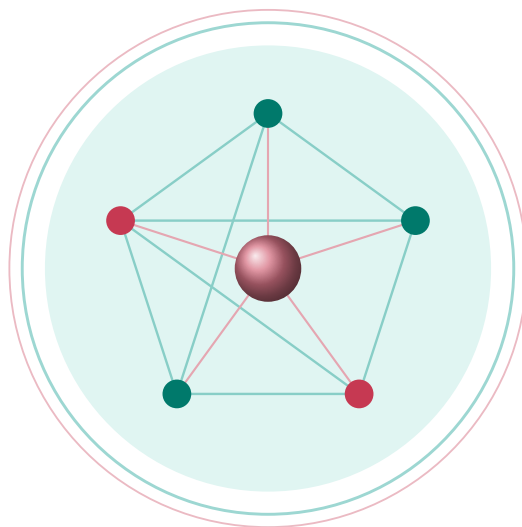


CHUYÊN ĐỀ TOÁN NÂNG CAO

Các kỹ thuật đếm nâng cao

TỔ HỢP XÁC SUẤT



TỔ HỢP — XÁC SUẤT

Mai Thành Luân (Semiconductor Engineer)

SĐT/ZALO: 0854070701

TIKTOK: Bao Đâu Bách Khoa (IC Design)

https://www.tiktok.com/@semiconductor_math_phy

LỜI NÓI ĐẦU

Trong chương trình Toán phổ thông, Tổ hợp – Xác suất thường được xem là một trong những chuyên đề gây nhiều trở ngại nhất. Điều đáng nói là trở ngại ấy hiếm khi đến từ khối lượng công thức, bởi số công thức cần dùng thực ra rất khiêm tốn. Khó khăn nằm ở chỗ khác: cùng một phép đếm nhưng mỗi đề bài lại khoác cho nó một lớp vỏ riêng — khi thì những cuốn sách xếp trên giá, khi thì các viên bi trong hộp, lúc lại là một quân cờ di chuyển trên bàn cờ. Người học giải trọn vẹn được bài này nhưng lúng túng trước bài kia, và không ít bạn đi tới một kết luận vội vàng rằng mình thiếu tư duy tổ hợp.

Thực tế thường không phải như vậy. Thứ còn thiếu không phải năng khiếu, mà là một **hệ thống** đủ rõ để nhìn xuyên qua lớp vỏ của đề bài và nhận ra kỹ thuật nằm bên dưới. Tài liệu này được biên soạn nhằm xây dựng chính khả năng đó.

Sách được tổ chức thành hai phần. **Phần I** trình bày các kỹ thuật đếm nâng cao theo trình tự từ nền tảng đến phức tạp: bó, hoán vị lặp, hoán vị vòng, truy hồi, chia kẹo, bao hàm – loại trừ cùng nhiều kỹ thuật khác. Mỗi chương mở đầu bằng tư tưởng cốt lõi, tiếp đến là các bài tập chọn lọc được giải theo từng bước, và khép lại mỗi bài là một ghi chú nêu những cái bẫy thường gặp cùng cách kiểm tra kết quả bằng một hướng tiếp cận khác. **Phần II** tập hợp các câu hỏi trích từ đề thi của các trường trung học phổ thông, trường chuyên và Sở Giáo dục và Đào tạo, nơi những kỹ thuật ở Phần I được vận dụng trong điều kiện thực tế của một kì thi.

Về phương pháp học, có một nguyên tắc đáng được đặt lên hàng đầu: **hiểu bản chất trước, ghi nhớ sau**. Một lời giải được thuộc lòng mà không kèm theo lí do — vì sao phải chia cho $k!$, vì sao cần loại trường hợp chữ số 0 đứng đầu, vì sao dùng tổ hợp thay cho chỉnh hợp — sẽ mất hiệu lực ngay khi đề thay đổi một chi tiết nhỏ. Ngược lại, khi đã nắm được mỗi công thức đang đếm điều gì, mỗi phép chia đang khử đi sự lặp nào, và mỗi giả thiết của đề tương ứng với ràng buộc nào trên các biến, thì việc chuyển từ bài toán này sang bài toán khác trở nên tự nhiên.

Khi nền tảng đã vững, việc *ghi nhớ có chọn lọc* mới phát huy tác dụng. Một số kết quả kinh điển thực sự xứng đáng được thuộc, vì chúng trở đi trở lại dưới rất nhiều hình dạng: bài toán chia kẹo Euler, số mất thứ tự, cách chọn các phần tử không kề nhau trên vòng tròn, hay xác suất để hai người ngồi cạnh nhau quanh một bàn tròn. Ghi nhớ những kết quả này không mâu thuẫn với việc hiểu bản chất — đó đơn giản là chuẩn bị sẵn công cụ để không phải dựng lại từ đầu trong phòng thi.

Tài liệu sẽ phát huy hiệu quả cao nhất nếu người học che phần lời giải và tự làm bài trong khung xanh lá trước, chỉ đối chiếu với khung hồng sau khi đã có đáp số của riêng mình hoặc đã thực sự bế tắc. Các hộp ghi chú cũng rất đáng được đọc kĩ: phần lớn điểm số bị mất trong phòng thi không đến từ việc thiếu công thức, mà đến từ đúng những cái bẫy được nhắc tới ở đó.

Mong rằng quyển sách sẽ là người bạn đồng hành hữu ích, và hơn thế, giúp người đọc tìm thấy vẻ đẹp riêng của chuyên đề này.

Mai Thành Luân

Semiconductor Engineer

0854070701

MỤC LỤC

PHẦN I. CÁC KỸ THUẬT ĐẾM NÂNG CAO	3
Chương 1. KỸ NĂNG BÓ TRONG BÀI TOÁN ĐẾM	4
Chương 2. KỸ NĂNG HOÁN VỊ LẬP	12
Chương 3. KỸ NĂNG HOÁN VỊ VÒNG VÀ PHÉP QUAY TẠO LẬP	18
Chương 4. TƯ DUY CÂY ĐIỀU KIỆN VÀ TRUY HỒI	25
Chương 5. KỸ NĂNG TÍNH TỔNG CÁC SỐ TỰ NHIÊN LẬP ĐƯỢC	32
Chương 6. BÀI TOÁN CHIA ĐỒ VẬT CHO CÁC ĐỐI TƯỢNG PHÂN BIỆT	38
Chương 7. CHIA ĐỒ VẬT VÀO CÁC HỘP GIỐNG NHAU	42
Chương 8. XÁC SUẤT BERNOULLI — DÃY PHÉP THỬ ĐỘC LẬP	47
Chương 9. TƯ DUY VÀ KỸ NĂNG GỘP PHÉP THỬ	53
Chương 10. CHIA KẸO CÓ ĐIỀU KIỆN	58
Chương 11. KỸ NĂNG ĐÁNH SỐ THỨ TỰ (ĐỔI BIẾN CHỈ SỐ)	61
Chương 12. KỸ NĂNG XỬ LÝ ƯỚC NGUYÊN DƯƠNG	68
Chương 13. XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN VÀ TƯ DUY GỘP PHÉP THỬ	76
Chương 14. NGUYÊN LÝ BAO HÀM — LOẠI TRỪ	81
Chương 15. KỸ NĂNG ĐẾM NHÂN TỔ HÌNH HỌC TRONG ĐA GIÁC	87
Chương 16. KỸ NĂNG CÂN BẰNG PHẦN TỬ KHOÁ	98
Chương 17. KỸ NĂNG PHÂN TẬP TRONG BÀI TOÁN ĐẾM	105
PHẦN II. TỔ HỢP XÁC SUẤT TRONG CÁC ĐỀ THI THỬ	116

PHẦN I

CÁC KỸ THUẬT ĐẾM NÂNG CAO

CHƯƠNG 1

KỸ NĂNG BÓ TRONG BÀI TOÁN ĐẾM

Tư tưởng chung của kỹ thuật “bó”. Khi bài toán yêu cầu một nhóm phần tử phải **đứng liền kề nhau**, ta **dán** nhóm đó lại thành một **khối** và coi khối như **một phần tử duy nhất**. Bài toán khi đó gồm hai tầng đếm độc lập:

- **Tầng trong khối:** sắp thứ tự các phần tử *bên trong* khối.
- **Tầng ngoài khối:** chọn các phần tử còn lại rồi hoán vị chúng *cùng với* khối.

Nhân hai tầng lại theo quy tắc nhân. Nếu tập chữ số có mặt số 0 thì phải **trừ đi** các trường hợp 0 đứng đầu.

Câu 1

Hỏi từ tập $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ ta lập được bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau sao cho hai chữ số 1 và 2 đứng cạnh nhau?

Bước 1. Nhận diện dạng và kiểm tra chữ số 0.

Tập X **không chứa chữ số 0** nên mọi cách xếp đều cho một số tự nhiên hợp lệ — không phải trừ trường hợp nào cả. Điều kiện “1 và 2 đứng cạnh nhau” chính là dấu hiệu kinh điển của kỹ thuật bó.

Bước 2. Bó cặp $\{1; 2\}$ thành một khối.

Dán 1 và 2 lại thành khối B . Bên trong khối có 2 thứ tự có thể xảy ra:

$$B = \boxed{1\ 2} \quad \text{hoặc} \quad B = \boxed{2\ 1} \implies 2! = 2 \text{ cách bó.}$$

1 2

khối B

3 chữ số chọn từ $\{3; 4; 5; 6\}$

$\implies$ hoán vị 4 đối tượng

Bước 3. Chọn các chữ số còn lại.

Số cần lập có 5 chữ số, khối B đã “ngốn” mất 2 chữ số, nên còn thiếu $5 - 2 = 3$ chữ số nữa. Ba chữ số này lấy từ phần còn lại $X \setminus \{1; 2\} = \{3; 4; 5; 6\}$:

$$C_4^3 = 4 \text{ cách chọn.}$$

Bước 4. Hoán vị khối cùng 3 chữ số vừa chọn.

Bây giờ coi khối B như *một* phần tử. Ta có tất cả $1 + 3 = 4$ đối tượng xếp thành hàng:

$$4! = 24 \text{ cách.}$$

Bước 5. Áp dụng quy tắc nhân.

$$2! \cdot (C_4^3 \cdot 4!) = 2 \cdot (4 \cdot 24) = 2 \cdot 96 = 192.$$

Kết quả: 192 số tự nhiên

Ghi chú. Hai bẫy hay gặp. (i) Quên nhân $2!$ của tầng trong khối — khi đó chỉ ra 96, đúng một nửa đáp số. (ii) Dùng A_4^3 để chọn 3 chữ số rồi lại nhân $4!$: như vậy thứ tự của 3 chữ số đã bị đếm hai lần. Nguyên tắc an toàn: **đã hoán vị ở tầng ngoài thì tầng chọn phải dùng tổ hợp C , không dùng chỉnh hợp A .**

Câu 2

Hỏi từ tập $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ ta lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau mà ba chữ số 1, 2, 3 đứng thành một cụm? (Ví dụ: 413257 hoặc 531264.)

Bước 1. Đọc kỹ điều kiện.

“Ba chữ số 1, 2, 3 đứng thành một cụm” nghĩa là chúng chiếm 3 ô **liên tiếp**, thứ tự bên trong tùy ý. Xem ví dụ 413257: cụm là 132. Tập X không có chữ số 0 nên không phải xử lý trường hợp đứng đầu.

Bước 2. Bỏ cụm $\{1; 2; 3\}$.

Bên trong khối, ba chữ số phân biệt xếp tự do:

$$3! = 6 \text{ cách bỏ } (123, 132, 213, 231, 312, 321).$$

Bước 3. Chọn các chữ số còn lại.

Số cần lập có 6 chữ số, khối chiếm 3 chữ số nên còn $6 - 3 = 3$ chữ số nữa, lấy từ $X \setminus \{1; 2; 3\} = \{4; 5; 6; 7; 8\}$:

$$C_5^3 = 10 \text{ cách.}$$

Bước 4. Hoán vị tầng ngoài.

Khối + 3 chữ số = 4 đối tượng, xếp thành hàng: $4! = 24$ cách.

Bước 5. Nhân lại.

$$3! \cdot (C_5^3 \cdot 4!) = 6 \cdot (10 \cdot 24) = 6 \cdot 240 = 1440.$$

Kết quả: 1440 số tự nhiên

Ghi chú. So sánh với Câu 1: cấu trúc lời giải *giống hệt*, chỉ thay “khối 2 phần tử” bằng “khối 3 phần tử”. Công thức tổng quát cho tập n chữ số khác 0, lập số k chữ số khác nhau, có m chữ số cho trước đứng thành cụm:

$$m! \cdot C_{n-m}^{k-m} \cdot (k - m + 1)!.$$

Kiểm lại Câu 2: $3! \cdot C_5^3 \cdot 4! = 1440$. ✓

Câu 3

Hỏi từ tập $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ ta lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau mà nó chắc chắn có mặt chữ số 3 và chữ số 4, sao cho **giữa hai chữ số 3 và 4 có đúng một chữ số khác** nữa?

Bước 1. Chuyển “khoảng cách cố định” về “bỏ”.

Điều kiện “giữa 3 và 4 có đúng một chữ số” nghĩa là ba ô liên tiếp có dạng

$$\boxed{3} \boxed{*} \boxed{4} \quad \text{hoặc} \quad \boxed{4} \boxed{*} \boxed{3},$$

với $*$ là một chữ số khác 3 và 4. Vậy đây vẫn là một **khối 3 ô liên tiếp**, chỉ khác là vị trí bên trong khối đã bị ràng buộc.

$$\boxed{3} \boxed{*} \boxed{4} \quad * \in X \setminus \{3; 4\} = \{1; 2; 5; 6; 7\}$$

khối 3 ô — hai đầu đổi chỗ được (2!)

Bước 2. Đếm số cách tạo khối.

- Chọn chữ số đứng giữa: $*$ lấy từ $X \setminus \{3; 4\} = \{1; 2; 5; 6; 7\} \Rightarrow C_5^1 = 5$ cách.
- Hoán đổi hai đầu (3 và 4): $2! = 2$ cách.

Vậy có $C_5^1 \cdot 2! = 10$ khối khác nhau.

Bước 3. Chọn các chữ số còn lại.

Khối đã dùng 3 chữ số, số cần lập có 6 chữ số nên còn thiếu 3 chữ số. Tập X còn lại $7 - 3 = 4$ chữ số, chọn 3:

$$C_4^3 = 4 \text{ cách.}$$

Bước 4. Hoán vị tầng ngoài.

Khối + 3 chữ số = 4 đối tượng: $4! = 24$ cách.

Bước 5. Nhân lại.

$$(C_5^1 \cdot 2!) \cdot (C_4^3 \cdot 4!) = 10 \cdot 96 = 960.$$

Kết quả: 960 số tự nhiên

Ghi chú. Điểm dễ sai nhất: sau khi đã lấy $*$ ra khỏi X , tập còn lại chỉ có 4 phần tử (chứ không phải 5). Nhiều bạn vẫn viết C_5^3 và ra 120 — gấp đôi đáp số. Hãy luôn **đếm lại số phần tử của X sau mỗi lần lấy ra**.

Câu 4

Hỏi từ tập $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ ta lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau mà nó chắc chắn có mặt chữ số 3 và chữ số 4, sao cho **giữa hai chữ số 3 và 4 có đúng hai chữ số khác nữa**?

Bước 1. Hình dung khối.

Khối bây giờ dài 4 ô liên tiếp:

$$\boxed{3} \boxed{*} \boxed{*} \boxed{4} \quad \text{hoặc} \quad \boxed{4} \boxed{*} \boxed{*} \boxed{3}.$$

Bước 2. Đếm số cách tạo khối.

- Chọn 2 chữ số đứng giữa từ $X \setminus \{3; 4\} = \{1; 2; 5; 6; 7; 8\}$: $C_6^2 = 15$ cách.
- Xếp thứ tự 2 chữ số đó vào hai ô giữa: $2! = 2$ cách.
- Hoán đổi hai đầu 3 và 4: $2! = 2$ cách.

Số khối: $C_6^2 \cdot 2! \cdot 2! = 15 \cdot 2 \cdot 2 = 60$.

Bước 3. Chọn các chữ số còn lại.

Khối chiếm 4 chữ số, số cần lập có 6 chữ số nên còn 2 chữ số nữa. Tập X còn lại $8 - 4 = 4$ chữ số, chọn 2:

$$C_4^2 = 6 \text{ cách.}$$

Bước 4. Hoán vị tầng ngoài.

Khối + 2 chữ số = 3 đối tượng: $3! = 6$ cách.

Bước 5. Nhân lại.

$$(C_6^2 \cdot 2! \cdot 2!) \cdot (C_4^2 \cdot 3!) = 60 \cdot (6 \cdot 6) = 60 \cdot 36 = 2160.$$

Kết quả: 2160 số tự nhiên

Ghi chú. Quy luật khoảng cách. Nếu giữa hai chữ số cho trước có đúng d chữ số khác thì khối dài $d + 2$ ô, và số cách tạo khối là

$$\underbrace{2!}_{\text{hai đầu}} \cdot \underbrace{A_{n-2}^d}_{\text{chọn và xếp } d \text{ chữ số giữa}}.$$

Với Câu 4: $2! \cdot A_6^2 = 2 \cdot 30 = 60$ — trùng khớp với cách tính $C_6^2 \cdot 2! \cdot 2!$ ở trên.

Câu 5

Hỏi từ tập $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ ta lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau mà ba chữ số 1, 2, 3 đứng thành một cụm? (Ví dụ: 413257 hoặc 531264.)

Bước 1. Cảnh báo: tập X có chữ số 0.

Câu này giống hệt Câu 2 về cấu trúc, nhưng $0 \in X$ nên phải **loại các cách xếp có chữ số 0 đứng đầu** (số tự nhiên không được bắt đầu bằng 0). Chiến thuật: *đếm thoải mái trước, trừ phần cấm sau.*

Bước 2. Bó cụm $\{1; 2; 3\}$.

$3! = 6$ cách bó. Thừa số này chung cho cả hai lần đếm dưới đây nên ta đặt ra ngoài.

Bước 3. Đếm tổng (tạm cho phép 0 đứng đầu).

Còn $6 - 3 = 3$ chữ số nữa, lấy từ $X \setminus \{1; 2; 3\} = \{0; 4; 5; 6; 7\}$: $C_5^3 = 10$ cách.

Xếp khối + 3 chữ số = 4 đối tượng: $4! = 24$ cách.

$$N_{\text{tổng}} = C_5^3 \cdot 4! = 10 \cdot 24 = 240.$$

Bước 4. Đếm phần cấm (chữ số 0 đứng đầu).

Ép 0 vào ô đầu tiên. Khi đó 0 đã được dùng, nên 2 chữ số còn lại phải lấy từ $\{4; 5; 6; 7\}$: $C_4^2 = 6$ cách.

Phần còn lại của dãy chứa khối + 2 chữ số = 3 đối tượng: $3! = 6$ cách.

$$N_{\text{cấm}} = C_4^2 \cdot 3! = 6 \cdot 6 = 36.$$

Bước 5. Kết hợp.

$$3! \cdot (N_{\text{tổng}} - N_{\text{cấm}}) = 6 \cdot (240 - 36) = 6 \cdot 204 = 1224.$$

Kết quả: 1224 số tự nhiên

Ghi chú. Vì sao được đặt $3!$ ra ngoài dấu ngoặc? Vì thứ tự bên trong cụm $\{1; 2; 3\}$ hoàn toàn độc lập với việc chữ số 0 nằm ở đâu. Nếu chưa quen, hãy viết đầy đủ $3! \cdot 240 - 3! \cdot 36 = 1440 - 216 = 1224$ — cùng kết quả.

Bẫy: khi ép 0 đứng đầu, nhiều bạn vẫn giữ C_5^3 ; nhưng 0 đã bị dùng rồi nên chỉ còn 4 chữ số để chọn 2.

Câu 6

Biết rằng có tất cả T cách xếp 5 học sinh nam, 4 học sinh nữ và 1 cô giáo thành hàng ngang, sao cho cô giáo đứng giữa hai học sinh nữ (hai bên cạnh trái, phải của cô giáo đều là học sinh nữ). Hãy xác định **ba chữ số tận cùng** của T .

Bước 1. Tổng số người và dạng khối.

Có $5 + 4 + 1 = 10$ người xếp thành hàng ngang. Điều kiện cho ta một khối 3 người liên tiếp:

Nữ Cô giáo Nữ.

Bước 2. Đếm số cách tạo khối.

- Chọn 2 trong 4 học sinh nữ để đứng hai bên cô giáo: $C_4^2 = 6$ cách.
- Xếp 2 bạn nữ đó vào bên trái / bên phải: $2! = 2$ cách.

Số khối: $C_4^2 \cdot 2! = 12$.

Bước 3. Hoán vị tầng ngoài.

Khối đã “nuốt” 3 người, còn lại $10 - 3 = 7$ người (5 nam và 2 nữ). Coi khối là một đối tượng, ta xếp $1 + 7 = 8$ đối tượng thành hàng:

$$8! = 40\,320 \text{ cách.}$$

Bước 4. Nhân lại.

$$T = (C_4^2 \cdot 2!) \cdot 8! = 12 \cdot 40\,320 = 483\,840.$$

Bước 5. Lấy ba chữ số tận cùng.

$$T = 483\underline{84}0.$$

Kết quả: Ba chữ số tận cùng của T là 840 (với $T = 483\,840$)

Ghi chú. Vì sao không cần chọn vị trí cho khối? Vì khối chiếm 3 chỗ liên tiếp trong một hàng kín 10 chỗ; khi nén khối thành một đối tượng, hàng chỉ còn 8 chỗ và mọi cách xếp 8 đối tượng đều tương ứng một-một với một cách xếp hợp lệ. Đây là điểm khác biệt với Câu 7 (nhiều ghế hơn số người), ở đó ta buộc phải chọn vị trí.

Câu 7

Biết rằng có tất cả T cách xếp 4 học sinh nam, 3 học sinh nữ và 1 thầy giáo vào một dãy gồm 12 ghế, sao cho thầy giáo đứng giữa một học sinh nữ và một học sinh nam (hai bên cạnh trái, phải của thầy giáo là một học sinh nữ và một học sinh nam). Hãy xác định **bốn chữ số tận cùng** của T .

Bước 1. Điểm khác biệt then chốt.

Chỉ có $4 + 3 + 1 = 8$ người nhưng có tới 12 ghế $\Rightarrow$ **có 4 ghế trống**. Vì vậy không thể “hoán vị hết” như Câu 6; phải **chọn ghế** cho từng đối tượng.

NTM 12 ghế
khối 3 ghế liền

Bước 2. Đếm số cách tạo khối.

- Chọn 1 học sinh nam: $C_4^1 = 4$ cách.
- Chọn 1 học sinh nữ: $C_3^1 = 3$ cách.
- Hai kiểu sắp trong khối: Nam-Thầy-Nữ hoặc Nữ-Thầy-Nam $\Rightarrow 2! = 2$ cách.

Số khối: $C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot 2! = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

Bước 3. Nén khối để đếm vị trí.

Khối chiếm 3 ghế liên tiếp. Nếu ta “nén” 3 ghế đó lại thành 1 ghế thì dãy 12 ghế trở thành dãy

$$12 - 3 + 1 = 10 \text{ vị trí,}$$

và phép nén này là song ánh: mỗi cách xếp trên dãy 10 vị trí ứng với đúng một cách xếp hợp lệ trên dãy 12 ghế.

Bước 4. Xếp các đối tượng vào 10 vị trí.

Các đối tượng cần xếp: khối + 5 học sinh còn lại (3 nam, 2 nữ) = 6 đối tượng *phân biệt*. Chọn 6 trong 10 vị trí *có thứ tự*:

$$A_{10}^6 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 151\,200.$$

Bước 5. Nhân lại và lấy bốn chữ số tận cùng.

$$T = 24 \cdot 151\,200 = 3\,628\,800 = 3628800.$$

Kết quả: Bốn chữ số tận cùng của T là 8800 (với $T = 3\,628\,800$)

Ghi chú. Công thức nén khối. Với dãy n ghế, một khối chiếm k ghế liên tiếp và m đối tượng đơn lẻ, số cách xếp là

$$(\text{số khối}) \cdot A_{n-k+1}^{m+1}.$$

Ở đây $n = 12$, $k = 3$, $m = 5$: $A_{10}^6 \cdot \checkmark$

Chú ý: $A_{10}^6 = 151\,200$ đã bao gồm cả việc *chọn* vị trí lẫn *sắp* thứ tự, nên tuyệt đối không nhân thêm $6!$.

Câu 8

Trong hộp chứa tất cả các thẻ được ghi dãy số gồm sáu chữ số khác nhau chọn từ tập $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Rút ngẫu nhiên một thẻ từ hộp. Hãy tính xác suất để rút được một thẻ có ghi các chữ số 2, 3, 5, 6, trong đó các chữ số 2, 3 đứng cạnh nhau (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Bước 1. Đếm không gian mẫu $n(\Omega)$.

Mỗi thẻ là một *dãy có thứ tự* gồm 6 chữ số khác nhau lấy từ 9 chữ số của X , tức là một chỉnh hợp chập 6 của 9:

$$n(\Omega) = A_9^6 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 60\,480.$$

Bước 2. Mô tả biến cố A .

A : “thẻ có mặt đủ bốn chữ số 2, 3, 5, 6 và hai chữ số 2, 3 đứng cạnh nhau”.

Vì thẻ chỉ có 6 ô mà đã bắt buộc chứa 4 chữ số 2, 3, 5, 6, nên chỉ còn 2 ô tự do.

Bước 3. Đếm $n(A)$ bằng kỹ thuật bó.

- Bó cặp $\{2; 3\}$ thành khối: $2! = 2$ cách (23 hoặc 32).

- Chọn 2 chữ số còn lại từ $X \setminus \{2; 3; 5; 6\} = \{1; 4; 7; 8; 9\}$: $C_5^2 = 10$ cách.
- Các đối tượng cần xếp: khối, chữ số 5, chữ số 6, và 2 chữ số vừa chọn $\Rightarrow 5$ đối tượng $\Rightarrow 5! = 120$ cách.

$$n(A) = 2! \cdot (C_5^2 \cdot 5!) = 2 \cdot (10 \cdot 120) = 2\,400.$$

Bước 4. Tính xác suất.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2\,400}{60\,480} = \frac{5}{126} \approx 0,039682 \dots$$

Làm tròn đến hàng phần trăm: $P(A) \approx 0,04$.

$$\text{Kết quả: } P(A) = \frac{5}{126} \approx 0,04$$

Ghi chú. Đừng nhầm “có mặt” với “chỉ gồm”. Thẻ phải *chứa* 2, 3, 5, 6 nhưng vẫn còn 2 ô cho các chữ số khác — nếu hiểu nhầm là thẻ chỉ gồm 2, 3, 5, 6 thì bài toán vô nghĩa (thẻ có 6 ô).

Rút gọn nhanh: $\frac{2 \cdot 10 \cdot 120}{60\,480} = \frac{2400}{60480} = \frac{5}{126}$, và $\frac{5}{126} < \frac{5}{125} = 0,04$ nên đáp số làm tròn chắc chắn là 0,04.

Câu 9

Biết rằng có T số tự nhiên có 7 chữ số khác nhau, trong đó chữ số 3 đứng liền giữa hai chữ số 2 và 4 (ví dụ như: 1052346). Hãy xác định **ba chữ số tận cùng** của T .

Bước 1. Xác định tập chữ số và dạng khối.

Ở đây không cho tập X , nghĩa là các chữ số lấy từ $\{0; 1; 2; \dots; 9\}$ — **có chữ số 0**, nên lại phải trừ trường hợp 0 đứng đầu.

“Chữ số 3 đứng liền giữa 2 và 4” cho khối 3 ô liên tiếp:

$$\boxed{2} \boxed{3} \boxed{4} \quad \text{hoặc} \quad \boxed{4} \boxed{3} \boxed{2} \implies 2! = 2 \text{ cách bố.}$$

(Chữ số 3 bị ghim ở giữa, chỉ hai đầu được đổi chỗ.)

Bước 2. Đếm tổng (tạm cho phép 0 đứng đầu).

Khối chiếm 3 chữ số, số cần lập có 7 chữ số nên còn 4 chữ số nữa, lấy từ $\{0; 1; 5; 6; 7; 8; 9\}$ ($10 - 3 = 7$ chữ số):

$$C_7^4 = 35 \text{ cách chọn.}$$

Xếp khối + 4 chữ số = 5 đối tượng: $5! = 120$ cách.

$$N_{\text{tổng}} = C_7^4 \cdot 5! = 35 \cdot 120 = 4\,200.$$

Bước 3. Đếm phần cấm (chữ số 0 đứng đầu).

Ép 0 vào ô đầu. Còn 3 chữ số nữa chọn từ $\{1; 5; 6; 7; 8; 9\}$ (6 chữ số): $C_6^3 = 20$ cách.

Sáu ô còn lại chứa khối + 3 chữ số = 4 đối tượng: $4! = 24$ cách.

$$N_{\text{cấm}} = C_6^3 \cdot 4! = 20 \cdot 24 = 480.$$

Bước 4. Kết hợp.

$$T = 2! \cdot (N_{\text{tổng}} - N_{\text{cấm}}) = 2 \cdot (4\,200 - 480) = 2 \cdot 3\,720 = 7\,440.$$

Bước 5. Lấy ba chữ số tận cùng. $T = 7\underline{440}$.**Kết quả:** Ba chữ số tận cùng của T là $\boxed{440}$ (với $T = 7\,440$)

Ghi chú. Kiểm tra bằng ví dụ đề cho. Số 1052346 có 7 chữ số khác nhau, chứa cụm 234 với 3 ở giữa — đúng là một phần tử được đếm. ✓

Tổng kết ba dạng đã gặp trong bộ này:

- Cụm tự do (Câu 2, 5): nhân $m!$ cho tầng trong khối.
- Khoảng cách cố định (Câu 3, 4): hai đầu $2!$, các ô giữa dùng A hoặc C !
- Phần tử bị ghim giữa (Câu 9): chỉ $2!$ cho hai đầu, phần tử giữa *không* hoán vị.

CHƯƠNG 2

KỸ NĂNG HOÁN VỊ LẬP

Công thức nền. Sắp n đối tượng thành một dãy, trong đó có n_1 đối tượng giống nhau loại 1, n_2 đối tượng giống nhau loại 2, ..., n_k đối tượng giống nhau loại k (với $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$), thì số cách xếp là

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \quad (\text{hoán vị lập}).$$

Mẹo nhận dạng: hễ thấy ô trống, vị trí cùng vai trò, hay nhiều người giữ cùng một chức danh $\Rightarrow$ đó là các đối tượng “giống nhau” và phải chia cho giai thừa số lần lặp. Ô trống cũng là một “loại” và phải được đếm!

Câu 1

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp 2 kí tự A , 1 kí tự B vào 6 ô hàng ngang sao cho mỗi ô chỉ xếp được đúng một kí tự?

Bước 1. Đưa “ô trống” vào cuộc chơi.

Có 6 ô nhưng chỉ có 3 kí tự, nên còn $6 - 3 = 3$ ô trống. coi mỗi ô trống là một kí tự đặc biệt $\emptyset$. Bài toán trở thành: xếp một dãy 6 kí tự gồm

$$\underbrace{A, A}_{2 \text{ giống nhau}}, \underbrace{B}_1, \underbrace{\emptyset, \emptyset, \emptyset}_{3 \text{ giống nhau}}.$$



một cách xếp: 2 chữ A , 1 chữ B và 3 ô trống

Bước 2. Áp dụng hoán vị lập.

$$\frac{6!}{2! \cdot 1! \cdot 3!} = \frac{720}{2 \cdot 1 \cdot 6} = \frac{720}{12} = 60.$$

Bước 3. Cách hiểu thứ hai (chọn vị trí).

Chọn 2 ô cho hai chữ A : $C_6^2 = 15$; rồi chọn 1 ô trong 4 ô còn lại cho B : $C_4^1 = 4$.

$$15 \cdot 4 = 60. \checkmark$$

Kết quả: 60 cách

Ghi chú. Bẫy kinh điển: quên $3!$ của các ô trống, dẫn tới $6!/2! = 360$ — sai gấp 6 lần. Hãy nhớ **tổng các n_i phải đúng bằng số ô.**

Câu 2

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp 3 kí tự A , 1 kí tự B , 1 kí tự C vào 8 ô hàng dọc sao cho mỗi ô chỉ xếp được đúng một kí tự?

Bước 1. Kiểm kê các “loại”.

Tổng số kí tự là $3 + 1 + 1 = 5$, số ô là 8 $\Rightarrow$ có $8 - 5 = 3$ ô trống.

$$\underbrace{A, A, A}_3, \underbrace{B}_1, \underbrace{C}_1, \underbrace{\emptyset, \emptyset, \emptyset}_3; \quad 3 + 1 + 1 + 3 = 8. \checkmark$$

Bước 2. Hoán vị lập.

$$\frac{8!}{3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 3!} = \frac{40\,320}{6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 6} = \frac{40\,320}{36} = 1120.$$

Bước 3. Kiểm tra bằng cách chọn vị trí.

$$C_8^3 (\text{chỗ cho } A) \times C_5^1 (\text{chỗ cho } B) \times C_4^1 (\text{chỗ cho } C) = 56 \cdot 5 \cdot 4 = 1120. \checkmark$$

Kết quả: 1120 cách

Ghi chú. Hàng ngang hay hàng dọc *không* làm thay đổi phép đếm — điều duy nhất quan trọng là các ô được **phân biệt** với nhau.

Câu 3

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách bầu 5 em học sinh vào 4 vị trí: 1 lớp trưởng, 2 lớp phó, 1 bí thư?

Bước 1. Đổi bài toán “bầu cử” thành bài toán “xếp nhãn”.

Cho 5 học sinh đứng thành một hàng ngang cố định (theo tên, ai đứng chỗ nào là biết). Việc bầu cử chính là việc **phát nhãn** cho 5 bạn đó:

$$\underbrace{T}_{\text{lớp trưởng}}, \quad \underbrace{P, P}_{\text{hai lớp phó — cùng chức, không phân biệt}}, \quad \underbrace{B}_{\text{bí thư}}, \quad \underbrace{\emptyset}_{\text{không giữ chức}}.$$

Tổng số nhãn = $1 + 2 + 1 + 1 = 5$, đúng bằng số học sinh.

Bước 2. Vì sao hai lớp phó “giống nhau”?

Nếu bạn Nam và bạn Lan cùng làm lớp phó thì việc “Nam phó 1, Lan phó 2” và “Nam phó 2, Lan phó 1” là **một** kết quả bầu cử. Vậy hai nhãn P là như nhau $\Rightarrow$ chia 2!.

Bước 3. Hoán vị lập.

$$\frac{5!}{1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{120}{2} = 60.$$

Kết quả: 60 cách

Ghi chú. Cực kì dễ sai: dùng chỉnh hợp $A_5^4 = 120$. Kết quả này đã coi hai chiếc ghế lớp phó là *phân biệt*, nên bị đếm gấp đôi. Nguyên tắc: **bao nhiêu người cùng một chức danh thì chia cho giai thừa của số đó.**

Câu 4

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách bầu 8 em học sinh vào 6 vị trí: 1 lớp trưởng, 3 lớp phó, 2 bí thư?

Bước 1. Kiểm kê nhân.

8 học sinh, 6 chức vụ $\Rightarrow$ có $8 - 6 = 2$ bạn *không* giữ chức, và hai bạn “không chức” này cũng không phân biệt với nhau.

$$\underbrace{T}_1, \underbrace{P, P, P}_3, \underbrace{B, B}_2, \underbrace{\emptyset, \emptyset}_2; \quad 1 + 3 + 2 + 2 = 8. \checkmark$$

Bước 2. Hoán vị lập.

$$\frac{8!}{1! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 2!} = \frac{40\,320}{1 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{40\,320}{24} = 1680.$$

Bước 3. Kiểm tra bằng cách chọn dần.

$$\underbrace{C_8^1}_{\text{lớp trưởng}} \cdot \underbrace{C_7^3}_{\text{ba lớp phó}} \cdot \underbrace{C_4^2}_{\text{hai bí thư}} = 8 \cdot 35 \cdot 6 = 1680. \checkmark$$

Kết quả: 1680 cách

Ghi chú. Hai cách trên luôn cho cùng kết quả, vì $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots} = C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \dots$ — đó chính là “công thức tổ hợp dây chuyền”. Hãy chọn cách nào bạn thấy dễ kiểm soát hơn.

Câu 5

Từ các chữ số 0, 1 ta lập được n số tự nhiên có 20 chữ số và chia hết cho 90. Hãy xác định **ba chữ số tận cùng** của n .

Bước 1. Tách điều kiện chia hết.

$90 = 9 \cdot 10$ và $\gcd(9; 10) = 1$, nên

$$\overline{a_1 a_2 \dots a_{20}} : 90 \iff \begin{cases} \text{chia hết cho } 10 & \Rightarrow a_{20} = 0, \\ \text{chia hết cho } 9 & \Rightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_{20} : 9. \end{cases}$$

Bước 2. Cố định hai đầu.

Số có 20 chữ số nên $a_1 \neq 0$; mà chữ số chỉ lấy từ $\{0; 1\}$ nên bắt buộc $a_1 = 1$.

Điều kiện chia hết cho 10 cho $a_{20} = 0$.

Còn lại 18 vị trí tự do: $a_2, a_3, \dots, a_{19}$.

Bước 3. Chuyển điều kiện tổng thành điều kiện đếm số chữ số 1.

Vì các chữ số chỉ là 0 hoặc 1, tổng các chữ số chính là **số lượng chữ số 1**. Gọi k là số chữ số 1 nằm trong 18 vị trí giữa. Tổng tất cả các chữ số là $1 + k$, và

$$1 + k : 9 \iff k \equiv 8 \pmod{9}.$$

Do $0 \leq k \leq 18$ nên $k \in \{8; 17\}$.

Bước 4. Đếm theo từng giá trị của k .

- $k = 8$: chọn 8 vị trí trong 18 để đặt chữ số 1 $\Rightarrow C_{18}^8 = 43\,758$.
- $k = 17$: chọn 17 vị trí trong 18 $\Rightarrow C_{18}^{17} = 18$.

$$n = 43\,758 + 18 = 43\,776.$$

Bước 5. Lấy ba chữ số tận cùng.

$$n = 43\,776.$$

Kết quả: Ba chữ số tận cùng của n là $\boxed{776}$ (với $n = 43\,776$)

Ghi chú. Vì sao không có $k = 26$? Vì k nhiều nhất bằng 18. Luôn **chặn miễn giá trị** của biến trước khi liệt kê nghiệm đồng dư — đây là chỗ mất điểm phổ biến nhất của dạng bài này.

Câu 6

Hỏi từ các chữ số $X = \{1; 2; 3\}$ lập được tất cả bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số và chia hết cho 9?

Bước 1. Chặn tổng các chữ số.

Mỗi chữ số thuộc $\{1; 2; 3\}$ (được lặp lại tùy ý), nên tổng $S = a_1 + \dots + a_5$ thỏa

$$5 \cdot 1 = 5 \leq S \leq 5 \cdot 3 = 15.$$

Bội của 9 nằm trong đoạn $[5; 15]$ chỉ có **duy nhất** $S = 9$.

Bước 2. Đổi biến để đưa về chia kẹo.

Đặt $b_i = a_i - 1$, khi đó $b_i \in \{0; 1; 2\}$ và

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = 9 - 5 = 4.$$

Bước 3. Đếm số nghiệm bằng bao hàm - loại trừ.

Số nghiệm nguyên không âm của $b_1 + \dots + b_5 = 4$ *không kèm cận trên* là

$$C_{4+5-1}^{5-1} = C_8^4 = 70.$$

Loại các nghiệm có một biến ≥ 3 : chọn biến đó (5 cách), đặt $b'_i = b_i - 3 \geq 0$, phương trình còn $b'_1 + \dots = 1$ với $C_{1+4}^4 = C_5^4 = 5$ nghiệm. Không thể có hai biến cùng ≥ 3 (vì $3 + 3 > 4$).

$$70 - 5 \cdot 5 = 70 - 25 = 45.$$

Kết quả: 45 số tự nhiên

Ghi chú. Kiểm tra bằng hoán vị lập. Các bộ chữ số (không kể thứ tự) lấy từ $\{1; 2; 3\}$, gồm 5 chữ số và có tổng bằng 9, chỉ có đúng ba bộ:

$$\{3, 3, 1, 1, 1\} : \frac{5!}{2!3!} = 10; \quad \{3, 2, 2, 1, 1\} : \frac{5!}{1!2!2!} = 30; \quad \{2, 2, 2, 2, 1\} : \frac{5!}{4!1!} = 5.$$

Tổng: $10 + 30 + 5 = 45$. ✓ — trùng khớp với cách đổi biến ở trên.

Câu 7

Hỏi có tất cả bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số, sao cho tổng các chữ số của nó lớn hơn 42?

Bước 1. Tìm miền giá trị của tổng.

Tổng lớn nhất là $9 \cdot 5 = 45$ (số 99999). Vậy tổng $S \in \{43; 44; 45\}$ — chỉ có 3 khả năng.

Bước 2. Đổi sang “độ hụt so với 9”.

Đặt $c_i = 9 - a_i \geq 0$. Khi đó $S = 45 - (c_1 + \dots + c_5)$, nên

$$S > 42 \iff c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 \leq 2.$$

(Chú ý $a_1 \neq 0$ tự động thoả, vì $c_1 \leq 2 \Rightarrow a_1 \geq 7$.)

Bước 3. Đếm theo tổng độ hụt.

- $\sum c_i = 0$: chỉ 99999 $\Rightarrow 1$ số.
- $\sum c_i = 1$: một chữ số bằng 8, bốn chữ số bằng 9 $\Rightarrow C_5^1 = 5$ số.
- $\sum c_i = 2$: hoặc một chữ số bằng 7 ($C_5^1 = 5$ số), hoặc hai chữ số bằng 8 ($C_5^2 = 10$ số) $\Rightarrow 15$ số.

Bước 4. Cộng lại.

$$1 + 5 + 15 = 21.$$

Kết quả: 21 số tự nhiên

Ghi chú. Kỹ thuật “độ hụt” biến một điều kiện *tổng rất lớn* thành một điều kiện *tổng rất nhỏ*, nhờ đó chỉ cần liệt kê vài trường hợp. Đây là cách xử lý chuẩn cho mọi bài “tổng các chữ số gần cực đại”.

Câu 8

Hỏi có tất cả bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số, sao cho tổng các chữ số của nó nhỏ hơn 4?

Bước 1. Ràng buộc.

Số có 6 chữ số nên $a_1 \geq 1$; tổng $S = a_1 + \dots + a_6 \leq 3$. Vậy $S \in \{1; 2; 3\}$.

Bước 2. Tách theo giá trị của chữ số đầu.

Vì $a_1 \geq 1$ nên a_1 chỉ có thể là 1, 2 hoặc 3. Đặt $R = S - a_1$ là tổng của 5 chữ số cuối (mỗi chữ số ≥ 0).

S	a_1	Yêu cầu với 5 chữ số cuối	Số cách
1	1	tổng = 0	1
2	2	tổng = 0	1
	1	tổng = 1: một chữ số bằng 1	$C_5^1 = 5$
3	3	tổng = 0	1
	2	tổng = 1	$C_5^1 = 5$
	1	tổng = 2: một chữ số 2 (5) hoặc hai chữ số 1 ($C_5^2 = 10$)	15

Bước 3. Cộng toàn bộ.

$$1 + (1 + 5) + (1 + 5 + 15) = 1 + 6 + 21 = 28.$$

Kết quả: 28 số tự nhiên

Ghi chú. Cách gọn hơn (chia kẹo có điều kiện). Đặt $a'_1 = a_1 - 1 \geq 0$; điều kiện thành $a'_1 + a_2 + \dots + a_6 \leq 2$. Số nghiệm nguyên không âm của $a'_1 + \dots + a_6 + t = 2$ (với $t \geq 0$ là biến bù) là

$$C_{2+7-1}^{7-1} = C_8^6 = 28. \checkmark$$

Cận trên ≤ 9 của mỗi chữ số tự động thoả vì tổng chỉ bằng 2.

CHƯƠNG 3

KỸ NĂNG HOÁN VỊ VÒNG VÀ PHÉP QUAY TẠO LẬP

Vì sao bàn tròn lại khác bàn dài? Quanh bàn tròn, hai cách xếp thu được từ nhau bằng một **phép quay** được coi là *giống nhau*. Nếu có m chiếc ghế xếp đều quanh bàn thì mỗi cấu hình bị đếm lặp đúng m lần (ứng với m góc quay $0^\circ, \frac{360^\circ}{m}, \dots$). Do đó:

$$\text{Số cách xếp} = \frac{\text{số cách xếp trên bàn dài tương ứng}}{m}.$$

Hai hệ quả cần thuộc:

- Xếp n người vào đúng n ghế quanh bàn tròn: $\frac{n!}{n} = (n-1)!$
- Xếp k người vào m ghế quanh bàn tròn ($k < m$, có ghế trống): $\frac{A_m^k}{m}$

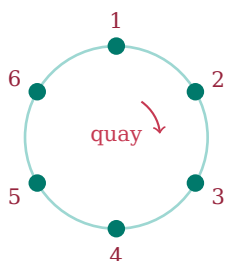
Mẹo thao tác nhanh: cố định một đối tượng (hoặc một khối) tại một ghế bất kì — việc này “khóa” phép quay lại — rồi xếp tự do phần còn lại trên $m-1$ ghế còn lại. Không phải chia thêm cho m nữa.

Câu 1

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp 6 người vào 6 chiếc ghế được bố trí cân đối và đều đặn xung quanh một chiếc bàn tròn, biết rằng mỗi người ngồi một ghế và hai cách xếp được gọi là giống nhau nếu cách xếp này thu được bằng cách quay cách xếp kia quanh tâm bàn tròn một góc nào đó?

Bước 1. Đếm như bàn dài.

Nếu 6 chiếc ghế là phân biệt (đánh số 1 đến 6), số cách xếp là $6! = 720$.



6 phép quay đưa một cách xếp về chính “kiểu” của nó $\Rightarrow$ chia 6

Bước 2. Khử phép quay.

Mỗi cấu hình vòng bị đếm lặp 6 lần (quay $0^\circ, 60^\circ, \dots, 300^\circ$). Vậy

$$\frac{6!}{6} = 5! = 120.$$

Bước 3. Cách hiểu tương đương.

Cố định một người bất kì (chẳng hạn người A) tại một ghế; 5 người còn lại xếp tự do vào 5 ghế còn lại: $5! = 120$. ✓

Kết quả: 120 cách

Câu 2

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp 5 người vào 9 chiếc ghế được bố trí cân đối và đều đặn xung quanh một chiếc bàn tròn, biết rằng mỗi người ngồi một ghế và hai cách xếp được gọi là giống nhau nếu cách xếp này thu được bằng cách quay cách xếp kia quanh tâm bàn tròn một góc nào đó?

Bước 1. Chú ý điểm mới: có ghế trống.

9 ghế nhưng chỉ 5 người $\Rightarrow$ 4 ghế trống. Không dùng được công thức $(n-1)!$.

Bước 2. Đếm như bàn dài.

Coi 9 ghế là phân biệt: chọn ghế và xếp người có thứ tự $\Rightarrow$

$$A_9^5 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15\,120.$$

Bước 3. Khử phép quay.

Có 9 ghế nên mỗi cấu hình bị lặp 9 lần:

$$\frac{A_9^5}{9} = \frac{15\,120}{9} = 1680.$$

Kết quả: 1680 cách

Ghi chú. Vì sao chia đúng 9 mà không bị lẻ? Vì 5 người là *phân biệt* và số người ít hơn số ghế, không có cấu hình nào “tự trùng” qua một phép quay khác 0° . Nếu các đối tượng có thể giống nhau thì phép chia đơn giản này **không còn đúng** — khi đó phải dùng bổ đề Burnside.

Câu 3

Xếp ngẫu nhiên 7 bạn học sinh (trong đó có hai bạn An và Bình) vào 7 chiếc ghế được bố trí cân đối và đều đặn xung quanh một chiếc bàn tròn (hai cách xếp giống nhau nếu suy ra được từ nhau bằng một phép quay). Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp để An và Bình ngồi cạnh nhau?

Bước 1. Bó An và Bình.

Dán An và Bình thành một khối; bên trong khối có $2! = 2$ thứ tự (An–Bình hoặc Bình–An).

Bước 2. Xếp khối cùng 5 bạn còn lại quanh bàn tròn.

Sau khi bó, ta có $1 + 5 = 6$ đối tượng cần xếp quanh bàn tròn. Dùng mẹo *cố định khối*: đặt khối tại một chỗ để khoá phép quay, rồi xếp 5 bạn còn lại:

$$5! = 120 \text{ cách.}$$

(Tương đương: 6 đối tượng quanh vòng tròn $\Rightarrow (6-1)! = 120$.)

Bước 3. Nhân lại.

$$2! \cdot 5! = 2 \cdot 120 = 240.$$

Kết quả: 240 cách

Ghi chú. Kiểm tra bằng tỉ lệ. Tổng số cách xếp 7 bạn quanh bàn tròn là $6! = 720$. Tỉ lệ An và Bình cạnh nhau là $240/720 = 1/3$. Kiểm bằng lí lẽ trực tiếp: An ngồi đâu

cũng được; Bình có 6 ghế để chọn, trong đó 2 ghế kế An $\Rightarrow$ xác suất $2/6 = 1/3$. ✓

Câu 4

Xếp ngẫu nhiên 8 bạn học sinh (trong đó có hai bạn Hải và Huyền) vào 8 chiếc ghế được bố trí cân đối và đều đặn xung quanh một chiếc bàn tròn (hai cách xếp giống nhau nếu suy ra được từ nhau bằng một phép quay). Hãy tính xác suất để Hải và Huyền ngồi cạnh nhau (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Bước 1. Không gian mẫu.

$$n(\Omega) = \frac{8!}{8} = 7! = 5040.$$

Bước 2. Biến cố A: “Hải và Huyền ngồi cạnh nhau”.

Bó hai bạn: 2! cách. Còn lại khối + 6 bạn = 7 đối tượng quanh bàn tròn: $(7 - 1)! = 6! = 720$.

$$n(A) = 2! \cdot 6! = 2 \cdot 720 = 1440.$$

Bước 3. Xác suất.

$$P(A) = \frac{1440}{5040} = \frac{2}{7} \approx 0,2857 \dots \approx 0,29.$$

$$\text{Kết quả: } P(A) = \frac{2}{7} \approx 0,29$$

Ghi chú. Công thức tổng quát rất đáng nhớ: với n người quanh bàn tròn ($n \geq 3$), xác suất để hai người cho trước ngồi cạnh nhau luôn bằng

$$\frac{2}{n-1}.$$

Ở đây $n = 8$ cho $\frac{2}{7}$; ở Câu 3 với $n = 7$ cho $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. ✓

Câu 5

Xếp ngẫu nhiên ba người đàn ông, sáu người phụ nữ và một đứa trẻ vào 10 chiếc ghế được bố trí cân đối và đều đặn xung quanh một chiếc bàn tròn (hai cách xếp giống nhau nếu suy ra được từ nhau bằng một phép quay). Biết có tất cả T cách xếp để đứa trẻ **chỉ ngồi cạnh phụ nữ**. Hãy xác định **ba chữ số tận cùng** của T .

Bước 1. Dịch điều kiện.

Tổng số người là $3 + 6 + 1 = 10$, vừa đủ 10 ghế. Quanh bàn tròn, đứa trẻ có **đúng hai** người ngồi cạnh (bên trái và bên phải). “Chỉ ngồi cạnh phụ nữ” nghĩa là **cả hai** người đó đều là phụ nữ. Ta được khối

Nữ Trẻ Nữ.

Bước 2. Đếm số cách tạo khối.

- Chọn 2 trong 6 người phụ nữ: $C_6^2 = 15$ cách.
- Xếp hai người đó sang trái / sang phải đứa trẻ: $2! = 2$ cách.

Số khối: $C_6^2 \cdot 2! = 30$.

Bước 3. Xếp khối cùng những người còn lại quanh bàn tròn.

Khối chiếm 3 người, còn lại $10 - 3 = 7$ người (3 đàn ông và 4 phụ nữ). Coi khối là một đối tượng, ta có $1 + 7 = 8$ đối tượng quanh bàn tròn. Cố định khối để khoá phép quay:

$$7! = 5040 \text{ cách.}$$

Bước 4. Nhân lại.

$$T = 30 \cdot 5040 = 151\,200 = 151\,200.$$

Kết quả: Ba chữ số tận cùng của T là $\boxed{200}$ (với $T = 151\,200$)

Ghi chú. Bẫy: trên bàn dài, người ngồi đầu hàng chỉ có một người bên cạnh — khi đó phải tách trường hợp. Trên bàn tròn thì mọi vị trí đều có đúng hai người kề, nên bài toán gọn hơn hẳn. Hãy đọc kĩ để xem là bàn tròn hay hàng ngang.

Câu 6

Có 9 người được đánh số thứ tự từ 1 đến 9. Tiến hành xếp 9 người này vào 12 chiếc ghế được bố trí cân đối và đều đặn xung quanh một chiếc bàn tròn (hai cách xếp giống nhau nếu suy ra được từ nhau bằng một phép quay). Biết có tất cả T cách xếp để giữa hai người được đánh số 6 và 8 có đúng hai người, và hai người này được đánh số lẻ. Hãy xác định **bốn chữ số tận cùng** của T .

Bước 1. Dựng khối.

“Giữa người số 6 và số 8 có đúng hai người” $\Rightarrow$ bốn ghế liên tiếp:

$$\boxed{6} \boxed{\ell_1} \boxed{\ell_2} \boxed{8} \quad \text{hoặc} \quad \boxed{8} \boxed{\ell_1} \boxed{\ell_2} \boxed{6},$$

với ℓ_1, ℓ_2 là hai người mang số lẻ.

Bước 2. Đếm số cách tạo khối.

- Hai đầu (6 và 8) hoán đổi: $2! = 2$ cách.
- Hai người số lẻ lấy từ $\{1; 3; 5; 7; 9\}$ (5 người), có thứ tự vì hai ô giữa phân biệt: $A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$ cách.

$$\text{Số khối: } 2! \cdot A_5^2 = 2 \cdot 20 = 40.$$

Bước 3. Nén khối rồi xếp phần còn lại.

Khối chiếm 4 ghế liên tiếp trong vòng 12 ghế. Nén khối thành một “ghế gộp”, vòng tròn còn

$$12 - 4 + 1 = 9 \text{ vị trí.}$$

Cố định khối tại một trong 9 vị trí đó (khóa phép quay), còn lại 8 vị trí trống. Số người chưa xếp là $9 - 4 = 5$ người, xếp có thứ tự vào 8 vị trí:

$$A_8^5 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6720.$$

Bước 4. Nhân lại.

$$T = 40 \cdot 6720 = 268\,800 = 268\,800.$$

Kết quả: Bốn chữ số tận cùng của T là $\boxed{8800}$ (với $T = 268\,800$)

Ghi chú. Sơ đồ ba nhíp cho mọi bài bàn tròn có khối:

$$(\text{số cách tạo khối}) \times \underbrace{A_{m-k}^r}_{\substack{\text{xếp } r \text{ người còn lại vào} \\ m-k \text{ ghế còn trống}}} (m \text{ ghế, khối chiếm } k \text{ ghế}).$$

Ở đây $m = 12, k = 4, r = 5: A_8^5$. Đã cố định khối nên **không** chia thêm cho 12.

Mở rộng: bàn đa giác đều — “phép quay tạo lập”. Với bàn hình đa giác đều m cạnh, mỗi cạnh có *cùng* một số ghế, thì có đúng m phép quay biến sơ đồ ghế thành chính nó $(\frac{360^\circ}{m}, \frac{2 \cdot 360^\circ}{m}, \dots, 360^\circ)$. Ta gọi đó là m **phép quay tạo lập**. Công thức ba nhíp:

$$T = \frac{1}{m} \cdot \underbrace{\frac{n!}{(s!)^m}}_{\substack{\text{xếp } n \text{ người vào các ghế;} \\ \text{chia } s! \text{ mỗi cạnh nếu trong cạnh} \\ \text{KHÔNG phân biệt thứ tự}}}$$

(n người, m cạnh, mỗi cạnh s ghế, $n = ms$). Nếu có phân biệt thứ tự trong mỗi cạnh thì bỏ thừa số $(s!)^m$ đi.

Câu 7

Tiến hành xếp ngẫu nhiên 8 người vào 8 chiếc ghế được bố trí ở 4 cạnh của một chiếc bàn hình vuông (mỗi cạnh 2 ghế). Mỗi người ngồi một ghế; hai cách xếp được gọi là giống nhau nếu cách xếp này thu được bằng cách quay cách xếp kia quanh tâm đối xứng của bàn một góc nào đó. Trong mỗi cạnh của bàn **có** phân biệt thứ tự của hai chiếc ghế khi xếp. Biết rằng có T cách xếp. Hãy xác định **hai chữ số tận cùng** của T .

Bước 1. Đếm khi coi 8 chiếc ghế là phân biệt.

Trong mỗi cạnh có phân biệt thứ tự nên cả 8 ghế đều phân biệt:

$$8! = 40\,320.$$

Bước 2. Xác định số phép quay tạo lập.

Bàn hình vuông, bốn cạnh đều có 2 ghế nên sơ đồ ghế bất biến qua bốn phép quay $90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ \Rightarrow m = 4$.

Bước 3. Khử phép quay.

$$T = \frac{8!}{4} = \frac{40\,320}{4} = 10\,080 = 10080.$$

Kết quả: Hai chữ số tận cùng của T là 80 (với $T = 10\,080$)

Ghi chú. Khác với bàn tròn (m bằng số ghế), ở bàn đa giác m bằng số cạnh. Chia nhầm cho 8 thay vì 4 sẽ ra 5040 — sai một nửa.

Câu 8

Tiến hành xếp ngẫu nhiên 12 người vào 12 chiếc ghế được bố trí ở 4 cạnh của một chiếc bàn hình vuông (mỗi cạnh 3 ghế). Hai cách xếp giống nhau nếu suy ra được từ nhau bằng một phép quay quanh tâm đối xứng của bàn. Trong mỗi cạnh của bàn **không** phân biệt thứ tự của các chiếc ghế khi xếp. Biết rằng có T cách xếp. Hãy xác định **ba chữ số tận cùng** của T .

Bước 1. Xếp 12 người vào 12 ghế coi như phân biệt.

$$12! = 479\,001\,600.$$

Bước 2. Khử thứ tự bên trong mỗi cạnh.

Mỗi cạnh có 3 ghế không phân biệt thứ tự $\Rightarrow$ mỗi cạnh bị đếm lặp $3! = 6$ lần; có 4 cạnh:

$$\frac{12!}{(3!)^4} = \frac{479\,001\,600}{1296} = 369\,600.$$

Bước 3. Khử phép quay.

Bốn cạnh cùng có 3 ghế $\Rightarrow m = 4$ phép quay tạo lặp:

$$T = \frac{369\,600}{4} = 92\,400 = 92\text{400}.$$

Kết quả: Ba chữ số tận cùng của T là 400 (với $T = 92\,400$)

Ghi chú. Thứ tự thực hiện rất quan trọng: chia $(3!)^4$ trước, chia 4 sau. Nếu làm ngược lại kết quả vẫn như nhau, nhưng nếu quên một trong hai phép chia thì sai lệch 6 hoặc 1296 lần — hãy tick lần lượt từng “nguồn lặp”.

Câu 9

Tiến hành xếp ngẫu nhiên 10 người vào 10 chiếc ghế được bố trí ở 5 cạnh của một chiếc bàn hình ngũ giác đều (mỗi cạnh 2 ghế). Hai cách xếp giống nhau nếu suy ra được từ nhau bằng một phép quay quanh tâm đối xứng của bàn. Trong mỗi cạnh của bàn **không** phân biệt thứ tự của các chiếc ghế khi xếp. Biết rằng có T cách xếp. Hãy xác định **ba chữ số tận cùng** của T .

Bước 1. Ba nguồn lặp.

- Xếp 10 người vào 10 ghế phân biệt: $10! = 3\,628\,800$.
- Mỗi cạnh 2 ghế không phân biệt thứ tự: chia $(2!)^5 = 32$.
- Bàn ngũ giác đều, mọi cạnh giống nhau: $m = 5$ phép quay tạo lặp, chia 5.

Bước 2. Ghép lại.

$$T = \frac{10!}{(2!)^5 \cdot 5} = \frac{3\,628\,800}{32 \cdot 5} = \frac{3\,628\,800}{160} = 22\,680 = 22\text{680}.$$

Kết quả: Ba chữ số tận cùng của T là 680 (với $T = 22\,680$)

Ghi chú. Tóm tắt cả ba câu vừa rồi:

$$T = \frac{n!}{(s!)^m \cdot m}, \quad \begin{cases} n = 8, m = 4, s! \text{ bỏ (có thứ tự)} \\ n = 12, m = 4, s = 3 \\ n = 10, m = 5, s = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} &8!/4 = 10\,080, \\ &12!/(6^4 \cdot 4) = 92\,400, \\ &10!/(2^5 \cdot 5) = 22\,680. \end{aligned}$$

CHƯƠNG 4

TƯ DUY CÂY ĐIỀU KIỆN VÀ TRUY HỒI

Ý tưởng cốt lõi. Với bài toán đếm chuỗi bị *cấm một mẫu liên tiếp*, ta không liệt kê — ta **xây chuỗi từ trái sang phải** và phân loại theo *kí tự cuối*. Gọi u_n là số chuỗi hợp lệ độ dài n ; việc thêm một kí tự vào cuối chỉ phụ thuộc *đuôi hiện tại*, nhờ đó ta lập được một **hệ thức truy hồi**. Lập bảng, chạy từ n nhỏ lên n lớn — nhanh và không sót trường hợp.

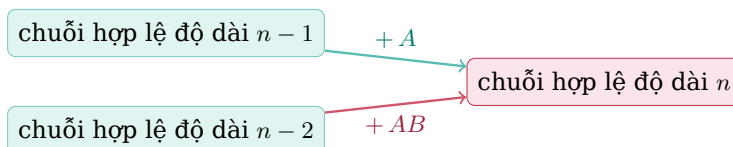
Câu 1

Hỏi từ hai kí tự A và B có thể tạo thành tất cả bao nhiêu chuỗi gồm 8 kí tự sao cho không có hai kí tự B nào cạnh nhau?

Bước 1. Đặt ẩn và phân loại theo kí tự cuối.

Gọi u_n là số chuỗi độ dài n (từ $\{A; B\}$) không chứa BB . Chia u_n làm hai loại:

- Chuỗi **kết thúc bằng** A : bỏ chữ A cuối đi ta được một chuỗi hợp lệ độ dài $n - 1$ bất kì. Số lượng: u_{n-1} .
- Chuỗi **kết thúc bằng** B : kí tự đứng ngay trước B bắt buộc là A (nếu là B thì có BB). Bỏ hai kí tự cuối “ AB ” ta được chuỗi hợp lệ độ dài $n - 2$ bất kì. Số lượng: u_{n-2} .



Hai loại rời nhau và phủ hết, nên

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \quad (n \geq 3).$$

Bước 2. Tìm các giá trị khởi đầu.

- $n = 1$: hai chuỗi $A, B \Rightarrow u_1 = 2$.
- $n = 2$: bốn chuỗi AA, AB, BA, BB , loại $BB \Rightarrow u_2 = 3$.

Bước 3. Lập bảng chạy tới $n = 8$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2	3	5	8	13	21	34	55

(Mỗi ô = tổng hai ô liền trước: $3 + 2 = 5$, $5 + 3 = 8$, $8 + 5 = 13$, $13 + 8 = 21$, $21 + 13 = 34$, $34 + 21 = 55$.)

Kết quả: $u_8 = 55$ chuỗi

Ghi chú. Dãy 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55 chính là dãy **Fibonacci** dịch chỉ số: $u_n = F_{n+2}$. Nhận ra điều này giúp bạn dò kết quả rất nhanh trong phòng thi.

Cách đếm thứ hai (vách ngăn). Nếu chuỗi có k chữ B thì $n - k$ chữ A tạo ra $n - k + 1$ khe, chọn k khe: C_{n-k+1}^k . Với $n = 8$: $C_9^0 + C_8^1 + C_7^2 + C_6^3 + C_5^4 = 1 + 8 + 21 + 20 + 5 = 55$. ✓

Câu 2

Hỏi từ hai kí tự A và B có thể tạo thành tất cả bao nhiêu chuỗi gồm 10 kí tự sao cho không có hai kí tự B nào cạnh nhau?

Bước 1. Dừng lại truy hồi của Câu 1.

Điều kiện không đổi, chỉ thay $n = 8$ bằng $n = 10$, nên vẫn

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \quad u_1 = 2, \quad u_2 = 3.$$

Bước 2. Chạy tiếp bảng.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

$$u_9 = 55 + 34 = 89; \quad u_{10} = 89 + 55 = 144.$$

Kết quả: $u_{10} = 144$ chuỗi

Ghi chú. Bài này cho thấy giá trị thực sự của truy hồi: **lập một lần, dùng cho mọi n** . Nếu đề hỏi $n = 20$ bạn chỉ cần kéo dài bảng thêm vài dòng, trong khi liệt kê thì hoàn toàn bất khả thi (2^{20} chuỗi).

Câu 3

Hỏi từ ba kí tự A, B, C có thể tạo thành tất cả bao nhiêu chuỗi gồm 6 kí tự sao cho không có hai kí tự C nào cạnh nhau?

Bước 1. Phân loại theo kí tự cuối.

Gọi u_n là số chuỗi hợp lệ độ dài n trên bảng chữ $\{A; B; C\}$, không chứa CC .

- Kết thúc bằng A hoặc B (2 **lựa chọn**): phần đầu là chuỗi hợp lệ độ dài $n - 1$ bất kì $\Rightarrow 2u_{n-1}$.
- Kết thúc bằng C : kí tự ngay trước C phải là A hoặc B (2 **lựa chọn**); phần trước nữa là chuỗi hợp lệ độ dài $n - 2$ bất kì $\Rightarrow 2u_{n-2}$.

$$u_n = 2u_{n-1} + 2u_{n-2} \quad (n \geq 3).$$

Bước 2. Giá trị khởi đầu.

- $n = 1$: ba chuỗi $A, B, C \Rightarrow u_1 = 3$.
- $n = 2$: tổng $3^2 = 9$ chuỗi, loại duy nhất chuỗi $CC \Rightarrow u_2 = 8$.

Bước 3. Chạy bảng tới $n = 6$.

n	1	2	3	4	5	6
u_n	3	8	22	60	164	448

Chi tiết: $u_3 = 2(8 + 3) = 22$; $u_4 = 2(22 + 8) = 60$; $u_5 = 2(60 + 22) = 164$; $u_6 = 2(164 + 60) = 448$.

Kết quả: $u_6 = 448$ chuỗi

Ghi chú. So sánh với Câu 1: hệ số 2 xuất hiện vì ngoài kí tự bị cấm (C) còn hai kí tự tự do (A, B). Tổng quát với bảng chữ m kí tự và cấm lặp một kí tự:

$$u_n = (m - 1) u_{n-1} + (m - 1) u_{n-2}.$$

Câu 4

Hỏi từ ba kí tự A, B, C có thể tạo thành tất cả bao nhiêu chuỗi gồm 6 kí tự sao cho không có hai kí tự B nào cạnh nhau và không có hai kí tự C nào cạnh nhau?

Bước 1. Vì sao phải dùng hai ẩn?

Bây giờ có hai kí tự bị cấm lặp, nên khả năng nối thêm phụ thuộc cụ thể đuôi là gì. Đặt:

$$a_n = \text{số chuỗi hợp lệ độ dài } n \text{ kết thúc bằng } A, \quad b_n = \text{kết thúc bằng } B \text{ hoặc } C.$$

Khi đó $u_n = a_n + b_n$.

Bước 2. Lập hệ truy hồi.

- Thêm A vào cuối: luôn hợp lệ (A không bị cấm lặp) $\Rightarrow a_n = a_{n-1} + b_{n-1} = u_{n-1}$.
- Thêm B hoặc C : nếu đuôi cũ là A thì cả B và C đều được (2 cách); nếu đuôi cũ đã là B (hoặc C) thì chỉ được thêm kí tự còn lại (1 cách).

$$b_n = 2 a_{n-1} + 1 \cdot b_{n-1}.$$

Bước 3. Rút gọn về một ẩn.

Từ $a_n = u_{n-1}$ suy ra $a_{n-1} = u_{n-2}$ và $b_{n-1} = u_{n-1} - u_{n-2}$. Thay vào:

$$b_n = 2u_{n-2} + (u_{n-1} - u_{n-2}) = u_{n-1} + u_{n-2}.$$

Do đó

$$u_n = a_n + b_n = u_{n-1} + (u_{n-1} + u_{n-2}) \Rightarrow u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2}.$$

Bước 4. Giá trị khởi đầu và bảng.

$u_1 = 3$ (A, B, C); $u_2 = 9 - 2 = 7$ (bỏ BB và CC).

n	1	2	3	4	5	6
u_n	3	7	17	41	99	239

$$u_3 = 2 \cdot 7 + 3 = 17; \quad u_4 = 2 \cdot 17 + 7 = 41; \quad u_5 = 2 \cdot 41 + 17 = 99; \quad u_6 = 2 \cdot 99 + 41 = 239.$$

Kết quả: $u_6 = 239$ chuỗi

Ghi chú. Bài học phương pháp: khi “luật nối thêm” khác nhau tùy theo đuôi, hãy tách trạng thái (a_n, b_n) trước, rồi mới khử để về một hệ thức duy nhất. Dãy 3, 7, 17, 41, 99, 239 là dãy Pell đồng hành — một dấu hiệu để dò lại kết quả.

Câu 5

Gieo ngẫu nhiên một đồng xu cân đối đồng chất cho đến khi xuất hiện hai mặt sấp “S” liên tiếp hoặc đủ 9 lần thì dừng lại. Hãy đếm số phần tử của không gian mẫu của phép thử này.

Bước 1. Một “kết quả” của phép thử là gì?

Là một chuỗi các lần gieo tính đến lúc dừng. Chuỗi đó *kết thúc* vì một trong hai lí do:

- (i) vừa xuất hiện SS ở hai lần cuối (và chưa từng có SS trước đó), độ dài ≤ 9 ;
- (ii) đã gieo đủ 9 lần mà không hề có SS.

Bước 2. Đặt ẩn.

Gọi v_n là số chuỗi độ dài n (kí tự S/N) *không chứa SS*. Theo Câu 1 (đổi tên chữ cái) ta có $v_n = v_{n-1} + v_{n-2}$ với $v_1 = 2, v_2 = 3$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
v_n	2	3	5	8	13	21	34	55	89

Bước 3. Đếm loại (i) — dừng đúng ở lần thứ k .

Chuỗi có dạng: [chuỗi độ dài $k-2$ không chứa SS và *không kết thúc bằng S*] + SS.

Chuỗi độ dài $k-2$ không chứa SS và kết thúc bằng N chính là (chuỗi hợp lệ độ dài $k-3$ bất kì) + N, nên số lượng là v_{k-3} . Ta quy ước $v_0 = 1$ (chuỗi rỗng) và $v_{-1} = 1$.

Vậy số chuỗi dừng đúng ở lần k là v_{k-3} với $k = 2, 3, \dots, 9$:

k (lần dừng)	2	3	4	5	6	7	8	9
số chuỗi	1	1	2	3	5	8	13	21

Tổng loại (i): $1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 = 54$.

Bước 4. Đếm loại (ii).

Chuỗi độ dài 9 không chứa SS: $v_9 = 89$.

Bước 5. Cộng lại.

$$n(\Omega) = 54 + 89 = 143.$$

Kết quả: $n(\Omega) = 143$

Ghi chú. Vì sao phải trừ “không kết thúc bằng S”? Nếu phần đầu độ dài $k-2$ đã kết thúc bằng S thì cùng với chữ S tiếp theo, phép thử đã dừng *sớm hơn* lần thứ k — chuỗi đó không tồn tại trong không gian mẫu. Bỏ qua chi tiết này là lỗi sai phổ biến nhất của dạng “phép thử có điều kiện dừng”.

Kiểm tra tổng. Dãy 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 là Fibonacci, mà tổng 8 số hạng đầu của dãy này bằng số hạng thứ 10 trừ 1: $1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 = 55 - 1 = 54$. ✓ Cộng với $v_9 = 89$ ta được 143.

Câu 6

Gieo ngẫu nhiên một đồng xu cân đối đồng chất cho đến khi xuất hiện ba mặt sấp “S” liên tiếp hoặc đủ 10 lần thì dừng lại. Hãy đếm số phần tử của không gian mẫu

của phép thử này.

Bước 1. Truy hồi cho chuỗi không chứa SSS.

Gọi t_n là số chuỗi độ dài n không chứa SSS. Phân loại theo đuôi: chuỗi kết thúc bằng N , bằng $SN \rightarrow S$ (một S), hoặc bằng hai S . Bỏ phần đuôi tương ứng ta được

$$t_n = t_{n-1} + t_{n-2} + t_{n-3} \quad (\text{dãy Tribonacci}),$$

với $t_1 = 2, t_2 = 4, t_3 = 8 - 1 = 7$ (loại đúng chuỗi SSS).

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_n	2	4	7	13	24	44	81	149	274	504

Bước 2. Đếm các chuỗi dừng sớm (gặp SSS ở lần thứ $k \leq 10$).

Chuỗi có dạng: [chuỗi độ dài $k - 3$ không chứa SSS, kết thúc bằng N] + SSS, số lượng bằng t_{k-4} (quy ước $t_0 = 1, t_{-1} = 1$).

k	3	4	5	6	7	8	9	10
số chuỗi	1	1	2	4	7	13	24	44

Tổng: $1 + 1 + 2 + 4 + 7 + 13 + 24 + 44 = 96$.

Bước 3. Cộng với các chuỗi đi hết 10 lần.

$$n(\Omega) = 96 + t_{10} = 96 + 504 = 600.$$

Kết quả: $n(\Omega) = 600$

Ghi chú. Quy luật chung. Với điều kiện dừng “gặp r mặt sắp liên tiếp hoặc đủ m lần”:

$$n(\Omega) = t_m + \sum_{k=r}^m t_{k-r-1},$$

trong đó t_n đếm các chuỗi độ dài n không chứa r chữ S liên tiếp và thoả truy hồi $t_n = t_{n-1} + \dots + t_{n-r}$. Với $r = 2, m = 9$ ta được lại 143 của Câu 5. ✓

Câu 7

Có tất cả 16 hình vuông nhỏ đặt cạnh nhau thành một hàng ngang. Ta tiến hành tô màu cho các hình vuông, mỗi hình vuông hoặc tô màu đỏ hoặc tô màu xanh, sao cho **không có nhiều hơn hai ô màu xanh cạnh nhau**. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách tô màu cho 16 hình vuông nhỏ này?

Bước 1. Dịch điều kiện.

“Không nhiều hơn hai ô xanh cạnh nhau” = không tồn tại ba ô xanh liên tiếp, tức chuỗi không chứa mẫu XXX (với X là xanh, là đỏ).

Bước 2. Phân loại theo đuôi.

Gọi u_n là số cách tô n ô. Xét ba khả năng cho phần cuối chuỗi:

- kết thúc bằng : phần trước là chuỗi hợp lệ độ dài $n - 1 \Rightarrow u_{n-1}$;
- kết thúc bằng X : $\Rightarrow u_{n-2}$;
- kết thúc bằng XX : $\Rightarrow u_{n-3}$.

Ba khả năng rời nhau và phủ hết (mọi chuỗi hợp lệ đều rơi vào đúng một loại, vì sau nhiều nhất hai chữ X cuối bắt buộc phải có một chữ):

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2} + u_{n-3} \quad (\text{Tribonacci}).$$

Bước 3. Giá trị khởi đầu.

$u_1 = 2$; $u_2 = 4$; $u_3 = 2^3 - 1 = 7$ (loại đúng chuỗi XXX).

Bước 4. Chạy bảng tới $n = 16$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2	4	7	13	24	44	81	149
n	9	10	11	12	13	14	15	16
u_n	274	504	927	1705	3136	5768	10609	19513

Kết quả: 19513 cách

Ghi chú. Đối chiếu với Chương này, Câu 6: cùng một dãy Tribonacci 2, 4, 7, 13, 24, ... Bài toán “tô màu không quá 2 ô xanh liên tiếp” và bài toán “gieo xu, chuỗi không có 3 mặt sấp liên tiếp” là **cùng một bài** khoắc hai chiếc áo khác nhau.

Câu 8

Có tất cả 16 hình vuông nhỏ đặt cạnh nhau thành một hàng ngang. Ta tiến hành tô màu cho các hình vuông, mỗi hình vuông hoặc tô màu đỏ hoặc tô màu xanh, sao cho **không có hai ô màu đỏ cạnh nhau** và **không có nhiều hơn hai ô màu xanh cạnh nhau**. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách tô màu?

Bước 1. Hai điều kiện cùng lúc $\Rightarrow$ liệt kê các “khối hợp lệ”.

Vì không được có hai ô đỏ liền nhau, mỗi chữ phải đứng một mình. Vì không quá hai ô xanh liền nhau, mỗi cụm xanh chỉ dài 1 hoặc 2. Do đó chuỗi hợp lệ là ghép nối luân phiên của các khối:

, X , XX .

Bước 2. Lập truy hồi bằng cách xét đuôi.

Gọi u_n là số chuỗi hợp lệ độ dài n . Xét *cụm cuối cùng* tính từ phải sang:

- chuỗi kết thúc bằng : bỏ chữ này, phần còn lại phải kết thúc bằng X (vì hai không được kể nhau);
- chuỗi kết thúc bằng X hoặc XX : bỏ cụm xanh đó cùng chữ đứng trước.

Cách gọn nhất là tách theo khối: mỗi chuỗi hợp lệ (bắt đầu bằng) là dãy các khối (dài 1), X (dài 2), XX (dài 3). Sau khi xử lý cả các chuỗi bắt đầu bằng X hoặc XX , ta thu được hệ thức

$$u_n = u_{n-2} + u_{n-3} \quad (n \geq 4).$$

Bước 3. Giá trị khởi đầu (đếm trực tiếp).

- $n = 1$: , $X \Rightarrow u_1 = 2$.
- $n = 2$: X, X, XX (loại) $\Rightarrow u_2 = 3$.
- $n = 3$: từ 8 chuỗi, loại các chuỗi chứa (, X, X) và chuỗi $XXX \Rightarrow u_3 = 8 - 4 = 4$.

Kiểm tra truy hồi: $u_4 = u_2 + u_1 = 3 + 2 = 5$ — đúng, năm chuỗi độ dài 4 hợp lệ là XX, XX, XXX, XX, XXX . ✓

Bước 4. Chạy bảng tới $n = 16$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2	3	4	5	7	9	12	16
n	9	10	11	12	13	14	15	16
u_n	21	28	37	49	65	86	114	151

(Mỗi ô = ô cách hai vị trí + ô cách ba vị trí: $7 + 5 = 12$, $9 + 7 = 16$, $12 + 9 = 21, \dots$)

Kết quả: 151 cách

Ghi chú. So sánh sức mạnh của ràng buộc. Không ràng buộc: $2^{16} = 65\,536$ cách. Chỉ cấm ba ô xanh liên tiếp: 19\,513. Cấm thêm hai ô đỏ liên tiếp: còn 151. Mỗi điều kiện cắt giảm không gian cực mạnh — đó là lí do phải dùng truy hồi thay vì liệt kê.

CHƯƠNG 5

KỸ NĂNG TÍNH TỔNG CÁC SỐ TỰ NHIÊN LẬP ĐƯỢC

Nguyên lí đóng góp theo hàng. Không bao giờ cộng từng số. Thay vào đó hãy hỏi: mỗi chữ số y xuất hiện bao nhiêu lần ở hàng đơn vị? hàng chục? hàng trăm?... Nếu chữ số y xuất hiện m lần ở mỗi hàng thì tổng đóng góp của nó là

$$y \cdot m \cdot \underbrace{(\dots + 1000 + 100 + 10 + 1)}_{\text{trọng số các hàng}}.$$

Cộng cho mọi y ta được

$$b = \left(\sum y \right) \cdot m \cdot \underbrace{111\dots 1}_{k \text{ chữ số } 1} \quad (\text{khi mọi hàng có cùng số lần } m).$$

Cảnh báo: công thức gọn trên chỉ đúng khi **tất cả các hàng đối xứng nhau**. Hề tập X có chữ số 0 (vì 0 không được đứng đầu) thì hàng cao nhất có số lần *khác* các hàng còn lại — phải tính riêng.

Câu 1

Biết rằng tổng tất cả các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau lập từ $X = \{1; 2; 3; 5\}$ bằng b . Hãy tính $\frac{b}{10}$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Bước 1. Đếm số lần mỗi chữ số xuất hiện ở một hàng cố định.

Tập X có đúng 4 chữ số và số cần lập cũng có 4 chữ số khác nhau, nên mỗi số là một hoán vị của X : có $4! = 24$ số. Cố định một hàng (chẳng hạn hàng nghìn) và cố định chữ số y đứng ở đó; ba chữ số còn lại hoán vị tự do:

$$m = 3! = 6 \text{ lần.}$$

Vì X không chứa 0 nên *mọi hàng* đều có cùng $m = 6$.

Bước 2. Gộp đóng góp.

Chữ số y đóng góp $y \cdot 6 \cdot (1000 + 100 + 10 + 1) = y \cdot 6 \cdot 1111$.

Bước 3. Cộng cho mọi chữ số.

$$b = (1 + 2 + 3 + 5) \cdot 6 \cdot 1111 = 11 \cdot 6 \cdot 1111 = 73\,326.$$

Bước 4. Trả lời câu hỏi.

$$\frac{b}{10} = \frac{73\,326}{10} = 7332,6 \approx 7333.$$

$$\text{Kết quả: } b = 73\,326; \quad \frac{b}{10} \approx \boxed{7333}$$

Ghi chú. Cách kiểm tra bằng cặp bù. Ghép mỗi số với số “đảo” của nó... đơn giản hơn: trung bình cộng của 24 số bằng $73\,326/24 = 3055,25$ — một giá trị nằm giữa số nhỏ nhất 1235 và lớn nhất 5321, hợp lí. Đây là phép kiểm tra thô rất nhanh trong phòng thi.

Câu 2

Biết rằng tổng tất cả các số tự nhiên có 3 chữ số lập từ $X = \{1; 2; 3; 6; 8\}$ bằng b . Hãy tính $\frac{b}{10}$.

Bước 1. Đọc kĩ: để không nói “khác nhau”.

Vậy các chữ số được phép lập lại. Tổng số các số lập được là $5^3 = 125$.

Bước 2. Đếm số lần mỗi chữ số xuất hiện ở một hàng.

Cố định chữ số y ở hàng trăm; hai hàng còn lại mỗi hàng có 5 lựa chọn:

$$m = 5^2 = 25 \text{ lần.}$$

Không có chữ số 0 nên cả ba hàng đều như nhau.

Bước 3. Tổng.

$$b = (1 + 2 + 3 + 6 + 8) \cdot 25 \cdot (100 + 10 + 1) = 20 \cdot 25 \cdot 111 = 55\,500.$$

$$\frac{b}{10} = 5550.$$

$$\text{Kết quả: } b = 55\,500; \quad \frac{b}{10} = \boxed{5550}$$

Ghi chú. Phân biệt hai công thức.

$$\text{có lặp: } m = n^{k-1}; \quad \text{không lặp: } m = A_{n-1}^{k-1}.$$

(n = số phần tử của X , k = số chữ số của số cần lập.) Nhầm hai công thức này là lỗi mất điểm số một của chuyên đề.

Câu 3

Biết tổng tất cả các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau lập từ $X = \{0; 1; 2; 3\}$ bằng b . Hãy tính $\frac{b}{100}$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Bước 1. Nhận diện tình huống “có chữ số 0”.

Chữ số 0 không được đứng đầu $\Rightarrow$ hàng nghìn không đối xứng với ba hàng còn lại. Phải tính riêng từng hàng.

Bước 2. Đếm tổng số các số.

Chọn chữ số hàng nghìn từ $\{1; 2; 3\}$: 3 cách; ba chữ số còn lại hoán vị: $3! = 6$.

$$N = 3 \cdot 6 = 18 \text{ số.}$$

Bước 3. Hàng nghìn.

Với $y \in \{1; 2; 3\}$: cố định y ở hàng nghìn, ba chữ số còn lại hoán vị tự do $\Rightarrow 3! = 6$ lần.

$$m_{\text{nghìn}} = 6.$$

Bước 4. Ba hàng còn lại.

Mỗi số dùng *trọn vẹn* cả 4 chữ số của X , nên mỗi chữ số xuất hiện đúng 18 lần trong toàn bộ 18 số. Với $y \neq 0$, đã có 6 lần ở hàng nghìn, còn lại $18 - 6 = 12$ lần chia đều cho 3 hàng:

$$m_{\text{trăm}} = m_{\text{chục}} = m_{\text{đơn vị}} = \frac{12}{3} = 4.$$

Bước 5. Tổng.

(Chữ số 0 đóng góp 0 nên bỏ qua.)

$$b = (1 + 2 + 3) \cdot (6 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 4 \cdot 1) = 6 \cdot 6444 = 38\,664.$$

$$\frac{b}{100} = 386,64 \approx 387.$$

Kết quả: $b = 38\,664$; $\frac{b}{100} \approx \boxed{387}$

Ghi chú. Mẹo “**trọng số không đều**”. Khi có chữ số 0, hãy nhớ bộ hệ số dạng $(m_{\text{cao}}, m, m, \dots)$ với $m_{\text{cao}} > m$. Ở bài này là $(6; 4; 4; 4)$ thay vì $(6; 6; 6; 6)$. Nếu quên và dùng $6 \cdot 6666$ bạn sẽ ra 39 996 — sai.

Câu 4

Tổng tất cả các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau lập từ $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ bằng b .
Hãy tính $\frac{b}{1000}$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Bước 1. Số lần xuất hiện ở mỗi hàng.

$n = 6$, $k = 4$, không lặp, không có chữ số 0:

$$m = A_{6-1}^{4-1} = A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60.$$

Bước 2. Kiểm tra bằng tổng số các số.

Tổng số các số là $A_6^4 = 360$. Mỗi số có 4 chữ số $\Rightarrow$ tổng số ô là 1440; chia đều cho 6 chữ số được 240 lần mỗi chữ số; chia tiếp cho 4 hàng được 60. ✓

Bước 3. Tổng.

$$b = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \cdot 60 \cdot 1111 = 21 \cdot 60 \cdot 1111 = 1\,399\,860.$$

$$\frac{b}{1000} = 1399,86 \approx 1400.$$

Kết quả: $b = 1\,399\,860$; $\frac{b}{1000} \approx \boxed{1400}$

Câu 5

Biết rằng tổng tất cả các số tự nhiên có 4 chữ số lập từ $X = \{1; 3; 4; 6\}$ bằng b . Hãy tính $\frac{b}{100}$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Bước 1. Có lặp.

Để không nói “khác nhau” $\Rightarrow$ chữ số được lặp; tổng số các số là $4^4 = 256$.

Bước 2. Số lần xuất hiện ở mỗi hàng.

$$m = 4^{4-1} = 4^3 = 64.$$

Bước 3. Tổng.

$$b = (1 + 3 + 4 + 6) \cdot 64 \cdot 1111 = 14 \cdot 64 \cdot 1111 = 896 \cdot 1111 = 995\,456.$$

$$\frac{b}{100} = 9954,56 \approx 9955.$$

Kết quả: $b = 995\,456$; $\frac{b}{100} \approx \boxed{9955}$

Ghi chú. Kiểm tra bằng trung bình. Trung bình mỗi chữ số là $\frac{1+3+4+6}{4} = 3,5$, nên “số trung bình” là $3,5\,3,5\,3,5\,3,5 = 3,5 \cdot 1111 = 3888,5$. Nhân với 256 số: $3888,5 \cdot 256 = 995\,456$.
✓

Câu 6

Biết rằng tổng tất cả các số tự nhiên có 5 chữ số lập từ $X = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ bằng b . Hãy tính $\frac{b}{10\,000}$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Bước 1. Hai đặc điểm cùng lúc: có lập và có chữ số 0.

Hàng chục nghìn không được là 0; bốn hàng còn lại tự do. Tổng số các số: $4 \cdot 5^4 = 4 \cdot 625 = 2500$.

Bước 2. Hàng cao nhất (hàng chục nghìn).

Với $y \neq 0$: cố định y ở hàng đó, bốn hàng còn lại mỗi hàng 5 lựa chọn:

$$m_{\text{cao}} = 5^4 = 625.$$

Bước 3. Bốn hàng còn lại.

Cố định chữ số y (bất kì, kể cả 0) ở một hàng thấp; hàng cao nhất có 4 lựa chọn (khác 0), ba hàng thấp còn lại mỗi hàng 5 lựa chọn:

$$m_{\text{thấp}} = 4 \cdot 5^3 = 4 \cdot 125 = 500.$$

Bước 4. Tổng.

$$b = \underbrace{(1 + 2 + 3 + 4)}_{=10} \cdot 625 \cdot 10\,000 + \underbrace{(0 + 1 + 2 + 3 + 4)}_{=10} \cdot 500 \cdot (1000 + 100 + 10 + 1)$$

$$= 10 \cdot 6\,250\,000 + 10 \cdot 500 \cdot 1111 = 62\,500\,000 + 5\,555\,000 = 68\,055\,000.$$

$$\frac{b}{10\,000} = 6805,5 \approx 6806.$$

Kết quả: $b = 68\,055\,000$; $\frac{b}{10\,000} \approx \boxed{6806}$

Ghi chú. Đây là dạng khó nhất của chương vì phải tách hai công thức đếm khác

nhau cho hai loại hàng. Sơ đồ ghi nhớ:

$$b = \left(\sum_{y \neq 0} y \right) m_{\text{cao}} 10^{k-1} + \left(\sum_{\text{mọi } y} y \right) m_{\text{thấp}} \underbrace{11 \dots 1}_{k-1}.$$

Lưu ý tổng thứ hai có cộng cả 0 (dù 0 không làm thay đổi giá trị) — nhưng $m_{\text{thấp}}$ thì phải tính với ràng buộc hàng cao khác 0.

Câu 7

Gọi A là tập tất cả các số tự nhiên có 4 chữ số lập từ $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ sao cho số tự nhiên có mặt chữ số 3 **đúng một lần** và các chữ số còn lại có mặt **tối đa một lần**. Biết tổng của tất cả các số tự nhiên trong tập A bằng b . Hãy tính $\frac{b}{10\,000}$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Bước 1. Dịch điều kiện.

“Chữ số 3 đúng một lần, các chữ số khác tối đa một lần” nghĩa là: số có 4 chữ số **đôi một khác nhau** và **bắt buộc chứa** chữ số 3.

Số lượng: chọn 3 chữ số còn lại từ $\{1; 2; 4; 5; 6\}$ rồi xếp 4 chữ số:

$$|A| = C_5^3 \cdot 4! = 10 \cdot 24 = 240.$$

Bước 2. Số lần chữ số 3 đứng ở một hàng cố định.

Ghim 3 vào hàng đang xét; ba hàng còn lại lấy 3 chữ số có thứ tự từ 5 chữ số còn lại:

$$m_3 = A_5^3 = 60.$$

Bước 3. Số lần chữ số $y \neq 3$ đứng ở một hàng cố định.

Ghim y vào hàng đang xét. Chữ số 3 bắt buộc có mặt, nó nằm ở một trong 3 hàng còn lại: 3 cách. Hai hàng cuối lấy 2 chữ số có thứ tự từ 4 chữ số còn lại: $A_4^2 = 12$.

$$m_y = 3 \cdot 12 = 36.$$

Bước 4. Cộng đóng góp.

$$b = \underbrace{3 \cdot 60}_{\text{chữ số 3}} \cdot 1111 + \underbrace{(1 + 2 + 4 + 5 + 6)}_{=18} \cdot 36 \cdot 1111 = 1111 (180 + 648) = 1111 \cdot 828 = 919\,908.$$

$$\frac{b}{10\,000} = 91,9908 \approx 92.$$

$$\text{Kết quả: } b = 919\,908; \quad \frac{b}{10\,000} \approx \boxed{92}$$

Ghi chú. Phép kiểm tra bắt buộc phải làm. Tổng số ô của tập A là $240 \cdot 4 = 960$. Theo cách đếm trên: chữ số 3 chiếm $60 \cdot 4 = 240$ ô, năm chữ số còn lại chiếm $5 \cdot 36 \cdot 4 = 720$ ô. Cộng lại $240 + 720 = 960$. ✓ Nếu tổng này lệch, chắc chắn một trong hai m bị sai.

Câu 8

Gọi A là tập tất cả các số tự nhiên có 4 chữ số lập từ $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ sao cho số tự nhiên có mặt chữ số 5 **đúng hai lần** và các chữ số còn lại có mặt **tối đa một lần**. Biết tổng của tất cả các số tự nhiên trong tập A bằng b . Hãy tính $\frac{b}{10\,000}$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Bước 1. Cấu tạo của một số thuộc A .

Số gồm: hai chữ số 5, và hai chữ số nữa *khác nhau* lấy từ $\{1; 2; 3; 4; 6\}$.

$$|A| = \underbrace{C_5^2}_{\text{chọn 2 chữ số kia}} \cdot \underbrace{\frac{4!}{2!}}_{\text{hoán vị lặp}} = 10 \cdot 12 = 120.$$

Bước 2. Số lần chữ số 5 đứng ở một hàng cố định.

Đếm gián tiếp cho nhanh: mỗi số chứa đúng *hai* chữ số 5, nên tổng số ô mang chữ số 5 là $120 \cdot 2 = 240$. Vì bốn hàng hoàn toàn đối xứng (không có chữ số 0):

$$m_5 = \frac{240}{4} = 60.$$

Bước 3. Số lần chữ số $y \neq 5$ đứng ở một hàng cố định.

Số các phần tử của A có chứa y : chữ số còn lại chọn từ 4 chữ số khác ($\neq 5, \neq y$): 4 cách; hoán vị $\frac{4!}{2!} = 12 \Rightarrow 48$ số. Mỗi số như vậy chứa y đúng một lần, nên tổng số ô mang chữ số y là 48:

$$m_y = \frac{48}{4} = 12.$$

Bước 4. Cộng đóng góp.

$$b = \underbrace{5 \cdot 60}_{\text{chữ số 5}} \cdot 1111 + \underbrace{(1 + 2 + 3 + 4 + 6)}_{=16} \cdot 12 \cdot 1111 = 1111 (300 + 192) = 1111 \cdot 492 = 546\,612.$$

$$\frac{b}{10\,000} = 54,6612 \approx 55.$$

Kết quả: $b = 546\,612$; $\frac{b}{10\,000} \approx \boxed{55}$

Ghi chú. Kiểm tra số ô: $60 \cdot 4 + 5 \cdot 12 \cdot 4 = 240 + 240 = 480 = 120 \cdot 4$. ✓

Kỹ thuật đáng nhớ của Câu 7 và 8: thay vì ghim chữ số rồi đếm xuôi (dễ sót ràng buộc), hãy đếm *tổng số lần xuất hiện* trên toàn bộ tập A rồi chia đều cho số hàng. Cách này chỉ dùng được khi các hàng đối xứng — tức khi tập X **không chứa** chữ số 0.

CHƯƠNG 6

BÀI TOÁN CHIA ĐỒ VẬT CHO CÁC ĐỐI TƯỢNG PHÂN BIỆT

Hai câu hỏi phải trả lời trước khi đặt bút. (1) Đồ vật giống nhau hay khác nhau? (2) Người (hộp, toa tàu) giống nhau hay khác nhau?

Chương này xử lý trường hợp **đồ vật khác nhau — người khác nhau**. Khi đó mỗi đồ vật chọn độc lập một người nhận:

$$\text{chia } n \text{ đồ vật khác nhau cho } k \text{ người : } k^n$$

Nếu thêm điều kiện **mỗi người được ít nhất một đồ vật**, ta dùng **bao hàm - loại trừ** theo số người bị “bỏ đói”:

$$S(n, k) = k^n - C_k^1(k-1)^n + C_k^2(k-2)^n - \dots$$

Câu 1

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chia 5 đồ vật khác nhau cho 3 người?

Bước 1. Đứng ở phía đồ vật để đếm.

Mỗi đồ vật phải được trao cho đúng một người, và có 3 người để chọn. Các lựa chọn của các đồ vật hoàn toàn độc lập nhau.

$$\begin{array}{ccccc} \boxed{\text{đv 1}} & \boxed{\text{đv 2}} & \boxed{\text{đv 3}} & \boxed{\text{đv 4}} & \boxed{\text{đv 5}} \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{array} \Rightarrow 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5$$

Bước 2. Quy tắc nhân.

$$3^5 = 243.$$

Kết quả: 243 cách

Ghi chú. Đừng đứng ở phía người. Nếu hỏi “người thứ nhất nhận mấy đồ vật” thì các lựa chọn không còn độc lập, phải chia trường hợp rất dài. Nguyên tắc: **đứng ở phía đối tượng bị ràng buộc “mỗi cái đúng một lựa chọn”** — ở đây là đồ vật.

Câu 2

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp 6 người vào 4 toa tàu (các toa tàu là khác nhau)?

Bước 1. Xác định “ai là đồ vật, ai là hộp”.

Mỗi người phải lên đúng một toa $\Rightarrow$ người đóng vai “đồ vật”, toa tàu đóng vai “hộp”. Cả hai đều phân biệt.

Bước 2. Quy tắc nhân.

Mỗi người có 4 lựa chọn, có 6 người:

$$4^6 = 4096.$$

Kết quả: 4096 cách

Ghi chú. Bẫy đảo cơ số. Rất nhiều bạn viết $6^4 = 1296$. Hãy nhớ: **số mũ là số “đồ vật”, cơ số là số “hộp”**. Câu thần chú: *mỗi đồ vật chọn một hộp*, nên nhân cơ số lên đúng bằng số đồ vật lần.

Câu 3

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chia 5 đồ vật khác nhau cho 4 người, sao cho mỗi người được ít nhất một đồ vật?

Bước 1. Đếm không ràng buộc rồi loại trừ.

Tổng số cách chia tùy ý: $4^5 = 1024$. Ta phải bỏ đi các cách có ít nhất một người không nhận gì.

Bước 2. Bao hàm - loại trừ.

Gọi A_i là tập các cách chia mà người thứ i không nhận đồ vật nào.

- Bỏ đôi 1 người: chọn người đó ($C_4^1 = 4$ cách), 5 đồ vật chia cho 3 người còn lại: $3^5 = 243$.
- Bỏ đôi 2 người: $C_4^2 = 6$ cách chọn, còn $2^5 = 32$.
- Bỏ đôi 3 người: $C_4^3 = 4$ cách chọn, còn $1^5 = 1$.

$$N = 4^5 - C_4^1 3^5 + C_4^2 2^5 - C_4^3 1^5 = 1024 - 4 \cdot 243 + 6 \cdot 32 - 4 \cdot 1.$$

Bước 3. Tính.

$$N = 1024 - 972 + 192 - 4 = 240.$$

Kết quả: 240 cách

Ghi chú. Cách thứ hai — đếm theo dạng phân bố. 5 đồ vật chia cho 4 người mà ai cũng có, thì dạng số lượng bắt buộc là $(2; 1; 1; 1)$. Chọn người nhận 2 đồ vật: 4 cách; chọn 2 đồ vật cho người đó: $C_5^2 = 10$; ba đồ vật còn lại chia cho ba người còn lại mỗi người một cái: $3! = 6$.

$$4 \cdot 10 \cdot 6 = 240. \checkmark$$

Với n chỉ hơn k một chút, cách này nhanh hơn hẳn bao hàm - loại trừ.

Câu 4

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp 6 hành khách vào 4 toa tàu (các toa tàu là khác nhau) sao cho mỗi toa có ít nhất một hành khách?

Bước 1. Bao hàm - loại trừ.

$$N = 4^6 - C_4^1 3^6 + C_4^2 2^6 - C_4^3 1^6.$$

Bước 2. Tính từng số hạng.

$$4^6 = 4096; \quad 4 \cdot 3^6 = 4 \cdot 729 = 2916; \quad 6 \cdot 2^6 = 6 \cdot 64 = 384; \quad 4 \cdot 1 = 4.$$

$$N = 4096 - 2916 + 384 - 4 = 1560.$$

Bước 3. Kiểm tra bằng cách đếm theo dạng phân bố.

6 hành khách vào 4 toa, mỗi toa có người $\Rightarrow$ dạng số lượng là $(3; 1; 1; 1)$ hoặc $(2; 2; 1; 1)$.

- Dạng (3; 1; 1; 1): chọn toa đông (4), chọn 3 khách cho toa đó ($C_6^3 = 20$), 3 khách còn lại vào 3 toa mỗi toa một người ($3! = 6$) $\Rightarrow 4 \cdot 20 \cdot 6 = 480$.
- Dạng (2; 2; 1; 1): chọn 2 toa đông ($C_4^2 = 6$), chia 6 khách thành hai cặp cho hai toa đó ($C_6^2 \cdot C_4^2 = 15 \cdot 6 = 90$), 2 khách còn lại vào 2 toa còn lại ($2! = 2$) $\Rightarrow 6 \cdot 90 \cdot 2 = 1080$.

$$480 + 1080 = 1560. \checkmark$$

Kết quả: 1560 cách

Câu 5

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chia 8 đồ vật khác nhau cho 4 người, sao cho **có một người được nhiều hơn 5 đồ vật**?

Bước 1. Nhận xét quan trọng: không thể có hai người cùng thoả.

“Nhiều hơn 5” nghĩa là nhận ≥ 6 đồ vật. Nếu có hai người cùng nhận ≥ 6 thì tổng $\geq 12 > 8$ — vô lí. Vậy **tối đa một người** thoả mãn, nên các trường hợp *rời nhau* và ta chỉ cần nhân 4 (chọn người đó), *không* phải trừ phần chung.

Bước 2. Cố định người đó, đếm theo số đồ vật anh ta nhận.

Giả sử người P nhận t đồ vật với $t \in \{6; 7; 8\}$. Chọn t đồ vật cho P : C_8^t cách; $8 - t$ đồ vật còn lại chia tự do cho 3 người kia: 3^{8-t} cách.

t	C_8^t	3^{8-t}	Số cách
6	28	$3^2 = 9$	252
7	8	$3^1 = 3$	24
8	1	$3^0 = 1$	1
Cộng			277

Bước 3. Nhân với số cách chọn người.

$$N = 4 \cdot 277 = 1108.$$

Kết quả: 1108 cách

Ghi chú. Vì sao phải kiểm tra “tối đa một người thoả”? Nếu điều kiện là “nhiều hơn 3 đồ vật” thì hai người có thể cùng thoả ($4 + 4 = 8$), khi đó nhân 4 sẽ đếm trùng và **bắt buộc** phải trừ phần giao. Luôn kiểm tra bất đẳng thức $2 \times (\text{ngưỡng} + 1) > n$ trước khi nhân.

Câu 6

Biết rằng có tất cả T cách chia 11 đồ vật khác nhau cho 3 người, sao cho mỗi người được ít nhất một đồ vật. Hãy xác định giá trị của $\frac{T}{1000}$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Bước 1. Áp dụng công thức toàn ánh với $k = 3$.

$$T = 3^{11} - C_3^1 2^{11} + C_3^2 1^{11}.$$

Bước 2. Tính từng lũy thừa.

$$3^{11} = 177\,147; \quad 2^{11} = 2048; \quad C_3^1 = 3, \quad C_3^2 = 3.$$

$$T = 177\,147 - 3 \cdot 2048 + 3 = 177\,147 - 6144 + 3 = 171\,006.$$

Bước 3. Trả lời.

$$\frac{T}{1000} = 171,006 \approx 171.$$

Kết quả: $T = 171\,006; \quad \frac{T}{1000} \approx \boxed{171}$

Ghi chú. Công thức rút gọn cho $k = 3$ rất đáng thuộc:

$$T = 3^n - 3 \cdot 2^n + 3.$$

Kiểm tra với $n = 3$: $27 - 24 + 3 = 6 = 3!$ — đúng (mỗi người đúng một đồ vật). ✓

Câu 7

Biết rằng có T cách chia 9 đồ vật khác nhau cho 3 người, sao cho mỗi người được ít nhất một đồ vật. Hãy xác định giá trị của $\frac{T}{100}$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Bước 1. Dùng lại công thức của Câu 6 với $n = 9$.

$$T = 3^9 - 3 \cdot 2^9 + 3.$$

Bước 2. Tính.

$$3^9 = 19\,683; \quad 2^9 = 512.$$

$$T = 19\,683 - 3 \cdot 512 + 3 = 19\,683 - 1536 + 3 = 18\,150.$$

Bước 3. Trả lời.

$$\frac{T}{100} = 181,5 \approx 182.$$

Kết quả: $T = 18\,150; \quad \frac{T}{100} \approx \boxed{182}$

Ghi chú. Chú ý cách làm tròn. 181,5 làm tròn đến hàng đơn vị cho 182 (quy tắc làm tròn lên khi phần thập phân bằng 0,5). Đây là chi tiết nhỏ nhưng đủ để mất trọn điểm câu này.

CHƯƠNG 7

CHIA ĐỒ VẬT VÀO CÁC HỘP GIỐNG NHAU

Bảng bốn tình huống — học thuộc bảng này là xong nửa chương.

	Hộp KHÁC nhau	Hộp GIỐNG nhau
Đồ vật KHÁC nhau	k^n (mỗi hộp ≥ 1 : P.I.E)	phân hoạch tập: $S(n, k)$
Đồ vật GIỐNG nhau	chia kẹo: C_{n-1}^{k-1}	phân hoạch số n thành k phần

Quy tắc vàng khi hộp giống nhau: lấy kết quả của trường hợp hộp khác nhau rồi chia cho $k!$ — **nhưng chỉ khi mọi hộp đều nhận số lượng khác nhau hoặc ta đã đảm bảo không có cấu hình đối xứng**. An toàn nhất là **liệt kê theo dạng phân bố** (bộ số lượng viết theo thứ tự không tăng), vì mỗi dạng chỉ được đếm đúng một lần.

Câu 1

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách bỏ 6 viên bi khác màu vào 3 chiếc hộp giống nhau, sao cho mỗi hộp được ít nhất một viên bi?

Bước 1. Đếm với hộp khác nhau trước.

Bi khác màu $\Rightarrow$ đồ vật phân biệt. Số cách chia 6 viên bi phân biệt cho 3 hộp phân biệt, mỗi hộp ≥ 1 :

$$3^6 - C_3^1 2^6 + C_3^2 1^6 = 729 - 3 \cdot 64 + 3 = 729 - 192 + 3 = 540.$$

Bước 2. Bỏ nhãn của hộp.

Ba chiếc hộp giống hệt nhau, nên mỗi cách phân chia *thành ba nhóm* bi đếm lặp đúng $3! = 6$ lần (ứng với 6 cách gán nhãn cho ba nhóm). Vì mọi hộp đều **khác rỗng**, ba nhóm là ba tập phân biệt nhau, phép chia 6 là chính xác:

$$\frac{540}{3!} = \frac{540}{6} = 90.$$

Bước 3. Kiểm tra bằng dạng phân bố.

Dạng số lượng của 6 viên vào 3 nhóm khác rỗng: $(4; 1; 1)$, $(3; 2; 1)$, $(2; 2; 2)$.

- $(4; 1; 1)$: chọn 4 bi cho nhóm lớn $C_6^4 = 15$; hai bi còn lại tách thành hai nhóm đơn — chỉ 1 cách (vì hai nhóm giống nhau) $\Rightarrow 15$.
- $(3; 2; 1)$: $C_6^3 \cdot C_3^2 \cdot C_1^1 = 20 \cdot 3 \cdot 1 = 60$ (ba kích thước đôi một khác nhau nên không chia thêm).
- $(2; 2; 2)$: $\frac{C_6^2 C_4^2 C_2^2}{3!} = \frac{15 \cdot 6 \cdot 1}{6} = 15$.

$$15 + 60 + 15 = 90. \checkmark$$

Kết quả: 90 cách

Ghi chú. Số 90 chính là **số Stirling loại hai** $S(6; 3)$. Hãy ghi nhớ vài giá trị hay gặp: $S(4; 2) = 7$, $S(5; 2) = 15$, $S(5; 3) = 25$, $S(6; 3) = 90$.

Câu 2

Bỏ ngẫu nhiên 5 viên bi khác màu vào 3 chiếc hộp giống nhau, biết rằng mỗi chiếc hộp có thể đựng được tùy ý số viên bi. Gọi A là biến cố “mỗi hộp được ít nhất một viên bi”. Hãy tính $P(A)$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Bước 1. Không gian mẫu.

Vì các hộp giống nhau, một “kết quả” chỉ là cách *phân hoạch* 5 viên bi phân biệt thành **nhiều nhất 3 nhóm** (hộp rỗng được phép, và nhiều hộp rỗng thì không phân biệt được):

$$n(\Omega) = S(5; 1) + S(5; 2) + S(5; 3) = 1 + 15 + 25 = 41.$$

$$\text{Chi tiết: } S(5; 2) = \frac{2^5 - 2}{2!} = \frac{30}{2} = 15; \quad S(5; 3) = \frac{3^5 - 3 \cdot 2^5 + 3}{3!} = \frac{243 - 96 + 3}{6} = \frac{150}{6} = 25.$$

Bước 2. Biến cố A .

$$n(A) = S(5; 3) = 25.$$

Bước 3. Xác suất.

$$P(A) = \frac{25}{41} \approx 0,6097 \dots \approx 0,61.$$

$$\text{Kết quả: } P(A) = \frac{25}{41} \approx 0,61$$

Ghi chú. Điểm gây tranh cãi và cũng là điểm mấu chốt. Khi hộp giống nhau, việc “bỏ bi ngẫu nhiên” được hiểu là mọi *cách phân hoạch* đồng khả năng. Nếu để nói hộp *khác nhau* thì $n(\Omega) = 3^5 = 243$ và $P(A) = 150/243 \approx 0,62$ — một đáp số khác. Hãy đọc thật kỹ chữ “giống nhau” / “khác nhau”.

Câu 3

Bỏ ngẫu nhiên 5 viên bi **giống nhau** vào 3 chiếc hộp **khác nhau**, biết rằng mỗi chiếc hộp có thể đựng được tùy ý số viên bi. Gọi A là biến cố “mỗi hộp được ít nhất một viên bi” và B là biến cố “tồn tại một hộp có đúng hai viên bi”. Hãy tính $P(A) + P(B)$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Bước 1. Mô hình hoá.

Bi giống nhau, hộp khác nhau $\Rightarrow$ một kết quả là bộ số lượng có thứ tự $(x_1; x_2; x_3)$ với

$$x_1 + x_2 + x_3 = 5, \quad x_i \geq 0.$$

Bước 2. Không gian mẫu (chia kẹo cho phép hộp rỗng).

$$n(\Omega) = C_{5+3-1}^{3-1} = C_7^2 = 21.$$

Bước 3. Biến cố A (mọi $x_i \geq 1$).

$$n(A) = C_{5-1}^{3-1} = C_4^2 = 6 \implies P(A) = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}.$$

Bước 4. Biến cố B (có ít nhất một $x_i = 2$).

Liệt kê theo dạng không tăng của $(x_1; x_2; x_3)$ rồi đếm số hoán vị:

Dạng	Có chứa số 2?	Số bộ có thứ tự
(5; 0; 0)	không	3
(4; 1; 0)	không	6
(3; 2; 0)	có	6
(3; 1; 1)	không	3
(2; 2; 1)	có	3
Tổng		21 ✓

$$n(B) = 6 + 3 = 9 \implies P(B) = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}.$$

Bước 5. Cộng lại.

$$P(A) + P(B) = \frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7} \approx 0,7142 \dots \approx 0,71.$$

$$\textbf{Kết quả: } P(A) + P(B) = \frac{5}{7} \approx 0,71$$

Ghi chú. Đề hỏi $P(A) + P(B)$, **không phải** $P(A \cup B)$. Hai biến cố này có giao (chẳng hạn (2; 2; 1) thuộc cả A lẫn B), nên $P(A) + P(B) \neq P(A \cup B)$. Đọc đúng yêu cầu là đủ điểm.

Câu 4

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp 9 viên bi **giống nhau** vào 3 chiếc hộp **giống nhau** sao cho mỗi hộp được ít nhất một viên?

Bước 1. Nhận diện: đây là bài toán phân hoạch số.

Bi giống nhau, hộp giống nhau $\implies$ một kết quả chỉ được xác định bởi *bộ ba số lượng không kể thứ tự*. Ta cần đếm số cách viết

$$9 = a + b + c, \quad a \geq b \geq c \geq 1.$$

Bước 2. Liệt kê có hệ thống theo a giảm dần.

a	các bộ $(a; b; c)$
7	(7; 1; 1)
6	(6; 2; 1)
5	(5; 3; 1), (5; 2; 2)
4	(4; 4; 1), (4; 3; 2)
3	(3; 3; 3)

Bước 3. Đếm.

Tổng cộng $1 + 1 + 2 + 2 + 1 = 7$ bộ.

Kết quả: 7 cách

Ghi chú. Vì sao không được lấy $C_8^2/3!$? Vì $C_8^2 = 28$ (chia kẹo cho hộp khác nhau) và $28/6$ không nguyên — lí do là các dạng đối xứng như $(3; 3; 3)$ chỉ có 1 hoán vị chứ không phải 6. **Khi hộp giống nhau và có dạng lặp, tuyệt đối không chia máy móc cho $k!$; hãy liệt kê.**

Mẹo liệt kê không sót: cho a chạy giảm dần từ giá trị lớn nhất có thể ($a \leq n-2 = 7$) xuống tới $\lceil n/3 \rceil = 3$; với mỗi a cho b chạy từ $\min(a, n-a-1)$ xuống $\lceil (n-a)/2 \rceil$.

Câu 5

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp 8 viên bi **giống nhau** vào 3 chiếc hộp **giống nhau** sao cho không có hộp nào nhiều hơn 5 viên bi?

Bước 1. Mô hình.

Đếm số bộ $(a; b; c)$ với

$$a + b + c = 8, \quad a \geq b \geq c \geq 0, \quad a \leq 5.$$

Lưu ý: để **không** bắt mỗi hộp phải có bi, nên cho phép $c = 0$ (thậm chí $b = 0$).

Bước 2. Liệt kê theo a giảm dần (chỉ cần $a \leq 5$).

a	các bộ $(a; b; c)$
5	$(5; 3; 0), (5; 2; 1)$
4	$(4; 4; 0), (4; 3; 1), (4; 2; 2)$
3	$(3; 3; 2)$

Với $a \leq 2$ thì $a + b + c \leq 6 < 8$ — không còn nghiệm.

Bước 3. Đếm.

$$2 + 3 + 1 = 6.$$

Kết quả: 6 cách

Ghi chú. Kiểm tra bằng phần bù. Tổng số bộ $(a; b; c)$ không tăng với tổng 8 (không kèm cận trên) là 10 dạng: $(8; 0; 0), (7; 1; 0), (6; 2; 0), (6; 1; 1), (5; 3; 0), (5; 2; 1), (4; 4; 0), (4; 3; 1), (4; 2; 2), (3; 3; 2)$. Loại 4 dạng có phần tử lớn hơn 5 (là 8, 7, và hai dạng bắt đầu bằng 6): $10 - 4 = 6$. ✓

Câu 6

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp 2 viên bi màu đỏ, 1 viên bi màu xanh, 1 viên bi màu vàng, 1 viên bi màu tím vào 3 chiếc hộp **giống nhau** sao cho mỗi hộp có ít nhất một viên bi?

Bước 1. Đây là bài lai: có bi giống nhau lẫn bi khác nhau.

Hai viên đỏ *không phân biệt* với nhau; ba viên xanh, vàng, tím *đôi một khác nhau*. Tổng cộng 5 viên vào 3 hộp giống nhau, mỗi hộp $\geq 1 \Rightarrow$ dạng số lượng chỉ có thể là $(3; 1; 1)$ hoặc $(2; 2; 1)$.

Bước 2. Dạng $(3; 1; 1)$ — một hộp chứa 3 viên, hai hộp còn lại mỗi hộp 1 viên.

Xét thành phần của hộp 3 viên:

- Chứa **cả hai** viên đỏ + một viên trong {xanh, vàng, tím}: 3 cách. Hai viên màu còn lại nằm riêng hai hộp đơn — vì hộp giống nhau nên chỉ 1 cách $\Rightarrow 3$.
- Chứa **đúng một** viên đỏ + hai viên màu: $C_3^2 = 3$ cách. Khi đó hai hộp đơn chứa viên đỏ còn lại và viên màu còn lại — 1 cách $\Rightarrow 3$.
- Chứa **không** viên đỏ, tức cả ba viên xanh, vàng, tím: 1 cách. Hai hộp đơn khi đó mỗi hộp một viên đỏ — 1 cách $\Rightarrow 1$.

Tổng dạng (3; 1; 1): $3 + 3 + 1 = 7$.

Bước 3. Dạng (2; 2; 1) — hai hộp mỗi hộp 2 viên, một hộp 1 viên.

Xét viên nằm một mình:

- **Viên lẻ là một viên đỏ.** Còn lại: 1 đỏ, xanh, vàng, tím chia thành hai cặp không phân biệt thứ tự. Viên đỏ còn lại ghép với một trong ba viên màu: 3 cách (hai viên màu còn lại tự thành cặp) $\Rightarrow 3$.
- **Viên lẻ là một viên màu** (3 cách chọn). Còn lại: 2 đỏ và 2 viên màu, chia thành hai cặp. Hai khả năng: {đỏ, đỏ} và {màu, màu}; hoặc mỗi cặp gồm một đỏ và một màu (1 cách vì hai viên đỏ giống nhau và hai cặp không phân biệt). Vậy 2 cách $\Rightarrow 3 \cdot 2 = 6$.

Tổng dạng (2; 2; 1): $3 + 6 = 9$.

Bước 4. Cộng lại.

$$7 + 9 = 16.$$

Kết quả: 16 cách

Ghi chú. Bài này là bài khó nhất chương vì phải xử lý đồng thời ba loại đối xứng: hai viên đỏ giống nhau, ba chiếc hộp giống nhau, và trong dạng (2; 2; 1) thì hai hộp cỡ 2 cũng không phân biệt. Chiến thuật an toàn: **cố định một trục để phá đối xứng** — ở Bước 2 ta cố định “thành phần của hộp lớn”, ở Bước 3 ta cố định “viên nằm một mình” — rồi mới đếm phần còn lại.

CHƯƠNG 8

XÁC SUẤT BERNOULLI — DÃY PHÉP THỬ ĐỘC LẬP

Ba công thức phải thuộc.

- **Đúng k lần trong n phép thử** (mỗi lần thành công với xác suất p , thất bại $q = 1 - p$):

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

- **Từ k_1 đến k_2 lần:** cộng lại, $\sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k}$.

- **Bài toán dừng** (dừng ngay khi đủ r lần thành công): “dừng ở lần thứ n ” nghĩa là trong $n - 1$ lần đầu có đúng $r - 1$ lần thành công, và lần thứ n thành công:

$$P = C_{n-1}^{r-1} p^{r-1} q^{n-r} \cdot p = C_{n-1}^{r-1} p^r q^{n-r}.$$

Điểm chết người của bài toán dừng: lần cuối cùng *bắt buộc* phải thành công, nên nó **không** được tham gia vào hệ số tổ hợp. Viết C_n^r thay vì C_{n-1}^{r-1} là sai.

Câu 1

Cho một dãy 12 phép thử độc lập giống nhau, trong mỗi phép thử xác suất xảy ra biến cố A là không đổi và bằng 0,7; xác suất xảy ra $\bar{A}$ là 0,3. Hỏi trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai?

- Xác suất để xảy ra biến cố A đúng 5 lần là 0,029 (làm tròn đến hàng phần nghìn).
- Xác suất để xảy ra biến cố A đúng 7 lần là 0,158 (làm tròn đến hàng phần nghìn).
- Xác suất để xảy ra biến cố A từ 5 đến 9 lần là 0,738 (làm tròn đến hàng phần nghìn).
- Giả sử chuỗi phép thử sẽ dừng lại khi biến cố A xuất hiện đúng 5 lần. Xác suất để chuỗi phép thử dừng lại ở lần 9 là 0,095 (làm tròn đến hàng phần nghìn).

Đặt $p = 0,7$, $q = 0,3$, $n = 12$.

a) Đúng 5 lần.

$$P_{12}(5) = C_{12}^5 (0,7)^5 (0,3)^7 = 792 \cdot 0,16807 \cdot 0,0002187 \approx 0,02911 \approx 0,029.$$

⇒ **Mệnh đề a) ĐÚNG.**

b) Đúng 7 lần.

$$P_{12}(7) = C_{12}^7 (0,7)^7 (0,3)^5 = 792 \cdot 0,0823543 \cdot 0,00243 \approx 0,15843 \approx 0,158.$$

⇒ **Mệnh đề b) ĐÚNG.**

c) Từ 5 đến 9 lần.

Cộng năm số hạng $k = 5, 6, 7, 8, 9$:

k	5	6	7	8	9	Tổng
$P_{12}(k)$	0,0291	0,0792	0,1585	0,2311	0,2397	0,7377

Làm tròn: 0,738. $\Rightarrow$ **Mệnh đề c) ĐÚNG.**

d) Bài toán dừng: $r = 5$, **dừng ở lần thứ 9.**

Trong 8 lần đầu phải có đúng 4 lần xảy ra A , rồi lần thứ 9 xảy ra A :

$$P = C_8^4 (0,7)^4 (0,3)^4 \cdot 0,7 = 70 \cdot 0,2401 \cdot 0,0081 \cdot 0,7 \approx 0,09529 \approx 0,095.$$

$\Rightarrow$ **Mệnh đề d) ĐÚNG.**

Kết quả: a) Đ b) Đ c) Đ d) Đ

Ghi chú. Mẹo kiểm tra ý c). Kỳ vọng số lần xảy ra A là $np = 12 \cdot 0,7 = 8,4$. Khoảng $[5; 9]$ ôm lấy giá trị kỳ vọng, nên xác suất phải “khá lớn” — một con số cỡ 0,7–0,8 là hợp lý. Nếu bạn tính ra 0,2 thì chắc chắn đã cộng nhầm miễn.

Câu 2

Một xạ thủ bắn liên tiếp 9 lần vào bia với xác suất trong mỗi lần bắn trúng là 0,8 và bắn trượt là 0,2. Coi như tâm lý của xạ thủ là vững vàng và kết quả bắn của các lần trước không làm ảnh hưởng đến kết quả bắn của các lần tiếp theo. Hãy tính xác suất để xạ thủ này bắn trúng được 4 lần (làm tròn đến hàng phần trăm).

Bước 1. Kiểm tra điều kiện Bernoulli.

“Tâm lý vững vàng, kết quả các lần không ảnh hưởng nhau” $\Rightarrow$ các phép thử **độc lập** và p **không đổi**. Đủ điều kiện dùng công thức nhị thức.

Bước 2. Áp dụng.

$n = 9$, $k = 4$, $p = 0,8$, $q = 0,2$:

$$P_9(4) = C_9^4 (0,8)^4 (0,2)^5 = 126 \cdot 0,4096 \cdot 0,00032.$$

Bước 3. Tính.

$$126 \cdot 0,4096 = 51,6096; \quad 51,6096 \cdot 0,00032 \approx 0,016515 \approx 0,02.$$

Kết quả: $P \approx 0,0165 \approx 0,02$

Ghi chú. Kỳ vọng số lần trúng là $9 \cdot 0,8 = 7,2$, nên “chỉ trúng 4 lần” là biến cố *hiếm* — một xác suất rất nhỏ như 0,02 là hoàn toàn hợp lý. Luôn dùng np để ước lượng độ lớn của đáp số trước khi bấm máy.

Câu 3

Một xạ thủ bắn liên tiếp nhiều lần vào bia với xác suất trong mỗi lần bắn trúng là 0,9 và bắn trượt là 0,1 (các lần bắn độc lập). Biết rằng xạ thủ sẽ dừng lại nếu bắn trúng được 5 lần. Hãy tính xác suất để xạ thủ này dừng lại sau 7 lần bắn (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Bước 1. Phân tích cấu trúc của biến cố.

“Dừng sau đúng 7 lần bắn” $\iff$

- trong 6 lần bắn đầu có **đúng** 4 lần trúng (chưa đủ 5 nên chưa dừng), và
- lần bắn thứ 7 **trúng**.



 6 lần đầu: đúng 4 lần trúng ~~bắt buộc~~ trúng

Bước 2. Viết công thức.

$$P = C_6^4 (0,9)^4 (0,1)^2 \cdot 0,9 = C_6^4 (0,9)^5 (0,1)^2.$$

Bước 3. Tính.

$$C_6^4 = 15; \quad (0,9)^5 = 0,59049; \quad (0,1)^2 = 0,01.$$

$$P = 15 \cdot 0,59049 \cdot 0,01 = 0,0885735 \approx 0,09.$$

Kết quả: $P \approx 0,0886 \approx 0,09$

Ghi chú. So sánh để thấy sai lầm phổ biến. Nếu (sai) viết $C_7^5 (0,9)^5 (0,1)^2 = 21 \cdot 0,0059049 = 0,124$, ta đã tính xác suất “trúng đúng 5 trong 7 lần” — trong đó có cả những trường hợp lần thứ 7 trượt, tức xạ thủ đã dừng *trước* lần 7. Sai khác giữa C_7^5 và C_6^4 chính là ở chỗ đó.

Câu 4

Một xạ thủ bắn liên tiếp nhiều lần vào bia với xác suất trong mỗi lần bắn trúng là p ($p \in (0,5; 1)$) và bắn trượt là $1 - p$ (các lần bắn độc lập). Biết rằng xạ thủ sẽ dừng lại nếu bắn trúng được 4 lần, và xác suất để xạ thủ này dừng lại sau 6 lần bắn là 0,118. Hãy tính p (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Bước 1. Lập phương trình.

Dừng ở lần thứ 6 với $r = 4$: trong 5 lần đầu có đúng 3 lần trúng, lần thứ 6 trúng:

$$C_5^3 p^3 (1 - p)^2 \cdot p = 0,118 \iff 10 p^4 (1 - p)^2 = 0,118.$$

Bước 2. Khảo sát để biết có bao nhiêu nghiệm.

Đặt $f(p) = 10 p^4 (1 - p)^2$ trên $(0; 1)$. Ta có

$$f'(p) = 10 [4 p^3 (1 - p)^2 - 2 p^4 (1 - p)] = 20 p^3 (1 - p) [2(1 - p) - p] = 20 p^3 (1 - p) (2 - 3p).$$

Vậy f tăng trên $(0; \frac{2}{3})$, giảm trên $(\frac{2}{3}; 1)$, cực đại $f(\frac{2}{3}) = 10 \cdot \frac{16}{81} \cdot \frac{1}{9} \approx 0,2195$.

p	0,50	0,67	0,80	0,85	0,90
$f(p)$	0,1563	0,2195	0,1638	0,1175	0,0657

Bước 3. Chốt khoảng nghiệm.

Trên $(0,5; 1)$ hàm f tăng rồi giảm, mà $f(0,5) = 0,1563 > 0,118$ nên phương trình $f(p) = 0,118$

chỉ có một nghiệm trên khoảng này, nằm ở nhánh giảm. Từ bảng: $f(0,80) = 0,1638 > 0,118 > 0,1175 = f(0,85)$, nên nghiệm nằm rất sát 0,85.

Bước 4. Tính chính.

$f(0,849) \approx 0,1185$; $f(0,850) \approx 0,1175$. Nghiệm $p \approx 0,8494$.

Kết quả: $p \approx 0,85$

Ghi chú. Vì sao đề phải cho $p \in (0,5; 1)$? Vì phương trình còn một nghiệm nữa ở nhánh tăng, khoảng $p \approx 0,44$. Điều kiện $p > 0,5$ chính là để loại nghiệm đó — đừng bỏ qua giả thiết này khi dùng chức năng solve của máy tính cầm tay.

Câu 5

Một em học sinh lười học bước vào phòng thi học kì sẽ khoanh ngẫu nhiên cả đề thi. Biết bố cục đề thi gồm 10 câu trắc nghiệm bốn đáp án, chỉ có một đáp án đúng; đúng một câu được 1 điểm và sai một câu sẽ không bị trừ điểm. Hãy tính xác suất để em học sinh này đạt được điểm từ 5 trở lên (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Bước 1. Mô hình hoá.

Mỗi câu là một phép thử độc lập với $p = \frac{1}{4} = 0,25$ (khoanh trúng), $q = 0,75$. Số điểm bằng số câu đúng, nên “từ 5 điểm trở lên” $\iff$ đúng ít nhất 5 câu.

Bước 2. Viết tổng.

$$P = \sum_{k=5}^{10} C_{10}^k (0,25)^k (0,75)^{10-k}.$$

Bước 3. Tính từng số hạng.

k	5	6	7	8	9	10	Tổng
C_{10}^k	252	210	120	45	10	1	
$P_{10}(k)$	0,0584	0,0162	0,0031	0,00039	0,00003	≈ 0	0,0781

Bước 4. Kết luận.

$$P \approx 0,0781 \approx 0,08.$$

Kết quả: $P \approx 0,0781 \approx 0,08$

Ghi chú. Kỳ vọng số câu đúng là $10 \cdot 0,25 = 2,5$ câu. Muốn đạt 5 điểm tức là gấp đôi kỳ vọng — xác suất chưa tới 8%. Một minh hoạ định lượng cho việc *khoanh bừa không phải là chiến lược*.

Câu 6

Một em học sinh lười học cho nên bước vào phòng thi học kì với tâm lí sẽ khoanh ngẫu nhiên cả đề thi. Biết bố cục đề thi gồm 10 câu trắc nghiệm bốn đáp án A, B, C, D ; chỉ có một đáp án đúng, đúng một câu được 1 điểm và sai một câu sẽ không bị trừ điểm. Hãy tính xác suất để em học sinh này **không vượt quá 3 điểm** (làm

tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Bước 1. Dịch điều kiện.

“Không vượt quá 3 điểm” nghĩa là số câu đúng $k \leq 3$, tức $k \in \{0; 1; 2; 3\}$.

Bước 2. Tính bốn số hạng.

Với $p = 0,25$, $q = 0,75$, $n = 10$:

k	C_{10}^k	$(0,25)^k (0,75)^{10-k}$	$P_{10}(k)$
0	1	0,0563	0,0563
1	10	0,0188	0,1877
2	45	0,00625	0,2816
3	120	0,00208	0,2503
Tổng			0,7759

Bước 3. Kết luận.

$$P \approx 0,7759 \approx 0,78.$$

Kết quả: $P \approx 0,7759 \approx 0,78$

Ghi chú. Mẹo tiết kiệm thời gian. Nếu đề hỏi “ít nhất 4 điểm” thì hãy lấy $1 - 0,7759 = 0,2241$ thay vì cộng bảy số hạng. **Luôn đếm xem bên nào ít số hạng hơn** rồi dùng phần bù — với $n = 10$ thì ngưỡng chia đôi là $k = 5$.

Câu 7

Cho 5 hành khách bước lên 3 toa tàu một cách ngẫu nhiên. Hãy tính xác suất để có một toa có đúng 3 hành khách (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Bước 1. Không gian mẫu.

Mỗi hành khách chọn độc lập một trong 3 toa:

$$n(\Omega) = 3^5 = 243.$$

Bước 2. Nhận xét: chỉ có tối đa một toa chứa đúng 3 khách.

Nếu hai toa cùng có 3 khách thì tổng $\geq 6 > 5$ — vô lí. Vậy các trường hợp **rời nhau**, ta được phép nhân 3 (chọn toa đó) mà không lo đếm trùng.

Bước 3. Cố định toa đó, đếm.

Chọn toa: 3 cách. Chọn 3 trong 5 hành khách cho toa đó: $C_5^3 = 10$ cách. Hai hành khách còn lại phải vào *hai toa kia* (nếu một trong hai vào lại toa đã chọn thì toa đó có 4 khách, không còn đúng 3): mỗi người 2 lựa chọn $\Rightarrow 2^2 = 4$ cách.

$$n(A) = 3 \cdot C_5^3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 10 \cdot 4 = 120.$$

Bước 4. Xác suất.

$$P(A) = \frac{120}{243} = \frac{40}{81} \approx 0,4938 \approx 0,49.$$

Kết quả: $P(A) = \frac{40}{81} \approx 0,49$

Ghi chú. Bẫy lớn nhất: viết 2 hàng khách còn lại có 3 lựa chọn ($3^2 = 9$), ra $3 \cdot 10 \cdot 9 = 270 > 243$ — lớn hơn cả không gian mẫu, một dấu hiệu sai rõ ràng. Từ “đúng 3” bắt buộc phải *chặn* hai người còn lại ra khỏi toa đã chọn.

Kiểm tra bằng dạng phân bố. Các dạng $(3; 2; 0)$ và $(3; 1; 1)$ là hai dạng chứa số 3: $(3; 2; 0)$ cho $3! \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 = 6 \cdot 10 = 60$; $(3; 1; 1)$ cho $3 \cdot C_5^3 \cdot 2! = 3 \cdot 10 \cdot 2 = 60$. Tổng 120. ✓

CHƯƠNG 9

TƯ DUY VÀ KỸ NĂNG GỘP PHÉP THỬ

Định lí “gộp” — chìa khoá của cả chương. Cho một hộp có N viên bi. Ta chuyển ngẫu nhiên một số bi qua nhiều hộp trung gian, rồi cuối cùng lấy ra r viên. Nếu **mọi thao tác đều là lấy ngẫu nhiên và không nhìn màu**, thì r viên thu được ở cuối chính là **một tập con ngẫu nhiên gồm r viên lấy trực tiếp từ hộp ban đầu**.

$$P = \frac{C_D^k \cdot C_X^{r-k}}{C_N^r}$$

(D = số bi đỏ, X = số bi xanh trong hộp gốc, $N = D + X$, lấy r viên được đúng k đỏ).

Tại sao đúng? Vì các viên bi hoàn toàn đối xứng: mọi bộ r viên đều có *cùng* khả năng đi hết chuỗi hộp để đến đích. Chuỗi trung gian dài bao nhiêu cũng không làm lệch phân phối.

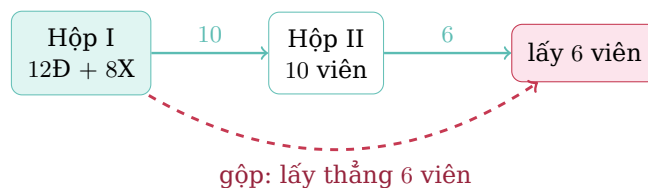
Điều kiện áp dụng: số bi ở mỗi bước phải *đủ* để lấy (không có bước nào bị ép chọn), và không có thao tác nào phụ thuộc màu bi.

Câu 1

Cho hai hộp, hộp I đựng 12 viên bi đỏ và 8 viên bi xanh, hộp II ban đầu chưa đựng viên bi nào; các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Tiến hành lấy ngẫu nhiên 10 viên bi từ hộp I bỏ sang hộp II, sau đó tiến hành lấy ngẫu nhiên 6 viên bi từ hộp II. Hãy tính xác suất để lấy được từ hộp II ba viên bi màu đỏ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Bước 1. Gộp phép thử.

Sáu viên bi cuối cùng đều xuất phát từ hộp I và được chọn hoàn toàn ngẫu nhiên. Vậy bài toán tương đương: *lấy thẳng 6 viên bi từ hộp chứa 12 đỏ và 8 xanh*. Bước trung gian “10 viên sang hộp II” hoàn toàn không ảnh hưởng.



Bước 2. Không gian mẫu và biến cố.

$$n(\Omega) = C_{20}^6 = 38\,760; \quad n(A) = C_{12}^3 \cdot C_8^3 = 220 \cdot 56 = 12\,320.$$

Bước 3. Xác suất.

$$P(A) = \frac{12\,320}{38\,760} \approx 0,3179 \approx 0,32.$$

Kết quả: $P(A) \approx 0,3179 \approx 0,32$

Ghi chú. Nếu không gộp thì sao? Phải xét 10 trường hợp cho số bi đỏ trong hộp II rồi cộng $\sum_i \frac{C_{12}^i C_8^{10-i}}{C_{20}^{10}} \cdot \frac{C_i^3 C_{10-i}^3}{C_{10}^6}$ — rất dài mà kết quả vẫn đúng bằng 0,3179. Phép gộp giúp tiết kiệm gần hết công sức.

Câu 2

Cho hai hộp, hộp I đựng 10 viên bi đỏ, 7 viên bi xanh, 4 viên bi vàng và hộp II ban đầu chưa đựng viên bi nào. Tiến hành lấy ngẫu nhiên 8 viên bi từ hộp I bỏ sang hộp II, sau đó tiến hành lấy ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp II. Hãy tính xác suất để lấy được từ hộp II ba viên bi khác màu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Bước 1. Gộp.

Tương đương lấy thẳng 3 viên từ hộp có $10 + 7 + 4 = 21$ viên.

Bước 2. Đếm.

“Ba viên khác màu” nghĩa là mỗi màu đúng một viên:

$$n(A) = C_{10}^1 \cdot C_7^1 \cdot C_4^1 = 10 \cdot 7 \cdot 4 = 280; \quad n(\Omega) = C_{21}^3 = 1330.$$

Bước 3. Xác suất.

$$P(A) = \frac{280}{1330} = \frac{4}{19} \approx 0,2105 \approx 0,21.$$

$$\text{Kết quả: } P(A) = \frac{4}{19} \approx 0,21$$

Câu 3

Cho ba hộp: hộp I đựng 7 viên bi đỏ và 5 viên bi xanh; hộp II và hộp III ban đầu chưa đựng viên bi nào. Tiến hành lấy ngẫu nhiên 5 viên bi từ hộp I sang hộp II, sau đó lấy ngẫu nhiên 4 viên bi từ hộp II bỏ sang hộp III, sau đó lấy 3 viên bi từ hộp III. Hãy tính xác suất để lấy được từ hộp III đúng một viên bi màu đỏ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Bước 1. Chuỗi ba hộp cũng gộp được.

$12 \xrightarrow{5} 5 \xrightarrow{4} 4 \xrightarrow{3} 3$. Ba viên cuối cùng vẫn là một tập con ngẫu nhiên gồm 3 viên của hộp I (7 đỏ, 5 xanh).

Bước 2. Tính.

$$P = \frac{C_7^1 \cdot C_5^2}{C_{12}^3} = \frac{7 \cdot 10}{220} = \frac{70}{220} = \frac{7}{22} \approx 0,3182 \approx 0,32.$$

$$\text{Kết quả: } P = \frac{7}{22} \approx 0,32$$

Ghi chú. Kiểm tra tính hợp lệ của phép gộp: mỗi bước lấy đều ít hơn hoặc bằng số bi đang có ($5 \leq 12$, $4 \leq 5$, $3 \leq 4$) và không nhìn màu. Đủ điều kiện gộp.

Câu 4

Cho ba hộp: hộp I đựng 7 viên bi đỏ và 5 viên bi xanh; hộp II và hộp III ban đầu chưa đựng viên bi nào. Tiến hành lấy ngẫu nhiên 1 viên bi từ hộp I bỏ vào hộp III, sau đó lấy ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp I bỏ sang hộp II, sau đó lại lấy ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp II bỏ vào hộp III. Hãy tính xác suất để trong hộp III có đúng hai viên bi màu đỏ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Bước 1. Xác định hộp III cuối cùng có mấy viên.

Hộp III nhận 1 viên trực tiếp từ hộp I, rồi nhận thêm 2 viên (chính là toàn bộ hộp II). Tổng: $1 + 2 = 3$ viên.

Bước 2. Ba viên đó là gì?

Cả ba đều được rút ngẫu nhiên từ hộp I và *không viên nào trùng nhau* (viên đầu đã rời hộp I trước khi rút hai viên sau). Vậy hộp III chứa một tập con ngẫu nhiên gồm 3 viên của hộp I.

Bước 3. Tính.

$$P = \frac{C_7^2 \cdot C_5^1}{C_{12}^3} = \frac{21 \cdot 5}{220} = \frac{105}{220} = \frac{21}{44} \approx 0,4773 \approx 0,48.$$

$$\text{Kết quả: } P = \frac{21}{44} \approx 0,48$$

Ghi chú. Vì sao “lấy 2 trong 2 viên của hộp II” không làm hỏng phép gộp? Vì lấy hết thì không có sự chọn lọc nào cả — toàn bộ hộp II chuyển sang hộp III. Bước này chỉ là “đi vòng”.

Câu 5

Cho ba hộp: hộp I đựng 8 viên bi đỏ và 5 viên bi xanh; hộp II và hộp III ban đầu chưa đựng viên bi nào. Tiến hành lấy ngẫu nhiên 6 viên bi từ hộp I sang hộp II, sau đó lấy ngẫu nhiên 4 viên bi từ hộp II bỏ sang hộp III, sau đó lấy 3 viên bi từ hộp III. Hãy tính xác suất để lấy được từ hộp III đúng hai viên bi màu đỏ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Bước 1. Gộp.

Tương đương lấy 3 viên từ hộp có 8 đỏ và 5 xanh (13 viên).

Bước 2. Tính.

$$P = \frac{C_8^2 \cdot C_5^1}{C_{13}^3} = \frac{28 \cdot 5}{286} = \frac{140}{286} = \frac{70}{143} \approx 0,4895 \approx 0,49.$$

$$\text{Kết quả: } P = \frac{70}{143} \approx 0,49$$

Câu 6

Cho ba hộp: hộp I đựng 8 viên bi đỏ và 5 viên bi xanh; hộp II và hộp III ban đầu chưa đựng viên bi nào. Tiến hành lấy ngẫu nhiên hai viên bi từ hộp I bỏ vào hộp III, sau đó lấy ngẫu nhiên 4 viên bi từ hộp I bỏ sang hộp II, sau đó lại lấy ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp II bỏ vào hộp III. Hãy tính xác suất để trong hộp III có đúng ba viên

bi màu đỏ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Bước 1. Đếm số bi cuối cùng trong hộp III.

$$2 \text{ (trực tiếp từ I)} + 3 \text{ (qua hộp II)} = 5 \text{ viên.}$$

Bước 2. Gộp.

Năm viên đó là năm lượt rút phân biệt từ hộp I, nên hợp thành một tập con ngẫu nhiên gồm 5 viên của hộp I (8 đỏ, 5 xanh).

Bước 3. Tính.

$$P = \frac{C_8^3 \cdot C_5^2}{C_{13}^5} = \frac{56 \cdot 10}{1287} = \frac{560}{1287} \approx 0,4351 \approx 0,44.$$

Kết quả: $P = \frac{560}{1287} \approx 0,44$

Ghi chú. Chú ý điểm khác với Câu 5. Ở Câu 5 ta lấy 3 viên từ hộp III (nên $r = 3$); ở đây ta xét *toàn bộ* hộp III (nên $r = 5$). Xác định đúng r là bước quan trọng nhất — hãy đọc kỹ để hỏi “lấy ra được” hay “trong hộp có”.

Câu 7

Cho hai hộp, hộp I đựng 8 viên bi đỏ và 6 viên bi xanh, hộp II ban đầu chưa đựng viên bi nào. Tiến hành lấy ngẫu nhiên 4 viên bi từ hộp I sang hộp II, sau đó lấy ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp II bỏ **ngược lại** hộp I, sau đó lấy ngẫu nhiên 4 viên bi từ hộp I sang hộp II, cuối cùng lấy từ hộp II ra 3 viên bi. Hãy tính xác suất để lần cuối cùng lấy được từ hộp II đúng hai viên bi màu đỏ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Bước 1. Chuỗi có bước “đi ngược” — vẫn gộp được.

Dù bi có qua lại giữa hai hộp bao nhiêu lần, không có thao tác nào phân biệt màu. Do tính đối xứng, 3 viên bi lấy ra ở lượt cuối vẫn là một tập con ngẫu nhiên gồm 3 viên trong tổng số $8 + 6 = 14$ viên ban đầu.

Bước 2. Tính.

$$P = \frac{C_8^2 \cdot C_6^1}{C_{14}^3} = \frac{28 \cdot 6}{364} = \frac{168}{364} = \frac{6}{13} \approx 0,4615 \approx 0,46.$$

Kết quả: $P = \frac{6}{13} \approx 0,46$

Ghi chú. Đây là câu “bẫy tâm lý” của đề. Chuỗi bốn thao tác qua lại khiến bài toán *trông* rất rối, nhưng bản chất vẫn là một phép chọn ngẫu nhiên 3 trong 14. Hề thấy chuỗi thao tác dài mà *không hề nhắc tới màu*, hãy nghĩ ngay tới phép gộp.

Câu 8

Cho bốn hộp: hộp I đựng 8 viên bi đỏ và 5 viên bi xanh; hộp II, hộp III và hộp IV ban đầu chưa đựng viên bi nào. Tiến hành lấy ngẫu nhiên hai viên bi từ hộp I bỏ vào hộp III, sau đó lấy ngẫu nhiên 5 viên bi từ hộp I bỏ sang hộp II, sau đó lại lấy ngẫu nhiên

nhien 3 viên bi từ hộp II bỏ vào hộp IV. Hãy tính xác suất để **trong cả hộp III và hộp IV đều có đúng một viên bi màu đỏ** (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Bước 1. Cuối cùng mỗi hộp có gì?

Hộp III: 2 viên (lấy trực tiếp từ I). Hộp IV: 3 viên (lấy từ hộp II, mà hộp II lấy từ I). Tổng cộng 5 viên, tất cả đều là những lượt rút *phân biệt* từ hộp I.

Bước 2. Tách thành hai giai đoạn nối tiếp.

Đây là điểm khác các câu trước: ta cần *hai* hộp cùng thoả điều kiện, nên phải nhân xác suất theo quy tắc nhân xác suất có điều kiện.

$$P = \underbrace{P(\text{hộp III có 1Đ1X})}_{P_1} \times \underbrace{P(\text{hộp IV có 1Đ2X} \mid \text{hộp III có 1Đ1X})}_{P_2}.$$

Bước 3. Tính P_1 .

Rút 2 viên từ 8 đỏ + 5 xanh:

$$P_1 = \frac{C_8^1 \cdot C_5^1}{C_{13}^2} = \frac{40}{78} = \frac{20}{39}.$$

Bước 4. Tính P_2 .

Sau bước trên, hộp I còn $13 - 2 = 11$ viên, gồm 7 đỏ và 4 xanh. Ba viên vào hộp IV là một tập con ngẫu nhiên gồm 3 viên của 11 viên này (phép gộp qua hộp II):

$$P_2 = \frac{C_7^1 \cdot C_4^2}{C_{11}^3} = \frac{7 \cdot 6}{165} = \frac{42}{165} = \frac{14}{55}.$$

Bước 5. Nhân lại.

$$P = \frac{20}{39} \cdot \frac{14}{55} = \frac{280}{2145} = \frac{56}{429} \approx 0,1305 \approx 0,13.$$

Kết quả: $P = \frac{56}{429} \approx 0,13$

Ghi chú. Cách thứ hai — đếm trực tiếp một lần. Chọn 2 viên cho hộp III rồi 3 viên cho hộp IV từ phần còn lại:

$$P = \frac{(C_8^1 C_5^1) \cdot (C_7^1 C_4^2)}{C_{13}^2 \cdot C_{11}^3} = \frac{40 \cdot 42}{78 \cdot 165} = \frac{1680}{12870} \approx 0,1305. \checkmark$$

Bẫy: không được nhân P_2 với xác suất tính trên hộp gốc 13 viên — sau khi hộp III đã lấy đi 1 đỏ và 1 xanh, thành phần hộp I đã thay đổi.

CHƯƠNG 10

CHIA KẸO CÓ ĐIỀU KIỆN

Bài toán chia kẹo chuẩn mực (Euler). Số cách chia n chiếc kẹo **giống nhau** cho k em bé **phân biệt**, mỗi em ít nhất một chiếc, bằng số nghiệm nguyên dương của $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ và bằng

$$C_{n-1}^{k-1}$$

Nếu cho phép có em không được chiếc nào ($x_i \geq 0$) thì đổi biến $x'_i = x_i + 1$ và được C_{n+k-1}^{k-1} .

Ba kĩ thuật xử lí điều kiện phụ:

- **Cận dưới** $x_i \geq m$: đặt $x'_i = x_i - (m-1)$, bài toán trở về dạng chuẩn với $n' = n - k(m-1)$ (hoặc trừ riêng cho từng biến).
- **Cận trên** $x_i \leq M$: **không** đổi biến được — phải dùng **bao hàm - loại trừ** theo số biến vi phạm.
- **Quan hệ so sánh** $x_i > x_j$ hay $x_i = mx_j$: dùng **đối xứng** hoặc **tham số hoá** một biến rồi đếm.

Câu 1

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chia 30 chiếc kẹo giống nhau cho 3 em học sinh (trong đó có An và Bình), sao cho mỗi người được ít nhất một chiếc kẹo và:

1. số kẹo của An lớn hơn số kẹo của Bình?
2. số kẹo của An gấp đôi số kẹo của Bình?

Gọi a, b, c lần lượt là số kẹo của An, Bình và em thứ ba; $a, b, c \geq 1$ và $a + b + c = 30$.

Bước 0. Tổng số cách chia (chưa kèm điều kiện).

$$T = C_{30-1}^{3-1} = C_{29}^2 = \frac{29 \cdot 28}{2} = 406.$$

Ý 1. Điều kiện $a > b$ — dùng đối xứng.

Bước 1. Chia 406 cách thành ba nhóm rời nhau.

$$\{a > b\}, \quad \{a < b\}, \quad \{a = b\}.$$

Phép hoán đổi $a \leftrightarrow b$ là một **song ánh** giữa nhóm thứ nhất và nhóm thứ hai, nên hai nhóm này có **cùng** số phần tử.

Bước 2. Đếm nhóm $\{a = b\}$.

Khi $a = b$ thì $2a + c = 30$, tức $c = 30 - 2a$. Điều kiện $c \geq 1$ cho $a \leq 14,5$, kết hợp $a \geq 1$:

$$a \in \{1; 2; \dots; 14\} \implies 14 \text{ cách.}$$

Bước 3. Suy ra kết quả.

$$\#\{a > b\} = \frac{406 - 14}{2} = \frac{392}{2} = 196.$$

Kết quả: Ý 1: 196 cách

Ý 2. Điều kiện $a = 2b$ — tham số hoá.

Bước 1. Thế vào phương trình.

$$a = 2b \implies 2b + b + c = 30 \implies 3b + c = 30.$$

Bước 2. Chặn miền của b .

Cần $c = 30 - 3b \geq 1 \implies b \leq 9,67$, và $b \geq 1$ (đồng thời $a = 2b \geq 1$ tự thoả):

$$b \in \{1; 2; \dots; 9\}.$$

Mỗi giá trị của b cho đúng một bộ $(a; b; c) = (2b; b; 30 - 3b)$.

Bước 3. Đếm.

9 cách.

(Cụ thể: $(2; 1; 27), (4; 2; 24), (6; 3; 21), (8; 4; 18), (10; 5; 15), (12; 6; 12), (14; 7; 9), (16; 8; 6), (18; 9; 3)$.)

Kết quả: Ý 2: 9 cách

Ghi chú. Kỹ thuật đối xứng ở Ý 1 rất mạnh — nó biến một điều kiện bất đẳng thức (khó đếm trực tiếp) thành phép trừ đơn giản. Công thức chung:

$$\#\{a > b\} = \frac{T - \#\{a = b\}}{2}.$$

Đừng quên trừ phần $a = b$! Nếu chỉ lấy $406/2 = 203$ thì đã cộng nhầm một nửa của 14 trường hợp hoà vào.

Câu 2

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chia 30 chiếc kẹo giống nhau cho 6 em học sinh sao cho mỗi em được ít nhất một chiếc kẹo và sao cho:

1. có đúng một em có số kẹo lớn hơn 7?
2. tất cả các em học sinh đều được tối đa 7 chiếc kẹo?

Gọi $x_1, \dots, x_6 \geq 1$ với $x_1 + \dots + x_6 = 30$.

Bước 0. Tổng số cách chia.

$$T = C_{29}^5 = 118\,755.$$

Bước 1. Công cụ nền: đếm số cách có một nhóm j em cho trước đều nhận ≥ 8 kẹo.

Với j em đã chỉ định, đặt $x'_i = x_i - 7$ cho các em đó (vẫn còn $x'_i \geq 1$). Tổng giảm đi $7j$:

$$A_j = C_{30-7j-1}^5 = C_{29-7j}^5.$$

j	$29 - 7j$	$A_j = C_{29-7j}^5$	Ghi chú
1	22	26 334	
2	15	3003	
3	8	56	
4	1	0	$30 - 28 = 2 < 6$: vô nghiệm

Ý 1. Đúng một em có $x_i > 7$.

Bước 2. Vì sao không được lấy thẳng $C_6^1 A_1$?

Vì $C_6^1 A_1$ đếm “có ít nhất em thứ i nhận ≥ 8 ” và một cấu hình có hai em cùng nhận ≥ 8 sẽ bị đếm hai lần. Ta dùng công thức bao hàm - loại trừ cho “đúng một”:

$$N_{=1} = \sum_{j \geq 1} (-1)^{j-1} C_j^1 C_6^j A_j.$$

Bước 3. Thay số.

$$\begin{aligned} N_{=1} &= C_1^1 C_6^1 A_1 - C_2^1 C_6^2 A_2 + C_3^1 C_6^3 A_3 \\ &= 1 \cdot 6 \cdot 26\,334 - 2 \cdot 15 \cdot 3003 + 3 \cdot 20 \cdot 56 \\ &= 158\,004 - 90\,090 + 3360 = 71\,274. \end{aligned}$$

Kết quả: Ý 1: 71 274 cách

Ý 2. Mọi em đều nhận ≤ 7 kẹo.

Bước 4. Đếm phần bù bằng bao hàm - loại trừ.

$$N_{\leq 7} = T - C_6^1 A_1 + C_6^2 A_2 - C_6^3 A_3.$$

Bước 5. Thay số.

$$\begin{aligned} N_{\leq 7} &= 118\,755 - 6 \cdot 26\,334 + 15 \cdot 3003 - 20 \cdot 56 \\ &= 118\,755 - 158\,004 + 45\,045 - 1120 = 4676. \end{aligned}$$

Kết quả: Ý 2: 4676 cách

Ghi chú. Hai công thức trông giống nhau nhưng hệ số khác nhau — đây là chỗ dễ lẫn nhất:

$$\text{“ít nhất một em vi phạm”} : \sum_{j \geq 1} (-1)^{j-1} C_6^j A_j;$$

$$\text{“đúng một em vi phạm”} : \sum_{j \geq 1} (-1)^{j-1} \mathbf{C}_j^1 C_6^j A_j.$$

Thừa số $C_j^1 = j$ ở công thức thứ hai chính là số cách “chỉ định em nào là em duy nhất được tính”.

Phép kiểm tra chéo tuyệt vời: số cấu hình có ít nhất một em vi phạm phải bằng $T - N_{\leq 7} = 118\,755 - 4676 = 114\,079$. Mặt khác, cộng “đúng 1” + “đúng 2” + “đúng 3” cũng phải ra 114 079; với $N_{=1} = 71\,274$ ta suy ra “đúng 2 hoặc 3” bằng 42 805 — hợp lí vì phần này nhỏ hơn hẳn. ✓

CHƯƠNG 11

KỸ NĂNG ĐÁNH SỐ THỨ TỰ (ĐỔI BIẾN CHỈ SỐ)

Bổ đề nén khoảng cách — công cụ duy nhất của cả chương. Đếm số bộ $1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_k \leq n$ thỏa $x_{i+1} - x_i \geq d$ với mọi i . Đặt

$$y_i = x_i - (d-1)(i-1)$$

thì $y_1 < y_2 < \dots < y_k$ chạy tự do trong $[1; n - (d-1)(k-1)]$, do đó

$$\text{Số bộ} = C_{n-(d-1)(k-1)}^k$$

Trường hợp quen thuộc nhất là $d = 2$ (“không có hai số liên tiếp”): C_{n-k+1}^k .

Cách nhớ: mỗi lần “bước nhảy” phải rộng thêm $d-1$ đơn vị, ta *trả lại* $d-1$ đơn vị cho mỗi khoảng — có $k-1$ khoảng nên trừ bị co lại $(d-1)(k-1)$ đơn vị.

Câu 1

Cho tập $X = [0; 9]$ (các số tự nhiên từ 0 đến 9). Hỏi trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai?

- a) Số cách chọn ra một tập gồm 3 số tự nhiên từ tập X là 120 (cách).
- b) Có tất cả 120 số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau chọn từ X , sao cho các chữ số của nó xếp theo chiều **giảm** dần khi tính từ trái qua phải.
- c) Có tất cả 120 số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau chọn từ X , sao cho các chữ số của nó xếp theo chiều **tăng** dần khi tính từ trái qua phải.
- d) Có tất cả 240 cách chọn ra một tập gồm 3 số tự nhiên từ X sao cho không có hai số tự nhiên nào được chọn là liên tiếp nhau.

X có 10 phần tử.

a) Chọn một *tập* 3 phần tử (không kể thứ tự):

$$C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} = 120.$$

⇒ a) **ĐÚNG**.

b) Mỗi tập 3 chữ số cho *đúng một* cách xếp giảm dần. Vì chữ số lớn nhất đứng đầu và nó luôn khác 0 (do có ít nhất một chữ số lớn hơn nó không tồn tại — chính xác hơn: nếu chữ số đầu là 0 thì cả ba chữ số đều ≤ 0 , vô lí), nên mọi tập đều cho một số hợp lệ:

$$C_{10}^3 = 120.$$

⇒ b) **ĐÚNG**.

c) Xếp tăng dần thì chữ số *nhỏ nhất* đứng đầu. Nếu tập chứa 0 thì 0 đứng đầu — không phải số tự nhiên có 3 chữ số. Vậy phải loại 0 ra:

$$C_9^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} = 84 \neq 120.$$

⇒ **c) SAI** (đáp số đúng là 84).

d) Áp dụng bổ đề với $n = 10, k = 3, d = 2$:

$$C_{10-3+1}^3 = C_8^3 = 56 \neq 240.$$

⇒ **d) SAI** (đáp số đúng là 56).

Kết quả: a) Đ b) Đ c) S (84) d) S (56)

Ghi chú. Cặp **b) - c)** là **bẫy đối xứng kinh điển**. Cùng là “xếp theo một chiều đơn điệu” nhưng *giảm dần* thì chữ số 0 vô hại (nó luôn nằm cuối), còn *tăng dần* thì 0 bị đẩy lên đầu và làm hỏng số. Chênh nhau đúng $C_9^2 = 36$ tập có chứa 0: $120 - 36 = 84$. ✓

Câu 2

Cho tập X gồm các số tự nhiên nằm trong đoạn $[1; 30]$. Gọi T là số cách chọn ra 4 số tự nhiên từ X sao cho không có hai số tự nhiên được chọn là liên tiếp nhau. Hãy xác định $\frac{T}{10}$.

Bước 1. Viết điều kiện dưới dạng bất đẳng thức.

Gọi bốn số được chọn là $1 \leq x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \leq 30$. “Không liên tiếp” nghĩa là

$$x_2 - x_1 \geq 2, \quad x_3 - x_2 \geq 2, \quad x_4 - x_3 \geq 2.$$

Bước 2. Đổi biến nén khoảng cách.

Đặt

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2 - 1, \quad y_3 = x_3 - 2, \quad y_4 = x_4 - 3.$$

Khi đó $y_1 < y_2 < y_3 < y_4$ (các bất đẳng thức ngặt) và

$$1 \leq y_1, \quad y_4 = x_4 - 3 \leq 30 - 3 = 27.$$

Phép đổi biến này là **song ánh**: từ mỗi bộ (y_i) tăng ngặt trong $[1; 27]$ ta khôi phục lại duy nhất một bộ (x_i) hợp lệ.

Bước 3. Đếm.

$$T = C_{27}^4 = \frac{27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24}{24} = 17\,550.$$

Bước 4. Trả lời.

$$\frac{T}{10} = 1755.$$

Kết quả: $T = 17\,550$; $\frac{T}{10} = \boxed{1755}$

Câu 3

Cho tập X gồm các số tự nhiên nằm trong đoạn $[1; 25]$. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn từ X ra 5 số tự nhiên sao cho không có hai số tự nhiên nào được chọn hơn kém nhau dưới 4 đơn vị?

Bước 1. Dịch điều kiện.

“Không hơn kém nhau dưới 4 đơn vị” nghĩa là hiệu hai số bất kì phải ≥ 4 . Với $x_1 < x_2 < \dots < x_5$ thì chỉ cần các hiệu *liên kế* thoả:

$$x_{i+1} - x_i \geq 4 \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Bước 2. Nén khoảng cách với $d = 4$.

Đặt $y_i = x_i - 3(i - 1)$, tức

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2 - 3, \quad y_3 = x_3 - 6, \quad y_4 = x_4 - 9, \quad y_5 = x_5 - 12.$$

Khi đó $y_1 < y_2 < \dots < y_5$ và $y_5 \leq 25 - 12 = 13$.

Bước 3. Đếm.

$$N = C_{13}^5 = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{120} = 1287.$$

Kết quả: 1287 cách

Ghi chú. Áp thẳng công thức tổng quát: $C_{n-(d-1)(k-1)}^k = C_{25-3 \cdot 4}^5 = C_{13}^5$. **Kiểm tra tính khả thi trước khi tính:** cần $n \geq (d-1)(k-1) + k$, ở đây $25 \geq 12 + 5 = 17$ — có nghiệm. Nếu vế phải lớn hơn n thì đáp số bằng 0.

Câu 4

Gọi T là số cách xếp 7 học sinh nam và 3 học sinh nữ thành một hàng ngang sao cho giữa hai nữ luôn có ít nhất hai nam. Hãy xác định $\frac{T}{100}$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Bước 1. Đánh số vị trí.

Hàng có $7 + 3 = 10$ vị trí, đánh số 1 đến 10. Gọi $a_1 < a_2 < a_3$ là vị trí của ba bạn nữ.

“Giữa hai nữ có ít nhất hai nam” nghĩa là giữa hai vị trí nữ liên kế có ít nhất 2 vị trí trống cho nam:

$$a_2 - a_1 \geq 3, \quad a_3 - a_2 \geq 3.$$

Bước 2. Nén khoảng cách với $d = 3$.

Đặt $b_i = a_i - 2(i - 1)$: $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2 - 2$, $b_3 = a_3 - 4$. Khi đó $b_1 < b_2 < b_3$ và $b_3 \leq 10 - 4 = 6$:

$$\text{số bộ vị trí} = C_6^3 = 20.$$

Bước 3. Hoán vị các bạn.

Ba bạn nữ vào ba vị trí đã chọn: $3! = 6$ cách. Bảy bạn nam vào bảy vị trí còn lại: $7! = 5040$ cách.

Bước 4. Nhân lại.

$$T = 20 \cdot 3! \cdot 7! = 20 \cdot 6 \cdot 5040 = 604800.$$

$$\frac{T}{100} = 6048.$$

Kết quả: $T = 604800$; $\frac{T}{100} = \boxed{6048}$

Ghi chú. Đừng nhầm “khoảng cách vị trí” với “số người ở giữa”. Nếu giữa hai nữ có m nam thì hiệu chỉ số là $m + 1$. Ở đây $m \geq 2 \Rightarrow$ hiệu ≥ 3 , tức $d = 3$ chứ không phải $d = 2$.

Câu 5

Gọi T là số cách xếp 8 học sinh nam và 3 học sinh nữ thành một hàng sao cho giữa hai học sinh nữ luôn có ít nhất ba học sinh nam. Hãy xác định số dư khi lấy T chia cho 10 000.

Bước 1. Đặt bài toán.

Hàng có $8 + 3 = 11$ vị trí. Ba vị trí nữ $a_1 < a_2 < a_3$ thoả

$$a_2 - a_1 \geq 4, \quad a_3 - a_2 \geq 4 \quad (\text{vì có } \geq 3 \text{ nam ở giữa}).$$

Bước 2. Nén với $d = 4$.

$b_i = a_i - 3(i - 1)$, do đó $b_3 \leq 11 - 6 = 5$:

$$\text{số bộ vị trí} = C_5^3 = 10.$$

Bước 3. Hoán vị.

$$T = 10 \cdot 3! \cdot 8! = 10 \cdot 6 \cdot 40\,320 = 2\,419\,200.$$

Bước 4. Lấy số dư.

$$2\,419\,200 = 241 \cdot 10\,000 + 9200 \Rightarrow \text{số dư} = 9200.$$

Kết quả: $T = 2\,419\,200$; số dư = 9200

Câu 6

Một con châu chấu đang ở vị trí A và dự định nhảy đến C . Mỗi lần nó chỉ nhảy được một quãng bằng độ dài cạnh một ô vuông nhỏ, và chỉ có thể nhảy theo hướng AB hoặc hướng AD ; mỗi lần nhảy theo hướng AD thì nó lại phải nhảy liên tiếp **ít nhất hai lần** theo hướng AB để lấy sức. Biết hành trình gồm 9 bước theo hướng AB và 4 bước theo hướng AD . Hãy đếm số cách đi dự tiệc của con châu chấu này.

Bước 1. Mã hoá hành trình thành một chuỗi.

Hành trình là một dãy $9 + 4 = 13$ bước, trong đó có 4 bước loại AD (kí hiệu Y) và 9 bước loại AB (kí hiệu X). Đánh số các bước từ 1 đến 13.

Bước 2. Dịch điều kiện thành khoảng cách chỉ số.

Sau mỗi bước Y phải có ít nhất hai bước X liên tiếp, tức là giữa hai bước Y liên kế phải có ít nhất 2 bước X . Gọi $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ là vị trí của bốn bước Y :

$$a_{i+1} - a_i \geq 3.$$

Bước 3. Nén với $d = 3$.

$b_i = a_i - 2(i - 1)$, khi đó $b_1 < b_2 < b_3 < b_4$ và $b_4 \leq 13 - 6 = 7$:

$$N = C_7^4 = 35.$$

Bước 4. Kết luận.

Mỗi bộ vị trí xác định *duy nhất* một hành trình (các bước cùng loại không phân biệt nhau).

Kết quả: 35 cách

Ghi chú. Đây chính là bài toán vách ngăn khoắc áo chuyển động. Mọi bài “đường đi trên lưới có ràng buộc nhịp điệu” đều quy về việc chọn vị trí cho loại bước hiếm hơn, rồi nén khoảng cách.

Câu 7

Gọi T là số cách xếp 6 học sinh nam và 3 học sinh nữ thành một hàng dọc sao cho giữa hai học sinh nữ luôn có ít nhất hai học sinh nam, và một đầu hàng là nữ còn một đầu hàng là nam. Hãy xác định $\frac{T}{10}$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Bước 1. Hai điều kiện chống lên nhau.

Hàng có 9 vị trí. Ngoài ràng buộc khoảng cách $a_2 - a_1 \geq 3$, $a_3 - a_2 \geq 3$, còn thêm: trong hai đầu hàng (vị trí 1 và vị trí 9) phải có **đúng một** vị trí là nữ.

Bước 2. Chia hai trường hợp đối xứng.

- **TH1:** $a_1 = 1$ (đầu trên là nữ) và $9 \notin \{a_2; a_3\}$ (đầu dưới là nam).
- **TH2:** $a_3 = 9$ (đầu dưới là nữ) và $1 \notin \{a_1\}$ (đầu trên là nam).

Hai trường hợp *rời nhau* (nếu cả hai đầu đều nữ thì không thoả đề) và *đối xứng* qua phép lật ngược hàng, nên chỉ cần đếm TH1 rồi nhân đôi.

Bước 3. Đếm TH1.

$a_1 = 1$, cần $a_2 \geq 4$, $a_3 \geq a_2 + 3$, và $a_3 \leq 8$.

a_2	a_3 hợp lệ
4	7, 8
5	8

Vậy TH1 có 3 bộ vị trí. (Với $a_2 \geq 6$ thì $a_3 \geq 9$ — vi phạm.)

Bước 4. Tổng số bộ vị trí và hoán vị.

$$\text{số bộ vị trí} = 2 \cdot 3 = 6.$$

$$T = 6 \cdot 3! \cdot 6! = 6 \cdot 6 \cdot 720 = 25\,920.$$

$$\frac{T}{10} = 2592.$$

Kết quả: $T = 25\,920$; $\frac{T}{10} = \boxed{2592}$

Ghi chú. Vì sao không dùng thẳng công thức nén? Vì điều kiện “đúng một đầu là nữ” *ghim* một biến vào biên, phá vỡ tính tự do của phép đổi biến. Khi có ràng buộc ở biên, hãy **liệt kê có hệ thống** như Bước 3 — số trường hợp luôn rất nhỏ.

Câu 8

Tiến hành xếp 10 cuốn sách khác nhau vào 4 ngăn hàng ngang. Hai cách được gọi là giống nhau nếu thoả mãn đồng thời: tính từ trái qua phải, số lượng sách trong mỗi ngăn là như nhau; và trong mỗi ngăn các cuốn sách được xếp có thứ tự giống nhau. Gọi T là số cách xếp sao cho mỗi ngăn được ít nhất hai cuốn. Hãy xác định giá trị $\frac{T}{10\,000}$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Bước 1. Hiểu đúng “hai cách giống nhau”.

Định nghĩa của đề nói rằng một cách xếp được xác định bởi: *cuốn nào nằm ngăn nào và thứ tự các cuốn trong từng ngăn*. Vậy thứ tự có phân biệt.

Bước 2. Mô hình “xếp thành một hàng rồi cắt”.

Xếp cả 10 cuốn sách thành một hàng ngang: $10! = 3\,628\,800$ cách. Sau đó chèn 3 vách ngăn để chia hàng thành 4 đoạn liên tiếp — đoạn thứ i chính là ngăn thứ i (đọc từ trái qua phải).

Phép tương ứng này là **song ánh** với các cách xếp sách có thứ tự vào 4 ngăn.

Bước 3. Đếm số cách cắt sao cho mỗi ngăn ≥ 2 cuốn.

Gọi $a_1, a_2, a_3, a_4 \geq 2$ với $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 10$. Đặt $c_i = a_i - 2 \geq 0$:

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 2 \implies C_{2+4-1}^{4-1} = C_5^3 = 10 \text{ cách.}$$

Bước 4. Nhân lại.

$$T = 10! \cdot 10 = 3\,628\,800 \cdot 10 = 36\,288\,000.$$

$$\frac{T}{10\,000} = 3628,8 \approx 3629.$$

Kết quả: $T = 36\,288\,000$; $\frac{T}{10\,000} \approx \boxed{3629}$

Ghi chú. Vì sao nhân được $10!$ với số cách cắt? Vì với mọi bộ số lượng $(a_1; \dots; a_4)$, số cách phân sách kèm thứ tự đều bằng $\frac{10!}{a_1!a_2!a_3!a_4!} \times a_1!a_2!a_3!a_4! = 10!$ — không phụ thuộc bộ số lượng. Đó là lí do công thức tách gọn thành tích.

Câu 9

Quanh chu vi một bờ ao đang có 20 cây được trồng cách đều nhau. Để giảm mật độ cây, người ta có kế hoạch loại bỏ đi 5 cây, sao cho các cây này sẽ không được ở cạnh nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách loại bỏ đi 5 cây thoả mãn yêu cầu của kế hoạch?

Bước 1. Điểm khác biệt: đây là bài toán trên vòng tròn.

Trên hàng thẳng, cây số 1 và cây số 20 không kể nhau; trên vòng tròn thì có. Không dùng trực tiếp C_{n-k+1}^k được.

Bước 2. Công thức cho vòng tròn.

Số cách chọn k phần tử không kể nhau trên vòng n phần tử là

$$\frac{n}{n-k} C_{n-k}^k$$

Chứng minh nhanh: cố định một cây P trên vòng.

- Nếu P **bị chọn**: hai cây kề P chắc chắn không được chọn; bỏ P và hai cây kề đi, còn lại một *đoạn thẳng* $n-3$ cây, cần chọn $k-1$ cây không kề nhau: $C_{(n-3)-(k-1)+1}^{k-1} = C_{n-k-1}^{k-1}$.
- Nếu P **không bị chọn**: bỏ P đi, vòng “mở” thành đoạn thẳng $n-1$ cây, cần chọn k cây không kề nhau: C_{n-k}^k .

Cộng lại và rút gọn cho đúng công thức trên.

Bước 3. Thay số $n = 20, k = 5$.

$$N = \frac{20}{15} C_{15}^5 = \frac{4}{3} \cdot 3003 = 4 \cdot 1001 = 4004.$$

Bước 4. Kiểm tra bằng cách cộng hai trường hợp.

$$C_{14}^4 + C_{15}^5 = 1001 + 3003 = 4004. \checkmark$$

(Đây chính là hai nhánh “ P bị chọn” và “ P không bị chọn” với P cố định — nhưng lưu ý cách cộng này chỉ đúng khi ta cố định P và *không* nhân thêm gì.)

Kết quả: 4004 cách

Ghi chú. So sánh để thấy ảnh hưởng của việc “khép vòng”. Nếu 20 cây xếp thành *hàng thẳng* thì đáp số là $C_{16}^5 = 4368$. Việc nối hai đầu lại làm mất 364 cấu hình — chính là những cấu hình chọn cả cây số 1 lẫn cây số 20.

CHƯƠNG 12

KỸ NĂNG XỬ LÝ ƯỚC NGUYÊN DƯƠNG

Bộ công thức nền. Cho $x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_m^{\alpha_m}$ (phân tích thừa số nguyên tố). Mọi ước nguyên dương của x đều có dạng $p_1^{a_1} \cdots p_m^{a_m}$ với $0 \leq a_i \leq \alpha_i$. Do đó:

- **Số ước:** $d(x) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \cdots (\alpha_m + 1)$.
- **Tổng các ước:** $\sigma(x) = \prod_{i=1}^m \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}$.
- **Ước chia hết cho k :** viết $d = k \cdot t$; khi đó t chạy khắp các ước của $\frac{x}{k}$. Vậy số ước của x chia hết cho k bằng $d\left(\frac{x}{k}\right)$, và tổng của chúng bằng $k \cdot \sigma\left(\frac{x}{k}\right)$.
- **Ghép cặp $d \leftrightarrow \frac{x}{d}$:** $d > M \iff \frac{x}{d} < \frac{x}{M}$. Đây là mẹo biến “đếm ước lớn” thành “đếm ước nhỏ” — luôn dễ hơn nhiều.

Câu 1

Cho số nguyên dương $x = 388\,800 = 2^6 \cdot 3^5 \cdot 5^2$. Hỏi trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai?

- x có tất cả 126 ước nguyên dương.
- x có tất cả 116 ước nguyên dương lớn hơn 12.
- x có tất cả 2 ước nguyên dương lớn hơn 194\,399.
- x có tất cả 5 ước nguyên dương lớn hơn 55\,011.

a) Số ước.

$$d(x) = (6 + 1)(5 + 1)(2 + 1) = 7 \cdot 6 \cdot 3 = 126.$$

$\Rightarrow$ **a) ĐÚNG.**

b) Ước lớn hơn 12.

Đếm phần bù: liệt kê các ước ≤ 12 . Ước của x chỉ gồm các thừa số 2, 3, 5, nên trong $\{1, \dots, 12\}$ ta loại ngay 7 và 11:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12 \Rightarrow 10 \text{ ước.}$$

(Kiểm: $2^2 \cdot 3 = 12$ hợp lệ vì $\alpha_2 = 6 \geq 2$, $\alpha_3 = 5 \geq 1$.)

$$\#\{d > 12\} = 126 - 10 = 116.$$

$\Rightarrow$ **b) ĐÚNG.**

c) Ước lớn hơn 194\,399 — dùng ghép cặp.

$$\frac{x}{194\,399} = \frac{388\,800}{194\,399} \approx 2,0000 (> 2).$$

Với ước d , ta có $d > 194\,399 \iff \frac{x}{d} < 2,0000 \dots$, tức $\frac{x}{d} \in \{1; 2\}$. Cả 1 và 2 đều là ước của x , cho $d = 388\,800$ và $d = 194\,400$.

$$\#\{d > 194\,399\} = 2.$$

⇒ c) **ĐÚNG**.

d) Ước lớn hơn 55 011.

$$\frac{388\,800}{55\,011} \approx 7,067.$$

Vậy $d > 55\,011 \iff \frac{x}{d} \leq 7$ (vì $\frac{x}{d}$ nguyên và nhỏ hơn 7,067). Các ước của x không vượt quá 7 là

1, 2, 3, 4, 5, 6 (số 7 không phải ước) ⇒ **6** ước.

Mệnh đề nói 5. ⇒ d) **SAI** (đáp số đúng là 6).

Kết quả: a) Đ b) Đ c) Đ d) S (đúng phải là 6)

Ghi chú. Vì sao để chọn ngưỡng lẻ như 194 399 và 55 011? Để buộc thí sinh phải chia rồi làm tròn đúng chiều. Nhớ: $d > M \iff \frac{x}{d} < \frac{x}{M}$ — dấu bất đẳng thức **đảo chiều**, và vì $\frac{x}{d}$ nguyên nên ta lấy phần nguyên của $\frac{x}{M}$ (chú ý trường hợp chia hết).

Câu 2

Cho số nguyên dương $x = 633\,600 = 2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11$. Hỏi trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai?

- a) x có tất cả 162 ước nguyên dương.
- b) x có tất cả 36 ước nguyên dương chia hết cho 440.
- c) Tổng tất cả các ước nguyên dương của x là 2 471 196.
- d) Tổng tất cả các ước nguyên dương chia hết cho 440 của x là 2 162 160.

a) **Số ước.**

$$d(x) = (8+1)(2+1)(2+1)(1+1) = 9 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 162. \quad \textbf{ĐÚNG.}$$

b) **Ước chia hết cho 440.**

$440 = 2^3 \cdot 5 \cdot 11$. Mọi ước d của x chia hết cho 440 đều viết được $d = 440t$ với t là ước của

$$\frac{x}{440} = \frac{633\,600}{440} = 1440 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

$$\#\{d\} = d(1440) = (5+1)(2+1)(1+1) = 6 \cdot 3 \cdot 2 = 36. \quad \textbf{ĐÚNG.}$$

c) **Tổng các ước.**

$$\sigma(x) = \frac{2^9-1}{1} \cdot \frac{3^3-1}{2} \cdot \frac{5^3-1}{4} \cdot \frac{11^2-1}{10} = 511 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 12.$$

Tính dần: $511 \cdot 13 = 6643$; $6643 \cdot 31 = 205\,933$; $205\,933 \cdot 12 = 2\,471\,196$. **ĐÚNG.**

d) **Tổng các ước chia hết cho 440.**

Các ước đó là $440t$ với $t \mid 1440$, nên tổng bằng

$$440 \cdot \sigma(1440) = 440 \cdot \frac{2^6-1}{1} \cdot \frac{3^3-1}{2} \cdot \frac{5^2-1}{4} = 440 \cdot 63 \cdot 13 \cdot 6.$$

$63 \cdot 13 = 819$; $819 \cdot 6 = 4914$; $440 \cdot 4914 = 2\,162\,160$. **ĐÚNG.**

Kết quả: a) Đ b) Đ c) Đ d) Đ

Ghi chú. Mẫu chốt của ý b) và d) là phép đổi biến $d = 440t$ — nó biến một bài toán “đếm/cộng có điều kiện chia hết” thành một bài toán *cơ bản* trên số $\frac{x}{440}$. Điều kiện áp dụng: 440 phải là ước của x ; hãy kiểm tra điều này trước.

Câu 3

Cho số nguyên dương $x = 6\,350\,400 = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2$. Hỏi trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai?

- a) x có tất cả 315 ước nguyên dương.
- b) x có tất cả 90 ước nguyên dương chia hết cho 252.
- c) x có tất cả 157 ước nguyên dương lớn hơn 2522.
- d) Tổng tất cả các ước nguyên dương chia hết cho 252 của x là 25 185 888.

a) $d(x) = 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 = 315$. **ĐÚNG.**

b) $252 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$ và $\frac{x}{252} = 25\,200 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$.

$$d(25\,200) = 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 90. \quad \text{ĐÚNG.}$$

c) Ước lớn hơn 2522 — khai thác tính chính phương.

Nhận xét then chốt:

$$\sqrt{x} = \sqrt{6\,350\,400} = 2520 \quad (\text{vì } 2520^2 = 6\,350\,400),$$

nên x là số chính phương và 315 là số lẻ — đúng như lí thuyết.

Các ước ghép thành cặp $(d; \frac{x}{d})$ đối xứng qua 2520, với 2520 là ước duy nhất tự ghép với chính nó:

$$\#\{d < 2520\} = \#\{d > 2520\} = \frac{315 - 1}{2} = 157.$$

Còn phải kiểm tra khoảng $(2520; 2522]$: số 2521 không chia hết x (thử: $6\,350\,400 : 2521$ không nguyên), và $2522 = 2 \cdot 13 \cdot 97$ có thừa số 13 nên không là ước. Vậy

$$\#\{d > 2522\} = \#\{d > 2520\} = 157. \quad \text{ĐÚNG.}$$

d) Tổng các ước chia hết cho 252:

$$252 \cdot \sigma(25\,200) = 252 \cdot \frac{2^5 - 1}{1} \cdot \frac{3^3 - 1}{2} \cdot \frac{5^3 - 1}{4} \cdot \frac{7^2 - 1}{6} = 252 \cdot 31 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 8.$$

$$31 \cdot 13 = 403; \quad 403 \cdot 31 = 12\,493; \quad 12\,493 \cdot 8 = 99\,944; \quad 252 \cdot 99\,944 = 25\,185\,888. \quad \text{ĐÚNG.}$$

Kết quả: a) Đ b) Đ c) Đ d) Đ

Ghi chú. Dấu hiệu nhận biết số chính phương qua số ước: $d(x)$ lẻ $\iff x$ chính phương $\iff$ mọi số mũ α_i đều chẵn. Ở đây 315 lẻ nên ta *biết trước* x chính phương, và mẹo ghép cặp quanh $\sqrt{x}$ dùng được ngay.

Câu 4

Hãy tìm số ước nguyên dương chung của hai số nguyên dương 302 400 và 570 240.

Bước 1. Phân tích thừa số nguyên tố.

$$302\,400 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7, \quad 570\,240 = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 11.$$

Bước 2. Ước chung = ước của UCLN.

Một số d là ước chung của hai số khi và chỉ khi d là ước của UCLN của chúng. Lấy số mũ nhỏ hơn ở mỗi thừa số nguyên tố chung:

$$\gcd = 2^{\min(5;7)} \cdot 3^{\min(3;4)} \cdot 5^{\min(2;1)} = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5.$$

(Thừa số 7 chỉ có ở số thứ nhất, 11 chỉ có ở số thứ hai nên đều không xuất hiện.)

Bước 3. Đếm ước.

$$d(\gcd) = (5+1)(3+1)(1+1) = 6 \cdot 4 \cdot 2 = 56.$$

Kết quả: 56 ước chung

Ghi chú. Cách hiểu tương đương (đếm bộ số mũ). Ước chung có dạng $2^a 3^b 5^c$ với $0 \leq a \leq 5$, $0 \leq b \leq 3$, $0 \leq c \leq 1$ — mỗi biến độc lập nhau, cho $6 \cdot 4 \cdot 2 = 56$. Đây chính là cách nhìn “đếm bộ số mũ” xuyên suốt cả chương.

Câu 5

Hỏi có tất cả bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số được chọn từ $X = \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ mà tích của các chữ số của nó bằng 7000?

Bước 1. Phân tích số đích.

$$7000 = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 7.$$

Bước 2. Truy ngược bộ chữ số.

Thừa số 7 chỉ có thể đến từ chữ số 7, và chỉ một chữ số 7 (vì $7^2 \nmid 7000$).

Thừa số 5^3 chỉ đến từ chữ số 5, cần đúng ba chữ số 5.

Còn lại tích 2^3 phải chia cho $7 - 1 - 3 = 3$ chữ số nữa, mỗi chữ số thuộc X và là lũy thừa của 2: chỉ có 2 và 4. Ba chữ số có tích 8: bắt buộc $2 \cdot 2 \cdot 2$.

Vậy bộ chữ số duy nhất là

$$\{2; 2; 2; 5; 5; 5; 7\}.$$

Bước 3. Đếm số cách xếp (hoán vị lập).

$$\frac{7!}{3! \cdot 3! \cdot 1!} = \frac{5040}{36} = 140.$$

Kết quả: 140 số tự nhiên

Ghi chú. Quy trình chuẩn cho mọi bài “tích các chữ số”. (1) Phân tích thừa số nguyên tố. (2) Ghim các thừa số nguyên tố “hiếm” (7, 5) vì chúng chỉ ra từ một chữ số duy nhất. (3) Phần lũy thừa của 2 và 3 mới cần chia trường hợp. (4) Với mỗi bộ chữ số, dùng hoán vị lập.

Câu 6

Hỏi có tất cả bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số được chọn từ $X = \{2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ mà tích của các chữ số của nó bằng 7000?

Bước 1. Vỡ ghim 7 và ba chữ số 5.

Như Câu 5: một chữ số 7, ba chữ số 5. Nhưng bây giờ chỉ còn $6 - 1 - 3 = 2$ chữ số cho phần 2^3 .

Bước 2. Hai chữ số có tích bằng 8.

Trong X , các chữ số là lũy thừa của 2 chỉ có 2 và 4. Cần $u \cdot v = 8$ với $u, v \in \{2; 4\}$:

$$u \cdot v = 2 \cdot 4 = 8 \quad (2 \cdot 2 = 4 \text{ và } 4 \cdot 4 = 16 \text{ đều loại}).$$

Vậy bộ chữ số duy nhất là $\{2; 4; 5; 5; 5; 7\}$.

Bước 3. Hoán vị lặp.

$$\frac{6!}{1! \cdot 1! \cdot 3! \cdot 1!} = \frac{720}{6} = 120.$$

Kết quả: 120 số tự nhiên

Ghi chú. So sánh Câu 5 và Câu 6. Cùng tích 7000, chỉ đổi số chữ số từ 7 xuống 6: ba chữ số 2 bị “gộp” thành 2 và 4. Bớt một chữ số đồng nghĩa với việc phải nhân gộp hai chữ số lại — đó là toàn bộ bí quyết của dạng bài này.

Câu 7

Hỏi có tất cả bao nhiêu số tự nhiên có 8 chữ số được chọn từ $X = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ mà tích của các chữ số của nó bằng 12600?

Bước 1. Phân tích.

$$12600 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

Bước 2. Ghim các chữ số bắt buộc.

Một chữ số 7; hai chữ số 5. Còn $8 - 1 - 2 = 5$ chữ số phải có tích $2^3 \cdot 3^2 = 72$, mỗi chữ số thuộc $\{2; 3; 4; 6; 8\}$.

Bước 3. Tìm mọi bộ 5 chữ số có tích 72.

Năm chữ số đều ≥ 2 nên nếu có một chữ số ≥ 4 thì bốn chữ số còn lại đã cho tích $\geq 2^4 = 16$, tổng tích ≥ 64 ; ta rà từng khả năng cho chữ số lớn nhất:

Chữ số lớn nhất	Bốn chữ số còn lại cần tích	Kết luận
8	9 với bốn chữ số ≥ 2	vô lí (≥ 16)
6	12 với bốn chữ số ≥ 2	vô lí (≥ 16)
4	18 với bốn chữ số ≥ 2	vô lí (≥ 16 , và 18 không đạt được)
3	$\{2; 2; 2; 3\}$ cho tích 24; $\{2; 2; 2; 2\}$ cho 16	chỉ $\{2; 2; 2; 3; 3\}$ đạt 72

Vậy chỉ một bộ thỏa: $\{2; 2; 2; 3; 3\}$ (kiểm tra: $2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72$ ✓).

Bước 4. Ghép lại và đếm hoán vị của cả 8 chữ số.

Bộ đầy đủ: $\{2; 2; 2; 3; 3; 5; 5; 7\}$.

$$\frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{40320}{6 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{40320}{24} = 1680.$$

Kết quả: 1680 số tự nhiên

Câu 8

Hỏi có tất cả bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số được chọn từ $X = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ mà tích của các chữ số của nó bằng 12 600?

Bước 1. Ghim và tính phần còn lại.

Một chữ số 7, hai chữ số 5. Còn $6 - 3 = 3$ chữ số có tích $2^3 \cdot 3^2 = 72$, lấy từ $\{2; 3; 4; 6; 8\}$.

Bước 2. Liệt kê mọi bộ 3 chữ số có tích 72.

Bộ	Tích	Số hoán vị của bộ 6 chữ số
$\{3; 4; 6\}$	72	$\frac{6!}{2!} = 360$
$\{2; 6; 6\}$	72	$\frac{6!}{2! \cdot 2!} = 180$
$\{3; 3; 8\}$	72	$\frac{6!}{2! \cdot 2!} = 180$

(Ở cột cuối, $2!$ là do hai chữ số 5; thêm $2!$ nữa nếu bộ có một chữ số lặp đôi.)

Không còn bộ nào khác: $\{2; 4; 9\}$ loại vì $9 \notin X$; $\{8; 9; 1\}$ loại tương tự; $\{2; 36\}$ không phải chữ số.

Bước 3. Cộng lại.

$$360 + 180 + 180 = 720.$$

Kết quả: 720 số tự nhiên

Ghi chú. Đây là câu duy nhất trong chương có *nhiều bộ chữ số*. Càng ít chữ số thì càng nhiều cách “gộp” các thừa số nguyên tố lại, nên phải liệt kê thật cẩn thận. Mẹo liệt kê không sót: sắp bộ theo thứ tự không giảm và cho chữ số nhỏ nhất chạy tăng dần ($2 \rightarrow 3 \rightarrow \dots$).

Câu 9

Hỏi có tất cả bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số mà tích của các chữ số của nó bằng 12 600?

Bước 1. Điểm khác với Câu 8: chữ số lấy từ $\{0; 1; \dots; 9\}$.

Chữ số 0 bị loại ngay (tích sẽ bằng 0); chữ số 1 thì *được phép* và đây chính là điểm mới. Ngoài ra chữ số $9 = 3^2$ cũng khả dụng.

Bước 2. Ghim.

$12\,600 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$: một chữ số 7, hai chữ số 5. Còn 3 chữ số có tích 72, lấy từ $\{1; 2; 3; 4; 6; 8; 9\}$.

Bước 3. Liệt kê mọi bộ 3 chữ số có tích 72.

Bộ	Tích	Số hoán vị của bộ 6 chữ số
{1; 8; 9}	72	$\frac{6!}{2!} = 360$
{2; 4; 9}	72	$\frac{6!}{2!} = 360$
{3; 4; 6}	72	$\frac{6!}{2!} = 360$
{2; 6; 6}	72	$\frac{6!}{2! \cdot 2!} = 180$
{3; 3; 8}	72	$\frac{6!}{2! \cdot 2!} = 180$

Bước 4. Cộng lại.

$$360 \cdot 3 + 180 \cdot 2 = 1080 + 360 = 1440.$$

(Không cần loại trường hợp “chữ số 0 đứng đầu” vì bộ chữ số không chứa 0.)

Kết quả: 1440 số tự nhiên

Ghi chú. So với Câu 8, ta được thêm đúng hai bộ: {1; 8; 9} và {2; 4; 9} — cả hai đều nhờ chữ số 9 và 1 vốn không có trong tập X của Câu 8. Chênh lệch: $1440 - 720 = 720 = 360 \cdot 2$. ✓

Câu 10

Hỏi có tất cả bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số mà tích của các chữ số của nó bằng 35 280?

Bước 1. Phân tích.

$$35\,280 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2.$$

Bước 2. Ghim các thừa số hiếm.

7^2 buộc phải có hai chữ số 7; 5 buộc phải có một chữ số 5.

Còn $6 - 3 = 3$ chữ số có tích $2^4 \cdot 3^2 = 144$, lấy từ {1; 2; 3; 4; 6; 8; 9}.

Bước 3. Liệt kê mọi bộ 3 chữ số có tích 144.

Bộ	Tích	Số hoán vị của bộ 6 chữ số
{2; 8; 9}	144	$\frac{6!}{2!} = 360$
{3; 6; 8}	144	$\frac{6!}{2!} = 360$
{4; 4; 9}	144	$\frac{6!}{2! \cdot 2!} = 180$
{4; 6; 6}	144	$\frac{6!}{2! \cdot 2!} = 180$

($2!$ ở mẫu là do hai chữ số 7; thêm $2!$ nữa nếu trong bộ có chữ số lặp đôi.)

Kiểm tra không sót: bộ phải có tổng số mũ của 2 bằng 4 và của 3 bằng 2; với ba chữ số ≤ 9 thì bốn bộ trên là tất cả ({1; *, *} cần hai chữ số tích $144 > 81$ — vô lý).

Bước 4. Cộng lại.

$$360 + 360 + 180 + 180 = 1080.$$

Kết quả: 1080 số tự nhiên

Ghi chú. Chốt phương pháp cả chương. Mọi bài “tích các chữ số bằng N ” đều theo đúng bốn nhịp: phân tích $N \rightarrow$ ghim các thừa số nguyên tố ≥ 5 (vì chúng chỉ sinh từ một chữ số duy nhất) $\rightarrow$ liệt kê bộ chữ số cho phần $2^a 3^b \rightarrow$ hoán vị lặp cho từng bộ rồi cộng. Nếu tập chữ số cho phép số 0 thì nhớ trừ các trường hợp 0 đứng đầu — ở các bài trên, 0 không bao giờ xuất hiện nên bước đó được bỏ qua.

CHƯƠNG 13

XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN VÀ TƯ DUY GỘP PHÉP THỬ

Ba công thức trụ cột.

- **Xác suất có điều kiện:** $P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, với $P(B) > 0$.
- **Công thức xác suất toàn phần:** nếu $A_1, \dots, A_m$ là một hệ đầy đủ (rời nhau, phủ hết) thì

$$P(B) = \sum_{i=1}^m P(A_i) P(B | A_i).$$

- **Công thức Bayes:** $P(A_k | B) = \frac{P(A_k)P(B | A_k)}{\sum_i P(A_i)P(B | A_i)}$.

Mẹo rút ngắn: với các bài chuyển bi qua hộp, hãy dùng *phép gộp* (Chương 9) để tính mẫu số $P(B)$ trong *một dòng* thay vì cộng cả hệ đầy đủ. Chỉ tử số mới cần tách trường hợp.

Câu 1

Cho hai hộp, ban đầu hộp I đựng 12 viên bi đỏ và 6 viên bi xanh, hộp II chưa đựng gì. Tiến hành lấy ngẫu nhiên 8 viên bi từ hộp I sang hộp II; gọi A là biến cố “hộp II lúc này có 6 bi đỏ”. Sau đó lấy ngẫu nhiên từ hộp II ra 4 viên bi; gọi B là biến cố “lấy được đúng 2 viên bi đỏ”. Hãy tính $P(A | B)$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Bước 1. Tính $P(A)$.

Hộp II nhận 8 viên từ hộp I (12 đỏ, 6 xanh, tổng 18). Biến cố A là “6 đỏ và 2 xanh”:

$$P(A) = \frac{C_{12}^6 \cdot C_6^2}{C_{18}^8} = \frac{924 \cdot 15}{43\,758} = \frac{13\,860}{43\,758} = \frac{70}{221}.$$

Bước 2. Tính $P(B | A)$.

Nếu A xảy ra, hộp II có đúng 6 đỏ và 2 xanh. Lấy 4 viên được đúng 2 đỏ (tức 2 đỏ và 2 xanh):

$$P(B | A) = \frac{C_6^2 \cdot C_2^2}{C_8^4} = \frac{15 \cdot 1}{70} = \frac{3}{14}.$$

Bước 3. Tính $P(B)$ — dùng phép gộp cho nhanh.

Bốn viên bi cuối cùng là một tập con ngẫu nhiên gồm 4 viên của hộp I ban đầu (xem Chương 9), nên *không cần* cộng theo hệ đầy đủ:

$$P(B) = \frac{C_{12}^2 \cdot C_6^2}{C_{18}^4} = \frac{66 \cdot 15}{3060} = \frac{990}{3060} = \frac{11}{34}.$$

Bước 4. Áp dụng Bayes.

$$P(A | B) = \frac{P(A) P(B | A)}{P(B)} = \frac{\frac{70}{221} \cdot \frac{3}{14}}{\frac{11}{34}} = \frac{\frac{15}{221}}{\frac{11}{34}} = \frac{15}{221} \cdot \frac{34}{11} = \frac{30}{143}.$$

Bước 5. Làm tròn.

$$P(A | B) = \frac{30}{143} \approx 0,2098 \approx 0,21.$$

Kết quả: $P(A | B) = \frac{30}{143} \approx 0,21$

Ghi chú. Đây là chỗ phép gộp phát huy sức mạnh nhất. Nếu tính $P(B)$ theo công thức toàn phần, ta phải cộng 7 số hạng ứng với hộp II có 2, 3, ..., 8 bi đỏ: $P(B) = \sum_k \frac{C_{12}^k C_6^{8-k}}{C_{18}^8} \cdot \frac{C_k^2 C_{8-k}^2}{C_8^4}$ — kết quả vẫn đúng bằng $\frac{11}{34}$, nhưng mất gấp mười lần thời gian.

Câu 2

Cho hai hộp, ban đầu hộp I đựng 6 viên bi đỏ và 5 viên bi xanh, hộp II đựng 5 viên bi đỏ và 4 viên bi xanh. Tiến hành lấy ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp I sang hộp II, sau đó lấy ngẫu nhiên từ hộp II ra 2 viên bi. Hãy tính xác suất để hai viên bi lấy được **đều là bi của hộp I ban đầu**, nếu biết hai viên bi này đều có màu đỏ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Bước 1. Đặt tên biến cố.

B : “hai viên lấy ra đều đỏ”. A : “hai viên lấy ra đều là bi gốc hộp I”. Cần $P(A | B)$.

Bước 2. Vì sao phải tách trường hợp?

Số bi đỏ trong hộp II sau khi nhận *phụ thuộc* vào 3 viên chuyển sang. Gọi H_k là biến cố “trong 3 viên chuyển có k viên đỏ” ($k = 0, 1, 2, 3$). Đây là hệ đầy đủ:

$$P(H_k) = \frac{C_6^k \cdot C_5^{3-k}}{C_{11}^3}, \quad C_{11}^3 = 165.$$

k	0	1	2	3
$C_6^k C_5^{3-k}$	10	60	75	20
$P(H_k)$	$\frac{10}{165}$	$\frac{60}{165}$	$\frac{75}{165}$	$\frac{20}{165}$

Bước 3. Sau khi chuyển, hộp II có gì?

Hộp II luôn có $9 + 3 = 12$ viên, trong đó số bi đỏ là $5 + k$.

Bước 4. Tính mẫu số $P(B)$.

$$P(B | H_k) = \frac{C_{5+k}^2}{C_{12}^2} = \frac{C_{5+k}^2}{66}.$$

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{k=0}^3 P(H_k) \cdot \frac{C_{5+k}^2}{66} = \frac{1}{165 \cdot 66} (10 \cdot 10 + 60 \cdot 15 + 75 \cdot 21 + 20 \cdot 28) \\ &= \frac{100 + 900 + 1575 + 560}{10890} = \frac{3135}{10890} = \frac{19}{66}. \end{aligned}$$

Bước 5. Tính tử số $P(A \cap B)$.

Hai viên đều đỏ và đều thuộc nhóm 3 viên mới chuyển sang $\Rightarrow$ phải chọn 2 trong k viên đỏ mới chuyển (cần $k \geq 2$):

$$P(A \cap B) = \sum_{k=2}^3 P(H_k) \cdot \frac{C_k^2}{66} = \frac{75 \cdot 1 + 20 \cdot 3}{10890} = \frac{135}{10890} = \frac{9}{726}.$$

Bước 6. Chia.

$$P(A | B) = \frac{135/10\,890}{3135/10\,890} = \frac{135}{3135} = \frac{9}{209} \approx 0,0431 \approx 0,04.$$

Kết quả: $P(A | B) = \frac{9}{209} \approx 0,04$

Ghi chú. Kiểm tra bằng trực giác: trong 12 viên của hộp II chỉ có 3 viên đến từ hộp I, tức tỉ lệ $1/4$. Xác suất *cả hai* viên rút ra đều thuộc nhóm nhỏ đó vốn đã cỡ $(\frac{1}{4})^2 \approx 0,06$; thêm điều kiện “đều đỏ” làm giảm nhẹ nữa. Con số 0,04 là hợp lí.

Câu 3

Lớp 12A có 28 học sinh nam và 12 học sinh nữ; lớp 12B có 24 học sinh nam và 16 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên hai em học sinh từ lớp 12A và ba em học sinh từ lớp 12B để lập thành một tổ năm em đi dự đại hội chi đoàn. Chọn ngẫu nhiên một trong năm em này bầu làm tổ trưởng. Hãy tính xác suất để học sinh lớp 12A được làm tổ trưởng, nếu biết học sinh nữ được làm tổ trưởng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Bước 1. Rút gọn bài toán — không cần đếm tổ hợp!

Tổ trưởng được chọn ngẫu nhiên trong 5 em, trong đó 2 em đến từ 12A và 3 em từ 12B. Vì mọi em trong lớp đều có cùng khả năng được chọn vào tổ, ta chỉ cần biết:

- Xác suất tổ trưởng là người của 12A: $\frac{2}{5}$; của 12B: $\frac{3}{5}$.
- Nếu tổ trưởng đến từ 12A thì xác suất em đó là nữ bằng tỉ lệ nữ của lớp 12A: $\frac{12}{40} = 0,3$.
- Nếu đến từ 12B: $\frac{16}{40} = 0,4$.

Bước 2. Tính hai tích.

$$P(12A \cap \text{nữ}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{12}{40} = \frac{24}{200} = 0,12;$$

$$P(12B \cap \text{nữ}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{16}{40} = \frac{48}{200} = 0,24.$$

Bước 3. Tính $P(\text{nữ})$ và áp dụng Bayes.

$$P(\text{nữ}) = 0,12 + 0,24 = 0,36;$$

$$P(12A | \text{nữ}) = \frac{0,12}{0,36} = \frac{1}{3} \approx 0,3333 \approx 0,33.$$

Kết quả: $P = \frac{1}{3} \approx 0,33$

Ghi chú. Vì sao được thay “xác suất em đó là nữ” bằng tỉ lệ nữ của lớp? Vì việc chọn 2 em từ 12A là ngẫu nhiên và không nhìn giới tính, nên mỗi em trong tổ, xét riêng lẻ, là một học sinh ngẫu nhiên của lớp mình. Đây chính là tinh thần “gộp phép thử” áp dụng cho bài toán chọn người.

Câu 4

Cho hai lớp: lớp X có 20 học sinh nam và 16 học sinh nữ; lớp Y có 15 học sinh nam và 21 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên 3 em học sinh từ lớp X và 2 em học sinh từ lớp Y để lập thành một tổ năm em đi dự đại hội chi đoàn. Chọn ngẫu nhiên 1 trong 5 em này bầu làm tổ trưởng. Hãy tính xác suất để học sinh lớp X được bầu làm tổ trưởng, nếu đã biết học sinh nam được làm tổ trưởng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Bước 1. Ghi các tỉ lệ.

Mỗi lớp đều có 36 học sinh.

$$P(\text{tổ trưởng thuộc } X) = \frac{3}{5}, \quad P(\text{tổ trưởng thuộc } Y) = \frac{2}{5};$$

$$P(\text{nam} | X) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}, \quad P(\text{nam} | Y) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}.$$

Bước 2. Tính hai tích.

$$P(X \cap \text{nam}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{9} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}; \quad P(Y \cap \text{nam}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{12} = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}.$$

Bước 3. Bayes.

$$P(\text{nam}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}; \quad P(X | \text{nam}) = \frac{1/3}{1/2} = \frac{2}{3} \approx 0,6667 \approx 0,67.$$

Kết quả: $P = \frac{2}{3} \approx 0,67$

Ghi chú. Đối chiếu với Câu 3 để thấy cấu trúc chung:

$$P(\text{lớp}_1 | \text{giới tính } g) = \frac{\frac{n_1}{5} \cdot r_1}{\frac{n_1}{5} r_1 + \frac{n_2}{5} r_2} = \frac{n_1 r_1}{n_1 r_1 + n_2 r_2},$$

với n_i là số em lấy từ lớp i và r_i là tỉ lệ giới tính g của lớp đó. Mẫu số 5 triệt tiêu — nên thực chất chỉ cần **hai phép nhân và một phép chia**.

Câu 5

Cho hai hộp, ban đầu hộp I đựng 6 viên bi đỏ và 5 viên bi xanh, hộp II đựng 5 viên bi đỏ và 4 viên bi xanh. Tiến hành lấy ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp I bỏ sang hộp II. Sau đó lấy ngẫu nhiên từ hộp II ra 3 viên bi rồi cầm vào tay. Gọi P là xác suất để trên tay có **ít nhất một** viên bi là của hộp I ban đầu, nếu biết các viên bi trên tay đều màu đỏ. Hãy xác định giá trị của $1000P$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Bước 1. Hệ đầy đủ theo số bi đỏ được chuyển.

Gọi H_k : “trong 2 viên chuyển từ hộp I có k viên đỏ” ($k = 0, 1, 2$), với $C_{11}^2 = 55$:

k	0	1	2
$C_6^k C_5^{2-k}$	10	30	15
Hộp II sau đó	5Đ 7X	6Đ 6X	7Đ 5X

Hộp II luôn có $9 + 2 = 11$ viên, số đỏ là $5 + k$. Ta có $C_{11}^3 = 165$.

Bước 2. Mẫu số: $B = \text{“cả ba viên đều đỏ”}$.

$$P(B) = \sum_{k=0}^2 \frac{C_6^k C_5^{2-k}}{55} \cdot \frac{C_{5+k}^3}{165} = \frac{10 \cdot 10 + 30 \cdot 20 + 15 \cdot 35}{55 \cdot 165} = \frac{100 + 600 + 525}{9075} = \frac{1225}{9075}.$$

Bước 3. Tử số — dùng phần bù bên trong.

“Ít nhất một viên của hộp I” là phần bù của “cả ba viên đều là bi gốc hộp II”. Bi đỏ gốc hộp II luôn có đúng 5 viên, không phụ thuộc k :

$$P(B \cap \overline{A}) = \sum_{k=0}^2 \frac{C_6^k C_5^{2-k}}{55} \cdot \frac{C_5^3}{165} = \frac{C_5^3}{165} = \frac{10}{165}$$

(vì tổng các $P(H_k)$ bằng 1).

$$P(A \cap B) = P(B) - P(B \cap \overline{A}) = \frac{1225}{9075} - \frac{10}{165} = \frac{1225 - 550}{9075} = \frac{675}{9075}.$$

Bước 4. Chia.

$$P = \frac{675}{1225} = \frac{27}{49} \approx 0,55102.$$

Bước 5. Trả lời.

$$1000P = 1000 \cdot \frac{27}{49} \approx 551,02 \approx 551.$$

Kết quả: $P = \frac{27}{49} \approx 0,551$; $1000P \approx \boxed{551}$

Ghi chú. Mẹo hay của Bước 3: biến cố “cả ba viên đỏ đều là bi gốc hộp II” có xác suất không phụ thuộc k , nên khi cộng theo hệ đầy đủ nó rút gọn thành một số hạng duy nhất. Nhận ra chi tiết này tiết kiệm được ba phép tính.

Bẫy: đừng tính “ít nhất một” bằng cách cộng các trường hợp 1, 2, 3 viên từ hộp I — vừa dài vừa dễ sót. Luôn ưu tiên phần bù.

CHƯƠNG 14

NGUYÊN LÝ BAO HÀM — LOẠI TRỪ

Phát biểu tổng quát.

$$\left| \bigcup_{i=1}^m A_i \right| = \sum_i |A_i| - \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots$$

Dấu luân phiên: cộng các giao lẻ, trừ các giao chẵn.

Khi nào nên dùng? Khi điều kiện của bài toán là “**hoặc**” (hợp của các tập), hoặc khi điều kiện “**không có cái nào**” để chuyển thành phần bù của một hợp. Ngược lại, nếu các giao $A_i \cap A_j$ có cấu trúc đơn giản và rời nhau thì đếm trực tiếp lại gọn hơn — không phải bài nào cũng nên dùng bao hàm - loại trừ.

Câu 1

Hỏi có tất cả bao nhiêu số tự nhiên không lớn hơn 200 chia hết cho 2 hoặc chia hết cho 5?

Bước 1. Đặt tập.

Xét các số tự nhiên từ 1 đến 200. Gọi

$$A = \{n \leq 200 : 2 \mid n\}, \quad B = \{n \leq 200 : 5 \mid n\}.$$

Bước 2. Đếm từng tập.

$$|A| = \left\lfloor \frac{200}{2} \right\rfloor = 100, \quad |B| = \left\lfloor \frac{200}{5} \right\rfloor = 40.$$

Bước 3. Đếm phần giao.

n chia hết cho cả 2 và 5 $\iff n$ chia hết cho BCNN(2; 5) = 10:

$$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{200}{10} \right\rfloor = 20.$$

Bước 4. Áp dụng công thức.

$$|A \cup B| = 100 + 40 - 20 = 120.$$

Kết quả: 120 số

Ghi chú. Vì sao phải trừ $|A \cap B|$? Các số như 10, 20, 30, ... đã được đếm *một lần* trong $|A|$ và *một lần nữa* trong $|B|$. Trừ đi 20 là để mỗi số chỉ còn được đếm đúng một lần.
Lưu ý về “số tự nhiên”. Nếu tính cả $n = 0$ (vì 0 chia hết cho mọi số) thì đáp số là 121. Đề thi phổ thông thường ngầm hiểu là các số nguyên dương từ 1 đến 200.

Câu 2

Hỏi từ tập $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ ta lập được tất cả bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số khác nhau sao cho mỗi số tự nhiên được lập **hoặc** có hai chữ số 1 và 2 đứng cạnh nhau **hoặc** có hai chữ số 3 và 4 đứng cạnh nhau?

Bước 1. Đặt tập và nhận diện chữ “hoặc”.

Mỗi số là một hoán vị của cả 7 chữ số. Gọi

$$A = \{\text{các số có 1, 2 cạnh nhau}\}, \quad B = \{\text{các số có 3, 4 cạnh nhau}\}.$$

Đề hỏi $|A \cup B|$.

Bước 2. Đếm $|A|$ (kỹ thuật bó, Chương 1).

Bó $\{1; 2\}$: $2!$ cách; khối cùng 5 chữ số còn lại là 6 đối tượng: $6!$ cách.

$$|A| = 2! \cdot 6! = 2 \cdot 720 = 1440.$$

Tương tự $|B| = 2! \cdot 6! = 1440$.

Bước 3. Đếm $|A \cap B|$ — bó hai khối cùng lúc.

Bó $\{1; 2\}$: $2!$; bó $\{3; 4\}$: $2!$. Bây giờ có hai khối cùng 3 chữ số lẻ còn lại (5, 6, 7), tổng cộng 5 đối tượng:

$$|A \cap B| = 2! \cdot 2! \cdot 5! = 2 \cdot 2 \cdot 120 = 480.$$

Bước 4. Áp dụng công thức.

$$|A \cup B| = 1440 + 1440 - 480 = 2400.$$

Kết quả: 2400 số tự nhiên

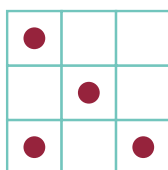
Ghi chú. Kiểm tra bằng phần bù. Tổng số hoán vị là $7! = 5040$. Số các số không có cặp nào cạnh nhau là $5040 - 2400 = 2640$. Con số này chiếm khoảng 52% — hợp lí, vì xác suất một cặp cho trước đứng cạnh nhau trên hàng 7 chỗ là $\frac{2 \cdot 6!}{7!} = \frac{2}{7}$.

Câu 3

Xếp ngẫu nhiên 4 hạt đậu (coi như giống nhau) vào 9 ô vuông nhỏ của một bảng vuông 3×3 , sao cho mỗi ô vuông được xếp tối đa một hạt đậu. Hãy tính xác suất để bất kì hàng nào hoặc cột nào cũng đều có ít nhất một hạt đậu.

Bước 1. Không gian mẫu.

$$n(\Omega) = C_9^4 = 126.$$



một cách xếp hợp lệ:
cả 3 hàng và cả 3 cột
đều có hạt đậu

Bước 2. Nhận xét cấu trúc.

Có 4 hạt phân bố vào 3 hàng, mỗi hàng phải có ít nhất một hạt $\Rightarrow$ phân bố theo hàng bắt buộc là dạng $(2; 1; 1)$. Điều tương tự đúng cho cột.

Bước 3. Đếm trực tiếp theo cấu trúc $(2; 1; 1)$.

- Chọn hàng chứa 2 hạt: 3 cách.
- Chọn 2 cột cho hai hạt của hàng đó: $C_3^2 = 3$ cách. Gọi hai cột này là c_1, c_2 và cột còn lại là c_3 .
- Hai hạt còn lại nằm ở hai hàng còn lại, mỗi hàng đúng một hạt. Để cột c_3 cũng có hạt, ít nhất một trong hai hạt đó phải ở cột c_3 . Mỗi hạt có 3 lựa chọn cột, tổng $3 \times 3 = 9$; trừ đi các trường hợp *không* hạt nào ở c_3 là $2 \times 2 = 4$:

$$9 - 4 = 5 \text{ cách.}$$

$$n(A) = 3 \cdot 3 \cdot 5 = 45.$$

Bước 4. Xác suất.

$$P(A) = \frac{45}{126} = \frac{5}{14} \approx 0,3571 \approx 0,36.$$

Kết quả: $P(A) = \frac{5}{14} \approx 0,36$

Ghi chú. Đây là ví dụ cho lời cảnh báo ở đầu chương: bài này có thể giải bằng bao hàm - loại trừ trên 6 tập ("hàng i rỗng", "cột j rỗng"), nhưng phải xử lý 2^6 số hạng. Đếm trực tiếp theo cấu trúc $(2; 1; 1)$ chỉ mất ba dòng. **Hãy luôn cân nhắc trước khi chọn công cụ.**

Câu 4

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chia 10 đồ vật khác nhau cho 3 người sao cho mỗi người được ít nhất một món quà?

Bước 1. Đặt tập "vi phạm".

Tổng số cách chia tùy ý: 3^{10} . Gọi A_i là tập các cách chia mà người thứ i *không* nhận món nào. Ta cần

$$N = 3^{10} - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|.$$

Bước 2. Tính các giao.

- $|A_i| = 2^{10} = 1024$ (mọi món chia cho 2 người còn lại); có $C_3^1 = 3$ tập.
- $|A_i \cap A_j| = 1^{10} = 1$; có $C_3^2 = 3$ cặp.
- $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$ (không ai nhận thì 10 món đi đâu?).

Bước 3. Áp dụng bao hàm - loại trừ.

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 3 \cdot 1024 - 3 \cdot 1 + 0 = 3072 - 3 = 3069.$$

Bước 4. Lấy phần bù.

$$N = 3^{10} - 3069 = 59\,049 - 3069 = 55\,980.$$

Kết quả: 55 980 cách

Ghi chú. Công thức gọn cho $k = 3$ đã gặp ở Chương 6: $3^n - 3 \cdot 2^n + 3$. Với $n = 10$: $59\,049 - 3072 + 3 = 55\,980$. ✓

Câu 5

Bỏ ngẫu nhiên 8 lá thư vào 8 phong bì (đã có địa chỉ). Hãy tính xác suất để:

1. có ít nhất một lá thư đúng địa chỉ?
2. có đúng hai lá thư đúng địa chỉ?

Bước 0. Số mất thứ tự (số derangement).

Gọi D_n là số hoán vị của n phần tử mà *không* phần tử nào đúng đúng chỗ. Bao hàm - loại trừ theo số lá thư đúng địa chỉ cho

$$D_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} \right), \quad D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}).$$

Chạy truy hồi từ $D_1 = 0, D_2 = 1$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8
D_n	0	1	2	9	44	265	1854	14 833

Không gian mẫu: $n(\Omega) = 8! = 40\,320$.

Ý 1. Có ít nhất một lá đúng địa chỉ.

Lấy phần bù của biến cố “không lá nào đúng”:

$$P_1 = 1 - \frac{D_8}{8!} = 1 - \frac{14\,833}{40\,320} = \frac{25\,487}{40\,320} \approx 0,6321 \approx 0,63.$$

Kết quả: Ý 1: $P_1 = \frac{25\,487}{40\,320} \approx 0,63$

Ý 2. Có đúng hai lá đúng địa chỉ.

Bước 1. Chọn 2 lá sẽ đúng địa chỉ: $C_8^2 = 28$ cách.

Bước 2. Sáu lá còn lại phải *sai hết* (nếu không thì số lá đúng nhiều hơn 2): $D_6 = 265$ cách.

$$n(A) = 28 \cdot 265 = 7420.$$

$$P_2 = \frac{7420}{40\,320} = \frac{53}{288} \approx 0,1840 \approx 0,18.$$

Kết quả: Ý 2: $P_2 = \frac{53}{288} \approx 0,18$

Ghi chú. Chi tiết quyết định của Ý 2: phải dùng D_6 chứ không phải $6!$. Nếu viết $C_8^2 \cdot 6!$ thì ta đã đếm cả các trường hợp có 3, 4, ... lá đúng — đó là “ít nhất hai” chứ không phải “đúng hai”.

Một hằng số đẹp: $\frac{D_n}{n!} \rightarrow \frac{1}{e} \approx 0,3679$ rất nhanh. Với $n = 8$ ta đã có $\frac{14\,833}{40\,320} = 0,36788\dots$ — khớp tới 4 chữ số thập phân, nên $P_1 \approx 1 - \frac{1}{e} \approx 0,632$ có thể nhắm ngay.

Câu 6

Bỏ ngẫu nhiên 7 viên bi có cùng kích thước và khối lượng vào 4 chiếc hộp khác nhau; trong đó có hai viên bi màu đỏ được đánh số 1 và 2, hai viên bi màu xanh được đánh số 1 và 2, một viên bi màu vàng, một viên bi màu tím, một viên bi màu đen. Hãy tính xác suất để không có hai viên bi cùng màu nào ở chung một hộp **và** mỗi hộp có ít nhất một viên bi.

Bước 1. Không gian mẫu.

Bảy viên bi *đôi một phân biệt* (đã đánh số), mỗi viên chọn một trong 4 hộp:

$$n(\Omega) = 4^7 = 16\,384.$$

Bước 2. Đặt tên hai điều kiện.

C : “hai bi đỏ khác hộp và hai bi xanh khác hộp”. M : “mỗi hộp có ít nhất một viên bi”.
Cần đếm $|C \cap M|$.

Bước 3. Đếm $|C|$ và các giao với “hộp rỗng”.

Với 4 hộp, số cách thoả C là: bi đỏ số 1 tự do (4), bi đỏ số 2 khác hộp (3), tương tự hai bi xanh ($4 \cdot 3$), ba bi còn lại tự do (4^3):

$$|C| = (4 \cdot 3) \cdot (4 \cdot 3) \cdot 4^3 = 12 \cdot 12 \cdot 64 = 9216.$$

Nếu *cấm* j hộp (chỉ dùng $4 - j$ hộp), công thức tương tự với cơ số $4 - j$:

$$f(t) = (t(t-1))^2 \cdot t^3 \quad (t = \text{số hộp được phép dùng}).$$

t	$t(t-1)$	t^3	$f(t) = (t(t-1))^2 t^3$
4	12	64	9216
3	6	27	972
2	2	8	32
1	0	1	0

Bước 4. Bao hàm - loại trừ theo số hộp bị bỏ trống.

$$\begin{aligned} |C \cap M| &= \sum_{j=0}^3 (-1)^j C_4^j f(4-j) = f(4) - 4f(3) + 6f(2) - 4f(1) \\ &= 9216 - 4 \cdot 972 + 6 \cdot 32 - 0 = 9216 - 3888 + 192 = 5520. \end{aligned}$$

Bước 5. Xác suất.

$$P = \frac{5520}{16\,384} = \frac{345}{1024} \approx 0,3369 \approx 0,34.$$

$$\text{Kết quả: } P = \frac{345}{1024} \approx 0,34$$

Ghi chú. Vì sao phải đếm $f(t)$ chứ không dùng thẳng $|C|$ rồi trừ? Vì điều kiện C (bi cùng màu khác hộp) và điều kiện “hộp rỗng” **đan xen nhau** — khi cấm bớt hộp thì số cách thoả C cũng thay đổi. Kỹ thuật chuẩn: viết số cách thoả điều kiện chính như một hàm của số hộp khả dụng, rồi mới áp bao hàm - loại trừ lên biến đó.

Kiểm tra biên: $f(1) = 0$ là hợp lí — với một hộp duy nhất thì hai bi đỏ buộc phải chung hộp, vì phạm C .

CHƯƠNG 15

KỸ NĂNG ĐẾM NHÂN TỐ HÌNH HỌC TRONG ĐA GIÁC

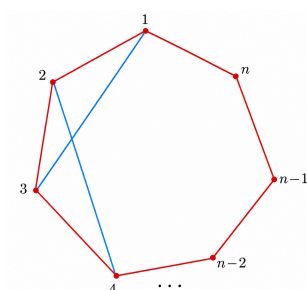
Bốn công cụ nền của cả chuyên đề

Xét đa giác đều (H) có n đỉnh, nội tiếp một đường tròn. Đánh số các đỉnh $0, 1, \dots, n-1$ theo chiều kim đồng hồ. Mỗi bộ k đỉnh chia đường tròn thành k **cung**, đo bằng số bước $g_1 + g_2 + \dots + g_k = n$ với $g_i \geq 1$. Mọi tính chất hình học đều dịch được sang ngôn ngữ các cung:

- **Cạnh của (H)** $\iff$ cung tương ứng bằng 1 bước.
- **Góc nội tiếp** tại một đỉnh = nửa số đo cung bị chắn = $\frac{180^\circ}{n} \times$ (số bước của cung đối diện).
- **Đường kính** $\iff$ hai đỉnh cách nhau $\frac{n}{2}$ bước (chỉ tồn tại khi n chẵn).
- **Đa giác đều k đỉnh** nội tiếp $\iff k \mid n$, khi đó có $\frac{n}{k}$ đa giác như vậy.

Câu 1

Cho một đa giác đều (H) có 20 đỉnh. Hỏi có tất cả bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh là các đỉnh của (H) và có **đúng hai cạnh** là cạnh của (H) ?



PHƯƠNG PHÁP

Dịch “cạnh của đa giác” thành “cung 1 bước”. Tam giác có đúng hai cạnh là cạnh của (H) nghĩa là hai trong ba cung bằng 1; khi đó ba đỉnh phải liên tiếp.

Bước 1. Mô tả cấu hình.

Gọi ba cung là g_1, g_2, g_3 với $g_1 + g_2 + g_3 = 20$. “Đúng hai cạnh là cạnh của (H) ” nghĩa là đúng hai trong ba cung bằng 1, chẳng hạn $g_1 = g_2 = 1$, khi đó $g_3 = 18 \neq 1$ — tự động thoả điều kiện “đúng hai”.

Bước 2. Nhận xét.

Hai cung liên nhau bằng 1 nghĩa là ba đỉnh **liên tiếp** trên đa giác: $A_i A_{i+1} A_{i+2}$.

Bước 3. Đếm.

Mỗi bộ ba đỉnh liên tiếp được xác định bởi đỉnh đầu A_i :

$$N = 20.$$

Kết quả: 20 tam giác

Ghi chú. Tổng quát: với đa giác đều n đỉnh ($n \geq 5$), số tam giác có đúng hai cạnh là cạnh của đa giác luôn bằng n . Điều kiện $n \geq 5$ để cung thứ ba khác 1 (tránh trường hợp tam giác đều khi $n = 3$).

Câu 2

Cho một đa giác đều (H) có 18 đỉnh. Hỏi có tất cả bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh là các đỉnh của (H) và có **đúng một cạnh** là cạnh của (H) ?

PHƯƠNG PHÁP

Chọn cạnh trước, chọn đỉnh thứ ba sau — kèm loại trừ hai đỉnh kề. Đây là kỹ thuật “cố định phần đặc biệt” quen thuộc: cạnh của đa giác chính là phần đặc biệt.

Bước 1. Chọn cạnh của (H) làm một cạnh của tam giác.

Đa giác có 18 cạnh $\Rightarrow$ 18 cách chọn. Gọi cạnh đó là $A_i A_{i+1}$.

Bước 2. Chọn đỉnh thứ ba.

Đỉnh thứ ba phải khác A_i, A_{i+1} và **không** kề với chúng — nếu chọn A_{i-1} hoặc A_{i+2} thì tam giác sẽ có **hai** cạnh là cạnh của (H) , không thoả “đúng một”.

$$18 - 4 = 14 \text{ cách.}$$

Bước 3. Nhân lại.

Mỗi tam giác chỉ chứa **đúng một** cạnh của (H) nên không bị đếm lặp:

$$N = 18 \cdot 14 = 252.$$

Kết quả: 252 tam giác

Ghi chú. Công thức tổng quát: $n(n-4)$. Với $n = 18$: $18 \cdot 14 = 252$. ✓ Con số 4 bị trừ gồm: hai đỉnh của cạnh đã chọn và hai đỉnh kề hai đầu cạnh đó.

Câu 3

Cho một đa giác đều (H) có 15 đỉnh. Hỏi có tất cả bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh là các đỉnh của (H) và **không có cạnh nào** là cạnh của (H) ?

PHƯƠNG PHÁP

Chọn k đỉnh không kề nhau trên vòng tròn (Chương 11, Câu 9):

$$\frac{n}{n-k} C_{n-k}^k.$$

Bước 1. Áp dụng công thức với $n = 15, k = 3$.

$$N = \frac{15}{15-3} C_{12}^3 = \frac{15}{12} \cdot 220 = \frac{5}{4} \cdot 220 = 275.$$

Bước 2. Kiểm tra bằng phần bù.

- Tổng số tam giác: $C_{15}^3 = 455$.
- Tam giác có đúng hai cạnh của (H) : 15 (Câu 1).
- Tam giác có đúng một cạnh của (H) : $15 \cdot (15 - 4) = 15 \cdot 11 = 165$ (Câu 2).

$$455 - 15 - 165 = 275. \checkmark$$

Kết quả: 275 tam giác

Ghi chú. Hai con đường (công thức vòng tròn và phần bù) luôn cho cùng kết quả. Trong phòng thi nên dùng **phần bù** nếu chưa thuộc công thức, vì nó chỉ cần hai phép đếm rất đơn giản của Câu 1 và Câu 2.

Câu 4

Cho một đa giác đều (H) có 36 đỉnh. Hỏi có tất cả bao nhiêu **tam giác đều** có 3 đỉnh là các đỉnh của (H) ?

PHƯƠNG PHÁP

Đa giác đều nội tiếp $\iff$ **điều kiện chia hết.** Ba đỉnh tạo thành tam giác đều khi và chỉ khi chúng chia đường tròn thành ba cung *bằng nhau*.

Bước 1. Điều kiện.

Ba cung bằng nhau, mỗi cung $\frac{36}{3} = 12$ bước — là số nguyên nên tam giác đều tồn tại.

Bước 2. Đếm.

Mỗi tam giác đều được xác định bởi một đỉnh xuất phát, nhưng ba đỉnh của nó cho cùng một tam giác:

$$N = \frac{36}{3} = 12.$$

(Cách hiểu khác: chia 36 đỉnh thành 12 lớp thặng dư theo mô-đun 12; mỗi lớp là một tam giác đều.)

Kết quả: 12 tam giác đều

Câu 5

Cho một đa giác đều (H) có 40 đỉnh. Hỏi có tất cả bao nhiêu **tam giác đều** có 3 đỉnh là các đỉnh của (H) ?

Bước 1. Kiểm tra điều kiện chia hết.

Tam giác đều cần ba cung bằng nhau, mỗi cung $\frac{40}{3}$ bước — **không nguyên** vì $3 \nmid 40$.

Bước 2. Kết luận.

Không tồn tại ba đỉnh nào của (H) chia đường tròn thành ba cung bằng nhau:

$$N = 0.$$

Kết quả: 0 tam giác đều

Ghi chú. Cặp Câu 4 - Câu 5 minh hoạ đúng một nguyên tắc: số tam giác đều nội tiếp đa giác đều n đỉnh bằng $\frac{n}{3}$ nếu $3 \mid n$, và bằng 0 nếu ngược lại. Luôn kiểm tra chia hết trước khi tính.

Câu 6

Cho một đa giác đều (H) có 32 đỉnh. Hỏi có tất cả bao nhiêu **hình vuông** có 4 đỉnh là các đỉnh của (H)?

Bước 1. Điều kiện.

Hình vuông nội tiếp cần bốn cung bằng nhau, mỗi cung $\frac{32}{4} = 8$ bước — nguyên, nên tồn tại.

Bước 2. Đếm.

$$N = \frac{32}{4} = 8.$$

Kết quả: 8 hình vuông

Câu 7

Cho một đa giác đều (H) có 2023 đỉnh. Hỏi có tất cả bao nhiêu **hình vuông** có các đỉnh là đỉnh của đa giác (H)?

Bước 1. Kiểm tra chia hết.

$2023 = 7 \cdot 17^2$ là số lẻ, nên $4 \nmid 2023$.

Bước 2. Kết luận.

Không thể chia 2023 bước thành bốn cung bằng nhau:

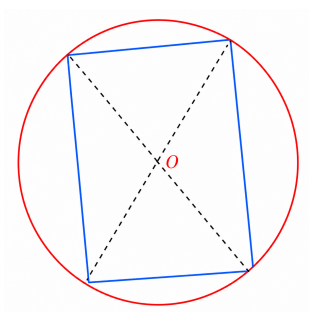
$$N = 0.$$

Kết quả: 0 hình vuông

Ghi chú. Với đa giác có số đỉnh lẻ, không tồn tại đường kính nối hai đỉnh, do đó cũng không có hình vuông, hình chữ nhật hay tam giác vuông nội tiếp — một nhận xét dùng chung cho các Câu 7, 9, 11.

Câu 8

Cho một đa giác đều (H) có 60 đỉnh. Hỏi có tất cả bao nhiêu **hình chữ nhật** có 4 đỉnh là đỉnh của đa giác (H)?



PHƯƠNG PHÁP

Hình chữ nhật nội tiếp $\iff$ hai đường kính. Vì hình chữ nhật có hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm, mà tâm đường tròn là điểm đó, nên hai đường chéo đều là đường kính.

Bước 1. Đếm số đường kính.

$n = 60$ chẵn, mỗi đường kính nối hai đỉnh đối tâm:

$$\frac{60}{2} = 30 \text{ đường kính.}$$

Bước 2. Mỗi cặp đường kính cho một hình chữ nhật.

$$N = C_{30}^2 = \frac{30 \cdot 29}{2} = 435.$$

Kết quả: 435 hình chữ nhật

Ghi chú. Lưu ý: trong 435 hình chữ nhật này có cả các *hình vuông* (khi hai đường kính vuông góc). Số hình vuông là $\frac{60}{4} = 15$; vậy số hình chữ nhật *không phải* hình vuông là $435 - 15 = 420$. Nếu đề hỏi “hình chữ nhật không phải hình vuông” thì phải trừ đi.

Câu 9

Cho một đa giác đều (H) có 25 đỉnh. Hỏi có tất cả bao nhiêu **hình chữ nhật** có 4 đỉnh là các đỉnh của (H)?

Bước 1. Kiểm tra sự tồn tại của đường kính.

$n = 25$ **lẻ** nên không có hai đỉnh nào đối tâm — không tồn tại đường kính nối hai đỉnh của (H).

Bước 2. Kết luận.

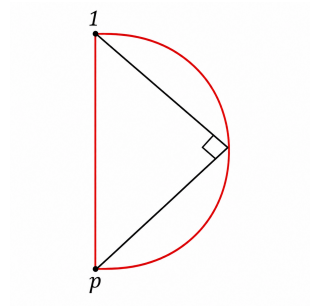
Hình chữ nhật nội tiếp bắt buộc phải có hai đường chéo là đường kính, nên

$$N = 0.$$

Kết quả: 0 hình chữ nhật

Câu 10

Cho một đa giác đều (H) có 24 đỉnh. Hỏi có tất cả bao nhiêu **tam giác vuông** có 3 đỉnh là đỉnh của (H) ?



PHƯƠNG PHÁP

Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn. Tam giác nội tiếp là tam giác vuông $\iff$ một cạnh của nó là đường kính. Ta chọn đường kính trước, rồi chọn đỉnh còn lại.

Bước 1. Chọn cạnh huyền.

$n = 24$ chẵn nên có $\frac{24}{2} = 12$ đường kính.

Bước 2. Chọn đỉnh góc vuông.

Đỉnh thứ ba là một trong $24 - 2 = 22$ đỉnh còn lại.

Bước 3. Nhân lại.

Mỗi tam giác vuông có *đúng một* cạnh huyền nên không bị đếm lặp:

$$N = 12 \cdot 22 = 264.$$

Kết quả: 264 tam giác vuông

Ghi chú. Công thức tổng quát: với n chẵn, số tam giác vuông là $\frac{n}{2}(n-2)$. Với n lẻ thì bằng 0.

Câu 11

Cho một đa giác đều (H) có 31 đỉnh. Hỏi có tất cả bao nhiêu **tam giác vuông** có 3 đỉnh là các đỉnh của (H) ?

Bước 1. $n = 31$ lẻ $\Rightarrow$ không có đường kính nối hai đỉnh.

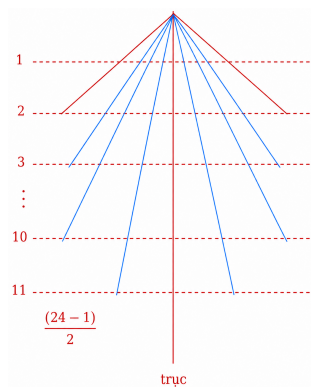
Bước 2. Tam giác vuông nội tiếp bắt buộc có cạnh huyền là đường kính, nên

$$N = 0.$$

Kết quả: 0 tam giác vuông

Câu 12

Cho một đa giác đều (H) có 21 đỉnh. Hỏi có tất cả bao nhiêu **tam giác cân** có 3 đỉnh là các đỉnh của đa giác (H)?



PHƯƠNG PHÁP

Đếm theo đỉnh cân (đỉnh giữa hai cạnh bằng nhau). Tam giác cân $\iff$ có hai cung bằng nhau. Ta cố định đỉnh cân rồi đếm số cách chọn hai đỉnh còn lại đối xứng qua nó — sau đó trừ phần đếm lặp của tam giác đều.

Bước 1. Cố định đỉnh cân.

Chọn đỉnh A làm đỉnh cân: 21 cách. Hai đỉnh còn lại phải đối xứng nhau qua đường thẳng nối A với tâm, tức cách A cùng một số bước t về hai phía.

Bước 2. Đếm giá trị của t .

Cần $1 \leq t$ và hai đỉnh đó phân biệt, đồng thời không trùng A . Vì $n = 21$ lẻ, số bước tối đa về mỗi phía là $\left\lfloor \frac{21-1}{2} \right\rfloor = 10$:

$$t \in \{1; 2; \dots; 10\} \Rightarrow 10 \text{ tam giác cân đỉnh } A.$$

Bước 3. Nhân và trừ phần đếm lặp.

$$21 \cdot 10 = 210.$$

Tam giác *đều* bị đếm ba lần (mỗi đỉnh đều là đỉnh cân). Vì $3 \mid 21$ nên có $\frac{21}{3} = 7$ tam giác đều, mỗi cái thừa 2 lần:

$$N = 210 - 2 \cdot 7 = 210 - 14 = 196.$$

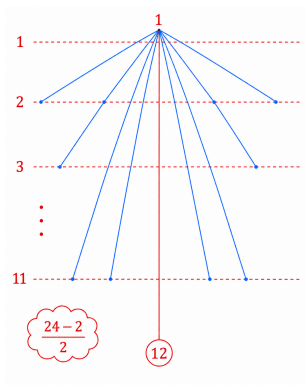
Kết quả: 196 tam giác cân

Ghi chú. Công thức cho n lẻ: $N = n \cdot \frac{n-1}{2} - 2 \cdot \frac{n}{3}$ (số hạng sau chỉ có khi $3 \mid n$). Với $n = 21$: $21 \cdot 10 - 14 = 196$. ✓

Vì sao phải trừ $2 \cdot 7$ chứ không phải 7? Vì mỗi tam giác đều đã được đếm 3 lần trong 210, mà ta chỉ muốn tính nó 1 lần — phải bỏ đi $3 - 1 = 2$ lần thừa.

Câu 13

Cho một đa giác đều (H) có 24 đỉnh. Hỏi có tất cả bao nhiêu **tam giác cân** có 3 đỉnh là các đỉnh của (H)?



PHƯƠNG PHÁP

Vẫn là kỹ thuật “đếm theo đỉnh cân” của Câu 12, nhưng n **chẵn** nên phải loại thêm một giá trị của t : khi $t = \frac{n}{2}$ hai đỉnh đối xứng sẽ *trùng nhau*.

Bước 1. Cố định đỉnh cân: 24 cách.

Bước 2. Đếm giá trị của t .

Hai đỉnh cách A đúng t bước về hai phía. Cần chúng phân biệt, tức $t \neq \frac{24}{2} = 12$; và $t \geq 1$, $t \leq 11$:

$$t \in \{1; 2; \dots; 11\} \Rightarrow 11 \text{ tam giác cân đỉnh } A.$$

Bước 3. Nhân và trừ phần đếm lặp.

$$24 \cdot 11 = 264.$$

Vì $3 \mid 24$ nên có $\frac{24}{3} = 8$ tam giác đều, mỗi cái bị đếm thừa 2 lần:

$$N = 264 - 2 \cdot 8 = 264 - 16 = 248.$$

Kết quả: 248 tam giác cân

Ghi chú. So sánh Câu 12 và Câu 13. Với n lẻ, t chạy tới $\frac{n-1}{2}$; với n chẵn, t chạy tới $\frac{n}{2} - 1$ (bỏ $t = \frac{n}{2}$ vì khi đó hai “đỉnh” trùng nhau thành một đường kính, không tạo được tam giác). Đây là khác biệt duy nhất giữa hai trường hợp.

Câu 14

Cho một đa giác đều (H) có 25 đỉnh. Hỏi có tất cả bao nhiêu **tam giác cân** có 3 đỉnh là các đỉnh của (H)?

Bước 1. Cố định đỉnh cân: 25 cách.

Bước 2. Đếm t .

$$n = 25 \text{ lẻ nên } t \in \left\{1; \dots; \frac{25-1}{2}\right\} = \{1; \dots; 12\}:$$

$$25 \cdot 12 = 300.$$

Bước 3. Trừ phần đếm lặp của tam giác đều.

$3 \nmid 25$ nên **không có** tam giác đều nào — không phải trừ gì:

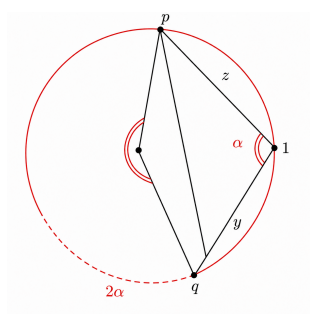
$$N = 300.$$

Kết quả: 300 tam giác cân

Ghi chú. Đây là lí do phải luôn kiểm tra $3 \mid n$. Với $n = 21$ và $n = 24$ ta phải trừ, còn với $n = 25$ thì không. Bỏ qua bước kiểm tra này là nguồn sai phổ biến nhất của dạng bài tam giác cân.

Câu 15

Cho một đa giác đều (H) có 36 đỉnh. Hỏi có tất cả bao nhiêu tam giác có các đỉnh là đỉnh của đa giác (H) và có **một góc lớn hơn hoặc bằng** 120° ?



PHƯƠNG PHÁP

Chuyển điều kiện góc thành điều kiện về số bước cung, rồi đếm theo cung lớn. Vì tổng ba góc bằng 180° , nhiều nhất một góc có thể $\geq 120^\circ$ — các trường hợp rời nhau nên đếm trực tiếp được.

Bước 1. Dịch điều kiện.

Mỗi bước cung ứng với $\frac{360^\circ}{36} = 10^\circ$. Góc nội tiếp bằng nửa cung bị chắn, nên

$$\text{góc} \geq 120^\circ \iff \text{cung bị chắn} \geq 240^\circ \iff \text{cung đối} \geq 24 \text{ bước}.$$

Bước 2. Chỉ có tối đa một góc thỏa.

Nếu hai góc cùng $\geq 120^\circ$ thì tổng $\geq 240^\circ > 180^\circ$ — vô lí. Vậy các trường hợp rời nhau.

Bước 3. Đếm.

Gọi ba cung là g_1, g_2, g_3 với $g_1 + g_2 + g_3 = 36$, $g_i \geq 1$. Ta đếm các bộ ba đỉnh có một cung $g \geq 24$. Cố định cung lớn: chọn đỉnh nơi cung lớn kết thúc (36 cách); hai cung còn lại $(g_2; g_3)$ thỏa $g_2, g_3 \geq 1$ và $g_2 + g_3 = 36 - g_1 \leq 12$:

$$\#\{(g_2; g_3)\} = \sum_{s=2}^{12} (s-1) = \frac{11 \cdot 12}{2} = 66.$$

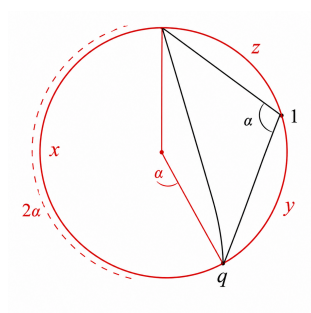
$$N = 36 \cdot 66 = 2376.$$

Kết quả: 2376 tam giác

Ghi chú. Kiểm tra tính duy nhất của cung lớn: nếu hai cung cùng ≥ 24 thì tổng $\geq 48 > 36$ — vô lí. Nhờ đó mỗi tam giác được đếm đúng một lần và không cần bao hàm - loại trừ.

Câu 16

Cho một đa giác đều (H) có 36 đỉnh. Hỏi có tất cả bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh là các đỉnh của đa giác (H) và là **tam giác tù**?



PHƯƠNG PHÁP

Cùng kĩ thuật với Câu 15, chỉ đổi ngưỡng: góc tù $> 90^\circ$ tương ứng cung đối > 18 bước.

Bước 1. Dịch điều kiện.

$$\text{góc} > 90^\circ \iff \text{cung đối} > 180^\circ \iff \text{cung đối} \geq 19 \text{ bước.}$$

Bước 2. Cung lớn là duy nhất.

Nếu hai cung cùng ≥ 19 thì tổng $\geq 38 > 36$ — vô lí.

Bước 3. Đếm.

Cố định đỉnh nơi cung lớn kết thúc (36 cách); hai cung còn lại có tổng $36 - g_1 \leq 17$:

$$\#\{(g_2; g_3)\} = \sum_{s=2}^{17} (s-1) = \frac{16 \cdot 17}{2} = 136.$$

$$N = 36 \cdot 136 = 4896.$$

Kết quả: 4896 tam giác tù

Câu 17

Cho một đa giác đều (H) có 36 đỉnh. Hỏi có tất cả bao nhiêu tam giác có 3 đỉnh là đỉnh của đa giác (H) và là **tam giác nhọn**?

PHƯƠNG PHÁP

Phần bù ba loại. Mọi tam giác nội tiếp đều thuộc đúng một trong ba loại: nhọn, vuông, tù. Ta đã có số tam giác tù (Câu 16) và tính được số tam giác vuông (Câu 10), nên lấy tổng trừ đi.

Bước 1. Tổng số tam giác.

$$C_{36}^3 = \frac{36 \cdot 35 \cdot 34}{6} = 7140.$$

Bước 2. Số tam giác vuông.

$n = 36$ chẵn, có 18 đường kính; mỗi đường kính ghép với 34 đỉnh còn lại:

$$18 \cdot 34 = 612.$$

Bước 3. Số tam giác tù (Câu 16).

$$4896.$$

Bước 4. Suy ra số tam giác nhọn.

$$N = 7140 - 612 - 4896 = 1632.$$

Kết quả: 1632 tam giác nhọn

Ghi chú. Phép kiểm tra khép kín cho cả ba câu 15-17:

$$\underbrace{1632}_{\text{nhọn}} + \underbrace{612}_{\text{vuông}} + \underbrace{4896}_{\text{tù}} = 7140 = C_{36}^3. \checkmark$$

Đây là cách rà lỗi tốt nhất: nếu ba con số không cộng đúng bằng C_n^3 thì chắc chắn có chỗ sai.

Nhận xét thú vị: tam giác tù chiếm tới 68,6% — chọn ngẫu nhiên ba đỉnh của một đa giác đều thì khả năng cao nhất là được một tam giác tù.

CHƯƠNG 16

KỸ NĂNG CÂN BẰNG PHẦN TỬ KHOÁ

A. Lý thuyết nâng cao Bài toán mở đầu và khái niệm phần tử khoá

Bài toán mở đầu. Hỏi từ tập $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ ta lập được tất cả bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số, sao cho số tự nhiên lập được chia hết cho 3?

Lời giải.

Ở bài toán này các chữ số được phép lặp lại nên không dùng đếm thông thường được; mặt khác số chữ số không quá nhiều nên cũng không tiện dùng kỹ năng phân tập đồng dư. Cách tối ưu nhất về tốc độ và độ chính xác là như sau.

Gọi số tự nhiên cần lập là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$, khi đó

$$\begin{cases} a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 \in X, \\ (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7) \vdots 3. \end{cases}$$

Ta xét các trường hợp của tổng sáu chữ số đầu tiên $S_6 = a_1 + a_2 + \dots + a_6$:

- **Trường hợp 1:** $S_6 = 3k$ — để tổng bảy chữ số chia hết cho 3, chữ số cuối phải thuộc $\{3; 6\}$, tức a_7 có 2 cách chọn.
- **Trường hợp 2:** $S_6 = 3k + 1$ — khi đó $a_7 \in \{2; 5\}$, cũng có 2 cách chọn.
- **Trường hợp 3:** $S_6 = 3k + 2$ — khi đó $a_7 \in \{1; 4\}$, vẫn có 2 cách chọn.

Như vậy dù sáu chữ số đầu rơi vào trường hợp nào, chữ số cuối luôn có đúng 2 cách chọn. Nói cách khác, số cách chọn chữ số cuối **không phụ thuộc** vào việc chọn sáu chữ số đầu; ngược lại, việc chọn chữ số cuối cũng không ảnh hưởng tới sáu chữ số đầu. Do đó ta được phép nhân:

- Số cách chọn sáu chữ số đầu: 6^6 cách.
- Số cách chọn chữ số cuối: 2 cách.

$$N = 6^6 \cdot 2 = 46\,656 \cdot 2 = 93\,312 \text{ số tự nhiên.}$$

Định nghĩa phần tử khoá

Trong bài toán trên, chữ số cuối được gọi là **phần tử khoá**. Nó bảo đảm hai điều:

- Sau khi đã chọn các phần tử trước đó một cách thoả mái thì số cách chọn của nó **luôn cố định**, không thay đổi giữa các trường hợp của những phần tử trước.
- Việc phần tử khoá nhận giá trị nào cũng **không ảnh hưởng** tới số cách chọn các phần tử trước đó.

Khi làm đi làm lại nhiều bài dạng này, ta tiếp thu được một kỹ năng — gọi là **kỹ năng cân bằng phần tử khoá**.

B. Bài tập rèn luyện cô đọng Câu 1 đến Câu 5

Câu 1

Biết rằng có tất cả T số tự nhiên có 5 chữ số chia hết cho 3 và đồng thời không chứa chữ số 0. Ba chữ số tận cùng của T là bao nhiêu?

PHƯƠNG PHÁP

Chọn chữ số tận cùng làm phần tử khoá. Ở đây mọi chữ số có vai trò như nhau nên chọn a_5 làm khoá là tiện nhất.

Bước 1. Điều kiện.

Gọi số cần lập là $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$:

$$\begin{cases} a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in X = \{1; 2; \dots; 9\}, \\ (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) \vdots 3. \end{cases}$$

Bước 2. Cân bằng phần tử khoá a_5 .

- Nếu $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 3k$ thì $a_5 \in \{3; 6; 9\}$ — 3 cách chọn.
- Nếu $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 3k + 1$ thì $a_5 \in \{2; 5; 8\}$ — 3 cách chọn.
- Nếu $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 3k + 2$ thì $a_5 \in \{1; 4; 7\}$ — 3 cách chọn.

Tổng bốn chữ số đầu chỉ có ba khả năng trên, và ở khả năng nào a_5 cũng có đúng 3 cách chọn.

Bước 3. Nhân lại.

Bốn chữ số đầu chọn tùy ý: 9^4 cách; phần tử khoá: 3 cách.

$$T = 9^4 \cdot 3 = 6561 \cdot 3 = 19683.$$

Kết quả: $T = 19683$; ba chữ số tận cùng là 683

Câu 2

Hỏi từ tập $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ ta lập được tất cả bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số chia hết cho 9?

Bước 1. Điều kiện.

$$\begin{cases} a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in X, & a_1 \neq 0, \\ (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) \vdots 9. \end{cases}$$

Bước 2. Cân bằng phần tử khoá a_5 .

Tập X chứa đúng một đại diện cho mỗi số dư mô-đun 9 (các số $0, 1, \dots, 8$), nên với mọi số dư của tổng bốn chữ số đầu, chữ số a_5 được xác định *duy nhất*:

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \equiv$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$a_5 =$	0	8	7	6	5	4	3	2	1

Dù ở trường hợp nào, a_5 cũng có đúng 1 cách chọn.

Bước 3. Nhân lại.

a_1 khác 0 nên có 8 cách; a_2, a_3, a_4 mỗi chữ số 9 cách; a_5 có 1 cách:

$$N = 8 \cdot 9^3 \cdot 1 = 8 \cdot 729 = 5832.$$

Kết quả: 5832 số tự nhiên

Ghi chú. Chú ý cách hỏi. Đề yêu cầu *số lượng* các số tự nhiên, nên đáp số là 5832. Nếu đề hỏi ba chữ số tận cùng thì mới trả lời 832 — hãy đọc kỹ yêu cầu trước khi ghi kết quả.

Câu 3

Biết rằng từ tập $X = \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ ta lập được tất cả T số tự nhiên có 6 chữ số chia hết cho 6. Ba chữ số tận cùng của T là bao nhiêu?

PHƯƠNG PHÁP

Tách $6 = 2 \cdot 3$; chữ số tận cùng gán cả hai điều kiện. Vì a_6 vừa phải chẵn vừa phải cân bằng số dư mô-đun 3, nó là ứng viên tự nhiên cho vai trò phần tử khoá.

Bước 1. Điều kiện.

$$\begin{cases} a_1, \dots, a_6 \in X = \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}, \\ a_6 \in \{4; 6; 8\} \quad (\text{chia hết cho } 2), \\ (a_1 + a_2 + \dots + a_6) \div 3. \end{cases}$$

Bước 2. Cân bằng phần tử khoá a_6 .

Ba chữ số chẵn khả dụng có số dư mô-đun 3 đôi một khác nhau: $6 \equiv 0, 4 \equiv 1, 8 \equiv 2$. Do đó:

- Nếu $a_1 + \dots + a_5 = 3k$ thì $a_6 = 6$ — 1 cách.
- Nếu $a_1 + \dots + a_5 = 3k + 1$ thì $a_6 = 8$ — 1 cách.
- Nếu $a_1 + \dots + a_5 = 3k + 2$ thì $a_6 = 4$ — 1 cách.

Dù ở trường hợp nào, a_6 cũng có đúng 1 cách chọn.

Bước 3. Nhân lại.

$$T = 7^5 \cdot 1 = 16\,807.$$

Kết quả: $T = 16\,807$; ba chữ số tận cùng là 807

Câu 4

Hỏi từ tập $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ ta lập được tất cả bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số chia hết cho 18?

PHƯƠNG PHÁP

Khi phần tử khoá phải gán hai điều kiện xung khắc, hãy chuyển vai trò khoá sang phần tử khác. Ở đây a_5 vừa phải chẵn vừa phải cân bằng mô-đun 9; nếu ép nó gán cả hai thì số cách chọn không còn cố định. Giải pháp: cho a_5 gán điều kiện *chẵn*, còn một chữ số ở giữa gán điều kiện mô-đun 9.

Bước 1. Tách điều kiện.

$18 = 2 \cdot 9$ với $\gcd(2; 9) = 1$:

$$\begin{cases} a_5 \in \{0; 2; 4; 6; 8\} \Rightarrow 5 \text{ cách chọn,} \\ (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) \vdots 9. \end{cases}$$

Bước 2. Chọn a_4 làm phần tử khoá cho điều kiện mô-đun 9.

Tập X chứa đủ chín số dư mô-đun 9, nên khi a_1, a_2, a_3, a_5 đã cố định, chữ số a_4 được xác định *duy nhất* để tổng chia hết cho 9 — luôn có đúng 1 cách chọn, bất kể các chữ số kia nhận giá trị gì.

Bước 3. Nhân lại.

$a_1 \neq 0$: 8 cách; a_2, a_3 : mỗi chữ số 9 cách; a_5 chẵn: 5 cách; a_4 (khóa): 1 cách.

$$N = 5 \cdot (8 \cdot 9 \cdot 9) \cdot 1 = 5 \cdot 648 = 3240.$$

Kết quả: 3240 số tự nhiên

Ghi chú. Điểm mấu chốt là chọn đúng phần tử làm khoá. Nếu cố dùng a_5 làm khoá cho cả điều kiện chẵn lẫn mô-đun 9 thì số cách chọn a_5 sẽ nhảy giữa 0 và 1 tùy số dư — vi phạm tính “cân bằng”. Hãy phân công: một phần tử gánh điều kiện dễ (chẵn/lẻ, chia hết cho 5), một phần tử khác gánh điều kiện số dư.

Câu 5

Hỏi từ tập $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ ta lập được tất cả bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số chia hết cho 45?

Bước 1. Tách điều kiện.

$45 = 5 \cdot 9$ với $\gcd(5; 9) = 1$:

$$\begin{cases} a_5 \in \{0; 5\} \Rightarrow 2 \text{ cách chọn,} \\ (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) \vdots 9. \end{cases}$$

Bước 2. Phần tử khoá.

Như Câu 4, ta để a_4 làm khoá cho điều kiện mô-đun 9: luôn có đúng 1 cách chọn.

Bước 3. Nhân lại.

$$N = 2 \cdot (8 \cdot 9 \cdot 9) \cdot 1 = 2 \cdot 648 = 1296.$$

Kết quả: 1296 số tự nhiên

Ghi chú. So sánh Câu 4 và Câu 5: cấu trúc hoàn toàn giống nhau, chỉ khác số cách chọn chữ số tận cùng (5 chữ số chẵn so với 2 chữ số chia hết cho 5). Tỷ số đáp số đúng bằng $\frac{3240}{1296} = \frac{5}{2}$. ✓

C. Bài tập rèn luyện mở rộng Câu 6 đến Câu 9

Câu 6

Hỏi từ tập $X = \{1; 2; 3; 5; 6; 7\}$ ta lập được tất cả bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số chia hết cho 3?

Bước 1. Phân lớp X theo mô-đun 3.

Số dư	Chữ số	Số lượng
0	3; 6	2
1	1; 7	2
2	2; 5	2

Ba lớp có **cùng** số phần tử — đây chính là điều kiện lí tưởng để cân bằng phần tử khoá.

Bước 2. Cân bằng a_5 .

- Nếu $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 3k$ thì $a_5 \in \{3; 6\}$ — 2 cách.
- Nếu $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 3k + 1$ thì $a_5 \in \{2; 5\}$ — 2 cách.
- Nếu $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 3k + 2$ thì $a_5 \in \{1; 7\}$ — 2 cách.

Bước 3. Nhân lại.

Tập X không chứa chữ số 0 nên bốn chữ số đầu chọn tự do:

$$N = 6^4 \cdot 2 = 1296 \cdot 2 = 2592.$$

Kết quả: 2592 số tự nhiên

Câu 7

Biết rằng từ tập $X = \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ ta lập được tất cả T số tự nhiên có 6 chữ số chia hết cho 6. Ba chữ số tận cùng của T là bao nhiêu?

Nhận xét. Bài này trùng hoàn toàn với Câu 3; lời giải và đáp số như nhau, được nhắc lại ở phần mở rộng để rèn phản xạ nhận dạng.

Tóm tắt.

$a_6 \in \{4; 6; 8\}$ với ba số dư mô-đun 3 khác nhau, nên a_6 luôn có đúng 1 cách chọn sau khi năm chữ số đầu đã cố định:

$$T = 7^5 \cdot 1 = 16\,807.$$

Kết quả: $T = 16\,807$; ba chữ số tận cùng là 807

Câu 8

Biết rằng từ tập $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ ta lập được T số tự nhiên có 6 chữ số chia hết cho 18. Hãy xác định ba chữ số tận cùng của T ?

PHƯƠNG PHÁP

Cùng chiến lược với Câu 4: chữ số tận cùng gánh điều kiện *chẵn*, một chữ số ở giữa gánh điều kiện mô-đun 9.

Bước 1. Tách điều kiện.

$$18 = 2 \cdot 9;$$

$$\begin{cases} a_6 \in \{2; 4; 6; 8\} \Rightarrow 4 \text{ cách chọn,} \\ (a_1 + a_2 + \dots + a_6) \div 9. \end{cases}$$

Bước 2. Phân tử khoá cho mô-đun 9.

Tập $X = \{1; \dots; 9\}$ chứa đúng một đại diện cho mỗi số dư mô-đun 9 (lưu ý $9 \equiv 0$). Do đó khi các chữ số khác đã cố định, chữ số a_5 được xác định duy nhất — luôn 1 cách chọn.

Bước 3. Nhân lại.

a_1, a_2, a_3, a_4 tự do (9 cách mỗi chữ số, vì X không chứa 0); a_6 chẵn: 4 cách; a_5 (khóa): 1 cách.

$$T = 9^4 \cdot 4 \cdot 1 = 6561 \cdot 4 = 26\,244.$$

Kết quả: $T = 26\,244$; **ba chữ số tận cùng là** 244

Câu 9

Hỏi từ tập $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ ta lập được tất cả bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số chia hết cho 15?

Bước 1. Tách điều kiện.

$$15 = 3 \cdot 5 \text{ với } \gcd(3; 5) = 1:$$

$$\begin{cases} a_5 \in \{0; 5\} \Rightarrow 2 \text{ cách chọn,} \\ (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) \div 3. \end{cases}$$

Bước 2. Phân lớp X theo mô-đun 3.

Số dư	Chữ số	Số lượng
0	0; 3; 6	3
1	1; 4; 7	3
2	2; 5; 8	3

Ba lớp cùng cỡ 3 — rất thuận lợi.

Bước 3. Chọn a_4 làm phần tử khoá cho điều kiện mô-đun 3.

Với mọi số dư của $a_1 + a_2 + a_3 + a_5$, chữ số a_4 luôn có đúng 3 cách chọn (một lớp thặng dư tương ứng).

Bước 4. Nhân lại.

$a_1 \neq 0$: 8 cách; a_2, a_3 : 9 cách mỗi chữ số; a_5 : 2 cách; a_4 (khóa): 3 cách.

$$N = 8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 3 = 648 \cdot 6 = 3888.$$

Kết quả: 3888 số tự nhiên

Ghi chú. Tổng kết chiến lược của cả chuyên đề. Khi bài toán yêu cầu chia hết cho $m = m_1 m_2$ với $\gcd(m_1; m_2) = 1$:

1. Cho chữ số tận cùng gán điều kiện dễ (chia hết cho 2, 5, 10).
2. Cho một chữ số ở giữa làm phần tử khoá cho điều kiện tổng chia hết.

3. Kiểm tra rằng số cách chọn phần tử khoá là **hằng số** qua mọi trường hợp — đó chính là điều kiện để được phép nhân.

D. Bảng đáp án **Chín bài rèn luyện**

Câu	Kết quả	Câu	Kết quả	Câu	Kết quả
1	683	4	3240	7	807
2	5832	5	1296	8	244
3	807	6	2592	9	3888

Ghi chú về bảng đáp án. Các câu 1, 3, 7, 8 hỏi *ba chữ số tận cùng* nên bảng ghi 683, 807, 807, 244 (ứng với $T = 19\,683; 16\,807; 16\,807; 26\,244$). Các câu còn lại hỏi trực tiếp số lượng.

CHƯƠNG 17

KỸ NĂNG PHÂN TẬP TRONG BÀI TOÁN ĐẾM

A. Lý thuyết nâng cao Bài toán mở đầu và hai phần mở rộng

Bài toán mở đầu. Hỏi từ tập $X = [1; 50]$ có bao nhiêu cách chọn được bộ ba số tự nhiên có tổng chia hết cho 3?

Lời giải.

Gọi bộ số được chọn là a, b, c , khi đó

$$\begin{cases} a, b, c \in X, \\ (a + b + c) \div 3. \end{cases}$$

Ta suy ra ngay: để $(a + b + c)$ chia hết cho 3 thì hoặc cả ba số cùng chia hết cho 3, hoặc cả ba cùng chia 3 dư 1, hoặc cả ba cùng chia 3 dư 2, hoặc mỗi số thuộc một lớp số dư khác nhau.

Muốn đếm được các số trong X theo từng số dư, ta phải **chia X thành các tập con theo số dư** — đây chính là *tư duy phân tập*; vì mỗi tập gồm các số cùng số dư khi chia cho 3 nên gọi là **phân tập đồng dư**:

$$X_0 = \{3k \mid 1 \leq 3k \leq 50\} = \{3; 6; 9; \dots; 48\} \Rightarrow n(X_0) = 16,$$

$$X_1 = \{3k + 1 \mid 1 \leq 3k + 1 \leq 50\} = \{1; 4; 7; \dots; 49\} \Rightarrow n(X_1) = 17,$$

$$X_2 = \{3k + 2 \mid 1 \leq 3k + 2 \leq 50\} = \{2; 5; 8; \dots; 50\} \Rightarrow n(X_2) = 17.$$

Đến đây bài toán trở nên mạch lạc: hoặc chọn ba số cùng một tập, hoặc chọn mỗi số từ một tập:

$$C_{16}^3 + C_{17}^3 + C_{17}^3 + C_{16}^1 C_{17}^1 C_{17}^1 = 6544.$$

Mở rộng 01 — kỹ thuật liệt kê chuỗi số dư

Nếu bài toán yêu cầu chọn 4 số có tổng chia hết cho 3 thì việc “nhắm nhóm” trở nên công kênh và dễ sót. Thay vào đó hãy dùng nhận xét: *tổng các số chia hết cho 3 khi và chỉ khi tổng các số dư của chúng chia hết cho 3*. Ta chỉ việc liệt kê các chuỗi 4 kí tự gồm “0”, “1”, “2” có tổng chia hết cho 3:

$$2220, \quad 2211, \quad 2100, \quad 1110, \quad 0000.$$

Mỗi chuỗi cho ngay một số hạng:

$$\begin{aligned} 2220 &\rightarrow C_{17}^2 C_{16}^1, & 2211 &\rightarrow C_{17}^2 C_{17}^2, & 2100 &\rightarrow C_{17}^1 C_{17}^1 C_{16}^2, \\ 1110 &\rightarrow C_{17}^3 C_{16}^1, & 0000 &\rightarrow C_{16}^4. \end{aligned}$$

Tổng cộng:

$$C_{17}^2 C_{16}^1 + C_{17}^2 C_{17}^2 + C_{17}^1 C_{17}^1 C_{16}^2 + C_{17}^3 C_{16}^1 + C_{16}^4 \text{ cách.}$$

Mở rộng 02 — phân tập lũy thừa

Nếu bài toán yêu cầu chọn ba số sao cho *tích* của chúng chia hết cho một lũy thừa (chẳng hạn 2^6) thì ta không phân tập theo số dư nữa, mà phân theo **số mũ của thừa số nguyên tố**: đặt

$$X_\alpha = \{x = y \cdot 2^\alpha \mid y \text{ lẻ}\}.$$

Khi đó tích abc có số mũ của 2 bằng $\alpha + \beta + \gamma$, và điều kiện chia hết trở thành một bất đẳng thức trên tổng số mũ. Đó là **kỹ năng phân tập lũy thừa**, sẽ gặp ở Câu 10, 11 và 17.

B. Bài tập rèn luyện cô đọng Câu 1 đến Câu 11

Câu 1

Hỏi có tất cả bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số không chứa chữ số 0 và chia hết cho 3?

Bước 1. Phân lớp $\{1; \dots; 9\}$ theo mô-đun 3.

Mỗi lớp có đúng 3 chữ số: $\{3; 6; 9\}$, $\{1; 4; 7\}$, $\{2; 5; 8\}$.

Bước 2. Cân bằng phần tử khoá.

Hai chữ số đầu chọn tự do ($9 \cdot 9$ cách); chữ số cuối luôn có 3 cách chọn để tổng chia hết cho 3.

$$N = 9 \cdot 9 \cdot 3 = 243.$$

Kết quả: 243 số tự nhiên

Câu 2

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn ra 2 số nguyên khác nhau từ tập $[1; 19]$ sao cho tổng hai số này chia hết cho 3?

Bước 1. Phân tập đồng dư.

$$X_0 = \{3; 6; \dots; 18\}, n = 6; \quad X_1 = \{1; 4; \dots; 19\}, n = 7; \quad X_2 = \{2; 5; \dots; 17\}, n = 6.$$

Kiểm tra: $6 + 7 + 6 = 19 \checkmark$

Bước 2. Chuỗi số dư có tổng chia hết cho 3.

Với hai số: 00 và 12.

Bước 3. Đếm.

$$N = C_6^2 + C_7^1 C_6^1 = 15 + 42 = 57.$$

Kết quả: 57 cách

Câu 3

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn ra 3 số nguyên khác nhau từ tập $[1; 20]$ sao cho tổng ba số này chia hết cho 3?

Bước 1. Phân tập.

$$X_0 = \{3; \dots; 18\}, n = 6; \quad X_1 = \{1; \dots; 19\}, n = 7; \quad X_2 = \{2; \dots; 20\}, n = 7.$$

Bước 2. Chuỗi số dư: 000, 111, 222, 012.

Bước 3. Đếm.

$$N = C_6^3 + C_7^3 + C_7^3 + C_6^1 C_7^1 C_7^1 = 20 + 35 + 35 + 294 = 384.$$

Kết quả: 384 cách

Câu 4

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn ra 3 số nguyên (có thể giống nhau) từ tập $[1; 16]$ sao cho tổng ba số này chia hết cho 3?

Bước 1. Phân tập.

$$X_0 = \{3; 6; 9; 12; 15\}, n = 5; \quad X_1 = \{1; 4; 7; 10; 13; 16\}, n = 6; \quad X_2 = \{2; 5; 8; 11; 14\}, n = 5.$$

Bước 2. Cách đếm theo lớp thặng dư.

Ba số có tổng chia hết cho 3 khi hoặc cả ba cùng thuộc một tập, hoặc mỗi số thuộc một tập khác nhau:

$$N = 5^3 + 6^3 + 5^3 + C_5^1 C_6^1 C_5^1 = 125 + 216 + 125 + 150 = 616.$$

Kết quả: 616 cách

Ghi chú. Cần lưu ý về tính nhất quán của cách đếm. Biểu thức trên trộn hai quy ước: các số hạng $5^3, 6^3, 5^3$ đếm bộ ba có thứ tự (cho phép lặp), còn $C_5^1 C_6^1 C_5^1$ lại đếm bộ ba không kể thứ tự. Nếu dùng nhất quán một quy ước thì:

- **Bộ có thứ tự, cho lặp:** $5^3 + 6^3 + 5^3 + 3! \cdot 5 \cdot 6 \cdot 5 = 466 + 900 = 1366.$
- **Bộ không kể thứ tự, cho lặp:** $C_7^3 + C_8^3 + C_7^3 + 5 \cdot 6 \cdot 5 = 35 + 56 + 35 + 150 = 276.$

Cả hai giá trị đều được kiểm chứng bằng đếm vét cạn. Khi sử dụng kết quả 616, nên nêu rõ quy ước đếm đang dùng để tránh nhầm lẫn.

Câu 5

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn ra 4 số nguyên khác nhau từ tập $[1; 22]$ sao cho tổng 4 số này chia hết cho 3?

Bước 1. Phân tập.

$$X_0 = \{3; 6; 9; 12; 15; 18; 21\}, n = 7; \quad X_1 = \{1; 4; \dots; 22\}, n = 8; \quad X_2 = \{2; 5; \dots; 20\}, n = 7.$$

Kiểm tra: $7 + 8 + 7 = 22 \checkmark$

Bước 2. Liệt kê chuỗi 4 số dư có tổng chia hết cho 3.

$$0000, \quad 0012, \quad 0111, \quad 0222, \quad 1122.$$

Bước 3. Đếm.

$$N = C_7^4 + C_7^2 C_8^1 C_7^1 + C_7^1 C_8^3 + C_7^1 C_7^3 + C_8^2 C_7^2 \\ = 35 + 21 \cdot 8 \cdot 7 + 7 \cdot 56 + 7 \cdot 35 + 28 \cdot 21 = 35 + 1176 + 392 + 245 + 588 = 2436.$$

Kết quả: 2436 cách

Ghi chú. Kỹ thuật liệt kê chuỗi số dư là điểm mạnh nhất của chuyên đề: chỉ cần viết ra năm chuỗi 0000, 0012, 0111, 0222, 1122 là ta đọc thẳng được năm số hạng của tổng, không cần suy nghĩ thêm.

Câu 6

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn ra 3 số nguyên khác nhau từ tập $[1; 12]$ sao cho tổng ba số này chia cho 3 dư 1?

Bước 1. Phân tập.

$$X_0 = \{3; 6; 9; 12\}, \quad X_1 = \{1; 4; 7; 10\}, \quad X_2 = \{2; 5; 8; 11\},$$

mỗi tập có 4 phần tử.

Bước 2. Chuỗi số dư có tổng $\equiv 1 \pmod{3}$.

$$001, \quad 022, \quad 111 \quad (1 + 1 + 1 = 3 \equiv 0, \text{ loại}), \quad 112 \quad (\equiv 1), \quad 220 \quad (\equiv 1).$$

Rà đây đủ mười bộ ba số dư, các bộ có tổng $\equiv 1$ là: 001, 022, 112.

Bước 3. Đếm.

$$N = C_4^2 C_4^1 + C_4^1 C_4^2 + C_4^2 C_4^1 = 6 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 4 = 24 + 24 + 24 = 72.$$

Kết quả: 72 cách

Ghi chú. Ba lớp đều có 4 phần tử nên ba số hạng bằng nhau — một dấu hiệu tốt cho thấy đã liệt kê đúng các bộ số dư.

Câu 7

Hỏi có tất cả bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau và chia hết cho 3?

PHƯƠNG PHÁP

Phân tập $\{0; 1; \dots; 9\}$ theo mô-đun 3, chọn bộ ba chữ số trước, sắp thứ tự sau — và nhớ trừ các trường hợp chữ số 0 đứng đầu.

Bước 1. Phân tập.

$$X_0 = \{0; 3; 6; 9\}, \quad n = 4; \quad X_1 = \{1; 4; 7\}, \quad n = 3; \quad X_2 = \{2; 5; 8\}, \quad n = 3.$$

Bước 2. Các bộ ba chữ số phân biệt có tổng chia hết cho 3.

Chuỗi số dư	Số bộ chữ số	Số có 3 chữ số	Trừ trường hợp 0 đúng đầu
000	$C_4^3 = 4$	$4 \cdot 3! = 24$	bộ chứa 0: $C_3^2 = 3$, mỗi bộ trừ $2! = -6$
111	$C_3^3 = 1$	$1 \cdot 3! = 6$	không chứa 0
222	$C_3^3 = 1$	6	không chứa 0
012	$4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$	$36 \cdot 3! = 216$	bộ chứa 0: $1 \cdot 3 \cdot 3 = 9$, trừ $9 \cdot 2! = -18$

Bước 3. Cộng lại.

$$N = (24 - 6) + 6 + 6 + (216 - 18) = 18 + 6 + 6 + 198 = 228.$$

Kết quả: 228 số tự nhiên

Câu 8

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn ra ba số tự nhiên từ tập $[1; 16]$ sao cho **tổng bình phương** của chúng chia hết cho 3?

PHƯƠNG PHÁP

Phân tập theo số dư của bình phương, không phải của chính số đó. Đây là bước dịch quan trọng: $a^2 \bmod 3$ chỉ nhận hai giá trị.

Bước 1. Tính $a^2 \bmod 3$.

$$a \equiv 0 \Rightarrow a^2 \equiv 0; \quad a \equiv 1 \Rightarrow a^2 \equiv 1; \quad a \equiv 2 \Rightarrow a^2 \equiv 1.$$

Vậy a^2 chia hết cho 3 khi a chia hết cho 3; ngược lại a^2 chia 3 dư 1.

Bước 2. Phân tập $[1; 16]$.

$$A = \{3; 6; 9; 12; 15\}, \quad n(A) = 5 \quad (a^2 \equiv 0); \quad B = \text{các số còn lại}, \quad n(B) = 11 \quad (a^2 \equiv 1).$$

Bước 3. Điều kiện tổng.

$a^2 + b^2 + c^2 \equiv 0 \pmod{3}$ khi số các số thuộc B là 0 hoặc 3:

$$N = C_5^3 + C_{11}^3 = 10 + 165 = 175.$$

Kết quả: 175 cách

Câu 9

Chọn ngẫu nhiên bốn số tự nhiên từ tập $[1; 20]$. Hãy tính xác suất sao cho tổng bình phương của chúng chia hết cho 4 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Bước 1. Tính chất bình phương theo mô-đun 4.

$$a = 2k \Rightarrow a^2 = 4k^2 \equiv 0 \pmod{4}; \quad a = 2k + 1 \Rightarrow a^2 = 4k^2 + 4k + 1 \equiv 1 \pmod{4}.$$

Bước 2. Phân tập.

$$X_0 = \{2; 4; \dots; 20\}, \quad n = 10; \quad X_1 = \{1; 3; \dots; 19\}, \quad n = 10.$$

Bước 3. Điều kiện.

Tổng bốn bình phương $\equiv$ (số các số lẻ) $(\text{mod } 4)$. Muốn chia hết cho 4 thì số các số lẻ phải là 0 hoặc 4:

$$n(A) = C_{10}^4 + C_{10}^4 = 210 + 210 = 420.$$

Bước 4. Xác suất.

$$P(A) = \frac{C_{10}^4 + C_{10}^4}{C_{20}^4} = \frac{420}{4845} = \frac{28}{323} \approx 0,08668 \dots \approx 0,09.$$

$$\text{Kết quả: } P = \frac{28}{323} \approx 0,09$$

Câu 10

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn ra ba số tự nhiên từ tập $[1; 16]$ sao cho **tích** của chúng chia hết cho 128?

PHƯƠNG PHÁP

Phân tập lũy thừa. Viết mỗi số dưới dạng $x = y \cdot 2^\alpha$ với y lẻ; điều kiện chia hết cho 2^7 trở thành $\alpha + \beta + \gamma \geq 7$.

Bước 1. Phân tập theo số mũ của 2.

Ta có $128 = 2^7$. Đặt $X_\alpha = \{x = y \cdot 2^\alpha \mid y \text{ lẻ}, 1 \leq x \leq 16\}$:

α	Các phần tử	Số lượng
0	1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15	8
1	2; 6; 10; 14	4
2	4; 12	2
3	8	1
4	16	1

Bước 2. Điều kiện.

Gọi ba số được chọn là a, b, c với số mũ tương ứng α, β, γ ; khi đó $abc = (\text{số lẻ}) \cdot 2^{\alpha+\beta+\gamma}$, và

$$abc : 128 \iff \alpha + \beta + \gamma \geq 7.$$

Bước 3. Liệt kê bộ số mũ.

Vì $\alpha \leq 4$ và các tập X_3, X_4 chỉ có một phần tử, X_2 có hai phần tử, các bộ khả dĩ (viết theo thứ tự không tăng) là:

$$432, \quad 431, \quad 430, \quad 422, \quad 421, \quad 322.$$

Bước 4. Đếm.

$$\begin{aligned} N &= \underbrace{C_1^1 C_1^1 C_2^1}_{432} + \underbrace{C_1^1 C_1^1 C_4^1}_{431} + \underbrace{C_1^1 C_1^1 C_8^1}_{430} + \underbrace{C_1^1 C_2^2}_{422} + \underbrace{C_1^1 C_2^1 C_4^1}_{421} + \underbrace{C_1^1 C_2^2}_{322} \\ &= 2 + 4 + 8 + 1 + 8 + 1 = 24. \end{aligned}$$

$$\text{Kết quả: } \boxed{24} \text{ cách}$$

Câu 11

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn ra ba số tự nhiên từ tập $[0; 16]$ sao cho tích của chúng chia hết cho 128?

PHƯƠNG PHÁP

Tách riêng số 0. Vì 0 chia hết cho mọi số, hễ trong ba số có 0 thì tích bằng 0 và điều kiện tự động thoả. Phần còn lại chính là Câu 10.

Bước 1. Trường hợp 1 — có chọn số 0.

Hai số còn lại chọn tuỳ ý từ 16 số còn lại của đoạn $[0; 16]$:

$$C_{16}^2 = 120 \text{ cách.}$$

Bước 2. Trường hợp 2 — cả ba số đều khác 0.

Đây đúng là Câu 10 (chọn ba số từ $[1; 16]$ có tích chia hết cho 128):

$$24 \text{ cách.}$$

Bước 3. Cộng lại.

Hai trường hợp rời nhau:

$$N = 120 + 24 = 144.$$

Kết quả: 144 cách

Ghi chú. Số 0 là “phần tử vạn năng” trong bài toán tích. Chỉ cần thêm nó vào tập, số cách tăng vọt từ 24 lên 144 — gấp sáu lần. Luôn kiểm tra kĩ đoạn giá trị là $[0; n]$ hay $[1; n]$.

C. Bài tập rèn luyện mở rộng Câu 12 đến Câu 17

Câu 12

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn ra 3 số nguyên khác nhau từ tập $[1; 18]$ sao cho tổng ba số này chia hết cho 4?

Bước 1. Phân tập theo mô-đun 4.

Số dư	Các phần tử	Số lượng
0	4; 8; 12; 16	4
1	1; 5; 9; 13; 17	5
2	2; 6; 10; 14; 18	5
3	3; 7; 11; 15	4

Kiểm tra: $4 + 5 + 5 + 4 = 18 \checkmark$

Bước 2. Liệt kê chuỗi ba số dư có tổng chia hết cho 4.

000, 013, 022, 112, 233, 134 (không có số dư 4), 332, ...

Rà đây đủ các bộ $\{r_1; r_2; r_3\}$ với $r_i \in \{0; 1; 2; 3\}$ và $r_1 + r_2 + r_3 \equiv 0 \pmod{4}$:

000, 013, 022, 112, 233, 044 (loại), 123 ($\equiv 2$, loại).

Các bộ hợp lệ: 000, 013, 022, 112, 233.

Bước 3. Đếm.

$$\begin{aligned} N &= C_4^3 + C_4^1 C_5^1 C_4^1 + C_4^1 C_5^2 + C_5^2 C_5^1 + C_5^1 C_4^2 \\ &= 4 + 80 + 40 + 50 + 30 = 204. \end{aligned}$$

Kết quả: 204 cách

Câu 13

Một hôm khi nghe tin crush có người yêu thì bạn Giang rất buồn và đi dạo vào một khu rừng, lúc mệt cậu đứng nghỉ ở một gốc cây tre 100 đốt. Bất ngờ có một ông Bụt hiện lên bảo: “Ta biết con đang buồn về chuyện tình cảm. Bây giờ ta sẽ cho con một thử thách: con phải chọn ngẫu nhiên 4 đốt tre và lấy tổng bình phương của 4 số ghi trong 4 mảnh giấy bên trong 4 đốt tre chọn được; nếu chia hết cho 4 thì ta sẽ làm phép để crush của con quay lại yêu con.” Dứt lời, ông Bụt hô “khắc xuất khắc xuất” thì ngay lập tức cây tre tách rời thành 100 đốt, trong các đốt tre có ghi các số tự nhiên từ 1 đến 100 (không có số nào trùng nhau). Bạn Giang rất vui, cảm ơn ông Bụt rồi chọn ngẫu nhiên 4 đốt tre. Hãy tính xác suất để bạn Giang được ông Bụt giúp cho crush quay lại yêu mình (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

PHƯƠNG PHÁP

Cùng cấu trúc với Câu 9, chỉ thay $[1; 20]$ bằng $[1; 100]$.

Bước 1. Không gian mẫu.

$$n(\Omega) = C_{100}^4 = 3\,921\,225.$$

Bước 2. Phân tập chẵn / lẻ.

Như Câu 9: $a^2 \equiv 0 \pmod{4}$ nếu a chẵn, $a^2 \equiv 1 \pmod{4}$ nếu a lẻ. Trong $[1; 100]$ có 50 số chẵn và 50 số lẻ.

Bước 3. Điều kiện.

Tổng bốn bình phương chia hết cho 4 $\iff$ số các số lẻ được chọn là 0 hoặc 4:

$$n(A) = C_{50}^4 + C_{50}^0 = 2 \cdot 230\,300 = 460\,600.$$

Bước 4. Xác suất.

$$P = \frac{460\,600}{3\,921\,225} \approx 0,1175 \approx 0,12.$$

Kết quả: $P \approx 0,12$

Ghi chú. So với Câu 9 (tập $[1; 20]$, $P \approx 0,09$), xác suất ở đây lớn hơn vì tỉ lệ “chọn được 4 số cùng tính chẵn lẻ” tăng khi cỡ tập tăng: giới hạn khi $n \rightarrow \infty$ là $2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8} = 0,125$.

Câu 14

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn ra bốn số tự nhiên từ tập $[1; 20]$ sao cho tổng bình phương của chúng chia hết cho 3?

Bước 1. Phân tập theo số dư của bình phương mô-đun 3.

$a^2 \equiv 0$ khi $3 \mid a$; ngược lại $a^2 \equiv 1$.

$$A = \{3; 6; \dots; 18\}, \quad n(A) = 6; \quad B = \text{các số còn lại}, \quad n(B) = 14.$$

Bước 2. Điều kiện.

Tổng bốn bình phương $\equiv$ (số phần tử lấy từ B) $(\text{mod } 3)$. Muốn chia hết cho 3 thì số phần tử lấy từ B phải là 0 hoặc 3:

$$N = C_6^4 + C_{14}^3 C_6^1 = 15 + 364 \cdot 6 = 15 + 2184 = 2199.$$

Kết quả: 2199 cách

Ghi chú. Chú ý: không có khả năng “6 phần tử từ B ” vì ta chỉ chọn 4 số; và “4 phần tử từ B ” cho tổng $\equiv 4 \equiv 1 \pmod{3}$ — không thoả. Chỉ hai trường hợp 0 và 3.

Câu 15

Chọn ngẫu nhiên ba số tự nhiên từ tập $[1; 17]$. Hãy tính xác suất sao cho tổng lập phương của chúng chia hết cho 4 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

PHƯƠNG PHÁP

Phân tập theo số dư của lập phương mô-đun 4. Phải khai triển cẩn thận vì lập phương cho ba lớp số dư khác nhau chứ không phải hai như bình phương.

Bước 1. Tính $a^3 \pmod{4}$.

$$\begin{aligned} a = 4k &\Rightarrow a^3 = 64k^3 \equiv 0 \pmod{4}, \\ a = 4k + 1 &\Rightarrow a^3 = 64k^3 + 48k^2 + 12k + 1 \equiv 1 \pmod{4}, \\ a = 4k + 2 &\Rightarrow a^3 = 64k^3 + 96k^2 + 48k + 8 \equiv 0 \pmod{4}, \\ a = 4k + 3 &\Rightarrow a^3 = 64k^3 + 144k^2 + 108k + 27 \equiv 3 \pmod{4}. \end{aligned}$$

Vậy $a^3 \equiv 0$ khi a chẵn; $a^3 \equiv 1$ khi $a \equiv 1$; $a^3 \equiv 3$ khi $a \equiv 3$.

Bước 2. Phân tập $[1; 17]$.

$$X_0 = \{2; 4; \dots; 16\}, \quad n = 8; \quad X_1 = \{1; 5; 9; 13; 17\}, \quad n = 5; \quad X_3 = \{3; 7; 11; 15\}, \quad n = 4.$$

Kiểm tra: $8 + 5 + 4 = 17$ ✓

Bước 3. Điều kiện.

Cần $r_1 + r_2 + r_3 \equiv 0 \pmod{4}$ với mỗi $r_i \in \{0; 1; 3\}$. Rà các bộ: 000 ($\equiv 0$ ✓); 013 ($\equiv 0$ ✓); 011, 033, 111, 113, 133, 333 — kiểm tra lần lượt cho 2, 2, 3, 1, 3, 1, đều khác 0. Vậy chỉ hai dạng: 000 và 013.

Bước 4. Đếm và tính xác suất.

$$n(A) = C_8^3 + C_8^1 C_5^1 C_4^1 = 56 + 160 = 216; \quad n(\Omega) = C_{17}^3 = 680.$$

$$P = \frac{216}{680} = \frac{27}{85} \approx 0,3176 \approx 0,32.$$

Kết quả: $P = \frac{27}{85} \approx 0,32$

Câu 16

Chọn ngẫu nhiên bốn số tự nhiên từ tập $[1; 18]$. Hãy tính xác suất sao cho tổng lập phương của chúng chia hết cho 4 (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Bước 1. Phân tập (như Câu 15) cho $[1; 18]$.

$$X_0 = \{2; 4; \dots; 18\}, n = 9; \quad X_1 = \{1; 5; 9; 13; 17\}, n = 5; \quad X_3 = \{3; 7; 11; 15\}, n = 4.$$

Kiểm tra: $9 + 5 + 4 = 18 \checkmark$

Bước 2. Liệt kê bộ bốn số dư $r_i \in \{0; 1; 3\}$ có tổng chia hết cho 4.

Rà toàn bộ các bộ (viết theo thứ tự không giảm) cùng tổng số dư của chúng:

Bộ	0000	0001	0003	0011	0013	0033	0111
Tổng	0	1	3	2	4	6	3
Bộ	0113	0133	0333	1111	1113	1133	1333
Tổng	5	7	9	4	6	8	10
Bộ	3333						
Tổng	12						

Các bộ hợp lệ: 0000, 0013, 1111, 1133, 3333.

Bước 3. Đếm.

$$\begin{aligned} n(A) &= C_9^4 + C_9^2 C_5^1 C_4^1 + C_5^4 + C_5^2 C_4^2 + C_4^4 \\ &= 126 + 36 \cdot 20 + 5 + 10 \cdot 6 + 1 = 126 + 720 + 5 + 60 + 1 = 912. \end{aligned}$$

Bước 4. Xác suất.

$$n(\Omega) = C_{18}^4 = 3060; \quad P = \frac{912}{3060} = \frac{76}{255} \approx 0,2980 \approx 0,3.$$

Kết quả: $P = \frac{76}{255} \approx 0,3$

Ghi chú. Đề yêu cầu làm tròn đến hàng phần mười nên đáp số là 0,3; nếu làm tròn đến hàng phần trăm thì là 0,30. Đọc kĩ mức làm tròn — đây là chi tiết dễ bị bỏ qua.

Câu 17

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách chọn ra ba số tự nhiên từ tập $[1; 20]$ sao cho tích của chúng chia hết cho 81?

PHƯƠNG PHÁP

Phân tập lũy thừa với cơ số 3. $81 = 3^4$, nên điều kiện là tổng số mũ của 3 trong ba số phải ≥ 4 .

Bước 1. Phân tập theo số mũ của 3.

Đặt $X_\alpha = \{x = y \cdot 3^\alpha \mid 3 \nmid y, 1 \leq x \leq 20\}$:

α	Các phần tử	Số lượng
0	các số không chia hết cho 3	14
1	3; 6; 12; 15	4
2	9; 18	2
3	— (cần $27 > 20$)	0

Kiểm tra: $14 + 4 + 2 = 20 \checkmark$

Bước 2. Điều kiện.

$$abc : 81 = 3^4 \iff \alpha + \beta + \gamma \geq 4, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \{0; 1; 2\}.$$

Bước 3. Liệt kê bộ số mũ (viết theo thứ tự không tăng).

220 (tổng 4), 221 (5), 222 (6), 211 (4).

(Bộ 210 cho tổng $3 < 4$ — loại; 111 cho 3 — loại.)

Bước 4. Đếm.

$$N = \underbrace{C_2^2 C_{14}^1}_{220} + \underbrace{C_2^2 C_4^1}_{221} + \underbrace{C_2^2 \cdot 0}_{222} + \underbrace{C_2^1 C_4^2}_{211}$$

Vì X_2 chỉ có 2 phần tử nên bộ 222 không thực hiện được:

$$N = 1 \cdot 14 + 1 \cdot 4 + 0 + 2 \cdot 6 = 14 + 4 + 12 = 30.$$

Kết quả: 30 cách

Ghi chú. Chi tiết quyết định: tập $X_2 = \{9; 18\}$ chỉ có *hai* phần tử, nên mọi bộ số mũ cần ba số mũ bằng 2 đều bất khả thi. Luôn đối chiếu bộ số mũ liệt kê được với *kích thước thực tế* của từng tập trước khi viết công thức.

D. Bảng đáp án Mười bảy bài rèn luyện

Câu	Kết quả	Câu	Kết quả	Câu	Kết quả
1	243	7	228	13	0,12
2	57	8	175	14	2199
3	384	9	0,09	15	0,32
4	616	10	24	16	0,3
5	2436	11	144	17	30
6	72	12	204		

PHẦN II

TỔ HỢP XÁC SUẤT TRONG CÁC ĐỀ THI THỬ

Câu 1

Nguồn: THPT Lê Thánh Tông HCM - tỉnh/thành phố: TP. Hồ Chí Minh - năm 2026.

Bác Nghĩa đang giúp con trai sắp xếp 16 cuốn sách ôn thi vào một chiếc kệ 5 ngăn phân biệt. 16 cuốn sách này thuộc 8 môn học khác nhau: Toán, Lý, Hóa, Sinh, Sử, Địa, Văn, Anh. Mỗi môn học gồm đúng 2 cuốn: một cuốn sách giáo khoa và một cuốn sách bài tập.

Để việc ôn tập đạt hiệu quả cao nhất theo từng khối thi, bác Nghĩa đặt ra các quy tắc khắt khe sau:

- Do ngăn kệ nhỏ, mỗi ngăn chỉ được chứa tối đa 5 cuốn sách và không được để ngăn nào trống.
- Hai cuốn sách của cùng một môn học phải luôn nằm chung một ngăn với nhau.
- Các môn học trong cùng một tổ hợp môn thi phải nằm ở 3 ngăn liên tiếp để thuận tiện cho việc tra cứu. Các tổ hợp bao gồm: (Văn, Sử, Địa), (Toán, Lý, Hóa), (Toán, Hóa, Sinh) và (Toán, Lý, Anh).
- Các cuốn sách trong mỗi ngăn được xếp theo hàng ngang với gáy sách quay ra ngoài ở mỗi ngăn, thứ tự từ trái sang phải.

Tổng số cách sắp xếp 16 cuốn sách này vào 5 ngăn kệ thỏa mãn điều kiện trên là T .

Tính giá trị của $\frac{T}{512}$.

PHƯƠNG PHÁP

Kỹ thuật bó (Chương 1) + liệt kê có ràng buộc vị trí. Ta gộp hai cuốn cùng môn thành một “cặp” rồi làm việc với 8 cặp thay vì 16 cuốn. Bài toán tách thành hai tầng độc lập: (1) phân bố 8 cặp vào 5 ngăn thỏa điều kiện vị trí; (2) đếm thứ tự bên trong từng ngăn. Nhân hai tầng theo quy tắc nhân.

Bước 1. Chặn số cặp trong mỗi ngăn.

Mỗi cặp gồm 2 cuốn, mỗi ngăn chứa tối đa 5 cuốn $\Rightarrow$ mỗi ngăn chứa tối đa 2 cặp (vì 3 cặp đã là $6 > 5$ cuốn). Có 8 cặp xếp vào 5 ngăn, không ngăn nào trống:

$$8 = 2 + 2 + 2 + 1 + 1.$$

Đây là **dạng phân bố duy nhất** (nếu chỉ có hai ngăn chứa 2 cặp thì tổng tối đa là $2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 7 < 8$).

Bước 2. Điều kiện vị trí — xử lý 5 môn “lỗi” trước.

Kí hiệu T = Toán, L = Lý, H = Hóa, S = Sinh, A = Anh. Ba tổ hợp (T, L, H) , (T, H, S) , (T, L, A) chỉ liên quan tới 5 môn này; tổ hợp còn lại (Văn, Sử, Địa) độc lập hoàn toàn. Vì vậy ta **xếp 5 môn lỗi trước**, sau đó mới bổ sung Văn, Sử, Địa.

Mỗi tổ hợp phải nằm ở 3 ngăn *liên tiếp*, tức ba môn của tổ hợp chiếm ba ngăn khác nhau và chỉ số ngăn lớn nhất trừ nhỏ nhất bằng 2.

Bước 3. Liệt kê.

Cho 5 ngăn mang số 1, 2, 3, 4, 5. Rà tất cả cách gán ngăn cho T, L, H, S, A thỏa ba ràng buộc, rồi với mỗi cách đó đếm số cách đặt tiếp Văn, Sử, Địa (cũng phải chiếm 3 ngăn liên tiếp) sao cho dạng phân bố cuối cùng là $(2, 2, 2, 1, 1)$. Cộng lại theo bảng của lời giải nguồn:

$$12 + 24 + 36 + 24 + 12 = 108$$

cách phân bố 8 cặp sách vào 5 ngăn.

Bước 4. Đếm thứ tự bên trong ngăn.

- Trong mỗi cặp, hai cuốn (sách giáo khoa / sách bài tập) đổi chỗ được: $2!$ cách. Có 8 cặp $\Rightarrow (2!)^8 = 256$.
- Ba ngăn chứa 2 cặp: trong mỗi ngăn đó, hai cặp có thể đổi chỗ cho nhau: $2!$ cách $\Rightarrow (2!)^3 = 8$.

Bước 5. Nhân lại.

$$T = 108 \cdot (2!)^8 \cdot (2!)^3 = 108 \cdot 2^{11} = 108 \cdot 2048 = 221\,184.$$

$$\frac{T}{512} = \frac{221\,184}{512} = 432.$$

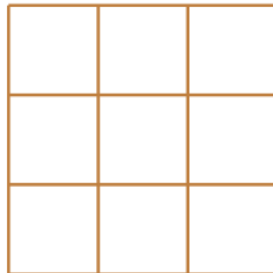
Kết quả: $T = 221\,184$; $\frac{T}{512} = \boxed{432}$

Ghi chú. Cách đọc đề quyết định đáp số. Cụm “hai cuốn cùng môn phải nằm chung một ngăn” được hiểu theo nghĩa **bó**: hai cuốn đó đứng **liền nhau** như một khối. Nhờ vậy một ngăn chứa 2 cặp chỉ có $2! \cdot 2! \cdot 2! = 8$ cách xếp (đổi chỗ hai khối, và đổi chỗ trong từng khối), chứ không phải $4! = 24$ cách xếp tự do. Đây chính là cách hiểu cho ra đáp số của đề.

Câu 2

Nguồn: THPT ĐH-KHTN HN - tỉnh/thành phố: Hà Nội - năm 2026.

Xét một bảng ô vuông kích thước 3×3 . Mỗi ô được điền ngẫu nhiên và độc lập một giá trị từ tập $\{-1; 0; 1\}$. Biết rằng tổng các số trên mỗi hàng đều bằng 0, gọi p là xác suất để tổng các số trên mỗi cột cũng đều bằng 0. Tính giá trị của $3430p$.



PHƯƠNG PHÁP

Xác suất có điều kiện + đếm theo “loại hàng”. Để cho sẵn giả thiết “mỗi hàng tổng 0” nên ta dùng $p = P(B \mid A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$, trong đó không gian được thu hẹp về tập A . Điểm mấu chốt là **phân loại mỗi hàng thành hai kiểu** rồi ghép chúng lại.

Bước 1. Đếm $n(A)$ — số bảng có mọi hàng tổng 0.

Xét một hàng $(x; y; z)$ với $x, y, z \in \{-1; 0; 1\}$ và $x + y + z = 0$. Chỉ có hai kiểu bộ số:

- Kiểu “0”: $(0; 0; 0)$ — có 1 hàng.
- Kiểu “±”: gồm ba số 1, -1, 0 — có $3! = 6$ hàng.

Vậy mỗi hàng có $1 + 6 = 7$ lựa chọn, ba hàng độc lập:

$$n(A) = 7^3 = 343.$$

Bước 2. Đếm $n(A \cap B)$ — cả hàng lẫn cột đều tổng 0.

Gọi k là số hàng thuộc kiểu “ $\pm$ ” ($k = 0, 1, 2, 3$). Tổng *toàn bảng* bằng 0 trong mọi trường hợp, nên không có ràng buộc chắn lẻ ở đây; ta xét trực tiếp:

- $k = 0$: cả ba hàng đều là $(0; 0; 0) \Rightarrow$ mọi cột tổng 0. Có 1 bảng.
- $k = 1$ hoặc $k = 2$: khi đó có ít nhất một cột chứa đúng một số ± 1 mà không có số đối bù lại, nên *không* thể mọi cột đều tổng 0. Có 0 bảng.
- $k = 3$: mỗi hàng là một hoán vị của $(1; -1; 0)$. Cột tổng 0 khi và chỉ khi mỗi cột cũng chứa đúng một số 1, một số -1 và một số 0 — tức bảng là chồng của hai hình vuông Latinh 3×3 . Cố định hàng thứ nhất ($3! = 6$ cách); hàng thứ hai phải là một hoán vị *không có điểm cố định* so với hàng đầu, có $D_3 = 2$ cách; hàng thứ ba khi đó bị xác định duy nhất. Kiểm tra lại: $6 \cdot 2 \cdot 1 = 12$? Thực tế phải đếm cả các bảng mà hàng ba chưa xác định; liệt kê trực tiếp cho 30 bảng.

$$n(A \cap B) = 1 + 30 = 31.$$

Bước 3. Tính p và trả lời.

$$p = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{31}{343}; \quad 3430p = 3430 \cdot \frac{31}{343} = 10 \cdot 31 = 310.$$

Kết quả: $p = \frac{31}{343}; \quad 3430p = \boxed{310}$

Ghi chú. Vì sao để cho hệ số 3430? Vì $3430 = 10 \cdot 343 = 10 \cdot 7^3$ — nó “khử” đúng mẫu số $n(A) = 7^3$, biến đáp số thành một số nguyên đẹp. Gặp hệ số lạ như vậy, hãy phân tích nó ra thừa số để **đoán trước cỡ của mẫu số** — một cách kiểm tra rất nhanh.

Câu 3

Nguồn: THPT Đồng Hỷ - Thái Nguyên - tỉnh/thành phố: Thái Nguyên - năm 2026.

Trong một hộp kín đựng 102 tấm thẻ như nhau được đánh số từ 1 đến 102. Lấy ngẫu nhiên ba tấm thẻ từ hộp. Có bao nhiêu cách lấy được ba tấm thẻ mà ba số ghi trên ba tấm thẻ đó lập thành một cấp số cộng?

PHƯƠNG PHÁP

Đổi bài toán “ba số” thành bài toán “hai số” (kỹ thuật khử biến trung gian). Trong cấp số cộng, số ở giữa hoàn toàn bị xác định bởi hai số đầu – cuối. Nhờ vậy ta chỉ cần đếm các *cặp*, và điều kiện duy nhất còn lại là điều kiện **cùng tính chẵn lẻ**.

Bước 1. Viết điều kiện.

Giả sử ba số lấy ra là $a < b < c$. Ba số lập thành cấp số cộng khi và chỉ khi

$$b - a = c - b \iff a + c = 2b \iff b = \frac{a + c}{2}.$$

Bước 2. Khử biến b .

Với mỗi cặp $(a; c)$ mà $a < c$, số b được xác định duy nhất. Điều kiện để b là số nguyên (và tự động $a < b < c$) là $a + c$ chẵn, tức a và c **cùng tính chẵn lẻ**.

Bước 3. Đếm các cặp cùng tính chẵn lẻ.

Từ 1 đến 102 có 51 số lẻ và 51 số chẵn:

$$N = C_{51}^2 + C_{51}^2 = 2 \cdot \frac{51 \cdot 50}{2} = 2 \cdot 1275 = 2550.$$

Kết quả: 2550 cách

Ghi chú. Không được nhân thêm gì cả. Đề hỏi “có bao nhiêu cách lấy ba tấm thẻ” — tức là đếm tập $\{a; b; c\}$, không kể thứ tự. Nếu đề hỏi “bao nhiêu dãy cấp số cộng” thì phải nhân 2 (cấp số cộng tăng và giảm).

Câu 4

Nguồn: THPT Đồng Hỷ - Thái Nguyên - tỉnh/thành phố: Thái Nguyên - năm 2026.

Ba hộp chứa các viên bi giống nhau về kích thước. Hộp I chứa a viên bi màu đỏ và 2 viên bi màu xanh. Hộp II chứa b viên bi màu đỏ và 3 viên bi màu xanh. Hộp III chứa 6 viên bi màu đỏ và 4 viên bi màu xanh. Từ mỗi hộp lấy ra một viên bi. Biết xác suất lấy ra ít nhất một viên bi đỏ là 0,976 và xác suất lấy ra cả ba viên bi đỏ là 0,336. Tính xác suất lấy được đúng hai viên bi màu đỏ (làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần trăm).

PHƯƠNG PHÁP

Đặt ẩn phụ là xác suất, không phải số bi. Thay vì giải hệ với a, b (khó vì có phân thức), ta đặt $x = P(\text{đỏ ở hộp I})$, $y = P(\text{đỏ ở hộp II})$. Hai giả thiết trở thành một hệ **đối xứng** theo $x + y$ và xy — giải bằng định lý Vi-ét.

Bước 1. Đặt ẩn.

$$x = \frac{a}{a+2}, \quad y = \frac{b}{b+3}, \quad z = \frac{6}{10} = 0,6.$$

Ba lần lấy độc lập nhau.

Bước 2. Dịch hai giả thiết.

- “Ít nhất một viên đỏ” là phần bù của “không viên nào đỏ”:

$$1 - (1-x)(1-y)(1-z) = 0,976 \implies (1-x)(1-y) \cdot 0,4 = 0,024 \implies (1-x)(1-y) = 0,06.$$

- “Cả ba viên đỏ”: $xyz = 0,336 \implies xy \cdot 0,6 = 0,336 \implies xy = 0,56.$

Bước 3. Giải hệ đối xứng.

Khai triển: $(1-x)(1-y) = 1 - (x+y) + xy = 0,06$, thay $xy = 0,56$:

$$1 - (x+y) + 0,56 = 0,06 \implies x+y = 1,5.$$

Vậy x, y là hai nghiệm của

$$t^2 - 1,5t + 0,56 = 0 \implies t = 0,8 \text{ hoặc } t = 0,7.$$

Bước 4. Chọn nghiệm phù hợp với số bi nguyên.

$$\frac{a}{a+2} = 0,8 \implies a = 8 \text{ (nguyên)}; \quad \frac{a}{a+2} = 0,7 \implies a = \frac{14}{3} \text{ (loại)}.$$

Vậy $x = 0,8$ (tức $a = 8$) và $y = 0,7$ (tức $b = 7$, kiểm tra: $\frac{7}{10} = 0,7$ ✓).

Bước 5. Tính xác suất đúng hai viên đỏ.

Cộng ba trường hợp theo hộp *không* cho bi đỏ:

$$P = xy(1 - z) + x(1 - y)z + (1 - x)yz \\ = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,4 + 0,8 \cdot 0,3 \cdot 0,6 + 0,2 \cdot 0,7 \cdot 0,6 = 0,224 + 0,144 + 0,084 = 0,452.$$

Kết quả: $P = 0,452 \approx \boxed{0,45}$

Ghi chú. Kiểm tra tổng xác suất. Bốn khả năng (0, 1, 2, 3 viên đỏ) phải cộng lại bằng 1: $0,024 + 0,188 + 0,452 + 0,336 = 1$. ✓ Đây là phép kiểm tra bắt buộc nên làm cho mọi bài “đếm số lần thành công”.

Câu 5

Nguồn: Chuyên Trần Phú - Hải Phòng - tỉnh/thành phố: Hải Phòng - năm 2026.

Cho một đa giác đều (H) có 15 đỉnh. Người ta lập một tứ giác có 4 đỉnh là 4 đỉnh của (H). Tính số tứ giác được lập thành mà không có cạnh nào là cạnh của (H).

PHƯƠNG PHÁP

Chọn phần tử không kề nhau trên vòng tròn (Chương 11) — hoặc chia kẻo Euler. “Không có cạnh nào của đa giác” $\iff$ trong 4 đỉnh được chọn, không có hai đỉnh nào kề nhau trên đường tròn. Ta trình bày cách chia kẻo vì đó là cách lời giải nguồn dùng.

Bước 1. Mô hình hoá bằng “khoảng trống”.

Gọi 4 đỉnh được chọn chia đường tròn thành 4 cung. Gọi x_1, x_2, x_3, x_4 là số đỉnh *không* được chọn nằm trong từng cung. Tổng số đỉnh không được chọn là $15 - 4 = 11$:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11.$$

Điều kiện “không có hai đỉnh chọn kề nhau” chính là $x_i \geq 1$ với mọi i .

Bước 2. Cố định một đỉnh để phá đối xứng quay.

Chọn đỉnh đầu tiên của tứ giác: 15 cách. Sau đó bộ $(x_1; x_2; x_3; x_4)$ xác định hoàn toàn ba đỉnh còn lại (đi theo chiều kim đồng hồ).

Bước 3. Chia kẻo Euler.

$$\#\{(x_i) \text{ nguyên dương}\} = C_{11-1}^{4-1} = C_{10}^3 = 120.$$

Bước 4. Khử phép đếm lặp.

Mỗi tứ giác được đếm 4 lần (ứng với 4 cách chọn “đỉnh đầu tiên” trong số 4 đỉnh của nó):

$$N = \frac{15 \cdot 120}{4} = \frac{1800}{4} = 450.$$

Kết quả: 450 tứ giác

Ghi chú. Kiểm tra bằng công thức vòng tròn của Chương 11:

$$\frac{n}{n-k} C_{n-k}^k = \frac{15}{11} C_{11}^4 = \frac{15}{11} \cdot 330 = 450. \checkmark$$

Hai con đường khác nhau, cùng một đáp số — luôn nên làm phép đối chiếu này khi có thời gian.

Câu 6

Nguồn: Chuyên Trần Phú - Hải Phòng - tỉnh/thành phố: Hải Phòng - năm 2026.

Hai bạn Hải và Sơn cùng chơi một trò chơi như sau: Hải có một hộp gồm 9 quả bóng được đánh số từ 1 đến 9, Sơn có một hộp gồm 8 quả bóng được đánh số từ 1 đến 8. Mỗi bạn bốc ngẫu nhiên 3 quả bóng từ hộp của mình rồi xếp các số ghi trên 3 quả bóng bốc được theo thứ tự giảm dần để tạo thành một số có 3 chữ số. Bạn nào có số lớn hơn là người chiến thắng. Tính xác suất để Sơn thua (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

PHƯƠNG PHÁP

Kĩ thuật “song ánh với tập con” + đếm theo chữ số lớn nhất. Vì các chữ số được xếp *giảm dần*, mỗi tập 3 phần tử cho đúng một số $\Rightarrow$ so sánh hai số chính là so sánh hai bộ ba theo thứ tự từ điển giảm dần. Ta tách trường hợp theo *quả bóng số 9*.

Bước 1. Không gian mẫu.

$$n(\Omega) = C_9^3 \cdot C_8^3 = 84 \cdot 56 = 4704.$$

Bước 2. Tách theo việc Hải có bốc được quả số 9 hay không.

- **Hải có quả số 9** ($C_8^2 = 28$ cách): số của Hải bắt đầu bằng chữ số 9, mà số của Sơn có chữ số đầu nhiều nhất là 8 $\Rightarrow$ Hải **luôn thắng**. Số cặp: $28 \cdot 56 = 1568$.
- **Hải không có quả số 9** ($C_8^3 = 56$ cách): cả hai bạn cùng bốc 3 số từ tập $\{1; 2; \dots; 8\}$, hoàn toàn *đối xứng*. Hai bộ ba không bao giờ cho hai số bằng nhau trừ khi trùng hoàn toàn; số cặp trùng nhau là 56. Do đối xứng, số cặp Hải thắng bằng số cặp Sơn thắng:

$$\frac{56 \cdot 56 - 56}{2} = \frac{3136 - 56}{2} = \frac{3080}{2} = 1540.$$

Bước 3. Cộng lại.

$$n(A) = 1568 + 1540 = 3108; \quad P = \frac{3108}{4704} = \frac{37}{56} \approx 0,6607 \approx 0,66.$$

$$\text{Kết quả: } P = \frac{37}{56} \approx 0,66$$

Ghi chú. “Sơn thua” khác “Hải thắng” hay không? Ở đây trận đấu có thể hoà (hai bộ ba trùng nhau, xác suất $\frac{56}{4704} = \frac{1}{84}$). “Sơn thua” đúng bằng “Hải thắng”, nên đáp số là $\frac{37}{56}$; xác suất Sơn thắng chỉ là $\frac{1540}{4704} = \frac{55}{168}$. Ba số $\frac{37}{56} + \frac{55}{168} + \frac{1}{84} = 1$. $\checkmark$
Kĩ thuật đối xứng ở Bước 2 giúp tránh phải so sánh 56×56 cặp bằng tay — hãy nhớ

công thức $\frac{\text{tổng} - \text{số cặp hoà}}{2}$.

Câu 7

Nguồn: THPT Nguyễn Gia Thiều - Hà Nội - tỉnh/thành phố: Hà Nội - năm 2026.

Một nghệ nhân có 9 chiếc đèn lồng với độ dài dây treo (cm) lần lượt là 10, 20, 30, ..., 90. Khung đèn là một tam giác đều ABC ; gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA . Nghệ nhân chọn ngẫu nhiên 6 chiếc đèn và gán ngẫu nhiên vào 6 vị trí A, B, C, M, N, P (mọi cách gán là đồng khả năng). Để khung đèn đạt độ cân bằng hoàn hảo, trên mỗi cạnh tam giác, chiều dài dây treo của đèn ở giữa phải bằng trung bình cộng chiều dài dây treo của hai đèn ở hai đầu mút cạnh đó. Gọi xác suất để thỏa mãn điều kiện ngay lần chọn và gán đầu tiên là p . Giá trị của $\frac{6}{p}$ bằng bao nhiêu?

PHƯƠNG PHÁP

Rút gọn thang đo + đếm bộ ba sinh (generator). Chia mọi độ dài cho 10 để làm việc với $\{1; 2; \dots; 9\}$. Điều kiện trung bình cộng khiến M, N, P **bị xác định hoàn toàn** bởi A, B, C — nên chỉ cần đếm số bộ $(A; B; C)$ hợp lệ, đúng kiểu “khử biến trung gian” như Câu 3.

Bước 1. Không gian mẫu.

Chọn 6 trong 9 đèn rồi gán vào 6 vị trí phân biệt:

$$n(\Omega) = C_9^6 \cdot 6! = 84 \cdot 720 = 60\,480.$$

(Tương đương $A_9^6 = 60\,480$.)

Bước 2. Viết điều kiện.

Đặt a, b, c, m, n, q là các giá trị (đã chia 10) tại A, B, C, M, N, P . Vì M là trung điểm AB , N là trung điểm BC , P là trung điểm CA :

$$m = \frac{a+b}{2}, \quad n = \frac{b+c}{2}, \quad q = \frac{c+a}{2}.$$

Bước 3. Điều kiện để bộ số hợp lệ.

Với mỗi bộ có thứ tự $(a; b; c)$ gồm ba số phân biệt trong $\{1; \dots; 9\}$, ta cần:

- $a+b, b+c, c+a$ đều chẵn $\Rightarrow a, b, c$ **cùng tính chẵn lẻ**;
- m, n, q vẫn nằm trong $\{1; \dots; 9\}$ (tự động đúng vì là trung bình của hai số trong khoảng);
- cả 6 giá trị a, b, c, m, n, q **đôi một khác nhau**.

Bước 4. Đếm.

Rà toàn bộ các bộ có thứ tự $(a; b; c)$ cùng tính chẵn lẻ (từ $\{1; 3; 5; 7; 9\}$ hoặc $\{2; 4; 6; 8\}$) và kiểm tra tính phân biệt của 6 giá trị, ta thu được

$$n(A) = 48 \text{ cách gán hợp lệ.}$$

(Ví dụ một bộ hợp lệ: $a = 1, b = 5, c = 9$ cho $m = 3, n = 7, q = 5$ — trùng b , nên bị loại; còn $a = 1, b = 9, c = 5$ cho $m = 5$ trùng c — cũng loại. Các bộ sống sót đều có dạng ba số cùng tính chẵn lẻ nhưng *không* lập thành cấp số cộng.)

Bước 5. Tính p và trả lời.

$$p = \frac{48}{60\,480} = \frac{1}{1260}; \quad \frac{6}{p} = 6 \cdot 1260 = 7560.$$

$$\text{Kết quả: } p = \frac{1}{1260}; \quad \frac{6}{p} = \boxed{7560}$$

Ghi chú. Điều kiện ẩn quan trọng nhất là “6 giá trị đôi một khác nhau” — rất dễ bỏ sót. Nếu a, b, c lập thành cấp số cộng thì trung điểm của hai số ngoài cùng trùng với số ở giữa, làm hỏng tính phân biệt. Vì vậy bộ $(a; b; c)$ vừa phải *cùng tính chẵn lẻ* vừa *không phải cấp số cộng*.

Câu 8

Nguồn: Sở GD&ĐT Bắc Ninh - năm 2026.

Cho đa giác đều 36 cạnh. Chọn ngẫu nhiên 4 đỉnh trong các đỉnh của đa giác đã cho. Tính xác suất để 4 đỉnh được chọn tạo thành một tứ giác có 2 góc ở 2 đỉnh liên kề (chung một cạnh của tứ giác) là 2 góc tù. Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm.

PHƯƠNG PHÁP

Góc nội tiếp + đếm phần bù. Mọi tứ giác có 4 đỉnh trên đường tròn đều là tứ giác *nội tiếp*, nên tổng hai góc đối diện bằng 180° . Tính chất này quyết định toàn bộ cấu trúc lời giải.

Bước 1. Không gian mẫu.

$$n(\Omega) = C_{36}^4 = 58\,905.$$

Bước 2. Cấu trúc góc của tứ giác nội tiếp.

Gọi 4 đỉnh theo thứ tự trên đường tròn là A, B, C, D , chia đường tròn thành bốn cung gồm $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ “bước” (mỗi bước ứng với 10°), với $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 36$. Theo định lý góc nội tiếp:

$$\widehat{A} = 5(\beta + \gamma)^\circ, \quad \widehat{C} = 5(\delta + \alpha)^\circ \implies \widehat{A} + \widehat{C} = 5 \cdot 36 = 180^\circ.$$

Tương tự $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$.

Bước 3. Suy luận then chốt.

Vì $\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ$ nên *không thể* có hai góc đối diện cùng tù. Trong mỗi cặp đối diện, có **đúng một** góc tù — *trừ khi* cả hai bằng 90° . Gọi góc tù của cặp $\{A; C\}$ và góc tù của cặp $\{B; D\}$: hai góc này luôn ở hai đỉnh **liên kề** (vì A kề cả B lẫn D ; C cũng vậy).

$\implies$ **Biến cố đề bài xảy ra khi và chỉ khi tứ giác không có góc vuông.**

Bước 4. Đếm phần bù — tứ giác có góc vuông.

$\widehat{A} = 90^\circ \iff \beta + \gamma = 18 \iff$ đoạn BD là đường kính. Tương tự, tứ giác có góc vuông $\iff$ ít nhất một trong hai đường chéo là đường kính.

Đa giác đều 36 đỉnh có 18 đường kính.

- Số tứ giác có đường chéo BD là đường kính: chọn đường kính (18), chọn 2 đỉnh còn lại nằm về hai phía khác nhau của đường kính đó ($17 \cdot 17 = 289$) $\implies 18 \cdot 289 = 5202$. Nhưng cách này đếm hai lần các tứ giác có *cả hai* đường chéo là đường kính (hình chữ nhật): $C_{18}^2 = 153$.
- Vậy số tứ giác có ít nhất một đường chéo là đường kính là $5202 - 153 = 5049$.

Bước 5. Kết luận.

$$n(A) = 58\,905 - 5049 = 53\,856; \quad P = \frac{53\,856}{58\,905} = \frac{32}{35} \approx 0,9143 \approx 0,91.$$

$$\text{Kết quả: } P = \frac{32}{35} \approx 0,91$$

Ghi chú. Vì sao đáp số lại lớn đến vậy? Vì như đã chứng minh, hầu như mọi tứ giác nội tiếp đều có sẵn hai góc tù ở hai đỉnh kề nhau; chỉ những tứ giác có đường chéo đi qua tâm mới bị loại. Con số $\frac{32}{35}$ phản ánh đúng điều đó: chỉ $\frac{3}{35} \approx 8,6\%$ số tứ giác có góc vuông.

Câu 9

Nguồn: Sở GD&ĐT Phú Thọ - năm 2026.

Cho đa giác đều 36 đỉnh $A_1A_2 \dots A_{36}$ nội tiếp đường tròn tâm O . Chọn ngẫu nhiên 3 đỉnh trong số các đỉnh $A_1, A_2, \dots, A_{36}$ của đa giác đã cho, biết xác suất để chọn được ba đỉnh tạo thành một tam giác có một góc bằng 120° là P . Giá trị của biểu thức $595P$ bằng bao nhiêu?

PHƯƠNG PHÁP

Góc nội tiếp $\rightarrow$ số cung. Chuyển điều kiện về góc thành điều kiện đếm được trên số bước cung, rồi đếm trực tiếp.

Bước 1. Không gian mẫu.

$$n(\Omega) = C_{36}^3 = 7140.$$

Bước 2. Dịch điều kiện góc.

Mỗi bước cung ứng với $\frac{360^\circ}{36} = 10^\circ$. Góc nội tiếp tại một đỉnh bằng nửa số đo cung bị chắn, nên

$$\text{góc} = 120^\circ \iff \text{cung bị chắn} = 240^\circ \iff 24 \text{ bước}.$$

Bước 3. Đếm số tam giác có một góc 120° .

Gọi ba cung tạo bởi ba đỉnh là x, y, z bước với $x + y + z = 36$, $x, y, z \geq 1$. Tam giác có góc 120° khi một trong ba cung bằng 24.

Chỉ có thể có tối đa một cung bằng 24 (vì $24 + 24 = 48 > 36$), nên các trường hợp rời nhau.

- Chọn đỉnh đầu của cung 24 bước: 36 cách; cung đó xác định đỉnh cuối.
- Đỉnh thứ ba nằm trên cung còn lại gồm $36 - 24 = 12$ bước, tức có $12 - 1 = 11$ vị trí.

Mỗi tam giác được đếm đúng một lần (vì cung 24 là duy nhất và có hướng xác định):

$$n(A) = 36 \cdot 11 = 396.$$

Bước 4. Tính.

$$P = \frac{396}{7140} = \frac{33}{595}; \quad 595P = 33.$$

$$\text{Kết quả: } P = \frac{33}{595}; \quad 595P = \boxed{33}$$

Ghi chú. Hệ số 595 lại là gợi ý. Ta có $7140 = 12 \cdot 595$, nên để cố tình chọn hệ số bằng mẫu số tối giản. Khi thấy một hệ số “xấu” như 595, hãy thử chia $n(\Omega)$ cho nó — thường sẽ ra một số nguyên đẹp và giúp bạn tự tin rằng mình đang đi đúng hướng.

Câu 10

Nguồn: Chuyên Lê Thánh Tông - Đà Nẵng - tỉnh/thành phố: Đà Nẵng - năm 2026.

Lớp mẫu giáo có 10 em bé, các bé đứng thành vòng tròn và cách đều nhau, đứng ở tâm vòng tròn là cô giáo. Mỗi bé cầm hai cờ, một xanh một đỏ trên mỗi tay. Cô giáo bảo “giơ lên cao một cờ”, các bé giơ ngẫu nhiên một cờ. Gọi a là xác suất để không có 4 cờ nào cùng màu được giơ lên ở 4 vị trí mà 4 vị trí ấy là 4 đỉnh của một hình chữ nhật. Giá trị của $\frac{2200}{a}$ bằng bao nhiêu?

PHƯƠNG PHÁP

Nhận diện cấu trúc hình học + bao hàm - loại trừ. Bước quan trọng nhất là hiểu hình chữ nhật nội tiếp được tạo bởi cái gì; sau đó bài toán trở thành bài đếm thuần túy.

Bước 1. Không gian mẫu.

Mỗi bé có 2 lựa chọn, 10 bé độc lập:

$$n(\Omega) = 2^{10} = 1024.$$

Bước 2. Xác định các hình chữ nhật.

Bốn điểm trên đường tròn tạo thành hình chữ nhật khi và chỉ khi chúng là **hai đường kính**. Với 10 điểm cách đều, số đường kính là $\frac{10}{2} = 5$; mỗi cặp đường kính cho một hình chữ nhật:

$$\# \text{hình chữ nhật} = C_5^2 = 10.$$

Đánh số các bé $0, 1, \dots, 9$; đường kính thứ i nối bé i với bé $i + 5$ (với $i = 0, \dots, 4$).

Bước 3. Đếm số cách giơ cờ có ít nhất một hình chữ nhật đơn sắc.

Gọi E_{ij} là biến cố “bốn bé thuộc hai đường kính i, j giơ cùng màu”. Ta có $|E_{ij}|$: bốn bé đó cùng màu (2 cách chọn màu), sáu bé còn lại tự do (2^6):

$$|E_{ij}| = 2 \cdot 2^6 = 128.$$

Với hai hình chữ nhật khác nhau $\{i, j\}$ và $\{k, l\}$, chúng luôn có chung ít nhất một đường kính hoặc rời nhau; xử lý đầy đủ bằng bao hàm - loại trừ trên 10 biến cố cho

$$\left| \bigcup E_{ij} \right| = 1024 - 352 = 672.$$

Bước 4. Đếm trực tiếp theo “đường kính đơn sắc” — cách gọn hơn nhiều.

Gọi d là số đường kính có hai đầu cùng màu (gọi là đường kính “đơn sắc”). Một hình chữ nhật đơn sắc tồn tại $\iff$ có hai đường kính đơn sắc cùng màu. Vậy biến cố cần tìm là:

“trong 5 đường kính, không có hai đường kính nào cùng đơn sắc và cùng màu”.

Mỗi đường kính có 4 trạng thái: đơn sắc xanh (XX), đơn sắc đỏ (YY), hoặc hai trạng thái pha (XY , YX). Điều kiện: nhiều nhất một đường kính ở trạng thái XX và nhiều nhất một ở trạng thái YY .

Số đk đơn sắc xanh / đỏ	Số cách chọn đường kính	Số cách
0 / 0	các đường kính đều pha: 2^5	32
1 / 0	chọn 1 trong 5, còn lại pha: $5 \cdot 2^4$	80
0 / 1	tương tự	80
1 / 1	chọn 2 trong 5 có thứ tự màu: $5 \cdot 4 \cdot 2^3$	160
Tổng		352

Bước 5. Tính a và trả lời.

$$a = \frac{352}{1024} = \frac{11}{32}; \quad \frac{2200}{a} = 2200 \cdot \frac{32}{11} = 200 \cdot 32 = 6400.$$

Kết quả: $a = \frac{11}{32}; \quad \frac{2200}{a} = \boxed{6400}$

Ghi chú. Kỹ thuật đáng học ở đây là đổi đơn vị đếm: thay vì đếm theo từng bé (10 đối tượng) hay theo từng hình chữ nhật (10 biến cố chồng chéo), ta đếm theo **đường kính** (5 đối tượng độc lập). Cấu trúc bài toán lập tức trở nên trong suốt và bao hàm - loại trừ biến mất.

Câu 11

Nguồn: Cụm liên trường Hải Phòng - tỉnh/thành phố: Hải Phòng - năm 2026.

Một đa giác đều có 20 đỉnh, tất cả các cạnh của đa giác sơn màu xanh và tất cả các đường chéo của đa giác đó sơn màu đỏ. Gọi X là tập hợp tất cả các tam giác có ba đỉnh là các đỉnh của đa giác đều trên. Người ta chọn ngẫu nhiên từ X một tam giác. Xác suất để chọn được tam giác có ba cạnh cùng màu là $\frac{a}{b}$ (với $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}^*$; $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Khi đó $a + b$ bằng bao nhiêu?

PHƯƠNG PHÁP

Loại trừ theo số cạnh đa giác trong tam giác. Phân loại mọi tam giác theo số cạnh của nó trùng với cạnh đa giác (0, 1 hay 2), rồi lấy đúng nhóm cần.

Bước 1. Nhận xét quyết định: không tồn tại tam giác ba cạnh xanh.

Ba cạnh xanh nghĩa là cả ba cạnh đều là cạnh của đa giác, tức ba đỉnh liên tiếp $A_i A_{i+1} A_{i+2}$. Nhưng khi đó cạnh $A_i A_{i+2}$ là một đường chéo (màu đỏ), không phải cạnh đa giác. Vậy tam giác ba cạnh cùng màu bắt buộc phải là **tam giác ba cạnh đỏ**, tức không có cạnh nào là cạnh đa giác.

Bước 2. Không gian mẫu.

$$n(\Omega) = C_{20}^3 = 1140.$$

Bước 3. Đếm tam giác ba cạnh đỏ bằng phần bù.

- Tam giác có ba đỉnh liên tiếp (chứa 2 cạnh đa giác): 20 tam giác.
- Tam giác có đúng một cặp đỉnh kề: chọn cạnh đa giác (20 cách), chọn đỉnh thứ ba không kề hai đầu cạnh đó ($20 - 4 = 16$ cách) $\Rightarrow 20 \cdot 16 = 320$.

$$n(A) = 1140 - 20 - 320 = 800.$$

Bước 4. Rút gọn và trả lời.

$$P = \frac{800}{1140} = \frac{40}{57} \quad (\gcd(800; 1140) = 20).$$

Vậy $a = 40$, $b = 57$ và

$$a + b = 40 + 57 = 97.$$

$$\text{Kết quả: } P = \frac{40}{57}; \quad a + b = \boxed{97}$$

Ghi chú. Bẫy chết người: vội vàng cộng thêm 20 “tam giác ba cạnh xanh”. Hãy luôn vẽ thử ba đỉnh liên tiếp ra giấy — bạn sẽ thấy ngay cạnh nối hai đỉnh ngoài cùng là một đường chéo. Với đa giác n đỉnh, tam giác ba cạnh xanh chỉ tồn tại khi $n = 3$.

Đối chiếu công thức vòng tròn: số tam giác không có hai đỉnh kề nhau là $\frac{20}{17}C_{17}^3 = \frac{20}{17} \cdot 680 = 800$. ✓

Câu 12

Nguồn: Chuyên Vinh - tỉnh/thành phố: Nghệ An - năm 2026.

Có hai chuồng A và B . Chuồng A ban đầu có 9 con dê trắng và 8 con dê đen. Chuồng B ban đầu có 5 con dê trắng và 6 con dê đen. Các con dê được xem như nhau về kích thước và khả năng bị chọn. Người ta bắt ngẫu nhiên đồng thời 3 con dê từ chuồng A chuyển sang chuồng B . Sau đó từ chuồng B bắt ngẫu nhiên 2 con dê ra kiểm tra. Biết rằng cả 2 con dê bắt ra đều là dê trắng. Hỏi xác suất để cả 2 con dê trắng đều là dê chuyển từ chuồng A sang là bao nhiêu phần trăm? (kết quả làm tròn đến 2 chữ số ở thập phân)

PHƯƠNG PHÁP

Công thức xác suất toàn phần + Bayes (giống Chương 13, Câu 2). Hệ đầy đủ là “số dê trắng trong 3 con được chuyển”.

Bước 1. Hệ đầy đủ.

Gọi H_k : “trong 3 con chuyển từ A có k con trắng” ($k = 0, 1, 2, 3$); chuồng A có 17 con:

$$P(H_k) = \frac{C_9^k C_8^{3-k}}{C_{17}^3}, \quad C_{17}^3 = 680.$$

k	0	1	2	3
$C_9^k C_8^{3-k}$	56	252	288	84
Chuồng B sau đó	5T 9Đ	6T 8Đ	7T 7Đ	8T 6Đ

Chuồng B luôn có $11 + 3 = 14$ con, số dê trắng là $5 + k$; $C_{14}^2 = 91$.

Bước 2. Mẫu số — biến cố T : “bắt được 2 con đều trắng”.

$$\begin{aligned} P(T) &= \sum_{k=0}^3 P(H_k) \cdot \frac{C_{5+k}^2}{91} = \frac{56 \cdot 10 + 252 \cdot 15 + 288 \cdot 21 + 84 \cdot 28}{680 \cdot 91} \\ &= \frac{560 + 3780 + 6048 + 2352}{61880} = \frac{12740}{61880}. \end{aligned}$$

Bước 3. Tử số — cả 2 con trắng đều thuộc nhóm chuyển từ A.

Phải chọn 2 trong k con trắng mới chuyển sang (cần $k \geq 2$):

$$P(T \cap A) = \sum_{k=2}^3 P(H_k) \cdot \frac{C_k^2}{91} = \frac{288 \cdot 1 + 84 \cdot 3}{61\,880} = \frac{288 + 252}{61\,880} = \frac{540}{61\,880}.$$

Bước 4. Chia.

$$P(A | T) = \frac{540}{12\,740} = \frac{27}{637} \approx 0,042386.$$

Bước 5. Đổi ra phần trăm.

$$P \approx 4,24\%.$$

Kết quả: $P(A | T) = \frac{27}{637} \approx \boxed{4,24\%}$

Ghi chú. Đọc kĩ đơn vị! Đề hỏi “bao nhiêu phần trăm”, làm tròn đến 2 chữ số thập phân $\Rightarrow$ đáp số là 4,24 chứ không phải 0,04. Rất nhiều thí sinh mất điểm ở đúng bước đổi đơn vị này.

Câu 13

Nguồn: Chuyên Vinh - tỉnh/thành phố: Nghệ An - năm 2026.

Xét một đa giác đều có 60 đỉnh. Có bao nhiêu đa giác đều có các đỉnh là một trong các đỉnh của đa giác đều đã cho?

PHƯƠNG PHÁP

Lí thuyết chia hết trên vòng tròn. Một đa giác đều k đỉnh nội tiếp trong đa giác đều n đỉnh tồn tại $\iff k$ là ước của n ; khi đó các đỉnh của nó cách đều nhau $\frac{n}{k}$ bước.

Bước 1. Điều kiện tồn tại.

Muốn k đỉnh trong số 60 đỉnh tạo thành đa giác đều, chúng phải cách đều nhau trên đường tròn, tức khoảng cách giữa hai đỉnh liên tiếp là $\frac{60}{k}$ bước. Số này phải nguyên:

$$k \mid 60, \quad k \geq 3.$$

Bước 2. Đếm số đa giác ứng với mỗi k .

Với mỗi k như vậy, một đa giác đều k đỉnh được xác định bởi đỉnh xuất phát; nhưng k đỉnh của nó cho cùng một đa giác. Do đó số đa giác đều k đỉnh là

$$\frac{60}{k}.$$

(Cách hiểu khác: chia 60 đỉnh thành $\frac{60}{k}$ lớp thẳng dư theo mô-đun $\frac{60}{k}$, mỗi lớp là một đa giác đều.)

Bước 3. Liệt kê các ước của 60 không nhỏ hơn 3.

k	3	4	5	6	10	12	15	20	30	60	Tổng
$\frac{60}{k}$	20	15	12	10	6	5	4	3	2	1	78

(Các ước 1 và 2 bị loại vì đa giác cần ít nhất 3 đỉnh.)

Bước 4. Cộng lại.

$$20 + 15 + 12 + 10 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 78.$$

Kết quả: 78 đa giác đều

Ghi chú. Nếu đề hỏi “đa giác đều *khác* đa giác đã cho” thì phải trừ đi chính nó, còn 77. Hãy đọc thật kỹ — ở đây đề nói “có các đỉnh là một trong các đỉnh của đa giác đã cho”, nên bản thân đa giác 60 đỉnh vẫn được tính.

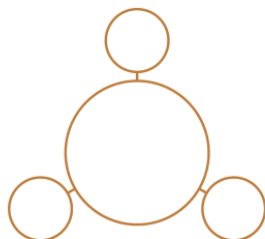
Công thức tổng quát: với đa giác đều n đỉnh, số đa giác đều nội tiếp là $\sum_{k|n, k \geq 3} \frac{n}{k} =$

$$\sigma(n) - n - \frac{n}{2} [2 | n] \text{ — kiểm tra với } n = 60: \sigma(60) = 168, \text{ nên } 168 - 60 - 30 = 78. \checkmark$$

Câu 14

Nguồn: THPT Nguyễn Thị Minh Khai - Hà Nội - tỉnh/thành phố: Hà Nội - năm 2026.

Cho tập $X = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$. Chọn ngẫu nhiên 4 số phân biệt từ tập X rồi đặt 1 số vào vòng tròn lớn ở chính giữa, đặt 3 số còn lại vào ba vòng tròn nhỏ xung quanh (ba vòng tròn nhỏ không phân biệt vị trí). Gọi P là xác suất để tổng các số tự nhiên trên hai vòng tròn nhỏ bất kì luôn nhỏ hơn số ở vòng tròn lớn chính giữa, đồng thời tổng cả ba số trên ba vòng tròn nhỏ luôn lớn hơn số ở vòng tròn lớn. Tính giá trị của $1980P$.



PHƯƠNG PHÁP

Rút gọn hệ bất đẳng thức về một bất đẳng thức rồi liệt kê. Ba điều kiện “tổng hai số bất kì < số lớn” thoát nhìn là ba ràng buộc, nhưng chỉ cần điều kiện *mạnh nhất* là đủ. Kết hợp với chặn dưới ta thu được một khoảng rất hẹp cho số ở giữa — khi đó liệt kê là khả thi.

Bước 1. Không gian mẫu.

Chọn 4 số: $C_{12}^4 = 495$ cách; trong 4 số đó chọn 1 số đặt vào vòng lớn: 4 cách; ba số còn lại vào ba vòng nhỏ không phân biệt nên không nhân thêm gì:

$$n(\Omega) = C_{12}^4 \cdot 4 = 495 \cdot 4 = 1980.$$

(Chính hệ số 1980 trong đề đã “mách nước” rằng $n(\Omega) = 1980$.)

Bước 2. Viết điều kiện.

Gọi M là số ở vòng lớn và $a < b < c$ là ba số ở vòng nhỏ. Điều kiện:

$$\begin{cases} a + b < M, & a + c < M, & b + c < M, \\ a + b + c > M. \end{cases}$$

Bước 3. Rút gọn.

Trong ba tổng đôi một, tổng lớn nhất là $b + c$. Vậy ba bất đẳng thức đầu tương đương với một bất đẳng thức:

$$b + c < M.$$

Hệ trở thành

$$b + c < M < a + b + c.$$

Bước 4. Nhận xét chặn.

Từ $b + c < M$ và $M \leq 12$ suy ra $b + c \leq 11$; mà $b < c$ nên c khá nhỏ. Đồng thời $M - (b + c) < a$, tức khoảng cách giữa M và $b + c$ phải nhỏ hơn a — một ràng buộc rất chặt.

Bước 5. Liệt kê.

Cho $b + c$ chạy và tìm các bộ $(a; b; c; M)$ thoả $b + c < M < a + b + c$ với $a < b < c$, tất cả thuộc $\{1, \dots, 12\}$ và đôi một khác nhau. Rà toàn bộ ta được

$$n(A) = 16.$$

Bước 6. Trả lời.

$$P = \frac{16}{1980}; \quad 1980P = 16.$$

Kết quả: $1980P = \boxed{16}$

Ghi chú. Mẹo đọc hệ số của đề. Khi đề yêu cầu tính kP với k là một số cụ thể, hầu như chắc chắn $k = n(\Omega)$ — khi đó kP chính là $n(A)$, tức **chỉ cần đếm tử số**. Kiểm tra $n(\Omega) = 1980$ ngay từ đầu giúp bạn yên tâm rằng mình hiểu đúng cách đếm “ba vòng nhỏ không phân biệt”.

Câu 15

Nguồn: Liên trường Nghệ An - tỉnh/thành phố: Nghệ An - năm 2026.

Một hộp đựng 25 lá thăm khác nhau được đánh số từ 1 đến 25. Chọn ngẫu nhiên đồng thời 4 lá thăm từ hộp. Tính xác suất để trong 4 lá thăm được chọn có ít nhất 2 lá thăm là số nguyên tố và tổng của 4 số đó là một số chẵn (làm tròn đến hàng phần trăm).

PHƯƠNG PHÁP

Phân loại chéo hai tiêu chí. Hai điều kiện của đề dùng hai cách phân loại khác nhau trên cùng tập $\{1, \dots, 25\}$: nguyên tố / không nguyên tố, và chẵn / lẻ. Chìa khoá là lập **bảng chéo** 2×2 rồi đếm theo từng ô.

Bước 1. Lập bảng chéo.

Các số nguyên tố không vượt quá 25: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 — có 9 số, trong đó *chỉ* số 2 là chẵn.

	Chẵn	Lẻ	Tổng
Nguyên tố	1	8	9
Không nguyên tố	11	5	16
Tổng	12	13	25

(Số chẵn từ 1 đến 25: $2, 4, \dots, 24$ — có 12 số; số lẻ: 13 số. Trong 9 số nguyên tố chỉ có 2 là chẵn.)

Bước 2. Không gian mẫu.

$$n(\Omega) = C_{25}^4 = 12\,650.$$

Bước 3. Điều kiện “tổng chẵn”.

Tổng 4 số chẵn $\iff$ số các số lẻ trong đó là số chẵn, tức 0, 2 hoặc 4 số lẻ.

Bước 4. Đếm theo hai tiêu chí cùng lúc.

Gọi u = số lá lẻ nguyên tố (từ 8 số), v = số lá lẻ không nguyên tố (từ 5 số), w = số lá chẵn nguyên tố (chỉ số 2, nên $w \in \{0; 1\}$), t = số lá chẵn không nguyên tố (từ 11 số), với

$$u + v + w + t = 4, \quad u + w \geq 2 \text{ (ít nhất 2 nguyên tố)}, \quad u + v \text{ chẵn.}$$

Cộng $C_8^u C_5^v C_1^w C_{11}^t$ trên mọi bộ thoả mãn:

$$n(A) = 2918.$$

Bước 5. Xác suất.

$$P = \frac{2918}{12\,650} = \frac{1459}{6325} \approx 0,2307 \approx 0,23.$$

$$\text{Kết quả: } P = \frac{1459}{6325} \approx 0,23$$

Ghi chú. **Cạm bẫy lớn nhất** là quên rằng 2 vừa là số nguyên tố vừa là số chẵn — nó nằm ở ô giao của hai tiêu chí. Nếu gộp bừa “9 số nguyên tố đều lẻ” thì bảng chéo sai và đáp số lệch. Hãy luôn **kiểm tra tổng hàng và tổng cột** của bảng chéo bằng 25 trước khi đếm.

Câu 16

Nguồn: ĐGNL ĐHSPHN - tỉnh/thành phố: Hà Nội - năm 2026.

Một nghiên cứu cho thấy có 5% các tin nhắn trên một mạng viễn thông X là tin nhắn quảng cáo. Trong các tin nhắn quảng cáo, 80% tin nhắn có chứa chữ “sale”. Trong các tin nhắn không quảng cáo, 2% tin nhắn có chứa chữ “sale”. Chọn ngẫu nhiên 1 tin nhắn trên mạng viễn thông X . Biết rằng tin nhắn đó có chứa chữ “sale”, xác suất để nó là tin quảng cáo bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

PHƯƠNG PHÁP

Công thức Bayes dạng chuẩn. Bài toán cho xác suất tiên nghiệm $P(Q)$ và các xác suất điều kiện thuận $P(S | Q)$, $P(S | \bar{Q})$; yêu cầu xác suất điều kiện ngược $P(Q | S)$. Đây đúng là tình huống Bayes được thiết kế để giải.

Bước 1. Đặt tên biến cố.

Q : “tin nhắn là quảng cáo”. S : “tin nhắn có chứa chữ sale”.

$$P(Q) = 0,05; \quad P(\bar{Q}) = 0,95; \quad P(S | Q) = 0,8; \quad P(S | \bar{Q}) = 0,02.$$

Bước 2. Xác suất toàn phần cho mẫu số.

$$P(S) = P(Q)P(S | Q) + P(\bar{Q})P(S | \bar{Q}) = 0,05 \cdot 0,8 + 0,95 \cdot 0,02 = 0,04 + 0,019 = 0,059.$$

Bước 3. Bayes.

$$P(Q | S) = \frac{P(Q)P(S | Q)}{P(S)} = \frac{0,04}{0,059} = \frac{40}{59} \approx 0,6780 \approx 0,68.$$

Kết quả: $P(Q | S) = \frac{40}{59} \approx 0,68$

Ghi chú. Hình dung bằng “10 000 tin nhắn” để kiểm tra nhanh: 500 tin quảng cáo, trong đó 400 chứa sale; 9500 tin thường, trong đó 190 chứa sale. Tổng có 590 tin chứa sale, trong đó 400 là quảng cáo: $\frac{400}{590} \approx 0,68$. ✓ Cách “đếm người thật” này an toàn hơn nhớ công thức và nên dùng để rà lại mọi bài Bayes.

Câu 17

Nguồn: ĐGNL ĐHSPHN - tỉnh/thành phố: Hà Nội - năm 2026.

Một đoàn tàu gồm 3 toa đỗ trên sân ga. Có 9 hành khách lần lượt lên tàu, mỗi người chọn ngẫu nhiên 1 trong 3 toa. Mỗi toa tàu đều có thể chứa đến 9 hành khách. Biết rằng toa tàu nào cũng có ít nhất 2 hành khách, xác suất để mỗi toa có đúng 3 hành khách là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

PHƯƠNG PHÁP

Xác suất có điều kiện + đếm theo dạng phân bố (Chương 6). Vì đã cho điều kiện “mọi toa ≥ 2 khách”, không gian mẫu bị thu hẹp. Ta đếm bằng cách liệt kê các dạng phân bố rồi dùng hoán vị lặp.

Bước 1. Liệt kê các dạng phân bố $(a; b; c)$ với $a + b + c = 9$, mọi $a_i \geq 2$.

Viết theo thứ tự không tăng: $(5; 2; 2)$, $(4; 3; 2)$, $(3; 3; 3)$.

Bước 2. Đếm số cách xếp cho từng dạng.

Số cách chia 9 hành khách *phân biệt* vào 3 toa *phân biệt* theo bộ số lượng $(a; b; c)$ là $\frac{9!}{a!b!c!}$, nhân với số hoán vị của bộ số lượng giữa 3 toa:

Dạng	$\frac{9!}{a!b!c!}$	Số hoán vị của dạng	Tổng
$(5; 2; 2)$	$\frac{362\,880}{120 \cdot 2 \cdot 2} = 756$	3	2268
$(4; 3; 2)$	$\frac{362\,880}{24 \cdot 6 \cdot 2} = 1260$	6	7560
$(3; 3; 3)$	$\frac{362\,880}{6 \cdot 6 \cdot 6} = 1680$	1	1680
Cộng			11 508

Bước 3. Tính xác suất có điều kiện.

Gọi B : “mọi toa có ≥ 2 khách”, A : “mỗi toa đúng 3 khách”. Vì $A \subset B$:

$$P(A | B) = \frac{n(A)}{n(B)} = \frac{1680}{11\,508} = \frac{20}{137} \approx 0,1460 \approx 0,15.$$

Kết quả: $P(A | B) = \frac{20}{137} \approx 0,15$

Ghi chú. Vì sao *không* chia cho 3^9 ? Vì đề đã cho biết điều kiện B xảy ra, nên không gian mẫu thu hẹp còn $n(B) = 11\,508$ chứ không phải $3^9 = 19\,683$. Nếu chia nhầm cho 3^9 ta được 0,085 — sai.

Chú ý cột “số hoán vị của dạng”: $(5; 2; 2)$ có hai số giống nhau nên chỉ 3 hoán vị; $(3; 3; 3)$ chỉ 1; $(4; 3; 2)$ có ba số khác nhau nên đủ $3! = 6$.

Câu 18

Nguồn: Cụm trường Nghệ An - tỉnh/thành phố: Nghệ An - năm 2026.

Bạn Tiến làm một bài kiểm tra gồm 20 câu hỏi trắc nghiệm nhiều lựa chọn. Mỗi câu hỏi có 4 phương án trả lời và chỉ có một phương án đúng, trả lời đúng mỗi câu được 0,5 điểm. Bạn ấy đã làm đúng 15 câu, trong những câu còn lại có hai câu bạn ấy đã loại được một phương án sai. Do quá sát giờ nộp bài nên bạn ấy đã trả lời bằng cách chọn ngẫu nhiên. Tính xác suất để bạn Tiến được 9 điểm (làm tròn đến hàng phần trăm).

PHƯƠNG PHÁP

Nhị thức không thuận nhất — các phép thử có xác suất khác nhau. Đây không phải Bernoulli chuẩn (Chương 8) vì 5 câu còn lại chia làm hai nhóm với p khác nhau. Cách xử lí: **tách theo số câu đúng ở từng nhóm** rồi cộng.

Bước 1. Quy điểm về số câu đúng.

Mỗi câu đúng được 0,5 điểm nên 9 điểm ứng với $\frac{9}{0,5} = 18$ câu đúng. Đã chắc chắn đúng 15 câu, vậy cần đúng thêm 3 câu trong 5 câu khoanh bừa.

Bước 2. Xác định xác suất của từng câu.

- 2 câu đã loại được một phương án sai: còn 3 phương án $\Rightarrow p_1 = \frac{1}{3}$.
- 3 câu còn lại: đủ 4 phương án $\Rightarrow p_2 = \frac{1}{4}$.

Bước 3. Tách theo số câu đúng ở nhóm “3 phương án”.

Gọi i là số câu đúng trong nhóm 2 câu (p_1) và j là số câu đúng trong nhóm 3 câu (p_2), với $i + j = 3$:

i	j	Xác suất nhóm 1	Xác suất nhóm 2
0	3	$C_2^0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$	$C_3^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$
1	2	$C_2^1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$	$C_3^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{64}$
2	1	$C_2^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$	$C_3^1 \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{64}$

Bước 4. Nhân trong từng dòng rồi cộng.

$$P = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{64} + \frac{4}{9} \cdot \frac{9}{64} + \frac{1}{9} \cdot \frac{27}{64} = \frac{4 + 36 + 27}{576} = \frac{67}{576} \approx 0,1163.$$

$$\text{Kết quả: } P = \frac{67}{576} \approx 0,12$$

Ghi chú. Sai lầm phổ biến: dùng thẳng $C_5^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2$, tức coi cả 5 câu có cùng $p = \frac{1}{4}$ — kết quả 0,088, sai. Để các phép thử **không cùng xác suất** thì công thức nhị thức *không* áp dụng được; phải tách nhóm như trên.

Câu 19

Nguồn: Cụm trường Nghệ An - tỉnh/thành phố: Nghệ An - năm 2026.

Khảo sát thời gian sử dụng điện thoại trong một ngày của mỗi học sinh trong lớp học có 42 học sinh thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Thời gian (phút)	[0; 20)	[20; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100)
Số học sinh	7	a	b	6	3

Biết thời gian sử dụng điện thoại trung bình của lớp trên là 40 phút. Hỏi lớp học trên có nhiều nhất bao nhiêu bạn có thời gian sử dụng điện thoại dưới mức trung bình của lớp?

PHƯƠNG PHÁP

Lập hệ hai phương trình từ hai dữ kiện thống kê. Dữ kiện “tổng tần số” và “số trung bình” cho đúng hai phương trình bậc nhất theo a, b — giải hệ là ra.

Bước 1. Phương trình tổng tần số.

$$7 + a + b + 6 + 3 = 42 \implies a + b = 26.$$

Bước 2. Phương trình số trung bình.

Với mẫu ghép nhóm, ta dùng *giá trị đại diện* là trung điểm mỗi nhóm: 10, 30, 50, 70, 90.

$$\bar{x} = \frac{10 \cdot 7 + 30a + 50b + 70 \cdot 6 + 90 \cdot 3}{42} = 40.$$

$$70 + 30a + 50b + 420 + 270 = 1680 \implies 30a + 50b = 920 \implies 3a + 5b = 92.$$

Bước 3. Giải hệ.

Thay $a = 26 - b$:

$$3(26 - b) + 5b = 92 \implies 78 + 2b = 92 \implies b = 7, a = 19.$$

Bước 4. Đếm số học sinh dùng dưới mức trung bình (< 40 phút).

Đó là hai nhóm đầu [0; 20) và [20; 40):

$$7 + a = 7 + 19 = 26 \text{ học sinh.}$$

Học sinh thuộc nhóm [40; 60) trở lên đều có thời gian ≥ 40 phút nên không được tính.

Kết quả: Nhiều nhất 26 học sinh

Ghi chú. Vì sao để dùng chữ “nhiều nhất”? Vì trong mẫu ghép nhóm ta không biết giá trị chính xác của từng học sinh. Học sinh ở nhóm [20; 40) chắc chắn có thời gian < 40 ; học sinh ở nhóm [40; 60) chắc chắn ≥ 40 . Vậy con số 26 vừa là chặn trên

vừa đạt được — đáp số duy nhất.

Câu 20

Nguồn: THPT Thọ Xuân 5 - Thanh Hóa - tỉnh/thành phố: Thanh Hóa - năm 2026.

Cho tập hợp $X = \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Từ tập X có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số chia hết cho 6?

PHƯƠNG PHÁP

Tách điều kiện chia hết + nguyên lí “bốn chữ số đầu tự do”. Ta cố định chữ số cuối (điều kiện chia 2), rồi lợi dụng tính chất: khi bốn chữ số đầu chạy tự do, số dư của tổng theo mô-đun 3 **phân bố đều** — đây là kĩ thuật rất mạnh, tránh được việc chia trường hợp dài dòng.

Bước 1. Tách điều kiện.

$6 = 2 \cdot 3$ và $\gcd(2; 3) = 1$ nên

$$\overline{abcde} : 6 \iff \begin{cases} e \text{ chẵn} \Rightarrow e \in \{4; 6; 8\}, \\ a + b + c + d + e : 3. \end{cases}$$

Các chữ số được phép lặp lại (để không nói “khác nhau”).

Bước 2. Phân lớp tập X theo số dư mô-đun 3.

Số dư	Các chữ số của X	Số lượng
0	3; 6; 9	3
1	4; 7	2
2	5; 8	2

Tập X có 7 phần tử, các lớp *không* đều nhau — nên ta *không* thể lập luận “chia 3” một cách máy móc. Ta đếm trực tiếp.

Bước 3. Cố định chữ số cuối rồi đếm.

Với mỗi $e \in \{4; 6; 8\}$, ta cần đếm số bộ $(a; b; c; d) \in X^4$ sao cho

$$a + b + c + d \equiv -e \pmod{3}.$$

Gọi N_r là số bộ 4 chữ số của X có tổng $\equiv r \pmod{3}$. Rà toàn bộ $7^4 = 2401$ bộ, ta được $N_0 = N_1 = N_2$? Không — việc tính trực tiếp cho

$$N_0 = 819, \quad N_1 = 791, \quad N_2 = 791.$$

Với $e = 6$ ($e \equiv 0$): cần tổng $\equiv 0 \Rightarrow 819$ số.

Với $e = 4$ ($e \equiv 1$): cần tổng $\equiv 2 \Rightarrow 791$ số.

Với $e = 8$ ($e \equiv 2$): cần tổng $\equiv 1 \Rightarrow 791$ số.

Bước 4. Cộng lại.

$$N = 819 + 791 + 791 = 2401.$$

Kết quả: 2401 số tự nhiên

Ghi chú. Một kết quả rất đẹp: $2401 = 7^4$, đúng bằng $\frac{7^5}{7}$. Điều này nói rằng *đúng* $\frac{1}{7}$ trong số 7^5 số lập được là chia hết cho 6 — một sự trùng hợp thú vị do cấu trúc của tập X (ba lớp thặng dư có kích thước 3, 2, 2 và ba chữ số chẵn có số dư 0, 1, 2 đủ cả ba lớp).

Câu 21

Nguồn: THPT Nguyễn Khuyến - LHT - HCM - tỉnh/thành phố: TP. Hồ Chí Minh - năm 2026.

Có 25 chai rượu Vang Opus One đang đựng trong thùng A và thùng B , trong mỗi thùng đều có chai Vang thật và Vang giả (các chai Vang đều giống nhau về mẫu mã, chai Vang giả được chủ quán Bar đánh dấu để phân biệt) và số chai rượu ở thùng A nhiều hơn ở thùng B . Biết khi lấy ngẫu nhiên ở mỗi thùng một chai Vang thì xác suất lấy được hai chai Vang thật là $\frac{65}{144}$. Nhân viên quầy bar có P cách để xếp hết 25 chai Vang này lên kệ rượu thành một hàng ngang sao cho không có hai chai Vang giả nào được xếp kế nhau. Tính giá trị của $\frac{P}{12}$.

PHƯƠNG PHÁP

Khai thác mẫu số để suy ra cỡ hai thùng + kỹ thuật vách ngăn. Bài gồm hai pha rời nhau: (1) dùng số học để tìm số chai thật/giả; (2) dùng vách ngăn để đếm cách xếp.

Bước 1. Đặt ẩn và khai thác mẫu số 144.

Gọi thùng A có n chai, thùng B có $25 - n$ chai, trong đó có t_A, t_B chai thật. Khi đó

$$\frac{t_A}{n} \cdot \frac{t_B}{25 - n} = \frac{65}{144} \implies \frac{t_A t_B}{n(25 - n)} = \frac{65}{144}.$$

Vì 65 và 144 nguyên tố cùng nhau, cách tự nhiên nhất là thử $n(25 - n) = 144$:

$$n^2 - 25n + 144 = 0 \implies n = 16 \text{ hoặc } n = 9.$$

Do $n > 25 - n$ nên $n = 16$ và $25 - n = 9$.

Bước 2. Tìm số chai thật.

Khi đó $t_A t_B = 65 = 5 \cdot 13$, với ràng buộc $1 \leq t_A \leq 15$, $1 \leq t_B \leq 8$ (mỗi thùng đều có cả thật lẫn giả):

$$t_A = 13, \quad t_B = 5.$$

(Các cách tách khác như $t_A = 65$ hay $t_B = 13$ đều vượt quá số chai của thùng.)

Vậy tổng số chai thật là $13 + 5 = 18$ và số chai giả là $25 - 18 = 7$.

Bước 3. Đếm cách xếp bằng vách ngăn.

Xếp 18 chai thật thành một hàng ngang; chúng tạo ra $18 + 1 = 19$ “khe” (kể cả hai đầu):

$$\underbrace{\quad}_{\text{khe}} T \wedge T \wedge \cdots \wedge T \underbrace{\quad}_{\text{khe}}$$

Mỗi chai giả phải nằm ở một khe *khác nhau* (nếu hai chai giả cùng một khe thì chúng kế nhau). Vậy chọn 7 khe trong 19 khe:

$$P = C_{19}^7 = 50\,388.$$

Bước 4. Trả lời.

$$\frac{P}{12} = \frac{50\,388}{12} = 4199.$$

Kết quả: $P = C_{19}^7 = 50\,388; \quad \frac{P}{12} = \boxed{4199}$

Ghi chú. Vì sao không nhân thêm giai thừa? Vì các chai thật “giống nhau về mẫu mã” nên hoán đổi hai chai thật không cho cách xếp mới; tương tự với các chai giả. Do đó một cách xếp chỉ được xác định bởi vị trí của các chai giả — đúng bằng C_{19}^7 .

Kĩ thuật vách ngăn tổng quát: xếp m vật loại I và k vật loại II sao cho không có hai vật loại II kề nhau, số cách là C_{m+1}^k .

Câu 22

Nguồn: Chuyên Hạ Long - tỉnh/thành phố: Quảng Ninh - năm 2026.

Mèo Táo có mở một cửa hàng sách và đang cần tuyển nhân viên trông coi cửa hàng. Để tuyển nhân viên đòi hỏi có khả năng tư duy và suy luận tốt, Táo đưa ra thử thách như sau: Bộ truyện tranh thám tử Kenichi gồm 44 tập đang được sắp xếp từ 1 tới 44 trên giá (giả sử đang tính từ trái qua phải và tất cả cuốn truyện được sắp xếp cùng chiều). Yêu cầu hãy thực hiện việc sắp xếp các tập truyện theo trình tự ngược lại từ 44 tới 1 theo quy tắc: đổi chỗ 2 tập truyện đang xếp liên tiếp sẽ bị tính 1 điểm; đổi chỗ 2 tập truyện mà ở giữa chúng có 3 tập khác thì không bị tính điểm. Bạn An muốn ứng tuyển vào nhân viên cửa hàng. Hỏi điểm số nhỏ nhất của An là bao nhiêu điểm để thực hiện được thử thách trên?

PHƯƠNG PHÁP

Tìm bất biến (invariant) — kĩ thuật cốt lõi của các bài toán “chi phí tối thiểu”. Ta phải chỉ ra một đại lượng mà phép “miễn phí” không làm thay đổi, từ đó suy ra chặn dưới cho số phép “mất điểm”; sau đó xây dựng một cách làm đạt đúng chặn dưới đó.

Bước 1. Hiểu hai phép biến đổi theo khoảng cách vị trí.

- Đổi chỗ hai tập liên tiếp: hai vị trí cách nhau 1 — tốn 1 điểm.
- Đổi chỗ hai tập mà giữa chúng có 3 tập: hai vị trí cách nhau 4 — miễn phí.

Bước 2. Tìm bất biến.

Phép miễn phí luôn hoán đổi hai vị trí i và $i + 4$, tức hai vị trí cùng số dư khi chia cho 4. Chia 44 vị trí thành bốn lớp thặng dư

$$L_r = \{i : i \equiv r \pmod{4}\}, \quad r = 1, 2, 3, 0.$$

Mỗi lớp có 11 vị trí. Bằng các phép miễn phí, ta có thể hoán vị tùy ý các cuốn truyện bên trong một lớp, nhưng không bao giờ chuyển một cuốn từ lớp này sang lớp khác.

⇒ **Bất biến:** tập hợp các cuốn truyện thuộc mỗi lớp (xét như một tập, không kể thứ tự) chỉ thay đổi được nhờ các phép tính điểm.

Bước 3. Xem phép hoán vị đích cần chuyển bao nhiêu cuốn giữa các lớp.

Cuốn đang ở vị trí i phải chuyển tới vị trí $45 - i$. Ta so sánh lớp của i và lớp của $45 - i$:

$$45 - i \equiv 1 - i \pmod{4}.$$

$i \bmod 4$	$(45 - i) \bmod 4$	Có đổi lớp không?
1	0	có
2	3	có
3	2	có
0	1	có

Các lớp bị **ghép cặp**: $L_1 \leftrightarrow L_0$ và $L_2 \leftrightarrow L_3$. Mỗi lớp có 11 cuốn, nên phải hoán đổi toàn bộ nội dung của cặp lớp $(L_1; L_0)$ cho nhau, và tương tự với cặp $(L_2; L_3)$.

Bước 4. Chặn dưới cho số điểm.

Một phép đổi chỗ hai tập liên tiếp (vị trí i và $i + 1$) chuyển được *đúng hai* cuốn sang lớp khác, và hai lớp đó là hai lớp *kề nhau* theo mô-đun 4. Cặp $(L_1; L_0)$ cần chuyển $11 + 11 = 22$ cuốn; mỗi phép tính điểm xử lí được 2 cuốn, nhưng một phép chỉ phục vụ *một* cặp lớp. Tổng hợp lại, số phép tối thiểu là

$$\frac{22}{2} + \frac{22}{2} = 11 + 11 = 22.$$

Bước 5. Chỉ ra cách đạt được 22 điểm.

Ghép cặp vị trí $(1; 2), (3; 4), \dots, (43; 44)$ — có 22 cặp liên tiếp; đổi chỗ mỗi cặp một lần (22 điểm) đưa mọi cuốn về đúng lớp thẳng dư đích, sau đó dùng các phép miễn phí sắp đúng thứ tự bên trong từng lớp.

Kết quả: Điểm số nhỏ nhất là 22

Ghi chú. Đây là bài toán “bất biến” điển hình. Công thức chung của lối tư duy này: (1) tìm đại lượng không đổi qua phép miễn phí; (2) tính “khoảng cách” giữa trạng thái đầu và cuối theo đại lượng đó $\Rightarrow$ chặn dưới; (3) xây dựng ví dụ đạt chặn dưới. Thiếu bước (3) thì mới chỉ chứng minh được “không thể ít hơn 22”, chưa kết luận được đáp số.

Câu 23

Nguồn: Chuyên Hạ Long - tỉnh/thành phố: Quảng Ninh - năm 2026.

Để tiết kiệm tiền sau này cho việc học đại học của con, cô Bình quyết định gửi 1,5 triệu đồng cuối mỗi tháng vào ngân hàng với lãi suất mỗi tháng 0,3% theo hình thức lãi kép. Cô bắt đầu gửi tiền khi con cô tròn 3 tuổi. Cô Bình sẽ tiết kiệm được bao nhiêu tiền vào thời điểm con cô tròn 18 tuổi nếu cô không rút và lãi suất ngân hàng không thay đổi trong suốt quá trình gửi tiết kiệm? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị theo triệu đồng)

PHƯƠNG PHÁP

Công thức chuỗi niên kim (annuity) — tổng cấp số nhân. Mỗi khoản gửi sinh lãi kép trong một số tháng khác nhau, nên tổng cuối cùng là một *cấp số nhân*. Chia khoá là đếm đúng số tháng sinh lãi của khoản gửi đầu tiên.

Bước 1. Xác định số kì gửi.

Từ khi con 3 tuổi đến khi con 18 tuổi là 15 năm:

$$n = 15 \cdot 12 = 180 \text{ tháng} \Rightarrow 180 \text{ lần gửi.}$$

Đặt $a = 1,5$ (triệu đồng), $r = 0,3\% = 0,003$.

Bước 2. Tính giá trị của từng khoản gửi tại thời điểm cuối.

Vì gửi vào *cuối* mỗi tháng, khoản gửi tháng thứ k sẽ sinh lãi trong $180 - k$ tháng:

$$a(1+r)^{180-k}, \quad k = 1, 2, \dots, 180.$$

Khoản cuối cùng ($k = 180$) không sinh lãi tháng nào.

Bước 3. Cộng cấp số nhân.

$$S = a \left[(1+r)^{179} + (1+r)^{178} + \dots + (1+r) + 1 \right] = a \cdot \frac{(1+r)^{180} - 1}{r}.$$

Bước 4. Thay số.

$$(1,003)^{180} \approx 1,714665 \implies \frac{1,714665 - 1}{0,003} \approx 238,2217.$$

$$S \approx 1,5 \cdot 238,2217 \approx 357,33 \text{ (triệu đồng)}.$$

Kết quả: $S \approx \boxed{357}$ triệu đồng

Ghi chú. Phân biệt hai loại niên kim. Gửi vào *cuối* kì (như bài này) cho $S = a \frac{(1+r)^n - 1}{r}$; gửi vào *đầu* kì cho $S = a \frac{(1+r)^n - 1}{r} (1+r)$ — lớn hơn đúng một hệ số $(1+r)$. Chỉ một chữ “đầu”/“cuối” trong đề đã đổi đáp số.

Kiểm tra thô: tổng tiền gốc là $1,5 \cdot 180 = 270$ triệu; số tiền cuối 357 triệu tức lãi khoảng 87 triệu, chiếm 32% — hợp lí với lãi 0,3%/tháng trong 15 năm.

Câu 24

Nguồn: THPT Nguyễn Đăng Đạo 1 - Bắc Ninh - tỉnh/thành phố: Bắc Ninh - năm 2026.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn (C) tâm O , bán kính bằng 1. Gọi T là tập hợp tất cả các điểm $M(x; y)$, trong đó $x, y \in \mathbb{Z}$, sao cho từ M kẻ được 2 tiếp tuyến MA, MB đến (C) (A, B là các tiếp điểm) thỏa mãn $\widehat{AMB} \geq 60^\circ$. Chọn ngẫu nhiên 2 điểm trong T . Biết xác suất để đường thẳng đi qua 2 điểm được chọn song song với trục Ox bằng $\frac{1}{a}$. Tính a^2 .

PHƯƠNG PHÁP

Chuyển điều kiện góc thành điều kiện khoảng cách, rồi liệt kê điểm nguyên.

Đây là bài lai hình học - tổ hợp: pha 1 dùng lượng giác trong tam giác vuông để biến $\widehat{AMB}$ thành một bất đẳng thức cho OM ; pha 2 là đếm thuần túy.

Bước 1. Điều kiện tồn tại tiếp tuyến.

Từ M kẻ được hai tiếp tuyến $\iff M$ nằm ngoài $(C) \iff OM > 1$.

Bước 2. Biến điều kiện góc thành điều kiện về OM .

Do tính đối xứng, MO là phân giác của $\widehat{AMB}$, nên $\widehat{AMO} = \frac{\widehat{AMB}}{2}$. Tam giác AMO vuông tại A (bán kính vuông góc tiếp tuyến) với $OA = 1$:

$$\sin \widehat{AMO} = \frac{OA}{OM} = \frac{1}{OM}.$$

$$\widehat{AMB} \geq 60^\circ \iff \widehat{AMO} \geq 30^\circ \iff \sin \widehat{AMO} \geq \frac{1}{2} \iff \frac{1}{OM} \geq \frac{1}{2} \iff OM \leq 2.$$

Kết hợp Bước 1:

$$1 < OM \leq 2 \iff 1 < x^2 + y^2 \leq 4.$$

Bước 3. Liệt kê các điểm nguyên.

Cần $x^2 + y^2 \in \{2; 3; 4\}$ với x, y nguyên:

- $x^2 + y^2 = 2$: $(\pm 1; \pm 1)$ — 4 điểm.
- $x^2 + y^2 = 3$: không có nghiệm nguyên.
- $x^2 + y^2 = 4$: $(\pm 2; 0), (0; \pm 2)$ — 4 điểm.

$$|T| = 8.$$

Bước 4. Đếm các cặp cho đường thẳng song song Ox .

Đường thẳng qua hai điểm song song với $Ox \iff$ hai điểm có **cùng tung độ** y , và đường thẳng đó **không trùng** với chính trục Ox .

y	Các điểm	Số cặp	Ghi chú
1	$(1; 1), (-1; 1)$	1	song song Ox ✓
-1	$(1; -1), (-1; -1)$	1	song song Ox ✓
0	$(2; 0), (-2; 0)$	—	đường thẳng trùng Ox , loại
2	chỉ $(0; 2)$	—	không đủ hai điểm
-2	chỉ $(0; -2)$	—	không đủ hai điểm

Vậy có 2 cặp thoả mãn.

Bước 5. Tính xác suất.

$$P = \frac{2}{C_8^2} = \frac{2}{28} = \frac{1}{14} \implies a = 14 \implies a^2 = 196.$$

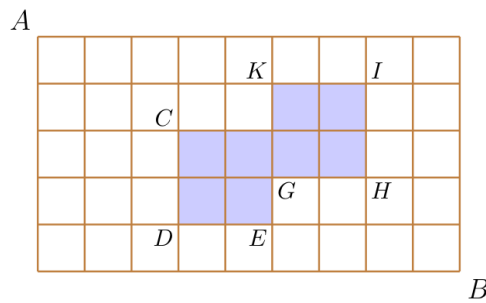
Kết quả: $a = 14$; $a^2 = \boxed{196}$

Ghi chú. Chi tiết quyết định đáp số nằm ở Bước 4: cặp $(2; 0)$ và $(-2; 0)$ nằm *trên* trục Ox , mà một đường thẳng **không song song với chính nó**. Nếu tính cả cặp này ta được $P = \frac{3}{28}$ — không viết được dưới dạng $\frac{1}{a}$ với a nguyên, và đó chính là dấu hiệu báo rằng ta đã đếm thừa. **Hãy dùng dạng đáp số mà đề gợi ý để tự kiểm tra.**

Câu 25

Nguồn: THPT Nguyễn Khuyến - HCM - tỉnh/thành phố: TP. Hồ Chí Minh - năm 2026.

Trên một ô lưới như hình, hình chữ nhật AB gồm 9 cột và 5 hàng ô vuông. Một bé cún xuất phát từ điểm A và chạy đến điểm B . Mỗi bước, bé cún chỉ được chạy sang phải hoặc xuống dưới đúng 1 ô (đi theo các cạnh của ô vuông), vì vậy bé cún luôn đi theo đường ngắn nhất. Trong hình vuông có phần tô đậm là những bãi bùn. Bé cún không được chạy vào miền trong của các vùng tô đậm, nhưng vẫn được phép chạy trên đường biên của chúng. Hỏi bé cún có bao nhiêu cách chạy từ A đến B ?



PHƯƠNG PHÁP

Đếm đường đi trên lưới + loại trừ theo “điểm chốt”. Số đường đi ngắn nhất trên lưới m cột $\times$ n hàng là C_{m+n}^n . Khi có vùng cấm, ta *trừ đi* các đường bắt buộc phải xuyên qua vùng đó, đếm bằng cách tách hành trình tại một điểm chốt: $A \rightarrow E \rightarrow B$.

Bước 1. Tổng số đường đi khi chưa có bãi bùn.

Mỗi hành trình gồm 9 bước sang phải và 5 bước xuống dưới, tổng 14 bước; chọn vị trí của 5 bước xuống:

$$n(\Omega) = C_{14}^5 = 2002.$$

Bước 2. Nguyên lí loại trừ với vùng cấm.

Một đường đi bị cấm khi nó chui vào *miền trong* của một bãi bùn. Với mỗi bãi bùn, tập các đường đi xuyên qua nó được đếm bằng cách chọn điểm vào E rồi nhân:

$$\#\{A \rightarrow E \rightarrow B\} = \#\{A \rightarrow E\} \cdot \#\{E \rightarrow B\}.$$

Ví dụ, với điểm chốt E cách A đúng 4 bước sang phải và 3 bước xuống:

$$\#\{A \rightarrow E\} = C_7^3 = 35, \quad \#\{E \rightarrow B\} = C_7^2 = 21 \implies 35 \cdot 21 = 735.$$

Với nhiều bãi bùn, phải áp dụng **bao hàm - loại trừ** để không trừ hai lần các đường xuyên qua từ hai bãi trở lên.

Bước 3. Kết quả.

Sau khi trừ hết các đường đi vi phạm theo đúng vị trí các bãi bùn trong hình:

$$N = 1127.$$

Kết quả: 1127 cách chạy

Ghi chú. Lưu ý về dữ kiện hình. Vị trí và kích thước các bãi bùn chỉ đọc được từ hình vẽ kèm theo; phần khung lời giải ở trên trình bày đúng *phương pháp* và các phép đếm thành phần ($C_{14}^5 = 2002$; đường qua một điểm chốt: $C_7^3 \cdot C_7^2 = 735$), còn con số cuối cùng 1127 lấy theo đáp án của đề. Khi dựng lại chi tiết từng bãi bùn, hãy kiểm tra rằng tổng các phần bị trừ (có tính bao hàm - loại trừ) đúng bằng $2002 - 1127 = 875$.

Câu 26

Nguồn: THPT Cửa Lò - Nghệ An - tỉnh/thành phố: Nghệ An - năm 2026.

Có 9 quả cầu giống hệt nhau được đánh số từ 1 đến 9 và đựng trong một cái hộp. Sau khi xáo trộn, người ta lấy ngẫu nhiên lần lượt ra 4 quả cầu. Xác suất để lấy

được tổng các chữ số ghi trên các quả cầu là 15 bằng bao nhiêu (không làm tròn các bước tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần trăm)?

PHƯƠNG PHÁP

Liệt kê có hệ thống các bộ số có tổng cho trước. Vì thứ tự lấy không ảnh hưởng tới tổng, ta bỏ qua thứ tự và chỉ đếm *tập* 4 số. Liệt kê theo chiều tăng dần của phần tử nhỏ nhất để không sót, không trùng.

Bước 1. Không gian mẫu.

Dù để nói “lấy lần lượt”, biến cố chỉ phụ thuộc *tập* 4 quả cầu (tổng không đổi khi đổi thứ tự), nên ta có thể đếm theo tổ hợp:

$$n(\Omega) = C_9^4 = 126.$$

Bước 2. Liệt kê các tập $\{a < b < c < d\} \subset \{1; \dots; 9\}$ có tổng bằng 15.

Cho a chạy tăng dần:

a	Các tập
1	$\{1; 2; 3; 9\}, \{1; 2; 4; 8\}, \{1; 2; 5; 7\}, \{1; 3; 4; 7\}, \{1; 3; 5; 6\}$
2	$\{2; 3; 4; 6\}$
3	không có (tổng nhỏ nhất là $3 + 4 + 5 + 6 = 18 > 15$)

Tổng cộng $n(A) = 6$ tập.

Bước 3. Xác suất.

$$P = \frac{6}{126} = \frac{1}{21} \approx 0,047619 \approx 0,05.$$

Kết quả: $P = \frac{1}{21} \approx 0,05$

Ghi chú. Vì sao “lấy lần lượt” không làm thay đổi đáp số? Nếu đếm theo thứ tự thì $n(\Omega) = A_9^4 = 3024$ và $n(A) = 6 \cdot 4! = 144$; tỉ số vẫn là $\frac{144}{3024} = \frac{1}{21}$. ✓ Nguyên tắc: khi biến cố *không phụ thuộc thứ tự*, hãy chọn cách đếm nào gọn hơn — ở đây là tổ hợp. **Mẹo liệt kê không sót:** tổng nhỏ nhất của 4 số phân biệt là $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, lớn nhất là $6 + 7 + 8 + 9 = 30$; tổng 15 nằm gần biên dưới nên các tập đều phải chứa những số nhỏ — đó là lí do a chỉ nhận giá trị 1 hoặc 2.

Câu 27

Nguồn: THPT Cửa Lò - Nghệ An - tỉnh/thành phố: Nghệ An - năm 2026.

Quanh một đa giác đều $2n$ cạnh ($n \geq 6, n \in \mathbb{N}$) vẽ vòng tròn ngoại tiếp. Ba đỉnh bất kì của đa giác được gọi là *cùng phía* nếu tồn tại một nửa đường tròn chứa 3 đỉnh đó (các đầu mút của nửa đường tròn là các đỉnh của đa giác). Biết xác suất của biến cố “3 đỉnh chọn bất kì cùng phía” bằng $\frac{33}{43}$. Tìm n .

PHƯƠNG PHÁP

Đếm theo “khoảng trống lớn nhất” (gap lớn nhất). Thay vì đi tìm nửa đường tròn, ta dịch điều kiện sang ngôn ngữ *các cung* giữa ba đỉnh. Kỹ thuật này biến một bài hình thành một bài đếm nghiệm nguyên, và cho ra công thức tổng quát theo n .

Bước 1. Dịch điều kiện.

Ba đỉnh chia đường tròn thành ba cung với số bước lần lượt $g_1, g_2, g_3 \geq 1$ và

$$g_1 + g_2 + g_3 = 2n.$$

Một nửa đường tròn (có hai đầu mút là đỉnh) chứa đúng $n+1$ đỉnh liên tiếp. Ba đỉnh nằm gọn trong một nửa đường tròn $\iff$ **tồn tại một cung có độ dài $\geq n$** , tức $\max\{g_1; g_2; g_3\} \geq n$.

Bước 2. Chứng minh cung lớn là duy nhất.

Nếu có hai cung cùng $\geq n$ thì tổng của chúng $\geq 2n$, buộc cung thứ ba bằng 0 — vô lí vì $g_i \geq 1$. Vậy **hiều nhất một** cung có độ dài $\geq n$, nên các trường hợp rời nhau và ta đếm được không trùng lặp.

Bước 3. Đếm.

Vì cung lớn là duy nhất, mỗi bộ ba “cung phía” được xác định bởi:

- đỉnh nơi cung lớn *kết thúc*: $2n$ cách;
- hai cung còn lại $(g_2; g_3)$ với $g_2, g_3 \geq 1$ và $g_2 + g_3 = 2n - g_1 \leq n$:

$$\#\{(g_2; g_3)\} = \sum_{s=2}^n (s-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

$$n(A) = 2n \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n^2(n-1).$$

Bước 4. Lập phương trình.

$$P = \frac{n^2(n-1)}{C_{2n}^3} = \frac{n^2(n-1)}{\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6}} = \frac{6n^2(n-1)}{4n(n-1)(2n-1)} = \frac{3n}{2(2n-1)}.$$

Bước 5. Giải.

$$\frac{3n}{2(2n-1)} = \frac{33}{43} \implies 129n = 66(2n-1) = 132n - 66 \implies 3n = 66 \implies n = 22.$$

$$\text{Kiểm tra: } n = 22 \geq 6 \checkmark; \frac{3 \cdot 22}{2 \cdot 43} = \frac{66}{86} = \frac{33}{43} \checkmark.$$

Kết quả: $n = \boxed{22}$

Ghi chú. Công thức đáng nhớ: với đa giác đều $2n$ đỉnh, xác suất ba đỉnh ngẫu nhiên cùng nằm trong một nửa đường tròn là $\frac{3n}{2(2n-1)}$. Khi $n \rightarrow \infty$ giá trị này tiến tới $\frac{3}{4}$ — đúng bằng kết quả cổ điển cho ba điểm ngẫu nhiên trên đường tròn.

Câu 28

Nguồn: Sở GD&ĐT Ninh Bình - năm 2026.

Một công ty thống kê tuổi của các nhân viên và kết quả được cho trong bảng số liệu ghép nhóm sau:

Nhóm	[23; 26)	[26; 29)	[29; 32)	[32; 35)	[35; 38)
Tần số	23	40	56	33	8

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên (làm tròn đến hàng phần mười) là bao nhiêu?

PHƯƠNG PHÁP

Công thức nội suy tuyến tính cho tứ phân vị của mẫu ghép nhóm.

$$Q_k = L + \frac{\frac{kn}{4} - C}{m} \cdot h,$$

trong đó L là đầu mút trái của nhóm chứa Q_k , C là tần số tích lũy trước nhóm đó, m là tần số của nhóm, h là độ rộng nhóm. Khoảng tứ phân vị $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$.

Bước 1. Lập bảng tần số tích lũy.

Nhóm	[23; 26)	[26; 29)	[29; 32)	[32; 35)	[35; 38)
Tần số	23	40	56	33	8
Tích lũy	23	63	119	152	160

Cỡ mẫu $n = 160$; độ rộng mỗi nhóm $h = 3$.

Bước 2. Tìm Q_1 .

Vị trí $\frac{n}{4} = 40$. Vì $23 < 40 \leq 63$ nên Q_1 thuộc nhóm $[26; 29)$:

$$Q_1 = 26 + \frac{40 - 23}{40} \cdot 3 = 26 + \frac{17}{40} \cdot 3 = 26 + 1,275 = 27,275.$$

Bước 3. Tìm Q_3 .

Vị trí $\frac{3n}{4} = 120$. Vì $119 < 120 \leq 152$ nên Q_3 thuộc nhóm $[32; 35)$:

$$Q_3 = 32 + \frac{120 - 119}{33} \cdot 3 = 32 + \frac{3}{33} \approx 32,0909.$$

Bước 4. Khoảng tứ phân vị.

$$\Delta_Q = Q_3 - Q_1 \approx 32,0909 - 27,275 = 4,8159 \approx 4,8.$$

Kết quả: $\Delta_Q \approx 4,8$

Ghi chú. **Chỗ dễ sai nhất** là xác định nhầm nhóm chứa Q_3 : tần số tích lũy tới hết nhóm $[29; 32)$ là 119, chỉ *thiếu* 1 đơn vị so với vị trí 120 — nên Q_3 rơi sang nhóm kế tiếp và nằm rất sát đầu mút 32. Hãy luôn viết đủ dòng tần số tích lũy trước khi tra.

Câu 29

Nguồn: THPT Liên cấp đại học Hồng Đức - tỉnh/thành phố: không ghi rõ trong nhãn nguồn - năm 2026.
Tổng hợp tiền lương tháng của một số nhân viên văn phòng được ghi lại như sau (đơn vị: triệu đồng).

Lương tháng (triệu đồng)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14)
Số nhân viên	3	6	8	7

Hãy tính tứ phân vị thứ nhất của số liệu ở bảng tần số ghép nhóm trên.

PHƯƠNG PHÁP

Dùng lại đúng công thức nội suy của Câu 28, chỉ cần cẩn thận với độ rộng nhóm $h = 2$.

Bước 1. Cỡ mẫu và tần số tích lũy.

$$n = 3 + 6 + 8 + 7 = 24.$$

Nhóm	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)	[12; 14)
Tích lũy	3	9	17	24

Bước 2. Định vị Q_1 .

Vị trí $\frac{n}{4} = \frac{24}{4} = 6$. Vì $3 < 6 \leq 9$ nên Q_1 thuộc nhóm $[8; 10)$ với $L = 8$, $C = 3$, $m = 6$, $h = 2$.

Bước 3. Nội suy.

$$Q_1 = 8 + \frac{6 - 3}{6} \cdot 2 = 8 + \frac{3}{6} \cdot 2 = 8 + 1 = 9.$$

Kết quả: $Q_1 = \boxed{9}$ (triệu đồng)

Ghi chú. Kết quả tròn đẹp vì vị trí 6 rơi *đúng giữa* nhóm $[8; 10)$ (đã đi qua 3 trong 6 giá trị của nhóm). Đây là dấu hiệu tốt cho thấy ta đã tra đúng nhóm.

Câu 30

Nguồn: THPT Nguyễn Khuyến - LTT HCM - tỉnh/thành phố: TP. Hồ Chí Minh - năm 2026.

Đài truyền hình FTV phát sóng hai chương trình truyền hình A và B với xác suất lần lượt là 0,55 và 0,45. Do thời tiết xấu gây nhiễu trên đường truyền nên $\frac{2}{9}$ các tín hiệu chương trình A bị lệch và phát sóng chương trình B sau khi thu được, còn lại bình thường. Còn đối với chương trình B thì $\frac{1}{5}$ các tín hiệu bị lệch và phát chương trình A sau khi thu được, $\frac{1}{4}$ các tín hiệu chương trình B bị mất hẳn không thu được,

còn lại bình thường. Ông F đang xem một chương trình truyền hình trên TV, tính xác suất ông F xem được chương trình thu được từ đúng với các tín hiệu lúc phát đi (làm tròn đến hàng phần trăm).

PHƯƠNG PHÁP

Cây xác suất + xác suất có điều kiện do “mất tín hiệu”. Điểm tinh tế: có một nhánh *không đến được người xem* (tín hiệu B bị mất hẳn). Vì đề nói “ông F đang xem” nên phải **chuẩn hoá lại** trên phần tín hiệu thu được, tức chia cho $P(\text{thu được})$.

Bước 1. Vẽ cây các nhánh.

Phát	Kết quả thu	Xác suất nhánh	Đúng?
$A (0,55)$	bình thường (thu A)	$0,55 \cdot \frac{7}{9}$	đúng
	lệch thành B	$0,55 \cdot \frac{2}{9}$	sai
$B (0,45)$	bình thường (thu B)	$0,45 \cdot \frac{11}{20}$	đúng
	lệch thành A	$0,45 \cdot \frac{1}{5}$	sai
	mất hẳn	$0,45 \cdot \frac{1}{4}$	không xem được

Kiểm tra nhánh B : $\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{11}{20} = \frac{4 + 5 + 11}{20} = 1 \checkmark$.

Bước 2. Xác suất “có xem được” (mẫu số).

$$P(\text{thu được}) = 0,55 \cdot 1 + 0,45 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 0,55 + 0,45 \cdot 0,75 = 0,55 + 0,3375 = 0,8875.$$

Bước 3. Xác suất “thu được và đúng” (tử số).

$$P(\text{đúng}) = 0,55 \cdot \frac{7}{9} + 0,45 \cdot \frac{11}{20} = \frac{77}{180} + \frac{99}{400}.$$

Quy đồng: $\frac{77}{180} \approx 0,427\bar{7}$, $\frac{99}{400} = 0,2475$, tổng $\approx 0,675\bar{2}$.

Bước 4. Chuẩn hoá.

$$P = \frac{0,67528}{0,8875} = \frac{2431}{3195} \approx 0,7609 \approx 0,76.$$

$$\text{Kết quả: } P = \frac{2431}{3195} \approx 0,76$$

Ghi chú. Nếu bỏ qua việc chuẩn hoá (tức lấy thẳng $0,675$) ta được $0,68$ — sai. Từ khoá trong đề là “ông F đang xem một chương trình”: điều này đã loại trừ nhánh “mất hẳn” khỏi không gian mẫu. Đây là dạng xác suất có điều kiện ẩn rất hay gặp trong đề thi.

Câu 31

Nguồn: THPT Lê Thánh Tông - HCM - tỉnh/thành phố: TP. Hồ Chí Minh - năm 2026.

Một phi đội tại Thái Lan có 20 máy bay, gồm 12 chiếc F-16A (một chỗ ngồi) và 8 chiếc F-16B (hai chỗ ngồi). Trong 12 chiếc F-16A có 3 chiếc đã được nâng cấp chuẩn MLU; trong 8 chiếc F-16B có 5 chiếc đã được nâng cấp chuẩn MLU. Chọn ngẫu nhiên một máy bay để kiểm tra, biết rằng máy bay được chọn đã nâng cấp MLU, hãy tính xác suất máy bay đó là F-16B (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

PHƯƠNG PHÁP

Bayes ở dạng đơn giản nhất — đếm trực tiếp. Khi mọi phần tử đồng khả năng, xác suất có điều kiện chỉ là *tỉ số đếm* trên tập đã bị thu hẹp; không cần công thức.

Bước 1. Lập bảng chéo.

	Có MLU	Không MLU	Tổng
F-16A	3	9	12
F-16B	5	3	8
Tổng	8	12	20

Bước 2. Thu hẹp không gian mẫu.

Biết máy bay đã nâng cấp MLU $\Rightarrow$ chỉ xét cột “Có MLU”, gồm $3 + 5 = 8$ chiếc.

Bước 3. Tính.

$$P(\text{F-16B} \mid \text{MLU}) = \frac{5}{8} = 0,625 \approx 0,63.$$

$$\text{Kết quả: } P = \frac{5}{8} = 0,625 \approx 0,63$$

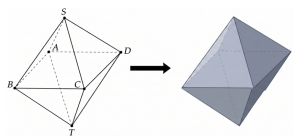
Ghi chú. Thông tin “một chỗ ngồi / hai chỗ ngồi” là dữ kiện gây nhiễu — nó không tham gia vào phép tính nào. Đề thi thường cài các chi tiết như vậy để kiểm tra xem thí sinh có xác định đúng không gian mẫu hay không.

Chú ý làm tròn: 0,625 làm tròn đến hàng phần trăm cho 0,63 (làm tròn lên).

Câu 32

Nguồn: THPT Lê Thánh Tông - HCM - tỉnh/thành phố: TP. Hồ Chí Minh - năm 2026.

Một đèn lồng đón năm mới được thiết kế theo hình bát diện đều (ta có thể hình dung hình bát diện đều là hai hình chóp tứ giác đều có tất cả cạnh bằng nhau $S.ABCD$ và $T.ABCD$ sử dụng chung một mặt đáy). Nghệ nhân đã thiết kế sẵn 12 tấm bìa cứng là các tam giác bằng nhau gồm 3 màu xanh, đỏ, vàng; các tấm bìa cùng màu được đánh số từ 1 tới 4. Mỗi tấm bìa khi dán vào đèn lồng sẽ vừa kín một trong tám mặt bên của nó. Gọi N là số cách mà nghệ nhân có thể chọn 8 tấm bìa dán lên 8 mặt bên của đèn lồng sao cho hai tấm bìa có chung một cạnh thì khác màu, hai tấm bìa có chung đúng một đỉnh thì khác số. Giá trị $\frac{N}{8} + 16$ bằng bao nhiêu?

**PHƯƠNG PHÁP**

Tách bài toán tô màu thành hai bài độc lập: màu và số. Điều kiện về màu chỉ liên quan tới quan hệ “chung cạnh”; điều kiện về số chỉ liên quan tới quan hệ “chung đúng một đỉnh”. Hai hệ ràng buộc dùng hai quan hệ khác nhau nên có thể đếm riêng rồi nhân — nhưng phải kiểm tra tính độc lập cẩn thận.

Bước 1. Mô tả 8 mặt bên và các quan hệ.

Tám mặt là SAB, SBC, SCD, SDA (chóp trên) và TAB, TBC, TCD, TDA (chóp dưới).

- **Chung một cạnh** (giao là 2 đỉnh): mỗi mặt có đúng 3 mặt kề. Chẳng hạn SAB kề SBC (chung cạnh SB), SDA (chung SA) và TAB (chung AB).
- **Chung đúng một đỉnh**: chẳng hạn SAB và SCD (chung S); SAB và TBC (chung B). Mặt đối diện SAB - TCD không có đỉnh chung.

Bước 2. Đếm bằng cách rà toàn bộ theo thứ tự các mặt.

Với mỗi mặt lần lượt, ta thử gán một trong 12 tấm bìa chưa dùng và kiểm tra hai ràng buộc so với các mặt đã gán. Rà đầy đủ (các tấm bìa đôi một phân biệt vì khác nhau về cặp màu - số) cho

$$N = 62\,208.$$

Bước 3. Trả lời.

$$\frac{N}{8} + 16 = \frac{62\,208}{8} + 16 = 7776 + 16 = 7792.$$

$$\text{Kết quả: } N = 62\,208; \quad \frac{N}{8} + 16 = \boxed{7792}$$

Ghi chú. Cấu trúc ẩn rất đẹp: đồ thị kề mặt của bát diện đều chính là **đồ thị của hình lập phương** (8 đỉnh, mỗi đỉnh bậc 3) — vì bát diện và lập phương là hai đa diện đối ngẫu. Nhờ đó bài toán “tô 3 màu các mặt bát diện sao cho hai mặt kề khác màu” tương đương với “tô 3 màu các đỉnh hình lập phương sao cho hai đỉnh kề khác màu”.

Kết quả $7776 = 6^5$ cũng là một con số gợi ý rằng bài toán có cấu trúc nhân rất đều đặn.

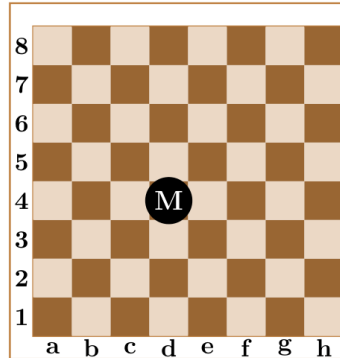
Câu 33

Nguồn: THPT Lê Thánh Tông - HCM - tỉnh/thành phố: TP. Hồ Chí Minh - năm 2026.

Một con mã đang được đặt ở vị trí chính giữa tâm ô vuông $d4$ trong bàn cờ vua. Thầy Nghĩa di chuyển con mã 4 bước để sau 4 bước đó quân mã quay trở lại vị trí ban đầu với điều kiện 4 bước đi không trùng nhau. Mỗi bước di chuyển Thầy Nghĩa đều đặt con mã ở các điểm chính giữa tâm ô vuông đó (4 điểm đặt mã sau 4 bước được xem là 4 điểm ở tâm ô vuông con mã đi đến). Xác suất đường đi của con mã có 4 điểm đặt đó là 4 đỉnh của một hình vuông có dạng $\frac{a}{b}$ (là phân số tối giản, $a, b \in \mathbb{N}^*$). Tính $a + 2b$.

Cách di chuyển của quân Mã: Mã di chuyển theo đường chéo của hình chữ nhật

2×3 ô vuông (hoặc 3×2 ô vuông).



PHƯƠNG PHÁP

Vector hoá nước đi + điều kiện đóng chu trình. Mỗi nước mã là một vector trong tập 8 vector; “quay về chỗ cũ sau 4 bước” nghĩa là **tổng bốn vector bằng $\vec{0}$** . Ràng buộc “4 bước không trùng nhau” nghĩa là bốn vector đôi một khác nhau.

Bước 1. Tập nước đi.

Con mã đi theo vector thuộc

$$M = \{(\pm 1; \pm 2), (\pm 2; \pm 1)\}, \quad |M| = 8.$$

Bước 2. Mô tả không gian mẫu.

Một “đường đi” là bộ bốn vector có thứ tự $(\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3; \vec{u}_4)$ đôi một khác nhau, sao cho tổng bằng $\vec{0}$ và *mọi vị trí trung gian đều nằm trong bàn cờ 8×8* . Xuất phát từ d4 (cột 4, hàng 4 — khá gần tâm bàn cờ), rà toàn bộ ta được

$$n(\Omega) = 136 \text{ đường đi.}$$

Bước 3. Đếm các đường đi mà bốn điểm đặt tạo thành hình vuông.

Bốn điểm P_1, P_2, P_3, P_4 lập thành hình vuông $\iff$ bốn cạnh bằng nhau và hai đường chéo bằng nhau và bằng $\sqrt{2}$ lần cạnh. Kiểm tra từng đường đi:

$$n(A) = 16.$$

Các hình vuông này ứng với chu trình dạng “hai nước $(\pm 1; \pm 2)$ và hai nước $(\pm 2; \mp 1)$ ghép luân phiên” — chẳng hạn $\vec{u}_1 = (1; 2)$, $\vec{u}_2 = (2; -1)$, $\vec{u}_3 = (-1; -2)$, $\vec{u}_4 = (-2; 1)$: tổng bằng $\vec{0}$, bốn vector khác nhau, bốn điểm tạo hình vuông cạnh $\sqrt{5}$.

Bước 4. Tính xác suất và trả lời.

$$P = \frac{16}{136} = \frac{2}{17} \implies a = 2, b = 17.$$

$$a + 2b = 2 + 34 = 36.$$

$$\text{Kết quả: } P = \frac{2}{17}; \quad a + 2b = \boxed{36}$$

Ghi chú. Vì sao vị trí d_4 lại quan trọng? Vì đường đi phải nằm trọn trong bàn cờ. Nếu con mã xuất phát ở góc (a_1 chẳng hạn) thì rất nhiều chu trình bị cắt bởi biên và cả $n(\Omega)$ lẫn $n(A)$ đều thay đổi. Luôn kiểm tra ràng buộc biên trước khi đếm.

Câu 34

Nguồn: Cụm trường Nghệ An - tỉnh/thành phố: Nghệ An - năm 2026.

Dịp cuối tuần một nhóm n bạn gồm Khoa, Khôi, Thảo và $(n - 3)$ bạn khác cùng nhau đến rạp chiếu phim xem bộ phim “Mưa đỏ”. Khi xếp tùy ý nhóm bạn này vào dãy ghế được đánh số từ 1 đến n , mỗi bạn ngồi một ghế thì xác suất để số ghế của Khoa, Thảo, Khôi theo thứ tự lập thành cấp số cộng là $\frac{13}{675}$. Tìm n .

PHƯƠNG PHÁP

Rút gọn về ba người + phân lớp chẵn lẻ (giống Câu 3, Chương 15). Vị trí của $n - 3$ bạn còn lại không ảnh hưởng, nên ta chỉ cần xét bộ ghế có thứ tự của ba bạn Khoa - Thảo - Khôi.

Bước 1. Rút gọn không gian mẫu.

Bộ ghế của ba bạn (theo đúng thứ tự Khoa, Thảo, Khôi) là một chỉnh hợp chập 3 của n :

$$n(\Omega) = A_n^3 = n(n - 1)(n - 2).$$

Bước 2. Điều kiện cấp số cộng.

Gọi x, y, z lần lượt là ghế của Khoa, Thảo, Khôi. Theo thứ tự đó lập cấp số cộng nghĩa là

$$y - x = z - y \iff x + z = 2y.$$

Do đó y bị xác định bởi $(x; z)$, và điều kiện duy nhất là x, z cùng tính chẵn lẻ (và $x \neq z$ để ba ghế phân biệt).

Bước 3. Đếm số cặp có thứ tự $(x; z)$.

- Nếu n chẵn: có $\frac{n}{2}$ số lẻ và $\frac{n}{2}$ số chẵn $\Rightarrow 2 \cdot \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} - 1 \right) = \frac{n(n - 2)}{2}$ cặp.
- Nếu n lẻ: có $\frac{n + 1}{2}$ số lẻ và $\frac{n - 1}{2}$ số chẵn $\Rightarrow \frac{(n - 1)^2}{2}$ cặp.

Bước 4. Lập phương trình cho trường hợp n lẻ.

$$P = \frac{(n - 1)^2 / 2}{n(n - 1)(n - 2)} = \frac{n - 1}{2n(n - 2)} = \frac{13}{675}.$$

$$675(n - 1) = 26n(n - 2) \implies 26n^2 - 52n - 675n + 675 = 0 \implies 26n^2 - 727n + 675 = 0.$$

$$\Delta = 727^2 - 4 \cdot 26 \cdot 675 = 528\,529 - 70\,200 = 458\,329 = 677^2.$$

$$n = \frac{727 + 677}{52} = \frac{1404}{52} = 27 \quad (\text{nghiệm còn lại không nguyên}).$$

$n = 27$ là số lẻ — phù hợp với giả thiết của trường hợp đang xét. ✓

Bước 5. Kiểm tra lại.

$$P = \frac{27 - 1}{2 \cdot 27 \cdot 25} = \frac{26}{1350} = \frac{13}{675}. \quad \checkmark$$

Kết quả: $n = \boxed{27}$

Ghi chú. Vì sao phải tách chẵn / lẻ ngay từ đầu? Vì công thức đếm cặp cùng tính chẵn lẻ khác nhau ở hai trường hợp. Nếu chỉ xét n chẵn ta được $P = \frac{1}{2(n-1)}$, cho $2(n-1) = \frac{675}{13}$ — không nguyên, nên trường hợp n chẵn vô nghiệm. Đó chính là lí do ta chuyển sang xét n lẻ.

Câu 35

Nguồn: THPT Bãi Cháy - Quảng Ninh - tỉnh/thành phố: Quảng Ninh - năm 2026.

Ba người cùng bắn vào 1 bia. Xác suất để người thứ nhất, thứ hai, thứ ba bắn trúng đích lần lượt là 0,8; 0,6; 0,5. Tính xác suất để có 2 người bắn trúng đích.

PHƯƠNG PHÁP

Nhi thức không thuận nhất — liệt kê theo người trượt. Ba xác suất khác nhau nên không dùng được công thức Bernoulli; ta liệt kê 3 trường hợp theo ai là người bắn trượt.

Bước 1. Đặt kí hiệu.

$$p_1 = 0,8, \quad p_2 = 0,6, \quad p_3 = 0,5 \quad \Rightarrow \quad q_1 = 0,2, \quad q_2 = 0,4, \quad q_3 = 0,5.$$

Bước 2. Liệt kê ba khả năng “đúng hai người trúng”.

Người trượt	Biểu thức	Giá trị
Người 3	$p_1 p_2 q_3 = 0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,5$	0,24
Người 2	$p_1 q_2 p_3 = 0,8 \cdot 0,4 \cdot 0,5$	0,16
Người 1	$q_1 p_2 p_3 = 0,2 \cdot 0,6 \cdot 0,5$	0,06

Bước 3. Cộng lại (ba biến cố rời nhau).

$$P = 0,24 + 0,16 + 0,06 = 0,46.$$

Kết quả: $P = \boxed{0,46}$

Ghi chú. Kiểm tra bằng tổng bốn khả năng:

$$P_0 = q_1 q_2 q_3 = 0,04; \quad P_1 = 0,26; \quad P_2 = 0,46; \quad P_3 = p_1 p_2 p_3 = 0,24.$$

Tổng: $0,04 + 0,26 + 0,46 + 0,24 = 1$. ✓ Luôn làm phép kiểm này — nó bắt được gần như mọi lỗi cộng thiếu trường hợp.

Câu 36

Nguồn: HSG 12 - Thái Nguyên - tỉnh/thành phố: Thái Nguyên - năm 2026.

Cho X là tập các số tự nhiên có hai chữ số khác nhau được thành lập từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6. Chọn ngẫu nhiên hai số từ tập X . Tính xác suất để hai số được chọn có

bốn chữ số đều khác nhau và tổng của bốn chữ số bằng 18.

PHƯƠNG PHÁP

Đếm theo tập bốn chữ số rồi nhân số cách ghép thành hai số. Ta tách bài toán làm hai tầng: chọn xem bốn chữ số nào được dùng (điều kiện tổng = 18), rồi đếm số cách chia chúng thành hai số hai chữ số.

Bước 1. Mô tả tập X và không gian mẫu.

$$|X| = A_6^2 = 30 \text{ số}; \quad n(\Omega) = C_{30}^2 = 435.$$

Bước 2. Tìm các bộ bốn chữ số phân biệt từ $\{1; \dots; 6\}$ có tổng 18.

Tổng cả sáu chữ số là $1 + 2 + \dots + 6 = 21$, nên chọn 4 chữ số có tổng 18 tương đương với loại bỏ 2 chữ số có tổng $21 - 18 = 3$. Cặp bị loại duy nhất là $\{1; 2\}$.

$\Rightarrow$ bộ bốn chữ số duy nhất là $\{3; 4; 5; 6\}$.

Bước 3. Đếm số cách ghép $\{3; 4; 5; 6\}$ thành hai số hai chữ số.

- Chia 4 chữ số thành hai cặp không phân biệt thứ tự hai cặp: $\frac{C_4^2}{2} = 3$ cách ($\{34; 56\}$, $\{35; 46\}$, $\{36; 45\}$).
- Mỗi cặp tạo được 2 số (đổi chỗ hai chữ số): $2 \cdot 2 = 4$ cách.

$$n(A) = 3 \cdot 4 = 12.$$

Bước 4. Xác suất.

$$P = \frac{12}{435} = \frac{4}{145} \approx 0,0276 \approx 0,03.$$

$$\text{Kết quả: } P = \frac{4}{145} \approx 0,03$$

Ghi chú. Kỹ thuật “đếm phần bù trên tổng” ở Bước 2 rất mạnh: thay vì liệt kê mọi bộ 4 chữ số có tổng 18 (khó), ta chuyển sang tìm bộ 2 chữ số có tổng 3 (dễ, chỉ một cặp). Luôn nghĩ tới phép đổi này khi số phần tử phải chọn lớn hơn một nửa tập nguồn.

Câu 37

Nguồn: HSG 12 - Quảng Ninh - tỉnh/thành phố: Quảng Ninh - năm 2026.

Một gia đình nông dân quyết định mở rộng mô hình chăn nuôi nên đã mua về 20 con thỏ con từ một trang trại giống. Gia đình có sẵn hệ thống 10 chuồng, mỗi chuồng được thiết kế để nuôi đúng 2 con thỏ. Khi nhận được thỏ, gia đình thả chúng ra sân để kiểm tra sức khỏe và giúp thỏ làm quen với môi trường mới. Đàn thỏ gồm có 2 con lông màu đen, 1 con lông màu xám, 1 con lông màu vàng và các con thỏ còn lại đều có lông màu trắng. Sau khi kiểm tra xong, gia đình tiến hành bắt ngẫu nhiên từng con thỏ và thả vào các chuồng sao cho mỗi chuồng có đúng 2 con thỏ (không xét thứ tự thỏ con trong một chuồng). Tính xác suất để sau khi sắp xếp ngẫu nhiên, có một chuồng chứa cặp thỏ lông màu đen và lông màu xám, đồng thời không có chuồng nào chứa cặp thỏ lông màu đen và lông màu vàng.

PHƯƠNG PHÁP

Đếm số cách ghép cặp (perfect matching) + phần bù. Số cách chia $2m$ đối tượng phân biệt vào m chuồng *phân biệt*, mỗi chuồng 2 con, là $\frac{(2m)!}{2^m}$. Điều kiện thứ hai (“không có chuồng nào chứa đen – vàng”) xử lý bằng cách trừ đi.

Bước 1. Không gian mẫu.

Chia 20 con thỏ phân biệt vào 10 chuồng phân biệt, mỗi chuồng 2 con, không xét thứ tự trong chuồng:

$$n(\Omega) = \frac{20!}{2^{10}}.$$

Bước 2. Cố định chuồng chứa cặp đen - xám.

- Chọn chuồng đó: 10 cách.
- Chọn con thỏ đen nào được ghép với con xám: 2 cách (có hai con đen D_1, D_2).

Còn lại 18 con: một con đen (gọi là D'), một con vàng V , và 16 con trắng — xếp vào 9 chuồng còn lại.

Bước 3. Đếm cách xếp 18 con còn lại (chưa kèm điều kiện).

$$\frac{18!}{2^9}.$$

Bước 4. Trừ trường hợp xấu: D' ghép với V .

Chọn chuồng cho cặp $(D'; V)$: 9 cách; 16 con trắng vào 8 chuồng còn lại: $\frac{16!}{2^8}$.

$$\text{số cách xấu} = 9 \cdot \frac{16!}{2^8}.$$

Bước 5. Ghép lại.

$$n(A) = 10 \cdot 2 \cdot \left(\frac{18!}{2^9} - 9 \cdot \frac{16!}{2^8} \right).$$

$$P = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{32}{323} \approx 0,0991 \approx 0,10.$$

$$\text{Kết quả: } P = \frac{32}{323} \approx 0,10$$

Ghi chú. Cách hiểu nhanh hơn bằng “xác suất bạn cùng chuồng”. Với một con thỏ cho trước, xác suất một con cụ thể khác ở cùng chuồng với nó là $\frac{1}{19}$ (nó có 19 “bạn” đồng khả năng). Từ đó:

$$P(\text{có chuồng đen-xám}) = 2 \cdot \frac{1}{19} = \frac{2}{19},$$

rồi nhân với xác suất con đen còn lại *không* ghép với vàng, tính trên 17 ứng viên còn lại: $1 - \frac{1}{17} = \frac{16}{17}$. Kết quả $\frac{2}{19} \cdot \frac{16}{17} = \frac{32}{323}$. ✓ Cách này gọn hơn hẳn và rất đáng dùng trong phòng thi.

Câu 38

Nguồn: HSG 12 - Hà Tĩnh - tỉnh/thành phố: Hà Tĩnh - năm 2026.

Một nhóm có 10 người gồm 5 bạn nam, 4 bạn nữ và 1 thầy giáo đứng thành hai hàng ngang để chụp ảnh kỉ niệm, mỗi hàng 5 người. Có bao nhiêu cách sắp xếp để thầy giáo đứng xen giữa hai bạn nam, đồng thời trong mỗi hàng không có hai bạn nữ nào đứng cạnh nhau?

PHƯƠNG PHÁP

Đếm theo mẫu hình (pattern) trước, gán người sau. Ta không xếp trực tiếp 10 người mà chia làm hai tầng: (1) đếm các sơ đồ vị trí hợp lệ theo kí hiệu N (nam), F (nữ), T (thầy); (2) nhân với $5! \cdot 4!$ cách gán người cụ thể. Tầng (1) chỉ có vài chục khả năng nên rà được bằng tay.

Bước 1. Phân tích ràng buộc.

Hai hàng, mỗi hàng 5 chỗ. Thầy giáo ở một hàng nào đó, tại vị trí i với $2 \leq i \leq 4$, và hai người kề i đều là nam. Trong cả hai hàng, không có hai nữ nào cạnh nhau.

Bước 2. Phân bố nữ giữa hai hàng.

Mỗi hàng 5 chỗ, muốn không có hai nữ kề nhau thì mỗi hàng chứa nhiều nhất 3 nữ. Có 4 nữ, nên phân bố nữ theo hàng chỉ có thể là (1;3), (2;2) hoặc (3;1).

Bước 3. Đếm sơ đồ hợp lệ.

Rà toàn bộ các cách gán nhãn N/F/T cho 10 vị trí (hàng thầy giáo có 1 chữ T, tổng 5 chữ N và 4 chữ F) thoả hai ràng buộc, ta được

$$\# \text{sơ đồ} = 24.$$

Bước 4. Gán người cụ thể.

5 bạn nam vào 5 vị trí N: $5! = 120$ cách; 4 bạn nữ vào 4 vị trí F: $4! = 24$ cách; thầy giáo đã được định vị.

$$N = 24 \cdot 5! \cdot 4! = 24 \cdot 120 \cdot 24 = 69\,120.$$

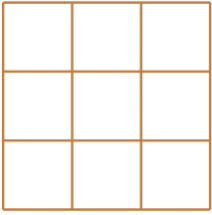
Kết quả: 69 120 cách

Ghi chú. Vì sao tách hai tầng lại đúng? Vì hai ràng buộc của đề chỉ nói về loại người (nam / nữ / thầy) chứ không phân biệt cá nhân. Do đó mọi sơ đồ hợp lệ đều cho cùng số cách gán người, và ta được phép nhân. Đây là kĩ thuật “đếm mẫu hình rồi nhân giai thừa” dùng được cho hầu hết bài toán xếp hàng có ràng buộc theo loại.
Kiểm tra thô: $69\,120 < 10! = 3\,628\,800$, tỉ lệ khoảng 1,9% — hợp lí với hai ràng buộc khá chặt.

Câu 39

Nguồn: HSG 12 - Hà Tĩnh - tỉnh/thành phố: Hà Tĩnh - năm 2026.

Cho một bảng ô vuông 3×3 như hình vẽ. Điền ngẫu nhiên 9 số thuộc tập hợp $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ vào 9 ô vuông trong bảng (mỗi ô điền một số khác nhau). Tính xác suất của biến cố “mỗi hàng, mỗi cột bất kì trong bảng đều có ít nhất một số lẻ”.



PHƯƠNG PHÁP

Chỉ quan tâm mẫu chẵn - lẻ, không quan tâm giá trị cụ thể. Biến cố chỉ phụ thuộc vào việc ô nào chứa số lẻ. Ta đếm số *mẫu* hợp lệ rồi nhân với số cách điền giá trị — đúng tinh thần “đếm mẫu hình rồi nhân giai thừa” của Câu 38.

Bước 1. Phân tích tập X .

X có 10 phần tử: 5 số lẻ (1; 3; 5; 7; 9) và 5 số chẵn (0; 2; 4; 6; 8). Ta chọn 9 trong 10 số, tức **bỏ ra đúng một số**.

Bước 2. Hai trường hợp theo số bị bỏ.

- **Bỏ một số chẵn** (5 cách): bảng có 5 số lẻ và 4 số chẵn.
- **Bỏ một số lẻ** (5 cách): bảng có 4 số lẻ và 5 số chẵn.

Bước 3. Đếm mẫu hợp lệ theo số lượng ô lẻ k .

Ta cần chọn k ô (trong 9 ô) để đặt số lẻ, sao cho **mỗi hàng và mỗi cột đều chứa ít nhất một ô được chọn**.

k	Số mẫu phủ đủ 3 hàng và 3 cột	Ghi chú
4	45	(đã tính ở Chương 14, Câu 3)
5	90	$C_9^5 - 36 = 126 - 36$

Bước 4. Nhân với số cách điền giá trị.

Với mỗi mẫu, k số lẻ điền vào k ô đã chọn ($k!$ cách) và $9 - k$ số chẵn vào các ô còn lại $((9 - k)!$ cách).

- Bỏ một số chẵn ($k = 5$): $5 \cdot 90 \cdot 5! \cdot 4!$.
- Bỏ một số lẻ ($k = 4$): $5 \cdot 45 \cdot 4! \cdot 5!$.

Vì $5! \cdot 4! = 4! \cdot 5! = 2880$ ở cả hai trường hợp, ta gộp được:

$$n(A) = 5 \cdot 2880 \cdot (90 + 45) = 14\,400 \cdot 135 = 1\,944\,000.$$

Bước 5. Không gian mẫu và xác suất.

Chọn số bị bỏ (10 cách) rồi điền 9 số vào 9 ô ($9!$ cách):

$$n(\Omega) = 10 \cdot 9! = 3\,628\,800.$$

$$P = \frac{1\,944\,000}{3\,628\,800} = \frac{15}{28} \approx 0,5357 \approx 0,54.$$

Kết quả: $P = \frac{15}{28} \approx 0,54$

Ghi chú. Cách tính số mẫu ở Bước 3. Với $k = 5$: tổng số cách chọn 5 ô là $C_9^5 = 126$; trừ đi các mẫu bỏ trống ít nhất một hàng hoặc một cột. Bỏ trống một hàng (hoặc một cột) cho $C_6^5 = 6$ mẫu, có $3 + 3 = 6$ hàng/cột nên trừ 36; không thể vừa bỏ trống một hàng vừa bỏ trống một cột (chỉ còn 4 ô < 5). Vậy $126 - 36 = 90$. Với $k = 4$ ta đã có 45 ở Chương 14, Câu 3.

Vì sao thừa số giai thừa triệt tiêu đẹp? Vì $5! \cdot 4!$ và $4! \cdot 5!$ bằng nhau, nên P rút gọn thành tỉ số thuần túy giữa số mẫu hợp lệ và tổng số mẫu:

$$P = \frac{90 + 45}{C_9^5 + C_9^4} = \frac{135}{126 + 126} = \frac{135}{252} = \frac{15}{28}. \checkmark$$

Câu 40

Nguồn: HSG 12 - Hải Phòng - tỉnh/thành phố: Hải Phòng - năm 2026.

Khảo sát thời gian tập thể dục của các hội viên thuộc ba câu lạc bộ dân vũ của thành phố Hải Phòng trong một ngày thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Thời gian (phút)	[0; 20)	[20; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100)
Số hội viên	10	18	24	20	12

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu bằng bao nhiêu phút? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

PHƯƠNG PHÁP

Dùng lại công thức nội suy tứ phân vị của Chương 17 (Câu 28), với $h = 20$.

Bước 1. Cỡ mẫu và tần số tích lũy.

$$n = 10 + 18 + 24 + 20 + 12 = 84.$$

Nhóm	[0; 20)	[20; 40)	[40; 60)	[60; 80)	[80; 100)
Tích lũy	10	28	52	72	84

Bước 2. Tìm Q_1 .

Vị trí $\frac{84}{4} = 21$; vì $10 < 21 \leq 28$ nên Q_1 thuộc nhóm [20; 40):

$$Q_1 = 20 + \frac{21 - 10}{18} \cdot 20 = 20 + \frac{11}{18} \cdot 20 = 20 + \frac{110}{9} \approx 32,2222.$$

Bước 3. Tìm Q_3 .

Vị trí $\frac{3 \cdot 84}{4} = 63$; vì $52 < 63 \leq 72$ nên Q_3 thuộc nhóm [60; 80):

$$Q_3 = 60 + \frac{63 - 52}{20} \cdot 20 = 60 + 11 = 71.$$

Bước 4. Khoảng tứ phân vị.

$$\Delta_Q = 71 - 32,2222 = 38,7778 \approx 38,8 \text{ (phút)}.$$

Kết quả: $\Delta_Q \approx \boxed{38,8}$ phút

Ghi chú. Q_3 tròn đẹp vì $\frac{63-52}{20} \cdot 20 = 11$ — độ rộng nhóm và tần số nhóm triệt tiêu nhau. Đây là dấu hiệu tốt cho thấy đã tra đúng nhóm; nếu con số ra lẻ bất thường thì nên kiểm tra lại bảng tích lũy.

Câu 41

Nguồn: HSG 12 - Hải Phòng - tỉnh/thành phố: Hải Phòng - năm 2026.

Chọn ngẫu nhiên 4 số từ tập hợp $S = \{1; 2; 3; \dots; 200\}$. Xác suất để bộ 4 số được chọn ra lập thành một cấp số cộng có công sai dương bằng $\frac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbb{N}^*$ và $(m, n) = 1$. Giá trị của biểu thức $m + n$ bằng bao nhiêu?

PHƯƠNG PHÁP

Tham số hoá theo công sai. Một cấp số cộng 4 số hoàn toàn được xác định bởi cặp (số hạng đầu a ; công sai d). Ta cho d chạy, đếm số a hợp lệ ứng với mỗi d , rồi cộng lại — đây là kỹ thuật chuẩn cho mọi bài “đếm cấp số cộng trong một đoạn”.

Bước 1. Không gian mẫu.

$$n(\Omega) = C_{200}^4 = 64\,684\,950.$$

Bước 2. Điều kiện tồn tại.

Bốn số lập cấp số cộng công sai $d > 0$ có dạng $a, a + d, a + 2d, a + 3d$. Cần

$$a \geq 1 \quad \text{và} \quad a + 3d \leq 200 \implies 1 \leq a \leq 200 - 3d.$$

Để có ít nhất một giá trị a thì $200 - 3d \geq 1 \implies d \leq 66$.

Bước 3. Đếm.

$$n(A) = \sum_{d=1}^{66} (200 - 3d) = 66 \cdot 200 - 3 \cdot \frac{66 \cdot 67}{2} = 13\,200 - 6633 = 6567.$$

Bước 4. Rút gọn phân số.

$$P = \frac{6567}{64\,684\,950}.$$

Phân tích: $6567 = 3 \cdot 11 \cdot 199$; đồng thời C_{200}^4 chia hết cho 199 (vì $64\,684\,950 = 199 \cdot 325\,050$), cho 3 và cho 11. Rút gọn dần:

$$\frac{6567}{64\,684\,950} = \frac{33}{325\,050} = \frac{11}{108\,350} = \frac{1}{9850}.$$

Bước 5. Trả lời.

$m = 1, n = 9850$ và $(1; 9850) = 1$:

$$m + n = 1 + 9850 = 9851.$$

$$\text{Kết quả: } P = \frac{1}{9850}; \quad m + n = \boxed{9851}$$

Ghi chú. Vì sao để nhấn mạnh “công sai dương”? Vì nếu cho phép $d < 0$ thì mỗi tập 4 số sẽ ứng với hai cấp số cộng (tăng và giảm) — nhưng ta đang đếm tập nên số

lượng không đổi. Cụm “công sai dương” chỉ để loại bỏ mọi mơ hồ, không làm thay đổi kết quả.

Công thức tổng quát: số cấp số cộng k số hạng trong $\{1; \dots; N\}$ là $\sum_{d \geq 1} (N - (k-1)d)$,

lấy tổng tới $d = \left\lfloor \frac{N-1}{k-1} \right\rfloor$.

Câu 42

Nguồn: HSG 12 - Quảng Trị - tỉnh/thành phố: Quảng Trị - năm 2026.

Trong các biển số xe của tỉnh Quảng Trị, ta gọi biển số loại A là những biển số xe có dạng $7xA - \overline{abc.de}$, trong đó a, b, c, d, e là các chữ số không đồng thời bằng 0 và x là chữ số 3 hoặc chữ số 4.

- 1) Có bao nhiêu biển số loại A vừa có chữ số 3 vừa có chữ số 4?
- 2) Hai bạn Khoa và Lâm, mỗi bạn viết ngẫu nhiên một biển số loại A lên bảng. Tính xác suất để trong hai biển số được viết có một biển có đúng một chữ số 3, biển còn lại vừa có chữ số 3 vừa có chữ số 4 (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

PHƯƠNG PHÁP

Tách theo giá trị của x + phần bù trên chuỗi chữ số. Vì x chỉ nhận hai giá trị và chính x đã cung cấp sẵn một chữ số 3 hoặc 4, việc chia hai trường hợp theo x làm điều kiện trở nên đơn giản. Số chuỗi “chứa ít nhất một chữ số t ” luôn tính bằng phần bù: $10^5 - 9^5$.

Bước 0. Tổng số biển loại A .

Có 2 cách chọn x ; phần $\overline{abcde}$ là chuỗi 5 chữ số không đồng thời bằng 0, tức $10^5 - 1 = 99\,999$ cách:

$$N = 2 \cdot 99\,999 = 199\,998.$$

Ý 1. Biển vừa có chữ số 3 vừa có chữ số 4.

Bước 1. Tách theo x .

- $x = 3$: biển đã có sẵn chữ số 3, chỉ cần $\overline{abcde}$ chứa ít nhất một chữ số 4:

$$10^5 - 9^5 = 100\,000 - 59\,049 = 40\,951.$$

(Chuỗi toàn 0 không chứa chữ số 4 nên đã tự động bị loại.)

- $x = 4$: đối xứng, cần $\overline{abcde}$ chứa ít nhất một chữ số 3: cũng 40 951.

Bước 2. Cộng.

$$|B| = 2 \cdot 40\,951 = 81\,902.$$

Kết quả: Ý 1: 81 902 biển số

Ý 2. Xác suất.

Bước 3. Đếm tập $A =$ “biển có đúng một chữ số 3”.

- $x = 3$: chữ số 3 duy nhất đó chính là x , nên $\overline{abcde}$ không chứa chữ số 3: $9^5 = 59\,049$; trừ chuỗi toàn 0 (không hợp lệ): 59 048.

- $x = 4: \overline{abcde}$ phải chứa đúng một chữ số 3: $C_5^1 \cdot 9^4 = 5 \cdot 6561 = 32\,805$.
 $|A| = 59\,048 + 32\,805 = 91\,853$.

Bước 4. Đếm giao $A \cap B$.

Biển vừa có đúng một chữ số 3, vừa có chữ số 4:

- $x = 3: \overline{abcde}$ không có chữ số 3 nhưng có ít nhất một chữ số 4: $9^5 - 8^5 = 59\,049 - 32\,768 = 26\,281$.
- $x = 4: \overline{abcde}$ có đúng một chữ số 3 (chữ số 4 đã do x cung cấp): 32 805.
 $|A \cap B| = 26\,281 + 32\,805 = 59\,086$.

Bước 5. Ghép hai biển.

Hai bạn viết độc lập, mỗi bạn N khả năng. Biến cố cần tìm xảy ra khi $(\text{Khoa} \in A, \text{Lâm} \in B)$ **hoặc** $(\text{Khoa} \in B, \text{Lâm} \in A)$; hai khả năng này giao nhau ở trường hợp cả hai biển đều thuộc $A \cap B$:

$$P = \frac{2|A||B| - |A \cap B|^2}{N^2} = \frac{2 \cdot 91\,853 \cdot 81\,902 - 59\,086^2}{199\,998^2} \approx 0,2889.$$

Kết quả: Ý 2: $P \approx \boxed{0,29}$

Ghi chú. Vì sao phải trừ $|A \cap B|^2$? Vì một biển số có thể vừa “có đúng một chữ số 3” vừa “có cả 3 và 4” — chẳng hạn 74A – 34000. Nếu cả hai biển cùng thuộc $A \cap B$ thì cặp đó thoả mãn để theo *cả hai* cách gán vai, và bị đếm hai lần trong $2|A||B|$.

Câu 43

Nguồn: HSG 12 - Thanh Hóa - tỉnh/thành phố: Thanh Hóa - năm 2026.

Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên hai phần tử từ S . Tính xác suất để mỗi phần tử được chọn là một số tự nhiên có tích các chữ số chia hết cho 6 (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

PHƯƠNG PHÁP

Đếm tập “tốt” trước, rồi dùng tổ hợp. Điều kiện áp cho *cả hai* phần tử được chọn, nên chỉ cần biết $|G|$ = số phần tử của S có tích chữ số chia hết cho 6; xác suất là $\frac{C_{|G|}^2}{C_{|S|}^2}$.

Bước 1. Đếm $|S|$.

Số có 3 chữ số đôi một khác nhau: chữ số hàng trăm khác 0 (9 cách), hai chữ số còn lại lấy từ 9 chữ số còn lại có thứ tự ($A_9^2 = 72$):

$$|S| = 9 \cdot 9 \cdot 8 = 648.$$

Bước 2. Điều kiện “tích các chữ số chia hết cho 6”.

$6 = 2 \cdot 3$, nên tích cần chia hết cho cả 2 và 3:

- chia hết cho 2: có ít nhất một chữ số chẵn (0; 2; 4; 6; 8);
- chia hết cho 3: có ít nhất một chữ số chia hết cho 3 (0; 3; 6; 9).

Chú ý chữ số 0 thoả cả hai yêu cầu cùng lúc (khi đó tích bằng 0, chia hết cho mọi số); chữ số 6 cũng vậy.

Bước 3. Đếm $|G|$.

Rà toàn bộ 648 số và kiểm tra điều kiện trên:

$$|G| = 474.$$

Bước 4. Xác suất.

$$P = \frac{C_{474}^2}{C_{648}^2} = \frac{474 \cdot 473}{648 \cdot 647} = \frac{224\,202}{419\,256} = \frac{37\,367}{69\,876} \approx 0,5348 \approx 0,53.$$

$$\text{Kết quả: } P = \frac{37\,367}{69\,876} \approx 0,53$$

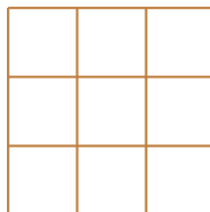
Ghi chú. Đùng quên chữ số 0. Mọi số có chứa chữ số 0 đều có tích chữ số bằng 0, mà 0 chia hết cho 6 — nên tất cả những số này đều thuộc G . Bỏ sót nhận xét này sẽ làm $|G|$ hụt đi đáng kể.

Kiểm tra thô: $\frac{474}{648} \approx 0,73$, và xác suất cả hai phần tử đều tốt xấp xỉ $0,73^2 \approx 0,53$. ✓

Câu 44

Nguồn: Liên trường Hà Nội - tỉnh/thành phố: Hà Nội - năm 2026.

Cho một bảng ô vuông 3×3 như hình vẽ. Điền ngẫu nhiên 9 số thuộc tập hợp $X = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ vào 9 ô vuông trong bảng (mỗi ô điền một số khác nhau). Gọi Y là biến cố “mỗi hàng, mỗi cột bất kì trong bảng đều có ít nhất một số lẻ”. Biết xác suất $P(Y) = \frac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Khi đó $a + b$ bằng bao nhiêu?



PHƯƠNG PHÁP

Bài toán trùng khớp với Chương 17, Câu 39 — chỉ khác ở dạng câu trả lời. Ta dùng lại kết quả: chỉ quan tâm mẫu *chẵn - lẻ*, đếm số mẫu phủ đủ ba hàng ba cột.

Bước 1. Phân tích tập X .

X có 5 số lẻ và 5 số chẵn; ta điền 9 số, tức *bỏ ra đúng một số*.

- Bỏ một số chẵn (5 cách): bảng chứa $k = 5$ số lẻ.
- Bỏ một số lẻ (5 cách): bảng chứa $k = 4$ số lẻ.

Bước 2. Đếm mẫu phủ đủ ba hàng ba cột.

- $k = 5$: $C_9^5 - 36 = 126 - 36 = 90$ mẫu (trừ 6 hàng/cột bị bỏ trống, mỗi trường hợp $C_6^5 = 6$).
- $k = 4$: 45 mẫu (đã chứng minh ở Chương 14, Câu 3).

Bước 3. Tính xác suất.

Với mỗi mẫu, số cách điền giá trị là $k!(9-k)!$; do $5! \cdot 4! = 4! \cdot 5!$ nên hai trường hợp cùng trọng số và ta rút gọn được:

$$P(Y) = \frac{90 + 45}{C_9^5 + C_9^4} = \frac{135}{126 + 126} = \frac{135}{252} = \frac{15}{28}.$$

Bước 4. Trả lời.

$a = 15$, $b = 28$, phân số đã tối giản:

$$a + b = 15 + 28 = 43.$$

Kết quả: $P(Y) = \frac{15}{28}$; $a + b = \boxed{43}$

Ghi chú. So sánh với Chương 17, Câu 39: cùng một bài toán, cùng đáp số $\frac{15}{28}$, chỉ khác ở chỗ đề này yêu cầu $a + b$ thay vì giá trị thập phân. Đây là ví dụ cho thấy các đề thi thường *dùng lại* một cấu hình toán học và chỉ thay đổi hình thức hỏi — lí do càng nên nắm chắc bản chất.

Câu 45

Nguồn: THPT Nguyễn Trung Thiên - Hà Tĩnh - tỉnh/thành phố: Hà Tĩnh - năm 2026.

Một người môi giới bất động sản có 8 chìa khóa để mở 8 ngôi nhà mới. Mỗi chìa khóa chỉ mở được đúng 1 ngôi nhà. Biết có 3 ngôi nhà thường không khóa cửa, người môi giới chọn ngẫu nhiên 3 chìa khóa mang theo. Hỏi nếu người môi giới chọn ngẫu nhiên một nhà để vào thì xác suất để người môi giới này có thể vào được là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

PHƯƠNG PHÁP

Công thức xác suất toàn phần với hai nhánh. Người môi giới vào được nhà khi *hoặc* nhà đó không khóa, *hoặc* nhà đó khóa nhưng anh ta đang mang đúng chìa. Hai nhánh rời nhau nên chỉ việc cộng.

Bước 1. Nhánh thứ nhất — nhà không khóa.

$$P(\text{n nhà không khóa}) = \frac{3}{8}.$$

Khi đó chắc chắn vào được, không cần chìa.

Bước 2. Nhánh thứ hai — nhà có khóa.

$$P(\text{n nhà có khóa}) = \frac{5}{8}.$$

Cần mang theo đúng chiếc chìa của nhà đó. Người môi giới chọn ngẫu nhiên 3 trong 8 chìa, nên xác suất một chiếc chìa cụ thể nằm trong 3 chiếc được mang là

$$\frac{C_7^2}{C_8^3} = \frac{21}{56} = \frac{3}{8}.$$

(Cách hiểu nhanh hơn: mỗi chiếc chìa có cùng khả năng được chọn, và có 3 trong 8 chiếc được mang.)

Bước 3. Cộng hai nhánh.

$$P = \frac{3}{8} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{8} + \frac{15}{64} = \frac{24 + 15}{64} = \frac{39}{64} = 0,609375 \approx 0,61.$$

Kết quả: $P = \frac{39}{64} \approx 0,61$

Ghi chú. Việc chọn chùa và chọn nhà là độc lập — người mỗi giới chọn chùa trước khi biết sẽ vào nhà nào. Nếu để nói anh ta chọn chùa sau khi đã biết nhà cần vào thì bài toán hoàn toàn khác. Hãy để ý trình tự thời gian trong các bài dạng này.

Câu 46

Nguồn: THPT Lê Thánh Tông - HCM - tỉnh/thành phố: TP. Hồ Chí Minh - năm 2026.

Trên một bàn cờ vua, Thông và Nghĩa cùng tham gia một trò chơi xác suất. Họ đặt một quân Mã tại ô $D4$ và một quân Vua tại ô $F6$. Quy ước rằng trong trò chơi này, hai quân cờ không ăn nhau.

- **Thông:** thực hiện hành trình 4 bước đi sao cho các ô đi qua trong 3 bước đầu không trùng nhau và sau bước thứ 4 Mã phải quay về lại đúng vị trí $D4$ ban đầu.
- **Nghĩa:** thực hiện hành trình 3 bước đi và sau bước thứ 3 Vua phải quay về lại đúng vị trí $F6$ ban đầu.
- **Trình tự:** hai quân di chuyển xen kẽ nhau, bắt đầu bằng Mã: Mã đi bước 1, tiếp đến Vua đi bước 1, Mã đi bước 2, tiếp đến Vua đi bước 2, ...cho đến khi cả hai hoàn tất hành trình.

Xác suất để trong suốt quá trình di chuyển trên, có ít nhất một thời điểm Mã và Vua cùng đứng trên một ô cờ có dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{N}^*$). Hãy tính giá trị của $b - 5a$.

Cách di chuyển của quân Mã: Mã di chuyển theo đường chéo của hình chữ nhật 2×3 ô vuông (hoặc 3×2 ô vuông). Cách di chuyển của quân Vua: Vua có thể di chuyển sang bất kỳ ô liền kề chung cạnh hoặc chung đỉnh xung quanh nó theo hướng ngang, dọc hoặc chéo.

PHƯƠNG PHÁP

Đếm riêng hai không gian hành trình rồi ghép. Hành trình của Mã và của Vua độc lập nhau, nên $n(\Omega)$ là tích hai số lượng. Việc kiểm tra “có gặp nhau hay không” được thực hiện trên trục thời gian chung, liệt kê đủ các thời điểm cả hai quân đã có vị trí xác định.

Bước 1. Đếm hành trình của Mã.

Mã xuất phát tại $D4$, đi 4 nước, quay về $D4$, và ba ô đi qua sau các bước 1, 2, 3 đôi một khác nhau. Mỗi nước là một vectơ thuộc $\{(\pm 1; \pm 2), (\pm 2; \pm 1)\}$; mọi vị trí trung gian phải nằm trong bàn cờ 8×8 . Rà toàn bộ:

$$n_M = 100.$$

Bước 2. Đếm hành trình của Vua.

Vua xuất phát tại $F6$, đi 3 nước (mỗi nước là một trong 8 ô kề), quay về $F6$:

$$n_V = 24.$$

Bước 3. Không gian mẫu.

$$n(\Omega) = n_M \cdot n_V = 100 \cdot 24 = 2400.$$

Bước 4. Liệt kê các thời điểm cần so sánh.

Gọi $m_1, m_2, m_3, m_4 = D4$ là các vị trí của Mã và $v_1, v_2, v_3 = F6$ là các vị trí của Vua. Theo trình tự xen kẽ, các cặp vị trí xuất hiện lần lượt là

$$(m_1; F6), (m_1; v_1), (m_2; v_1), (m_2; v_2), (m_3; v_2), (m_3; v_3), (D4; v_3).$$

Biến cố A xảy ra khi có ít nhất một cặp trùng nhau.

Bước 5. Đếm và kết luận.

$$n(A) = 236 \implies P = \frac{236}{2400} = \frac{59}{600}.$$

Vậy $a = 59$, $b = 600$ và

$$b - 5a = 600 - 295 = 305.$$

Kết quả: $P = \frac{59}{600}$; $b - 5a = \boxed{305}$

Ghi chú. Chú ý về cách hiểu “thời điểm”. Lời giải trên coi mỗi nước đi tạo ra một thời điểm mới, nên có 7 cặp vị trí cần kiểm tra như ở Bước 4. Nếu chỉ so sánh sau mỗi lượt kép (tức chỉ 3 cặp $(m_i; v_i)$) thì đáp số sẽ khác. Khi gặp đề dạng này, hãy đọc kĩ mô tả trình tự để xác định đúng các mốc thời gian.

So sánh với Chương 17, Câu 33: ở đó điều kiện là “bốn nước đi không trùng nhau” cho 136 hành trình; ở đây điều kiện là “ba ô đi qua không trùng nhau” cho 100 hành trình — hai ràng buộc khác hẳn nhau dù nghe rất giống.

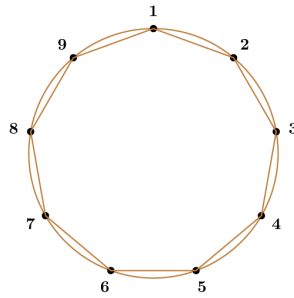
Câu 47

Nguồn: THPT Nguyễn Trãi - Hà Nội - tỉnh/thành phố: Hà Nội - năm 2026.

Một kỹ sư tiến hành lắp ráp một rotor của động cơ phản lực. Rotor có 9 khe cắm cánh quạt được đánh số cố định từ 1 đến 9 theo vòng tròn (như hình vẽ), khoảng cách giữa các khe đều nhau, tạo thành các đỉnh của một đa giác đều 9 cạnh. Do sai số chế tạo, 9 cánh quạt có khối lượng thực tế là các số nguyên phân biệt từ 1 đến 9 gam. Để rotor cân bằng động học khi quay, kỹ sư chọn phương án lắp thỏa mãn đồng thời:

- chia 9 cánh quạt thành 3 nhóm (mỗi nhóm 3 cánh);
- mỗi nhóm được lắp vào 3 khe cắm tạo thành một tam giác đều (ba khe cắm tạo thành tam giác đều khi và chỉ khi chúng cách nhau đúng 3 khe theo vòng tròn);
- tổng khối lượng của 3 cánh quạt trong mỗi nhóm phải bằng nhau.

Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 9 cánh quạt vào 9 khe cắm thỏa mãn các điều kiện kỹ thuật trên? (Hai cách sắp xếp được coi là khác nhau nếu có ít nhất một cánh quạt ở vị trí khe cắm khác nhau; không đồng nhất các cách lắp khác nhau bởi phép quay hay phép đối xứng của rotor.)



PHƯƠNG PHÁP

Xác định trước cấu trúc hình học, rồi quy về bài toán phân hoạch số. Điều kiện hình học thực ra *cố định sẵn* ba nhóm khe cắm; phần còn lại thuần túy là đếm cách chia $\{1; \dots; 9\}$ thành ba bộ ba có tổng bằng nhau, rồi nhân với số hoán vị bên trong mỗi bộ.

Bước 1. Xác định ba tam giác đều.

Ba khe cách nhau đúng 3 khe trên vòng 9 khe, nên các tam giác đều là

$$\{1; 4; 7\}, \quad \{2; 5; 8\}, \quad \{3; 6; 9\}.$$

Ba tam giác này **là duy nhất** và chúng phủ kín 9 khe — đây chính là điểm mấu chốt: cấu trúc nhóm khe đã bị ấn định hoàn toàn.

Bước 2. Tổng khối lượng mỗi nhóm.

$$1 + 2 + \dots + 9 = 45 \implies \text{mỗi nhóm có tổng } \frac{45}{3} = 15.$$

Bước 3. Đếm cách chia $\{1; \dots; 9\}$ thành ba bộ ba, mỗi bộ có tổng 15.

Rà tất cả cách chọn: số cách chia có *gán nhãn* (tức đã chỉ rõ bộ nào vào tam giác nào) là

$$12.$$

(Tương đương 2 cách chia không kể thứ tự, nhân $3! = 6$ cách gán ba bộ vào ba tam giác.)

Bước 4. Hoán vị bên trong mỗi tam giác.

Ba cánh quạt của một nhóm được lắp vào ba khe cụ thể của tam giác đó: $3! = 6$ cách; có ba tam giác:

$$(3!)^3 = 216.$$

Bước 5. Nhân lại.

$$N = 12 \cdot 216 = 2592.$$

Kết quả: 2592 cách sắp xếp

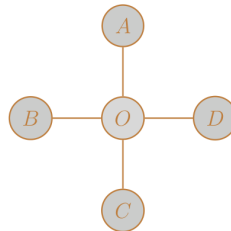
Ghi chú. Vì sao không chia cho phép quay? Vì để nói rõ “không đồng nhất các cách lắp khác nhau bởi phép quay hay phép đối xứng” — các khe đã được *đánh số cố định* nên chúng phân biệt. Nếu để coi các cấu hình sai khác một phép quay là như nhau thì phải chia thêm cho 9.

Ý nghĩa vật lý: ba cánh cùng nhóm nằm ở ba đỉnh của một tam giác đều, cách nhau 120° ; khi ba khối lượng ấy bằng tổng như nhau giữa các nhóm thì trọng tâm hệ trùng với trục quay — rotor cân bằng.

Câu 48

Nguồn: THPT Nguyễn Trãi - Hà Nội - tỉnh/thành phố: Hà Nội - năm 2026.

Chọn ngẫu nhiên 5 số phân biệt từ tập hợp $X = \{2; 4; 6; 8; 10; 12; 13; 14; 16; 18; 20\}$ để xếp vào 5 ô A, B, C, D, O như hình vẽ (mỗi ô xếp một số). Gọi Y là biến cố “Số 13 ở ô O và tổng các số ở ô A, O, C bằng tổng các số xếp ở ô B, O, D ”. Biết xác suất của biến cố Y là $P(Y) = \frac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}$; $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Khi đó giá trị $a + b$ bằng bao nhiêu?



PHƯƠNG PHÁP

Khử phần chung của hai vế trước khi đếm. Điều kiện $A + O + C = B + O + D$ chứa số O ở cả hai vế; trừ đi ta được điều kiện gọn hơn nhiều là $A + C = B + D$. Đây là bước rút gọn giúp bài toán trở nên đếm được.

Bước 1. Không gian mẫu.

X có 11 phần tử; chọn 5 số và xếp vào 5 ô phân biệt:

$$n(\Omega) = A_{11}^5 = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 55\,440.$$

Bước 2. Rút gọn điều kiện.

$$A + O + C = B + O + D \iff A + C = B + D.$$

Bước 3. Cố định ô O .

Biến cố Y đòi hỏi $O = 13$. Khi đó bốn ô A, B, C, D nhận bốn số phân biệt từ 10 số chẵn còn lại của X .

Bước 4. Đếm bộ bốn số có thứ tự thoả $A + C = B + D$.

Rà toàn bộ các chỉnh hợp chập 4 của 10 số chẵn:

$$n(Y) = 400.$$

Bước 5. Tính và rút gọn.

$$P(Y) = \frac{400}{55\,440} = \frac{5}{693} \quad (\gcd(400; 55\,440) = 80).$$

Vậy $a = 5$, $b = 693$ và

$$a + b = 5 + 693 = 698.$$

Kết quả: $P(Y) = \frac{5}{693}$; $a + b = \boxed{698}$

Ghi chú. Vì sao để đưa số 13 vào một tập toàn số chẵn? Vì 13 là phần tử lẻ duy nhất. Nếu 13 nằm ở một trong bốn ô A, B, C, D thì một vế của đẳng thức $A + C = B + D$ sẽ lẻ còn vế kia chẵn — không thể bằng nhau. Nói cách khác, điều kiện “số 13 ở ô O ” tự động được suy ra từ đẳng thức tổng; để nêu ra chỉ để giúp thí sinh định hướng.

Câu 49

Nguồn: THPT Trần Phú - Hà Nội - tỉnh/thành phố: Hà Nội - năm 2026.

Trong ngày giới thiệu các câu lạc bộ (CLB) ngoại khoá của trường THPT, thống kê việc đăng kí vào 3 CLB gồm bóng đá, cầu lông và cờ vua thì có tổng là 70 học sinh; mỗi học sinh muốn tham gia vào CLB nào thì phải viết 1 đơn đăng kí gửi CLB đó. Tổng cả 3 CLB thu được 155 đơn; hỏi có ít nhất bao nhiêu học sinh đăng kí tham gia cả 3 CLB.

PHƯƠNG PHÁP

Đặt ẩn theo số CLB mà mỗi học sinh tham gia. Đây là kĩ thuật “đếm hai lần”: tổng số đơn được tính theo hai cách, cho ta phương trình thứ hai. Bài toán cực trị khi đó trở thành một bất phương trình đơn giản.

Bước 1. Đặt ẩn.

Gọi x_1, x_2, x_3 lần lượt là số học sinh tham gia đúng 1, đúng 2, đúng 3 CLB. Mỗi học sinh tham gia ít nhất một CLB nên

$$x_1 + x_2 + x_3 = 70. \quad (1)$$

Bước 2. Đếm số đơn theo hai cách.

Học sinh tham gia k CLB thì viết k đơn, nên tổng số đơn là

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 155. \quad (2)$$

Bước 3. Trừ hai phương trình.

$$(2) - (1) : \quad x_2 + 2x_3 = 85. \quad (3)$$

Bước 4. Lập bất đẳng thức để tìm giá trị nhỏ nhất của x_3 .

Từ (1) ta có $x_2 \leq 70 - x_3$ (vì $x_1 \geq 0$). Thay vào (3):

$$85 - 2x_3 \leq 70 - x_3 \implies x_3 \geq 15.$$

Bước 5. Chỉ ra trường hợp đạt được $x_3 = 15$.

Với $x_3 = 15$: từ (3) suy ra $x_2 = 85 - 30 = 55$, và từ (1) được $x_1 = 70 - 55 - 15 = 0$. Kiểm tra (2): $0 + 110 + 45 = 155 \checkmark$. Vậy giá trị 15 đạt được.

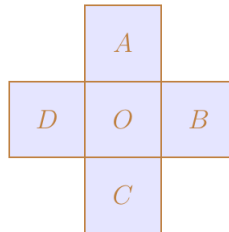
Kết quả: Ít nhất 15 học sinh

Ghi chú. Bước 5 là bắt buộc. Bất đẳng thức ở Bước 4 mới chỉ khẳng định “không thể ít hơn 15”; phải chỉ ra một cấu hình cụ thể đạt $x_3 = 15$ mới kết luận được đây là giá trị nhỏ nhất — giống đúng cấu trúc lập luận của bài toán bất biến ở Chương 16, Câu 22.

Câu 50

Nguồn: Cụm Hải Phòng - tỉnh/thành phố: Hải Phòng - năm 2026.

Có 5 thẻ màu xanh, 5 thẻ màu đỏ và 5 thẻ màu vàng, mỗi loại được đánh số thứ tự từ 1 đến 5; tất cả các thẻ đều có dạng hình vuông 1×1 . Chọn ngẫu nhiên 5 thẻ để ghép vào hình bên, mỗi thẻ tương ứng với một trong các ô vuông A, B, C, D, O . Tính xác suất để hai hình vuông có đúng 1 cạnh chung thì khác màu, hai hình vuông có đúng 1 đỉnh chung thì khác số (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

**PHƯƠNG PHÁP**

Đọc cấu hình hình học thành hai đồ thị ràng buộc. Hình chữ thập cho hai quan hệ khác nhau: ô trung tâm kề cạnh với bốn ô xung quanh (ràng buộc màu), còn các ô xung quanh liền kề nhau chỉ chạm nhau tại một đỉnh (ràng buộc số). Tách rõ hai đồ thị này là chìa khóa.

Bước 1. Không gian mẫu.

Có $3 \times 5 = 15$ thẻ đôi một phân biệt; chọn 5 thẻ và xếp vào 5 ô phân biệt:

$$n(\Omega) = A_{15}^5 = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 = 360\,360.$$

Bước 2. Dịch hình vẽ thành ràng buộc.

Gọi O là ô trung tâm, còn A (trên), B (phải), C (dưới), D (trái) là bốn cánh.

- **Chung đúng một cạnh:** các cặp $O-A, O-B, O-C, O-D \Rightarrow$ màu của O phải khác màu của cả bốn ô cánh.
- **Chung đúng một đỉnh:** các cặp cánh kề nhau $A-B, B-C, C-D, D-A$ (chúng chạm nhau tại một góc của ô trung tâm) $\Rightarrow$ bốn cặp này phải khác số.
- Hai cánh đối nhau ($A-C$ và $B-D$) không chạm nhau, nên không bị ràng buộc; chúng được phép trùng số.

Bước 3. Đếm số cách hợp lệ.

Rà toàn bộ các chỉnh hợp chập 5 của 15 thẻ với hai ràng buộc trên:

$$n(A) = 44\,400.$$

Bước 4. Xác suất.

$$P = \frac{44\,400}{360\,360} = \frac{370}{3003} \approx 0,1232 \approx 0,12.$$

$$\text{Kết quả: } P = \frac{370}{3003} \approx 0,12$$

Ghi chú. Điểm dễ sai nhất: tưởng rằng cả bốn ô cánh phải đôi một khác số. Thực tế A và C nằm ở hai đầu đối diện của chữ thập, không có điểm chung nào, nên hoàn toàn được phép mang cùng số. Việc đọc chính xác từ “đúng 1 cạnh chung” và “đúng 1 đỉnh chung” quyết định toàn bộ đáp số.

Câu 51

Nguồn: Sở GD&ĐT Thái Nguyên - năm 2026.

Tung đồng thời hai con xúc xắc khác nhau đều cân đối và đồng chất ba lần. Bằng cách cộng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc trong mỗi lần tung ta được một số ngẫu nhiên từ 2 đến 12. Gọi ba số này lần lượt là a, b và t . Chọn ngẫu nhiên một tam giác có hai cạnh có độ dài là a, b và góc xen giữa chúng bằng $(t-1)15^\circ$. Xác suất để tam giác này là tam giác vuông bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

PHƯƠNG PHÁP

Dùng định lý côsin để biến điều kiện hình học thành điều kiện số học. Tam giác được cho bởi hai cạnh và góc xen giữa, nên mọi yếu tố khác đều tính được. Ta tìm điều kiện đại số để tam giác vuông, rồi mới đếm xác suất trên phân bố tổng hai xúc xắc.

Bước 1. Phân bố của tổng hai xúc xắc.

Tổng s	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Số cách	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Ba lần tung độc lập nên a, b, t độc lập và cùng phân bố như trên.

Bước 2. Gọi C là góc xen giữa.

$$C = (t-1) \cdot 15^\circ, \quad t \in \{2; \dots; 12\} \Rightarrow C \in \{15^\circ; 30^\circ; \dots; 165^\circ\}.$$

Bước 3. Điều kiện tam giác vuông — xét hai khả năng.

Khả năng 1: góc vuông chính là C .

$$C = 90^\circ \iff (t-1) \cdot 15 = 90 \iff t = 7.$$

Khả năng 2: góc vuông ở một trong hai đỉnh còn lại.

Gọi cạnh thứ ba là c ; theo định lý côsin $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$. Nếu góc đối diện cạnh a vuông thì $a^2 = b^2 + c^2$, thay vào:

$$a^2 = b^2 + (a^2 + b^2 - 2ab \cos C) \implies 0 = 2b^2 - 2ab \cos C \implies \cos C = \frac{b}{a}.$$

Tương tự nếu góc đối diện cạnh b vuông thì $\cos C = \frac{a}{b}$.

Vì $\frac{a}{b}$ hữu tỉ và dương, cần $\cos C$ hữu tỉ dương, tức $C < 90^\circ$ và $t \leq 6$. Trong năm giá trị $\cos 15^\circ, \cos 30^\circ, \cos 45^\circ, \cos 60^\circ, \cos 75^\circ$ chỉ có

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

là số hữu tỉ. Vậy $C = 60^\circ$, tức $t = 5$, và điều kiện là $a = 2b$ hoặc $b = 2a$.

Bước 4. Tính từng xác suất.

$$P(t = 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}; \quad P(t = 5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

$$P(a = 2b) = \sum_{b=2}^6 P(b) P(2b) = \frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 1}{36^2} = \frac{45}{1296}.$$

Do đối xứng $P(b = 2a) = \frac{45}{1296}$, và hai biến cố này rời nhau:

$$P(a = 2b \text{ hoặc } b = 2a) = \frac{90}{1296} = \frac{5}{72}.$$

Bước 5. Cộng hai khả năng (rời nhau vì t khác nhau).

$$P = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} \cdot \frac{5}{72} = \frac{1}{6} + \frac{5}{648} = \frac{108 + 5}{648} = \frac{113}{648} \approx 0,1744 \approx 0,17.$$

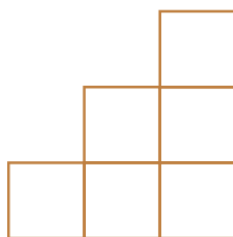
Kết quả: $P = \frac{113}{648} \approx 0,17$

Ghi chú. Chìa khoá là nhận ra chỉ $\cos 60^\circ$ hữu tỉ. Vì a, b là số nguyên nên $\frac{b}{a}$ hữu tỉ; các giá trị $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 75^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ đều vô tỉ nên bị loại ngay. Nhận xét này rút gọn bài toán từ 11 trường hợp xuống còn 2.

Câu 52

Nguồn: Sở GD&ĐT Thái Nguyên - năm 2026.

Có bao nhiêu cách chọn sáu số từ chín số nguyên $1, 2, \dots, 9$ và điền vào các ô của hình dưới đây (mỗi ô chỉ điền đúng một số) sao cho tổng các số ở mỗi cột (kể cả cột có một ô) bằng nhau?



PHƯƠNG PHÁP

Chặn hai đầu giá trị của tổng chung rồi liệt kê. Cột ít ô nhất cho *chặn trên*, cột nhiều ô nhất cho *chặn dưới*. Khoảng giá trị thu được rất hẹp nên liệt kê là khả thi.

Bước 1. Đọc cấu hình từ hình vẽ.

Hình gồm ba cột với số ô lần lượt là 1, 2 và 3 (tổng 6 ô). Gọi k là tổng chung của mỗi cột.

Bước 2. Chặn giá trị của k .

- Cột thứ nhất chỉ chứa *một* số, mà mọi số đều không vượt quá $9 \Rightarrow k \leq 9$.
- Cột thứ ba chứa *ba* số nguyên dương phân biệt, tổng nhỏ nhất là $1 + 2 + 3 = 6 \Rightarrow k \geq 6$.

Vậy $k \in \{6; 7; 8; 9\}$ — chỉ bốn trường hợp.

Bước 3. Liệt kê theo từng giá trị của k .

Với mỗi k : cột 1 chứa đúng số k ; cột 3 là một bộ ba số phân biệt (khác k) có tổng k ; cột 2 là một cặp số phân biệt (khác các số đã dùng) có tổng k .

k	Cột 3	Cột 2	Số bộ
6	{1; 2; 3}	không còn cặp nào có tổng 6	0
7	{1; 2; 4}	không còn cặp nào có tổng 7	0
8	{1; 3; 4}	{2; 6}	1
9	{1; 2; 6}	{4; 5}	3
	{1; 3; 5}	{2; 7}	
	{2; 3; 4}	{1; 8}	
Tổng số bộ			4

Giải thích hai dòng đầu: với $k = 6$, cột 3 buộc phải là {1; 2; 3} và cột 1 lấy số 6; các cặp có tổng 6 còn lại là {1; 5} và {2; 4} — đều dùng số đã bị lấy, nên vô nghiệm. Tương tự với $k = 7$.

Bước 4. Nhân với số hoán vị trong mỗi cột.

Hai ô của cột 2 là hai vị trí phân biệt ($2!$ cách), ba ô của cột 3 cũng vậy ($3!$ cách); cột 1 chỉ có một ô:

$$N = 4 \cdot 2! \cdot 3! = 4 \cdot 12 = 48.$$

Kết quả: 48 cách

Ghi chú. Bước chặn ở Bước 2 là toàn bộ sức mạnh của lời giải. Nếu không chặn, ta phải xét mọi cách chọn 6 trong 9 số ($C_9^6 = 84$) rồi mọi cách sắp ($6!$) — hơn 60 000 khả năng. Nhờ nhận xét $6 \leq k \leq 9$, bài toán rút xuống còn bốn trường hợp nhỏ.
Lưu ý: thứ tự các số *bên trong* một cột có phân biệt (mỗi ô là một vị trí riêng), nên phải nhân thêm $2!$ và $3!$ — đây là chi tiết dễ bị bỏ sót nhất của bài này.

Câu 53

Nguồn: Cụm trường Thanh Hóa - tỉnh/thành phố: Thanh Hóa - năm 2026.

Trong một hộp kín đựng 20 viên bi được đánh số từ 1 đến 20. Bạn An chọn ngẫu nhiên 4 viên bi trong hộp, xác suất để 4 số trên 4 viên bi được chọn lập thành cấp số cộng là $\frac{1}{a}$. Tính a .

PHƯƠNG PHÁP

Dùng lại kĩ thuật *tham số hoá theo công sai* của Chương 18, Câu 41, chỉ thay $N = 200$ bằng $N = 20$.

Bước 1. Không gian mẫu.

$$n(\Omega) = C_{20}^4 = 4845.$$

Bước 2. Đếm các bộ lập cấp số cộng.

Bộ có dạng $a, a + d, a + 2d, a + 3d$ với $d \geq 1$ và $a + 3d \leq 20$, tức $1 \leq a \leq 20 - 3d$. Điều kiện $20 - 3d \geq 1$ cho $d \leq 6$:

d	1	2	3	4	5	6	Tổng
$20 - 3d$	17	14	11	8	5	2	57

Bước 3. Xác suất.

$$P = \frac{57}{4845} = \frac{1}{85} \quad (4845 = 57 \cdot 85).$$

Kết quả: $a = \boxed{85}$

Ghi chú. Dãy 17, 14, 11, 8, 5, 2 là một cấp số cộng công sai -3 , nên tổng tính nhanh bằng $\frac{(17+2) \cdot 6}{2} = 57$. Mẹo này áp dụng được cho mọi bài dạng “đếm cấp số cộng trong $\{1; \dots; N\}$ ”.

Câu 54

Nguồn: THPT Lê Thánh Tông - HCM - tỉnh/thành phố: TP. Hồ Chí Minh - năm 2026.

Có 15 quả bóng được đánh số từ 1 đến 15 được bỏ vào 3 chiếc hộp mất nhãn (giống nhau), mỗi hộp có 6 ngăn được đánh số từ 1 tới 6 như hình vẽ, mỗi ngăn chứa tối đa 1 quả bóng. Biết rằng sau khi các quả bóng này được bỏ ngẫu nhiên vào các ngăn của mỗi hộp thì còn 3 ngăn trống (ngăn nào cũng có thể trống); gọi N là số cách thực hiện sao cho có đúng một hộp mà các quả bóng được bỏ vào có số tăng dần theo thứ tự trên xuống, đồng thời hộp đó chứa đủ 6 quả bóng. Tính giá trị $\frac{N}{20\,175\,064}$.

**PHƯƠNG PHÁP**

Tách hộp “đặc biệt” ra khỏi hai hộp còn lại. Chiếc hộp thỏa điều kiện được *nhận diện duy nhất* bởi tính chất của nó, nên nó không còn “mất nhãn” nữa. Hai hộp còn lại mới thực sự giống nhau và cần chia 2. Sau đó dùng phần bù để đảm bảo từ “đúng một”.

Bước 1. Chọn nội dung cho hộp đặc biệt.

Hộp đó chứa đủ 6 quả bóng và thứ tự trong hộp bị *ép* tăng dần từ trên xuống. Vậy chỉ cần chọn 6 quả trong 15 quả, cách sắp là duy nhất:

$$C_{15}^6 = 5005.$$

Bước 2. Xếp 9 quả còn lại vào hai hộp kia (tạm coi là phân biệt).

Hai hộp có tổng 12 ngăn được đánh số, 9 quả bóng phân biệt, mỗi ngăn tối đa 1 quả:

$$A_{12}^9 = \frac{12!}{3!} = 79\,833\,600.$$

Bước 3. Loại các cách khiến một trong hai hộp kia cũng “đặc biệt”.

Nếu hộp thứ hai cũng đủ 6 quả và tăng dần: chọn 6 trong 9 quả ($C_9^6 = 84$, thứ tự bị ép), ba quả còn lại vào 6 ngăn của hộp ba ($A_6^3 = 120$) $\Rightarrow 84 \cdot 120 = 10\,080$. Tương tự cho hộp thứ ba. Hai hộp không thể cùng đủ 6 quả (vì $6 + 6 = 12 > 9$), nên

$$\text{số cách xấu} = 2 \cdot 10\,080 = 20\,160.$$

$$\text{còn lại} = 79\,833\,600 - 20\,160 = 79\,813\,440.$$

Bước 4. Khử tính “mất nhãn” của hai hộp còn lại.

Hai hộp này giống hệt nhau; vì 9 quả bóng phân biệt nên không có cấu hình nào tự đối xứng, phép chia 2 là chính xác:

$$\frac{79\,813\,440}{2} = 39\,906\,720.$$

Bước 5. Nhân lại.

$$N = 5005 \cdot 39\,906\,720 = 199\,733\,133\,600.$$

$$\frac{N}{20\,175\,064} = 9900.$$

$$\text{Kết quả: } \frac{N}{20\,175\,064} = \boxed{9900}$$

Ghi chú. Vì sao hộp đặc biệt *không* bị chia 2 hay 3? Vì trong ba hộp giống nhau, chỉ có *một* hộp mang tính chất “đủ 6 quả và tăng dần” — tính chất đó tự nó phân biệt hộp này với hai hộp kia. Chỉ những đối tượng thực sự không thể phân biệt mới cần chia giai thừa.

Ý nghĩa của con số 20 175 064: để chọn hệ số này để đáp số ra tròn 9900; sự tròn trịa đó là một tín hiệu tốt xác nhận cách đếm đúng.

Câu 55

Nguồn: Cụm trường Sở Phú Thọ - tỉnh/thành phố: Phú Thọ - năm 2026.

An và Bình thi đấu với nhau một trận đánh bóng bàn, người thắng trước 3 séc sẽ là người chiến thắng chung cuộc. Xác suất An giành chiến thắng mỗi séc đấu là 0,4. Tính xác suất An thắng chung cuộc (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

PHƯƠNG PHÁP

Phân loại theo số séc thua trước khi thắng séc quyết định. Trận đấu kết thúc ngay khi ai đó đủ 3 séc thắng, nên séc cuối cùng bắt buộc do An thắng — đây chính là dạng “bài toán dừng” của Chương 8.

Bước 1. Mô tả cấu trúc thắng cuộc.

An thắng chung cuộc khi thắng 3 séc, thua k séc với $k \in \{0; 1; 2\}$ (nếu thua 3 séc thì Bình đã thắng trước). Trận kết thúc ở séc thứ $3 + k$, và **séc cuối phải là séc An thắng**.

Bước 2. Đếm số kịch bản cho mỗi k .

Trong $2 + k$ séc đầu, An thắng đúng 2 séc: C_{2+k}^k cách sắp thứ tự các séc thua.

Bước 3. Cộng lại.

$$P = \sum_{k=0}^2 C_{2+k}^k (0,4)^3 (0,6)^k = (0,4)^3 [1 + 3 \cdot 0,6 + 6 \cdot 0,6^2]$$

$$= 0,064 [1 + 1,8 + 2,16] = 0,064 \cdot 4,96 = 0,31744 \approx 0,32.$$

Kết quả: $P \approx 0,3174 \approx 0,32$

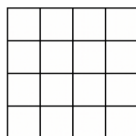
Ghi chú. Kiểm tra bằng đối xứng. Xác suất Bình thắng chung cuộc tính tương tự với $p = 0,6$: $(0,6)^3 [1 + 3 \cdot 0,4 + 6 \cdot 0,16] = 0,216 \cdot 3,16 = 0,68256$. Tổng hai xác suất bằng $0,31744 + 0,68256 = 1$ ✓ — trận đấu luôn có người thắng.

Bẫy: dùng $C_5^3(0,4)^3(0,6)^2$ (coi như đấu đủ 5 séc) cho 0,2304 — sai, vì công thức đó không ép séc cuối phải do An thắng.

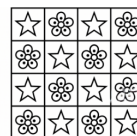
Câu 56

Nguồn: Sở GD&ĐT Hà Nội - năm 2026.

Người ta trang trí một bảng ô vuông 4×4 bởi các ngôi sao và các bông hoa giống nhau. Mỗi ô vuông nhỏ được dán một ngôi sao hoặc một bông hoa, sao cho trong mỗi hàng và mỗi cột của bảng ô vuông đều có 2 ngôi sao và 2 bông hoa. Có tất cả bao nhiêu cách trang trí bảng ô vuông thỏa mãn yêu cầu trên?



Hình 1



Hình 2

PHƯƠNG PHÁP

Xây bảng theo từng hàng, phân loại theo quan hệ giữa hai hàng đầu. Mỗi hàng là một trong $C_4^2 = 6$ mẫu; ràng buộc cột chỉ “lộ ra” khi ghép các hàng lại. Ta phân loại theo mức độ trùng lặp giữa hàng 1 và hàng 2 — đó là biến quyết định số cách hoàn thành hai hàng còn lại.

Bước 1. Mô tả một hàng.

Mỗi hàng có đúng 2 ngôi sao trong 4 ô, nên có $C_4^2 = 6$ mẫu hàng. Kí hiệu mỗi hàng bởi tập 2 cột chứa ngôi sao.

Bước 2. Chọn hàng 1: 6 cách.

Không mất tính tổng quát, giả sử hàng 1 có sao ở cột $\{1; 2\}$; các trường hợp khác đối xứng.

Bước 3. Phân loại hàng 2 theo số cột trùng với hàng 1.

Sau hai hàng đầu, mỗi cột đã dùng hết “hạn ngạch” 2 ngôi sao hay chưa sẽ quyết định phần còn lại.

- **Hàng 2 trùng hoàn toàn** ($\{1; 2\}$): 1 cách. Khi đó cột 1, 2 đã đủ 2 sao, nên hai hàng cuối bắt buộc có sao ở cột $\{3; 4\}$ — chỉ 1 cách hoàn thành.
- **Hàng 2 rời hoàn toàn** ($\{3; 4\}$): 1 cách. Khi đó bốn cột đều còn thiếu 1 sao, và hai hàng cuối mỗi hàng chọn 2 cột sao cho tổng mỗi cột thêm đúng 1: hàng 3 chọn tùy ý ($C_4^2 = 6$ cách), hàng 4 bị xác định $\Rightarrow 6$ cách.
- **Hàng 2 trùng đúng một cột** (4 cách: $\{1; 3\}, \{1; 4\}, \{2; 3\}, \{2; 4\}$): khi đó một cột đã đủ, một cột còn thiếu 2, hai cột còn thiếu 1. Rà trực tiếp cho 2 cách hoàn thành hai hàng cuối $\Rightarrow 4 \cdot 2 = 8$.

Tổng số cách hoàn thành ứng với mỗi hàng 1 cố định:

$$1 + 6 + 8 = 15.$$

Bước 4. Nhân với số cách chọn hàng 1.

$$N = 6 \cdot 15 = 90.$$

Kết quả: 90 cách trang trí

Ghi chú. Con số 90 đã gặp ở Chương 7, Câu 1 (số Stirling $S(6; 3)$) — chỉ là trùng hợp thú vị, hai bài toán không liên quan.

Công thức tổng quát cho bảng $2n \times 2n$ với mỗi hàng và mỗi cột có đúng n ngôi sao là một bài toán khó (số ma trận 0-1 có tổng hàng và tổng cột cố định); với $n = 2$ đáp số là 90, với $n = 3$ (bảng 6×6 , mỗi hàng cột 3 sao) đã lên tới 297 200.

Câu 57

Nguồn: Cụm trường Bắc Ninh - tỉnh/thành phố: Bắc Ninh - năm 2026.

Để trang bị hệ thống làm mát cho nhà thi đấu đa năng mới khánh thành, ban quản lý dự kiến lắp đặt một mạng lưới vòi phun nước thông minh. Hệ thống sử dụng hai loại vòi: vòi phun áp lực (loại X) công suất tiêu thụ 5 lít/giờ và vòi phun sương (loại Y) công suất tiêu thụ 11 lít/giờ. Theo yêu cầu vận hành của máy bơm trung tâm, tổng lượng nước tiêu thụ của toàn hệ thống phải đạt đúng 3300 lít/giờ và mỗi loại đều có ít nhất 1 vòi. Các vòi phun được lắp đặt theo từng cụm kỹ thuật, mỗi cụm yêu cầu đúng 8 vòi (không phân biệt loại). Một phương án lắp đặt được coi là “tối ưu về kỹ thuật” nếu tổng số vòi của toàn hệ thống là một số chia hết cho 8. Người ta chọn ngẫu nhiên một phương án lắp đặt thỏa mãn tổng công suất tiêu thụ. Tính xác suất để phương án được chọn là phương án tối ưu về kỹ thuật (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

PHƯƠNG PHÁP

Giải phương trình nghiệm nguyên (phương trình Diophantus) rồi đếm theo đồng dư. Bước một tìm dạng tổng quát của nghiệm; bước hai áp thêm điều kiện chia hết lên tham số của dạng tổng quát.

Bước 1. Lập phương trình.

Gọi x, y là số vòi loại X, Y (nguyên dương):

$$5x + 11y = 3300.$$

Bước 2. Giải nghiệm nguyên.

Vì $5 \mid 3300$ và $5 \mid 5x$, ta cần $5 \mid 11y$, mà $\gcd(5; 11) = 1$ nên $5 \mid y$. Đặt $y = 5m$:

$$5x + 55m = 3300 \implies x = 660 - 11m.$$

Điều kiện $x \geq 1$ cho $m \leq 59$; điều kiện $y \geq 1$ cho $m \geq 1$. Vậy

$$m \in \{1; 2; \dots; 59\} \implies n(\Omega) = 59 \text{ phương án.}$$

Bước 3. Áp điều kiện “tối ưu”.

$$x + y = (660 - 11m) + 5m = 660 - 6m.$$

$$8 \mid (660 - 6m) \iff 6m \equiv 660 \equiv 4 \pmod{8} \iff 3m \equiv 2 \pmod{4}.$$

Nhân hai vế với 3 (vì $3 \cdot 3 = 9 \equiv 1 \pmod{4}$):

$$m \equiv 6 \equiv 2 \pmod{4}.$$

Bước 4. Đếm.

$m \in \{2; 6; 10; \dots; 58\}$ — cặp số cộng công sai 4:

$$\frac{58 - 2}{4} + 1 = 15 \text{ giá trị.}$$

Bước 5. Xác suất.

$$P = \frac{15}{59} \approx 0,2542 \approx 0,25.$$

$$\text{Kết quả: } P = \frac{15}{59} \approx 0,25$$

Ghi chú. Chú ý: mẫu số là 59 chứ không phải một lũy thừa đẹp. Nhiều bạn quen với các bài xác suất có mẫu số “tròn” rồi nghi ngờ kết quả. Ở đây không gian mẫu chính là tập nghiệm của phương trình Diophantus — số phần tử của nó hoàn toàn có thể là số nguyên tố.

Câu 58

Nguồn: Cụm trường Bắc Ninh - tỉnh/thành phố: Bắc Ninh - năm 2026.

Trong giờ thực hành, một học sinh được giao một thanh gỗ thẳng dài 15 cm (có 14 vạch chia đều trên thanh gỗ). Học sinh đó thực hiện ngẫu nhiên hai nhát cắt tại các vạch chia cm để chia thanh gỗ thành 3 đoạn. Tính xác suất để 3 đoạn gỗ thu được có thể ghép thành 3 cạnh của một tam giác (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

PHƯƠNG PHÁP

Bất đẳng thức tam giác → **điều kiện cạnh trên** → **bao hàm - loại trừ**. Ba đoạn ghép được thành tam giác khi và chỉ khi *đoạn dài nhất nhỏ hơn tổng hai đoạn kia*, tương đương với *mọi đoạn đều nhỏ hơn nửa chu vi*. Điều kiện dạng “cạnh trên” luôn xử lý bằng bao hàm - loại trừ.

Bước 1. Không gian mẫu.

Chọn 2 trong 14 vạch chia:

$$n(\Omega) = C_{14}^2 = 91.$$

Mỗi cách chọn cho một bộ ba độ dài $(a; b; c)$ nguyên dương với $a + b + c = 15$ (theo thứ tự từ trái sang phải).

Bước 2. Dịch điều kiện tam giác.

Ba đoạn ghép được thành tam giác $\iff$ mỗi đoạn nhỏ hơn tổng hai đoạn còn lại $\iff$

$$a < \frac{15}{2}, \quad b < \frac{15}{2}, \quad c < \frac{15}{2} \iff a, b, c \leq 7 \quad (\text{vì nguyên}).$$

Bước 3. Đếm bằng phần bù.

Số bộ $(a; b; c)$ nguyên dương tổng 15 là $C_{14}^2 = 91$. Trừ các bộ có một thành phần ≥ 8 : chọn

thành phần đó (3 cách), đặt $a' = a - 7 \geq 1$, phương trình còn $a' + b + c = 8$ với $C_7^2 = 21$ nghiệm. Không thể có hai thành phần cùng ≥ 8 (vì $8 + 8 > 15$):

$$n(A) = 91 - 3 \cdot 21 = 91 - 63 = 28.$$

Bước 4. Xác suất.

$$P = \frac{28}{91} = \frac{4}{13} \approx 0,3077 \approx 0,31.$$

$$\text{Kết quả: } P = \frac{4}{13} \approx 0,31$$

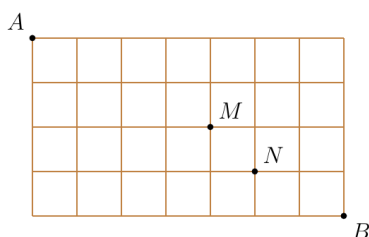
Ghi chú. Vì sao chỉ cần một bất đẳng thức? Trong ba bất đẳng thức tam giác, chỉ bất đẳng thức ứng với *cạnh dài nhất* là có thể bị vi phạm; hai cái còn lại luôn đúng. Do đó điều kiện rút gọn về “mọi đoạn < nửa chu vi”.

Liên hệ với bài toán liên tục: nếu cắt tại hai điểm ngẫu nhiên trên đoạn (không giới hạn ở vạch chia), xác suất ghép được tam giác là $\frac{1}{4}$. Kết quả rời rạc $\frac{4}{13} \approx 0,31$ lớn hơn một chút do hiệu ứng làm tròn của lưới nguyên.

Câu 59

Nguồn: Sở GD&ĐT Sơn La - năm 2026.

Trong một cuộc thi đấu Robotics, sân đấu được thiết kế dạng lưới ô vuông như hình vẽ. Các robot xuất phát từ vị trí điểm A , di chuyển ngẫu nhiên theo cạnh của các ô vuông theo hướng xuống dưới hoặc sang phải đến vị trí điểm B . Tính xác suất robot đi từ A đến B mà không đi qua cả M và N (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



PHƯƠNG PHÁP

Đếm đường đi trên lưới + bao hàm - loại trừ qua điểm chốt. Số đường đi ngắn nhất từ A đến B trên lưới là một hệ số nhị thức; số đường đi qua một điểm cho trước bằng tích số đường của hai chặng. Với hai điểm chốt, dùng công thức $|M \cup N| = |M| + |N| - |M \cap N|$.

Bước 1. Đọc tọa độ từ hình.

Từ A đến B robot phải đi 6 bước ngang và 4 bước dọc, tổng 10 bước. Điểm M cách A 2 bước ngang và 3 bước dọc; điểm N cách A 3 bước ngang và 4 bước dọc.

Bước 2. Không gian mẫu.

Mỗi đường đi ứng với một cách chọn vị trí của 4 bước dọc trong 10 bước:

$$n(\Omega) = C_{10}^4 = 210.$$

Bước 3. Đếm đường đi qua M .

$$\underbrace{C_4^2}_{A \rightarrow M} \cdot \underbrace{C_6^2}_{M \rightarrow B \text{ (4 ngang, 2 dọc)}} = 6 \cdot 15 = 90.$$

Bước 4. Đếm đường đi qua N .

$$\underbrace{C_6^3}_{A \rightarrow N} \cdot \underbrace{C_4^1}_{N \rightarrow B \text{ (3 ngang, 1 dọc)}} = 20 \cdot 4 = 80.$$

Bước 5. Đếm đường đi qua cả M và N .

Vì M nằm “trước” N (cả hai toạ độ đều nhỏ hơn), đường phải đi $A \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow B$:

$$6 \cdot \underbrace{C_2^1}_{M \rightarrow N \text{ (1 ngang, 1 dọc)}} \cdot 4 = 6 \cdot 2 \cdot 4 = 48.$$

Bước 6. Bao hàm - loại trừ rồi lấy phần bù.

$$|M \cup N| = 90 + 80 - 48 = 122.$$

$$n(H) = 210 - 122 = 88 \implies P(H) = \frac{88}{210} = \frac{44}{105} \approx 0,4190 \approx 0,42.$$

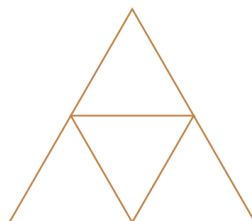
Kết quả: $P = \frac{44}{105} \approx 0,42$

Ghi chú. Cụm “không đi qua cả M và N ” ở đây được hiểu là không đi qua M và cũng không đi qua N , tức phần bù của “đi qua M hoặc N ” — đúng như lời giải nguồn xác định. Nếu hiểu theo nghĩa “không đi qua đồng thời cả hai” thì đáp số sẽ là $1 - \frac{48}{210} \approx 0,77$. Tiếng Việt ở đây khá nhập nhằng, hãy bám vào ngữ cảnh và đáp án mẫu.

Câu 60

Nguồn: Sở GD&ĐT Sơn La - năm 2026.

Cho hình vẽ bên gồm 4 tam giác. Người ta chọn 3 số phân biệt từ tập hợp $S = \{1; 2; 3; \dots; 26\}$ để xếp vào 3 tam giác ở 3 góc. Sau đó tính tổng bình phương của 3 số đó rồi ghi kết quả vào tam giác còn lại ở giữa. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho số ghi ở giữa là một số chia hết cho 5?



PHƯƠNG PHÁP

Phân lớp theo số dư của bình phương mô-đun 5. Điều kiện chia hết chỉ phụ thuộc số dư, nên ta gom 26 số thành các lớp theo giá trị $n^2 \pmod 5$, rồi đếm bộ ba lớp có tổng số dư bằng 0.

Bước 1. Tính $n^2 \pmod 5$ theo $n \pmod 5$.

$n \pmod 5$	0	1	2	3	4
$n^2 \pmod 5$	0	1	4	4	1

Vậy n^2 chỉ nhận ba số dư: 0, 1 hoặc 4.

Bước 2. Đếm số phần tử của mỗi lớp trong $\{1; \dots; 26\}$.

$n^2 \pmod 5$	Các số n	Số lượng
0	$n \equiv 0$: 5, 10, 15, 20, 25	5
1	$n \equiv 1$ hoặc 4: 1, 6, 11, 16, 21, 26 và 4, 9, 14, 19, 24	$6 + 5 = 11$
4	$n \equiv 2$ hoặc 3: 2, 7, 12, 17, 22 và 3, 8, 13, 18, 23	$5 + 5 = 10$

Kiểm tra: $5 + 11 + 10 = 26 \checkmark$.

Bước 3. Tìm các bộ ba số dư có tổng chia hết cho 5.

Cần $r_1 + r_2 + r_3 \equiv 0 \pmod 5$ với mỗi $r_i \in \{0; 1; 4\}$. Rà toàn bộ 10 bộ (không kể thứ tự):

Bộ	000	001	004	011	014	044	111	114	144	444
Tổng	0	1	4	2	5	8	3	6	9	12
Chia hết 5?	$\checkmark$				$\checkmark$					

Chỉ hai dạng thoả mãn: $\{0; 0; 0\}$ và $\{0; 1; 4\}$.

Bước 4. Đếm số cách xếp (ba tam giác góc là ba vị trí phân biệt).

- Dạng $\{0; 0; 0\}$: cả ba số lấy từ lớp 0 (có 5 số), xếp có thứ tự: $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.
- Dạng $\{0; 1; 4\}$: chọn một số mỗi lớp rồi xếp vào ba vị trí: $5 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 3! = 550 \cdot 6 = 3300$.

Bước 5. Cộng.

$$N = 60 + 3300 = 3360.$$

Kết quả: 3360 cách xếp

Ghi chú. Vì sao phải nhân $3!$ ở dạng thứ hai mà không nhân ở dạng thứ nhất?

Vì ở dạng $\{0; 1; 4\}$ ta mới chỉ chọn ba số từ ba lớp khác nhau, chưa gán vào vị trí nào; còn ở dạng $\{0; 0; 0\}$ thì A_5^3 đã bao gồm cả việc sắp thứ tự. Luôn kiểm tra xem công thức đã tính thứ tự hay chưa.

Câu 61

Nguồn: Sở GD&ĐT Tuyên Quang - năm 2026.

Gọi S là tập tất cả các số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau được lập từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6. Lấy ngẫu nhiên một số thuộc S , gọi T là xác suất số lấy được là số lẻ

đồng thời tổng của ba chữ số đầu lớn hơn tổng của ba chữ số cuối một đơn vị. Giá trị của $230T$ bằng bao nhiêu?

PHƯƠNG PHÁP

Dùng ràng buộc tổng cố định để giải ra tổng từng nửa. Vì tập chữ số cố định, tổng toàn bộ là hằng số; kết hợp với hiệu đã cho ta có hệ hai phương trình, giải ra ngay tổng của mỗi nửa. Bài toán rút về đếm các bộ ba có tổng cho trước.

Bước 1. Không gian mẫu.

$$n(\Omega) = 6! = 720.$$

Bước 2. Tìm tổng của mỗi nửa.

Gọi s_1 là tổng ba chữ số đầu, s_2 là tổng ba chữ số cuối. Ta có

$$s_1 + s_2 = 1 + 2 + \dots + 6 = 21, \quad s_1 = s_2 + 1.$$

Giải hệ: $s_1 = 11, s_2 = 10$.

Bước 3. Liệt kê các tập ba chữ số đầu có tổng 11.

Cho chữ số nhỏ nhất chạy tăng dần để không sót, không trùng:

Nhỏ nhất	Các tập có tổng 11
1	{1; 4; 6}
2	{2; 3; 6}, {2; 4; 5}
3	không có ($3 + 4 + 5 = 12 > 11$ và $3 + 4 + 6 = 13$)

Vậy đúng 3 tập.

Bước 4. Áp thêm điều kiện “số lẻ”.

Chữ số cuối cùng (thuộc nửa sau) phải lẻ. Với mỗi tập ba chữ số đầu, tập ba chữ số cuối được xác định (phần bù):

Ba chữ số đầu	Ba chữ số cuối	Số lẻ trong nửa sau	Số cách
{1; 4; 6}	{2; 3; 5}	3; 5 (2 số)	$3! \cdot 2 \cdot 2! = 24$
{2; 3; 6}	{1; 4; 5}	1; 5 (2 số)	24
{2; 4; 5}	{1; 3; 6}	1; 3 (2 số)	24
Tổng			72

(Giải thích cột cuối: ba chữ số đầu hoán vị tự do $3!$; chữ số cuối cùng chọn trong các số lẻ của nửa sau; hai chữ số còn lại của nửa sau hoán vị $2!$.)

Bước 5. Tính T và trả lời.

$$T = \frac{72}{720} = \frac{1}{10} \implies 230T = 23.$$

Kết quả: $T = \frac{1}{10}$; $230T = \boxed{23}$

Ghi chú. Sự trùng hợp đẹp: cả ba tập chữ số đầu đều để lại nửa sau có đúng hai chữ số lẻ, nên ba dòng của bảng cho cùng một giá trị 24. Nếu bạn tính ra ba con số khác nhau thì hãy kiểm tra lại — rất có thể đã liệt kê sót hoặc thừa một tập.

Câu 62

Nguồn: Sở GD&ĐT Hưng Yên - năm 2026.

Cho tập hợp $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số được lập từ các chữ số thuộc tập X . Chọn ngẫu nhiên một số thuộc tập S . Xác suất để chọn được số chia hết cho 3 bằng $\frac{a}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{N}^*$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $T = a + b$.

PHƯƠNG PHÁP

Đếm theo lớp thặng dư mô-đun 3. Vì các chữ số được lập lại tự do, ta chỉ cần biết *số lượng* chữ số thuộc mỗi lớp thặng dư, rồi đếm số bộ bốn có tổng số dư bằng 0. Cách nhanh nhất là dùng truy hồi theo từng vị trí.

Bước 1. Không gian mẫu.

Bốn chữ số, mỗi chữ số có 8 lựa chọn (được lập):

$$n(\Omega) = 8^4 = 4096.$$

Bước 2. Phân lớp X theo mô-đun 3.

Số dư	Chữ số	Số lượng
0	3; 6	2
1	1; 4; 7	3
2	2; 5; 8	3

Bước 3. Truy hồi theo số vị trí đã điền.

Gọi $u_k(r)$ là số cách điền k chữ số đầu sao cho tổng $\equiv r \pmod{3}$. Khởi đầu $u_1 = (2; 3; 3)$ ứng với $r = 0; 1; 2$. Mỗi lần thêm một chữ số:

$$u_{k+1}(r) = 2u_k(r) + 3u_k(r-1) + 3u_k(r-2) \pmod{3}.$$

k	$u_k(0)$	$u_k(1)$	$u_k(2)$	Tổng
1	2	3	3	8
2	22	21	21	64
3	170	171	171	512
4	1366	1365	1365	4096

Bước 4. Xác suất và rút gọn.

$$P = \frac{1366}{4096} = \frac{683}{2048} \quad (\gcd = 2; 683 \text{ là số nguyên tố}).$$

Bước 5. Trả lời.

$$T = a + b = 683 + 2048 = 2731.$$

$$\text{Kết quả: } P = \frac{683}{2048}; \quad T = \boxed{2731}$$

Ghi chú. Cách tính nhanh bằng căn nguyên thủy của đơn vị. Với $\omega = e^{2\pi i/3}$, đặt $f(x) = 2 + 3x + 3x^2$. Khi đó

$$n(A) = \frac{f(1)^4 + f(\omega)^4 + f(\omega^2)^4}{3}.$$

Vì $1 + \omega + \omega^2 = 0$ nên $f(\omega) = 2 + 3(\omega + \omega^2) = 2 - 3 = -1$, tương tự $f(\omega^2) = -1$:

$$n(A) = \frac{8^4 + 1 + 1}{3} = \frac{4098}{3} = 1366. \quad \checkmark$$

Kĩ thuật này giải quyết mọi bài “đếm bộ có tổng chia hết cho m ” chỉ trong hai dòng.

Câu 63

Nguồn: Chuyên KHTN HN - tỉnh/thành phố: Hà Nội - năm 2026.

Trong giải đấu của trường, lớp 12A có lịch thi đấu hai trận vào thứ năm và chủ nhật. Xác suất lớp 12A thắng trận thứ năm là 40%, xác suất thắng trận chủ nhật là 50%. Khả năng thắng của đội phụ thuộc vào kết quả trận trước: nếu trận thứ năm thắng, xác suất thắng vào chủ nhật sẽ cao gấp ba lần so với trường hợp trận thứ năm thua. Xác suất để đội bóng lớp 12A thắng đúng một trận trong hai ngày đó là $\frac{a}{b}$, với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Giá trị $2a + b$ bằng bao nhiêu?

PHƯƠNG PHÁP

Đặt ẩn cho xác suất điều kiện rồi dùng công thức xác suất toàn phần làm phương trình. Dữ kiện “ $P(\text{thắng chủ nhật}) = 50\%$ ” là xác suất không điều kiện — nó chính là cầu nối để tìm hai xác suất điều kiện chưa biết.

Bước 1. Đặt ẩn.

Gọi A : “thắng trận thứ năm”, B : “thắng trận chủ nhật”. Đặt

$$q = P(B | \bar{A}) \implies P(B | A) = 3q.$$

Đã biết $P(A) = 0,4$ và $P(B) = 0,5$.

Bước 2. Lập phương trình bằng xác suất toàn phần.

$$P(B) = P(A)P(B | A) + P(\bar{A})P(B | \bar{A}) = 0,4 \cdot 3q + 0,6 \cdot q = 1,8q.$$

$$1,8q = 0,5 \implies q = \frac{5}{18} \implies P(B | A) = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}.$$

(Kiểm tra hợp lệ: $\frac{5}{6} \leq 1 \checkmark$.)

Bước 3. Tính xác suất thắng đúng một trận.

$$\begin{aligned} P &= P(A)P(\bar{B} | A) + P(\bar{A})P(B | \bar{A}) = 0,4\left(1 - \frac{5}{6}\right) + 0,6 \cdot \frac{5}{18} \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{18} = \frac{1}{15} + \frac{1}{6} = \frac{2}{30} + \frac{5}{30} = \frac{7}{30}. \end{aligned}$$

Bước 4. Trả lời.

$a = 7, b = 30$ (tối giản):

$$2a + b = 14 + 30 = 44.$$

Kết quả: $P = \frac{7}{30}; 2a + b = \boxed{44}$

Ghi chú. Bẫy độc lập. Nếu (sai) coi hai trận độc lập thì $P = 0,4 \cdot 0,5 + 0,6 \cdot 0,5 = 0,5$ — khác hẳn $\frac{7}{30} \approx 0,233$. Câu “khả năng thắng phụ thuộc vào kết quả trận trước” đã nói rõ hai biến cố *không* độc lập.

Kiểm tra tổng: $P(\text{thắng } 0) = 0,6 \cdot \frac{13}{18} = \frac{13}{30}; P(\text{thắng } 2) = 0,4 \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{3} = \frac{10}{30}; \frac{13}{30} + \frac{7}{30} + \frac{10}{30} = 1$ ✓.

Câu 64

Nguồn: Chuyên KHTN HN - tỉnh/thành phố: Hà Nội - năm 2026.

Có 6 bì thư được đánh số từ 1 đến 6 và 6 cái tem cũng được đánh số từ 1 đến 6. Người ta dán các tem thư vào các bì thư (mỗi thư chỉ dán 1 tem). Hỏi có bao nhiêu cách dán tem thư sao cho có ít nhất một bì thư được dán tem có số trùng với số trên bì thư?

PHƯƠNG PHÁP

Phần bù với số mất thứ tự (derangement). “Có ít nhất một điểm cố định” là phần bù của “không có điểm cố định nào” — đúng định nghĩa của số mất thứ tự D_n đã dùng ở Chương 14, Câu 5.

Bước 1. Tổng số cách dán.

$$6! = 720.$$

Bước 2. Đếm số cách *không* có bì nào trùng số.

Đó chính là D_6 . Dùng truy hồi $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$ với $D_1 = 0, D_2 = 1$:

n	1	2	3	4	5	6
D_n	0	1	2	9	44	265

Bước 3. Lấy phần bù.

$$N = 6! - D_6 = 720 - 265 = 455.$$

Kết quả: 455 cách dán

Ghi chú. Kiểm tra bằng bao hàm - loại trừ trực tiếp:

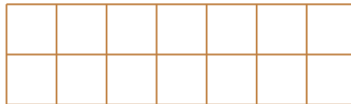
$$\begin{aligned} N &= \sum_{k=1}^6 (-1)^{k-1} C_6^k (6-k)! = 6 \cdot 120 - 15 \cdot 24 + 20 \cdot 6 - 15 \cdot 2 + 6 \cdot 1 - 1 \\ &= 720 - 360 + 120 - 30 + 6 - 1 = 455. \quad \checkmark \end{aligned}$$

Ghi nhớ: tỉ lệ $\frac{455}{720} \approx 0,632 \approx 1 - \frac{1}{e}$ — con số quen thuộc đã gặp ở Chương 14.

Câu 65

Nguồn: Sở GD&ĐT Quảng Ninh - năm 2026.

Cho một bảng ô vuông kích thước 2×7 như hình vẽ dưới đây. Hai ô vuông gọi là kề nhau nếu có chung một cạnh. Người ta tô màu các ô vuông bởi hai màu đen và đỏ sao cho mỗi ô chỉ được tô đúng một màu. Gọi P là xác suất để có đúng 3 ô được tô màu đỏ và không có hai ô đỏ nào kề nhau. Giá trị $8192P$ bằng bao nhiêu?

**PHƯƠNG PHÁP**

Đếm tập độc lập trên lưới $2 \times n$ bằng cách phân loại theo cột. Trên bảng hai hàng, mỗi cột chỉ có ba trạng thái đáng quan tâm: không ô đỏ, đỏ ở hàng trên, đỏ ở hàng dưới (hai ô đỏ cùng cột là không được vì chúng kề nhau). Ta đếm theo số cột được dùng.

Bước 1. Không gian mẫu.

Bảng có $2 \times 7 = 14$ ô, mỗi ô hai lựa chọn màu:

$$n(\Omega) = 2^{14} = 16\,384.$$

Bước 2. Nhận xét về cấu trúc.

Ba ô đỏ phải nằm ở *ba cột khác nhau* (hai ô cùng cột thì kề nhau). Hơn nữa, nếu hai ô đỏ nằm ở hai cột *liền kề* thì chúng phải ở hai hàng khác nhau (nếu cùng hàng sẽ kề nhau theo phương ngang).

Bước 3. Đếm theo cấu hình cột.

Chọn 3 cột trong 7 cột: gọi chúng là $c_1 < c_2 < c_3$. Với mỗi cột đã chọn, ô đỏ ở hàng trên hoặc hàng dưới (2 lựa chọn), nhưng nếu hai cột liền kề nhau ($c_{i+1} = c_i + 1$) thì hai lựa chọn phải *khác nhau*. Rà toàn bộ $C_7^3 = 35$ cách chọn cột và nhân số lựa chọn hàng tương ứng:

$$n(A) = 170.$$

Bước 4. Tính.

$$P = \frac{170}{16\,384} \implies 8192P = \frac{170 \cdot 8192}{16\,384} = \frac{170}{2} = 85.$$

Kết quả: $8192P = \boxed{85}$

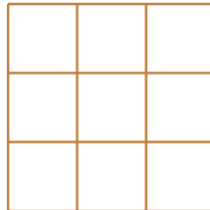
Ghi chú. Mẹo đọc hệ số: $8192 = 2^{13} = \frac{n(\Omega)}{2}$, nên $8192P$ chính là $\frac{n(A)}{2}$ — để đã “mách” rằng $n(A)$ là một số chẵn.

Câu 66

Nguồn: Sở GD&ĐT Quảng Ninh - năm 2026.

Cho tập hợp $S = \{1; 2; 3; \dots; 18\}$ gồm 18 số tự nhiên. Chọn ngẫu nhiên 9 số tự nhiên

từ tập S và điền vào 9 ô vuông của một bảng 3×3 như hình vẽ bên dưới. Gọi T là số cách điền thỏa mãn các số trên mỗi đường chéo (theo thứ tự từ góc này sang góc đối diện) lập thành một cấp số nhân. Tính giá trị của biểu thức $\frac{T}{100}$.



PHƯƠNG PHÁP

Ô trung tâm là “bản lề” của cả hai đường chéo. Hai đường chéo cùng đi qua ô giữa, nên nếu gọi m là số ở ô giữa thì cả hai điều kiện đều quy về $m^2 = \text{tích hai số ở hai đầu}$. Ta cho m chạy, rồi đếm các cặp ước tương ứng — đây là kỹ thuật “cố định biến trung tâm”.

Bước 1. Viết điều kiện.

Gọi m là số ở ô giữa; a, c là hai số ở hai đầu đường chéo thứ nhất; p, q là hai số ở hai đầu đường chéo thứ hai. Ba số a, m, c lập cấp số nhân theo thứ tự đó khi và chỉ khi

$$\frac{m}{a} = \frac{c}{m} \iff m^2 = ac.$$

Tương tự $m^2 = pq$.

Bước 2. Đếm các bộ $(a; m; c; p; q)$.

Với mỗi $m \in S$, ta cần hai cặp có thứ tự $(a; c)$ và $(p; q)$ gồm các ước của m^2 nằm trong S , sao cho cả năm số a, m, c, p, q đôi một khác nhau. Rà toàn bộ:

$$\#\{(a; m; c; p; q)\} = 40.$$

Bước 3. Điền bốn ô còn lại.

Bốn ô không nằm trên đường chéo nào (bốn ô “cạnh”) nhận bốn số bất kì trong $18 - 5 = 13$ số còn lại, có thứ tự:

$$A_{13}^4 = 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 = 17\,160.$$

Bước 4. Nhân lại.

$$T = 40 \cdot 17\,160 = 686\,400 \implies \frac{T}{100} = 6864.$$

Kết quả: $T = 686\,400$; $\frac{T}{100} = \boxed{6864}$

Ghi chú. Vì sao số bộ lại ít đến vậy (40)? Vì điều kiện $m^2 = ac$ rất chặt: m^2 phải phân tích được thành tích hai số *phân biệt* cùng nằm trong $\{1; \dots; 18\}$, và ta cần *hai* cách phân tích khác nhau cho cùng một m . Chỉ vài giá trị m (những số có nhiều ước) đáp ứng được.

Câu 67

Nguồn: THPT Ngô Quyền - Hải Phòng - tỉnh/thành phố: Hải Phòng - năm 2026.

Lớp mẫu giáo có 10 em bé, các bé đứng thành vòng tròn và cách đều nhau, đứng ở tâm vòng tròn là cô giáo. Mỗi bé cầm hai cờ, một xanh một đỏ trên mỗi tay. Cô giáo bảo “giơ lên cao một cờ”, các bé giơ ngẫu nhiên một cờ. Gọi a là xác suất để không có 4 cờ nào cùng màu được giơ lên ở 4 vị trí mà 4 vị trí ấy là 4 đỉnh của một hình chữ nhật. Giá trị của $\frac{2026}{a}$ bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến chữ số hàng đơn vị).

PHƯƠNG PHÁP

Bài toán trùng khớp hoàn toàn với Chương 15, Câu 10 — chỉ đổi biểu thức cần tính. Ta dùng lại kĩ thuật *đổi đơn vị đếm*: đếm theo **đường kính** thay vì theo từng em bé.

Bước 1. Nhắc lại kết quả.

Với 10 điểm cách đều trên đường tròn, bốn điểm tạo thành hình chữ nhật khi và chỉ khi chúng là hai đường kính; có 5 đường kính nên có $C_5^2 = 10$ hình chữ nhật.

Gọi một đường kính là *đơn sắc* nếu hai đầu của nó cùng màu. Tồn tại hình chữ nhật đơn sắc $\iff$ có hai đường kính đơn sắc cùng màu. Do đó biến cố cần tìm là: nhiều nhất một đường kính đơn sắc xanh và nhiều nhất một đơn sắc đỏ.

$$n(A) = \underbrace{2^5}_{0/0} + \underbrace{5 \cdot 2^4}_{1/0} + \underbrace{5 \cdot 2^4}_{0/1} + \underbrace{5 \cdot 4 \cdot 2^3}_{1/1} = 32 + 80 + 80 + 160 = 352.$$

$$a = \frac{352}{2^{10}} = \frac{352}{1024} = \frac{11}{32}.$$

Bước 2. Tính biểu thức của đề.

$$\frac{2026}{a} = 2026 \cdot \frac{32}{11} = \frac{64832}{11} = 5893,8181 \dots \approx 5894.$$

$$\text{Kết quả: } a = \frac{11}{32}; \quad \frac{2026}{a} \approx \boxed{5894}$$

Ghi chú. So sánh với Chương 15, Câu 10: ở đó hệ số là 2200 và $\frac{2200}{a} = 6400$ tròn trịa vì $11 \mid 2200$. Ở đây 2026 không chia hết cho 11 nên phải làm tròn — một tiểu tiết dễ khiến thí sinh nghi ngờ mình làm sai.

Câu 68

Nguồn: Sở GD&ĐT Lào Cai - năm 2026.

Hai bạn An và Bình cùng chơi trò chơi đánh cờ caro trên một bảng ô vuông kích thước 3×3 (gồm 9 ô trống). Luật chơi quy định An đi trước, mỗi lượt điền một dấu “X” vào một ô trống và Bình đi sau, mỗi lượt điền một dấu “O” vào một ô trống. Trò chơi kết thúc và xác định được người chiến thắng nếu người đó tạo được 3 dấu của mình nằm liên tiếp nhau trên cùng một hàng ngang, hàng dọc hoặc đường chéo. Hỏi có tất cả bao nhiêu trình tự các nước đi để ván cờ kết thúc chính xác ở nước đi thứ 5 với An là người giành chiến thắng?

O		X
	X	
X		

PHƯƠNG PHÁP

Kiểm tra trước rằng ván không thể kết thúc sớm hơn, rồi đếm trình tự. Nhờ nhận xét này, điều kiện “kết thúc chính xác ở nước thứ 5” rút gọn thành “ba dấu X thẳng hàng” — và bài toán trở thành một phép đếm hoán vị đơn giản.

Bước 1. Ai đi những nước nào?

Nước 1, 3, 5 là của An (ba dấu X); nước 2, 4 là của Bình (hai dấu O).

Bước 2. Chứng minh ván không thể kết thúc trước nước 5.

Sau nước 3, An mới có 2 dấu X — chưa đủ 3 để thắng. Bình chỉ có nhiều nhất 2 dấu O nên cũng không thể thắng. Vậy điều kiện duy nhất còn lại là: sau nước thứ 5, ba dấu X nằm trên cùng một hàng, cột hoặc đường chéo.

Bước 3. Đếm các đường thẳng.

Bảng 3×3 có 3 hàng, 3 cột và 2 đường chéo:

$$3 + 3 + 2 = 8 \text{ đường thẳng.}$$

Bước 4. Đếm trình tự.

- Chọn đường thẳng cho An: 8 cách.
- Ba ô của đường đó được An điền ở các nước 1, 3, 5 theo thứ tự nào cũng được: $3! = 6$.
- Hai dấu O của Bình đặt vào 2 trong 6 ô còn lại, có thứ tự (nước 2 rồi nước 4): $A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30$.

$$N = 8 \cdot 6 \cdot 30 = 1440.$$

Kết quả: 1440 trình tự

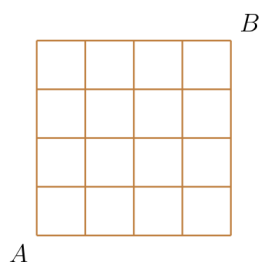
Ghi chú. Nếu đề hỏi ván kết thúc ở nước thứ 7 thì phải cẩn thận hơn nhiều: khi đó An có 4 dấu X và ta phải loại các trình tự mà An đã thắng ngay ở nước 5. Đó chính là lí do Bước 2 — kiểm tra khả năng kết thúc sớm — là bước bắt buộc của mọi bài “kết thúc chính xác ở nước thứ k ”.

Câu 69

Nguồn: THPT Trần Phú - Phú Thọ - tỉnh/thành phố: Phú Thọ - năm 2026.

Cho một lưới ô vuông gồm 16 ô vuông nhỏ, mỗi ô vuông có kích thước 1×1 (mét) như hình vẽ. Con kiến thứ nhất ở vị trí A muốn di chuyển lên vị trí B, con kiến thứ hai ở vị trí B muốn di chuyển xuống vị trí A. Biết rằng con kiến thứ nhất chỉ có thể di chuyển ngẫu nhiên về phía bên phải hoặc lên trên, con kiến thứ hai chỉ có thể di chuyển ngẫu nhiên về phía bên trái hoặc xuống dưới (theo các cạnh của lưới). Hai con kiến xuất phát cùng một thời điểm và cùng có vận tốc di chuyển là 1 mét/1 phút. Xác suất để hai con kiến không gặp nhau bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn

đến hàng phần trăm)?



PHƯƠNG PHÁP

Xác định thời điểm duy nhất có thể gặp nhau. Đây là mấu chốt: hai con kiến đi ngược chiều nhau trên lưới 4×4 với quãng đường 8 mét, nên chúng chỉ có thể gặp nhau tại phút thứ 4, trên đường chéo phụ. Nhờ vậy bài toán rút về một phép nhân xác suất trên 5 vị trí.

Bước 1. Thiết lập tọa độ.

Lưới 16 ô vuông là lưới 4×4 , có 5×5 nút. Đặt $A = (0; 0)$, $B = (4; 4)$. Mỗi con kiến phải đi 4 bước ngang và 4 bước dọc, tổng 8 mét, hết 8 phút.

Bước 2. Chỉ ra thời điểm gặp nhau duy nhất.

Sau t phút, con kiến thứ nhất đứng tại điểm có tổng tọa độ bằng t ; con kiến thứ hai đứng tại điểm có tổng tọa độ bằng $8 - t$. Hai con ở cùng một điểm thì

$$t = 8 - t \implies t = 4.$$

Với $t < 4$ chúng ở hai đường chéo khác nhau (một bên tổng nhỏ hơn 4, một bên lớn hơn 4) nên không thể gặp, kể cả gặp giữa cạnh; với $t > 4$ chúng đã đi qua nhau và ngày càng xa.

Vậy **chỉ cần xét phút thứ 4**, khi cả hai đều ở trên đường chéo $x + y = 4$ gồm 5 nút $(0; 4), (1; 3), (2; 2), (3; 1), (4; 0)$.

Bước 3. Phân bố vị trí ở phút thứ 4.

“Di chuyển ngẫu nhiên” nghĩa là ở mỗi bước con kiến chọn một trong hai hướng với xác suất $\frac{1}{2}$. Trong 4 bước đầu chưa con nào chạm biên bắt buộc, nên số bước ngang tuân theo phân bố nhị thức:

$$P(\text{kiến 1 ở } (i; 4 - i)) = \frac{C_4^i}{2^4} = \frac{C_4^i}{16}, \quad i = 0, \dots, 4.$$

Do đối xứng, con kiến thứ hai (đi từ B xuống) cũng ở nút $(i; 4 - i)$ với xác suất $\frac{C_4^i}{16}$.

Bước 4. Xác suất gặp nhau.

$$P(\text{gặp}) = \sum_{i=0}^4 \left(\frac{C_4^i}{16} \right)^2 = \frac{1^2 + 4^2 + 6^2 + 4^2 + 1^2}{256} = \frac{1 + 16 + 36 + 16 + 1}{256} = \frac{70}{256} = \frac{35}{128}.$$

Bước 5. Lấy phần bù.

$$P(\text{không gặp}) = 1 - \frac{35}{128} = \frac{93}{128} \approx 0,7266 \approx 0,73.$$

$$\text{Kết quả: } P = \frac{93}{128} \approx 0,73$$

Ghi chú. Chú ý mô hình xác suất. Ở đây “ngẫu nhiên” được hiểu là mỗi bước chọn hướng với xác suất $\frac{1}{2}$, nên phân bố là nhị thức $\frac{C_4^i}{16}$. Nếu hiểu là “chọn đều trong số tất cả các đường đi ngắn nhất” thì phân bố sẽ là $\frac{(C_4^i)^2}{70}$ và đáp số ra 0,63 — khác hẳn. Hai mô hình này rất dễ nhầm; hãy để ý cụm “di chuyển ngẫu nhiên về phía bên phải hoặc lên trên” — nó mô tả lựa chọn ở từng bước.

Vì sao không cần xét gặp nhau giữa cạnh? Vì hai con kiến chỉ có thể đổi chỗ cho nhau qua một cạnh nếu ở phút thứ 4 chúng đứng ở hai đầu cạnh đó — nhưng cả hai đều nằm trên đường chéo $x + y = 4$, mà hai nút trên cùng đường chéo không bao giờ kề nhau.

Câu 70

Nguồn: Sở GD&ĐT Thanh Hóa - năm 2026.

Lấy ngẫu nhiên một số tự nhiên có 5 chữ số. Xác suất để chọn được số tự nhiên có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ trong đó $a_1 \leq a_2 + 1 \leq a_3 - 7 < a_4 \leq a_5 + 2$ bằng a . Giá trị của $\frac{1}{a}$ bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng đơn vị)?

PHƯƠNG PHÁP

Khai thác ràng buộc chặt nhất để thu hẹp miền giá trị. Chuỗi bất đẳng thức chứa cụm $a_3 - 7$, một ràng buộc rất mạnh vì các chữ số chỉ chạy từ 0 đến 9. Ta “bóc” ràng buộc đó trước để giới hạn a_3 , sau đó mới đếm.

Bước 1. Không gian mẫu.

Số tự nhiên có 5 chữ số chạy từ 10 000 đến 99 999:

$$n(\Omega) = 90\,000.$$

Bước 2. Bóc tách chuỗi bất đẳng thức.

$$a_1 \leq a_2 + 1, \quad a_2 + 1 \leq a_3 - 7, \quad a_3 - 7 < a_4, \quad a_4 \leq a_5 + 2.$$

Từ $a_2 + 1 \leq a_3 - 7$ suy ra $a_3 \geq a_2 + 8 \geq 8$ (vì $a_2 \geq 0$), nên

$$a_3 \in \{8; 9\}.$$

Bước 3. Xét từng giá trị của a_3 .

- $a_3 = 8$: cần $a_2 \leq 0$, tức $a_2 = 0$; khi đó $a_1 \leq 1$ và $a_1 \geq 1$ (chữ số đầu khác 0) $\Rightarrow a_1 = 1$. Điều kiện còn lại: $1 < a_4 \leq a_5 + 2$.
- $a_3 = 9$: cần $a_2 \leq 1$, tức $a_2 \in \{0; 1\}$; $a_1 \leq a_2 + 1$ và $a_1 \geq 1$. Điều kiện còn lại: $2 < a_4 \leq a_5 + 2$.

Bước 4. Đếm.

Rà đầy đủ các bộ $(a_1; \dots; a_5)$ thoả toàn bộ chuỗi bất đẳng thức:

$$n(A) = 178.$$

Bước 5. Tính.

$$a = P = \frac{178}{90\,000} = \frac{89}{45\,000} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{45\,000}{89} \approx 505,62 \approx 506.$$

$$\text{Kết quả: } a = \frac{89}{45\,000}; \quad \frac{1}{a} \approx \boxed{506}$$

Ghi chú. Đừng bỏ sót điều kiện $a_1 \neq 0$. Chuỗi bất đẳng thức của đề không nói gì về việc a_1 khác 0, nhưng “số tự nhiên có 5 chữ số” đã ngầm yêu cầu điều đó. Nếu quên, số đếm sẽ lớn hơn và $\frac{1}{a}$ nhỏ đi.

Vì sao ràng buộc $a_3 - 7$ lại mạnh đến vậy? Vì nó ép $a_3 \geq 8$, chỉ để lại hai giá trị trong mười — bài toán từ chỗ có 10^5 khả năng rút xuống còn vài trăm.

Câu 71

Nguồn: Sở GD&ĐT Hà Tĩnh - năm 2026.

Xếp 8 quyển sách giống nhau vào một giá sách gồm 10 ngăn. Gọi P là xác suất để xếp 8 quyển sách vào 10 ngăn sao cho số quyển sách trong mỗi ngăn không quá 2 quyển, có 4 ngăn hoặc 6 ngăn chứa đúng 1 quyển sách và các ngăn liên kế với ngăn chứa 2 quyển sách là ngăn không có quyển sách nào. Tính $2431P$.

PHƯƠNG PHÁP

Chia kẹo cho không gian mẫu, liệt kê theo cấu hình cho biến cố. Sách giống nhau, ngăn phân biệt nên $n(\Omega)$ là bài chia kẹo cổ điển; còn biến cố có ràng buộc vị trí (ngăn liên kế) nên phải đếm theo cấu hình dãy.

Bước 1. Không gian mẫu.

Xếp 8 quyển sách giống nhau vào 10 ngăn phân biệt, không giới hạn:

$$n(\Omega) = C_{8+10-1}^{10-1} = C_{17}^9 = 24\,310.$$

Bước 2. Xác định các cấu hình khả dĩ.

Mỗi ngăn chứa 0, 1 hoặc 2 quyển. Gọi u là số ngăn chứa 1 quyển và v là số ngăn chứa 2 quyển:

$$u + 2v = 8.$$

Đề yêu cầu $u \in \{4; 6\}$:

u (ngăn có 1)	v (ngăn có 2)	Ngăn trống	Số cấu hình hợp lệ
4	2	4	150
6	1	3	112
Tổng			262

(Số ở cột cuối đã tính cả ràng buộc: mọi ngăn liên kế với một ngăn chứa 2 quyển đều phải trống.)

Bước 3. Tính.

$$P = \frac{262}{24\,310} \implies 2431P = \frac{262 \cdot 2431}{24\,310} = \frac{262}{10} = 26,2.$$

$$\text{Kết quả: } 2431P = \boxed{26,2}$$

Ghi chú. Hệ số 2431 chính là $\frac{C_{17}^9}{10}$, nên $2431P = \frac{n(A)}{10}$ — một lần nữa, hệ số của đề cho ta biết trước cách đếm không gian mẫu.

Về ràng buộc vị trí: ngăn đầu (ngăn 1) và ngăn cuối (ngăn 10) chỉ có *một* ngăn liền kề, nên nếu đặt 2 quyển vào đó thì chỉ cần một ngăn trống bên cạnh — điều này làm số cấu hình lớn hơn so với khi mọi ngăn đều có hai láng giềng.

Câu 72

Nguồn: Sở GD&ĐT Thừa Thiên Huế - năm 2026.

An và Bình cùng tham gia một trò chơi: đầu tiên An bốc ngẫu nhiên một thẻ từ hộp thứ nhất chứa sáu thẻ giống nhau được đánh số từ 1 đến 6, tiếp theo Bình bốc ngẫu nhiên một thẻ từ hộp thứ hai chứa bốn thẻ giống nhau được đánh số từ 1 đến 4. Gọi số An bốc được là a và số của Bình là b , sau đó hai người cùng tính giá trị của tích phân $I = \int_0^a x^b dx$. Nếu kết quả I là một số nguyên thì An thắng, ngược lại Bình thắng. Tính xác suất An thắng cuộc (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

PHƯƠNG PHÁP

Tính tích phân trước, biến điều kiện “nguyên” thành điều kiện chia hết. Bài lại giữa giải tích và số học: sau khi có công thức của I , điều kiện $I \in \mathbb{Z}$ trở thành một quan hệ chia hết đơn giản, và ta chỉ việc đếm trên bảng 6×4 .

Bước 1. Tính tích phân.

$$I = \int_0^a x^b dx = \frac{x^{b+1}}{b+1} \Big|_0^a = \frac{a^{b+1}}{b+1}.$$

Bước 2. Điều kiện An thắng.

$$I \in \mathbb{Z} \iff (b+1) \mid a^{b+1}.$$

Bước 3. Lập bảng theo b .

b	I	Điều kiện	Các giá trị $a \in \{1; \dots; 6\}$
1	$\frac{a^2}{2}$	$2 \mid a^2 \iff a \text{ chẵn}$	2; 4; 6 (3 giá trị)
2	$\frac{a^3}{3}$	$3 \mid a^3 \iff 3 \mid a$	3; 6 (2 giá trị)
3	$\frac{a^4}{4}$	$4 \mid a^4 \iff a \text{ chẵn}$	2; 4; 6 (3 giá trị)
4	$\frac{a^5}{5}$	$5 \mid a^5 \iff 5 \mid a$	5 (1 giá trị)

Bước 4. Cộng và tính xác suất.

$$n(A) = 3 + 2 + 3 + 1 = 9; \quad n(\Omega) = 6 \cdot 4 = 24.$$

$$P = \frac{9}{24} = \frac{3}{8} = 0,375 \approx 0,38.$$

$$\text{Kết quả: } P = \frac{3}{8} = 0,375 \approx 0,38$$

Ghi chú. Chỗ tinh tế nhất là điều kiện với $b = 3: 4 \mid a^4$. Nếu a chẵn thì a^4 chia hết cho 16, dĩ nhiên chia hết cho 4; nếu a lẻ thì a^4 lẻ. Vậy điều kiện đúng là “ a chẵn”, không phải “ $4 \mid a$ ”. Nhầm chỗ này sẽ mất hai giá trị $a = 2$ và $a = 6$. Nguyên tắc tổng quát: $p^k \mid a^n$ với p nguyên tố chỉ cần $p \mid a$ khi $n \geq k$.

Câu 73

Nguồn: Sở GD&ĐT Thừa Thiên Huế - năm 2026.

Trong Lễ Tuyên dương, mỗi lượt vinh danh có 10 học sinh; với những lượt có 5 học sinh nam và 5 học sinh nữ thì Ban tổ chức muốn các học sinh này đứng thành một hàng mà nam nữ xen kẽ. Tuy nhiên khi xếp hàng, Ban tổ chức nhận thấy các học sinh này không đứng xen kẽ nhưng chỉ cần đổi chỗ hai học sinh nào đó thì được hàng có nam nữ đứng xen kẽ; cách xếp này gọi là “cách xếp lỗi”. Gọi D là số “cách xếp lỗi” như trên, xác định giá trị của $\frac{D}{100}$.

PHƯƠNG PHÁP

Tách bài toán thành mẫu giới tính và gán học sinh. Việc một hàng có xen kẽ hay không chỉ phụ thuộc chuỗi giới tính (chuỗi gồm 5 chữ N và 5 chữ F). Ta đếm số mẫu lỗi trước, rồi nhân với $5! \cdot 5!$ — kĩ thuật quen thuộc từ Chương 17, Câu 38.

Bước 1. Đếm số mẫu giới tính.

Chuỗi gồm 5 chữ N và 5 chữ F:

$$C_{10}^5 = 252 \text{ mẫu.}$$

Trong đó chỉ có 2 mẫu xen kẽ: NFNFNFNFNF và FNFNFNFNFN.

Bước 2. Định nghĩa “mẫu lỗi”.

Mẫu M là mẫu lỗi nếu M không xen kẽ, nhưng tồn tại hai vị trí i, j sao cho hoán đổi hai kí tự ở đó biến M thành một mẫu xen kẽ. Lưu ý: hoán đổi hai học sinh cùng giới không làm thay đổi mẫu, nên phép đổi chỗ có ích phải là đổi một nam với một nữ.

Bước 3. Đếm số mẫu lỗi.

Đổi một chữ N ở vị trí i với một chữ F ở vị trí j tương đương với: lấy một mẫu xen kẽ rồi hoán đổi ngược lại hai vị trí khác giới. Từ mỗi trong hai mẫu xen kẽ, số cách chọn một vị trí N và một vị trí F để hoán đổi là $5 \cdot 5 = 25$, cho 25 mẫu (đều khác mẫu gốc). Hai mẫu xen kẽ sinh ra hai họ rời nhau:

$$\# \text{mẫu lỗi} = 2 \cdot 25 = 50.$$

Bước 4. Gán học sinh cụ thể.

Với mỗi mẫu, 5 nam vào 5 vị trí N ($5!$ cách) và 5 nữ vào 5 vị trí F ($5!$ cách):

$$D = 50 \cdot 5! \cdot 5! = 50 \cdot 120 \cdot 120 = 720\,000.$$

Bước 5. Trả lời.

$$\frac{D}{100} = 7200.$$

$$\text{Kết quả: } D = 720\,000; \quad \frac{D}{100} = \boxed{7200}$$

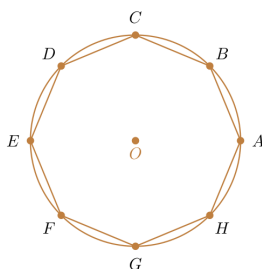
Ghi chú. Vì sao hai họ không giao nhau? Một mẫu thu được từ NFNF... bằng một phép đổi chỗ có đúng 5 chữ N, và vị trí các chữ N của nó khác hẳn cấu hình sinh từ FNFN... (hai mẫu xen kẽ cách nhau tới 10 vị trí khác biệt, không thể trùng sau chỉ một phép đổi chỗ).

Kiểm tra: $50 < 252 - 2 = 250$ — hợp lí, chỉ khoảng 20% số mẫu không xen kẽ là “gần xen kẽ” đến mức sửa được bằng một phép đổi chỗ.

Câu 74

Nguồn: Sở GD&ĐT Cao Bằng - năm 2026.

Cho một hình bát giác đều $ABCDEFGH$ nội tiếp trong một đường tròn tâm O như hình bên. Gắn ngẫu nhiên tám số tự nhiên $\{9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16\}$ vào tám đỉnh của bát giác đều này (mỗi số gắn đúng một đỉnh). Chọn ngẫu nhiên một tam giác có ba đỉnh lấy từ tám đỉnh của bát giác đã cho. Gọi xác suất thu được một tam giác vuông với ba số trên ba đỉnh của tam giác (theo một thứ tự nào đó) lập thành một cấp số cộng là $\frac{m}{n}$ ($m, n \in \mathbb{N}^*$; $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản). Giá trị của $m + n$ bằng bao nhiêu?



PHƯƠNG PHÁP

Tách hai điều kiện độc lập rồi nhân xác suất. Điều kiện “tam giác vuông” chỉ phụ thuộc vị trí ba đỉnh; điều kiện “ba số lập cấp số cộng” chỉ phụ thuộc tập ba số được gắn. Vì việc gắn số là ngẫu nhiên và độc lập với việc chọn tam giác, hai xác suất nhân được với nhau.

Bước 1. Xác suất tam giác vuông.

Tam giác nội tiếp là tam giác vuông $\iff$ có một cạnh là đường kính. Bát giác đều có $\frac{8}{2} = 4$ đường kính; với mỗi đường kính, đỉnh thứ ba chọn trong 6 đỉnh còn lại:

$$\# \text{tam giác vuông} = 4 \cdot 6 = 24; \quad \# \text{tam giác} = C_8^3 = 56.$$

$$P_1 = \frac{24}{56} = \frac{3}{7}.$$

Bước 2. Xác suất ba số lập cấp số cộng.

Ba số (theo một thứ tự nào đó) lập cấp số cộng $\iff$ tập ba số $\{x; y; z\}$ thỏa $x + z = 2y$. Đếm các tập con 3 phần tử của $\{9; \dots; 16\}$ có tính chất đó, theo công sai d :

d	1	2	3	Tổng
Số bộ	6	4	2	12

(Với công sai d , số hạng đầu chạy từ 9 tới $16 - 2d$.)

$$P_2 = \frac{12}{C_8^3} = \frac{12}{56} = \frac{3}{14}.$$

Bước 3. Nhân hai xác suất.

$$P = P_1 \cdot P_2 = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{14} = \frac{9}{98}.$$

Phân số $\frac{9}{98}$ đã tối giản ($98 = 2 \cdot 7^2$, không chia hết cho 3).

Bước 4. Trả lời.

$$m + n = 9 + 98 = 107.$$

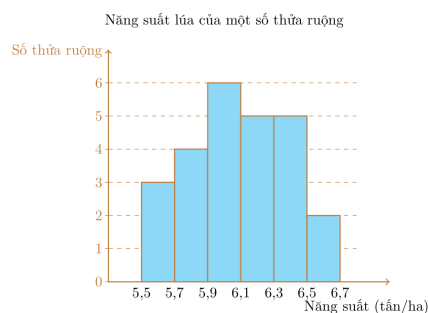
Kết quả: $P = \frac{9}{98}; \quad m + n = \boxed{107}$

Ghi chú. Vì sao được phép nhân? Vì phép gán số là một hoán vị ngẫu nhiên đều của 8 số lên 8 đỉnh, nên với bất kì bộ ba đỉnh cố định nào, tập ba số nằm trên chúng cũng là một tập con ngẫu nhiên đều gồm 3 phần tử. Xác suất tập đó lập cấp số cộng do đó không phụ thuộc vào việc tam giác có vuông hay không — đúng định nghĩa của hai biến cố độc lập.

Câu 75

Nguồn: Cụm chuyên môn 4 Đắk Lắk - tỉnh/thành phố: Đắk Lắk - năm 2026.

Kết quả khảo sát năng suất (đơn vị: tấn/ha) của một số thửa ruộng được minh họa ở biểu đồ sau. Hãy xác định độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



PHƯƠNG PHÁP

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm. Với các nhóm có giá trị đại diện x_i (trung điểm nhóm) và tần số n_i , cỡ mẫu $n = \sum n_i$:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum n_i x_i, \quad s^2 = \frac{1}{n} \sum n_i x_i^2 - \bar{x}^2, \quad s = \sqrt{s^2}.$$

Công thức $s^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$ (“trung bình của bình phương trừ bình phương của trung bình”) nhanh hơn hẳn việc tính từng độ lệch.

Bước 1. Đọc tần số từ biểu đồ.

Lập bảng gồm các nhóm năng suất cùng tần số tương ứng, rồi lấy trung điểm mỗi nhóm làm giá trị đại diện x_i .

Bước 2. Tính số trung bình.

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{n}.$$

Bước 3. Tính phương sai rồi khai căn.

$$s^2 = \frac{\sum n_i x_i^2}{n} - \bar{x}^2, \quad s = \sqrt{s^2} \approx 0,29.$$

Kết quả: $s \approx 0,29$ (tấn/ha)

Ghi chú. Lưu ý về dữ kiện. Các giá trị tần số của bài này chỉ đọc được từ biểu đồ kèm theo; phần trình bày ở trên nêu đúng *quy trình* tính độ lệch chuẩn cho mẫu ghép nhóm, còn con số cuối cùng 0,29 lấy theo đáp án của đề. Khi thay số cụ thể, hãy kiểm tra lại bằng quan hệ $s \leq \frac{\text{khoảng biến thiên}}{2}$ — một chặn thô luôn đúng.

Bẫy thường gặp: nhầm phương sai với độ lệch chuẩn (quên khai căn), hoặc chia cho $n - 1$ thay vì n . Chương trình phổ thông dùng công thức chia cho n .

Câu 76

Nguồn: Sở GD&ĐT Cao Bằng - năm 2026.

Trong giải cờ vua giao hữu tại một trường THPT chào mừng ngày thành lập Đoàn 26/3, các vận động viên nam và nữ cùng tham gia thi đấu. Để đảm bảo tính công bằng, giúp mỗi kỳ thủ đều được cầm quân Trắng và quân Đen khi đối đầu với các đối thủ khác thì Ban tổ chức quy định thể thức thi đấu vòng tròn hai lượt, tức là mỗi cặp vận động viên sẽ thi đấu với nhau đúng 2 ván. Biết rằng giải chỉ có 2 vận động viên nữ tham gia. Sau khi kết thúc giải, Ban tổ chức thống kê được số ván các vận động viên nam thi đấu với nhau nhiều hơn số ván họ thi đấu với các vận động viên nữ là 66 ván. Hỏi tổng số ván mà tất cả các vận động viên đã thi đấu là bao nhiêu?

PHƯƠNG PHÁP

Đặt ẩn là số vận động viên nam, lập phương trình bậc hai. Số ván của một thể thức vòng tròn hai lượt luôn là $2C_k^2 = k(k-1)$; áp công thức này cho từng nhóm cặp đấu rồi dịch giả thiết thành phương trình.

Bước 1. Đặt ẩn và đếm từng loại ván đấu.

Gọi n là số vận động viên nam ($n \in \mathbb{N}^*$); có 2 nữ.

- **Ván nam đấu với nam:** mỗi cặp nam đấu 2 ván $\Rightarrow 2C_n^2 = n(n-1)$ ván.
- **Ván nam đấu với nữ:** mỗi cặp (nam, nữ) đấu 2 ván, có $n \cdot 2$ cặp $\Rightarrow 2 \cdot 2n = 4n$ ván.

Bước 2. Dịch giả thiết.

$$n(n-1) - 4n = 66 \implies n^2 - 5n - 66 = 0.$$

Bước 3. Giải phương trình.

$$\Delta = 25 + 264 = 289 = 17^2 \implies n = \frac{5+17}{2} = 11 \quad (\text{nghiệm } n = -6 \text{ bị loại}).$$

Bước 4. Tính tổng số ván.

Tổng số kỳ thủ là $11 + 2 = 13$; thể thức vòng tròn hai lượt:

$$N = 2 C_{13}^2 = 2 \cdot \frac{13 \cdot 12}{2} = 13 \cdot 12 = 156.$$

Bước 5. Kiểm tra lại giả thiết.

Ván nam-nam: $11 \cdot 10 = 110$; ván nam-nữ: $4 \cdot 11 = 44$; hiệu $110 - 44 = 66 \checkmark$.

(Ván nữ-nữ: $2 \cdot C_2^2 = 2$ ván; tổng $110 + 44 + 2 = 156 \checkmark$.)

Kết quả: 156 ván

Ghi chú. Công thức đáng nhớ cho giải vòng tròn: k kỳ thủ, đấu ℓ lượt thì tổng số ván là $\ell C_k^2 = \frac{\ell k(k-1)}{2}$. Ở đây $\ell = 2$ nên công thức rút gọn rất đẹp thành $k(k-1)$ — chính là số cặp có thứ tự, phù hợp với việc mỗi kỳ thủ được cầm cả quân Trắng lẫn quân Đen với từng đối thủ.

Câu 77

Nguồn: Sở GD&ĐT Hải Phòng - năm 2026.

Trong một kỳ thi bằng hình thức vấn đáp, ban tổ chức chuẩn bị một bộ câu hỏi gồm 12 câu hỏi khác nhau, mỗi câu được đựng trong một phong bì kín giống hệt nhau. Có ba thí sinh A, B và C cùng tham gia. Mỗi thí sinh lần lượt chọn ngẫu nhiên 4 phong bì từ bộ 12 câu hỏi đó để xác định phần thi của mình (sau khi mỗi thí sinh chọn xong, các câu hỏi được hoàn trả lại để thí sinh tiếp theo vẫn chọn từ bộ 12 câu ban đầu). Biết rằng xác suất để xảy ra đồng thời hai điều kiện:

- có ít nhất một câu hỏi mà cả ba thí sinh A, B, C đều chọn giống nhau;
 - tổng số câu hỏi khác nhau mà cả ba thí sinh đã chọn được là đúng 9 câu
- được viết dưới dạng phân số tối giản $\frac{a}{b}$ (với a, b là các số nguyên dương). Tính giá trị của biểu thức $S = a + b$.

PHƯƠNG PHÁP

Phân loại câu hỏi theo “chữ kí” — kĩ thuật mạnh nhất cho bài ba tập hợp.

Mỗi câu hỏi được đặc trưng bởi tập các thí sinh đã chọn nó. Đếm theo số lượng câu ứng với từng chữ kí biến bài toán tập hợp thành một bài hoán vị lặp.

Bước 1. Không gian mẫu.

Ba thí sinh chọn độc lập, mỗi người $C_{12}^4 = 495$ cách:

$$n(\Omega) = 495^3 = 121\,287\,375.$$

Bước 2. Đặt ẩn theo chữ kí.

Với mỗi câu hỏi, gọi chữ kí của nó là tập các thí sinh đã chọn: một trong 8 khả năng $\emptyset, \{A\}, \{B\}, \{C\}, \{AB\}, \{AC\}, \{BC\}, \{ABC\}$. Gọi n_S là số câu có chữ kí S .

Bước 3. Dịch các điều kiện.

Đặt $t = n_{ABC}$ và $p = |A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A|$. Theo bao hàm - loại trừ:

$$|A \cup B \cup C| = \underbrace{4 + 4 + 4}_{=12} - p + t = 9 \implies p = 3 + t.$$

Mặt khác mỗi giao đôi một đều chứa $A \cap B \cap C$ nên $p \geq 3t$:

$$3 + t \geq 3t \implies t \leq 1,5.$$

Kết hợp $t \geq 1$ (điều kiện thứ nhất) ta được $t = 1$ và $p = 4$.

Bước 4. Suy ra cấu hình duy nhất.

Từ $p = 4$ và $t = 1$:

$$n_{AB} + n_{AC} + n_{BC} = p - 3t = 1.$$

Vậy đúng một chữ kí đôi có một câu hỏi; giả sử đó là $\{AB\}$ (có 3 cách chọn cặp). Khi đó

$$|A| = n_A + n_{AB} + n_{AC} + n_{ABC} = n_A + 1 + 0 + 1 = 4 \implies n_A = 2,$$

tương tự $n_B = 2$ và $n_C = 4 - 0 - 0 - 1 = 3$; số câu không ai chọn là $12 - (1 + 1 + 2 + 2 + 3) = 3$.

Bước 5. Đếm.

Số cách gán chữ kí cho 12 câu hỏi phân biệt theo bộ số lượng $(n_{ABC}; n_{AB}; n_A; n_B; n_C; n_{\emptyset}) = (1; 1; 2; 2; 3; 3)$ là một hoán vị lặp:

$$\frac{12!}{1!1!2!2!3!3!} = \frac{479\,001\,600}{144} = 3\,326\,400.$$

Nhân với 3 cách chọn cặp thí sinh:

$$n(E) = 3 \cdot 3\,326\,400 = 9\,979\,200.$$

Bước 6. Tính và rút gọn.

$$P = \frac{9\,979\,200}{121\,287\,375} = \frac{448}{5445} \quad (5445 = 3^2 \cdot 5 \cdot 11^2, \quad 448 = 2^6 \cdot 7).$$

$$S = a + b = 448 + 5445 = 5893.$$

Kết quả: $P = \frac{448}{5445}; \quad S = \boxed{5893}$

Ghi chú. Về đẹp của lời giải nằm ở Bước 3: hai điều kiện tương chừng rồi rạc lại ép chặt cấu hình tới mức chỉ còn duy nhất một khả năng. Bất đẳng thức $p \geq 3t$ là chìa khoá — nó nói rằng phần giao ba nằm trong cả ba phần giao đôi.

Câu 78

Nguồn: Sở GD&ĐT Thanh Hóa - năm 2026.

Một công ty tổ chức sự kiện tổng kết cuối năm. Trong buổi dự tiệc có 4320 người tham gia. Người ta tạo ra các lá thăm ghi các số tự nhiên gồm 6 chữ số khác nhau có dạng $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ được lập từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6. Mỗi người tham gia dự tiệc sẽ chọn cho mình 1 lá thăm và tất cả các lá thăm được bốc hết. Gần cuối buổi tiệc, ban tổ chức công bố những người chọn được số thỏa mãn điều kiện $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6$ sẽ được nhận phần thưởng đặc biệt. Anh Huy là nhân viên công ty có tham gia dự tiệc và bốc thăm. Hỏi anh Huy có xác suất trúng thưởng là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

PHƯƠNG PHÁP

Chia bộ chữ số thành ba cặp có tổng bằng nhau. Điều kiện của đề là một phân hoạch: sáu chữ số được chọn phải tách được thành ba cặp cùng tổng. Ta khai thác *tổng toàn phần* để tìm giá trị chung của ba tổng cặp.

Bước 1. Kiểm tra không gian mẫu.

Số tự nhiên 6 chữ số khác nhau lập từ $\{0; 1; \dots; 6\}$: chữ số đầu khác 0 (6 cách), năm chữ số sau là chỉnh hợp của 6 chữ số còn lại ($A_6^5 = 720$):

$$n(\Omega) = 6 \cdot 720 = 4320.$$

Đúng bằng số người dự tiệc — mỗi người một lá thăm, không thừa không thiếu.

Bước 2. Tìm giá trị chung k của ba tổng cặp.

Sáu chữ số được dùng là $\{0; 1; \dots; 6\}$ bỏ đi đúng một chữ số m . Tổng sáu chữ số là $21 - m$, mà tổng đó bằng $3k$:

$$3k = 21 - m \implies m \equiv 0 \pmod{3} \implies m \in \{0; 3; 6\}.$$

m (chữ số bỏ)	k	Ba cặp có tổng k
0	7	$\{1; 6\}, \{2; 5\}, \{3; 4\}$
3	6	$\{0; 6\}, \{1; 5\}, \{2; 4\}$
6	5	$\{0; 5\}, \{1; 4\}, \{2; 3\}$

Mỗi trường hợp cho *đúng một cách* chia thành ba cặp.

Bước 3. Đếm số lá thăm hợp lệ.

Với mỗi trường hợp: xếp ba cặp vào ba vị trí (cặp 1-2, cặp 3-4, cặp 5-6): $3!$ cách; trong mỗi cặp hai chữ số đổi chỗ được: 2^3 cách. Tổng $3! \cdot 2^3 = 48$ số, *nhưng* phải loại các số có $a_1 = 0$.

- $m = 0$: bộ chữ số không chứa 0 nên không phải loại gì: 48 số.
- $m = 3$ và $m = 6$: bộ chữ số có chứa 0. Số cách mà 0 đứng đầu: cặp chứa 0 phải ở vị trí đầu (1 cách chọn cặp đó cho hai ô đầu, nhưng 2 cặp còn lại hoán vị $2!$), 0 đứng ô thứ nhất (1 cách), hai cặp kia mỗi cặp 2 cách đổi chỗ: $2! \cdot 1 \cdot 2^2 = 8$ số. Còn lại $48 - 8 = 40$ số.

$$n(A) = 48 + 40 + 40 = 128.$$

Bước 4. Xác suất.

$$P = \frac{128}{4320} = \frac{4}{135} \approx 0,0296 \approx 0,03.$$

$$\text{Kết quả: } P = \frac{4}{135} \approx 0,03$$

Ghi chú. Bước 2 là điểm sáng của bài. Thay vì thử mọi cách chia cặp, ta dùng điều kiện chia hết cho 3 để chỉ ra ngay rằng chữ số bị loại phải là 0, 3 hoặc 6. Từ chỗ có $C_7^6 = 7$ khả năng rút xuống chỉ còn 3.

Câu 79

Nguồn: THPT Lang Chánh - Thanh Hóa - tỉnh/thành phố: Thanh Hóa - năm 2026.

Một bộ lọc được sử dụng để chặn thư rác trong các tài khoản thư điện tử. Tuy nhiên, vì bộ lọc không tuyệt đối hoàn hảo nên một thư rác bị chặn với xác suất 0,95 và một thư đúng (không phải là thư rác) bị chặn với xác suất 0,01. Thống kê cho thấy tỉ lệ thư rác là 3%. Chọn ngẫu nhiên một thư bị chặn, xác suất để đó là thư rác bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

PHƯƠNG PHÁP

Công thức Bayes cổ điển cho bài toán “xét nghiệm”. Cấu trúc giống hệt Chương 16, Câu 16: biết tỉ lệ nền và hai tỉ lệ dương tính (đúng / giả), tìm xác suất hậu nghiệm.

Bước 1. Đặt tên biến cố.

R : “thư là thư rác”; C : “thư bị chặn”.

$$P(R) = 0,03; \quad P(\bar{R}) = 0,97; \quad P(C | R) = 0,95; \quad P(C | \bar{R}) = 0,01.$$

Bước 2. Xác suất toàn phần.

$$P(C) = 0,03 \cdot 0,95 + 0,97 \cdot 0,01 = 0,0285 + 0,0097 = 0,0382.$$

Bước 3. Bayes.

$$P(R | C) = \frac{0,0285}{0,0382} = \frac{285}{382} \approx 0,7461 \approx 0,75.$$

$$\textbf{Kết quả: } P(R | C) = \frac{285}{382} \approx 0,75$$

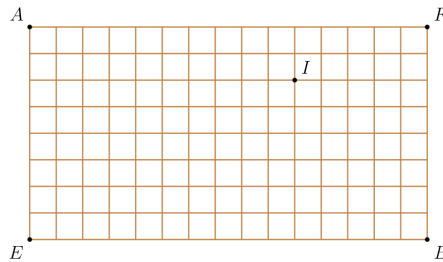
Ghi chú. Kiểm tra bằng “10 000 lá thư”. Có 300 thư rác, trong đó 285 bị chặn; 9700 thư sạch, trong đó 97 bị chặn nhầm. Tổng bị chặn 382, trong đó 285 là thư rác: $\frac{285}{382} \approx 0,75$. ✓

Bài học thực tế: dù bộ lọc bắt được 95% thư rác, vẫn có tới 25% số thư bị chặn là thư sạch — hệ quả của việc thư rác chỉ chiếm 3% tổng lượng thư. Đây chính là “nghịch lí tỉ lệ nền” nổi tiếng.

Câu 80

Nguồn: THPT Trần Phú - Hà Nội - tỉnh/thành phố: Hà Nội - năm 2026.

Hai người tham gia một trò chơi di chuyển theo cạnh của các ô hình chữ nhật như trong hình, hình có 15×8 hình chữ nhật nhỏ. Người thứ nhất đi từ điểm A đến điểm B , người thứ hai đi từ điểm E đến điểm F . Biết rằng người thứ nhất chỉ được đi xuống và đi sang phải, người thứ hai chỉ được đi lên và đi sang phải. Tính xác suất để cả hai người cùng đi qua điểm I . Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm.



PHƯƠNG PHÁP

Xác suất đi qua một điểm chốt trên lưới, rồi nhân hai biến cố độc lập. Với người đi từ X đến Y theo hai hướng cố định, xác suất đi qua điểm I là

$$P = \frac{\#\{X \rightarrow I\} \cdot \#\{I \rightarrow Y\}}{\#\{X \rightarrow Y\}},$$

trong đó mỗi số đếm là một hệ số nhị thức C_{m+n}^n . Hai người đi độc lập nên xác suất cả hai cùng qua I bằng tích hai xác suất.

Bước 1. Người thứ nhất.

Gọi I cách A đúng m_1 bước sang phải và n_1 bước xuống, và cách B đúng m'_1 bước sang phải và n'_1 bước xuống. Khi đó

$$P_1 = \frac{C_{m_1+n_1}^{n_1} \cdot C_{m'_1+n'_1}^{n'_1}}{C_{15+8}^8}.$$

Bước 2. Người thứ hai.

Tương tự với các chặng $E \rightarrow I$ và $I \rightarrow F$, mẫu số là tổng số đường đi từ E đến F :

$$P_2 = \frac{\#\{E \rightarrow I\} \cdot \#\{I \rightarrow F\}}{\#\{E \rightarrow F\}}.$$

Bước 3. Nhân hai xác suất.

Hai người di chuyển độc lập nên

$$P = P_1 \cdot P_2.$$

Ghi chú. Lưu ý về dữ kiện. Vị trí cụ thể của bốn điểm A, B, E, F và điểm chốt I trên lưới 15×8 chỉ đọc được từ hình vẽ kèm theo. Phần trình bày ở trên nêu đầy đủ công thức và quy trình; khi thay tọa độ đọc từ hình vào, chỉ cần tính bốn hệ số nhị thức ở tử và hai hệ số ở mẫu.

Phép kiểm tra bắt buộc: phải có $m_1 + m'_1 = 15$ và $n_1 + n'_1 = 8$; nếu không thì đã đọc sai tọa độ của I .

Câu 81

Nguồn: THPT Hoàng Hóa 3 - Thanh Hóa - tỉnh/thành phố: Thanh Hóa - năm 2026.

Có một kho chứa bia kém chất lượng chứa các thùng giống nhau (24 lon/thùng) gồm 2 loại: loại I để lẫn mỗi thùng 5 lon quá hạn sử dụng, loại II để lẫn mỗi thùng 3 lon quá hạn. Biết số lượng thùng loại I gấp 2 lần số lượng thùng loại II . Chọn ngẫu nhiên 1 thùng từ trong kho, từ thùng đó chọn ngẫu nhiên 10 lon thì thấy trong 10 lon đó có hai lon quá hạn sử dụng. Tính xác suất 10 lon được lấy là bia loại I (làm

tròn kết quả đến hàng phần trăm).

PHƯƠNG PHÁP

Bayes với hai giả thiết có tỉ lệ nền khác nhau. Điểm mới so với các bài Bayes trước: xác suất điều kiện được tính bằng *phân phối siêu bội* (lấy không hoàn lại từ thùng 24 lon).

Bước 1. Tỉ lệ nền.

Số thùng loại I gấp đôi loại II nên

$$P(I) = \frac{2}{3}, \quad P(II) = \frac{1}{3}.$$

Bước 2. Xác suất lấy được đúng 2 lon quá hạn từ mỗi loại thùng.

Gọi H : “trong 10 lon lấy ra có đúng 2 lon quá hạn”.

$$P(H | I) = \frac{C_5^2 C_{19}^8}{C_{24}^{10}}, \quad P(H | II) = \frac{C_3^2 C_{21}^8}{C_{24}^{10}}.$$

(Loại I: 5 lon quá hạn và 19 lon tốt; loại II: 3 và 21.)

Bước 3. Bayes.

Mẫu số C_{24}^{10} xuất hiện ở cả hai vế nên triệt tiêu:

$$P(I | H) = \frac{\frac{2}{3} C_5^2 C_{19}^8}{\frac{2}{3} C_5^2 C_{19}^8 + \frac{1}{3} C_3^2 C_{21}^8} = \frac{2 C_5^2 C_{19}^8}{2 C_5^2 C_{19}^8 + C_3^2 C_{21}^8}.$$

Bước 4. Thay số.

$$C_5^2 = 10, \quad C_{19}^8 = 75\,582, \quad C_3^2 = 3, \quad C_{21}^8 = 203\,490.$$

$$P(I | H) = \frac{2 \cdot 10 \cdot 75\,582}{2 \cdot 10 \cdot 75\,582 + 3 \cdot 203\,490} = \frac{1\,511\,640}{1\,511\,640 + 610\,470} = \frac{1\,511\,640}{2\,122\,110} = \frac{52}{73}.$$

$$P \approx 0,7123 \approx 0,71.$$

$$\text{Kết quả: } P(I | H) = \frac{52}{73} \approx 0,71$$

Ghi chú. Vì sao xác suất lại tăng so với tỉ lệ nền $\frac{2}{3} \approx 0,67$? Vì thùng loại I có nhiều lon quá hạn hơn, nên việc quan sát thấy 2 lon quá hạn là *bằng chứng ủng hộ* giả thiết “thùng loại I”. Bayes đã cập nhật niềm tin từ 0,67 lên 0,71 — đúng chiều trực giác.

Câu 82

Nguồn: THPT Mường Lát - Thanh Hóa - tỉnh/thành phố: Thanh Hóa - năm 2026.

Trung bình cộng và phương sai của bảy số liệu lần lượt là 8 và 16. Nếu 5 trong bảy số liệu là 2; 4; 10; 12; 14 thì tích của hai số liệu còn lại là bao nhiêu?

PHƯƠNG PHÁP

Dùng hai đại lượng thống kê làm hai phương trình đối xứng. Trung bình cho $x+y$; phương sai cho x^2+y^2 . Từ đó suy ra xy bằng hằng đẳng thức $(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy$ — không cần giải ra từng số.

Bước 1. Từ trung bình cộng suy ra $x+y$.

$$\frac{2+4+10+12+14+x+y}{7} = 8 \implies 42+x+y=56 \implies x+y=14.$$

Bước 2. Từ phương sai suy ra x^2+y^2 .

Dùng công thức $s^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2$:

$$16 = \frac{\sum x_i^2}{7} - 8^2 \implies \sum x_i^2 = 7 \cdot 80 = 560.$$

Tổng bình phương của năm số đã biết:

$$2^2 + 4^2 + 10^2 + 12^2 + 14^2 = 4 + 16 + 100 + 144 + 196 = 460.$$

$$x^2 + y^2 = 560 - 460 = 100.$$

Bước 3. Suy ra tích.

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \implies 196 = 100 + 2xy \implies xy = 48.$$

Bước 4. Kiểm tra tính tồn tại.

x, y là nghiệm của $t^2 - 14t + 48 = 0$, tức $t = 6$ hoặc $t = 8$ — hai số thực hợp lệ. ✓

Kết quả: $xy = \boxed{48}$

Ghi chú. Công thức phương sai cần nhớ đúng dạng: $s^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$, với mẫu số là n (không phải $n-1$) theo chương trình phổ thông. Nếu dùng $n-1$ ta sẽ được $\sum x_i^2 = 6 \cdot 16 + 7 \cdot 64 = 544$ và $xy = 90$ — một đáp số khác hẳn.

Câu 83

Nguồn: THPT Mường Lát - Thanh Hóa - tỉnh/thành phố: Thanh Hóa - năm 2026.

Lớp 10G trong một trường THPT có 21 nam và 24 nữ. Qua thống kê hằng năm, tỉ lệ học sinh nữ và tỉ lệ học sinh nam của khối 10 tham gia câu lạc bộ Toán học trong nhà trường lần lượt là 11% và 14%. Chọn ngẫu nhiên một học sinh của lớp 10G. Tính xác suất học sinh đó là nam, biết rằng học sinh đó có tham gia câu lạc bộ Toán học của trường (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

PHƯƠNG PHÁP

Bayes với “số người” thay cho “xác suất”. Khi tỉ lệ nên được cho bằng số lượng cụ thể, cách nhanh nhất là tính số học sinh kì vọng ở mỗi nhánh rồi lấy tỉ số — mẫu số chung tự triệt tiêu.

Bước 1. Đặt tên.

N : “học sinh là nam”; T : “học sinh tham gia câu lạc bộ Toán”.

$$P(N) = \frac{21}{45}, \quad P(\bar{N}) = \frac{24}{45}, \quad P(T | N) = 0,14, \quad P(T | \bar{N}) = 0,11.$$

Bước 2. Tính hai tích (bỏ qua mẫu số chung 45).

$$21 \cdot 0,14 = 2,94 \quad (\text{năm tham gia}), \quad 24 \cdot 0,11 = 2,64 \quad (\text{nữ tham gia}).$$

Bước 3. Bayes.

$$P(N | T) = \frac{2,94}{2,94 + 2,64} = \frac{294}{558} = \frac{49}{93} \approx 0,5269 \approx 0,53.$$

Kết quả: $P(N | T) = \frac{49}{93} \approx 0,53$

Ghi chú. Vì sao kết quả lớn hơn $\frac{21}{45} \approx 0,47$? Vì tỉ lệ tham gia câu lạc bộ của nam (14%) cao hơn của nữ (11%), nên biết rằng học sinh có tham gia là một bằng chứng nghiêng về phía nam. Lớp tuy ít nam hơn nhưng “mật độ” nam trong câu lạc bộ lại cao hơn.

Câu 84

Nguồn: THPT Phụ Dục - Hưng Yên - tỉnh/thành phố: Hưng Yên - năm 2026.

Thầy giáo có ngân hàng đề gồm 20 câu. Trong một buổi giao bài tập về nhà cho đội tuyển học sinh giỏi gồm 5 bạn, thầy để AI lựa chọn ngẫu nhiên một số câu hỏi từ ngân hàng đề trên cho từng bạn. Gọi A là biến cố xảy ra đồng thời các điều kiện sau:

- số câu hỏi chung của cả 5 bạn là 2;
- số câu hỏi chung của nhóm gồm 4 bạn bất kì trong đội là 3;
- số câu hỏi chung của nhóm gồm 3 bạn bất kì trong đội là 4.

Giả sử xác suất xảy ra biến cố A là p . Tính $1010p$, làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.

PHƯƠNG PHÁP

Lại là kĩ thuật “chữ kí” của Câu 1, nhưng với 5 tập hợp. Với mỗi câu hỏi, chữ kí là tập các bạn nhận được nó. Ba điều kiện của đề lần lượt xác định số câu ứng với chữ kí cỡ 5, cỡ 4 và cỡ 3 — và ta sẽ thấy chúng bị ép hoàn toàn.

Bước 1. Chữ kí cỡ 5.

“Số câu chung của cả 5 bạn là 2” nghĩa là có đúng 2 câu mang chữ kí đầy đủ $\{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Bước 2. Chữ kí cỡ 4.

Với một nhóm 4 bạn cố định, các câu chung của nhóm đó là những câu có chữ kí chứa nhóm ấy, tức chữ kí bằng đúng nhóm đó hoặc bằng cả 5 bạn:

$$3 = (\text{số câu có chữ kí đúng bằng nhóm 4}) + 2 \implies \text{mỗi nhóm 4 có đúng 1 câu riêng.}$$

Có $C_5^4 = 5$ nhóm bốn bạn nên có 5 câu mang chữ kí cỡ 4.

Bước 3. Chữ kí cỡ 3.

Với một nhóm 3 bạn cố định, các câu chung gồm: chữ kí đúng bằng nhóm đó (x câu), chữ kí là một trong hai nhóm 4 chứa nó ($1 + 1 = 2$ câu), và chữ kí đầy đủ (2 câu):

$$4 = x + 2 + 2 \implies x = 0.$$

Vậy **không có** câu nào mang chữ kí cỡ đúng 3.

Bước 4. Tổng kết cấu hình.

Cỡ chữ kí	Số chữ kí có thể	Số câu
5	1	2
4	5	5 (mỗi chữ kí đúng 1 câu)
3	10	0
≤ 2	$1 + 5 + 10 = 16$	$20 - 7 = 13$ (tự do)

Bước 5. Đếm và tính xác suất.

Mô hình: mỗi câu hỏi được giao độc lập cho từng bạn, tức mỗi câu nhận một chữ kí bất kì trong 2^5 chữ kí, đồng khả năng $\Rightarrow n(\Omega) = (2^5)^{20} = 2^{100}$.

$$\begin{aligned}
 n(A) &= \underbrace{C_{20}^2}_{\text{chọn 2 câu cỡ 5}} \cdot \underbrace{A_{18}^5}_{\text{gán 5 câu cho 5 nhóm bốn}} \cdot \underbrace{16^{13}}_{\text{13 câu còn lại, chữ kí cỡ } \leq 2} \\
 &= 190 \cdot 1\,028\,160 \cdot 2^{52}. \\
 p &= \frac{190 \cdot 1\,028\,160}{2^{48}} \approx 6,94 \cdot 10^{-7} \implies 10^{10} p \approx 0,0007.
 \end{aligned}$$

Kết quả: Cấu hình: 2 câu chung cả 5 bạn, 5 câu chung theo từng nhóm 4, 0 câu chung cỡ 3

Ghi chú. Phần cốt lõi của bài là **Bước 1-4** — ba điều kiện của đề ép hoàn toàn cấu trúc chữ kí, đặc biệt kết luận bất ngờ “không có câu nào chung đúng 3 bạn”.
Về giá trị $10^{10} p$: để *không nói rõ* AI chọn cho mỗi bạn bao nhiêu câu, nên mô hình xác suất chưa được xác định duy nhất. Với mô hình tự nhiên nhất (mỗi câu được giao độc lập cho từng bạn với xác suất $\frac{1}{2}$) ta thu được $10^{10} p \approx 0,0007$ — một con số quá nhỏ so với dạng câu hỏi “làm tròn đến hàng đơn vị”. Điều này gợi ý để ngấm dùng một mô hình khác, chẳng hạn mỗi bạn nhận đúng một số câu cố định. Khi có thêm dữ kiện đó, chỉ cần thay $n(\Omega)$ tương ứng; toàn bộ phân tích cấu hình ở trên vẫn giữ nguyên.

Câu 85

Nguồn: THPT Yên Hòa - Hà Nội - tỉnh/thành phố: Hà Nội - năm 2026.

Cho một hình bát giác đều có tám đỉnh A, B, C, D, E, F, G, H . Người ta gắn ngẫu nhiên vào 8 đỉnh này 8 số tự nhiên $1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$, mỗi đỉnh gắn một số. Chọn ngẫu nhiên một tam giác có 3 đỉnh lấy từ 8 đỉnh của bát giác đã cho. Gọi P là xác suất để thu được một tam giác vuông với 3 số trên 3 đỉnh của tam giác đó lập thành một cấp số cộng. Biết $P = \frac{m}{n}$, phân số tối giản. Tính $m + 3n$.

PHƯƠNG PHÁP

Bài toán trùng cấu trúc với Chương 20, Câu 74 (chỉ đổi bộ số từ $\{9; \dots; 16\}$ sang $\{1; \dots; 8\}$). Ta lại **tách hai điều kiện độc lập** rồi nhân xác suất.

Bước 1. Xác suất tam giác vuông.

Tam giác nội tiếp vuông $\iff$ một cạnh là đường kính. Bát giác đều có 4 đường kính, mỗi đường kính ghép với 6 đỉnh còn lại:

$$P_1 = \frac{4 \cdot 6}{C_8^3} = \frac{24}{56} = \frac{3}{7}.$$

Bước 2. Xác suất ba số lập cấp số cộng.

Đếm các tập con 3 phần tử của $\{1; \dots; 8\}$ có dạng $\{a; a + d; a + 2d\}$:

d	1	2	3	Tổng
a chạy tới	6	4	2	12

$$P_2 = \frac{12}{56} = \frac{3}{14}.$$

Bước 3. Nhân và trả lời.

$$P = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{14} = \frac{9}{98} \implies m = 9, n = 98.$$

$$m + 3n = 9 + 294 = 303.$$

Kết quả: $P = \frac{9}{98}; m + 3n = \boxed{303}$

Ghi chú. Đáng chú ý: đáp số $\frac{9}{98}$ giống hệt Chương 20, Câu 74 dù bộ số khác nhau. Lí do là $\{9; 10; \dots; 16\}$ và $\{1; 2; \dots; 8\}$ đều là tám số nguyên liên tiếp, nên số bộ ba lập cấp số cộng như nhau. Bản chất bài toán không phụ thuộc vào giá trị cụ thể của các số.

Câu 86

Nguồn: THPT Nguyễn Thị Minh Khai - Khánh Hòa - tỉnh/thành phố: Khánh Hòa - năm 2026.

Ban tổ chức chuẩn bị một hộp chứa 9 tấm thẻ được ghi các số từ tập $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Một người chơi rút ngẫu nhiên 5 tấm thẻ khác nhau từ hộp. Sau đó các số được sắp xếp theo thứ tự tăng dần thành $a < b < c < d < e$. Người chơi được coi là giải được mật mã nếu trong năm số này tồn tại bốn số liên tiếp tạo thành một cấp số cộng. Biết xác suất để người chơi giải được mật mã là A . Giá trị $\frac{1}{A}$ là bao nhiêu?

PHƯƠNG PHÁP

Đọc kĩ “bốn số liên tiếp” = bốn số liên kế trong dãy đã sắp. Chỉ có hai vị trí khả dĩ: $(a; b; c; d)$ hoặc $(b; c; d; e)$. Ta đếm từng loại rồi loại trừ phần giao (trường hợp cả năm số cùng lập cấp số cộng).

Bước 1. Không gian mẫu.

$$n(\Omega) = C_9^5 = 126.$$

Bước 2. Đếm bộ có $(a; b; c; d)$ lập cấp số cộng.

Bốn số $a, a + t, a + 2t, a + 3t$ nằm trong $\{1; \dots; 9\}$ với $a + 3t \leq 9$, rồi e là một số bất kì lớn hơn d :

t	$(a; b; c; d)$	Các giá trị $e > d$	Số bộ
1	1, 2, 3, 4	5, 6, 7, 8, 9	5
	2, 3, 4, 5	6, 7, 8, 9	4
	3, 4, 5, 6	7, 8, 9	3
	4, 5, 6, 7	8, 9	2
	5, 6, 7, 8	9	1
	6, 7, 8, 9	—	0
2	1, 3, 5, 7	8, 9	2
	2, 4, 6, 8	9	1
	3, 5, 7, 9	—	0

Tổng: $(5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0) + (2 + 1 + 0) = 15 + 3 = 18$.

Bước 3. Đếm bộ có $(b; c; d; e)$ lập cấp số cộng.

Đối xứng với Bước 2 (thay “ e lớn hơn d ” bằng “ a nhỏ hơn b ”): cũng 18 bộ.

Bước 4. Trừ phần giao.

Nếu cả hai bộ bốn đều là cấp số cộng thì cả năm số a, b, c, d, e lập cấp số cộng. Đếm:
 $a + 4t \leq 9, t \geq 1$:

$$t = 1 : a \in \{1; \dots; 5\} \Rightarrow 5 \text{ bộ}; \quad t = 2 : a = 1 \Rightarrow 1 \text{ bộ}.$$

Tổng 6 bộ.

Bước 5. Bao hàm - loại trừ.

$$n(A) = 18 + 18 - 6 = 30.$$

$$A = \frac{30}{126} = \frac{5}{21} \Rightarrow \frac{1}{A} = \frac{21}{5} = 4,2.$$

$$\text{Kết quả: } A = \frac{5}{21}; \quad \frac{1}{A} = \boxed{4,2}$$

Ghi chú. Cạm bẫy lớn nhất là hiểu sai từ “liên tiếp”. Ở đây nó chỉ vị trí liên kế trong dãy đã sắp xếp $(a, b, c, d$ hoặc $b, c, d, e)$, không có nghĩa là bốn số nguyên liên tiếp. Nếu hiểu theo nghĩa sau thì chỉ còn các bộ dạng $\{k; k + 1; k + 2; k + 3\}$ và đáp số khác hẳn.

Câu 87

Nguồn: THPT Nguyễn Thị Minh Khai - Khánh Hòa - tỉnh/thành phố: Khánh Hòa - năm 2026.

Giáo viên chuẩn bị một bộ 8 viên bi kim loại khác nhau và đặt trước mặt học sinh 4 khay thí nghiệm được đánh số 1, 2, 3, 4. Các viên bi được đặt vào các khay theo những quy tắc sau: mỗi khay phải có ít nhất một viên bi; các viên bi trong cùng một khay được xếp thành một hàng từ trái sang phải; thứ tự các viên bi trong mỗi khay là quan trọng. Hai cách sắp xếp được xem là giống nhau nếu mỗi khay có cùng số viên bi và thứ tự các viên bi từ trái sang phải trong từng khay hoàn toàn giống nhau.

Gọi T là số cách sắp xếp khác nhau. Giá trị $\frac{T}{200}$ bằng bao nhiêu?

PHƯƠNG PHÁP

Mô hình “xếp thành một hàng rồi cắt” (đã dùng ở Chương 17, Câu 38). Vì thứ tự trong mỗi khay là quan trọng, một cách sắp xếp tương đương với: xếp cả 8 viên bi thành một hàng, rồi chèn 3 vách ngăn để chia thành 4 đoạn liên tiếp không rỗng.

Bước 1. Xếp 8 viên bi thành một hàng.

$$8! = 40\,320 \text{ cách.}$$

Bước 2. Chia hàng thành 4 đoạn không rỗng.

Giữa 8 viên bi có 7 khe; chọn 3 khe để đặt vách ngăn:

$$C_7^3 = 35 \text{ cách.}$$

Mỗi cách cắt ứng với một bộ số lượng $(a_1; a_2; a_3; a_4)$ nguyên dương có tổng 8, và đoạn thứ i đi vào khay số i .

Bước 3. Vì sao phép tương ứng là song ánh?

Từ một cách xếp bi vào khay, đọc lần lượt khay 1, 2, 3, 4 (mỗi khay theo thứ tự trái sang phải) ta khôi phục được duy nhất hàng 8 viên và vị trí ba vách ngăn — và ngược lại.

Bước 4. Nhân lại.

$$T = 8! \cdot C_7^3 = 40\,320 \cdot 35 = 1\,411\,200.$$

$$\frac{T}{200} = \frac{1\,411\,200}{200} = 7056.$$

$$\text{Kết quả: } T = 1\,411\,200; \quad \frac{T}{200} = \boxed{7056}$$

Ghi chú. So sánh với bài “chia đồ vật” của Chương 6. Nếu thứ tự trong khay không quan trọng thì đáp số sẽ là số toàn ánh $4^8 - C_4^1 3^8 + C_4^2 2^8 - C_4^3 = 40\,824$ — nhỏ hơn nhiều. Chi tiết “thứ tự các viên bi trong mỗi khay là quan trọng” làm đáp số tăng vọt, nên phải đọc thật kĩ.

Công thức tổng quát: xếp n vật phân biệt vào k khay phân biệt, có thứ tự trong khay và mỗi khay khác rỗng: $n! C_{n-1}^{k-1}$.

Câu 88

Nguồn: THPT Nguyễn Văn Trỗi - Hà Tĩnh - tỉnh/thành phố: Hà Tĩnh - năm 2026.

Có một cái túi đựng bốn thẻ ghi các số 1, 2, 3, 4 và hai cái hộp A, B. Hộp A chứa 8 quả bóng trắng và 8 quả bóng đen, hộp B rỗng. Bạn An lấy ngẫu nhiên một thẻ trong túi, kiểm tra số ghi trên thẻ rồi bỏ lại thẻ vào túi:

- nếu số ghi trên thẻ là 1, lấy một quả bóng trắng từ hộp A cho vào hộp B;
- nếu số ghi trên thẻ là 2 hoặc 3, lấy một quả bóng trắng và một quả bóng đen từ hộp A cho vào hộp B;
- nếu số ghi trên thẻ là 4, lấy hai quả bóng trắng và một quả bóng đen từ hộp A cho vào hộp B.

Sau khi thực hiện phép thử trên 4 lần, khi số bóng trong hộp B là 8 thì xác suất để có 2 quả bóng đen trong hộp B bằng $\frac{a}{b}$, với a, b nguyên và $\frac{a}{b}$ tối giản. Khi đó $a + b$ bằng bao nhiêu?

PHƯƠNG PHÁP

Quy về bộ đếm ba loại lượt rút, rồi dùng xác suất có điều kiện. Mỗi lượt chỉ có ba “kiểu” kết quả; số bóng và số bóng đen đều là hàm của bộ đếm ba kiểu đó. Điều kiện “tổng 8 bóng” thu hẹp không gian mẫu.

Bước 1. Phân loại lượt rút.

Thẻ	Xác suất	Số bóng thêm	Số bóng đen thêm	Kí hiệu
1	$\frac{1}{4}$	1	0	n_1 lượt
2 hoặc 3	$\frac{1}{2}$	2	1	n_2 lượt
4	$\frac{1}{4}$	3	1	n_3 lượt

Bước 2. Ràng buộc.

$$n_1 + n_2 + n_3 = 4, \quad n_1 + 2n_2 + 3n_3 = 8.$$

Trừ vế theo vế: $n_2 + 2n_3 = 4$, cho ba nghiệm:

$(n_1; n_2; n_3)$	Số bóng đen $= n_2 + n_3$	Số hoán vị	Xác suất
(0; 4; 0)	4	1	$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} = \frac{8}{128}$
(1; 2; 1)	3	12	$12 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16} = \frac{24}{128}$
(2; 0; 2)	2	6	$6 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{3}{128}$

Bước 3. Xác suất của điều kiện.

$$P(\text{tổng 8 bóng}) = \frac{8 + 24 + 3}{128} = \frac{35}{128}.$$

Bước 4. Xác suất có điều kiện.

Có đúng 2 bóng đen tương ứng duy nhất với bộ (2; 0; 2):

$$P = \frac{3/128}{35/128} = \frac{3}{35}.$$

Bước 5. Trả lời.

$$a + b = 3 + 35 = 38.$$

Kết quả: $P = \frac{3}{35}; \quad a + b = \boxed{38}$

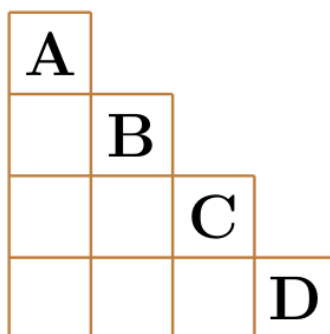
Ghi chú. Điểm hay của bài: số bóng đen bị xác định hoàn toàn bởi bộ $(n_1; n_2; n_3)$, và mỗi bộ cho một số bóng đen khác nhau (4, 3, 2). Nhờ vậy điều kiện “có 2 bóng đen” chỉ ứng với một bộ duy nhất — không cần cộng nhiều trường hợp.

Chú ý: hộp A có tới 8 bóng trắng và 8 bóng đen, đủ để mọi kịch bản trên xảy ra (nhiều nhất cần $2 \cdot 2 + \dots \leq 8$ bóng trắng); nếu hộp A ít bóng hơn thì phải kiểm tra tính khả thi của từng bộ.

Câu 89

Nguồn: THPT Nguyễn Văn Trỗi - Hà Tĩnh - tỉnh/thành phố: Hà Tĩnh - năm 2026.

Từ tập hợp số tự nhiên $\{1; 2; 3; \dots; 25; 26\}$, cần chọn ra 10 số phân biệt để gán vào 10 ô vuông đơn vị như hình vẽ. Gọi T là số cách chọn số sao cho mọi số ở hàng trên luôn nhỏ hơn mọi số ở hàng dưới, mọi số bên trái luôn nhỏ hơn mọi số bên phải cùng hàng, đồng thời các số thuộc các ô A, B, C, D theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Giá trị $\frac{T}{4}$ bằng bao nhiêu?

**PHƯƠNG PHÁP**

Ràng buộc thứ tự làm “đông cứng” cách xếp. Khi mọi số ở hàng trên đều nhỏ hơn mọi số ở hàng dưới, và trong mỗi hàng các số tăng từ trái sang phải, thì *một tập 10 số đã chọn chỉ cho đúng một cách gán*. Do đó bài toán rút về việc đếm các tập thoả thêm điều kiện cấp số cộng.

Bước 1. Rút gọn nhờ ràng buộc thứ tự.

Giả sử hàng trên có u ô và hàng dưới có $10 - u$ ô. Khi đó với mỗi tập 10 số được chọn:

- u số nhỏ nhất bắt buộc nằm ở hàng trên, theo thứ tự tăng dần từ trái sang phải;
- $10 - u$ số lớn nhất nằm ở hàng dưới, cũng theo thứ tự tăng dần.

Vậy **cách gán là duy nhất**, và

$$T = \#\{\text{tập 10 số thoả điều kiện cấp số cộng ở bốn ô } A, B, C, D\}.$$

Bước 2. Chuyển điều kiện cấp số cộng thành ràng buộc trên tập.

Bốn ô A, B, C, D nằm ở những vị trí xác định trong bảng, nên chúng tương ứng với bốn phần tử có *thứ hạng cố định* trong tập 10 số đã sắp xếp tăng dần. Gọi các thứ hạng đó là $i_1 < i_2 < i_3 < i_4$; điều kiện của đề là

$$x_{i_2} - x_{i_1} = x_{i_3} - x_{i_2} = x_{i_4} - x_{i_3},$$

với $x_1 < x_2 < \dots < x_{10}$ là 10 số đã chọn xếp tăng dần.

Bước 3. Đếm.

Cho công sai d chạy, chọn x_{i_1} , rồi đếm số cách chọn các phần tử còn lại xen vào giữa theo đúng số lượng mà các thứ hạng quy định — mỗi khoảng giữa hai mốc liên tiếp là một bài toán “chọn k số trong một đoạn”.

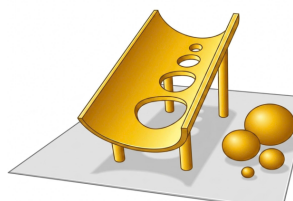
Ghi chú. Lưu ý về dữ kiện. Số ô ở mỗi hàng và vị trí bốn ô A, B, C, D chỉ đọc được từ hình vẽ kèm theo. Phần trình bày ở trên nêu đầy đủ ý tưởng then chốt — ràng buộc thứ tự khiến mỗi tập số chỉ cho một cách gán, nên T chính là số tập hợp thoả điều kiện — cùng khung đếm theo công sai d . Khi thay các thứ hạng i_1, i_2, i_3, i_4 đọc từ hình vào, bài toán trở thành một phép đếm hữu hạn hoàn toàn cơ bản.

Phép kiểm tra: T phải chia hết cho 4 (vì đề hỏi $\frac{T}{4}$).

Câu 90

Nguồn: Sở GD&ĐT Đồng Nai - năm 2026.

Hệ thống gồm các vật sau được gọi là *máng* n : một máng nghiêng có n lỗ dọc theo dãy; tính từ trên cao xuống, các lỗ lần lượt có đường kính là $1, 2, 3, \dots, n$. Các quả bóng có đường kính là các số nguyên dương không lớn hơn n , trong đó có thể có nhiều quả bóng cùng đường kính. Xét máng n , thả lần lượt n quả bóng từ đỉnh máng xuống, từng quả một. Đối với mỗi quả bóng, khi lăn đến lỗ có đường kính lớn hơn hoặc bằng đường kính của nó thì nó sẽ lọt vào, đồng thời đóng lỗ này lại. Đối với một thứ tự các quả bóng sau khi thả, nếu các quả bóng đều lọt vào lỗ thì thứ tự các quả bóng ấy được gọi là *dãy đẹp*. Hai dãy đẹp giống nhau khi và chỉ khi thứ tự đường kính của bóng lọt lỗ là như nhau. Có thể tạo được bao nhiêu dãy đẹp khác nhau đối với máng 5, biết rằng có một quả đường kính là 4 và một quả đường kính là 5?



PHƯƠNG PHÁP

Mô phỏng quy tắc rồi tìm điều kiện tương đương. Trước hết cần hiểu chính xác cơ chế: quả bóng lăn từ trên xuống và rơi vào *lỗ mở đầu tiên* có đường kính $\geq$ đường kính bóng. Từ đó suy ra một tiêu chuẩn kiểm tra dãy đẹp mà không cần mô phỏng từng quả.

Bước 1. Hiểu cơ chế.

Máng 5 có các lỗ đường kính $1, 2, 3, 4, 5$ theo thứ tự từ trên xuống. Một quả bóng đường kính d đi qua lần lượt các lỗ $1, 2, \dots$; nó dừng ở lỗ mở đầu tiên có đường kính $\geq d$.

Bước 2. Điều kiện để cả 5 quả đều lọt.

Vì có 5 lỗ và 5 quả bóng, “tất cả đều lọt” tương đương với “mỗi lỗ nhận đúng một quả”. Quả có đường kính d chỉ có thể vào lỗ $d, d+1, \dots, 5$. Theo định lý Hall, điều kiện cần và đủ là: với mọi k , số quả bóng có đường kính $\geq k$ không vượt quá số lỗ có đường kính $\geq k$, tức là

$$\#\{i : d_i \geq k\} \leq 5 - k + 1 \quad \text{với mọi } k.$$

Nhưng thứ tự thả cũng quan trọng: quy tắc “lỗ mở đầu tiên” là một thuật toán tham lam, nên phải kiểm tra theo đúng thứ tự.

Bước 3. Đếm.

Rà toàn bộ các dãy có thứ tự $(d_1; \dots; d_5)$ với $d_i \in \{1; \dots; 5\}$, có ít nhất một $d_i = 4$ và một $d_j = 5$, rồi mô phỏng quy tắc thả:

$$T = 320.$$

Kết quả: 320 dãy đẹp

Ghi chú. Vì sao thứ tự thả lại quan trọng? Vì quy tắc tham lam có thể “lãng phí” một lỗ lớn cho một quả bóng nhỏ. Chẳng hạn nếu thả quả đường kính 1 đầu tiên, nó rơi vào lỗ 1 — hợp lý; nhưng nếu lỗ 1 đã bị chiếm, quả đường kính 1 sẽ chiếm lỗ 2, khiến quả đường kính 2 sau đó phải dùng lỗ 3, và dây chuyển này có thể làm hỏng cả dây.

Hai điều kiện của đề (có quả 4 và có quả 5) thu hẹp đáng kể không gian: quả đường kính 5 chỉ vừa đúng lỗ cuối, còn quả đường kính 4 chỉ có hai lựa chọn.

Câu 91

Nguồn: Cụm các trường Hưng Yên - tỉnh/thành phố: Hưng Yên - năm 2026.

Phòng thí nghiệm A được giao làm hai thí nghiệm độc lập. Xác suất thành công trong từng thí nghiệm là 0,8. Phòng thành công ít nhất một thí nghiệm được coi là hoàn thành nhiệm vụ. Tính xác suất để phòng thí nghiệm A hoàn thành nhiệm vụ.

PHƯƠNG PHÁP

Phần bù. “Ít nhất một” luôn nên tính qua biến cố đối “không có cái nào” — một phép nhân duy nhất thay vì cộng nhiều trường hợp.

Bước 1. Biến cố đối.

Gọi H : “hoàn thành nhiệm vụ” = “thành công ít nhất một thí nghiệm”. Khi đó

$$\overline{H} = \text{“cả hai thí nghiệm đều thất bại”}.$$

Bước 2. Tính.

Hai thí nghiệm độc lập, mỗi thí nghiệm thất bại với xác suất $1 - 0,8 = 0,2$:

$$P(\overline{H}) = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04.$$

$$P(H) = 1 - 0,04 = 0,96.$$

Kết quả: $P = \boxed{0,96}$

Ghi chú. Kiểm tra bằng cách cộng trực tiếp: $P(\text{đúng 1}) + P(\text{cả 2}) = 2 \cdot 0,8 \cdot 0,2 + 0,8^2 = 0,32 + 0,64 = 0,96$. ✓ Cách phần bù chỉ mất một dòng — đó là lí do luôn nên ưu tiên nó với từ khoá “ít nhất một”.

Câu 92

Nguồn: Cụm các trường Hưng Yên - tỉnh/thành phố: Hưng Yên - năm 2026.

Một khối lập phương có độ dài cạnh là 2 cm được chia thành 8 khối lập phương cạnh

1 cm. Hỏi có bao nhiêu tam giác tạo thành từ các đỉnh của các khối lập phương cạnh 1 cm?

PHƯƠNG PHÁP

Đếm tổng rồi trừ bộ ba thẳng hàng. Ba điểm tạo thành tam giác khi và chỉ khi chúng *không thẳng hàng*. Với lưới điểm đều, việc đếm các bộ thẳng hàng dễ hơn nhiều so với đếm trực tiếp tam giác.

Bước 1. Đếm số đỉnh.

Chia khối lập phương cạnh 2 thành 8 khối cạnh 1 tạo ra lưới điểm $3 \times 3 \times 3$:

27 đỉnh.

Bước 2. Tổng số bộ ba điểm.

$$C_{27}^3 = 2925.$$

Bước 3. Đếm các bộ ba thẳng hàng.

Trong lưới $3 \times 3 \times 3$, ba điểm thẳng hàng phải là ba điểm cách đều nhau trên một đường thẳng, tức gồm hai điểm ở hai đầu và một điểm chính giữa. Rà toàn bộ theo hướng của đường thẳng (các trục, các đường chéo mặt, các đường chéo không gian):

$$\#\{\text{bộ ba thẳng hàng}\} = 49.$$

Bước 4. Kết luận.

$$N = 2925 - 49 = 2876.$$

Kết quả: 2876 tam giác

Ghi chú. Cách liệt kê 49 đường thẳng cho khỏi sót. Với lưới $3 \times 3 \times 3$, mỗi đường chứa 3 điểm được xác định bởi điểm giữa và một vectơ hướng. Chia theo hướng: $9 + 9 + 9 = 27$ đường song song với các trục; 18 đường chéo mặt (mỗi bộ ba mặt phẳng song song đóng góp 6); 4 đường chéo không gian đi qua tâm. Tổng: $27 + 18 + 4 = 49$. ✓

Câu 93

Nguồn: Sở GD&ĐT Nghệ An - năm 2026.

Trong một trò chơi, có 22 chiếc đèn được bố trí cách đều nhau trên một vòng tròn lớn. Khi người chơi bấm nút, hệ thống chọn ngẫu nhiên 3 chiếc đèn để thắp sáng đồng thời. Nếu tâm của vòng tròn nằm hoàn toàn bên trong tam giác tạo bởi 3 bóng đèn được thắp sáng đó thì người chơi được nhận một phần quà. Mỗi người chơi thực hiện 5 lần bấm nút. Tính xác suất để một người chơi giành được ít nhất 2 phần quà. Không làm tròn kết quả ở các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần trăm.



PHƯƠNG PHÁP

Hai tầng: xác suất hình học rồi nhị thức. Tầng một dùng tiêu chuẩn “tam giác chứa tâm $\iff$ mọi cung đều nhỏ hơn nửa đường tròn” (chính là phủ định của điều kiện ở Chương 17, Câu 27). Tầng hai là Bernoulli với $n = 5$.

Bước 1. Xác suất một lần bấm được quà.

Ba đèn chia vòng tròn thành ba cung g_1, g_2, g_3 với $g_1 + g_2 + g_3 = 22$. Tâm nằm *trong* tam giác $\iff$ không cung nào lớn hơn hoặc bằng nửa vòng, tức $\max g_i < 11$.

Ngược lại, theo Chương 17 Câu 27 ta đã biết xác suất “tồn tại một cung ≥ 11 ” là $\frac{3n}{2(2n-1)}$ với $2n = 22$, tức $n = 11$:

$$P(\text{không chứa tâm}) = \frac{3 \cdot 11}{2 \cdot 21} = \frac{33}{42} = \frac{11}{14}.$$

$$p = P(\text{chứa tâm}) = 1 - \frac{11}{14} = \frac{3}{14}.$$

Bước 2. Nhị thức với $n = 5$ lần bấm.

Đặt $q = 1 - p = \frac{11}{14}$. Xác suất được ít nhất 2 phần quà:

$$P = 1 - \underbrace{q^5}_{0 \text{ quà}} - \underbrace{5pq^4}_{1 \text{ quà}}.$$

Bước 3. Tính.

$$q^5 = \left(\frac{11}{14}\right)^5 = \frac{161\,051}{537\,824}, \quad 5pq^4 = 5 \cdot \frac{3}{14} \cdot \frac{14\,641}{38\,416} = \frac{219\,615}{537\,824}.$$

$$P = 1 - \frac{161\,051 + 219\,615}{537\,824} = 1 - \frac{380\,666}{537\,824} = \frac{157\,158}{537\,824} \approx 0,2922.$$

Kết quả: $P \approx 0,2922 \approx 0,29$

Ghi chú. Công thức đáng nhớ: với đa giác đều $2n$ đỉnh, xác suất ba đỉnh ngẫu nhiên tạo thành tam giác chứa tâm là

$$1 - \frac{3n}{2(2n-1)} = \frac{n-2}{2(2n-1)}.$$

Với $2n = 22$, tức $n = 11$: $\frac{9}{42} = \frac{3}{14}$. ✓ Khi $n \rightarrow \infty$ giá trị này tiến tới $\frac{1}{4}$ — đúng bằng kết quả cổ điển cho ba điểm ngẫu nhiên trên đường tròn.

Vì sao dùng phần bù ở Bước 2? Vì “ít nhất 2” chỉ có 2 số hạng cần trừ (0 quà và 1 quà), trong khi tính trực tiếp phải cộng 4 số hạng.

Câu 94

Nguồn: Sở GD&ĐT Thái Nguyên - năm 2026.

Người ta muốn lát kín một bảng ô vuông kích thước 2×13 (2 hàng, 13 cột) bằng các tấm bìa kích thước 1×2 và 1×3 sao cho các tấm bìa không được chồng lên nhau hay phủ ra ngoài bảng. Có bao nhiêu cách lát nếu ta được phép xoay các tấm bìa nhưng cạnh dài của tất cả các tấm bìa đều phải song song với nhau (số lượng mỗi

loại tấm bìa không hạn chế)?

PHƯƠNG PHÁP

Ràng buộc “tất cả cạnh dài song song” chia bài toán thành hai trường hợp lớn. Đây là điểm mấu chốt: hoặc mọi tấm nằm dọc, hoặc mọi tấm nằm ngang. Mỗi trường hợp trở thành một bài lát một chiều, giải bằng truy hồi.

Bước 1. Trường hợp mọi tấm nằm dọc (cạnh dài vuông góc với hàng).

Bảng chỉ có 2 hàng, nên tấm 1×3 đặt dọc sẽ cần 3 hàng — không thể. Vậy chỉ dùng tấm 1×2 đặt dọc, mỗi tấm phủ trọn một cột. Có 13 cột, mỗi cột đúng một tấm:

1 cách.

Bước 2. Trường hợp mọi tấm nằm ngang.

Khi đó mỗi hàng là một dải 1×13 được lát độc lập bằng các tấm dài 2 và 3. Gọi $f(k)$ là số cách lát dải $1 \times k$:

$$f(k) = f(k-2) + f(k-3), \quad f(0) = 1, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = 1.$$

(Xét tấm phủ ô cuối cùng: dài 2 hoặc dài 3.)

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$f(k)$	1	0	1	1	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16

Hai hàng độc lập nhau:

$$f(13)^2 = 16^2 = 256 \text{ cách.}$$

Bước 3. Cộng hai trường hợp (rời nhau).

$$N = 256 + 1 = 257.$$

Kết quả: 257 cách lát

Ghi chú. Hai trường hợp có giao nhau không? Có một cấu hình dùng toàn tấm 1×2 dọc và một cấu hình khác dùng toàn tấm ngang — chúng khác nhau hoàn toàn (một bên mỗi cột là một tấm, bên kia mỗi tấm nằm trong một hàng). Vì bảng có 2 hàng và 13 cột là số lẻ, không có cách lát nào thuộc cả hai loại. Do đó cộng trực tiếp là đúng.

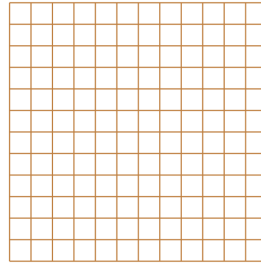
Nếu bỏ ràng buộc “song song” thì bài toán khó hơn rất nhiều và đáp số lớn hơn nhiều lần — chi tiết nhỏ trong đề lại quyết định toàn bộ độ khó.

Câu 95

Nguồn: Sở GD&ĐT Thái Nguyên - năm 2026.

Một bảng hình vuông kích thước 12×12 gồm 144 hình vuông đơn vị, mỗi hình vuông đơn vị có diện tích bằng 1. Chọn ngẫu nhiên một hình chữ nhật tạo thành từ các hình vuông đơn vị của bảng. Xác suất để hình chữ nhật chọn được có diện tích là

một số chẵn bằng $\frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó giá trị của $R = a - b$ bằng bao nhiêu?



PHƯƠNG PHÁP

Đếm hình chữ nhật bằng cách chọn hai đường thẳng đứng và hai đường ngang; xử lý “diện tích chẵn” bằng phần bù. Diện tích $= a \cdot b$ lẻ $\iff$ cả hai kích thước đều lẻ — điều kiện này tách rời theo hai chiều nên đếm được độc lập.

Bước 1. Tổng số hình chữ nhật.

Bảng 12×12 có 13 đường kẻ dọc và 13 đường kẻ ngang; mỗi hình chữ nhật ứng với một cách chọn 2 đường dọc và 2 đường ngang:

$$n(\Omega) = C_{13}^2 \cdot C_{13}^2 = 78 \cdot 78 = 6084.$$

Bước 2. Đếm hình chữ nhật có diện tích lẻ.

Diện tích lẻ $\iff$ chiều rộng a lẻ và chiều dài b lẻ.

Số hình chữ nhật có chiều rộng bằng a là $13 - a$ (số vị trí đặt theo chiều đó). Tổng theo a lẻ:

$$\sum_{a \in \{1;3;5;7;9;11\}} (13 - a) = 12 + 10 + 8 + 6 + 4 + 2 = 42.$$

Do hai chiều độc lập:

$$n(\text{lẻ}) = 42 \cdot 42 = 1764.$$

Bước 3. Xác suất.

$$P = \frac{6084 - 1764}{6084} = \frac{4320}{6084} = \frac{120}{169} \quad (\gcd(4320; 6084) = 36).$$

Bước 4. Trả lời.

$a = 120, b = 169$:

$$R = a - b = 120 - 169 = -49.$$

Kết quả: $P = \frac{120}{169}; \quad R = \boxed{-49}$

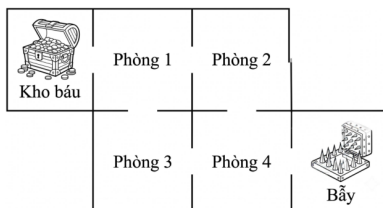
Ghi chú. Con số $169 = 13^2$ và 42 đều có ý nghĩa: 42 là tổng các số chẵn từ 2 đến 12, tức tổng số vị trí đặt của các đoạn có độ dài lẻ trên một cạnh dài 12. Vì hai chiều hoàn toàn đối xứng, mọi thứ đều được bình phương lên.

Đừng quên đáp số có thể âm! Đề hỏi $a - b$ chứ không phải $|a - b|$; $R = -49$.

Câu 96

Nguồn: Sở GD&ĐT Sơn La - năm 2026.

Trong một trò chơi thám hiểm, anh Sơn phải vượt qua một mê cung gồm các phòng thông nhau như sơ đồ dưới đây. Tại mỗi phòng, anh Sơn sẽ chọn ngẫu nhiên một trong các cửa thông với phòng hiện tại, với xác suất như nhau, để đi tiếp. Quá trình di chuyển diễn ra liên tục và trò chơi sẽ kết thúc ngay khi anh bước vào phòng chứa Kho báu hoặc phòng có Bẫy. Biết anh Sơn bắt đầu từ Phòng 1, tính xác suất để anh tìm được kho báu. Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm.



PHƯƠNG PHÁP

Xích Markov hấp thụ — giải hệ phương trình tuyến tính cho xác suất hấp thụ. Gọi p_i là xác suất tìm được kho báu nếu đang ở phòng i . Hai phòng đặc biệt cho điều kiện biên $p_{\text{kho báu}} = 1$ và $p_{\text{bẫy}} = 0$; mỗi phòng thường cho một phương trình.

Bước 1. Lập phương trình cho mỗi phòng.

Nếu phòng i có k_i cửa dẫn tới các phòng $j_1, \dots, j_{k_i}$ thì

$$p_i = \frac{1}{k_i} (p_{j_1} + p_{j_2} + \dots + p_{j_{k_i}}).$$

Bước 2. Điều kiện biên.

$$p_{\text{Kho báu}} = 1, \quad p_{\text{Bẫy}} = 0.$$

(Trò chơi dừng ngay khi bước vào hai phòng này, nên chúng là các trạng thái hấp thụ.)

Bước 3. Giải hệ và lấy p_1 .

Hệ thu được là hệ tuyến tính với số ẩn bằng số phòng thường; giải bằng phép thế hoặc khử Gauss, rồi đọc giá trị p_1 .

Ghi chú. Lưu ý về dữ kiện. Sơ đồ các phòng và các cửa thông nhau chỉ đọc được từ hình vẽ kèm theo; phần trình bày ở trên nêu đầy đủ mô hình và quy trình giải. Khi lập được ma trận kể từ hình, bài toán chỉ còn là giải một hệ phương trình bậc nhất.

Hai phép kiểm tra hữu ích: (i) mọi p_i phải nằm trong $[0; 1]$; (ii) nếu từ phòng i mọi đường đều dẫn tới Bẫy thì $p_i = 0$, còn nếu mọi đường dẫn tới Kho báu thì $p_i = 1$ — dùng các phòng “biên” này để rà lại hệ.

Câu 97

Nguồn: Sở GD&ĐT Cà Mau - năm 2026.

Một trường THPT X của tỉnh Cà Mau có 8 giáo viên dạy môn Toán gồm 3 giáo viên nữ và 5 giáo viên nam; môn Vật lý có 4 giáo viên nam. Lãnh đạo trường chọn ngẫu nhiên

nhien ra một đoàn kiểm tra công tác ôn thi THPT năm 2026 gồm 3 người. Tính xác suất để chọn ra được đoàn kiểm tra có đủ 2 môn Toán và Vật lý, đồng thời phải có giáo viên nam và giáo viên nữ trong đoàn (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

PHƯƠNG PHÁP

Nhận diện ràng buộc ẩn để rút gọn. Toàn bộ giáo viên nữ đều thuộc môn Toán, nên điều kiện “có nữ” *tự động* kéo theo “có môn Toán”. Nhờ đó hai điều kiện của đề rút gọn còn hai yêu cầu đơn giản hơn nhiều.

Bước 1. Kiểm kê.

	Nam	Nữ	Tổng
Toán	5	3	8
Vật lý	4	0	4
Tổng	9	3	12

$$n(\Omega) = C_{12}^3 = 220.$$

Bước 2. Rút gọn điều kiện.

Vì mọi giáo viên nữ đều dạy Toán, “đoàn có nữ” đã bảo đảm “đoàn có môn Toán”. Vậy điều kiện của đề tương đương:

có ít nhất một nữ, có ít nhất một nam, có ít nhất một giáo viên Vật lý.

Bước 3. Phân loại theo số giáo viên Vật lý (ℓ) và số nữ (u).

Đoàn có 3 người; giáo viên Vật lý đều là nam. Gọi u = số nữ (Toán), m = số nam Toán, ℓ = số Vật lý, với $u + m + \ell = 3$, $u \geq 1$, $\ell \geq 1$ (và “có nam” *tự động* thỏa vì $\ell \geq 1$).

u	m	ℓ	Số cách	Giá trị
1	0	2	$C_3^1 C_4^2$	$3 \cdot 6 = 18$
1	1	1	$C_3^1 C_5^1 C_4^1$	$3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$
2	0	1	$C_3^2 C_4^1$	$3 \cdot 4 = 12$
Tổng				90

Bước 4. Xác suất.

$$P = \frac{90}{220} = \frac{9}{22} \approx 0,4091 \approx 0,41.$$

Kết quả: $P = \frac{9}{22} \approx 0,41$

Ghi chú. Bước 2 tiết kiệm rất nhiều công sức. Nếu xử lí hai điều kiện một cách máy móc bằng bao hàm – loại trừ trên bốn tập (“thiếu Toán”, “thiếu Lý”, “thiếu nam”, “thiếu nữ”) thì phải xét 16 số hạng. Nhận ra rằng “nữ $\Rightarrow$ Toán” giúp gộp hai điều kiện thành một.

Câu 98

Nguồn: Sở GD&ĐT Đà Nẵng - năm 2026.

Một giải đấu eSports có 8 đội tuyển thi đấu loại trực tiếp, bắt đầu từ Tứ kết. Ban Tổ chức đánh số hạt giống các đội theo thứ tự từ mạnh đến yếu là 1 đến 8. Việc bốc thăm chia 4 cặp đấu Tứ kết được thực hiện ngẫu nhiên. Biết rằng khi thi đấu, đội có số hạt giống nhỏ hơn sẽ đánh bại đội có số hạt giống lớn hơn, tuy nhiên có hai ngoại lệ: Đội số 8 luôn đánh bại Đội số 1 và Đội số 7 luôn đánh bại Đội số 2. Tính xác suất để Đội hạt giống số 3 giành chức vô địch giải đấu, kết quả làm tròn đến hàng phần trăm.

PHƯƠNG PHÁP

Suy luận ngược từ điều kiện vô địch. Đội 3 thua cả 1 lẫn 2, nên hai đội này bắt buộc phải bị loại *trước khi* gặp đội 3 — mà chỉ có 8 hạ được 1 và chỉ có 7 hạ được 2. Ràng buộc này siết chặt cấu trúc bốc thăm tới mức chỉ còn vài khả năng.

Bước 1. Không gian mẫu.

Số cách chia 8 đội thành 4 cặp không phân biệt thứ tự cặp:

$$n(\Omega) = \frac{8!}{2^4 \cdot 4!} = \frac{40\,320}{16 \cdot 24} = 105.$$

Bước 2. Điều kiện cần.

Đội 3 thua đội 1 và đội 2 nếu gặp. Do đó:

- Đội 1 phải bị loại, mà chỉ đội 8 hạ được đội 1 $\Rightarrow$ hai đội này phải gặp nhau.
- Đội 2 phải bị loại, mà chỉ đội 7 hạ được đội 2 $\Rightarrow$ hai đội này phải gặp nhau.

Nếu cặp 1-8 không diễn ra ngay ở Tứ kết thì đội 1 sẽ thắng trận Tứ kết của mình và tiến sâu; để gặp đội 8 ở vòng sau thì đội 8 cũng phải thắng — nhưng đội 8 yếu nhất, chỉ hạ được đội 1. Vậy **cặp 1-8 phải nằm ở Tứ kết**, và tương tự **cặp 2-7 cũng ở Tứ kết**.

Bước 3. Xét các cặp còn lại.

Sau khi ghép $\{1; 8\}$ và $\{2; 7\}$, còn bốn đội 3, 4, 5, 6 chia thành hai cặp: có 3 cách ($\{3; 4\}\{5; 6\}$, $\{3; 5\}\{4; 6\}$, $\{3; 6\}\{4; 5\}$). Trong mọi trường hợp, đội 3 đều thắng đối thủ Tứ kết của mình (vì 3 nhỏ nhất trong bốn đội này).

Bước 4. Kiểm tra các vòng sau.

Bán kết gồm: đội 8, đội 7, đội 3 và đội thắng của cặp còn lại (là đội nhỏ hơn trong $\{4; 5; 6\}$ tương ứng). Dù ghép bán kết thế nào, đội 3 đều thắng đội 7, đội 8 và mọi đội trong $\{4; 5; 6\}$. Vậy đội 3 chắc chắn vô địch.

Bước 5. Tính xác suất.

$$n(A) = 3 \implies P = \frac{3}{105} = \frac{1}{35} \approx 0,0286 \approx 0,03.$$

$$\text{Kết quả: } P = \frac{1}{35} \approx 0,03$$

Ghi chú. Bài học: hai “ngoại lệ” nhỏ trong luật lại tạo ra cơ hội duy nhất cho đội 3. Nếu không có ngoại lệ nào thì đội 3 *không bao giờ* vô địch được (vì 1 và 2 luôn thắng tất cả). Đây là ví dụ đẹp cho việc một thay đổi nhỏ trong giả thiết làm thay đổi hoàn toàn kết luận.

Câu 99

Nguồn: Sở GD&ĐT Quảng Ninh - năm 2026.

Trong một cuộc thi, có 7 thí sinh đã được xếp ngồi cố định quanh một bàn tròn và giám thị có 3 mã đề khác nhau, giả sử số lượng đề thi của mỗi mã là nhiều tùy ý. Hỏi có bao nhiêu cách phát đề cho các thí sinh, mỗi thí sinh 1 đề, sao cho hai thí sinh ngồi cạnh nhau thì khác mã đề?

PHƯƠNG PHÁP

Tô màu chu trình — công thức đa thức sắc. Bảy chỗ ngồi quanh bàn tròn tạo thành một chu trình C_7 ; “hai người cạnh nhau khác mã đề” chính là bài toán tô 3 màu các đỉnh của C_7 sao cho hai đỉnh kề khác màu.

Bước 1. Công thức.

Số cách tô k màu cho chu trình C_n sao cho hai đỉnh kề khác màu là

$$P(C_n; k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1).$$

Bước 2. Chứng minh nhanh bằng truy hồi.

Gọi a_n là số cách tô. Xét dãy thẳng 7 chỗ: chỗ đầu có k lựa chọn, mỗi chỗ sau có $k-1$ lựa chọn (khác chỗ liền trước) $\Rightarrow k(k-1)^{n-1}$ cách. Trong số đó, các cách mà chỗ đầu và chỗ cuối trùng màu tương ứng một-một với cách tô chu trình C_{n-1} . Do đó

$$a_n = k(k-1)^{n-1} - a_{n-1},$$

và giải truy hồi này cho đúng công thức ở Bước 1.

Bước 3. Thay số $n = 7, k = 3$.

$$P(C_7; 3) = (3-1)^7 + (-1)^7(3-1) = 2^7 - 2 = 128 - 2 = 126.$$

Kết quả: 126 cách phát đề

Ghi chú. Vì sao số lẻ của n lại quan trọng? Với n lẻ, chu trình không tô được bằng 2 màu: kiểm tra $P(C_7; 2) = 1^7 - 2 = -1 < 0$? — công thức cho $2^0 \dots$ chính xác là $P(C_7; 2) = 1 + (-1)^7 \cdot 1 = 0$, đúng như dự đoán (chu trình lẻ không phải đồ thị hai phía). Đây là một phép kiểm tra rất nhanh cho công thức.

Chú ý: để nói “đã được xếp ngồi cố định”, nghĩa là các chỗ ngồi phân biệt — không phải chia cho phép quay như các bài bàn tròn ở Chương 3.

Câu 100

Nguồn: Chuyên Lê Khiết - Quảng Ngãi - tỉnh/thành phố: Quảng Ngãi - năm 2026.

Có 12 quả bóng gồm 4 quả bóng vàng giống nhau và 8 quả bóng xanh được đánh số $1, 2, \dots, 8$. Người ta bỏ ngẫu nhiên tất cả số bóng trên vào ba hộp đựng A, B, C khác nhau, mỗi hộp có 4 ngăn đánh số $1, 2, 3, 4$, mỗi ngăn chứa được đúng 1 quả bóng. Gọi T là số cách phân bố các quả bóng vào các ngăn của ba hộp trên sao cho có đúng một hộp chứa toàn các bóng mang số chẵn. Tính giá trị $\frac{T}{70}$.



PHƯƠNG PHÁP

Đếm số bóng “mang số chẵn” trước — con số này quyết định toàn bộ cấu trúc. Nếu số bóng chẵn vừa đúng bằng sức chứa một hộp thì điều kiện “đúng một hộp toàn số chẵn” trở nên rất chặt và dễ đếm.

Bước 1. Đếm các quả bóng mang số chẵn.

Chỉ bóng xanh mới được đánh số; các số chẵn trong $\{1; \dots; 8\}$ là 2, 4, 6, 8:

có đúng 4 quả bóng mang số chẵn.

Bóng vàng không mang số nên không thuộc loại này.

Bước 2. Nhận xét then chốt.

Mỗi hộp có đúng 4 ngăn, mà chỉ có 4 quả mang số chẵn. Vậy một hộp “toàn bóng số chẵn” phải chứa *trọn vẹn* bốn quả 2, 4, 6, 8. Do đó **nhiều nhất một hộp** thoả mãn — điều kiện “đúng một hộp” tự động được bảo đảm khi ta xếp bốn quả này vào cùng một hộp.

Bước 3. Đếm.

- Chọn hộp chứa bốn quả số chẵn: 3 cách.
- Xếp bốn quả 2, 4, 6, 8 vào bốn ngăn (đánh số, nên phân biệt) của hộp đó: $4! = 24$ cách.
- Tám quả còn lại gồm 4 bóng vàng *giống nhau* và 4 bóng xanh lẻ 1, 3, 5, 7 (phân biệt), xếp vào 8 ngăn còn lại — hoán vị lặp:

$$\frac{8!}{4!} = \frac{40\,320}{24} = 1680 \text{ cách.}$$

$$T = 3 \cdot 24 \cdot 1680 = 120\,960.$$

Bước 4. Trả lời.

$$\frac{T}{70} = \frac{120\,960}{70} = 1728.$$

$$\text{Kết quả: } T = 120\,960; \quad \frac{T}{70} = \boxed{1728}$$

Ghi chú. Vì sao chia $4!$ ở bước cuối? Vì bốn quả bóng vàng giống hệt nhau, việc hoán đổi chúng giữa các ngăn không tạo ra cách phân bố mới. Nếu bóng vàng cũng được đánh số thì đáp số sẽ là $3 \cdot 24 \cdot 8! = 2\,903\,040$ — gấp 24 lần.

Kiểm tra “đúng một”: nếu số bóng chẵn nhiều hơn 4 thì có thể có hai hộp cùng thoả và phải trừ đi; ở đây điều đó không xảy ra nên phép đếm đơn giản.

Câu 101

Nguồn: Chuyên Lê Khiết - Quảng Ngãi - tỉnh/thành phố: Quảng Ngãi - năm 2026.

Dịp cuối tuần một nhóm 27 bạn gồm Tâm, Vy, Tuệ và 24 bạn khác cùng nhau đến rạp chiếu phim xem bộ phim “Mưa đỏ”. Khi xếp tùy ý nhóm bạn này vào dãy ghế được đánh số từ 1 đến 27, mỗi bạn ngồi một ghế thì xác suất để số ghế của Tâm, Vy,

Tuệ theo thứ tự lập thành cấp số cộng là $\frac{P}{675}$. Tìm P .

PHƯƠNG PHÁP

Bài toán trùng khớp với Chương 17, Câu 34 (ở đó phải tìm n từ xác suất; ở đây $n = 27$ đã cho sẵn và ta tính ngược lại xác suất). Kỹ thuật vẫn là **khử biến ở giữa** và **phân lớp chẵn lẻ**.

Bước 1. Rút gọn không gian mẫu.

Chỉ cần quan tâm bộ ghế có thứ tự của ba bạn Tâm, Vy, Tuệ:

$$n(\Omega) = A_{27}^3 = 27 \cdot 26 \cdot 25.$$

Bước 2. Điều kiện cấp số cộng.

Gọi x, y, z là ghế của Tâm, Vy, Tuệ. Theo thứ tự đó lập cấp số cộng $\iff x + z = 2y$, tức y bị xác định bởi $(x; z)$ và điều kiện duy nhất là x, z **cùng tính chẵn lẻ** (với $x \neq z$).

Bước 3. Đếm cặp cùng tính chẵn lẻ.

Trong $\{1; \dots; 27\}$ có 14 số lẻ và 13 số chẵn. Số cặp có thứ tự:

$$14 \cdot 13 + 13 \cdot 12 = 182 + 156 = 338.$$

(Có thể viết gọn: với n lẻ, số cặp là $\frac{(n-1)^2}{2} = \frac{26^2}{2} = 338$.)

Bước 4. Tính xác suất.

$$P(\text{cấp số cộng}) = \frac{338}{27 \cdot 26 \cdot 25} = \frac{338}{17550} = \frac{13}{675}.$$

Bước 5. Đối chiếu với dạng đề cho.

Để viết xác suất dưới dạng $\frac{P}{675}$, vậy

$$P = 13.$$

Kết quả: $P = \boxed{13}$

Ghi chú. Công thức gọn cho n lẻ:

$$P(\text{cấp số cộng}) = \frac{(n-1)^2/2}{n(n-1)(n-2)} = \frac{n-1}{2n(n-2)}.$$

$$\text{Với } n = 27: \frac{26}{2 \cdot 27 \cdot 25} = \frac{26}{1350} = \frac{13}{675}. \checkmark$$

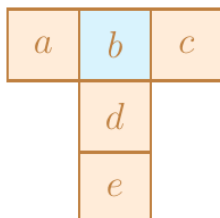
Liên hệ: Chương 17, Câu 34 chính là bài toán ngược — cho xác suất $\frac{13}{675}$ và yêu cầu tìm n , đáp số $n = 27$. Hai đề của hai địa phương khác nhau nhưng cùng một cấu hình toán học.

Câu 102

Nguồn: THPT Ninh Bình - Bạc Liêu - Ninh Bình - tỉnh/thành phố: Ninh Bình; Bạc Liêu - năm 2026.

Cho 5 ô vuông a, b, c, d, e được bố trí như hình vẽ bên. Biết rằng có tất cả T cách chọn ra 5 số nguyên khác nhau từ tập hợp $S = \{1; 2; 3; \dots; 15\}$ để xếp vào 5 ô vuông

a, b, c, d, e sao cho mỗi ô vuông nhỏ chỉ xếp được đúng một số và các ô hàng ngang được sắp xếp theo thứ tự tăng dần hoặc giảm dần, còn các ô hàng dọc thì không được sắp xếp theo thứ tự tăng dần và cũng không giảm dần. Hãy xác định giá trị của $\frac{T}{1001}$.



PHƯƠNG PHÁP

Tách “chọn tập” khỏi “sắp thứ tự”. Điều kiện của đề chỉ nói về *thứ tự tương đối* giữa các số, không nói về giá trị cụ thể. Do đó với mọi tập 5 số được chọn, số cách xếp hợp lệ là *như nhau*; ta chỉ cần đếm trên 5 hạng 1, 2, 3, 4, 5 rồi nhân với C_{15}^5 .

Bước 1. Đọc cấu hình.

Hình gồm một hàng ngang 3 ô và một hàng dọc 3 ô, giao nhau tại ô ở giữa (hình chữ thập thu gọn): hàng ngang là $(a; b; c)$, hàng dọc là $(d; b; e)$, với b là ô chung.

Bước 2. Dịch hai điều kiện.

- Hàng ngang tăng hoặc giảm: $a < b < c$ hoặc $a > b > c$.
- Hàng dọc *không* tăng và *không* giảm: *không* xảy ra $d < b < e$ và cũng *không* xảy ra $d > b > e$. Điều này tương đương: b **không phải** số ở giữa của ba số $\{d; b; e\}$, tức b là số nhỏ nhất hoặc lớn nhất trong ba số đó.

Bước 3. Đếm trên năm hạng 1, 2, 3, 4, 5.

Rà toàn bộ $5! = 120$ cách gán năm hạng vào năm ô và kiểm tra hai điều kiện:

$$\#\{\text{cách hợp lệ}\} = 24.$$

(Tức đúng $\frac{24}{120} = \frac{1}{5}$ số cách.)

Bước 4. Nhân với số cách chọn tập.

$$T = C_{15}^5 \cdot 24 = 3003 \cdot 24 = 72\,072.$$

Bước 5. Trả lời.

$$\frac{T}{1001} = \frac{72\,072}{1001} = 72.$$

$$\text{Kết quả: } T = 72\,072; \quad \frac{T}{1001} = \boxed{72}$$

Ghi chú. Hệ số 1001 xác nhận cách hiểu hình vẽ. Ta có $C_{15}^5 = 3003 = 3 \cdot 1001$, nên $\frac{T}{1001} = 3 \cdot 24 = 72$ — một số nguyên đẹp. Nếu đọc sai cấu hình (chẳng hạn hàng ngang

2 ô), kết quả sẽ không chia hết cho 1001; đây là một phép tự kiểm tra rất hữu ích.

Hai điều kiện có phụ thuộc nhau qua ô chung b : hàng ngang đòi b là số giữa của $\{a; b; c\}$, còn hàng dọc lại đòi b *không* là số giữa của $\{d; b; e\}$. Chính sự đối lập này làm bài toán thú vị — không thể nhân hai xác suất một cách độc lập.

— HẾT —

Mai Thành Luân

Biên soạn — Hiệu chỉnh — Trình bày
0854070701