

CHƯƠNG VII. ĐẠO HÀM

BÀI 1. ĐẠO HÀM

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Đạo hàm

HD 1: Quỹ đạo rơi tự do của một vật được biểu diễn bởi công thức $s(t) = 4,9t^2$ với t là thời gian tính bằng giây và s tính bằng mét.



Hình 1

Vận tốc trung bình của chuyển động này trên khoảng thời gian $[5; t]$ hoặc $[t; 5]$ được tính bằng công thức $\frac{s(t) - s(5)}{t - 5}$

a) Hoàn thiện bảng sau về vận tốc trung bình trong những khoảng thời gian khác nhau. Nêu nhận xét về $\frac{s(t) - s(5)}{t - 5}$ khi t càng gần 5.

Khoảng thời gian	$[5; 6]$	$[5; 5,1]$	$[5; 5,05]$	$[5; 5,01]$	$[5; 5,001]$	$[4,999; 5]$	$[4,99; 5]$
$\frac{s(t) - s(5)}{t - 5}$	53,9	?	?	?	?	?	?

b) Giới hạn $\lim_{t \rightarrow 5} \frac{s(t) - s(5)}{t - 5}$ được gọi là vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t_0 = 5$. Tính giá trị này.

c) Tính giới hạn $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ để xác định vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0 nào đó trong quá trình rơi của vật.

Lời giải

a)

Khoảng thời gian	$[5; 6]$	$[5; 5,1]$	$[5; 5,05]$	$[5; 5,01]$	$[5; 5,001]$	$[4,999; 5]$	$[4,99; 5]$
$\frac{s(t) - s(5)}{t - 5}$	53,9	49,49	49,24 5	49,04 9	49,004 9	48,995 1	48,95 1

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{t \rightarrow 5} \frac{s(t) - s(5)}{t - 5} &= \lim_{t \rightarrow 5} \frac{4,9t^2 - 4,9 \cdot 5^2}{t - 5} \\ &= \lim_{t \rightarrow 5} \frac{4,9(t^2 - 5^2)}{t - 5} = \lim_{t \rightarrow 5} \frac{4,9(t - 5)(t + 5)}{t - 5} \\ &= \lim_{t \rightarrow 5} 4,9(t + 5) = 4,9(5 + 5) = 49 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{4,9t^2 - 4,9t_0^2}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{4,9(t^2 - t_0^2)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{4,9(t - t_0)(t + t_0)}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} 4,9(t + t_0) = 4,9(t_0 + t_0) = 9,8t_0 \end{aligned}$$

Mở rộng tình huống trong hoạt động trên, giả sử $s(t)$ là tọa độ tại thời điểm t của một chất điểm chuyển động thẳng trên trục $s'O s$ (Hình 2).



Hình 2

Khi đó, giới hạn $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$ được gọi là vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0 , kí hiệu $v(t_0)$. Giới hạn này cũng được gọi là đạo hàm của hàm số $s(t)$ theo thời gian t tại thời điểm t_0 , kí hiệu $s'(t_0)$.

$$\text{Vậy } v(t_0) = s'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}.$$

Tổng quát, ta có định nghĩa đạo hàm của hàm số bất kì như sau:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$.

Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

thì giới hạn này được gọi là đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại x_0 , kí hiệu là $f'(x_0)$ hoặc $y'(x_0)$.

Vậy:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x) = x^2$. Tính $f'(x_0)$ với $x_0 \in \mathbb{R}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0.$$

Chú ý

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$. Nếu hàm số này có đạo hàm tại mọi điểm $x \in (a, b)$ thì ta nói nó có đạo hàm trên khoảng (a, b) , kí hiệu y' hoặc $f'(x)$.

Ví dụ 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = C$ (C là hằng số)

b) $f(x) = \frac{1}{x}$ với $x \neq 0$.

Lời giải

a) Với bất kì x_0 , ta có:

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{C - C}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 0 = 0.$$

Vậy $f'(x) = (C)' = 0$ trên $\mathbb{R}$.

a) Với bất kì $x_0 \neq 0$, ta có:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{x_0 - x}{xx_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-1}{xx_0} = -\frac{1}{x_0^2}.$$

Vậy $f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

Luyện tập 1. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x^3$.

Lời giải

Với bất kì x_0 ta có:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x^2 + x.x_0 + x_0^2)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x^2 + x.x_0 + x_0^2) = x_0^2 + x_0.x_0 + x_0^2 = 3x_0^2 \end{aligned}$$

Chú ý: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$, có đạo hàm tại $x_0 \in (a; b)$.

a) Đại lượng $\Delta x = x - x_0$ gọi là số gia của biến tại x_0 . Đại lượng $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ gọi là số gia tương ứng của hàm số. Khi đó, $x = x_0 + \Delta x$ và $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

b) Tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ biểu thị tốc độ thay đổi trung bình của đại lượng y theo đại lượng x trong khoảng từ x_0 đến $x_0 + \Delta x$; còn $f'(x_0)$ biểu thị tốc độ thay đổi (tức thời) của đại lượng y theo đại lượng x tại điểm x_0 .

Ý nghĩa vật lý của đạo hàm

- Nếu hàm số $s = f(t)$ biểu thị quãng đường di chuyển của vật theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0 .

- Nếu hàm số $T = f(t)$ biểu thị nhiệt độ T theo thời gian t thì $f'(t_0)$ biểu thị tốc độ thay đổi nhiệt độ theo thời gian tại thời điểm t_0 .

Vận dụng 1: Với tình huống trong Kính lúp 1, hãy tính vận tốc tức thời của chuyển động lúc $t = 2$

Lời giải

Vận tốc tức thời của chuyển động lúc $t = 2$ là:

$$v(2) = s'(2) = 9,8 \cdot 2 = 19,6$$

2. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

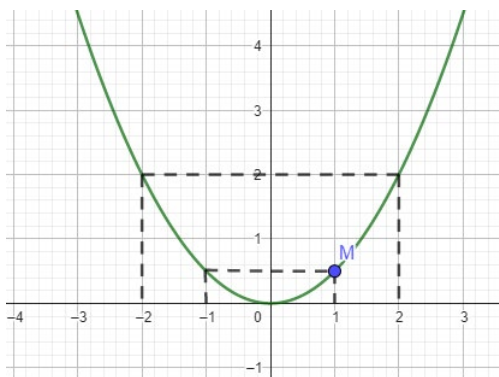
Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2$ có đồ thị (C) và điểm $M\left(1; \frac{1}{2}\right)$ thuộc (C) .

a) Vẽ (C) và tính $f'(1)$.

b) Vẽ đường thẳng d đi qua điểm M và có hệ số góc bằng $f'(1)$. Nêu nhận xét về vị trí tương đối giữa d và (C) .

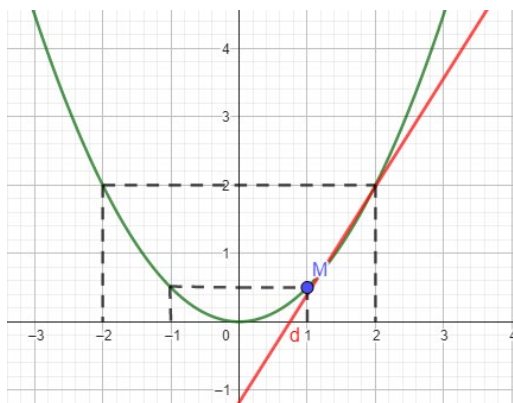
Lời giải

a)



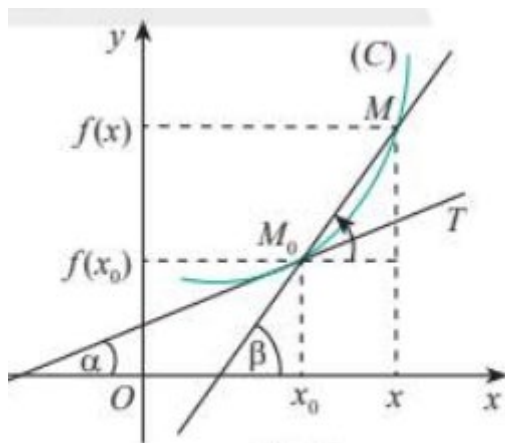
$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2}(x^2 - 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{2}(x-1)(x+1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2}(x+1) = \frac{1}{2}(1+1) = 1 \end{aligned}$$

b)



Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại 1 điểm M duy nhất

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ và điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ thuộc (C) . Xét $M(x; f(x))$ là một điểm di chuyển trên (C) . Đường thẳng M_0M là một cát tuyến của (C) . Hệ số góc của cát tuyến M_0M được tính bởi công thức $k_{M_0M} = \tan \beta = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Khi cho x dần tới x_0 thì M di chuyển trên (C) tới M_0 . Giả sử cát tuyến M_0M có vị trí giới hạn là M_0T thì M_0T được gọi là tiếp tuyến của (C) tại M_0 và M_0 được gọi là tiếp điểm.



Hình 3

Ta có hệ số góc của tiếp tuyến M_0T là $k_{M_0T} = \tan \alpha = \lim_{x \rightarrow x_0} \tan \beta = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.

Sau đây, ta không xét trường hợp tiếp tuyến song song hoặc trùng với trục Oy .

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và có đạo hàm tại $x_0 \in (a; b)$. Gọi (C) là đồ thị của hàm số đó.

Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0 \in (a; b)$ là hệ số góc của tiếp tuyến M_0T của (C) tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$.

Tiếp tuyến M_0T có phương trình là $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị (C) và điểm $M(2; 4) \in (C)$. Tính hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm M và viết phương trình của tiếp tuyến đó.

Lời giải

Ta có $(x^2)' = 2x$ nên tiếp tuyến của (C) tại M có hệ số góc là $f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là

$$y - 4 = 4(x - 2) \Leftrightarrow y = 4x - 4$$



Cho (C) là đồ thị của hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ và điểm $M(1; 1) \in (C)$. Tính hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại điểm M và viết phương trình tiếp tuyến đó.

Lời giải

Ta có $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$ nên tiếp tuyến của (C) tại M có hệ số góc là $f'(1) = \frac{-1}{1^2} = -1$ Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là:

$$y - 1 = -1 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = -x + 2$$

3. Số e

 Một người gửi tiết kiệm khoản tiền A triệu đồng (gọi là vốn) với lãi suất r / năm theo thể thức lãi kép (tiền lãi sau mỗi kì hạn được cộng gộp vào vốn). Tính tổng số tiền vốn và lãi sau một năm của người gửi nếu kì hạn là

a) một năm;

b) một tháng.

Lưu ý: Nếu một năm được chia thành n kì hạn ($n \in \mathbb{N}^*$) thì lãi suất mỗi kì hạn là $\frac{r}{n}$.

Lời giải

a) Nếu kì hạn là 1 năm thì tổng tiền vốn và lãi sau một năm gửi là: $A \cdot (1 + r)$

b) Nếu kì hạn là 1 tháng thì tổng tiền vốn và lãi sau một năm gửi là: $A \cdot \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12}$

Xét tình huống gửi tiết kiệm ở . Kí hiệu T là tổng số tiền vốn và lãi của người gửi sau một năm. Tùy theo kì hạn, ta có những công thức tính T khác nhau.

- Nếu kì hạn là 1 năm thì $T = A(1 + r)$.

- Nếu kì hạn là 6 tháng thì $T = A \left(1 + \frac{r}{2}\right)^2$.

- Nếu kì hạn là 3 tháng thì $T = A \left(1 + \frac{r}{4}\right)^4$.

- Nếu kì hạn là 1 tháng thì $T = A \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12}$.

- Nếu kì hạn là 1 ngày thì $T = A \left(1 + \frac{r}{365}\right)^{365}$ (luôn coi một năm có 365 ngày).

Tổng quát, nếu một năm được chia thành n kì hạn thì

$$T = A \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = A \left(1 + \frac{1}{m}\right)^{ar} \quad \text{với} \quad \left(m = \frac{n}{r}, r > 0\right).$$

Khi kì hạn càng ngắn thì n càng lớn, do đó m càng lớn. Người ta chứng minh được rằng có giới hạn hữu hạn

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Hơn nữa, người ta còn biết rằng e là số vô tỉ và $e = 2,718281828\dots$ (số thập phân vô hạn không tuần hoàn).

Từ kết quả trên suy ra, khi kì hạn trở nên rất ngắn (m dần đến $+\infty$) thì $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ dần đến e , và do đó

$$T = A \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \text{ dần đến } A \cdot e^r.$$

Ví dụ 4. Công thức $T = A \cdot e^{rt}$ được dùng để tính tổng số tiền vốn và lãi mà người gửi nhận được sau thời gian t kể từ thời điểm người đó gửi tiết kiệm A đồng theo thể thức "lãi kép liên tục" với lãi suất r năm. Trong đó, A và T tính theo đồng, t tính theo năm và t có thể nhận giá trị thực bất kì. Sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị của T (làm tròn đến hàng đơn vị) khi $A = 2000000, r = 0,05$ và

$$\text{b) } t = \frac{1}{365}.$$

a) $T = 2000000 \cdot e^{0.05 \cdot \frac{1}{4}} = 2000000 \cdot e^{0.0125} \approx 2025157$ (đồng).

b) $T = 2000000 \cdot e^{0.05 \cdot \frac{1}{365}} \approx 2000274$ (đồng).



b) 30 ngày.

(Luôn coi một năm có 365 ngày.)

Lời giải

a) Tổng số tiền vốn và lãi mà người đó nhận được sau 1 ngày là:

$$5000000 \cdot e^{0,06 \cdot \frac{1}{365}} = 5000822 \text{ (đồng)}$$

b) Tổng số tiền vốn và lãi mà người đó nhận được sau 30 ngày là:

$$5000000 \cdot e^{0,06 \cdot \frac{30}{365}} = 5024718 \text{ (đồng)}$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Tính đạo hàm bằng định nghĩa

1. Phương pháp

Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0 \in (a; b)$, ta thực hiện theo các bước sau:

1. Tính $f(x) - f(x_0)$.

2. Lập và rút gọn tỉ số $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ với $x \in (a;b), x \neq x_0$.

3. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tính đạo hàm (bằng định nghĩa) của hàm số $y = 2x^2 + x + 1$ tại $x_0 = 2$.

Lời giải

$$f(x) - f(x_0) = f(x) - f(2) = 2x^2 + x + 1 - 11 = 2x^2 + x - 10$$

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{2x^2+x-10}{x-2} = \frac{2(x-2)\left(x+\frac{5}{2}\right)}{x-2} = 2x+5$$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (2x+5) = 9.$$

$$\text{Vậy } f'(2) = 9$$

Ví dụ 2: Tính đạo hàm (bằng định nghĩa) của hàm số $y = \sqrt{x^2 + 3}$ tại $x; \forall x \in \mathbb{R}$

Lời giải

Ta có:

Với x_0 bất kì

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - \sqrt{x_0^2 + 3}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{(x - x_0)[\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{x_0^2 + 3}]} = \frac{2x_0}{2\sqrt{x_0^2 + 3}} = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + 3}} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}.$$

Ví dụ 3: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^3 + x^2 + 1} - 1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ tại $x = 0$.

Lời giải

$$\text{Ta có : } f(0) = 0, \text{ do đó: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^3 + x^2 + 1} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1}{\sqrt{x^3 + x^2 + 1} + 1} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } f'(0) = \frac{1}{2}.$$

Ví dụ 4: Tìm a, b để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{khi } x \leq 1 \\ ax + b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ có đạo hàm tại $x = 1$.

Lời giải

Điều kiện cần:

$$f(1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + b) = a + b$$

Để hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 1$ thì $f(x)$ liên tục tại $x = 1$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow a + b = 2$$

Điều kiện đủ:

$$f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 2) = 3$$

$$f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax + b - (a + b)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax - a}{x - 1} = a$$

Để hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 1$ thì $f'(1^+) = f'(1^-) \Leftrightarrow a = 3 \Rightarrow b = -1$.

Dạng 2. Ý nghĩa vật lý của đạo hàm

1. Phương pháp

❶. Vận tốc tức thời tại thời điểm t_0 của chất điểm chuyển động với phương trình $s = s(t)$ là

$$v(t_0) = s'(t_0).$$

❷. Cường độ tức thời tại thời điểm t_0 của một dòng điện với điện lượng $Q = Q(t)$ là

$$I(t_0) = Q'(t_0).$$

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là:

$$s = f(t) = t^2 + 4t + 6 \text{ (t được tính bằng giây, s được tính bằng mét)}$$

a) Tính đạo hàm của hàm số $f(t)$ tại điểm t_0 .

b) Tính vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 5$.

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{t^2 + 4t + 6 - (t_0^2 + 4t_0 + 6)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} (t + t_0 + 4) = 2t_0 + 4.$$

$$\text{Vậy } f'(t_0) = 2t_0 + 4.$$

b) Vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 5$ là $v_{tt} = f'(5) = 2 \cdot 5 + 4 = 14 \text{ (m/s)}$.

Ví dụ 2: Cho biết điện lượng trong một dây dẫn theo thời gian biểu thị bởi hàm số $Q = 6t + 5$ (t được tính bằng giây, Q được tính bằng Coulomb). Tính cường độ của dòng điện trong dây dẫn tại thời điểm $t = 10$.

Lời giải

Vì $Q'(t) = 6 \Rightarrow$ Cường độ của dòng điện trong dây dẫn tại thời điểm $t = 10$ là $I_{tt} = Q'(10) = 6$

Dạng 3. Phương trình tiếp tuyến

1. Phương pháp

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; y_0)$ là:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Nếu tiếp tuyến có hệ số góc k thì ta giải phương trình $f'(x_0) = k$ tìm hoành độ tiếp điểm.

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x) = x^2 + 5$ có $f'(x) = 2x$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị của hàm số tại điểm M có hoành độ $x_0 = -1$.

Hướng dẫn giải

$$x_0 = -1 \Rightarrow f(x_0) = (-1)^2 + 5 = 6$$

$$f'(-1) = -2.$$

Phương trình tiếp tuyến: $y = -2(x+1) + 6.$

Ví dụ 2: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) = x^4$ tại điểm có hoành độ bằng -1

Hướng dẫn giải

Ta có: $f(1) = 1; f'(x) = 4x^3$, do đó $f'(-1) = -4.$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = -4(x+1) + 1 = -4x - 3.$

Ví dụ 3: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3$ tại điểm mà tiếp điểm có tung độ bằng -1

Hướng dẫn giải

Ta có: Khi $y = -1$ thì $x^3 = -1$, do đó $x = -1.$

$$f(-1) = -1; f'(x) = 3x^2, \text{ do đó } f'(-1) = 3.$$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 3(x+1) - 1 = 3x + 2.$

Ví dụ 5: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x) = x^4$ có hệ số góc bằng $4.$

Hướng dẫn giải

Ta có: $f'(x) = 4x^3.$

Hệ số góc của tiếp tuyến bằng 4 nên $4x^3 = 4$, do đó $x = 1; f(1) = 1.$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 4(x-1) + 1 = 4x - 3.$

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = -x^2$; b) $f(x) = x^3 - 2x$; c) $f(x) = \frac{4}{x}.$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-x^2 - (-x_0^2)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-(x^2 - x_0^2)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} [-(x + x_0)] \\ &= -(x_0 + x_0) = -2x_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 - 2x - x_0^3 + 2x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x^3 - x_0^3) - (2x - 2x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x^2 + x.x_0 + x_0^2) - 2(x - x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} [(x^2 + x.x_0 + x_0^2) - 2] \\ &= (x_0^2 + x_0.x_0 + x_0^2) - 2 = 3x_0^2 - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) b) } f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 - 2x - x_0^3 + 2x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{4}{x} - \frac{4}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{4x_0 - 4x}{x \cdot x_0}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-4}{x \cdot x_0} = \frac{-4}{x \cdot x_0} = \frac{-4}{x_0^2} \end{aligned}$$

Bài 2. Cho hàm số $f(x) = -2x^2$ có đồ thị (C) và điểm $A(1; -2) \in (C)$. Tính hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại điểm A .

Lời giải

Ta có $f'(x_0) = -4x$

Hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại điểm A là $(-4) \cdot 1 = -4$

Bài 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3$

a) Tại điểm $(-1; 1)$;

b) Tại điểm có hoành độ bằng 2 .

Lời giải

Ta có: $y'(x_0) = 3x^2$

a) Ta có điểm $(-1; 1)$ không thuộc hàm số $y = x^3$ nên không có phương trình tiếp tuyến tại điểm $(-1; 1)$.

b) Khi $x = 2$ thì $y = 2^3 = 8$

Hệ số góc của phương trình tiếp tuyến là $3 \cdot 2^2 = 12$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $(2; 8)$ là: $y - 8 = 12 \cdot (x - 2)$ hay $y = 12x - 16$

Bài 4. Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = 4t^3 + 6t + 2$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc tức thời của chuyển động tại $t = 2$.

Lời giải

Vận tốc tức thời của chuyển động là: $v(t) = s'(t) = 12t^2 + 6$

Khi $t = 2$, $v(2) = 12 \cdot 2^2 + 6 = 54$

Bài 5. Một người gửi tiết kiệm khoản tiền 10 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 5% / năm. Tính tổng số tiền vốn và lãi mà người đó nhận được sau một năm, nếu tiền lãi được tính theo thể thức

a) lãi kép với kì hạn 6 tháng;

b) lãi kép liên tục.

Lời giải

a) Tổng số tiền vốn và lãi người đó nhận được sau một năm là:

$$T = 10000000 \left(1 + \frac{0,05}{2}\right)^2 = 10506250 \quad (\text{đồng})$$

b) Tổng số tiền vốn và lãi người đó nhận được sau một năm là:

$$T = 10000000 e^{0,05} = 10512711 \quad (\text{đồng})$$

Bài 6. Trên Mặt Trăng, quãng đường rơi tự do của một vật được cho bởi công thức $h(t) = 0,81t^2$, với t được tính bằng giây và h tính bằng mét. Hãy tính vận tốc tức thời của vật được thả rơi tự do trên Mặt Trăng tại thời điểm $t = 2$.



Hình 4

(Nguồn: <https://www.britannica.com/place/Moon>)

Lời giải

Vận tốc tức thời của vật là: $v(t) = h'(t) = 1,62t$

Tại thời điểm $t = 2$ thì $v(2) = 1,62 \cdot 2 = 3,24$

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong các phát biểu sau, phát biểu nào sau đây là đúng?

- A.** Nếu hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại x_0 thì nó có đạo hàm tại điểm đó.
- B.** Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó không liên tục tại điểm đó.
- C.** Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.
- D.** Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 thì nó có đạo hàm tại điểm đó.

Lời giải

Chọn C

Câu 2: Cho f là hàm số liên tục tại x_0 . Đạo hàm của f tại x_0 là:

- A.** $f(x_0)$.
- B.** $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.
- C.** $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).
- D.** $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).

Lời giải

Chọn C

Ta có Cho f là hàm số liên tục tại x_0 .

Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ thì $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Đặt $h = x - x_0 \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

B. $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

C. $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

D. $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x + x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0) \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Đặt $h = \Delta x = x - x_0 \Rightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{4 - x}}{4} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$.

A. $f'(0) = \frac{1}{4}$.

B. $f'(0) = \frac{1}{16}$.

C. $f'(0) = \frac{1}{32}$.

D. Không tồn tại.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Xét } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3 - \sqrt{4 - x}}{4} - \frac{1}{4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4 - x}}{4x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 - \sqrt{4 - x})(2 + \sqrt{4 - x})}{4x(2 + \sqrt{4 - x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{4x(2 + \sqrt{4 - x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4(2 + \sqrt{4 - x})} = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$.

A. $f'(0) = 0$.

B. $f'(0) = 1$.

C. $f'(0) = \frac{1}{2}$.

D. Không tồn tại.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Xét } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - 1)(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{x^2(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ bởi $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - 3x + 2} & \text{khi } x \neq 1 \\ 0 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tính $f'(1)$.

A. $f'(1) = \frac{3}{2}$.

B. $f'(1) = 1$.

C. $f'(1) = 0$.

D. Không tồn tại.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Xét } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-3)}{x-2} = 2.$$

Ta thấy: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$. Do đó, hàm số không liên tục tại điểm $x = 1$.

Vậy hàm số không tồn tại đạo hàm tại điểm $x = 1$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A.** Hàm số không liên tục tại $x = 0$. **B.** Hàm số có đạo hàm tại $x = 2$.
C. Hàm số liên tục tại $x = 2$. **D.** Hàm số có đạo hàm tại $x = 0$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Xét các giới hạn } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 1) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2) = 0 \end{cases}.$$

Do $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ nên hàm số không liên tục tại $x = 0$.

Do đó, hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$.

Câu 8: Tìm tham số thực b để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \leq 2 \\ -\frac{x^2}{2} + bx - 6 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$ có đạo hàm tại $x = 2$.

- A.** $b = 3$. **B.** $b = 6$. **C.** $b = 1$. **D.** $b = -6$.

Lời giải

Chọn B

Để hàm số có đạo hàm tại $x = 2$ trước tiên hàm số phải liên tục tại $x = 2$, tức là

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(-\frac{x^2}{2} + bx - 6 \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 \Leftrightarrow -2 + 2b - 6 = 4 \Leftrightarrow b = 6.$$

Thử lại với $b = 6$, ta có

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-\frac{x^2}{2} + 6x - 10}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-\frac{x^2}{2} + 6x - 10}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(10-x)}{2(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{10-x}{2} = 4;$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4.$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ nên hàm số có đạo hàm tại $x = 2$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} mx^2 + 2x + 2 & \text{khi } x > 0 \\ nx + 1 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của các tham số m, n sao cho

$f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = 0$.

- A.** Không tồn tại m, n . **B.** $m = 2, \forall n$.
C. $n = 2, \forall m$. **D.** $m = n = 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{mx^2 + 2x + 2 - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{mx^2 + 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (mx + 2) = 2. \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{nx + 2 - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{nx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} n = n \end{cases}$$

Hàm số có đạo hàm tại $x = 0$ khi và chỉ khi tồn tại giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow n = 2.$$

Câu 10: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{khi } x \leq 1 \\ ax + b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của các tham số a, b sao cho $f(x)$

có đạo hàm tại điểm $x = 1$.

- A.** $a = 1, b = -\frac{1}{2}$. **B.** $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$. **C.** $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$. **D.** $a = 1, b = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

- Hàm số có đạo hàm tại $x = 1$, do đó hàm số liên tục tại $x = 1$.

$$\Rightarrow a + b = \frac{1}{2}. \quad (1)$$

$$\bullet \text{ Ta có } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax + b - (a \cdot 1 + b)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} a = a \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x+1)(x-1)}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x+1)}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\text{Hàm số có đạo hàm tại } x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \Leftrightarrow a = 1. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), ta có } a = 1, b = -\frac{1}{2}.$$

Câu 11: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Tính vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 2$ giây.

- A.** 2m/s. **B.** 3m/s. **C.** 4m/s. **D.** 5m/s.

Lời giải

Chọn C

Ta tính được $s'(t) = 2t$.

$$\text{Vận tốc của chất điểm } v(t) = s'(t) = 2t \Rightarrow v(2) = 2 \cdot 2 = 4 \text{ m/s.}$$

Câu 12: Một viên đạn được bắn lên cao theo phương trình $s(t) = 196t - 4,9t^2$ trong đó $t > 0$, t tính bằng giây kể từ thời điểm viên đạn được bắn lên cao và $s(t)$ là khoảng cách của viên đạn so với mặt đất được tính bằng mét. Tại thời điểm vận tốc của viên đạn bằng 0 thì viên đạn cách mặt đất bao nhiêu mét?

- A.** 1690m. **B.** 1069m. **C.** 1906m. **D.** 1960m.

Lời giải

Chọn D

Ta tính được $s'(t) = 196 - 9,8t$.

Vận tốc của viên đạn $v(t) = s'(t) = 196 - 9,8t \Rightarrow v(t) = 0 \Leftrightarrow 196 - 9,8t = 0 \Leftrightarrow t = 20$.

Khi đó viên đạn cách mặt đất một khoảng $h = s(20) = 196.20 - 4,9.20^2 = 1960\text{m}$.

Câu 13: Một chất điểm chuyển động có phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 9t + 2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Hỏi tại thời điểm nào thì vận tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $t = 1\text{s}$.B. $t = 2\text{s}$.C. $t = 3\text{s}$.D. $t = 6\text{s}$.

Lời giải

Chọn A

Ta tính được $s'(t) = 3t^2 - 6t + 9$.

Vận tốc của chất điểm $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t + 9 = 3(t-1)^2 + 6 \geq 6$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow t = 1$.

Câu 14: Vận tốc của một chất điểm chuyển động được biểu thị bởi công thức $v(t) = 8t + 3t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $v(t)$ tính bằng mét/giây. Tìm gia tốc của chất điểm tại thời điểm mà vận tốc chuyển động là 11 mét / giây

A. 6m/s^2 .B. 11m/s^2 .C. 14m/s^2 .D. 20m/s^2 .

Lời giải

Chọn C

Ta tính được $v'(t) = 8 + 6t$.

Ta có $v(t) = 11 \Leftrightarrow 8t + 3t^2 = 11 \Leftrightarrow t = 1$ ($t > 0$).

Gia tốc của chất điểm $a(t) = v'(t) = 8 + 6t \Rightarrow a(1) = v'(1) = 8 + 6.1 = 14\text{m/s}^2$.

Câu 15: Một vật rơi tự do theo phương trình $s = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g = 9,8\text{m/s}^2$ là gia tốc trọng trường. Tìm vận tốc trung bình của chuyển động trong khoảng thời gian từ t ($t = 5\text{s}$) đến $t + \Delta t$ với $\Delta t = 0,001\text{s}$.

A. $v_{tb} = 49\text{m/s}$.B. $v_{tb} = 49,49\text{m/s}$.C. $v_{tb} = 49,0049\text{m/s}$.D. $v_{tb} = 49,245\text{m/s}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $v_{tb} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}g(t + \Delta t)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{\Delta t} = gt + \frac{1}{2}g\Delta t = 49,0049\text{m/s}$.

Câu 16: Tìm hệ số góc k của tiếp tuyến của parabol $y = x^2$ tại điểm có hoành độ $\frac{1}{2}$.

A. $k = 0$.B. $k = 1$.C. $k = \frac{1}{4}$.D. $k = -\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Vậy } k = y' \left(\frac{1}{2} \right) = 1.$$

Câu 17: Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3$ tại điểm $(-1; -1)$.

- A.** $y = -3x - 4$. **B.** $y = -1$. **C.** $y = 3x - 2$. **D.** $y = 3x + 2$.

Lời giải**Chọn D**

Ta tính được $k = y'(-1) = 3$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -1 \\ k = 3 \end{cases}. \text{ Suy ra phương trình tiếp tuyến } y + 1 = 3(x + 1) \Leftrightarrow y = 3x + 2.$$

Câu 18: Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = \frac{1}{x}$ tại điểm có hoành độ bằng -1 .

- A.** $x + y + 2 = 0$. **B.** $y = x + 2$. **C.** $y = x - 2$. **D.** $y = -x + 2$.

Lời giải**Chọn A**

Ta tính được $k = y'(-1) = -1$.

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -1$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -1 \\ k = -1 \end{cases}. \text{ Suy ra phương trình tiếp tuyến } y + 1 = -1(x + 1) \Leftrightarrow y = -x - 2.$$

Câu 19: Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3$ tại điểm có tung độ bằng 8.

- A.** $y = 8$. **B.** $y = -12x + 16$. **C.** $y = 12x - 24$. **D.** $y = 12x - 16$.

Lời giải**Chọn D**

Với $y_0 = 8 \Rightarrow x_0 = 2$.

Ta tính được $k = y'(2) = 12$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 8 \\ k = 12 \end{cases}. \text{ Suy ra phương trình tiếp tuyến } y - 8 = 12(x - 2) \Leftrightarrow y = 12x - 16.$$

Câu 20: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm với trục tung.

- A.** $y = 2x$. **B.** $y = 2$. **C.** $y = 0$. **D.** $y = -2$.

Lời giải**Chọn B**

Ta có : $x_0 = 0; y_0 = 2; y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow k = y'(0) = 0$

Ta có : $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 2. \end{cases}$ Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 2$.

Câu 21: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại giao điểm với đường thẳng $y = -2$.

- A.** $y = -9x + 7; y = -2$. **B.** $y = -2$. **C.** $y = 9x + 7; y = -2$. **D.** $y = 9x + 7; y = 2$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm : $y = x^3 - 3x^2 + 2 = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Với $x = -1 \rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ k = y'(-1) = 9 \end{cases}$. Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 9x + 7$.

Với $x = 2 \rightarrow \begin{cases} y = -2 \\ k = y'(-2) = 0 \end{cases}$. suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -2$.

Câu 22: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 7$.

- A.** $y = 9x + 7; y = 9x - 25$. **B.** $y = 9x - 25$.
C. $y = 9x - 7; y = 9x + 25$. **D.** $y = 9x + 25$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

Ta tính được $k = y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0$. Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x + 7$ nên có

$$k = 9 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = 3 \end{cases}.$$

Với $x_0 = -1 \rightarrow \begin{cases} y_0 = -2 \\ k = 9 \end{cases}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 9x + 7$ (loại) (vì trùng với đường thẳng đã cho).

Với $x_0 = 3 \rightarrow \begin{cases} y_0 = 2 \\ k = 9 \end{cases}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 9x - 25$.

Câu 23: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{45}x$.

- A.** $y = 45x - 173; y = 45x + 83$. **B.** $y = 45x - 173$.
C. $y = 45x + 173; y = 45x - 83$. **D.** $y = 45x - 83$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

Ta tính được $k = y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0$. Do tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{45}x$ nên

$$\text{có } k \cdot \left(-\frac{1}{45}\right) = -1 \Leftrightarrow k = 45 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 45 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 5 \\ x_0 = -3 \end{cases}.$$

Với $x_0 = 5 \rightarrow \begin{cases} y_0 = 52 \\ k = 45 \end{cases}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 45x - 173$.

Với $x_0 = -3 \rightarrow \begin{cases} y_0 = -52 \\ k = 45 \end{cases}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 45x + 83$.

Câu 24: Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = \frac{1}{x}$ biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\frac{1}{4}$.

A. $x + 4y - 1 = 0; x + 4y + 1 = 0$.

B. $x + 4y - 4 = 0; x + 4y + 4 = 0$.

C. $y = -\frac{1}{4}x - 4; y = -\frac{1}{4}x + 4$.

D. $y = -\frac{1}{4}x$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm. Ta tính được $k = y'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$.

Theo giả thiết ta có $k = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{x_0^2} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow x_0^2 = 4 \Leftrightarrow x_0 = \pm 2$.

• Với $x_0 = 2 \rightarrow y_0 = \frac{1}{2}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -\frac{1}{4}(x - 2) + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + 4y - 4 = 0$.

• Với $x_0 = -2 \rightarrow y_0 = -\frac{1}{2}$. Phương trình tiếp tuyến cần tìm là:
 $y = -\frac{1}{4}(x + 2) - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x + 4y + 4 = 0$.

Câu 25: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số biết cosin góc tạo bởi tiếp tuyến và đường thẳng $\Delta: 4x - 3y = 0$ bằng $\frac{3}{5}$.

A. $y = 2; y = 1$.

B. $y = -2; y = 1$.

C. $y = -2; y = -1$.

D. $y = 2; y = -2$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm $\Rightarrow k = y'(x_0) = 3x_0^2 - 6x_0$.

Phương trình tiếp tuyến d có dạng $y + y_0 = k(x - x_0)$.

Suy ra tiếp tuyến d có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_d = (-k; 1)$.

Đường thẳng Δ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_\Delta = (4; -3)$.

Theo đề bài ta có: $\cos(d, \Delta) = \frac{|-4k-3|}{\sqrt{k^2+1}\sqrt{16+9}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \begin{cases} k=0 \\ k=-\frac{24}{7} \end{cases}$.

Với $k = -\frac{24}{7} \Rightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = -\frac{24}{7}$: vô nghiệm.

Với $k = 0 \Rightarrow 3x_0^2 - 6x_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 2 \end{cases}$.

- $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 2 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2$.
- $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = -2 \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = -2$.

BÀI 2. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM**A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM**

Câu hỏi mở đầu: Giả sử hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ lần lượt có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0)$ và $g'(x_0)$. Làm thế nào để tính đạo hàm của các hàm số là tổng, hiệu, tích hoặc thương của $f(x)$ và $g(x)$ tại x_a ?

Lời giải

Ta sử dụng định nghĩa đạo hàm để tính đạo hàm của các hàm số là tổng, hiệu, tích của thương của $f(x)$ và $g(x)$ tại x_0 .

1. Đạo hàm của hàm số $y = x^n, n \in \mathbb{N}^*$ **HĐ 1.**

a) Dùng định nghĩa tính đạo hàm của hàm số $y = x$ tại điểm $x = x_0$.

b) Nhắc lại đạo hàm của các hàm số $y = x^2, y = x^3$ đã tìm được ở bài học trước. Từ đó, dự đoán đạo hàm của hàm số $y = x^n$ với $n \in \mathbb{N}^*$.

Lời giải

$$a) y'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1$$

b) Đạo hàm của $y = x^2$ là $y' = 2x$.

Đạo hàm của $y = x^3$ là $y' = 3x^2$.

Dự đoán đạo hàm của $y = x^n$ là $y' = nx^{n-1}$



Hàm số $y = x^n$ với $n \in \mathbb{N}^*$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Ví dụ 1. Tính đạo hàm của hàm số $y = x^5$ tại điểm $x = 2$ và $x = -\frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $(x^3)' = 5x^4$. Từ đó, $y'(2) = 5 \cdot 2^4 = 80$ và $y'\left(-\frac{1}{2}\right) = 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16}$.

Luyện tập 1. Tính đạo hàm của hàm số $y = x^{10}$ tại $x = -1$ và $x = \sqrt[3]{2}$.

Lời giải

Ta có: $(x^{10})' = 10x^9$

Từ đó: $y'(-1) = 10 \cdot (-1)^9 = -10$, $y'(2 - \sqrt{3}) = 10 \cdot (\sqrt[3]{2})^9 = 80$

2. Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$

HĐ 2. Dùng định nghĩa, tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$ tại điểm $x = x_0$ với $x_0 > 0$.

Lời giải

$$y'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0}) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Ví dụ 2. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$ tại điểm $x = 1$ và $x = \frac{1}{4}$.

Lời giải

Ta có $y' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$. Từ đó, $y'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$ và $y'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 1$.

Luyện tập 2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ tại điểm có hoành độ bằng 4.

Lời giải

Ta có: $y' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Khi $x = 4$ thì $y = \sqrt{4} = 2$

Hệ số góc tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng 4 là: $\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại điểm $(4; 2)$ là: $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$ hay $y = \frac{1}{4}x + 1$

Nhận xét:

a) Cho số thực α . Hàm số $y = x^\alpha$ được gọi là *hàm số lũy thừa* (với tập xác định $(0; +\infty)$).

Công thức $(x^n)' = nx^{n-1}$ còn đúng khi n là số thực, tức là với số thực α bất kì

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} (x > 0)$.

Với $\alpha = \frac{1}{2}$, ta nhận được công thức đã biết: $(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} (x > 0)$.

b) Ở bài học trước, dùng định nghĩa ta tìm được các công thức đạo hàm:

- $(C)' = 0$ (C là hằng số);
- $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} (x \neq 0)$.

Ví dụ 3. Tìm đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{x}$ tại điểm $x = 8$.

Lời giải

Ta có $y' = (\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Từ đó, $y'(8) = \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{2^3})^2} = \frac{1}{3 \cdot 2^2} = \frac{1}{12}$.

Luyện tập 3. Tìm đạo hàm của các hàm số:

- a) $y = \sqrt[4]{x}$ tại $x = 1$; b) $y = \frac{1}{x}$ tại $x = -\frac{1}{4}$.

Lời giải

$$y' = (\sqrt[4]{x})' = (x^{\frac{1}{4}})' = \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$$

a) Với $x > 0$, ta có:

Từ đó: $y'(1) = \frac{1}{4\sqrt[4]{1^3}} = \frac{1}{4}$

b) Ta có: $y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}$

Từ đó, $y'\left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{-1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = -16$

3. Đạo hàm của hàm số lượng giác

HD 3. Cho biết $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Dùng định nghĩa tính đạo hàm của hàm số $y = \sin x$.

Lời giải

$$y'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0}$$

Gọi $x = x_0 + \Delta x$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } y'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x_0 \cos \Delta x + \cos x_0 \sin \Delta x - \sin x_0}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x_0 \cos \Delta x - \sin x_0}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x_0 \sin \Delta x}{\Delta x} \\ &= \sin x_0 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} + \cos x_0 \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \end{aligned}$$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ Suy ra: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1$

Ta lại có: $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos \Delta x - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\cos \Delta x - 1)(\cos \Delta x + 1)}{\Delta x (\cos \Delta x + 1)}$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 \Delta x - 1}{\Delta x (\cos \Delta x + 1)} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \Delta x}{\Delta x (\cos \Delta x + 1)}$$

$$= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\cos \Delta x + 1} = 1 \cdot \frac{0}{1+1} = 0$$

Từ đó: $y'(x_0) = \cos x_0 \cdot 1 = \cos x_0$

Ta có công thức đạo hàm của các hàm số lượng giác sau:

$$(\sin x)' = \cos x;$$

$$(\cos x)' = -\sin x;$$

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z});$$

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad (x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}).$$

Ví dụ 4. Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos x$ tại $x = \frac{\pi}{6}$.

Lời giải

b) Ta có $y' = (\log_5 x)' = \frac{1}{x \ln 5} (x > 0)$. Từ đó, $y'(2) = \frac{1}{2 \ln 5}$.

Luyện tập 5. Tìm đạo hàm của các hàm số:

- a) $y = 9^x$ tại $x = 1$; b) $y = \ln x$ tại $x = \frac{1}{3}$.

Lời giải

a) Ta có: $y' = (9^x)' = 9^x \ln 9$

Suy ra $y'(1) = 9^1 \ln 9 = 9 \ln 9$

b) Ta có: $y' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$

Suy ra $y'\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$

5. Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số

HD 5. Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số có đạo hàm tại x_0 .

Xét hàm số $h(x) = f(x) + g(x)$.

Ta có $\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$.

Nên $h'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \dots + \dots$

Chọn biểu thức thích hợp thay cho chỗ chấm để tìm $h'(x)$.

Lời giải

$$h'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Cho hai hàm số $u(x)$, $v(x)$ có đạo hàm tại điểm x thuộc tập xác định. Ta có:

- $(u + v)' = u' + v'$
- $(u - v)' = u' - v'$
- $(u \cdot v)' = u'v + uv'$ (1)
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ (với $v = v(x) \neq 0$) (2)

Chú ý:

- Với $u = C$ (C là hằng số), công thức (1) trở thành $(C \cdot v)' = C \cdot v'$.
- Với $u = 1$, công thức (2) trở thành $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ (với $v = v(x) \neq 0$)

Ví dụ 6. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

- a) $y = 3x^2 - 4x + 2$; b) $y = x \sin x$; c) $y = \frac{3x + 2}{2x - 1}$.

Lời giải

$$a) (3x^2 - 4x + 2)' = (3x^2)' - (4x)' + (2)' = 3(x^2)' - 4(x)' + 0 = 3.2x - 4.1 = 6x - 4.$$

$$b) (x \sin x)' = x' \cdot \sin x + x \cdot (\sin x)' = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x = \sin x + x \cos x.$$

$$c) \left(\frac{3x+2}{2x-1} \right)' = \frac{(3x+2)' \cdot (2x-1) - (3x+2) \cdot (2x-1)'}{(2x-1)^2} = \frac{3(2x-1) - (3x+2) \cdot 2}{(2x-1)^2} \\ = \frac{6x-3-6x-4}{(2x-1)^2} = -\frac{7}{(2x-1)^2}.$$

Ví dụ 7. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$a) y = x^2 3^x; \quad b) y = \frac{\sqrt{x}}{\cos x}.$$

Lời giải

$$a) (x^2 3^x)' = (x^2)' \cdot 3^x + x^2 \cdot (3^x)' = 2x \cdot 3^x + x^2 \cdot 3^x \ln 3 = x 3^x (2 + x \ln 3).$$

$$b) \left(\frac{\sqrt{x}}{\cos x} \right)' = \frac{(\sqrt{x})' \cdot \cos x - \sqrt{x} \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cos x - \sqrt{x} \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos x + 2x \sin x}{2\sqrt{x} \cos^2 x}.$$

Luyện tập 6. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$a) y = x \log_2 x; \quad b) y = x^3 e^x.$$

Lời giải

$$a) y' = (x \log_2 x)' = x' \cdot \log_2 x + x \cdot (\log_2 x)' = \log_2 x + x \cdot \frac{1}{x \ln 2} = \log_2 x + \frac{1}{\ln 2}$$

$$b) y' = (x^3 e^x)' = (x^3)' \cdot e^x + x^3 \cdot (e^x)' = 3x^2 e^x + x^3 \cdot e^x$$

6. Đạo hàm của hàm hợp

HD 6. Cho hàm số $u = \sin x$ và hàm số $y = u^2$.

a) Tính y theo x .

b) Tính y'_x (đạo hàm của y theo biến x), y'_u (đạo hàm của y theo biến u) và u'_x (đạo hàm của u theo biến x) rồi so sánh y'_x với $y'_u \cdot u'_x$.

Lời giải

$$a) y = (\sin x)^2 = \sin^2 x$$

$$b) y'_x = (\sin^2 x)' = 2 \sin x \cdot \cos x, \quad y'_u = 2u, \quad u'_x = \cos x$$

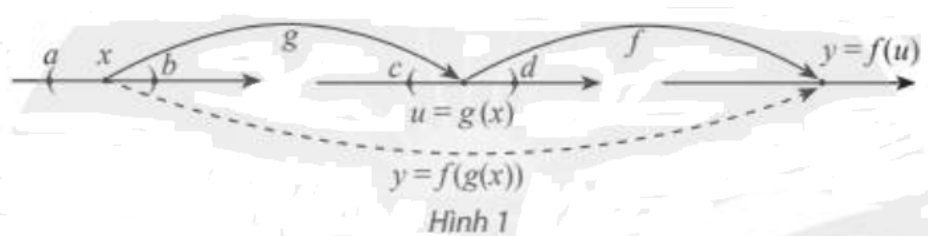
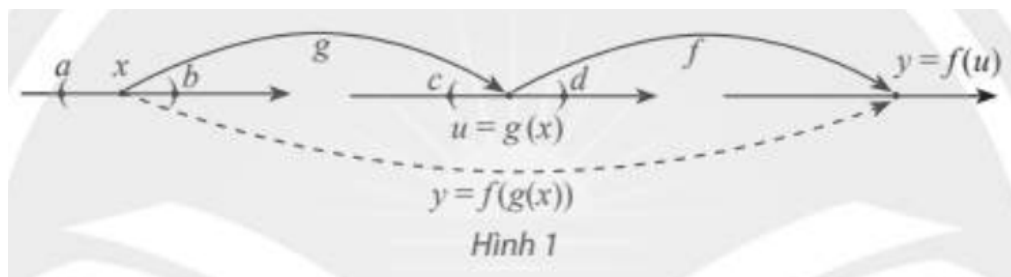
$$\text{Ta có: } y'_u \cdot u'_x = 2u \cdot \cos x = 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$\text{Suy ra: } y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Cho $u = g(x)$ là hàm số của x xác định trên khoảng $(a; b)$ và lấy giá trị trên khoảng $(c; d)$; $y = f(u)$ là hàm số của u xác định trên khoảng $(c; d)$ và lấy giá trị trên $\mathbb{R}$. Ta lập hàm số xác định trên $(a; b)$ và lấy giá trị trên $\mathbb{R}$ theo quy tắc sau:

$$x \rightarrow f(g(x))$$

Hàm số $x \rightarrow f(g(x))$ được gọi là hàm hợp của hàm số $y = f(u)$ với $u = g(x)$.



Ví dụ 8.

- a) Hàm số $y = (2x+1)^3$ là hàm hợp của các hàm số nào?
 b) Hàm số $y = \cos(x^2+1)$ là hàm hợp của các hàm số nào?

Lời giải

- a) Hàm số $y = (2x+1)^3$ là hàm hợp của các hàm số $y = u^3$ với $u = 2x+1$
 b) Hàm số $y = \cos(x^2+1)$ là hàm hợp của các hàm số $y = \cos u$ với $u = x^2+1$

Cho hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm tại x là u'_x , và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại u là y'_u thì hàm hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm tại x là $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Ví dụ 9. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

- a) $y = (3x^2 + x)^3$; b) $y = \sin 2x$; c) $y = e^{x^2+1}$.

Lời giải

- a) Đặt $u = 3x^2 + x$ thì $y = u^3$. Ta có $u'_x = 6x+1$ và $y'_u = 3u^2$.

Suy ra $y'_x = y'_u \cdot u'_x = 3u^2 \cdot (6x+1) = 3(3x^2 + x)^2 \cdot (6x+1)$.

Vậy $y' = 3(3x^2 + x)^2 \cdot (6x+1)$.

- b) Đặt $u = 2x$ thì $y = \sin u$. Ta có $u'_x = 2$ và $y'_u = (\sin u)' = \cos u$.

Suy ra $y'_x = y'_u \cdot u'_x = \cos u \cdot 2 = 2 \cos 2x$.

Vậy $y' = 2 \cos 2x$.

- c) Đặt $u = x^2+1$ thì $y = e^u$. Ta có $u'_x = 2x$ và $y'_u = (e^u)' = e^u$.

Suy ra $y'_x = y'_u \cdot u'_x = e^u \cdot 2x = 2xe^{x^2+1}$.

Vậy $y' = 2xe^{x^2+1}$.

Thực hành 7. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

- a) $y = (2x^3 + 3)^2$; b) $y = \cos 3x$; c) $y = \log_2(x^2 + 2)$.

Lời giải

- a) $y' = 2 \cdot (2x^3 + 3) \cdot (2x^3 + 3)' = 2 \cdot (2x^3 + 3) \cdot 6x^2 = 12x^2(2x^3 + 3)$

$$b) y' = (3x)' \cdot (-\sin 3x) = -3\sin 3x \quad c) y' = (x^2 + 2)' \cdot \frac{1}{(x^2 + 2)\ln 2} = \frac{2x}{(x^2 + 2)\ln 2}$$

BẢNG ĐẠO HÀM

$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u' \cdot e^u$
$(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0 \text{ và } a \neq 1)$	$(a^u)' = u' \cdot a^u \ln a \quad (a > 0 \text{ và } a \neq 1)$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0 \text{ và } a \neq 1)$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a > 0 \text{ và } a \neq 1)$

7. Đạo hàm cấp hai

HD 7. Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = 2t^3 + 4t + 1$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây.

a) Tính vận tốc tức thời $v(t)$ tại thời điểm t .

b) Đạo hàm $v'(t)$ biểu thị tốc độ thay đổi của vận tốc theo thời gian, còn gọi là gia tốc của chuyển động, kí hiệu $a(t)$. Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 2$.

Lời giải

$$a) v(t) = s'(t) = 6t^2 + 4t$$

$$b) v'(t) = 12t + 4$$

$$\text{Ta có: } v'(2) = 12 \cdot 2 + 4 = 28$$

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = f'(x)$ tại mọi $x \in (a; b)$.

Nếu hàm số $y' = f'(x)$ lại có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của y' là **đạo hàm cấp hai** của hàm số $y = f(x)$ tại x , kí hiệu y'' hoặc $f''(x)$.

Ví dụ 10. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số:

$$a) y = 3x^2 + 5x + 1;$$

$$b) y = \sin x.$$

Lời giải

a) $y' = 3.2x + 5 + 0 = 6x + 5, y'' = 6.1 + 0 = 6$

b) $y' = \cos x; y'' = -\sin x$

Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Đạo hàm cấp hai $f''(t)$ là gia tốc tức thời tại thời điểm t của vật chuyển động có phương trình $s = f(t)$.

Ví dụ 11. Một vật chuyển động thẳng không đều xác định bởi phương trình $s(t) = t^2 - 4t + 3$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 4$.

Lời giải

Ta có $s'(t) = 2t - 4; s''(t) = 2$.

Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 4$ là $s''(4) = 2 \text{ m/s}^2$.

Luyện tập 8. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = x^2 - x$;

b) $y = \cos x$.

Lời giải

a) $y' = 2x - 1; y'' = 2$

b) $y' = -\sin x; y'' = -\cos x$

Vận dụng. Một hòn sỏi rơi tự do có quãng đường rơi tính theo thời gian t là $s(t) = 4,9t^2$, trong đó s tính bằng mét và t tính bằng giây. Tính gia tốc rơi của hòn sỏi lúc $t = 3$.

Lời giải

$v(t) = s'(t) = 9,8t$

Gia tốc rơi của hòn sỏi là $v'(t) = 9,8$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Đạo hàm của hàm đa thức

1. Phương pháp

Chủ yếu ta dùng các công thức sau

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

$$(c)' = 0; (x)' = 1.$$

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(u-v)' = u' - v'$$

$$(uv)' = u'v + v'u$$

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 5$. Tìm x để $y' = 0$

Lời giải

$$y = 2x^3 - 3x^2 - 5$$

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = 3x^3 + x^2 + 1$. Giải bất phương trình $y' \leq 0$.

Lời giải

$$y = 3x^3 + x^2 + 1 \Rightarrow y' = 9x^2 + 2x$$

$$y' \leq 0 \Leftrightarrow 9x^2 + 2x \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{9} \leq x \leq 0.$$

Ví dụ 3: Cho hai hàm số $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x$; $g(x) = 9x - \frac{3}{2}x^2$. Tìm x để $f'(x) = g'(x)$

Lời giải

$$f'(x) = x + 4; g'(x) = 9 - 3x.$$

$$\text{Do đó } f'(x) = g'(x) \Leftrightarrow 4x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}.$$

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x) = mx - \frac{1}{3}x^3$. Tìm m để $x = -1$ là nghiệm của bất phương trình $f'(x) < 2$

Lời giải

Ta có: $f'(x) = m - x^2$. Giá trị $x = -1$ là nghiệm của bất phương trình $f'(x) < 2$ khi và chỉ khi:
 $m - 1 < 2 \Leftrightarrow m < 3$.

Dạng 2. Đạo hàm của hàm phân thức

1. Phương pháp

Ta thường sử dụng các công thức sau:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}, \quad (u \neq 0).$$

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: $y = \frac{x(1-3x)}{x+1}$

Lời giải

$$y = \frac{x(1-3x)}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{(1-6x)(x+1) - 1(x-3x^2)}{(x+1)^2} = \frac{-3x^2 - 6x + 1}{(x+1)^2}.$$

Ví dụ 2: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x+3}{2x-1}$

Lời giải

Dùng công thức nhanh: $y = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}.$

Do đó, với $y = \frac{2x+3}{2x-1}$ thì $y' = -\frac{8}{(2x-1)^2}.$

Ví dụ 3: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{x^2+1}$

Lời giải

$$y' = \frac{-(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

Ví dụ 4: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$?

Lời giải

$$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - 1 + 2}{x^2 - 1} = 1 + \frac{2}{x^2 - 1}$$

$$\text{Do đó } y' = \frac{-2(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}.$$

Ví dụ 5: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{x^2 + x - 1}$

Lời giải

$$y' = \frac{-(x^2 + x - 1)'}{(x^2 + x - 1)^2} = \frac{-2x - 1}{(x^2 + x - 1)^2}.$$

Ví dụ 6: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^2 + x + 3}{x^2 + x - 1}$

Lời giải

$$y = \frac{x^2 + x + 3}{x^2 + x - 1} = \frac{x^2 + x - 1 + 4}{x^2 + x - 1} = 1 + \frac{4}{x^2 + x - 1}.$$

$$\text{Do đó: } y' = \frac{-4(x^2 + x - 1)'}{(x^2 + x - 1)^2} = \frac{-4(2x + 1)}{(x^2 + x - 1)^2}.$$

Dạng 3. Đạo hàm của hàm chứa căn

1. Phương pháp

Ta thường dùng các công thức sau

Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm tại mọi x dương và $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Ngoài ra, đối với hàm hợp $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}$

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = 4x - \sqrt{x}$. Tìm x để $y' = 0$?

Lời giải

$$y = 4x - \sqrt{x} \Rightarrow y' = 4 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = \frac{1}{64}.$$

Ví dụ 2: Tính đạo hàm của hàm số $y = x^3 - \sqrt{x} + 1$

Lời giải

$$y' = 3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 18x - 7$. Tìm x để $f'(x) \leq 0$

Lời giải

$$f'(x) = x^2 - 6\sqrt{2}x + 18 = (x - 3\sqrt{2})^2.$$

$$f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow (x - 3\sqrt{2})^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 3\sqrt{2}.$$

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{1+x}$. Tính $f(3) + (x-3) \cdot f'(3)$?

Lời giải

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \Rightarrow f'(3) = \frac{1}{4}.$

Lại có: $f(3) = 2$. Vậy $f(3) + (x-3) \cdot f'(3) = 2 + (x-3) \cdot \frac{1}{4} = \frac{x+5}{4}.$

Ví dụ 5: Tính đạo hàm của hàm số: $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$?

Lời giải

Ta có: $y' = \frac{-x}{\sqrt{x^2+1}^2} = \frac{-x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}.$

Ví dụ 6: Tính đạo hàm của hàm số: $y = x\sqrt{x^2+1}$?

Lời giải

Ta có: $y' = \sqrt{x^2+1} + x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}.$

Ví dụ 7: Tính đạo hàm của hàm số: $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$?

Lời giải

Ta có: $y' = \frac{1}{1-x} \left(\sqrt{1-x} + \frac{1+x}{2\sqrt{1-x}} \right) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{2-2x+1+x}{2\sqrt{1-x}} = \frac{3-x}{2\sqrt{(1-x)^3}}.$

Dạng 4. Tính Đạo Hàm của các hàm số lượng giác

1. Phương pháp

- Áp dụng quy tắc tính đạo hàm.
- Áp dụng các đạo hàm lượng giác cơ bản.

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan 7x$

Hướng dẫn giải

$$y' = \frac{(7x)'}{\cos^2 7x} = \frac{7}{\cos^2 7x}.$$

Ví dụ 2: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\cos x}$

Hướng dẫn giải

$$y' = \frac{(\cos x)'}{2\sqrt{\cos x}} = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}.$$

Ví dụ 3: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\cos 2x}$

Hướng dẫn giải

$$y' = \frac{(\cos 2x)'}{2\sqrt{\cos 2x}} = \frac{-2\sin 2x}{2\sqrt{\cos 2x}} = \frac{-\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}.$$

Ví dụ 4: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\sin x}$

Hướng dẫn giải

$$y = \sqrt{\sin x} \Rightarrow y' = \frac{(\sin x)'}{2\sqrt{\sin x}} = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}.$$

Ví dụ 5: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\sin 3x}$

Hướng dẫn giải

$$y' = \frac{(\sin 3x)'}{2\sqrt{\sin 3x}} = \frac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}.$$

Ví dụ 6: Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan^2 5x$

Hướng dẫn giải

$$y' = 2 \tan 5x \cdot \frac{(5x)'}{\cos^2 5x} = \frac{10 \sin 5x}{\cos^3 5x}.$$

Ví dụ 7: Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right)$

Hướng dẫn giải

$$y = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) \Rightarrow y' = \left(\frac{\pi}{3} - 3x\right)' \cdot \left(-\sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right)\right) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right).$$

Ví dụ 8: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

Hướng dẫn giải

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos 2x \Rightarrow y' = -2 \sin 2x.$$

Ví dụ 9: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 2 \sin 2x + \cos 2x$

Hướng dẫn giải

$$y' = 2(\sin 2x)' + (\cos 2x)' = 4 \cos 2x - 2 \sin 2x.$$

Ví dụ 10: Cho $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$. Tính $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

Ta có $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$. Do đó $f'(x) = -2 \sin 2x$.

Vậy $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \sin \frac{\pi}{2} = -2$.

Cách 2: Giải nhanh bằng máy tính

Chuyển sang chế độ rad bằng cách ấn phím $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{MODE}} 4$

Nhập vào màn hình $\frac{d}{dx} \left((\cos(X))^2 + (\sin(X))^2 \right) \Big|_{x=\frac{\pi}{4}}$ rồi ấn phím $\boxed{=}$ ta được kết quả

Ví dụ 11: Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos^3 4x$

Hướng dẫn giải

$$y = \cos^3 4x \Rightarrow y' = 3 \cos^2 4x \cdot (\cos 4x)' = 3 \cos^2 4x \cdot (-4 \sin 4x) = -12 \cos^2 4x \cdot \sin 4x.$$

Ví dụ 12: Với $y = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$ thì $\frac{y'\left(\frac{\pi}{8}\right)}{y'\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ có giá trị bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải

Cách 1: Giải bằng tự luận

$$y = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \Rightarrow y' = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$$

$$y'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2 \left(\sin \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = 0; y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}\right) \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{y'\left(\frac{\pi}{8}\right)}{y'\left(\frac{\pi}{3}\right)} = 0.$$

Cách 2: Giải nhanh bằng máy tính

Chuyển sang chế độ rad bằng cách ấn phím $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{MODE}} 4$

Nhập vào màn hình $\frac{\frac{d}{dx} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2X\right) \right) \Big|_{x=\frac{\pi}{8}}}{\frac{d}{dx} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2X\right) \right) \Big|_{x=\frac{\pi}{3}}}$ rồi ấn phím $\boxed{=}$ ta được kết quả

Ví dụ 13: Cho hàm số $f(x) = 2 \sin\left(\frac{5\pi}{6} + x\right)$. Tính $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 2 \cos\left(\frac{5\pi}{6} + x\right) \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2$

Ví dụ 142: Cho hàm số $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$. Tính $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

Ta có: $f(x) = \cos 2x \Rightarrow f'(x) = -2 \sin 2x$. Do đó: $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2$.

Ví dụ 15: Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{\tan x + \cot x}$. Tính $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = \frac{(\tan x + \cot x)'}{2\sqrt{\tan x + \cot x}} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}}{2\sqrt{\tan x + \cot x}} \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Dạng 5: Giải phương trình lượng giác $f'(x) = 0$

1. Phương pháp

- ✓ Tính đạo hàm $f'(x)$
- ✓ Để giải phương trình $f'(x) = 0$, ta áp dụng cách giải các phương trình lượng giác cơ bản và một số phương trình lượng giác thường gặp.

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}x\right)$. Giải phương trình $y' = 0$.

Hướng dẫn giải

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}x\right) \Rightarrow y' = -\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}x\right)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}x\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} - 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 2: Cho hàm số $y = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right)$. Giải phương trình $y' = 0$.

Hướng dẫn giải

$$y = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right) \Rightarrow y' = -2 \sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2x\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} + 2x = k\pi$$

$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{2\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = \cot^2 \frac{x}{4}$. Giải phương trình $y' = 0$.

Hướng dẫn giải

$$y = \cot^2 \frac{x}{4} \Rightarrow y' = 2 \cot \frac{x}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{4}} = -\frac{1}{2} \frac{\cos \frac{x}{4}}{\sin^3 \frac{x}{4}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \cos \frac{x}{4} = 0 \Leftrightarrow x = 2\pi + k4\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 4: Giải phương trình: $f'(x) = 0$, biết $f(x) = \cos x - \sin x + x$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $f'(x) = -\sin x - \cos x + 1$.

$$\text{Vậy: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}.$$

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x) = \frac{\sin 3x}{3} + \cos x - \sqrt{3}\left(\sin x + \frac{\cos 3x}{3}\right)$. Tìm tập nghiệm của $f'(x) = 0$

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } f(x) = \frac{\sin 3x}{3} + \cos x - \sqrt{3}\left(\sin x + \frac{\cos 3x}{3}\right)$$

$$f'(x) = \cos 3x - \sin x - \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos 3x - \sin x - \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 3x + \sqrt{3} \sin 3x = \sin x + \sqrt{3} \cos x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos 3x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 3x = \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{3} \cos 3x + \sin \frac{\pi}{3} \sin 3x = \cos \frac{\pi}{3} \sin x + \sin \frac{\pi}{3} \cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} - x + k2\pi \\ 3x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{12} + k\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z}.$$

Dạng 6. Tính đạo hàm mũ và loga

1. Phương pháp:

$$(e^x)' = e^x \quad (a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

$$(e^u)' = u'e^u \quad (a^u)' = u'a^u \cdot \ln a$$

Với mọi $0 < a \neq 1$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$$

Ngoài ra ta có thể sử dụng MTCT để kiểm tra và thử đáp án

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_3(2x-2)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = \frac{(2x-2)'}{(2x-2)\ln 3} = \frac{1}{(x-1)\ln 3}.$$

Ví dụ 2: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x+1}{2^x}$

Lời giải

$$y' = \frac{2^x - (x+1)2^x \ln 2}{4^x} = \frac{1 - (x+1)\ln 2}{2^x}$$

Ví dụ 3: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x+2}{x-1} \ln(x+2)$

Lời giải

$$y' = \frac{-3}{(x-1)^2} \ln(x+2) + \frac{x+2}{x-1} \cdot \frac{1}{x+2} = \frac{-3\ln(x+2)}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}$$

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x) = x^2 e^{-x}$. Giải bất phương trình $f'(x) \geq 0$

Lời giải

$$f'(x) = \frac{2x - x^2}{e^x} \geq 0 \Leftrightarrow 2x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 2$$

Dạng 7: Tính đạo hàm cấp cao của hàm số $y = f(x)$

1. Phương pháp

- ✓ Tính đạo hàm cấp 1: $f'(x)$
- ✓ Tính đạo hàm cấp 2: $f''(x) = [f'(x)]'$

2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng

Ví dụ 1: Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x) = \frac{4}{5}x^5 - 3x^2 - x + 4$

Hướng dẫn giải

$$f(x) = \frac{4}{5}x^5 - 3x^2 - x + 4 \text{ thì } f'(x) = 4x^4 - 6x - 1, \text{ do đó: } f''(x) = 16x^3 - 6.$$

Ví dụ 2: Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \cos 2x$

Hướng dẫn giải

$$y = \cos 2x \text{ thì } y' = -2\sin 2x. \text{ Do đó } y'' = -4\cos 2x.$$

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 12x - 1$. Giải $f''(x) \geq 0$

Hướng dẫn giải

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 12x - 1 \text{ thì } f'(x) = x^2 + x - 12; f''(x) = 2x + 1.$$

$$\text{Do đó } f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}.$$

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = \frac{1}{x+1}$. Tính y'' ?

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } y' = -\frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow y'' = \frac{2}{(x+1)^3}.$$

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+4}$. Tính $M = 2(y')^2 + (1-y).y''$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } y' = \frac{7}{(x+4)^2} \Rightarrow y'' = -\frac{14}{(x+4)^3}$$

$$\text{Lại có } 1-y = 1 - \frac{x-3}{x+4} = \frac{7}{x+4}$$

$$\text{Vậy: } M = 2(y')^2 + (1-y).y'' = 2 \cdot \frac{49}{(x+4)^4} + \frac{7}{x+4} \cdot \left(-\frac{14}{(x+4)^3} \right) = 0.$$

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$. Tính $y'^2 - 2y.y''$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } y' = x + 1 \Rightarrow y'' = 1.$$

$$\text{Vậy: } y'^2 - 2y.y'' = (x+1)^2 - 2\left(\frac{1}{2}x^2 + x + 1\right) \cdot 1 = x^2 + 2x + 1 - x^2 - 2x - 2 = -1.$$

Ví dụ 7: Cho hàm số $y = x \sin x$. Tính $xy - 2(y' - \sin x) + xy''$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } y' = \sin x + x \cos x \Rightarrow y'' = \cos x + (\cos x - x \sin x) = 2 \cos x - x \sin x.$$

Vậy:

$$xy - 2(y' - \sin x) + xy'' = x^2 \sin x - 2(\sin x + x \cos x - \sin x) + 2x \cos x - x^2 \sin x = 0.$$

Ví dụ 8: Cho hàm số $y = A \sin(\omega x + \varphi)$. Tính $M = y'' + \omega^2.y$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } y' = A\omega \cos(\omega x + \varphi) \Rightarrow y'' = -A\omega^2 \sin(\omega x + \varphi)$$

$$\Rightarrow y'' + \omega^2.y = -A\omega^2 \sin(\omega x + \varphi) + A\omega^2 \sin(\omega x + \varphi) = 0.$$

Ví dụ 9: Cho hàm số $y = \sin 2x - \cos 2x$. Giải phương trình $y'' = 0$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } y' = 2 \cos 2x + 2 \sin 2x \Rightarrow y'' = -4 \sin 2x + 4 \cos 2x.$$

$$\text{Phương trình } y'' = 0 \Leftrightarrow -4 \sin 2x + 4 \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}.$$

Ví dụ 10: Cho hàm số: $y = (m-4)\frac{x^2}{2} + \cos x$.

Tìm m sao cho $y'' \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = (m-4)x - \sin x \Rightarrow y'' = m-4 - \cos x$

$$y'' \leq 0 \Leftrightarrow m-4 - \cos x \leq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq m-4 (*)$$

Vì $\cos x \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy bất phương trình (*) luôn nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -1 \geq m-4 \Leftrightarrow m \leq 3$.

Ví dụ 11: Cho hàm số $y = \frac{3x-2}{1-x}$. Giải bất phương trình $y'' > 0$.

Hướng dẫn giải

$$\text{Ta có: } y' = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow y'' = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

$$\text{Vậy } y'' > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{(1-x)^3} > 0 \Leftrightarrow 1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1.$$

Ví dụ 12 : Hàm số $f(x) = \frac{x^3+3x+2}{x-1}$ có $f''(x) = \frac{ax^3+bx^2+cx+d}{(x-1)^3}$. Tính $S = a-b+c-2d$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } f(x) = \frac{x^3+3x+2}{x-1} = x^2 + x + 4 + \frac{6}{x-1}.$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2x+1 - \frac{6}{(x-1)^2}.$$

$$\Rightarrow f''(x) = 2 + \frac{12}{(x-1)^3} = \frac{2(x-1)^3+12}{(x-1)^3} = \frac{2x^3-6x^2+6x+10}{(x-1)^3}.$$

$$\Rightarrow a=2, b=-6, c=6, d=10.$$

$$\text{Do đó } S = a-b+c-2d = -6.$$

Dạng 8: Ý nghĩa vật lý của đạo hàm cấp hai

1. Phương pháp

Ý nghĩa của đạo hàm cấp hai: Gia tốc tức thời (γ) tại thời điểm t là đạo hàm cấp 2 của hàm số

$$s = f(t).$$

2. Các ví dụ rèn luyện kỹ năng

Câu 1: Một chất điểm chuyển động thẳng được xác định bởi phương trình : $s = t^3 - 3t^2 + 5t + 2$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính gia tốc của chuyển động khi $t = 3$.

Lời giải

- Gia tốc chuyển động tại $t = 3s$ là $s''(3)$
- Ta có: $s'(t) = 3t^2 - 6t + 5$
- $s''(t) = 6t - 6 \Rightarrow s''(3) = 12m/s^2$.

Câu 2: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = -t^3 + 3t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Tính vận tốc của chuyển động tại thời điểm gia tốc triệt tiêu.

Lời giải

- Vận tốc của chuyển động chính là đạo hàm cấp một của quãng đường:
 $v = S' = -3t^2 + 6t + 9$
- Gia tốc của chuyển động chính là đạo hàm cấp hai của quãng đường: $a = S'' = -6t + 6$
- Gia tốc triệt tiêu khi $S'' = 0 \Leftrightarrow t = 1$.
- Khi đó vận tốc của chuyển động là $S'(1) = 12m/s$.

Câu 3: Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = -t^3 + 6t^2$ với t là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $s(t)$ là quãng đường đi được trong khoảng thời gian t . Tính thời điểm t tại đó vận tốc đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

Ta có $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 12t$ có đồ thị là Parabol, do đó $v(t)_{\max} \Leftrightarrow t = \frac{-12}{-6} = 2$.

C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

Bài 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 2x^3 - \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{1}{3}$;

b) $y = \frac{-2x+3}{x-4}$;

c) $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x-1}$;

d) $y = \sqrt{5x}$.

Lời giải

a) $y' = 6x^2 - x + 4$

b) $y' = \left(\frac{-2x+3}{x-4} \right)' = \left(-2 - \frac{5}{x-4} \right)' = \frac{5}{(x-4)^2}$

c) $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x-1} = \frac{x^2 - x - x + 1 + 2}{x-1} = x - 1 + \frac{2}{x-1}$

$y' = 1 - \frac{2}{(x-1)^2}$

d) $y' = (5x)' \cdot \frac{1}{2\sqrt{5x}} = \frac{5}{2\sqrt{5x}}$

Bài 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \sin 3x$;

b) $y = \cos^3 2x$;

c) $y = \tan^2 x$;

d) $y = \cot(4 - x^2)$.

Lời giải

$$a) y' = (3x)' \cdot \cos 3x = 3 \cos 3x$$

$$b) y' = (\cos 2x)' \cdot 3 \cos^2 2x = (2x)' \cdot (-\sin 2x) \cdot 3 \cos^2 2x = -6 \sin 2x \cos 2x$$

$$c) y' = (\tan x)' \cdot 2 \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot 2 \tan x = \frac{2 \tan x}{\cos^2 x}$$

$$d) y' = (4 - x^2)' \cdot \frac{1}{\sin^2 x} = -2x \cdot \frac{-1}{\sin^2 x} = \frac{2x}{\sin^2 x}$$

Bài 3. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$a) y = (x^2 - x) \cdot 2^x;$$

$$b) y = x^2 \log_3 x;$$

$$c) y = e^{3x+1}.$$

Lời giải

$$a) y' = (x^2 - x)' \cdot 2^x + (x^2 - x) \cdot (2^x)' = (2x - 1) \cdot 2^x + (x^2 - x) \cdot 2^x \ln 2$$

$$b) y' = (x^2)' \log_3 x + x^2 \cdot (\log_3 x)' = 2x \log_3 x + x^2 \cdot \frac{1}{x \ln 3}$$

$$c) y' = (3x + 1)' \cdot e^{3x+1} = 3 \cdot e^{3x+1}$$

Bài 4. Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

$$a) y = 2x^4 - 5x^2 + 3;$$

$$b) y = xe^x.$$

Lời giải

$$a) y' = 8x^3 - 10x; y'' = 24x^2 - 10$$

$$b) y' = e^x + x \cdot e^x; y'' = e^x + e^x + x \cdot e^x = 2e^x + x \cdot e^x$$

Bài 5. Cân nặng trung bình của một bé gái trong độ tuổi từ 0 đến 36 tháng có thể được tính gần đúng bởi hàm số $w(t) = 0,000758t^3 - 0,0596t^2 + 1,82t + 8,15$, trong đó t được tính bằng tháng và w được tính bằng pound (nguồn: https://www.cde.gov/growthcharts/data/who/GrChrt_Boys). Tính tốc độ thay đổi cân nặng của bé gái đó tại thời điểm 10 tháng tuổi.

Lời giải

Tốc độ thay đổi cân nặng của bé gái là: $w'(t) = 0,002274t^2 - 0,1192t + 1,82$

Khi $t = 10$, ta có: $w'(10) = 0,002274 \cdot 10^2 - 0,1192 \cdot 10 + 1,82 = 0,8554$

Bài 6. Một công ty xác định rằng tổng chi phí của họ, tính theo nghìn đô-la, để sản xuất x mặt hàng là $C(x) = \sqrt{5x^2 + 60}$ và công ty lên kế hoạch nâng sản lượng trong t tháng kể từ nay theo hàm số $x(t) = 20t + 40$. Chi phí sẽ tăng nhanh thế nào sau 4 tháng kể từ khi công ty thực hiện kế hoạch đó?

Lời giải

Tốc độ tăng của chi phí theo thời gian là

$$C'(t) = C'(x) \cdot x'(t) = \left(\sqrt{5x^2 + 60} \right)' (20t + 40)' = (5x^2 + 60)' \cdot \frac{1}{2\sqrt{5x^2 + 60}} \cdot 20 = 10x \cdot \frac{1}{2\sqrt{5x^2 + 60}} \cdot 20$$

$$= 100x \cdot \frac{1}{2\sqrt{5x^2 + 60}} = 100(20t + 40) \cdot \frac{1}{\sqrt{5(20t + 40)^2 + 60}}$$

$$C'(4) = 100(20.4 + 40) \cdot \frac{1}{\sqrt{5(20.4 + 40)^2 + 60}} = 44,7$$

Khi $t = 4$ thì

Bài 7. Trên Mặt Trăng, quãng đường rơi tự do của một vật được cho bởi công thức $s(t) = 0,81t^2$, trong đó t là thời gian được tính bằng giây và s tính bằng mét. Một vật được thả rơi từ độ cao 200m phía trên Mặt Trăng. Tại thời điểm $t = 2$ sau khi thả vật đó, tính:

- a) Quãng đường vật đã rơi;
b) Gia tốc của vật.

Lời giải

a) Khi $t = 2$ thì $s(t) = 0,81.2^2 = 3,24(m)$

b) Ta có: $v(t) = s'(t) = 1,62t$

Gia tốc của vật là: $v'(t) = 1,62$

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2\sqrt{2}x^2 + 8x - 1$, có đạo hàm là $f'(x)$. Tập hợp những giá trị của x

để $f'(x) = 0$ là:

- A.** $\{-2\sqrt{2}\}$. **B.** $\{2; \sqrt{2}\}$. **C.** $\{-4\sqrt{2}\}$. **D.** $\{2\sqrt{2}\}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x) = x^2 - 4\sqrt{2}x + 8$.

Phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4\sqrt{2}x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}$.

Câu 2: Cho hàm số $y = 3x^3 + x^2 + 1$, có đạo hàm là y' . Để $y' \leq 0$ thì x nhận các giá trị thuộc tập nào sau đây?

- A.** $\left[-\frac{2}{9}; 0\right]$. **B.** $\left[-\frac{9}{2}; 0\right]$.
C. $\left(-\infty; -\frac{9}{2}\right] \cup [0; +\infty)$. **D.** $\left(-\infty; -\frac{2}{9}\right] \cup [0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = 9x^2 + 2x$.

Do đó, $y' \leq 0 \Leftrightarrow y' = 9x^2 + 2x \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{9} \leq x \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{2}{9}; 0\right]$.

Câu 3: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ tại điểm $x = -1$.

- A.** $f'(-1) = 4$. **B.** $f'(-1) = 14$. **C.** $f'(-1) = 15$. **D.** $f'(-1) = 24$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x) = -4x^3 + 12x^2 - 6x + 2$.

Suy ra $f'(-1) = -4(-1)^3 + 12(-1)^2 - 6(-1) + 2 = 24$.

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (2m+1)x^2 - mx - 4$, có đạo hàm là y' . Tìm tất cả các giá trị của m để $y' \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

A. $m \in \left(-1; -\frac{1}{4}\right)$.

B. $m \in \left[-1; -\frac{1}{4}\right]$.

C. $m \in (-\infty; -1] \cup \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

D. $m \in \left[-1; \frac{1}{4}\right]$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = x^2 - 2(2m+1)x - m$.

Khi đó, $y' \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - 2(2m+1)x - m \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \Delta' = (2m+1)^2 + m \leq 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 5m + 1 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq -\frac{1}{4}.$$

Câu 5: Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}mx^3 + (m-1)x^2 - mx + 3$, có đạo hàm là y' . Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 6$.

A. $m = -1 + \sqrt{2}$; $m = -1 - \sqrt{2}$.

B. $m = -1 - \sqrt{2}$.

C. $m = 1 - \sqrt{2}$; $m = 1 + \sqrt{2}$.

D. $m = -1 + \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = -mx^2 + 2(m-1)x - m$.

Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow -mx^2 + 2(m-1)x - m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m < \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Khi đó, gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình $\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m} \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases}$.

Ta có: $x_1^2 + x_2^2 = 6 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 6 \Leftrightarrow \left(\frac{2(m-1)}{m}\right)^2 - 2 = 6$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1 \pm \sqrt{2}.$$

So với điều kiện thì $m = -1 \pm \sqrt{2}$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 6: Biết hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a > 0$) có đạo hàm $f'(x) > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $b^2 - 3ac > 0$. **B.** $b^2 - 3ac \geq 0$. **C.** $b^2 - 3ac < 0$. **D.** $b^2 - 3ac \leq 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Vì $a > 0$ và $f'(x) > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên $\Delta' < 0$ tức là $b^2 - 3ac < 0$.

Câu 7: Biết hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a < 0$) có đạo hàm $f'(x) < 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $b^2 - 3ac > 0$. **B.** $b^2 - 3ac \geq 0$. **C.** $b^2 - 3ac < 0$. **D.** $b^2 - 3ac \leq 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Vì $a < 0$ và $f'(x) < 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên $\Delta' < 0$ tức là $b^2 - 3ac < 0$.

Câu 8: Tính đạo hàm của của hàm số $y = (x^3 - 2x^2)^2$.

- A.** $f'(x) = 6x^5 - 20x^4 + 16x^3$. **B.** $f'(x) = 6x^5 + 16x^3$.
C. $f'(x) = 6x^5 - 20x^4 + 4x^3$. **D.** $f'(x) = 6x^5 - 20x^4 - 16x^3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = 2(x^3 - 2x^2)'(x^3 - 2x^2) = 2(3x^2 - 4x)(x^3 - 2x^2) = 6x^5 - 20x^4 + 16x^3$.

Câu 9: Cho hàm số $y = (2x^2 + 1)^3$, có đạo hàm là y' . Để $y' \geq 0$ thì x nhận các giá trị nào sau đây?

- A.** Không có giá trị nào của x .
B. $(-\infty; 0]$. **C.** $[0; +\infty)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = 3(2x^2 + 1)'(2x^2 + 1)^2 = 3 \cdot 4x(2x^2 + 1)^2 = 12x(2x^2 + 1)^2$.

Do đó, $y' \geq 0 \Leftrightarrow 12x(2x^2 + 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

Câu 10: Tính đạo hàm của hàm số $y = (1 - x^3)^5$.

- A.** $y' = 5x^2(1 - x^3)^4$. **B.** $y' = -15x^2(1 - x^3)^4$.
C. $y' = -3x^2(1 - x^3)^4$. **D.** $y' = -5x^2(1 - x^3)^4$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 5(1-x^3)'(1-x^3)^4 = 5(-3x^2)(1-x^3)^4 = -15x^2(1-x^3)^4$.

Câu 11: Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^3 - 2x^2)^{2016}$.

A. $y' = 2016(x^3 - 2x^2)^{2015}$.

B. $y' = 2016(x^3 - 2x^2)^{2015}(3x^2 - 4x)$.

C. $y' = 2016(x^3 - 2x^2)(3x^2 - 4x)$.

D. $y' = 2016(x^3 - 2x^2)(3x^2 - 2x)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 2016(x^3 - 2x^2)'(x^3 - 2x^2)^{2015} = 2016(3x^2 - 4x)(x^3 - 2x^2)^{2015}$.

Câu 12: Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^2 - 2)(2x - 1)$.

A. $y' = 4x$.

B. $y' = 3x^2 - 6x + 2$.

C. $y' = 2x^2 - 2x + 4$.

D. $y' = 6x^2 - 2x - 4$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = (x^2 - 2)'(2x - 1) + (x^2 - 2)(2x - 1)' = 2x(2x - 1) + 2(x^2 - 2) = 6x^2 - 2x - 4$

Câu 13: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-2018)$ tại điểm $x = 0$.

A. $f'(0) = 0$.

B. $f'(0) = -2018!$.

C. $f'(0) = 2018!$.

D. $f'(0) = 2018$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x) = f_0(x)f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)$ ($n \geq 1; n \in \mathbb{Z}$).

Bằng quy nạp, dễ dàng chứng minh được:

$$f'(x) = f_0'(x)f_1(x)\dots f_n(x) + f_0(x)f_1'(x)\dots f_n(x) + \dots + f_0(x)f_1(x)\dots f_n'(x)$$

Áp dụng công thức trên cho hàm số $f(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-2018)$ và thay $x = 0$ với chú ý $f_0(0) = 0$ ta được:

$$f'(0) = (-1) \cdot (-2) \dots (-2018) + 0 \cdot (-2) \dots (-2018) + \dots + 0 \cdot (-1) \dots (-2017) = 2018!.$$

Câu 14: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x(x+1)(x+2)\dots(x+2018)$ tại điểm $x = -1004$.

A. $f'(-1004) = 0$.

B. $f'(-1004) = 1004!$.

C. $f'(-1004) = -1004!$.

D. $f'(-1004) = (1004!)^2$.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x) = f_0(x)f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)$ ($n \geq 1; n \in \mathbb{Z}$).

Bằng quy nạp, dễ dàng chứng minh được:

$$f'(x) = f_0'(x)f_1(x)\dots f_n(x) + f_0(x)f_1'(x)\dots f_n(x) + \dots + f_0(x)f_1(x)\dots f_n'(x).$$

Áp dụng công thức trên cho hàm số $f(x) = x(x+1)(x+2)\dots(x+2018)$ và thay $x = -1004$ với chú ý $f_{1004}(-1004) = 0$ ta được

$$\begin{aligned} f'(-1004) &= [(-1004)(-1004+1)\dots(-1004+1003)] \cdot [(-1004+1005)\dots(-1004+2018)] \\ &= (-1) \cdot 1 \cdot (-2) \cdot 2 \cdot \dots \cdot (-1004) \cdot 1004 = (1004!)^2. \end{aligned}$$

Câu 15: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ tại điểm $x = -1$.

- A.** $f'(-1) = 1$. **B.** $f'(-1) = -\frac{1}{2}$. **C.** $f'(-1) = -2$. **D.** $f'(-1) = 0$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(-1) = -\frac{1}{2}$$

Câu 16: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 2}$.

- A.** $y' = 1 + \frac{3}{(x+2)^2}$. **B.** $y' = \frac{x^2 + 6x + 7}{(x+2)^2}$. **C.** $y' = \frac{x^2 + 4x + 5}{(x+2)^2}$. **D.** $y' = \frac{x^2 + 8x + 1}{(x+2)^2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y = x - \frac{3}{x+2} \Rightarrow y' = 1 + \frac{3}{(x+2)^2}.$$

Câu 17: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x(1-3x)}{x+1}$.

- A.** $y' = \frac{-9x^2 - 4x + 1}{(x+1)^2}$. **B.** $y' = \frac{-3x^2 - 6x + 1}{(x+1)^2}$. **C.** $y' = 1 - 6x^2$. **D.** $y' = \frac{1 - 6x^2}{(x+1)^2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } y = \frac{x(1-3x)}{x+1} = \frac{x-3x^2}{x+1}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{(x-3x^2)'(x+1) - (x-3x^2)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{(1-6x)(x+1) - (x-3x^2)}{(x+1)^2} = \frac{-3x^2 - 6x + 1}{(x+1)^2}.$$

Câu 18: Cho hàm số $f(x) = \frac{1-3x+x^2}{x-1}$. Giải bất phương trình $f'(x) > 0$.

- A.** $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. **B.** $x \in \emptyset$. **C.** $x \in (1; +\infty)$. **D.** $x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } f'(x) &= \frac{(1-3x+x^2)'(x-1) - (1-3x+x^2)(x-1)'}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(-3+2x)(x-1) - (1-3x+x^2)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Bất phương trình } f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+2 > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Câu 19: Cho hàm số $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$. Phương trình $f'(x) = 0$ có tập nghiệm S là:

- A.** $S = \left\{0; \frac{2}{3}\right\}$. **B.** $S = \left\{-\frac{2}{3}; 0\right\}$. **C.** $S = \left\{0; \frac{3}{2}\right\}$. **D.** $S = \left\{-\frac{3}{2}; 0\right\}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{(x^3)'(x-1) - x^3(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{3x^2(x-1) - x^3}{(x-1)^2} = \frac{2x^3-3x^2}{(x-1)^2}.$$

$$\text{Phương trình } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3-3x^2}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^3-3x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Câu 20: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{-2x^2+x-7}{x^2+3}$.

- A.** $y' = \frac{-3x^2-13x-10}{(x^2+3)^2}$. **B.** $y' = \frac{-x^2+x+3}{(x^2+3)^2}$.
C. $y' = \frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}$. **D.** $y' = \frac{-7x^2-13x-10}{(x^2+3)^2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } y' = \frac{(-2x^2+x-7)'(x^2+3) - (x^2+3)'(-2x^2+x-7)}{(x^2+3)^2}$$

$$y' = \frac{(-4x+1)(x^2+3) - 2x(-2x^2+x-7)}{(x^2+3)^2} = \frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}$$

Câu 21: Cho hàm số $y = -2\sqrt{x} + 3x$. Tập nghiệm S của bất phương trình $y' > 0$ là:

- A. $S = (-\infty; +\infty)$. B. $S = \left(-\infty; \frac{1}{9}\right)$. C. $S = \left(\frac{1}{9}; +\infty\right)$. D. $S = \emptyset$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = -2\sqrt{x} + 3x \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{x}} + 3$.

Do đó $y' > 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt{x}} + 3 > 0 \Leftrightarrow 3 > \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x > \frac{1}{9}$

Câu 22: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x-1}$ tại điểm $x = 1$.

- A. $f'(1) = \frac{1}{2}$. B. $f'(1) = 1$. C. $f'(1) = 0$. D. Không tồn tại.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$.

Tại $x = 1$ thì $f'(x)$ không xác định.

Câu 23: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{1-2x^2}$.

- A. $y' = \frac{1}{2\sqrt{1-2x^2}}$. B. $y' = \frac{-4x}{\sqrt{1-2x^2}}$. C. $y' = \frac{-2x}{\sqrt{1-2x^2}}$. D. $y' = \frac{2x}{\sqrt{1-2x^2}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = \frac{(1-2x^2)'}{2\sqrt{1-2x^2}} = \frac{-4x}{2\sqrt{1-2x^2}} = \frac{-2x}{\sqrt{1-2x^2}}$.

Câu 24: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x^3}$.

- A. $y' = \frac{x-6x^2}{\sqrt{x^2-4x^3}}$. B. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2-4x^3}}$. C. $y' = \frac{x-12x^2}{2\sqrt{x^2-4x^3}}$. D. $y' = \frac{x-6x^2}{2\sqrt{x^2-4x^3}}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = \frac{2x-12x^2}{2\sqrt{x^2-4x^3}} = \frac{x-6x^2}{\sqrt{x^2-4x^3}}$.

Câu 25: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. Tập nghiệm S của bất phương trình $f'(x) \geq f(x)$ có bao nhiêu giá trị nguyên?

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{(x^2 - 2x)'}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}}.$$

$$\text{Khi đó, } f'(x) \geq f(x) \Leftrightarrow \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}} \geq \sqrt{x^2 - 2x}$$

$$\Leftrightarrow x - 1 \geq x^2 - 2x \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

Vì $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \{1; 2\} \Rightarrow$ tập S có 2 giá trị nguyên.

Câu 26: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x\sqrt{x}$.

- A. $f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x}$. B. $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$. C. $f'(x) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}}{x}$. D. $f'(x) = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } f'(x) = x' \cdot \sqrt{x} + x \cdot (\sqrt{x})' = \sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

Câu 27: Tính đạo hàm của hàm số $y = x\sqrt{x^2 - 2x}$.

- A. $y' = \frac{2x - 2}{\sqrt{x^2 - 2x}}$. B. $y' = \frac{3x^2 - 4x}{\sqrt{x^2 - 2x}}$. C. $y' = \frac{2x^2 - 3x}{\sqrt{x^2 - 2x}}$. D. $y' = \frac{2x^2 - 2x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x}}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y' = \sqrt{x^2 - 2x} + x \cdot \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{x^2 - 2x + x^2 - x}{\sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{2x^2 - 3x}{\sqrt{x^2 - 2x}}.$$

Câu 28: Tính đạo hàm của hàm số $y = (2x - 1)\sqrt{x^2 + x}$.

- A. $y' = 2\sqrt{x^2 + x} - \frac{4x^2 - 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$. B. $y' = 2\sqrt{x^2 + x} + \frac{4x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + x}}$.
C. $y' = 2\sqrt{x^2 + x} + \frac{4x^2 - 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$. D. $y' = 2\sqrt{x^2 + x} + \frac{4x^2 + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có } y' &= (2x-1)' \cdot \sqrt{x^2+x} + (2x-1) \cdot (\sqrt{x^2+x})' \\ &= 2 \cdot \sqrt{x^2+x} + \frac{(2x-1)(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x}} = 2\sqrt{x^2+x} + \frac{4x^2-1}{2\sqrt{x^2+x}}. \end{aligned}$$

Câu 29: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

A. $y' = \frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

B. $y' = -\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

C. $y' = \frac{x}{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$. **D.** $y' = -\frac{x(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có } y' &= \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right)' = \frac{-(\sqrt{x^2+1})'}{x^2+1} = \frac{-(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}(x^2+1)} \\ &= \frac{-x}{\sqrt{x^2+1}(x^2+1)}. \end{aligned}$$

Câu 30: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$.

A. $y' = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$.

B. $y' = \frac{1+x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

C. $y' = \frac{2(x+1)}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

D. $y' = \frac{x^2-x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có } y' &= \frac{(x-1)' \cdot \sqrt{x^2+1} - (x-1)(\sqrt{x^2+1})'}{(\sqrt{x^2+1})^2} = \frac{\sqrt{x^2+1} - (x-1) \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2} \\ &= \frac{x^2+1-x^2+x}{(\sqrt{x^2+1})^3} = \frac{1+x}{\sqrt{(x^2+1)^3}}. \end{aligned}$$

Câu 31: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\frac{2x-1}{x+2}}$.

A. $y' = \frac{5}{(2x-1)^2} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$.

B. $y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{(2x-1)^2} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$.

C. $y' = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$.

D. $y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{(x+2)^2} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{2x-1}{x+2}}} \cdot \left(\frac{2x-1}{x+2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{(x+2)^2} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}.$$

Câu 32: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\frac{x^2+1}{x}}$.

A. $y' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{x^2+1}} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$

B. $y' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{x^2+1}}.$

C. $y' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{x^2+1}} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$

D. $y' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{x^2+1}} \left(x - \frac{1}{x^2}\right).$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^2+1}{x}}} \left(\frac{x^2+1}{x}\right)' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{x^2+1}} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

Câu 33: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$.

A. $y' = -\frac{1}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})^2}.$

B. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x-1}}.$

C. $y' = \frac{1}{4\sqrt{x+1}} + \frac{1}{4\sqrt{x-1}}.$

D. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x-1}}.$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y = \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2}.$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{2} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \right) = \frac{1}{4\sqrt{x+1}} + \frac{1}{4\sqrt{x-1}}.$$

Câu 34: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{3x^2 + 2x + 1}{2\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 1}}$ tại điểm $x = 0$.

A. $f'(0) = 0.$

B. $f'(0) = \frac{1}{2}.$

C. Không tồn tại.

D. $f'(0) = 1.$

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f'(x) &= \frac{(3x^2 + 2x + 1)' \cdot 2\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 1} - (3x^2 + 2x + 1) \cdot (2\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 1})'}{(2\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 1})^2} \\ &= \frac{(6x + 2)2\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 1} - (3x^2 + 2x + 1) \frac{9x^2 + 4x}{\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 1}}}{(2\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 1})^2} = \frac{9x^4 + 6x^3 - 9x^2 + 8x + 4}{4(3x^3 + 2x^2 + 1)\sqrt{3x^3 + 2x^2 + 1}} \\ \Rightarrow f'(0) &= \frac{4}{8} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Câu 35: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{a^3}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ (a là hằng số).

A. $y' = \frac{a^3 x}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}.$

B. $y' = \frac{a^3 x}{a^2 - x^2}.$

C. $y' = \frac{a^3 x}{2(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}.$

D. $y' = \frac{a^3(3a^2 - 2x)}{2(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}.$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y' = \frac{-a^3(\sqrt{a^2 - x^2})'}{a^2 - x^2} = \frac{-a^3(-2x)}{2\sqrt{a^2 - x^2} \cdot (a^2 - x^2)} = \frac{a^3 x}{(a^2 - x^2)\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Câu 36: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right).$

A. $y' = 3\cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right).$

B. $y' = -3\cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right).$

C. $y' = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right).$

D. $y' = -3\sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right).$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } y' = \left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)' \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) = -3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right).$$

Câu 37: Tính đạo hàm của hàm số $y = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right).$

A. $y' = x\cos\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right).$

B. $y' = \frac{1}{2}x^2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right).$

C. $y' = \frac{1}{2}x\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right).$

D. $y' = \frac{1}{2}x\cos\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right).$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y' = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{3} - x^2 \right)' \cdot \cos \left(\frac{\pi}{3} - x^2 \right) = -\frac{1}{2} \cdot (-2x) \cdot \cos \left(\frac{\pi}{3} - x^2 \right) = x \cdot \cos \left(\frac{\pi}{3} - x^2 \right).$$

Câu 38: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin(x^2 - 3x + 2)$.

A. $y' = \cos(x^2 - 3x + 2)$.

B. $y' = (2x - 3) \cdot \sin(x^2 - 3x + 2)$.

C. $y' = (2x - 3) \cdot \cos(x^2 - 3x + 2)$.

D. $y' = -(2x - 3) \cdot \cos(x^2 - 3x + 2)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y' = (x^2 - 3x + 2)' \cdot \cos(x^2 - 3x + 2) = (2x - 3) \cdot \cos(x^2 - 3x + 2).$$

Câu 39: Tính đạo hàm của hàm số $y = x^2 \tan x + \sqrt{x}$.

A. $y' = 2x \tan x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

B. $y' = 2x \tan x + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

C. $y' = 2x \tan x + \frac{x^2}{\cos^2 x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

D. $y' = 2x \tan x + \frac{x^2}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y' = (x^2)' \tan x + (\tan x)' \cdot x^2 + (\sqrt{x})' = 2x \tan x + \frac{x^2}{\cos^2 x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Câu 40: Tính đạo hàm của hàm số $y = 2 \cos x^2$.

A. $y' = -2 \sin x^2$.

B. $y' = -4x \cos x^2$.

C. $y' = -2x \sin x^2$.

D. $y' = -4x \sin x^2$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y' = -2 \cdot (x^2)' \cdot \sin x^2 = -2 \cdot 2x \cdot \sin x^2 = -4x \sin x^2.$$

Câu 41: Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan \frac{x+1}{2}$.

A. $y' = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x+1}{2}}$.

B. $y' = \frac{1}{\cos^2 \frac{x+1}{2}}$.

C. $y' = -\frac{1}{2 \cos^2 \frac{x+1}{2}}$.

D. $y' = -\frac{1}{\cos^2 \frac{x+1}{2}}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y' = \left(\tan \frac{x+1}{2} \right)' = \frac{\left(\frac{x+1}{2} \right)'}{\cos^2 \frac{x+1}{2}} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x+1}{2}}.$$

Câu 42: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin \sqrt{2+x^2}$.

A. $y' = \frac{2x+2}{\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2}.$

B. $y' = -\frac{x}{\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2}.$

C. $y' = \frac{x}{\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2}.$

D. $y' = \frac{x+1}{\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2}.$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y' = \left(\sqrt{2+x^2} \right)' \cos \sqrt{2+x^2} = \frac{(2+x^2)'}{2\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2} = \frac{x}{\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2}$$

Câu 43: Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos \sqrt{2x+1}$.

A. $y' = -\frac{\sin \sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}.$

B. $y' = \frac{\sin \sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}.$

C. $y' = -\sin \sqrt{2x+1}.$

D. $y' = -\frac{\sin \sqrt{2x+1}}{2\sqrt{2x+1}}.$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y' = -\left(\sqrt{2x+1} \right)' \sin \sqrt{2x+1} = \frac{(2x+1)'}{2\sqrt{2x+1}} \sin \sqrt{2x+1} = -\frac{\sin \sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}.$$

Câu 44: Tính đạo hàm của hàm số $y = \cot \sqrt{x^2+1}$.

A. $y' = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1} \cdot \sin^2 \sqrt{x^2+1}}.$

B. $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1} \cdot \sin^2 \sqrt{x^2+1}}.$

C. $y' = -\frac{1}{\sin^2 \sqrt{x^2+1}}.$

D. $y' = \frac{1}{\sin^2 \sqrt{x^2+1}}.$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y' = -\frac{\left(\sqrt{x^2+1} \right)'}{\sin^2 \sqrt{x^2+1}} = -\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sin^2 \sqrt{x^2+1}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1} \cdot \sin^2 \sqrt{x^2+1}}.$$

Câu 45: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin(\sin x)$.

A. $y' = \cos(\sin x).$

B. $y' = \cos(\cos x).$

C. $y' = \cos x \cdot \cos(\sin x).$

D. $y' = \cos x \cdot \cos(\cos x).$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = [\sin(\sin x)]' = (\sin x)' \cdot \cos(\sin x) = \cos x \cdot \cos(\sin x)$.

Câu 46: Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos(\tan x)$.

A. $y' = \sin(\tan x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$.

B. $y' = -\sin(\tan x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$.

C. $y' = \sin(\tan x)$.

D. $y' = \sin(\tan x)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = -(\tan x)' \sin(\tan x) = -\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \sin(\tan x)$.

Câu 47: Tính đạo hàm của hàm số $y = 2\sin^2 x - \cos 2x + x$.

A. $y' = 4\sin x + \sin 2x + 1$.

B. $y' = 4\sin 2x + 1$.

C. $y' = 4\cos x + 2\sin 2x + 1$.

D. $y' = 4\sin x - 2\sin 2x + 1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 2 \cdot 2(\sin x)' \cdot \sin x + (2x)' \sin 2x + 1 = 4\cos x \sin x + 2\sin 2x + 1$
 $= 2\sin 2x + 2\sin 2x + 1 = 4\sin 2x + 1$

Câu 48: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4}$.

A. $y' = -2\sin(\pi - 4x) + \frac{\pi}{2}$.

B. $y' = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \frac{\pi}{2}$.

C. $y' = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \frac{\pi}{2}x$.

D. $y' = -2\sin(\pi - 4x)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y = \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4} = \frac{1 - \cos(\pi - 4x)}{2} + \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4}$
 $= -\frac{1}{2}\cos(\pi - 4x) + \frac{\pi}{2}x + \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

Suy ra $y' = \left(-\frac{1}{2}\cos(\pi - 4x) + \frac{\pi}{2}x + \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right)'$
 $= \frac{1}{2}(\pi - 4x)' \sin(\pi - 4x) + \frac{\pi}{2} = -2\sin(\pi - 4x) + \frac{\pi}{2}$.

Câu 49: Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos^3(2x - 1)$.

A. $y' = -3\sin(4x - 2)\cos(2x - 1)$.

B. $y' = 3\cos^2(2x - 1)\sin(2x - 1)$.

C. $y' = -3 \cos^2(2x-1) \sin(2x-1).$

D. $y' = 6 \cos^2(2x-1) \sin(2x-1).$

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có } y' &= [\cos^3(2x-1)]' = 3 \cos^2(2x-1) [\cos(2x-1)]' \\ &= -6 \sin(2x-1) \cos^2(2x-1) \\ &= -3 [2 \sin(2x-1) \cos(2x-1)] \cos(2x-1) = -3 \sin(4x-2) \cos(2x-1). \end{aligned}$$

Câu 50: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin^3(1-x).$

A. $y' = \cos^3(1-x).$

B. $y' = -\cos^3(1-x).$

C. $y' = -3 \sin^2(1-x) \cdot \cos(1-x).$

D. $y' = 3 \sin^2(1-x) \cdot \cos(1-x).$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y' = [\sin^3(1-x)]' = 3 \cdot [\sin(1-x)]' \cdot \sin^2(1-x) = -3 \cdot \cos(1-x) \cdot \sin^2(1-x).$$

Câu 51: Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan^3 x + \cot 2x.$

A. $y' = 3 \tan^2 x \cdot \cot x + 2 \tan 2x.$

B. $y' = -\frac{3 \tan^2 x}{\cos^2 x} + \frac{2}{\sin^2 2x}.$

C. $y' = 3 \tan^2 x - \frac{1}{\sin^2 2x}.$

D. $y' = \frac{3 \tan^2 x}{\cos^2 x} - \frac{2}{\sin^2 2x}.$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y' = (\tan^3 x + \cot 2x)' = 3 \tan^2 x (\tan x)' - \frac{2}{\sin^2 2x} = \frac{3 \tan^2 x}{\cos^2 x} - \frac{2}{\sin^2 2x}$$

Câu 52: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}.$

A. $y' = \frac{-\sin 2x}{(\sin x - \cos x)^2}.$

B. $y' = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{(\sin x - \cos x)^2}.$

C. $y' = \frac{2 - 2 \sin 2x}{(\sin x - \cos x)^2}.$

D. $y' = \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}.$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = \frac{\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{-\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = -\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\text{Suy ra } y' = -\frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{1}{\left(\frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}.$$

Câu 53: Tính đạo hàm của hàm số $y = -\frac{2}{\tan(1-2x)}$.

A. $y' = \frac{4x}{\sin^2(1-2x)}$. **B.** $y' = \frac{-4}{\sin(1-2x)}$. **C.** $y' = \frac{-4x}{\sin^2(1-2x)}$. **D.** $y' = \frac{-4}{\sin^2(1-2x)}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y' = -\frac{-2(\tan(1-2x))'}{\tan^2(1-2x)} = \frac{-4 \cdot \frac{1}{\cos^2(1-2x)}}{\tan^2(1-2x)} = \frac{-4}{\sin^2(1-2x)}.$$

Câu 54: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{\cos 2x}{3x+1}$.

A. $y' = \frac{-2(3x+1)\sin 2x - 3\cos 2x}{(3x+1)^2}$. **B.** $y' = \frac{-2(3x+1)\sin 2x - 3\cos 2x}{3x+1}$.
C. $y' = \frac{-(3x+1)\sin 2x - 3\cos 2x}{(3x+1)^2}$. **D.** $y' = \frac{2(3x+1)\sin 2x + 3\cos 2x}{(3x+1)^2}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y' = \frac{(\cos 2x)'(3x+1) - (3x+1)' \cdot \cos 2x}{(3x+1)^2} = \frac{-2(3x+1)\sin 2x - 3\cos 2x}{(3x+1)^2}.$$

Câu 55: Cho $f(x) = 2x^2 - x + 2$ và $g(x) = f(\sin x)$. Tính đạo hàm của hàm số $g(x)$.

A. $g'(x) = 2\cos 2x - \sin x$. **B.** $g'(x) = 2\sin 2x + \cos x$.
C. $g'(x) = 2\sin 2x - \cos x$. **D.** $g'(x) = 2\cos 2x + \sin x$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } g(x) = f(\sin x) = 2\sin^2 x - \sin x + 2$$

$$\Rightarrow g'(x) = (2\sin^2 x - \sin x + 2)' = 2 \cdot 2\sin x \cdot \cos x - \cos x = 2\sin 2x - \cos x.$$

Câu 56: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 5\sin x - 3\cos x$ tại điểm $x = \frac{\pi}{2}$.

A. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$. **B.** $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3$. **C.** $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -5$. **D.** $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = (5\sin x - 3\cos x)' = 5(\sin x)' - 3(\cos x)' = 5\cos x + 3\sin x$.

Suy ra $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5\cos\frac{\pi}{2} + 3\sin\frac{\pi}{2} = 3$

Câu 57: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 2\sin\left(\frac{3\pi}{5} - 2x\right)$ tại điểm $x = -\frac{\pi}{5}$.

- A.** $f'\left(-\frac{\pi}{5}\right) = 4$. **B.** $f'\left(-\frac{\pi}{5}\right) = -4$. **C.** $f'\left(-\frac{\pi}{5}\right) = 2$. **D.** $f'\left(-\frac{\pi}{5}\right) = -2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = \left[2\sin\left(\frac{3\pi}{5} - 2x\right)\right]' = 2\left(\frac{3\pi}{5} - 2x\right)' \cos\left(\frac{3\pi}{5} - 2x\right) = -4\cos\left(\frac{3\pi}{5} - 2x\right)$.

Suy ra $f'\left(-\frac{\pi}{5}\right) = -4\cos\left(\frac{3\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}\right) = -4\cos\pi = 4$.

Câu 58: Hàm số $f(x) = x^4$ có đạo hàm là $f'(x)$, hàm số $g(x) = 2x + \sin\frac{\pi x}{2}$ có đạo hàm là $g'(x)$. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{f'(1)}{g'(1)}$.

- A.** $P = \frac{4}{3}$. **B.** $P = 2$. **C.** $P = -2$. **D.** $P = -\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x) = 4x^3$ và $g'(x) = \left(2x + \sin\frac{\pi x}{2}\right)' = 2 + \frac{\pi}{2} \cdot \cos\frac{\pi x}{2}$.

Suy ra $P = \frac{f'(1)}{g'(1)} = \frac{4}{2 + \frac{\pi}{2} \cos\frac{\pi}{2}} = 2$.

Câu 59: Hàm số $f(x) = 4x$ có đạo hàm là $f'(x)$, hàm số $g(x) = 4x + \sin\frac{\pi x}{4}$ có đạo hàm là $g'(x)$. Tính giá trị biểu thức $P = \frac{f'(2)}{g'(2)}$.

- A.** $P = 1$. **B.** $P = \frac{16}{16 + \pi}$. **C.** $P = \frac{16}{17}$. **D.** $P = \frac{1}{16}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = 4$ và $g'(x) = 4 + \frac{\pi}{4} \cos\frac{\pi x}{4}$.

Suy ra $P = \frac{f'(2)}{g'(2)} = \frac{4}{4 + \frac{\pi}{4} \cos\frac{\pi \cdot 2}{4}} = 1$

Câu 60: Hàm số $f(x) = a \sin x + b \cos x + 1$ có đạo hàm là $f'(x)$. Để $f'(0) = \frac{1}{2}$ và $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1$ thì giá trị của a và b bằng bao nhiêu?

A. $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $a = \frac{\sqrt{2}}{2}; b = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $a = \frac{1}{2}; b = -\frac{1}{2}$.

D. $a = b = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x) = a \cos x - b \sin x$. Khi đó
$$\begin{cases} f'(0) = \frac{1}{2} \\ f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \cos 0 - b \sin 0 = \frac{1}{2} \\ a \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + b \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}a + \frac{\sqrt{2}}{2}b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Câu 61: Cho hàm số $y = f(x) - \cos^2 x$ với $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$. Trong các biểu thức dưới đây, biểu thức nào xác định hàm số $f(x)$ thỏa mãn $y'(x) = 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$?

A. $f(x) = x + \frac{1}{2} \cos 2x$.

B. $f(x) = x - \frac{1}{2} \cos 2x$.

C. $f(x) = x - \sin 2x$.

D. $f(x) = x + \sin 2x$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'(x) = f'(x) + 2 \sin x \cos x = f'(x) + \sin 2x$.

Suy ra $y'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) + \sin 2x = 1 \Leftrightarrow f'(x) = 1 - \sin 2x$.

Đến đây ta lần lượt xét từng đáp án, ví dụ xét đáp án A ta có

$$f'(x) = \left(x + \frac{1}{2} \cos 2x\right)' = x' + \frac{1}{2}(\cos 2x)' = 1 - \sin 2x \text{ (thỏa mãn)}$$

Câu 62: Cho hàm số $y = \cos^2 x + \sin x$. Phương trình $y' = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$.

A. 1 nghiệm.

B. 2 nghiệm.

C. 3 nghiệm.

D. 4 nghiệm.

Lời giải

Chọn C

$$y' = -2 \cos x \sin x + \cos x = \cos x(1 - 2 \sin x)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} ; (k \in \mathbb{Z})$$

Vì $x \in (0; \pi) \Rightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6} \right\}$. Vậy có 3 nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$

Câu 63: Cho hàm số $y = (m+1)\sin x + m\cos x - (m+2)x + 1$. Tìm giá trị của m để $y' = 0$ có nghiệm?

- A.** $\begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 3 \end{cases}$. **B.** $m \geq 2$. **C.** $-1 \leq m \leq 3$. **D.** $m \leq -2$.

Lời giải

Chọn A

$$y' = (m+1)\cos x - m\sin x - (m+2)$$

$$\text{Phương trình } y' = 0 \Leftrightarrow (m+1)\cos x - m\sin x = (m+2)$$

Điều kiện phương trình có nghiệm là $a^2 + b^2 \geq c^2$

$$\Leftrightarrow (m+1)^2 + m^2 \geq (m+2)^2 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 3 \end{cases}$$

Câu 64: Cho hàm số $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$. Biểu diễn nghiệm của phương trình lượng giác $f'(x) = 0$ trên đường tròn lượng giác ta được mấy điểm phân biệt?

- A.** 1 điểm. **B.** 2 điểm. **C.** 3 điểm. **D.** 4 điểm.

Lời giải

Chọn B

$$f'(x) = \frac{-\sin x \cdot \sqrt{\cos 2x} - \cos x \cdot \frac{1}{2\sqrt{\cos 2x}}(-\sin 2x)}{\cos 2x} = \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Ta biểu diễn được 2 điểm phân biệt trên đường tròn lượng giác.

Câu 65: Cho hàm số $f(x) = -\cos x + \sin x - \cos 2x$. Phương trình $f'(x) = 1$ tương đương với phương trình nào sau đây?

- A.** $\sin x = 0$. **B.** $\sin x - 1 = 0$.
C. $(\sin x - 1)(\cos x - 1) = 0$. **D.** $\cos x = 0$.

Lời giải

Chọn C

$$f'(x) = \sin x + \cos x + 2\sin 2x$$

$$f'(x) = 1 \Leftrightarrow \sin x + \cos x + 2\sin 2x = 1$$

$$\text{Đặt } t = \sin x + \cos x \quad (|t| \leq \sqrt{2}) \Rightarrow \sin 2x = t^2 - 1$$

$$\text{Khi đó phương trình } \Leftrightarrow 2t^2 + t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{3}{2} \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Với } t = 1 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Nghiệm trên cũng là nghiệm của phương trình $(\sin x - 1)(\cos x - 1) = 0$.

Câu 66: Cho hàm số $f(x) = 2\frac{\cos^3 x}{3} + \sin^3 x - 2\cos x - 3\sin x$. Biểu diễn nghiệm của phương trình lượng giác $f'(x)$ trên đường tròn ta được mấy điểm phân biệt?

- A.** 1 điểm. **B.** 2 điểm. **C.** 4 điểm. **D.** 6 điểm.

Lời giải

Chọn B

$$f'(x) = 2\sin^3 x - 3\cos^3 x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \tan^3 x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \tan x = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}.$$

Vậy có hai điểm biểu diễn nghiệm trên đường tròn lượng giác.

Câu 67: Hàm số $y = 8^{x^2+x+1}(6x+3)\ln 2$ là đạo hàm của hàm số nào sau đây?

- A.** $y = 8^{x^2+x+1}$ **B.** $y = 2^{x^2+x+1}$ **C.** $y = 2^{3x^2+3x+1}$ **D.** $y = 8^{3x^2+3x+1}$

Lời giải

Chọn A

Câu 68: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{x+1}{9^x}$

A. $y' = \frac{1-2(x+1)\ln 3}{3^{2x}}.$

B. $y' = \frac{1-(x+1)\ln 3}{3^{2x}}.$

C. $y' = \frac{1-2(x+1)\ln 9}{3^x}.$

D. $y' = \frac{1-2(x+1)\ln 3}{3^x}.$

Lời giải

Chọn A

$$y' = \frac{(x+1)' \cdot 9^x - (9^x)' \cdot (x+1)}{9^{2x}} = \frac{9^x - 9^x(x+1)\ln 9}{9^{2x}} = \frac{1-2(x+1)\ln 3}{3^{2x}}.$$

Câu 69: Cho hàm số $y = \log_3(2x+1)$, ta có:

- A.** $y' = \frac{1}{2x+1}.$ **B.** $y' = \frac{1}{(2x+1)\ln 3}.$ **C.** $y' = \frac{2}{(2x+1)\ln 3}.$ **D.** $y' = \frac{2}{2x+1}.$

Lời giải

Chọn C

Câu 70: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{\log_2 x}$ là:

A. $y' = -\frac{\ln 2}{x \ln^2 x}$. **B.** $y' = \frac{\ln 2}{x \ln^2 x}$. **C.** $y' = -\frac{x \ln 2}{\log_2^2 x}$. **D.** $y' = \frac{x \ln 2}{\log_2^2 x}$.

Lời giải

Chọn A

$$y' = -\frac{(\log_2 x)'}{\ln^2 x} = -\frac{\ln 2}{x \ln^2 x}$$

Câu 71: Kết quả tính đạo hàm nào sau đây **sai**?

A. $(3^x)' = 3^x \ln 3$ **B.** $(10^x)' = 10^x \ln 10$ **C.** $(\log_3 x)' = \frac{1}{x \ln 3}$ **D.** $(e^{2x})' = e^{2x}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $(e^{2x})' = 2e^{2x}$, suy ra **D** sai.

Câu 72: Đạo hàm của hàm số $y = (2x+1)\ln(1-x)$ là.

A. $2\ln(1-x) - \frac{2x+1}{1-x}$. **B.** $2x\ln(x-1)$.
C. $\frac{2x+1}{1-x} + 2x$. **D.** $2\ln(1-x) + \frac{2x+1}{1-x}$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} y' &= (2x+1)' \cdot \ln(1-x) + (2x+1) \cdot (\ln(1-x))' = 2 \cdot \ln(1-x) + (2x+1) \cdot \frac{-1}{1-x} \\ &= 2\ln(1-x) - \frac{2x+1}{1-x} \end{aligned}$$

Câu 73: Đạo hàm của hàm số $y = \log_2 \left(\frac{x-1}{\ln x} \right)$ là:

A. $\frac{x \ln x + 1 - x}{x(x-1) \ln 2}$. **B.** $\frac{x \ln x + 1 - x}{(x-1) \ln x \ln 2}$. **C.** $\frac{x \ln x + 1 - x}{(x-1) \ln 2}$. **D.** $\frac{x \ln x + 1 - x}{x(x-1) \ln 2 \cdot \ln x}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } y' = \frac{\left(\frac{x-1}{\ln x} \right)'}{\frac{x-1}{\ln x} \ln 2} = \frac{x \ln x + 1 - x}{x(x-1) \ln 2 \cdot \ln x}$$

Câu 74: Cho hàm số $f(x) = 2^{x^2+a}$ và $f'(1) = 2 \ln 2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $-2 < a < 0$ **B.** $0 < a < 1$ **C.** $a > 1$ **D.** $a < -2$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } f'(x) = 2x \cdot 2^{x^2+a} \ln 2 \Rightarrow f'(1) = 2 \ln 2 \cdot 2^{a+1} = 2 \ln 2 \Rightarrow 2^{a+1} = 1 \Rightarrow a = -1$$

Câu 75: Cho hàm số $y = \ln \frac{1}{x}$. Hệ thức nào sau đây đúng?

A. $e^y + y' = 0$

B. $e^y - y' = 0$

C. $e^y \cdot y' = 0$

D. $e^y \cdot y' = \frac{1}{x^2}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = \frac{1}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{x}\right)' = x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x}$, $e^y = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \Rightarrow y' + e^y = 0$

Câu 76: Đạo hàm cấp hai của hàm số $f(x) = 2x^5 - \frac{4}{x} + 1$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $40x^3 - \frac{4}{x^3}$.

B. $40x^3 + \frac{4}{x^3}$.

C. $40x^3 - \frac{8}{x^3}$.

D. $40x^3 + \frac{8}{x^3}$.

Lời giải

CHỌN C

$f(x) = 2x^5 - \frac{4}{x} + 1$ thì $f'(x) = 10x^4 + \frac{4}{x^2}$, do đó $f''(x) = 40x^3 - \frac{8}{x^3}$.

Câu 77: Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \sin 2x$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $-\sin 2x$.

B. $-4 \sin x$.

C. $-4 \sin 2x$.

D. $-2 \sin 2x$.

Lời giải

CHỌN C

$y = \sin 2x$ thì $y' = 2 \cos 2x$. Do đó $y'' = -4 \sin 2x$.

Câu 78: Cho hàm số $y = \cos^2 x$. Tính y'' ?

A. $y'' = -2 \cos 2x$.

B. $y'' = -4 \cos 2x$.

C. $y'' = 2 \cos 2x$.

D. $y'' = 4 \cos 2x$.

Lời giải

CHỌN A

Ta có: $y' = -2 \cos x \sin x = -\sin 2x \Rightarrow y'' = -2 \cos 2x$.

Câu 79: Cho hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$. Tính $M = y^3 \cdot y'' + 1$.

A. -2 .

B. 0 .

C. -1 .

D. $\frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$.

Lời giải

CHỌN B

Ta có: $y' = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} \Rightarrow y'' = \frac{1}{(2x-x^2)} \cdot \left[-1 \cdot \sqrt{2x-x^2} - \frac{(1-x)^2}{\sqrt{2x-x^2}} \right]$
 $= \frac{-1}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}} \Rightarrow y^3 \cdot y'' = -1 \Rightarrow y^3 \cdot y'' + 1 = 0$.

Câu 80: Cho hàm số $f(x) = (x+1)^4$. Tính $f''(2)$.

A. 27 .

B. 81 .

C. 96 .

D. 108 .

Lời giải

CHỌN D

Ta có: $f'(x) = 4(x+1)^3 \Rightarrow f''(x) = 12(x+1)^2$. Vậy $f''(2) = 108$.

Câu 81: Cho hàm số $y = \sin^3 x$. Tính $M = y'' + 9y$.

- A.** $\sin x$. **B.** $6 \sin x$. **C.** $6 \cos x$. **D.** $-6 \sin x$.

Lời giải

CHỌN B

Ta có: $y' = 3 \sin^2 x \cos x \Rightarrow y'' = 6 \sin x \cos^2 x - 3 \sin^3 x$.

Vậy:

$$M = y'' + 9y = 6 \sin x \cos^2 x - 3 \sin^3 x + 9 \sin^3 x = 6 \sin x (\cos^2 x + \sin^2 x) = 6 \sin x.$$

Câu 82: Cho hàm số $y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2$. Giải bất phương trình $y'' < 0$.

- A.** $x \in (-\infty; 1) \setminus \{0\}$. **B.** $x \in (1; +\infty)$. **C.** $x \in (-1; 1)$. **D.** $x \in (-2; 2)$.

Lời giải

CHỌN A

Ta có: $y' = 15x^4 - 20x^3 + 3 \Rightarrow y'' = 60x^3 - 60x^2$.

$$y'' < 0 \Leftrightarrow 60x^3 - 60x^2 < 0 \Leftrightarrow 60x^2(x-1) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases}.$$

Câu 83: Cho hàm số $y = \frac{1}{(x+1)^3}$. Giải bất phương trình $y'' < 0$.

- A.** $x < -1$. **B.** $x > -1$. **C.** $x \neq 1$. **D.** Vô nghiệm.

Lời giải

CHỌN A

$$\text{Ta có: } y' = \frac{-3}{(x+1)^4} \Rightarrow y'' = \frac{12}{(x+1)^5}.$$

$$\text{Vậy } y'' < 0 \Leftrightarrow \frac{12}{(x+1)^5} < 0 \Leftrightarrow x+1 < 0 \Leftrightarrow x < -1.$$

Câu 84: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{-2x^2 + 3x}{1-x}$. Đạo hàm cấp 2 của f là:

- A.** $y'' = 2 + \frac{1}{(1-x)^2}$. **B.** $y'' = \frac{2}{(1-x)^3}$. **C.** $y'' = \frac{-2}{(1-x)^3}$. **D.** $y'' = \frac{2}{(1-x)^4}$.

Lời giải

CHỌN B

$$y = 2x - 1 + \frac{1}{1-x} \Rightarrow y' = 2 + \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow y'' = \frac{2(1-x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Câu 85: Cho hàm số: $y = (2-m)x^4 + 2x^3 + 2mx^2 + 2m - 1$.

Tìm m để phương trình $y'' = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

- A.** $m \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right) \setminus \{2\}$. **B.** $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{2\}$.

C. $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{2\}.$

D. $m \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right) \setminus \{2\}.$

Lời giải

CHỌN D

Ta có: $y' = 4(2-m)x^3 + 6x^2 + 4mx \Rightarrow y'' = 12(2-m)x^2 + 12x + 4m.$

Phương trình $y'' = 0$ có hai nghiệm phân biệt hay phương trình: $3(2-m)x^2 + 3x + m = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-m \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-m \neq 0 \\ 4m^2 - 8m + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m < \frac{1}{2} \\ m > \frac{3}{2} \end{cases}$$

Câu 86: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = t^3 - 3t^2$ (t: tính bằng giây, s: tính bằng mét).

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Vận tốc của chuyển động khi $t = 3s$ là $v = 12m / s.$

B. Vận tốc của chuyển động khi $t = 3s$ là $v = 24m / s.$

C. Gia tốc của chuyển động khi $t = 4s$ là $a = 18m / s^2.$

D. Gia tốc của chuyển động khi $t = 4s$ là $a = 9m / s^2.$

Lời giải

CHỌN C

$\square \quad S = t^3 - 3t^2 \Rightarrow v(t) = S' = 3t^2 - 6t$

$\Rightarrow v(3) = 3 \cdot 3^2 - 18 = 9(m / s).$

$\square \quad S = t^3 - 3t^2 \Rightarrow a = S'' = 6t - 6$

$a_{(t=4s)} = 6 \cdot 4 - 6 = 18(m / s^2).$

Câu 87: Một chất điểm chuyển động thẳng xác định bởi phương trình: $S = t^3 - 3t^2 + 5t + 2$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi $t = 3$ là:

A. $24(m / s^2).$

B. $17(m / s^2).$

C. $14(m / s^2).$

D. $12(m / s^2).$

Lời giải

CHỌN D

Gia tốc của chuyển động khi $t = 3$ bằng $S''(3).$

$S'(t) = 3t^2 - 6t + 5; S''(t) = 6t - 6$ nên $S''(3) = 18 - 6 = 12(m / s^2).$

Câu 88: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình:

$S = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$ (t: tính bằng giây, s tính bằng mét).

Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Vận tốc của chuyển động bằng 0 khi $t = 0$ hoặc $t = 3.$

B. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 1$ là $a = 12m / s^2.$

C. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3$ là $a = 12m / s^2.$

D. Gia tốc của chuyển động bằng 0 khi $t = 0$.

Lời giải

CHỌN C

$$\square S = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$$

$$\Rightarrow v(t) = S'(t) = 3t^2 - 6t - 9$$

$$v(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 6t - 9 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 3 \end{cases}$$

$$\square S = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$$

$$\Rightarrow a = S'' = 6t - 6$$

$$\Rightarrow a_{(t=3s)} = 6 \cdot 3 - 6 = 12 \text{ (m/s}^2\text{)}.$$

Câu 89: Một chất điểm chuyển động thẳng xác định bởi phương trình: $S = t^3 - 2t^2 + 4t + 1$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi $t = 2$ là:

- A.** $12 \text{ (m/s}^2\text{)}.$ **B.** $8 \text{ (m/s}^2\text{)}.$ **C.** $7 \text{ (m/s}^2\text{)}.$ **D.** $6 \text{ (m/s}^2\text{)}.$

Lời giải

CHỌN B

Gia tốc của chuyển động khi $t = 2$ bằng $S''(2)$.

$$S'(t) = 3t^2 - 4t + 4; S''(t) = 6t - 4 \text{ nên } S''(2) = 12 - 4 = 8 \text{ (m/s}^2\text{)}.$$

Câu 90: Phương trình chuyển động của một chất điểm được biểu thị bởi công thức $S(t) = 4 - 2t + 4t^2 + 2t^3$, trong đó $t > 0$ và t tính bằng giây (s), $S(t)$ tính bằng mét (m). Tìm gia tốc a của chất điểm tại thời điểm $t = 5(s)$.

- A.** $a = 68.$ **B.** $a = 115.$ **C.** $a = 100.$ **D.** $a = 225.$

Lời giải

Chọn A

Theo ứng dụng đạo hàm của hàm số có:

$$v(t) = S'(t) = -2 + 8t + 6t^2 \text{ và } a(t) = v'(t) = 8 + 12t \Rightarrow a(5) = 68 \text{ (m/s}^2\text{)}.$$

Câu 91: Một vật chuyển động có phương trình $S = t^4 - 3t^3 - 3t^2 + 2t + 1$ (m), t là thời gian tính bằng giây. Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 3s$ là

- A.** $48 \text{ m/s}^2.$ **B.** $28 \text{ m/s}^2.$ **C.** $18 \text{ m/s}^2.$ **D.** $54 \text{ m/s}^2.$

Lời giải

Chọn A

$$S = f(t) = t^4 - 3t^3 - 3t^2 + 2t + 1$$

$$\Rightarrow f'(t) = 4t^3 - 9t^2 - 6t + 2$$

$$\Rightarrow a(t) = f''(t) = 12t^2 - 18t - 6$$

$$\text{Gia tốc của vật tại thời điểm } t = 3s \text{ là } a(3) = 12 \cdot 3^2 - 18 \cdot 3 - 6 = 48 \text{ m/s}^2.$$

Câu 92: Một chất điểm chuyển động có phương trình $s = -t^3 + t^2 + t + 4$ (t là thời gian tính bằng giây).

Gia tốc của chuyển động tại thời điểm vận tốc đạt giá trị lớn nhất là

- A.** 6. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Vận tốc của chất điểm có phương trình là: $v = s' = -3t^2 + 2t + 1$.

Vận tốc của chất điểm đạt GTLN khi $t = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{3}$.

Gia tốc của chất điểm có phương trình là: $s'' = -6t + 2$.

Tại thời điểm vận tốc đạt GTLN thì gia tốc bằng $s''\left(\frac{1}{3}\right) = 0$.

Câu 93: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = 2t^3 - 3t^2 + 4t$, trong đó t được tính bằng giây và s được tính bằng mét. Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm gia tốc bằng không là

- A.** $-2,5m/s$. **B.** $4m/s$. **C.** $2,5m/s$. **D.** $8,5m/s$.

Lời giải

Chọn C

Ta có, gia tốc tức thời của chuyển động bằng: $a(t) = s''(t) = 12t - 6$. Thời điểm gia tốc bằng không là: $a(t) = s''(t) = 12t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 0,5$. Vậy khi đó vận tốc tức thời của chuyển động

bằng $v(t) = s'(t) = 6t^2 - 6t + 4 \Rightarrow v(0,5) = \frac{5}{2}$. vậy chọn C

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG VII

A. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$. Tiếp tuyến với đồ thị của hàm số tại điểm $M(-1; -4)$ có hệ số góc bằng

A. -3.

B. 9.

C. -9.

D. 72.

Lời giải

Chọn B

Tiếp tuyến với đồ thị của hàm số tại điểm $M(-1; -4)$ có hệ số góc là:

$$y'(-1) = 3x^2 - 6x = 3 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) = 9$$

Câu 2: Hàm số $y = -x^2 + x + 7$ có đạo hàm tại $x = 1$ bằng

A. -1.

B. 7.

C. 1.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'(1) = -2x + 1 = -2 \cdot 1 + 1 = -1$

Câu 3: Cho hai hàm số $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3$ và $g(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} - 5$. Bất phương trình $f'(x) > g'(x)$ có tập nghiệm là

A. $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$.B. $(0; 1)$.C. $[0; 1]$.D. $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

$$f'(x) > g'(x) \Leftrightarrow 6x^2 - 2x > 3x^2 + x \Leftrightarrow 3x^2 - 3x > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 0 \end{cases}$$

Câu 4: Hàm số $y = \frac{x+3}{x+2}$ có đạo hàm là

A. $y' = \frac{1}{(x+2)^2}$.B. $y' = \frac{5}{(x+2)^2}$.C. $y' = \frac{-1}{(x+2)^2}$.D. $y' = \frac{-5}{(x+2)^2}$.

Lời giải

Chọn C

$$y' = \frac{(x+3)'(x+2) - (x+3)(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{1 \cdot (x+2) - (x+3) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{-1}{(x+2)^2}$$

Câu 5: Hàm số $y = \frac{1}{x+1}$ có đạo hàm cấp hai tại $x = 1$ là

A. $y''(1) = \frac{1}{2}$.B. $y''(1) = -\frac{1}{4}$.C. $y''(1) = 4$.D. $y''(1) = \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn D

$$y' = (x+1)' \cdot \frac{-1}{(x+1)^2} = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$y'' = \left[(x+1)^2 \right]' \cdot \frac{1}{(x+1)^4} = \frac{2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2}{(x+1)^3}$$

$$y''(1) = \frac{2}{(1+1)^3} = \frac{1}{4}$$

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2x + 3$ có đồ thị (C) và điểm $M(-1; 6) \in (C)$. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm M .

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 2x - 2$ nên tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(-1; 6)$ có hệ số góc là:

$f'(-1) = 2 \cdot (-1) - 2 = -4$ Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M là:

$$y - 6 = -4(x + 1) \Leftrightarrow y = -4x - 4 + 6 \Leftrightarrow y = -4x + 2.$$

Câu 7: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 3x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 1$;

b) $y = (x^2 - x)^3$;

c) $y = \frac{4x-1}{2x+1}$.

Lời giải

a) $y' = 3 \cdot 4x^3 - 7 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 2x + 0 = 12x^3 - 21x^2 + 6x$;

b) Đặt $u = x^2 - x$ thì $y = u^3$. Ta có: $(u_x)' = (x^2 - x)' = 2x - 1$ và $(y_u)' = (u^3)' = 3u^2$.

Suy ra $(y_x)' = (y_u)' \cdot (u_x)' = 3u^2 \cdot (2x - 1) = 3(2x - 1)(x^2 - x)^2$.

Vậy $y' = 3(2x - 1)(x^2 - x)^2$.

c)

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(4x-1)'(2x+1) - (4x-1)(2x+1)'}{(2x+1)^2} \\ &= \frac{4(2x+1) - (4x-1) \cdot 2}{(2x+1)^2} \\ &= \frac{8x+4-8x+2}{(2x+1)^2} = \frac{6}{(2x+1)^2} \end{aligned}$$

Câu 8: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (x^2 + 3x - 1)e^x$;

b) $y = x^2 \log_2 x$.

Lời giải

a) $y' = (x^2 + 3x - 1)' \cdot e^x + (x^2 + 3x - 1) \cdot (e^x)' = (2x + 3) \cdot e^x + (x^2 + 3x - 1) \cdot e^x = (x^2 + 5x - 1) \cdot e^x$

b) $y' = (x^3)' \cdot \log_2 x + x^3 \cdot (\log_2 x)' = 3x^2 \log_2 x + x^3 \cdot \frac{1}{x \cdot \ln 2}$

Câu 9: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \tan(e^x + 1)$;

b) $y = \sqrt{\sin 3x}$;

c) $y = \cot(1 - 2^x)$.

Lời giải

a) $y' = (e^x + 1)' \cdot \frac{1}{\cos(e^x + 1)^2} = e^x \cdot \frac{1}{\cos(e^x + 1)^2}$

b) $y' = (\sin 3x)' \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\sin 3x}} = (3x)' \cdot \cos 3x \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\sin 3x}} = 3 \cos 3x \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\sin 3x}}$

c) $y' = (1 - 2^x)' \cdot \frac{-1}{\sin^2(1 - 2^x)} = 2^x \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{\sin^2(1 - 2^x)}$

Câu 10: Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 4x^2 + 2x - 3$;

b) $y = x^2 e^x$.

Lời giải

a) $y' = 3x^2 - 8x + 2$

$y'' = 6x - 8$

b) $y' = (x^2)' \cdot e^x + x^2 \cdot (e^x)' = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = (2x + x^2) \cdot e^x$

$y'' = (2x + x^2)' \cdot e^x + (2x + x^2) \cdot (e^x)' = (2 + 2x) \cdot e^x + (2x + x^2) \cdot e^x = (x^2 + 4x + 2) \cdot e^x$

Câu 11: Một viên sỏi rơi từ độ cao 44,1m thì quãng đường rơi được biểu diễn bởi công thức $s(t) = 4,9t^2$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính:

a) Vận tốc rơi của viên sỏi lúc $t = 2$;

b) Vận tốc của viên sỏi khi chạm đất.

Lời giải

Vận tốc rơi của viên sỏi là: $v(t) = s'(t) = 9,8t$

a) Khi $t = 2$ thì $v(2) = 9,8 \cdot 2 = 19,6$ (m/s)

b) Khi viên sỏi chạm đất thì $s(t) = 44,1$ Hay $4,9t^2 = 44,1 \Leftrightarrow t = 3$

Ta có: $v(3) = 9,8 \cdot 3 = 29,4$ (m / s)

Câu 12: Một vật chuyển động trên đường thẳng được xác định bởi công thức $s(t) = 2t^3 + 4t + 1$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính vận tốc và gia tốc của vật khi $t = 1$.

Lời giải

Vận tốc của vật là: $v(t) = s'(t) = 6t^2 + 4$

Gia tốc của vật là $v'(t) = 12t$

Khi $t = 1$ thì $v(1) = 6 \cdot 1^2 + 4 = 10$; $v'(1) = 12 \cdot 1 = 12$

Câu 13: Dân số P (tính theo nghìn người) của một thành phố nhỏ được cho bởi công thức $P(t) = \frac{500t}{t^2 + 9}$, trong đó t là thời gian được tính bằng năm. Tìm tốc độ tăng dân số tại thời điểm $t = 12$.

Lời giải

Tốc độ tăng trưởng dân số là:

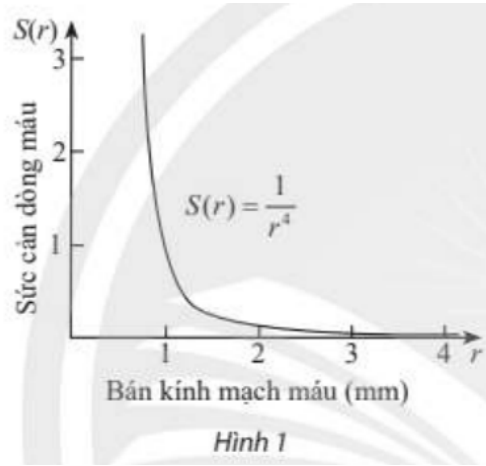
$$P'(t) = \frac{(500t)'(t^2 + 9) - 500t(t^2 + 9)'}{(t^2 + 9)^2}$$

$$P'(t) = \frac{500 \cdot (t^2 + 9) - 500t \cdot 2t}{(t^2 + 9)^2}$$

$$P'(t) = \frac{4500 - 500t^2}{(t^2 + 9)^2}$$

$$\text{Khi } t = 12 \text{ thì } P'(12) = \frac{4500 - 500 \cdot 12^2}{(12^2 + 9)^2} = -2,88$$

Câu 14: Hàm số $S(r) = \frac{1}{r^4}$ có thể được sử dụng để xác định sức cản S của dòng máu trong mạch máu có bán kính r (tính theo milimét) (theo Bách khoa toàn thư Y học "Harrison's internal medicine 21st edition"). Tìm tốc độ thay đổi của S theo r khi $r = 0,8$.

**Lời giải**

Tốc độ thay đổi của S là

$$S'(r) = (r^4)' \cdot \frac{-1}{(r^4)^2} = 4r^3 \cdot \frac{-1}{r^8} = \frac{-4}{r^5}$$

$$\text{Khi } r = 0,8 \text{ thì } S'(0,8) = \frac{-4}{0,8^5} = -12,2$$

Câu 15: Nhiệt độ cơ thể của một người trong thời gian bị bệnh được cho bởi công thức

$$T(t) = -0,1t^2 + 1,2t + 98,6$$

trong đó T là nhiệt độ (tính theo đơn vị đo nhiệt độ Fahrenheit) tại thời điểm t (tính theo ngày). Tìm tốc độ thay đổi của nhiệt độ ở thời điểm $t = 1,5$.

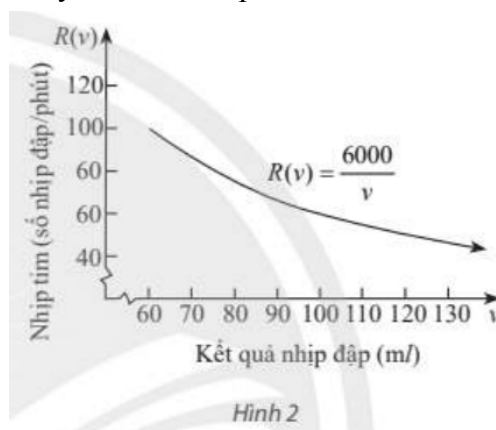
(Nguồn: <https://www.algebra.com/algebra/homework/Trigonometry-basics/Trigonometry-basics.faq.question.1111985.html>)

Lời giải

Tốc độ thay đổi của nhiệt độ là: $T'(t) = -0,2t + 1,2$ Khi $t = 1,5$ thì

$$T'(1,5) = -0,2 \cdot 1,5 + 1,2 = 0,9$$

Câu 16: Hàm số $R(v) = \frac{6000}{v}$ có thể được sử dụng để xác định nhịp tim R của một người mà tim của người đó có thể đẩy đi được 6000ml máu trên mỗi phút và v ml máu trên mỗi nhịp đập (theo Bách khoa toàn thư Y học "Harrison's internal medicine 21st edition"). Tìm tốc độ thay đổi của nhịp tim khi lượng máu tim đẩy đi ở một nhịp là $v = 80$.

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } R'(v) = 6000 \cdot \left(-\frac{1}{v^2} \right) = -\frac{6000}{v^2}.$$

Tốc độ thay đổi của nhịp tim khi lượng máu tim đẩy đi ở một nhịp là $v = 80$ là:

$$R'(80) = -\frac{6000}{80^2} = -0,9375.$$

BÀI TẬP TỔNG ÔN CHƯƠNG VII

A. TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong các phát biểu sau phát biểu nào là đúng?

- A.** Nếu hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại x_0 thì nó có đạo hàm tại điểm đó.
- B.** Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó không liên tục tại điểm đó.
- C.** Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.
- D.** Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục tại x_0 thì nó có đạo hàm tại điểm đó.

Lời giải

Chọn C

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó còn nếu hàm số liên tục tại điểm x_0 thì nó chưa chắc có đạo hàm tại điểm đó.

Câu 2: Cho f là hàm số liên tục tại x_0 . Đạo hàm của f tại x_0 là:

- A.** $f(x)$
- B.** $\frac{f(x_0 + h) - f(x)}{h}$.
- C.** $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).
- D.** $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).

Lời giải

Chọn C

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A.** $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.
- B.** $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.
- C.** $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.
- D.** $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x + x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

và $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ là những khẳng định đúng.

Khẳng định sai là $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x + x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{4 - x}}{4} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$.

- A. $f'(0) = \frac{1}{4}$. B. $f'(0) = \frac{1}{16}$. C. $f'(0) = \frac{1}{32}$. D. Không tồn tại.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{4 - x}}{4x}$ (không tồn tại giới hạn)

Do đó không tồn tại $f'(0)$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ bởi $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - 3x + 2} & \text{khi } x \neq 1 \\ 0 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tính $f'(1)$.

- A. $f'(1) = \frac{3}{2}$. B. $f'(1) = 1$. C. $f'(1) = 0$. D. không tồn tại.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - 3x + 2} - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x^3 - 4x + 3)}{(x - 1)(x - 1)(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x - 1)(x^2 + x + 3)}{(x - 1)^2(x - 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x^2 + x + 3)}{(x - 1)(x - 2)} \rightarrow \text{Không tồn tại.} \end{aligned}$$

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$

Khẳng định nào sau đây sai?

- A. Hàm số không liên tục tại $x = 0$. B. Hàm số có đạo hàm tại $x = 2$.
C. Hàm số liên tục tại $x = 2$. D. Hàm số có đạo hàm tại $x = 0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = -1$

Mặt khác $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$ do đó hàm số không liên tục tại điểm $x = 0$ nên hàm số không đạo hàm tại $x = 0$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} mx^2 + 2x + 2 & \text{khi } x > 0 \\ nx + 1 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của các tham số m, n sao cho $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = 0$.

A. Không tồn tại m, n . **B.** $m = 2, \forall n$. **C.** $n = 2, \forall m$. **D.** $m = n = 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (mx^2 + 2x + 2) = 2$

Do đó hàm số không liên tục tại điểm $x = 0$ nên hàm số không thể có đạo hàm tại điểm $x = 0$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{khi } x \leq 1 \\ ax + b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị của các tham số a, b sao cho $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = 1$.

A. $a = 1, b = -\frac{1}{2}$. **B.** $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$. **C.** $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$. **D.** $a = 1, b = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + b) = a + b$

Hàm số liên tục tại điểm $x = 1$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Leftrightarrow a + b = \frac{1}{2}$

Mặt khác $f'(x) = \begin{cases} x & \text{khi } x < 1 \\ ax & \text{khi } x > 1 \end{cases} \Rightarrow f'(1^-) = 1, f'(1^+) = a$

Suy ra hàm số có đạo hàm tại điểm $x = 1 \Rightarrow \begin{cases} a + b = \frac{1}{2} \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Câu 9: Cho $f(x) = x^{2018} - 1009x^2 + 2019x$. Giá trị của $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x + 1) - f(1)}{\Delta x}$ bằng

A. 1009. **B.** 1008. **C.** 2018. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x + 1) - f(1)}{\Delta x} = f'(1)$$

$$\text{Mặt khác } f'(x) = 2018x^{2017} - 2018x + 2019 \text{ suy ra } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x + 1) - f(1)}{\Delta x} = f'(1) = 2019.$$

Câu 10: Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{(x-1)(x-2)\dots(x-2019)}$. Giá trị của $f'(0)$ là

- A.** $-\frac{1}{2019!}$. **B.** $\frac{1}{2019!}$. **C.** $-2019!$. **D.** $2019!$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{(x-1)(x-2)\dots(x-2019)}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x-1)(x-2)\dots(x-2019)} = \frac{1}{-2019!}. \end{aligned}$$

Câu 11: Cho $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)\dots(x+n)$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Tính $f'(0)$.

- A.** $f'(0) = 0$. **B.** $f'(0) = n$. **C.** $f'(0) = n!$. **D.** $f'(0) = \frac{n(n+1)}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)\dots(x+n)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x+1)(x+2)\dots(x+n) \\ &= 1.2\dots n = n!. \end{aligned}$$

Câu 12: Cho hàm số $f(x) = |x-2|$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A.** $f(2) = 0$. **B.** $f(x)$ nhận giá trị không âm.
C. $f(x)$ liên tục tại $x = 2$. **D.** $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 2$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } f(x) = |x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{khi } x \geq 2 \\ -x+2 & \text{khi } x < 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } x > 2 \\ -1 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$$

Do $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$ nên hàm số liên tục tại điểm $x = 2$.

Mặt khác $f'(2^+) \neq f'(2^-)$ nên hàm số không có đạo hàm tại điểm $x = 2$.

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm thỏa mãn $f'(6) = 2$. Tính giá trị của biểu thức

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6}.$$

- A. 2. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{1}{2}$. D. 12.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6} = f'(6) = 2$.

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0 = 2$. Tìm $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - xf(2)}{x - 2}$.

- A. 0. B. $f'(2)$. C. $2f'(2) - f(2)$. D. $f(2) - 2f'(2)$.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - xf(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x[f(x) - f(2)] + 2f(x) - xf(2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x[f(x) - f(2)]}{x - 2} + \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)(2 - x)}{x - 2} = 2f'(2) + \lim_{x \rightarrow 2} [-f(x)] = 2f'(2) - 2f(2). \end{aligned}$$

Câu 15: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2\sqrt{2}x^2 + 8x - 1$, có đạo hàm là $f'(x)$. Tập hợp những giá trị của x để $f'(x) = 0$ là

- A. $\{-2\sqrt{2}\}$ B. $\{2; \sqrt{2}\}$ C. $\{-4\sqrt{2}\}$ D. $\{2\sqrt{2}\}$

Lời giải

Chọn D

$$f'(x) = x^2 - 4\sqrt{2}x + 8, \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4\sqrt{2}x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{2}.$$

Câu 16: Cho hàm số $y = 3x^3 + x^2 + 1$, có đạo hàm là y' . Để $y' \leq 0$ thì x nhận các giá trị thuộc tập nào sau đây?

- A. $\left[-\frac{2}{9}; 0\right]$ B. $\left[-\frac{9}{2}; 0\right]$
C. $\left(-\infty; -\frac{9}{2}\right] \cup [0; +\infty)$ D. $\left(-\infty; -\frac{2}{9}\right] \cup [0; +\infty)$

Lời giải

Chọn A

$$y' = 9x^2 + 2x; y' \leq 0 \Leftrightarrow 9x^2 + 2x \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{9} \leq x \leq 0. \text{ Vậy } S = \left[-\frac{2}{9}; 0\right].$$

Câu 17: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ tại điểm $x = -1$.

- A.** $f'(-1) = 4$ **B.** $f'(-1) = 14$ **C.** $f'(-1) = 15$ **D.** $f'(-1) = 24$

Lời giải

Chọn D

$$f'(x) = -4x^3 + 12x^2 - 6x + 2 \Rightarrow f'(-1) = 24.$$

Câu 18: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (2m+1)x^2 - mx - 4$, có đạo hàm là y' . Tìm tất cả các giá trị của m để $y' \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

- A.** $m \in \left(-1; -\frac{1}{4}\right)$ **B.** $m \in \left[-1; -\frac{1}{4}\right]$
C. $m \in (-\infty; -1] \cup \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$ **D.** $m \in \left[-1; \frac{1}{4}\right]$

Lời giải

Chọn B

$$y' = x^2 - 2(2m+1)x - m$$

$$\text{Khi đó } y' \geq 0; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = (2m+1)^2 + m \leq 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 5m + 1 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq -\frac{1}{4}$$

Vậy $m \in \left[-1; -\frac{1}{4}\right]$ là giá trị thỏa mãn bài toán.

Câu 19: Biết hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a > 0$) có đạo hàm là $f'(x) > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $b^2 - 3ac > 0$ **B.** $b^2 - 3ac \geq 0$ **C.** $b^2 - 3ac < 0$ **D.** $b^2 - 3ac \leq 0$

Lời giải

Chọn C

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c > 0; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 3ac < 0 \end{cases}$$

Câu 20: Hàm số $y = \sqrt{x^3 + x}$ có đạo hàm bằng

- A.** $\frac{3x^2 + 1}{2\sqrt{x^3 + x}}$ **B.** $\frac{3x^2 + 1}{\sqrt{x^3 + x}}$ **C.** $\frac{3x^2 + x}{2\sqrt{x^3 + x}}$ **D.** $\frac{x^3 + x}{2\sqrt{x^3 + x}}$

Lời giải

Chọn A

$$y' = \frac{(x^3 + x)'}{2\sqrt{x^3 + x}} = \frac{3x^2 + 1}{2\sqrt{x^3 + x}}.$$

Câu 21: Tính đạo hàm của hàm số $y = (7x - 5)^4$

- A. $y' = 4(7x - 5)^3$ B. $y' = -28(7x - 5)^3$ C. $y' = -28(5 - 7x)^3$ D. $y' = 28(5 - 7x)^3$

Lời giải

Chọn C

$$y' = 4 \cdot (7x - 5)' \cdot (7x - 5)^3 = 28(7x - 5)^3$$

Câu 22: Tính đạo hàm của hàm số $y = (1 - x^3)^5$

- A. $y' = 5x^2(1 - x^3)^4$ B. $y' = -15x^2(1 - x^3)^4$
C. $y' = -3x^2(1 - x^3)^4$ D. $y' = -5x^2(1 - x^3)^4$

Lời giải

Chọn B

$$y' = 5 \cdot (1 - x^3)' \cdot (1 - x^3)^4 = -15x^2(1 - x^3)^4$$

Câu 23: Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^3 - 2x^2)^{2016}$

- A. $y' = 2016(x^3 - 2x^2)^{2015}$ B. $y' = 2016(x^3 - 2x^2)^{2015}(3x^2 - 4x)$
C. $y' = 2016(x^3 - 2x^2)^{2015}(3x^2 - 4x)$ D. $y' = 2016(x^3 - 2x^2)(3x^2 - 2x)$

Lời giải

Chọn B

$$y' = 2016 \cdot (x^3 - 2x^2)' \cdot (x^3 - 2x^2)^{2015} = 2016 \cdot (3x^2 - 4x) \cdot (x^3 - 2x^2)^{2015}$$

Câu 24: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x(x-1)(x-2)\dots(x-2018)$ tại điểm $x = 0$

- A. $f'(0) = 0$ B. $f'(0) = -2018!$ C. $f'(0) = 2018!$ D. $f'(0) = 2018$

Lời giải

Chọn C

$$f'(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-2018) + x(x-2)\dots(x-2018) + \dots + x(x-1)\dots(x-2017)$$

$$\text{Suy ra } f'(0) = (0-1) \cdot (0-2) \cdot \dots \cdot (0-2018) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2018 = 2018!$$

Câu 25: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x(x+1)(x+2)\dots(x+2018)$ tại điểm $x = -1004$

- A. $f'(-1004) = 0$ B. $f'(-1004) = 1004!$
C. $f'(-1004) = -1004!$ D. $f'(-1004) = (1004!)^2$

Lời giải

Chọn D

$$f'(x) = (x+1)(x+2)\dots(x+2018) + x(x+2)\dots(x+2018) + \dots + x(x+1)\dots(x+2017)$$

Suy ra $f'(-1004) = x.(x+1).(x+2)...(x+1003).(x+1005)...(x+2018)|_{x=-1004}$
 $= (-1004).(-1003).(-1002)...(-1).(-2)...1003.1004 = (1004!)^2$

Câu 26: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 2}$

A. $y' = 1 + \frac{3}{(x+2)^2}$

B. $y' = \frac{x^2 + 6x + 7}{(x+2)^2}$

C. $y' = \frac{x^2 + 4x + 5}{(x+2)^2}$

D. $y' = \frac{x^2 + 8x + 1}{(x+2)^2}$

Lời giải

Chọn A

$$y' = \frac{(2x+2).(x+2) - (x^2 + 2x - 3)}{(x+2)^2} = \frac{2x^2 + 6x + 4 - x^2 - 2x + 3}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x + 7}{(x+2)^2}$$

Câu 27: Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{3x^2 + 4}$ là

A. $y' = \frac{1}{2\sqrt{3x^2 + 4}}$

B. $y' = \frac{x}{\sqrt{3x^2 + 4}}$

C. $y' = \frac{6x}{\sqrt{3x^2 + 4}}$

D. $y' = \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + 4}}$

Lời giải

Chọn D

$$y' = \frac{(3x^2 + 4)'}{2\sqrt{3x^2 + 4}} = \frac{6x}{2\sqrt{3x^2 + 4}} = \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + 4}}$$

Câu 28: Đạo hàm của hàm số $y = (2x-1)\sqrt{x^2 + x}$ là

A. $y' = \frac{8x^2 + 4x - 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$

B. $y' = \frac{8x^2 + 4x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$

C. $y' = \frac{4x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$

D. $y' = \frac{6x^2 + 2x - 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$

Lời giải

Chọn D

$$y' = (2x-1)' \cdot \sqrt{x^2 + x} + (2x-1) \cdot \frac{(x^2 + x)'}{2\sqrt{x^2 + x}}$$

$$= 2\sqrt{x^2 + x} + \frac{(2x-1).(2x+1)}{2\sqrt{x^2 + x}} = \frac{2x^2 + 2x + 4x^2 - 1}{2\sqrt{x^2 + x}} = \frac{6x^2 + 2x - 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$$

Câu 29: Đạo hàm của hàm số $y = \left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^3$ bằng

A. $y' = 3\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^2$

B. $y' = 6\left(x - \frac{1}{x^2}\right)\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^2$

C. $y' = 6\left(x + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^2$

D. $y' = 6\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^2$

Lời giải

Chọn C

$$y' = 3 \left(x^2 - \frac{2}{x} \right)' \left(x^2 - \frac{2}{x} \right)^2 = 3 \left(2x + \frac{2}{x^2} \right) \left(x^2 - \frac{2}{x} \right)^2$$

Câu 30: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\frac{2x-1}{x+2}}$

A. $y' = \frac{5}{(2x-1)^2} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$

B. $y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{(2x-1)^2} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$

C. $y' = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$

D. $y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{(x+2)^2} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$

Lời giải

Chọn D

$$y' = \frac{\left(\frac{2x-1}{x+2} \right)'}{2 \sqrt{\frac{2x-1}{x+2}}} = \frac{\frac{5}{(x+2)^2}}{2 \sqrt{\frac{2x-1}{x+2}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{(x+2)^2} \cdot \sqrt{\frac{x+2}{2x-1}}$$

Câu 31: Cho hàm số $y = \sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $y' \sqrt{x^2 + 1} = y$

B. $2y' \sqrt{x^2 + 1} = y$

C. $y' \sqrt{x^2 + 1} = 2y$

D. $2y \sqrt{x^2 + 1} = y'$

Lời giải

Chọn B

$$y' = \frac{\left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)'}{2 \sqrt{x + \sqrt{x^2 + 1}}} = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}}{2y} = \frac{\frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{2y} = \frac{y^2}{2y \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{y}{2\sqrt{x^2 + 1}}$$

Do đó $2y' \sqrt{x^2 + 1} = y$.

Câu 32: Cho hàm số $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$. Phương trình $f'(x) = 0$ có tập nghiệm S là

A. $S = \left\{ 0; \frac{2}{3} \right\}$

B. $S = \left\{ -\frac{2}{3}; 0 \right\}$

C. $S = \left\{ 0; \frac{3}{2} \right\}$

D. $S = \left\{ -\frac{3}{2}; 0 \right\}$

Lời giải

Chọn C

$$f'(x) = \frac{3x^2(x-1) - x^3}{(x-1)^2} = \frac{2x^3 - 3x^2}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Câu 33: Cho hàm số $y = -2\sqrt{x} + 3x$. Tập nghiệm S của bất phương trình $y' > 0$ là

- A.** $S = (-\infty; +\infty)$ **B.** $S = \left(-\infty; \frac{1}{9}\right)$ **C.** $S = \left(\frac{1}{9}; +\infty\right)$ **D.** $S = \emptyset$

Lời giải

Chọn C

$$y' = -2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + 3 = \frac{-1}{\sqrt{x}} + 3 = \frac{-1 + 3\sqrt{x}}{\sqrt{x}} > 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x} > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{9}.$$

Câu 34: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{-5x^2 + 14x - 9}$. Tập hợp các giá trị của x để $f'(x) < 0$ là

- A.** $\left(\frac{7}{5}; +\infty\right)$ **B.** $\left(-\infty; \frac{7}{5}\right)$ **C.** $\left(\frac{7}{5}; \frac{9}{5}\right)$ **D.** $\left(1; \frac{7}{5}\right)$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Điều kiện } -5x^2 + 14x - 9 > 0 \Leftrightarrow 1 < x < \frac{9}{5}$$

$$\text{Khi đó } f'(x) < 0 \Leftrightarrow -5x + 7 < 0 \Leftrightarrow x > \frac{7}{5}$$

$$\text{Vậy tập nghiệm của bất phương trình là } \left(\frac{7}{5}; \frac{9}{5}\right).$$

Câu 35: Cho hàm số $f(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2018}$. Tính $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$

- A.** $2017 \cdot 2^{2018} + 1$ **B.** $2019 \cdot 2^{2017} + 1$ **C.** $2017 \cdot 2^{2018} - 1$ **D.** $2018 \cdot 2^{2017} + 1$

Lời giải

Chọn A

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2)$$

$$\text{Mặt khác } f(x) = x + x^2 + x^3 + \dots + x^{2018} = x \cdot \frac{1 - x^{2018}}{1 - x} = \frac{x - x^{2019}}{1 - x}$$

$$\text{Do đó } f'(x) = \frac{(1 - 2019x^{2018})(1 - x) + (x - x^{2019})}{(1 - x)^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{2019 \cdot 2^{2018} - 1 + 2 - 2^{2019}}{1}$$

$$= 2017 \cdot 2^{2018} + 1.$$

Câu 36: Cho $f(x)$ là hàm số thỏa mãn $f(1) = f'(1) = 1$. Giả sử $g(x) = x^2 f(x)$. Tính $g'(1)$

- A.** 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Chọn D

$$g'(x) = 2x.f(x) + x^2.f'(x)$$

$$\text{Suy ra } g'(1) = 2f(1) + f'(1) = 3.$$

Câu 37: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$.

A. $y' = 3 \cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$.

B. $y' = -3 \cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$.

C. $y' = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$.

D. $y' = -3 \sin\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)$.

Lời giải

Chọn B

$$y' = \left(\frac{\pi}{6} - 3x\right)' \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right) = -3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right).$$

Câu 38: Tính đạo hàm của hàm số $y = -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right)$.

A. $y' = x \cos\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right)$.

B. $y' = \frac{1}{2} x^2 \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$.

C. $y' = \frac{1}{2} x \cos\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right)$.

D. $y' = \frac{1}{2} x \cos\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right)$.

Lời giải

Chọn A

$$y' = -\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{3} - x^2\right)' \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right) = -\frac{1}{2} \cdot (-2x) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right) = x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - x^2\right).$$

Câu 39: Tính đạo hàm của hàm số $y = x^2 \tan x + \sqrt{x}$.

A. $y' = 2x \tan x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

B. $y' = 2x \tan x + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

C. $y' = 2x \tan x + \frac{x^2}{\cos^2 x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

D. $y' = 2x \tan x + \frac{x^2}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Lời giải

Chọn C

$$y' = (x^2)' \tan x + (\tan x)' \cdot x^2 + (\sqrt{x})' = 2x \tan x + \frac{x^2}{\cos^2 x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Câu 40: Tính đạo hàm của hàm số $y = 2 \cos x^2$.

A. $y' = -2 \sin x^2$.

B. $y' = -4x \cos x^2$.

C. $y' = -2x \sin x^2$.

D. $y' = -4x \sin x^2$.

Lời giải

Chọn D

$$y' = -2.(x^2)' \cdot \sin x^2 = -2.2x \cdot \sin x^2 = -4x \cdot \sin x^2.$$

Câu 41: Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan \frac{x+1}{2}$.

A. $y' = \frac{1}{2\cos^2 \frac{x+1}{2}}$. B. $y' = \frac{1}{\cos^2 \frac{x+1}{2}}$. C. $y' = -\frac{1}{2\cos^2 \frac{x+1}{2}}$. D. $y' = -\frac{1}{\cos^2 \frac{x+1}{2}}$.

Lời giải

Chọn A

$$y' = \left(\tan \frac{x+1}{2} \right)' = \frac{\left(\frac{x+1}{2} \right)'}{\cos^2 \frac{x+1}{2}} = \frac{1}{2\cos^2 \frac{x+1}{2}}.$$

Câu 42: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin \sqrt{2+x^2}$.

A. $y' = \frac{2x+2}{\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2}$. B. $y' = -\frac{x}{\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2}$.
C. $y' = \frac{x}{\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2}$. D. $y' = \frac{x+1}{\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2}$.

Lời giải

Chọn C

$$y' = \left(\sqrt{2+x^2} \right)' \cos \sqrt{2+x^2} = \frac{(2+x^2)'}{2\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2} = \frac{x}{\sqrt{2+x^2}} \cos \sqrt{2+x^2}.$$

Câu 43: Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos \sqrt{2x+1}$.

A. $y' = -\frac{\sin \sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}$. B. $y' = \frac{\sin \sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}$. C. $y' = -\sin \sqrt{2x+1}$. D. $y' = -\frac{\sin \sqrt{2x+1}}{2\sqrt{2x+1}}$.

Lời giải

Chọn A

$$y' = -\left(\sqrt{2x+1} \right)' \sin \sqrt{2x+1} = -\frac{(2x+1)'}{2\sqrt{2x+1}} \sin \sqrt{2x+1} = -\frac{\sin \sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}.$$

Câu 44: Tính đạo hàm của hàm số $y = \cot \sqrt{x^2+1}$.

A. $y' = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1} \sin^2 \sqrt{x^2+1}}$. B. $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1} \sin^2 \sqrt{x^2+1}}$.
C. $y' = -\frac{1}{\sin^2 \sqrt{x^2+1}}$. D. $y' = \frac{1}{\sin^2 \sqrt{x^2+1}}$.

Lời giải

Chọn A

$$y' = -\frac{(\sqrt{x^2+1})'}{\sin^2 \sqrt{x^2+1}} = -\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\sin^2 \sqrt{x^2+1}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+1} \cdot \sin^2 \sqrt{x^2+1}}.$$

Câu 45: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

A. $y' = -\frac{\sin 2x}{(\sin x - \cos x)^2}.$

B. $y' = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{(\sin x - \cos x)^2}.$

C. $y' = \frac{2 - 2 \sin 2x}{(\sin x - \cos x)^2}.$

D. $y' = -\frac{2}{(\sin x - \cos x)^2}.$

Lời giải

Chọn D

Ta có $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = \frac{\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{-\sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = -\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$

Suy ra $y' = -\frac{1}{\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{1}{\left(\frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}.$

Câu 46: Tính đạo hàm của hàm số $y = -\frac{2}{\tan(1-2x)}.$

A. $y' = \frac{4}{\sin^2(1-2x)}.$

B. $y' = -\frac{4}{\sin(1-2x)}.$

C. $y' = -\frac{4x}{\sin^2(1-2x)}.$

D.

$y' = -\frac{4}{\sin^2(1-2x)}.$

Lời giải

Chọn A

$y' = -\frac{-2(\tan(1-2x))'}{\tan^2(1-2x)} = \frac{-4 \cdot \frac{1}{\cos^2 x(1-2x)}}{\tan^2(1-2x)} = \frac{-4}{\sin^2(1-2x)}.$

Câu 47: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 5 \sin x - 3 \cos x$ tại điểm $x = \frac{\pi}{2}.$

A. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3.$

B. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3.$

C. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -5.$

D. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5.$

Lời giải

Chọn A

$f'(x) = (5 \sin x - 3 \cos x)' = 5(\sin x)' - 3(\cos x)' = 5 \cos x + 3 \sin x$

Suy ra $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5\cos\frac{\pi}{2} + 3\sin\frac{\pi}{2} = 3$.

Câu 48: Hàm số nào dưới đây thỏa mãn hệ thức $y' + 2y^2 + 2 = 0$?

- A. $y = \sin 2x$. B. $y = \tan 2x$. C. $y = \cos 2x$. D. $y = \cot 2x$.

Lời giải

Chọn D

Với $y = \tan 2x \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 2x} \cdot 2$

Do đó $y' + 2y^2 + 2 = \frac{2}{\cos^2 2x} + 2\tan^2 2x + 2 = \frac{4}{\cos^2 2x}$

Với $y = \cot 2x \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sin^2 2x} \cdot 2$ suy ra $y' + 2y^2 + 2 = \frac{-2}{\sin^2 2x} + 2\cot^2 2x + 2 = 0$.

Câu 49: Cho $f(x) = \sin^3 ax$, $a > 0$. Tính $f'(\pi)$.

- A. $f'(\pi) = 2\sin^2(a\pi)\cos(a\pi)$. B. $f'(\pi) = 0$.
C. $f'(\pi) = 3a\sin^2(a\pi)$. D. $f'(\pi) = 3a\sin^2(a\pi)\cos(a\pi)$.

Lời giải

Chọn D

$$f'(x) = 3\sin^2(ax)(\sin ax)' = 3\sin^2(ax)(a\cos ax)$$

Câu 50: Cho hàm số $y = \sin^2 x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $2y' + y'' = \sqrt{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$. B. $4y - y'' = 2$.
C. $4y + y'' = 2$. D. $2y' + y' \cdot \tan x = 0$.

Lời giải

Chọn C

$$y' = 2\sin x \cdot \cos x = 2\sin 2x, y'' = 2\cos 2x = 2(1 - 2\sin^2 x) = 2 - 4\sin^2 x$$

Do đó $4y + y'' = 4\sin^2 x + 2 - 4\sin^2 x = 2$.

Câu 51: Xét hàm số $y = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ khi $x \neq 0$ và $f(x) = 0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $f(x)$ là một hàm số lẻ. B. $f(x)$ là một hàm tuần hoàn chu kỳ 2π .
C. $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 0$ bằng 0. D. $f(x)$ không có đạo hàm tại $x = 0$.

Lời giải

Chọn D

$$y(-x) = \frac{1 - \cos(-x)}{(-x)^2} = \frac{1 - \cos x}{x^2} \text{ khi } x \neq 0 \text{ và } f(0) = 0. \text{ Do đó, } f(x) \text{ là một hàm số chẵn,}$$

$f(x)$ không là hàm số tuần hoàn

$$\text{Mặt khác } \lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \text{ nên hàm số không liên tục tại}$$

điểm $x = 0$ do đó $f(x)$ không có đạo hàm tại $x = 0$.

Câu 52: Đạo hàm của hàm số $y = \log_3(4x+1)$ là

A. $y' = \frac{\ln 3}{4x+1}$. B. $y' = \frac{4}{(4x+1)\ln 3}$. C. $y' = \frac{1}{(4x+1)\ln 3}$. D. $y' = \frac{4 \ln 3}{4x+1}$.

Lời giải

Chọn B

$$y' = \frac{(4x+1)'}{(4x+1)\ln 3} = \frac{4}{(4x+1)\ln 3}.$$

Câu 53: Đạo hàm của hàm số $y = 2017^x$ là

A. $y' = x \cdot 2017^{x-1}$. B. $y' = 2017^x$ C. $y' = \frac{2017^x}{\ln 2017}$. D.

$$y' = 2017^x \cdot \ln 2017.$$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y' = 2017^x \cdot \ln 2017.$$

Câu 54: Cho hàm số $f(x) = (x+1)e^x$. Tính $f'(0)$

A. $2e$. B. 0 . C. 1 . D. 2

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } f(x) = (x+1)e^x \Rightarrow f'(x) = (x+2)e^x \Rightarrow f'(0) = 2.$$

Câu 55: Tính đạo hàm của hàm số $y = 3^x + \log x$.

A. $y' = 3^x \ln 3 + \frac{1}{x \ln 10}$. B. $y' = \log_3 x + \frac{1}{x \ln 3}$.

C. $y' = \log_3 x + \ln 3$. D. $y' = \frac{1 - \ln x}{\ln 3}$.

Lời giải

Chọn A

$$y = 3^x + \log x.$$

$$y' = 3^x \ln 3 + \frac{1}{x \ln 10}.$$

Câu 56: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{4 - \log_2^2 x}$.

- A.** $D = [-2; 2]$. **B.** $D = (0; 16]$. **C.** $D = (0; 4]$. **D.** $D = \left[\frac{1}{4}; 4\right]$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Hàm số có nghĩa} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \log_2^2 x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ -2 \leq \log_2 x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \frac{1}{4} \leq x \leq 4 \end{cases}.$$

Câu 57: Cho hàm số $f(x) = \ln(x^4 + 1)$. Đạo hàm $f'(1)$ bằng.

- A.** 2. **B.** $\frac{\ln 2}{2}$. **C.** 1. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } f'(x) = \frac{4x^3}{x^4 + 1} \Rightarrow f'(1) = 2.$$

Câu 58: Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^2 - 2x + 2)3^x$.

- A.** $y' = (2x - 2)3^x + (x^2 - 2x + 2)3^x \ln 3$. **B.** $y' = (2x - 2)3^x \ln 3$.
C. $y' = x^2 \cdot 3^x$. **D.** $y' = (2x - 2)3^x$.

Lời giải

Chọn A

$$y' = (2x - 2)3^x + (x^2 - 2x + 2)3^x \ln 3.$$

Câu 59: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{2^x}$ là.

- A.** $y' = 2^{-x} \ln 2$. **B.** $y' = -\frac{1}{2^x}$. **C.** $y' = -\frac{\ln 2}{2^x}$. **D.** $y' = -\frac{1}{(2^x)^2}$.

Lời giải

Chọn C

$$y = \frac{1}{2^x} = 2^{-x} \Rightarrow y' = -2^{-x} \cdot \ln 2 = -\frac{\ln 2}{2^x}.$$

Câu 60: Tính đạo hàm của hàm số $y = 2^{\sqrt{1-x}}$.

- A.** $y' = \frac{2^{\sqrt{1-x}}}{2\sqrt{1-x}}$. **B.** $y' = \frac{\ln 2}{2\sqrt{1-x}} 2^{\sqrt{1-x}}$. **C.** $y' = \frac{-\ln 2}{2\sqrt{1-x}} 2^{\sqrt{1-x}}$. **D.** $y'' = \frac{-2^{\sqrt{1-x}}}{2\sqrt{1-x}}$.

Lời giải

Chọn C

$$y' = (\sqrt{1-x})' \cdot 2^{\sqrt{1-x}} \cdot \ln 2 = \frac{-\ln 2}{2\sqrt{1-x}} 2^{\sqrt{1-x}}.$$

Câu 61: Tính đạo hàm của hàm số $y = 2^{\tan x}$.

A. $y' = \frac{\tan x \cdot 2^{\tan x-1}}{\ln 2}$.

B. $y' = \tan x \cdot 2^{\tan x-1} \ln 2$.

C. $y' = \frac{2^{\tan x} \ln 2}{\sin^2 x}$.

D. $y' = \frac{2^{\tan x} \ln 2}{\cos^2 x}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 2^{\tan x} \ln 2 (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} 2^{\tan x} \ln 2$.

Câu 62: Cho hàm số $y = f(x) = \ln(2e^x + m)$ có $f'(-\ln 2) = \frac{3}{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m \in (1; 3)$.

B. $m \in (-5; -2)$.

C. $m \in (1; +\infty)$.

D. $m \in (-\infty; 3)$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $2e^x + m > 0$.

Ta có $f'(x) = \frac{2e^x}{2e^x + m}$.

Theo đề bài ta có $f'(-\ln 2) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{2e^{-\ln 2}}{2e^{-\ln 2} + m} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{1+m} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3}$.

Vậy $m \in (-\infty; 3)$.

Câu 63: Cho hàm số $y = \ln(e^x + m^2)$. Với giá trị nào của m thì $y'(1) = \frac{1}{2}$.

A. $m = e$.

B. $m = -e$.

C. $m = \frac{1}{e}$.

D. $m = \pm\sqrt{e}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = \frac{e^x}{e^x + m^2} \Rightarrow y'(1) = \frac{e}{e + m^2}$.

Khi đó $y'(1) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{e}{e + m^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2e = e + m^2 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{e}$.

Câu 64: Hàm số $y = \ln(x^2 - 2mx + 4)$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$ khi các giá trị của tham số m là:

A. $m < 2$.

B. $m < -2$ hoặc $m > 2$.

C. $m = 2$.

D. $-2 < m < 2$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = \ln(x^2 - 2mx + 4)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ khi $x^2 - 2mx + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2.$$

Câu 65: Ông Tú dự định gửi vào ngân hàng một số tiền với lãi suất 6,5% một năm. Biết rằng, cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Tính số tiền tối thiểu x (triệu đồng, $x \in \mathbb{N}$) ông Tú gửi vào ngân hàng để sau 3 năm số tiền lãi đủ mua một chiếc xe gắn máy giá trị 30 triệu đồng.

- A. 145 triệu đồng B. 154 triệu đồng C. 150 triệu đồng D. 140 triệu đồng

Lời giải**Chọn A**

Theo công thức lãi kép, số tiền lãi ông Tú nhận được sau 3 năm là: $y = x \left(1 + \frac{6,5}{100} \right)^3 - x$
 $= \left[(1,065)^3 - 1 \right] x.$

Ta có: $\left[(1,065)^3 - 1 \right] x = 30 \Leftrightarrow x = \frac{30}{(1,065)^3 - 1} \approx 144,27$ triệu.

Vậy ông Tú cần gửi ít nhất 145 triệu để sau 3 năm số tiền lãi đủ mua một chiếc xe gắn máy giá trị 30 triệu đồng.

Câu 66: Hàm số $y = \log_2(4^x - 2^x + m)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi

- A. $m < \frac{1}{4}$. B. $m > 0$. C. $m \geq \frac{1}{4}$. D. $m > \frac{1}{4}$.

Lời giải**Chọn D**

Điều kiện: $4^x - 2^x + m > 0$.

Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $4^x - 2^x + m > 0$ (*) $\forall x \in \mathbb{R}$.

Đặt $t = 2^x$ với $t > 0$, khi đó bất phương trình (*) trở thành: $t^2 - t + m > 0 \quad \forall t > 0$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 - t$, $\forall t > 0$ ta có $f'(t) = 2t - 1$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$.

Lập bảng biến thiên ta tìm được $\min_{(0;+\infty)} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$.

Để bất phương trình $t^2 - t + m > 0$, $\forall t > 0$ thì $-m < -\frac{1}{4} \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$.

Cách khác:

➤ Trường hợp 1: $\Delta = 1 - 4m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$ thì $t^2 - t + m > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ (thỏa mãn yêu cầu bài toán)

➤ Trường hợp 2: $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$ thì phương trình $t^2 - t + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$ (không thỏa mãn yêu cầu bài toán).

➤ Trường hợp 3: $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{4}$. Ta thấy $-\frac{b}{a} = 1 > 0$ nên phương trình $t^2 - t + m = 0$ không thể có hai nghiệm âm. Tức là $t^2 - t + m$ không thể luôn dương với mọi $t > 0$.
 Vậy $m > \frac{1}{4}$.

B. TỰ LUẬN

Câu 67: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. Giải bất phương trình $f'(x) \geq f(x)$

Lời giải

$$f'(x) \geq f(x) \Leftrightarrow \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}} \geq \sqrt{x^2-2x} \quad (\text{với } x^2-2x > 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 0 \\ x-1 > x^2-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 0 \\ 0 > x^2-x+1 \end{cases} \quad (\text{vô nghiệm}).$$

Câu 68: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Xét các hàm số $g(x) = f(x) - f(2x)$ và $h(x) = f(x) - f(4x)$. Biết rằng $g'(1) = 18$ và $g'(2) = 1000$. Tính $h'(1)$

Lời giải

$$g'(x) = f'(x) - 2f'(2x) \text{ và } h'(x) = f'(x) - 4f'(4x)$$

$$\text{Do } g'(1) = 18 \text{ và } g'(2) = 1000 \text{ nên } \begin{cases} f'(1) - 2f'(2) = 18 \\ f'(2) - 2f'(4) = 1000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(1) - 2f'(2) = 18 \\ 2f'(2) - 4f'(4) = 2000 \end{cases}$$

Cộng vế theo vế ta được $f'(1) - 4f'(4) = 2018 \Rightarrow h'(1) = 2018$.

Câu 69: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = f'(1) + f'(2) + \dots + f'(2018)$$

Lời giải

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x+1-x} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

$$\text{Suy ra } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right)$$

$$\text{Khi đó } P = \frac{-1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2018}} - \frac{1}{\sqrt{2019}} \right) = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2019}} \right) = \frac{1 - \sqrt{2019}}{2\sqrt{2019}}$$

Câu 70: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = ax + \frac{b}{x^2}$, $f(-1) = 2$, $f(1) = 4$, $f'(1) = 0$.

$$\text{Viết } f(x) = \frac{ax^2}{2} - \frac{b}{x} + c. \text{ Tính } abc$$

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} f'(1) = a + b = 0 \\ f(-1) = \frac{a}{2} - \frac{b}{-1} + c = 2 \\ f(1) = \frac{a}{2} - \frac{b}{1} + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow abc = -\frac{5}{2}.$$

Câu 71: Cho $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$, $y' = \frac{ax + b}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}$. Khi đó giá trị $a.b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$y' = \frac{(x^2 - 2x + 3)'}{2\sqrt{x^2 - 2x + 3}} = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x + 3}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}$$

Do đó $a = 1, b = -1 \Rightarrow ab = -1$.

Câu 72: Cho hàm số $f(x) = \frac{\sin 4x}{4} + \cos x - \sqrt{3} \left(\sin x + \frac{\cos 4x}{4} \right)$. Tìm nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ thuộc $\left(0; \frac{\pi}{2} \right]$

Lời giải

$$f'(x) = \frac{\cos 4x \cdot 4}{4} - \sin x - \sqrt{3} \left(\cos x + \frac{-\sin 4x \cdot 4}{4} \right)$$

$$= \cos 4x - \sin x - \sqrt{3} \cos x + \sqrt{3} \sin 4x$$

$$\text{Khi đó } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3} \sin 4x + \cos 4x = \sin x + \sqrt{3} \cos x \Leftrightarrow 2 \sin \left(4x + \frac{\pi}{6} \right) = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + \frac{\pi}{6} = x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 4x + \frac{\pi}{6} = \pi - \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + l.2\pi \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{10} + \frac{l.2\pi}{5} \end{cases}$$

$$\text{Kết hợp } x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right] \Rightarrow x = \left\{ \frac{\pi}{18}; \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Câu 73: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \log(x^2 - 2mx + 4)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } x^2 - 2mx + 4 > 0 \quad (*)$$

$$\text{Để } (*) \text{ đúng với mọi } x \in \mathbb{R} \text{ thì } \Delta' = m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2.$$

Câu 74: Một người gửi số tiền 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7% / năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi đó là lãi kép). Để người đó lãnh được số tiền 250 triệu thì người đó cần gửi trong

khoảng thời gian ít nhất bao nhiêu năm? (nếu trong khoảng thời gian này không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi).

Lời giải

Ta có công thức tính $A = a(1+r)^n$ với A là số tiền gửi sau n tháng, a là số tiền gửi ban đầu, r là lãi suất.

$$250.10^6 = 100.10^6 (1+0,07)^n \Leftrightarrow 1,07^n = 2,5 \Leftrightarrow n = \log_{1,07} 2,5 = 13,542.$$

Câu 75: Cho hình vuông $ABCD$ có diện tích bằng 36, $\overrightarrow{AB}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng $y = 0$. Các điểm A, B, C lần lượt nằm trên đồ thị hàm số $y = \log_a x$; $y = 2 \log_a x$; $y = 3 \log_a x$. Tìm a .

Lời giải

Do diện tích hình vuông là 36 $\Rightarrow$ cạnh bằng 6

Gọi $A(m; \log_a m) \in y = \log_a x \Rightarrow B(m-6; \log_a m)$ và $C(m-6; 6 + \log_a m)$

Vì $B(m-6; \log_a m) \in y = 2 \log_a x \Rightarrow \log_a m = 2 \log_a (m-6)$ (1)

Vì $C(m-6; 6 + \log_a m) \in y = 3 \log_a x \Rightarrow 6 + \log_a m = 3 \log_a (m-6)$ (2)

Giải (1) $\Rightarrow m = 9$ Thay vào (2) $\Rightarrow a = \sqrt[6]{3}$

Câu 76: Cho hàm số $f(x) = \frac{2^x}{2^x + 2}$. Tính $f(0) + f\left(\frac{1}{10}\right) + \dots + f\left(\frac{19}{10}\right)$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Với } a+b=2, \text{ ta có } f(a) + f(b) &= \frac{2^a}{2^a + 2} + \frac{2^b}{2^b + 2} \\ &= \frac{2^a \cdot 2^b + 2 \cdot 2^a + 2^a \cdot 2^b + 2 \cdot 2^b}{(2^a + 2)(2^b + 2)} = \frac{2^{a+b} + 2 \cdot 2^a + 2^{a+b} + 2 \cdot 2^b}{2^{a+b} + 2 \cdot 2^a + 2 \cdot 2^b + 4} = \frac{4 + 2 \cdot 2^a + 4 + 2 \cdot 2^b}{4 + 2 \cdot 2^a + 2 \cdot 2^b + 4} = 1. \end{aligned}$$

Do đó với $a+b=2$ thì $f(a) + f(b) = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Áp dụng ta được } f(0) + f\left(\frac{1}{10}\right) + \dots + f\left(\frac{19}{10}\right) \\ &= f(0) + \left[f\left(\frac{1}{10}\right) + f\left(\frac{19}{10}\right) \right] + \left[f\left(\frac{2}{10}\right) + f\left(\frac{18}{10}\right) \right] + \dots + \left[f\left(\frac{9}{10}\right) + f\left(\frac{11}{10}\right) \right] + f(1) \\ &= \frac{1}{3} + 9 \cdot 1 + \frac{2}{4} = \frac{59}{6}. \end{aligned}$$