

TRẦN ĐỨC HUYỀN (Chủ biên) - NGUYỄN DUY HIẾU
NGUYỄN LÊ THUY HOA - NGUYỄN THÀNH TUẤN
(TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG TP. HỒ CHÍ MINH)

GIẢI TOÁN

HÀM SỐ MŨ LÔGARIT VÀ SỐ PHỨC

12

DÙNG CHO HỌC SINH LỚP CHUYÊN

(Tái bản lần thứ tư)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC VIỆT NAM

LỜI NÓI ĐẦU

Trong thời gian vừa qua, được sự giúp đỡ của Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, Trường Trung học phổ thông chuyên Lê Hồng Phong đã biên soạn bộ sách **“Giải toán dành cho học sinh lớp chuyên”** theo định hướng bám sát sách giáo khoa, bổ sung các chủ đề nâng cao theo trình độ trường chuyên và các nội dung thi đại học. Bộ sách đã được đông đảo học sinh và giáo viên các trường chuyên sử dụng và tin cậy.

Trong quá trình đổi mới giáo dục, đáp ứng yêu cầu mới của sách giáo khoa chuyên ban, xây dựng phương pháp kiểm tra kết hợp giữa tự luận và trắc nghiệm khách quan, chúng tôi biên soạn lại bộ sách **Giải toán dành cho học sinh các trường chuyên và học sinh khá giỏi ở các trường Trung học phổ thông trên toàn quốc**. Bộ sách **“Giải toán lớp 12”** được biên soạn nhằm đáp ứng tốt nhất cho các kì thi Tốt nghiệp Trung học phổ thông và đặc biệt là kì thi Tuyển sinh Đại học – Cao đẳng. Bộ sách này gồm năm quyển :

- Giải toán 12 – Hàm số mũ – lôgarit và số phức ;
- Giải toán 12 – Phương pháp tọa độ trong không gian ;
- Giải toán 12 – Khảo sát hàm số ;
- Giải toán 12 – Khối đa diện và khối tròn xoay ;
- Giải toán 12 – Tích phân – nguyên hàm.

Nội dung quyển **“Giải toán 12 – Hàm số mũ – lôgarit và số phức”** bám sát theo cấu trúc của sách giáo khoa **Giải tích 12 (Nâng cao)** và được trình bày theo năm chương như sau :

- Chương I : Khái niệm lũy thừa và hàm số lũy thừa ;
- Chương II : Khái niệm lôgarit và hàm số lôgarit ;
- Chương III : Phương trình mũ và phương trình lôgarit ;
- Chương IV : Bất phương trình mũ và bất phương trình lôgarit ;
- Chương V : Số phức.

Trong mỗi bài học, chúng tôi xây dựng hệ thống bài tập rèn luyện dựa theo các vấn đề cụ thể, một số bài tập là các đề thi đại học để bạn đọc tham khảo. Chúng tôi có cung cấp đáp án và hướng dẫn giải sơ lược của một số bài tập tiêu biểu nhằm giúp các bạn đọc ôn tập, nâng cao kiến thức, rèn luyện kĩ năng giải toán.

Hi vọng quyển sách sẽ giúp ích cho các bạn học sinh trong quá trình học tập, rèn luyện nâng cao bộ môn Toán lớp 12, chủ động và tự tin bước vào kì thi Đại học – Cao đẳng để đạt được kết quả tốt nhất ; quyển sách này cũng là tài liệu hỗ trợ cho giáo viên Toán các trường Trung học phổ thông trong công tác đào tạo học sinh giỏi.

Mọi ý kiến đóng góp gửi về theo địa chỉ sau :

- Trường Trung học phổ thông chuyên Lê Hồng Phong, 235 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5, TP. Hồ Chí Minh
- Ban biên tập sách Khoa học Tự nhiên, Công ti CP DVXBGD Gia Định – Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 231 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5, TP. Hồ Chí Minh.

Trân trọng cảm ơn.

CÁC TÁC GIẢ

§1. LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ HỮU TỈ -
LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

I. LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ NGUYÊN

1) Định nghĩa

1.1. Lũy thừa với số mũ nguyên dương

Cho $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, ta có :

$$a^n = \underbrace{a.a.\dots.a}_{n \text{ số } a}$$

(aⁿ là lũy thừa bậc n của a, a gọi là cơ số, n là số mũ).

1.2. Lũy thừa với số mũ 0

Cho $a \neq 0$, $a^0 = 1$ (lưu ý : 0^0 không có nghĩa).

1.3. Lũy thừa với số mũ nguyên âm

Cho $a \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}^+$, ta có :

$$a^0 = 1 ; a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

(lưu ý : 0^{-n} không có nghĩa).

2) Tính chất lũy thừa với số mũ nguyên

2.1. Định lý 1. Cho $a \neq 0$; $b \neq 0$; $m, n \in \mathbb{Z}$, ta có :

1. $a^m.a^n = a^{m+n}$

2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

3. $(a^m)^n = a^{mn}$

4. $(ab)^n = a^n b^n$

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

2.2. Định lý 2 (tính chất bất đẳng thức)

Cho $m, n \in \mathbb{Z}$. Khi đó

$$1. \text{ Với } a > 1 : \quad a^m > a^n \Leftrightarrow m > n$$

$$2. \text{ Với } 0 < a < 1 : \quad a^m > a^n \Leftrightarrow m < n$$

Hệ quả 1

Với $0 < a < b, m \in \mathbb{Z}$ thì :

$$1. a^m < b^m \Leftrightarrow m > 0$$

$$2. a^m > b^m \Leftrightarrow m < 0$$

Hệ quả 2

Với n là số tự nhiên lẻ : $a < b \Rightarrow a^n < b^n$

II. CĂN BẬC n VÀ LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ HỮU TỈ

1) Căn bậc n

1.1. **Định nghĩa.** Cho $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}^+$, ta có :

$$b \in \mathbb{R} \text{ là căn bậc } n \text{ của } a \text{ khi và chỉ khi } b^n = a$$

Nhận xét

* $a \in \mathbb{R}$ có duy nhất một căn bậc n lẻ, kí hiệu : $\sqrt[n]{a}$

* $a > 0$ có đúng hai căn bậc n chẵn, kí hiệu : $\sqrt[n]{a}$ và $-\sqrt[n]{a}$,

trong đó $\sqrt[n]{a} > 0$ và $-\sqrt[n]{a} < 0$.

1.2. Tính chất

Cho $a, b \in \mathbb{R}^+ ; m, n \in \mathbb{Z}^+ ; p, q \in \mathbb{Z}$. Ta có :

$$1. \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$$

$$2. \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b > 0)$$

$$3. \sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p \quad (a > 0)$$

$$4. \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$5. \text{ Nếu } \frac{p}{n} = \frac{q}{m} \text{ thì } \sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q} \quad (a > 0). \text{ Đặc biệt } \sqrt[n]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^m}.$$

2) Luỹ thừa với số mũ hữu tỉ

2.1. Định nghĩa

a là một số thực dương, r là một số hữu tỉ có dạng $r = \frac{m}{n}$, trong đó $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

Ta định nghĩa : $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

2.2. Tính chất của lũy thừa với số mũ hữu tỉ

Lũy thừa với số mũ hữu tỉ có đầy đủ các tính chất của lũy thừa với số mũ nguyên đã nêu ra ở trên.

III. LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC

1) Định nghĩa

Cho $a > 0$ và α là một số vô tỉ. Ta luôn có một dãy số hữu tỉ $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n, \dots$ mà $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \alpha$. Xét dãy số những lũy thừa của a tương ứng : $a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \dots, a^{r_n}, \dots$

Người ta chứng minh được rằng dãy số $a^{r_1}, a^{r_2}, a^{r_3}, \dots, a^{r_n}, \dots$ có giới hạn xác định (không phụ thuộc vào dãy số hữu tỉ đã chọn) khi $n \rightarrow +\infty$.

Giới hạn đó được gọi là lũy thừa với số mũ vô tỉ α của số dương a . Kí hiệu a^α .

Vậy : $a^\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} a^{r_n}$.

Chú ý về cơ số của lũy thừa a^r

- $r \in \mathbb{Z}^+$ thì cơ số $a \in \mathbb{R}$
- $r \in \mathbb{Z}$ thì cơ số $a \neq 0$
- $r \in \mathbb{R}$ thì cơ số $a > 0$

2) Tính chất lũy thừa với số mũ thực

Lũy thừa với số mũ thực có đầy đủ tính chất như lũy thừa với số mũ nguyên.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN



Vấn đề 1

CÁC PHÉP TOÁN CƠ BẢN VỀ LŨY THỪA

I. PHƯƠNG PHÁP

– Sử dụng các tính chất của lũy thừa để tính giá trị của biểu thức, so sánh các số có dạng lũy thừa, rút gọn một biểu thức, chứng minh một biểu thức không phụ thuộc tham số ...

– Cần lưu ý :

* Với $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ thì $\sqrt[n]{a^{2n}} = |a|$

* Ngược lại, $a\sqrt[n]{A} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^{2n} \cdot A} & \text{khi } a \geq 0 \\ -\sqrt[n]{a^{2n} \cdot A} & \text{khi } a < 0 \end{cases}$

* Với $a > 1$ thì $a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$

* Với $0 < a < 1$ thì $a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$

* Với $a, b \neq 1$ và $0 < b < a \Leftrightarrow \begin{cases} b^x < a^x & \text{khi và chỉ khi } x > 0 \\ b^x > a^x & \text{khi và chỉ khi } x < 0. \end{cases}$

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Hãy so sánh các số :

a) $\sqrt{42}$ và $\sqrt[3]{51}$; b) $16^{\sqrt{3}}$ và $4^{3\sqrt{2}}$; c) $9^{\sqrt{16}}$ và $9^{\sqrt[3]{60}}$.

Giải

a) Ta có : $\sqrt{42} = \sqrt[6]{42^3} = \sqrt[6]{74088}$ và $\sqrt[3]{51} = \sqrt[6]{51^2} = \sqrt[6]{2601}$.

Vậy $\sqrt{42} > \sqrt[3]{51}$.

b) Ta có :

$16^{\sqrt{3}} = (4^2)^{\sqrt{3}} = 4^{2\sqrt{3}}$, mà $(2\sqrt{3})^2 = 12$ và $(3\sqrt{2})^2 = 18$, nên $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$.

Mà $4 > 1$ nên $16^{\sqrt{3}} < 4^{3\sqrt{2}}$.

c) Ta có : $\sqrt{16} = 4 = \sqrt[3]{64} \Rightarrow \sqrt{16} > \sqrt[3]{60}$. Mà $9 > 1$ nên ta có : $9^{\sqrt{16}} > 9^{\sqrt[3]{60}}$.

Ví dụ 2. Tính giá trị các biểu thức :

$$\text{a) } A = \left(\frac{1}{81}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}} ; \quad \text{b) } B = \left(\frac{1}{25}\right)^{-1,5} - \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}.$$

Giải

$$\text{a) Ta có : } A = \left(\frac{1}{81}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}} = \left(3^{-4}\right)^{-\frac{3}{4}} + \left(2^{-3}\right)^{-\frac{4}{3}} = 3^3 + 2^4 = 43.$$

b) Ta có :

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{1}{25}\right)^{-1,5} - \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{5^2}\right)^{-\frac{3}{2}} - \left(\frac{1^3}{2^3}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \\ &= 125 - 4 = 121. \end{aligned}$$

Ví dụ 3. Tính giá trị các biểu thức:

$$\text{a) } A = \sqrt[3]{\frac{64}{27}} \cdot \sqrt[4]{16} ; \quad \text{b) } B = \frac{\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{16}}{\sqrt[5]{32}}.$$

Giải

$$\text{a) Ta có : } A = \sqrt[3]{\frac{64}{27}} \cdot \sqrt[4]{16} = \frac{\sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[4]{16}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{4 \cdot 2}{3} = \frac{8}{3}.$$

$$\text{b) Ta có : } B = \frac{\sqrt[5]{2} \cdot \sqrt[5]{16}}{\sqrt[5]{32}} = \sqrt[5]{\frac{2 \cdot 16}{32}} = \sqrt[5]{1} = 1.$$

Ví dụ 4. Tính giá trị các biểu thức :

$$\text{a) } A = 4^{\frac{9}{7}} : 4^{\frac{2}{7}} - 2^{\frac{6}{5}} \cdot 2^{\frac{4}{5}} ; \quad \text{b) } B = \left(4^{2\sqrt{3}} - 4^{\sqrt{3}-1}\right) \cdot 2^{-2\sqrt{3}} ;$$

$$\text{c) } C = \left(3^{\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}\right)^{-3} \cdot 3^{\frac{3\sqrt{5}}{2}}.$$

Giải

a) Ta có : $A = 4^{\frac{9}{7}} : 4^{\frac{2}{7}} - 2^{\frac{6}{5}} \cdot 2^{\frac{4}{5}} = 4^{\frac{7}{7}} - 2^{\frac{10}{5}} = 4 - 4 = 0.$

b) Ta có : $B = (4^{2\sqrt{3}} - 4^{\sqrt{3}-1}) \cdot 2^{-2\sqrt{3}} = (2^{4\sqrt{3}} - 2^{2\sqrt{3}-2}) \cdot 2^{-2\sqrt{3}}$
 $= 2^{4\sqrt{3}-2\sqrt{3}} - 2^{2\sqrt{3}-2-2\sqrt{3}} = 2^{2\sqrt{3}} - 2^{-2} = 2^{2\sqrt{3}} - \frac{1}{4}.$

c) Áp dụng tính chất : $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$. Ta có :

$$C = \left(3^{\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}} \right)^{-3} \cdot 3^{\frac{3\sqrt{5}}{2}} = 3^{\frac{(1-\sqrt{5})(-3)}{1+\sqrt{5}}} \cdot 3^{\frac{3\sqrt{5}}{2}} = 3^{\frac{-3+3\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} + \frac{3\sqrt{5}}{2}} = 3^{\frac{9-3\sqrt{5}}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{2}} = 3^{\frac{9}{2}} = 81\sqrt{3}.$$

Ví dụ 5. Rút gọn các biểu thức rồi tính :

a) $A = \frac{a^{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[6]{a}}$ (áp dụng với $a = 1; 3$) ;

b) $B = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt[6]{b}}$ (áp dụng với $b = 27$).

Giải

a) Sử dụng tính chất $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ của căn thức và các tính chất lũy thừa ta có :

$$A = \frac{a^{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[6]{a}} = \frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{6}}} = \frac{a^{\frac{7}{6}}}{a^{\frac{1}{6}}} = a. \text{ Do đó :}$$

Với $a = 1$ thì $A = 1$ và với $a = 3$ thì $A = 3$.

b) $B = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt[6]{b}} = \frac{b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{6}}} = b^{\frac{1}{3}}$ nên khi $b = 27$ thì $B = b^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{3}} = 3.$

Ví dụ 6. Cho biểu thức : $M = \frac{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{9}{4}}}{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{5}{4}}} : \frac{b^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}$

a) Rút gọn M ;

b) Tính M khi $a = 5$ và $b = -7$.

Giải

a) Ta có : $M = \frac{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{9}{4}}}{a^{\frac{1}{4}} - a^{\frac{5}{4}}} : \frac{b^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}} = \frac{a^{\frac{1}{4}}(1 - a^2)}{a^{\frac{1}{4}}(1 - a)} : \frac{b^{\frac{1}{2}}(1 - b^2)}{b^{\frac{1}{2}}(1 + b)}$

$$\Rightarrow M = (1+a):(1-b) = \frac{1+a}{1-b}.$$

b) Khi $a = 5$ và $b = -7$ thì $M = \frac{1+5}{1-(-7)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$

Ví dụ 7. Cho biểu thức : $A = \left[\frac{4a - 9a^{-1}}{2a^{\frac{1}{2}} - 3a^{-\frac{1}{2}}} + \frac{a - 4 + 3a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}} \right]^2.$

Rút gọn và tính giá trị của A khi $a = 4.$

Giải

Điều kiện bài toán : $0 < a \neq 1; \frac{3}{2}.$

Ta có : $A = \left[\frac{4a - 9a^{-1}}{2a^{\frac{1}{2}} - 3a^{-\frac{1}{2}}} + \frac{a - 4 + 3a^{-1}}{a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}} \right]^2 = \left[\frac{4a^2 - 9}{(2a - 3)\sqrt{a}} + \frac{a^2 - 4a + 3}{(a - 1)\sqrt{a}} \right]^2$

$$\Rightarrow A = \left[\frac{2a + 3}{\sqrt{a}} + \frac{a - 3}{\sqrt{a}} \right]^2 = \left(\frac{3a}{\sqrt{a}} \right)^2 = 9a.$$

Khi $a = 4 \Rightarrow A = 36.$

Ví dụ 8. Tính (rút gọn) biểu thức :

$$M = \frac{(a^{\sqrt{5}+1})^{\sqrt{5}-1}}{a^{7-\sqrt{2}} \cdot a^{-3+\sqrt{2}}} \quad (a > 0).$$

Giải

$$M = \frac{(a^{\sqrt{5}+1})^{\sqrt{5}-1}}{a^{7-\sqrt{2}} \cdot a^{-3+\sqrt{2}}} \quad (a > 0) = \frac{a^{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}}{a^{7-\sqrt{2}-3+\sqrt{2}}} = \frac{a^{5-1}}{a^4} = 1.$$

Ví dụ 9. Rút gọn : $X = \frac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} \quad (a, b > 0).$

Giải

$$\text{Ta có : } X = \frac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \frac{ab \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}} \right)}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}} = ab, \quad (a, b > 0)$$

III. BÀI TẬP

1. Thực hiện phép tính sau :

$$a) 81^{-0,75} + \left(\frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{3}{5}} ;$$

$$b) 0,001^{\frac{1}{3}} - (-2)^{-2} \cdot 64^{\frac{2}{3}} - 8^{-\frac{1}{3}} + (9^0)^2 ;$$

$$c) 27^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} - 25^{-0,5} ;$$

$$d) (-0,5)^{-4} - 625^{0,25} - \left(2\frac{1}{4}\right)^{-1\frac{1}{2}} + 19(-3)^{-3} .$$

2. Viết các biểu thức sau dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ :

$$a) \sqrt[4]{x^2} \sqrt[3]{x} \quad (x > 0) ;$$

$$b) \sqrt[5]{\frac{b}{a}} \sqrt[3]{\frac{a}{b}} \quad (a > 0, b > 0) ;$$

$$c) \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{\frac{2}{3}} ;$$

$$d) \sqrt{a} \sqrt{a} \sqrt{a} \sqrt{a} : a^{\frac{11}{16}} \quad (a > 0) .$$

3. Đơn giản các biểu thức sau ($a, b > 0$) :

$$a) \frac{\left(\sqrt[4]{a^3 b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12} b^6}}} ;$$

$$b) \frac{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{4}{3}}} - \frac{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}} .$$

4. Đơn giản các biểu thức sau ($a, b > 0$) :

$$a) \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} - \frac{\sqrt{a} - \sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}} ;$$

$$b) \frac{a-b}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}} - \frac{a+b}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} ;$$

$$c) \left(\frac{a+b}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} - \sqrt[3]{ab}\right) : (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^2 ;$$

$$d) \frac{a-1}{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt[4]{a}}{\sqrt{a} + 1} \cdot a^{\frac{1}{4}} + 1 .$$

5. Đơn giản các biểu thức sau :

$$a) \frac{\left(a^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}}{a^{\sqrt{5}-3} \cdot a^{4-\sqrt{5}}} ;$$

$$b) a^{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1} .$$

6. Đơn giản các biểu thức sau :

$$a) a^{-2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{a^{-\sqrt{2}-1}} \right)^{\sqrt{2}+1} ;$$

$$b) \left(\frac{a^{\sqrt{3}}}{b^{\sqrt{3}-1}} \right)^{\sqrt{3}+1} \frac{a^{-1-\sqrt{3}}}{b^{-2}} ;$$

$$c) \frac{a^{2\sqrt{2}} - b^{2\sqrt{3}}}{(a^{\sqrt{2}} - b^{\sqrt{3}})^2} + 1 ;$$

$$d) \sqrt{(x^\pi + y^\pi)^2 - \left(4^{\frac{1}{\pi}} xy \right)^\pi}.$$

7. Chứng minh :

$$a) \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = 2 ;$$

$$b) \sqrt[3]{9+\sqrt{80}} + \sqrt[3]{9-\sqrt{80}} = 3.$$

8. So sánh các số sau :

$$a) (\sqrt{3})^{-\frac{5}{6}} \text{ và } \sqrt[3]{3^{-1}} \sqrt[4]{\frac{1}{3}} ;$$

$$b) 3^{600} \text{ và } 5^{400} ;$$

$$c) \left(\frac{1}{2} \right)^{-\frac{5}{7}} \text{ và } \sqrt{2} \cdot 2^{\frac{3}{14}} ;$$

$$d) 7^{30} \text{ và } 4^{40}.$$



Vấn đề 2

CHỨNG MINH MỘT BIỂU THỨC KHÔNG PHỤ THUỘC THAM SỐ

I. PHƯƠNG PHÁP

Sử dụng các tính chất của lũy thừa để chứng minh một biểu thức không phụ thuộc tham số.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Chứng minh rằng biểu thức sau không phụ thuộc vào b :

$$B = \left(1 - 2\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{b}{a} \right) : \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} \right)^2.$$

Giải

Ta có :

$$\begin{aligned} B &= \left(1 - 2\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{b}{a}\right) : \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)^2 \\ &= \left(-\sqrt{\frac{b}{a}} + 1\right)^2 : (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = \left(1 - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)^2 : (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \\ &= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{(\sqrt{a})^2} : (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = \frac{1}{(\sqrt{a})^2} = \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Cho biểu thức : $M = \frac{ab^{-2}(ab^{-1})^2(a^{-1}b^2)}{a^{-2}b(a^{-2}b^{-1})^3}.$

a) Chứng minh M không phụ thuộc vào b ;

b) Tính giá trị của M khi a = 2.

Giải

a) Ta có :

$$M = \frac{ab^{-2}(ab^{-1})^2(a^{-1}b^2)}{a^{-2}b(a^{-2}b^{-1})^3} = \frac{a^{1+2-1}b^{-2-2+2}}{a^{-2-6}b^{1-3}} = \frac{a^2b^{-2}}{a^{-8}b^{-2}} = a^{10}.$$

Vậy M không phụ thuộc vào b.

b) Khi a = 2 $\Rightarrow M = 2^{10} = 1024.$

III. BÀI TẬP

9. Chứng minh rằng biểu thức : $M = ab \frac{\sqrt[n]{\frac{a^{1-n}}{b^n} - \frac{a^{-n}}{b^{n-1}}}}{\sqrt[n]{a-b}}$ với $a > b > 0$ không phụ thuộc vào giá trị của a và b.

§2. HÀM SỐ LŨY THỪA

A. TÓM TẮT GIẢNG KHOA

I. KHÁI NIỆM HÀM SỐ LŨY THỪA

Định nghĩa. Hàm số lũy thừa có dạng: $y = x^\alpha$, trong đó α là một hằng số tùy ý.

Từ định nghĩa về lũy thừa, ta có :

Hàm số	Số mũ lũy thừa	Tập xác định
$y = x^n$	n nguyên dương	$D = \mathbb{R}$
$y = x^n$	n nguyên âm hoặc $n = 0$	$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$y = x^\alpha$	α không nguyên	$D = (0 ; +\infty)$

Hàm số lũy thừa liên tục trên tập xác định của nó.

Lưu ý. Theo định nghĩa, đẳng thức $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ chỉ xảy ra nếu $x > 0$. Do đó hàm số $y = x^{\frac{1}{n}}$ không đồng nhất với hàm số $y = \sqrt[n]{x}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

II. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ LŨY THỪA

Nhắc lại : $(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$, n là số nguyên lớn hơn 1.

Định lí

1) Hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) có đạo hàm tại mọi $x > 0$ và

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

2) Nếu $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm và $u(x) > 0$ trên J (với J là một khoảng hay hợp của nhiều khoảng) thì hàm số $y = u^\alpha(x)$ cũng có đạo hàm trên J và

$$[u^\alpha(x)]' = \alpha u^{\alpha-1}(x) \cdot u'(x)$$

Lưu ý

Đặc biệt, ta có: $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

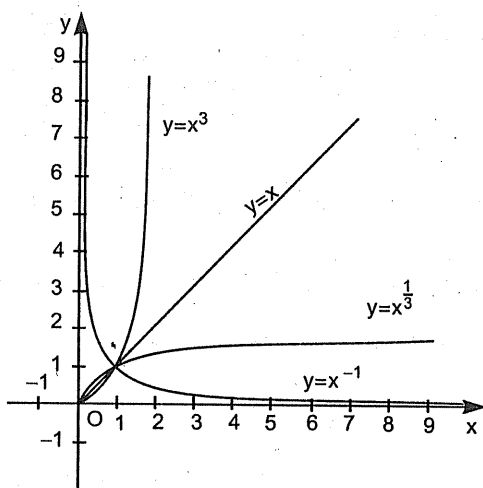
(với mọi $x > 0$ nếu n chẵn, với mọi $x \neq 0$ nếu n lẻ).

Nếu $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm trên J và thỏa mãn điều kiện $u(x) > 0$ với mọi $x \in J$ khi n chẵn, $u(x) \neq 0$ với mọi $x \in J$ khi n lẻ thì :

$$\left(\sqrt[n]{u(x)} \right)' = \frac{u'(x)}{n \sqrt[n]{u^{n-1}(x)}}.$$

III. SỰ BIẾN THIÊN VÀ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ LŨY THỪA

Xét hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ với $\alpha \neq 0$ và với tập xác định $(0; +\infty)$. Từ công thức: $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ ta suy ra hàm số $y = x^\alpha$ *đồng biến* trên khoảng $(0; +\infty)$ nếu $\alpha > 0$ và *nghịch biến* trên khoảng $(0; +\infty)$ nếu $\alpha < 0$.



Lưu ý. Đồ thị của hàm số lũy thừa $y = x^\alpha$ luôn đi qua điểm $M(1; 1)$ (vì $1^\alpha = 1; \forall \alpha$).

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN



Vấn đề 1

CHỨNG MINH MỘT ĐẲNG THỨC, BẤT ĐẲNG THỨC

I. PHƯƠNG PHÁP

Thường thì ta biến đổi về trái (VT) hoặc về phải (VP) của biểu thức để trở về với biểu thức về bên kia. Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp ta cần biến đổi cả hai vế của đẳng thức này về cùng một biểu thức trung gian. Để làm được điều đó ta sử dụng các định nghĩa, tính chất của hàm số lũy thừa và căn thức.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho $a, b, c > 0$ thoả mãn $a + b = c$. Chứng minh rằng :

$$\text{a) } a^m + b^m > c^m \text{ nếu } 0 < m < 1; \quad \text{b) } a^m + b^m < c^m \text{ nếu } m > 1.$$

Giải

a) Chứng minh : $a^m + b^m > c^m$ nếu $0 < m < 1$.

Theo điều kiện đề bài ra a, b, c đều dương nên ta có :

$$c > a; c > b \text{ và } \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 1 \Rightarrow 0 < \frac{a}{c} < 1; 0 < \frac{b}{c} < 1.$$

Khi $0 < m < 1$ ta có :

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{c}\right)^m > \frac{a}{c} \\ \left(\frac{b}{c}\right)^m > \frac{b}{c} \end{cases} \Rightarrow \frac{a^m}{c^m} + \frac{b^m}{c^m} > \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 1.$$

Vậy khi $0 < m < 1$ ta luôn có $a^m + b^m > c^m$.

b) Chứng minh : $a^m + b^m < c^m$ nếu $m > 1$.

Theo điều kiện đề bài, vì $a, b, c > 0$ nên ta có :

$$c > a; c > b; \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 1 \Rightarrow 0 < \frac{a}{c} < 1; 0 < \frac{b}{c} < 1.$$

$$\text{Khi } m > 1, \text{ ta có : } \begin{cases} 0 < \left(\frac{a}{c}\right)^m < \frac{a}{c} \\ 0 < \left(\frac{b}{c}\right)^m < \frac{b}{c} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^m + \left(\frac{b}{c}\right)^m < \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = 1.$$

Vậy với mọi $m > 1$ ta luôn có : $a^m + b^m < c^m$.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng với các số dương a, b, x, y ($a > 0; b > 0; x > y > 0$) ta luôn có :

$$(a^x + b^x)^y < (a^y + b^y)^x.$$

Giải

Theo bài ra : $(a^x + b^x)^y < (a^y + b^y)^x \Leftrightarrow a^{xy} \left[1 + \left(\frac{b}{a} \right)^x \right]^y < a^{xy} \left[1 + \left(\frac{b}{a} \right)^y \right]^x$

hay $(a^x + b^x)^y < (a^y + b^y)^x \Leftrightarrow \left[1 + \left(\frac{b}{a} \right)^x \right]^{\frac{1}{x}} < \left[1 + \left(\frac{b}{a} \right)^y \right]^{\frac{1}{y}}$.

Đặt $\alpha = \frac{b}{a} > 0$, xét hàm số $y = f(x) = (1 + \alpha^x)^{\frac{1}{x}}$, $x > 0$ ta có :

$$\begin{aligned} \ln y &= \frac{1}{x} \ln(1 + \alpha^x) \Rightarrow \frac{y'}{y} = \left(-\frac{1}{x^2} \right) \ln(1 + \alpha^x) + \frac{1}{x} \cdot \frac{(1 + \alpha^x)}{1 + \alpha^x} \\ \Rightarrow \frac{y'}{y} &= \frac{\alpha^x \ln \alpha^x - (1 + \alpha^x) \ln(1 + \alpha^x)}{x^2 (1 + \alpha^x)} \end{aligned}$$

Do $0 < \alpha^x < 1 + \alpha^x$ nên hiển nhiên: $\alpha^x \ln \alpha^x < (1 + \alpha^x) \ln(1 + \alpha^x)$.

Suy ra $y' < 0$, $\forall x > 0$

$\Rightarrow$ hàm f nghịch biến trong khoảng $(0; +\infty)$ và do đó $x > y \Rightarrow f(x) < f(y)$

$$\Rightarrow (1 + \alpha^x)^{\frac{1}{x}} < (1 + \alpha^y)^{\frac{1}{y}}.$$

$$\text{Vậy } (a^x + b^x)^y < (a^y + b^y)^x.$$

Ví dụ 3. Cho $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh bất đẳng thức : $2^{\sin x} + 2^{\cos x} \geq 2^{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$.

Khi nào thì dấu đẳng thức xảy ra ?

Giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si :

$$2^{\sin x} + 2^{\cos x} \geq 2\sqrt{2^{\sin x} \cdot 2^{\cos x}} = 2\sqrt{2^{\sin x + \cos x}} = 2 \cdot 2^{\frac{\sin x + \cos x}{2}}.$$

$$\text{Do } \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq -\sqrt{2} \text{ nên } 2^{\frac{\sin x + \cos x}{2}} \geq 2^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 2^{\frac{\sin x + \cos x}{2}} \geq 2 \cdot 2^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow 2^{\sin x} + 2^{\cos x} \geq 2^{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

Dấu “=” xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{\sin x} = 2^{\cos x} \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi.$$

Vậy bất đẳng thức trở thành đẳng thức khi $x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi$.

Ví dụ 4. Cho x, y, z thoả mãn : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ và $ax^3 = by^3 = cz^3$.

a) Rút gọn biểu thức : $A = ax^2 + by^2 + cz^2$

b) Chứng minh rằng : $A = \left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}\right)^3$.

Giải

a) Ta có : $A = ax^2 + by^2 + cz^2$

$$\Rightarrow A = \frac{ax^3}{x} + \frac{by^3}{y} + \frac{cz^3}{z} = \frac{ax^3}{x} + \frac{ax^3}{y} + \frac{ax^3}{z} = ax^3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$$

(vì $ax^3 = by^3 = cz^3$).

Vì $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ nên suy ra : $A = ax^3$.

b) Ta có :

$$\left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}\right)^3 = \left(\frac{\sqrt[3]{ax^3}}{x} + \frac{\sqrt[3]{by^3}}{y} + \frac{\sqrt[3]{cz^3}}{z}\right)^3 = ax^3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^3 = ax^3$$

(vì $ax^3 = by^3 = cz^3$).

Vậy $A = \left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}\right)^3$ (đpcm).

III. BÀI TẬP

1. Cho $a, b, c > 0$ thoả mãn $a^2 = b^2 + c^2$. Chứng minh :

a) $a^m > b^m + c^m$ nếu $m > 2$;

b) $a^m < b^m + c^m$ nếu $m < 2$.

2. Chứng minh bất đẳng thức : $2^{2\sin x} + 2^{\tan x} > 2^{\frac{3x}{2}+1}$, $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

3. Cho biểu thức : $A = (9^a - 4 \cdot 3^a + 1)a + (a^2 + 1) \cdot 3^a$.

Chứng minh rằng : $A > 0$ khi $a > 0$.

4. Cho $a \geq 0$; $b \geq 0$; $m > n > 0$. Chứng minh : $(a^m + b^m)^{\frac{1}{m}} \leq (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}}$.



Vấn đề 2

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LŨY THỪA

I. PHƯƠNG PHÁP

– Giải phương trình lũy thừa là dùng các tính chất của lũy thừa (hoặc đặt ẩn phụ) biến đổi để đưa phương trình đã cho về dạng các phương trình bậc nhất, bậc hai, bậc ba ...

– Cần nắm các tính chất sau :

• Với $a \neq 0$ và n nguyên dương thì :

$$a^0 = 1 \quad (\text{lưu ý : } 0^0 \text{ không có nghĩa})$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (\text{lưu ý : } 0^{-n} \text{ không có nghĩa})$$

• Với mọi số thực a, b khác 0 và $m, n \in \mathbb{Z}$ ta luôn có :

$$1. a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$2. \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$3. (a^m)^n = a^{mn}$$

$$4. (ab)^n = a^n b^n$$

$$5. \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

* Lưu ý. Không được đồng nhất : $\sqrt[n]{x}$ với $x^{\frac{1}{n}}$.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải phương trình sau : $\sqrt[3]{\frac{1}{2} + x} + \sqrt{\frac{1}{2} - x} = 1$.

Giải

Ta có : $\sqrt[3]{\frac{1}{2}+x} + \sqrt{\frac{1}{2}-x} = 1$ (*)

Đặt $u = \sqrt[3]{\frac{1}{2}+x}$; $v = \sqrt{\frac{1}{2}-x}$ với $v \geq 0$.

$$\begin{aligned}
 (*) \Leftrightarrow \begin{cases} v \geq 0 \\ u+v=1 \\ u^3+v^2=1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} v \geq 0 \\ v=1-u \\ u^3+(1-u)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v \geq 0 \\ v=1-u \\ u^3+u^2-2u+1=1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} v \geq 0 \\ v=1-u \\ u^3+u^2-2u=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=0 \\ v=1 \\ u=1 \\ v=0 \\ u=-2 \\ v=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ x=\frac{1}{2} \\ x=-\frac{17}{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình (*) có nghiệm là : $x_1 = -\frac{1}{2}$; $x_2 = \frac{1}{2}$; $x_3 = -\frac{17}{2}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình sau : $\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} - 3 = 0$.

Giải

Đặt $\sqrt[3]{x} = t$ ta có $t^2 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-3 \end{cases}$.

* $t = 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

* $t = -3 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} = -3 \Leftrightarrow x = -27$.

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = 1$; $x = -27$.

Ví dụ 3. Giải phương trình sau :

$$x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}.$$

Giải

Ta có : $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$ (1)

Đặt $t = \sqrt[3]{2x-1}$ khi đó từ (1) ta có

$$\begin{cases} x^3 + 1 = 2t \\ 2x - 1 = t^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 1 = 2t \\ t^3 - x^3 = 2(x - t) \end{cases} \quad (2) \quad (3)$$

$$(3) \Leftrightarrow (t - x)(t^2 + xt + x^2) = 2(x - t) \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ t^2 + xt + x^2 + 2 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{cases}$$

$$\text{Xét } x = t \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2x-1} \Leftrightarrow x^3 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x^2 + x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ x_3 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy phương trình (1) có nghiệm } \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ x_3 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

III. BÀI TẬP

5. Giải các phương trình sau :

$$\text{a) } \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} = 16 ;$$

$$\text{b) } (3x-1)^{\frac{2}{3}} = 4.$$

$$6. \text{ Giải phương trình : } \sqrt[4]{16x^2} + 5\sqrt[4]{x} - 7 = 0.$$

7. Giải các phương trình sau :

$$\text{a) } \sqrt{x} + \sqrt[4]{x} = 2 ;$$

$$\text{b) } \sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x} + 2 = 0.$$

8. Giải phương trình sau :

$$2\sqrt[3]{3x-2} + 3\sqrt{6-5x} - 8 = 0 \quad (\text{đề thi tuyển sinh ĐH khối A - 2009})$$

9. Tìm các số thực x thỏa mãn điều kiện sau :

a) $\frac{1}{2}(a^x + a^{-x}) = 1 \quad (a > 0) ;$

b) $3^{|x|} < 27.$



Vấn đề 3

TÌM TẬP XÁC ĐỊNH. ĐẠO HÀM TRÊN TẬP XÁC ĐỊNH

I. PHƯƠNG PHÁP

* Khi giải bài toán tìm tập xác định (TXĐ) của hàm số lũy thừa, cần lưu ý :

Hàm số	Số mũ lũy thừa	Tập xác định
$y = x^n$	n nguyên dương	$D = \mathbb{R}$
$y = x^n$	n nguyên âm hoặc $n = 0$	$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$y = x^\alpha$	α không nguyên	$D = (0; +\infty)$

Khi giải bài toán liên quan đến đạo hàm của hàm số lũy thừa, cần lưu ý :

$$*(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$*(u^\alpha(x))' = \alpha u^{\alpha-1}(x) \cdot u'(x)$$

$$*(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$*(\sqrt[n]{u(x)})' = \frac{u'(x)}{n\sqrt[n]{u^{n-1}(x)}}$$

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau :

a) $y = \sqrt[3]{x}$;

b) $y = x^{\frac{1}{3}}$.

Giải

Hàm số căn bậc ba : $y = \sqrt[3]{x}$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$, còn hàm số lũy thừa $y = x^{\frac{1}{3}}$ chỉ xác định với mọi $x > 0$.

Ví dụ 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau :

a) $y = \sqrt[5]{1-x}$;

b) $y = \sqrt{4x^2 - 4x - 8}$.

Giải

a) $y = \sqrt[5]{1-x}$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$

b) $y = \sqrt{4x^2 - 4x - 8} = 2\sqrt{x^2 - x - 2}$ xác định

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 \vee x \geq 2.$$

Vậy $D = (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$.

Ví dụ 3. Tìm tập xác định của các hàm số sau :

$$y = (2\cos^2 x - 3\cos x + 1)^{\sin x}.$$

Giải

Hàm số xác định $\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x + 1 > 0$ (1)

Đặt $t = \cos x$, điều kiện $|t| \leq 1$.

Khi đó bất phương trình (1) có dạng :

$$2t^2 - 3t + 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t > 1 & (\text{loại}) \\ t < \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow t < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x < \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} + k2\pi < x < \frac{5\pi}{3} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy tập xác định của hàm số là : $\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \right), k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 4. Tìm tập xác định của các hàm số sau :

$$y = \left(x + \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 4}} - 3\sqrt{5} \right)^{x + \cot x}.$$

Giải

$$\text{Hàm số xác định} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 > 0 & (1) \\ x + \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 4}} - 3\sqrt{5} > 0 & (2) \\ \sin x \neq 0 & (3) \end{cases}$$

Giải (1) ta được : $|x| > 2$

Giải (3) ta được : $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Giải (2) : $x + \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 4}} > 3\sqrt{5}$ (4)

Xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1 : $x < -2$ suy ra bất phương trình (4) vô nghiệm (về trái âm).

Trường hợp 2 : $x > 2$, bình phương hai vế của (4) ta được :

$$x^2 + \frac{4x^2}{x^2 - 4} + \frac{4x^2}{\sqrt{x^2 - 4}} > 45 \Leftrightarrow \frac{x^4}{x^2 - 4} + \frac{4x^2}{\sqrt{x^2 - 4}} > 45 \quad (5)$$

Đặt $t = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}}$, điều kiện $t > 0$. Khi đó, bất phương trình (5) có dạng :

$$t^2 + 4t - 45 > 0 \Leftrightarrow t > 5 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}} > 5 \Leftrightarrow x^4 - 25x^2 + 100 > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 > 20 \\ x^2 < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| > \sqrt{20} \\ |x| < \sqrt{5} \end{cases}$$

Vậy tập xác định của hàm số là :

$$x \in (2; \sqrt{5}) \cup (\sqrt{20}; +\infty) \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Ví dụ 5. Tính đạo hàm của hàm số sau trên tập xác định của nó :

$$y = (x^3 - 2x + 2)^{\sqrt{5}}.$$

Giải

$$\text{Ta có : } y = (x^3 - 2x + 2)^{\sqrt{5}} \Rightarrow y' = \sqrt{5} (x^3 - 2x + 2)^{\sqrt{5}-1} (3x^2 - 2).$$

Ví dụ 6. Cho hàm số: $y = \sqrt{1+x}$. Hãy xác định đạo hàm của hàm số, từ đó tính giá trị của biểu thức : $A = y(3) + (x-3).y'(3)$.

Giải

$$\text{Theo đề bài ta có : } y = \sqrt{1+x} \Rightarrow y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}.$$

$$\text{Vì } y(3) = 2 \text{ và } y'(3) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow A = y(3) + (x-3)y'(3) = 2 + (x-3)\frac{1}{4} = \frac{1}{4}(x+5).$$

Ví dụ 7. Tính đạo hàm các hàm số trên tập xác định :

a) $y = \sin^3 x$;

b) $y = \cos^3(3x)$.

Giải

a) Ta có : $y = \sin^3 x \Rightarrow y' = 3\sin^2 x \cos x$.

b) Ta có : $y = \cos^3(3x) \Rightarrow y' = 3\cos^2 3x \cdot (-3\sin 3x) = -9\cos^2 3x \sin 3x$.

Ví dụ 8. Xác định đạo hàm của hàm số :

a) $y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$; b) $y = \sqrt[3]{a + bx^3}$.

Giải

a) Hàm số $y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ xác định với điều kiện : $a > 0$. Khi đó với $0 < x < a$,

ta có :

$$y' = \frac{3}{2} \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}-1} \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)' = -x^{-\frac{1}{3}} \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

b) $y = \sqrt[3]{a + bx^3}$.

Ta chỉ tính đạo hàm của hàm số $\Leftrightarrow a + bx^3 \neq 0$, khi đó ta có :

$$y' = \frac{\sqrt[3]{a + bx^3}}{3(a + bx^3)} (a + bx^3)' = \frac{bx^2 \sqrt[3]{a + bx^3}}{a + bx^3}.$$

III. BÀI TẬP

10. Tìm tập xác định của các hàm số :

a) $y = (x^2 + x - 1)^{-2}$;

b) $y = (x^3 - 8)^{\frac{\sqrt{2}}{5}}$.

11. Tìm tập xác định của hàm số sau : $y = (5x^2 - 3)^{-2}$.

12. Tìm tập xác định của hàm số sau :

$$y = \left(\frac{2x}{\sqrt{2x+1}-1} - 2x - 2 \right)^{\tan x}.$$

13. Tìm đạo hàm hàm số :

$$y = \frac{(x+2)^2}{(x+1)^3(x+3)^4}, \quad \text{với } x \neq -1, -2, -3.$$

14. Tìm đạo hàm hàm số : $y = \frac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{b}{x\sqrt[3]{x}}.$

15. Tính đạo hàm của các hàm số sau :

$$\text{a) } y = x^\pi \cdot \pi^x; \quad \text{b) } y = (\ln x)^{1+\sqrt{2}}.$$

16. Tính đạo hàm của các hàm số sau :

$$\text{a) } y = \sqrt[3]{\sin 5x}; \quad \text{b) } y = \sqrt[4]{e^{3x} + 2}.$$

17. Tính đạo hàm của các hàm số sau :

$$\text{a) } y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}; \quad \text{b) } y = 5\sqrt{x} - \frac{10}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\text{c) } y = \sqrt[3]{\frac{1}{x^3}}; \quad \text{d) } y = x^{\frac{3}{2}}(2 + \sqrt{x});$$

$$\text{e) } y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}; \quad \text{f) } y = \left(\frac{x}{b}\right)^a \left(\frac{a}{x}\right)^b \quad (a > 0, b > 0);$$

$$\text{g) } y = (2x+1)^\pi; \quad \text{h) } y = \sqrt[5]{\ln^3 5x}.$$

18. Cho hai đồ thị $(C_1) : f(x) = ax^2$ và $(C_2) : g(x) = \sqrt{x}$.

a) Tìm giá trị của a sao cho đồ thị (C_1) đi qua điểm $A(4; 2)$.

b) Gọi B là giao điểm có hoành độ dương của (C_1) với (C_2) . Viết phương trình tiếp tuyến d với đồ thị (C_2) tại B.

c) Tìm giao điểm của tiếp tuyến d với (C_1) ở câu a).

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

Cho $0 < a \neq 1$. Cho J là một khoảng hay hợp của nhiều khoảng nào đó.

I. KHÁI NIỆM HÀM SỐ MŨ

Định nghĩa

Cho $0 < a \neq 1$. Hàm số dạng $y = a^x$ được gọi là hàm số mũ cơ số a .

II. MỘT SỐ GIỚI HẠN LIÊN QUAN ĐẾN HÀM SỐ MŨ

Hàm số mũ liên tục tại mọi điểm mà hàm số xác định, nghĩa là :

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$$

$$\text{Từ giới hạn : } \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e ; \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e ,$$

$$\text{bằng cách viết } \frac{1}{t} = x, \text{ ta được : } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e .$$

$$\text{Định lí. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 .$$

III. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ MŨ

Định lí

Cho $0 < a \neq 1$. Cho J là một khoảng hay hợp của nhiều khoảng nào đó.

Hàm số $y = a^x$ có đạo hàm tại mọi $x \in \mathbb{R}$ và

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$\text{Nói riêng : } (e^x)' = e^x .$$

Nếu $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm trên J thì hàm số $y = a^{u(x)}$ có đạo hàm trên J và

$$(a^{u(x)})' = u'(x) \cdot a^{u(x)} \cdot \ln a$$

$$\text{Nói riêng : } (e^{u(x)})' = u'(x) \cdot e^{u(x)} .$$

IV. SỰ BIẾN THIÊN VÀ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ MŨ $y = a^x$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị: $f(D) = (0; +\infty)$, vì $a^x > 0 \forall x$.
- Đạo hàm: $y' = a^x \cdot \ln a$

$a > 1$	$y' > 0$
$0 < a < 1$	$y' < 0$

- Giới hạn và tiệm cận :

$a > 1$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$	Tiệm cận ngang : $y = 0 \ (x \rightarrow -\infty)$
$0 < a < 1$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$	Tiệm cận ngang : $y = 0 \ (x \rightarrow +\infty)$

- Bảng biến thiên :

Với $a > 1$:

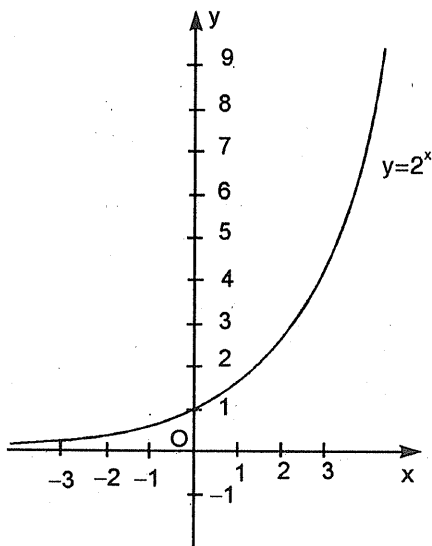
x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'		+	
y	0	1	$+\infty$

Với $0 < a < 1$:

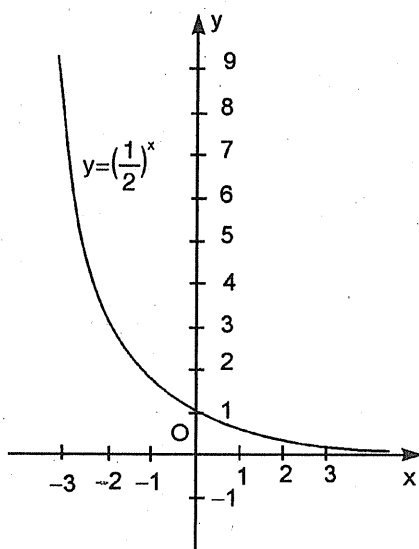
x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'		-	
y	$+\infty$	1	0

- Đồ thị hàm số luôn cắt trục tung tại điểm $M(0; 1)$ (vì $a^0 = 1$) và nằm ở phía trên trục hoành (vì $a^x > 0$ với mọi x).

$$a > 1$$



$$0 < a < 1$$



B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN



Vấn đề 1

TÌM GIỚI HẠN

I. PHƯƠNG PHÁP

Sử dụng các công thức giới hạn :

- $\forall x_0 \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$ (với $0 < a \neq 1$)

- $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$

II. VÍ DỤ

Ví dụ. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} ;$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{e^x} - 1}{x}.$

Giải

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{e^x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{x}{3}} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{e^{\frac{x}{3}} - 1}{\frac{x}{3}} \right) = \frac{1}{3}.$$

III. BÀI TẬP

1. Tìm các giới hạn sau :

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^2 - e^{3x+2}}{x};$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{5x}}{x};$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + e^x - 2}{x}.$$

2. Tìm giới hạn :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot e^{\frac{1}{x}} - x \right).$$



Vấn đề 2

TÌM ĐẠO HÀM

I. PHƯƠNG PHÁP

Sử dụng các công thức tính đạo hàm :

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$(e^x)' = e^x.$$

$$(a^{u(x)})' = u'(x) \cdot a^{u(x)} \cdot \ln a$$

$$(e^{u(x)})' = u'(x) \cdot e^{u(x)}.$$

II. VÍ DỤ

Ví dụ. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

$$a) y = (x+1)e^{2x};$$

$$b) y = e^{\sqrt{x} \cdot \sin x}.$$

Giải

$$a) y = (x+1)e^{2x} \Rightarrow y' = (x+1)'e^{2x} + (x+1)(e^{2x})'$$

$$= e^{2x} + 2(x+1)e^{2x} = e^{2x}(1+2x+2) = (2x+3)e^{2x}.$$

$$b) y = e^{\sqrt{x} \cdot \sin x}$$

$$\Rightarrow y' = (\sqrt{x} \cdot \sin x)' e^{\sqrt{x} \sin x}$$

$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \sin x + \sqrt{x} \cos x \right) e^{\sqrt{x} \sin x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} (\sin x + 2x \cos x) e^{\sqrt{x} \sin x}.$$

III. BÀI TẬP

3. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

$$a) y = (x-1)e^{2x} ;$$

$$b) y = x^2 \cdot \sqrt{e^{4x} + 1} ;$$

$$c) y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) ;$$

$$d) y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) ;$$

$$e) y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} ;$$

$$f) y = 2^x - \sqrt{e^x}.$$

4. Tìm đạo hàm cấp n của các hàm số sau :

$$a) y = a^x ;$$

$$b) y = e^{kx}.$$



Vấn đề 3

CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT. KHẢO SÁT TÍNH CHẤT BIẾN THIÊN

I. PHƯƠNG PHÁP

Sử dụng tính chất biến thiên của hàm số mũ $y = a^x$:

* Tăng (đồng biến) trên $\mathbb{R}$ nếu $a > 1$

* Giảm (nghịch biến) trên $\mathbb{R}$ nếu $0 < a < 1$.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Chứng minh rằng : $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$ với mọi $x > 0$.

Giải

Xét hàm số : $y = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$ với $x > 0$

$$y'(x) = e^x - 1 - x; \quad y''(x) = e^x - 1.$$

$$\text{Vì } x > 0 \Rightarrow e^x > 1$$

$$\Rightarrow y''(x) > 0 \Rightarrow y'(x) \text{ là hàm đồng biến với } x > 0$$

$$\Rightarrow y'(x) > y'(0) \text{ với } x > 0$$

$$\Rightarrow y'(x) > 0 \text{ với } x > 0.$$

Vậy $y(x)$ đồng biến với $x > 0$.

$$y(x) > y(0), \forall x > 0$$

$$\Rightarrow y(x) = e^x - x - \frac{x^2}{2} - 1 > 0, \forall x > 0$$

$$\Rightarrow e^x > \frac{x^2}{2} + x + 1, \forall x > 0.$$

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số : $y = 4^x$ trên đoạn $[2; 4]$.

Giải

Do hàm số $y = 4^x$ là hàm số mũ với cơ số lớn hơn 1 nên luôn đồng biến.

Vì vậy : $\text{Max } y = y(4) = 256$ và $\text{min } y = y(2) = 16$.

III. BÀI TẬP

5. Chứng minh rằng hàm số $y = \frac{2^x - 2^{-x}}{3}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

6. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau :

a) $y = 2^x \quad (-1 \leq x \leq 2)$;

b) $y = 2^{|x|} \quad (-1 \leq x \leq 1).$

7. Cho $a + b = c$ ($a > 0, b > 0$)

a) Chứng minh : $a^m + b^m < c^m$ nếu $m > 1$;

b) Chứng minh : $a^m + b^m > c^m$ nếu $m < 1$.

8. Với điều kiện nào của a thì :

a) $a^\pi < \sqrt[3]{a^{10}}$;

b) $a^{-0,3} > a^{1,5}$.

9. Cho hàm số $f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$. Tính tổng sau :

$$S = f\left(\frac{1}{2010}\right) + f\left(\frac{2}{2010}\right) + f\left(\frac{3}{2010}\right) + \dots + f\left(\frac{2009}{2010}\right).$$

BÀI TẬP ÔN CUỐI CHƯƠNG I

1. So sánh p và q , biết :

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^p > \left(\frac{3}{2}\right)^{-q}$;

b) $\left(\frac{8}{3}\right)^{-p} < \left(\frac{3}{8}\right)^q$;

c) $0,25^p < \left(\frac{1}{2}\right)^{2q}$;

d) $\left(\frac{7}{2}\right)^p > \left(\frac{2}{7}\right)^{p-2q}$.

2. Cho $x < 0$. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4}(2^x - 2^{-x})^2}}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4}(2^x - 2^{-x})^2}}} = \frac{1 - 2^x}{1 + 2^x}.$$

3. Giải các phương trình sau :

a) $x^5 = 16x^3$;

b) $\sqrt[3]{x^2} = 16$.

4. Với điều kiện nào của a thì :

$$(a-1)^{\frac{3}{4}} > (a-1)^{t+\sqrt{t+1}} \quad (t > 0).$$

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

I. LÔGARIT

1) Định nghĩa. Cho $a > 0$, $a \neq 1$ và $b > 0$

$$\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$$

Chú ý :

- $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$
- $\log_a a^b = b$, $\forall b \in \mathbb{R}$
- $a^{\log_a b} = b$, $\forall b \in \mathbb{R}$, $b > 0$

Nói cách khác, với $a > 0$, $a \neq 1$ và

* với mọi số thực b :

$$b \xrightarrow{\text{nâng lên lũy thừa cơ số } a} a^b \xrightarrow{\text{lấy lôgarit cơ số } a} \log_a a^b = b$$

* với mọi số thực b dương :

$$b \xrightarrow{\text{lấy lôgarit cơ số } a} \log_a b \xrightarrow{\text{nâng lên lũy thừa cơ số } a} a^{\log_a b} = b.$$

2) Tính chất

2.1. So sánh hai lôgarit cùng cơ số

* Cho $b, c > 0$

1. $a > 1 : \log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$
2. $0 < a < 1 : \log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c$

* Cho $0 < a \neq 1$ và $b, c > 0$

1. $a > 1 : \log_a b > 0 \Leftrightarrow b > 1$
2. $0 < a < 1 : \log_a b > 0 \Leftrightarrow b < 1$
3. $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$

2.2. Các quy tắc tính lôgarit

* Cho $0 < a \neq 1$ và $b, c > 0$

$$1. \log_a (b.c) = \log_a b + \log_a c$$

$$2. \log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$$

$$3. \log_a b^\alpha = \alpha \log_a b \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

* Cho $0 < a \neq 1$ và $b > 0$ và n là số nguyên dương

$$1. \log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$$

$$2. \log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$$

2.3. Đổi cơ số của lôgarit

Với $0 < a, b$ và $a, b \neq 1, c > 0$ và $\alpha \neq 0$

$$\bullet \log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b} \quad \text{hay} \quad \log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$$

$$\bullet \log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad \text{hay} \quad \log_a b \cdot \log_b a = 1$$

$$\bullet \log_{a^\alpha} c = \frac{1}{\alpha} \log_a c.$$

Chú ý

$$\blacksquare \text{ Nếu } x = 10^n \text{ thì } \log x = n$$

$$\blacksquare \text{ Nếu } x \geq 1 \text{ sao cho } n \leq \log x < n+1 \text{ thì } 10^n \leq x < 10^{n+1}.$$

II. HÀM SỐ LÔGARIT

Cho $0 < a \neq 1$. Cho J là một khoảng hay hợp của nhiều khoảng nào đó.

1) Khái niệm hàm số lôgarit

Định nghĩa

Cho $0 < a \neq 1$. Hàm số dạng $y = \log_a x$ được gọi là hàm số lôgarit cơ số a .

Lưu ý

Kí hiệu $y = \log x$ (hoặc $\lg x$) để chỉ hàm số lôgarit cơ số 10.

Kí hiệu $y = \ln x$ để chỉ hàm số lôgarit cơ số e.

2) Một số giới hạn liên quan đến hàm số lôgarit

Hàm số lôgarit liên tục tại mọi điểm mà hàm số xác định, nghĩa là :

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}_+^*, \lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0.$$

Định lí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

3) Đạo hàm của hàm số lôgarit

Định lí

Cho $0 < a \neq 1$. Cho J là một khoảng hay hợp của nhiều khoảng nào đó.

Hàm số $y = \log_a x$ có đạo hàm tại mọi $x > 0$ và

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Nói riêng, ta có : $(\ln x)' = \frac{1}{x}.$

3.1. Nếu $u = u(x)$ là hàm số nhận giá trị dương và có đạo hàm trên J thì hàm số $y = \log_a u(x)$ có đạo hàm trên J và

$$(\log_a u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x) \ln a}.$$

Nói riêng, ta có : $(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}.$

3.2. Nếu $u = u(x)$ là hàm số nhận giá trị khác 0 và có đạo hàm trên J thì

$$(\ln |u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}, \quad \forall x \in J.$$

Hệ quả

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0).$$

4) Sự biến thiên và đồ thị của hàm số lôgarit $y = \log_a x$

– Tập xác định: $D = (0 ; +\infty)$

– Tập giá trị: $f(D) = \mathbb{R}$.

– Đạo hàm : $y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

$a > 1$	$y' > 0$
$0 < a < 1$	$y' < 0$

– Giới hạn và tiệm cận :

$a > 1$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$	Tiệm cận đứng : $x = 0 (x \rightarrow 0^+)$
$0 < a < 1$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$	Tiệm cận đứng : $x = 0 (x \rightarrow 0^+)$

– Bảng biến thiên :

Với $a > 1$:

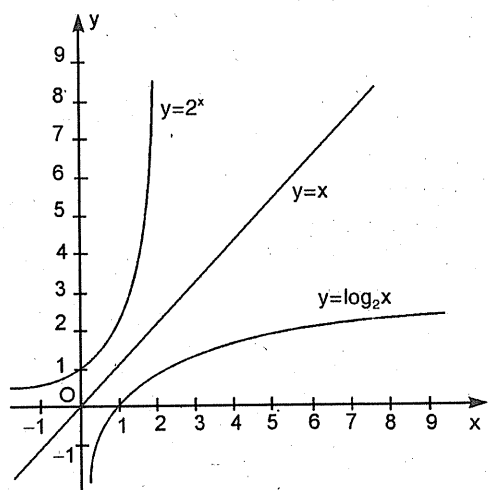
x	0	1	$+\infty$
y'		+	
y	$-\infty$	0	$+\infty$

Với $0 < a < 1$:

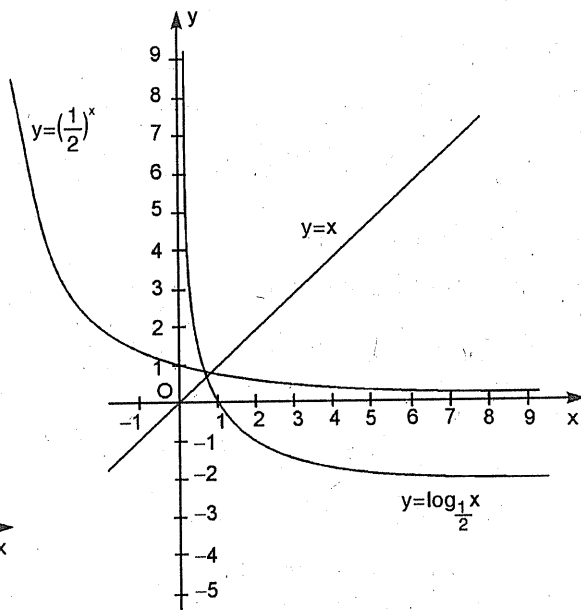
x	0	1	$+\infty$
y'		-	
y	$+\infty$	0	$-\infty$

– Đồ thị hàm số luôn cắt trục hoành tại điểm $M(1 ; 0)$ (vì $\log_a 1 = 0$) và nằm ở bên phải trục tung (vì $\log_a x$ chỉ xác định khi $x > 0$).

$$a > 1$$

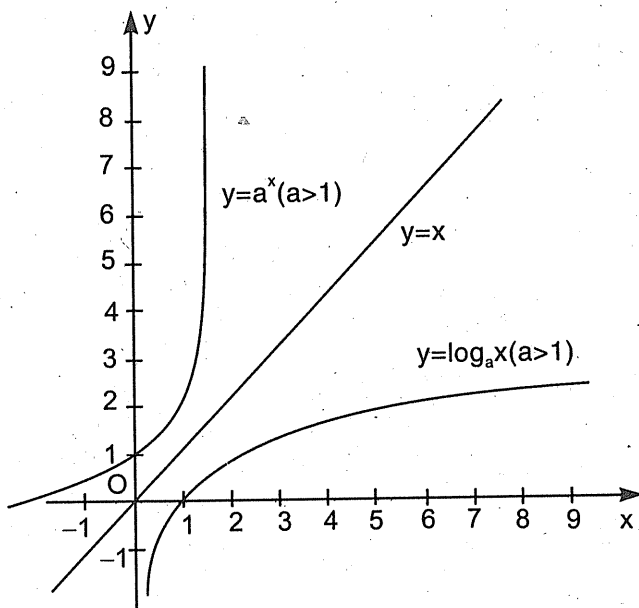


$$0 < a < 1$$



Nhận xét

Đồ thị (G) của hàm số $y = a^x$ và đồ thị (G') của hàm số $y = \log_a x$ đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất : $y = x$.



B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN



Vấn đề 1

CÁC PHÉP TOÁN VỀ LÔGARIT

I. PHƯƠNG PHÁP

Sử dụng các công thức về lôgarit :

Cho $a > 0$, $a \neq 1$ và $b > 0$. Ta có : $\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$

Chú ý

$$* \log_a 1 = 0, \log_a a = 1$$

$$* \log_a a^b = b, \forall b \in \mathbb{R}$$

$$* a^{\log_a b} = b, \forall b \in \mathbb{R}, b > 0.$$

Các quy tắc tính lôgarit

• Cho $0 < a \neq 1$ và $b, c > 0$

$$1. \log_a (b.c) = \log_a b + \log_a c$$

$$2. \log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$$

$$3. \log_a b^\alpha = \alpha \log_a b \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

• Cho $0 < a \neq 1$ và $b > 0$ và n là số nguyên dương

$$1. \log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$$

$$2. \log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b.$$

Đổi cơ số của lôgarit

Với $0 < a, b$ và $a, b \neq 1, c > 0$ và $\alpha \neq 0$

$$\bullet \log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b} \quad \text{hay} \quad \log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$$

- $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ hay $\log_a b \cdot \log_b a = 1$

- $\log_{a^\alpha} c = \frac{1}{\alpha} \log_a c$.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính các giá trị sau :

$$A = \frac{\log_7 16}{\log_7 15 - \log_7 30} ;$$

$$B = \log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2} \log_5 12 + \log_5 50.$$

Giải

$$A = \frac{\log_7 16}{\log_7 15 - \log_7 30} = \frac{\log_7 16}{\log_7 \frac{15}{30}} = \frac{\log_7 16}{\log_7 \frac{1}{2}} = \frac{\log_7 2^4}{-\log_7 2} = \frac{4 \log_7 2}{-\log_7 2} = -4$$

$$\begin{aligned} B &= \log_5 \sqrt{3} - \frac{1}{2} \log_5 12 + \log_5 50 = \frac{1}{2} \log_5 3 - \frac{1}{2} \log_5 12 + \log_5 50 \\ &= \frac{1}{2} \log_5 \frac{3}{12} + \log_5 50 \\ &= \frac{1}{2} \log_5 2^{-2} + \log_5 50 = -\log_5 2 + \log_5 50 = \log_5 \frac{50}{2} = \log_5 25 = 2. \end{aligned}$$

Ví dụ 2

a) Rút gọn biểu thức sau : $A = \log_{\frac{1}{4}} (\log_3 4 \cdot \log_2 3)$;

b) Cho $\log_2 14 = a$, tính $\log_{49} 32$ theo a.

Giải

a) $A = \log_{\frac{1}{4}} (\log_3 4 \cdot \log_2 3) = \log_{\frac{1}{4}} (\log_2 4) = \log_{2^{-2}} (\log_2 2^2) = -\frac{1}{2} \log_2 2 = -\frac{1}{2}.$

b) $\log_2 14 = a \Leftrightarrow \log_2 2 + \log_2 7 = a \Leftrightarrow \log_2 7 = a - 1.$

$$\log_{49} 32 = \log_{7^2} 2^5 = \frac{5}{2} \log_7 2 = \frac{5}{2(a-1)}.$$

Ví dụ 3. Biểu diễn theo $a = \ln 2$ các số sau :

$$\ln 16 ; \ln 0,125 ; \frac{1}{8} \ln \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \ln \frac{1}{8}.$$

Giải

$$\ln 16 = \ln 2^4 = 4 \ln 2 = 4a;$$

$$\ln 0,125 = \ln \frac{1}{8} = -3 \ln 2 = -3a;$$

$$\frac{1}{8} \ln \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \ln \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \ln 2^{-2} - \frac{1}{4} \ln 2^{-3} = -\frac{1}{4} \ln 2 + \frac{3}{4} \ln 2 = \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{2} a.$$

Ví dụ 4. Cho a, b, c là ba số dương và $c \neq 1$. Chứng minh rằng: $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$.

Giải

$$\text{Ta có } a^{\log_c b} = a^{\log_c a \cdot \log_a b} = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_c a} = b^{\log_c a}.$$

Ví dụ 5. Tìm x biết $\log_3 x + \log_9 x = \frac{3}{2}$.

Giải

$$\log_3 x + \log_9 x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \log_3 x + \frac{1}{2} \log_3 x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \log_3 x = 1 \Leftrightarrow x = 3.$$

III. BÀI TẬP

1. Hãy tìm lôgarit của mỗi số sau theo cơ số 3 :

$$3; \quad 81; \quad 1; \quad \frac{1}{9}; \quad \sqrt[3]{3}; \quad \frac{1}{\sqrt[3]{3}}.$$

2. Tính : $\log_{\frac{1}{5}} 125$; $\log_{0,5} \frac{1}{2}$; $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{64}$; $\log_{\frac{1}{6}} 36$.

3. Tính : $3^{\log_3 18}$; $3^{5 \log_3 2}$; $\left(\frac{1}{8}\right)^{\log_2 5}$; $\left(\frac{1}{32}\right)^{\log_{0,5} 2}$.

4. Tìm x , biết :

a) $\log_5 x = 4$;

b) $\log_2 (5-x) = 3$;

c) $\log_3 (x+2) = 3$;

d) $\log_{\frac{1}{6}} (0,5+x) = -1$.

5. Hãy tính :

a) $\log_8 12 - \log_8 15 + \log_8 20$;

b) $\frac{1}{2} \log_7 36 - \log_7 14 - 3 \log_7 \sqrt[3]{21}$;

c) $\frac{\log_5 36 - \log_5 12}{\log_5 9}$;

d) $36^{\log_6 5} + 10^{1 - \log_2} - 8^{\log_2 3}$.

6. Biết $\log_a b = 3$, $\log_a c = -2$. Hãy tính $\log_a x$:

a) $x = a^3 b^2 \sqrt{c}$;

b) $x = \frac{a^4 \sqrt[3]{b}}{c^3}$.

7. Trong mỗi trường hợp sau, hãy tìm x :

a) $\log_3 x = 4 \log_3 a + 7 \log_3 b$;

b) $\log_5 x = 2 \log_5 a - 3 \log_5 b$.

8. Hãy biểu diễn các lôgarit sau qua α và β :

a) $\log_{\sqrt{3}} 50$, nếu $\log_3 15 = \alpha$, $\log_3 10 = \beta$;

b) $\log_4 1250$, nếu $\log_2 5 = \alpha$.

9. Đơn giản các biểu thức :

a) $\log \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \log 4 + 4 \log \sqrt{2}$;

b) $\log \frac{4}{9} + \frac{1}{2} \log 36 + \frac{3}{2} \log \frac{9}{2}$;

c) $\log 27 - 2 \log \frac{27}{256} + \log \sqrt{108}$;

d) $\log \frac{1}{8} - \log 0,375 + 2 \log \sqrt{0,5625}$.

10. Tìm x biết :

a) $\log_x 27 = 3$;

b) $\log_x \frac{1}{7} = -1$;

c) $\log_x \sqrt{5} = -4$.

11. Biểu diễn các số sau đây theo $a = \ln 2$, $b = \ln 5$:

a) $\ln 500$;

b) $\ln \frac{16}{25}$;

c) $\ln 6,25$;

d) $\ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \dots + \ln \frac{98}{99} + \ln \frac{99}{100}$.

12. Chứng minh :

$$\frac{7}{16} \ln(3+2\sqrt{2}) - 4 \ln(\sqrt{2}+1) - \frac{25}{8} \ln(\sqrt{2}-1) = 0.$$

13. Chứng minh rằng nếu $\begin{cases} a^2 + b^2 = 7ab \\ a > 0, b > 0 \end{cases}$ thì $\log_7 \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\log_7 a + \log_7 b)$.

14. Hãy tính :

a) $\ln \sqrt{e} + \ln \frac{1}{e}$;

b) $5 \ln e^{-1} + 4 \ln(e^2 \sqrt{e})$.

15. Đơn giản các biểu thức :

a) $A = (\ln a + \log_a e)^2 + \ln^2 a - \log_a^2 e$;

b) $B = 2 \ln a + 3 \log_a e - \frac{3}{\ln a} - \frac{2}{\log_a e}$.

16. Biểu diễn theo $a = \ln 2$, $b = \ln 3$ các số sau :

$$\ln 36 ; \ln \frac{1}{12} ; \ln 21 + 2 \ln 14 - 3 \ln 0,875.$$



Vấn đề 2

TÌM GIỚI HẠN

I. PHƯƠNG PHÁP

Sử dụng các công thức giới hạn :

- $\forall x_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0$ (với $0 < a \neq 1$)
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

II. VÍ DỤ

Ví dụ. Tìm các giới hạn sau :

a) $\lim_{x \rightarrow 8} \log_2 x$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \log \left| \frac{\sin x}{x} \right|$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{x}$.

Giải

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 8} \log_2 x = \log_2 8 = 3$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \log \left| \frac{\sin x}{x} \right| = \log 1 = 0$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \right] = 1.$$

III. BÀI TẬP

17. Tìm các giới hạn sau :

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x)}{x} ; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{x} ; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3x + 1) - \ln(2x + 1)}{x}.$$



Vấn đề 3

TÌM ĐẠO HÀM

I. PHƯƠNG PHÁP

Sử dụng các công thức tính đạo hàm :

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$(e^x)' = e^x.$$

$$(a^{u(x)})' = u'(x) \cdot a^{u(x)} \cdot \ln a$$

$$(e^{u(x)})' = u'(x) \cdot e^{u(x)}$$

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm đạo hàm của hàm số sau: $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

Giải

$$y' = \frac{(x + \sqrt{x^2 + 1})'}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Ví dụ 2. Chứng minh rằng : $[\ln(-x)]' = \frac{1}{x} \quad (x < 0).$

$$[\ln(-x)]' = \frac{(-x)'}{(-x)} = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

III. BÀI TẬP

18. Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = (3x - 2) \ln^2 x$;

b) $y = \sqrt{x^2 + 1} \cdot \ln x^2$;

c) $y = x \cdot \ln \frac{1}{1+x}$;

d) $y = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}$.

19. Tìm đạo hàm cấp n của các hàm số sau :

a) $y = \ln x^x$;

b) $y = x \cdot \ln x$.



Vấn đề 4

**TÌM TẬP XÁC ĐỊNH. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC.
TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT.
KHẢO SÁT TÍNH CHẤT BIẾN THIÊN**

I. PHƯƠNG PHÁP

Hàm số $y = \log_a x$ ($0 < a \neq 1$) xác định với mọi $x > 0$.

Sử dụng tính chất biến thiên của hàm số lôgarit

* Tăng (đồng biến) trên $\mathbb{R}_+^*$ nếu $a > 1$

* Giảm (nghịch biến) trên $\mathbb{R}_+^*$ nếu $0 < a < 1$.

II. VÍ DỤ

Ví dụ. Tìm tập xác định của các hàm số :

a) $y = \log_2 \frac{3}{10-x}$;

b) $y = \log_5 x^2$;

c) $y = \log_3 \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x-2}}$;

d) $y = \frac{1}{\log_2 x - 1}$.

Giải

a) Hàm số xác định $\Leftrightarrow \frac{3}{10-x} > 0 \Leftrightarrow x < 10$. Vậy TXĐ : $D = (-\infty; 10)$.

b) Hàm số xác định $\Leftrightarrow x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$. Vậy TXĐ : $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

c) Hàm số xác định $\Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x-2}} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-x-2} > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x+1)(x-2)} > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$. Vậy TXĐ: $D = (2; +\infty)$.

d) Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \neq 2$

Vậy TXĐ : $D = (0; +\infty) \setminus \{2\}$.

III. BÀI TẬP

20. Tìm tập xác định của các hàm số sau :

a) $y = \log_3(x^2 + 2x)$;

b) $y = \log_{0,7} \frac{x^2 - 9}{x + 5}$;

c) $y = \frac{2}{\log_4 x - 3}$;

d) $y = \log_3(2-x)^2$.

21. Chứng minh rằng hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x - \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ đồng biến trên $\mathbb{R}^+$.

22. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau :

a) $y = \ln x^2 \quad \left(-e \leq x \leq -\frac{1}{e}\right)$;

b) $y = |\ln x|$;

c) $y = \log_2 x - \frac{2}{x} \quad \left(x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

d) $y = \frac{\ln(2x-3)}{2x-3}$.

23. Xét sự biến thiên của các hàm số sau :

a) $y = \sqrt{x^2 + 1} \cdot \ln x^2$;

b) $y = x \cdot \ln\left(\frac{1}{x+1}\right)$.

24. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}$ đồng biến trong các khoảng $(-1; 0), (0; 1)$.

25. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$y = \frac{\ln^2 x}{x} \text{ trên đoạn } [1; e^3].$$

(Đề thi Tuyển sinh đại học khối B – 2004)

♦ BÀI TẬP ÔN CUỐI CHƯƠNG II

1. Rút gọn :

a) $A = 8^{\log_2 3 - \log_4 5} - 3^{2\log_3 2 + \log_3 5}$;

b) $B = \log_a \left(\frac{a^2 \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[4]{a}} \right)$;

c) $C = \log_5 \log_5 \underbrace{\sqrt[5]{\sqrt[5]{\sqrt[5]{\dots \sqrt[5]{5}}}}}_{n \text{ dấu căn}}$.

2. Gọi c là cạnh huyền, a và b là hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông.
Chứng minh rằng : $\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{b+c} a \cdot \log_{c-b} a$.

3. Tìm tập xác định của hàm số : $y = 2^{\sqrt{|x-3| - |8-x|}} + \sqrt{\frac{-\log_{0,3}(x-1)}{\sqrt{x^2 - 2x - 8}}}$.

§1. PHƯƠNG TRÌNH MŨ

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

I. ĐỊNH NGHĨA

Phương trình mũ là phương trình có chứa ẩn ở số mũ của lũy thừa.

II. PHƯƠNG TRÌNH MŨ CƠ BẢN

$$\boxed{a^x = m} \quad \text{với } 0 < a \neq 1.$$

* Nếu $m \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm.

* Nếu $m > 0$ thì : $a^x = m \Leftrightarrow x = \log_a m$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Vấn đề 1

ĐUA VỀ CÙNG MỘT CƠ SỐ

I. PHƯƠNG PHÁP

Với $0 < a \neq 1$ thì : $a^\alpha = a^\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau :

a) $3^x = 9$;

b) $10^x = 1$;

c) $2^{2(x-1)} + 4^{x+1} = 5$.

Giải

a) $3^x = 9 \Leftrightarrow 3^x = 3^2 \Leftrightarrow x = 2$.

$$b) 10^x = 1 \Leftrightarrow 10^x = 10^0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$c) 2^{2(x-1)} + 4^{x+1} = 5 \Leftrightarrow \frac{4^x}{4} + 4 \cdot 4^x = 5 \Leftrightarrow \frac{17}{4} 4^x = 5 \Leftrightarrow 4^x = \frac{20}{17} \Leftrightarrow x = \log_4 \frac{20}{17}.$$

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau :

$$a) 9^{x+1} = 27^{2x+1} ; \quad b) 5^{\frac{1}{2^x}} = 625 ; \quad c) 4^{-2x} = 64^{(1-x)}.$$

Giải

$$a) 9^{x+1} = 27^{2x+1} \Leftrightarrow (3^2)^{x+1} = (3^3)^{2x+1} \Leftrightarrow 3^{2x+2} = 3^{6x+3} \Leftrightarrow 2x+2 = 6x+3$$

$$\Leftrightarrow 4x+1=0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}.$$

$$b) 5^{\frac{1}{2^x}} = 625 \Leftrightarrow 5^{\frac{1}{2^x}} = 5^4 \Leftrightarrow \frac{1}{2^x} = 4 \Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^x = 2^{-2} \Leftrightarrow x = -2.$$

$$c) 4^{-2x} = 64^{(1-x)} \Leftrightarrow 2^{-4x} = 2^{6(1-x)} \Leftrightarrow -4x = 6 - 6x \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3.$$

Ví dụ 3. Giải phương trình sau :

$$3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2} = 2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2}.$$

Giải

$$3^x - 3^{x-1} + 3^{x-2} = 2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} \Leftrightarrow 3^x - \frac{3^x}{3} + \frac{3^x}{9} = 2^x + \frac{2^x}{2} + \frac{2^x}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{9} 3^x = \frac{7}{4} 2^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Leftrightarrow x = 2.$$

Ví dụ 4. Giải phương trình sau :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-x-5} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2x+3}.$$

Giải

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-x-5} = \left(\frac{2}{3}\right)^{2x+3} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-x-5} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2x-3}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 5 = -2x - 3 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2. \end{cases}$$

Ví dụ 5. Giải phương trình sau : $5^{x-1} = 10^x \cdot 2^{-x} \cdot 5^{x+1}$.

Giải

$$5^{x-1} = 10^x \cdot 2^{-x} \cdot 5^{x+1} \Leftrightarrow 5^{x-1} = 5^x 2^x \cdot 2^{-x} \cdot 5^{x+1} \Leftrightarrow 5^{x-1} = 5^{2x+1} \\ \Leftrightarrow x-1 = 2x+1 \Leftrightarrow x = -2.$$

Ví dụ 6. Giải phương trình sau : $2^{\frac{3(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}} = 4$.

Giải

$$\text{Ta có : } 2^{\frac{3(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}} = 2^2 \quad (x > 0, x \neq 1) \\ \Leftrightarrow \frac{3(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = 2 \Leftrightarrow 3(\sqrt{x}+1) = 2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) \\ \Leftrightarrow 2x - 5\sqrt{x} - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 3 \\ \sqrt{x} = -\frac{1}{2} \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow x = 9.$$

III. BÀI TẬP

1. Giải phương trình sau : $5^{x+1} - 5^x = 2 \cdot 2^x + 8 \cdot 2^x$.

2. Giải phương trình sau : $2^{x+1} + 9 \cdot 2^x - 2^{x+2} = 56$.

3. Giải phương trình sau : $2^{\frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}(5\sqrt{x}+1)}} - 2^{2\sqrt{x}-1} = 0$.

4. Giải phương trình sau : $5^{2|2x-3|} - 5^{6x-8} = 0$.

5. Giải các phương trình sau :

a) $(2 + \sqrt{3})^{2x} = 2 - \sqrt{3}$;

b) $2^{x^2-3x+2} = 4$;

c) $2 \cdot 3^{x+1} - 6 \cdot 3^{x-1} - 3^x = 9$.



PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN SỐ PHỤ

I. PHƯƠNG PHÁP

Nếu đặt $t = a^x$, điều kiện $t > 0$ thì $a^{2x} = (a^2)^x = (a^x)^2 = t^2$; $a^{3x} = t^3$; $a^{-x} = \frac{1}{t}$...

Lưu ý

$$* (\sqrt{2}-1)^x (\sqrt{2}+1)^x = 1 \quad * (2-\sqrt{3})^x (2+\sqrt{3})^x = 1$$

$$* (4-\sqrt{15})^x (4+\sqrt{15})^x = 1 \quad * (\sqrt{7-\sqrt{48}})^x (\sqrt{7+\sqrt{48}})^x = 1.$$

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải phương trình sau : $e^{4x} + 2 = 3.e^{2x}$.

Giải

$$e^{4x} + 2 = 3.e^{2x} \quad (1).$$

Đặt $e^{2x} = t$ với $t > 0$

$$(1) \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{\ln 2}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy : } \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{\ln 2}{2} \end{cases}.$$

Ví dụ 2. Giải phương trình sau : $(2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x = 4$.

Giải

$$(2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x = 4 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } (2+\sqrt{3})^x = t; \quad t > 0 \Rightarrow (2-\sqrt{3})^x = \frac{1}{t}$$

Phương trình (1) trở thành : $t + \frac{1}{t} - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 2 + \sqrt{3} \\ t_2 = 2 - \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 1.$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = -1$.

Ví dụ 3. Giải phương trình sau : $3.8^x + 4.12^x = 18^x + 2.27^x$.

Giải

$$3.8^x + 4.12^x = 18^x + 2.27^x \quad (1)$$

Chia hai vế cho 27^x ta có :

$$(1) \Leftrightarrow 3.\left(\frac{2}{3}\right)^{3x} + 4.\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{3}\right)^x + 2 \quad (2)$$

Đặt $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x, t > 0$.

Phương trình (2) trở thành :

$$3t^3 + 4t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 1.$$

Ví dụ 4. Giải phương trình sau : $\frac{49^x}{10^{2x}} = 6.(0,7)^x + 7$.

Giải

$$\begin{aligned} \frac{49^x}{10^{2x}} = 6.(0,7)^x + 7 &\Leftrightarrow \frac{7^{2x}}{10^{2x}} - 6.(0,7)^x - 7 = 0 \\ &\Leftrightarrow (0,7)^{2x} - 6.(0,7)^x - 7 = 0. \end{aligned}$$

Đặt $t = (0,7)^x, t > 0$.

Phương trình trên trở thành :

$$t^2 - 6t - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 7 \Leftrightarrow (0,7)^x = 7 \end{cases} \Leftrightarrow x = \log_{0,7} 7.$$

Vậy : $x = \log_{0,7} 7$.

Ví dụ 5. Giải phương trình sau : $5^3 - 5^{x-1} - 5^{3-x} = 99$.

Giải

Ta có :

$$5^3 - 5^{x-1} - 5^{3-x} = 99 \Leftrightarrow 5^{x-1} + 5^{3-x} - 26 = 0 \Leftrightarrow \frac{5^x}{5} + \frac{125}{5^x} = 26.$$

Đặt $t = 5^x$, điều kiện $t > 0$.

Phương trình trở thành : $t^2 - 130t + 625 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 125 \\ t_2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Nghiệm của phương trình $x = 1$ và $x = 3$.

Ví dụ 6. Giải phương trình sau : $5.6^{\frac{x}{2}} - 4.3^x + 9.2^x = 0$.

Giải

$$5.6^{\frac{x}{2}} - 4.3^x + 9.2^x = 0 \quad (1)$$

Chia hai vế phương trình (1) cho $6^{\frac{x}{2}}$ ta được :

$$9.\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x}{2}} - 4.\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{x}{2}} + 5 = 0 \quad (2)$$

Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{x}{2}}$, $t > 0$.

Phương trình (1) trở thành :

$$4t^2 - 5t - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 & (\text{loại}) \\ t = \frac{9}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{x}{2}} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x = 4. \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là : $x = 4$.

Ví dụ 7. Giải phương trình sau : $\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x + \left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x = \sqrt{7+\sqrt{35721}}$.

Giải

$$\left(\sqrt{7-\sqrt{48}}\right)^x + \left(\sqrt{7+\sqrt{48}}\right)^x = \sqrt{7+\sqrt{35721}} \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = (7 + \sqrt{48})^{\frac{x}{2}}, t > 0 \Rightarrow (7 - \sqrt{48})^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{t}.$$

Phương trình (1) trở thành :

$$t + \frac{1}{t} = 14 \Leftrightarrow t^2 - 14t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 7 + \sqrt{48} \\ t_2 = 7 - \sqrt{48} \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 2$$

Vậy nghiệm của phương trình sẽ là : $\begin{cases} x = 2 \\ x = -2. \end{cases}$

Ví dụ 8. Giải các phương trình sau :

a) $9^x - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$;

b) $3^{2x+5} = 3^{x+2} + 2$.

Giải

a) $9^x - 4 \cdot 3^x - 45 = 0$ (1)

Đặt $t = 3^x$, điều kiện $t > 0$.

(1) trở thành $t^2 - 4t - 45 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 9 \text{ (nhận)} \\ t = -5 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow 3^x = 9 \Leftrightarrow x = 2.$

b) $3^{2x+5} = 3^{x+2} + 2$ (1)

Đặt $t = 3^{x+2}$, điều kiện $t > 0$

(1) trở thành : $3t^2 - t - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (nhận)} \\ t = -\frac{2}{3} \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow 3^{x+2} = 1 \Leftrightarrow 3^{x+2} = 3^0 \Leftrightarrow x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$

III. BÀI TẬP

6. Giải các phương trình sau :

a) $3^{x+1} + 18 \cdot 3^{-x} = 29$;

b) $4 \cdot 9^x + 12^x = 3 \cdot 16^x$;

c) $5^{2x} + 15^x - 2 \cdot 9^x = 0$.

7. Giải các phương trình sau :

a) $2^{3x+1} - 125^x - 50^x = 0$;

b) $8^x - 2 \cdot 4^x - 2^x + 2 = 0$.

8. Giải phương trình sau : $7^{\frac{2}{x}} - 35^{\frac{1}{x}} - 25^{\frac{1}{x}} = 0$.

9. Giải phương trình sau : $2^{x(1-x)+2} - 2^{x(x-1)} + 3 = 0$.

10. Giải phương trình sau : $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5.2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} - 6 = 0$.

11. Giải các phương trình sau :

a) $3^{2\sin^2 x} + 3^{2\cos^2 x} = 10$;

b) $4^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} - \sqrt{2}(\sqrt{2} + 1) = 0$;

c) $2^{\sin^2 x} + 4.2^{\cos^2 x} = 6$;

d) $4^{3+2\cos 2x} - 7.4^{1+\cos 2x} = 4^{\frac{1}{2}}$.

12. Giải các phương trình sau :

a) $27^x + 12^x = 2.8^x$;

b) $4^{\frac{1}{x}} + 6^{\frac{1}{x}} = 9^{\frac{1}{x}}$;

c) $4^{\ln x + 1} - 6^{\ln x} - 2.3^{\ln x^2 + 2} = 0$.

13. Tìm m để phương trình sau đây có nghiệm : $9^{x+1} - 3^{x+2} + m = 0$.

14. Cho phương trình : $4^x = m(2^{x+1} - 2)$

a) Giải phương trình khi $m = 2$;

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt có tổng bằng 3.

15. Với giá trị nào của k thì phương trình : $9^x - (k-1).3^x + 2k = 0$ có một nghiệm duy nhất.

16. Giải phương trình : $2^{x^2-x} - 2^{2+x-x^2} = 3$.

(Đề thi Tuyển sinh đại học khối D – 2003).

17. Giải phương trình : $3.8^x + 4.12^x - 18^x - 2.27^x = 0$.

(Đề thi Tuyển sinh đại học khối A – 2006).

18. Giải phương trình :

$$(\sqrt{2} - 1)^x + (\sqrt{2} + 1)^x - 2\sqrt{2} = 0$$

(Đề thi Tuyển sinh đại học khối B – 2007).



PHƯƠNG PHÁP LÔGARIT HOÁ

I. PHƯƠNG PHÁP

Với phương trình không cùng cơ số dạng : $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ (a, b dương, khác 1 và nguyên tố cùng nhau), lấy lôgarit cơ số a (hoặc b) cho hai vế, ta có :

$$a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a[a^{f(x)}] = \log_a[b^{g(x)}] \Leftrightarrow f(x) = g(x) \cdot \log_a b.$$

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải phương trình sau : $2^x = 25 \cdot 5^x$.

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } 2^x &= 25 \cdot 5^x \Leftrightarrow 2^x = 5^2 \cdot 5^x = 5^{x+2} \\ &\Leftrightarrow (x+2) \log_2 5 = x \\ &\Leftrightarrow x(\log_2 5 - 1) = -2 \log_2 5 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{\log_2 5^2}{1 - \log_2 5}. \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Giải phương trình sau : $4^x \cdot 5^{-x^2} - 1 = 0$.

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } 4^x \cdot 5^{-x^2} - 1 &= 0 \Leftrightarrow 4^x \cdot 5^{-x^2} = 1 \Leftrightarrow \log_4(4^x \cdot 5^{-x^2}) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - x^2 \log_4 5 = 0 \Leftrightarrow x(1 - x \log_4 5) = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{\log_4 5} = \log_5 4. \end{cases}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm : $x = 0$; $x = \log_5 4$.

Ví dụ 3. Giải phương trình sau : $x - 2^{\log_5(x+3)} = 0$.

Giải

Ta có: $x - 2^{\log_5(x+3)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5(x+3) = \log_2 x \\ x > 0 \end{cases}$

$$\log_5(x+3) = \log_2 x \quad (1)$$

Đặt $t = \log_2 x$. $(1) \Leftrightarrow 5^t - 3 = 2^t$.

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{1}{5}\right)^t + \left(\frac{2}{5}\right)^t - 1 = 0.$$

Xét hàm số: $3\left(\frac{1}{5}\right)^t + \left(\frac{2}{5}\right)^t - 1 = 0, t \in \mathbb{R}$.

Ta có: $f(1) = 0$

$$f'(t) = -3\left(\frac{1}{5}\right)^t \ln 5 + \left(\frac{2}{5}\right)^t \ln 2$$

$$\Rightarrow f'(t) < 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \text{Phương trình } f(t) = 0 \text{ có nghiệm duy nhất } t = 1.$$

$$\Rightarrow \text{Phương trình (1) có nghiệm duy nhất } x = 2.$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = 2$.

Ví dụ 4. Giải phương trình sau: $5^x \cdot 8^{\frac{x-1}{x}} - 500 = 0$.

Giải

Ta có: $5^x \cdot 8^{\frac{x-1}{x}} - 500 = 0 \Leftrightarrow 5^x \cdot 2^{\frac{3(x-1)}{x}} = 5^3 \cdot 2^2 \Leftrightarrow 2^{\left(\frac{3(x-1)}{x} - 2\right)} = 5^{(3-x)}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3(x-1)}{x} - 2\right) = (3-x) \log_2 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 \cdot \log_2 5 + (1 - 3 \log_2 5)x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_5 \frac{1}{2} \\ x = 3 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $\begin{cases} x = \log_5 \frac{1}{2} \\ x = 3. \end{cases}$

III. BÀI TẬP

19. Giải các phương trình sau :

a) $2^{x-3} = 5^{x^2-5x+6}$; b) $3^x \cdot 2^{x^2} = 1$; c) $3^{x-1} \cdot 2^{x^2} = 8 \cdot 4^{x-2}$.

20. Giải các phương trình sau :

a) $2^{x+1} \cdot 5^x = 200$; b) $0,125 \cdot 4^{2x-3} = (4\sqrt{2})^x$;
c) $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$; d) $7^{\lg x} - 5^{\lg x+1} = 3 \cdot 5^{\lg x-1} - 13 \cdot 7^{\lg x-1}$.

21. Giải các phương trình sau :

a) $3^{4^x} = 4^{3^x}$; b) $3^{2-\log_3 x} = 81$;
c) $3^x \cdot 8^{\frac{x}{x+1}} = 36$; d) $x^6 \cdot 5^{-\log_x 5} = 5^{-5}$.



Vấn đề 4

PHƯƠNG PHÁP DÙNG TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ ĐỂ CHỨNG MINH TÍNH DUY NHẤT CỦA NGHIỆM

I. PHƯƠNG PHÁP

Đưa phương trình đã cho về hai vế, trong đó một vế là một hàm số đồng biến (hoặc không đổi) và một vế là một hàm số nghịch biến (hoặc không đổi) : $f(x) = k$ hoặc $f(x) = g(x)$.

* *Bước 1* : Nhẩm và chứng minh x_0 là nghiệm.

* *Bước 2* : Chứng minh x_0 là nghiệm duy nhất (bằng cách chứng minh $x \neq x_0$ không là nghiệm).

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải phương trình : $2^x + 3x - 5 = 0$.

Giải

Ta có : $2^x + 3x - 5 = 0 \Leftrightarrow 2^x = -3x + 5$ (1)

Nhận xét : với $x = 1$ thoả mãn phương trình.

Ta chứng minh $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Ta có :

+ hàm số $y = 2^x$ có $y' = 2^x \ln 2 > 0$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

+ hàm số $y = 5 - 3x$ có $y' = -3 < 0$ nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$

• Với $x > 1$, từ (1) ta có :

$$\begin{cases} VT > 2 \\ VP < 2 \end{cases} \Rightarrow x > 1 \text{ không là nghiệm của phương trình.}$$

(VT : vế trái, VP : vế phải của phương trình)

• Với $x < 1$, từ (1) ta có :

$$\begin{cases} VT < 2 \\ VP > 2 \end{cases} \Rightarrow x < 1 \text{ không là nghiệm của phương trình.}$$

Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất $x = 1$.

Ví dụ 2. Giải phương trình : $3^x + 4^x = 5^x$.

Giải

Chia hai vế của phương trình cho 5^x ta có : $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$ (1)

Nhận xét : với $x = 2$ thỏa mãn phương trình.

Ta chứng minh $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Ta có :

+ hàm số: $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$ có $y' = \left(\frac{3}{5}\right)^x \ln \frac{3}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^x \ln \frac{4}{5} < 0$

nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

+ hàm số $y = 1$ có đồ thị là đường thẳng song song với trục Ox.

• Với $x > 2$, từ (1) ta có :

$$\begin{cases} VT < 1 \\ VP = 1 \end{cases} \Rightarrow x > 2 \text{ không là nghiệm của phương trình.}$$

• Với $x < 2$, từ (1) ta có :

$$\begin{cases} VT > 1 \\ VP = 1 \end{cases} \Rightarrow x < 2 \text{ không là nghiệm của phương trình.}$$

Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất $x = 2$.

Ví dụ 3. Giải phương trình : $3^{2x} + 2x(3^x + 1) - 4 \cdot 3^x - 5 = 0$.

Giải

$$3^{2x} + 2x(3^x + 1) - 4 \cdot 3^x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9^x - 1 + 2x(3^x + 1) - 4(3^x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3^x + 1)(3^x + 2x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3^x + 2x - 5 = 0 \quad (1)$$

Nhận xét. với $x = 1$ thỏa mãn phương trình.

Ta chứng minh $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Ta có :

$$\text{Đặt } f(x) = 3^x + 2x - 5$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3^x \ln 3 + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

nên $f(x) = 3^x + 2x - 5$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

• Với $x > 1$, từ (1) ta có :

$$\begin{cases} VT > 0 \\ VP = 0 \end{cases} \Rightarrow x > 1 \text{ không là nghiệm của phương trình.}$$

• Với $x < 1$, từ (1) ta có :

$$\begin{cases} VT < 0 \\ VP = 0 \end{cases} \Rightarrow x < 1 \text{ không là nghiệm của phương trình.}$$

Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất $x = 1$.

Lưu ý : Ngoài ra có thể giải bài toán bằng cách đặt $3^x = t, t > 0$.

III. BÀI TẬP

22. Giải phương trình : $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^x + (\sqrt{3} + \sqrt{2})^x = (\sqrt{5})^x$.

23. Giải phương trình : $13^x - 11^x - 4^x = (4\sqrt{2})^x$.

24. Giải các phương trình sau :

a) $2^x + 3^x + 5^x = 10$;

b) $3 \cdot 25^{x-2} + (3x-10)5^{x-2} + 3 - x = 0$.

25. Giải các phương trình sau :

a) $2^x = 3 - x$;

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x + 4$;

c) $\left(\sin \frac{\pi}{5}\right)^x + \left(\cos \frac{\pi}{5}\right)^x = 1$.



Vấn đề 5

PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG MẪU MỤC

I. PHƯƠNG PHÁP

Có một số phương trình không dùng thuần túy các phương pháp nêu trên, đôi khi ta có thể

* biến đổi phương trình đã cho về phương trình tích

* dùng ẩn số phụ $t = a^{f(x)}$ để đưa phương trình về dạng phương trình bậc hai theo ẩn số t , trong đó x đóng vai trò là tham số. Giải phương trình bậc hai này để tính t theo x . Từ đó suy ra x

* dùng các bất đẳng thức để đưa phương trình về dạng đối lập : $A = B$,
trong đó : $\begin{cases} A \geq M \\ B \leq M. \end{cases}$

Khi đó phương trình đã cho tương đương với : $\begin{cases} A = M \\ B = M. \end{cases}$

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải phương trình : $x^2 \cdot 2^{x-1} - 2^{x+1} - x^2 \cdot 2^{|x-3|+4} + 2^{|x-3|+6} = 0$ (1)

Giải

Biến đổi bằng cách đặt thừa số chung, ta có:

$$2^{x-1}(x^2 - 4) - 2^{|x-3|+4}(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4)(2^{x-1} - 2^{|x-3|+4}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2 \\ 2^{x-1} = 2^{|x-3|+4} \end{cases} \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow x - 1 = |x - 3| + 4 \Leftrightarrow |x - 3| = x - 5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-5 \geq 0 \\ x+3 = x-5 \\ x+3 = -(x-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \pm 2$.

Ví dụ 2. Giải phương trình : $3.2^{2x} + 6 - 2x = 3 - x - (3x - 10).2^x$.

Giải

Từ phương trình đề ra ta có :

$$3.2^{2x} + 6 - 2x = 3 - x - (3x - 10).2^x \Leftrightarrow 3.2^{2x} + (3x - 10).2^x + 3 - x = 0 \quad (1)$$

Đặt $2^x = t$ với điều kiện $t > 0$.

$$\text{Khi đó : } (1) \Leftrightarrow 3.t^2 + (3x - 10).t + 3 - x = 0$$

$$\text{Giải phương trình theo } t \text{ ta có : } \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ t = 3 - x \end{cases}$$

$$\text{Với } t = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \log_2 \frac{1}{3}$$

$$\text{Với } t = 3 - x \Leftrightarrow 2^x = 3 - x.$$

Áp dụng tính chất đồng biến, nghịch biến suy ra $x = 1$.

$$\text{Vậy phương trình có nghiệm } \begin{cases} x = \log_2 \frac{1}{3} \\ x = 1. \end{cases}$$

III. BÀI TẬP

26. Giải phương trình : $3^{2x} + 2x(3^x + 1) - 4.3^x = 5$.

27. Giải phương trình : $2^{|x|} = \sin x^2$.

28. Giải phương trình : $x^2.(2^{x+1} - 2^{|x-3|+4}) + 2^{|x-3|+2} - 2^{x-1} = 0$.

§2. PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

I. ĐỊNH NGHĨA

Phương trình lôgarit là phương trình có chứa ẩn số dưới dấu lôgarit.

II. PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT CƠ BẢN

$$\log_a x = m \text{ (với } 0 < a \neq 1) \Leftrightarrow x = a^m$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Chú ý đặt điều kiện để biểu thức dưới dấu lôgarit dương.



Vấn đề 1

ĐUA VỀ CÙNG MỘT CƠ SỞ

I. PHƯƠNG PHÁP

Với $0 < a \neq 1$ thì :

$$* \log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \text{ (hay } g(x) > 0) \end{cases}$$

$$* \log_a f(x) = m \Leftrightarrow f(x) = a^m.$$

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau :

a) $\log_2 x = \frac{1}{2}$;

b) $\log_3 x + \log_3 (x+2) = 1$;

c) $\log_2 (2^x - 3) + x = 2$.

Giải

a) Điều kiện $x > 0$: $\log_2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

$$b) \log_3 x + \log_3 (x+2) = 1 \quad (1)$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x > 0 \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$$

$$(1) \Leftrightarrow \log_3 x(x+2) = \log_3 3 \Leftrightarrow x(x+2) = 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \text{ (loại)} \\ x = 1 \text{ (nhận)} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

$$c) \text{ Điều kiện } 2^x - 3 > 0 : \log_2 (2^x - 3) + x = 2 \Leftrightarrow \log_2 (2^x - 3) = 2 - x$$

$$\Leftrightarrow 2^x - 3 = 2^{2-x} \Leftrightarrow 2^x - 3 = \frac{4}{2^x}$$

$$\Leftrightarrow (2^x)^2 - 3 \cdot 2^x - 4 = 0 \quad (1)$$

Đặt $t = 2^x$ điều kiện $t > 0$

$$(1) \text{ trở thành: } t^2 - 3t - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = 4 \text{ (nhận)} \end{cases} \Leftrightarrow 2^x = 4 \Leftrightarrow x = 2$$

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau :

$$a) \log_2 \frac{1}{x} = \log_{\frac{1}{2}} (x^2 - x - 1) ; \quad b) \log_4 (x+12) \cdot \log_x 2 = 1.$$

Giải

$$a) \log_2 \frac{1}{x} = \log_{2^{-1}} (x^2 - x - 1) \Leftrightarrow -\log_2 x = -\log_2 (x^2 - x - 1)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = \log_2 (x^2 - x - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - x - 1 = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x = 1 \pm \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{2}$$

$$b) \log_4 (x+12) \cdot \log_x 2 = 1 \quad (1)$$

Điều kiện : $0 < x \neq 1$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \log_2 (x+12) \cdot \log_x 2 = 1 \Leftrightarrow \log_x 2 \cdot \log_2 (x+12) = 2$$

$$\Leftrightarrow \log_x (x+12) = 2 \quad \Leftrightarrow x+12 = x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \text{ (nhận)} \\ x = -3 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

III. BÀI TẬP

1. Giải phương trình sau : $\log(\sqrt{x+1}+1) - 3\log \sqrt[3]{x-40} = 0.$

2. Giải phương trình sau : $4\log_{27x^3} x - \frac{3}{4}\log_{3x} x^2 = 0.$

3. Giải phương trình sau : $\log_{\sqrt{2+x}} x + \log_{x^2} (2+x) - 2 = 0.$

4. Giải phương trình sau : $2 - \log(x-9) - \log(2x-1) = 0.$

5. Giải phương trình sau : $\log_2(x^2 + 3x + 2) + \log_2(x^2 + 7x + 12) - \log_2 3 - 3 = 0.$

6. Giải phương trình sau : $3^{\log_4 x + \frac{1}{2}} + 3^{\log_4 x - \frac{1}{2}} = \sqrt{x}.$

7. Giải các phương trình sau :

a) $\log_2[x(x-1)] = 1;$

b) $\log_2 x + \log_2(x-1) = 1;$

c) $\log_2(3-x) + \log_2(1-x) = 3.$

8. Giải các phương trình sau :

a) $\log_3(3^x + 8) = 2 + x;$

b) $\log_2(9 - 2^x) = 10^{\lg(3-x)}.$

9. Giải các phương trình sau :

a) $\log_2 x + \log_4 x = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{3};$

b) $\log_{\sqrt{3}} x \cdot \log_3 x \cdot \log_9 x = 8.$

10. Giải phương trình : $\log_2(4^x + 15 \cdot 2^x + 27) + 2\log_2 \frac{1}{4 \cdot 2^x - 3} = 0.$

(Đề thi Tuyển sinh đại học khối D - 2007)



PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN SỐ PHỤ

I. PHƯƠNG PHÁP

Nếu đặt $t = \log_a x$ thì $\log_{\frac{1}{a}} x = -t$; $\log_{a^2} x = \frac{1}{2}t$; $\log_a^2 x = t^2$...

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau :

a) $\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0$;

b) $\frac{6}{\log_2 2x} + \frac{4}{\log_2 (x^2)} = 3$.

Giải

a) Điều kiện $x > 0$: $\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0$ (1)

Đặt $t = \log_2 x$.

(1) trở thành : $t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$

b) $\frac{6}{\log_2 2x} + \frac{4}{\log_2 (x^2)} = 3$ (1)

Điều kiện : $\begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow \frac{6}{\log_2 2 + \log_2 x} + \frac{4}{2\log_2 x} = 3 \Leftrightarrow \frac{6}{\log_2 x + 1} + \frac{2}{\log_2 x} = 3$ (2)

Đặt $t = \log_2 x$.

Phương trình (2) trở thành :

$$\frac{6}{t+1} + \frac{2}{t} = 3 \Leftrightarrow 6t + 2t + 2 = 3(t^2 + t) \Leftrightarrow 3t^2 - 5t - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=-\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2^2 \\ x=2^{-\frac{1}{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là : $x = 4 ; x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Ví dụ 2. Giải phương trình sau : $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 5 = 0$.

Giải

Ta có : $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 5 = 0$ (1), ĐK : $x > 0$.

Đặt $t = \sqrt{\log_3^2 x + 1}$ điều kiện $t \geq 1$

Phương trình (1) trở thành :

$$\begin{aligned} t^2 + t - 6 = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \text{ (nhận)} \\ t = -3 \text{ (loại)} \end{cases} \Leftrightarrow t = 2 \\ &\Leftrightarrow \log_3^2 x = 3 \Leftrightarrow \log_3 x = \pm \sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3^{\sqrt{3}} \\ x = 3^{-\sqrt{3}} \end{cases} \end{aligned}$$

III. BÀI TẬP

11. Giải phương trình sau :

$$\log^2 x = 3 + \log x^2.$$

12. Giải phương trình sau :

$$2 \cdot 9^{\log_2 x - 1} = 6^{\log_2 x} - x^2.$$

13. Giải phương trình sau :

$$\log_3(2x+1) - 2\log_{2x+1} 3 - 1 = 0.$$

14. Giải phương trình sau :

$$\log_5(5^x - 1) \left[\frac{1}{2} \log_5 5(5^x - 1) \right] - 1 = 0.$$

15. Giải phương trình sau :

$$3 \log_{27} (x^{\log_{27} x}) - 10 \log_{27} x + 3 = 0.$$

16. Giải phương trình sau :

$$\log^2 (x^3) - 20 \log \sqrt{x} + 1 = 0.$$

17. Giải phương trình sau :

$$\log_{9x} 27 - \log_{3x} 3 + \log_9 243 = 0.$$

18. Giải các phương trình sau :

$$a) \frac{\log_2 x}{\log_4 2x} = \frac{\log_8 4x}{\log_{16} 8x};$$

$$b) 3\sqrt{\log_2 x} - \log_2 8x + 1 = 0.$$

19. Giải các phương trình sau :

$$a) \log_3 (3^x - 1) \cdot \log_3 (3^{x+1} - 3) = 12;$$

$$b) \log_{x-1} 4 = 1 + \log_2 (x - 1).$$

20. Giải phương trình sau :

$$5\sqrt{\log_2 (-x)} = \log_2 \sqrt{x^2}.$$



Vấn đề 3

PHƯƠNG PHÁP DÙNG TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ ĐỂ CHỨNG MINH TÍNH DUY NHẤT CỦA NGHIỆM

I. PHƯƠNG PHÁP

Đưa phương trình đã cho về hai vế, trong đó một vế là một hàm số đồng biến (hoặc không đổi) và một vế là một hàm số nghịch biến (hoặc không đổi) :

$$f(x) = k \text{ hoặc } f(x) = g(x)$$

* *Bước 1* : Nhẩm và chứng minh x_0 là nghiệm.

* *Bước 2* : Chứng minh x_0 là nghiệm duy nhất (bằng cách chứng minh $x \neq x_0$ không là nghiệm).

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải phương trình : $2^x = 2 - \log_3 x$.

Giải

Điều kiện của phương trình là $x > 0$.

Nhận xét : với $x = 1$ thoả mãn phương trình.

Ta chứng minh $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Ta có:

+ hàm số $y = 2^x$ có $y' = 2^x \ln 2 > 0$ nên hàm số đồng biến trên $(0 ; +\infty)$

+ hàm số $y = 2 - \log_3 x$ có $y' = -\frac{1}{x \ln 3} < 0, \forall x > 0$ nên hàm số nghịch biến trên $(0 ; +\infty)$

• $x > 1$:

$$\begin{cases} VT > 2 \\ VP < 2 \end{cases} \Rightarrow x > 1 \text{ không là nghiệm của phương trình.}$$

• $0 < x < 1$:

$$\begin{cases} VT < 2 \\ VP > 2 \end{cases} \Rightarrow x < 1 \text{ không là nghiệm của phương trình.}$$

Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất $x = 1$.

Ví dụ 2. Giải phương trình : $-x + 11 = \log_3 x$.

Giải

Điều kiện $x > 0$.

Nhận xét : với $x = 9$ thoả mãn phương trình.

Ta chứng minh $x = 9$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Ta có:

+ hàm số $y = 11 - x$ có $y' = -1 < 0$ nên hàm số nghịch biến trên $(0 ; +\infty)$

+ hàm số $y = \log_3 x$ có $y' = \frac{1}{x \ln 3} > 0, \forall x > 0$ nên hàm số đồng biến trên $(0 ; +\infty)$

• $x > 9$:

$$\begin{cases} VT < 2 \\ VP > 2 \end{cases} \Rightarrow x > 9 \text{ không là nghiệm của phương trình.}$$

• $0 < x < 9$:

$$\begin{cases} VT > 2 \\ VP < 2 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 9 \text{ không là nghiệm của phương trình.}$$

Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất $x = 9$.

III. BÀI TẬP

21. $x - 2^{\log_5(x+3)} = 0$.

22. Giải phương trình sau : $\log_2(\sqrt{x} + 1) - \log_3 x = 0$.

23. Giải phương trình sau : $\log_2(x + 3^{\log_6 x}) - \log_6 x = 0$.

24. Giải phương trình : $\log_3 \left(\frac{x^2 + x + 3}{2x^2 + 4x + 5} \right) = x^2 + 3x + 2$.



Vấn đề 4

PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG MẪU MỤC

I. PHƯƠNG PHÁP

Có một số phương trình không dùng thuần túy các phương pháp nêu trên, đôi khi ta có thể

* biến đổi phương trình đã cho về phương trình tích

* dùng ẩn số phụ $t = \log_a f(x)$ để đưa phương trình về dạng phương trình bậc hai theo ẩn số t , trong đó x đóng vai trò là tham số. Giải phương trình bậc hai này để tính t theo x . Từ đó suy ra x

* Dùng các bất đẳng thức để đưa phương trình về dạng đối lập :

$$A = B, \text{ trong đó } \begin{cases} A \geq M \\ B \leq M. \end{cases}$$

Khi đó phương trình đã cho tương đương với : $\begin{cases} A = M \\ B = M. \end{cases}$

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải phương trình : $\log_3(x^2 + x + 1) = x(2 - x) + \log_3 x$.

Giải

$$\log_3(x^2 + x + 1) = x(2 - x) + \log_3 x \quad (1)$$

$$\text{Điều kiện : } \begin{cases} x > 0 \\ x^2 + x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0$$

$$(1) \Leftrightarrow \log_3 \frac{(x^2 + x + 1)}{x} = 2x - x^2 \quad (2)$$

$$\text{Khi } x > 0 \Rightarrow \frac{x^2 + x + 1}{x} = x + \frac{1}{x} + 1 \geq 3$$

$$\Rightarrow \text{VT (2)} \geq \log_3 3 \Rightarrow \text{VT (2)} \geq 1.$$

$$\text{Mặt khác : VP (2)} = 2x - x^2 = 1 - (x - 1)^2 \leq 1$$

$$\text{do đó (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 \frac{(x^2 + x + 1)}{x} = 1 \\ 2x - x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy nghiệm của phương trình là : $x = 1$.

Ví dụ 2. $(x + 2)\log_3^2(x + 1) + 4(x + 1)\log_3(x + 1) - 16 = 0$.

Giải

$$(x + 2)\log_3^2(x + 1) + 4(x + 1)\log_3(x + 1) - 16 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Điều kiện : } x > -1.$$

$$\text{Đặt } t = \log_3(x + 1).$$

$$(1) \text{ trở thành : } (x + 2)t^2 + 4(x + 1)t - 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -4 \\ t = \frac{4}{x + 2} \end{cases}$$

$$* \text{ Với } t = -4$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x + 1) = -4 \Leftrightarrow x + 1 = 3^{-4} \Leftrightarrow x = 3^{-4} - 1 \Leftrightarrow x = -\frac{80}{81}$$

$$* \text{ với } t = \frac{4}{x+2} \Leftrightarrow \log_3(x+1) = \frac{4}{x+2} \quad (2)$$

Nhận xét : $x = 2$ là nghiệm của phương trình (2).

• Xét $x > 2$:

$$\text{Ta có : } x+1 > 3, x+2 > 4 \Rightarrow \begin{cases} \log_3(x+1) > \log_3 3 \\ \frac{4}{x+2} < \frac{4}{4} \end{cases} \Rightarrow VT(2) > VP(2)$$

$\Rightarrow x > 2$ không là nghiệm của (2).

• Xét $x < 2$:

$$\text{Ta có : } \begin{cases} 3 > x+1 > 0 \\ 4 > x+2 > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_3(x+1) < \log_3 3 \\ \frac{4}{x+2} > \frac{4}{4} \end{cases} \Rightarrow VT(2) < VP(2)$$

$\Rightarrow -1 < x < 2$ không là nghiệm của (2).

Vậy $x = 2$ là nghiệm duy nhất của (2).

$$\text{Vậy phương trình (1) có hai nghiệm là : } \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{80}{81} \end{cases}$$

III. BÀI TẬP

25. Giải phương trình sau trên tập hợp $\mathbb{R}^* \setminus \{1\}$:

$$\log_x(x+1) = \frac{3}{2}.$$

26. Giải phương trình : $\frac{1}{x-1} \log_2^2 x + \log_2 x + 2 = \frac{4}{x-1}.$

§3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ – LÔGARIT

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

Hệ phương trình mũ – lôgarit là hệ phương trình trong đó có chứa các phương trình mũ và phương trình lôgarit.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

I. PHƯƠNG PHÁP

* Dùng các phương pháp giải hệ phương trình đại số như : phương pháp thế, phương pháp cộng,...

* Dùng một hoặc hai ẩn phụ để biến hệ mũ, lôgarit thành các hệ đại số quen thuộc như hệ tổng tích, hệ đối xứng loại I, hệ đối xứng loại II, hệ đẳng cấp, ...

Cần lưu ý :

- Biến đổi đưa về cùng cơ số, làm mất cơ số, đưa về hệ các phương trình đại số quen thuộc
- Giải một phương trình, sau đó thế vào phương trình còn lại (phương pháp thế)
- Biến đổi đưa hệ về dạng $f(u) = f(v)$
- Dùng phương pháp khảo sát hàm số
- Dùng phương pháp đồ thị
- Dùng phương pháp đặt ẩn số phụ (lưu ý điều kiện cần và đủ cho ẩn số phụ này)
- Đối với hệ mũ có thể dùng các bất đẳng thức cơ bản (bất đẳng thức Cô-si,...) hoặc tam thức bậc hai..

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải các hệ phương trình sau :

$$a) \begin{cases} 5^x \cdot 8^y = 512\,000 \\ x + y = 7 \end{cases} ;$$

$$b) \begin{cases} 2^{x+y} + 3^y = 5 \\ 2^{x+y} \cdot 3^{y-1} = 2. \end{cases}$$

Giải

$$\begin{aligned} a) \begin{cases} 5^x \cdot 8^y = 512\,000 \\ x + y = 7 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 5^x \cdot 8^y = 5^3 \cdot 8^4 \\ x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^{x-3} \cdot 8^{y-4} = 1 \\ x + y = 7 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5^{x-3} \cdot 8^{3-x} = 1 \\ x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{5}{8}\right)^{x-3} = 1 \\ x + y = 7 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ x+y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \begin{cases} 2^{x+y} + 3^y = 5 \\ 2^{x+y} \cdot 3^y = 6 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x+y} = 2 \\ 3^y = 3 \\ 2^{x+y} = 3 \\ 3^y = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ y=1 \\ x+y=\log_2 3 \\ y=\log_3 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ x=\log_2 3 - \log_3 2 \\ y=\log_3 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Giải các hệ phương trình sau :

$$\text{a) } \begin{cases} 2^{2x-y} + 2^y = 2^{1+y} \\ \log_2 x \cdot (\log_4 y - 1) = 4 \end{cases}; \quad \text{b) } \begin{cases} x \cdot y = 1 \\ \lg^2 x + \lg^2 y = 2. \end{cases}$$

Giải

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{cases} 2^{2x-y} + 2^y = 2^{1+y} \\ \log_2 x \cdot (\log_4 y - 1) = 4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{2(x-y)-1} + \frac{1}{2} = 1 \\ \log_2 x \cdot (\log_4 y - 1) = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{2(x-y)-1} = 2^{-1} \\ \log_2 x \cdot (\log_4 y - 1) = 4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-y) = 0 \\ \log_2 x \cdot (\log_4 y - 1) = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \log_2 x \cdot (\log_4 x - 1) = 4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \log_2 x \left(\frac{1}{2} \log_2 x - 1 \right) = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ (\log_2 x)^2 - 2 \log_2 x - 8 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \log_2 x = 4 \\ \log_2 x = -2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 2^4 \\ x = y = 2^{-2}. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \begin{cases} x \cdot y = 1 \\ \lg^2 x + \lg^2 y = 2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \cdot y = 1 \\ \lg^2 x + \lg^2 \frac{1}{x} = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \cdot y = 1 \\ \lg^2 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \cdot y = 1 \\ \lg x = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 10 \\ y = \frac{1}{10} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{1}{10} \\ y = 10. \end{cases} \end{cases} \end{aligned}$$

III. BÀI TẬP

1. Giải các hệ phương trình sau :

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 1 \\ 2^x - 2^y = 2 \end{cases} ;$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2 \cdot 10^2 \cdot 5^x - 2^y = 0 \end{cases} ;$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + y = 1 \\ 4^{-2x} + 4^{-2y} = 0,5. \end{cases}$$

2. Giải các hệ phương trình sau :

$$\text{a) } \begin{cases} 4^x + 2^{x+1} - y \cdot 2^x - 2y = 0 \\ 2^{3x} - 5y^2 + 4y = 0 \end{cases} ;$$

$$\text{b) } \begin{cases} 4^x - y^2 + 8 = 0 \\ 2^{x+1} + y + 1 = 0 \end{cases} ;$$

$$\text{c) } \begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 3^{-2} \\ y - x - 2 = 0. \end{cases}$$

3. Giải các hệ phương trình sau :

$$\text{a) } \begin{cases} 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^y = 2,375 \\ 2^x - 3^y = -0,875 \end{cases} ;$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3^{2x} - 2^y = 77 \\ 3^x - 2^{\frac{y}{2}} = 7 \end{cases} ;$$

$$\text{c) } \begin{cases} 64^{2x} + 64^{2y} = 12 \\ 64^{x+y} = 4\sqrt{2} \end{cases} ;$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2^x - 9 \cdot 3^y = 7 \\ 2^x \cdot 3^y = \frac{8}{9}. \end{cases}$$

4. Giải các hệ phương trình sau :

$$a) \begin{cases} x + y = 20 \\ \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9 \end{cases} ;$$

$$c) \begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ \log_2 x + \log_2 y = 2. \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x + y = 30 \\ \lg x + \lg y = 3 \lg 6 \end{cases} ;$$

5. Giải các hệ phương trình sau :

$$a) \begin{cases} 3^{-x} \cdot 2^y = 1152 \\ \log_{\sqrt{5}} (x + y) = 2 \end{cases} ;$$

$$b) \begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ \log_2 (x + y) - \log_3 (x - y) = 1. \end{cases}$$

6. Giải các hệ phương trình sau :

$$a) \begin{cases} 3 \log_9 (9x^2) - \log_3 y^3 = 3 \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{2-y} = 1 \end{cases} ;$$

$$b) \begin{cases} 2^{3x+1} + 2^{y-2} = 3 \cdot 2^{y+3x} \\ \sqrt{3x^2 + 1 + xy} = \sqrt{x+1}. \end{cases}$$

7. Giải các hệ phương trình sau :

$$a) \begin{cases} \log_5 x + \log_5 7 \cdot \log_7 y = 1 + \log_5 2 \\ 3 + \log_2 y = \log_2 5(1 + 3 \log_5 x) \end{cases} ;$$

$$b) \begin{cases} \log x + \frac{1}{2} \log y = \frac{5}{2} \\ 5 \log x - 2 \log y = 8. \end{cases}$$

8. Giải các hệ phương trình sau :

$$a) \begin{cases} \log_y x - \log_2 y^2 = 1 \\ \log_4 x - \log_4 y = 1 \end{cases} ;$$

$$b) \begin{cases} \log_{xy} (x + y) = 0 \\ \log_{xy} (x - y) = 1. \end{cases}$$

9. Giải các hệ phương trình sau :

$$a) \begin{cases} \log_2 \sqrt{x+3} = \log_3 3y \\ \log_2 \sqrt{y+3} = \log_3 3x \end{cases} ;$$

$$b) \begin{cases} \log_x (3x + 2y) = 2 \\ \log_y (2x + 3y) = 2 \end{cases} ;$$

$$c) \begin{cases} \log_x (x^3 + 2x^2 - 3x - 5y) = 3 \\ \log_y (y^3 + 2y^2 - 3y - 5x) = 3. \end{cases}$$

10. Giải các hệ phương trình sau :

$$a) \begin{cases} 2^{x+1} = 4y^2 + 1 \\ 2^x \leq 2y \end{cases} ;$$

$$b) \begin{cases} 2^{|x^2-2x-3| - \log_2 3} = 3^{-y-4} \\ 4|y| - |y-1| + (y+3)^2 \leq 8. \end{cases}$$

11. Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} y^{\frac{5-2\log_x y}{5}} = x^{\frac{2}{5}} \\ 1 - \log_x 4 = \log_x \left(1 - \frac{3y}{x}\right). \end{cases}$$

12. Giải các hệ phương trình sau :

$$\text{a) } \begin{cases} (4x)^{\lg 4} = (3y)^{\lg 3} \\ 3^{\lg x} = 4^{\lg y} \end{cases};$$

$$\text{b) } \begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4 \\ \log_4 x - \log_4 y = 1 \end{cases};$$

$$\text{c) } \begin{cases} 4^{\log_3(xy)} = 2 + (xy)^{\log_3 2} \\ x^2 + y^2 - 3x - 3y = 12. \end{cases}$$

$$\text{13. Giải hệ phương trình : } \begin{cases} 2^{3x} = 5y^2 - 4y \\ \frac{4^x + 2^{x+1}}{2^x + 2} = y \end{cases} \quad (\text{Đề thi Tuyển sinh đại học khối D - 2002})$$

$$\text{14. Giải hệ phương trình : } \begin{cases} \log_{\frac{1}{4}}(y-x) - \log_4 \frac{1}{y} = 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

(Đề thi Tuyển sinh đại học khối A - 2004)

$$\text{15. Giải hệ phương trình : } \begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{2-y} = 1 \\ 3\log_9(9x^2) - \log_3 y^3 = 3 \end{cases}$$

(Đề thi Tuyển sinh đại học khối B - 2005)

$$\text{16. Giải hệ phương trình : } \begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 1 + \log_2(xy) \\ 3^{x^2 - xy + y^2} = 81 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

(Đề thi Tuyển sinh đại học khối A - 2009)

BÀI TẬP ÔN CUỐI CHƯƠNG III

1. Giải các phương trình :

$$a) 32^{\frac{x+5}{x-7}} = 0,25.128^{\frac{x+17}{x-3}} ;$$

$$c) 4^x - 3^{x-0,5} = 3^{x+0,5} - 2^{2x-1} ;$$

$$b) 5^{x-1} = 10^x.2^{-x}.5^{x+1} ;$$

$$d) 3^{4x+8} - 4.3^{2x+5} + 28 = 2\log_2 \sqrt{2} .$$

2. Giải các phương trình :

$$a) \log_3 (\log_{0,5}^2 x - 3\log_{0,5} x + 5) = 2 ;$$

$$c) 1 - \frac{1}{2}\log(2x-1) = \frac{1}{2}\log(x-9) ;$$

$$b) \log_2 (4.3^x - 6) - \log_2 (9^x - 6) = 1 ;$$

$$d) \frac{1}{2}\log_2 (x-2) - \frac{1}{3} = \log_{\frac{1}{8}} \sqrt{3x-5} .$$

3. Giải các phương trình :

$$a) 4^x - 3^x = 1 ;$$

$$b) \log_3 x = \log_2 (x-1) .$$

4. Giải các phương trình sau :

$$a) (2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x = 4 ;$$

$$b) (2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x = 4^x .$$

5. Giải các hệ phương trình :

$$a) \begin{cases} 2^x 3^y = 24 \\ 2^y 3^x = 54 \end{cases} ;$$

$$b) \begin{cases} \log_2 (x-y) = 5 - \log_2 (x+y) \\ \frac{\log x - \log 4}{\log y - \log 3} = -1 \end{cases} ;$$

$$c) \begin{cases} 2\log_2 x - 3^y = 15 \\ 3^y \cdot \log_2 x = 2\log_2 x + 3^{y+1} . \end{cases}$$

6. Giải hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} e^x - e^y = (\log_2 y - \log_2 x)(xy+1) \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

7. Chứng minh rằng với mọi $a > 0$ thì hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất :

$$\begin{cases} e^x - e^y = \ln(1+x) - \ln(1+y) \\ y - x = a. \end{cases}$$

8. Giải phương trình sau : $a^x + b^x = c^x$ (với a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác vuông với cạnh huyền bằng c).

9. Cho phương trình : $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0$ (m là tham số) (1)

a) Giải phương trình (1) khi $m = 2$;

b) Định m để (1) có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[1; 3^{\sqrt{3}}]$.

(Đề thi Tuyển sinh đại học khối A – 2002)

10. Giải phương trình : $2^{x^2+x} - 4 \cdot 2^{x^2-x} - 2^{2x} + 4 = 0$.

(Đề thi Tuyển sinh đại học khối D – 2006)

11. Giải phương trình : $\log_{2x-1}(2x^2 + x - 1) + \log_{x+1}(2x - 1)^2 = 4$.

(Đề thi Tuyển sinh đại học khối A – 2008)

§1. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

A. TÓM TẮT GIẢNG KHOA

Định nghĩa

Bất phương trình mũ cơ bản là bất phương trình có một trong các dạng :

$$a^x > m, a^x \geq m, a^x < m, a^x \leq m \text{ với } 0 < a \neq 1.$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Phương pháp chung : Dùng tính chất đồng biến, nghịch biến của hàm số mũ và hàm số lôgarit (lôgarit hoá).

Vấn đề 1

BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ DẠNG CƠ BẢN

I. PHƯƠNG PHÁP

Với bất phương trình $a^x > m$ (1)

* Nếu $m \leq 0$ thì tập nghiệm là $S = \mathbb{R}$ (vì $a^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$)

* Nếu $m > 0$ thì :

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x > \log_a m & \text{nếu } a > 1 \\ x < \log_a m & \text{nếu } 0 < a < 1 \end{cases}$$

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải các bất phương trình sau :

$$\text{a) } 3^x > 81; \quad \text{b) } \left(\frac{1}{2}\right)^x > 32.$$

Giải

$$a) 3^x > 81 \Leftrightarrow 3^x > 3^4 \Leftrightarrow x > 4.$$

$$b) \left(\frac{1}{2}\right)^x > 32 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x > 2^5 \Leftrightarrow 2^{-x} > 2^5 \Leftrightarrow -x > 5 \Leftrightarrow x < -5.$$

Ví dụ 2. Giải bất phương trình sau :

$$3^x + 3^{x+1} + 3^{x-1} < 5^x + 5^{x+1} + 5^{x-1}.$$

Giải

$$\text{Ta có : } 3^x + 3^{x+1} + 3^{x-1} < 5^x + 5^{x+1} + 5^{x-1}$$

$$\Leftrightarrow 3^x \left(1 + 3 + \frac{1}{3}\right) < 5^x \left(1 + 5 + \frac{1}{5}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x < \frac{93}{65} \Leftrightarrow x > \log_{\frac{3}{5}} \frac{93}{65}.$$

III. BÀI TẬP

1. Giải các bất phương trình sau :

$$a) 3^x > 5 ;$$

$$b) 8.4^{\frac{x-3}{x^2+1}} < 1.$$

2. Giải các bất phương trình :

$$a) 2^{-x^2+3x} < 4 ;$$

$$b) \left(\frac{7}{9}\right)^{2x^2-3x} \geq \frac{9}{7}.$$

3. Giải bất phương trình : $3^{x+2} + 3^{x-1} \leq 28$

4. Giải bất phương trình: $5^{\log_3 \frac{x-2}{x}} < 1.$



Văn đề 2

ĐUA VỀ CÙNG MỘT CƠ SỞ

I. PHƯƠNG PHÁP

Với $0 < a \neq 1$:

$$* a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \text{ nếu } a > 1 \\ f(x) < g(x) \text{ nếu } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$* a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x) & \text{nếu } a > 1 \\ f(x) \leq g(x) & \text{nếu } 0 < a < 1 \end{cases}$$

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải bất phương trình : $3^{x^2-2x} < 3$.

Giải

$$\text{Ta có : } 3^{x^2-2x} < 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x < 1 \Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}.$$

Ví dụ 2. Giải bất phương trình : $2^{|x-2|} > 4^{|x+1|}$.

Giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } 2^{|x-2|} > 4^{|x+1|} &\Leftrightarrow 2^{|x-2|} > 2^{2|x+1|} \Leftrightarrow |x-2| > 2|x+1| \\ &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 > 4x^2 + 8x + 4 \Leftrightarrow 3x^2 + 12x < 0 \Leftrightarrow -4 < x < 0. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là : $-4 < x < 0$.

Ví dụ 3. Giải bất phương trình : $(\sqrt{10} + 3)^{\frac{x-3}{x-1}} < (\sqrt{10} - 3)^{\frac{x+1}{x+3}}$.

Giải

Điều kiện : $x \neq 1, x \neq -3$.

$$\text{Nhận xét : } (\sqrt{10} + 3) \cdot (\sqrt{10} - 3) = 1 \Rightarrow (\sqrt{10} - 3) = (\sqrt{10} + 3)^{-1}.$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{10} + 3)^{\frac{x-3}{x-1}} < (\sqrt{10} - 3)^{\frac{x+1}{x+3}} &\Leftrightarrow (\sqrt{10} + 3)^{\frac{x-3}{x-1}} < (\sqrt{10} + 3)^{\left(-\frac{x+1}{x+3}\right)} \\ &\Leftrightarrow \frac{x-3}{x-1} < -\frac{x+1}{x+3} \Leftrightarrow \frac{x-3}{x-1} + \frac{x+1}{x+3} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-5}{(x-1)(x+3)} < 0 \\ &\Leftrightarrow -3 < x < -\sqrt{5} \vee 1 < x < \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là : $-3 < x < -\sqrt{5} \vee 1 < x < \sqrt{5}$.

III. BÀI TẬP

5. Giải bất phương trình : $(\sqrt{2} + 1)^{\frac{6x-6}{x+1}} \leq (\sqrt{2} - 1)^{-x}$.

6. Giải các bất phương trình :

$$a) \frac{1}{2^{|2x-1|}} > \frac{1}{2^{3x-1}} ;$$

$$b) \left(\frac{3}{7}\right)^{x^2+1} \geq \left(\frac{3}{7}\right)^{3x-1}.$$

7. Giải bất phương trình : $3^{\sqrt{x^2-2x}} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{x-7|x-1|}$.

8. Giải bất phương trình : $x^{2x^2-5x+2} \geq 1$ (với $0 < x \neq 1$).



Vấn đề 3

PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN SỐ PHỤ

I. PHƯƠNG PHÁP

Nếu đặt $t = a^x$, điều kiện $t > 0$ thì $a^{2x} = (a^2)^x = (a^x)^2 = t^2$; $a^{3x} = t^3$; $a^{-x} = \frac{1}{t}$...

Lưu ý :

$$* (\sqrt{2}-1)^x (\sqrt{2}+1)^x = 1$$

$$* (2-\sqrt{3})^x (2+\sqrt{3})^x = 1$$

$$* (4-\sqrt{15})^x (4+\sqrt{15})^x = 1$$

$$* (\sqrt{7-\sqrt{48}})^x (\sqrt{7+\sqrt{48}})^x = 1.$$

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải bất phương trình : $4^x - 2.5^{2x} < 10^x$.

Giải

$$4^x - 2.5^{2x} < 10^x \Leftrightarrow 1 - 2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{2x} < \left(\frac{5}{2}\right)^x \quad (1)$$

Đặt $t = \left(\frac{5}{2}\right)^x$, điều kiện $t > 0$.

(1) trở thành : $1 - 2t^2 < t \Leftrightarrow 2t^2 + t - 1 > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t < -1 \text{ (loại)} \\ t > \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \log_{\frac{5}{2}} \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > -\log_{\frac{5}{2}} 2.$$

Ví dụ 2. Giải bất phương trình : $(\sqrt{5}+1)^{x-x^2} + 2^{-x^2+x+1} < 3 \cdot (\sqrt{5}-1)^{x-x^2}$.

Giải

$$(\sqrt{5}+1)^{x-x^2} + 2^{-x^2+x+1} < 3 \cdot (\sqrt{5}-1)^{x-x^2} \quad (1)$$

Ta có : $2^{-x^2+x} > 0$ với mọi x . Chia hai vế cho 2^{-x^2+x} ta được:

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^{x-x^2} + 2 < 3 \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{x-x^2} \quad (2)$$

Ta nhận thấy : $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right) = 1$.

$$\text{Đặt : } \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^{x-x^2} = t, \quad (t > 0) \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{x-x^2} = \frac{1}{t}.$$

(2) trở thành :

$$t + 2 < \frac{3}{t} \Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 < 0 \Leftrightarrow 0 < t < 1 \Leftrightarrow 0 < \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^{x-x^2} < 1$$

$$\Leftrightarrow x - x^2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 1. \end{cases}$$

III. BÀI TẬP

9. Giải các bất phương trình :

a) $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 > 0$;

b) $\left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{2}{x}} + \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{1}{x}} > 12$.

10. Giải các bất phương trình :

a) $9^{\sqrt{x^2-3}} + 3 < 28 \cdot 3^{\sqrt{x^2-3}-1}$;

b) $2^{3x} - \frac{8}{2^{3x}} - 6 \left(2^x - \frac{1}{2^{x-1}} \right) \leq 1$.

11. Giải bất phương trình :

$$25^{1+2x-x^2} + 9^{1+2x-x^2} \geq 34 \cdot 15^{2x-x^2}$$

12. Giải các bất phương trình :

a) $3^{2x} - 8.3^{x+\sqrt{x+4}} - 9.9\sqrt{x+4} > 0$;

b) $2^{2\sqrt{x+3}-x-6} + 15.2^{\sqrt{x+3}-5} < 2^x$.

13. Giải bất phương trình : $2\log_3(4x-3) + \log_{\frac{1}{3}}(2x+3) \leq 2$.

(Đề thi Tuyển sinh đại học khối A – 2007)



Vấn đề 4

PHƯƠNG PHÁP LÔGARIT HOÁ

I. PHƯƠNG PHÁP

Với bất phương trình không cùng cơ số dạng : $a^{f(x)} > b^{g(x)}$ hay $a^{f(x)} \geq b^{g(x)}$ (a, b dương, khác 1), lấy lôgarit cơ số a (hoặc b) cho hai vế, ta có:

$$* a^{f(x)} > b^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \cdot \log_a b & \text{nếu } a > 1 \\ f(x) < g(x) \cdot \log_a b & \text{nếu } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$* a^{f(x)} \geq b^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x) \cdot \log_a b & \text{nếu } a > 1 \\ f(x) \leq g(x) \cdot \log_a b & \text{nếu } 0 < a < 1 \end{cases}$$

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải bất phương trình : $3^{2x-1} < 11^{3-x}$.

Giải

$$\begin{aligned} 3^{2x-1} < 11^{3-x} &\Leftrightarrow 2x-1 < \log_3 11^{3-x} \\ &\Leftrightarrow 2x-1 < (3-x)\log_3 11 \\ &\Leftrightarrow x < \frac{3\log_3 11 + 1}{2 + \log_3 11}. \end{aligned}$$

Ví dụ 2. $(x-2)^{x^2-6x+8} > 1$ với $2 < x \neq 3$.

Giải

$$\begin{aligned} (x-2)^{x^2-6x+8} > 1 &\text{ với } 2 < x \neq 3 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 0 \\ (x-2-1)(x^2-6x+8-0) > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ 2 < x < 3 \vee x > 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2 < x < 3 \vee x > 4.$$

III. BÀI TẬP

14. Giải các bất phương trình :

a) $5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2} \geq 7^x + 7^{x+1} + 7^{x+2}$;

b) $5^{4x-6} > 3^{3x-4}$.

§2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

Định nghĩa

Bất phương trình lôgarit cơ bản là bất phương trình có một trong các dạng:
 $\log_a x > m$, $\log_a x \geq m$, $\log_a x < m$, $\log_a x \leq m$ với $0 < a \neq 1$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Phương pháp chung : Dùng tính chất đồng biến, nghịch biến của hàm số mũ (mũ hoá) và hàm số lôgarit.

Chú ý : Có thể tìm tập xác định của bất phương trình trước khi giải.



Vấn đề 1

BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT DẠNG CƠ BẢN

I. PHƯƠNG PHÁP

Với bất phương trình $\log_a x > m$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x > a^m & \text{nếu } a > 1 \\ 0 < x < a^m & \text{nếu } 0 < a < 1 \end{cases}$$

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải các bất phương trình sau :

a) $\log_2 x > 3$;

b) $\log_{\frac{1}{3}} x > 5$.

Giải

a) $\log_2 x > 3 \Leftrightarrow x > 2^3 \Leftrightarrow x > 8$.

b) $\log_{\frac{1}{3}} x > 5 \Leftrightarrow 0 < x < \left(\frac{1}{3}\right)^5 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{243}$.

Ví dụ 2. Giải bất phương trình sau : $\log_3 \frac{x^2 + 4x}{2x - 3} < 1$.

Giải

$$\begin{aligned} \log_3 \frac{x^2 + 4x}{2x - 3} < 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + 4x}{2x - 3} > 0 \\ \frac{x^2 + 4x}{2x - 3} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + 4x}{2x - 3} > 0 \\ \frac{x^2 - 2x + 9}{2x - 3} < 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 < 0 \quad (\text{vì } x^2 - 2x + 9 = (x - 1)^2 + 8 > 0, \forall x) \\ x^2 + 4x < 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ -4 < x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < x < 0. \end{aligned}$$

III. BÀI TẬP

1. Giải các bất phương trình sau :

a) $\log_8 (4 - 2x) \geq 2$;

b) $\log_2 (2 - x - \sqrt{x^2 - 1}) < 1$;

c) $\log_{\sqrt{5}} (6^{x+1} - 36^x) \leq 2$.

2. Giải bất phương trình sau : $\log_{\frac{2}{3}} \log_3 |x - 3| \geq 0$.

3. Giải bất phương trình sau : $\log_2 x (\log_3 x - 1) + 1 - \log_3 x > 0$.

4. Giải bất phương trình : $\log_{0,7} \left[\log_6 \left(\frac{x^2 + x}{x + 4} \right) \right] < 0$

(Đề thi Tuyển sinh đại học khối B – 2008)

5. Giải bất phương trình : $\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{x^2 - 3x + 2}{x} \right) \geq 0$

(Đề thi Tuyển sinh đại học khối D – 2008)



Vấn đề 2

ĐUA VỀ CÙNG MỘT CƠ SỞ

I. PHƯƠNG PHÁP

Với $0 < a \neq 1$

$$* \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) > 0 & \text{nếu } a > 1 \\ 0 < f(x) < g(x) & \text{nếu } 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$* \log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x) > 0 & \text{nếu } a > 1 \\ 0 < f(x) \leq g(x) & \text{nếu } 0 < a < 1 \end{cases}$$

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải các bất phương trình :

a) $\log_{0,5} (5x + 10) < \log_{0,5} (x^2 + 6x + 8)$;

b) $\log_2 (x - 3) + \log_2 (x - 2) \leq 1$.

Giải

a) $\log_{0,5} (5x + 10) < \log_{0,5} (x^2 + 6x + 8)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 6x + 8 > 0 \\ 5x + 10 > x^2 + 6x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -4 \vee x > -2 \\ x^2 + x - 2 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -4 \vee x > -2 \\ -2 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x < 1.$$

$$b) \log_2(x-3) + \log_2(x-2) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3 > 0 \\ x-2 > 0 \\ \log_2(x-3)(x-2) \leq \log_2 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x^2 - 5x + 6 \leq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ 1 \leq x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x \leq 4.$$

Ví dụ 2. Giải bất phương trình : $\log_x(3 - \sqrt{1-2x+x^2}) > 1$.

Giải

$$\text{Ta có : } \log_x(3 - \sqrt{1-2x+x^2}) > 1 \Leftrightarrow \log_x(3 - |1-x|) > 1 \quad (1)$$

Điều kiện :

$$\begin{cases} 1 \neq x > 0 \\ 3 - |1-x| > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ -2 < x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 4 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ 3 - |1-x| > x \end{cases} \vee \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 3 - |1-x| < x \end{cases} \Leftrightarrow 1 < x < 2 \quad (\text{thỏa mãn điều kiện})$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là : $1 < x < 2$.

III. BÀI TẬP

6. Giải các bất phương trình :

$$a) \log_{\frac{1}{3}}(x+1) \leq \log_3(2-x) ;$$

$$b) \log_{\frac{1}{7}} \frac{x^2+6x+9}{2(x+1)} < -\log_7(x+1) ;$$

$$c) \log_2(9^{x-1} + 7) > \log_2(3^{x-1} + 1) + 2.$$

7. Giải các bất phương trình :

$$a) \log_x(5x^2 - 8x + 3) > 2 ;$$

$$b) \log_x \frac{4x+5}{6-5x} < -1.$$

8. Giải bất phương trình :

$$a) \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{4}}(x-1) + \frac{1}{2} \log_2 6 \leq 0 ; \quad b) \lg(x^2 - 3x + 2) > 2(\lg x + \lg 2) ;$$

$$c) \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)} + \frac{1}{\log_2 \sqrt{x^2 - 3x + 2}} > 0.$$



PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN SỐ PHỤ

I. PHƯƠNG PHÁP

Nếu đặt $t = \log_a x$ thì $\log_{\frac{1}{a}} x = -t$; $\log_{a^2} x = \frac{1}{2}t$; $\log_a^2 x = t^2$...

II. VÍ DỤ

Ví dụ. Giải bất phương trình : $\log_2(2^x - 1) \cdot \log_2(2^{x+1} - 2) < 2$.

Giải

Điều kiện : $2^x - 1 > 0$ và $2^{x+1} - 2 > 0$.

Ta có :

$$\log_2(2^x - 1) \cdot \log_2(2^{x+1} - 2) < 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2^x - 1) \cdot [\log_2(2^x - 1) + \log_2 2] < 2 \quad (1)$$

Đặt $t = \log_2(2^x - 1)$

(1) trở thành : $t(t + 1) < 2$

$$\Leftrightarrow t^2 + t - 2 < 0 \quad \Leftrightarrow -2 < t < 1$$

$$\Leftrightarrow -2 < \log_2(2^x - 1) < 1 \quad \Leftrightarrow 2^{-2} < 2^x - 1 < 2^1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} + 1 < 2^x < 3 \quad \Leftrightarrow \frac{5}{4} < 2^x < 3$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{5}{4} < x < \log_2 3 \quad \Leftrightarrow \log_2 5 - 2 < x < \log_2 3.$$

III. BÀI TẬP

9. Giải các bất phương trình :

a) $2\log_5 x - \log_x 125 < 1$;

b) $\log_x 2 \cdot \log_{\frac{x}{16}} 2 > \frac{1}{\log_2 x - 6}$.

10. Giải các bất phương trình :

a) $3^{\log x + 2} - 3^{\log x^2 + 5} + 2 < 0$;

b) $6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} \leq 12$.

11. Giải các bất phương trình :

a) $\sqrt{\log_3^2 x - 4 \log_3 x + 9} \geq 2 \log_3 x - 3$; b) $\log_2(2^x - 1) \cdot \log_2(2^{x+1} - 2) < 2$.

BÀI TẬP ÔN CUỐI CHƯƠNG IV

1. Giải các bất phương trình :

- a) $2^{2x-1} + 2^{2x-2} + 2^{2x-3} \geq 448$;
b) $(0,4)^x - (2,5)^{x+1} > 1,5$;
c) $(\sqrt{2})^{3x} + (2\sqrt{2})^x \geq 2 \cdot 4^x$;
d) $x^2 2^{2x} + 9(x+2) \cdot 2^x + 8x^2 \leq (x+2)2^{2x} + 9x^2 2^x + 8x + 16$.

2. Giải các bất phương trình :

- a) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 6x + 18) + 2 \log_5(x - 4) < 0$;
b) $\log_3 \left[\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1) \right] < 1$;
c) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1} - 36^x) \geq -2$.

3. Giải bất phương trình sau : $2 \cdot 2^x + 3 \cdot 3^x > 6^x - 1$.

4. Giải bất phương trình sau : $(\sqrt{3 + 5x - 2x^2} + 3)(1 - 3x \cdot 5^{-x}) > 0$.

5. Giải bất phương trình : $\log_x(\log_3(9^x - 72)) \leq 1$.

(Đề thi Tuyển sinh đại học khối B – 2002)

6. Giải bất phương trình : $\log_5(4^x + 144) - 4 \log_5 2 < 1 + \log_5(2^{x-2} + 1)$.

(Đề thi Tuyển sinh đại học khối B – 2006).

§1. SỐ PHỨC

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

I. SỐ PHỨC

Định nghĩa 1

* Số phức z là một biểu thức có dạng $z = a + bi$, trong đó a và b là những số thực và i là số thoả mãn $i^2 = -1$.

* i được gọi là *đơn vị ảo*, a là *phần thực* và b là *phần ảo* của số phức z .

* Tập hợp các số phức được kí hiệu là $\mathbb{C}$.

Đặc biệt :

* Số phức $z = a + 0i$ có phần ảo bằng 0 được coi là số thực và viết là $z = a + 0i = a$

* Số phức $z = 0 + bi$ có phần thực bằng 0 được gọi là số ảo (hay số thuần ảo) và viết là

$$z = 0 + bi = bi$$

* $i = 0 + 1i = 1i$

* Số $0 = 0 + 0i$ vừa là số thực vừa là số ảo.

Định nghĩa 2

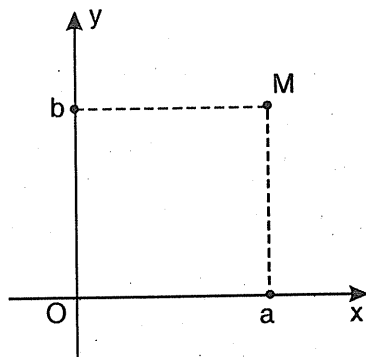
Cho hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$ ($a, b, a', b' \in \mathbb{R}$).

$$z = z' \Leftrightarrow a = a' \text{ và } b = b'.$$

II. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC SỐ PHỨC TRONG MẶT PHẪNG TOẠ ĐỘ OXY

Mỗi số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bởi điểm $M(a; b)$ trong mặt phẳng toạ độ.

Mỗi điểm $M(a; b)$ biểu diễn một số phức $z = a + bi$, ta kí hiệu là $M(z)$. Mặt phẳng toạ độ với việc biểu diễn số phức còn gọi là mặt phẳng phức.



III. PHÉP CỘNG VÀ PHÉP TRỪ SỐ PHỨC

1) Phép cộng

Định nghĩa 3

Với $z = a + bi$, $z' = a' + b'i$ ta định nghĩa :

$$z + z' = a + a' + (b + b')i.$$

2) Tính chất

- *Tính chất kết hợp*

$$(z + z') + z'' = z + (z' + z''), \quad \forall z, z', z'' \in \mathbb{C}$$

- *Tính chất giao hoán*

$$z + z' = z' + z, \quad \forall z, z' \in \mathbb{C}$$

- *Cộng với 0*

$$z + 0 = 0 + z, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Với mọi số phức $z = a + bi$, ta gọi số đối của z là $-z$, kí hiệu $-z = -a - bi$, thì ta có $z + (-z) = (-z) + z = 0$.

3) Phép trừ

Định nghĩa 4

Với hai số phức z, z' , ta định nghĩa $z - z' = z + (-z')$.

Nếu $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$ ($a, b, a', b' \in \mathbb{R}$) thì

$$z - z' = a - a' + (b - b')i.$$

4) Biểu diễn hình học của phép cộng và phép trừ

* Trong mặt phẳng phức, ta cũng coi vector $\vec{u} = (a; b)$ biểu diễn số phức

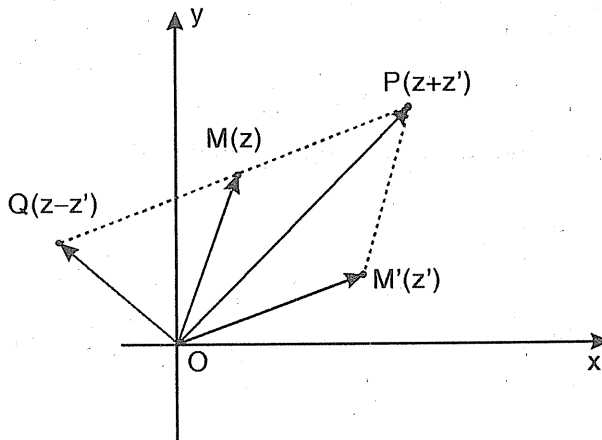
$$z = a + bi.$$

Như vậy số phức z được biểu diễn bởi điểm M cũng có nghĩa là được biểu diễn bởi vector $\vec{OM}$.

* Nếu vector $\vec{u}, \vec{u}'$ lần lượt biểu diễn các số phức z, z' thì :

$$\vec{u} + \vec{u}' \text{ biểu diễn số phức } z + z';$$

$$\vec{u} - \vec{u}' \text{ biểu diễn số phức } z - z'.$$



IV. PHÉP NHÂN SỐ PHỨC

1) Tích của hai số phức

Định nghĩa 5

Với $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$ ($a, b, a', b' \in \mathbb{R}$), ta định nghĩa

$$zz' = aa' - bb' + (ab' + ba')i.$$

2) Chú ý

* Với $k \in \mathbb{R}$ và $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thì $kz = ka + kbi$

* $0z = 0, \forall z \in \mathbb{C}$.

3) Tính chất của phép nhân

- *Tính giao hoán* : $zz' = z'z, \forall z, z' \in \mathbb{C}$
- *Tính kết hợp* : $(zz')z'' = z(z'z''), \forall z, z', z'' \in \mathbb{C}$
- *Nhân với 1* : $1.z = z.1 = z, \forall z \in \mathbb{C}$.

Như vậy ta có thể thực hiện các phép tính cộng, nhân các số phức như phép cộng, nhân các số thực. Đặc biệt là các hằng đẳng thức vẫn đúng trong trường hợp số phức.

V. SỐ PHỨC LIÊN HỢP VÀ MÔĐUN CỦA SỐ PHỨC

1) Số phức liên hợp

Định nghĩa 6

Số phức liên hợp của số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) là số phức $a - bi$, kí hiệu là $\bar{z}$.

$$\bar{z} = \overline{a + bi} = a - bi$$

Nhận xét : * $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) \Rightarrow z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$

* z và $\bar{z}$ được biểu diễn bởi hai điểm đối xứng nhau qua trục Ox.

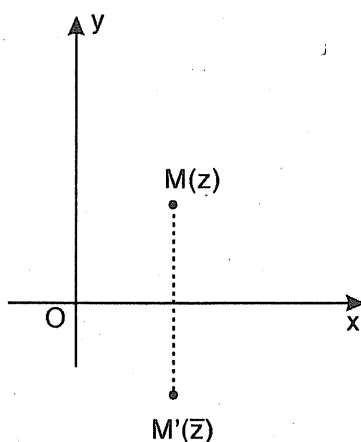
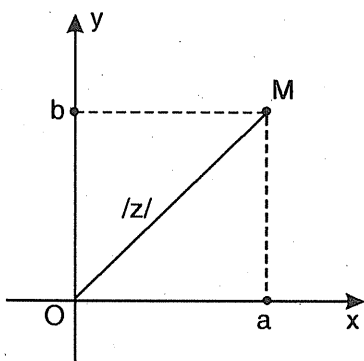
2) Môđun của số phức

Định nghĩa 7

Môđun của số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) là số thực không âm $\sqrt{a^2 + b^2}$, kí hiệu là $|z|$.

Nhận xét :

- Nếu $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thì $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$
- Nếu z là số thực thì môđun của z là giá trị tuyệt đối của số thực đó.
- Nếu $z = 0$ thì $|z| = 0$



VI. PHÉP CHIA CHO SỐ PHỨC KHÁC 0

Định nghĩa 8

Số nghịch đảo của số phức z khác 0 là số phức kí hiệu là z^{-1} , xác định bởi

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Phép chia số phức z' cho số phức z khác 0 : $\frac{z'}{z} = z' \cdot z^{-1} = \frac{z' \bar{z}}{|z|^2}.$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN



Vấn đề 1

THỰC HIỆN CÁC PHÉP TOÁN TRÊN $\mathbb{C}$

I. PHƯƠNG PHÁP

Với $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$ ($a, b, a', b' \in \mathbb{R}$), vận dụng các định nghĩa, ta có :

$$z + z' = a + a' + (b + b')i$$

$$z - z' = a - a' + (b - b')i$$

$$zz' = aa' - bb' + (ab' + ba')i$$

$$\frac{z'}{z} = \frac{z'\bar{z}}{|z|^2} = \frac{(a' + b'i)(a - bi)}{a^2 + b^2} = \frac{a'a + b'b + (b'a - a'b)i}{a^2 + b^2}.$$

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Viết các số phức sau đây dưới dạng $a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) :

a) $z = (2+i)^3 - (1+2i)^3 - (3-i)(2-i)$;

b) $z = \frac{1+i}{1-i} + \frac{3-i}{2-i} - \frac{1+2i}{1+i}$;

c) $z = \frac{(2+i)^2(1+i)}{2(1-i) - 3(1+i)}$.

Giải

$$\begin{aligned} \text{a) } z &= (2+i)^3 - (1+2i)^3 - (3-i)(2-i) \\ &= 2^3 + 3 \cdot 2^2 i + 3 \cdot 2i^2 + i^3 - [1 + 3 \cdot 2i + 3 \cdot (2i)^2 + (2i)^3] - (6 - 3i - 2i + i^2) \\ &= 8 + 12i - 6 - i - (1 + 6i - 12 - 8i) - (6 - 5i - 1) = 8 + 18i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } z &= \frac{1+i}{1-i} + \frac{3-i}{2-i} - \frac{1+2i}{1+i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} + \frac{(3-i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} - \frac{(1+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} \\ &= \frac{1+2i+i^2}{1+1} + \frac{6+i-i^2}{4+1} - \frac{1+i-2i^2}{1+1} = \frac{2i}{2} + \frac{7+i}{5} - \frac{3+i}{2} = -\frac{1}{10} + \frac{7}{10}i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } z &= \frac{(2+i)^2(1+i)}{2(1-i)-3(1+i)} = \frac{(4+i^2+4i)(1+i)}{-1-5i} \\
 &= -\frac{(3+4i)(1+i)}{1+5i} = -\frac{3+4i^2+7i}{1+5i} = \frac{(1-7i)(1-5i)}{(1+5i)(1-5i)} \\
 &= \frac{1+35i^2-12i}{1+25} = \frac{-34-12i}{26} = -\frac{17}{13} - \frac{6}{13}i.
 \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Thực hiện các phép tính sau đây và viết kết quả dưới dạng $a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$)

$$\text{a) } \frac{(2+i)^5}{(1-2i)^3}; \qquad \text{b) } \frac{(1+i)^6}{(2-2i)^5}.$$

Giải

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \frac{(2+i)^5}{(1-2i)^3} &= \left(\frac{2+i}{1-2i} \right)^3 (2+i)^2 = \left(\frac{(2+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} \right)^3 (4+i^2+4i) \\
 &= \left(\frac{5i}{1+4} \right)^3 (3+4i) = i^3(3+4i) = -i(3+4i) = 4-3i.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \frac{(1+i)^6}{(2-2i)^5} &= \frac{(1+i)^6}{2^5(1-i)^5} = \frac{1}{32} \cdot \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^5 (1+i) \\
 &= \frac{1}{32} \cdot \left(\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} \right)^5 (1+i) = \frac{1}{32} \cdot \left(\frac{2i}{2} \right)^5 (1+i) \\
 &= \frac{1}{32} \cdot i^4 \cdot i(1+i) = \frac{1}{32} i(1+i) = -\frac{1}{32} + \frac{1}{32}i.
 \end{aligned}$$

III. BÀI TẬP

1. Viết các số phức sau đây dưới dạng $a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) :

$$\text{a) } z = \frac{1-i\sqrt{2}}{\sqrt{5}-i\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{3}-i\sqrt{5}}; \qquad \text{b) } z = \frac{(7-8i)^{10}}{(8+7i)^{11}}.$$

2. Thực hiện các phép tính :

$$\text{a) } (2+i)^3 - (2-i)^3; \qquad \text{b) } (1+\sqrt{2}i)^4 + (1-\sqrt{2}i)^4;$$

$$c) \frac{(3+i)^4 - (3-i)^4}{(2+i)^3 + (2-i)^3};$$

$$d) \frac{(1-2i)^{13}}{(2+i)^{12}};$$

$$e) \frac{(2-3i)^5(3-2i)^2}{(3+2i)^7};$$

$$f) \frac{(2-3i)^8}{(3+2i)^7} + \frac{(5-4i)^9}{(4+5i)^8} \dots$$

3. Cho $z_1 = 1 - 3i$, $z_2 = 2 + i$, $z_3 = 3 - 4i$. Tính :

$$a) z_1 + 2z_2 - \bar{z}_3;$$

$$b) z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_3;$$

$$c) \overline{z_1 z_2 z_3} + z_2^2 z_3.$$

4. Tìm $m \in \mathbb{R}$ để :

a) Số phức $z = 1 + (1+mi) + (1+mi)^2$ là số thuần ảo.

b) Số phức $z = \frac{m-1+2(m-1)i}{1-mi}$ là số thực.

5. Cho số phức z thỏa mãn $\frac{2z-1}{z+1}$ là số thực. Chứng minh rằng z là số thực.

6. Cho $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Tìm điều kiện của x và y để :

a) z^2 là số thực ;

b) z^2 là số thuần ảo.



Vấn đề 2

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐƠN GIẢN

I. PHƯƠNG PHÁP

* Đưa về phương trình bậc nhất theo z , thực hiện các phép tính số phức và tính z .

* Nếu phương trình chứa z , $|z|$, $\bar{z}$, ta đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) rồi suy ra $\bar{z} = x - yi$ và $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Sau đó ta biến đổi hai vế theo x, y và cân bằng phần thực, phần ảo ở hai vế để tính x, y .

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau đây với ẩn z :

$$a) (2+i)z = z + 2i - 1;$$

$$b) (1-i)(z-2i) = 2+i.$$

Giải

$$\text{a) } (2+i)z = z + 2i - 1 \Leftrightarrow z(2+i-1) = -1+2i \Leftrightarrow z(1+i) = -1+2i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-1+2i}{1+i} \Leftrightarrow z = \frac{(-1+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-1-2i^2+i+2i}{1-i^2} = \frac{1+3i}{1+1}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i.$$

$$\text{b) } (1-i)(z-2i) = 2+i \Leftrightarrow z-2i = \frac{2+i}{1-i}$$

$$\Leftrightarrow z-2i = \frac{(2+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} \Leftrightarrow z-2i = \frac{2+i^2+3i}{1-i^2}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1+3i}{2} + 2i \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} + \frac{7}{2}i.$$

Ví dụ 2. Tìm các số thực x, y trong các trường hợp sau :

$$\text{a) } \frac{x+1}{1-i} = \frac{y-1}{1+i};$$

$$\text{b) } \frac{1}{x-i} + \frac{y}{3-3i} = 2+3i;$$

$$\text{c) } (x+i)(1+yi) = (3+2i)x + 1 - 4i.$$

Giải

$$\text{a) } \frac{x+1}{1-i} = \frac{y-1}{1+i} \Leftrightarrow (x+1)(1+i) = (y-1)(1-i)$$

$$\Leftrightarrow x+1+(x+1)i = y-1-(y-1)i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=y-1 \\ x+1=-y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-2 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1. \end{cases}$$

b) Điều kiện : $x \neq i$.

$$\frac{1}{x-i} + \frac{y}{3-3i} = 2+3i \Leftrightarrow \frac{x+i}{(x-i)(x+i)} + \frac{y(1+i)}{3(1-i)(1+i)} = 2+3i$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+i}{x^2+1} + \frac{y+yi}{3(1+1)} = 2+3i$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{6} + i\left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{y}{6}\right) = 2+3i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{6} = 2 \\ \frac{1}{x^2+1} + \frac{y}{6} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-x}{x^2+1} = 1 \\ \frac{y}{6} = 3 - \frac{1}{x^2+1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x = 0 \\ \frac{y}{6} = 3 - \frac{1}{x^2+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 12 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = 15. \end{cases}$$

c) $(x+i)(1+yi) = (3+2i)x + 1 - 4i \Leftrightarrow x - y + (1+xy)i = 3x + 1 + (2x-4)i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 3x + 1 \\ 1 + xy = 2x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x - 1 \\ 1 + x(-2x - 1) = 2x - 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x - 1 \\ 2x^2 + 3x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\frac{5}{2} \\ y = 4. \end{cases}$$

Ví dụ 3. Giải các phương trình sau với ẩn z :

a) $(z + \bar{z})(1+i) + (\bar{z} - z)(2+3i) = 4-i$;

b) $\frac{z + \bar{z}}{1+i} - \frac{i(z - \bar{z})}{2-2i} = 4+6i$.

Giải

Đặt $z = x + yi \Rightarrow \bar{z} = x - yi$.

a) Ta có $\begin{cases} z + \bar{z} = 2x \\ \bar{z} - z = -2yi \end{cases}$

Phương trình $(z + \bar{z})(1+i) + (\bar{z} - z)(2+3i) = 4-i$ trở thành :

$$2x(1+i) - 2yi(2+3i) = 4-i \Leftrightarrow 2x + 2xi - 4yi + 6y = 4-i$$

$$\Leftrightarrow 2x + 6y + (2x - 4y)i = 4 - i \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 6y = 4 \\ 2x - 4y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Vậy $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

b) Phương trình $\frac{z + \bar{z}}{1+i} - \frac{i(z - \bar{z})}{2-2i} = 4+6i$ trở thành :

$$\begin{aligned} \frac{2x}{1+i} - \frac{2yi^2}{2(1-i)} &= 4+6i & \Leftrightarrow & \frac{2x}{1+i} + \frac{2y}{2(1-i)} = 4+6i \\ \Leftrightarrow \frac{2x(1-i)+y(1+i)}{(1+i)(1-i)} &= 4+6i & \Leftrightarrow & \frac{2x+y+(-2x+y)i}{2} = 4+6i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=8 \\ -2x+y=12 \end{cases} & & \Leftrightarrow & \begin{cases} x=-1 \\ y=10. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $z = -1 + 10i$.

Ví dụ 4. Tìm số phức z, w thoả mãn $\begin{cases} z+w=4+3i \\ z-iw=3-2i. \end{cases}$

Giải

$$\text{Hệ phương trình } \begin{cases} z+w=4+3i \\ z-iw=3-2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z+w=4+3i & (1) \\ (1+i)w=1+5i & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow w = \frac{1+5i}{1+i} = \frac{(1+5i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1+5-i+5i}{1+1} = 3+2i$$

$$(1) \Rightarrow z = 4+3i - w = 4+3i - 3-2i = 1+i.$$

$$\text{Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm : } \begin{cases} z=1+i \\ w=3+2i. \end{cases}$$

III. BÀI TẬP

7. Tìm $x, y \in \mathbb{R}$ thoả mãn các hệ thức sau :

a) $(x+yi)(3-2i) = 13i$;

b) $x(1+i) - y(2+3i) = 10$;

c) $(x-2)(1-i) + (y+1)(2+i) = 2+4i$.

8. Giải các phương trình sau với ẩn z :

a) $(1+i)z = 4-2i$;

b) $(2i+1)(z+i) = 1+i$;

c) $\frac{z+i}{z} = 2+i$.

9. Giải các phương trình sau đây với ẩn z :

a) $\frac{2z-1}{z+i} = 1+i$;

b) $\frac{i}{z} = \frac{1}{2-i} + \frac{1}{3+6i}$;

c) $[(1+2i)\bar{z} + 2-i] \left(iz + \frac{1}{i} \right) = 0$;

d) $2z - \bar{z} = (z + \bar{z} + 1)(1+i) - 2$.

10. Giải các phương trình sau trong $\mathbb{C}$:

a) $z^2 = 2\bar{z}$;

b) $z^2 - |z|^2 + 1 = 0$;

c) $z^2 + |z| = 0$;

d) $\frac{\bar{z}^2 + i}{z + 1} = i$.

11. Giải các hệ phương trình sau với hai ẩn x và w :

a) $\begin{cases} 2z + w = 4 \\ 2i\bar{z} + \bar{w} = 0 \end{cases}$; b) $\begin{cases} z + w = \bar{w} + i \\ z - w = \bar{z} + i \end{cases}$; c) $\begin{cases} z + w = 1 - \bar{w} \\ 2z + \bar{w} = 2 + i + w \end{cases}$.



Vấn đề 3

BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CÁC SỐ PHỨC

I. PHƯƠNG PHÁP

1) Trong mặt phẳng phức, số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) được biểu diễn bằng :

- điểm $M(x; y)$, kí hiệu $M(z)$
- vector $\overrightarrow{OM} = (x; y)$
- vector $\vec{u} = (x; y)$

2) Biểu diễn hình học của z , $-z$, $\bar{z}$

$M(z)$ và $M(-z)$ đối xứng với nhau qua gốc toạ độ.

$M(z)$ và $M(\bar{z})$ đối xứng với nhau qua trục Ox .

3) Biểu diễn hình học của $z + z'$, $z - z'$, kz ($k \in \mathbb{R}$)

Gọi M , $\vec{u}$ lần lượt biểu diễn số phức z ; M' , $\vec{v}$ biểu diễn số phức z' . Ta có :

$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$ và $\vec{u} + \vec{v}$ biểu diễn số phức $z + z'$;

$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM'}$ và $\vec{u} - \vec{v}$ biểu diễn số phức $z - z'$;

$k\overrightarrow{OM}$ và $k\vec{u}$ biểu diễn số phức kz .

4) Với M , A , B lần lượt biểu diễn số phức z , a , b thì :

$OM = |z|$; $AB = |b - a|$.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng phức, cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng biểu diễn các số phức a, b, c. Gọi M là trung điểm AB, G là trọng tâm tam giác ABC và D là điểm đối xứng của A qua G. Các điểm M, G, D lần lượt biểu diễn các số phức m, g, d.

- Tính các số phức m, g, d theo a, b, c.
- Nếu thêm giả thiết $|a| = |b| = |c|$, chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều nếu và chỉ nếu $a + b + c = 0$.

Giải

a) M là trung điểm của AB

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{1}{2}(a + b).$$

G là trọng tâm tam giác ABC

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

$$\Leftrightarrow g = \frac{1}{3}(a + b + c).$$

D là điểm đối xứng của A qua G $\Leftrightarrow$ G là trung điểm của AD

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}$$

$$\Leftrightarrow 2g = a + d \Leftrightarrow d = 2g - a \Leftrightarrow d = 2 \cdot \frac{1}{3}(a + b + c) - a$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}c - \frac{1}{3}a.$$

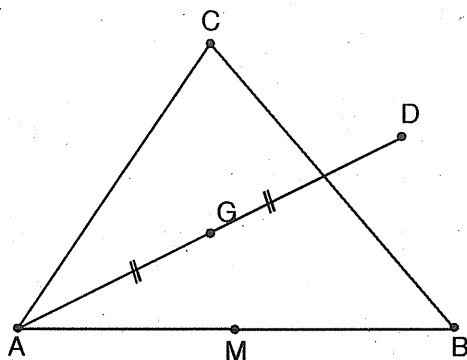
b) Giả thiết $|a| = |b| = |c| \Leftrightarrow OA = OB = OC \Leftrightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Như vậy tam giác ABC là tam giác đều

$$\Leftrightarrow O \equiv G \Leftrightarrow g = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0.$$

Ví dụ 2. Cho hình bình hành ABCD. Ba đỉnh A, B, C lần lượt biểu diễn các số phức

$$a = 2 - 2i, b = -1 + i, c = 5 + mi \quad (m \in \mathbb{R}).$$



- a) Tính số phức d (biểu diễn điểm D) ;
 b) Định m sao cho $ABCD$ là hình chữ nhật.

Giải

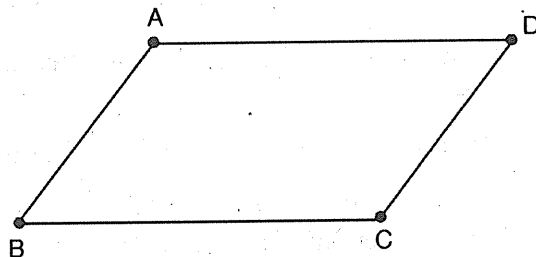
a) $ABCD$ là hình bình hành

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow d - c = a - b$$

$$\Leftrightarrow d = a + c - b$$

$$\Leftrightarrow d = 2 - 2i + 5 + mi - (-1 + i)$$

$$\Leftrightarrow d = 8 + (m - 3)i.$$



b) $ABCD$ là hình chữ nhật $\Leftrightarrow AC = BD \Leftrightarrow |c - a| = |d - b|$

$$\Leftrightarrow |5 + mi - 2 + 2i| = |8 + (m - 3)i + 1 - i| \Leftrightarrow |3 + (m + 2)i| = |9 + (m - 4)i|$$

$$\Leftrightarrow |3 + (m + 2)i|^2 = |9 + (m - 4)i|^2 \Leftrightarrow 3^2 + (m + 2)^2 = 9^2 + (m - 4)^2$$

$$\Leftrightarrow 9 + m^2 + 4m + 4 = 81 + m^2 - 8m + 16 \Leftrightarrow 12m = 84$$

$$\Leftrightarrow m = 7.$$

III. BÀI TẬP

12. Trong mặt phẳng phức, cho ba điểm M, A, B lần lượt biểu diễn các số phức z ,

$$\left(\frac{3 + i\sqrt{3}}{3} \right) z \text{ và } \frac{i}{\sqrt{3}} z.$$

Chứng minh rằng :

- a) $\forall z \in \mathbb{C}$, tam giác OMA vuông tại M ;
 b) $\forall z \in \mathbb{C}$, tam giác MAB là tam giác vuông ;
 c) $\forall z \in \mathbb{C}$, tứ giác $OMAB$ là hình chữ nhật.

13. Gọi A, B, C là ba điểm lần lượt biểu diễn các số phức

$$a = -1 - i, b = i, c = 1 + ki \quad (k \in \mathbb{R}).$$

- a) Định k để ba điểm A, B, C thẳng hàng ;
 b) Xét hàm số $w = f(z) = z^2$. Đặt $a' = f(a), b' = f(b), c' = f(c)$. Tính a', b', c' ;
 c) Gọi A', B', C' lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức a', b', c' . Định k để A', B', C' là ba điểm thẳng hàng ;

d) Nếu $\vec{u}, \vec{v}$ lần lượt biểu diễn các số phức z, z' . Chứng minh rằng $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \frac{z}{z'}$ là số ảo.

Áp dụng : tính k để tam giác $A'B'C'$ vuông tại A' .

14. Cho ba điểm A, B, C lần lượt biểu diễn các số phức $a = 1, b = -1 + \alpha i$ và $c = b^2$.

- Xác định các số phức được biểu diễn bởi các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$;
- Xác định α sao cho A, B, C là ba đỉnh của một tam giác ;
- Với điều kiện ở câu b), chứng minh rằng ABC là tam giác vuông ;
- Tìm số phức d biểu diễn bởi điểm D sao cho ABDC là hình chữ nhật.

15. Cho ba điểm A, B, C biểu diễn các số phức $a = 1 + i, b = a^2$ và $c = x - i$ ($x \in \mathbb{R}$).

Tìm x sao cho :

- Tam giác ABC vuông tại B ;
- Tam giác ABC cân tại C.



Vấn đề 4

TÌM TẬP HỢP ĐIỂM

I. PHƯƠNG PHÁP

1) Giả sử các điểm M, A, B lần lượt biểu diễn các số phức z, a, b .

* $|z - a| = |z - b| \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow M$ thuộc đường trung trực của đoạn AB.

* $|z - a| + |z - b| = k$ ($k \in \mathbb{R}, k > 0, k > |a - b|$) $\Leftrightarrow MA + MB = k$

$\Leftrightarrow M$ thuộc elip (E) nhận A, B làm hai tiêu điểm và có độ dài trục lớn bằng k.

2) Giả sử M và M' lần lượt biểu diễn các số phức z và $w = f(z)$.

Đặt $z = x + yi$ và $w = u + vi$ ($x, y, u, v \in \mathbb{R}$).

Hệ thức $w = f(z)$ tương đương với hai hệ thức liên hệ giữa x, y, u, v .

* Nếu biết một hệ thức giữa x, y , ta tìm được một hệ thức giữa u, v và suy ra được tập hợp các điểm M'.

* Nếu biết một hệ thức giữa u, v , ta tìm được một hệ thức giữa x, y và suy ra được tập hợp các điểm M .

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z trong các trường hợp sau :

a) $|z + i| = |z - i|$;

b) $\left| \frac{z+1-3i}{z-1+i} \right| = 1$;

c) $|z - 2 + i| = \sqrt{5}$;

d) $|z - 1| + |z + 1| = 4$;

e) $\frac{2z+1}{z-1}$ là số ảo, $z \neq 1$;

f) $\frac{z+1}{z-2i}$ là số thực, $z \neq 2i$;

g) $z_0 z + \overline{z_0 z} + 1 = 0$ với $z_0 = 1 - i$.

Giải

a) Đặt $a = -i$ và $b = i$.

Gọi $A(0 ; -1)$ và $B(0 ; 1)$ lần lượt biểu diễn các số phức a và b , suy ra $|z + i| = |z - a| = MA$ và $|z - i| = |z - b| = MB$.

Ta có $|z + i| = |z - i| \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow M$ thuộc đường trung trực của AB , đó chính là trục Ox .

Vậy tập hợp các điểm M là trục Ox .

b) $\left| \frac{z+1-3i}{z-1+i} \right| = 1$

$\Leftrightarrow |z + 1 - 3i| = |z - 1 + i| \quad (1)$

Đặt $a = -1 + 3i$ biểu diễn bởi điểm $A(-1 ; 3)$ và $b = 1 - i$ được biểu diễn bởi điểm $B(1 ; -1)$.

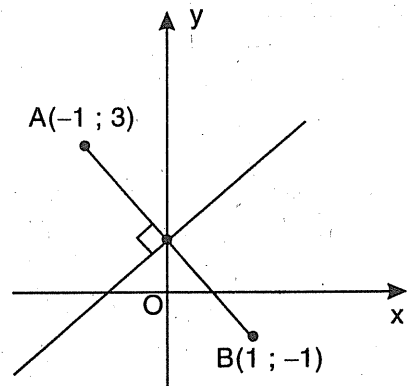
Ta có $(1) \Leftrightarrow |z - a| = |z - b| \Leftrightarrow MA = MB$.

Vậy tập hợp các điểm M là đường trung trực của đoạn AB .

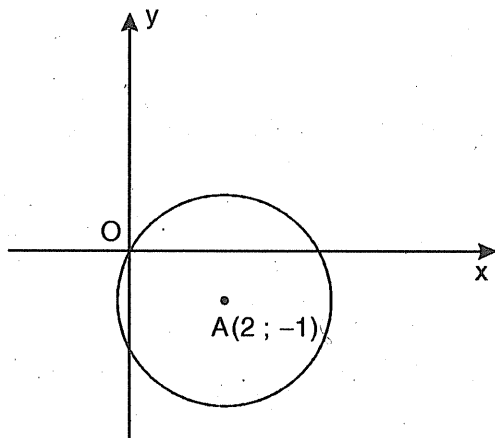
c) Đặt $a = 2 - i$ biểu diễn bởi điểm $A(2 ; -1)$.

Ta có $|z - 2 + i| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |z - a| = \sqrt{5}$

$\Leftrightarrow MA = \sqrt{5}$.



Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A(2 ; -1), bán kính $R = \sqrt{5}$.



d) Đặt $a = 1$ và $b = -1$, lần lượt được biểu diễn bởi các điểm A(1 ; 0) và B(-1 ; 0).

Ta có $|z - 1| + |z + 1| = 4 \Leftrightarrow |z - a| + |z - b| = 4 \Leftrightarrow MA + MB = 4$.

Vậy tập hợp các điểm M là elip (E) nhận A, B là hai tiêu điểm, có độ dài trục lớn là 4.

e) Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Với $z \neq 1$, ta có :

$$\begin{aligned} \frac{2z+1}{z-1} &= \frac{2x+2yi+1}{x+yi-1} = \frac{(2x+1+2yi)(x-1-yi)}{(x-1+yi)(x-1-yi)} \\ &= \frac{(2x+1)(x-1)+2y^2+i[2y(x-1)-y(2x+1)]}{(x-1)^2+y^2} \end{aligned}$$

$$\frac{2z+1}{z-1} \text{ là số ảo } \Leftrightarrow \text{phần thực của } \frac{2z+1}{z-1} \text{ triệt tiêu}$$

$$\Leftrightarrow (2x+1)(x-1)+2y^2=0 \Leftrightarrow 2x^2-x-1+2y^2=0 \Leftrightarrow x^2-\frac{x}{2}+y^2-\frac{1}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{16}\right)+y^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{16}$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{4}\right)^2+y^2=\frac{9}{16}.$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn (C), tâm I($\frac{1}{4}$; 0), bán kính $R = \frac{3}{4}$, bỏ đi điểm A(1 ; 0).

f) Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Với $z \neq 2i$, ta có :

$$\begin{aligned}\frac{z+1}{z-2i} &= \frac{x+1+yi}{x+(y-2)i} = \frac{(x+1+yi)(x-(y-2)i)}{(x+(y-2)i)(x-(y-2)i)} \\ &= \frac{x(x+1)+y(y-2)+i[xy-(x+1)(y-2)]}{x^2+(y-2)^2}\end{aligned}$$

$$\frac{z+1}{z-2i} \text{ là số thực } \Leftrightarrow \text{phần ảo triệt tiêu} \Leftrightarrow xy - (x+1)(y-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow xy - (xy - 2x + y - 2) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 2x + 2.$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng có phương trình $y = 2x + 2$, bỏ đi điểm A(0 ; 2) vì $z \neq 2i$.

g) Với $z_0 = 1 - i$, đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), ta có :

$$z_0 \cdot z = (1 - i)(x + yi) = x + y + (y - x)i ;$$

$$\overline{z_0 \cdot z} = x + y - (y - x)i.$$

$$\text{Như vậy } z_0 z + \overline{z_0 z} + 1 = 0 \Leftrightarrow 2(x + y) + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y + 1 = 0.$$

Tập hợp các điểm M là đường thẳng có phương trình $2x + 2y + 1 = 0$.

Ví dụ 2. Gọi M và M' là các điểm lần lượt biểu diễn các số phức z và $z' = \frac{1}{z}$

($z \neq 0$).

Đặt $z = x + yi$ và $z' = x' + y'i$ ($x, y, x', y' \in \mathbb{R}$)

a) Tính x', y' theo x, y và tính x, y theo x', y' ;

b) Cho M di động trên đường tròn (C) tâm A(-1 ; 1), bán kính $R = \sqrt{2}$. Tìm tập hợp các điểm M' ;

c) Cho M di động trên đường thẳng d : $y = x + 1$, tìm tập hợp các điểm M'.

Giải

a) Ta có

$$z' = \frac{1}{z} \Leftrightarrow z' = \frac{z}{z \cdot \overline{z}} \Leftrightarrow z' = \frac{z}{|z|^2}$$

$$\Leftrightarrow x' + y'i = \frac{x + yi}{x^2 + y^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ y' = \frac{y}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

Tương tự, ta có :

$$z' = \frac{1}{\bar{z}} \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z'} \Leftrightarrow z = \frac{1}{\bar{z}'} \Leftrightarrow z = \frac{z'}{z' \cdot \bar{z}'} = \frac{z'}{|z'|^2}$$

$$\Leftrightarrow x + yi = \frac{x' + y'i}{x'^2 + y'^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x'}{x'^2 + y'^2} \\ y = \frac{y'}{x'^2 + y'^2} \end{cases}$$

b) Đường tròn (C) tâm A(-1 ; 1), bán kính $R = \sqrt{2}$ có phương trình :

$$(C) : (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0.$$

Điểm $M \in (C) \Leftrightarrow$ toạ độ M (x ; y) thoả mãn phương trình :

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2 + 2x - 2y}{x^2 + y^2} = 0 \quad (\text{vì } x^2 + y^2 \neq 0 \text{ do } z \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{2x}{x^2 + y^2} - \frac{2y}{x^2 + y^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x' - 2y' + 1 = 0 \quad (\text{vì } \frac{x}{x^2 + y^2} = x' \text{ và } \frac{y}{x^2 + y^2} = y' \text{ theo kết quả của câu a)})$$

Suy ra toạ độ của điểm $M'(x' ; y')$ thoả mãn phương trình $2x' - 2y' + 1 = 0$.

Vậy tập hợp các điểm M' là đường thẳng có phương trình $2x - 2y + 1 = 0$.

c) Điểm M di động trên đường thẳng d : $y = x + 1$ nên toạ độ của M(x ; y) thoả mãn $y = x + 1$

$$\Leftrightarrow \frac{y'}{x'^2 + y'^2} = \frac{x'}{x'^2 + y'^2} + 1 \quad (\text{vì theo câu a ta có } y = \frac{y'}{x'^2 + y'^2} \text{ và}$$

$$x = \frac{x'}{x'^2 + y'^2})$$

$$\Leftrightarrow y' = x' + x'^2 + y'^2 \Leftrightarrow x'^2 + y'^2 + x' - y' = 0.$$

Suy ra toạ độ của $M'(x' ; y')$ thoả mãn phương trình : $x'^2 + y'^2 + x' - y' = 0$.

Vậy tập hợp các điểm M' là đường tròn (C') có phương trình :

$$x^2 + y^2 + x - y = 0.$$

III. BÀI TẬP

16. Gọi M và P lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) và $w = z^2$. Tìm tập hợp các điểm P trong các trường hợp sau đây :

a) M thuộc đường thẳng $d : y = 2x$;

b) M thuộc đường thẳng $d : y = x + 1$;

c) Chứng minh rằng $\forall z, z' \in \mathbb{C}$, ta có $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$. Từ đó suy ra $|z^2| = |z|^2$.

Tìm tập các điểm P khi M thuộc đường tròn $(C) : x^2 + y^2 = 1$;

d) M thuộc hypebol $(C) : y = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$).

17. Tìm tập hợp các điểm $M(z)$ biết z thoả mãn hệ thức sau :

a) $|z - (2 + i)| = 1$;

b) $|z + 1 - i| = |z - (3 - i)|$;

c) $\left| \frac{3-i}{z} - 4 \right| = 4$;

d) $|(1 - i)z - 4| = 2$;

e) $|z - 4| - |z + 4| = 4\sqrt{3}$.

18. Tìm tập hợp các điểm $M(z)$ biết :

a) $w = \frac{z^2}{z-1}$ là số thực ;

b) $w = \frac{z^2}{z-i}$ là số thuần ảo ;

c) $w = \frac{z+2+i}{z-i}$ là số thực ;

d) $w = \frac{z+2+i}{z-i}$ là số thuần ảo.

19. Cho điểm M biểu diễn số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) và điểm P biểu diễn số phức $w = z^2$. Tìm tập hợp các điểm P trong các trường hợp sau :

a) M di động trên đường thẳng $d : y = x - 1$;

b) M di động trên đường tròn tâm O , bán kính $R = 2$;

c) $|z + 2 - i| = |z - 2 + i|$.

§2. CĂN BẬC HAI CỦA SỐ PHỨC VÀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

I. CĂN BẬC HAI CỦA SỐ PHỨC

Định nghĩa

Cho số phức w . Mỗi số phức z thoả mãn $z^2 = w$ được gọi là một căn bậc hai của w .

Mỗi căn bậc hai của w là một nghiệm của phương trình $z^2 - w = 0$.

1) Trường hợp w là số thực

– Căn bậc hai của 0 là 0.

– Xét số thực $w = a \neq 0$

Khi $a > 0$, ta có $z^2 - a = (z - \sqrt{a})(z + \sqrt{a})$.

Phương trình $z^2 - a = 0 \Leftrightarrow z = \sqrt{a}$ hoặc $z = -\sqrt{a}$.

Vậy số thực a dương có hai căn bậc hai là $\sqrt{a}$ và $-\sqrt{a}$.

Khi $a < 0$, ta có $z^2 - a = z^2 - (-a i^2) = (z - \sqrt{-a} i)(z + \sqrt{-a} i)$.

Phương trình $z^2 - a = 0 \Leftrightarrow z = \sqrt{-a} i$ hoặc $z = -\sqrt{-a} i$.

Vậy số thực a âm có hai căn bậc hai là $\sqrt{-a} i$ và $-\sqrt{-a} i$.

Ví dụ : $-1 = i^2 \Rightarrow -1$ có hai căn bậc hai là i và $-i$.

$-a^2 = a^2 i^2 \Rightarrow -a^2$ có hai căn bậc hai là ai và $-ai$.

2) Trường hợp $w = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$)

Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

z là căn bậc hai của $w \Leftrightarrow z^2 = w \Leftrightarrow (x + yi)^2 = a + bi$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$. Giải hệ phương trình này, ta luôn tính được 2 nghiệm $(x; y)$.

Mỗi nghiệm $(x; y)$ của hệ phương trình trên cho ta một căn bậc hai $z = x + yi$ của số phức $w = a + bi$.

TÓM TẮT

- Số 0 có đúng 1 căn bậc hai là 0.
- Mỗi số phức khác 0 có đúng 2 căn bậc hai đối nhau.

Đặc biệt, số thực a dương có 2 căn bậc hai là $\sqrt{a}$ và $-\sqrt{a}$;
số thực a âm có 2 căn bậc hai là $\sqrt{-a}i$ và $-\sqrt{-a}i$.

II. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Xét phương trình : $Az^2 + Bz + C = 0$ (A, B, C là số phức và $A \neq 0$) (1)

Ta có : $\Delta = B^2 - 4AC$.

Nếu $\Delta \neq 0$, Δ có 2 căn bậc hai là δ và $-\delta$, phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt là

$$z_1 = \frac{-B + \delta}{2A} \text{ và } z_2 = \frac{-B - \delta}{2A}.$$

Nếu $\Delta = 0$, phương trình (1) có nghiệm kép

$$z_1 = z_2 = -\frac{B}{2A}.$$

III. ĐỊNH LÝ CƠ BẢN CỦA ĐẠI SỐ

Định lý

Mọi phương trình bậc n ($n \geq 1$) luôn có n nghiệm phức (không nhất thiết phân biệt).

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN



Vấn đề 1

TÍNH CĂN BẬC HAI, CĂN BẬC BỐN CỦA MỘT SỐ PHỨC w

I. PHƯƠNG PHÁP

* Để tính căn bậc hai $z = x + yi$ của số phức $w = a + bi$, ta giải phương trình :

$$z^2 = w \Leftrightarrow (x + yi)^2 = a + bi \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases} \text{ . Tính } x \text{ và } y, \text{ suy ra } z.$$

* Để tính căn bậc bốn của số phức w , trước hết ta tính căn bậc hai z của w . Sau đó ta lại tính căn bậc hai của z .

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính căn bậc hai của các số phức sau :

a) -9 ; b) $3 + 4i$; c) $1 - \sqrt{3}i$; d) $-\frac{1}{4i}$.

Giải

a) Gọi z là căn bậc hai của -9 , ta có :

$$z^2 = -9 \Leftrightarrow z^2 = 9i^2 \Leftrightarrow z = 3i \text{ hoặc } z = -3i.$$

Vậy -9 có hai căn bậc hai là $3i$ và $-3i$.

b) Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của $3 + 4i$, ta có :

$$\begin{aligned} z^2 = 3 + 4i &\Leftrightarrow (x + yi)^2 = 3 + 4i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = 3 + 4i \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 & (1) \\ xy = 2 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

$$(2) \Rightarrow x \neq 0 \text{ và } y = \frac{2}{x}.$$

$$(1) \Rightarrow x^2 - \frac{4}{x^2} = 3 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -1 \text{ (loại) hoặc}$$

$$x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 1$$

$$x = -2 \Rightarrow y = -1.$$

Vậy $3 + 4i$ có hai căn bậc hai là $2 + i$ và $-2 - i$.

c) Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) là căn bậc hai của

$$1 - \sqrt{3}i \Leftrightarrow (x + yi)^2 = 1 - \sqrt{3}i.$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = 1 - \sqrt{3}i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 1 & (1) \\ 2xy = -\sqrt{3} & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow x \neq 0 \text{ và } y = -\frac{\sqrt{3}}{2x}.$$

$$(1) \Rightarrow x^2 - \frac{3}{4x^2} = 1 \Leftrightarrow 4x^4 - 4x^2 - 3 = 0 \quad x^2 = -\frac{1}{2} \text{ (loại) hoặc } x^2 = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Với } x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{2x} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Với } x = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{2x} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy có hai căn bậc hai của } 1 - \sqrt{3}i \text{ là } z = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \text{ và } -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

$$\text{d) Gọi } z = x + yi \text{ (} x, y \in \mathbb{R} \text{) là căn bậc hai của } -\frac{1}{4i}$$

$$\Leftrightarrow z^2 = -\frac{1}{4i} \Leftrightarrow (x + yi)^2 = \frac{i^2}{4i}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = \frac{i}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{8x} \\ x^2 - \frac{1}{64x^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{8x} \\ 64x^4 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{8x} \\ x^4 = \frac{1}{64} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{8x} \\ x^2 = \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ y = \frac{1}{8x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } -\frac{1}{4i} \text{ có hai căn bậc hai là } z = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i \text{ và } z = -\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i\right).$$

Nhận xét : mọi số phức đều có 2 căn bậc hai đối nhau.

Ví dụ 2

a) Tìm số phức z thoả mãn $z^2 = -164 + 48\sqrt{5}i$;

b) Tìm số phức w thoả mãn $w^4 = -164 + 48\sqrt{5}i$.

Giải

a) Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$), ta có :

$$\begin{aligned} z^2 = -164 + 48\sqrt{5}i &\Leftrightarrow (x + yi)^2 = -164 + 48\sqrt{5}i \\ &\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = -164 + 48\sqrt{5}i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -164 & (1) \\ xy = 24\sqrt{5} & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

$$(2) \Rightarrow x \neq 0 \text{ và } y = \frac{24\sqrt{5}}{x}$$

$$(1) \Rightarrow x^2 - \left(\frac{24\sqrt{5}}{x}\right)^2 = -164 \Leftrightarrow x^4 + 164x^2 - 2880 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = -180 \text{ (loại)} \Leftrightarrow x^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 4.$$

$$\text{Với } x = 4 \Rightarrow y = 6\sqrt{5}.$$

$$\text{Với } x = -4 \Rightarrow y = -6\sqrt{5}.$$

Vậy có hai số phức z thoả mãn $z^2 = -164 + 48\sqrt{5}i$ là $z = 4 + 6\sqrt{5}i$ và $z = -4 - 6\sqrt{5}i$.

b) Ta có $z^2 = -164 + 48\sqrt{5}i$ (và) $w^4 = -164 + 48\sqrt{5}i$ suy ra
 $w^4 = z^2 \Leftrightarrow (w^2 - z)(w^2 + z) = 0 \Leftrightarrow w^2 = \pm z.$

Theo kết quả trên ta có $z = \pm (4 + 6\sqrt{5}i) \Rightarrow w^2 = 4 + 6\sqrt{5}i$ hoặc
 $w^2 = -4 - 6\sqrt{5}i.$

Đặt $w = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Trường hợp 1 : Với $w^2 = 4 + 6\sqrt{5}i$, ta có $(x + yi)^2 = 4 + 6\sqrt{5}i$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = 4 + 6\sqrt{5}i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 4 & (1) \\ 2xy = 6\sqrt{5} & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow x \neq 0 \text{ và } y = \frac{3\sqrt{5}}{x}$$

$$(1) \Rightarrow x^2 - \left(\frac{3\sqrt{5}}{x}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 - 45 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -5 \text{ (loại) hoặc}$$

$$x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3.$$

$$\text{Với } x = 3 \Rightarrow y = \frac{3\sqrt{5}}{3} = \sqrt{5}$$

$$\text{Với } x = -3 \Rightarrow y = \frac{3\sqrt{5}}{-3} = -\sqrt{5}.$$

$$\text{Vậy } w = \pm (3 + \sqrt{5}i).$$

$$\text{Trường hợp 2: Với } w^2 = -4 - 6\sqrt{5}i, \text{ ta có } (x + yi)^2 = -4 - 6\sqrt{5}i$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = -4 - 6\sqrt{5}i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -4 & (1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2xy = -6\sqrt{5} & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow x \neq 0 \text{ và } y = -\frac{3\sqrt{5}}{x}$$

$$(1) \Rightarrow x^2 - \left(-\frac{3\sqrt{5}}{x}\right)^2 = -4 \Leftrightarrow x^4 + 4x^2 - 45 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -9 \text{ (loại) hoặc}$$

$$x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{5}.$$

$$\text{Với } x = \sqrt{5} \Rightarrow y = -\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = -3$$

$$\text{Với } x = -\sqrt{5} \Rightarrow y = -\frac{3\sqrt{5}}{-\sqrt{5}} = 3.$$

$$\text{Vậy } w = \pm (\sqrt{5} - 3i).$$

Kết luận: có 4 số phức w thỏa mãn $w^4 = -164 + 48\sqrt{5}i$ là:

$$w = \pm (3 + \sqrt{5}i) \text{ và } w = \pm (\sqrt{5} - 3i).$$

III. BÀI TẬP

1. Tính căn bậc hai của các số phức sau :

a) $-15 - 8i$; b) $1 + 4\sqrt{3}i$; c) -4 ; d) $-5 + 12i$.

2. a) Tính căn bậc hai của số phức $-23 - 4\sqrt{6}i$;

b) Tính căn bậc bốn của số phức $-23 - 4\sqrt{6}i$.

3. a) Tìm số phức z thoả mãn $z^4 = -1$;

b) Tìm số phức z thoả mãn $\left(\frac{z-1}{z+i}\right)^4 = -1$.

4. Giải phương trình :

a) $\left(\frac{z-1}{z+i}\right)^4 = 1$; b) $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1$.



Vấn đề 2

PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

I. PHƯƠNG PHÁP

1) Dùng hằng đẳng thức đưa phương trình về dạng $(Az + B)^2 - C^2 = 0$ và biến đổi tương đương thành phương trình tích

$$(Az + B + C)(Az + B - C) = 0.$$

2) Với phương trình $Az^2 + Bz + C = 0$:

Ta tính $\Delta = B^2 - 4AC$ và tính căn bậc hai của Δ .

Gọi δ là một căn bậc hai của Δ , suy ra nghiệm của phương trình là

$$z = \frac{-B \pm \delta}{2A}.$$

3) Chú ý

a) Ta chứng minh được với mọi phương trình bậc hai *hệ số thực*, nếu $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$ và $y \neq 0$) là một nghiệm thì $\bar{z} = x - yi$ cũng là nghiệm của phương trình đó.

b) Do tính chất của phép nhân số phức, định lí Vi-ét vẫn đúng cho phương trình bậc hai với ẩn $z \in \mathbb{C}$. Do đó các cách tính nhằm nghiệm của phương trình bậc hai vẫn áp dụng được.

$$\text{Chẳng hạn : } A + B + C = 0 \Rightarrow z = 1, z = \frac{C}{A}$$

$$A - B + C = 0 \Rightarrow z = -1, z = -\frac{C}{A}.$$

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải các phương trình bậc hai sau đây :

$$\text{a) } z^2 + 4z - 5 = 0 ; \quad \text{b) } (2z - 1)^2 + 9 = 0 ;$$

$$\text{c) } z^2 - 8z + 16 - 2i = 0 ; \quad \text{d) } z^2 + 3z + \frac{25}{4} = 0.$$

Giải

a) Phương trình : $z^2 + 4z - 5 = 0$ có các hệ số $A + B + C = 1 + 4 - 5 = 0$ nên phương trình có hai nghiệm là $z_1 = 1$ và $z_2 = -5$.

$$\begin{aligned} \text{b) Phương trình } (2z - 1)^2 + 9 = 0 &\Leftrightarrow (2z - 1)^2 = -9 \Leftrightarrow (2z - 1)^2 = (3i)^2 \\ &\Leftrightarrow 2z - 1 = 3i \text{ hoặc } 2z - 1 = -3i \Leftrightarrow z = \frac{1+3i}{2} \text{ hoặc } z = \frac{1-3i}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) Phương trình } z^2 - 8z + 16 - 2i = 0 &\Leftrightarrow (z - 4)^2 = 2i \\ &\Leftrightarrow (z - 4)^2 = (1 + i)^2 \text{ (chú ý là } (1 + i)^2 = 1 + i^2 + 2i = 1 - 1 + 2i = 2i) \\ &\Leftrightarrow z - 4 = 1 + i \text{ hoặc } z - 4 = -1 - i \\ &\Leftrightarrow z = 5 + i \text{ hoặc } z = 3 - i. \end{aligned}$$

$$\text{d) Phương trình } z^2 + 3z + \frac{25}{4} = 0 \text{ có :}$$

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot \frac{25}{4} = -16 = (4i)^2. \text{ Phương trình có hai nghiệm là } z = \frac{-3 \pm 4i}{2}.$$

Ví dụ 2. Giải các phương trình bậc hai hệ số phức sau đây :

$$\begin{aligned} \text{a) } z^2 - 7z + 11 + 3i &= 0 ; \\ \text{b) } z^2 + 2(1 - 2i)z - (7 + 4i) &= 0 ; \\ \text{c) } z^2 - 2(2 - i)z + 6 - 8i &= 0 ; \\ \text{d) } z^2 - (2 + i)z + i + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Giải

a) Phương trình $z^2 - 7z + 11 + 3i = 0$ có :

$$\Delta = 49 - 44 - 12i = 5 - 12i.$$

Đặt $\Delta = (x + yi)^2$; $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } (x + yi)^2 = 5 - 12i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 & (1) \\ 2xy = -12 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow x \neq 0 \text{ và } y = -\frac{6}{x}$$

$$(1) \Rightarrow x^2 - \frac{36}{x^2} = 5 \Leftrightarrow x^4 - 5x^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4 \text{ (loại) hoặc } x^2 = 9 \\ \Leftrightarrow x = \pm 3.$$

$$\text{Với } x = 3 \Rightarrow y = -2$$

$$\text{Với } x = -3 \Rightarrow y = 2.$$

$$\text{Vậy } \Delta = (3 - 2i)^2.$$

Phương trình có hai nghiệm là :

$$z_1 = \frac{7+3-2i}{2} = 5-i \text{ và } z_2 = \frac{7-3+2i}{2} = 2+i.$$

b) Phương trình $z^2 + 2(1 - 2i)z - (7 + 4i) = 0$ có :

$$\Delta' = (1 - 2i)^2 + 7 + 4i = 1 - 4 - 4i + 7 + 4i = 4.$$

Phương trình có hai nghiệm là

$$z_1 = -1 + 2i + 2 = 1 + 2i \text{ và } z_2 = -1 + 2i - 2 = -3 + 2i.$$

c) Phương trình $z^2 - 2(2 - i)z + 6 - 8i = 0$ có :

$$\Delta' = (2 - i)^2 - 6 + 8i = 4 - 1 - 4i - 6 + 8i = -3 + 4i.$$

Đặt $-3 + 4i = (x + yi)^2$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 & (1) \\ 2xy = 4 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow x \neq 0 \text{ và } y = \frac{2}{x}$$

$$(1) \Rightarrow x^2 - \frac{4}{x^2} = -3 \Leftrightarrow x^4 + 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \text{ hoặc } x^2 = -4 \text{ (loại)}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 1.$$

$$\text{Với } x = 1 \Rightarrow y = 2$$

$$\text{Với } x = -1 \Rightarrow y = -2.$$

$$\text{Vậy } \Delta' = -3 + 4i = (1 + 2i)^2$$

Phương trình có hai nghiệm là $z_1 = 2 - i + 1 + 2i = 3 + i$ và

$$z_2 = 2 - i - 1 - 2i = 1 - 3i.$$

d) Phương trình $z^2 - (2 + i)z + i + 1 = 0$ có các hệ số thoả mãn

$$a + b + c = 1 - 2 - i + i + 1 = 0, \text{ suy ra phương trình có hai nghiệm là}$$

$$z_1 = 1 \text{ và } z_2 = 1 + i.$$

Ví dụ 3.

a) Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình bậc hai hệ số phức $Az^2 + Bz + C = 0$ ($A \neq 0$).

$$\text{Chúng minh rằng : } z_1 + z_2 = \frac{-B}{A} \text{ và } z_1 \cdot z_2 = \frac{C}{A}.$$

Áp dụng 1 : Biết phương trình bậc hai $(1 - i)z^2 + Bz + C = 0$ có hai nghiệm là $z_1 = 2$ và $z_2 = 1 + 2i$. Tính B và C.

b) Cho hai số phức có tổng $z_1 + z_2 = S$ và tích $z_1 \cdot z_2 = P$. Chứng minh rằng z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình bậc hai

$$z^2 - Sz + P = 0.$$

Áp dụng 2 : Tìm hai số phức có tổng bằng 4 và tích bằng $4 + 2i$.

Giải

a) Phương trình $Az^2 + Bz + C = 0$ có $\Delta = B^2 - 4AC$. Gọi δ là một căn bậc hai của Δ .

Phương trình có hai nghiệm là

$$z_1 = \frac{-B + \delta}{2A} \text{ và } z_2 = \frac{-B - \delta}{2A}.$$

$$\text{Ta có } z_1 + z_2 = \frac{-B + \delta}{2A} + \frac{-B - \delta}{2A} = -\frac{B}{A}$$

$$\text{và } z_1 \cdot z_2 = \left(\frac{-B + \delta}{2A} \right) \left(\frac{-B - \delta}{2A} \right) = \frac{(-B)^2 - \delta^2}{4A^2} = \frac{B^2 - (B^2 - 4AC)}{4A^2} = \frac{C}{A}.$$

Áp dụng 1 : $(1-i)z^2 + Bz + C = 0$ có hai nghiệm là $z_1 = 2$ và $z_2 = 1 + 2i$.

Áp dụng kết quả trên, ta có :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{B}{A} \\ z_1 \cdot z_2 = \frac{C}{A} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + (1+2i) = \frac{-B}{1-i} & (1) \\ 2 \cdot (1+2i) = \frac{C}{1-i} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow B = (-1+i)(3+2i) = -3 + 2i^2 - 2i + 3i = -5 + i$$

$$(2) \Rightarrow C = (1-i)(2+4i) = 2 - 4i^2 - 2i + 4i = 6 + 2i.$$

Vậy $B = -5 + i$ và $C = 6 + 2i$.

b) Hiển nhiên z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình bậc hai

$$(z - z_1)(z - z_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 z_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow z^2 - Sz + P = 0.$$

Áp dụng 2: Gọi hai số phức phải tìm là z_1 và z_2 . Theo giả thiết ta có

$$S = z_1 + z_2 = 4 \quad \text{và} \quad P = z_1 \cdot z_2 = 4 + 2i.$$

Do đó z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình bậc hai $z^2 - Sz + P = 0$ hay $z^2 - 4z + 4 + 2i = 0$.

Phương trình trên tương đương với $(z - 2)^2 = -2i$

$$\Leftrightarrow (z - 2)^2 = (1-i)^2 \Leftrightarrow z - 2 = \pm (1-i)$$

$$\Leftrightarrow z = 2 + 1 - i = 3 - i \quad \text{hoặc} \quad z = 2 - 1 + i = 1 + i.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm là $z_1 = 3 - i$ và $z_2 = 1 + i$.

Ví dụ 4. Cho phương trình bậc hai hệ số thực $Az^2 + Bz + C = 0$ (1), với $A \neq 0$.

a) Chứng minh rằng nếu phương trình (1) có 1 nghiệm thực z_1 thì nghiệm còn lại z_2 cũng là số thực.

b) Chứng minh rằng nếu phương trình (1) có 1 nghiệm z_0 không là số thực thì $\overline{z_0}$ cũng là 1 nghiệm.

Áp dụng : Tìm phương trình bậc hai hệ số thực biết phương trình có 1 nghiệm là $2 + i$.

Giải

a) Ta biết rằng phương trình bậc hai $Az^2 + Bz + C = 0$ (1) có hai nghiệm là z_1 và z_2 .

$$\text{Theo công thức Vi-ét ta có } z_1 + z_2 = -\frac{B}{A}.$$

Vì $A, B \in \mathbb{R}$ nên $-\frac{B}{A} \in \mathbb{R}$ và ta cũng có $z_1 \in \mathbb{R}$. Vậy $z_2 \in \mathbb{R}$.

b) Ta có z_0 là nghiệm của phương trình $Az^2 + Bz + C = 0$ nên :

$Az_0^2 + Bz_0 + C = 0 \Rightarrow \overline{Az_0^2 + Bz_0 + C} = 0$ (vì liên hợp của số thực là chính số thực đó

suy ra $A(\overline{z_0})^2 + B\overline{z_0} + C = 0$).

Vậy $\overline{z_0}$ cũng là nghiệm của phương trình $Az^2 + Bz + C = 0$.

Áp dụng :

Theo chứng minh trên, phương trình bậc hai *hệ số thực* có 1 nghiệm là $z_1 = 2 + i$ thì nghiệm kia là $z_2 = 2 - i$

Ta có $S = z_1 + z_2 = (2 + i) + (2 - i) = 4$

và $P = z_1 \cdot z_2 = (2 + i)(2 - i) = 4 - i^2 = 4 + 1 = 5$.

Vậy z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình bậc hai : $z^2 - Sz + P = 0$ hay $z^2 - 4z + 5 = 0$.

III. BÀI TẬP

5. Giải các phương trình sau :

a) $z^2 - 4z + 13 = 0$;

b) $z^2 - (5 + 2i)z + 5 + 5i = 0$.

6. Tìm phương trình bậc hai hệ số thực biết một nghiệm là $3 - 2i$.

7. Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình :

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

a) Tính z_1, z_2 ;

b) Chứng minh $z_1^2 = z_2$ và $z_2^2 = z_1$.

8. Tìm các số phức a và b sao cho phương trình $(2 + i)z^2 + az + b = 0$ có hai nghiệm là $z_1 = 3 + i$ và $z_2 = 1 - 2i$.

9. Giải các phương trình sau :

a) $z^2 + 2|z| = 0$;

b) $z^2 + i|z| = 0$;

c) $iz^2 + |z| + 1 = 0$;

d) $z^2 + \bar{z} = 0$.



PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA

$$Az^3 + Bz^2 + Cz + D = 0 \quad (A \neq 0)$$

I. PHƯƠNG PHÁP

Theo định lý cơ bản của đại số, phương trình bậc ba có đúng 3 nghiệm phức (không nhất thiết phân biệt).

1) Để giải phương trình bậc ba tổng quát $Az^3 + Bz^2 + Cz + D = 0$ ($A \neq 0$) (1), ta cần biết một nghiệm z_0 của phương trình. Khi đó phương trình (1) được biến đổi thành phương trình tích :

$$(1) \Leftrightarrow (z - z_0)(Az^2 + bz + c) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z - z_0 = 0 \\ Az^2 + bz + c = 0 \end{cases}$$

Muốn xác định $Az^2 + bz + c$, ta có thể dùng một trong hai cách sau :

Cách 1: Ta thực hiện phép chia đa thức $Az^3 + Bz^2 + Cz + D$ cho $z - z_0$, thương sẽ là $Az^2 + bz + c$.

Cách 2: Dùng sơ đồ Horner sau đây để xác định các hệ số A, b, c của đa thức thương $Az^2 + bz + c$.

	A	B	C	D
z_0	A	b	c	0

Dòng thứ nhất ghi các hệ số của đa thức bị chia, theo thứ tự A, B, C, D .

Dòng thứ hai sẽ xác định các hệ số của đa thức thương theo công thức sau :

Hệ số thứ nhất là A .

Hệ số thứ hai $b = z_0.A + B$ (“nhân ngang, cộng chéo”).

Hệ số thứ ba $c = z_0.b + C$ (“nhân ngang, cộng chéo”).

Hệ số cuối $d = z_0.c + D = 0$ (đây là số dư trong phép chia, vì chia hết nên d luôn luôn là 0).

2) Đôi khi ta có thể xác định z_0 bằng cách nhẩm nghiệm như sau :

Nếu $A + B + C + D = 0$ thì phương trình có 1 nghiệm là $z_0 = 1$.

Nếu $A - B + C - D = 0$ thì phương trình có 1 nghiệm là $z_0 = -1$.

3) Việc biến đổi thành phương trình tích có thể thực hiện dễ dàng nếu ta có thể đặt nhân tử chung.

4) Ta biết rằng nếu một phương trình đa thức *hệ số thực* có 1 nghiệm phức $z_0 = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$ và $y \neq 0$) thì $\overline{z_0} = x - yi$ cũng là 1 nghiệm. Như vậy :

* Mọi phương trình bậc 3 hệ số thực có ít nhất 1 nghiệm thực, nghĩa là

– hoặc có 3 nghiệm thực

– hoặc có 1 nghiệm thực và 2 nghiệm phức (không thực) liên hợp nhau.

* Muốn giải phương trình bậc 3 hệ số thực, ta thường phải tìm nghiệm thực của phương trình rồi biến đổi thành phương trình tích. Nghiệm thực này có thể tính chính xác nhờ máy tính bỏ túi (nếu là nghiệm hữu tỉ).

* Nếu biết phương trình bậc 3 hệ số thực $P(z) = 0$ có 1 nghiệm không là số thực z_0 thì $\overline{z_0}$ cũng là nghiệm, nên phương trình phải có dạng

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_0)(z - \overline{z_0}) = 0.$$

Chia $P(z)$ cho $(z - z_0)(z - \overline{z_0}) = z^2 - (z_0 + \overline{z_0})z + z_0 \cdot \overline{z_0}$ sẽ tìm được thừa số $z - z_1$.

Như vậy phương trình có 3 nghiệm là $z_0, \overline{z_0}$ và z_1 .

II. Ví Dụ

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau :

a) $z^3 - (2 + i)z^2 + (2 + 2i)z - 2i = 0$ biết 1 nghiệm là $z_1 = i$;

b) $z^3 + 4z^2 + (4 + i)z + 3 + 3i = 0$ biết 1 nghiệm là $z_1 = -i$;

c) $z^3 - z^2 + (2 - 2i)z + 2 + 4i = 0$ biết 1 nghiệm là $z_1 = 1 - i$.

Giải

a) Chia đa thức $P(z) = z^3 - (2 + i)z^2 + (2 + 2i)z - 2i$ cho $z - i$

	1	$-2 - i$	$2 + 2i$	$-2i$
$z_0 = i$	1	-2	2	0

Phương trình $z^3 - (2 + i)z^2 + (2 + 2i)z - 2i = 0 \Leftrightarrow (z - i)(z^2 - 2z + 2) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z - i = 0 & (1) \\ z^2 - 2z + 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow z = i$$

$$(2) \Leftrightarrow z^2 - 2z + 2 = 0$$

$$\Delta' = 1 - 2 = -1 = i^2$$

$$(2) \Leftrightarrow z = 1 + i \text{ hoặc } z = 1 - i.$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm : $z_1 = i$, $z_2 = 1 + i$ và $z_3 = 1 - i$.

b) Chia đa thức $P(z) = z^3 + 4z^2 + (4 + i)z + 3 + 3i$ cho $z + i$

	1	4	4 + i	3 + 3i
$z_0 = -i$	1	4 - i	3 - 3i	0

$$\text{Phương trình } z^3 + 4z^2 + (4 + i)z + 3 + 3i = 0$$

$$\Leftrightarrow (z + i)(z^2 + (4 - i)z + 3 - 3i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z + i = 0 & (1) \\ z^2 + (4 - i)z + 3 - 3i = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow z = -i$$

$$(2) \Leftrightarrow z^2 + (4 - i)z + 3 - 3i = 0$$

$$\Delta = (4 - i)^2 - 12 + 12i = 16 - 1 - 8i - 12 + 12i = 3 + 4i.$$

Đặt $3 + 4i = (x + yi)^2$, x và $y \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = 3 + 4i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 & (i) \\ 2xy = 4 & (ii) \end{cases}$$

$$(ii) \Rightarrow x \neq 0 \text{ và } y = \frac{2}{x}$$

$$(i) \Rightarrow x^2 - \frac{4}{x^2} = 3 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = -1 \text{ (loại) hoặc } x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

$$\text{Với } x = 2 \Rightarrow y = 1$$

$$\text{Với } x = -2 \Rightarrow y = -1.$$

$$\text{Vậy } \Delta = (2 + i)^2.$$

Phương trình $z^2 + (4 - i)z + 3 - 3i = 0$ có 2 nghiệm là

$$z = \frac{-4 + i + 2 + i}{2} = -1 + i \text{ và } z = \frac{-4 + i - 2 - i}{2} = -3.$$

Vậy phương trình $z^3 + 4z^2 + (4+i)z + 3 + 3i = 0$ có 3 nghiệm là :

$$z_1 = -i, z_2 = -1 + i \text{ và } z_3 = -3.$$

c) Chia đa thức $P(z) = z^3 - z^2 + (2-2i)z + 2 + 4i$ cho $z - (1-i)$:

	1	-1	$2-2i$	$2+4i$
$z_0 = 1-i$	1	$-i$	$1-3i$	0

$$\text{Phương trình } z^3 - z^2 + (2-2i)z + 2 + 4i = 0$$

$$\Leftrightarrow (z-1+i)(z^2 - iz + 1 - 3i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z-1+i=0 & (1) \\ z^2 - iz + 1 - 3i = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow z = 1 - i$$

$$(2) \Leftrightarrow z^2 - iz + 1 - 3i = 0$$

$$\Delta = i^2 - 4 + 12i = -5 + 12i.$$

$$\text{Đặt } -5 + 12i = (x + yi)^2 \text{ với } x, y \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = -5 + 12i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -5 & (i) \\ 2xy = 12 & (ii) \end{cases}$$

$$(ii) \Leftrightarrow x \neq 0 \text{ và } y = \frac{6}{x}$$

$$(i) \Leftrightarrow x^2 - \frac{36}{x^2} = -5 \Leftrightarrow x^4 + 5x^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \text{ hoặc } x^2 = -9 \text{ (loại)}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 2.$$

$$\text{Với } x = 2 \Rightarrow y = 3$$

$$\text{Với } x = -2 \Rightarrow y = -3.$$

$$\text{Vậy } \Delta = (2 + 3i)^2.$$

Phương trình (2) có 2 nghiệm là

$$z = \frac{i+2+3i}{2} = 1+2i \text{ và } z = \frac{i-2-3i}{2} = -1-i.$$

Vậy phương trình $z^3 - z^2 + (2-2i)z + 2 + 4i = 0$ có 3 nghiệm là

$$z_1 = 1 - i, z_2 = 1 + 2i \text{ và } z_3 = -1 - i.$$

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau :

a) $z^3 - (1 + 2i)z^2 + 2(1 + i)z - 2 = 0$;

b) $z^3 - 2iz^2 + (2 - i)z + 3 + i = 0$;

c) $z^3 - (2 + i)z^2 + z - 2 - i = 0$.

Giải

a) Các hệ số của phương trình $z^3 - (1 + 2i)z^2 + 2(1 + i)z - 2 = 0$ thoả mãn :
 $A + B + C + D = 1 - 1 - 2i + 2(1 + i) - 2 = 0$.

Vậy phương trình nhận $z = 1$ là nghiệm.

Chia đa thức $P(z) = z^3 - (1 + 2i)z^2 + 2(1 + i)z - 2$ cho $z - 1$:

	1	- 1 - 2i	2 + 2i	- 2
$z_0 = 1$	1	- 2i	2	0

Phương trình $z^3 - (1 + 2i)z^2 + 2(1 + i)z - 2 = 0$ tương đương với

$$(z - 1)(z^2 - 2iz + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z - 1 = 0 & (1) \\ z^2 - 2iz + 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) $\Leftrightarrow z = 1$

(2) $\Leftrightarrow z^2 - 2iz + 2 = 0$.

$\Delta' = (-i)^2 - 2 = -1 - 2 = -3 = 3i^2$

Phương trình (2) có 2 nghiệm là $z = i \pm i\sqrt{3} = (1 \pm \sqrt{3})i$.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là

$z_1 = 1, z_2 = (1 + \sqrt{3})i$ và $z_3 = (1 - \sqrt{3})i$

b) Các hệ số của phương trình $z^3 - 2iz^2 + (2 - i)z + 3 + i = 0$ thoả mãn :

$A - B + C - D = 1 + 2i + 2 - i - 3 - i = 0$ nên phương trình nhận $z = -1$ là nghiệm.

Chia đa thức $P(z) = z^3 - 2iz^2 + (2 - i)z + 3 + i$ cho $z - (-1)$

	1	- 2i	2 - i	3 + i
$z_0 = -1$	1	-1 - 2i	3 + i	0

Phương trình $z^3 - 2iz^2 + (2 - i)z + 3 + i = 0$ tương đương với

$$(z + 1)[z^2 - (1 + 2i)z + 3 + i] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z + 1 = 0 & (1) \\ z^2 - (1 + 2i)z + 3 + i = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) $\Leftrightarrow z = -1$

$$(2) \Leftrightarrow z^2 - (1 + 2i)z + 3 + i = 0.$$

$$\Delta = (1 + 2i)^2 - 12 - 4i = 1 - 4 + 4i - 12 - 4i = -15.$$

Phương trình (2) có 2 nghiệm là : $z = \frac{1+2i+\sqrt{15}i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2+\sqrt{15})i$ hoặc

$$z = \frac{1+2i-\sqrt{15}i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2-\sqrt{15})i.$$

Kết luận : Phương trình $z^3 - 2iz^2 + (2-i)z + 3 + i = 0$ có 3 nghiệm là :

$$z_1 = -1, z_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2+\sqrt{15})i \text{ và } z_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2-\sqrt{15})i.$$

c) Phương trình $z^3 - (2+i)z^2 + z - 2 - i = 0$ tương đương với

$$z^2(z - 2 - i) + z - 2 - i = 0$$

$$\Leftrightarrow (z - 2 - i)(z^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow z - 2 - i = 0 \text{ hoặc } z^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 2 + i \text{ hoặc } z^2 = -1$$

$$\Leftrightarrow z = 2 + i \text{ hoặc } z = \pm i.$$

Vậy phương trình $z^3 - (2+i)z^2 + z - 2 - i = 0$ có 3 nghiệm là

$$z_1 = 2 + i, z_2 = i \text{ và } z_3 = -i.$$

III. BÀI TẬP

10. Giải các phương trình :

a) $z^3 - (1+i)z^2 + az + b - 4i = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ và biết phương trình có 1 nghiệm là $z = 1 + i$.

b) $z^3 + aiz^2 + (i-b)z - 2 - 2i = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ và biết phương trình có 1 nghiệm là $z = 1 - i$.

11. Giải các phương trình :

a) $2z^3 + 9z^2 + 14z + 5 = 0$;

b) $z^3 - 7z^2 + 17z - 15 = 0$;

c) $z^3 - (6 + \sqrt{2})z^2 + (13 + 6\sqrt{2})z - 13\sqrt{2} = 0$ biết phương trình có 1 nghiệm là $z_1 = 3 - 2i$.

12. Giải các phương trình :

a) $z^3 - 2z^2 + 25z + b = 0$, $b \in \mathbb{R}$ và biết phương trình có nghiệm thuần ảo.

b) $z^3 + bz^2 + (9-i)z - 6 + 2i = 0$, $b \in \mathbb{R}$ và biết phương trình có nghiệm thực.



PHƯƠNG TRÌNH BẬC BỐN

$$Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E = 0 \quad (A \neq 0)$$

I. PHƯƠNG PHÁP

1) Với dạng phương trình trùng phương, ta đặt $w = z^2$, sẽ đưa về phương trình bậc hai theo w . Giải phương trình này, tính w rồi lại giải phương trình $w = z^2$ để tính z .

2) Nếu $A + B + C + D + E = 0$ thì phương trình $Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E = 0$ có 1 nghiệm là $z = 1$. Chia $P(z) = Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E$ cho $z - 1$, phương trình $P(z) = 0$ tương đương với phương trình $(z - 1)(Az^3 + bz^2 + cz + d) = 0$.

3) Nếu $A - B + C - D + E = 0$ thì phương trình $Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E = 0$ có 1 nghiệm là $z = -1$. Chia $P(z) = Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E$ cho $z + 1$, phương trình $P(z) = 0$ tương đương với phương trình $(z + 1)(Az^3 + bz^2 + cz + d) = 0$.

Như vậy ta nên viết các hệ số của phương trình để xem phương trình có rơi vào hai trường hợp đặc biệt này không.

4) Trường hợp phương trình *hệ số thực*, nếu biết 1 nghiệm z_0 (không là số thực) thì $\overline{z_0}$ cũng là nghiệm. Do đó phương trình có dạng

$$(z - z_0)(z - \overline{z_0})(Az^2 + bz + c) = 0.$$

Khai triển phương trình này và đồng nhất với phương trình đã cho sẽ tìm được hệ số b và c .

Giải phương trình : $Az^2 + bz + c = 0$ ta được hai nghiệm z_1, z_2 .

Như vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm là : $z_0, \overline{z_0}, z_1$ và z_2 .

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Giải các phương trình :

a) $z^4 + 4z^2 - 5 = 0$;

b) $z^4 - (8 + 8i)z^2 + 63 + 16i = 0$;

c) $iz^4 + 2(1 + 2i)z^2 + 8 = 0$.

Giải

a) Phương trình : $z^4 + 4z^2 - 5 = 0$ ta coi là phương trình bậc hai theo z^2 , phương trình có hai nghiệm là $z^2 = 1$ hoặc $z^2 = -5 = 5i^2$

$$\Leftrightarrow z = \pm 1 \text{ hoặc } z = \pm \sqrt{5}i.$$

b) Đặt $w = z^2$, phương trình : $z^4 - (8 + 8i)z^2 + 63 + 16i = 0$ (1) trở thành
 $w^2 - (8 + 8i)w + 63 + 16i = 0$

$$\Leftrightarrow w^2 - 2(4 + 4i)w + 63 + 16i = 0 \quad (2)$$

$$\Delta' = (4 + 4i)^2 - 63 - 16i = 32i - 63 - 16i = -63 + 16i = (1 + 8i)^2$$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} w = 4 + 4i + 1 + 8i = 5 + 12i \\ w = 4 + 4i - 1 - 8i = 3 - 4i \end{cases}$

Với $w = 5 + 12i \Leftrightarrow z^2 = 5 + 12i = (3 + 2i)^2 \Leftrightarrow z = \pm (3 + 2i)$

Với $w = 3 - 4i \Leftrightarrow z^2 = 3 - 4i = (2 - i)^2 \Leftrightarrow z = \pm (2 - i).$

Vậy phương trình (1) có 4 nghiệm là : $z = \pm (3 + 2i)$ và $z = \pm (2 - i).$

c) $iz^4 + 2(1 + 2i)z^2 + 8 = 0 \quad (1)$

Đặt $w = z^2$, phương trình $iz^4 + 2(1 + 2i)z^2 + 8 = 0$ trở thành

$$iw^2 + 2(1 + 2i)w + 8 = 0 \quad (2)$$

$$\Delta' = (1 + 2i)^2 - 8i = 1 + 4i^2 + 4i - 8i = 1 + 4i^2 - 4i = (1 - 2i)^2$$

Phương trình (2) có 2 nghiệm là : $w_1 = \frac{-1 - 2i + 1 - 2i}{i} = -4$

và $w_2 = \frac{-1 - 2i - 1 + 2i}{i} = -\frac{2}{i} = -\frac{2i}{i^2} = 2i.$

Với $w = -4 \Leftrightarrow z^2 = 4i^2 \Leftrightarrow z = \pm 2i$

Với $w = 2i \Leftrightarrow z^2 = (1 + i)^2 \Leftrightarrow z = \pm (1 + i).$

Vậy phương trình $iz^4 + 2(1 + 2i)z^2 + 8 = 0$ có 4 nghiệm là : $z = \pm 2i$ và
 $z = \pm (1 + i).$

Ví dụ 2. Cho phương trình bậc bốn hệ số thực

$$P(z) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 + mz + 20 = 0, \quad m \in \mathbb{R}.$$

Biết phương trình có một nghiệm $z_1 = -2i$. Tính m và các nghiệm còn lại.

Giải

Ta có $z_1 = -2i$ là nghiệm của phương trình : $z^4 - 4z^3 + 9z^2 + mz + 20 = 0$

$$\Leftrightarrow (-2i)^4 - 4(-2i)^3 + 9(-2i)^2 + m(-2i) + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow 16 - 32i - 36 - 2mi + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow (-32 - 2m)i = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -16.$$

$$\text{Phương trình trở thành } P(z) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 16z + 20 = 0 \quad (1)$$

Ta biết rằng nếu một phương trình đa thức *hệ số thực* nhận z_1 là một nghiệm phức, không thực, $z_1 = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$) thì $\overline{z_1} = x - yi$ cũng là nghiệm của phương trình. Như vậy phương trình nhận 2 nghiệm là $z_1 = -2i$ và $z_2 = 2i$. Do đó phương trình (1) phải có dạng :

$$P(z) = (z - 2i)(z + 2i)(z^2 + az + b) = 0 \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow P(z) = (z^2 + 4)(z^2 + az + b) = 0$$

$$\Leftrightarrow P(z) = z^4 + az^3 + (b + 4)z^2 + 4az + 4b = 0 \quad (2)$$

Đồng nhất hệ số của hai phương trình (1) và (2) ta được $a = -4$ và $b = 5$.

$$\text{Vậy phương trình } P(z) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 16z + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z^2 + 4)(z^2 - 4z + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z^2 + 4 = 0 \\ z^2 - 4z + 5 = 0 \end{cases}$$

$$z^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -4 \Leftrightarrow z = \pm 2i$$

$$z^2 - 4z + 5 = 0 \quad (\Delta' = 4 - 5 = -1 = i^2)$$

$$\Leftrightarrow z = 2 \pm i.$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm : $z = \pm 2i$ và $z = 2 \pm i$.

III. BÀI TẬP

13. Giải phương trình sau biết phương trình có nghiệm thực :

$$P(z) = z^4 + z^3 - (3 + i)z^2 - 4z + 4i - 4 = 0.$$

14. Giải phương trình sau, biết phương trình có nghiệm thuần ảo :

$$P(z) = z^4 + 2iz^3 - z^2 + 2iz - 2 = 0.$$

15. Giải phương trình : $z^4 - 3z^3 + (2 - i)z^2 + 3z - 3 + i = 0 \quad (1)$

§3. DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC VÀ ỨNG DỤNG

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

I. SỐ PHỨC DƯỚI DẠNG LƯỢNG GIÁC

1) Acgumen của số phức khác 0

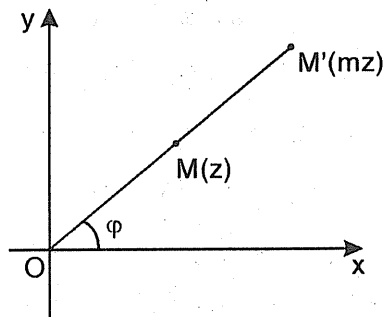
Định nghĩa 1

Cho số phức $z \neq 0$. Gọi M là điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn số z . Số đo (radian) của mỗi góc lượng giác có tia đầu Ox , tia cuối OM được gọi là một acgumen của z .

Chú ý :

* Nếu φ là 1 acgumen của z thì mọi acgumen của z có dạng $\varphi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

* Hai số phức z và mz (m là số thực dương) có acgumen sai khác $k2\pi$, vì các điểm biểu diễn chúng thuộc cùng một tia gốc O .



2) Dạng lượng giác của số phức

Định nghĩa 2

Cho số phức $z \neq 0$, gọi r là môđun của z và φ là một acgumen của z thì số phức z được viết dưới dạng $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Chú ý :

Dạng $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ được gọi là *dạng lượng giác* của z .

Dạng $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) được gọi là *dạng đại số* của z .

II. NHÂN VÀ CHIA SỐ PHỨC DƯỚI DẠNG LƯỢNG GIÁC

Định lí

Nếu $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ và $z' = r'(\cos \varphi' + i \sin \varphi')$, ($r \geq 0, r' \geq 0$) thì $zz' = rr' [\cos(\varphi + \varphi') + i \sin(\varphi + \varphi')]$

và $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} [\cos(\varphi - \varphi') + i \sin(\varphi - \varphi')] (z' \neq 0)$.

III. CÔNG THỨC MOIVRE (MOA-VRO)

1) Công thức Moivre

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n \varphi + i \sin n \varphi).$$

Đặc biệt khi $r = 1$, ta có

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n \varphi + i \sin n \varphi.$$

2) Ứng dụng vào lượng giác

Đổi chiều công thức Moivre và khai triển lũy thừa bậc n của nhị thức $\cos \varphi + i \sin \varphi$, ta có thể biểu diễn $\cos n \varphi$ và $\sin n \varphi$ theo các lũy thừa của $\cos \varphi$ và $\sin \varphi$.

Ví dụ :

$$\cos 3 \varphi + i \sin 3 \varphi = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^3$$

$$\Leftrightarrow \cos 3 \varphi + i \sin 3 \varphi = \cos^3 \varphi + 3 \cos^2 \varphi (i \sin \varphi) + 3 \cos \varphi (i \sin \varphi)^2 + (i \sin \varphi)^3$$

$$\Leftrightarrow \cos 3 \varphi + i \sin 3 \varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi + i (3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 3 \varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \\ \sin 3 \varphi = 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi = 3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi \end{cases}$$

3) Căn bậc hai của số phức dưới dạng lượng giác

Số phức $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $r > 0$ có 2 căn bậc hai là :

$$\sqrt{r} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right)$$

$$\text{và } -\sqrt{r} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right) = \sqrt{r} \left(\cos \left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \pi \right) \right).$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN



Vấn đề 1

VIẾT SỐ PHỨC DƯỚI DẠNG LƯỢNG GIÁC

I. PHƯƠNG PHÁP

1) Để viết số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) dưới dạng lượng giác

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

– Trước hết biến đổi $z = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} i \right)$

– Như vậy $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

– Đặt $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ và $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, từ đó suy ra φ là một

argumen của z .

2) Chú ý các công thức biến đổi lượng giác :

$$\begin{aligned} * 1 + \cos \varphi + i \sin \varphi &= 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + 2i \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \\ &= 2 \cos \frac{\varphi}{2} \left[\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right] \end{aligned}$$

$$* 1 + i \tan \varphi = 1 + i \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác :

a) 4 ;

b) 2i ;

c) $1 - i\sqrt{3}$;

d) $\sqrt{3} - i\sqrt{3}$;

e) $\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i$;

f) $\frac{7\sqrt{3}}{3} - 7i$.

Giải

a) $4 = 4(1 + 0i) = 4(\cos 0 + i \sin 0)$.

b) $2i = 2(0 + i) = 2\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$.

c) $1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$.

d) $\sqrt{3} - i\sqrt{3} = \sqrt{3}(1 - i) = \sqrt{6}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$
 $= \sqrt{6}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

e) $\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2}{3}\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{f) } \frac{7\sqrt{3}}{3} - 7i &= \frac{7\sqrt{3}}{3}(1 - i\sqrt{3}) = \frac{14\sqrt{3}}{3} \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \frac{14\sqrt{3}}{3} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right]. \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác :

a) $(1 + 3i)(1 + 2i)$;

b) $(1 + i)[1 + (\sqrt{3} - 2)i]$;

c) $(\sqrt{2} - 2i)[\sqrt{2} + (3\sqrt{2} - 4)i]$;

d) $\frac{3-i}{1-2i}$.

Giải

$$\begin{aligned} \text{a) } (1 + 3i)(1 + 2i) &= 1 + 6i^2 + 3i + 2i = -5 + 5i = 5(-1 + i) \\ &= 5\sqrt{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 5\sqrt{2} \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } (1 + i)[1 + (\sqrt{3} - 2)i] &= 1 - (\sqrt{3} - 2) + (\sqrt{3} - 2 + 1)i \\ &= 3 - \sqrt{3} + (\sqrt{3} - 1)i \\ &= \sqrt{3}(\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} - 1)i \\ &= (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + i) = 2(\sqrt{3} - 1) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \\ &= 2(\sqrt{3} - 1) \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (\sqrt{2} - 2i)[\sqrt{2} + (3\sqrt{2} - 4)i] &= (2 + 6\sqrt{2} - 8) + (6 - 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2})i \\ &= (6\sqrt{2} - 6) + (6 - 6\sqrt{2})i = (6\sqrt{2} - 6)(1 - i) \\ &= \sqrt{2}(6\sqrt{2} - 6) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) \\ &= (12 - 6\sqrt{2}) \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \frac{3-i}{1-2i} &= \frac{(3-i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{3+2+6i-i}{1-(2i)^2} = \frac{5+5i}{1+4} = 1+i \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2} \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

III. BÀI TẬP

1. Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác :

a) $(2 + i)(3 + i)$;

b) $\frac{2\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{6 - 2i}$;

c) $(\sqrt{2} + 2i)(\sqrt{3} + (9 - 4\sqrt{6})i)$;

d) $(1 - i)(1 + (\sqrt{3} + 2)i)$;

e) $(\sqrt{3} - 2i)(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}i)$

f) $2\sqrt{2} + \frac{2\sqrt{6}}{3}i$.

2. Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác :

a) $\sqrt{2} + 1 + i$;

b) $2 - \sqrt{3} + i$;

c) $1 + (\sqrt{2} + 1)i$;

d) $1 + (2 - \sqrt{3})i$;

e) $1 - (2 + \sqrt{3})i$.

3. Viết các số phức sau dưới dạng lượng giác :

a) $1 + \frac{i}{\sqrt{3}}$;

b) $1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})i$.



Vấn đề 2

ÁP DỤNG CÔNG THỨC MOIVRE ĐỂ THỰC HIỆN CÁC PHÉP TÍNH

I. PHƯƠNG PHÁP

Ta vận dụng công thức Moivre và các công thức lượng giác để tính toán :

$$\square (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)$$

$$\square (\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \varphi' + i \sin \varphi') = \cos(\varphi + \varphi') + i \sin(\varphi + \varphi')$$

$$\square \frac{\cos \varphi + i \sin \varphi}{\cos \varphi' + i \sin \varphi'} = \cos(\varphi - \varphi') + i \sin(\varphi - \varphi')$$

$$\square 1 + \cos \varphi + i \sin \varphi = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + 2i \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = 2 \cos \frac{\varphi}{2} (\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2})$$

$$\square 1 + i \tan \varphi = 1 + i \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính giá trị của các số phức sau và viết kết quả dưới dạng $a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$):

$$\text{a) } A = \left(\cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7} \right) \left(\cos \frac{3\pi}{14} + i \sin \frac{3\pi}{14} \right);$$

$$\text{b) } B = \frac{\left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right)^3}{\left(\cos \frac{\pi}{15} + i \sin \frac{\pi}{15} \right)^4};$$

$$\text{c) } C = \frac{i\sqrt{3}}{\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^5};$$

$$\text{d) } D = \frac{\left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \right]^{10} \left[\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \right]}{\left[2 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) \right]^5}.$$

Giải

Áp dụng công thức Moivre ta có :

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \left(\cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7} \right) \left(\cos \frac{3\pi}{14} + i \sin \frac{3\pi}{14} \right) \\ &= \cos \left(\frac{2\pi}{7} + \frac{3\pi}{14} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{7} + \frac{3\pi}{14} \right) = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= \frac{\left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right)^3}{\left(\cos \frac{\pi}{15} + i \sin \frac{\pi}{15} \right)^4} = \frac{\cos \frac{3\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi}{5}}{\cos \frac{4\pi}{15} + i \sin \frac{4\pi}{15}} \\ &= \cos \left(\frac{3\pi}{5} - \frac{4\pi}{15} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{5} - \frac{4\pi}{15} \right) = \\ &= \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } C &= \frac{i\sqrt{3}}{\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)^5} = \frac{\sqrt{3}(0+i)}{\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)^5} = \frac{\sqrt{3}\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)}{\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}} \\
 &= \sqrt{3} \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{6} \right) \right] = \sqrt{3} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right] \\
 &= \sqrt{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } D &= \frac{\left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \right]^{10} \left[\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \right]}{\left[2 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) \right]^5} \\
 &= \frac{32\sqrt{3} \left(\cos \frac{20\pi}{3} + i \sin \frac{20\pi}{3} \right) \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)}{32 \left(\cos \frac{35\pi}{6} + i \sin \frac{35\pi}{6} \right)} \\
 &= \sqrt{3} \left[\cos \left(\frac{20\pi}{3} + \frac{\pi}{3} - \frac{35\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{20\pi}{3} + \frac{\pi}{3} - \frac{35\pi}{6} \right) \right] \\
 &= \sqrt{3} \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) = \sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \right) = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.
 \end{aligned}$$

Ví dụ 2. Tính giá trị các biểu thức sau :

$$\text{a) } A = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^9 + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right)^9 ;$$

$$\text{b) } B = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)^7 - \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right)^7 ;$$

$$\text{c) } C = (1+i\sqrt{3})^6 (1-i)^5 + (1+i)^5 (1-i\sqrt{3})^6 ;$$

$$\text{d) } D = \frac{(1+i\sqrt{3})^5}{(1-i)^4} + \frac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1+i)^4}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{a) } A &= \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^9 + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} \right)^9 = \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^9 + \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right]^9 = \\
 &= \cos \frac{9\pi}{4} + i \sin \frac{9\pi}{4} + \cos \left(-\frac{9\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{9\pi}{4} \right) \\
 &= \cos \frac{9\pi}{4} + i \sin \frac{9\pi}{4} + \cos \frac{9\pi}{4} - i \sin \frac{9\pi}{4} \\
 &= \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } B &= \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)^7 - \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right)^7 \\
 &= \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^7 - \left[\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right]^7 = \\
 &= \cos \frac{7\pi}{3} + i \sin \frac{7\pi}{3} - \left[\cos \left(-\frac{7\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{7\pi}{3} \right) \right] \\
 &= \cos \frac{7\pi}{3} + i \sin \frac{7\pi}{3} - \cos \frac{7\pi}{3} + i \sin \frac{7\pi}{3} \\
 &= 2i \sin \frac{\pi}{3} = 2i \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 &= i\sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } C &= (1+i\sqrt{3})^6 (1-i)^5 + (1+i)^5 (1-i\sqrt{3})^6 \\
 &= \left[2 \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right) \right]^6 \left[\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \right]^5 + \left[\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \right]^5 \left[2 \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \right) \right]^6 \\
 &= 2^6 (\sqrt{2})^5 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^6 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right]^5 + \\
 &\quad + 2^6 (\sqrt{2})^5 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^5 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right]^6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2^8 \sqrt{2} \left(\cos \frac{6\pi}{3} + i \sin \frac{6\pi}{3} \right) \left[\cos \left(-\frac{5\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{4} \right) \right] + \\
&\quad + 2^8 \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) \left[\cos \left(-\frac{6\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{6\pi}{3} \right) \right] \\
&= 2^8 \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} - i \sin \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) \\
&= 2^8 \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -2^9 = -512.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{d) } D &= \frac{(1+i\sqrt{3})^5}{(1-i)^4} + \frac{(1-i\sqrt{3})^5}{(1+i)^4} = \frac{2^5 \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)^5}{(\sqrt{2})^4 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right)^4} + \frac{2^5 \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right)^5}{(\sqrt{2})^4 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right)^4} \\
&= \frac{2^5 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^5}{2^2 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right]^4} + \frac{2^5 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right]^5}{2^2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^4} \\
&= 8 \frac{\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}}{\cos(-\pi) + i \sin(-\pi)} + 8 \frac{\cos \left(-\frac{5\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{3} \right)}{\cos \pi + i \sin \pi} \\
&= \frac{8 \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \right)}{-1} + \frac{8 \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right)}{-1} = -8 \left(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \right) - 8 \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right) = -8.
\end{aligned}$$

Ví dụ 3. Tính giá trị của các biểu thức sau :

$$\text{a) } A = \left(1 + \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)^4 + \left(1 + \cos \frac{5\pi}{3} - i \sin \frac{5\pi}{3} \right)^4 ;$$

$$\text{b) } B = \frac{1 + \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^4}{1 + \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right)^4} ; \quad \text{c) } C = \frac{1 - \left(\cos \frac{8\pi}{3} - i \sin \frac{8\pi}{3} \right)^2}{1 - \left(\cos \frac{8\pi}{3} + i \sin \frac{8\pi}{3} \right)^2} .$$

$$\begin{aligned}
 \text{a) } A &= \left(1 + \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right)^4 + \left(1 + \cos \frac{5\pi}{3} - i \sin \frac{5\pi}{3}\right)^4 \\
 &= \left(2 \cos^2 \frac{5\pi}{6} + 2i \sin \frac{5\pi}{6} \cos \frac{5\pi}{6}\right)^4 + \left(2 \cos^2 \frac{5\pi}{6} - 2i \sin \frac{5\pi}{6} \cos \frac{5\pi}{6}\right)^4 \\
 &= \left[2 \cos \frac{5\pi}{6} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right)\right]^4 + \left[2 \cos \frac{5\pi}{6} \left(\cos \frac{5\pi}{6} - i \sin \frac{5\pi}{6}\right)\right]^4 \\
 &= \left[2 \cos \frac{5\pi}{6} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right)\right]^4 \\
 &\quad + \left[2 \cos \frac{5\pi}{6} \left(\cos \left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)\right]^4 \\
 &= \left(-\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)^4 \left(\cos \frac{20\pi}{6} + i \sin \frac{20\pi}{6}\right) \\
 &\quad + \left(-\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)^4 \left[\cos \left(-\frac{20\pi}{6}\right) + i \sin \left(-\frac{20\pi}{6}\right)\right] \\
 &= 9 \left(2 \cos \frac{20\pi}{6}\right) = 18 \cos \frac{10\pi}{3} = 18 \cos \left(-\frac{2\pi}{3}\right) \\
 &= 18 \left(-\frac{1}{2}\right) = -9.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } B &= \frac{1 + \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)^4}{1 + \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}\right)^4} = \frac{1 + \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)^4}{1 + \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]^4} \\
 &= \frac{1 + \cos \frac{4\pi}{6} + i \sin \frac{4\pi}{6}}{1 + \cos \left(-\frac{4\pi}{6}\right) + i \sin \left(-\frac{4\pi}{6}\right)} = \frac{1 + \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}}{1 + \cos \left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3}\right)}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1 + \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}}{1 + \cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3}} = \frac{2 \cos \frac{\pi}{3} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)}{2 \cos \frac{\pi}{3} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right]}$$

$$= \cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{c) } C = \frac{1 - \left(\cos \frac{8\pi}{3} - i \sin \frac{8\pi}{3} \right)^2}{1 - \left(\cos \frac{8\pi}{3} + i \sin \frac{8\pi}{3} \right)^2} = \frac{1 - \left(\cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3} \right)^2}{1 - \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)^2}$$

$$= \frac{1 - \left[\cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right) \right]^2}{1 - \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)^2} = \frac{1 - \left[\cos \left(-\frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{4\pi}{3} \right) \right]}{1 - \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)}$$

$$= \frac{2 \sin^2 \left(-\frac{2\pi}{3} \right) - 2i \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right) \cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right)}{2 \sin^2 \frac{2\pi}{3} - 2i \sin \frac{2\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{3}} = \frac{2 \sin^2 \frac{2\pi}{3} + 2i \sin \frac{2\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{3}}{2 \sin^2 \frac{2\pi}{3} - 2i \sin \frac{2\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{3}}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{2\pi}{3} \left(\sin \frac{2\pi}{3} + i \cos \frac{2\pi}{3} \right)}{2 \sin \frac{2\pi}{3} \left(\sin \frac{2\pi}{3} - i \cos \frac{2\pi}{3} \right)} = \frac{\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right)}{\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) - i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right)}$$

$$= \frac{\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right)}{\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}} = \cos \left(-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

III. BÀI TẬP

4. Thực hiện các phép tính và viết kết quả dưới dạng $a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

$$\text{a) } 3 \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right) \cdot 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3} \right); \quad \text{b) } \frac{2 \left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right)}{3 \left(\cos \frac{2\pi}{15} - i \sin \frac{2\pi}{15} \right)}.$$

5. Thực hiện phép tính :

$$\begin{aligned} \text{a) } & \frac{(1-i\sqrt{3})^{24} - (1+i\sqrt{3})^{12}}{(1-i)^{24}}; & \text{b) } & \frac{\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{13} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}i\right)^6}{(\sqrt{3}+i)^5}; \\ \text{c) } & \frac{(1-i)^8}{(1+i\sqrt{3})^5} + \frac{(1+i)^8}{(1-i\sqrt{3})^5}; & \text{d) } & \frac{(1-i\sqrt{3})^6}{(1+i)^8} + \frac{(1+i\sqrt{3})^6}{(1-i)^8}. \end{aligned}$$

6. Cho $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$. Tính :

$$\begin{aligned} \text{a) } & A = z^{12} + z^6 + 1; \\ \text{b) } & B = z^9 + z^6 + z^3 + 1; \\ \text{c) } & C = z^8 + 2z^4 + z^2; \\ \text{d) } & D = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots + z^8; \\ \text{e) } & E = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots - z^9 + z^{10}; \\ \text{f) } & F = z^{2009} - z^{2010} + z^{2011}. \end{aligned}$$

7. Chứng minh rằng :

$$\text{a) } \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \text{và} \quad \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4};$$

$$\text{b) Cho số phức } z = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}. \text{ Tính :}$$

$$A = z^2 + z + 2 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}; \quad B = z^2 - z + 2i + \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}.$$

8. Thu gọn :

$$A = \left(1 + \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right)^4 + \left(1 + \cos \frac{\pi}{8} - i \sin \frac{\pi}{8} \right)^4$$

$$B = \left(1 + \cos \frac{\pi}{16} + i \sin \frac{\pi}{16} \right)^3 - \left(1 + \cos \frac{\pi}{16} - i \sin \frac{\pi}{16} \right)^3$$

$$C = \frac{1 + \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)^2}{1 + \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right)^2}.$$

9. Cho $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Tính $w = z^{2009} + z^{2010} + z^{2011}$

10. Cho số phức z thỏa mãn $z + \frac{1}{z} = 1$. Tính : $A = z^{114} + \frac{1}{z^{114}}$ và $B = z^{165} + \frac{1}{z^{165}}$.



Vấn đề 3

TÍNH MÔĐUN VÀ ARGUMEN CỦA SỐ PHỨC

I. PHƯƠNG PHÁP

1) Với $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), ta có môđun của z là $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

và một argumen của z là φ thỏa

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

2) Với $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ thì môđun của z là r và một argumen của z là φ .

Đặc biệt, ta chú ý các biến đổi sau đây để suy ra môđun và một argumen của z

3) Với $z = r(\cos \varphi - i \sin \varphi) \Rightarrow z = r[\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)]$

4) Với $z = r(\sin \varphi + i \cos \varphi)$, ta biến đổi $z = r[\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) + i \sin(\frac{\pi}{2} - \varphi)]$

5) Với $z = r[1 + \cos \varphi + i \sin \varphi]$, ta có $z = r[2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} + 2i \sin \frac{\varphi}{2} \cdot \cos \frac{\varphi}{2}]$

$$\Rightarrow z = 2r \cos \frac{\varphi}{2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right)$$

$$6) \text{ Với } z = r(1 + i \tan \varphi) \Rightarrow z = r \left(1 + \frac{i \sin \varphi}{\cos \varphi} \right) = \frac{r}{\cos \varphi} (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tính môđun và một argumen của các số phức sau :

$$a) z = \frac{5-i}{2-3i};$$

$$b) z = \frac{18+8i}{4-9i};$$

$$c) z = \left(\frac{1-3i}{2-i} \right)^5;$$

$$d) z = \left(\frac{3\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-2i} \right)^3.$$

Giải

$$\begin{aligned} a) z &= \frac{5-i}{2-3i} = \frac{(5-i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{10+3+15i-2i}{4+9} = \frac{13+13i}{13} = 1+i \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Gọi r là môđun và φ là một argumen của số phức z , ta có :

$$\begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \varphi = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b) z &= \frac{18+8i}{4-9i} = \frac{(18+8i)(4+9i)}{(4-9i)(4+9i)} = \frac{72-72+162i+32i}{16+81} \\ &= \frac{194i}{97} = 2i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} r = 2 \\ \varphi = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} c) z &= \left(\frac{1-3i}{2-i} \right)^5 = \left(\frac{(1-3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} \right)^5 = \left(\frac{2+3-6i+i}{4+1} \right)^5 = \left(\frac{5-5i}{5} \right)^5 = (1-i)^5 \\ &= \left[\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \right]^5 = \left[\sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right] \right]^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\sqrt{2})^5 \left[\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right) \right] \\
 &= 4\sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{4}\right) \right].
 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} r = 4\sqrt{2} \\ \varphi = -\frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

$$\text{d) } z = \left(\frac{3\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - 2i} \right)^3.$$

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có } \frac{3\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - 2i} &= \frac{(3\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} + 2i)}{(\sqrt{3} - 2i)(\sqrt{3} + 2i)} = \frac{9 - 2 + (6\sqrt{3} + \sqrt{3})i}{3 + 4} \\
 &= \frac{7 + 7\sqrt{3}i}{7} = 1 + i\sqrt{3} \\
 &= 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right).
 \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } z = \left(\frac{3\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - 2i} \right)^3 = \left[2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) \right]^3 = 2^3 (\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} r = 8 \\ \varphi = \pi. \end{cases}$$

Ví dụ 2. Tìm môđun và một argumen của các số phức sau :

$$\text{a) } z = 1 + \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4};$$

$$\text{b) } z = 1 + \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3};$$

$$\text{c) } z = 1 - \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5};$$

$$\text{d) } z = -1 - \sin \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{6};$$

$$\text{e) } z = -1 + \sin \frac{\pi}{6} - i \cos \frac{\pi}{6}.$$

Giải

$$\begin{aligned}
 \text{a) } z &= 1 + \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} + 2i \sin \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8} \\
 &= 2 \cos \frac{\pi}{8} (\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8})
 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} r = 2 \cos \frac{\pi}{8} \\ \varphi = \frac{\pi}{8} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } z &= 1 + \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{6} - 2i \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{6} \\ &= 2 \cos \frac{\pi}{6} (\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}) \\ &= 2 \cos \frac{\pi}{6} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} r = 2 \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \\ \varphi = -\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } z &= 1 - \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5} = 2 \sin^2 \frac{\pi}{5} + 2i \sin \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{\pi}{5} \\ &= 2 \sin \frac{\pi}{5} \left(\sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5} \right) \\ &= 2 \sin \frac{\pi}{5} \left(\cos \frac{3\pi}{10} + i \sin \frac{3\pi}{10} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} r = 2 \sin \frac{\pi}{5} \\ \varphi = \frac{3\pi}{10} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } z &= -1 - \sin \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{6} = -1 - \cos \frac{\pi}{6} + 2i \sin \frac{\pi}{6} \\ &= -2 \cos^2 \frac{\pi}{12} + 2i \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} \\ &= 2 \cos \frac{\pi}{12} \left(-\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) = 2 \cos \frac{\pi}{12} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} r = 2 \cos \frac{\pi}{12} \\ \varphi = \frac{11\pi}{12} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } z &= -1 + \sin \frac{\pi}{6} - i \cos \frac{\pi}{6} = -1 + \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \\
 &= -2 \sin^2 \frac{\pi}{6} - 2i \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} \\
 &= 2 \sin \frac{\pi}{6} \left(-\sin \frac{\pi}{6} - i \cos \frac{\pi}{6} \right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \left(\sin \frac{7\pi}{6} + i \cos \frac{7\pi}{6} \right) \\
 &= \cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} r = 1 \\ \varphi = -\frac{2\pi}{3} \end{cases}.$$

III. BÀI TẬP

11. Tìm môđun và một argumen của các số phức sau :

$$\text{a) } z = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i ;$$

$$\text{b) } z = 2 - \sqrt{2} - i\sqrt{2} ;$$

$$\text{c) } z = 2\sqrt{3} + 3 + i\sqrt{3} ;$$

$$\text{d) } z = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}i.$$

12. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình : $z^2 - 2iz - 4 = 0$, z_1 có phần thực âm. Tính môđun và argumen của các số phức sau :

$$\text{a) } w = z_1^2 \cdot z_2 ;$$

$$\text{b) } w = \frac{z_1}{z_2 - 2} ;$$

$$\text{c) } w = (z_1 - 2)(z_2 - 2) ;$$

$$\text{d) } w = \overline{z_1} \cdot (2 - \overline{z_2}).$$

13. Tìm môđun và một argumen của số phức z thoả mãn phương trình $\frac{1+z^2}{1-z^2} = i$.



ÁP DỤNG CÔNG THỨC MOIVRE ĐỂ TÍNH CĂN BẬC n CỦA SỐ PHỨC

I. PHƯƠNG PHÁP

1) Tính căn bậc hai của số phức w

Theo định nghĩa, căn bậc hai của số phức w là số phức z thoả mãn $z^2 = w$

* Căn bậc hai của 0 là 0.

* Với $w \neq 0$, $w = R(\cos \theta + i \sin \theta)$, $R > 0$, ta đặt $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ thì ta có :

$$z^2 = w \Leftrightarrow r^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) = R(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^2 = R \\ 2\varphi = \theta + k2\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{R} \\ \varphi = \frac{\theta}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Lấy $k = 0, 1$, ta được hai giá trị của φ .

* Một số phức $w = R(\cos \theta + i \sin \theta)$, $R > 0$, có hai căn bậc hai là :

$$z_1 = \sqrt{R} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) \text{ và } z_2 = \sqrt{R} \left[\cos \left(\frac{\theta}{2} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{2} + \pi \right) \right]$$

$$\text{hay } z = \pm \sqrt{R} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right).$$

* Hai căn bậc hai của $w \neq 0$ được biểu diễn trong mặt phẳng phức bởi hai điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ O .

2) Tính căn bậc n của số phức w

Căn bậc n của số phức w là số phức z thoả mãn $z^n = w$

* Căn bậc n của 0 là 0.

* Với $w \neq 0$, $w = R(\cos \theta + i \sin \theta)$, $R > 0$, ta đặt $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ thì ta có :

$$z^n = w \Leftrightarrow r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = R(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\Leftrightarrow r^n = R \text{ và } n\varphi = \theta + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt[n]{R} \text{ và } \varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{k2\pi}{n}.$$

Lấy $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, ta được n giá trị của φ .

* Một số phức $w = R(\cos \theta + i \sin \theta)$, $R > 0$, có n căn bậc n ($n \geq 3$) được biểu diễn trong mặt phẳng phức bởi n điểm là đỉnh của n - giác đều nội tiếp đường tròn tâm O , bán kính $\sqrt[n]{R}$.

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm căn bậc hai của các số phức sau và viết dưới dạng lượng giác :

$$w = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Giải

$$w = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}.$$

Đặt $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ là một căn bậc hai của w , ta có :

$$z^2 = w \Leftrightarrow r^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ 2\varphi = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \varphi = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Vậy w có 2 căn bậc hai là : $z_1 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$ và $z_2 = \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}$.

Ví dụ 2. Tính căn bậc ba của các số phức sau : $w = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Giải

$$w = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right)$$

w có môđun $R = 1$ và một argumen là $\theta = -\frac{\pi}{4}$.

Suy ra căn bậc ba của w là số phức z có

– môđun $r = \sqrt[3]{1} = 1$

– một argumen $\varphi = \frac{\theta}{3} + \frac{k2\pi}{3} = -\frac{\pi}{12} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Với $k = 0, 1, 2$ ta có ba giá trị của φ :

$$\varphi_1 = -\frac{\pi}{12}$$

$$\varphi_2 = -\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$$

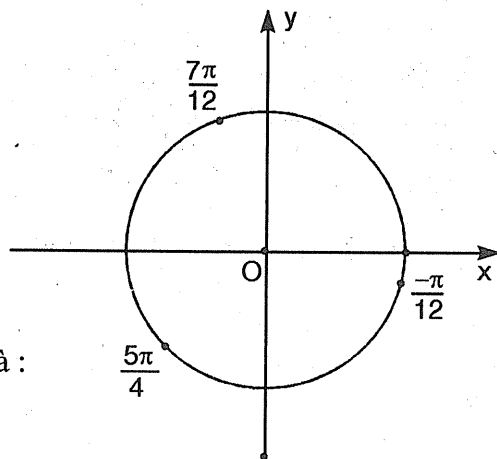
$$\varphi_3 = -\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3} = \frac{15\pi}{12} = \frac{5\pi}{4}$$

Vậy $w = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$ có 3 căn bậc ba là :

$$z_1 = \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$$

$$z_2 = \cos\frac{7\pi}{12} + i \sin\frac{7\pi}{12}$$

$$z_3 = \cos\frac{5\pi}{4} + i \sin\frac{5\pi}{4}$$



Ví dụ 3. Tính căn bậc bốn của số phức sau và viết dưới dạng lượng giác :

$$w = i.$$

Giải

$w = i = \cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}$ có môđun $R = 1$ và một argumen $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Suy ra căn bậc bốn của w là số phức z có :

môđun $r = 1$

và một argumen $\varphi = \frac{\theta}{4} + \frac{k2\pi}{4} = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Lấy $k = 0, 1, 2, 3$, ta có 4 giá trị của φ :

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{8}$$

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{8}$$

$$\varphi_3 = \frac{\pi}{8} + \pi = \frac{9\pi}{8}$$

$$\varphi_4 = \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{2} = \frac{13\pi}{8}$$

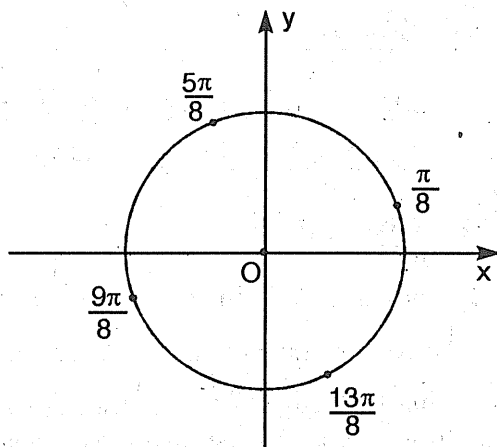
Vậy $w = i$ có 4 căn bậc bốn là :

$$z_1 = \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} ;$$

$$z_2 = \cos \frac{5\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi}{8}$$

$$z_3 = \cos \frac{9\pi}{8} + i \sin \frac{9\pi}{8} ;$$

$$z_4 = \cos \frac{13\pi}{8} + i \sin \frac{13\pi}{8}.$$



III. BÀI TẬP

14. Tính căn bậc hai của

a) $w = (1 + i)(\sqrt{3} + i)$;

b) $w = \sqrt{3} - i$;

c) $w = 4 + 4i$.

15. Tính căn bậc ba của

a) $w = -1 + i\sqrt{3}$;

b) $w = 2 - 2i$;

c) $w = i$;

d) $w = -4 + 4\sqrt{3}i$.

16. Tính căn bậc bốn của $w = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

17. a) Viết $z_0 = \sqrt{3} + i$ dưới dạng lượng giác.

b) Tính z_0^4 và suy ra các căn bậc 4 của $w = -8 + 8i\sqrt{3}$.

18. Tính căn bậc năm của $w = i$.



ÁP DỤNG CÔNG THỨC MOIVRE ĐỂ CHỨNG MINH CÁC HỆ THỨC LƯỢNG GIÁC

I. PHƯƠNG PHÁP

1) Tính $\cos nx$ và $\sin nx$ theo $\cos x$ và $\sin x$:

Ta có : $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$

Khai triển nhị thức ở vế trái, đồng nhất phần thực và phần ảo của hai vế, ta tính được $\cos nx$ và $\sin nx$ theo $\cos x$ và $\sin x$.

2) Công thức rút gọn các biểu thức lượng giác :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi)$$

$$\frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \varphi + i \sin \varphi} = \cos(\theta - \varphi) + i \sin(\theta - \varphi).$$

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Áp dụng công thức Moivre, tính các biểu thức sau theo $\sin x$ và $\cos x$:

a) $\cos 2x, \sin 2x$;

b) $\cos 3x, \sin 3x$;

c) $\cos 4x, \sin 4x$;

d) $\cos 5x, \sin 5x$.

Giải

a) Ta có $\cos 2x + i \sin 2x = (\cos x + i \sin x)^2$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + i \sin 2x = \cos^2 x - \sin^2 x + 2i \sin x \cos x.$$

Vậy $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x.$$

b) Ta có $\cos 3x + i \sin 3x = (\cos x + i \sin x)^3$

$$\Leftrightarrow \cos 3x + i \sin 3x = \cos^3 x + 3 \cos^2 x \cdot i \sin x + 3 \cos x \cdot (i \sin x)^2 + (i \sin x)^3$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x + i \sin 3x = (\cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x) + i (3 \cos^2 x \sin x - \sin^3 x).$$

Vậy $\cos 3x = \cos^3 x - 3 \cos x \sin^2 x$

$$= \cos^3 x - 3 \cos x (1 - \cos^2 x)$$

$$= 4 \cos^3 x - 3 \cos x.$$

$$\begin{aligned}\text{và } \sin 3x &= 3\cos^2 x \cdot \sin x - \sin^3 x \\ &= 3(1 - \sin^2 x)\sin x - \sin^3 x \\ &= 3\sin x - 4\sin^3 x.\end{aligned}$$

c) Ta có $\cos 4x + i \sin 4x = (\cos x + i \sin x)^4$

$$\Leftrightarrow \cos 4x + i \sin 4x = (\cos^2 x - \sin^2 x + 2i \sin x \cos x)^2$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \cos 4x + i \sin 4x &= (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 - (2\sin x \cdot \cos x)^2 \\ &\quad + 2i (2\sin x \cos x)(\cos^2 x - \sin^2 x).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Vậy } \cos 4x &= (\cos^2 x - \sin^2 x)^2 - (2\sin x \cdot \cos x)^2 \\ &= \cos^4 x + \sin^4 x - 2\sin^2 x \cos^2 x - 4\sin^2 x \cos^2 x \\ &= \cos^4 x + \sin^4 x - 6\sin^2 x \cos^2 x \\ &= \cos^4 x + (1 - \cos^2 x)^2 - 6\cos^2 x \cdot (1 - \cos^2 x) \\ &= 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1\end{aligned}$$

$$\sin 4x = 4\sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x).$$

d) Ta có : $\cos 5x + i \sin 5x = (\cos x + i \sin x)^5$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \cos 5x + i \sin 5x &= \cos^5 x + 5\cos^4 x \cdot i \sin x \\ &\quad + 10\cos^3 x (i^2 \cdot \sin^2 x) + 10\cos^2 x \cdot (i^3 \cdot \sin^3 x) \\ &\quad + 5\cos x (i^4 \cdot \sin^4 x) + i^5 \cdot \sin^5 x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \cos 5x + i \sin 5x &= \cos^5 x - 10\cos^3 x \cdot \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x \\ &\quad + i(5\cos^4 x \cdot \sin x - 10\cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Vậy } \cos 5x &= \cos^5 x - 10\cos^3 x \sin^2 x + 5\cos x \sin^4 x \\ &= \cos^5 x - 10\cos^3 x (1 - \cos^2 x) + 5\cos x (1 - \cos^2 x)^2 \\ &= \cos^5 x - 10\cos^3 x (1 - \cos^2 x) + 5\cos x (1 + \cos^4 x - 2\cos^2 x) \\ &= 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{và } \sin 5x &= 5\cos^4 x \sin x - 10\cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x \\ &= 5(1 - \sin^2 x)^2 \cdot \sin x - 10(1 - \sin^2 x) \sin^3 x + \sin^5 x \\ &= 16\sin^5 x - 20\sin^3 x + 5\sin x.\end{aligned}$$

Ví dụ 2. Rút gọn các biểu thức :

$$A = 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos 9x ;$$

$$B = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin 9x.$$

Giải

$$\text{Ta có } A + iB = (1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos 9x)$$

$$+ i(\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin 9x)$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + (\cos x + i \sin x) + (\cos 2x + i \sin 2x) + (\cos 3x + i \sin 3x) + \dots \\
&\quad + (\cos 9x + i \sin 9x) \\
&= 1 + (\cos x + i \sin x) + (\cos x + i \sin x)^2 + (\cos x + i \sin x)^3 + \dots \\
&\quad + (\cos x + i \sin x)^9 \\
&= \frac{1 - (\cos x + i \sin x)^{10}}{1 - (\cos x + i \sin x)} \\
&= \frac{1 - \cos 10x - i \sin 10x}{1 - \cos x - i \sin x} = \frac{2 \sin^2 5x - 2i \sin 5x \cdot \cos 5x}{2 \sin^2 \frac{x}{2} - 2i \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} \\
&= \frac{\sin 5x}{\sin \frac{5x}{2}} \cdot \frac{\sin 5x - i \cos 5x}{\sin \frac{x}{2} - i \cos \frac{x}{2}} = \frac{\sin 5x}{\sin \frac{5x}{2}} \cdot \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} - 5x \right) - i \sin \left(\frac{\pi}{2} - 5x \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) - i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right)} \\
&= \frac{\sin 5x}{\sin \frac{5x}{2}} \cdot \frac{\cos \left(-\frac{\pi}{2} + 5x \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} + 5x \right)}{\cos \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2} \right)} \\
&= \frac{\sin 5x}{\sin \frac{5x}{2}} \cdot \left[\cos \left(5x - \frac{x}{2} \right) + i \sin \left(5x - \frac{x}{2} \right) \right] \\
&= \frac{\sin 5x}{\sin \frac{5x}{2}} \cdot \left(\cos \frac{9x}{2} + i \sin \frac{9x}{2} \right).
\end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{\sin 5x}{\sin \frac{5x}{2}} \cdot \cos \frac{9x}{2}$ và $B = \frac{\sin 5x}{\sin \frac{5x}{2}} \cdot \sin \frac{9x}{2}$.

III. BÀI TẬP

19. Chứng minh hệ thức :

$$1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \cdot \cos \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \quad (1)$$

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \cdot \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \quad (2)$$

20. Áp dụng kết quả bài 19, suy ra giá trị của biểu thức

$$E = \cos \frac{2\pi}{2n+1} + \cos \frac{4\pi}{2n+1} + \cos \frac{6\pi}{2n+1} + \dots + \cos \frac{2n\pi}{2n+1}.$$

21. Cho $z = \cos \theta + i \sin \theta$. Chứng minh :

a) $z^2 + z + 2 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 2(\cos 2\theta + \cos \theta + 1);$

b) $z^2 - z + 2i + \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} = 2i(\sin 2\theta - \sin \theta + 1);$

c) $z^3 - \frac{1}{z^3} = 2i \sin 3\theta ;$

d) $\left(z - \frac{1}{z}\right)^3 = -8i \sin^3 \theta ;$

e) $z^3 - z + \frac{1}{z} - \frac{1}{z^3} = 2i(\sin 3\theta - \sin \theta).$



Vấn đề 6

PHÉP BIẾN HÌNH VÀ SỐ PHỨC

I. PHƯƠNG PHÁP

Trong mặt phẳng phức, phép biến hình f biến điểm $M(z)$ thành điểm $M'(z')$ được xác định bằng một hệ thức giữa z và z' : $z' = f(z)$.

1) Phép tịnh tiến

$$z' = z + c \text{ (c là số phức cho trước)}$$

2) Phép đối xứng

* Đối xứng qua gốc tọa độ O : $z' = -z$

* Đối xứng qua trục Ox : $z' = \bar{z}$

* Đối xứng qua trục Oy : $z' = -\bar{z}$.

3) Phép vị tự tâm O , tỉ số vị tự k

$$z' = kz \text{ (k là số thực khác 0)}.$$

4) Phép quay tâm O, góc quay φ

$$z' = (\cos \varphi + i \sin \varphi).z.$$

Đặc biệt : phép quay tâm O, góc quay $\pm 90^\circ$

$$z' = \pm iz.$$

5) Phép đồng dạng

$$z' = r (\cos \varphi + i \sin \varphi).z.$$

II. VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho hình vuông ABCD có 4 đỉnh theo thứ tự đó (ngược chiều kim đồng hồ), lần lượt biểu diễn các số phức a, b, c và d .

a) Cho $a = 2 + i, b = 3 - 2i$. Tìm c và d ;

b) Cho $a = -2 + 5i, c = 4 - 8i$. Tìm b và d .

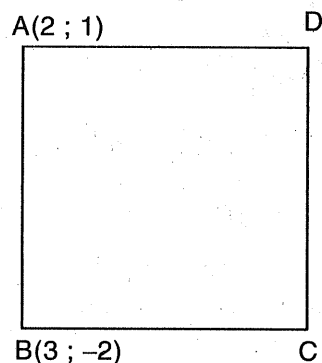
Giải

a) Phép quay tâm A, góc quay 90° biến điểm B thành điểm D, suy ra :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} &= i \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow d - a = i(b - a) \\ &\Leftrightarrow d - (2 + i) = i(3 - 2i - 2 - i) \\ &\Leftrightarrow d = 2 + i + 3i + 2 - 2i + 1 \\ &\Leftrightarrow d = 5 + 2i. \end{aligned}$$

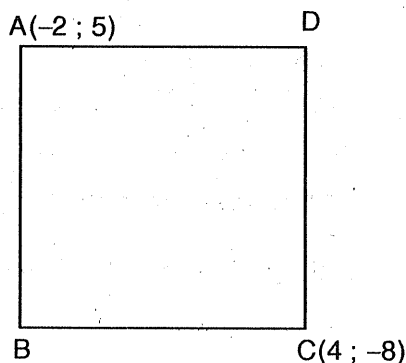
Ta có $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow c - d = b - a \\ &\Leftrightarrow c = d + b - a = 5 + 2i + 3 - 2i - 2 - i \\ &\Leftrightarrow c = 6 - i. \end{aligned}$$



b) Phép quay tâm B góc quay 90° biến điểm C thành điểm A nên ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA} &= i \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow a - b = i(c - b) \\ &\Leftrightarrow b(1 - i) = a - ic \\ &\Leftrightarrow b(1 - i) = -2 + 5i - 4i - 8 = -10 + i \\ &\Leftrightarrow b = \frac{-10 + i}{1 - i} = \frac{(-10 + i)(1 + i)}{2} \\ &\Leftrightarrow b = -\frac{11}{2} - \frac{9i}{2}. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\text{Ta có } \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow d - a = c - b \Leftrightarrow d = a + c - b \\
&\Leftrightarrow d = -2 + 5i + 4 - 8i - \left(-\frac{11}{2} - \frac{9i}{2}\right) \\
&\Leftrightarrow d = \frac{15}{2} + \frac{3i}{2}.
\end{aligned}$$

Ví dụ 2. Tâm của một hình vuông là điểm $K(-2 + i)$, một đỉnh là điểm $A(1 + 3i)$. Tìm 3 đỉnh còn lại.

Giải

Bốn đỉnh của hình vuông là A, B, C, D lần lượt biểu diễn các số phức a, b, c và d. Tâm K biểu diễn số phức $k = -2 + i$.

$$\begin{aligned}
\text{Ta có } \overrightarrow{CK} &= \overrightarrow{KA} \Leftrightarrow k - c = a - k \\
&\Leftrightarrow c = 2k - a = -4 + 2i - 1 - 3i \\
&\Leftrightarrow c = -5 - i.
\end{aligned}$$

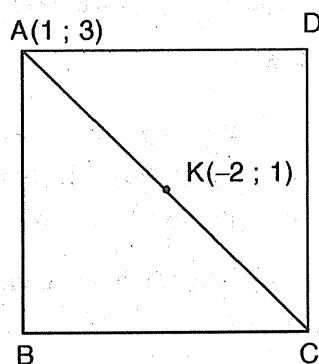
Phép quay tâm K, góc quay 90° biến điểm A thành điểm B nên ta có :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{KB} &= i \overrightarrow{KA} \Leftrightarrow b - k = i(a - k) \\
&\Leftrightarrow b = k + ia - ik = -2 + i + i + 3i^2 + 2i - i^2 \\
&\Leftrightarrow b = -4 + 4i.
\end{aligned}$$

Ta có K là trung điểm của BD nên : $b + d = 2k$

$$\Leftrightarrow d = 2k - b = -4 + 2i + 4 - 4i = -2i.$$

Vậy 3 đỉnh còn lại là $B(-4 ; 4)$, $C(-5 ; -1)$ và $D(0 ; -2)$.



III. BÀI TẬP

22. Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 4 BC$. Bốn đỉnh A, B, C và D (theo chiều kim đồng hồ) lần lượt biểu diễn các số phức a, b, c và d. Cho $a = 1 + 2i$, $b = 5 + 6i$. Tìm c và d.
23. Cho hình chữ nhật ABCD có 4 đỉnh theo thứ tự đó (cùng chiều kim đồng hồ), lần lượt biểu diễn các số phức a, b, c và d. Biết $AB = 2 CB$, $a = -2 - i$ và $c = 3 + 5i$. Tìm b và d.

BÀI TẬP ÔN CUỐI CHƯƠNG V

1. Tìm $x, y \in \mathbb{R}$ thoả mãn các hệ thức sau :

a) $\frac{x}{1+i} + \frac{y}{3-3i} = 2 + 3i$;

b) $\frac{x(1+i)}{2-i} - \frac{(x+y)(2+3i)}{1-2i} = y + 1 - 2i$;

c) $\frac{x+i}{1-i} = \frac{y-i}{1+i}$.

2. Gọi $M(x ; y)$ và $P(x' ; y')$ là các điểm lần lượt biểu diễn các số phức z và $w = \frac{1}{z}$.

a) Tính x', y' theo x và y ;

b) Tìm tập hợp các điểm P biết M di động trên đường thẳng $y = -2x$ ($x \neq 0$) ;

c) Tìm tập hợp các điểm P biết M di động trên đường thẳng $x = 1$.

3. Tính căn bậc hai của các số phức sau :

a) $-8 - 6i$;

b) $24 - 10i$;

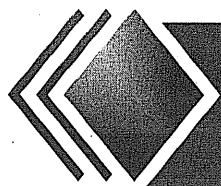
c) $35 + 12i$.

4. Giải các phương trình sau :

a) $z^2 - 4z + 4 + 2i = 0$;

b) $z^2 - (4+i)z + 5 - i = 0$.

5. Giải phương trình $z^5 = 1$. Từ đó suy ra giá trị đúng của $\cos \frac{2\pi}{5}$ và $\sin \frac{2\pi}{5}$.



HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

Chương I

KHÁI NIỆM LŨY THỪA VÀ HÀM SỐ LŨY THỪA

§1. LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ HỮU TỈ - LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC

Vấn đề 1. CÁC PHÉP TOÁN CƠ BẢN VỀ LŨY THỪA

1. a) $-\frac{80}{27}$; b) $\frac{111}{16}$; c) $\frac{84}{5}$; d) 10 .
2. a) $x^{\frac{7}{12}}$; b) $\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{15}}$; c) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$; d) $a^{\frac{1}{4}}$.
3. a) ab ; b) $2a$.
4. a) $\sqrt[4]{b}$; b) $2\sqrt[3]{ab}$; c) 1 ; d) $\sqrt{a}$.
5. a) a ; b) a .
6. a) a^3 ; b) a^2 ; c) $\frac{2a^{\sqrt{2}}}{a^{\sqrt{2}} - b\sqrt{3}}$; d) $|x^{\pi} - y^{\pi}|$.
8. a) $(\sqrt{3})^{-\frac{5}{6}} = \sqrt[3]{3^{-1}} \sqrt[4]{\frac{1}{3}}$; b) $3^{600} > 5^{400}$;
c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{7}} = \sqrt{2} \cdot 2^{\frac{3}{14}}$; d) $7^{30} > 4^{40}$.

Vấn đề 2. CHỨNG MINH MỘT BIỂU THỨC KHÔNG PHỤ THUỘC THAM SỐ

9. $M = 1$. Vậy M không phụ thuộc vào a, b .

§2. HÀM SỐ LŨY THỪA

Vấn đề 1. CHỨNG MINH MỘT ĐẲNG THỨC, BẤT ĐẲNG THỨC

1. Xét biểu thức : $a^m - b^m - c^m = a^{m-2}(b^2 + c^2) - b^m - c^m$
 $= b^2(a^{m-2} - b^{m-2}) + c^2(a^{m-2} - c^{m-2})$

Theo điều kiện bài ra thì : $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a > b$; $a > c$.

a) Khi $m > 2 \Rightarrow m - 2 > 0 \Rightarrow a^{m-2} > b^{m-2}$ và $a^{m-2} > c^{m-2}$.

Suy ra : $a^m - b^m - c^m > 0 \Rightarrow a^m > b^m + c^m$.

b) Khi $m < 2 \Rightarrow m - 2 < 0$ thì $a^{m-2} < b^{m-2}$ và $a^{m-2} < c^{m-2}$.

Suy ra : $a^m - b^m - c^m < 0 \Rightarrow a^m < b^m + c^m$.

2. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si: $2^{\sin x} + 2^{\tan x} \geq 2\sqrt{2^{\sin x + \tan x}} = 2.2^{\frac{2\sin x + \tan x}{2}}$

Ta có : $2^{\frac{3x}{2}+1} = 2.2^{\frac{3x}{2}}$.

So sánh : $2\sin x + \tan x$ với $3x$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Xét hàm số: $f(x) = 2\sin x + \tan x - 3x \Rightarrow f'(x) = 2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3$

$$f'(x) = \frac{2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1}{\cos^2 x} = \frac{(2\cos x + 1)(\cos x - 1)^2}{\cos^2 x} > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$f(x)$ đồng biến trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên:

$$\frac{\pi}{2} > x > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow 2\sin x + \tan x > 3x \Rightarrow 2.2^{\frac{2\sin x + \tan x}{2}} > 2.2^{\frac{3x}{2}}.$$

Vậy $2^{2\sin x} + 2^{\tan x} > 2^{\frac{3x}{2}+1}$.

3. Theo giả thiết $a > 0$ nên $a.3^a$ cũng lớn hơn 0. Chia hai vế của bất đẳng thức cho số dương $a.3^a$.

$$\text{Ta có : } A = \left(9^a - 4.3^a + 1\right)\frac{1}{3^a} + \left(a^2 + 1\right)\frac{1}{a} \geq 0 \Leftrightarrow \left(3^a - 4 + \frac{1}{3^a}\right) + \left(a + \frac{1}{a}\right) \geq 0.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2 số dương, ta có:

$$3^a + \frac{1}{3^a} \geq 2 \text{ và } 3^a + \frac{1}{3^a} = 2 \Leftrightarrow a = 0, \text{ trái với giả thiết } a > 0 \text{ nên dấu bằng không xảy ra, do đó}$$

$$3^a + \frac{1}{3^a} > 2. \text{ Với hai số } a \text{ và } \frac{1}{a} \text{ ta có } a + \frac{1}{a} \geq 2.$$

Cộng các bất đẳng thức theo vế ta có:

$$3^a + \frac{1}{3^a} + a + \frac{1}{a} > 4 \Rightarrow \left(3^a - 4 + \frac{1}{3^a}\right) + \left(a + \frac{1}{a}\right) > 0.$$

Vậy kết hợp lại ta luôn có $A > 0$.

4. Theo đề bài: $(a^m + b^m)^{\frac{1}{m}} \leq (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}}$ (1)

Với $a = 0$ hoặc $b = 0$, bất đẳng thức đúng.

$$\text{Với } 0 < a \leq b, \text{ ta có } 0 < \frac{a}{b} \leq 1 \Rightarrow 0 < \left(\frac{a}{b}\right)^m \leq \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$\Rightarrow 1 + \left(\frac{a}{b}\right)^m \leq 1 + \left(\frac{a}{b}\right)^n \Rightarrow \left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^m\right]^{\frac{1}{n}} \leq \left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}} \quad (2)$$

$$\forall 1 + \left(\frac{a}{b}\right)^m > 1 \text{ và } 0 < \frac{1}{m} < \frac{1}{n} \text{ nên } \left[\left(1 + \frac{a}{b}\right)^m\right]^{\frac{1}{m}} \leq \left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^m\right]^{\frac{1}{n}} \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) và (3) suy ra: } \left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^m\right]^{\frac{1}{m}} \leq \left[1 + \left(\frac{a}{b}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}} \Rightarrow \left[\frac{a^m + b^m}{b^m}\right]^{\frac{1}{m}} \leq \left[\frac{b^n + a^n}{b^n}\right]^{\frac{1}{n}}.$$

$$\text{Vậy } (a^m + b^m)^{\frac{1}{m}} \leq (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}}.$$

Vấn đề 2. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LŨY THỪA

5. a) $x = \frac{1}{4}$; b) $x = 3$.

6. $x = 1$.

7. a) $x = 1$; b) $x = 1$; $x = 16$.

8. Đặt $u = \sqrt[3]{3x-2}$ và $v = \sqrt{6-5x}$, $v \geq 0$. Ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2u + 3v = 8 \\ 5u^3 + 3v^2 = 8. \end{cases}$$

Giải hệ ta được: $\begin{cases} u = -2 \\ v = 4 \end{cases}$ từ đó suy ra nghiệm: $x = -2$.

9. a) $x = 0$; b) $-3 < x < 3$.

Vấn đề 3. TÌM TẬP XÁC ĐỊNH. ĐẠO HÀM TRÊN TẬP XÁC ĐỊNH

10. a) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 1 > 0\} \Rightarrow D = \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$

b) $D \equiv \mathbb{R}$.

11. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\sqrt{\frac{3}{5}}, \sqrt{\frac{3}{5}}\right\}$.

12. $D = \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

13. $y' = \frac{(x+2)^2}{(x+1)^3(x+3)^4} \left(\frac{2}{x+2} - \frac{3}{x+1} - \frac{4}{x+3}\right)$.

14. $y' = -\frac{2a}{3x\sqrt[3]{x^2}} - \frac{4b}{3x^2\sqrt[3]{x}}$.

$$15. a) y' = x^{\pi} x^{\left(\frac{\pi}{x} + \ln \pi\right)};$$

$$b) y' = (1 + \sqrt{2}) \frac{1}{x} (\ln x)^{\sqrt{2}}.$$

$$16. a) y' = \frac{5 \cos 5x}{3 \sqrt[3]{(\sin 5x)^2}}; \quad b) y' = \frac{3 e^{3x}}{4 \sqrt[4]{(e^{3x} + 2)^3}}.$$

$$17. a) y' = -\frac{1}{3x^3 \sqrt{x}};$$

$$b) y' = \frac{5}{2\sqrt{x}} + \frac{20}{x^3} - \frac{1}{4x\sqrt{x}};$$

$$c) y' = -\frac{1}{x^2};$$

$$d) y' = 3\sqrt{x} + 2x;$$

$$e) y' = \frac{2x^2 \sqrt[3]{\left(\frac{1-x^3}{1+x^3}\right)^2}}{(1-x^3)^2};$$

$$f) y' = \left(\frac{a}{x}\right)^b \left(\frac{x}{b}\right)^a \left(\frac{a-b}{x}\right);$$

$$g) y' = 2\pi(2x+1)^{\pi-1}; \quad h) y' = \frac{3}{5x^5 \sqrt{\ln^2 5x}}.$$

$$18. a) a = \frac{1}{8};$$

$$b) y = \frac{1}{4}x + 1;$$

$$c) A(4; 2), C(-2; \frac{1}{2}).$$

§3. HÀM SỐ MŨ

Vấn đề 1. TÌM GIỚI HẠN

1. a) $-3e^2$; b) -3 ; c) 3 .
2. 1.

Vấn đề 2. TÌM ĐẠO HÀM

3. a) $(2x-1)e^{2x}$; b) $\frac{2x(e^{4x}+1+xe^{4x})}{\sqrt{e^{4x}+1}}$; c) $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$;
d) $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$; e) $\frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$; f) $2^x \ln 2 - \frac{\sqrt{e^x}}{2}$.
4. a) $y^{(n)} = (\ln a)^n a^x$; b) $y^{(n)} = (k^n)e^{kx}$.

Vấn đề 3. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT. KHẢO SÁT TÍNH CHẤT BIẾN THIÊN

6. a) $\text{Min}_y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -1$, $\text{Max}_y = 4 \Leftrightarrow x = 2$;
b) $\text{Min}_y = 1 \Leftrightarrow x = 0$, $\text{Max}_y = 2 \Leftrightarrow x = \pm 1$.
8. a) $a > 1$; b) $0 < a < 1$.
9. $\frac{2007}{2}$.

BÀI TẬP ÔN CUỐI CHƯƠNG I

1. a) $p < q$; b) $p > q$; c) $p > q$; d) $p > q$.
3. a) $\begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 4 \end{cases}$; b) $x = \pm 64$.

Chương II

KHÁI NIỆM LÔGARIT VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

Vấn đề 1. CÁC PHÉP TOÁN VỀ LÔGARIT

1. $\log_3 3 = 1$; $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$; $\log_3 1 = 0$; $\log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2$;
 $\log_3 \sqrt[3]{3} = \log_3 3^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$; $\log_3 \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = \log_3 3^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}$.
2. $\log_{\frac{1}{5}} 125 = -3$; $\log_{0,5} \frac{1}{2} = 1$; $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{64} = 3$; $\log_{\frac{1}{6}} 36 = -2$.
3. $3^{\log_3 18} = 18$; $3^{5 \log_3 2} = 32$; $\left(\frac{1}{8}\right)^{\log_2 5} = \frac{1}{125}$; $\left(\frac{1}{32}\right)^{\log_{0,5} 2} = 32$.
4. a) 625; b) -3; c) 25; d) 5,5.
5. a) $\frac{4}{3}$; b) -2; c) $\frac{1}{2}$; d) 3.
6. a) 8; b) 11.
7. a) $a^4 b^7$; b) $\frac{a^2}{b^3}$.
8. a) $2(\alpha - 1 + \beta)$; b) $\frac{1}{2} + 4\alpha$.
9. a) 0; b) $\log 18\sqrt{2}$; c) $15 \log 2 - 3 \log \sqrt{3}$; d) $\log 1875 - 4$.
10. a) 3; b) 7; c) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}}$.
11. a) $3b + 2a$; b) $4a - 2b$; c) $2b - 2a$; d) $-2(a+b)$.
14. a) $-\frac{1}{2}$; b) 5.
15. a) $2 \ln^2 a + 2$; b) 0.
16. $\ln 36 = 2a + 2b$; $\ln \frac{1}{12} = -(b + 2a)$; $\ln 21 + 2 \ln 14 - 3 \ln 0,875 = b + 11a$.

Vấn đề 2. TÌM GIỚI HẠN

17. a) 3 ; b) 0 ; c) 1.

Vấn đề 3. TÌM ĐẠO HÀM

18. a) $3 \ln x + \frac{3x-2}{x} 2 \ln x$; b) $\frac{x \ln x^2}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{2\sqrt{x^2+1}}{x}$;
c) $\ln \frac{1}{x+1} - \frac{x}{1+x}$; d) $\frac{2}{1+x^2} - \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$.
19. a) $(-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{x^n}$; b) $(-1)^n \frac{(n-2)!}{x^{n-1}}$.

Vấn đề 4. TÌM TẬP XÁC ĐỊNH. CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT. KHẢO SÁT TÍNH CHẤT BIẾN THIÊN

20. a) $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$; b) $(5; -3) \cup (3; +\infty)$; c) $(0; +\infty) \setminus \{64\}$; d) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
22. a) $y_{\min} = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{e}$; $y_{\max} = 2 \Leftrightarrow x = -e$;
b) $y_{\min} = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (hàm số không có GTLN);
c) $y_{\min} = -\frac{1}{2} - 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (hàm số không có GTLN);
d) $y_{\max} = \frac{1}{e} \Leftrightarrow x = \frac{3+e}{2}$ (hàm số không có GTNN);
25. $y_{\max} = \frac{4}{e^2} \Leftrightarrow x = e^2$; $y_{\min} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

BÀI TẬP ÔN CUỐI CHƯƠNG II

1. a) $\frac{27}{5\sqrt{5}} - 20$; b) $\frac{173}{60}$; c) $-n$.
3. $D = \left[\frac{11}{2} ; +\infty \right)$.

Chương III

PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

§1. PHƯƠNG TRÌNH MŨ

Vấn đề 1. ĐUA VỀ CÙNG MỘT CƠ SỐ

1. $x = 1$. 2. $x = 3$. 3. $x = 1$. 4. $x = \frac{7}{5}$.

5. a) $x = -\frac{1}{2}$; b) $x = 0 \vee x = 3$; c) $x = 1$.

Vấn đề 2. PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN SỐ PHỤ

6. a) $x = 2$; $x = \log_3 \frac{2}{3}$; b) $x = 1$; c) $x = 0$.

7. a) $x = 0$; b) $x = 0$ và $x = 1$.

8. $x = \log_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \frac{7}{5}$.

9. $x = -1$ và $x = 2$.

10. $x = \frac{3}{2}$.

11. a) $x = k \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) ; b) $x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$) ;

c) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; d) $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

12. a) $x = 0$; b) $x = \log_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \frac{2}{3}$; c) $x = e^{-2}$.

13. $0 < m \leq \frac{9}{4}$.

14. a) $x = 1$; b) $m = 4$.

15. $\begin{cases} k = 5 + 2\sqrt{6} \\ k < 0. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x = -1 \\ x = 2. \end{cases}$

17. $x = 1$.

18. $x = \pm 1$.

Vấn đề 3. PHƯƠNG PHÁP LÔGARIT HOÁ

19. a) $\begin{cases} x = 3 \\ x = 2 + \log_5 2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x = 0 \\ x = -\log_2 3 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x = 1 \\ x = 1 - \log_2 3. \end{cases}$

20. a) $x = 2$; b) $x = 6$; c) $x = 0$; d) $x = 100$.

21. a) $x = \log_{\frac{4}{3}} (\log_3 4)$; b) $x = \frac{1}{9}$;

c) $\begin{cases} x = 2 \\ x = -1 - \log_3 2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x = \frac{1}{5} \\ x = \sqrt[5]{5}. \end{cases}$

Vấn đề 4. PHƯƠNG PHÁP DÙNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ ĐỂ CHỨNG MINH TÍNH DUY NHẤT CỦA NGHIỆM

22. Vô nghiệm.

23. $x = 2$

24. a) $x = 1$; b) $\begin{cases} x = 2 - \lg_5 3 \\ x = 2. \end{cases}$

25. a) $x = 1$; b) $x = -1$; c) $x = 2$.

Vấn đề 5. PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG MẪU MỤC

26. $x = 1$.

27. Vô nghiệm.

28. $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{1}{2} \\ x \geq 3. \end{cases}$

§2. PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

Vấn đề 1. ĐƯA VỀ CÙNG MỘT CƠ SỐ

1. $x = 48$. 2. $x = 1$. 3. $x = 2$. 4. $x = 13$.

5. $\begin{cases} x = 0 \\ x = -5. \end{cases}$ 6. $x = 3^{\frac{\frac{1}{2} - \log_3 4}{\log_4 3 - \frac{1}{2}}}$.

7. a) $x = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$; b) $x = \frac{1 \pm \sqrt{11}}{2}$; c) $x = -1$.

8. a) $x = 0$; b) $\begin{cases} x = 0 \\ x = 3. \end{cases}$

9. a) $x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$; b) $x = 9$.

10. $x = \log_2 3$.

Vấn đề 2. PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN SỐ PHỤ

11. $\begin{cases} x = 0, 1 \\ x = 1000 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x = 2^{\frac{\log_3 3}{2}} \\ x = 2 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ x = 4 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x = \log_5 6 \\ x = \log_5 \frac{26}{25} \end{cases}$

$$15. \begin{cases} x = 3^9 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} x = 10 \\ x = 10^{\frac{1}{9}} \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x = \frac{1}{27} \\ x = \frac{1}{\sqrt[5]{81}} \end{cases}$$

$$18. a) \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{16} \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} x = 2 \\ x = 16 \end{cases}$$

$$19. a) \begin{cases} x = \log_3 \frac{82}{81} \\ x = \log_3 28 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x = \frac{5}{4} \\ x = 3. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} x = -1 \\ x = -2^{25} \end{cases}$$

Vấn đề 3. PHƯƠNG PHÁP DÙNG TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ ĐỂ CHỨNG MINH TÍNH DUY NHẤT CỦA NGHIỆM

$$21. x = 2.$$

$$22. x = 9.$$

$$23. x = \frac{1}{6}.$$

$$24. \begin{cases} x = -1 \\ x = -2. \end{cases}$$

Vấn đề 4. PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG MẪU MỤC

$$25. \text{ Vô nghiệm.}$$

$$26. \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ x = 2. \end{cases}$$

§3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ - LÔGARIT

$$1. a) x = \log_2(1 + \sqrt{3}); y = \log_2(\sqrt{3} - 1); b) x = -2; y = 3; c) x = \frac{1}{2}; y = \frac{1}{2}.$$

$$2. a) \begin{cases} x = 0; y = 1 \\ x = 2; y = 4 \end{cases};$$

$$b) x = 0; y = -3;$$

$$c) x = -2; y = 0.$$

$$3. a) x = -3; y = 0;$$

$$b) x = y = 2;$$

$$c) \begin{cases} x = \frac{1}{6}; y = \frac{1}{4} \\ x = \frac{1}{4}; y = \frac{1}{6} \end{cases};$$

$$d) x = 3; y = -2.$$

$$4. a) \begin{cases} x = 2; y = 18 \\ x = 18; y = 2 \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} x = 12; y = 18 \\ x = 18; y = 12 \end{cases};$$

$$c) \begin{cases} x = 1; y = 4 \\ x = 4; y = 1. \end{cases}$$

$$5. a) x = -2; y = 7;$$

$$b) x = \frac{3}{2}; y = \frac{1}{2}.$$

6. a) $\begin{cases} x=y=1 \\ x=y=2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x=0; y=\log_2 \frac{8}{11} \\ x=\frac{1}{3}[\log_2(3+\sqrt{8})-1]; y=2-\log_2(3+\sqrt{8}) \end{cases}$.
7. a) $x=2; y=5$; b) $x=100; y=10$.
8. a) $\begin{cases} x=8; y=2 \\ x=2; y=\frac{1}{2} \end{cases}$; b) $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; y=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.
9. a) $x=y=1$; b) $x=y=5$; c) $x=y=4$.
10. a) $x=0; y=\frac{1}{2}$; b) $\begin{cases} x=-1; y=-3 \\ x=3; y=-3 \end{cases}$.
11. $x=16; y=4$.
12. a) $x=\frac{1}{4}; y=\frac{1}{3}$; b) $\begin{cases} x=8; y=2 \\ x=\frac{1}{2}; y=\frac{1}{8} \end{cases}$; c) $\begin{cases} x=3-\sqrt{6}; y=3+\sqrt{6} \\ x=3+\sqrt{6}; y=3-\sqrt{6} \end{cases}$.
13. $\begin{cases} x=0; y=1 \\ x=2; y=4 \end{cases}$; 14. $\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$.
15. $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$; 16. $x=y=\pm 2$.

BÀI TẬP ÔN CUỐI CHƯƠNG III

1. a) $x=10$; b) $x=-2$; c) $x=\frac{3}{2}$; d) $\begin{cases} x=-\frac{3}{2} \\ x=-1 \end{cases}$.
2. a) $\begin{cases} x=2 \\ x=\frac{1}{16} \end{cases}$; b) $x=1$; c) $x=13$; d) $x=3$.
3. a) $x=1$; b) $x=3$.
4. a) $x=\pm 1$; b) $x=1$.
5. a) $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$; c) $\begin{cases} x=2^9 \\ y=1 \end{cases}$.
6. ĐK: $x > 0$ và $y > 0$.

Xét hai trường hợp: $x > y > 0$ và $y > x > 0$. Suy ra điều vô lí. Kết luận $x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

7. ĐK: $x > -1$ và $y > -1$. Từ hệ suy ra $y=x+a$.

Xét hàm số: $f(x)=e^{x+a}-e^x+\ln(1+x)-\ln(1+x+a)$ với $x > -1$.

Tìm $f'(x)$. Chứng minh $f'(x) > 0$ với $a > 0$. Từ đó suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm duy nhất.

Suy ra hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

8. $x = 2$. 9. a) $x = 3^{\pm\sqrt{3}}$; b) $0 \leq m \leq 2$.

10. $\begin{cases} x = 0 \\ x = 1. \end{cases}$ 11. $\begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{5}{4}. \end{cases}$

Chương IV

BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

§1. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

Vấn đề 1. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ DẠNG CƠ BẢN

1. a) $x > \log_3 5$; b) $\frac{-1-\sqrt{10}}{3} < x < \frac{-1+\sqrt{10}}{3}$.

2. a) $\begin{cases} x < 1 \\ x > 2 \end{cases}$; b) $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$.

3. $x \leq 1$. 4. $x > 2$.

Vấn đề 2. ĐUA VỀ CÙNG MỘT CƠ SỞ

5. $\begin{cases} -1 \leq x \leq 2 \\ x \geq 3. \end{cases}$ 6. a) $x > \frac{2}{5}$; b) $x \in [1; 2]$.

7. $x \geq 2$. 8. $\begin{cases} x \geq 2 \\ 0 < x \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$

Vấn đề 3. PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN SỐ PHỤ

9. a) $\begin{cases} x > 1 \\ x < 0 \end{cases}$; b) $-1 < x < 0$.

10. a) $\begin{cases} \sqrt{3} \leq x < \sqrt{7} \\ -\sqrt{7} < x \leq -\sqrt{3} \end{cases}$; b) $x \leq 1$.

11. $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x \geq 1+\sqrt{3} \\ x \leq 1-\sqrt{3}. \end{cases}$ 12. a) $x > 5$; b) $x > 2$.

13. $\frac{3}{4} < x \leq 3$.

Vấn đề 4. PHƯƠNG PHÁP LÔGARIT HOÁ

14. a) $x \leq \log_7 \frac{31}{5}$; b) $x > 4 \log_{\frac{625}{27}} \frac{5\sqrt{5}}{3}$.

§2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

Vấn đề 1. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT DẠNG CƠ BẢN

1. a) $-30 \geq x$; b) $x \geq 1$; c) $x < 1$.
2. $x \in [0; 2) \cup (4; 6]$.
3. Biến đổi bất phương trình về dạng : $(\log_3 x - 1)(\log_2 x - 1) > 0$.
ĐS : $0 < x < 2$ hay $x > 3$.
4. $(-4; -3) \cup (8; +\infty)$.
5. $[2 - \sqrt{2}; 1) \cup (2; 2 + \sqrt{2}]$.

Vấn đề 2. ĐUA VỀ CÙNG MỘT CƠ SỞ

6. a) $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$; b) $-1 + 2\sqrt{2} > x > -1$; c) $\begin{cases} x > 2 \\ x < 1. \end{cases}$
7. a) $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{5} \cup x > \frac{3}{2}$; b) $\frac{1}{2} < x < 1$.
8. a) $x \geq 3$; b) $\frac{-3 + \sqrt{33}}{6} < x < \frac{1}{2}$; c) $x > \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$.

Vấn đề 3. PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN SỐ PHỤ

9. a) $\begin{cases} 0 < x < \frac{1}{5} \\ 1 < x < 5\sqrt{5} \end{cases}$; b) $0 < x < 1 \vee 4 < x < 8 \vee 16 < x < 2^6$.
10. a) $x > \frac{1}{100}$; b) $\frac{1}{6} \leq x \leq 6$.
11. a) $x \leq 9\sqrt[3]{9}$; b) $\log_2 5 - 2 < x < 1$.

BÀI TẬP ÔN CUỐI CHƯƠNG IV

1. a) $x \geq \frac{9}{2}$; b) $x < -1$; c) $x \leq 0$; d) $\begin{cases} x \leq 1 \\ 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$
2. a) $x > 4$; b) $\begin{cases} -\sqrt{2} < x < -\frac{3\sqrt{2}}{4} \\ \frac{3\sqrt{2}}{4} < x < \sqrt{2} \end{cases}$; c) $\begin{cases} x < 0 \\ \log_6 5 < x < 1. \end{cases}$

3. Chia hai vế của bất phương trình cho 6^x , bất phương trình trở thành :

$$2.\left(\frac{1}{3}\right)^x + 3.\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{6}\right)^x > 1.$$

Xét hàm số : $f(x) = 2.\left(\frac{1}{3}\right)^x + 3.\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{6}\right)^x$

$\Rightarrow f(x)$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$

* Xét $f(2) = 1 \Rightarrow x = 2$ không là nghiệm của bất phương trình

* $x > 2 \Rightarrow f(x) < f(2) \Rightarrow x > 2$ không là nghiệm của bất phương trình

* $x < 2 \Rightarrow f(x) > f(2) \Rightarrow x < 2$ là nghiệm của bất phương trình.

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < 2$.

4. Đặt điều kiện : $-\frac{1}{2} \leq x \leq 3$.

Khi đó bất phương trình $\Leftrightarrow 1 - 3x.5^{-x} > 0 \Leftrightarrow 5^x - 3x > 0$.

Xét hàm số : $f(x) = 5^x - 3x$. Ta chứng minh $\min_{\left[-\frac{1}{2}, 3\right]} y > 0$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là : $-\frac{1}{2} \leq x \leq 3$.

5. $\log_9 73 < x \leq 2$.

6. $2 < x < 4$.

Chương V

SỐ PHỨC

§1. SỐ PHỨC

Vấn đề 1. THỰC HIỆN CÁC PHÉP TÍNH TRÊN $\mathbb{C}$

1. a) $z = \frac{1-i\sqrt{2}}{\sqrt{5}-i\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}+i}{\sqrt{3}-i\sqrt{5}} = \frac{(1-i\sqrt{2})(\sqrt{5}+i\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-i\sqrt{3})(\sqrt{5}+i\sqrt{3})} + \frac{(\sqrt{2}+i)(\sqrt{3}+i\sqrt{5})}{(\sqrt{3}-i\sqrt{5})(\sqrt{3}+i\sqrt{5})}$
 $= \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{6}+i\sqrt{3}-i\sqrt{10})+(\sqrt{6}-\sqrt{5}+i\sqrt{10}+i\sqrt{3})}{5+3} = \frac{2\sqrt{6}+2i\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{i\sqrt{3}}{4}$.
- b) $z = \frac{(7-8i)^{10}}{(8+7i)^{11}} = \left(\frac{7-8i}{8+7i}\right)^{10} \frac{1}{8+7i} = \left(\frac{(7-8i)(8-7i)}{(8+7i)(8-7i)}\right)^{10} \frac{8-7i}{(8+7i)(8-7i)}$
 $= \left(\frac{56+56i^2-49i-64i}{64+49}\right)^{10} \frac{8-7i}{64+49} = \left(\frac{-113i}{113}\right)^{10} \frac{8-7i}{113}$
 $= (-i)^{10} \frac{8-7i}{113} = i^4.i^4.i^2 \frac{8-7i}{113} = -\frac{8}{113} + \frac{7i}{113}$.

2. a) $22i$; b) -14 ; c) $48i$; d) $1-2i$; e) $\frac{-120+119i}{169}$; f) $8-2i$.

3. a) $z_1 + 2z_2 - \bar{z}_3 = (1-3i) + 2(2+i) - \overline{(3-4i)} = 1-3i + 4+2i - (3+4i) = 2-5i$.

b) $z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_3 = (1-3i)(2+i) + (2+i)(3-4i) = (1-3i)(2-i) + (2+i)(3+4i)$
 $= 2-3-7i+6-4+11i = 1+4i$.

c) $\overline{z_1 z_2 z_3} + z_2^2 z_3 = \overline{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3} + z_2^2 z_3 = (1+3i)(2-i)(3+4i) + (2+i)^2(3-4i)$
 $= (2+3+5i)(3+4i) + (4-1+4i)(3-4i)$
 $= (5+5i)(3+4i) + (3+4i)(3-4i) = 15-20+35i+9+16 = 20+35i$.

4. a) $z = 1 + (1+mi) + (1+mi)^2 = 1+1+mi+1+2mi+i^2m^2 = 3-m^2+3mi$.

z là số thuần ảo $\Leftrightarrow 3-m^2=0 \Leftrightarrow m=\pm\sqrt{3}$.

b) $z = \frac{m-1+2(m-1)i}{1-mi} = \frac{(m-1+2(m-1)i)(1+mi)}{(1-mi)(1+mi)}$
 $= \frac{m-1-m(2m-2)+[m(m-1)+2m-2]i}{1+m^2}$.

z là số thực $\Leftrightarrow m(m-1)+2m-2=0 \Leftrightarrow m^2+m-2=0 \Leftrightarrow m=1 \vee m=-2$.

5. Ta biết rằng số phức w là số thực $\Leftrightarrow \bar{w} = w$. Do đó

$\frac{2z-1}{z+1}$ là số thực $\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{2z-1}{z+1}\right)} = \frac{2z-1}{z+1} \Leftrightarrow \frac{2\bar{z}-1}{\bar{z}+1} = \frac{2z-1}{z+1}$

$\Leftrightarrow (2\bar{z}-1)(z+1) = (2z-1)(\bar{z}+1)$

$\Leftrightarrow 2z\bar{z} + 2\bar{z} - z - 1 = 2z\bar{z} + 2z - \bar{z} - 1 \Leftrightarrow z = \bar{z} \Leftrightarrow z$ là số thực.

6. a) $xy=0$; b) $x^2=y^2$.

Vấn đề 2. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐƠN GIẢN

7. a) $x=-2, y=3$; b) $x=30, y=10$; c) $x=0, y=1$.

8. a) $1-3i$; b) $\frac{3}{5}-\frac{6i}{5}$; c) $\frac{1}{2}+\frac{i}{2}$.

9. a) Điều kiện $z \neq -i$

$\frac{2z-1}{z+i} = 1+i \Leftrightarrow 2z-1 = (1+i)(z+i) \Leftrightarrow 2z-1 = (1+i)z + i + i^2$

$\Leftrightarrow (2-1-i)z = i-1+1 \Leftrightarrow (1-i)z = i$

$\Leftrightarrow z = \frac{i}{1-i} = \frac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{i+i^2}{1+1}$

$\Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$.

b) Điều kiện $z \neq 0$

$\frac{i}{z} = \frac{1}{2-i} + \frac{1}{3+6i} \Leftrightarrow \frac{i}{z} = \frac{1}{2-i} + \frac{1}{3(1+2i)} \Leftrightarrow \frac{i}{z} = \frac{2+i}{4+1} + \frac{1-2i}{3(1+2i)(1-2i)}$

$\Leftrightarrow \frac{i}{z} = \frac{2+i}{5} + \frac{1-2i}{3(1+4)} \Leftrightarrow \frac{i}{z} = \frac{3(2+i)}{15} + \frac{1-2i}{15} \Leftrightarrow \frac{i}{z} = \frac{7+i}{15}$

$$\Leftrightarrow z = \frac{15i}{7+i} = \frac{15i(7-i)}{(7+i)(7-i)} = \frac{15+105i}{49+1} \Leftrightarrow z = \frac{3}{10} + \frac{21}{10}i.$$

c) Phương trình $[(1+2i)\bar{z}+2-i]\left(iz+\frac{1}{i}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} iz+\frac{1}{i}=0 & (1) \\ (1+2i)\bar{z}+2-i=0 & (2) \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow i^2z+1=0 \Leftrightarrow -z+1=0 \Leftrightarrow z=1$$

$$(2) \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{-2+i}{1+2i} \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{(-2+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{-2+2+i+4i}{1+4} \Leftrightarrow \bar{z}=i \Leftrightarrow z=-i.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm : $z=1$ và $z=-i$.

d) Đặt $z=x+yi$, phương trình : $2z-\bar{z}=(z+\bar{z}+1)(1+i)-2$ có :

$$\text{vế trái} = 2x+2yi-(x-yi)=x+3yi$$

$$\text{vế phải} = (2x+1)(1+i)-2=2x-1+(2x+1)i.$$

Như vậy phương trình trở thành :

$$x+3yi=2x-1+(2x+1)i \Leftrightarrow \begin{cases} x=2x-1 \\ 3y=2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy phương trình có 1 nghiệm $z=1+i$.

10. Đặt $z=x+yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z}=x-yi$.

a) Phương trình $z^2=2\bar{z}$ trở thành

$$x^2-y^2+2xyi=2x-2yi \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=2x & (1) \\ xy=-y & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow y(x+1)=0 \Leftrightarrow y=0 \text{ hoặc } x=-1.$$

$$\text{Với } y=0, (1) \Rightarrow x^2-2x=0 \Rightarrow x=0 \vee x=2.$$

$$\text{Với } x=-1, (1) \Rightarrow y^2=3 \Rightarrow y=\pm\sqrt{3}.$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm : $z=0, z=2, z=-1+i\sqrt{3}$ và $z=-1-i\sqrt{3}$.

b) Phương trình : $z^2-|z|^2+1=0$ trở thành

$$x^2-y^2+2xyi-(x^2+y^2)+1=0 \Leftrightarrow -2y^2+1+2xyi=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2y^2+1=0 \\ 2xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y^2=\frac{1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} y=0 \\ y^2=\frac{1}{2} \end{cases} \text{ vô nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là : $z=\frac{1}{\sqrt{2}}i$ và $z=-\frac{1}{\sqrt{2}}i$.

c) Phương trình $z^2+|z|=0$ trở thành

$$x^2-y^2+2xyi+\sqrt{x^2+y^2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2+\sqrt{x^2+y^2}=0 \\ 2xy=0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ -y^2 + \sqrt{y^2} = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y=0 \\ x^2 + \sqrt{x^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y^2 = |y| \end{cases} \vee \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y^2 = \pm y \end{cases} \vee \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y^2 + y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=0 \\ y^2 - y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm là : $z=0$, $z=i$ và $z=-i$.

d) Phương trình $\frac{\bar{z}^2 + i}{z+1} = i \Leftrightarrow \bar{z}^2 + i = iz + i$ trở thành

$$\begin{aligned}
(x-yi)^2 = i(x+yi) &\Leftrightarrow x^2 - y^2 - 2xyi = -y + xi \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -y \\ -2xy = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + y = 0 \\ x(2y+1) = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ -y^2 + y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm : $z=0$, $z=i$, $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ và $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

$$11. a) \begin{cases} 2z + w = 4 \\ 2i\bar{z} + \bar{w} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z + w = 4 \\ -2iz + w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z + w = 4 \\ (2+2i)z = 4 \end{cases}$$

(phương trình thứ hai được thay thế bằng phương trình hệ quả do trừ các vế của 2 phương trình đã cho)

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{2}{1+i} \\ w = 4 - 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} \\ w = 4 - 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{2(1-i)}{1+1} \\ w = 4 - 2(1-i) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1-i \\ w = 2+2i \end{cases}
\end{aligned}$$

$$b) \begin{cases} z + w = \bar{w} + i \\ z - w = \bar{z} + i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z + (w - \bar{w}) = i \\ (z - \bar{z}) - w = i \end{cases}$$

Đặt $z = x + yi$, $w = u + vi$ ($x, y, u, v \in \mathbb{R}$), hệ phương trình trở thành :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x + yi + 2vi = i \\ 2yi - u - vi = i \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + (y + 2v)i = i \\ -u + (2y - v)i = i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y + 2v = 1 \\ u = 0 \\ 2y - v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ u = 0 \\ y + 2v = 1 \\ 2y - v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ u = 0 \\ y = \frac{3}{5} \\ v = \frac{1}{5} \end{cases}
\end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm là $\begin{cases} z = \frac{3}{5}i \\ w = \frac{1}{5}i \end{cases}$.

$$c) \begin{cases} z+w=1-\bar{w} \\ 2z+\bar{w}=2+i+w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z+(w+\bar{w})=1 \\ 2z+(\bar{w}-w)=2+i \end{cases}$$

Đặt $z = x + yi$ và $w = u + vi$ ($x, y, u, v \in \mathbb{R}$) thì hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} x+yi+2u=1 \\ 2x+2yi-2vi=2+i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2u+yi=1 \\ 2x+(2y-2v)i=2+i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2u=1 \\ y=0 \\ 2x=2 \\ 2y-2v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ u=0 \\ v=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm là : $\begin{cases} z=1 \\ w=-\frac{1}{2}i \end{cases}$

Vấn đề 3. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CÁC SỐ PHỨC

12. a) Đặt $a = \left(\frac{3+i\sqrt{3}}{3}\right)z$ và $b = \frac{i}{\sqrt{3}}z$.

Ta có : $OM = |z|$

$$OA = |a| = \left|\frac{3+i\sqrt{3}}{3}\right| |z| = \left|1+\frac{1}{\sqrt{3}}i\right| |z| = \sqrt{1+\frac{1}{3}} |z| = \frac{2}{\sqrt{3}} |z|$$

$$MA = |a - z| = \left|(1+\frac{i}{\sqrt{3}})z - z\right| = \left|\frac{i}{\sqrt{3}}\right| |z| = \frac{1}{\sqrt{3}} |z|.$$

Tam giác OMA vuông tại M $\Leftrightarrow OM^2 + MA^2 = OA^2$

$$\Leftrightarrow |z|^2 + \frac{1}{3}|z|^2 = \frac{4}{3}|z|^2, \text{ đúng } \forall z \in \mathbb{C}.$$

b) Ta có $MA = |a - z| = \left|(1+\frac{i}{\sqrt{3}})z - z\right| = \left|\frac{i}{\sqrt{3}}\right| |z| = \frac{1}{\sqrt{3}} |z|$

$$MB = |b - z| = \left|\frac{i}{\sqrt{3}}z - z\right| = \left|\frac{i}{\sqrt{3}} - 1\right| |z| = |z| \sqrt{\frac{1}{3} + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} |z|$$

$$AB = |b - a| = \left|\frac{i}{\sqrt{3}}z - (1+\frac{i}{\sqrt{3}})z\right| = |z|.$$

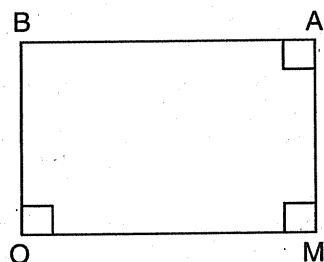
Ta có $MA^2 + AB^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}|z|\right)^2 + |z|^2 = \frac{1}{3}|z|^2 + |z|^2 = \frac{4}{3}|z|^2 = MB^2$ đúng $\forall z \in \mathbb{C}$.

Vậy tam giác MAB vuông tại A với mọi $z \in \mathbb{C}$.

c) Xét tam giác MOB, ta có :

$$OB = |b| = \left|\frac{i}{\sqrt{3}}z\right| = \frac{|z|}{\sqrt{3}}; OM = |z| \text{ và}$$

$$MB = |b - z| = \frac{2}{\sqrt{3}} |z|.$$



$$\text{Suy ra : } OM^2 + OB^2 = |z|^2 + \frac{|z|^2}{3} = \frac{4|z|^2}{3} = MB^2.$$

Vậy tam giác MOB vuông tại O với mọi $z \in \mathbb{C}$.

Tứ giác OMAB có 3 góc vuông nên là hình chữ nhật.

$$13. \text{ a) Ba điểm A, B, C thẳng hàng} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \alpha \overrightarrow{BC} \ (\alpha \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow a - b = \alpha(c - b)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a-b}{c-b} = \alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{a-b}{c-b} \text{ là số thực.}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \frac{a-b}{c-b} &= \frac{-1-i-i}{1+ki-i} = \frac{-1-2i}{1+(k-1)i} = \frac{(-1-2i)[1-(k-1)i]}{[1+(k-1)i][1-(k-1)i]} \\ &= \frac{-1-2i+(k-1)i-2(k-1)}{1+(k-1)^2} = \frac{1-2k+(k-3)i}{1+(k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \frac{a-b}{c-b} \text{ là số thực} \Leftrightarrow k-3=0 \Leftrightarrow k=3.$$

b) Ta có

$$a' = f(a) = a^2 = (-1-i)^2 = (1+i)^2 = 1+i^2+2i = 2i$$

$$b' = f(b) = b^2 = i^2 = -1$$

$$c' = f(c) = c^2 = (1+ki)^2 = 1-k^2+2ki.$$

c) Ta có 3 điểm A', B', C' phân biệt $\Leftrightarrow a', b', c'$ đôi một khác nhau.

Hiển nhiên $a' \neq b'$.

$$\text{Ta có } a' = c' \Leftrightarrow 2i = 1 - k^2 + 2ki \Leftrightarrow 1 - k^2 = 0 \text{ và } 2k = 2 \Leftrightarrow k = 1$$

$$\text{suy ra } a' \neq c' \Leftrightarrow k \neq 1.$$

$$\text{Ta có } b' = c' \Leftrightarrow -1 = 1 - k^2 + 2ki \Leftrightarrow -1 = 1 - k^2 \text{ và } k = 0 \Leftrightarrow k \in \emptyset. \text{ Vậy } b' \neq c'.$$

Tóm lại 3 điểm A', B', C' phân biệt $\Leftrightarrow k \neq 1$.

$$\text{Ta có 3 điểm A', B', C' thẳng hàng} \Leftrightarrow \overrightarrow{B'C'} = \alpha \overrightarrow{B'A'} \ (\alpha \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow c' - b' = \alpha(a' - b')$$

$$\Leftrightarrow \frac{c'-b'}{a'-b'} \text{ là số thực.}$$

$$\text{Ta có } \frac{c'-b'}{a'-b'} = \frac{2-k^2+2ki}{1+2i} = \frac{(2-k^2+2ki)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{1}{5}[2-k^2+4k+(-4+2k^2+2k)i].$$

$$\text{Suy ra } \frac{c'-b'}{a'-b'} \text{ là số thực} \Leftrightarrow 2k^2+2k-4=0 \Leftrightarrow k=1 \vee k=-2 \Leftrightarrow k=-2 \text{ (vì } k \neq 1).$$

Vậy A', B', C' là 3 điểm phân biệt thẳng hàng $\Leftrightarrow k=-2$.

d) Đặt $z = x + yi$, $z' = x' + y'i$, và $\vec{u}$, $\vec{v}$ lần lượt biểu diễn số phức z , $z' \Rightarrow \vec{u} = (x; y)$ và $\vec{v} = (x'; y')$.

$$\text{Ta có } \frac{z}{z'} = \frac{x+yi}{x'+y'i} = \frac{(x+yi)(x'-y'i)}{(x'+y'i)(x'-y'i)} = \frac{xx'+yy'+(x'y-xy')i}{x'^2+y'^2}.$$

$$\text{Như vậy } \frac{z}{z'} \text{ là số ảo} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}.$$

Xét tam giác A'B'C'. Ta có

$\overline{A'C'}$ biểu diễn số phức $z = c' - a' = 1 - k^2 + (2k - 2)i$

và $\overline{A'B'}$ biểu diễn số phức $z' = b' - a' = -1 - 2i$

$$\frac{z}{z'} = \frac{(1-k^2) + (2k-2)i}{-1-2i} = \frac{[(1-k^2) + (2k-2)i](-1+2i)}{(-1-2i)(-1+2i)}$$

$$= \frac{1}{5}[-1+k^2-2(2k-2)+(2-2k^2-2k+2)i].$$

Theo chứng minh trên : tam giác $A'B'C'$ vuông tại $A' \Leftrightarrow \overline{A'C'} \perp \overline{A'B'} \Leftrightarrow \frac{z}{z'}$ là số ảo
 $\Leftrightarrow -1+k^2-4k+4=0 \Leftrightarrow k^2-4k+3=0 \Leftrightarrow k=1$ (loại) $\vee k=3 \Leftrightarrow k=3$.

14. a) $b-a=-2+\alpha i$, $c-a=-\alpha^2-2\alpha i$, $c-b=2-\alpha^2-3\alpha i$.
 b) Điều kiện là A, B, C phân biệt và không thẳng hàng $\Leftrightarrow \alpha \neq 0$.
 c) $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0$.
 d) $d = -1 - \alpha^2 - \alpha i$.
15. a) $x = -3$; b) $x = -2$.

Vấn đề 4. TÌM TẬP HỢP ĐIỂM

16. Đặt $z = x + yi$ và $w = u + vi$ ($x, y, u, v \in \mathbb{R}$), ta có :

$$w = z^2 \Leftrightarrow u + vi = (x + yi)^2 \Leftrightarrow u + vi = x^2 - y^2 + 2xyi \Leftrightarrow \begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$

a) M thuộc đường thẳng $d : y = 2x$

$$\Rightarrow \text{toạ độ của điểm P thỏa mãn } \begin{cases} u = x^2 - 4x^2 \\ v = 2x(2x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -3x^2 \leq 0 \\ v = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -3x^2 \leq 0 \\ v = -\frac{4}{3}u \end{cases}$$

Vậy tập hợp các điểm P là tia $(d') : y = -\frac{4}{3}x$, với $x \leq 0$.

b) M thuộc đường thẳng $d : y = x + 1 \Rightarrow$ toạ độ điểm P thỏa mãn

$$\begin{cases} u = x^2 - (x+1)^2 \\ v = 2x(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -2x-1 \\ v = 2x^2+2x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-u-1}{2} \\ v = 2\left(\frac{-u-1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{-u-1}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-u-1}{2} \\ v = \frac{1}{2}(u^2 + 2u + 1) - u - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-u-1}{2} \\ v = \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy tập hợp các điểm P là parabol có phương trình $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$.

c) Đặt $z = x + yi$ và $z' = x' + y'i$ ($x, y, x', y' \in \mathbb{R}$), ta có :

$$z \cdot z' = xx' - yy' + (xy' + x'y)i$$

$$\Rightarrow |z \cdot z'|^2 = (xx' - yy')^2 + (xy' + x'y)^2$$

$$= [(xx')^2 + (yy')^2 - 2xx'yy'] + [(xy')^2 + (x'y)^2 + 2xx'yy']$$

$$= (xx')^2 + (yy')^2 + (xy')^2 + (x'y)^2.$$

Mặt khác

$$(|z|.|z'|)^2 = |z|^2 \cdot |z'|^2 = (x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) = (xx')^2 + (yy')^2 + (xy')^2 + (x'y)^2$$

Vậy $|zz'| = |z| |z'|$.

Suy ra $|z|^2 = |z.z| = |z|.|z| = |z|^2$.

M thuộc đường tròn (C) : $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |w| = |z|^2 = 1$ (theo chứng minh trên)

Vậy tập hợp các điểm P là đường tròn (C) : $x^2 + y^2 = 1$.

d) M thuộc hypebol (C) : $y = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$). Suy ra tọa độ điểm P(u ; v) thỏa mãn :

$$\begin{cases} u = x^2 - \frac{1}{x^2} \\ v = 2x \cdot \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = x^2 - \frac{1}{x^2} \\ v = 2 \end{cases}. \text{ Vậy tập hợp các điểm P là đường thẳng có phương trình } y = 2.$$

17. a) Đường tròn tâm A(2 ; 1) bán kính R = 1;

b) Đường trung trực của đoạn AB với A(-1 ; 1), B(3 ; -1) ;

c) Đường trung trực của đoạn OA, A($\frac{3}{4}$; $-\frac{1}{4}$) ;

d) Đường tròn tâm A(2 ; -2) bán kính R = $\sqrt{2}$;

e) Elip (E) : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$;

18. a) w là số thực $\Leftrightarrow$ phần ảo của w bằng 0.

Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm A(1 ; 0) bán kính R = 1 hợp với trục Ox bỏ đi điểm A(1 ; 0).

b) w là số thuần ảo $\Leftrightarrow$ phần thực của w bằng 0.

Tập hợp các điểm M là đường tròn tâm B(0 ; 1), bán kính R = 1, hợp với trục Oy bỏ đi điểm B(0 ; 1).

c) Đường thẳng $y = x + 1$ bỏ đi điểm (0 ; 1).

d) Đường tròn tâm I(-1 ; 0) bán kính R = $\sqrt{2}$, bỏ đi điểm (0 ; 1).

19. a) Parabol $y = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$.

b) Đường tròn tâm O, bán kính R' = 4.

c) Tia $y = -\frac{4}{3}x$ với $x \leq 0$.

§2. CĂN BẬC HAI CỦA SỐ PHỨC VÀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Vấn đề 1. TÍNH CĂN BẬC HAI, CĂN BẬC BỐN CỦA MỘT SỐ PHỨC w

1. a) $\pm(1 - 4i)$; b) $\pm(2 + \sqrt{3}i)$; c) $\pm 2i$; d) $\pm(2 + 3i)$.

2. a) Hai nghiệm : $\pm(1 - 2\sqrt{6}i)$;

b) bốn nghiệm : $\pm(\sqrt{3} + i\sqrt{2})$; $\pm(\sqrt{2} + i\sqrt{3})$.

3. a) $z^4 = -1 \Leftrightarrow z^4 = i^2 \Leftrightarrow (z^2 - i)(z^2 + i) = 0 \Leftrightarrow z^2 = \pm i$.

Với $z^2 = i$, đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) ta có :

$$(x + yi)^2 = i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 & (1) \\ 2xy = 1 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow x \neq 0 \text{ và } y = \frac{1}{2x}$$

$$(1) \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4x^2} \Leftrightarrow x^4 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Với } x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{1}{2x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Với } x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{1}{2x} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Vậy } z = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \right).$$

Với $z^2 = -i$, ta có

$$(x + yi)^2 = -i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = -i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 & (1) \\ 2xy = -1 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow x \neq 0 \text{ và } y = -\frac{1}{2x}$$

$$(1) \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4x^2} \Leftrightarrow x^4 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Với } x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = -\frac{1}{2x} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Với } x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = -\frac{1}{2x} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Vậy } z = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i \right).$$

$$\text{Kết luận : } z^4 = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} z = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \\ z = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right). \end{cases}$$

b) Theo kết quả câu a) ta có :

$$\left(\frac{z-1}{z+i} \right)^4 = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{z-1}{z+i} = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \\ \frac{z-1}{z+i} = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \end{cases} \text{ Xét 4 trường hợp :}$$

Trường hợp 1

$$\begin{aligned}\frac{z-1}{z+i} &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \Leftrightarrow \sqrt{2}z - \sqrt{2} = (1+i)(z+i) \Leftrightarrow \sqrt{2}z - \sqrt{2} = z+i+iz-1 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{2}-1-i)z &= \sqrt{2}-1+i \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{2}-1+i}{\sqrt{2}-1-i} = \frac{(\sqrt{2}-1+i)(\sqrt{2}-1+i)}{(\sqrt{2}-1-i)(\sqrt{2}-1+i)} \\ \Leftrightarrow z &= \frac{(\sqrt{2}-1)^2 - 1 + 2(\sqrt{2}-1)i}{(\sqrt{2}-1)^2 + 1} = \frac{2-2\sqrt{2}+2(\sqrt{2}-1)i}{4-2\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}+(\sqrt{2}-1)i}{2-\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow z &= \frac{1-\sqrt{2}+(\sqrt{2}-1)i}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)} \Leftrightarrow z = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Trường hợp 2

$$\begin{aligned}\frac{z-1}{z+i} &= -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) \Leftrightarrow \sqrt{2}z - \sqrt{2} = (-1-i)(z+i) \\ \Leftrightarrow \sqrt{2}z - \sqrt{2} &= -z - iz - i - i^2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{2}z - \sqrt{2} &= -z - iz - i + 1 \Leftrightarrow (\sqrt{2}+1+i)z = \sqrt{2}+1-i \\ \Leftrightarrow z &= \frac{\sqrt{2}+1-i}{\sqrt{2}+1+i} \\ &= \frac{(\sqrt{2}+1-i)^2}{(\sqrt{2}+1+i)(\sqrt{2}+1-i)} = \frac{(\sqrt{2}+1)^2 + i^2 - 2(\sqrt{2}+1)i}{(\sqrt{2}+1)^2 + 1} = \frac{2+2\sqrt{2}-2(\sqrt{2}+1)i}{4+2\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow z &= \frac{\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}+1)i}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1-(\sqrt{2}+1)i}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} \Leftrightarrow z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Trường hợp 3

$$\begin{aligned}\frac{z-1}{z+i} &= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \Leftrightarrow \sqrt{2}z - \sqrt{2} = (1-i)(z+i) \Leftrightarrow \sqrt{2}z - \sqrt{2} = z-iz+i-i^2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{2}z - \sqrt{2} &= z-iz+i+1 \Leftrightarrow (\sqrt{2}-1+i)z = \sqrt{2}+1+i \\ \Leftrightarrow z &= \frac{\sqrt{2}+1+i}{\sqrt{2}-1+i} = \frac{(\sqrt{2}+1+i)(\sqrt{2}-1-i)}{(\sqrt{2}-1+i)(\sqrt{2}-1-i)} = \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)+1+i(\sqrt{2}-1-\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)^2+1} \\ \Leftrightarrow z &= \frac{2-2i}{4-2\sqrt{2}} = \frac{1-i}{2-\sqrt{2}} \Leftrightarrow z = \frac{1}{2-\sqrt{2}} - \frac{i}{2-\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Trường hợp 4

$$\begin{aligned}\frac{z-1}{z+i} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \Leftrightarrow \sqrt{2}z - \sqrt{2} = (-1+i)(z+i) \Leftrightarrow \sqrt{2}z - \sqrt{2} = -z+iz-i+i^2 \\ \Leftrightarrow \sqrt{2}z - \sqrt{2} &= -z+iz-i-1 \Leftrightarrow (\sqrt{2}+1-i)z = \sqrt{2}-1-i \\ \Leftrightarrow z &= \frac{\sqrt{2}-1-i}{\sqrt{2}+1-i} = \frac{(\sqrt{2}-1-i)(\sqrt{2}+1+i)}{(\sqrt{2}+1-i)(\sqrt{2}+1+i)} = \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)+1+i(\sqrt{2}-1-\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)^2+1}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2-2i}{4+2\sqrt{2}} = \frac{1-i}{2+\sqrt{2}} \Leftrightarrow z = \frac{1}{2+\sqrt{2}} - \frac{i}{2+\sqrt{2}}.$$

Kết luận:

$$\left(\frac{z-1}{z+i}\right)^4 = -1 \Leftrightarrow z = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \text{ hoặc } z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \text{ hoặc } z = \frac{1}{2-\sqrt{2}} - \frac{i}{2-\sqrt{2}}$$

$$\text{hoặc } z = \frac{1}{2+\sqrt{2}} - \frac{i}{2+\sqrt{2}}.$$

4. a) Ba nghiệm : $0; 1-i; \frac{1-i}{2}$. b) Bốn nghiệm : $0; -2; -\frac{1}{5} \pm \frac{3}{5}i$.

Vấn đề 2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

5. a) $2 \pm 3i$; b) $2+i, 3+i$.

6. $z^2 - 6z + 13 = 0$. 7. a) $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

8. $a = -9 - 2i, b = 15 - 5i$.

9. Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$.

$$\text{a) Phương trình : } z^2 + 2|z| = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = -2\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -2\sqrt{x^2 + y^2} & (1) \\ 2xy = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow x = 0 \text{ hoặc } y = 0.$$

$$\bullet \text{ Với } x = 0, (1) \Leftrightarrow -y^2 = -2\sqrt{y^2} \Leftrightarrow y^2 = 2|y| \Leftrightarrow y^2 = 2y \text{ hoặc } y^2 = -2y \\ \Leftrightarrow y = 0 \text{ hoặc } y = 2 \text{ hoặc } y = -2.$$

$$\text{Suy ra } z = 0 \text{ hoặc } z = 2i \text{ hoặc } z = -2i.$$

$$\bullet \text{ Với } y = 0, (1) \Leftrightarrow x^2 = -2\sqrt{x^2} \Leftrightarrow x^2 + 2|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\text{Suy ra } z = 0.$$

$$\text{Vậy phương trình : } z^2 + 2|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \text{ hoặc } z = 2i \text{ hoặc } z = -2i.$$

Cách khác: Ta giải phương trình hệ quả rồi thử lại.

$$\text{Phương trình : } z^2 + 2|z| = 0 \quad (1) \Rightarrow z^2 = -2|z| \Rightarrow |z^2| = |-2|z|| \Rightarrow |z|^2 = 2|z| \\ \Rightarrow |z| = 0 \text{ hoặc } |z| = 2.$$

$$\text{Với } |z| = 0 \Rightarrow z = 0.$$

$$\text{Với } |z| = 2, \text{ phương trình } (1) \Rightarrow z^2 + 4 = 0 \Rightarrow z^2 = -4 \Rightarrow z^2 = 4i^2 \Rightarrow z = \pm 2i.$$

Thử lại : ta thế các giá trị của z vừa tìm được vào phương trình (1).

Với $z = 0$, ta có $z^2 = 0 \Rightarrow$ phương trình (1) được nghiệm đúng.

$$\text{Với } z = \pm 2i, \text{ ta có } z^2 = (\pm 2i)^2 = 4i^2 = -4$$

$$\text{và } 2|z| = 2|\pm 2i| = 2 \cdot 2 = 4.$$

Vậy phương trình $z^2 + 2|z| = 0$ được nghiệm đúng.

Kết luận: phương trình có 3 nghiệm là : $z_1 = 0, z_2 = 2i$ và $z_3 = -2i$.

b) Phương trình $z^2 + i|z| = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = -i\sqrt{x^2 + y^2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 & (1) \\ 2xy = -\sqrt{x^2 + y^2} & (2) \end{cases}$$

(1) $\Leftrightarrow y = \pm x$.

• Với $y = x$, (2) $\Leftrightarrow 2x^2 = -\sqrt{2x^2} \Leftrightarrow 2x^2 + \sqrt{2x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ suy ra $y = 0$.
Vậy $z = 0$.

• Với $y = -x$, (2) $\Leftrightarrow -2x^2 = -\sqrt{2x^2} \Leftrightarrow 2x^2 = |x| \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = x\sqrt{2} \\ 2x^2 = -x\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

Với $x = 0 \Rightarrow y = 0$

Với $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Với $x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Vậy $z = 0$ hoặc $z = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$ hoặc $z = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$.

Kết luận : phương trình có 3 nghiệm là :

$$z_1 = 0, z_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i \text{ và } z_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i.$$

c) Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$)

Phương trình : $i z^2 + |z| + 1 = 0 \Leftrightarrow i(x^2 - y^2 + 2xyi) + \sqrt{x^2 + y^2} + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (-2xy + \sqrt{x^2 + y^2} + 1) + (x^2 - y^2)i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 & (1) \\ -2xy + \sqrt{x^2 + y^2} + 1 = 0 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \vee x = -y & (1) \\ -2xy + \sqrt{x^2 + y^2} + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

▪ Với $x = y$, (2) $\Leftrightarrow -2x^2 + \sqrt{2x^2} + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - |x| \sqrt{2} - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 2|x|^2 - |x| \sqrt{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow |x| = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{10}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{10}}{4}$$

suy ra $y = x = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{10}}{4}$.

▪ Với $y = -x$, (2) $\Leftrightarrow 2x^2 + \sqrt{2x^2} + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + |x| \sqrt{2} + 1 = 0$
 $\Leftrightarrow 2|x|^2 + |x| \sqrt{2} + 1 = 0$ (vô nghiệm)

Kết luận : Phương trình : $iz^2 + |z| + 1 = 0$ có 2 nghiệm là :

$$z_1 = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{10}}{4} + \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{10}}{4} i$$

và $z_2 = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{10}}{4} + \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{10}}{4} i.$

d) Đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

$$\text{Phương trình } z^2 + \bar{z} = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi + x - yi = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + x + (2xy - y)i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y(2x-1) = 0 \\ x^2 - y^2 + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \vee x = \frac{1}{2} \\ x^2 - y^2 + x = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

Với $y = 0$, (2) $\Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -1$.

Với $x = \frac{1}{2}$, (2) $\Leftrightarrow y^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Kết luận : Phương trình $z^2 + \bar{z} = 0$ có 4 nghiệm là :

$$z_1 = 0; z_2 = -1; z_3 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}; z_4 = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vấn đề 3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA $Az^3 + Bz^2 + Cz + D = 0$ ($A \neq 0$)

10. a) $z = 1 + i$ là nghiệm của phương trình $z^3 - (1+i)z^2 + az + b - 4i = 0$

$$\Leftrightarrow (1+i)^3 - (1+i)(1+i)^2 + a(1+i) + b - 4i = 0$$

$$\Leftrightarrow a + b + (a-4)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=4, b=-4.$$

Phương trình trở thành : $z^3 - (1+i)z^2 + 4z - 4 - 4i = 0$.

Vì phương trình có một nghiệm là $z = 1 + i$, ta chia đa thức

$$P(z) = z^3 - (1+i)z^2 + 4z - 4 - 4i \text{ cho } z - 1 - i :$$

	1	-1-i	4	-4-4i
$z_0 = 1 + i$	1	0	4	0

Phương trình $z^3 - (1+i)z^2 + 4z - 4 - 4i = 0$ tương đương với

$$(z - 1 - i)(z^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow z = 1 + i \text{ hoặc } z^2 = -4 = 4i^2$$

$$\Leftrightarrow z = 1 + i \text{ hoặc } z = \pm 2i.$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2i$ và $z_3 = -2i$.

b) $z = 1 - i$ là nghiệm của phương trình $z^3 + aiz^2 + (i-b)z - 2 - 2i = 0$

$$\Leftrightarrow (1-i)^3 + ai(1-i)^2 + (i-b)(1-i) - 2 - 2i = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-3i+3i^2-i^3) + ai(1-2i+i^2) + (i-i^2-b+bi) - 2 - 2i = 0$$

$$\Leftrightarrow 1-3i-3+i+2a+i+1-b+bi-2-2i=0$$

$$\Leftrightarrow -3+2a-b+(b-3)i=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3+2a-b=0 \\ b-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=3 \end{cases}$$

Phương trình trở thành $z^3 + 3iz^2 + (i-3)z - 2 - 2i = 0$.

Biết $z = 1 - i$ là 1 nghiệm, chia đa thức $P(z) = z^3 + 3iz^2 + (i-3)z - 2 - 2i$ cho $z - 1 + i$:

$z_0 = 1 - i$	1	$3i$	$i - 3$	$-2 - 2i$
	1	$1 + 2i$	$2i$	0

Phương trình: $z^3 + 3iz^2 + (i-3)z - 2 - 2i = 0$ tương đương với

$$(z - 1 + i)[z^2 + (1+2i)z + 2i] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z - 1 + i = 0 & (1) \\ z^2 + (1+2i)z + 2i = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow z = 1 - i$$

$$(2) \Leftrightarrow z^2 + (1+2i)z + 2i = 0 \quad (A - B + C = 0)$$

$$\Leftrightarrow z = -1 \text{ hoặc } z = -2i.$$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là: $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -1$ và $z_3 = -2i$.

11. a) Ta thấy phương trình: $2z^3 + 9z^2 + 14z + 5 = 0$ nhận $z = -\frac{1}{2}$ là nghiệm.

Chia đa thức $P(z) = 2z^3 + 9z^2 + 14z + 5$ cho $z + \frac{1}{2}$:

$z_0 = -\frac{1}{2}$	2	9	14	5
	2	8	10	0

Phương trình $2z^3 + 9z^2 + 14z + 5 = 0$ tương đương với

$$(z + \frac{1}{2})(2z^2 + 8z + 10) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z + \frac{1}{2} = 0 & (1) \\ 2z^2 + 8z + 10 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2}$$

$$(2) \Leftrightarrow 2z^2 + 8z + 10 = 0 \Leftrightarrow z^2 + 4z + 5 = 0$$

$$\Delta' = 4 - 5 = -1 = i^2$$

$$z = -2 \pm i.$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm là: $z_1 = -\frac{1}{2}$, $z_2 = -2 + i$ và $z_3 = -2 - i$.

b) Ta thấy phương trình: $z^3 - 7z^2 + 17z - 15 = 0$ có 1 nghiệm là $z = 3$.

Chia đa thức $P(z) = z^3 - 7z^2 + 17z - 15$ cho $z - 3$:

$z_0 = 3$	1	-7	17	-15
	1	-4	5	0

Phương trình $z^3 - 7z^2 + 17z - 15 = 0$ tương đương với

$$(z-3)(z^2-4z+5)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z-3=0 & (1) \\ z^2-4z+5=0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow z=3$$

$$(2) \Leftrightarrow z^2-4z+5=0$$

$$\Delta' = 4-5 = -1 = i^2$$

$$z = 2 \pm i.$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm là: $z_1 = 3$, $z_2 = 2 + i$ và $z_3 = 2 - i$.

c) Phương trình: $z^3 - (6 + \sqrt{2})z^2 + (13 + 6\sqrt{2})z - 13\sqrt{2} = 0$ hệ số thực có 1 nghiệm là $z = 3 - 2i$, suy ra $z = 3 + 2i$ cũng là nghiệm. Do đó phương trình phải có dạng

$$(z - z_1)(z - 3 + 2i)(z - 3 - 2i) = 0.$$

Chia đa thức $P(z) = z^3 - (6 + \sqrt{2})z^2 + (13 + 6\sqrt{2})z - 13\sqrt{2}$ cho

$$(z - 3 + 2i)(z - 3 - 2i) = z^2 - 6z + 13, \text{ ta được thương là } z - \sqrt{2}.$$

Phương trình: $z^3 - (6 + \sqrt{2})z^2 + (13 + 6\sqrt{2})z - 13\sqrt{2} = 0$ tương đương với

$$(z - \sqrt{2})(z - 3 + 2i)(z - 3 - 2i) = 0.$$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là: $z_1 = \sqrt{2}$, $z_2 = 3 - 2i$ và $z_3 = 3 + 2i$.

12. a) Gọi nghiệm thuần ảo của phương trình là ai ($a \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow ai$ thỏa mãn phương trình:

$$(ai)^3 - 2(ai)^2 + 25ai + b = 0$$

$$\Leftrightarrow -a^3i + 2a^2 + 25ai + b = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + b + (-a^3 + 25a)i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a^2 & (1) \\ a(25 - a^2) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$a = 0 \Rightarrow b = 0 \text{ (loại)}$$

$$a = \pm 5 \Rightarrow b = -50.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm ảo là $\pm 5i$ và phương trình có dạng:

$$z^3 - 2z^2 + 25z - 50 = 0 \text{ với } z = 2 \text{ là nghiệm thực.}$$

Kết luận: phương trình đã cho có 3 nghiệm là: $z_1 = 2$, $z_2 = 5i$ và $z_3 = -5i$.

b) Gọi x là nghiệm thực của phương trình: $z^3 + bz^2 + (9-i)z - 6 + 2i = 0$, $b \in \mathbb{R}$, ta có:

$$x^3 + bx^2 + (9-i)x - 6 + 2i = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + bx^2 + 9x - 6 + (2-x)i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x=0 \\ x^3 + bx^2 + 9x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ b=-5 \end{cases}$$

Suy ra phương trình có dạng:

$$z^3 - 5z^2 + (9-i)z - 6 + 2i = 0, \text{ với } z = 2 \text{ là nghiệm thực của phương trình.}$$

Chia đa thức $P(z) = z^3 - 5z^2 + (9-i)z - 6 + 2i$ cho $z - 2$:

1	-5	9 - i	-6 + 2i
1	-3	3 - i	0

Phương trình $z^3 - 5z^2 + (9-i)z - 6 + 2i = 0$ tương đương với:

$$(z-2)(z^2-3z+3-i)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z-2=0 & (1) \\ z^2-3z+3-i=0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow z=2$$

$$(2) \Leftrightarrow z^2-3z+3-i=0$$

$$\Delta = 9 - 12 + 4i = -3 + 4i = (1 + 2i)^2$$

$$z = \frac{3 \pm (1 + 2i)}{2} \Leftrightarrow z = 2 + i \text{ hoặc } z = 1 - i.$$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là : $z_1 = 2$, $z_2 = 2 + i$ và $z_3 = 1 - i$.

Vấn đề 4. PHƯƠNG TRÌNH BẬC BỐN $Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E = 0$ ($A \neq 0$)

13. Gọi $z = x$ là nghiệm thực của phương trình, ta có :

$$x^4 + x^3 - (3 + i)x^2 - 4x + 4i - 4 = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4 + i(-x^2 + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + 4 = 0 \\ x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

Như vậy phương trình được biến đổi thành phương trình tích có dạng :

$$(z-2)(z+2)(z^2+az+b)=0$$

$$\Leftrightarrow (z^2-4)(z^2+az+b)=0$$

$$\Leftrightarrow z^4 + az^3 + (b-4)z^2 - 4az - 4b = 0 \quad (2)$$

$$\text{Đồng nhất phương trình (1) và (2) ta được : } \begin{cases} a=1 \\ b-4=-3-i \\ -4a=-4 \\ -4b=4i-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1-i \end{cases}$$

Vậy phương trình (1) tương đương với :

$$(z^2-4)(z^2+z+1-i)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2=4 & (i) \\ z^2+z+1-i=0 & (ii) \end{cases}$$

$$(i) z^2=4 \Leftrightarrow z=\pm 2$$

$$(ii) z^2+z+1-i=0, \Delta=1-4+4i=(1+2i)^2$$

$$z = \frac{-1+1+2i}{2} = i \text{ hoặc } z = \frac{-1-1-2i}{2} = -1-i.$$

Kết luận : Phương trình đã cho có 4 nghiệm :

$$z_1 = 2, z_2 = -2, z_3 = i \text{ và } z_4 = -1 - i.$$

14. Gọi nghiệm thuần ảo của phương trình là xi ($x \in \mathbb{R}$), ta có

$$x^4 i^4 + 2ix^3 i^3 - x^2 i^2 + 2i.xi - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2 + 2x + 1) - 2(x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x+1)^2 - 2(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)[x^2(x+1) - 2] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^3+x^2-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ x^3+x^2-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-1 \text{ hoặc } x=1.$$

Vậy 2 nghiệm thuần ảo của phương trình là $z = \pm i$ và phương trình có dạng phương trình tích

$$(z-i)(z+i)(z^2+az+b)=0 \quad (a, b \in \mathbb{C})$$

$$\Leftrightarrow (z^2+1)(z^2+az+b)=0$$

$$\Leftrightarrow z^4+az^3+(b+1)z^2+az+b=0.$$

Đồng nhất phương trình này với phương trình đã cho ta được :

$$\begin{cases} a=2i \\ b+1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow a=2i \text{ và } b=-2.$$

Phương trình trở thành :

$$(z-i)(z+i)(z^2+2iz-2)=0$$

$$\Leftrightarrow z=\pm i \text{ hoặc } z^2+2iz-2=0$$

$$\Delta' = i^2+2 = -1+2 = 1 \Rightarrow z = -i \pm 1.$$

Kết luận : Phương trình đã cho có 4 nghiệm là : $z_{1,2} = \pm i$, $z_3 = 1-i$ và $z_4 = -1-i$.

15. Các hệ số của phương trình là :

$$A=1; B=-3; C=2-i; D=3; E=-3+i.$$

Ta có $A+B+C+D+E=0$. Suy ra phương trình có một nghiệm $z=1$.

Chia đa thức $P(z) = z^4-3z^3+(2-i)z^2+3z-3+i$ cho $(z-1)$, ta biến đổi :

$$(1) \Leftrightarrow (z-1)[z^3-2z^2-iz+3-i]=0$$

$$\Leftrightarrow z=1 \text{ hoặc } z^3-2z^2-iz+3-i=0 \quad (2)$$

Phương trình (2) lại có các hệ số thỏa mãn : $A'-B'+C'-D'=1+2-i-3+i=0$.

Do đó phương trình (2) có một nghiệm $z=-1$.

$$(2) \Leftrightarrow (z+1)(z^2-3z+3-i)=0$$

$$\Leftrightarrow z=-1 \text{ hoặc } z^2-3z+3-i=0 \quad (3)$$

Phương trình (3) có $\Delta = 9-12+4i = -3+4i = (1+2i)^2$

Suy ra (3) có 2 nghiệm là $z=1-i$ và $z=2+i$.

Kết luận : Phương trình (1) có 4 nghiệm là : $z = \pm 1$, $z=1-i$ và $z=2+i$.

§3. DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC VÀ ỨNG DỤNG

Vấn đề 1. VIẾT SỐ PHỨC DƯỚI DẠNG LƯỢNG GIÁC

1. a) $5\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4});$

b) $\frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$

c) $(18\sqrt{2}-12\sqrt{3})(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6});$

d) $(2\sqrt{3}+2)(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$

e) $\frac{14\sqrt{3}}{3}(\cos(-\frac{\pi}{3})+i\sin(-\frac{\pi}{3}));$

f) $\frac{4\sqrt{6}}{3}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}).$

$$\begin{aligned}
 2. \quad a) \quad \sqrt{2} + 1 + i &= \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2} \left(1 + \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\
 &= \sqrt{2} \left(2 \cos^2 \frac{\pi}{8} + 2i \sin \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8} \right) = 2\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{8} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad 2 - \sqrt{3} + i &= 2 \left[1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right] = 2 \left(1 + \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) \\
 &= 2 \left(2 \cos^2 \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \cdot \cos \frac{5\pi}{12} \right) = 4 \cos \frac{5\pi}{12} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c) \quad 1 + (\sqrt{2} + 1)i &= (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{2} + 1)i \\
 &= (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1 + i) = \sqrt{2}(\sqrt{2} + 1) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \\
 &= \sqrt{2}(\sqrt{2} + 1) \left(1 + \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \\
 &= \sqrt{2}(\sqrt{2} + 1) \left(2 \cos^2 \frac{3\pi}{8} + 2i \sin \frac{3\pi}{8} \cdot \cos \frac{3\pi}{8} \right) \\
 &= 2\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1) \cos \frac{3\pi}{8} \cdot \left[\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 d) \quad 1 + (2 - \sqrt{3})i &= (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3})i \\
 &= (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3} + i) = 2(2 - \sqrt{3}) \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \right) \\
 &= 2(2 - \sqrt{3}) \left(1 + \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \\
 &= 2(2 - \sqrt{3}) \left(2 \cos^2 \frac{\pi}{12} + 2i \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \right) \\
 &= 4(2 - \sqrt{3}) \cos \frac{\pi}{12} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right).
 \end{aligned}$$

$$e) \quad 4(2 + \sqrt{3}) \sin \frac{\pi}{12} \left[\cos \left(-\frac{5\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{12} \right) \right].$$

$$3. \quad a) \quad 1 + \frac{i}{\sqrt{3}} = 1 + i \tan \frac{\pi}{6} = 1 + i \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{6}} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad 1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})i &= 1 + \tan \frac{\pi}{3} + (1 - \tan \frac{\pi}{3})i \\
 &= 1 + \frac{\sin \left(\frac{\pi}{3} \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{3} \right)} + \left(1 - \frac{\sin \left(\frac{\pi}{3} \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{3} \right)} \right) i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} \left(\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} \left(\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\right).i \\
&= \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} \left(\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} \left(\sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3}\right).i \\
&= \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right).i \\
&= 2\sqrt{2} \left(\cos\frac{\pi}{12} - i \sin\frac{\pi}{12}\right) \\
&= 2\sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right].
\end{aligned}$$

Cách khác :

$$\begin{aligned}
1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})i &= (1 + \sqrt{3}) \left(1 + \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}i\right) \\
&= (1 + \sqrt{3}) \left(1 + \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{3}}{1 + \tan\frac{\pi}{4} \cdot \tan\frac{\pi}{3}}i\right) \\
&= (1 + \sqrt{3}) \left[1 + i \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)\right] = (1 + \sqrt{3}) \left[1 + i \tan\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right] \\
&= (1 + \sqrt{3}) \left[1 + i \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)}\right] = \frac{1 + \sqrt{3}}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right].
\end{aligned}$$

$$\text{Mà } \cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3} \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3} \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

$$\begin{aligned}
\text{Do đó : } 1 + \sqrt{3} + (1 - \sqrt{3})i &= \frac{1 + \sqrt{3}}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right] \\
&= 2\sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right].
\end{aligned}$$

Vấn đề 2. ỨNG DỤNG CÔNG THỨC MOIVRE ĐỂ THỰC HIỆN CÁC PHÉP TÍNH

4. a) $-3\sqrt{3} - 3i$; b) $\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i$.

5. a) $2^{12} - 1$; b) $\frac{27}{32} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$; c) $\frac{1}{2}$; d) 8.

6. Ta có $z = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = \cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3})$

a) $z^{12} = [\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3})]^{12} = \cos(-\frac{12\pi}{3}) + i \sin(-\frac{12\pi}{3}) = \cos(-4\pi) + i \sin(-4\pi) = 1$

$z^6 = [\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3})]^6 = \cos(-\frac{6\pi}{3}) + i \sin(-\frac{6\pi}{3}) = \cos(-2\pi) + i \sin(-2\pi) = 1.$

Vậy $A = z^{12} + z^6 + 1 = 1 + 1 + 1 = 3.$

b) $z^9 = [\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3})]^9 = \cos(-\frac{9\pi}{3}) + i \sin(-\frac{9\pi}{3}) = \cos(-3\pi) + i \sin(-3\pi) = -1$

$z^6 = 1$ (theo câu a))

$z^3 = [\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3})]^3 = \cos(-\frac{3\pi}{3}) + i \sin(-\frac{3\pi}{3}) = \cos(-\pi) + i \sin(-\pi) = -1.$

Vậy $B = z^9 + z^6 + z^3 + 1 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0.$

Cách khác :

Ta có thể coi B là tổng của một cấp số nhân có 4 số hạng, số hạng đầu là 1 và công bội là $z^3 \neq 1$.

Suy ra ta có $B = z^9 + z^6 + z^3 + 1 = \frac{u_1(1-q^4)}{1-q} = \frac{1-(z^3)^4}{1-z^3} = \frac{1-z^{12}}{1-z^3}.$

Với $z^3 = -1$ và $z^{12} = 1$ (theo câu a)).

Vậy $B = 0.$

c) Ta có :

$z^2 = [\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3})]^2 = \cos(-\frac{2\pi}{3}) + i \sin(-\frac{2\pi}{3}) = \cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$z^4 = [\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3})]^4 = \cos(-\frac{4\pi}{3}) + i \sin(-\frac{4\pi}{3}) = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$z^8 = [\cos(-\frac{\pi}{3}) + i \sin(-\frac{\pi}{3})]^8 = \cos(-\frac{8\pi}{3}) + i \sin(-\frac{8\pi}{3}) = \cos(-\frac{2\pi}{3}) + i \sin(-\frac{2\pi}{3})$

$= -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}.$

Vậy $C = z^8 + 2z^4 + z^2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} + 2(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}) - \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = -2.$

d) Ta có $D = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots + z^8$ là tổng của một cấp số nhân có 9 số hạng, số hạng đầu là 1, công bội bằng $z \neq 1$.

Suy ra $D = \frac{z^9 - 1}{z - 1}$ với $z^9 = -1$ (theo câu b))

$D = \frac{z^9 - 1}{z - 1} = \frac{-1 - 1}{-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{4(1 - i\sqrt{3})}{(1 + i\sqrt{3})(1 - i\sqrt{3})} = \frac{4(1 - i\sqrt{3})}{1 + 3} = 1 - i\sqrt{3}.$

e) $E = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots - z^9 + z^{10}$ là tổng của một cấp số nhân có 11 số hạng, số hạng đầu là 1, công bội bằng $q = -z$.

$$\text{Ta có } E = \frac{q^{11} - 1}{q - 1} = \frac{(-z)^{11} - 1}{-z - 1} = \frac{-z^{11} - 1}{-z - 1} = \frac{z^{11} + 1}{z + 1}.$$

$$\text{Với } z = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z + 1 = \frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{và } z^{11} = \cos\left(-\frac{11\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{11\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow z^{11} + 1 = \frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } E = \frac{z^{11} + 1}{z + 1} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}}{\frac{3}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}} = \frac{3 + i\sqrt{3}}{3 - i\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} = \frac{(\sqrt{3} + i)^2}{(\sqrt{3} - i)(\sqrt{3} + i)} = \frac{3 - 1 + 2i\sqrt{3}}{3 + 1}$$

$$E = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{f) } F = z^{2009} - z^{2010} + z^{2011}$$

$$\text{hay } F = z^{2009}(1 - z + z^2).$$

$$\text{Với } z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \text{ và } z^2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 1 - z + z^2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = 0.$$

$$\text{Vậy } F = 0.$$

$$7. \text{ a) } \sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3} \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3} \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{b) Theo câu a), ta có } z = \cos\frac{\pi}{12} + i \sin\frac{\pi}{12} \Rightarrow |z| = 1 \Rightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow z \cdot \bar{z} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z} = \bar{z} \text{ và } \frac{1}{z^2} = \bar{z}^2.$$

$$\text{Ta có } A = z^2 + z + 2 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = (z^2 + \frac{1}{z^2} + 2) + (z + \frac{1}{z}) = (z^2 + \bar{z}^2 + 2z \cdot \bar{z}) + (z + \bar{z})$$

$$= (z + \bar{z})^2 + (z + \bar{z}) \text{ với } z + \bar{z} = 2 \cos\frac{\pi}{12}.$$

$$\text{Suy ra } A = (2 \cos\frac{\pi}{12})^2 + 2 \cos\frac{\pi}{12} = 2 \cdot (2 \cos^2\frac{\pi}{12}) + 2 \cos\frac{\pi}{12} = 2 \cdot (1 + \cos\frac{\pi}{6}) + 2 \cos\frac{\pi}{12}$$

$$= 2(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}) + 2 \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = 2 + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy } A = \frac{4 + 2\sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}.$$

$$B = z^2 - z + 2i + \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} = z^2 - \frac{1}{z^2} + 2i - (z - \frac{1}{z}) = z^2 - \bar{z}^2 + 2i - (z - \bar{z})$$

$$= (z - \bar{z})(z + \bar{z}) + 2i - (z - \bar{z}) = 2i \sin\frac{\pi}{12} \cdot 2 \cos\frac{\pi}{12} + 2i - 2i \sin\frac{\pi}{12}$$

$$\begin{aligned}
&= 2i \sin \frac{\pi}{6} + 2i - 2i \sin \frac{\pi}{12} = 2i \left(\sin \frac{\pi}{6} + 1 - \sin \frac{\pi}{12} \right) = 2i \left(\frac{1}{2} + 1 - \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right) \\
&= 2i \left(\frac{6 - \sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \right).
\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } B = \frac{6 - \sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} i.$$

$$8. \quad A = 2^4 \sqrt{2} \cdot \cos^4 \frac{\pi}{16}; \quad B = 16i \cdot \cos^3 \frac{\pi}{32} \cdot \sin \frac{3\pi}{32}; \quad C = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

$$9. \quad w = 0. \quad 10. \quad A = 2, \quad B = -2.$$

Vấn đề 3. TÍNH MÔĐUN VÀ ARGUMEN CỦA SỐ PHỨC

11. Ta kí hiệu r và φ lần lượt là môđun và argumen của số phức z , ta có

$$\begin{aligned}
a) \quad z &= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i = 1 + \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \\
&= 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} - 2i \sin \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8} = 2 \cos \frac{\pi}{8} \left(\cos \frac{\pi}{8} - i \sin \frac{\pi}{8} \right) \\
&= 2 \cos \frac{\pi}{8} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{8} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{8} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} r = 2 \cos \frac{\pi}{8} \\ \varphi = -\frac{\pi}{8}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
b) \quad z &= 2 - \sqrt{2} - i\sqrt{2} = 2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2} \right) = 2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\
&= 2 \left(2 \sin^2 \frac{\pi}{8} - 2i \sin \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8} \right) = 4 \sin \frac{\pi}{8} \left(\sin \frac{\pi}{8} - i \cos \frac{\pi}{8} \right) \\
&= 4 \sin \frac{\pi}{8} \left(\cos \frac{3\pi}{8} - i \sin \frac{3\pi}{8} \right) = 4 \sin \frac{\pi}{8} \left[\cos \left(-\frac{3\pi}{8} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{8} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} r = 4 \sin \frac{\pi}{8} \\ \varphi = -\frac{3\pi}{8}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
c) \quad z &= 2\sqrt{3} + 3 + i\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right) = 2\sqrt{3} \left(1 + \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \\
&= 2\sqrt{3} \left(2 \cos^2 \frac{\pi}{12} + 2i \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \right) = 4\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{12} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)
\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} r = 4\sqrt{3} \cos \frac{\pi}{12} \\ \varphi = \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } z &= \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}i = -\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{3}i = \frac{2}{3} \left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \\ &= \frac{2}{3} \left(-2\sin^2 \frac{\pi}{12} + 2i \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \right) = \frac{4}{3} \sin \frac{\pi}{12} \left(-\sin \frac{\pi}{12} + i \cos \frac{\pi}{12} \right) \\ &= \frac{4}{3} \sin \frac{\pi}{12} \left(\sin \left(-\frac{\pi}{12} \right) + i \cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) \right) = \frac{4}{3} \sin \frac{\pi}{12} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} r = \frac{4}{3} \sin \frac{\pi}{12} \\ \varphi = \frac{7\pi}{12} \end{cases}$$

12. Ta gọi r và φ lần lượt là môđun và một argumen của số phức w .

Giải phương trình $z^2 - 2iz - 4 = 0$:

$$\Delta' = i^2 + 4 = -1 + 4 = 3.$$

Phương trình có 2 nghiệm là:

$$z_1 = -\sqrt{3} + i = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right), z_1 \text{ có phần thực âm}$$

$$\text{và } z_2 = \sqrt{3} + i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

$$\text{a) Ta có: } z_1^2 = 4 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$$

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

Suy ra:

$$w = z_1^2 \cdot z_2 = 4 \cdot 2 \cdot \left[\cos \left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) \right] = 8 \left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right).$$

$$\text{Vậy } w \text{ có môđun và một argumen là: } \begin{cases} r = 8 \\ \varphi = \frac{11\pi}{6} \end{cases}$$

b) Ta có

$$\begin{aligned} z_2 - 2 &= \sqrt{3} + i - 2 = 2 \left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2 \left(-1 + \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \\ &= 2 \left(-2\sin^2 \frac{\pi}{12} + 2i \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \right) = 4 \sin \frac{\pi}{12} \left(-\sin \frac{\pi}{12} + i \cos \frac{\pi}{12} \right) \\ &= 4 \sin \frac{\pi}{12} \left[\sin \left(-\frac{\pi}{12} \right) + i \cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) \right] = 4 \sin \frac{\pi}{12} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right). \end{aligned}$$

Suy ra :

$$w = \frac{z_1}{z_2 - 2} = \frac{2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)}{4 \sin \frac{\pi}{12} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)} = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{12}} \left[\cos \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{7\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{7\pi}{12} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{12}} \left(\cos \frac{3\pi}{12} + i \sin \frac{3\pi}{12} \right) = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{12}} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Vậy $w = \frac{z_1}{z_2 - 2}$ có môđun và một argumen là
$$\begin{cases} r = \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{12}} \\ \varphi = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

c) Ta có $z_2 - 2 = 4 \sin \frac{\pi}{12} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$ (theo câu b))

và $z_1 - 2 = -\sqrt{3} + i - 2 = 2 \left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2 \left(-1 - \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$

$$= 2 \left(-2 \cos^2 \frac{\pi}{12} + 2i \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \right) = 4 \cos \frac{\pi}{12} \left(-\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

$$= 4 \cos \frac{\pi}{12} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right).$$

Suy ra

$$w = (z_1 - 2)(z_2 - 2) = 4 \cos \frac{\pi}{12} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right) \cdot 4 \sin \frac{\pi}{12} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$$

$$= 16 \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \left[\cos \left(\frac{11\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{11\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} \right) \right]$$

$$= 8 \sin \frac{\pi}{6} \cdot \left(\cos \frac{18\pi}{12} + i \sin \frac{18\pi}{12} \right) = 8 \sin \frac{\pi}{6} \cdot \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$$

$$= 4 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right).$$

Vậy $w = (z_1 - 2)(z_2 - 2)$ có môđun và một argumen là
$$\begin{cases} r = 4 \\ \varphi = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Cách khác :

Trong trường hợp này, ta có thể áp dụng công thức Vi-ét :

$$z_1 + z_2 = 2i \text{ và } z_1 \cdot z_2 = -4.$$

Ta có : $w = (z_1 - 2)(z_2 - 2) = z_1 \cdot z_2 - 2(z_1 + z_2) + 4 = -4 - 2 \cdot 2i + 4 = -4i$

$$= 4(0 - i) = 4 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right).$$

d) $w = \overline{z_1} \cdot \overline{(2 - z_2)} \Rightarrow \bar{w} = \overline{z_1 \cdot (2 - z_2)} = z_1 \cdot (2 - z_2) = -z_1 \cdot (z_2 - 2).$

$$\begin{aligned}\text{Với } -z_1 &= -2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = 2\left(-\cos\frac{5\pi}{6} - i\sin\frac{5\pi}{6}\right) \\ &= 2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6} - \pi\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6} - \pi\right)\right] \\ &= 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]\end{aligned}$$

$$\text{và } z_2 - 2 = 4\sin\frac{\pi}{12}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right).$$

$$\begin{aligned}\text{Suy ra } \bar{w} &= -z_1 \cdot (z_2 - 2) = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] \cdot 4\sin\frac{\pi}{12}\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right) \\ &= 8\sin\frac{\pi}{12} \cdot \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{7\pi}{12}\right)\right] \\ &= 8\sin\frac{\pi}{12} \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow w = 8\sin\frac{\pi}{12} \cdot \left(\cos\frac{5\pi}{12} - i\sin\frac{5\pi}{12}\right) = 8\sin\frac{\pi}{12} \cdot \left[\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right].$$

$$\text{Vậy } w = \bar{z}_1 \cdot (2 - z_2) \text{ có môđun và một argumen là } \begin{cases} r = 8\sin\frac{\pi}{12} \\ \varphi = -\frac{5\pi}{12} \end{cases}$$

$$13. \text{ Ta có } \frac{1+z^2}{1-z^2} = i \Leftrightarrow 1+z^2 = i - iz^2 \Leftrightarrow (1+i)z^2 = -1+i \Leftrightarrow z^2 = \frac{-1+i}{1+i}$$

$$z^2 = \frac{-(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-(1+i^2-2i)}{1+1} = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow |z| = 1. \text{ Đặt } z = \cos\varphi + i\sin\varphi \Rightarrow z^2 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi.$$

$$\text{Ta có } z^2 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\varphi = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} + k\pi. \text{ Chọn } k=0, 1, \text{ ta được } \varphi_1 = \frac{\pi}{4} \text{ và } \varphi_2 = \frac{5\pi}{4}.$$

$$\text{Vậy có 2 số phức } z \text{ thoả mãn } \frac{1+z^2}{1-z^2} = i \text{ là:}$$

$$z_1 \text{ có môđun } r=1, \text{ một argumen là } \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{và } z_2 \text{ có môđun } r=1, \text{ một argumen } \varphi = \frac{5\pi}{4}.$$

Vấn đề 4. ÁP DỤNG CÔNG THỨC MOIVRE ĐỂ TÍNH CĂN BẬC n CỦA SỐ PHỨC

$$14. a) w = (1+i)(\sqrt{3}+i) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \cdot 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)$$

$$= 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= 2\sqrt{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) \right]$$

$$= \sqrt{8} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right).$$

Vậy w có 2 căn bậc hai là :

$$z_1 = \sqrt[4]{8} \left(\cos \frac{5\pi}{24} + i \sin \frac{5\pi}{24} \right)$$

$$\text{và } z_2 = \sqrt[4]{8} \left[\cos \left(\frac{5\pi}{24} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{24} + \pi \right) \right] = \sqrt[4]{8} \left(\cos \frac{29\pi}{24} + i \sin \frac{29\pi}{24} \right).$$

$$b) \sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{12} \right) \right]; \sqrt{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right).$$

$$c) 2\sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right); 2\sqrt[4]{2} \left[\cos \left(-\frac{7\pi}{8} \right) + i \sin \left(-\frac{7\pi}{8} \right) \right].$$

$$15. a) w = -1 + i\sqrt{3} = 2 \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$\Rightarrow w \text{ có môđun } R = 2 \text{ và một argumen } \theta = \frac{2\pi}{3}.$$

Suy ra căn bậc ba của w là số phức z có

$$- \text{ môđun } r = \sqrt[3]{2}$$

$$- \text{ một argumen } \varphi = \frac{\theta}{3} + \frac{k2\pi}{3} = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

Lấy $k = 0, 1, 2$, φ có 3 giá trị :

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{9}$$

$$\varphi_2 = \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} = \frac{8\pi}{9}$$

$$\varphi_3 = \frac{2\pi}{9} + \frac{4\pi}{3} = \frac{14\pi}{9}.$$

Vậy $w = -1 + i\sqrt{3}$ có 3 căn bậc ba là :

$$z_1 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{2\pi}{9} + i \sin \frac{2\pi}{9} \right)$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{8\pi}{9} + i \sin \frac{8\pi}{9} \right)$$

$$z_3 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{14\pi}{9} + i \sin \frac{14\pi}{9} \right).$$

$$b) \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right); \sqrt{2} \left[\cos \left(\frac{5\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{4} \right) \right]; \sqrt{2} \left[\cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{12} \right) \right]$$

$$c) \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}; \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}; \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right)$$

$$d) 2 \left(\cos \frac{2\pi}{9} + i \sin \frac{2\pi}{9} \right); 2 \left(\cos \frac{8\pi}{9} + i \sin \frac{8\pi}{9} \right); 2 \left[\cos \left(-\frac{4\pi}{9} \right) + i \sin \left(-\frac{4\pi}{9} \right) \right].$$

16. $w = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}$ có môđun $R = 1$ và một argumen $\theta = \frac{7\pi}{6}$.

Suy ra căn bậc bốn của w là số phức z có :

– môđun $r = 1$

– một argumen $\varphi = \frac{\theta}{4} + \frac{k2\pi}{4} = \frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Lấy $k = 0, 1, 2, 3$ ta có 4 giá trị của φ :

$$\varphi_1 = \frac{7\pi}{24}$$

$$\varphi_2 = \frac{7\pi}{24} + \frac{\pi}{2} = \frac{19\pi}{24}$$

$$\varphi_3 = \frac{7\pi}{24} + \pi = \frac{31\pi}{24}$$

$$\varphi_4 = \frac{7\pi}{24} + \frac{3\pi}{2} = \frac{43\pi}{24}$$

Vậy $w = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ có 4 căn bậc bốn là :

$$z_1 = \cos \frac{7\pi}{24} + i \sin \frac{7\pi}{24}$$

$$z_2 = \cos \frac{19\pi}{24} + i \sin \frac{19\pi}{24}$$

$$z_3 = \cos \frac{31\pi}{24} + i \sin \frac{31\pi}{24}$$

$$z_4 = \cos \frac{43\pi}{24} + i \sin \frac{43\pi}{24}$$

17. a) $z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$

b) $z_0^4 = -8 + 8i\sqrt{3}$.

Các căn bậc bốn của $-8 + 8i\sqrt{3}$ là : $z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right), z_1 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right),$

$$z_2 = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) \text{ và } z_3 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right).$$

18. Căn bậc năm của số phức $w = i$ là số phức z thoả mãn $z^5 = i$.

Vì $|z^5| = |i| = 1 \Leftrightarrow |z|^5 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$. Đặt $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$, ta có :

$$z^5 = i \Leftrightarrow (\cos \varphi + i \sin \varphi)^5 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 5\varphi + i \sin 5\varphi = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow 5\varphi = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}.$$

Lấy $k = 0, 1, 2, 3, 4$, ta được 5 giá trị của φ :

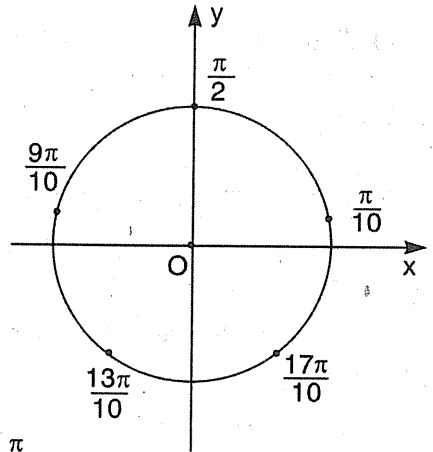
$$\varphi_1 = \frac{\pi}{10}$$

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi_3 = \frac{\pi}{10} + \frac{4\pi}{5} = \frac{9\pi}{10}$$

$$\varphi_4 = \frac{\pi}{10} + \frac{6\pi}{5} = \frac{13\pi}{10}$$

$$\varphi_5 = \frac{\pi}{10} + \frac{8\pi}{5} = \frac{17\pi}{10}$$



Vậy có 5 căn bậc năm của i là :

$$z_1 = \cos \frac{\pi}{10} + i \sin \frac{\pi}{10}$$

$$z_2 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$$

$$z_3 = \cos \frac{9\pi}{10} + i \sin \frac{9\pi}{10}$$

$$z_4 = \cos \frac{13\pi}{10} + i \sin \frac{13\pi}{10}$$

$$z_5 = \cos \frac{17\pi}{10} + i \sin \frac{17\pi}{10}$$

Vấn đề 5. ỨNG DỤNG CÔNG THỨC MOIURE ĐỂ CHỨNG MINH CÁC HỆ THỨC LƯỢNG GIÁC

19. Đặt $A = 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx$

và $B = \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx$.

Ta có

$$A + iB = (1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx) + i(\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx)$$

$$= 1 + (\cos x + i \sin x) + (\cos 2x + i \sin 2x) + (\cos 3x + i \sin 3x) + \dots + (\cos nx + i \sin nx)$$

$$= 1 + (\cos x + i \sin x) + (\cos x + i \sin x)^2 + (\cos x + i \sin x)^3 + \dots + (\cos x + i \sin x)^n$$

$$= \frac{1 - (\cos x + i \sin x)^{n+1}}{1 - (\cos x + i \sin x)} = \frac{1 - \cos(n+1)x - i \sin(n+1)x}{1 - \cos x - i \sin x}$$

$$= \frac{2 \sin^2 \frac{(n+1)x}{2} - 2i \sin \frac{(n+1)x}{2} \cdot \cos \frac{(n+1)x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2} - 2i \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{n+1}{2} x - i \cos \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2} - i \cos \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{(n+1)x}{2} \right) - i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{(n+1)x}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) - i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right)}$$

$$= \frac{\sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \frac{\cos \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{(n+1)x}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{(n+1)x}{2} \right)}{\cos \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2} \right)}$$

$$= \frac{\sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \cos \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{(n+1)x}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{(n+1)x}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \right)$$

$$= \frac{\sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \left(\cos \frac{nx}{2} + i \sin \frac{nx}{2} \right)$$

$$\Rightarrow A + iB = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \left(\cos \frac{nx}{2} + i \sin \frac{nx}{2} \right)$$

$$\Rightarrow A = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \cdot \cos \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \quad \text{và} \quad B = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \cdot \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

$$\text{Vậy } 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \cdot \cos \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \quad (1)$$

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \cdot \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \quad (2)$$

20. Đặt $x = \frac{2\pi}{2n+1}$, ta có $E = \cos \frac{2\pi}{2n+1} + \cos \frac{4\pi}{2n+1} + \cos \frac{6\pi}{2n+1} + \dots + \cos \frac{2n\pi}{2n+1}$

hay $E = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx$.

Theo kết quả trên, ta có $1 + E = 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \cdot \cos \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 1 + E &= \frac{\sin \left(\frac{n+1}{2} \cdot \frac{2\pi}{2n+1} \right) \cdot \cos \left(\frac{n}{2} \cdot \frac{2\pi}{2n+1} \right)}{\sin \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{2n+1} \right)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \left[\sin \left(\frac{n+1}{2n+1} \cdot \pi + \frac{n}{2n+1} \cdot \pi \right) + \sin \left(\frac{n+1}{2n+1} \cdot \pi - \frac{n}{2n+1} \cdot \pi \right) \right]}{\sin \frac{\pi}{2n+1}} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \left[\sin \pi + \sin \frac{\pi}{2n+1} \right]}{\sin \frac{\pi}{2n+1}} \quad \Rightarrow 1 + E = \frac{1}{2}. \quad \text{Vậy } E = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

21. Dùng các kết quả dưới đây và kết hợp với các hằng đẳng thức quen thuộc để chứng minh

$$|z| = 1 \Rightarrow \frac{1}{z} = \bar{z}$$

$$z + \bar{z} = 2\cos \theta.$$

$$z - \bar{z} = 2i \sin \theta.$$

Vấn đề 6. PHÉP BIẾN HÌNH VÀ SỐ PHỨC

22. Ta thấy điểm A biến thành điểm C qua hai phép biến hình liên tiếp :

phép quay tâm B, góc quay 90° và phép vị tự tâm B, tỉ số vị tự $k = \frac{1}{4}$.

Ta có :

$$\overrightarrow{BC} = \frac{1}{4} i \cdot \overrightarrow{BA}$$

$$\Leftrightarrow c - b = \frac{1}{4} i (a - b)$$

$$\Leftrightarrow 4c = 4b + ia - ib$$

$$\Leftrightarrow 4c = (20 + 24i) + (i + 2i^2) - (5i + 6i^2)$$

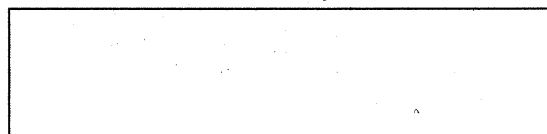
$$\Leftrightarrow 4c = 24 + 20i$$

$$\Leftrightarrow c = 6 + 5i.$$

Ta có : $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow c - d = b - a \Leftrightarrow d = a + c - b = 1 + 2i + 6 + 5i - 5 - 6i = 2 + i.$

A(1 ; 2)

B(5 ; 6)



D

C

23. Ta thấy điểm C biến thành điểm A bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm B góc quay -90° và phép vị tự tâm B tỉ số $k = 2$.

Ta có $\overrightarrow{BA} = -2i \overrightarrow{BC}$

$$\Leftrightarrow a - b = -2i (c - b)$$

$$\Leftrightarrow b + 2ib = a + 2ci$$

$$\Leftrightarrow b(1 + 2i) = -2 - i + 6i - 10$$

$$\Leftrightarrow b(1 + 2i) = -12 + 5i$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{-12 + 5i}{1 + 2i} = \frac{(-12 + 5i)(1 - 2i)}{1 + 4} = -\frac{2}{5} + \frac{29}{5}i$$

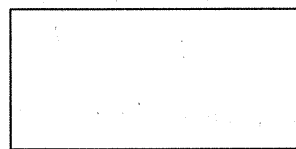
và ta có $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow d - c = a - b$

$$\Leftrightarrow d = c + a - b = 3 + 5i - 2 - i - \left(-\frac{2}{5} + \frac{29}{5}i\right)$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{7}{5} - \frac{9i}{5}.$$

A(-2 ; -1)

B



D

C(3 ; 5)

ÔN TẬP CUỐI CHƯƠNG V

1. a) $x = -1, y = 15$; b) $x = \frac{15}{13}, y = \frac{10}{13}$; c) $x = y = -1$.

2. a) $x' = \frac{x}{x^2 + y^2}$ và $y' = \frac{-y}{x^2 + y^2}$.

b) Tập hợp các điểm P là đường thẳng $y = 2x$ ($x \neq 0$).

c) Đường tròn tâm I($\frac{1}{2}; 0$) bán kính $R = \frac{1}{2}$, bỏ điểm O(0; 0).

3. a) $\pm(1 - 3i)$; b) $\pm(5 - i)$; c) $\pm(6 + i)$.

4. a) $3 - i, 1 + i$; b) $3 + 2i, 1 - i$.

5. Vì $|z^5| = 1 \Rightarrow |z| = 1$, nên ta đặt $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$.

Phương trình $z^5 = 1 \Leftrightarrow (\cos \varphi + i \sin \varphi)^5 = 1$

$\Leftrightarrow \cos 5\varphi + i \sin 5\varphi = \cos k2\pi + i \sin k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$\Leftrightarrow 5\varphi = k2\pi \Leftrightarrow \varphi = \frac{k2\pi}{5}$.

Chọn $k = 0, 1, 2, 3$ và 4 , ta được 5 giá trị của φ : $0, \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5}, \frac{6\pi}{5}$ và $\frac{8\pi}{5}$.

Phương trình $z^5 = 1$ có 5 nghiệm, với $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$.

Ta xét nghiệm $z = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$.

Mặt khác, đặt $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$).

Ta có:

$$\begin{aligned} z^5 &= (x + yi)^5 \\ &= x^5 + 5x^4 \cdot yi + 10x^3(yi)^2 + 10x^2(yi)^3 + 5x(yi)^4 + (yi)^5 \\ &= x^5 + 5x^4 \cdot yi - 10x^3y^2 - 10x^2y^3i + 5xy^4 + y^5i \\ &= (x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4) + i(5x^4y - 10x^2y^3 + y^5). \end{aligned}$$

Do đó phương trình $z^5 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4 = 1 & (1) \\ 5x^4y - 10x^2y^3 + y^5 = 0 & (2) \end{cases}$

Ta nhận xét rằng:

* x và $y > 0$

* $x^2 + y^2 = 1$

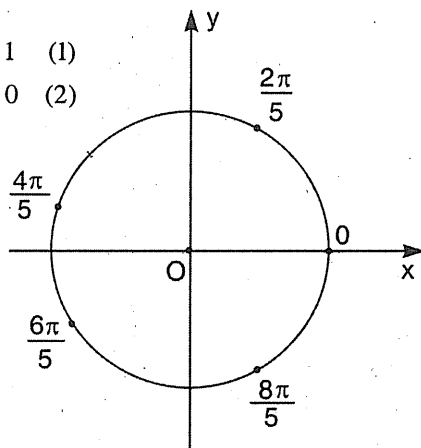
* Vì $\frac{\pi}{3} < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$ nên $0 < \cos \frac{2\pi}{5} < \frac{1}{2}$ suy ra

$0 < x^2 = \cos^2 \frac{2\pi}{5} < \frac{1}{4}$.

Từ (2), suy ra:

$5x^4 - 10x^2y^2 + y^4 = 0$

$\Leftrightarrow 5x^4 - 10x^2(1 - x^2) + (1 - x^2)^2 = 0$



$$\Leftrightarrow 5x^4 - 10x^2 + 10x^4 + 1 - 2x^2 + x^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 16x^4 - 12x^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{6+2\sqrt{5}}{16} \approx 0,65 \text{ (loại vì lớn hơn } \frac{1}{4}) \text{ hoặc } x^2 = \frac{6-2\sqrt{5}}{16} \approx 0,095.$$

$$\text{Suy ra } x^2 = \frac{6-2\sqrt{5}}{16} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4} \right)^2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\Rightarrow y^2 = 1 - x^2 = 1 - \frac{6-2\sqrt{5}}{16} = \frac{10+2\sqrt{5}}{16} = \frac{2(5+\sqrt{5})}{16} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5+\sqrt{5}}}{4}.$$

Kết luận :

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \text{ và } \sin \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5+\sqrt{5}}}{4}.$$

MỤC LỤC

	Trang
<i>Lời nói đầu</i>	3
Chương I. KHÁI NIỆM LŨY THỪA VÀ HÀM SỐ LŨY THỪA	
§1. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ - Lũy thừa với số mũ thực	5
A. Tóm tắt giáo khoa	5
B. Phương pháp giải toán	8
<i>Vấn đề 1.</i> Các phép toán cơ bản về lũy thừa	8
<i>Vấn đề 2.</i> Chứng minh một biểu thức không phụ thuộc tham số	13
§2. Hàm số lũy thừa	15
A. Tóm tắt giáo khoa	15
B. Phương pháp giải toán	16
<i>Vấn đề 1.</i> Chứng minh một đẳng thức, bất đẳng thức	16
<i>Vấn đề 2.</i> Giải phương trình lũy thừa	20
<i>Vấn đề 3.</i> Tìm tập xác định. Đạo hàm trên tập xác định	23
§3. Hàm số mũ	28
A. Tóm tắt giáo khoa	28
B. Phương pháp giải toán	30
<i>Vấn đề 1.</i> Tìm giới hạn	30
<i>Vấn đề 2.</i> Tìm đạo hàm	31
<i>Vấn đề 3.</i> Chứng minh bất đẳng thức. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.	
Khảo sát tính chất biến thiên	32
Bài tập ôn cuối chương I	34
Chương II. KHÁI NIỆM LÔGARIT VÀ HÀM SỐ LÔGARIT	
A. Tóm tắt giáo khoa	35
B. Phương pháp giải toán	40
<i>Vấn đề 1.</i> Các phép toán về lôgarit	40
<i>Vấn đề 2.</i> Tìm giới hạn	44
<i>Vấn đề 3.</i> Tìm đạo hàm	45

<i>Vấn đề 4. Tìm tập xác định. Chứng minh bất đẳng thức.</i>	
Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất. Khảo sát tính chất biến thiên	46
Bài tập ôn cuối chương II	48
Chương III. PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT	
§1. Phương trình mũ	49
A. Tóm tắt giáo khoa	49
B. Phương pháp giải toán	49
<i>Vấn đề 1. Đưa về cùng một cơ số</i>	49
<i>Vấn đề 2. Phương pháp đặt ẩn số phụ</i>	52
<i>Vấn đề 3. Phương pháp lôgarit hoá</i>	57
<i>Vấn đề 4. Phương pháp dùng tính đơn điệu của hàm số để chứng minh tính duy nhất của nghiệm</i>	59
<i>Vấn đề 5. Phương trình không mẫu mực</i>	62
§2. Phương trình lôgarit	64
A. Tóm tắt giáo khoa	64
B. Phương pháp giải toán	64
<i>Vấn đề 1. Đưa về cùng một cơ số</i>	64
<i>Vấn đề 2. Phương pháp đặt ẩn số phụ</i>	67
<i>Vấn đề 3. Phương pháp dùng tính đơn điệu của hàm số để chứng minh tính duy nhất của nghiệm</i>	69
<i>Vấn đề 4. Phương trình không mẫu mực</i>	71
§3. Hệ phương trình mũ – lôgarit	
A. Tóm tắt giáo khoa	73
B. Phương pháp giải toán	74
Bài tập ôn cuối chương III	79
Chương IV. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT	
§1. Bất phương trình mũ	81
A. Tóm tắt giáo khoa	81
B. Phương pháp giải toán	81
<i>Vấn đề 1. Bất phương trình mũ dạng cơ bản</i>	81
<i>Vấn đề 2. Đưa về cùng một cơ số</i>	82
<i>Vấn đề 3. Phương pháp đặt ẩn số phụ</i>	84
<i>Vấn đề 4. Phương pháp lôgarit hoá</i>	86

§2. Bất phương trình lôgarit	87
A. Tóm tắt giáo khoa	87
B. Phương pháp giải toán	87
<i>Vấn đề 1.</i> Bất phương trình lôgarit dạng cơ bản	87
<i>Vấn đề 2.</i> Đưa về cùng một cơ số	89
<i>Vấn đề 3.</i> Phương pháp đặt ẩn số phụ	91
Bài tập ôn cuối chương IV	92
Chương V. SỐ PHỨC	
§1. Số phức	93
A. Tóm tắt giáo khoa	93
B. Phương pháp giải toán	97
<i>Vấn đề 1.</i> Thực hiện các phép tính trên $\mathbb{C}$	97
<i>Vấn đề 2.</i> Giải phương trình và hệ phương trình đơn giản	99
<i>Vấn đề 3.</i> Biểu diễn hình học các số phức	103
<i>Vấn đề 4.</i> Tìm tập hợp điểm	106
§2. Căn bậc hai của số phức và phương trình bậc hai	112
A. Tóm tắt giáo khoa	112
B. Phương pháp giải toán	113
<i>Vấn đề 1.</i> Tính căn bậc hai, căn bậc bốn của một số phức w	113
<i>Vấn đề 2.</i> Phương trình bậc hai	118
<i>Vấn đề 3.</i> Phương trình bậc ba $Az^3 + Bz^2 + Cz + D = 0$ ($A \neq 0$)	124
<i>Vấn đề 4.</i> Phương trình bậc bốn $Az^4 + Bz^3 + Cz^2 + Dz + E = 0$ ($A \neq 0$)	130
§3. Dạng lượng giác của số phức và ứng dụng	133
A. Tóm tắt giáo khoa	133
B. Phương pháp giải toán	134
<i>Vấn đề 1.</i> Viết số phức dưới dạng lượng giác	134
<i>Vấn đề 2.</i> Áp dụng công thức Moivre để thực hiện các phép tính	137
<i>Vấn đề 3.</i> Tính môđun và argumen của số phức	145
<i>Vấn đề 4.</i> Áp dụng công thức Moivre để tính căn bậc n của số phức	150
<i>Vấn đề 5.</i> Áp dụng công thức Moivre để chứng minh các hệ thức lượng giác	154
<i>Vấn đề 6.</i> Phép biến hình và số phức	157
Bài tập ôn cuối chương V	160
HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ	161

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Chủ tịch Hội đồng Thành viên kiêm Tổng Giám đốc NGUYỄN NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập GS.TS VŨ VĂN HÙNG

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung:

Phó Tổng biên tập PHAN XUÂN KHÁNH

Phó Giám đốc phụ trách Công ty CP DVXBGD Gia Định TRẦN THỊ KIM NHUNG

Biên tập nội dung: HOÀNG NGỌC PHƯƠNG

Biên tập kĩ - mỹ thuật: TRẦN NGUYỄN ANH TÚ

Trình bày bìa: NGUYỄN MẠNH HÙNG

Sửa bản in: THANH BÌNH - DƯƠNG HÀ

Chế bản: CTY CỔ PHẦN MỸ THUẬT SAO MAI

Công ty cổ phần Dịch vụ xuất bản Giáo dục Gia Định - Nhà xuất bản Giáo dục
Việt Nam giữ quyền công bố tác phẩm

GIẢI TOÁN 12: HÀM SỐ MŨ LOGARIT VÀ SỐ PHỨC

(Dùng cho học sinh lớp chuyên)

Mã số : TZX39m4 – TTS

Số đăng kí KHXB: 21 – 2014/CXB/772 – 2055/GD

In 1.500 bản, (QĐ: 64TK), khổ 17 x 24 cm

Tại trung tâm nghiên cứu và sản xuất Học Liệu

In xong và nộp lưu chiểu tháng 7 năm 2014