

"Nơi nào có ý chí, nơi đó có con đường."

166

BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÀM SỐ BẬC BA TRONG CÁC ĐỀ THI THỬ 17-21



<https://luyenthitranghien.vn>

Ngày đã rạng, bình minh đang tỉnh giấc!

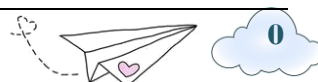
"Khi nào em cảm thấy muốn phê phán và chê bai một ai đó, hãy nhớ rằng không phải ai trên thế giới này cũng có những thuận lợi trong cuộc sống mà em có được."

Họ và Tên học sinh:

Trường: Lớp:



<https://www.facebook.com/vietqld>



Câu 1: (Câu 25 - Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + mx + 2$ có cực đại và cực tiểu?

- Ⓐ. $m \geq 3$. Ⓑ. $m > -3$. Ⓒ. $m > 3$. Ⓓ. $m \geq -3$.

Lời giải

Chọn B

♦ $y' = -3x^2 - 6x + m$ (1).

Để hàm số có cực đại, cực tiểu thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 9 + 3m > 0 \Leftrightarrow m > -3$.

Câu 2: (Câu 37 - Chuyên Thoại Ngọc Hầu - An Giang - Đề A - Năm 2020 - 2021) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (m^2 - 4m + 3)x - 1$ có hai điểm cực trị.

- Ⓐ. $-5 < m < -1$. Ⓑ. $1 < m < 5$. Ⓒ. $-5 < m < 1$. Ⓓ. $-1 < m < 5$.

Lời giải

Chọn B

$y' = 2x^2 + 2(m-1)x + m^2 - 4m + 3$

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2(m-1)x + m^2 - 4m + 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Delta' > 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 - 2(m^2 - 4m + 3) > 0 \Leftrightarrow -m^2 + 6m - 5 > 0 \Leftrightarrow 1 < m < 5$.

Vậy $1 < m < 5$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 3: (Câu 32 - THPT Lương Thế Vinh - Hà Nội - Lần 01 - Năm 2020 - 2021) Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -\frac{x^3}{3} + mx^2 - 2mx + 1$ có hai điểm cực trị là

- Ⓐ. $\begin{cases} m > 2 \\ m < 0 \end{cases}$. Ⓑ. $0 < m < 2$. Ⓒ. $m > 2$. Ⓓ. $m > 0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = -x^2 + 2mx - 2m$.

Hàm số đã cho có hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$

Phương trình $-x^2 + 2mx - 2m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 2m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < 0 \end{cases}$.

Câu 4: (Câu 6 - THPT Yên Phong 1 - Bắc Ninh - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(3m+7)x + 1$ có cực trị là

- Ⓐ. $\begin{cases} m < -2 \\ m > 3 \end{cases}$. Ⓑ. $\begin{cases} m < -3 \\ m > 2 \end{cases}$. Ⓒ. $\begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq 3 \end{cases}$. Ⓓ. $-2 < m < 3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(3m+7)x + 1 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 3(3m+7)$.



Để hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(3m+7)x + 1$ có cực trị thì $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 9m^2 - 9m - 54 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m > 3 \end{cases}$$

Câu 5: (Câu 45 - Chuyên Lê Quý Đôn - Bà Rịa Vũng Tàu - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Tìm số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}(m^2 - 1)x^3 + mx^2 + 3x + 1$ có cực đại

(A). 2.

(B). 0.

(C). 1.

(D). 3.

Lời giải

Chọn A

$$y' = (m^2 - 1)x^2 + 2mx + 3$$

Trường hợp 1. $m = 1$ ta có $y' = 2x + 3$

Xét dấu y'

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$+\infty$
y'		-	0
			+

$\Rightarrow m = 1$ loại

Trường hợp 2. $m = -1$ ta có $y' = -2x + 3$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
y'		+	0
			-

$\Rightarrow m = -1$ thỏa mãn

? $m \neq \pm 1$

Hàm số có cực đại $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 3(m^2 - 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow 3 - 2m^2 > 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{6}}{2} < m < \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-1; 0; 1\}$ kết hợp với điều kiện ta được $m = 0$

Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 6: (Câu 10 - ĐTN - BGD&ĐT - Năm 2016 - 2017) Biết $M(0; 2)$, $N(2; -2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tính giá trị của hàm số tại $x = -2$.

(A). $y(-2) = 2$.

(B). $y(-2) = 22$.

(C). $y(-2) = 6$.

(D). $y(-2) = -18$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } y' = 3ax^2 + 2bx + c$$

Vì $M(0; 2)$, $N(2; -2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số nên:



$$\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} y(0) = 2 \\ y(2) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ 8a + 4b + 2c + d = -2 \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{cases} \Rightarrow y = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow y(-2) = -18.$

Câu 7: (Câu 2 - THPT Lý Thái Tổ - Bắc Ninh - Lần 2 - Năm 2020 - 2021) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + x - 2$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 + x_1x_2 = 3$

- Ⓐ. $m = -4.$ Ⓑ. $m = 2.$
Ⓒ. $m = 3.$ Ⓓ. Không có giá trị $m.$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = x^2 - mx + 1$

Để hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty) \quad (1)$$

Khi đó, phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 .

theo hệ thức viét $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 \cdot x_2 = 1 \end{cases}.$

Theo bài ra ta có: $x_1 + x_2 + x_1x_2 = 3 \Leftrightarrow m + 1 = 3 \Leftrightarrow m = 2 \quad (2).$

Từ (1) và (2) suy ra không có giá trị m nào thỏa mãn yêu cầu bài toán

Câu 8: (Câu 40 - THPT Ngô Gia Tự - Vĩnh Phúc - Năm 2020 - 2021) Biết m_0 là giá trị tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- Ⓐ. $m_0 \in (-7; -1).$ Ⓑ. $m_0 \in (7; 10).$ Ⓒ. $m_0 \in (-1; 7).$ Ⓓ. $m_0 \in (-15; -7).$

Lời giải

Chọn D

Để hàm số có 2 điểm cực trị thì $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + m = 0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow \Delta = 36 - 12m > 0 \Leftrightarrow m < 3$$

Theo bài ra: $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 13 \quad [*].$

Mà theo định lý Viét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m}{3} \end{cases}$ thay vào $[*]$ ta được:

$$4 - 3 \cdot \frac{m}{3} = 13 \Leftrightarrow m = -9 \quad (t/m).$$



Câu 9: (Câu 41 - THPT Kim Liên - Hà Nội - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 10$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- Ⓐ. $m_0 \in (-15; -7)$. Ⓑ. $m_0 \in (-1; 7)$. Ⓒ. $m_0 \in (-7; -1)$. Ⓓ. $m_0 \in (7; 10)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x + m \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + m = 0$ (1).

Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Điều kiện $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$.

$$\text{Theo Viet} \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = \frac{m}{3} \end{cases} (*).$$

Theo bài ra $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 10 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2 = 10$ (**).

Từ (*) và (**) ta được $4 - m = 10 \Leftrightarrow m = -6$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy $m_0 = -6 \in (-7; -1)$.

Câu 10: (Câu 36 - SGD Phú Thọ - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Biết hàm số $y = m^2 + 1 x^3 + 3 m - 5 x^2 - x + 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{1}{|x_1|} - \frac{1}{|x_2|} = 8$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- Ⓐ. $m \in -5; -2$. Ⓑ. $m \in 4; 5$. Ⓒ. $m \in -1; 1$. Ⓓ. $m \in 3; 7$.

Lời giải

Chọn C

Ta có :

$$y' = 3 m^2 + 1 x^2 + 6 m - 5 x - 1$$

Có $\Delta' < 0$ nên hàm số đã cho luôn có 2 điểm cực trị

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \frac{m-5}{m^2+1} \\ x_1 \cdot x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{|x_1|} - \frac{1}{|x_2|} = 8 \Leftrightarrow \frac{|x_2| - |x_1|}{|x_1 \cdot x_2|} = 8 \Leftrightarrow |x_2| - |x_1| = 8 \Leftrightarrow x_1^2 - 2|x_1 \cdot x_2| + x_2^2 = 64$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2|x_1 x_2| = 64 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = 64 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ x_1 + x_2 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 + m - 1 = 0 \\ 4m^2 - m + 9 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{8}.$$

Câu 11: (Câu 44 - SGD Thái Nguyên - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(3m+2)x^2 + (2m^2+3m+1)x - 2$ có điểm cực đại x_{CD} và điểm cực tiểu x_{CT} thỏa mãn $3x_{CD}^2 = 4x_{CT}$?



(A). 2.

(B). 1.

(C). 3.

(D). 4.

Lời giải

Chọn A

• Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = x^2 - (3m+2)x + (2m^2+3m+1)$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m+1 \\ x = 2m+1 \end{cases}$.

Hàm số đã cho có điểm cực đại và điểm cực tiểu $\Leftrightarrow m+1 \neq 2m+1 \Leftrightarrow m \neq 0$.

• **Trường hợp 1:** $m+1 < 2m+1 \Leftrightarrow m > 0$.

Khi đó: $x_{CD} = m+1$, $x_{CT} = 2m+1$.

$$3x_{CD}^2 = 4x_{CT} \Leftrightarrow 3(m+1)^2 = 4(2m+1) \Leftrightarrow 3m^2 - 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \quad (N) \\ m = -\frac{1}{3} \quad (L) \end{cases}$$

• **Trường hợp 2:** $2m+1 < m+1 \Leftrightarrow m < 0$.

Khi đó $x_{CD} = 2m+1$, $x_{CT} = m+1$.

$$3x_{CD}^2 = 4x_{CT} \Leftrightarrow 3(2m+1)^2 = 4(m+1) \Leftrightarrow 12m^2 + 8m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{-2+\sqrt{7}}{6} \quad (L) \\ m = \frac{-2-\sqrt{7}}{6} \quad (N) \end{cases}$$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 12: (Câu 33 - Chuyên Ngữ - Hà Nội - lần 1 - Năm 2020 - 2021) Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa $x_1^2 + x_2^2 = 3$ khi

(A). $m = \frac{1}{2}$.

(B). $m = \frac{3}{2}$.

(C). $m = -2$.

(D). $m = 1$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 6x + m$, ($a = 3, b = -6, c = m, \Delta = 36 - 12m$).

Để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thì $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < 3$.

Theo đề bài $x_1^2 + x_2^2 = 3 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 3 \Leftrightarrow 4 - \frac{2}{3}m = 3 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$. (**nhận**)

Câu 13: (Câu 17 - Chuyên Nguyễn Bình Khiêm - Quảng Nam - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+2)x^2 + (m^2+4m+3)x + 6m+9$. Tìm giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (C) có cực đại tại x_1 , đạt cực tiểu tại x_2 sao cho $x_1^2 = 2x_2$.

(A). $m = 4$.

(B). $m = -2$.

(C). $\begin{cases} m = 4 \\ m = -2 \end{cases}$.

(D). $m = \pm\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.



$$y' = x^2 - 2(m+2)x + m^2 + 4m + 3.$$

Hàm số đạt cực đại tại x_1 , đạt cực tiểu tại x_2 khi và chỉ khi

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow (m+2)^2 - (m^2 + 4m + 3) > 0 \Leftrightarrow 1 > 0, \forall m \in \mathbb{R}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m+3 \\ x = m+1 \end{cases}.$$

$$\text{Theo đề bài ta có: } x_1^2 = 2x_2 \Leftrightarrow (m+1)^2 = 2(m+3) \Leftrightarrow m^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\sqrt{5} \\ m = \sqrt{5} \end{cases}.$$

Câu 14: (Câu 5 - Chuyên Khoa Học Tự Nhiên - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = x^3 - mx^2 - m^2x + 8$. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số có điểm cực tiểu nằm hoàn toàn phía trên trục hoành?

- Ⓐ. 3. Ⓑ. 5. Ⓒ. 4. Ⓓ. 6.

Lời giải

Chọn C

$$y' = 3x^2 - 2mx - m^2$$

$$\Delta' = m^2 + 3m^2 = 4m^2.$$

$$\text{Do đó phương trình } y' = 0 \text{ có hai nghiệm là } x_1 = \frac{m+2m}{3} = m, x_2 = \frac{m-2m}{3} = -\frac{m}{3}.$$

Để hàm số có cực trị thì $m \neq 0$

Trường hợp 1: $m > 0$, khi đó $x_1 > x_2$, hàm số đạt cực tiểu tại $x_1 = m$.

Để hàm số có điểm cực tiểu nằm hoàn toàn phía trên trục hoành $f(x_1) > 0$.

$$\text{Hay } m^3 - m^3 - m^3 + 8 > 0 \Leftrightarrow 8 - m^3 > 0 \Leftrightarrow m < 2.$$

Kết hợp điều kiện ta được $0 < m < 2$. Do m nguyên nên $m = 1$.

$$\text{Trường hợp 2: } m < 0, \text{ khi đó } x_1 < x_2, \text{ hàm số đạt cực tiểu tại } x_2 = -\frac{m}{3}.$$

Để hàm số có điểm cực tiểu nằm hoàn toàn phía trên trục hoành $f(x_2) > 0$.

$$\text{Hay } -\frac{m^3}{27} - \frac{m^3}{9} + \frac{m^3}{3} + 8 > 0 \Leftrightarrow \frac{5}{27}m^3 + 8 > 0 \Leftrightarrow m > -\sqrt[3]{\frac{216}{5}}.$$

$$\text{Kết hợp điều kiện ta được } -\sqrt[3]{\frac{216}{5}} < m < 0. \text{ Do } m \text{ nguyên nên } m \in \{-3; -2; -1\}.$$

Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Câu 15: (Câu 50 - Chuyên PTNK - HCM - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Cho $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq n \leq 20\}$ và F là tập hợp các hàm số $f(x) = x^3 + (2m^2 - 5)x^2 + 6x - 8m^2$ có $m \in A$. Chọn ngẫu nhiên một hàm số $f(x)$ thuộc F . Tính xác suất để đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị nằm khác phía đối với trục Ox .

- Ⓐ. $\frac{18}{21}$. Ⓑ. $\frac{19}{20}$. Ⓒ. $\frac{9}{10}$. Ⓓ. $\frac{19}{21}$.

Lời giải

Chọn D

+ Không gian mẫu $|\Omega| = 21$



+ Ta có: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 + (2m^2 - 3)x + 4m^2 = 0(*) \end{cases}$

+ Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị nằm khác phía đối với trục Ox

$\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \in A \\ (2m^2 - 3)^2 - 16m^2 > 0 \\ 2^2 + (2m^2 - 3) \cdot 2 + 4m^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in A \\ m > \sqrt{\frac{7 + 2\sqrt{10}}{2}} \approx 2,58 \\ 0 \leq m < \sqrt{\frac{7 - 2\sqrt{10}}{2}} \approx 0,58 \\ \forall m \end{cases} \Rightarrow m \in \{0; 3; 4; \dots; 20\}$$

Vậy xác suất là: $P = \frac{19}{21}$.

Câu 16: (Câu 40 - THPT Ngô Quyền - Ba Vì - Hà Nội - Lần 2 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = (m-3)x^3 + 2(m^2 - m - 1)x^2 + (m+4)x - 1$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục Oy . Tổng các phần tử của S là

- (A). -3. (B). -4. (C). 0. (D). -2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 3(m-3)x^2 + 4(m^2 - m - 1)x + m + 4 = 0$.

Đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục $Oy \Leftrightarrow$ Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow 3(m-3)(m+4) < 0 \Leftrightarrow -4 < m < 3$.

Kết hợp điều kiện $m \in \mathbb{Z}$ ta được $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2\} \Rightarrow S = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2\}$.

Vậy tổng các phần tử của S là -3.

Câu 17: (Câu 46 - ĐTK - BGD&ĐT - Năm 2016 - 2017) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 1)x$ có hai điểm cực trị A và B sao cho A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $d: y = 5x - 9$. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

- (A). 0 (B). 6 (C). -6 (D). 3

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Ta có $y' = x^2 - 2mx + (m^2 - 1)$

$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m-1 \\ x = m+1 \end{cases} \Rightarrow A\left(m-1; \frac{m^3 - 3m + 2}{3}\right)$ và $B\left(m+1; \frac{m^3 - 3m - 2}{3}\right)$

Để thấy phương trình đường thẳng $AB: y = -\frac{2}{3}x + \frac{m(m^2 - 1)}{3}$ nên AB không thể song song hoặc trùng với $d \Rightarrow A, B$ cách đều đường thẳng $d: y = 5x - 9$ nếu trung điểm I của AB nằm trên d

$$I\left(m; \frac{m^3-3m}{3}\right) \in d \Rightarrow \frac{m^3-3m}{3} = 5m-9 \Leftrightarrow m^3-18m+27=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=3 \\ m=\frac{-3\pm 3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Với $m=3 \Rightarrow A, B$ thỏa điều kiện nằm khác phía so với d .

Với $m=\frac{-3\pm 3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow A, B$ thỏa điều kiện nằm khác phía so với d .

Tổng các phần tử của S bằng 0.

Câu 18: (Câu 35 - SGD Hà Nội- Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m^2-1)x$ có hai điểm cực trị A và B sao cho A, B nằm khác phía và cắt đều đường thẳng $d:y=5x-9$. Tổng các phần tử của S bằng

- (A). 0. (B). 6. (C). 2. (D). -6.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=x^2-2mx+(m^2-1)$.

$$\Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=m-1 \\ x=m+1 \end{cases} \Rightarrow A\left(m-1; \frac{m^3-3m+2}{3}\right) \text{ và } B\left(m+1; \frac{m^3-3m-2}{3}\right)$$

Dễ thấy phương trình đường thẳng $AB:y=-\frac{2}{3}x+\frac{m(m^2+1)}{3}$ nên AB không thể song song hoặc trùng với $d:y=5x-9$ nếu trung điểm I của AB nằm trên d

$$I\left(m; \frac{m^3-3m}{3}\right) \in d \Rightarrow \frac{m^3-3m}{3} = 5m-9 \Leftrightarrow m^3-19m+27=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=3 \\ m=\frac{-3\pm 3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Với $m=3 \Rightarrow A, B$ thỏa mãn điều kiện nằm khác phía so với d .

Với $m=\frac{-3\pm 3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow A, B$ thỏa mãn điều kiện nằm khác phía so với d .

Vậy Tổng các phần tử của S bằng 0.

Câu 19: (Câu 36 - THPT Ba Đình - Thanh Hóa - Lần 2 - Năm 2020 - 2021) Gọi m_1, m_2 là các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=2x^3-3x^2+m-1$ có hai điểm cực trị là B, C sao cho tam giác OBC có diện tích bằng 2, với O là gốc tọa độ. Tính m_1, m_2 .

- (A). 6. (B). -15. (C). 12. (D). -20.

Lời giải

Chọn B

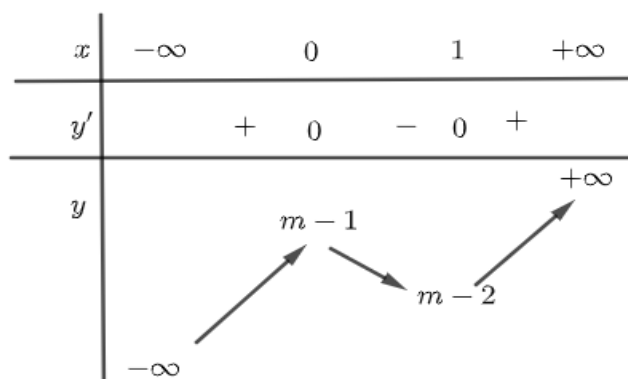
Hàm số xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$$y'=6x^2-6x.$$

$$y'=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0; y=m-1 \\ x=1; y=m-2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:





Vậy $B(0; m-1)$, $C(1; m-2)$.

$$\overrightarrow{BC} = (1; -1) \Rightarrow BC = \sqrt{2}.$$

(BC) đi qua $B(0; m-1)$ và nhận $\vec{n} = (1; 1)$ làm một vector pháp tuyến nên có phương trình

$$1(x-0) + 1(y-m+1) = 0 \Leftrightarrow x + y - m + 1 = 0.$$

$$d(O; BC) = \frac{|1-m|}{\sqrt{2}}.$$

$$S_{OBC} = \frac{1}{2} d(O; BC) \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{|1-m|}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = 2 \Leftrightarrow |1-m| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m=4 \\ 1-m=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-3 \\ m=5 \end{cases}.$$

Vậy $m_1, m_2 = -15$.

Câu 20: (Câu 35 - THPT Hoàn Kiếm và Hai Bà Trưng - Hà Nội - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = x^3 - 3mx + 1$ (1) và điểm $A(2; 3)$. Biết m là một giá trị để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị B và C sao cho tam giác ABC cân tại A . Diện tích tam giác ABC bằng

(A). 6. (B). $2\sqrt{2}$. (C). 3. (D). $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 3x^2 - 3m$.

Đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị B và C khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt, suy ra $m > 0$.

Khi đó, không giảm tổng quát suy ra $B(\sqrt{m}; 1-2m\sqrt{m}); C(-\sqrt{m}; 2m\sqrt{m}+1); A(2; 3)$.

Tam giác ABC cân tại A suy ra $AB = AC$.

$$AB^2 = AC^2 \Leftrightarrow (\sqrt{m}-2)^2 + (2+2m\sqrt{m})^2 = (\sqrt{m}+2)^2 + (2-2m\sqrt{m})^2$$

$$\Leftrightarrow 8\sqrt{m} - 16m\sqrt{m} = 0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 & (\text{loại vì } m > 0) \\ m=\frac{1}{2} & (\text{thỏa mãn}) \end{cases}$$

$$\text{Với } m = \frac{1}{2} \text{ thì } BC = \sqrt{(2\sqrt{m})^2 + (4m\sqrt{m})^2} = \sqrt{4m + 16m^3} = \sqrt{4 \cdot \frac{1}{2} + 16 \cdot \frac{1}{8}} = 2.$$

Thử lại thấy ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

Gọi I là trung điểm của BC , suy ra $I(0; 1)$ và $IA = \sqrt{2^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{2}$.

Vậy diện tích tam giác ABC bằng $\frac{1}{2} \cdot IA \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2 = 2\sqrt{2}$.

Câu 21: (Câu 44 - THPT Hoàn Kiếm và Hai Bà Trưng - Hà Nội - Năm 2020 - 2021) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + m$ có hai điểm cực trị A, B và $OA + OB$ đạt giá trị nhỏ nhất?

(A). Vô số.

(B). 2.

(C). 3.

(D). 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = (x - m)^3 - 3x + m \Rightarrow y' = 3(x - m)^2 - 3$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow (x - m)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m + 1 \\ x = m - 1 \end{cases}$$

Đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow m + 1 \neq m - 1 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Với } x = m + 1 \Rightarrow y = 1 - 3(m + 1) + m = -2m - 2 \Rightarrow A(m + 1; -2m - 2).$$

$$\text{Với } x = m - 1 \Rightarrow y = -1 - 3(m - 1) + m = -2m + 2 \Rightarrow B(m - 1; -2m + 2).$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } OA + OB &= \sqrt{(m + 1)^2 + (-2m - 2)^2} + \sqrt{(m - 1)^2 + (-2m + 2)^2} \\ &= \sqrt{5m^2 + 10m + 5} + \sqrt{5m^2 - 10m + 5} \\ &= \sqrt{5}|m + 1| + \sqrt{5}|-m + 1| \geq \sqrt{5} \cdot |(m + 1) + (-m + 1)| = 2\sqrt{5} \Rightarrow (OA + OB)_{\min} = 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow (m + 1)(-m + 1) \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1 \Rightarrow m \in \{0; \pm 1\}.$$

Câu 22: (Câu 45 - THPT Hồng Lĩnh - Hà Tĩnh - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m - 1)x + 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 2mx_2 - 3m^2 + m - 5 \leq 0$?

(A). 9.

(B). 3.

(C). 7.

(D). 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = x^2 - 2mx + m^2 - m - 1$.

Hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1. (*)$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 - m - 1 \end{cases}$$

Theo đề bài: $x_1^2 + 2mx_2 - 3m^2 + m - 5 \leq 0$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + (x_1 + x_2)x_2 - 3m^2 + m - 5 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - 3m^2 + m - 5 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - x_1x_2 - 3m^2 + m - 5 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - m^2 + m + 1 - 3m^2 + m - 5 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2m - 4 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 2.$$

Kết hợp với (*) ta được $-1 < m \leq 2$.



Do m nguyên nên $m \in \{0, 1, 2\}$.

Vậy có 3 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 23: (Câu 38 - THPT Lương Tài - Bắc Ninh - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Biết rằng đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + x - 2$ có giá trị tuyệt đối của hoành độ hai điểm cực trị là độ dài hai cạnh của tam giác vuông có cạnh huyền $\sqrt{7}$. Hỏi có mấy giá trị của m ?

- (A). 0. (B). 2. (C). 3. (D). 1.

Lời giải

Chọn B

♦ Ta có: $y' = x^2 - mx + 1$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - mx + 1 = 0.$$

♦ Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 4 > 0$.

Khi đó, gọi các nghiệm của là x_1, x_2 thì x_1, x_2 chính là hoành độ hai điểm cực trị. Theo Viet ta có $x_1 + x_2 = m; x_1 \cdot x_2 = 1$.

$$\text{Theo bài ra ta có: } x_1^2 + x_2^2 = 7 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 7 \Leftrightarrow m^2 - 2 = 7 \Leftrightarrow m^2 = 9 \Leftrightarrow m = \pm 3).$$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu.

Câu 24: (Câu 38 - SGD Thái Nguyên - Lần 1 - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$, với m là tham số. Gọi (C) là đồ thị của hàm số đã cho. Biết rằng khi m thay đổi, điểm cực tiểu của đồ thị (C) luôn nằm trên đường thẳng cố định. Hệ số góc của đường thẳng d bằng

- (A). $-\frac{1}{3}$. (B). 3. (C). -3. (D). $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m - 1 \\ x = m + 1 \end{cases}.$$

Vì hàm số có hệ số bậc ba dương nên hàm số có điểm cực tiểu $x_{CT} = m + 1$.

$$\text{Mặt khác ta lại có: } y = (x - m) \left[(x - m)^2 + 3mx \right] - 3mx(x - m) - 3x$$

$$\text{Suy ra: } y_{CT} = (x_{CT} - m) \left[(x_{CT} - m)^2 + 3mx_{CT} \right] - 3mx_{CT}(x_{CT} - m) - 3x_{CT}$$

$$y_{CT} = [1 + 3mx_{CT}] - 3mx_{CT} - 3x_{CT} = 1 - 3x_{CT} = 1 - 3x_{CT}$$

Vậy tọa độ điểm cực tiểu thỏa mãn phương trình đường thẳng $y = -3x + 1$ hay đường thẳng d có hệ số góc bằng -3.

Câu 25: (SGD Hưng Yên-Năm 2019-2020) Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = 2x^3 + 3mx^2 + 2mx - 5$ không có cực trị là

Ⓐ. $0 \leq m \leq \frac{4}{3}$.

Ⓑ. $0 < m < \frac{4}{3}$.

Ⓒ. $-\frac{4}{3} < m < 0$.

Ⓓ. $-\frac{4}{3} \leq m \leq 0$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 6x^2 + 6mx + 2m$.

Để hàm số đã cho không có cực trị thì phương trình $6x^2 + 6mx + 2m = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 9m^2 - 12m \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{4}{3}$.

Câu 26: (SGD Vĩnh Phúc-2019-2020) Cho hàm số $y = x^3 - (m+2)x^2 + 2$ (với m là tham số). Hàm số đã cho có cực tiểu khi và chỉ khi

Ⓐ. $m \neq 1$.

Ⓑ. $m \neq -2$.

Ⓒ. $m \neq 0$.

Ⓓ. $m \neq -3$.

Lời giải

Chọn B

Ta thấy $y' = 3x^2 - 2(m+2)x = x[3x - 2(m+2)]$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2(m+2)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2(m+2)}{3} \end{cases}$$

Vì hàm số đã cho là hàm bậc 3 nên hàm số có cực tiểu khi và chỉ khi hàm số có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \frac{2(m+2)}{3} \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -2$.

Câu 27: (THPT Nguyễn Tất Thành - Hà Nội - Năm 2019-2020) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^3 - 3mx^2 + 3(m-6)x$ có cực trị.

Ⓐ. $-3 < m < 2$.

Ⓑ. $m < -3$ hoặc $m > 2$.

Ⓒ. $m \leq -3$ hoặc $m \geq 2$.

Ⓓ. $-3 \leq m \leq 2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = -3x^2 - 6mx + 3(m-6)$.

$$\text{Hàm số có cực trị} \Leftrightarrow \Delta'_{y'} > 0 \Leftrightarrow 9m^2 + 3.3(m-6) > 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 6 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m > 2 \end{cases}$$

Câu 28: (TN12-THPT Nguyễn Tất Thành 2019-2020) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^3 - 3mx^2 + 3(m-6)x$ có cực trị.

Ⓐ. $-3 < m < 2$.

Ⓑ. $m < -3$ hoặc $m > 2$.

Ⓒ. $m \leq -3$ hoặc $m \geq 2$.

Ⓓ. $-3 \leq m \leq 2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = -3x^2 - 6mx + 3(m-6)$.

$$\text{Hàm số có cực trị} \Leftrightarrow \Delta'_{y'} > 0 \Leftrightarrow 9m^2 + 3.3(m-6) > 0 \Leftrightarrow m^2 + m - 6 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m > 2 \end{cases}$$



Câu 29: (THPT Võ Thị Sáu- TPHCM- năm 2019-2020) Tập hợp các số thực m để hàm số

$$y = \frac{x^3}{3} - mx^2 - (6m+9)x + 1 \text{ có cực trị là}$$

- (A). $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. (B). $\mathbb{R}$. (C). $\mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$. (D). $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

Lời giải

Chọn D

Để hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có cực trị thì $b^2 - 3ac > 0$

$$\Rightarrow (-m)^2 - 3 \cdot \frac{1}{3} [-(6m+9)] > 0$$

$$\Rightarrow m^2 + 6m + 9 > 0$$

$$\Rightarrow (m+3)^2 > 0$$

$$\Rightarrow m+3 \neq 0$$

$$\Rightarrow m \neq -3.$$

Câu 30: (THPT Nguyễn Gia Thiều- Năm 2019 -2020) Cho hàm số

$$y = f(x) = x^3 - (a-2)x^2 - (2a-1)x + 1. \text{ Tìm mệnh đề nào sai.}$$

- (A). Hàm số luôn có cực đại, cực tiểu $\forall a$. (B). Hàm số luôn có cực đại, cực tiểu $\forall a \neq -1$.
(C). Hàm số đồng biến khi $a = -1$. (D). Hàm số luôn có cực đại, cực tiểu $\forall a > -1$.

Lời giải

Chọn B

$$y' = 3x^2 - 2(a-2)x - (2a-1).$$

$$\Delta' = (a-2)^2 + 3(2a-1) = a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2.$$

$\Rightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khi $a \neq -1$. Vậy hàm số luôn có cực đại, cực tiểu $\forall a \neq -1$.

Câu 31: (THPT Nguyễn Khuyến - TP HCM - Lần 02 - Năm 2019 - 2020) Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = mx^3 + 2x - m^2 + 1$ có điểm cực tiểu.

- (A). $m < 0$. (B). $m > 0$. (C). $m \leq 0$. (D). $m \geq 0$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } y' = 3mx^2 + 2.$$

Để hàm số đã cho có điểm cực tiểu thì phương trình $y' = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow 3m \cdot 2 < 0 \Leftrightarrow m < 0.$$

Câu 32: (Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - Năm 2019 - 2020) Cho hàm số $y = x^3 + (m-1)x^2 + (m^2 - 6m + 5)x - 2$. Gọi $S = (a; b)$ là tập hợp các giá trị của tham số m để hàm số có cực trị, giá trị của $a+b$ bằng :

- (A). 7 (B). 6 (C). 8 (D). 9

Lời giải

Chọn C

$$y' = 3x^2 + 2(m-1)x + m^2 - 6m + 5$$

Để hàm số có cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = (m-1)^2 - 3(m^2 - 6m + 5) > 0$

$$\Leftrightarrow -2m^2 + 16m - 14 > 0 \Leftrightarrow 1 < m < 7 \Rightarrow S = (1; 7). \text{ Vậy, } a + b = 8$$

Câu 33: Với giá trị thực nào của tham số m thì hàm số $y = (m-3)x^3 + 2\sqrt{3}x^2 + mx - 5$ có hai điểm cực trị?

- (A). $m \in (-1; 4)$. (B). $m \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty)$.
(C). $m \in (-1; 4) \setminus \{3\}$. (D). $m \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty) \cup \{3\}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y' = 3(m-3)x^2 + 4\sqrt{3}x + m.$$

Hàm số có hai cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-3 \neq 0 \\ (2\sqrt{3})^2 - 3(m-3)m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ -3m^2 + 9m + 12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ -1 < m < 4 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-1; 4) \setminus \{3\}.$$

Vậy $m \in (-1; 4) \setminus \{3\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 34: (Vted - Đề số 21 - Năm 2019 - 2020) Hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 . Giá trị của $x_1 + x_2$ bằng

- (A). -6. (B). -2. (C). 3. (D). 2.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Có } f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 + 2 = 2.$$

Câu 35: (THPT Nguyễn Khuyến - TP HCM - Lần 02 - Năm 2019 - 2020) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + \frac{4}{3}x - 2 + m$ không có điểm cực trị.

- (A). $-3 < m < 1$. (B). $-1 \leq m \leq 1$. (C). $m < 1$. (D). $-3 \leq m \leq 1$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 2(m+1)x + \frac{4}{3}.$$

Hàm số không có cực trị khi và chỉ khi y' không đổi dấu

$$\Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 1.$$

Câu 36: (THPT Triệu Sơn 4 - Thanh Hóa - Lần 3 - Năm - 2019 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - m + 1$ có các giá trị cực trị trái dấu?

- (A). 2. (B). 9. (C). 3. (D). 7.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.



Ta có $y' = 6x^2 - 12x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}; f(0) = 1-m, f(2) = -7-m.$

Hàm số $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - m + 1$ có các giá trị cực trị trái dấu $\Leftrightarrow f(0) \cdot f(2) < 0 \Leftrightarrow (1-m) \cdot (-7-m) < 0 \Leftrightarrow -7 < m < 1.$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-6; -5; -4; -3; -2; -1; 0\}$. Có 7 giá trị thỏa mãn.

Câu 37: (THPT Tam Dương - Vĩnh Phúc - Năm học 2019 - 2020) Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} - (5m^2 - 3m - 1)x^2 + (2m+1)x + 1$ có hai điểm cực trị A, B sao cho A, B cách đều đường thẳng $\Delta: x-1=0$?

- (A). 2. (B). 3. (C). 1. (D). 0.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R}.$

Đạo hàm: $y' = x^2 - 2(5m^2 - 3m - 1)x + 2m + 1$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(5m^2 - 3m - 1)x + 2m + 1 = 0 \quad (1)$$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt.

$$\text{Khi đó: } \Delta' > 0 \Leftrightarrow (5m^2 - 3m - 1)^2 - (2m + 1) > 0 \quad (*)$$

Với điều kiện (*), phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(5m^2 - 3m - 1) \\ x_1 \cdot x_2 = 2m + 1 \end{cases} \quad (**) \text{ (theo định lý Vi-ét).}$$

Giả sử tọa độ hai điểm cực trị $A\left(x_1; \frac{x_1^3}{3} - (5m^2 - 3m - 1)x_1^2 + (2m+1)x_1 + 1\right)$

$B\left(x_2; \frac{x_2^3}{3} - (5m^2 - 3m - 1)x_2^2 + (2m+1)x_2 + 1\right).$

Theo giả thiết, hai điểm cực trị cách đều đường thẳng $\Delta: x-1=0$ nên ta có:

$$d(A, \Delta) = d(B, \Delta) \Leftrightarrow |x_1 - 1| = |x_2 - 1| \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 2 \text{ (do } x_1 \neq x_2 \text{)}.$$

$$\text{Kết hợp với hệ } (**) \text{ suy ra: } 2(5m^2 - 3m - 1) = 2 \Leftrightarrow 5m^2 - 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{2}{5} \end{cases}.$$

Kiểm tra với điều kiện (*) thấy $m = -\frac{2}{5}$ thỏa mãn.

Vậy có 1 giá trị thực của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 38: (THPT Liên Trường - Nghệ An - Năm 2019 - 2020) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + mx + 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 nằm về hai phía trục Oy .

- (A). $m < 0.$ (B). $m > 0.$ (C). $-\frac{1}{4} < m < 0.$ (D). $\begin{cases} m < -\frac{1}{4} \\ m > 0 \end{cases}.$



Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -x^2 - 4mx + m$.

Để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 nằm về hai phía trục Oy thì phương trình

$-x^2 - 4mx + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 trái dấu $\Leftrightarrow -m < 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Câu 39: (THPT chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020) Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$ có hai điểm cực trị có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$?

(A). 1.

(B). 0.

(C). 3.

(D). 2.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$y' = 2x^2 - 2mx - 2(3m^2 - 1)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - mx - 3m^2 + 1 = 0(1)$.

Đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4(-3m^2 + 1) > 0 \Leftrightarrow 13m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{2}{\sqrt{13}} \\ m < -\frac{2}{\sqrt{13}} \end{cases}.$$

Theo định lý Vi-et: $x_1x_2 = -3m^2 + 1$; $x_1 + x_2 = m$.

Theo đề bài, ta có:

$$x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1 \Leftrightarrow -3m^2 + 1 + 2m = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \text{ (nhận)} \\ m = 0 \text{ (loại)} \end{cases}.$$

Vậy có 1 giá trị thực của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 40: (THPT Thái Phúc- Thái Bình- Lần 3- 2020) Cho hàm số $f(x) = x^3 - 2ax^2 + a^2x + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) có 2 điểm cực trị A và B . Biết tam giác OAB vuông cân tại O (O là gốc tọa độ), giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2$ bằng

(A). 25.

(B). $\frac{10}{3}$.

(C). 40.

(D). 10.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 3x^2 - 4ax + a^2$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x = \frac{a}{3} \end{cases} \quad (a \neq 0).$$

$$A(a, b) \text{ và } B\left(\frac{a}{3}; \frac{4a^3}{27} + b\right)$$



$$\text{Ta có } \begin{cases} \overline{OA} \cdot \overline{OB} = 0 \\ OA = OB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a^2}{3} + b \left(\frac{4a^3}{27} + b \right) = 0 \\ a^2 + b^2 = \frac{a^2}{9} + \left(\frac{4a^3}{27} + b \right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 9b^2 \\ \frac{a^2}{3} + b \left(\frac{4a^3}{27} + b \right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = a^2 + b^2 = 10.$$

Câu 41: (THPT-Quốc Học Huế- Lần 1- 2020) Tìm các giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-2019; 2020)$ để điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 + mx - 1$ nằm bên phải trục tung.

- (A). 2020. (B). 2019. (C). 2017. (D). 2018.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 3x^2 + 2x + m$.

Hàm số có cực trị thì $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 1 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{3}$

Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 + mx - 1$ nằm bên phải trục tung $\Rightarrow y' = 0$ có ít nhất một nghiệm dương.

Mà $3x^2 + 2x + m = 0$ có 2 nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-2}{3} < 0 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m}{3} \end{cases} \Rightarrow m < 0$$

Vậy có 2018 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 42: (Chuyên KHTN - Hà Nội - Lần 3 - Năm 2019-2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số

$y = mx^3 - (2m-1)x^2 + 2mx - m - 1$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành.

- (A). 4. (B). 2. (C). 1. (D). 3.

Lời giải

Chọn C

Để đồ thị hàm số $y = mx^3 - (2m-1)x^2 + 2mx - m - 1$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành thì phương trình $mx^3 - (2m-1)x^2 + 2mx - m - 1 = 0$ (1) có ba nghiệm phân biệt.

Ta có: $mx^3 - (2m-1)x^2 + 2mx - m - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)[mx^2 + (1-m)x^2 + m+1] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ f(x) = mx^2 + (1-m)x^2 + m+1 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Để phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt thì (2) có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ (1-m)^2 - 4m(m+1) > 0 \\ m+1-m+m+1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -3m^2 - 6m + 1 > 0 \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \frac{-3-2\sqrt{3}}{3} < m < \frac{-3+2\sqrt{3}}{3} \\ m \neq -2 \end{cases}$$

Mặt khác ta có $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = -1$.

Câu 43: (SGD Hưng Yên - Năm 2019-2020) Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số có các điểm cực đại và cực tiểu của hàm số nằm trong khoảng $(-2; 3)$

Ⓐ. $m \in (1; 3)$. Ⓑ. $m \in (-1; 3) \cup (3; 4)$.

Ⓒ. $m \in (-1; 4)$. Ⓓ. $m \in (3; 4)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6(m-2)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 - m \end{cases}$$

Để hàm số có các điểm cực đại đều thuộc khoảng $(-2; 3)$ thì

$$\begin{cases} 2 - m \neq -1 \\ -2 < 2 - m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ -1 < m < 4 \end{cases}$$

Vậy $m \in (-1; 3) \cup (3; 4)$

Câu 44: (THPT Nam Đàn 2 - Lần 1 - Năm 2019-2020) Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m - 2$ có đồ thị (C_m) . Giá trị của tham số thực m để (C_m) có điểm cực đại, cực tiểu nằm về hai phía trục hoành là

Ⓐ. $m < 3$. Ⓑ. $1 < m < 5$. Ⓒ. $2 < m < 3$. Ⓓ. $m > 3$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Ta có: $y = x^3 + 3x^2 + mx + m - 2 = (x+1)(x^2 + 2x + m - 2)$

$$y = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 + 2x + m - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + m - 2 = 0 \\ x = -1 \end{cases} \quad (1)$$

Để đồ thị (C_m) có điểm cực đại, cực tiểu nằm về hai phía trục hoành

$\Leftrightarrow y = 0$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 1-2+m-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m < 3$$

Vậy $m < 3$ thì đồ thị (C_m) có điểm cực đại, cực tiểu nằm về hai phía trục hoành.

Cách 2:

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x + m$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x + m = 0$ (*)

Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3 \quad (1)$$

Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (*). Theo định lý Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m}{3} \end{cases}$

Gọi y_1, y_2 là giá trị cực trị tương ứng của hàm số.

$$\text{Vì } y = y' \cdot \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}m - 2\right)(x+1) \text{ nên } y_1 = \left(\frac{2}{3}m - 2\right)(x_1 + 1); y_2 = \left(\frac{2}{3}m - 2\right)(x_2 + 1).$$

Để đồ thị (C_m) có điểm cực đại, cực tiểu nằm về hai phía trục hoành $\Leftrightarrow y_1 \cdot y_2 < 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}m - 2\right)(x_1 + 1) \cdot \left(\frac{2}{3}m - 2\right)(x_2 + 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}m - 2\right)^2 (x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2 + 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}m - 2\right)^2 \left(\frac{m}{3} - 1\right) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow m < 3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $m < 3$ thì đồ thị (C_m) có điểm cực đại, cực tiểu nằm về hai phía trục hoành.

Câu 45: (THPT Tam Dương - Vĩnh Phúc - Năm 2019-2020) Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m

để đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} - (5m^2 - 3m - 1)x^2 + (2m + 1)x + 1$ có hai điểm cực trị A, B sao cho A, B cách đều đường thẳng $\Delta: x - 1 = 0$?

(A). 2.

(B). 3.

(C). 1.

(D). 0.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = x^2 - 2(5m^2 - 3m - 1)x + 2m + 1$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(5m^2 - 3m - 1)x + 2m + 1 = 0 \quad (1)$$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt.

$$\text{Khi đó: } \Delta' > 0 \Leftrightarrow (5m^2 - 3m - 1)^2 - (2m + 1) > 0 \quad (*)$$

Với điều kiện (*), phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(5m^2 - 3m - 1) \\ x_1 \cdot x_2 = 2m + 1 \end{cases} \quad (**)(\text{theo định lý Vi-ét}).$$

Giả sử tọa độ hai điểm cực trị $A\left(x_1; \frac{x_1^3}{3} - (5m^2 - 3m - 1)x_1^2 + (2m + 1)x_1 + 1\right)$

$B\left(x_2; \frac{x_2^3}{3} - (5m^2 - 3m - 1)x_2^2 + (2m + 1)x_2 + 1\right)$.

Theo giả thiết, hai điểm cực trị cách đều đường thẳng $\Delta: x - 1 = 0$ nên ta có:

$$d(A, \Delta) = d(B, \Delta) \Leftrightarrow |x_1 - 1| = |x_2 - 1| \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 2 \text{ (do } x_1 \neq x_2 \text{)}.$$

$$\text{Kết hợp với hệ (**)} \text{ suy ra: } 2(5m^2 - 3m - 1) = 2 \Leftrightarrow 5m^2 - 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{2}{5} \end{cases}.$$

Kiểm tra với điều kiện (*) thấy $m = -\frac{2}{5}$ thỏa mãn.

Vậy có 1 giá trị thực của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 46: (THPT Nghi Sơn - Thanh Hóa - Lần 01 - Năm 2019-2020) Tìm tổng tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6m(1-2m)x$ song song đường thẳng $y = -4x$.

Ⓐ. $-\frac{1}{3}$.

Ⓑ. $-\frac{2}{3}$.

Ⓒ. 1.

Ⓓ. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Gọi (C): $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6m(1-2m)x$.

Có: $y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6m(1-2m)$.

Có: $\Delta_{y'} = 36[(m-1)^2 - 4m(1-2m)] = 36(9m^2 - 6m + 1) = 36(3m-1)^2$.

Để hàm số có hai cực trị thì: $\Delta_{y'} > 0 \Leftrightarrow (3m-1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{3}$.

Có: $y = y' \cdot \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}(m-1)\right) + (-9m^2 + 6m - 1)x + m(m-1)(2m-1)$.

Do đó phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị (C) là:

$y = (-9m^2 + 6m - 1)x + m(m-1)(2m-1)$.

Để đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y = -4x$ thì:

$$\begin{cases} -9m^2 + 6m - 1 = -4 \\ m(m-1)(2m-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{1}{3} \\ m \neq 0; m \neq 1; m \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3}.$$

Vậy $m = -\frac{1}{3}$ là giá trị cần tìm.

Câu 47: (THPT Việt Nam Ba Lan - Hà Nội - Năm 2019-2020) Số các giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 2019$ có hai điểm cực trị nằm trong khoảng $(-5; 5)$ bằng



Ⓐ. 7.

Ⓑ. 8.

Ⓒ. 6.

Ⓓ. 5.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6(m-2)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 - m \end{cases}$$

Để hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 2019$ có hai điểm cực trị nằm trong khoảng

$$(-5; 5) \text{ thì } \begin{cases} 2 - m \neq -1 \\ -5 < 2 - m < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ -3 < m < 7 \end{cases}$$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 4; 5; 6\}$.

Câu 48: (THPT Việt Nam Ba Lan - Hà Nội - Năm 2019-2020) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = -x^3 + (2m-1)x^2 - (m^2+8)x + 2$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Ⓐ. $m = 3$.

Ⓑ. Không tìm được m .

Ⓒ. $m = -9$.

Ⓓ. $m = -2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x) = -3x^2 + 2(2m-1)x - (m^2+8)$ và $f''(x) = -6x + 2(2m-1)$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1 \Rightarrow \begin{cases} f'(-1) = 0 \\ f''(-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 - 4m - 9 = 0 \\ 4m + 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -(m+2)^2 - 5 = 0 \\ m > -1 \end{cases}$ (vô nghiệm).

Vậy không tìm được m .

Câu 49: (THPT Lý Tự Trọng - TPHCM - Năm 2019 - 2020) Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + m + 2$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = \frac{1}{2}x + 3$. Tập hợp các giá trị thực của tham số m để (C) có 2 điểm cực trị đối xứng với nhau qua đường thẳng d là:

Ⓐ. $\{1\}$.

Ⓑ. $\{-1\}$.

Ⓒ. $\{-1; 1\}$.

Ⓓ. $\emptyset$.

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 6mx = 3x(x - 2m).$$

Để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị thì $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó: $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$, đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(0; m+2)$,

$$B(2m; -4m^3 + m + 2).$$

Gọi $I(m; -2m^3 + m + 2)$ là trung điểm của AB .

Ta có: $\overrightarrow{u_d} = (2; 1)$; $\overrightarrow{AB} = (2m; -4m^3)$.

A và B đối xứng nhau qua đường thẳng d khi và chỉ khi:



$$\begin{cases} I \in d \\ d \perp AB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I \in d \\ \overrightarrow{u_d} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{cases} \begin{cases} -2m^3 + m + 2 = \frac{1}{2}m + 3 \\ 4m - 4m^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4m^3 + m - 2 = 0 \\ 4m - 4m^3 = 0 \end{cases}$$

Hệ phương trình vô nghiệm nên không có giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 50: (Chuyên Nguyễn Trãi - Hải Dương- Lần 04 - Năm 2019 - 2020) Cho hàm số $y = (x-m)^3 - 3x + m^2$ (với m là tham số). M là điểm cực đại của đồ thị hàm số ứng với giá trị m thích hợp đồng thời là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số ứng với một giá trị khác của m . Hỏi số điểm M có tính chất như vậy là bao nhiêu?

- (A). 0. (B). 2. (C). 1. (D). 3.

Lời giải

Hàm số $y = (x-m)^3 - 3x + m^2$

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$y' = 3(x-m)^2 - 3$

$y'' = 6(x-m)$

$y' = 0 \Leftrightarrow 3(x-m)^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = m+1 \\ x_2 = m-1 \end{cases}$

Ta có: $y''_{(m+1)} = 6(m+1-m) = 6 > 0$; $y''_{(m-1)} = 6(m-1-m) = -6 < 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x_{CD} = m-1; y_{CD} = (m-1-m)^3 - 3(m-1) + m^2 = m^2 - 3m + 2 \\ x_{CT} = m+1; y_{CT} = (m+1-m)^3 - 3(m+1) + m^2 = m^2 - 3m - 2 \end{cases}$

Gọi M là 1 điểm cực đại ứng với giá trị m_1 và là điểm cực tiểu ứng với giá trị m_2 .

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} m_1 - 1 = m_2 + 1 \\ m_1^2 - 3m_1 + 2 = m_2^2 - 3m_2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = m_2 + 2 \\ (m_2 + 2)^2 - 3(m_2 + 2) + 2 = m_2^2 - 3m_2 - 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = \frac{3}{2} \\ m_2 = \frac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right).$

Câu 51: (Chuyên Lương Văn Chánh - Lần 02 - Năm 2019 - 2020) Biết hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ đạt cực đại tại điểm $x = -3$, $f(-3) = 28$ và đồ thị của hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1. Tính $S = a^2 + b^2 - c^2$.

- (A). $S = 89$. (B). $S = \frac{225}{4}$. (C). $S = \frac{619}{8}$. (D). $S = 91$.

Lời giải

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$; $f''(x) = 6x + 2a$.

Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = -3$ khi và chỉ khi $\begin{cases} f'(-3) = 0 \\ f''(-3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6a + b = -27 \\ a < 9 \end{cases} \quad (1).$

Mà $f(-3) = 28 \Rightarrow 9a - 3b + c = 55 \quad (2).$

Ngoài ra, đồ thị của hàm số $f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1 nên $c = 1 \quad (3).$



Từ (1), (2), (3) suy ra
$$\begin{cases} -6a + b = -27 \\ 9a - 3b + c = 55 \\ c = 1 \\ a < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -9 \\ c = 1 \\ a < 9 \end{cases}.$$

Do đó $S = 3^2 + (-9)^2 - 1^2 = 89$.

Câu 52: (THPT Phó Cơ Điều - An Giang - Năm 2019 - 2020) Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + (m-1)x + 2m^2 + 1$ (m là tham số). Xác định khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ $O(0;0)$ đến đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số trên.

- Ⓐ. $\sqrt{3}$. Ⓑ. $\frac{2}{9}$. Ⓒ. $2\sqrt{3}$. Ⓓ. $\frac{\sqrt{10}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + (m-1)x + 2m^2 + 1$

$\Rightarrow f'(x) = x^2 - 4mx + (m-1)$

Hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ (2m)^2 - 1(m-1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4m^2 - m + 1 > 0 \Leftrightarrow \left(2m - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16} > 0, \forall m \in \mathbb{R}.$

Tìm được phương trình đường thẳng qua 2 điểm cực trị:

$(\Delta): y = \left(\frac{-8}{3}m^2 + \frac{2}{3}m - \frac{2}{3}\right)x + \frac{8}{3}m^2 - \frac{2}{3}m + 1$

Cách 1: Theo đề bài ta có:

$$d(O, \Delta) = \frac{\left|\frac{8}{3}m^2 - \frac{2}{3}m + 1\right|}{\sqrt{\left(\frac{-8}{3}m^2 + \frac{2}{3}m - \frac{2}{3}\right)^2 + 1}} = \frac{\left|\frac{8}{3}m^2 - \frac{2}{3}m + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right|}{\sqrt{\left(\frac{8}{3}m^2 - \frac{2}{3}m + \frac{2}{3}\right)^2 + 1}}$$

Ta có: $\frac{8}{3}m^2 - \frac{2}{3}m + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(4m^2 - m + 1) = \frac{2}{3}\left(2m - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{5}{8} > 0, \forall m \in \mathbb{R}.$

Áp dụng bất đẳng thức Ⓑ. Ⓒ. S cho 2 số dương:

$$\left|1 \cdot \left(\frac{8}{3}m^2 - \frac{2}{3}m + \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3} \cdot 1\right| \leq \sqrt{\left[1^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right] \left[\left(\frac{8}{3}m^2 - \frac{2}{3}m + \frac{2}{3}\right)^2 + 1\right]}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|1 \cdot \left(\frac{8}{3}m^2 - \frac{2}{3}m + \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{3} \cdot 1\right|}{\sqrt{\left[\left(\frac{8}{3}m^2 - \frac{2}{3}m + \frac{2}{3}\right)^2 + 1\right]}} \leq \sqrt{\left[1^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2\right]} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

$$\Leftrightarrow d(O, \Delta) \leq \frac{\sqrt{10}}{3}.$$



$$\text{Vậy giá trị lớn nhất của } d(O, \Delta) = \frac{\sqrt{10}}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{8}{3}m^2 - \frac{2}{3}m + \frac{2}{3} \right) = 3 \Leftrightarrow \frac{8}{3}m^2 - \frac{2}{3}m - \frac{7}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1+\sqrt{57}}{8} \\ m = \frac{1-\sqrt{57}}{8} \end{cases}$$

Cách 2:

Tìm được điểm cố định mà Δ luôn đi qua với mọi m là $A\left(1; \frac{1}{3}\right)$.

Δ có vec tơ chỉ phương là $\vec{u}_\Delta \left(-1; \frac{8}{3}m^2 - \frac{2}{3}m + \frac{2}{3}\right)$.

Ta có $d(O, \Delta) \leq OA$.

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow OA \perp \Delta \Leftrightarrow \vec{OA} \cdot \vec{u}_\Delta = 0 \Leftrightarrow -1 + \frac{1}{3} \left(\frac{8}{3}m^2 - \frac{2}{3}m + \frac{2}{3} \right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1+\sqrt{57}}{8} \\ m = \frac{1-\sqrt{57}}{8} \end{cases}$$

$$\text{Vậy giá trị lớn nhất của } d(O, \Delta) = \frac{\sqrt{10}}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1+\sqrt{57}}{8} \\ m = \frac{1-\sqrt{57}}{8} \end{cases}$$

Câu 53: (THPT Minh Khai – Hà Nội – Lần 01 – Năm 2019 – 2020) Hàm số

$y = \frac{1}{3}x^3 - (m-1)x^2 + 5m - 4$ có điểm cực tiểu lớn hơn 2 khi

- Ⓐ. $m > 2$. Ⓑ. $m \in (1; 3)$. Ⓒ. $m > 3$. Ⓓ. $m < 1$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y' = x^2 - 2(m-1)x; y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m-1)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m - 2 \end{cases}$$

Nếu $2m - 2 < 0 \Leftrightarrow m < 1$ thì hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0 < 2$. Không thỏa mãn.

Để hàm có điểm cực tiểu lớn hơn 2 thì ta phải có $x = 2m - 2 > 2 \Leftrightarrow m > 2$.

Vậy $m > 2$ thì hàm số có điểm cực tiểu lớn hơn 2.

Câu 54: (THPT Nghi Xuân - Năm 2019 - 2020) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6m(1-2m)x$ song song đường thẳng $y = -4x$.

- Ⓐ. $m = -\frac{1}{3}$. Ⓑ. $m = -\frac{2}{3}$. Ⓒ. $m = 1$. Ⓓ. $m = \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6m(1-2m).$$

$$\text{Điều kiện để hàm số có hai điểm cực trị là: } \Delta' > 0 \Leftrightarrow 9(9m^2 - 6m + 1) > 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{3} (*).$$



Chia y cho y' ta được phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là

$$y = (-9m^2 + 6m - 1)x + m(m-1)(1-2m).$$

Để đường thẳng đi qua hai điểm cực trị song song với đường thẳng $y = -4x$ ta phải có

$$\begin{cases} -9m^2 + 6m - 1 = -4 \\ m(m-1)(1-2m) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{1}{3} \\ m \neq 0; m \neq 1; m \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3}.$$

Kiểm tra điều kiện (*) ta được $m = -\frac{1}{3}$.

Câu 55: (THPT NGHỊ XUÂN - NĂM 2019-2020) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6m(1-2m)x$ song song đường thẳng $y = -4x$.

Ⓐ. $m = -\frac{1}{3}$.

Ⓑ. $m = -\frac{2}{3}$.

Ⓒ. $m = 1$.

Ⓓ. $m = \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6m(1-2m)$.

Điều kiện để hàm số có hai điểm cực trị là: $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 9(9m^2 - 6m + 1) > 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{3}$ (*).

Chia y cho y' ta được phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là

$$y = (-9m^2 + 6m - 1)x + m(m-1)(1-2m).$$

Để đường thẳng đi qua hai điểm cực trị song song với đường thẳng $y = -4x$ ta phải có

$$\begin{cases} -9m^2 + 6m - 1 = -4 \\ m(m-1)(1-2m) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{1}{3} \\ m \neq 0; m \neq 1; m \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3}.$$

Kiểm tra điều kiện (*) ta được $m = -\frac{1}{3}$.

Câu 56: (THPT HÀM RỒNG - NĂM 2019 - 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^3 + (m+2)x^2 + (m^2 - m - 3)x - m^2$ (1) có hai giá trị cực trị trái dấu.

Ⓐ. 1.

Ⓑ. 4.

Ⓒ. 3.

Ⓓ. 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có $x^3 + (m+2)x^2 + (m^2 - m - 3)x - m^2 = 0$ (2)

$$\Leftrightarrow (x-1)[x^2 + (m+3)x + m^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f(x) = x^2 + (m+3)x + m^2 = 0 \end{cases} \text{ (3)}$$



Hàm số (1) có hai giá trị cực trị trái dấu

$\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có ba nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow$ Phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3m^2 + 6m + 9 > 0 \\ m^2 + m + 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 3.$$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0; 1; 2\}$.

Vậy có ba số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 57: (THPT Thạch Thành 2 - Thanh Hóa - Năm 2019 - 2020) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 1)x$ có hai điểm cực trị A, B sao cho A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $y = 5x - 9$. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

(A). 0.

(B). 6.

(C). -6.

(D). 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = x^2 - 2mx + m^2 - 1$, $\Delta' = m^2 - m^2 + 1 = 1 > 0$ nên

$$\text{phương trình } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m+1 \\ x = m-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{(m+1)^3}{3} - m(m+1)^2 + (m^2-1)(m+1) = \frac{m^3-3m-2}{3} \\ y = \frac{(m-1)^3}{3} - m(m-1)^2 + (m^2-1)(m-1) = \frac{m^3-3m+2}{3} \end{cases}$$

Vậy $A\left(m+1; \frac{m^3-3m-2}{3}\right); B\left(m-1; \frac{m^3-3m+2}{3}\right) \Rightarrow \overline{AB} = \left(-2; \frac{4}{3}\right)$ nên đường thẳng AB không song song hoặc trùng với đường thẳng $(d): y = 5x - 9$.

A, B cách đều đường thẳng (d) nếu trung điểm I của AB nằm trên đường thẳng (d) .

$$I\left(m; \frac{m^3-3m}{3}\right) \in (d) \Leftrightarrow \frac{m^3-3m}{3} = 5m-9 \Leftrightarrow m^3-18m+27=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=3 \\ m=\frac{-3 \pm 3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Cả ba giá trị của m đều thỏa mãn A, B nằm khác phía so với (d) . Vậy tổng tất cả các phần tử của S là 0.

Câu 58: (THPT Lê Lợi - Thanh Hóa - Năm 2019 - 2020) Biết rằng đồ thị hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + x - 2$ có giá trị tuyệt đối của hoành độ hai điểm cực trị là độ dài hai cạnh của tam giác vuông có cạnh huyền là $\sqrt{7}$. Hỏi có mấy giá trị của m ?

(A). 2.

(B). 3.

(C). 1.

(D). Không có m .

Lời giải

Chọn A

$$y' = x^2 - mx + 1$$



Để hàm số có hai cực trị thì $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4 > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases}$$

Giả sử hai điểm cực trị có hoành độ x_1, x_2

Theo đề ra, ta có

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 = 7 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 7 \Leftrightarrow m^2 - 2 = 7 \Leftrightarrow m = \pm 3.$$

So với điều kiện, ta có 2 giá trị của m là $m = -3$ và $m = 3$.

Câu 59: (THPT Lê Lợi - Thanh Hóa - Năm 2019 - 2020) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2$ có 2 điểm cực trị A và B sao cho các điểm A, B và $M(1; -2)$ thẳng hàng.

Ⓐ. $m = \sqrt{2}.$

Ⓑ. $m = -\sqrt{2}; m = \sqrt{2}.$

Ⓒ. $m = 2.$

Ⓓ. $m = -\sqrt{2}.$

Lời giải

Chọn B

$$y' = 3x^2 - 6mx.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx = 0 \quad (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$$

Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó, giả sử $A(0; 2), B(2m; 2 - 4m^3)$.

Cách 1:

Phương trình đường thẳng $AM: 4x + y - 2 = 0$.

$$\text{Ba điểm } A, B, M \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow B \in AM \Leftrightarrow 8m - 4m^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \quad (1) \\ m = \sqrt{2} \\ m = -\sqrt{2}. \end{cases}$$

Cách 2: Ta có $\overrightarrow{AM} = (1; -4); \overrightarrow{AB} = (2m; -4m^3)$.

$$\text{Ba điểm } A, B, M \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \frac{2m}{1} = \frac{-4m^3}{-4} \Leftrightarrow m^3 = 2m \Leftrightarrow m = 0 \vee m = \pm\sqrt{2}.$$

So với điều kiện $m \neq 0$ ta được $m = \pm\sqrt{2}$.

$$\text{Vậy } \begin{cases} m = \sqrt{2} \\ m = -\sqrt{2}. \end{cases}$$

Câu 60: (THPT Lê Xoay - Vĩnh Phúc - Lần 1 - Năm 2019 - 2020) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 + 2x^2 + mx + 1$ có 2 điểm cực trị thỏa mãn $x_{CD} < x_{CT}$?

Ⓐ. $m < 2.$

Ⓑ. $0 < m < 2.$

Ⓒ. $-2 < m < 0.$

Ⓓ. $-2 < m < 2.$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } y' = mx^2 + 4x + m$$

Để hàm số đã cho có 2 điểm cực trị thỏa mãn $x_{CD} < x_{CT}$ thì



$$\begin{cases} m > 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 4 - m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -2 < m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 2$$

Câu 61: (THPT Nam Đàn 2 - Nghệ An - năm 2019 - 2020) Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m - 2$ có đồ thị (C_m) . Giá trị của tham số thực m để (C_m) có điểm cực đại, cực tiểu nằm về hai phía trục hoành là

- (A). $m < 3$. (B). $1 < m < 5$. (C). $2 < m < 3$. (D). $m > 3$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Ta có: $y = x^3 + 3x^2 + mx + m - 2 = (x+1)(x^2 + 2x + m - 2)$

$$y = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 + 2x + m - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + m - 2 = 0 \\ x = -1 \end{cases} \quad (1)$$

Để đồ thị (C_m) có điểm cực đại, cực tiểu nằm về hai phía trục hoành

$\Leftrightarrow y = 0$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 1 - 2 + m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m < 3$$

Vậy $m < 3$ thì đồ thị (C_m) có điểm cực đại, cực tiểu nằm về hai phía trục hoành.

Cách 2:

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x + m$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x + m = 0$ (*)

Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3 \quad (1)$$

Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (*). Theo định lý Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m}{3} \end{cases}$

Gọi y_1, y_2 là giá trị cực trị tương ứng của hàm số.

Vì $y = y' \cdot \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}m - 2\right)(x+1)$ nên $y_1 = \left(\frac{2}{3}m - 2\right)(x_1 + 1)$; $y_2 = \left(\frac{2}{3}m - 2\right)(x_2 + 1)$.

Để đồ thị (C_m) có điểm cực đại, cực tiểu nằm về hai phía trục hoành $\Leftrightarrow y_1 \cdot y_2 < 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}m - 2\right)(x_1 + 1) \cdot \left(\frac{2}{3}m - 2\right)(x_2 + 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}m - 2\right)^2 (x_1 + x_2 + x_1 \cdot x_2 + 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}m - 2\right)^2 \left(\frac{m}{3} - 1\right) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow m < 3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $m < 3$ thì đồ thị (C_m) có điểm cực đại, cực tiểu nằm về hai phía trục hoành.

Câu 62: (THPT Triệu Sơn 4 - Thanh Hóa - Lần 3 - Năm - 2019 - 2020) Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 + m$ có đồ thị (C) và điểm $I(1;1)$. Biết rằng có hai giá trị của



tham số m (kí hiệu m_1, m_2 với $m_1 < m_2$) sao cho hai điểm cực trị của (C) cùng với I tạo ra một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $\sqrt{5}$. Tính $P = m_1 + 5m_2$.

- Ⓐ. $P = 2$. Ⓑ. $P = \frac{5}{3}$. Ⓒ. $P = -\frac{5}{3}$. Ⓓ. $P = -2$.

Lời giải

Chọn A

*TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1);$$

* Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m+1 \\ x = m-1 \end{cases}$.

Giả sử hai điểm cực trị của (C) là A và B, khi đó: $A(m+1; -2m-2); B(m-1; -2m+2) \Rightarrow AB = 2\sqrt{5} = 2R$ (Với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABI). Vậy tam giác ABI vuông tại I.

$$A(m+1; -2m-2); B(m-1; -2m+2) \Rightarrow AB = 2\sqrt{5} = 2R,$$

Ta có $\overrightarrow{IA} = (m; -2m-3), \overrightarrow{IB} = (m-2; -2m+1);$

$$\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = 0 \Leftrightarrow 5m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = \frac{3}{5} \end{cases}.$$

Theo giả thiết ta có $m_1 = -1, m_2 = \frac{3}{5} \Rightarrow P = 2$.

Câu 63: (THPT Hoàng Văn Thụ - Nam Định - Lần 2 - Năm 2019 - 2020) Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 - m$, (m là tham số). Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số và $I(2; -2)$. Tổng tất cả các số m để ba điểm I, A, B tạo thành tam giác nội tiếp đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{5}$ là

- Ⓐ. $\frac{4}{17}$. Ⓑ. $-\frac{2}{17}$. Ⓒ. $\frac{20}{17}$. Ⓓ. $\frac{14}{17}$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1); y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m-1 \\ x = m+1 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị là $A(m-1; -4m+2)$ và $B(m+1; -4m-2)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2; -4), \overrightarrow{IA} = (m-3; -4m+4), \overrightarrow{IB} = (m-1; -4m)$$

+) I, A, B là ba đỉnh của một tam giác $\Leftrightarrow \frac{m-1}{2} \neq \frac{-4m}{-4} \Leftrightarrow m \neq 1$.

+) Nhận thấy $AB = 2\sqrt{5} = 2R \Rightarrow IAB$ là tam giác vuông tại I $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = 0$

$$\Leftrightarrow (m-3)(m-1) - 4m(-4m+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow 17m^2 - 20m + 3 = 0 \quad (*)$$

Phương trình (*) luôn có 2 nghiệm phân biệt, khác 1.

Theo Vi – et, ta có tổng hai nghiệm bằng $\frac{20}{17}$.

Câu 64: (THPT Quảng Xương 1 - Thanh Hoá - Năm học 2019 - 2020) Cho hàm số $f(x) = x^3 - (2m+1)x^2 + 3mx - m$ có đồ thị (C_m) . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-2020; 2020]$ để đồ thị (C_m) có hai điểm cực trị nằm khác phía so với trục hoành.

- Ⓐ. 4037. Ⓑ. 4038. Ⓒ. 4039. Ⓓ. 4040.

Lời giải

Chọn B

➤ Đồ thị (C_m) có hai điểm cực trị nằm khác phía so với trục hoành khi (C_m) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt, điều này xảy ra khi phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và trục hoành có ba nghiệm phân biệt.

➤ Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và trục hoành:

$$x^3 - (2m+1)x^2 + 3mx - m = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x^2 - m(2x^2 - 3x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2mx + m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2mx + m = 0 (*) \end{cases}$$

➤ Để yêu cầu bài toán xảy ra thì phương trình $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m > 0 \\ 1^2 - 2m \cdot 1 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty) \\ m \neq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty).$$

$$\text{Do } \begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in (-2020; 2020] \end{cases} \Rightarrow m \in \{-2019; -2018; \dots; -1; 2; 3; \dots; 2020\}.$$

➤ Ta đếm được 4038 giá trị m thỏa mãn.

Câu 65: (HSG - Thái Bình - Năm 2019 - 2020) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^2$ có hai điểm cực trị cùng với gốc tọa độ tạo thành một tam giác có diện tích bằng 192 (đvdt).

- Ⓐ. $m = \pm 4$. Ⓑ. $m = \pm 3$. Ⓒ. $m = \pm 1$. Ⓓ. $m = \pm 2$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^2$ có TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 3x^2 - 6mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$.

Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì $m \neq 0$. Khi đó hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0; 3m^2)$, $B(2m; -4m^3 + 3m^2)$.

Tam giác OAB có $A \in Oy$ nên $S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OA = \frac{1}{2} |2m| \cdot |3m^2|$

Theo yêu cầu bài toán, ta có: $S_{OAB} = \frac{1}{2} |2m| \cdot |3m^2| = 192 \Leftrightarrow |m^3| = 64 \Leftrightarrow |m| = 4 \Leftrightarrow m = \pm 4$.



Câu 66: (Chuyên Bắc Giang - Lần 01 - Năm 2018-2019) Tập hợp các giá trị của m để hàm số

$$y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x + 1 \text{ có hai cực trị là:}$$

- Ⓐ. $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$ Ⓑ. $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$ Ⓒ. $(-1; 2)$ Ⓓ. $[-1; 2]$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m + 2$. Để hàm số có hai cực trị thì $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt nên

$$y' > 0 \Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \end{cases}$$

Câu 67: (GK1 - K12 - THPT Nghĩa Hưng - Nam Định - Năm 2018 -2019) Giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 6$ là

- Ⓐ. 1. Ⓑ. -1. Ⓒ. 3. Ⓓ. -3.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x + m = 0$ (1).

Để hàm số có hai cực trị x_1, x_2 thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt,

Khi đó: $\Delta' = 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$ (*).

Mà theo yêu cầu bài toán x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 = 6 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 6$ (2).

Mặt khác theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1x_2 = \frac{m}{3} \end{cases}$, thay vào (2) ta được: $4 - 2 \cdot \frac{m}{3} = 6 \Leftrightarrow m = -3$, thỏa mãn

điều kiện (*).

Vậy $m = -3$.

Câu 68: (THPT Ba Đình - Hà Nội - Lần 2 - Năm 2018-2019) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2mx + m$ có cực đại và cực tiểu?

- Ⓐ. $m < \frac{3}{2}$. Ⓑ. $m < -\frac{3}{2}$. Ⓒ. $m \leq -\frac{3}{2}$. Ⓓ. $m > \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

+ TXĐ: $D = \mathbb{R}$

+ $y' = 3x^2 - 6x + 2m$

+ Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \Delta = 36 - 24m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}.$$

Câu 69: (THPT Hùng Vương-Bình Phước-Lần 01-Năm 2018-2019) Tìm tất cả các giá trị của tham số

m để hàm số $y = -\frac{x^3}{3} + mx^2 - 2mx + 1$ có hai điểm cực trị.



Ⓐ. $0 < m < 2$.

Ⓑ. $m > 2$.

Ⓒ. $m > 0$.

Ⓓ. $\begin{cases} m > 2 \\ m < 0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = -x^2 + 2mx - 2m$

Hàm số $y = -\frac{x^3}{3} + mx^2 - 2mx + 1$ có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 2m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < 0 \end{cases}$.

Câu 70: (THPT Yên Khánh - Ninh Bình - Năm 2018-2019) Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(7m-3)x$. Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m để hàm số không có cực trị. Số phần tử của S là

Ⓐ. 2.

Ⓑ. 4.

Ⓒ. 0.

Ⓓ. Vô số.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 3(7m-3)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + 7m-3 = 0$.

Để hàm số không có cực trị thì

$\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - (7m-3) \leq 0$

$\Leftrightarrow m^2 - 5m + 4 \leq 0$

$\Leftrightarrow 1 \leq m \leq 4$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow S = \{1; 2; 3; 4\}$. Vậy S có 4 phần tử.

Câu 71: (SGD Bà Rịa Vũng Tàu - Năm 2018-2019) Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (4-4m)x + 1$. Mệnh đề nào sau đây sai?

Ⓐ. $\forall m < 2$ thì hàm số có hai điểm cực trị.

Ⓑ. $\forall m \in \mathbb{R}$ thì hàm số có cực đại và cực tiểu.

Ⓒ. $\forall m > 2$ thì hàm số có cực trị.

Ⓓ. $\forall m \neq 2$ thì hàm số có cực đại và cực tiểu.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = -x^2 + 2mx + (4-4m)$. $\Delta' = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2 \geq 0$.

+) Với $\forall m \neq 2$ thì $\Delta' > 0$ nên hàm số đã cho sẽ có 2 cực trị (trong đó có 1 cực đại và một cực tiểu).

+) Với $m = 2$ thì $\Delta' = 0$ do đó $y' \leq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đã cho không có cực trị.

Vậy B là phương án sai.

Cu 72: (THPT L Quí Đơn - Điện Biên - Lần 01- Năm 2018-2019) Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + 2018$ với m là tham số. Tổ hợp bình phương tất cả các giá trị của m để hàm số có hai điểm cực trị $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1$ bằng



Ⓐ. $\frac{40}{9}$

Ⓑ. $\frac{22}{9}$

Ⓒ. $\frac{25}{4}$

Ⓓ. $\frac{8}{3}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$

Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt.

$$\Rightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - 3m(m-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -2m^2 + 4m + 1 > 0 \end{cases}$$

Theo định lý Vi-ét ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{3(m-2)}{m} \end{cases}$$

Theo bài ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m} \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3m-4}{m} \\ x_2 = 1 - \frac{2(m-1)}{m} = \frac{2-m}{m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{3m-4}{m} \cdot \frac{2-m}{m} = \frac{3(m-2)}{m} \Rightarrow 3(2-m)m + (3m-4)(2-m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2(t/m) \\ m = \frac{2}{3}(t/m) \end{cases}$$

Vậy $m_1^2 + m_2^2 = \frac{40}{9}$.

Câu 73: (THPT Lê Quý Đôn – Điện Biên - Lần 01- Năm 2018-2019) Cho hàm số $y = 2x^3 + 3m - 1x^2 + 6m - 2x - 1$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $-2; 3$.

Ⓐ. $m \in -1; 3 \cup 3; 4$. Ⓑ. $m \in 1; 3$. Ⓒ. $m \in 3; 4$. Ⓓ. $m \in -1; 4$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = 6x^2 + 6m - 1x + 6m - 2$

Để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $-2; 3 \Leftrightarrow$ pt $y' = 0$ có 2 nghiệm thuộc khoảng $-2; 3$

$$\Leftrightarrow x^2 + m - 1x + m - 2 = 0 \text{ có 2 nghiệm thuộc khoảng } -2; 3$$

$$\Leftrightarrow x + 1 \quad x + m - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \in -2; 3 \\ x = 2 - m \end{cases}$$

$$YCBT \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - m \neq -1 \\ -2 < 2 - m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ -1 < m < 4 \end{cases}$$



Câu 74: (ĐTD - Đề số 8 - Năm 2018 - 2019) Tìm các giá trị của m sao cho đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 - (6m+9)x - 12$ có các điểm cực đại và cực tiểu nằm cùng một phía đối với trục tung.

- Ⓐ. $m = -2$. Ⓑ. $-3 < m < -\frac{3}{2}$. Ⓒ. $\begin{cases} m < -\frac{3}{2} \\ m \neq -3 \end{cases}$ Ⓓ. $m < -\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = x^2 + 2mx - 6m - 9$.

Đồ thị hàm số có các điểm cực đại và cực tiểu nằm cùng một phía đối với trục tung khi phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt cùng dấu.

$$\text{ĐK: } \begin{cases} \Delta' = m^2 + 6m + 9 > 0 \\ P = -6m - 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -3 \\ m < -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Câu 75: (GK1-K12-THPT Lương Thế Vinh-Hà Nội-2018-2019) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 6$

- Ⓐ. $m = -3$ Ⓑ. $m = 3$ Ⓒ. $m = -1$ Ⓓ. $m = 1$

Lời giải

Chọn A

$y' = 3x^2 - 6x + m$. Hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 . Vậy x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $y' = 0$

$$\text{Theo Viet ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m}{3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \\ &= 4 - \frac{2m}{3} \Rightarrow 4 - \frac{2m}{3} = 6 \Rightarrow m = -3 \end{aligned}$$

Câu 76: (GK1 - K12 - Lương Thế Vinh - Hà Nội - Năm 2018 - 2019) Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 6$.

- Ⓐ. $m = -3$. Ⓑ. $m = 3$. Ⓒ. $m = 1$. Ⓓ. $m = -1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ TXĐ: $\mathbb{R}$

$y' = 3x^2 - 6x + m$.

Hàm số đạt cực trị tại $x_1, x_2 \Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \Delta' = 9 - 3m > 0$$

$$\Leftrightarrow m < 3$$



Khi đó có: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4 - 2\frac{m}{3}$ vì $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m}{3} \end{cases}$

Theo đề bài có: $4 - 2\frac{m}{3} = 6 \Leftrightarrow m = -3$

Câu 77: (GK1 - K12 - Lương Thế Vinh - Hà Nội - Năm 2018 - 2019) Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 6$.

- (A). $m = -3$. (B). $m = 3$. (C). $m = 1$. (D). $m = -1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ TXĐ: $\mathbb{R}$

$y' = 3x^2 - 6x + m$.

Hàm số đạt cực trị tại $x_1, x_2 \Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$\Leftrightarrow \Delta' = 9 - 3m > 0$

$\Leftrightarrow m < 3$

Khi đó có: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4 - 2\frac{m}{3}$ vì $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m}{3} \end{cases}$

Theo đề bài có: $4 - 2\frac{m}{3} = 6 \Leftrightarrow m = -3$

Câu 78: (THCS - THPT Nguyễn Khuyến - Lần 1 - Năm 2018-2019) Giá trị lớn nhất của m để hàm số $y = mx^3 + 3mx^2 - (m-1)x - 1$ không đạt cực trị là

- (A). $\frac{1}{4}$. (B). 0 . (C). $\frac{1}{2}$. (D). 1 .

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3mx^2 + 6mx - (m-1)$.

Với $m = 0$ thì $y' = 1 > 0 \Rightarrow$ hàm số $y = mx^3 + 3mx^2 - (m-1)x - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow m = 0$ thì hàm số đã cho không đạt cực trị.

Với $m \neq 0$, hàm số $y = mx^3 + 3mx^2 - (m-1)x - 1$ không đạt cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ vô nghiệm hoặc

có nghiệm kép $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = 9m^2 + 3m(m-1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 12m^2 - 3m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ 0 \leq m \leq \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq \frac{1}{4}$.

$\Rightarrow$ Hàm số $y = mx^3 + 3mx^2 - (m-1)x - 1$ không đạt cực trị khi $0 \leq m \leq \frac{1}{4}$.



Vậy giá trị lớn nhất của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m = \frac{1}{4}$.

Câu 79: (THPT YÊN LẠC NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ với m là tham số thực

Ⓒ. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thỏa $x_1^2 + x_2^2 = 6$.

Ⓐ. 3.

Ⓑ. -1.

Ⓒ. 1.

Ⓓ. -3.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x + m$ có $\Delta' = 9 - 3m$.

Để hàm số đạt cực trị tại hai điểm x_1, x_2 thì phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt, nghĩa

là: $\begin{cases} 3 \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$. Khi đó theo định lý Vi-et ta có: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = 2 \\ P = x_1 x_2 = \frac{m}{3} \end{cases}$.

Ta có: $x_1^2 + x_2^2 = 6 \Leftrightarrow S^2 - 2P = 6 \Leftrightarrow 4 - 2 \cdot \frac{m}{3} - 6 = 0 \Leftrightarrow m = -3$ (nhận).

Câu 80: (THPT Đoàn Thượng - Hải Dương - Năm 2018 - 2019) Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số

$y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x$ có cực trị và các điểm cực đại, điểm cực tiểu nhận giá trị dương.

Ⓐ. $m < 2$.

Ⓑ. $m > 2$.

Ⓒ. $0 < m < 2$.

Ⓓ. $m = 2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = x^2 - 2mx + (m+2)$.

Hàm số đã cho có các điểm cực đại và cực tiểu dương khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt dương

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 2 > 0 \\ 2m > 0 \\ m + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2$.

Câu 81: (THPT chuyên Bắc Ninh - L01 - 2018-2019) Gọi S là tập các giá trị dương của tham số m sao

cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 27x + 3m - 2$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| \leq 5$. Biết $S = (a; b]$. Tính $T = 2b - a$.

Ⓐ. $T = \sqrt{51} + 6$

Ⓑ. $T = \sqrt{61} + 3$

Ⓒ. $T = \sqrt{61} - 3$

Ⓓ. $T = \sqrt{51} - 6$

Lời giải

Chọn C

+) Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 27$, $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 9 = 0$ (1)

+) Theo giả thiết hàm số đạt cực trị tại $x_1, x_2 \Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < -3 \end{cases} (*)$



+) Với điều kiện (*) thì phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 , theo Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = 9 \end{cases}$

+) Ta lại có $|x_1 - x_2| \leq 5 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 \leq 25 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 - 25 \leq 0$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 61 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{61}}{2} \leq m \leq \frac{\sqrt{61}}{2} (**)$$

+) Kết hợp (*), (**) và điều kiện m dương ta được: $3 < m \leq \frac{\sqrt{61}}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = \frac{\sqrt{61}}{2} \end{cases} \Rightarrow T = 2b - a = \sqrt{61} - 3.$$

Câu 82: (THPT chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - L01 - 2018-2019) Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của $m, m \geq -2019$ để phương trình $x^3 - 3mx^2 + 4m^3 + 1 = 0$ có ba nghiệm phân biệt?

(A). 2020

(B). 2021

(C). 2030

(D). 2019

Lời giải

Chọn D

Để phương trình $x^3 - 3mx^2 + 4m^3 + 1 = 0$ có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3 + 1$ cắt Ox tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow y_{CD} \cdot y_{CT} < 0$

$$y' = 3x^2 - 6mx \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$$

$$y(0) = 4m^3 + 1; y(2m) = 1 \Rightarrow y_{CD} \cdot y_{CT} < 0 \Leftrightarrow 4m^3 + 1 < 0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

Vậy có: $-1 - (-2019) + 1 = 2019$ giá trị nguyên của m thỏa mãn điều kiện đề bài

Câu 83: (THPT chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - L01 - 2018-2019) Tổng tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số: $y = 3x^3 + 2(m+1)x^2 - 3mx + m - 5$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 đồng thời $y(x_1) \cdot y(x_2) = 0$ là:

(A). -21

(B). -39

(C). -8

(D). $3\sqrt{11} - 13$

Lời giải

Chọn A

+) Để hàm số có hai cực trị thì phương trình $y' = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt:

$$y' = 9x^2 + 4(m+1)x - 3m \text{ có hai nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow \Delta' = 4(m+1)^2 + 27m > 0$$

+) Xét $y(x_1) \cdot y(x_2) = 0$ nên ta có $y = 3x^3 + 2(m+1)x^2 - 3mx + m - 5$ phải tiếp xúc với trục hoành

$$\Rightarrow 3x^3 + 2(m+1)x^2 - 3mx + m - 5 = 0 \text{ phải có nghiệm kép}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)[3x^2 + (2m+5)x - m+5] = 0(1) \text{ phải có nghiệm kép}$$

$$\text{+) TH1: Phương trình } 3x^2 + (2m+5)x - m+5 = 0 \text{ có một nghiệm } x=1 \Rightarrow m_1 = -13$$

$$\text{+) TH2: Phương trình } 3x^2 + (2m+5)x - m+5 = 0 \text{ có nghiệm kép khác 1}$$

$$\Rightarrow \Delta = (2m+5)^2 - 12(5-m) = 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 32m - 35 = 0 \Rightarrow m_2 + m_3 = -8$$



$$\Rightarrow m_1 + m_2 + m_3 = -21$$

Câu 84: (Chuyên Thái Bình - Lần 01 - Năm 2018 - 2019) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 8x^2 + (m^2 + 11)x - 2m^2 + 2$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục Ox .

- (A). 4. (B). 5. (C). 6. (D). 7.

Lời giải

Chọn D

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow x^3 - 8x^2 + (m^2 + 11)x - 2m^2 + 2 = 0 \text{ có ba nghiệm phân biệt}$$

$$x^3 - 8x^2 + (m^2 + 11)x - 2m^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 - 6x + m^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - 6x + m^2 - 1 = 0(*) \end{cases}$$

Suy ra phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 10 - m^2 > 0 \\ m^2 - 8 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \neq \pm 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{10} < m < \sqrt{10} \end{cases}$$

Vậy có 7 giá trị nguyên của tham số thỏa mãn đề bài.

Câu 85: (Vted-Đề số 1-Năm học 2018-2019) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - (m + 1)x^2 + (m^2 - 2)x - m^2 + 3$ có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị đó nằm về cùng một phía đối với trục hoành?

- (A). 4. (B). 1. (C). 3. (D). 2.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 2(m + 1)x + m^2 - 2$$

Điều kiện để hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía đối với trục hoành là

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m + 1)^2 - 3(m^2 - 2) > 0 \\ 3(m^2 - 2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2m^2 + 2m + 7 > 0 \\ m \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left(\frac{1 - \sqrt{15}}{2}; \frac{1 + \sqrt{15}}{2}\right) \\ m \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(\frac{1 - \sqrt{15}}{2}; -\sqrt{2}\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{15}}{2}; \sqrt{2}\right)$$

Vì m nguyên nên chỉ có giá trị $m = 2$ là thỏa mãn yêu cầu.

Câu 86: (ĐỀ 02 VTED NĂM HỌC 2018 - 2019) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - (m + 1)x^2 + (m^2 - 2)x - m^2 + 3$ có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị đó nằm về cùng một phía đối với trục hoành.

- (A). 4. (B). 1. (C). 3. (D). 2

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 2(m + 1)x + m^2 - 2$$

Hàm số có hai cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt



$$\Leftrightarrow (m+1)^2 - 3(m^2 - 2) > 0 \Leftrightarrow -2m^2 + 2m + 7 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{15}}{2} < m < \frac{1+\sqrt{15}}{2}$$

$$\text{Do } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{-1; 0; 1; 2\}$$

Phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị là

$$y' = \frac{1}{9}(4m^2 - 4m + 14)x + \frac{1}{9}(m^3 - 8m^2 - 2m + 25)$$

Hai điểm cực trị nằm về cùng phía đối với trục hoành khi và chỉ khi $y_{CD} \cdot y_{CT} > 0$

Bằng cách thử đáp án ta nhận ba giá trị của m .

Câu 87: (Vted - Đề số 04 - Năm 2018 - 2019) Biết đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ có hai điểm cực trị $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ thỏa mãn $x_1(y_1 - y_2) = y_1(x_1 - x_2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = abc + 2ab + 3c$ bằng

(A). $-\frac{49}{4}$

(B). $-\frac{25}{4}$

(C). $-\frac{841}{36}$

(D). $-\frac{7}{6}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 3x^2 + 2ax + b$

Chia y cho y' ta được $y = y' \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}a \right) + \left(-\frac{a^2}{9} - \frac{2b}{3} \right)x + c - \frac{ab}{9}$.

Do $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ là hai điểm cực trị nên $y'(x_1) = 0, y'(x_2) = 0$

$$\text{Do đó } y_1 = \left(-\frac{a^2}{9} - \frac{2b}{3} \right)x_1 + c - \frac{ab}{9}; y_2 = \left(-\frac{a^2}{9} - \frac{2b}{3} \right)x_2 + c - \frac{ab}{9}$$

Theo giả thiết $x_1(y_1 - y_2) = y_1(x_1 - x_2) \Leftrightarrow x_1y_2 = x_2y_1$

$$\Leftrightarrow x_1 \left[\left(-\frac{a^2}{9} - \frac{2b}{3} \right)x_2 + c - \frac{ab}{9} \right] = x_2 \left[\left(-\frac{a^2}{9} - \frac{2b}{3} \right)x_1 + c - \frac{ab}{9} \right]$$

$$\Leftrightarrow x_1 \left(c - \frac{ab}{9} \right) = x_2 \left(c - \frac{ab}{9} \right) \Leftrightarrow c - \frac{ab}{9} = 0 (x_1 \neq x_2) \Leftrightarrow ab = 9c$$

$$\text{Ta có: } P = abc + 2ab + 3c = 9c^2 + 21c = \left(3c + \frac{7}{2} \right)^2 - \frac{49}{4} \geq -\frac{49}{4}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = abc + 2ab + 3c$ bằng $-\frac{49}{4}$

Câu 88: (ĐTD - Đề Số 20 - Năm 2018 - 2019) Cho hàm số $y = (x - m)^3 - 3x + m^2$ (C_m). Biết rằng điểm $M(a; b)$ là điểm cực đại của (C_m) ứng với một giá trị m thích hợp đồng thời là điểm cực tiểu của (C_m) ứng với một giá trị khác của m . Tính tổng $S = 2018a + 2020b$

(A). 5004.

(B). -504.

(C). 504.

(D). 12504.

Lời giải

Chọn C



$$\text{Ta có: } y' = 3(x-m)^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m+1 \\ x = m-1 \end{cases} \Rightarrow a = m_1 - 1; b = m_1^2 - 3m_1 + 2$$

Gọi m_2 là giá trị đó mà $M(a; b)$ đạt cực tiểu nên ta có $a = m_2 + 1; b = m_2^2 - 3m_2 - 2$

$$\text{Nên ta có hệ } \begin{cases} m_1 - m_2 = -2 \\ m_1^2 - m_2^2 - 3m_1 + 3m_2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 + m_2 = 1 \\ m_1 - m_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = -\frac{1}{2} \\ m_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } a = -\frac{1}{2}; b = -\frac{1}{4} \Rightarrow S = 1009 - 505 = 504.$$

Câu 89: (ĐTD - Đề số 8 - Năm 2018 - 2019) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a sao cho hàm số

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + ax + 1 \text{ đạt cực trị tại } x_1, x_2 \text{ thỏa mãn: } (x_1^2 + x_2 + 2a)(x_2^2 + x_1 + 2a) = 9.$$

- Ⓐ. $a = 2$. Ⓑ. $a = -4$. Ⓒ. $a = -3$. Ⓓ. $a = -1$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } y' = x^2 - x + a = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta = 1 - 4a \\ S = 1 \\ P = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1 - 2a; x_1^3 + x_2^3 = 1 - 3a \end{cases}$$

Để thỏa yêu cầu bài toán ta phải có

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ 4a^2 + (2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1 + 2x_2)a + x_1^2x_2^2 + x_1^3 + x_2^3 + x_1x_2 - 9 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4a > 0 \\ 4a^2 + (2 - 4a + 2)a + a^2 + 1 - 3a + a - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < \frac{1}{4} \\ a = 2 \vee a = -4 \end{cases} \Rightarrow a = -4.$$

Câu 90: (VDC - Đề Số 12 - Năm 2018 - 2019) Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số

$$y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1 \text{ có hai điểm cực trị cách đều trục tung.}$$

- Ⓐ. Không tồn tại giá trị nào. Ⓑ. $m = -\frac{1}{2}$.
Ⓒ. $m = 2$. Ⓓ. $m = 2; m = -\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Kí hiệu $A_1(x_1; y_1), A_2(x_2; y_2)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số. Để A_1, A_2 cách đều trục tung điều cần cần và đủ là $x_1 + x_2 = 0$. Cần tìm m để y' có hai nghiệm phân biệt có tổng bằng 0.

Câu 91: (Đề VDC - Đề số 16 - Năm 2018 - 2019) Tìm tất cả m sao cho điểm cực tiểu của đồ thị hàm số

$$y = x^3 + x^2 + mx - 1 \text{ nằm bên phải trục tung.}$$

- Ⓐ. Không tồn tại m . Ⓑ. $0 < m < \frac{1}{3}$. Ⓒ. $m < \frac{1}{3}$. Ⓓ. $m < 0$.

Lời giải

Chọn D

Để hàm số có cực tiểu, tức hàm số có hai cực trị thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$3x^2 + 2x + m = 0 \quad (1) \text{ có hai nghiệm phân biệt } \Delta' = 1 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{3}.$$

Khi đó (1) có hai nghiệm phân biệt x_{CD}, x_{CT} là hoành độ hai điểm cực trị. Theo định lý Viet ta

$$\text{có } \begin{cases} x_{CD} + x_{CT} = -\frac{2}{3} < 0 \quad (2) \\ x_{CD} \cdot x_{CT} = \frac{m}{3} \quad (3) \end{cases}, \text{ trong đó } x_{CD} < x_{CT} \text{ vì hệ số của } x^3 \text{ lớn hơn } 0.$$

Để cực tiểu của đồ thị hàm số nằm bên phải trục tung thì phải có: $x_{CT} > 0$, kết hợp (2) và (3)

$$\text{suy ra (1) có hai nghiệm trái dấu } \Leftrightarrow x_{CD} \cdot x_{CT} = \frac{m}{3} < 0 \Leftrightarrow m < 0.$$

Câu 92: (ĐTD - Đề 24 - Năm 2018 - 2019) Cho hàm số $y = x^3 + (2m-1)x^2 + (1+m)x$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị của hàm số đã cho có 2 điểm cực trị, đồng thời hoành độ điểm cực đại không nhỏ hơn -1 là

- Ⓐ. $\left(-\infty; \frac{-1}{4}\right] \cup \{2\}$. Ⓑ. $\left(-\infty; \frac{-1}{4}\right) \cup (2; +\infty)$.
 Ⓒ. $\left(-\infty; \frac{-1}{4}\right)$. Ⓓ. $\left(-\infty; \frac{-1}{4}\right) \cup \{2\}$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 3x^2 + 2(2m-1)x + 1 + m$. Vậy

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2(2m-1)x + 1 + m = 0 \quad (*)$$

Đồ thị của hàm số đã cho có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow (*)$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 7m - 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{-1}{4} \\ m > 2 \end{cases} \quad (1)$$

Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của (*), sao cho $x_1 < x_2$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	x_1		x_2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+
y	$-\infty$	↗		↘		$+\infty$

Vậy x_1 là điểm cực đại của hàm số đã cho.

Đặt $VT(*) = f(x)$. Yêu cầu bài toán tương đương hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 của phương trình (*) phải thỏa $-1 \leq x_1 < x_2$, nghĩa là

$$\begin{cases} f(-1) \geq 0 \\ -1 < -\frac{b}{2a} = \frac{-2m+1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow m < 2 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } m < \frac{-1}{4}.$$

Câu 93: (ĐTD - ĐỀ 02 - NĂM 2018-2019) Biết rằng đồ thị hàm số $y = (3a^2 - 1)x^3 - (b^3 + 1)x^2 + 3c^2x + 4d$ có hai điểm cực trị là $(1; -7)$, $(2; -8)$. Hãy xác định tổng $M = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

Ⓐ. 18. Ⓑ. 8. Ⓒ. 15. Ⓓ. -18.

Lời giải

Chọn A

Đạo hàm: $y' = 3(3a^2 - 1)x^2 - 2(b^3 + 1)x + 3c^2$.

Theo giả thiết ta có hệ:
$$\begin{cases} y'(1) = 3(3a^2 - 1) - 2(b^3 + 1) + 3c^2 = 0 \\ y'(2) = 12(3a^2 - 1) - 4(b^3 + 1) + 3c^2 = 0 \\ y(1) = (3a^2 - 1) - (b^3 + 1) + 3c^2 + 4d = -7 \\ y(2) = 8(3a^2 - 1) - 4(b^3 + 1) + 6c^2 + 4d = -8 \end{cases}$$

Xét hệ phương trình
$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ 12x - 4y + z = 0 \\ x - y + z + t = -7 \\ 8x - 4y + 2z + t = -8 \end{cases} \quad \text{với} \quad \begin{cases} x = 3a^2 - 1 \\ y = b^3 + 1 \\ z = 3c^2 \\ t = 4d \end{cases}$$

Giải hệ phương trình trên ta tìm được
$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 9 \\ z = 12 \\ t = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 4 \\ c^2 = 4 \\ d^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 18.$$

Câu 94: (ĐTD - ĐỀ 02 - NĂM 2018-2019) Cho hàm số $y = x^3 - 3mx + 1$ (1). Cho $A(2; 3)$, tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị B và C sao cho tam giác ABC cân tại A

Ⓐ. $m = \frac{-1}{2}$. Ⓑ. $m = \frac{-3}{2}$. Ⓒ. $m = \frac{1}{2}$. Ⓓ. $m = \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 3x^2 - 3m$. Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $m > 0$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{m} \\ x = -\sqrt{m} \end{cases}$$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $B(\sqrt{m}; -2m\sqrt{m} + 1)$, $C(-\sqrt{m}; 2m\sqrt{m} + 1)$. Suy ra $\overline{BC} = (-2\sqrt{m}; 4m\sqrt{m})$.

Gọi M là trung điểm của BC thì $M(0; 1)$, nên $\overline{AM} = (-2; -2)$.

Vậy tam giác ABC là tam giác cân khi và chỉ khi.

Câu 95: $AM \perp BC \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \overline{BC} = \vec{0} \Leftrightarrow (-2) \cdot (-2\sqrt{m}) + (-2) \cdot (4m\sqrt{m}) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$. (ĐTD - ĐỀ TUẦN 1 - NĂM 2018-2019) Với giá trị thực dương của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3x + 1$ có các điểm cực trị A và B sao cho tam giác ΔOAB có diện tích bằng $8\sqrt{2}$ thì mệnh đề nào sau đây là đúng?



Ⓐ. $1 < m < 2$

Ⓑ. $2 < m < \frac{7}{2}$

Ⓒ. $3 < m < 4$

Ⓓ. $m < 1$

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng qua hai điểm cực trị $y = (2 - 2m^2)x + m + 1 = px + q$

Điều kiện có hai điểm cực trị là $m^2 > 1$. Gọi hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(x_1; px_1 + q)$

và $B(x_2; px_2 + q) \Rightarrow S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} \cdot |x_1(px_2 + q) - x_2(px_1 + q)| \Rightarrow S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} \cdot |q| \cdot |x_1 - x_2|$

$\Rightarrow S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} \cdot |m+1| \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} \Rightarrow S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} \cdot |m+1| \cdot \sqrt{4m^2 - 4}$

$\Rightarrow S_{\Delta OAB} = |m+1| \cdot \sqrt{m^2 - 1} = 8\sqrt{2} \Rightarrow (m^2 + 2m + 1)(m^2 - 1) = 128$

$\Rightarrow (m-3)(m^3 + 5m^2 + 15m + 43) = 0 \Rightarrow m = 3$. **Chọn B**

Câu 96: (TT học mãi - Thầy Lê Anh Tuấn - Năm 2018 - 2019) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để điểm $M(2m^3; m)$ tạo với hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ (C) một tam giác có diện tích nhỏ nhất?

Ⓐ. 0

Ⓑ. 1

Ⓒ. 2

Ⓓ. không tồn tại

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1)$

$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+1 \end{cases} \Rightarrow \forall m \in \mathbb{R}, \text{ hàm số luôn có CĐ, CT}$

Tọa độ các điểm CĐ, CT của đồ thị là $A(m; 2m^3 + 3m^2 + 1), B(m+1; 2m^3 + 3m^2)$

Suy ra $AB = \sqrt{2}$ và phương trình đường thẳng $AB: x + y - 2m^3 - 3m^2 - m - 1 = 0$

Do đó, tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất khi và chỉ khi khoảng cách từ M tới AB nhỏ nhất

Ta có $d(M, AB) = \frac{3m^2 + 1}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, dấu "=" khi $m = 0$

Câu 97: (Chuyên Thái Bình- Lần 03- Năm 2018- 2019) Gọi x_1, x_2 là hai điểm cực trị của hàm số

$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 - 4x - 10$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)$.

Ⓐ. 9.

Ⓑ. 4.

Ⓒ. 0.

Ⓓ. 8.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 - 4x - 10 \Rightarrow y' = x^2 - mx - 4$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - mx - 4 = 0$.

$\Delta = m^2 + 16 > 0, \forall m$ nên phương trình $y' = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Áp dụng định lí Viet:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = m \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -4 \end{cases}.$$

$$S = (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1) = (x_1 x_2)^2 - [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] + 1 = 16 - (m^2 + 8) + 1 = 9 - m^2 \leq 9.$$

Câu 98: (THPT Sơn Tây - Hà Nội - Lần 01- Năm 2018-2019) Ta xác định được các số a, b, c để đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $(0;1)$ và có điểm cực trị $(-2;0)$. Tính giá trị của biểu thức $T = 4a + b + c$.

(A). 20.

(B). 23.

(C). 24.

(D). 22.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $\mathbb{R}$

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c; y' = 3x^2 + 2ax + b.$$

Đồ thị hàm số qua điểm $(0;1)$ nên $c = 1$

$$\text{Đồ thị hàm số có điểm cực trị } (-2;0) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 3b > 0 \\ y(-2) = 0 \\ y'(-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 3b > 0 \\ -8 + 4a - 2b + c = 0 \\ 12 - 4a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{17}{4} \\ b = 5 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó: } T = 4a + b + c = 4 \cdot \frac{17}{4} + 5 + 1 = 23.$$

Câu 99: (THPT KIM LIÊN - HÀ NỘI - Lần 03 - Năm 2018-2019) Cho hàm số $y = x^3 - 6mx + 4$ có đồ thị (C_m) . Gọi m_0 là giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, điểm cực tiểu của (C_m) cắt đường tròn tâm $I(1;0)$, bán kính $\sqrt{2}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất. Chọn khẳng định đúng

(A). $m_0 \in (3;4)$.

(B). $m_0 \in (1;2)$.

(C). $m_0 \in (0;1)$.

(D). $m_0 \in (2;3)$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y = x^3 - 6mx + 4$ có tập xác định $\mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 6m; y' = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2m.$$

Đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow y'$ đổi dấu 2 lần

$$\Leftrightarrow y' = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow m > 0.$$

$$\text{Ta có } y = \frac{1}{3} y' \cdot x - 4mx + 4.$$

Gọi $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

$$\text{Ta có } \begin{cases} y'(x_1) = y'(x_2) = 0 \\ y_1 = y(x_1) = \frac{1}{3} y'(x_1) \cdot x_1 - 4mx_1 + 4 \\ y_2 = y(x_2) = \frac{1}{3} y'(x_2) \cdot x_2 - 4mx_2 + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -4mx_1 + 4 \\ y_2 = -4mx_2 + 4 \end{cases}.$$



Suy ra M, N thuộc đường thẳng d có phương trình $y = -4mx + 4$.

Vậy phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị của (C_m) là: $y = -4mx + 4$.

Gọi (T) là đường tròn có tâm $I(1;0)$ và bán kính $R = \sqrt{2}$.

Đường thẳng d cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt A, B và tạo thành tam giác IAB

$$\Leftrightarrow 0 < d(I, d) < R \Leftrightarrow 0 < d(I, d) < \sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ \frac{|-4m+4|}{\sqrt{16m^2+1}} < \sqrt{2} \end{cases} (*).$$

Cách 1: (Nguyễn Công Định)

Do đường thẳng d luôn đi qua điểm $K(0;4)$, $IK = \sqrt{17} > R \Rightarrow K$ nằm ngoài đường tròn nên tồn tại hai điểm A, B là giao điểm của d với đường tròn để tam giác IAB vuông tại I .

$$\text{Do đó: } S_{IAB} = \frac{1}{2} IA \cdot IB \cdot \sin AIB \leq \frac{1}{2} IA \cdot IB.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow IA \perp IB \Leftrightarrow d(I, d) = \frac{R}{\sqrt{2}} = 1 \text{ (thỏa mãn (*))}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{|-4m+4|}{\sqrt{16m^2+1}} = 1 \Leftrightarrow m = \frac{15}{32}.$$

Bình luận: Nếu đường thẳng d luôn đi qua điểm K cố định mà $IK < \frac{R}{\sqrt{2}}$ thì sẽ không có vị trí

của đường thẳng d để tam giác IAB vuông tại I . Khi đó, nếu làm như trên sẽ bị sai. Trong trường hợp đó thì ta phải đặt $d(I, d) = t$ ($0 < t \leq l$), với l là độ dài đoạn thẳng IK , rồi tính $S_{\Delta IAB} = f(t)$ và tìm giá trị lớn nhất của $f(t)$ trên nửa khoảng $(0; l]$.

Cách 2: Phương trình đường tròn là: $(x-1)^2 + y^2 = 2$ (C)

$$\text{Xét hệ } \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 2 \\ y = -4mx + 4 \end{cases} \Rightarrow (16m^2 + 1)x^2 - 2(16m+1)x + 15 = 0 \quad (1).$$

d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $A, B \Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt a, b
 $\Leftrightarrow (16m+1)^2 - 15(16m+1) > 0$.

$$\text{Khi đó } A(a; -4ma+4), B(b; -4mb+4) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA} = (a-1; -4ma+4) \\ \overrightarrow{IB} = (b-1; -4mb+4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = ab - (a+b) + 16[m^2ab - m(a+b) + 1] + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow ab - (a+b) + 16m^2ab - 16m(a+b) + 17 = 0 \Leftrightarrow (16m^2+1)ab - (16m+1)(a+b) + 17 = 0$$

$$\Leftrightarrow 15 - \frac{2(16m+1)^2}{16m^2+1} + 17 = 0 \Leftrightarrow \frac{(16m+1)^2}{16m^2+1} = 16 \Leftrightarrow m = \frac{15}{32}.$$

Câu 100: (THPT KIM LIÊN - HÀ NỘI - Lần 03 - Năm 2018-2019) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (2m-1)x^2 + (m^2-m+7)x + m-5$ có hai điểm cực trị là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có cạnh huyền bằng $\sqrt{74}$.



- Ⓐ. $m = 3$. Ⓑ. $\begin{cases} m = -3 \\ m = 2 \end{cases}$. Ⓒ. $m = 2$. Ⓓ. $\begin{cases} m = 3 \\ m = -2 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

$$y' = x^2 - 2(2m-1)x + m^2 - m + 7.$$

$$\text{Xét phương trình } y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(2m-1)x + m^2 - m + 7 = 0 \quad (*).$$

$$\text{Yêu cầu bài toán } \Leftrightarrow \text{pt } (*) \text{ có hai nghiệm phân biệt } x_1; x_2 \text{ sao cho } \begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 74 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 \cdot x_2 > 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 74 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 - 3m - 6 > 0 \\ 4m - 2 > 0 \\ m^2 - m + 7 > 0 \\ (4m-2)^2 - 2(m^2 - m + 7) = 74 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 - 3m - 6 > 0 \\ 4m - 2 > 0 \\ m^2 - m + 7 > 0 \\ m^2 - m - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3m^2 - 3m - 6 > 0 \\ 4m - 2 > 0 \\ m^2 - m + 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3. \\ \begin{cases} m = 3 \\ m = -2 \end{cases}$$

Câu 101: (THPT Nguyễn Khuyến - Thành Phố Hồ Chí Minh - Năm 2018-2019) Tìm số thực k để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2kx^2 + k$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận điểm $G\left(0; \frac{1}{3}\right)$ làm trọng tâm.

- Ⓐ. $k = -1; k = \frac{1}{2}$. Ⓑ. $k = 1; k = \frac{1}{3}$.
Ⓒ. $k = 1; k = \frac{1}{2}$. Ⓓ. $k = \frac{1}{3}; k = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } y' = 4x^3 - 4kx = 4x(x^2 - k).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = k \end{cases} \quad (1)$$

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt và y' đổi dấu khi x đi qua 3 nghiệm đó $\Leftrightarrow PT(1)$ có hai nghiệm phân biệt khác không $\Leftrightarrow k > 0$. Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là

$$A(0; k), B(-\sqrt{k}; k - k^2), C(\sqrt{k}; k - k^2).$$

$$\text{Từ yêu cầu bài toán ta có: } y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{k + (k - k^2) + (k - k^2)}{3}$$



$$\Leftrightarrow -2k^2 + 3k - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Câu 102: (Chuyên KHTN - Năm 2018 - 2019 - Lần 01) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 - 2)x - m^2 + 3$ có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị đó nằm về hai phía khác nhau đối với trục hoành?

- (A). 2. (B). 1.
(C). 3. (D). 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 2 = 0$.

Để hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow -2m^2 + 2m + 7 > 0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{15}}{2} < m < \frac{1+\sqrt{15}}{2} (*)$.

Ta lần lượt thử bốn giá trị nguyên của m thỏa mãn (*) là $-1; 0; 1; 2$.

Ta được bốn hàm số

$y = x^3 - x + 2; y = x^3 - x^2 - 2x + 3; y = x^3 - 2x^2 - x + 2; y = x^3 - 3x^2 + x - 1$.

Khi đó ta nhận thấy chỉ có $m = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 103: (THPT LÝ THÁI TÔ - BẮC NINH - LẦN 1- NĂM 2018 - 2019) Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3m+2}{2}x^2 + 2m^2 + 3m + 1x + m - 2$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số (1) đạt cực đại, cực tiểu tại x_{CB}, x_{CT} sao cho $3x_{CB}^2 = 4x_{CT}$. Khi đó, tổng các phần tử của tập S bằng?

- (A). $S = \frac{-4-\sqrt{7}}{6}$. (B). $S = \frac{4+\sqrt{7}}{6}$. (C). $S = \frac{-4+\sqrt{7}}{6}$. (D). $S = \frac{4-\sqrt{7}}{6}$.

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = x^2 - (3m+2)x + (2m^2 + 3m + 1)$.

Hàm số đạt cực đại, cực tiểu khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$\Leftrightarrow \Delta = (3m+2)^2 - 4(2m^2 + 3m + 1) = m^2 > 0, \forall m \neq 0$.

$$x_1 = \frac{3m+2+m}{2} = 2m+1$$

$$x_2 = \frac{3m+2-m}{2} = m+1$$

• Trường hợp $m > 0$: $x_{CB} = m+1, x_{CT} = 2m+1$.

$$3x_{CB}^2 = 4x_{CT} \Leftrightarrow 3(m+1)^2 = 4(2m+1) \Leftrightarrow 3m^2 - 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Vì $m > 0$ nên $m = 1$.



• Trường hợp $m < 0$: $x_{CB} = 2m + 1, x_{CT} = m + 1$.

$$3x_{CB}^2 = 4x_{CT} \Leftrightarrow 3(2m+1)^2 = 4(m+1) \Leftrightarrow 12m^2 + 8m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{-2+\sqrt{7}}{6} \\ m = \frac{-2-\sqrt{7}}{6} \end{cases}$$

Vì $m < 0$ nên $m = \frac{-2-\sqrt{7}}{6}$.

$$\text{Vậy } S = 1 + \frac{-2-\sqrt{7}}{6} = \frac{4-\sqrt{7}}{6}.$$

Câu 104: (THPT Ischool Nha Trang – Khánh Hoà - Lần 01 - Năm 2018 - 2019) Tìm các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = -(x-1)^3 + 3m^2(x-1) - 2$ có hai điểm cực trị cách đều gốc tọa độ.

- Ⓐ. $m = \pm \frac{1}{3}$. Ⓑ. $m = \pm \frac{1}{2}$. Ⓒ. $m = -5$. Ⓓ. $m = 5$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = -3(x-1)^2 + 3m^2$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow -3(x-1)^2 + 3m^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = m^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = m \\ x-1 = -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+m \\ x = 1-m \end{cases}.$$

Để hàm số có 2 cực trị thì $m \neq 0$.

Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số có hoành độ lần lượt là $x_A = 1+m; x_B = 1-m$.

Khi đó $A(1+m; 2m^3-2); B(1-m; -2m^3-2)$.

Hai điểm cực trị cách đều gốc tọa độ nên $OA = OB \Leftrightarrow OA^2 = OB^2$

$$\Leftrightarrow (1+m)^2 + (2m^3-2)^2 = (1-m)^2 + (-2m^3-2)^2 \Leftrightarrow 4m^3 - m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ (ktm)} \\ m = \pm \frac{1}{2} \text{ (tm)} \end{cases}.$$

Vậy $m = \pm \frac{1}{2}$.

Câu 105: (Chuyên Thái Bình - Lần 04 - Năm 2018 - 2019) Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^3$. Biết rằng có hai giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B và tam giác OAB có diện tích bằng 48. Khi đó tổng hai giá trị của m là

- Ⓐ. 2. Ⓑ. -2. Ⓒ. 0. Ⓓ. $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 6mx, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$$

Hàm số đã cho có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó tọa độ hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0; 3m^3); B(2m; -m^3)$.



Phương trình đường thẳng AB là $2m^2x + y - 3m^3 = 0$.

$$S_{OAB} = 48 \Leftrightarrow \frac{1}{2} AB \cdot d(O; AB) = 48 \Leftrightarrow \sqrt{4m^2 + 16m^6} \frac{|-3m^3|}{\sqrt{4m^4 + 1}} = 96$$

$$\Leftrightarrow 36m^8 = 96^2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases} \text{ (Thỏa mãn điều kiện } \Leftrightarrow m \neq 0 \text{)}$$

Vậy tổng hai giá trị của m là 0..

Câu 106: (Chuyên Lam Sơn - Lần 2 - Năm 2018 - 2019) Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 - m$ (m là tham số). Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số và $I(2; -2)$. Tổng tất cả các giá trị của m để ba điểm I, A, B tạo thành tam giác nội tiếp đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{5}$ là

Ⓐ. $\frac{20}{17}$.

Ⓑ. $-\frac{2}{17}$.

Ⓒ. $\frac{4}{17}$.

Ⓓ. $\frac{14}{17}$.

Lời giải

Chọn C

+) Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 - m$. TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

+) $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1) = 3[(x - m)^2 - 1]$.

+) $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - m = 1 \\ x - m = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m + 1 \\ x = m - 1 \end{cases}$.

+) Suy ra $\forall m \in \mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f(x)$ luôn có 2 điểm cực trị là:

$A(m + 1; -4m - 2), B(m - 1; -4m + 2)$.

+) Ta có $AB = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$; Bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle IAB$ là $R = \sqrt{5}$.

+) Theo định lý sin trong $\triangle IAB$ ta có: $\frac{AB}{\sin AIB} = 2R \Leftrightarrow \sin AIB = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1 \Leftrightarrow AIB = 90^\circ$

$\Leftrightarrow \vec{IA} \cdot \vec{IB} = 0 \Leftrightarrow (m - 1)(m - 3) + (-4m)(-4m + 4) = 0 \Leftrightarrow 17m^2 - 20m + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{3}{17} \end{cases}$.

Vậy tổng các giá trị của m là: $1 + \frac{3}{17} = \frac{20}{17}$.

Câu 107: (THPT Ninh Bình - Bạc Liêu - Lần 04 - Năm 2018 - 2019) Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 4$ có hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-3; 3)$?

Ⓐ. 12.

Ⓑ. 11.

Ⓒ. 13.

Ⓓ. 10.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - m$

Để hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 4$ có hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-3; 3)$ thì phương trình $y' = 0$



hay $3x^2 - 6x - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-3; 3)$.

Cách 1:

Khi đó, đặt $f(x) = 3x^2 - 6x - m$ thì

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ a.f(3) > 0 \\ a.f(-3) > 0 \\ -3 < \frac{S}{2} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 + 3m > 0 \\ 45 - m > 0 \\ 9 - m > 0 \\ -3 < 1 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < 9$$

Do đó có 11 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2:

Khi đó, đặt $f(x) = 3x^2 - 6x - m$ thì

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ -3 < x_1 < x_2 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 + 3m > 0 \\ -3 < \frac{3 - \sqrt{9 + 3m}}{3} < \frac{3 + \sqrt{9 + 3m}}{3} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < 9$$

Do đó có 11 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 3: Admin Nguyễn Văn Thịnh

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - m$

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 4$ có hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-3; 3) \Leftrightarrow$ Phương trình $y' = 0$

hay $3x^2 - 6x = m$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-3; 3)$.

Đặt $f(x) = 3x^2 - 6x$, $x \in (-3; 3)$. Ta có:

$$f'(x) = 6x - 6; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên:

x	-3	1	3
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	45	-3	9

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -3 < m < 9$.

Vậy có 11 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 108: (THPT Nguyễn Huệ - Huế - Lần 02 - Năm 2018 - 2019) Cho hàm số

$y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + 2019$ với m là tham số. Tổng bình phương tất cả các giá trị của m để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1$ bằng

Ⓐ. $\frac{22}{9}$

Ⓑ. $\frac{8}{3}$

Ⓒ. $\frac{40}{9}$

Ⓓ. $\frac{25}{4}$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$.

$$\text{Để hàm số có hai điểm cực trị} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = -2m^2 + 4m + 1 > 0 \end{cases}$$



$$\text{Ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m} \\ x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 x_2 = \frac{3(m-2)}{m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 - \frac{2}{m} \\ x_2 = -1 + \frac{2}{m} \\ x_1 x_2 = 3 \left(1 - \frac{2}{m}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(3 - \frac{2}{m}\right) \left(-1 + \frac{2}{m}\right) = 3 \left(1 - \frac{2}{m}\right) \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ m = \frac{2}{3} \end{cases} (N)$$

$$\text{Vậy } m_1^2 + m_2^2 = \frac{40}{9}.$$

Câu 109: (SGD Bắc Giang - Lần 01 - Năm 2018 - 2019) Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + mx + 3$ có hai điểm cực trị $x_1, x_2 \leq 4$. Số phần tử của S bằng

(A). 5.

(B). 3.

(C). 2.

(D). 4.

Lời giải

Chọn D

Hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 4 - m > 0 \Leftrightarrow m < 4$.

$$\text{Khi đó giả sử } x_1 < x_2, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - \sqrt{4 - m} \\ x_2 = 2 + \sqrt{4 - m} \end{cases}$$

$$\text{Yêu cầu bài toán trở thành } x_2 \leq 4 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{4 - m} \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 4.$$

Kết hợp với $m < 4$ ta được $0 \leq m < 4$. Do m nguyên nên $m \in \{0; 1; 2; 3\}$. Vậy có 4 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 110: (SGD Hưng Yên - Năm 2018 - 2019) Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2; 3)$.

(A). $m \in (-1; 4) \setminus \{3\}$.

(B). $m \in (3; 4)$.

(C). $m \in (1; 3)$.

(D). $m \in (-1; 4)$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6(m-2).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + (m-1)x + (m-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -m+2 \end{cases}$$

Để hàm số có điểm cực đại cực tiểu nằm trong khoảng $(-2; 3)$ thì $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\text{nằm trong khoảng } (-2; 3) \Leftrightarrow \begin{cases} -m+2 \neq -1 \\ -2 < -m+2 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ -1 < m < 4 \end{cases}$$



Câu 111: (SGD Kiên Giang - Năm 2018 - 2019) Gọi m là số thực âm để đồ thị hàm số $y = x^3 - 6mx^2 + 32m^3$ có hai điểm cực trị đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất của hệ trục tọa độ Oxy . Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- Ⓐ. $m \in \left(-\frac{3}{2}; -1\right)$. Ⓑ. $m \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right)$. Ⓒ. $m \in \left(-2; -\frac{3}{2}\right)$. Ⓓ. $m \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 3x^2 - 12mx$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4m \end{cases}$$

Hàm số có hai cực trị khi $m \neq 0$. Khi đó, gọi $A(0; 32m^3); B(4m; 0)$ là tọa độ 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số. Hai điểm này đối xứng với nhau qua đường thẳng $\Delta: y = x$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} d(A; \Delta) = d(B; \Delta) \\ AB \perp \Delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |32m^3| = |4m| \\ 4m - 32m^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ (vì } m \neq 0 \text{)}.$$

Vì $m < 0$ nên ta chọn $m = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Cách 2:

Chú ý: Hai điểm $A(x; y), B(x'; y')$ đối xứng nhau qua đường phân giác góc phần tư thứ nhất

$$\text{khi và chỉ khi } \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

Câu 112: $A(0; 32m^3); B(4m; 0)$ đối xứng nhau qua đường phân giác góc phần tư thứ nhất khi và chỉ khi

$$32m^3 = 4m \text{ (với } m < 0 \text{)} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2\sqrt{2}}. \text{ Đối chiếu các phương án, ta chọn phương án D}$$

(SGD Phú Thọ - Lần 02 - Năm 2018 - 2019) Tập hợp tất cả các giá trị tham số thực m để đồ thị hàm số $y = x^3 + 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x + m^3$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành là $(a; b)$. Khi đó giá trị $a + 2b$ bằng

- Ⓐ. $\frac{3}{2}$. Ⓑ. $\frac{4}{3}$. Ⓒ. 1. Ⓓ. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 3x^2 + 6mx + 3(m^2 - 1)$.

$$\text{Xét } 3x^2 + 6mx + 3(m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -m - 1 \\ x = -m + 1 \end{cases}$$

Hai nghiệm trên phân biệt với mọi m .

Đường thẳng qua 2 điểm cực trị của đồ thị là $y = -2x + m$.

Vậy nên các giá trị cực trị $y(-m-1) = 3m+2, y(-m+1) = 3m-2$.

Theo yêu cầu bài toán ta phải có $(3m+2)(3m-2) < 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < m < \frac{2}{3}$.

Vậy $a + 2b = \frac{2}{3}$.



Câu 113: (SGD Quảng Nam - Năm 2018 - 2019) Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm

số $y = x^3 - \frac{3}{2}mx^2 + \frac{1}{2}m^3$ có hai điểm cực trị đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$?

Ⓐ. 1

Ⓑ. 3

Ⓒ. 2

Ⓓ. 0

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 3x^2 - 3mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = m \end{cases}$

Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq 0$.

Với điều kiện $m \neq 0$, giả sử hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A\left(0; \frac{1}{2}m^3\right)$, $B(m; 0)$.

$\Rightarrow \overline{AB}\left(m; -\frac{1}{2}m^3\right)$ và $I\left(\frac{m}{2}; \frac{m^3}{4}\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AB} \cdot \vec{u_d} = 0 \\ I \in d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - \frac{1}{2}m^3 = 0 \\ \frac{m}{2} = \frac{m^3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm\sqrt{2} \\ m = 0 \end{cases}$

Đổi chiều điều kiện ta được $m = \pm\sqrt{2}$.

Câu 114: (SGD Vĩnh Phúc - Lần 2 - Năm 2018 - 2019) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số

$y = \frac{1}{3}x^3 + (m+3)x^2 + 4(m+3)x + m^3 - m$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $-1 < x_1 < x_2$.

Ⓐ. $-3 < m < 1$.

Ⓑ. $-\frac{7}{2} < m < -3$.

Ⓒ. $\begin{cases} m < -3 \\ m > 1 \end{cases}$.

Ⓓ. $-\frac{7}{2} < m < -2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = x^2 + 2(m+3)x + 4(m+3)$

Đặt $t = x+1 \Leftrightarrow x = t-1$. Khi đó $y' = t^2 + 2(m+2)t + 2m+7$

Hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $-1 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow x^2 + 2(m+3)x + 4(m+3) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $-1 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow t^2 + 2(m+2)t + 2m+7 = 0$ có hai nghiệm phân biệt dương. Điều này tương đương với

$$\begin{cases} \Delta' = m^2 + 2m - 3 > 0 \\ S = -2(m+2) > 0 \\ P = 2m+7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m > 1 \\ m < -2 \\ m > -\frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{7}{2} < m < -3.$$

Cách 2:

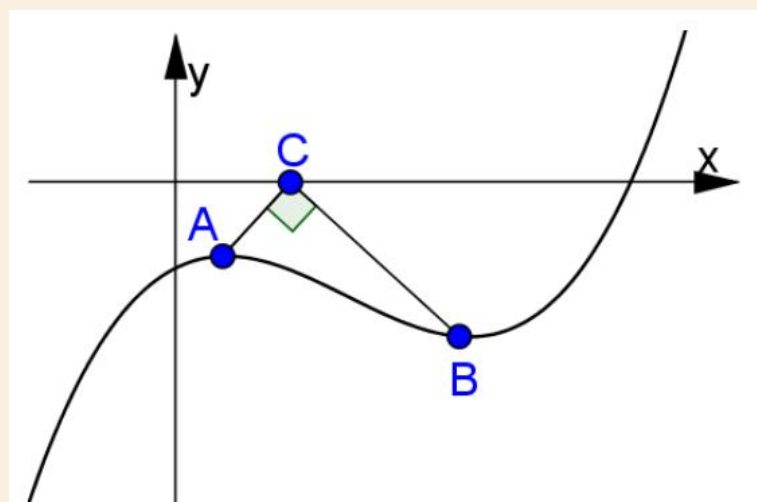
Ta có $y' = f(x) = x^2 + 2(m+3)x + 4(m+3)$

Hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $-1 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow x^2 + 2(m+3)x + 4(m+3) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $-1 < x_1 < x_2$. Điều này tương đương với



$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ a \cdot f(-1) > 0 \\ \frac{S}{2} > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 3 > 0 \\ 1 - 2(m+3) + 4(m+3) > 0 \\ \frac{-2(m+3)}{2} > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m > 1 \\ m > -\frac{7}{2} \\ m < -3 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{7}{2} < m < 3. \text{ Chọn B}$$

Câu 115: (ĐTD-Đề 5- Năm 2018-2019) Xác định các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + mx - m$ có các điểm cực đại và cực tiểu A và B sao cho tam giác ABC vuông tại C trong đó tọa độ điểm $C\left(\frac{2}{3}; 0\right)$?



Ⓐ. $m = \frac{1}{3}$.

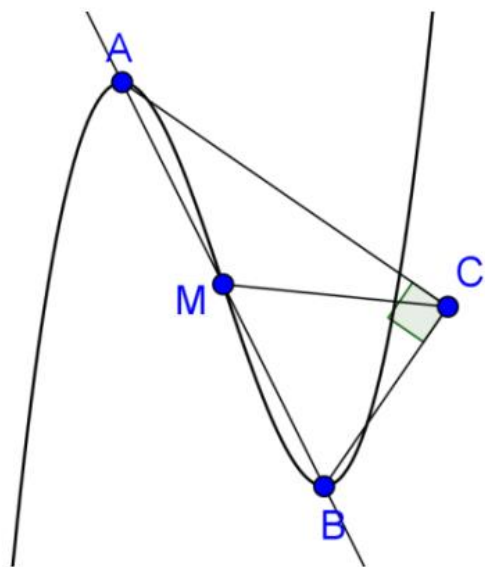
Ⓑ. $m = \frac{1}{2}$.

Ⓒ. $m = \frac{1}{6}$.

Ⓓ. $m = \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có tam giác ABC vuông tại C nên gọi M là điểm uốn của đồ thị hàm số đồng thời là trung điểm của AB , Khi đó tam giác vuông có đường trung tuyến bằng nửa cạnh huyền do vậy ta có phương trình sau: $MC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{1+p^2}\sqrt{(x_2+x_1)^2-4x_1x_2}$ (*). Thay số:



◎ Hệ số góc đường thẳng qua hai cực trị: $p = \frac{2}{3}(m-1)$.

◎ Ta có: $y' = x^2 - 2x + m \Rightarrow \begin{cases} x_2 + x_1 = 2 \\ x_1 x_2 = m \end{cases}$.

◎ Tọa độ điểm uốn $M\left(1, -\frac{2}{3}\right)$ (Chú ý điểm uốn $x = -\frac{b}{3a}$).

Vậy ta có: $(*) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{4}{9}(m-1)^2} \sqrt{4-4m} \Leftrightarrow \boxed{m = \frac{1}{2}}$.

Câu 116: (ĐTD- Đề VDC 9 - 10- Tuần 15 - Năm 2018-2019) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 8x^2 + (m^2 + 11)x - 2m^2 + 2$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục Ox .

Ⓐ. 4.

Ⓑ. 5.

Ⓒ. 6.

Ⓓ. 7.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số (C): $y = x^3 - 8x^2 + (m^2 + 11)x - 2m^2 + 2$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục $Ox \Leftrightarrow$ phương trình $x^3 - 8x^2 + (m^2 + 11)x - 2m^2 + 2 = 0, (1)$ có 3 nghiệm phân biệt.

Ta có $(1) \Leftrightarrow (x-2)(x^2 - 6x + m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ f(x) = x^2 - 6x + m^2 - 1 = 0, (2) \end{cases}$

Suy ra phương trình (2) phải có 2 nghiệm phân biệt khác 2.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 9 - (m^2 - 1) > 0 \\ f(2) = 4 - 12 + m^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{10} < m < \sqrt{10} \\ m \neq \pm 3 \end{cases}$. Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{\pm 2; \pm 1; 0\}$.

Câu 117: (Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - Lần 01 - Năm 2018 - 2019) Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 - m$, với m là tham số. Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số và $I(2; -2)$. Giá trị thực $m < 1$ để ba điểm I, A, B tạo thành tam giác nội tiếp đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{5}$ là

Ⓐ. $m = \frac{2}{17}$.

Ⓑ. $m = \frac{3}{17}$.

Ⓒ. $m = \frac{4}{17}$.

Ⓓ. $m = \frac{5}{17}$.

Lời giải

Chọn B

$y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 - m \Rightarrow y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m+1 \\ x = m-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -4m-2 \\ y = -4m+2 \end{cases}$

Khi đó đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị $A(m+1; -4m-2), B(m-1; -4m+2) \Rightarrow \overline{IA}(m-1; -4m+4), \overline{IB}(m-3; -4m)$

Ta có: $\overline{AB}(-2; 4) \Rightarrow AB = 2\sqrt{5}$ do đó AB là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ΔIAB nên $\angle AIB = 90^\circ$ hay $AI \perp BI \Leftrightarrow \overline{IA} \cdot \overline{IB} = 0$



$$\Leftrightarrow (m-1)(m-3) + (-4m)(-4m+4) = 0 \Leftrightarrow 17m^2 - 20m + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=\frac{3}{17} \end{cases}$$

Do $m < 1$ nên chọn $m = \frac{3}{17}$.

Câu 118: (Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - Lần 2 - Năm 2018) Tìm tham số m để hàm số

$$y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x + 2018 \text{ không có cực trị.}$$

- Ⓐ. $m \leq -1$ hoặc $m \geq 2$ Ⓑ. $m \leq -1$ Ⓒ. $m \geq 2$ Ⓓ. $-1 \leq m \leq 2$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } y' = x^2 - 2mx + m + 2$$

Để hàm số đã cho không có cực trị khi phương trình $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép hay

$$\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - (m+2) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 2.$$

Câu 119: (THPT LƯƠNG NGỌC QUYẾN - THÁI NGUYÊN - LẦN 02 - NĂM 2017-2018) Cho hàm

số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$. Với điều kiện nào của tham số m thì hàm số trên có cực trị?

- Ⓐ. $m > 3$. Ⓑ. Với mọi m . Ⓒ. Không tồn tại m . Ⓓ. $m \neq 3$.

Lời giải

Chọn D

$$y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6(m-2).$$

Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow (m-1)^2 - 4(m-2) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 9 > 0 \Leftrightarrow m \neq 3.$$

Câu 120: (Pen M - Nguyễn Thanh Tùng - Năm 2017 - 2018) Biết rằng đồ thị hàm số

$y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có hai điểm cực trị là $A(0;3)$ và $B(2;-13)$. Giá trị của $f(1)$ là

- Ⓐ. $f(1) = 4$ Ⓑ. $f(1) = -8$ Ⓒ. $f(1) = 2$ Ⓓ. $f(1) = -6$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } f'(x) = 4ax^3 + 2bx.$$

Do $A(0;3), B(2;-13)$ là hai điểm cực trị nên ta có:

$$\begin{cases} f(0) = 3 \\ f'(2) = 0 \\ f(2) = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ 32a + 4b = 0 \\ 16a + 4b + c = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a + b = 0 \\ 4a + b = -4 \\ c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -8 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = x^4 - 8x^2 + 3 \Rightarrow f(1) = 1 - 8 + 3 = -4.$$

Chú ý:

✓ Như bình thường với một điểm $M(x_0; y_0)$ là điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta sẽ



khai thác được phương trình $\begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x_0) = y_0 \end{cases}$. Nhưng hàm trùng phương, với điểm cực trị thuộc trục

tung Oy thì dĩ nhiên $f'(x_0) = 0$ luôn đúng (ở đây $x_0 = 0$ và $f'(0) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$). Do đó ta chỉ có được 1 phương trình (ở bài toán trên ta có được 1 phương trình là $f(0) = y_0 = 3$).

✓ Ở bài toán này đề bài cho biết tọa độ 2 điểm cực trị (trong khi thực tế hàm số có tới 3 cực trị) nên việc tìm điểm cực trị thứ ba (nếu cần) là không khó khi ta biết $A(0;3) \in Oy$ thì suy ra điểm cực trị thứ ba sẽ đối xứng với $B(2;-15)$ qua trục Oy, hay điểm cực trị thứ ba có tọa độ $C(-2;-15)$. Nhưng với bài toán này, dĩ nhiên điểm cực trị thứ ba không cần thiết nên ta không khai thác $\textcircled{C}$.

Câu 121: (Pen M - Nguyễn Thanh Tùng - Năm 2017 - 2018) Biết đồ thị (T) của hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có $A(1;4)$ và $B(0;3)$ là các điểm cực trị. Hỏi trong các điểm sau đây, đâu là điểm thuộc đồ thị (T)?

- $\textcircled{A}$. $M(-2;5)$ $\textcircled{B}$. $N(-1;-4)$ $\textcircled{C}$. $P(3;-15)$ $\textcircled{D}$. $Q(2;-5)$

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$. Do $A(1;4)$ và $B(0;3)$ là hai điểm cực trị nên ta có:

$$\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(1) = 4 \\ f(0) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b = 0 \\ a + b + c = 4 \\ c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ a + b = 1 \\ c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3.$$

Chỉ có điểm $Q(2;-5)$ thỏa mãn $f(2) = -5 \Rightarrow Q \in (T)$.

Câu 122: (Pen M - Nguyễn Thanh Tùng - Năm 2017 - 2018) Tìm tất cả các giá trị của m sao cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m + 1$ có hai điểm cực trị

- $\textcircled{A}$. $m > 0$ $\textcircled{B}$. $m < 0$ $\textcircled{C}$. $m \geq 0$ $\textcircled{D}$. $m \neq 0$

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Ta có $y' = 3x^2 - 6mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$

Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình trên có hai nghiệm phân biệt $2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Cách 2: Do hàm số dạng bậc ba nên điều kiện để hàm số có hai điểm cực trị là

$$b^2 - 3ac > 0 \Leftrightarrow 9m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0$$

Câu 123: (Pen M - Nguyễn Thanh Tùng - Năm 2017 - 2018) Cho hàm số $y = -2x^3 + (2m-1)x^2 - (m^2-1)x + 2$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số đã cho có hai điểm cực trị



(A). 4

(B). 5

(C). 3

(D). 6

Lời giải

Chọn B

Do hàm số bậc ba nên điều kiện hàm số có hai điểm cực trị là

$$b^2 - 3ac > 0 \Leftrightarrow (2m-1)^2 - 6(m^2-1) > 0 \Leftrightarrow 2m^2 + 4m - 7 < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2-3\sqrt{2}}{2} < m < \frac{-2+3\sqrt{2}}{2}. \text{ Do } m \in \mathbb{Z} \text{ nên } m \in \{-3; -2; -1; 0; 1\}.$$

Vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 124: (Pen M - Nguyễn Thanh Tùng - Năm 2017 - 2018) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = (1-m)x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ có cực trị.

(A). $m < 1$

(B). $m > -1$

(C). $0 < m \neq 1$

(D). $m > 0$

Lời giải

Chọn D

+) Với $m=1$ hàm số có dạng $y = -3x^2 + 3x - 1$ là hàm số bậc 2 nên có một cực trị (thỏa mãn).

+) Với $m \neq 1$, hàm số có cực trị $\Leftrightarrow b^2 - 3ac > 0 \Leftrightarrow 9m > 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Vậy $m > 0$.

Chú ý: Hàm số bậc ba số cực trị có thể là 2 hoặc 0. Do đó câu hỏi tìm m để hàm bậc ba có cực trị hay có hai cực trị là như nhau. Song nếu hàm số có hệ số a chứa tham số thì ta phải xét thêm $a=0$ (Hàm số không có dạng bậc 3), khi đó có thể hàm số có 1 cực trị ví như câu trên.

Câu 125: (Pen M - Nguyễn Thanh Tùng - Năm 2017 - 2018) Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 - (2m-1)x - 1$. Trong các mệnh đề sau, đâu là mệnh đề sai?

(A). Với $\forall m < 1$ thì hàm số có hai điểm cực trị.

(B). Hàm số luôn có cực đại và cực tiểu.

(C). Với $\forall m \neq 1$ thì hàm số có cực đại và cực tiểu.

(D). Với $\forall m > 1$ thì hàm số có cực trị.

Lời giải

Chọn B

Vì hàm số có dạng bậc ba nên ta xét $b^2 - 3ac = m^2 - (2m-1) = (m-1)^2$

Hàm số có hai cực trị khi và chỉ khi $b^2 - 3ac > 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 1$ nên đáp án B sai.

Chú ý: Ở bài toán này mệnh đề A, D đúng vì $\forall m \neq 1$ thì hàm số có cực đại và cực tiểu (Có hai cực trị hay có cực trị) nên cũng thỏa mãn với $\forall m < 1$ hoặc $\forall m > 1$

Câu 126: (Pen M - Nguyễn Thanh Tùng - Năm 2017 - 2018) Tất cả các giá trị của m để hàm số $y = (m^2-1)x^4 + (m-1)x^2 - 3$ có đúng một cực trị là

(A). $m \geq -1$

(B). $m < -1$

(C). $m \geq 1$ và $m \neq -1$

(D). $m \geq -1$ và $m \neq 1$

Lời giải

Chọn D



$$\text{Hàm số có một cực trị khi và chỉ khi } \begin{cases} ab \geq 0 \\ a^2 + b^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m^2 - 1)(m - 1) \geq 0 \\ (m^2 - 1)^2 + (m - 1)^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m^2 - 1)(m - 1) \geq 0 \\ (m - 1)^2 [(m - 1)^2 + 1] \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 \geq 0 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m \neq 1 \end{cases}$$

Chú ý: Trong bài toán này, có thể rất nhiều bạn sẽ mắc phải lỗi không cho điều kiện $a^2 + b^2 \neq 0$ dẫn đến kết quả không đúng. Vì với $a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0 \Rightarrow y = c$ sẽ không có cực trị.

Vì vậy các bạn cần nhớ: Hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ với a chứa tham số

⊕ **không** có **cực trị** $\Leftrightarrow a = b = 0$.

⊕ có **một cực đại** và **không** có **cực tiểu** $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b < 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$ (hay viết gọn thành

$$\begin{cases} a \leq 0 \\ b \leq 0 \\ a^2 + b^2 \neq 0 \end{cases}).$$

⊕ có **một cực tiểu** và **không** có **cực đại** $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b > 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a > 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$ (hay viết gọn thành

$$\begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ a^2 + b^2 \neq 0 \end{cases}).$$

⊕ có **một cực đại** $\Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 0 \\ b \leq 0 \\ a^2 + b^2 \neq 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$.

⊕ có **một cực tiểu** $\Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ a^2 + b^2 \neq 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$.

⊕ có **một cực trị** $\Leftrightarrow \begin{cases} ab \geq 0 \\ a^2 + b^2 \neq 0 \end{cases}$.

⊕ có **hai cực đại** và **một cực tiểu** $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases}$.

⊕ có **hai cực tiểu** và **một cực đại** $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$.

⊕ có **ba cực trị** $\Leftrightarrow ab < 0$.

Câu 127: (NXBGD - Phạm Đức Tài- Đề số 2 - Năm 2017-2018) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số

α để hàm số $y = \frac{4}{3}x^3 - 2(1 - \sin \alpha)x^2 - (1 + \cos 2\alpha)x$ có cực trị.

- Ⓐ. $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$. Ⓑ. $\alpha \neq k\pi$. Ⓒ. $\alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi$. Ⓓ. $\alpha = k\pi$.

Lời giải

Chọn A

$y' = 4x^2 - 4(1 - \sin \alpha)x - (1 + \cos 2\alpha)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta_{y'} > 0 \Leftrightarrow (1 - \sin \alpha)(3 + \sin \alpha) > 0 \Leftrightarrow \sin \alpha \neq 1 \Leftrightarrow \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 128: (Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - Lần 1 - Năm 2018) Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- Ⓐ. $m_0 \in (-1; 7)$. Ⓑ. $m_0 \in (7; 10)$. Ⓒ. $m_0 \in (-15; -7)$. Ⓓ. $m_0 \in (-7; -1)$.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$y' = 3x^2 - 6x + m.$$

$$\text{Xét } y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + m = 0; \Delta' = 9 - 3m.$$

$$\text{Hàm số có hai điểm cực trị} \Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 3.$$

$$\text{Hai điểm cực trị } x_1, x_2 \text{ là nghiệm của } y' = 0 \text{ nên: } x_1 + x_2 = 2; x_1 \cdot x_2 = \frac{m}{3}.$$

$$\text{Để } x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1 \cdot x_2 = 13$$

$$\Leftrightarrow 4 - m = 13 \Leftrightarrow m = -9. \text{ Vậy } m_0 = -9 \in (-15; -7).$$

Câu 129: (THPT Lương Thế Vinh - Hà Nội - Lần 03 - Năm 2018) Cho hàm số $f(x) = x^3 - x^2 + ax + b$ có đồ thị là C . Biết C có điểm cực tiểu là $A(1; 2)$. Giá trị $2a - b$ bằng

- Ⓐ. -1 Ⓑ. 1 Ⓒ. -5 Ⓓ. 5

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } f(x) = x^3 - x^2 + ax + b \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2x + a$$

Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $A(1; 2)$

$$\text{Ta được } \begin{cases} f'(1) = 0 \\ f(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } 2a - b = -2 - 3 = -5.$$

Câu 130: (THPT Nguyễn Khuyến - TP HCM - Năm 2018) Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (1 - m)x + m$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía đối với trục hoành.

- Ⓐ. $-\frac{1}{4} < m \neq 0$ Ⓑ. $m > 0$ Ⓒ. $-\frac{1}{4} < m < 0$ Ⓓ. $m < -\frac{1}{4}$

Lời giải

Chọn A

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}, \text{ có } y' = 3x^2 - 4x + (1 - m).$$



Hai điểm cực trị nằm về hai phía đối với trục hoành thì $y = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

Suy ra $x^3 - 2x^2 + (1-m)x + m = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - x - m) = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

$$\text{Nên } \begin{cases} 1+4m > 0 \\ 1-1-m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < m \neq 0.$$

Câu 131: (THPT Nguyễn Huệ - TP HCM - Năm 2018) Biết hàm số

$y = \frac{x^3}{3} - (m+1)x^2 + (m+2)x - 1$ đạt cực trị tại $x = 1$ (m là tham số thực). Khi đó điểm cực trị của hàm số khác 1 là

- (A). -1 (B). -2 (C). 3 (D). Đáp số khác

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = x^2 - 2(m+1)x + m + 2$.

Hàm số đạt cực trị tại $x = 1 \Rightarrow y'(1) = 0 \Leftrightarrow -m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Với $m = 1$ ta có: $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x - 1$ và $y' = x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Suy ra điểm cực trị còn lại là $x = 3$.

Câu 132: (THPT Kinh Môn 2 - Hải Dương - Năm 2018) Cho

$y = (m-3)x^3 + 2(m^2 - m - 1)x^2 + (m+4)x - 1$. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục Oy . S có bao nhiêu phần tử?

- (A). 4. (B). 5. (C). 6. (D). 7.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 3(m-3)x^2 + 4(m^2 - m - 1)x + m + 4$

$y' = 0 \Leftrightarrow 3(m-3)x^2 + 4(m^2 - m - 1)x + m + 4 = 0$.

Để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục Oy thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} 3(m-3) \neq 0 \\ 3(m-3) \cdot (m+4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -4 < m < 3.$$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2\}$. Vậy S có 6 phần tử.

Câu 133: (Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh - Lần 01 - Năm 2018) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (m+1)x + 2$ có hai điểm cực trị.

- (A). $m \leq 2$. (B). $m < 2$. (C). $m > 2$. (D). $m < -4$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + m + 1$. Hàm số có hai điểm cực trị khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow 9 - 3(m+1) > 0 \Leftrightarrow m < 2.$$

Câu 134: (THPT THỰC HÀNH TÂY NGUYÊN - LẦN 02 - 2018) Tìm các giá trị thực của tham số m

để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + 3x + 2m - 1$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.

- Ⓐ. $m = 2$. Ⓑ. Không tồn tại m . Ⓒ. $m = 1$. Ⓓ. $m = 3$.

Lời giải

Chọn B

$$y' = x^2 - 2mx + 3, \quad y'' = 2x - 2m.$$

$$\text{Xét } \begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 2m = 0 \\ 2 - 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m < 1 \end{cases}.$$

Vậy không tồn tại m thỏa mãn bài toán.

Câu 135: (Pen M - Nguyễn Thanh Tùng) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 4x^2 + (1 - m^2)x + 1$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía khác nhau đối với trục tung.

- Ⓐ. $-\frac{1}{3} < m < \frac{1}{3}$. Ⓑ. $\begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases}$. Ⓒ. $-1 < m < 1$. Ⓓ. $-1 \leq m \leq 1$.

Lời giải

Chọn B

$$y' = 3x^2 - 8x + (1 - m^2)$$

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow y' = 0 \text{ có hai nghiệm trái dấu} \Leftrightarrow 3(1 - m^2) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases}.$$

Câu 136: (Chuyên Nam Sơn - Thanh Hóa - Lần 03 - Năm 2018 - 2019) Gọi S là tập các giá trị dương của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 9x - m$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| \leq 2$. Biết $S = (a; b]$. Tính $T = b - a$.

- Ⓐ. $T = 2 + \sqrt{3}$ Ⓑ. $T = 1 + \sqrt{3}$ Ⓒ. $T = 2 - \sqrt{3}$ Ⓓ. $T = 3 - \sqrt{3}$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 6mx + 9$$

$$\text{Hàm số có hai cực trị khi và chỉ khi } \Delta' > 0 \Leftrightarrow 9m^2 - 27 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > \sqrt{3} \\ m < -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } |x_1 - x_2| \leq 2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 \leq 4 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \leq 4 \Leftrightarrow 4m^2 - 12 \leq 4$$

$$\Leftrightarrow m^2 \leq 16 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$$

$$\text{Từ, mà } m > 0 \text{ theo giả thiết ta được } S = (\sqrt{3}; 2].$$

$$\text{Vậy } T = b - a = 2 - \sqrt{3}.$$

Câu 137: (NXBGD - Đề số 3 - PHẠM ĐỨC TÀI - Năm 2017 - 2018) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (2m+1)x - m + 1$ có cực trị.

- Ⓐ. $m > 0$. Ⓑ. $\forall m \in \mathbb{R}$. Ⓒ. $m \neq 0$. Ⓓ. không có m .

Lời giải



Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Để hàm số có cực trị thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$y' = x^2 - 2(m+1)x + 2m+1.$$

$$\Delta' = (m+1)^2 - 2m - 1 = m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0.$$

Câu 138: (NXBGD - ĐOÀN QUỲNH - Đề số 05 - Năm 2021) Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 + m$ có hai điểm cực trị A, B sao cho gốc tọa độ O cùng với A và B là ba đỉnh của tam giác vuông tại O .

- Ⓐ. Không có giá trị nào của m . Ⓑ. $m = -4$.
Ⓒ. $m = 0, m = -4$. Ⓓ. $m = 1, m = 4$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $\mathbb{R}$

$$y' = 3x^2 + 6x^2; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Hàm số luôn có hai điểm cực trị với $\forall m$

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $A(0; m), B(-2; m+4)$.

$$\overrightarrow{OA} = (0; m), \overrightarrow{OB} = (-2; m+4)$$

$$\Delta OAB \text{ vuông tại } O \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow m(m+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -4 \end{cases}.$$

Câu 139: (THPT Triệu Sơn - Thanh Hóa - Năm 2018) Cho hàm số $y = (x-m)^3 - 3x + m^2$ có đồ thị là (C_m) với m là tham số thực. Biết điểm $M(a; b)$ là điểm cực đại của (C_m) ứng với một giá trị m thích hợp, đồng thời là điểm cực tiểu của (C_m) ứng với một giá trị khác của m . Tổng $S = 2018a + 2020b$ bằng

- Ⓐ. 504. Ⓑ. -504. Ⓒ. 12504. Ⓓ. 5004.

Lời giải

Chọn A

Vì điểm $M(a; b)$ thuộc đồ thị (C_m) nên ta có: $(a-m)^3 - 3a + m^2 = b, \forall m \in \mathbb{R}. (1)$

$$\text{Xét } y' = 3(x-m)^2 - 3; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m-1 \\ x = m+1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$m-1$	$m+1$	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	
y			CD		CT		
	$-\infty$						$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: Nếu m_1 là giá trị của tham số m để đồ thị hàm số nhận điểm $M(a; b)$ là điểm cực đại thì $a = m_1 - 1$. Nếu m_2 là giá trị của tham số m để đồ thị hàm số nhận

điểm $M(a; b)$ là điểm cực tiểu thì $a = m_2 + 1$.

$$\text{Mà } m_1, m_2 \text{ phải thỏa mãn (1) nên ta có: } \begin{cases} -1 - 3a + (a+1)^2 = b \\ 1 - 3a + (a-1)^2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{4} \end{cases}.$$

Vậy $S = 2018a + 2020b = 504$.

Câu 140: (Chuyên ĐHSPT Hà Nội - Lần 01 - Năm 2017 - 2018) Tìm tất cả các giá trị của tham số a để hàm số $y = 2x^3 + 9ax^2 + 12a^2x + 1$ có cực đại, cực tiểu và hoành độ điểm cực tiểu của đồ thị hàm số bằng 1.

Ⓐ. $a = -\frac{1}{2}$.

Ⓑ. $a = 1$.

Ⓒ. $a = \frac{1}{2}$.

Ⓓ. $a = -1$.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$y' = 6x^2 + 18ax + 12a^2 \quad (1)$$

Để hàm số có cực đại, cực tiểu thì $\Delta' > 0 \Leftrightarrow 81a^2 - 72a^2 = 9a^2 > 0$ luôn đúng $\forall a \in \mathbb{R}$.

Do đó x_{CT} là nghiệm của phương trình (1). Từ giả thiết $x_{CT} = 1$ thay vào phương trình (1) ta

$$\text{có: } 12a^2 + 18a + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ a = -1 \end{cases}$$

+ Với $a = -1$

$$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1, \quad y' = 6x^2 - 18x + 12$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$						$+\infty$

Dựa vào BBT ta thấy hàm số không đạt cực tiểu tại $x = 1$. Do đó $a = 1$ không thỏa mãn.

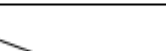
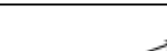
+ Với $a = -\frac{1}{2}$

$$y = 2x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 3x + 1, \quad y' = 6x^2 - 9x + 3$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên



x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y						

Dựa vào BBT ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$. Do đó $a = -\frac{1}{2}$ thỏa mãn.

Câu 141: (Chuyên Hạ Long - Quảng Ninh - Lần 01 - Năm 2018) Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2$ có hai điểm cực trị A và B sao cho các điểm A , B và $M(1; -2)$ thẳng hàng.

- Ⓐ. $m = \sqrt{2}$. Ⓑ. $m = -\sqrt{2}$. Ⓒ. $m = 2$. Ⓓ. $m = -\sqrt{2}; m = \sqrt{2}$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 2m$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó hai điểm cực trị là $A(0; 2)$, $B(2m; 2 - 4m^3)$.

Ta có $\overrightarrow{MA} = (-1; 4)$, $\overrightarrow{MB} = (2m - 1; 4 - 4m^3)$.

Ba điểm A , B và $M(1; -2)$ thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ cùng phương

$$\Leftrightarrow \frac{2m-1}{-1} = \frac{4-4m^3}{4} \Leftrightarrow \frac{2m-1}{-1} = \frac{1-m^3}{1} \Leftrightarrow 2m-1 = m^3-1 \Leftrightarrow m^3 = 2m$$

$$\Leftrightarrow m^2 = 2 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}.$$

Câu 142: (THPT SỐ 02 AN NHƠN - BÌNH ĐỊNH - LẦN 2 - 2018) Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + 2018$ với m là tham số. Tổng bình phương tất cả các giá trị của m để hàm số có hai điểm cực trị $x_1; x_2$ thỏa mãn $2x_1 + x_2 = 2$ bằng

- Ⓐ. $\frac{52}{9}$. Ⓑ. $\frac{10}{9}$. Ⓒ. $\frac{73}{16}$. Ⓓ. $\frac{34}{9}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -2m^2 + 4m + 1 > 0 \end{cases} (*)$$

$$\text{Theo định lý Viet: } S = x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m} \quad (1)$$

$$P = x_1, x_2 = \frac{3(m-2)}{m} \quad (2)$$

Theo giả thiết: $2x_1 + x_2 = 2 \quad (3)$

$$\text{Từ (1) và (3)} \Rightarrow x_1 = \frac{2}{m} \text{ và } x_2 = \frac{2m-4}{m}$$

$$\text{Từ (2)} \Rightarrow \frac{2}{m} \cdot \frac{2m-4}{m} = \frac{3(m-2)}{m} \Leftrightarrow 3m^2 - 10m + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{4}{3} \end{cases}$$

So điều kiện (*), ta nhận $m = 2$; $m = \frac{4}{3}$.

Câu 143: (Chuyên Vĩnh Phúc - Lần 3 - MĐ234 - Năm 2018) Với giá trị nào của tham số m thì đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$ có cực đại, cực tiểu thỏa mãn $|x_{CD} + x_{CT}| = 2$

(A). $m = 1$

(B). $m = 2$

(C). $m = -1$

(D). $m = -2$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6(m-2)$

$$\text{Giải phương trình } y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6(m-1)x + 6(m-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 - m \end{cases}$$

Để đồ thị hàm số có cực đại cực tiểu thì $2 - m \neq -1 \Leftrightarrow m \neq 3$

$$\text{Theo giả thiết ta có } |x_{CD} + x_{CT}| = 2 \Leftrightarrow |1 - m| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m = 2 \\ 1 - m = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 (t/m) \\ m = 3 (loại) \end{cases}$$

Vậy $m = -1$

Câu 144: (Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình - Năm 2018) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 12mx - 3m + 4$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 3 < x_2$.

(A). $m \neq 1$

(B). $m > 1$

(C). $m < \frac{3}{2}$

(D). $m > \frac{3}{2}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 12m$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6(m+1)x + 12m = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + 4m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 2m \end{cases}$$

Bởi vậy, hàm số đã cho có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 3 < x_2$ khi và chỉ khi

$$2 < 3 < 2m \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}.$$

Câu 145: (THPT QUẢNG XƯƠNG - THANH HÓA - LẦN 04 - NĂM HỌC 2017-2018) Cho hàm số $f(x) = x^3 - (2m+1)x^2 + 3mx - m$ có đồ thị (C_m) . Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-2018; 2018]$ để đồ thị (C_m) có hai điểm cực trị nằm khác phía so với trục hoành.

(A). 4033.

(B). 4034.

(C). 4035.

(D). 4036.

Lời giải

Chọn B



- Xét phương trình $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - (2m+1)x^2 + 3mx - m = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 2mx + m) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x^2 - 2mx + m = 0 \end{cases}$$

Suy ra đồ thị (C_m) có hai điểm cực trị nằm khác phía so với trục hoành khi và chỉ khi phương trình $x^2 - 2mx + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m > 0 \\ 1 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 1 \end{cases} \text{ hay } m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty).$$

Lại do: $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in (-2018; 2018] \end{cases}$ nên $m \in \{-2017; -2016; \dots; -1; 2; 3; \dots; 2018\}$.

Vậy có tất cả 4034 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 146: (THPT THÁI PHIÊN - HẢI PHÒNG - LẦN 04 - NĂM 2017-2018) Cho hàm số

$y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + 2018$ với m là tham số. Tổng bình phương tất cả các giá trị của m để hàm số có hai điểm cực trị thỏa mãn $2x_1 + x_2 = 2$.

Ⓐ. $\frac{52}{9}$.

Ⓑ. $\frac{34}{9}$.

Ⓒ. $\frac{10}{9}$.

Ⓓ. $\frac{73}{16}$.

Lời giải

Chọn A

$$y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2).$$

$$\text{Hàm số có hai cực trị} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - 3m(m-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -2m^2 + 4m + 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \in \left(\frac{2-\sqrt{6}}{2}; \frac{2+\sqrt{6}}{2} \right). \end{cases}$$

$$\text{Theo Vi-et, ta có: } x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m} \quad (1); \quad x_1 x_2 = \frac{3(m-2)}{m} \quad (2).$$

$$\text{Từ giả thiết} \Rightarrow x_2 = 2 - 2x_1. \text{ Thay vào (1), ta được: } 2 - x_1 = \frac{2m-2}{m} \Leftrightarrow x_1 = \frac{2}{m} \Leftrightarrow x_2 = \frac{2m-4}{m}$$

$$\text{Thay vào (2), ta được: } \frac{2}{m} \cdot \frac{2m-4}{m} = \frac{3m-6}{m}$$

$$\Leftrightarrow 4m - 8 = 3m^2 - 6m \Leftrightarrow 3m^2 - 10m + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy tổng bình phương tất cả các giá trị của } m \text{ là: } 2^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{52}{9}.$$

--- HẾT ---

Câu 147: (Chuyên Hà Tĩnh - Lần 01 - Năm 2018 - 2019) Tổng tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có điểm cực đại và cực tiểu đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất là



(A). $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(B). $\frac{1}{2}$

(C). 0

(D). $\frac{1}{4}$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$.

Để hàm số có cực đại cực tiểu thì $m \neq 0$.

Khi đó các điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0; 4m^3), B(2m; 0)$.

Ta có $I(m; 2m^3)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Đường phân giác của góc phần tư thứ nhất là $d: x - y = 0$.

Do đó để điểm cực đại và cực tiểu đối xứng với nhau qua d thì:

$$\begin{cases} 2m - 4m^3 = 0 \\ m - 2m^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 - 2m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy tổng tất cả các giá trị của tham số thực m là 0.

Câu 148: (Chuyên Trần Phú - Hải Phòng - Lần 02 - Năm 2017 - 2018) Gọi m_1, m_2 là các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 + m - 1$ có hai điểm cực trị là B, C sao cho tam giác OBC có diện tích bằng 2, với O là gốc tọa độ. Tính $m_1 m_2$.

(A). -15

(B). 12

(C). 6

(D). -20

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 6x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = m - 1 \Rightarrow B(0; m - 1) \\ x = 1 \Rightarrow y = m - 2 \Rightarrow C(1; m - 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OB} = (0; m - 1) \\ \overrightarrow{OC} = (1; m - 2) \end{cases}$

$$\Rightarrow S_{OBC} = \frac{1}{2} |0 \cdot (m - 2) - (m - 1) \cdot 1| = \frac{1}{2} |m - 1|.$$

Bài ra $S_{OBC} = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} |m - 1| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m = -3 \end{cases} \Rightarrow m_1 m_2 = -15.$

Câu 149: (Pen M - Nguyễn Thanh Tùng - Năm 2017 - 2018) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 3$.

(A). -3

(B). 3

(C). $-\frac{3}{2}$

(D). $\frac{3}{2}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + m; y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + m = 0$

Để hàm số có hai điểm cực trị thì $\Delta' = 9 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < 3$ (1)

Theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = \frac{m}{3} \end{cases}$

Khi đó $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 3 \Leftrightarrow 2^2 - 2 \cdot \frac{m}{3} = 3 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$ thỏa mãn điều kiện.

Chú ý: Với những bài thuộc dạng này ta có thể tìm điều kiện (1) sau. Ví như bài toán này khi ra



kết quả $m = \frac{3}{2}$ thì ta cũng chắc chắn rằng kết quả đó đúng (Vì các phương án của bài toán cho một kết quả m) mà không cần thử lại điều kiện. Do đó trong một số bài toán ta không cần kiểm tra điều kiện (1).

Câu 150: (Pen M - Nguyễn Thanh Tùng - Năm 2017 - 2018) (Chuyên Thái Bình – lần 3) Tìm tất cả

các giá trị thực của tham số a sao cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + ax + 1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $(x_1^2 + x_2 + 2a)(x_2^2 + x_1 + 2a) = 9$

Ⓐ. $a = 2$

Ⓑ. $a = -4$

Ⓒ. $a = -3$

Ⓓ. $a = -1$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = x^2 - x + a; y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + a = 0$ (*)

Cách 1: (Giải xuôi)

Để hàm số có hai điểm cực trị thì $\Delta = 1 - 4a > 0 \Leftrightarrow a < \frac{1}{4}$ (2*)

Với x_1, x_2 là nghiệm của (*) nên ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 x_2 = a \end{cases}$ (3*)

$$\begin{aligned} \text{Biến đổi } (x_1^2 + x_2 + 2a)(x_2^2 + x_1 + 2a) &= (x_1 x_2)^2 + (x_1^3 + x_2^3) + 2a(x_1^2 + x_2^2 + x_1 + x_2) + x_1 x_2 + 4a^2 \\ &= (x_1 x_2)^2 + (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2(x_1 + x_2) + 2a[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + x_1 + x_2] + x_1 x_2 + 4a^2 \\ &\stackrel{(2*)}{=} a^2 + 1 - 3a + 2a(1 - 2a + 1) + a + 4a^2 = a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2. \end{aligned}$$

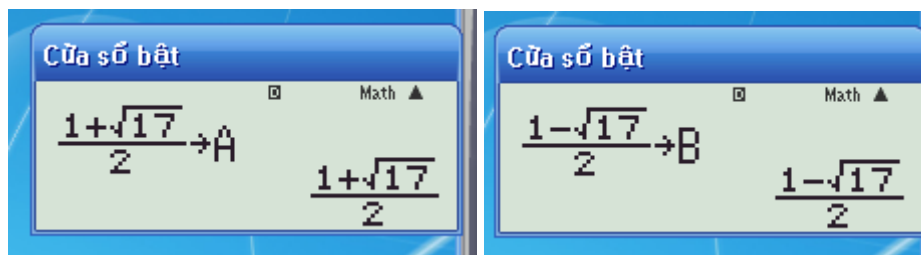
Khi đó điều kiện của bài toán tương đương: $(a + 1)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -4 \end{cases} \stackrel{(2*)}{\rightarrow} a = -4 \rightarrow \text{Chọn B}$

Cách 2: (Giải ngược)

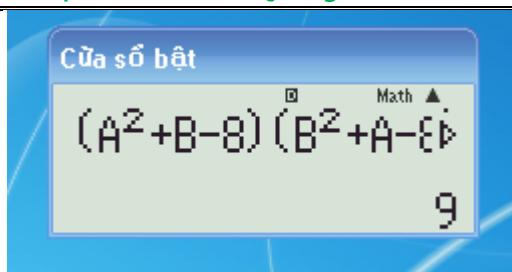
+) Thử $a = 2$, (*) có dạng $x^2 - x + 2 = 0$ (vô nghiệm), vậy $a = 2$ không thỏa mãn.

$$\text{+) Thử } a = -4, (*) \text{ có dạng } x^2 - x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \\ x_2 = \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Lúc này sử dụng casio, gán $x_1 = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \rightarrow A$ và $x_2 = \frac{1 - \sqrt{17}}{2} \rightarrow B$



Sau đó nhập biểu thức $(A^2 + B - 8)(B^2 + A - 8)$ vào máy:



Ta được kết quả là 9 (thỏa mãn) → **Chọn B**

Chú ý: Nếu bài toán này câu hỏi là “Tìm giá trị gần a nhất” thì ta không giải được theo chiều ngược. ©

Câu 151: (Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - Lần 2 - 2018) Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + m$ với m là tham số thực khác 0. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để trọng tâm tam giác OAB thuộc đường thẳng $3x + 3y - 8 = 0$.

- Ⓐ. $m = 5$. Ⓑ. $m = 2$. Ⓒ. $m = 6$. Ⓓ. $m = 4$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2 - 6x, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Tọa độ 2 điểm cực trị là $A(0; m); B(2; m - 4)$.

Tọa độ trọng tâm G của tam giác OAB là $G\left(\frac{2}{3}; \frac{2m - 4}{3}\right)$.

Điểm G thuộc đường thẳng: $3x + 3y - 8 = 0$ nên: $2 + 2m - 4 - 8 = 0 \Leftrightarrow m = 5$.

Câu 152: (Chuyên Hạ Long - Lần 03 - Năm 2017 - 2018) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 1)x$ có hai điểm cực trị là A và B sao cho A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $y = 5x - 9$. Tính tích các phần tử của S .

- Ⓐ. 3 Ⓑ. 0 Ⓒ. 18 Ⓓ. -27

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } y' = x^2 - 2mx + m^2 - 1 = (x - m - 1)(x - m + 1); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m + 1 \\ x = m - 1 \end{cases}.$$

Vì $m - 1 \neq m + 1$ với mọi giá trị m nên đồ thị hàm số luôn có hai điểm cực trị là

$$A\left(m + 1; \frac{m^3}{3} - m - \frac{2}{3}\right) \text{ và } B\left(m - 1; \frac{m^3}{3} - m + \frac{2}{3}\right).$$

A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $y = 5x - 9$.

$$\Leftrightarrow A \notin d: y = 5x - 9 \text{ và trung điểm } I\left(m; \frac{m^3}{3} - m\right) \text{ của } AB \text{ thuộc } d.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m^3}{3} - m - \frac{2}{3} \neq 5m + 5 - 9 \\ \frac{m^3}{3} - m = 5m - 9 \end{cases} \Leftrightarrow m^3 - 18m + 27 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m \approx -4,9 \\ m \approx 1,9 \end{cases}$$



Vậy tích các phân tử của S bằng -27 .

Câu 153: (Chuyên Quốc Học Huế - Lần 03 - Năm 2017 - 2018) Cho hàm số

$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}(m-1)x^2 - 3mx - \frac{3m}{2}$ với m là tham số thực. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $-20; 18$ sao cho đồ thị của hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm cùng một phía đối với trục hoành?

- (A). 1. (B). 19. (C). 20. (D). 18.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } f'(x) = 3x^2 - 3(m-1)x - 3m, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = m \end{cases}$$

Hàm số có cực trị thì $m \neq -1$.

Đồ thị của hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm cùng một phía đối với trục hoành

$$\Leftrightarrow y(-1) \cdot y(m) > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}m(m^2 + 3m + 3) > 0 \Leftrightarrow m < 0.$$

Suy ra $m < 0$ và $m \neq -1$.

Vậy trong khoảng $-20; 18$ có 18 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 154: (Chuyên Lê Hồng Phong - HCM - Năm 2017 - 2018) Tìm tổng tất cả các giá trị thực của m

sao cho đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6m(1-2m)x$ song song với đường thẳng $y = -4x$.

- (A). $m = 1$. (B). $m = -\frac{1}{3}$. (C). $m = \frac{2}{3}$. (D). $m = -\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6m(1-2m)x.$$

$$y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6m(1-2m).$$

$$\Delta' = 9(m-1)^2 - 36m(1-2m) = 81m^2 - 54m + 9 = (9m-3)^2.$$

$$\text{Hàm số có hai điểm cực trị} \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{3}.$$

Ta có phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị có dạng:

$$y = \frac{2}{3} \left(c - \frac{b^2}{3a} \right) x + d - \frac{bc}{9a}$$

$$\Leftrightarrow y = (-9m^2 + 6m - 1)x + 2m^3 - 3m^2 + m$$

Để đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6m(1-2m)x$ song song với đường thẳng $y = -4x$ thì:

$$\begin{cases} -9m^2 + 6m - 1 = -4 \\ 2m^3 - 3m^2 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9m^2 + 6m + 3 = 0 \\ 2m^3 - 3m^2 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3}$$

Tìm tổng tất cả các giá trị thực của m là $-\frac{1}{3}$.

Câu 155: (NXBGD - Đề số 4 - ĐOÀN QUỲNH - Năm 2017 - 2018) Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ có hai điểm cực trị cách đều trục tung.

- Ⓐ. Không tồn tại giá trị nào. Ⓑ. $m = -\frac{1}{2}$.
Ⓒ. $m = 2$. Ⓓ. $m = 2, m = -\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

$$y = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1)$$

Để hàm số có hai điểm cực trị cách đều trục tung $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 + x_2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -32m^2 - 32m + 1 > 0 \\ 2m + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

Câu 1. Câu 156: (NXBGD - ĐOÀN QUỲNH - Đề số 05 - Năm 2021) Tìm các giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có hai điểm cực trị đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$.

Câu 2.

- Ⓐ. $m = 0$. Ⓑ. $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ⓒ.

$m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ⓓ. $m = 1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx = 3x(x - 2m); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$.

Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq 0$.

Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số và giả sử $A(0; 4m^3), B(2m; 0)$.

Theo giả thiết A, B đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$ nên ta có

$$4m^3 = 2m \Leftrightarrow m^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 157: (NXBGD - Đoàn Quỳnh - Đề số 07 - Năm 2018) Tìm các giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y = 2x^3 + mx^2 - 12x - 13$ có các điểm cực đại, cực tiểu và các điểm đó có khoảng cách bằng nhau đến trục tung.

- Ⓐ. $m = 0$. Ⓑ. $m = 1$. Ⓒ. $m = 2$. Ⓓ. $m = 3$.

Lời giải

Chọn A

$$y' = 6x^2 + 2mx - 12$$

Phương trình $y' = 0$ có $P < 0$ nên luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$

Do đó hàm số luôn có hai cực trị

Các điểm cực đại và cực tiểu có khoảng cách đến trục tung bằng nhau nên $x_1 = -x_2$

$$\text{Hay } x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{-2m}{6} = 0 \Leftrightarrow m = 0.$$

Câu 158: (NXBGD - Đề số 14 - Năm 2018) Cho đồ thị (C_m) của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^2 + 1$ và điểm $M(-2; 2)$. Biết đồ thị (C_m) có hai điểm cực trị A, B và tam giác ABM vuông tại M . Hỏi giá trị nào của m cho dưới đây thỏa mãn bài toán đã cho?

- Ⓐ. $m = -1$. Ⓑ. $m = 1$.
Ⓒ. Không có $m = 1$. Ⓓ. Có vô số giá trị của m .

Lời giải

Chọn A

$$y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$$

$$\Delta > 0 \forall x$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = m \pm 1$$

$$A(m-1; -3m+3), B(m+1; -3m-1)$$

$$\overrightarrow{MA} = (m+1; -3m+1)$$

$$\overrightarrow{MB} = (m+3; -3m-3)$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow 10m^2 + 10m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases}$$

Câu 159: (NXBGD - Phạm Đức Tài - Đề 20 - Năm 2017-2018) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C_m) của hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 2m^3$ có hai điểm cực trị M, N sao cho đường thẳng MN vuông góc với đường thẳng $d: y = -2x$.

- Ⓐ. $m \in \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$. Ⓑ. $m \in \left\{-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right\}$. Ⓒ. $m \in \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right\}$. Ⓓ. $m \in \left\{-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right\}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Phương trình đường thẳng } MN: y = 2m^2x - 2m^3.$$

$$MN \perp d \Leftrightarrow 2m^2 \cdot (-2) = -1 \Leftrightarrow m^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{2}.$$

Câu 160: (Vted - Đề số 16 - Năm 2017 - 2018) Khi đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ có hai điểm cực trị A, B và đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 3$ cắt đường thẳng AB tại hai điểm phân biệt M, N sao cho khoảng cách giữa M và N lớn nhất. Tính độ dài MN .

- Ⓐ. $MN = \sqrt{3}$. Ⓑ. $MN = 1$. Ⓒ. $MN = 2$. Ⓓ. $MN = 2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có điều kiện để hàm số có hai điểm cực trị là $m > 0$ và $AB: y = -2mx + 2$.

Đường tròn (C) có tâm $I(1;1), R = \sqrt{3}$. Ta có

$$MN = 2\sqrt{R^2 - d^2(I, AB)} = 2\sqrt{3 - \left(\frac{-2m+1}{\sqrt{4m^2+1}}\right)^2} = 2\sqrt{2\left(\frac{4m^2+2m+1}{4m^2+1}\right)} \leq 2\sqrt{3}.$$

Dấu bằng đạt tại $m = \frac{1}{2}$.

Câu 161: (Đề 20- Vted- Năm 2017-2018) Có bao nhiêu số thực m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2$ có ba điểm cực trị A, B, C sao cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp với $D\left(\frac{3}{5}; \frac{9}{5}\right)$.

(A). 4.

(B). 2.

(C). 3.

(D). 1.

Lời giải

Chọn B

$$y' = 4x^3 - 4mx; y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m) = 0.$$

Suy ra đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m > 0$. Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0; 2), B(-\sqrt{m}; 2 - m^2), C(\sqrt{m}; 2 - m^2)$.

Gọi $I(0; h)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$.

$$\text{Ta có: } IA^2 = IB^2 \Leftrightarrow (2 - h)^2 = m + (2 - h - m^2)^2 \Leftrightarrow h = \frac{4m - m^3 - 1}{2m}.$$

$$\text{Lại có: } IA^2 = ID^2 \Leftrightarrow (2 - h)^2 = \frac{9}{25} + \left(\frac{9}{5} - h\right)^2 \Leftrightarrow h = 1.$$

$$\text{Vậy suy ra } 4m - m^3 - 1 - 2m = 0 \Leftrightarrow 2m - m^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m^2 + m - 1 = 0 \end{cases}. \text{ Phương trình này có ba}$$

nghiệm trong đó có hai nghiệm dương. Vậy **Chọn B**

Nhận xét: Bài toán trên là bài toán liên quan đến cực trị của hàm bậc 4 trùng phương và một điều kiện hình học. Phương pháp giải là ta xác định tọa độ các điểm cực trị của đồ thị hàm số rồi dựa vào đặc điểm của chúng để thiết lập các mối quan hệ (phương trình) thỏa yêu cầu bài toán.

Các bài tương tự: Tìm điều kiện để 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo thành tam giác đều; tam giác cân có góc ở đỉnh bằng $120^\circ, \dots$; tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 2;

Câu 162: (ĐTD - Đề thi thử đại học - Năm 2017 - 2018) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để $M(2m^3; m)$ cùng với hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ nhất.

(A). $m = 2$.

(B). $m = 0$.

(C). $m = 1$.

(D). $m = -1$.

Lời giải

Chọn B

$$y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (2m+1)x + m(m+1) = 0$$



Ta có $\Delta = 1 > 0 \forall m \in \mathbb{R}$ nên đồ thị luôn có 2 cực trị.

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị $y = -x + 2m^3 + 3m^2 + m + 1$

Hai điểm cực trị có tọa độ là $A(m+1; 2m^3 + 3m^2)$, $B(m; 2m^3 + 3m^2 + 1)$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}] \right| = \frac{1}{2} (3m^2 + 1) \geq \frac{1}{2}$$

$$\min S_{ABC} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = 0.$$

Câu 163: (WORD VD - VDC - ĐỀ 05- NĂM 2018) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để điểm $M(2m^3; m-1)$ cùng với hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x$ tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ nhất.

(A). $m = 1$

(B). $m = 2$

(C). $m = 0$

(D). $m = -1$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1)$ và $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m-1 \end{cases}$.

Lại có : $y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{2m+1}{6} \right) \cdot y' - x + m(m+1)(2m+1)$ suy ra phương trình đường thẳng đi qua 2

cực trị là : $y = -x + m(m+1)(2m+1)$.

Suy ra CT $A(m; m(m+1)(2m+1) - m)$;

CD : $B(m-1; m(m+1)(2m+1) - m + 1)$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{2}.$$

$$\text{Có } d_{(M; AB)} = \frac{|-3m^2 - 1|}{2} = \frac{3m^2 + 1}{2}.$$

$$\text{Mà } S_{\Delta MAB} = \frac{1}{2} AB \cdot d_{(M; AB)} = \frac{3m^2}{2} + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}.$$

Dấu '=' xảy ra khi $\Leftrightarrow m = 0$.

Câu 164: (NXBGD - PHẠM ĐỨC TÀI - ĐỀ 12 - NĂM 2018) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có hai điểm cực trị A, B sao cho $AB = \sqrt{20}$.

(A). $m \in \{-1; 2\}$.

(B). $m \in \{-1; 1\}$.

(C). $m \in \emptyset$.

(D). $m \in \{-2; 1\}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx = 3x(x - 2m)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$.

Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow m \neq 0$.

Giả sử $A(0; 4m^3)$, $B(2m; 0)$.

Theo giả thiết $AB = \sqrt{20} \Leftrightarrow AB^2 = 20 \Leftrightarrow 4m^2 + 16m^6 = 20$

$$\Leftrightarrow 4(m^2)^3 + (m^2) - 5 = 0 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = \pm 1 \text{ (thỏa mãn)}.$$



Câu 165: (THPT An Lão - Hải Phòng - Năm 2018) Cho hàm số

$y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + 2018$ với m là tham số. Tổng bình phương tất cả các giá trị của m để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1$ bằng

- Ⓐ. $\frac{25}{4}$. Ⓑ. $\frac{22}{9}$. Ⓒ. $\frac{8}{3}$. Ⓓ. $\frac{40}{9}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) = 0$ (*)

Hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$ (1).

$$x_1 + 2x_2 = 1 \quad (2)$$

Ta có (1) $\Leftrightarrow -2m^2 + 4m + 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{6}}{2} < m < \frac{2+\sqrt{6}}{2}$ (*).

Mặt khác ta có $x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m}$ (3)

Từ (2) và (3) ta có $x_2 = \frac{2-m}{m}$ mà x_2 là nghiệm của (*) nên

Vì $m\left(\frac{2-m}{m}\right)^2 - 2(m-1)\frac{2-m}{m} + 3m - 6 = 0 \Leftrightarrow 3m^2 - 8m + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{2}{3} \end{cases}$ thỏa mãn (*).

Vậy tổng bình phương các giá trị của m là: $2^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{40}{9}$.

Câu 166: (Vted - Đề số 09 - Năm 2017 - 2018) Biết hàm số $f(x) = x^3 + x^2 + mx$ có một cực trị bằng 1.

Cực trị còn lại của hàm số đã cho bằng

- Ⓐ. $-\frac{5}{27}$. Ⓑ. $\frac{13}{27}$. Ⓒ. $\frac{11}{27}$. Ⓓ. $\frac{5}{27}$.

Lời giải

Chọn A

Theo giả thiết $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và $f(x_1) = 1$, ta cần tìm $f(x_2)$

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2x + m = 0$ phương trình này có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\Delta' = 1 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{3}.$$

Khi đó theo vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2}{3} \\ x_1 x_2 = \frac{m}{3} \end{cases}$ và $f(x_1) = 1 \Leftrightarrow x_1^3 + x_1^2 + mx_1 = 1$,

Khi đó rút $m = 3x_1 x_2 = 3x_1 \left(-\frac{2}{3} - x_1\right) = -2x_1 - 3x_1^2$ và thay vào đẳng thức cuối có

$$x_1^3 + x_1^2 + x_1(-2x_1 - 3x_1^2) = 1 \Leftrightarrow 2x_1^3 + x_1^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1 \Rightarrow m = -1 \text{ (thỏa mãn điều kiện).}$$



Vậy $f(x) = x^3 + x^2 - x, x_1 = -1, x_2 = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3} \Rightarrow f(x_2) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{5}{27}$.

THAM GIA LỚP LUYỆN THI CHẤT LƯỢNG CAO MR.VIỆT MATH CLASS



82 Võ Thị Sáu - TDP Bến Chợ – Phường Q.Thuận - T.xã Ba Đồn – Tỉnh Quảng Bình



<http://luyenthitracnghiem.vn>



0905 193 688 (Điện thoại hoặc nhắn tin)



Facebook: <https://www.facebook.com/vietgold>

LIÊN
HỆ

