SỐ PHỨC *rất là đơn giản nhưng lại rất quan trọng trong ứng dụng của chính môn Toán và các ngành khoa học kĩ thuật công nghệ. Một tư duy tự nhiên muốn phát triển toàn diện thì nên biết trang bị cho mình kiến thức về số phức thật hoàn chỉnh ngay từ cuối lớp 10 THPT.*

Nếu như trước kia, số phức chỉ được xem là một câu rất đơn giản trong đề thi tự luận dập khuôn máy móc, thì giờ đây, khi mà BỘ GIÁO DỤC cải cách chuyển sang cơ chế thi Toán trắc nghiệm thì số phức sẽ chiếm một phần đáng kể. Trắc nghiệm là sự toàn diện, có thể hướng tới mọi phần, mọi chuyên đề đều có câu khó câu dễ bình đẳng, tránh học tủ học nòi, chỉ biết chăm chăm vào các câu điểm 8,9,10 ở một bộ phận nhỏ 2 3 chuyên đề Toán.

Cuốn tài liệu này có trang bị đầy đủ các kiến thức về số phức từ cơ bản đến nâng cao toàn diện. Chúng ta hướng tới sự ứng dụng của số phức trong việc học môn Toán, Vật Lí và trong tương lai các ngành kĩ thuật công nghệ. Tài liệu cũng trình bày các phương pháp và mẹo trắc nghiệm nhanh các câu phức nâng cao, giúp chúng ta có thể tối ưu tuyệt đối kì thi trắc nghiệm của mình bằng tốc độ và sự đa dạng về bài tập mà tác giả biên soạn và sưu tầm. Đặc biệt có một số kiến thức nâng cao sáng tạo độc đáo của tác giả mà phải ngẫm kĩ mới thấy hay.

Mọi ý kiến nhận xét và góp ý về cuốn tài liệu này xin gửi về địa chỉ email:

DangAi.kstn.bkhn@gmail.com

Cuối cùng, chúc các em học sinh sử dụng tài liệu một cách hiệu quả. Chúc các em thành công trong kì thi đại học ở tương lai gần và chúc các em có một nền tảng kiến thức vững vàng ở tương lai xa hơn trên giảng đường đại học!

Bách Khoa Hà Nội *ngày 25 tháng 10 năm 2016.*

Kỹ sư tài năng *Nguyễn Đăng Ái.*

MỤC LỤC

I. CƠ BẢN VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP SỐ PHỨC.....7

1.1 Các định nghĩa về tập số phức C.....7

1.2. Các phép toán trên tập số phức.....8

1.3. Các tính chất cơ bản của số phức.....8

1.4. Lũy thừa của số ảo i^n – Cấp số cộng và cấp số nhân trong số phức.....10

1.5. Hàm số phức – Bài toán đồng nhất hàm bằng số ảo f(i) = Ai + B.....11

II. DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC – CÔNG THỨC Ơ LE.....15

2.1. Cách chuyển từ dạng đại số sang dạng lượng giác của một số phức.....15

2.2. Ứng dụng của dạng lượng giác – Công thức Ơ le – Công thức Moivre cơ bản.....16

2.3. Ứng dụng dạng lượng giác vào một số bài toán cực trị lũy thừa lớn.....17

2.4. Ứng dụng dạng lượng giác vào một số bài toán số phức có mô đun bằng 1.....20

III. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT – HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT.....26

3.1. Phương trình bậc nhất chứa một biến.....26

3.2. Phương trình bậc nhất chứa hai biến.....27

3.3. Biện luận theo tham số phức một phương trình bậc nhất phức.....28

3.4. Hệ phương trình bậc nhất trong số phức.....29

IV. CĂN BẬC HAI – PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO – XỬ LÍ MÔ ĐUN.....32

4.1. Căn bậc hai của một số âm.....32

4.2. Căn bậc hai của một số phức 32

4.3. Phương trình bậc 2 trên tập số phức.....35

4.4. Phương trình bậc cao – Phân tích nhân tử – Đặt ẩn phụ – Khai căn thức.....36

4.5. Các định lí VIET áp dụng vào phương trình bậc cao trắc nghiệm phức.....38

4.6. Phương trình phức dạng đa thức với các hệ số thực.....44

4.7. Xử lí mô đun trong các phương trình phức.....49

V. BẤT ĐẲNG THỨC ĐẠI SỐ PHỨC – BÀI TOÁN CỰC TRỊ ĐẠI SỐ.....54

5.1. Bất đẳng thức tam giác – Bài toán số phức đồng dạng.....54

5.2. Bất đẳng thức CÔ SI – Bất đẳng thức BUNHIA vận dụng trong số phức.....58
5.3. Một số bất đẳng thức không mẫu mực trong số phức.....61

VI. MẶT PHẲNG PHỨC – GIẢI TÍCH TRÊN MẶT PHẲNG PHỨC.....62
6.1. Biểu diễn điểm và các công thức cơ bản trên mặt phẳng phức.....62
6.2. Bất đẳng thức tam giác ứng dụng vào một số bất đẳng thức hình học.....64
6.3. Quỹ tích là đường thẳng trên mặt phẳng phức.....72
6.4. Quỹ tích là đường tròn trên mặt phẳng phức.....79
6.5. Elip trong mặt phẳng phức – Các bài toán nâng cao 84
6.6. Quỹ tích là đường hypebol cơ bản.....96
6.7. Các đường cong bất kì: Đường thẳng – Đường tròn – Elip – Hypebol – Parabol.....105
6.8. Phép quay trong số phức – Nâng cao tư duy véc tơ phức.....107
6.9. Bài toán tương giao trên mặt phẳng phức – Hệ phương trình mô đun phức.....111
6.10. Biểu diễn số phức là một miền trên hình phẳng – Cực trị phức trên miền D.....113
6.11. Bài toán tâm tỉ cự trên mặt phẳng phức.....120
6.12. Bình phương vô hướng ứng dụng trên mặt phẳng phức.....123
6.13. Các số phức có mô đun bằng nhau – Bài toán phân bố véc tơ trên vòng tròn.....130

VII. BÀI TẬP ÔN TẬP TỰ LUẬN.....136

VIII. TUYỂN TẬP CÁC BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM NÂNG CAO.....142

IX. ĐÁP ÁN CÁC BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM NÂNG CAO.....189

X. HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT CÁC BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....192

I. CƠ BẢN VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP SỐ PHỨC

1.1. Các định nghĩa về tập số phức C:

- Định nghĩa số ảo: $i^2 = -1$.
- Gọi z = a + ib là một số phức; trong đó a,b $\in$ R. Kí hiệu C là tập số phức: $z \in C$.
- a gọi là phần thực của số phức z {Re z}; b gọi là phần ảo của số phức z {Im z}.

Ví dụ 1.1.1. Cho số phức: $z_1 = 3 + 4i$, thì phần thực của nó là 3 và phần ảo là 4.

- $z_2 = -4 + 5i$, thì phần thực của nó là -4 và phần ảo là 5.
- $z_3 = 5$, thì phần thực bằng 5 và phần ảo bằng 0. Còn được gọi là số phức thuần thực. Vậy số phức thuần thực là số phức có phần ảo bằng 0.
- $z_4 = 7i$, thì phần thực bằng 0 và phần ảo bằng 7. Còn được gọi là số phức thuần ảo. Vậy số phức thuần ảo là số phức có phần thực bằng 0.
- **Chú ý:** số phức z = 0, vừa là số phức thuần ảo (phần thực bằng 0), vừa là số phức thuần thực.

Số phức liên hợp: Nếu z = a + ib thì số phức liên hợp của nó kí hiệu là: $\overline{z}$ = a – ib. Như vậy, số phức liên hợp là giữ nguyên phần thực và đảo dấu phần ảo.

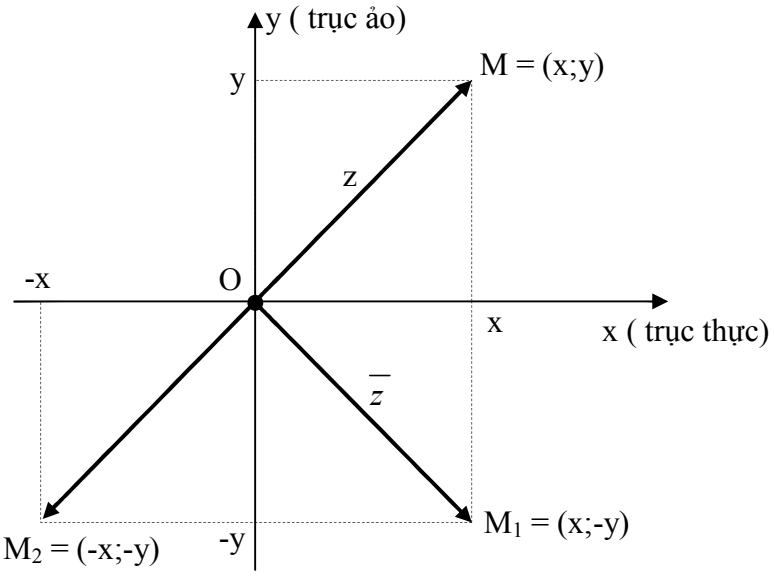
Ví dụ 1.1.2. Cho số phức: z = 3 + 4i. Khi đó số phức liên hợp của nó là: $\overline{z}$ = 3 – 4i. Còn số phức đối của nó là: -z = -(3 + 4i) = -3 – 4i. Lưu ý phân biệt số phức liên hợp và số phức đối.

Mô đun của số phức: Cho số phức z = a + ib, mô đun của số phức z kí hiệu là: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

- Mô đun của số phức liên hợp: $|\overline{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$
- Xét tích: $z.\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\overline{z}|^2 \rightarrow \overline{z} = \frac{|z|^2}{z}$

Mặt phẳng phức: Với hệ tọa độ đề các Oxy, trong đó Ox là trục thực và Oy là trục ảo.

- Cho số phức z = x + iy, điểm M biểu diễn số phức z thì M = (x;y). Có thể viết véc tơ như sau:



- Điểm M_1= (x;-y) biểu diễn số phức liên hợp: $\overline{z} = x - iy$, đối xứng với M qua trục Ox.
- Điểm M_2 = (-x;-y) biểu diễn số phức đối: $-z = -x - iy$, đối xứng với M qua gốc O.
- Ta có: $OM = |\overrightarrow{OM}| = |z|$.

1.2. Các phép toán trên tập số phức:

Phép cộng và phép trừ: Cho hai số phức: $z_1 = a_1 + ib_1$ và $z_2 = a_2 + ib_2$. Khi đó phép cộng và trừ hai số phức được định nghĩa là: $z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$. Tức là, thực cộng trừ thực và ảo cộng trừ ảo.

Ví dụ 1.2.1. Thực hiện các phép cộng và phép trừ: $(1+2i)+(3+4i) = (1+3)+i(2+4) = 4+6i$

- $(3+4i)-(1+5i) = (3-1)+i(4-5) = 2-i$

Hai số phức bằng nhau: Cho hai số phức : $z_1 = a_1 + ib_1$ và $z_2 = a_2 + ib_2$. Hai số phức bằng nhau:

$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$ hoặc: $z_1 - z_2 = 0$.

Phép nhân hai số phức: $z_1.z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$

Ví dụ 1.2.2. $(1+3i)(2+5i) = 2+5i+6i+15i^2 = (2-15)+11i = -13+11i$

Ví dụ 1.2.3. Rút gọn các số phức sau:

1. $z = (3+2i)(-2+7i)+9-5i$
2. $B = (1+3i)^2(1-i)-(5+6i)$
3. $C = (1+i)^2(1+2i)^4-(1+3i)$

Phép chia hai số phức: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2.\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}$ = nhân cả tử và mẫu với liên hợp của mẫu số.

Ví dụ 1.2.4. Thực hiện các phép rút gọn sau:

- $\frac{1+3i}{2-5i} = \frac{(1+3i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)} = \frac{2+5i+6i+15i^2}{4+25} = \frac{-13}{29} + \frac{11}{29}i$
- $\frac{3+6i}{4i-3} = \frac{(3+6i)(-3-4i)}{(-3+4i)(-3-4i)} = \frac{-9-12i-18i-24i^2}{9+16} = \frac{15}{25} - \frac{30}{25}i = \frac{3}{5} - \frac{6}{5}i$
- $\frac{5+2i}{i} = \frac{-i(5+2i)}{-i.i} = \frac{-5i-2i^2}{-i^2} = 2-5i$
- **Ghi nhớ:** Tất cả các phép toán rút gọn số phức đơn giản với số liệu cụ thể đều có thể dùng máy tính cầm tay CASIO giải quyết nhanh gọn được. Chúng ta vẫn phải biết cách làm để xử lí những bài toán rút gọn chứa tham số và giải phương trình phức có phân số.

1.3. Các tính chất cơ bản của số phức:

- **Liên hợp của một tổng** (hiệu) bằng tổng (hiệu) của các liên hợp : $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$

Ví dụ 1.3.1. Cho $z_1 = 1 + 2i$ và $z_2 = 3 + 4i$. Khi đó: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(1+2i)+(3+4i)} = \overline{4+6i} = 4-6i$

- và $\overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{1+2i} + \overline{3+4i} = 1-2i+3-2i = 4-6i$
- **Liên hợp của một tích** bằng tích các liên hợp: $\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$

Ví dụ 1.3.2. Cho hai số phức: $z_1 = 1+2i; z_2 = 3+4i \rightarrow \overline{z_1.z_2} = \overline{(1+2i)(3+4i)} = \overline{-5+10i} = -5-10i$.

- $\overline{z_1}.\overline{z_2} = \overline{1+2i}.\overline{3+4i} = (1-2i)(3-4i) = -5-10i$.
- **Liên hợp của một thương** bằng thương các liên hợp: $\overline{(\frac{z_1}{z_2})} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
- **Liên hợp một lũy thừa** bằng lũy thừa liên hợp: $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$
- **Đặc biệt:** Cho z = a + ib , thì ta có: $z + \overline{z} = 2a$; $z - \overline{z} = 2ib$
- **Phép thử số phức:** Nếu số phức z thuần thực thì: $\overline{z} = z$; số phức z thuần ảo thì: $\overline{z} = -z$
- **Tích của cặp số phức với số phức liên hợp:** $z.\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\overline{z}|^2$
- **Mô đun của môt tích** bằng tích các mô đun: $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$

Ví dụ 1.3.3. $|(1+2i)(3+5i)| = |1+2i|.|3+5i| = \sqrt{5}.\sqrt{34} = \sqrt{170}$

- **Mô đun của một lũy thừa** bằng lũy thừa của mô đun: $|z^n| = |z|^n$

Ví dụ 1.3.4. $|(1+2i)^{20}| = |1+2i|^{20} = (\sqrt{5})^{20} = 5^{10}$.

- **Mô đun của một thương** thì bằng thương các mô đun: $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

Ví dụ 1.3.5. $|\frac{1-2i}{3+4i}| = \frac{|1-2i|}{|3+4i|} = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Ví dụ 1.3.6. Rút gọn các biểu thức sau:

1. $z = \frac{1+3i}{2i-7} + (1+i)^{10}$.
2. $A = \frac{(1+7i)(2-i)}{1+i} - \frac{6+5i}{1-i}$
3. $w = (1+i)^{20} - \frac{3+6i}{6+3i}$

Ví dụ 1.3.7. Tính các mô đun sau:

1. $|(1+2i)^2(3-4i)|$
2. $|\frac{(4+i)^2}{(3-2i)(1+i)^6}|$
3. $|(1+3i)^6(1-3i)^6(4i)|$

1.4. Lũy thừa của số ảo i^n – Tổng của cấp số cộng và cấp số nhân trong số phức

- Phép lũy thừa của số ảo được xử lí rất đơn giản:

Ví dụ 1.4.1. Với: $i^3 = i^2.i = -1.i = -i$. Với : $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$.

- Với: $i^{2017} = i^{2016}.i = (i^2)^{1008}.i = (-1)^{1008}.i = i$.

Ví dụ 1.4.2. Tính tổng: $S_n = 1 + i + i^2 + i^3 + ... + i^{60}$

Giải:

- Nhận thấy tổng của 4 lũy thừa liên tiếp: $i + i^2 + i^3 + i^4 = (i + i^3) + (i^2 + i^4) = i(1 + i^2) + i^2(1 + i^2) = 0$
- Vậy suy ra tổng của 4k lũy thừa liên tiếp cũng bằng 0.
- Vậy suy ra tổng: $S_n = 1 + (i + i^2 + ... + i^{60}) = 1 + 0 = 1$.

Ví dụ 1.4.3. Tính các tổng:

1. $S_n = i + i^2 + i^3 + ... + i^{93}$.
2. $S_n = i + i^2 + i^3 + ... + i^{94}$.
3. $S_n = i + i^3 + i^5 + ... + i^{81}$.
4. $S_n = i + i^5 + i^9 + ... + i^{101}$.

- **Cấp số cộng:** Nhắc lại về cấp số cộng: cho dãy số: u_1 , u_2 , ... , u_n là một cấp số cộng thì thỏa mãn các tính chất sau: $u_2 = u_1 + d$; $u_3 = u_2 + d = u_1 + 2d$; ... ; $u_n = u_{n-1} + d = u_1 + (n - 1)d$. Trong đó $\mathbf{u_1}$ gọi là số hạng đầu và **d** gọi là công sai của cấp số cộng.
- Một số hạng bất kì luôn bằng trung bình cộng của hai số hạng đứng trước và sau nó:
- $u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$
- Tổng của n số hạng liên tiếp: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \frac{u_1 + u_n}{2}.n$

Ví dụ 1.4.4. Tính tổng của cấp số cộng sau: $S_n = 1 + (1 + i) + (1 + 2i) + ... + (1 + 200i)$

Giải:

- Nhận thấy có 201 số hạng, nên ta có: $S_n = \frac{u_1 + u_{200}}{2}.201 = \frac{1 + (1 + 200i)}{2}.201 = 201 + 20100i$.

Ví dụ 1.4.5. Tính tổng của cấp số cộng sau: $S_n = 1 + (2 + 2i) + (3 + 4i) + ... + (300 + 598i)$

- **Cấp số nhân:** Nhắc lại về cấp số cộng: cho dãy số: u_1 , u_2 , ... , u_n là một cấp số nhân thì thỏa mãn các tính chất sau: $u_2 = u_1.q$; $u_3 = u_2q = u_1.q^2$; ... ; $u_n = u_{n-1}.q = u_1.q^{n-1}$. Trong đó: $\mathbf{u_1}$ là số hạng đầu và **q** gọi là công bội của cấp số nhân.
- Một số hạng bất kì luôn bằng trung bình nhân của hai số hạng đứng trước và sau nó:
- $u_k = \sqrt{u_{k-1}u_{k+1}}$
- Tổng của n số hạng liên tiếp: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = u_1\frac{q^n - 1}{q - 1}$

Ví dụ 1.4.6. Tính tổng của cấp số nhân sau: $S_n = 1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + ... + (1 + i)^{11}$

Giải:

- Tổng trên có các số hạng là một cấp số nhân có công bội: q = 1 + i và số hạng đầu: $u_1 = 1$.
- Áp dụng công thức: $S_n = u_1.\frac{q^n - 1}{q - 1} = 1.\frac{(1+i)^{12} - 1}{(1+i) - 1} = \frac{-2^6 - 1}{i} = (2^6 + 1)i$.

Ví dụ 1.4.7. Tính tổng của các cấp số nhân sau:

1. $S_n = 1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + ... + (1 + i)^{31}$
2. $S_n = 1 + (1 - 2i) + (1 - 2i)^2 + ... + (1 - 2i)^{49}$
3. $S_n = (1 - i) + (1 - i)^2 + ... + (1 - i)^{55}$

1.5. Hàm số phức – Bài toán đồng nhất hàm bằng số ảo f(i) = Ai + B

- Số phức có rất nhiều ứng dụng, dưới đây là một ví dụ về phép đồng nhất hàm có sử dụng giá trị của hàm phức tại số ảo f(i):

Bài toán 1.5.1. Cho hàm số $f(x) = \frac{2x^3 - 2x + 1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)(x + 1)^2}$. Người ta phân tích hàm số này thành dạng của các phân số tối giản: $f(x) \equiv \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4} + \frac{E}{(x + 1)^2} + \frac{F}{x + 1}$. Hãy tìm các hệ số thực trong phép phân tích trên: A, B, C, D, E, F

✍ **Giải:**

- Với hệ số E và F ta đã biết tìm ở các chuyên đề khác rồi. Chúng ta không bàn trong chuyên đề số phức này gây phức tạp và cồng kềnh kiến thức.
- Ta đi tìm các hệ số A, B, C, D bằng ứng dụng hàm phức:
- Nhân hai vế của f(x) với $(x^2 + 1)$ ta được:
- $$(x^2 + 1)f(x) = \frac{2x^3 - 2x + 1}{(x^2 + 4)(x + 1)^2} \equiv Ax + B + (x^2 + 1)\{\frac{Cx + D}{x^2 + 4} + \frac{E}{(x + 1)^2} + \frac{F}{x + 1}\} \qquad (1)$$
- Thay x = i , vào hai vế của phương trình (1), ta được:
- $$\frac{2x^3 - 2x + 1}{(x^2 + 4)(x + 1)^2}\Big|_{x=i} \equiv Ai + B + (i^2 + 1)\{\frac{Cx + D}{x^2 + 4} + \frac{E}{(x + 1)^2} + \frac{F}{x + 1}\}$$
- $$\Leftrightarrow \frac{2i^3 - 2i + 1}{(i^2 + 4)(i + 1)^2}\Big|_{x=i} \equiv Ai + B + 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} - \frac{1}{6}i \equiv Ai + B \leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{6} \\ B = -\frac{2}{3} \end{cases}$$
- Tương tự, nhân hai vế của f(x) với $(x^2 + 4)$ ta được:
- $$(x^2 + 4)f(x) = \frac{2x^3 - 2x + 1}{(x^2 + 1)(x + 1)^2} \equiv Cx + D + (x^2 + 4)\{\frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{E}{(x + 1)^2} + \frac{F}{x + 1}\} \qquad (2)$$

- Thay x = 2i , vào hai vế của phương trình (2), ta được:
- $\frac{2x^3-2x+1}{(x^2+1)(x+1)^2}\Big|_{x=2i} \equiv 2\mathrm{C}i+\mathrm{D}+(4i^2+4)\{\frac{\mathrm{A}x+\mathrm{B}}{x^2+1}+\frac{\mathrm{E}}{(x+1)^2}+\frac{\mathrm{F}}{x+1}\}$
- $\Leftrightarrow \frac{2(2i)^3-2(2i)+1}{(4i^2+1)(2i+1)^2}\Big|_{x=2i} \equiv 2\mathrm{C}i+\mathrm{D}+0 \Leftrightarrow -\frac{83}{75}-\frac{56}{75}i \equiv 2\mathrm{C}i+\mathrm{D} \leftrightarrow \begin{cases}\mathrm{C}=-\frac{28}{75}\\ \mathrm{D}=-\frac{83}{75}\end{cases}$

Ví dụ 1.5.2. Cho hàm số $f(x)=\frac{4x^3+3x+1}{(x^2+1)(x^2+9)(3x-1)^2}$. Người ta phân tích hàm số này thành dạng của các phân số tối giản: $f(x)\equiv\frac{\mathrm{A}x+\mathrm{B}}{x^2+1}+\frac{\mathrm{C}x+\mathrm{D}}{x^2+9}+\frac{\mathrm{E}}{(3x+1)^2}+\frac{\mathrm{F}}{3x+1}$. Hãy tìm các hệ số thực trong phép phân tích trên: A, B, C, **D.**

Ví dụ 1.5.3. Chứng minh rằng hai hàm sau là đồng nhất: $f(x)=\arctan x\equiv\frac{1}{2i}\ln|\frac{x-i}{x+i}|$

Giải:

- Xét nguyên hàm của: $\mathrm{I}=\int\frac{dx}{x^2+1}=\arctan x$ (1)
- Theo cách khác: $\mathrm{I}=\int\frac{dx}{x^2+1}=\int\frac{dx}{x^2-i^2}=\int\frac{dx}{(x-i)(x+i)}=\frac{1}{2i}\int\left(\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i}\right)dx$
- $\mathrm{I}=\frac{1}{2i}\left(\ln|x-i|-\ln|x+i|\right)=\frac{1}{2i}\ln|\frac{x-i}{x+i}|$ (2)
- Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 1.5.4. Chứng minh rằng hai hàm sau là đồng nhất: $f(x)=\frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\equiv\frac{1}{4i}\ln|\frac{x-2i}{x+2i}|$

Ví dụ 1.5.5. Chứng minh rằng hai hàm sau là đồng nhất: $f(x)=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\equiv\frac{1}{2ai}\ln|\frac{x-ai}{x+ai}|$

Bài toán 1.5.6. Tính giá trị của các biểu thức phức sau:

1. $S_{2019} = 1 + 2i + 3i^2 + ... + 2019.i^{2018}$
2. $S_{2017} = i + 2i^2 + 3i^3 + ... + 2017i^{2017}$
3. $S_{2016}=i+\frac{i^2}{2}+\frac{i^3}{3}+...+\frac{i^{2016}}{2016}$
4. $S_{2017}=i^2-\frac{i^3}{2}+\frac{i^4}{3}-...+\frac{i^{2018}}{2017}$

✍ **Giải:**

- Những bài toán dạng này là những bài toán có sử dụng đạo hàm và tích phân.

1. $S_{2019} = 1 + 2i + 3i^2 + ... + 2019.i^{2018}$

- Ta có tổng của cấp số nhân có $u_1 = 1$ và công bội q = x là: $1+x+x^2+...+x^n = 1.\frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ (1)
- Áp dụng công thức 1, ứng với n = 2019, ta có: $1+x+x^2+...+x^{2019} = 1.\frac{x^{2019+1}-1}{x-1} = \frac{x^{2020}-1}{x-1}$
- Đạo hàm hai vế phương trình trên ta được:
- $0+1+2x+3x^2+...+2019x^{2018} = (\frac{x^{2020}-1}{x-1})' = \frac{2020.x^{2019}(x-1)-(x^{2020}-1)}{(x-1)^2}$
- $\Leftrightarrow 1+2x+3x^2+...+2019x^{2018} = \frac{2020.x^{2019}(x-1)-(x^{2020}-1)}{(x-1)^2}$ (2)
- Thay x = i vào hai vế của đẳng thức (2) ta được:
- $S_{2019} = 1+2i+3i^2+...+2019i^{2018} = \frac{2020.i^{2019}(i-1)-(i^{2020}-1)}{(i-1)^2} = -1010+1010i$

2. $S_{2017} = i - 2i^2 + 3i^3 - ... + 2017i^{2017}$

- Ta có: $S_{2017} = i(1 - 2i + 3i^2 - ... + 2017i^{2016})$
- Ta đi tính tổng $S_n = 1 - 2i + 3i^2 - ... + 2017i^{2016}$ như sau:
- Có: $1-x+x^2-...-x^{2017} = 1.\frac{(-x)^{2017+1}-1}{-x-1} = \frac{1-x^{2018}}{x-1}$
- Đạo hàm hai vế, ta được: $-1+2x-3x^2...-2017x^{2016} = \frac{-2018x^{2017}(x-1)-(1-x^{2018})}{(x-1)^2}$
- Thay x = i vào hai vế đẳng thức trên ta được:
- $-1+2i-3i^2...-2017i^{2016} = \frac{-2018i^{2017}(i-1)-(1-i^{2018})}{(i-1)^2} = -1009+1008i$
- Suy ra: $S_n = 1009 - 1008i \rightarrow S_{2017} = i.S_n = i(1009-1008i) = 1008+1009i$

3. $S_{2016} = i + \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3} + ... + \frac{i^{2016}}{2016}$

- Xét tổng của cấp số nhân: $1+(ix)+(ix)^2+...+(ix)^{2015} = 1.\frac{(ix)^{2016}-1}{ix-1} = \frac{(ix)^{2016}-1}{ix-1}$
- Suy ra: $1+i.x+i^2.x^2+...+i^{2015}.x^{2015} = \frac{x^{2016}-1}{ix-1} = \frac{(x^{2016}-1)(-ix-1)}{(ix-1).(-ix-1)} = \frac{-i.x^{2017}+i.x-x^{2016}+1}{x^2+1}$
- Nhân hai vế với i vào ta được: $i+i^2.x+i^3.x^2+...+i^{2016}.x^{2015} = \frac{x^{2017}-x-i.x^{2016}+i}{x^2+1}$ (1)
- Lấy tích phân hai vế theo biến x , cận từ 0 đến 1, ta được:

- $\int_0^1 (i + i^2.x + i^3.x^2 + ... + i^{2016}.x^{2015})dx = \int_0^1 \frac{x^{2017} - x - i.x^{2016} + i}{x^2 + 1} dx$
- $\Leftrightarrow (ix + i^2.\frac{x^2}{2} + i^3.\frac{x^3}{3} + ... + i^{2016}.\frac{x^{2016}}{2016})\Big|_0^1 = \int_0^1 \frac{x^{2017} - x}{x^2 + 1} dx - i\int_0^1 \frac{x^{2016} - 1}{x^2 + 1} dx = \text{A} - i.\text{B}$
- $\Leftrightarrow S_{2016} = i + \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3} + ... + \frac{i^{2016}}{2016} = \text{A} - i.\text{B} \approx -0,347 + 0,785i$

4. $S_{2017} = i^2 - \frac{i^3}{2} + \frac{i^4}{3} - ... + \frac{i^{2018}}{2017}$

- Xét tổng của cấp số nhân: $1 + (-ix) + (-ix)^2 + ... + (-ix)^{2016} = 1.\frac{(-ix)^{2017} - 1}{(-ix) - 1} = \frac{i.x^{2017} + 1}{ix + 1}$
- Suy ra: $1 - i.x + i^2.x^2 - ... + i^{2016}.x^{2016} = \frac{i.x^{2017} + 1}{ix + 1} = \frac{(i.x^{2017} + 1)(-ix + 1)}{(ix + 1)(-ix + 1)} = \frac{x^{2018} + 1 + i(x^{2017} - x)}{x^2 + 1}$
- Nhân hai vế với i^2 vào ta được: $i^2 - i^3.x + i^4.x^2 - ... + i^{2018}.x^{2016} = \frac{-(x^{2018} + 1) - i(x^{2017} - x)}{x^2 + 1}$ (1)
- Lấy tích phân hai vế theo biến x , cận từ 0 đến 1, ta được:
- $\int_0^1 (i^2 - i^3.x + i^4.x^2 - ... + i^{2018}.x^{2016})dx = \int_0^1 \frac{-(x^{2018} + 1) - i(x^{2017} - x)}{x^2 + 1} dx$
- $\Leftrightarrow (i^2 x - i^3.\frac{x^2}{2} + i^4.\frac{x^3}{3} - ... + i^{2018}.\frac{x^{2017}}{2017})\Big|_0^1 = -\int_0^1 \frac{x^{2018} + 1}{x^2 + 1} dx - i\int_0^1 \frac{x^{2017} - x}{x^2 + 1} dx = \text{A} + i.\text{B}$
- $\Leftrightarrow S_{2017} = i^2 - \frac{i^3}{2} + \frac{i^4}{3} - ... + \frac{i^{2018}}{2017} = -\int_0^1 \frac{x^{2018} + 1}{x^2 + 1} dx - i\int_0^1 \frac{x^{2017} - x}{x^2 + 1} dx = -0,785 + 0,347\text{i}$

Ví dụ 1.5.7. Tính giá trị của các biểu thức phức sau:

1. $S_{2018} = 1 + 2i + 3i^2 + ... + 2018.i^{2017}$
2. $S_{2020} = i^2 + 2i^3 + 3i^4 + ... + 2020i^{2021}$
3. $S_{2016} = 1 + \frac{i}{2} + \frac{i^2}{3} + ... + \frac{i^{2015}}{2016}$
4. $S_{2017} = i^3 - \frac{i^4}{2} + \frac{i^5}{3} - ... + \frac{i^{2019}}{2017}$

II. DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC – CÔNG THỨC Ơ LE

2.1. Cách chuyển từ dạng đại số sang dạng lượng giác của một số phức:

- Cho số phức z = a + ib; trong đó hai số a, b ∈ R. Dạng lượng giác của số phức z:
- $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.
- Trong đó: $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ và góc φ được gọi là Argument của z, được xác định $\begin{cases}\cos\varphi = \dfrac{a}{|z|}\\ \sin\varphi = \dfrac{b}{|z|}\end{cases}$
- Chúng ta hạn chế dùng công thức: $\tan\varphi = \dfrac{b}{a} \to \varphi = \arctan\dfrac{b}{a}$. Vì công thức này sẽ rất dễ nhầm lẫn giữa dấu của phần thực và phần ảo.

Ví dụ 2.1.1. Cho số phức $z = 1 - i\sqrt{3}$. Hãy chuyển số phức này về dạng lượng giác.

Giải:

- Mô đun: $|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$.
- Xác định Argument: $\begin{cases}\cos\varphi = \dfrac{1}{2}\\ \sin\varphi = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}\end{cases} \to \varphi = -\dfrac{\pi}{3}$.
- Vậy dạng lượng giác của số phức z là: $z = 2(\cos(-\dfrac{\pi}{3}) + i\sin(-\dfrac{\pi}{3}))$.

Ví dụ 2.1.2. Cho số phức $z = -\sqrt{3} + i$. Viết dạng lượng giác của z.

Giải:

- Mô đun: $|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1} = 2$.
- Xác định Argument: $\begin{cases}\cos\varphi = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\varphi = \dfrac{1}{2} > 0\end{cases} \to \varphi = \dfrac{5\pi}{6}$.
- Vậy dạng lượng giác của số phức z là: $z = 2(\cos\dfrac{5\pi}{6} + i\sin\dfrac{5\pi}{6})$.
- **Chú ý:** Nhiều người tính Argument theo cách: $\tan\varphi = \dfrac{b}{a} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \to \varphi = -\dfrac{\pi}{6}$ thì sẽ sai.

Ví dụ 2.1.3. Đưa các số phức sau về dạng lượng giác:

1. $z_1 = 1 + i$
2. $z_2 = -2 - 2i$
3. $z_3 = -1 - i\sqrt{3}$
4. $z_4 = 3 - 4i$

2.2. Ứng dụng của dạng lượng giác – Công thức Ơ le – Công thức Moivre cơ bản:

a. Công thức Ơ le:

- Định nghĩa: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$
- Từ đó suy ra: $e^{i(-\varphi)} = e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \cos\varphi - i\sin\varphi$
- Và có thể viết được: $\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}; \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$; $e^{-i\varphi} = \overline{e^{i\varphi}}$

b. Công thức Moivre:

- Xuất phát từ: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \to (e^{i\varphi})^n = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = e^{i(n\varphi)} = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$
- Vậy công thức: $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$ được gọi là công thức Movie.
- Công thức này được dùng rất rộng rãi và ứng dụng nhiều trong khai triển số phức bậc cao.

Bài toán 2.2.1. Cho số phức $z = 1 + i\sqrt{3}$. Hãy đưa số phức z về dạng lượng giác và tính z^{20}, z^{2016}.

✍ **Giải:**

- Đưa về dạng lượng giác của số phức z rất đơn giản như ở phần trên: $z = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$.
- Áp dụng công thức movie ta có:
- $z^{20} = \{2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})\}^{20} = 2^{20}.\{\cos\frac{20\pi}{3} + i.\sin\frac{20\pi}{3}\} = 2^{20}.\{\cos(\frac{2\pi}{3} + 6\pi) + i.\sin(\frac{2\pi}{3} + 6\pi)\}$
- $= 2^{20}.\{\cos\frac{2\pi}{3} + i.\sin\frac{2\pi}{3}\} = 2^{20}.\{-\frac{1}{2} + i.\frac{\sqrt{3}}{2}\} = -2^{19} + 2^{19}i\sqrt{3}$.
- $z^{2016} = \{2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})\}^{2016} = 2^{2016}.\{\cos\frac{2016\pi}{3} + i.\sin\frac{2016\pi}{3}\} = 2^{2016}.\{\cos 672\pi + i.\sin 672\pi\}$
- $= 2^{2016}.\{1 + i.0\} = 2^{2016}$.

Ví dụ 2.2.2. Cho số phức $z = \sqrt{3} - i$. Hãy đưa số phức z về dạng lượng giác và tính z^{2016}, z^{2017}.

Ví dụ 2.2.3. Hãy xác định giá trị của n để số phức $(1 - i\sqrt{3})^n$ là thuần ảo.

- **Các công thức quan trọng khác:**
- $(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)$
- $\frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2} = \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)$
- $\sqrt[n]{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \cos\frac{\varphi + k2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + k2\pi}{n}$; trong đó k = 0; 1;... ; n – 1 và n là số tự nhiên.
- Đặc biệt khai căn bậc 2: $\sqrt{\cos\varphi + i.\sin\varphi} = \pm(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2})$

- Phép nghịch đảo Ơ LE: $\frac{1}{\cos\varphi + i.\sin\varphi} = \frac{1}{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$

Ví dụ 2.2.4. Rút gọn các biểu thức phức sau:

1. $A = (\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3})(\cos\frac{\pi}{6} + i.\sin\frac{\pi}{6})$
2. $B = (\cos\frac{2\pi}{3} + i.\sin\frac{2\pi}{3})^{22}(\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3})^{22}$
3. $C = \frac{\cos\frac{5\pi}{12} + i.\sin\frac{5\pi}{12}}{\cos\frac{\pi}{6} + i.\sin\frac{\pi}{6}}$
4. $D = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3}}$

- Số phức có Argument $\varphi = 0; \pm\frac{\pi}{6}; \pm\frac{\pi}{4}; \pm\frac{\pi}{3}; \pm\frac{\pi}{2}; \ldots$ còn được gọi là số phức có dạng lượng giác cơ bản. Tức là số phức có: $\frac{b}{a} = 0; \pm 1; \pm\sqrt{3}; \pm\frac{1}{\sqrt{3}}; \infty$. Những số phức này rất tiện lợi cho việc tính toán và khai căn bậc cao.

Bài toán 2.2.5. Cho số phức $z = 1 + i\sqrt{3}$. Hãy đưa về dạng lượng giác và khai căn: $\sqrt{z}; \sqrt[3]{z}; \sqrt[9]{z}$.

Giải:

- Dạng lượng giác của số phức z: $z = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3})$.
- Căn bậc 2: $\sqrt{z} = \sqrt{2}(\cos\frac{\frac{\pi}{3} + k2\pi}{2} + i.\sin\frac{\frac{\pi}{3} + k2\pi}{2})$ $(k = 0;1)$
- Với k = 0, ta được: $\sqrt{z} = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{6} + i.\sin\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$
- Với k = 1, ta được: $\sqrt{z} = \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{6} + i.\sin\frac{7\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ví dụ 2.2.6. Tìm các số phức z thỏa mãn phương trình: $z^3 - 1 = 0$.

Ví dụ 2.2.7. Xác định căn bậc 2 của: $1 - i\sqrt{3}; \sqrt{3} + i; 1 + i$

2.3. Ứng dụng dạng lượng giác vào một số bài toán cực trị lũy thừa lớn:

Bài toán 2.3.1. Cho số phức z = a + ib, với a và b là hai số thực khác 0. Gọi $z^3 = a_0 + ib_0$.

1. Hãy tìm giá trị lớn nhất của a_0/a^3.
2. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của b_0/b^3.

✍ **Giải:**

- Áp dụng dạng lượng giác ta có: $z = a + ib = |z|(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$ với: $a = |z|\cos\varphi$; $b = |z|\sin\varphi$
- Khi đó: $z^3 = |z|^3(\cos\varphi + i.\sin\varphi)^3 = |z|^3(\cos 3\varphi + i.\sin 3\varphi) = |z|^3\cos 3\varphi + i.|z|^3\sin 3\varphi = a_0 + ib_0$

- Trong đó: $a_0 = |z|^3 \cos 3\varphi$; $b_0 = |z|^3 \sin 3\varphi$
- Áp dụng vào các câu hỏi:

1. Hãy tìm giá trị lớn nhất của a_0/a^3.

- Ta có: $\frac{a_0}{a^3} = \frac{|z|^3 \cos 3\varphi}{|z|^3 (\cos\varphi)^3} = \frac{\cos 3\varphi}{\cos^3\varphi} = f(\varphi)$
- Chúng ta có thể sử dụng công thức góc bậc 3, cũng có thể sử dụng khảo sát hàm số:
- $f'(\varphi) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{-3\sin 3\varphi.\cos^3\varphi - \cos 3\varphi(-3\cos^2\varphi.\sin\varphi)}{\cos^6\varphi} = -3\frac{\sin 3\varphi.\cos\varphi - \cos 3\varphi\sin\varphi}{\cos^4\varphi}$
- $f'(\varphi) = -3\frac{\sin(3\varphi - \varphi)}{\cos^4\varphi} = -3\frac{\sin 2\varphi}{\cos^4\varphi}$
- Cho: $f'(\varphi) = -3\frac{\sin 2\varphi}{\cos^4\varphi} = -\frac{6\sin\varphi}{\cos^3\varphi} = 0 \to \sin\varphi = 0 \to \left[\begin{array}{l}\varphi = 0\\ \varphi = \pi\end{array}\right.$
- Thay các giá trị của φ ở trên vào hàm: $f(\varphi) = \frac{a_0}{a^3} = \frac{\cos 3\varphi}{\cos^3\varphi}$; sẽ được giá trị lớn nhất là:
- $\max f(\varphi) = \max(\frac{a_0}{a^3}) = f(0) = 1$

2. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của b_0/b^3.

- Tương tự ta có: $\frac{b_0}{b^3} = \frac{|z|^3 \sin 3\varphi}{|z|^3 \sin^3\varphi} = \frac{\sin 3\varphi}{\sin^3\varphi} = f(\varphi)$
- Đạo hàm: $f'(\varphi) = \frac{3\cos 3\varphi\sin^3\varphi - \sin 3\varphi.(3\sin^2\varphi.\cos\varphi)}{\sin^6\varphi} = 3\frac{\cos 3\varphi\sin\varphi - \sin 3\varphi\cos\varphi}{\sin^4\varphi}$
- $f'(\varphi) = 3\frac{\sin(\varphi - 3\varphi)}{\sin^4\varphi} = -3\frac{\sin 2\varphi}{\sin^4\varphi} = -\frac{6\cos\varphi}{\sin^3\varphi} = 0 \to \varphi = \pm\frac{\pi}{2}$
- Thay vào suy ra giá trị nhỏ nhất: $\min(\frac{b_0}{b^3}) = \min f(\varphi) = f(\pm\frac{\pi}{2}) = -1$

Bài toán 2.3.2. Cho số phức z = a + ib, với a và b là hai số thực khác 0. Gọi $z^5 = a_0 + ib_0$. Biện luận các giá trị nhỏ nhất và lớn nhất cần tìm dưới đây:

1. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của a_0/a^5.
2. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của b_0/b^5.

✍ **Giải:**

- Áp dụng dạng lượng giác ta có: $z = a + ib = |z|(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$ với: $a = |z|\cos\varphi$; $b = |z|\sin\varphi$
- Khi đó: $z^5 = |z|^5 (\cos\varphi + i.\sin\varphi)^5 = |z|^5 (\cos 5\varphi + i.\sin 5\varphi) = |z|^5 \cos 5\varphi + i.|z|^5 \sin 5\varphi = a_0 + ib_0$
- Trong đó: $a_0 = |z|^5 \cos 5\varphi$; $b_0 = |z|^5 \sin 5\varphi$

1. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của a_0/a^5.

- Ta có: $\frac{a_0}{a^5}=\frac{|z|^5\cos 5\varphi}{|z|^5(\cos\varphi)^5}=\frac{\cos 5\varphi}{\cos^5\varphi}=f(\varphi)$
- Chúng ta khảo sát trong một chu kì: $\varphi=[-\pi;\pi]$
- Đạo hàm: $f'(\varphi)=\frac{-5\sin 5\varphi\cos^5\varphi-\cos 5\varphi(-5.\cos^4\varphi.\sin\varphi)}{\cos^{10}\varphi}=-5\frac{\sin 5\varphi\cos\varphi-\cos 5\varphi\sin\varphi}{\cos^6\varphi}$
- $f'(\varphi)=-5\frac{\sin(5\varphi-\varphi)}{\cos^{n+1}\varphi}=-5\frac{\sin 4\varphi}{\cos^{n+1}\varphi}=-20\frac{\sin\varphi.\cos 2\varphi}{\cos^{n+1}\varphi}0\rightarrow\left[\begin{array}{l}\varphi=0\\ \varphi=\frac{\pm\pi}{4}\end{array}\right.$
- $f(0)=1; f(\pm\frac{\pi}{4})=\frac{\cos 5(\frac{\pm\pi}{4})}{\cos^5(\frac{\pm\pi}{4})}=-4$
- Vậy giá trị nhỏ nhất của $\frac{a_0}{a^5}=\frac{\cos 5\varphi}{\cos^5\varphi}=f(\varphi)$ bằng: -4

2. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của b_0/b^5.

- Ta có: $\frac{b_0}{b^5}=\frac{|z|^5\sin 5\varphi}{|z|^5(\sin\varphi)^5}=\frac{\sin 5\varphi}{\sin^5\varphi}=f(\varphi)$
- Đạo hàm: $f'(\varphi)=\frac{5\cos 5\varphi\sin^5\varphi-\sin 5\varphi(5\sin^4\varphi.\cos\varphi)}{\sin^{10}\varphi}=5\frac{\cos 5\varphi\sin\varphi-\sin 5\varphi\cos\varphi}{\sin^6\varphi}$
- $f'(\varphi)=5\frac{\sin(\varphi-5\varphi)}{\sin^6\varphi}=-5\frac{\sin 4\varphi}{\sin^6\varphi}=-20\frac{\cos\varphi\cos 2\varphi}{\sin^6\varphi}=0\rightarrow\left[\begin{array}{l}\varphi=\pm\frac{\pi}{2}\\ \varphi=\pm\frac{\pi}{4}\end{array}\right.$
- $f(\pm\frac{\pi}{2})=1; f(\pm\frac{\pi}{4})=\frac{\sin 5(\frac{\pm\pi}{4})}{\sin^5(\frac{\pm\pi}{4})}=-4$
- Vậy giá trị nhỏ nhất của: $\frac{b_0}{b^5}=\frac{\sin 5\varphi}{\sin^5\varphi}=f(\varphi)$ bằng: - 4.

Ví dụ 2.3.3. Cho số phức z = a + ib, với a và b là hai số thực khác 0, a > 0. Gọi $z^2 = a_0 + ib_0$. Hãy xác định giá trị nhỏ nhất của: $\frac{a_0}{a^2}$ và giá trị nhỏ nhất của $(\frac{b_0}{b^2}+\frac{b}{a})$.

Ví dụ 2.3.4. Cho số phức z = a + ib, với a và b là hai số thực khác 0, a > 0. Gọi $z^3 = a_0 + ib_0$. Hãy xác định giá trị nhỏ nhất của: $\frac{a_0+a+2}{a}$.

2.4. Ứng dụng dạng lượng giác vào một số bài toán số phức có mô đun bằng 1:

- Có thể coi như một công thức hẹp dành riêng cho nội bộ ôn luyện thi trắc nghiệm cũng như dùng riêng cho những học sinh đã theo học tác giả trên quê hương Thuận Thành.
- **Công thức hẹp TTper05**: Cho số phức z có mô đun: |z| = 1 , với: z = a + ib, trong đó a và b là các số thực, thì ta có các tính chất sau đây:
  - ❖ Phần thực và phần ảo: $-1 \le a,b \le 1$
  - ❖ $1+z^2 = 2az \leftrightarrow z^2 - 2az + 1 = 0$ **(1)**
  - ❖ $1-z^2 = -2ibz \leftrightarrow z^2 - 2ibz - 1 = 0$ **(2)**
  - ❖ $|1 \pm z| = \sqrt{2(1 \pm a)}$ **(3)**
- **Chứng minh công thức (1):**
- Ta có: $1+z^2 = 1+a^2-b^2+2abi = (1-b^2)+a^2+2abi = a^2+a^2+2abi = 2a(a+ib) = 2az$
- Suy ra: $1-z^2 = 2az \leftrightarrow z^2 - 2az + 1 = 0$ (đpcm)
- **Chứng minh công thức (2):**
- Ta có: $1-z^2 = 1-a^2+b^2-2abi = b^2+b^2-2abi = -2ib(a+ib) = -2ibz$
- Suy ra: $1-z^2 = -2ibz \leftrightarrow z^2 - 2ibz - 1 = 0$ (đpcm)
- **Chứng minh công thức (3):**
- Ta có: $|1 \pm z| = |1 \pm a + ib| = \sqrt{(1 \pm a)^2 + b^2} = \sqrt{1 \pm 2a + a^2 + b^2} = \sqrt{1 \pm 2a + 1} = \sqrt{2 \pm 2a} = \sqrt{2(1 \pm a)}$
- Chúng ta có thể sử dụng dạng lượng giác để chứng minh các công thức trên như sau:
- Áp dụng dạng lượng giác ta có: $z = a + ib = |z|(\cos\varphi + i.\sin\varphi) = \cos\varphi + i.\sin\varphi$ (vì |z| = 1)
- Suy ra có thể gọi: $-1 \le a = \cos\varphi; b = \sin\varphi \le 1 \leftrightarrow 0 \le |a|; |b| \le 1$.
- Ta có:
- $1+z^2 = 1+(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = 1+\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi = 2\cos^2\varphi + 2i\sin\varphi\cos\varphi = 2\cos\varphi(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
- Suy ra: $1+z^2 = 2\cos\varphi(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 2\cos\varphi.z = 2a.z \leftrightarrow z^2 - 2az + 1 = 0$ (đpcm)
- Ta có thể áp dụng các công thức tính nhanh hẹp trên để giải những bài toán liên quan tới số phức có mô đun bằng 1. Như vậy, sẽ ghi nhớ được công thức và giảm thiểu được sự dài dòng trong một số bài toán lớn:

Bài toán 2.4.1. Cho số phức z = a + ib, với a và b là hai số thực khác 0. Có mô đun |z| = 1.

1. Hãy tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của: P = |z² + 1|.

2. Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của: $P = |z^3 + 4z + \overline{z}| - |z + \overline{z}|$

✍ **Giải:**

1. Hãy tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của: P = |z² + 1|.

- Ta có: $P = |z^2 + 1| = |2az| = 2|a|.|z| = 2|a| \rightarrow 0 \le P = 2|a| \le 2$
- Giá trị lớn nhất của P là: $P_{max} = 2 \Leftrightarrow |a| = 1$, khi đó b = 0 (vì: $a^2 + b^2 = |z|^2 = 1$) $\Leftrightarrow z = \pm 1$.

2. Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của: $P = |z^3 + 4z + \overline{z}| - |z + \overline{z}|$

- Vì có |z| = 1, nên ta có thể nhân biểu thức P với |z| như sau:
- $P = |z|.|z^3 + 4z + \overline{z}| - |z + \overline{z}| = |z^4 + 4z^2 + z.\overline{z}| - |2a| = |z^4 + 4z^2 + 1| - |2a|$
- (Chú ý là $z.\overline{z} = |z|^2 = 1$)
- Biến đổi biểu thức P :
- $P = |(z^2 + 1)^2 + 2z^2| - |2a| = |(2az)^2 + 2z^2| - |2a| = |z^2|.|4a^2 + 2| - 2|a| = 4a^2 + 2 - 2|a|$
- Đặt: $t = 2|a| \in [0;2]$; thay vào P ta được:
- $P = |4a^2 + 2| - 2|a| = t^2 + 2 - t = t^2 - t + 2 = f(t)$
- Ycbt $\Leftrightarrow$ tìm MAX và MIN của hàm số: $P = f(t) = t^2 - t + 2$ trên đoạn [0;2]
- Dễ dàng suy ra được: MAX của P = $P_{max} = 4 \Leftrightarrow t = 2|a| = 2 \rightarrow a = \pm 1; b = 0 \rightarrow z = \pm 1$
- MIN của P = $P_{min} = 7/4 \Leftrightarrow t = 2|a| = \frac{1}{2} \rightarrow |a| = \frac{1}{4} \rightarrow |b| = \sqrt{1 - a^2} = \frac{\sqrt{15}}{4} \rightarrow z = \pm\frac{1}{4} \pm \frac{i\sqrt{15}}{4}$

Bài toán 2.4.2. Cho số phức z = a + ib, với a và b là hai số thực khác 0. Có mô đun |z| = 1. Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của: $P = |1 - z| + |z + \overline{z}|$

✍ **Giải:**

- Với: $z = a + ib \rightarrow -1 = -|z| \le a, b \le |z| = 1$.
- Ta có: $P = |1 - z| + |z + \overline{z}| = \sqrt{2(1 - a)} + |2a|$
- Đặt: $t = \sqrt{2(1 - a)} \rightarrow 2a = 2 - t^2$; $0 \le t = \sqrt{2(1 - a)} \le \sqrt{2(1 + 1)} = 2$.
- Thay vào biểu thức P ta được: $P = t + |2 - t^2| = f(t)$; với $t \in [0;2]$.
- **Trường hợp 1:** $0 \le t \le \sqrt{2}$
- $P = t + |2 - t^2| = f(t) = 2 + t - t^2$ trên đoạn $[0;\sqrt{2}]$ suy ra: Max = 9/4 và Min = $\sqrt{2}$
- **Trường hợp 2:** $\sqrt{2} \le t \le 2$
- $P = t + |2 - t^2| = f(t) = t^2 + t - 2$ trên đoạn $[\sqrt{2};2]$ suy ra: Max = 4 và Min = $\sqrt{2}$
- Ta phải kết hợp cả hai trường hợp trên mới suy ra được GTLN và GTNN của biểu thức P.
- Vậy giá trị lớn nhất của P là: $P_{max} = 4$ và giá trị nhỏ nhất của P là: $P_{min} = \sqrt{2}$.

Bài toán 2.4.3. Cho số phức z = a + ib, với a và b là hai số thực khác 0. Có mô đun |z| = 1.

1. Hãy tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của: P = $|z^2 - 1|$.

2. Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của: $P = |z^3 - 4z + \overline{z}| - |z - \overline{z}|$

✍ **Giải:**

- Ta có: |z| = 1 ⇔ $a^2 + b^2 = 1$ {trong đó: z = a + ib}
- Khi đó ta có: $1 - z^2 = 1 - a^2 + b^2 - 2abi = 2b^2 - 2abi = -2ib(a + ib) = -2ibz$ (đpcm)

1. Hãy tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của: P = $|z^2 - 1|$.

- Ta có: $P = |z^2 - 1| = |-2ibz| = 2|b|.|z| = 2|b| \to 0 \le P = 2|b| \le 2$
- Giá trị lớn nhất của P là: $P_{max} = 2 \Leftrightarrow |b| = 1$, khi đó a = 0 (vì: $a^2 + b^2 = |z|^2 = 1$) ⇔ $z = \pm 1$.

2. Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của: $P = |z^3 - 4z + \overline{z}| - |z - \overline{z}|$

- Vì có |z| = 1, nên ta có thể nhân biểu thức P với |z| như sau:
- $P = |z|.|z^3 - 4z + \overline{z}| - |z - \overline{z}| = |z^4 - 4z^2 + z.\overline{z}| - |z - \overline{z}| = |z^4 - 4z^2 + 1| - |z - \overline{z}|$
- Chú ý là $z.\overline{z} = |z|^2 = 1$
- Biến đổi biểu thức P :
- $P = |(z^2 - 1)^2 - 2z^2| - |2ib| = |(-2ibz)^2 - 2z^2| - |2b| = |z^2|.|-4b^2 - 2| - |2b| = 4b^2 + 2 - 2|b|$
- Đặt: $t = 2|b| \in [0;2]$; thay vào P ta được:
- $P = 4b^2 + 2 - 2|b| = t^2 + 2 - t = t^2 - t + 2 = f(t)$
- Ycbt ⇔ tìm MAX và MIN của hàm số: $P = f(t) = t^2 - t + 2$ trên đoạn [0;2]
- Dễ dàng suy ra được: MAX của P = $P_{max} = 4 \Leftrightarrow t = 2|b| = 2 \to b = \pm 1; a = 0 \to z = \pm i$
- MIN của P = $P_{min} = 7/4 \Leftrightarrow t = 2|b| = \frac{1}{2} \to |b| = \frac{1}{4} \to |a| = \sqrt{1 - b^2} = \frac{\sqrt{15}}{4} \to z = \pm\frac{\sqrt{15}}{4} \pm \frac{i}{4}$

Bài toán 2.4.4. Cho số phức z có |z| = 1. Hãy trả lời các câu hỏi sau:

1. Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = 2|1 - z| + 3|1 + z|$

2. Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = |1 - z| + |1 + z + z^2|$

✍ **Giải:**

1. Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = 2|1 - z| + 3|1 + z|$

- Biến đổi nhanh theo công thức hẹp biểu thức P như sau:

- $P = 2|1-z| + 3|1+z| = 2\sqrt{2(1-a)} + 3\sqrt{2(1+a)} = 2\sqrt{2}.\sqrt{1-a} + 3\sqrt{2}.\sqrt{1+a}$; trong đó: $-1 \le a \le 1$
- Áp dụng bất đẳng thức bunhia ta có thể suy ra được giá trị lớn nhất và khó suy ra giá trị nhỏ nhất được từ các BĐT cơ bản:
- $P^2 = (2\sqrt{2}.\sqrt{1-a} + 3\sqrt{2}.\sqrt{1+a})^2 \le (8+18)(1-a+1+a) = 52 \to P \le 2\sqrt{13}$
- Chúng ta có thể sử dụng phương pháp khảo sát hàm số cho tối ưu kiến thức:
- Đặt: $0 \le t = \sqrt{2-2a} \le 2 \to 2a = 2 - t^2 \to P = 2t + 3\sqrt{4-t^2} = f(t)$
- $f'(t) = 2 - \dfrac{3t}{\sqrt{4-t^2}} = 0 \to 2\sqrt{4-t^2} = 3t \leftrightarrow \begin{cases} t \ge 0 \\ 16 - 4t^2 = 9t^2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} t \ge 0 \\ t = \pm\dfrac{4}{\sqrt{13}} \end{cases} \to t = \dfrac{4}{\sqrt{13}}$
- Khi: $t = \dfrac{4}{\sqrt{13}} \to a = \dfrac{5}{13} \to b = \pm\dfrac{12}{13} \to z = \dfrac{5}{13} \pm \dfrac{12i}{13}$
- $f(0) = 6$; $f(2) = 4$; $f(\dfrac{4}{\sqrt{13}}) = 2\sqrt{13}$
- Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là : $P_{max} = 2\sqrt{13}$ khi $z = \dfrac{5}{13} \pm \dfrac{12i}{13}$; giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là: $P_{min} = 4$ khi $t = 2 \Leftrightarrow a = -1 \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow z = -1$.

2. Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = |1-z| + |1+z+z^2|$

- Biến đổi nhanh theo công thức hẹp với những số phức có |z| = 1, ta được:
- $P = |1-z| + |1+z+z^2| = \sqrt{2(1-a)} + |2az+z| = \sqrt{2(1-a)} + |2a+1|.|z| = \sqrt{2(1-a)} + |2a+1|$
- Đặt: $0 \le t = \sqrt{2(1-a)} \le 2 \to 2a = 2 - t^2$ {vì $-1 \le a \le 1$ }
- Biểu thức: $P = \sqrt{2(1-a)} + |2a+1| = t + |2 - t^2 + 1| = t + |3 - t^2|$
- Chia trường hợp như sau:
- **Trường hợp 1:** $0 \le t \le \sqrt{3}$
- Biểu thức: $P = t + 3 - t^2 = -t^2 + t + 3 = f(t)$
- $f'(t) = -2t + 1 = 0 \to t = \dfrac{1}{2}$
- $f(0) = 3$; $f(\dfrac{1}{2}) = \dfrac{13}{4}$; $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$
- Ở trường hợp này thì: Max P = $\dfrac{13}{4}$ khi: t = $\dfrac{1}{2}$; Min P = $\sqrt{3}$ khi t = $\sqrt{3}$
- **Trường hợp 2:** $\sqrt{3} \le t \le 2$
- Biểu thức: $P = t + t^2 - 3 = t^2 + t - 3 = f(t)$

- $f'(t) = 2t + 1 = 0 \to t = -\frac{1}{2}$ (loại). $f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}$; $f(2) = 3$
- Ở trường hợp này thì: Max P = 3 khi: t = 2 ; Min P = $\sqrt{3}$ khi t = $\sqrt{3}$
- Kết hợp cả hai trường hợp ta có:
- $P_{max} = \frac{13}{4}$ khi: t = $\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2a = 2 - t^2 = \frac{7}{4} \to a = \frac{7}{8} \to b = \pm\frac{\sqrt{15}}{8} \to z = \frac{7}{8} \pm \frac{i\sqrt{15}}{8}$
- $P_{min} = \sqrt{3}$ khi t = $\sqrt{3} \to 2a = 2 - t^2 = -1 \to a = -\frac{1}{2} \to b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \to z = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$

Ví dụ 2.4.5. Cho số phức z có mô đun bằng 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau đây :

1. $P = |z + \overline{z}| - 2|1 - z|$
2. $P = |1 - z| + |1 - 3z + z^2|$
3. $P = |z^3 + 5z + \overline{z}| - 2|z + \overline{z}|$

Ví dụ 2.4.6. Cho số phức z có |z| = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của các biểu thức:

1. P = |1 – z| + |z³ + 1|
2. P = 2|1 + z| + |z³ – 1|
3. P = 3|z + 1| – 2|z – 1|

Bài toán 2.4.7. Cho số phức z có: |z| = 1. Khi đó phần thực của số phức: $\frac{1}{1-z}$ bằng bao nhiêu?

Giải:

- **Cách 1:** Sử dụng công thức lượng giác. Vì |z| = 1 suy ra: $z = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i.\sin\varphi$
- Thay vào biểu thức:
- $$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-\cos\varphi - i.\sin\varphi} = \frac{1}{2\sin^2\frac{\varphi}{2} - i.2\sin\frac{\varphi}{2}.\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{-2i\sin\frac{\varphi}{2}(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2})}$$
- $\frac{1}{1-z} = \frac{\cos\frac{\varphi}{2} - i\sin\frac{\varphi}{2}}{-2i\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}.\cot\frac{\varphi}{2} \to$ phần thực của $\frac{1}{1-z}$ là $\frac{1}{2}$.
- **Cách 2:** Đại số thuần túy: z = a + ib , trong đó: a² + b² = 1. Suy ra:
- $$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-a-ib} = \frac{1-a+ib}{(1-a-ib)(1-a+ib)} = \frac{1-a+ib}{(1-a)^2+b^2} = \frac{1-a+ib}{1-2a+a^2+b^2} = \frac{1-a+ib}{2-2a} = \frac{1}{2} + \frac{ib}{2-2a}$$
- Vậy vẫn suy ra được phần thực của: $\frac{1}{1-z}$ là $\frac{1}{2}$.

Bài toán 2.4.8. Cho số phức z có: |z| = 1. Khi đó phần thực của số phức: $\frac{1}{1+z^2}$ bằng bao nhiêu?

✍ **Giải:**

- **Cách 1:** Sử dụng công thức lượng giác
- Vì |z| = 1 suy ra: $z = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i.\sin\varphi$
- Suy ra: $\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1+(\cos\varphi + i.\sin\varphi)^2} = \frac{1}{1+\cos 2\varphi + i.\sin 2\varphi} = \frac{1}{2\cos^2\varphi + i.2\sin\varphi.\cos\varphi}$
- $\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2\cos\varphi(\cos\varphi + i.\sin\varphi)} = \frac{\cos\varphi - i.\sin\varphi}{2\cos\varphi} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}.\tan\varphi$
- Vậy phần thực của số phức: $\frac{1}{1+z^2}$ là $\frac{1}{2}$.
- **Cách 2:** Sử dụng phương pháp đại số thuần túy: Gọi z = a + ib, trong đó: $a^2 + b^2 = 1$
- $\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1+a^2-b^2+2abi} = \frac{1}{2a^2+2abi} = \frac{1}{2a}.\frac{1}{a+ib} = \frac{1}{2a}.\frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a-ib}{2a} = \frac{1}{2} - \frac{ib}{2a}$
- Vậy phần thực của số phức: $\frac{1}{1+z^2}$ là $\frac{1}{2}$.

Ví dụ 2.4.9. Cho số phức z có |z| = 1. Hãy xác định phần thực của các số phức:

1. $\frac{1}{1+z}$ 2. $\frac{1}{1-z^2}$

Ví dụ 2.4.10. Hãy xây dựng công thức tổng quát, khi cho z có |z| = r thì phần thực của số phức:

$\frac{1}{r \pm z}$ là $\frac{1}{2r}$

Ví dụ 2.4.11. Hãy xây dựng công thức tổng quát, khi cho z có |z| = r thì phần thực của số phức:

$\frac{1}{r^2 \pm z^2}$ là $\frac{1}{2r^2}$

III. PHƯƠNG TRÌNH – HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT PHỨC

3.1. Phương trình bậc nhất chứa một biến (z hoặc $\overline{z}$):

- **Phương pháp giải:** Ta biến đổi đưa về dạng: $A.z = B \to z = \frac{B}{A}$ hoặc $A.\overline{z} = B \to \overline{z} = \frac{B}{A}$

Bài toán 3.1.1. Giải phương trình: (1 + 3i)z – (2i + 3)(1 + z) = 4i (1)

✍ **Giải:**

- Pt (1) ⇔ z(1 + 3i – 2i – 3) = 4i + 2i + 3 ⇔ z(-2 + i) = 3 + 6i ⇔ $z = \frac{3+6i}{-2+i} = 3i$.
- **Nhận xét:** Đây chỉ là phương pháp chung.Nhưng khi ta đi trắc nghiệm sẽ gặp nhiều tình huống yêu cầu xử lí thông minh tốc độ hơn.

Ví dụ 3.1.2. Giải các phương trình phức bậc nhất một ẩn sau:

1. $z(2i-3)+(1+i)(iz-1)=2i+3$.
2. $(1+i)\overline{z}+(\overline{z}+i)(2-i)=5i$.

Bài toán 3.1.3. Cho z thỏa mãn phương trình: $(z+2-3i)(4+3i)=2+i$. Hãy tính: |z + 2 – 3i| = ?

✍ **Giải:**

- Đây là những bài toán, nhìn qua thì rất đơn giản, chỉ là những phương trình bậc nhất đơn giản..chúng ta có thể làm nhanh để giải nghiệm ra nghiệm z rồi thay vào biểu thức mô đun tính là xong. Tuy nhiên, để tối ưu thời gian thì chúng ta nên xử lí mô đun như sau:
- Từ: $(z+2-3i)(4+3i)=2+i \to |(z+2-3i)(4+3i)|=|2+i| \to |z+2-3i|.|4+3i|=|2+i|$
- Suy ra: $|z+2-3i|=\frac{|2+i|}{|4+3i|}=\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Bài toán 3.1.4. Cho z thỏa mãn phương trình: $(z+1+2i)(2+5i)=3+4i$. Hỏi |iz – 2 + i| = ?

✍ **Giải:**

- Với bài toán này, chúng ta nên xử lí mô đun như sau:
- Từ: $(z+1+2i)(2+5i)=3+4i \to i(z+1+2i)(2+5i)=i(3+4i) \to (iz+i-2)(2+5i)=i(3+4i)$
- $\to |(iz+i-2)(2+5i)|=|i(3+4i)| \to |iz+i-2|=\frac{|i(3+4i)|}{|2+5i|}=\frac{5}{\sqrt{29}}$
- **Ghi nhớ:** Khi cần tính mô đun hãy cứ lưu ý tới các cách xử lí mô đun cho tốc độ, hạn chế lối mòn tư duy: "*cứ giải ra nghiệm rồi thay vào biểu thức mô đun là xong*.."

Ví dụ 3.1.5. Cho z thỏa mãn phương trình: $(z+3i+5)(2-i)=4+i$. Hỏi |z + 5 + 3i| = ?

Ví dụ 3.1.6. Cho z thỏa mãn phương trình: $(z+3i+5)(2-i)=4+i$. Hỏi |iz + 5i – 3| = ?

Ví dụ 3.1.7. Tìm x và y thực thỏa mãn phương trình: (x + 2iy)(1 – 2i) + i(x – iy) = 1 .

3.2. Phương trình bậc nhất chứa hai biến (z hoặc $\overline{z}$):

- **Phương pháp giải:** Ta gọi z = x + iy, trong đó $x, y \in \mathrm{R} \to \overline{z} = x - iy$ và $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Sau đó thay vào phương trình đã cho rồi tiến tới giải hệ suy ra x, y rồi suy ra z.

Bài toán 3.2.1. Giải phương trình: (1 + 2i)z + (i – 1)(i + $\overline{z}$) = i (1)

✍ **Giải:**

- Gọi: $z = x + iy; \quad x, y \in \mathrm{R} \to \overline{z} = x - iy$. Thay vào phương trình (1), ta được:
- $(1+2i)(x+iy)+(i-1)(i+x-iy)=i \leftrightarrow (-y-1)+i(3x+2y-2)=0 \to \begin{cases} -y-1=0 \\ 3x+2y-2=0 \end{cases} \to \begin{cases} x=\dfrac{4}{3} \\ y=-1 \end{cases}$
- Vậy ta có nghiệm là: $z = \frac{4}{3} - i$.

Ví dụ 3.2.2. Giải các phương trình tìm z:

1. $(3+4i)z-(2+i)\overline{z}=4+5i$.
2. $(z+1)3i+(2\overline{z}-i)(4+3i)=11+i$.

Ví dụ 3.2.3. Cho z thỏa mãn phương trình: $(1+i)z-2i(1+i)\overline{z}=7i-2$. Hãy xác định số phức $\mathrm{w} = z - 2i\overline{z}$?

Ví dụ 3.2.4. Cho z thỏa mãn phương trình: $(3+2i)z-(3i-2)\overline{z}=5+3i$. Hãy xác định số phức $\mathrm{w} = iz + \overline{z}$?

Ví dụ 3.2.5. Cho z thỏa mãn phương trình: $(1+2i)z-i(1+2i)\overline{z}=1+i$. Hãy xác định số phức $\mathrm{w} = z - i\overline{z}$?

Ví dụ 3.2.6. Cho z thỏa mãn: $(2+5i)z-(2i-5)\overline{z}=11+4i$. Hãy xác định số phức $\mathrm{w} = iz + \overline{z}$?

Bài toán 3.2.7. Cho số phức z thỏa mãn phương trình: $\frac{|z|^2}{z} + 2iz + \frac{2(z+i)}{1-i} = 0$. Tìm z ?

✍ **Giải:**

- Nhận xét: $\frac{|z|^2}{z} = \overline{z}$ và $\frac{2}{1-i} = 1+i$.
- Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \overline{z} + 2iz + (1+i)(z+i) = 0 \quad (1)$
- Gọi z = x + iy ; trong đó a và b là số thực. Thay vào (1) ta được:
- $(1) \Leftrightarrow x - iy + 2i(x+iy) + (1+i)(x+iy+i) = 0 \Leftrightarrow (2x-3y-1) + i(3x+1) = 0 \to \begin{cases} x = -\dfrac{1}{3} \\ y = -\dfrac{5}{9} \end{cases}$
- Vậy số phức: $z = -\frac{1}{3} - \frac{5}{9}i$

- **Ghi nhớ:** Có những phương trình bậc nhất đơn giản được che mờ bởi những công thức biến đổi cơ bản làm cho phức tạp hóa vấn đề. Chúng ta phải cố gắng nhìn ra và biến đổi những công thức cơ bản này: $\frac{|z|^2}{z}=\overline{z}$.

Ví dụ 3.2.8. Cho số phức z thỏa mãn phương trình: $\frac{|z|^2}{z}+(1-i)z+\frac{2(z+1)}{1-i}=0$. Tìm z?

Ví dụ 3.2.9. Cho số phức z thỏa mãn phương trình: $\frac{|z|^2}{\overline{z}}+2z+\frac{5(\overline{z}-i)}{3+4i}=0$. Tìm z?

Bài toán 3.2.10. Giải phương trình bậc nhất sau trên tập số phức: $\frac{1-i}{z-3i+1}=\frac{4+2i}{\overline{z}+2iz-1}$ (1)

✍ **Giải:**

- Đây là phương trình bậc nhất với hai ẩn số cơ bản. Nếu chúng ta cứ gọi z = x + iy và thay vào phương trình luôn thì sẽ rất cồng kềnh và rễ mắc sai lầm.
- Chúng ta có thể rút gọn trước khi giải thay ẩn z vào như sau:
- $(1)\Leftrightarrow \overline{z}+2iz-1=(z-3i+1)\frac{4+2i}{1-i}=(z-3i+1)(1+3i)=(1+3i)z+10\Leftrightarrow \overline{z}-(1+i)z-11=0$
- Đến đây ta có thể thay: z = x + iy vào phương trình sẽ được:
- $(x-iy)-(1+i)(x+iy)-11=0\leftrightarrow(y-11)-i(x+2y)=0\rightarrow\begin{cases}x=-22\\y=11\end{cases}\rightarrow z=-22+11i$

Ví dụ 3.2.11. Giải các phương trình bậc nhất trên tập số phức sau:

1. $\frac{2-3i}{z+4i-5}=\frac{1+2i}{3-7i}$.
2. $\frac{10+5i}{z+2i\overline{z}-3}=\frac{2+i}{3z+2i}$
3. $\frac{1-i}{z+i}-\frac{3+4i}{2\overline{z}+z-i}=0$

3.3. Biện luận theo tham số phức một phương trình phức bậc nhất: $A_mz + B_m = 0$:

- Nhắc lại kiến thức cơ bản của phương trình bậc nhất chứa tham số:
- Cho phương trình: Az + B = 0 (1)
  - ❖ Phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow\begin{cases}A=0\\B\neq 0\end{cases}$
  - ❖ Phương trình có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow A\neq 0$
  - ❖ Phương trình (1) đúng với mọi z, tức là có vô số nghiệm z $\Leftrightarrow\begin{cases}A=0\\B=0\end{cases}$

Bài toán 3.3.1. Cho phương trình bậc nhất tham số phức u. Giải và biện luận phương trình theo u

$$(u-3+2i)z-4+6i=0 \qquad (1)$$

✍ **Giải:**

- Đây là dạng cơ bản của phương trình bậc nhất một ẩn, chúng ta biện luận bình thường:
- Nếu: $u-3+2i=0 \leftrightarrow u=3-2i \rightarrow$ phương trình đã cho vô nghiệm.
- Nếu: $u-3+2i\neq 0 \leftrightarrow u\neq 3-2i \rightarrow$ phương trình có nghiệm duy nhất.

Bài toán 3.3.2. Cho pt bậc nhất ẩn z và hai tham số phức u, v: $(u+1-2i)z-(1-i)v-2+4i=0$. Biết phương trình có nghiệm đúng với mọi z. Hãy xác định các giá trị của u và v ?

✍ **Giải:**

- Đã biết phương trình dạng Az + B = 0 có nghiệm đúng với mọi z ⇔ A = B = 0. Nên để phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi z ta phải có:
- $\begin{cases} u+1-2i=0 \\ -(1-i)v-2+4i=0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} u=-1+2i \\ v=\dfrac{2-4i}{-1+i}=-3+i \end{cases}$

Ví dụ 3.3.3. Để phương trình: $(u+2-i)z-4+2i=0$ không tồn tại nghiệm phức z thì số phức u bằng bao nhiêu?

Ví dụ 3.3.4. Để phương trình: $(u+3-4i)z-(3+2i)v-1+3i=0$ nghiệm đúng với mọi z thì các số phức u và v bằng bao nhiêu?

Ví dụ 3.3.5. Để phương trình: $u(1+2i-z)+(2+i)z-3w+4i=0$ nghiệm đúng với mọi z thì các số phức u và w bằng bao nhiêu?

Ví dụ 3.3.6. Để phương trình: $u(3+i-iz)+(2-2i)z-2w+3i-1=0$ không tồn tại số phức z nào thỏa mãn thì các số phức u và w bằng bao nhiêu?

3.4. Hệ phương trình bậc nhất trong số phức:

Bài toán 3.4.1. Giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn z và w : $\begin{cases} iz+(3-i)\mathrm{w}=1 & (1) \\ 2z+i\mathrm{w}=2-i & (2) \end{cases}$

✍ **Giải:**

- Từ (1) suy ra: $\mathrm{w}=\dfrac{1-iz}{3-i}$ (3); thế vào phương trình (2), ta được:
- (2) ⇔ $2z+i.\dfrac{1-iz}{3-i}=2-i \leftrightarrow 2(3-i)z+i(1-iz)=(3-i)(2-i) \leftrightarrow (7-2i)z=5-6i \rightarrow z=\dfrac{47}{53}-\dfrac{32}{53}i$
- Thế z vào (3), ta được: $\mathrm{w}=\dfrac{1-i.(\frac{47}{53}-\frac{32}{53}i)}{3-i}=\dfrac{11}{53}-\dfrac{12}{53}i$

Bài toán 3.4.2. Giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn z và w : $\begin{cases}(1-i)z+3i\text{w}=2-3i & (1)\\ 2z-(2+i)\text{w}=2+4i & (2)\end{cases}$

✍ **Giải:**

- Chúng ta cũng có thể sử dụng phương pháp cộng (trừ) đại số như sau:
- Nhân hai vế của (1) với 2, nhân hai vế của (2) với (1 – i) rồi lấy chúng trừ đi nhau sẽ được:
- Hệ phương trình đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases}2(1-i)z+6i\text{w}=4-6i & (3)\\ 2(1-i)z-(1-i)(2+i)\text{w}=(1-i)(2+4i) & (4)\end{cases}$
- Lấy (3) trừ đi (4), vế theo vế, ta được:
- $6i\text{w}+(1-i)(2+i)\text{w}=4-6i-(1-i)(2+4i)\rightarrow(3+5i)\text{w}=-2-8i\rightarrow \text{w}=-\frac{23}{17}-\frac{7}{17}i$
- Thế vào phương trình (1) ta được: $z=\frac{2-3i-3iw}{1-i}=-\frac{5}{34}+\frac{31}{34}i$
- **Ghi nhớ:** *Khi đã nắm vững các thao tác cũng như các phép toán phức cơ bản, chúng ta nên dùng CASIO để tính toán cho đạt tốc độ phù hợp với yêu cầu thi cử.*

Bài toán 3.4.3. Giải hệ phương trình bậc nhất ba ẩn u , v , w : $\begin{cases}(2+i)u+iv+3\text{w}=1+i & (1)\\ 2u-3iv+(1-2i)\text{w}=3 & (2)\\ (1+i)u+2v+(3-i)\text{w}=4-3i & (3)\end{cases}$

✍ **Giải:**

- Chúng ta có thể sử dụng phương pháp thế đại số, cộng đại số, hoặc sử dụng định thức cho hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn.
- Chúng ta sử dụng phương pháp thế:
- Từ phương trình (2), suy ra: $u=\frac{3}{2}+\frac{3i}{2}v-\frac{1-2i}{2}\text{w}$ (4) , thế vào (1), ta được:
- $(2+i)\left(\frac{3}{2}+\frac{3i}{2}v-\frac{1-2i}{2}\text{w}\right)+iv+3\text{w}=1+i\leftrightarrow(-\frac{3}{2}+4i)v+(1+\frac{3i}{2})\text{w}=-2-\frac{i}{2}$
- $\rightarrow v=\frac{4}{73}+\frac{35i}{73}-(\frac{18}{73}-\frac{25i}{73})\text{w}$ (5) .
- Thay vào (4) ta suy ra:
- $u=\frac{3}{2}+\frac{3i}{2}\left(\frac{4}{73}+\frac{35i}{73}-(\frac{18}{73}-\frac{25i}{73})\text{w}\right)-\frac{1-2i}{2}\text{w}=\frac{57}{73}+\frac{6i}{73}+(-\frac{74}{73}+\frac{46i}{73})\text{w}$ (6)
- Thay (5) và (6) vào phương trình (3), ta được:
- $(1+i)\left(\frac{57}{73}+\frac{6i}{73}+(-\frac{74}{73}+\frac{46i}{73})\text{w}\right)+2\left(\frac{4}{73}+\frac{35i}{73}-(\frac{18}{73}-\frac{25i}{73})\text{w}\right)+(3-i)\text{w}=4-3i$

- Suy ra: $(-\frac{156}{73}+\frac{22i}{73})\mathrm{w}=\frac{233}{73}-\frac{352i}{73}\rightarrow \mathrm{w}=-\frac{151}{85}+\frac{341i}{170}$
- Thay vào (5) và (6), suy ra: $v=-\frac{33}{170}-\frac{53i}{85}$; $u=\frac{112}{85}-\frac{261i}{85}$

Ví dụ 3.4.4. Giải các hệ phương trình bậc nhất hai ẩn z_1 , z_2 :

1. $\begin{cases}(1-i)z_1-iz_2=3+4i\\(3+4i)z_1+(1+i)z_2=-2-i\end{cases}$

2. $\begin{cases}iz_1+(i-2)z_2=1\\(3+2i)z_1-(1+3i)z_2=4i\end{cases}$

3. $\begin{cases}(2+i)z_1+4iz_2=6-5i\\z_1+2i(3i-1)z_2=4+i\end{cases}$

Ví dụ 3.4.5. Giải các hệ phương trình bậc nhất ba ẩn:

1. $\begin{cases}u+2iv-(2+i)\mathrm{w}=1-i\\2iu-3v+2i\mathrm{w}=4\mathrm{i}\\(1-i)u+(2-i)v+3\mathrm{w}=2\end{cases}$

2. $\begin{cases}iz_1+2z_2-(1+2i)\mathrm{z}_3=3-4i\\z_1-(3+i)z_2+4i\mathrm{z}_3=1-2\mathrm{i}\\(1-i)z_1+2z_2+(i-2)z_3=0\end{cases}$

IV. CĂN BẬC HAI – PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO – XỬ LÍ MÔ ĐUN

4.1. Căn bậc hai của một số âm

- Đúng ra, khi mà còn thi tự luận, nghe nói cấm viết $\sqrt{-1}$ hoặc cấm viết $\sqrt{z}$ mà phải viết là: căn bậc 2 của (-1) hoặc viết là căn bậc 2 của z. Không cần bàn về vấn đề đúng sai. Nhưng mở ra một hướng thi trắc nghiệm cho môn Toán..thì chúng ta cứ nên viết ngắn gọn cho dễ làm và dễ hình dung: $\sqrt{-1}$; $\sqrt{z}$; $\sqrt{3+4i}$
- Với số phức, chúng ta biết: $-1=i^2 \to \sqrt{-1}=\sqrt{i^2}=\pm i$.
- Căn bậc 2 của một số thực âm: $\sqrt{-a}=\sqrt{i^2}.\sqrt{a}=\pm i\sqrt{a}$.

Ví dụ 4.1.1. Tính căn bậc hai của các số thực âm sau:

1. $\sqrt{-64}=\pm i\sqrt{64}=\pm 8i$.
2. $\sqrt{-100}$ =
3. $\sqrt{-16}$ =
4. $\sqrt{-19}$ =

4.2. Căn bậc hai – Căn bậc n của số phức

4.2/1. Số phức tổng quát

Bài toán 4.2.1. Khai căn bậc hai của số phức: z = 3 + 4i

✍ **Giải:**

- **Cách 1:** Tổng quát cho mọi trường hợp.
- Ta gọi $\sqrt{3+4i}=x+iy \to 3+4i=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi$; trong đó x và y là các số thực.
- Suy ra: $\begin{cases} 2xy=4 \to y=\dfrac{2}{x} & (2) \\ x^2-y^2=3 & (3) \end{cases}$
- Thế (2) vào (3), ta được: $x^2-\dfrac{4}{x^2}=3 \leftrightarrow x^4-3x^2-4=0 \to \left[\begin{array}{l} x^2=-1(\text{Loai}) \\ x^2=4 \to x=\pm 2 \end{array}\right.$
- Từ đó thay vào (2) suy ra được: $y=\dfrac{2}{x}=\pm 1$.
- Vậy căn bậc hai của một số phức luôn luôn có hai giá trị: $\left[\begin{array}{l} \sqrt{3+4i}=x+iy=2+i \\ \sqrt{3+4i}=x+iy=-(2+i) \end{array}\right.$
- **Cách 2:** Ta nhận thấy: $3+4i=4+4i+i^2=(2+i)^2 \to \sqrt{3+4i}=\sqrt{(2+i)^2}=\pm(2+i)$
- **Ghi nhớ:** Để khai căn nhanh một số phức nếu chúng ta biến đổi bằng cách 2 sẽ nhanh hơn cách 1 rất nhiều. Thế nhưng, khi nào ta làm được bằng cách 2 mới là vấn đề quan trọng.

4.2/2. Số phức chính phương và bội của số phức chính phương:

- Ở đây, tác giả mạnh dạn đưa vào khái niệm số phức chính phương cho tối ưu tốc độ khi thực hiện các phép khai căn. Vì đây là tài liệu lưu hành nội bộ nên chúng ta không quá câu nệ tới sự công nhận của một hội đồng giáo sư tiến sĩ nào cả..đơn giản chỉ là phục vụ học và thi.
- **Số phức chính phương:** là số phức có căn bậc hai là một số phức với phần thực và phần ảo nguyên: z chính phương ⇔ $\sqrt{z} = x + iy$ trong đó: $x, y \in Z$.

Ví dụ 4.2.2. Số phức z = 8 – 6i là số phức chính phương vì: $z = 8 - 6i = (9 - 6i + i^2) = (3 - i)^2$

- $\rightarrow \sqrt{z} = \sqrt{(3-i)^2} = \pm(3-i)$.
- Số phức: z = 1 + i$\sqrt{3}$ không phải là số phức chính phương vì: $\sqrt{1 + i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.
- Số phức: z = 16 – 12i = 2(8 – 6i) = 2(3 – i)^2 là bội của số phức chính phương. Khi đó khai căn số phức này: $\sqrt{16 - 12i} = \sqrt{2(3-i)^2} = \pm\sqrt{2}(3-i) = \pm(3\sqrt{2} + i\sqrt{2})$.

Ví dụ 4.2.3. Hãy tính căn bậc 2 của số phức: z = 15 + 8i

- Ta nhận thấy: z = 16 + 8i + i^2 = (4 + i)^2. Vậy đây là một số phức chính phương nên ta có ngay:
- $\sqrt{15 + 8i} = \sqrt{(4+i)^2} = \pm(4+i)$

Ví dụ 4.2.4. Hãy tính căn bậc 2 của số phức: z = 12 + 16i

- Ta để ý: 3 + 4i = 4 + 4i + i^2 = (2 + i)^2 nên: $12 + 16i = 4(2+i)^2$. Vậy z là bội của một số chính phương, nên ta khai căn như sau: $\sqrt{12 + 16i} = \sqrt{4(2+i)^2} = \pm 2(2+i) = \pm(4+2i)$.

Ví dụ 4.2.5. Hãy tính căn bậc 2 của các số phức sau:

1. z = 2i.
2. z = -2i.
3. z = 8i.
4. z = -16i.
5. z = -8 + 6i.
6. z = 32 – 24i.
7. z = 65 + 72i

4.2/3. Số phức dạng lượng giác

- **Số phức lượng giác:** Chúng ta nên hiểu là số phức mà trong dạng lượng giác góc φ (hoặc Argument) của nó là những góc đặc biệt: 0, 30^0, 45^0, 60^0, 90^0, ...
- Chúng ta áp dụng công thức khai căn nhanh số phức: $\sqrt{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \pm(\cos\frac{\varphi}{2} + i.\sin\frac{\varphi}{2})$

Bài toán 4.2.6. Cho số phức: $z=1+i\sqrt{3}$. Căn bậc hai của số phức z là?

✍ **Giải:**

- Ta có: $z=1+i\sqrt{3}=2(\cos\frac{\pi}{3}+i.\sin\frac{\pi}{3})$. Vậy suy ra:
- $\sqrt{1+i\sqrt{3}}=\sqrt{2(\cos\frac{\pi}{3}+i.\sin\frac{\pi}{3})}=\sqrt{2}\left(\pm(\cos\frac{\pi}{6}+i.\sin\frac{\pi}{6})\right)=\pm\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)=\pm\left(\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Ví dụ 4.2.7. Khai căn các số phức lượng giác sau:

1. $z=-1+i\sqrt{3}$.
2. $z=-\sqrt{3}-i$.
3. $z=4+4i$

Bài toán 4.2.8. Sử dụng CASIO để khai căn bậc hai của các số phức bằng phương pháp lượng giác:

1. z = -45 + 108i.
2. z = -13 – 84i

✍ **Giải:**

- Cho số phức: $z=a+ib=|z|(\cos\varphi+i.\sin\varphi)\rightarrow\sqrt{z}=\pm(\sqrt{|z|}.\cos\frac{\varphi}{2}+i\sqrt{|z|}.\sin\frac{\varphi}{2})$
- Các bước thực hiện bằng CASIO như sau:
- **Bước 1:** Xác định căn bậc hai của môđun của số phức z rồi lưu vào A: $\sqrt{|z|}\rightarrow A$
- **Bước 2:** Xác định argument của số phức z và chia cho 2 rồi lưu vào B:
- $\tan\varphi=\frac{b}{a}\rightarrow\varphi=\arctan\frac{b}{a}=(shift\_\tan)\frac{b}{a}\rightarrow B$
- **Bước 3:** Phần thực sau khi khai căn bậc 2 số phức z là: $\sqrt{|z|}.\cos\frac{\varphi}{2}=A.\cos B$
- Phần ảo sau khi khai căn bậc 2 số phức z là: $\sqrt{|z|}.\sin\frac{\varphi}{2}=A.\sin B$
- Suy ra: $\sqrt{z}=\pm(A\cos B+iA.\sin B)$

1. z = -45 + 108i.

- Ta có: $A=\sqrt{|z|}=\sqrt{|-45+108i|}=3\sqrt{13}$
- $\tan\varphi=\frac{b}{a}=\frac{108}{-45}\rightarrow\varphi=\arctan\frac{108}{-45}\rightarrow B=\frac{\varphi}{2}$
- Suy ra: $\sqrt{z}=\pm(A\cos B+iA.\sin B)=\pm(9-6i)$

2. z = -13 – 84i

- Ta có: $A=\sqrt{|z|}=\sqrt{|-13-84i|}=\sqrt{85}$
- $\tan\varphi=\frac{b}{a}=\frac{-84}{-13}\to\varphi=\arctan\frac{-84}{-13}+\pi\to B=\frac{\varphi}{2}$
- Suy ra: $\sqrt{z}=\pm(A\cos B+iA.\sin B)=\pm(-6+7i)$

Ví dụ 4.2.9. Sử dụng CASIO khai căn các số phức sau:

1. z = 119 – 120i.

2. $z=3-6\sqrt{2}i$

4.3. Phương trình bậc hai trên tập số phức:

Bài toán 4.3.1. Giải phương trình bậc 2: $z^2-4z+5=0$.

✍ **Giải:**

- Chúng ta làm bình thường như với phương trình bậc hai đã học từ cấp 2.
- $\Delta=b^2-4ac=4^2-4.1.5=-4=4i^2\to\sqrt{\Delta}=\pm2i$.
- $z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4-2i}{2}=2-i;z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{4+2i}{2}=2+i$
- **Ghi nhớ:** *Với phương trình bậc hai trên tập phức với hệ số thực thì chúng ta nên sử dụng CASIO để bấm cho nhanh và đơn giản.*

Ví dụ 4.3.2. Giải các phương trình bậc 2 hệ số thực sau:

1. $z^2+8z+20=0$.
2. $z^2+2z+10=0$.
3. $z^2-4z+8=0$.
4. $z^4+4z^2+3=0$.
5. $z^4+16=0$.
6. $z^4-4z^2-5=0$

Bài toán 4.3.3. Giải phương trình bậc 2 hệ số phức: $z^2-(2i+1)z+i-1=0$ (1).

✍ **Giải:**

- $\Delta=(2i+1)^2-4.1.(i-1)=4i^2+4i+1-4i+4=1\to\sqrt{\Delta}=1$
- $z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2i+1-1}{2}=i;z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2i+1+1}{2}=i+1$.

Ví dụ 4.3.4. Giải các phương trình bậc 2 hệ số phức sau:

1. $z^2-(2i+3)z+3i-1=0$.
2. $z^2-4iz+12=0$.
3. $z^2-(4-2i)z+11+2i=0$.
4. $z^2+(2i-5)z+9-7i=0$.
5. $z^2-(23+i)z+162+17i=0$.
6. $z^2-(37+i)z+392-19i=0$.

4.4. Phương trình bậc cao – Phân tích nhân tử – Đặt ẩn phụ – Khai căn phức:

- Mỗi phương trình một biến trong tập số phức đều có số nghiệm bằng đúng số bậc của một phương trình nếu ta tính cả nghiệm bội.
- Một phương trình phức một biến trên tập số phức không bao giờ có khái niệm: vô nghiệm.
- Đa số phương trình bậc cao chúng ta thường phải dùng CASIO để nhẩm nghiệm thực rồi thực hiện các phép phân tích đưa về phương trình bậc thấp hơn giải cho dễ.

Bài toán 4.4.1. Giải phương trình bậc 3 trên tập số phức: $z^3 - 1 = 0$.

✍ **Giải:**

- Nhẩm nhanh z = 1 là nghiệm, ta thực hiện phép phân tích:
- $z^3 - 1 = 0 \leftrightarrow (z-1)(z^2+z+1) = 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 1 \\ z = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$
- **Ghi nhớ:** Chúng ta tránh sai lầm giải phương trình trên tập số phức mà xử lí như trên tập số thực như: $z^3 - 1 = 0 \leftrightarrow z^3 - 1 = 0 \leftrightarrow z = 1$.

Bài toán 4.4.2. Giải phương trình bậc 3 trên tập số phức: $z^3 + 2z - 3 = 0$

✍ **Giải:**

- Chúng ta có thể sử dụng máy tính CASIO để nhẩm nhanh nghiệm thực chẵn: z = 1 của pt.
- Từ đó chúng ta thực hiện phép phân tích nhân tử:
- $z^3 + 2z - 3 = 0 \leftrightarrow (z-1)(z^2+z+3) = 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 1 \\ z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{i\sqrt{11}}{2} \\ z = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{i\sqrt{11}}{2} \end{array}\right.$
- **Ghi nhớ:** Với những phương trình bậc ba hệ số thực chúng ta có thể sử dụng hoàn toàn CASIO để tìm ra ba nghiệm.

Ví dụ 4.4.3. Giải các phương trình phức bậc cao sau:

1. $z^3 - 8 = 0$.
2. $z^3 + 3z - 4 = 0$.

Bài toán 4.4.4. Giải phương trình phức bậc 3: $z^3 + 4z - 3i = 0$ (1)

✍ **Giải:**

- Tính chất: Một phương trình bậc 3 mà có dạng: $z^3 + az + ib = 0$ bao giờ cũng có một nghiệm dạng thuần ảo: z = iy

- Ta thay nghiệm z = iy vào pt (1) sẽ được:
- $z^3+4z-3i=0\leftrightarrow i^3y^3+4iy-3i=0\leftrightarrow -iy^3+4iy-3i=0\leftrightarrow y^3-4y+3=0\rightarrow y=1$
- Vậy phương trình (1) có một nghiệm: z = i. Ta sẽ phân tích như sau:
- (1) $\Leftrightarrow (z-i)(z^2+iz+3)=0\leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=i \\ z_1= \\ z_2= \end{array}\right.$
- Đa số những bài toán như thế này sẽ có những câu hỏi dạng: Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm không thuần ảo của phương trình (1), khi đó tính giá trị của biểu thức chứa z_1 và z_2 dưới dạng VIET.

Ví dụ 4.4.5. Giải phương trình phức bậc 3: $z^3-4z+5i=0$ (1). Gọi z_1 và z_2 là hai số phức không thuần ảo của phương trình (1). Khi đó hãy tính giá trị của các biểu thức: A = $(z_1 + i)(z_2 + i)$; $B=|z_1-\frac{5}{z_1}|+|z_2-\frac{5}{z_2}|$.

Ví dụ 4.4.6. Giải phương trình bậc 4: $z^4+4z^3+5z^2+4z+1=0$ (1)

✍ **Giải:**

- Đây là phương trình đối xứng bậc 4, nhận thấy z = 0 không phải là nghiệm, ta chia hai vế của (1) cho z^2 sẽ được phương trình:
- (1) $\Leftrightarrow z^2+4z+5+\frac{4}{z}+\frac{1}{z^2}=0\leftrightarrow (z^2+\frac{1}{z^2})+4(z+\frac{1}{z})+5=0$ (2)
- Đặt ẩn phụ: $t=z+\frac{1}{z}\rightarrow t^2=z^2+\frac{1}{z^2}+2\rightarrow z^2+\frac{1}{z^2}=t^2-2$; thay tất cả vào (2) ta được:
- (2) $\Leftrightarrow (t^2-2)+4t+5=0\leftrightarrow t^2+4t+3=0\leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1=z+\frac{1}{z}\rightarrow z^2+z+1=0\rightarrow z=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2} \\ t=-3=z+\frac{1}{z}\rightarrow z^2+3z+1=0\rightarrow z=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$

Ví dụ 4.4.7. Giải phương trình bậc 4 dạng phân tích nhân tử phức: $z^4+4z^3+5z^2+2z+1=0$ (1)

- (1) $\Leftrightarrow z^4+4z^3+4z^2+z^2+2z+1=0\leftrightarrow (z^2+2z)^2+(z+1)^2=0\leftrightarrow (z^2+2z)^2=-(z+1)^2$
- $\leftrightarrow (z^2+2z)^2=\{i(z+1)\}^2\leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2+2z=i(z+1)\leftrightarrow z^2+(2-i)z-i=0 \\ z^2+2z=-i(z+1)\leftrightarrow z^2+(2+i)z+i=0 \end{array}\right.$

Ví dụ 4.4.8. Giải các phương trình sau trên tập số phức:

1. $z^3-5z+6i=0$.
2. $z^4+6z^2+8=0$.
3. $z^4+2z^3+3z^2+2z+1=0$.
4. $z^4+4z^3+z^2-4z+1=0$.
5. $z^4-3z^2-2z+5=0$.
6. $z^3-(1+i\sqrt{3})=0$.
7. $z^4-\sqrt{3}+i=0$.
8. $z^4-2z^3+5z^2+4z+1=0$.
9. $z^5-1=0$.
10. $(z^2+3-2i)^2+4=0$.
11. $(z^2+2iz)^2-2z^2-4iz-3=0$.
12. $z^4+2z^3+4z^2+2=0$.

4.5. Hệ thức VIET áp dụng vào trắc nghiệm phương trình bậc cao phức:

Bài toán 4.5.1. Hai số phức z_1 và z_2 lần lượt là nghiệm của phương trình: $z^2-(4i+5)z+3-5i=0$. Mô đun của số phức $w_1 = (z_1 + i + 2)(z_2 + i + 2)$ bằng bao nhiêu?

✍ **Giải:**

- Bài toán này nhận thấy phương trình ban đầu rất lẻ nên ta sử dụng định lí Vi ét đảo cho phương trình bậc 2 bằng cách biến đổi w_1 như sau:
- $w_1 = z_1z_2+(i+2)(z_1+z_2)+(i+2)^2 = \frac{c}{a}+(i+2)(-\frac{b}{a})+3+4i = (3-5i)+(i+2)(4i+5)+3+4i$
- Dùng CASIO ta rút gọn nhanh được: $w_1 = 12+12i \rightarrow |w_1| = 12\sqrt{2}$.
- **Ghi nhớ:** *Vẫn như kiến thức đã học từ phương trình bậc 2 hồi cấp 2..Ta áp dụng các định lí Vi ét vào các biểu thức nghiệm đối xứng của một phương trình phức bậc 2.*
- Cho phương trình phức bậc 2: $az^2+bz+c=0$ có hai nghiệm phức: $z_1;z_2$ thì có định lí Vi ét là: $\begin{cases} z_1+z_2=-\frac{b}{a} \\ z_1.z_2=\frac{c}{a} \end{cases}$

Ví dụ 4.5.2. Hai số phức z_1 và z_2 lần lượt là nghiệm của phương trình: $z^2-(3i-2)z+1+2i=0$.

1. Số phức $w_1 = (z_1 - i + 1)(z_2 + 1 - i)$ bằng bao nhiêu?
2. Số phức $w_2 = (z_1 + i - 1)(iz_2 + 1 + i)$ bằng bao nhiêu?
3. Mô đun của số phức: $w_2 = (z_1 + 2i + 3)(iz_2 - 2 + 3i)$ bằng bao nhiêu?

Bài toán 4.5.3. (TN) Cho phương trình bậc hai trên tập số phức: $z^2-(9+23i)z-92+108i=0$. Hai nghiệm của phương trình lần lượt là

A. 2 + 9i và 7 + 3i. **B.** 5 + 7i và 11 + 2i. **C.** 5 + 7i và 4 + 16i. **D.** 5 – 8i và 9 + 31i.

✍ **Giải:**

- **Cách 1:** CASIO khi mà tác giả viết tài liệu này, chưa có tính năng giải phương trình phức bậc 2 với hệ số phức, vì vậy, ở bài toán này chúng ta phải làm tay bình thường:
- $\Delta = (9+23i)^2-4.(-92+108i) = -80-18i = 81i^2-18i+1 = (9i-1)^2 \rightarrow \sqrt{\Delta} = \pm(9i-1)$
- Hai nghiệm: $z_1 = \frac{(9+23i)-(9i-1)}{2} = 5+7i; z_2 = \frac{(9+23i)+(9i-1)}{2} = 4+16i$
- Với cách 1 này, chúng ta phải biết khai triển và nhận biết Δ là một số chính phương, điều mà không phải lúc nào cũng dễ làm và dễ thấy.
- **Cách 2:** Sử dụng phương pháp thay từng cặp nghiệm vào có kết hợp định lí Viet đảo.
- Nếu chúng ta cứ lần lượt thay hết tất cả các trường hợp vào thì cũng rất lâu, vì thế nên sử dụng định lí VIET đảo để thử nhanh cặp nghiệm như sau: $z_1+z_2 = -\frac{b}{a}; z_1.z_2 = -\frac{c}{a}$.

- Đa số khi thi cử trắc nghiệm chúng ta chỉ cần thử trường hợp tổng hai nghiệm: $z_1+z_2=-\frac{b}{a}$ là đủ để nhận biết rồi.
- Khi tiến hành thử ta thấy: **A.** $(z_1+z_2=9+12i)\neq(\frac{-b}{a}=9+23i)$.
- **B.** $(z_1+z_2=16+9i)\neq(\frac{-b}{a}=9+23i)$
- **C.** $(z_1+z_2=9+23i)=(\frac{-b}{a}=9+23i)$
- **D.** $(z_1+z_2=9+23i)=(\frac{-b}{a}=9+23i)$
- Vậy có đáp án C và D cùng thỏa mãn điều kiện tổng hai nghiệm: $z_1+z_2=-\frac{b}{a}$.
- Dùng đáp án C ta thử nốt điều kiện tích hai nghiệm: **C.** $z_1.z_2=-92+108i=\frac{c}{a}$; nhận thấy trường hợp này thỏa mãn. Vậy đáp án của bài toán là **C.**
- **Ghi nhớ:** *Cách 2 diễn giải thì dài nhưng khi trắc nghiệm sẽ rất nhanh.*

Ví dụ 4.5.4. (TN) Cho phương trình bậc hai trên tập số phức: $z^2-(13+15i)z-14+97i=0$. Hai nghiệm của phương trình lần lượt là

A. 11 + 2i và 2 + 11i. **B.** 13 + 8i và 7i.

C. 6 + 7i và 7 + 8i. **D.** 15 –i và 9 + 16i.

Hệ thức VI_ET tổng quát cho một phương trình bậc 3: $az^3+bz^2+cz+d=0$, với ba nghiệm phức phân biệt: z_1, z_2, z_3 :

$$\begin{cases} z_1+z_2+z_3=-\frac{b}{a} \\ z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=\frac{c}{a} \\ z_1z_2z_3=-\frac{d}{a} \end{cases}$$

Hệ thức VI_ET tổng quát cho một phương trình bậc 4: $az^4+bz^3+cz^2+dz+e=0$, với bốn nghiệm phức phân biệt: z_1, z_2, z_3, z_4 :

$$\begin{cases} z_1+z_2+z_3+z_4=-\frac{b}{a} \\ z_1z_2+z_1z_3+z_1z_4+z_2z_3+z_2z_4+z_3z_4=\frac{c}{a} \\ z_1z_2z_3+z_1z_2z_4+z_1z_3z_4+z_2z_3z_4=-\frac{d}{a} \\ z_1z_2z_3z_4=\frac{e}{a} \end{cases}$$

Bài toán 4.5.5. Cho phương trình bậc 3 phức: $z^3+(3i-2)z^2+iz-2i+1=0$ (1). Gọi ba nghiệm phức của phương trình (1) lần lượt là: z_1, z_2, z_3. Khi đó giá trị của biểu thức A sau sẽ được rút gọn bằng bao nhiêu? Với: A = $(z_1-1)(z_2-1)(z_3-1)$.

✍ **Giải:**

- Đây là dạng bài toán xử lí biểu thức Viet bậc cao, chúng ta không thể cứ giải cụ thể ra nghiệm rồi thay vào được, vì việc giải phương trình ở đây là rất khó khăn.
- Biến đổi đưa về Viet: $A=(z_1-1)(z_2-1)(z_3-1)=(z_1+z_2+z_3)-(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)+(z_1z_2z_3)-1$
- Áp dụng định lí Viet vào biểu thức trên ta có:
- $A=(-(3i-2))-(i)+(-(-2i+1))-1=-2i$

Bài toán 4.5.6. Cho phương trình bậc 3 phức với tham số thực m: $z^3-2iz^2+(m+1)z-i+2m=0$. Gọi 3 nghiệm phức của phương trình (1) lần lượt là: z_1, z_2, z_3. Có: A = $(z_1+1)(z_2+1)(z_3+1)$. Biết rằng |A| = 5. Hãy tìm tất cả các giá trị thực của m?

✍ **Giải:**

- Biểu thức A là một biểu thức Viet bậc 3 nên ta biến đổi như sau:
- $A=(z_1+1)(z_2+1)(z_3+1)=(z_1+z_2+z_3)+(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)+(z_1z_2z_3)+1$
- Áp dụng định lí Viet vào biểu thức trên ta có:
- $A=(2i)+(m+1)+(i-2m)+1=(2-m)+3i\rightarrow|A|=\sqrt{(2-m)^2+9}=5\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-2\\m=6\end{array}\right.$
- **Ghi nhớ:** Biểu thức VIET thường được kết hợp với bài toán tìm tham số của phương trình bậc cao đặc biệt là phương trình bậc 3.

Ví dụ 4.5.7. Cho phương trình bậc 3 phức với tham số thực m: $z^3-3iz^2+(m-i)z-2i-m=0$. Gọi 3 nghiệm phức của phương trình (1) lần lượt là: z_1, z_2, z_3. Có: A = $(z_1+1)(z_2+1)(z_3+1)$. Biết rằng |A| = 6. Hãy tìm tất cả các giá trị thực của m?

Ví dụ 4.5.8. Cho phương trình bậc 3 phức với tham số thực m: $z^3-iz^2+(2m+i)z+1+im=0$. Gọi 3 nghiệm phức của phương trình (1) lần lượt là: z_1, z_2, z_3. Biết rằng $|(1-\frac{1}{z_1})(1-\frac{1}{z_2})(1-\frac{1}{z_3})|=10$. Hãy tìm tất cả các giá trị thực của m?

Bài toán 4.5.9. Cho phương trình bậc 4 trùng phương trên tập phức: $z^4-4z^2+8=0$ (1). Gọi bốn nghiệm phức của phương trình (1) lần lượt là: z_1, z_2, z_3, z_4. Khi đó giá trị của biểu thức: $A=|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|$ bằng bao nhiêu?

✍ **Giải:**

- Với bài toán này, ta sử dụng CASIO bấm nhanh ra nghiệm được phương trình trùng phương:
- $z^2 = 2 \pm 2i \rightarrow |z^2| = |z|^2 = |2 \pm 2i| = 2\sqrt{2} \rightarrow |z| = \sqrt{2\sqrt{2}}$. Tức là bốn nghiệm phức của phương trình đều có mô đun bằng nhau, nên suy nhanh ra được: $A = 4\sqrt{2\sqrt{2}}$.

Bài toán 4.5.10. Cho phương trình bậc 4 trùng phương trên tập phức: $z^4 + 4z^2 + 3 = 0$ (1). Gọi bốn nghiệm phức của phương trình (1) lần lượt là: z_1 , z_2 , z_3 , z_4 . Khi đó giá trị của biểu thức: $A = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$ bằng bao nhiêu?

✍ **Giải:**

- Với bài toán này, ta sử dụng CASIO bấm nhanh ra nghiệm được phương trình trùng phương:
- $\left[\begin{array}{l} z^2 = -1 \rightarrow z_{1,2} = \sqrt{-1} = \pm i \rightarrow |z_1| = |z_2| = 1 \\ z^2 = -3 \rightarrow z_{3,4} = \sqrt{-3} = \pm i\sqrt{3} \rightarrow |z_3| = |z_4| = \sqrt{3} \end{array}\right.$. Nên suy nhanh ra được: $A = 2+2\sqrt{3}$.

Ví dụ 4.5.11. Cho phương trình bậc 4 trùng phương trên tập phức: $z^4 + 6z^2 + 13 = 0$ (1). Gọi bốn nghiệm phức của phương trình (1) lần lượt là: z_1 , z_2 , z_3 , z_4 . Khi đó giá trị của biểu thức: $A = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$ bằng bao nhiêu?

Ví dụ 4.5.12. Cho phương trình bậc 4 trùng phương trên tập phức: $z^4 + 6z^2 + 8 = 0$ (1). Gọi bốn nghiệm phức của phương trình (1) lần lượt là: z_1 , z_2 , z_3 , z_4 . Khi đó giá trị của biểu thức: $A = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$ bằng bao nhiêu?

Bài toán 4.5.13. Cho phương trình đối xứng bậc 4: $z^4 + 2015z^3 + 2017z^2 + 2015z + 1 = 0$. Gọi z_1 , z_2 , z_3 , z_4 lần lượt là 4 nghiệm của phương trình đã cho. Tính giá trị của: $T = (z_1^2 + 1)(z_2^2 + 1)(z_3^2 + 1)(z_4^2 + 1)$

✍ **Giải:**

- Áp dụng hệ thức VIET cho phương trình bậc 4, ta có: $z_1z_2z_3z_4 = e/a = 1$.
- Biến đổi: $T = z_1z_2z_3z_4\left(\frac{z_1^2+1}{z_1}\right)\left(\frac{z_2^2+1}{z_2}\right)\left(\frac{z_3^2+1}{z_3}\right)\left(\frac{z_4^2+1}{z_4}\right) = \left(z_1 + \frac{1}{z_1}\right)\left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right)\left(z_3 + \frac{1}{z_3}\right)\left(z_4 + \frac{1}{z_4}\right)$ (2)
- Chúng ta biến đổi phương trình đối xứng bậc 4 về dạng: $\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + 2015\left(z + \frac{1}{z}\right) + 2017 = 0$ (3)
- Đặt $t = z + \frac{1}{z} \rightarrow z^2 + \frac{1}{z^2} = t^2 - 2$. Thay vào phương trình (2), ta được:
- (2) $\Leftrightarrow$ $(t^2 - 2) + 2015t + 2017 = 0 \rightarrow t^2 + 2015t + 2015 = 0$; gọi t_1 và t_2 là hai nghiệm tương ứng thì ta có: $t_1t_2 = 2015$
- Gọi z_1 và z_3 là hai nghiệm của phương trình: $z + \frac{1}{z} = t_1$. Suy ra: $z_1 + \frac{1}{z_1} = t_1$ và $z_3 + \frac{1}{z_3} = t_1$
- Gọi z_2 và z_4 là hai nghiệm của phương trình: $z + \frac{1}{z} = t_2$. Suy ra: $z_2 + \frac{1}{z_2} = t_2$ và $z_4 + \frac{1}{z_4} = t_2$
- Thay vào biểu thức ở (2) ta được: $T = t_1^2t_2^2 = 1.(2015)^2 = 2015^2$

Bài toán 4.5.14. Cho pt đối xứng bậc 6: $z^6+2016z^5+2017z^4+2018z^3+2017z^2+2016z+1=0$ (1)

Gọi $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$ là các nghiệm của (1). Hãy tính:

1. Tích số: $P = z_1.z_2z_3z_4z_5z_6 = ?$

2. Tính tích số: $T=(z_1^2+1)(z_2^2+1)(z_3^2+1)(z_4^2+1)(z_5^2+1)(z_6^2+1) = ?$

✍ **Giải:**

1. Tích số: $P = z_1.z_2z_3z_4z_5z_6 = ?$

- Theo hệ thức VIET ta có tích của tất cả các nghiệm bằng: $P = z_1.z_2z_3z_4z_5z_6 = \frac{g}{a}=\frac{1}{1}=1$. (tại sao lại là $+\frac{g}{a}$ mà không phải: $-\frac{g}{a}$ thì tự chúng ta phải hiểu).

2. Tính tích số: $T=(z_1^2+1)(z_2^2+1)(z_3^2+1)(z_4^2+1)(z_5^2+1)(z_6^2+1) = ?$

- Biến đổi biểu thức T như sau: $T=z_1z_2z_3z_4z_5z_6(\frac{z_1^2+1}{z_1})(\frac{z_2^2+1}{z_2})(\frac{z_3^2+1}{z_3})(\frac{z_4^2+1}{z_4})(\frac{z_5^2+1}{z_5})(\frac{z_6^2+1}{z_6})$
- $\rightarrow T=(z_1+\frac{1}{z_1})(z_2+\frac{1}{z_2})(z_3+\frac{1}{z_3})(z_4+\frac{1}{z_4})(z_5+\frac{1}{z_5})(z_6+\frac{1}{z_6})$ (2)
- Chúng ta xử lí phương trình đối xứng bằng cách chia hai vế của (1) cho z^3, ta được:
- (1) $\Leftrightarrow (z^3+\frac{1}{z^3})+2016(z^2+\frac{1}{z^2})+2017(z+\frac{1}{z})+2018=0$
- Đặt: $t=z+\frac{1}{z}\rightarrow\begin{cases}z^3+\frac{1}{z^3}=t^3-3t\\ z^2+\frac{1}{z^2}=t^2-2\end{cases}$; thay vào phương trình trên ta được:
- $(t^3-3t)+2016(t^2-2)+2017t+2018=0\rightarrow t^3+2016t^2+2017t-2014=0$ (2)
- Nếu gọi t_1, t_2, t_3 lần lượt là 3 nghiệm của phương trình (2) thì ta có: $t_1t_2t_3 = 2014$.
- Gọi z_1 và z_4 lần lượt là hai nghiệm của pt: $z+\frac{1}{z}=t_1\rightarrow z_1+\frac{1}{z_1}=t_1$ và $z_4+\frac{1}{z_4}=t_1$
- Gọi z_2 và z_5 lần lượt là hai nghiệm của pt: $z+\frac{1}{z}=t_2\rightarrow z_2+\frac{1}{z_2}=t_2$ và $z_4+\frac{1}{z_4}=t_1$
- Gọi z_3 và z_6 lần lượt là hai nghiệm của pt: $z+\frac{1}{z}=t_3\rightarrow z_6+\frac{1}{z_6}=t_3$ và $z_4+\frac{1}{z_4}=t_1$
- Thay vào biểu thức T ở (2), ta được: $T=t_1^2t_2^2t_3^2=2014^2$

Ví dụ 4.5.15. Cho phương trình $z^4+2016z^3+2020z^2+2016z+1=0$ có 4 nghiệm phân biệt z_1 , z_2, z_3 , z_4. Tính giá trị của biểu thức: $T=(z_1^2+1)(z_2^2+1)(z_3^2+1)(z_4^2+1)$?

Ví dụ 4.5.16. Cho pt đối xứng bậc 6: $z^6+3z^5+11z^4+14z^3+11z^2+3z+1=0$ có các nghiệm lần lượt là: z_1, z_2 , z_3, z_4 , z_5 , z_6. Tính: $T=(z_1^2+1)(z_2^2+1)(z_3^2+1)(z_4^2+1)(z_5^2+1)(z_6^2+1)$ = ?

4.6. Phương trình phức dạng đa thức với các hệ số thực: $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1z + a_0 = 0$.

- **Tích chất cơ bản của một phương trình phức dạng đa thức với các hệ số thực:** Một phương trình phức dạng đa thức với các hệ số thực. Nếu đã có một nghiệm phức (không thuần thực) là: z_0 thì bao giờ nó cũng có một nghiệm nữa dạng liên hợp của z_0 là: $\overline{z_0}$.
- **Chứng minh tính chất này rất dễ dàng như sau:**
- Xét phương trình phức dạng đa thức: $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1z + a_0 = 0$ (1) .
- Với các hệ số thực: $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$.
- Gọi một nghiệm phức của phương trình (1) là z_0 . Khi đó ta có:
- $z_0^n + a_{n-1}z_0^{n-1} + ... + a_1z_0 + a_0 = 0$
- Lấy liên hợp hai vế đẳng thức trên ta được:
- $\overline{z_0^n + a_{n-1}z_0^{n-1} + ... + a_1z_0 + a_0} = 0 \leftrightarrow \overline{z_0^n} + \overline{a_{n-1}z_0^{n-1}} + ... + \overline{a_1z_0} + \overline{a_0} = 0 \leftrightarrow \overline{z_0}^n + a_{n-1}\overline{z_0}^{n-1} + ... + a_1\overline{z_0} + a_0 = 0$
- Chứng tỏ rằng phương trình cũng có nghiệm: $\overline{z_0}$
- **Hệ quả quan trọng đối với một phương trình bậc 2 hệ số thực:**
- Cho phương trình bậc hai hệ số thực: $z^2 + az + b = 0$, với a và b là hai hệ số thực. Khi đó phương trình nếu có nghiệm phức thì phải có cả hai nghiệm phức, và hai nghiệm phức này phải là liên hợp của nhau.
- Tức là phương trình có hai nghiệm phức: z_1, z_2 sao cho: $z_1 = \overline{z_2} \rightarrow |z_1| = |z_2| = |z| = \sqrt{\frac{C}{A}} = \sqrt{b}$
- Chúng ta áp dụng tính chất này để xử lí một số bài toán cho linh hoạt và tốc độ sau đây.

Bài toán 4.6.1. Cho phương trình phức bậc 2 hệ số thực: $z^2 + az + b = 0$. Biết phương trình có một nghiệm phức: $z = 1 + 3i$. Hỏi a, b bằng bao nhiêu?

✍ **Giải:**

- **Cách 1:** Thay nghiệm $z = 1 + 3i$ vào phương trình rồi tìm ra a và b.
- Thay nghiệm vào phương trình ta được:
- $(1+3i)^2 + a(1+3i) + b = 0 \leftrightarrow (a+b-8) + i(3a+6) = 0 \rightarrow \begin{cases} a+b-8=0 \\ 3a+6=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=10 \end{cases}$
- **Cách 2:** Phương trình có nghiệm $z = 1 + 3i$, suy ra nó có nghiệm phức liên hợp: $z' = 1 - 3i$.
- Áp dụng hệ thức VIET cho phương trình bậc hai, ta có:
- $\begin{cases} z + z' = -a = 1+3i+1-3i \\ z.z' = b = (1+3i)(1-3i) = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=10 \end{cases}$
- **Ghi nhớ:** *Cách 2 tuy có thể mới mẻ và khó hiểu hơn cách 1 tuy nhiên nó có thể ứng dụng được những bài toán khó hơn, nâng cao hơn, toàn diện hơn.*

Ví dụ 4.6.2. Cho phương trình phức bậc 2 hệ số thực: $z^2 + az + b = 0$. Biết phương trình có một nghiệm: $z = 7 + 8i$. Hỏi a, b bằng bao nhiêu?

Ví dụ 4.6.3. Cho phương trình phức bậc hai với các hệ số a, b thực: $z^2 + az + b = 0$. Biết phương trình có một nghiệm phức: $z = 2 + 5i$. Hỏi các giá trị của a, b bằng bao nhiêu?

Bài toán 4.6.4. Cho phương trình bậc hai với các hệ số a, b thực: $z^2 + 2az + b^2 + 3b = 0$. Biết phương trình có một nghiệm phức không thuần thực thỏa mãn: $|z_1| = 2$. Giá trị của b bằng bao nhiêu? Điều kiện của hệ số a khi đó như thế nào?

✍ **Giải:**

- Vì phương trình đã có một nghiệm phức z_1 nên nó cũng có một nghiệm phức z_2 nữa là liên hợp của z_1 và tất nhiên cũng có : $|z_2| = |z_1| = 2$.
- Theo hệ thức VIET cho phương trình bậc 2, ta có: $z_1z_2 = b^2 + 3b$
- Lấy mô đun hai vế ta được: $|z_1z_2| = |b^2 + 3b| \Leftrightarrow |z_1|.|z_2| = |b^2 + 3b| = 4$
- Suy ra: $\left[\begin{array}{l} b^2+3b=-4 \\ b^2+3b=4 \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b^2+3b+4=0\ (VN) \\ b^2+3b-4=0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=-4 \end{array}\right. \end{array}\right.$
- Phương trình bậc hai trở thành: $z^2+2az+4=0$ (1)
- Để phương trình có nghiệm phức thì: $\Delta'_{(1)} < 0 \leftrightarrow a^2-4<0 \leftrightarrow -2<a<2$
- **Ghi nhớ:** *Chúng ta phải để ý kĩ tới điều kiện của một phương trình bậc hai để nó có nghiệm phức. Nếu chúng ta chỉ áp dụng hệ thức VIET luôn thì rất rễ sai lầm và không triệt để.*

Ví dụ 4.6.5. Cho phương trình bậc hai hệ số thực: $z^2 + az + b^2 - 6b = 0$. Biết phương trình có một nghiệm phức không thuần thực z_1 có mô đun $|z_1| = 3$. Hãy xác định giá trị của b và điều kiện của a.

Ví dụ 4.6.6. Cho phương trình bậc hai hệ số thực: $z^2 + 2az + a^2 - a - 2 = 0$. Biết phương trình có một nghiệm phức không thuần thực z_1 có mô đun $|z_1| = 2$. Hãy xác định giá trị của a.

Bài toán 4.6.7. Cho phương trình phức bậc 2 hệ số thực: $z^2 + az + b = 0$. Biết phương trình có hai nghiệm phức là $(w + 5i - 4)$ và $(3w - i + 1)$. Hãy tìm số phức w?

✍ **Giải:**

- Phương trình bậc hai hệ số thực nếu có hai nghiệm phức thì chúng là liên hợp của nhau, nên ta có thể suy ra được kết quả:
- $3w-i+1=\overline{w+5i-4}=\overline{w}-5i-4 \leftrightarrow 3w-\overline{w}=-4i-5$
- Gọi $w = a + ib$, thay vào phương trình trên ta được:
- $3(a + ib) - (a - ib) = -4i - 5 \Leftrightarrow 2a + 4ib = -4i - 5 \rightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{5}{2} \rightarrow w=-\dfrac{5}{2}-i \\ b=-1 \end{cases}$

Ví dụ 4.6.8. Cho phương trình bậc 2 hệ số thực: $z^2 + az + b = 0$. Có hai nghiệm phức lần lượt là $(2w - 8i + 1)$ và $(3w - 3 + i)$. Tìm số phức w ?

Ví dụ 4.6.9. Cho phương trình bậc 2 hệ số thực: $z^2 + az + b = 0$. Có hai nghiệm phức lần lượt là $(2w - 4i)$ và $(5w - 12 + 3i)$. Tìm tích số phần thực và phần ảo của số phức w ?

Bài toán 4.6.10. Cho phương trình bậc ba hệ số a, b , c thực: $z^3 + az^2 + bz + c = 0$. Biết phương trình có một nghiệm thực $z_1 = 3$ và một nghiệm phức $z_2 = 2 - i$. Hãy xác định các hệ số a, b , c ?

✍ **Giải:**

- **Cách 1:** Ta có thể thay hai nghiệm z_1 và z_2 vào phương trình bậc ba đã cho sau đó suy ra được các phương trình (hệ 3 phương trình bậc nhất 3 ẩn a, b, c)
- Với $z_1 = 3$, thay vào phương trình: $27 + 9a + 3b + c = 0$ (1)
- Với $z_2 = 2 - i$, thay vào phương trình và rút gọn: $(2 - i)^3 + a(2 - i)^2 + b(2 - i) + c = 0$
- $\Leftrightarrow 2 - 11i + a(3 - 4i) + b(2 - i) + c = 0 \Leftrightarrow (3a + 2b + c + 2) + i(-4a - b - 11) = 0$
- $\Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + c + 2 = 0 \quad (2) \\ -4a - b - 11 = 0 \quad (3) \end{cases}$
- Giải hệ phương trình (1) , (2) , (3) ta được: $a = -7; b = 17; c = -15$
- **Cách 2:** Phương trình có các hệ số thực nên nếu có một nghiệm phức sẽ tồn tại một nghiệm phức lên hợp nữa: $z_3 = z_3 = \overline{z_2} = \overline{2 - i} = 2 + i$
- Áp dụng hệ thức VIET cho phương trình bậc 3 ta có:
- $$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = -\dfrac{B}{A} = -a = 3 + 2 - i + 2 + i = 7 \to a = -7 \\ z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = \dfrac{C}{A} = b = 3.(2 - i) + (2 - i)(2 + i) + (2 + i).3 = 17 \to b = 17 \\ z_1.z_2.z_3 = -\dfrac{D}{A} = -c = 3.(2 - i)(2 + i) = 15 \to c = -15 \end{cases}$$
- Vậy a = - 5, b = 9 , c = - 5.

Bài toán 4.6.11. Cho phương trình bậc bốn hệ số a, b , c , d thực: $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$. Biết phương trình có hai nghiệm phức $z_1 = 1 - i$ và $z_2 = 3 + 2i$. Hãy xác định các hệ số: a, b , c , d ?

✍ **Giải:**

- **Cách 1:** Ta có thể thay hai nghiệm z_1 và z_2 vào phương trình bậc bốn đã cho sau đó suy ra được hệ phương trình bậc nhất 4 ẩn a, b, c , d.
- Với nghiệm $z_1 = 1 - i$, thay vào ta được: $(1 - i)^4 + a(1 - i)^3 + b(1 - i)^2 + c(1 - i) + d = 0$

- $\Leftrightarrow -4 + a(-2 - 2i) + b(-2i) + c(1 - i) + d = 0 \Leftrightarrow (-2a + c + d - 4) + i(-2a - 2b - c) = 0$
- Suy ra: $\begin{cases} -2a + c + d - 4 = 0 \quad (1) \\ -2a - 2b - c = 0 \quad (2) \end{cases}$
- Với nghiệm $z_2 = 3 + 2i$, thay vào ta được: $(3 + 2i)^4 + a(3 + 2i)^3 + b(3 + 2i)^2 + c(3 + 2i) + d = 0$
- $\Leftrightarrow (-119 + 120i) + a(-9 + 46i) + b(5 + 12i) + c(3 + 2i) + d = 0$
- $\Leftrightarrow (-9a + 5b + 3c + d - 119) + i(46a + 12b + 2c + 120) = 0$
- Suy ra: $\begin{cases} -9a + 5b + 3c + d - 119 = 0 \quad (3) \\ 46a + 12b + 2c + 120 = 0 \quad (4) \end{cases}$
- Giải hệ phương trình (1), (2), (3), (4) ta được: $a = -8; b = 27; c = -38; d = 26.$
- **Nhận xét:** Khá dài và thụ động trong việc giải hệ phương trình bậc nhất 4 ẩn 4 phương trình.
- **Cách 2:** Áp dụng tính chất phương trình phức dạng đa thức hệ số thực ta có các cặp nghiệm liên hợp từ giả thiết là: $z_1 = 1 - i$, $z_3 = 1 + i$, $z_2 = 3 + 2i$, $z_4 = 3 - 2i$.
- Áp dụng hệ thức VIET cho phương trình bậc 4, ta có:
- $$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = -\dfrac{B}{A} = -a = (1-i) + (1+i) + (3+2i) + (3-2i) = 8 \to a = -8 \\ z_1z_2 + z_1z_3 + z_1z_4 + z_2z_3 + z_2z_4 + z_3z_4 = \dfrac{C}{A} = b = 27 \\ z_1z_2z_3 + z_1z_2z_4 + z_1z_3z_4 + z_2z_3z_4 = -\dfrac{D}{A} = -c = 38 \to c = -38 \\ z_1z_2z_3z_4 = \dfrac{E}{A} = d = 26 \end{cases}$$
- **Nhận xét:** Cách làm thứ hai chỉ cần nhớ hệ thức VIET và bấm CASIO trực tiếp sẽ ra đáp án.

Ví dụ 4.6.12. Cho phương trình bậc 4 hệ số thực: $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$. Biết phương trình có hai nghiệm là: $z_1 = 1 + 2i$ và $z_2 = 2 + 3i$. Hỏi a, b, c, d bằng bao nhiêu?

Ví dụ 4.6.13. Cho phương trình bậc 4 hệ số thực: $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$. Biết phương trình có hai nghiệm là: $z_1 = 2 + i$ và $z_2 = 3 + i$. Hỏi a, b, c, d bằng bao nhiêu?

Ví dụ 4.6.14. Cho phương trình bậc 4 hệ số thực: $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$. Có 3 nghiệm phức lần lượt là: $(w + i)$, $(2w + 3i)$, $(3w - 2i + 2)$. Hỏi nghiệm còn lại và các hệ số a, b, c, d bằng bao nhiêu?

Ví dụ 4.6.15. Cho phương trình bậc 4 hệ số thực: $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$. Có 3 nghiệm phức lần lượt là: $(w + 2i)$, $(w + i + 1)$, $(2w - 2i + 1)$. Hỏi nghiệm còn lại và các hệ số a, b, c, d bằng bao nhiêu?

Bài toán 4.6.16. Cho số phức z không thuần thực thỏa mãn: $w = \dfrac{2z}{1+z^2}$ là số thực. Trong đó m là số thực khác 0. Hãy xác định $|z|$?

✍ **Giải:**

- **Cách 1:** Sử dụng tính chất của phương trình phức dạng đa thức có các hệ số thực
- Từ giả thiết: $\mathrm{w}=\frac{2z}{1+z^2}\leftrightarrow z^2+1=\frac{2}{\mathrm{w}}z\leftrightarrow z^2-\frac{2}{\mathrm{w}}z+1=0$ (1)
- Phương trình (1) chính là phương trình bậc hai hệ số thực, có nghiệm z không thuần thực tức là sẽ có cặp nghiệm phức liên hợp: z_1,z_2 với: $z_1=\overline{z_2}\rightarrow|z_1|=|z_2|=|z|$
- Theo hệ thức VIET, ta có: $z_1z_2=\frac{C}{A}=1\rightarrow|z_1z_2|=1\leftrightarrow|z_1|^2=|z_2|^2=1\leftrightarrow|z|^2=1\rightarrow|z|=1$
- **Cách 2:** Sử dụng tính chất liên hợp của một số phức thuần thực bằng chính nó:
- Có số: $\mathrm{w}=\frac{2z}{1+z^2}$ thuần thực, suy ra:
- $\mathrm{w}=\overline{\mathrm{w}}\leftrightarrow\frac{2z}{1+z^2}=\overline{(\frac{2z}{1+z^2})}=\frac{2.\overline{z}}{1+\overline{z^2}}\leftrightarrow z(1+\overline{z^2})=\overline{z}(1+z^2)\leftrightarrow z+|z|^2.\overline{z}=\overline{z}+|z|^2.z$
- $\Leftrightarrow(z-\overline{z})(1-|z|^2)=0\rightarrow|z|^2=1\rightarrow|z|=1$ (Vì z không thuần thực lên ta có: $(z-\overline{z})\neq 0$)
- **Ghi nhớ:** *Nếu sử dụng cách 1 có thể tổng quát hóa được kết quả: Cho số phức z không thuần thực thỏa mãn:* $\mathrm{w}=\frac{mz}{R^2+z^2}$ *là một số thực, khi đó suy ra được:* |z| = R. *Với* R *là hằng số thực dương và m là một hằng số thực.*

Ví dụ 4.6.17. Cho số phức z không thuần thực thỏa mãn: $\mathrm{w}=\frac{6z}{9+z^2}$ là số thực. Trong đó m là số thực khác 0. Hãy xác định giá trị của biểu thức: $P=\frac{|z|}{3+2|z|^2}$?

Ví dụ 4.6.18. Cho số phức z không thuần thực thỏa mãn: $\mathrm{w}=\frac{1+z+z^2}{1-z+z^2}$ là số thực. Trong đó m là số thực khác 0. Hãy xác định giá trị của biểu thức: $P=\frac{3|z|}{1+4|z|^3}$?

4.7. Xử lí mô đun trong các phương trình phức:

Bài toán 4.7.1. Cho z_1 và z_2 lần lượt là hai nghiệm của phương trình: $z^2-2iz+3i+2=0$. Giá trị của $|z_1-i|^2+|z_2-i|^2$ bằng bao nhiêu?

A. $6\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{18}$. **C.** 13. **D.** 6.

✍ **Giải:**

- **Phân tích:** Nếu mà cứ giải phương trình ra rồi làm bình thường bằng cách thay nghiệm vào mà bấm máy ra thì khó và lâu...Đặc biệt là CASIO không có hỗ trợ giải phương trình hệ số phức. Như vậy, ta liệt kê bài toán này vào dạng bài toán xử lí mô đun. (thầy tự đặt tên)
- Từ phương trình đã cho phân tích thông minh:
- $z^2-2iz+3i+2=0\leftrightarrow(z-i)^2=-3i-3$
- Như vậy: $|z_1-i|^2=|(z_1-i)^2|=|-3i-3|=3\sqrt{2}$, tương tự: $|z_2-i|^2=|(z_2-i)^2|=|-3i-3|=3\sqrt{2}$
- Vậy kết quả là: $|z_1-i|^2+|z_2-i|^2=6\sqrt{2}$. Vậy chọn đáp án **A.**
- **Ghi nhớ:** Khi dẫn giải thì dài, nhưng bắt tay vào làm sẽ rất nhanh theo lối tư duy này.

Ví dụ 4.7.2. Cho z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình phức: $z^2-6iz+3i-7=0$. Hãy tính giá trị của biểu thức: $A=|z_1-3i|^2+|z_2-3i|^2$

Bài toán 4.7.3. Cho z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình phức: $z^2-(3i+2)z+1=0$. Hãy tính giá trị của biểu thức: $A=|z_1+\frac{1}{z_1}|^2+|z_2+\frac{1}{z_2}|^2$?

✍ **Giải:**

- Vẫn là bài toán xử lí mô đun.
- Từ phương trình ta suy ra: $z^2-(3i+2)z+1=0\to z-(3i+2)+\frac{1}{z}=0\to z+\frac{1}{z}=(3i+2)$
- Vậy ta có: $A=|z_1+\frac{1}{z_1}|^2+|z_2+\frac{1}{z_2}|^2=|3i+2|^2+|3i+2|^2=26$.

Ví dụ 4.7.4. Cho z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình phức: $z^2+(3i+4)z+2=0$. Hãy tính giá trị của biểu thức: $A=|z_1+\frac{2}{z_1}|^2+|z_2+\frac{2}{z_2}|^2$?

Bài toán 4.7.5. Cho số phức: $z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Hãy tính giá trị của: $A=(z+\frac{1}{z})+(z^2+\frac{1}{z^2})^2+(z^3+\frac{1}{z^3})^3$

✍ **Giải:**

- Đây là bài toán xử lí mô đun ngược. Từ giá trị của số phức:

- $z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\leftrightarrow(2z+1)=i\sqrt{3}\leftrightarrow(2z+1)^2=(i\sqrt{3})^2\leftrightarrow 4z^2+4z+4=0\leftrightarrow z^2+z+1=0$
- Từ đó suy ra: $z+1+\frac{1}{z}=0\rightarrow z+\frac{1}{z}=-1$. Chúng ta đã biết: $z^2+\frac{1}{z^2}=(z+\frac{1}{z})^2-2=(-1)^2-2=-1$
- $z^3+\frac{1}{z^3}=(z+\frac{1}{z})^3-3.z.\frac{1}{z}(z+\frac{1}{z})=(z+\frac{1}{z})^3-3(z+\frac{1}{z})=(-1)^3-3.(-1)=2$
- $z^4+\frac{1}{z^4}=(z^2+\frac{1}{z^2})^2-2=(-1)^2-2=-1$
- Thay vào biểu thức A ta được: $A=(z+\frac{1}{z})+(z^2+\frac{1}{z^2})^2+(z^3+\frac{1}{z^3})^3=-1+(-1)^2+(2)^3=8$

Bài toán 4.7.6. Cho số phức: $z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Hãy tính giá trị của: $A=(z^{64}+\frac{1}{z^{64}})^{2016}$?

✍ **Giải:**

- Tương tự bài toán trên, ta có thể suy ra từ nghiệm: $z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\leftrightarrow\ldots\leftrightarrow z+\frac{1}{z}=-1$
- Bây giờ ta đi chứng minh: $P_n=z^{2^n}+\frac{1}{z^{2^n}}=-1$ với mọi giá trị n là số tự nhiên: n = 0, 1, 2, ...
- Phương pháp quy nạp: Với n = 0, ta có: $P_0=z^{2^0}+\frac{1}{z^{2^0}}=z+\frac{1}{z}=-1$ (đúng)
- Giả sử đẳng thức đúng đến n = k, tức là ta có: $P_k=z^{2^k}+\frac{1}{z^{2^k}}=-1$ (1)
- Ta đi chứng minh nó đúng đến n = k +1, tức là phải chứng minh: $P_{k+1}=z^{2^{k+1}}+\frac{1}{z^{2^{k+1}}}=-1$ (2)
- (1) $\Leftrightarrow P_k^2=(-1)^2=1=(z^{2^k}+\frac{1}{z^{2^k}})^2=(z^{2^k})^2+(\frac{1}{z^{2^k}})^2+2=z^{2^{k+1}}+\frac{1}{z^{2^{k+1}}}+2\rightarrow P_{k+1}=z^{2^{k+1}}+\frac{1}{z^{2^{k+1}}}=-1$
- Vậy suy ra: $A=(z^{64}+\frac{1}{z^{64}})^{2016}=-1$

Ví dụ 4.7.7. Cho số phức: $z=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. Hãy tính giá trị của: $A=(z^2+\frac{1}{z^2})^2+(z^3+\frac{1}{z^3})^3+(z^4+\frac{1}{z^4})^4$?

Ví dụ 4.7.8. Cho số phức: $z=\frac{1+i\sqrt{7}}{2}$. Hãy tính giá trị của: $A=(z^2+\frac{4}{z^2})^2+(z^3+\frac{8}{z^3})^3+(z^4+\frac{16}{z^4})^4$?

Bài toán 4.7.9. Cho z thỏa mãn phương trình phức: $(1+2i)z^2+(3i+4)\overline{z}=0$. Hãy xác định mô đun của số phức z, tức là đi tính: |z| = ?

✍ **Giải:**

- **Nhận xét:** Đây là phương trình phức chứa hai biến $(z\ ;\ \overline{z})$ nếu chúng ta làm theo phương

pháp chung như là gọi: z = x + iy rồi thay vào phương trình và biến đổi tìm ra các giá trị thực của x và y thì khó khăn và mất thời gian. Chúng ta lại sử dụng bài toán Mô đun để lấy tốc độ và sự đơn giản trong trắc nghiệm như sau:

- $(1+2i)z^2+(3i+4)\overline{z}=0\rightarrow(1+2i)z^2=-(3i+4)\overline{z}$
- Tới đây ta lấy mô đun hai vế và sử dụng các tính chất của mô đun: $|z|=|\overline{z}|$ và $|z^n|=|z|^n$:
- $\rightarrow|(1+2i)z^2|=|-(3i+4)\overline{z}|\rightarrow|1+2i|.|z|^2=|3i+4|.|\overline{z}|\rightarrow\sqrt{5}|z|^2=5.|z|\rightarrow|z|=\sqrt{5}$
- **Ghi nhớ:** Tổng quát: $A.z^m=B.\overline{z}^n\rightarrow|A|.|z|^m=|B|.|\overline{z}|^n\rightarrow|z|^{m-n}=\frac{|B|}{|A|}\rightarrow|z|=\sqrt[m-n]{\frac{|B|}{|A|}}$

Ví dụ 4.7.10. Cho z thỏa mãn phương trình phức: $(1+2i)z^3-(3i+4)\overline{z}=0$. Hãy xác định mô đun của số phức z là: |z| = ?

Ví dụ 4.7.11. Cho z là số phức thỏa mãn đồng thời hai phương trình phức: $(1+i)z^2+(5+3i)\overline{z}=0$ và $(m+i)z-2+3i=\frac{4}{i-1}$. Trong đó m là tham số thực. Giá trị của m bằng bao nhiêu?

Bài toán 4.7.12. Cho z thỏa mãn phương trình phức: $(3+i)|z|=\frac{2\sqrt{15}}{z}+3i-1$. Hãy xác định mô đun của số phức z, tức là đi tính: |z| = ?

✍ **Giải:**

- Đây vẫn là dạng bài toán xử lí mô đun.
- Ta có: $(3+i)|z|=\frac{2\sqrt{15}}{z}+3i-1\leftrightarrow(3+i)|z|+1-3i=\frac{2\sqrt{15}}{z}$
- Đến đây ta lấy mô đun hai vế: $|(3+i)|z|+1-3i|=|\frac{2\sqrt{15}}{z}|\leftrightarrow|(3+i)|z|+1-3i|=\frac{2\sqrt{15}}{|z|}$ (1)
- Đặt ẩn phụ cho dễ nhìn: $t=|z|\in R$, $t\geq0$, thay vào (1) ta được:
- $|(3+i)t+1-3i|=\frac{2\sqrt{15}}{t}\leftrightarrow|(3t+1)+i(t-3)|=\frac{2\sqrt{15}}{t}\leftrightarrow\sqrt{(3t+1)^2+(t-3)^2}=\frac{2\sqrt{15}}{t}\leftrightarrow10t^2+10=\frac{60}{t^2}$
- $\leftrightarrow t^2+1=\frac{6}{t^2}\leftrightarrow t^4+t^2-6=0\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t^2=-3(Loai)\\t^2=2\rightarrow t=|z|=\sqrt{2}\end{array}\right.$

Ví dụ 4.7.13. Cho z thỏa mãn phương trình phức: $(2+3i)|z|=\frac{12}{z}+3i-2$. Hãy xác định mô đun của số phức z, tức là đi tính: |z| = ?

Ví dụ 4.7.14. Cho z thỏa mãn phương trình phức: $(3+4i)|z|=3\overline{z}+2i-1$. Hãy xác định mô đun của số phức z, tức là đi tính: |z| = ?

Ví dụ 4.7.15. Cho z thỏa mãn phương trình phức: $(1+2i)|z|=4(z-i)+2i-3$. Hãy xác định mô đun của số phức z, tức là đi tính: |z| = ?

Bài toán 4.7.16. Cho phương trình phức: $z^3-5z+6i=0$. Gọi z_1 và z_2 lần lượt là hai nghiệm phức không thuần ảo của phương trình. Hãy xác định giá trị của: $P=|z_1-\frac{6}{z_1}|+|z_2-\frac{6}{z_2}|$?

✍ **Giải:**

- Nhận thấy phương trình có nghiệm: z = i, ta phân tích:
- $z^3-5z+6i=0\leftrightarrow(z-i)(z^2+iz-6)=0\leftrightarrow\left[\begin{array}{l} z=i \\ z^2+iz-6=0 \end{array}\right.$
- Chúng ta không quan tâm tới nghiệm phức thuần ảo: z = i, nên chỉ xét tới phương trình:
- $z^2+iz-6=0\leftrightarrow z-\frac{6}{z}=-i\rightarrow|z_1-\frac{6}{z_1}|=|-i|=1\ ;\ |z_2-\frac{6}{z_2}|=|-i|=1$
- Suy ra: $P=|z_1-\frac{6}{z_1}|+|z_2-\frac{6}{z_2}|=2$

Ví dụ 4.7.17. Cho phương trình phức: $z^3+7z-6i=0$. Gọi z_1 và z_2 lần lượt là hai nghiệm phức không thuần ảo của phương trình. Hãy xác định giá trị của: $P=|z_1+\frac{6}{z_1}|+|z_2+\frac{6}{z_2}|$?

Ví dụ 4.7.18. Cho phương trình phức: $z^3+iz^2+7z-i=0$. Gọi z_1 và z_2 lần lượt là hai nghiệm phức không thuần ảo của phương trình. Hãy xác định giá trị của: $P=|z_1+\frac{1}{z_1}|+|z_2+\frac{1}{z_2}|$?

Bài toán 4.7.19. Cho hai số phức z và w thỏa mãn các điều kiện: z, z + w khác 0 và $z+2w\neq 0$; sao cho : $\frac{1}{z}+\frac{1}{z+w}=\frac{1}{z+2w}$ và |w| = 1. Hãy tìm mô đun của số phức z: |z| = ?

✍ **Giải:**

- Ta có: $\frac{1}{z}+\frac{1}{z+w}=\frac{1}{z+2w}\leftrightarrow(z+w)(z+2w)+z(z+2w)=z(z+w)\leftrightarrow z^2+4wz+2w^2=0$ (1)
- Đây là phương trình đẳng cấp: $\rightarrow(\frac{z}{w})^2+4\frac{z}{w}+2=0\rightarrow\left[\begin{array}{l} \frac{z}{w}=-2-\sqrt{2} \\ \frac{z}{w}=-2+\sqrt{2} \end{array}\right.$
- Từ đó suy ra: $\left[\begin{array}{l} |\frac{z}{w}|=|z|=|-2-\sqrt{2}|=2+\sqrt{2} \\ |\frac{z}{w}|=|z|=|-2+\sqrt{2}|=2-\sqrt{2} \end{array}\right.$

Bài toán 4.7.20. Cho hai số phức z và w thỏa mãn các điều kiện: z, w khác 0 và $z + 3w \neq 0$; sao cho : $\frac{1}{z}+\frac{1}{w}=\frac{1}{z+3w}$ và |w| = 2. Hãy tìm mô đun của số phức z: |z| = ?

✍ **Giải:**

- Ta có: $\frac{1}{z}+\frac{1}{w}=\frac{1}{z+3w} \leftrightarrow w(z+3w)+z(z+3w)=zw \leftrightarrow z^2+3wz+3w^2=0$ (1)
- Đây là phương trình đẳng cấp: $\rightarrow (\frac{z}{w})^2+3\frac{z}{w}+3=0 \rightarrow \frac{z}{w}=-\frac{3}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- Đến đây ta môn đun hai vế sẽ được: $|\frac{z}{w}|=|-\frac{3}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}| \rightarrow \frac{|z|}{2}=\sqrt{3} \rightarrow |z|=2\sqrt{3}$

Ví dụ 4.7.21. Cho hai số phức z và w thỏa mãn các điều kiện: z, z + w , $z + 4w \neq 0$; sao cho : $\frac{1}{z}+\frac{1}{z+w}=\frac{1}{z+4w}$ và |w| = 4. Hãy tính mô đun của số phức z: |z| = ?

Ví dụ 4.7.22. Cho hai số phức z và w khác không sao cho : $\frac{1}{z}+\frac{1}{w}=\frac{1}{z+w}$ và |w| = 3. Hãy tính mô đun của số phức z: |z| = ?

Ví dụ 4.7.23. Cho hai số phức z và w khác không sao cho : $\frac{1}{z}+\frac{1}{w}=\frac{1}{z+w}$ và |w| = |z| + 1. Hãy tính mô đun của số phức z: |z| = ?

V. BẤT ĐẲNG THỨC ĐẠI SỐ TRONG SỐ PHỨC:

5.1. Bất đẳng thức tam giác dạng đại số – Bài toán số phức đồng dạng:

- Cho hai số phức: z_1 và z_2, ta luôn có BĐT tam giác: $|z_1|+|z_2|\geq|z_1+z_2|$
- Chúng ta có thể ghi nhớ: *Tổng mô đun lớn hơn hoặc bằng mô đun tổng.*
- Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow z_1=k.z_2$. Trong đó hệ số thực k không âm: $k\in R$; $k\geq 0$. Còn gọi trường hợp xảy ra dấu "=" này là trường hợp: số phức z_1 đồng dạng dương so với số phức z_2.
- Ta cũng có BĐT tam giác: $|z_1-z_2|\geq|z_1|-|z_2|$
- Chúng ta có thể ghi nhớ: *Mô đun hiệu lớn hơn hoặc bằng hiệu mô dun.*
- Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow z_1=k.z_2$. Trong đó hệ số thực k thỏa mãn: $k\in R$; $k\geq 1$. Còn gọi trường hợp xảy ra dấu "=" này là trường hợp: số phức z_1 đồng dạng to so với số phức z_2.
- Áp dụng cho nhiều số phức: $|z_1|+|z_2|+...+|z_n|\geq|z_1+z_2+...+z_n|$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi các số phức đồng dạng: $z_2=k_2z_1$; $z_3=k_3z_1$; ...; $z_n=k_nz_1$; với các số thực: $k_2,k_3,...,k_n\geq 0$.

Bài toán 5.1.1. Biết rằng số phức z thỏa mãn: |z + 3i| = |z| + 3 và có |z – 1| = 2. Hãy tìm z?

✍ **Giải:**

- Theo bất đẳng thức tam giác có: $|z+3i|\leq|z|+|3i|=|z|+3$.
- Bài toán cho dấu "=" xảy ra nên suy ngay ra: $z=k.(3i)=3ki$, trong đó k là số thực: $k\geq 0$.
- Vậy số phức z là số thuần ảo và có phần ảo không âm.
- Điểm biểu diễn số phức z là nửa trục ảo dương kể cả gốc O.

Bài toán 5.1.2. Biết rằng số phức z thỏa mãn: |z – 2i| = |z| – 2 và thỏa mãn |z + 3| = 5. Hỏi z = ?

✍ **Giải:**

- Theo bất đẳng thức tam giác có: $|z-2i|\geq|z|-|2i|=|z|-2$.
- Bài toán cho dấu "=" xảy ra, nên ta suy ra: $z=k.(-2i)=-2ki$. Trong đó k là số thực: $k\geq 1$.
- Ta lại có: $|z+3|=|-2ki+3|=\sqrt{4k^2+9}=5\rightarrow k=2\rightarrow z=-4i$.

Ví dụ 5.1.3. Biết rằng số phức z thỏa mãn: |z + 3 – 4i| = |z| + 5 và thỏa mãn |z + 1| = 4. Hỏi z = ?

Ví dụ 5.1.4. Biết rằng số phức z thỏa mãn: |z + 1 + 3i| = |z| + $\sqrt{10}$ và thỏa mãn |z| = 3. Hỏi z = ?

Ví dụ 5.1.5. Biết rằng số phức z thỏa mãn: |z – (3 + 2i)| = $|z|-\sqrt{13}$ và thỏa mãn |z| = 3. Hỏi z = ?

Bài toán 5.1.6. Chứng minh rằng biểu thức: $P=|z-2i+3|+|z+2i|\geq 5$. Khi dấu "=" xảy ra hãy tìm z , biết rằng: |z| = $\frac{\sqrt{13}}{3}$.

✍ **Giải:**

- Ta có: $P = |z-2i+3| + |z+2i| = |z-2i+3| + |-z-2i| \geq |z-2i+3+(-z-2i)| = |3-4i| = 5$
- Khi dấu "=" xảy ra, ta có:
- $z-2i+3 = k(-z-2i)$; $k \geq 0$. Suy ra: $z = \dfrac{-3+2i(1-k)}{1+k}$. Thay vào giả thiết: |z| = 26, ta được:
- $|z| = |\dfrac{-3+2i(1-k)}{1+k}| = \dfrac{\sqrt{13}}{3} \leftrightarrow |-9+6i(1-k)| = \sqrt{13}.|1+k| \leftrightarrow \sqrt{9^2+36(1-k)^2} = \sqrt{13}.(1+k)$
- $\Leftrightarrow 117-72k+36k^2 = 13(1+k)^2 \leftrightarrow 23k^2-98k+104 = 0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} k=2 \rightarrow z = -1-\dfrac{2i}{3} \\ k = \dfrac{52}{23} \rightarrow z = -\dfrac{23}{25} - \dfrac{58i}{75} \end{array}\right.$

Bài toán 5.1.7. Cho số phức z thỏa mãn: |z – 2| = |z + i – 1| và đồng thời: P = |z – 2i| + |z + 1| đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm số phức z ?

✍ **Giải:**

- Áp dụng bất đẳng thức tam giác:
- $P = |z-2i| + |z+1| = |2i-z| + |z+1| \geq |2i-z+z+1| = |1+2i| = \sqrt{5}$
- Dấu "=" xảy ra ⇔ hai số phức đồng dạng: $z+1 = k(2i-z) \rightarrow z = \dfrac{-1+2ki}{1+k}$ (k > 0). Ta thế vào điều kiện đã cho: $|\dfrac{-1+2ki}{1+k} - 2| = |\dfrac{-1+2ki}{1+k} + i - 1| \leftrightarrow |\dfrac{-1+2ki-2-2k}{1+k}| = |\dfrac{-1+2ki+i+ki-1-k}{1+k}|$
- $\Leftrightarrow |-3-2k+2ki| = |-2-k+(3k+1)i| \leftrightarrow (2k+3)^2+4k^2 = (k+2)^2+(3k+1)^2 \leftrightarrow k^2-k-2 = 0$
- $\rightarrow \left[\begin{array}{l} k = -1 (loai) \\ k = 2 (TM) \end{array}\right.$
- Với k = 2, suy ra số phức $z = \dfrac{-1+2ki}{1+k} = \dfrac{-1+2.2i}{1+2} = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{3}i$
- Vậy giá trị nhỏ nhất của P = P_{min} = $\sqrt{5}$ khi $z = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{3}i$
- **Ghi nhớ:** *Có nhiều bài toán, nếu đánh giá nhanh bằng bất đẳng thức tam giác sẽ được giá trị nhỏ nhất P_{min} . Thế nhưng nếu số phức z bị ràng buộc thêm bởi một hoặc nhiều điều kiện khác thì chúng ta phải xét tới điều kiện xảy ra dấu "=" của bất đẳng thức tam giác. Rất có thể không tồn tại số phức z để dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra.*

Ví dụ 5.1.8. Cho biết: $|z-3+i| + |z+2-i| = \sqrt{29}$ và |z| = $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Ví dụ 5.1.9. Cho biết: $|z-1+2i| - |z+2-2i| = 5$ và |z| = $\sqrt{61}$.

Ví dụ 5.1.10. Cho số phức z thỏa mãn: |z –i| = |z + 2|. Tìm z để biểu thức: P = | z + 1 – i| + |z –i – 2|

đạt giá trị nhỏ nhất? Tìm giá trị nhỏ nhất: P_{min} đó ?

Ví dụ 5.1.11. Cho số phức z thỏa mãn: |z – 3i| = 4. Tìm z để biểu thức: P = | z + 2 – i| + |z – 3i| đạt giá trị nhỏ nhất? Tìm giá trị nhỏ nhất: P_{min} đó ?

Bài toán 5.1.12. Cho biết số phức z thỏa mãn đồng thời: $|z|=2$ và $|z^2+\overline{z}|=6$. Hãy tìm z = ?

✍ **Giải:**

- Đây là bài toán dạng bất đẳng thức tam giác. Ta nhận thấy: $|z^2|=4$ và $|\overline{z}|=|z|=2$.
- Áp dụng bất đẳng thức tam giác như sau:
- $|z^2+\overline{z}|\le|z^2|+|\overline{z}|=4+2=6$.
- Bài toán cho dấu "=" xảy ra nên: $z^2=k.\overline{z}$, với số thực $k\ge 0$.
- Đến đây ta có thể lấy môđun hai vế ta được: $|z^2|=|k.\overline{z}|\leftrightarrow|z|^2=k|z|\leftrightarrow|z|=k=2$
- Suy ra: $z^2=2\overline{z}\leftrightarrow z^2.z=2\overline{z}.z=2|z|^2=2.2^2=8\leftrightarrow z^3-8=0$
- $\Leftrightarrow (z-2)(z^2+2z+4)=0\leftrightarrow\left[\begin{array}{l} z=2 \\ z=-1\pm i\sqrt{3}\end{array}\right.$

Bài toán 5.1.13. Cho biết số phức z thỏa mãn đồng thời: $|z|=2$ và $|z^2+\overline{z}|=2$. Hãy tìm z = ?

✍ **Giải:**

- Đây là bài toán dạng bất đẳng thức tam giác. Ta nhận thấy: $|z^2|=4$ và $|-\overline{z}|=|z|=2$.
- Áp dụng bất đẳng thức tam giác như sau:
- $|z^2+\overline{z}|=|z^2-(-\overline{z})|\ge|z^2|-|-\overline{z}|=4-2=2$.
- Bài toán cho dấu "=" xảy ra nên: $z^2=k.(-\overline{z})$ với số thực: $k\ge 1$.
- Mô đun hai vế ta được: $|z^2|=|k(-\overline{z})|=k|z|\leftrightarrow|z|=k=2$
- Vậy ta có: $z^2=-2.\overline{z}\leftrightarrow z^3=-2z\overline{z}=-2.|z|^2=-8\leftrightarrow z^3+8=0\leftrightarrow(z+2)(z^2-2z+4)=0$
- Giải phương trình này ra ta được ba nghiệm: $z=-2;z=1\pm\sqrt{3}$.

Ví dụ 5.1.14. Cho biết số phức z thỏa mãn đồng thời: $|z|=2$ và $|2z^2+\overline{z}|=10$. Hãy tìm z = ?

Ví dụ 5.1.15. Cho biết số phức z thỏa mãn đồng thời: $|z|=3$ và $|z^2-2\overline{z}|=15$. Hãy tìm z = ?

Ví dụ 5.1.16. Cho biết số phức z thỏa mãn đồng thời: $|z|=4$ và $|2z^2-3\overline{z}|=20$. Hãy tìm z = ?

Ví dụ 5.1.17. Chứng minh rằng: $|z_1+z_2-z_3|+|z_1-z_2+z_3|+|-z_1+z_2+z_3|\ge|z_1+z_2+z_3|$

Ví dụ 5.1.18. Chứng minh rằng: $|z_1+z_2|+|z_2+z_3|+|z_3+z_1|\le|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_1+z_2+z_3|$

Bài toán 5.1.19. (TL) Cho z thỏa mãn: $3|z+i|+5|z-i|=12$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của |z| ?

✍ **Giải:**

- Áp dụng BĐT tam giác ta có: $3\left(|z+i|+|z-i|\right)\geq 3|z+i+z-i|=6|z|$ (1)
- Và: $|z-i|\geq|z|-|i|=|z|-1\leftrightarrow 2|z-i|\geq 2|z|-2$ (2)
- Suy ra: $12=3|z+i|+5|z-i|=3\left(|z+i|+|z-i|\right)+2|z-i|\geq 6|z|+2|z|-2=8|z|-2$
- $\Leftrightarrow |z|\leq\frac{14}{8}=\frac{7}{4}$
- Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ dấu "=" ở (1) và (2) cùng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} z=k.i \\ z+i=m(z-i) \\ |z|=k|i|=k=\frac{7}{4} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} k=\frac{7}{4}; z=\frac{7i}{4} \\ m=\frac{11}{3} \end{cases}$
- Vậy giá trị lớn nhất của |z| là $\max|z|=\frac{7}{4}$ xảy ra khi z = $\frac{7i}{4}$

Ví dụ 5.1.20. (TL) Cho z thỏa mãn: $4|z+i|+5|z-i|=14$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của |z| ?

Ví dụ 5.1.21. (TL) Cho z thỏa mãn: $4|z-2i|+7|z+i|=20$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của |z| ?

Ví dụ 5.1.22. (TL) Cho z thỏa mãn: $2|z+3i|+7|z-i|=12$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của |z| ?

Ví dụ 5.1.23. (TL) Cho z thỏa mãn: $3|z-2|+4|z-2+2i|=10$. Hãy tìm GTLN của $|z-2+i|$?

5.2. Bất đẳng thức CÔ SI – Bất đẳng thức BUNHIA vận dụng trong số phức:

- BĐT CÔ SI cho hai số phức: $|z_1|+|z_2|\geq 2.\sqrt{|z_1|.|z_2|}\leftrightarrow\frac{|z_1|+|z_2|}{2}\geq\sqrt{|z_1z_2|}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ |u| = |v|, tức là khi đó u và v là những số phức có điểm biểu diễn nằm trên cùng một đường tròn tâm O có bán kính R bất kì.
- Trường hợp nhiều số phức, ta có: $\frac{|z_1|+|z_2|+...+|z_n|}{n}\geq\sqrt[n]{|z_1z_2...z_n|}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $|z_1|=|z_2|...=|z_n|$, tức là khi mọi số phức xuất hiện trong BĐT đều nằm trên cùng một đường tròn tâm O, bán kính R bất kì.
- BĐT Bunhia cho hai số phức: $(m|z_1|+n|z_2|)^2\leq(m^2+n^2)(|z_1|^2+|z_2|^2)$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{|z_1|}{m}=\frac{|z_2|}{n}$.
- BĐT Bunhia tổng quát: $(m_1|z_1|+m_2|z_2|+...+m_n|z_n|)^2\leq(m_1^2+m_2^2+...+m_n^2)(|z_1|^2+|z_2|^2+...+|z_n|^2)$
- Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{|z_1|}{m_1}=\frac{|z_2|}{m_2}=...=\frac{|z_n|}{m_n}$
- Một số trường hợp đặc biệt của hai BĐT CÔ SI và BUNHI trong số phức:
  - $|z_1z_2|\leq\frac{|z_1|^2+|z_2|^2}{2}$
  - $|z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1|\leq|z_1z_2|+|z_2z_3|+|z_3z_1|\leq|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2$
  - $|z_1z_2+z_3z_4|\leq|z_1z_2|+|z_3z_4|\leq\sqrt{(|z_1|^2+|z_3|^2)(|z_2|^2+|z_4|^2)}$
  - Hoặc BĐT trên có thể được viết là: $|au+bv|\leq\sqrt{(|a|^2+|b|^2)(|u|^2+|v|^2)}$
- Một số bài toán cụ thể vận dụng các BĐT CÔ SI và BĐT BUNHIA:

Bài toán 5.2.1. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình bậc hai: $z^2 + az + 6 - 8i = 0$. Trong đó a là tham số thực. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = |z_1| + |z_2|$? Xác định giá trị của a khi biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất?

✍ **Giải:**

- Áp dụng hệ thức VIET, ta có: $z_1z_2=3+4i$
- Áp dụng BĐT CÔ SI, ta có: $P=|z_1|+|z_2|\geq 2\sqrt{|z_1|.|z_2|}=2\sqrt{|z_1z_2|}=2\sqrt{|6-8i|}=2\sqrt{10}$
- Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $|z_1|=|z_2|=\frac{P}{2}=\sqrt{10}$
- Theo hệ thức VIET, ta có: $z_1+z_2=-a\in R\rightarrow z_1=x_1+iy$; $z_2=x_2-iy$

- Dựa vào điều kiện bên trên, hai mô đun bằng nhau: $|z_1| = |z_2|$, ta suy ra:
- $\sqrt{x_1^2+y^2}=\sqrt{x_2^2+y^2}\leftrightarrow x_1^2=x_2^2\rightarrow\left[\begin{array}{l} x_1=x_2=-\dfrac{a}{2}\rightarrow z_1.z_2=\dfrac{a^2}{4}+y^2\neq 6-8i\ \ (loai) \\ x_1=-x_2\rightarrow x_1+x_2=-a=0\rightarrow a=0 \end{array}\right.$
- Vậy để P đạt giá trị nhỏ nhất: $P_{\min}=2\sqrt{10}$ thì: $a=0$
- **Nhận xét:** *Thường thì điều kiện để một biểu thức đạt GTLN (hoặc GTNN) sẽ không được quan tâm nhiều, đa số là chú trọng phương pháp đi tìm giá trị cực trị của một biểu thức phức.*

Bài toán 5.2.2. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình bậc hai: $z^2 + az + 3 + 4i = 0$. Trong đó a là tham số thực. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = 2|z_1| + 3|z_2|$?

✍ **Giải:**

- Áp dụng hệ thức VIET, ta có: $z_1 z_2 = 3+4i$
- Áp dụng BĐT CÔ SI ta có: $P=2\,|\,z_1\,|+3\,|\,z_2\,|\geq 2\sqrt{2\,|\,z_1\,|.3\,|\,z_2\,|}=2\sqrt{6\,|\,z_1z_2\,|}=2\sqrt{6.|\,3+4i\,|}=2\sqrt{30}$
- Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\ 2\,|\,z_1\,|=3\,|\,z_2\,|=\dfrac{P}{2}=\sqrt{30}\rightarrow|\,z_1\,|=\dfrac{\sqrt{30}}{2}\ ;\ |\,z_2\,|=\dfrac{\sqrt{30}}{3}$
- Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là: $P_{min} = 2\sqrt{30}$.

Bài toán 5.2.3. Gọi z_1 , z_2 , z_3 là ba nghiệm của phương trình bậc ba: $z^3 + az^2 + bz + 8i = 0$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = 2|z_1| + 4|z_2| + |z_3|$?

✍ **Giải:**

- Áp dụng hệ thức VIET, ta có: $z_1 z_2 z_3 = -\dfrac{D}{A} = -8i$
- Áp dụng BĐT CÔ SI ta có: $P=2\,|\,z_1\,|+\,4\,|\,z_2\,|+|\,z_3\,|\geq 3\sqrt[3]{2\,|\,z_1\,|.4\,|\,z_2\,|.|\,z_3\,|}=3\sqrt[3]{8\,|\,-8i\,|}=12$
- Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\ 2\,|\,z_1\,|=4\,|\,z_2\,|=|\,z_3\,|=\dfrac{P}{3}=\dfrac{12}{3}=4\rightarrow|\,z_1\,|=2\ ;\ |\,z_2\,|=1$
- Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là: $P_{min} = 12$.

Ví dụ 5.2.4. Cho z_1 và z_2 là nghiệm của phương trình: $z^2 + az - 4 + 6i = 0$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:

1. $P = |z_1| + |z_2|$.
2. $Q = 2|z_1| + 3|z_2|$.
3. $R=2\,|\,z_1^2\,|+3z_2\overline{z_2}$
4. $T=2\,|\,z_1\,|+|\,(3-4i)z_2\,|$

Ví dụ 5.2.5. Cho z_1 , z_2 , z_3 là ba nghiệm của phương trình bậc 3: $z^3 + az^2 + bz + 2 + 2i = 0$. Hãy xác định giá trị nhỏ nhất của các biểu thức:

1. $P = |z_1| + |z_2| + |z_3|$
2. $P = 2|z_1| + 4|z_2| + 3|z_3|$
3. $P = |(1+i)z_1| + |4z_2| + |2iz_3|$

Ví dụ 5.2.6. Cho z_1, z_2, z_3, z_4 lần lượt là các căn bậc 4 của số phức: z = 8 + 6i. Khi đó giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau bằng bao nhiêu?

1. $P = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$
2. $Q = 2|z_1| + 4|z_2| + |(3-4i)z_3| + |2iz_4|$

Bài toán 5.2.7. Gọi z là một số phức thỏa mãn điều kiện: |z| = 6. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = |z-2+3i| + |z+2-3i|$. Tìm giá trị của z khi P_{max} ?

✍ **Giải:**

- Với BĐT BUNHI yêu cầu chúng ta phải học qua phép bình phương vô hướng và quen với việc xử lí các bài toàn cực trị trong phần **6.** thì mới có thể áp dụng nhuần nhuyễn được.
- Ở bài toán này chúng ta chấp nhận một kết quả: $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2(|u|^2 + |v|^2)$
- Biểu thức: $P = |z-2+3i| + |z+2-3i| = |z-(2-3i)| + |z+(2-3i)| = |z-v| + |z+v|$
- Trong đó: $v = 2-3i \rightarrow |v| = \sqrt{13}$
- Áp dụng BĐT BUNHIA, ta có:
- $P^2 = (|z-v| + |z+v|)^2 \le (1^2+1^2)(|z-v|^2 + |z+v|^2) = 2(|z|^2 + |v|^2) = 2(6^2 + (\sqrt{13})^2) = 98$
- Suy ra: $P \le \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$.
- Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow |z-v| = |z+v| \leftrightarrow |z-2+3i| = |z+2-3i|$
- Ta có hệ phương trình điều kiện của số phức z: $\begin{cases} |z| = 6 \\ |z-2+3i| = |z+2-3i| \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = \frac{18}{\sqrt{13}} + \frac{12i}{\sqrt{13}} \\ z = -\frac{18}{\sqrt{13}} - \frac{12i}{\sqrt{13}} \end{cases}$
- Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là: $P_{max} = 7\sqrt{2}$.

Ví dụ 5.2.8. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: |z| = 4. Hãy xác định giá trị lớn nhất của biểu thức: P = |z + 3 – 4i| + |z – 3 + 4i| ?

Ví dụ 5.2.9. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: |z| = 3. Hãy xác định giá trị lớn nhất của biểu thức: P = |3z + 9 – 12i| + |2z – 6 + 8i| ?

5.3. Một số đẳng thức và bất đẳng thức khác trong số phức:

Bài toán 5.3.1. Cho hai số phức z và z_0, thỏa mãn: $|z - z_0| = 1$. Chứng minh rằng, khi đó ta có BĐT: $|z^2 + z_0^2| \geq |\frac{1-2|z_0|}{\sqrt{2}}|$. Tìm điều kiện xảy ra dấu "=".

✍ **Giải:**

- Chúng ta sẽ đi chứng minh tổng quát và có thể ghi nhớ để áp dụng nhanh khi làm trắc nghiệm

Bài toán 5.3.4. Cho ba số phức z_1 , z_2 , z_3 thỏa mãn: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = R$. Chứng minh rằng, khi đó ta có BĐT: $|z_1 - z_2|.|z_2 - z_3| + |z_2 - z_3|.|z_3 - z_1| + |z_3 - z_1|.|z_1 - z_2| \leq 9R^2$. Tìm điều kiện xảy ra dấu "=".

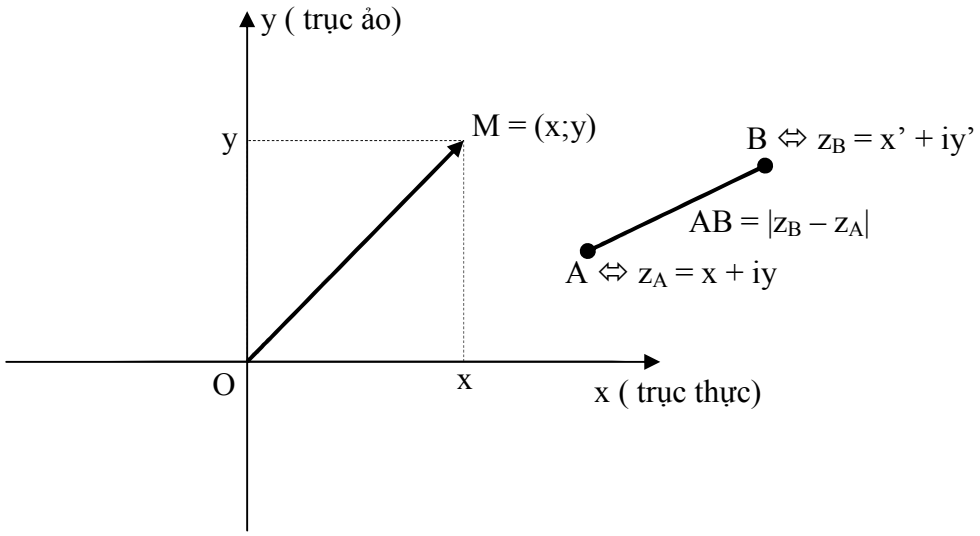
✍ **Giải:**

- Chứng minh:

VI. MẶT PHẲNG PHỨC – GIẢI TÍCH TRÊN MẶT PHẲNG PHỨC

6.1. Biểu diễn điểm và các công thức cơ bản trên mặt phẳng phức:

- Mặt phẳng phức: giống như Oxy với Ox là trục thực và Oy là trục ảo. Tức là hoành độ là thực và tung độ là ảo.



- Cho số phức z = x + iy. Điểm M biểu diễn số phức z trên mặt phẳng phức khi và chỉ khi có tọa độ: M(x;y).Có thể coi như: $\overrightarrow{OM} = (x;y) = z = x + iy$. Khi đó: $OM = |\overrightarrow{OM}| = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- Gọi A và B là hai điểm biểu diễn các số phức: A = z_A = x + iy = (x;y) và B = z_B = x' + iy' = (x';y').
- Khi đó véc tơ: $\overrightarrow{AB} = z_B - z_A = (x' - x) + i(y' - y) = (x' - x; y' - y)$
- Độ dài véc tơ: $AB = |\overrightarrow{AB}| = |z_B - z_A| = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$
- Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB thì điểm M sẽ biểu diễn số phức: $z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$.
- Gọi N là điểm thỏa mãn điều kiện: $\overrightarrow{NA} + k\overrightarrow{NB} = \vec{0} \rightarrow z_A - z_N + k(z_B - z_N) = 0 \rightarrow z_N = \frac{z_A + kz_B}{1 + k}$.
- Gọi G là trọng tâm của ΔABC, trong đó A, B, C lần lượt biểu diễn ba số phức z_A, z_B, z_C thì điểm G sẽ biểu diễn số phức tương ứng là: $z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$
- Nếu z_N biểu diễn điểm N thỏa mãn hệ thức tỉ cự: $\alpha\overrightarrow{NA} + \beta\overrightarrow{NA} + \gamma\overrightarrow{NA} = \vec{0}$ thì số phức z_N được xác định: $z_N = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma} = (x_N; y_N)$

Bài toán 6.1.1. (TL) Cho tam giác ABC với 3 đỉnh A, B, C biểu diễn 3 số phức tương ứng lần lượt là: $z_A = 1+3i; z_B = -4+2i; z_C = 6+i$.

1. Tìm số phức z_M biểu diễn bởi điểm M là trung điểm của AB.
2. Tìm số phức z_G biểu diễn bởi điểm G là trọng tâm của ΔABC.
3. Tìm số phức z_N biểu diễn bởi điểm N thỏa mãn: $\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NB} = \vec{0}$.
4. Tìm số phức z_P biểu diễn bởi điểm P thỏa mãn: $\overrightarrow{PA} - 2\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC}$.
5. Khoảng cách hai điểm BC = ?

✍ **Giải:**

1. Áp dụng công thức trung điểm: $z_M = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{(1+3i)+(-4+2i)}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2}i \to M(-\frac{3}{2}; \frac{5}{2})$

2. Áp dụng công thức trọng tâm: $z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{(1+3i)+(-4+2i)+(6+i)}{3} = 1+2i \to G(1;2)$

3. Gọi số phức biểu diễn bởi điểm N là z_N. Khi đó ta có:

- $\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NB} = \vec{0} \to z_A - z_N + 3(z_B - z_N) = 0 \to z_N = \frac{z_A + 3z_B}{4} = \frac{(1+3i)+3(-4+2i)}{4} = -\frac{11}{4} + \frac{9}{4}i$

4. Gọi số phức biểu diễn bởi P là z_P. Từ: $\overrightarrow{PA} - 2\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC} \to (z_A - z_P) - 2(z_B - z_P) = (z_C - z_P)$

- Suy ra: $z_P = \frac{2z_B + z_C - z_A}{2} = \frac{2.(-4+2i)+(6+i)-(1+3i)}{2} = -\frac{3}{2} + i$

5. Khoảng cách hai điểm trên mặt phẳng phức:

- Ta có công thức: BC = $|\, z_C - z_B \,| = |\,(6+i)-(-4+2i)\,| = |\,10-i\,| = \sqrt{101}$

Ví dụ 6.1.2. Cho tam giác ABC với 3 đỉnh A, B, C biểu diễn 3 số phức tương ứng lần lượt là: $z_A = 3+2i; z_B = -1+1i; z_C = 6+3i$.

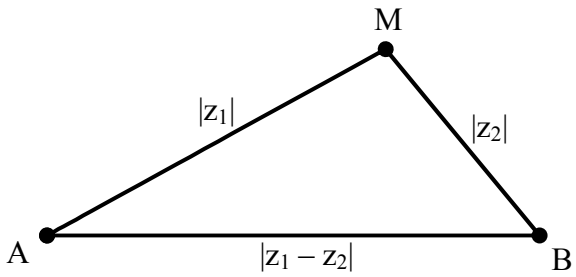
1. Tìm số phức z_M biểu diễn bởi điểm M là trung điểm của AB.
2. Tìm số phức z_G biểu diễn bởi điểm G là trọng tâm của ΔABC.
3. Tìm số phức z_N biểu diễn bởi điểm N thỏa mãn: $\overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{NB} = \vec{0}$.
4. Tìm số phức z_P biểu diễn bởi điểm P thỏa mãn: $\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PC}$.
5. Tính khoảng cách giữa hai điểm BC ?

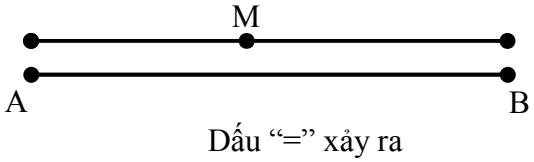
Ví dụ 6.1.3. Cho tam giác ABC có ba đỉnh biểu diễn ba số phức: $z_A = 3 + i$; $z_B = -4 + 3i$; $z_C = 1 + 2i$.

1. Xác định chu vi của tam giác ABC.
2. Xác định số phức biểu diễn điểm H là chân đường cao hạ từ đỉnh A xuống cạnh BC.
3. Xác định số phức biểu diễn tọa độ điểm D là chân đường phân giác góc A lên BC.
4. Tìm số phức biểu diễn điểm N thỏa mãn: $3\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC} = \vec{0}$

6.2. Bất đẳng thức tam giác ứng dụng vào một số bất đẳng thức hình học:

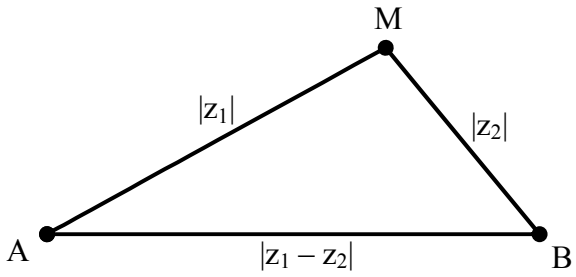
- Phát biểu lại bất đẳng thức tam giác: Cho hai véc tơ $\overrightarrow{u}$ và $\overrightarrow{v}$ trong mặt phẳng, khi đó ta có bất đẳng thức tam giác tổng quát: $|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|\leq|\overrightarrow{u}|+|\overrightarrow{v}|$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{u}$ và $\overrightarrow{v}$ cùng hướng với nhau $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{u}=k\overrightarrow{v}$, trong đó k là một số thực không âm: $k\geq 0$.

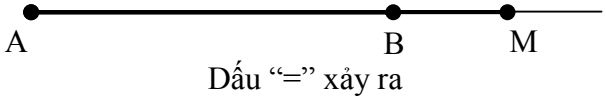




Dấu "=" xảy ra

- Suy ra bất đẳng thức tam giác trong số phức: $MA+MB\geq AB$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi điểm M nằm trong đoạn thẳng AB.
- Chúng ta cũng có thể suy ra: $|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}|-|\overrightarrow{u}|\leq|\overrightarrow{v}|\Leftrightarrow MA-MB\leq AB$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi A, B, M thẳng hàng và B nằm giữa A và M. Nói cách khác M nằm trên tia đối của tia B**A.**





Dấu "=" xảy ra

- Tất nhiên, là trong những bài toán số phức chúng ta phải biết biến đổi và qui dẫn về dạng các bất đẳng thức tam giác dạng hình học.

Bài toán 6.2.1. Tìm GTNN của biểu thức: $P=|z-4+5i|+|z+2-3i|$?

✍ **Giải:**

- Gọi A là điểm biểu diễn số phức z_A = 4 – 5i = A = (4;-5) ; gọi B là điểm biểu diễn số phức: z_B = -2 + 3i = B = (-2;3). Suy ra độ dài đoạn thẳng AB = $|z_A - z_B|$ = |6 – 8i| = 10.
- Gọi M là điểm biểu diễn số phức z, khi đó: P = $|z - z_A|$ + $|z - z_B|$ = MA + MB
- Áp dụng BĐT tam giác, ta có: $P=MA+MB\geq AB=10$.
- Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ M nằm trong đoạn thẳng AB.
- Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là: P_{min} = AB = 10.

Bài toán 6.2.2. Tìm GTLN của biểu thức: $P=|z-3+5i|-|z+1+i|$?

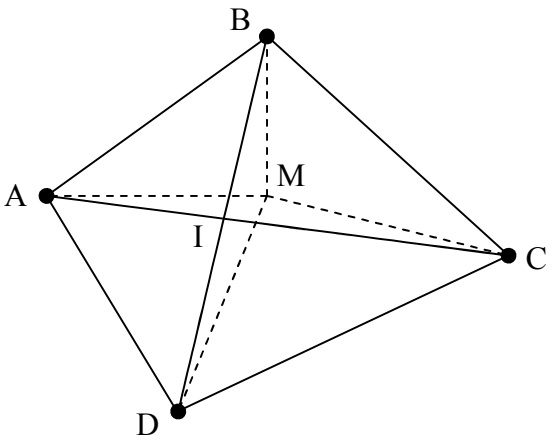
✍ **Giải:**

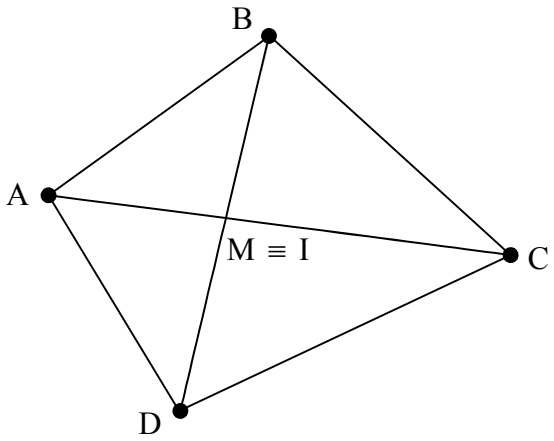
- Gọi A là điểm biểu diễn số phức $z_A = 3 - 5i$ = A = (3;-5) ; gọi B là điểm biểu diễn số phức: $z_B = -1 - i$ = B = (-1;-1). Suy ra độ dài đoạn thẳng AB = $|z_A - z_B| = |4 - 4i| = 4\sqrt{2}$.
- Gọi M là điểm biểu diễn số phức z, khi đó: P = $|z - z_A| - |z - z_B|$ = MA – MB
- Áp dụng BĐT tam giác, ta có: $P = MA - MB \le AB = 4\sqrt{2}$.
- Dấu "=" xảy ra ⇔ A, B, M thẳng hàng và B nằm giữa A và M ⇔ M nằm trên tia đối của tia BA.
- Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là: P_{max} = AB = $4\sqrt{2}$.

Ví dụ 6.2.3. Hãy xác định GTLN của biểu thức: $P = |z - 4 - 5i| - |z - 2 + 3i|$?

Ví dụ 6.2.4. Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn điều kiện: $|z_1 - z_2| = 6$. Hãy xác định GTNN của biểu thức: $P = |z - z_1| + |z - z_2|$?

- Chúng ta cũng nên biết một số bất đẳng thức hình học quan trọng để xử lí những bài toán cực trị phức khi quy về dạng hình học. Nếu vận dụng được các kiến thức hình học vào các bài toán cực trị phức sẽ đơn giản và thanh thoát hơn rất nhiều so với các cách biến đổi đại số.
- **Bất đẳng thức tứ giác lồi:** Cho tứ giác lồi ABCD, tổng khoảng cách từ điểm M đến bốn điểm ABCD lớn hơn hoặc bằng tổng hai đường chéo:
- $P = MA + MB + MC + MD \ge AC + BD$
- Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi M là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.



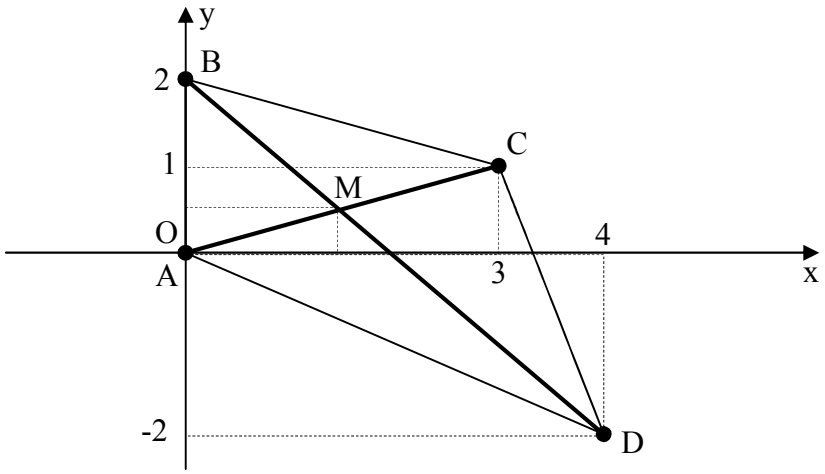


- Cách chứng minh bất đẳng thức tứ giác lồi thì rất đơn giản: Gọi M là điểm bất kì, khi đó theo bất đẳng thức tam giác:
- $MA + MC \ge AC$. Dấu "=" xảy ra ⇔ M nằm trên AC.
- $MB + MD \ge BD$. Dấu "=" xảy ra ⇔ M nằm trên BD.
- Suy ra: $MA + MB + MC + MD \ge AC + BD$. Dấu "=" xảy ra ⇔ M là giao điểm của AC với BD.
- **Ghi nhớ:** *Quan trọng trong bài toán này thường phải xác định rõ trong 4 điểm cố định A, B, C, D đâu là hai đường chéo của tứ giác lồi, không thì sẽ dễ mắc sai lầm.*

Bài toán 6.2.5. Cho biểu thức: P = |z| + |z – 2i| + |z – 3 – i| + |z – 4 + 2i|. Hãy xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức P ? Tìm số phức z khi đó ?

✍ **Giải:**

- Nếu chúng ta đánh giá tùy tiện mà không thông qua vẽ hình sẽ rất dễ mắc sai lầm ở điều kiện xảy ra dấu "="
- **Sai lầm nếu triển khai tùy tiện bất đẳng thức tam giác:**
- $|z|+|z-2i|=|z|+|2i-z| \geq |z+2i-z|=|2i|=2$
- $|z-3-i|+|z-4+2i|=|z-3-i|+|4-2i-z| \geq |z-3-i+4-2i-z|=|1-3i|=\sqrt{10}$
- Suy ra: $P \geq 2+\sqrt{10}$
- Thế nhưng điều kiện xảy ra dấu "=" là không có.
- Cách làm chắc chắn là ta phải áp dụng bất đẳng thức tứ giác lồi:
- Trước hết chúng ta phải xác định rõ xem tứ giác ABCD là tứ giác lồi với các đỉnh được bố trí như thế nào, khi đó mới áp dụng được bất đẳng thức tứ giác lồi.
- Biểu thức: $P=MA+MB+MC+MD=|z|+|z-2i|+|z-3-i|+|z-4+2i|$
- Trong đó: A = O = z_A = 0; B = z_B = 2i ; C = z_C = 3 + i ; D = z_D = 4 – 2i. Chúng được biểu diễn như hình vẽ minh họa bên dưới:



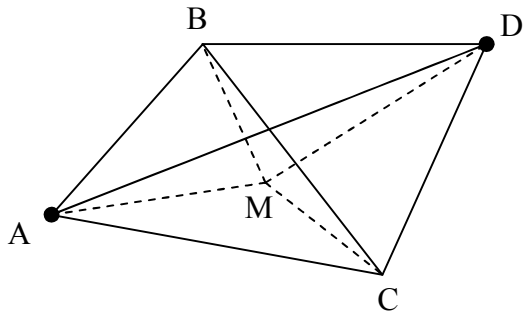
- Từ hình vẽ ta nhận thấy hai đường chéo của tứ giác lồi là: AC và BD
- Độ dài đoạn: $AC=|z_A-z_C|=|0-3-i|=\sqrt{10}$. Độ dài đoạn: $BD=|z_B-z_D|=|2i-(4-2i)|=4\sqrt{2}$
- Suy ra: $P=MA+MB+MC+MD \geq AC+BD=\sqrt{10}+4\sqrt{2}$
- Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M=AC\cap BD$
- Chúng ta đi lập phương trình các đường thẳng AC và BD:
- VTCP của đường thẳng AC là: $\overrightarrow{AC}=z_C-z_A=3+i=(3;1) \rightarrow VTPT: \overrightarrow{n_{(AC)}}=(-1;3)$

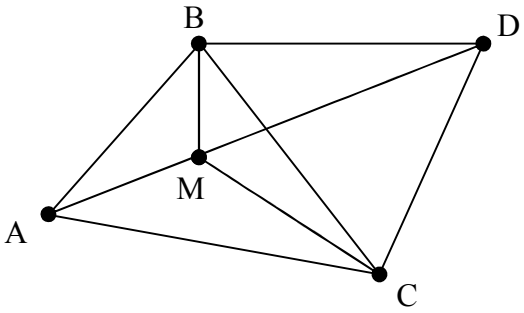
- Phương trình của đường thẳng (AC): $-1(x-0)+3(y-0)=0 \leftrightarrow -x+3y=0$
- VTCP của BD là: $\overrightarrow{BD}=z_D-z_B=4-2i-(2i)=4-4i=(4;-4) \rightarrow VTPT: \overrightarrow{n_{(BD)}}=(4;4)$
- Phương trình của đường thẳng (BD): $4(x-0)+4(y-2)=0 \leftrightarrow x+y-2=0$
- Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ: $\begin{cases} -x+3y=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow M=(\frac{3}{2};\frac{1}{2})=z_M=\frac{3}{2}+\frac{i}{2}$

Ví dụ 6.2.6. Cho biểu thức: P = |z| + |z – 4| + |z – 3 – 2i| + |z – 3 + 2i|. Hãy xác định giá trị nhỏ nhất của P và giá trị tương ứng của số phức z để P nhỏ nhất ?

Ví dụ 6.2.7. Cho biểu thức: P = |z – 1| + |z – 5 – 3i| + |z – 2 – 4i| + |z – 6 + i|. Hãy xác định giá trị nhỏ nhất của P và giá trị tương ứng của số phức z để P nhỏ nhất ?

- Bất đẳng thức **TTper02**: Tổng khoảng cách nhỏ nhất từ một điểm M đến 3 điểm A, B, C cố định cho trước: $P=MA+MB+MC \geq AD$. Trong đó: D là một điểm thỏa mãn tam giác BCD là tam giác đều, A với D nằm khác phía nhau so với BC. Dấu "=" xảy ra ⇔ M nằm trên AD. Việc tìm vị trí của điểm M khi dấu bằng xảy ra cũng rất khó khăn và nan giải, đa số các trường hợp áp dụng bất đẳng thức này đều dừng lại ở việc tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P.



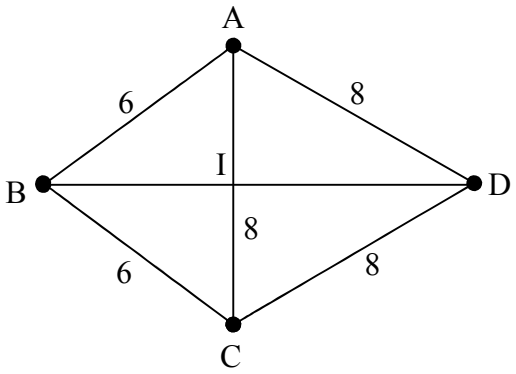


- Nếu chúng ta cần quan tâm tới vị trí điểm M thì có thể làm theo cách như sau:
- $P=MA+MB+MC \geq AD$. Trong đó D là điểm nằm khác phía A so với BC và ΔBCD đều và dấu "=" xảy ra ⇔ M nằm trên đoạn thẳng AD.
- $P=MA+MB+MC \geq BE$. Trong đó E là điểm nằm khác phía B so với AC và ΔACE đều và dấu "=" xảy ra ⇔ M nằm trên đoạn thẳng BE.
- Như vậy, M là giao điểm của AD và BE. Cũng khá là rườm rà và khó khăn để tìm ra điểm M.
- Nếu ta gọi ba cạnh của tam giác ΔABC là a, b, c và diện tích của nó là S. Khi đó chúng ta có thể rút gọn lại định lí quan trọng thành dạng đại số: $P^2=(MA+MB+MC)^2 \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{2}+2S\sqrt{3}$
- Đây là BĐT có sự áp dụng sáng tạo nhanh, khác hoàn toàn với các áp dụng của những nguồn kiến thức khác, đa số các nguồn kiến thức khác chỉ vận dụng BĐT ptoleme phức tạp.

Bài toán 6.2.8. Cho ba số phức z_1 , z_2, z_3 thỏa mãn: $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = 6$; $|z_3 - z_1| = 8$. Hãy xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = |z - z_1| + |z - z_2| + |z - z_3|$?

✍ **Giải:**

- Gọi A là điểm biểu diễn số phức z_1 , B là điểm biểu diễn số phức z_2 , C là điểm biểu diễn số phức z_3. Khi đó ta có: $|z_1 - z_2| = AB = 6$, $|z_2 - z_3| = BC = 6$, $|z_3 - z_1| = CA = 8$.
- Giá trị của biểu thức: $P = MA + MB + MC$
- Áp dụng tổng khoảng cách nhỏ nhất tới ba đỉnh cố định của một tam giác ta có:
- $P = MA + MB + MC \geq BD$. Trong đó: ΔACD là tam giác đều, D nằm khác phía B so với AC.



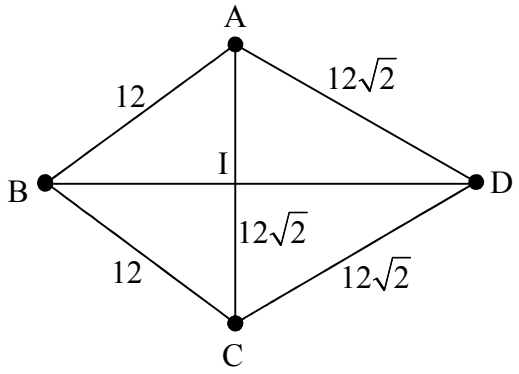
- Độ dài đoạn BD được tính: BD = BI + ID = $\sqrt{6^2 - 4^2} + \sqrt{8^2 - 4^2} = 2\sqrt{5} + 4\sqrt{3}$
- Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là: $P_{\min} = 2\sqrt{5} + 4\sqrt{3}$.
- **Cách 2:** Chúng ta có thể tính diện tích tam giác ABC: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC.BI = \frac{1}{2}.8.2\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$
- Suy ra: $P^2 = (MA + MB + MC)^2 \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2S\sqrt{3} = \frac{6^2 + 6^2 + 8^2}{2} + 2.8\sqrt{5}.\sqrt{3} = 68 + 16\sqrt{15}$
- Suy ra: $P = 2\sqrt{5} + 4\sqrt{3}$
- **Ghi nhớ:** *Khi tam giác ABC cân ở đâu thì ta nên chọn đó làm đỉnh để tính giá trị nhỏ nhất của tổng* MA + MB + MC *cho hợp lí và nhanh hơn.*

Bài toán 6.2.9. Cho ba số phức z_1 , z_2, z_3 thỏa mãn: $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = 12$; $|z_3 - z_1| = 12\sqrt{2}$. Hãy xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = |z - z_1| + |z - z_2| + |z - z_3|$?

✍ **Giải:**

- Gọi A là điểm biểu diễn số phức z_1 , B là điểm biểu diễn số phức z_2 , C là điểm biểu diễn số phức z_3. Khi đó ta có: $|z_1 - z_2| = AB = 12$, $|z_2 - z_3| = BC = 12$, $|z_3 - z_1| = CA = 12\sqrt{2}$.
- Nhận thấy ngay ΔABC vuông cân tại B. Biểu thức: P = MA + MB + MC $\geq$ BD. Trong đó D là điểm nằm khác phía B so với AC sao cho tam giác ACD đều.

- Hình vẽ minh họa:

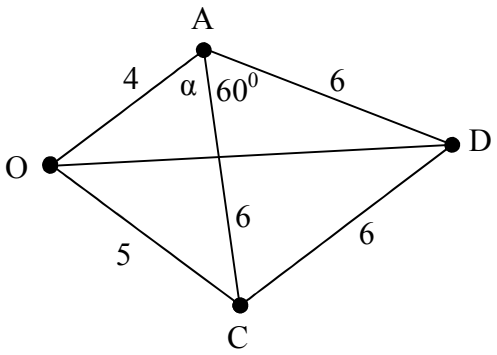


- Độ dài đoạn: $BD = BI + ID\frac{1}{n} = 6\sqrt{2} + 12\sqrt{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{2} + 6\sqrt{6}$
- Vậy suy ra giá trị nhỏ nhất của P là: $P_{\min} = 6\sqrt{2} + 6\sqrt{6}$

Bài toán 6.2.10. Cho hai số phức z_1 , z_2 thỏa mãn: $|z_1| = 4$; $|z_2| = 5$; $|z_2 - z_1| = 6$. Hãy xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = |z| + |z - z_1| + |z - z_2|$?

✍ **Giải:**

- Gọi A là điểm biểu diễn số phức z_1 , B là điểm biểu diễn số phức z_2. Khi đó ta có tam giác OAB với các cạnh: $OA = |z_1| = 4$; $OB = |z_2| = 5$; $AB = |z_2 - z_1| = 6$.
- Biểu thức: $P = MO + MA + MB \geq OD$; trong đó D là điểm khác phía O so với AB sao cho tam giác ABD đều cạnh AB = 6.
- Hình vẽ minh họa:



- Xác định góc: $\widehat{OAB} = \alpha$ có: $\cos\alpha = \frac{4^2 + 6^2 - 5^2}{2.4.6} = \frac{9}{16} \to \sin\alpha = \frac{5\sqrt{7}}{16}$
- Áp dụng định lí hàm số COSIN trong tam giác, ta có:
- $OD^2 = OA^2 + AD^2 - 2OA.AD.\cos(\alpha + 60^\circ) = 4^2 + 6^2 - 2.4.6.(\cos\alpha.\cos 60^\circ - \sin\alpha.\sin 60^\circ)$
- $OD^2 = 16 + 36 - 48.(\frac{9}{16}.\frac{1}{2} - \frac{5\sqrt{7}}{16}.\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{77 + 15\sqrt{21}}{2} \to OD = \frac{\sqrt{154 + 30\sqrt{21}}}{2}$

- Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là: $P_{min} = = \frac{\sqrt{154+30\sqrt{21}}}{2}$

Ví dụ 6.2.11. Cho hai số phức z_1 , z_2 thỏa mãn: $|z_1| = |z_2| = 4$; $|z_2 - z_1| = 6$. Hãy xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = |z| + |z - z_1| + |z - z_2|$?

Ví dụ 6.2.12. Cho hai số phức z_1 , z_2 thỏa mãn: $|z_1| = |z_2| = |z_2 - z_1| = 6$. Hãy xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = |z| + |z - z_1| + |z - z_2|$?

Ví dụ 6.2.13. Cho ba số phức z_1 , z_2 , z_3 thỏa mãn: $|z_1| = |z_2| = 6$; $|z_3| = 10$. Hãy xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = |z - z_1| + |z - z_2| + |z - z_3|$?

Bài toán 6.2.14. Cho hai số phức z_1 và z_2 khác 0. Chứng minh rằng: $|z_1 - z_2| = |\frac{|z_1|}{|z_2|}z_2 - \frac{|z_2|}{|z_1|}z_1|$. Từ đó áp dụng giải bài toán: Cho số phức z có |z| = R. Hãy xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = |z - z_1| + \frac{|z_1|}{|z|}.|z - z_2| = |z - z_1| + \alpha|z - z_2|$?

Vận dụng vào bài toán: Cho số phức z thỏa mãn: $|z + i| = 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z - \sqrt{2} + i| + \sqrt{2}.|z - \sqrt{2} + 3i|$?

✍ **Giải:**

- Để chứng minh đẳng thức hiển nhiên: $|z_1 - z_2| = |\frac{|z_1|}{|z_2|}z_2 - \frac{|z_2|}{|z_1|}z_1|$, ta sẽ sử dụng phép bình phương vô hướng trong véc tơ như sau:
- Đặt: $\overrightarrow{u_1} = z_1$; $\overrightarrow{u_2} = z_2$. Xét: $|z_1 - z_2|^2 = |\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}|^2 = |\overrightarrow{u_1}|^2 + |\overrightarrow{u_2}|^2 - 2\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}$
- Và: $|\frac{|z_2|}{|z_1|}z_1 - \frac{|z_1|}{|z_2|}z_2|^2 = |\frac{|\overrightarrow{u_2}|}{|\overrightarrow{u_1}|}\overrightarrow{u_1} - \frac{|\overrightarrow{u_1}|}{|\overrightarrow{u_2}|}\overrightarrow{u_2}|^2 = (\frac{|\overrightarrow{u_2}|}{|\overrightarrow{u_1}|}\overrightarrow{u_1})^2 + (\frac{|\overrightarrow{u_1}|}{|\overrightarrow{u_2}|}\overrightarrow{u_2})^2 - 2(\frac{|\overrightarrow{u_2}|}{|\overrightarrow{u_1}|}\overrightarrow{u_1}).(\frac{|\overrightarrow{u_1}|}{|\overrightarrow{u_2}|}\overrightarrow{u_2})$
- $\Leftrightarrow |\frac{|z_2|}{|z_1|}z_1 - \frac{|z_1|}{|z_2|}z_2|^2 = |\overrightarrow{u_2}|^2 + |\overrightarrow{u_1}|^2 - 2\overrightarrow{u_1}\overrightarrow{u_2}$
- Suy ra: $|z_1 - z_2|^2 = |\frac{|z_2|}{|z_1|}z_1 - \frac{|z_1|}{|z_2|}z_2|^2 \leftrightarrow |z_1 - z_2| = |\frac{|z_2|}{|z_1|}z_1 - \frac{|z_1|}{|z_2|}z_2|$

Áp dụng giải bài toán: Cho số phức z có |z| = R. Hãy xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = |z - z_1| + \frac{|z_1|}{|z|}.|z - z_2|$?

- Áp dụng CT ta có: $|z - z_1| = |\frac{|z_1|}{|z|}.z - \frac{|z|}{|z_1|}.z_1| = \frac{|z_1|}{|z|}.|z - \frac{|z|^2}{|z_1|^2}.z_1|$
- Suy ra: $P = \frac{|z_1|}{|z|}.|z - \frac{|z|^2}{|z_1|^2}.z_1| + \frac{|z_1|}{|z|}.|z - z_2| = \frac{|z_1|}{|z|}\left(|z - \frac{|z|^2}{|z_1|^2}.z_1| + |z - z_2|\right)$

- Áp dụng BĐT tam giác: $|z-\frac{|z|^2}{|z_1|^2}.z_1|+|z-z_2|=|z-\frac{|z|^2}{|z_1|^2}.z_1|+|z_2-z|\geq|z_2-\frac{|z|^2}{|z_1|^2}.z_1|$
- Suy ra: $P=\frac{|z_1|}{|z|}\left(|z-\frac{|z|^2}{|z_1|^2}.z_1|+|z-z_2|\right)\geq\frac{|z_1|}{|z|}.|z_2-\frac{|z|^2}{|z_1|^2}.z_1|=|\frac{|z_1|}{|z|}z_2-\frac{|z|}{|z_1|}.z_1|$
- Vậy với |z| = R thì giá trị nhỏ nhất của $P=|z-z_1|+\frac{|z_1|}{|z|}.|z-z_2|$ có MIN là: $|\frac{|z_1|}{|z|}z_2-\frac{|z|}{|z_1|}.z_1|$
- Hoặc mạnh dạn đề cử dạng này: $P=|z-z_1|+\alpha|z-z_2|\geq|\frac{z_1}{\alpha}-\alpha z_2|$ với: $\alpha=\frac{|z_1|}{|z|}$

Vận dụng vào bài toán: Cho số phức z thỏa mãn: $|z+i|=1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-\sqrt{2}+i|+\sqrt{2}.|z-\sqrt{2}+3i|$?

- Đặt: |z+i| = |u| = 1. Với $z_1=\sqrt{2}$; $z_2=\sqrt{2}-2i$
- Khi đó: $P=|u-\sqrt{2}|+\sqrt{2}.|u-\sqrt{2}+2i|\geq|\sqrt{2}z_2-\frac{z_1}{\sqrt{2}}|=|\sqrt{2}.(\sqrt{2}-2i)-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}|=3$

Ví dụ 6.2.15. Cho |z| = 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $P=|z-4|+2|z-3+2i|$

Ví dụ 6.2.16. Cho |z + 2i| = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $P=|z-\sqrt{3}+2i|+\sqrt{3}|z-2+3i|$

Ví dụ 6.2.17. Cho |z – i| = 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $P=|\overline{z}-\sqrt{3}+i|+\sqrt{3}|z-2+2i|$

6.3. Quỹ tích là đường thẳng trên mặt phẳng phức:

- Phương trình đường thẳng tổng quát: $ax+by+c=0$
- Khi b = 0 thì có dạng: x = hằng số, là đường thẳng đứng song song với trục tung Oy.
- Khi a = 0 thì có dạng: y = hằng số, là đường thẳng nằm ngang song song với trục Ox.
- Về cách tìm quỹ tích tổng quát thì ta gọi: $z=x+iy\to\overline{z}=x-iy;|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ rồi thay vào hệ thức đã cho và biến đổi rồi suy ra quỹ tích điểm.

Bài toán 6.3.1. Tìm quỹ tích điểm biểu diễn bởi phương trình: |z – 2i + 3| = |z + i + 1| (1)

✍ **Giải:**

- Gọi z = x + iy; trong đó x, y $\in$ R . Thay vào (1) ta được:
- $|x+iy-2i+3|=|x+iy+i+1|\leftrightarrow|(x+3)+i(y-2)|=|(x+1)+i(y+1)|$
- $\to\sqrt{(x+3)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}\leftrightarrow(x+3)^2+(y-2)^2=(x+1)^2+(y+1)^2$
- $4x-6y+11=0$. Vậy quỹ tích điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện (1) là đường thẳng $\Delta:4x-6y+11=0$.
- **Ghi nhớ:** Nếu là định tính..thì khi điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn phương trình dạng:
  $\left[\begin{array}{l}|z-z_1|=|z-z_2|\\|z-z_1|=|\overline{z}-z_2|\\|\overline{z}-z_1|=|\overline{z}-z_2|\end{array}\right.$ thì quỹ tích sẽ là một đường thẳng.
- Trên đây chỉ là dấu hiệu nhận biết phương trình đường thẳng cơ bản, còn rất nhiều dạng phương trình đường thẳng trong mặt phẳng phức.

Ví dụ 6.3.2. Tìm quỹ tích điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn các phương trình:

1. $|z-2i+5|=|\overline{z}+3i-4|$.
2. $2|\overline{z}-i+1|=|2\overline{z}+5i+3|$.
3. $|z+i|=|z-1|$

Bài toán 6.3.3. Tìm quỹ tích điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn: $|z-2i+5|=|\overline{z}+4i-3|$?

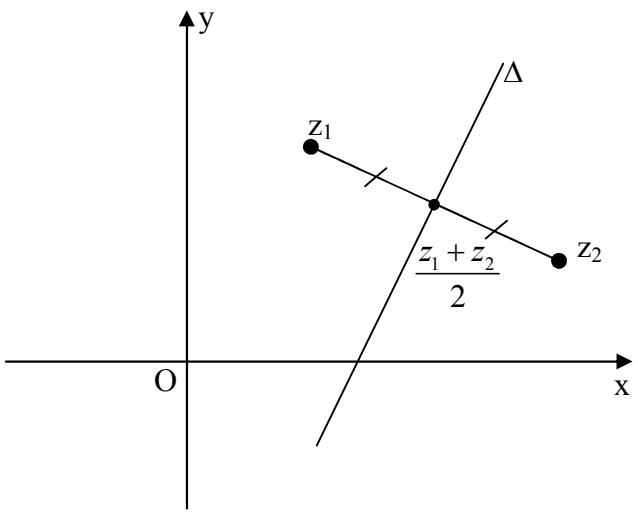
A. đường thẳng: x + 2y – 3 = 0. **B.** đường thẳng 2x – y + 4 = 0.

C. đường thẳng: 4x + y – 11 = 0. **D.** đường thẳng: 4x + y + 1 = 0.

✍ **Giải:**

- Nếu chúng ta cứ làm bình thường thì có khi sẽ rất lâu. Vì vậy, đôi khi ta chỉ cần thử một mẹo nhỏ sẽ làm việc xử lí bài toán có tốc độ hơn, như trình bày ở dưới đây:
- Chúng ta để ý rằng: $|\overline{z}+4i-3|=|\overline{\overline{z}+4i-3}|=|z-3-4i|=|z-(3+4i)|$

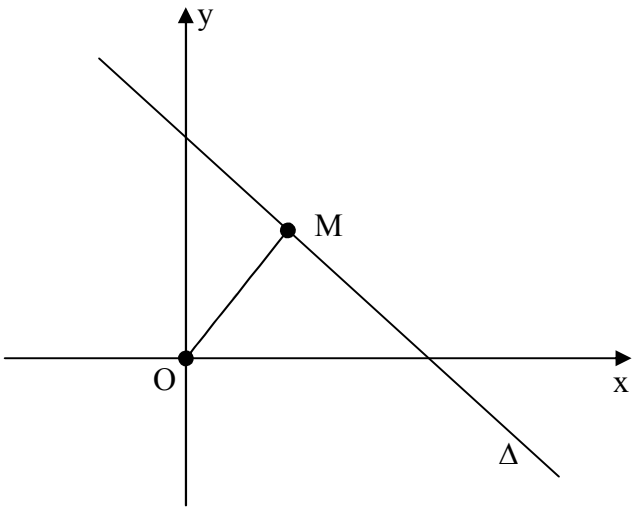
- Vậy phương trình đã cho $\Leftrightarrow |z-(-5+2i)|=|z-(3+4i)| \leftrightarrow |z-z_1|=|z-z_2|$; trong đó: $z_1 = -5 + 2i$ và $z_2 = 3 + 4i$.
- Ta nhận thấy $|z-z_1|$ là khoảng cách từ điểm z tới điểm z_1 và $|z-z_2|$ là khoảng cách từ điểm z tới điểm z_2. Như vậy, tập hợp điểm biểu diễn z chính là tập hợp điểm cách đều z_1 và z_2. Đây chính là đường trung trực của đoạn z_1z_2. Cho nên trung điểm của z_1 và z_2 phải nằm trên đường thẳng trung trực của z_1z_2 (đường thẳng này cũng là đường biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện đã cho).
- Như vậy: để kiểm tra xem liệu đường thẳng nào đó có phải đường thẳng quỹ tích cần tìm không, ta chỉ việc thử xem trung điểm của z_1z_2 có thuộc nó không là được.
- Xét lại bài toán này có: $|z-(-5+2i)|=|z-(3+4i)| \leftrightarrow |z-z_1|=|z-z_2|$
- Trung điểm là: $z_M = \frac{z_1+z_2}{2} = \frac{-5+2i+3+4i}{2} = -1+3i = (-1;3)$. Ta dùng điểm này thử vào 4 đáp án và nhận thấy chỉ có đáp án **D** thỏa mãn. Vậy chọn đáp án đúng là **D.**
- Hình vẽ minh họa cho phương trình đường thẳng Δ biểu diễn bởi: $|z - z_1| = |z - z_2|$:



Bài toán 6.3.4. Cho đường thẳng (d): $|z - 1 + 2i| = |z - 3|$. Tìm trên đường thẳng (Δ) điểm M biểu diễn bởi số phức z_1 sao cho: M gần O nhất hoặc tương đương với câu hỏi: $|z_1|$ nhỏ nhất?

✍ **Giải:**

- Phương trình đã cho biểu diễn đường thẳng Δ
- Gọi z = x + iy, ta suy ra: $|(x - 1) + i(y + 2)| = |(x - 3) + iy| \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = (x - 3)^2 + y^2$
- $\Leftrightarrow 4x + 4y - 4 = 0 \Leftrightarrow x + y - 1 = 0$ (Δ)
- Một điểm gần O nhất (tương đương với số phức biểu diễn nó có mô đun nhỏ nhất). Một điểm xa O nhất (tương đương với số phức biểu diễn nó có mô đun lớn nhất).

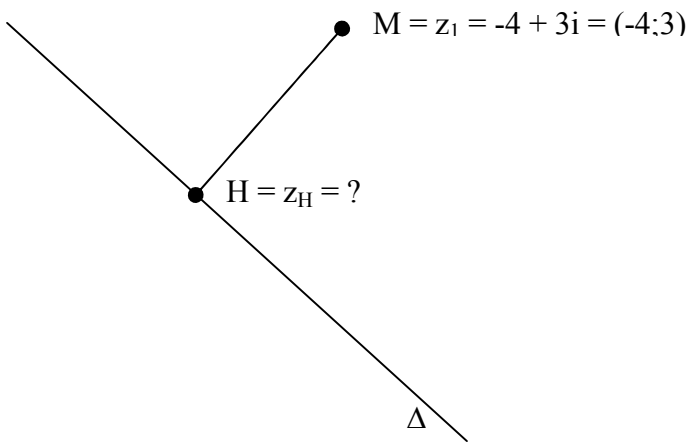


- Bài toán này yêu cầu tìm điểm M trên đường thẳng Δ và gần O nhất ⇔ điểm M là hình chiếu vuông góc của O lên Δ.
- Ta đi tìm hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng Δ như sau:
- Gọi M nằm trên Δ có tọa độ M(m;1 – m) suy ra: $\overrightarrow{OM} = (m;1-m)$. VTCP của đường thẳng Δ là $\overrightarrow{u_\Delta} = (1;-1)$
- Ta có: $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{u_\Delta} = 0 \leftrightarrow 1.m - 1(1-m) = 0 \rightarrow m = \frac{1}{2} \rightarrow M(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$
- Vậy số phức z thỏa mãn điều kiện đã cho và có mô đun nhỏ nhất được biểu diễn bởi điểm M, tức là: $z = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$.

Bài toán 6.3.5. Cho số phức z thỏa mãn: |z – 1 + i| = |z – 2| và đồng thời |z – 3i + 4| nhỏ nhất. Hỏi khi đó mô đun của số phức z bằng bao nhiêu?

✍ **Giải:**

- Số phức z thỏa mãn điều kiện |z – 1 + i| = |z – 2| là đường thẳng Δ được tìm bằng cách:
- Gọi z = x + iy rồi thay vào biểu thức trên ta được:
- |x + iy – 1 + i| = |x + iy – 2| ⇔ |(x–1) + i(y+1)| = |(x–2) + iy| ⇔ $(x-1)^2 + (y+1)^2 = (x-2)^2 + y^2$
- ⇔ 2x + 2y – 2 = 0 ⇔ x + y – 1 = 0 (Δ).
- Giá trị của biểu thức: P = |z – 3i + 4| = |z – (– 4 + 3i)| = $|z - z_M|$
- Gọi M là điểm biểu diễn số phức z_M = – 4 + 3i, khi đó biểu thức P chính là khoảng cách từ điểm M đến một điểm chạy trên đường thẳng Δ. Giá trị nhỏ nhất của P ứng với khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ, khi đó điểm H nằm trên Δ sẽ là hình chiếu vuông góc của M lên Δ.
- Như vậy, giá trị nhỏ nhất của P là $P_{min} = |z_H - z_M| = MH = d(M,\Delta) = \frac{|-4+3-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{2}$.



- Tọa độ điểm H = (a;b) = (a;1 – a) {Vì H nằm trên đường thẳng Δ}
- Véc tơ: $\overrightarrow{MH} = (a+4;-a-2)$; VTCP của Δ là: $\overrightarrow{u}_{\Delta} = (1;-1)$.
- Suy ra: $\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{u}_{\Delta} = 1(a+4)-1(-a-2) = 0 \to a = -3 \to H = (-3;4)$. Suy ra số phức z_H = - 3 + 4i
- Vậy suy ra $|z_H| = 5$.

Ví dụ 6.3.6. Cho số phức z thỏa mãn: |z – 3 + i| = |z + 1 – 5i|. Tìm số phức |z| có mô đun nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện đã cho?

Ví dụ 6.3.7. Cho số phức z thỏa mãn: |z – 5 + 2i| = |z + 3 – 2i| đồng thời làm cho biểu thức P = |z – 3i| nhỏ nhất. Tìm số phức z thỏa mãn các điều kiện đã cho?

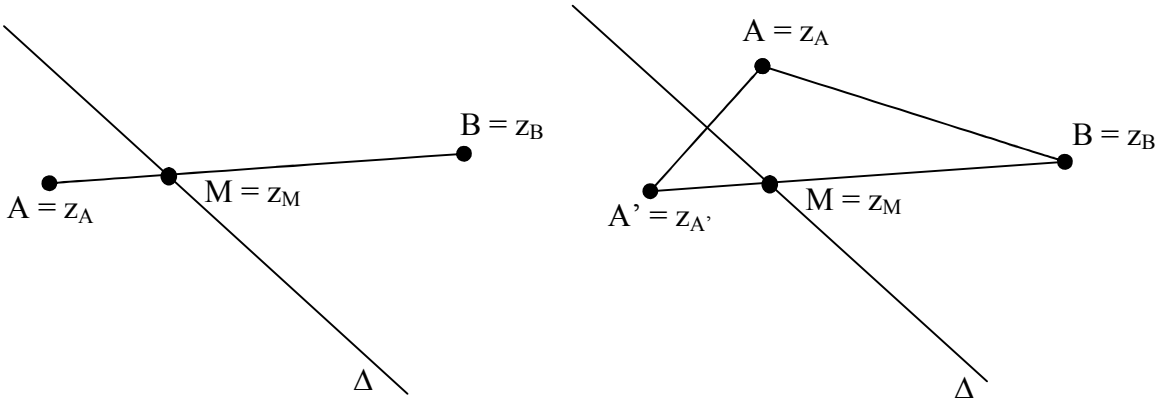
Ví dụ 6.3.8. Cho số phức z thỏa mãn: |z + 2 – i| = |iz + 3 + 2i| đồng thời làm cho biểu thức P = |2z – 6i + 2| nhỏ nhất. Tìm số phức |z| thỏa mãn các điều kiện đã cho?

Ví dụ 6.3.9. Cho số phức z thỏa mãn: $|z-2i+3| = |\overline{z}-4i+1|$ đồng thời làm cho biểu thức P = |(1 +i)z – 4| nhỏ nhất. Tìm số phức z thỏa mãn các điều kiện đã cho?

Bài toán 6.3.10. Cho số phức z thỏa mãn: |z – 2 + i| = |z + 2 + 3i| và đồng thời P = |z – 1| + |z – 2i| nhỏ nhất. Hỏi khi đó mô đun của số phức z bằng bao nhiêu?

✍ **Giải:**

- Số phức z thỏa mãn điều kiện |z – 1 + i| = |z – 2| là đường thẳng Δ:
- |z – 2 + i| = |z + 2 + 3i| ⇔ $(x-2)^2 + (y+1)^2 = (x+2)^2 + (y+3)^2$ ⇔ 2x + y + 2 = 0 (Δ)
- Gọi A là điểm biểu diễn z_A = 1 ; B là điểm biểu diễn z_B = 2i ; M là điểm bất kì nằm trên đường thẳng Δ. Khi đó biểu thức: P = |z – z_A| + |z – z_B| = MA + MB.
- Ycbt tương đương với việc tìm điểm M nằm trên đường thẳng Δ để P = MA + MB nhỏ nhất. Đây là một bài cực trị hình học quen thuộc.

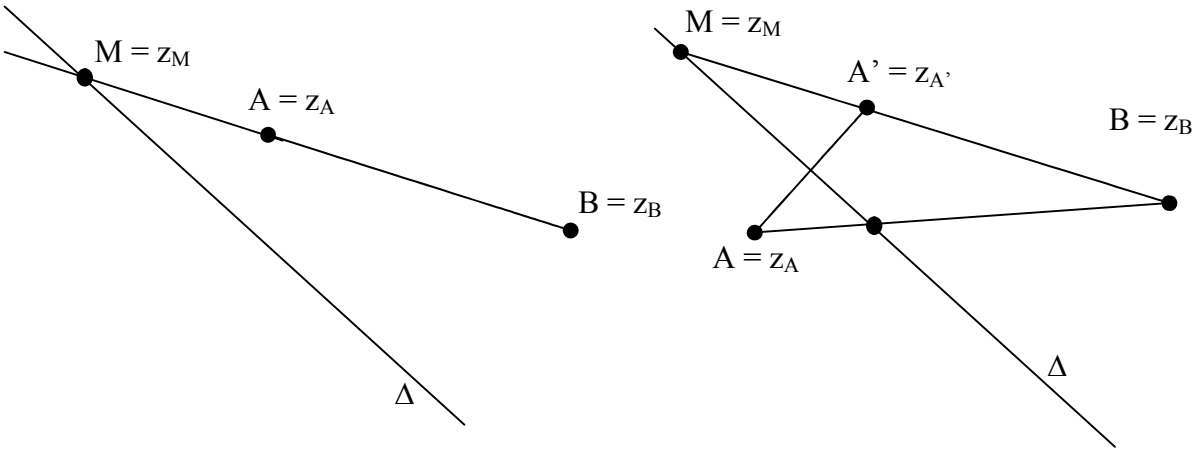


- Nếu hai điểm A và B khác phía với Δ thì: điểm M = (AB giao với Δ). Giá trị nhỏ nhất của P khi đó: $P_{min} = AB = |z_A - z_B|$.
- Nếu hai điểm A và B cùng phía so với Δ thì lấy A' đối xứng với A qua đường thẳng Δ. Rồi suy ra điểm: M = (A'B giao với Δ). Giá trị nhỏ nhất của P chính là: $P_{min} = A'B = |z_{A'} - z_B|$

Bài toán 6.3.11. Cho số phức z thỏa mãn: $|z - 1 - 2i| = |z + 1 + 2i|$ và đồng thời $P = |z - 2| - |z - i|$ lớn nhất. Hỏi khi đó mô đun của số phức z bằng bao nhiêu?

✍ **Giải:**

- Số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 1 - 2i| = |z + 1 + 2i|$ là đường thẳng Δ:
- $\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = (x + 1)^2 + (y + 2)^2 \Leftrightarrow x + 2y = 0$ (Δ)
- Gọi A là điểm biểu diễn $z_A = 2$; B là điểm biểu diễn $z_B = i$; M là điểm bất kì nằm trên đường thẳng Δ. Khi đó biểu thức: $P = |z - z_A| - |z - z_B| = MA - MB$.
- Ycbt tương đương với việc tìm điểm M nằm trên đường thẳng Δ để P = MA – MB lớn nhất. Đây là một bài cực trị hình học quen thuộc.



- Nếu hai điểm A và B cùng phía với Δ thì M = AB giao với Δ. Từ đây suy ra M. Giá trị lớn nhất của P khi đó: $P_{max} = AB = |z_A - z_B|$.

- Nếu hai điểm A và B khác phía so với Δ thì lấy A' đối xứng với A qua đường thẳng Δ. Rồi suy ra điểm M = A'B giao với Δ. Giá trị lớn nhất của P chính là: $P_{max} = A'B = |z_{A'} - z_B|$
- **Ghi nhớ:** *Khi mà chúng ta không cả hiểu được cách làm bài toán: Tìm M thuộc đường thẳng Δ sao cho (MA + MB) min {hoặc (MA – MB) max} thì phải hiểu rằng kiến thức nâng cao của chúng ta hổng từ phần Oxy của hình học lớp 10. Chứ không phải phần số phức này khó quá. Hãy tiến bộ mà nhận ra lỗi và trả đúng về với nguyên nhân.*

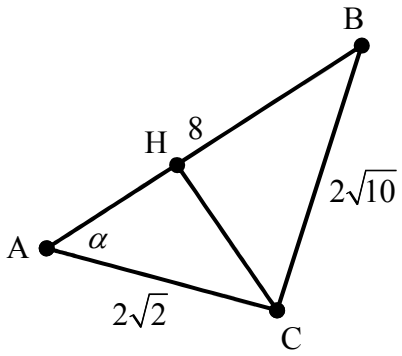
Ví dụ 6.3.12. Cho số phức z thỏa mãn: |z – 3i + 1| = |z – 3 + i|. Hãy tìm số phức z thỏa mãn đồng thời:

1. Biểu thức P = |z – 2| + |z – 3i| nhỏ nhất.
2. Biểu thức P = |z – 2i| - |iz – 4i + 1| lớn nhất.
3. Biểu thức P = |z + 2| + |z – i| nhỏ nhất.
4. Biểu thức P = |z – i| – |z – 5| lớn nhất.

Bài toán 6.3.13. Cho số phức z thỏa mãn phương trình: $|z-3+2i|+|z+5+2i|=8$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của: P = |z – 1 + 4i| ?

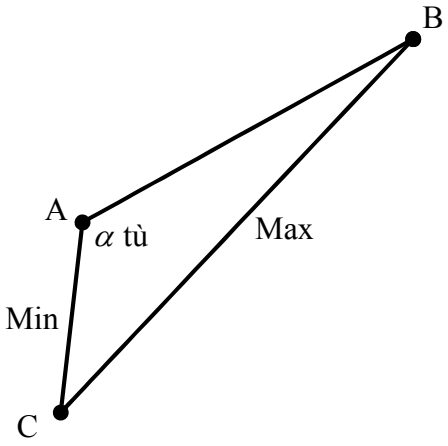
✍ **Giải:**

- Gọi điểm M = z = x + iy; điểm $A = z_A = 3 - 2i$; điểm $B = z_B = -5 - 2i$; điểm $C = z_C = 1 - 4i$.
- Khi đó biểu thức giả thiết trở thành: MA + MB = 8.
- Ta lại có $AB = |z_A - z_B| = |3 - 2i + 5 + 2i| = 8$.
- Suy ra: AB = MA + MB. Suy ra: M nằm trong đoạn thẳng AB, hay nói cách khác phương trình đã cho biểu diễn đoạn thẳng AB.
- P = MC là khoảng cách từ điểm M nằm trong đoạn AB đến điểm C.
- Bài toán tím khoảng cách lớn nhất và khoảng cách nhỏ nhất từ một điểm C tới một đoạn thẳng AB được giải tổng quát tối ưu như sau:



- Tính độ dài hai cạnh: $CA = |1 - 4i - 3 + 2i| = 2\sqrt{2}$. $CB = |1 - 4i + 5 + 2i| = 2\sqrt{10}$
- Suy ra khoảng cách lớn nhất là $CB = 2\sqrt{10}$. Xác định góc $\widehat{BAC} = \alpha$. Ta có: $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$.

- Vì góc α nhọn nên ta suy ra khoảng cách nhỏ nhất là: CH = $CA.\sin\alpha = 2\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} = 2$.
- Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là: P_{max} = CB = $2\sqrt{10}$ khi z = z_A.
- Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là: P_{min} = CH = 2 khi z = z_H .
- **Ghi nhớ:** Khi góc α = 90^0 thì CA = CH = P_{min}. Khi góc α tù, tức là: cosα < 0 thì khoảng cách nhỏ nhất của P là: P_{min} = CA, khi z = z_A.

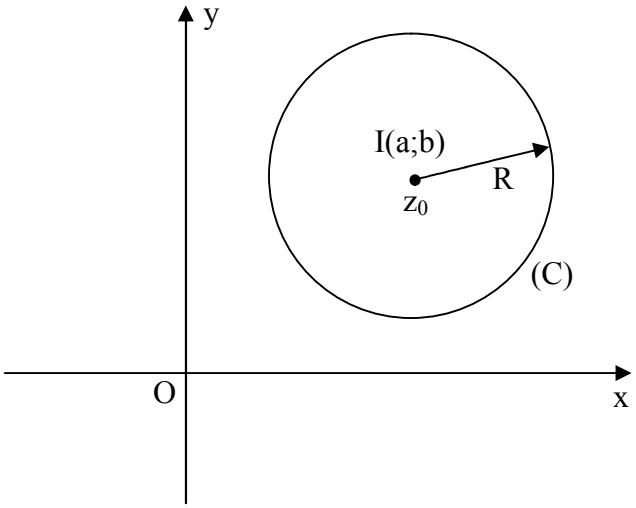


Ví dụ 6.3.14. Cho số phức z thỏa mãn: |z – 5 + i| + |z + 3 – 7i| = $8\sqrt{2}$. Biểu thức P = |z – 3i + 2|. Hãy xác định giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức P ?

Ví dụ 6.3.15. Cho số phức z thỏa mãn: |z – 1+ 3i| + |z + 5 – 5i| = 10. Biểu thức P = |z – 2i + 4|. Hãy xác định giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức P ?

6.4. Quỹ tích là đường tròn trên mặt phẳng phức:

- Phương trình biểu diễn đường tròn (C): $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$; tâm I = (a;b) và bán kính R.
- Hoặc phương trình đường tròn (C) có dạng tổng quát: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$; có tâm I = (a;b) và bán kính: $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.
- Cho phương trình phức: $|z - z_0| = R$; phương trình này biểu diễn đường tròn (C) có tọa độ tâm là z_0 và bán kính là R.



Bài toán 6.4.1. Tìm điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn: $|z - 3i + 2| = 5$

✍ **Giải:**

- Ta có: $|z - 3i + 2| = 5 \leftrightarrow |z - (-2 + 3i)| = 5$
- $z_0 = -2 + 3i$ và R = 5. Vậy phương trình đã cho biểu diễn đường tròn (C) có tâm I = (-2;3) và bán kính R = 5.
- Chúng ta có thể làm một cách như tổng quát: Gọi z = x + iy thay vào phương trình đã cho:
- $|z - 3i + 2| = 5 \rightarrow |x + iy - 3i + 2| = 5 \leftrightarrow |(x + 2) + i(y - 3)| = 5 \leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$
- Đây chính là phương trình đường tròn (C) ở trên.
- **Ghi nhớ:** *Chúng ta nên xác định đường tròn bằng phương pháp phức cho nhanh và dễ trong các trường hợp phức tạp như bên dưới đây.*

Ví dụ 6.4.2. Tìm điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn: $|iz - 2i + 1| = 4$ (1)

Giải:

- (1) $\Leftrightarrow |i(z - 2 - i)| = 4 \leftrightarrow |i| . |z - (2 + i)| = 4 \leftrightarrow |z - (2 + i)| = 4$
- Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn phương trình (1) là đường tròn tâm $z_0 = 2 + i$ và bán kính R = 4. Hoặc tâm là điểm I biểu diễn số phức z_0 có tọa độ I = (2;1).

Ví dụ 6.4.3. Tìm điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn các phương trình sau:

1. $|iz+3i-2|=2$.
2. $|(1-2i)z+2i+5|=5$
3. $|(1+i)z+(z-1)3i+5i|=6$

Bài toán 6.4.4. Cho số phức z thỏa mãn phương trình: $|z+3i-2|=2$. Hãy tìm quỹ tích điểm biểu diễn số phức w = 2z + i ?

✍ **Giải:**

- Chúng ta không được nhầm lẫn là tìm quỹ tích điểm biểu diễn số phức z. Ở bài toán này yêu cầu tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức w = 2z + i.
- **Cách 1:** Giả thiết suy ra: $|2z+6i-4|=4 \leftrightarrow |w-i+6i-4|=4 \leftrightarrow |w-4+5i|=4$
- Điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm: 4 – 5i = (4;-5) và bán kính r = 4.
- **Cách 2:** Làm bình thường một cách tổng quát:
- Gọi $z=x+iy$ và $w=X+iY=2z+i=2x+i(2y+1) \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{X}{2} \\ y=\dfrac{Y-1}{2} \end{cases}$
- Điểm biểu diễn số phức z là M(x;y) còn điểm biểu diễn số phức w là N(X;Y). Ta phải tìm phương trình biểu diễn X và Y chứ không phải tìm phương trình biểu diễn x và y.
- Ta thay $z=x+iy$ vào phương trình đã cho: $|x+iy+3i-2|=2 \rightarrow |\frac{X}{2}+i.\frac{Y-1}{2}+3i-2|=2$
- $\rightarrow |(X-4)+i(Y+5)|=4 \rightarrow (X-4)^2+(Y+5)^2=4^2$
- Vậy quỹ tích điểm biểu diễn w là đường tròn (C): $(X-4)^2+(Y+5)^2=4^2$ có tâm I(4;-5) và bán kính R = 4. Hoặc có thể viết lại: |w – 4 + 5i| = 4.

Bài toán 6.4.5. Cho số phức z thỏa mãn phương trình: $|z+i-1|=2$ (1). Hãy tìm quỹ tích điểm biểu diễn số phức w = 3z + 2i – 1.

✍ **Giải:**

- Chúng ta có thể suy ra: $z=\dfrac{w+1-2i}{3}$ thay vào phương trình (1) ta được:
- $|\dfrac{w+1-2i}{3}+i-1|=2 \leftrightarrow |w-(2-i)|=6$.
- Vậy quỹ tích điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm I = (2;-1) và bán kính R = 6.
- Hoặc có thể làm nhanh: Từ w = 3z + 2i – 1 $\rightarrow$ 3z = w + 1 – 2i.
- (1) $\Leftrightarrow 3|z+i-1|=6 \leftrightarrow |3z+3i-3|=6 \leftrightarrow |w+1-2i+3i-3|=6 \leftrightarrow |w-2+i|=6$

Bài toán 6.4.6. Cho số phức z thỏa mãn phương trình: $|z+2i+1|=1$ (1). Hãy tìm quỹ tích điểm biểu diễn số phức w = $2\overline{z}+4i-3$

✍ **Giải:**

- (1) ⇔ $|\overline{z+2i+1}|=1 \leftrightarrow |\overline{z}+1-2i|=1$
- Từ: $w=2.\overline{z}+4i-3 \rightarrow \overline{z}=\dfrac{w+3-4i}{2}$; ta thay vào phương trình trên sẽ được:
- $|\overline{z}+1-2i|=1 \leftrightarrow |\dfrac{w+3-4i}{2}+1-2i|=1 \leftrightarrow |w+5-8i|=2 \leftrightarrow |w-(-5+8i)|=2$
- Vậy điểm biểu diễn số phức w là đường tròn (C) có tâm I(-5;8) và bán kính R = 2.

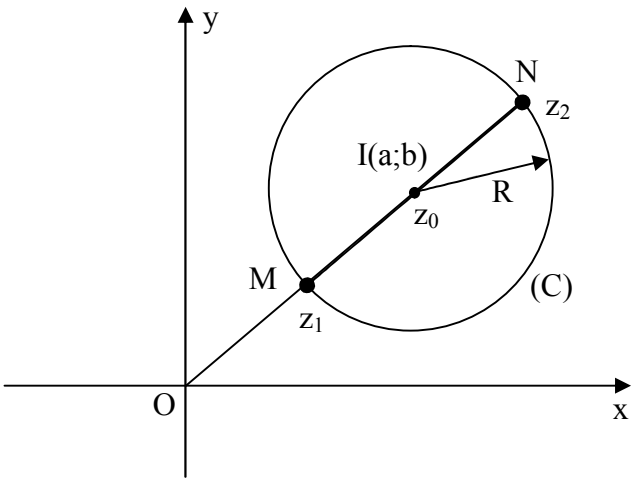
Ví dụ 6.4.7. Cho số phức z thỏa mãn phương trình: $|z-2i+3|=2$ (1). Hãy tìm quỹ tích điểm biểu diễn số phức w = $3z+2i+5$.

Ví dụ 6.4.8. Cho số phức z thỏa mãn phương trình: $|z-2i+3|=3$ (1). Hãy tìm quỹ tích điểm biểu diễn số phức w = $2\overline{z}-3i+1$.

Bài toán 6.4.9. Cho đường tròn (C): $|z-z_0| = R$. Tìm trên đường tròn (C) điểm M và điểm N biểu diễn số phức z_1 và z_2 sao cho: M gần O nhất và N xa O nhất. Hoặc tương đương với câu hỏi: $|z_1|$ nhỏ nhất và $|z_2|$ lớn nhất?

✍ **Giải:**

- Ta giải bài toán tổng quát: Gọi I là tâm đường tròn biểu diễn bởi số phức z_0.
- Từ hình vẽ ta có các kết quả:



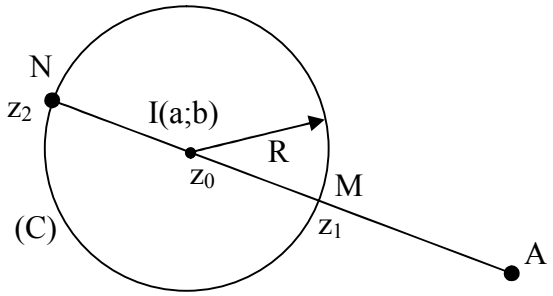
- Điểm M gần O nhất biểu diễn z_1 có môn đun $|z_1|$ nhỏ nhất. Điểm N xa O nhất biểu diễn z_2 có mô đun $|z_2|$ lớn nhất.
- Khoảng cách từ O tới tâm I là: OI = $|z_0|$

- OM = OI – IM = $|z_0| - R$; ON = OI + IN = $|z_0| + R$
- Ta có: $\overrightarrow{OM} = \frac{OM}{OI}.\overrightarrow{OI} = \frac{OI - IM}{OI}.\overrightarrow{OI} = (1 - \frac{R}{OI}).\overrightarrow{OI} \to z_M = (1 - \frac{R}{|z_0|})z_0$
- Tương tự: $\overrightarrow{ON} = \frac{ON}{OI}.\overrightarrow{OI} = \frac{OI + IN}{OI}.\overrightarrow{OI} = (1 + \frac{R}{OI}).\overrightarrow{OI} \to z_N = (1 + \frac{R}{|z_0|})z_0$
- Số phức có môn đun nhỏ nhất: $z_M = (1 - \frac{R}{|z_0|})z_0$, tương ứng với GTNN của $|z|_{min} = ||z_0| - R|$
- Số phức có mô đun lớn nhất: $z_N = (1 + \frac{R}{|z_0|})z_0$, tương ứng với GTLN của $|z|_{max} = |z_0| + R$.

Bài toán 6.4.10. Cho đường tròn (C): $|z - z_0| = R$. Tìm trên đường tròn (C) điểm M và điểm N biểu diễn số phức z_1 và z_2 sao cho giá trị của biểu thức $P = |z - z_A|$ nhỏ nhất và lớn nhất?

✍ **Giải:**

- Gọi I là tâm đường tròn biểu diễn bởi số phức z_0. Từ hình vẽ ta có các kết quả:
- Giá trị của biểu thức: $P = |z - z_A|$ chính là khoảng cách từ điểm A (biểu diễn bởi z_A) tới đường tròn (C) cho bởi phương trình: $|z - z_0| = R$.

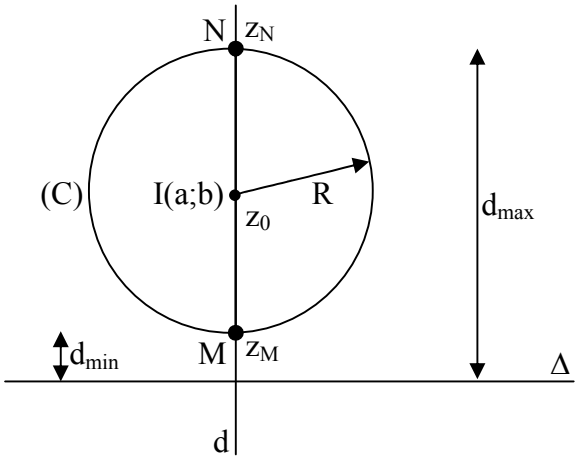


- Điểm M nằm trên đường tròn (C) gần A nhất biểu diễn z_1 . Điểm N nằm trên (C) xa A nhất biểu diễn z_2 được biểu diễn như trên hình vẽ.
- Ta vẫn có công thức như bài toán trên như sau:
- $\overrightarrow{AM} = (1 - \frac{R}{AI}).\overrightarrow{AI} \to z_M - z_A = (1 - \frac{R}{|z_0 - z_A|})(z_0 - z_A) \to z_M = z_0 - \frac{R}{|z_0 - z_A|}(z_0 - z_A)$
- Khi đó GTNN là: $P_{min} = |z - z_A|_{min} = AM = ||z_0 - z_A| - R|$
- $\overrightarrow{AN} = (1 + \frac{R}{AI}).\overrightarrow{AI} \to z_N - z_A = (1 + \frac{R}{|z_0 - z_A|})(z_0 - z_A) \to z_N = z_0 + \frac{R}{|z_0 - z_A|}(z_0 - z_A)$
- Khi đó GTLN là $P_{max} = |z - z_A|_{max} = AN = |z_0 - z_A| + R$.

Bài toán 6.4.11. Cho đường tròn (C): $|z - z_0| = R$ và đường thẳng Δ: $|z - z_1| = |z - z_2|$. Tìm trên đường tròn (C) điểm M và điểm N biểu diễn số phức z_M và z_N sao cho khoảng cách từ M và N đến đường thẳng Δ nhỏ nhất và lớn nhất?

✍ **Giải:**

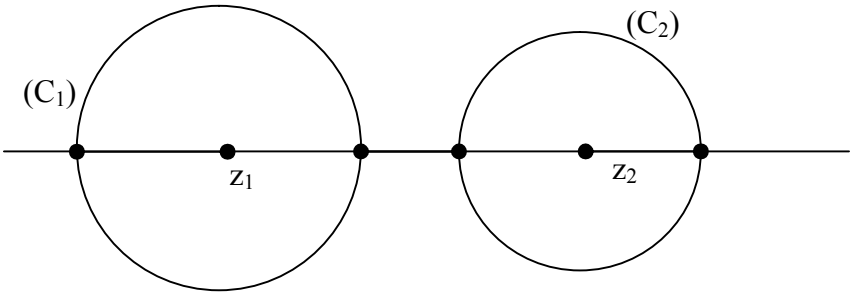
- Khoảng cách nhỏ nhất ứng với hai trường hợp:
  - ❖ Nếu $d(I,\Delta) \le R \to d_{\min} = 0$
  - ❖ Nếu: $d(I,\Delta) > R \to d_{\min} = d(M,\Delta) = d(I,\Delta) - R$
- Khoảng cách lớn nhất luôn được tính bằng: $d_{\max} = d(N,\Delta) = d(I,\Delta) + R$
- Việc tìm tọa độ điểm M và N để suy ra số phức tương ứng mà chúng biểu diễn thì chúng ta đưa về hình phẳng. M và N là giao điểm của đường thẳng (d) với đường tròn (C). Trong đó đường thẳng (d) đi qua tâm I, (d) vuông góc với đường thẳng Δ.



Bài toán 6.4.12. Cho hai đường tròn (C_1): $|z - z_1| = R_1$ và đường tròn (C_2): $|z - z_2| = R_2$. Tìm trên đường tròn (C_1) điểm M và trên đường tròn (C_2) điểm N biểu diễn số phức z_M và z_N sao cho giá trị của biểu thức $P = |z_M - z_N|$ nhỏ nhất và lớn nhất?

✍ **Giải:**

- Bài tập này chúng ta có thể tự giải bằng gợi ý hình vẽ dưới đây.

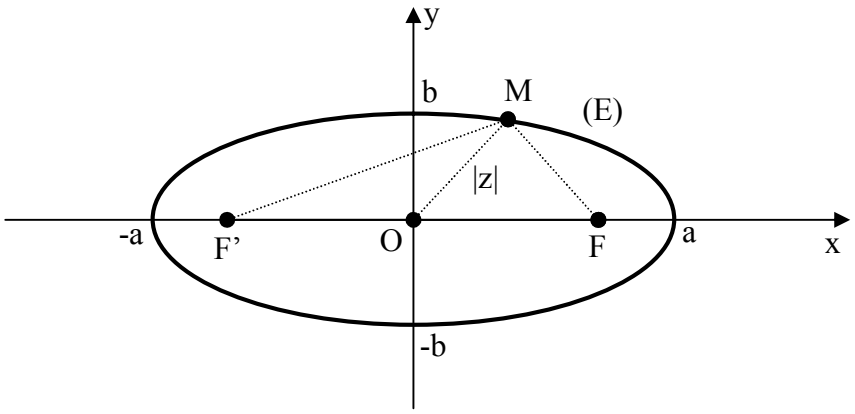


- Khoảng cách lớn nhất: $d_{max} = |z_1 - z_2| + R_1 + R_2$. Từ đây chúng ta có thể tự suy ra tọa độ điểm M và N tương ứng: M nằm trên (C_1) và ở xa I_2 nhất. N nằm trên (C_2) và ở xa I_1 nhất.
- Khoảng cách nhỏ nhất: $d_{min} = |z_1 - z_2| - R_1 - R_2$. Từ đây chúng ta có thể tự suy ra tọa độ điểm M và N tương ứng: M nằm trên (C_1) và ở gần I_2 nhất. N nằm trên (C_2) và ở gần I_1 nhất.

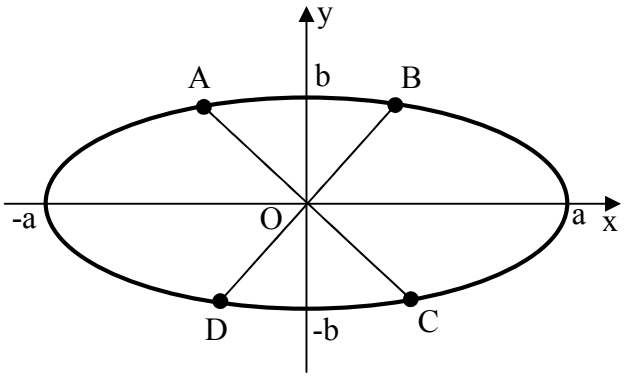
6.5. Elip trong mặt phẳng phức – Các bài toán nâng cao:

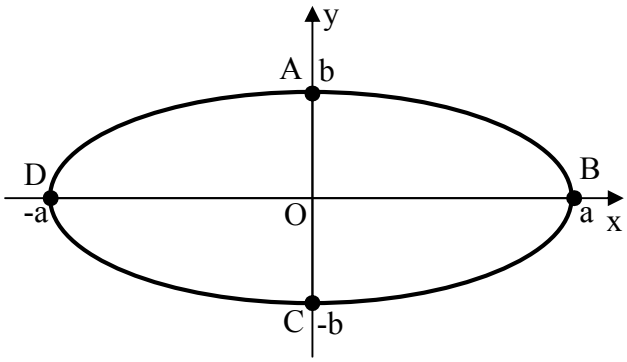
6.5/1. Cơ bản về elip trong mặt phẳng Oxy và trong mặt phẳng phức:

- Đã biết trong hình phẳng Oxy, tập hợp điểm M có tổng khoảng cách tới hai điểm cố định F và F' bằng một số (2a) không đổi là đường elíp (E) có hai tiêu điểm F và F'; có tiêu cự: 2c = FF' ; có trục dài bằng: 2a ; bán trục nhỏ bằng: $b=\sqrt{a^2-c^2}$; tâm sai: e = c/a.
- Phương trình hình học: MF + MF' = 2a (a không đổi).
- Phương trình chính tắc của (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
- Tọa độ hai tiêu điểm: F'(–c;0) và F(c;0)
- Hình vẽ minh họa Elip trong hình học phẳng và hệ tọa độ Oxy:



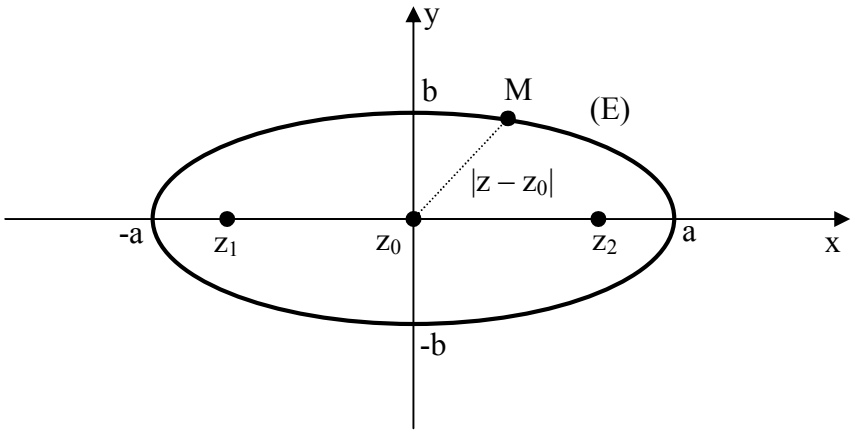
- Khi M chạy trên elip, OM có giá trị nhỏ nhất khi bằng bán trục nhỏ b và M(0;b) hoặc M(0;-b).
- OM có giá trị lớn nhất khi bằng bán trục lớn a và M(a;0) hoặc M(-a;0).
- Diện tích của hình elip: S = πab
- Xét một tứ giác ABCD nội tiếp elip (E). Trong đó AC ⊥ BD, diện tích tứ giác ABCD là:
- $S_{ABCD}=\frac{AC.BD}{2}$



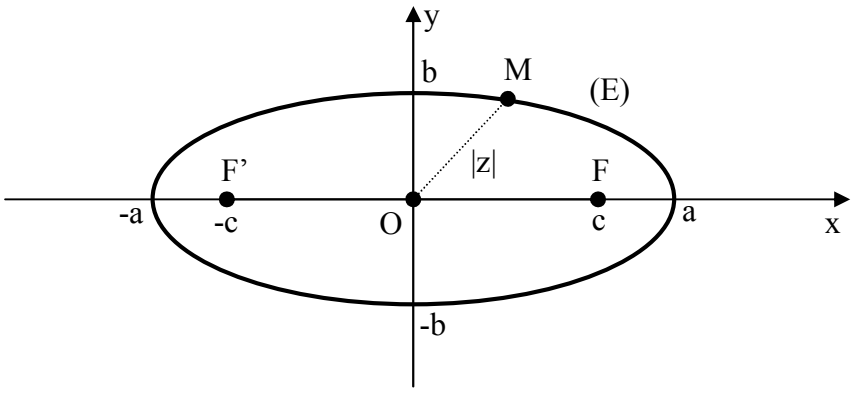


- Diện tích nhỏ nhất: $S_{\min}=\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$.
- Diện tích lớn nhất: $S_{\max}=2ab$

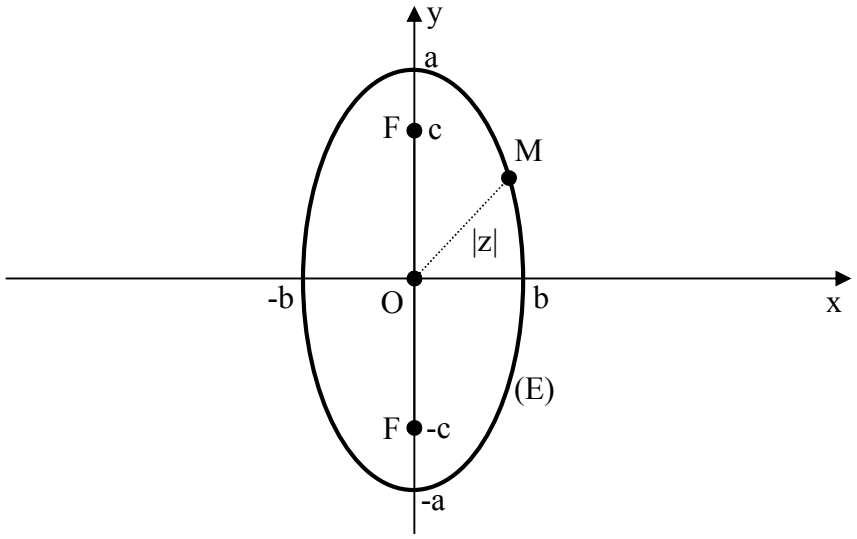
- Bây giờ chúng ta xét kĩ quỹ tích điểm biểu diễn là elip (E) trong mặt phẳng phức.
- Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn phương trình: { $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$ } là một đường elip (E) tổng quát có hai tiêu điểm z_1 (biểu diễn bởi F') và z_2 (biểu diễn bởi F).
- Tiêu cự của elip là khoảng cách giữa hai điểm F và F': $2c = FF' = |z_1 - z_2|$
- Bán tiêu cự là: c.
- Trục lớn là: 2a ; bán trục lớn là a.
- Trục nhỏ là: 2b; bán trục nhỏ là b được tính: $b = \sqrt{a^2 - c^2}$
- Tâm của elip là: $z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}$
- Giá trị lớn nhất của $|z - z_0|$ là bán trục lớn: $|z - z_0|_{max} = a$
- Giá trị nhỏ nhất của $|z - z_0|$ là bán trục nhỏ: $|z - z_0|_{max} = b$
- Cho ABCD là tứ giác nội tiếp elip sao cho hai đường chéo AC và BD vuông góc: diện tích lớn nhất của tứ giác ABCD là: $\boxed{S_{max} = 2ab}$; diện tích nhỏ nhất của tứ giác ABCD là: $\boxed{S_{min} = \frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2}}$



- **Trường hợp 1: Cơ bản nhất:** Phương trình elip có dạng chuẩn: $|z - c| + |z + c| = 2a$
- Khi đó hai tiêu điểm đối xứng nhau qua gốc O. Tâm của elip trùng với gốc O: $z_0 = 0$.

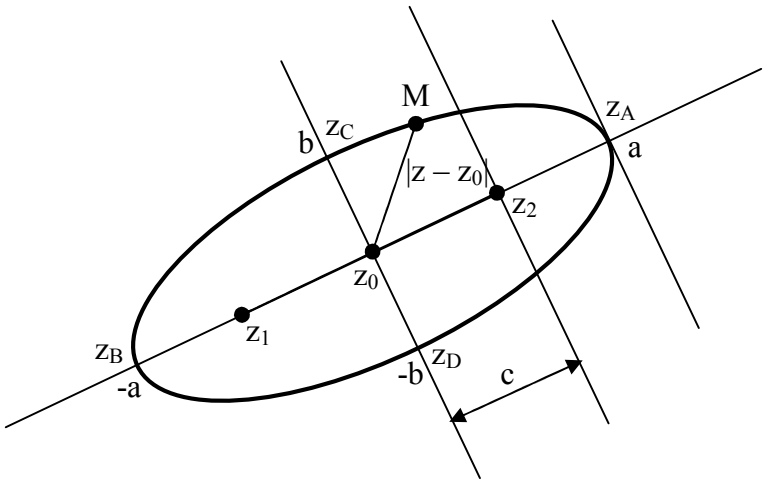


- Bán trục lớn bằng: a. Bán tiêu cự đúng bằng c. Bán trục nhỏ: $b = \sqrt{a^2 - c^2}$
- Khi đó max |z| = a khi $z = \pm a$; min |z| = b khi $z = \pm ib$.
- Phương trình chính tắc trong mặt phẳng Oxy mô tả phương trình elip dạng chuẩn này:
- $|z+c|+|z-c|=2a \leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$
- **Trường hợp 2:** Phương trình elip có dạng: |z – ic| + |z + ic| = 2a
- Khi đó hai tiêu điểm đối xứng nhau qua gốc O. Tâm của elip trùng với gốc O: $z_0 = 0$.



- Bán trục lớn: a. Bán tiêu cự đúng bằng c. Bán trục nhỏ: $b = \sqrt{a^2 - c^2}$
- Khi đó max |z| = a khi $z = \pm ia$; min |z| = b khi $z = \pm b$.
- Phương trình chính tắc trong mặt phẳng Oxy mô tả phương trình elip dạng này:
- $|z+ic|+|z-ic|=2a \leftrightarrow \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \leftrightarrow \frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$
- **Trường hợp 3:** Phương trình elip có dạng tổng quát: $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$
- Hai tiêu điểm: $F = z_1$ và $F' = z_2$. Tiêu cự: $FF' = 2c = |z_1 - z_2|$.
- Bán trục dài: a và bán trục nhỏ: $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.
- **Ghi nhớ:** Khi a = c, b = 0 thì elip bị suy biến về một đoạn thẳng: FF'.
- Tâm của elip chính là trung điểm của hai tiêu tự: $I = z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}$.
- Giá trị lớn nhất của: $|z - z_0|_{max} = a$. Đạt được tại hai điểm A và B được biểu diễn bởi hai số phức z_A và z_B: $\frac{z_A - z_0}{a} = \frac{z_2 - z_0}{c} \rightarrow z_A = z_0 + \frac{a}{c}(z_2 - z_0)$; $\frac{z_B - z_0}{a} = \frac{z_1 - z_0}{c} \rightarrow z_B = z_0 + \frac{a}{c}(z_1 - z_0)$

- Giá trị nhỏ nhất của: $|z - z_0|_{min} = b$. Đạt được tại hai điểm C và D biểu diễn bởi hai số phức z_A và z_B: $\frac{z_C - z_0}{b} = \frac{i(z_2 - z_0)}{c} \to z_C = z_0 + i\frac{b}{c}(z_2 - z_0)$; $\frac{z_D - z_0}{b} = \frac{i(z_1 - z_0)}{c} \to z_D = z_0 + i\frac{b}{c}(z_1 - z_0)$



- Phương trình chính tắc trong mặt phẳng Oxy mô tả phương trình elip dạng này:
- Nếu elip có dạng: $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a \to$ tâm elip: $z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2} = m + in$
- Thì phương trình chính tắc của elip (E): $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \leftrightarrow \frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2 - c^2} = 1$

Bài toán 6.5.1. Cho số phức z thỏa mãn: $|z - 4| + |z + 4| = 10$ (1)

1. Tìm tập hợp điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện (1).
2. Tìm số phức z có mô đun lớn nhất và nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện (1).
3. Gọi ABCD là có 4 đỉnh biểu diễn 4 số phức z thỏa mãn (1) sao cho AC vuông góc với BD. Diện tích lớn nhất của tứ giác ABCD bằng bao nhiêu ?
4. Gọi ABCD là có 4 đỉnh biểu diễn 4 số phức z thỏa mãn (1) sao cho AC vuông góc với BD. Diện tích nhỏ nhất của tứ giác ABCD bằng bao nhiêu ?

✍ **Giải:**

1. Tìm tập hợp điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện (1).

- Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn (1) là đường elip (E) có bán trục lớn a = 5.
- Bán tiêu c = 4. Bán trục nhỏ: $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.
- Hai tiêu điểm là: $z_1 = 4$; $z_2 = -4$. Tâm của elip là: $z_0 = 0$. Phương trình: $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$

2. Tìm số phức z có mô đun lớn nhất và nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện (1).

- Số phức có mô đun lớn nhất đúng bằng bán trục lớn: max |z| = a = 5 khi: $z = \pm 5$

- Số phức có mô đun nhỏ nhất đúng bằng bán trục nhỏ: min |z| = b = 3 khi: $z = \pm 3i$

3. Gọi ABCD là có 4 đỉnh biểu diễn 4 số phức z thỏa mãn (1) sao cho AC vuông góc với BD. Diện tích lớn nhất của tứ giác ABCD bằng bao nhiêu ?

- Chúng ta áp dụng luôn kết quả: S_{max} = 2ab = 2.3.5 = 30 (đvdt).

4. Gọi ABCD là có 4 đỉnh biểu diễn 4 số phức z thỏa mãn (1) sao cho AC vuông góc với BD. Diện tích nhỏ nhất của tứ giác ABCD bằng bao nhiêu ?

- Chúng ta áp dụng luôn kết quả: $S_{min} = \dfrac{4a^2b^2}{a^2+b^2} = \dfrac{4.5^2.3^2}{5^2+3^2} = \dfrac{450}{17}$

Ví dụ 6.5.2. Cho số phức z thỏa mãn: |z – 5| + |z + 5| = 14 (1)

1. Tìm tập hợp điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện (1).
2. Tìm số phức z có mô đun lớn nhất và nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện (1).
3. Gọi ABCD là có 4 đỉnh biểu diễn 4 số phức z thỏa mãn (1) sao cho AC vuông góc với BD. Diện tích lớn nhất của tứ giác ABCD bằng bao nhiêu ?
4. Gọi ABCD là có 4 đỉnh biểu diễn 4 số phức z thỏa mãn (1) sao cho AC vuông góc với BD. Diện tích nhỏ nhất của tứ giác ABCD bằng bao nhiêu ?
5. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của: |z +3|

Bài toán 6.5.3. Cho số phức z thỏa mãn: |z – 3 + 4i| + |z + 1 + 2i| = 8 (1)

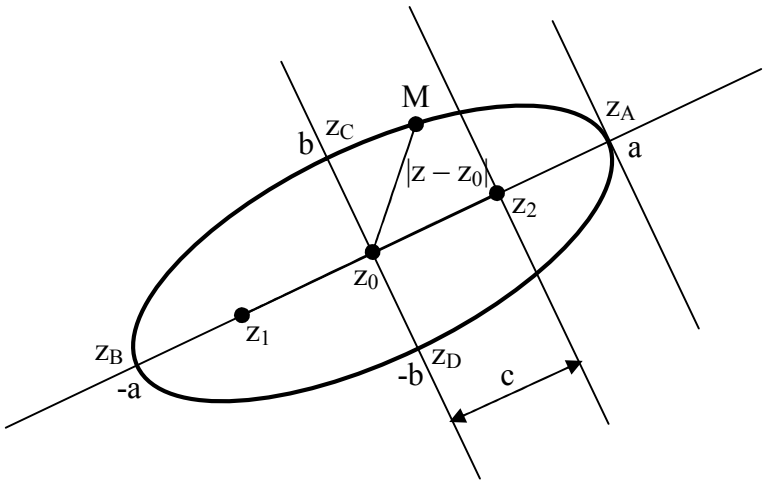
1. Tìm tập hợp điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện (1).
2. Tìm số phức w = (z – 1 + 3i) có mô đun lớn nhất và nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện (1). Giá trị của số phức z tương ứng khi đó?
3. Gọi ABCD là có 4 đỉnh biểu diễn 4 số phức z thỏa mãn (1) sao cho AC vuông góc với BD. Diện tích lớn nhất của tứ giác ABCD bằng bao nhiêu ?
4. Gọi ABCD là có 4 đỉnh biểu diễn 4 số phức z thỏa mãn (1) sao cho AC vuông góc với BD. Diện tích nhỏ nhất của tứ giác ABCD bằng bao nhiêu ?

✍ **Giải:**

1. Tìm tập hợp điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện (1).

- Phương trình (1) biểu diễn elip (E) có hai tiêu điểm: z_1 = 3 – 4i ; z_2 = – 1 – 2i. Tâm của elip là: $z_0 = \dfrac{z_1+z_2}{2} = \dfrac{3-4i-1-2i}{2} = 1-3i$.
- Bán trục lớn là: a = 4.
- Tiêu cự: $2c = |z_1 - z_2| = |3-4i+1+2i| = |4-2i| = 2\sqrt{5}$. Bán tiêu cự: $c = \sqrt{5}$.

- Bán trục nhỏ: $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{4^2 - (\sqrt{5})^2} = \sqrt{11}$
- Hình vẽ minh họa:



- Phương trình chính tắc của elip trong mặt phẳng Oxy: $\frac{(x-1)^2}{4^2} + \frac{(x+3)^2}{(\sqrt{11})^2} = 1$

2. Tìm số phức w = (z – 1 + 3i) có mô đun lớn nhất và nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện (1). Giá trị của số phức z tương ứng khi đó?

- Nhận thấy: $w = z - z_0$. Giá trị lớn nhất của $|w| = |z - z_0|$ bằng bán trục lớn: $\max |z - z_0| = 4$.
- Đạt được khi số phức z ở hai điểm đầu A và B của elip biểu diễn bởi hai số phức: z_A và z_B
- $\frac{z_A - z_0}{a} = \frac{z_2 - z_0}{c} \rightarrow z_A = z_0 + \frac{a}{c}(z_2 - z_0)$
- $\frac{z_B - z_0}{a} = \frac{z_1 - z_0}{c} \rightarrow z_B = z_0 + \frac{a}{c}(z_1 - z_0)$
- Giá trị nhỏ nhất của $|w| = |z - z_0|$ bằng bán trục nhỏ: $\max |z - z_0| = b = \sqrt{11}$
- Đạt được khi số phức z ở hai điểm đầu C và D của elip biểu diễn bởi hai số phức: z_C và z_D
- $\frac{z_C - z_0}{b} = \frac{i(z_2 - z_0)}{c} \rightarrow z_C = z_0 + i\frac{b}{c}(z_2 - z_0)$
- $\frac{z_D - z_0}{b} = \frac{i(z_1 - z_0)}{c} \rightarrow z_D = z_0 + i\frac{b}{c}(z_1 - z_0)$

3. Gọi ABCD là có 4 đỉnh biểu diễn 4 số phức z thỏa mãn (1) sao cho AC vuông góc với BD. Diện tích lớn nhất của tứ giác ABCD bằng bao nhiêu ?

- Diện tích lớn nhất vẫn áp dụng công thức elip tổng quát: $S_{max} = 2ab = 2.4.\sqrt{11} = 8\sqrt{11}$

4. Gọi ABCD là có 4 đỉnh biểu diễn 4 số phức z thỏa mãn (1) sao cho AC vuông góc với BD. Diện tích nhỏ nhất của tứ giác ABCD bằng bao nhiêu ?

- Diện tích nhỏ nhất: $S_{min} = \frac{4a^2b^2}{a^2+b^2} = \frac{4.4^2.(\sqrt{11})^2}{4^2+(\sqrt{11})^2} = \frac{704}{27}$

Ví dụ 6.5.4. Cho số phức z thỏa mãn: |z – 2 + 3i| + |z + 1 – i| = 20 (1)

1. Tìm tập hợp điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện (1).

2. Tìm số phức w = (z – 1 + 3i) có mô đun lớn nhất và nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện (1). Giá trị của số phức z tương ứng khi đó?

3. Gọi ABCD là có 4 đỉnh biểu diễn 4 số phức z thỏa mãn (1) sao cho AC vuông góc với BD. Diện tích lớn nhất của tứ giác ABCD bằng bao nhiêu ?

4. Gọi ABCD là có 4 đỉnh biểu diễn 4 số phức z thỏa mãn (1) sao cho AC vuông góc với BD. Diện tích nhỏ nhất của tứ giác ABCD bằng bao nhiêu ?

6.5/2. Sự suy biến của elip về một đoạn thẳng:

Bài toán 6.5.5. Cho số phức z thỏa mãn: |z – 4 + 4i| + |z + 2 – 4i| = 10 (1)

1. Tìm tập hợp điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện (1).

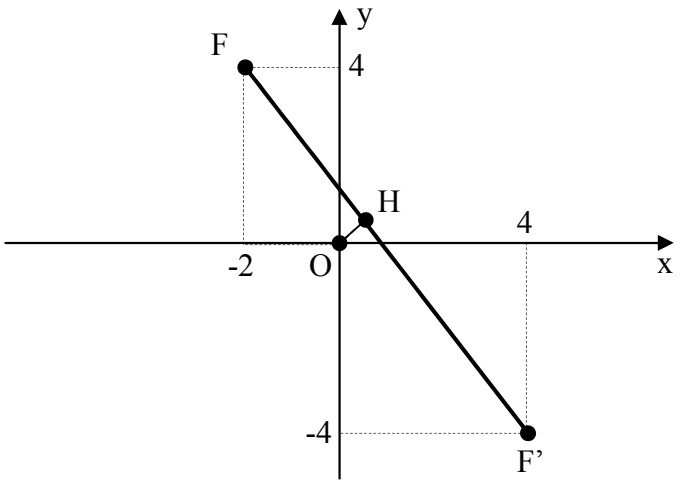
2. Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện (1) có mô đun |z| đạt giá trị nhỏ nhất?

3. Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện (1) có mô đun |z| đạt giá trị lớn nhất?

✍ **Giải:**

1. Tìm tập hợp điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện (1).

- Hai tiêu điểm F' = z_1 = 4 – 4i ; F = z_2 = – 2 + 4i
- Trục lớn: 2a = 10 $\rightarrow$ bán trục lớn: a = 5.
- Tiêu cự: 2c = FF' = $|z_1 - z_2|$ = | 4 – 4i – (-2 + 4i)| = 10 $\rightarrow$ bán tiêu: c = 5.
- Đây là trường hợp đặc biệt: a = c , b = 0 (trục lớn bằng tiêu cự) nên elip chỉ còn là một đoạn thẳng được xác định bởi đoạn: FF'.



2. Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện (1) có mô đun |z| đạt giá trị nhỏ nhất?

- Số phức có |z| nhỏ nhất chính là hình chiếu H vuông góc của O lên đoạn thẳng FF'
- Phương trình đoạn thẳng FF' là: VTCP: $\overrightarrow{FF'} = (6;-8) = 2(3;-4) \rightarrow$ VTPT: $\overrightarrow{n_{(FF')}} = (4;3)$
- Suy ra phương trình: (FF'): $4(x-4)+3(y+4)=0 \leftrightarrow 4x+3y-4=0$
- Giá trị nhỏ nhất của |z| là: $|z|_{\min} = d(O,(FF')) = \frac{|-4|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{4}{5}$.
- Tương ứng với hình chiếu H của O lên đường thẳng FF': $H = (h;\frac{4-4h}{3}) \rightarrow \overrightarrow{OH} = (h;\frac{4-4h}{3})$
- Ta có: $\overrightarrow{OH} \perp \overrightarrow{FF'} \rightarrow \overrightarrow{OH}.\overrightarrow{FF'} = 0 \leftrightarrow 6h - 8(\frac{4-4h}{3}) = 0 \rightarrow h = \frac{16}{25} \rightarrow H = (\frac{16}{25};\frac{12}{25})$
- Suy ra điểm z ứng với $|z|_{\min}$ là: $z = \frac{16}{25} + \frac{12i}{25}$
- **Ghi nhớ:** *ở bài toán này, hình chiếu H còn nằm trong đoạn FF' thì có thể kết luận $|z|_{min} = OH = d(O,(FF'))$. Lưu ý tới trường hợp hình chiếu H không nằm trong đoạn FF' thì giá trị $|z|_{min}$ sẽ ứng với OF hoặc OF'.*

3. Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện (1) có mô đun |z| đạt giá trị lớn nhất?

- Số phức có |z| lớn nhất sẽ ứng với đoạn: OF hoặc OF':
- OF = $|z_2|$ = |-2 + 4i| = $2\sqrt{5}$.
- OF' = $|z_1|$ = |4 – 4i| = $4\sqrt{2}$.
- Vậy suy ra $|z|_{\max} = 4\sqrt{2}$ khi: z = 4 – 4i = F'.

Bài toán 6.5.6. Cho số phức z thỏa mãn: |z – 1 – i| + |z + 2 – 5i| = 5 (1)

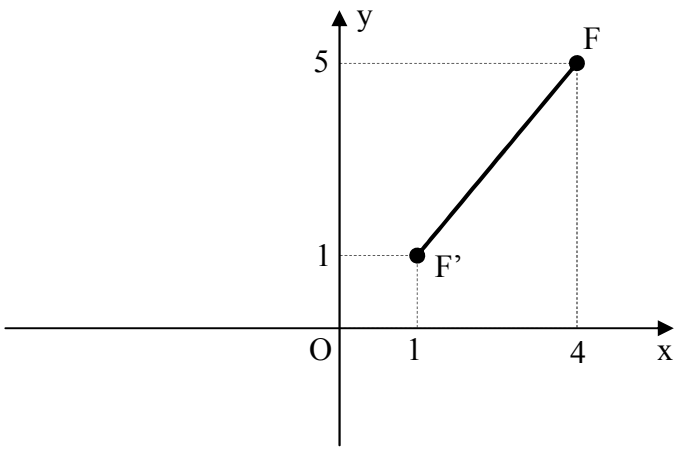
1. Tìm tập hợp điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện (1).
2. Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện (1) có mô đun |z| đạt giá trị nhỏ nhất?
3. Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện (1) có mô đun |z| đạt giá trị lớn nhất?

✍ **Giải:**

1. Tìm tập hợp điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện (1).

- Phương trình (1) biểu diễn dạng đường elip.
- Hai tiêu điểm F' = z_1 = 1 + i ; F = z_2 = 4 + 5i
- Trục lớn: 2a = 5 $\rightarrow$ bán trục lớn: a = 2,5.
- Tiêu cự: 2c = FF' = $|z_1 - z_2|$ = | 1 + i – (-2 + 5i)| = 5 $\rightarrow$ bán tiêu: c = 2,5

- Đây là trường hợp đặc biệt: a = c (trục lớn bằng tiêu cự) nên elip chỉ còn là một đoạn thẳng được xác định bởi đoạn: FF'.



2. + 3. Tìm các số phức z thỏa mãn điều kiện (1) có mô đun |z| đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất?

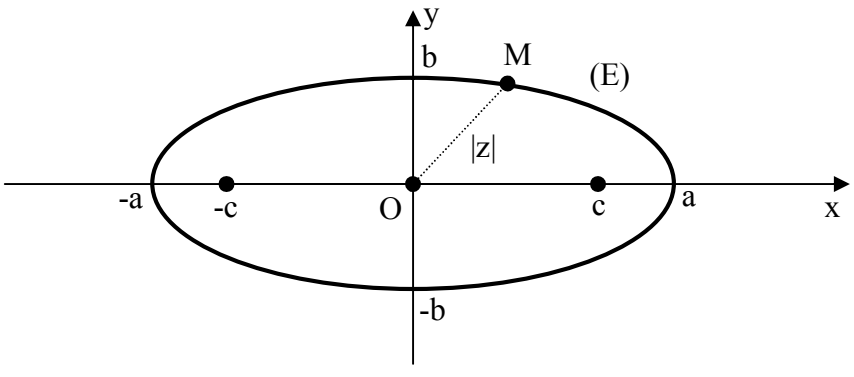
- Nhận thấy hình chiếu H vuông góc của O lên đoạn thẳng FF' không nằm trong đoạn FF' nên ta không thể kết luận $|z|_{min} = OH = d(O,(FF'))$ được.
- Đoạn $OF = |z_2| = |4 + 5i| = \sqrt{41}$. Đoạn $OF' = |z_1| = |1 + i| = \sqrt{2}$.
- Vậy suy ra giá trị lớn nhất của |z| là: $|z|_{max} = OF = \sqrt{41}$ ứng với $z = z_F = 4 + 5i$.
- Giá trị nhỏ nhất của |z| là: $|z|_{min} = OF' = \sqrt{2}$ ứng với $z = z_{F'} = 1 + i$.

Ví dụ 6.5.7. Cho số phức z thỏa mãn: |z – 3 + i| + |z – 3i| = 5. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của |z| lần lượt là M và m. Tìm tích số (Mm) khi đó?

Ví dụ 6.5.8. Cho số phức z thỏa mãn: |z – 2i| + |z – 6 – 10i| = 10. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của |z| ?

6.5/3. Phương pháp đưa phương trình elip về dạng chính tắc trong mặt phẳng phức:

- Đã biết điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn: $|z – z_1| + |z – z_2| = 2a$ là một đường elip (E).
- Thế nhưng đa số chúng ta chỉ quen nhìn và quen làm việc với dạng đường elip (E) chuẩn mực trong hệ tọa độ Oxy như là: |z + c| + |z – c| = 2a. Vì đơn giản nó nằm đối xứng trên hai trục.



- Tác giả sẽ cung cấp cho các bạn phép xoay hình elip tổng quát thành hình elip chuẩn như sau:
- Từ dạng tổng quát của elip: $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$
- Ta có tâm của elip được xác định: $z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}$, sử dụng phép biến đổi:
- $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a \leftrightarrow |z - z_0 + \frac{z_2 - z_1}{2}| + |z - z_0 - \frac{z_2 - z_1}{2}| = 2a$
- Nhân cả hai vế của phương trình trên với: $|\overline{z_2} - \overline{z_1}|$ ta được:
- $|(\overline{z_2} - \overline{z_1})(z - z_0) + c| + |(\overline{z_2} - \overline{z_1})(z - z_0) - c| = 2a|\overline{z_2} - \overline{z_1}|$.
- Đặt $u = (\overline{z_2} - \overline{z_1})(z - z_0) \rightarrow z = \frac{u}{\overline{z_2} - \overline{z_1}} + z_0 = \frac{u}{\overline{z_2} - \overline{z_1}} + \frac{z_1 + z_2}{2}$ ta sẽ được:
- $|u + c| + |u - c| = 2a'$. Đây chính là phương trình đường elip chuẩn.
- Cụ thể đường elip sau khi được đổi trục và xoay hình sẽ là:
- $|u + \frac{|z_2 - z_1|^2}{2}| + |u - \frac{|z_2 - z_1|^2}{2}| = 2a|z_2 - z_1| \leftrightarrow |u + 2c^2| + |u - 2c^2| = 4ac$
- **Ghi nhớ:** *Cho một elip tổng quát dạng*: $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$. *Có tiêu cự*: $2c = |z_1 - z_2|$. *Qua phép biến đổi, đặt*: $z = \frac{u}{\overline{z_2} - \overline{z_1}} + \frac{z_1 + z_2}{2}$ *sẽ đưa về dạng chuẩn*: $|u + 2c^2| + |u - 2c^2| = 4ac$.

Bài toán 6.5.9. Cho phương trình đường elip tổng quát: $|z + 2 - i| + |z - 4 - 7i| = 12$. Hãy đưa elip về dạng chuẩn.

✍ **Giải:**

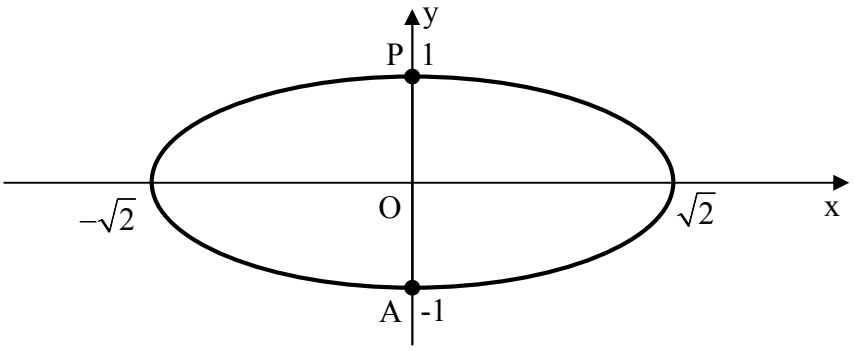
- Tiêu cự: $2c = |z_1 - z_2| = |-2 + i - 4 - 7i| = 6\sqrt{2} \rightarrow c = 3\sqrt{2}$.
- Thực hiện phép biến đổi: $z = \frac{u}{\overline{z_2} - \overline{z_1}} + \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{u}{\overline{4 + 7i} - \overline{-2 + i}} + \frac{-2 + i + 4 + 7i}{2} = \frac{u}{6 - 6i} + 1 + 4i$
- Ta được: $|u + 2c^2| + |u - 2c^2| = 4ac \leftrightarrow |u + 36| + |u - 36| = 72\sqrt{2}$

Bài toán 6.5.10. Cho phương trình đường elip tổng quát: $|z - 1| + |z + i| = 2$. Hãy đưa elip về dạng chuẩn. Từ đó tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của $|z|$?

✍ **Giải:**

- Hai tiêu điểm cũ của elip đã cho là: $z_1 = 1$; $z_2 = -i$. Tiêu cự: $2c = |1 - i| = \sqrt{2} \rightarrow c = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- Áp dụng phép xoay hình bằng cách, đặt $z = \frac{u}{\overline{z_2} - \overline{z_1}} + \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{u}{\overline{-i - 1}} + \frac{1 - i}{2} = \frac{u}{i - 1} + \frac{1 - i}{2}$
- Thay vào phương trình ban đầu, ta được: $|u + 1| + |u - 1| = 2\sqrt{2}$

- Đây là phương trình ELIP chuẩn rồi.
- Khi đó giá trị mô đun cần khảo sát là: $|z|=|\frac{u}{i-1}+\frac{1-i}{2}|=\frac{1}{|i-1|}|u+i|=\frac{|u+i|}{\sqrt{2}}$
- Chúng ta đi tìm Max và Min của |u + i| với u là đường ELIP: $|u+1|+|u-1|=2\sqrt{2}$.
- Đã biết elip (E) trên có bán trục lớn: $2a=2\sqrt{2}\to a=\sqrt{2}$. Tiêu cự: $2c=2\to c=1\to b=1$.

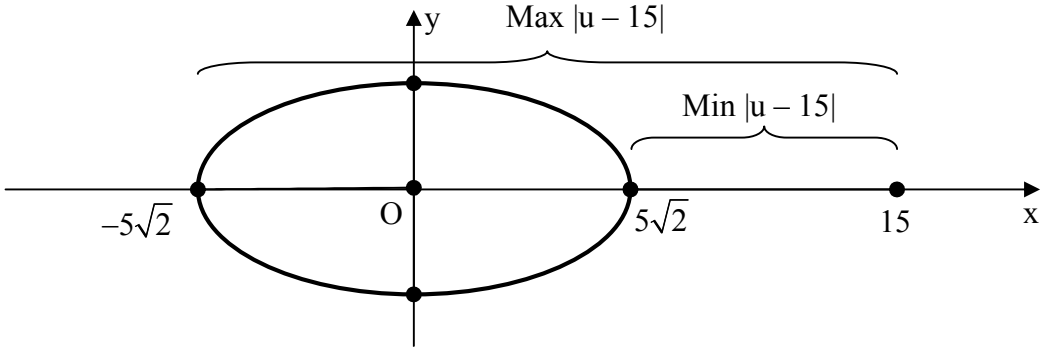


- Giá trị của |u + i| tương ứng là khoảng cách từ điểm A(0;-1) đến elip. Dễ thấy MAX và MIN ngay trên hình: $|u-1|_{max}=AP=2$; $|u-1|_{min}=0$.
- Suy ra giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của |z| tương ứng là: $M=\frac{AP}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2};m=\frac{0}{\sqrt{2}}=0$

Bài toán 6.5.11. Cho phương trình đường elip tổng quát: |z – 2– i| + |z + 2 + i| = $2\sqrt{10}$. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của |z – 6 – 3i| lần lượt là M và m, khi đó giá trị của: P = $M^2 - m^2$ tương ứng bằng bao nhiêu?

✍ **Giải:**

- Áp dụng phép quay trục elip: ta nhân hai vế của giả thiết với |2 – i| sẽ được:
- $|(2-i)z-(2-i)(2+i)|+|(2+i)z+(2-i)(2+i)|=2\sqrt{10}.|2-i|\leftrightarrow|(2-i)z-5|+|(2-i)z+5|=10\sqrt{2}$
- Đặt: u = (2 – i)z ta được: $|u-5|+|u+5|=10\sqrt{2}$ và biểu thức cần tìm MAX MIN tương ứng là:
- $|z-6-3i|=|\frac{u}{2-i}-6-3i|=\frac{1}{|2-i|}.|u-15|=\frac{|u-15|}{\sqrt{5}}$
- Nhận thấy: $|u-15|$ là khoảng cách từ điểm (15;0) đến ELIP chuẩn: $|u-5|+|u+5|=10\sqrt{2}$

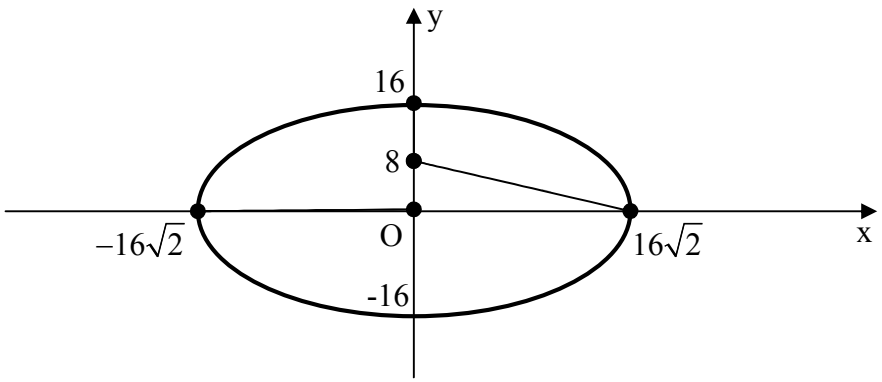


- $M = \dfrac{15+5\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}+\sqrt{10}$; $m = \dfrac{15-5\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}-\sqrt{10} \rightarrow P = M^2 - m^2 = 60\sqrt{2}$

Bài toán 6.5.12. Cho phương trình đường elip tổng quát: |z – 1 – 3i| + |z + 3 + i| = 8. Hãy đưa elip về dạng chuẩn. Từ đó tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của |z| ?

✍ **Giải:**

- Hai tiêu điểm: $z_1 = 1 + 3i$; $z_2 = -3 - i$. Tiêu cự: $2c = |z_1 - z_2| = |1+3i+3+i| = 4\sqrt{2} \rightarrow c = 2\sqrt{2}$
- Ta có: $\overline{z_2} - \overline{z_1} = -3 + i - (1-3i) = -4 + 4i$; $\dfrac{z_1+z_2}{2} = \dfrac{1+3i-3-i}{2} = -1+i$
- Đặt: $z = \dfrac{u}{\overline{z_2 - z_1}} + \dfrac{z_1+z_2}{2} = \dfrac{u}{-4+4i} - 1 + i$
- Khi đó giả thiết được đưa về dạng chuẩn:
- $|u+2c^2| + |u-2c^2| = 4ac \Leftrightarrow |u+16| + |u-16| = 32\sqrt{2}$ (1)
- Giá trị của: $|z| = \left|\dfrac{u}{-4+4i} - 1 + i\right| = \dfrac{|u-8i|}{4\sqrt{2}}$



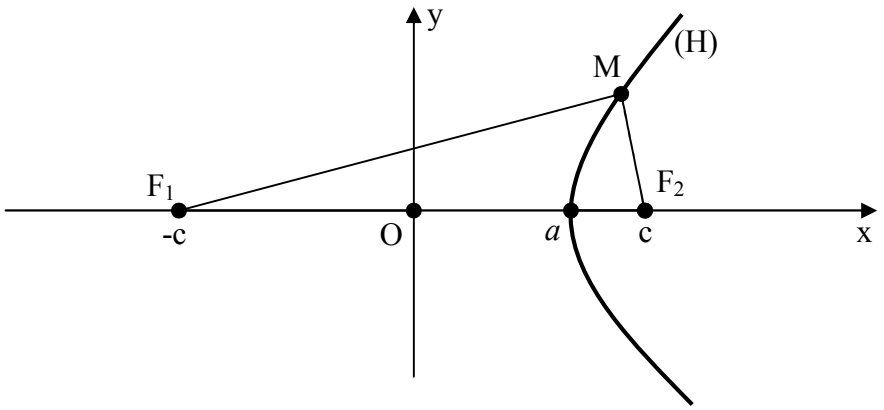
- Giá trị nhỏ nhất của: |u – 8i| là: (16 – 8 = 8).
- Suy ra giá trị nhỏ nhất của |z| là: m = $\dfrac{8}{4\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.
- Giá trị lớn nhất của: |u – 8i| là: $\sqrt{8^2 + (16\sqrt{2})^2} = 24$.
- Suy ra giá trị lớn nhất của |z| là: M = $\dfrac{24}{4\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$.

Ví dụ 6.5.13. Cho phương trình đường elip tổng quát: |z – 1– i| + |z + 1 + i| = $2\sqrt{10}$. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của |z – 4 – 4i| lần lượt là M và m. Hãy xác định M và m?

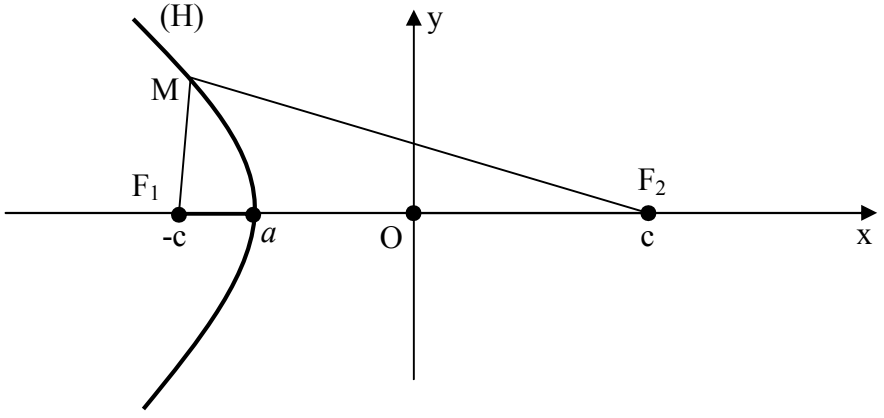
Ví dụ 6.5.14. Cho phương trình đường elip tổng quát: |z – 3– 3i| + |z + 3 + 3i| = 12. Xác định giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của | z – 1 + i| ?

6.6. Quỹ tích là đường Hypebol cơ bản:

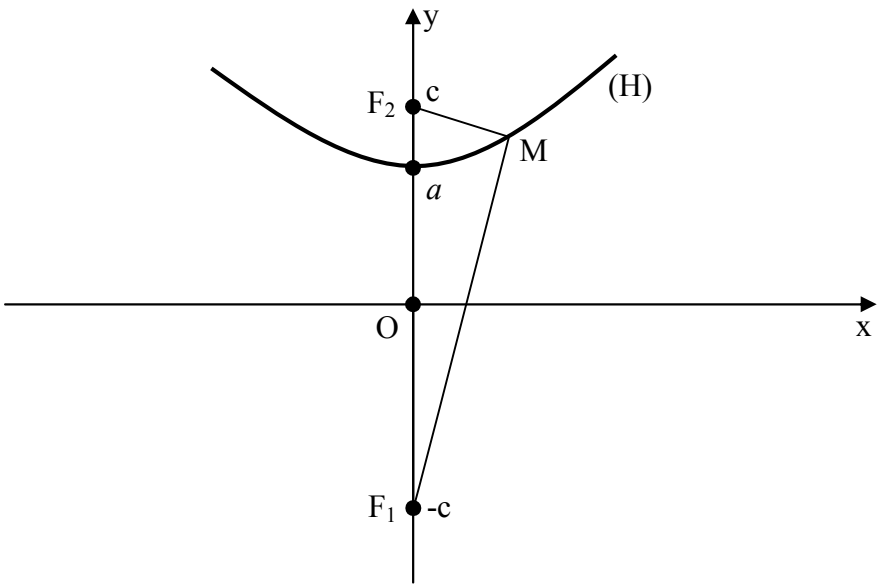
- Đã biết quỹ tích điểm M có: $MF_1 - MF_2 = 2a$ = không đổi là đường hypebol có tiêu điểm chính là F_2 và tiêu điểm ảo là F_1.
- Tiêu cự $2c = F_1F_2$, điều kiện để tồn tại hypebol là: $c > a$
- 2a là trục dài, a là bán trục dài.
- 2c là tiêu cự, c là bán tiêu cự.
- 2b là trục ảo và b là bán trục ảo, có: $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.
- Gốc của hypebol là trung điểm của F_1 và F_2: I là trung điểm của F_1 và F_2.
- Khi c > a thì quỹ tích: $MF_1 - MF_2$ là đường hypebol nằm về phía F_2. Thường chúng ta chỉ gặp hai dạng hypebol cơ bản có trục F_1F_2 nằm ở hai trục Ox và Oy như sau:
- Khi $F_1 = (-c;0)$ và $F_2 = (c;0)$ thì hypebol: $MF_1 - MF_2 = 2a$, ở dạng chính tắc có F_1F_2 nằm trên trục hoành, nằm về phía F_2 và có phương trình chính tắc là: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ và x > 0.



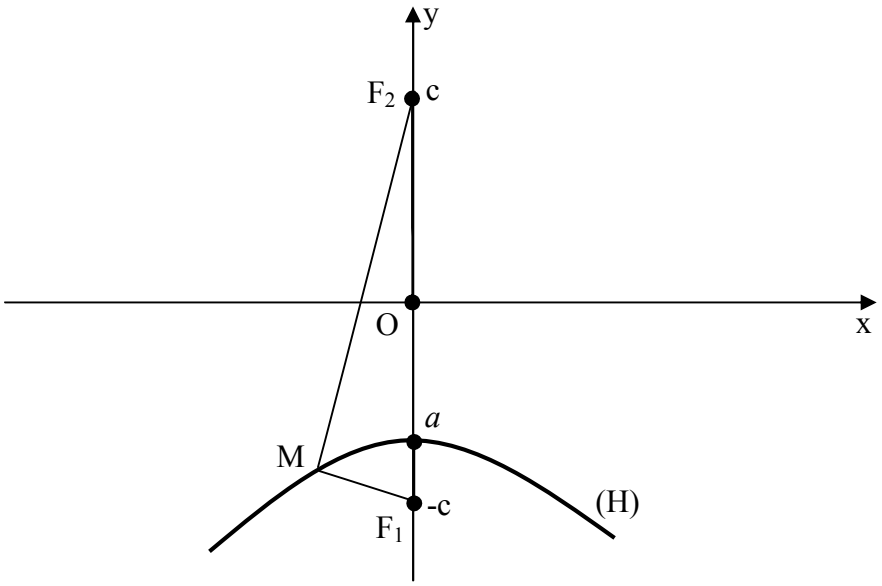
- Khi $F_1 = (-c;0)$ và $F_2 = (c;0)$ thì hypebol: $MF_2 - MF_1 = 2a$, ở dạng chính tắc có F_1F_2 nằm trên trục hoành, nằm về phía F_1 và có phương trình chính tắc là: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ và x < 0.



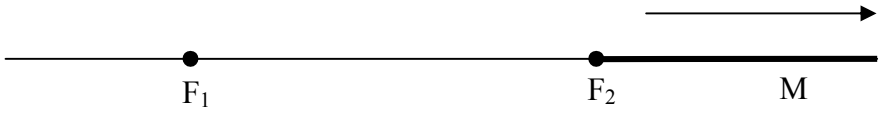
- Khi $F_1 = (0;-c)$ và $F_2 = (0;c)$ thì hypebol: $MF_1 - MF_2 = 2a$, ở dạng chính tắc có F_1F_2 nằm trên trục tung, ở gần F_2 và có phương trình chính tắc là: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ và $y > 0$



- Khi $F_1 = (0;-c)$ và $F_2 = (0;c)$ thì hypebol: $MF_2 - MF_1 = 2a$, ở dạng chính tắc có F_1F_2 nằm trên trục tung, ở gần F_1 và có phương trình chính tắc là: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ và $y < 0$



- Khi $c = a$ thì quỹ tích: $MF_1 - MF_2 = 2a$, là nửa đường thẳng F_2x tính cả F_2, F_2x ngược hướng với F_2F_1.



- Khi c < a thì không tồn tại điểm M nào thỏa mãn điều kiện: $MF_1 - MF_2$.
- Một điểm M nằm trên hypebol gần gốc của hypebol nhất ⇔ nó là đỉnh của hypebol. Tức là khi đó ta có: $OM_{min} = |z|_{min} = a$ ⇔ M là đỉnh tương ứng của hypebol.

Bài toán 6.6.1. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: |z – 5| – |z + 5| = 8.

1. Quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là đường gì?

2. Giá trị nhỏ nhất của |z| bằng bao nhiêu? Khi đó z bằng bao nhiêu?

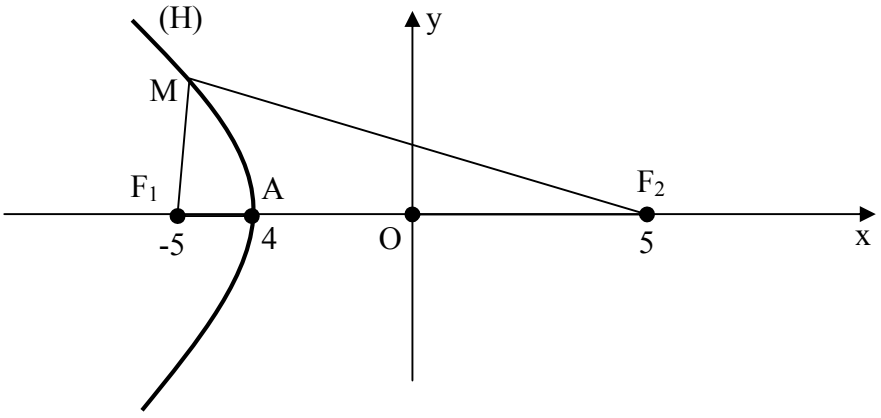
3. Xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức: P = |z – 1| ?

4. Xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức: Q = |z – 2i| ?

✍ **Giải:**

1. Quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là đường gì?

- Đây là dạng đường hypebol, hai tiêu điểm là $F_1 = (-5;0)$, $F_2 = (5;0)$.
- Tiêu cự: $F_1F_2 = 2c = 10 \rightarrow c = 5$. Trục thực: $2a = 8 \rightarrow$ bán trục thực: $a = 4$.
- Bán trục ảo (bán trục nhỏ): $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$
- Quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là đường hypebol nằm gần F_1 hơn, nằm trên trục Ox
- Phương trình chính tắc của hypebol là: $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1 \leftrightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ với x < 0
- Hình vẽ minh họa:



2. Giá trị nhỏ nhất của |z| bằng bao nhiêu? Khi đó z bằng bao nhiêu?

- Quan sát kĩ chúng ta biết được luôn giá trị nhỏ nhất của |z| là: $|z|_{min} = OA = a = 4$. Đạt được khi $z = z_A = 4$.

3. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: P = |z + 6| ?

- Dạng bài toán này, nếu chúng ta quan sát nhanh được thì có thể kết luận luôn. Tuy nhiên đây

là biểu thức P = |z + 6| = MB. Trong đó điểm B nằm bên trong hypebol nên rất khó có thể sử dụng hình để quan sát ngay được.

- Chúng ta sử dụng phương pháp khảo sát như sau:
- $P = |z+6| = \sqrt{(x+6)^2 + y^2}$ (1)
- Từ phương trình chính tắc của hypebol suy ra: $\rightarrow y^2 = 9(\frac{x^2}{16} - 1)$ thay vào biểu thức P ta được:
- $P = \sqrt{(x+6)^2 + 9(\frac{x^2}{16} - 1)} = \sqrt{\frac{25x^2}{16} + 12x + 27}$ với $x \in (-\infty; -4]$.
- Lập bảng biến thiên (hàm trong căn) chúng ta có thể suy ra giá trị nhỏ nhất của biểu thức P đạt tại x = -4. Khi đó: $P_{\min} = \sqrt{\frac{25}{16}(-4)^2 + 12(-4) + 27} = 2$.
- **Ghi nhớ:** Đôi khi quan sát hình cũng có thể suy ra được giá trị nhỏ nhất của P_{min}

4. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: Q = |z – 2i| ?

- Biểu thức: $Q = |z - 2i| = |x + iy - 2i| = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$ (2)
- Từ phương trình chính tắc suy ra: $\rightarrow x^2 = 16(\frac{y^2}{9} + 1)$ thay vào biểu thức (2), ta được:
- $Q = \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = \sqrt{16(\frac{y^2}{9} + 1) + (y-2)^2} = \sqrt{\frac{25y^2}{9} - 4y + 20}$ với $y \in (-\infty; +\infty)$.
- Khi đó: $Q = \sqrt{\frac{25y^2}{9} - 4y + 20} = \sqrt{(\frac{5y}{3} - \frac{6}{5})^2 + \frac{464}{25}} \geq \sqrt{\frac{464}{25}} = \frac{4\sqrt{29}}{5}$
- Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow y = \frac{18}{25} \rightarrow x = \pm\frac{4\sqrt{661}}{25}$.
- Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là: $Q_{\min} = \frac{4\sqrt{29}}{5}$.
- **Ghi nhớ:** *Đôi khi cách đưa một dạng biểu thức của z về dạng chính tắc của hypebol có thể sẽ đưa bài toán cực trị về khảo sát hàm số bậc hai rất đơn giản. Yêu cầu của dạng này là biểu thức mô đun cần khảo sát phải ở dạng: P = |z – z_A| trong đó z_A hoặc thuần thực hoặc thuần ảo.*

Ví dụ 6.6.2. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: |z + 13| – |z – 13| = 10.

1. Quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là đường gì?
2. Giá trị nhỏ nhất của |z| bằng bao nhiêu? Khi đó z bằng bao nhiêu?
3. Xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức: P = |z – 4| ?
4. Xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức: Q = |z + 3i| ?
5. Xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức: R = |z – i| ?

Ví dụ 6.6.3. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: |z + 5i| – |z – 5i| = 6.

1. Quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là đường gì?
2. Xác định giá trị nhỏ nhất của |z| bằng bao nhiêu? Khi đó z bằng bao nhiêu?
3. Xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức: P = |z – 2i| ?
4. Xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức: Q = |z – 5| ?

Bài toán 6.6.4. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: |z – 3 + 4i| – |z + 5 – 2i| = 6.

1. Quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là đường gì?
2. Xác định giá trị nhỏ nhất của |z + 1 + i| bằng bao nhiêu? Khi đó z bằng bao nhiêu?
3. Xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức: P = |z + 2 + i| ?
4. Xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức: Q = |z + 1 – 2i| ?

✍ **Giải:**

1. Quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là đường gì?

- Đây là dạng đường hypebol, hai tiêu điểm là $F_1 = 3 - 4i = (3;-4)$; $F_2 = -5 + 2i = (-5;2)$.
- Tâm của hypebol là trung điểm của đoạn F_1F_2 được xác định: $I = -1 - i = (-1;-1)$.
- Suy ra: $MF_1 - MF_2 = 2a$.
- Tiêu cự: $F_1F_2 = 2c = |3 - 4i - (-5 + 2i)| = 10 \rightarrow c = 5$. Trục thực: $2a = 6 \rightarrow$ bán trục thực: $a = 3$.
- Bán trục ảo: $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.
- Qũy tích điểm biểu diễn số phức z là 1 nhánh hypebol gần tiêu điểm F_2 hơn, có phương trình chính tắc: $\frac{(x-x_I)^2}{3^2} - \frac{(y-y_I)^2}{4^2} = 1 \leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{16} = 1$ (H)

2. Xác định giá trị nhỏ nhất của |z + 1 + i| bằng bao nhiêu? Khi đó z bằng bao nhiêu?

- Ta có: $|z + 1 + i| = |z - z_I|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng bán trục thực a = 3.
- Suy ra $|z + 1 + i|_{min} = 3 \Leftrightarrow z = z_M = M$ = giao điểm của đường thẳng F_1F_2 với hypebol (H).
- Phương trình đường thẳng F_1F_2: $\frac{x-3}{-5-3} = \frac{y+4}{2+4} \leftrightarrow 3x + 4y + 7 = 0$.
- Suy ra tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} 3x + 4y + 7 = 0 \\ \frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{16} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dots \\ y = \dots \end{cases}$

3. Xác định giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: P = |z + 2 + i| ?

- Giá trị của: $P = |z + 2 + i| = |x + iy + 2 + i| = \sqrt{(x+2)^2 + (y+1)^2}$ (1)

- Từ phương trình chính tắc của (H) suy ra: $(y+1)^2 = 16(\frac{(x+1)^2}{9} - 1)$, thế vào (1) ta được:
- $P = \sqrt{(x+2)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + 16(\frac{(x+1)^2}{9} - 1)} = \sqrt{\frac{25x^2 + 68x - 92}{9}}$
- Điều kiện của phần thực x là: $(y+1)^2 = 16(\frac{(x+1)^2}{9} - 1) \geq 0 \leftrightarrow (x+1)^2 \geq 9 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \leq -4 \end{array}\right.$
- Khảo sát hàm trong căn của biểu thức P ta suy ra được giá trị nhỏ nhất của P là:
- $P_{min} = 2 \Leftrightarrow x = -4 \rightarrow y = 0 \rightarrow z = -4$

4. Xác định giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: Q = |z + 1 – 2i| ?

- Giá trị của: $Q = |z+1-2i| = |x+iy+1-2i| = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2}$ (2)
- Từ phương trình chính tắc của (H) suy ra: $(x+1)^2 = 9(\frac{(y+1)^2}{16} + 1)$, thế vào (2) ta được:
- $Q = \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{9(\frac{(y+1)^2}{16} + 1) + (y-2)^2} = \sqrt{\frac{25y^2 - 46y + 217}{16}} = \sqrt{\frac{(5y - \frac{23}{5})^2 + \frac{4896}{25}}{16}}$
- $\Leftrightarrow Q = \sqrt{\frac{(5y - \frac{23}{5})^2 + \frac{4896}{25}}{16}} \geq \frac{3\sqrt{34}}{5}$.
- Giá trị nhỏ nhất của Q là: $Q_{min} = \frac{3\sqrt{34}}{5} \Leftrightarrow y = \frac{23}{25} \rightarrow x = -1 \pm \frac{3\sqrt{769}}{25}$.
- **Ghi nhớ:** *Chúng ta có thể thực hiện phép quay hypebol về dạng chính tắc cho dễ làm và dễ hình dung bằng cách đặt:* $z = \frac{u}{\overline{z_2} - \overline{z_1}} - \frac{z_1 + z_2}{2}$ *rồi suy ra phương trình chính tắc chuẩn của hypebol.*
- Ở bài toán này nếu ta đặt: $z = \frac{u}{\overline{z_2} - \overline{z_1}} - \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{u}{\overline{-5+2i} - \overline{-3-4i}} - \frac{-5+2i+3-4i}{2} = \frac{u}{-8-6i} - 1 - i$
- Thay vào phương trình ban đầu ta được: |u + 50| – |u – 50| = 80

Ví dụ 6.6.5. Cho số phức z thỏa mãn: |z + 4 + i| – |z – 2 – 7i| = 6.

1. Quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là đường gì? Xác định phương trình chính tắc của nó ?
2. Xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức: P = |z + 1 – 3i| ?
3. Xác định giá trị nhỏ nhất của: Q = |z + 1 – i| ?
4. Xác định giá trị nhỏ nhất của: R = |z + 4 – 3i| ?
5. Chuyển về dạng chính tắc chuẩn của đường hypebol?
6. Dựa vào phương trình chính tắc chuẩn tìm giá trị nhỏ nhất của: T = |z + 1 – 5i| ?

Bài toán 6.6.6. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: |z – 4 + 3i| – |z + 4 – 3i| = 10.

1. Quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là đường gì?

2. Xác định giá trị nhỏ nhất của |z | bằng bao nhiêu? Khi đó z bằng bao nhiêu?

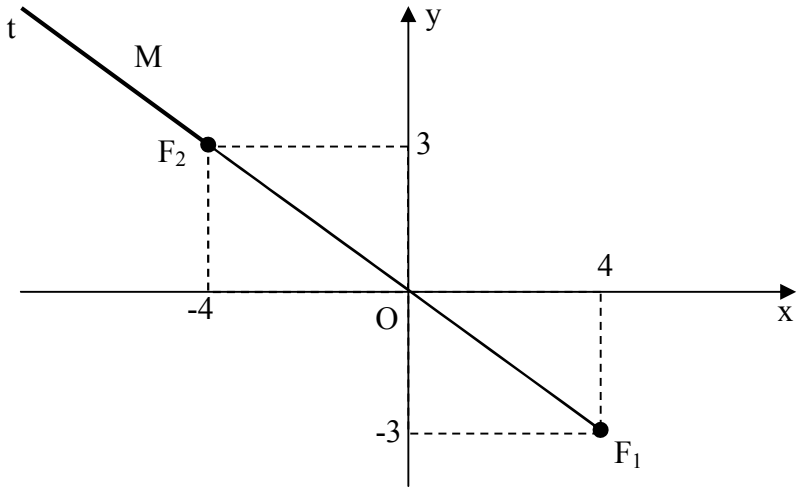
3. Xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức: P = |z + 4 – 6i| ?

4. Cho biết $|z|\le 10$. Xác định giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của T = |z – 5 + 2i| ?

✍ **Giải:**

1. Quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là đường gì?

- $F_1 = z_1 = 4 - 3i = (4;-3)$; $F_2 = z_2 = -4 + 3i = (-4;3)$.
- $F_1F_2 = |4 - 3i - (-4 + 3i)| = 10$.
- Giả thiết cho biết: |z – 4 + 3i| – |z + 4 – 3i| = 10 $\Leftrightarrow MF_1 - MF_2 = F_1F_2 \Leftrightarrow MF_1 = MF_2 + F_1F_2$
- Suy ra: M, F_1 , F_2 thẳng hàng. Cụ thể là: F_2 nằm giữa F_1 và M. Hãy nói cách khác M nằm trên tia F_2t như hình vẽ (nửa đường thẳng F_2t):



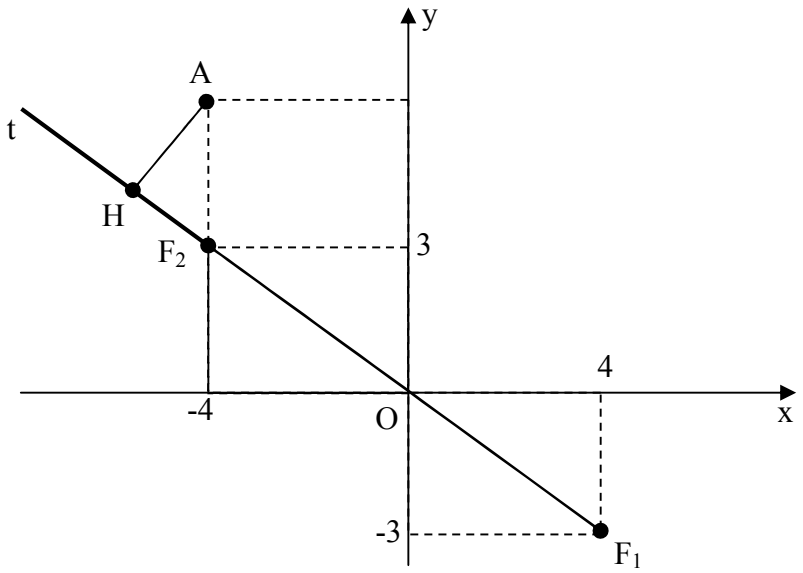
- Phương trình đường thẳng F_1F_2 được lập nhanh bằng dạng chính tắc:
- $F_1F_2 : \dfrac{x-4}{4-(-4)} = \dfrac{x+3}{-3-3} \leftrightarrow 3x + 4y = 0$ trong đó: $x \le -4$

2. Xác định giá trị nhỏ nhất của |z | bằng bao nhiêu? Khi đó z bằng bao nhiêu?

- Quan sát nhanh ta nhận thấy giá trị nhỏ nhất của |z| là: $|z|_{min} = OF_2 = |z_2| = |-4 + 3i| = 5$.
- Đạt được khi z = - 4 + 3i.

3. Xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức: P = |z + 4 – 6i| ?

- $P = |z - z_A|$ trong đó $A = z_A = -4 + 6i = (-4;6)$.
- Nhận thấy ngay giá trị nhỏ nhất của P chính là khoảng cách từ A đến đường thẳng F_1F_2 và bằng độ dài đoạn AH.



- $P_{\min} = d(A, F_1F_2) = \frac{|3(-4)+4(6)|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{12}{5}$.
- Số phức z tương ứng được biểu diễn bởi điểm H là hình chiếu vuông góc của A lên F_1F_2
- Gọi H = (3h;-4h) là hình chiếu của A, suy ra: $\overrightarrow{AH} = (3h+4;-4h-6)$; $\overrightarrow{F_1F_2} = (-8;6)$
- Suy ra:
- $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{F_1F_2} = 0 \leftrightarrow -8(3h+4)+6(-4h-6) = 0 \leftrightarrow h = -\frac{17}{12} \rightarrow H = (-\frac{17}{4};\frac{17}{3}) = z_H = -\frac{17}{4}+\frac{17i}{3}$

4. Cho biết z thỏa mãn thêm: $|z| \le 10$. Xác định giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của T = |z – 5 + 2i| ?

- Ta có thể gọi: $z = x+iy \rightarrow 3x+4y = 0 \rightarrow y = -\frac{3}{4}x$ thay vào điều kiện:
- $|z| \le 10 \leftrightarrow x^2+y^2 \le 100 \leftrightarrow x^2+\frac{9x^2}{16} \le 100 \leftrightarrow -8 \le x \le 8$
- Kết hợp với điều kiện của x ở trên, ta suy ra: $-8 \le x \le -4$
- Xét biểu thức: $T = |z-5+2i| = |x+iy-5+2i| = \sqrt{(x-5)^2+(y+2)^2} = \sqrt{(x-5)^2+(-\frac{3}{4}x+2)^2}$
- $T = \sqrt{\frac{25x^2}{16}-13x+29}$.
- Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của T trên đoạn [-8;-4] bằng phương pháp hàm số rất đơn giản:
- $T_{\max} = \sqrt{233} \leftrightarrow x = -8 \rightarrow y = 6 \rightarrow z = -8+6i$
- $T_{\min} = \sqrt{106} \leftrightarrow x = -4 \rightarrow y = 3 \rightarrow z = -4+3i$

Ví dụ 6.6.7. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z - 1 + 2i| - |z + 2 - i| = 3\sqrt{2}$.

1. Quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là đường gì?

2. Xác định giá trị nhỏ nhất của |z | bằng bao nhiêu? Khi đó z bằng bao nhiêu?

3. Xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức: P = |z + 4 – 6i| ?

4. Cho biết $|z| \le 6$. Xác định giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của T = |z – 3 + i| ?

Ví dụ 6.6.8. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: |z + 3| – |z – 3| = 6.

1. Quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là đường gì?

2. Xác định giá trị nhỏ nhất của |z | bằng bao nhiêu?

3. Xác định giá trị nhỏ nhất của biểu thức: P = |z – 5 + 2i| ?

4. Cho biết $|z| \le 12$. Xác định giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của T = |z – 4 + 3i| ?

6.7. Các đường cong bất kì: Đường thẳng – Đường tròn – Elip – Hypebol – Parabol:

- Không phải lúc nào quỹ tích các đường cong như: đườngthẳng, đường tròn, đường elip…cũng được cho ở các dạng chuẩn trong phức. Đôi khi ta phải biến đổi sau quá trình đặt trực tiếp: z = x + iy mới có thể rút ra được phương trình đường cong.
- Các dạng đường cong cơ bản:
  - ❖ Đường thẳng (Δ) có dạng phương trình: ax + by + c = 0.
  - ❖ Đường tròn (C) có dạng phương trình: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. Trong đó tâm I(a;b) và bán kính R > 0.
  - ❖ Đường cong elip (E) có dạng phương trình: $\frac{(x-a)^2}{m^2}+\frac{(y-b)^2}{n^2}=1$. Hoặc có thể viết theo dạng: $ax^2+by^2+cx+dy+e=0$. (a, b > 0 và $a\neq b$).
  - ❖ Đường cong hypebol (H) có dạng phương trình: $\frac{(x-a)^2}{m^2}-\frac{(y-b)^2}{n^2}=\pm 1$. Hoặc có thể viết theo dạng: $ax^2-by^2+cx+dy+e=0$. (a,b > 0).
  - ❖ Đường cong parabol (P) có dạng: $\left[\begin{array}{l} a.x^2+bx+c+dy=0 \\ a.y^2+by+c+dx=0 \end{array}\right.$

Bài toán 6.7.1. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn: $|z+2\overline{z}+3i-2|=4$ (1)

✍ **Giải:**

- Gọi z = x + iy, với x và y là hai số thực.
- (1) $\Leftrightarrow |x+iy+2(x-iy)+3i-2|=4 \leftrightarrow |(3x-2)+i(-y+3)|=4 \leftrightarrow (3x-2)^2+(y-3)^2=16$
- Rút gọn ta được phương trình: $9x^2+y^2-12x-6y-3=0$ đây là đường elip.

Bài toán 6.7.2. Cho số phức z thỏa mãn phương trình: $|z+3i-2|=4$. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức: $w=z+2\overline{z}$?

✍ **Giải:**

- Nếu là tập hợp điểm biểu diễn số phức z thì ta suy ngay ra đó là đường tròn tâm I(2;-3) và bán kính là R = 4. Tuy nhiên, hãy chú ý ở đây hỏi điểm biểu diễn số phức w?
- Ta có: $|z+3i-2|=4 \leftrightarrow |x+iy+3i-2|=4$ (1)
- Từ: $w=z+2\overline{z} \rightarrow X+iY=x+iy+2(x-iy)=3x-iy \rightarrow \begin{cases} x=\frac{X}{3} \\ y=-Y \end{cases}$. Ta thế vào (1) sẽ được:
- (1) $\Leftrightarrow |\frac{X}{3}+i(-Y)+3i-2|=4 \leftrightarrow |(X-6)+i(-3Y+9)|=12 \leftrightarrow (X-6)^2+(3Y-9)^2=12^2$
- Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường elip trên.

Bài toán 6.7.3. Cho số phức z thỏa mãn phương trình: $|z+3i-2|=4$. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức: $w=z+2\overline{z}$?

✍ **Giải:**

Nếu là tập hợp điểm biểu diễn số phức z thì ta suy ngay ra đó là đường tròn tâm I(2;-3) và

Ví dụ 6.7.3. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn: $|2z-\overline{z}+i-1|=2$

Ví dụ 6.7.4. Cho số phức z thỏa mãn: $|z+2i+1|=3$. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức: $w=3z-\overline{z}$

Ví dụ 6.7.5. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn:

1. $|z+2i\overline{z}-2|=3$.
2. $|z+3i-2|=|2z-i\overline{z}+i|$.
3. $|iz+3\overline{z}-1|=|3iz+1|$

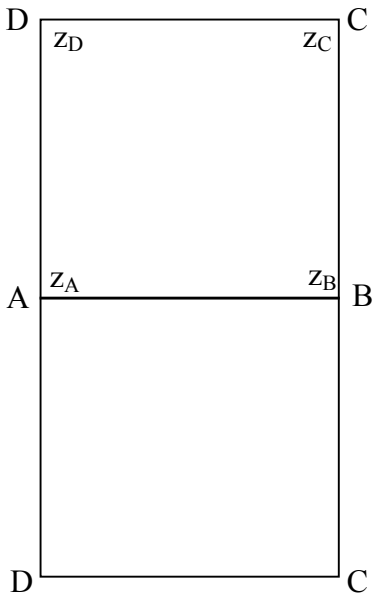
6.8. Phép quay trong số phức – Nâng cao tư duy véc tơ phức:

- Cho một số phức z = x + iy ; được biểu diễn bởi điểm M(x;y) trên mặt phẳng phức.
- Gọi M' là ảnh của M trong phép quay tâm O (gốc tọa độ O) với góc quay α sẽ biểu diễn số phức tương ứng là: $z' = e^{i\alpha}z = (\cos\alpha + i.\sin\alpha)z$.
- Chứng minh điều trên cực kì dễ dàng: có OM' = |z'| = $|e^{i\alpha}z| = |z|$ $\{|e^{i\alpha}| = |\cos\alpha + i.\sin\alpha| = 1\}$
- Đặc biệt, khi quay một góc $90^0 = \frac{\pi}{2}$ thì ta nhận thấy: $e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i.\sin\frac{\pi}{2} = i$. Tức là ta chỉ việc nhân i vào trước một số phức đồng nghĩa với việc đã quay nó trong mặt phẳng phức một góc $+90^0 = \frac{\pi}{2}$.
- Tương tự, khi ta nhân (-i) vào trước một số phức đồng nghĩa với việc ta đã quay nó trong mặt phẳng phức một góc $-90^0 = -\frac{\pi}{2}$.
- Phép quay bảo toàn mô đun của các số phức. Có ứng dụng rất nhiều trong việc tạo hình và giải bài toán bằng hình học phẳng.

Bài toán 6.8.1. Cho hình vuông ABCD biểu diễn 4 số phức $z_A = 3 + 4i$, $z_B = 4 - 5i$, z_C , z_D. Hãy tìm các số phức z_C và z_D ?

✍ **Giải:**

- Sử dụng phép quay để giải bài toán này.



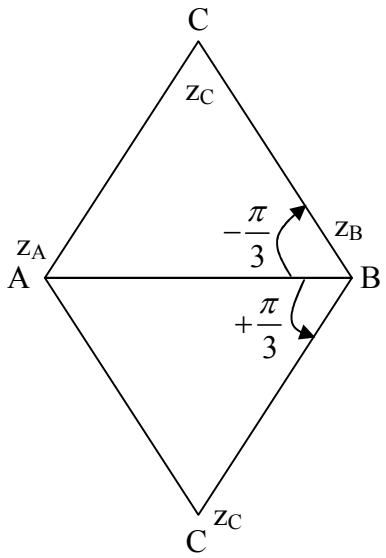
- **Trường hợp 1:** Hình bên trên.
- Điểm C là ảnh của A qua phép quay tâm B góc quay ($-90^0 = -\frac{\pi}{2}$): $Q_{(B,-90^0)} = Q_{(B;-\pi/2)}$

- Phép quay: $-\frac{\pi}{2}$ là nhân với số phức: $e^{i(-\frac{\pi}{2})} = -i$
- Vậy ta có: $C = Q_{(B;-\frac{\pi}{2})}(A) \to z_C - z_B = e^{i(-\frac{\pi}{2})}(z_A - z_B) = -i(z_A - z_B) \to z_C = z_B - i(z_A - z_B)$
- Thay số: $z_C = z_B - i(z_A - z_B) = 4 - 5i - i(3 + 4i - 4 + 5i) = 13 - 4i \to C(13;-4)$
- $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} \to z_D - z_C = z_A - z_B \to z_D = z_C + z_A - z_B = 13 - 4i + 3 + 4i - 4 + 5i = 12 + 5i \to D(12;5)$
- **Trường hợp 2:** Hình bên dưới.
- Điểm C là ảnh của A qua phép quay tâm B góc quay ($90^0 = \frac{\pi}{2}$):
- $C = Q_{(B;\frac{\pi}{2})}(A) \to z_C - z_B = e^{i(\frac{\pi}{2})}(z_A - z_B) = i(z_A - z_B) \to z_C = z_B + i(z_A - z_B)$
- Thay số: $z_C = z_B + i(z_A - z_B) = 4 - 5i + i(3 + 4i - 4 + 5i) = -5 - 6i \to C(-5;-6)$
- $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} \to z_D - z_C = z_A - z_B \to z_D = z_C + z_A - z_B = -5 - 6i + 3 + 4i - 4 + 5i = -6 + 3i \to D(-6;3)$
- **Ghi nhớ:** Nếu chúng ta dùng phương pháp tọa độ Oxy thì khá là dài và khó khăn.

Bài toán 6.8.2. Cho tam giác đều ABC biểu diễn 3 số phức $z_A = 2 + i$, $z_B = 3 - 2i$, z_C. Hãy tìm các số phức z_C ?

✍ **Giải:**

- Sử dụng phép quay để giải bài toán này.



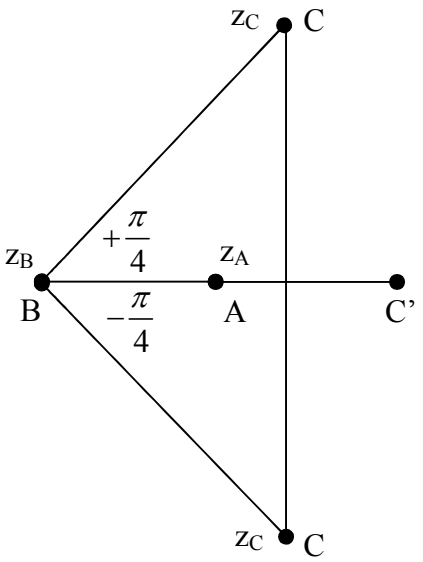
- **Trường hợp 1:** Hình bên trên.
- C là ảnh của A qua phép quay tâm B góc quay ($-60^0 = -\frac{\pi}{3}$)

- Ta có:
- $C = Q_{(B;-\frac{\pi}{3})}(A) \to z_C - z_B = e^{i(-\frac{\pi}{3})}(z_A - z_B) = (\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2})(z_A - z_B) \to z_C = z_B + (\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2})(z_A - z_B)$
- Thay số: $z_C = z_B + (\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2})(z_A - z_B) = 3 - 2i + (\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2})(2 + i - 3 + 2i) = \frac{5+3\sqrt{3}}{2} + \frac{-1+\sqrt{3}}{2}i$
- Suy ra tọa độ: $C = (\frac{5+3\sqrt{3}}{2}; \frac{-1+\sqrt{3}}{2})$
- **Trường hợp 2:** Hình bên dưới.
- C là ảnh của A qua phép quay tâm B góc quay ($60^0 = \frac{\pi}{3}$)
- Ta có:
- $C = Q_{(B;\frac{\pi}{3})}(A) \to z_C - z_B = e^{i(\frac{\pi}{3})}(z_A - z_B) = (\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2})(z_A - z_B) \to z_C = z_B + (\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2})(z_A - z_B)$
- Thay số: $z_C = z_B + (\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2})(z_A - z_B) = 3 - 2i + (\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2})(2 + i - 3 + 2i) = \frac{5-3\sqrt{3}}{2} - \frac{1+\sqrt{3}}{2}i$
- Suy ra tọa độ: $C = (\frac{5-3\sqrt{3}}{2}; -\frac{1+\sqrt{3}}{2})$

Bài toán 6.8.3. Cho tam giác ABC biểu diễn 3 số phức $z_A = 1 + 2i$, $z_B = 3 + 2i$, z_C. Biết góc $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{4}$ và BC = 2BA. Hãy tìm các số phức z_C ?

✍ **Giải:**

- Sử dụng phép quay để giải bài toán này.



- Gọi C' là điểm nằm trên BA sao cho BC' = BC = 2BA. Suy ra: $\overrightarrow{BC'} = 2\overrightarrow{BA} \to z_{C'} - z_B = 2(z_A - z_B)$
- C là ảnh của C' qua phép quay tâm B với góc quay: $\pm\frac{\pi}{4}$
- Ta có: $z_C - z_B = e^{i(\pm\frac{\pi}{4})}(z_{C'} - z_B) = 2e^{i(\pm\frac{\pi}{4})}(z_A - z_B) = (\sqrt{2} \pm i\sqrt{2})(z_A - z_B)$
- $\to z_C = z_B + (\sqrt{2} \pm i\sqrt{2})(z_A - z_B) = 3 + 2i + (\sqrt{2} \pm i\sqrt{2})(1 + 2i - 3 - 2i) = (3 - 2\sqrt{2}) + (2 \pm 2\sqrt{2})i$

Ví dụ 6.8.4. Cho tam giác ABC biểu diễn 3 số phức $z_A = 3 - 2i$, $z_B = 1 + 3i$, z_C. Biết góc $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}$ và BC = BA. Hãy tìm các số phức z_C biểu diễn điểm C ?

Ví dụ 6.8.5. Cho tam giác ABC biểu diễn 3 số phức $z_A = 3 + 4i$, $z_B = 2 + 5i$, z_C. Biết góc $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}$ và BC = 3BA. Hãy tìm các số phức z_C biểu diễn điểm C ?

Ví dụ 6.8.6. Cho hình vuông ABCD biểu diễn 4 số phức $z_A = 1 + 4i$, $z_B = 2 + i$. Hãy tìm các số phức z_C và z_D biểu diễn điểm C và D?

Ví dụ 6.8.7. Cho hình bình hành ABCD biểu diễn 4 số phức $z_A = 2 + i$, $z_B = 3 + 4i$. Có AB = 2AD và góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Hãy tìm các số phức z_C và z_D biểu diễn điểm C và D?

6.9. Bài toán tương giao trên mặt phẳng phức – Hệ phương trình mô đun phức:

- Đa số các bài toán tương giao đều yêu cầu tìm số nghiệm của một hệ phương trình phức.
- Điển hình nhất vẫn là ba loại hệ phương trình đó là: hệ 2 đường thẳng hoặc hệ hai đường tròn hoặc hệ một đường thẳng và một đường tròn.
- Thường thì dạng bài toán này có hai loại là: định tính (cho biết số nghiệm hoặc số giao điểm) và định lượng (tức là đi tìm tọa độ giao điểm của các đường cong).
- **Hệ phương trình tương giao giữa hai đường:** Tìm nghiệm của hệ phương trình phức dạng mô đun chúng ta thường chỉ xét tới hai loại đường là: đường thẳng và đường tròn.

Bài toán 6.9.1. Bài toán giao điểm của hai đường thẳng: Tìm giao điểm của hai đường thẳng sau:

$$\begin{cases} |z+1|=|z-2i| \\ |z+3i|=|\overline{z}-1-2i| \end{cases}$$

✍ **Giải:**

- Gọi z = x + iy rồi thay vào hệ phương trình đã cho, ta biết được:
- $$\begin{cases} |z+1|=|z-2i| \\ |z+3i|=|\overline{z}-1-2i| \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} |(x+1)+iy|=|x+i(y-2)| \\ |x+i(y+3)|=|(x-1)-i(y+2)| \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2+y^2=x^2+(y-2)^2 \\ x^2+(y+3)^2=(x-1)^2+(y+2)^2 \end{cases}$$
- Rút gọn ta đưa về hệ phương trình bậc nhất 2 ẩn:
- $$\begin{cases} (x+1)^2+y^2=x^2+(y-2)^2 \\ x^2+(y+3)^2=(x-1)^2+(y+2)^2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y=3 \\ 2x+2y=-4 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-11}{2} \\ y=\dfrac{7}{2} \end{cases}$$
- Vậy giao điểm là điểm biểu diễn số phức: $z=\dfrac{-11}{2}+\dfrac{7}{2}i$

Ví dụ 6.9.2. Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng sau: $\begin{cases} |z+2|=|z-i| \\ |z+i+2|=|\overline{z}-3| \end{cases}$

Ví dụ 6.9.3. Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng sau: $\begin{cases} |z-1+2i|=|z-3-2i| \\ |z+1|=|z-2i| \end{cases}$

Bài toán 6.9.4. Bài toán giao điểm của đường thẳng và đường tròn: Tìm nghiệm phức của hệ phương trình phức sau: $\begin{cases} |z+1|=|z-i| & (1) \\ |z-i-2|=3 & (2) \end{cases}$

✍ **Giải:**

- Ta biến đổi pt (1) $\Leftrightarrow |(x+1)+iy|=|x+i(y-1)| \leftrightarrow (x+1)^2+y^2=x^2+(y-1)^2 \leftrightarrow x+y=0 \ \ (\Delta)$
- **Đến đây, nếu bài toán là định tính,** tức là chỉ yêu cầu cho biết vị trí tương đối của đường thẳng (1) và đường tròn (2), cũng tức là bài toán chỉ hỏi số nghiệm phức của hệ phương trình

đã cho, thì ta làm theo phương pháp định tính, như sau:

- Đã biết phương trình (2) là đường tròn (C) có tâm I(2;1) và bán kính R = 3. Ta chỉ cần tính khoảng cách từ I tới đường thẳng (d) và song song với R là xong:
- $d(\mathrm{I},\Delta)=\dfrac{|2+1|}{\sqrt{1+1}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}<R=3$. Vậy suy ra đường thẳng Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt.
- **Nếu bài toán là định lượng,** thì ta phải làm bình thường, tức là viết phương trình đường tròn (C) ở phương trình (2) ra rồi thế: y = -x từ (1) vào: (2) $\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=9$ (3)
- Thế y = -x vào phương trình trên, ta được:
- $(x-2)^2+(-x-1)^2=9\leftrightarrow 2x^2-2x-4=0\rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\rightarrow y=1\rightarrow z_1=-1+i\\x=2\rightarrow y=-2\rightarrow z_2=2-2i\end{array}\right.$
- **Ghi nhớ:** Tùy vào bài toán định tính (đếm số nghiệm) hay định lượng (xác định rõ nghiệm) mà ta chọn phương pháp cho phù hợp.

Ví dụ 6.9.5. Bài toán giao điểm của đường thẳng và đường tròn: Tìm nghiệm phức của hệ phương trình phức sau: $\begin{cases}|z+2i|=|z-1-2i| & (1)\\ |z-i-1|=3 & (2)\end{cases}$

Bài toán 6.9.6. Tương giao của hai đường tròn: Tìm nghiệm phức thỏa mãn: $\begin{cases}|z+2i-1|=3 & (1)\\ |z-i+2|=5 & (2)\end{cases}$

✍ **Giải:**

- **Nếu bài toán là định tính:** Ta đã biết cách xác định vị trí tương đối của hai đường tròn.
- Phương trình (1) là đường tròn tâm $I_1(1;-2)$ và bán kính $R_1 = 3$.
- Phương trình (2) là đường tròn tâm $I_2(-2;1)$ và bán kính $R_2 = 5$.
- Khoảng cách $I_1I_2 = \sqrt{3^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$
- $R_1 + R_2 = 8$ và $|R_1 - R_2| = 2$.
- Suy ra: $|R_1-R_2|<I_1I_2<R_1+R_2\rightarrow$ hai đường tròn này cắt nhau tại hai điểm phân biệt.
- **Nếu bài toán là định lượng:** Ta phải lập hệ phương trình hai đường tròn và giải như đã làm như trong hình phẳng Oxy.
- Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}(x-1)^2+(y+2)^2=9 & (1)\\ (x+2)^2+(y-1)^2=25 & (2)\end{cases}$
- Lấy (2) – (1) vế theo vế, ta được: $6x-6y=16\rightarrow y=\dfrac{3x-8}{3}$, thế vào (1):
- (1) $\Leftrightarrow (x-1)^2+(\dfrac{3x-8}{3}+2)^2=9\leftrightarrow 9x^2-15x-34=0\rightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=\ldots\rightarrow y_1\\x_2=\ldots\rightarrow y_2\end{array}\right.$

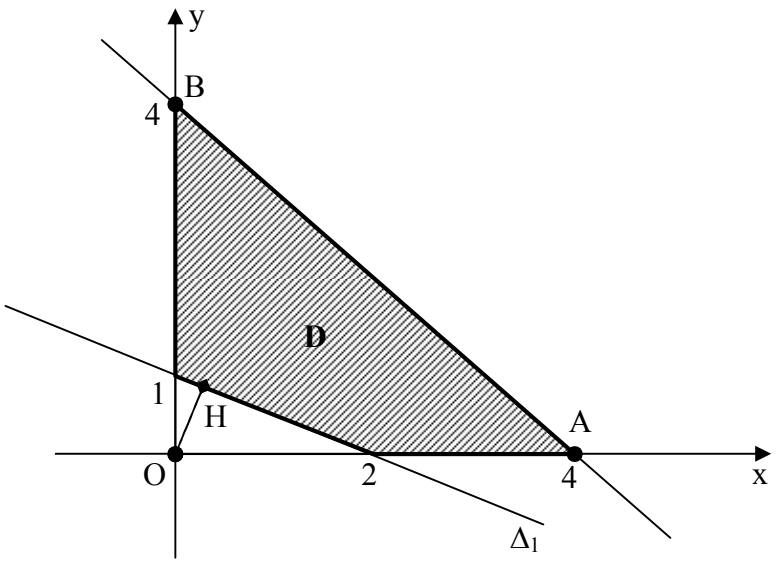
Ví dụ 6.9.7. Tìm nghiệm phức của hệ phương trình phức sau: $\begin{cases}|z+i|=2 & (1)\\ |z-i+3|=4 & (2)\end{cases}$

6.10. Biểu diễn số phức là một miền trên hình phẳng – Cực trị phức trên miền D:

Bài toán 6.10.1. Cho số phức z = x + iy có điểm biểu diễn M(x;y) nằm trong miền D được xác định bởi: $D = \{0 \le x, y \ ; \ x + 2y \ge 2 \ ; \ x + y \le 4\}$. Hãy xác định giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các biểu thức: P = |z| và Q = |z – 3 + i| ?

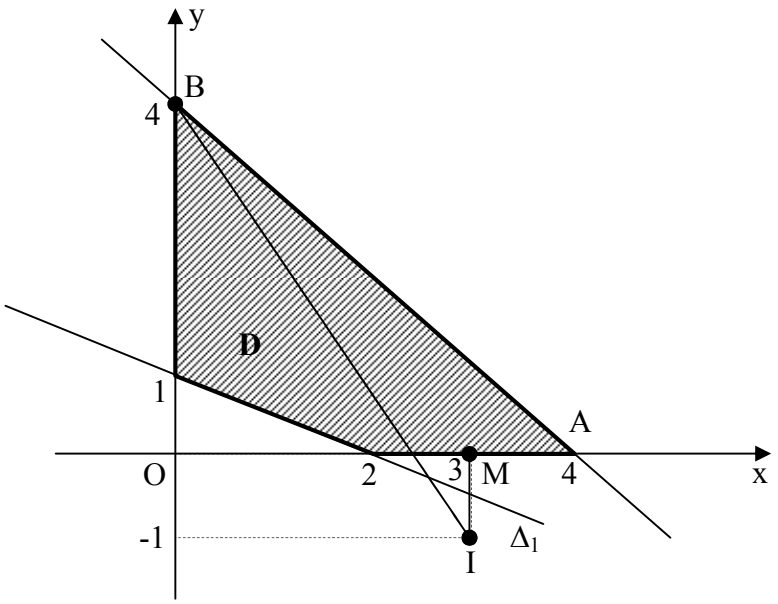
✍ **Giải:**

- Dạng bài toán này có thể dùng bất đẳng thức đại số đánh giá được, tuy nhiên nó rất rườm rà và khó khăn, đôi khi còn quá dễ nhầm và ngộ nhận. Cách tối ưu nhất là sử dụng phương pháp hình học trên mặt phẳng phức. Chủ yếu là chúng ta phải xác định tương đối chính xác được miền D và từ đó có thể rút ra cách làm cũng như các nhận xét tối ưu nhất cho bài toán.
- Miền D ở bài toán này được cho dưới dạng miền xác định bởi các đường thẳng đã được biết tỉ mỉ ở chương trình lớp 10 rồi.



- **Xét biểu thức** P = |z| = OM , trong đó M là một điểm thuộc miền D.
- Quan sát nhanh trên hình nhận thấy P = |z| = OM lớn nhất khi M trùng với điểm A và điểm B. Khi đó: $z_M = z_A = 4$ hoặc $z_M = z_B = 4i$ và $P_{max} = |z|_{max} = OA = OB = 4$
- P = |z| = OM nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng Δ_1. Cũng có thể tính nhanh giá trị nhỏ nhất của P = |z| = OM bằng hệ thức lượng trong tam giác vuông.
- $P_{min} = |z|_{min} = OH = d(O, \Delta_1) = \dfrac{1.2}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$
- Việc tìm tọa độ điểm H biểu diễn số phức z_H để có P_{min} được đưa về tìm hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng Δ_1. Phương trình đường thẳng Δ_1: x + 2y – 2 = 0.
- Gọi H = (2 – 2h;h) nằm trên Δ_1 là hình chiếu vuông góc của O lên Δ_1.

- VTCP của Δ_1 là: $\overrightarrow{u_{\Delta 1}} = (2;-1)$. Véc tơ: $\overrightarrow{OH} = (2-2h;h)$
- Suy ra: $\overrightarrow{u_{\Delta 1}}.\overrightarrow{OH} = 0 \leftrightarrow 2(2-2h)-1(h) = 0 \leftrightarrow h = \frac{4}{5} \rightarrow H = (\frac{2}{5};\frac{4}{5}) = z_H = \frac{2}{5}+\frac{4i}{5}$
- **Xét biểu thức:** Q = |z – 3 + i| = IM , trong đó M là một điểm thuộc miền D và I là điểm biểu diễn số phức $z_I = 3 - i$

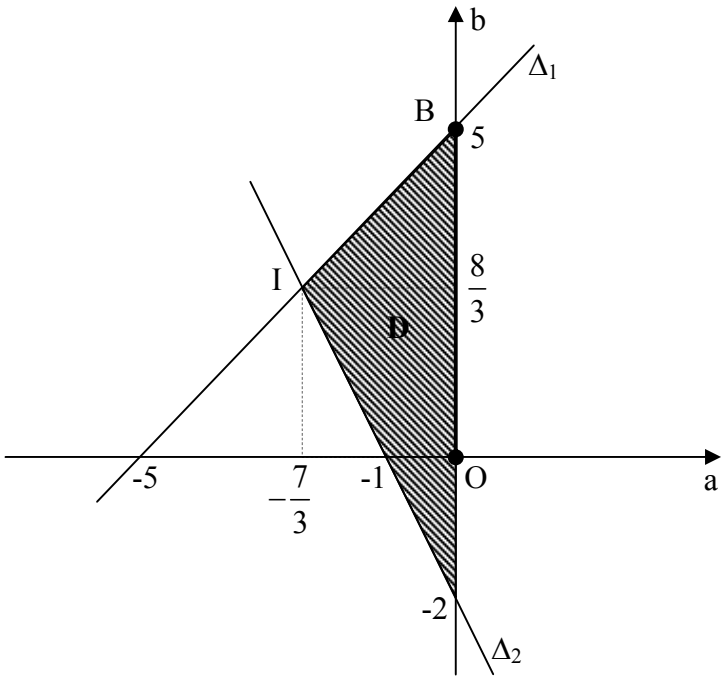


- Giá trị lớn nhất của Q tương ứng là: $IB = Q_{max} = |z_B - z_I| = |4i - 3 + i| = \sqrt{34} \Leftrightarrow z = z_B = 4i$
- Giá trị nhỏ nhất của Q tương ứng là: $IM = Q_{min} = |z_M - z_I| = |3 - 3 + i| = 1 \Leftrightarrow z = z_M = 3$.
- **Ghi nhớ:** *Khi đã xác định và phác họa hơi chính xác được miền D thì việc xác định MAX và MIN của một biểu thức sẽ rất dễ dàng.*

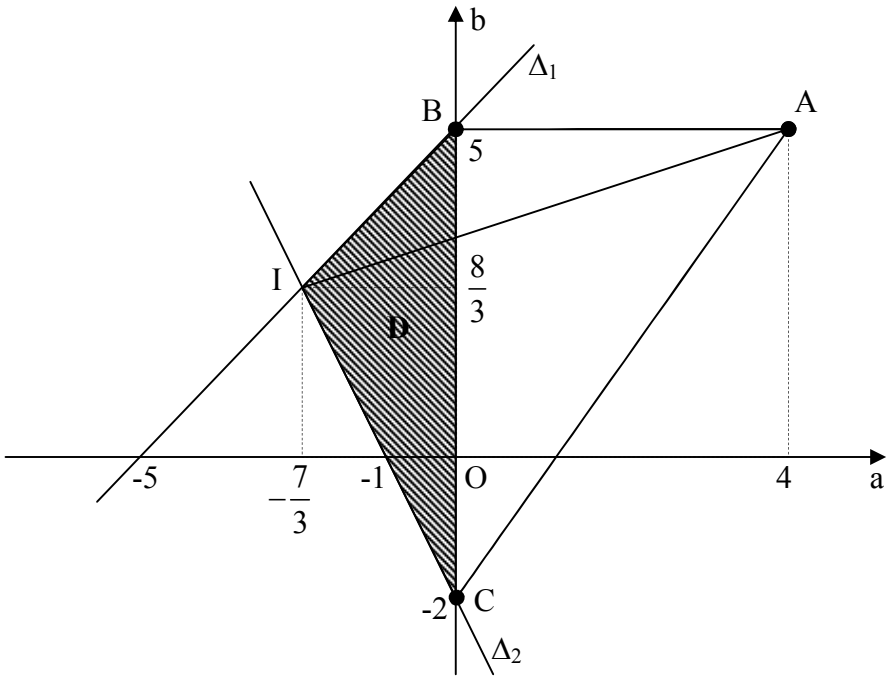
Bài toán 6.10.2. Cho số phức z = a + ib , trong đó a là số thực không dương và đồng thời là hệ số của tam thức bậc 2: $f(x) = x^2 + ax + b$. Biết rằng: $f(-1) \le 6$ và $f(2) \ge 2$. Hãy xác định giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các biểu thức: P = |z| và Q = |z – 4 – 5i| ?

✍ **Giải:**

- Đôi khi bài toán cũng cho phần thực và phần ảo dưới dạng hệ số của một tam thức bậc hai, chúng ta vẫn xác định và phác họa miền D như đã làm với bài toán trên.
- Số thực a không dương tức là: $a \le 0$
- Ta có: $f(-1) \le 6 \leftrightarrow 1 - a + b \le 6 \leftrightarrow b \le 5 + a$ (Δ_1)
- $f(2) \ge 2 \leftrightarrow 4 + 2a + b \ge 2 \leftrightarrow b \ge -2a - 2$ (Δ_2)
- Suy ra miền $D = \{a \le 0 \ ; \ b \le 5 + a \ ; \ b \ge -2a - 2\}$
- Hình vẽ minh họa miền D trên mặt phẳng phức:



- Giao điểm của hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 là điểm I có tọa độ: $I = (-\frac{7}{3};\frac{8}{3})$.
- **Biểu thức P** = |z| = OM, trong đó M là một điểm biểu diễn số phức z thuộc miền xác định D.
- Giá trị nhỏ nhất của P bằng 0 vì O nằm trong miền D. Khi đó P_{min} = ⇔ M trùng với O.
- Giá trị lớn nhất của P là: P_{max} = OB = 5 ⇔ z = z_B = 5i.
- **Khảo sát biểu thức Q** = |z – 4 – 5i| = AM, trong đó M là điểm nằm trong miền D và A là điểm biểu diễn số phức z_A = 4 + 5i

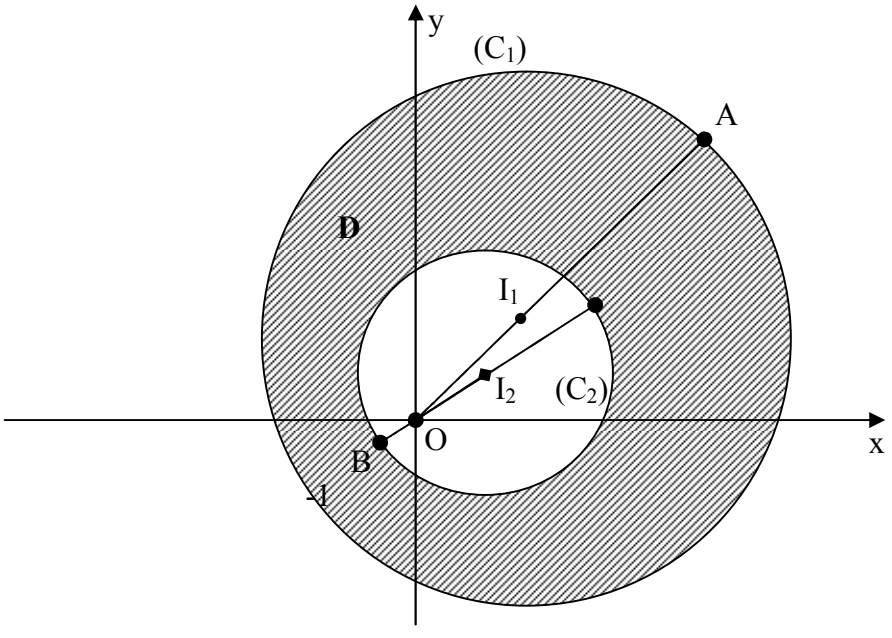


- Giá trị nhỏ nhất của biểu thức Q là: $Q_{min} = AB = 4 \Leftrightarrow z = z_B = 5i$.
- Để xác định giá trị lớn nhất của biểu thức Q ta đi tính độ dài đoạn AI và AC rồi so sánh:
- $AI = |z_A - z_I| = |4 + 5i - (-\frac{7}{3} + \frac{8}{3}i)| = \frac{\sqrt{410}}{3}$
- $AC = |z_A - z_C| = |4 + 5i - (-2i)| = \sqrt{65}$
- Vậy giá trị lớn nhất của Q là: $Q_{max} = AC = \sqrt{65} \Leftrightarrow z = z_C = -2i$.
- **Ghi nhớ:** *Đôi khi miền xác định D cho bởi điều kiện của các phần thực và phần ảo thông qua việc chúng được gán là hệ số của các đa thức đại số và từ điều kiện của đa thức ta tìm ra được điều kiện của phần thực vào phần ảo tương ứng.*
- *Khi đi xác định giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất ngoài việc quan sát nhanh chúng ta cũng nên tính toán những trường hợp có khả năng đạt cực trị để tránh ngộ nhận bởi hình vẽ sai tỉ lệ.*

Bài toán 6.10.3. Cho số phức z nằm trong miền D xác định bởi: $D = \{|z-2-3i| \le 6 \; ; |z-1-i| \ge 3\}$. Hãy xác định giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của: P = |z|?

✍ **Giải:**

- Miền D không được cho bởi giới hạn các đường thẳng và các đường cũng không được biểu diễn thông qua phần thực và phần ảo mà được giới hạn trực tiếp bởi các bpt phức cơ bản.
- $|z-2-3i| \le 6$ là miền nằm trong hình tròn (C_1) bao gồm cả đường tròn (C_1). Có tâm đường tròn là: $I_1 = z_{I1} = 2 + 3i$ và bán kính $R_1 = 6$.
- $|z-1-i| \ge 3$ là miền nằm ngoài hình tròn (C_2) bao gồm cả đường tròn (C_2). Có tâm đường tròn là: $I_2 = z_{I2} = 1 + i$ và bán kính $R_2 = 3$.
- Miền D được minh họa như hình vẽ:

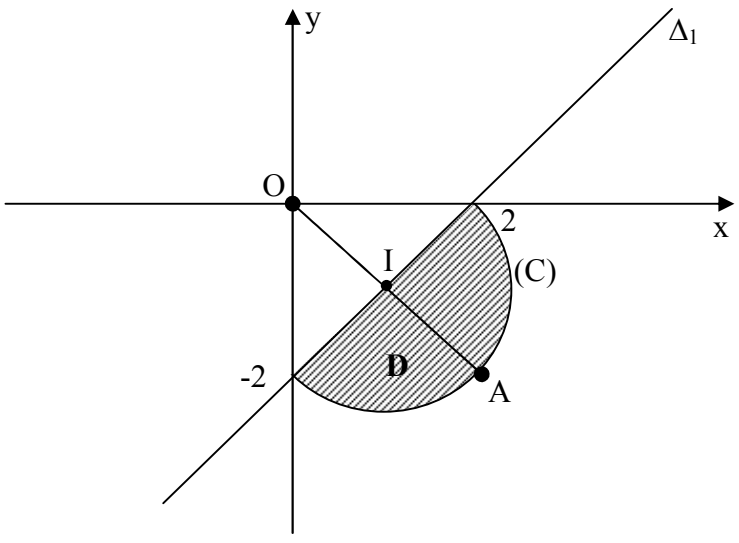


- **Khảo sát biểu thức** P = |z| = OM , trong đó M là điểm nằm trong miền D (là phần gạch chéo như hình vẽ minh họa).
- Thử điều kiện thấy được gốc tọa độ O nằm bên trong hình tròn (C_2) như hình vẽ:
- $|z_O - 1 - i| = |1 + i| = \sqrt{2} < 3$
- Suy ra giá trị lớn nhất của P là: $P_{max} = OA = OI_1 + I_1A = |z_{I1}| + R_1 = |2 + 3i| + 6 = 6 + \sqrt{13}$. Khi đó số phức z = z_A được tìm bằng công thức nhanh đã được trình bày ở những phần trước:
- $z_A = (1 + \frac{R_1}{|z_{I1}|}) z_{I1} = (1 + \frac{6}{|2 + 3i|})(2 + 3i) = (1 + \frac{6}{\sqrt{13}})(2 + 3i)$
- Giá trị nhỏ nhất của P là: $P_{min} = OB = |I_2B - OI_2| = |R_2 - |z_{I2}|| = |3 - |1 + i|| = |3 - \sqrt{2}| = 3 - \sqrt{2}$.
- Khi đó số phức z = z_B được tìm bằng công thức tính nhanh:
- $z_B = (1 - \frac{R_2}{|z_{I2}|}) z_{I2} = (1 - \frac{3}{|1 + i|})(1 + i) = (1 - \frac{3}{\sqrt{2}})(1 + i)$

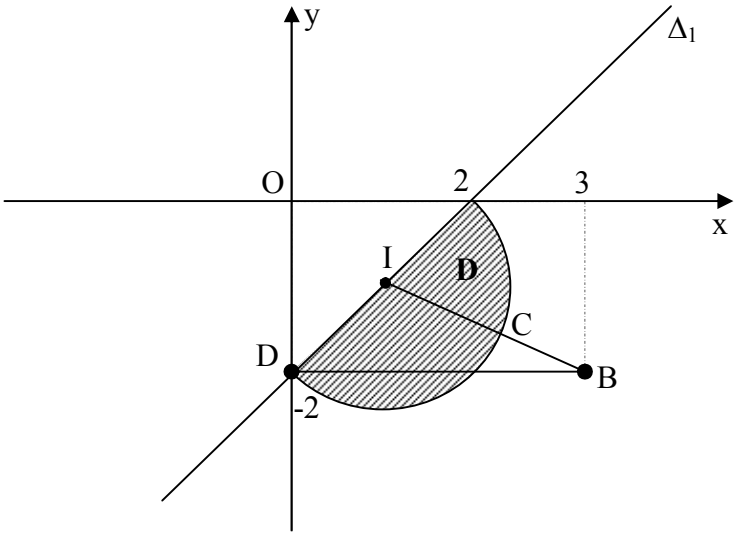
Bài toán 6.10.4. Cho số phức z nằm trong miền: $D = \{|z - 1 + i| \le \sqrt{2} \; ; |z - 1 - i| \ge |z - 3 + i|\}$. Hãy xác định giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của: P = |z| và Q = |z – 3 + 2i|?

✍ **Giải:**

- $|z - 1 + i| \le \sqrt{2}$ là miền nằm trong hình tròn (C) bao gồm cả đường tròn (C). Có tâm đường tròn là: I = z_I = 1 – i và bán kính R = $\sqrt{2}$.
- $|z - 1 - i| \ge |z - 3 + i| \leftrightarrow |(x - 1) + i(y - 1)| \ge |(x - 3) + i(y + 1)| \leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \ge (x - 3)^2 + (y + 1)^2$
- $\Leftrightarrow x - y \ge 2 \leftrightarrow y \le 2 - x$. Đây là miền nửa mặt phẳng nằm phía dưới đường thẳng Δ_1 có phương trình: $y = 2 - x$ (Δ_1)
- Hình vẽ minh họa miền D như hình vẽ bên dưới:



- **Khảo sát biểu thức:** P = |z| = OM , với M là một điểm biểu diễn số phức z nằm trong miền D.
- Giá trị nhỏ nhất của P là: P_{min} = OI = $|z_I|$ = |1 – i| = $\sqrt{2}$ ⇔ z = z_I = 1 – i .
- Giá trị lớn nhất của P là: P_{max} = OA = OI + IA = 2R = $2\sqrt{2}$ ⇔ z = z_A = 2 – 2i.
- **Khảo sát biểu thức:** Q = |z – 3 + 2i| = BM, với B là điểm biểu diễn: z_B = 3 – 2i như hình vẽ.



- Giá trị nhỏ nhất của Q là: Q_{min} = BC = BI – IC = $|z_B - z_I|$ – R = $|3-2i-(1-i)|-\sqrt{2}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$ ⇔ Số phức: z = z_C được tìm bằng cách đã được trình bày ở phần cơ bản của đường tròn.
- Giá trị lớn nhất của Q là: Q_{max} = BD = 3.

Ví dụ 6.10.5. Cho số phức z = x + iy, trong đó x, y là những số thực không âm thỏa mãn đồng thời các điều kiện: $x+y\le 8$; $x+3y\ge 6$. Hãy xác định giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các biểu thức: P = |z| và Q = |z – 5 – i| ? Xác định các giá trị tương ứng của z khi đó ?

Ví dụ 6.10.6. Cho số phức z = x + iy, trong đó x, y là những số thực thỏa mãn đồng thời các điều kiện: $0\le y$; $2x+y\le 6$; $3x+y\le 3$. Hãy xác định giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các biểu thức: P = |z| và Q = |z – 5 – i| ? Xác định các giá trị tương ứng của z khi đó ?

Ví dụ 6.10.7. Cho số phức z = x + iy, trong đó x, y là những số thực thỏa mãn đồng thời các điều kiện: $0\le (x-2)(y-2)$; $x+y\ge 2$; $x+2y\le 10$. Hãy xác định giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các biểu thức: P = |z| và Q = |z – 3 – i| ? Xác định các giá trị tương ứng của z khi đó ?

Ví dụ 6.10.8. Cho số phức z = a + ib, trong đó a, b là những số thực không âm đồng thời là các hệ số của tham thức bậc 2: $f(x)=x^2-2ax+b$. Biết rằng: $f(1)\le 5$; $f(2)\le 0$. Hãy xác định giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các biểu thức: P = |z| và Q = |z – 4 – 3i| ? Xác định các giá trị tương ứng của z khi đó ?

Ví dụ 6.10.9. Cho số phức z = a + ib, trong đó a, b là những số thực không âm đồng thời là các hệ số của tham thức bậc 2: $f(x)=x^2+ax+b$. Biết rằng: $f(1)\le 7$; $f(-1)\ge 3$. Hãy xác định giá trị lớn nhất

và giá trị nhỏ nhất của các biểu thức: P = |z| và Q = |z – 4 – 3i| ? Xác định các giá trị tương ứng của z khi đó ?

Ví dụ 6.10.10. Cho số phức z thỏa mãn: $|z-2|\leq 4$; $|z-2i|\geq 4$. Hãy xác định giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các biểu thức: P = |z| và Q = |z – 2 – 2i| ?

Ví dụ 6.10.11. Cho số phức z thỏa mãn: $|z-1|\leq 3$; $|z-2i|\leq 4$. Hãy xác định giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các biểu thức: P = |z| và Q = |z – 8 – 5i| ?

Ví dụ 6.10.12. Cho số phức z thỏa mãn: $|z-2|\leq 4$; $|z-1+i|\geq|z+1|$. Hãy xác định giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các biểu thức: P = |z| và Q = |z – 6 – 4i| ?

6.11. Bài toán tâm tỉ cự trên mặt phẳng phức:

- **Tâm tỉ cự của một hệ thức véc tơ:** Cho các điểm A , B , C biểu diễn các số phức tương ứng là z_A , z_B , z_C. Tìm điểm N thỏa mãn hệ thức véc tơ (còn gọi N là tâm tỉ cự của hệ thức véc tơ): $\alpha\overrightarrow{NA}+\beta\overrightarrow{NB}+\gamma\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{0}$.
- Đây là tài liệu số phức, mọi chứng minh hình học không thể trình bày hết được. Đôi khi một số kết quả phải bắt buộc chấp nhận từ hình học véc tơ. Ta chuyển từ véc tơ qua số phức:
- $\alpha(z_A-z_N)+\beta(z_B-z_N)+\gamma(z_C-z_N)=0$
- Tọa độ tâm tỉ cự N cũng như số phức z_N biểu diễn nó cần tìm là:
- $z_N=\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$
- **Chú ý rằng:** Khi $\alpha+\beta+\gamma=0$ thì không tồn tại tâm tỉ cự N.
- Tại sao gọi là tâm tỉ cự, ứng dụng của tâm tỉ cự khi nào thì chúng ta sẽ nghiên cứu kĩ dần dần bằng những bài toán mẫu được trình bày bên dưới:

Bài toán 6.11.1. Tìm điểm M biểu diễn số phức z_M sao cho biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất: $P=\alpha|z-z_A|^2+\beta|z-z_B|^2+\gamma|z-z_C|^2$. Tính giá trị nhỏ nhất đó: P_{min} = ?

✍ **Giải:**

- Gọi điểm A, B, C lần lượt biểu diễn số phức: z_A , z_B , z_C và N là tâm tỉ cự của biểu thức véc tơ: $\alpha\overrightarrow{NA}+\beta\overrightarrow{NB}+\gamma\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{0}$, biểu diễn số phức z_N. Khi đó ta đã biết: $z_N=\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$.
- Gọi M là điểm biểu diễn số phức z bất kì. Khi đó biểu thức tỉ cự đã cho được viết dưới dạng:
- $P=\alpha.MA^2+\beta.MB^2+\gamma.MC^2$
- Ta có: $P=\alpha.\overrightarrow{MA}^2+\beta.\overrightarrow{MB}^2+\gamma.\overrightarrow{MC}^2=\alpha.(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NA})^2+\beta.(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NB})^2+\gamma.(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC})^2$
- $P=(\alpha+\beta+\gamma)MN^2+\alpha.NA^2+\beta NB^2+\gamma NC^2+2\overrightarrow{MN}(\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC})$
- $P=(\alpha+\beta+\gamma)MN^2+\alpha.NA^2+\beta.NB^2+\gamma.NC^2$
- Ta có: ($\alpha.NA^2+\beta NB^2+\gamma NC^2$) không đổi vì A, B, C, N là cố định đã biết rõ. Vậy biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MN^2 nhỏ nhất ⇔ MN = 0 ⇔ M trùng với N ⇔ $z_M=z_N$.
- **Ghi nhớ:** Điều kiện để một biểu thức tỉ cự: $P=\alpha|z-z_A|^2+\beta|z-z_B|^2+\gamma|z-z_C|^2$ đạt giá trị nhỏ nhất ⇔ số phức z_N là tâm tỉ cự của hệ thức: $z_N=\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$.
- Giá trị nhỏ nhất khi đó tương ứng là:
- $P_{min}=\alpha.NA^2+\beta NB^2+\gamma NC^2=\alpha|z_N-z_A|^2+\beta|z_N-z_B|^2+\gamma|z_N-z_C|^2$

Ví dụ 6.11.2. Tìm số phức z_M sao cho P đạt giá trị nhỏ nhất: $P = 2|z-1+2i|^2 + 3|z-2i|^2 - |z-3|^2$.

Tính giá trị nhỏ nhất đó: P_{min} = ?

Ví dụ 6.11.3. Tìm số phức z_M sao cho P đạt giá trị nhỏ nhất: $P = |z-3+i|^2 + |z-4-i|^2 + 3|z-2i|^2$.

Tính giá trị nhỏ nhất đó: P_{min} = ?

Bài toán 6.11.4. Cho biểu thức tỉ cự: $P = \alpha|z-z_A|^2 + \beta|z-z_B|^2 + \gamma|z-z_C|^2$. Tìm số phức z_M sao cho:

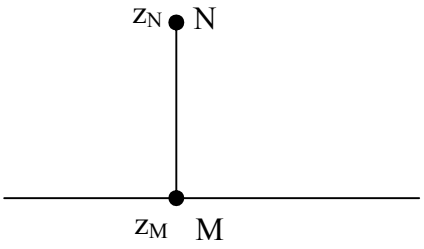
1. Số phức z_M thỏa mãn đường thẳng Δ: $|z - z_1| = |z - z_2|$ và giá trị của P nhỏ nhất? Tính P_{min} khi đó ?
2. Số phức z_M thỏa mãn đường tròn (C): $|z - z_0| = R$ và giá trị của P nhỏ nhất hoặc giá trị của P lớn nhất? Tìm các giá trị P_{min} và P_{max} khi đó ?

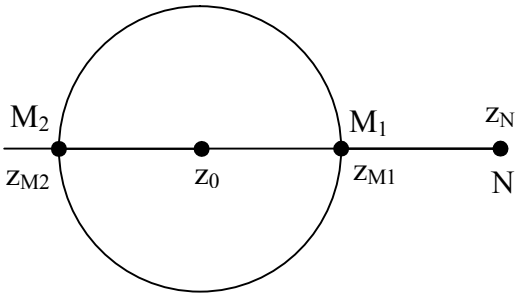
✍ **Giải:**

- Số phức z_N là tâm tỉ cự của biểu thức đã cho P. Suy ra: $z_N = \dfrac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$
- Biểu thức P khi đó được biến đổi thành: $P = (\alpha+\beta+\gamma)MN^2 + \alpha.NA^2 + \beta.NB^2 + \gamma.NC^2$
- Trong đó có: $(\alpha.NA^2 + \beta NB^2 + \gamma NC^2)$ không đổi.
- Như vậy P phụ thuộc hoàn toàn vào sự biến thiên của giá trị đoạn MN.

1. Số phức z_M thỏa mãn đường thẳng Δ: $|z - z_1| = |z - z_2|$ và giá trị của P nhỏ nhất? Tính P_{min} khi đó ?

- Khi điểm M chạy trên đường thẳng Δ thì để P_{min} ⇔ MN nhỏ nhất ⇔ M là hình chiếu vuông góc của N lên đường thẳng Δ.





- Khi đó $MN_{min} = d(N,\Delta)$.
- Giá trị nhỏ nhất của P là: $P_{min} = P = (\alpha+\beta+\gamma)(d(N,\Delta))^2 + \alpha.NA^2 + \beta.NB^2 + \gamma.NC^2$

2. Số phức z_M thỏa mãn đường tròn (C): $|z - z_0| = R$ và giá trị của P nhỏ nhất hoặc giá trị của P lớn nhất? Tìm các giá trị P_{min} và P_{max} khi đó ?

- Khi M chạy trên đường tròn (C) thì có hai trường hợp cực trị.
- Khi M = M_1 ở gần N nhất , ta đã biết tìm điểm M_1 ở những phần trên, thì P đạt giá trị nhỏ nhất:
- $P_{min} = (\alpha+\beta+\gamma)M_1N^2 + \alpha.NA^2 + \beta.NB^2 + \gamma.NC^2$
- Khi M = M_2 ở xa N nhất , ta đã biết tìm điểm M_2 ở những phần trên, thì P đạt giá trị lớn nhất:
- $P_{max} = (\alpha+\beta+\gamma)M_2N^2 + \alpha.NA^2 + \beta.NB^2 + \gamma.NC^2$

Ví dụ 6.11.5. Cho biểu thức tỉ cự: $P = |z-2i|^2 + 3|z-1+3i|^2 - |z-2|^2$. Tìm số phức z_M sao cho:

1. Số phức z_M thỏa mãn đường thẳng Δ: |z – 1| = |z – i| và giá trị của P nhỏ nhất? Tính P_{min} khi đó ?

2. Số phức z_M thỏa mãn đường tròn (C): |z – 3 – 4i| = 5 và giá trị của P nhỏ nhất hoặc giá trị của P lớn nhất? Tìm các giá trị P_{min} và P_{max} khi đó ?

Ví dụ 6.11.6. Cho biểu thức tỉ cự: $P = 2|z+i|^2 + |z-1-i|^2 - |z-3|^2$. Tìm số phức z_M sao cho:

1. Số phức z_M thỏa mãn đường thẳng Δ: |z – 2i| = |z + 2| và giá trị của P nhỏ nhất? Tính P_{min} khi đó ?

2. Số phức z_M thỏa mãn đường tròn (C): |z – 3 – 4i| = 5 và giá trị của P nhỏ nhất hoặc giá trị của P lớn nhất? Tìm các giá trị P_{min} và P_{max} khi đó ?

Bài toán 6.11.7. Cho biểu thức tỉ cự: $P = \alpha|z-z_A|^2 + \beta|z-z_B|^2 + \gamma|z-z_C|^2$. Trong đó P đã biết giá trị. Hãy tìm quỹ tích của điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn biểu thức trên?

✍ **Giải:**

- Gọi z_N là tâm tỉ cự của biểu thức P. Ta suy ra: $z_N = \dfrac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$
- $P = (\alpha+\beta+\gamma)MN^2 + \alpha.NA^2 + \beta.NB^2 + \gamma.NC^2 \rightarrow MN^2 = \dfrac{P - (\alpha.NA^2 + \beta.NB^2 + \gamma.NC^2)}{\alpha+\beta+\gamma}$
- Xảy ra các trường hợp sau:
- **Trường hợp 1:** $P < \alpha.NA^2 + \beta.NB^2 + \gamma.NC^2$, thì không tồn tại điểm M thỏa mãn.
- **Trường hợp 2:** $P = \alpha.NA^2 + \beta.NB^2 + \gamma.NC^2$, thì có duy nhất một điểm M ≡ N thỏa mãn.
- **Trường hợp 3:** $P > \alpha.NA^2 + \beta.NB^2 + \gamma.NC^2$, thì quỹ tích điểm biểu diễn là đường tròn (C) có tâm là tâm tỉ cự N (z_N) và có bán kính: $R = \sqrt{P - (\alpha.NA^2 + \beta.NB^2 + \gamma.NC^2)}$

Ví dụ 6.11.8. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện : $|z - 3i|^2 + |z + 1 - 2i|^2 + 2|z|^2 = 2018$.

Ví dụ 6.11.9. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z - i|^2 + |z + 3 + i|^2 + |2z - 4i + 2|^2 = 12$.

Ví dụ 6.11.10. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện: $|3z - 6i|^2 - |z + 2 + 3i|^2 + |z - 2i + 3|^2 = -34/3$.

6.12. Bình phương vô hướng trong số phức – Ứng dụng trên mặt phẳng phức:

- **Công thức hẹp:** Phép bình phương vô hướng trên mặt phẳng phức:
- Mỗi số phức z có thể coi như 1 véc tơ $\overrightarrow{u}$ và môđun số phức bằng độ dài véc tơ đó: $|z|=|\overrightarrow{u}|$
- Suy ra: $|z_1 \pm z_2| = |\overrightarrow{u_1} \pm \overrightarrow{u_2}| \rightarrow |z_1 \pm z_2|^2 = |\overrightarrow{u_1} \pm \overrightarrow{u_2}|^2 = |\overrightarrow{u_1}|^2 + |\overrightarrow{u_2}|^2 \pm 2|\overrightarrow{u_1}|.|\overrightarrow{u_2}|.\cos(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})$ (1)
- Góc tạo bởi hai véc tơ cũng có thể coi là góc tạo bởi hai số phức tương ứng: $\alpha = \widehat{z_1, z_2} = (\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})$
- Thay vào (1), ta được: $|z_1 \pm z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2|z_1|.|z_2|\cos(z_1, z_2)$
- Tổng quát bình phương vô hướng trong số phức:
- $z = mz_1 \pm nz_2 \rightarrow |z|^2 = |mz_1 + nz_2|^2 = m^2|z_1|^2 + n^2|z_2|^2 \pm 2.mn.|z_1|.|z_2|.\cos(z_1, z_2)$
- Góc tạo bởi hai số phức z_1 và z_2 cũng bằng góc tạo bởi hai số phức liên hợp: $\alpha = \widehat{z_1, z_2} = \widehat{\overline{z_1}, \overline{z_2}}$
- Ứng dụng của phép bình phương vô hướng vào một số bài toán số phức dạng đại số:

Bài toán 6.12.1. Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $|z_1| = 6$, $|z_2| = 8$ và $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{13}$. Hãy:

1. Tính giá trị của biểu thức: $P = |z_1 + z_2|$
2. Tính giá trị của biểu thức: $P = |2z_1 + 3z_2|$
3. Tính giá trị của biểu thức: $P = |2z_1 - 3z_2|$

✍ **Giải:**

- Gọi góc tạo bởi hai số phức z_1 và z_2 là: $\alpha = (z_1, z_2)$.

1. Tính giá trị của biểu thức: $P = |z_1 + z_2|$

- Từ giả thiết : $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{13} \rightarrow 52 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1|.|z_2|\cos\alpha$ (1)
- $P = |z_1 + z_2| \rightarrow P^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1|.|z_2|\cos\alpha$ (2)
- Lấy (1) + (2), vế theo vế, ta được: $P^2 + 52 = 2.|z_1|^2 + 2.|z_2|^2 = 200 \rightarrow P = 2\sqrt{37}$ (vì $P > 0$)

2. Tính giá trị của biểu thức: $P = |2z_1 + 3z_2|$

- Bình phương vô hướng biểu thức P ta được:
- Ta có: $P = |2z_1 + 3z_2| \rightarrow P^2 = 4|z_1|^2 + 9|z_2|^2 + 12|z_1|.|z_2|.\cos\alpha$ (3)
- Kết hợp nhân hai vế của (1) với 6 rồi cộng vế theo vế với (3), ta được:
- $\begin{cases} 312 = 6|z_1|^2 + 6|z_2|^2 - 12|z_1|.|z_2|.\cos\alpha \\ P^2 = 4|z_1|^2 + 9|z_2|^2 + 12|z_1|.|z_2|.\cos\alpha \end{cases} \rightarrow P^2 + 312 = 10|z_1|^2 + 15|z_2|^2 = 1320 \rightarrow P = 12\sqrt{7}$

3. Tính giá trị của biểu thức: $P = |2z_1 - 3z_2|$

- Ta có: $P = |2z_1 - 3z_2| \rightarrow P^2 = 4|z_1|^2 + 9|z_2|^2 - 12|z_1|.|z_2|.\cos\alpha$

- Kết hợp với (1), ta được:
- $\begin{cases} 312 = 6|z_1|^2 + 6|z_2|^2 - 12|z_1|.|z_2|.\cos\alpha \\ P^2 = 4|z_1|^2 + 9|z_2|^2 - 12|z_1|.|z_2|.\cos\alpha \end{cases} \rightarrow P^2 - 312 = -2|z_1|^2 + 3|z_2|^2 = 120 \rightarrow P = 12\sqrt{3}$

✍ **Ghi nhớ:** *Phép bình phương vô hướng rất hữu dụng trong các dạng bài toán này. Chúng ta có thể ghi nhớ cách làm cho lưu loát và tốc độ khi bước vào thi trắc nghiệm.*

Ví dụ 6.12.2. Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $|z_1| = 3$, $|z_2| = 4$ và $|z_1 - z_2| = 5$. Hãy:

1. Tính giá trị của biểu thức: $P = |z_1 + z_2|$
2. Tính giá trị của biểu thức: $P = |z_1 + 2z_2|$
3. Tính giá trị của biểu thức: $P = |3z_1 - 2z_2|$

Ví dụ 6.12.3. Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $|z_1| = 3$, $|z_2| = 4$ và $|z_1 - 2z_2| = 7$. Hãy:

1. Tính giá trị của biểu thức: $P = |2z_1 + z_2|$
2. Tính giá trị của biểu thức: $P = |2z_1 - 5z_2|$

Ví dụ 6.12.4. Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $|z_1| = 3$, $|z_2| = 4$ và $|2z_1 - 3z_2| = 6$. Hãy:

1. Tính giá trị của biểu thức: $P = |z_1 + 2z_2|$
2. Tính giá trị của biểu thức: $P = |3z_1 - 2z_2|$

Bài toán 6.12.5. Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $|2z - i| = |2 + iz|$ và $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$. Hãy tính:

1. Giá trị của biểu thức: $P = |z_1 + z_2|$
2. Giá trị của biểu thức: $P = |2z_1 + 3z_2|$
3. Giá trị của biểu thức: $P = |2z_1 - 3z_2|$

✍ **Giải:**

- Từ giả thiết ta suy ra: $|2z - i| = |-i.(iz + 2)| = |z - 2i|$. Bình phương vô hướng hai vế ta được:
- $4|z|^2 + |i|^2 - 4|z|.|i|.\cos(z,i) = |z|^2 + 4|i|^2 - 4|z|.|i|.\cos(z,i) \rightarrow |z|^2 = 1 \rightarrow |z| = 1$
- Hai số phức z_1 và z_2 có cùng mô đun: $|z_1| = |z_2| = 1$.
- Từ giả thiết: $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$, bình phương vô hướng ta được:
- $3 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2.|z_1|.|z_2|.\cos\alpha = 1^2 + 1^2 - 2.1.1.\cos\alpha \rightarrow \cos\alpha = -0,5$.
- Trong đó $\alpha = (z_1, z_2)$

1. Giá trị của biểu thức: $P = |z_1 + z_2|$

- Bình phương vô hướng ta được:
- $P^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2.|z_1|.|z_2|.\cos\alpha = 1^2 + 1^2 + 2.1.1.(-0,5) = 1 \rightarrow P = 1$.

2. Giá trị của biểu thức: $P = |2z_1 + 3z_2|$

- $P^2 = 4|z_1|^2 + 9|z_2|^2 + 2.2.3.|z_1|.|z_2|.\cos\alpha = 4.1^2 + 9.1^2 + 2.2.3.1.1.(-0,5) = 7 \rightarrow P = \sqrt{7}$.

3. Giá trị của biểu thức: P = $|2z_1 - 3z_2|$

- $P^2 = 4|z_1|^2 + 9|z_2|^2 - 2.2.3.|z_1|.|z_2|.\cos\alpha = 4.1^2 + 9.1^2 - 2.2.3.1.1.(-0,5) = 19 \to P = \sqrt{19}$.

Ví dụ 6.12.6. Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $|3z - i| = |iz + 3|$ và $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$. Hãy tính:

1. Giá trị của biểu thức: P = $|z_1 + z_2|$
2. Giá trị của biểu thức: P = $|2z_1 + 3z_2|$
3. Giá trị của biểu thức: P = $|2z_1 - 3z_2|$

Ví dụ 6.12.7. Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $|3z - i| = |iz + 3|$ và $|z_1 - z_2| = 1$. Hãy tính:

1. Giá trị của biểu thức: P = $|z_1 + z_2|$
2. Giá trị của biểu thức: P = $|3z_1 + z_2|$
3. Giá trị của biểu thức: P = $|z_1 - 2z_2|$

Bài toán 6.12.8. Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $|z_1 - 2z_2| = 2$ và $|3z_1 + z_2| = 3$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: P = $|z_1| + |z_2|$?

✍ **Giải:**

- $\begin{cases} |z_1 - 2z_2| = 2 \to 4 = |z_1|^2 + 4|z_2|^2 - 4|z_1|.|z_2|\cos\alpha \\ |3z_1 + z_2| = 3 \to 9 = 9|z_1|^2 + |z_2|^2 + 6|z_1|.|z_2|\cos\alpha \end{cases} \to \begin{cases} 12 = 3|z_1|^2 + 12|z_2|^2 - 12|z_1|.|z_2|\cos\alpha \\ 18 = 18|z_1|^2 + 2|z_2|^2 + 12|z_1|.|z_2|\cos\alpha \end{cases}$
- Cộng vế với vế ta được: $30 = 21|z_1|^2 + 14|z_2|^2$ (1)
- Áp dụng BĐT bunhia ta có:
- $P^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 = (\frac{1}{\sqrt{21}}.\sqrt{21}|z_1| + \frac{1}{\sqrt{14}}.\sqrt{14}|z_2|)^2 \le (\frac{1}{21} + \frac{1}{14})(21|z_1|^2 + 14|z_2|^2) = \frac{5}{42}.30 = \frac{25}{7}$
- Suy ra: $P \le \frac{5\sqrt{7}}{7}$. Vậy giá trị lớn nhất của P là: $P_{max} = \frac{5\sqrt{7}}{7}$

Ví dụ 6.12.9. Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $|z_1 - 2z_2| = 2$ và $|2z_1 + 3z_2| = 3$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của các biểu thức:

1. P = $|z_1| + |z_2|$?
2. P = $2|z_1| + 3|z_2|$?
3. P = $|z_1 z_2|$?

Bài toán 6.12.10. Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $z_1 + z_2 = 8 + 6i$ và $|z_1 - z_2| = 4$. Hãy:

1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: P = $|z_1| + |z_2|$
2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: P = $2|z_1| + 3|z_2|$

✍ **Giải:**

- Ta có: $|z_1 + z_2| = |8 + 6i| = 10 \to 100 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1|.|z_2|.\cos\alpha$ (1)

- Từ: $|z_1 - z_2| = 4 \to 16 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1|.|z_2|.\cos\alpha$ (2)
- Cộng 2 phương trình (1) + (2) vế theo vế ta được:
- $116 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$

1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: P = |z1| + |z2|

- Áp dụng BĐT bunhia: $P^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \le (1+1)(|z_1|^2 + |z_2|^2) = 116 \to P \le \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$.
- Suy ra giá trị lớn nhất của P là: $P_{max} = 2\sqrt{29}$.

2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: P = 2|z1| + 3|z2|

- Áp dụng BĐT bunhia: $P^2 = (2|z_1| + 3|z_2|)^2 \le (4+9)(|z_1|^2 + |z_2|^2) = 13.58 \to P \le \sqrt{754}$.
- Suy ra giá trị lớn nhất của P là: $P_{max} = \sqrt{754}$.
- Điều kiện xảy ra dấu "=" chúng ta không quá quan trọng trong các bất đẳng thức COSI hay BUNHIA về mô đun. Chỉ các điều kiện về bất đẳng thức tam giác mới khó xảy ra.

Bài toán 6.12.11. Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $z_1 + 2z_2 = 8 + 6i$ và $|z_1 - z_2| = 6$. Hãy:

1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: P = |z1| + |z2|
2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: P = 2|z1| + 3|z2|

✍ **Giải:**

- Ta có: $|z_1 + 2z_2| = |8 + 6i| = 10 \to 100 = |z_1|^2 + 4|z_2|^2 + 4|z_1|.|z_2|.\cos\alpha$ (1)
- Từ: $|z_1 - z_2| = 4 \to 16 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1|.|z_2|.\cos\alpha$
- $\to 32 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 - 4|z_1|.|z_2|.\cos\alpha$ (2)
- Cộng 2 phương trình (1) + (2) , vế theo vế ta được:
- $132 = 3|z_1|^2 + 6|z_2|^2 \leftrightarrow |z_1|^2 + 2|z_2|^2 = 44$ (3)

1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: P = |z1| + |z2|

- BĐT bunhia: $P^2 = (1.|z_1| + \frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}|z_2|)^2 \le (1 + \frac{1}{2})(|z_1|^2 + 2|z_2|^2) = \frac{3}{2}.44 = 66 \to P \le \sqrt{66}$.
- Suy ra giá trị lớn nhất của P là: $P_{max} = \sqrt{66}$.

2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: P = 2|z1| + 3|z2|

- Áp dụng BĐT bunhia:
- $P^2 = (2|z_1| + 3|z_2|)^2 = (2.|z_1| + \frac{3}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}|z_2|)^2 \le (4 + \frac{9}{2})(|z_1|^2 + 2|z_2|^2) = \frac{17}{2}.44 = 374 \to P \le \sqrt{374}$
- Suy ra giá trị lớn nhất của P là: $P_{max} = \sqrt{374}$

Ví dụ 6.12.12. Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $z_1 + z_2 = 3 + 4i$ và $|z_1 - z_2| = 4$. Hãy:

1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = |z_1| + |z_2|$

2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = |z_1| + 2|z_2|$

Ví dụ 6.12.13. Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $2z_1 + 3z_2 = 3 + 4i$ và $|z_1 - z_2| = 12$. Hãy:

1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = |z_1| + |z_2|$

2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = 3|z_1| + 2|z_2|$

✍ **Ghi nhớ:** *Hai số phức vuông pha là hai số phức tạo với nhau một góc:* $\alpha = \pm 90^\circ = \pm\frac{\pi}{2}$. *Tính chất quan trọng của hai số phức vuông pha:* $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \Leftrightarrow |z_1 + z_2| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2}$

Bài toán 6.12.14. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z^2 + 3| = 2|z|$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của |z| ?

✍ **Giải:**

- Gọi góc tạo bởi: z^2 và 3 là: $\alpha = (z^2, 3)$. Bình phương vô hướng biểu thức giả thiết ta được:
- $|z^2 + 3| = 2|z| \leftrightarrow |z^2|^2 + 9 + 2.3.|z^2|.\cos\alpha = 4|z|^2 \leftrightarrow |z|^4 + 9 + 6.|z|^2.\cos\alpha = 4|z|^2$
- Đặt ẩn phụ: $t = |z|^2 > 0$ (vì khi z = 0, không thỏa mãn)
- Biểu thức trở thành: $t^2 + 9 + 6t\cos\alpha = 4t \leftrightarrow -1 \le \cos\alpha = \frac{4t - t^2 - 9}{6t} \le 1$
- Xét điều kiện: $\frac{4t - t^2 - 9}{6t} \le 1 \to t^2 - 2t + 9 \ge 0$ (hiển nhiên đúng)
- Xét điều kiện: $-1 \le \frac{4t - t^2 - 9}{6t} \to t^2 - 10t + 9 \le 0 \leftrightarrow 1 \le t \le 9$
- Suy ra: $1 \le t = |z|^2 \le 9 \to 1 \le |z| \le 3$
- Vậy giá trị lớn nhất của |z| là: $|z|_{max} = 3$. Giá trị nhỏ nhất của |z| là: $|z|_{min} = 1$.

Ví dụ 6.12.15. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z^2 + 2| = 2|z|$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của |z| ?

Ví dụ 6.12.16. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z + \frac{1}{z}| = \sqrt{2}|z|$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của |z| ?

Bài toán 6.12.17. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: $|\frac{12z - i}{3 + 4iz}| \le 1$. Tìm giá trị lớn nhất của |z| ?

✍ **Giải:**

- Xử lí mô đun rút gọn biểu thức: $|\frac{12z-i}{3+4iz}|\le 1\leftrightarrow|\frac{12z-i}{i(4z-3i)}|\le 1\leftrightarrow|\frac{12z-i}{4z-3i}|\le 1\leftrightarrow|12z-i|\le|4z-3i|$
- Gọi góc tạo bởi z và i là: $\alpha=(z,i)$. Bình phương vô hướng biểu thức trên ta được:
- $|12z-i|^2\le|4z-3i|^2\leftrightarrow 144|z|^2+1-24|z|.\cos\alpha\le 16|z|^2+9-24.|z|.\cos\alpha\leftrightarrow 128|z|^2\le 8$
- $\Leftrightarrow |z|^2\le\frac{1}{16}\leftrightarrow|z|\le\frac{1}{4}$
- Vậy giá trị lớn nhất của |z| là: $|z|_{max}=1/4$

Ví dụ 6.12.18. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: $|\frac{6z-2i}{3+4iz}|\le 1$. Tìm giá trị lớn nhất của |z| ?

Ví dụ 6.12.19. Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: $|\frac{2z-3i}{2+3iz}|\le 1$. Tìm giá trị lớn nhất của |z| ?

Bài toán 6.12.20. (TL) Cho số phức z thỏa mãn: $3|z-i|+5|z+i|=14$. Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của |z| ?

✍ **Giải:**

- Áp dụng BĐT bunhia, ta có:
- $196=\left(3|z-i|+5|z+i|\right)^2\le(3^2+5^2)(|z-i|^2+|z+i|^2)=34.(2|z|^2+2|i|^2)=68|z|^2+68$
- $\Leftrightarrow |z|\ge\sqrt{\frac{32}{17}}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ 3|z + i| = 5|z – i| , chúng ta không nên quá để ý tới điều kiện dấu "=" xảy ra vì BĐT bunhi trong số phức rất dễ thỏa mãn điều kiện dấu "=".
- Suy ra giá trị nhỏ nhất của |z| là: $\min|z|=\sqrt{\frac{32}{17}}$
- Áp dụng BĐT tam giác trị tuyệt đối ta lại có:
- $14=3|z-i|+5|z+i|=3\left(|z-i|+|z+i|\right)+2|z+i|\ge 3|z-i+z+i|+2\left(|z|-|-i|\right)$
- $\Leftrightarrow 14\ge 6|z|+2|z|-2\leftrightarrow|z|\le 2$.
- Điều kiện dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ Dấu "=" ở hai BĐT tam giác xảy ra $\Leftrightarrow$ z = –2i .
- Suy ra giá trị lớn nhất của |z| là: $\max|z|=2$. Vậy suy ra: $\sqrt{\frac{32}{17}}\le|z|\le 2$

Bài toán 6.12.21. (TL) Cho số phức z thỏa mãn: $3|z-1+4i|+4|z-5|=30$. Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của: $|z-2+3i|$?

✍ **Giải:**

- Đặt: $z-2+3i=u\rightarrow z=u+2-3i$. Thay vào điều kiện ban đầu, ta được:
- $3|z-1+4i|+4|z-5|=30\leftrightarrow 3|u+(1+i)|+4|u-3(1+i)|=30$

- Áp dụng BĐT bunhia, ta có:
- $900=\left(\sqrt{3}.\sqrt{3}\,|u+(1+i)|+4|u-3(1+i)|\right)^2\le(3+4^2)(3|u+(1+i)|^2+|u-3(1+i)|^2)$
- $\Leftrightarrow 900\le 19.(4|u|^2+12|1+i|^2)=76|u|^2+456\leftrightarrow|u|\ge\sqrt{\frac{111}{19}}$
- Suy ra giá trị nhỏ nhất của |z – 2 + 3i| = |u| là: $\min|z-2+3i|=\min|u|=\sqrt{\frac{111}{19}}$
- Áp dụng BĐT tam giác trị tuyệt đối ta lại có:
- $30=3|u+(1+i)|+4|u-3(1+i)|=\left(3|u+(1+i)|+|u-3(1+i)|\right)+3|u-3(1+i)|$
- $\Leftrightarrow 30=\left(|3u+3(1+i)|+|u-3(1+i)|\right)+3|u-3(1+i)|\ge|3u+3(1+i)+u-3(1+i)|+3|u|-3|3(1+i)|$
- $\Leftrightarrow 30\ge|4u|+3|u|-9\sqrt{2}\leftrightarrow|u|\le\frac{30+9\sqrt{2}}{7}$
- Suy ra giá trị lớn nhất của |u| là: $\max|u|=\frac{30+9\sqrt{2}}{7}$.
- Vậy suy ra: $\sqrt{\frac{111}{19}}\le|z-2+3i|\le\frac{30+9\sqrt{2}}{7}$

Ví dụ 6.12.22. Cho số phức z thỏa mãn: $3|z-i|+5|z+i|=16$. Tìm gtln và gtnn của |z| ?

Ví dụ 6.12.23. Cho số phức z thỏa mãn: $3|z-i|+5|z+2i|=20$. Tìm gtln và gtnn của |z| ?

Ví dụ 6.12.24. Cho số phức z thỏa mãn: $3|z-2i|+4|z+3i|=30$. Tìm gtln và gtnn của |z| ?

Ví dụ 6.12.25. Cho số phức z thỏa mãn: $3|z+2i+1|+4|z-1|=16$. Tìm gtln và gtnn của |z + i| ?

Ví dụ 6.12.26. Cho số phức z thỏa mãn: $3|z+3i+5|+4|z-1|=18$. Tìm gtln và gtnn của |z + i + 1| ?

6.13. Các số phức có mô đun bằng nhau – Bài toán phân bố số phức trên vòng tròn:

- **Ba số phức** có mô đun bằng nhau và có tổng bằng 0: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = R$ và $z_1 + z_2 + z_3 = 0$
- Tập hợp các số phức có cùng giá trị mô đun bằng R nằm trên một đường tròn (C) có tâm là gốc tọa độ O và có bán kính bằng R.
- Đặc biệt khi cho biết tổng các số phức bằng 0 thì chúng được biểu diễn bởi các đỉnh của một đa giác đều nội tiếp đường tròn (O;R).
- Ứng với trường hợp ba số phức: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = R$ và $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ thì chúng là ba đỉnh của một tam giác đều có tâm của tam giác là gốc tọa độ O. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác là R = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- **Cách chứng minh:** Sử dụng phương pháp bình phương vô hướng đã biết.
- Từ: $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = - z_3 \Leftrightarrow |z_1 + z_2| = |-z_3| = |z_3| = R$
- Bình phương vô hướng hai vế: $|z_1 + z_2|^2 = R^2 \leftrightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1|.|z_2|\cos\alpha = R^2$
- $\Leftrightarrow R^2 + R^2 + 2R^2\cos\alpha = R^2 \rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} \rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$
- Vậy các số phức đôi một tạo với nhau một góc 120^0 phân bố đều đặn trên vòng tròn (O;R).
- Theo quan điểm lượng giác và công thức Ơ LE thì ba số phức này lần lượt được biểu diễn:
  - Số phức thứ nhất: $z_1 = R.(\cos\varphi + i.\sin\varphi) = R.e^{i\varphi}$
  - Số phức thứ 2: $z_2 = R.(\cos(\varphi - \frac{2\pi}{3}) + i.\sin(\varphi - \frac{2\pi}{3})) = R.e^{i(\varphi - \frac{2\pi}{3})}$
  - Số phức thứ 3: $z_3 = R.(\cos(\varphi + \frac{2\pi}{3}) + i.\sin(\varphi - \frac{2\pi}{3})) = R.e^{i(\varphi + \frac{2\pi}{3})}$
  - Ba số phức này lệch nhau một góc $120^0 = 2\pi/3$ trên vòng tròn, tương tự như đã học ở ĐXC với dòng điện ba pha đối xứng.
  - Ta có tính chất quan trọng của tổng ba véc tơ có mô đun bằng nhau lệch nhau một góc 120^0 là: $\{ e^{i\varphi} + e^{i(\varphi - \frac{2\pi}{3})} + e^{i(\varphi + \frac{2\pi}{3})} = 0 \}$ với mọi góc φ
  - Có vô số cặp 3 số phức thỏa mãn điều kiện trên ứng với mỗi góc φ. Để đơn giản đôi khi chúng ta có thể cho góc: φ = 0 sẽ được ba giá trị cụ thể lần lượt là: $z_1 = R.(1) = R$; $z_2 = R(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2})$; $z_3 = R(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2})$
- **Bốn số phức** có mô đun bằng nhau: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = R$ và có tổng: $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$
- Điểm biểu diễn chúng là bốn đỉnh của một hình vuông có tâm là gốc tọa độ O. Bán kính đường tròn ngoại tiếp là R = $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

- Theo quan điểm lượng giác và công thức Ơ LE thì bốn số phức này lần lượt được biểu diễn:
  - ❖ Số phức thứ nhất: $z_1 = R.(\cos\varphi + i.\sin\varphi) = R.e^{i\varphi}$
  - ❖ Số phức thứ 2: $z_2 = R.(\cos(\varphi+\frac{\pi}{2}) + i.\sin(\varphi+\frac{\pi}{2})) = R.e^{i(\varphi+\frac{\pi}{2})}$
  - ❖ Số phức thứ 3: $z_3 = R.(\cos(\varphi+\pi) + i.\sin(\varphi+\pi)) = R.e^{i(\varphi+\pi)} = -z_1$
  - ❖ Số phức thứ 4: $z_4 = R.(\cos(\varphi+\frac{3\pi}{2}) + i.\sin(\varphi+\frac{3\pi}{2})) = R.e^{i(\varphi+\frac{3\pi}{2})} = -z_2$
  - ❖ Bốn số phức này lệch nhau một góc $90^0 = \pi/2$ trên vòng tròn.
  - ❖ Có vô số cặp 4 số phức thỏa mãn điều kiện trên ứng với mỗi góc φ. Để đơn giản đôi khi chúng ta có thể cho góc: φ = 0 sẽ được ba giá trị cụ thể lần lượt là: $z_1 = R.(1) = R$; $z_2 = R(i) = iR$; $z_3 = R(-1) = -R$; $z_4 = R(-i) = -iR$

Bài toán 6.13.1. Cho ba số phức có cùng mô đun: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = R \geq 0$ và có: $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Hãy trả lời những câu hỏi sau:

1. Tính giá trị của biểu thức: $P = |z_1 + z_2| + |z_2 + z_3| + |z_3 + z_1|$?
2. Tính giá trị của biểu thức: $P = |z_1 + z_2|^n + |z_2 + z_3|^n + |z_3 + z_1|^n$?
3. Tính giá trị của biểu thức: $P = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$?
4. Tính giá trị của biểu thức: $P = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$?
5. Tính giá trị của biểu thức: $P = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3$?

✍ **Giải:**

- Đây là một dạng bài toán nâng cao, cũng có thể xây dựng bổ đề hẹp (bổ đề sử dụng nội bộ được dùng cho các kì thi trắc nghiệm là chính)
- Chúng ta có kết quả sau:
- Cho các số phức: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = R \geq 0$ và $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Khi đó ta suy ra:
- $$\rightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = -z_3 \\ z_2 + z_3 = -z_1 \\ z_3 + z_1 = -z_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} |z_1 + z_2| = |-z_3| = R \\ |z_2 + z_3| = |-z_1| = R \\ |z_3 + z_1| = |-z_2| = R \end{cases}$$
- Tương tự ta có: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = R \geq 0$ và $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$. Khi đó ta suy ra:
- $$\rightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = -z_4 \\ z_2 + z_3 + z_4 = -z_1 \\ z_3 + z_4 + z_1 = -z_2 \\ z_4 + z_1 + z_2 = -z_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} |z_1 + z_2 + z_3| = |-z_4| = R \\ |z_2 + z_3 + z_4| = |-z_1| = R \\ |z_3 + z_4 + z_1| = |-z_2| = R \\ |z_4 + z_1 + z_2| = |-z_3| = R \end{cases}$$

1. Tính giá trị của biểu thức: $P = |z_1 + z_2| + |z_2 + z_3| + |z_3 + z_1|$?

- Áp dụng kết quả trên ta có: $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \rightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = -z_3 \\ z_2 + z_3 = -z_1 \\ z_3 + z_1 = -z_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} |z_1 + z_2| = |-z_3| = R \\ |z_2 + z_3| = |-z_1| = R \\ |z_3 + z_1| = |-z_2| = R \end{cases}$
- Suy ra: $P = |z_1 + z_2| + |z_2 + z_3| + |z_3 + z_1| = c + c + c = 3c$

2. Tính giá trị của biểu thức: $P = |z_1 + z_2|^n + |z_2 + z_3|^n + |z_3 + z_1|^n$?

- Áp dụng kết quả trên: $P = |z_1 + z_2|^n + |z_2 + z_3|^n + |z_3 + z_1|^n = R^n + R^n + R^n = 3.R^n$

3. Tính giá trị của biểu thức: P = $z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$?

- **Cách 1:** Biến đổi đại số thuần túy:
- Ta có: $z_1 + z_2 + z_3 = 0 \leftrightarrow \overline{z_1 + z_2 + z_3} = 0 \leftrightarrow \overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3} = 0$
- Cũng có: $z_1.\overline{z_1} = |z_1|^2 = R^2$; $z_2.\overline{z_2} = R^2$; $z_3.\overline{z_3} = |R^2$
- Biến đổi biểu thức P như sau:
- $P = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = \frac{1}{R^2}(z_1z_2(z_3\overline{z_3}) + z_2z_3(z_1\overline{z_1}) + z_3z_1(z_2\overline{z_2})) = \frac{1}{R^2}z_1z_2z_3(\overline{z_3} + \overline{z_1} + \overline{z_2}) = 0$
- **Cách 2:** Chúng ta có thể thay số trực tiếp bằng cách cho:
- $z_1 = 1$; $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$; $z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$ vẫn suy ra được kết quả: P = 0

4. Tính giá trị của biểu thức: $P = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$?

- Chúng ta sử dụng nhanh dạng lượng giác cho ba số phức có cùng mô đun (đơn giản ta cho R = 1) và có tổng bằng 0 như sau:
- $z_1 = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i.\sin\varphi$
- $z_2 = e^{i(\varphi - \frac{2\pi}{3})} = \cos(\varphi - \frac{2\pi}{3}) + i.\sin(\varphi - \frac{2\pi}{3})$
- $z_3 = e^{i(\varphi + \frac{2\pi}{3})} = \cos(\varphi + \frac{2\pi}{3}) + i.\sin(\varphi + \frac{2\pi}{3})$
- Ta có: $e^{i\varphi} + e^{i(\varphi - \frac{2\pi}{3})} + e^{i(\varphi + \frac{2\pi}{3})} = 0$ với mọi φ
- **Cách 1:** Có thể cho góc φ = 0 và thay số cụ thể vào biểu thức.
- **Cách 2:** Làm tổng quát như sau:
- $z_1 = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i.\sin\varphi \rightarrow z_1^2 = e^{i2\varphi} = \cos 2\varphi + i.\sin 2\varphi$
- $z_2 = e^{i(\varphi - \frac{2\pi}{3})} \rightarrow z_2^2 = e^{i2(\varphi - \frac{2\pi}{3})} = e^{i(2\varphi - \frac{4\pi}{3})} = e^{i(2\varphi - \frac{4\pi}{3} + 2\pi)} = e^{i(2\varphi + \frac{2\pi}{3})}$

- $z_3 = e^{i(\varphi+\frac{2\pi}{3})} \to z_3^2 = e^{i2(\varphi+\frac{2\pi}{3})} = e^{i(2\varphi+\frac{4\pi}{3})} = e^{i(2\varphi-\frac{4\pi}{3}-2\pi)} = e^{i(2\varphi-\frac{2\pi}{3})}$
- **Ghi nhớ:** Ta có biến đổi: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i.\sin\varphi = \cos(\varphi \pm k.2\pi) + i.\sin(\varphi \pm k.2\pi) = e^{i(\varphi \pm k.2\pi)}$
- Từ đó suy ra: $P = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = e^{i.2\varphi} + e^{i(2\varphi+\frac{2\pi}{3})} + e^{i(2\varphi-\frac{2\pi}{3})} = 0$
- **Cách 3:** Ta có: $P = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + 2(z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1) = (z_1 + z_2 + z_3)^2 = 0$

5. Tính giá trị của biểu thức: $P = |\, z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 \,|$?

- **Cách 1:** Phương pháp đại số thông minh mang tính chất chuyên chọn và không có sự càn lướt kiến thức:
- Ta có: $P = |\, z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 \,| = |\, (z_1 + z_2 + z_3)^3 - 3(z_1 + z_2)(z_2 + z_3)(z_3 + z_1) \,| = |\, 0 - 3.(-z_3)(-z_1)(-z_2) \,|$
- $P = 3\,|\, z_1 z_2 z_3 \,| = 3R^3$
- **Ghi nhớ:** $z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = (z_1 + z_2 + z_3)^3 - 3(z_1 + z_2)(z_2 + z_3)(z_3 + z_1) \,| = 0 - 3.(-z_3)(-z_1)(-z_2) = 3z_1 z_2 z_3$

Ví dụ 6.13.2. Cho ba số phức có cùng mô đun: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ và thỏa mãn: $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Hãy tính giá trị của các biểu thức sau:

1. $P = |\, z_1 + z_2 \,| + |\, z_2 + z_3 \,| + |\, z_3 + z_1 \,|$
2. $P = |\, z_1 + z_2 \,|^2 + |\, z_2 + z_3 \,|^2 + |\, z_3 + z_1 \,|^2$
3. $P = |\, z_1 + z_2 \,|^3 + |\, z_2 + z_3 \,|^3 + |\, z_3 + z_1 \,|^3$
4. $P = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$
5. $P = z_1^4 + z_2^4 + z_3^4$
6. $P = |\, z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 \,|$

Ví dụ 6.13.3. Cho bốn số phức có cùng mô đun: $|\, z_1 \,| = |\, z_2 \,| = |\, z_3 \,| = |\, z_4 \,| = R \geq 0$ và: $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$. Hãy trả lời những câu hỏi sau:

1. Tính giá trị của biểu thức: $P = |\, z_1 + z_2 + z_3 \,|^n + |\, z_2 + z_3 + z_4 \,|^n + |\, z_3 + z_4 + z_1 \,|^n + |\, z_4 + z_1 + z_2 \,|^n$?
2. Tính giá trị của biểu thức: $P = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2$?
3. Tính giá trị của biểu thức: $P = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + z_4^3$?
4. Tính giá trị của biểu thức: $P = |\, z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 + z_4^4 \,|$?

Gợi ý giải:

- Chỉ cần áp dụng tính chất: 4 điểm biểu diễn bốn số phức tương ứng là 4 đỉnh của hình vuông có tâm là gốc tọa độ O và các số phức được chia thành từng cặp đối nhau: $z_1 = -z_2$; $z_3 = -z_4$.
- Chúng ta có thể xét tổng quát bốn số phức Ơ LE: $z_1 = e^{i\varphi}; z_2 = e^{i(\varphi+\frac{\pi}{2})}; z_3 = e^{i(\varphi+\pi)}; z_4 = e^{i(\varphi+\frac{3\pi}{2})}$
- Áp dụng tính chất: $e^{i\varphi} + e^{i(\varphi \pm k.2\pi \pm \pi)} = 0; e^{i\varphi} = e^{i(\varphi \pm k.2\pi)}$

Bài toán 6.13.4. Cho ba số phức cùng mô đun: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ và các số phức: $(z_1 + z_2z_3)$, $(z_2 + z_3z_1)$, $(z_3 + z_1z_2)$ thuần thực. Chứng minh rằng: $z_1z_2z_3 = \pm 1$.

✍ **Giải:**

- **Ghi nhớ**: Hai số phức có mô đun bằng nhau và có tổng là một số thực thì chúng là số phức liên hợp hoặc là số đối của nhau: $(z+z') \in R \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z' = \overline{z} \\ z' = -z \end{array}\right.$
- **Chứng minh điều ghi nhớ trên:** Gọi z = a + ib ; z' = a' + ib'.
- $z + z' = (a + a') + i(b + b') \in R \rightarrow b + b' = 0 \rightarrow b' = -b$
- Lại có: $|z| = |z'| \leftrightarrow a^2 + b^2 = (a')^2 + (b')^2 \leftrightarrow a^2 = (a')^2 \rightarrow \left[\begin{array}{l} a' = a \rightarrow z' = a - ib = \overline{z} \\ a' = -a \rightarrow z' = -a - ib = -z \end{array}\right.$
- Áp dụng vào bài toán này như sau:
- Ta có: $|z_1| = 1$; $|z_2z_3| = |z_2|.|z_3| = 1$. Suy ra hai số phức z_1 và (z_2z_3) cùng mô đun lại có tổng là số thực: $(z_1 + z_2z_3) \in R \rightarrow \left[\begin{array}{l} z_2z_3 = \overline{z_1} \\ z_2z_3 = -z_1 \end{array}\right.$
- **Trường hợp 1:** Nếu $z_2z_3 = \overline{z_1} \rightarrow z_1z_2z_3 = z_1.\overline{z_1} = |z_1|^2 = 1$
- **Trường hợp 2:** Nếu $z_2z_3 = -z_1; z_3z_1 = -z_2; z_1z_2 = -z_3 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} z_2z_3 = -z_1 \\ -z_1 = \dfrac{z_2}{z_3} \end{array}\right. \rightarrow z_2z_3 = \dfrac{z_2}{z_3} \rightarrow z_3^2 = 1$
- Tương tự suy ra: $z_1^2 = z_2^2 = z_3^2 = 1 \rightarrow z_1 = \pm 1; z_2 = \pm 1; z_3 = \pm 1$
- Suy ra: $\left[\begin{array}{l} z_1 = 1; z_2 = -1; z_3 = 1 \\ z_1 = 1; z_2 = 1; z_3 = -1 \rightarrow z_1z_2z_3 = -1 \\ z_1 = -1; z_2 = 1; z_3 = 1 \end{array}\right.$
- Vậy suy ra được: $z_1z_2z_3 = \pm 1$

Bài toán 6.13.5. Cho ba số phức cùng mô đun: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ và $(z_1 + z_2 + z_3 = 1)$. Hãy tính giá trị của biểu thức: $P = z_1^{2n+1} + z_2^{2n+1} + z_3^{2n+1}$, với n là số nguyên dương?

✍ **Giải:**

- **Cách 1:** Giả sử một trường hợp biến thỏa mãn giả thiết rồi suy ra.
- Ta có thể giả sử được: $z_1 = 1$ và $z_2 + z_3 = 0 \leftrightarrow z_2 = -z_3 \leftrightarrow z_2 = e^{i\varphi}; z_3 = e^{i(\varphi \pm \pi)}$
- Suy ra: $P = z_1^{2n+1} + z_2^{2n+1} + z_3^{2n+1} = 1^{2n+1} + (z_2)^{2n+1} + (-z_2)^{2n+1} = 1 + 0 = 1$
- **Ghi nhớ:** *Khi thi trắc nghiệm mà không thể giải được theo một hướng nào đó chúng ta có thể tự giả sử được các giá trị của biến để phù hợp với giả thiết, sau đó thay vào biểu thức cần tính cũng có thể cho ta một đáp án tối ưu.*

- **Cách 2:** Chứng minh theo cơ sở
- Gọi dạng lượng giác của ba số phức lần lượt là:
- $z_1 = \cos\varphi_1 + i.\sin\varphi_1$; $z_2 = \cos\varphi_2 + i.\sin\varphi_2$; $z_3 = \cos\varphi_3 + i.\sin\varphi_3$
- Suy ra: $z_1 + z_2 + z_3 = (\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 + \cos\varphi_3) + i.(\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2 + \sin\varphi_3) = 1$
- Suy ra: $\begin{cases} \cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 + \cos\varphi_3 = 1 & (1) \\ \sin\varphi_1 + \sin\varphi_2 + \sin\varphi_3 = 0 & (2) \end{cases}$
- Bình phương hai vế của (1) và (2) rồi cộng chúng với nhau vế theo vế ta được:
- $3 + 2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + 2\cos(\varphi_2 - \varphi_3) + 2\cos(\varphi_3 - \varphi_1) = 1 \leftrightarrow 1 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos(\varphi_2 - \varphi_3) + \cos(\varphi_3 - \varphi_1) = 0$
- $\Leftrightarrow \{1 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\} + \{\cos(\varphi_2 - \varphi_3) + \cos(\varphi_3 - \varphi_1)\} = 0 \leftrightarrow 2\cos^2\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} + 2\cos\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}.\cos\frac{2\varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2}{2}$
- $\Leftrightarrow 2\cos\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}(\cos\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} + \cos\frac{2\varphi_3 - \varphi_1 - \varphi_2}{2}) = 0 \leftrightarrow \cos\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}.\cos\frac{\varphi_2 - \varphi_3}{2}.\cos\frac{\varphi_3 - \varphi_1}{2} = 0$
- Ta có thể giả sử: $\cos\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = 0 \rightarrow \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = \frac{\pi}{2} \rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = \pi \rightarrow \varphi_1 = \varphi_2 + \pi$
- Điều này chứng tỏ luôn tồn tại hai số phức là đối của nhau, vì:
- $z_1 = \cos\varphi_1 + i.\sin\varphi_1 = \cos(\varphi_2 + \pi) + i.\sin(\varphi_2 + \pi) = -\cos\varphi_2 - i.\sin\varphi_2 = -z_2$
- Thay vào giả thiết: $z_1 + z_2 + z_3 = 1 \leftrightarrow z_3 = 1$
- Như vậy ta đã chứng minh được: trong ba số phức có 1 cặp đối nhau: $z_1 = -z_2$ và 1 số phức bằng 1 là: $z_3 = 1$. Từ đó kết luận: $P = z_1^{2n+1} + z_2^{2n+1} + z_3^{2n+1} = 1$ với mọi giá trị n nguyên dương.

VII. BÀI TẬP TỰ LUYỆN DẠNG TỰ LUẬN

Bài tập 7.1. Rút gọn các biểu thức sau (có thể sử dụng máy tính cầm tay CASIO)

1. $\mathrm{A} = (2i-3)^2(1+3i) - \dfrac{1}{i+1}$
2. $B = (1+i)^{2017}(i-1) - \dfrac{3i+4}{i-1}$
3. $C = (1+i)^{2015}(1-i)^{2015} + \dfrac{3i-1}{3+4i}$
4. $D = (1-i\sqrt{3})(i+\sqrt{3}) + \dfrac{2i}{\sqrt{3}-i}$
5. $E = \dfrac{2i+1}{3-4i} - \dfrac{4+3i}{2i-1} - 2i + 5$
6. $F = i(2z-1) + (3z-2i)(i+3)$ với $z = -2i+5$
7. $G = (3i+1)z + (2\overline{z} - z - i)(4i+5)$ với $z = i-1$
8. $H = \|z\|(iz-3) + (2\overline{z} - 5i + 3)(1+3i)$ với $z = 4-3i$

Bài tập 7.2. Tính các giá trị của các biểu thức sau:

1. $A = 1 + i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5$
2. $B = 1 + i^2 + i^4 + \ldots + i^{2018}$
3. $C = i + i^3 + \ldots + i^{2019}$
4. $D = (1+i) + (1+2i) + (1+3i) + \ldots + (1+2017i)$
5. $E = 1 + (1-2i) + (1-2i)^2 + \ldots + (1-2i)^{2020}$

Bài tập 7.3. Tính giá trị của các hàm phức sau:

1. Cho hàm số f(x) = x³ + 2x² – 2 . Hãy tính giá trị của f(i) ; f(1 – i) ; f(2i + 1)
2. Cho hàm số: $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 5}{x-1}$. Hãy tính giá trị của $f(i)$; $f(3i-2)$; $f(\dfrac{i-1}{i+2})$

Bài tập 7.4. Tìm các số thực x, y thỏa mãn các phương trình phức sau:

1. (2x + 3y) – i(3x + 1) = 4i + 5.
2. (2x + iy)(i – 1) + (x – 3iy)(2i + 3) = 2i.
3. (x – iy)i + 3i – 2(x + 2iy) = 4 + i.
4. (x + iy)(2i – 1) – (i + x)(i – 1) = 0.
5. $(3 + i(x-2iy) + 3(\overline{x - iy + i + 1} + 2) = 1 - i$.

Bài tập 7.5. Giải các phương trình bậc nhất một ẩn của số phức z:

1. $(z+i-3)(3-2i)+z(i-4)=6+i$
2. $(iz-3)(2+i)-\dfrac{z}{2-i}=3+4i$
3. $(3z-4i)(2i-3)-(z+i)i=2i-1$
4. $3i-1+\dfrac{3-4i}{z+i}=\dfrac{2i}{4-3i}$
5. $(i-3)\overline{z}+(4i\overline{z}-1)(i+3)=i^2-2$

Bài tập 7.6. Giải các phương trình bậc nhất phức hợp sau:

1. $(z+i)(3i-2)-(2\overline{z}+1)i=4$
2. $3i(2\overline{z}-i)+(3z-1)(i+1)=i-3$
3. $i(z-1)+i\overline{z}-2=i$
4. $(z+i)(i-1)-(3\overline{z}+4)i=0$.

Bài tập 7.7. Đưa về dạng lượng giác các số phức sau:

1. $z=1-i$
2. $z=4+4i$
3. $z=-1+i$
4. $z=1-i\sqrt{3}$.
5. $z=-1-i\sqrt{3}$
6. $z=\sqrt{3}+i$
7. $z=3-4i$
8. $z=2+3i$

Bài tập 7.8. Đưa số phức $z=\sqrt{3}+i$ về dạng lượng giác và tính: z^{200}, z^{2017}, z^{2018}.

Bài tập 7.9. Viết dạng lượng giác của số phức: z = 3 + 4i rồi tính: z^{2017}, z^{2018}

Bài tập 7.10. Hãy tính giá trị của biểu thức (theo hình thức tự luận): $(1-i\sqrt{3})^{2017}(1+i)^{2018}$

Bài tập 7.11. Tính căn bậc hai của các số phức sau:

1. -100.
2. -47.
3. -64.
4. -2i.
5. 3 – 4i.
6. +4i.
7. 6 – 8i.
8. 15 – 8i.
9. 24 – 10i.
10. 12 – 5i.
11. i.
12. 7 + 8i.
13. $1-i\sqrt{3}$.
14. $-\sqrt{3}+i$

Bài tập 7.12. Khai căn bậc của số phức:

1. $\sqrt[3]{i}$
2. $\sqrt[3]{1-i\sqrt{3}}$.
3. $\sqrt[6]{\sqrt{3}+i}$
4. $\sqrt[4]{3+4i}$

Bài tập 7.13. Viết lại về dạng lượng giác chuẩn rồi xác định |z| và argument φ của số phức z

1. $z = 2(\cos\frac{\pi}{6} - i.\sin\frac{\pi}{6})$
2. $z = -2(\cos\frac{\pi}{5} + i.\sin\frac{\pi}{5})$
3. $z = i(\cos\varphi + i.\sin\varphi)$
4. $z = \frac{1}{i}(\cos\frac{\pi}{6} + i.\sin\frac{\pi}{6})$
5. $z = (1 + i\sqrt{3})(\cos\frac{\pi}{4} - i.\sin\frac{\pi}{4})$
6. $z = 2(\sqrt{3} - i)(-\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{2\pi}{3})$

Bài tập 7.14. Giải phương trình phức bậc hai và bậc cao sau:

1. $z^2 - 4z + 5 = 0$.
2. $z^2 + 10z + 29 = 0$.
3. $z^2 + 9 = 0$.
4. $(z - 2i + 1)^2 + 16 = 0$.
5. $z^4 - 16 = 0$.
6. $z^4 - 2z^2 - 3 = 0$.
7. $(z - 3i + 2)^2 + (i + 3)^2 = 0$.
8. $(2z - i)^2 + (3z - 4i)^2 = 0$.
9. $z^3 - 1 = 0$.
10. $z^3 + 8 = 0$.
11. $z^3 + 3z - 4 = 0$.
12. $z^3 + 3iz^2 + 4i = 0$.
13. $z^4 + 4z^3 + 5z^2 + 4z + 1 = 0$.
14. $z^4 - 3z^2 + 2z + 3 = 0$.
15. $z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 4z + 4 = 0$.
16. $(z - i)^2 + 2z - 2i - 3 = 0$.
18. $z^2 - (2i + 3)z + 2i + 2 = 0$.
19. $z^2 + 2iz - 2 = 0$.
20. $z^2 + (4i + 3)z + 7i - 1 = 0$.
21. $z^2 + (3i - 4)z + 2 - 5i = 0$.
22. $z^2 - 4iz - 13 = 0$.
23. $(z^2 - 2iz - 1)^2 - 2(z^2 - 2iz) - 1 = 0$.

Bài tập 7.15. Cho hai số phức sao cho hệ thức sau xác định: $\frac{1}{z} + \frac{1}{2w} = \frac{1}{z + 3w}$ và |w| = 2. Hãy tính mô đun của số phức z: |z| = ?

Bài tập 7.16. Cho hai số phức z và w sao cho thỏa mãn : $\frac{1}{z} + \frac{1}{2z + w} = \frac{1}{z + 2w}$ và |w| = |z| + 1. Hãy tính mô đun của số phức z: |z| = ?

Bài tập 7.17. Tìm số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

1. |z| = 4 và $|3z^2 + \overline{z}| = 44$.
2. |z| = 3 và $|z^2 + 2\overline{z}| = 15$.
3. |z| = 1 và $|5z^2 - 3\overline{z}| = 8$.
4. |z| = 2 và $|z^2 - 3 + 4i| = 9$.
5. |z| = 2 và $|z^2 - 3 + 4i| = 1$.

Bài tập 7.18. Cho ba điểm A, B và C lần lượt biểu diễn các số phức z_1, z_2 và z_3 trên mặt phẳng phức. Biết rằng $z_1 = 3 - 2i$; $z_2 = 1 + 4i$ và $z_3 = 2 - i$.

a. Hãy nhận xét xem tam giác ABC là tam giác gì? Tính chu vi và diện tích của tam giác ABC.
b. Tìm số phức z_4 tương ứng với trọng tâm G của ΔABC.
c. Tìm số phức z_5 tương ứng với trực tâm của ΔABC.
d. Tìm số phức z_6 là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.
e. Tìm số phức z_7 là tâm của đường tròn nội tiếp ΔABC.

Bài tập 7.19. Lập phương trình đường thẳng chứa điểm biểu diễn 2 số phức $z_1 = 3 - 2i$ và $z_2 = -1 + i$.

Bài tập 7.20. Cho điểm A biểu diễn số phức $z_1 = 2i$, điểm B biểu diễn số phức $z_2 = 4 - 3i$. Tìm điểm C và số phức z_3 mà nó biểu diễn, sao cho ΔABC vuông cân, biết rằng z_3 thuần thực.

Bài tập 7.21. Cho điểm A biểu diễn $z_1 = 5 - 3i$, điểm B biểu diễn $z_2 = 4 - 6i$. Điểm P biểu diễn số phức z_3 sao cho thỏa mãn hệ thức véc tơ: $\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} = \vec{0}$.

Bài tập 7.22. Lập phương trình đường tròn (C) trên mặt phẳng phức. Biết rằng nó:

a. nhận điểm biểu diễn số phức $z_1 = 3 - 2i$ làm tâm và có bán kính R = 5.
b. nhận điểm biểu diễn số phức $z_1 = 4 - i$ làm tâm và đi qua điểm biểu diễn số phức $z_2 = 3i - 1$.
c. có đường kính là hai điểm biểu diễn số phức $z_1 = i - 3$ và $z_2 = 5 - 2i$.

Bài tập 7.23. Lập các phương trình elip dưới đây:

1. Có bán trục lớn là a = 5 và có hai tiêu điểm F'(-3;0), F(3;0).
2. Có bán trục nhỏ là 8 và có hai tiêu điểm F'(-4;0), F(4;0).
3. Có bán trục lớn là 8 và có hai tiêu điểm F'(0;-5), F(0;5).
4. Có bán trục lớn là 6 và có hai tiêu điểm $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 4 - i$.
5. Có hai tiêu điểm $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 3 - 3i$ và đi qua $z_3 = 2 + 4i$.

Bài tập 7.24. Tìm quỹ tích các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn các phương trình dưới đây:

1. |z – 2i + 1| = 4.
2. |2iz – 3 + 4i| = 6.
3. |z – 1| = |iz + 3i – 2|

4. $|(3+4i)z-6|=20$.

5. $|iz-3|=|\overline{z}+i+2|$

6. $|z-i-1|=|2z+\overline{z}-2|$

7. $|3z+\overline{z}+i|=|z-2\overline{z}-1|$

8. $(z+i)(z-i)$ là số phức thuần ảo.

9. $(z+3i-2)(z-i)$ là số phức thuần thực.

Bài tập 7.25. Tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện :

1. $|z-i+2|^2+|2z+4-2i|^2-2|z-1|^2=2018$.
2. $|z+i|^2+|z+1+i|^2+|3z-6i+3|^2=4$.
3. $|3z+3i|^2-|z+1-3i|^2+|z-i+2|^2=1102$.

Bài tập 7.26. Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $|3z-i|=|iz+3|$ và $|z_1-z_2|=2$. Hãy tính:

1. Giá trị của biểu thức: $P=|z_1+2z_2|$
2. Giá trị của biểu thức: $P=|2z_1+z_2|$
3. Giá trị của biểu thức: $P=|3z_1-2z_2|$

Bài tập 7.27. Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $|z_1|=1$, $|z_2|=2$ và $|z_1-z_2|=3$. Hãy tính:

1. Giá trị của biểu thức: $P=|z_1+2z_2|$
2. Giá trị của biểu thức: $P=|2z_1+z_2|$
3. Giá trị của biểu thức: $P=|3z_1-2z_2|$

Bài tập 7.28. Cho số phức z thỏa mã: $|z|=1$. Hãy xác định phần thực của các số phức sau:

1. $u=\dfrac{1}{1+z}$ 2. $u=\dfrac{1}{1-z}$
3. $u=\dfrac{1}{1+z^2}$ 4. $u=\dfrac{1}{1-z^2}$

Bài tập 7.29. Tính các tổng sau:

1. $S_1=i+2i^2+3i^3+\ldots+2020.i^{2020}$
2. $S_2=i^2-2i^3+3i^4-\ldots+2019.i^{2020}$

Bài tập 7.30. Cho ba số phức: z_1, z_2, z_3. Hãy chứng minh các đẳng thức và bất đẳng thức sau:

1. $|z_1+z_2|^2+|z_1+z_2|^2+|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2+|z_1+z_2+z_3|^2$.
2. $|z_1+z_2+z_3|^2+|z_1+z_2-z_3|^2+|z_1-z_2+z_3|^2+|-z_1+z_2+z_3|^2=4(|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2)$.
3. $|z_1+z_2|+|z_2+z_3|+|z_3+z_1|\le|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_1+z_2+z_3|$.
4. $|z_1|+|z_2|+|z_3|\le|z_1-z_2+z_3|+|z_1+z_2-z_3|+|-z_1+z_2+z_3|$.
5. $|z_1+z_2|+|z_2+z_3|+|z_3+z_1|\le|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_1+z_2+z_3|$.

Bài tập 7.31. Chứng minh rằng: Nếu $z_1^k + z_2^k + ... + z_n^k = 0$ thì $\frac{1}{z_1^k} + \frac{1}{z_2^k} + ... + \frac{1}{z_n^k} = 0$. Trong đó: k , n là số nguyên dương.

Bài tập 7.32. Cho ba số phức z_1, z_2 , z_3 thỏa mãn điều kiện: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Chứng minh rằng : $|z_1 - z_2|.|z_2 - z_3| + |z_2 - z_3|.|z_3 - z_1| + |z_3 - z_1|.|z_1 - z_2| \leq 9$.

Bài tập 7.33. Chứng minh rằng: Nếu: $|z + z_1| = 1$ thì: $|z^2 + z_1^2| \geq \frac{|1 - 2|z_1||}{\sqrt{2}}$

VIII. TUYỂN TẬP NHỮNG CÂU TRẮC NGHIỆM CƠ BẢN VÀ NÂNG CAO

Câu 1. (2) Phần thực của số phức $z=(1-2i)(3+i)$ là

A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 2. (2) Phần ảo của số phức z = (4 + i)(i – 2) là

A. 2i. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 3. (2) Mô đun của số phức z = (2i + 1)(3i – 4) là

A. 25. **B.** 5. **C.** $5\sqrt{3}$. **D.** $5\sqrt{5}$.

Câu 4. (2) Cho số phức z = a + ib, nhận xét sai là

A. số phức đối là: a – ib. **B.** số phức liên hợp là: a – ib.

C. mô đun của số phức là: $\sqrt{a^2+b^2}$. **D.** điểm biểu diễn số phức z là M(a;b).

Câu 5. (2) Số phức thuần thực là số phức có

A. phần thực bằng 0. **B.** phần ảo bằng 0.

C. phần thực là số nguyên. **D.** phần thực vô cùng lớn.

Câu 6. (2) Số phức z = (m +i)(4i – 5) thuần thực ứng với giá trị m bằng

A. 4. **B.** 1,25. **C.** 0,8. **D.** 1,0.

Câu 7. (2) Số phức thuần ảo là số phức có

A. phần thực bằng 0. **B.** phần ảo bằng 0.

C. phần ảo bằng 1. **D.** phần ảo bằng -1.

Câu 8. (2) Cho số phức z = 11 + 7i. Số phức liên hợp của nó là

A. 18. **B.** $\sqrt{170}$. **C.** -11 + 7i. **D.** 11 – 7i.

Câu 9. (2) Chọn hệ thức sai?

A. $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$. **B.** $\overline{z_1.z_2}=\overline{z_1}.\overline{z_2}$. **C.** $(\overline{\frac{z_1}{z_2}})=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$. **D.** $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}.\overline{z_2}$.

Câu 10. (2) Số phức z = (m + 4i)(m + i) thuần ảo ứng với giá trị của m bằng

A. -2. **B.** 3. **C.** -4. **D.** 4.

Câu 11. (2) Phần thực của số phức z = $\frac{(2+3i)(4-3i)}{(5+2i)}$ là

A. 11. **B.** 97/29. **C.** -4/29. **D.** 31/29.

Câu 12. (2) Chọn hệ thức sai?

A. $|z^n|=|z|^n$. **B.** $|z_1.z_2|=|z_1|.|z_2|$. **C.** $|\pm z_1|=z_1$. **D.** $|\frac{z_1}{z_2}|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$.

Câu 13. (2) Cho số phức z = (3 + 2i)i. Số phức liên hợp của z sẽ là

A. –2 – 3i. **B.** 2 + 3i. **C.** 3 – 2i. **D.** –2 + 3i.

Câu 14. (2) Cho số phức $z=\frac{(1-i\sqrt{3})^3}{1+i}$. Mô đun của số phức $w=\overline{z}-iz$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 1,41.

Câu 15. (2) Rút gọn số phức: $z=\frac{1+i}{2-3i}+\frac{2+i}{1-i}$. Phần thực của số phức w = (1 + i)z sẽ bằng

A. -19/13. **B.** 49/26. **C.** -13/26. **D.** 47/26.

Câu 16. (2) Chọn hệ thức sai?

A. $\frac{|z|^2}{z}=\overline{z}$. **B.** $\frac{|z|^2}{z}=z$. **C.** $|z|^2=z.\overline{z}$. **D.** $\frac{z}{|z|}=\frac{|z|}{\overline{z}}$.

Câu 17. (2) Giá trị của: $\overline{\frac{2}{1-i}+3i^3-2}$ sẽ bằng

A. -1 – 2i. **B.** -1 + 2i. **C.** -2 – 3i. **D.** -2 + 3i.

Câu 18. (3) Biết rằng số phức z thỏa mãn: $|z+2i|=|z|+2$. Số phức z bằng

A. 4i. **B.** 3. **C.** 3 + 4i. **D.** 3 – 4i.

Câu 19. (2) Chọn phát biểu đúng trong các phát biểu sau đây?

A. Hai số phức bằng nhau là hai số phức có mô đun bằng nhau.

B. Hai số phức liên hợp là hai số phức có tổng bằng 0.

C. Hai số phức liên hợp có mô đun bằng nhau và phần thực bằng nhau, phần ảo đối nhau.

D. Hai số phức gọi là đối của nhau nếu có mô đun bằng đối của nhau.

Câu 20. (3) Cho số phức $z=\frac{(1+2i)(1-i\sqrt{3})^{16}}{(1-i)^{12}}$. Mô đun của số phức (1 – 2i)z sẽ là

A. 1024. **B.** 1204. **C.** 4092. **D.** 5120.

Câu 21. (2) Số phức liên hợp của một tổng: $\overline{z_1+z_2}$ sẽ bằng

A. $\overline{z_1}+\overline{z_2}$. **B.** $\overline{z_1}-\overline{z_2}$. **C.** $\overline{z_1}+i\overline{z_2}$. **D.** $\overline{z_1}-i\overline{z_2}$.

Câu 22. (3) Chọn hệ thức sai?

A. $|z+i|=|z|+1$. **B.** $|z+2i|\le|z|+2$. **C.** $|z-i|\ge|z|-1$. **D.** $|z+2+i|<|z|+3$.

Câu 23. (2) Khi nói về liên hợp của một tích hai số phức, đáp án đúng sẽ là

A. $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$. **B.** $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$. **C.** $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}.\overline{z_2}$. **D.** $\overline{z_1z_2}=z_1.z_2$.

Câu 24. (2) Cho số phức z = (1 + 2i)(3 – 4i). Số đối của số phức z sẽ là

A. 11 – 2i. **B.** – 11 – 2i. **C.** – 11 + 2i. **D.** 2 + 11i.

Câu 25. (2) Cho số phức z = (2m – i)(3i + 4) là thuần ảo (với m là tham số thực) thì phần ảo khi đó bằng

A. $-\frac{25}{4}$. **B.** 11. **C.** $-\frac{15}{4}$. **D.** 7.

Câu 26. (2) Cho số phức z thỏa mãn: $z = 3 + 4i - \frac{11+5i}{2i-3}$. Tỉ số phần ảo so với phần thực là

A. 89/62. **B.** 62/89. **C.** 11/35. **D.** 31/17.

Câu 27. (2) Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề dưới đây?

A. $z + \overline{z}$ luôn luôn là một số thực. **B.** $z - \overline{z}$ luôn là số phức thuần ảo.

C. $z + i\overline{z}$ luôn là số phức thuần ảo. **D.** $\frac{z-\overline{z}}{2i}$ luôn luôn là một số thực.

Câu 28. (2) Cho số phức: $z = \frac{(1-i\sqrt{3})^2}{(3+4i)(1+i)}$. Số phức $\overline{z}$ là

A. $\frac{1-7\sqrt{3}}{25} + \frac{7+\sqrt{3}}{25}i$. **B.** $\frac{1-7\sqrt{3}}{25} - \frac{7+\sqrt{3}}{25}i$.

C. $\frac{1+\sqrt{3}}{25} - \frac{1-2\sqrt{3}}{25}i$. **D.** $\frac{17+\sqrt{3}}{25} - \frac{2-\sqrt{3}}{25}i$.

Câu 29 (2) Cho số phức z thỏa mãn: $\overline{z} = \frac{(1-i\sqrt{3})^3}{1-i}$. Mô đun của số phức: $\overline{z} + iz$ là

A. $8\sqrt{2}$. **B.** 4. **C.** 5. **D.** $2\sqrt{5}$.

Câu 30. (3) Tổng: A = i + i^2 + ... + i^{51} bằng

A. 1. **B.** -1. **C.** -i. **D.** i.

Câu 31. (3) Tổng: A = 1 + i + i^2 + ... + i^{2017} bằng

A. 1 – i. **B.** i. **C.** 1. **D.** 1 + i.

Câu 32. (3) Rút gọn biểu thức: A = $\frac{i+i^3+...+i^{57}}{i^2+i^4+...+i^{62}}$ sẽ bằng

A. i. **B.** -1. **C.** -i. **D.** 1 + i.

Câu 33. (3) Tổng: $S_n = 1 + (1+i) + (1+2i) + ... + (1+2016i)$ có phần ảo bằng b. Khi đó b/144 bằng

A. 14119. **B.** 19114. **C.** 11491. **D.** 14911.

Câu 34. (3) Tổng: $S_n = 1 + (2+i) + (3+2i) + ... + (200+199i)$ có phần thực bằng a và phân ảo bằng b. Khi đó (a + b)/100 bằng

A. 200. **B.** 400. **C.** 144. **D.** 289.

Câu 35. (3) Cho tổng: $S_n = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + ... + (1+i)^{19}$. Rút gọn tổng S_n bằng

A. 1+210i. **B.** $(2^{10}+1)i$. **C.** 1025. **D.** 1023.

Câu 36. (3) Cho tổng: $S_n = (1-i) + (1-i)^2 + ... + (1-i)^{20}$. Rút gọn tổng S_n bằng

A. -1025(1 + i). **B.** $2^{10}(1+i)$. **C.** 1025(1 – i). **D.** 1023i – 1.

Câu 37. (2) Cho số phức z thỏa mãn phương trình: (z + 2i)(3 – 4i) + 2z(i + 1) = 3i. Số phức z là

A. $3-5i$. **B.** $-\frac{17}{29}+\frac{21}{29}i$. **C.** $-\frac{34}{29}-\frac{31}{29}i$. **D.** $-\frac{13}{8}+\frac{11}{8}i$.

Câu 38. (2) Cho số phức z thỏa mãn: $(2+2i)z+(1-2i)z=2i-5$. Phần thực của số phức z là

A. – 5/3. **B.** 5/3. **C.** 2/3. **D.** – 2/3.

Câu 39. (2) Cho số phức z thỏa mãn phương trình: $z(i+2)-(\overline{z}+1)(3+4i)=3-4i$. Giá trị của biểu thức $A=|z+2i-1|$ là

A. $\frac{\sqrt{746}}{10}$. **B.** 5. **C.** $\frac{\sqrt{127}}{8}$. **D.** $\sqrt{13}$.

Câu 40. (2) Cho số phức z thỏa mãn: $iz+(2-i)\overline{z}=2+i$. Phần ảo của số phức z là

A. 1/2. **B.** –1/2. **C.** 2. **D.** – 2.

Câu 41. (2) Cho số phức z thỏa mãn phương trình: $\overline{z}(2i-3)+(1-\overline{z})(2+i)=3-i$. Số phức z là

A. $-\frac{7}{26}+\frac{9}{26}i$. **B.** $\frac{1}{26}-\frac{2}{26}i$. **C.** $\frac{11}{26}+\frac{1}{2}i$. **D.** $-\frac{7}{26}-\frac{9}{26}i$.

Câu 42. (2) Cho số phức z thỏa mãn phương trình phức: $(i+z)(i+1)-(z+1)(i+2)=1$. Số phức iz sẽ tương ứng là

A. 1 + 3i. **B.** $\frac{11}{5}-\frac{7}{5}i$. **C.** –4i. **D.** 2i.

Câu 43. (2) Cho số phức z thỏa mãn phương trình: (2i + 1)z + (z – 2)(1 – i) = 3i + 1. Giá trị của |z| tương ứng là

A. $\sqrt{2}$. **B.** 2. **C.** 4. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 44. (2) Cho z thỏa mãn: (z – 2i)(3 + 4i) = i và w = 2z – 4i. Tích của phần thực với phần ảo của số phức w là

A. 43/225. **B.** 48/425. **C.** 61/625. **D.** 48/625.

Câu 45. (2) Số phức z thỏa mãn điều kiện: $(3z-\overline{z})(1+i)=8i-1$ tương ứng là

A. $\frac{7}{4}+\frac{9}{8}i$. **B.** $\frac{7}{4}+\frac{9}{4}i$. **C.** $\frac{7}{4}-\frac{9}{8}i$. **D.** $-\frac{7}{4}+\frac{9}{4}i$.

Câu 46. (2) Cho biết w = (m + i)(4i – 5) là một số phức thuần thực, trong đó m là một số thực, thì giá trị thực của w bằng

A. $-\frac{31}{4}$. **B.** $-\frac{21}{4}$. **C.** $-\frac{41}{4}$. **D.** $-\frac{11}{4}$.

Câu 47. (3) Cho số phức z = a + ib, trong đó a và b là hai số thực. Biết rằng số phức z thỏa mãn phương trình phức: $\frac{|z|^2}{\overline{z}}+2z-\frac{25(\overline{z}-i)}{3-4i}=0$. Tỉ số $\frac{b}{a}$ có giá trị bằng

A. 3/8. **B.** 1/3. **C.** 3. **D.** 4/3.

Câu 48. (2) Cho số phức z thỏa mãn: $(2z+3\overline{z})(3-2i)=4+i$. Phần thực của số phức iz sẽ là

A. 2/13. **B.** -11/13. **C.** -2/13. **D.** 11/13.

Câu 49. (2) Cho số phức z thỏa mãn phương trình $(z+3i-1)(4+5i)=\frac{i}{2i-1}$. Mô đun của số phức w = z – 1 + 3i sẽ bằng

A. $\frac{1}{\sqrt{105}}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{205}}$. **D.** 5.

Câu 50. (2) Cho số phức z thỏa mãn phương trình $(z+2-3i)(4+3i)=2+i$. Mô đun của số phức w = (iz + 3 + 2i) sẽ bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{15}}$. **D.** 3.

Câu 51. (2) Phương trình phức $(3+5i)z-(2+7i)(\overline{z}+i)=2i-7$ có số nghiệm là

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 52. (2) Cho số phức z thỏa mãn: $(1+2i)z+(3i-2)(\overline{z}+4i)=i-2$. Mô đun của số phức $z+i.\overline{z}$ sẽ bằng

A. $\frac{11}{6}\sqrt{2}$. **B.** $\frac{19}{4}$. **C.** $\frac{11}{6}$. **D.** $\frac{19}{4}\sqrt{2}$.

Câu 53. (3) Cho số phức z thỏa mãn phương trình: $\frac{|z|^2}{z}+iz-\frac{2(z+1)}{1+i}=0$. Tích số phần thực và phần ảo của số phức z bằng?

A. 1/4. **B.** 1/2. **C.** -1/4. **D.** -1/2.

Câu 54. (3) Cho số phức z thỏa mãn phương trình: $(1+i)(z-i)+2z=2i$. Khi đó mô đun của số phức: $w=\frac{\overline{z}-2z+1}{z^2}$ sẽ là

A. $\sqrt{10}$. **B.** 5. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{13}$.

Câu 55. (2) Cho số phức z thỏa mãn: $(2z-1)(1+i)+(\overline{z}+1)(1-i)=2-2i$. Mô đun |z| bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

Câu 56. (2) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: $2z+3(1-i)\overline{z}=1-9i$. Giá trị của |z| bằng

A. 4. **B.** $\sqrt{13}$. **C.** 9. **D.** 25.

Câu 57. (2) Cho số phức z thỏa mãn phương trình: $z+(2+i)\overline{z}=3+5i$. Tổng của phần thực và phần ảo là

A. 17. **B.** 12. **C.** -5. **D.** -1.

Câu 58. (2) Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)(z-i)+2z=13+i$. Mô đun của số phức |z| sẽ bằng

A. $\sqrt{17}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{17}}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** 5.

Câu 59. (2) Cho số phức z thỏa mãn: $(2+i)z+\frac{2(1+2i)}{1+i}=7+8i$. Giá trị của |z + 1 + i| là

A. 10. **B.** 5. **C.** 15. **D.** 4.

Câu 60. (2) Cho số phức z thỏa mãn $\frac{5(\bar{z}+i)}{z+1}=2-i$. Giá trị |1 + z + z²| bằng

A. $2\sqrt{7}$. **B.** 13. **C.** $\sqrt{15}$. **D.** $\sqrt{13}$.

Câu 61. (2) Cho số phức z thỏa mãn: $z-(2+3i)\bar{z}=1-9i$. Tổng của phần thực và phần ảo là

A. 14/3. **B.** 5. **C.** 1/3. **D.** 5/6.

Câu 62. (3) Cho số phức z thỏa mãn phương trình: $(1+3i)z^2-\bar{z}(3+4i)=0$. Giá trị của |z| là

A. 5. **B.** 8,5. **C.** $0,5\sqrt{10}$. **D.** $5\sqrt{2}$.

Câu 63. (2) Cho z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình phức: $z^2-4z+5=0$. Giá trị của biểu thức $A=|z_1|^2+|z_2|^2$ là

A. 10. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** 5. **D.** $\sqrt{10}$.

Câu 64. (3) Cho số phức z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình phức: $z^2+(5i-2)z+1=0$. Giá trị của biểu thức: $A=|z_1+\frac{1}{z_1}|+|z_2+\frac{1}{z_2}|$ sẽ là

A. 31. **B.** 29. **C.** $2\sqrt{29}$. **D.** $\sqrt{58}$.

Câu 65. (3) Cho số phức z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình phức: $z^2+3z+5=0$. Giá trị của biểu thức: $A=|z_1+\frac{5}{z_1}|+|z_2+\frac{5}{z_2}|$ sẽ là

A. 3. **B.** 6. **C.** $2\sqrt{15}$. **D.** $\sqrt{30}$.

Câu 66. (3) Cho số phức z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình phức: $z^2+2z+17=0$. Giá trị của biểu thức: $A=|z_1^2|+|z_2^2|$ sẽ là

A. 34. **B.** 17. **C.** $2\sqrt{17}$. **D.** $\sqrt{34}$.

Câu 67. (3) Cho số phức z thỏa mãn phương trình: $(2-i)z^2=m.(\bar{z})^2$. Giá trị của m bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** 4. **C.** 3. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 68. (3) Cho số phức z thỏa mãn: $(1+2i)z^3-\bar{z}(4-3i)=0$. Giá trị của |z| bằng

A. 5. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 10. **D.** $\sqrt{\sqrt{5}}$.

Câu 69. (3) Cho z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm của phương trình trùng phương: $z^4-5z^2+4=0$. Giá trị của biểu thức: $A=|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|$ bằng

A. 10. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 8.

Câu 70. (3) Cho z_1 và z_2 lần lượt là hai nghiệm của phương trình: $z^2-2iz+3i+2=0$. Giá trị của $|z_1-i|^2+|z_2-i|^2$ bằng

A. $6\sqrt{2}$. **B.** $4\sqrt{7}$. **C.** 12. **D.** 26.

Câu 71. (3) Cho z_1 và z_2 lần lượt là hai nghiệm của phương trình: $z^2-4iz+3i-3=0$. Giá trị của $|z_1-2i|^2+|z_2-2i|^2$ bằng

A. 20. **B.** $\sqrt{13}$. **C.** 15. **D.** $2\sqrt{10}$.

Câu 72. (3) Hai nghiệm của phương trình phức: $z^2-(3+7i)z-10+11i=0$ lần lượt là

A. 1 + 4i và 3 – 5i. **B.** 1 + 4i và 2 + 3i. **C.** 1 – 4i và 3 + i. **D.** 1 – 4i và 2 + 11i.

Câu 73. (3) Hai số phức z_1 và z_2 lần lượt là nghiệm của phương trình: $z^2-(4i+5)z+3+8i=0$. Mô đun của số phức $w = (z_1 + i)(z_2 + i)$ bằng

A. 5. **B.** $\sqrt{15}$. **C.** $2\sqrt{13}$. **D.** $\sqrt{173}$.

Câu 74. (3) Hai số phức z_1 và z_2 lần lượt là nghiệm của phương trình: $z^2-(2i+7)z+1+5i=0$. Mô đun của số phức $w = (z_1 + 2i + 1)(z_2 + 2i + 1)$ bằng

A. $\sqrt{626}$. **B.** $\sqrt{215}$. **C.** $5\sqrt{11}$. **D.** $11\sqrt{7}$.

Câu 75. (3) Hai số phức z_1 và z_2 lần lượt là nghiệm của phương trình: $z^2-(2i+1)z+2+3i=0$. Mô đun của số phức $w = (z_1 + 2i + 1)(iz_2 + i - 2)$ bằng

A. $\sqrt{137}$. **B.** $5\sqrt{5}$. **C.** $5\sqrt{6}$. **D.** $3\sqrt{7}$.

Câu 76. (3) Cho số phức w = (m – i)(2i + 3). Biết rằng |w| = 4m. Khi đó giá trị của m bằng

A. $\frac{13}{3}$. **B.** $-\sqrt{\frac{13}{3}}$. **C.** $\frac{11}{3}$. **D.** $\sqrt{\frac{13}{3}}$.

Câu 77. (3) Số nghiệm của phương trình $z^2=|z|^2+\overline{z}$ sẽ là

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 78. (3) Cho phương trình: $z^2=|z|^2+\overline{z}$. Số phức nào dưới đây không phải là nghiệm của phương trình trên?

A. 0. **B.** $-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$. **D.** $-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$.

Câu 79. (3) Cho phương trình bậc 3 phức: $z^3-(3+2i)z^2+z-4i+1=0$. Gọi ba nghiệm của nó lần lượt là z_1, z_2, z_3. Giá trị của số phức: $w = (z_1 + 1)(z_2 + 1)(z_3 + 1)$ bằng

A. 4 + 5i. **B.** 4 + 6i. **C.** 3 + i. **D.** -3 + 4i.

Câu 80. (3) Cho biết x là một số thực và hàm số f(x) = $\frac{3x+4}{(x^2+1)(x^2+4)}$. Nếu viết hàm f(x) dưới dạng:

f(x) = $\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$ thì hệ số B sẽ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 3/4. **D.** 4/3.

Câu 81. (4) Cho biết x là một số thực và hàm số f(x) = $\frac{5x+4}{(x^2+1)(x^2+4)(x^2+9)}$. Nếu viết hàm f(x) dưới dạng: f(x) = $\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+4}+\frac{Ex+F}{x^2+9}$, trong đó các hệ số A, B, C, D, E , F là các giá trị thực. Khi đó giá trị của (C + D) sẽ bằng

A. -3/7. **B.** -9/15. **C.** -3/2. **D.** -14/15.

Câu 82. (4) Cho số phức z thỏa mãn đồng thời: $|z|=2$ và $|3z^2+\overline{z}|=10$. Số nghiệm z thỏa mãn những điều kiện này là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 83. (4) Cho số phức z thỏa mãn đồng thời: $|z|=3$ và $|z^2+\overline{z}|=12$. Số nghiệm phức z thỏa mãn những điều kiện này là

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 84. (2) Cho số phức z thỏa mãn: $|z-i+2|=|\overline{z}+2i-1|$. Trong các nghiệm dưới đây, nghiệm có mô đun nhỏ nhất là

A. 1 + 2i. **B.** 2 – 6i. **C.** 1 – 3i. **D.** 1 + i.

Câu 85. (3) Cho hai số phức z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình phức: $z^2 + (1 + 2i)z + 1 = 0$. Giá trị của biểu thức: $A = |2z_1+2i+1|^2+|2z_2+2i+1|^2$ bằng

A. $2\sqrt{41}$. **B.** $2\sqrt{65}$. **C.** $\sqrt{67}$. **D.** 34.

Câu 86. (3) Cho số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: $|z|=4$ và $|z^2+3+4i|=21$. Số nghiệm thỏa mãn là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 87. (3) Cho số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: $|z|=3$ và $|z^2-3+4i|=4$. Gọi z_1 là một nghiệm thỏa mãn. Khi đó tổng phần thực và phần ảo của z_1 có thể bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 88. (3) Cho phương trình phức: $z^3 + 4z – 3i = 0$. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức (không thuần ảo) của phương trình đã cho. Khi đó giá trị của: $A = |z_1+\frac{3}{z_1}|^2+|z_2+\frac{3}{z_2}|^2$ bằng

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 89. (3) Cho phương trình phức: $z^3+2iz^2-(i+2)z+i+1=0$. Nếu gọi z_1 , z_2 , z_3 lần lượt là ba nghiệm của phương trình thì $|(z_1 + 1)(z_2 + 1)(z_3 + 1)|$ bằng

A. $\sqrt{13}$. **B.** $\sqrt{34}$. **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

Câu 90. (2) Cho phương trình phức bậc 4: $z^4+4z^2+3=0$. Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 lần lượt là bốn nghiệm. Khi đó giá trị của: A = $|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|$ bằng

A. $2+2\sqrt{3}$. **B.** 8. **C.** $4+4\sqrt{3}$. **D.** 6.

Câu 91. (3) Cho phương trình phức bậc 4: $z^4+6z^2+25=0$. Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 lần lượt là bốn nghiệm. Khi đó giá trị của: A = $|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|$ bằng

A. 25. **B.** 12. **C.** $4\sqrt{5}$. **D.** $5+2\sqrt{5}$.

Câu 92. (3). Cho phương trình bậc 3 phức với tham số thực m: $z^3-3iz^2+(m-i)z-2i+2m=0$.

Gọi 3 nghiệm phức của phương trình (1) lần lượt là: z_1, z_2, z_3. $|(z_1+1)(z_2+1)(z_3+1)|=5$. Giá trị của m bằng

A. 6. **B.** -4. **C.** $\sqrt{7}$. **D.** -2.

Câu 93. (3) Cho phương trình bậc 3 phức với tham số thực m: $z^3-iz^2+(2m+i)z+1+im=0$. Gọi 3 nghiệm phức của phương trình (1) lần lượt là: z_1, z_2, z_3. Biết rằng $|(1-\frac{1}{z_1})(1-\frac{1}{z_2})(1-\frac{1}{z_3})|=2$. Giá trị thực của m bằng

A. m = 1. **B.** m = -8. **C.** m = 4. **D.** m = -3.

Câu 94. (3) Cho phương trình phức bậc 2 hệ số thực: $z^2-az+b=0$ có nghiệm là z = 1 + i. Nghiệm còn lại sẽ là

A. 1 – i. **B.** 1 + 2i. **C.** 1 – 2i. **D.** – 1 + i.

Câu 95. (3) Cho phương trình phức bậc 2 hệ số thực: $z^2-az+b=0$ có nghiệm là z = 1 + 2i. Tích số a.b bằng

A. 2. **B.** 5. **C.** 10. **D.** 12.

Câu 96. (3) Cho phương trình phức bậc 2: $z^2-2(2+3i)z-5+10i=0$ có một nghiệm là z. Biết rằng z^2 = a + ib. Giá trị của 3b/a bằng

A. 12. **B.** – 72/7. **C.** – 12. **D.** -21/5.

Câu 97. (3) Cho phương trình phức bậc 2: $z^2-(5+2i)z+21+i$. Hai nghiệm của phương trình lần lượt là

A. 3 + 5i và 1 – 4i. **B.** 3 + 4i và 2 – 2i. **C.** 4 – 2i và 2 – 3i. **D.** 3 + 5i và 2 – 3i.

Câu 98. (3) Cho số phức z thỏa mãn phương trình: $\bar{z}-\frac{5+i\sqrt{3}}{z}-1=0$. Số các số phức thỏa mãn phương trình đã cho là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 99. (3) Cho số phức z thỏa mãn đồng thời: $z^2=|z|^2+\bar{z}$ và z^2 là số thuần ảo. Số các số phức thỏa mãn phương trình đã cho là

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 100. (3) Cho số phức z = 1 + 2i. Gọi z_1 , z_2, z_3 lần lượt là ba giá trị khai căn bậc 3 của số phức z. Khi đó giá trị: $z_1.z_2.z_3$ có phần thực bằng a và phần ảo bằng b. Giá trị của (3a + 2b) bằng

A. 7. **B.** -7. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 101. (3) Cho số phức z = 1 + 2i. Gọi z_1 , z_2, z_3 lần lượt là ba giá trị khai căn bậc 3 của số phức z. Khi đó giá trị: $(z_1+ 1)(z_2 + 1)(z_3 + 1)$ có phần thực bằng a và phần ảo bằng b. Giá trị của (a.b) bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** -2. **D.** 3.

Câu 102. (2) Cho số phức w = (1 + i)z – 2i – 3 thuần ảo và có phần ảo bằng 2. Số phức z là

A. $\frac{7}{2}+\frac{i}{2}$. **B.** $\frac{5}{2}-\frac{3i}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}+\frac{7i}{2}$. **D.** $-\frac{7}{2}-\frac{i}{2}$.

Câu 103. (4) Cho hệ phương trình phức: $\begin{cases}(3-4i)z^2=(1+2i)\overline{z}\\(1+i\sqrt{3})z^3=(m+1).\overline{z}\end{cases}$. Trong đó m là số thực. Giá trị của m bằng

A. 11. **B.** – 7/5. **C.** 10. **D.** 8/3.

Câu 104. (3) Cho số phức z thỏa mãn hệ phương trình: $\begin{cases}|z-1|=2\\|z-2i|=5\end{cases}$. Số nghiệm thỏa mãn hệ phương trình là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 105. (3) Cho số phức z thỏa mãn hệ phương trình: $\begin{cases}|\overline{z}+4i-1|=3\\|z-i-2|=4\end{cases}$. Số nghiệm thỏa mãn hệ phương trình là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 106. (3) Cho số phức z thỏa mãn đồng thời: |z + i| = |z| + 1 và |z + 2| = 3. Giá trị |z| bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 107. (3) Cho số phức z thỏa mãn đồng thời: |z + 2i| = |z| – 2 và |z + 2i| = 4. Giá trị |z| bằng

A. $3\sqrt{2}$. **B.** 2. **C.** 4. **D.** $2\sqrt{3}$.

Câu 108. (3) Biết rằng số phức z thỏa mãn: |z – 4 + 3i| = |z| + 5 và thỏa mãn |z| = 3. Vậy z bằng

A. 4/5 + 3i/5. **B.** -12/5 + 9i/5. **C.** 2/5 + 3i/5. **D.** -2/5 + 5i/2.

Câu 109. (3) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z|=\sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo. Một số phức z_1 = a + ib là nghiệm. Khi đó tổng (a + b) bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 2.

Câu 110. (3) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z-(2+i)|=\sqrt{10}$ và $z.\overline{z}=25$. Một nghiệm phức của nó là z_1 = a + ib. Khi đó tỉ số b/a bằng

A. 4/3. **B.** 3/4. **C.** -4/3. **D.** -3/4.

Câu 111. (3) Cho số phức z thỏa mãn hệ phương trình phức: $\begin{cases} |z-2|=|z+3i| \\ |z-i|=|\overline{z}+2-3i| \end{cases}$ số nghiệm thỏa mãn hệ phương trình đã cho là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** vô số.

Câu 112. (3) Cho số phức z thỏa mãn hệ phương trình phức: $\begin{cases} |z-i|=|z+1| \\ |z-3i+4|=5 \end{cases}$ số nghiệm thỏa mãn hệ phương trình đã cho là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** vô số.

Câu 113. (3) Cho hệ phương trình phức: $\begin{cases} |z-i|=|z+2i| \\ |z-i|=|\overline{z}+1+2i| \end{cases}$. Số phức z = a + ib thỏa mãn hệ phương trình đã cho có: (a + b) bằng

A. -3. **B.** 3. **C.** 7. **D.** -6.

Câu 114. (3) Cho số phức z thỏa mãn hệ phương trình phức: $\begin{cases} |z-3|=|z+1+2i| \\ |(1-i)z-4+2i|=\dfrac{6\sqrt{10}}{5} \end{cases}$ số nghiệm thỏa mãn hệ phương trình đã cho là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 115. (3) Cho số phức z thỏa mãn hệ phương trình phức: $\begin{cases} |z|=|z-3-4i| \\ |(1-i)\overline{z}-2+4i|=2 \end{cases}$ số nghiệm thỏa mãn hệ phương trình đã cho là

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 116. (3) Cho hệ phương trình phức: $\begin{cases} |z-1|=|\overline{z}-2-i| \\ |z-2+3i|=3 \end{cases}$. Số phức z = a + ib thỏa mãn hệ phương trình đã cho có: 2a + 3b bằng

A. 13. **B.** 4. **C.** -11. **D.** -8.

Câu 117. (2) Cho điểm M biểu diễn số phức $z_1 = 3 - i$ và N biểu diễn số phức $z_2 = 4 + 3i$. Độ dài đoạn thẳng MN bằng

A. $\sqrt{17}$. **B.** $\sqrt{34}$. **C.** 13. **D.** 7.

Câu 118. (2) Trên mặt phẳng phức, điểm A biểu diễn số phức z và điểm B biểu diễn số phức $\overline{z}$. Hai điểm A và B sẽ

A. đối xứng nhau qua trục Ox. **B.** đối xứng nhau qua trục Oy.

C. đối xứng nhau qua gốc O. **D.** trùng nhau.

Câu 119. (2) Trên mặt phẳng phức, điểm A biểu diễn số phức z và điểm B biểu diễn số phức –z . Hai

điểm A và B sẽ

A. đối xứng nhau qua trục Ox. **B.** đối xứng nhau qua trục Oy.

C. đối xứng nhau qua gốc O. **D.** trùng nhau.

Câu 120. (2) Trong mặt phẳng phức cho điểm M và N lần lượt biểu diễn hai số phức: 3 – 2i và 7 + 4i. Trung điểm P của MN biểu diễn số phức tương ứng là

A. 2 + 3i. **B.** 4 – i. **C.** 1 + 2i. **D.** 5 + i.

Câu 121. (2) Trên mặt phẳng phức cho ba điểm M , N , P lần lượt biểu diễn ba số phức (1 + i) , (3 + 6i) , (8 – i). Khi đó trọng tâm G của tam giác MNP sẽ biểu diễn số phức

A. 2 + 2i. **B.** 4 + 2i. **C.** 3 – 2i. **D.** 2 + 3i.

Câu 122. (3) Trên mặt phẳng phức cho hai điểm A và B lần lượt biểu diễn hai số phức (2 + 3i) và (4 – i). Một điểm M thỏa mãn hệ thức véc tơ: $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$. Điểm M biểu diễn số phức tương ứng

A. $\frac{16}{5}+\frac{3i}{5}$. **B.** $\frac{11}{5}+\frac{6i}{5}$. **C.** $\frac{8}{5}+\frac{13i}{5}$. **D.** $\frac{9}{5}-\frac{2i}{5}$.

Câu 123. (3) Cho điểm A biểu diễn số phức z_1 = 2 + 3i và điểm B biểu diễn số phức z_2 = m – i. Biết độ dài đoạn thẳng AB bằng 5. Chu vi tam giác OAB bằng

A. 9. **B.** $\sqrt{13}+\sqrt{2}+5$. **C.** $\sqrt{26}+\sqrt{11}+5$. **D.** $5+\sqrt{3}+\sqrt{14}$.

Câu 124. (3) Trên mặt phẳng phức cho tam giác MNP, trong đó ba đỉnh M, N, P lần lượt biểu diễn ba số phức: z_1 = 5 – 3i, z_2 = 2 + i, z_3 = m + 6i. Biết rằng ΔMNP vuông tại điểm M. Giá trị của m bằng

A. 12. **B.** 3. **C.** 17. **D.** 15.

Câu 125. (3) Trên mặt phẳng phức cho ba điểm M, N, P lần lượt biểu diễn ba số phức z_1 = 3 + 2i, z_2 = 4 – 3i, z_3 = 2m – i. Để ba điểm này thẳng hàng thì giá trị của m phải có giá trị

A. 3/4. **B.** 2. **C.** 9/10. **D.** 9/5.

Câu 126. (3) Trên mặt phẳng phức cho ΔMNP đều; trong đó ba điểm M, N, P lần lượt biểu diễn ba số phức $1+6i$, $1+i$, z. Số phức z = a + ib thì (a + b) bằng

A. $6\sqrt{3}$. **B.** $\frac{7}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{9}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Câu 127. (3) Trên mặt phẳng phức cho hai điểm A và B lần lượt biểu diễn hai số phức (1 + 2i) và (3 + 4i). Điểm D thỏa mãn điều kiện tứ giác OABD là hình bình hành. Điểm D biểu diễn số phức

A. 2 + 2i. **B.** 4 + 6i. **C.** 2 + 3i. **D.** 3 – 2i.

Câu 128. (4) Trên mặt phẳng phức cho hình vuông ABC**D.** Biết A và C lần lượt biểu diễn hai số phức (1 + 3i) và (5 – i). Gọi z_B và z_D lần lượt là hai số phức được biểu diễn bởi điểm B và điểm D trên mặt phẳng phức. Tích số $z_B.z_D$ sẽ là

A. 8 – 2i. **B.** 5 + 4i. **C.** 1 – 3i. **D.** 3 + 7i.

Câu 129. (2) Trên mặt phẳng phức tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn: |z – 2 + 3i| = 4 là

A. đường tròn tâm I(2;3) và bán kính R = 2.

B. đường tròn tâm I(2;-3) và bán kính R = 4.

C. đường tròn (C) có phương trình: $(x + 2)^2 + (y – 3)^2 = 16$.

D. đường tròn (C) có phương trình: $x^2 + y^2 – 2x + 3y – 3 = 0$.

Câu 130. (2) Trên mặt phẳng phức cho đường tròn (C): $(x + 3)^2 + (y – 1)^2 = 25$. Một điểm M bất kì nằm trên đường tròn (C) sẽ biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện

A. $|z – 3 + i| = 5$. **B.** $|z + 3 – i| = 25$. **C.** $|z + 3 – i| = 5$. **D.** $|z – 3 + i| = 25$.

Câu 131. (3) Cho số phức z thỏa mãn phương trình: $|\frac{z-i+2}{z+2i-1}|=1$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng phức sẽ tương ứng là

A. đường phân giác góc phần tư thứ nhất.

B. đường phân giác góc phần tư thứ hai.

C. đường thẳng có phương trình: $2x – 3y – 1 = 0$.

D. đường thẳng có phương trình: $3x + 2y – 6 = 0$.

Câu 132. (2) Trên mặt phẳng phức, cho đường tròn tâm I(-2;1) bán kính R = 3. Phương trình phức biểu diễn đường tròn này tương ứng sẽ là

A. $|z – 2 + i| = 3$. **B.** $|z + i – 2| = 3$. **C.** $|z + 2 – i| = \sqrt{3}$. **D.** $|z + 2 – i| = 3$.

Câu 133. (3) Trên mặt phẳng phức, tập hợp điểm biểu diễn số phức thỏa mãn: $|2z + 2 – i| = 4$ là

A. đường tròn tâm I(2; -1) và có bán kính R = 4.

B. đường tròn tâm I(-2;1) và có bán kính R = 4.

C. đường tròn tâm I(-1;1/2) và có bán kính R = 2.

D. đường tròn (C) có phương trình: $x^2 + y^2 + 4x – 2y – 16 = 0$.

Câu 134. (3) Trên mặt phẳng phức, tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện: $|iz+3-2i|=6$ là

A. đường tròn (C) có phương trình: $(x + 3)^2 + (y – 2)^2 = 36$.

B. đường tròn (C) có phương trình: $(x – 2)^2 + (y – 3)^2 = 36$.

C. đường tròn có tâm I(2;3) và bán kính R = 36.

D. đường tròn (C) có phương trình: $x^2 + y^2 + 4x – 6y – 19 = 0$.

Câu 135. (3) Trên mặt phẳng phức, tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện: $|(1+i)z-2+3i|=4$ là

A. đường tròn tâm I(1;5) bán kinh R = 4.

B. đường tròn (C): $(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{5}{2})^2=16$.

C. đường tròn tâm $I(\frac{1}{2};\frac{5}{2})$ và bán kính R = 8.

D. đường tròn (C): $(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{5}{2})^2=8$.

Câu 136. (3) Cho số phức z thỏa mãn phương trình: $|\frac{z-i}{z-2i}|=1$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z sẽ là

A. đường tròn tâm I(-1;2) và bán kính R = 1.

B. đường tròn (C): $(x-1)^2+(y+2)^2=1$.

C. đường thẳng y = 2x – 1.

D. đường thẳng 2y – 3 = 0.

Câu 137. (2) Trên Trên mặt phẳng phức, tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn phương trình: $|z+3i-2|=|\overline{z}+2i-1|$ có dạng

A. đường tròn. **B.** đường thẳng. **C.** đường elip. **D.** đường parabol.

Câu 138. (3) Hệ thức biểu diễn đường thẳng có phương trình: 2x – 8y + 5 = 0 sẽ tương ứng là

A. $|z+2-8i|=5$. **B.** $|2z-8\overline{z}+5|=0$.

C. $|z-1+i|=|\overline{z}+3i+2|$. **D.** $|z-2+i|=|\overline{z}+3i-1|$.

Câu 139. (3) Trên mặt phẳng phức số phức z thỏa mãn phương trình: $|2z+3\overline{z}+1|=0$ là

A. đường thẳng có phương trình 2x + 3y + 1 = 0.

B. đường tròn tâm I(2;3) bán kính R = 1.

C. một điểm có tọa độ (-1/5;0)

D. đường tròn (C): $(x-2)^2+(y+3)^2=1$.

Câu 140. (3) Trên mặt phẳng Oxy, điểm biểu diễn số phức w = 2z + i – 2 sẽ là đường nào dưới đây? Biết z là số phức thỏa mãn phương trình: |z – 2i +1| = |z + i|.

A. Đường tròn (C): $(x+1)^2+(y-2)^2=4$.

B. Đường thẳng d: x + 2y – 11 = 0.

C. Đường thẳng d: x – 3y + 9 = 0.

D. Đường elip (E): $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

Câu 141. (2) Quỹ tích điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn phương trình: $|3z+i-2|=|2i-1-3\overline{z}|$ tương ứng là

A. 3x + y = 0. **B.** 3x – y – 4 = 0. **C.** 3x + y + 11 = 0. **D.** 3x – y =0.

Câu 142. (2) Cho số phức z thỏa mãn phương trình: $|z+2\overline{z}-1|=2$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z tương ứng là

A. đường tròn. **B.** đường thẳng. **C.** đường elip. **D.** đường hypebol.

Câu 143. (2) Số phức z có phần thực bằng phần ảo thì quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là

A. đường phân giác của góc phần tư thứ nhất: y = x.

B. đường phân giác của góc phần tư thứ hai: y = – x.

C. đường thẳng có phương trình: y = x + 1.

D. đường thẳng có phương trình: y = x – 1.

Câu 144. (3) Cho số phức z thỏa mãn phương trình: $|2z-\overline{z}+i|=|z-2|$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z sẽ là

A. đường elip. **B.** đường tròn. **C.** đường thẳng. **D.** đường parabol.

Câu 145. (2) Cho số phức z có phần thực bằng phần ảo thì quỹ tích điểm biểu diễn số phức liên hợp của z sẽ là

A. đường phân giác của góc phần tư thứ nhất: y = x.

B. đường thẳng có phương trình: y = 2x – 1.

C. đường thẳng có phương trình: y = x + 2.

D. đường phân giác của góc phần tư thứ hai: y = - x.

Câu 146. (2) Cho số phức z thỏa mãn phương trình: |z + 2i – 1| = 3. Tập hợp điểm biểu diễn số phức liên hợp của z là

A. đường tròn (C): $(x-1)^2+(y+2)^2=9$.

B. đường tròn (C): $(x-1)^2+(y-2)^2=9$.

C. đường thẳng x + 2y – 1 = 3.

D. đường tròn (C): $(x+1)^2+(y-2)^2=9$.

Câu 147. (2) Quỹ tích các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn: $|z-2i+3|\le 4$ là

A. miền hình tròn có tâm I(-3;2) và bán kính R = 4.

B. là đường tròn (C) có tâm I(2;3) và bán kính R = 4.

C. là đường tròn (C): $(x+3)^2+(y-2)^2=16$.

D. là một miền hình chữ nhật đối xứng quanh gốc O.

Câu 148. (2) Trên mặt phẳng phức tập hợp những điểm biểu diễn số phức z = x + iy thỏa mãn đồng thời các điều kiện: $-2\le x\le 3$ và $1\le y\le 4$ sẽ là

A. hình chữ nhật có bốn đỉnh tương ứng là (-2;1), (-2;4), (3;4) , (3;1).

B. là hình tròn có tâm I(-2;3) và bán kính R = 4.

C. là hình vành khuyên có tâm I(-2;3) và bán kính trong $R_1 = 1$, bán kính ngoài $R_2 = 4$.

D. là đường tròn tâm I(1;4) và bán kính R = 3 – 2 = 1.

Câu 149. (2) Trên mặt phẳng phức tập hợp những điểm biểu diễn số phức z = x + iy thỏa mãn điều kiện: $1\le|z|\le 4$ sẽ là

A. hình chữ nhật có bốn đỉnh tương ứng là (0;1), (0;4), (1;1) , (1;4).

B. là hình tròn có tâm I(1;4) và bán kính R = 3.

C. là đường tròn có phương trình: $(x-1)^2+(y-4)^2=16$.

D. hình vành khăn tâm là gốc O và bán kính trong là $R_1 = 1$, bán kính ngoài $R_2 = 4$.

Câu 150. (3) Cho số phức z thỏa mãn $|z+2\overline{z}+2i|=4$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=2z+\overline{z}$ tương ứng sẽ là

A. đường elip: $9x^2+(y-2)^2=16$.

B. đường tròn (C) có phương trình : $(x+1)^2+(y-2)^2=16$.

C. đường tròn (C) có tâm I (0;2) và bán kính R = 4.

D. đường tròn (C) có tâm I(0;-2) và bán kính R = 4.

Câu 151. (2) Trên Trên mặt phẳng phức, tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn phương trình: $|z+i-1|=|z-3i+2|$ có dạng

A. đường tròn. **B.** đường hypebol. **C.** đường elip. **D.** đường thẳng.

Câu 152. (2) Số phức z thuần thực thì đường biểu diễn của nó là

A. trục tung. **B.** đường thẳng y = 1. **C.** trục hoành. **D.** đường thẳng x = 1.

Câu 153. (3) Số phức z thỏa mãn: |(1 + 2i)z – (z + 1)i – 4| = 6 sẽ có điểm biểu diễn thuộc

A. đường tròn tâm $I=(\frac{5}{2};-\frac{3}{2})$ và bán kính R = $3\sqrt{2}$.

B. đường tròn tâm $I=(\frac{5}{2};-\frac{3}{2})$ và bán kính R = 6.

C. đường tròn tâm $I=(1;4)$ và bán kính R = $3\sqrt{2}$.

D. đường tròn tâm $I=(-\frac{5}{2};\frac{3}{2})$ và bán kính R = $3\sqrt{2}$.

Câu 154. (3) Cho số phức z thỏa mãn phương trình: $|z-1|=|z+3i|$. Số phức z = a + ib có mô đun nhỏ nhất. Khi đó (a.b) bằng

A. 12/25. **B.** 8/25. **C.** 16/9. **D.** 15/49.

Câu 155. (2) Số phức z thuần ảo thì đường biểu diễn nó là

A. trục hoành. **B.** đường thẳng y = x. **C.** đường thẳng y =1. **D.** trục tung.

Câu 156. (3) Trên mặt phẳng Oxy, điểm biểu diễn số phức w = 2z – 1 sẽ là đường nào dưới đây? Biết z là số phức thỏa mãn phương trình: |z – 2i +1| = 4.

A. Đường tròn (C): $(x+3)^2+(y-4)^2=64$.

B. Đường tròn (C): $(x-3)^2+(y+4)^2=16$.

C. Đường thẳng d: 2x + y – 4 = 0.

D. Đường tròn (C) có tâm I(-1;2) và bán kính R = 4.

Câu 157. (3) Cho số phức z thỏa mãn phương trình: |z| = 2. Trên mặt phẳng phức tập hợp điểm biểu diễn số phức: $w = (1+i\sqrt{3})z - 1$ là đường tròn (C) có bán kính r bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** $2\sqrt{3}$.

Câu 158. (2) Quỹ tích điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn phương trình: $|z+i| = |3i - 1 + \overline{z}|$ tương ứng là

A. 4x + y = 0. **B.** 2x + 8y – 9 = 0. **C.** 2x – 8 y – 5 = 0. **D.** x + 3y – 1 =0.

Câu 159. (2) Trên mặt phẳng phức, quỹ tích các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn: $\overline{z} = \frac{1}{z}$ là

A. Đường tròn (C): $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. **B.** Đường tròn (C): $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$.

C. Đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 1$. **D.** Đường thẳng: x – y + 1 = 0.

Câu 160. (3) Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn: $|z - i| = |(1+i)z|$ là

A. đường tròn (C): $x^2 + (y + 1)^2 = 4$.

B. đường tròn (C): $x^2 + (y+1)^2 = 2$.

C. đường thẳng: x – y + 1 = 0.

D. đường tròn (C): $x^2 + (y+1)^2 = \sqrt{2}$.

Câu 161. (3) Cho số phức z thỏa mãn phương trình: $|z - 3| = |z + i|$. Số phức z = a + ib có mô đun nhỏ nhất. Khi đó (a + b) bằng

A. 31/24. **B.** 25/16. **C.** 11/15. **D.** 8/5.

Câu 162. (3) Cho phương trình phức: |z – i| = 3. Số phức z = a + ib thỏa mãn phương trình đã cho có mô đun lớn nhất sẽ có: 3a + 2b bằng

A. 8. **B.** 5. **C.** 10. **D.** 14.

Câu 163. (3) Cho phương trình phức: |z – 3| = 1. Số phức z = a + ib thỏa mãn phương trình đã cho có mô đun nhỏ nhất sẽ có: 11a + 23b bằng

A. 15. **B.** 11. **C.** 22. **D.** 8.

Câu 164. (3) Cho phương trình phức: $|z - 2i + 3| = 2\sqrt{13}$. Số phức z = a + ib thỏa mãn phương trình đã cho có mô đun nhỏ nhất sẽ có: 4a + 3b bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 165. (3) Cho phương trình phức: |z – 3i + 4| = 10. Số phức z = a + ib thỏa mãn phương trình đã cho có mô đun lớn nhất sẽ có: (a + b) bằng

A. 18/5. **B.** -24/5. **C.** -11/5. **D.** -13/5.

Câu 166. (3) Cho biểu thức: $A = 1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + ... + (1 + i)^{30}$. Rút gọn của biểu thức A là

A. 2^{30}. **B.** $2^{15} – (2^{15} + 1)i$. **C.** $-2^{15} – (2^{15} – 1)i$. **D.** $2^{15} + 2^{15}i$.

Câu 167. (3) Cho biểu thức: $B = 1 + (1 – i) + (1 – i)^2 + ... + (1 – i)^{20}$. Rút gọn biểu thức B sẽ là

A. $–2^{10} + (2^{10} + 1)i$. **B.** $2^{10} – (2^{10} – 1)i$. **C.** $2^{11} + i$. **D.** $–2^{10} – (2^{10} + 1)i$.

Câu 168. (3) Cho biểu thức $A = 1 + (1+i\sqrt{3}) + (1+i\sqrt{3})^2 + ... + (1+i\sqrt{3})^{40}$. Rút gọn biểu thức A là

A. $(1-2^{40})i - 2^{40}\sqrt{3}$. **B.** $-2^{40} + \frac{1-2^{40}}{\sqrt{3}}i$. **C.** $-2^{40} + 2^{40}i\sqrt{3}$. **D.** $2^{40}\sqrt{3}$.

Câu 169. (2) Dạng lượng giác của số phức $z = \sqrt{3} - i$ là

A. $2(\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6})$. **B.** $\cos\frac{-\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi}{6}$.

C. $2(\cos\frac{-\pi}{6} - i\sin\frac{-\pi}{6})$. **D.** $2(\cos\frac{-\pi}{3} + i\sin\frac{-\pi}{3})$.

Câu 170. (2) Cho số phức z có dạng lượng giác: $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Dạng lượng giác của số phức iz sẽ tương ứng là

A. $\cos(\varphi+1) + i\sin(\varphi+1)$. **B.** $\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)$.

C. $\cos(\varphi+\frac{\pi}{2}) + i\sin(\varphi+\frac{\pi}{2})$. **D.** $\sin\varphi + i\cos\varphi$.

Câu 171. (3) Cho số phức $z = 1 + i\sqrt{3}$. Gọi z_1 và z_2 là hai căn bậc hai của z. Tổng $z_1 + z_2$ bằng

A. 0. **B.** $2 + 2i\sqrt{3}$. **C.** 2 – i. **D.** $\sqrt{3} + 2i$.

Câu 172. (3) Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 2i\sqrt{3}z - 4 = 0$. Dạng lượng giác của một nghiệm là

A. $|z|(\cos\frac{-\pi}{3} + i.\sin\frac{-\pi}{3})$. **B.** $|z|(\cos\frac{\pi}{6} + i.\sin\frac{\pi}{6})$.

C. $|z|(\cos\frac{-2\pi}{3} + i.\sin\frac{-2\pi}{3})$. **D.** $|z|(\cos\frac{2\pi}{3} + i.\sin\frac{2\pi}{3})$.

Câu 173. (2) Phương trình phức $z^3 + 8 = 0$ có số nghiệm phức với phần thực dương là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 174. (3) Cho số phức z thỏa mãn phương trình: |z + 2i – 3| = 6. Tập hợp điểm biểu diễn số phức w = 3z – 2i + 4 sẽ là

A. đường tròn (C) có tâm I(13;8) và bán kính R = 6.

B. đường tròn (C): $(x - 13)^2 + (y + 8)^2 = 324$.

C. đường thẳng d: 2x – 3y + 6 = 0.

D. đường tròn (C) có tâm I(3;2) và bán kính R = 6.

Câu 175. (2) Cho phương trình bậc 2 hệ số phức: $z^2 - (14+10i)z + 17 + 94i = 0$. Hai nghiệm của phương trình lần lượt là

A. 10 + 3i và 4 – 7i. **B.** 7 + i và 7 + 9i. **C.** 3 + 8i và 11 + 2i. **D.** 3 + 7i và 4 + 11i.

Câu 176. (2) Cho số phức z thỏa mãn: |z + 3i – 2| = 5. Điểm biểu diễn số phức $\overline{z}$ là

A. đường tròn (C): $(x-2)^2+(y+3)^2=25$.

B. đường tròn (C): $(x-2)^2+(y-3)^2=25$.

C. đường elip (E): $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

D. đường tròn tâm I(3;2) bán kính R = 5.

Câu 177. (2) Cho hai số phức z_1 và z_2 có tích và tổng lần lượt là: 29 và 10. Tổng mô đun của hai số phức này bằng

A. 29. **B.** 68. **C.** $2\sqrt{29}$. **D.** $2\sqrt{10}$.

Câu 178. (2) Cho hàm số phức: $f(z)=z^3+3z^2-2z+1$. Giá trị của hàm số tại $z_1 = 1 - 2i$ bằng

A. -21 – 6i. **B.** 3 – 2i. **C.** – 2 + i. **D.** 11 + 32i.

Câu 179. (2) Cho bốn đường biểu diễn bởi 4 phương trình phức: |z – 2i| = 4; |z – 3i + 1| = |z – i| ; $|z+2i-3|=31$; $|z+4i|=|\overline{z}-i-5|$. Số đường thẳng là

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 180. (3) Cho phương trình phức: $z^3-2+2i=0$. Gọi ba nghiệm phức của nó lần lượt là: z_1, z_2, z_3. Giá trị của biểu thức: $A = |z_1| + |z_2| + |z_3|$ bằng

A. 6. **C.** $2\sqrt{2}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

Câu 181. (2) Cho số phức có phần thực bằng 2 lần phần ảo thì điểm biểu diễn nó trên mặt phẳng tọa độ là

A. đường thẳng. **B.** đường tròn. **C.** elip. **D.** hypebol.

Câu 182. (2) Cho hàm số phức: $f(z)=z^2-2iz+i+3$. Giá trị của $|f(1+i)|$ bằng

A. 13. **B.** $\sqrt{26}$. **C.** 5. **D.** $\sqrt{13}$.

Câu 183. (3) Cho phương trình phức bậc 2: $z^2-2z+a=0$, với a là tham số thực. Gọi A và B lần lượt là hai điểm biểu diễn hai nghiệm của phương trình đã cho trên mặt phẳng phức, điều kiện để tam giác OAB vuông cân là

A. $a = 2$. **B.** $a = 5$. **C.** $a = 0$. **D.** $a = 2/3$.

Câu 184. (3) Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn hệ phương trình: $\begin{cases} iz_1+z_2=2-i \\ 2z_1+(1+i)z_2=1+2i \end{cases}$. Khi đó số phức z_1 bằng

A. $\frac{7}{10}-\frac{i}{10}$. **B.** $-\frac{7}{10}+\frac{i}{10}$. **C.** $\frac{3}{5}+\frac{i}{5}$. **D.** $\frac{3}{5}-\frac{4i}{5}$.

Câu 185. (3) Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn hệ phương trình: $\begin{cases} (2-i)z_1+iz_2=1+i \\ iz_1+(1-i)z_2=3-i \end{cases}$. Khi đó số phức $w = z_1 + z_2$ bằng

A. $\frac{17}{13}-\frac{3i}{13}$. **B.** $\frac{8}{15}+\frac{4i}{15}$. **C.** $\frac{41}{13}+\frac{3i}{13}$. **D.** $\frac{15}{31}-\frac{14i}{31}$.

Câu 186. (3) Cho phương trình phức bậc 2: $z^2-2z+a=0$, với a là tham số thực. Gọi A và B lần lượt

là hai điểm biểu diễn hai nghiệm của phương trình đã cho trên mặt phẳng phức, điều kiện để tam giác OAB đều là

A. $2/3$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** 2. **D.** $4/3$.

Câu 187. (3) Cho phương trình phức bậc hai với hai tham số phức a và b là: $(1+2i)z^2+az+b=0$

Phương trình có nghiệm $z_1 = 3 + 4i$ và $z_2 = - 1 + 2i$. Nhận xét sai là:

A. a = 10 – 10i. **B.** b = -15 – 20i. **C.** a + b = -5 – 30i. **D.** a = -10 + 10i.

Câu 188. (3) Cho phương trình phức bậc bốn: $z^4+2z^3-z^2-2z+10=0$. Phương trình có bốn nghiệm lần lượt là:

A. 2 + i; 2 – i; 4 + 3i ; 4 – 3i. **B.** 2i ; 3i ; 1 – 3i ; 1 + 3i.

C. 1 + i; 1 – i; -2 – i; -2 + i. **D.** 1 – i; 1 + 3i; 2 – 2i; 2 + 2i.

Câu 189. (2) Cho số phức z = (1 + 2i)(3 – 4i). Mô đun của số phức $w = 2z^2 + iz – 1$ bằng

A. $33\sqrt{58}$. **B.** $51\sqrt{13}$. **C.** 25. **D.** $17\sqrt{31}$.

Câu 190. (3) Cho số phức z thỏa mãn đồng thời: $|z-i+2|=\sqrt{20}$ và $z.\overline{z}=13$. Gọi z_1= a + ib là một nghiệm. Khi đó a + b bằng

A. 11. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 191. (3) Cho phương trình bậc 3 phức với a, b , c là ba tham số thực: $z^3+az^2+bz+c=0$. Biết phương trình có hai nghiệm: $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 1$. Giá trị của: (a + 2b + 3c) bằng

A. 7. **B.** -1. **C.** 3. **D.** 21.

Câu 192. (3) Cho hai số phức z và w có môn đun bằng 1 và tích $z.w \neq -1$. Khi đó $\frac{z+w}{1+z.w}$ là số

A. thuần thực. **B.** thuần ảo. **C.** số phức. **D.** số ảo âm.

Câu 193. (4) Cho điểm số phức z thỏa mãn: |z – 5i| = 2 và số phức w thỏa mãn: |w – 1| = |w – i|. Số phức z_1 và số phức w_1 lần lượt là hai số phức thỏa mãn điều kiện trên và $|z_1 – w_1|$ nhỏ nhất. Khi đó số phức $(z_1 + w_1)$ là

A. $\frac{5}{2}+i\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{5}{2}+\sqrt{2}+i(\frac{5}{2}-\sqrt{2})$. **C.** $\frac{5}{2}+\sqrt{2}+i(\frac{15}{2}-\sqrt{2})$. **D.** 3 – 7i.

Câu 194. (3) Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn: |z + 2i| + |z – 2i| = 4 là

A. đường tròn (C): $(x + 2)^2 + (y – 2)^2 = 16$.

B. đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 16$.

C. đường thẳng d: x – 2y + 4 = 0.

D. đoạn thẳng trên trục tung.

Câu 195. (3) Cho phương trình bậc 2 với hai tham số phức a và b: $(3+2i)z^2-az+b=0$ có hai nghiệm phức lần lượt là (1 + 2i) và (5 – 6i). Giá trị của b bằng

A. 41 – 43i. **B.** 43 + 46i. **C.** 19 + 23i. **D.** 45 + 41i.

Câu 196. (3) Cho phương trình bậc hai hệ số phức: $z^2+(2i-3)z+1-5i=0$. Mô đun của số phức $w=z_1^4+z_2^4$ bằng

A. $13\sqrt{17}$. **B.** 25. **C.** $2\sqrt{29}$. **D.** $4\sqrt{13}$.

Câu 197. (3) Cho số phức $z=\dfrac{m-2}{1+m-i}$, với m là tham số thực. Biết rằng: $z.\overline{z}=2$. Tất cả các giá trị của m sẽ lần lượt là

A. $m=-4\pm\sqrt{5}$. **B.** $m=1+\sqrt{3};m=1$. **C.** $m=0;m=-8$. **D.** $m=1-\sqrt{2};m=2$.

Câu 198. (3) Số nghiệm của phương trình phức: $4z^2+8|z|^2-3=0$ sẽ là

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 199. (3) Cho phương trình phức với tham số thực m: $z^3+(2i-1)z^2+(m-4i)z-6i+1=0$. Số giá trị của m để phương trình có nghiệm thuần thực là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 200. (3) Cho phương trình phức với tham số thực m: $z^3+(i-1)z^2+(m+3i)z+2i-3=0$. Tích của tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có nghiệm thực sẽ bằng

A. 75/2. **B.** 15/4. **C.** 20/5. **D.** 27/25.

Câu 201. (2) Giải phương trình phức bậc bốn: $(z-i)^4+4z^2=0$ sẽ được hai trong số các nghiệm của nó lần lượt là

A. 1 và 3i. **B.** $i(2+\sqrt{3})$ và 1 – i. **C.** $i(2-\sqrt{3})$ và -1. **D.** 1 – i và 1 + 2i.

Câu 202. (3) Cho 4 điểm A, B, C, D lần lượt biểu diễn các số phức 1 + 2i; 2 – 3i; 3 + i; 6 + 2i. Trong các nhận xét sau, nhận xét sai là

A. điểm C nằm trong tam giác AB**D.**

B. diện tích tam giác ACD nhỏ hơn diện tích tam giác BC**D.**

C. trung điểm của đoạn AC là điểm biểu diễn số phức z = 2 + 3i/2.

D. trọng tâm tam giác ABC là điểm G = (6;0).

Câu 203. (2) Cho ba điểm A, B, C lần lượt biểu diễn ba số phức z_A, z_B, z_C thỏa mãn: $|z_A| = |z_B| = |z_C|$. Nhận xét đúng là?

A. Ba điểm A, B , C lập thành một tam giác đều.

B. Tam giác ABC đều và có trọng tâm là gốc O.

C. Tam giác ABC nhận O làm trực tâm.

D. Ba điểm A, B, C nằm trên một đường tròn tâm là gốc O.

Câu 204. (2) Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn: $\left|\dfrac{z-2i+3}{\overline{z}+i-2}\right|=1$ là

A. đường thẳng. **B.** đường tròn. **C.** đường elip. **D.** đường hypebol.

Câu 205. (3) Mô đun của số phức $z=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-i\sqrt{2xy}}{x-y-2i\sqrt{xy}}$ bằng

A. $\sqrt{x^2+y^2}$. **B.** $|\dfrac{x+y}{x-y}|$. **C.** $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}$. **D.** 1.

Câu 206. (3) Giải phương trình: $z^2+|z|=0$ sẽ được các nghiệm có tổng mô đun tất cả các nghiệm bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 207. (3) Cho số phức z = a + ib. Hệ thức luôn đúng là

A. $|z|\geq|a|+|b|$. **B.** $|z|\leq\dfrac{|a|+|b|}{2}$. **C.** $|z|\sqrt{2}\geq|a|+|b|$. **D.** $|z|\leq|a|-|b|$.

Câu 208. (3) Phương trình phức: $z^6+7z^3-8=0$ có số nghiệm phức là

A. 6. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 209. (3) Cho số phức z khác 0 có Argument bằng φ. Số phức i.z có Argument là

A. 2φ. **B.** $\varphi-\dfrac{\pi}{2}$. **C.** $\varphi+\dfrac{\pi}{2}$. **D.** $-\varphi$.

Câu 210. (3) Cho số phức z khác 0 có Argument bằng φ. Nhận xét sai là?

A. Argument của số phức iz là: $\varphi+\dfrac{\pi}{2}$.

B. Argument của số phức $\overline{z}$ là: $-\varphi$.

C. Argument của số phức (-z) là: $\varphi+\pi$ hoặc $\varphi-\pi$.

D. Argument của số phức 1/z là: $\dfrac{1}{\varphi}$.

Câu 211. (2) Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn: $|(1+i)\overline{z}-3+5i|\leq 4$ là

A. hình tròn tâm I = (-1;4) bán kính R = $2\sqrt{2}$.

B. hình tròn tâm I (1;-4) bán kính R = 4.

C. đường tròn tâm I(-1;4) bán kính R = $2\sqrt{2}$.

D. đường tròn tâm I(1;2) bán kính R = 2.

Câu 212. (3) Cho số phức z khác 0 có Argument bằng φ. Số phức có Argument bằng $3\varphi-\dfrac{\pi}{2}$ là

A. iz. **B.** z^3. **C.** z^3/i. **D.** –i.z.

Câu 213. (3) Phương trình phức: $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^4=1$ có tất cả

A. 3 nghiệm. **B.** 4 nghiệm. **C.** 2 nghiệm. **D.** 1 nghiệm.

Câu 214. (2) Tập hợp những số phức z có cùng giá trị Argument là

A. đường thẳng đi qua gốc tọa độ O. **B.** đường tròn tâm là gốc tọa độ O.

C. elip có tiêu cự đối xứng qua gốc tọa độ O. **D.** Parabol có tiêu điểm là gốc tọa độ O.

Câu 215. (2) Cho phương trình phức bậc 3 hệ số thực: $z^3 + az^2 + bz + c = 0$. Biết phương trình có một nghiệm phức z = 2 + 3i. Trong các số phức dưới đây, số phức là nghiệm của phương trình đã cho là

A. 2 + 4i. **B.** 2 – 5i. **C.** -2 + 3i. **D.** 2 – 3i.

Câu 216. (3) Cho số phức z thỏa mãn hệ thức: $(1+3i)|z|=2(z+i)-(2-z)$. Khi đó giá trị |z| bằng

A. $4+2\sqrt{2}$. **B.** $2-4\sqrt{2}$. **C.** $3-\sqrt{2}$. **D.** 3.

Câu 217. (3) Cho số phức z thỏa mãn hệ thức: $(1+3i)|z|=\frac{2\sqrt{30}}{\overline{z}}+3-i$. Khi đó giá trị |z| bằng

A. 1. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 218. (2) Cho số phức z thỏa mãn phương trình |z – 1 + 2i| + |z + 2 – 3i| = 12. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z là

A. đường elip. **B.** đường tròn. **C.** đường thẳng. **D.** đường hypebol.

Câu 219. (4) Cho số phức z thỏa mãn phương trình |z – 3| + |z + 3| = 12. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của |z| là M và m. Khi đó (M + m) bằng

A. 9. **B.** 12. **C.** 15. **D.** 10.

Câu 220. (4) Cho số phức z thỏa mãn phương trình |z – 1| + |z + 7| = 12. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của |z| là M và m. Khi đó (M + m) bằng

A. 12. **B.** 24. **C.** 16. **D.** 18.

Câu 221. (4) Cho số phức z thỏa mãn phương trình |z – 2 + i| + |z + 4 – 5i| = 12. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của |z + 1 - 2i| là M và m. Khi đó (M + m) bằng

A. 6. **B.** 18. **C.** 12. **D.** 24.

Câu 222. (4) Cho pt đối xứng bậc 6: $z^6+2015z^5+2016z^4+2017z^3+2016z^2+2015z+1=0$ có các nghiệm lần lượt là $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$. Giá trị: $T=(z_1^2+1)(z_2^2+1)(z_3^2+1)(z_4^2+1)(z_5^2+1)(z_6^2+1)$ bằng

A. 2013^2. **B.** 2014^2. **C.** 2015^2. **D.** 2016^2.

Câu 223. (4) Cho pt đối xứng bậc 4: $z^4+2z^3+12z^2+2z+1=0$ có các nghiệm lần lượt là z_1, z_2, z_3, z_4. Giá trị: $T=(z_1^2+1)(z_2^2+1)(z_3^2+1)(z_4^2+1)$ bằng

A. 64. **B.** 81. **C.** 100. **D.** 144.

Câu 224. (3) Cho hai số phức z và w sao cho hệ thức xác định: $\frac{1}{2z}+\frac{2}{z+w}=\frac{3}{z+3w}$ và |z| = 2. Khi đó mô đun |w| có giá trị nhỏ nhất tương ứng bằng

A. $\frac{10+4\sqrt{7}}{3}$. **B.** $\frac{-10+4\sqrt{7}}{3}$. **C.** $2\sqrt{7}-5$. **D.** $2\sqrt{7}+5$.

Câu 225. (3) Cho hai số phức z và w sao cho hệ thức xác định: $\frac{1}{z}+\frac{2}{w}=\frac{2}{z+w}$ và |w| = 2. Khi đó mô đun |z| tương ứng bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Câu 226. (3) Cho hai số phức z và w sao cho hệ thức xác định: $\frac{1}{z}+\frac{1}{w}=\frac{2}{z+3w}$ và |w| = |z| – 2. Khi đó mô đun |z| nằm trong khoảng đúng là:

A. $4<|z|<5$. **B.** $5<|z|<6$. **C.** $2<|z|<3$. **D.** $1<|z|<2$.

Câu 227. (3) Cho phương trình bậc 2 với a và b là hai hệ số thực: $z^2 + az + b = 0$. Phương trình có hai nghiệm lần lượt là: (w + 3i – 5) và (2w + 3 – 2i). Tích của phần thực và phần ảo của số phức w có giá trị tương ứng bằng

A. 8/3. **B.** 14/2. **C.** 30/4. **D.** 1/5.

Câu 228. (3) Cho phương trình bậc 2 với a và b là hai hệ số thực: $z^2 + az + b = 0$. Phương trình có hai nghiệm lần lượt là: (w + i – 2) và (3w + 1 – 3i). Mô đun |w| bằng

A. $\frac{\sqrt{10}}{3}$. **B.** 10. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Câu 229. (3) Cho biết z = a + ib, với a và b là hai số thực khác 0. Gọi $z^4 = a_0 + ib_0$. Giá trị nhỏ nhất của a_0/b^4 bằng

A. – 8. **B.** 0. **C.** -12. **D.** -4.

Câu 230. (3) Cho biết z = a + ib, với a và b là hai số thực khác 0. Gọi $z^3 = a_0 + ib_0$. Giá trị nhỏ nhất của b_0/b^3 bằng

A. 0. **B.** – 4. **C.** -1. **D.** -2.

Câu 231. (4) Cho phương trình bậc 4 hệ số thực: $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$. Có 3 nghiệm phức lần lượt là: (w + i) , (2w + 3i) , (3w – 2i + 2). Nghiệm còn lại của nó không thể là giá trị nào dưới đây?

A. $-1+\frac{5}{4}i$. **B.** $-1-\frac{3}{4}i$. **C.** $-2-\frac{5}{2}i$. **D.** $-3-\frac{9}{4}i$.

Câu 232. (4) Cho số phức z thỏa mãn: |z – 3 + i| = 4 và đồng thời P = |z – 2i + 1| đạt giá trị nhỏ nhất. Mô đun của số phức w = (2z + i) tương ứng bằng

A. $\frac{\sqrt{365}}{5}$. **B.** $\frac{3\sqrt{10}}{2}$. **C.** 20. **D.** $\frac{5\sqrt{17}}{2}$.

Câu 233. (4) Cho số phức z thỏa mãn: |z – 1 + 2i| = 4 và đồng thời P = |z – 3i + 4| đạt giá trị lớn nhất. Phần thực của số phức w = (iz + 3) tương ứng bằng

A. $\frac{\sqrt{185}}{5}$. **B.** 34. **C.** $\frac{\sqrt{1730}}{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{1810}}{5}$.

Câu 234. (4) Cho số phức z thỏa mãn: |z – 1| = |z – 3i| và đồng thời P = |z – 2i| nhỏ nhất. Mô đun

của số phức z tương ứng bằng

A. 6. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 4.

Câu 235. (4) Cho số phức z thỏa mãn: |z – 1| = |z – i| và đồng thời P = |z – 2i| + |z + 3i + 4| nhỏ nhất. Mô đun của số phức z tương ứng bằng

A. 2. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 5. **D.** $3\sqrt{2}$.

Câu 236. (4) Cho số phức z thỏa mãn: |z – 3i| = |z – 3| . Giá trị nhỏ nhất của P = |iz – 2| + |z + 2i + 1| tương ứng bằng

A. 0. **B.** $\sqrt{17}$. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 237. (4) Cho số phức z thỏa mãn: |z + 2i| = |z + 1| . Giá trị lớn nhất của P = |z – 2i| – |iz + 1| tương ứng bằng

A. $\frac{\sqrt{170}}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{310}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{230}}{6}$. **D.** $\frac{\sqrt{110}}{3}$.

Câu 238. (4) Cho số phức z thỏa mãn: |z + i| = |z + 3|. Giá trị lớn nhất của biểu thức: P = |z – 4i + 1| – |z + 3| tương ứng bằng

A. 5. **B.** 6. **C.** $2\sqrt{6}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

Câu 239. (4) Cho số phức z thỏa mãn: |z – 2 + 3i| = 5 . Giá trị lớn nhất của: P = $|z - i|^2 - |z + 3|^2$ tương ứng bằng

A. 18. **B.** $2\sqrt{11} - 12$. **C.** $5\sqrt{10} - 14$. **D.** $4\sqrt{10} - 10$.

Câu 240. (3) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện đường tròn: |z – 4 + 4i| = 3 và đồng thời biểu thức: P = $|z - i|^2 - 2|z + 3|^2 + 3|z + i + 2|^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Mô đun của số phức z tương ứng bằng

A. 5. **B.** $\frac{\sqrt{205}}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{185}}{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{177}}{6}$.

Câu 241. (3) Cho số phức z thỏa mãn điều P = $|z - 2|^2 + 2|z + 3i|^2 + 2|z + i - 1|^2 = 2018$. Quỹ tích điểm M biểu diễn số phức z là

A. đường tròn có tâm I(4/5;-8/5).

B. đường elip có tiêu cự bằng 5.

C. đường tròn (C) có tâm I(3;-4)

D. đường thẳng Δ có phương trình: x + 2y + 2 = 0.

Câu 242. (3) Cho số phức z thỏa mãn điều P = $|z - i|^2 + 3|z - 2i|^2 + |z + 2i - 5|^2 = 2018$. Quỹ tích điểm M biểu diễn số phức z là

A. đường tròn (C) có bán kính R = $\sqrt{\frac{1983}{4}}$.

B. đường elip có tiêu cự bằng 2018.

C. đường tròn (C) có bán kính R = $\sqrt{2018}$

D. đường tròn (C) có bán kính R = $\sqrt{\frac{1979}{5}}$.

Câu 243. (3) Cho số phức z thỏa mãn điều P = $|z - 3 + 2i|^2 - 3|z - 1|^2 + 3|z + 2i - 1|^2 = 2019$. Quỹ tích điểm M biểu diễn số phức z là

A. đường tròn (C) có phương trình: $x^2 + (y + 11)^2 = 2019$.

B. đường tròn (C) có phương trình: $(x - 3)^2 + (y + 8)^2 = 2067$.

C. đường tròn (C) có tâm I(0;3) và có bán kính R = $\sqrt{2019}$

D. đường tròn (C) có tâm I(-5;1) và có bán kính R = 209.

Câu 244. (3) Cho số phức z biểu diễn đường cong: $|z - 3| + |z + 3| = 10$. Gọi bốn điểm A, B, C, D là bốn điểm biểu diễn 4 số phức z thỏa mãn điều kiện đã cho. Biết rằng tứ giác ABCD có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau. Diện tích lớn nhất của tứ giác ABCD là

A. 30. **B.** 50. **C.** 90. **D.** 40.

Câu 245. (3) Cho số phức z biểu diễn đường cong: $|z - 3| + |z + 3| = 10$. Gọi bốn điểm A, B, C, D là bốn điểm biểu diễn 4 số phức z thỏa mãn điều kiện đã cho. Biết rằng tứ giác ABCD có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau. Diện tích nhỏ nhất của tứ giác ABCD là

A. 1600/41. **B.** 40. **C.** 1540/37. **D.** 2017/41.

Câu 246. (3) Cho số phức z thỏa mãn: w = (z + 2i – 3)($2\overline{z}$ + i – 4) thuần thực. Quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là

A. đường tròn (C) có tâm O bán kính R = 5.

B. đường thẳng d có phương trình: 4x + y – 13 = 0.

C. đường thẳng d có phương trình: 5x + 2y – 11 = 0.

D. đường thẳng d có phương trình: x + 2y – 6 = 0.

Câu 247. (3) Cho số phức z thỏa mãn: $(2z + i - 2)(\overline{z} - 1)$ thuần thực. Quỹ tích điểm biểu diễn số phức z tương ứng là

A. đường thẳng d có phương trình: x – y – 1 = 0.

B. đường thẳng d có phương trình: x – 1 = 0.

C. đường tròn (C) có phương trình: $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$.

D. đường thẳng d có phương trình: 4x – y – 11 = 0.

Câu 248. (3) Cho số phức z thỏa mãn: |2iz + 4 – 3i| = 6. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của |z|. Khi đó |M + 2mi| có giá trị tương ứng bằng

A. $\frac{5\sqrt{5}}{2}$. **B.** 10. **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{6}$.

Câu 249. (3) Cho số phức z thỏa mãn: |z – 3i + 4| = 10. Tập hợp điểm biểu diễn số phức w = (2 +

3i)z – 12 tương ứng là

A. đường thẳng d có phương trình: 2x + 3y – 12 = 0.

B. đường tròn (C) có tâm I = (-4;3).

C. đường tròn (C) có tâm I = (-11;06).

D. đường tròn (C) có tâm I(-29;-6).

Câu 250. (3) Cho số phức z thỏa mãn: $4|z|+4iz=9-3z$. Tích số của phần thực và phần ảo của số phức z tương ứng là

A. 20. **B.** -20. **C.** 12. **D.** -12.

Câu 251. (3) Tập hợp điểm biểu diễn số phức: $w=\dfrac{z-1}{|z-1|}$ là

A. đường tròn tâm O và có bán kính bằng R = 1.

B. đường thẳng d có phương trình: x + y = 0.

C. đường tròn tâm I(1;0) có bán kính bằng R = 1.

D. đường tròn I(0;1) và có bán kính R = 1.

Câu 252. (3) Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $|z_1| = 2$, $|z_2| = 3$, $|2z_1 – 3z_2| = 5$. Giá trị $|3z_1 + 4z_2|$ tương ứng bằng

A. 15. **B.** 25. **C.** 18. **D.** 24.

Câu 253. (3) Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $|z_1 + z_2| = 2$, $|z_1 – z_2| = 3$ và $\dfrac{|z_1|}{|z_2|}=4$. Trong các nhận xét dưới đây, nhận xét đúng là?

A. $|z_1|=3$. **B.** $|z_1|^2=\dfrac{107}{12}$. **C.** $|z_2|=\dfrac{12}{5}$. **D.** $|z_2|^2=\dfrac{13}{34}$.

Câu 254. (3) Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 là nghiệm của phương trình bậc 3: $z^3 + az^2 + bz + 2 – 3i = 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = |z_1| + |z_2| + |z_3|$ bằng

A. $3\sqrt[6]{13}$. **B.** 15. **C.** $\sqrt{13}$. **D.** $3\sqrt[3]{13}$.

Câu 255. (3) Cho số phức z = a + ib (a, b là số thực, a > 0) có |z| = 2. Khí hiệu a_0 là phần thực của số phức $w=z^3-3z+2\overline{z}$. Giá trị nhỏ nhất của: $\dfrac{2a_0+3}{a}$ bằng

A. 16. **B.** $-12+3\sqrt[3]{24}$. **C.** $-26+3\sqrt[3]{18}$. **D.** $-14+3\sqrt[3]{9}$.

Câu 256. (4) Cho số phức z có mô đun bằng 1. Xét biểu thức: $P=|z^3+3z+\overline{z}|-|z+\overline{z}|$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất lần lượt là M và m. Tích số (mM) bằng

A. -3/4. **B.** 9/4. **C.** 11/4. **D.** 12.

Câu 257. (3) Cho phương trình phức bậc hai với hai hệ số thực a và b: $z^2 + az + b = 0$. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm. Khi đó biểu thức $(z_1^3+1)(z_2^3+1)$ tương ứng bằng

A. $a^3+b^3-2ab+3$. **B.** $a^3-3b-2a+1$.

C. $a^3b^3+3(a+b)-1$. **D.** $b^3-a^3+3ab+1$.

Câu 258. (3) Cho phương trình phức: $\left(\frac{2z+3i}{z+1}\right)^4=1$ có 4 nghiệm phức lần lượt là z_1, z_2, z_3, z_4. Tổng phần thực và phần ảo của các nghiệm không thể là giá trị nào sau đây?

A. 3. **B.** -2. **C.** -2/5. **D.** -4/3.

Câu 259. (3) Cho $|z|\le 1$. Nhận xét đúng là

A. $|\frac{2z-i}{2+iz}|\ge 1$. **B.** $|\frac{2z-i}{2+iz}|>1$. **C.** $|\frac{2z-i}{2+iz}|\le 1$. **D.** $|\frac{2z-i}{2+iz}|<1$.

Câu 260. (4) Cho số phức z thỏa mãn: |z| = 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức T = |1 – z| + |1 – z + z^2|. Nhận xét đúng nhất là:

A. max T = 11; min T = 2. **B.** max T = 5; min T = 1.

C. max T = 3; min T = 0. **D.** max T = 7; min T = - 2.

Câu 261. (4) Cho số phức z có mô đun bằng 1. Khi xét giá trị của biểu thức: P = |1 – z| + |1 + z^2|. Nhận xét đúng nhất là:

A. 1 < P < 4. **B.** $2\le P\le 4$. **C.** $3\le P\le 4$. **D.** $\sqrt{2}\le P\le 4$.

Câu 262. (4) Cho z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: $|z-i-1|\ge 2$ và $|z-2i|\le 5$. Kí hiệu z_1 và z_2 là hai số phức có mô đun nhỏ nhất và lớn nhất. Khi đó $|z_1 - z_2|$ bằng

A. $\sqrt{41+10\sqrt{2}}$. **B.** $\sqrt{13+4\sqrt{2}}$. **C.** $2\sqrt{7}$. **D.** $\sqrt{20-6\sqrt{3}}$.

Câu 263. (4) Cho z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: $|z-2i+1|\ge 3$ và $|z-1-i|\le 5$. Kí hiệu z_1 và z_2 là hai số phức có mô đun nhỏ nhất và lớn nhất. Khi đó $|(1 + 2i)z_1 + (1 - i)z_2|$ bằng

A. $3+2\sqrt{5}$. **B.** $-3+3\sqrt{5}+5\sqrt{2}$. **C.** $11-2\sqrt{2}$. **D.** $14+6\sqrt{3}$.

Câu 264. (3) Cho số phức z thỏa mãn: (4z + 5i) = (4 – 5iz)z^6. Giá trị của |z| bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

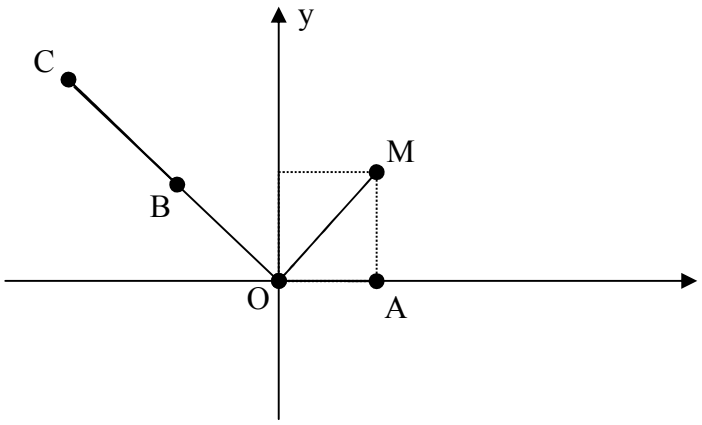
Câu 265. (4) Cho số phức z thỏa mãn: $|z^2 + 4| = 2|z|$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của |z|. Khi đó (m + M) tương ứng bằng

A. 6. **B.** $2\sqrt{5}+2$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $4\sqrt{3}$.

Câu 266. (3) Cho số phức: $z=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$. Giá trị của biểu thức: $(z^2+\frac{1}{z^2})^2+(z^3+\frac{1}{z^3})^3+(z^4+\frac{1}{z^4})^4$ là

A. 4. **B.** $10\sqrt{2}$. **C.** -6. **D.** 12.

Câu 267. (3) Cho điểm A biểu diễn số phức: $z=3+4i$ trên mặt phẳng phức như hình vẽ. Biết số phức w có |w| = 10. Điểm biểu diễn số phức w chỉ có thể là



A. A. **B.** 0. **C. B.** **D. C.**

Câu 268. (4) Cho số phức z thỏa mãn |z| = 1. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của: P = 2|1 – z| + |1 + z| lần lượt là M và m. Khi đó tích (Mm) tương ứng bằng

A. 10. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $4\sqrt{3}$. **D.** 12.

Câu 269. (3) Cho phương trình bậc 2 hệ số phức: $az^2 + bz + c = 0$ (1), trong đó a, b, c là các hệ số phức và z_1 , z_2 là hai nghiệm của phương trình phức (1) đã cho. Khi đó giá trị của biểu thức: $P = |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 - 2(|z_1| + |z_2|)^2$ tương ứng bằng

A. $|\frac{c}{a}|$. **B.** $4|\frac{-b}{a}|$. **C.** $-4|\frac{c}{a}|$. **D.** $4|\frac{b}{c}|$.

Câu 270. (3) Cho các số phức: $|z_1| = 2$; $|z_2| = 3$. Giá trị của: $P = |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2$ tương ứng bằng

A. 5. **B.** 20. **C.** 1. **D.** 10.

Câu 271. (3) Cho các số phức có cùng mô đun: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ và thỏa mãn: $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Khi đó giá trị của: $P = |z_1 + z_2|^3 + |z_2 + z_3|^3 + |z_3 + z_1|^3$ tương ứng bằng

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $3\sqrt{2}$.

Câu 272. (3) Cho các số phức có cùng mô đun: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 2$ và thỏa mãn: $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Khi đó giá trị của: $P = 2|z_1 + z_2| + 3|z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^3$ tương ứng bằng

A. 0. **B.** 6. **C.** 24. **D.** 18.

Câu 273. (3) Cho các số phức có cùng mô đun: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ và thỏa mãn: $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Khi đó mệnh đề **sai** là:

A. $P = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 1$.

B. $P = |z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| = |z_1^3| + |z_2^3| + |z_3^3|$

C. $P = |z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| = |z_1| + |z_2| + |z_3|$

D. $P = |z_1^4 + z_2^4 + z_3^4| = |z_1^4| + |z_2^4| + |z_3^4|$

Câu 274. (3) Cho các số phức có cùng mô đun: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \sqrt{3}$ và thỏa mãn: $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Khi đó giá trị của: $P = |z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2$ tương ứng bằng

A. $3\sqrt{3}$. **B.** 9. **C.** 0. **D.** 6.

Câu 275. (3) Cho bốn số phức có cùng mô đun: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 2$ và: $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$. Giá trị của biểu thức: $P = |z_1 + z_2 + z_3|^2 + |z_2 + z_3 + z_4|^2 + |z_3 + z_4 + z_1|^2$ tương ứng bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 12. **D.** 8.

Câu 276. (3) Cho bốn số phức có cùng mô đun: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4|$ và: $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$. Giá trị của biểu thức: $P = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 + z_4^3$ tương ứng bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 12.

Câu 277. (3) Cho bốn số phức có cùng mô đun: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = 1$ và: $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$. Giá trị của biểu thức: $P = |z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 + z_4^4|$ tương ứng bằng

A. 1. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 8.

Câu 278. (3) Giá trị của biểu thức: $P = (1 + i)^{4001} + (1 - i)^{4001}$ bằng

A. 2^{2000}. **B.** -2^{2001}. **C.** 2^{4000}. **D.** 2^{4001}.

Câu 279. (3) Giá trị của biểu thức: $P = (\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2})^{5000} + (\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2})^{5000}$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 2.

Câu 280. (4) Cho số phức z thỏa mãn: $|iz - \frac{5}{3-4i}| + |iz + \frac{5}{3-4i}| = 12$. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z - 4|$ lần lượt là M và m. Khi đó $|M + im|^2$ tương ứng bằng

A. 54. **B.** 63. **C.** 64. **D.** 96.

Câu 281. (3) Cho phương trình phức ẩn z bậc ba hệ số thực a, b, c là: $z^3 + az^2 + bz + c = 0$. Biết phương trình có hai nghiệm là $z_1 = 2$ và $z_2 = 1 + 2i$. Giá trị của biểu thức (a + 2b + 3c) bằng

A. 0. **B.** -12. **C.** 20. **D.** -16.

Câu 282. (3) Cho số phức z thỏa mãn: $|z| = 1$ và $|\frac{z}{\overline{z}} + \frac{\overline{z}}{z}| = 2$. Số nghiệm z thỏa mãn điều kiện bài toán tương ứng là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 283. (4) Cho số phức z thỏa mãn: $|\frac{6z - i}{2 + 3iz}| \le 1$. Giá trị lớn nhất của $|z|$ bằng

A. 1. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 1/3. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 284. (4) Cho số phức $z = a + ib$ thỏa mãn: $|z^2 + 4| = 2|z|$ và $(b^2 - a^2) = 6$. Khi đó mô đun của số

phức z tương ứng bằng

A. 4. **B.** 1. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 285. (3) Cho số phức z = a + ib thỏa mãn: $|z^2 + 4| = 2|z|$ và $P = 8(b^2 - a^2)$. Biểu diễn biểu thức P theo |z| thì hệ thức đúng tương ứng là

A. $P = (|z|^2 - 2)^2 + 12$. **B.** $P = (|z|^2 - 4)^2$.

C. $P = (|z|^2 - 3)^2 + 9$. **D.** $P = (|z|^2 - 1)^2 + 15$.

Câu 286. (4) Cho số phức z thỏa mãn: $|z^2 + \frac{1}{z^2}| \le 3$. Gọi M là giá trị lớn nhất của $|z + \frac{1}{z}|$. Nhận xét đúng sẽ là:

A. 0 < M < 2. **B.** 5/2 < M < 3. **C.** 2 < M < 5/2. **D.** M > 3.

Câu 287. (4) Cho số phức z thỏa mãn: $|z^3 + \frac{1}{z^3}| \le 18$. Gọi M là giá trị lớn nhất của $|z + \frac{1}{z}|$. Nhận xét đúng sẽ là:

A. 1 < M < 2. **B.** 0 < M < 1. **C.** 2 < M < 5/2. **D.** 5/2< M <4.

Câu 288. (3) Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $|z_1| = 3$, $|z_2| = 4$ và $|z_1 - z_2| = 5$. Giá trị của biểu thức: $P = |z_1 + z_2|$ tương ứng bằng

A. 5. **B.** 10. **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** $5\sqrt{3}$.

Câu 289. (3) Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $|z_1| = 6$, $|z_2| = 8$ và $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{13}$. Giá trị của biểu thức: $P = |z_1 + 2z_2|$ tương ứng bằng

A. 20. **B.** $5\sqrt{13}$. **C.** 14. **D.** $4\sqrt{13}$.

Câu 290. (3) Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $|z_1| = 6$, $|z_2| = 8$ và $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{13}$. Giá trị của biểu thức: $P = |3z_1 - 2z_2|$ tương ứng bằng

A. 26. **B.** $2\sqrt{73}$. **C.** $4\sqrt{11}$. **D.** $6\sqrt{13}$.

Câu 291. (3) Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $|z| = 6$ và $|z_1 - z_2| = 6$. Giá trị của biểu thức: $P = |z_1 + z_2|$ tương ứng bằng

A. 12. **B.** 6. **C.** $6\sqrt{2}$. **D.** $6\sqrt{3}$.

Câu 292. (3) Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $|z| = 4$ và $|z_1 - z_2| = 4$. Giá trị của biểu thức: $P = |2z_1 + 3z_2|$ tương ứng bằng

A. $4\sqrt{19}$. **B.** 20. **C.** 12. **D.** $4\sqrt{3}$.

Câu 293. (3) Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $|2z - i| = |2 + iz|$ và $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$. Giá trị của biểu thức: $P = |3z_1 - z_2|$ tương ứng bằng

A. $\sqrt{7}$. **B.** 2. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 294. (3) Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $|z_1| = 1$, $|z_2| = 2$ và $|2z_1 - 3z_2| = 5$. Giá trị của biểu thức: $P = |3z_1 + z_2|$ tương ứng bằng

A. 10. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** $\frac{7\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{82}}{2}$.

Câu 295. (4) Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $z_1 + z_2 = 3 + 4i$ và $|z_1 - z_2| = 4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = |z_1| + |z_2|$ tương ứng bằng

A. 8. **B.** $4\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{37}$. **D.** $\sqrt{41}$.

Câu 296. (4) Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $z_1 + z_2 = 6 - 8i$ và $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{5}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = 3|z_1| + 2|z_2|$ tương ứng bằng

A. 10. **B.** $2\sqrt{195}$. **C.** $5\sqrt{5}$. **D.** 30.

Câu 297. (4) Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $z_1 + 2z_2 = 3 + 4i$ và $|z_1 - z_2| = 4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = |z_1| + |z_2|$ tương ứng bằng

A. 16. **B.** $4\sqrt{13}$. **C.** $\frac{\sqrt{114}}{2}$ **D.** $\frac{2\sqrt{19}}{5}$

Câu 298. (4) Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $3z_1 + z_2 = 6 + 8i$ và $|z_1 - z_2| = 6$. Giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = 3|z_1| + 2|z_2|$ tương ứng bằng

A. 24. **B.** $4\sqrt{59}$. **C.** $2\sqrt{91}$. **D.** $5\sqrt{13}$.

Câu 299. (4) Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $|z_1 - 2z_2| = 2$ và $|3z_1 + z_2| = 4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = 2|z_1| + 3|z_2|$ bằng

A. 12. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** $\frac{44}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{22}{\sqrt{5}}$.

Câu 300. (4) Cho số phức z thỏa mãn đồng thời: $z + \overline{z} = 4$ và $2z + \overline{z} = (1+i).|z|$. Khi đó nhận xét đúng về mô đun của z là

A. $0 < |z| < 2$. **B.** $2 < |z| < 3$. **C.** $3 < |z| < 5$. **D.** $|z| > 5$.

Câu 301. (4) Cho hai số phức z thỏa mãn: $\frac{|z_1 + z_2|}{|z_1| + |z_2|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |\frac{z_1}{|z_1|} + \frac{z_2}{|z_2|}|$ tương ứng bằng

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\frac{2\sqrt{6}}{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{15}}{2}$.

Câu 302. (4) Cho hai điểm A và B khác gốc tọa độ O biểu diễn hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn hệ thức: $z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. ΔOAB vuông tại B. **B.** ΔOAB là tam giác đều.

C. ΔOAB vuông cân tại A. **D.** ΔOAB cân tại B.

Câu 303. (3) Cho hai số phức khác không z_1 và z_2 được biểu diễn bởi hai điểm A và **B.** Biết chúng thỏa mãn hệ thức phức: $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$. Nhận xét đúng về dạng của ΔOAB là

A. ΔOAB vuông tại O. **B.** ΔOAB vuông tại A.

C. ΔOAB là tam giác đều. **D.** ΔOAB là tam giác cân tại O.

Câu 304. (4) Cho phương trình phức z với các hệ số phức a, b, c: $az^2 + bz + c = 0$, trong đó: $|a| = |b| = |c| > 0$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của |z|. Khi đó giá trị |m + Mi| tương ứng bằng

A. 4. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 1. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 305. (3) Cho ba số phức thỏa mãn: $z_1z_2z_3 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $P = \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{|z_1| + |z_2|} + \frac{|z_2|^2 + |z_3|^2}{|z_2| + |z_3|} + \frac{|z_3|^2 + |z_1|^2}{|z_3| + |z_1|}$ tương ứng là

A. 3. **B.** 3/2. **C.** 4. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 306. (4) Cho phương trình bậc 4 biến z hệ số thực: $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$, có bốn nghiệm phức: z_1 , z_2 , z_3 , z_4 . Biết rằng: $z_1z_2 = 13 + i$; $z_3 + z_4 = 3 + 4i$. Giá trị của (a + b + c) bằng

A. 210. **B.** 18. **C.** 119. **D.** 137.

Câu 307. (3) Cho ba số phức cùng mô đun: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{|z_1 - z_2|.|z_1 - z_3|} + \frac{1}{|z_2 - z_1|.|z_2 - z_3|} + \frac{1}{|z_3 - z_1|.|z_3 - z_2|}$ tương ứng bằng

A. 3/2. **B.** 1. **C.** 4/3. **D.** 3/4.

Câu 308. (3) Cho số phức z thỏa mãn phương trình: $8z^{10} + 7iz^9 + 7iz - 8 = 0$. Khi đó |z| tương ứng bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 309. (4) Cho số phức z thỏa mãn: $|z - i| + |z + 3 - 5i| = 5$. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của |z| lần lượt là M và m. Khi đó |M + mi| tương ứng bằng

A. 4. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{26}$. **D.** $\sqrt{35}$.

Câu 310. (3) Cho số phức z có phần thực nhỏ hơn 1 thỏa mãn: $|z + 1 + i| = |2z + \overline{z} - 5 - 3i|$ sao cho P = |z – 2 – 2i| đạt giá trị cực tiểu. Số phức thỏa mãn là: z = a + ib. Khi đó: (a + 2b) tương ứng bằng

A. 10. **B.** 12. **C.** $5 - \sqrt{\frac{3}{2}}$. **D.** $6 - 2\sqrt{3}$.

Câu 311. (3) Cho số phức z thỏa mãn: $|z + 2| = |z + 2\overline{z} - 2 + 2i|$ sao cho P = |z – 1 + 3i| đạt giá trị cực tiểu. Giá trị cực tiểu của P tương ứng bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 312. (4) Cho số phức z có: |z| = 1. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: P = $|1 + z^3| + |1 + z + z^2|$. Khi đó (M + 2m) tương ứng bằng

A. 5. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 7.

Câu 313. (3) Cho số phức z có: |z| = 1. Giá trị lớn nhất của: P = $|1 + z| + |1 + z^2| + |1 + z^3|$ tương ứng bằng

A. 5. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 7.

Câu 314. (3) Cho số phức z có: |z| = 1. Giá trị nhỏ nhất của: P = $|1 + z| + |1 + z^2| + |1 + z^3|$ tương ứng bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 315. (4) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: |z| = 1. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức: P = $|1 + z^3| + |1 + z + z^2|$ tương ứng là m và M. Khi đó tổng (m + M) bằng

A. 4. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 316. (3) Cho phương trình phức ẩn z: $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ với các tham số thực: a, b, c, d. Biết phương trình có hai nghiệm phức: $z_1 = 3 - 2i$ và $z_2 = 3 + i$. Giá trị của (a + b + c – d) bằng

A. -20. **B.** 24. **C.** 12. **D.** 16.

Câu 317. (3) Cho phương trình phức ẩn z và hai tham số thực a và b: $4z^5 + 3iz^4 + 3iz - 4 = 0$. Giá trị của |z| tương ứng bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 318. (4) Cho số phức z thỏa mãn: |(3 – 4i)z + 50| = 10. Gọi giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |\overline{z} + 3 - 2i|$ là M , giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = |(1+i)\overline{z} + 4i - 2|$ là m. Khi đó giá trị của biểu thức: $(m + 2\sqrt{2})^2 + (M - 2)^2$ tương ứng bằng

A. 251. **B.** 212. **C.** 247. **D.** 220.

Câu 319. (3) Cho số phức z thỏa mãn: $|\frac{8z - i}{4 + 2iz}| \le 1$. Giá trị lớn nhất của |z| tương ứng bằng

A. 2. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 320. (3) Cho biểu thức: $|\frac{z - 2 + i}{z}| = k$ biểu diễn đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{30}$ (trong đó k > 1). Tâm của đường tròn được biểu diễn bởi số phức tương ứng là

A. -4 + 2i. **B.** 6 – 3i. **C.** 1 + 2i. **D.** 2 – i.

Câu 321. (4) Cho số phức z thỏa mãn: $|z + \frac{1}{z}| = 2$. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của |z| tương ứng là M và m. Khi đó (M + m) bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Câu 322. (3) Cho số phức z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình: $z^2 - 2z + 4 = 0$. Giá trị của biểu thức: $P = z_1^{2018} + z_2^{2018} + z_1^{2019} + z_2^{2019}$ tương ứng bằng

A. 0. **B.** 2^{2020}. **C.** 3.2^{2018}. **D.** -5.2^{2018}.

Câu 323. (3) Cho biểu thức: $|\frac{z-1+2i}{z}| = k$ biểu diễn đường tròn tâm I được biểu diễn bởi số phức $z_0 = 2 - 4i$ (trong đó $k > 0$). Bán kính của đường tròn tương ứng là

A. 1. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{17}$. **D.** 4.

Câu 324. (4) Cho số phức z thỏa mãn: $2|z-1|+3|z-i| \le 2\sqrt{2}$. Khi đó giá trị của |z| tương ứng sẽ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 325. (4) Cho số phức z thỏa mãn: $3|z-3|+4|z+4i| \le 15$. Khi đó mệnh đề nào dưới đây nhận xét đúng về |z| ?

A. $0 < |z| < 1$. **B.** $1 < |z| < 3$. **C.** $3 < |z| < 5$. **D.** $|z| > 5$.

Câu 326. (3) Cho số phức z có |z| = 1. Phần thực của số phức: $\frac{1}{1-z^2}$ tương ứng bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 327. (3) Cho số phức z có |z| = 2. Phần thực của số phức: $\frac{1}{2+z}$ tương ứng bằng

A. 1. **B.** 1/4. **C.** 1/2. **D.** 3/2.

Câu 328. (3) Cho số phức z có |z| = 3. Phần thực của số phức $\frac{1}{9+z^2}$ tương ứng bằng

A. 1/18. **B.** 1/9. **C.** 1/4. **D.** 1/3.

Câu 329. (4) Cho hai số phức z thỏa mãn: |z – w| = 2|z| = |w|. Khi đó phần thực của số phức $u = \frac{z}{w}$ tương ứng sẽ bằng

A. 1. **B.** 1/2. **C.** -1/4. **D.**1/8.

Câu 330. (3) Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $\begin{cases} |z_1 - 2i| = |2iz_1 + 1| \\ |z_2 - 2i| = |2iz_2 + 1| \end{cases}$ và $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}$. Giá trị của biểu thức $P = |2z_1 + z_2|$ tương ứng bằng

A. 2. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 331. (4) Cho số phức z thỏa mãn: |z – 1| = 2. Giá trị lớn nhất của: P = |z + 2i| + |z – 2 – 2i| tương

ứng bằng

A. 4. **B.** 12. **C.** 6. **D.** $2\sqrt{5}$.

Câu 332. (3) Cho số phức z thỏa mãn phương trình: $z^2 - (3i + 1)z - 2 + i = 0$. Giá trị của biểu thức: $|z_1 - z_2|$ tương ứng bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 333. (3) Tổng $S = 1 + 2i + 3.i^2 + 4.i^3 + ... + 2017.i^{2016}$ tương ứng bằng

A. 2018. **B.** – 1 + 2017i. **C.** 2018i – 1. **D.** 1009 – 1008i.

Câu 334. (3) Tổng $S = i - 2i^2 + 3.i^3 - ... + 2017.i^{2017}$ tương ứng bằng

A. 1008 – 1009i. **B.** 0. **C.** 2017i – 1. **D.** 1009i + 1009.

Câu 335. (3) Cho số phức z không phải là số thực thỏa mãn: $w = \frac{z}{1+z^2}$ là số thực. Khi đó giá trị của biểu thức $\frac{|z|}{1+|z|^2}$ tương ứng bằng

A. 1. **B.** 1/2. **C.** 1/4. **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 336. (4) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z - i| = 2$. Khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = |z - 1| + |z - 3i + 2|$ sẽ bằng

A. 6. **B.** 3. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $4\sqrt{2}$.

Câu 337. (4) Cho số phức z không phải là số thực thỏa mãn: $w = mz + \frac{n}{z}$ là số thực. Trong đó m và n là hai hằng số thực. Khi đó giá trị của biểu thức $P = |z| + \frac{1}{|z|}$ tương ứng bằng

A. $\frac{m}{n}$. **B.** $m + \frac{1}{n}$. **C.** $\sqrt{\frac{n}{m}} + \sqrt{\frac{m}{n}}$. **D.** $\sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Câu 338. (4) Tổng $S_{2020} = i + \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{3} + ... + \frac{i^{2020}}{2020} = A + i.B$. Khi đó $|S_{2020}|$ nằm trong khoảng

A. $(0;\frac{1}{2})$. **B.** $(1;\frac{3}{2})$. **C.** $(\frac{3}{2};2)$. **D.** $(\frac{1}{2};1)$.

Câu 339. (4) Tổng $S_{2019} = i^2 - \frac{i^3}{2} + \frac{i^4}{3} - ... - \frac{i^{2019}}{2018} = A + i.B$. Khi đó $|S_{2019}|$ nằm trong khoảng

A. $(\frac{1}{2};1)$. **B.** $(1;\frac{3}{2})$. **C.** $(\frac{3}{2};2)$. **D.** $(0;\frac{1}{2})$.

Câu 340. (3) Cho số phức z thỏa mãn $|z| = 2$. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = 2|z - 3| + 3|z + 3|$ tương ứng là M và m. Khi đó tích (mM) tương ứng bằng

A. 120. **B.** 0. **C.** $156\sqrt{2}$. **D.** $120\sqrt{3}$.

Câu 341. (3) Cho hai số phức z, u thỏa mãn: $|z + u| = 4$ và $|z - 2u| = 6$. Khi đó giá trị của biểu thức $P = |z|^2 + 2|u|^2$ tương ứng bằng

A. $\frac{21}{2}$. **B.** $\frac{44}{3}$. **C.** $\frac{48}{5}$. **D.** $\frac{68}{3}$.

Câu 342. (3) Cho phương trình bậc 2 ẩn phức z với các hệ số thực a, b: $z^2 + az + b = 0$. Biết phương trình có hai nghiệm phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $|z_1 - 1| = |z_2 - 2|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = 3|z_1| + 5|z_2|$ sẽ bằng

A. 8. **B.** 12. **C.** $\sqrt{34}$. **D.** $15\sqrt{2}$.

Câu 343. (3) Cho số phức z khác 0 thỏa mãn: $\frac{iz + (3-4i)\overline{z}}{1-i} = 3|z|^2$. Số phức: w = $5iz + 2 + i$ có mô đun tương ứng bằng

A. 10. **B.** $2\sqrt{10}$. **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** $12\sqrt{3}$.

Câu 344. (4) Cho số phức z thỏa mãn: $|z - 2 + i| = 1$. Giá trị lớn nhất của: $P = |z + 1| + |z - 5 + 2i|$ tương ứng bằng

A. 22. **B.** $4\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{11}$. **D.** $4\sqrt{10}$.

Câu 345. (3) Cho số phức z không phải số thực thỏa mãn: $w = \frac{m.z}{4 + z^2}$ là một số thực, trong đó m là hằng số thực. Giá trị của: $P = \frac{2|z|}{3 + |z|^3}$ bằng

A. $\frac{4}{11}$. **B.** 2. **C.** $\frac{4}{13}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Câu 346. (3) Cho số phức z và số phức liên hợp của nó được biểu diễn bởi hai điểm A và A' trên mặt phẳng phức. Số phức (3 + 2i)z và số phức liên hợp của nó được biểu diễn bởi hai điểm B và B' trên mặt phẳng phức. Biết AA'B'A là hình chữ nhật. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = |z - 1 + 4i|$ bằng

A. 3. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Câu 347. (3) Cho số phức z và số phức liên hợp của nó được biểu diễn bởi hai điểm A và A' trên mặt phẳng phức. Số phức (4 – 3i)(z + 1) và số phức liên hợp của nó được biểu diễn bởi hai điểm B và B' trên mặt phẳng phức. Biết AA'B'A là hình vuông. Giá trị của |iz + 3 – 4i | tương ứng nằm trong

A. $(0;1)$. **B.** $(1;4)$. **C.** $(4;7)$. **D.** $(7;+\infty)$.

Câu 348. (3) Cho số phức z thỏa mãn: $|z^2 - 4z + 13| = |(z - 2 - 3i)(z - 1 + i)|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = |z - 5|$ tương ứng là

A. 1. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{10}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $\frac{1}{2\sqrt{10}}$.

Câu 349. (3) Cho ba số phức cùng mô đun: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = R > 0$ và thỏa mãn: $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Mệnh đề nào dưới đây sai ?

A. $|z_1+z_2| = |z_2+z_3| = |z_3+z_1|$. **B.** $B = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = 0$.

C. $C = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$. **D.** $D = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = 0$.

Câu 350. (3) Cho một đa thức P(z) với các hệ số thực. Biết rằng số phức z (không thuần thực) thỏa mãn: P(z) = 0 thì mệnh đề đúng trong các mệnh đề dưới đây là:

A. $P(|z|) = 0$. **B.** $P(z^2) = 0$. **C.** $P(\frac{1}{z}) = 0$. **D.** $P(\overline{z}) = 0$.

Câu 351. (3) Cho số phức z thỏa mãn: $|z| \geq 1$. Xét biểu thức: $P = \frac{4z-5i}{4+5iz}$. Mệnh đề đúng là:

A. $|P| = 1$. **B.** $0 \leq |P| \leq 1$. **C.** $|P| > 1$. **D.** $|P| \geq 2$.

Câu 352. (3) Cho hai số phức z thỏa mãn: |z – 2u| = 2|u| = |z|. Khi đó giá trị của biểu thức: $P = (\frac{z}{u})^2 + 16(\frac{u}{z})^2$ tương ứng bằng

A. -4. **B.** $3 + i\sqrt{3}$. **C.** $17\sqrt{2}$. **D.** $-1 + i\sqrt{3}$.

Câu 353. (3) Cho số phức z thỏa mãn: |z + 2 – 3i| = |z – 1 + i|. Biết số phức w = iz + 2. Khi đó giá trị nhỏ nhất của |w| tương ứng bằng

A. 1. **B.** 1/2. **C.** 3/4. **D.** 3/2.

Câu 354. (3) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: |z| = 3 và $|2z.\overline{z} + 3z| = 9$?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 355. (3) Cho hai số phức z và u thỏa mãn: |z| = |u| = 1. Khi đó số phức $w = \frac{z+u}{1+zu}$ có phần ảo tương ứng bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 1/2.

Câu 356. (3) Gọi (H) là hình biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện: $|3z - \overline{z}| \leq 4$ và số phức z có phần thực không âm. Diện tích hình (H) tương ứng bằng

A. 2π. **B.** π^2. **C.** 4π. **D.** π.

Câu 357. (3) Cho số phức z thỏa mãn $|z + 2 - 5i| \leq 2$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức w = (3 + 4i)z + 2 – i là hình tròn có chu vi bằng

A. 20π. **B.** 16π. **C.** $8\pi\sqrt{2}$. **D.** $4\pi\sqrt{3}$.

Câu 358. (3) Cho số phức z thỏa mãn: $(3+2i)|z| = \frac{12}{z} + 1 - 5i$. Biết điểm biểu diễn số phức $w = (3-4i)z + 5 - 2i$ là đường tròn tâm I và bán kính R. Giá trị của bán kính R nằm trong khoảng

A. $0 < R < 1$. **B.** $\sqrt{2} < R < 3\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{3} < R < 4\sqrt{2}$. **D.** $4\sqrt{2} < R < 5\sqrt{3}$.

Câu 359. (3) Cho số phức z thỏa mãn: $(3+2i)z+\frac{325}{3-4i}=0$. Gọi M là điểm biểu diễn số phức $w=(i+2)z-3i+1$. Biết $\alpha=\widehat{MOx}=$ góc tạo bởi $\overrightarrow{OM}$ với trục Ox. Khi đó góc 2α có giá trị nằm trong cung phần tư tương ứng là

A. góc phần tư thứ 3. **B.** góc phần tư thứ nhất.

C. góc phần tư thứ 2. **D.** góc phần tư thứ 4.

Câu 360. (3) Cho số phức z không thuần thực sao cho: $w=\frac{2017z}{1+4z^2}$ là số phức thuần thực. Khi đó giá trị của biểu thức: $P=\frac{|z|}{3+4|z|^3}$ tương ứng bằng

A. 1. **B.** $\frac{1}{7}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Câu 361. (3) Cho z là số phức không thuần thực sao cho phần thực của số phức $u=\frac{1}{|z|+z}$ bằng 2. Khi đó |z| có giá trị bằng

A. 1/4. **B.** 1/2. **C.** 1/8. **D.** 1.

Câu 362. (3) Cho phương trình bậc hai hệ số thực a và b: $z^2 - bz + 3a + a^2 = 0$. Biết phương trình có một nghiệm z_1 không thuần thực thỏa mãn: $|z_1| = 2$. Mệnh đề đúng là:

A. a = 4 hoặc a = -1. **B.** a = 1 và b > 4.

C. a = 1 và -4 < b < 4. **D.** a = 1 hoặc a = -4 và b < - 4.

Câu 363. (4) Cho số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| + |z - 4 - 7i| = 6\sqrt{2}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của |z – 1 + i|. Khi đó tổng của (M + m) bằng

A. $\frac{5\sqrt{2}+2\sqrt{73}}{2}$. **B.** $\sqrt{13}+\sqrt{73}$. **C.** $5\sqrt{2}+\sqrt{73}$. **D.** $\frac{5\sqrt{2}+\sqrt{73}}{2}$.

Câu 364. (3) Cho số phức z không thuần thực thỏa mãn: $w=\frac{1+z+z^2}{1-z+z^2}$ là số thực. Giá trị của biểu thức: $P=\sqrt{1+2|z|}$ tương ứng bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 365. (4) Cho số phức z = a + ib trong đó a, b thỏa mãn: $a,b\ge 0; a-b\le 2; a+3b\le 12$. Giá trị lớn nhất của |z| tương ứng bằng

A. $\sqrt{113}$. **B.** $\frac{\sqrt{107}}{3}$. **C.** 14. **C.** $\frac{\sqrt{106}}{2}$.

Câu 366. (3) Cho phương trình phức: $z^{2017} + z^{2016} + ... + z + 1 = 0$ có đúng 2017 nghiệm phức lần lượt là: $z_1, z_2, ..., z_{2017}$. Khi đó tổng: $S=z_1^{2018}+z_2^{2018}+...+z_{2017}^{2018}$ có giá trị bằng

A. 0. **B.** 2018. **C.** 2017. **D.** – 1.

Câu 367. (3) Cho phương trình bậc hai hệ số a thực: $z^2 - 2az + a^2 - 3a = 0$. Biết phương trình có một nghiệm phức z_1 không thuần thực có $|z_1| = 2$. Giá trị của $|2a + (a^2 - 2)i|$ tương ứng bằng

A. 2. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{7}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 368. (3) Cho số phức z = x + iy, trong đó x, y là những số thực không âm thỏa mãn đồng thời các điều kiện: $x+y \le 6$; $x+2y \ge 4$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của Q = |z – 5 – i| tương ứng là M và m. Khi đó (M + 2m) tương ứng bằng

A. 9. **B.** $4\sqrt{3}$. **C.** $5\sqrt{3}$. **D.** $5\sqrt{2}$.

Câu 369. (3) Cho số phức z = x + iy, trong đó x, y là những số thực thỏa mãn đồng thời các điều kiện: $0 \le y$; $x+2y \le 8$; $x-y \ge 2$. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của: P = |z – 8 – 4i| lần lượt là M và m. Khi đó (M.m) tương ứng bằng

A. $\frac{16\sqrt{85}}{5}$. **B.** 12. **C.** $\frac{12\sqrt{3}}{5}$. **D.** $\frac{7\sqrt{3}}{2}$.

Câu 370. (3) Cho số phức z = x + iy, trong đó x, y là những số thực thỏa mãn đồng thời các điều kiện: $0 \le (x-2)(y-2)$; $3x+2y \ge 8$; $x+2y \le 10$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của P = |z – 4 – i| lần lượt là M và m. Khi đó (M + m) tương ứng bằng

A. 12. **B.** $2\sqrt{3}+2$. **C.** $\sqrt{13}+1$. **D.** $3\sqrt{2}+2$.

Câu 371. (3) Cho số phức z thỏa mãn: $|\frac{(3+4i)z+12-12i}{z-3i}| = 6$. Số phức $w = \frac{1}{iz+3}$ nằm trên đường tròn (C) có bán kính R bằng

A. 2. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 372. (3) Cho số phức z = a + ib, trong đó a, b là những số thực không âm đồng thời là các hệ số của tham thức bậc 2: $f(x) = x^2 - 2ax + b$. Biết rằng: $f(-1) \ge 3$; $f(-2) \le 9$. Giá trị lớn nhất của biểu thức P = |z – 3 – 4i| tương ứng bằng

A. $2\sqrt{13}$. **B.** $\sqrt{17}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** 5.

Câu 373. (4) Cho số phức z thỏa mãn: $|z-1| \le 3$; $|z-2i| \le 4$. Giá trị lớn nhất của P = |z – 3 – 4i| tương ứng bằng

A. $\frac{\sqrt{124+71\sqrt{11}}}{5}$. **B.** $4\sqrt{13}$. **C.** 5. **D.** $\frac{\sqrt{545+80\sqrt{11}}}{5}$.

Câu 374. (3) Cho số phức z thỏa mãn: $|z-2| \le 4$; $|z+1| \le |z+i|$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của P = |z – 3 + 2i| lần lượt là M và m. Khi đó (Mm) tương ứng bằng

A. $3\sqrt{2}+2$. **B.** $\frac{5\sqrt{10}+4\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{4\sqrt{3}+6\sqrt{2}}{2}$. **D.** 9.

Câu 375. (3) Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $|z_1|=|z_2|=1$; $|z_1+z_2|=\sqrt{3}$. Giá trị của biểu thức: $P=z_1.\overline{z_2}+z_2.\overline{z_1}$ tương ứng bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** -1. **D.** 3.

Câu 376. (4) Cho biểu thức: P = |z – 1| + |z – 2 – 3i| + |z – 4 – 2i| + |z – 5 + i|. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P tương ứng bằng

A. $2\sqrt{3}+6$. **B.** $2\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{5}+\sqrt{17}$. **D.** $5+\sqrt{13}$

Câu 377. (4) Cho biểu thức: P = |z | + |z – 4 – 2i| + |z – 3i| + |z – 5 + 2i|. Biết rằng khi z = a + ib thì biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó (a + 2b) tương ứng bằng

A. 1. **B.** 4. **C.** 6. **D.** -3.

Câu 378. (4) Cho ba số phức z_1 , z_2 , z_3 thỏa mãn: $|z_1 – z_2| = |z_2 – z_3| = 12$; $|z_3 – z_1| = 14$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = |z – z_1| + |z – z_2| + |z – z_3|$ tương ứng bằng

A. 6. **B.** $4\sqrt{5}+\sqrt{13}$. **C.** $\sqrt{95}+7\sqrt{3}$. **D.** $2\sqrt{11}+\sqrt{97}$.

Câu 379. (4) Cho hai số phức z_1 , z_2 thỏa mãn: $|z_1| = |z_2| = |z_1 – z_2| = 12$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = |z – z_1| + |z – z_2| + |z|$ tương ứng bằng

A. $12\sqrt{3}$. **B.** $6\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{15}$. **D.** $6\sqrt{7}$.

Câu 380. (4) Giá trị nhỏ nhất của biểu thức: P = |z – 6| + |z – 8i| + |z – 12 – 8i| tương ứng bằng

A. 6. **B.** $4+8\sqrt{3}$. **C.** $8+6\sqrt{3}$. **D.** $2\sqrt{11}+12$.

Câu 381. (3) Cho số phức z thỏa mãn phương trình: |z – 2i| = 2. Tập hợp điểm biểu diễn số phức w thỏa mãn: $|w-z|\le 1$ tương ứng là

A. miền D xác định bởi: $1\le x^2+y^2\le 3$.

B. miền D xác định bởi: $1\le x^2+(y-2)^2\le 9$.

C. miền D xác định bởi: $1\le x^2+y^2\le 9$.

D. miền D xác định bởi: $1\le (x-1)^2+y^2\le 3$.

Câu 382. (3) Cho số phức z thỏa mãn: $\left|\frac{(2+3i)z+5+i}{iz-3}\right|=6$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=\frac{1}{z+3i}$ tương ứng là

A. đường thẳng: x + 2y – 6 = 0.

B. đường tròn (C): $(x+\frac{1}{17})^2+(y+\frac{4}{17})^2=\frac{36}{221}$.

C. đường tròn (C): $(x-1)^2+(y-\frac{3}{2})^2=36$.

D. đường tròn (C): $(x-5)^2+(y-1)^2=6$.

Câu 383. (3) Cho số phức z thỏa mãn: |z – 2 + 3i| - |z + 2 – i| = $4\sqrt{2}$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức: P = |z – 3i + 2| tương ứng bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 384. (3) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: |z – 4| - |z + 4| = 8. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức: P = |z – 3 + 4i| bằng

A. 12. **B.** $3\sqrt{7}$. **C.** $\sqrt{65}$. **D.** $2\sqrt{13}$.

Câu 385. (4) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: |z – 5 + 3i| – |z + 3 – 3i| = 8 và đồng thời làm cho giá trị của biểu thức P = |z – 1| đạt giá trị nhỏ nhất. Biết rằng z = a + ib. Khi đó giá trị của tổng (10a + 10b) bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 386. (3) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: |z – 7 + 4i| – |z + 1 – 2i| = 6. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P = |z – 3 + i| bằng

A. 3. **B.** 6 **C.** 4. **D.** 5.

Câu 387. (4) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: |z – 8 + 4i| – |z – 2i| = 6. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P = |z + 2 + i| bằng

A. 1. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 6. **D.** 3.

Câu 388. (3) Cho số phức z không thuần thực sao cho: $w = \frac{3z}{3+z^2}$ là số thuần thực. Khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức P = |z + 3 – 2i| tương ứng bằng

A. 5. **B.** $3+2\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{13}$. **D.** $\sqrt{3}+\sqrt{13}$.

Câu 389. (3) Cho số phức z không thuần thực sao cho: $w = \frac{5z}{4+z^2}$ là số thuần thực đồng thời biểu thức $P = |z-1+i|$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó số phức z = a+ ib. Giá trị của $(a – b)^2$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 8. **D.** $3+2\sqrt{2}$.

Câu 390. (4) Cho số phức z thỏa mãn: $|z+1-2i| = 2\sqrt{2}$. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = |z-1| + 2017|\overline{z}+3+4i|$ lần lượt là M và m. Giá trị của (M/m) bằng

A. 2017^2. **B.** 2018. **C.** $2\sqrt{2017}$. **D.** $\sqrt{1+2017^2}$.

Câu 391. (3) Cho số phức z thỏa mãn: $|z – z_0| = 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = |z^2 + z_0^2|$ tương ứng bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** 1/2. **D.** 2.

Câu 392. (3) Cho số phức z_1 không đổi và số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z – z_1| = 4$. Xét biểu thức: $P = |z^2 + 2z_1^2 + 2z.z_1|$. Để biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất thì: $|z|$ **gần nhất** giá trị nào dưới đây?

A. 0. **B.** 1. **C.** 5/2. **D.** 7/2.

Câu 393. (3) Cho số phức z không thuần thực thỏa mãn điều kiện số phức: $w=\frac{z^2+z+1}{z^2-z+1}$ thuần thực. Khi đó gọi z = a + ib, giá trị của biểu thức: $\frac{1-(a^4+b^4)}{1-(a^6+b^6)}$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** 2/3. **D.** 1/2.

Câu 394. (3) Cho số phức z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình: |6 – 3i + iz| = |2z – 6 – 9i|, thỏa mãn: $|z_1-z_2|=2$. Giá trị của biểu thức: $P=|z_1+z_2|$ tương ứng bằng

A. 6. **B.** 5. **C.** $\sqrt{26}$. **D.** 10.

Câu 395. (4) Cho số phức z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình: |z – 1 + i| = 2, thỏa mãn: $|z_1-z_2|=2\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=|z_1+z_2|$ tương ứng bằng

A. 4. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $4\sqrt{3}$.

Câu 396. (4) Cho số phức z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình: |z – 3 + 4i| = 3, thỏa mãn: $|z_1-z_2|=2$. Giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=|z_1+z_2|$ tương ứng bằng

A. $4\sqrt{2}+10$. **B.** $4\sqrt{3}$. **C.** $6+2\sqrt{2}$. **D.** 12.

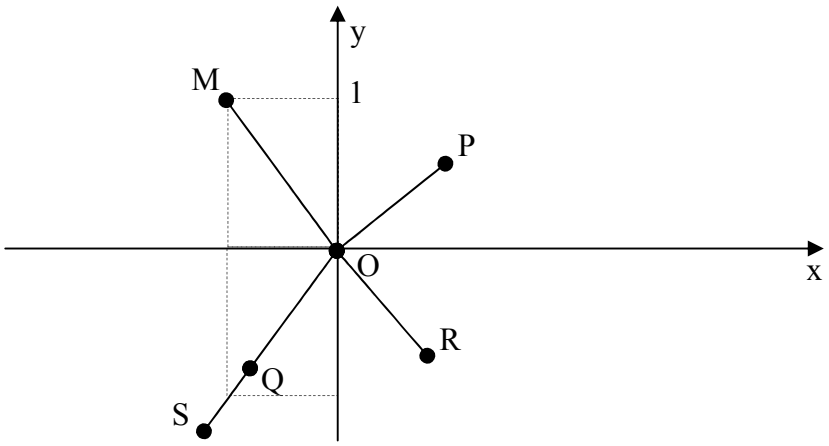
Câu 397. (4) Cho số phức z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình: |z – 2 + 3i| = 2, thỏa mãn: $|z_1-z_2|=3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=|z_1+z_2|$ tương ứng bằng

A. $4\sqrt{5}-\sqrt{7}$. **B.** $2\sqrt{13}-\sqrt{7}$. **C.** $10+2\sqrt{3}$. **D.** 10.

Câu 398. (4) Cho số phức z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình: |z – 4 + 2i| = 2, thỏa mãn: $|z_1-z_2|=\sqrt{6}$. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P=|2z_1+3z_2|$ lần lượt là M và m. Khi đó tổng (M + m) tương ứng bằng

A. $10\sqrt{5}-\sqrt{82}$. **B.** $2\sqrt{82}$. **C.** $10\sqrt{5}+\sqrt{19}$. **D.** $20\sqrt{5}$.

Câu 399. (3) Cho điểm M biểu diễn số phức z như hình vẽ. Trong các điểm đã cho (P, Q, R , S) điểm biểu diễn số phức nghịch đảo của z tương ứng là



A. P. **B.** R. **C.** S. **D.** Q.

Câu 400. (3) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z+1+i|=|z+1-i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=|z-2i+2|+\frac{8}{|z|}+\sqrt{z.\overline{z}}$ tương ứng nằm trong khoảng

A. (1;3). **B.** (3;5). **C.** (5;7). **D.** (7;9).

Câu 401. (3) Cho số phức z thỏa mãn: |z + 1 + i| = 1. Giá trị nhỏ nhất của: P = $|z^2 + 2i|$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** $2-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 402. (3) Cho ba số phức z phân biệt thỏa mãn: $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ và $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{1}{z_3}$. Biết rằng z_1, z_2, z_3 lần lượt được biểu diễn bởi các điểm A, B, **C.** Khi đó góc $\widehat{ACB}$ tương ứng bằng bao nhiêu ?

A. 90^0. **B.** 120^0. **C.** 60^0. **D.** 150^0.

Câu 403. (3) Cho phương trình bậc 2 hệ số thực: $z^2 + az + b = 0$ có hai nghiệm phức không thuần thực lần lượt là: w + 1 và 2w – 2i. Khi đó tổng của (8a + 9b) bằng

A. 8. **B.** 0. **C.** -8. **D.** 12.

Câu 404. (4) Cho phương trình phức hệ số thực: $z^3 + az^2 + bz + c = 0$. Biết phương trình có một nghiệm thuần thực và hai nghiệm phức không thuần thực. Gọi một nghiệm thuần thực là z_1 và một nghiệm phức là z_2. Biết rằng z_1 và iz_2 có cùng phần thực và có $|z_2| = 2$. Giá trị lớn nhất của hệ số thực b tương ứng bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 405. (3) Cho phương trình phức hệ số thực: $z^2 + az + 2a + 1 = 0$. Biết phương trình có hai nghiệm phức z_1 và z_2 thỏa mãn điều kiện: $z_1 = iz_2$. Khi đó biểu thức $(a – 2)^2$ có giá trị bằng

A. 0. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 406. (3) Cho số phức z thỏa mãn: |z + 1 + 2i| = 1. Giá trị nhỏ nhất của: P = $|z^2 + 4i – 3|$ bằng

A. 6. **B.** $2\sqrt{2}+3$. **C.** $\frac{2\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{13}-\sqrt{3}}{2}$.

Câu 407. (4) Cho số phức z khác không và thỏa mãn: $|z+\frac{3}{z}|=3\sqrt{2}$ và đặt: $M=\max|z|^2$; $m=\min|z|^2$. Giá trị của (M + m) tương ứng bằng

A. 12. **B.** 24. **C.** 20. **D.** 18.

Câu 408. (3) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z-2+3i|=\sqrt{6}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=|z-2+i|^2-|\overline{z}+1+3i|^2$ tương ứng bằng

A. 21. **B.** 14. **C.** $2\sqrt{13}+4$. **D.** $10\sqrt{6}-41$.

Câu 409. (3) Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn điều kiện: $|z_1|=|z_2|=1$. Giá trị nhỏ nhất của: P = $|z_1+1|+|z_2+1|+|z_1z_2+1|$ tương ứng bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 2.

Câu 410. (4) Cho hai số phức thỏa mãn điều kiện: $|z_1|=1;|z_2|=2$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức: P = $|z_1+1|+|z_2+2|+|z_1z_2+1|$ tương ứng bằng

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 411. (3) Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $|z_1| = 2$; $|z_2| = a > 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=|z_1+2|+|z_2+3|+|z_1z_2+4|$ nằm trong khoảng

A. (0;1). **B.** (1;3). **C.** (4;6). **D.** (6;8).

Câu 412. (4) Cho hai số phức z_1 và z_2 nằm trên đường tròn (C) có bán kính R và đi qua gốc tọa độ. Biết rằng: $|z_1| + |z_2| = 6$; $|z_1z_2| = 7$; $|z_1 - z_2| = 4$. Tìm bán kính R?

A. $\frac{7\sqrt{10}}{10}$. **B.** $\frac{10\sqrt{7}}{7}$. **C.** $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **D.** $\frac{14\sqrt{10}}{5}$.

Câu 413. (3) Cho số phức z thỏa mãn: $\overline{z}=\frac{z^2+2z+3}{z+1}$. Tổng mô đun của tất cả các số phức z thỏa mãn phương trình đã cho tương ứng bằng

A. 6. **B.** $3+\sqrt{6}$. **C.** $4+2\sqrt{2}$. **D.** 7.

Câu 414. (3) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z+i|=2$. Khi đó điểm biểu diễn số phức $w=\frac{(3-4i)z+2-i}{iz-1}$ là đường tròn (C) có tâm I(a;b) và bán kính R. Trong đó: a, b, R là các số thực. Giá trị của $(a + b + R^2)$ bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** -2.

Câu 415. (3) Cho ba số phức u, v, w thỏa mãn hệ thức: $(u-2i+3)v+2iw-3i-4=0$. Biết phương trình nghiệm đúng với mọi v. Khi đó |u + w| bằng

A. 2. **B.** 1/2. **C.** 3/2. **D.** 1.

Câu 416. (3) Cho u và w thỏa mãn hệ thức: $(1+2i)u.w-3i+4u=0$. Biết |u| = 4. Tìm quỹ tích điểm biểu diễn số phức w?

A. là đường tròn (C) có phương trình: $(x+\frac{4}{5})^2+(y-\frac{8}{5})^2=\frac{9}{80}$.

B. là đường thẳng có phương trình: 2x – 3y – 9 = 0.

C. là đường tròn (C) có phương trình: $(x+1)^2+(y-2)^2=9$

D. là đường tròn (C) có phương trình: $(x+\frac{2}{5})^2+(y-\frac{1}{5})^2=5$.

Câu 417. (3) Cho z và w thỏa mãn hệ thức: $(w+2i)z-(3-i)w+2i=0$. Biết |w| = 2. Quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là

A. đường tròn (C) có phương trình: $(x-1)^2+y^2=25$.

B. đường thẳng d có phương trình: $8x+2y+11=0$.

C. đường thẳng d có phương trình: $8x-2y-9=0$.

D. đường thẳng d có phương trình: $2x+11y-8=0$.

Câu 418. (3) Gọi M là điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn hệ thức: $|z-1+i\sqrt{3}|=1$. Biết góc $\widehat{MOy}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó số phức z = a + ib. Giá trị (2a + 2b) tương ứng bằng

A. $2\sqrt{3}$. **B.** 1. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $3-\sqrt{3}$.

Câu 419. (3) Gọi M là điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn hệ thức: $|z-1+i\sqrt{3}|=1$. Biết góc $\widehat{MOx}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó phần thực của số phức z bằng

A. 1. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 420. (3) Gọi M là điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn hệ thức: $|z-1+i\sqrt{3}|=1$. Biết góc $\widehat{MOy}$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó phần ảo của số phức z bằng

A. $-\frac{7+\sqrt{7}}{4}$. **B.** $-\frac{3+\sqrt{2}}{2}$. **C.** $-\sqrt{5}+1$. **D.** -2.

Câu 421. (3) Cho số phức z không thuần thực, sao cho số phức: $w=\frac{6+z+z^2}{6-z+z^2}$ là số thực. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: P = |z – 4 + 3i| lần lượt là M và m. Khi đó (Mm) bằng

A. 16. **B.** 14. **C.** 19. **D.** 12.

Câu 422. (4) Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình: $z^2 + 2az + a^2 + 2a + 3 = 0$, với a là tham số thực. Khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{1}{|z_1^2|}+\frac{1}{|z_2^2|}$ bằng

A. 2. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 1.

Câu 423. (4) Cho số phức z thỏa mãn: $|z^2+4i|=z$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=|z-2+3i|$. Khi đó tổng (M + m) bằng

A. 12. **B.** $2\sqrt{13}+1$. **C.** $2\sqrt{3}+6$. **D.** $9+2\sqrt{2}$.

Câu 424. (4) Gọi z_1 và z_2 là hai số phức thỏa mãn điều kiện: |4z – 3i| = |4 + 3iz|. Biết rằng chúng cũng thỏa mãn điều kiện: $|z_1 – z_2| = 1$. Hãy tính giá trị của biểu thức: $P = |2z_1 + 3z_2|$?

A. $\sqrt{19}$. **B.** 4. **C.** $2\sqrt{7}$. **D.** $5\sqrt{2}$.

Câu 425. (3) Cho hai số phức thỏa mãn: $|z_1| = |z_2| = 2$ và $|4z_1^2+9z_2^2|=48$. Khi đó giá trị của biểu thức: $P=|z_1^2-z_2^2|$ bằng bao nhiêu?

A. 12. **B.** $2\sqrt{26}$. **C.** 10/3. **D.** $5\sqrt{2}$.

Câu 426. (3) (Đề ĐH 2017 – Mã 108) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: $|z+2-i|=2\sqrt{2}$ và $(z – 1)^2$ thuần ảo ?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 427. (3) (Đề ĐH 2017 – Mã 108) Cho số phức z thỏa mãn: $z+2+i=|z|$. Đặt: z = a+ ib. Khi đó giá trị của S = (4a + b) tương ứng bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 428. (3) (Đề ĐH 2017 – Mã 103) Cho số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện: $|z+3|=5$ và $|z-2i|=|z-2-2i|$. Tính |z| ?

A. 17. **B.** $\sqrt{17}$. **C.** 10. **D.** $\sqrt{10}$.

Câu 429. (3) (Đề ĐH 2017 – Mã 103) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: $|z+3i|=\sqrt{13}$ và $\frac{z}{z+2}$ là số thuần ảo ?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 430. (3) (Đề ĐH 2017 – Mã 107) Cho số phức z = a + ib, (có a và b là số thực) thỏa mãn điều kiện: z + 1 + 3i – |z|i = 0. Tính S = (a + 3b) ?

A. -5. **B.** 5 . **C.** 7/3. **D.** -7/3.

Câu 431. (3) (Đề ĐH 2017 – Mã 107) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: $|z-3i|=5$ và $\frac{z}{z-2}$ là số thuần ảo ?

A. Vô số. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 432. (3) (Đề ĐH 2017 – Mã 120) Cho số phức z thỏa mãn: |z| = 5 và |z + 3| = |z + 3 – 10i|. Tìm số phức w = z – 4 + 3i ?

A. w = 1 + 3i. **B.** w = - 1 + 7i . **C.** w = - 4 + 8i. **D.** -3 + 8i.

Câu 433. (3) (Đề ĐH 2017 – Mã 120) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất một số phức z thỏa mãn đồng thời: $z.\overline{z}=1$ và $|z-\sqrt{3}+i|=m$. Tìm số phần tử của S?

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 434. (3) Cho số phức z thỏa mãn: $3|z+i|+5|z-i|=16$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của |z|. Khi đó (M + m) tương ứng thuộc khoảng nào ?

A. $(1;2)$. **B.** $(2;\frac{5}{2})$. **C.** $(\frac{5}{2};\frac{7}{2})$. **D.** $(\frac{7}{2};4)$.

Câu 435. (3) Cho số phức z thỏa mãn: $3|z+i|+4|z-2i|=20$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của |z|. Khi đó (M + m) tương ứng thuộc khoảng nào ?

A. $(1;3)$. **B.** $(4;\frac{11}{2})$. **C.** $(\frac{11}{2};\frac{13}{2})$. **D.** $(\frac{13}{2};8)$.

Câu 436. (3) Cho số phức z thỏa mãn: $3|z+3+2i|+4|z+1|=12$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của |z + i + 2|. Khi đó (M + m) tương ứng thuộc khoảng nào ?

A. $(1;2)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(3;4)$. **D.** $(4;6)$.

Câu 437. (3) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: |z| = 1. Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-1+i|+\sqrt{2}|z-2+i|$ tương ứng bằng

A. 2. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 3. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 438. (3) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: |z + i| = 1. Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-1+3i|+\sqrt{5}|z-5+i|$ tương ứng bằng

A. $2\sqrt{29}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{13}+\sqrt{5}$. **D.** $2\sqrt{15}$.

ĐÁP ÁN CÁC CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM NÂNG CAO

Câu	Đ/A	Câu	Đ/A	Câu	Đ/A	Câu	Đ/A	Câu	Đ/A	Câu	Đ/A	Câu	Đ/A
01	A	31	D	61	C	91	C	121	B	151	D	181	A
02	D	32	C	62	C	92	D	122	A	152	C	182	B
03	D	33	A	63	A	93	B	123	B	153	A	183	A
04	A	34	B	64	C	94	A	124	C	154	A	184	B
05	B	35	B	65	B	95	C	125	D	155	D	185	C
06	B	36	A	66	A	96	B	126	D	156	A	186	D
07	A	37	C	67	A	97	D	127	A	157	B	187	D
08	D	38	C	68	D	98	A	128	A	158	B	188	C
09	D	39	A	69	B	99	D	129	B	159	C	189	A
10	A	40	B	70	A	100	A	130	C	160	B	190	C
11	B	41	D	71	D	101	B	131	A	161	D	191	B
12	C	42	C	72	B	102	A	132	D	162	A	192	A
13	A	43	A	73	D	103	B	133	C	163	C	193	C
14	C	44	D	74	A	104	A	134	B	164	C	194	D
15	A	45	A	75	A	105	C	135	D	165	D	195	B
16	B	46	C	76	D	106	A	136	D	166	C	196	A
17	B	47	D	77	C	107	D	137	B	167	D	197	C
18	A	48	D	78	C	108	B	138	D	168	B	198	A
19	C	49	C	79	B	109	D	139	C	169	A	199	C
20	D	50	B	80	D	110	A	140	C	170	C	200	A
21	A	51	A	81	B	111	B	141	A	171	A	201	C
22	A	52	D	82	C	112	C	142	C	172	D	202	D
23	C	53	B	83	D	113	A	143	A	173	C	203	D
24	B	54	A	84	C	114	D	144	D	174	B	204	A
25	A	55	C	85	B	115	B	145	D	175	C	205	D
26	A	56	B	86	A	116	C	146	B	176	B	206	B
27	C	57	D	87	B	117	A	147	A	177	C	207	C
28	B	58	A	88	C	118	A	148	A	178	B	208	A
29	A	59	B	89	D	119	C	149	D	179	D	209	C
30	B	60	D	90	A	120	D	150	C	180	C	210	D

Câu	Đ/A	Câu	Đ/A	Câu	Đ/A	Câu	Đ/A	Câu	Đ/A	Câu	Đ/A	Câu	Đ/A
211	A	241	A	271	A	301	A	331	C	361	A	391	B
212	C	242	D	272	C	302	B	332	C	362	C	392	C
213	A	243	B	273	D	303	A	333	D	363	A	393	C
214	A	244	D	274	B	304	D	334	A	364	D	394	D
215	D	245	A	275	C	305	A	335	B	365	D	395	B
216	A	246	C	276	A	306	C	336	A	366	C	396	A
217	D	247	B	277	B	307	B	337	C	367	D	397	B
218	A	248	A	278	D	308	A	338	D	368	D	398	D
219	B	249	D	279	C	309	D	339	A	369	A	399	D
220	C	250	B	280	B	310	C	340	C	370	C	400	D
221	B	251	A	281	D	311	A	341	D	371	A	401	C
222	A	252	C	282	B	312	D	342	B	372	D	402	B
223	C	253	D	283	C	313	B	343	B	373	D	403	A
224	B	254	A	284	D	314	A	344	C	374	B	404	D
225	C	255	C	285	A	315	D	345	A	375	A	405	B
226	A	256	B	286	C	316	D	346	D	376	D	406	C
227	A	257	D	287	D	317	B	347	C	377	B	407	B
228	D	258	A	288	A	318	C	348	B	378	C	408	D
229	A	259	C	289	C	319	D	349	D	379	A	409	D
230	C	260	B	290	B	320	A	350	D	380	C	410	B
231	A	261	D	291	D	321	C	351	B	381	B	411	C
232	A	262	A	292	A	322	D	352	A	382	B	412	A
233	D	263	B	293	A	323	B	353	B	383	D	413	B
234	C	264	A	294	D	324	A	354	C	384	C	414	D
235	B	265	C	295	D	325	C	355	A	385	B	415	C
236	B	266	C	296	B	326	D	356	D	386	A	416	A
237	A	267	D	297	C	327	B	357	A	387	D	417	C
238	D	268	B	298	C	328	A	358	D	388	D	418	D
239	C	269	C	299	A	329	D	359	A	389	C	419	B
240	C	270	D	300	C	330	B	360	B	390	D	420	A

Câu	Đ/A	Câu	Đ/A	Câu	Đ/A	Câu	Đ/A	Câu	Đ/A	Câu	Đ/A	Câu	Đ/A
421	C	451		481		511		541		571		601	
422	D	452		482		512		542		572		602	
423	B	453		483		513		543		573		603	
424	A	454		484		514		544		574		604	
425	C	455		485		515		545		575		605	
426	A	456		486		516		546		576		606	
427	B	457		487		517		547		577		607	
428	D	458		488		518		548		578		608	
429	C	459		489		519		549		579		609	
430	D	460		490		520		550		580		610	
431	B	461		491		521		551		581		611	
432	C	462		492		522		552		582		612	
433	A	463		493		523		553		583		613	
434	D	464		494		524		554		584		614	
435	C	465		495		525		555		585		615	
436	B	466		496		526		556		586		616	
437	B	467		497		527		557		587		617	
438	A	468		498		528		558		588		618	
439		469		499		529		559		589		619	
440		470		500		530		560		590		620	
441		471		501		531		561		591		621	
442		472		502		532		562		592		622	
443		473		503		533		563		593		623	
444		474		504		534		564		594		624	
445		475		505		535		565		595		625	
446		476		506		536		566		596		626	
447		477		507		537		567		597		627	
448		478		508		538		568		598		628	
449		479		509		539		569		599		629	
450		480		510		540		570		600		630	

X. HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT CÁC BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM:

Lời tựa: Với mỗi câu trắc nghiệm này sẽ được trình bày ít nhất một cách bắt buộc đầu tiên, đó là cách trình bày tự luận giúp các em học sinh mới học phần số phức có thể nắm vững được bản chất. Tuy nhiên, tác giả cũng sẽ trình bày thêm một hoặc nhiều cách trắc nghiệm: có cách thì dễ nhớ nhưng dài dòng hơn, có cách thì ngắn gọn tốc độ nhưng lại yêu cầu nhớ các công thức chuyên dụng nhiều hơn. Tóm lại, các em học sinh và bạn đọc tham khảo xem cách nào, hướng giải nào phù hợp với tư duy và khả năng thiết thực nhất của bản thân mình thì nên ghi nhớ và sử dụng thường xuyên để tạo cho mình kĩ năng trắc nghiệm.

Ở sau mỗi câu trắc nghiệm có kí hiệu (2) , (3) , (4) thì đây là mức độ khó tăng dần. Cần phân biệt rõ, cách làm nhanh và tốc độ là so sánh khi triển khai làm trực tiếp, chứ không được so sánh số dòng chữ dẫn giải. Vì đơn giản, cách trắc nghiệm, số dòng chữ dẫn giải đó có tốc độ xử lí đo bằng tư duy. Phần này chỉ trình bày lời giải của các câu mức (3) và mức (4); còn với những câu mức (2) đều là cơ bản và là những câu lí thuyết chúng ta phải tự hoàn thiện.

Câu 18. (3) Biết rằng số phức z thỏa mãn: $|z+2i|=|z|+2$. Số phức z bằng

A. 4i. **B.** 3. **C.** 3 + 4i. **D.** 3 – 4i.

Giải:

Cách 1: Tự luận.

- Áp dụng bất đẳng thức tam giác trong số phức, ta có:
- $|z+2i|\le|z|+|2i|=|z|+2$. Bài toán cho dấu "=" xảy ra. Khi đó hai số phức (z) và (2i) đồng dạng dương, tức là ta có: z = k.(2i) ; với số thực: $k\ge 0$.
- Vậy chứng tỏ: z = 2k.i là số phức thuần ảo. Quan sát các đáp án ta nhận thấy chỉ có đáp án A thỏa mãn. Vậy ta chọn đáp án **A.**

Cách 2: (Thay số thử nghiệm) Nếu chúng ta không nắm vững được quá nhiều kiến thức nâng cao thì việc thay số 4 đáp án vào đề bài cũng là một phương pháp rất hữu dụng trong thi trắc nghiệm.

- Lần lượt thay 4 đáp án vào hệ thức đã cho:
- Với đáp án A. z = 4i. Ta thay vào hệ thức đã cho: $|4i+2i|=|4i|+2=6$; đúng. Vậy ta chọn ngay đáp án **A.**
- **Nhận xét:** *Khi ta gặp may, câu trắc nghiệm cho đáp án là* **A** *thì chỉ cần thay một lần là được ngay đáp án. Thế nhưng, khi mà đáp án là* **C.** *hoặc* **D.** *và đồng thời hệ thức thay khó khăn thì coi như chúng ta ko gặp may.*

Câu 20. (3) Cho số phức $z=\frac{(1+2i)(1-i\sqrt{3})^{16}}{(1-i)^{12}}$. Mô đun của số phức (1 – 2i)z sẽ là

A. 1024. **B.** 1204. **C.** 4092. **D.** 5120.

Giải:

Cách 1: Tự luận

- Số phức: (1 – 2i)z = $(1-2i).\frac{(1+2i)(1-i\sqrt{3})^{16}}{(1-i)^{12}}=\frac{\{(1-2i)(1+2i)\}(1-i\sqrt{3})^{16}}{(1-i)^{12}}=\frac{5(1-i\sqrt{3})^{16}}{(1-i)^{12}}$
- Suy ra: $|(1-2i)z|=|\frac{5(1-i\sqrt{3})^{16}}{(1-i)^{12}}|=5\frac{|1-i\sqrt{3}|^{16}}{|1-i|^{12}}=5.\frac{2^{16}}{(\sqrt{2})^{12}}=5.2^{10}=5120.$
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Cách 2: Bài toán hỏi |(1 – 2i)z| thì ta dùng CASIO bấm luôn giá trị: $|(1-2i)\frac{(1+2i)(1-i\sqrt{3})^{16}}{(1-i)^{12}}|=5120.$

Câu 22. (3) Chọn hệ thức sai?

A. $|z+i|=|z|+1.$ **B.** $|z+2i|\le|z|+2.$ **C.** $|z-i|\ge|z|-1.$ **D.** $|z+2+i|<|z|+3.$

Giải:

- Xuất phát từ bất đẳng thức tam giác: $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$ và $|z_1-z_2|\ge|z_1|-|z_2|$
- Lần lượt kiểm tra các đáp án:
- **Đáp án A.** đúng ra: $|z+i|\le|z|+|i|=|z|+1$ mà đáp án A. là: $|z+i|=|z|+1$. Vậy suy ra hệ thức của đáp án **A.** sai.
- Đúng ra khi đi làm đề thi trắc nghiệm thì đến đây là xong rồi. Nhưng ta vẫn xét thêm sự đúng sai của 3 đáp án còn lại cho thông suốt và mạch lạc kiến thức:
- **Đáp án B.** $|z+2i|\le|z|+|2i|=|z|+2$ đúng với bất đẳng thức tam giác tổng hai cạnh luôn.
- **Đáp án C.** $|z-i|\ge|z|-|i|=|z|-1$ đúng với bất đẳng thức tam giác hiệu hai cạnh luôn.
- **Đáp án D.** $|z+2+i|<|z|+3$ Đây là một đáp án mồi, nếu các em học sinh học khá giỏi nhìn vào sẽ dùng tư duy khoanh bừa đáp án D sai..Vì nhận thấy cả 3 đáp án kia có xuất hiện các dấu $\ge$ và $\le$; đồng thời cả 3 đáp án kia đều ngấp nghé xuất hiện các mô đun đúng.
- Thế nhưng, nếu phân tích kĩ: $|z+2+i|\le|z|+|2+i|=|z|+\sqrt{5}<|z|+3$ quá đúng.
- **Nhận xét:** Khi không dùng tư duy Toán học để chọn đáp án mà chỉ dùng tư duy loại trừ linh cảm, sẽ đưa tới kết quả tốt nhất là 50/50. Đó là còn lại một câu đáp án mồi rất nguy hiểm.

Câu 30. (3) Tổng: A = i + i^2 + … + i^{51} bằng

A. 1. **B.** -1. **C.** -i. **D.** i.

Giải:

Cách 1:

- Tổng cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = i$ và công bội $q = i$:
- $A = u_1.\frac{q^n - 1}{q - 1} = i.\frac{i^{51} - 1}{i - 1} = \frac{i^{52} - i}{i - 1} = \frac{(i^2)^{26} - i}{i - 1} = \frac{(-1)^{26} - i}{i - 1} = \frac{1 - i}{i - 1} = -1$
- Chọn đáp án **B.**

Cách 2:

- Tổng của 4 lũy thừa liên tiếp của số ảo i là: $i + i^2 + i^3 + i^4 = i(1 + i^2) + i^2(1 + i^2) = 0$
- Như vậy, tổng của 4k lũy thừa liên tiếp của số ảo luôn bằng 0.
- Vậy ta có: $A = (1 + i + i^2 + ... + i^{51}) - 1 = 0 - 1 = -1$.

Câu 31. (3) Tổng: $A = 1 + i + i^2 + ... + i^{2017}$ bằng

A. $1 - i$. **B.** i. **C.** 1. **D.** $1 + i$.

Giải:

- Tổng của 4 lũy thừa số ảo liên tiếp bằng 0: $A = 1 + i + (i^2 + i^3 + ... + i^{2017}) = 1 + i + 0 = 1 + i$.
- Chọn đáp án **D.**

Câu 32. (3) Rút gọn biểu thức: $A = \frac{i + i^3 + ... + i^{57}}{i^2 + i^4 + ... + i^{62}}$ sẽ bằng

A. i. **B.** -1. **C.** 0. **D.** $1 + i$.

Giải:

- Chúng ta nhận thấy: $i + i^3 = i(1 + i^2) = 0$; $i^2 + i^4 = i^2(1 + i^2) = 0$. Khi đó ta có:
- $A = \frac{i + (i^3 + ... + i^{57})}{i^2 + (i^4 + ... + i^{62})} = \frac{i + (i^3 + i^5) + ...(i^{55} + i^{57})}{i^2 + (i^4 + i^6) + ...(i^{60} + i^{62})} = \frac{i}{i^2} = -i$.
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 33. (3) Tổng: $S_n = 1 + (1 + i) + (1 + 2i) + ... + (1 + 2016i)$ có phần ảo bằng b. Khi đó b/144 bằng

A. 14119. **B.** 19114. **C.** 11491. **D.** 14911.

Giải:

- Chúng ta nhận thấy S_n là tổng của 2017 số hạng, các số hạng này lập thành một cấp số cộng với công sai d = i. {muốn biết công sai d ta chỉ cần xác định hiệu của hai số hạng liên tiếp}
- Vậy áp dụng công thức tính tổng cấp số cộng ta được:
- $S_n = 1 + (1 + i) + (1 + 2i) + ... + (1 + 2016i) = \frac{1 + (1 + 2016i)}{2}.2017 = 2017 + 2033136i$

- Phần ảo của S_n là: b = 2033136 $\rightarrow \frac{b}{144} = 14119$. Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 34. (3) Tổng: $S_n = 1 + (2+i) + (3+2i) + ... + (200+199i)$ có phần thực bằng a và phân ảo bằng b. Khi đó (a + b)/100 bằng

A. 200. **B.** 400. **C.** 144. **D.** 289.

Giải:

- S_n là tổng của cấp số cộng có đông sai d = 1 + i và có 200 số hạng. Ta có:
- $S_n = 1 + (2+i) + (3+2i) + ... + (200+199i) = \frac{1+(200+199i)}{2}.200 = 20100 + 19900i$
- Suy ra: $\frac{a+b}{100} = \frac{20100+19900}{100} = 400$.
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 35. (3) Cho tổng: $S_n = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + ... + (1+i)^{19}$. Rút gọn tổng S_n bằng

A. 1+210i. **B.** $(2^{10}+1)i$. **C.** 1025. **D.** 1023.

Giải:

- S_n tổng của một cấp số nhân có số hạng đầu tiên $u_1 = 1$ và công bội q = 1 + i, có 20 số hạng.
- Áp dụng công thức:
- $S_n = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + ... + (1+i)^{19} = u_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1.\frac{(1+i)^{20} - 1}{(1+i) - 1} = (2^{10}+1)i$
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 36. (3) Cho tổng: $S_n = (1-i) + (1-i)^2 + ... + (1-i)^{20}$. Rút gọn tổng S_n bằng

A. -1025(1 + i). **B.** $2^{10}(1+i)$. **C.** 1025(1 – i). **D.** 1023i – 1.

Giải:

- Áp dụng công thức tổng của 20 số hạng của cấp số nhân:
- $S_n = (1-i) + (1-i)^2 + ... + (1-i)^{20} = u_1.\frac{q^n - 1}{q - 1} = (1-i).\frac{(1-i)^{20} - 1}{(1-i) - 1} = -(1025)(1+i)$
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 47. (3) Cho số phức z = a + ib, trong đó a và b là hai số thực. Biết rằng số phức z thỏa mãn

phương trình phức: $\frac{|z|^2}{\overline{z}}+2z-\frac{25(\overline{z}-i)}{3-4i}=0$. Tỉ số $\frac{b}{a}$ có giá trị bằng

A. 3/8. **B.** 1/3. **C.** 3. **D.** 4/3.

Giải:

- Chúng ta có: $z.\overline{z}=|z|^2\rightarrow z=\frac{|z|^2}{\overline{z}}$. Lại có: $\frac{25}{3-4i}=3+4i$.
- Phương trình đã cho $\Leftrightarrow z+2z-(3+4i)(\overline{z}-i)=0\leftrightarrow 3z-(3+4i)\overline{z}-4+3i=0$ (1)
- Đến đây ta thấy (1) là phương trình bậc nhất hai ẩn quá đơn giản và đã biết làm rồi .
- (1) $\Leftrightarrow 3(a+ib)-(3+4i)(a-ib)-4+3i=0\leftrightarrow(-4b-4)+i(-4a+6b+3)=0\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-\frac{3}{4}\\b=-1\end{array}\right.$
- Suy ra tỉ số: $\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$. Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 53. (3) Cho số phức z thỏa mãn phương trình: $\frac{|z|^2}{z}+iz-\frac{2(z+1)}{1+i}=0$. Tích số phần thực và phần ảo của số phức z bằng?

A. 1/4. **B.** 1/2. **C.** -1/4. **D.** -1/2.

Giải:

- Tương tự câu 47 ta có:
- Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \overline{z}+iz-(1-i)(z+1)=0\leftrightarrow\overline{z}+(2i-1)z-1+i=0$ (1)
- Thay z = a + ib vào phương trình (1) ta được:
- (1) $\Leftrightarrow (a-ib)+(2i-1)(a+ib)-1+i=0\leftrightarrow(-2b-1)+i(2a-2b+1)=0\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-1\\b=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$
- Suy ra tích số phần thực và phần ảo của số phức z: a.b = 1/2. Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 54. (3) Cho số phức z thỏa mãn phương trình: $(1+i)(z-i)+2z=2i$. Khi đó mô đun của số phức: $w=\frac{\overline{z}-2z+1}{z^2}$ sẽ là

A. $\sqrt{10}$. **B.** 5. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{13}$.

Giải:

- Giải nhanh phương trình bậc nhất để tìm số phức z:
- Phương trình đã cho $\Leftrightarrow z(1+i+2)=2i+(1+i)i\rightarrow z=\frac{2i+(1+i)i}{1+i+2}=CASIO=i\rightarrow\overline{z}=-i$

- Mô đun của số phức w: $|w| = \frac{|\overline{z} - 2z + 1|}{|z^2|} = \frac{|-i - 2i + 1|}{|i^2|} = \sqrt{10}$.
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 62. (3) Cho số phức z thỏa mãn phương trình: $(1+3i)z^2 - \overline{z}(3+4i) = 0$. Giá trị của |z| là

A. 5. **B.** 8,5. **C.** $0,5\sqrt{10}$. **D.** $5\sqrt{2}$.

Giải:

- **Cách 1:** Gọi z = a + ib rồi thay vào phương trình đã cho..Rồi sau nhiều phút suy ra được z.
- **Cách 2:** Đây là dạng bài toán xử lí mô đun:
- Phương trình đã cho $\Leftrightarrow (1+3i)z^2 = \overline{z}(3+4i) \rightarrow |(1+3i)z^2| = |\overline{z}(3+4i)| \rightarrow |1+3i|.|z|^2 = |z|.|3+4i|$
- $\Leftrightarrow \sqrt{10}.|z| = 5 \rightarrow |z| = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$.
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 64. (3) Cho số phức z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình phức: $z^2 + (5i-2)z + 1 = 0$. Giá trị của biểu thức: $A = |z_1 + \frac{1}{z_1}| + |z_2 + \frac{1}{z_2}|$ sẽ là

A. 31. **B.** 29. **C.** $2\sqrt{29}$. **D.** $\sqrt{58}$.

Giải:

- **Cách 1:** Giải phương trình bậc hai mất một ít phút rồi thay vào biểu thức A.
- **Cách 2:** Đây là bài toán xử lí mô đun.
- Chia phương trình cho z ta được: $z + (5i-2) + \frac{1}{z} = 0 \leftrightarrow z + \frac{1}{z} = 2 - 5i \rightarrow |z + \frac{1}{z}| = |2 - 5i| = \sqrt{29}$
- Suy ra: $A = |z_1 + \frac{1}{z_1}| + |z_2 + \frac{1}{z_2}| = |25 - i| + |2 - 5i| = 2\sqrt{29}$.
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 65. (3) Cho số phức z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình phức: $z^2 + 3z + 5 = 0$. Giá trị của biểu thức: $A = |z_1 + \frac{5}{z_1}| + |z_2 + \frac{5}{z_2}|$ sẽ là

A. 3. **B.** 6. **C.** $2\sqrt{15}$. **D.** $\sqrt{30}$.

Giải:

- Phương trình đã cho $\Leftrightarrow z + 3 + \frac{1}{z} = 0 \rightarrow z + \frac{1}{z} = -3$

- Thay vào biểu thức A, ta được: $A = |z_1 + \frac{5}{z_1}| + |z_2 + \frac{5}{z_2}| = |-3| + |-3| = 6$.
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 66. (3) Cho số phức z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình phức: $z^2 + 2z + 17 = 0$. Giá trị của biểu thức: $A = |z_1^2| + |z_2^2|$ sẽ là

A. 34. **B.** 17. **C.** $2\sqrt{17}$. **D.** $\sqrt{34}$.

Giải:

- Bài toán này thì không xử lí mô đun được. Mà thực chất phương trình bậc hai cũng rất đơn giản. Sử dụng CASIO bấm nhanh ra được hai nghiệm phức:
- $z^2 + 2z + 17 = 0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} z_1 = -1 - 4i \\ z_2 = -1 + 4i \end{array}\right.$
- Thay vào biểu thức A, ta được: $A = |z_1^2| + |z_2^2| = |-1-4i|^2 + |-1+4i|^2 = 34$
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 67. (3) Cho số phức z thỏa mãn phương trình: $(2-i)z^2 = m.(\overline{z})^2$. Giá trị của m bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** 4. **C.** 3. **D.** $\sqrt{3}$.

Giải:

- Từ phương trình đã cho ta lấy môđun hai vế:
- $|(2-i)z^2| = |m.\overline{z}^2| \leftrightarrow |2-i|.|z|^2 = |m|.|\overline{z}|^2 \rightarrow |2-i| = |m| = \sqrt{5} \rightarrow m = \pm\sqrt{5}$
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 68. (3) Cho số phức z thỏa mãn: $(1+2i)z^3 - \overline{z}(4-3i) = 0$. Giá trị của |z| bằng

A. 5. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 10. **D.** $\sqrt{\sqrt{5}}$.

Giải:

- Xử lí mô đun: Phương trình $\Leftrightarrow (1+2i)z^3 = \overline{z}(4-3i) \leftrightarrow |(1+2i)z^3| = |\overline{z}(4-3i)|$
- $\Leftrightarrow |1+2i|.|z|^3 = |\overline{z}|.|3-4i| \leftrightarrow \sqrt{5}.|z|^2 = 5 \rightarrow |z| = \sqrt{\sqrt{5}}$.
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 69. (3) Cho z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm của phương trình trùng phương: $z^4 - 5z^2 + 4 = 0$. Giá trị của biểu thức: $A = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$ bằng

A. 10. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 8.

Giải:

- Bấm CASIO giải phương trình trùng phương ta được:
- $\left[\begin{array}{l} z^2=1\to z_{1,2}=\pm 1 \\ z^2=4\to z_{3,4}=\pm 2 \end{array}\right.$
- Thay vào biểu thức A ta được: $A=|-1|+|+1|+|-2|+|+2|=6$
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 70. (3) Cho z_1 và z_2 lần lượt là hai nghiệm của phương trình: $z^2-2iz+3i+2=0$. Giá trị của $|z_1-i|^2+|z_2-i|^2$ bằng

A. $6\sqrt{2}$. **B.** $4\sqrt{7}$. **C.** 12. **D.** 26.

Giải:

- Phương trình đã cho $\Leftrightarrow z^2-2iz+i^2-i^2+3i+2=0\leftrightarrow (z-i)^2+3+3i=0\leftrightarrow (z-i)^2=-3-3i$
- Suy ra: $(z_1-i)^2=(z_2-i)^2=-3-3i$. Thay vào biểu thức mô đun cần tính, ta được:
- $|z_1-i|^2+|z_2-i|^2=|(z_1-i)^2|+|(z_2-i)^2|=|-3-3i|+|-3-3i|=6\sqrt{2}$.
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 71. (3) Cho z_1 và z_2 lần lượt là hai nghiệm của phương trình: $z^2-4iz+3i-3=0$. Giá trị của $|z_1-2i|^2+|z_2-2i|^2$ bằng

A. 20. **B.** $\sqrt{13}$. **C.** 15. **D.** $2\sqrt{10}$.

Giải:

- Phương trình đã cho $\Leftrightarrow z^2-4iz+4i^2-4i^2+3i-3=0\leftrightarrow (z-2i)^2+1+3i=0\leftrightarrow (z-2i)^2=-1-3i$
- Suy ra: $(z_1-2i)^2=(z_2-2i)^2=-1-3i$. Thay vào biểu thức mô đun ta được:
- $|z_1-2i|^2+|z_2-2i|^2=|(z_1-2i)^2|+|(z_2-2i)^2|=|-1-3i|+|-1-3i|=2\sqrt{10}$.
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 72. (3) Hai nghiệm của phương trình phức: $z^2-(3+7i)z-10+11i=0$ lần lượt là

A. 1 + 4i và 3 – 5i. **B.** 1 + 4i và 2 + 3i. **C.** 1 – 4i và 3 + i. **D.** 1 – 4i và 2 + 11i.

Giải:

- **Cách 1:** Tự luận.
- Đây là phương trình bậc hai hệ số phức một ẩn nên ta làm bình thường:
- $\Delta=(3+7i)^2-4(-10+11i)=-2i=(1-i)^2\to\sqrt{\Delta}=\pm(1-i)$

- $z_1 = \frac{3+7i-(1-i)}{2} = 1+4i; z_2 = \frac{3+7i+(1-i)}{2} = 2+3i$
- Vậy ta chọn đáp án **B.**
- **Nhận xét:** Bài toán này khai căn biệt số Δ khá dễ dàng nên ta cảm giác đơn giản. Nếu gặp bài toán khai căn Δ phức tạp thì sẽ rất hoang mang.
- **Cách 2:** Thay số.
- Chúng ta không thể thay số lần lượt các cặp nghiệm ngay vào phương trình được sẽ rất mất thời gian. Sử dụng định lí VIET đảo cho tổng và tích hai nghiệm: $\begin{cases} z_1+z_2 = -\frac{b}{a} = 3+7i \\ z_1z_2 = \frac{c}{a} = -10+11i \end{cases}$
- Với đáp án A: $z_1 + z_2 = 4 - i$, loại.
- Với đáp án B: $z_1 + z_2 = 3 + 7i$, thỏa mãn điều kiện tổng. Ta tiếp tục thử với điều kiện tích:
- $z_1z_2 = -10 + 11i$, thỏa mãn điều kiện tích. Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 73. (3) Hai số phức z_1 và z_2 lần lượt là nghiệm của phương trình: $z^2-(4i+5)z+3+8i=0$. Mô đun của số phức $w = (z_1 + i)(z_2 + i)$ bằng

A. 5. **B.** $\sqrt{15}$. **C.** $2\sqrt{13}$. **D.** $\sqrt{173}$.

Giải:

- Số phức w là biểu thức VIET {phải tự hiểu biểu thức VIET là biểu thức có thể đưa về dạng của tổng và tích hai nghiệm một phương trình bậc hai đang xét}:
- $w = z_1z_2 + i(z_1 + z_2) + i^2 = (3 + 8i) + i(4i +5) - 1$
- Đến đây ta dùng CASIO bấm luôn kết quả cho nhanh:
- $|w| = |3+8i+i(4i+5)-1| = \sqrt{173}$
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 74. (3) Hai số phức z_1 và z_2 lần lượt là nghiệm của phương trình: $z^2-(2i+7)z+1+5i=0$. Mô đun của số phức $w = (z_1 + 2i + 1)(z_2 + 2i + 1)$ bằng

A. $\sqrt{626}$. **B.** $\sqrt{215}$. **C.** $5\sqrt{11}$. **D.** $11\sqrt{7}$.

Giải:

- Ta có: $w = z_1z_2 + (2i+1)(z_1+z_2) + (1+2i)^2 = (1+5i) + (2i+1)(2i+7) + (1+2i)^2$
- Dùng CASIO bấm luôn mô đun: $|w| = |(1+5i) + (2i+1)(2i+7) + (1+2i)^2| = \sqrt{626}$
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 75. (3) Hai số phức z_1 và z_2 lần lượt là nghiệm của phương trình: $z^2-(2i+1)z+2+3i=0$. Mô đun của số phức $w = (z_1 + 2i + 1)(iz_2 + i - 2)$ bằng

A. $\sqrt{137}$. **B.** $5\sqrt{5}$. **C.** $5\sqrt{6}$. **D.** $3\sqrt{7}$.

Giải:

- Biểu thức w nhìn qua thì ta không nhận biết được nó là một biểu thức VIET. Biến đổi như sau: $w=(z_1+2i+1)i(z_2+1+2i)=i\{z_1z_2+(1+2i)(z_1+z_2)+(1+2i)^2\}$
- Thay các hệ thức VIET vào:
- $w=i\{(2+3i)+(1+2i)(2i+1)+(1+2i)^2\}\rightarrow |w|=|i\{(2+3i)+(1+2i)(2i+1)+(1+2i)^2\}|=\sqrt{137}$
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 76. (3) Cho số phức w = (m – i)(2i + 3). Biết rằng |w| = 4m. Khi đó giá trị của m bằng

A. $\frac{13}{3}$. **B.** $-\sqrt{\frac{13}{3}}$. **C.** $\frac{11}{3}$. **D.** $\sqrt{\frac{13}{3}}$.

Giải:

- Lấy mô đun hai vế phương trình đã cho ta được: (từ $|w|=4m\rightarrow m\geq 0$)
- $|w|=|m-i||2i+3|\leftrightarrow 4m=\sqrt{m^2+1}.\sqrt{13}\leftrightarrow 16m^2=13m^2+13\leftrightarrow m=\pm\sqrt{\frac{13}{3}}\rightarrow m=\sqrt{\frac{13}{3}}$
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 77. (3) Số nghiệm của phương trình $z^2=|z|^2+\overline{z}$ sẽ là

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 78. (3) Cho phương trình: $z^2=|z|^2+\overline{z}$. Số phức nào dưới đây không phải là nghiệm của phương trình trên?

A. 0. **B.** $-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$. **D.** $-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}$.

Giải:

- Gọi z = a + ib rồi thay vào phương trình đã cho ta được:
- $(a+ib)^2=a^2+b^2+a-ib\leftrightarrow a^2-b^2+2abi=a^2+b^2+a-ib\leftrightarrow (2b^2-a)+b(2a+1)i=0$
- Suy ra hệ phương trình hai ẩn đơn giản: $\begin{cases} b(2a+1)=0\rightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ a=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \\ -2b^2-a=0 \quad (2) \end{cases}$
- Với b = 0, thay vào (2) suy ra a = 0. Ta được một số phức thỏa mãn phương trình là: z = 0.

- Với $a=-\frac{1}{2}$, thay vào (2) ta được: $-2b^2+\frac{1}{2}=0\to b=\pm\frac{1}{2}$. Vậy ta được hai số phức thỏa mãn phương trình đã cho là: $z=-\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i$.
- Vậy tất cả có ba nghiệm phức thỏa mãn phương trình đã cho.
- Ở **Câu 77** ta chọn đáp án **C.** và ở **Câu 78** ta cũng chọn đáp án **C.**

Câu 79. (3) Cho phương trình bậc 3 phức: $z^3-(3+2i)z^2+z-4i+1=0$. Gọi ba nghiệm của nó lần lượt là z_1, z_2, z_3. Giá trị của số phức: $w=(z_1+1)(z_2+1)(z_3+1)$ bằng

A. 4 + 5i. **B.** 4 + 6i. **C.** 3 + i. **D.** -3 + 4i.

Giải:

- Số phức w có dạng biểu thức VIET của ba nghiệm, ta biến đổi như sau:
- $w=(z_1+z_2+z_3)+(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)+(z_1z_2z_3)+1$
- Thay các hệ thức VIET vào ta được:
- $w=(3+2i)+(1)+(4i-1)+1=4+6i$
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 80. (3) Cho biết x là một số thực và hàm số $f(x)=\frac{3x+4}{(x^2+1)(x^2+4)}$. Nếu viết hàm f(x) dưới dạng: $f(x)=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$ thì hệ số B sẽ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** 3/4. **D.** 4/3.

Giải:

- **Cách 1:** Tự luận lạc hậu.
- Sử dụng phép đồng nhất thức:
- $f(x)=\frac{3x+4}{(x^2+1)(x^2+4)}\equiv\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+4}\equiv\frac{(A+C)x^3+(B+D)x^2+(4A+C)x+4B+D}{(x^2+1)(x^2+4)}$
- Từ đó, suy ra: $\begin{cases}B+D=0\\4B+D=4\end{cases}\to\begin{cases}B=\frac{4}{3}\\D=-\frac{4}{3}\end{cases}$
- Vậy chọn đáp án **D.**
- **Nhận xét:** Cách này chỉ áp dụng cho những bài toán đơn giản, với những bài toán có tới 3 hoặc 4 nhân tử ở mẫu thì sẽ rất khó khăn trong việc quy đồng mẫu và đồng nhất thức.
- **Cách 2:** Ứng dụng quà tặng cuộc sống mà số phức mang lại.

- $f(x)=\frac{3x+4}{(x^2+1)(x^2+4)}\equiv\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+4}\rightarrow\frac{3x+4}{x^2+4}\equiv Ax+B+(x^2+1)\frac{Cx+D}{x^2+4}$
- Thay x = i vào biểu thức trên ta được:
- $\frac{3x+4}{x^2+4}\Big|_{x=i}\equiv Ai+B+(i^2+1)\frac{Cx+D}{x^2+4}\rightarrow\frac{4}{3}+i=Ai+B\rightarrow\begin{cases}A=1\\B=\frac{4}{3}\end{cases}$

Câu 81. (4) Cho biết x là một số thực và hàm số f(x) = $\frac{5x+4}{(x^2+1)(x^2+4)(x^2+9)}$. Nếu viết hàm f(x) dưới dạng: f(x) = $\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+4}+\frac{Ex+F}{x^2+9}$, trong đó các hệ số A, B, C, D, E , F là các giá trị thực. Khi đó giá trị của (C + D) sẽ bằng

A. -3/7. **B.** -9/15. **C.** -3/2. **D.** -14/15.

Giải:

- Biến đổi qua:
- $f(x)\equiv\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2+4}+\frac{Ex+F}{x^2+9}\rightarrow\frac{5x+4}{(x^2+1)(x^2+9)}\equiv Cx+D+(x^2+4)(\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Ex+F}{x^2+9})$
- Thay giá trị của: x = 2i vào hai vế của đồng nhất thức trên ta được:
- $\frac{5x+4}{(x^2+1)(x^2+9)}\Big|_{x=2i}\equiv Cx+D+(x^2+4)(\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Ex+F}{x^2+9})\rightarrow-\frac{4}{15}-\frac{2}{3}i\equiv 2Ci+D\rightarrow\begin{cases}C=-\frac{1}{3}\\D=-\frac{4}{15}\end{cases}$
- Suy ra: $C+D=-\frac{9}{15}$.
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 82. (4) Cho số phức z thỏa mãn đồng thời: $|z|=2$ và $|3z^2+\overline{z}|=10$. Số nghiệm z thỏa mãn những điều kiện này là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Giải:

- Áp dụng bất đẳng thức Δ: $|z_1-z_2|\geq|z_1|-|z_2|$; dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $z_1=k.z_2$ với số thực: $k>1$.
- Còn gọi z_1 và z_2 khi dấu "=" xảy ra là hai số phức đồng dạng.
- Bài toán cho: |z| = 2 , suy ra: $|z^2|=|z|^2=4$ và $|-\overline{z}|=|z|=2$
- Ta có: $10=|3z^2+\overline{z}|=|3z^2-(-\overline{z})|\geq|3z^2|-|-\overline{z}|=3|z|^2-|z|=3.4-2=10$

- Bài toán cho dấu "=" xảy ra nên ta có:
- $z_1 = kz_2 \leftrightarrow 3z^2 = k(-\overline{z}) \rightarrow 3|z^2| = k|\overline{z}| \rightarrow 3.4 = k.2 \rightarrow k = 6$ (vì k > 1).
- Khi đó: $3z^2 = 6(-\overline{z}) \leftrightarrow 3z^3 = -6\overline{z}.z = -6|z|^2 = -6.4 \leftrightarrow (z+2)(z^2-2z+4) = 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-2 \\ z=1\pm i\sqrt{3} \end{array}\right.$
- Suy ra phương trình có 3 nghiệm.
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 83. (4) Cho số phức z thỏa mãn đồng thời: $|z|=3$ và $|z^2+\overline{z}|=12$. Số nghiệm phức z thỏa mãn những điều kiện này là

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Giải:

- Áp dụng bất đẳng thức Δ: $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$; dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $z_1 = k.z_2$ với số thực: $k \ge 0$.
- $12 = |z^2+\overline{z}| \le |z^2|+|\overline{z}| = 9+3 = 12$
- Bài toán này cho dấu "=" xảy ra nên suy ra được: $z^2 = k.\overline{z} \rightarrow |z^2| = |k|.|\overline{z}| \rightarrow 9 = |k|.3 \rightarrow k = 3$
- Thay k = 3 vào phương trình đồng dạng: $z^2 = k.\overline{z}$, ta được:
- $z^2 = k.\overline{z} = 3\overline{z} \leftrightarrow z^3 = 3.\overline{z}.z = 3.|z|^2 = 27 \leftrightarrow (z-3)(z^2+3z+9) = 0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} z=3 \\ z=\dfrac{-3\pm 3i\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$
- Vậy ta chọn đáp án **D.** phương trình có 3 nghiệm.

Câu 85. (3) Cho hai số phức z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình phức: $z^2 + (1 + 2i)z + 1 = 0$. Giá trị của biểu thức: $A = |2z_1 + 2i + 1|^2 + |2z_2 + 2i + 1|^2$ bằng

A. $2\sqrt{41}$. **B.** $2\sqrt{65}$. **C.** $\sqrt{67}$. **D.** 34.

Giải:

- Phương trình đã cho $\Leftrightarrow$ $4z^2 + 4(1+2i)z + 4 = 0 \leftrightarrow (4z^2 + 4(1+2i)z + (1+2i)^2) - (1+2i)^2 + 4 = 0$
- $\Leftrightarrow$ $(2z+1+2i)^2 = (1+2i)^2 - 4 \rightarrow (2z_1+1+2i)^2 = (1+2i)^2 - 4; (2z_2+1+2i)^2 = (1+2i)^2 - 4$
- Thay vào biểu thức của A, ta được:
- $A = |(2z_1+2i+1)^2| + |(2z_2+2i+1)^2| = |(1+2i)^2 - 4| + |(1+2i)^2 - 4| = 2\sqrt{65}$
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 86. (3) Cho số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: $|z|=4$ và $|z^2+3+4i|=21$. Số nghiệm thỏa mãn là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Giải:

- Áp dụng bất đẳng thức tam giác: $21=|z^2+3+4i|\le|z^2|+|3+4i|=16+5=21$
- Bài toán cho dấu "=" xảy ra nên ta suy ra cặp số phức đồng dạng: $z^2=k(3+4i)$ (1)
- Mô đun hai vế, ta được: $|z|^2=|k|.|3+4i|\leftrightarrow 16=|k|.5\rightarrow k=\frac{16}{5}$. Thay giá trị k này vào pt (1):
- $z^2=k(3+4i)=\frac{16}{5}(3+4i)$
- Đến đây, nếu ta máy móc làm ra tới cùng nghiệm z thì chắc là mất khá nhiều phút...và có khả năng mất hết tư duy bản thân.
- Biết chắc phương trình sẽ có hai nghiệm phân biệt, ta chọn đáp án **A.**

Câu 87. (3) Cho số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: $|z|=3$ và $|z^2-3+4i|=4$. Gọi z_1 là một nghiệm thỏa mãn. Khi đó tổng phần thực và phần ảo của z_1 có thể bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Giải:

- Áp dụng bất đẳng thức tam giác:
- $4=|z^2-(3-4i)|\ge|z^2|-|3-4i|=9-5=4$. Dấu "=" xảy ra nên ta có hai số phức đồng dạng:
- $z^2=k.(3-4i)$ (1)
- Mô đun hai vế của (1) ta được: $|z^2|=|z|^2=|k|.|3-4i|\leftrightarrow 9=|k|.5\rightarrow k=\frac{9}{5}$
- Thay k vào phương trình đồng dạng (1), ta được: $z^2=k.(3-4i)=\frac{9}{5}(3-4i)$
- Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phức phân biệt, ta chọn đáp án **A.**

Câu 88. (3) Cho phương trình phức: $z^3 + 4z - 3i = 0$. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức (không thuần ảo) của phương trình đã cho. Khi đó giá trị của: $A = |z_1+\frac{3}{z_1}|^2+|z_2+\frac{3}{z_2}|^2$ bằng

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 3.

Giải:

- Có một nhận xét quan trọng: Phương trình phức bậc 3 dạng: $z^3+mz+in=0$; trong đó m và n là hai hệ số thực; bao giờ cũng có ít nhất một nghiệm thuần ảo.

- Vậy ở bài này ta tìm một nghiệm dạng: z = ib, thay vào phương trình đã cho sẽ được:
- $i^3b^3+4.ib-3i=0\leftrightarrow -i.b^3+4ib-3i=0\leftrightarrow b^3-4b+3=0\rightarrow b=1$. Vậy phương trình đã cho có nghiệm thuần ảo: z = i. Thực hiện phép chia đa thức ta được:
- Phương trình đã cho $\Leftrightarrow (z-i)(z^2+iz+3)=0\rightarrow \left[\begin{array}{l} z=i \\ z^2+iz+3=0 \end{array}\right.$
- Như vậy, z_1 và z_2 lần lượt là hai nghiệm của pt: $z^2+iz+3=0\rightarrow z++i+\frac{3}{z}=0\rightarrow z+\frac{3}{z}=-i$
- Thay vào: $A=|z_1+\frac{3}{z_1}|^2+|z_2+\frac{3}{z_2}|^2=|-i|^2+|-i|^2=2$.
- Ta chọn đáp án **C.**

Câu 89. (3) Cho phương trình phức: $z^3+2iz^2-(i+2)z+i+1=0$. Nếu gọi z_1 , z_2 , z_3 lần lượt là ba nghiệm của phương trình thì $|(z_1 + 1)(z_2 + 1)(z_3 + 1)|$ bằng

A. $\sqrt{13}$. **B.** $\sqrt{34}$. **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

Giải:

- Ta có: $|(z_1+1)(z_2+1)(z_3+1)|=|z_1+z_2+z_3+z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1+z_1z_2z_3+1|$
- Thay các hệ thức VIET vào biểu thức trên, ta được:
- $|(z_1+1)(z_2+1)(z_3+1)|=|-2i-(i+2)-(i+1)+1|=2\sqrt{5}$.
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 91. (3) Cho phương trình phức bậc 4: $z^4+6z^2+25=0$. Gọi z_1 , z_2, z_3 , z_4 lần lượt là bốn nghiệm. Khi đó giá trị của: $A = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$ bằng

A. 25. **B.** 12. **C.** $4\sqrt{5}$. **D.** $5+2\sqrt{5}$.

Giải:

- **Cách 1:** Tự luận.
- Dùng CASIO giải phương trình trùng phương ta được: $\left[\begin{array}{l} z^2=-3-4i \\ z^2=-3+4i \end{array}\right.$
- Đến đây, thực hiện các phép khai căn thông minh:
- $\left[\begin{array}{l} z^2=-3-4i=(4i^2-4i+1)=(2i-1)^2\rightarrow z_{1,2}=\pm(2i-1)\rightarrow |z_1|=|z_2|=\sqrt{5} \\ z^2=-3+4i=(4i^2+4i+1)=(2i+1)^2\rightarrow z_{1,2}=\pm(2i+1)\rightarrow |z_3|=|z_4|=\sqrt{5} \end{array}\right.$
- Suy ra: $A = 4\sqrt{5}$. Vậy ta chọn đáp án **C.**

- **Nhận xét:** Ở câu này, việc khai căn là đơn giản thì ta chưa thấy được sự phức tạp và mất tốc độ. Chúng ta nên sử dụng cách 2 cho tối ưu kiến thức và tốc độ cũng như sự toàn diện.
- **Cách 2:** $\left[\begin{array}{l} z^2=-3-4i \to z_1^2=z_2^2=z^2=-3-4i \to |z_1|^2=|z_2|^2=|-3-4i|=5 \to |z_1|=|z_2|=\sqrt{5} \\ z^2=-3+4i \to z_3^2=z_4^2=z^2=-3+4i \to |z_1|^2=|z_2|^2=|-3+4i|=5 \to |z_3|=|z_4|=\sqrt{5} \end{array}\right.$
- Vậy ta có A = $4\sqrt{5}$.

Câu 92. (3). Cho phương trình bậc 3 phức với tham số thực m: $z^3-3iz^2+(m-i)z-2i+2m=0$.

Gọi 3 nghiệm phức của phương trình (1) lần lượt là: z_1, z_2, z_3. $|(z_1+1)(z_2+1)(z_3+1)|=5$. Giá trị của m bằng

A. 6. **B.** -4. **C.** $\sqrt{7}$. **D.** -2.

Giải:

- Biến đổi: $(z_1+1)(z_2+1)(z_3+1)=z_1+z_2+z_3+z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1+z_1z_2z_3+1$
- Thay các hệ thức VIET bậc ba vào biểu thức trên ta được:
- $(z_1+1)(z_2+1)(z_3+1)=3i+(m-i)+(2i-2m)+1=-m+1+4i$
- Suy ra: $|-m+1+4i|=5 \leftrightarrow (m-1)^2+4^2=5^2 \to \left[\begin{array}{l} m=4 \\ m=-2 \end{array}\right.$
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 93. (3) Cho phương trình bậc 3 phức với tham số thực m: $z^3-iz^2+(2m+i)z+1+im=0$. Gọi 3 nghiệm phức của phương trình (1) lần lượt là: z_1, z_2, z_3. Biết rằng $|(1-\frac{1}{z_1})(1-\frac{1}{z_2})(1-\frac{1}{z_3})|=2$. Giá trị thực của m bằng

A. m = 1. **B.** m = -8. **C.** m = 4. **D.** m = -3.

Giải:

- Đặt:

$$w=(1-\frac{1}{z_1})(1-\frac{1}{z_2})(1-\frac{1}{z_3})=\frac{(z_1-1)(z_2-1)(z_3-1)}{z_1z_2z_3}=\frac{z_1+z_2+z_3-(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)+z_1z_2z_3-1}{z_1z_2z_3}$$

- Thay các hệ thức VIET bậc 3 vào biểu thức trên ta được:
- $w=\frac{i-(2m+i)+(-1-im)-1}{(-1-im)}=\frac{-2m-2-im}{-1-im} \to |w|=|\frac{-2m-2-im}{-1-im}|=|\frac{2m+2+im}{1+im}|=2$
- $\Leftrightarrow \frac{(2m+2)^2+m^2}{1^2+m^2}=2^2=4 \leftrightarrow (2m+2)^2+m^2=4(1+m^2) \leftrightarrow m^2+8m=0 \to \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-8 \end{array}\right.$
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 94. (3) Cho phương trình phức bậc 2 hệ số thực: $z^2 - az + b = 0$ có nghiệm là z = 1 + i. Nghiệm còn lại sẽ là

A. 1 – i. **B.** 1 + 2i. **C.** 1 – 2i. **D.** – 1 + i.

Giải:

- **Cách 1:** Tự luận.
- Thay nghiệm: z = 1 + i , vào phương trình đã cho ta được:
- $(1+i)^2 - a(1+i) + b = 0 \leftrightarrow (-a+b) + i(-a+2) = 0 \rightarrow \begin{cases} -a+b=0 \\ -a+2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases}$
- Khi đó phương trình bậc hai đã cho là: $z^2 - 2z + 2 = 0$. Dùng CASIO bấm nhanh ra được hai nghiệm phức là: $z = 1 \pm i$.
- Vậy ta chọn đáp án **A.**
- **Cách 2:** Khi phương trình bậc 2 với các hệ số thực, nếu đã có một nghiệm phức thì bao giờ cũng có cặp nghiệm phức liên hợp.
- Từ giả thiết cho phương trình có nghiệm: z = 1 + i, ta suy ra phương trình sẽ có một nghiệm phức liên hợp nữa là: 1 – i. Quá nhanh để chọn ra đáp án **A.**

Câu 95. (3) Cho phương trình phức bậc 2 hệ số thực: $z^2 - az + b = 0$ có nghiệm là z = 1 + 2i. Tích số a.b bằng

A. 2. **B.** 5. **C.** 10. **D.** 12.

Giải:

- **Cách 1:** Tự luận.
- Thay z = 1 + 2i , vào pt: $(1+2i)^2 - a(1+2i) + b = 0 \leftrightarrow (-a+b-3) + i(-2a+4) = 0 \rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=5 \end{cases}$
- Suy ra tích số: a.b = 10.
- Vậy ta chọn đáp án **C.**
- **Cách 2:** Đã biết, một phương trình phức với hệ số thực, nếu đã có một nghiệm phức thì nó phải có một nghiệm phức liên hợp nữa. Vậy từ nghiệm z = 1 + 2i, suy ra phương trình có nghiệm nữa: z = 1 – 2i. Theo VIET: a = (1 + 2i)(1 – 2i) = 2; b = (1 + 2i)(1 – 2i) = 5.
- Suy ra: a.b = 10

Câu 96. (3) Cho phương trình phức bậc 2: $z^2 - 2(2+3i)z - 5 + 10i = 0$ có một nghiệm là z. Biết rằng z^2 = a + ib. Giá trị của 3b/a bằng

A. 12. **B.** – 72/7. **C.** – 12. **D.** -21/5.

Giải:

- $\Delta' = (2+3i)^2 - (-5+10i) = 2i = (1+i)^2 \rightarrow \sqrt{\Delta'} = \pm(1+i)$
- $z_1 = (2+3i) - (1+i) = 1+2i; z_2 = (2+3i) + (1+i) = 3+4i$
- Với $z_1 = 1+2i \rightarrow z_1^2 = -3+4i = a+ib \rightarrow \frac{3b}{a} = -\frac{12}{3}$. (không có giá trị đáp án nào thỏa mãn, nên ta phải thử tiếp với nghiệm còn lại)
- Với $z_2 = 3+4i \rightarrow z_2^2 = -7+24i = a+ib \rightarrow \frac{3b}{a} = -\frac{72}{7}$.
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 97. (3) Cho phương trình phức bậc 2: $z^2 - (5+2i)z + 21 + i$. Hai nghiệm của phương trình lần lượt là

A. 3 + 5i và 1 – 4i. **B.** 3 + 4i và 2 – 2i. **C.** 4 – 2i và 2 – 3i. **D.** 3 + 5i và 2 – 3i.

Giải:

- **Cách 1:** Tự luận.
- $\Delta = (5+2i)^2 - 4(21+i) = -63+16i = 64i^2 + 16i + 1 = (8i+1)^2 \rightarrow \sqrt{\Delta} = \pm(1+8i)$
- Suy ra: $z_1 = \frac{5+2i-(1+8i)}{2} = 2-3i; z_2 = \frac{5+2i+(1+8i)}{2} = 3+5i$
- Vậy ta chọn đáp án **D.**
- **Nhận xét:** Nhìn có vẻ cách 1 đơn giản và nhanh hơn. Thế nhưng, khi gặp dạng bài toán này, với trường hợp khác, biệt số Δ quá phức tạp thì không thể triển khai đơn giản được.
- **Cách 2:** Thay số và thử VIET
- Với đáp án **A.** Ta nhẩm nhanh thấy tổng hai nghiệm: $z_1 + z_2 = (3 + 5i) + (1 – 4i) = 4 + i$, không thỏa mãn.
- Với đáp án **B.** Nhẩm thấy tổng hai nghiệm: (3 + 4i) + (2 – 2i) = 5 + 2i thỏa mãn 1 hệ thức VIET. Ta thử tiếp tích hai nghiệm: (3 + 4i)(2 – 2i) = 14 +2i , không thỏa mãn.
- Với đáp án **C.** Nhẩm thấy tổng hai nghiệm: (4 – 2i) + (2 – 3i) = 6 – 5i , không thỏa mãn.
- Vậy ta chọn đáp án cuối cùng **D**, vì cả ba đáp án đầu đều sai.

Câu 98. (3) Cho số phức z thỏa mãn phương trình: $\bar{z} - \frac{5+i\sqrt{3}}{z} - 1 = 0$. Số các số phức thỏa mãn phương trình đã cho là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Giải:

- Gọi số phức cần tìm là: z = a + ib, thay vào phương trình đã cho ta được:

- $z.\overline{z}-(5+i\sqrt{3})-z=0\leftrightarrow a^2+b^2-(5+i\sqrt{3})-(a+ib)=0\leftrightarrow(a^2+b^2-a-5)-i(b+\sqrt{3})=0$
- Suy ra: $\begin{cases} b+\sqrt{3}=0\rightarrow b=-\sqrt{3} \\ a^2+b^2-a-5=0\leftrightarrow a^2+3-a-5=0\leftrightarrow a^2-a-2=0\rightarrow a=-1;a=2 \end{cases}$
- Suy ra có hai số phức thỏa mãn phương trình đã cho là: $z_1=-1-i\sqrt{3};z_2=2-i\sqrt{3}$
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 99. (3) Cho số phức z thỏa mãn đồng thời: $z^2=|z|^2+\overline{z}$ và z^2 là số thuần ảo. Số các số phức thỏa mãn phương trình đã cho là

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Giải:

- Gọi z = a + ib.
- $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$, là số thuần ảo nên có: $a^2 - b^2 = 0$. Suy ra: $z^2 = 2abi$.
- $z^2=|z|^2+\overline{z}\leftrightarrow 2abi=a^2+b^2+a-ib\leftrightarrow\begin{cases} 2ab=-b\leftrightarrow\left[\begin{array}{l} b=0 \\ a=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \\ a^2+b^2+a=0\leftrightarrow 2a^2+a=0\leftrightarrow\left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases}$
- Kết hợp với điều kiện $a^2 - b^2 = 0$, ta có các số phức thỏa mãn: $z_1 = 0$; $z_2 = -\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i$
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 100. (3) Cho số phức z = 1 + 2i. Gọi z_1 , z_2, z_3 lần lượt là ba giá trị khai căn bậc 3 của số phức z. Khi đó giá trị: $z_1.z_2.z_3$ có phần thực bằng a và phần ảo bằng b. Giá trị của (3a + 2b) bằng

A. 7. **B.** -7. **C.** 5. **D.** 3.

Giải:

- Nhận thấy: z_1 , z_2 , z_3 là ba nghiệm của phương trình: $z=\sqrt[3]{1+2i}\leftrightarrow z^3-(1+2i)=0$
- Theo hệ thức VIET cho phương trình bậc 3, ta có:
- $z_1z_2z_3=1+2i=a+ib\rightarrow 3a+2b=3.1+2.2=7$
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 101. (3) Cho số phức z = 1 + 2i. Gọi z_1 , z_2, z_3 lần lượt là ba giá trị khai căn bậc 3 của số phức z. Khi đó giá trị: $(z_1+1)(z_2+1)(z_3+1)$ có phần thực bằng a và phần ảo bằng b. Giá trị của (a.b) bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** -2. **D.** 3.

Giải:

- Nhận thấy: z_1 , z_2 , z_3 là ba nghiệm của phương trình: $z=\sqrt[3]{1+2i} \leftrightarrow z^3-(1+2i)=0$
- Ta có: $(z_1+1)(z_2+1)(z_3+1)=z_1+z_2+z_3+z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1+z_1z_2z_3+1$
- Thay các hệ thức VIET vào biểu thức trên ta được:
- $(z_1+1)(z_2+1)(z_3+1)=0+0+(1+2i)+2=2+2i=a+ib \rightarrow a.b=2.2=4$
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 103. (4) Cho hệ phương trình phức: $\begin{cases}(3-4i)z^2=(1+2i)\overline{z}\\(1+i\sqrt{3})z^3=(m+1).\overline{z}\end{cases}$. Trong đó m là số thực. Giá trị của m bằng

A. 11. **B.** – 7/5. **C.** 10. **D.** 8/3.

Giải:

- Lấy mô đun hai vế của pt: $|(3-4i)z^2|=|(1+2i).\overline{z}| \leftrightarrow |3-4i|.|z|^2=|1+2i|.|\overline{z}|=|1+2i|.|z|$
- $\Leftrightarrow |3-4i|.|z|=|1+2i| \leftrightarrow 5.|z|=\sqrt{5} \rightarrow |z|=\frac{1}{\sqrt{5}}$
- Lại lấy mô đun hai vế phương trình dưới ta được:
- $|(1+i\sqrt{3})z^3|=|(m+1)\overline{z}| \leftrightarrow |1+i\sqrt{3}|.|z^3|=|m+1|.|\overline{z}| \leftrightarrow 2.|z|^2=|m+1| \leftrightarrow \frac{2}{5}=|m+1| \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-\frac{3}{5}\\m=-\frac{7}{5}\end{array}\right.$
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 104. (3) Cho số phức z thỏa mãn hệ phương trình: $\begin{cases}|z-1|=2\\|z-2i|=5\end{cases}$. Số nghiệm thỏa mãn hệ phương trình là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Giải:

- **Cách 1:** Gọi z = a + ib, thay vào hệ phương trình ta được:
- $\begin{cases}|a+ib-1|=2\\|a+ib-2i|=5\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases}(a-1)^2+b^2=4 \quad (1)\\a^2+(b-2)^2=25 \quad (2)\end{cases}$
- Lấy (2) – (1), vế theo vế, ta được: $2a-4b=18 \rightarrow a=9+2b$ (3). Thế vào (1) ta được:
- $(9+2b-1)^2+b^2=4 \leftrightarrow 5b^2+32b+60=0$
- Đến đây, nhận thấy phương trình trên vô nghiệm. Suy ra hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

- Vậy ta chọn đáp án **A.**
- **Cách 2:** Hệ phương trình chính là hai đường tròn. Phương trình (1) cho ta đường tròn (C_1) có tâm I_1= (1;0) và bán kính R_1 = 2. Phương trình (2) cho ta đường tròn (C_2) có tâm I_2 =(0;2) và bán kính R_2 = 5.
- Số giao điểm của hai đường tròn trên là số nghiệm của hệ phương trình đã cho. Ta áp dụng phương pháp xét vị trí tương đối của hai đường tròn như sau:
- $I_1I_2 = \sqrt{(1-0)^2+(0-2)^2} = \sqrt{5} < |R_1 - R_2| = 3$. Suy ra hai đường tròn trên không cắt nhau, tức là hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 105. (3) Cho số phức z thỏa mãn hệ phương trình: $\begin{cases} |\bar{z}+4i-1|=3 \\ |z-i-2|=4 \end{cases}$. Số nghiệm thỏa mãn hệ phương trình là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Giải:

- Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} |\overline{\bar{z}+4i-1}|=3 \\ |z-i-4|=4 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} |z-1-4i|=3 \quad (1) \\ |z-i-4|=4 \quad (2) \end{cases}$
- Phương trình (1) biểu diễn đường tròn (C_1) có tâm I_1 = (1;4) và bán kính R_1 = 3.
- Phương trình (2) biểu diễn đường tròn (C_2) có tâm I_2 = (4;1) và bán kính R_2 = 4.
- Khoảng cách hai tâm I_1I_2 = $\sqrt{(4-1)^2+(1-4)^2} = 3\sqrt{2}$; $|R_1 - R_2|$ = 1 ; $R_1 + R_2$ = 7.\
- Suy ra: $|R_1 - R_2| < I_1I_2 < R_1 + R_2$. Tức là hai đường tròn này cắt nhau tại hai điểm phân biệt.
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 106. (3) Cho số phức z thỏa mãn đồng thời: |z + i| = |z| + 1 và |z + 2| = 3. Giá trị |z| bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $\sqrt{3}$.

Giải:

- **Cách 1:** Gọi z = a + ib, rồi thay vào hai phương trình trên, biến đổi suy ra a và b.
- **Cách 2:** Áp dụng bất đẳng thức tam giác ta được:
- $|z+i| \le |z| + |i| = |z| + 1$. Bài toán cho dấu "=" xảy ra, nên ta có hai số phức trong mô đun phải đồng dạng dương: $z = k.i$; với hệ số thực: $k \ge 0$.
- Thay z vào pt còn lại: $|z+2| = 3 \leftrightarrow |ki+2| = 3 \leftrightarrow k^2 + 2^2 = 3^2 \rightarrow k = \sqrt{5} \rightarrow |z| = k = \sqrt{5}$.
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 107. (3) Cho số phức z thỏa mãn đồng thời: |z + 2i| = |z| – 2 và |z + 2i| = 4. Giá trị |z| bằng

A. $3\sqrt{2}$. **B.** 2. **C.** 4. **D.** $2\sqrt{3}$.

Giải:

- Áp dụng bất đẳng thức tam giác: $|z+2i|=|z-(-2i)|\geq|z|-|-2i|=|z|-2$
- Bài toán cho dấu bằng xảy ra, nên hai số phức là đồng dạng dương:
- $z=k.(-2i)=-2ki$; với hệ số thực $k\geq 1$.
- Thay z vào pt còn lại: $|z+2i|=4\leftrightarrow|-2ki+2i|=4\leftrightarrow|2k-2|.|i|=4\leftrightarrow|k-1|=2\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=3\\k=-1\end{array}\right.$
- $\left[\begin{array}{l}k=3\rightarrow z=-6i\rightarrow|z|=6\\k=-1\rightarrow z=2i\rightarrow|z|=2\end{array}\right.$
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 108. (3) Biết rằng số phức z thỏa mãn: |z – 4 + 3i| = |z| + 5 và thỏa mãn |z| = 3. Vậy z bằng

A. 4/5 + 3i/5. **B.** -12/5 + 9i/5. **C.** 2/5 + 3i/5. **D.** -2/5 + 5i/2.

Giải:

- Áp dụng bất đẳng thức tam giác: $|z-4+3i|\leq|z|+|-4+3i|=|z|+5$.
- Bài toán cho dấu "=" xảy ra nên ta có hai số phức đồng dạng dương: $z=k(-4+3i)$.
- Lại có: $|z|=3\leftrightarrow|k(-4+3i)|=3\leftrightarrow k.|-4+3i|=3\leftrightarrow k.5=3\leftrightarrow k=\frac{3}{5}$.
- Suy ra: $z=\frac{3}{5}(-4+3i)=\frac{-12}{5}+\frac{9}{5}i$
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 109. (3) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z|=\sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo. Một số phức z_1 = a + ib là nghiệm. Khi đó tổng (a + b) bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 2.

Giải:

- z = a + ib. Số phức z^2 thuần ảo nên: $a^2 - b^2 + 2abi$ thuần ảo $\Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = \pm b$.
- Giả thiết lại cho: $|z|=\sqrt{2}\leftrightarrow a^2+b^2=2\leftrightarrow 2a^2=2\leftrightarrow a=\pm 1$
- Suy ra có bốn nghiệm thỏa mãn: z = 1 + i; z = 1 – i;z = -1 + i; z = -1 – i.
- Ta nhận thấy với nghiệm: z = 1 + i = a + ib , có: a + b = 2.
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 110. (3) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z-(2+i)|=\sqrt{10}$ và $z.\overline{z}=25$. Một nghiệm phức của nó là z_1 = a + ib. Khi đó tỉ số b/a bằng

A. 4/3. **B.** 3/4. **C.** -4/3. **D.** -3/4.

Giải:

- Gọi z = a + ib. $z.\overline{z}=a^2+b^2=25$ (1)
- $|z-(2+i)|=\sqrt{10}\leftrightarrow|(a-2)+i(b-1)|=\sqrt{10}\leftrightarrow(a-2)^2+(b-1)^2=10\leftrightarrow a^2+b^2-4a-2b=5$ (2)
- Thay (1) vào (2), ta được: $25-4a-2b=5\leftrightarrow b=10-2a$ (3)
- Thế (3) vào (1), ta được: $a^2+(10-2a)^2=25\leftrightarrow 5a^2-40a+75=0\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=3\rightarrow b=4\\a=5\rightarrow b=0\end{array}\right.$
- Vậy ta chọn tỉ số b/a bằng 4/3 tức là chọn đáp án **A.**

Câu 111. (3) Cho số phức z thỏa mãn hệ phương trình phức: $\left\{\begin{array}{l}|z-2|=|z+3i|\\|z-i|=|\overline{z}+2-3i|\end{array}\right.$ số nghiệm thỏa mãn hệ phương trình đã cho là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** vô số.

Giải:

- Đây chính là tìm giao điểm của hai đường thẳng. Vì mỗi phương trình biểu diễn một phương trình đường thẳng. Như vậy, chỉ có 3 trường hợp là: song song với nhau (có 0 giao điểm) hoặc cắt nhau (có 1 giao điểm) hoặc trùng nhau (vô số giao điểm). Đa số là rơi vào trường hợp cắt nhau tại 1 giao điểm. Tức là, xác suất cao rơi vào trường hợp 1 nghiệm thỏa mãn.
- Gọi z = a + ib, thay vào hệ phương trình đã cho ta được:
- $\left\{\begin{array}{l}|a+ib-2|=|a+ib+3i|\\|a+ib-i|=|a-ib+2-3i|\end{array}\right.\leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}|(a-2)+ib|=|a+i(b+3)|\\|a+i(b-1)|=|(a+2)-i(b+3)|\end{array}\right.\leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}(a-2)^2+b^2=a^2+(b+3)^2\\a^2+(b-1)^2=(a+2)^2+(b+3)^2\end{array}\right.$
- $\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-4a+4=6b+9\\-2b+1=4a+4+6b+9\end{array}\right.\leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}4a+6b=-5\\4a+8b=-12\end{array}\right.\leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=4\\b=-\frac{7}{2}\end{array}\right.$
- Suy ra có một nghiệm của hệ phương trình là: $z=4-\frac{7}{2}i$.
- Vậy ta chọn đáp án **B.**
- **Nhận xét:** Đây là câu hỏi định tính, chỉ cần xác định số giao điểm (số nghiệm) của hệ phương trình. Nên, khi ta biến đổi tới bước: $\left\{\begin{array}{l}4a+6b=-5\\4a+8b=-12\end{array}\right.$ ta nhận thấy hai phương trình của hệ không đồng dạng với nhau, thì suy ngay ra hệ phương trình có nghiệm duy nhất cho nhanh.

Còn nếu hai phương trình của hệ đồng dạng thì ta xét tiếp ở hai trường hợp (vô nghiệm hoặc vô số nghiệm) như đã làm ở cấp hai, khi xét vị trí tương đối của hai đường thẳng.

Câu 112. (3) Cho số phức z thỏa mãn hệ phương trình phức: $\begin{cases} |z-i|=|z+1| \\ |z-3i+4|=5 \end{cases}$ số nghiệm thỏa mãn hệ phương trình đã cho là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** vô số.

Giải:

- Phương trình đầu tiên của hệ biểu diễn đường thẳng, phương trình thứ hai là đường tròn. Như vậy, câu trắc nghiệm này yêu cầu đi xác định số giao điểm của một đường thẳng với một đường tròn. Chỉ xảy ra 3 trường hợp: Không cắt nhau (0 nghiệm) hoặc tiếp xúc (1 nghiệm) hoặc cắt nhau (2 nghiệm), không bao giờ tồn tại trường hợp vô số nghiệm.
- Gọi z = a + ib, thay vào hệ phương trình đã cho ta được:
- $\begin{cases} |a+ib-i|=|a+ib+1| \\ |a+ib-3i+4|=5 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} |a+i(b-1)|=|(a+1)+ib| \\ |(a+4)+i(b-3)|=5 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a^2+(b-1)^2=(a+1)^2+b^2 \\ (a+4)^2+(b-3)^2=5^2 \end{cases}$
- $\Leftrightarrow \begin{cases} b=-a & (1) \\ (a+4)^2+(b-3)^2=5^2 & (2) \end{cases}$
- Thay (1) vào (2), ta được: $a^2+8a+16+a^2+6a+9=25 \leftrightarrow 2a^2+14a=0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \rightarrow =0 \\ a=-7 \rightarrow b=7 \end{array}\right.$
- Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt: $z_1 = 0$; $z_2 = -7 + 7i$.
- Ta chọn đáp án **C.**
- **Nhận xét:** Chúng ta có thể tìm nhanh phương trình đường thẳng từ phương trình (1). Rồi xác định nhanh tâm I và bán kính R của đường tròn ở phương trình (2). Sau đó áp dụng vị trí tương đối giữa đường thẳng và đường tròn để xác định nhanh số giao điểm (số nghiệm hpt)

Câu 113. (3) Cho hệ phương trình phức: $\begin{cases} |z-i|=|z+2i| \\ |z-i|=|\overline{z}+1+2i| \end{cases}$. Số phức z = a + ib thỏa mãn hệ phương trình đã cho có: (a + b) bằng

A. -3. **B.** 3. **C.** 7. **D.** -6.

Giải:

- Nhìn qua là dạng bài toán xác định giao điểm của hai đường thẳng.
- Gọi z = a + ib rồi thay vào hệ phương trình đã cho, ta được:
- $\begin{cases} |a+ib-i|=|a+ib+2i| \\ |a+ib-i|=|a-ib+1+2i| \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} |a+i(b-1)|=|a+i(b+2)| \\ |a+i(b-1)|=|(a+1)+i(2-b)| \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a^2+(b-1)^2=a^2+(b+2)^2 \\ a^2+(b-1)^2=(a+1)^2+(b-2)^2 \end{cases}$

- $\Leftrightarrow \begin{cases} -2b+1=4b+4 \\ -2b+1=2a+1-4b+4 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{5}{2} \\ b=-\frac{1}{2} \end{cases}$
- Suy ra tổng: a + b = -3.
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 114. (3) Cho số phức z thỏa mãn hệ phương trình phức: $\begin{cases} |z-3|=|z+1+2i| \\ |(1-i)z-4+2i|=\frac{6\sqrt{10}}{5} \end{cases}$, số nghiệm thỏa mãn hệ phương trình đã cho là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Giải:

- Vẫn là bài toán xác định số giao điểm (định tính) của đường thẳng với đường tròn. Nhưng ở câu này ta quan sát thấy số liệu khá lẻ cho nên để đạt được tốc độ làm trắc nghiệm.
- Gọi z = a + ib, thay vào phương trình đầu tiên, rồi đi xác định phương trình đường thẳng:
- $|a+ib-3|=|a+ib+1+2i| \leftrightarrow |(a-3)+ib|=|(a+1)+i(b+2)| \leftrightarrow (a-3)^2+b^2=(a+1)^2+(b+2)^2$
- $\Leftrightarrow -6a+9=2a+1+4b+4 \leftrightarrow 8a+4b-4=0 \leftrightarrow 2a+b-1=0 \qquad (\Delta)$
- Từ pt thứ hai: $|(1-i)(z-\frac{4-2i}{1-i})|=\frac{6\sqrt{10}}{5} \leftrightarrow |1-i|.|z-(3+i)|=\frac{6\sqrt{10}}{5} \leftrightarrow |z-(3+i)|=\frac{6\sqrt{5}}{5}$.
- Suy ra phương trình đường tròn (C) có tâm I(3;1) và bán kính R = $\frac{6\sqrt{5}}{5}$.
- Khoảng cách từ tâm I tới đường thẳng Δ là: $d(I,\Delta)=\frac{|2.3+1.1-1|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}=R$.
- Vậy đường thẳng Δ tiếp xúc với đường tròn (C). Tức là hpt có 1 nghiệm duy nhất.
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 115. (3) Cho số phức z thỏa mãn hệ phương trình phức: $\begin{cases} |z|=|z-3-4i| \\ |(1-i)\bar{z}-2+4i|=2 \end{cases}$, số nghiệm thỏa mãn hệ phương trình đã cho là

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Giải:

- Bài toán này yêu cầu tìm số giao điểm của đường thẳng cho bởi phương trình (1) và đường tròn cho bởi phương trình (2).

- Gọi z = a + ib. Thay vào phương trình (1) để xác định phương trình đường thẳng:
- $|a+ib|=|a+ib-3-4i| \leftrightarrow |a+ib|=|(a-3)+i(b-4)| \leftrightarrow a^2+b^2=(a-3)^2+(b-4)^2$
- $\Leftrightarrow 6a+8b-25=0 \qquad (\Delta)$.
- Biến đổi phương trình (2) về dạng phương trình đường tròn cơ bản:
- $|(1-i)\overline{z}-2+4i|=2 \leftrightarrow |(1-i)(\overline{z}-\frac{2-4i}{1-i})|=2 \leftrightarrow |\overline{z}-(3-i)|=\sqrt{2}$
- Chúng ta áp dụng tính chất: $|\overline{z}|=|z|$ và $\overline{\overline{z}}=z$; $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ vào phương trình trên:
- $|\overline{z}-(3-i)|=\sqrt{2} \leftrightarrow |\overline{\overline{z}-(3-i)}|=\sqrt{2} \leftrightarrow |z-(3+i)|=\sqrt{2}$. Đây là phương trình đường tròn (C) có tâm I = (3;1) và bán kính R = $\sqrt{2}$.
- Khoảng cách từ tâm I tới đường thẳng Δ là: $d(I,\Delta)=\frac{|6.3+8.1-25|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{1}{10}<R=\sqrt{2}$.
- Suy ra đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt.
- Vậy hệ phương trình có hai nghiệm phân biệt. Chọn đáp án **C.**

Câu 116. (3) Cho hệ phương trình phức: $\begin{cases}|z-1|=|\overline{z}-2-i| \\ |z-2+3i|=3\end{cases}$. Số phức z = a + ib thỏa mãn hệ phương trình đã cho có: 2a + 3b bằng

A. 13. **B.** 4. **C.** -11. **D.** -8.

Giải:

- Đây là bài toán định lượng yêu cầu tìm rõ giao điểm của đường thẳng và đường tròn.
- Gọi z = a + ib thay vào hệ phương trình:
- $\begin{cases}|a+ib-1|=|a-ib-2-i| \\ |a+ib-2+3i|=3\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases}|(a-1)+ib|=|(a-2)-i(b+1)| \\ |(a-2)+i(b+3)|=3\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases}(a-1)^2+b^2=(a-2)^2+(b+1)^2 \\ (a-2)^2+(b+3)^2=3^2\end{cases}$
- $\Leftrightarrow \begin{cases}-2a+1=-4a+4+2b+1 \\ (a-2)^2+(b+3)^2=9\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases}b=a-2 \qquad (1) \\ (a-2)^2+(b+3)^2=9 \quad (2)\end{cases}$
- Thế (1) vào (2) ta được:
- $(a-2)^2+(a+1)^2=9 \leftrightarrow a^2-a-2=0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=-1 \to b=-3 \to (2a+3b)=-11 \\ a=2 \to b=0 \to (2a+3b)=4\end{array}\right.$
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 122. (3) Trên mặt phẳng phức cho hai điểm A và B lần lượt biểu diễn hai số phức (2 + 3i) và (4 – i). Một điểm M thỏa mãn hệ thức véc tơ: $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$. Điểm M biểu diễn số phức tương ứng

A. $\frac{16}{5}+\frac{3i}{5}$. **B.** $\frac{11}{5}+\frac{6i}{5}$. **C.** $\frac{8}{5}+\frac{13i}{5}$. **D.** $\frac{9}{5}-\frac{2i}{5}$.

Giải:

- Điểm A biểu diễn số phức $z_A = 2 + 3i$ và điểm B biểu diễn số phức $z_B = 4 - i$.
- Gọi điểm M biểu diễn số phức z_M cần tìm. Khi đó ta có:
- $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0} \leftrightarrow 2(z_A - z_M) + 3(z_B - z_M) = 0 \leftrightarrow z_M = \frac{2z_A + 3z_B}{5} = \frac{2(2+3i) + 3(4-i)}{5} = \frac{16}{5} + \frac{3}{5}i$
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 123. (3) Cho điểm A biểu diễn số phức $z_1 = 2 + 3i$ và điểm B biểu diễn số phức $z_2 = m - i$. Biết độ dài đoạn thẳng AB bằng 5. Chu vi tam giác OAB bằng

A. 9. **B.** $\sqrt{13} + \sqrt{2} + 5$. **C.** $\sqrt{26} + \sqrt{11} + 5$. **D.** $5 + \sqrt{3} + \sqrt{14}$.

Giải:

- Độ dài đoạn thẳng: OA = $|\overrightarrow{OA}| = |2 + 3i| = \sqrt{13}$.
- Chu vi của tam giác OAB bằng: $p_{\Delta OAB}$ = OA + OB + AB = $\sqrt{13} + 5 +$ O**B.**
- Độ dài đoạn thẳng: AB = $|\overrightarrow{AB}| = |z_B - z_A| = |m - i - 2 - 3i| = |(m-2) - 4i| = 5 \leftrightarrow (m-2)^2 + 4^2 = 5^2$
- Giải phương trình trên ta được: $\left[\begin{array}{l} m = 5 \to OB = |m - i| = |5 - i| = \sqrt{26} \to p_{\Delta OAB} = \sqrt{13} + 5 + \sqrt{26} \\ m = -1 \to OB = |m - i| = |-1 - i| = \sqrt{2} \to p_{\Delta OAB} = \sqrt{13} + 5 + \sqrt{2} \end{array}\right.$
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 124. (3) Trên mặt phẳng phức cho tam giác MNP, trong đó ba đỉnh M, N, P lần lượt biểu diễn ba số phức: $z_1 = 5 - 3i$, $z_2 = 2 + i$, $z_3 = m + 6i$. Biết rằng ΔMNP vuông tại điểm M. Giá trị của m bằng

A. 12. **B.** 3. **C.** 17. **D.** 15.

Giải:

- Ta có: MN = $|z_N - z_M| = |z_2 - z_1| = |2 + i - (5 - 3i)| = |-3 + 4i| = 5$.
- MP = $|z_P - z_M| = |z_3 - z_1| = |m + 6i - (5 - 3i)| = |(m - 5) + 9i| = \sqrt{(m-5)^2 + 9^2}$
- NP = $|z_P - z_N| = |z_3 - z_2| = |m + 6i - (2 + i)| = |(m - 2) + 5i| = \sqrt{(m-2)^2 + 5^2}$
- ΔMNP vuông tại điểm M $\Leftrightarrow$ $NP^2 = MN^2 + MP^2 \Leftrightarrow (m-2)^2 + 5^2 = (m-5)^2 + 9^2 + 25 \leftrightarrow m = 17$
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 125. (3) Trên mặt phẳng phức cho ba điểm M, N, P lần lượt biểu diễn ba số phức $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 4 - 3i$, $z_3 = 2m - i$. Để ba điểm này thẳng hàng thì giá trị của m phải có giá trị

A. 3/4. **B.** 2. **C.** 9/10. **D.** 9/5.

Giải:

- **Cách 1:** Tự luận.
- Ba điểm thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = k.\overrightarrow{MP} \leftrightarrow z_N - z_M = k(z_P - z_M) \leftrightarrow z_2 - z_1 = k(z_3 - z_1)$
- $\Leftrightarrow 4-3i-(3+2i) = k\left(2m-i-(3+2i)\right) \leftrightarrow 1-5i = k(2m-3-3i) \leftrightarrow \begin{cases} 1 = k.(2m-3) \\ -5 = k.(-3) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{5}{3} \\ m = \frac{9}{5} \end{cases}$
- Vậy ta chọn đáp án **D.**
- **Cách 2:** Ba điểm M, N, P thẳng hàng $\Leftrightarrow$ số phức: $\frac{z_M - z_N}{z_M - z_P} = \frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3}$ thuần thực.
- Áp dụng vào bài toán này, ta có số phức: $\frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3} = \frac{3+2i-(4-3i)}{3+2i-(2m-i)} = \frac{-1+5i}{(3-2m)+3i}$ thuần thực.
- $\Leftrightarrow \frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3} = \frac{-1+5i}{(3-2m)+3i} = \frac{(-1+5i)\{(3-2m)-3i\}}{(3-2m)^2+3^2}$ thuần thực $\Leftrightarrow$
- $\Leftrightarrow (-1+5i)\{(3-2m)-3i\}$ thuần thực $\Leftrightarrow i\{3+5(3-2m)\} = 0 \leftrightarrow 3+5(3-2m) = 0 \leftrightarrow m = \frac{9}{5}$

Câu 126. (3) Trên mặt phẳng phức cho ΔMNP đều; trong đó ba điểm M, N, P lần lượt biểu diễn ba số phức $1+6i, 1+i, z$. Số phức z = a + ib thì (a + b) bằng

A. $6\sqrt{3}$. **B.** $\frac{7}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}-\frac{5\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{9}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Giải:

- ΔMNP đều $\Leftrightarrow \begin{cases} MN = MP \\ MP = NP \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} |z_N - z_M| = |z_P - z_M| \\ |z_P - z_M| = |z_P - z_N| \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} |1+i-(1+6i)| = |a+ib-(1+6i)| \\ |a+ib-(1+6i)| = |a+ib-(1+i)| \end{cases}$
- $\Leftrightarrow \begin{cases} |-5i| = |(a-1)+i(b-6)| \\ |(a-1)+i(b-6)| = |(a-1)+i(b-1)| \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2+(b-6)^2 = 5^2 \\ (a-1)^2+(b-6)^2 = (a-1)^2+(b-1)^2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2+(b-6)^2 = 5^2 \\ b = \frac{7}{2} \end{cases}$
- $\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 = \frac{75}{4} \rightarrow a-1 = \pm\frac{5\sqrt{3}}{2} \rightarrow a = 1 \pm \frac{5\sqrt{3}}{2} \\ b = \frac{7}{2} \end{cases} \rightarrow (a+b) = \frac{9}{2} \pm \frac{5\sqrt{3}}{2}$
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 127. (3) Trên mặt phẳng phức cho hai điểm A và B lần lượt biểu diễn hai số phức (1 + 2i) và (3 + 4i). Điểm D thỏa mãn điều kiện tứ giác OABD là hình bình hành. Điểm D biểu diễn số phức

A. 2 + 2i. **B.** 4 + 6i. **C.** 2 + 3i. **D.** 3 – 2i.

Giải:

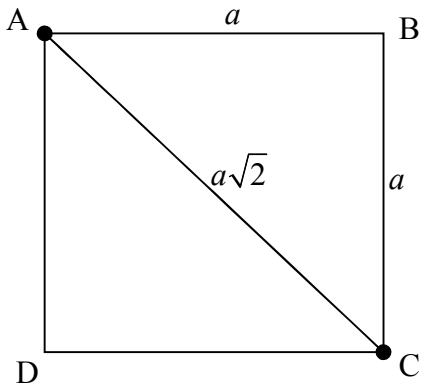
- Tứ giác OABD là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AB} \leftrightarrow z_D = z_B - z_A = (3+4i) - (1+2i) = 2+2i$
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 128. (4) Trên mặt phẳng phức cho hình vuông ABC**D.** Biết A và C lần lượt biểu diễn hai số phức (1 + 3i) và (5 – i). Gọi z_B và z_D lần lượt là hai số phức được biểu diễn bởi điểm B và điểm D trên mặt phẳng phức. Tích số $z_B.z_D$ sẽ là

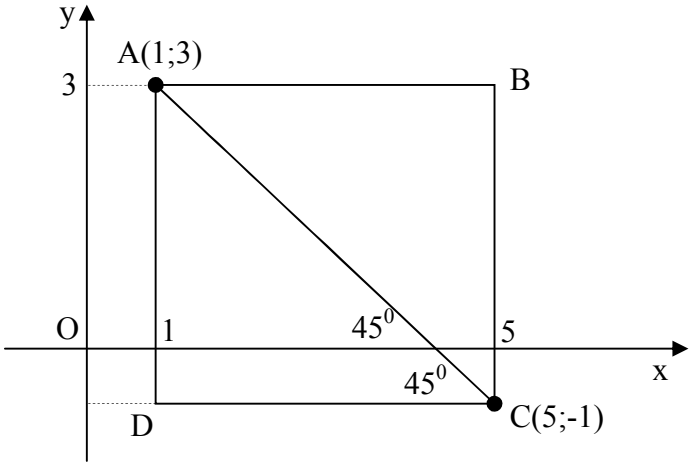
A. 8 – 2i. **B.** 5 + 4i. **C.** 1 – 3i. **D.** 3 + 7i.

Giải:

- **Cách 1:** Tự luận
- Ta có hình vẽ minh họa:



- Khoảng cách giữa hai điểm AC là: AC = $|z_C - z_A|$ = |5 – i – (1 + 3i)| = |4 – 4i| = $4\sqrt{2} = a\sqrt{2}$.
- Trong đó *a* là cạnh của hình vuông. Từ đó suy ra: *a* = 4.
- Tọa độ điểm A(1;3) và điểm C(5;-1). Gọi tọa độ điểm B = (x;y).Khi đó ta có: BA = BC = *a* = 4.
- Hệ phương trình: $\begin{cases} (x-1)^2+(y-3)^2=4^2 & (1) \\ (x-5)^2+(y+1)^2=4^2 & (2) \end{cases}$
- Lấy (2) – (1) vế theo vế, ta được: $-8x+24+8y-8=0 \rightarrow y=x-2$ (3).
- Thế (3) vào (1), ta được: $(x-1)^2+(x-2-3)^2=4^2 \leftrightarrow 2x^2-12x+10=0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \rightarrow y=-1 \\ x=5 \rightarrow y=3 \end{array}\right.$
- Vậy từ đó suy ra: điểm B(1;-1) thì điểm D(5;3) và ngược lại.
- Điểm B biểu diễn: z_B = 1 – i ; điểm D biểu diễn: z_D = 5 + 3i.
- Suy ra tích số: $z_B.z_D$ = (1 – i)(5 + 3i) = 8 – 2i .
- Vậy ta chọn đáp án **A.**
- **Cách 2:** Vẽ hình chính xác và ước lượng điểm:



- Trong mặt phẳng phức, các bài toán về hình vuông và hình chữ nhất rất hay có tọa độ các đỉnh chẵn. Ta nên phác họa vẽ hình khá chính xác ra nháp rồi thử.
- Hình vuông có các góc tạo bởi đường chéo và cạnh bằng 45^0. Chúng ta tính ngay được góc tạo bởi AC với trục Ox (hoặc trục Oy) bằng 45^0. Vậy các cạnh của hình vuông sẽ song song với Ox và Oy. Ta dễ dàng dựng hình vuông ABCD như hình vẽ.
- Suy ra tọa độ B(5;3) $\Leftrightarrow z_B = 5 + 3i$; tọa độ điểm D(1;-1) $\Leftrightarrow z_D = 1 - i$.
- Từ đó suy ra: $z_B.z_D = (5 + 3i)(1 - i) = 8 - 2i$.

Câu 131. (3) Cho số phức z thỏa mãn phương trình: $|\frac{z-i+2}{z+2i-1}|=1$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng phức sẽ tương ứng là

A. đường phân giác góc phần tư thứ nhất.

B. đường phân giác góc phần tư thứ hai.

C. đường thẳng có phương trình: 2x – 3y – 1 = 0.

D. đường thẳng có phương trình: 3x + 2y – 6 = 0.

Giải:

- Đây là phương trình đường thẳng.
- Gọi z = x + iy, thay vào phương trình đã cho ta được:
- $|z-i+2|=|z+2i-1| \leftrightarrow |x+iy-i+2|=|x+iy+2i-1| \leftrightarrow (x+2)^2+(y-1)^2=(x-1)^2+(y+2)^2$
- $\Leftrightarrow$ y = x. Đây là phương trình đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 134. (3) Trên mặt phẳng phức, tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện: $|iz+3-2i|=6$ là

A. đường tròn (C) có phương trình: $(x + 3)^2 + (y – 2)^2 = 36$.

B. đường tròn (C) có phương trình: $(x – 2)^2 + (y – 3)^2 = 36$.

C. đường tròn có tâm I(2;3) và bán kính R = 36.

D. đường tròn (C) có phương trình: $x^2 + y^2 + 4x – 6y – 19 = 0$.

Giải:

- Đây là bài toán tìm quỹ tích điểm và phương trình đã cho biểu diễn đường tròn.
- Ta biến đổi phương trình đã cho như sau:
- $|iz+3-2i|=6\leftrightarrow|i(z+\frac{3-2i}{i})|=6\leftrightarrow|i|.|z-(3i+2)|=6\leftrightarrow|z-(3i+2)|=6$
- Đây là phương trình đường tròn (C): $(x – 2)^2 + (y – 3)^2 = 36$.
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 135. (3) Trên mặt phẳng phức, tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện: $|(1+i)z-2+3i|=4$ là

A. đường tròn tâm I(1;5) bán kinh R = 4.

B. đường tròn (C): $(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{5}{2})^2=16$.

C. đường tròn tâm $I(\frac{1}{2};\frac{5}{2})$ và bán kính R = 8.

D. đường tròn (C): $(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{5}{2})^2=8$.

Giải:

- Pt đã cho ⇔ $|(1+i)(z-\frac{2-3i}{1+i})|=4\leftrightarrow|1+i|.|z-(-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i)|=4\leftrightarrow|z-(-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}i)|=2\sqrt{2}$.
- Đây là phương trình đường tròn (C) có tâm I = $(-\frac{1}{2};-\frac{5}{2})$ và bán kính R = $2\sqrt{2}$.
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 136. (3) Cho số phức z thỏa mãn phương trình: $|\frac{z-i}{z-2i}|=1$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z sẽ là

A. đường tròn tâm I(-1;2) và bán kính R = 1.

B. đường tròn (C): $(x – 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$.

C. đường thẳng $y = 2x – 1$.

D. đường thẳng $2y – 3 = 0$.

Giải:

- Đây là phương trình đường thẳng. Gọi z = x + iy, thay vào phương trình đã cho:
- $|z-i|=|z-2i| \leftrightarrow |x+iy-i|=|x+iy-2i| \leftrightarrow x^2+(y-1)^2=x^2+(y-2)^2 \leftrightarrow 2y-3=0$
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 138. (3) Hệ thức biểu diễn đường thẳng có phương trình: 2x – 8y + 5 = 0 sẽ tương ứng là

A. $|z+2-8i|=5$.

B. $|2z-8\overline{z}+5|=0$.

C. $|z-1+i|=|\overline{z}+3i+2|$.

D. $|z-2+i|=|\overline{z}+3i-1|$.

Giải:

- Trong 4 đáp án ta nhận thấy chỉ có hai đáp án C và D biểu diễn đường thẳng.
- Gọi z = x + iy ; ta thay vào đáp án C:
- $|x+iy-1+i|=|x-iy+3i+2| \leftrightarrow |(x-1)+i(y+1)|=|(x+2)+i(3-y)|$
- $\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=(x+2)^2+(y-3)^2 \leftrightarrow -2x+1+2y+1=4x+4-6y+9 \leftrightarrow 6x-8y+11=0$
- Không trùng với đường thẳng cho ban đầu.
- Vậy ta chọn đáp án cuối cùng **D.**

Câu 139. (3) Trên mặt phẳng phức số phức z thỏa mãn phương trình: $|2z+3\overline{z}+1|=0$ là

A. đường thẳng có phương trình 2x + 3y + 1 = 0.

B. đường tròn tâm I(2;3) bán kính R = 1.

C. một điểm có tọa độ (-1/5;0)

D. đường tròn (C): $(x-2)^2+(y+3)^2=1$.

Giải:

- Gọi z = x + iy, thay vào phương trình ban đầu, ta được:
- $|2(x+iy)+3(x-iy)+1|=0 \leftrightarrow |(5x+1)-iy|=0 \leftrightarrow (5x+1)^2+y^2=0 \leftrightarrow 5x+1=y=0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{1}{5} \\ y=0 \end{array}\right.$
- Suy ra quỹ tích là một điểm có tọa độ (-1/5;0).
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 140. (3) Trên mặt phẳng Oxy, điểm biểu diễn số phức w = 2z + i – 2 sẽ là đường nào dưới đây? Biết z là số phức thỏa mãn phương trình: |z – 2i +1| = |z + i|.

A. Đường tròn (C): $(x+1)^2+(y-2)^2=4$.

B. Đường thẳng d: x + 2y – 11 = 0.

C. Đường thẳng d: x – 3y + 9 = 0.

D. Đường elip (E): $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

Giải:

- Từ: w = 2z + i – 2, suy ra: $2z = \mathrm{w} + 2 - i$
- Thay vào phương trình đã cho ta được:
- $|2z-4i+2| = |2z+2i| \leftrightarrow |\mathrm{w}+2-i-4i+2| = |\mathrm{w}+2-i+2i| \leftrightarrow |\mathrm{w}+4-5i| = |\mathrm{w}+2+i|$
- Gọi w = x + iy, thay vào phương trình trên ta được:
- $|x+iy+4-5i| = |x+iy+2+i| \leftrightarrow |(x+4)+i(y-5)| = |(x+2)+i(y+1)|$
- $\Leftrightarrow (x+4)^2+(y-5)^2 = (x+2)^2+(y+1)^2 \leftrightarrow 8x+16-10y+25 = 4x+4+2y+1 \leftrightarrow x-3y+9=0$
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 144. (3) Cho số phức z thỏa mãn phương trình: $|2z-\overline{z}+i| = |z-2|$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z sẽ là

A. đường elip. **B.** đường tròn. **C.** đường thẳng. **D.** đường parabol.

Giải:

- Gọi z = x + iy, thay vào phương trình đã cho ta được:
- $|2(x+iy)-(x-iy)+i| = |x+iy-2| \leftrightarrow |(x+i(3y+1)| = |(x-2)+iy| \leftrightarrow x^2+(3y+1)^2 = (x-2)^2+y^2$
- $\Leftrightarrow 9y^2+6y+1 = -4x+4+y^2 \leftrightarrow 4x+8y^2+6y-3=0$.
- Đây là phương trình biểu diễn một Parabol.
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 150. (3) Cho số phức z thỏa mãn $|z+2\overline{z}+2i| = 4$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức $\mathrm{w} = 2z+\overline{z}$ tương ứng sẽ là

A. đường elip: $9x^2+(y-2)^2 = 16$.

B. đường tròn (C) có phương trình : $(x + 1)^2 + (y – 2)^2 = 16$.

C. đường tròn (C) có tâm I (0;2) và bán kính R = 4.

D. đường tròn (C) có tâm I(0;-2) và bán kính R = 4.

Giải:

- Gọi z = a + ib, thay vào phương trình đã cho ta được:
- $|a+ib+2(a-ib)+2i| = 4 \leftrightarrow |3a+i(2-b)| = 4$ (1)
- Gọi w = x + iy ; từ $\mathrm{w} = 2z+\overline{z} \leftrightarrow x+iy = 2(a+ib)+(a-ib) = 3a+ib \leftrightarrow \begin{cases} 3a = x \\ b = y \end{cases}$ (2)
- Chúng ta thay (2) vào (1) sẽ được hệ thức biểu diễn w:
- $|x+i(2-y)| = 4 \leftrightarrow x^2+(y-2)^2 = 4^2$. Đây là phương trình đường tròn (C) có tâm I(0;2) và có bán kính R = 4. Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 153. (3) Số phức z thỏa mãn: |(1 + 2i)z – (z + 1)i – 4| = 6 sẽ có điểm biểu diễn thuộc

A. đường tròn tâm $I=(\frac{5}{2};-\frac{3}{2})$ và bán kính R = $3\sqrt{2}$.

B. đường tròn tâm $I=(\frac{5}{2};-\frac{3}{2})$ và bán kính R = 6.

C. đường tròn tâm $I=(1;4)$ và bán kính R = $3\sqrt{2}$.

D. đường tròn tâm $I=(-\frac{5}{2};\frac{3}{2})$ và bán kính R = $3\sqrt{2}$.

Giải:

- Trước hết chúng ta biến đổi lại phương trình đã cho đưa về dạng chuẩn:
- $|(1+i)z-4-i|=6\leftrightarrow|(1+i)(z-\frac{4+i}{1+i})|=6\leftrightarrow|1+i|.|z-(\frac{5}{2}-\frac{3}{2}i)|=6\leftrightarrow|z-(\frac{5}{2}-\frac{3}{2}i)|=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$
- Đây là phương trình đường tròn (C) có tâm I = $(\frac{5}{2};-\frac{3}{2})$ và bán kính R = $3\sqrt{2}$.
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 154. (3) Cho số phức z thỏa mãn phương trình: $|z-1|=|z+3i|$. Số phức z = a + ib có mô đun nhỏ nhất. Khi đó (a.b) bằng

A. 12/25. **B.** 8/25. **C.** 16/9. **D.** 15/49.

Giải:

- Đây là dạng bài toán cực trị trên mặt phẳng phức. Số phức có mô đun nhỏ nhất, |z| nhỏ nhất, là số phức gần gốc O nhất. Số phức có mô đun lớn nhất là số phức xa gốc O nhất.
- Gọi z = x + iy, thay vào phương trình đã cho ta được:
- $|x+iy-1|=|x+iy+3i|\leftrightarrow|(x-1)+iy|=|x+i(y+3)|\leftrightarrow(x-1)^2+y^2=x^2+(y+3)^2$
- $\Leftrightarrow -2x+1=6y+9\leftrightarrow x+3y+4=0 \quad (\Delta)$
- Yêu cầu của bài toán là tìm điểm M nằm trên đường thẳng Δ sao cho khoảng cách từ nó tới gốc O nhỏ nhất. Vậy M chính là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng Δ. Đây là bài toán quá cơ bản trong hình học phẳng Oxy.
- Gọi M là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng Δ, khi đó M = (-3m – 4; m).
- Véc tơ $\overrightarrow{OM}=(-3m-4;m)$ và VTCP của đường thẳng Δ là: $\overrightarrow{u_\Delta}=(-3;1)$, vuông góc với nhau:
- $\overrightarrow{u_\Delta}.\overrightarrow{OM}=0\leftrightarrow-3(-3m-4)+1.m=0\leftrightarrow m=-\frac{6}{5}\rightarrow M=(-\frac{2}{5};-\frac{6}{5})$
- Điểm M biểu diễn số phức có mô đun nhỏ nhất: z = $-\frac{2}{5}-\frac{6}{5}i=a+ib\rightarrow(a.b)=\frac{12}{25}$.
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 156. (3) Trên mặt phẳng Oxy, điểm biểu diễn số phức w = 2z – 1 sẽ là đường nào dưới đây? Biết z là số phức thỏa mãn phương trình: |z – 2i +1| = 4.

A. Đường tròn (C): $(x+3)^2+(y-4)^2=64$.

B. Đường tròn (C): $(x-3)^2+(y+4)^2=16$.

C. Đường thẳng d: 2x + y – 4 = 0.

D. Đường tròn (C) có tâm I(-1;2) và bán kính R = 4.

Giải:

- Từ w = 2z – 1 ⇔ 2z = w + 1, thay vào phương trình biểu diễn số phức z:
- |z – 2i + 1| = 4 ⇔ |2z – 4i + 2| = 8 ⇔ |w + 1 – 4i + 2| = 8 ⇔ |w – (-3 + 4i)| = 8.
- Đây là phương trình đường tròn (C) có tâm I = (-3;4) và bán kính R = 8.
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 157. (3) Cho số phức z thỏa mãn phương trình: |z| = 2. Trên mặt phẳng phức tập hợp điểm biểu diễn số phức: $w=(1+i\sqrt{3})z-1$ là đường tròn (C) có bán kính r bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** $2\sqrt{3}$.

Giải:

- Từ giả thiết: $w=(1+i\sqrt{3})z-1\rightarrow(1+i\sqrt{3})z=w+1$
- Từ phương trình: $|z|=2\leftrightarrow|1+i\sqrt{3}|.|z|=2.|1+i\sqrt{3}|\leftrightarrow|(1+i\sqrt{3})z|=4\leftrightarrow|w+1|=4$
- Đây là phương trình đường tròn (C) có tâm I = (-1;0) và bán kính R = 4.
- Vậy ta chọn đáp án **B.**
- **Nhận xét:** Từ pt đường tròn |z| = 2, có bán kính R = 2, điểm biểu diễn số phức $w=Az+B$ sẽ là đường tròn có bán kính r = R.$|A|$. Áp dụng vào bài toán này: $r=R.|1+i\sqrt{3}|=2.2=4$.

Câu 159. (3) Trên mặt phẳng phức, quỹ tích các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn: $\overline{z}=\frac{1}{z}$ là

A. Đường tròn (C): $(x-1)^2+y^2=1$. **B.** Đường tròn (C): $(x-1)^2+(y+1)^2=4$.

C. Đường tròn (C): $x^2+y^2=1$. **D.** Đường thẳng: x – y + 1 = 0.

Giải:

- Từ giả thiết: $\overline{z}=\frac{1}{z}\leftrightarrow\overline{z}z=1\leftrightarrow|z|^2=1\leftrightarrow|z|=1$.
- Đây là phương trình đường tròn tâm O bán kính R = 1. Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 160. (3) Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn: $|z-i|=|(1+i)z|$ là

A. đường tròn (C): $x^2 + (y + 1)^2 = 4$.

B. đường tròn (C): $x^2+(y+1)^2=2$.

C. đường thẳng: x – y + 1 = 0.

D. đường tròn (C): $x^2+(y+1)^2=\sqrt{2}$.

Giải:

- Gọi z = x + iy, thay vào phương trình đã cho ta được:
- $|z-i|=|(1+i)z| \leftrightarrow |z-i|=|1+i|.|z|=\sqrt{2}|z| \leftrightarrow |x+iy-i|=\sqrt{2}.|x+iy| \leftrightarrow |x+i(y-1)|=\sqrt{2}|x+iy|$
- $\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=2.(x^2+y^2) \leftrightarrow x^2+y^2+2y=1 \leftrightarrow x^2+(y+1)^2=2$
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 161. (3) Cho số phức z thỏa mãn phương trình: $|z-3|=|z+i|$. Số phức z = a + ib có mô đun nhỏ nhất. Khi đó (a + b) bằng

A. 31/24. **B.** 25/16. **C.** 11/15. **D.** 8/5.

Giải:

- Tương tự **Câu 154.** Ta đi tìm hình chiếu vuông góc M của gốc O lên đường thẳng cho bởi phương trình đã cho, chính là điểm biểu diễn số phức z = a + ib có mô đun nhỏ nhất.
- Gọi z = x + iy, thay vào phương trình đã cho:
- $|x+iy-3|=|x+iy+i| \leftrightarrow |(x-3)+iy|=|x+i(y+1)| \leftrightarrow (x-3)^2+y^2=x^2+(y+1)^2$
- $\Leftrightarrow -6x+9=2y+1 \leftrightarrow 3x+y-4=0 \quad (\Delta)$
- Gọi M là hình chiếu vuông góc của O lên đường thẳng Δ: M = (m; 4 – 3m). Khi đó:
- Véc tơ { $\overrightarrow{OM}=(m;4-3m)$ } và VTCP của Δ { $\overrightarrow{u_\Delta}=(-1;3)$ } vuông góc với nhau $\Leftrightarrow$
- $\overrightarrow{u_\Delta}.\overrightarrow{OM}=0 \leftrightarrow -1.m+3(4-3m)=0 \leftrightarrow m=\frac{6}{5} \rightarrow M=(\frac{6}{5};\frac{2}{5})$.
- Điểm M biểu diễn số phức có mô đun nhỏ nhất: z = a + ib = $\frac{6}{5}+\frac{2}{5}i \rightarrow (a+b)=\frac{6}{5}+\frac{2}{5}=\frac{8}{5}$.
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

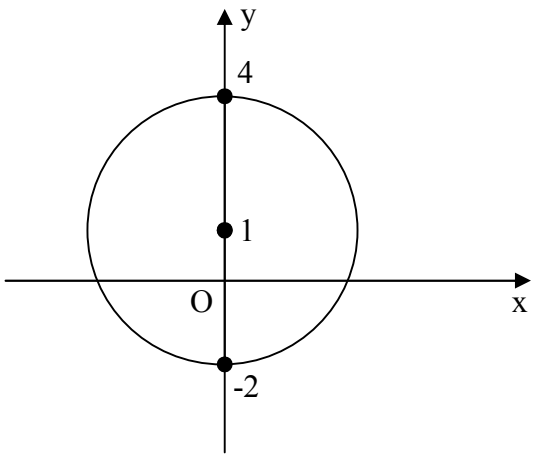
Câu 162. (3) Cho phương trình phức: |z – i| = 3. Số phức z = a + ib thỏa mãn phương trình đã cho có mô đun lớn nhất sẽ có: 3a + 2b bằng

A. 8. **B.** 5. **C.** 10. **D.** 14.

Giải:

- Đây là bài toán tìm trên đường tròn đã cho một điểm M nằm xa O nhất.

- Đường tròn (C) cho bởi phương trình đã cho có tâm I = (0;1) và bán kính R = 3. Ta có thể vẽ nhanh đường tròn (C) trên mặt phẳng phức Oxy :



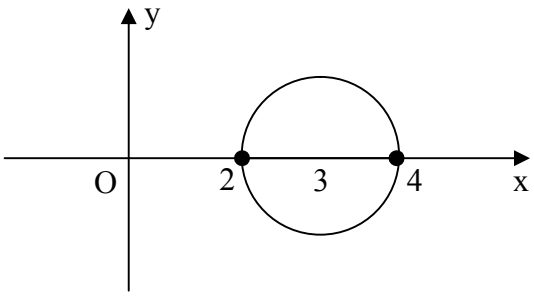
- Nhận thấy ngay điểm có mô đun lớn nhất là M = (0;4) ⇔ z = a + ib = 4i ⇔ (3a + 2b) = 8.
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 163. (3) Cho phương trình phức: |z – 3| = 1. Số phức z = a + ib thỏa mãn phương trình đã cho có mô đun nhỏ nhất sẽ có: 11a + 23b bằng

A. 15. **B.** 11. **C.** 22. **D.** 8.

Giải:

- Tương tự như **Câu 162.** Phương trình đã cho biểu diễn đường tròn (C) có tâm I(3;0) và bán kính R = 1.

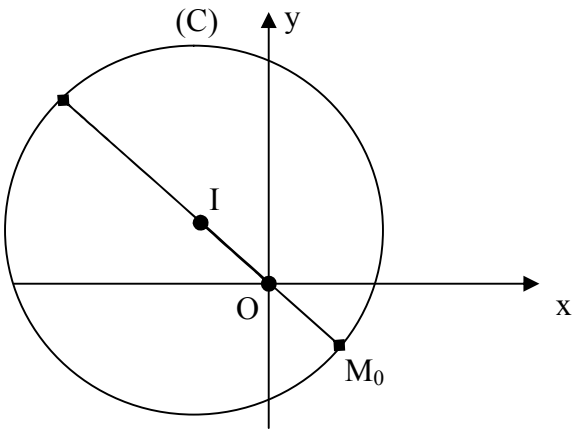


- Điểm gần O nhất trên đường tròn là M = (2;0) biểu diễn số phức z = a + ib = 2, có mô đun nhỏ nhất. Suy ra: (11a + 23b) = 22.
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 164. (3) Cho phương trình phức: |z – 2i + 3| = $2\sqrt{13}$. Số phức z = a + ib thỏa mãn phương trình đã cho có mô đun nhỏ nhất sẽ có: 4a + 3b bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

Giải:

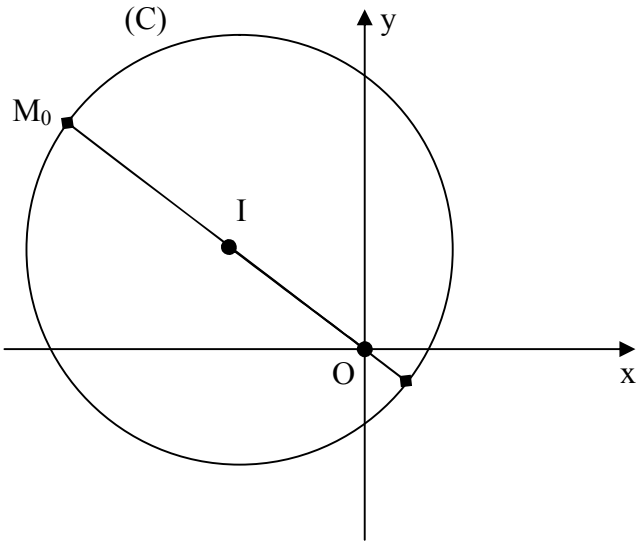


- Tâm đường tròn: z_0 = I = -3 + 2i. Có: OI = $|z_0|$ = $\sqrt{13}$. Bán kính R = $2\sqrt{13}$.
- Số phức z_M thỏa mãn $|z_M|$ nhỏ nhất đã biết cách tính nhanh:
- $z_M = (1-\frac{R}{|z_0|})z_0 = (1-\frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{13}})(-3+2i) = 3-2i = a+ib \rightarrow a=3; b=-2$
- Suy ra: (4a + 3b) = (4.3 + 3.(-2)) = 6
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 165. (3) Cho phương trình phức: |z – 3i + 4| = 8. Số phức z = a + ib thỏa mãn phương trình đã cho có mô đun lớn nhất sẽ có (a + b) bằng

A. 18/5. **B.** -24/5. **C.** -11/5. **D.** -13/5.

Giải:



- Tâm I = z_0 = -4 + 3i. Bán kính: R = 8. Ta có: OI = $|z_0|$ = 5.

- Số phức z_M ứng với $|z_M|$ lớn nhất đã biết cách tính nhanh":
- $z_M = (1+\frac{R}{|z_0|})z_0 = (1+\frac{8}{5})(-4+3i) = -\frac{52}{5}+\frac{39}{5}i \to (a+b) = -\frac{13}{5}$
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 166. (3) Cho biểu thức: A = 1 + (1 + i) + $(1 + i)^2$ + ... + $(1 + i)^{30}$. Rút gọn của biểu thức A là

A. 2^{30}. **B.** $2^{15} - (2^{15} + 1)i$. **C.** $-2^{15} - (2^{15} - 1)i$. **D.** $2^{15} + 2^{15}i$.

Giải:

- A là tổng của một cấp số nhân có 31 số hạng với: số hạng đầu $u_1 = 1$; công bội q = (1 + i).
- Áp dụng công thức tính tổng của cấp số nhân:
- A = $u_1.\frac{q^n-1}{q-1} = 1.\frac{(1+i)^{31}-1}{(1+i)-1} = -2^{15}+(1-2^{15})i$.
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 167. (3) Cho biểu thức: B = 1 + (1 – i) + $(1 - i)^2$ + ... + $(1 - i)^{20}$. Rút gọn biểu thức B sẽ là

A. $-2^{10} + (2^{10} + 1)i$. **B.** $2^{10} - (2^{10} - 1)i$. **C.** $2^{11} + i$. **D.** $-2^{10} - (2^{10} + 1)i$.

Giải:

- B là tổng của một cấp số nhân gồm 21 số hạng: có số hạng đầu $u_1 = 1$; công bội q = 1 – i.
- Áp dụng công thức tính tổng của cấp số nhân:
- B = $u_1.\frac{q^n-1}{q-1} = 1.\frac{(1-i)^{21}-1}{(1-i)-1} = -2^{10}-(2^{10}+1)i$.
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 168. (3) Cho biểu thức A = 1 + $(1+i\sqrt{3})+(1+i\sqrt{3})^2+...+(1+i\sqrt{3})^{40}$. Rút gọn biểu thức A là

A. $(1-2^{40})i-2^{40}\sqrt{3}$. **B.** $-2^{40}+\frac{1-2^{40}}{\sqrt{3}}i$. **C.** $-2^{40}+2^{40}i\sqrt{3}$. **D.** $2^{40}\sqrt{3}$.

Giải:

- A là tổng của một cấp số nhân có 41 số hạng với: số hạng đầu $u_1 = 1$, công bội q = $1+i\sqrt{3}$.
- Áp dụng công thức tính tổng của cấp số nhân:
- A = $u_1.\frac{q^n-1}{q-1} = 1.\frac{(1+i\sqrt{3})^{41}-1}{(1+i\sqrt{3})-1} = -2^{40}+\frac{1-2^{40}}{\sqrt{3}}i$.
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 171. (3) Cho số phức $z = 1 + i\sqrt{3}$. Gọi z_1 và z_2 là hai căn bậc hai của z. Tổng $z_1 + z_2$ bằng

A. 0. **B.** $2 + 2i\sqrt{3}$. **C.** 2 – i. **D.** $\sqrt{3} + 2i$.

Giải:

- z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình phức: $z = \sqrt{1 + i\sqrt{3}} \leftrightarrow z^2 - (1 + i\sqrt{3}) = 0$.
- Áp dụng hệ thức VIET cho phương trình bậc 2, ta có được: $\begin{cases} z_1 + z_2 = 0 \\ z_1 z_2 = -(1 + i\sqrt{3}) \end{cases}$
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 172. (3) Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2 - 2i\sqrt{3}z - 4 = 0$. Dạng lượng giác của một nghiệm là

A. $|z|(\cos\frac{-\pi}{3} + i.\sin\frac{-\pi}{3})$. **B.** $|z|(\cos\frac{\pi}{6} + i.\sin\frac{\pi}{6})$.

C. $|z|(\cos\frac{-2\pi}{3} + i.\sin\frac{-2\pi}{3})$. **D.** $|z|(\cos\frac{2\pi}{3} + i.\sin\frac{2\pi}{3})$.

Giải:

- Giải phương trình bậc hai hệ số phức:
- $\Delta' = (i\sqrt{3})^2 - 1.(-4) = 1 \rightarrow \sqrt{\Delta'} = 1$.
- $z_1 = i\sqrt{3} - 1 = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i.\sin\frac{2\pi}{3}); z_2 = i\sqrt{3} + 1 = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3})$
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 174. (3) Cho số phức z thỏa mãn phương trình: |z + 2i – 3| = 6. Tập hợp điểm biểu diễn số phức w = 3z – 2i + 4 sẽ là

A. đường tròn (C) có tâm I(13;8) và bán kính R = 6.

B. đường tròn (C): $(x - 13)^2 + (y + 8)^2 = 324$.

C. đường thẳng d: 2x – 3y + 6 = 0.

D. đường tròn (C) có tâm I(3;2) và bán kính R = 6.

Giải:

- Từ giả thiết: w = 3z – 2i + 4 ⇔ 3z = w + 2i – 4.
- Phương trình đã cho ⇔ |3z + 6i – 9| = 18 ⇔ |(w + 2i – 4) + 6i – 9| = 18 ⇔ |w – 13 + 8i| = 18.
- Phương trình trên biểu diễn đường tròn (C): $(x - 13)^2 + (y + 8)^2 = 324$.
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 180. (3) Cho phương trình phức: $z^3-2+2i=0$. Gọi ba nghiệm phức của nó lần lượt là: z_1, z_2, z_3. Giá trị của biểu thức: A = $|z_1|$ + $|z_2|$ + $|z_3|$ bằng

A. 6. **C.** $2\sqrt{2}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

Giải:

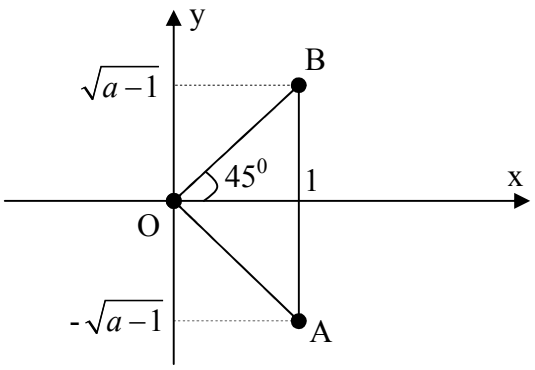
- Phương trình đã cho $\Leftrightarrow z^3=2-2i\rightarrow|z^3|=|2-2i|=2\sqrt{2}\rightarrow|z|^3=2\sqrt{2}\rightarrow|z|=\sqrt{2}$
- Suy ra: $|z_1|=|z_2|=|z_3|=\sqrt{2}\rightarrow A=|z_1|+|z_2|+|z_3|=2\sqrt{2}$.
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 183. (3) Cho phương trình phức bậc 2: $z^2-2z+a=0$, với a là tham số thực. Gọi A và B lần lượt là hai điểm biểu diễn hai nghiệm của phương trình đã cho trên mặt phẳng phức, điều kiện để tam giác OAB vuông cân là

A. a = 2. **B.** a = 5. **C.** a = 0. **D.** a = 2/3.

Giải:

- Phương trình bậc hai đã cho phải có hai nghiệm phức thì mới tồn tại tam giác OAB. Vì nếu chỉ có hai nghiệm thực thì cả ba điểm O, A, B đều nằm trên trục hoành Ox.
- $\Delta'=1-a<0\rightarrow\Delta'=-(a-1)=i^2(a-1)\rightarrow\sqrt{\Delta'}=\pm i\sqrt{a-1}$.
- Phương trình có hai nghiệm phức: $z_{1,2}=1\pm i\sqrt{a-1}$.
- Suy ra tọa độ hai điểm: $A=(1;-\sqrt{a-1});B=(1;\sqrt{a-1})$. Hai điểm này đối xứng qua trục Ox, vì chúng là hai điểm biểu diễn hai số phức liện hợp, nên tam giác OAB cân tại O. Để tam giác OAB vuông cân thì góc tạo bởi OA (hoặc OB) với trục Ox bằng 45^0.



- Từ hình vẽ ta suy ra: $\sqrt{a-1}=1\leftrightarrow a=2$.
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 184. (3) Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn hệ phương trình: $\begin{cases} iz_1+z_2=2-i \\ 2z_1+(1+i)z_2=1+2i \end{cases}$. Khi đó số phức z_1 bằng

A. $\frac{7}{10}-\frac{i}{10}$. **B.** $-\frac{7}{10}+\frac{i}{10}$. **C.** $\frac{3}{5}+\frac{i}{5}$. **D.** $\frac{3}{5}-\frac{4i}{5}$.

Giải:

- Đây là hệ phương trình phức bậc nhất hai ẩn, chúng ta làm bình thường như đã làm với trên tập số thực. Khác một điều, hệ phương trình phức không sử dụng CASIO giải nhanh được.
- Từ phương trình (1): $iz_1+z_2=2-i \to z_2=2-i-iz_1$ (3). Thế (3) vào pt (2), ta được:
- (2) $2z_1+(1+i)z_2=1+2i \leftrightarrow 2z_1+(1+i)(2-i-iz_1)=1+2i \leftrightarrow (3-i)z_1=-2+i \leftrightarrow z_1=-\frac{7}{10}+\frac{1}{10}i$
- Bài toán chỉ hỏi giá trị của z_1. Vậy ta chọn đáp án **B.**
- Nếu cần tính z_2: thay z_1 vào (3), ta được: $z_2=2-i-iz_1=2-i-i(-\frac{7}{10}+\frac{1}{10}i)=\frac{21}{10}-\frac{17}{10}i$.

Câu 185. (3) Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn hệ phương trình: $\begin{cases} (2-i)z_1+iz_2=1+i \\ iz_1+(1-i)z_2=3-i \end{cases}$. Khi đó số phức $w = z_1 + z_2$ bằng

A. $\frac{17}{13}-\frac{3i}{13}$. **B.** $\frac{8}{15}+\frac{4i}{15}$. **C.** $\frac{41}{13}+\frac{3i}{13}$. **D.** $\frac{15}{31}-\frac{14i}{31}$.

Giải:

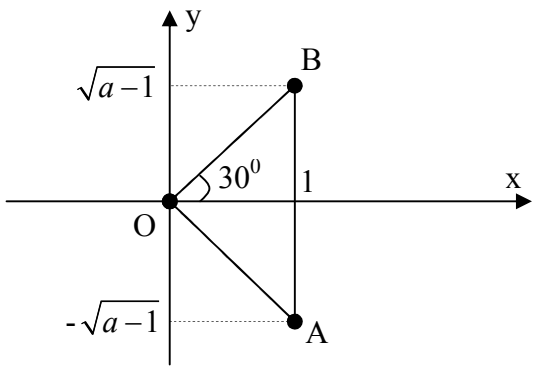
- Cộng hai phương trình vế theo vế ta được:
- $2z_1+z_2=4 \to z_1+z_1=4-z_1$ (3)
- Vậy ta chỉ cần đi tìm z_1, rồi thay vào (3) là xong. Từ (3) suy ra: $z_2=4-2z_1$, thế vào phương trình (1): $(2-i)z_1+iz_2=1+i$, sẽ được:
- $(2-i)z_1+i(4-2z_1)=1+i \leftrightarrow (2-3i)z_1=1-3i \leftrightarrow z_1=\frac{1-3i}{2-3i}=\frac{11}{13}-\frac{3}{13}i$.
- Thay z_1 vào (3): $z_1+z_1=4-z_1=4-(\frac{11}{13}-\frac{3}{13}i)=\frac{41}{13}+\frac{3}{13}i$.
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 186. (3) Cho phương trình phức bậc 2: $z^2-2z+a=0$, với a là tham số thực. Gọi A và B lần lượt là hai điểm biểu diễn hai nghiệm của phương trình đã cho trên mặt phẳng phức, điều kiện để tam giác OAB đều là

A. $2/3$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** 2. **D.** $4/3$.

Giải:

- Tương tự **Câu 183.** Phương trình có hai nghiệm phức: $z_1 = 1 - i\sqrt{a-1}; z_2 = 1 + i\sqrt{a-1}$.
- Hai điểm A và B được cho như hình vẽ:



- Tam giác OAB đều suy ra: $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{a-1}}{1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \to a = \frac{4}{3}$.
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 187. (3) Cho phương trình phức bậc hai với hai tham số phức a và b là: $(1+2i)z^2 + az + b = 0$

Phương trình có nghiệm $z_1 = 3 + 4i$ và $z_2 = -1 + 2i$. Nhận xét sai là:

A. a = 10 – 10i. **B.** b = -15 – 20i. **C.** a + b = -5 – 30i. **D.** a = -10 + 10i.

Giải:

- Đã biết rõ hai nghiệm phức của phương trình chúng ta áp dụng hệ thức VIET là suy ra được các hệ số a và b:
- $$\begin{cases} z_1 + z_2 = 3 + 4i + (-1 + 2i) = -\dfrac{a}{1+2i} \to a = 10 - 10i \\ z_1.z_1 = (3+4i)(-1+2i) = \dfrac{b}{1+2i} \to b = -15 - 20i \end{cases}$$
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 188. (3) Cho phương trình phức bậc bốn: $z^4 + 2z^3 - z^2 - 2z + 10 = 0$. Phương trình có bốn nghiệm lần lượt là:

A. 2 + i; 2 – i; 4 + 3i ; 4 – 3i. **B.** 2i ; 3i ; 1 – 3i ; 1 + 3i.

C. 1 + i; 1 – i; -2 – i; -2 + i. **D.** 1 – i; 1 + 3i; 2 – 2i; 2 + 2i.

Giải:

- Những bài toán như thế này, nếu chúng ta giải trực tiếp ra các nghiệm rất hay gặp rủi ro là khó giải và mất thời gian. Đa số chúng ta thay nghiệm của lần lượt các đáp án vào phương

trình đã cho ban đầu. Thế nhưng việc thay này cũng rất lâu.

- Chúng ta sử dụng hệ thức VIET đảo cho phương trình bậc 4:
- $\begin{cases} z_1+z_2+z_3+z_4=-\dfrac{b}{a}=-2 \\ z_1.z_2z_3z_4=\dfrac{e}{a}=10 \end{cases}$
- Thực tế, đa số chỉ cần thử điều kiện tổng các nghiệm là đủ.
- Với đáp án A. tổng 4 nghiệm: 2 + i + 2 – i + 4 + 3i + 4 – 3i = 12 (không thỏa mãn)
- Với đáp án **B.** tổng 4 nghiệm: 2i + 3i + 1 – 3i + 1 + 3i = 2 + 5i (không thỏa mãn)
- Với đáp án **C.** tổng 4 nghiệm: 1 + i + 1 – i – 2 – i – 2 + i = – 2 (thỏa mãn)
- Với đáp án **D.** tổng 4 nghiệm: 1 – i + 1 + 3i + 2 – 2i + 2 + 2i = 6 + 2i (không thỏa mãn)
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 190. (3) Cho số phức z thỏa mãn đồng thời: $|z-i+2|=\sqrt{20}$ và $z.\overline{z}=13$. Gọi z_1= a + ib là một nghiệm. Khi đó a + b bằng

A. 11. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 6.

Giải:

- Thay nghiệm z_1 = a + ib vào hai phương trình đã cho ta được:
- $\begin{cases} (a+ib)(a-ib)=13 \\ |a+ib-i+2|=\sqrt{20} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=13 \\ |(a+2)+i(b-1)|=\sqrt{20} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=13 & (1) \\ (a+2)^2+(b-1)^2=20 & (2) \end{cases}$
- Lấy (2) – (1) vế theo vế ta được:
- $4a+4-2b+1=7 \leftrightarrow b=2a-1$ (3). Thế vào (1) ta được:
- $a^2+(2a-1)^2=13 \leftrightarrow 5a^2-4a-12=0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \to b=3 \to (a+b)=5 \\ a=-\dfrac{6}{5} \to b=-\dfrac{17}{5} \to (a+b)=-\dfrac{23}{5} \end{array}\right.$
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 191. (3) Cho phương trình bậc 3 phức với a, b , c là ba tham số thực: $z^3+az^2+bz+c=0$. Biết phương trình có hai nghiệm: z_1 = 1 + i và z_2 = 1. Giá trị của: (a + 2b + 3c) bằng

A. 7. **B.** -1. **C.** 3. **D.** 21.

Giải:

- **Cách 1:** Phương pháp thế nghiệm vào và giải hệ phương trình bậc nhất 3 ẩn (a , b , c)
- Ta lần lượt thay hai nghiệm vào phương trình bậc 3 đã cho rồi lập được một hệ 3 phương trình bậc nhất 3 ẩn a, b, c rồi bấm CASIO giải ra: a, b, c.

- Nên nhớ khi thay một nghiệm phức vào một phương trình luôn được hai phương trình, vì nó có điều kiện phần thực và phần ảo.
- Với nghiệm $z_2 = 1$, ta được: $a+b+c=-1$ (1)
- Với nghiệm $z_1 = 1 + i$, ta được: $(1+i)^3 + a(1+i)^2 + b(1+i) + c = 0 \leftrightarrow (b+c-2) + i(2a+b+2) = 0$
- Suy ra: $b+c-2=0$ (2) và $2a+b+2=0$ (3)
- Dùng CASIO giải hệ phương trình (1), (2), (3), ta được: $a=-3; b=4; c=-2$.
- Suy ra: (a + 2b + 3c) = –1.
- Vậy ta chọn đáp án **B.**
- **Cách 2:** Sử dụng hệ thức VIET kết hợp suy ra nghiệm liên hợp của phương trình hệ số thực.
- Vì phương trình có các hệ số thực lên nếu có một nghiệm phức rồi sẽ bắt buộc phải tồn tại một nghiệm phức nữa là liên hợp của nó.
- Suy ra nghiệm phức nữa: $z_3 = \overline{z_1} = \overline{1+i} = 1-i$
- Áp dụng hệ thức VIET cho phương trình bậc 3 ta có:
- $$\begin{cases} z_1+z_2+z_3 = -\dfrac{B}{A} = -a = (1+i)+1+(1-i) = 3 \to a = -3 \\ z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = \dfrac{C}{A} = b = (1+i).1 + 1.(1-i) + (1+i)(1-i) = 4 \\ z_1z_2z_3 = -\dfrac{D}{A} = -c = (1+i).1.(1-i) = 2 \to c = -2 \end{cases}$$
- Suy ra (a + 2b + 3c) = -1. Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 192. (3) Cho hai số phức z và w có môn đun bằng 1 và tích $z.\text{w} \neq -1$. Khi đó $\dfrac{z+\text{w}}{1+z.\text{w}}$ là số

A. thuần thực. **B.** thuần ảo. **C.** số phức. **D.** số ảo âm.

Giải:

- **Cách 1:** Sử dụng tính chất số phức liên hợp.
- Ta có: $z.\overline{z} = |z|^2 = 1$; $\text{w}.\overline{\text{w}} = |\text{w}|^2 = 1$
- Đặt: $u = \dfrac{z+\text{w}}{1+z\text{w}} \to \overline{u} = \dfrac{\overline{z+\text{w}}}{1+z\text{w}} = \dfrac{\overline{z}+\overline{\text{w}}}{1+\overline{z}.\overline{\text{w}}} = \dfrac{\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{\text{w}}}{1+\dfrac{1}{z}.\dfrac{1}{\text{w}}} = \dfrac{\text{w}+z}{z.\text{w}+1} = u$
- Suy ra u là số phức thuần thực. Vậy ta chọn đáp án **A.**
- **Ghi nhớ:** *Một số phức z gọi là thuần thực* $\Leftrightarrow z = \overline{z}$
- **Cách 2:** Sử dụng công thức Ơ Le với mục đích làm quen CT hiện đại
- Tất cả các số phức có mô đun bằng 1 đều có thể viết dưới dạng lượng giác cơ bản:
- $z = e^{i\varphi} = \cos\varphi + i.\sin\varphi; \text{w} = e^{i\alpha} = \cos\alpha + i.\sin\alpha \to z.\text{w} = e^{i\varphi}.e^{i\alpha} = e^{i(\varphi+\alpha)} = \cos(\varphi+\alpha) + i.\sin(\varphi+\alpha)$

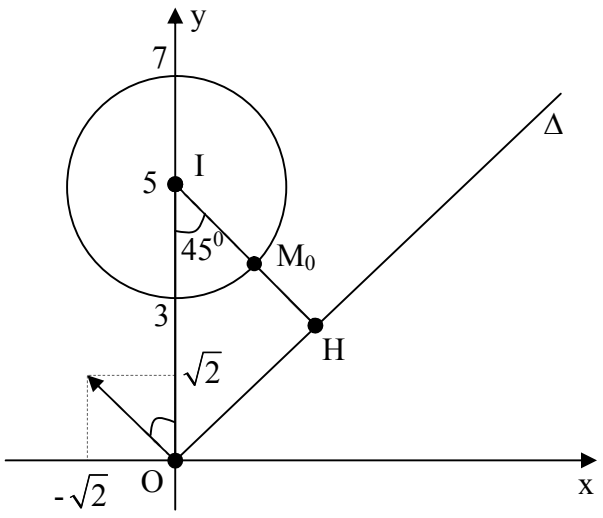
- $z+\mathrm{w}=(\cos\varphi+\cos\alpha)+i.(\sin\varphi+\sin\alpha)=2\cos\frac{\varphi+\alpha}{2}.\cos\frac{\varphi-\alpha}{2}+2i.\sin\frac{\varphi+\alpha}{2}.\cos\frac{\varphi-\alpha}{2}$
- $\Leftrightarrow\ z+\mathrm{w}=2\cos\frac{\varphi-\alpha}{2}(\cos\frac{\varphi+\alpha}{2}.+i.\sin\frac{\varphi+\alpha}{2})$
- $1+z.\mathrm{w}=1+\cos(\varphi+\alpha)+i.\sin(\varphi+\alpha)=2.\cos^2\frac{\varphi+\alpha}{2}+2i.\sin\frac{\varphi+\alpha}{2}.\cos\frac{\varphi+\alpha}{2}$
- $\Leftrightarrow\ 1+z.\mathrm{w}=2\cos\frac{\varphi+\alpha}{2}(\cos\frac{\varphi+\alpha}{2}+i.\sin\frac{\varphi+\alpha}{2})$
- Từ đó suy ra: $\frac{z+\mathrm{w}}{1+z.\mathrm{w}}=\frac{2\cos\frac{\varphi-\alpha}{2}(\cos\frac{\varphi+\alpha}{2}.+i.\sin\frac{\varphi+\alpha}{2})}{2\cos\frac{\varphi+\alpha}{2}(\cos\frac{\varphi+\alpha}{2}.+i.\sin\frac{\varphi+\alpha}{2})}=\frac{\cos\frac{\varphi-\alpha}{2}}{\cos\frac{\varphi+\alpha}{2}}$
- Suy ra : $u=\frac{z+\mathrm{w}}{1+z.\mathrm{w}}$ thuần thực. Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 193. (4) Cho điểm số phức z thỏa mãn: |z – 5i| = 2 và số phức w thỏa mãn: |w – 1| = |w – i|. Số phức z_1 và số phức w_1 lần lượt là hai số phức thỏa mãn điều kiện trên và $|z_1 - w_1|$ nhỏ nhất. Khi đó số phức $(z_1 + w_1)$ là

A. $\frac{5}{2}+i\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{5}{2}+\sqrt{2}+i(\frac{5}{2}-\sqrt{2})$. **C.** $\frac{5}{2}+\sqrt{2}+i(\frac{15}{2}-\sqrt{2})$. **D.** 3 – 7i.

Giải:

- Trước hết ta đi xác định phương trình đường thẳng: |w – 1| = |w – i|
- Gọi w = x + iy, thay vào phương trình trên ta được:
- $|x+iy-1|=|x+iy-i|\leftrightarrow(x-1)^2+y^2=x^2+(y-1)^2\leftrightarrow x-y=0\qquad(\Delta)$
- Phương trình |z – 5i| = 2, là đường tròn (C) có tâm I(0;5) và bán kính R = 2.
- Trên đường thẳng Δ điểm biểu diễn z_1 là điểm H, chính là hình chiếu vuông góc của I lên Δ.
- Trên đường tròn (C) điểm biểu diễn w_1 gần z_1 nhất chính là giao của IH với (C) như hình vẽ:
- Khoảng cách từ I tới đường thẳng Δ là: $d(I,\Delta)=\frac{|0-5|}{\sqrt{1+1}}=\frac{5}{\sqrt{2}}>R=2$



- $IM_0 = 2$; $IH = \frac{5}{\sqrt{2}}$.
- Từ hình vẽ: $\overrightarrow{M_0I} = (-\sqrt{2};\sqrt{2}) = (0 - x_{M_0}; 5 - y_{M_0}) \to M_0 = (\sqrt{2}; 5 - \sqrt{2})$.
- $\overrightarrow{HI} = \frac{HI}{M_0I}.\overrightarrow{M_0I} = \frac{\frac{5}{\sqrt{2}}}{2}\overrightarrow{M_0I} = \frac{5}{2\sqrt{2}}\overrightarrow{M_0I} = \frac{5}{2\sqrt{2}}(-\sqrt{2};\sqrt{2}) = (-\frac{5}{2};\frac{5}{2}) \to H = (\frac{5}{2};\frac{5}{2})$
- Điểm M_0 biểu diễn $z_1 = \sqrt{2} + i(5 - \sqrt{2})$. Điểm H biểu diễn $w_1 = \frac{5}{2} + \frac{5}{2}i$.
- Suy ra: $z_1 + w_1 = \frac{5}{2} + \sqrt{2} + i(\frac{15}{2} - \sqrt{2})$.
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 194. (3) Tập hợp điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn: |z + 2i| + |z – 2i| = 4 là

A. đường tròn (C): $(x + 2)^2 + (y – 2)^2 = 16$.

B. đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 16$.

C. đường thẳng d: x – 2y + 4 = 0.

D. đoạn thẳng trên trục tung.

Giải:

- Áp dụng bất đẳng thức tam giác: $4 = |z + 2i| + |2i - z| \geq |z + 2i + 2i - z| = |4i| = 4$
- Bài toán cho dấu "=" xảy ra nên có: $z + 2i = k(2i - z)$; với số thực $k \geq 0$.
- Từ đó suy ra: $z(k + 1) = 2i(k - 1) \leftrightarrow z = 2\frac{k-1}{k+1}i = 2(1 - \frac{2}{k+1})i$
- Vậy z là một số phức thuần ảo, có phần ảo: $b = 2 - \frac{4}{k+1} \in [-2; 2)$.
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 195. (3) Cho phương trình bậc 2 với hai tham số phức a và b: $(3 + 2i)z^2 - az + b = 0$ có hai nghiệm phức lần lượt là (1 + 2i) và (5 – 6i). Giá trị của b bằng

A. 41 – 43i. **B.** 43 + 46i. **C.** 19 + 23i. **D.** 45 + 41i.

Giải:

- Áp dụng hệ thức VIET: $z_1 z_2 = \frac{b}{3 + 2i} = (1 + 2i)(5 - 6i) \leftrightarrow b = 43 + 46i$.
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 196. (3) Cho phương trình bậc hai hệ số phức: $z^2+(2i-3)z+1-5i=0$. Mô đun của số phức $w=z_1^4+z_2^4$ bằng

A. $13\sqrt{17}$. **B.** 25. **C.** $2\sqrt{29}$. **D.** $4\sqrt{13}$.

Giải:

- Số phức w là một hệ thức VIET, ta biến đổi như sau:
- $w=((z_1+z_2)^2-2z_1z_2)^2-2z_1^2z_2^2=\{(3-2i)^2-2(1-5i)\}^2-2(1-5i)^2=53+8i\rightarrow|w|=13\sqrt{17}$
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 197. (3) Cho số phức $z=\dfrac{m-2}{1+m-i}$, với m là tham số thực. Biết rằng: $z.\overline{z}=2$. Tất cả các giá trị của m sẽ lần lượt là

A. $m=-4\pm\sqrt{5}$. **B.** $m=1+\sqrt{3};m=1$. **C.** $m = 0; m = -8$. **D.** $m=1-\sqrt{2};m=2$.

Giải:

- Từ: $z.\overline{z}=2\leftrightarrow|z|^2=2\leftrightarrow|z|=\sqrt{2}$.
- Lấy mô đun của số phức z ta được:
- $|z|=\dfrac{|m-2|}{|1+m-i|}=\dfrac{|m-2|}{\sqrt{(1+m)^2+1}}=\sqrt{2}\leftrightarrow m^2-4m+4=2m^2+4m+4\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-8\end{array}\right.$
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 198. (3) Số nghiệm của phương trình phức: $4z^2+8|z|^2-3=0$ sẽ là

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Giải:

- Gọi z = a + ib, với a và b là hai số thực, thay vào phương trình đã cho ta được:
- $4(a^2-b^2+2abi)+8(a^2+b^2)-3=0\leftrightarrow 12a^2+4b^2-3+2abi=0\leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2ab=0\\12a^2+4b^2-3=0\end{array}\right.$
- **Trường hợp 1:** Với $a = 0$, suy ra: $b=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\rightarrow z_{1,2}=\pm\dfrac{i\sqrt{3}}{2}$.
- **Trường hợp 2:** Với $b = 0$, suy ra: $a=\pm\dfrac{1}{2}\rightarrow z_{3,4}=\pm\dfrac{1}{2}$.
- Suy ra có tất cả 4 số phức thỏa mãn bài toán. Vậy chọn đáp án **A.**

Câu 199. (3) Cho phương trình phức với tham số thực m: $z^3+(2i-1)z^2+(m-4i)z-6i+1=0$. Số giá trị của m để phương trình có nghiệm thuần thực là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Giải:

- Phương trình có nghiệm thuần thực ⇔ $(z^3-z^2+mz+1)+i(2z^2-4z-6)=0$ có nghiệm thực.
- Khi đó nghiệm thực z_0 phải là nghiệm của hệ phương trình:
- $\begin{cases} z^3-z^2+mz+1=0 \quad (1) \\ 2z^2-4z-6=0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-1 \\ z=3 \end{array}\right. \end{cases}$
- Với z = -1, thay vào (1), suy ra: m = -1.
- Với z = 3, thay vào (1), suy ra: m = -19/3. Suy ra có hai giá trị của m thỏa mãn bài toán.
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 200. (3) Cho phương trình phức với tham số thực m: $z^3+(i-1)z^2+(m+3i)z+2i-3=0$. Tích của tất cả các giá trị của m để phương trình đã cho có nghiệm thực sẽ bằng

A. 75/2. **B.** 15/4. **C.** 20/5. **D.** 27/25.

Giải:

- Tương tự **Câu 199.** Phương trình đã cho ⇔ $(z^3-z^2+mz-3)+i(z^2+3z+2)=0$. Có nghiệm thuần thực ⇔ tồn tại nghiệm thực z_0 thỏa mãn:
- $\begin{cases} z^3-z^2+mz-3=0 \quad (1) \\ z^2+3z+2=0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=-1 \\ z=-2 \end{array}\right. \end{cases}$
- Với z = - 1, thay vào (1), ta được: m = -5.
- Với z = -2, thay vào (1), ta được: m = - 15/2.
- Suy ra tích của hai giá trị m thỏa mãn điều kiện bài toán là: 75/2.
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 202. (3) Cho 4 điểm A, B, C, D lần lượt biểu diễn các số phức 1 + 2i; 2 – 3i; 3 + i; 6 + 2i. Trong các nhận xét sau, nhận xét sai là

A. điểm C nằm trong tam giác AB**D.**

B. diện tích tam giác ACD nhỏ hơn diện tích tam giác BC**D.**

C. trung điểm của đoạn AC là điểm biểu diễn số phức z = 2 + 3i/2.

D. trọng tâm tam giác ABC là điểm G = (6;0).

Giải:

- Đây là dạng câu hỏi thử từng đáp án và khá cồng kềnh kiến thức cũng như thời gian.
- Chúng ta nên xét các đáp án có nội dung từ đơn giản tới phức tạp, nếu gặp phải đáp án sai thì dừng lại và chọn luôn đáp án sai đó. Tránh thử lần lượt đáp án, vì đôi khi gặp phải các đáp án

có nội dung phức tạp, yêu cầu mất khá nhiều thời gian mới định hình được tính đúng sai.

- Quan sát 4 đáp án, ta thấy đáp án **C.** hỏi trung điểm của đoạn AC dễ nhất ta thử trước:
- Trung điểm của AC là: $z_M = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{1+2i+3+i}{2} = 2 + \frac{3i}{2}$. (đúng)
- Tiếp theo tới đáp án **D.** cũng đơn giản vì yêu cầu tìm trọng tâm của tam giác ABC:
- $z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{1+2i+2-3i+3+i}{3} = 2 \Leftrightarrow$ G(2;0) (đáp án sai).
- Vậy ta chọn đáp án **D.** là đáp án của bài toán.

Câu 205. (3) Mô đun của số phức $z = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - i\sqrt{2xy}}{x - y - 2i\sqrt{xy}}$ bằng

A. $\sqrt{x^2+y^2}$. **B.** $|\frac{x+y}{x-y}|$. **C.** $\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{2xy}$. **D.** 1.

Giải:

- Ta có: $|z| = \frac{|\sqrt{x^2+y^2} - i\sqrt{2xy}|}{|x - y - 2i\sqrt{xy}|} = \frac{\sqrt{(x^2+y^2)+2xy}}{\sqrt{(x-y)^2+4xy}} = 1$.
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 206. (3) Giải phương trình: $z^2 + |z| = 0$ sẽ được các nghiệm có tổng mô đun tất cả các nghiệm bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Giải:

- Gọi z = a + ib, với a và b là hai số thực. Thay vào phương trình đã cho ta được:
- $a^2 - b^2 + 2abi + \sqrt{a^2+b^2} = 0 \leftrightarrow \begin{cases} 2ab = 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ b = 0 \end{array}\right. \\ a^2 - b^2 + \sqrt{a^2+b^2} = 0 \quad (1) \end{cases}$
- Với $b = 0$, thay vào (1), ta được: $a^2 + \sqrt{a^2} = 0 \leftrightarrow a^2 + |a| = 0 \leftrightarrow a = 0 \rightarrow z_1 = 0$
- Với $a = 0$, thay vào (1), ta được: $-b^2 + \sqrt{b^2} = 0 \leftrightarrow b^2 - |b| = 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ b = \pm 1 \end{array}\right. \rightarrow z_{2,3} = \pm i$
- Suy ra tổng mô đun của tất cả các nghiệm: |0| + |-i| + |i| = 2.
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 207. (3) Cho số phức z = a + ib. Hệ thức luôn đúng là

A. $|z| \geq |a| + |b|$. **B.** $|z| \leq \frac{|a| + |b|}{2}$. **C.** $|z|\sqrt{2} \geq |a| + |b|$. **D.** $|z| \leq |a| - |b|$.

Giải:

- Hai bất đẳng thức tam giác là: $|z| = |a + ib| \leq |a| + |ib| = |a| + |b|$ và:
- $|z| = |a - (-ib)| \geq |a| - |-ib| = |a| - |b|$
- Quan sát 4 đáp án so với hai bất đẳng thức trên, thì thấy ngay đáp án A và đáp án D sai rồi.
- Còn lại hai đáp án B và C là chưa biết.
- Vậy ta thử với đáp án B nữa là đủ:
- Ví dụ: z = a + ib = 1 ; tức là a = 1 và b = 0, thay vào B:
- $|1| \leq \frac{|1| + |0|}{2}$ vô lí, suy ra đáp án B sai.
- Vậy ta chọn đáp án cuối cùng là **C.**

Câu 208. (3) Phương trình phức: $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$ có số nghiệm phức là

A. 6. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Giải:

- Đặt $t = z^3$, phương trình đã cho trở thành:
- $t^2 + 7t - 8 = 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 = z^3 \leftrightarrow (z-1)(z^2+z+1) = 0 \\ t = -8 = z^3 \leftrightarrow (z+2)(z^2-2z+4) = 0 \end{array}\right.$
- Đã từng làm rất nhiều, nhìn qua là biết phương trình có 2 nghiệm thuần thực và 4 nghiệm phức đầy đủ. Tuy nhiên, vẫn kết luận phương trình có 6 nghiệm phức.
- Chọn đáp án **A.**

Câu 209. (3) Cho số phức z khác 0 có Argument bằng φ. Số phức i.z có Argument là

A. 2φ. **B.** $\varphi - \frac{\pi}{2}$. **C.** $\varphi + \frac{\pi}{2}$. **D.** $-\varphi$.

Giải:

- Áp dụng công thức Ơ le, ta có: $z = |z| e^{i\varphi}$
- $i = 1.(\cos\frac{\pi}{2} + i.\sin\frac{\pi}{2}) = e^{i.\frac{\pi}{2}}$. Suy ra:
- $i.z = e^{i.\frac{\pi}{2}}.|z|.e^{i\varphi} = |z|.e^{i(\varphi+\frac{\pi}{2})} \rightarrow (\varphi + \frac{\pi}{2})$ là Argument của số phức i.z.
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 210. (3) Cho số phức z khác 0 có Argument bằng φ. Nhận xét sai là?

A. Argument của số phức iz là: $\varphi+\frac{\pi}{2}$.

B. Argument của số phức $\overline{z}$ là: $-\varphi$.

C. Argument của số phức (-z) là: $\varphi+\pi$ hoặc $\varphi-\pi$.

D. Argument của số phức 1/z là: $\frac{1}{\varphi}$.

Giải:

- Áp dụng công thức Ơ le: $z=|z|e^{i\varphi}$; $i=e^{i\frac{\pi}{2}}$
- Với đáp án A: $i.z=e^{i\frac{\pi}{2}}.|z|.e^{i\varphi}=|z|.e^{i(\varphi+\frac{\pi}{2})}\rightarrow$ có Argument là: $\varphi+\frac{\pi}{2}$. (đúng)
- Ta có: $z.\overline{z}=|z|^2\rightarrow\overline{z}=\frac{|z|^2}{z}=\frac{|z|^2}{|z|e^{i\varphi}}=\frac{|z|}{e^{i\varphi}}=|z|.e^{i(-\varphi)}\rightarrow$ có Argument là: $-\varphi$. (Đáp án B đúng)
- Đáp án C: $-z=-|z|(\cos\varphi+i.\sin\varphi)=|z|(\cos(\varphi\pm\pi)+i.\sin(\varphi\pm\pi))\rightarrow$ Argument: $\varphi\pm\pi$. (đúng)
- Ta chọn luôn đáp án **D.** là đáp án của bài toán (tức là có nội dung sai) . Thật ra Argument của số phức 1/z là: $-\varphi$.

Câu 212. (3) Cho số phức z khác 0 có Argument bằng φ. Số phức có Argument bằng $3\varphi-\frac{\pi}{2}$ là

A. iz. **B.** z^3. **C.** z^3/i. **D.** –i.z.

Giải:

- Áp dụng công thức Ơ Le, ta có:
- $z=|z|e^{i\varphi}$; $i=e^{i\frac{\pi}{2}}$; $-i=e^{i(-\frac{\pi}{2})}$.
- $i.z=e^{i\frac{\pi}{2}}|z|e^{i\varphi}=|z|e^{i(\varphi+\frac{\pi}{2})}\rightarrow$ có Argument là: $\varphi+\frac{\pi}{2}$
- $z^3=|z|^3.e^{i3\varphi}\rightarrow$ có Argument là: 3φ
- $\frac{z^3}{i}=\frac{|z|^3e^{i3\varphi}}{e^{i\frac{\pi}{2}}}=|z|^3.e^{i(3\varphi-\frac{\pi}{2})}\rightarrow$ có Argument là: $3\varphi-\frac{\pi}{2}$.
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 213. (3) Phương trình phức: $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4 = 1$ có tất cả

A. 3 nghiệm. **B.** 4 nghiệm. **C.** 2 nghiệm. **D.** 1 nghiệm.

Giải:

- Phương trình đã cho $\Leftrightarrow (z+i)^4 = (z-i)^4 \leftrightarrow \left[\begin{array}{c}(z+i)^2 = (z-i)^2 \\ (z+i)^2 = -(z-i)^2 = i^2(z-i)^2\end{array}\right.$
- Với: $(z+i)^2 = (z-i)^2 \leftrightarrow 2iz = 0 \leftrightarrow z_1 = 0$.
- Với: $(z+i)^2 = i^2(z-i)^2 \leftrightarrow \{z+i-i(z-i)\}.\{z+i+i(z-i)\} = 0 \leftrightarrow \{(1-i)z+i-1\}.\{(1+i)z+1+i\}=0$
- $\Leftrightarrow z_2 = 1$ hoặc $z_3 = -1$.
- Suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm.
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 216. (3) Cho số phức z thỏa mãn hệ thức: $(1+3i)|z| = 2(z+i)-(2-z)$. Khi đó giá trị |z| bằng

A. $4+2\sqrt{2}$. **B.** $2-4\sqrt{2}$. **C.** $3-\sqrt{2}$. **D.** 3.

Giải:

- Phương trình đã cho $\Leftrightarrow (1+3i)|z| = 3z+2i-2 \leftrightarrow (1+3i)|z|+2-2i = 3z$
- Tới đây ta mô đun hai vế: $|(1+3i)|z|+2-2i| = |3z| = 3|z|$ (2)
- Đặt: $t = |z| \in R$, $t \geq 0$
- Thay vào (2) ta được: $|(1+3i)t+2-2i| = 3t \leftrightarrow |(t+2)+i(3t-2)| = 3t \leftrightarrow \sqrt{(t+2)^2+(3t-2)^2} = 3t$
- Biến đổi đưa về phương trình: $t^2-8t+8=0 \rightarrow t = 4 \pm 2\sqrt{2}$
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 217. (3) Cho số phức z thỏa mãn hệ thức: $(1+3i)|z| = \frac{2\sqrt{30}}{\overline{z}} + 3 - i$. Khi đó giá trị |z| bằng

A. 1. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** $\sqrt{3}$.

Giải:

- Phương trình đã cho $\Leftrightarrow (1+3i)|z| - 3 + i = \frac{2\sqrt{30}}{\overline{z}}$
- Đến đây ta mô đun hai vế sẽ được: $|(1+3i)|z| - 3 + i| = \left|\frac{2\sqrt{30}}{\overline{z}}\right| = \frac{2\sqrt{30}}{|\overline{z}|} = \frac{2\sqrt{30}}{|z|}$ (1)

- Đặt: $t = |z| \in R$, $t \geq 0$. Thay vào phương trình (1) suy ra:
- $|(1+3i)t - 3 + i| = \frac{2\sqrt{30}}{t} \leftrightarrow |(t-3) + i(3t+1)| = \frac{2\sqrt{30}}{t} \leftrightarrow \sqrt{(t-3)^2 + (3t+1)^2} = \frac{2\sqrt{30}}{t} \leftrightarrow 10t^2 + 10 = \frac{120}{t^2}$
- $\Leftrightarrow t^2 + 1 = \frac{12}{t^2} \leftrightarrow t^4 + t^2 - 12 = 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2 = -4(Loai) \\ t^2 = 3 \leftrightarrow t = \sqrt{3} \end{array}\right. \rightarrow |z| = \sqrt{3}$
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 219. (4) Cho số phức z thỏa mãn phương trình |z – 3| + |z + 3| = 12. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của |z| là M và m. Khi đó (M + m$\sqrt{3}$) bằng

A. 9. **B.** 12. **C.** 15. **D.** 10.

Giải:

Cách 1: Sử dụng các bất đẳng thức tam giác và bunhia thuần túy:

- Áp dụng bất đẳng thức tam giác: $12 = |z-3| + |z+3| \geq |(z-3) + (z+3)| = |2z| = 2|z| \rightarrow |z| \leq 6$
- Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $z + 3 = k(z-3) \rightarrow \left\{\begin{array}{l} z = \frac{3k+3}{k-1} \\ |z+3| = k|z-3| \rightarrow k|z-3| + |z-3| = 12 \rightarrow |z-3| = \frac{12}{k+1} \end{array}\right.$
- Ta có: $|z-3| = |\frac{3k+3}{k-1} - 3| = \frac{6}{|k-1|} \rightarrow \frac{6}{|k-1|} = \frac{12}{|k+1|} \rightarrow |k+1| = 2|k-1| \rightarrow \left[\begin{array}{l} k = 3 \rightarrow z = 6 \\ k = \frac{1}{3} \rightarrow z = -6 \end{array}\right.$
- Vậy giá trị lớn nhất của |z| = 6 = M.
- Việc tìm giá trị nhỏ nhất sẽ rất phức tạp và phải đưa về công thức đường trung tuyến kết hợp bất đẳng thức bunhia….Chúng ta nên làm theo cách thứ 2.

Cách 2:

- Một số kiến thức cần bổ sung:
- Nếu một số phức z thỏa mãn: $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$ thì tập hợp điểm biểu diễn nó là một đường elip có hai tiêu điểm là z_1 và z_2.
- Có tiêu cự là: $|z_1 - z_2| = 2c$; bán trục lớn là a và bán trục nhỏ là $b = \sqrt{a^2 - c^2}$
- Tâm của elip khi đó là trung điểm của đoạn z_1z_2 , tức là: $z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}$
- **Kết quả sử dụng cho bài toán này:** Giá trị lớn nhất của $|z - z_0|$ = a = bán trục lớn. Giá trị nhỏ nhất của $|z - z_0|$ = b = bán trục nhỏ.

- Xét phương trình elip đã cho: $|z - 3| + |z + 3| = 12 = 2a$.
- Hai tiêu điểm: $z_1 = 3$ và $z_2 = -3$. Tâm của elip $z_0 = (z_1 + z_2)/2 = 0$.
- $|z - z_0| = |z|$.
- Tiêu cự: $|z_1 - z_2| = |3 + 3| = 6 = 2c \rightarrow c = 3$.
- Bán trục dài: a = 6. Bán trục nhỏ: b = $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$.
- Vậy giá trị lớn nhất của |z| là M = 6, giá trị nhỏ nhất của |z| ;à m = $3\sqrt{3}$.
- Suy ra: $(M + m\sqrt{3}) = 12$. Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 220. (4) Cho số phức z thỏa mãn phương trình $|z - 1| + |z + 7| = 12$. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z + 3|$ là M và m. Khi đó (M + m) bằng

A. 12. **B.** 24. **C.** 16. **D.** 18.

Giải:

- Đây là phương trình elip có hai tiêu điểm: $z_1 = 1$; $z_2 = -7$. Bán trục dài là a = 6.
- Suy ra tâm của elip: $z_0 = (z_1 + z_2)/2 = -3$.
- Tiêu cự: $2c = |z_1 - z_2| = |1 - (-7)| = 8$. Suy ra bán tiêu cự: c = 4.
- Bán trục nhỏ: $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = 2\sqrt{5}$.
- Giá trị lớn nhất của $|z - z_0|$ là: M = a = 6; giá trị nhỏ nhất của $|z - z_0|$ là m = $2\sqrt{5}$.
- Suy ra: $(M + m\sqrt{5}) = (6 + 10) = 16$.
- Vậy ta chọn đáp án **C.**
- Chúng ta cũng có thể làm theo các dạng bất đẳng thức

Câu 221. (4) Cho số phức z thỏa mãn phương trình $|z - 2 + i| + |z + 4 - 5i| = 12$. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z + 1 - 2i|$ là M và m. Khi đó $(M + 2m\sqrt{2})$ bằng

A. 6. **B.** 18. **C.** 12. **D.** 24.

Giải:

- Bán tiêu cự: $c = \frac{|z_1 - z_2|}{2} = \frac{|2 - i + 4 - 5i|}{2} = 3\sqrt{2}$
- Bán trục dài: a = 6. Bán trục nhỏ: $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{6^2 - (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}$
- Suy ra giá trị max của $|z - z_0|$ là M = 6 , giá trị min là: $3\sqrt{2}$. Giá trị của $(M + 2m\sqrt{2}) = 12$.
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 222. (4) Cho pt đối xứng bậc 6: $z^6+2015z^5+2016z^4+2017z^3+2016z^2+2015z+1=0$ có các nghiệm lần lượt là $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$. Giá trị: $T=(z_1^2+1)(z_2^2+1)(z_3^2+1)(z_4^2+1)(z_5^2+1)(z_6^2+1)$ bằng

A. 2013^2. **B.** 2014^2. **C.** 2015^2. **D.** 2016^2.

Giải:

- Áp dụng VIET cho phương trình bậc 6, tích 6 nghiệm: $z_1z_2z_3z_4z_5z_6=1$
- Biến đổi biểu thức của T như sau:
- $T=z_1z_2z_3z_4z_5z_6(\frac{z_1^2+1}{z_1})(\frac{z_2^2+1}{z_2})(\frac{z_3^2+1}{z_3})(\frac{z_4^2+1}{z_4})(\frac{z_5^2+1}{z_5})(\frac{z_6^2+1}{z_6})$
- $T=(z_1+\frac{1}{z_1})(z_2+\frac{1}{z_2})(z_3+\frac{1}{z_3})(z_4+\frac{1}{z_4})(z_5+\frac{1}{z_5})(z_6+\frac{1}{z_6})$ (2)
- Biến đổi phương trình bậc 6 đã cho bằng cách chia hai vế cho z^3, ta được:
- $z^3+2015z^2+2016z+2017+2016.\frac{1}{z}+2015.\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}=0$
- $\leftrightarrow(z^3+\frac{1}{z^3})+2015(z^2+\frac{1}{z^2})+2016(z+\frac{1}{z})+2017=0$ (3)
- Đặt ẩn phụ: $t=z+\frac{1}{z}\rightarrow z^2+\frac{1}{z^2}=t^2-2$; $z^3+\frac{1}{z^3}=t^3-3t$
- Thay vào phương trình (3) ta được:
- $(t^3-3t)+2015(t^2-2)+2016t+2017=0\leftrightarrow t^3+2015t^2+2013t-2013=0$
- Nếu gọi 3 nghiệm của phương trình (4) là t_1, t_2, t_3 thì ta có: $t_1t_2t_3$ = -d/a = 2013
- Nếu gọi z_1 và z_4 lần lượt là hai nghiệm của phương trình: $z+\frac{1}{z}=t_1\rightarrow z_1+\frac{1}{z_1}=t_1$; $z_4+\frac{1}{z_4}=t_1$
- Gọi z_2 và z_5 lần lượt là hai nghiệm của phương trình: $z+\frac{1}{z}=t_2\rightarrow z_2+\frac{1}{z_2}=t_2$; $z_5+\frac{1}{z_5}=t_2$
- Gọi z_3 và z_6 lần lượt là hai nghiệm của phương trình: $z+\frac{1}{z}=t_3\rightarrow z_3+\frac{1}{z_3}=t_3$; $z_6+\frac{1}{z_6}=t_3$
- Thay tất cả vào biểu thức của T ở (2), ta sẽ được: $T=(t_1t_2t_3)^2=2013^2$
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 223. (4) Cho pt đối xứng bậc 4: $z^4+2z^3+12z^2+2z+1=0$ có các nghiệm lần lượt là z_1, z_2, z_3, z_4. Giá trị: $T=(z_1^2+1)(z_2^2+1)(z_3^2+1)(z_4^2+1)$ bằng

A. 64. **B.** 81. **C.** 100. **D.** 144.

Giải:

- Tương tự câu 222, nhưng ở câu này là đối với phương trình bậc 4, đơn giản hơn nhiều.
- Tích 4 nghiệm theo VIET: $z_1z_2z_3z_4 = 1$.
- Biến đổi biểu thức T bằng cách:
- $T = z_1z_2z_3z_4\dfrac{(z_1^2+1)}{z_1}\dfrac{(z_2^2+1)}{z_2}\dfrac{(z_3^2+1)}{z_3}\dfrac{(z_4^2+1)}{z_4} = (z_1+\dfrac{1}{z_1})(z_2+\dfrac{1}{z_2})(z_3+\dfrac{1}{z_3})(z_4+\dfrac{1}{z_4})$ (1)
- Biến đổi phương trình đối xứng bậc 4 như sau:
- $z^4+2z^3+12z^2+2z+1=0 \leftrightarrow z^2+2z+12+\dfrac{2}{z}+\dfrac{1}{z^2}=0 \leftrightarrow (z^2+\dfrac{1}{z^2})+2(z+\dfrac{1}{z})+12=0$
- Đặt ẩn: $t = z+\dfrac{1}{z} \rightarrow z^2+\dfrac{1}{z^2} = t^2-2$. Thay vào phương trình trên ta được:
- $(t^2-2)+2t+12=0 \leftrightarrow t^2+2t+10=0$
- Gọi t_1 và t_2 là hai nghiệm của phương trình trên thì ta có: $t_1t_2 = 10$.
- Gọi z_1 và z_3 là hai nghiệm của phương trình: $z+\dfrac{1}{z}=t_1 \rightarrow z_1+\dfrac{1}{z_1}=t_1$; $z_3+\dfrac{1}{z_3}=t_1$
- Gọi z_2 và z_4 là hai nghiệm của phương trình: $z+\dfrac{1}{z}=t_2 \rightarrow z_2+\dfrac{1}{z_2}=t_2$; $z_4+\dfrac{1}{z_4}=t_2$
- Thay vào biểu thức của T ở (1), ta được: $T = (t_1t_2)^2 = 10^2 = 100$.
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 224. (3) Cho hai số phức z và w sao cho hệ thức xác định: $\dfrac{1}{2z}+\dfrac{2}{z+w}=\dfrac{3}{z+3w}$ và |z| = 2. Khi đó mô đun |w| có giá trị nhỏ nhất tương ứng bằng

A. $\dfrac{10+4\sqrt{7}}{3}$. **B.** $\dfrac{-10+4\sqrt{7}}{3}$. **C.** $2\sqrt{7}-5$. **D.** $2\sqrt{7}+5$.

Giải:

- Bài toán này nhìn qua là dạng phương trình đẳng cấp rồi, ta chỉ việc biến đổi đưa về dạng cơ bản như sau:
- $\leftrightarrow (z+w)(z+3w)+2.2z(z+3w)=3.2z(z+w) \leftrightarrow 3w^2+10zw-z^2=0 \rightarrow 3\dfrac{w^2}{z^2}+10\dfrac{w}{z}-1=0$
- Suy ra: $\left[\begin{array}{l}\dfrac{w}{z}=\dfrac{-5-2\sqrt{7}}{3} \rightarrow |\dfrac{w}{z}|=|\dfrac{-5-2\sqrt{7}}{3}|=\dfrac{5+2\sqrt{7}}{3} \rightarrow |w|=\dfrac{10+4\sqrt{7}}{3} \\ \dfrac{w}{z}=\dfrac{-5+2\sqrt{7}}{3} \rightarrow |\dfrac{w}{z}|=|\dfrac{-5+2\sqrt{7}}{3}|=\dfrac{2\sqrt{7}-5}{3} \rightarrow |w|=\dfrac{4\sqrt{7}-10}{3}\end{array}\right.$
- Suy ra |w| nhỏ nhất là: $|w|=\dfrac{4\sqrt{7}-10}{3}$. Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 225. (3) Cho hai số phức z và w sao cho hệ thức xác định: $\frac{1}{z}+\frac{2}{w}=\frac{2}{z+w}$ và |w| = 2. Khi đó mô đun |z| tương ứng bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Giải:

- Vẫn là phương trình đẳng cấp của z và w.
- Pt ⇔ $w(z+w)+2z(z+w)=2zw \leftrightarrow 2z^2+zw+w^2=0 \to 2\frac{z^2}{w^2}+\frac{z}{w}+1=0$
- Suy ra: $\frac{z}{w}=-\frac{1}{4}\pm\frac{\sqrt{7}}{4}i \to |\frac{z}{w}|=|-\frac{1}{4}\pm\frac{\sqrt{7}}{4}i|=\frac{1}{\sqrt{2}} \to |z|=|w|.\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 226. (3) Cho hai số phức z và w sao cho hệ thức xác định: $\frac{1}{z}+\frac{1}{w}=\frac{2}{z+3w}$ và |w| = |z| – 2. Khi đó mô đun |z| nằm trong khoảng đúng là:

A. $4<|z|<5$. **B.** $5<|z|<6$. **C.** $2<|z|<3$. **D.** $1<|z|<2$.

Giải:

- Phương trình ⇔ $w(z+3w)+z(z+3w)=2zw \leftrightarrow z^2+2zw+3w^2=0 \to 3\frac{w^2}{z^2}+2\frac{w}{z}+1=0$
- Suy ra: $\frac{w}{z}=-\frac{1}{3}\pm\frac{\sqrt{2}}{3}i \to |\frac{w}{z}|=|-\frac{1}{3}\pm\frac{\sqrt{2}}{3}i|=\frac{1}{\sqrt{3}} \to |w|=\frac{|z|}{\sqrt{3}}$
- Kết hợp giả thiết suy ra: $|w|=\frac{|z|}{\sqrt{3}}=|z|-2 \to |z|=3+\sqrt{3}$. Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 227. (3) Cho phương trình bậc 2 với a và b là hai hệ số thực: $z^2 + az + b = 0$. Phương trình có hai nghiệm lần lượt là: (w + 3i – 5) và (2w + 3 – 2i). Tích của phần thực và phần ảo của số phức w có giá trị tương ứng bằng

A. 8/3. **B.** 14/2. **C.** 30/4. **D.** 1/5.

Giải:

- Đã biết một phương trình phức với các hệ số thực thì luôn tồn tại một cặp nghiệm phức liên hợp. Một phương trình bậc 2 với các hệ số thực, nếu có nghiệm phức thì nó tồn tại một cặp nghiệm liên hợp.

- Suy ra: $2w+3-2i=\overline{w+3i-5}=\overline{w}-3i-5\leftrightarrow 2w-\overline{w}=-8-i$
- Gọi w = x + iy , thay vào pt trên ta được:
- $2(x+iy)-(x-iy)=-8-i\leftrightarrow x+3iy=-8-i\rightarrow\begin{cases}x=-8\\y=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$
- Tích số của phần thực và phần ảo của w là: $x.y=\dfrac{8}{3}$. Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 228. (3) Cho phương trình bậc 2 với a và b là hai hệ số thực: $z^2 + az + b = 0$. Phương trình có hai nghiệm lần lượt là: (w + i – 2) và (3w + 1 – 3i). Mô đun |w| bằng

A. $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$. **B.** 10. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

Giải:

- Tương tự câu 227, ta có được:
- $3w+1-3i=\overline{w+i-2}=\overline{w}-i-2\leftrightarrow 3w-\overline{w}=-3+2i$
- Gọi w = x + iy , thay vào phương trình trên ta được:
- $3(x+iy)-(x-iy)=-3+2i\leftrightarrow 2x+4iy=-3+2i\rightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{3}{2}\\y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$
- Suy ra: $|w|=\sqrt{(-\frac{3}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$.
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 229. (3) Cho biết z = a + ib, với a và b là hai số thực khác 0. Gọi $z^4 = a_0 + ib_0$. Giá trị nhỏ nhất của a_0/b^4 bằng

A. – 8. **B.** 0. **C.** -12. **D.** -4.

Giải:

- **Cách 1:**
- Gọi dạng lượng giác của số phức: z = |z|(cosφ + i.sinφ) ; trong đó a = |z|.cosφ và b = |z|.sinφ.
- Khi đó: $z^4 = |z|^4(\cos\varphi + i.\sin\varphi)^4 = |z|^4(\cos 4\varphi + i.\sin 4\varphi)$
- Trong đó: $a_0 = |z|^4.\cos 4\varphi$ và $b_0 = |z|^4.\sin 4\varphi$
- Suy ra tỉ số: $\dfrac{a_0}{b^4}=\dfrac{|z|^4.\cos 4\varphi}{|z|^4.\sin^4\varphi}=\dfrac{\cos 4\varphi}{\sin^4\varphi}=f(\varphi)$

- Đạo hàm: $f'(\varphi)=\dfrac{-4\sin 4\varphi\sin^4\varphi-\cos 4\varphi.(4\sin^3\varphi\cos\varphi)}{\sin^8\varphi}=-4\dfrac{\cos 4\varphi\cos\varphi+\sin 4\varphi\sin\varphi}{\sin^5\varphi}$
- $f'(\varphi)=-4\dfrac{\cos(4\varphi-\varphi)}{\sin^5\varphi}=-4\dfrac{\cos 3\varphi}{\sin^5\varphi}=0\rightarrow\varphi=\pm\dfrac{\pi}{6}$
- Thay vào hàm: $f(\pm\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{\cos 4(\frac{\pm\pi}{6})}{\sin^4(\frac{\pm\pi}{6})}=-8$
- Vậy ta chọn đáp án **A.**
- **Cách 2:** Khi ta biến đổi tới: $\dfrac{a_0}{b^4}=\dfrac{\cos 4\varphi}{\sin^4\varphi}=f(\varphi)$ có thể thay đáp án và bấm SHIFT SOLVE
- Lần lượt từ đáp án có trị số nhỏ nhất ta có:
- Đáp án C có: $\dfrac{a_0}{b^4}=\dfrac{\cos 4\varphi}{\sin^4\varphi}=f(\varphi)=-12$. Khi bấm SHIFT SOLVE trả về vô nghiệm (can't solve)
- Đáp án A có: $\dfrac{a_0}{b^4}=\dfrac{\cos 4\varphi}{\sin^4\varphi}=f(\varphi)=-8$. Khi bấm SHIFT SOLVE trả về nghiệm. Tức là có giá trị của góc φ để cho giá trị của biểu thức a_0/b^4 nhỏ nhất bằng -8.
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 230. (3) Cho biết z = a + ib, với a và b là hai số thực khác 0. Gọi $z^3 = a_0 + ib_0$. Giá trị nhỏ nhất của b_0/b^3 bằng

A. 0. **B.** – 4. **C.** -1. **D.** -2.

Giải:

- Tương tự câu 229, ta có được: $\dfrac{b_0}{b^3}=\dfrac{\sin 3\varphi}{\sin^3\varphi}=f(\varphi)$
- Đến đây có thể sử dụng đạo hàm như đã biết. Tuy nhiên, ở bài tập này ta sử dụng phương pháp lượng giác đơn giản:
- $\dfrac{b_0}{b^3}=\dfrac{\sin 3\varphi}{\sin^3\varphi}=f(\varphi)=\dfrac{3\sin\varphi-4\sin^3\varphi}{\sin^3\varphi}=\dfrac{3}{\sin^2\varphi}-4\geq\dfrac{3}{1}-4=-1$
- Suy ra giá trị nhỏ nhất của $\dfrac{b_0}{b^3}=\dfrac{\sin 3\varphi}{\sin^3\varphi}=f(\varphi)$ là: -1 . Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 231. (4) Cho phương trình bậc 4 hệ số thực: $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$. Có 3 nghiệm phức lần lượt là: (w + i) , (2w + 3i) , (3w – 2i + 2). Nghiệm còn lại của nó không thể là giá trị nào dưới đây?

A. $-1+\dfrac{5}{4}i$. **B.** $-1-\dfrac{3}{4}i$. **C.** $-2-\dfrac{5}{2}i$. **D.** $-3-\dfrac{9}{4}i$.

Giải:

- Áp dụng tính chất: một phương trình có các hệ số thực thì tồn tại các cặp nghiệm phức liên hợp nhau. Đặt: $z_1 = w + i$; $z_2 = 2w + 3i$; $z_3 = 3w - 2i + 2$; z_4 chưa biết.
- Như vậy, trong 3 nghiệm đã cho có một cặp nghiệm là liên hợp của nhau, ta có 3 trường hợp:
- 3 cặp nghiệm liên hợp: $\left[\begin{array}{l} z_3 = z_1 \\ z_3 = z_2 \\ z_1 = z_2 \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{c} 3w - 2i + 2 = \overline{w + i} = \overline{w} - i \\ 3w - 2i + 2 = \overline{2w + 3i} = 2\overline{w} - 3i \\ 2w + 3i = \overline{w + i} = \overline{w} - i \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} 3w - \overline{w} = -2 + i \\ 3w - 2\overline{w} = -2 - i \\ 2w - \overline{w} = -4i \end{array}\right.$
- Gọi $w = a + ib$, thay vào các trường hợp trên, ta được:
- $\left[\begin{array}{l} z_3 = z_1 \\ z_3 = z_2 \\ z_1 = z_2 \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} 3(a+ib) - (a-ib) = -2 + i \\ 3(a+ib) - 2(a-ib) = -2 - i \\ 2(a+ib) - (a-ib) = -4i \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} 2a + 4ib = -2 - i \\ a + 5ib = -2 - i \\ a + 3ib = -4i \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1; b = -\frac{1}{4} \rightarrow w = -1 - \frac{i}{4} \\ a = -2; b = -\frac{1}{5} \rightarrow w = -2 - \frac{i}{5} \\ a = 0; b = -\frac{4}{3} \rightarrow w = -\frac{4}{3}i \end{array}\right.$
- Ta suy ra nghiệm còn lại như sau:
- $\left[\begin{array}{l} z_3 = z_1 \\ z_3 = z_2 \\ z_1 = z_2 \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{c} w = -1 - \frac{i}{4} \rightarrow z_4 = \overline{z_2} = \overline{2w + 3i} = 2\overline{w} - 3i = 2(-1 + \frac{i}{4}) - 3i = -2 - \frac{5}{2}i \\ w = -2 - \frac{i}{5} \rightarrow z_4 = \overline{z_1} = \overline{w + i} = \overline{w} - i = -1 + \frac{i}{4} - i = -1 - \frac{3}{4}i \\ w = -\frac{4}{3}i \rightarrow z_4 = \overline{z_3} = \overline{3w - 2i + 2} = 3\overline{w} + 2i + 2 = 3(-1 + \frac{i}{4}) - 3i = -3 - \frac{9}{4}i \end{array}\right.$
- Quan sát kĩ các đáp án ta chọn đáp án **A.**

Câu 232. (3) Cho số phức z thỏa mãn: $|z - 3 + i| = 4$ và đồng thời $P = |z - 2i + 1|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Mô đun của số phức $w = (2z + i)$ tương ứng bằng

A. $\frac{\sqrt{365}}{5}$. **B.** $\frac{3\sqrt{10}}{2}$. **C.** 20. **D.** $\frac{5\sqrt{17}}{2}$.

Giải:

- Số phức thỏa mãn $|z - 3 + i| = 4$ là đường tròn (C) có tâm: $z_0 = 3 - i$ và bán kính R = 4.
- Biểu thức: $P = |z - 2i + 1| = |z - z_1|$; trong đó $z_1 = -1 + 2i$.
- Bài toán yêu cầu giá trị của biểu thức P nhỏ nhất ⇔ z_2 nằm trên (C) sao cho z_2 gần z_1 nhất:
- $z_2 - z_1 = (1 - \frac{R}{|z_0 - z_1|})(z_0 - z_1) \rightarrow z_2 = z_1 + (1 - \frac{R}{|z_0 - z_1|})(z_0 - z_1)$
- $|z_0 - z_1| = |3 - i - (-1 + 2i)| = |4 - 3i| = 5$

- Suy ra: $z_2 = z_1 + (1 - \frac{R}{|z_0 - z_1|})(z_0 - z_1) = -1 + 2i + (1 - \frac{4}{5})(3 - i - (-1 + 2i)) = -\frac{1}{5} + \frac{7}{5}i$
- Khi đó: |w| = |2z + i| = $|2(-\frac{1}{5} + \frac{7}{5}i) + i| = \frac{\sqrt{365}}{5}$. Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 233. (3) Cho số phức z thỏa mãn: |z – 1 + 2i| = 4 và đồng thời P = |z – i + 3| đạt giá trị lớn nhất. Phần thực của số phức w = (iz + 3) tương ứng bằng

A. $\frac{\sqrt{185}}{5}$. **B.** 34. **C.** $\frac{\sqrt{1730}}{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{1810}}{5}$.

Giải:

- Tương tự bài toán trên. Tâm đường tròn: $z_0 = 1 - 2i$. Số phức $z_A = -3 + i$
- Biểu thức: $P = |z - z_A|$ lớn nhất ⇔ $z = z_2$ xa z_A nhất. Khi đó:
- $z_2 = z_A + (1 + \frac{R}{|z_0 - z_A|})(z_0 - z_A)$
- Trong đó: R = 4; $|z_0 - z_A| = |1 - 2i + 3 - i| = |4 - 3i| = 5$
- Suy ra: $z_2 = -3 + i + (1 + \frac{4}{5})(1 - 2i + 3 - i) = -\frac{21}{5} - \frac{22}{5}i \rightarrow |w| = |iz + 3| = |i(-\frac{21}{5} - \frac{22}{5}i) + 3| = \frac{\sqrt{1810}}{5}$
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 234. (3) Cho số phức z thỏa mãn: |z – 1| = |z – 3i| (1) và đồng thời P = |z – 2i| nhỏ nhất. Mô đun của số phức z tương ứng bằng

A. 6. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** 4.

Giải:

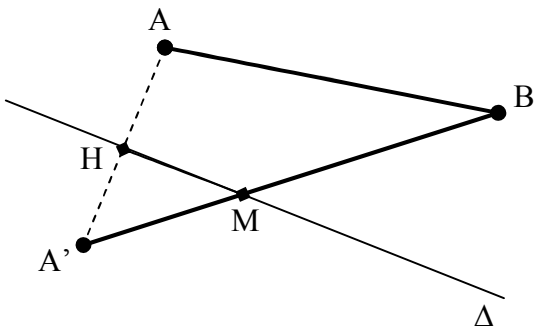
- Đây là bài toán tìm số phức z_M nằm trên đường thẳng Δ biểu diễn bởi phương trình đã cho sao cho khoảng cách từ nó đến số phức: $z_A = 2i$ nhỏ nhất ⇔ z_M là hình chiếu vuông góc của z_A lên đường thẳng Δ.
- Đường thẳng Δ: Từ phương trình (1) ⇔ $(x - 1)^2 + y^2 = x^2 + (y - 3)^2$ ⇔ x – 3y + 4 = 0 (Δ)
- Ta đi tìm hình chiếu vuông góc M của điểm A = z_A = 2i = (0;2) lên đường thẳng Δ:
- Gọi M = (3m – 4;m) nằm trên Δ. Suy ra: $\overrightarrow{AM} = (3m - 4; m - 2)$ và VTCP của Δ: $\overrightarrow{u_\Delta} = (3;1)$
- Suy ra tích vô hướng: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u_\Delta} = 0 \leftrightarrow 3(3m - 4) + 1(m - 2) = 0 \rightarrow m = \frac{7}{5} \rightarrow M = (-\frac{1}{5}; \frac{7}{5})$
- Suy ra: $|z_M| = |-\frac{1}{5} + \frac{7}{5}i| = \sqrt{2}$.
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 235. (3) Cho số phức z thỏa mãn: |z – 1| = |z – i| và đồng thời P = |z – 2i| + |z + 3i + 4| nhỏ nhất. Mô đun của số phức z tương ứng bằng

A. 2. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 5. **D.** $3\sqrt{2}$.

Giải:

- Phương trình đường thẳng được xác định: $(x-1)^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2 \Leftrightarrow x - y = 0$ (Δ)
- Gọi A = z_A = 2i = (0;2); B = z_B = - 4 – 3i = (-4;-3). Suy ra: P = MA + M**B.** Trong đó M nằm trên Δ
- Đến đây đưa về bài toán cơ bản cấp 2.
- Xét xem hai điểm A và B có cùng phía so với Δ không: $(x_A - y_A)(x_B - y_B) = (0-2)(-4+3) > 0$. Nhận thấy A và B cùng phía. Như vậy, ta phải lấy A' đối xứng với A qua đường thẳng Δ.



- Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng Δ: H(h;h). Suy ra: $\overrightarrow{AH} = (h; h-2)$; VTCP của đường thẳng Δ là: $\overrightarrow{u_\Delta} = (1;1) \to \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{u_\Delta} = 1(h) + 1(h-2) = 0 \to h = 1 \to H(1;1)$
- Điểm A' đối xứng với A có tọa độ: A' = (2;0)
- Phương trình đường thẳng A'B là: $\frac{x+4}{2+4} = \frac{y+3}{0+3} \to x - 2y - 2 = 0$
- Điểm M là giao của đường thẳng (A'B) và đường thẳng Δ: $\begin{cases} x-2y-2=0 \\ x-y=0 \end{cases} \to \begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases}$
- Suy ra số phức: z_M = – 2 – 2i $\to |z_M| = |-2-2i| = 2\sqrt{2}$
- Vậy ta chọn đáp án **B.**
- Có thể vẽ hình phác họa sẽ làm nhanh hơn rất nhiều như đã trình bày tự luận ở trên.

Câu 236. (3) Cho số phức z thỏa mãn: |z – 3i| = |z – 3|. Giá trị nhỏ nhất của P = |iz – 2| + |z – 2i + 1| tương ứng bằng

A. 0. **B.** $\sqrt{17}$. **C.** 2. **D.** 3.

Giải:

- Biến đổi biểu thức : $P = |i(z+2i)| + |z+1-2i| = |z+2i| + |z+1-2i| = |z-z_A| + |z-z_B|$
- Gọi A = z_A = -2i ; B = z_B = –1 + 2i .

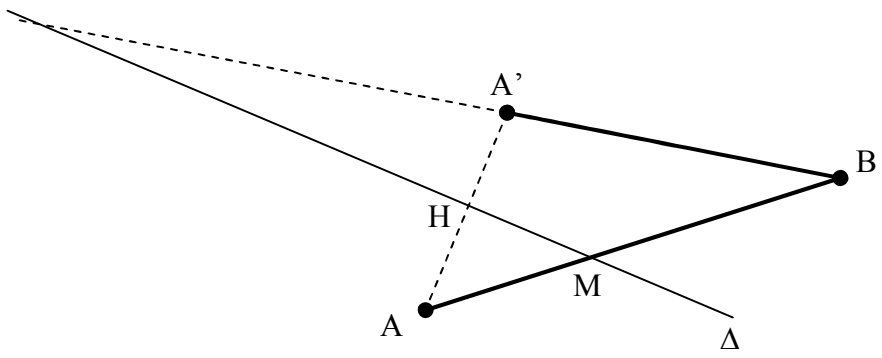
- Phương trình đường thẳng $\Leftrightarrow |z - 3i| - |z - 3| = 0$.
- Xét tính cùng phía và khác phía của AB so với đường thẳng Δ như sau:
- $\left(|z_A - 3i| - |z_A - 3|\right).\left(|z_B - 3i| - |z_B - 3|\right) < 0 \rightarrow$ A và B nằm khác phía.
- Đến đây sẽ có hai cách làm đều nhanh như nhau.
- **Cách 1:** Ta có thể áp dụng bất đẳng thức tam giác:
- $P = |z + 2i| + |z + 1 - 2i| = |z + 2i| + |-z - 1 + 2i| \geq |z + 2i - z - 1 + 2i| = \sqrt{17}$
- Vậy suy ra giá trị nhỏ nhất $P_{min} = \sqrt{17}$. Vậy ta chọn đáp án **B.**
- **Cách 2:** Ta có thể làm độc đoán tư duy là cho luôn P_{min} = đoạn thẳng AB = $|z_A - z_B| = \sqrt{17}$.

Câu 237. (3) Cho số phức z thỏa mãn: |z + 2i| = |z + 1|. Giá trị lớn nhất của biểu thức: P = |z – 2i| – |iz – 1| tương ứng bằng

A. $\frac{\sqrt{170}}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{310}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{230}}{6}$. **D.** $\frac{\sqrt{110}}{3}$.

Giải:

- Biến đổi: $P = |z - 2i| - |i(z + i)| = |z - 2i| - |z + i|$
- Gọi A = z_A = 2i = (0;2) ; B = z_B = -i = (0;-1). Khi đó: P = MA – MB . Ycbt đưa về dạng bài toán nâng cao cơ bản ở Oxy. Tìm điểm M thuộc đường thẳng Δ cho trước sao cho hiệu khoảng cách P = MA – MB lớn nhất.
- Đường thẳng Δ: $x^2 + (y + 2)^2 = (x + 1)^2 + y^2 \Leftrightarrow 2x - 4y - 3 = 0$ (Δ)
- Xét tính cùng phía và khác phía của A và B so với đường thẳng Δ.
- (2.0 – 4.2 – 3)(2.0 – 4.(-1) – 3) < 0. Suy ra A và B khác phía nhau.
- Đây là dạng bài tìm hiệu khoảng cách lớn nhất từ một điểm nằm trên một đường thẳng đến hai điểm cho trước. Chúng ta phải làm ngược lại với bài toán tổng khoảng cách.
- Ta phải tìm điểm A’ đối xứng với A qua đường thẳng Δ, để A’ và B cùng phía với nhau.
- Gọi H = $(h; \frac{2h-3}{4})$ là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng Δ.



- $\overrightarrow{AH} = (h; \frac{2h-11}{4})$; $\overrightarrow{u_\Delta} = (4;2)$. Tích vô hướng: $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{u_\Delta} = 0 \to 4.h + 2(\frac{2h-11}{4}) = 0 \to h = \frac{11}{10}$
- Tọa độ điểm H = $(\frac{11}{10}; -\frac{1}{5})$. Suy ra điểm A' đối xứng với A: A' = $(\frac{11}{5}; \frac{-12}{5})$
- Giá trị lớn nhất: P_{max} = A'B = $|z_{A'} - z_B|$ = $\frac{\sqrt{170}}{5}$. Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 238. (3) Cho số phức z thỏa mãn: |z + i| = |z + 3| . Giá trị lớn nhất của P = |z – 4i + 1| – |z + 3| tương ứng bằng

A. 5. **B.** 6. **C.** $2\sqrt{6}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

Giải:

- Phương trình đường thẳng Δ: |z + i| - |z + 3| = 0.
- Điểm A = - 1 + 4i = z_A ; điểm B = - 3 = z_B. Biểu thức: P = MA – MB.
- Để xét tính cùng phía của hai điểm A và B so với đường thẳng Δ, ta thay z_A và z_B vào biểu thức: $(|z_A + i| - |z_A + 3|)(|z_B + i| - |z_B + 3|) > 0$. Suy ra A và B cùng phía.
- Ta có thể áp dụng ngay được bất đẳng thức tam giác như sau:
- $P = |z - 4i + 1| - |z + 3| \le |z - 4i + 1 - z - 3| = |-4i - 2| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
- Suy ra giá trị lớn nhất của P là: $P_{max} = 2\sqrt{5}$.
- Hoặc ta có thể tính luôn P_{min} = AB = $|z_A - z_B| = 2\sqrt{5}$.
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 239. (3) Cho số phức z thỏa mãn: |z – 2 + 3i| = 5 . Giá trị lớn nhất của: P = $|z - i|^2 - |z + 3|^2$ tương ứng bằng

A. 18. **B.** $2\sqrt{11} - 12$. **C.** $5\sqrt{10} - 14$. **D.** $4\sqrt{10} - 10$.

Giải:

- Đây không phải dạng biểu thức tỉ cự vì: $(\alpha + \beta + \gamma + ...) = 0$
- Gọi z = a + ib, thay vào biểu thức:
- $P = |z - i|^2 - |z + 3|^2 = (a^2 + (b-1)^2) - ((a+3)^2 + b^2) = -6a - 2b - 8$ (1)
- Phương trình đường tròn đã cho: $(a-2)^2 + (b+3)^2 = 25$ (2)
- Dùng BĐT BUNHIA đánh giá khéo léo như sau:
- $\{3(a-2) + (b+3)\}^2 \le (9+1)\{(a-2)^2 + (b+3)^2\} = 10.(25) \to -5\sqrt{10} \le 3(a-2) + (b+3) \le 5\sqrt{10}$
- Suy ra: $-5\sqrt{10} - 14 \le P = -6a - 2b - 8 = -2\{3(a-2) + (b+3)\} - 14 \le 5\sqrt{10} - 14$

- Giá trị lớn nhất là: $P_{max} = 5\sqrt{10} - 14 \Leftrightarrow \frac{a-2}{3} = \frac{b+3}{1} \rightarrow a - 3b = 11$ (3)
- Kết hợp hai điều kiện: $\begin{cases} -6a - 2b - 8 = 5\sqrt{10} - 14 \\ a - 3b = 11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \\ b = \end{cases}$
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 240. (3) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện đường tròn: |z – 4 + 4i| = 3 và đồng thời biểu thức: P = $|z - i|^2 - 2|z + 3|^2 + 3|z + i + 2|^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Mô đun của số phức z tương ứng bằng

A. 5. **B.** $\frac{\sqrt{205}}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{185}}{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{177}}{6}$.

Giải:

- Đây là dạng bài toán cho biểu thức chứa tâm tỉ cự đã được trình bày khá kĩ ở phần lí thuyết nâng cao.
- Gọi z_N là tâm tỉ cự, suy ra: $z_N = \frac{1(i) - 2(-3) + 3(-2 - i)}{1 - 2 + 3} = -i$
- Ycbt ⇔ tìm z_M nằm trên đường tròn (C) biểu diễn bởi: |z – 4 + 4i| = $|z - z_0| = 3$ sao cho nó gần z_N nhất ?
- Công thức tính nhanh:
- $z_M = z_N + (1 - \frac{R}{|z_0 - z_N|})(z_0 - z_N) = -i + (1 - \frac{3}{|4 - 4i + i|})(4 - 4i + i) = \frac{8}{5} - \frac{11}{5}i$
- Suy ra môn đun: |z| = $|\frac{8}{5} - \frac{11}{5}i| = \frac{\sqrt{185}}{5}$
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 241. (3) Cho số phức z thỏa mãn điều P = $|z - 2|^2 + 2|z + 3i|^2 + 2|z + i - 1|^2 = 2018$. Quỹ tích điểm M biểu diễn số phức z là

A. đường tròn có tâm I(4/5;-8/5).

B. đường elip có tiêu cự bằng 5.

C. đường tròn (C) có tâm I(3;-4)

D. đường thẳng Δ có phương trình: x + 2y + 2 = 0.

Giải:

- Đây là dạng bài toán cho quỹ tích là đường tròn có tâm đúng là tâm tỉ cự của hệ thức véc tơ:
- $z_N = \frac{1.(2) + 2.(-3i) + 2.(1 - i)}{1 + 2 + 2} = \frac{4}{5} - \frac{8}{5}i$. Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 242. (3) Cho số phức z thỏa mãn điều $P = |z - i|^2 + 3|z - 2i|^2 + |z + 2i - 5|^2 = 2018$. Quỹ tích điểm M biểu diễn số phức z là

A. đường tròn (C) có bán kính $R = \sqrt{\frac{1983}{4}}$.

B. đường elip có tiêu cự bằng 2018.

C. đường tròn (C) có bán kính $R = \sqrt{2018}$

D. đường tròn (C) có bán kính $R = \sqrt{\frac{1979}{5}}$.

Giải:

- Đây là bài toán quỹ tích tâm tỉ cự. Ta có tâm đường tròn là số phức z_N trùng với tâm tỉ cự:
- $z_N = \frac{1.(i) + 3.(2i) + 1.(5 - 2i)}{1 + 3 + 1} = 1 + i$
- Bán kính đường tròn: $R = \sqrt{\frac{2018 - (|z_N - i|^2 + 3|z_N - 2i|^2 + |z_N + 3i - 5|^2)}{1 + 3 + 1}} = \sqrt{\frac{1979}{5}}$
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 243. (3) Cho số phức z thỏa mãn điều $P = |z - 3 + 2i|^2 - 3|z - 1|^2 + 3|z + 2i - 1|^2 = 2019$. Quỹ tích điểm M biểu diễn số phức z là

A. đường tròn (C) có phương trình: $x^2 + (y + 11)^2 = 2019$.

B. đường tròn (C) có phương trình: $(x - 3)^2 + (y + 8)^2 = 2067$.

C. đường tròn (C) có tâm I(0;3) và có bán kính $R = \sqrt{2019}$

D. đường tròn (C) có tâm I(-5;1) và có bán kính R = 209.

Giải:

- Tâm tỉ cự trùng với tâm của đường tròn: $z_N = \frac{1.(3 - 2i) - 3.(1) + 3.(1 - 2i)}{1 - 3 + 3} = 3 - 8i$
- Bán kính đường tròn: $R = \sqrt{\frac{2019 - (|z_N - 3 + 2i|^2 - 3|z_N - 1|^2 + 3|z_N + 2i - 1|^2)}{1 - 3 + 3}} = \sqrt{2067}$
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 244. (3) Cho số phức z biểu diễn đường cong: $|z - 3| + |z + 3| = 10$. Gọi bốn điểm A, B, C, D là bốn điểm biểu diễn 4 số phức z thỏa mãn điều kiện đã cho. Biết rằng tứ giác ABCD có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau. Diện tích lớn nhất của tứ giác ABCD là

A. 30. **B.** 50. **C.** 90. **D.** 40.

Giải:

- Đây là bài toán elip cơ bản nhất. Bán trục dài: a = 5. Bán tiêu cự: c = 3. Bán trục nhỏ:
- $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.
- Diện tích lớn nhất của một tứ giác nội tiếp elip là: $S_{max} = 2ab = 2.5.4 = 40$.
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 245. (3) Cho số phức z biểu diễn đường cong: |z – 3| + |z + 3| = 10. Gọi bốn điểm A, B, C, D là bốn điểm biểu diễn 4 số phức z thỏa mãn điều kiện đã cho. Biết rằng tứ giác ABCD có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau. Diện tích nhỏ nhất của tứ giác ABCD là

A. 1600/41. **B.** 40. **C.** 1540/37. **D.** 2017/41.

Giải:

- Tương tự câu 244. Elip có bán trục dài: a = 5; bán tiêu cự: c = 3 ; bán trục nhỏ: b = 4.
- Diện tích nhỏ nhất của tứ giác (có hai đường chéo vuông góc) nội tiếp elip là:
- $S_{\min} = \frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2} = \frac{4.(5)^2.(4)^2}{(5)^2 + (4)^2} = \frac{1600}{41}$.
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 246. (3) Cho số phức z thỏa mãn: w = (z + 2i – 3)($2\overline{z}$ + i – 4) thuần thực. Quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là

A. đường tròn (C) có tâm O bán kính R = 5.

B. đường thẳng d có phương trình: 4x + y – 13 = 0.

C. đường thẳng d có phương trình: 5x + 2y – 11 = 0.

D. đường thẳng d có phương trình: x + 2y – 6 = 0.

Giải:

- $w = 2z.\overline{z} + (i-4)z + (2i-3).2\overline{z} + (2i-3)(i-4) = 2|z|^2 + (i-4)(a+ib) + 2(2i-3)(a-ib) + 10 - 11i$
- Thuần thực ⇔ phần ảo bằng 0
- Xét nhanh phần ảo: $i(a - 4b + 4a + 6b - 11) = i(5a + 2b - 11) = 0 \rightarrow 5a + 2b - 11 = 0$
- Vậy quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng: 5x + 2y – 11 = 0.
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 247. (3) Cho số phức z thỏa mãn: $(2z+i-2)(\overline{z}-1)$ thuần thực. Quỹ tích điểm biểu diễn số phức z tương ứng là

A. đường thẳng d có phương trình: x – y – 1 = 0.

B. đường thẳng d có phương trình: x – 1 = 0.

C. đường tròn (C) có phương trình: $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 16$.

D. đường thẳng d có phương trình: 4x – y – 11 = 0.

Giải:

- Ta có: $(2z+i-2)(\overline{z}-1) = 2z.\overline{z} - 2z + (i-2)\overline{z} - i + 2 = 2|z|^2 - 2(x+iy) + (i-2)(x-iy) - i + 2$
- Số phức thuần thực nên ta chỉ xét tới phần ảo bằng không:
- $i(-2y+x+2y-1) = i(x-1) = 0 \to x - 1 = 0$
- Suy ra quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng: x – 1 = 0.
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 248. (3) Cho số phức z thỏa mãn: |2iz + 4 – 3i| = 6. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của |z|. Khi đó |M + 2mi| có giá trị tương ứng bằng

A. $\frac{5\sqrt{5}}{2}$. **B.** 10. **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{6}$.

Giải:

- Đây là bài toán tìm điểm trên đường tròn sao cho mô đun của nó MAX và MIN.
- Phương trình đường tròn: $|2i(z+\frac{4-3i}{2i})| = 6 \leftrightarrow |2i|.|z-\frac{3}{2}-2i| = 6 \leftrightarrow |z-\frac{3}{2}-2i| = 3$
- Đường tròn có tâm: $z_0 = \frac{3}{2}+2i$ và bán kính: R = 3.
- Giá trị lớn nhất của |z| là: $M = |z_0| + R = |\frac{3}{2}+2i| + 3 = \frac{11}{2}$
- Giá trị nhỏ nhất của |z| là: $m = |R - |z_0|| = |3 - |\frac{3}{2}+2i|| = \frac{1}{2}$
- Suy ra: $|M+2mi| = |\frac{11}{2} + 2.\frac{1}{2}i| = \frac{5\sqrt{5}}{2}$.
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 249. (3) Cho số phức z thỏa mãn: |z – 3i + 4| = 10. Tập hợp điểm biểu diễn số phức w = (2 + 3i)z – 12 tương ứng là

A. đường thẳng d có phương trình: 2x + 3y – 12 = 0.

B. đường tròn (C) có tâm I = (-4;3).

C. đường tròn (C) có tâm I = (-11;06).

D. đường tròn (C) có tâm I(-29;-6).

Giải:

- Ta có: (2 + 3i)z = w + 12.
- Biến đổi phương trình đường tròn như sau:
- $|z-3i+4|=10 \leftrightarrow |2+3i|.|z-3i+4|=|2+3i|.10 \leftrightarrow |(2+3i)z+(2+3i)(4-3i)|=10\sqrt{13}$
- $\Leftrightarrow |w+12+17+6i|=10\sqrt{13} \leftrightarrow |w+29+6i|=10\sqrt{13}$.
- Suy ra tâm của đường tròn là I = (-29;-6).
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 250. (3) Cho số phức z thỏa mãn: $4|z|+4iz=9-3z$. Tích số của phần thực và phần ảo của số phức z tương ứng là

A. 20. **B.** -20. **C.** 12. **D.** -12.

Giải:

- Phương trình $\Leftrightarrow 4|z|-9=-(3+4i)z$. Đến đây, ta mô đun hai vế sẽ được:
- $|4|z|-9|=|-(3+4i)z|=5|z|$
- Đặt: $t=|z|\geq 0$; $t\in R$. Thay vào phương trình trên ta được:
- $|4t-9|=5t \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4t-9=5t \rightarrow t=-9 \ (loai) \\ 4t-9=-5t \rightarrow t=1 \ (TM) \end{array}\right.$
- Thay t = 1 vào phương trình ban đầu ta được:
- $4.1+4iz=9-3z \leftrightarrow z(3+4i)=5 \rightarrow z=\dfrac{5}{3+4i}=3-4i$
- Suy ra: tích số phần thực và phần ảo của số phức z là: (3)(-4) = - 20.
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 251. (3) Tập hợp điểm biểu diễn số phức: $w=\dfrac{z-1}{|z-1|}$ là

A. đường tròn tâm O và có bán kính bằng R = 1.

B. đường thẳng d có phương trình: x + y = 0.

C. đường tròn tâm I(1;0) có bán kính bằng R = 1.

D. đường tròn I(0;1) và có bán kính R = 1.

Giải:

- Từ phương trình ban đầu ta mô đun hai vế sẽ được:
- $|w| = \left|\frac{z-1}{|z-1|}\right| = \frac{|z-1|}{|z-1|} = 1$. Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 252. (3) Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $|z_1| = 2$, $|z_2| = 3$, $|2z_1 - 3z_2| = 5$. Giá trị $|3z_1 + 4z_2|$ tương ứng bằng

A. 15. **B.** 25. **C.** 18. **D.** 24.

Giải:

- **Cách 1:** Đại số cổ điển thuần túy và khá dài
- Chúng ta có thể gọi $z_1 = a_1 + ib_1$ và $z_2 = a_2 + ib_2$ rồi thay vào 3 giả thiết ban đầu. Từ đó tìm ra được kết quả bài toán:
- $|z_1| = 2 \to a_1^2 + b_1^2 = 4$; $|z_2| = 3 \to a_2^2 + b_2^2 = 9$
- $|2z_1 - 3z_2| = 5 \leftrightarrow |(2a_1 - 3a_2) - i(2b_1 - 3b_2)| = 5 \to (2a_1 - 3a_2)^2 + (2b_1 - 3b_2)^2 = 25 \to$
- $4(a_1^2 + b_1^2) + 9(a_2^2 + b_2^2) - 12(a_1a_2 + b_1b_2) = 25 \to 4(4) + 9(9) - 12(a_1a_2 + b_1b_2) = 25 \to a_1a_2 + b_1b_2 = 6$
- Suy ra: $P = |3z_1 + 4z_2| = |(3a_1 + 4a_2) + i(3b_1 + 4b_2)| = \sqrt{(3a_1 + 4a_2)^2 + (3b_1 + 4b_2)^2}$
- $P = \sqrt{9(a_1^2 + a_2^2) + 16(b_1^2 + b_2^2) + 24(a_1a_2 + b_1b_2)} = \sqrt{9.(4) + 16.(9) + 24.(6)} = \sqrt{324} = 18$
- Vậy ta chọn đáp án **C.**
- **Cách 2:** Sử dụng phương pháp mới hiện đại đó là phương pháp bình phương vô hướng.
- Gọi góc tạo bởi hai số phức: $\alpha = \widehat{z_1, z_2}$
- Từ giả thiết suy ra:
- $25 = |2z_1 - 3z_2|^2 = 4|z_1|^2 + 9|z_2|^2 - 12.|z_1|.|z_2|.\cos\alpha = 4.4 + 9.9 - 12.2.3.\cos\alpha \to \cos\alpha = 1$
- Có: $P^2 = |3z_1 + 4z_2|^2 = 9|z_1|^2 + 16|z_2|^2 + 24.|z_1|.|z_2|.\cos\alpha = 9.4 + 16.9 + 24.2.3.\cos\alpha = 324$
- Suy ra: P = 18. Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 253. (3) Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $|z_1 + z_2| = 2$, $|z_1 - z_2| = 3$ và $\frac{|z_1|}{|z_2|} = 4$. Trong các nhận xét dưới đây, nhận xét đúng là?

A. $|z_1| = 3$. **B.** $|z_1|^2 = \frac{107}{12}$. **C.** $|z_2| = \frac{12}{5}$. **D.** $|z_2|^2 = \frac{13}{34}$.

Giải:

- **Cách 1: Phương pháp bình phương vô hướng**
- Đặt: $|z_1| = 4|z_2| = 4c > 0$ (vì nếu mô đun của hai số phức bằng 0 không thỏa mãn)
- Từ giả thiết suy ra:
- $\begin{cases} 4 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1|.|z_2|.\cos\alpha \\ 9 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1|.|z_2|.\cos\alpha \end{cases} \rightarrow 13 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) = 2(16c^2 + c^2) \rightarrow c^2 = \frac{13}{34} = |z_2|^2$
- Vậy ta chọn đáp án **D.**
- **Cách 2: Đại số cổ điển với phức**
- Với X, Y, Z là các số thực. $X = |z_1|^2$; $Y = |z_2|^2$; $Z = (a_1a_2 + b_1b_2)$.
- Từ giả thiết: $|z_1 + z_2| = 2 \rightarrow |(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)| = 2 \rightarrow (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 = 4$
- $\rightarrow (a_1^2 + b_1^2) + (a_2^2 + b_2^2) + 2(a_1a_2 + b_1b_2) = 4 \rightarrow X + Y + 2Z = 4$ (1)
- Từ giả thiết: $|z_1 - z_2| = 3 \rightarrow |(a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)| = 3 \rightarrow (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = 9$
- $\rightarrow (a_1^2 + b_1^2) + (a_2^2 + b_2^2) - 2(a_1a_2 + b_1b_2) = 9 \rightarrow X + Y - 2Z = 9$ (2)
- Từ giả thiết: $\frac{|z_1|}{|z_2|} = 4 \rightarrow \frac{\sqrt{X}}{\sqrt{Y}} = 4 \rightarrow X - 16Y = 0$ (3)
- Sử dụng CASIO giải hệ bậc nhất: 3 pt 3 ẩn (1),(2),(3) ta được: $X = \frac{104}{17}; Y = \frac{13}{34}; Z = -\frac{5}{4}$
- Suy ra: $|z_2|^2 = X = 13/34$.
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 254. (3) Cho ba số phức z_1, z_2, z_3 là nghiệm của phương trình bậc 3: $z^3 + az^2 + bz + 2 - 3i = 0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = |z_1| + |z_2| + |z_3|$ bằng

A. $3\sqrt[6]{13}$. **B.** 15. **C.** $\sqrt{13}$. **D.** $3\sqrt[3]{13}$.

Giải:

- Theo hệ thức VIET, ta có: $z_1z_2z_3 = -D/A = 3i - 2$
- Áp dụng BĐT CÔ SI, ta có:
- $P = |z_1| + |z_2| + |z_3| \geq 3\sqrt[3]{|z_1|.|z_2|.|z_3|} = 3\sqrt[3]{|z_1z_2z_3|} = 3\sqrt[3]{|3i-2|} = 3\sqrt[6]{13}$
- Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là: $P_{min} = 3\sqrt[6]{13}$. Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 255. (3) Cho số phức $z = a + ib$ (a, b là số thực, $a > 0$) có $|z| = 2$. Khí hiệu a_0 là phần thực của số phức $w = z^3 - 3z + 2\overline{z}$. Giá trị nhỏ nhất của: $\frac{2a_0 + 3}{a}$ bằng

A. 16. **B.** $-12 + 3\sqrt[3]{24}$. **C.** $-26 + 3\sqrt[3]{18}$. **D.** $-14 + 3\sqrt[3]{9}$.

Giải:

- **Cách 1: Đại số thuần túy.**
- Ta có: $|z|=2 \leftrightarrow a^2+b^2=4$
- $w=z^3-3z+2\overline{z}=(a+ib)^3-3(a+ib)+2(a-ib)=(a^3-3ab^2-a)+i(3a^2b-b^3-5b)$
- Lại có: $w=a_0+ib_0 \rightarrow a_0=a^3-3ab^2-a=a^3-3a(4-a^2)-a=4a^3-13a$
- Biểu thức cần khảo sát: $P=\frac{2a_0+3}{a}=\frac{8a^3-26a+3}{a}=8a^2+\frac{3}{a}-26=8a^2+\frac{3}{2a}+\frac{3}{2a}-26$
- Áp dụng BĐT CÔ SI, ta có được:
- $P=8a^2+\frac{3}{2a}+\frac{3}{2a}-26\geq 3.\sqrt[3]{8a^2.\frac{3}{2a}.\frac{3}{2a}}-26=3\sqrt[3]{18}-26$
- Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $8a^2=\frac{3}{2a}\rightarrow a=\sqrt[3]{\frac{3}{16}}$
- Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là: $3\sqrt[3]{18}-26$
- Vậy ta chọn đáp án **C.**
- **Cách 2: Sử dụng công thức lượng giác**
- Ta có: $z=|z|(\cos\varphi+i.\sin\varphi)=2(\cos\varphi+i.\sin\varphi)\rightarrow \overline{z}=2(\cos\varphi-i.\sin\varphi)=a+ib\rightarrow a=2\cos\varphi$
- Để ý rằng: $a>0\rightarrow\cos\varphi>0$
- $\rightarrow z^3=8(\cos\varphi-i.\sin\varphi)^3=8(\cos 3\varphi-i.\sin 3\varphi)$
- $\rightarrow w=8(\cos 3\varphi+i.\sin 3\varphi)-3.2(\cos\varphi+i.\sin\varphi)+2.2(\cos\varphi-i.\sin\varphi)$
- $w=(8\cos 3\varphi-2\cos\varphi)+i(8\sin 3\varphi-10\sin\varphi)=a_0+ib_0\rightarrow a_0=8\cos 3\varphi-2\cos\varphi$
- $\frac{2a_0+3}{a}=\frac{2(8\cos 3\varphi-2\cos\varphi)+3}{2\cos\varphi}=\frac{16(4\cos^3\varphi-3\cos\varphi)-4\cos\varphi+3}{2\cos\varphi}=32\cos^2\varphi-26+\frac{3}{2\cos\varphi}$
- Áp dụng BĐT CÔ SI:
- $\frac{2a_0+3}{a}=-26+32\cos^2\varphi+\frac{3}{4\cos\varphi}+\frac{3}{4\cos\varphi}\geq -26+3.\sqrt[3]{32\cos^2\varphi.\frac{3}{4\cos\varphi}.\frac{3}{4\cos\varphi}}=-26+3.\sqrt[3]{18}$
- Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $32\cos^2\varphi=\frac{3}{4\cos\varphi}\rightarrow\cos\varphi=\sqrt[3]{\frac{3}{128}}$ (tồn tại giá trị φ thỏa mãn)
- Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là: $P_{min}=-26+3.\sqrt[3]{18}$.
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 256. (3) Cho số phức z có mô đun bằng 1. Xét biểu thức: $P=|z^3+3z+\overline{z}|-|z+\overline{z}|$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất lần lượt là M và m. Tích số (mM) bằng

A. -3/4. **B.** 9/4. **C.** 11/4. **D.** 12.

Giải:

- Gọi số phức: z = a + ib, từ giả thiết: |z| = 1 ⇔ $a^2 + b^2 = 1$ và $-1 \le a,b \le 1$.
- Có luôn kết quả: $1 + z^2 = 2az$
- Biến đổi biểu thức: $P=|z|.|z^3+3z+\overline{z}|-|2a|=|z^4+3z^2+z.\overline{z}|-|2a|=|z^4+3z^2+1|-|2a|$
- $P=|(z^2+1)^2+z^2|-|2a|=|(2az)^2+z^2|-|2a|=|z^2|.|4a^2+1|-2|a|=4a^2+1-2|a|$
- Đặt: $0 \le t = 2|a| \le 2 \to P = t^2 - t + 1$ Khảo sát nhanh trên đoạn [0;2] cho ta:
- M = P_{max} = 3 khi t = 2 = 2|a| ⇔ $a = \pm 1 \to b = 0 \to z = a = \pm 1$
- M = P_{min} = 3/4 khi t = 1/2 = 2|a| ⇔ $|a| = \frac{1}{4} \to |b| = \sqrt{1-a^2} = \frac{\sqrt{15}}{4} \to z = \pm\frac{1}{4} \pm \frac{i\sqrt{15}}{4}$
- Suy ra tích số: (mM) = 9/4.
- Vậy ta chọn đáp án **B.**
- **Ghi nhớ:** *Việc tìm rõ ràng ra các giá trị của số phức z khi biểu thức P đạt giá trị cực đại và cực tiểu chỉ làm cho hướng của bài toán rộng hơn. Để khi gặp ta có thể tự làm được, không nên tính rõ ràng giá trị z ra nếu bài toán không yêu cầu.*

Câu 257. (3) Cho phương trình phức bậc hai với hai hệ số thực a và b: $z^2 + az + b = 0$. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm. Khi đó biểu thức $(z_1^3+1)(z_2^3+1)$ tương ứng bằng

A. $a^3+b^3-2ab+3$. **B.** $a^3-3b-2a+1$.

C. $a^3b^3+3(a+b)-1$. **D.** $b^3-a^3+3ab+1$.

Giải:

- Khai triển hệ thức rồi áp dụng VIET ta được:
- $P = z_1^3 z_2^3 + (z_1^3 + z_2^3) + 1 = z_1^3 z_2^3 + (z_1 + z_2)^3 - 3z_1 z_2 (z_1 + z_2) + 1 = (\frac{C}{A})^3 + (\frac{-B}{A})^3 - 3\frac{C}{A}.\frac{-B}{A} + 1$
- $P = (b)^3 + (-a)^3 - 3b.(-a) + 1 = b^3 - a^3 + 3ab + 1$
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 258. (3) Cho phương trình phức: $\left(\frac{2z+3i}{z+1}\right)^4=1$ có 4 nghiệm phức lần lượt là z_1, z_2, z_3, z_4. Tổng phần thực và phần ảo của các nghiệm không thể là giá trị nào sau đây?

A. 3. **B.** -2. **C.** -2/5. **D.** -4/3.

Giải:

- Ta có:
- $\left(\frac{2z+3i}{z+1}\right)^4=1\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\frac{2z+3i}{z+1}\right)^2=1\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{2z+3i}{z+1}=1\to z=1-3i\to a+b=-2\\ \frac{2z+3i}{z+1}=-1\to z=-\frac{1}{3}-i\to a+b=-\frac{4}{3}\end{array}\right.\\ \left(\frac{2z+3i}{z+1}\right)^2=-1=i^2\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{2z+3i}{z+1}=i\to z=\frac{2}{5}-\frac{4}{5}i\to a+b=-\frac{2}{5}\\ \frac{2z+3i}{z+1}=-i\to z=-\frac{4}{5}-\frac{8}{5}i\to a+b=-\frac{12}{5}\end{array}\right.\end{array}\right.$
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 259. (3) Cho $|z|\le 1$. Nhận xét đúng là

A. $|\frac{2z-i}{2+iz}|\ge 1$. **B.** $|\frac{2z-i}{2+iz}|>1$. **C.** $|\frac{2z-i}{2+iz}|\le 1$. **D.** $|\frac{2z-i}{2+iz}|<1$.

Giải:

- **Cách 1: Trắc nghiệm.**
- Ta thay một giá trị: z = 0,5i vào các biểu thức trên sẽ thấy: $|\frac{2z-i}{2+iz}|=0$. Chỉ có đáp án C và D thỏa mãn.
- Tiếp tục thay z = i vào: $|\frac{2z-i}{2+iz}|=|\frac{2i-i}{2+i.i}|=1$. Chỉ có đáp án C thỏa mãn.
- Vậy ta chọn đáp án **C.**
- **Cách 2: Tự luận đại số cổ điển.**
- Xuất phát từ giả thiết: $|z|\le 1\leftrightarrow a^2+b^2\le 1\leftrightarrow 3(a^2+b^2)\le 3\leftrightarrow 4(a^2+b^2)\le a^2+b^2+3$ $\Leftrightarrow$
- $4a^2+4b^2-4b+1\le a^2+b^2-4b+4\leftrightarrow(2a)^2+(2b-1)^2\le a^2+(b-2)^2\to|2a+i(2b-1)|\le|a+i(b-2)|$
- $\Leftrightarrow |2(a+ib)-i|\le|(a+ib)-2i|\leftrightarrow|2z-i|\le|z-2i|\leftrightarrow|2z-i|\le|z-2i|.|i|\leftrightarrow|2z-i|\le|iz+2|$
- Suy ra: $\frac{|2z-i|}{|iz+2|}\le 1$
- Vậy ta chọn đáp án **C.**
- **Cách 3: Phương pháp bình phương vô hướng.**

- Đặt: $P=\frac{2z-i}{2+iz}\leftrightarrow z=\frac{2P+i}{2-iP}\rightarrow|z|=|\frac{2P+i}{2-iP}|=|\frac{2P+i}{-i(P+2i)}|=|\frac{2P+i}{P+2i}|\leq 1$
- $\Leftrightarrow\ |2P+i|\leq|P+2i|\leftrightarrow 4|P|^2+|i|^2+4|P|.|i|\cos\alpha\leq|P|^2+4|i|^2+4/|P|.|i|\cos\alpha$
- $\Leftrightarrow\ 4|P|^2+1\leq|P|^2+4\leftrightarrow|P|\leq 1$. Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 260. (3) Cho số phức z thỏa mãn: |z| = 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức T = |1 – z| + |1 – z + z²|. Nhận xét đúng nhất là:

A. max T = 11; min T = 2. **B.** max T = 5; min T = 1.

C. max T = 3; min T = 0. **D.** max T = 7; min T = - 2.

Giải:

- **Cách 1:** Áp dụng bất đẳng thức tam giác.
- Ta có: $T=|1-z|+|1-z+z^2|=|z-1|+|1-z+z^2|\geq|z-1+1-z+z^2|=|z^2|=|z|^2=1$
- Dấu "=" xảy ra ⇔ hai số phức đồng dạng: $1-z+z^2=k(z-1)\ ;\ k>0$
- $1-z+z^2=k(z-1)\leftrightarrow z^2-(k+1)z+k+1=0\rightarrow z_1z_2=k+1\rightarrow|z_1z_2|=|k+1|=|z_1|.|z_2|=1\rightarrow k=0$
- $1-z+z^2=0\rightarrow z=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$
- Suy ra giá trị nhỏ nhất của T là: T_{min} = 1.
- Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức tam giác:
- $T=|1-z|+|1-z+z^2|\leq|1|+|-z|+|1|+|-z|+|z^2|=5$. Dấu "=" xảy ra ⇔ z = – 1
- Suy ra giá trị lớn nhất của T là: T_{max} = 5.
- Vậy ta chọn đáp án **B.**
- **Cách 2:** Áp dụng công thức rút gọn TTper0504 về các số phức có mô đun bằng 1 như sau:
- Nếu |z| = |a + ib| = 1 thì ta có kết quả: $|1\pm z|=\sqrt{2(1\pm a)}$ và $1 + z^2 = 2az$
- Thay vào biểu thức P ta được:
- $P=\sqrt{2(1-a)}+|2az-z|=\sqrt{2(1-a)}+|2a-1|.|z|=\sqrt{2(1-a)}+|2a-1|$
- Đặt: $0\leq t=\sqrt{2(1-a)}\leq 2\rightarrow 2a=2-t^2$ { vì ta có: $-1\leq a,b\leq 1$ }
- Thay vào biểu thức: $P=t+|2-t^2-1|=t+|t^2-1|$
- Suy ra: $\left[\begin{array}{l}0\leq t\leq 1:\ P=-t^2+t+1\rightarrow Max\,P=\frac{5}{4}\ ;Min\,P=1\\1\leq t\leq 2:\ P=t^2+t-1\rightarrow Max\,P=5\ ;Min\,P=1\end{array}\right.$
- Vậy giá trị lớn nhất của P là: Max P = 5; giá trị nhỏ nhất của P là Min P = 1.

Câu 261. (3) Cho số phức z có mô đun bằng 1. Khi xét giá trị của biểu thức: P = |1 – z| + |1 + z^2|. Nhận xét đúng nhất là:

A. $1 < P < 4$. **B.** $2 \le P \le 4$. **C.** $3 \le P \le 4$. **D.** $\sqrt{2} \le P \le 4$.

Giải:

- Áp dụng công thức hẹp với những số phức có |z| = 1, ta có:
- $P = \sqrt{2(1-a)} + |2az| = \sqrt{2(1-a)} + |2a|$
- Đặt: $0 \le t = \sqrt{2(1-a)} \le 2 \to 2a = 2 - t^2$
- Thay vào P ta được: $P = t + |t^2 - 2|$
- **Trường hợp 1:** $0 \le t \le \sqrt{2}$ ta có:
- $P = t + |t^2 - 2| = 2 - t^2 + t = -t^2 + t + 2$
- Khảo sát hoặc tìm MAX MIN theo quy tắc đã học ta được: $P_{\min} = \sqrt{2}$; $P_{\max} = \frac{9}{4}$
- **Trường hợp 2:** $\sqrt{2} \le t \le 2$ ta có:
- $P = t + |t^2 - 2| = t^2 - 2 + t = t^2 + t - 2$
- Khảo sát hoặc tìm MAX MIN theo quy tắc đã học ta được: $P_{\min} = \sqrt{2}$; $P_{\max} = 4$
- Suy ra giá trị lớn nhất của P là: $P_{\max} = \frac{9}{4}$ và giá trị nhỏ nhất của P là: $P_{\min} = \sqrt{2}$
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

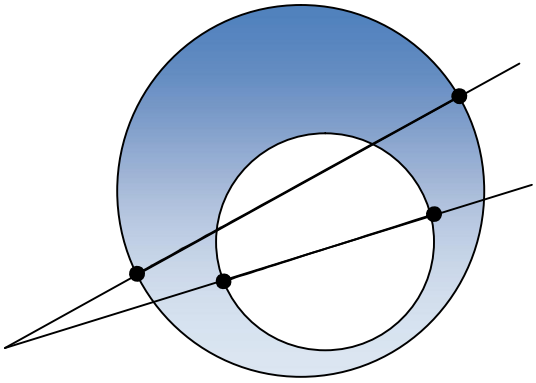
Câu 262. (4) Cho z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: $|z - i - 1| \ge 2$ và $|z - 2i| \le 5$. Kí hiệu z_1 và z_2 là hai số phức có mô đun nhỏ nhất và lớn nhất. Khi đó $|z_1 - z_2|$ bằng

A. $\sqrt{41 + 10\sqrt{2}}$. **B.** $\sqrt{13 + 4\sqrt{2}}$. **C.** $2\sqrt{7}$. **D.** $\sqrt{20 - 6\sqrt{3}}$.

Giải:

- Bài toán này chúng ta sẽ phác họa hình và xác định miền biểu diễn.
- $|z - i - 1| \ge 2$ là miền mặt phẳng phức nằm bên ngoài hình tròn (C_1) tính cả đường tròn. Trong đó (C_1) có tâm: $z_{01} = 1 + i$ và bán kính $R_1 = 2$.
- $|z - 2i| \le 5$ là miền mặt phẳng phức nằm trong hình tròn (C_2) tính cả đường tròn. Trong đó (C_2) có tâm: $z_{02} = 2i$ và bán kính $R_2 = 5$.
- Xác định vị trí tương đối của hai hình tròn này như sau:

- Khoảng cách hai tâm: $|z_{01}-z_{02}|=|1+i-2i|=\sqrt{2}<|R_2-R_1|=|5-2|=3$
- Như vậy, hình tròn (C_2) đựng hoàn toàn hình tròn (C_1). Miền biểu diễn như hình vẽ:



- Điểm có mô đun nhỏ nhất sẽ phải tìm bằng cách: tìm hai điểm trên hai đường tròn gần O nhất để lựa chọn:
- Điểm gần O nhất trên đường tròn (C_1) là: $z=(1-\frac{R_1}{|z_{01}|})z_{01}=(1-\frac{2}{|1+i|})(1+i)=(1-\sqrt{2})(1+i)$
- Điểm gần O nhất trên đường tròn (C_2) là: $z=(1-\frac{R_2}{|z_{02}|})z_{02}=(1-\frac{5}{|2i|})(2i)=-3i$
- So sánh thấy điểm có mô đun nhỏ nhất là: $z_1=(1-\sqrt{2})(1+i)$
- Điểm có mô đun lớn nhất là điểm nằm trên đường tròn lớn (C_2) và xa O nhất.
- Điểm xa O nhất trên đường tròn (C_2) là: $z_2=(1+\frac{R_2}{|z_{02}|})z_{02}=(1+\frac{5}{|2i|})(2i)=7i$
- Suy ra: $|z_1-z_2|=|(1-\sqrt{2})(1+i)-7i|=\sqrt{41+10\sqrt{2}}$
- Vậy ta chọn đáp án **A.**
- **Ghi nhớ:** *Chúng ta có thể vẽ hình chính xác và suy nhanh ra được các giá trị số phức có mô đun max và min. Cách giải này là giải tổng quát.*

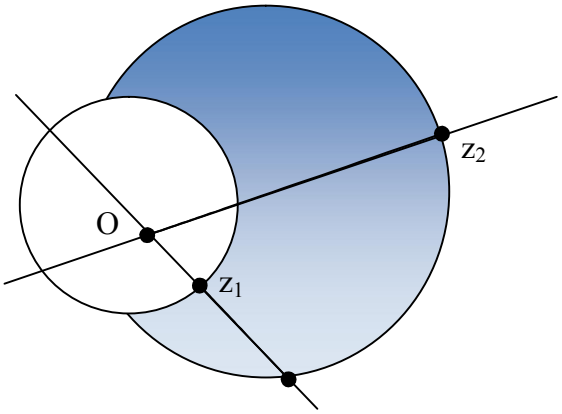
Câu 263. (4) Cho z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: $|z-2i+1|\geq 3$ và $|z-1-i|\leq 5$. Kí hiệu z_1 và z_2 là hai số phức có mô đun nhỏ nhất và lớn nhất. Khi đó $|(1+2i)z_1+(1-i)z_2|$ bằng

A. $3+2\sqrt{5}$. **B.** $-3+3\sqrt{5}+5\sqrt{2}$. **C.** $11-2\sqrt{2}$. **D.** $14+6\sqrt{3}$.

Giải:

- Tương tự câu 262. Phác họa hình như sau:
- Đường tròn (C_1) có tâm: $z_{01}=-1+2i$ và bán kính $R_1=3$.

- Đường tròn (C_2) có tâm: $z_{02} = 1 + i$ và bán kính $R_2 = 5$.
- Khoảng cách giữa hai tâm: $|z_{01} - z_{02}| = |1 + i + 1 - 2i| = \sqrt{5} \rightarrow |R_2 - R_1| < |z_{01} - z_{02}| < |R_2 + R_1|$. Như vậy, hai đường tròn này cắt nhau tại hai điểm. Gốc O có vị trí nằm trong cả hai đường tròn. Hình vẽ được phác họa:



- Số phức có mô đun nhỏ nhất: $z_1 = (1 - \frac{R_1}{|z_{01}|})z_{01} = (1 - \frac{3}{|-1+2i|})(-1+2i) = (1 - \frac{3}{\sqrt{5}})(-1+2i)$
- Số phức có mô đun lớn nhất: $z_2 = (1 + \frac{R_2}{|z_{02}|})z_{02} = (1 + \frac{5}{|1+i|})(1+i) = (1 + \frac{5}{\sqrt{2}})(1+i)$
- Suy ra: $|(1+2i)z_1 + (1-i)z_2| = |(1+2i).(1 - \frac{3}{\sqrt{5}})(-1+2i) + (1-i)(1 + \frac{5}{\sqrt{2}})(1+i)| = -3 + 3\sqrt{5} + 5\sqrt{2}$
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 264. (3) Cho số phức z thỏa mãn: $(4z + 5i) = (4 - 5iz)z^6$. Giá trị của $|z|$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Giải:

- Từ giả thiết suy ra: $z^6 = \frac{4z+5i}{4-5iz} \rightarrow |z|^6 = |\frac{4z+5i}{4-5iz}| = |\frac{4z+5i}{-i(5z+4i)}| = |\frac{4z+5i}{5z+4i}|$
- Đến đây bình phương hai vế và áp dụng phương pháp sáng tạo, bình phương vô hướng:
- $|z|^{12} = |\frac{4z+5i}{5z+4i}|^2 = \frac{16|z|^2 + 25 + 40|z|\cos\alpha}{25|z|^2 + 16 + 40|z|\cos\alpha}$
- **Trường hợp 1:** Nếu $|z| > 1$
- $\Leftrightarrow |z|^{12} = \frac{16|z|^2 + 25 + 40|z|\cos\alpha}{25|z|^2 + 16 + 40|z|\cos\alpha} > 1 \leftrightarrow 16|z|^2 + 25 + 40|z|\cos\alpha > 25|z|^2 + 16 + 40|z|\cos\alpha$
- $\Leftrightarrow |z| < 1 \rightarrow$ suy ra vô lí.

- **Trường hợp 2:** Nếu |z| < 1
- $\Leftrightarrow |z|^{12}=\frac{16|z|^2+25+40|z|\cos\alpha}{25|z|^2+16+40|z|\cos\alpha}<1\leftrightarrow 16|z|^2+25+40|z|\cos\alpha<25|z|^2+16+40|z|\cos\alpha$
- $\Leftrightarrow |z|>1\rightarrow$ suy ra vô lí.
- **Trường hợp 3:** |z| = 1
- Khi đó ta có: $|z|^{12}=\frac{16|z|^2+25+40|z|\cos\alpha}{25|z|^2+16+40|z|\cos\alpha}=\frac{16.1+25+40|z|\cos\alpha}{25.1+16+40|z|\cos\alpha}=1$. Thỏa mãn.
- Suy ra: |z| = 1.
- Vậy ta chọn đáp án là **A.**
- **Ghi nhớ:** *Mọi dạng phương trình phức: (az + ib) = (a – biz).z^n (n > 0) luôn có |z| = 1.*

Câu 265. (3) Cho số phức z thỏa mãn: $|z^2 + 4| = 2|z|$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của |z|. Khi đó (m + M) tương ứng bằng

A. 6. **B.** $2\sqrt{5}+2$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $4\sqrt{3}$.

Giải:

- Gọi góc tạo bởi hai số phức: z^2 và 4 là: $\alpha=\widehat{z^2,4}$
- Từ giả thiết ta bình phương vô hướng hai vế, có được:
- $\Leftrightarrow |z^2+4|^2=4|z|^2\leftrightarrow|z^2|^2+16+8|z^2|\cos\alpha=4|z|^2\leftrightarrow|z|^4+16+8|z|^2\cos\alpha=4|z|^2$
- Đặt: t = $|z|^2 > 0$. Suy ra: $t^2+16+8t\cos\alpha=4t\rightarrow-1\leq\cos\alpha=\frac{4t-16-t^2}{8t}\leq 1$
- Giải hệ điều kiện:
- $\begin{cases}\frac{4t-16-t^2}{8t}\leq 1\\ \frac{4t-16-t^2}{8t}\geq -1\end{cases}\leftrightarrow\begin{cases}4t-16-t^2\leq 8t\\ 4t-16-t^2\geq -8t\end{cases}\leftrightarrow\begin{cases}0\leq t^2+4t+16\quad(\forall t)\\ t^2-12t+16\leq 0\end{cases}\leftrightarrow 6-2\sqrt{5}\leq t\leq 6+2\sqrt{5}$
- Suy ra: $6-2\sqrt{5}\leq t=|z|^2\leq 6+2\sqrt{5}\leftrightarrow\sqrt{5}-1\leq|z|\leq\sqrt{5}+1$
- Suy ra: M = max |z| = $\sqrt{5}+1$ và m = min |z| = $\sqrt{5}-1$. Suy ra: (m + M) = $2\sqrt{5}$
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

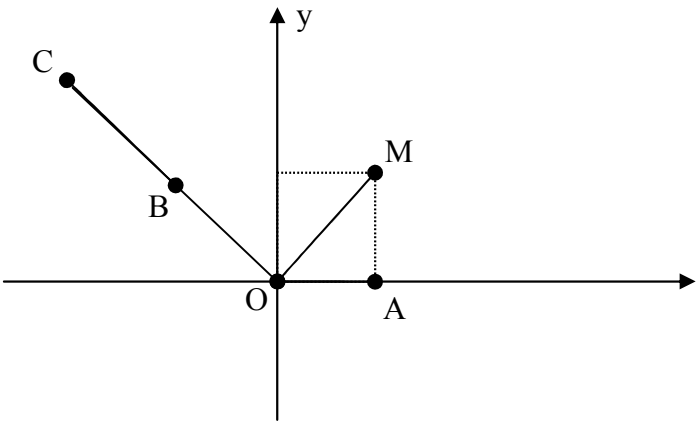
Câu 266. (3) Cho số phức: $z=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$. Giá trị của biểu thức: $(z^2+\frac{1}{z^2})^2+(z^3+\frac{1}{z^3})^3+(z^4+\frac{1}{z^4})^4$ là

A. 4. **B.** $10\sqrt{2}$. **C.** -6. **D.** 12.

Giải:

- Từ số phức: $z=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\to 2z-1=-i\sqrt{3}\to(2z-1)^2=(-i\sqrt{3})^2\leftrightarrow z^2-z+1=0\to z+\frac{1}{z}=1$
- Suy ra: $z^2+\frac{1}{z^2}=(z+\frac{1}{z})^2-2=(1)^2-2=-1$; $z^3+\frac{1}{z^3}=(z+\frac{1}{z})^3-3(z+\frac{1}{z})=(1)^3-3(1)=-2$
- $z^4+\frac{1}{z^4}=(z^2+\frac{1}{z^2})^2-2=(-1)^2-2=-1$
- Suy ra: $(z^2+\frac{1}{z^2})^2+(z^3+\frac{1}{z^3})^3+(z^4+\frac{1}{z^4})^4=(-1)^2+(-2)^3+(-1)^4=-6$
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 267. (3) Cho điểm A biểu diễn số phức: $z=3+4i$ trên mặt phẳng phức như hình vẽ. Biết số phức w có |w| = 10. Điểm biểu diễn số phức w chỉ có thể là



A. A. **B.** O. **C. B.** **D. C.**

Giải:

- Điểm M biểu diễn số phức z = 3 + 4i , suy ra: OM = |z| = |3 + 4i| = 5.
- Số phức w có |w| = 10 = 2OM. Vậy điểm biểu diễn số phức w phải có khoảng cách đến gốc O gấp đôi đoạn OM. Quan sát hình vẽ chỉ có điểm C thỏa mãn.
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 268. (4) Cho số phức z thỏa mãn |z| = 1. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của: P = 2|1 – z| + |1 + z| lần lượt là M và m. Khi đó tích (Mm) tương ứng bằng

A. 10. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $4\sqrt{3}$. **D.** 12.

Giải:

- Áp dụng công thức hẹp cho các số phức có |z| = 1, ta được:

- $P = 2\sqrt{2(1-a)} + \sqrt{2(1+a)}$ trong đó: z = a + ib thỏa mãn $-1 \le a, b \le 1$
- Đưa về bài toán tìm MAX MIN cơ bản của toán học:
- $P = f(a) = 2\sqrt{2-2a} + \sqrt{2+2a}$ với: $-1 \le a \le 1$
- **Cách 1:** Khảo sát hàm số hoặc làm theo quy tắc MAX MIN
- Ta có: $f'(a) = \frac{-2}{\sqrt{2-2a}} + \frac{1}{\sqrt{2+2a}} = 0 \to \sqrt{2-2a} = 2\sqrt{2+2a} \leftrightarrow 2-2a = 4(2+2a) \leftrightarrow a = -\frac{3}{5}$
- $f(-1) = 4$; $f(1) = 2$; $f(-\frac{3}{5}) = 2\sqrt{5}$.
- Suy ra giá trị lớn nhất của P là: M = P_{max} = $2\sqrt{5}$ khi $a = -\frac{3}{5} \to b = \pm\frac{4}{5} \to z = -\frac{3}{5} \pm \frac{4i}{5}$
- Giá trị nhỏ nhất của P là: m = P_{min} = 2 khi a = 1 $\to b = 0 \to z = 1$
- Suy ra tích: (M.m) = $4\sqrt{5}$.
- Vậy ta chọn đáp án **B.**
- **Cách 2:** Nếu chỉ tìm giá trị lớn nhất ta có thể đánh giá bằng BĐT bunhia như sau:
- $P^2 = (2\sqrt{2-2a} + \sqrt{2+2a})^2 \le (2^2+1^2)(2-2a+2+2a) = 20 \to P \le \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
- Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2-2a}}{2} = \frac{\sqrt{2+2a}}{1} \to a = -\frac{3}{5}$
- Vậy giá trị lớn nhất của P là: $P_{max} = 2\sqrt{5}$.

Câu 269. (3) Cho phương trình bậc 2 hệ số phức: $az^2 + bz + c = 0$ (1), trong đó a, b, c là các hệ số phức và z_1 , z_2 là hai nghiệm của phương trình phức (1) đã cho. Khi đó giá trị của biểu thức: $P = |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 - 2(|z_1| + |z_2|)^2$ tương ứng bằng

A. $|\frac{c}{a}|$. **B.** $4|\frac{-b}{a}|$. **C.** $-4|\frac{c}{a}|$. **D.** $4|\frac{b}{c}|$.

Giải:

- Ta có:
- $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (z_1 + z_2).\overline{z_1 + z_2} + (z_1 - z_2).\overline{z_1 - z_2} = (z_1 + z_2).(\overline{z_1} + \overline{z_2}) + (z_1 - z_2).(\overline{z_1} - \overline{z_2})$
- $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(z_1\overline{z_1} + z_2.\overline{z_2}) = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$
- Suy ra: $P = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) - 2(|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1|.|z_2|) = -4|z_1|.|z_2| = -4|z_1 z_2|$
- Theo VIET cho phương trình bậc 2: $P = -4|z_1 z_2| = -4|\frac{c}{a}|$
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 270. (3) Cho các số phức: $|z_1| = 2$; $|z_2| = 3$. Giá trị của: $P = |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2$ tương ứng bằng

A. 5. **B.** 20. **C.** 1. **D.** 10.

Giải:

- **Cách 1:** Biến đổi đại số
- Ta có xử lí tổng quát như bài toán trên:
- $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=(z_1+z_2).\overline{z_1+z_2}+(z_1-z_2).\overline{z_1-z_2}=(z_1+z_2).(\overline{z_1}+\overline{z_2})+(z_1-z_2).(\overline{z_1}-\overline{z_2})$
- $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)=2(2+3)=10$
- Vậy ta chọn đáp án **D.**
- **Cách 2:** Bình phương vô hướng gọi: $\alpha=\widehat{z_1,z_2}$

Câu 271. (3) Cho các số phức có cùng mô đun: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ và thỏa mãn: $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Khi đó giá trị của: $P = |z_1 + z_2|^3 + |z_2 + z_3|^3 + |z_3 + z_1|^3$ tương ứng bằng

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $3\sqrt{2}$.

Giải:

- Ta có: $\begin{cases} z_1+z_2=-z_3 \\ z_2+z_3=-z_1 \\ z_3+z_1=-z_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} |z_1+z_2|=|-z_3|=1 \\ |z_2+z_3|=|-z_1|=1 \\ |z_3+z_1|=|-z_2|=1 \end{cases}$
- Suy ra: $P = 1^3 + 1^3 + 1^3 = 3$.
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 272. (3) Cho các số phức có cùng mô đun: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 2$ và thỏa mãn: $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Khi đó giá trị của: $P = 2|z_1 + z_2| + 3|z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^3$ tương ứng bằng

A. 0. **B.** 6. **C.** 24. **D.** 18.

Giải:

- Giải tương tự như câu trên, ta có:
- $\begin{cases} z_1+z_2=-z_3 \\ z_2+z_3=-z_1 \\ z_3+z_1=-z_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} |z_1+z_2|=|-z_3|=2 \\ |z_2+z_3|=|-z_1|=2 \\ |z_3+z_1|=|-z_2|=2 \end{cases}$
- Suy ra: $P = 2.2 + 3.2^2 + 2^3 = 24$.
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 273. (3) Cho các số phức có cùng mô đun: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ và thỏa mãn: $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Khi đó mệnh đề **sai** là:

A. $P = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$.

B. $P = |z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| = |z_1^3| + |z_2^3| + |z_3^3|$

C. $P = |z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| = |z_1| + |z_2| + |z_3|$

D. $P = |z_1^4 + z_2^4 + z_3^4| = |z_1^4| + |z_2^4| + |z_3^4|$

Giải:

- **Cách 1:** Cụ thể ba số phức thỏa mãn điều kiện bài toán: $z_1 = 1$, $z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$, $z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$
- Từ đó ta thay vào các đáp án và chọn đáp án sai là **D.**
- **Cách 2:** Dạng lượng giác của ba số phức: $z_1 = e^{i\varphi}, z_2 = e^{i(\varphi - \frac{2\pi}{3})}, z_3 = e^{i(\varphi + \frac{2\pi}{3})}$
- Suy ra: $z_1^2 = e^{i2\varphi}, z_2^2 = e^{i(2\varphi - \frac{4\pi}{3})} = e^{i(2\varphi + \frac{2\pi}{3})}, z_3^2 = e^{i(2\varphi + \frac{4\pi}{3})} = e^{i(2\varphi - \frac{4\pi}{3})}$
- Suy ra: $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = e^{i2\varphi} + e^{i(2\varphi + \frac{2\pi}{3})} + e^{i(2\varphi - \frac{4\pi}{3})} = 0$
- Suy ra: $z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = e^{i3\varphi} + e^{i(3\varphi - 2\pi)} + e^{i(3\varphi + 2\pi)} = e^{i3\varphi} + e^{i(3\varphi)} + e^{i(3\varphi)} = 3e^{i3\varphi}$
- Suy ra: $|z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| = |3e^{i3\varphi}| = 3$
- $z_1^4 + z_2^4 + z_3^4 = e^{i4\varphi} + e^{i(4\varphi - \frac{8\pi}{3})} + e^{i(4\varphi + \frac{8\pi}{3})} = e^{i4\varphi} + e^{i(4\varphi - \frac{2\pi}{3} - 2\pi)} + e^{i(4\varphi + \frac{2\pi}{3} + 2\pi)} = e^{i4\varphi} + e^{i(4\varphi - \frac{2\pi}{3})} + e^{i(4\varphi + \frac{2\pi}{3})} = 0$
- Vậy ta chọn đáp án sai là **D.**

Câu 274. (3) Cho các số phức có cùng mô đun: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \sqrt{3}$ và thỏa mãn: $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Khi đó giá trị của: $P = |z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2$ tương ứng bằng

A. $3\sqrt{3}$. **B.** 9. **C.** 0. **D.** 6.

Giải:

- Ta có: $\begin{cases} z_1 + z_2 = -z_3 \\ z_2 + z_3 = -z_1 \\ z_3 + z_1 = -z_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} |z_1 + z_2| = |-z_3| = \sqrt{3} \\ |z_2 + z_3| = |-z_1| = \sqrt{3} \\ |z_3 + z_1| = |-z_2| = \sqrt{3} \end{cases}$
- Suy ra: P = $(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 = 9$
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 275. (3) Cho bốn số phức có cùng mô đun: $|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|=2$ và: $z_1+z_2+z_3+z_4=0$. Giá trị của biểu thức: $P=|z_1+z_2+z_3|^2+|z_2+z_3+z_4|^2+|z_3+z_4+z_1|^2$ tương ứng bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 12. **D.** 8.

Giải:

- Ta có: $\begin{cases} z_1+z_2+z_3=-z_4 \\ z_2+z_3+z_4=-z_1 \\ z_3+z_4+z_1=-z_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} |z_1+z_2+z_3|=|-z_4|=2 \\ |z_2+z_3+z_4|=|-z_1|=2 \\ |z_3+z_4+z_1|=|-z_2|=2 \end{cases}$
- Suy ra: P = $2^2 + 2^2 + 2^2 = 12$.
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 276. (3) Cho bốn số phức có cùng mô đun: $|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|$ và: $z_1+z_2+z_3+z_4=0$. Giá trị của biểu thức: $P=z_1^3+z_2^3+z_3^3+z_4^3$ tương ứng bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 12.

Giải:

- Đã biết 4 số phức phân bố trên một vòng tròn có tổng bằng 0 có hai cặp đối nhau, nên ta có:
- $z_1=-z_2$; $z_3=-z_4 \rightarrow z_1^3=-z_2^3$; $z_2^3=-z_4^3 \rightarrow z_1^3+z_2^3+z_3^3+z_4^3=0$
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 277. (3) Cho bốn số phức có cùng mô đun: $|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|=1$ và: $z_1+z_2+z_3+z_4=0$. Giá trị của biểu thức: $P=|z_1^4+z_2^4+z_3^4+z_4^4|$ tương ứng bằng

A. 1. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 8.

Giải:

- **Cách 1:** Trắc nghiệm: cho $z_1 = 1$; $z_2 = -1$; $z_3 = i$; $z_4 = -i$.
- Suy ra: P = 4. Vậy ta chọn đáp án **B.**
- **Cách 2:** Phân bố số phức cùng mô đun đối xứng có tổng bằng 0 trên một vòng tròn.
- Bốn số phức lượng giác thỏa mãn điều kiện bài toán là:
- $z_1=e^{i\varphi}; z_2=e^{i(\varphi+\frac{\pi}{2})}; z_3=e^{i(\varphi+\pi)}; z_4=e^{i(\varphi+\frac{3\pi}{2})}$
- Suy ra: $z_1^4=e^{i4\varphi}; z_2^4=e^{i(4\varphi+2\pi)}=e^{i4\varphi}; z_3^4=e^{i(4\varphi+4\pi)}=e^{i4\varphi}; z_4^4=e^{i(4\varphi+6\pi)}=e^{i4\varphi}$
- Suy ra: $P=|z_1^4+z_2^4+z_3^4+z_4^4|=|4e^{i4\varphi}|=4$
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 278. (3) Giá trị của biểu thức: $P = (1 + i)^{4001} + (1 - i)^{4001}$ bằng

A. 2^{2000}. **B.** -2^{2001}. **C.** 2^{4000}. **D.** 2^{4001}.

Giải:

- Có thể sử dụng dạng lượng giác hoặc có thể sử dụng tư duy xử lí lũy thừa phức:
- Cách xử lí khéo léo lũy thừa phức như sau:
- Ta có: $(1 + i)^2 = 2i$ và $(1 - i)^2 = -2i$
- Vậy ta có thể xử lí biểu thức P như sau: $P = ((1+i)^2)^{2000}.(1+i) + ((1-i)^2)^{2000}.(1-i)$
- $P = (2i)^{2000}.(1+i) + (-2i)^{2000}.(1-i) = 2^{2000}.(i)^{2000}.(1+i) + (-2)^{2000}.(i)^{2000}.(1-i) = 2^{2000}(1+i) + 2^{2000}(1-i)$
- $P = 2^{2000}(1+i+1-i) = 2^{2000}.2 = 2^{2001}$
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 279. (3) Giá trị của biểu thức: $P = (\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2})^{5000} + (\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2})^{5000}$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 2.

Giải:

- Chúng ta sử dụng phương pháp lượng giác cho toàn diện kiến thức bổ trợ cho cách xử lí lũy thừa như sau:
- $\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3} = e^{i\frac{\pi}{3}}$; $\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} - i.\sin\frac{\pi}{3} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$
- Suy ra: $(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2})^{5000} = (e^{i\frac{\pi}{3}})^{5000} = e^{i\frac{5000\pi}{3}} = e^{i(\frac{2\pi}{3}+1666\pi)} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i.\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$
- Và: $(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2})^{5000} = (e^{-i\frac{\pi}{3}})^{5000} = e^{i\frac{-5000\pi}{3}} = e^{-i(-\frac{2\pi}{3}-1666\pi)} = e^{i\frac{-2\pi}{3}} = \cos\frac{-2\pi}{3} + i.\sin\frac{-2\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$
- Suy ra: $P = (\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2})^{5000} + (\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2})^{5000} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 280. (4) Cho số phức z thỏa mãn: $|iz - \frac{5}{3-4i}| + |iz + \frac{5}{3-4i}| = 12$. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z - 4|$ lần lượt là M và m. Khi đó $|M + im|^2$ tương ứng bằng

A. 54. **B.** 63. **C.** 64. **D.** 96.

Giải:

- Đây là bài toán quỹ tích Elip đã biết, ta biến đổi đưa về dạng cơ bản bằng các phép xử lí nhanh mô đun như sau:
- $|iz-\frac{25}{3-4i}|+|iz+\frac{25}{3-4i}|=12\leftrightarrow|iz-(3+4i)|+|iz-(-3+4i)|=12\leftrightarrow|i(z-\frac{3+4i}{i})|+|i(z-\frac{-3+4i}{i})|=12$
- $|i|.|z-(4-3i)|+|i|.|z-(4+3i)|=12\leftrightarrow|z-(4-3i)|+|z-(4+3i)|=12$
- Đây là quỹ tích elip có hai tiêu điểm: $z_1 = 4 - 3i$; $z_2 = 4 + 3i$. Tâm elip là: $z_0=\frac{z_1+z_2}{2}=4$
- Trục dài: $2a = 12 \rightarrow$ bán trục dài: $a = 6$.
- Tiêu cự: $2c=|z_1-z_2|=|4-3i-4-3i|=6\rightarrow$ bán tiêu: $c = 3$.
- Bán trục nhỏ: $b=\sqrt{a^2-c^2}=3\sqrt{3}$
- Suy ra giá trị lớn nhất của: $|z - z_0| = |z - 4|$ là: $M = a = 6$; giá trị nhỏ nhất của $|z - z_0| = |z - 4|$ là $m = b = 3\sqrt{3}$.
- Suy ra: $|M+mi|^2=M^2+m^2=6^2+(3\sqrt{3})^2=63$
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 281. (3) Cho phương trình phức ẩn z bậc ba hệ số thực a, b, c là: $z^3 + az^2 + bz + c = 0$. Biết phương trình có hai nghiệm là $z_1 = 2$ và $z_2 = 1 + 2i$. Giá trị của biểu thức (a + 2b + 3c) bằng

A. 0. **B.** -12. **C.** 20. **D.** -16.

Giải:

- Áp dụng tính chất: một phương trình phức với các hệ số thực bao giờ cũng tồn tại một cặp số phức liên hợp:
- Suy ra nghiệm còn lại là: $z_3=\overline{z_2}=1-2i$
- Áp dụng hệ thức VIET cho phương trình bậc 3:
- $\begin{cases} z_1+z_2+z_3=\frac{-B}{A}=-a \\ z_1.z_2+z_2z_3+z_3z_1=\frac{C}{A}=b \\ z_1z_2z_3=\frac{-D}{A}=-c \end{cases}\rightarrow\begin{cases} 2+1+2i+1-2i=-a \\ 2(1+2i)+(1+2i)(1-2i)+(1-2i)2=b \\ 2(1+2i)(1-2i)=-c \end{cases}\rightarrow\begin{cases} a=-4 \\ b=9 \\ c=-10 \end{cases}$
- Suy ra: (a + 2b + 3c) = -4 + 2.9 + 3.(-10) = -16.
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 282. (3) Cho số phức z thỏa mãn: |z| = 1 và $|\frac{z}{\overline{z}}+\frac{\overline{z}}{z}|=2$. Số nghiệm z thỏa mãn điều kiện bài toán tương ứng là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Giải:

- Chúng ta biến đổi:
- $|\frac{z}{\overline{z}}+\frac{\overline{z}}{z}|=|\frac{z.z+\overline{z}.\overline{z}}{\overline{z}.z}|=|\frac{z^2+\overline{z}^2}{|z|^2}|=|z^2+\overline{z}^2|=|(z+\overline{z})^2-2z.\overline{z}|=|(2a)^2-2|z|^2|=|4a^2-2|$
- Từ đó suy ra: $|4a^2-2|=2\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4a^2-2=2\\4a^2-2=-2\end{array}\right.\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a^2=1\\a^2=0\end{array}\right.\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=\pm1\rightarrow b=0\\a=0\rightarrow b=\pm1\end{array}\right.$
- Suy ra có các số phức thỏa mãn là: $z=\pm1; z=\pm i$. Tức là có 4 số phức thỏa mãn.
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 283. (4) Cho số phức z thỏa mãn: $|\frac{6z-i}{2+3iz}|\leq1$. Giá trị lớn nhất của |z| bằng

A. 1. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 1/3. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Giải:

- Gọi z = a + ib ta có: $|\frac{6z-i}{2+3iz}|\leq1\leftrightarrow|6z-i|^2\leq|2+3iz|^2\leftrightarrow|6a+i(6b-1)|^2\leq|(2-3b)+3ia|^2$
- $\Leftrightarrow 36a^2+(6b-1)^2\leq(2-3b)^2+9a^2\leftrightarrow27(a^2+b^2)\leq3\leftrightarrow a^2+b^2\leq\frac{1}{9}\leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}\leq\frac{1}{3}\leftrightarrow|z|\leq\frac{1}{3}$
- Suy ra giá trị lớn nhất của |z| là: $|z|_{\max}=\frac{1}{3}$
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 284. (4) Cho số phức z = a + ib thỏa mãn: $|z^2+4|=2|z|$ và $(b^2-a^2)=6$. Khi đó mô đun của số phức z tương ứng bằng

A. 4. **B.** 1. **C.** $4\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Giải:

- $|z^2+4|=2|z|\Leftrightarrow|z^2+4|^2=4|z|^2\Leftrightarrow|(a^2-b^2+4)+2abi|^2=4(a^2+b^2)$
- $\Leftrightarrow(a^2-b^2+4)^2+4a^2b^2=4(a^2+b^2)\Leftrightarrow a^4+b^4+16+8a^2-8b^2-2a^2b^2+4a^2b^2=4(a^2+b^2)$

- $\Leftrightarrow (a^4 + b^4 + 2a^2b^2) - 4(a^2 + b^2) + 16 + 8(a^2 - b^2) = 0 \Leftrightarrow 8(b^2 - a^2) = (a^2 + b^2)^2 - 4(a^2 + b^2) + 16$
- Đến đây ta có thể thay $(b^2 - a^2)$ vào biểu thức trên sẽ được:
- $(a^2 + b^2)^2 - 4(a^2 + b^2) + 16 = 8.6 \Leftrightarrow (a^2 + b^2)^2 - 4(a^2 + b^2) - 32 = 0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 + b^2 = -4(loai) \\ a^2 + b^2 = 8(TM) \end{array}\right.$
- Suy ra: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 285. (3) Cho số phức z = a + ib thỏa mãn: $|z^2 + 4| = 2|z|$ và $P = 8(b^2 - a^2)$. Biểu diễn biểu thức P theo |z| thì hệ thức đúng tương ứng là

A. $P = (|z|^2 - 2)^2 + 12$. **B.** $P = (|z|^2 - 4)^2$.

C. $P = (|z|^2 - 3)^2 + 9$. **D.** $P = (|z|^2 - 1)^2 + 15$.

Giải:

- Biến đổi tương tự bài trên: $P = 8(b^2 - a^2) = (a^2 + b^2)^2 - 4(a^2 + b^2) + 16 = |z|^4 - 4|z|^2 + 16$
- $\Leftrightarrow P = 8(b^2 - a^2) = |z|^4 - 4|z|^2 + 16 = (|z|^2 - 2)^2 + 12$
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 286. (4) Cho số phức z thỏa mãn: $|z^2 + \frac{1}{z^2}| \le 3$. Gọi M là giá trị lớn nhất của $|z + \frac{1}{z}|$. Nhận xét đúng sẽ là:

A. $0 < M < 2$. **B.** $5/2 < M < 3$. **C.** $2 < M < 5/2$. **D.** $M > 3$.

Giải:

- Áp dụng BĐT tam giác ta có: $|z^2 + \frac{1}{z^2}| = |(z + \frac{1}{z})^2 - 2| \ge |(z + \frac{1}{z})^2| - 2 = |z + \frac{1}{z}|^2 - 2$
- Suy ra: $|z + \frac{1}{z}|^2 - 2 \le |z^2 + \frac{1}{z^2}| \le 3 \leftrightarrow |z + \frac{1}{z}|^2 \le 5 \leftrightarrow |z + \frac{1}{z}| \le \sqrt{5}$
- Suy ra giá trị lớn nhất của: $|z + \frac{1}{z}|$ là: $M = \sqrt{5}$.
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 287. (4) Cho số phức z thỏa mãn: $|z^3+\frac{1}{z^3}|\le 18$. Gọi M là giá trị lớn nhất của $|z+\frac{1}{z}|$. Nhận xét đúng sẽ là:

A. 1 < M < 2. **B.** 0 < M < 1. **C.** 2 < M < 5/2. **D.** 5/2< M <4.

Giải:

- Áp dụng BĐT tam giác ta có: $|z^3+\frac{1}{z^3}|=|(z+\frac{1}{z})^3-3(z+\frac{1}{z})|\ge|(z+\frac{1}{z})^3|-3|z+\frac{1}{z}|$
- Suy ra: $|(z+\frac{1}{z})^3|-3|z+\frac{1}{z}|\le|z^3+\frac{1}{z^3}|\le 18\leftrightarrow|z+\frac{1}{z}|^3-3|z+\frac{1}{z}|-18\le 0$
- Đặt: $t=|z+\frac{1}{z}|\ge 0$ và $t\in R$
- Suy ra: $t^3-3t-18\le 0\leftrightarrow(t-3)(t^2+3t+6)\le 0\leftrightarrow t\le 3$ (vì: $t^2+3t+6>0$)
- Suy ra giá trị lớn nhất của: $|z+\frac{1}{z}|$ là: M = 3.
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 288. (3) Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $|z_1| = 3$, $|z_2| = 4$ và $|z_1 - z_2| = 5$. Giá trị của biểu thức: $P = |z_1 + z_2|$ tương ứng bằng

A. 5. **B.** 10. **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** $5\sqrt{3}$.

Giải:

- Sử dụng phương pháp bình phương vô hướng:
- Từ giả thiết $|z_1 - z_2| = 5$, suy ra: $25=|z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1|.|z_2|.\cos\alpha=3^2+4^2-2.3.4.\cos\alpha$
- $\rightarrow\cos\alpha=0$
- Suy ra: $P^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1|.|z_2|.\cos\alpha=3^2+4^2+2.3.4.0=25\rightarrow P=5$
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 289. (3) Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $|z_1| = 6$, $|z_2| = 8$ và $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{13}$. Giá trị của biểu thức: $P = |z_1 + 2z_2|$ tương ứng bằng

A. 20. **B.** $5\sqrt{13}$. **C.** 14. **D.** $4\sqrt{13}$.

Giải:

- Từ giả thiết $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{13}$ $\rightarrow 52=|z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1|.|z_2|.\cos\alpha=6^2+8^2-2.6.8.\cos\alpha$

- $\rightarrow \cos\alpha = -0,5$
- Suy ra: $P^2 = |z_1|^2 + 4|z_2|^2 + 4|z_1|.|z_2|.\cos\alpha = 6^2 + 4.8^2 + 4.6.8.(-0,5) = 196 \rightarrow P = 14$
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 290. (3) Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $|z_1| = 6$, $|z_2| = 8$ và $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{13}$. Giá trị của biểu thức: $P = |3z_1 - 2z_2|$ tương ứng bằng

A. 26. **B.** $2\sqrt{73}$. **C.** $4\sqrt{11}$. **D.** $6\sqrt{13}$.

Giải:

- Từ giả thiết $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{13} \rightarrow 52 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1|.|z_2|.\cos\alpha = 6^2 + 8^2 - 2.6.8.\cos\alpha$
- $\rightarrow \cos\alpha = -0,5$
- Suy ra: $P^2 = 9|z_1|^2 + 4|z_2|^2 + 12|z_1|.|z_2|.\cos\alpha = 9.6^2 + 4.8^2 + 12.6.8.(-0,5) = 292 \rightarrow P = 2\sqrt{73}$
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 291. (3) Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $|z| = 6$ và $|z_1 - z_2| = 6$. Giá trị của biểu thức: $P = |z_1 + z_2|$ tương ứng bằng

A. 12. **B.** 6. **C.** $6\sqrt{2}$. **D.** $6\sqrt{3}$.

Giải:

- Ta có: $|z_1| = |z_2| = 6$.
- Từ: $|z_1 - z_2| = 6 \rightarrow 36 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1|.|z_2|\cos\alpha = 6^2 + 6^2 - 2.6.6.\cos\alpha \rightarrow \cos\alpha = 0,5$
- Suy ra: $P^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1|.|z_2|.\cos\alpha = 6^2 + 6^2 + 2.6.6.(0,5) = 108 \rightarrow P = 6\sqrt{3}$
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 292. (3) Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $|z| = 4$ và $|z_1 - z_2| = 4$. Giá trị của biểu thức: $P = |2z_1 + 3z_2|$ tương ứng bằng

A. $4\sqrt{19}$. **B.** 20. **C.** 12. **D.** $4\sqrt{3}$.

Giải:

- Ta có: $|z_1| = |z_2| = 4$.
- Từ: $|z_1 - z_2| = 4 \rightarrow 16 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1|.|z_2|\cos\alpha = 4^2 + 4^2 - 2.4.4.\cos\alpha \rightarrow \cos\alpha = 0,5$
- Suy ra: $P^2 = 4|z_1|^2 + 9|z_2|^2 + 12|z_1|.|z_2|.\cos\alpha = 4.4^2 + 9.4^2 + 12.4.4.(0,5) = 304 \rightarrow P = 4\sqrt{19}$
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 293. (3) Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $|2z - i| = |2 + iz|$ và $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$. Giá trị của biểu thức: $P = |3z_1 - z_2|$ tương ứng bằng

A. $\sqrt{7}$. **B.** 2. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Giải:

- Gọi $z = a + ib$, thay vào điều kiện: $|2z - i| = |2 + iz| \Leftrightarrow |2a + i(2b - 1)| = |(2 - b) + ia|$
- $\Leftrightarrow 4a^2 + (2b - 1)^2 = (2 - b)^2 + a^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2| = 1.$
- Từ: $|z_1 - z_2| = \sqrt{2} \rightarrow 2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1|.|z_2|\cos\alpha = 1^2 + 1^2 - 2.1.1.\cos\alpha \rightarrow \cos\alpha = 0$
- Suy ra: $P^2 = 9|z_1|^2 + |z_2|^2 - 6|z_1|.|z_2|.\cos\alpha = 9.1^2 + 1^2 - 6.1.1.(0,5) = 7 \rightarrow P = \sqrt{7}$
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 294. (3) Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $|z_1| = 1$, $|z_2| = 2$ và $|2z_1 - 3z_2| = 5$. Giá trị của biểu thức: $P = |3z_1 + z_2|$ tương ứng bằng

A. 10. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** $\frac{7\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{82}}{2}$.

Giải:

- Từ: $|2z_1 - 3z_2| = 5 \rightarrow 25 = 4|z_1|^2 + 9|z_2|^2 - 12|z_1|.|z_2|\cos\alpha = 4.1^2 + 9.2^2 - 12.1.2.\cos\alpha$
- $\rightarrow \cos\alpha = 0,625$
- Suy ra: $P^2 = 9|z_1|^2 + |z_2|^2 + 6|z_1|.|z_2|.\cos\alpha = 9.1^2 + 2^2 + 6.1.2.(0,625) = 20,5 \rightarrow P = \frac{\sqrt{82}}{2}$
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 295. (4) Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $z_1 + z_2 = 3 + 4i$ và $|z_1 - z_2| = 4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = |z_1| + |z_2|$ tương ứng bằng

A. 8. **B.** $4\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{37}$. **D.** $\sqrt{41}$.

Giải:

- Từ: $z_1 + z_2 = 3 + 4i \rightarrow |z_1 + z_2| = |3 + 4i| = 5 \rightarrow 25 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1|.|z_1|\cos\alpha$ (1)
- Từ: $|z_1 - z_2| = 4 \rightarrow 16 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1|.|z_1|\cos\alpha$ (2)
- Cộng hai phương trình (1) + (2), vế theo vế, ta được:

- $41 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ (3)
- Áp dụng BĐT bunhia, ta có:
- $P^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \le (1+1)(|z_1|^2 + |z_2|^2) = 41 \to P \le \sqrt{41}$
- Suy ra giá trị lớn nhất của P là: $P_{max} = \sqrt{41}$.
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 296. (4) Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $z_1 + z_2 = 6 - 8i$ và $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{5}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = 3|z_1| + 2|z_2|$ tương ứng bằng

A. 10. **B.** $2\sqrt{195}$. **C.** $5\sqrt{5}$. **D.** 30.

Giải:

- Từ: $z_1 + z_2 = 6 - 8i \to |z_1 + z_2| = |6 - 8i| = 10 \to 100 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1|.|z_1|\cos\alpha$ (1)
- Từ: $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{5} \to 20 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1|.|z_1|\cos\alpha$ (2)
- Cộng hai phương trình (1) + (2) , vế theo vế, ta được:
- $120 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ (3)
- Áp dụng BĐT bunhia, ta có:
- $P^2 = (3|z_1| + 2|z_2|)^2 \le (9+4)(|z_1|^2 + |z_2|^2) = 780 \to P \le 2\sqrt{195}$
- Suy ra giá trị lớn nhất của P là: $P_{max} = 2\sqrt{195}$.
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 297. (4) Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $z_1 + 2z_2 = 3 + 4i$ và $|z_1 - z_2| = 4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = |z_1| + |z_2|$ tương ứng bằng

A. 16. **B.** $4\sqrt{13}$. **C.** $\frac{\sqrt{114}}{2}$ **D.** $\frac{2\sqrt{19}}{5}$

Giải:

- Từ: $z_1 + 2z_2 = 3 - 4i \to |z_1 + 2z_2| = |3 - 4i| = 5 \to 25 = |z_1|^2 + 4|z_2|^2 + 4|z_1|.|z_1|\cos\alpha$ (1)
- Từ: $|z_1 - z_2| = 4 \to 16 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1|.|z_1|\cos\alpha$
- $\to 32 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 - 4|z_1|.|z_1|\cos\alpha$ (2)
- Cộng hai phương trình (1) + (2) , vế theo vế, ta được:
- $57 = 3|z_1|^2 + 6|z_2|^2 \to 19 = |z_1|^2 + 2|z_2|^2$ (3)

- Áp dụng BĐT bunhia, ta có:
- $P^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 = (1.|z_1| + \frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}|z_2|)^2 \le (1+\frac{1}{2})(|z_1|^2 + 2|z_2|^2) = \frac{3}{2}.19 = \frac{57}{2} \to P \le \frac{\sqrt{114}}{2}$
- Suy ra giá trị lớn nhất của P là: $P_{max} = \frac{\sqrt{114}}{2}$.
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 298. (4) Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $3z_1 + z_2 = 6 + 8i$ và $|z_1 - z_2| = 6$. Giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = 3|z_1| + 2|z_2|$ tương ứng bằng

A. 24. **B.** $4\sqrt{59}$. **C.** $2\sqrt{91}$. **D.** $5\sqrt{13}$.

Giải:

- Từ: $3z_1 + z_2 = 6 + 8i \to |3z_1 + z_2| = |6 + 8i| = 10 \to 100 = 9|z_1|^2 + |z_2|^2 + 6|z_1|.|z_1|\cos\alpha$ (1)
- Từ: $|z_1 - z_2| = 6 \to 36 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1|.|z_1|\cos\alpha$
- $\to 108 = 3|z_1|^2 + 3|z_2|^2 - 6|z_1|.|z_1|\cos\alpha$ (2)
- Cộng hai phương trình (1) + (2) , vế theo vế, ta được:
- $208 = 12|z_1|^2 + 4|z_2|^2 \to 52 = 3|z_1|^2 + |z_2|^2$ (3)
- Áp dụng BĐT bunhia, ta có:
- $P^2 = (3|z_1| + 2|z_2|)^2 = (\sqrt{3}.\sqrt{3}|z_1| + 2.|z_2|)^2 \le (3+4)(3|z_1|^2 + |z_2|^2) = 7.52 = 364 \to P \le 2\sqrt{91}$
- Suy ra giá trị lớn nhất của P là: $P_{max} = 2\sqrt{91}$.
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 299. (4) Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $|z_1 - 2z_2| = 2$ và $|3z_1 + z_2| = 4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = 2|z_1| + 3|z_2|$ bằng

A. 12. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** $\frac{44}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{22}{\sqrt{5}}$.

Giải:

- Từ: $|z_1 - 2z_2| = 2 \to 4 = |z_1|^2 + 4|z_2|^2 - 4|z_1|.|z_1|\cos\alpha$ (1)
- Từ: $|3z_1 + z_2| = 4 \to 16 = 9|z_1|^2 + |z_2|^2 + 6|z_1|.|z_1|\cos\alpha$ (2)
- Lấy 3 lần (1) cộng với 2 lần (2) , vế theo vế, ta được:
- $44 = 10|z_1|^2 + 5|z_2|^2 \to \frac{44}{5} = 2|z_1|^2 + |z_2|^2$ (3)

- Áp dụng BĐT bunhia, ta có:
- $P^2 = (2|z_1| + 3|z_2|)^2 = (\sqrt{2}.\sqrt{2}|z_1| + 3.|z_2|)^2 \le (2+9)(2|z_1|^2 + |z_2|^2) = 11.\frac{44}{5} = \frac{484}{5} \to P \le \frac{22}{\sqrt{5}}$
- Suy ra giá trị lớn nhất của P là: $P_{max} = \frac{22}{\sqrt{5}}$.
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 300. (4) Cho số phức z thỏa mãn đồng thời: $z + \overline{z} = 4$ và $2z + \overline{z} = (1+i).|z|$. Khi đó nhận xét đúng về mô đun của z là

A. 0< |z| < 2. **B.** 2 < |z| < 3. **C.** 3 < |z| < 5. **D.** |z| > 5.

Giải:

- Từ: $z + \overline{z} = 4 \to \overline{z} = 4 - z$ thế vào điều kiện:
- $2z + \overline{z} = (1+i).|z| \leftrightarrow 2z + (4-z) = (1+i).|z| \leftrightarrow 4 + z = (1+i).|z| \leftrightarrow z = (1+i).|z| - 4$
- Đến đây ta mô đun hai vế sẽ được:
- $|z| = |(1+i).|z| - 4| \leftrightarrow t = |(1+i)t - 4| \leftrightarrow t = |(t-4) + it|$; trong đó: $t = |z| \ge 0$
- Suy ra: $t = \sqrt{(t-4)^2 + t^2} \leftrightarrow t^2 = 2t^2 - 8t + 16 \leftrightarrow t^2 - 8t + 16 = 0 \leftrightarrow t = 4$
- Suy ra: t = |z| = 4 (thỏa mãn).
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 301. (4) Cho hai số phức z thỏa mãn: $\frac{|z_1 + z_2|}{|z_1| + |z_2|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \left|\frac{z_1}{|z_1|} + \frac{z_2}{|z_2|}\right|$ tương ứng bằng

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\frac{2\sqrt{6}}{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{15}}{2}$.

Giải:

- Từ giả thiết $\frac{|z_1 + z_2|}{|z_1| + |z_2|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ suy ra: $\sqrt{3}|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \leftrightarrow 3|z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$
- $\Leftrightarrow 3|z_1|^2 + 3|z_2|^2 + 6|z_1|.|z_2|.\cos\alpha = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1|.|z_2|$
- $\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{|z_1|}{|z_2|} + \frac{|z_2|}{|z_1|}\right) \le \frac{1}{3} - \frac{1}{2}.2 = -\frac{2}{3}$

- Lại có: $P^2 = |\frac{z_1}{|z_1|}|^2 + |\frac{z_2}{|z_2|}|^2 + 2.|\frac{z_1}{|z_1|}|.|\frac{z_2}{|z_2|}|.\cos\alpha$
- Lưu ý rằng góc tạo bởi hai số phức: z_1 và z_2 cũng bằng góc tạo bởi hai số phức: $k.z_1$ và $k.z_2$ (hoặc góc tạo bởi hai số phức: $\frac{z_1}{|z_1|}$ và $\frac{z_2}{|z_2|}$)
- $P^2 = 1+1+2.1.1.\cos\alpha = 2+2\cos\alpha \le 2+2.(-\frac{2}{3}) = \frac{2}{3} \to P \le \frac{\sqrt{6}}{3}$
- Suy ra giá trị lớn nhất của P là: $P_{max} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 302. (4) Cho hai điểm A và B khác gốc tọa độ O biểu diễn hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn hệ thức: $z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. ΔOAB vuông tại B. **B.** ΔOAB là tam giác đều.

C. ΔOAB vuông cân tại A. **D.** ΔOAB cân tại B.

Giải:

- Hệ thức đã cho: $z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2$ là một hệ thức đối xứng nên ta có thể dễ dàng suy ra được kết quả: $|z_1| = |z_2|$. Trong số phức không được phép suy ra độc đoán: $z_1 = z_2$ như bên đại số thực được, vì nếu ta suy ra $z_1 = z_2$ thay vào hệ thức đã cho sẽ dẫn tới $z_1 = z_2 = 0$ (A và B trùng với gốc tọa độ O).
- **Cách 1:** Xử lí đẳng cấp mẫu mực:
- $z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2 \leftrightarrow \frac{z_2^2}{z_1^2} + 1 = \frac{z_2}{z_1} \leftrightarrow \frac{z_2^2}{z_1^2} - \frac{z_2}{z_1} + 1 = 0 \to \frac{z_2}{z_1} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \to |\frac{z_2}{z_1}| = |\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}| = 1$
- Suy ra: $|z_1| = |z_2|$
- Đến đây vẫn phải sử dụng cách thứ 2 để nhận dạng tam giác tiếp theo.
- **Cách 2:** Xử lí mô đun
- $z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2 \leftrightarrow z_1^2 = z_1 z_2 - z_2^2 = z_2(z_1 - z_2) \to |z_1^2| = |z_2(z_1 - z_2)| = |z_2|.|z_1 - z_2|$
- Suy ra: $|z_1 - z_2| = \frac{|z_1^2|}{|z_2|}$ (1)
- Tương tự ta có: $|z_1 - z_2| = \frac{|z_2^2|}{|z_1|}$ (2)

- Từ (1) và (2) suy ra: $|z_1 - z_2| = \frac{|z_1^2|}{|z_2|} = \frac{|z_2^2|}{|z_1|} \to |z_1|^3 = |z_2|^3 \to |z_1| = |z_2|$
- Suy ra: $|z_1 - z_2| = \frac{|z_2^2|}{|z_1|} = \frac{|z_1|^2}{|z_1|} = |z_1| = |z_2| \to OA = OB = AB$
- Vậy ΔOAB đều.

Câu 303. (3) Cho hai số phức khác không z_1 và z_2 được biểu diễn bởi hai điểm A và B. Biết chúng thỏa mãn hệ thức phức: $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$. Nhận xét đúng về dạng của ΔOAB là

A. ΔOAB vuông tại O. **B.** ΔOAB vuông tại A.

C. ΔOAB là tam giác đều. **D.** ΔOAB là tam giác cân tại O.

Giải:

- Sử dụng bình phương vô hướng trong phức:
- $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1|.|z_2|.\cos\alpha \Leftrightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1|.|z_2|.\cos\alpha$
- $\Leftrightarrow \cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \pi/2$.
- Suy ra góc giữa hai véc tơ: $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ bằng $\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$ ΔOAB vuông tại O.
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 304. (4) Cho phương trình phức z với các hệ số phức a, b, c: $az^2 + bz + c = 0$, trong đó: $|a| = |b| = |c| > 0$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của |z|. Khi đó giá trị |m + Mi| tương ứng bằng

A. 4. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 1. **D.** $\sqrt{3}$.

Giải:

- **Cách 1:** Sử dụng phương pháp bình phương vô hướng:
- Giả thiết cho $\Leftrightarrow az^2 + c = -bz \to |az^2 + c| = |-bz| = |bz| \to |az^2 + c|^2 = |bz|^2$
- $\Leftrightarrow |az^2|^2 + |c|^2 + 2|az^2|.|c|.\cos\alpha = |bz|^2 \leftrightarrow |z|^4 + 1 + 2|z|^2\cos\alpha = |z|^2$
- Đặt $t = |z|^2 > 0$. Suy ra: $t^2 + 1 + 2t\cos\alpha = t \to \cos\alpha = \frac{t - 1 - t^2}{2t}$
- Suy ra:
- $$-1 \le \cos\alpha = \frac{t-1-t^2}{2t} \le 1 \leftrightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \frac{t-1-t^2}{2t} \le 1 \leftrightarrow t^2 + t + 1 \ge 0 \ (\forall t) \\ -1 \le \cos\alpha = \frac{t-1-t^2}{2t} \leftrightarrow t^2 - 3t + 1 \le 0 \end{cases} \leftrightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2} \le t \le \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

- Suy ra: $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \le t = |z|^2 \le \frac{3+\sqrt{5}}{2} \leftrightarrow \frac{\sqrt{5}-1}{2} \le |z| \le \frac{\sqrt{5}+1}{2}$
- Suy ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của z là: $M = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$; $m = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$
- Suy ra: $|m+Mi| = |\frac{-1+\sqrt{5}}{2} + i.\frac{1+\sqrt{5}}{2}| = \sqrt{3}$
- Vậy ta chọn đáp án **D.**
- **Cách 2:** Áp dụng biến đổi khéo léo kết hợp BĐT tam giác:
- Từ giả thiết suy ra: $-a.z^2 = bz + c \to |-a.z^2| = |bz+c| \leftrightarrow |a|.|z|^2 = |bz+c|$
- Áp dụng BĐT tam giác: $|a|.|z|^2 \le |bz| + |c| \leftrightarrow |a|.|z|^2 \le |b|.|z| + |c| \leftrightarrow |z|^2 \le |z| + 1$
- $\Leftrightarrow |z|^2 - |z| - 1 \le 0 \leftrightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} \le |z| \le \frac{1+\sqrt{5}}{2} \to 0 \le |z| \le \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- Suy ra giá trị lớn nhất của |z| là: $M = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- Từ giả thiết suy ra: $az^2 + bz = -c \to |az^2 + bz| = |-c| = |c|$
- Áp dụng BĐT tam giác: $|az^2 + bz| = |c| \le |az^2| + |bz| = |a|.|z|^2 + |b|.|z| \leftrightarrow |c| \le |a|.|z|^2 + |b|.|z|$
- $\Leftrightarrow 1 \le |z|^2 + |z| \leftrightarrow |z|^2 + |z| - 1 \ge 0 \to |z| \ge \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
- Suy ra giá trị nhỏ nhất của |z| là: $m = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
- Suy ra: $|m+Mi| = |\frac{-1+\sqrt{5}}{2} + i.\frac{1+\sqrt{5}}{2}| = \sqrt{3}$.
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 305. (3) Cho ba số phức thỏa mãn: $z_1 z_2 z_3 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $P = \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{|z_1| + |z_2|} + \frac{|z_2|^2 + |z_3|^2}{|z_2| + |z_3|} + \frac{|z_3|^2 + |z_1|^2}{|z_3| + |z_1|}$ tương ứng là

A. 3. **B.** 3/2. **C.** 4. **D.** $\sqrt{3}$.

Giải:

- Bài toán này thuần túy bài toán BĐT đại số nên sẽ được nhắc tới rất ít trong số phức:
- Từ giả thiết: $z_1 z_2 z_3 = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \to |z_1 z_2 z_3| = |z_1|.|z_2|.|z_3| = |\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}| = 1$
- Đặt: $a = |z_1|$; $b = |z_2|$; $c = |z_3| \to abc = 1$ và a, b, c là ba số dương.

- Biểu thức P trở thành: $P=\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}$
- Đưa về bài toán tìm giá trị nhỏ nhất của một biểu thức đại số thuần túy không có tính chất tư duy trắc nghiệm.
- Ví dụ một người yếu tư duy mà chỉ cần hiểu rằng: đây là biểu thức đối xứng của a, b, c nên nó đạt cực trị khi a = b = c = 1 thì suy ngay ra được: $P_{min} = 3$.
- Vậy ta chọn đáp án **A.**
- Còn nếu tự luận cho vui: thì ta có:
- $a^2+b^2\geq\frac{1}{2}(a+b)^2\rightarrow\frac{a^2+b^2}{a+b}\geq\frac{\frac{1}{2}(a+b)^2}{a+b}=\frac{1}{2}(a+b)$
- Tương tự, ta cũng có: $\frac{b^2+c^2}{b+c}\geq\frac{1}{2}(b+c)$; $\frac{c^2+a^2}{c+a}\geq\frac{1}{2}(c+a)$
- Suy ra: $P=\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}\geq\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(b+c)+\frac{1}{2}(c+a)=a+b+c\geq3\sqrt[3]{abc}=3$
- Suy ra: giá trị nhỏ nhất của P là: $P_{min} = 3$.

Câu 306. (4) Cho phương trình bậc 4 biến z hệ số thực: $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$, có bốn nghiệm phức: z_1 , z_2 , z_3 , z_4 . Biết rằng: $z_1z_2 = 13 + i$; $z_3 + z_4 = 3 + 4i$. Giá trị của (a + b + c) bằng

A. 210. **B.** 18. **C.** 119. **D.** 137.

Giải:

- Phương trình có các nghiệm thực thì nếu có một nghiệm phức z bao giờ cũng có thêm một nghiệm phức liên hợp với nó: $\overline{z}$.
- Nhận thấy: $z+\overline{z}=2a\in R$; $z.\overline{z}=a^2+b^2\in R$
- Như vậy từ giả thiết: $z_1z_2 = 13 + i$; $z_3 + z_4 = 3 + 4i$, suy ra: z_1 và z_2 không phải là cặp nghiệm phức liên hợp; z_3 và z_4 cũng không phải là cặp nghiệm phức liên hợp.
- Ta có thể giả sử: $\overline{z_3}=z_1$; $\overline{z_4}=z_2\leftrightarrow\overline{z_1}=z_3$; $\overline{z_2}=z_4$
- Suy ra: $\overline{z_3+z_4}=\overline{z_3}+\overline{z_4}=z_1+z_2=3-4i$; $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}.\overline{z_2}=z_3.z_4=13-i$
- Khi đó z_1 và z_2 là nghiệm của phương trình: $z^2-(3-4i)z+13+i=0$
- Và z_3 và z_4 là nghiệm của phương trình: $z^2-(3+4i)z+13-i=0$
- Phương trình bậc 4 đã cho có thể phân tích thành:
- $z^2+az^3+bz^2+cz+d=\{z^2-(3+4i)z+13-i\}\{z^2-(3-4i)z+13+i\}=z^4-6z^3+195z^2-70z+170=0$
- Suy ra: (a + b + c) = (-6 + 195 – 70) = 119. Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 307. (3) Cho ba số phức cùng mô đun: $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{|z_1 - z_2|.|z_1 - z_3|} + \frac{1}{|z_2 - z_1|.|z_2 - z_3|} + \frac{1}{|z_3 - z_1|.|z_3 - z_2|}$ tương ứng bằng

A. 3/2. **B.** 1. **C.** 4/3. **D.** 3/4.

Giải:

- Ba số phức z_1 , z_2 , z_3 lần lượt biểu diễn ba điểm A, B, C nằm trên đường tròn (O;1).
- Coi như tam giác ABC nội tiếp đường tròn bán kính R = 1.
- Khi đó: $AB = |z_1 - z_2| = 2R.\sin C = 2\sin C$; $BC = |z_2 - z_3| = 2\sin A$; $CA = |z_3 - z_1| = 2\sin B$.
- Thay vào biểu thức P đưa về thuần túy biểu thức lượng giác (không mang tính chất phức):
- $P = \frac{1}{4\sin B.\sin C} + \frac{1}{4\sin C.\sin A} + \frac{1}{4\sin A.\sin B} = \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{4\sin A.\sin B.\sin C}$
- Biến đổi lượng giác: $P = \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{4\sin A.\sin B.\sin C} = \frac{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{4\sin A.\sin B.\sin C} = \frac{1}{8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$
- Lại có: $MS = 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 4(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2})\cos\frac{A+B}{2}$
- $MS = \cos^2\frac{A-B}{2} - (\cos^2\frac{A-B}{2} - 4\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2} + 4\cos^2\frac{A+B}{2})$
- $MS = \cos^2\frac{A-B}{2} - (\cos\frac{A-B}{2} - 2\cos\frac{A+B}{2})^2 \le \cos^2\frac{A-B}{2} \le 1$
- Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\frac{A-B}{2} = 1 \\ 2\cos\frac{A+B}{2} = \cos\frac{A-B}{2} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = B \\ 2\cos A = 1 \end{cases} \rightarrow A = B = C = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$
- Tức là khi đó tam giác ABC đều: $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.
- Suy ra: $P = \frac{1}{MS} \ge 1$. Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là: $P_{min} = 1$.
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 308. (3) Cho số phức z thỏa mãn phương trình: $8z^{10} + 7iz^9 + 7iz - 8 = 0$. Khi đó $|z|$ tương ứng bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** $\sqrt{2}$.

Giải:

- Từ phương trình đã cho ta suy ra: $z^9(8z + 7i) = 8 - 7iz \leftrightarrow z^9 = \frac{8 - 7iz}{8z + 7i}$

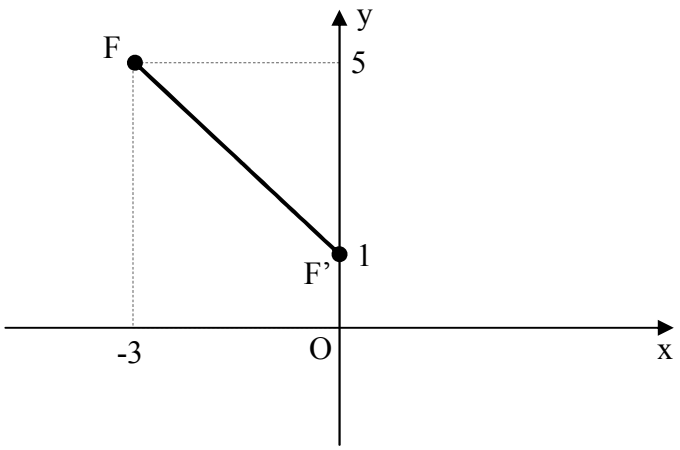
- Đây là dạng phương trình đã biết ở trong phần lí thuyết của tài liệu và đã được chứng minh tổng quát thành dạng phương trình: $z^n = \frac{a-biz}{az+bi}$ với mọi n > 0 luôn phải có điều kiện duy nhất về mô đun của số phức: |z| = 1
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 309. (4) Cho số phức z thỏa mãn: |z – i| + |z + 3 – 5i| = 5 . Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của |z| lần lượt là M và m. Khi đó |M + mi| tương ứng bằng

A. 4. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{26}$. **D.** $\sqrt{35}$.

Giải:

- Phương trình (1) biểu diễn dạng đường elip.
- Hai tiêu điểm F' = z_1 = i ; F = z_2 = -3 + 5i
- Trục lớn: 2a = 5 $\rightarrow$ bán trục lớn: a = 2,5.
- Tiêu cự: 2c = FF' = $|z_1 - z_2|$ = |i – (-3 + 5i)| = 5 $\rightarrow$ bán tiêu: c = 2,5
- Đây là trường hợp đặc biệt: a = c (trục lớn bằng tiêu cự) nên elip chỉ còn là một đoạn thẳng được xác định bởi đoạn: FF'.



- Nhận thấy hình chiếu H vuông góc của O lên đoạn thẳng FF' không nằm trong đoạn FF' nên ta không thể kết luận $|z|_{min}$ = OH = d(O,(FF')) được.
- Đoạn OF = $|z_2|$ = |-3 + 5i| = $\sqrt{34}$.
- Đoạn OF' = $|z_1|$ = |i| = 1.
- Giá trị lớn nhất của |z| là: $|z|_{max}$ = M = OF = $\sqrt{34}$.
- Giá trị nhỏ nhất của |z| là: $|z|_{min}$ = m = OF' = 1.
- Suy ra: |M + mi| = $|\sqrt{34}+i| = \sqrt{35}$
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 310. (3) Cho số phức z có phần thực nhỏ hơn 1 thỏa mãn: $|z+1+i|=|2z+\overline{z}-5-3i|$ sao cho P = |z – 2 – 2i| đạt giá trị cực tiểu. Số phức thỏa mãn là: z = a + ib. Khi đó: (a + 2b) tương ứng bằng

A. 10. **B.** 12. **C.** $5-\sqrt{\frac{3}{2}}$. **D.** $6-2\sqrt{3}$.

Giải:

- Từ giả thiết: $\rightarrow |a+ib+1+i|=|2a+2ib+a-ib-5-3i| \leftrightarrow |(a+1)+i(b+1)|=|(3a-5)+i(b-3)|$
- $\Leftrightarrow (a+1)^2+(b+1)^2=(3a-5)^2+(b-3)^2 \leftrightarrow 8a^2-32a+32-8b=0 \rightarrow b=a^2-4a+4=(a-2)^2$
- Biểu thức: P = |(a – 2) + i(b – 2)| = |(a – 2) +i{(a – 2)² – 2)}|
- Suy ra: $P^2=(a-2)^2+\{(a-2)^2-2\}^2=t+(t-2)^2=t^2-3t+4$ với $t=(a-2)^2\geq 0$
- Suy ra: $P^2=t^2-3t+4=(t-\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}\geq\frac{7}{4}\rightarrow P\geq\frac{\sqrt{7}}{2}$
- Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow t=\frac{3}{2}=(a-2)^2\leftrightarrow a^2-4a+\frac{5}{2}=0\rightarrow a=2\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$
- Giả thiết cho: a < 1, nên ta có: $a=2-\sqrt{\frac{3}{2}}$ và: $b=(a-2)^2=\frac{3}{2}\rightarrow z=a+ib=2-\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{3i}{2}$
- Suy ra: $a+2b=2-\sqrt{\frac{3}{2}}+2.\frac{3}{2}=5-\sqrt{\frac{3}{2}}$.
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 311. (3) Cho số phức z thỏa mãn: $|z+2|=|z+2\overline{z}-2+2i|$ sao cho P = |z – 1 + 3i| đạt giá trị cực tiểu. Giá trị cực tiểu của P tương ứng bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Giải:

- Gọi z = a + ib thay vào giả thiết ta được: $|(a+2)+ib|=|(3a-2)+i(-b+2)|$
- $\Leftrightarrow (a+2)^2+b^2=(3a-2)^2+(-b+2)^2\rightarrow b=2(a-1)^2-1$
- P = |(a – 1) + i(b + 3)| $\rightarrow P^2=(a-1)^2+(b+3)^2=(a-1)^2+\{2(a-1)^2-1+3\}^2$
- Đặt: $t=(a-1)^2\geq 0\rightarrow P^2=t+(2t+2)^2=4t^2+9t+4$
- Khảo sát hàm này trên miền: $t\geq 0\rightarrow P^2\geq 4\rightarrow P\geq 2$
- Vậy giá trị nhỏ nhất của P là: P_{min} = 2.
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 312. (4) Cho số phức z có: |z| = 1. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: P = $|1 + z^3| + |1 + z + z^2|$. Khi đó (M + 2m) tương ứng bằng

A. 5. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 7.

Giải:

- Áp dụng BĐT tam giác ta có thể tìm được ngay giá trị lớn nhất nhưng mà không toàn diện kiến thức khi chỉ tìm được giá trị lớn nhất:
- $P = |1+z^3| + |1+z+z^2| \le 1+|z^3|+1+|z|+|z^2| = 1+|z|^3+1+|z|+|z|^2 = 5$
- Dấu "=" xảy ra ⇔ z = 1.
- Biến đổi toàn diện để tìm cả giá trị nhỏ nhất như sau:
- $P = |(1+z)(1-z+z^2)| + |(1+z^2)+z| = |1+z|.|(1+z^2)-z| + |2az+z| = \sqrt{2+2a}.|2az-z| + |2a+1|$
- $P = \sqrt{2+2a}.|2a-1| + |2a+1|$; trong đó phần thực: $-1 \le a \le 1$.
- Đặt ẩn phụ: $0 \le t = \sqrt{2+2a} \le 2 \to 2a = t^2 - 2$
- Biểu thức P trở thành: $P = t.|t^2-3| + |t^2-1|$
- **Trường hợp 1:** $0 \le t \le 1$ khi đó: $P = t.(3-t^2) + (1-t^2) = -t^3 - t^2 + 3t + 1$
- Đạo hàm: $P' = -3t^2 - 2t + 3 = 0 \to t = \dfrac{\sqrt{10}-1}{3}$
- $P(0) = 1; P(1) = 2; P(\dfrac{\sqrt{10}-1}{3}) = \dfrac{-2+20\sqrt{10}}{27} \approx 2,7$
- Suy ra trường hợp này GTNN của P là: P_{min} = 1 và GTLN của P là: P_{max} = $P(\dfrac{\sqrt{10}-1}{3}) = 2,7$
- **Trường hợp 2:** $1 \le t \le \sqrt{3}$ khi đó: $P = t.(3-t^2) + (t^2-1) = -t^3 + t^2 + 3t - 1$
- Đạo hàm: $P' = -3t^2 + 2t + 3 = 0 \to t = \dfrac{\sqrt{10}+1}{3}$
- $P(1) = 2; P(\sqrt{3}) = 2; P(\dfrac{\sqrt{10}+1}{3}) = \dfrac{2+20\sqrt{10}}{27} \approx 2,42$
- Suy ra trường hợp này GTNN của P là: P_{min} = 2 và GTLN của P là: P_{max} = $P(\dfrac{\sqrt{10}+1}{3}) = 2,42$
- **Trường hợp 3:** $\sqrt{3} \le t \le 2$ khi đó: $P = t.(t^2-3) + (t^2-1) = t^3 + t^2 - 3t - 1$
- Đạo hàm: $P' = 3t^2 + 2t - 3 = 0 \to t = \dfrac{-1 \pm \sqrt{10}}{3}$ (loại vì không nằm trong đoạn đang xét).
- $P(\sqrt{3}) = 2; P(2) = 5$
- Suy ra trường hợp này GTNN của P là: P_{min} = 2 và GTLN của P là: P_{max} = 5

- Tổng hợp 3 trường hợp ta được: $P_{min} = 1 = m$ khi $t = 0 \Leftrightarrow a = -1, b = 0 \Leftrightarrow z = -1$
- $P_{max} = 5 = M$ khi $t = 2 \Leftrightarrow a = 1, b = 0 \Leftrightarrow z = 1$
- Suy ra: $M + 2m = 5 + 2.1 = 7$.
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 313. (3) Cho số phức z có: $|z| = 1$. Giá trị lớn nhất của: $P = |1 + z| + |1 + z^2| + |1 + z^3|$ tương ứng bằng

A. 5. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 7.

Giải:

- Áp dụng BĐT tam giác ta được:
- $P = |1+z| + |1+z^2| + |1+z^3| \le 1 + |z| + 1 + |z^2| + 1 + |z^3| = 1+1+1+1+1+1 = 6$
- Suy ra giá trị lớn nhất của P là: $P_{max} = 6$.
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 314. (3) Cho số phức z có: $|z| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của: $P = |1 + z| + |1 + z^2| + |1 + z^3|$ tương ứng bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Giải:

- Biến đổi nhanh biểu thức P như sau:
- $P = |1+z| + |1+z^2| + |1+z^3| = \sqrt{2+2a} + |2az| + |(1+z)(1-z+z^2)| = \sqrt{2+2a} + |2a| + \sqrt{2+2a}.|2az - z|$
- $P = \sqrt{2+2a} + |2a| + \sqrt{2+2a}.|2a-1|$; trong đó: $-1 \le a \le 1$
- Đặt: $0 \le t = \sqrt{2+2a} \le 2 \to 2a = t^2 - 2$. Biểu thức P trở thành:
- $P = t + |t^2 - 2| + t.|t^2 - 3|$
- **Trường hợp 1:** $0 \le t \le \sqrt{2}$ khi đó: $P = t + 2 - t^2 + t(3 - t^2) = -t^3 - t^2 + 4t + 2$
- Đạo hàm: $P' = -3t^2 - 2t + 4 = 0 \to t = \dfrac{\sqrt{13}-1}{3}$
- $P(0) = 2; P(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}; P(\dfrac{\sqrt{13}-1}{3}) \approx 4,1$
- Suy ra trường hợp này GTNN của P là: $P_{min} = 2$ và GTLN của P là: $P_{max} = P(\dfrac{\sqrt{13}-1}{3}) \approx 4,1$

- **Trường hợp 2:** $\sqrt{2} \le t \le \sqrt{3}$ khi đó: $P = t + t^2 - 2 + t.(3 - t^2) = -t^3 + t^2 + 4t - 2$
- Đạo hàm: $P' = -3t^2 + 2t + 4 = 0 \to t = \dfrac{\sqrt{13}+1}{3}$
- $P(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}\,; P(\sqrt{3}) = 1 + \sqrt{3}\,; P(\dfrac{\sqrt{13}+1}{3}) \approx 2,9$
- Suy ra trường hợp này GTNN của P là: $P_{min} = 1 + \sqrt{3}$ và GTLN là: $P_{max} = P(\dfrac{\sqrt{13}+1}{3}) \approx 2,9$
- **Trường hợp 3:** $\sqrt{3} \le t \le 2$ khi đó: $P = t + t^2 - 2 + t.(t^2 - 3) = t^3 + t^2 - 2t - 2$
- Đạo hàm: $P' = 3t^2 + 2t - 2 = 0 \to t = \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}}{3}$ (loại vì không nằm trong đoạn đang xét).
- $P(\sqrt{3}) = 1 + 2\sqrt{3}\,; P(2) = 6$
- Suy ra trường hợp này GTNN của P là: $P_{min} = 1 + 2\sqrt{3}$ và GTLN của P là: $P_{max} = 6$
- Tổng hợp 3 trường hợp ta được: $P_{min} = 2 = m$ khi $t = 0 \Leftrightarrow a = -1, b = 0 \Leftrightarrow z = -1$
- $P_{max} = 6 = M$ khi $t = 2 \Leftrightarrow a = 1, b = 0 \Leftrightarrow z = 1$
- Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là: $P_{min} = 2$.
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 315. (4) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: |z| = 1. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = |1 + z^3| + |1 + z + z^2|$ tương ứng là m và M. Khi đó tổng (m + M) bằng

A. 4. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 6.

Giải:

- Biến đổi biểu thức P như sau:
- $P = |1 + z^3| + |1 + z + z^3| = |1 + z|.|1 - z + z^2| + |1 + z^2 + z| = \sqrt{2 + 2a}.|2az - z| + |2az + z|$
- $P = \sqrt{2 + 2a}.|2a - 1| + |2a + 1|$ trong đó: $-1 \le a \le 1$
- Đặt ẩn phụ: $0 \le t = \sqrt{2 + 2a} \le 2 \to 2a = t^2 - 2$
- Biểu thức P trở thành: $P = t|t^2 - 3| + |t^2 - 1|$
- **Trường hợp 1:** $0 \le t \le 1$ khi đó: $P = t(3 - t^2) + (1 - t^2) = -t^3 - t^2 + 3t + 1$
- Đạo hàm: $P' = -3t^2 - 2t + 3 = 0 \to t = \dfrac{\sqrt{10}-1}{3}$
- $P(0) = 1; P(1) = 2; P(\dfrac{\sqrt{10}-1}{3}) \approx 2,3$
- Suy ra trường hợp này GTNN của P là: $P_{min} = 1$ và GTLN của P là: $P_{max} = P(\dfrac{\sqrt{10}-1}{3}) \approx 2,3$

- **Trường hợp 2:** $1 \le t \le \sqrt{3}$ khi đó: $P = t.(3 - t^2) + t^2 - 1 = -t^3 + t^2 + 3t - 1$
- Đạo hàm: $P' = -3t^2 + 2t + 3 = 0 \to t = \dfrac{\sqrt{10}+1}{3}$
- $P(1) = 2; P(\sqrt{3}) = 2; P(\dfrac{\sqrt{10}+1}{3}) = 2,42$
- Suy ra trường hợp này GTNN của P là: $P_{min} = 2$ và GTLN của P là: $P_{max} = P(\dfrac{\sqrt{10}+1}{3}) = 2,42$
- **Trường hợp 3:** $\sqrt{3} \le t \le 2$ khi đó: $P = t.(t^2 - 3) + t^2 - 1 + = t^3 + t^2 - 3t - 1$
- Đạo hàm: $P' = 3t^2 + 2t - 3 = 0 \to t = \dfrac{-1 \pm \sqrt{10}}{3}$ (loại vì không nằm trong đoạn đang xét).
- $P(\sqrt{3}) = 2; P(2) = 5$
- Suy ra trường hợp này GTNN của P là: $P_{min} = 2$ và GTLN của P là: $P_{max} = 5$
- Tổng hợp 3 trường hợp ta được: $P_{min} = 1 = m$ khi $t = 0 \Leftrightarrow a = -1, b = 0 \Leftrightarrow z = -1$
- $P_{max} = 5 = M$ khi $t = 2 \Leftrightarrow a = 1, b = 0 \Leftrightarrow z = 1$
- Suy ra: $m + M = 1 + 5 = 6$.
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 316. (3) Cho phương trình phức ẩn z: $z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ với các tham số thực: a, b, c, d. Biết phương trình có hai nghiệm phức: $z_1 = 3 - 2i$ và $z_2 = 3 + i$. Giá trị của (a + b + c – d) bằng

A. -20. **B.** 24. **C.** 12. **D.** 16.

Giải:

- Đã biết phương trình phức hệ số thực luôn tồn tại các cặp nghiệm phức, tức là nếu có nghiệm phức z bắt buộc phải có nghiệm phức liên hợp với nó là: $\overline{z}$
- Vậy ta suy ra phương trình bậc 4 có hai nghiệm phức là:
- $z_1 = 3 - 2i \to z_3 = \overline{z_1} = 3 + 2i$; $z_2 = 3 + i \to z_4 = \overline{z_2} = 3 - i$
- Áp dụng định lí VIET cho phương trình bậc 4, ta được:
- $$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = -\dfrac{B}{A} = -a = 12 \\ z_1z_2 + z_1z_3 + z_1z_4 + z_2z_3 + z_2z_4 + z_3z_4 = \dfrac{C}{A} = b = 36 \\ z_1z_2z_3 + z_1z_2z_4 + z_1z_3z_4 + z_2z_3z_4 = -\dfrac{D}{A} = -c = 138 \\ z_1z_2z_3z_4 = \dfrac{E}{A} = d = 130 \end{cases} \to \begin{cases} a = -12 \\ b = 36 \\ c = -138 \\ d = 130 \end{cases}$$

- Suy ra: (a + b + c + d) = 16.
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 317. (3) Cho phương trình phức ẩn z và hai tham số thực a và b: $4z^5 + 3iz^4 + 3iz - 4 = 0$. Giá trị của |z| tương ứng bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** $\sqrt{2}$.

Giải:

- Chúng ta biến đổi đưa về một dạng tổng quát như sau:
- $z^4(4z + 3i) = 4 - 3iz \Leftrightarrow z^4 = \dfrac{4-3iz}{4z+3i}$
- Ta có thể sử dụng phép bình phương vô hướng hoặc là biến đổi bình thường cũng vẫn có thể chứng minh được |z| = 1.
- Sử dụng bình phương vô hướng thể hiện tư duy:
- $|z^4| = |\dfrac{4-3iz}{4z+3i}| \leftrightarrow |z|^4 = |\dfrac{-i(3z+4i)}{4z+3i}| = |\dfrac{3z+4i}{4z+3i}| \leftrightarrow |z|^8 = |\dfrac{3z+4i}{4z+3i}|^2$
- $\Leftrightarrow |z|^8 = |\dfrac{3z+4i}{4z+3i}|^2 = \dfrac{|3iz+4|^2}{|4z+3i|^2} = \dfrac{9|z|^2+16+24.|z|\cos\alpha}{16|z|^2+9+24.|z|.\cos\alpha}$
- **Trường hợp 1:** Nếu |z| > 1 suy ra:
- $|z|^8 = \dfrac{9|z|^2+16+24.|z|\cos\alpha}{16|z|^2+9+24.|z|.\cos\alpha} > 1 \leftrightarrow 9|z|^2+16+24.|z|\cos\alpha > 16|z|^2+9+24.|z|.\cos\alpha$
- Suy ra: $|z|^2 < 1 \rightarrow$ vô lí.
- **Trường hợp 2:** Nếu |z| < 1 suy ra:
- $|z|^8 = \dfrac{9|z|^2+16+24.|z|\cos\alpha}{16|z|^2+9+24.|z|.\cos\alpha} < 1 \leftrightarrow 9|z|^2+16+24.|z|\cos\alpha < 16|z|^2+9+24.|z|.\cos\alpha$
- Suy ra: $|z|^2 > 1 \rightarrow$ vô lí.
- **Trường hợp 3:** Nếu |z| = 1 suy ra: $|z|^8 = \dfrac{9|z|^2+16+24.|z|\cos\alpha}{16|z|^2+9+24.|z|.\cos\alpha} = 1$ thỏa mãn.
- Suy ra |z| = 1 thỏa mãn. Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 318. (4) Cho số phức z thỏa mãn: |(3 – 4i)z + 50| = 10. Gọi giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |\overline{z} + 3 - 2i|$ là M , giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q = |(1+i)\overline{z} + 4i - 2|$ là m. Khi đó giá trị của biểu thức: $(m + 2\sqrt{2})^2 + (M-2)^2$ tương ứng bằng

A. 251. **B.** 212. **C.** 247. **D.** 220.

Giải:

- Từ phương trình đường tròn đã cho ta biến đổi về dạng cơ bản:
- $|(3-4i)z+50|=10\leftrightarrow|3-4i|.|z+\frac{50}{3-4i}|=10\leftrightarrow 5|z+6+8i|=10\leftrightarrow|z-(-6-8i)|=2$
- Đường tròn (C) có tâm $z_0 = -6 - 8i$ và có bán kính R = 2.
- Biểu thức: $P=|\overline{z}+3-2i|=|\overline{\overline{z}+3-2i}|=|z+3+2i|=|z-(-3-2i)|$
- Giá trị lớn nhất của P ứng với khoảng cách xa nhất từ điểm M nằm trên (C) tới điểm A biểu diễn bởi số phức: $z_A = - 3 - 2i$, đã biết cách tìm:
- $P_{\max}=M=|z_A-z_0|+R=|-3-2i-(-6-8i)|+2=2+3\sqrt{5}$
- Biểu thức: $Q=|1+i|.|\overline{z}+\frac{4i-2}{1+i}|=\sqrt{2}.|\overline{z}+1+3i|=\sqrt{2}.|\overline{\overline{z}+1+3i}|=\sqrt{2}|z+1-3i|$
- Xét K = |z + 1 – 3i|
- Giá trị nhỏ nhất của Q ứng với giá trị nhỏ nhất của K = tương ứng với khoảng cách gần nhất từ điểm N nằm trên (C) tới điểm B biểu diễn bởi số phức: $z_B = - 1 + 3i$, đã biết cách tìm:
- $K_{\min}=||z_B-z_0|-R|=||-1+3i-(-6-8i)|-2|=\sqrt{146}-2$
- Suy ra giá trị nhỏ nhất của Q là: $Q_{\min} = \sqrt{2}.(\sqrt{146}-2)=2(\sqrt{73}-\sqrt{2})$
- Suy ra: $(m+2\sqrt{2})^2-(M-2)^2=(2\sqrt{73})^2-(3\sqrt{5})^2=247$
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 319. (3) Cho số phức z thỏa mãn: $|\frac{8z-i}{4+2iz}|\leq 1$. Giá trị lớn nhất của |z| tương ứng bằng

A. 2. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{2}$.

Giải:

- $|\frac{8z-i}{4+2iz}|\leq 1\leftrightarrow\frac{|8z-i|^2}{|i(2z-4i)|^2}\leq 1\leftrightarrow\frac{|8z-i|^2}{|2z-4i|^2}\leq 1$
- Bình phương vô hướng: $\frac{64|z|^2+|i|^2-2.8|z|.|i|.\cos\alpha}{4|z|^2+16|i|^2-2.|2z|.|4i|.\cos\alpha}\leq 1$
- $\Leftrightarrow 64|z|^2+1-16|z|\cos\alpha\leq 4|z|^2+16-16|z|\cos\alpha\leftrightarrow 60|z|^2\leq 15\leftrightarrow|z|^2\leq\frac{1}{4}\leftrightarrow|z|\leq\frac{1}{2}$
- Suy ra giá trị lớn nhất của |z| là: $|z|_{\max} = 1/2$.
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 320. (3) Cho biểu thức: $|\frac{z-2+i}{z}|=k$ biểu diễn đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{30}$ (trong đó k > 1). Tâm của đường tròn được biểu diễn bởi số phức tương ứng là

A. -4 + 2i. **B.** 6 – 3i. **C.** 1 + 2i. **D.** 2 – i.

Giải:

- Gọi số phức: z = a + ib , thay vào giả thiết suy ra:
- $|\frac{z-2+i}{z}|=k \leftrightarrow |z-2+i|=k|z| \leftrightarrow |(a-2)+i(b+1)|=k|a+ib| \leftrightarrow |(a-2)+i(b+1)|^2=k^2|a+ib|^2$
- $\Leftrightarrow (k^2-1)a^2+(k^2-1)b^2+4a-2b-5=0$
- $\Leftrightarrow a^2+b^2+\frac{4}{(k^2-1)}a-\frac{2}{(k^2-1)}b-\frac{5}{(k^2-1)}=0$
- Đường tròn (C) có tâm: $I=(\frac{-2}{k^2-1};\frac{1}{k^2-1})$ và bán kính: $R=\sqrt{\frac{4}{(k^2-1)^2}+\frac{1}{(k^2-1)^2}+\frac{5}{k^2-1}}$
- Giả thiết cho bán kính: $R=\sqrt{\frac{4}{(k^2-1)^2}+\frac{1}{(k^2-1)^2}+\frac{5}{k^2-1}}=\sqrt{30} \rightarrow \frac{1}{(k^2-1)^2}++\frac{1}{k^2-1}-6=0$
- Suy ra phương trình ẩn phụ: $0<t=\frac{1}{k^2-1} \rightarrow t^2+t-6=0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} t=-3\ (Loai) \\ t=2\ (TM) \end{array}\right.$
- Suy ra: $t=\frac{1}{k^2-1}=2 \rightarrow k=\sqrt{\frac{3}{2}}$
- Suy ra tọa độ tâm: $I=(\frac{-2}{k^2-1};\frac{1}{k^2-1})=(-4;2)$
- Suy ra số phức tương ứng với tâm I là: $z_0 = -4+2i$.
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 321. (4) Cho số phức z thỏa mãn: $|z+\frac{1}{z}|=2$. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của |z| tương ứng là M và m. Khi đó (M + m) bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Giải:

- Áp dụng phép bình phương vô hướng: $|z+\frac{1}{z}|=2 \leftrightarrow |z^2+1|=2|z| \leftrightarrow |z^2+1|^2=4|z|^2$
- Gọi $\alpha=\widehat{(z^2,1)}$
- Ta có: $|z^2+1|^2=4|z|^2 \leftrightarrow |z^2|^2+1+2.|z^2|.1.\cos\alpha=4|z|^2 \leftrightarrow |z|^4+1+2|z|^2\cos\alpha=4|z|^2$

- Đặt: $t = |z|^2 > 0$ (vì z khác không), khi đó: $t^2 + 1 + 2t\cos\alpha = 4t \to -2 \le 2\cos\alpha = \dfrac{4t - t^2 - 1}{t} \le 2$
- Từ: $\dfrac{4t - t^2 - 1}{t} \le 2 \to t^2 - 2t + 1 \ge 0$ hiển nhiên là đúng.
- Từ: $-2 \le \dfrac{4t - t^2 - 1}{t} \to t^2 - 6t + 1 \le 0 \to 3 - 2\sqrt{2} \le t \le 3 + 2\sqrt{2} \to \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} \le |z| \le \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$
- Suy ra: $\sqrt{2} - 1 \le |z| \le \sqrt{2} + 1 \to M = \sqrt{2} + 1$; $m = \sqrt{2} - 1 \to M + m = 2\sqrt{2}$
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 322. (3) Cho số phức z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình: $z^2 - 2z + 4 = 0$. Giá trị của biểu thức: $P = z_1^{2018} + z_2^{2018} + z_1^{2019} + z_2^{2019}$ tương ứng bằng

A. 0. **B.** 2^{2020}. **C.** 3.2^{2018}. **D.** -5.2^{2018}.

Giải:

- Dễ dàng suy ra được: $z_1 = 1 + i\sqrt{3}; z_2 = 1 - i\sqrt{3}$
- Đưa về dạng lượng giác: $z_1 = 1 + i\sqrt{3} = 2(\cos\dfrac{\pi}{3} + i.\sin\dfrac{\pi}{3}); z_2 = 1 - i\sqrt{3} = 2(\cos\dfrac{\pi}{3} - i.\sin\dfrac{\pi}{3})$
- Khi đó: $z_1^{2018} = 2^{2018}(\cos\dfrac{\pi}{3} + i.\sin\dfrac{\pi}{3})^{2018} = 2^{2018}(\cos\dfrac{2018\pi}{3} + i.\sin\dfrac{2018\pi}{3}) = 2^{2018}(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i.\sin\dfrac{2\pi}{3})$
- $z_2^{2018} = 2^{2018}(\cos\dfrac{\pi}{3} - i.\sin\dfrac{\pi}{3})^{2018} = 2^{2018}(\cos\dfrac{2018\pi}{3} - i.\sin\dfrac{2018\pi}{3}) = 2^{2018}(\cos\dfrac{2\pi}{3} - i.\sin\dfrac{2\pi}{3})$
- $z_1^{2019} = 2^{2019}(\cos\dfrac{\pi}{3} + i.\sin\dfrac{\pi}{3})^{2019} = 2^{2019}(\cos\dfrac{2019\pi}{3} + i.\sin\dfrac{2019\pi}{3}) = 2^{2018}(\cos\pi + i.\sin\pi)$
- $z_2^{2019} = 2^{2019}(\cos\dfrac{\pi}{3} - i.\sin\dfrac{\pi}{3})^{2019} = 2^{2019}(\cos\dfrac{2019\pi}{3} - i.\sin\dfrac{2019\pi}{3}) = 2^{2018}(\cos\pi - i.\sin\pi)$
- Suy ra:
- $P = 2^{2018}(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i.\sin\dfrac{2\pi}{3}) + 2^{2018}(\cos\dfrac{2\pi}{3} - i.\sin\dfrac{2\pi}{3}) + 2^{2019}(\cos\pi + i.\sin\pi) + 2^{2019}(\cos\pi - i.\sin\pi)$
- $P = 2^{2018}.2.\cos\dfrac{2\pi}{3} + 2^{2019}.2.\cos\pi = 2^{2018}.2.(-\dfrac{1}{2}) + 2^{2019}.2.(-1) = -2^{2018}(1+4) = -5.2^{2018}$
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 323. (3) Cho biểu thức: $|\frac{z-1+2i}{z}|=k$ biểu diễn đường tròn tâm I được biểu diễn bởi số phức z_0 = 2 – 4i (trong đó k > 0). Bán kính của đường tròn tương ứng là

A. 1. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{17}$. **D.** 4.

Giải:

- Gọi số phức: z = a + ib, thay vào giả thiết ban đầu ta được:
- |(a – 1) +i(b + 2)| = k|a + ib| ⇔ $(a-1)^2+(b+2)^2=k^2(a^2+b^2)$
- ⇔ $(1-k^2)a^2+(1-k^2)b^2+2a-4b-5=0 \Leftrightarrow a^2+b^2+\frac{2}{1-k^2}a-\frac{4}{1-k^2}b-\frac{5}{1-k^2}=0$
- Đây là đường tròn (C) có tâm: $I(\frac{-1}{1-k^2};\frac{2}{1-k^2})$
- Bài cho điểm I biểu diễn bởi: z_0 = 2 – 4i, suy ra: $\frac{-1}{1-k^2}=2\rightarrow k=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$
- Kết hợp với điều kiện k >0, ta suy ra: $k=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$
- Thay: $\frac{-1}{1-k^2}=2$ vào phương trình đường tròn (C) ta được: $a^2+b^2-4a+8b+10=0$
- Suy ra bán kính đường tròn: $R=\sqrt{2^2+4^2-10}=\sqrt{10}$
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 324. (4) Cho số phức z thỏa mãn: $2|z-1|+3|z-i|\le 2\sqrt{2}$. Khi đó giá trị của |z| tương ứng sẽ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Giải:

- Áp dụng BĐT tam giác ta có: $|z-1|+|z-i|=|z-1|+|i-z|\ge|z-1+i-z|=|-1+i|=\sqrt{2}$
- Lại có: $2|z-1|+3|z-i|=2(|z-1|+|z-i|)+|z-i|\ge 2\sqrt{2}+|z-i|\ge 2\sqrt{2}$ (1)
- Giả thiết lại cho: $2|z-1|+3|z-i|\le 2\sqrt{2}$ (2)
- Từ (1) và (2) suy ra: $2|z-1|+3|z-i|=2\sqrt{2}\leftrightarrow\begin{cases}|z-1|+|z-i|=\sqrt{2}\\ |z-i|=0\end{cases}\rightarrow z=i\rightarrow|z|=1$
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 325. (4) Cho số phức z thỏa mãn: $3|z-3|+4|z+4i|\le 15$. Khi đó mệnh đề nào dưới đây nhận xét đúng về |z| ?

A. $0<|z|<1$. **B.** $1<|z|<3$. **C.** $3<|z|<5$. **D.** $|z|>5$.

Giải:

- Tương tự bài toán trên.
- Áp dụng BĐT tam giác ta có: $|z-3|+|z+4i|=|z-3|+|-4i-z|\ge|z-3-4i-z|=|-3-4i|=5$
- Lại có: $3|z-3|+4|z+4i|=3(|z-3|+|z+4i|)+|z+4i|\ge 3.5+|z+4i|\ge 15$ (1)
- Giả thiết lại cho: $3|z-3|+4|z+4i|\le 15$ (2)
- Từ (1) và (2) suy ra: $3|z-3|+4|z+4i|=15\leftrightarrow\begin{cases}|z-3|+|z+4i|=15\\ |z+4i|=0\end{cases}\rightarrow z=-4i\rightarrow|z|=4$
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 326. (3) Cho số phức z có |z| = 1. Phần thực của số phức: $\frac{1}{1-z^2}$ tương ứng bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Giải:

- **Cách 1:** Sử dụng phương pháp đại số thuần túy:
- Gọi z = a + ib thì từ: |z| = 1 ⇔ $a^2 + b^2 = 1$
- $\frac{1}{1-z^2}=\frac{1}{1-(a^2-b^2+2abi)}=\frac{1}{(1-a^2)+b^2-2abi}=\frac{1}{b^2+b^2-2abi}=\frac{1}{2b(b-ia)}=\frac{1}{2b}.\frac{1}{b-ia}$
- $\frac{1}{1-z^2}=\frac{1}{2b}.\frac{1}{b-ia}=\frac{1}{2b}.\frac{b+ia}{b^2+a^2}=\frac{b+ia}{2b}=\frac{1}{2}+\frac{ia}{2b}$
- Suy ra phần thực của số phức: $\frac{1}{1-z^2}$ là $\frac{1}{2}$.
- Vậy ta chọn đáp án **D.**
- **Cách 2:** Sử dụng công thức có sẵn:
- $\frac{1}{1-z^2}=\frac{1}{-2ibz}=\frac{i}{2bz}=\frac{i\overline{z}}{2bz.\overline{z}}=\frac{i\overline{z}}{2b|z|^2}=\frac{i\overline{z}}{2b}=\frac{i(a-ib)}{2b}=\frac{ia+b}{2b}=\frac{1}{2}+\frac{ia}{2b}$
- **Cách 3:** Sử dụng công thức lượng giác…

Câu 327. (3) Cho số phức z có |z| = 2. Phần thực của số phức: $\frac{1}{2+z}$ tương ứng bằng

A. 1. **B.** 1/4. **C.** 1/2. **D.** 3/2.

Giải:

- **Cách 1:** Sử dụng nền tảng kiến thức hoặc kết quả đã biết.
- Đặt $\frac{z}{2}=u\to|u|=|\frac{z}{2}|=1$
- Khi đó: $\frac{1}{2+z}=\frac{1}{2(1+\frac{z}{2})}=\frac{1}{2(1+u)}=\frac{1}{2}.\frac{1}{1+u}=\frac{1}{2}.(\frac{1}{2}+i....)=\frac{1}{4}+i....$
- Suy ra phần thực cần tìm là: $\frac{1}{4}$. Vậy ta chọn đáp án **B.**
- **Cách 2:** Biến đổi đại số, gọi z = a + ib suy ra: $a^2 + b^2 = 4$
- Khi đó: $\frac{1}{2+z}=\frac{1}{2+a+ib}=\frac{2+a-ib}{(2+a)^2+b^2}=\frac{2+a-ib}{a^2+4a+4+b^2}=\frac{2+a-ib}{8+4a}=\frac{1}{4}-\frac{ib}{4(2+a)}$
- **Cách 3:** Sử dụng công thức lượng giác.....

Câu 328. (3) Cho số phức z có |z| = 3. Phần thực của số phức $\frac{1}{9+z^2}$ tương ứng bằng

A. 1/18. **B.** 1/9. **C.** 1/4. **D.** 1/3.

Giải:

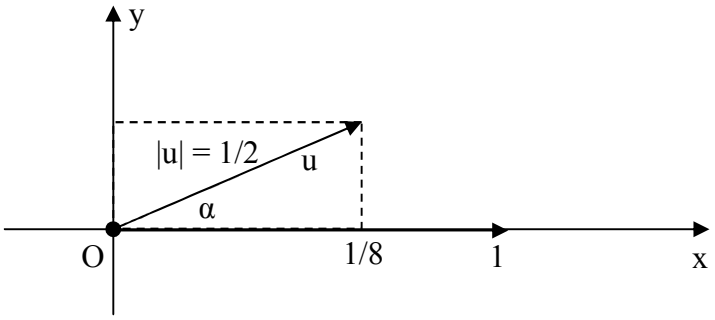
- Gọi số phức z = a + ib suy ra: $a^2 + b^2 = 9$
- Ta có: $\frac{1}{9+z^2}=\frac{1}{9+a^2-b^2+2abi}=\frac{1}{9-b^2+a^2+2abi}=\frac{1}{a^2+a^2+2abi}=\frac{1}{2a(a+ib)}$
- $\frac{1}{9+z^2}=\frac{a-ib}{2a(a+ib)(a-ib)}=\frac{a-ib}{2a(a^2+b^2)}=\frac{a-ib}{18a}=\frac{1}{18}-\frac{ib}{18a}$
- Suy ra phần thực cần tìm là: $\frac{1}{18}$.
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 329. (4) Cho hai số phức z thỏa mãn: |z – w| = 2|z| = |w|. Khi đó phần thực của số phức $u=\frac{z}{w}$ tương ứng sẽ bằng

A. 1. **B.** 1/2. **C.** -1/4. **D.**1/8.

Giải:

- Từ giả thiết suy ra: $|z-w|=2|z|=|w|\rightarrow|\frac{z}{w}-1|=1$; $|\frac{z}{w}|=\frac{1}{2}\rightarrow|u-1|=1$; $|u|=\frac{1}{2}$
- **Cách 1:** Tiếp cận tư duy và phương pháp hiện đại.
- Bình phương vô hướng: $|u-1|^2=1\leftrightarrow|u|^2+1-2|u|\cos\alpha=1\rightarrow|u|-2\cos\alpha=0\rightarrow\cos\alpha=\frac{1}{4}$
- Trong đó: $\alpha=\widehat{u,1}$



- Suy ra phần thực của số phức u là: $|u|.\cos\alpha=\frac{1}{2}.\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$. Vậy ta chọn đáp án **D.**
- **Cách 2:** Phương pháp đại số cổ điển nhưng dễ hiểu. Gọi u = a + ib thay vào các biểu thức:
- $\begin{cases}|u|=\frac{1}{2}\\|u-1|=1\end{cases}\leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=\frac{1}{4}\\(a-1)^2+b^2=1\end{cases}\leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=\frac{1}{4}\\a^2-2a+1+b^2=1\end{cases}\rightarrow 2a-1=-\frac{3}{4}\rightarrow a=\frac{1}{8}$
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 330. (3) Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $\begin{cases}|z_1-2i|=|2iz_1+1|\\|z_2-2i|=|2iz_2+1|\end{cases}$ và $|z_1-z_2|=\sqrt{3}$. Giá trị của biểu thức $P=|2z_1+z_2|$ tương ứng bằng

A. 2. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Giải:

- Từ giả thiết ta có thể suy ra: $|z_1|=|z_2|$.
- Xử lí: $|z_1-2i|=|2iz_1+1|\leftrightarrow|z_1-2i|=|i(2z_1-i)|=|2z_1-i|\rightarrow|z_1-2i|^2=|2z_1-i|^2$
- $\Leftrightarrow|z_1|^2+4-4|z_1|.\cos\alpha=4|z_1|^2+1-4|z_1|.\cos\alpha\leftrightarrow|z_1|=|z_2|=1$
- Gọi $\beta=\widehat{z_1,z_2}$
- Từ: $|z_1-z_2|=\sqrt{3}\rightarrow 3=|z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1|.|z_2|.\cos\beta=1^2+1^2-2.1.\cos\beta\rightarrow\cos\beta=-\frac{1}{2}$
- Suy ra: $P^2=4|z_1|^2+|z_2|^2+4|z_1|.|z_2|.\cos\beta=4.1^2+1^2+4.1.\cos\beta=3\rightarrow P=\sqrt{3}$
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 331. (4) Cho số phức z thỏa mãn: |z – 1| = 2. Giá trị lớn nhất của: P = |z + 2i| + |z – 2 – 2i| tương ứng bằng

A. 4. **B.** 12. **C.** 6. **D.** $2\sqrt{5}$.

Giải:

- Xử lí biểu thức: $P = |z-1+1+2i| + |z-1-(1+2i)|$. Gọi $\alpha = \widehat{(z-1),(1+2i)}$
- Áp dụng BĐT bunhia, ta có: $P^2 \le (1^2+1^2)(|z-1+1+2i|^2 + |z-1-(1+2i)|^2)$
- $\Leftrightarrow$ $P^2 \le 2(|z-1|^2 + |1+2i|^2 + 2|z-1|.|1+2i|\cos\alpha + (|z-1|^2 + |1+2i|^2 - 2|z-1|.|1+2i|\cos\alpha)$
- $\Leftrightarrow$ $P^2 \le 2(2^2+\sqrt{5}^2+2^2+\sqrt{5}^2) = 36 \to P \le 6$
- Suy ra giá trị lớn nhất của P là: $P_{max} = 6$.
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 332. (3) Cho số phức z thỏa mãn phương trình: $z^2 – (3i + 1)z – 2 + i = 0$. Giá trị của biểu thức: $|z_1 – z_2|$ tương ứng bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Giải:

- Biến đổi biểu thức cần tính: $P^2 = |z_1 - z_2|^2 = |(z_1 - z_2)^2| = |(z_1 + z_2)^2 - 4z_1z_2|$
- Từ định lí VIET thay vào biểu thức trên, ta được:
- $P^2 = |(z_1 + z_2)^2 - 4z_1z_2| = |(3i+1)^2 - 4(i-2)| = 2 \to P = \sqrt{2}$
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 333. (3) Tổng $S = 1 + 2i + 3.i^2 + 4.i^3 + ... + 2017.i^{2016}$ tương ứng bằng

A. 2018. **B.** – 1 + 2017i. **C.** 2018i – 1. **D.** 1009 – 1008i.

Giải:

- Xét tổng: $S_{2017} = 1 + x + x^2 + ... + x^{2017} = 1.\dfrac{x^{2018}-1}{x-1} = \dfrac{x^{2018}-1}{x-1}$
- Đạo hàm hai vế ta được: $1 + 2x + 3x^2 + ... + 2017x^{2016} = \dfrac{2018x^{2017}(x-1) - (x^{2018}-1)}{(x-1)^2}$ (1)
- Thay x = i vào biểu thức (1) ta được:

- $1+2i+3.i^2+...+2017.i^{2016}=\dfrac{2018(i)^{2017}(i-1)-((i)^{2018}-1)}{(i-1)^2}=1009-1008i$
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 334. (3) Tổng S = i – 2i² + 3.i³ – … + 2017.i²⁰¹⁷ tương ứng bằng

A. 1008 – 1009i. **B.** 0. **C.** 2017i – 1. **D.** 1009i + 1009.

Giải:

- Xét tổng: $S_{2017}=1-x+x^2-...+x^{2016}-x^{2017}=1.\dfrac{(-x)^{2018}-1}{-x-1}=\dfrac{1-x^{2018}}{x+1}$
- Đạo hàm hai vế ta được: $-1+2x-3x^2+...-2017x^{2016}=\dfrac{-2018x^{2017}(x+1)-(1-x^{2018})}{(x+1)^2}$
- Nhân hai vế với (-x) ta được: $x-2x^2+3x^3-...+2017x^{2017}=\dfrac{-2018x^{2018}(x+1)-x(1-x^{2018})}{(x+1)^2}$
- Thay x = i vào hai vế của (1) ta được:
- $i-2i^2+3i^3-...+2017.i^{2017}=\dfrac{-2018.i^{2018}(i+1)-i(1-i^{2018})}{(i+1)^2}=1008-1009i$
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 335. (3) Cho số phức z không phải là số thực thỏa mãn: $w=\dfrac{z}{1+z^2}$. Khi đó giá trị của biểu thức $\dfrac{|z|}{1+|z|^2}$ tương ứng bằng

A. 1. **B.** 1/2. **C.** 1/4. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Giải:

- **Cách 1:** Có: $z\neq 0$ và $w\in R\to\dfrac{1}{w}=\dfrac{1+z^2}{z}=\dfrac{1}{z}+z\in R\leftrightarrow\dfrac{\overline{z}}{z.\overline{z}}+z=\dfrac{\overline{z}}{|z|^2}+z=\dfrac{a-ib}{|z|^2}+a+ib\in R$
- $\Leftrightarrow\dfrac{-ib}{|z|^2}+ib=0\leftrightarrow|z|=1$ (vì z không phải số thực nên b khác 0)
- Suy ra: $\dfrac{|z|}{1+|z|^2}=\dfrac{1}{2}$
- Vậy ta chọn đáp án **B.**
- **Cách 2:** Nếu $w\in R\to w-\overline{w}=0\leftrightarrow\dfrac{z}{1+z^2}-\dfrac{\overline{z}}{1+\overline{z}^2}=0\leftrightarrow z+z.\overline{z}^2-\overline{z}-\overline{z}.z^2=0$

- $\Leftrightarrow (z-\overline{z})(1-|z|^2)=0 \leftrightarrow |z|=1$ (vì z không phải số thực nên: $z-\overline{z}=2ib\neq 0$)
- Thay |z| = 1 vào biểu thức cần tính: $\frac{|z|}{1+|z|^2}=\frac{1}{2}$

Câu 336. (4) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: |z – i| = 2. Khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức: P = |z – 1| + |z – 3i + 2| sẽ bằng

A. 6. **B.** 3. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $4\sqrt{2}$.

Giải:

- Xử lí biểu thức P như sau: $P=|z-i+(i-1)|+|z-i-2(i-1)|$
- Gọi $\alpha=\widehat{(z-i),(i-1)}$. Áp dụng BĐT bunhia ta được:
- $P^2=(\frac{1}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}|z-i+(i-1)|+1.|z-i-2(i-1)|)^2\leq(\frac{1}{2}+1)(2|z-i+(i-1)|^2+|z-i-2(i-1)|^2)$
- $P^2\leq\frac{3}{2}(2|z-i|^2+2|i-1|^2+|z-i|^2+4|i-1|^2)=\frac{3}{2}(2.2^2+2.2+2^2+4.2)=36$
- Suy ra: $P\leq 6$. Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 337. (4) Cho số phức z không phải là số thực thỏa mãn: $w=mz+\frac{n}{z}$ là số thực. Trong đó m và n là hai hằng số thực. Khi đó giá trị của biểu thức $P=|z|+\frac{1}{|z|}$ tương ứng bằng

A. $\frac{m}{n}$. **B.** $m+\frac{1}{n}$. **C.** $\sqrt{\frac{n}{m}}+\sqrt{\frac{m}{n}}$. **D.** $\sqrt{m}+\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Giải:

- Bài cho w là số thực: $w=mz+\frac{n}{z}=mz+\frac{n.\overline{z}}{z.\overline{z}}=mz+\frac{n.\overline{z}}{|z|^2}\in R\rightarrow ib(m-\frac{n}{|z|^2})=0\rightarrow m-\frac{n}{|z|^2}$
- Suy ra: $|z|=\sqrt{\frac{n}{m}}\rightarrow P=\sqrt{\frac{n}{m}}+\sqrt{\frac{m}{n}}\rightarrow\frac{1}{P}=\frac{|z|}{1+|z|^2}=\frac{\sqrt{mn}}{m+n}$
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 338. (4) Tổng $S_{2020}=i+\frac{i^2}{2}+\frac{i^3}{3}+...+\frac{i^{2020}}{2020}=A+i.B$. Khi đó $|S_{2020}|$ nằm trong khoảng

A. $(0;\frac{1}{2})$. **B.** $(1;\frac{3}{2})$. **C.** $(\frac{3}{2};2)$. **D.** $(\frac{1}{2};1)$.

Giải:

- Xét tổng của cấp số nhân: $1+(ix)+(ix)^2+...+(i.x)^{2019}=1.\dfrac{(i.x)^{2020}-1}{ix-1}=\dfrac{x^{2020}-1}{ix-1}$
- $\Leftrightarrow 1+ix+i^2.x^2+...+i^{2019}.x^{2019}=\dfrac{x^{2020}-1}{ix-1}=\dfrac{(x^{2020}-1)(-ix-1)}{(ix-1)(-ix-1)}=\dfrac{-i.x^{2021}+ix-x^{2020}+1}{x^2+1}$
- Nhân hai vế với i ta được: $i+i^2x+i^3x^2+...+i^{2020}x^{2019}=\dfrac{(x^{2021}-x)-i(x^{2020}-1)}{x^2+1}$ (1)
- Tích phân hai vế (theo vi phân dx, ứng với cận từ 0 đến 1) ta được:
- $\int\limits_0^1(i+i^2x+i^3x^2+...+i^{2020}x^{2019})dx=\int\limits_0^1\dfrac{(x^{2021}-x)-i(x^{2020}-1)}{x^2+1}dx$
- $\Leftrightarrow (ix+\dfrac{i^2x^2}{2}+\dfrac{i^3x^3}{3}+...+\dfrac{i^{2020}x^{2020}}{2020})\Big|_0^1=\int\limits_0^1\dfrac{x^{2021}-x}{x^2+1}dx-i\int\limits_0^1\dfrac{x^{2020}-1}{x^2+1}dx$
- $\Leftrightarrow S_{2020}=i+\dfrac{i^2}{2}+\dfrac{i^3}{3}+...+\dfrac{i^{2020}}{2020}=-0,347+0,785i\rightarrow|S_{2020}|=0,86$
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 339. (4) Tổng $S_{2019}=i^2-\dfrac{i^3}{2}+\dfrac{i^4}{3}-...-\dfrac{i^{2019}}{2018}=\mathrm{A}+i.\mathrm{B}$. Khi đó $|S_{2019}|$ nằm trong khoảng

A. $(\dfrac{1}{2};1)$. **B.** $(1;\dfrac{3}{2})$. **C.** $(\dfrac{3}{2};2)$. **D.** $(0;\dfrac{1}{2})$.

Giải:

- Xét tổng của cấp số nhân: $1+(-ix)+(-ix)^2+...+(-i.x)^{2017}=1.\dfrac{(-i.x)^{2018}-1}{(-ix)-1}=\dfrac{x^{2018}+1}{ix+1}$
- $\Leftrightarrow 1-ix+i^2x^2-...-i^{2017}x^{2017}=\dfrac{x^{2018}+1}{ix+1}=\dfrac{(x^{2018}+1)(-ix+1)}{(ix+1)(-ix+1)}=\dfrac{-ix^{2019}-ix+x^{2018}+1}{x^2+1}$
- Nhân hai vế với i^2 ta được: $i^2-i^3x+i^4x^2-...-i^{2019}x^{2017}=\dfrac{-(x^{2018}+1)+i(x^{2019}+x)}{x^2+1}$ (1)
- Tích phân hai vế (theo vi phân dx, ứng với cận từ 0 đến 1) ta được:
- $\int\limits_0^1(i^2-i^3x+i^4x^2-...-i^{2019}x^{2017})dx=\int\limits_0^1\dfrac{-(x^{2018}+1)+i(x^{2019}+x)}{x^2+1}dx$
- $\Leftrightarrow (i^2x-\dfrac{i^3x^2}{2}+\dfrac{i^4x^3}{3}-...-\dfrac{i^{2019}x^{2018}}{2018})\Big|_0^1=-\int\limits_0^1\dfrac{x^{2018}+1}{x^2+1}dx+i\int\limits_0^1\dfrac{x^{2019}+x}{x^2+1}dx$
- $\Leftrightarrow S_{2019}=i^2-\dfrac{i^3}{2}+\dfrac{i^4}{3}-...-\dfrac{i^{2019}}{2018}=-0,785+0,347i\rightarrow|S_{2019}|=0,86$. Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 340. (3) Cho số phức z thỏa mãn |z| = 2. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của P = 2|z – 3| + 3|z + 3| tương ứng là M và m. Khi đó tích (mM) tương ứng bằng

A. 120. **B.** 0. **C.** $156\sqrt{2}$. **D.** $120\sqrt{3}$.

Giải:

- Áp dụng BĐT tam giác ta có: $|z-3|+|z+3|=|3-z|+|z+3| \geq |3-z+z+3|=6$
- Suy ra: $P=2|z-3|+3|z+3|=2(|z-3|+|z+3|)+|z+3|\geq 2.6+|z+3|=12+|z+3|\geq 12$
- Dấu "=" xảy ra ⇔ |z + 3| = 0 ⇔ z = -3 (TM)
- Áp dụng BĐT bunhia ta lại có:
- $P^2=(2|z-3|+3|z+3|)^2\leq(2^2+3^2)(|z-3|^2+|z+3|^2)=13.(2|z|^2+2|3|^2)=13.(2.2^2+2.3^2)$
- Suy ra: $P\leq 13\sqrt{2}$.
- Suy ra giá trị lớn nhất của P là $M=13\sqrt{2}$ và giá trị nhỏ nhất của P là: $m=12$.
- Suy ra tích số: (mM) = $12.13\sqrt{2}=156\sqrt{2}$.
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 341. (3) Cho hai số phức z, u thỏa mãn: |z + u | = 4 và |z – 2u| = 6. Khi đó giá trị của biểu thức P = $|z|^2 + 2|u|^2$ tương ứng bằng

A. $\frac{21}{2}$. **B.** $\frac{44}{3}$. **C.** $\frac{48}{5}$. **D.** $\frac{68}{3}$.

Giải:

- Gọi góc tạo bởi hai số phức z và u là: $\alpha=\widehat{z,u}$
- Áp dụng bình phương vô hướng ta có:
- $\begin{cases}|z+u|=4\\|z-2u|=6\end{cases}\leftrightarrow\begin{cases}|z+u|^2=16\\|z-2u|^2=36\end{cases}\leftrightarrow\begin{cases}|z|^2+|u|^2+2|z|.|u|.\cos\alpha=16 & (1)\\|z|^2+4|u|^2-4|z|.|u|.\cos\alpha=36 & (2)\end{cases}$
- Nhân hai vế của phương trình (1) với 2 rồi cộng hai phương trình trên vế theo vế ta được:
- $3|z|^2 + 6|u|^2 = 32 + 36 = 68$ ⇔ P = $|z|^2 + 2|u|^2 = 68/3$
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 342. (3) Cho phương trình bậc 2 ẩn phức z với các hệ số thực a, b: $z^2 + az + b = 0$. Biết phương trình có hai nghiệm phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $|z_1 - 1| = |z_2 - 2|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = 3|z_1| + 5|z_2|$ sẽ bằng

A. 8. **B.** 12. **C.** $\sqrt{34}$. **D.** $15\sqrt{2}$.

Giải:

- Gọi góc tạo bởi số phức z_1 và 1 là: $\alpha = \widehat{z_1,1}$.
- Áp dụng tính chất của phương trình phức hệ số thực, phương trình bậc hai hệ số thực đã cho sẽ có cặp nghiệm phức liên hợp: $\overline{z_2} = z_1$
- Từ giả thiết đã cho suy ra: $|z_1 - 1| = |z_2 - 2| = |\overline{z_2 - 2}| = |\overline{z_2} - 2| = |z_1 - 2|$ (1)
- Bình phương vô hướng hai vế của (1) ta được:
- $|z_1|^2 + 1 - 2|z_1|.\cos\alpha = |z_1|^2 + 4 - 4|z_1|.\cos\alpha \to \cos\alpha = \frac{3}{2|z_1|} \le 1 \to |z_1| \ge \frac{3}{2} \to |z_1| = |z_2| \ge \frac{3}{2}$
- Suy ra giá trị nhỏ nhất của: $|z_1| = |z_2|$ là: $\frac{3}{2}$
- Suy ra $P = 3|z_1| + 5|z_2| \ge 3.\frac{3}{2} + 5.\frac{3}{2} = 12 \to$ Giá trị nhỏ nhất của P là: $P_{min} = 12$.
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 343. (3) Cho số phức z khác 0 thỏa mãn: $\frac{iz + (3-4i)\overline{z}}{1-i} = 3|z|^2$. Số phức: w = $5iz + 2 + i$ có mô đun tương ứng bằng

A. 10. **B.** $2\sqrt{10}$. **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** $12\sqrt{3}$.

Giải:

- Gọi z = a + ib thế vào biểu thức giả thiết ta được:
- $\frac{iz + (3-4i)\overline{z}}{1-i} = 3|z|^2 \leftrightarrow \frac{i(a+ib) + (3-4i)(a-ib)}{1-i} = \frac{(3a-5b) - i(3a+3b)}{1-i} = 3(a^2+b^2)$
- $\Leftrightarrow (3a-5b) - i(3a+3b) = 3(a^2+b^2) - 3(a^2+b^2)i \to \begin{cases} 3a - 5b = 3(a^2+b^2) & (1) \\ 3a + 3b = 3(a^2+b^2) & (2) \end{cases}$
- Lấy (1) trừ đi (2) vế theo vế ta được: b = 0, thay vào (1) ta được:
- $3a = 3a^2 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \to z = a + ib = 0 \ \ (loai) \\ a = 1 \to z = a + ib = 1 \ \ (TM) \end{array}\right.$
- Suy ra: $|w| = |5i.1 + 2 + i| = 2\sqrt{10}$. Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 344. (4) Cho số phức z thỏa mãn: |z – 2 + i| = 1. Giá trị lớn nhất của: P = |z + 1| + |z – 5 + 2i| tương ứng bằng

A. 22. **B.** $4\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{11}$. **D.** $4\sqrt{10}$.

Giải:

- Xử lí biểu thức P như sau: P = |(z – 2 + i) + (3 – i)| + |(z – 2 + i) – (3 – i)|
- Áp dụng tính chất của bình phương vô hướng hoặc áp dụng kết quả máy móc của công thức:
- $|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$
- Áp dụng BĐT bunhia, ta có:
- $P^2\le(1+1)(|(z-2+i)+(3-i)|^2+|(z-2+i)-(3-i)|^2)=2.\left(2|z-2+i|^2+2|3-i|^2\right)=44$
- Suy ra: $P\le\sqrt{44}=2\sqrt{11}$
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 345. (3) Cho số phức z không phải số thực thỏa mãn: $w=\frac{m.z}{4+z^2}$ là một số thực, trong đó m là hằng số thực. Giá trị của: $P=\frac{2|z|}{3+|z|^3}$ bằng

A. $\frac{4}{11}$. **B.** 2. **C.** $\frac{4}{13}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Giải:

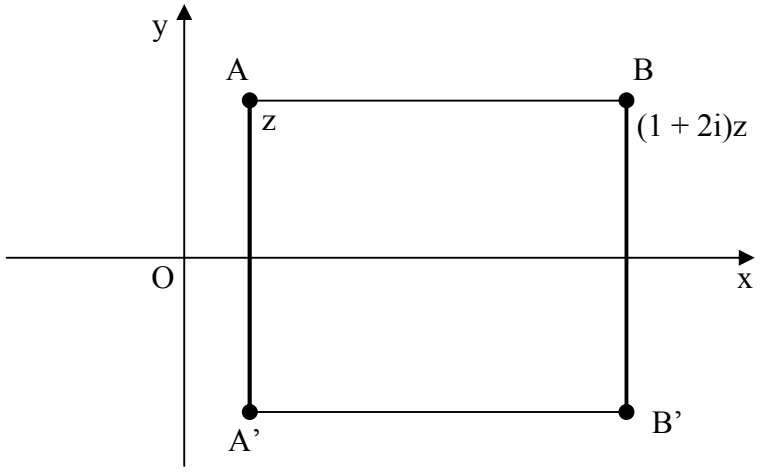
- Từ giả thiết suy ra: $4+z^2=\frac{mz}{w}\leftrightarrow z^2-\frac{m}{w}z+4=0$. Đây là phương trình bậc 2 phức hệ số thực, lại có điều kiện số phức z không thuần thực tức là phương trình phải tồn tại hai nghiệm phức liên hợp: $z_1=\overline{z_2}\to|z_1|=|z_2|=|z|$
- Theo VIET ta có: $z_1.z_2=\frac{C}{A}=4\to|z_1.z_2|=4=|z_1|^2=|z_2|^2\to|z_1|=|z_2|=|z|=2$
- Suy ra: $P=\frac{2|z|}{3+|z|^3}=\frac{2.2}{3+2^3}=\frac{4}{11}$
- Vậy ta chọn đáp án **A.**
- **Ghi nhớ:** Nếu z không thuần thực mà có $w=\frac{m.z}{R^2+z^2}$ thuần thực thì thôi suy ra luôn: |z| = R.

Câu 346. (3) Cho số phức z và số phức liên hợp của nó được biểu diễn bởi hai điểm A và A' trên mặt phẳng phức. Số phức (3 + 2i)z và số phức liên hợp của nó được biểu diễn bởi hai điểm B và B' trên mặt phẳng phức. Biết AA'B'A là hình chữ nhật. Giá trị nhỏ nhất của P = |z – 1 + 4i| bằng

A. 3. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Giải:

- Đã biết hai điểm biểu diễn số phức liên hợp đối xứng nhau qua trục thực Ox, ta suy ra: A và A' đối xứng nhau qua Ox; B và B' đối xứng nhau qua Ox. Dễ thấy ABB'A' là hình thang cân với hai đáy là AA' và BB' (AA' // BB').
- Để ABB'A' là hình chữ nhật $\Leftrightarrow$ AA' = BB' $\Leftrightarrow$ $y_A = y_B$ $\Leftrightarrow$ phần ảo của hai số phức biểu diễn hai điểm A và B bằng nhau.
- Gọi số phức z biểu diễn điểm A là z = a + ib , suy ra số phức biểu diễn điểm B là:



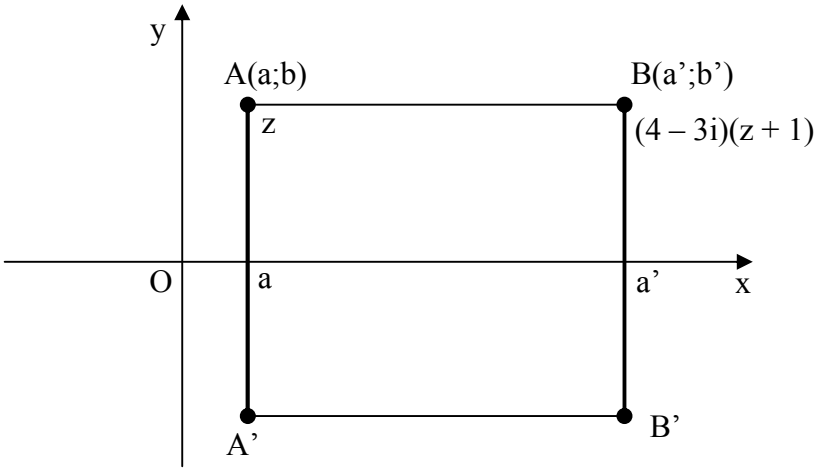
- $z_B = (3 + 2i)z = (3 + 2i)(a + ib) = (3a – 2b) + i(2a + 3b)$
- Suy ra: phần ảo của z = phần ảo của z_B $\Leftrightarrow$ b = 2a + 3b $\Leftrightarrow$ b = –a. Suy ra: z = (a – ia)
- Thay vào biểu thức P, ta được:
- $P = |z - 1 + 4i| = |a - ia - 1 + 4i| = |(a-1) - i(a-4)| = \sqrt{(a-1)^2 + (a-4)^2} = \sqrt{2a^2 - 10a + 17}$
- $P = \sqrt{2a^2 - 10a + 17} = \sqrt{2(a - \frac{5}{2})^2 + \frac{9}{2}} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi $a = \frac{5}{2}$.
- Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là $P_{min} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 347. (3) Cho số phức z và số phức liên hợp của nó được biểu diễn bởi hai điểm A và A' trên mặt phẳng phức. Số phức (4 – 3i)(z + 1) và số phức liên hợp của nó được biểu diễn bởi hai điểm B và B' trên mặt phẳng phức. Biết AA'B'A là hình vuông. Giá trị của |iz + 3 – 4i | tương ứng nằm trong

A. $(0;1)$. **B.** $(1;4)$. **C.** $(4;7)$. **D.** $(7;+\infty)$.

Giải:

- Gọi z = a + ib. Ta có hình vẽ minh họa:



- ABB'A' là hình thang cân với hai đáy là AA' và BB'.
- Để ABB'A' là hình vuông thì ta phải có: $\begin{cases} AA' = BB' \\ AA' = AB \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} b = b' & (1) \\ 2\,|\,b\,| = |\,a' - a\,| & (2) \end{cases}$
- Ta đi xác định số phức được biểu diễn bởi điểm B:
- $z_B = (4 - 3i)(z + 1) = (4 - 3i)(a + ib + 1) = (4a + 4 + 3b) + i(4b - 3a - 3) = a' + ib'$
- Thay vào hệ phương trình (1), (2) ta được:
- $\begin{cases} b = b' & (1) \\ 2\,|\,b\,| = |\,a' - a\,| & (2) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} b = 4b - 3a - 3 \\ 2\,|\,b\,| = |\,4a + 4 + 3b - a\,| \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} b = a + 1 & (1) \\ 2\,|\,b\,| = |\,3a + 4 + 3b\,| & (2) \end{cases}$
- Thế (1) vào (2), ta được: $2\,|\,a+1\,| = |\,3a + 4 + 3a + 3\,| = |\,6a + 7\,| \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2a + 2 = 6a + 7 \\ 2a + 2 = -6a - 7 \end{array}\right.$
- $\leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -\dfrac{5}{4} \to b = -\dfrac{1}{4} \\ a = -\dfrac{9}{8} \to b = -\dfrac{1}{8} \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -\dfrac{5}{4} - \dfrac{i}{4} \to |\,iz + 3 - 4i\,| = \dfrac{\sqrt{610}}{4} \\ z = -\dfrac{9}{8} - \dfrac{i}{8} \to |\,iz + 3 - 4i\,| = \dfrac{\sqrt{1153}}{32} \end{array}\right.$
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 348. (3) Cho số phức z thỏa mãn: $|z^2 - 4z + 13| = |(z - 2 - 3i)(z - 1 + i)|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức: P = |z – 5| tương ứng là

A. 1. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{10}$. **C.** $3\sqrt{2}$. **D.** $\dfrac{1}{2\sqrt{10}}$.

Giải:

- Phân tích phương trình bậc 2 theo nghiệm: $z^2-4z+13=0\leftrightarrow(z-2-3i)(z-2+3i)=0$
- Thế vào biểu thức giả thiết ta được:
- $|(z-2-3i)(z-2+3i)|=|(z-2-3i)(z-1+i)|\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|z-2-3i|=0\\|z-2+3i|=|z-1+i|\end{array}\right.$
- **Trường hợp 1:** Với $|z-2-3i|=0\leftrightarrow z=2+3i\rightarrow P=|2+3i-5|=3\sqrt{2}$
- **Trường hợp 2:** $|z-2+3i|=|z-1+i|\leftrightarrow|(x-2)+i(y+3)|=|(x-1)+i(y+1)|$
- $\Leftrightarrow(x-2)^2+(y+3)^2=(x-1)^2+(y+1)^2\leftrightarrow 2x-4y-11=0\rightarrow x=2y+\frac{11}{2}$
- Thế vào biểu thức của P, ta được:
- $P=|z-5|=|x+iy-5|=|2y+\frac{11}{2}+iy-5|=|2y+\frac{1}{2}+iy|=\sqrt{(2y+\frac{1}{2})^2+y^2}=\sqrt{5y^2+2y+\frac{1}{4}}$
- $P=\sqrt{5y^2+2y+\frac{1}{4}}=\sqrt{5(y+\frac{1}{5})^2+\frac{1}{20}}\geq\sqrt{\frac{1}{20}}=\frac{\sqrt{5}}{10}$
- So sánh hai trường hợp ta thấy giá trị nhỏ nhất của P là: $P_{min}=\frac{\sqrt{5}}{10}$
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 349. (3) Cho ba số phức cùng mô đun: $|z_1|=|z_2|=|z_3|=R>0$ và thỏa mãn: $z_1+z_2+z_3=0$. Mệnh đề nào dưới đây sai ?

A. $|z_1+z_2|=|z_2+z_3|=|z_3+z_1|$.

B. $B=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=0$.

C. $C=z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$.

D. $D=z_1^3+z_2^3+z_3^3=0$.

Giải:

- Ta có: $z_1=-(z_2+z_3)\rightarrow|z_1|=|z_2+z_3|=R$. Tương tự, ta có: $|z_3+z_1|=|z_1+z_2|=R$
- Suy ra: Mệnh đề A đúng.
- Ta có: $B=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=\frac{z_1z_2z_3}{|z_3|^2}.\frac{|z_3|^2}{z_3}+\frac{z_1z_2z_3}{|z_1|^2}.\frac{|z_1|^2}{z_1}+\frac{z_1z_2z_3}{|z_2|^2}.\frac{|z_2|^2}{z_2}=\frac{z_1z_2z_3}{R^2}(\overline{z_3}+\overline{z_1}+\overline{z_2})$
- Từ giả thiết suy ra: $\overline{z_1+z_2+z_3}=0\leftrightarrow\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}=0\rightarrow B=0$
- Suy ra mệnh đề B đúng.
- Biến đổi biểu thức C như sau:
- $C=z_1^2+z_2^2+z_3^2=(z_1+z_2+z_3)^2-2(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)=0-0=0$
- Suy ra mệnh đề C đúng.

- Có thể chọn luôn mệnh đề của đáp án **D** sai.
- Tuy nhiên chúng ta có thể chứng minh đáp án D sai như sau:
- Ta có: $D = z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = (z_1 + z_2 + z_3)^3 - 3(z_1 + z_2)(z_2 + z_3)(z_3 + z_1) = 0 - 3(-z_3)(-z_1)(-z_2) = 3z_1z_2z_3$
- Suy ra: $|D| = |z_1^3 + z_2^3 + z_3^3| = |3z_1z_2z_3| = 3|z_1|.|z_2|.|z_3| = 3R^3 \neq 0$
- Vậy mệnh đề của đáp án **D** sai.

Câu 350. (3) Cho một đa thức P(z) với các hệ số thực. Biết rằng số phức z (không thuần thực) thỏa mãn: P(z) = 0 thì mệnh đề đúng trong các mệnh đề dưới đây là:

A. $P(|z|) = 0$. **B.** $P(z^2) = 0$. **C.** $P(\frac{1}{z}) = 0$. **D.** $P(\overline{z}) = 0$.

Giải:

- **Cách 1:** Có thể tạo ra một đa thức cụ thể có hệ số thực và nghiệm phức: $P(z) = z^2 + 1 = 0$.
- Suy ra nghiệm: $z = i \to \overline{z} = -i \to P(\overline{z}) = (-i)^2 + 1 = 0$
- Vậy ta chọn đáp án **D.**
- **Cách 2:** Phương pháp tự luận, ta đi chứng minh lại một kết quả đã biết.
- Xét đa thức phức hệ số thực: $P(z) = a_0 + a_1z + ... + a_nz^n = 0$
- Liên hợp hai vế ta được:
- $\overline{P(z)} = \overline{a_0 + a_1z + ... + a_nz^n} = 0 \leftrightarrow \overline{a_0} + a_1\overline{z} + ... + + ... + a_n\overline{z}^n = 0 \leftrightarrow P(\overline{z}) = 0$
- Suy ra: $\overline{z}$ cũng là nghiệm của đa thức P(z) = 0.
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 351. (3) Cho số phức z thỏa mãn: $|z| \geq 1$. Xét biểu thức: $P = \frac{4z - 5i}{4 + 5iz}$. Mệnh đề đúng là:

A. $|P| = 1$. **B.** $0 \leq |P| \leq 1$. **C.** $|P| > 1$. **D.** $|P| \geq 2$.

Giải:

- Ta có:
- $P = \frac{4z - 5i}{4 + 5iz} \leftrightarrow 4P + 5iPz = 4z - 5i \leftrightarrow z = \frac{4P + 5i}{4 - 5iP} \to |z| = |\frac{4P + 5i}{4 - 5iP}| = |\frac{4P + 5i}{-i(5P + 4i)}| = |\frac{4P + 5i}{5P + 4i}| \geq 1$
- $\Leftrightarrow |4P + 5i| \geq |5P + 4i| \leftrightarrow 16|P|^2 + 25 + 40|P|\cos\alpha \geq 25|P|^2 + 16 + 40|P|\cos\alpha$
- $\Leftrightarrow 1 \geq |P|^2 \leftrightarrow |P| \leq 1$
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 352. (3) Cho hai số phức z thỏa mãn: |z – 2u| = 2|u| = |z|. Khi đó giá trị của biểu thức: $P=(\frac{z}{u})^2+16(\frac{u}{z})^2$ tương ứng bằng

A. -4. **B.** $3+i\sqrt{3}$. **C.** $17\sqrt{2}$. **D.** $-1+i\sqrt{3}$.

Giải:

- Từ giả thiết suy ra: $\begin{cases}|\frac{z-2u}{u}|=2\\ |\frac{z}{u}|=2\end{cases}\leftrightarrow\begin{cases}|\frac{z}{u}-2|=2\\ |\frac{z}{u}|=2\end{cases}$
- Đặt số phức: z/u = a + ib, thay vào hệ phương trình trên ta được:
- $\begin{cases}|a+ib-2|=2\\ |a+ib|=2\end{cases}\leftrightarrow\begin{cases}(a-2)^2+b^2=4\\ a^2+b^2=4\end{cases}$
- Lấy hai phương trình trừ đi nhau vế theo vế , ta được: -4a + 4 = 0 ⇔ a = 1.
- Thế a = 1 vào một phương trình, suy ra: $b^2=3\rightarrow b=\pm\sqrt{3}\rightarrow\frac{z}{u}=1\pm i\sqrt{3}$
- Thay vào biểu thức: $P=(1+i\sqrt{3})^2+16(\frac{1}{1+i\sqrt{3}})^2=-4$
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 353. (3) Cho số phức z thỏa mãn: |z + 2 – 3i| = |z – 1 + i|. Biết số phức w = iz + 2. Khi đó giá trị nhỏ nhất của |w| tương ứng bằng

A. 1. **B.** 1/2. **C.** 3/4. **D.** 3/2.

Giải:

- Biến đổi giả thiết ban đầu: $|i|.|z+2-3i|=|i|.|z-1+i|\leftrightarrow|iz+2i+3|=|iz-i-1|$ (1)
- Thế iz = w – 2 , vào biểu thức (1) ta được:
- $|w-2+2i+3|=|w-2-i-1|\leftrightarrow|w+1+2i|=|w-3-i|$ (2)
- Đặt w = a + ib, thay vào biểu thức (2) ta được:
- $|a+ib+1+2i|=|a+ib-3-i|\leftrightarrow(a+1)^2+(b+2)^2=(a-3)^2+(b-1)^2\rightarrow b=\frac{8a-5}{6}$
- Khi đó: $|w|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+(\frac{8a-5}{6})^2}=\sqrt{\frac{(10a-4)^2+9}{36}}\geq\frac{1}{2}$
- Dấu "=" xảy ra ⇔ $a=\frac{2}{5}\rightarrow b=-\frac{3}{10}$
- Suy ra giá trị nhỏ nhất của |w| là $\frac{1}{2}$. Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 354. (3) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: |z| = 3 và $|2z.\bar{z}+3z|=9$?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Giải:

- **Cách 1:** Sử dụng BĐT tam giác
- Từ: $|2z.\bar{z}+3z|=9 \leftrightarrow |2|z|^2+3z|=9 \leftrightarrow |2.9+3z|=9 \leftrightarrow |z+6|=3$
- Áp dụng BĐT tam giác: $3=|z+6|=|6-(-z)|\geq|6|-|-z|=6-3=3$
- Suy ra dấu "=" phải xảy ra $\Leftrightarrow$ $6=k.(-z)$ (trong đó $k\geq 1$)
- $\rightarrow |6|=|k(-z)|=k.|z|=3k \rightarrow k=2 \rightarrow 6=2(-z) \rightarrow z=-3$
- Suy ra chỉ có duy nhất một số phức z = -3 thỏa mãn đồng thời hai điều kiện bài toán.
- Vậy ta chọn đáp án **C.**
- **Cách 2:** Gọi z = a + ib thay vào các giả thiết bài toán ta được:
- $\begin{cases} |a+ib|=3 \\ |2.|z|^2+3z|=9 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=9 \\ |2.9+3z|=9 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=9 \\ |z+6|=3 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=9 \\ |a+ib+6|=3 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=9 & (1) \\ (a+6)^2+b^2=9 & (2) \end{cases}$
- Lấy phương trình (2) trừ phương trình (1), vế theo vế ta được:
- $12a+36=0 \rightarrow a=-3 \rightarrow b=0 \rightarrow z=-3$. Suy ra có duy nhất một số phức thỏa mãn.
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 355. (3) Cho hai số phức z và u thỏa mãn: |z| = |u| = 1. Khi đó số phức $w=\dfrac{z+u}{1+zu}$ có phần ảo tương ứng bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** -1. **D.** $1/2$.

Giải:

- **Cách 1:** Ta có thể giả sử z = 1 và u = i thay vào biểu thức của w sẽ được:
- $w=\dfrac{z+u}{1+zu}=\dfrac{1+i}{1+1.i}=1$. Suy ra số phức w thuần thực. Suy ra phần ảo của nó bằng 0.
- Vậy ta chọn đáp án **A.**
- **Cách 2:** Ta có: $\bar{z}=\dfrac{1}{z}$; $\bar{u}=\dfrac{1}{u}$
- Suy ra: $w=\dfrac{z+u}{1+zu}=\dfrac{\frac{1}{\bar{z}}+\frac{1}{\bar{u}}}{1+\frac{1}{\bar{z}}\frac{1}{\bar{u}}}=\dfrac{\bar{u}+\bar{z}}{\bar{u}.\bar{z}+1}=\overline{w} \rightarrow w$ là số thuần thực $\rightarrow$ có phần ảo bằng 0.
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 356. (3) Gọi (H) là hình biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện: $|3z-\overline{z}|\le 4$ và số phức z có phần thực không âm. Diện tích hình (H) tương ứng bằng

A. 2π. **B.** π^2. **C.** 4π. **D.** π.

Giải:

- Gọi z = x + iy, thay vào giả thiết ta được: $|3z-\overline{z}|\le 4\leftrightarrow|3(x+iy)-(x-iy)|\le 4\leftrightarrow|2x+4iy|\le 4$
- $\Leftrightarrow |x+2iy|\le 2\leftrightarrow x^2+4y^2\le 4\leftrightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}\le 1$
- Đây là hình elip (E) có bán trục lớn a = 2, bán trục nhỏ b = 1. Hình (H) chính là hình giới hạn bởi elip (E) và trục tung Oy (ứng với hoành độ $x\ge 0$).
- Suy ra diện tích hình (H) là một nửa diện tích hình elip (E).
- $S_{(H)}=\frac{S_{(E)}}{2}=\frac{\pi ab}{2}=\frac{\pi.2.1}{2}=\pi$.
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 357. (3) Cho số phức z thỏa mãn $|z+2-5i|\le 2$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức w = (3 + 4i)z + 2 – i là hình tròn có chu vi bằng

A. 20π. **B.** 16π. **C.** $8\pi\sqrt{2}$. **D.** $4\pi\sqrt{3}$.

Giải:

- Từ giả thiết suy ra: $|3+4i|.|z+2-5i|\le 2.|3+4i|\leftrightarrow|(3+4i)z+(3+4i)(2-5i)|\le 10$
- $\Leftrightarrow |(3+4i)z+26-7i|\le 10$
- Có: (3 + 4i)z = w – 2 + i, thế vào biểu thức trên ta được:
- $|w-2+i+26-7i|\le 10\leftrightarrow|w+24-6i|\le 10$
- Hình biểu diễn là hình tròn có bán kính R = 10, suy ra chu vi: $p=2\pi R=20\pi$
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 358. (3) Cho số phức z thỏa mãn: $(3+2i)|z|=\frac{12}{z}+1-5i$. Biết điểm biểu diễn số phức $w=(3-4i)z+5-2i$ là đường tròn tâm I và bán kính R. Giá trị của bán kính R nằm trong khoảng

A. $0<R<1$. **B.** $\sqrt{2}<R<3\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{3}<R<4\sqrt{2}$. **D.** $4\sqrt{2}<R<5\sqrt{3}$.

Giải:

- $(3+6i)|z|=\frac{\sqrt{190}}{z}+2-i\leftrightarrow(3+6i)|z|-2+i=\frac{\sqrt{190}}{z}\rightarrow|(3+6i)|z|-2+i|=\frac{\sqrt{190}}{|z|}$

- Đặt: $t = |z| > 0 \rightarrow |(3+6i)t - 2 + i| = \frac{12}{t} \leftrightarrow |(3t-2) + i(6t+1)| = \frac{12}{t} \leftrightarrow \sqrt{(3t-2)^2 + (6t+1)^2} = \frac{12}{t}$
- $\Leftrightarrow \sqrt{45t^2+5} = \frac{\sqrt{190}}{t} \leftrightarrow 45t^2 + 5 = \frac{190}{t^2} \leftrightarrow 45t^4 + 5t^2 - 190 = 0 \rightarrow t^2 = 2 \rightarrow t = \sqrt{2} = |z|$
- Từ: $w = (3-4i)z + 5 - 2i \rightarrow w - 5 + 2i = (3-4i)z \rightarrow |w - 5 + 2i| = |(3-4i)z| = |3-4i| . |z| = 5\sqrt{2}$
- Suy ra bán kính đường tròn biểu diễn số phức w tương ứng là: $R = 5\sqrt{2}$
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 359. (3) Cho số phức z thỏa mãn: $(3+2i)z + \frac{325}{3-4i} = 0$. Gọi M là điểm biểu diễn số phức $w = (i+2)z - 3i + 1$. Biết $\alpha = \widehat{MOx} =$ góc tạo bởi $\overrightarrow{OM}$ với trục Ox. Khi đó góc 2α có giá trị nằm trong cung phần tư tương ứng là

A. góc phần tư thứ 3. **B.** góc phần tư thứ nhất.

C. góc phần tư thứ 2. **D.** góc phần tư thứ 4.

Giải:

- Rút gọn số phức z bằng CASIO nhanh ta được: $z = \frac{-325}{(3-4i)(3+2i)} = -17 - 6i$
- Suy ra số phức: $w = (i+2)z - 3i + 54 = (i+2)(-17-6i) - 3i + 1 = 26 - 32i$
- Suy ra góc tạo bởi Ox của điểm biểu diễn w tương ứng (chính là Argument của w):
- $\begin{cases} \cos\alpha = \frac{a}{|w|} = \frac{26}{10\sqrt{17}} \rightarrow \alpha \approx -51^\circ \rightarrow 2\alpha = -102^\circ \\ \sin\alpha < 0 \end{cases}$. Suy ra góc 2α nằm ở cung phần tư thứ 3.

Câu 360. (3) Cho số phức z không thuần thực sao cho: $w = \frac{2017z}{1+4z^2}$ là số phức thuần thực. Khi đó giá trị của biểu thức: $P = \frac{|z|}{3+4|z|^3}$ tương ứng bằng

A. 1. **B.** $\frac{1}{7}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Giải:

- $w = \frac{2017z}{1+4z^2} \leftrightarrow 4z^2 - \frac{2017}{w}z + 1 = 0$
- z không thuần thực suy ra tồn tại cặp nghiệm phức liên hợp có cùng mô đun:
- $z_1, z_2 \rightarrow z_1 = \overline{z_2}$; $|z_1| = |z_2| = |z|$
- Áp dụng VIET ta có: $z_1.z_2 = \frac{C}{A} = \frac{1}{4} \rightarrow |z_1.z_2| = \frac{1}{4} = |z|^2 \rightarrow |z| = \frac{1}{2}$

- Thay vào biểu thức: $P=\frac{|z|}{3+4|z|^3}=\frac{\frac{1}{2}}{3+4.\frac{1}{8}}=\frac{1}{7}$
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 361. (3) Cho z là số phức không thuần thực sao cho phần thực của số phức $u=\frac{1}{|z|+z}$ bằng 2. Khi đó |z| có giá trị bằng

A. 1/4. **B.** 1/2. **C.** 1/8. **D.** 1.

Giải:

- **Cách 1:** Trắc nghiệm.
- Ta có thể giả sử: $u=\frac{1}{|z|+z}=2+ib=2$ (coi như b = 0)
- Khi đó ta có: $u=\frac{1}{|z|+z}=2\leftrightarrow|z|+z=\frac{1}{2}\leftrightarrow z=\frac{1}{2}-|z|\rightarrow|z|=|\frac{1}{2}-|z||$
- Đặt t = |z| > 0, suy ra: $t=|\frac{1}{2}-t|\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{1}{2}-t\rightarrow t=\frac{1}{4}\ (TM)\\ t=-\frac{1}{2}+t\rightarrow\ \ (VN)\end{array}\right.$
- Vậy ta chọn đáp án **A.**
- **Cách 2:** Tự luận có cơ sở:
- Gọi $u=\frac{1}{|z|+z}=2+ib\leftrightarrow 1=|z|(2+ib)+(2+ib)z\leftrightarrow 1-|z|(2+ib)=(2+ib)z$
- Lấy mô đun hai vế: $|1-|z|(2+ib)|=|(2+ib)z|=|2+ib|.|z|=|z|\sqrt{4+b^2}$
- Đặt t = |z| > 0, suy ra:
- $|1-t(2+ib)|=t\sqrt{4+b^2}\leftrightarrow|(1-2t)-i(tb)|=t\sqrt{4+b^2}\leftrightarrow(1-2t)^2+(tb)^2=t^2(4+b^2)\rightarrow t=\frac{1}{4}$
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 362. (3) Cho phương trình bậc hai hệ số thực a và b: $z^2 - bz + 3a + a^2 = 0$. Biết phương trình có một nghiệm z_1 không thuần thực thỏa mãn: $|z_1| = 2$. Mệnh đề đúng là:

A. a = 4 hoặc a = -1. **B.** a = 1 và b > 4.

C. a = 1 và -4 < b < 4. **D.** a = 1 hoặc a = -4 và b < - 4.

Giải:

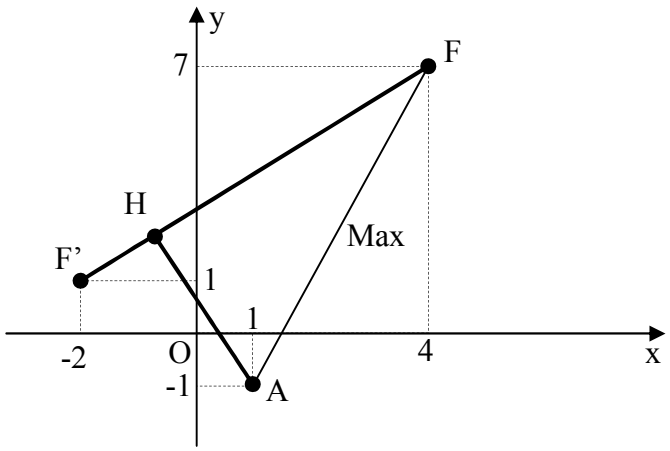
- Đã biết phương trình bậc hai hệ số thực nếu có nghiệm phức không thuần thực thì phải có đủ một cặp nghiệm liên hợp có cùng mô đun: z_1 và z_2 có $|z_1| = |z_2|$
- Theo VIET, ta có: $z_1.z_2 = C/A = 3a + a^2 \rightarrow |z|^2 = 3a + a^2 = 2^2 \leftrightarrow a^2 + 3a - 4 = 0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = -4 \end{array}\right.$
- Tuy nhiên, chúng ta cần có thêm điều kiện để phương trình bậc 2 có nghiệm phức là:
- $\Delta = b^2 - 4.(3a + a^2) < 0 \leftrightarrow b^2 - 4.4 < 0 \leftrightarrow -4 < b < 4$
- Vậy ta chọn mệnh đề đúng là mệnh đề **C.**

Câu 363. (4) Cho số phức z thỏa mãn $|z + 2 - i| + |z - 4 - 7i| = 6\sqrt{2}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z - 1 + i|$. Khi đó tổng của (M + m) bằng

A. $\frac{5\sqrt{2} + 2\sqrt{73}}{2}$. **B.** $\sqrt{13} + \sqrt{73}$. **C.** $5\sqrt{2} + \sqrt{73}$. **D.** $\frac{5\sqrt{2} + \sqrt{73}}{2}$.

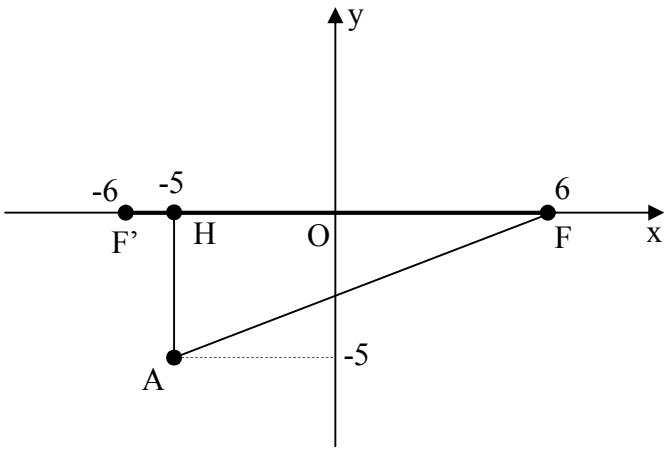
Giải:

- **Cách 1:** Quỹ tích điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn: $|z + 2 - i| + |z - 4 - 7i| = 6\sqrt{2}$
- Đây là mô hình đường elip: $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$. Trong đó:
- $z_1 = -2 + i$; $z_2 = 4 + 7i \rightarrow$ tiêu cự của elip là: $2c = |z_1 - z_2| = |-2 + i - 4 - 7i| = 6\sqrt{2} = 2a$
- Đây là dạng elip suy biến thành đoạn thẳng hai tiêu cự: FF', trong đó $F = z_1$ và $F' = z_2$.
- Giá trị của: $|z - (1 - i)|$ coi như khoảng cách từ điểm $A = z_A = 1 - i$, tới đoạn thẳng FF'.
- $F' = z_1 = -2 + i = (-2;1)$; $F = z_2 = 4 + 7i = (4;7)$; $A = z_A = 1 - i = (1;-1)$.



- Giá trị lớn nhất chính là đoạn: AF = max = M = $\sqrt{(4-1)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{73}$.
- Giá trị nhỏ nhất chính là: AH = d(A,FF') . Có phương trình tổng quát của FF' trong Oxy là:
- (FF'): $x - y + 3 = 0 \rightarrow d(A;FF') = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. Suy ra: giá trị nhỏ nhất: min = m = $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

- Suy ra: M + m = $\frac{5\sqrt{2}}{2}+\sqrt{73}=\frac{5\sqrt{2}+2\sqrt{73}}{2}$.
- Vậy ta chọn đáp án **A.**
- **Cách 2:** Sử dụng phương pháp xoay trục tọa độ trong mặt phẳng phức, ta có:
- $|z+2-i|+|z-4-7i|=6\sqrt{2}\leftrightarrow|(z-1-4i)+(3+3i)|+|(z-1-4i)-(3+3i)|=6\sqrt{2}$
- $\Leftrightarrow |1+i|.|(z-1-4i)+(3+3i)|+|1+i|.|(z-1-4i)-(3+3i)|=6\sqrt{2}.|1+i|=12$
- $\Leftrightarrow |(1-i)(z-1-4i)+(1-i)(3+3i)|+|(1-i)(z-1-4i)-(1-i)(3+3i)|=12$
- $\Leftrightarrow |(1-i)(z-1-4i)+6|+|(1-i)(z-1-4i)-6|=12$
- Đặt: $(1-i)(z-1-4i)=u\rightarrow|u+6|+|u-6|=12$ (1)
- Có trục dài: 2a = 12; tiêu cự nhìn nhanh: 2c = 12.
- Đây là dạng quỹ tích ELIP suy biến thành một đoạn thẳng nằm trên trục hoành [-6;6] {vì tiêu cự 2c = trục dài 2a}
- Biểu thức: $|z-1+i|=|(z-1-4i)+5i|=\frac{|1-i|}{|1-i|}.|(z-1-4i)+5i|=\frac{1}{\sqrt{2}}.|(1-i)(z-1-4i)+5+5i|$
- $|z-1+i|=\frac{1}{\sqrt{2}}.|u+5+5i|=\frac{1}{\sqrt{2}}.|u-(-5-5i)|$.
- Trong đó: $|u-(-5-5i)|$ = d(A,FF') = (khoảng cách từ điểm A(-5;-5) tới đoạn F'F).
- Giá trị lớn nhất của biểu thức: $|u-(-5-5i)|$ là: AF = $\sqrt{11^2+5^2}=\sqrt{146}$



- Giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $|u-(-5-5i)|$ là: AH = 5
- Vậy suy ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
- $|z-1+i|=\frac{1}{\sqrt{2}}.|u-(-5-5i)|$ lần lượt là: $M=\frac{\sqrt{146}}{\sqrt{2}}=\sqrt{73}$ và $m=\frac{5}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$
- Suy ra: M + m = $\frac{5\sqrt{2}+2\sqrt{73}}{2}$. Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 364. (3) Cho số phức z không thuần thực thỏa mãn: $w=\frac{1+z+z^2}{1-z+z^2}$ là số thực. Giá trị của biểu thức: $P=\sqrt{1+2|z|}$ tương ứng bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Giải:

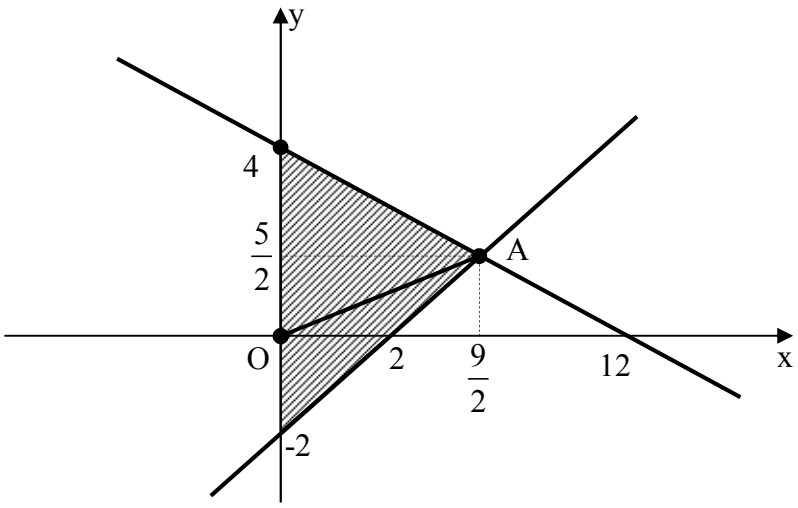
- Từ giả thiết ra biến đổi: $w=\frac{1+z+z^2}{1-z+z^2}\leftrightarrow(w-1)z^2-(w+1)z+(w-1)=0$ (1)
- Phương trình (1) biểu diễn phương trình bậc 2 của số phức không thuần thực z.
- **Trường hợp 1:** Nếu w = 1 thì phương trình (1) suy biến thành: -2z = 0 ⇔ z = 0. Đây là số phức đặc biệt vừa thuần thực vừa thuần ảo. Vậy suy ra: $w\neq 1$.
- **Trường hợp 2:** Biết rằng $w\neq 1$ nên phương trình (1) luôn là phương trình bậc 2 với các nghiệm phức không thuần thực. Suy ra nó phải có một cặp nghiệm liên hợp: z_1,z_2.
- Trong đó: $z_1=\overline{z_2}\rightarrow|z_1|=|z_2|$.
- Theo hệ thức VIET, ta có: $z_1.z_2=\frac{c}{a}=\frac{w-1}{w-1}=1\rightarrow|z_1.z_2|=|z|^2=1\rightarrow|z|=1$.
- Suy ra giá trị của biểu thức: $P=\sqrt{1+2|z|}=\sqrt{1+2.1}=\sqrt{3}$
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 365. (4) Cho số phức z = a + ib trong đó a, b thỏa mãn: $a,b\geq 0;a-b\leq 2;a+3b\leq 12$. Giá trị lớn nhất của |z| tương ứng bằng

A. $\sqrt{113}$. **B.** $\frac{\sqrt{107}}{3}$. **C.** 14. **D.** $\frac{\sqrt{106}}{2}$.

Giải:

- Đây là dạng bài toán xác định giá trị lớn nhất của mô đun z khi biết z nằm trong một miền được xác định bởi các đường thẳng giới hạn. Có thể coi đó là miền đa giác. Những bài toán dạng này cách nhanh nhất vẫn là sử dụng hình vẽ nhanh.
- Trước hết ta xác định miền chứa số phức z từ hệ điều kiện giả thiết:



- Điểm A là giao điểm của hai đường thẳng: a – b = 2 và a + 3b = 12. Suy ra: $A=(\frac{9}{2};\frac{5}{2})$.
- Điểm A là điểm nằm trong miền D cách xa O nhất , ứng với điểm biểu diễn số phức có mô đun lớn nhất: $|z|_{\max}=OA=\sqrt{(\frac{9}{2})^2+(\frac{5}{2})^2}=\frac{\sqrt{106}}{2}$. Đạt được khi: $A=z_A=\frac{9}{2}+\frac{5}{2}i$.
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 366. (3) Cho phương trình phức: $z^{2017}+z^{2016}+...+z+1=0$ có đúng 2017 nghiệm phức lần lượt là $z_1, z_2, ..., z_{2017}$. Khi đó tổng: $S=z_1^{2018}+z_2^{2018}+...+z_{2017}^{2018}$ có giá trị bằng

A. 0. **B.** 2018. **C.** 2017. **D.** -1.

Giải:

- **Cách 1:** Áp dụng CT tính tổng của cấp số nhân, ta có:
- $z^{2017}+z^{2016}+...+z+1=0\leftrightarrow 1.\frac{z^{2018}-1}{z-1}=0\rightarrow z^{2018}-1=0\leftrightarrow z^{2018}=1$
- Suy ra: $S=z_1^{2018}+z_2^{2018}+...+z_{2017}^{2018}=2017$.
- Vậy ta chọn đáp án **C.**
- **Cách 2:** Từ giả thiết, ta nhân hai vế với z sẽ được:
- $z^{2017}+z^{2016}+...+z+1=0\leftrightarrow z^{2018}+z^{2017}+...+z=0\leftrightarrow z^{2018}+(z^{2017}+z^{2016}+...+z)=0$
- $\Leftrightarrow z^{2018}+(z^{2017}+z^{2016}+...+z+1)=1\leftrightarrow z^{2018}=1$
- Suy ra: $S=z_1^{2018}+z_2^{2018}+...+z_{2017}^{2018}=2017$.
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 367. (3) Cho phương trình bậc hai hệ số a thực: $z^2 - 2az + a^2 - 3a = 0$. Biết phương trình có một nghiệm phức z_1 không thuần thực có $|z_1| = 2$. Giá trị của $|2a + (a^2 - 2)i|$ tương ứng bằng

A. 2. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{7}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Giải:

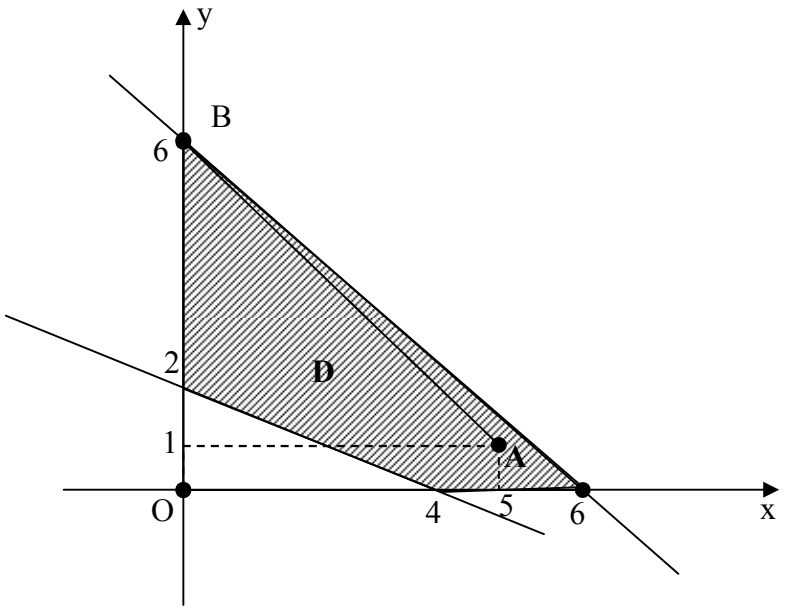
- Phương trình bậc hai hệ số thực mà có một nghiệm phức không thuần thực thì nó sẽ có hai nghiệm phức là liên hợp của nhau, có cùng mô đun là z_1 , z_2, có: $|z_1| = |z_2|$
- Theo VIET: $z_1 z_2 = \frac{C}{A} = a^2 - 3a \rightarrow |a^2 - 3a| = |z_1 z_2| = 4 \leftrightarrow \left[\begin{array}{c} a^2 - 3a = 4 \leftrightarrow a^2 - 3a - 4 = 0 \\ a^2 - 3a = -4 \rightarrow (VN) \end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = 4 \end{array}\right.$
- Chúng ta phải thử lại điều kiện phương trình bậc hai có nghiệm phức:
- Với $a = 4 \rightarrow pt: z^2 - 8z + 4 = 0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} z = 4 + 2\sqrt{3} \\ z = 4 - 2\sqrt{3} \end{array}\right.$. TH này không TM vì pt có 2 nghiệm thực.
- Với $a = -1 \rightarrow pt: z^2 + 2z + 4 = 0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} z = -1 + i\sqrt{3} \\ z = -1 - i\sqrt{3} \end{array}\right.$. Trường hợp này thỏa mãn.
- Suy ra: $a = -1 \rightarrow |2a + i(a^2 - 2)| = |-2 + i(1 - 2)| = \sqrt{5}$. Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 368. (3) Cho số phức z = x + iy, trong đó x, y là những số thực không âm thỏa mãn đồng thời các điều kiện: $x + y \le 6$; $x + 2y \ge 4$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của Q = |z – 5 – i| tương ứng là M và m. Khi đó (M + 2m) tương ứng bằng

A. 9. **B.** $4\sqrt{3}$. **C.** $5\sqrt{3}$. **D.** $5\sqrt{2}$.

Giải:

- Miền D được minh họa như hình vẽ:



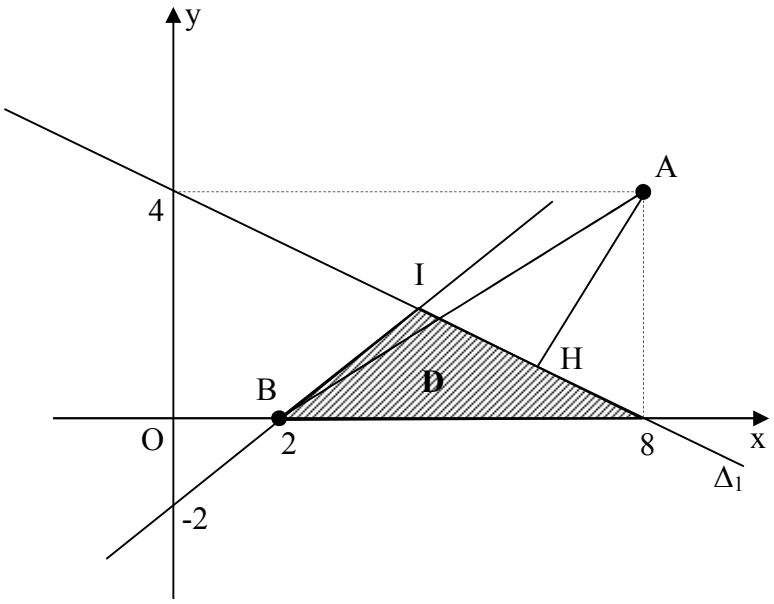
- Giá trị của biểu thức P = |z – 5 – i| = AM , trong đó A = z_A = 5 + i , M là điểm nằm trong miền **D.** Nhận thấy ngay A nằm trong miền **D.**
- Giá trị nhỏ nhất của P là P_{min} = 0.
- Giá trị lớn nhất của P là P_{max} = AB = |z_A – z_B| = | 5 + i – 6i| = $5\sqrt{2}$.
- Suy ra tổng (M + 2m) = $5\sqrt{2}$.
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 369. (3) Cho số phức z = x + iy, trong đó x, y là những số thực thỏa mãn đồng thời các điều kiện: $0 \le y$; $x+2y \le 8$; $x-y \ge 2$. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của: P = |z – 8 – 4i| lần lượt là M và m. Khi đó (M.m) tương ứng bằng

A. $\frac{16\sqrt{85}}{5}$. **B.** 12. **C.** $\frac{12\sqrt{3}}{5}$. **D.** $\frac{7\sqrt{3}}{2}$.

Giải:

- Miền D được xác định như hình vẽ.
- Giá trị của biểu thức: P = |z – 8 – 4i| = AM, trong đó A = z_A = 8 + 4i , M = z_M là điểm nằm trong miền xác định D (là miền gạch chéo cho trong hình vẽ).



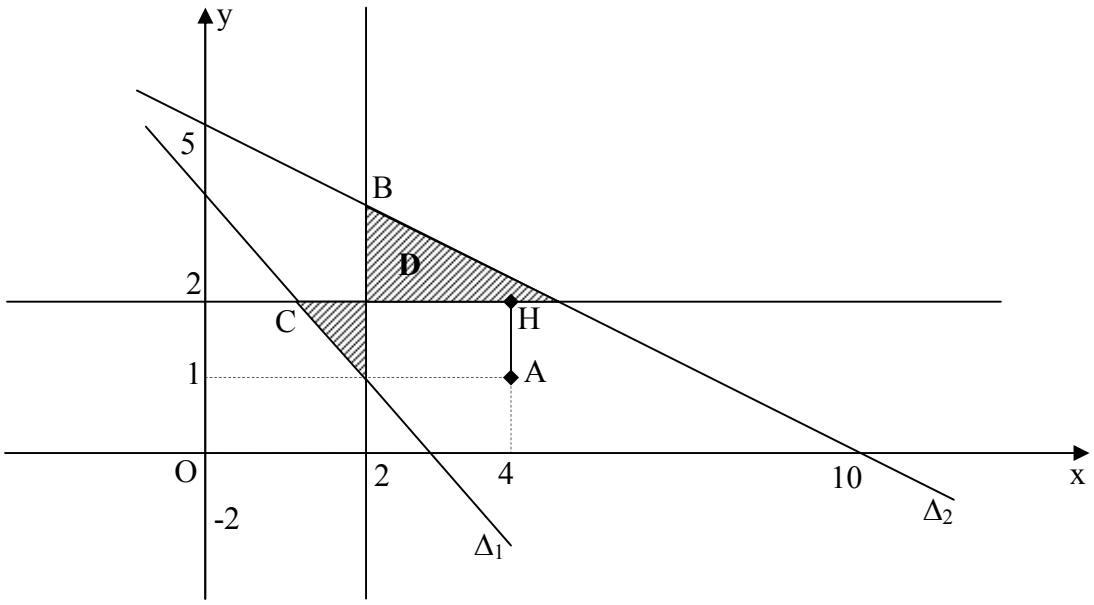
- Giá trị lớn nhất của biểu thức P là: P_{max} = M = AB = |z_A – z_B| = |8 + 4i – 2i| = $2\sqrt{17}$.
- Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là: P_{min} = m = AH = d(A,Δ_1) = $\frac{|8+2.4-8|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$
- Suy ra: Mm = $2\sqrt{17}.\frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{16\sqrt{85}}{5}$. Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 370. (3) Cho số phức z = x + iy, trong đó x, y là những số thực thỏa mãn đồng thời các điều kiện: $0 \le (x-2)(y-2)$; $3x+2y \ge 8$; $x+2y \le 10$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của P = |z – 4 – i| lần lượt là M và m. Khi đó (M + m) tương ứng bằng

A. 12. **B.** $2\sqrt{3}+2$. **C.** $\sqrt{13}+1$. **D.** $3\sqrt{2}+2$.

Giải:

- Phân tích kĩ lại miền D: $(x-2)(y-2) \ge 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x, y \ge 2 \\ x, y \le 2 \end{array}\right.$
- Các đường thẳng giới hạn: $\Delta_1 : 3x+2y-8=0$; $\Delta_2 : x+2y-10=0$
- Miền giới hạn D được biểu diễn như hình vẽ.
- Giá trị của biểu thức: P = AM = |z – z_A| ; trong đó A = z_A = 4 + i , M là điểm biểu diễn số phức z nằm trong miền xác định **D.**



- Ta phải đi tìm hai điểm có khả năng xa A nhất cho giá trị lớn nhất của biểu thức P là điểm B và điểm **C.**
- Điểm B là giao của đường thẳng x = 2 và đường thẳng Δ_2: $\left\{\begin{array}{l} x=2 \\ x+2y=10 \end{array}\right. \leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=2 \\ y=4 \end{array}\right. \to B=(2;4)$
- Điểm C là giao của đường thẳng y = 2 và đường thẳng Δ_1: $\left\{\begin{array}{l} y=2 \\ 3x+2y=8 \end{array}\right. \leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{4}{3} \\ y=2 \end{array}\right. \to C=(\frac{4}{3};2)$
- Khoảng cách đoạn AB = |z_A – z_B| = $|4+i-(2+4i)| = |2-3i| = \sqrt{13}$.

- Khoảng cách đoạn AC = $|z_A - z_C| = |4 + i - (\frac{4}{3} + 2i)| = |\frac{8}{3} - i| = \frac{\sqrt{73}}{3}$.
- Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là: $P_{min} = m = AH = 1$
- Giá trị lớn nhất của P là: $P_{max} = M = AB = \sqrt{13}$.
- Suy ra $(M + m) = \sqrt{13} + 1$. Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 371. (3) Cho số phức z thỏa mãn: $|\frac{(3+4i)z + 12 - 12i}{z - 3i}| = 6$. Số phức $w = \frac{1}{iz + 3}$ nằm trên đường tròn (C) có bán kính R bằng

A. 2. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 1.

Giải:

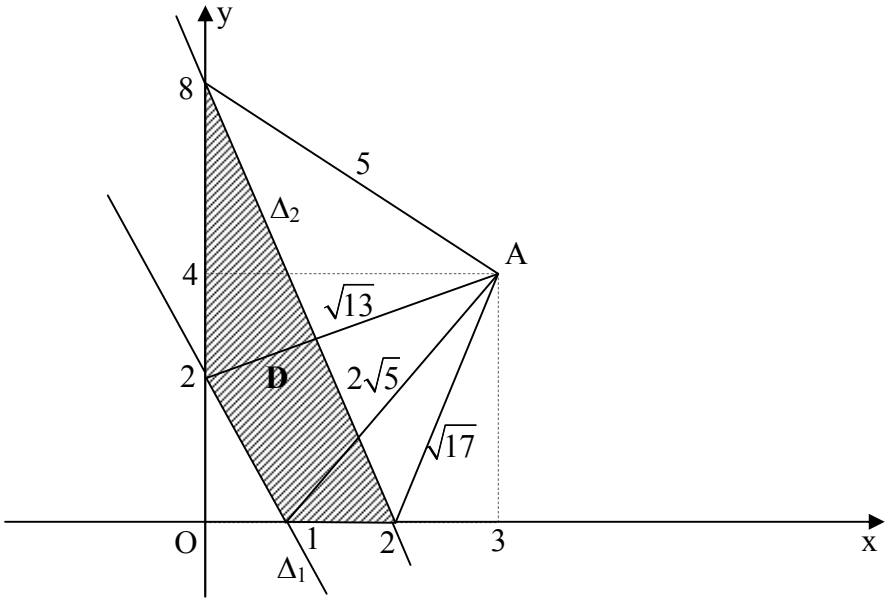
- **Cách 1:** Từ giả thiết suy ra: $w = \frac{1}{iz + 3} \to z = \frac{1}{i}(\frac{1}{w} - 3) = \frac{1}{iw} + 3i$
- Thay vào biểu thức ban đầu ta được:
- $|\frac{(3+4i)z + 12 - 12i}{z - 3i}| = 6 \leftrightarrow |\frac{(3+4i)(\frac{1}{iw} + 3i) + 12 - 12i}{(\frac{1}{iw} + 3i) - 3i}| = 6 \leftrightarrow |\frac{\frac{3+4i}{iw} - 3i}{\frac{1}{iw}}| = 6 \leftrightarrow |3 + 4i - 3i.iw| = 6$
- $\Leftrightarrow |3 + 4i + 3w| = 6 \leftrightarrow |w + 1 + \frac{4}{3}i| = 2$
- Đây là đường tròn có bán kính R = 2.
- Vậy ta chọn đáp án **A.**
- **Cách 2:** Sử dụng phương pháp biến đổi nhanh
- $|\frac{(3+4i)z + 12 - 12i}{z - 3i}| = 6 \leftrightarrow |\frac{(3+4i)(z - 3i) - 3i}{z - 3i}| = 6 \leftrightarrow |3 + 4i - \frac{3i}{z - 3i}| = 6 \leftrightarrow |3 + 4i - \frac{3i.i}{i(z - 3i)}| = 6$
- $\Leftrightarrow |3 + 4i + \frac{3}{iz + 3}| = 6 \leftrightarrow |\frac{1}{iz + 3} + 1 + \frac{4}{3}i| = 2 \leftrightarrow |w + 1 + \frac{4}{3}i| = 2$
- Đây là đường tròn có bán kính R = 2.
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 372. (3) Cho số phức z = a + ib, trong đó a, b là những số thực không âm đồng thời là các hệ số của tham thức bậc 2: $f(x) = x^2 - 2ax + b$. Biết rằng: $f(-1) \geq 3$; $f(-2) \leq 9$. Giá trị lớn nhất của biểu thức P = |z – 3 – 4i| tương ứng bằng

A. $2\sqrt{13}$. **B.** $\sqrt{17}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** 5.

Giải:

- Từ giả thiết ta suy ra các điều kiện của hai hệ số a và b: $a,b \ge 0$
- $f(-1) \ge 3 \leftrightarrow 1+2a+b \ge 3 \leftrightarrow b \ge 2-2a$; $f(-2) \le 9 \leftrightarrow 1+4a+b \le 9 \leftrightarrow b \le 8-4a$
- Miền D được xác định như hình vẽ:



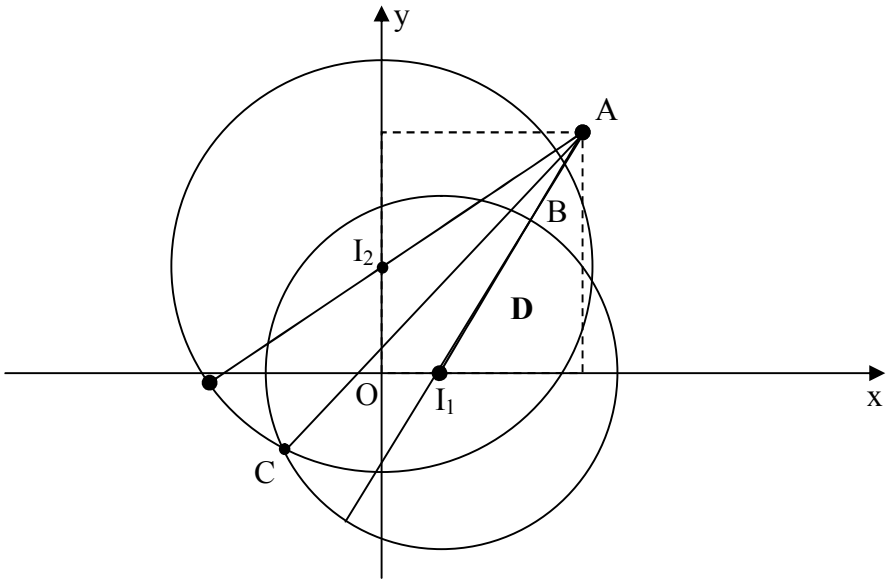
- Giá trị của biểu thức P = |z – z_A| = AM, trong đó A = z_A = 3 + 4i, M là điểm nằm trong miền **D.**
- Quan sát và tính toán ta suy ra được giá trị lớn nhất của P là:
- P_{max} = AB = 5 ⇔ z = 8i.
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 373. (4) Cho số phức z thỏa mãn: $|z-1| \le 3$; $|z-2i| \le 4$. Giá trị lớn nhất của P = |z – 3 – 4i| tương ứng bằng

A. $\frac{\sqrt{124+71\sqrt{11}}}{5}$. **B.** $4\sqrt{13}$. **C.** 5. **D.** $\frac{\sqrt{545+80\sqrt{11}}}{5}$.

Giải:

- Miền D được xác định bởi giới hạn hai hình tròn. Miền giao của hai hình tròn.
- Hình tròn $|z-1| \le 3$ có tâm $I_1 = z_{I1} = 1 = (1;0)$ và bán kính giới hạn là $R_1 = 3$
- Hình tròn $|z-2i| \le 4$ có tâm $I_2 = z_{I2} = 2i = (0;2)$ và bán kính giới hạn là $R_2 = 4$
- Miền D được xác định như hình vẽ:



- Giá trị của biểu thức P = |z – 3 – 4i| = |z – z_A| = AM, trong đó A = z_A = 3 + 4i = (3;4) và M là một điểm nằm trong miền **D.**
- Giá trị nhỏ nhất của P là: P_{min} = m = AB = $AI_1 - I_1B = |z_A - z_{I1}| - R_1 = |3+4i-1|-3 = 2\sqrt{5}-3$
- Giá trị lớn nhất khá phức tạp, sau khi nối A với hai tâm I_1 và I_2 ta nhận thấy AC là khoảng cách xa nhất tính từ A đến miền D, trong đó C là giao điểm của hai đường tròn (C_1) và (C_2).
- Suy ra: C: $\begin{cases}(C_1):(x-1)^2+y^2=9\\(C_1):x^2+(y-2)^2=16\end{cases}\leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{14\pm4\sqrt{11}}{5}\\y=\dfrac{2\pm2\sqrt{11}}{5}\end{cases}$
- Chúng ta có thể nhận thấy ngay điểm C cần tìm là: $C=(\frac{14-4\sqrt{11}}{5};\frac{2-2\sqrt{11}}{5})$
- Suy ra giá trị lớn nhất của P là: P_{max} = M = AC = $\dfrac{\sqrt{545+80\sqrt{11}}}{5}$.
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

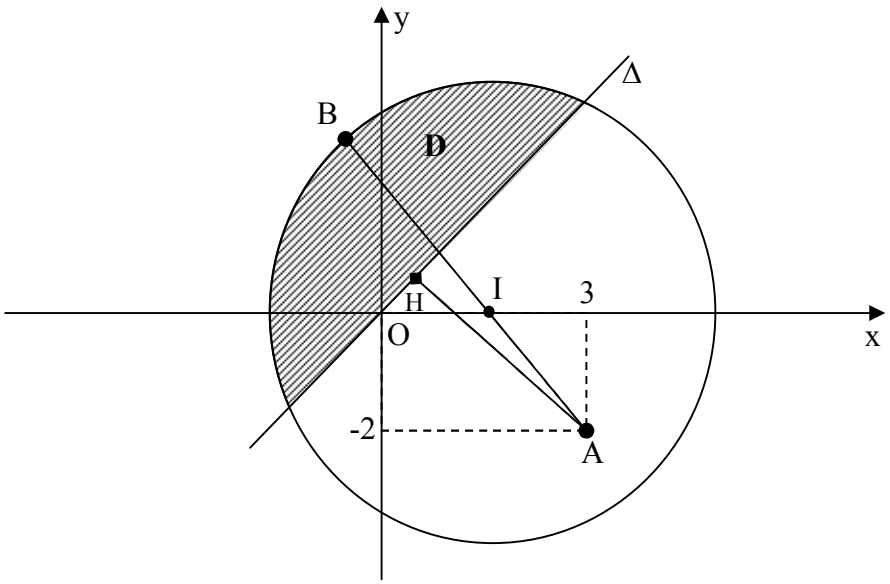
Câu 374. (3) Cho số phức z thỏa mãn: $|z-2|\le 4$; $|z+1|\le|z+i|$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của P = |z – 3 + 2i| lần lượt là M và m. Khi đó (Mm) tương ứng bằng

A. $3\sqrt{2}+2$. **B.** $\dfrac{5\sqrt{10}+4\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{4\sqrt{3}+6\sqrt{2}}{2}$. **D.** 9.

Giải:

- Miền D được giới hạn bởi hình tròn (C): $|z-2|\le 4$ có tâm I = z_I = 2 = (2;0) và bán kính R = 4 và đường thẳng: $|z+1|\le|z+i|\leftrightarrow(x+1)^2+y^2\le x^2+(y+1)^2\leftrightarrow x\le y$

- Miền D được biểu diễn như hình vẽ bên dưới:



- P = |z – 3 + 2i| = |z – z_A| = AM , trong đó A = z_A = 3 – 2i và M là điểm nằm trong miền **D.**
- Phương trình đường thẳng Δ là: x – y = 0.
- Giá trị nhỏ nhất của P là: P_{min} = m = AH = d(A,Δ) = $\frac{|3-(-2)|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}$
- Giá trị lớn nhất của P là: P_{max} = M = AB = AI + IB = |z_A – z_I| + R = $|3-2i-2|+4=\sqrt{5}+4$
- Suy ra tích: $Mm=\frac{5}{\sqrt{2}}(\sqrt{5}+4)=\frac{5\sqrt{10}+4\sqrt{2}}{2}$. Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 375. (3) Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $|z_1|=|z_2|=1$; $|z_1+z_2|=\sqrt{3}$. Giá trị của biểu thức: $P=z_1.\overline{z_2}+z_2.\overline{z_1}$ tương ứng bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** -1. **D.** 3.

Giải:

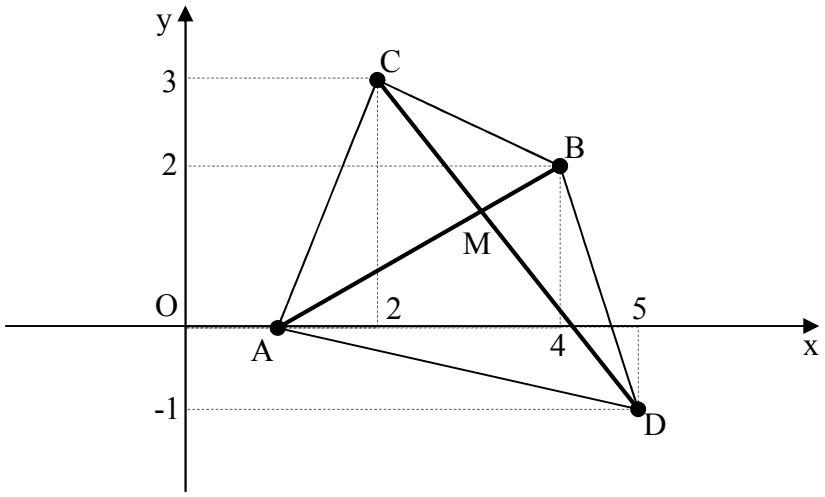
- **Cách 1:** Chúng ta có thể chọn cụ thể các giá trị của z_1 và z_2 là: $z_1=\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$; $z_2=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$
- Suy ra: $P=z_1.\overline{z_2}+z_2.\overline{z_1}=(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2})(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2})+(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2})(\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2})=1$
- Vậy ta chọn đáp án **A.**
- **Cách 2:** Ta có: $|z_1+z_2|=\sqrt{3}\leftrightarrow|z_1+z_2|^2=3\leftrightarrow(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})=3\leftrightarrow(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})=3$
- $\Leftrightarrow z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}=3\leftrightarrow|z_1|^2+|z_2|^2+P=3\leftrightarrow 1+1+P=3\rightarrow P=1$
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 376. (4) Cho biểu thức: P = |z – 1| + |z – 2 – 3i| + |z – 4 – 2i| + |z – 5 + i|. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P tương ứng bằng

A. $2\sqrt{3}+6$. **B.** $2\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{5}+\sqrt{17}$. **D.** $5+\sqrt{13}$

Giải:

- Đây là bài toán áp dụng BĐT tứ giác lồi.
- Biểu thức P = MA + MB + MC + MD, trong đó: M = z; A = z_A = 1 = (1;0) ; B = z_B = 4 + 2i = (4;2) ; C = z_C = 2 + 3i = (2;3) ; D = z_D = 5 – i = (5;-1).
- Hình biểu diễn tứ giác ABCD như hình vẽ:



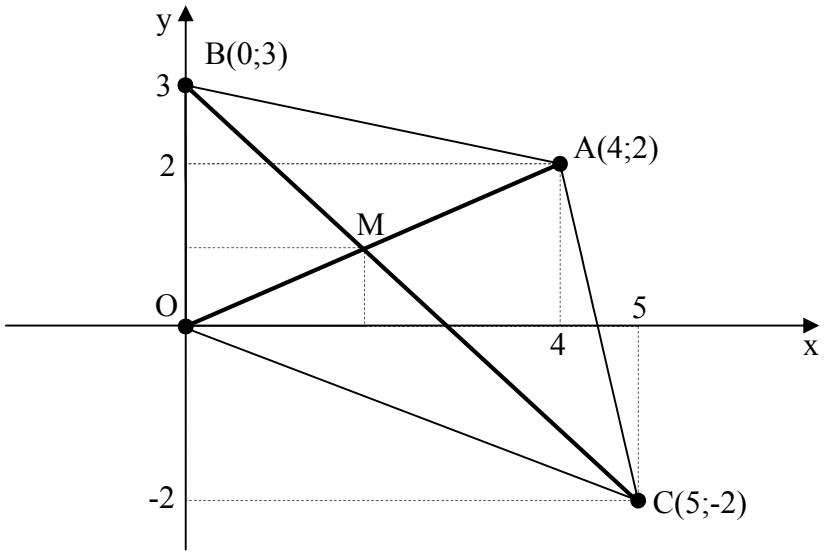
- Hai đường chéo của tứ giác lồi ABCD là AB và CD, có độ dài: $AB = |z_A - z_B| = |1-(4+2i)| = \sqrt{13}$; $CD = |z_C - z_D| = |2+3i-(5-i)| = 5$
- Suy ra: $P = MA + MB + MC + MD \geq AB + CD = \sqrt{13}+5$
- Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là: $P_{\min} = \sqrt{13}+5$
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 377. (4) Cho biểu thức: P = |z | + |z – 4 – 2i| + |z – 3i| + |z – 5 + 2i|. Biết rằng khi z = a + ib thì biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó (a + 2b) tương ứng bằng

A. 1. **B.** 4. **C.** 6. **D.** -3.

Giải:

- P = MO + MA + MB + MC ; A = z_A = 4 + 2i ; B = z_B = 3i ; C = z_C = 5 – 2i.
- Chúng ta xác định hình minh họa tứ giác OABC biểu diễn các số phức tương ứng trên hình vẽ:



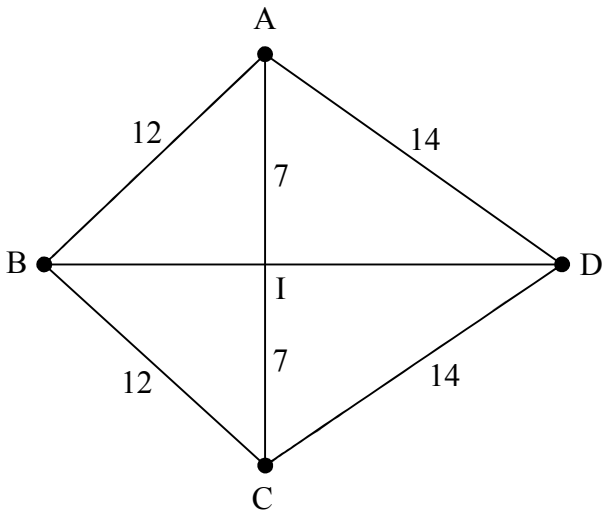
- Khi đó: $P = MO + MA + MB + MC \geq OA + BC$
- Dấu "=" xảy ra thì P đạt giá trị nhỏ nhất và khi đó M là giao điểm của OA và B**C.**
- Phương trình đường thẳng OA: $x - 2y = 0$
- Phương trình đường thẳng BC: $\frac{x-0}{5-0} = \frac{y-3}{-2-3} \leftrightarrow x + y - 3 = 0$
- Tọa độ của điểm M để P_{min} là nghiệm của hệ phương trình:
- $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow M = (2;1) = z_M = 2 + i = a + ib \rightarrow a = 2; b = 1 \rightarrow a + 2b = 4$
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 378. (4) Cho ba số phức z_1 , z_2 , z_3 thỏa mãn: $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = 12$; $|z_3 - z_1| = 14$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = |z - z_1| + |z - z_2| + |z - z_3|$ tương ứng bằng

A. 6. **B.** $4\sqrt{5} + \sqrt{13}$. **C.** $\sqrt{95} + 7\sqrt{3}$. **D.** $2\sqrt{11} + \sqrt{97}$.

Giải:

- Đây là dạng bài toán tìm tổng khoảng cách nhỏ nhất từ một điểm M thay đổi đến ba đỉnh A, B, C cố định của một tam giác.
- Gọi điểm biểu diễn số phức z_1 = A; z_2 = B ; z_3 = **C.** Khi đó ta có: AB = BC = 12; CA = 14. Nhận thấy ΔABC cân tại B, suy ra:
- P= MA + MB + MC ≥ BD ; trong đó D là điểm nằm khác phía B so với AC và ΔACD đều. Tất nhiên là khi đó B , I, D thẳng hàng (I là trung điểm của AC).
- Hình vẽ minh họa:



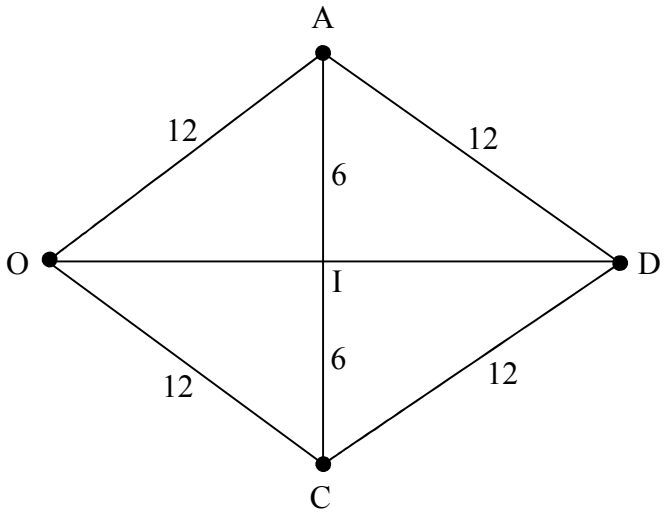
- Độ dài đoạn BD được tính: $BD = BI + ID = \sqrt{12^2 - 7^2} + \sqrt{14^2 - 7^2} = \sqrt{95} + 7\sqrt{3}$
- Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là: $P_{\min} = BD = \sqrt{95} + 7\sqrt{3}$.

Câu 379. (4) Cho hai số phức z_1 , z_2 thỏa mãn: $|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2| = 12$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = |z - z_1| + |z - z_2| + |z|$ tương ứng bằng

A. $12\sqrt{3}$. **B.** $6\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{15}$. **D.** $6\sqrt{7}$.

Giải:

- Gọi điểm $A = z_1$; $B = z_2$. Khi đó $OA = |z_1| = OB = |z_2| = AB = |z_1 - z_2| = 12$. Nhận thấy ngay tam giác OAB là tam giác đều.
- $P = MO + MA + MB \geq OD$; trong đó D nằm khác phía O so với AB và tam giác ABD đều.
- Hình vẽ minh họa:



- Độ dài cạnh OD được tính: $OD = OI + ID = 2OI = 12\sqrt{3}$

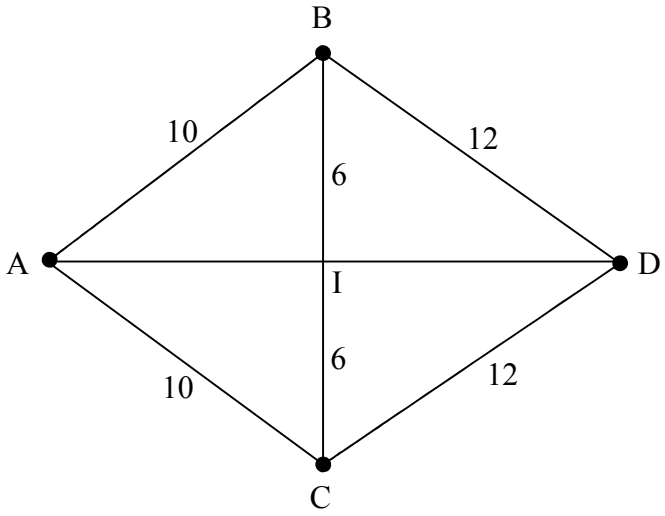
- Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là: $P_{min} = 12\sqrt{3}$.
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 380. (4) Giá trị nhỏ nhất của biểu thức: P = |z – 6| + |z – 8i| + |z – 12 – 8i| tương ứng bằng

A. 6. **B.** $4+8\sqrt{3}$. **C.** $8+6\sqrt{3}$. **D.** $2\sqrt{11}+12$.

Giải:

- Điểm A = z_A = 6 ; B = z_B = 8i ; C = z_C = 12 + 8i. Suy ra: AB = $|z_A - z_B|$ = |6 – 8i| = 10 ; BC = $|z_B - z_C|$ = |8i – (12 + 8i)| = 12 ; CA = $|z_C - z_A|$ = |12 + 8i – 6| = 10. Suy ra ΔABC cân tại **A.**
- P = MA + MB + MC $\geq$ AD ; trong đó D khác phía với A so với BC, sao cho ΔBCD đều.
- Hình vẽ mình họa:



- Độ dài đoạn AD được tính: $AD = AI + ID = \sqrt{10^2 - 6^2} + \sqrt{12^2 - 6^2} = 8 + 6\sqrt{3}$
- Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là: $P_{min} = 8 + 6\sqrt{3}$.
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 381. (3) Cho số phức z thỏa mãn phương trình: |z – 2i| = 2. Tập hợp điểm biểu diễn số phức w thỏa mãn: $|w - z| \leq 1$ tương ứng là

A. miền D xác định bởi: $1 \leq x^2 + y^2 \leq 3$.

B. miền D xác định bởi: $1 \leq x^2 + (y-2)^2 \leq 9$.

C. miền D xác định bởi: $1 \leq x^2 + y^2 \leq 9$.

D. miền D xác định bởi: $1 \leq (x-1)^2 + y^2 \leq 3$.

Giải:

- Áp dụng BĐT tam giác ta có:
- $|w-2i|=|w-z+z-2i|\le|w-z|+|z-2i|=|w-z|+2\le 1+2=3\to|w-2i|\le 3$
- $|w-2i|=|2i-w|=|(2i-z)-(w-z)|\ge|2i-z|-|w-z|=2-|w-z|\ge 2-1=1\to|w-2i|\ge 1$
- Suy ra: $1\le|w-2i|\le 3$
- Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức w là hình vành khuyên bao gồm cả hai đường tròn có tâm là I = 2i = (0;2) bán kính trong $R_1 = 1$ và bán kính ngoài $R_2 = 3$.
- Đường biểu diễn thỏa mãn: $1\le x^2+(y-2)^2\le 9$
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 382. (3) Cho số phức z thỏa mãn: $|\frac{(2+3i)z+5+i}{iz-3}|=6$. Tập hợp điểm biểu diễn số phức $w=\frac{1}{z+3i}$ tương ứng là

A. đường thẳng: x + 2y – 6 = 0.

B. đường tròn (C): $(x+\frac{1}{17})^2+(y+\frac{4}{17})^2=\frac{36}{221}$.

C. đường tròn (C): $(x-1)^2+(y-\frac{3}{2})^2=36$.

D. đường tròn (C): $(x-5)^2+(y-1)^2=6$.

Giải:

- **Cách 1:** Biến đổi qua biểu thức giả thiết:
- $|\frac{(2+3i)z+5+i}{iz-3}|=6\leftrightarrow|\frac{(2+3i)(z+1-i)}{i(z+3i)}|=6\leftrightarrow|\frac{2+3i}{i}|.|\frac{z+1-i}{z+3i}|=6\leftrightarrow\sqrt{13}|\frac{z+1-i}{z+3i}|=6$
- $\Leftrightarrow\sqrt{13}|\frac{z+3i+1-4i}{z+3i}|=6\leftrightarrow\sqrt{13}|\frac{1-4i}{z+3i}+1|=6$ (1)
- Thay $w=\frac{1}{z+3i}$ vào biểu thức (1), ta được:
- $\sqrt{13}|(1-4i)w+1|=6\leftrightarrow\sqrt{13}.|(1-4i)(w+\frac{1}{17}+\frac{4i}{17})|=6\leftrightarrow\sqrt{13}.\sqrt{17}.|w+\frac{1}{17}+\frac{4i}{17}|=6$
- Suy ra: $|w+\frac{1}{17}+\frac{4i}{17}|=\frac{6}{\sqrt{221}}$
- Suy ra tập hợp điểm biểu diễn số phức w là đường tròn (C) có tâm: $I=(-\frac{1}{17};-\frac{4}{17})$ và có bán kính $R=\frac{6}{\sqrt{221}}$ $\Leftrightarrow$ (C): $(x+\frac{1}{17})^2+(y+\frac{4}{17})^2=\frac{36}{221}$

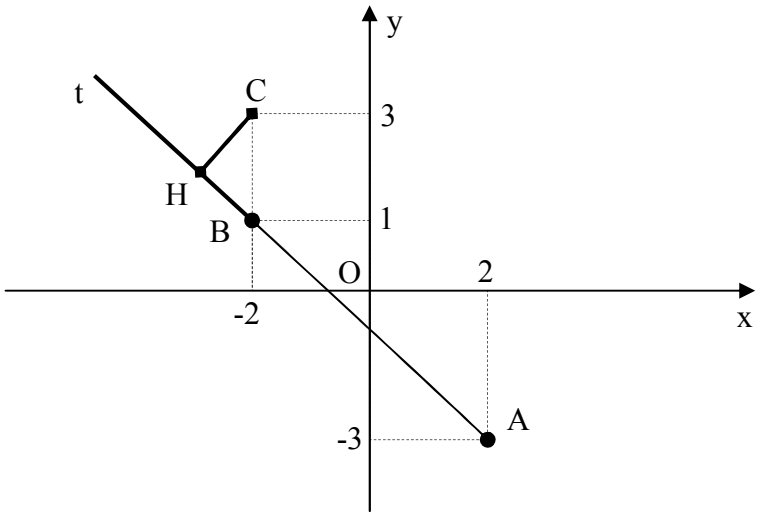
- Vậy ta chọn đáp án **B.**
- **Cách 2:** Phương pháp thế ẩn w vào giả thiết.
- Ta suy ra: $z=\frac{1}{w}-3i$ thay vào giả thiết: $|\frac{(2+3i)z+5+i}{iz-3}|=6$, ta được:
- $|\frac{(2+3i)(\frac{1}{w}-3i)+5+i}{i(\frac{1}{w}-3i)-3}|=6\leftrightarrow|\frac{\frac{2+3i}{w}+9-6i+5+i}{\frac{i}{w}}|=6\leftrightarrow|\frac{\frac{2+3i}{w}+14-5i}{\frac{1}{w}}|=6$
- $\Leftrightarrow|(14-5i)w+2+3i|=6\leftrightarrow|14-5i|.|w+\frac{1}{17}+\frac{4i}{17}|=6\leftrightarrow|w+\frac{1}{17}+\frac{4i}{17}|=\frac{6}{\sqrt{221}}$

Câu 383. (3) Cho số phức z thỏa mãn: |z – 2 + 3i| - |z + 2 – i| = $4\sqrt{2}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức: P = |z – 3i + 2| tương ứng bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Giải:

- Gọi $A = z_A = 2 - 3i = (2;-3)$; $B = z_B = -2 + i = (-2;1) \rightarrow AB = |z_A - z_B| = |2-3i-(-2+i)| = 4\sqrt{2}$
- Khi đó giả thiết trở thành: MA – MB = AB $\Leftrightarrow$ MA = MB + AB
- Suy ra M, A , B thẳng hàng, cụ thể là B nằm giữa M và A. Hay ta có: quỹ tích điểm M là tia Bt ngược hướng với tia BA (hoặc có thể gọi là nửa đường thẳng Bt ngược hướng với BA)
- Hình vẽ minh họa:



- Giá trị biểu thức P = |z – z_C| = MC ; trong đó C = z_C = - 2 + 3i = (-2;3) ; M là điểm nằm trên Bt.
- Từ hình vẽ ta có thể tính được giá trị nhỏ nhất của P là: CH = d(C,AB).
- Phương trình tổng quát của đường thẳng AB được lập như sau:

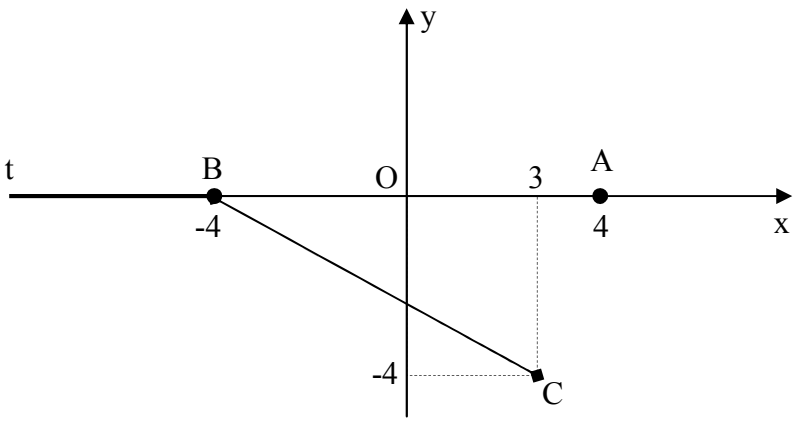
- (AB): $\frac{x-2}{-2-2}=\frac{y+3}{1-(-3)}\leftrightarrow x+y+1=0$
- Suy ra: $P_{\min}=CH=d(C,AB)=\frac{|-2+3+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$.
- Để chắc chắn (phòng các trường hợp vẽ nhầm hình) chúng ta có thể tính thêm độ dài đoạn thẳng CB: $CB=\sqrt{(-2+2)^2+(3-1)^2}=2$. Nhận thấy rõ: CB > CH. (tức là P_{min} = CH = $\sqrt{2}$)
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 384. (3) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: |z – 4| - |z + 4| = 8. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức: P = |z – 3 + 4i| bằng

A. 12. **B.** $3\sqrt{7}$. **C.** $\sqrt{65}$. **D.** $2\sqrt{13}$.

Giải:

- A = z_A = 4 = (4;0) ; B = z_B = - 4 = (-4;0); AB = 8. Điểm M biểu diễn số phức z.
- Giả thiết suy ra: MA – MB = AB ⇔ MA = MB + AB ; suy ra M, A, B thẳng hàng , cụ thể là B nằm giữa A và M. Quỹ tích điểm M biểu diễn số phức z là tia Bt ngược hướng với tia BA.
- Hình vẽ minh họa:
- Biểu thức: P = |z – z_C| = MC ; trong đó C = z_C = 3 – 4i = (3;-4); điểm M biểu diễn số phức z nằm trên tia Bt.



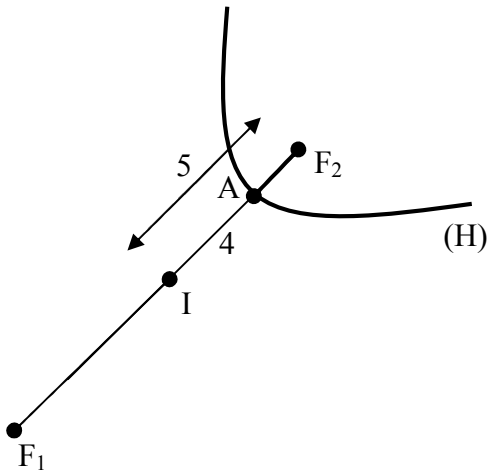
- Nhìn vào hình vẽ ta thấy giá trị nhỏ nhất của P ứng với khoảng cách ngắn nhất tính từ C tới tia Bt, chính là đoạn CB = P_{min} = $\sqrt{(3+4)^2+(0+4)^2}=\sqrt{65}$.
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 385. (4) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: |z – 5 + 3i| – |z + 3 – 3i| = 8 và đồng thời làm cho giá trị của biểu thức P = |z – 1| đạt giá trị nhỏ nhất. Biết rằng z = a + ib. Khi đó giá trị của tổng (10a + 10b) bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

Giải:

- Đây là dạng đường hypebol.
- Tiêu điểm $F_1 = 5 - 3i = z_1 = (5;-3)$; tiêu điểm $F_2 = -3 + 3i = z_2 = (-3;3)$
- Tâm của hypebol: I là trung điểm của hai tiêu điểm: $I = z_I = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{5 - 3i - 3 + 3i}{2} = 1 = (1;0)$.
- Tiêu cự: $F_1F_2 = 2c = |z_1 - z_2| = |5 - 3i - (-3 + 3i)| = 10$, suy ra bán tiêu: c= 5.
- Trục thực: 2a = 8 , suy ra bán trục thực: a = 4. Bán trục ảo: $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.
- M là điểm biểu diễn số phức z, giả thiết suy ra: $MF_1 - MF_2 = 8 = 2a$.
- Quỹ tích điểm M biểu diễn số phức z là 1 nhánh hypebol gần F_2 hơn có: c = 5; a = 4; b = 3.
- Biểu thức $P = |z - z_I|$ đạt giá trị nhỏ nhất là: $P_{min} = |z - z_I|_{min} = a = 4 \Leftrightarrow$ M trùng với đỉnh A của hypebol. Để tìm điểm A ta có thể dùng tỉ lệ véc tơ:
- $\overrightarrow{IA} = \frac{IA}{IF_2}.\overrightarrow{IF_2} = \frac{4}{5}\overrightarrow{IF_2}$
- $\overrightarrow{IF_2} = z_2 - z_I = -3 + 3i - 1 = -4 + 3i$; $\overrightarrow{IA} = z_A - z_I = z_A - 1$. Thay vào biểu thức véc tơ trên:



- $z_A - 1 = \frac{4}{5}(-4 + 3i) \rightarrow z_A = -\frac{11}{5} + \frac{12}{5}i = a + ib \rightarrow 10(a + b) = 2$
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 386. (3) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: |z – 7 + 4i| – |z + 1 – 2i| = 6. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P = |z – 3 + i| bằng

A. 3. **B.** 6 **C.** 4. **D.** 5.

Giải:

- Đây là dạng quỹ tích đường hypebol.
- Tiêu điểm $F_1 = z_1 = 7 - 4i = (7;-4)$; tiêu điểm $F_2 = z_2 = -1 + 2i = (-1;2)$. Tâm của hypebol là trung điểm I của hai tiêu điểm: $I = z_I = 3 - i$.
- Tiêu cự: $F_1F_2 = 2c = |7 - 4i + 1 - 2i| = 10$, suy ra bán tiêu cự: c = 5.
- Bán trục thực: $a = 3$, suy ra bán trục ảo: $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$
- Gọi M là điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện: $MF_1 - MF_2 = 2a = 6$, thì quỹ tích điểm M là nhánh hypebol gần F_2 hơn.
- Biểu thức: $P = |z - 3 + i| = |z - z_I| = IM$. Đạt giá trị nhỏ nhất khi M trùng với đỉnh A của hypebol. Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là: $P_{min} = a = 3$. Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 387. (4) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: |z – 8 + 4i| – |z – 2i| = 6. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P = |z + 2 + i| bằng

A. 1. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** 6. **D.** 3.

Giải:

- Dạng quỹ tích là một nhánh hypebol
- Tiêu điểm $F_1 = z_1 = 8 - 4i = (8;-4)$; tiêu điểm $F_2 = z_2 = 2i = (0;2)$; tâm hypebol: I là trung điểm của F_1 và F_2 suy ra: $I = z_I = 4 - i = (4;-1)$.
- Tiêu cự: $F_1F_2 = |z_1 - z_2| = |8 - 4i - 2i| = 10$, suy ra bán tiêu: c = 5.
- Bán trục thực: a = 3, bán trục ảo b = 4.
- Điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện bài toán: $MF_1 - MF_2 = 2a = 6$ là một nhánh hypebol gần F_2 hơn. Phương trình chính tắc: $\frac{(x-x_I)^2}{3^2} - \frac{(y-y_I)^2}{4^2} = 1 \leftrightarrow \frac{(x-4)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{16} = 1$
- Suy ra: $(y+1)^2 = 16(\frac{(x-4)^2}{9} - 1)$. Điều kiện: $(y+1)^2 = 16(\frac{(x-4)^2}{9} - 1) \geq 0 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 1 \\ x \geq 7 \end{array}\right.$
- Biểu thức: $P = |z + 2 + i| = |x + iy + 2 + i| = \sqrt{(x+2)^2 + (y+1)^2}$
- Thế quan hệ: $(y+1)^2 = 16(\frac{(x-4)^2}{9} - 1)$ vào biểu thức của P ta được:
- $P = \sqrt{(x+2)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + 16(\frac{(x-4)^2}{9} - 1)} = \sqrt{\frac{25x^2 - 92x + 148}{9}}$

- Khảo sát giá trị nhỏ nhất của biểu thức P trong trường hợp: $\left[\begin{array}{l} x \le 1 \\ x \ge 7 \end{array}\right.$, suy ra giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là: $P_{min} = 3 \Leftrightarrow x = 1 \to y = -1 \to z = 1 - i$
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 388. (3) Cho số phức z không thuần thực sao cho: $w = \dfrac{3z}{3+z^2}$ là số thuần thực. Khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức P = |z + 3 – 2i| tương ứng bằng

A. 5. **B.** $3+2\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{13}$. **D.** $\sqrt{3}+\sqrt{13}$.

Giải:

- Chúng ta biến đổi: $w = \dfrac{3z}{3+z^2} \leftrightarrow z^2 - \dfrac{3}{w}z + 3 = 0$. Nếu phương trình có hai nghiệm phức không thuần thực thì đó sẽ là cặp nghiệm phức liên hợp cùng mô đun: $|z_1| = |z_2|$.
- Theo hệ thức VIET ta có: $z_1 z_2 = \dfrac{C}{A} = 3 \to |z_1.z_2| = 3 = |z|^2 \to |z| = \sqrt{3}$ (1)
- Áp dụng BĐT tam giác ta có: $P = |z + 3 - 2i| \le |z| + |3 - 2i| = \sqrt{3} + \sqrt{13}$
- Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ z = k(3 – 2i)
- Suy ra giá trị lớn nhất của biểu thức: $P_{max} = \sqrt{3} + \sqrt{13}$
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 389. (3) Cho số phức z không thuần thực sao cho: $w = \dfrac{5z}{4+z^2}$ là số thuần thực đồng thời biểu thức $P = |z - 1 + i|$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó số phức z = a+ ib. Giá trị của $(a – b)^2$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 8. **D.** $3+2\sqrt{2}$.

Giải:

- Tương tự câu trên, nhìn nhanh ra được |z| = 2.
- Áp dụng BĐT tam giác ta có: $P = |z - 1 + i| \le |z| + |1 - i| = 2 + \sqrt{2}$
- Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ $z = k(1 - i) \to |z| = k|1 - i| \leftrightarrow 2 = k.\sqrt{2} \to k = \sqrt{2} \to z = \sqrt{2}(1 - i) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$
- Suy ra: $a = \sqrt{2}; b = -\sqrt{2} \to (a - b)^2 = 8$.
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 390. (4) Cho số phức z thỏa mãn: $|z+1-2i|=2\sqrt{2}$. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=|z-1|+2017|\overline{z}+3+4i|$ lần lượt là M và m. Giá trị của (M/m) bằng

A. 2017^2. **B.** 2018. **C.** $2\sqrt{2017}$. **D.** $\sqrt{1+2017^2}$.

Giải:

- Đặt: u = z + 1 – 2i. Suy ra: $|u|=2\sqrt{2}$. Biến đổi lại biểu thức P cho dễ nhìn:
- $P=|z-1|+2017|\overline{\overline{z}+3+4i}|=|(z+1-2i)-(2-2i)|+2017|z+3-4i|$
- $P=|(z+1-2i)-(2-2i)|+2017|(z+1-2i)+(2-2i)|=|u-\mathrm{w}|+2017|u+\mathrm{w}|$
- Trong đó: $\mathrm{w}=2-2i\rightarrow|\mathrm{w}|=2\sqrt{2}=|u|$
- Đã biết rồi nhé, ko lại bảo bịa ra: $|u+\mathrm{w}|^2+|u-\mathrm{w}|^2=2(|u|^2+|\mathrm{w}|^2)$
- Áp dụng các bất đẳng thức tam giác ta có:
- $P=|u-\mathrm{w}|+2017|u+\mathrm{w}|=(|\mathrm{w}-u|+|u+\mathrm{w}|)+2016|u+\mathrm{w}|\geq|\mathrm{w}-u+u+\mathrm{w}|+2016|u+\mathrm{w}|$
- $\Leftrightarrow P\geq|2\mathrm{w}|+2016|u+\mathrm{w}|\geq 2.2\sqrt{2}+2016.0=4\sqrt{2}$. Dấu "=" xảy ra khi |u + w| = 0 $\Leftrightarrow$ u = - w
- Suy ra P_{min} = m = $4\sqrt{2}$.
- Áp dụng bất đẳng thức bunhia, ta có:
- $P^2=(|u-\mathrm{w}|+2017|u+\mathrm{w}|)^2\leq(1+2017^2)(|u-\mathrm{w}|^2+|u+\mathrm{w}|^2)$
- $\Leftrightarrow P^2\leq 32(1+2017^2)\leftrightarrow P\leq 4\sqrt{2(1+2017^2)}\rightarrow M=P_{\max}=4\sqrt{2(1+2017^2)}$
- Suy ra: $\frac{M}{m}=\sqrt{1+2017^2}$
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 391. (3) Cho số phức z thỏa mãn: |z – z_0| = 2. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=|z^2+z_0^2|$ tương ứng bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** 1/2. **D.** 2.

Giải:

- Hiển nhiên ta có: $P=|z^2+z_0^2|\geq 0$.
- Bây giờ chỉ cần chứng minh tồn tại các giá trị của z và z_0 thỏa mãn điều kiện của giả thiết và đồng thời để P = 0.

- Từ: $P = |z^2 + z_0^2| = 0 \leftrightarrow z^2 + z_0^2 = 0 \leftrightarrow z^2 = -z_0^2 = (iz_0)^2 \leftrightarrow z = \pm iz_0$
- Thay vào giả thiết: $|z - z_0| = 2 \leftrightarrow |\pm iz_0 - z_0| = 2 \leftrightarrow |z_0|.|\pm i - 1| = 2 \leftrightarrow |z_0|.\sqrt{2} = 2 \leftrightarrow |z_0| = \sqrt{2}$
- Như vậy tồn tại vô số cặp số phức z và z_0 thỏa mãn giả thiết và đồng thời: P = 0.
- Chỉ cần chọn $|z_0| = \sqrt{2}$ và $z = \pm iz_0$.
- Suy ra $P_{min} = 0$.
- Vậy ta chọn đáp án **B.**
- Ví dụ ta có thể cho: $z_0 = 1 + i$ và $z = iz_0 = i(1 + i) = -1 + i$. Khi đó:
- $\begin{cases} |z - z_0| = |-1 + i - (1 + i)| = 2 \\ |z^2 + z_0^2| = |(-1 + i)^2 + (1 + i)^2| = P = 0 \end{cases}$

Câu 292. (3) Cho số phức z_1 không đổi và số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z - z_1| = 4$. Xét biểu thức: $P = |z^2 + 2z_1^2 + 2z.z_1|$. Để giá trị của biểu thức P nhỏ nhất thì giá trị mô đun: $|z|$ **gần nhất** giá trị nào dưới đây?

A. 0. **B.** 1. **C.** 5/2. **D.** 7/2.

Giải:

- Giá trị nhỏ nhất của P có thể phán đoán bằng 0: $P_{min} = 0$. Khi đó ta chỉ cần đi tìm điều kiện của z và z_1 để thỏa mãn đồng thời hai giả thiết: $\begin{cases} |z - z_1| = 4 & (1) \\ z^2 + 2zz_1 + 2z_1^2 = 0 & (2) \end{cases}$
- Từ (2) suy ra: $\frac{z^2}{z_1^2} + 2\frac{z}{z_1} + 2 = 0 \leftrightarrow \frac{z}{z_1} = -1 \pm i \leftrightarrow z_1 = \frac{z}{-1 \pm i}$ (Vì $z = 0$ không thỏa mãn)
- Thế vào (1) ta được: $|z - \frac{z}{-1 \pm i}| = 4 \leftrightarrow |z|.|1 - \frac{1}{-1 \pm i}| = 4 \leftrightarrow |z| = \frac{4\sqrt{10}}{5}$
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 393. (3) Cho số phức z không thuần thực thỏa mãn điều kiện số phức: $w = \frac{z^2 + z + 1}{z^2 - z + 1}$ thuần thực. Khi đó gọi z = a + ib, giá trị của biểu thức: $\frac{1 - (a^4 + b^4)}{1 - (a^6 + b^6)}$ bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** 2/3. **D.** 1/2.

Giải:

- **Cách 1:** Phương pháp tự luận triệt để: $w = \frac{z^2 + z + 1}{z^2 - z + 1} \leftrightarrow (w - 1)z^2 - (w + 1)z + (w - 1) = 0$ (1)

- Phương trình (1) có cặp nghiệm phức liên hợp: z ; $\overline{z}$. Theo hệ thức VIET, ta có:
- $z.\overline{z} = |z|^2 = \frac{c}{a} = \frac{w-1}{w-1} = 1 \to |z| = 1$
- Ta có: $a^4 + b^4 = (a^2+b^2)^2 - 2a^2b^2 = 1 - 2a^2b^2 \to 1 - a^4 + b^4 = 2a^2b^2$
- $a^6 + b^6 = (a^2+b^2)^3 - 3a^2b^2(a^2+b^2) = 1 - 3a^2b^2 \to 1 - a^6 - b^6 = 3a^2b^2$
- Suy ra: $\frac{1-(a^4+b^4)}{1-(a^6+b^6)} = \frac{2a^2b^2}{3a^2b^2} = \frac{2}{3}$
- Vậy ta chọn đáp án **C.**
- **Cách 2:** Vì w thuần thực, ta có thể cho nó một giá trị bất kì, ví dụ ta cho: $w = \frac{z^2+z+1}{z^2-z+1} = 0$
- $\Leftrightarrow z^2 + z + 1 = 0 \to z = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2} \to a = -\frac{1}{2}$; $b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$
- Thay vào biểu thức: $\frac{1-(a^4+b^4)}{1-(a^6+b^6)} = \frac{2}{3}$

Câu 394. (3) Cho số phức z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình: |6 – 3i + iz| = |2z – 6 – 9i|, thỏa mãn: $|z_1 - z_2| = 2$. Giá trị của biểu thức: $P = |z_1 + z_2|$ tương ứng bằng

A. 6. **B.** 5. **C.** $\sqrt{26}$. **D.** 10.

Giải:

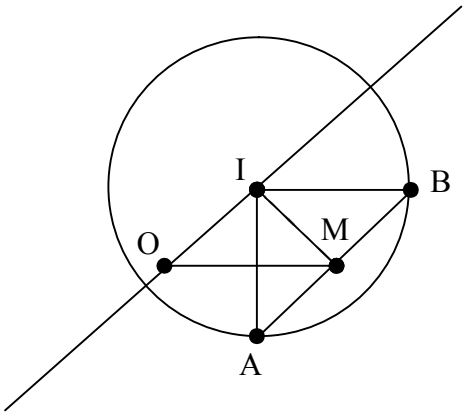
- Trước hết ta tìm quỹ tích điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn giả thiết:
- $|6 - 3i + iz| = |2z - 6 - 9i| \leftrightarrow |i|.|z - 3 - 6i| = |2z - 6 - 9i| \leftrightarrow |z - 3 - 6i| = |2z - 6 - 9i|$ (1)
- Đặt z = x + iy thay vào (1) ta được:
- $|x + iy - 3 - 6i| = |2(x+iy) - 6 - 9i| \leftrightarrow (x-3)^2 + (y-6)^2 = (2x-6)^2 + (2y-9)^2$
- $\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = 1$
- Như vậy điểm biểu diễn số phức z là đường tròn (C): $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 1 \Leftrightarrow |z - z_0| = R$
- Trong đó: $z_0 = 3 + 4i$ và R = 1. Điểm I biểu diễn số phức $z_0 = 3 + 4i$.
- Gọi A là điểm biểu diễn số phức z_1 và B là điểm biểu diễn số phức z_2 khi đó ta có:
- IA = IB = R = 1; AB = $|z_1 - z_2| = 2 = 2R$. Suy ra AB là một đường kính của đường tròn (C).
- Khi đó ta có I là trung điểm của AB tức là: $z_1 + z_2 = 2z_0 = 6 + 8i$.
- Suy ra: $P = |z_1 + z_2| = 10$.
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

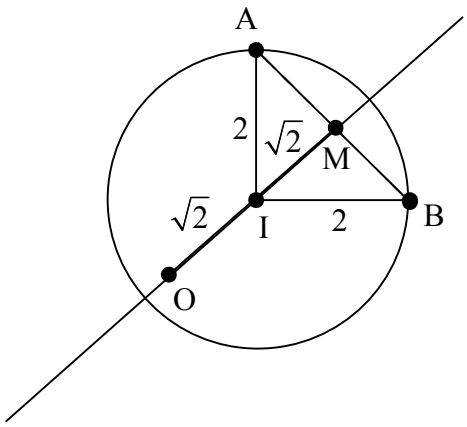
Câu 395. (4) Cho số phức z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình: |z – 1 + i| = 2, thỏa mãn: $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = |z_1 + z_2|$ tương ứng bằng

A. 4. **B.** $4\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $4\sqrt{3}$.

Giải:

- Từ giả thiết ta thấy, hai điểm A và B biểu diễn hai số phức z_1 và z_2 cùng nằm trên đường tròn (C) có tâm: I = z_0 = 1 – i ; bán kính R = 2.
- Hai điểm A và B lần lượt biểu diễn số phức z_1 và z_2 nằm trên đường tròn (C), độ dài đoạn thẳng AB = $|z_1 - z_2| = 2\sqrt{2}$; IA = IB = 2. Suy ra tam giác IAB vuông cân tại I.
- Gọi M là trung điểm của cạnh AB, ta suy ra được: $IM = \frac{AB}{2} = \sqrt{2}$, OI = $|z_I|$ = |1 – i| = $\sqrt{2}$.





- Khi đó, ta có:
- $z_1 = \overrightarrow{OA}; z_2 = \overrightarrow{OB} \rightarrow z_1 + z_2 = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM} \rightarrow P = |z_1 + z_2| = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = 2|\overrightarrow{OM}| = 2OM$
- Áp dụng BĐT tam giác, ta có: $OM \le OI + IM \rightarrow OM$ lớn nhất khi O , I , M thẳng hàng . Khi đó ta có: OM lớn nhất bằng: $OM_{max} = OI + IM = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$
- Suy ra giá trị lớn nhất của P là: $P_{max} = 2.OM_{max} = 4\sqrt{2}$.
- Chúng ta có thể tìm tỉ mỉ được các giá trị của z_1 và z_2, tuy nhiên sẽ rất dài và phức tạp bằng phương pháp tọa độ Oxy. Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 396. (4) Cho số phức z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình: |z – 3 + 4i| = 3, thỏa mãn: $|z_1 - z_2| = 2$. Giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = |z_1 + z_2|$ tương ứng bằng

A. $4\sqrt{2} + 10$. **B.** $4\sqrt{3}$. **C.** $6 + 2\sqrt{2}$. **D.** 12.

Giải:

- Bài toán này tương tự bài toán trên, nhưng chúng ta sẽ làm theo phương pháp đại số:
- Đường tròn (C): có tâm I = z_0 = 3 – 4i = (3;-4); bán kính: R = 3.
- Đặt: $u = z - 3 + 4i \rightarrow |u| = 3$ (1)
- Khi đó: $|z_1 - z_2| = 2 \leftrightarrow |(z_1 - 3 + 4i) - (z_2 - 3 + 4i)| = |u_1 - u_2| = 2$
- Ta cũng có: $|u_1| = |u_2| = 3$. Áp dụng CT:
- $|u_1 + u_2|^2 + |u_1 - u_2|^2 = 2(|u_1|^2 + |u_2|^2) \rightarrow |u_1 + u_2|^2 = 2(|u_1|^2 + |u_2|^2) - |u_1 - u_2|^2 = 2.(3^2 + 3^2) - 2^2$
- Suy ra: $|u_1 + u_2|^2 = 32 \rightarrow |u_1 + u_2| = 4\sqrt{2}$
- Xét: $P = |z_1 + z_2| = |(z_1 - 3 + 4i) + (z_2 - 3 + 4i) + 6 - 8i| = |u_1 + u_2 + 6 - 8i| \leq |u_1 + u_2| + |6 - 8i|$
- $\Leftrightarrow P \leq |u_1 + u_2| + |6 - 8i| = 4\sqrt{2} + 10 \rightarrow$ Giá trị lớn nhất của P là: $P_{max} = 4\sqrt{2} + 10$.
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 397. (4) Cho số phức z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình: |z – 2 + 3i| = 2, thỏa mãn: $|z_1 - z_2| = 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = |z_1 + z_2|$ tương ứng bằng

A. $4\sqrt{5} - \sqrt{7}$. **B.** $2\sqrt{13} - \sqrt{7}$. **C.** $10 + 2\sqrt{3}$. **D.** 10.

Giải:

- Đặt: u = z – 2 + 3i, suy ra: |u| = 2.
- Khi đó: $z_1 = u_1 + 2 - 3i$; $z_2 = u_2 + 2 - 3i$; $|u_1| = |u_2| = 2$.
- Thay vào các biểu thức: $\begin{cases} |z_1 - z_2| = 3 \\ P = |z_1 + z_2| \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} |u_1 - u_2| = 3 \\ P = |u_1 + u_2 + 4 - 6i| \end{cases}$
- Trước hết, ta áp dụng CT tính:
- $|u_1 + u_2|^2 + |u_1 - u_2|^2 = 2(|u_1|^2 + |u_2|^2) \rightarrow |u_1 + u_2|^2 = 2(|u_1|^2 + |u_2|^2) - |u_1 - u_2|^2 = 7 \rightarrow |u_1 + u_2| = \sqrt{7}$
- Áp dụng BĐT tam giác ta có thể xác định được giá trị nhỏ nhất của biểu thức P như sau:
- $P = |u_1 + u_2 + 4 - 6i| = |(u_1 + u_2) - (-4 + 6i)| \geq ||u_1 + u_2| - |-4 + 6i|| = |\sqrt{7} - 2\sqrt{13}| = 2\sqrt{13} - \sqrt{7}$
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 398. (4) Cho số phức z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình: |z – 4 + 2i| = 2, thỏa mãn: $|z_1 - z_2| = \sqrt{6}$. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức: $P = |2z_1 + 3z_2|$ lần lượt là M và m. Khi đó tổng (M + m) tương ứng bằng

A. $10\sqrt{5} - \sqrt{82}$. **B.** $2\sqrt{82}$. **C.** $10\sqrt{5} + \sqrt{19}$. **D.** $20\sqrt{5}$.

Giải:

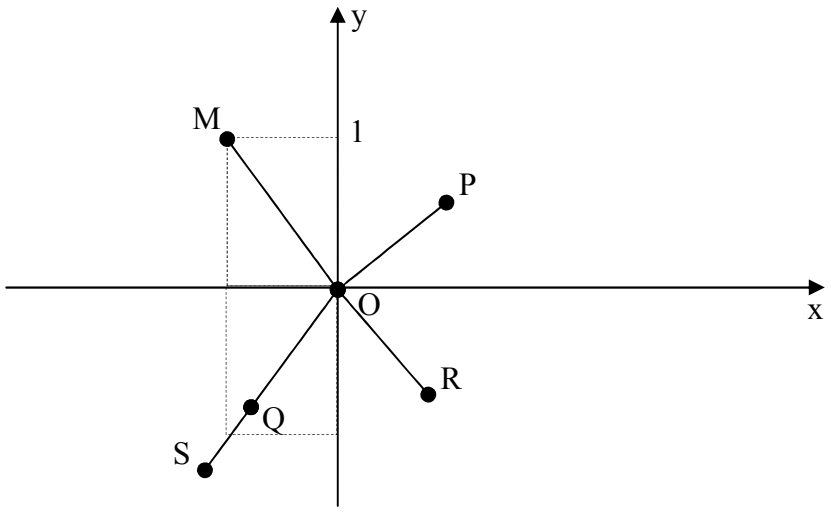
- Đặt u = z – 4 + 2i $\rightarrow z = u + 4 - 2i$; $|u| = 2$.
- Khi đó: $z_1 = u_1 + 4 - 2i$; $z_2 = u_2 + 4 - 2i$; $|u_1| = |u_2| = 2$.
- Thay vào giả thiết và biểu thức P ta được: $\begin{cases} |z_1 - z_2| = \sqrt{6} \\ P = |2z_1 + 3z_2| \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} |u_1 - u_2| = \sqrt{6} \\ P = |2u_1 + 3u_2 + 20 - 10i| \end{cases}$
- Trước hết ta có:
- $6|z_1 - z_2|^2 + |2z_1 + 3z_2|^2 = 10|z_1|^2 + 15|z_2|^2 \rightarrow |2z_1 + 3z_2|^2 = 82 \rightarrow |2z_1 + 3z_2| = \sqrt{82}$
- Áp dụng BĐT tam giác, ta có: $P = |2u_1 + 3u_2 + 20 - 10i| \le |2u_1 + 3u_2| + |20 - 10i| = \sqrt{82} + 10\sqrt{5}$
- Suy ra giá trị lớn nhất của P là: M = P_{max} = $\sqrt{82} + 10\sqrt{5}$
- $P = |2u_1 + 3u_2 - (-20 + 10i)| \ge ||2u_1 + 3u_2| - |-20 + 10i|| = |\sqrt{82} - 10\sqrt{5}| = 10\sqrt{5} - \sqrt{82}$
- Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là: m = P_{min} = $10\sqrt{5} - \sqrt{82}$
- Suy ra: M + m = $20\sqrt{5}$. Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 399. (3) Cho điểm M biểu diễn số phức z như hình vẽ. Trong các điểm đã cho (P, Q, R , S) điểm biểu diễn số phức nghịch đảo của z tương ứng là

A. P. **B.** R. **C.** S. **D.** Q.

Giải:

- Chúng ta có thể nhận thấy số phức z có phần ảo bằng 1 và phần thực âm, nên chọn một giá trị cụ thể cho z để tính toán: $z = -1 + i \rightarrow \frac{1}{z} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$



- Nhận thấy số phức này có mô đun nhỏ hơn 1, phần thực âm, phần ảo âm có độ lớn nhỏ hơn 1.

- Hiển nhiên có: $|z|>1 \to \frac{1}{|z|}<1$. Cho nên điểm biểu diễn số phức $\frac{1}{z}$ có khoảng cách tới gốc O nhỏ hơn 1.
- Trên hình vẽ nhận thấy điểm thỏa mãn biểu diễn số phức $\frac{1}{z}$ là điểm Q.
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 400. (3) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z+1+i|=|z+1-i|$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=|z-2i+2|+\frac{8}{|z|}+\sqrt{z.\overline{z}}$ tương ứng nằm trong khoảng

A. (1;3). **B.** (3;5). **C.** (5;7). **D.** (7;9).

Giải:

- Gọi số phức z = x + iy ; Trong đó x, y là số thực.
- Từ giả thiết: $\to |x+iy+1+i|=|x+iy+1-i| \leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}$
- Rút gọn ta được: $y=0 \to z=x \in R$ (z là số phức thuần thực).
- Biến đổi lại biểu thức P cho dễ nhìn:
- $P=|x+2-2i|+\frac{8}{|x|}+\sqrt{|z|^2}=|x+2-2i|+\frac{8}{|x|}+|x|=\sqrt{(x+2)^2+2^2}+\frac{8}{|x|}+|x|$
- $P=\sqrt{x^2+4x+8}+\frac{8}{|x|}+|x|$
- Dễ thấy, biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất ứng với trường hợp x < 0. Khi đó ta có thể đặt: $t=|x|=-x>0$. Biểu thức P trở thành: $P=\sqrt{t^2-4t+8}+\frac{8}{t}+t$
- Đạo hàm: $P'=\frac{t-2}{\sqrt{t^2-4t+8}}-\frac{8}{t^2}+1$. Dùng CASIO ta cho: P' = 0 $\to A=2,5256$
- Thay trở lại biểu thức P ta được gần đúng giá trị nhỏ nhất của P là: P_{min} = 7,761.
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 401. (3) Cho số phức z thỏa mãn: |z + 1 + i| = 1. Giá trị nhỏ nhất của: P = $|z^2 + 2i|$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** $2-\frac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Giải:

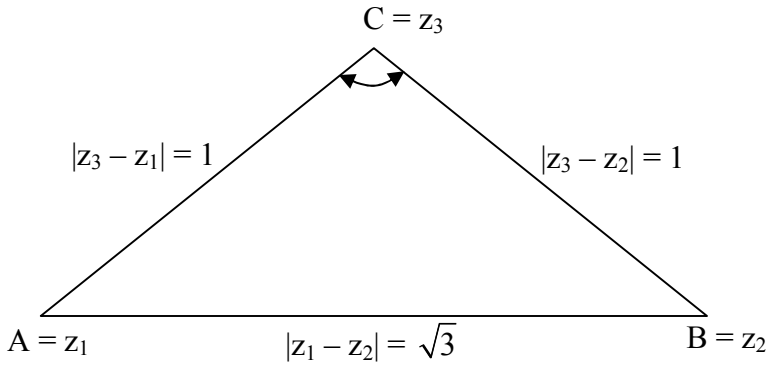
- Áp dụng BĐT: $|z^2+z_0^2|\geq|\frac{1-2|z_0|}{\sqrt{2}}|$; với $z_0 = 1 + i \Leftrightarrow z_0^2=(1+i)^2=2i$;$|z_0|=\sqrt{2}$
- Ta có: $P=|z^2+z_0^2|\geq|\frac{1-2|z_0|}{\sqrt{2}}|=|\frac{1-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}|=2-\frac{1}{\sqrt{2}}$
- Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là: $P_{min} = 2-\frac{1}{\sqrt{2}}$.
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 402. (3) Cho ba số phức z phân biệt thỏa mãn: $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ và $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{1}{z_3}$. Biết rằng z_1 , z_2 , z_3 lần lượt được biểu diễn bởi các điểm A, B, C. Khi đó góc $\widehat{ACB}$ tương ứng bằng bao nhiêu ?

A. 90^0. **B.** 120^0. **C.** 60^0. **D.** 150^0.

Giải:

- Từ giả thiết ta suy ra:
- $\frac{1}{z_1}=\frac{1}{z_3}-\frac{1}{z_2}\leftrightarrow\frac{1}{z_1}=\frac{z_3-z_2}{z_2z_3}\leftrightarrow|\frac{1}{z_1}|=|\frac{z_3-z_2}{z_2z_3}|\leftrightarrow\frac{1}{1}=\frac{|z_3-z_2|}{1}\leftrightarrow|z_3-z_2|=1$
- Tương tự, ta cũng có: $|z_3-z_1|=1$
- Lại có: $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{1}{z_3}\leftrightarrow\frac{1}{z_3}=\frac{z_1+z_2}{z_1z_2}\leftrightarrow|\frac{1}{z_3}|=|\frac{z_1+z_2}{z_1z_2}|\leftrightarrow\frac{1}{1}=\frac{|z_1+z_2|}{1}\leftrightarrow|z_1+z_2|=1$
- Đã biết kết quả: $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)\rightarrow|z_1-z_2|=\sqrt{3}$
- Điểm A = z_1 ; B = z_2 ; C = z_3 . Suy ra ΔABC có các cạnh: BC = AC = 1; AB = $\sqrt{3}$



- Từ hình vẽ suy ra: $\cos\widehat{ACB}=\frac{CA^2+CB^2-AB^2}{2CA.CB}=-\frac{1}{2}\rightarrow\widehat{ACB}=120^\circ$
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 403. (3) Cho phương trình bậc 2 hệ số thực: $z^2 + az + b = 0$ có hai nghiệm phức không thuần thực lần lượt là: $w + 1$ và $2w - 2i$. Khi đó tổng của $(8a + 9b)$ bằng

A. 8. **B.** 0. **C.** -8. **D.** 12.

Giải:

- Áp dụng tính chất của phương trình phức hệ số thực luôn có cặp nghiệm liên hợp:
- $z_1 = w + 1$; $z_2 = 2w - 2i \rightarrow z_2 = 2w - 2i = \overline{z_1} = \overline{w + 1} = \overline{w} + 1$
- Gọi: $w = a + ib \rightarrow$ $2(a + ib) - 2i = \overline{a + ib} + 1 = a - ib + 1 \leftrightarrow \begin{cases} 2a = a + 1 \\ 2b - 2 = -b \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{2}{3} \end{cases} \rightarrow w = 1 + \frac{2i}{3}$
- Suy ra hai nghiệm phức của phương trình bậc hai đã cho:
- $z_1 = w + 1 = 1 + \frac{2i}{3} + 1 = 2 + \frac{2i}{3}$; $z_2 = 2 - \frac{2i}{3}$
- Theo hệ thức VIET, ta có: $\begin{cases} z_1 + z_2 = -a = 2 + \frac{2i}{3} + 2 - \frac{2i}{3} = 4 \\ z_1 z_2 = b = (2 + \frac{2i}{3})(2 - \frac{2i}{3}) = \frac{40}{9} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = \frac{40}{9} \end{cases} \rightarrow (8a + 9b) = 8$
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 404. (4) Cho phương trình phức hệ số thực: $z^3 + az^2 + bz + c = 0$. Biết phương trình có một nghiệm thuần thực và hai nghiệm phức không thuần thực. Gọi một nghiệm thuần thực là z_1 và một nghiệm phức là z_2. Biết rằng z_1 và iz_2 có cùng phần thực và có $|z_2| = 2$. Giá trị lớn nhất của hệ số thực b tương ứng bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Giải:

- Áp dụng tính chất của một phương trình phức dạng đa thức với các hệ số thực, ta thấy phương trình luôn tồn tại ít nhất một cặp nghiệm phức. Gọi $z_2 = x + iy$, suy ra $z_3 = x - iy$, z_1 thuần thực. Từ giả thiết suy ra: z_1 = phần thực của (iz_2).
- Ta có: $iz_2 = i(x + iy) = ix - y \rightarrow z_1 = -y$.
- Ta cũng có: $|z_2| = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$ (1)
- Áp dụng hệ thức VIET cho phương trình bậc 3, ta có:

- $z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = \frac{C}{A} = b = -y(x+iy) + (x+iy)(x-iy) + (x-iy)(-y)$
- $\Leftrightarrow b = x^2 + y^2 - 2xy = 4 - 2xy \le 4 + 2|xy| \le 4 + x^2 + y^2 = 8$
- Suy ra giá trị lớn nhất của hệ số b là: $b_{max} = 8$.
- Vậy ta chọn đán án **D.**

Câu 405. (3) Cho phương trình phức hệ số thực: $z^2 + az + 2a + 1 = 0$. Biết phương trình có hai nghiệm phức z_1 và z_2 thỏa mãn điều kiện: $z_1 = iz_2$. Khi đó biểu thức $(a-2)^2$ có giá trị bằng

A. 0. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Giải:

- Gọi $z_2 = x + iy$. Ta có: $z_1 = \overline{z_2} = iz_2 \leftrightarrow \overline{x+iy} = i(x+iy) \leftrightarrow x - iy = ix - y \leftrightarrow y = -x$
- Vậy $z_2 = x - ix$. Thay vào phương trình ta được:
- $(x-ix)^2 + a(x-ix) + 2a + 1 = 0 \leftrightarrow (ax + 2a + 1) - i(2x^2 + ax) = 0 \leftrightarrow \begin{cases} ax + 2a + 1 = 0 & (1) \\ 2x^2 + ax = 0 & (2) \end{cases}$
- Từ (2) suy ra: x = 0 (loại) hoặc: $x = -\frac{a}{2}$. Thế vào (1) ta được:
- $-a.\frac{a}{2} + 2a + 1 = 0 \leftrightarrow a^2 - 4a - 2 = 0 \to a = 2 \pm \sqrt{6} \to (a-2)^2 = 6$
- Vậy ta chọn đán án **B.**

Câu 406. (3) Cho số phức z thỏa mãn: $|z + 1 + 2i| = 1$. Giá trị nhỏ nhất của: $P = |z^2 + 4i - 3|$ bằng

A. 6. **B.** $2\sqrt{2} + 3$. **C.** $\frac{2\sqrt{10} - \sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{13} - \sqrt{3}}{2}$.

Giải:

- Áp dụng BĐT: "Nếu $|z + z_0| = 1$ thì ta có: $|z^2 + z_0^2| \ge |\frac{1 - 2|z_0|}{\sqrt{2}}|$ "
- Ta có: $(1 + 2i)^2 = 4i - 3$.
- Suy ra: $P = |z^2 + 4i - 3| \ge |\frac{1 - 2|1 + 2i|}{\sqrt{2}}| = \frac{2\sqrt{10} - \sqrt{2}}{2}$
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 407. (4) Cho số phức z khác không và thỏa mãn: $|z+\frac{3}{z}|=3\sqrt{2}$ và đặt: $M=\max|z|^2$; $m=\min|z|^2$. Giá trị của (M + m) tương ứng bằng

A. 12. **B.** 24. **C.** 20. **D.** 18.

Giải:

- Áp dụng phương pháp bình phương vô hướng, gọi góc tạo bởi z^2 và 3 là: $\alpha=\widehat{z^2,3}$.
- Từ giả thiết ta có: $|z^2+3|=3|z|\sqrt{2}\rightarrow|z^2|^2+9+6|z^2|\cos\alpha=18|z^2|$
- Đặt: $t=|z|>0$. Thay vào trên ta được: $t^2+9+6t\cos\alpha=18t\rightarrow\cos\alpha=\frac{18t-t^2-9}{6t}\in[-1;1]$
- Suy ra:
- $-1\le\cos\alpha=\frac{18t-t^2-9}{6t}\le1\rightarrow\begin{cases}18t-t^2-9\le6t\\18t-t^2-9\ge-6t\end{cases}\leftrightarrow\begin{cases}t^2-12t+9\ge0\\t^2-24t+9\le0\end{cases}\leftrightarrow\begin{cases}t\le6-3\sqrt{3};t\ge6+3\sqrt{3}\\12-3\sqrt{15}\le t\le12+3\sqrt{15}\end{cases}$
- Suy ra: $12-3\sqrt{15}\le t=|z|^2\le12+3\sqrt{15}$.
- Suy ra: M = MAX $|z|^2=12+3\sqrt{15}$; m = MIN $|z|^2=12-3\sqrt{15}$.
- Suy ra: M + m = 24.
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 408. (3) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z-2+3i|=\sqrt{6}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=|z-2+i|^2-|\overline{z}+1+3i|^2$ tương ứng bằng

A. 21. **B.** 14. **C.** $2\sqrt{13}+4$. **D.** $10\sqrt{6}-41$.

Giải:

- Đặt u = z – 2 + 3i $\rightarrow z=u+2-3i\rightarrow|u|=\sqrt{6}$
- Biến đổi: $P=|z-2+i|^2-|\overline{z}+1+3i|^2=|z-2+i|^2-|z+1-3i|^2=|u-2i|^2-|u+3-6i|^2$
- Gọi u = a + ib, suy ra: $a^2+b^2=6$. Biểu thức P khi đó là:
- $P=|a+ib-2i|^2-|a+ib+3-6i|^2=a^2+(b-2)^2-(a+3)^2-(b-6)^2=-6a+8b-41$
- Ta có: $(-6a+8b)^2\le((-6)^2+8^2)(a^2+b^2)=600\rightarrow-10\sqrt{6}\le-6a+8b\le10\sqrt{6}$
- Suy ra: $-10\sqrt{6}-41\le P=-6a+8b-41\le10\sqrt{6}-41$
- Suy ra GTLN của biểu thức P là: $P_{max}=10\sqrt{6}-41$.
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 409. (3) Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn điều kiện: $|z_1|=|z_2|=1$. Giá trị nhỏ nhất của: $P=|z_1+1|+|z_2+1|+|z_1z_2+1|$ tương ứng bằng

A. 1. **B.** 0. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 2.

Giải:

- Biến đổi biểu thức P về dạng bậc nhất:
- $P=|z_1+1|+|z_2+1|+|z_1z_2+z_1.\overline{z_1}|=|z_1+1|+|z_2+1|+|z_1|.|z_2+\overline{z_1}|=|z_1+1|+|z_2+1|+|z_2+\overline{z_1}|$
- Áp dụng BĐT tam giác ta có:
- $|z_2+1|+|z_2+\overline{z_1}|=|-z_2-1|+|z_2+\overline{z_1}|\geq|-z_2-1+z_2+\overline{z_1}|=|-1+\overline{z_1}|=|\overline{-1+z_1}|=|1-z_1|$
- Suy ra: $P=|z_1+1|+|z_2+1|+|z_2+\overline{z_1}|\geq|z_1+1|+|1-z_1|\geq|z_1+1+1-z_1|=2$.
- Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là: $P_{min}=2$.
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 410. (4) Cho hai số phức thỏa mãn điều kiện: $|z_1|=1;|z_2|=2$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức: P = $|z_1+1|+|z_2+2|+|z_1z_2+1|$ tương ứng bằng

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Giải:

- Tương tự câu 409. Biến đổi biểu thức P về dạng bậc nhất:
- $P=|z_1+1|+|z_2+2|+|z_1z_2+z_1.\overline{z_1}|=|z_1+1|+|z_2+2|+|z_1|.|z_2+\overline{z_1}|=|z_1+1|+|z_2+2|+|z_2+\overline{z_1}|$
- Áp dụng BĐT tam giác ta có:
- $|z_2+2|+|z_2+\overline{z_1}|=|-z_2-2|+|z_2+\overline{z_1}|\geq|-z_2-2+z_2+\overline{z_1}|=|-2+\overline{z_1}|=|\overline{-2+z_1}|=|2-z_1|$
- Suy ra: $P=|z_1+1|+|z_2+2|+|z_2+\overline{z_1}|\geq|z_1+1|+|2-z_1|\geq|z_1+1+2-z_1|=3$.
- Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là: $P_{min}=3$.
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 411. (3) Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn: $|z_1|=2$; $|z_2|=a>0$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=|z_1+2|+|z_2+3|+|z_1z_2+4|$ nằm trong khoảng

A. (0;1). **B.** (1;3). **C.** (4;6). **D.** (6;8).

Giải:

- Biến đổi biểu thức P về dạng bậc nhất:
- $P = |z_1 + 2| + |z_2 + 3| + |z_1 z_2 + z_1.\overline{z_1}| = |z_1 + 2| + |z_2 + 3| + |z_1|.|z_2 + \overline{z_1}| = |z_1 + 2| + |z_2 + 3| + |z_2 + \overline{z_1}|$

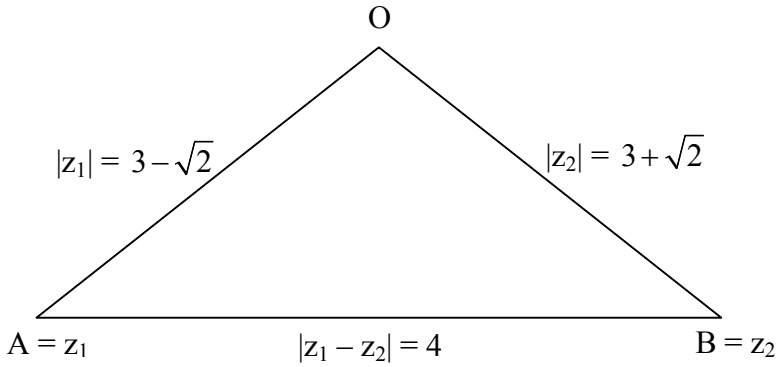
- Áp dụng BĐT tam giác ta có:
- $|z_2 + 3| + |z_2 + \overline{z_1}| = |-z_2 - 3| + |z_2 + \overline{z_1}| \geq |-z_2 - 3 + z_2 + \overline{z_1}| = |-3 + \overline{z_1}| = |\overline{-3 + z_1}| = |3 - z_1|$ (1)
- Suy ra: $P = |z_1 + 2| + |z_2 + 3| + |z_2 + \overline{z_1}| \geq |z_1 + 2| + |3 - z_1| \geq |z_1 + 2 + 3 - z_1| = 5$.
- Suy ra giá trị nhỏ nhất của P là: $P_{min} = 5$.
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 412. (4) Cho hai số phức z_1 và z_2 nằm trên đường tròn (C) có bán kính R và đi qua gốc tọa độ. Biết rằng: $|z_1| + |z_2| = 6$; $|z_1 z_2| = 7$; $|z_1 - z_2| = 4$. Tìm bán kính R?

A. $\frac{7\sqrt{10}}{10}$. **B.** $\frac{10\sqrt{7}}{7}$. **C.** $\frac{\sqrt{10}}{10}$. **D.** $\frac{14\sqrt{10}}{5}$.

Giải:

- Trước hết ta đi tìm giá trị của hai mô đun: $|z_1|$ và $|z_2|$ bằng bài toán TỔNG và TÍCH:
- $|z_1|$ và $|z_2|$ là nghiệm của phương trình: $t^2 - 6t + 7 = 0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = |z_1| = 3 - \sqrt{2} \\ t_2 = |z_2| = 3 + \sqrt{2} \end{array}\right.$
- Gọi A là điểm biểu diễn z_1: A = z_1 ; B là điểm biểu diễn z_2: B = z_2. Khi đó ta có:
- OA = $OA = |z_1| = 3 - \sqrt{2}$; $OB = |z_2| = 3 + \sqrt{2}$; $AB = |z_1 - z_2| = 4$.
- Chúng ta đưa về bài toán tìm bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB khi biết rõ 3 cạnh.



- Ta có: $\cos\widehat{AOB} = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA.OB} = \frac{(3-\sqrt{2})^2 + (3+\sqrt{2})^2 - 4^2}{2(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})} = \frac{3}{7} \rightarrow \sin\widehat{AOB} = \frac{2\sqrt{10}}{7}$
- Suy ra bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB (cũng chính là bán kính cần tìm)

- $R = \dfrac{AB}{2\sin\widehat{AOB}} = \dfrac{4}{2.2\sqrt{10}/7} = \dfrac{7}{\sqrt{10}}$
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 413. (3) Cho số phức z thỏa mãn: $\overline{z} = \dfrac{z^2+2z+3}{z+1}$. Tổng mô đun của tất cả các số phức z thỏa mãn phương trình đã cho tương ứng bằng

A. 6. **B.** $3+\sqrt{6}$. **C.** $4+2\sqrt{2}$. **D.** 7.

Giải:

- Biến đổi: $\overline{z} = \dfrac{z^2+2z+3}{z+1} \leftrightarrow z.\overline{z} + \overline{z} = z^2+2z+3 \leftrightarrow |z|^2 + \overline{z} = z^2+2z+3$
- Gọi z = a + ib, thay vào phương trình ta được:
- $a^2+b^2+a-ib = (a+ib)^2+2(a+ib)+3 \leftrightarrow (2b^2-a+3)+b(2a-1)i = 0 \rightarrow \begin{cases} 2b^2-a+3=0 & (1) \\ b(2a-1)=0 & (2) \end{cases}$
- Từ (2) suy ra: $\left[\begin{array}{l} b=0 \rightarrow a=3 \rightarrow z_1=3 \\ a=\dfrac{1}{2} \rightarrow b=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2} \rightarrow z_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{5}}{2};\ z_3=\dfrac{1}{2}-\dfrac{i\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$
- Suy ra: tổng mô đun của các số phức thỏa mãn điều kiện trên: $|z_1|+|z_2|+|z_3| = 3+\sqrt{6}$
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 414. (3) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z+i|=2$. Khi đó điểm biểu diễn số phức $w = \dfrac{(3-4i)z+2-i}{iz-1}$ là đường tròn (C) có tâm I(a;b) và bán kính R. Trong đó: a, b, R là các số thực. Giá trị của (a + b + R^2) bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** -2.

Giải:

- Áp dụng phép chia hai đa thức phức, ta có thể tách:
- $w = \dfrac{(3-4i)z+2-i}{iz-1} = -4-3i+\dfrac{-2-4i}{iz-1} \rightarrow w+4+3i = \dfrac{-2-4i}{iz-1}$
- Đến đây ta xử lí mô đun: $|w+4+3i| = \left|\dfrac{-2-4i}{iz-1}\right| = \dfrac{|2+4i|}{|i(z+i)|} = \dfrac{2\sqrt{5}}{|z+i|} = \dfrac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$
- $\rightarrow |w+4+3i| = \sqrt{5} \rightarrow$ điểm biểu diễn số phức w là đường tròn tâm I(-4;-3) bán kính $R = \sqrt{5}$
- Suy ra: a = -4 ; b = -3; $R = \sqrt{5} \rightarrow a+b+R^2 = -2$. Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 415. (3) Cho ba số phức u, v, w thỏa mãn hệ thức: $(u-2i+3)v+2iw-3i-4=0$. Biết phương trình nghiệm đúng với mọi v. Khi đó |u + w| bằng

A. 2. **B.** 1/2. **C.** 3/2. **D.** 1.

Giải:

- Phương trình đã cho đúng với mọi v $\Leftrightarrow \begin{cases} u-2i+3=0 \\ 2iw-3i-4=0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} u=-3+2i \\ w=\dfrac{3}{2}-2i \end{cases}$
- Suy ra: $|u+v|=|-3+2i+\dfrac{3}{2}-2i|=\dfrac{3}{2}$
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 416. (3) Cho u và w thỏa mãn hệ thức: $(1+2i)u.\mathrm{w}-3i+4u=0$. Biết |u| = 4. Tìm quỹ tích điểm biểu diễn số phức w?

A. là đường tròn (C) có phương trình: $(x+\dfrac{4}{5})^2+(y-\dfrac{8}{5})^2=\dfrac{9}{80}$.

B. là đường thẳng có phương trình: 2x – 3y – 9 = 0.

C. là đường tròn (C) có phương trình: $(x+1)^2+(y-2)^2=9$

D. là đường tròn (C) có phương trình: $(x+\dfrac{2}{5})^2+(y-\dfrac{1}{5})^2=5$.

Giải:

- Từ giả thiết suy ra: $u\left((1+2i)\mathrm{w}+4\right)=3i \leftrightarrow u=\dfrac{3i}{(1+2i)\mathrm{w}+4} \rightarrow |u|=|\dfrac{3i}{(1+2i)\mathrm{w}+4}|=4$
- $\Leftrightarrow |(1+2i)\mathrm{w}+4|=\dfrac{3}{4} \leftrightarrow |1+2i|.|\mathrm{w}+\dfrac{4}{5}-\dfrac{8}{5}i|=\dfrac{3}{4} \leftrightarrow |\mathrm{w}+\dfrac{4}{5}-\dfrac{8}{5}i|=\dfrac{3}{4\sqrt{5}}$
- Vậy quỹ tích điểm biểu diễn số phức w là đường tròn (C): $(x+\dfrac{4}{5})^2+(y-\dfrac{8}{5})^2=\dfrac{9}{80}$
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 417. (3) Cho z và w thỏa mãn hệ thức: $(\mathrm{w}+2i)z-(3-i)\mathrm{w}+2i=0$. Biết |w| = 2. Quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là

A. đường tròn (C) có phương trình: $(x-1)^2+y^2=25$.

B. đường thẳng d có phương trình: $8x+2y+11=0$.

C. đường thẳng d có phương trình: $8x-2y-9=0$.

D. đường thẳng d có phương trình: $2x+11y-8=0$.

Giải:

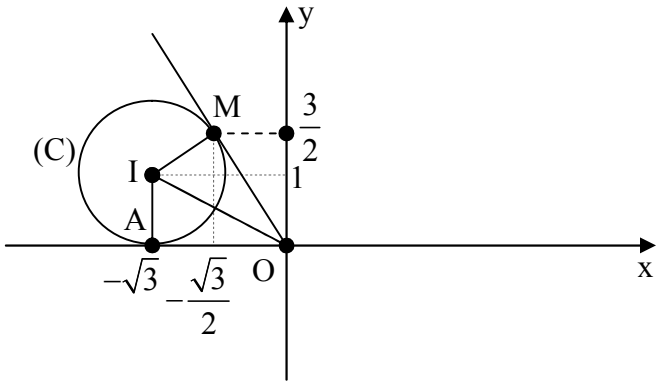
- Giả thiết suy ra: $w(z-3+i)=-2iz-2i \leftrightarrow w=\dfrac{-2iz-2i}{z-3+i}$
- Đến đây ta mô đun hai vế, sẽ được: $|w|=\left|\dfrac{-2iz-2i}{z-3+i}\right|=2 \leftrightarrow \dfrac{|z+1|}{|z-3+i|}=1 \leftrightarrow |z+1|=|z-3+i|$
- Gọi z = x + iy, thay vào phương trình trên ta được:
- $|x+iy+1|=|x+iy-3+i| \leftrightarrow (x+1)^2+y^2=(x-3)^2+(y+1)^2 \leftrightarrow 8x-2y-9=0$
- Suy ra quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng d: $8x-2y-9=0$.
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 418. (3) Gọi M là điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn hệ thức: $|z-1+i\sqrt{3}|=1$. Biết góc $\widehat{MOy}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó số phức z = a + ib. Giá trị (2a + 2b) tương ứng bằng

A. $2\sqrt{3}$. **B.** 1. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $3-\sqrt{3}$.

Giải:

- Đây là bài toán cơ bản và khá dễ hình dung. Điểm M chạy trên đường tròn (C) đã quen thuộc dạng. Yêu cầu góc tạo bởi véc tơ $\overrightarrow{OM}$ và trục Oy đạt giá trị nhỏ nhất. Chúng ta sẽ giải theo hai phương pháp là : phương pháp vẽ hình và phương pháp tự luận chắc chắn.
- Quỹ tích điểm biểu diễn số phức z là đường tròn có tâm: $I(1;-\sqrt{3})$ bán kính R = 1.
- **Phương pháp vẽ hình chuẩn (có thể các bạn dùng thước và compa)**



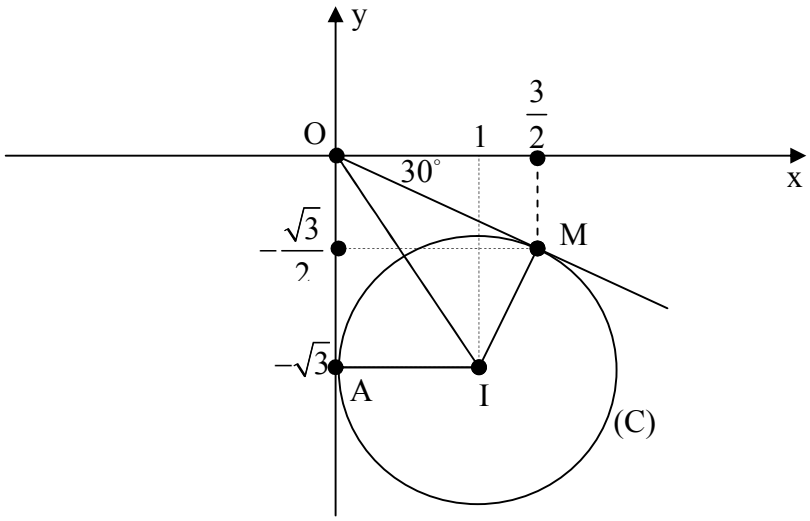
- Trước hết ta vẽ chính xác đường tròn (C) trên mặt phẳng tọa độ Oxy: Nhận thấy đường tròn tiếp xúc với trục Ox tại điểm A có hoành độ: $-\sqrt{3} \to OA=\sqrt{3}$; $OI=2$.
- Nhận thấy khi điểm M chạy trên đường tròn (C) thì góc $\widehat{MOy}$ nhỏ nhất khi OM tiếp xúc với đường tròn (C) tại một điểm khác **A.** Dễ thấy: $OA=OM=\sqrt{3}$. Góc: $\widehat{AOI}=\widehat{IOM}=\widehat{MOy}=30^\circ$
- Suy ra tọa độ của điểm: $M=(-OM.\sin 30^\circ; OM\cos 30^\circ)=(-\dfrac{\sqrt{3}}{2};\dfrac{3}{2}) \to z_M=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3i}{2}$
- Suy ra: $(2a+2b)=3-\sqrt{3}$. Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 419. (3) Gọi M là điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn hệ thức: $|z-1+i\sqrt{3}|=1$. Biết góc $\widehat{MOx}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó phần thực của số phức z bằng

A. 1. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Giải:

- Đường tròn biểu diễn quỹ tích điểm M có tâm $I=(1;-\sqrt{3})$ và bán kính R = 1. Suy ra: OI = 2.



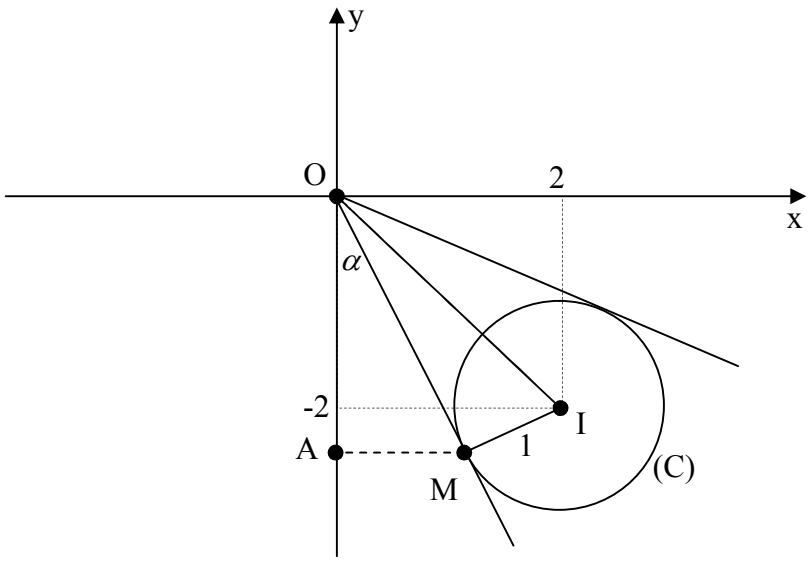
- Tương tự câu trên, đường tròn (C) tiếp xúc với trục Oy tại điểm $A=(1;-\sqrt{3})$
- Khi M chạy trên đường tròn (C), để góc: $\widehat{MOx}$ đạt giá trị nhỏ nhất thì OM phải tiếp xúc với (C) tại điểm M như hình vẽ.
- Ta có: $\tan\widehat{AOI}=\frac{1}{\sqrt{3}}\rightarrow\widehat{AOI}=30^\circ$. Áp dụng tính chất tiếp tuyến ta có:
- $OA=OM=\sqrt{3}\rightarrow\widehat{AOI}=\widehat{IOM}=\widehat{MOx}=30^\circ\rightarrow M=(OM.\cos 30^\circ;-OM.\sin 30^\circ)=(\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2})$
- Suy ra phần thực của số phức z biểu diễn M tương ứng là: $\frac{3}{2}$.
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 420. (3) Gọi M là điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn hệ thức: $|z-1+i\sqrt{3}|=1$. Biết góc $\widehat{MOy}$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó phần ảo của số phức z bằng

A. $-\frac{7+\sqrt{7}}{4}$. **B.** $-\frac{3+\sqrt{2}}{2}$. **C.** $-\sqrt{5}+1$. **D.** -2.

Giải:

- Ta có hình vẽ tương tự các câu trên: đường tròn (C) có tâm I(2;-2) và bán kính R = 1.



- $OI = 2\sqrt{2} \to OM = \sqrt{OI^2 - IM^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 1^2} = \sqrt{7}$; $\widehat{IOA} = 45^\circ \to \alpha = \widehat{MOA} = 45^\circ - \widehat{MOI}$
- Ta thấy để góc $\widehat{MOy}$ lớn nhất thì OM phải là một tiếp tuyến như hình vẽ.
- Tính xấp xỉ góc: $\sin\widehat{MOI} = \frac{IM}{OI} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \to \cos\widehat{MOI} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$
- Phần ảo của số phức z ứng với điểm M sẽ được tính trên hình vẽ chính xác:
- $-OA = -OM.\cos\alpha = -\sqrt{7}\cos(45^\circ - \widehat{MOI}) = -\sqrt{7}.\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\widehat{MOI} + \sin\widehat{MOI}\right) = -\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$
- Rút gọn ta được phần ảo của số phức ứng với điểm M là: $-\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) = -\frac{7+\sqrt{7}}{4}$
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 421. (3) Cho số phức z không thuần thực, sao cho số phức: $w = \frac{6+z+z^2}{6-z+z^2}$ là số thực. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: P = |z – 4 + 3i| lần lượt là M và m. Khi đó (Mm) bằng

A. 16. **B.** 14. **C.** 19. **D.** 12.

Giải:

- Đây là dạng bài cơ bản có áp dụng tính chất của phương trình đa thức hệ số thực.
- Từ giả thiết ta có: $6w - wz + wz^2 = 6 + z + z^2 \leftrightarrow (w-1)z^2 - (w+1)z + 6(w-1) = 0$
- Phương trình có hệ số thực nên sẽ tồn tại cặp nghiệm phức liên hợp: z , $\overline{z}$. Theo hệ thức VIET, ta có tích hai nghiệm: $z.\overline{z} = \frac{C}{A} = \frac{6(w-1)}{w-1} = 6 \to |z|^2 = 6 \to |z| = \sqrt{6}$

- Áp dụng BĐT tam giác, ta có: $||z|-|-4+3i||\le P=|z-4+3i|\le|z|+|-4+3i|$
- $\Leftrightarrow \quad 5-\sqrt{6}=|\sqrt{6}-5|\le P=|z-4+3i|\le\sqrt{6}+5$
- Suy ra: Giá trị lớn nhất của P là: M = P_{max} = $5+\sqrt{6}$; giá trị nhỏ nhất của P: m = P_{min} = $5-\sqrt{6}$
- Suy ra: $Mm=(5+\sqrt{6})(5-\sqrt{6})=19$.
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 422. (4) Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình: $z^2 + 2az + a^2 + 2a + 3 = 0$, với a là tham số thực. Khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{1}{|z_1^2|}+\frac{1}{|z_2^2|}$ bằng

A. 2. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** 1.

Giải:

- Giải phương trình: $\Delta'=a^2-(a^2+2a+3)=-2a-3$.
- Để có nghiệm phức thì điều kiện: $\Delta'=-2a-3<0\leftrightarrow a>-\frac{3}{2}$ (1)
- Phương trình có hai nghiệm liên hợp có mô đun bằng nhau: z ; $\overline{z}\rightarrow z.\overline{z}=|z|^2=a^2+2a+3$
- Suy ra: $P=\frac{1}{|z_1^2|}+\frac{1}{|z_2^2|}=\frac{1}{a^2+2a+3}+\frac{1}{a^2+2a+3}=\frac{2}{(a+1)^2+2}\le\frac{2}{2}=1$
- Suy ra giá trị lớn nhất của P là: P_{max} = 1 $\Leftrightarrow$ a = - 1.
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 423. (4) Cho số phức z thỏa mãn: $|z^2+4i|=z$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=|z-2+3i|$. Khi đó tổng (M + m) bằng

A. 12. **B.** $2\sqrt{13}+1$. **C.** $2\sqrt{3}+6$. **D.** $9+2\sqrt{2}$.

Giải:

- Gọi góc tạo bởi số phức: z^2 và i là: $\alpha=\widehat{z^2,i}$. Áp dụng công thức bình phương vô hướng:
- $|z^2+4i|=|z|\leftrightarrow|z^2|^2+16|i|+8.|z^2|.|i|.\cos\alpha=|z|^2\leftrightarrow|z|^4+16+8|z|^2\cos\alpha=|z|^2$
- Đặt: $t=|z|^2>0\rightarrow t^2+16+8t\cos\alpha=t\rightarrow-1\le\cos\alpha=\frac{t-t^2-16}{8t}\le1$
- Với vế BĐT: $\cos\alpha=\frac{t-t^2-16}{8t}\le1\leftrightarrow t^2+7t+16\ge0$; hiển nhiên là đúng với mọi t.

- Với vế BĐT: $-1 \le \cos\alpha = \dfrac{t - t^2 - 16}{8t} \leftrightarrow t^2 - 9t + 16 \le 0 \leftrightarrow \dfrac{9-\sqrt{17}}{2} \le t \le \dfrac{9+\sqrt{17}}{2}$
- Thay lại: t = $|z|^2$ và rút gọn khai căn chính phương ta được
- $\dfrac{9-\sqrt{17}}{2} \le t = |z|^2 \le \dfrac{9+\sqrt{17}}{2} \to \dfrac{\sqrt{17}-1}{2} \le |z| \le \dfrac{\sqrt{17}+1}{2}$
- Áp dụng BĐT tam giác ta có:
- $P = |z - 2 + 3i| \le |z| + |-2+3i| = |z| + \sqrt{13} \le \dfrac{\sqrt{17}+1}{2} + \sqrt{13} \to M = P_{\max} = \dfrac{\sqrt{17}+1}{2} + \sqrt{13}$
- $P = |z - 2 + 3i| \ge ||z| - |-2+3i|| = ||z| - \sqrt{13}| \ge |\dfrac{\sqrt{17}-1}{2} - \sqrt{13}| \to m = P_{\min} = \sqrt{13} - \dfrac{\sqrt{17}-1}{2}$
- Suy ra: $(M+m) = 2\sqrt{13} + 1$.
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 424. (4) Gọi z_1 và z_2 là hai số phức thỏa mãn điều kiện: |4z – 3i| = |4 + 3iz|. Biết rằng chúng cũng thỏa mãn điều kiện: $|z_1 - z_2| = 1$. Hãy tính giá trị của biểu thức: $P = |2z_1 + 3z_2|$?

A. $\sqrt{19}$. **B.** 4. **C.** $2\sqrt{7}$. **D.** $5\sqrt{2}$.

Giải:

- Xử lí giả thiết: $|4z - 3i| = |4 + 3iz| \leftrightarrow |4z - 3i| = |i(3z - 4i)| = |3z - 4i|$ (1)
- Gọi góc tạo bởi hai số phức z và i là: $\alpha = \widehat{z, i}$
- Bình phương vô hướng biểu thức (1), ta được:
- $16|z|^2 - 24|z|\cos\alpha + 9 = 9|z|^2 - 24|z|\cos\alpha + 16 \leftrightarrow |z|^2 = 1 \leftrightarrow |z| = 1$.
- Suy ra: $|z_1| = |z_2| = 1$. Gọi góc tạo bởi z_1 và z_2 là: $\beta = \widehat{z_1, z_2}$. Xử lí bình phương vô hướng:
- Ta có: $\begin{cases} 1 = |z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1|.|z_2|\cos\beta \\ P^2 = |2z_1 + 3z_2|^2 = 4|z_1|^2 + 9|z_2|^2 - 12|z_1|.|z_2|\cos\beta \end{cases}$
- $\leftrightarrow \begin{cases} 6 = 6|z_1 - z_2|^2 = 6|z_1|^2 + 6|z_2|^2 - 12|z_1|.|z_2|\cos\beta \\ P^2 = |2z_1 + 3z_2|^2 = 4|z_1|^2 + 9|z_2|^2 - 12|z_1|.|z_2|\cos\beta \end{cases} \to P^2 + 6 = 10|z_1|^2 + 15|z_2|^2$
- Suy ra: $P^2 + 6 = 10|z_1|^2 + 15|z_2|^2 = 10 + 15 \to P = \sqrt{19}$
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 425. (3) Cho hai số phức thỏa mãn: $|z_1| = |z_2| = 2$ và $|4z_1^2 + 9z_2^2| = 48$. Khi đó giá trị của biểu thức: $P = |z_1^2 - z_2^2|$ bằng bao nhiêu?

A. 12. **B.** $2\sqrt{26}$. **C.** 10/3. **D.** $5\sqrt{2}$.

Giải:

- Gọi góc giữa hai số phức: z_1^2 và z_1^2 là: $\alpha = \widehat{z_1^2, z_2^2}$. Áp dụng CT bình phương vô hướng, ta có:
- $48^2 = |4z_1^2 + 9z_2^2|^2 = 16|z_1^2|^2 + 81|z_2^2| + 72|z_1^2|.|z_2^2|\cos\alpha$ (1)
- $P^2 = |z_1^2 - z_2^2|^2 = |z_1^2|^2 + |z_2^2| - 2|z_1^2|.|z_2^2|\cos\alpha$ (2)
- Nhân 36 vào hai vế của biểu thức (2), ta được:
- $36P^2 = 36|z_1^2|^2 + 36|z_2^2| - 72|z_1^2|.|z_2^2|\cos\alpha$ (3)
- Cộng (1) với (3) , vế theo vế ta được:
- $48^2 + 36P^2 = 52|z_1|^4 + 117|z_2|^4 = 52.2^4 + 117.2^4 \rightarrow P = \frac{10}{3}$
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 426. (3) (Đề ĐH 2017 – Mã 108) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: $|z + 2 - i| = 2\sqrt{2}$ và $(z - 1)^2$ thuần ảo ?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 0.

Giải:

- Gọi z = a + ib, thay vào các giả thiết ta sẽ được:
- $|z + 2 - i| = 2\sqrt{2} \leftrightarrow |a + ib + 2 - i| = 2\sqrt{2} \leftrightarrow (a+2)^2 + (b-1)^2 = 8$ (1)
- Số phức: $(z-1)^2 = (a + ib - 1)^2 = (a-1)^2 - b^2 + 2(a-1)bi$ thuần ảo $\Leftrightarrow$ $(a-1)^2 - b^2 = 0$
- $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = a - 1 \\ b = 1 - a \end{array}\right.$
- Trường hợp 1: $b = a - 1$; thế vào (1) suy ra được: $(a+2)^2 + (a-2)^2 = 8 \leftrightarrow a = 0 \rightarrow b = -1$
- Suy ra: z_1 = -i.
- Trường hợp 2: $b = 1 - a$; thế vào (1) suy ra được:
- $(a+2)^2 + (1-a-1)^2 = 8 \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 - \sqrt{3} \rightarrow b = 2 + \sqrt{3} \rightarrow z_2 = -1 - \sqrt{3} + i(2 + \sqrt{3}) \\ a = -1 + \sqrt{3} \rightarrow b = 2 - \sqrt{3} \rightarrow z_3 = -1 + \sqrt{3} + i(2 - \sqrt{3}) \end{array}\right.$
- Suy ra có tất cả 3 số phức thỏa mãn bài toán.
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 427. (3) (Đề ĐH 2017 – Mã 108) Cho số phức z thỏa mãn: $z + 2 + i = |z|$. Đặt: z = a+ ib. Khi đó giá trị của S = (4a + b) tương ứng bằng

A. 4. **B.** -4. **C.** 2. **D.** -2.

Giải:

- Ta có: $z+2+i=|z| \leftrightarrow a+ib+2+i=\sqrt{a^2+b^2} \leftrightarrow \begin{cases} a+2=\sqrt{a^2+b^2} \rightarrow a+2=\sqrt{a^2+1} \rightarrow a=-\dfrac{3}{4} \\ b+1=0 \rightarrow b=-1 \end{cases}$
- Suy ra: S = 4a + b = -4.
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 428. (3) (Đề ĐH 2017 – Mã 103) Cho số phức z thỏa mãn đồng thời các điều kiện: $|z+3|=5$ và $|z-2i|=|z-2-2i|$. Tính |z| ?

A. 17. **B.** $\sqrt{17}$. **C.** 10. **D.** $\sqrt{10}$.

Giải:

- Gọi z = a + ib , thay vào giả thiết ta được:
- $\begin{cases} |a+ib+3|=5 \\ |a+ib-2i|=|a+ib-2-2i| \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} (a+3)^2+b^2=25 \\ a^2+(b-2)^2=(a-2)^2+(b-2)^2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} (a+3)^2+b^2=25 \\ a=1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} b^2=9 \\ a=1 \end{cases}$
- Suy ra: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$
- Vậy ta chọn đáp án **D.**

Câu 429. (3) (Đề ĐH 2017 – Mã 103) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: $|z+3i|=\sqrt{13}$ và $\dfrac{z}{z+2}$ là số thuần ảo ?

A. Vô số. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Giải:

- Gọi z = a + ib, thay vào các giả thiết ta được:
- $|z+3i|=\sqrt{13} \leftrightarrow |a+ib+3i|=\sqrt{13} \leftrightarrow a^2+(b+3)^2=13$ (1)
- Điều kiện thuần ảo: $\dfrac{z}{z+2}=\dfrac{a+ib}{a+ib+2}=\dfrac{(a+ib)(a+2-ib)}{(a+2)^2+b^2}=\dfrac{a(a+2)+b^2+2ib}{(a+2)^2+b^2}$ thuần ảo
- $\Leftrightarrow a(a+2)+b^2=0$ (2)
- Lấy (1) trừ đi (2), vế theo vế ta được: $-2a+6b+9=13 \leftrightarrow a=3b-2$; thế vào (2) ta được:
- $(3b-2)(3b)+b^2=0 \leftrightarrow 10b^2-6b=0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \rightarrow a=-2 \\ b=\dfrac{3}{5} \rightarrow a=-\dfrac{1}{5} \end{array}\right.$

- Suy ra có hai số phức thỏa mãn điều kiện bài toán.
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 430. (3) (Đề ĐH 2017 – Mã 107) Cho số phức z = a + ib, (có a và b là số thực) thỏa mãn điều kiện: z + 1 + 3i – |z|i = 0. Tính S = (a + 3b) ?

A. -5. **B.** 5 . **C.** 7/3. **D.** -7/3.

Giải:

- Ta có: $a+ib+1+3i-i\sqrt{a^2+b^2}=0\leftrightarrow\begin{cases}a+1=0\rightarrow a=-1\\ b+3-\sqrt{a^2+b^2}=0\rightarrow b+3-\sqrt{b^2+1}=0\rightarrow b=-\dfrac{4}{3}\end{cases}$
- Suy ra: S = a + 3b = -5.
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 431. (3) (Đề ĐH 2017 – Mã 107) Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: $|z-3i|=5$ và $\dfrac{z}{z-2}$ là số thuần ảo ?

A. Vô số. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Giải:

- Gọi z = a + ib thay vào các giả thiết ta được:
- $|z-3i|=5\leftrightarrow|a+ib-3i|=5\leftrightarrow a^2+(b-3)^2=25$ (1)
- Số phức thuần ảo: $\dfrac{z}{z-2}=\dfrac{a+ib}{a+ib-2}=\dfrac{(a+ib)(a-ib-2)}{(a-2)^2+b^2}=\dfrac{a(a-2)+b^2-2ib}{(a-2)^2+b^2}$ thuần ảo
- $\Leftrightarrow\ a(a-2)+b^2=0$ (2)
- Lấy (1) trừ đi (2) , vế theo vế ta được:
- $2a-6b+9=25\rightarrow a=3b+8$ thế vào (2) ta được:
- $(3b+8)(3b+6)+b^2=0\leftrightarrow$ (VN)
- Suy ra không có số phức nào thỏa mãn.
- Vậy ta chọn **C.**

Câu 432. (3) (Đề ĐH 2017 – Mã 120) Cho số phức z thỏa mãn: |z| = 5 và |z + 3| = |z + 3 – 10i|. Tìm số phức w = z – 4 + 3i ?

A. w = 1 + 3i. **B.** w = - 1 + 7i . **C.** w = - 4 + 8i. **D.** -3 + 8i.

Giải:

- Gọi z = a + ib, thay vào các giả thiết ta được:
- $\begin{cases} a^2+b^2=25 \\ |a+ib+3|=|a+ib+3-10i| \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=25 \\ (a+3)^2+b^2=(a+3)^2+(b-10)^2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=25 \\ b=5 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=5 \end{cases}$
- Suy ra: $w = z-4+3i = 0+5i-4+3i = -4+8i$
- Vậy ta chọn đáp án **C.**

Câu 433. (3) (Đề ĐH 2017 – Mã 120) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất một số phức z thỏa mãn đồng thời: $z.\overline{z}=1$ và $|z-\sqrt{3}+i|=m$. Tìm số phần tử của S?

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Giải:

- Ta có: $z.\overline{z}=|z|^2=1 \leftrightarrow |z|=1$. Đây là đường tròn ($C_1$) có tâm là gốc tọa độ O và bán kính R_1 = 1
- $|z-\sqrt{3}+i|=m$ là đường tròn (C_2) tâm $I=(\sqrt{3};-1)$ và có bán kính R_2 = m > 0.
- Để có duy nhất một số phức thỏa mãn điều kiện bài toán thì hai đường tròn (C_1) và (C_2) phải tiếp xúc (ngoài và trong) với nhau.
- $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} OI=R_1+R_2 \\ OI=|R_1-R_2| \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2=1+m \\ 2=|1-m| \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-1 (LOAI) \\ m=3 \end{array}\right.$
- Suy ra có 2 giá trị của m thỏa mãn.
- Vậy ta chọn đáp án **A.**

Câu 434. (3 – D) Cho số phức z thỏa mãn: $3|z+i|+5|z-i|=16$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của |z|. Khi đó (M + m) tương ứng thuộc khoảng nào ?

A. $(1;2)$. **B.** $(2;\frac{5}{2})$. **C.** $(\frac{5}{2};\frac{7}{2})$. **D.** $(\frac{7}{2};4)$.

Giải:

- Áp dụng BĐT bunhia, ta có:
- $256=\left(3|z+i|+5|z-i|\right)^2 \le (3^2+5^2)\left(|z+i|^2+|z-i|^2\right)=34.\left(2|z|^2+2|i|^2\right)=68|z|^2+68$
- $\Leftrightarrow |z|^2 \ge \frac{47}{17} \leftrightarrow |z| \ge \sqrt{\frac{47}{17}}$. Có thể suy ra được luôn: $\min|z|=\sqrt{\frac{47}{17}}=m$

- Chúng ta không cần để ý tới điều kiện dấu "=" xảy ra cho đỡ tốn thời gian: $3|z-i|=5|z+i|$
- Áp dụng nhanh tiếp hai BĐT tam giác trị tuyệt đối:
- $16=3\left(|z+i|+|z-i|\right)+2|z-i|\geq 3|z+i+z-i|+2\left(|z|-|i|\right)=8|z|-2|i| \Leftrightarrow |z|\leq\frac{9}{4}$
- Ta cũng có thể kiểm nghiệm dấu "=" ở các BĐT tam giác nhiều rồi, và có thể chỉ luôn được dấu "=" xảy ra ⇔ z = 9i/4.
- Suy ra $\max|z|=\frac{9}{4}=M \rightarrow M+m=\frac{9}{4}+\sqrt{\frac{47}{17}}\in(\frac{7}{2};4) \rightarrow$ Chọn đáp án **D.**

Câu 435. (3 – C) Cho số phức z thỏa mãn: $3|z+i|+4|z-2i|=20$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của |z|. Khi đó (M + m) tương ứng thuộc khoảng nào ?

A. $(1;3)$. **B.** $(4;\frac{11}{2})$. **C.** $(\frac{11}{2};\frac{13}{2})$. **D.** $(\frac{13}{2};8)$.

Giải:

- Áp dụng BĐT bunhia, ta có:
- $400=\left(\frac{3}{\sqrt{2}}.\sqrt{2}|z+i|+4|z-2i|\right)^2\leq(\frac{9}{2}+4^2)\left(2|z+i|^2+|z-2i|^2\right)=\frac{41}{2}.\left(3|z|^2+6|i|^2\right)$
- $\Leftrightarrow 400\leq\frac{41}{2}.\left(3|z|^2+6\right)\leftrightarrow|z|^2\geq\frac{554}{123}\leftrightarrow|z|\geq\sqrt{\frac{554}{123}}$. Suy ra: $\min|z|=\sqrt{\frac{554}{123}}=m$
- Áp dụng nhanh tiếp hai BĐT tam giác trị tuyệt đối:
- $20=\frac{3}{2}\left(2|z+i|+|z-2i|\right)+\frac{5}{2}|z-2i|=\frac{3}{2}\left(|2z+2i|+|z-2i|\right)+\frac{5}{2}|z-2i|$
- $\Leftrightarrow 20=\frac{3}{2}\left(|2z+2i|+|z-2i|\right)+\frac{5}{2}|z-2i|\geq\frac{3}{2}\left(|2z+2i+z-2i|\right)+\frac{5}{2}\left(|z|-|2i|\right)$
- $\Leftrightarrow 20\geq\frac{3}{2}.3|z|+\frac{5}{2}\left(|z|-2\right)\leftrightarrow|z|\leq\frac{25}{7}$. Suy ra $\max|z|=\frac{25}{7}=M$
- Suy ra: $M+m=\frac{25}{7}+\sqrt{\frac{554}{123}}\in(\frac{11}{2};\frac{13}{2})\rightarrow$ Chọn đáp án **C.**

Câu 436. (3) Cho số phức z thỏa mãn: $3|z+3+2i|+4|z+1|=12$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của |z + i + 2|. Khi đó (M + m) tương ứng thuộc khoảng nào ?

A. $(1;2)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(3;4)$. **D.** $(4;6)$.

Giải:

- Trước hết ta đặt $u=z+i+2\rightarrow$ giả thiết ban đầu được viết về dạng quen thuộc:
- $3|z+3+2i|+4|z+1|=12\leftrightarrow 3|u+(1+i)|+4|u-(1+i)|=12$
- Áp dụng BĐT bunhia, ta có:
- $144=\left(3|u+(1+i)|+4|u-(1+i)|\right)^2\leq(3^2+4^2)\left(|u+(1+i)|^2+|u-(1+i)|^2\right)=25\left(2|z|^2+2|1+i|^2\right)$
- $\Leftrightarrow 144\leq 50|z|^2+100\leftrightarrow|z|^2\geq\frac{44}{50}\leftrightarrow|z|\geq\frac{\sqrt{22}}{5}$. Suy ra: $\min|z|=\frac{\sqrt{22}}{5}=m$
- Áp dụng nhanh tiếp hai BĐT tam giác trị tuyệt đối:
- $12=3\left(|u+(1+i)|+|u-(1+i)|\right)+|u-(1+i)|\geq 3|u+1+i+u-1-i|+\left(|u|-|1+i|\right)=7|u|-\sqrt{2}$
- Suy ra $\max|u|=\frac{12+\sqrt{2}}{7}=M\rightarrow M+m=\frac{12+\sqrt{2}}{7}+\frac{\sqrt{22}}{5}\in(2;3)\rightarrow$ Chọn đáp án **B.**

Câu 437. (3) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: |z| = 1. Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-1+i|+\sqrt{2}|z-2+i|$ tương ứng bằng

A. 2. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 3. **D.** $\sqrt{3}$.

Giải:

- Áp dụng công thức: $|u-v|=|\frac{|u|}{|v|}u-\frac{|v|}{|u|}v|$.
- Ta có: $|z-1+i|=|\frac{\sqrt{2}}{|z|}z-\frac{|z|}{\sqrt{2}}(1-i)|=|\sqrt{2}.z-\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)|=\sqrt{2}|z-\frac{1-i}{2}|$
- Suy ra: $P=\sqrt{2}|z-\frac{1-i}{2}|+\sqrt{2}|z-2+i|=\sqrt{2}\left(|z-\frac{1-i}{2}|+|z-2+i|\right)\geq\sqrt{2}|z-\frac{1-i}{2}-z+2-i|$
- $\Leftrightarrow\ P\geq\sqrt{2}|\frac{3}{2}-\frac{i}{2}|=\sqrt{5}\rightarrow\min P=\sqrt{5}$
- Vậy ta chọn đáp án **B.**

Câu 438. (3) Cho số phức z thỏa mãn điều kiện: |z + i| = 1. Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z-1+3i|+\sqrt{5}|z-5+i|$ tương ứng bằng

A. $2\sqrt{29}$. **B.** $2\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{13}+\sqrt{5}$. **D.** $2\sqrt{15}$.

Giải:

- Đặt $u=z+i\rightarrow|u|=1$ và $P=|u-1+2i|+\sqrt{5}|u-5|$

- Áp dụng công thức $|u-v|=|\frac{|u|}{|v|}u-\frac{|v|}{|u|}v|$.
- Ta có: $|u-1+2i|=|\frac{|1-2i|}{|u|}u-\frac{|u|}{|1-2i|}(1-2i)|=|\frac{\sqrt{5}}{1}u-\frac{1}{\sqrt{5}}(1-2i)|=\sqrt{5}|u-\frac{1-2i}{5}|$
- Suy ra: $P=\sqrt{5}|u-\frac{1-2i}{5}|+\sqrt{5}|u-5|=\sqrt{5}\left(|u-\frac{1-2i}{5}|+|u-5|\right)\geq\sqrt{5}|u-\frac{1-2i}{5}-u+5|=2\sqrt{29}$
- Suy ra: $\min P=2\sqrt{29}\rightarrow$ Vậy ta chọn đáp án **A.**

---------- **Hết** ----------

Gần như xuyến suốt tài liệu, tác giả chỉ tham khảo một số bài toán số phức hay và khó ở tản mạn các đề thi thử TNĐH năm 2017 của các trường THPT chuyên nổi tiếng và mẫu mực trên toàn quốc. Tuy nhiên, tác giả luôn giải riêng theo một phương pháp mới, một phong cách mới đối với những bài toán tham khảo này. Tác giả xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới các quý thầy cô của các trường chuyên đã soạn ra một số câu hỏi số phức hay và độc đáo, đã phần nào gợi ý ra các kiến thức sáng tạo của tác giả, phần nào làm phong phú thêm nguồn bài tập nâng cao của cuốn tài liệu số phức này.

Khi còn là sinh viên lớp Kỹ Sư Tài Năng Khóa 44 Khoa Công Nghệ Thông Tin trường Đại Học Bách Khoa. Tác giả đã trực tiếp được PGS TS **Nguyễn Cảnh Lương**, nguyên phó hiệu trưởng trường Đại học Bách Khoa Hà Nội giảng dạy hai môn học: Đại số tuyến tính và Hàm Phức. Hệ thống tư tưởng và các cách triển khai kiến thức được tác giả kế thừa và phát huy từ những nền tảng cơ sở vững chắc của thầy **Nguyễn Cảnh Lương**.