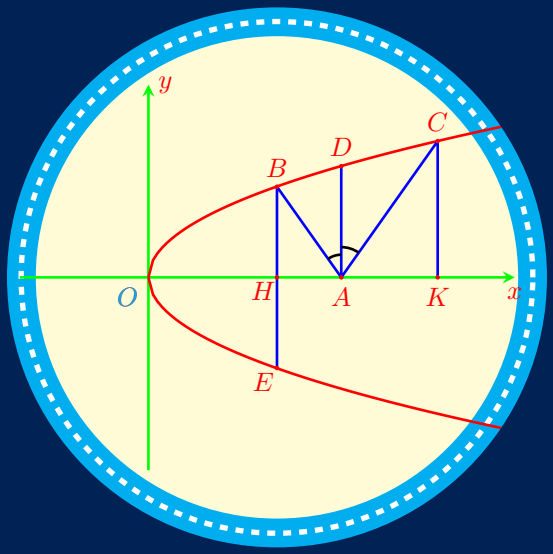
$\sqrt{f(x)} = g(x)$

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

TÀI LIỆU DẠY HỌC 3 IN 1

MÔN TOÁN 10



$y = x^2 - 4x + 3$

$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$

LƯU HÀNH NỘI BỘ

Mục lục

Chương 1. THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT 1

Bài 1. SỐ GẦN ĐÚNG VÀ SAI SỐ 1

A Tóm tắt lí thuyết ... 1

B Các dạng toán thường gặp ... 2

Dạng 1. Xác định sai số tuyệt đối của số gần đúng ... 2

Dạng 2. Xác định sai số tương đối của số gần đúng ... 3

Dạng 3. Xác định số quy tròn của số gần đúng với độ chính xác cho trước ... 5

C Bài tập trắc nghiệm ... 5

Bài 2. CÁC SỐ ĐẶC TRƯƠNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM 9

A Tóm tắt lý thuyết ... 9

B Các dạng toán thường gặp ... 10

Dạng 1. Xác định số trung bình của mẫu số liệu ... 10

Dạng 2. Xác định số trung vị của mẫu số liệu ... 11

Dạng 3. Xác định tứ phân vị dựa vào mẫu số liệu ... 12

Dạng 4. Xác định mốt dựa vào mẫu số liệu ... 14

C Bài tập trắc nghiệm ... 14

Bài 3. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO ĐỘ PHÂN TÁN 21

A Tóm tắt lý thuyết ... 21

B Các dạng toán thường gặp ... 22

Dạng 1. Xác định khoảng biến thiên dựa vào mẫu số liệu ... 22

Dạng 2. Xác định khoảng tứ phân vị dựa vào mẫu số liệu ... 23

Dạng 3. Xác địnhphương sai, độ lệch chuẩn dựa vào mẫu số liệu ... 24

C Bài tập trắc nghiệm ... 29

Bài 4. BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG V 36

A Bài tập trắc nghiệm ... 36

Chương 2. HÀM SỐ, ĐỒ THỊ VÀ ỨNG DỤNG 45

Bài 1. HÀM SỐ 45

A Tóm tắt lí thuyết ... 45

B Các dạng toán và ví dụ ... 48

Dạng 1. Tìm tập xác định của hàm số ... 48

Dạng 2. Tính giá trị của hàm số tại một điểm ... 50

Dạng 3. Dùng định nghĩa xét tính đơn điệu của hàm số ... 51

Dạng 4. Xét tính chẵn lẻ của hàm số ... 55

Dạng 5. Tính đơn điệu của hàm bậc nhất ... 57

Dạng 6. Dùng đồ thị xét tính đơn điệu của hàm số ... 60

C Bài tập tự luyện ... 62

D Bài tập trắc nghiệm ... 81

Bài 2. HÀM SỐ BẬC HAI **85**
A Tóm tắt lí thuyết 85
B Các dạng toán và ví dụ 88
Dạng 1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ 88
Dạng 2. Tìm tham số m để hàm số bậc 2 đơn điệu trên tập con của $\mathbb{R}$ 93
Dạng 3. Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ trên $\mathbb{R}$ và tập con của $\mathbb{R}$ 95
Dạng 4. Xác định hàm số bậc hai khi biết các yếu tố liên quan. 97
Dạng 5. Các bài toán tương giao 99
Dạng 6. Điểm đặc biệt của họ đồ thị hàm số bậc hai 103
C Bài tập tự luận 106
D Bài tập trắc nghiệm 129
Bài 3. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI **135**
A Tóm tắt lý thuyết 135
B Các dạng toán thường gặp 139
Dạng 1. Nhận dạng tam thức và xét dấu biểu thức 139
Dạng 2. Giải các bài toán liên quan đến bất phương trình 141
Dạng 3. Các bài toán liên quan bất phương bậc hai chứa tham số m 142
Dạng 4. Tìm nghiệm và lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai thông qua đồ thị 143
Dạng 5. Ứng dụng thực tế 145
C Bài tập tự luận 147
D Bài tập trắc nghiệm 156
Bài 4. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI **161**
A Tóm tắt lí thuyết 161
B Các dạng toán thường gặp 162
Dạng 1. Giải phương trình dạng $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ 162
Dạng 2. Giải phương trình dạng $\sqrt{f(x)} = g(x)$ 163
Dạng 3. Bài toán thực tế 163
C Bài tập tự luận 164
D Bài tập trắc nghiệm 178
Bài 5. ÔN TẬP CHƯƠNG VI **190**
A Trắc nghiệm 190
B Tự luận 211
Chương 3. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG **229**
Bài 1. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG **229**
A Tóm tắt lí thuyết 229
B Các dạng toán thường gặp 232
Dạng 1. Xác định các yếu tố của đường thẳng 232
Dạng 2. Viết phương trình đường thẳng 233
Dạng 3. Bài toán thực tế 235
C Bài tập tự luận 237
D Bài tập trắc nghiệm 239

Bài 2. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG. GÓC & KHOẢNG CÁCH 243
A Tóm tắt lý thuyết ... 243
B Các dạng toán thường gặp ... 245
Dạng 1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng ... 245
Dạng 2. Bài toán liên quan đến góc giữa hai đường thẳng ... 248
Dạng 3. Bài toán liên quan đến khoảng cách giữa hai đường thẳng ... 249
C Bài tập tự luận ... 252
D Bài tập trắc nghiệm ... 260
Bài 3. ĐƯỜNG TRÒN TRONG MẶT PHẲNG TỌA ĐỘ 268
A Tóm tắt lí thuyết ... 268
B Các dạng toán thường gặp ... 271
Dạng 1. Tìm tâm và bán kính đường tròn. ... 271
Dạng 2. Viết phương trình đường tròn. ... 273
Dạng 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn tại một điểm ... 277
Dạng 4. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn đi qua một điểm ... 279
Dạng 5. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn thỏa mãn điều kiện cho trước 281
Dạng 6. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn ... 282
Dạng 7. Vị trí tương đối của hai đường tròn. ... 285
C Bài tập tự luận ... 287
D Bài tập trắc nghiệm ... 300
Bài 4. BA ĐƯỜNG CONIC 339
A Tóm tắt lí thuyết ... 339
B Các dạng toán thường gặp ... 342
Dạng 1. Xác định các yếu tố của Elip ... 342
Dạng 2. Viết phương trình chính tắc của Elip ... 344
Dạng 3. Tìm điểm trên Elip thỏa mãn điều kiện cho trước ... 346
Dạng 4. Bài toán thực tế về Elip ... 348
Dạng 5. Xác định các yếu tố của Hypebol ... 349
Dạng 6. Viết phương trình chính tắc của Hypebol ... 349
Dạng 7. Tìm tọa độ điểm thuộc Hypebol thỏa mãn điều kiện cho trước ... 350
Dạng 8. Xác định các yếu tố của Parabol ... 352
Dạng 9. Viết phương trình chính tắc của parabol ... 353
Dạng 10. Xác định tọa độ điểm thuộc parabol thỏa mãn điều kiện cho trước ... 353
C Bài tập tự luận ... 354
D Bài tập trắc nghiệm ... 360
Bài 3. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 7 389
A Bài tập tự luận ... 389
B Bài tập trắc nghiệm ... 403

Chương 1

THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

§1. SỐ GẦN ĐÚNG VÀ SAI SỐ

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Số gần đúng và sai số

Ví dụ 1

Dân số trung bình năm 2021 của cả nước ước tính 98,51 triệu người, tăng 922,7 nghìn người, tương đương tăng 0,95% so với năm 2020. Trong tổng dân số, dân số thành thị 36,57 triệu người, chiếm 37,1%; dân số nông thôn 61,94 triệu người, chiếm 62,9%; nam 49,1 triệu người, chiếm 49,8%; nữ 49,41 triệu người, chiếm 50,2%. Tỷ số giới tính của dân số năm 2021 là 99,4 nam/100nữ. (Nguồn: baodansinh.vn)

Ví dụ 2

Cầu Cần Thơ bắc qua sông Hậu, nối tỉnh Vĩnh Long và thành phố Cần Thơ, cách bến phà Cần Thơ hiện hữu khoảng 3,2 km về phía hạ lưu. Tổng chiều dài của toàn tuyến là 15,85 km, trong đó phần cầu chính vượt sông Hậu dài 2,75 km, rộng 23,1 m; tốc độ thiết kế 80 km/h với 4 làn xe cơ giới (rộng 4,5m) và 2 làn thô sơ (rộng 2,75m). Phần đường dẫn vào cầu dài 13,1 km với 9 cầu, trong đó 4 cầu trên đất Vĩnh Long và 5 cầu trên địa phận Thành phố Cần Thơ). (Nguồn: mt.gov.vn)

Trong thực tế, khi đo đạc và tính toán bằng những dụng cụ, phương pháp khác nhau sẽ cho ra các kết quả khác nhau. Vì vậy kết quả thu được chỉ là những *số gần đúng*.

Định nghĩa 1.1. Số $\overline{a}$ biểu thị giá trị thực của một đại lượng gọi là số đúng. Số a có giá trị ít, nhiều sai lệch với số đúng $\overline{a}$. Ta gọi a là số gần đúng của số $\overline{a}$.

Định nghĩa 1.2. Nếu a là số gần đúng của số đúng $\overline{a}$ thì $\Delta_a = |\overline{a} - a|$ là *sai số tuyệt đối* của số gần đúng a.

Bây giờ ta giả sử a là số gần đúng của số đúng $\overline{a}$ với sai số tuyệt đối không vượt quá $d > 0$. Khi đó

$$\Delta_a = |\overline{a} - a| \leq d \Leftrightarrow -d \leq \overline{a} - a \leq d \Leftrightarrow a - d \leq \overline{a} \leq a + d.$$

Định nghĩa 1.3. Ta nói a là số gần đúng của $\overline{a}$ với độ chính xác d nếu $\Delta_a = |\overline{a} - a| \leq d$ và quy ước viết gọn là $\overline{a} = a \pm d$.
Nếu biết số gần đúng a và độ chính xác d, ta suy ra số gần đúng nằm trong đoạn $[a - d; a + d]$.

Định nghĩa 1.4. Tỉ số $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|}$ được gọi là *sai số tương đối* của số gần đúng a.

Định nghĩa 1.5. Khi quy tròn một số nguyên hoặc một số thập phân đến một hàng nào đó thì số nhận được gọi là *số quy tròn* của số ban đầu.

Ví dụ 3

Quy tròn các số sau:

a) 10072022 đến hàng chục ngàn.

b) 13,505 đến hàng đơn vị.

c) π đến hàng phần ngàn.

Lời giải.

a) Quy tròn số 10072022 đến hàng chục ngàn ta được số 10070000.

b) Quy tròn số 13,505 đến hàng đơn vị ta được số 14.

c) Quy tròn số π đến hàng phần ngàn ta được số 3,142.

□

Ví dụ 4

Chiều dài của một cái cầu là $l = 1745{,}25 \pm 0{,}01$ m. Hãy cho biết số quy tròn của số gần đúng 1745,25.

Lời giải.

Ta có $l = 1745{,}25 \pm 0{,}01$ nên $d = 0{,}01$.
Vì độ chính xác đến hàng phần trăm nên ta quy tròn đến hàng phần chục. Vậy số quy tròn của l là 1745,3. □

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Xác định sai số tuyệt đối của số gần đúng

Nếu a là số gần đúng của số đúng $\overline{a}$ thì $\Delta_a = |\overline{a} - a|$ là *sai số tuyệt đối* của số gần đúng a.

Ví dụ 1

Cho giá trị gần đúng của $\dfrac{8}{17}$ là $0,47$ thì sai số tuyệt đối không vượt quá bao nhiêu?

Lời giải.

Ta có $\dfrac{8}{17} = 0,4705882....$
Do $0,47 < \dfrac{8}{17} = 0,4705882... < 0,48$ nên

$$\Delta = \left|\frac{8}{17} - 0,47\right| < |0,48 - 0,47| = 0,01.$$

Vậy sai số tuyệt đối không quá 0,01. □

Dạng 2 Xác định sai số tương đối của số gần đúng

- Ước lượng sai số tương đối $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|}$.

  Nếu $\overline{a} = a \pm d$ thì $\delta_a \leq \dfrac{d}{|a|}$.

- Nếu $\dfrac{d}{|a|}$ càng nhỏ thì chất lượng của phép đo đạc hay tính toán càng cao.

Ví dụ 1

Trong một cuộc điều tra dân số, người ta viết dân số của một tỉnh là

$$3574625 \text{ người} \pm 50000 \text{ người}$$

Hãy đánh giá sai số tương đối của số gần đúng này.

Lời giải.

Ta có $a = 3574625$ người và $d = 50000$ người, do đó sai số tương đối là

$$\delta_a \leq \frac{d}{|a|} \approx 0{,}014.$$

□

Ví dụ 2

Cho số gần đúng $a = 2841331$ với độ chính xác $d = 400$. Hãy viết số quy tròn của a.

Lời giải.

Vì độ chính xác $100 < d = 400 < 1000$ nên ta quy tròn a đến hàng nghìn. Chữ số ngay sau hàng quy tròn là chữ số 3.
Vì $3 < 5$ nên số quy tròn của a là 2841000. □

Ví dụ 3

Hãy viết số quy tròn của số gần đúng của số gần đúng $a = 4{,}1463$ biết $\overline{a} = 4{,}1463 \pm 0{,}01$

Lời giải.

Vì độ chính xác $d = 0{,}01 < 0{,}1$ nên ta quy tròn số 4,1463 đến hàng phần chục. Chữ số ngay sau hàng quy tròn là số $4 < 5$.
Vậy số quy tròn của a là 4,1. □

Ví dụ 4

Ước lượng sai số tương đối ứng với mỗi số gần đúng sau
a) $\overline{a} = 100 \pm 5$;
b) $\overline{a} = 12{,}44 \pm 0{,}05$.

Lời giải.

a) Sai số tương đối là $\delta = \dfrac{d}{|a|} = \dfrac{5}{100} = 0{,}05 = 5\%$.

b) Sai số tương đối là $\delta = \dfrac{d}{|a|} = \dfrac{0{,}05}{12{,}44} \approx 0{,}004 = 0{,}4\%$.

□

Ví dụ 5

Một vật có thể tích $V = 180{,}37\ \text{cm}^3 \pm 0{,}05\ \text{cm}^3$. Tính sai số tương đối của giá trị gần đúng đó.

Lời giải.

Ta có thể tích gần đúng của vật là $a = 180{,}37$ và độ chính xác là 0,05.

Sai số tương đối của thể tích vật là $\delta \le \dfrac{d}{|a|} \approx 0,03\%$. □

Ví dụ 6

Độ dài của cầu bến thủy hai (Nghệ An) người ta đo được là 996 m $\pm$0,5 m. Sai số tương đối tối đa cho phép trong phép đo là bao nhiêu?

Lời giải.

Ta có độ dài gần đúng của cầu là $a = 996$ và độ chính xác là $d = 0{,}5$.

Vì sai số tuyệt tuyệt đối $\Delta_a \le d = 0{,}5$ nên sai số tương đối là $\delta_a \le \dfrac{d}{|a|} = \dfrac{0{,}5}{996} \approx 0{,}05\%$.

Vậy sai số tương đối tối đa cho phép trong phép đo trên là 0,05%. □

Ví dụ 7

Một người thợ cần biết chiều cao của một ngôi nhà. Anh ta thực hiện các phép đo trong ba lần và được kết quả như sau: $h_1 = 10{,}23 \pm 0{,}43$ (m), $h_2 = 10{,}58 \pm 0{,}2$ (m), $h_3 = 9{,}92 \pm 0{,}63$ (m). Hỏi trong ba số liệu đó, người thợ nên chọn số nào làm chiều cao ngôi nhà.

Lời giải.

Phép đo lần 1 có sai số tương đối $\delta_1 \le \dfrac{0{,}43}{10{,}23} \approx 0{,}042 = 4{,}2\%$.

Phép đo lần 2 có sai số tương đối $\delta_2 \le \dfrac{0{,}2}{10{,}58} \approx 0{,}0189 = 1{,}89\%$.

Phép đo lần 3 có sai số tương đối $\delta_3 \le \dfrac{0{,}63}{9{,}92} \approx 0{,}0635 = 6{,}35\%$.

Như vậy người thợ nên chọn $h_2 = 10{,}58 \pm 0{,}2$ (m) làm chiều cao ngôi nhàn. □

Dạng 3 Xác định số quy tròn của số gần đúng với độ chính xác cho trước

- Nếu chữ số sau hàng quy tròn nhỏ hơn 5 thì ta thay nó và các chữ số bên phải nó bởi chữ số 0.
- Nếu chữ số sau hàng quy tròn lớn hơn hoặc bằng 5 thì ta cũng làm như trên, nhưng cộng thêm một đơn vị vào chữ số hàng quy tròn.
- Chẳng hạn, số quy tròn đến hàng nghìn của $x = 2841675$ là $x = 2842000$, của $y = 432415$ là $y \approx 432000$.
- Số quy tròn đến hàng trăm của $x = 12{,}4253$ là $x \approx 12{,}43$, của $y = 4{,}1521$ là $y \approx 4{,}15$.

Ví dụ 1

Cho số gần đúng $a = 2841275$ có độ chính xác $d = 300$. Hãy viết số quy tròn của a.

Lời giải.

Vì độ chính xác đến hàng trăm ($d = 300$) nên ta quy tròn a đến hàng nghìn theo quy tắc làm tròn ở trên.
Vậy số quy tròn của a là 2841000. □

Ví dụ 2

Hãy viết số quy tròn của số gần đúng $a = 3{,}1463$ biết $\overline{a} = 3{,}1463 \pm 0{,}001$.

Lời giải.

Vì độ chính xác đến hàng phần nghìn ($d = 0{,}001$) nên ta quy tròn a đến hàng phần trăm theo quy tắc làm tròn ở trên.
Vậy số quy tròn của a là 3,15. □

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1

Cho a là số gần đúng của số đúng $\overline{a}$. Khi đó $\Delta_a = |\overline{a} - a|$ được gọi là
(A) số quy tròn của $\overline{a}$.
(B) sai số tương đối của số gần đúng a.
(C) sai số tuyệt đối của số gần đúng a.
(D) số quy tròn của a.

Câu 2

Cho giá trị gần đúng của $\frac{3}{7}$ là $0,429$ thì sai số tuyệt đối không vượt quá
(A) $0,002$.
(B) $0,001$.
(C) $0,003$.
(D) $0,004$.

Lời giải.

Ta có $\frac{3}{7} = 0,428571....$ Do $0,428 < \frac{3}{7} = 0,428571... < 0,429.$

$$\Delta = \left|0,429 - \frac{3}{7}\right| < |0,429 - 0,428| = 0,001.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 3

Kết quả đo chiều dài của một cây cầu được ghi là $152 \pm 0,2$ m. Tìm sai số tương đối của phép đo chiều dài cây cầu.

(A) $\delta_a < 0,1316\%$. (B) $\delta_a < 1,316\%$. (C) $\delta_a = 0,1316\%$. (D) $\delta_a > 0,1316\%$.

Lời giải.

Sai số tương đối của phép đo chiều dài cây cầu là $\delta \le \frac{0,2}{152} = 0,0013157\ldots < 0,1316\%$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 4

Bạn A đo chiều dài của một sân bóng ghi được $250 \pm 0,2$ m. Bạn B đo chiều cao của một cột cờ được $15 \pm 0,1$ m. Hỏi trong hai bạn A và B, bạn nào có phép đo chính xác hơn và sai số tương đối trong phép đo của bạn đó là bao nhiêu?

(A) Bạn A đo chính xác hơn bạn B với sai số tương đối là 0,08%.
(B) Bạn B đo chính xác hơn bạn A với sai số tương đối là 0,08%.
(C) Hai bạn đo chính xác như nhau với sai số tương đối bằng nhau là 0,08%.
(D) Bạn A đo chính xác hơn bạn B với sai số tương đối là 0,06%.

Lời giải.

Phép đo của bạn A có sai số tương đối $\delta_1 \le \frac{0,2}{250} = 0,0008 = 0,08\%$.

Phép đo của bạn B có sai số tương đối $\delta_2 \le \frac{0,1}{15} = 0,0066 = 0,66\%$.

Như vậy phép đo của bạn A có độ chính xác cao hơn.

Chọn đáp án (A) □

Câu 5

Biết số gần đúng $a = 7975421$ có độ chính xác $d = 150$. Hãy ước lượng sai số tương đối của a.

(A) $\delta_a \le 0,15\%$. (B) $\delta_a \le 0,19\%$. (C) $\delta_a \le 0,25\%$. (D) $\delta_a \le 0,21\%$.

Lời giải.

Sai số tương đối của a là $\delta_a \le \frac{d}{|a|} = \frac{150}{7975421} \approx 0,0019 = 0,19\%$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 6

Bác nông dân đo mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài $5 \pm 0,03$ m và chiều rộng $3 \pm 0,01$ m. Xác định sai số tương đối của phép đo diện tích mảnh vườn.

(A) 0,75%. (B) 0,85%. (C) 0,95%. (D) 0,1%.

Lời giải.

Gọi x, y là chiều dài và chiều rộng của vườn.

Ta có $\begin{cases} x = 5 \pm 0{,}03 \text{ m} \\ y = 3 \pm 0{,}01 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4{,}97 \le x \le 5{,}03 \\ 2{,}99 \le y \le 3{,}01. \end{cases}$

Gọi diện tích mảnh vườn là S, khi đó $14{,}8603 \le S \le 15{,}1403 \Rightarrow S = 14{,}72 \pm 0{,}14 \text{ m}^2$.

Vậy sai số tương đối trong phép đo là $\delta \le \dfrac{0{,}14}{14{,}72} \approx 0{,}0095 = 0{,}95\%$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 7

Một công ty sử dụng dây chuyền A để đóng gạo vào bao với khối lượng mong muốn là 5 kg. Trên bao bì ghi thông tin khối lượng là $5 \pm 0{,}2$ kg. Công ty cũng sử dụng dây chuyền B để để đóng gạo với khối lượng chính xác là 20 kg. Trên bao bì ghi thông tin khối lượng là $20 \pm 0{,}5$ kg. Hỏi dây chuyền nào đóng gói tốt hơn?

(A) Dây chuyền A đóng gói tốt hơn dây chuyền B.
(B) Dây chuyền B đóng gói tốt hơn dây chuyền A.
(C) Hai dây chuyền đóng gói tốt như nhau.
(D) Không có dây chuyền nào đóng gói tốt.

Lời giải.

Dây chuyền A có sai số tương đối $\delta_1 \le \dfrac{0{,}2}{5} = 0{,}04 = 4\%$.

Dây chuyền B có sai số tương đối $\delta_2 \le \dfrac{0{,}5}{20} = 0{,}025 = 2{,}5\%$.

Như vậy dây chuyền B đóng gói tốt hơn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 8

Nếu lấy $3,14$ làm giá trị gần đúng cho số π thì sai số tuyệt đối không vượt quá

(A) $0,01$. (B) $0,02$. (C) $0,03$. (D) $0,04$.

Lời giải.

Ta có $\pi = 3,141592654....$ Do $3,14 < \pi = 3,141592654... < 3,15$ nên ta có

$$\Delta = |\pi - 3,14| < |3,15 - 3,14| = 0,01.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 9

Cho số a là số gần đúng của số $\overline{a}$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

(A) $a > \overline{a}$. (B) $a < \overline{a}$. (C) $|\overline{a} - a| > 0$. (D) $-a < \overline{a} < a$.

Câu 10

Cho số gần đúng $a = 23748023$ có độ chính xác $d = 101$. Hãy viết số quy tròn của a.

(A) 23749000. (B) 23748000. (C) 23746000. (D) 237487000.

Lời giải.

Vì độ chính xác đến hàng trăm ($d = 101$) nên ta quy tròn a đến hàng nghìn, được kết quả là $a \approx 23748000$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 11

Cho số gần đúng $\pi = 3{,}141592653589$ có độ chính xác 10^{-10}. Hãy viết số quy tròn của a.
(A) $a \approx 3{,}141592654$. (B) $a \approx 3{,}1415926536$. (C) $a \approx 3{,}141592653$. (D) $a \approx 3{,}1415926535$.

Lời giải.

Vì độ chính xác đến hàng trăm ($d = 10^{-10}$) nên ta quy tròn a đến hàng $d \cdot 10 = 10^{-9}$(9 chữ số thập phân), kết quả là $a \approx 3{,}141592654000$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 12

Sử dụng máy tính bỏ túi, hãy viết giá trị gần đúng của $\sqrt{3}$ chính xác đến hàng phần nghìn.
(A) 1,7320. (B) 1,732. (C) 1,733. (D) 1,731.

Lời giải.

$\sqrt{3} = 1{,}7320508076$ nên ta làm tròn đến hàng phần nghìn, được kết quả là. 1,732.
Chọn đáp án (B) □

Câu 13

Sử dụng máy tính bỏ túi, hãy viết giá trị gần đúng của π^2 chính xác đến hàng phần nghìn.
(A) 9,873. (B) 9,870. (C) 9,872. (D) 9,871.

Lời giải.

$\pi^2 = 9{,}8696044011$ nên ta làm tròn đến hàng phần nghìn, được kết quả là. 9,870
Chọn đáp án (B) □

Câu 14

Hãy viết số quy tròn của số gần đúng $a = 17658$ biết $\overline{a} = 17658 \pm 16$.
(A) 17700. (B) 17800. (C) 17500. (D) 17600.

Lời giải.

$\overline{a} = 17658 \pm 16 \Rightarrow d = 16$ (hàng chục). Do đó, ta làm tròn số a đến hàng trăm, kết quả là 17700.
Chọn đáp án (A) □

Câu 15

Hãy viết số quy tròn của số gần đúng $a = 17658$ biết $\overline{a} = 17658 \pm 16$.
(A) 15,3. (B) 15,31. (C) 15,32. (D) 15,4.

Lời giải.

$\overline{a} = 15{,}318 \pm 0{,}056 \Rightarrow d = 0{,}056$ nên ta làm tròn số a chính xác đến hàng $d \cdot 10 = 0{,}56$(hàng phần trăm), kết quả là 15,32.
Chọn đáp án (C) □

§2. CÁC SỐ ĐẶC TRƯƠNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa 2.1. *Số trung bình cộng* của một mẫu n số liệu thống kê bằng tổng các số liệu chia cho số các số liệu đó. Số trung bình cộng của mẫu số liệu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bằng

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

- *Số trung bình cộng của mẫu số liệu thống kê trong bảng phân bố tần số là:*

$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_kx_k}{n_1 + n_2 + \ldots + n_k}.$$

Giá trị	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
Tần số	n_1	n_2	$\cdots$	n_k

- *Số trung bình cộng của mẫu số liệu thống kê trong bảng phân bố tần số tương đối là:*

$$\bar{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_kx_k,$$

trong đó $f_1 = \frac{n_1}{n}, f_2 = \frac{n_2}{n}, \ldots, f_k = \frac{n_k}{n}$, *với* $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$

Giá trị	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
Tần số tương đối	f_1	f_2	$\cdots$	f_k

- *Số trung bình là giá trị trung bình cộng của các số trong mẫu số liệu, nó cho biết vị trí trung tâm của mẫu số liệu và có thể dùng để đại diện cho mẫu số liệu.*

Định nghĩa 2.2. Sắp thứ tự mẫu số liệu gồm n số liệu thành một dãy không giảm (hoặc không tăng).

- Nếu n là lẻ thì số liệu đứng ở vị trí thứ $\frac{n+1}{2}$ (số đứng chính giữa) gọi là trung vị.
- Nếu n là chẵn thì số trung bình cộng của hai số liệu đứng ở vị trí thứ $\frac{n}{2}$ và $\frac{n}{2}+1$ gọi là trung vị.

Trung vị kí hiệu là M_e.

- *Trung vị là giá trị chia đôi mẫu số liệu, nghĩa là trong mẫu số liệu được sắp xếp theo thứ tự không giảm thì giá trị trung vị ở vị trí chính giữa. Trung vị không bị ảnh hưởng bởi các giá trị bất thường, trong khi đó số trung bình bị ảnh hưởng bởi giá trị trung bình.*
- *Trung vị không nhất thiết là một số trong mẫu số liệu và dễ tính toán.*
- *Khi các số liệu trong mẫu không có sự chênh lệch lớn thì số trung bình cộng và trung vị xấp xỉ nhau.*

Định nghĩa 2.3. Sắp thứ tự mẫu số liệu gồm N số liệu thành một dãy không giảm.
Tứ phân vị của mẫu số liệu trên là bộ ba giá trị: tứ phân vị thứ nhất, tứ phân vị thứ hai và tứ phân vị thứ ba; ba giá trị này chia mẫu số liệu thành bốn phần có số lượng phần tử bằng nhau.

- Tứ phân vị thứ hai Q_2 bằng trung vị.
- Nếu N là số chẵn thì tứ phân vị thứ nhất Q_1 bằng trung vị của nửa dãy phía dưới và tứ phân vị thứ ba Q_3 bằng trung vị của nửa dãy phía trên.
- Nếu N là số lẻ thì tứ phân vị thứ nhất Q_1 bằng trung vị của nửa dãy phía dưới (không bao gồm Q_2) và tứ phân vị thứ ba Q_3 bằng trung vị của nửa dãy phía trên (không bao gồm Q_2).

Các điểm Q_1, Q_2, Q_3 chia mẫu số liệu đã sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn thành bốn phần, mỗi phần đều chứa 25% giá trị.

Định nghĩa 2.4. *Mốt* của một mẫu số liệu là giá trị có tần số lớn nhất trong bảng phân bố tần số và kí hiệu là M_o.

a) Một mẫu số liệu có thể có một hoặc nhiều mốt.

b) Có thể dùng mốt để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu khi mẫu số liệu có nhiều giá trị trùng nhau.

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Xác định số trung bình của mẫu số liệu

- **Số trung bình** (số trung bình cộng) của mẫu số liệu $x_1, x_2, \ldots, x_n$, kí hiệu là $\overline{x}$ được tính bằng công thức

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

- Trong trường hợp mẫu số liệu cho dưới dạng bảng tần số thì số trung bình được tính theo công thức

$$\overline{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_k x_k}{n},$$

trong đó m_k là tần số của giá trị x_k và $n = m_1 + m_2 + \cdots + m_k$.

Ví dụ 1

Kết quả bốn lần kiểm tra môn toán của bạn Hoa là: 7, 9, 8, 9. Tính số trung bình cộng $\overline{x}$ của mẫu số liệu trên.

Lời giải.

Số trung bình cộng của mẫu số liệu trên là

$$\overline{x} = \frac{7+9+8+9}{4} = \frac{33}{4} = 8{,}25.$$

Số trung bình là giá trị trung bình cộng của các số trong mẫu số liệu, nó cho biết vị trí trung tâm của mẫu số liệu và có thể dùng để đại diện cho mẫu số liệu.

□

Ví dụ 2

Thông kê số sách mỗi bạn trong lớp đã đọc trong năm 2021, An thu được kết quả như bảng bên. Hỏi trong năm 2021, trung bình mỗi bạn trong lớp đọc bao nhiêu cuốn sách?

Số cuốn sách	1	2	3	4	5
Số bạn	3	5	15	10	7

Lời giải.

Số bạn trong lớp là $n = 3 + 5 + 15 + 10 + 7 = 40$ (bạn).
Trong năm 2021, trung bình mỗi bạn trong lớp đọc số cuốn sách là

$$\frac{3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 15 \cdot 3 + 10 \cdot 4 + 7 \cdot 5}{40} = 3{,}325 \text{ (cuốn)}.$$

□

Ví dụ 3

Điểm kiểm tra môn Toán của một nhóm gồm 9 học sinh như sau

1 1 3 6 7 8 9 10

Tính số trung bình cộng của mẫu số liệu trên và nêu nhận xét.

Lời giải.

Số trung bình cộng của mẫu số liệu trên là

$$\overline{x} = \frac{1 + 1 + 3 + 6 + 7 + 8 + 8 + 9 + 10}{9} \approx 5{,}9.$$

Quan sát mẫu số liệu trên, ta thấy nhiều số liệu có sự chênh lệch lớn so với số trung bình cộng. Vì vậy, ta không thể lấy số trung bình cộng làm đại diện cho mẫu số liệu.

□

Ví dụ 4

Bảng sau cho ta biết thời gian chạy cự li 100m của các bạn trong lớp (đơn vị giây)

Thời gian	12	13	14	15	16
Số bạn	5	7	10	8	6

Hãy tính thời gian chạy trung bình cự li 100m của các bạn trong lớp.

Lời giải.

Số bạn trong lớp là $n = 5 + 7 + 10 + 8 + 6 = 36$ (bạn).
Thời gian chạy trung bình cự li 100m của các bạn trong lớp là

$$\frac{12 \cdot 5 + 13 \cdot 7 + 14 \cdot 10 + 15 \cdot 8 + 16 \cdot 6}{36} \approx 14{,}083 \text{ (giây)}.$$

□

Dạng 2 Xác định số trung vị của mẫu số liệu

Để tìm trung vị của một mẫu số liệu, ta thực hiện các bước sau:

- Sắp xếp các giá trị trong mẫu số liệu theo thứ tự không giảm.
- Nếu số giá trị của mẫu số liệu là số lẻ thì giá trị chính giữa của mẫu là trung vị. Nếu là số chẵn thì trung vị là trung bình cộng của hai giá trị chính giữa của mẫu.

Ví dụ 1

Một công ty nhỏ gồm 1 giám đốc và 5 nhân viên, thu nhập mỗi tháng của giám đốc là 20 triệu đồng, của nhân viên là 4 triệu đồng. Tìm trung vị cho mẫu số liệu về lương của giám đốc và lương của nhân viên công ty.

Lời giải.

Sắp xếp số liệu theo thứ tự không giảm

$$4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 20$$

Dãy trên có hai giá trị chính giữa cùng bằng 4. Vậy trung vị của mẫu số liệu cũng bằng 4.

Trung vị là giá trị chia đôi mẫu số liệu, nghĩa là trong mẫu số liệu được sắp xếp theo thứ tự không giảm thì giá trị trung vị nằm ở vị trí chính giữa. Trung vị không bị ảnh hưởng bởi giá trị bất thường trong khi số trung bình bị ảnh hưởng bởi giá trị bất thường.

□

Ví dụ 2

Thời gian (tính theo phút) mà 10 người đợi ở bến xe buýt là

$$2{,}8 \quad 1{,}2 \quad 3{,}4 \quad 14{,}6 \quad 1{,}3 \quad 2{,}5 \quad 4{,}2 \quad 1{,}9 \quad 3{,}5 \quad 0{,}8$$

Tìm trung vị của mẫu số liệu trên.

Lời giải.

Sắp xếp số liệu theo thứ tự không giảm

$$0{,}8 \quad 1{,}2 \quad 1{,}3 \quad 1{,}9 \quad 2{,}5 \quad 2{,}8 \quad 3{,}4 \quad 3{,}5 \quad 4{,}2 \quad 14{,}6$$

Dãy trên có hai giá trị chính giữa là 2,5 và 2,8. Vì vậy $M_e = \dfrac{2{,}5+2{,}8}{2} = 2{,}65$ (phút). □

Dạng 3 Xác định tứ phân vị dựa vào mẫu số liệu

Để tìm các **tứ phân vị** của mẫu xố liệu có n giá trị, ta làm như sau:

- Sắp xếp mẫu số liệu theo thứ tự không giảm.
- Tìm trung vị. Giá trị này là Q_2.
- Tìm trung vị của nửa số liệu bên trái Q_2 (không bao gồm Q_2 nếu n lẻ). Giá trị này là Q_1.
- Tìm trung vị của nửa số liệu bên phải Q_2 (không bao gồm Q_2 nếu n lẻ). Giá trị này là Q_3.
- Khi đó, Q_1, Q_2, Q_3 được gọi là các ***tứ phân vị*** của mẫu số liệu.

Ví dụ 1

Tìm tứ phân vị của mẫu số liệu sau

21 35 17 43 8 59 72 119

Lời giải.

Mẫu số liệu trên được sắp xếp theo thứ tự tăng dần

8 17 21 35 43 59 72 119

Trung vị của mẫu số liệu trên là $\dfrac{35+43}{2}=39$.

Trung vị của dãy 8, 17, 21, 35 là $\dfrac{17+21}{2}=19$.

Trung vị của dãy 43, 59, 72, 119 là $\dfrac{59+72}{2}=65{,}5$.

Vậy $Q_1=19$, $Q_2=39$, $Q_3=65{,}5$.

Tứ phân vị được biểu diễn trên trục số như sau



□

Ví dụ 2

Hàm lượng Natri (đơn vị miligam, 1 mg $=$ 0,001 g) trong 100g một số loại ngũ cốc được cho như sau

0	340	70	140	200	180	210	150	100	130
140	180	190	160	290	50	220	180	200	210

Hãy tìm các tứ phân vị. Các tứ phân vị này cho ta thông tin gì?

Lời giải.

Mẫu số liệu trên được sắp xếp theo thứ tự tăng dần

0 50 70 100 130 140 140 150 160 180 180 180 190 200 200 210 210 220 290 340

Hai giá trị chính giữa của mẫu số liệu là 180 và 180.

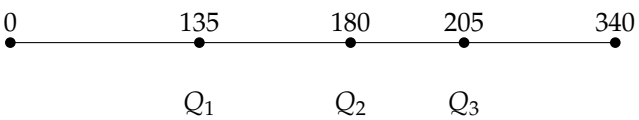
Trung vị của mẫu số liệu trên là $\dfrac{180+180}{2}=180$.

Trung vị của dãy 0, 50, 70, 100, 130, 140, 140, 150, 160, 180 là $\dfrac{130+140}{2}=135$.

Trung vị của dãy 180, 180, 190, 200, 200, 210, 210, 220, 290, 340 là $\dfrac{200+210}{2}=205$.

Vậy $Q_1=135$, $Q_2=180$, $Q_3=205$.

Tứ phân vị được biểu diễn trên trục số như sau



Các tứ phân vị cho ta hình ảnh phân bố của mẫu số liệu. Khoảng cách từ Q_1 đến Q_2 là 45 trong khi khaonrg cách từ Q_2 đến Q_3 là 25. Điều này cho thấy mẫu số liệu tập trung với mật độ cao ở bên phải của Q_2 và mật độ thấp ở bên trái của Q_2. □

Dạng 4 Xác định mốt dựa vào mẫu số liệu

Mốt của mẫu số liệu là giá trị xuất hiện với tần số lớn nhất.

Ví dụ 1

Thời gian truy cập internet (đơn vị giờ) trong một ngày của một số học sinh lớp 10 được cho như sau

0 0 1 1 1 3 4 4 5 6

Tìm mốt của mẫu số liệu này.

Lời giải.

Vì số học sinh truy cập internet 1 giờ mỗi ngày là lớn nhất (có 3 học sinh) nên một là 1. □

Ví dụ 2

Số áo của một cửa hàng đã bán ra trong một tháng được thống kê trong bảng tần số sau

Cỡ áo	37	38	39	40	41	42	43
Số áo bán được (tần số)	15	46	62	81	51	20	3

Tìm mốt của mẫu số liệu này.

Lời giải.

Vì tần số lớn nhất là 81 và 81 tương ứng với cỡ áo 40 nên mốt của bảng trên là 40. □

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1

Khối lượng 30 chi tiết máy được cho bởi bảng sau

Khối lượng(gam)	250	300	350	400	450	500	Cộng
Tần số	4	4	5	6	4	7	30

Tính số trung bình $\bar{x}$ (làm tròn đến hàng phần trăm) của bảng nói trên.

(A) 388,33. (B) 388,3. (C) 75. (D) 75,33.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính số trung bình cho bảng tần số ta có

$$\bar{x} = \frac{250 \cdot 4 + 300 \cdot 4 + 350 \cdot 5 + 400 \cdot 6 + 450 \cdot 4 + 500 \cdot 7}{30} \approx 388{,}33 \text{ (gam)}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 2

Điểm học kì một của một học sinh được cho bởi bảng số liệu sau (Đơn vị: điểm)

5	6	6	7	7	8	8	8,5	9

Tính số trung vị của bảng nói trên.

(A) 5. (B) 6. (C) 7. (D) 8,5.

Lời giải.

Ta có $n = 9$ là số lẻ. Số liệu thứ $\dfrac{N+1}{2} = 5$ là số trung vị. Do đó số trung vị là 7 (Điểm).

Chọn đáp án (C) □

Câu 3

Bảng số liệu sau đây thống kê thời gian nảy mầm một loại hạt mới trong các điều kiện khác nhau

Thời gian(phút)	420	440	450	480	500	540
Số hạt nảy mầm	8	17	18	16	11	10

Tính giá trị trung bình $\bar{x}$ (làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy) về thời gian nảy mầm loại hạt mới nói trên.

(A) 469. (B) 350. (C) 540. (D) 435.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính số trung bình cho bảng tần số ta có

$$\bar{x} = \frac{420 \cdot 8 + 440 \cdot 17 + 450 \cdot 18 + 480 \cdot 16 + 500 \cdot 11 + 540 \cdot 10}{80} = 469 \text{ (phút)}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 4

Điều tra số học sinh giỏi khối 10 của 15 trường cấp ba trên địa bàn tỉnh A, ta được bảng số liệu như sau

22	29	29	29	30	31	32	32	33	34	34	35	35	35	36

Tính số trung vị của bảng nói trên.

(A) 6. (B) 7. (C) 8. (D) 10.

Lời giải.

Ta có $n = 15$ là số lẻ. Số liệu thứ $\dfrac{15+1}{2} = 8$. Vậy số trung vị là 8 (Học sinh).

Chọn đáp án (C) □

Câu 5

Tốc độ phát triển của một loại Vi-rút trong 10 ngày với các điều kiện khác nhau (đơn vị nghìn con) được thống kê như sau

20	100	30	980	440	20	20	150	60	270

Trong trường hợp này ta chọn số nào dưới đây làm giá trị đại diện là tốt nhất? Tính giá trị đại diện đó.

(A) Trung vị, giá trị đại diện là 80.
(B) Trung bình, giá trị đại diện là 60.
(C) Mốt, giá trị đại diện là 100.
(D) Tứ phân vị, giá trị đại diện là 150.

Lời giải.

Ta chọn số trung vị làm đại diện là tốt nhất vì có sự chênh lệch lớn giữa các số liệu trong mẫu.
Sắp xếp lại số liệu mẫu

20	20	20	30	60	100	150	270	440	980

Kích thước mẫu là $n = 10$. Số liệu thứ 5 và 6 lần lượt là 60, 100. Vậy giá trị đại diện cho bảng số liệu là $\dfrac{60+100}{2} = 80$ (nghìn con).
Chọn đáp án (A) □

Câu 6

Bảng sau đây cho biết số lần học tiếng Anh trên Internet trong một tuần của một số học sinh lớp 10

Số lần	0	1	2	3	4	5
Số học sinh	2	4	6	12	8	3

Hãy tìm các tứ phân vị của mẫu số liệu này.

(A) $Q_1 = 2, Q_2 = 3, Q_3 = 5$.
(B) $Q_1 = 1, Q_2 = 2, Q_3 = 3$.
(C) $Q_1 = 2, Q_2 = 3, Q_3 = 4$.
(D) $Q_1 = 3, Q_2 = 4, Q_3 = 5$.

Lời giải.

Sắp xếp các giá trị theo thứ tự không giảm

0	0	1	1	1	1	2	2	2	2
2	2	3	3	3	3	3	3	3	3
3	3	3	3	4	4	4	4	4	4
		4	4	5	5	5			

Vì $n = 35$ là số lẻ nên tứ phân vị thứ hai Q_2 là giá trị chính giữa $Q_2 = 3$.
Ta có Q_1 là trung vị của nửa số liệu bên trái Q_2 (không bao gồm Q_2)

0	0	1	1	1	1	2	2	2	2
2	2	3	3	3	3	3			

và $Q_1 = 2$.
Ta có Q_3 là trung vị của nửa số liệu bên phải Q_2 (không bao gồm Q_2)

3 3
3 3 3 3 4 4 4 4 4 4
4 4 5 5 5

và $Q_3 = 4$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 7

Số điểm của năm vận động viên bóng rổ được ghi trong trận đấu

9 8 15 8 20

Tính tứ phân vị dưới của mẫu số liệu trên.
(A) $Q_1 = 8$. (B) $Q_1 = 8{,}5$. (C) $Q_1 = 9$. (D) $Q_1 = 20$.

Lời giải.

Sắp xếp các giá trị theo thứ tự không giảm

8 8 9 15 20

Vì $n = 5$ là số lẻ nên Q_2 là giá trị chính giữa: $Q_2 = 9$.
Ta có Q_1 là trung vị của nửa số liệu bên trái Q_2

8 8

và $Q_1 = \dfrac{8+8}{2} = 8$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 8

Số kênh được chiếu của một số hãng truyền hình cáp

36 38 33 34 32 30 34 35

Hãy tìm tứ phân vị trên của mẫu số liệu.
(A) 35,5. (B) 32. (C) 35. (D) 33.

Lời giải.

Sắp xếp các giá trị theo thứ tự không giảm

30 32 33 34 34 35 36 38

Vì $n = 8$ là số chẵn nên Q_2 là trung bình cộng của hai giá trị chính giữa

$$Q_2 = \frac{34+34}{2} = 34.$$

Ta có Q_3 là trung vị của nửa số liệu bên phải Q_2

34 35 36 38

và

$$Q_3 = \frac{35+36}{2} = 35{,}5.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 9

Tuổi thọ của 30 bóng đèn được thắp thử (đơn vị: giờ) được cho bởi bảng số liệu thống kê dưới đây

1180	1150	1190	1170	1180	1170	1160	1170	1160	1150
1190	1180	1170	1170	1170	1190	1170	1170	1170	1180
1170	1160	1160	1160	1170	1160	1180	1180	1150	1170.

Hãy tính mốt của bảng số liệu thống kê trên.

(A) 1170. (B) 1160. (C) 1180. (D) 1150.

Lời giải.

Từ bảng số liệu trên ta suy ra bảng phân bố tần số các giá trị tuổi thọ của 30 bóng đèn như sau

Tuổi thọ (giờ)	1150	1160	1170	1180	1190	Tổng
Số bóng	3	6	12	6	3	30

Ta thấy giá trị 1170 có tần số bằng 12 là lớn nhất. Do đó mốt của bảng số liệu là: 1170.
Chọn đáp án (C) □

Câu 10

Kết quả kiểm tra chất lượng đầu năm (thang điểm 30) của 41 học sinh của một lớp được cho bởi bảng số liệu thống kê dưới đây

Điểm	9	11	14	16	17	18	20	21	23	25	Tổng
Số học sinh	3	7	4	4	6	7	3	3	2	2	41

Hãy tính mốt của bảng số liệu thống kê trên.

(A) 11 và 18. (B) 14 và 18. (C) 11 và 16. (D) 14 và 16.

Lời giải.

Ta thấy điểm 11 và điểm 18 có số học sinh đạt được bằng 7 là lớn nhất. Do đó bảng số liệu có hai mốt là 11 và 18.
Chọn đáp án (A) □

Câu 11

Một bác sĩ mắt ghi lại tuổi của 30 bệnh nhân mắc bệnh đau mắt hột. Kết quả thu được mẫu số liệu như sau

21	17	22	18	20	17	15	13	15	20
15	12	18	17	25	17	21	15	12	18
16	23	14	18	19	13	16	19	18	17.

Tính mốt của bảng số liệu đã cho.

(A) 17 và 18. (B) 25 và 16. (C) 16 và 17. (D) 25 và 18.

Lời giải.

Từ bảng số liệu trên ta suy ra bảng phân bố tần số tuổi của 30 bệnh nhân đau mắt hột như sau

Tuổi	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	25	Tổng
Số bệnh nhân	2	2	1	4	2	5	5	2	2	2	1	1	1	30.

Ta thấy tuổi 17 và 18 có tần số bằng 5 là lớn nhất. Do đó bảng số liệu có hai mốt là 17 và 18.
Chọn đáp án (A) □

Câu 12

Điểm bài kiểm tra một tiết môn toán của 40 học sinh lớp 11A1 được thống kê bằng bảng số liệu dưới đây

Điểm	3	4	5	6	7	8	9	10	Cộng
Số học sinh	2	3	$3n-8$	$2n+4$	3	2	4	5	40

Trong đó $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$. Tính mốt của bảng số liệu thống kê đã cho.
(A) 4. (B) 5. (C) 6. (D) 10.

Lời giải.

Vì tổng các số liệu thống kê bằng 40 nên ta có: $5n + 15 = 40 \Leftrightarrow n = 5$.
Với $n = 5$ ta có bảng phân bố tần số

Điểm	3	4	5	6	7	8	9	10	Cộng
Số học sinh	2	3	7	14	3	2	4	5	40

Vậy mốt của bảng số liệu là 6.
Chọn đáp án (C) □

Câu 13

Số đôi giày bán ra trong Quý IV năm 2020 của một của hàng được thống kê trong bảng tần số sau

Cỡ giày	37	38	39	40	41	42	43	44
Số đôi giày bán được	40	48	52	70	54	47	28	3

Cửa hàng đó nên nhập về nhiều hơn cỡ giày nào để bán trong tháng tiếp theo?
(A) 70. (B) 40. (C) 44. (D) 39.

Lời giải.

Quan sát mẫu số liệu, mốt của mẫu số liệu trên là 40. Cửa hàng nên nhập thêm cỡ giày 40 để bán trong tháng tiếp theo.
Chọn đáp án (B) □

Câu 14

Chỉ số IQ của một nhóm học sinh

60 72 63 83 68
74 90 86 74 80

Hãy chọn số đặc trưng đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu trên.
(A) Mốt. (B) Trung vị. (C) Tứ phân vị. (D) Số trung bình.

Lời giải.

Vì số học sinh có chỉ số IQ bằng 74 là nhiều nhất (có 2 học sinh) nên dùng mốt để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu.

Chọn đáp án (A) □

Câu 15

Số lượng học sinh giỏi Quốc gia năm học 2018 - 2019 của 10 trường Trung học phổ thông được cho như sau

0 0 4 0 0 0 10 0 6 0.

Tìm mốt của mẫu số liệu trên

(A) 7. (B) 0. (C) 4. (D) 10.

Lời giải.

Vì số trường không có học sinh giỏi Quốc gia là nhiều nhất (có 7 trường) nên mốt của mẫu số liệu là 0.

Chọn đáp án (B) □

§3. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO ĐỘ PHÂN TÁN

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Định nghĩa 3.1. Khoảng biến thiên, kí hiệu là R, là hiệu số giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trong mẫu số liệu.

a) Khoảng biến thiên dùng để đo độ phân tán của mẫu số liệu. Khoảng biến thiên càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.

b) Sử dụng khoảng biến thiên có ưu điểm là đơn giản, dễ tính toán song khoảng biến thiên chỉ sử dụng thông tin của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất mà bỏ qua thông tin từ tất cả các giá trị khác. Do đó, khoảng biến thiên rất dễ bị ảnh hưởng bởi các giá trị bất thường.

Định nghĩa 3.2. Khoảng tứ phân vị, kí hiệu là Δ_Q, là hiệu số giữa tứ phân vị thứ ba và tứ phân vị thứ nhất, tức là

$$\Delta_Q = Q_3 - Q_1.$$

a) Khoảng tứ phân vị cũng là một số đo độ phân tán của mẫu số liệu. Khoảng tứ phân vị càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.

b) Về bản chất, khoảng tứ phân vị là khoảng biến thiên của 50% số liệu chính giữa của mẫu số liệu đã sắp xếp.

Một số tài liệu gọi khoảng biến thiên là biên độ, và khoảng tứ phân vị là độ trải giữa.

Ta xét mẫu số liệu $x_1, x_2, \ldots, x_n$, nếu gọi số trung bình là $\overline{x}$ thì với mỗi giá trị x_i, độ lệch của nó so với giá trị trung bình là $x_i - \overline{x}$.

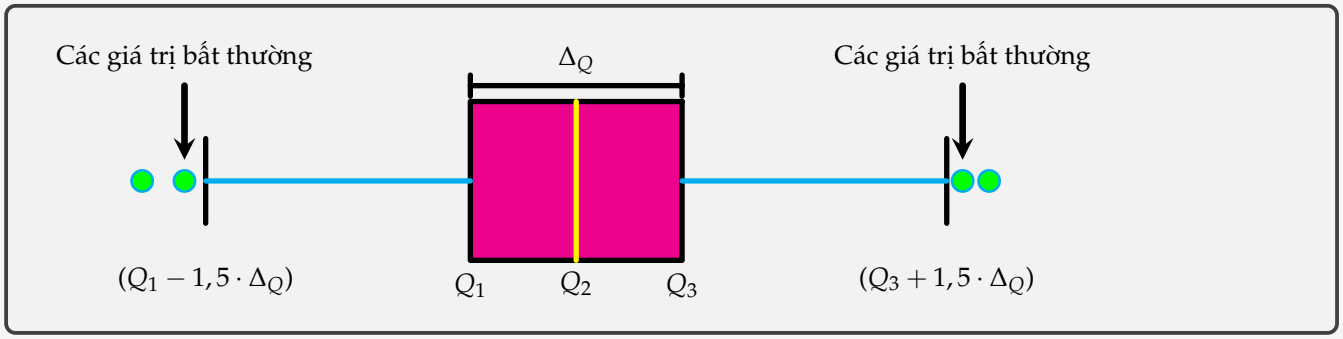
Định nghĩa 3.3. Phương sai là giá trị $s^2 = \dfrac{(x_1-\overline{x})^2 + (x_2-\overline{x})^2 + \cdots + (x_n-\overline{x})^2}{n}$.
Căn bậc hai của phương sai, $s = \sqrt{s^2}$ được gọi là độ lệch chuẩn.

a) Nếu số liệu càng phân tán thì phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn.

b) Ngoài ra, người ta còn sử dụng đại lượng sau để đo độ phân tán của mẫu số liệu

$$\widehat{s^2} = \frac{(x_1-\overline{x})^2 + (x_2-\overline{x})^2 + \cdots + (x_n-\overline{x})^2}{n-1}$$

Định nghĩa 3.4. Trong mẫu thống kê, đôi khi ta gặp những giá trị quá lớn hoặc quá nhỏ so với đa số các giá trị khác. Những giá trị này được gọi là giá trị bất thường.
Những giá trị này xuất hiện trong mẫu số liệu có thể do nhầm lẫn hay sai sót nào đó. Ta có thể dùng biểu đồ hộp để phát hiện những giá trị bất thường này (xem hình sau).



B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Xác định khoảng biến thiên dựa vào mẫu số liệu

Khoảng biến thiên, kí hiệu là R, là hiệu số giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trong mẫu số liệu.

Ví dụ 1

Điểm trung bình môn học kì của hai bạn An và Bình được cho bảng sau

	Toán	Vật lí	Hóa học	Ngữ văn	Lịch sử	Địa lí	Tin học	Tiếng Anh
An	9,2	8,7	9,5	6,8	8,0	8,0	7,3	6,5
Bình	8,2	8,1	8,0	7,8	8,3	7,9	7,6	8,1

a) Điểm trung bình môn học kì của hai bạn có như nhau không?

b) Tính các khoảng biến thiên của hai mẫu số liệu. Căn cứ trên mẫu số này, bạn nào học đồng đều hơn?

Lời giải.

a) Điểm trung bình môn học kì của An và Bình đều là 8,0.

b) Đối với bạn An: Điểm trung bình môn thấp nhất, cao nhất tương ứng là 6,5; 9,5. Do đó khoảng biến thiên là $R_1 = 9{,}5 - 6{,}5 = 3$.
Đối với bạn Bình: Điểm trung bình môn thấp nhất, cao nhất tương ứng là 7,6; 8,2. Do đó khoảng biến thiên là $R_2 = 8{,}2 - 7{,}6 = 0{,}6$.
Do $R_1 > R_2$ nên ta nói bạn Bình học đều hơn bạn An.

□

Ví dụ 2

Điểm kiểm tra học kì môn Toán của các bạn Tổ 1, Tổ 2 lớp $10A$ được cho như sau

Tổ 1	7	8	8	9	8	8	8		
Tổ 2	10	6	8	9	9	7	8	7	8

a) Điểm kiểm tra trung bình của hai tổ có như nhau không?

b) Tính các khoảng biến thiên của hai mẫu số liệu. Căn cứ trên mẫu số này, các bạn tổ nào học đồng đều hơn?

Lời giải.

a) Điểm kiểm tra trung bình của hai tổ đều bằng 8.

b) Đối với Tổ 1: Điểm kiểm tra thấp nhất, cao nhất tương ứng là 7; 9. Do đó khoảng biến thiên là $R_1 = 9 - 7 = 2$.

Đối với Tổ 2: Điểm kiểm tra thấp nhất, cao nhất tương ứng là 6; 10. Do đó khoảng biến thiên là $R_2 = 10 - 6 = 4$.
Do $R_2 > R_1$ nên ta nói Tổ 1 học đều hơn Tổ 2.

□

Dạng 2 Xác định khoảng tứ phân vị dựa vào mẫu số liệu

- Khoảng tứ phân vị, kí hiệu là Δ_Q là hiệu số giữa tứ phân vị thứ ba và tứ phân vị thứ nhất, tức là $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$.
- Một giá trị trong mẫu số liệu được coi là bất thường nếu nó nhỏ hơn $Q_1 - \frac{3}{2}\Delta_Q$ hoặc lớn hơn $Q_3 + \frac{3}{2}\Delta_Q$. Khoảng tứ phân vị cho ta cách nhận ra giá trị bất thường của mẫu số liệu.

Ví dụ 1

Mẫu số liệu sau cho biết số ghế trống tại một rạp chiếu phim trong 9 ngày là

$$7 \quad 8 \quad 22 \quad 20 \quad 15 \quad 18 \quad 19 \quad 13 \quad 11.$$

Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu này.

Lời giải.

Trước hết, ta sắp xếp mẫu số liệu theo thứ tự không giảm như sau

$$7 \quad 8 \quad 11 \quad 13 \quad 15 \quad 18 \quad 19 \quad 20 \quad 22.$$

Mẫu số liệu gồm 9 giá trị nên trung vị là số ở vị trí chính giữa $Q_2 = 15$.
Nửa số liệu bên trái là 7, 8, 11, 13 gồm 4 giá trị, hai phần tử chính giữa là 8, 11.
Do đó, $Q_1 = \dfrac{8+11}{2} = 9{,}5$.
Nửa số liệu bên phải là 18, 19, 20, 22 gồm 4 giá trị, hai phần tử chính giữa là 19, 20.
Do đó, $Q_3 = \dfrac{19+20}{2} = 19{,}5$.
Vậy khoảng tứ phân vị cho mẫu số liệu là $\Delta_Q = 19{,}5 - 9{,}5 = 10$. □

Ví dụ 2

Mẫu số liệu sau đây cho biết số bài hát ở mỗi album trong bộ sưu tập của An là

$$12 \quad 7 \quad 10 \quad 9 \quad 12 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 10 \quad 14.$$

Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu này.

Lời giải.

Trước hết, ta sắp xếp mẫu số liệu theo thứ tự không giảm như sau

$$7 \quad 9 \quad 9 \quad 10 \quad 10 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \quad 12 \quad 14.$$

Mẫu số liệu gồm 10 giá trị nên trung vị là số ở vị trí chính giữa $Q_2 = \dfrac{10+10}{2} = 10$.
Nửa số liệu bên trái là 7, 9, 9, 10, 10 gồm 5 giá trị, phần tử chính giữa là 9.

Do đó, $Q_1 = 9$.
Nửa số liệu bên phải là 10, 11, 12, 12, 14 gồm 5 giá trị, phần tử chính giữa là 12.
Do đó, $Q_3 = 12$.
Vậy khoảng tứ phân vị cho mẫu số liệu là $\Delta_Q = 12 - 9 = 3$. □

Ví dụ 3

Nêu các giá trị bất thường của mẫu số liệu thống kê sau

5 6 19 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 48 49

Lời giải.

Mẫu số liệu gồm 19 giá trị nên $Q_1 = 22$; $Q_2 = 27$; $Q_3 = 32$.
Suy ra $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 32 - 22 = 10$.
Các giá trị 5; 6 (nhỏ hơn $Q_1 - \frac{3}{2}\Delta_Q = 22 - \frac{3}{2} \cdot 10 = 7$) và các giá trị 48; 49 (lớn hơn $Q_3 + \frac{3}{2}\Delta_Q = 32 + \frac{3}{2} \cdot 10 = 47$) là các giá trị bất thường của mẫu số liệu. □

Dạng 3 Xác địnhphương sai, độ lệch chuẩn dựa vào mẫu số liệu

- Phương sai là giá trị $s^2 = \dfrac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \cdots (x_n - \overline{x})^2}{n}$.
- Căn bậc hai của phương sai, $s = \sqrt{s^2}$, được gọi là độ lệch chuẩn.

Ví dụ 1

Mẫu số liệu sau đây cho biết sĩ số của 5 lớp khối 10 tại một trường Trung học

43 45 46 41 40.

Tìm phương sai và độ lệch chuẩn cho mẫu số liệu này.

Lời giải.

Số trung bình của mẫu số liệu là $\overline{X} = \dfrac{43 + 45 + 46 + 41 + 40}{5} = 43$.
Ta có bảng sau

Giá trị	Độ lệch	Bình phương độ lệch
43	$43 - 43 = 0$	0
45	$45 - 43 = 2$	4
46	$46 - 43 = 3$	9
41	$41 - 43 = -2$	4
40	$40 - 43 = -3$	9
Tổng		26

Mẫu số liệu trên gồm 5 giá trị nên $n = 5$. Do đó phương sai là $s^2 = \dfrac{26}{5} = 5{,}2$.
Độ lệnh chuẩn là $s^2 = \sqrt{5{,}2} \approx 2{,}28$. □

Ví dụ 2

Số liệu thống kê kết quả 5 bài kiểm tra môn Toán của bạn Dũng và bạn Huy như sau

Bạn Dũng (1)	8	6	7	5	9
Bạn Huy (2)	6	7	7	8	7

a) Tính phương sai của mẫu số liệu trên.

b) So sánh phương sai của mẫu số liệu (Bạn Dũng) với phương sai của mẫu số liệu (Bạn Huy). Từ đó cho biết bạn nào có kết quả kiểm tra môn Toán đồng đều hơn?

Lời giải.

Số trung bình của mẫu số liệu (1) và (2) tương ứng là

$$\overline{X}_1 = \frac{8+6+7+5+9}{5} = 7; \quad \overline{X}_2 = \frac{6+7+7+8+7}{5} = 7.$$

Ta có hai bảng sau

Giá trị	Độ lệch	Bình phương độ lệch
8	$8-7=1$	1
6	$6-7=-1$	1
7	$7-7=0$	0
5	$5-7=-2$	4
9	$9-7=2$	4
Tổng		10

Giá trị	Độ lệch	Bình phương độ lệch
6	$6-7=-1$	1
7	$7-7=0$	0
7	$7-7=0$	0
8	$8-7=1$	1
7	$7-7=0$	0
Tổng		2

a) Phương sai của mẫu số liệu trên là

$$s_1^2 = \frac{10}{5} = 2; \; s_2^2 = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

b) Do $s_2^2 = 0{,}4 < s_1^2 = 2$ nên bạn Huy có kết quả kiểm tra môn Toán đồng đều hơn bạn Dũng.

□

Ví dụ 3

Mẫu số liệu thống kê chiều cao (đơn vị: mét) của 15 cây bạch đàn là

6,3 6,6 7,5 8,2 8,3 7,8 7,9 9,0 8,9 7,2 7,5 8,7 7,7 8,8 7,6.

a) Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên.

b) Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên.

Lời giải.

a) Trong mẫu số liệu trên, số lớn nhất là 9,0 và số nhỏ nhất là 6,3. Do đó khoảng biến thiên là $R = 9{,}0 - 6{,}3 = 2{,}7$ (m).

b) Sắp xếp mẫu số liệu trên theo thứ tự tăng dần ta được

$$6{,}3 \quad 6{,}6 \quad 7{,}2 \quad 7{,}5 \quad 7{,}5 \quad 7{,}6 \quad 7{,}7 \quad 7{,}8 \quad 7{,}9 \quad 8{,}2 \quad 8{,}3 \quad 8{,}7 \quad 8{,}8 \quad 8{,}9 \quad 9{,}0.$$

Mẫu số liệu gồm 15 giá trị nên $Q_1 = 7{,}5$; $Q_2 = 7{,}8$; $Q_3 = 8{,}7$.
Vậy khoảng tứ phân vị cho mẫu số liệu là $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 8{,}7 - 7{,}5 = 1{,}2$. □

Ví dụ 4

Mỗi khẳng định sau đúng hay sai?

(1) Nếu các giá trị của mẫu số liệu càng tập trung quanh giá trị trung bình thì độ lệch chuẩn càng lớn.

(2) Khoảng biến thiên chỉ sử dụng thông tin của giá trị lớn nhất và bé nhất, bỏ qua thông tin của các giá trị còn lại.

(3) Khoảng tứ phân vị có sử dụng thông tin của giá trị lớn nhất, giá trị bé nhất.

(4) Khoảng tứ phân vị chính là khoảng biến thiên của nửa dưới mẫu số liệu đã sắp xếp.

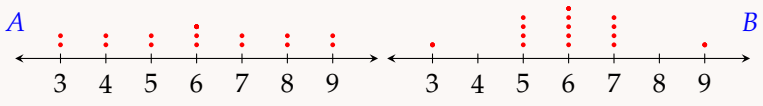
(5) Các số đo độ phân tán đều không âm.

Lời giải.

Phương án đúng: (2),(5).
Phương án (1) sai vì nếu số liệu càng phân tán thì độ lệch chuẩn càng lớn.
Phương án (3),(4) sai vì khoảng tứ phân vị chỉ sử dụng thông tin của 50% số liệu chính giữa. □

Ví dụ 5

Cho hai biểu đồ chấm điểm biểu diễn hai mẫu số liệu A, B như sau:



Số chấm trên mỗi giá trị biểu diễn cho tần số của giá trị đó.

Không tính toán, hãy cho biết:

a) Hai mẫu số liệu này có cùng khoảng biến thiên và số trung bình không?

b) Mẫu số liệu nào có phương sai lớn hơn?

Lời giải.

a) Hai mẫu số liệu này có cùng khoảng biến thiên và số trung bình.

b) Mẫu số liệu A phân tán nhiều hơn nên sẽ có phương sai lớn hơn.

□

Ví dụ 6

Cho mẫu số liệu gồm 10 số dương không hoàn toàn giống nhau. Các số đo độ phân tán (khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị, độ lệch chuẩn) sẽ thay đổi như thế nào nếu:

a) Nhân mỗi giá trị của mẫu số liệu với 2.

b) Cộng mỗi giá trị của mẫu số liệu với 2.

Lời giải.

a) Khi nhân mỗi giá trị của mẫu số liệu với 2 thì các số đo độ phân tán (khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị, độ lệch chuẩn) sẽ tăng gấp 2 so với giá trị ban đầu.

b) Khi cộng mỗi giá trị của mẫu số liệu với 2 thì các số đo độ phân tán (khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị, độ lệch chuẩn) không thay đổi.

□

Ví dụ 7

Từ mẫu số liệu về thuế thuốc lá của 51 thành phố tại một quốc gia, người ta tính được: Giá trị nhỏ nhất bằng 2,5; $Q_1 = 36$; $Q_2 = 60$; $Q_3 = 100$; giá trị lớn nhất bằng 205.

a) Tỉ lệ thành phố có thuế thuốc lá lớn hơn 36 là bao nhiêu?

b) Chỉ ra hai giá trị sao cho có 50% giá trị của mẫu số liệu nằm giữa hai giá trị này.

c) Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu.

Lời giải.

a) Tỉ lệ thành phố có thuế thuốc lá lớn hơn $Q_1 = 36$ là 75%.

b) Hai giá trị sao cho có 50% giá trị của mẫu số liệu nằm giữa hai giá trị này, tức là có thể từ Q_1 đến Q_3 sẽ nằm giữa hai giá trị này. Vậy ta có thể chọn những giá trị nhỏ hơn 36 và lớn hơn 100 ví dụ như 35 và 102.

c) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu là $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 100 - 36 = 64$.

□

Ví dụ 8

Mẫu số liệu sau đây cho biết cân nặng của 10 trẻ sơ sinh (đơn vị kg)

2,977	3,155	3,920	3,412	4,236
2,593	3,270	3,813	4,042	3,387

Hãy tính khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị và độ lệch chuẩn cho mẫu số liệu này.

Lời giải.

a) Cân nặng cao nhất, thấp nhất tương ứng là 4,236; 2,593. Do đó khoảng biến thiên là: $R = 4{,}236 - 2{,}593 = 1{,}643$.

b) Sắp xếp cân nặng theo thứ tự không giảm ta được

2,593	2,977	3,155	3,270	3,387	3,412	3,813	3,920	4,042	4,236

Mẫu số liệu gồm 10 giá trị, hai phần tử chính giữa là 3,387; 3,412. Do đó $Q_2 = (3{,}387 + 3{,}412) : 2 = 3{,}3995$.
Nửa số liệu bên trái là 2,593; 2,977; 3,155; 3,270 gồm 4 giá trị, hai phần tử chính giữa là 2,977; 3,155. Do đó $Q_1 = (2{,}977 + 3{,}155) : 2 = 3{,}066$.
Nửa số liệu bên phải là 3,813; 3,920; 4,042; 4,236 gồm 4 giá trị, hai phần tử chính giữa là 3,920; 4,042. Do đó $Q_3 = (3{,}920 + 4{,}042) : 2 = 3{,}981$.
Vậy khoảng tứ phân vị cho mẫu số liệu là $\Delta_Q = 3{,}981 - 3{,}066 = 0{,}915$.

c) Số trung bình của mẫu số liệu là $\overline{x} = 3{,}4805$.
Phương sai $s^2 = 0{,}23946425$. Do đó độ lệch chuẩn $s \approx 0{,}49$.

□

Ví dụ 9

Tỉ lệ thất nghiệp ở một số quốc gia vào năm 2017 (đơn vị %) được cho như sau:

7,8	3,2	7,7	8,7	8,6	8,4	7,2	3,6
5,0	4,4	6,7	7,0	4,5	6,0	5,4	

Hãy tìm các giá trị bất thường (nếu có) của mẫu số liệu trên.

Lời giải.

Sắp xếp các giá trị theo thứ tự không giảm ta được:

3,2	3,6	4,4	4,5	5,0	5,4	6,0	6,7	7,0	7,2	7,7	7,8	8,4	8,6	8,7

Từ mẫu số liệu ta tính được $Q_2 = 6{,}7$; $Q_1 = 4{,}5$; $Q_3 = 7{,}8$; $\Delta_Q = 3{,}3$.
Ta có $Q_1 - 1{,}5 \cdot \Delta_Q = -0{,}45$; $Q_3 + 1{,}5 \cdot \Delta_Q = 12{,}75$ nên mẫu số liệu không có giá trị bất thường. □

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1

Điểm số của câu lạc bộ Chelsea đạt được tại giải ngoại hạng, từ mùa giải 2012-2013 đến mùa giải 2020-2021 như sau:

75 82 87 50 93 70 72 66 67

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là

(A) 27. (B) 23. (C) 50. (D) 43.

Lời giải.

Khoảng biến thiên là $R = 93 - 50 = 43$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2

Điểm thi HK1 của một học sinh lớp 10 như sau:

9 9 7 8 9 7 10 8 8

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 0.

Lời giải.

Khoảng biến thiên là $R = 10 - 7 = 3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 3

Sản lượng gạo của Việt Nam từ 2007 đến 2017 như sau:

2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
4,53	4,68	6,05	6,75	7,18	7,72	6,68	6,32	6,57	4,89	5,77

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là

(A) 2,81. (B) 3,11. (C) 1,92. (D) 3,19.

Lời giải.

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là $R = 7,72 - 4,53 = 3,19$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 4

Tìm khoảng phân vị của mẫu số liệu

162 165 168 170 164 172 160 162 172 168 160 166 165 167 168 170 172 164 165 172

(A) 4. (B) 5. (C) 6. (D) 7.

Lời giải.

Ta sắp xếp mẫu theo thứ tự không giảm

160 160 162 162 164 164 165 165 165 166 167 168 168 168 170 170 172 172 172 172

Mẫu số liệu gồm 20 giá trị nên $Q_2 = \dfrac{166+167}{2} = 166{,}5$.

Nửa số liệu bên trái gồm 10 giá trị nên $Q_1 = \dfrac{164+164}{2} = 164$.

Nửa số liệu bên phải gồm 10 giá trị nên $Q_3 = \dfrac{170+170}{2} = 170$.

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu là $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 170 - 164 = 6$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 5

Điểm kiểm tra HK2 môn toán của một nhóm 12 học sinh lớp 10 như sau:

4 5 5 9 9 8 7 10 7 7 8 6

Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu.

(A) 3,5. (B) 2,5. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Ta sắp xếp mẫu số liệu theo thứ tự không giảm

4 5 5 6 7 7 7 8 8 9 9 10

Mẫu số liệu gồm 12 giá trị nên $Q_2 = \dfrac{7+7}{2} = 7$.

Nửa số liệu bên trái là 4 5 5 6 7 7 gồm 6 giá trị nên $Q_1 = \dfrac{5+6}{2} = 5{,}5$.

Nửa số liệu bên trái là 7 8 8 9 9 10 gồm 6 giá trị nên $Q_3 = \dfrac{8+9}{2} = 8{,}5$.

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu là $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 8{,}5 - 5{,}5 = 3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 6

Mẫu số liệu sau đây cho biết chiều cao (đơn vị: cm) của một nhóm học sinh nữ lớp 10:

151 152 153 154 155 160 160 162 163 165 165 165 166 167 167

Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu.

(A) 9. (B) 10. (C) 11. (D) 12.

Lời giải.

Mẫu số liệu gồm 15 giá trị nên $Q_2 = 162$.

Nửa số liệu bên trái gồm 7 giá trị nên $Q_1 = 154$.

Nửa số liệu bên trái gồm 7 giá trị nên $Q_3 = 165$.

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu là $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 165 - 154 = 11$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 7

Cho mẫu số liệu 10; 8; 6; 2; 4. Độ lệch chuẩn của mẫu là

(A) 8. (B) 2,4. (C) 2,8. (D) 6.

Lời giải.

Giá trị trung bình của dãy số liệu là $\overline{x} = \dfrac{10+8+6+4+2}{5} = 6$.

Độ lệch chuẩn của dãy số liệu là

$$s = \sqrt{\frac{(10-6)^2+(8-6)^2+(4-6)^2+(2-6)^2}{5}} \approx 2{,}8.$$

Chọn đáp án C □

Câu 8

Cho mẫu số liệu 6; 7; 8; 9; 9. Phương sai của mẫu là

A 1,72. B 1,25. C 1,45. D 1,36.

Lời giải.

Giá trị trung bình của mẫu số liệu là $\overline{x} = \dfrac{6+7+8+9+9}{5} = 7{,}8$.

Phương sai của mẫu số liệu là

$$s^2 = \frac{(6-\overline{x})^2+(7-\overline{x})^2+(8-\overline{x})^2+(9-\overline{x})^2+(9-\overline{x})^2}{5} \approx 1{,}36.$$

Chọn đáp án D □

Câu 9

Cho bảng số liệu thống kê điểm kiểm tra của lớp 10A1:

Điểm	3	4	5	6	7	8	9	10
Số học sinh	2	3	7	18	3	2	4	1

Tính phương sai của mẫu số liệu.

A 2,21. B 2,49. C 2,55. D 2,64.

Lời giải.

Số trung bình là $\overline{x} = \dfrac{2\cdot 3+3\cdot 4+7\cdot 5+18\cdot 6+3\cdot 7+2\cdot 8+4\cdot 9+1\cdot 10}{40} = 6{,}1$.

Phương sai của mẫu số liệu là

$$\begin{aligned} s^2 = \frac{1}{40}&(2\cdot(3-6{,}1)^2+3\cdot(4-6{,}1)^2+7\cdot(5-6{,}1)^2+18\cdot(6-6{,}1)^2 \\ &+3\cdot(7-6{,}1)^2+2\cdot(8-6{,}1)^2+2\cdot(9-6{,}1)^2+1\cdot(10-6{,}1)^2) \\ &\approx 2{,}49. \end{aligned}$$

Chọn đáp án B □

Câu 10

Sản lượng lúa (đơn vị là tạ) của 10 thửa ruộng thí nghiệm được trình bày trong bảng

Sản lượng	4	4,5	5	5,5	6
Tần số	1	3	4	1	1

Tính độ lệch chuẩn s của dãy số liệu.

Ⓐ $s \approx 0{,}54$. Ⓑ $s \approx 0{,}51$. Ⓒ $s \approx 0{,}44$. Ⓓ $s \approx 0{,}31$.

Lời giải.

Số trung bình là $\overline{x} = \dfrac{1 \cdot 4 + 3 \cdot 4{,}5 + 4 \cdot 5 + 1 \cdot 5{,}5 + 1 \cdot 6}{10} = 4{,}9$.
Phương sai là

$$s^2 = \frac{1 \cdot (4 - 4{,}9)^2 + 3 \cdot (4{,}5 - 4{,}9)^2 + 4 \cdot (5 - 4{,}9)^2 + 1 \cdot (5{,}5 - 4{,}9)^2 + 1 \cdot (6 - 4{,}9)^2}{10} \approx 0{,}29.$$

Độ lệch chuẩn của dãy số liệu là $s = \sqrt{s^2} \approx 0{,}54$.
Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 11

Tìm phương sai của mẫu số liệu sau đây

26 27 28 24 29 40 31 24 37 33 31 36 37 30 22 33 22 24 26 28 30 31 27 30 36

Ⓐ 21,18. Ⓑ 23,34. Ⓒ 25,28. Ⓓ 24,14.

Lời giải.

Số trung bình là $\overline{x} = 29{,}68$.
Phương sai của mẫu số liệu là $s^2 \approx 23{,}34$.
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 12

Một nhà nghiên cứu ghi lại tuổi của 30 bệnh nhân mắc bệnh đau mắt. Kết quả thu được mẫu số liệu như sau:
21 18 22 18 20 17 15 14 15 20 15 12 18 17 25 17 21 15 12 18 16 23 14 18 19 12 16 19 18 19.
Tính độ lệch chuẩn s của mẫu số liệu.

Ⓐ 3,51. Ⓑ 3,11. Ⓒ 3,15. Ⓓ 3,55.

Lời giải.

Bảng tần số

Tuổi	12	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	25
Số người	3	2	4	2	3	6	3	2	2	1	1	1

Số trung bình là $\overline{x} = 17{,}47$.
Độ lệch chuẩn s của mẫu số liệu là $s = 3{,}15$.
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 13

Đo kích thước các quả đậu Hà Lan ta thu được kết quả:

Kích thước	111	112	113	114	115	116	117	118	119
Số quả	3	8	30	68	81	36	18	5	1

Tính phương sai của mẫu số liệu.

Ⓐ 1,82. Ⓑ 1,71. Ⓒ 2,12. Ⓓ 1,07.

Lời giải.

Số trung bình là $\overline{x} = 114{,}708$.
Phương sai của mẫu số liệu là $s^2 \approx 1{,}82$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 14

Bảng thống kê nhiệt độ (đơn vị $^\circ C$) tại Hà Nội:

Giờ đo	1 h	4 h	7 h	10 h	13 h	16 h	19 h	22 h
Nhiệt độ	18	19	20	23	25	26	22	20

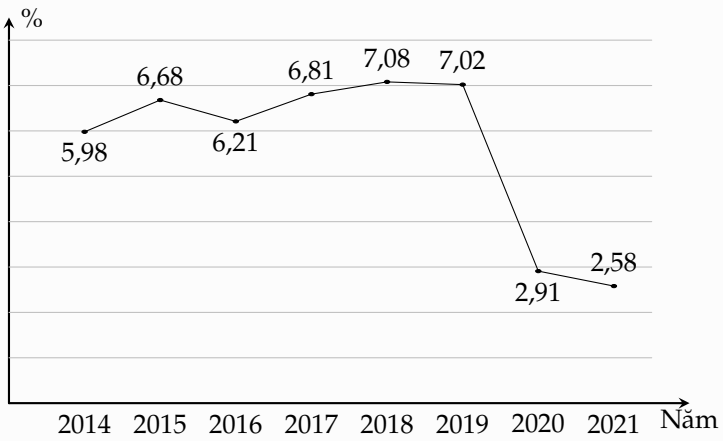
Tính độ lệch chuẩn của mẫu số liệu.
(A) 2,61. (B) 2,69. (C) 2,55. (D) 2,58.

Lời giải.

Số trung bình $\overline{x} = \dfrac{18+19+20+23+25+26+22+20}{8} = 21{,}625$.
Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu là $s \approx 2{,}69$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 15

Tốc độ tăng trưởng GDP của Việt Nam giai đoạn 2014 – 2021 được biểu diễn trong hình vẽ bên. Tính độ lệch chuẩn của mẫu số liệu.
(A) 1,72. (B) 1,77.
(C) 1,81. (D) 1,64.



Lời giải.

Số trung bình là

$$\overline{x} = \frac{5{,}98+6{,}68+6{,}21+6{,}81+7{,}08+7{,}02+2{,}91+2{,}58}{8} = 5{,}65875.$$

Phương sai của mẫu số liệu

$$\begin{aligned} s^2 = \frac{1}{8}\big((5{,}98-\overline{x})^2 + (6{,}68-\overline{x})^2 + (6{,}21-\overline{x})^2 + (6{,}81-\overline{x})^2 \\ + (7{,}08-\overline{x})^2 + (7{,}02-\overline{x})^2 + (2{,}91-\overline{x})^2 + (2{,}58-\overline{x})^2\big) \\ \approx 2{,}96. \end{aligned}$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu là $s \approx 1{,}72$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 16

Điểm thi HK2 môn Toán của một lớp 30 học sinh như sau:

4	5	3	5	9	5,5	6	7	10	9	5	6,5	7	8	6
7	9	8	5	7,5	8	6	2	9	7	6	5,5	5	6	7

Có bao nhiêu giá trị bất thường trong mẫu số liệu đã cho?

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Từ mẫu số liệu đã cho ta tính được $Q_1 = 5$; $Q_3 = 8$.
Khoảng tứ phân vị là $\Delta_Q = 8 - 5 = 3$.
Ta có $Q_1 - \frac{3}{2}\Delta_Q = 0{,}5$; $Q_3 + \frac{3}{2}\Delta_Q = 12{,}5$.
Vậy không có giá trị bất thường trong mẫu số liệu.
Chọn đáp án (A) □

Câu 17

Điều tra về chiều cao (đơn vị: cm) của học sinh nữ lớp 8, ta có kết quả

Chiều cao	143	145	148	150	151	152	154	156	158	160	161	162	164	
Số học sinh	1	2	4	8	6	13	15	18	25	18	10	8	7	

Có bao nhiêu giá trị bất thường trong mẫu số liệu đã cho?

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Từ mẫu số liệu đã cho ta tính được $Q_1 = 154$; $Q_3 = 160$.
Khoảng tứ phân vị là $\Delta_Q = 160 - 154 = 6$.
Ta có $Q_1 - \frac{3}{2}\Delta_Q = 145$; $Q_3 + \frac{3}{2}\Delta_Q = 169$.
Vậy trong mẫu số liệu giá trị được xem là bất thường là 143.
Chọn đáp án (B) □

Câu 18

Mẫu số liệu sau đây cho biết cân nặng của 10 trẻ sơ sinh (đơn vị kg):

2,681	2,955	3,112	3,425	4,318
3,017	3,382	2,842	3,172	3,921

Có bao nhiêu giá trị bất thường trong mẫu số liệu đã cho?

(A) 3. (B) 2. (C) 0. (D) 1.

Lời giải.

Từ mẫu số liệu đã cho ta tính được $Q_1 = 2{,}92675$; $Q_3 = 3{,}549$.
Khoảng tứ phân vị là $\Delta_Q = 3{,}549 - 2{,}92675 = 0{,}62225$.
Ta có $Q_1 - \frac{3}{2}\Delta_Q = 1{,}993375$; $Q_3 + \frac{3}{2}\Delta_Q = 4{,}482375$.

Vậy không có giá trị bất thường trong mẫu số liệu.
Chọn đáp án Ⓒ □

§4. BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG V

A BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1

Khi sử dụng máy tính bỏ túi với 10 chữ số thập phân ta được: $\sqrt{8} = 2{,}828427125$.Giá trị gần đúng của $\sqrt{8}$ chính xác đến hàng phần trăm là.

(A) 2,80. (B) 2,81. (C) 2,82. (D) 2,83.

Lời giải.

Cần lấy chính xác đến hàng phần trăm nên ta phải lấy 2 chữ số thập phân. Vì đứng sau số 2 ở hàng phần trăm là số $8 > 5$ nên theo nguyên lý làm tròn ta được kết quả là 2,83

Chọn đáp án (D) □

Câu 2

Viết giá trị gần đúng của $\sqrt{10}$ đến hàng phần trăm dùng MTBT:

(A) 3,16. (B) 3,17. (C) 3,10. (D) 3,162.

Lời giải.

Ta có: $\sqrt{10} = 3{,}16227766$
Cần lấy chính xác đến hàng phần trăm nên ta phải lấy 2 chữ số thập phân. Vì đứng sau số 6 ở hàng phần trăm là số $2 < 5$ nên theo nguyên lý làm tròn ta được kết quả là 3,16

Chọn đáp án (A) □

Câu 3

Viết các số gần đúng sau dưới dạng chuẩn$a = 467346 \pm 12$.

(A) $46735 \cdot 10$. (B) $47 \cdot 10^4$. (C) $467 \cdot 10^3$. (D) $4673 \cdot 10^2$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{10}{2} = 5 < 12 < \dfrac{100}{2} = 50$ nên chữ số hàng trăm trở đi là chữ số chữ số chắc do đó số gần đúng viết dưới dạng chuẩn là $4673 \cdot 10^2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 4

Viết các số gần đúng sau dưới dạng chuẩn $b = 2{,}4653245 \pm 0{,}006$.

(A) 2,46. (B) 2,47. (C) 2,5. (D) 2,465.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{0{,}01}{2} = 0{,}005 < 0{,}006 < \dfrac{0{,}1}{2} = 0{,}05$ nên chữ số hàng phần chục trở đi là chữ số chữ số chắc do đó số gần đúng viết dưới dạng chuẩn là 2,5.

Chọn đáp án (C) □

Câu 5

Viết giá trị gần đúng của số π^2, chính xác đến hàng phần trăm và hàng phần nghìn.

(A) 9,9 ; 9,87. (B) 9,87 ; 9,870. (C) 9,87 ; 9,87. (D) 9,870 ; 9,87.

Lời giải.

Sử dụng máy tính bỏ túi ta có giá trị của π^2 là 9,8696044...
Do đó giá trị gần đúng của π^2 chính xác đến hàng phần trăm là 9,87;
giá trị gần đúng của π^2 chính xác đến hàng phần nghìn là 9,870.

Chọn đáp án (B) □

Câu 6

Khi sử dụng máy tính bỏ túi với 10 chữ số thập phân ta được: $\sqrt{8} = 2{,}828427125$.Giá trị gần đúng của $\sqrt{8}$ chính xác đến hàng phần trăm là.

(A) 2,80. (B) 2,81. (C) 2,82. (D) 2,83.

Lời giải.

Cần lấy chính xác đến hàng phần trăm nên ta phải lấy 2 chữ số thập phân. Vì đứng sau số 2 ở hàng phần trăm là số $8 > 5$ nên theo nguyên lý làm tròn ta được kết quả là 2,83
Chọn đáp án (D) □

Câu 7

Viết giá trị gần đúng của $\sqrt{10}$ đến hàng phần trăm dùng MTBT:

(A) 3,16. (B) 3,17. (C) 3,10. (D) 3,162.

Lời giải.

Ta có: $\sqrt{10} = 3{,}16227766$
Cần lấy chính xác đến hàng phần trăm nên ta phải lấy 2 chữ số thập phân. Vì đứng sau số 6 ở hàng phần trăm là số $2 < 5$ nên theo nguyên lý làm tròn ta được kết quả là 3,16
Chọn đáp án (A) □

Câu 8

Viết các số gần đúng sau dưới dạng chuẩn$a = 467346 \pm 12$.

(A) $46735 \cdot 10$. (B) $47 \cdot 10^4$. (C) $467 \cdot 10^3$. (D) $4673 \cdot 10^2$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{10}{2} = 5 < 12 < \dfrac{100}{2} = 50$ nên chữ số hàng trăm trở đi là chữ số chữ số chắc do đó số gần đúng viết dưới dạng chuẩn là $4673 \cdot 10^2$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 9

Viết các số gần đúng sau dưới dạng chuẩn $b = 2{,}4653245 \pm 0{,}006$.

(A) 2,46. (B) 2,47. (C) 2,5. (D) 2,465.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{0{,}01}{2} = 0{,}005 < 0{,}006 < \dfrac{0{,}1}{2} = 0{,}05$ nên chữ số hàng phần chục trở đi là chữ số chữ số chắc do đó số gần đúng viết dưới dạng chuẩn là 2,5.
Chọn đáp án (C) □

Câu 10

Viết giá trị gần đúng của số π^2, chính xác đến hàng phần trăm và hàng phần nghìn.
(A) 9,9 ; 9,87. (B) 9,87 ; 9,870. (C) 9,87 ; 9,87. (D) 9,870 ; 9,87.

Lời giải.

Sử dụng máy tính bỏ túi ta có giá trị của π^2 là 9,8696044...
Do đó giá trị gần đúng của π^2 chính xác đến hàng phần trăm là 9,87;
giá trị gần đúng của π^2 chính xác đến hàng phần nghìn là 9,870.

Chọn đáp án (B) □

Câu 11

Giá trị trung bình và trung vị của mẫu số liệu sau lần lượt là

20 40 70 100 30 80 10

(A) 40, 50. (B) 50, 30. (C) 50, 40. (D) 40, 30.

Lời giải.

Số trung bình cộng của mẫu số liệu trên là

$$\frac{20+40+70+100+30+80+10}{7} = 50.$$

Mẫu số liệu trên được sắp xếp theo thứ tự không giảm

10 20 30 40 70 80 100

Khi đó, trung vị của mẫu số liệu là 40.
Chọn đáp án (C) □

Câu 12

Khi kiểm ra ngẫu nhiên một số công nhân trong một xí nghiệm, người ta thống kê lại độ tuổi của họ ở bảng sau

Tuổi	25	26	27	29	31	34
Số công nhân	4	9	8	3	1	1

Giá trị trung bình và trung vị của mẫu số liệu trên lần lượt là
(A) 27; 26,5. (B) 26; 27,5. (C) 26,5; 27. (D) 26; 27.

Lời giải.

Cỡ mẫu là $n = 26$. Khi sắp xếp độ tuổi các công nhân theo thứ tự không giảm thì số liệu thứ 13 và 14 lần lượt là 26 và 27.
Trung vị của mẫu số liệu là

$$M_e = \frac{26+27}{2} = 26{,}5.$$

Số trung bình của mẫu số liệu là

$$\frac{25\cdot 4 + 26\cdot 9 + 27\cdot 8 + 29\cdot 3 + 31 + 34}{26} = 27.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 13

Cho mẫu số liệu sau

10 13 15 2 10 19 2 5 7

Giá trị các tứ phân vị của mẫu số liệu sau lần lượt là

(A) $Q_1 = 3, Q_2 = 5, Q_3 = 14.$
(B) $Q_1 = 4, Q_2 = 10, Q_3 = 14.$
(C) $Q_1 = 3, Q_2 = 10, Q_3 = 15.$
(D) $Q_1 = 3, Q_2 = 10, Q_3 = 14.$

Lời giải.

Mẫu số liệu trên được sắp xếp theo thứ tự tăng dần

2 2 5 7 10 10 13 15 19

Trung vị của mẫu số liệu trên là 10.
Trung vị của dãy 2, 2, 4, 7 là $\frac{2+4}{2} = 3.$
Trung vị của dãy 10, 13, 15, 19 là $\frac{13+15}{2} = 14.$
Vậy $Q_1 = 3, Q_2 = 10, Q_3 = 14.$
Chọn đáp án (D) □

Câu 14

Cho mẫu số liệu về số học sinh bị nhiễm bệnh Covid 19 của một số trường học ở một xã được thống kê như sau

10 34 89 82 24 16 50 70 72

Giá trị các tứ phân vị của mẫu số liệu sau lần lượt là

(A) $Q_1 = 20, Q_2 = 50, Q_3 = 70.$
(B) $Q_1 = 20, Q_2 = 40, Q_3 = 77.$
(C) $Q_1 = 20, Q_2 = 50, Q_3 = 77.$
(D) $Q_1 = 30, Q_2 = 50, Q_3 = 70.$

Lời giải.

Mẫu số liệu trên được sắp xếp theo thứ tự tăng dần

10 16 24 34 50 70 72 82 89

Trung vị của mẫu số liệu trên là 50.
Trung vị của dãy 10, 16, 24, 34 là $\frac{16+24}{2} = 20.$
Trung vị của dãy 70, 72, 82, 89 là $\frac{72+82}{2} = 77.$
Vậy $Q_1 = 20, Q_2 = 50, Q_3 = 77.$
Chọn đáp án (C) □

Câu 15

Cho mẫu số liệu về số tuổi của các nhân viên trong một công ty như sau

Giá trị	23	25	28	31	33	37
Tần số	6	8	10	6	4	3

Giá trị trung bình và mốt của mẫu số liệu trên lần lượt là

(A) 28,3; 28. (B) 28,6; 28. (C) 28,3; 25. (D) 28,6; 25.

Lời giải.

Cỡ mẫu số liệu là $n = 6 + 8 + 10 + 6 + 4 + 3 = 37$.
Số trung bình của mẫu số liệu là

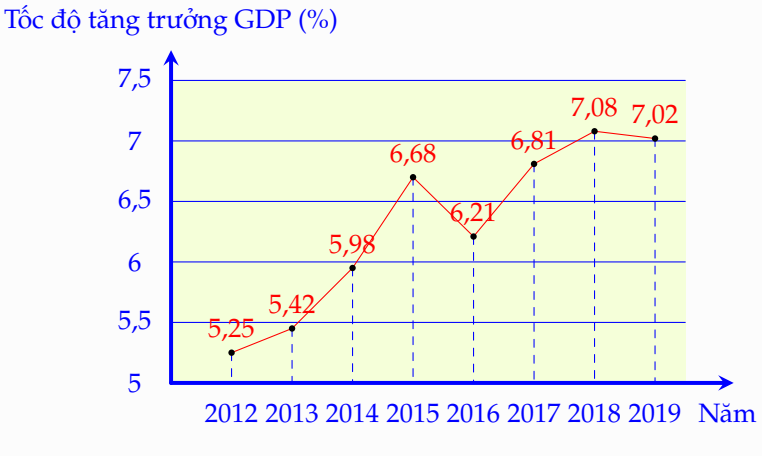
$$\frac{23 \cdot 6 + 25 \cdot 8 + 28 \cdot 10 + 31 \cdot 6 + 33 \cdot 4 + 37 \cdot 3}{37} \approx 28{,}3.$$

Giá trị 28 có tần số 10 lớn nhất. Do đó mẫu số liệu trên có mốt là 28.
Chọn đáp án (A) □

Câu 16

Biểu đồ đoạn thẳng ở hình bên biểu diễn tốc độ tăng trưởng GDP của Việt Nam giai đoạn 2012 – 2019. Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu.

(A) 1,81. (B) 1,82.
(C) 1,83. (D) 1,84.



Lời giải.

- Mẫu số liệu thống kê tốc độ tăng trưởng GDP nhận được

Năm	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Tốc độ tăng trưởng GDP (%)	5, 25	5,42	5,98	6,68	6,21	6,81	7,08	7,02

Sắp xếp lại mẫu số liệu ta được 5,25 5,42 5,98 6,21 6,68 6,81 7,02 7,08

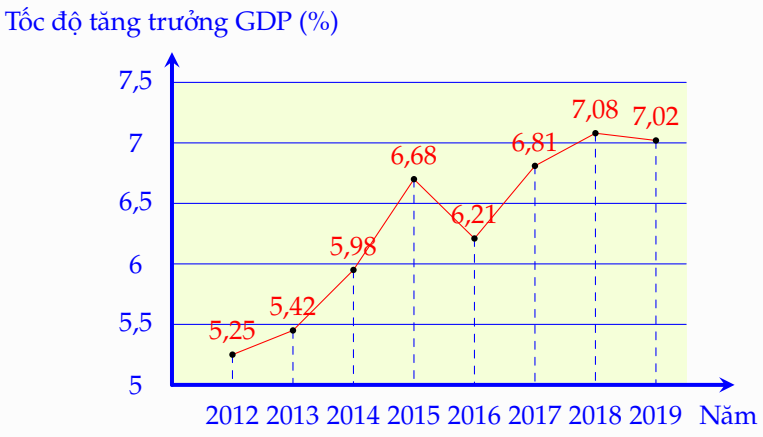
- Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là $R = 7{,}08 - 5{,}25 = 1{,}83$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 17

Biểu đồ đoạn thẳng ở hình bên biểu diễn tốc độ tăng trưởng GDP của Việt Nam giai đoạn 2012 – 2019. Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu.

(A) 1,125. (B) 1,13.
(C) 1,21. (D) 1,25.



Lời giải.

Mẫu số liệu thống kê tốc độ tăng trưởng GDP nhận được

Năm	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Tốc độ tăng trưởng GDP (%)	5,25	5,42	5,98	6,68	6,21	6,81	7,08	7,02

Sắp xếp lại mẫu số liệu ta được 5,25 5,42 5,98 6,21 6,68 6,81 7,02 7,08

Ta có

$$Q_2 = \frac{6{,}21 + 6{,}68}{2} = 6{,}445;\ Q_1 = \frac{5{,}42 + 5{,}98}{2} = 5{,}7;\ Q_3 = \frac{6{,}81 + 7{,}02}{2} = 6{,}915.$$

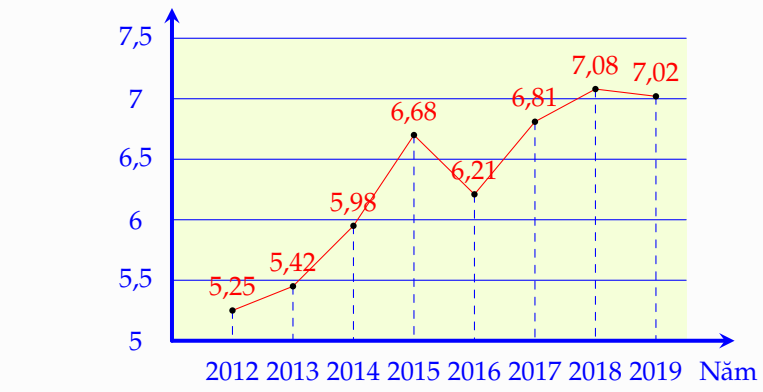
Vậy khoảng tứ phân vị $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 6{,}915 - 5{,}7 = 1{,}215$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 18

Biểu đồ đoạn thẳng ở hình bên biểu diễn tốc độ tăng trưởng GDP của Việt Nam giai đoạn 2012 – 2019. Độ lệch chuẩn (gần đúng) của mẫu số liệu là

(A) 0,66. (B) 0,75.
(C) 0,57. (D) 0,63.



Lời giải.

Mẫu số liệu thống kê tốc độ tăng trưởng GDP nhận được

Năm	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Tốc độ tăng trưởng GDP (%)	5,25	5,42	5,98	6,68	6,21	6,81	7,08	7,02

Sắp xếp lại mẫu số liệu ta được 5,25 5,42 5,98 6,21 6,68 6,81 7,02 7,08

- Số trung bình của mẫu số liệu là

$$\overline{x} = \frac{5{,}25 + 5{,}42 + 5{,}98 + 6{,}21 + 6{,}68 + 6{,}81 + 7{,}02 + 7{,}08}{8} = 6{,}30625.$$

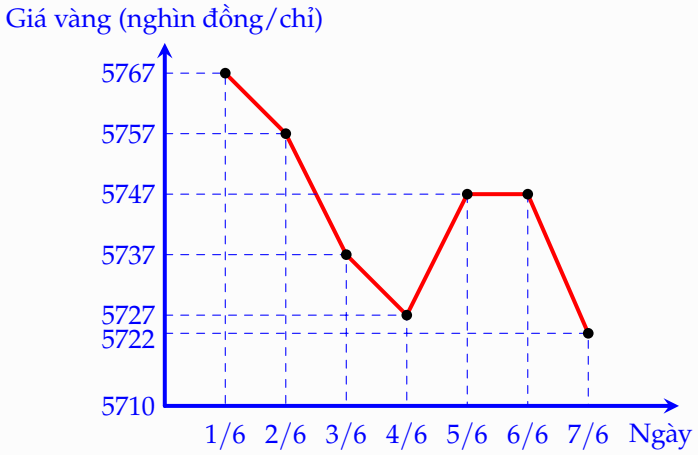
- Phương sai $s^2 \approx 0{,}44$; độ lệch chuẩn $s \approx 0{,}66$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19

Biểu đồ đoạn thẳng ở hình bên biểu diễn giá vàng bán ra trong bảy ngày đầu tiên của tháng 6 năm 2021. Tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu.

(A) 41. (B) 43. (C) 45. (D) 47.



Lời giải.

- Mẫu số liệu thống kê tốc độ tăng trưởng GDP nhận được

Ngày	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6	7/6
Giá vàng (nghìn đồng/chỉ)	5767	5757	5737	5727	5747	5747	5722

Sắp xếp lại mẫu số liệu ta được

5722 5727 5737 5747 5747 5757 5767

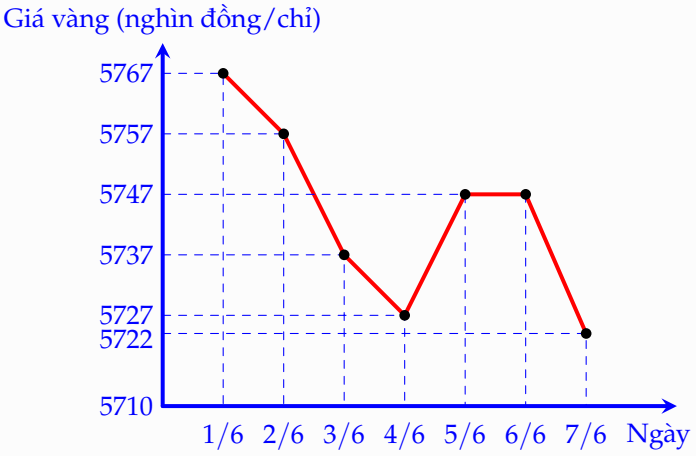
- Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là $R = 5767 - 5722 = 45$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 20

Biểu đồ đoạn thẳng ở hình bên biểu diễn giá vàng bán ra trong bảy ngày đầu tiên của tháng 6 năm 2021. Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu.

(A) 29. (B) 30. (C) 31. (D) 32.



Lời giải.

Mẫu số liệu thống kê tốc độ tăng trưởng GDP nhận được

Ngày	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6	7/6
Giá vàng (nghìn đồng/chỉ)	5767	5757	5737	5727	5747	5747	5722

Sắp xếp lại mẫu số liệu ta được

5722 5727 5737 5747 5747 5757 5767

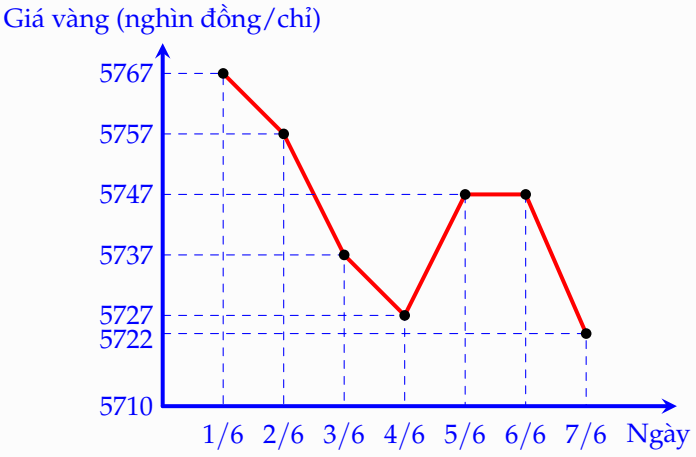
Ta có $Q_2 = 5747$; $Q_1 = 5727$; $Q_3 = 5757$.
Vậy khoảng tứ phân vị $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 5757 - 5727 = 30$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 21

Biểu đồ đoạn thẳng ở hình bên biểu diễn giá vàng bán ra trong bảy ngày đầu tiên của tháng 6 năm 2021. Tính phương sai của mẫu số liệu.

(A) 219,1. (B) 219,4.
(C) 218,1. (D) 219,8.



Lời giải.

Mẫu số liệu thống kê tốc độ tăng trưởng GDP nhận được

Ngày	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6	7/6
Giá vàng (nghìn đồng/chỉ)	5767	5757	5737	5727	5747	5747	5722

Sắp xếp lại mẫu số liệu ta được

5722 5727 5737 5747 5747 5757 5767

- Số trung bình của mẫu số liệu là

$$\overline{x} = \frac{5722 + 5727 + 5737 + 5747 + 5747 + 5757 + 5767}{7} \approx 5743{,}4.$$

- Phương sai $s^2 \approx 219,4$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 22

Để biết cây đậu phát triển như thế nào sau khi gieo hạt, bạn Châu gieo 5 hạt đậu vào 5 chậu riêng biệt và cung cấp cho chúng lượng nước, ánh sáng như nhau. Sau hai tuần, 5 hạt đậu đã nảy mầm và phát triển thành 5 cây con. Bạn Châu đo chiều cao từ rễ đến ngọn của mỗi cây (đơn vị: mi-li-mét) và ghi kết quả là mẫu số liệu sau

112 102 106 94 101

Tính độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên.

(A) 5,93. (B) 35,2. (C) 5,73. (D) 4,93.

Lời giải.

- Giá trị trung bình của mẫu số liệu là

$$\overline{x} = \frac{112 + 102 + 106 + 94 + 101}{5} = 103.$$

- Phương sai $s^2 = 35{,}2$; độ lệch chuẩn $s \approx 5{,}93$.
  Nhận xét: Các cây phát triển khá đồng đều.

Chọn đáp án (A) □

Chương 2
HÀM SỐ, ĐỒ THỊ VÀ ỨNG DỤNG

§1. HÀM SỐ

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Khái niệm hàm số

Định nghĩa 1.1. Nếu với mỗi giá trị của x thuộc tập hợp số $\mathcal{D}$ có một và chỉ một giá trị tương ứng của y thuộc tập số thực $\mathbb{R}$ thì ta có một hàm số.

- Ta gọi x là ***biến số*** và y là ***hàm số*** của x.
- Tập hợp $\mathcal{D}$ được gọi là ***tập xác định*** của hàm số.
- Tập tất cả các giá trị y nhận được, gọi là ***tập giá trị*** của hàm số.

⚠ *Khi y là hàm số của x, ta có thể viết $y = f(x), y = g(x), \ldots$*

Ví dụ 1

Bảng sau cho biết điểm trung bình môn Toán kỳ thi tuyển sinh 10 của trường THPT A trên địa bàn TP. Hồ Chí Minh.

Thời điểm (năm)	2018	2019	2020	2021	2022
Điểm trung bình môn Toán	7,24	8,02	7,65	8,14	8,34

Trong bảng trên, nếu gọi x là năm tuyển sinh, y là điểm trung bình môn Toán của các năm thì x là biến số và y là hàm số của x. Đây là một hàm số được cho bằng bảng. Dựa vào bảng trên hãy xác định tập xác định và tập giá trị của hàm số?

Lời giải.

Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \{2018; 2019; 2020; 2021; 2022\}$.
Tập giá trị của hàm số là $\{7,24; 8,02; 7,65; 8,14; 8,34\}$. □

Ví dụ 2

Viết hàm số mô tả sự phụ thuộc của quãng đường đi được vào thời gian của một vật chuyển động thẳng đều với vận tốc 3 m/s. Tìm tập xác định của hàm số đó. Tính quãng đường vật đi được sau 10 s, 20 s.

Lời giải.

Một vật chuyển động thẳng đều với vận tốc 3 m/s thì quãng đường đi được S (mét) phụ thuộc vào thời gian t (giây) theo công thức $S = 3t$, trong đó t là biến số, $S = S(t)$ là hàm số của t.
Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = [0; +\infty)$.
Quãng đường vật đi được sau 10 s là $S_1 = S(10) = 3 \cdot 10 = 30$ (m).
Quãng đường vật đi được sau 20 s là $S_2 = S(20) = 3 \cdot 20 = 60$ (m). □

⚠ *Khi cho hàm số bằng công thức $y = f(x)$ mà không chỉ rõ tập xác định của nó thì ta quy ước tập xác định của hàm số là tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.*

Ví dụ 3

Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $f(x) = \sqrt{2x+7}$;

b) $f(x) = \dfrac{x+4}{x^2-3x+2}$.

Lời giải.

a) Biểu thức $\sqrt{2x+7}$ có nghĩa khi $2x + 7 \geq 0$, tức là $x \geq -\dfrac{7}{2}$.
Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathcal{D} = \left[-\dfrac{7}{2}; +\infty\right)$.

b) Biểu thức $\dfrac{x+4}{x^2-3x+2}$ có nghĩa khi $x^2 - 3x + 2 \neq 0$, tức là $\begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 2. \end{cases}$
Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.

□

⚠ *Một hàm số có thể được cho bằng bảng, bằng biểu đồ, bằng công thức hoặc bằng mô tả.*

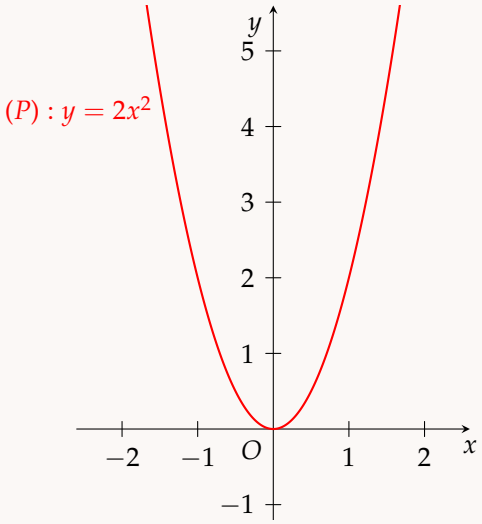
2. Đồ thị của hàm số

Định nghĩa 1.2. ***Đồ thị của hàm số*** $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathcal{D}$ là tập hợp tất cả các điểm $M(x; f(x))$ trên mặt phẳng toạ độ với mọi x thuộc $\mathcal{D}$.

Ví dụ 4

a)

Cho đồ thị của hàm số $y = 2x^2$ như sau, dựa vào đồ thị hàm số, hãy tìm x khi $y = 8$?

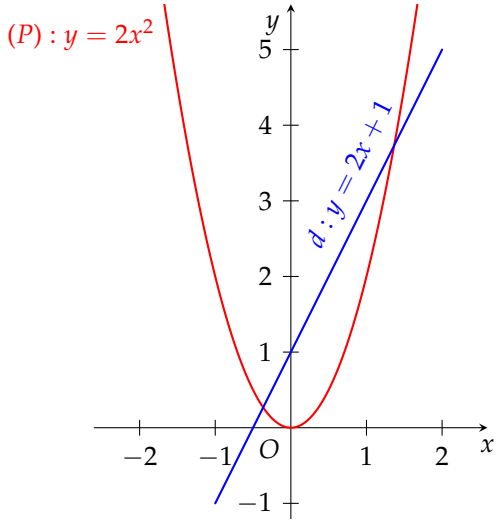


b) Hãy vẽ đồ thị hàm số $y = 2x + 1$ và $y = 2x^2$ trên cùng một mặt phẳng toạ độ.

Lời giải.

a) Khi $y = 8$ ta có $2x^2 = 8$, tức là $x = \pm 2$.
Vậy với $x = \pm 2$ thì $y = 8$.

b) Đồ thị hàm số $y = 2x + 1$ và $y = 2x^2$.



□

3. Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số

Định nghĩa 1.3.

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là ***đồng biến (tăng)*** trên khoảng $(a; b)$, nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a; b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là ***nghịch biến (giảm)*** trên khoảng $(a; b)$, nếu

$$\forall x_1, x_2 \in (a; b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

- *Đồ thị của một hàm số đồng biến trên khoảng $(a;b)$ là đường "đi lên" từ trái sang phải.*
- *Đồ thị của một hàm số đồng biến trên khoảng $(a;b)$ là đường "đi xuống" từ trái sang phải.*

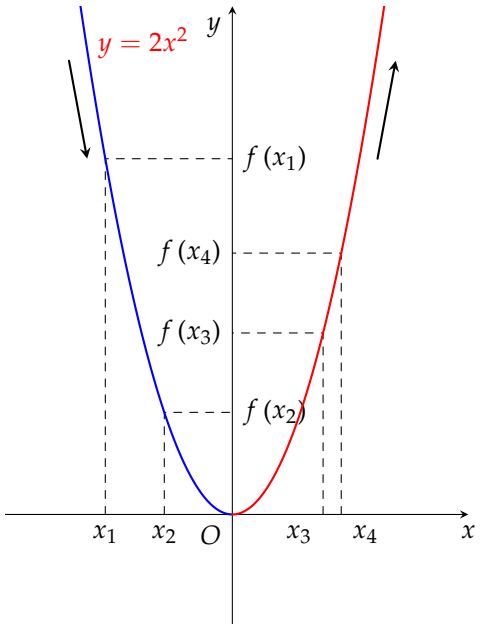
Ví dụ 5

Hãy cho biết hàm số $y=2x^2$ đồng biến hay nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$?

Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)=2x^2$

- Trên khoảng $(-\infty;0)$, đồ thị "đi xuống" từ trái sang phải và với $x_1,x_2\in(-\infty;0), x_1<x_2$ thì $f(x_1)>f(x_2)$. Như vậy, hàm số $y=2x^2$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.
- Trên khoảng $(0;+\infty)$, đồ thị "đi lên" từ trái sang phải và với $x_3,x_3\in(0;+\infty), x_3<x_4$ thì $f(x_3)<f(x_4)$. Như vậy, hàm số $y=2x^2$ đồng biến trên khoảng $(0;\infty)$.



□

B CÁC DẠNG TOÁN VÀ VÍ DỤ

Dạng 1 Tìm tập xác định của hàm số

Để tìm tập xác định của hàm số $y=f(x)$, ta làm như sau

- Tìm điều kiện để $f(x)$ xác định.
- Tập hợp các giá trị x để $f(x)$ xác định là tập xác định của hàm số.

Một số trường hợp thường gặp

- $\sqrt{f(x)}$ xác định $\Leftrightarrow f(x)\geq 0$.
- $\dfrac{1}{f(x)}$ xác định $\Leftrightarrow f(x)\neq 0$.
- $\dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}$ xác định $\Leftrightarrow f(x)>0$.

Ví dụ 1

Tìm tập xác định của hàm số $y=x^3-\dfrac{2x+1}{\sqrt{x-1}}$.

Lời giải.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow x-1>0 \Leftrightarrow x>1$.
Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=(1;+\infty)$. □

Ví dụ 2

Tìm tập xác định của hàm số $y=\sqrt[3]{2x-10}+\sqrt{9-x^2}$.

Lời giải.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow 9-x^2\neq 0 \Leftrightarrow -3\leq x\leq 3$.
Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=[-3;3]$. □

Ví dụ 3

Tìm tập xác định của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2+5x-6}$.

Lời giải.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x+2\geq 0 \\ x^2+5x-6\neq 0 \end{cases} \begin{cases} x\geq -2 \\ x\neq 1 \\ x\neq -6 \end{cases} \Leftrightarrow -2\leq x\neq 1$.
Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=[-2;+\infty)\setminus\{1\}$. □

Ví dụ 4

Tìm tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\dfrac{16-x^2}{x^2-4x+4}}$.

Lời giải.

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \dfrac{16-x^2}{x^2-4x+4}\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 16-x^2\geq 0 \\ (x-2)^2\neq 0 \end{cases} \begin{cases} -4\leq x\leq 4 \\ (x-2)^2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4\leq x\leq 4 \\ x\neq 2 \end{cases}$.
Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=[-4;4]\setminus\{2\}$. □

Ví dụ 5

Tìm tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\dfrac{x^2-2x+3}{4-x^2}}$.

Lời giải.

Vì $x^2-2x+3=(x-1)^2+2>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số xác định khi và chỉ khi

$$\frac{x^2-2x+3}{4-x^2}\geq 0 \Leftrightarrow 4-x^2>0 \Leftrightarrow -2<x<2.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=(-2;2)$. □

Dạng 2 Tính giá trị của hàm số tại một điểm

- Để tính giá trị của hàm số $f(x)$ tại $x = x_0$ ta thay thế x bởi x_0 vào công thức $f(x)$ để tính $f(x_0)$.
- Đối với các hàm số được cho bởi hai hay nhiều công thức với các miền xác định đã cho, chẳng hạn:
$$y = f(x) = \begin{cases} f_1(x) \text{ với } x \in \mathscr{D}_1 \\ f_2(x) \text{ với } x \in \mathscr{D}_2 \end{cases}$$
- Khi tính giá trị hàm số $f(x)$ tại $x = x_0$, tùy theo x_0 thuộc $\mathscr{D}_1$ hay $\mathscr{D}_2$ mà ta sử dụng công thức $f(x) = f_1(x)$ hay $f(x) = f_2(x)$ để tính $f(x_0)$.

Ví dụ 1

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x - 2 & \text{với } x \geq 1 \\ 1 - 2x^2 & \text{với } x < 1. \end{cases}$
Tính $f(1), f(2), f(0), f(-3)$.

Lời giải.

Ta có $f(1) = 1, f(2) = 4, f(0) = 1, f(-3) = -17$. □

Ví dụ 2

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5 - x} & \text{với } x < 3 \\ \sqrt{x + 5} & \text{với } x \geq 3. \end{cases}$
Tính $f(-4), f(1), f(4)$.

Lời giải.

Ta có $f(-4) = 3, f(1) = 2, f(4) = 3$. □

Ví dụ 3

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & \text{với } x < -1 \\ 3 & \text{với } -1 \leq x < 1 \\ \sqrt{x^2 - 1} & \text{với } x \geq 1. \end{cases}$
Tính $f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)$.

Lời giải.

Ta có $f(-2) = 7, f(-1) = 3, f(0) = 3, f(1) = 0, f(2) = \sqrt{3}$. □

Ví dụ 4

Cho hàm số $f(x) = -x^2 + 2x + 3$. Tính $f(a), f(a + 2)$ (với a là một số thực).

Lời giải.

Ta có $f(a) = -a^2 + 2a + 3$, $f(a+2) = -a^2 - 2a + 3$. □

Ví dụ 5

Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2$. Tìm giá trị của số thực a sao cho $f(a-1) = 2$.

Lời giải.

Ta có

$$f(a-1) = 2 \Leftrightarrow a^2 - 2a - 1 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = 3. \end{array}\right.$$

□

Dạng 3 Dùng định nghĩa xét tính đơn điệu của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K (K là một khoảng hoặc một đoạn hoặc một nửa khoảng).

- Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} &\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \\ \Leftrightarrow &\forall x_1, x_2 \in K : x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0. \end{aligned}$$

- Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} &\forall x_1, x_2 \in K : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \\ \Leftrightarrow &\forall x_1, x_2 \in K : x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0. \end{aligned}$$

Ví dụ 1

Dùng định nghĩa xét tính đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = x^2 + 10x + 9$ trên $(-5; +\infty)$.

Lời giải.

Gọi x_1, x_2 là hai giá trị phân biệt tùy ý thuộc $(-5; +\infty)$, ta có

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1^2 + 10x_1 + 9) - (x_2^2 + 10x_2 + 9)}{x_1 - x_2} = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 10)}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2 + 10.$$

Do $x_1 > -5, x_2 > -5$ nên $x_1 + x_2 > -10 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + 10 > 0$. Suy ra $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-5; +\infty)$. □

Ví dụ 2

Dùng định nghĩa xét tính đơn điệu của hàm số $y = \dfrac{4}{x+1}$ trên $(-1; +\infty)$.

Lời giải.

Gọi x_1, x_2 là hai giá trị phân biệt tùy ý thuộc $(-1;+\infty)$, ta có

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\dfrac{4}{x_1+1}-\dfrac{4}{x_2+1}}{x_1-x_2}=\frac{\dfrac{4(x_2-x_1)}{(x_1+1)(x_2+1)}}{x_1-x_2}=\frac{-4}{(x_1+1)(x_2+1)}.$$

Do $x_1>-1, x_2>-1$ nên $(x_1+1)(x_2+1)>0$, từ đó suy ra $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$.

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên $(-1;+\infty)$. □

Ví dụ 3

Dùng định nghĩa xét sự biến thiên của hàm số $y=\sqrt{x-1}$ trên tập xác định.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=[1;+\infty)$.
Gọi x_1, x_2 là hai giá trị phân biệt tùy ý thuộc $[1;+\infty)$, ta có

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\sqrt{x_1-1}-\sqrt{x_2-1}}{x_1-x_2}=\frac{1}{\sqrt{x_1-1}+\sqrt{x_2-1}}>0.$$

Vậy hàm số đã cho luôn đồng biến trên tập xác định.
Bảng biến thiên

x	1		$+\infty$
y	0	↗	$+\infty$

□

Ví dụ 4

Dùng định nghĩa xét tính đơn điệu của hàm số $y=\dfrac{1+x}{1-x}$ trên $(-\infty;1)$.

Lời giải.

Gọi x_1, x_2 là hai giá trị phân biệt tùy ý thuộc $(-\infty;1)$, ta có

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\dfrac{1+x_1}{1-x_1}-\dfrac{1+x_2}{1-x_2}}{x_1-x_2}=\frac{2}{(1-x_1)(1-x_2)}.$$

Do $x_1<1, x_2<1$ nên $(1-x_1)(1-x_2)>0$, từ đó suy ra $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$.

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty;1)$.

□

Ví dụ 5

Dùng định nghĩa xét sự biến thiên của hàm số $y = |x-3|$ trên tập xác định.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$, ta có

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{|x_1-3|-|x_2-3|}{x_1-x_2}.$$

- Với $x_1, x_2 \in (-\infty;3)$ thì $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \dfrac{(3-x_1)-(3-x_2)}{x_1-x_2} = -1 < 0$.
  Từ đó suy ra hàm số nghịch biến trên $(-\infty;3)$.
- Với $x_1, x_2 \in (3;+\infty)$ thì $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \dfrac{(x_1-3)-(x_2-3)}{x_1-x_2} = 1 > 0$.
  Từ đó suy ra hàm số đồng biến trên $(3;+\infty)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		3		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

□

Ví dụ 6

Dùng định nghĩa xét sự đồng biến nghịch biến của hàm số $y = \left|\sqrt{2-x}+1\right|$ trên tập xác định.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = (-\infty;2]$.
Gọi x_1, x_2 là hai giá trị tùy ý thuộc $(-\infty;2]$, ta có

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{\left|\sqrt{2-x_1}+1\right|-\left|\sqrt{2-x_2}+1\right|}{x_1-x_2} = \frac{-1}{\sqrt{2-x_1}+\sqrt{2-x_2}} < 0.$$

Vậy hàm số đã cho luôn nghịch biến trên tập xác định. □

Ví dụ 7

Dùng định nghĩa xét tính đơn điệu của hàm số $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ trên mỗi khoảng $(0;1)$ và $(1;+\infty)$.

Lời giải.

Với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$, ta có

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\dfrac{x_1}{x_1^2+1}-\dfrac{x_2}{x_2^2+1}}{x_1-x_2}=1-x_1x_2.$$

- Trường hợp $x_1, x_2 \in (0;1)$ suy ra $0<x_1,x_2<1 \Rightarrow 1-x_1x_2>0$, từ đó ta có

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0.$$

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

- Trường hợp $x_1, x_2 \in (1;+\infty)$ suy ra $x_1,x_2>1 \Rightarrow 1-x_1x_2<0$, từ đó ta có

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0.$$

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

□

Ví dụ 8

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{m}{x-2}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$.

- Với mọi $x_1, x_2 \in (-\infty;2)$, ta có

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\dfrac{m}{x_1-2}-\dfrac{m}{x_2-2}}{x_1-x_2}=\frac{-m}{(x_1-2)(x_2-2)}.$$

Do $x_1<2, x_2<2$ nên $(x_1-2)(x_2-2)>0$, từ đó suy ra để hàm số nghịch biến trên $(-\infty;2)$ thì $m>0$.

- Với mọi $x_1, x_2 \in (2;+\infty)$, ta có, ta có

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\frac{\dfrac{m}{x_1-2}-\dfrac{m}{x_2-2}}{x_1-x_2}=\frac{-m}{(x_1-2)(x_2-2)}.$$

Do $x_1>2, x_2>2$ nên $(x_1-2)(x_2-2)>0$, từ đó suy ra để hàm số nghịch biến trên $(2;+\infty)$ thì $m>0$.

Tóm lại $m>0$ thì hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng xác định. □

Ví dụ 9

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{m+1}{x}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$.
Với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x_1 \neq x_2$, ta có

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{\dfrac{m+1}{x_1} - \dfrac{m+1}{x_2}}{x_1-x_2} = \frac{-(m+1)}{x_1x_2}.$$

Nhận thấy trên từng khoảng xác định $(-\infty;0)$, $(0;+\infty)$ thì tích $x_1x_2 > 0$ nên hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0 \Leftrightarrow -(m+1) > 0 \Leftrightarrow m < -1.$$

Vậy với $m < -1$ thì hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định. □

Dạng 4 Xét tính chẵn lẻ của hàm số

- Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $\mathscr{D}$ được gọi là hàm số chẵn khi và chỉ khi

$$\forall x \in \mathscr{D} \text{ thì } -x \in \mathscr{D} \text{ và } f(-x) = f(x).$$

- Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $\mathscr{D}$ được gọi là hàm số lẻ khi và chỉ khi

$$\forall x \in \mathscr{D} \text{ thì } -x \in \mathscr{D} \text{ và } f(-x) = -f(x).$$

- Đồ thị hàm số chẵn đối xứng qua trục Oy.
- Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

Ví dụ 1

Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x) = \dfrac{3x^2+5}{x^3}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
Với mọi $x \in \mathscr{D}$ ta có

- $-x \in \mathscr{D}$.
- $f(-x) = \dfrac{3(-x)^2+5}{(-x)^3} = -\dfrac{3x^2+5}{x^3} = -f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ. □

Ví dụ 2

Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{|x-2022|+|x+2022|}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=[-1;1]$.
Với mọi $x\in\mathscr{D}$ ta có

- $-x\in\mathscr{D}$.
- $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{|-x-2022|+|-x+2022|}=-\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{|x+2022|+|x-2022|}=-f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ. □

Ví dụ 3

Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x^4-1}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=[-3;3]\setminus\{-1;1\}$.
Với mọi $x\in\mathscr{D}$ ta có

- $-x\in\mathscr{D}$.
- $f(-x)=\dfrac{\sqrt{9-(-x)^2}}{(-x)^4-1}=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x^4-1}$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn. □

Ví dụ 4

Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{9+x^2}}{x^3-1}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
Vì $x_0=-1\in\mathscr{D}$ nhưng $-x_0=1\notin\mathscr{D}$ nên tập xác định $\mathscr{D}$ không phải là tập đối xứng.
Vậy hàm số đã cho không phải là hàm số chẵn, không phải là hàm số lẻ. □

Ví dụ 5

Xét tính chẵn lẻ của hàm số $f(x)=\dfrac{3x+\sqrt{3+x^2}}{|x|+2}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathbb{R}$.

Vì $f(-1)=-\dfrac{1}{3}\neq \pm f(1)=\dfrac{5}{3}$ nên hàm số đã cho không phải là hàm số chẵn, không phải là hàm số lẻ. □

Dạng 5 Tính đơn điệu của hàm bậc nhất

1) Sự biến thiên của hàm số $y=ax+b$, $a\neq 0$ trên $\mathbb{R}$.

- Khi $a>0$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$+\infty$

- Khi $a<0$ hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	$-\infty$

2) Sự biến thiên của hàm số $y=|x|$ trên $\mathbb{R}$.

- Ta có $y=|x|=\begin{cases} x & \text{nếu } x\geq 0 \\ -x & \text{nếu } x<0. \end{cases}$
- Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$, nghịch biến trên $(-\infty;0)$.
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Ví dụ 1

Xét sự biến thiên của hàm số $y=2x-3$.

Lời giải.

- Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
- Do $a=2>0$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$+\infty$

□

Ví dụ 2

Xét sự biến thiên của hàm số $y = |1 - x|$.

Lời giải.

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- $y = |1 - x| = \begin{cases} x - 1 & \text{nếu } x \geq 1 \\ 1 - x & \text{nếu } x < 1. \end{cases}$
- Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$, nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

□

Ví dụ 3

Xét sự biến thiên của hàm số $y = |x + 2| + |x - 2|$.

Lời giải.

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- Ta có $y = |x + 2| + |x - 2| = \begin{cases} 2x & \text{nếu } x \geq 2 \\ 4 & \text{nếu } -2 \leq x < 2 \\ -2x & \text{nếu } x < -2. \end{cases}$
- Hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$, nghịch biến trên $(-\infty; 2)$, không đổi trên $(-2; 2)$.
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	4	→	4	↗	$+\infty$

□

Ví dụ 4

Xét sự biến thiên của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} - 2|x - 1|$.

Lời giải.

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- Ta có $y = |x - 2| - 2|x - 1| = \begin{cases} x & \text{khi } x < 1 \\ -3x + 4 & \text{khi } 1 \le x < 2 \\ -x & \text{khi } x \ge 2. \end{cases}$
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	1	↘	-2	↘	$-\infty$

□

Ví dụ 5

Cho hàm số $y = (1 - 2m)x + (3m + 2)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên tập xác định.

Lời giải.

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- Hàm số $y = (1 - 2m)x + (3m + 2)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$1 - 2m < 0 \Leftrightarrow 1 < 2m \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}.$$

Vậy với $m > \dfrac{1}{2}$ thì hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. □

Ví dụ 6

Xác định a để hàm số $y = (2a + 3)x + a - 1$ đồng biến trên tập xác định.

Lời giải.

- Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

- Hàm số đồng biến trên tập xác định khi và chỉ khi

$$2a+3>0 \Leftrightarrow 2a>-3 \Leftrightarrow a>-\frac{3}{2}.$$

Vậy với $a>-\frac{3}{2}$ thì hàm số đã cho đồng biến trên tập xác định. □

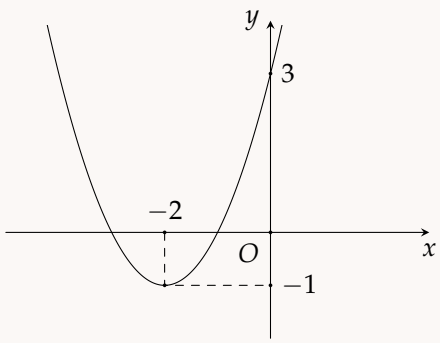
Dạng 6 Dùng đồ thị xét tính đơn điệu của hàm số

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên K (K là một khoảng hoặc một đoạn hoặc một nửa khoảng).

- Hàm số đồng biến trên K khi và chỉ khi đồ thị hàm số "đi lên" trên K.
- Hàm số nghịch biến trên K khi và chỉ khi đồ thị hàm số "đi xuống" trên K.
- Khi nói đồ thị "đi lên" hay "đi xuống", ta luôn kể theo chiều tăng của biến số, nghĩa là kể từ trái qua phải.

Ví dụ 1

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm các khoảng đồng biến, các khoảng nghịch biến của hàm số.

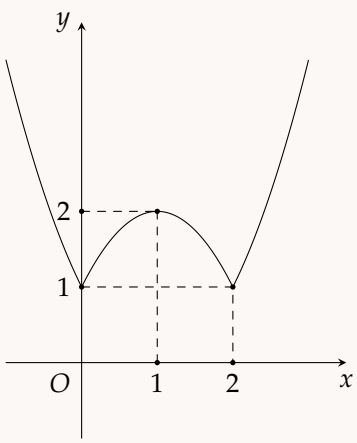


Lời giải.

Từ đồ thị, ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$. □

Ví dụ 2

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm các khoảng đồng biến, các khoảng nghịch biến của hàm số.

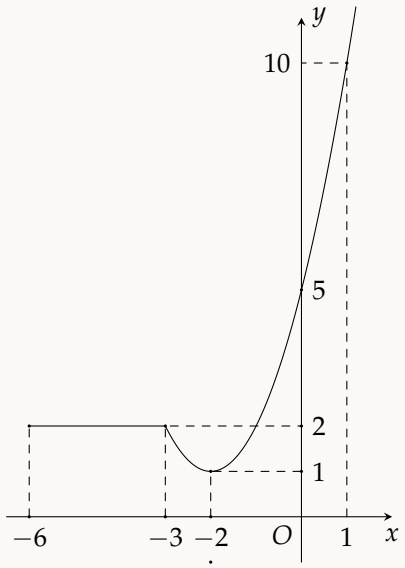


Lời giải.

Từ đồ thị, ta có hàm số đồng biến trên các khoảng $(0;1)$, $(2;+\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$, $(1;2)$. □

Ví dụ 3

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(-6;+\infty)$, có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm các khoảng đồng biến, các khoảng nghịch biến của hàm số.



Lời giải.

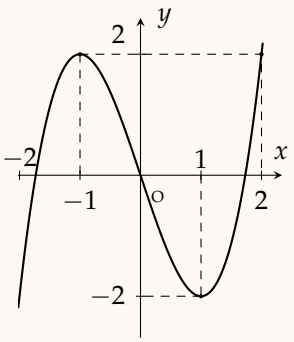
Từ đồ thị, ta có hàm số không đổi trên $(-6;-3)$, nghịch biến trên $(-3;-2)$ và đồng biến trên $(-2;+\infty)$. □

Ví dụ 4

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

a) Tìm các khoảng đồng biến, các khoảng nghịch biến của hàm số.

b) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;2]$.



Lời giải.

a) Từ đồ thị, ta có hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

b) Từ đồ thị ta thấy trên đoạn $[0;2]$ hàm số đã cho có giá trị nhỏ nhất bằng -2 và giá trị nhỏ nhất bằng 2.

□

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1

Xét hai đại lượng x, y phụ thuộc vào nhau theo các hệ thức dưới đây. Những trường hợp nào thì y là hàm số của x?

a) $x+y=1$. b) $y=x^2$. c) $y^2=x$. d) $x^2-y^2=0$.

Lời giải.

Nếu với mỗi giá trị của x thuộc tập hợp số D *có một và chỉ một* giá trị tương ứng của y thuộc tập số thực $\mathbb{R}$ thì ta một hàm số.

a) $x+y=1 \Leftrightarrow y=1-x$. Ta có $y=1-x$ là một hàm số.

b) $y=x^2$ là một hàm số.

c) $y^2=x$ không là một hàm số, vì với $x=x_0>0 \Rightarrow y=\pm\sqrt{x_0}$.

d) $x^2-y^2=0$ không là một hàm số, vì với $x=x_0 \Rightarrow y=\pm\sqrt{x_0}$.

□

Bài 2

Hãy cho một ví dụ về hàm số được cho bằng bảng hoặc biểu đồ. Hãy chỉ ra tập xác định và tập giá trị của hàm số đó.

Lời giải.

Bảng giá gạo ST25 của một đại lí được cho như bảng dưới đây

Ki-lô-gam gạo	Giá gạo (VNĐ/ kg)
Từ 0 đến 10 kg	32 000
Từ trên 10 kg đến 50 km	30 000
Trên 50 km	28 500

Gọi x là số ki-lô-gam gạo ($x>0$). Khi đó, ta có công thức liên hệ giữa số ki-lô-gam gạo và số tiền tương ứng phải trả $f(x)$ như sau

$$f(x)=\begin{cases}32\,000x & (0<x\le 10)\\ 32\,000\cdot 10+(x-10)\cdot 30\,000 & (10<x\le 50)\\ 32\,000\cdot 10+30\,000\cdot 40+(x-50)\cdot 28\,500 & (x>50)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad f(x)=\begin{cases}32\,000x & (0<x\le 10)\\ 30\,000x+20\,000 & (10<x\le 50)\\ 28\,500x+95\,000 & (x>50).\end{cases}$$

Tập xác định của hàm số trên là $\mathscr{D}=(0;+\infty)$.
Tập giá trị của hàm số trên là $(0;+\infty)$.
□

Bài 3

Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y = 2x^3 + 3x + 1$. b) $y = \dfrac{x-1}{x^2-3x+2}$. c) $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}$.

Lời giải.

a) Biểu thức $2x^3 + 3x + 1$ có nghĩa với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

b) Biểu thức $\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}$ có nghĩa khi $x^2 - 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 2. \end{cases}$
Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$.

c) Biểu thức $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{1-x}$ có nghĩa khi

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$$

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathscr{D} = [-1; 1]$.

□

Bài 4

Tìm tập xác định và tập giá trị của mỗi hàm số sau

a) $y = 2x + 3$. b) $y = 2x^2$.

Lời giải.

a) Biểu thức $2x + 3$ có nghĩa với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Tập giá trị của hàm số đã cho là $\mathbb{R}$.

b) Biểu thức $2x^2$ có nghĩa với mọi $x \in \mathbb{R}$.
Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Vì $2x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên tập giá trị của hàm số đã cho là $[0; +\infty)$.

□

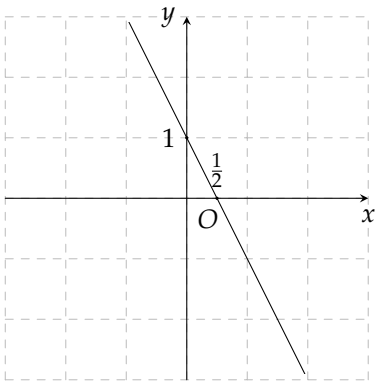
Bài 5

Vẽ đồ thị các hàm số sau và chỉ ra các khoảng đồng biến, nghịch biến của chúng.

a) $y = -2x + 1$ b) $y = -\dfrac{1}{2}x^2$

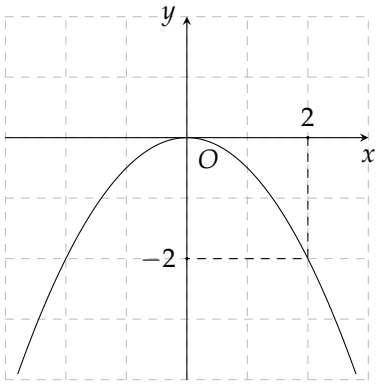
Lời giải.

a) $y = -2x + 1$



Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

b) $y = -\dfrac{1}{2}x^2$



Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty; 0)$.
Hàm số đã cho nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

□

Bài 6

Giá thuê xe ô tô tự lái là 1,2 triệu đồng một ngày cho hai ngày đầu tiên và 900 nghìn đồng cho mỗi ngày tiếp theo. Tổng số tiền T phải trả là một hàm số của số ngày x mà khách thuê xe.

a) Viết công thức của hàm số $T = T(x)$.

b) Tính $T(2)$, $T(3)$, $T(5)$ và cho biết ý nghĩa của mỗi giá trị này.

Lời giải.

a) Công thức của hàm số đã cho là

$$T = T(x) = \begin{cases} 1{,}2x & \text{nếu } 1 \le x \le 2 \\ 0{,}9x & \text{nếu } x > 2. \end{cases}$$

b) Ta có $T(2) = 1{,}2 \cdot 2 = 2{,}4$, $T(3) = 0{,}9 \cdot 3 = 2{,}7$, $T(5) = 0{,}9 \cdot 5 = 4{,}5$.
$T(2)$, $T(3)$, $T(5)$ cho biết số tiền khách phải trả nếu thuê xe lần lượt trong 2 ngày, 3 ngày, 5 ngày.

□

Bài 7

Xét hai đại lượng x, y phụ thuộc vào nhau theo các hệ thức dưới đây. Những trường hợp nào thì y là hàm số của x?

a) $y = \sqrt{(2x+1)(x-3)}$.

b) $\dfrac{x^2-3}{2x+4} - y = 1$.

c) $y^2 = 3x - 7$.

d) $x^2 = (y-1)^2$.

Lời giải.

Nếu với mỗi giá trị của x thuộc tập hợp số D *có một và chỉ một* giá trị tương ứng của y thuộc tập số thực $\mathbb{R}$ thì ta có một hàm số.

a) $y = \sqrt{(2x+1)(x-3)}$ là một hàm số.

b) $\dfrac{x^2-3}{2x+4}-y=1 \Leftrightarrow y=\dfrac{x^2-3}{2x+4}-1$ là một hàm số.

c) $y^2=3x-7$ không là một hàm số, vì với $x=x_0>\dfrac{7}{3} \Rightarrow y=\pm\sqrt{3x_0-7}$.

d) $x^2=(y-1)^2$ không là một hàm số, vì với $x=x_0 \Rightarrow \hoac{y=x_0+1\\y=-x_0+1.}$

□

Bài 8

Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y=\dfrac{\sqrt{5-3|x|}}{x^2+4x+3}$.

b) $y=\dfrac{x}{x-\sqrt{x}-6}$.

Lời giải.

a) Hàm số $y=\dfrac{\sqrt{5-3|x|}}{x^2+4x+3}$ xác định khi và chỉ khi

$$\heva{5-3|x|\geq 0\\x^2+4x+3\neq 0} \Leftrightarrow \heva{-\dfrac{5}{3}\leq x\leq \dfrac{5}{3}\\x\neq -1\\x\neq -3} \Leftrightarrow x\in\left[-\dfrac{5}{3};\dfrac{5}{3}\right]\setminus\{-1\}.$$

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathscr{D}=\left[-\dfrac{5}{3};\dfrac{5}{3}\right]\setminus\{-1\}$.

b) Hàm số $y=\dfrac{x}{x-\sqrt{x}-6}$ xác định khi và chỉ khi

$$\heva{x\geq 0\\x-\sqrt{x}-6\neq 0} \Leftrightarrow \heva{x\geq 0\\\sqrt{x}\neq 3} \Leftrightarrow x\in[0;+\infty)\setminus\{9\}.$$

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathscr{D}=[0;+\infty)\setminus\{9\}$.

□

Bài 9

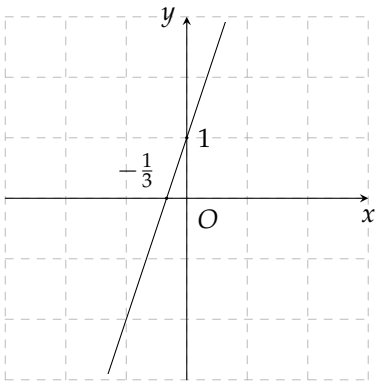
Vẽ đồ thị các hàm số sau và chỉ ra các khoảng đồng biến, nghịch biến của chúng.

a) $y=3x+1$.

b) $y=x^2-2x+3$.

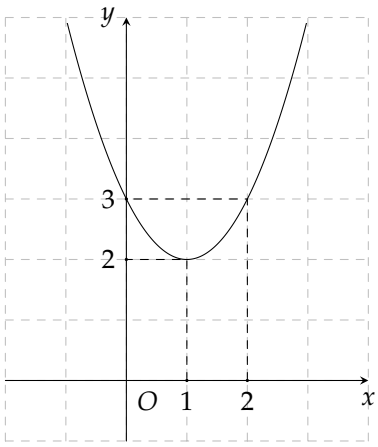
Lời giải.

a) $y=3x+1$



Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) $y = x^2 - 2x + 3$



Hàm số đã cho nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.
Hàm số đã cho đồng biến trên $(1; +\infty)$.

□

Bài 10

Bảng giá nước đối tượng sinh hoạt ở thành phố H năm 2021 được cho như bảng dưới đây

Mức sử dụng (m^3/tháng/1 người)	Giá chưa thuế GTGT (VNĐ/ m^3)	Phí BVMT	Thuế GTGT
Từ 0 đến 4 m^3	5 300	530	265
Từ trên 4 m^3 đến 6 m^3	10 200	1 020	510
Trên 6 m^3	11 400	1 140	570

Hãy tính số tiền phải trả ứng với mỗi mức sử dụng nước ở bảng dưới đây.

Mức sử dụng (m^3)	3	5,5	7
Số tiền (nghìn đồng)			

Lời giải.

Tổng số tiền T phải trả là một hàm số của x m^3 nước.
Ta có $T(3) = 3 \cdot (5\,300 + 530 + 265) = 18\,285$,
$T(5{,}5) = 4 \cdot (5\,300 + 530 + 265) + 1{,}5 \cdot (10\,200 + 1\,020 + 510) = 41\,975$,
$T(7) = 4 \cdot (5\,300 + 530 + 265) + 2 \cdot (10\,200 + 1\,020 + 510) + (11\,400 + 1\,140 + 570) = 60\,950$.
Do đó ta được bảng dưới đây.

Mức sử dụng (m^3)	3	5,5	7
Số tiền (nghìn đồng)	18 285	41 975	60 950

□

Bài 11

Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau

a) $y=-x^2$.

b) $y=\sqrt{2-x}$.

c) $y=\dfrac{4}{x-1}$.

d) $y=\begin{cases}1 \text{ nếu } x\in\mathbb{Q}\\ 0 \text{ nếu } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$

Lời giải.

a) $y=-x^2$ xác định với mọi x.
Suy ra tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

b) $y=\sqrt{2-x}$.
Điều kiện là $2-x\geq 0\Leftrightarrow x\leq 2$.
Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=(-\infty;2]$.

c) $y=\dfrac{4}{x-1}$.
Điều kiện $x-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1$.
Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

d) $y=\begin{cases}1 \text{ nếu } x\in\mathbb{Q}\\ 0 \text{ nếu } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$
Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

□

Bài 12

Bảng 1 dưới đây cho biết chỉ số $PM_{2,5}$ (bụi mịn) ở Thành phố Hà Nội từ tháng 1 đến tháng 12 của năm 2019.

	TB2019	**Tháng**											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$PM_{2,5}$ $\mu g/m^3$	46,9	59,3	36,0	50,2	40,3	45,8	36,5	30,4	33,1	48,3	43,2	66,3	72,7

(Nguồn: Báo cáo chất lượng không khí thế giới 2019)

Bảng 1

a) Nêu chỉ số $PM_{2,5}$ trong tháng 2; tháng 5; tháng 10.

b) Chỉ số $PM_{2,5}$ có phải là hàm số của tháng không? Tại sao?

Lời giải.

a) chỉ số $PM_{2,5}$ trong tháng 2 là 36,0; tháng 5 là 45,6; tháng 10 là 43,2.

b) Vì mỗi tháng có một và chỉ một chỉ số $PM_{2,5}$ tương ứng nên chỉ số $PM_{2,5}$ là một hàm số của tháng.

□

Bài 13

Theo quyết định số 2019/QĐ-BĐVN ngày 01/01/2018 của Tổng công ty Bưu điện Việt Nam, giá cước dịch vụ Bưu chính phổ cập đối với dịch vụ thư cơ bản và bưu thiếp trong nước có khối lượng đến 250 g như trong bảng sau

Khối lượng đến 250 g	**Mã cước (đồng)**
Đến 20 g	4 000
Trên 20 g **đến** 100 g	6 000
Trên 100 g **đến** 250 g	8 000

a) Số tiền dịch vụ thư cơ bản phải trả y (đồng) có là hàm số của khối lượng thư cơ bản x (g) hay không? Nếu đúng hãy xác định những công thức tính y.

b) Tính số tiền phải trả khi bạn Dương gửi thư có khối lượng 150 g, 200 g.

Lời giải.

a) Ta có y là một hàm số theo x.

$$y=\begin{cases}4\,000x & (x\le 20)\\ 4\,000\cdot 20+(x-20)\cdot 6\,000 & (20<x\le 100)\\ 4\,000\cdot 20+6\,000\cdot 80+(x-100)\cdot 8\,000 & (100<x\le 250)\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y=\begin{cases}4\,000x & (x\le 20)\\ 6\,000x-40\,000 & (20<x\le 100)\\ 8\,000x-240\,000 & (100<x\le 250).\end{cases}$$

b) Bạn Dương gửi thư có khối lượng

- 150 g số tiền phải trả là $y=8\,000\cdot 150-240\,000=960\,000$ đồng.
- 200 g số tiền phải trả là $y=8\,000\cdot 200-240\,000=1\,360\,000$ đồng.

□

Bài 14

Cho hàm số $y=-2x^2$.

a) Điểm nào trong các điểm có tọa độ $(-1;2)$, $(0;0)$, $(0;1)$, $(2\,021;1)$ thuộc đồ thị hàm số trên?

b) Tìm những điểm thuộc đồ thị hàm số có hoành độ lần lượt bằng 2; 3 và 10.

c) Tìm những điểm thuộc đồ thị hàm số có tung độ bằng -18.

Lời giải.

a) $x=-1\Rightarrow y=-2(-1)^2=-2$. Suy ra $(-1;2)$ không thuộc đồ thị hàm số.
$x=0\Rightarrow y=-2\cdot 0^2=0$. Suy ra $(0;0)$ thuộc đồ thị hàm số; $(0;1)$ không thuộc đồ thị hàm số.
$x=2\,021\Rightarrow y=-2\cdot 2\,021^2\neq 1$. Suy ra $(2\,021;1)$ không thuộc đồ thị hàm số.

b) $x=2\Rightarrow y=-2\cdot 2^2=-8$.
$x=3\Rightarrow y=-2\cdot 3^2=-18$.
$x=10\Rightarrow y=-2\cdot 10^2=-200$.
Vậy các điểm thuộc đồ thị hàm số là $(2;-8)$, $(3;-18)$, $(10;-200)$.

c) $y=-18\Rightarrow -2x^2=-18\Rightarrow x^2=9\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\ x=-3.\end{array}\right.$
Vậy các điểm thuộc đồ thị hàm số là $(3;-18)$, $(-3;-18)$.

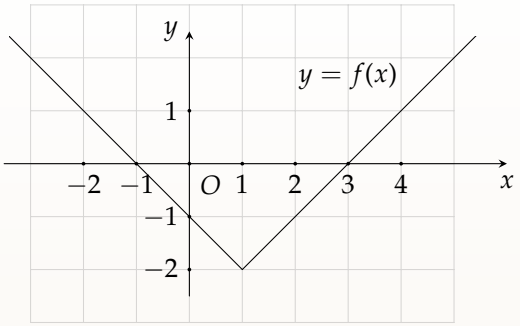
Bài 15

Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như Hình 8.

a) Trong các điểm có tọa độ $(1;-2)$; $(0;0)$; $(2;-1)$, điểm nào thuộc đồ thị hàm số? Điểm nào không thuộc đồ thị hàm số?

b) Xác định $f(0)$; $f(3)$.

c) Tìm điểm thuộc đồ thị có tung độ bằng 0.



Hình 8

Lời giải.

a) Các điểm thuộc đồ thị hàm số là $(1;-2)$, $(2;-1)$.
Điểm không thuộc đồ thị hàm số là $(0;0)$.

b) Ta có $f(0) = -1$, $f(3) = 0$.

c) Điểm thuộc đồ thị có tung độ bằng 0 là $(-1;0)$, $(3;0)$.

Bài 16

Cho hàm số $y = \dfrac{1}{x}$. Chứng tỏ hàm số đã cho

a) Nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

b) Nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

Lời giải.

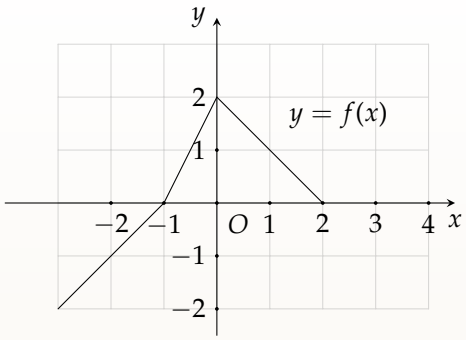
a) Nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.
Xét hai số bất kỳ $x_1, x_2 \in (0;+\infty)$ sao cho $x_1 < x_2$.
Ta có $0 < x_1 < x_2$ nên $\dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
Vậy hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

b) Nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.
Xét hai số bất kỳ $x_1, x_2 \in (-\infty;0)$ sao cho $x_1 < x_2$.
Ta có $x_1 < x_2 < 0$ nên $\dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
Vậy hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$.

Bài 17

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như Hình 9.

Chỉ ra khoảng đồng biến và khoảng nghịch biến của hàm số $y = f(x)$.



Hình 8

Lời giải.

- Hàm số đồng biến trên $(-3:0)$ vì đồ thị hàm số "đi lên" trên $(-3;0)$.
- Hàm số nghịch biến trên $(0;2)$ vì đồ thị hàm số "đi xuống" trên $(0;2)$.

□

Bài 18

Một lớp muốn thuê một chiếc xe khách cho chuyến tham quan với tổng đoạn đường cần di chuyển trong khoảng từ 550 km đến 600 km, có hai công ty được tiếp cận để tham khảo giá.
Công ty A có giá khởi đầu là 3,75 triệu đồng cộng thêm 5 000 đồng cho mỗi ki-lô-mét chạy xe.
Công ty B có giá khởi đầu là 2,5 triệu đồng cộng thêm 7 500 đồng cho mỗi ki-lô-mét chạy xe.
Lớp đó nên chọn công ty nào để chi phí là thấp nhất?

Lời giải.

Gọi x là số km lớp đó đi $(x > 0)$.
Số tiền phải trả cho công ty A là $3{,}75 + 5\,000x$ (triệu đồng).
Số tiền phải trả cho công ty B là $2{,}5 + 7\,500x$ (triệu đồng).
Ta có $x = 600 - 550 = 50$ km.
Suy ra số tiền phải trả cho công ty A là $3{,}75 + 5\,000 \cdot 50 = 4$ (triệu đồng).
Số tiền phải trả cho công ty B là $2{,}5 + 7\,500 \cdot 50 = 2{,}875$ (triệu đồng).
Vậy chọn công ty B có chi phí thấp hơn. □

Bài 19

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.
Tính

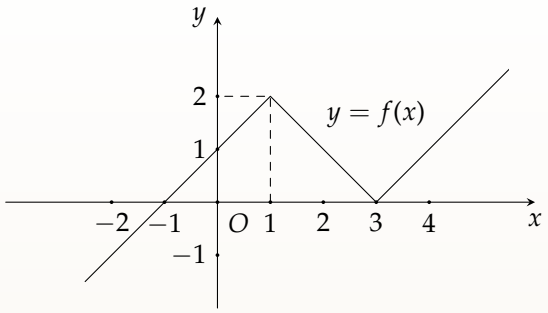
a) $f(-1)$.

b) $f(3)$.

c) $f(1)$.

d) $f(0)$.

e) Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số trên tập xác định.



Lời giải.

Ta có

- $f(-1)=0$.
- $f(3)=0$.
- $f(1)=2$.
- $f(0)=1$.
- Hàm số đồng biến trên $(-\infty;1)$ và trên $(3;+\infty)$ vì đồ thị hàm số "đi lên" từ trái sang phải trên các khoảng trên.
  Hàm số nghịch biến trên $(1;3)$ vì đồ thị hàm số "đi xuống" từ trái sang phải trên $(1;3)$.

□

Bài 20

Một lớp học thuê một hướng dẫn viên cho chuyến tham quan, có hai công ty được liên hệ để tham khảo giá.

- Công ty A có phí dịch vụ ban đầu là 400 nghìn đồng cộng thêm 3 000 đồng cho mỗi ki-lô-mét hướng dẫn.
- Công ty B có phí dịch vụ ban đầu là 300 nghìn đồng cộng thêm 3 nghìn 500 đồng cho mỗi ki-lô-mét hướng dẫn.

a) Lớp học nên chọn công ty nào để thuê hướng dẫn viên nếu biết rằng chuyến đi sẽ đến một địa điểm nào đó với tổng khoảng cách đi lại là 250 km.

b) Nếu đi khoảng cách là bao nhiêu thì chọn công ty A có lợi hơn.

Lời giải.

Gọi x là số km lớp đó đi ($x>0$).
Số tiền phải trả cho công ty A là $400+3x$ (nghìn đồng).
Số tiền phải trả cho công ty B là $300+3{,}5x$ (nghìn đồng).

a) Nếu $x=250$ km thì số tiền phải trả cho công ty A là $400+3\cdot 250=1\,150$ (nghìn đồng), số tiền phải trả cho công ty B là $300+3{,}5\cdot 50=1\,175$ (nghìn đồng).
Vậy chọn công ty A có lợi hơn.

b) Chọn công ty A có lợi hơn tức số tiền phải trả cho công ty A ít hơn số tiền phải trả cho công ty B. Ta có bất phương trình $400+3x<300+3{,}5x\Leftrightarrow x>200$.
Vậy chọn công ty A lợi hơn nếu tổng khoảng cách đi lại lớn hơn 200 km.

□

Bài 21

Một lớp học muốn thuê một hướng dẫn viên cho chuyến tham quan, có hai công ty được liên hệ để lấy các thông tinh về giá.

- Công ty A có phí dịch vụ ban đầu là 375 USD cộng thêm 0,5 USD cho mỗi ki-lô-mét hướng dẫn.
- Công ty B có phí dịch vụ ban đầu là 250 USD cộng thêm 0,75 USD cho mỗi ki-lô-mét hướng dẫn.

a) Lớp học nên chọn công ty nào để thuê hướng dẫn viên nếu biết rằng chuyến đi sẽ đến một địa điểm nào đó với tổng khoảng cách đi lại là 400 km, 600 km?

b) Vậy nếu đi với khoảng cách là bao nhiêu thì chọn công ty A có lợi hơn.

Lời giải.

Gọi x là số km lớp đó đi ($x > 0$).
Số tiền phải trả cho công ty A là $375 + 0{,}5x$ (USD).
Số tiền phải trả cho công ty B là $250 + 0{,}75x$ (USD).

a) Nếu $x = 400$ km thì số tiền phải trả cho công ty A là $375 + 0{,}5 \cdot 400 = 575$ (USD), số tiền phải trả cho công ty B là $250 + 0{,}75 \cdot 400 = 550$ (USD).
Vậy chọn công ty B có lợi hơn.

Nếu $x = 600$ km thì số tiền phải trả cho công ty A là $375 + 0{,}5 \cdot 600 = 675$ (USD), số tiền phải trả cho công ty B là $250 + 0{,}75 \cdot 600 = 700$ (USD).
Vậy chọn công ty A có lợi hơn.

b) Chọn công ty A có lợi hơn tức số tiền phải trả cho công ty A ít hơn số tiền phải trả cho công ty B. Ta có bất phương trình $375 + 0{,}5x < 250 + 0{,}75x \Leftrightarrow x < 500$.
Vậy chọn công ty A lợi hơn nếu tổng khoảng cách đi lại lớn hơn 500 km.

□

Bài 22

Tìm tập xác định của hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x + 4}}{|x| + 1}$.

Lời giải.

Ta thấy $x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 3 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $|x| + 1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
Vậy tập xác định của hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 2x + 4}}{|x| + 1}$ là $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. □

Bài 23

Trên đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x - 1}{x - 1}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ là các số nguyên?

Lời giải.

Ta có $y = \dfrac{2x-1}{x-1} = 2 + \dfrac{1}{x-1}$.
Để y nguyên thì $x - 1$ phải là ước của $1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 1 \\ x - 1 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 0. \end{array}\right.$
Vậy có 2 điểm có tọa độ là các số nguyên. □

Bài 24

Tìm tập giá trị của hàm số $y = \sqrt{6 - x} + \sqrt{x + 3}$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = [-3; 6]$.

$$y^2 = 9 + 2\sqrt{(6-x)(x+3)} \Rightarrow y^2 \geqslant 9 \Rightarrow y \geqslant 3 (\text{ do } y \geq 0, \forall x \in \mathscr{D}). \qquad (1)$$

Theo bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm $(6 - x)$; $(x + 3)$ ta được

$$2\sqrt{(6-x)(x+3)} \leqslant (6-x) + (x+3) = 9 \Leftrightarrow y^2 \leqslant 18 \Leftrightarrow -3\sqrt{2} \leq y \leqslant 3\sqrt{2}. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $3 \leqslant y \leqslant 3\sqrt{2}$. □

Bài 25

Tìm m để hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x-2m+3}}{x-m}+\dfrac{3x-1}{\sqrt{-x+m+5}}$ xác định trên khoảng $(0;1)$.

Lời giải.

Biểu thức $\dfrac{\sqrt{x-2m+3}}{x-m}+\dfrac{3x-1}{\sqrt{-x+m+5}}$ có nghĩa khi và chỉ khi $\begin{cases}x-2m+3\geq 0\\ x-m\neq 0\\ -x+m+5>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 2m-3\\ x\neq m\\ x<m+5.\end{cases}$

Suy ra tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=[2m-3;m)\cup(m;m+5)$, $\forall m<3$ (do $2m-3<m$).

Hàm số xác định trên khoảng $(0;1)\Leftrightarrow(0;1)\subset[2m-3;m)\cup(m;m+5)$. Do đó

$$\begin{bmatrix}(0;1)\subset[2m-3;m)\\ (0;1)\subset(m;m+5)\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1\leq m\leq\dfrac{3}{2}\\ -4\leq m\leq 0.\end{bmatrix}$$

Vậy $m\in[-4;0]\cup\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$. □

Bài 26

Tìm m để hàm số $y=\dfrac{x\sqrt{2}+1}{x^2+2x-m+1}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow x^2+2x-m+1\neq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Nghĩa là $(x+1)^2\neq m,\forall x\in\mathbb{R}$.

Mà $(x+1)^2\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên ta suy ra $m<0$. □

Bài 27

Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2m}$, với m là tham số. Tìm m để hàm số xác định trên $[0;1)$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định khi $x-2m\neq 0\Leftrightarrow x\neq 2m$.

Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{2m\}$.

Do đó hàm số xác định trên $[0;1)$ khi và chỉ khi $[0;1)\subset D\Leftrightarrow\begin{bmatrix}1\leq 2m\\ 2m<0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}m\geq\dfrac{1}{2}.\\ m<0.\end{bmatrix}$ □

Bài 28

Tìm các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{mx}{x-1}$ đồng biến trên $(1;+\infty)$.

Lời giải.

Với $1<x_1<x_2$, ta có: $y_1-y_2=\dfrac{m(x_2-x_1)}{(x_1-1)(x_2-1)}$. Mà $y_1-y_2<0\Rightarrow m<0$. □

Bài 29

Tìm giá trị thực của tham số a để hàm số $y=\dfrac{ax}{x-2}$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y = \dfrac{ax}{x-2} = a + \dfrac{2a}{x-2}$.
Với mọi $x_1, x_2 \in (2;+\infty)$, $x_1 \neq x_2$, ta có

$$K = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\dfrac{2a}{x_1-2} - \dfrac{2a}{x_2-2}}{x_1 - x_2} = -\frac{2a}{(x_1-2)(x_2-2)}.$$

Để hàm số $y = \dfrac{ax}{x-2}$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ thì $K > 0, \forall x \in (2;+\infty)$. Mặt khác, $(x_1-2)(x_2-2) > 0$, với mọi $x_1, x_2 \in (2;+\infty)$, $x_1 \neq x_2$. Do đó

$$K > 0, \forall x \in (2;+\infty) \Leftrightarrow -2a > 0 \Leftrightarrow a < 0.$$

Vậy $a < 0$ thỏa yêu cầu bài toán. □

Bài 30

Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $f(x) = \dfrac{4}{x-2}$.

Lời giải.

Xét $x_1, x_2 \neq 2$ và $x_1 \neq x_2$.
Ta có $f(x_2) - f(x_1) = \dfrac{4}{x_2-2} - \dfrac{4}{x_1-2} = \dfrac{4(x_1-x_2)}{(x_2-2)(x_1-2)} \Rightarrow \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \dfrac{4}{(x_2-2)(x_1-2)}$.
Nếu $x_1, x_2 \in (2;+\infty)$ thì $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$.
Nếu $x_1, x_2 \in (-\infty;2)$ thì $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(-\infty;2)$.
Vậy hàm số $f(x)$ đồng biến trên hai khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$. □

Bài 31

Tìm m để hàm số $y = \dfrac{x^2+x+m-5}{x+3}$ đồng biến trên khoảng $(-3;+\infty)$.

Lời giải.

Ta có $y = \dfrac{x^2+x+m-5}{x+3} = x - 2 + \dfrac{m+1}{x+3}$.
Xét $x_1; x_2 \in (-3;+\infty)$ với $x_1 < x_2$, ta có:

$$\begin{aligned}
y_2 - y_1 > 0 &\Leftrightarrow x_2 - x_1 + (m+1)\left(\frac{1}{x_2+3} - \frac{1}{x_1+3}\right) > 0 \\
&\Leftrightarrow x_2 - x_1 + (m+1)\frac{x_1-x_2}{(x_1+3)(x_2+3)} > 0 \\
&\Leftrightarrow (x_2-x_1)\left[1 - \frac{m+1}{(x_1+3)(x_2+3)}\right] > 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{(x_1+3)(x_2+3) - m - 1}{(x_1+3)(x_2+3)} > 0 \\
&\Leftrightarrow (x_1+3)(x_2+3) > m+1.
\end{aligned}$$

Để $y_2 - y_1 > 0$ với mọi $x_1, x_2 \in (-3;+\infty)$ thì $m+1 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -1$. □

Bài 32

Bản tin dự báo thời tiết cho biết tốc độ gió ở một số thời điểm tại Bắc Ninh ngày 10/08/2022 được ghi lại thành bảng

Giờ	11	14	17	20	23
Tốc độ gió (km/h)	8	14	17	11	13

Nếu coi x là thời điểm và y là tốc độ gió thì x là biến số và y là hàm số của x. Đó là hàm số cho bằng bảng.

a) Hãy tìm tập xác định của hàm số đó. Tìm tập giá trị của hàm số đó.

b) Tìm thời điểm mà tốc độ gió đạt 17 km/h.

Lời giải.

a) Tập xác định của hàm số trên là $\mathscr{D} = \{11; 14; 17; 20; 23\}$.
Tập giá trị của hàm số trên là $T = \{8; 14; 17; 11; 13\}$.

b) Từ bảng ta thấy $y = 17 \Leftrightarrow x = 17$.
Vậy tại thời điểm 17 giờ thì tốc độ gió đạt 17 km/h.

□

Bài 33

Viết hàm số mô tả sự phụ thuộc của quãng đường đi được vào thời gian của một vật chuyển động thẳng đều với với vận tốc 5 m/s. Tìm tập xác định của hàm số đó. Tính quãng đường vật đi được sau 8 s; 16 s.

Lời giải.

Một vật chuyển động thẳng đều với vận tốc 5 m/s thì quãng đường đi được s (mét) phụ thuộc vào thời gian t (giây) theo công thức $s = 5t$, trong đó t là biến số, $s = s(t)$ là hàm số của t.
Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = [0; +\infty)$.
Quãng đường vật đi được sau 8 s là $s_1 = s(5) = 5 \cdot 8 = 40$ (m).
Quãng đường vật đi được sau 16 s là $s_2 = s(16) = 5 \cdot 8 = 80$ (m).
□

Bài 34

Tìm tập xác định của hàm số

a) $y = \sqrt{3x - 9}$.

b) $y = \dfrac{x + 2}{4 - 2x}$.

Lời giải.

a) Biểu thức $\sqrt{3x - 9}$ có nghĩa khi $3x - 9 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$.
Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathscr{D} = [3; +\infty)$.

b) Biểu thức $\dfrac{x + 2}{4 - 2x}$ có nghĩa khi $4 - 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$.
Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

□

Bài 35

Cho bảng tính tiền nước (theo https://vinid.net/blog/gia-nuoc-sinh-hoat-cap-nhat-bieu-gia-nuoc-sach-moi-nhat-2020) như sau

Mức nước sử dụng	Giá (m^3/đồng)
Từ 0 đến 10 m^3	5 973
Từ trên 10 đến 20 m^3	7 052
Từ trên 20 đến 30 m^3	8 669
Từ trên 30 m^3	15 929

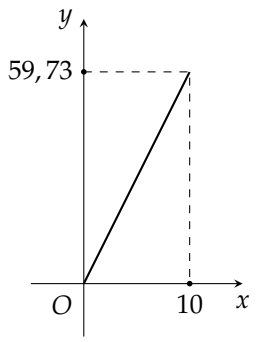
a) Gọi x là lượng nước sử dụng (đơn vị m^3) và y là số tiền phải trả tương ứng (đơn vị nghìn đồng). Viết công thức hàm số tính số tiền sử dụng từ 0 đến 10 m^3.

b) Tìm tập xác định, tập giá trị của hàm số, vẽ đồ thị của hàm số này?

Lời giải.

a) Công thức hàm số là $y = 5,973x$ với $0 \le x \le 10$.

b) Tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = [0;10]$.
Ta có $0 \le x \le 10 \Leftrightarrow 0 \le y \le 5,973 \cdot 10 \Leftrightarrow 0 \le y \le 59,73$.
Tập giá trị của hàm số là $[0;59,73]$.
Đồ thị của hàm số $y = 5,973x$ trên $[0;10]$ là một đoạn thẳng.



□

Bài 36

Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2-3x}}$.

b) $y = \dfrac{\sqrt{3+x}}{2x-4}$.

Lời giải.

a) Biểu thức $\dfrac{1}{\sqrt{2-3x}}$ có nghĩa khi $2-3x > 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{2}{3}$
Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathscr{D} = \left(-\infty;\dfrac{2}{3}\right)$.

b) Biểu thức $\dfrac{\sqrt{3+x}}{2x-4}$ có nghĩa khi $\begin{cases} 3+x \ge 0 \\ 2x-4 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -3 \\ x \ne 2. \end{cases}$
Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathscr{D} = [-3;+\infty)\backslash 2$.

□

Bài 37

a) Điểm nào trong các điểm sau $A\left(-1;\frac{1}{2}\right)$; $B(-4;4)$; $C(2;2)$; $D\left(-3;\frac{9}{2}\right)$ thuộc đồ thị hàm số $y=f(x)=\frac{1}{2}x^2$.

b) Vẽ đồ thị hàm số $y=f(x)=\frac{1}{2}x^2$.

Lời giải.

a) Ta có $f(-1)=\frac{1}{2}(-1)^2=\frac{1}{2}$ nên điểm A thuộc đồ thị hàm số đã cho.

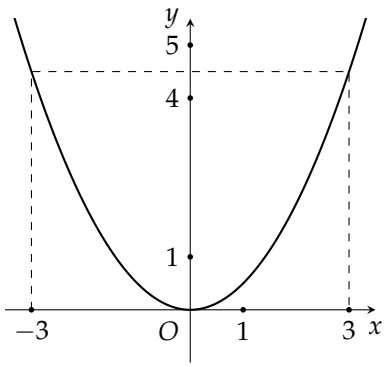
Ta có $f(-4)=\frac{1}{2}(-4)^2=8$ nên điểm B không thuộc đồ thị hàm số đã cho.

Ta có $f(2)=\frac{1}{2}2^2=2$ nên điểm C thuộc đồ thị hàm số đã cho.

Ta có $f(-3)=\frac{1}{2}\cdot(-3)^2=\frac{9}{2}$ nên điểm D thuộc đồ thị hàm số đã cho.

b)

Đồ thị hàm số $y=f(x)=\frac{1}{2}x^2$ là một Parabol có bề lõi hướng lên trên, nhận $O(0;0)$ làm đỉnh



□

Bài 38

a) Dựa vào đồ thị của hàm số $y=\frac{1}{2}x^2$, tìm x sao cho $y=\frac{1}{2}$.

b) Vẽ đồ thị của các hàm số $y=4x-4$ và $y=x^2$ lên cùng một mặt phẳng tọa độ.

Lời giải.

a) Cách 1: Dựa vào đồ thị hàm số $y=\frac{1}{2}x^2$ ta thấy điểm $\left(1;\frac{1}{2}\right);\left(-1;\frac{1}{2}\right)$ thuộc đồ thị hàm số.

Vậy $y=\frac{1}{2}$ thì $x=1;x=-1$.

Cách 2: Để $y=\frac{1}{2}$ thì $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}x^2\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1.\end{array}\right.$

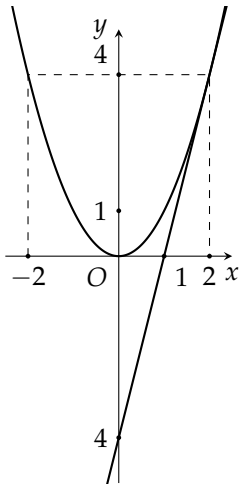
Vậy $y=\frac{1}{2}$ thì $x=1;x=-1$.

b)

Bảng giá trị

x	0	1
$y=4x-4$	-4	0

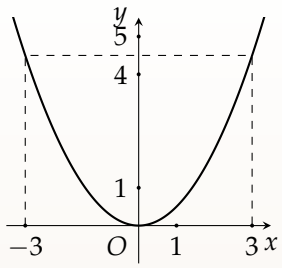
x	-2	-1	0	1	2
$y=x^2$	4	1	0	1	4



□

Bài 39

Dựa vào đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2}x^2$ (như hình vẽ), cho biết hàm số $y=\dfrac{1}{2}x^2$ đồng biến hay nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ và $(-\infty;0)$.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2}x^2$ ta có

- Trên khoảng $(-\infty;0)$, đồ thị "đi xuống" từ trái sang phải và với $x_1;x_2\in(-\infty;0)$, $x_1<x_2$ thì $f(x_1)>f(x_2)$. Như vậy, hàm số $y=\dfrac{1}{2}x^2$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

- Trên khoảng $(0;+\infty)$, đồ thị "đi lên" từ trái sang phải và với $x_1;x_2\in(0;+\infty)$, $x_1<x_2$ thì $f(x_1)<f(x_2)$. Như vậy, hàm số $y=\dfrac{1}{2}x^2$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

□

Bài 40

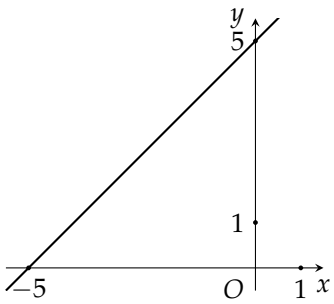
Vẽ đồ thị của các hàm số $y=x+5$ và $y=\dfrac{x^2}{4}$.
Hãy cho biết

a) Hàm số $y=x+5$ đồng biến hay nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

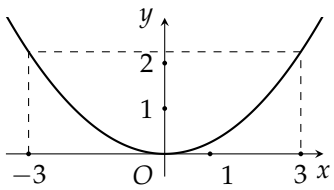
b) Hàm số $y=\dfrac{x^2}{4}$ đồng biến hay nghịch biến trên $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$?

Lời giải.

Vẽ đồ thị $y = x + 5$



Vẽ đồ thị $y = \dfrac{x^2}{4}$



a) Từ đồ thị của hàm số $y = x + 5$ ta thấy đồ thị của hàm số là một đường đi lên từ trái qua phải nên hàm số đã cho là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) Từ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2}{4}$ ta thấy đồ thị của hàm số ở bên trái trục tung là một đường đi xuống từ trái qua phải nên hàm số đã cho là hàm nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và đồ thị của hàm số ở bên phải trục tung là một đường đi lên từ trái qua phải nên hàm số đã cho là hàm đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

□

Bài 41

Vẽ đồ thị của các hàm số $y = -x - 2$ và $y = -\dfrac{1}{2}x^2$.

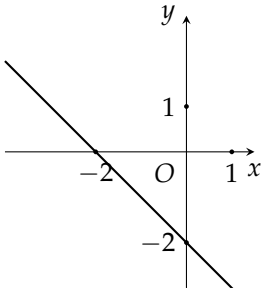
Hãy cho biết

a) Hàm số $y = -x - 2$ đồng biến hay nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

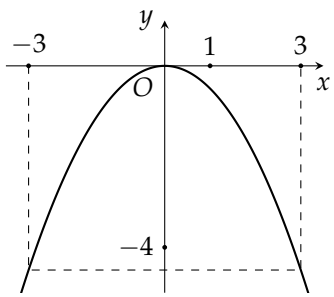
b) Hàm số $y = -\dfrac{1}{2}x^2$ đồng biến hay nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$?

Lời giải.

Vẽ đồ thị $y = -x - 2$



Vẽ đồ thị $y = -\dfrac{1}{2}x^2$



a) Từ đồ thị của hàm số $y = -x - 2$ ta thấy đồ thị của hàm số là một đường đi xuống từ trái qua phải nên hàm số đã cho là hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

b) Từ đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ ta thấy đồ thị của hàm số ở bên trái trục tung là một đường đi lên từ trái qua phải nên hàm số đã cho là hàm đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và đồ thị của hàm số ở bên phải trục tung là một đường đi xuống từ trái qua phải nên hàm số đã cho là hàm nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

□

Bài 42

Quan sát bảng giá nước sinh hoạt cho hộ gia đình năm 2022 tại Hà Nội

STT	Mức sử dụng nước sinh hoạt của dân cư (m^3/tháng/gia đình)	Giá bán nước (VND)	Thuế GTGT (5%)	Phí bảo vệ môi trường (10%)	Giá thanh toán (VND)
1	10 m^3 đầu tiên	5 973	298,65	597,30	6 869
2	Từ trên 10 m^3 đến 20 m^3	7 052	352,50	705,20	8 110
3	Từ trên 20 m^3 đến 30 m^3	8 669	433,45	866,90	9 969
4	Trên 20 m^3	15 929	796,45	1 592,90	18 318

a) Tính số tiền phải trả khi sử dụng 25 m^3 trong tháng 8 năm 2022.

b) Lập công thức tính số tiền nước phải trả theo khối lượng nước tiêu thụ trong một tháng.

c) Vẽ đồ thị và cho biết hàm số đồng biến trên khoảng nào, nghịch biến trên khoảng nào?

Lời giải.

a) Tính số tiền phải trả khi sử dụng 25 m^3 trong tháng 8 năm 2022.
Do số khối nước tiêu thụ là 25 m^3 nên số tiền được tính theo ba bậc
Bậc 1: Số tiền phải trả cho 10 m^3 nước đầu tiên là 6 869
Bậc 2: Số tiền phải trả cho 10 m^3 tiếp theo ở bậc 2 là 8 110
Bậc 3: Số tiền phải trả cho 5 m^3 tiếp theo ở bậc 3 là 9 969
Tổng số tiền nước phải trả cho 25 m^3 là $68\,690 + 81\,100 + 49\,845 = 199\,635$ (VN).

b) Lập công thức tính số tiền nước phải trả theo khối lượng nước tiêu thụ trong một tháng.
Gọi x là số khối nước tiêu thụ trong 1 tháng, y là số tiền phải trả ($x \geq 0; y \geq 0$)

$$\text{Ta có } \begin{cases} y = 6\,869x \text{ khi } 0 \leq x \leq 10 \\ y = 68\,690 + 8\,110(x - 10) \text{ khi } 10 < x \leq 20 \\ y = 68\,690 + 81\,100 + 9\,969(x - 20) \text{ khi } 20 < x \leq 30 \\ y = 68\,690 + 81\,100 + 99\,690 + 18\,316x \text{ khi } x > 30. \end{cases}$$

Khi $x = 25$ m^3 số tiền phải trả là $y = 68\,690 + 81\,100 + 9\,969(25 - 20) = 199\,635$ (VN).

c) Vẽ đồ thị hàm số

$$y = \begin{cases} 6\,869x \text{ khi } 0 \leq x \leq 10 \\ 68\,690 + 8\,110(x - 10) \text{ khi } 10 < x \leq 20 \\ 149\,790 + 9\,969(x - 20) \text{ khi } 20 < x \leq 30 \\ 249\,480 + 18\,316x \text{ khi } x > 30. \end{cases}$$

Hàm số đồng biến trên toàn tập xác định (dùng càng nhiều nước trả càng nhiều tiền).

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1

Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x+\sqrt{x-2}, & \text{khi } x\geq 2\\ 1-3x, & \text{khi } x<2\end{cases}$. Giá trị $f(1)$ bằng

(A) -2. (B) 0. (C) không xác định. (D) 2.

Lời giải.

Với $x=1<2$ suy ra $f(1)=1-3\cdot 1=-2$.

Chọn đáp án (A)

Câu 2

Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{1}{x}+\sqrt{3-x}$ là

(A) $(-\infty;3]$. (B) $[3;+\infty)$. (C) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. (D) $(-\infty;3]\setminus\{0\}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của hàm số đã cho là $\begin{cases}x\neq 0\\ 3-x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\ x\leq 3.\end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathscr{D}=(-\infty;3]\setminus\{0\}$.

Chọn đáp án (D)

Câu 3

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và nhận giá trị trên tập số nguyên; đồng thời thỏa mãn $f(1)=0$ và $f(m+n)=f(m)+f(n)+3(4mn-3)$ với mọi số nguyên m, n. Xác định $f(9)$.

(A) 360. (B) 336. (C) 351. (D) 368.

Lời giải.

Với $m=n=1$ suy ra $f(2)=2f(1)+3(4\cdot 1\cdot 1-3)=3$.
Với $m=n=2$ suy ra $f(4)=2f(2)+3(4\cdot 2\cdot 2-3)=45$.
Với $m=n=4$ suy ra $f(8)=2f(4)+3(4\cdot 4\cdot 4-3)=273$.
Với $m=4$ và $n=1$ suy ra $f(9)=f(8)+f(1)+3(4\cdot 8\cdot 1-3)=360$.

Chọn đáp án (A)

Câu 4

Tập xác định của hàm số $f(x)=\dfrac{3x-6}{4x-12}$ là

(A) $\mathscr{D}=\mathbb{R}$. (B) $\mathscr{D}=(3;+\infty)$. (C) $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. (D) $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Lời giải.

Biểu thức $\dfrac{3x-6}{4x-12}$ có nghĩa khi $4x-12\neq 0\Leftrightarrow x\neq 3$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Chọn đáp án (D)

Câu 5

Tập xác định của hàm số $y = \dfrac{x-1}{x^2-x+3}$ là

(A) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$. (B) $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. (C) $\mathscr{D} = \varnothing$. (D) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Lời giải.

Điều kiện $x^2 - x + 3 \neq 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$.
Vậy tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 6

Tìm tập xác định của hàm số $y = \dfrac{x+1}{(x-3)\sqrt{2x-1}}$.

(A) $\mathscr{D} = \left(-\dfrac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{3\}$. (B) $\mathscr{D} = \left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{3\}$.
(C) $\mathscr{D} = \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{3\}$. (D) $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x-3 \neq 0 \\ 2x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 3 \\ x > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$
Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right) \setminus \{3\}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 7

Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{2-x}$.

(A) $\mathscr{D} = (1;2)$. (B) $\mathscr{D} = [1;2]$.
(C) $\mathscr{D} = (-\infty;1) \cup (2;+\infty)$. (D) $\mathscr{D} = (-\infty;1] \cup [2;+\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của hàm số là $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$.
Suy ra tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = [1;2]$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 8

Tìm tập xác định của hàm số $y = \dfrac{1}{x \cdot \sqrt{x+1}}$

(A) $\mathscr{D} = (-1;+\infty) \setminus \{0\}$. (B) $\mathscr{D} = (-1;+\infty)$.
(C) $\mathscr{D} = (0;+\infty)$. (D) $\mathscr{D} = [-1;+\infty) \setminus \{0\}$.

Lời giải.

Điều kiện xác định của hàm số $\begin{cases} x+1 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0. \end{cases}$
Suy ra tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = (-1;+\infty) \setminus \{0\}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9

Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-2022; 2022]$ để hàm số $y = \sqrt{m-2x}$ xác định trên khoảng $(-3;-1)$?

(A) 2022. (B) 2025. (C) 2021. (D) 4042.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $m - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{m}{2}$.

TXĐ của hàm số là $\mathscr{D} = \left(-\infty; \dfrac{m}{2}\right]$.

Hàm số xác định trên khoảng $(-3;\ -1)$ khi $(-3;\ -1) \subset \left(-\infty; \dfrac{m}{2}\right] \Leftrightarrow -1 \leq \dfrac{m}{2} \Leftrightarrow m \geq -2$.

Với $m \in [-2022; 2022]$ suy ra $m \in \{-2; -1; \ldots; 2022\}$. Vậy có 2025 số thỏa mãn.

Chọn đáp án (B) □

Câu 10

Tập hợp S là tập hợp chứa các số nguyên dương m để hàm số $y = \sqrt{m-x} + \sqrt{x-2m+5}$ có tập xác định là một đoạn có độ dài không nhỏ hơn 3. Tính tổng bình phương các phần tử của S?

(A) 5. (B) 10. (C) 14. (D) 13.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} m-x \geq 0 \\ x-2m+5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq m \\ x \geq 2m-5. \end{cases}$

TXĐ của hàm số là một đoạn có độ dài không nhỏ hơn 3 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m > 2m-5 \\ m-2m+5 \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 2.$$

Với $m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$, suy ra $m \in \{1;2\}$. Vậy có $1^2 + 2^2 = 5$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 11

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x^2-2x+m-2}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

(A) $m \geq 3$. (B) $m > 3$. (C) $m < 3$. (D) $m \leq 3$.

Lời giải.

Hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x^2-2x+m-2}$ xác định trên $\mathbb{R}$ khi $x^2 - 2x + m - 2 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Khi đó $x^2 - 2x + m - 2 = 0$ vô nghiệm hay $\Delta' = 1 - (m-2) < 0 \Leftrightarrow m > 3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 12

Tập xác định của hàm số $y = \dfrac{2022}{\sqrt[3]{x^2-3x+2} - \sqrt[3]{x^2-5}}$ là

(A) $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. (B) $\mathscr{D} = (-\infty;1) \cup (2;+\infty)$.

(C) $\mathscr{D} = \left(-\infty; -\sqrt{5}\right) \cup \left(\sqrt{5}; +\infty\right)$. (D) $\mathscr{D} = \left(-\sqrt{5}; 1\right) \cup \left(2; \sqrt{5}\right)$.

Lời giải.

Hàm số $y = \dfrac{2022}{\sqrt[3]{x^2-3x+2}-\sqrt[3]{x^2-5}}$ xác định khi $\sqrt[3]{x^2-3x+2}-\sqrt[3]{x^2-5} \neq 0$
hay $\sqrt[3]{x^2-3x+2} \neq \sqrt[3]{x^2-5} \Leftrightarrow x^2-3x+2 \neq x^2-5 \Leftrightarrow x \neq 2$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 13

Cho hàm số $y = f(x) = x^2$ xác định trên $\mathbb{R}$. Xét các mệnh đề sau
I. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
II. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$.
III. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-\infty;0)$.
Tìm tất cả các mệnh đề sai trong ba mệnh đề trên.

(A) I và II. (B) I và III. (C) II và III. (D) I, II và III.

Lời giải.

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;0)$.
Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 14

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = f(x) = (m-4)x + m^2 - m - 2$ đồng biến trên tập xác định của nó.

(A) $m > 4$. (B) $m \geq 4$. (C) $m < 4$. (D) $m \leq 4$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $m - 4 > 0 \Leftrightarrow m > 4$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 15

Nhiệt độ mặt đất đo được khoảng 30°C. Biết rằng cứ lên cao 1 km thì nhiệt độ giảm đi 5°C. Hãy viết hàm số t theo độ cao h và nhiệt độ t tính bằng °C.

(A) $t = 5h - 30$. (B) $t = 5h + 30$. (C) $t = -5h - 30$. (D) $t = 30 - 5h$.

Lời giải.

Hàm số t theo độ cao h là $t = 30 - 5h$.
Chọn đáp án (D) □

§2. HÀM SỐ BẬC HAI

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Khái niệm hàm số bậc hai

Khái niệm 2.1. Hàm số bậc hai là hàm số cho bởi công thức

$$y = ax^2 + bx + c, \tag{2.1}$$

trong đó x là biến số, a, b, c là các hằng số và $a \neq 0$. Tập xác định của hàm số bậc hai là $\mathbb{R}$.

Ví dụ 1

Hàm số nào dưới đây là hàm số bậc hai?

a) $y = x^6 + 4x^3 + 2$; b) $y = \dfrac{1}{x^2}$; c) $y = -3x^2 + 1$;

d) $y = 2\left(\dfrac{1}{x}\right)^2 - \dfrac{1}{x} - 1$; e) $y = 2x^2 - 3x$; f) $y = x^4$.

Lời giải.

Câu c) là hàm số bậc hai với $a = -3, b = 0, c = 1$.
Câu e) là hàm số bậc hai với $a = 2, b = -3, c = 0$.
Các hàm số còn lại không phải hàm số bậc hai. □

Nhận xét. Hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$ đã học ở lớp 9 là một trường hợp đặc biệt của hàm số bậc hai với $b = c = 0$.

Ví dụ 2

Khi thả một viên đá xuống một chiếc giếng, quãng đường viên đá rơi được trong thời gian t (giây) sẽ được tính theo công thức $s = 4,9t^2 (m)$.

a) Tính quãng đường viên đá rơi được trong 1 giây, 2 giây, 3 giây.

b) Hãy tìm độ sâu của cái giếng biết viên đã sẽ chạm đáy giếng trong 5 giây.

c) Nếu cái giếng sâu $100m$, hãy tính thời gian từ lúc thả viên đá cho tới khi viên đá chạm đáy giếng.

Lời giải.

a) Quãng đường viên đá rơi được trong 1 giây, 2 giây và 3 giây lần lượt là $4,9m$, $19,6m$ và $44,1m$.

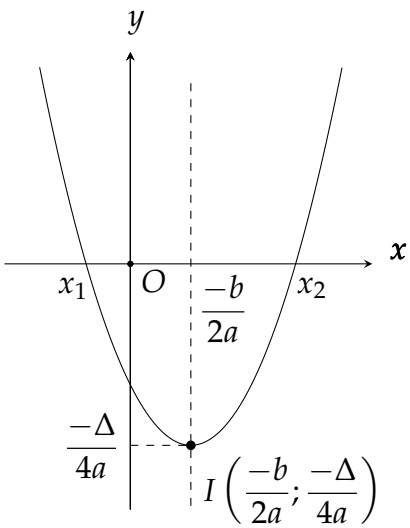
b) Với $t = 4,3$ thì độ sâu của cái giếng là $s = 4,9.5^2 = 122,5$.

c) Quãng đường từ lúc thả cho tới khi viên đá chạm đáy là độ sâu của giếng. Khi đó, với $s = 100$ thì $100 = 4,9t^2 \Leftrightarrow t^2 = \dfrac{1000}{49} \Leftrightarrow t \approx 4,5$ (do $t > 0$). Vậy thời gian viên đá rơi là 4,5 giây.

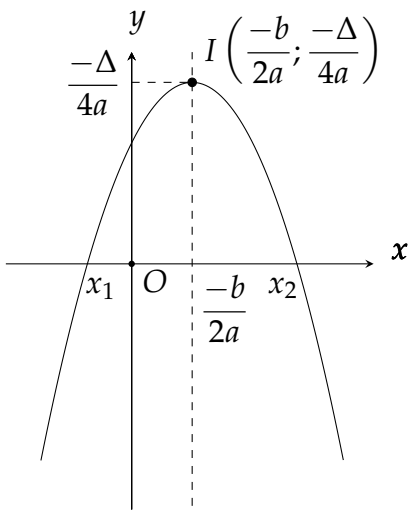
2. Đồ thị của hàm số bậc hai

- Đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ là một đường parabol có đỉnh là điểm $I\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$, có trục đối xứng là đường thẳng $x = -\dfrac{b}{2a}$. Parabol này quay bề lõm lên trên nếu $a > 0$, xuống dưới nếu $a < 0$.
- Để vẽ đường parabol $y = ax^2 + bx + c$ ta tiến hành theo các bước sau:
  1. Xác định toạ độ đỉnh I $\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$;
  2. Vẽ trục đối xứng $x = -\dfrac{b}{2a}$;
  3. Xác định toạ độ các giao điểm của parabol với trục tung, trục hoành (nếu có) và một vài điểm đặc biệt trên parabol;
  4. Vẽ parabol.
- Tính chất của hàm số bậc hai:
  + Nếu $a > 0$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right)$; $-\dfrac{\Delta}{4a}$ là giá trị nhỏ nhất của hàm số.
  + Nếu $a < 0$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right)$; $-\dfrac{\Delta}{4a}$ là giá trị lớn nhất của hàm số.

$a > 0$



$a < 0$



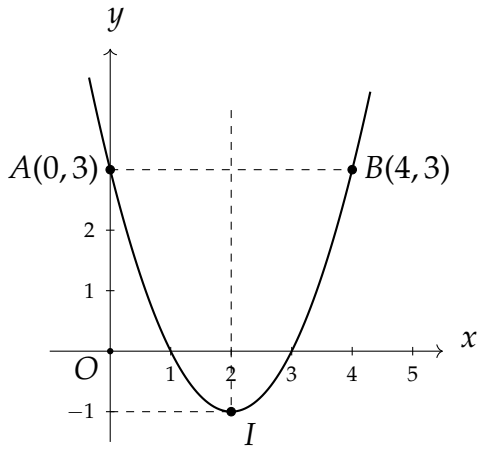
Ví dụ 3

a) Vẽ đồ thị parabol $y = x^2 - 4x + 3$.

b) Xác định khoảng đồng biến, nghịch biến và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 4x + 3$.

Lời giải.

a) Ta có $a = 1 > 0$ nên parabol quay bề lõm lên trên.
Đỉnh $I\,(2;-1)$. Trục đối xứng $x = 2$.
Giao điểm của đồ thị với trục Oy là $A(0;3)$.
Parabol cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $x^2 - 4x + 3 = 0$, tức là $x = 1$ và $x = 3$.
Để vẽ đồ thị chính xác hơn, ta có thể lấy thêm điểm đối xứng với A qua trục đối xứng $x = 2$ là $B(4;3)$.



b) Hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ nghịch biến trên $(-\infty;2)$, đồng biến trên $(2;+\infty)$;
Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $y = -1$, khi $x = 2$.

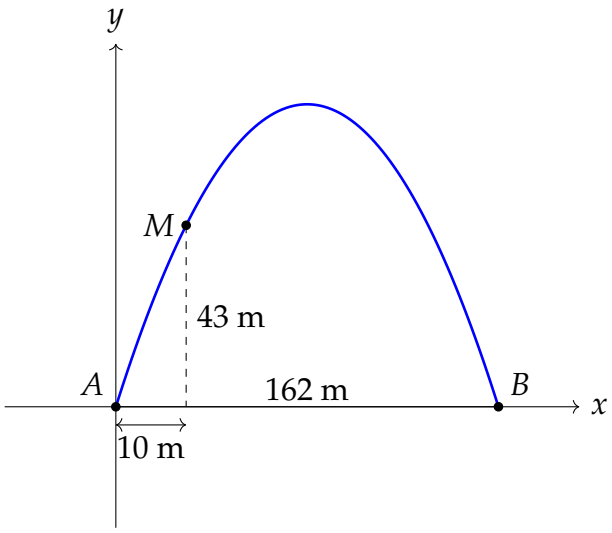
□

Ví dụ 4

Cổng Arch tại thành phố St Louis của Mỹ có hình dạng là một parabol. Biết khoảng cách giữa hai chân cổng bằng $162m$. Trên thành cổng, tại vị trí có độ cao $43m$ so với mặt đất, người ta thả một sợi dây chạm đất. Vị trí chạm đất của đầu sợi dây này cách chân cổng A một đoạn $10m$. Giả sử các số liệu trên là chính xác. Hãy tính độ cao của cổng Arch.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho một chân cổng A đặt tại gốc tọa độ, chân còn lại đặt trên tia Ox. Ta có hình vẽ sau:



Parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $A(0;0), B(162;0), M(10;43)$ nên ta có

$$\begin{cases} c = 0 \\ 162^2a + 162b + c = 0 \\ 10^2a + 10b + c = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = -\dfrac{43}{1520} \\ b = \dfrac{3483}{760} \end{cases} \Rightarrow (P): y = -\frac{43}{1520}x^2 + \frac{3483}{760}x.$$

Do đó chiều cao của cổng là $h = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} \approx 185,6\ m.$ □

B CÁC DẠNG TOÁN VÀ VÍ DỤ

Dạng 1 Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$.

Các bước khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

- Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- Sự biến thiên:
  + Bảng biến thiên.
  + Kết luận sự đồng biến nghịch biến của hàm số.
- Bảng giá trị.
- Vẽ đồ thị.
- Nhận xét đồ thị: Trục đối xứng, đỉnh, giao với Ox, Oy, ...

Ví dụ 1

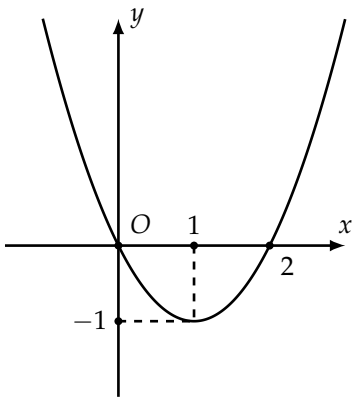
Hãy xét sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số $y = x^2 - 2x$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$, hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Đỉnh $I(1\,;\,-1)$.
Trục đối xứng $x = 1$.
Đồ thị của hàm số đi qua hai điểm $A(0\,;\,0)$, $B(2\,;\,0)$, nên ta có đồ thị là



□

Ví dụ 2

Hãy xét sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x - 1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $a = 1 > 0, b = -2, c = -1, -\dfrac{b}{2a} = 1$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Bảng biến thiên của hàm số như sau

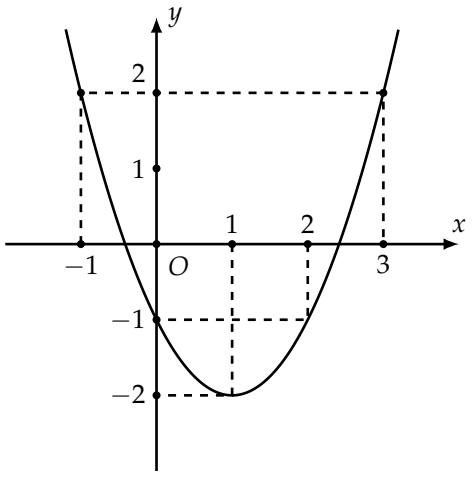
x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x - 1$ là parabol (P) có trục đối xứng là đường thẳng $x = 1$ và đỉnh là điểm $I(1; -2)$.

Để vẽ đồ thị (P) ta lấy một số điểm theo bảng giá trị sau

x	-1	0	1	2	3
y	2	-1	-2	-1	2

Ta có đồ thị (P) như hình vẽ.



□

Ví dụ 3

Hãy xét sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^2 + 3x - 3$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có $a = -1 < 0, b = 3, c = -3, -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{3}{2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; \dfrac{3}{2}\right)$.

Bảng biến thiên của hàm số như sau

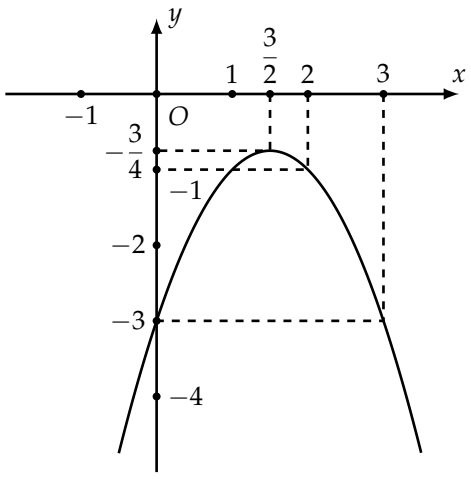
x	$-\infty$		$\dfrac{3}{2}$		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$-\dfrac{3}{4}$	↘	$-\infty$

Đồ thị của hàm số $y = -x^2 + 3x - 3$ là parabol (P) có trục đối xứng là đường thẳng $x = \dfrac{3}{2}$ và đỉnh là điểm $I\left(\dfrac{3}{2}; -\dfrac{3}{4}\right)$.

Để vẽ đồ thị (P) ta lấy một số điểm theo bảng giá trị sau

x	0	1	$\dfrac{3}{2}$	2	3
y	-3	-1	$-\dfrac{3}{4}$	-1	-3

Đồ thị (P) như hình vẽ.



□

Ví dụ 4

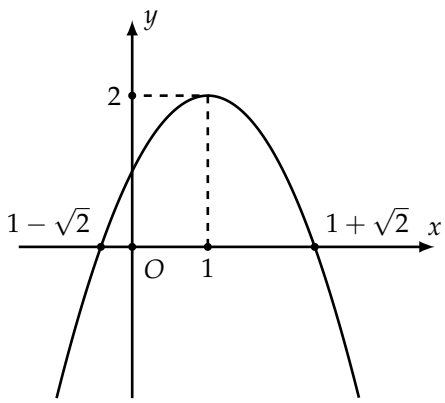
Xét sự biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số $y = -x^2 + 2x + 1$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty\,;\,1)$, hàm số nghịch biến trên khoảng $(1\,;\,+\infty)$.
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Đỉnh $I\,(1\,;\,2)$.
Trục đối xứng $x = 1$.
Đồ thị của hàm số đi qua hai điểm $A\left(1-\sqrt{2};0\right)$, $B\left(1+\sqrt{2};0\right)$, nên ta có đồ thị như sau



□

Ví dụ 5

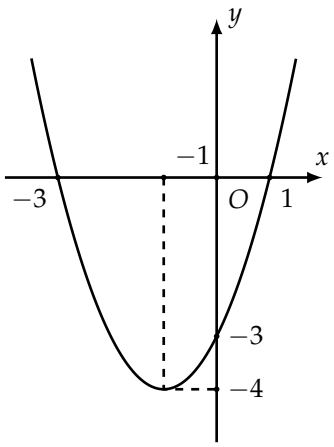
Hãy khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x - 3$. Từ đó suy ra đồ thị của hàm số $y = x^2 - 3\,|x| + 2$.

Lời giải.

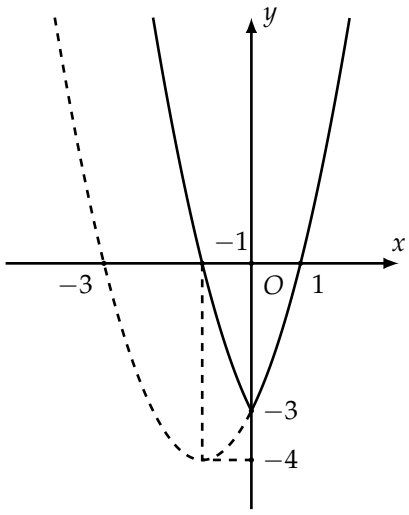
Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Tọa độ đỉnh $I\,(-1;-4)$.
Trục đối xứng $x = -1$.
Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $A\,(0;-3)$, cắt trục hoành tại hai điểm $B\,(1;0)$ và $C\,(-3;0)$.
Đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x - 3$.



Ta có $y = h(x) = x^2 + 2|x| - 3 = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2 - 2x - 3 & \text{khi } x < 0. \end{cases}$
Hơn nữa hàm số $h(x)$ làm số chẵn nên đồ thị đối xứng qua trục tung.
Từ đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2 - 3x + 2$ suy ra đồ thị hàm số $y = h(x) = x^2 - 3|x| + 2$ như sau:
Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ phần bên phải trục tung.
Lấy đối xứng phần đồ thị vừa giữ nguyên ở trên qua trục tung, ta được toàn bộ đồ thị hàm số $y = h(x)$.



□

Ví dụ 6

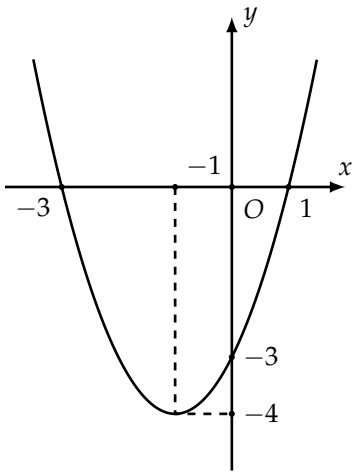
Hãy khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x - 3$. Từ đó suy ra đồ thị của hàm số $y = |x^2 + 2x - 3|$.

Lời giải.

Hàm số $y = x^2 + 2x - 3$, có
Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Tọa độ đỉnh $I(-1; -4)$.
Trục đối xứng $x = -1$.
Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.
Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y	$+\infty$ ↘	-4	↗ $+\infty$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $A(0;-3)$, cắt trục hoành tại hai điểm $B(1;0)$ và $C(-3;0)$.

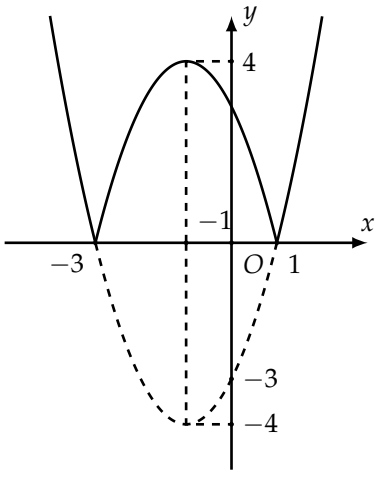


Ta có $y=\left|x^2+2x-3\right|=\begin{cases}x^2+2x-3 & \text{khi } x^2+2x-3\geq 0\\ -\left(x^2+2x-3\right) & \text{khi } x^2+2x-3<0.\end{cases}$

Do đó từ đồ thị hàm số $y=f(x)=x^2+2x-3$ suy ra đồ thị hàm số $y=\left|x^2+2x-3\right|$ như sau

+ Đồ thị hàm số $y=f(x)$ phần phía trên trục hoành ta giữ nguyên.

+ Đồ thị hàm số $y=f(x)$ phần phía dưới trục hoành ta lấy đối xứng qua trục hoành.



□

Dạng 2 Tìm tham số m để hàm số bậc 2 đơn điệu trên tập con của $\mathbb{R}$

Bước 1. Lập bảng biến thiên của hàm số bậc 2.

Bước 2. Dựa vào yêu cầu bài toán "ép" khoảng mà tính đơn điệu của hàm số không thỏa mãn ra khỏi khoảng đề bài yêu cầu.

Ví dụ 1

Hãy tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -x^2 + (2m-3)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -5)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có hoành độ đỉnh $x = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{2m-3}{2}$.

Do $a = -1 < 0$ nên ta có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	$\dfrac{2m-3}{2}$	$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$ $-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -5)$ khi và chỉ khi

$$\frac{2m-3}{2} \geq -5 \Leftrightarrow m \geq -\frac{7}{2}.$$

Vậy $m \geq -\dfrac{7}{2}$. □

Ví dụ 2

Cho hàm số $y = x^2 - 2(m+1)x + 3$ (với m là tham số). Hãy tìm tất cả các giá trị tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Ta có hoành độ đỉnh $x = -\dfrac{b}{2a} = m+1$.

Do $a = 1 > 0$ nên ta có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	$m+1$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$ $+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ khi và chỉ khi $-1 \leq m+1 \Leftrightarrow m \geq -2$ Vậy $m \geq -2$. □

Ví dụ 3

Hãy tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^2 + (m-1)x + 2m - 1$ đồng biến trên $(-2; +\infty)$.

Lời giải.

Do $a = 1 > 0$ nên ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\dfrac{m-1}{2}$	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên $\left(-\dfrac{m-1}{2};+\infty\right)$.

Vậy để hàm số đồng biến trên $(-2;+\infty)$ thì $-\dfrac{m-1}{2} \le -2 \Rightarrow m \ge 5$.

Vậy $m \ge 5$. □

Dạng 3 Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = ax^2 + bx + c$ trên $\mathbb{R}$ và tập con của $\mathbb{R}$

Khi $a > 0$, giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ của hàm số là $-\dfrac{\Delta}{4a}$ đạt được khi $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Đỉnh $I\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ là điểm thấp nhất của đồ thị hàm số.

Khi $a < 0$, giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ của hàm số là $-\dfrac{\Delta}{4a}$ đạt được khi $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Đỉnh $I\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ là điểm cao nhất của đồ thị hàm số.

Ví dụ 1

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất $y_{\min}$ của hàm số $y = x^2 - 4x + 5$.

Lời giải.

Hoành độ đỉnh $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{(-4)}{2} = 2$.

Vì hệ số $a > 0$ nên hàm số có giá trị nhỏ nhất $y_{\min} = y(2) = 2^2 - 4.2 + 5 = 1$. □

Ví dụ 2

Hãy tìm giá trị lớn nhất $y_{\max}$ của hàm số $y = -\sqrt{2}x^2 + 4x$.

Lời giải.

Hoành độ đỉnh $x = -\dfrac{b}{2a} = \sqrt{2}$.

Vì hệ số $a < 0$ nên hàm số có giá trị lớn nhất $y_{\max} = y\left(\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}$. □

Ví dụ 3

Hãy tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m trên đoạn $[-2;1]$ của hàm số $y = f(x) = x^2 - 4x + 3$.

Lời giải.

Hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ có $a = 1 > 0$ nên bề lõm hướng lên.

Hoành độ đỉnh $x = -\dfrac{b}{2a} = 2 \notin [-2;1]$.

Ta có $\begin{cases} f(-2) = 15 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow m = \min\limits_{[-2;1]} y = f(1) = 0; M = \max\limits_{[-2;1]} y = f(-2) = 15.$ □

Ví dụ 4

Hãy tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^2 - 2x + 2m + 3$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[2;5]$ bằng -3.

Lời giải.

Parabol $y = x^2 - 2x + 2m + 3$ có $a = 1 > 0$ và đỉnh $I(1; 2m + 2)$ nên hàm số $y = x^2 - 2x + 2m + 3$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
Do đó giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 2x + 2m + 3$ trên đoạn $[2;5]$ bằng $y(2) = 2m + 3 = -3 \Rightarrow m = -3$. □

Ví dụ 5

Hãy tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m \neq 0$ để hàm số $y = mx^2 - 2mx - 3m - 2$ có giá trị nhỏ nhất bằng -10 trên $\mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $y = mx^2 - 2mx - 3m - 2 = m\left(x^2 - 2x + 1\right) - 4m - 2 = m(x-1)^2 - 4m - 2$.
Do đó, để hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng -10 thì

$$\begin{cases} m > 0 \\ -4m - 2 = -10 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

Vậy với $m = 2$ thì hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng -10 khi $x = 1$. □

Ví dụ 6

Cho hàm số $y = f(x) = 4x^2 - 4ax + a^2 - 2a$ trên tập $\mathscr{D} = [-2;0]$. Tìm tất cả các giá trị của a để giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ bằng 2.

Lời giải.

Vì hệ số $a = 4 > 0$ thì đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là parabol quay bề lõm lên trên, đỉnh $S\left(\dfrac{a}{2}; -2a\right)$.

Bây giờ ta xét 3 vị trí của $x_S = \dfrac{a}{2}$ so với đoạn $[-2;0]$.

TH1. $-2 < \dfrac{a}{2} < 0$.

Quan sát đồ thị ta thấy

$$\min_{[-2;0]} f(x) = f(x_S) = -2a = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ -4 < a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -1.$$

TH2. $x_S = \dfrac{a}{2} < -2 \Leftrightarrow a < -4$.

Quan sát đồ thị ta thấy

$\min\limits_{[-2;0]} f(x) = f(-2) = a^2 + 6a + 16 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a < -4 \\ a^2 + 6a + 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow a \in \varnothing.$

TH3. $x_S = \dfrac{a}{2} > 0 \Leftrightarrow a > 0.$

Quan sát đồ thị ta thấy

$\min\limits_{[-2;0]} f(x) = f(0) = a^2 - 2a = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a^2 - 2a + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a = 1 \pm \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow a = 1 + \sqrt{3}.$

Vậy kết hợp ba trường hợp ta thấy $a = -1$; $a = 1 + \sqrt{3}$ thỏa yêu cầu bài toán. □

Dạng 4 Xác định hàm số bậc hai khi biết các yếu tố liên quan.

Ta thực hiện theo các bước sau.
Bước 1: Giả sử parabol $(P) : y = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$.
Bước 2: Dựa vào giả thiết đề bài để xác định a, b, c.
Một số giả thiết thường gặp ở bước này và cách xử lí.

- Parabol đi qua điểm $M(x_0; y_0) \Rightarrow y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c.$
- Parabol có trục đối xứng $x = x_0 \Rightarrow x_0 = -\dfrac{b}{2a}.$
- Parabol có đỉnh $I(x_0; y_0) \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -\dfrac{b}{2a} \\ y_0 = -\dfrac{\Delta}{4a}. \end{cases}$
- Parabol có giá trị nhỏ nhất (hoặc giá trị lớn nhất) bằng $y_0 \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ y_0 = -\dfrac{\Delta}{4a} \end{cases}$ $\left(\text{hoặc } \begin{cases} a < 0 \\ y_0 = -\dfrac{\Delta}{4a} \end{cases} \right).$

Bước 3: Kết luận.

Ví dụ 1

Hãy xác định parabol $y = ax^2 + bx + 3$, biết rằng parabol đi qua hai điểm $A(1;2)$ và $B(-2;11)$.

Lời giải.

Parabol $(P) : y = ax^2 + bx + 3$ $(a \neq 0)$. Ta có $c = 3$.
Vì (P) đi qua $A(1;2)$ nên $2 = a + b + 3 \Leftrightarrow a + b = -1.$ (1)
Vì (P) đi qua $B(-2;11)$ nên $11 = 4a - 2b + 3 \Leftrightarrow 4a - 2b = 8.$ (2)
Từ (1) và (2) ta có $\begin{cases} a + b = -1 \\ 4a - 2b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2. \end{cases}$
Vậy parabol $(P) : y = x^2 - 2x + 3.$ □

Ví dụ 2

Cho parabol $(P): y = -x^2 + bx + c$. Hãy xác định b, c biết (P) đi qua điểm $M(-2;4)$ và có trục đối xứng $x = -2$.

Lời giải.

Parabol $(P): y = -x^2 + bx + c$. Ta có $a = -1$.
Vì (P) có trục đối xứng $x = -2$ nên $-\dfrac{b}{2a} = -2 \Leftrightarrow b = 4a = 4 \cdot (-1) = -4$.
Vì $M(-2;4) \in (P)$ nên $4 = -(-2)^2 + b.(-2) + c \Leftrightarrow 4 = -4 - 2b + c \Leftrightarrow -2b + c = 8$.
Mà $b = -4$ nên $8 + c = 8 \Leftrightarrow c = 0$.
Vậy $(P): y = -x^2 - 4x$. □

Ví dụ 3

Cho parabol $(P): y = ax^2 - 2x + c$. Hãy xác định parabol (P) biết (P) có đỉnh $I(1;-3)$.

Lời giải.

Parabol $(P): y = ax^2 - 2x + c$. Ta có $b = -2$.
Vì (P) có đỉnh $I(1;-3)$ nên (P) có trục đối xứng $x = 1$.
Khi đó $-\dfrac{b}{2a} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{2}{2a} = 1 \Leftrightarrow a = 1$.
Hơn nữa, vì đỉnh $I(1;-3) \in (P)$ nên $-3 = 1.1^2 - 2.1 + c \Leftrightarrow c = -2$.
Vậy $(P): y = x^2 - 2x - 2$. □

Ví dụ 4

Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$. Xác định a, b, c biết (P) có giá trị nhỏ nhất bằng -5 và đi qua hai điểm $M(1;-1)$, $N(0;4)$.

Lời giải.

Parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$.
Vì $M(1;-1) \in (P)$ nên $-1 = a + b + c$. (1)
Vì $N(0;4) \in (P)$ nên $4 = c$. (2)
Vì (P) có giá trị nhỏ nhất bằng -5 nên $\begin{cases} a > 0 \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b^2 - 4ac = 20a. \end{cases}$ (3)
Từ (1), (2) và (3), ta có $\begin{cases} a + b + 4 = -1 \\ b^2 - 16a = 20a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -5 \\ b^2 - 36a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 - b \\ b^2 - 36 \cdot (-5 - b) = 0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 - b \\ b^2 + 36b + 180 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -6 \\ a = 1 \text{ (nhận)} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} b = -30 \\ a = 25 \text{ (nhận).} \end{cases}$
Vậy $(P_1): y = x^2 - 6x + 4$ và $(P_2): y = 25x^2 - 30x + 4$. □

Ví dụ 5

Cho hàm số $y = x^2 - mx + m + 1$ với $m \in \mathbb{R}$. Hãy xác định m để đồ thị hàm số là parabol có đỉnh nằm trên đường thẳng $y = x$ sao cho hoành độ đỉnh không âm.

Lời giải.

Với giá trị m cố định, gọi $I(x_0; y_0)$ là đỉnh của parabol ($x_0 \geq 0$).

Khi đó $\begin{cases} x_0 = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{m}{2} \\ y_0 = x_0^2 - mx_0 + m + 1. \end{cases}$

Suy ra $y_0 = \dfrac{m^2}{4} - \dfrac{m^2}{2} + m + 1$.

Vì đỉnh I nằm trên đường thẳng $y = x$ nên

$$y_0 = x_0 \Leftrightarrow \frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{2} + m + 1 = \frac{m}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 + \sqrt{5} \\ m = 1 - \sqrt{5}. \end{array}\right.$$

Vì $x_0 \geq 0$ nên $m \geq 0$, do đó $m = 1 + \sqrt{5}$. □

Dạng 5 Các bài toán tương giao

Bước 1. Lập phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị.
Bước 2. Chuyển vế, đưa về phương trình bậc hai.
Bước 3. Giải tìm nghiệm và kết luận số giao điểm

Ví dụ 1

Hãy tìm tọa độ giao điểm của parabol $(P)\colon y = x^2 - 3x + 5$ với trục Ox.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) với Ox là $x^2 - 3x + 5 = 0$ có $\Delta = 9 - 20 = -11 < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

Vậy không có giao điểm của (P) với Ox. □

Ví dụ 2

Hãy tìm tọa độ giao điểm của parabol $y = x^2 + 5x - 6$ cắt trục tung.

Lời giải.

Vì parabol $y = x^2 + 5x - 6$ cắt trục tung nên $x = 0$. Từ đó suy ra $y = -6$.

Vậy tọa độ giao điểm cần tìm là $(0; -6)$. □

Ví dụ 3

Hãy tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng $(d)\colon y = x + 1$ và parabol $(P)\colon y = x^2 - 3x - 4$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) là

$$x+1=x^2-3x-4 \Leftrightarrow x^2-4x-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \Rightarrow y=0 \\ x=5 \Rightarrow y=6. \end{array}\right.$$

Vậy tọa độ giao điểm của (d) và (P) là $A(-1;0)$ và $B(5;6)$. □

Ví dụ 4

Hãy tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=x^2-2x+3$ và $y=x^2+2x-1$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường là
$x^2-2x+3=x^2+2x-1 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=2$.
Vậy tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là $(1;2)$. □

Ví dụ 5

Hãy tìm giá trị thực của m để đường thẳng $d: y=4x-2m$ tiếp xúc với parabol $(P): y=(m-2)x^2+2mx-3m+1$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là
$(m-2)x^2+2mx-3m+1=4x-2m \Leftrightarrow (m-2)x^2+2(m-2)x-m+1=0$.
d tiếp xúc với $(P) \Leftrightarrow$ phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m-2\neq 0 \\ \Delta'=(m-2)^2-(m-2)(-m+1)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m\neq 2 \\ \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow m=\frac{3}{2}.$$

□

Ví dụ 6

Hãy tìm tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y=2x+3$ cắt parabol $y=x^2+(m+2)x-m$ tại hai điểm phân biệt nằm cùng phía với trục tung Oy.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng và parabol đã cho là
$x^2+(m+2)x-m=2x+3 \Leftrightarrow x^2+mx-m-3=0$. (1)
Để đường thẳng d cắt parabol tại hai điểm phân biệt nằm cùng phía với trục tung Oy thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt cùng dấu $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \Delta>0 \\ S>0 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m^2+4m+12>0 \\ m<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m<0.$$

□

Ví dụ 7

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để parabol $(P): y = x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1 \cdot x_2 = 1$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) với trục hoành là
$x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3 = 0$. (1).
Parabol (P) cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1 \cdot x_2 = 1 \Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa $x_1.x_2 = 1$
$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m+1)^2 - \left(m^2 - 3\right) > 0 \\ m^2 - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$ □

Ví dụ 8

Cho hai hàm số $y_1 = x^2 + (m-1)x + m$, $y_2 = 2x + m + 1$. Chứng minh rằng đồ thị hai hàm số luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị m.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số đã cho là
$x^2 + (m-1)x + m = 2x + m + 1 \Leftrightarrow x^2 + (m-3)x - 1 = 0$. (1)
$\Delta = (m-3)^2 + 4 > 0$ luôn đúng $\forall m \in \mathbb{R}$.
Suy ra phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt.
Vậy đồ thị hai hàm số luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt với mọi giá trị m. □

Ví dụ 9

Tìm tất cả các giá trị m để đường thẳng $y = mx + 3 - 2m$ cắt parabol $y = x^2 - 3x - 5$ tại 2 điểm phân biệt có hoành độ trái dấu.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hai đường đã cho là
$x^2 - 3x - 5 = mx + 3 - 2m \Leftrightarrow x^2 - (m+3)x + 2m - 8 = 0$. (∗)
Đường thẳng cắt parabol tại hai điểm phân biệt có hoành độ trái dấu khi và chỉ khi phương trình (∗) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow a \cdot c < 0 \Leftrightarrow 2m - 8 < 0 \Leftrightarrow m < 4$. □

Ví dụ 10

Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ có đồ thị (P) và đường thẳng $d: y = mx + 3$. Tìm giá trị của tham số m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng $\frac{9}{2}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là
$x^2 - 4x + 3 = mx + 3 \Leftrightarrow x^2 - (4+m)x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = m + 4. \end{array}\right.$

d và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt nên $m+4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -4$.
Gọi $A(0;3)$ và $B(m+4; m^2+4m+3)$, ta có OA thuộc Oy nên
$S_{\triangle OAB} = \dfrac{1}{2} \cdot OA \cdot \mathrm{d}(B, Oy) = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot |m+4| = \dfrac{9}{2}$
$\Leftrightarrow |m+4| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-7. \end{array}\right.$
Kết hợp với điều kiện $m \neq -4$ ta nhận $m=-1$, $m=-7$. □

Ví dụ 11

Cho $(P): y = x^2+2x$ và đường thẳng $(d): y = -2x+m$.

a) Xác định tất cả các giá trị của tham số m để (d) và (P) cắt nhau tai hai điểm phân biệt A, B. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB. Chứng minh I luôn chạy trên một đường thẳng cố định.

b) Tìm m sao cho (d) và (P) có điểm chung duy nhất, tìm tọa độ của điểm chung này.

Lời giải.

Cho $(P): y = x^2+2x$ và đường thẳng $(d): y = -2x+m$.

a) Ta biết (d) và (P) cắt nhau tai hai điểm phân biệt A, B
$\Leftrightarrow x^2+2x = -2x+m \Leftrightarrow x^2+4x-m=0$ (1) có 2 nghiệm phân biệt
$\Leftrightarrow \Delta' = 4+m > 0 \Leftrightarrow m > -4$.
Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là $x_I = \dfrac{1}{2}(x_A+x_B) = -2$.
Tức là I luôn chạy trên một đường thẳng cố định $x=-2$.

b) (d) và (P) có điểm chung duy nhất khi và chỉ khi (1) có nghiệm kép
$\Leftrightarrow \Delta' = 4+m = 0 \Leftrightarrow m = -4$.
Khi $m=-4 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x^2+4x+4=0 \Leftrightarrow (x+2)^2=0 \Leftrightarrow x=-2 \Rightarrow y=0$.
Vậy tọa độ của điểm chung $M(-2;0)$.

□

Ví dụ 12

Cho hai hàm số $y = x^2-2(m-1)x-2m$ và $y=2x+3$. Tìm m để đồ thị các hàm số đó cắt nhau tại hai điểm A và B phân biệt sao cho OA^2+OB^2 nhỏ nhất (trong đó O là gốc tọa độ).

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số đã cho là
$x^2-2(m-1)x-2m = 2x+3 \Leftrightarrow x^2-2mx-2m-3=0$. $(*)$
Ta có $\Delta' = m^2+2m+3 > 0$ với mọi m nên $(*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt hay hai đồ thị luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B.
Gọi x_A, x_B là hai nghiệm của phương trình $(*)$.
Khi đó $A(x_A; 2x_A+3)$, $B(x_B; 2x_B+3)$
Ta có $\overrightarrow{OA} = (x_A; 2x_A+3)$, $\overrightarrow{OB} = (x_B; 2x_B+3)$.

$$OA^2+OB^2 = x_A^2+(2x_A+3)^2+x_B^2+(2x_B+3)^2$$

$$= 5\left(x_A^2 + x_B^2\right) + 12\left(x_A + x_B\right) + 18$$
$$= 5\left(x_A + x_B\right)^2 + 12\left(x_A + x_B\right) + 18 - 10x_Ax_B. \quad (1)$$

Theo định lí Vi-et ta có $x_A + x_B = 2m, x_Ax_B = -2m - 3$.

Khi đó (1) trở thành $OA^2 + OB^2 = 20m^2 + 44m + 48 = 20\left(m + \dfrac{11}{10}\right)^2 + \dfrac{119}{5}$.

Tìm được $OA^2 + OB^2$ nhỏ nhất bằng $\dfrac{119}{5}$ khi $m = \dfrac{-11}{10}$.

Vậy $m = \dfrac{-11}{10}$ là giá trị cần tìm. □

Ví dụ 13

Cho Parabol $(P) : y = x^2 + 2mx + 3$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị (P) cắt trục Ox tại 2 điểm phân biệt A và B sao cho tam giác IAB là tam giác đều (với I là đỉnh của (P)).

Lời giải.

Đỉnh của $(P) : I\left(-m; 3 - m^2\right)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và trục Ox là $x^2 + 2mx + 3 = 0$. $(*)$

(P) cắt Ox tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -\sqrt{3} \\ m > \sqrt{3}. \end{array}\right.$

Khi đó phương trình $(*)$ có nghiệm $x_1 = -m + \sqrt{m^2 - 3}, x_2 = -m - \sqrt{m^2 - 3}$

$\Rightarrow A\left(-m + \sqrt{m^2 - 3}\,0\right), B\left(-m - \sqrt{m^2 - 3}\,0\right), \overrightarrow{AB}\left(-2\sqrt{m^2 - 3}; 0\right), \overrightarrow{IA}\left(\sqrt{m^2 - 3}; m^2 - 3\right)$.

Do (P) nhận đường thẳng $x = -m$ làm trục đối xứng suy ra tam giác IAB cân tại I để tam giác IAB đều $\Leftrightarrow AB = IA \Leftrightarrow \sqrt{4\left(m^2 - 3\right)} = \sqrt{\left(m^2 - 3\right) + \left(m^2 - 3\right)^2}$

$\Leftrightarrow 4\left(m^2 - 3\right) = \left(m^2 - 3\right) + \left(m^2 - 3\right)^2$

$\Leftrightarrow m^2 - 3 = 3 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{6}$.

Kết hợp điều kiện ta nhận $m = \pm\sqrt{6}$. □

Dạng 6 Điểm đặc biệt của họ đồ thị hàm số bậc hai

Ví dụ 1

Hãy tìm quỹ tích đỉnh của parabol $(P) : y = x^2 + mx + 1$.

Lời giải.

Đỉnh của parabol này là điểm $(x; y) = \left(-\dfrac{m}{2}; \dfrac{(4 - m^2)}{4}\right) = \left(-\dfrac{m}{2}; 1 - \left(\dfrac{m}{2}\right)^2\right)$.

Tức là $y = 1 - x^2$.

Như vậy quỹ tích các đỉnh này chính là 1 parabol dạng $y = 1 - x^2$. □

Ví dụ 2

Cho parabol: $y = x^2 + (2m+1)x + m^2 - 1$. Trong đó m là tham số. Tìm quỹ tích đỉnh của parabol khi m biến thiên.

Lời giải.

Tọa độ đỉnh của parabol $y = x^2 + (2m+1)x + m^2 - 1$ là

$$\begin{cases} x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(2m+1)}{2} = -m - \dfrac{1}{2} & (1) \\ y = \dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{-(4m+5)}{4} = -m - \dfrac{5}{4} & (2). \end{cases}$$

Khử m từ (1) và (2) ta được quỹ tích của đỉnh của parabol là đường $y = x - \dfrac{3}{4}$. □

Ví dụ 3

Cho hàm $y = x^2 - 4mx + m^2 - 2m$. Hãy tìm quỹ tích đỉnh I của Parabol.

Lời giải.

Đỉnh $I(2m\,;\,-3m^2-2m)$.

Thay $m = \dfrac{x}{2}$ ta được $(P): y = \dfrac{-3}{4}x^2 - x$.

Như vậy quỹ tích các đỉnh này chính là 1 parabol $(P): y = \dfrac{-3}{4}x^2 - x$. □

Ví dụ 4

Chứng minh rằng với mọi m, đồ thị hàm số $y = mx^2 + 2(m-2)x - 3m + 1$ luôn đi qua hai điểm cố định.

Lời giải.

Gọi $A(x_0; y_0)$ là điểm cố định của đồ thị hàm số

$\Leftrightarrow y_0 = mx_0^2 + 2(m-2)x_0 - 3m + 1$, với mọi m.

$\Leftrightarrow m(x_0^2 + 2x_0 - 3) - 4x_0 - y_0 + 1 = 0$, với mọi m

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 + 2x_0 - 3 = 0 \\ -4x_0 - y_0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 13. \end{cases}$$

Vậy đồ thị luôn đi qua hai điểm cố định là $A_1(1;-3)$ hoặc $A_2(-3;13)$ với mọi giá trị của m. □

Ví dụ 5

Hãy tìm điểm cố định của họ parabol $y = (m-1)x^2 - m + 2$ luôn đi qua với mọi m.

Lời giải.

Gọi $A(x_0; y_0)$ là điểm cố định của đồ thị hàm số

$\Leftrightarrow y_0 = (m-1)x_0^2 - m + 2$, với mọi m

$\Leftrightarrow m(x_0^2 - 1) - x_0^2 + 2 - y_0 = 0$, với mọi m

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - 1 = 0 \\ x_0^2 - 2 + y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1. \end{cases}$

Vậy đồ thị luôn đi qua một điểm cố định là $A(1;1)$. □

Ví dụ 6

Chứng minh rằng parabol $y = 2x^2 - 4(2m-1)x + 8m^2 - 3$ luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định.

Lời giải.

Gọi $y = ax + b$ là đường thẳng mà parabol luôn tiếp xúc.
Phương trình trình hoành độ giao điểm
$2x^2 - 4(2m-1)x + 8m^2 - 3 = ax + b \Leftrightarrow 2x^2 - (8m - 4 + a)x + 8m^2 - 3 - b = 0.$ (1)
Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (1) luôn có nghiệm kép với mọi m
$\Leftrightarrow \Delta = (8m - 4 + a)^2 - 8\left(8m^2 - 3 - b\right) = 0, \forall m$
$\Leftrightarrow 16(-4+a)m + (-4+a)^2 + 8(3+b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -4 + a = 0 \\ (-4+a)^2 + 8(3+b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -3. \end{cases}$
Vậy parabol $y = 2x^2 - 4(2m-1)x + 8m^2 - 3$ luôn tiếp xúc với đường thẳng $y = 4x - 3$. □

Ví dụ 7

Chứng minh rằng các đường thẳng sau luôn tiếp xúc với một parabol cố định.

a) $y = 2mx - m^2 + 4m + 2\ (m \neq 0)$;

b) $y = (4m-2)x - 4m^2 - 2\left(m \neq \dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải.

a) Gọi $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ là parabol cần tìm.
Phương trình trình hoành độ giao điểm $ax^2 + bx + c = 2mx - m^2 + 4m + 2$
$\Leftrightarrow ax^2 + (b - 2m)x + c + m^2 - 4m - 2 = 0.$ (1)
Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (1) luôn có nghiệm kép với mọi m
$\Leftrightarrow \Delta = (b-2m)^2 - 4a\left(c + m^2 - 4m - 2\right) = 0$, với mọi m
$\Leftrightarrow 4(1-a)m^2 - 4(b-4a)m + b^2 - 4ac + 8a = 0$, với mọi m
$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - a = 0 \\ b - 4a = 0 \\ b^2 - 4ac + 8a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = 6. \end{cases}$
Vậy đường thẳng $y = 2mx - m^2 + 4m + 2$ luôn tiếp xúc với parabol $y = x^2 + 4x + 6$.
b) Gọi $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ là parabol cần tìm.
Phương trình trình hoành độ giao điểm $ax^2 + bx + c = (4m-2)x - 4m^2 - 2$
$\Leftrightarrow ax^2 + (b - 4m + 2)x + c + 4m^2 + 2 = 0.$ (2)
Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình (2) luôn có nghiệm kép với mọi m
$\Leftrightarrow \Delta = (b - 4m + 2)^2 - 4a\left(c + 4m^2 + 2\right) = 0$, với mọi m
$\Leftrightarrow [4m - (b+2)]^2 - 4a\left(c + 4m^2 + 2\right) = 0$, với mọi m
$\Leftrightarrow 16(1-a)m^2 - 8(b+2)m + (b+2)^2 - 4ac - 8a = 0$, với mọi m
$\Leftrightarrow 16(1-a)m^2 - 8(b+2)m + (b+2)^2 - 4ac - 8a = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-a=0 \\ b+2=0 \\ (b+2)^2-4ac-8a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=-2. \end{cases}$

Vậy đường thẳng $y=(4m-2)x-4m^2-2$ luôn tiếp xúc với parabol $y=x^2-2x-2$.

□

C BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1

Vẽ các đường parabol sau

a) $y=x^2-3x+2$

b) $y=-2x^2+2x+3$

c) $y=x^2+2x+1$

d) $y=-x^2+x-1$

Lời giải.

a. Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Đỉnh $I\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{4}\right)$.

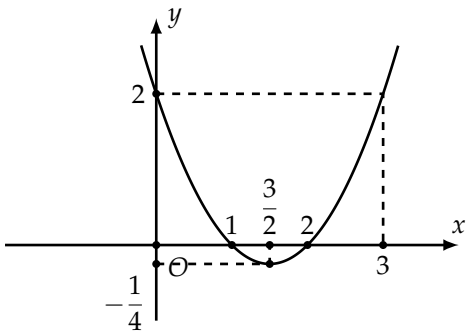
Trục đối xứng $x=\frac{3}{2}$.

Đồ thị của hàm số cắt trục Ox tại hai điểm $A(1;0)$, $B(2;0)$ và cắt trục Oy tại một điểm $C(0;2)$.

Để vẽ đồ thị (P) ta lấy một số điểm theo bảng giá trị sau

x	0	1	$\frac{3}{2}$	2	3
y	2	0	$-\frac{1}{4}$	0	2

Ta có đồ thị (P) như hình vẽ.



b. Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

Đỉnh $I\left(\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right)$.

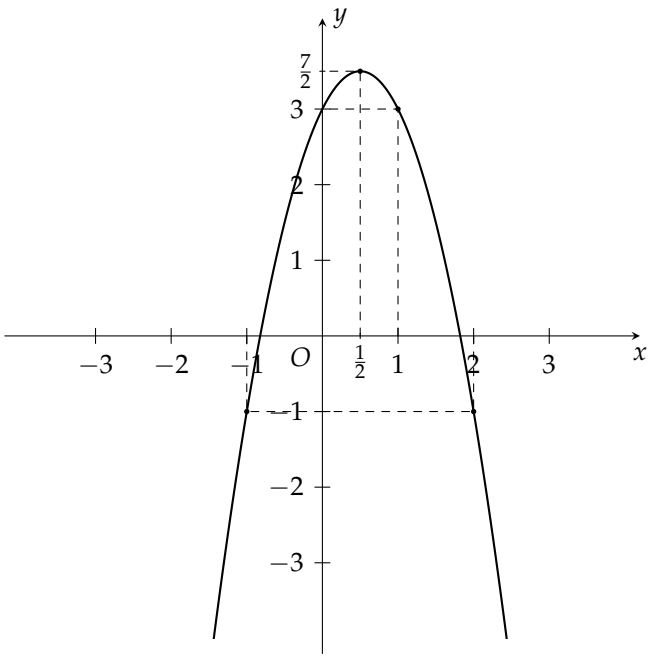
Trục đối xứng $x=\frac{1}{2}$.

Đồ thị của hàm số cắt trục Ox tại hai điểm $A\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2};0\right)$, $B\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2};0\right)$ và cắt trục Oy tại một điểm $C(0;3)$.

Để vẽ đồ thị (P) ta lấy một số điểm theo bảng giá trị sau

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y	-1	3	$\frac{7}{2}$	3	-1

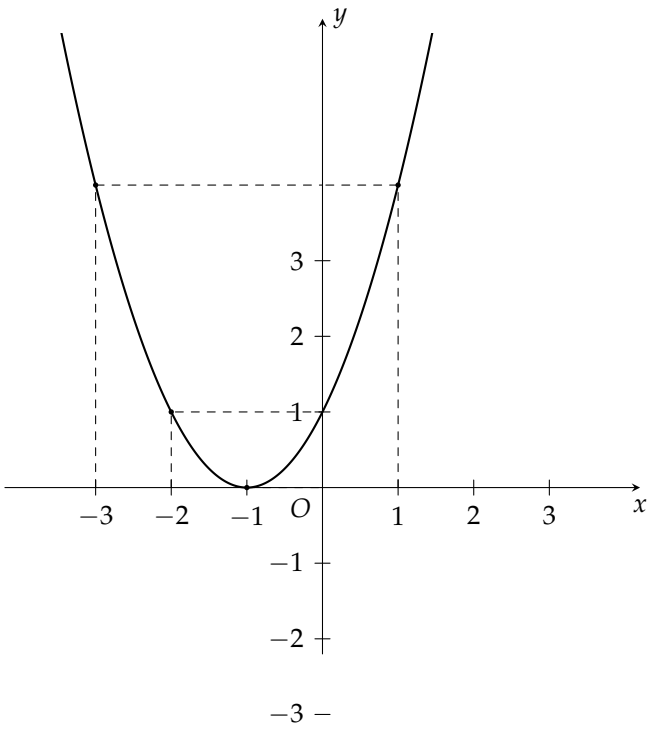
Ta có đồ thị (P) như hình vẽ.



c. Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
Đỉnh $I(-1\,;\,0)$.
Trục đối xứng $x = -1$.
Đồ thị của hàm số cắt trục Ox tại một điểm $A(-1\,;\,0)$ và cắt trục Oy tại một điểm $C(0\,;\,1)$.
Để vẽ đồ thị (P) ta lấy một số điểm theo bảng giá trị sau

x	-3	-2	-1	0	1
y	4	1	0	1	4

Ta có đồ thị (P) như hình vẽ.



d. Tập xác định $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.

Đỉnh $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right)$.

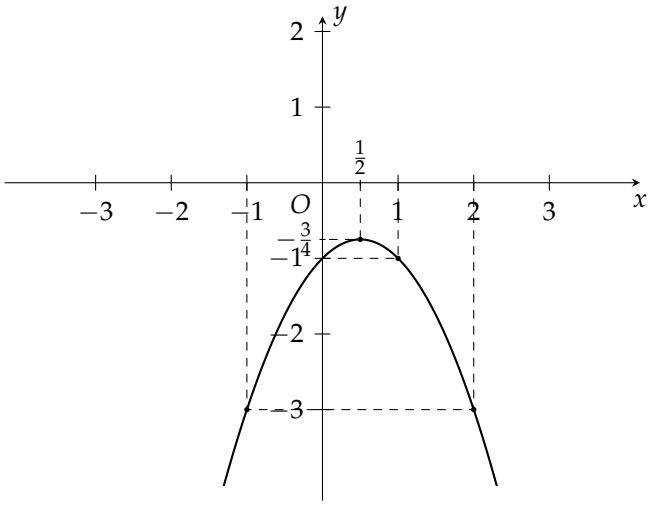
Trục đối xứng $x = \frac{1}{2}$.

Đồ thị của hàm số không cắt trục Ox và cắt trục Oy tại một điểm $C\,(0\,;\,-1)$.

Để vẽ đồ thị (P) ta lấy một số điểm theo bảng giá trị sau

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y	-3	-1	$-\frac{3}{4}$	-1	-3

Ta có đồ thị (P) như hình vẽ.



□

Bài 2

Từ các parabol đã vẽ ở Bài tập 6.7, hãy cho biết khoảng đồng biến và khoảng nghịch biến của mỗi hàm số bậc hai tương ứng.

Lời giải.

a. Dựa vào đồ thị (P) ta thấy hàm số $y = x^2 - 3x + 2$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$.

b. Dựa vào đồ thị (P) ta thấy hàm số $y = -2x^2 + 2x + 3$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

c. Dựa vào đồ thị (P) ta thấy hàm số $y = x^2 + 2x + 1$ đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

d. Dựa vào đồ thị (P) ta thấy hàm số $y = -x^2 + x - 1$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

□

Bài 3

Xác định parabol $y = ax^2 + bx + 1$, trong mỗi trường hợp sau

a. Đi qua hai điểm $A(1;0)$ và $B(2;4)$;

b. Đi qua điểm $A(1;0)$ và có trục đối xứng $x = 1$;

c. Có đỉnh $I(1;2)$;

d. Đi qua điểm $A(-1;6)$ và có tung độ đỉnh -0,25.

Lời giải.

a. Vì parabol $y = ax^2 + bx + 1$ đi qua hai điểm $A(1;0)$ và $B(2;4)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a + b + 1 = 0 \\ 4a + 2b + 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ 4a + 2b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{2} \\ b = -\frac{7}{2}. \end{cases}$$

Vậy parabol $y = \frac{5}{2}x^2 - \frac{7}{2}x + 1$.

b. Vì parabol $y = ax^2 + bx + 1$ đi qua điểm $A(1;0)$ và có trục đối xứng $x = 1$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a + b + 1 = 0 \\ -\frac{b}{2a} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2. \end{cases}$$

Vậy parabol $y = x^2 - 2x + 1$.

c. Vì parabol $y = ax^2 + bx + 1$ có đỉnh $I(1;2)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a+b+1=2 \\ -\dfrac{b}{2a}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ 2a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2. \end{cases}$$

Vậy parabol $y = -x^2 + 2x + 1$.

d. Vì parabol $y = ax^2 + bx + 1$ đi qua điểm $A(-1;6)$ và có tung độ đỉnh -0,25 nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a-b+1=6 \\ -\dfrac{\Delta}{4a}=-0,25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b=5 \\ b^2-4a=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b+5 \\ b^2-5a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=0 \\ a=5 \end{cases} \\ \begin{cases} b=5 \\ a=10. \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy có 2 parabol là $y = 5x^2 + 1$ và $y = 10x^2 + 5x + 1$.

□

Bài 4

Xác định parabol $y = ax^2 + bx + c$, biết rằng parabol đó đi qua điểm $A(8;0)$ và có đỉnh là $I(6;-12)$.

Lời giải.

Vì parabol $y = ax^2 + bx + c$ đi qua điểm $A(8;0)$ và có đỉnh $I(6;12)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 64a+8b+c=0 \\ -\dfrac{b}{2a}=6 \\ 36a+6b+c=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 64a+8b+c=0 \\ 12a+b=0 \\ 36a+6b+c=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=36 \\ c=-96. \end{cases}$$

Vậy parabol $y = -3x^2 + 36x - 96$. □

Bài 5

Gọi (P) là đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$. Hãy xác định dấu của hệ số a và biệt thức Δ, trong mỗi trường hợp sau

a. (P) nằm hoàn toàn phía trên trục hoành;

b. (P) nằm hoàn toàn phía dưới trục hoành;

c. (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và có đỉnh nằm phía dưới trục hoành;

d. (P) tiếp xúc với trục hoành và nằm phía trên trục hoành.

Lời giải.

a. Do (P) nằm hoàn toàn phía trên trục hoành nên bề lõm của parabol quay lên suy ra $a > 0$.
Vì (P) nằm hoàn toàn phía trên trục hoành nên phương trình hoành độ giao điểm của (P) và trục Ox vô nghiệm suy ra biệt thức $\Delta < 0$.

b. Do (P) nằm hoàn toàn phía dưới trục hoành nên bề lõm của parabol quay xuống suy ra $a < 0$.
Vì (P) nằm hoàn toàn phía dưới trục hoành nên phương trình hoành độ giao điểm của (P) và trục Ox vô nghiệm suy ra biệt thức $\Delta < 0$.

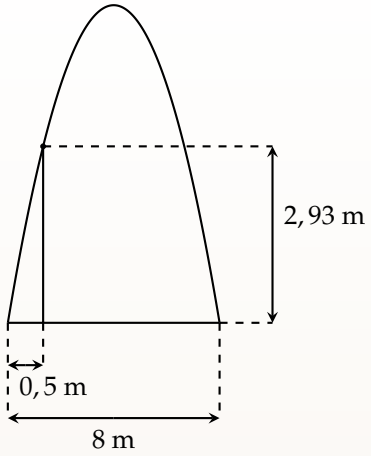
c. Vì (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt nên phương trình hoành độ giao điểm của (P) và trục Ox có 2 nghiệm phân biệt suy ra biệt thức $\Delta > 0$.
Do (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt và có đỉnh nằm phía dưới trục hoành nên bề lõm của parabol hải quay lên suy ra $a > 0$.

d. Vì (P) tiếp xúc với trục hoành nên phương trình hoành độ giao điểm của (P) và trục Ox có nghiệm kép suy ra biệt thức $\Delta = 0$.
Do (P) tiếp xúc với trục hoành và nằm phía trên trục hoành nên bề lõm của parabol phải quay lên suy ra $a > 0$.

□

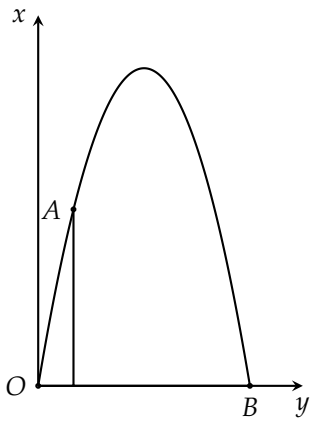
Bài 6

Hai bạn An và Bình trao đổi với nhau. An nói: "Tớ đọc ở một tài liệu thấy nói rằng cổng Trường Đại học Bách khoa Hà Nội có dạng một parabol, khoảng cách giữa hai chân cổng là 8 m và chiều cao của cổng tính từ một điểm trên mặt đất cách chân cổng 0,5 m là 2,93 m. Từ đó tớ tính ra được chiều cao của cổng parabol đó là 12 m".
Sau một hồi suy nghĩ, Bình nói: "Nếu dữ kiện như bạn nói, thì chiều cao của cổng parabol mà bạn tính ra ở trên là không chính xác".
Dựa vào thông tin mà An đọc được, em hãy tính chiều cao của cổng Trường Đại học Bách khoa Hà Nội để xem kết quả bạn An tính được có chính xác không nhé!



Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ bên.
Khi đó $O(0;0)$, $B(8,0)$ và $A(0,5;2,93)$. Gọi phương trình của Parabol là $y = ax^2 + bx + c$. Thay độ từng điểm O, A, B vào phương trình ta được hệ phương trình



$$\begin{cases} 0x + 0b + c = 0 \\ 0,25a + 0,5b + c = 2,93 \\ 64a + 8b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{293}{375} \\ b = \dfrac{2344}{375} \\ c = 0. \end{cases}$$

Suy ra parabol có phương trình $y = -\dfrac{293}{275}x^2 + \dfrac{2344}{375}x$.
Chiều cao của cổng chính là tung độ đỉnh của parabol

$$h = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{4688}{375} \approx 12,5 \text{ (mét)}.$$

Vậy kết quả bạn An tính được chưa chính xác.

□

Bài 7

Bác Hùng dùng 40 m lưới thép gai rào thành một mảnh vườn hình chữ nhật để trồng rau.

a. Tính diện tích mảnh vườn hình chữ nhật rào được theo chiều rộng x (mét) của nó.

b. Tìm kích thước của mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích lớn nhất mà bác Hùng có thể rào được.

Lời giải.

a. Gọi y (mét) là chiều rộng của hình chữ nhật. Điều kiện $x, y > 0$.
Vì bác Hùng dùng 40 m lưới thép gai rào thành một mảnh vườn hình chữ nhật để trồng rau nên chu vi của hình chữ nhật là 40 m suy ra $2(x+y) = 40 \Rightarrow x + y = 20 \Rightarrow y = 20 - x$.
Diện tích mảnh vườn hình chữ nhật là $S = xy = x(20 - x) = -x^2 + 20x$.

b. Vì $y > 0$ nên $20 - x > 0 \Rightarrow 0 < x < 20$.
Hàm số $S(x) = -x^2 + 20x$ có bảng biến thiên

x	0		10		20
$S(x)$	0	$\nearrow$	100	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy diện tích lớn nhất mà bác Hùng có thể rào được là 100 m^2 khi mảnh vườn có hình vuông cạnh 10 m.

Bài 8

Quỹ đạo của một vật được ném lên từ gốc O (được chọn là điểm ném) trong mặt phẳng toạ độ Oxy là một parabol có phương trình $y = \dfrac{-3}{1000} \cdot x^2 + x$, trong đó x (mét) là khoảng cách theo phương ngang trên mặt đất từ vị trí của vật đến gốc Oy (mét) là độ cao của vật so với mặt đất.

a. Tìm độ cao cực đại của vật trong quá trình bay.

b. Tính khoảng cách từ điểm chạm đất sau khi bay của vật đến gốc O. Khoảng cách này gọi là tầm xa của quỹ đạo.

Lời giải.

a. Độ cao cực đại của vật trong quá trình bay chính bằng với tung độ của parabol là $h = -\dfrac{\Delta}{4a} = -\dfrac{1}{4 \cdot \left(-\dfrac{3}{1000}\right)} = \dfrac{250}{3}$ (mét).

b. Lập phương trình hoành độ giao điểm của parabol và trục Ox

$$\frac{-3}{1000} \cdot x^2 + x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{1000}{3} \end{array}\right.$$

Khoảng cách từ điểm chạm đất sau khi bay của vật đến gốc O là $\dfrac{1000}{3}$ (mét).

Vậy tầm xa của quỹ đạo là $\dfrac{1000}{3}$ (mét)

□
□

Bài 9

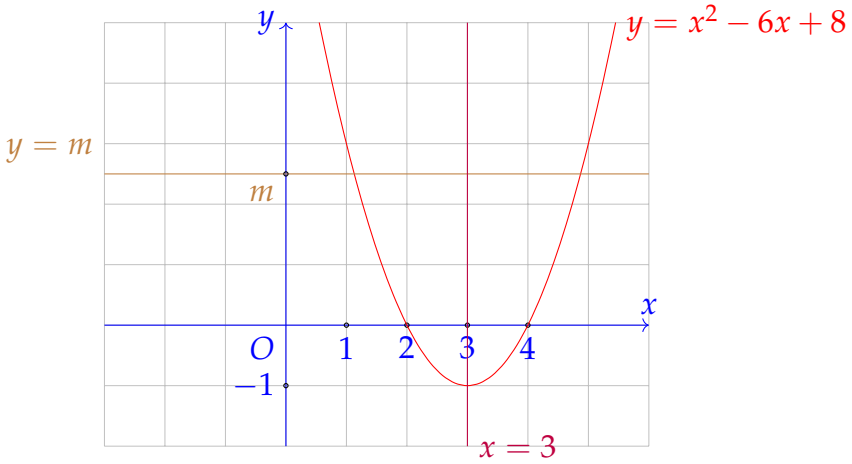
Cho hàm số $y = x^2 - 6x + 8$.
a) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số trên.
b) Sử dụng đồ thị để biện luận theo tham số m số điểm chung của đường thẳng $y = m$ và đồ thị hàm số trên.
c) Sử dụng đồ thị, hãy nêu các khoảng trên đó hàm số chỉ nhận giá trị dương.
d) Sử dụng đồ thị, hãy tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[-1;5]$.

Lời giải.

a) Ta có $-\dfrac{b}{2a} = 3, -\dfrac{\Delta}{4a} = -1$.
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra đồ thị hàm số $y = x^2 - 6x + 8$ có đỉnh là $I(3;-1)$, nhận đường thẳng $x = 3$ làm trục đối xứng, hướng bề lõm lên trên và đi qua các điểm $A(2;0), B(4;0)$.



Đường thẳng $y = m$ song song hoặc trùng với trục hoành do đó dựa vào đồ thị ta có:
+ Với $m < -1$ đường thẳng $y = m$ và parabol $y = x^2 - 6x + 8$ không cắt nhau.
+ Với $m = -1$ đường thẳng $y = m$ và parabol $y = x^2 - 6x + 8$ cắt nhau tại một điểm (tiếp xúc).
+ Với $m > -1$ đường thẳng $y = m$ và parabol $y = x^2 - 6x + 8$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt.
c) Hàm số nhận giá trị dương ứng với phần đồ thị nằm hoàn toàn trên trục hoành.
Do đó hàm số chỉ nhận giá trị dương khi và chỉ khi $x \in (-\infty;2) \cup (4;+\infty)$.
d) Ta có $y(-1) = 15, y(5) = 13, y(3) = -1$, kết hợp với đồ thị hàm số suy ra:
$\max\limits_{[-1;5]} y = 15$ khi và chỉ khi $x = -1$.
$\min\limits_{[-1;5]} y = -1$ khi và chỉ khi $x = 3$. □

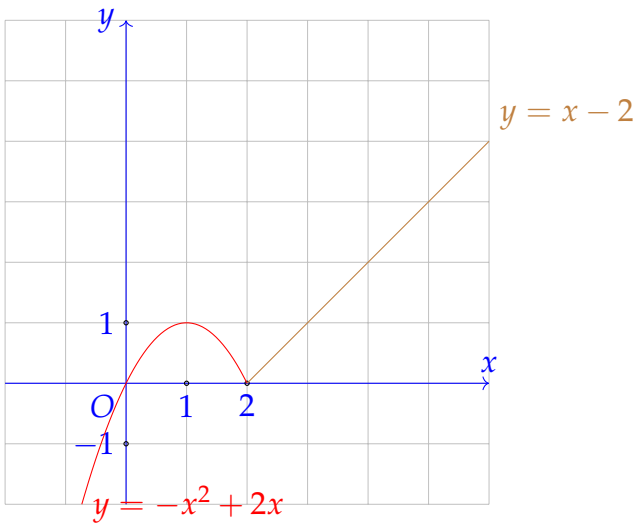
Bài 10

Vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y=\begin{cases} x-2 \text{ khi } x \geqslant 2 \\ -x^2+2x \text{ khi } x<2 \end{cases}$
b) $y=\left|x^2-x-2\right|$.

Lời giải.

a) Đồ thị hàm số $y=\begin{cases} x-2 \text{ khi } x \geqslant 2 \\ -x^2+2x \text{ khi } x<2 \end{cases}$ gồm:
+ Đường thẳng $y=x-2$ đi qua $A(2;0)$, $B(0;-2)$ và lấy phần nằm bên phải của đường thẳng $x=2$.
+ Parabol $y=-x^2+2x$ có đỉnh $I(1;2)$, trục đối xứng $x=1$, đi qua các điểm $O(0;0)$ $C(2;0)$ và lấy phần đồ thị nằm bên trái của đường thẳng $x=2$.

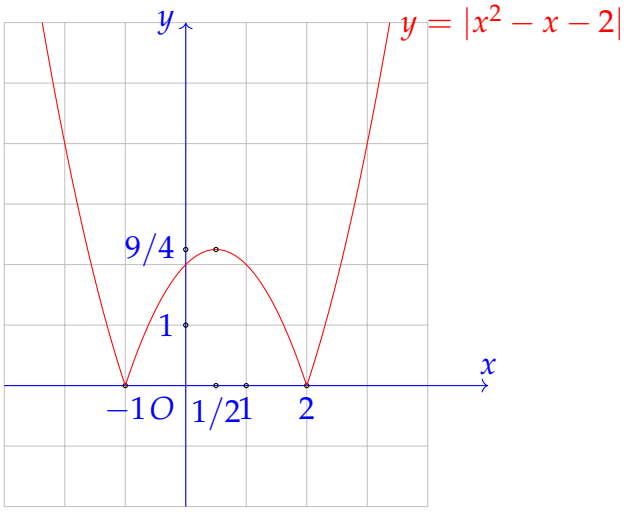


b)

• Vẽ đồ thị hàm số $y=|f(x)|=\left|ax^2+bx+c\right|$, $(a\neq 0)$
✓ Bước 1: Vẽ parabol $(P): y=ax^2+bx+c$.
✓ Bước 2: Suy ra đồ thị hàm số $y=|f(x)|=\left|ax^2+bx+c\right|$, $(a\neq 0)$ như sau:
○ Giữ nguyên phần đồ thị (P) ở phía đrên trục Ox.
○ Lấy đối xíng phần đồ thị (P) ở phía dưới trục Ox qua trục Ox.
○ Đồ thì cần tìm là hợp hai phần trên.

Vẽ parabol (P) của đồ thị hàm số $y=x^2-x-2$ có đỉnh $I\left(\frac{1}{2};-\frac{5}{4}\right)$, trục đối xứng $x=\frac{1}{2}$, đi qua các điểm $A(-1;0)$, $B(2;0)$, $C(0;-2)$, $D(1;-2)$.
Khi đó đồ thị hàm số $y=\left|x^2-x-2\right|$ gồm phần parabol (P) nằm phía trên trục hoành và phần đối

xứng của (P) nằm dưới trục hoành qua trục hoành.



□

Bài 11

Xác định parabol $(P): y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ biết:
a) (P) đi qua $A(2;3)$ có đỉnh $I(1;2)$.
b) $c = 2$ và (P) đi qua $B(3;-4)$ và có trục đối xứng là $x = -\dfrac{3}{2}$.
c) Hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{3}{4}$ khi $x = \dfrac{1}{2}$ và nhận giá trị bằng 1 khi $x = 1$. d) (P) đi qua $M(4;3)$ cắt Ox tại $N(3;0)$ và P sao cho ΔINP có diện tích bằng 1 biết hoành độ điểm P nhỏ hơn 3.

Lời giải.

a) Ta có: $A \in (P)$ nên $3 = 4a + 2b + c$.
Parabol (P) có đỉnh $I(1;2)$ nên $-\dfrac{b}{2a} = 1 \Leftrightarrow 2a + b = 0$.
$I \in (P)$ suy ra $2 = a + b + c$.
Từ đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} 4a + 2b + c = 3 \\ 2a + b = 0 \\ a + b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 3 \end{cases}$
Vậy parabol (P) cần tìm là $y = x^2 - 2x + 3$.
b) Ta có $c = 2$ và (P) đi qua $B(3;-4)$ nên $-4 = 9a + 3b + 2 \Leftrightarrow 3a + b = -2$.
(P) có trục đối xứng là $x = -\dfrac{3}{2}$ nên $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow b = 3a$.
Từ đó suy ra: $a = -\dfrac{1}{3}$ và $b = -1$.
Vậy parabol (P) cần tìm là $y = -\dfrac{1}{3}x^2 - x + 2$.
c) Hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{3}{4}$ khi $x = \dfrac{1}{2}$ nên ta có: $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a + b = 0, \dfrac{3}{4} = a\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + b\left(\dfrac{1}{2}\right) + c \Leftrightarrow a + 2b + 4c = 3$ và $a > 0$. Hàm số $y = ax^2 + bx + c$ nhận giá trị bằng 1 khi $x = 1$ nên $a + b + c = 1$.
Từ đó ta có hệ phương trình $\begin{cases} a + b = 0 \\ a + 2b + 4c = 3 \\ a + b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$

Vậy parabol (P) cần tìm là $y = x^2 - x + 1$.
d) Vì (P) đi qua $M(4;3)$ nên $3 = 16a + 4b + c \quad (1)$.
Mặt khác (P) cắt Ox tại $N(3;0)$ suy ra $0 = 9a + 3b + c \quad (2)$, (P) cắt Ox tại P nên P có tọa độ $P(t;0)$, $t < 3$.
Theo định lý Viét ta có $\begin{cases} t + 3 = -\dfrac{b}{a} \\ 3t = \dfrac{c}{a} \end{cases}$
Ta có $S_{\triangle IBC} = \dfrac{1}{2} IH.NP$ với H là hình chiếu của $I\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$ lên trục hoành.
Do $IH = \left|-\dfrac{\Delta}{4a}\right|$, $NP = 3 - t$ nên
$S_{\Delta INP} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left|-\dfrac{\Delta}{4a}\right| \cdot (3 - t) = 1$
$\Leftrightarrow (3 - t)\left|\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{c}{a}\right| = \left|\dfrac{2}{a}\right|$
$\Leftrightarrow (3 - t)\left|\dfrac{(t+3)^2}{4} - 3t\right| = \left|\dfrac{2}{a}\right| \Leftrightarrow (3 - t)^3 = \dfrac{8}{|a|} \quad (3)$.
Từ (1) và (2) ta có $7a + b = 3 \Leftrightarrow b = 3 - 7a$.
Suy ra $t + 3 = -\dfrac{3 - 7a}{a} \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} = \dfrac{4 - t}{3}$.
Thay vào (3) ta có $(3 - t)^3 = \dfrac{8(4 - t)}{3} \Leftrightarrow 3t^3 - 27t^2 + 73t - 49 = 0 \Leftrightarrow t = 1$.
Suy ra $a = 1 \Rightarrow b = -4 \Rightarrow c = 3$.
Vậy parabol (P) cần tìm là $y = x^2 - 4x + 3$. □

Bài 12

Vẽ đồ thị của hàm số sau:
a) $y = x^2 - 3|x| + 2$.
b) $y = |x^2 - 3|x| + 2|$.

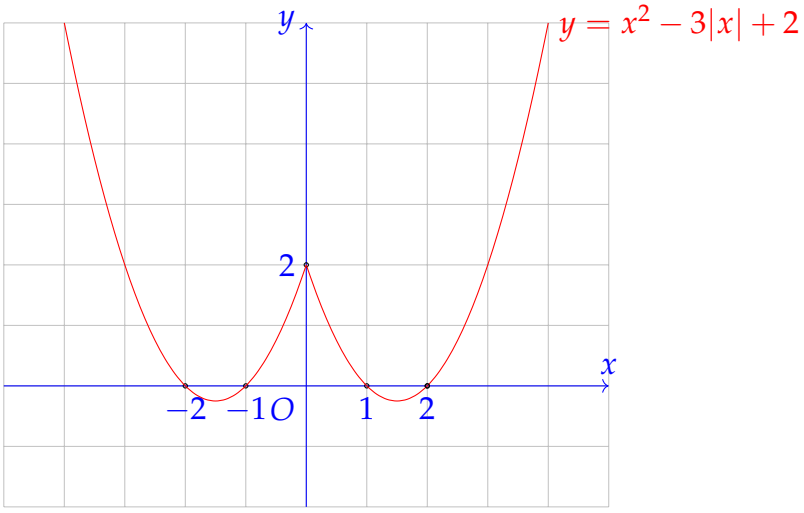
Lời giải.

a)

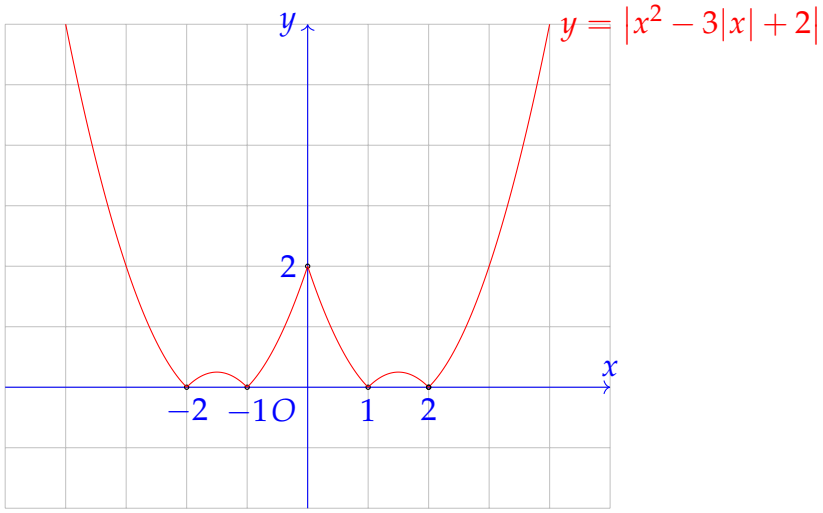
- Vẽ đồ thị hàm số $y = f(|x|) = ax^2 + b|x| + c$, $(a \neq 0)$
✓ Bước 1: Vẽ parabol $(P) : y = ax^2 + bx + c$.
✓ Bước 2: Suy ra đồ thị hàm số $y = f(|x|) = ax^2 + b|x| + c$, $(a \neq 0)$ như sau:
○ Giữ nguyên phần đồ thị (P) ở phía bên phải trục Oy, bỏ phần bên trái trục Oy.
○ Lấy đối xứng phần đồ thị (P) ở phía bên phải trục Oy qua trục Oy.
○ Đồ thị cần tìm là hợp hai phần trên.

Vẽ đồ thị hàm số $(P) : y = x^2 - 3x + 2$ có đỉnh $I\left(\dfrac{3}{2}; -\dfrac{1}{4}\right)$, trục đối xứng $x = \dfrac{3}{2}$, đi qua các điểm $A(1;0), B(2;0), C(0;2), D(3;2)$ và có phần bề lõm hướng lên trên. Khi đó đồ thị hàm số $y = x^2 - 3|x| + 2$ là (P_1) gồm phần bên phải trục tung của (P) và phần lấy đối xứng của nó qua trục

tung.



b) Đồ thị hàm số $y = \left|x^2 - 3|x| + 2\right|$ là (P_2) gồm phần phía trên trục hoành của (P_1) và phần đối xứng của (P_1) nằm phía dưới trục hoành qua trục hoành.



□

Bài 13

Cho phương trình $x^2 + 2(m+3)x + m^2 - 3 = 0$, m là tham số. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 và $P = 5(x_1 + x_2) - 2x_1x_2$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.

Ta có: $\Delta' = (m+3)^2 - (m^2 - 3) = 6m + 12$.
Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geqslant 0 \Leftrightarrow 6m + 12 \geqslant 0 \Leftrightarrow m \geqslant -2$.
Theo định lý Viét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2(m+3) \\ x_1x_2 = m^2 - 3 \end{cases}$
$P = -10(m+3) - 2(m^2 - 3) = -2m^2 - 10m - 24$.
Xét hàm số $y = -2x^2 - 10x - 24$ với $x \in [-2; +\infty)$.

Bảng biến thiên:

x	$-\frac{5}{2}$	-2	$+\infty$
y'		$-$	
y		12 ↘	$-\infty$

Suy ra $\max\limits_{[-2;+\infty)} y = -12$ khi và chỉ khi $x = -2$.

Vậy $m = -2$ là giá trị cần tìm. □

Bài 14

Cho hàm số $y = x^2 - 2x - 2$ có đồ thị là parabol (P) và đường thẳng (d) có phương trình $y = x + m$. Giá trị của m để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $OA^2 + OB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số: $x^2 - 2x - 2 = x + m \Leftrightarrow x^2 - 3x - m - 2 = 0 \quad (*)$

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt

$\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 9 + 4(m+2) > 0 \Leftrightarrow 4m + 17 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{17}{4}$.

Gọi $A\left(x_A; y_A\right)$, $B\left(x_B; y_B\right)$ là hai giao điểm của hai đồ thị hàm số.

$\Rightarrow x_A; x_B$ là hai nghiệm của phương trình $(*)$.

Áp dụng định lý Vi-et ta có: $\begin{cases} x_A + x_B = 3 \\ x_A x_B = -m - 2 \end{cases}$.

Ta có: $OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$, $OB = \sqrt{x_B^2 + y_B^2}$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow OA^2 + OB^2 = x_A^2 + y_A^2 + x_B^2 + y_B^2 = \left(x_A^2 + x_B^2\right) + \left(y_A^2 + y_B^2\right) \\
&= \left(x_A^2 + x_B^2\right) + \left[(x_A + m)^2 + (x_B + m)^2\right] \\
&= x_A^2 + x_B^2 + x_A^2 + x_B^2 + 2m\left(x_A + x_B\right) + 2m^2 \\
&= 2\left(x_A + x_B\right)^2 - 4x_A x_B + 2m\left(x_A + x_B\right) + 2m^2 \\
&= 2 \cdot 3^2 + 4(m+2) + 2m \cdot 3 + 2m^2 \\
&= 2m^2 + 10m + 26 = 2\left(m^2 + 5m\right) + 26 \\
&= 2\left(m + \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{27}{2} \geq \frac{27}{2}
\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow m + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{5}{2}$ (thỏa mãn)

Vậy $OA^2 + OB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $m = -\frac{5}{2}$. □

Bài 15

Cho $(P): y = x^2 - 2x - 3$. Dựa vào đồ thị, tìm m để phương trình

a. Khảo sát và vẽ đồ thị.

b. $2x^2 - 4x - 9 - 2m = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

c. $\dfrac{x^2}{2}+3x=4x+3-2m$ có hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn 5.

Lời giải.

a. Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Trục đối xứng $x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-2}{2.1}=1$.

Tâm đối xứng: $I(1;-4)$.

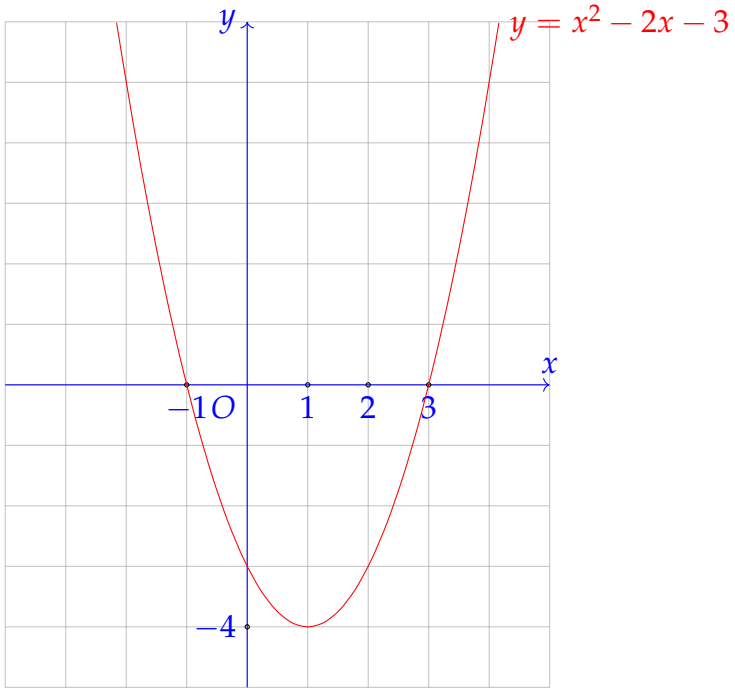
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Bảng giá trị:

x	-1	0	1	2	3
y	0	-3	-4	-3	0

Hình vẽ:



b. Phương trình $2x^2-4x-9-2m=0\Leftrightarrow x^2-2x-\dfrac{9}{2}-m=0$.

$\Leftrightarrow x^2-2x=\dfrac{9}{2}+m\Leftrightarrow x^2-2x-3=\dfrac{9}{2}-3+m$

$\Leftrightarrow x^2-2x-3=\dfrac{3}{2}+m$

Phương trình trên là phương trình giao điểm của $(P):y=x^2-2x-3$ (đồ thị ở trên) và đường thẳng $\Delta:y=\dfrac{3}{2}+m$.

Lưu ý: Đường thẳng Δ dịch chuyển lên, xuống và song song với trục hoành, ứng với tìm giá trị của m.

* Phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \dfrac{3}{2}+m>-4\Leftrightarrow m>-4-\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow m>-\dfrac{11}{2}$.

Vậy $m \in \left(-\dfrac{11}{2}; +\infty\right)$ thỏa yêu cầu bài toán.

c. Phương trình $\dfrac{x^2}{2} + 3x = 4x + 3 - 2m \Leftrightarrow x^2 + 6x = 8x + 6 - 4m$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x = 6 - 4m \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 6 - 3 - 4m$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 3 - 4m$$

* Bảng biến thiên của hàm số $y = x^2 - 2x - 3$:

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$		$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	12	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt nhỏ hơn 5
$\Leftrightarrow -4 < 3 - 4m < 12$
$\Leftrightarrow -7 < -4m < 9$
$\Leftrightarrow -\dfrac{9}{4} < m < \dfrac{7}{4}$.
Vậy $m \in \left(-\dfrac{9}{4}, \dfrac{7}{4}\right)$ thỏa yêu câu bài toán. □

Bài 16

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 - 1$ trên $[-1; 2]$.

Lời giải.

Đặt $t = x^2$.
Với $x \in [-1; 2]$, ta có: $t \in [0; 4]$.
Hàm số trở thành $f(t) = t^2 - 4t - 1$ với $t \in [0; 4]$.
Bảng biến thiên:

x	0		2		4
y'		$-$	0	$+$	
y	-1	$\searrow$	-5	$\nearrow$	-1

Suy ra:

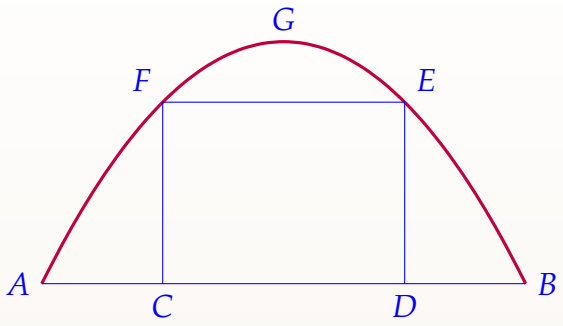
$$\max_{[-1;2]} y = \max_{[0;4]} f(t) = -1 \text{ khi } \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 4 \end{array}\right. \text{ hay } \left[\begin{array}{c} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$$
$$\min_{[-1;2]} y = \min_{[0;4]} f(t) = -5 \text{ khi } t = 2 \text{ hay } x = \pm\sqrt{2}.$$

□

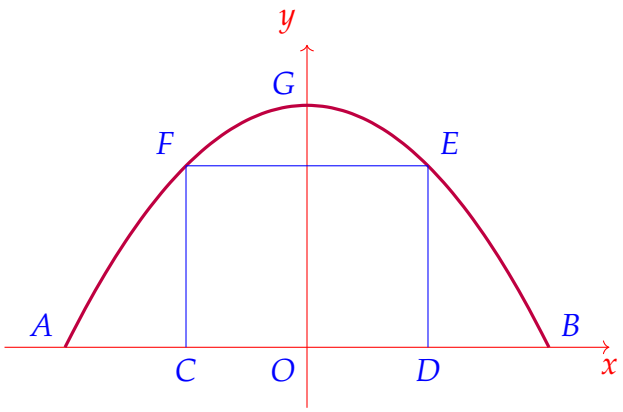
Bài 17

Một chiếc cổng hình parabol bao gồm một cửa chính hình chữ nhật ở giữa và hia cánh cửa phụ hai bên như hình vẽ. Biết chiều cao cổng parabol là $4m$, kích thước cửa ở giữa là $3m \times 4m$.

Hãy tính khoảng cách giữa hai điểm A và B.



Lời giải.



Gắn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, chiếc cổng là 1 phần của parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ với $a < 0$.

Do parabol (P) đối xứng qua trục tung nên có trục đối xứng $x = 0 \Rightarrow -\dfrac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow b = 0$.

Chiều cao của cổng Parabol là $4m$ nên $G(0,4) \Rightarrow c = 4$.

$\Rightarrow (P): y = ax^2 + 4$.

Lại có, kích thước cửa ở giữa là $3m \times 4m$ nên $E(2,3), F(-2,3) \Rightarrow 3 - 4a = 4 \Leftrightarrow a = -\dfrac{1}{4}$.

Vậy $(P): y = -\dfrac{1}{4}x^2 + 4$.

Ta có $-\dfrac{1}{4}x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -4 \end{array}\right.$

nên $A(-4,0), B(4,0)$ hay $AB = 8$. □

Bài 18

Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tậ0p trung chiến lược vào kinh doanh xe honda Future Fi với chi phí mua vào một chiếc là 27 triệu đồng và bán ra với giá là 31 triệu đồng. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm là sẽ tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải định giá bán mới là bao nhiêu để sau khỉ đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất.

Lời giải.

Gọi x triệu đồng là số tiền mà doanh nghiệp A dự định giảm giá $(0 \le x \le 4)$.

Khi đó lợi nhuận thu được khi bán một chiếc xe là $31 - x - 27 = 4 - x$.

Số xe mà doanh nghiệp sẽ bán được trong một năm là $600 + 200x$.
Lợi nhuận mà doanh nghiệp thu được trong một năm là $f(x) = (4 - x)(600 + 200x) = -200x^2 + 200x + 2400$
Xét hàm số $f(x) = -200x^2 + 200x + 2400$ trên đoạn $[0; 4]$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	2450	↘	$-\infty$

Vậy $\max f(x) = 2450 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.
Vậy giá mới của chiếc xe là $30,5$ triệu đồng thì lợi nhuận thu được là cao nhất. □

Bài 19

Hàm số nào dưới đây là hàm số bậc hai?

a) $y = -2x^2 + 3x + 1$

b) $y = \sqrt{-2x^2 + 4x + 1}$

c) $f(x) = \dfrac{2x}{x+2}$

d) $y = (x^2 - 4x + 1)(x + 2)$

Lời giải.

Hàm số bậc hai là$y = -2x^2 + 3x + 1$. □

Bài 20

Xét hàm số bậc hai $y = -3x^2 + 2x - 4$. Thay dấu bằng các số thích hợp để hoàn thành bảng giá trị sau của hàm số.

x	0	2	4	6	8	10
y	?	?	?	?	?	?

Lời giải.

x	0	2	4	6	8	10
y	-4	-12	-44	-100	-180	-284

□

Bài 21

Xét hàm số bậc hai $y = x^2 + 2x - 3$. Thay dấu bằng các số thích hợp để hoàn thành bảng giá trị sau của hàm số.

x	-10	-8	-6	-4	-2	0
y	?	?	?	?	?	?

Lời giải.

x	-10	-8	-6	-4	-2	0
y	77	45	21	5	-3	-3

□

Bài 22

Cho hàm số $y = x(3-2x) - 5x + 3$

a) Hàm số đã cho có phải là hàm số bậc hai không? Nếu có, hãy xác định các hệ số a, b, c của nó.

b) Thay dấu "?" bằng các số thích hợp để hoàn thành bảng giá trị sau của hàm số đã cho.

x	-2	-1	0	1
y	?	?	?	?

Lời giải.

a) Hàm số $y = x(3-2x) - 5x + 3 = -2x^2 - 2x + 3$ là hàm số bậc hai do $a = -2 \neq 0$.
Do đó $a = -2; b = -2; c = 3$.

b) Kết quả của bảng giá trị

x	-2	-1	0	1
y	-1	3	3	-1

□

Bài 23

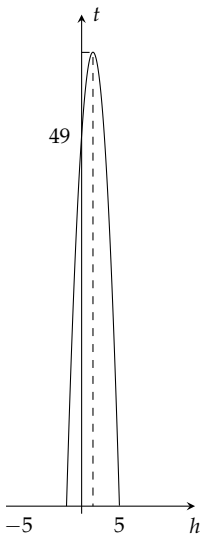
Khi quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt độ cao nào đó rồi rơi xuống đất. Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oth, trong đó t là thời gian, kể từ khi quả bóng được đá lên; h là độ cao của quả bóng. Quỹ đạo của quả bóng được xác định bởi công thức $h = -4{,}9t^2 + 14{,}7t + 49$.

a) Hỏi sau bao lâu kể từ khi quả bóng đang ở độ cao 49m đến khi quả bóng chạm đất.

b) Hãy tìm tập xác định và tập giá trị của hàm số h.

Lời giải.

a) Mô hình của quả bóng lên trục tọa độ như sau:



Ta có:

$y = h = 49 \Leftrightarrow -4{,}9t^2 + 14{,}7t + 49 = 49 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 3. \end{array}\right.$

$y = h = 0 \Leftrightarrow -4{,}9t^2 + 14{,}7t + 49 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2(L) \\ t = 5.(\text{tm}) \end{array}\right.$

Do vậy, sau 5 giây thì quả bóng đang ở độ cao 49m đến khi quả bóng chạm đất.

b) Tập xác định $\mathscr{D} = [0; +\infty)$.

Ta có $h = -4{,}9t^2 + 14{,}7t + 49 = -4{,}9\left(t - \dfrac{3}{2}\right)^2 + 60{,}025 \leqslant 60{,}025, \forall t \geqslant 0$

Ta có bảng giá trị

t	0	1	$\frac{3}{2}$	3	5
h	49	58,8	60,025	49	0

Từ bảng giá trị, ta có tập giá trị của h là $T = [0; 60{,}025]$.

□

Bài 24

Một viên đạn được bắn lên cao theo phương trình $S(t) = 196t - 4{,}9t^2$ trong đó $t > 0$, t tính bằng giây kể từ thời điểm viên đạn được bắn lên cao và $S(t)$ là khoảng cách của viên đạn so với mặt đất được tính bằng mét.

a) Hỏi sau bao nhiêu giây kể từ khi viên đạn được bắn lên thì viên đạn chạm đất?

b) Tìm tập xác định và tập giá trị của hàm số $S(t)$.

Lời giải.

a) Khi viên đạn chạm đất thì ta có $S(t) = 0 \Leftrightarrow 196t - 4{,}9t^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 40. \end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện $t > 0$ thì $t = 40$ thỏa mãn.
Vậy sau 40 giây kể từ khi viên đạn được bắn lên thì viên đạn chạm đất.

b) Tập xác định của hàm số $S(t)$ là $\mathscr{D} = (0; +\infty)$.
Ta có:
$S(t)$ là khoảng cách của viên đạn so với mặt đất nên $S(t) \geqslant 0$.
$S(t) = 196t - 4{,}9t^2 = -4{,}9\left(t^2 - 2 \cdot 20 \cdot t + 20^2 - 400\right) = -4{,}9\,(t - 20)^2 + 1960$.
Vì $-4{,}9\,(t - 20)^2 \leqslant 0$, $\forall t > 0$ suy ra $S(t) \leqslant 1960$.
Vậy tập giá trị của hàm số $S(t)$ là đoạn $[0; 1960]$.

□

Bài 25

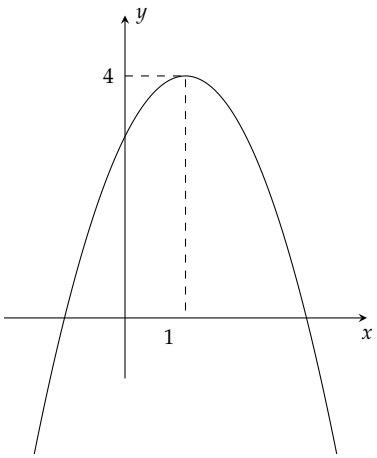
a) Vẽ parabol $y = -x^2 + 2x + 3$.

b) Từ đồ thị, hãy tìm khoảng đồng biến, nghịch biến và giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$.

Lời giải.

a) Ta có $a = -1 < 0$ nên parabol có bề lõm quay xuống dưới.
Đỉnh $I(1; 4)$. Trục đối xứng là đường thẳng $x = 1$.
Parabol cắt trục tung tại điểm $A(0; 3)$.
Parabol cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $-x^2 + 2x + 3 = 0$, tức là $x = -1$ và $x = 3$.

b) Từ đồ thị hàm số sau:



- Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty, 1)$.
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1, +\infty)$.
- Hàm số đạt giá trị lớn nhất $y_{max} = 4$ tại $x = 1$.

□

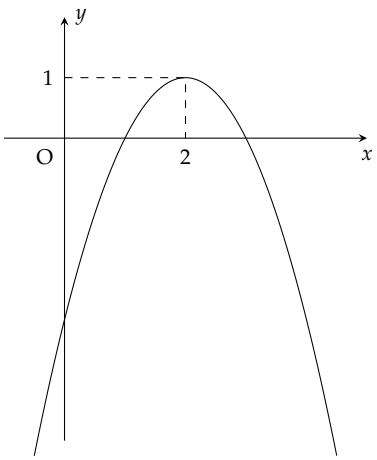
Bài 26

a) Vẽ đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x - 3$.

b) Từ đồ thị, hãy tìm khoảng đồng biến, nghịch biến và giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^2 + 4x - 3$.

Lời giải.

a) Vẽ đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x - 3$.



Ta có hệ số $a = -1$ đồ thị là một Parabol quay bề lõm lên trên.

Phương trình $-x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 3 \end{array}\right.$ suy ra đồ thị hàm số cắt trục hoàn tại $x = 1$ và $x = 3$.

Trục đối xứng $x = -\dfrac{b}{2a} = 2$.

Tại $x = 2 \Rightarrow y = 1$ đỉnh của Parapol là $I(2, 1)$.

b) Từ đồ thị hàm số ta có:

- Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty, 2)$.
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2, +\infty)$.
- Hàm số đạt giá trị lớn nhất $y_{max} = 1$ tại $x = 2$.

□

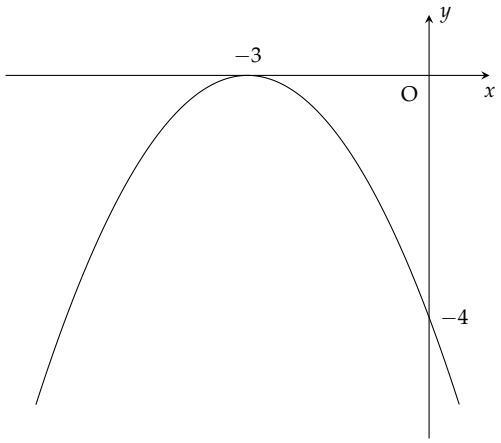
Bài 27

a) Vẽ đồ thị hàm số $y = -\dfrac{4}{9}x^2 - \dfrac{8}{3}x - 4$.

b) Từ đồ thị hãy tìm khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến và giá trị lớn nhất của hàm số $y = -\dfrac{4}{9}x^2 - \dfrac{8}{3}x - 4$.

Lời giải.

a) Vẽ đồ thị hàm số $y = -\dfrac{4}{9}x^2 - \dfrac{8}{3}x - 4$.



Ta có hệ số $a = -\dfrac{4}{9}$ đồ thị là một Parabol quay bề lõm lên trên.

Phương trình $-\dfrac{4}{9}x^2 - \dfrac{8}{3}x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ suy ra đồ thị hàm số cắt trục hoành tại $x = -3$.

Trục đối xứng $x = -\dfrac{b}{2a} = -3$.

Tại $x = -3 \Rightarrow y = 0$ đỉnh của Parapol là $I(-3, 0)$.

b) Từ đồ thị hàm số ta có:

- Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty, -3)$.
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3, +\infty)$.
- Hàm số đạt giá trị lớn nhất $y_{max} = 0$ tại $x = -3$.

□

Bài 28

Vẽ Parabol $(P)\colon y = 2x^2 + 5x + 2$. Từ đó tìm khoảng đồng biến, nghịch biến và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^2 + 5x + 2$.

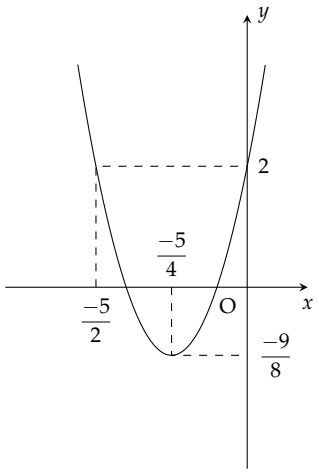
Lời giải.

Ta có $a = 2 > 0 \Rightarrow (P)$ có bề lõm quay lên trên.

(P) có đỉnh $I\left(-\frac{5}{4};-\frac{9}{8}\right)$, trục đối xứng $x = -\frac{5}{4}$.

(P) cắt trục Oy tại $(0;2)$, cắt trục Ox tại hai điểm $(-2;0)$, $\left(-\frac{1}{2};0\right)$ và đi qua $\left(-\frac{5}{2};2\right)$.

Đồ thị

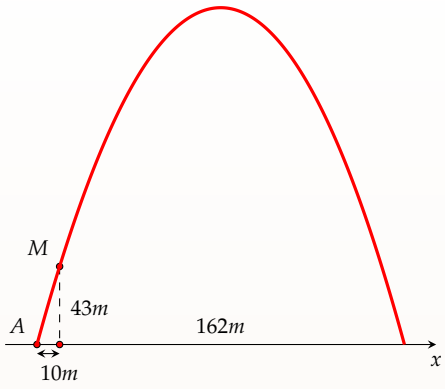


Từ đồ thị ta thấy hàm số $y = 2x^2 + 5x + 2$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{5}{4};+\infty\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-\frac{5}{4}\right)$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^2 + 5x + 2$ là $y = -\frac{9}{8}$ khi $x = -\frac{5}{4}$. □

Bài 29

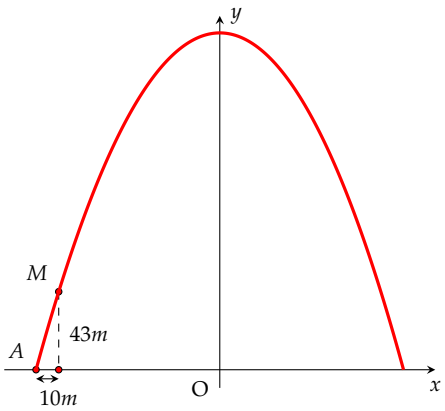
Cổng Arch tại thành phố St.Louis của Mỹ có hình dạng đường parabol (hình vẽ)



Biết khoảng cách giữa hai chân cổng bằng $162\,m$. Trên thành cổng, tại vị trí có độ cao $43\,m$ so với mặt đất (điểm M), người ta thả một sợi dây chạm đất (dây căng thẳng theo phương vuông góc với mặt đất). Vị trí chạm đất của sợi dây này cách chân cổng A một đoạn $10\,m$. Giả sử các số liệu trên là chính xác. Hãy tính độ cao của cổng Arch (tính tự mặt đất đến điểm cao nhất của cổng).

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho gốc tọa độ trùng với trung điểm AB, tia AB là chiều dương của trục hoành.



Khi đó cổng Arch là một phần của đồ thị hàm số dạng $y = ax^2 + c$, đi qua các điểm $B(81;0)$ và $M(-71;43)$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases} 81^2a + c = 0 \\ 71^2a + c = 43 \end{cases} \Rightarrow c = \frac{81^2 \cdot 43}{81^2 - 71^2} \approx 185{,}6.$$

Suy ra chiều cao của cổng là $c \approx 185{,}6$.

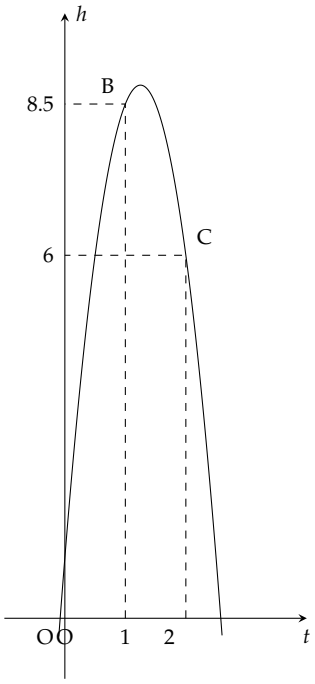
□

Bài 30

Khi một quả bóng được đá lên nó sẽ đạt được độ cao nào đó rồi rơi xuống. Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol. Giả thiết rằng bóng được đá từ độ cao 1m. Sau đó 1 giây nó đạt độ cao 8,5m và 2 giây sau khi đá nó đạt độ cao 6m. Hỏi sau bao lâu quả bóng chạm đất (Tính chính xác đến hàng phần trăm).

Lời giải.

Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol. Nên có dạng $y = ax^2 + bx + c$



Theo bài ra gắn vào hệ tọa độ và sẽ tương ứng các điểm A, B, C nên ta có

$$\begin{cases} c = 1 \\ a+b+c = 8{,}5 \\ 4a+2b+c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 12{,}5 \\ c = 1 \end{cases}$$

Khi đó parabol có dạng $y = -5x^2 + 12{,}5x + 1$
Để quả bóng rơi xuống đất thì

$$\mathrm{y} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \approx -0{,}08 \quad (\text{loại}) \\ x \approx 2{,}58. \quad (\text{tm}) \end{array} \right.$$

Vậy $s = 2{,}58$s. □

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1

Hàm số $y = 2x^2 + 4x - 2023$
(A) Đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và nghịch biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.
(B) Nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ và đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.
(C) Đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.
(D) Nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Lời giải.

Hàm số $y = ax^2 + bx + c$ với $a > 0$ đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right)$.

Áp dụng: Ta có $-\dfrac{b}{2a} = -1$.
Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 2

Hàm số nào sau đây nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$?
(A) $y = \sqrt{2}x^2 + 1$. (B) $y = -\sqrt{2}x^2 + 1$.
(C) $y = \sqrt{2}(x+1)^2$. (D) $y = -\sqrt{2}(x+1)^2$.

Lời giải.

Ta có $y = -\sqrt{2}(x+1)^2 = -\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{2}x - \sqrt{2}$ nên $-\dfrac{b}{2a} = -1$ và có $a < 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 3

Biết rằng (P): $y = ax^2 - 4x + c$ có hoành độ đỉnh bằng -3 và đi qua điểm $M(-2; 1)$. Tính tổng $S = a + c$.
(A) $S = 5$. (B) $S = -5$. (C) $S = 4$. (D) $S = 1$.

Lời giải.

Vì (P) có hoành độ đỉnh bằng -3 và đi qua điểm $M(-2;1)$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} -\dfrac{-4}{2a} = -3 \\ 4a+8+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 = 6a \\ 4a+c=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{2}{3} \\ c = -\dfrac{13}{3} \end{cases} \Rightarrow S = a+c = -5$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 4

Cho hàm số bậc hai $y = f(x) = 2x^2 - 4x - 1$. Đồ thị hàm số $y = f(x+2)$ là đường parabol có đỉnh là

(A) $I(1;-1)$. (B) $I(1;-3)$. (C) $I(-1;-3)$. (D) $I(3;-3)$.

Lời giải.

Hoành độ đỉnh của (P): $y = 2x^2 - 4x - 1$ là $x = -\dfrac{b}{2a} = 1$, suy ra tung độ đỉnh của (P) là $y = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 - 1 = -3$. Đỉnh của (P) là $S(1;-3)$.
Bằng cách dịch chuyển đồ thị của hàm số $y = f(x)$ theo phương song song với trục hoành sang trái 2 đơn vị ta được đồ thị của hàm số $y = f(x+2)$.
Vậy đồ thị hàm số $y = f(x+2)$ là đường parabol có đỉnh là $I(-1;-3)$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 5

Cho Parabol (P): $y = mx^2 + nx + 3$ (m, n là tham số). Xác định m, n để (P) nhận điểm $I(2;-1)$ làm đỉnh.

(A) $m=1$, $n=-4$. (B) $m=-1$, $n=4$. (C) $m=2$, $n=-8$. (D) $m=1$, $n=4$.

Lời giải.

Parabol (P): $y = mx^2 + nx + 3$ nhận $I(2;-1)$ là đỉnh, khi đó ta có

$$\begin{cases} 4m+2n+3=-1 \\ -\dfrac{n}{2m} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m+2n=-4 \\ -n=4m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=-4 \\ m=1. \end{cases}$$

Vậy $m=1$, $n=-4$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 6

Cho parabol (P): $y = ax^2 + 2x + b$ biết parabol đó đi qua hai điểm $M(1;7)$ và $N(-2;10)$. Tính tổng $S = a+b$.

(A) $S=4$. (B) $S=5$. (C) $S=2$. (D) $S=1$.

Lời giải.

Vì (P) đi qua hai điểm $M(1;7)$ và $N(-2;10)$ nên tọa độ hai điểm này thỏa mãn phương trình parabol (P).
Do đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} y(1)=7 \\ y(-2)=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2+b=7 \\ 4a-4+b=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ 4a+b=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2. \end{cases}$$

Vậy $S = a + b = 5$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 7

Xác định $(P)\colon y = ax^2 - 6x + c$, biết (P) có trục đối xứng $x = -4$ và cắt Ox tại hai điểm có độ dài bằng 4.

(A) $(P)\colon y = -\frac{3}{4}x^2 - 6x - 9$.
(B) $(P)\colon y = \frac{3}{4}x^2 - 6x - 9$.
(C) $(P)\colon y = -\frac{3}{4}x^2 - 6x + 9$.
(D) $(P)\colon y = \frac{3}{4}x^2 - 6x + 9$.

Lời giải.

Vì $(P)\colon y = ax^2 - 6x + c$, biết (P) có trục đối xứng $x = -4$ nên

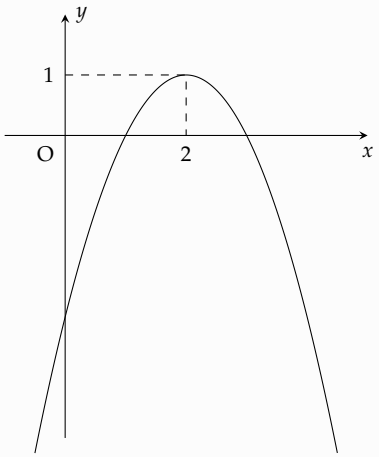
$$\frac{6}{2a} = -4 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{4} \Rightarrow (P)\colon y = -\frac{3}{4}x^2 - 6x + c.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và Ox là $-\frac{3}{4}x^2 - 6x + c = 0 \quad (*)$.
$(*)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \triangle' = 9 + \frac{3}{4}c > 0 \Leftrightarrow c > -12$.
Khi đó $(*)$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\begin{cases} x_1 + x_2 = -8 \\ x_1 \cdot x_2 = -\frac{4c}{3}. \end{cases}$
Mà $|x_2 - x_1| = 4$
$\Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 = 16 \Leftrightarrow (x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2 = 16$
$\Leftrightarrow (-8)^2 + \frac{16c}{3} = 16 \Leftrightarrow c = -9$ (t/m).
Vậy $(P)\colon y = -\frac{3}{4}x^2 - 6x - 9$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 8

Hàm số nào có đồ thị như hình vẽ bên dưới?

(A) $y = -x^2 + 4x - 3$.
(B) $y = -x^2 - 4x - 3$.
(C) $y = -2x^2 - x - 3$.
(D) $y = x^2 - 4x - 3$.



Lời giải.

Đồ thị có bề lõm quay xuống dưới nên $a < 0$. Trục đối xứng $x = 2$.
Vậy đồ thị đã cho là đồ thị hàm số $y = -x^2 + 4x - 3$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 9

Tọa độ giao điểm của $(P)\colon y = x^2 - 4x$ với đường thẳng $d\colon y = -x - 2$ là

(A) $M(0;\ -2)$, $N(2;\ -4)$.
(B) $M(-1;\ -1)$, $N(-2;\ 0)$.
(C) $M(-3;\ 1)$, $N(3;\ -5)$.
(D) $M(1;\ -3)$, $N(2;\ -4)$.

Lời giải.

Hoành độ giao điểm của (P) và d là nghiệm của phương trình

$$x^2 - 4x = -x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và d là $M(1;\ -3)$, $N(2;\ -4)$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 10

Cho hàm số $y = 2x^2 - 3x - 5$ (1). Giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) cắt đường thẳng $y = 4x + m$ tại hai điểm phân biệt $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ x_2)$ thỏa mãn $2x_1^2 + 2x_2^2 = 3x_1x_2 + 7$ là

(A) -10.
(B) 10.
(C) -6.
(D) 9.

Lời giải.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $2x^2 - 3x - 5 = 4x + m \Leftrightarrow 2x^2 - 7x - 5 - m = 0$.
Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\triangle = (-7)^2 - 4 \cdot 2(-m - 5) > 0 \Leftrightarrow 8m + 89 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{89}{8}.$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của nên theo Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{7}{2} \\ x_1.x_2 = \dfrac{-5 - m}{2}. \end{cases}$

Do đó $2x_1^2 + 2x_2^2 = 3x_1x_2 + 7 \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2)^2 - 7x_1x_2 - 7 = 0 \Leftrightarrow 2\left(\dfrac{7}{2}\right)^2 - 7.\left(\dfrac{-5 - m}{2}\right) - 7 = 0$
$\Leftrightarrow 70 + 7m = 0 \Leftrightarrow m = -10$.
Vậy $m = -10$ là giá trị cần tìm.
Chọn đáp án (A) □

Câu 11

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đường thẳng $y = mx - 3$ không có điểm chung với Parabol $y = x^2 + 1$?

(A) 6.
(B) 9.
(C) 7.
(D) 8.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 + 1 = mx - 3 \Leftrightarrow x^2 - mx + 4 = 0$
Đường thẳng $y = mx - 3$ không có điểm chung với Parabol $y = x^2 + 1 \Leftrightarrow$ Phương trình vô nghiệm
$\Leftrightarrow \triangle < 0 \Leftrightarrow m^2 - 16 < 0 \Leftrightarrow -4 < m < 4$.
Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3\}$.
Chọn đáp án (C) □

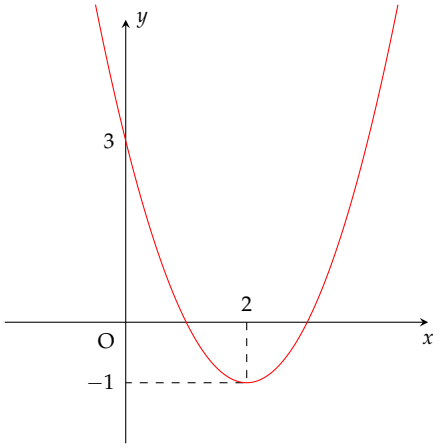
Câu 12

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^2-4x+3-m=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $0 \leqslant x_1 < x_2 < 3$.

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

PT $\Leftrightarrow x^2-4x+3=m$.
Ta có đồ thị hàm số $y=x^2-4x+3$ như hình vẽ.

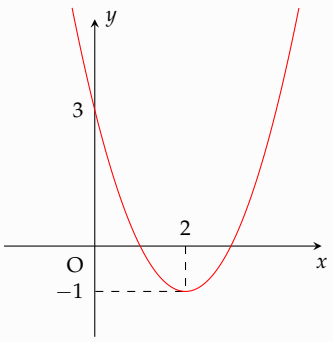


$ycbt \Leftrightarrow -1 < m < 0$.
Vậy không có giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án (A) □

Câu 13

Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0;3]$ bằng

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy:
Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0;3]$ bằng 3 tại $x=0$.
Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0;3]$ bằng -1 tại $x=2$.
Vậy tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất bằng 2.
Chọn đáp án (C) □

Câu 14

Cho hàm số $y=2x^2-3(m+1)x+m^2+3m-2$, trong đó m là tham số. Giá trị nhỏ nhất của hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu khi m thay đổi?

(A) -16. (B) -8. (C) -4. (D) -2.

Lời giải.

Ta có $a = 2 > 0$, bề lõm của đồ thị hàm số quay lên.

Hoành độ đỉnh $x = \dfrac{3}{4}(m+1)$.

Tung độ đỉnh $y = 2\left[\dfrac{3}{4}(m+1)\right]^2 - 3(m+1)\cdot\dfrac{3}{4}(m+1) + m^2 + 3m - 2 = \dfrac{-m^2+6m-25}{8}$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $y = \dfrac{-m^2+6m-25}{8} = -\dfrac{1}{8}\left[(m+3)^2\right] - 2 \leqslant -2$

Chọn đáp án (D) □

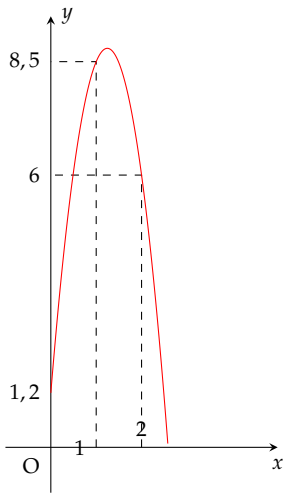
Câu 15

Khi một quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt đến độ cao nào đó rồi rơi xuống. Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oth, trong đó t là thời gian (tính bằng giây) kể từ khi quả bóng được đá lên; h là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá lên từ độ cao 1,2m. Sau đó 1 giây, nó đạt độ cao 8,5m và 2 giây sau khi đá lên, nó đạt độ cao 6m. Hỏi sau bao lâu thì quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi được đá lên (tính chính xác đến hàng phần trăm)?

(A) 2,56 giây. (B) 2,57 giây. (C) 2,58 giây. (D) 2,59 giây.

Lời giải.

Gọi phương trình của parabol quỹ đạo là $h = at^2 + bt + c$.
Từ giả thiết suy ra parabol đi qua các điểm $(0;1{,}2)$, $(1;8{,}5)$ và $(2;6)$.



Từ đó ta có

$$\begin{cases} c = 1{,}2 \\ a+b+c = 8{,}5 \\ 4a+2b+c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4{,}9 \\ b = 12{,}2 \\ c = 1{,}2. \end{cases}$$

Vậy phương trình của parabol quỹ đạo là $h = -4{,}9t^2 + 12{,}2t + 1{,}2$.
Giải phương trình $h = 0 \Leftrightarrow -4{,}9t^2 + 12{,}2t + 1{,}2 = 0$ ta tìm được một nghiệm dương là $t \approx 2{,}58$.
Chọn đáp án (C) □

§3. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Dấu của tam thức bậc hai

Định nghĩa 3.1. Tam thức bậc hai (đối với x) là biểu thức có dạng ax^2+bx+c, trong đó a, b, c là những số thực cho trước (với $a \neq 0$), được gọi là các hệ số của tam thức bậc hai.

Người ta thường viết $f(x)=ax^2+bx+c$.

Ví dụ 1

Hãy cho biết biểu thức nào sau đây là tam thức bậc hai

a) $A=3x+2\sqrt{x}+1$;

b) $B=-5x^4+3x^2+4$;

c) $C=-\dfrac{2}{3}x^2+7x-4$;

d) $D=\left(\dfrac{1}{x}\right)^2+2\dfrac{1}{x}+3$;

e) $E=(1-x)^2+(2x+1)$;

f) $F=(1-x)(2x+1)$;

Lời giải.

a) $A=3x+2\sqrt{x}+1$ không là tam thức bậc hai;

b) $B=-5x^4+3x^2+4$ không là tam thức bậc hai;

c) $C=-\dfrac{2}{3}x^2+7x-4$ là tam thức bậc hai;

d) $D=\left(\dfrac{1}{x}\right)^2+2\dfrac{1}{x}+3$ không là tam thức bậc hai;

e) $E=(1-x)^2+(2x+1)$ là tam thức bậc hai;

f) $F=(1-x)(2x+1)$ là tam thức bậc hai;

□

Nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ cũng được gọi là nghiệm của tam thức bậc hai ax^2+bx+c; $\Delta=b^2-4ac$ và $\Delta'=b'^2-ac$ tương ứng được gọi là biệt thức và biệt thức thu gọn của tam thức bậc hai.

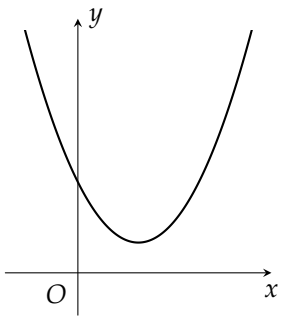
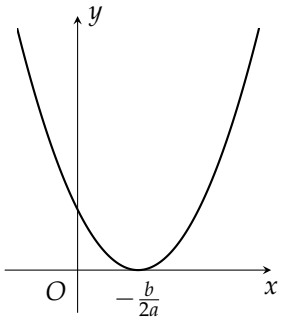
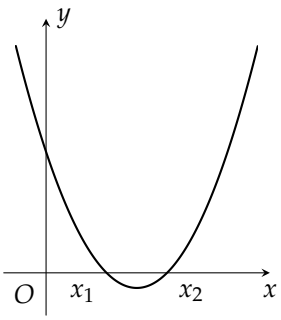
Định lý 3.1. (Định lí về dấu của tam thức bậc hai)
Cho tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$.

- Nếu $\Delta<0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x\in\mathbb{R}$.
- Nếu $\Delta=0$ thì $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x\neq -\dfrac{b}{2a}$ và $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=0$.
- Nếu $\Delta>0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 $(x_1<x_2)$. Khi đó $f(x)$ cùng dấu với hệ số a với mọi $x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$; $f(x)$ trái dấu với hệ số a với mọi $x\in(x_1;x_2)$.

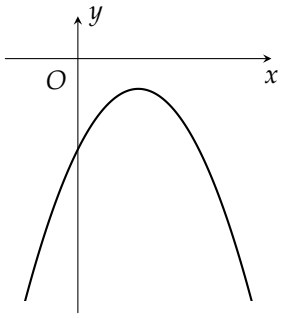
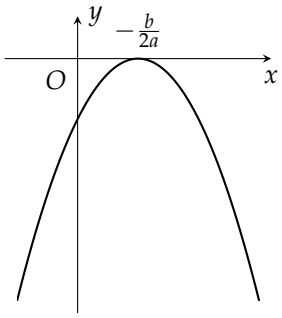
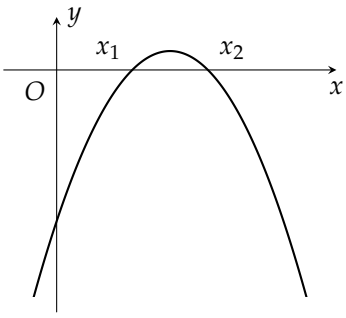
Trong Định lí về dấu của tam thức bậc hai có thể thay Δ bởi Δ'.

Mối quan hệ giữa dấu của tam thức bậc hai với dấu của hệ số a trong từng trường hợp của Δ

Trường hợp $a > 0$

Δ	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Dạng đồ thị			
Vị trí của đồ thị so với trục Ox	Đồ thị nằm hoàn toàn phía trên trục Ox	Đồ thị nằm phía trên trục Ox và tiếp xúc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x = -\dfrac{b}{2a}$	Đồ thị nằm phía trên trục Ox khi $x < x_1$ hoặc $x > x_2$. Đồ thị nằm phía dưới trục Ox khi $x_1 < x < x_2$

Trường hợp $a < 0$

Δ	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Dạng đồ thị			
Vị trí của đồ thị so với trục Ox	Đồ thị nằm hoàn toàn phía dưới trục Ox	Đồ thị nằm phía dưới trục Ox và tiếp xúc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x = -\dfrac{b}{2a}$	Đồ thị nằm phía dưới trục Ox khi $x < x_1$ hoặc $x > x_2$. Đồ thị nằm phía trên trục Ox khi $x_1 < x < x_2$

Ví dụ 2

Xét dấu các tam thức bậc hai sau

a) $x^2 + x + 1$;

b) $-\dfrac{3}{2}x^2 + 9x - \dfrac{27}{2}$;

c) $2x^2 + 6x - 8$;

d) $-3x^2 + x - \sqrt{2}$;

e) $-2x^2 + 7x - 3$;

f) $x^2 + 8x + 16$.

Lời giải.

a) $f(x) = x^2 + x + 1$ có $\Delta = -3 < 0$ và $a = 1 > 0$ nên $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) $g(x) = -\dfrac{3}{2}x^2 + 9x - \dfrac{27}{2}$ có $\Delta = 0$ và $a = -\dfrac{3}{2} < 0$ nên $g(x)$ có nghiệm kép $x = 3$ và $g(x) < 0$

với mọi $x \neq 3$.

c) Dễ thấy $h(x) = 2x^2 + 6x - 8$ có $\Delta' = 25 > 0$; $a = 2 > 0$ và có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -4$; $x_2 = 1$ nên $h(x) > 0$ với mọi $x \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$ và $h(x) < 0$ với mọi $x \in (-4; 1)$.

d) $f_1(x) = -3x^2 + x - \sqrt{2}$ có $\Delta < 0$ và $a = -3 < 0$ nên $f_1(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

e) $h_1(x) = -2x^2 + 7x - 3$ có $\Delta = 25 > 0$; $a = -2 < 0$ và có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \dfrac{1}{2}$; $x_2 = 3$ nên $h_1(x) < 0$ với mọi $x \in (-\infty; \dfrac{1}{2}) \cup (3; +\infty)$ và $h_1(x) > 0$ với mọi $x \in (\dfrac{1}{2}; 3)$.

f) $g_1(x) = x^2 + 8x + 16$ có $\Delta' = 0$ và $a = 1 > 0$ nên $g_1(x)$ có nghiệm kép $x = -4$ và $g_1(x) > 0$ với mọi $x \neq -4$.

□

2. Bất phương trình bậc hai

Định nghĩa 3.2. Bất phương trình bậc hai ẩn x là bất phương trình có dạng $ax^2 + bx + c > 0$ (hoặc $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$) trong đó a, b, c là những số thực đã cho và $a \neq 0$.
Số thực x_0 gọi là một nghiệm của bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c > 0$, nếu $ax_0^2 + bx_0 + c > 0$. Tập hợp gồm tất cả các nghiệm của bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c > 0$ gọi tập nghiệm của bất phương trình này.
Giải một bất phương trình bậc hai là tìm tập nghiệm của nó.

Để giải bất phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c > 0$ (hoặc $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$) ta cần xét dấu tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c > 0$, từ đó suy ra tập nghiệm.

Ví dụ 3

Giải các bất phương trình sau

a) $3x^2 + x + 5 \leq 0$; b) $-3x^2 + 2\sqrt{3}x - 1 \geq 0$; c) $-x^2 + 2x + 1 > 0$;

Lời giải.

a) Tam thức bậc hai $f(x) = 3x^2 + x + 5 \leq 0$ có $\Delta = -59 < 0$ và $a = 3 > 0$ nên $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, tức là $3x^2 + x + 5 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó bất phương trình vô nghiệm;;

b) Tam thức bậc hai $g(x) = -3x^2 + 2\sqrt{3}x - 1$ có $\Delta' = 0$ và $a = -3 < 0$ nên $f(x) < 0$ với mọi $x \neq \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, tức là $-3x^2 + 2\sqrt{3}x - 1 < 0$ với mọi $x \neq \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Do đó bất phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

c) Tam thức $h(x) = -x^2 + 2x + 1$ có $\Delta = 2 > 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 = 1 - \sqrt{2}$; $x_2 = 1 + \sqrt{2}$.
Mặt khác $a = -1 < 0$, do đó ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Tập nghiệm của bất phương trình là $S = (1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2})$.

□

3. Ứng dụng của bất phương trình bậc hai

. Bất phương trình bậc hai một ẩn có nhiều ứng dụng, chẳng hạn: giải một số hệ bất phương trình, ứng dụng tính lợi nhuận trong kinh doanh, tính toán điểm rơi trong pháo binh,...

Ví dụ 4

Bác Dũng muốn uốn tấm tôn phẳng có dạng hình chữ nhật với bề ngang 32cm thành một rãnh dẫn nước bằng cách chia tấm tôn đó thành ba phần rồi gấp hai bên lại theo một góc vuông. Để đảm bảo kĩ thuật, diện tích mặt cắt ngang của rãnh dẫn nước phải lớn hơn hoặc bằng 120cm^2. Hỏi rãnh dẫn nước phải có độ cao ít nhất là bao nhiêu cm?

Lời giải.

Khi chia tấm tôn đó thành ba phần rồi gấp hai bên lại theo một góc vuông thì kích thước của mặt cắt ngang là x (cm) và $32-2x$ (cm). Khi đó diện tích mặt cắt ngang là $(32-2x)x$ (cm^2).
Diện tích mặt cắt ngang của rãnh nước lớn hơn 120cm^2 khi và chỉ khi

$$(32-2x)x \geq 120 \Leftrightarrow -x^2+16x-60 \geq 0.$$

Tam thức $f(x) = -x^2+16x-60$ có hai nghiệm $x_1 = 6$, $x_2 = 10$ và hệ số $a = -1 < 0$. Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai, ta thấy tập hợp những giá trị của x sao cho tam thức $f(x)$ mang dấu dương là khoảng $(6;10)$. Do đó tập nghiệm của bất phương trình $-x^2+16x-60 \geq 0$ là đoạn $[6;10]$.
Vậy rãnh dẫn nước phải có độ cao ít nhất là 6cm. □

Ví dụ 5

Bác Việt có một tấm lưới hình chữ nhật dài 20m. Bác muốn dùng tấm lưới này rào chắn ba mặt áp bên bờ tường của khu vườn nhà mình thành một mảnh đất hình chữ nhật để trồng rau. Hỏi hai cột góc hàng rào cần phải cắm cách bờ tường bao xa để mảnh đất được rào chắn của bác có diện tích không nhỏ hơn 48m^2?

Lời giải.

Gọi x mét $(0 < x < 10)$ là khoảng cách từ điểm cắm cọc đến bờ tường. Khi đó diện tích của mảnh đất được rào chắn là $S(x) = -2x^2+20x$. Yêu cầu của bài toán tương đương

$$S(x) = -2x^2+20x \geq 48 \Leftrightarrow 2x^2-20x+48 \leq 0.$$

Tam thức bậc hai $f(x) = 2x^2-20x+48$ có hai nghiệm $x_1 = 4$; $x_2 = 6$ và có hệ số $a = 2 > 0$. Từ đó suy ra tập ngiệm của bất phương trình $2x^2-20x+48 \leq 0$ là đoạn $[4;6]$. Như vậy khoảng cách từ điểm cắm cột đến bờ tường phải lớn hơn hoặc bằng 4m và nhỏ hơn hoặc bằng 6m thì mảnh đất được rào chắn của bác Việt có diện tích không nhỏ hơn 48m^2. □

Ví dụ 6

Độ cao so với mặt đất của một quả bóng được ném lên theo phương thẳng đứng được mô tả bởi hàm số bậc hai $h(t) = -4,9t^2+20t+1$, ở đó độ cao $h(t)$ tính bằng mét và thời gian tính

bằng giây. Trong khoảng thời thời điểm nào trong quá trình bay của nó, quả bóng sẽ ở độ cao trên 5m so với mặt đất?

Lời giải.

Yêu cầu bài toán tương đương

$$h(t) = -4,9t^2 + 20t + 1 > 5 \Leftrightarrow -4,9t^2 + 20t - 4 > 0$$

Tam thức bậc hai $h(t) = -4,9t^2 + 20t -$ có hai nghiệm $t_1 = 0,211; t_2 = 3,871$ và có hệ số $a = -4,9 < 0$. Từ đó suy ra tập ngiệm của bất phương trình $-4,9t^2 + 20t - 4 > 0$ là đoạn $[0,211; 3,871]$. Như vậy khoảng thời thời điểm trong quá trình bay của nó, quả bóng sẽ ở độ cao trên 5m so với mặt đất là $[0,211; 3,871]$. □

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Nhận dạng tam thức và xét dấu biểu thức

Tam thức bậc hai có dạng $f(x) = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$.

Ví dụ 1

Hãy cho biết biểu thức nào sau đây là tam thức bậc hai

a) $A = 3x + 2\sqrt{x} + 1$

b) $B = -5x^4 + 3x^2 + 4$

c) $C = -\dfrac{2}{3}x^2 + 7x - 4$

d) $D = \left(\dfrac{1}{x}\right)^2 + 2\dfrac{1}{x} + 3$

Lời giải.

Biểu thức $C = -\dfrac{2}{3}x^2 + 7x - 4$ là tam thức bậc hai. □

Ví dụ 2

Xét dấu của mỗi tam thức bậc hai sau

a) $x^2 + x + 1$.

b) $-\dfrac{3}{2}x^2 + 9x - \dfrac{27}{2}$.

c) $2x^2 + 6x - 8$.

Lời giải.

a) Tam thức bậc hai $f(x) = x^2 + x + 1$ có $\Delta = -3 < 0$, hệ số $a = 1 > 0$ nên $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) Tam thức bậc hai $g(x) = -\dfrac{3}{2}x^2 + 9x - \dfrac{27}{2}$ có $\Delta = 0$, nghiệm kép $x_0 = 3$ và hệ số $a = -\dfrac{3}{2} < 0$ nên $g(x) < 0$ với mọi $x \neq 3$.

c) Tam thức bậc hai $h(x) = 2x^2 + 6x - 8$ có $\Delta = 100 > 0$, hệ số $a = 2 > 0$ và có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -4; x_2 = 1$. Do đó ta có bảng xét dấu $h(x)$

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra $h(x) > 0$ với mọi $x \in (-\infty; -4) \cup (1; +\infty)$ và $h(x) < 0$ với mọi $x \in (-4; 1)$.

□

Ví dụ 3

Xét dấu của mỗi tam thức bậc hai sau

a) $f(x) = 3x^2 - x + 1$.

b) $g(x) = 4x^2 + 4x + 1$.

Lời giải.

a) Tam thức bậc hai $f(x) = 3x^2 - x + 1$ có $\Delta = -11 < 0$, hệ số $a = 3 > 0$ nên $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) Tam thức bậc hai $g(x) = 4x^2 + 4x + 1$ có $\Delta = 0$, nghiệm kép $x_0 = -\dfrac{1}{2}$ và hệ số $a = 4 > 0$ nên $g(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

□

Ví dụ 4

Xét dấu của mỗi tam thức bậc hai sau

a) $-3x^2 + x - \sqrt{2}$.

b) $x^2 + 8x + 16$.

c) $-2x^2 + 7x - 3$.

Lời giải.

a) Tam thức bậc hai $f(x) = -3x^2 + x - \sqrt{2}$ có $\Delta = 1 - 12\sqrt{2} < 0$, hệ số $a = -3 < 0$ nên $f(x) < 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

b) Tam thức bậc hai $g(x) = x^2 + 8x + 16$ có $\Delta = 0$, nghiệm kép $x_0 = -4$ và hệ số $a = 1 > 0$ nên $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4\}$.

c) Tam thức bậc hai $h(x) = -2x^2 + 7x - 3$ có $\Delta = 50 > 0$, hệ số $a = -2 < 0$ và có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \dfrac{1}{2}$; $x_2 = 3$. Do đó ta có bảng xét dấu $h(x)$

x	$-\infty$		$\dfrac{1}{2}$		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Suy ra $h(x) < 0$ với mọi $x \in \left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right) \cup (3; +\infty)$ và $h(x) > 0$ với mọi $x \in \left(\dfrac{1}{2}; 3\right)$

□

Dạng 2 Giải các bài toán liên quan đến bất phương trình

Phương pháp giải: Dựa vào bảng xét dấu hoặc hệ thức Δ để xét dấu và đưa ra tập nghiệm cho bất phương trình bậc hai một ẩn.

Ví dụ 1

Giải các bất phương trình sau

a) $3x^2+x+5\le 0$. b) $-3x^2+2\sqrt{3}x-1\ge 0$. c) $-x^2+2x+1>0$.

Lời giải.

a) Tam thức $f(x)=3x^2+x+5$ có $\Delta=-59<0$, hệ số $a=3>0$ nên $f(x)$ luôn dương (cùng dấu với a) với mọi x, tức là $3x^2+5x+5>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Suy ra bất phương trình vô nghiệm.

b) Tam thức $f(x)=-3x^2+2\sqrt{3}x-1$ có $\Delta'=0$, hệ số $a=-3<0$ nên $f(x)$ luôn âm (cùng dấu với a) với mọi $x\ne\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, tức là $-3x^2+2\sqrt{3}x-1<0$ với mọi $x\ne\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Suy ra bất phương trình có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

c) Tam thức $f(x)=-x^2+2x+1$ có $\Delta'=2>0$ nên $f(x)$ có hai nghiệm $x_1=1-\sqrt{2}$ và $x_2=1+\sqrt{2}$.
Mặt khác $a=-1<0$, do đó ta có bảng xét dấu sau

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right)$.

□

Ví dụ 2

Giải bất phương trình bậc hai sau

a) $2x^2-5x+2>0$. b) $-x^2-2x+8>0$.

Lời giải.

a) Tam thức bậc hai $2x^2-5x+2$ có hai nghiệm $x_1=\dfrac{1}{2}$, $x_2=2$ và có hệ số $a=2>0$. Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai, ta thấy tập hợp những giá trị của x sao cho tam thức $2x^2-5x+2$ mang dấu "+" là $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)\cup(2;+\infty)$.

b) Tam thức bậc hai $-x^2-2x+8$ có hai nghiệm $x_1=-4$, $x_2=2$ và có hệ số $a=-1<0$.
Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai, ta thấy tập hợp những giá trị của x sao cho tam thức $-x^2-2x+8$ mang dấu "+" là $(-4;2)$.
Vậy tập nghiệm của bất phương trình $-x^2-2x+8>0$ là $(-4;2)$.

□

Dạng 3 Các bài toán liên quan bất phương bậc hai chứa tham số m

Phương pháp giải:

- $ax^2+bx+c>0,\ (a\neq 0)\ \ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta<0. \end{cases}$
- $ax^2+bx+c\geq 0,\ (a\neq 0)\ \ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta\leq 0. \end{cases}$
- $ax^2+bx+c<0,\ (a\neq 0)\ \ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta<0. \end{cases}$
- $ax^2+bx+c\leq 0,\ (a\neq 0)\ \ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta\leq 0. \end{cases}$

Ví dụ 1

Tìm các giá trị của tham số m để tam thức bậc hai

$$3x^2+2(m-1)x+m+4>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} 3x^2+2(m-1)x+m+4>0\ \ \forall x\in\mathbb{R} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3>0 \\ [2(m-1)]^2-4\cdot 3\cdot(m+4)<0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow 4m^2-16m-44<0 \\ &\Leftrightarrow 2-\sqrt{15}<m<2+\sqrt{15}. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 2

Tìm các giá trị của tham số m để tam thức bậc hai

$$x^2+(m-1)x+2m+7\geq 0\ \ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Lời giải.

$$\begin{aligned} x^2+(m-1)x+2m+7\geq 0\ \ \forall x\in\mathbb{R} &\Leftrightarrow \begin{cases} 1>0 \\ (m+1)^2-4\cdot 1\cdot(2m+7)\leq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow m^2-6m-3\leq 0 \\ &\Leftrightarrow 3-2\sqrt{3}\leq m\leq 3+2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

□

Ví dụ 3

Tìm các giá trị của tham số m để tam thức bậc hai

$$-x^2+2(2m-3)x-4m+3<0\ \ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Lời giải.

$$\begin{aligned}-x^2+2(2m-3)x-4m+3<0\ \ \forall x\in\mathbb{R} &\Leftrightarrow \begin{cases}-1<0\\ [2(2m-3)]^2-4\cdot(-1)\cdot(-4m+3)<0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow 16m^2-64m+48<0\\ &\Leftrightarrow 1<m<3.\end{aligned}$$

□

Ví dụ 4

Tìm các giá trị của tham số m để tam thức bậc hai

$$-2x^2+(m+2)x+m-4\le 0\ \ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Lời giải.

$$\begin{aligned}-2x^2+(m+2)x+m-4\le 0\ \ \forall x\in\mathbb{R} &\Leftrightarrow \begin{cases}-2<0\\ (m+2)^2-4\cdot(-2)\cdot(m-4)\le 0\end{cases}\\ &\Leftrightarrow m^2+12m-28\le 0\\ &\Leftrightarrow -14\le m\le 2.\end{aligned}$$

□

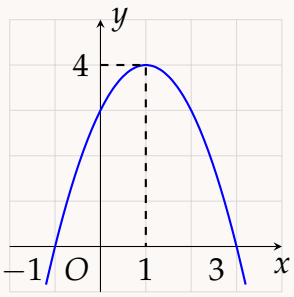
Dạng 4 Tìm nghiệm và lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai thông qua đồ thị

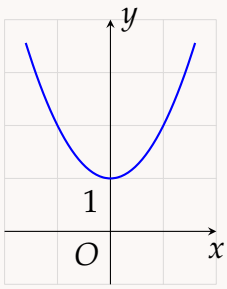
Phương pháp giải:

- Nghiệm của tam thức bậc hai chính là giao điểm của Parabol với trục hoành.
- Lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai ta dựa vào miền giá trị âm và dương của Parabol.

Ví dụ 1

Tìm nghiệm và lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai $f(x)$ ứng với đồ thị của hàm số được cho ở mỗi hình sau

a)


b)


Lời giải.

a) Từ đồ thị ta có nghiệm của $f(x)=0$ là $x=-1$ và $x=3$.
Bảng xét dấu của tam thức $f(x)$:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

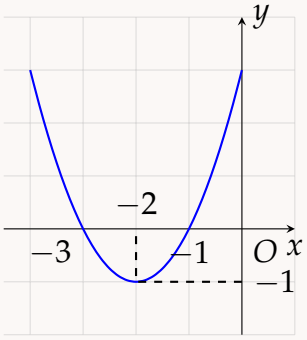
b) Từ đồ thị ta thấy $f(x)=0$ vô nghiệm.
Bảng xét dấu của tam thức $f(x)$:

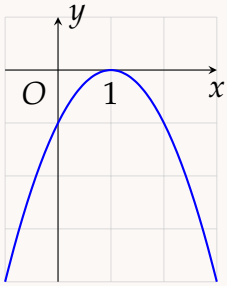
x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

□

Ví dụ 2

Tìm nghiệm và lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai $f(x)$ ứng với đồ thị của hàm số được cho ở mỗi hình sau

a)


b)


Lời giải.

a) Từ đồ thị ta có nghiệm của $f(x)=0$ là $x=-3$ và $x=-1$.
Bảng xét dấu của tam thức $f(x)$:

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b) Từ đồ thị ta thấy $f(x) = 0$ có nghiệm là $x = 1$.
Bảng xét dấu của tam thức $f(x)$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

□

Dạng 5 Ứng dụng thực tế

Phương pháp giải:

- Mô phỏng thực tế thành bài toán về bất đẳng thức.
- Sử dụng kiến thức về xét dấu để giải bất phương trình.
- Kết luận, trả lời cho câu hỏi đặt ra trong thực tế.

Ví dụ 1

Bác Nam có một tấm lưới hình chữ nhật dài $20(m)$. Bác muốn dùng tấm lưới này để rào chắn 3 mặt áp bên bờ tường của khu nhà mình đang ở thành một mảnh đất hình chữ nhật để trồng rau. Hỏi 2 cột của hàng rào phải cắm cách bờ tường bao xa để diện tích mảnh đất được rào không nhỏ hơn 48 (m^2).

Lời giải.

Gọi $x(m)$ $(0 < x < 10)$ là khoảng cách từ điểm cắm cọc đến bờ tường.
Khi đó, độ dài PQ của mảnh đất là $20 - 2x$ (m).
Diện tích của mảnh đất là $S(x) = (20 - 2x) \cdot x = -2x^2 + 20x$.
Diện tích mảnh đất được rào không nhỏ hơn 48 (m^2) nên

$$-2x^2 + 20x \geq 48 \Leftrightarrow -2x^2 + 20x - 48 \geq 0 \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 6.$$

Vậy để diện tích mảnh đất được rào không nhỏ hơn 48 (m^2) thì 2 cột của hàng rào phải cắm cách bờ tường lớn từ $4m$ đến $6m$. □

Ví dụ 2

Độ cao so với mặt đất của một quả bóng được ném lên theo phương thẳng đứng được mô tả bởi hàm số bậc hai $h(t) = -4,9t^2 + 20t + 1$, ở đó độ cao $h(t)$ tính bằng mét và thời gian t tính bằng giây. Trong khoảng thời điểm nào trong quá trình bay của nó, quả bóng sẽ ở độ cao trên $5(m)$ so với mặt đất?

Lời giải.

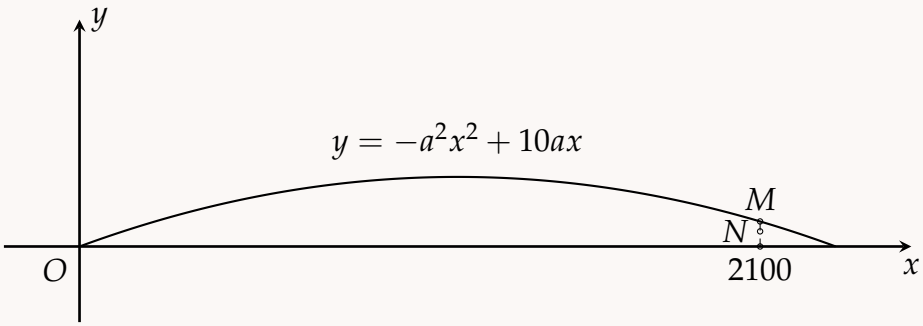
Quả bóng sẽ ở độ cao trên $5(m)$ so với mặt đất thì

$$h(t) > 5 \Leftrightarrow -4,9t^2 + 20t + 1 > 5 \Leftrightarrow -4,9t^2 + 20t - 4 > 0 \Leftrightarrow 0,21 < t < 3,81.$$

Vậy khoảng thời điểm $0,21 < t < 3,81$ thì quả bóng sẽ ở độ cao trên $5(m)$ so với mặt đất. □

Ví dụ 3

Một tình huống trong huấn luyện pháo binh được mô tả như sau: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, khẩu đại bác được biểu thị bằng điểm $O(0;\ 0)$ và bia mục tiêu được biểu thị bằng đoạn thẳng MN với $M(2100;\ 25)$ và $N(2100;\ 15)$ (Hình bên dưới). Xạ thủ cần xác định parabol $y = -a^2x^2 + 10ax$ $(a > 0)$ mô tả quỹ đạo chuyển động của viên đạn sao cho viên đạn bắn ra từ khẩu đại bác phải chạm vào bia mục tiêu. Tìm giá trị lớn nhất của a để xạ thủ đạt được mục đích trên.



Lời giải.

Tại vị trí $x = 2100$, độ cao của viên đạn là
$y = -a^2 \cdot 2100^2 + 10a \cdot 2100 = -4410000a^2 + 21000a$.
Viên đạn chạm được vào bia mục tiêu khi và chỉ khi a thỏa mãn các bất phương trình sau
$2100 \le \dfrac{10}{a}$ (5); $-4410000a^2 + 21000a \le 25$ (6); $-4410000a^2 + 21000a \ge 15$ (7).

- (5) $\Leftrightarrow \dfrac{1}{a} \ge 210 \Leftrightarrow a \le \dfrac{1}{210}$. Vì $a > 0$ nên $a \in \left(0;\ \dfrac{1}{210}\right]$
- (6) $\Leftrightarrow 4410000a^2 - 21000a + 25 \ge 0$
  $\Leftrightarrow (2100a - 5)^2 \ge 0$. Bất phương trình này đúng $\forall a > 0$.
- (7) $\Leftrightarrow 4410000a^2 - 21000a + 15 \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{420} - \dfrac{\sqrt{10}}{2100} \le a \le \dfrac{1}{420} + \dfrac{\sqrt{10}}{2100}$
  $\Leftrightarrow a \in \left[\dfrac{1}{420} - \dfrac{\sqrt{10}}{2100};\ \dfrac{1}{420} + \dfrac{\sqrt{10}}{2100}\right]$.

Do $\dfrac{1}{420} - \dfrac{\sqrt{10}}{2100} > 0$ và $\dfrac{1}{420} + \dfrac{\sqrt{10}}{2100} < \dfrac{1}{210}$ nên
$\left(0;\ \dfrac{1}{210}\right] \cap \left[\dfrac{1}{420} - \dfrac{\sqrt{10}}{2100};\ \dfrac{1}{420} + \dfrac{\sqrt{10}}{2100}\right] = \left[\dfrac{1}{420} - \dfrac{\sqrt{10}}{2100};\ \dfrac{1}{420} + \dfrac{\sqrt{10}}{2100}\right]$
Vì thế, viên đạn chạm được vào bia mục tiêu khi và chỉ khi $a \in \left[\dfrac{1}{420} - \dfrac{\sqrt{10}}{2100};\ \dfrac{1}{420} + \dfrac{\sqrt{10}}{2100}\right]$.

Vậy giá trị lớn nhất của a là $\dfrac{1}{420} + \dfrac{\sqrt{10}}{2100}$. □

C BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1

Xét dấu tam thức bậc hai sau

a) $3x^2-4x+1$.

b) x^2+2x+1.

c) $-x^2+3x-2$.

d) $-x^2+x-1$.

Lời giải.

a) $3x^2-4x+1$

Tam thức $f(x)=3x^2-4x+1$ có $\Delta'=1>0$, $a=3>0$ và có hai nghiệm phân biệt $x_1=\dfrac{1}{3}$; $x_2=1$.

Ta có bảng xét dấu $f(x)$

x	$-\infty$		$\dfrac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra $f(x)>0,\ \forall x\in\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty)$ và $f(x)<0,\ \forall x\in\left(\dfrac{1}{3};1\right)$.

b) x^2+2x+1

Tam thức $g(x)=x^2+2x+1=(x+1)^2\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

c) $-x^2+3x-2$

Tam thức $h(x)=-x^2+3x-2$ có $\Delta=1>0$, $a=-1<0$ và có hai nghiệm phân biệt $x_1=1$; $x_2=2$.

Ta có bảng xét dấu của $h(x)$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Suy ra $f(x)>0,\ \forall x\in(1;2)$ và $f(x)<0,\ \forall x\in(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

d) $-x^2+x-1$

Tam thức $k(x)=-x^2+x-1$ có $\Delta<0$ và $a=-1<0$ nên $k(x)<0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

□

Bài 2

Giải các bất phương trình sau

a) $x^2-1\geq 0$.

b) $x^2-2x-1<0$.

c) $-3x^2+12x+1\leq 0$.

d) $5x^2+x+1\geq 0$.

Lời giải.

a) $x^2-1\geq 0$
Tam thức $f(x)=x^2-1$ có $\Delta=1>0$ nên $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x=\pm 1$.
Mặt khác $a=1>0$, do đó ta có bảng xét dấu sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$.

b) $x^2-2x-1<0$
Tam thức $g(x)=x^2-2x-1$ có $\Delta'=2>0$ nên $g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x=1\pm\sqrt{2}$.
Mặt khác $a=1>0$, do đó ta có bảng xét dấu sau

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right)$.

c) $-3x^2+12x+1\leq 0$
Tam thức $h(x)=-3x^2+12x+1$ có $\Delta'=39>0$ nên $h(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x=\dfrac{6\pm\sqrt{39}}{3}$.
Mặt khác $a=-3<0$, do đó ta có bảng xét dấu sau

x	$-\infty$		$\dfrac{6-\sqrt{39}}{3}$		$\dfrac{6+\sqrt{39}}{3}$		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-\infty;\dfrac{6-\sqrt{39}}{3}\right]\cup\left[\dfrac{6+\sqrt{39}}{3};+\infty\right)$.

d) $5x^2+x+1\geq 0$
Tam thức $k(x)=5x^2+x+1$ có $\Delta=-19<0$, hệ số $a=5>0$ nên $k(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\mathbb{R}$.

□

Bài 3

Tìm các giá trị của tham số m để tam thức bậc hai $x^2+(m+1)x+2m+3$ dương với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Lời giải.

Ta có $x^2+(m+1)x+2m+3>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ □

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=1>0\text{ (luôn đúng)}\\ \Delta=(m+1)^2-4\cdot 1\cdot(2m+3)<0\end{cases}$$

Bài 4

Một vật được ném theo phương thẳng đứng xuống dưới từ độ cao 320m với vận tốc ban đầu $v_0 = 20\text{m/s}$. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu giây, vật đó cách mặt đất không quá 100m? Giả thiết rằng sức cản của không khí là không đáng kể.

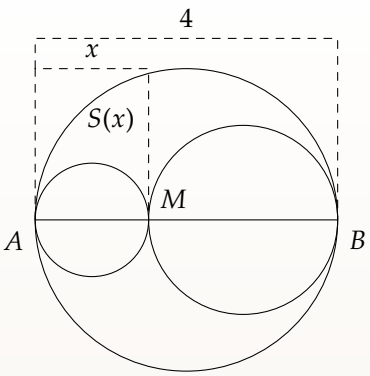
Lời giải.

Ta có $h(t) = -10t^2 - 20t + 320$ (m).

$h(t) < 100 \Leftrightarrow -10t^2 - 20t + 320 < 100 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 22 > 00 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < -1 - \sqrt{23} \\ t > -1 + \sqrt{23}. \end{array}\right.$ □

Bài 5

Xét đường tròn đường kính $AB = 4$ và một điểm M di chuyển trên đoạn AB, đặt $AM = x$. Xét hai đường tròn đường kính AM và BM. Kí hiệu $S(x)$ là diện tích phần hình phẳng nằm trong hình tròn lớn và nằm ngoài hai hình tròn nhỏ. Xác định các giá trị của x để diện tích $S(x)$ không vượt quá một nửa tổng diện tích hai hình tròn nhỏ.



Lời giải.

Tổng diện tích của hai hình tròn nhỏ là $S = \pi \cdot \dfrac{x^2}{4} + \pi \dfrac{(4-x)^2}{4}$.

Ta có $S(x) = \pi \cdot 4^2 - S \le \dfrac{1}{2}S \Leftrightarrow S \ge \dfrac{2}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 = \dfrac{32\pi}{3}$.

Suy ra $\pi \cdot \dfrac{x^2}{4} + \pi \dfrac{(4-x)^2}{4} \ge \dfrac{32\pi}{3}$ □

$\Leftrightarrow 3x^2 + 3(4-x)^2 \ge 4 \cdot 32$

$\Leftrightarrow 6x^2 - 24x - 80 \ge 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{6 + 2\sqrt{39}}{3}$; $x = \dfrac{6 - 2\sqrt{39}}{3}$(loại).

Bài 6

Trong các bất phương trình sau, bất phương trình nào là bất phương trình bậc hai một ẩn? Vì sao?

a) $-2x + 2 < 0$.

b) $\dfrac{1}{2}y^2 - \sqrt{2}(y+1) \le 0$.

c) $y^2 + x^2 - 2x \ge 0$.

Lời giải.

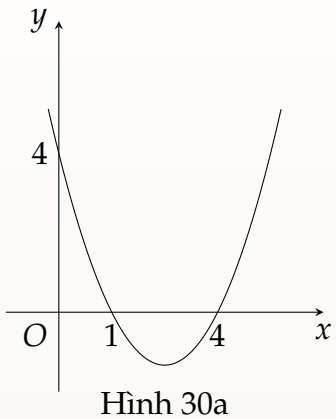
a) Bất phương trình $-2x + 2 < 0$ không phải bất phương trình bậc hai một ẩn vì ở đây bậc cao nhất của x là bậc một.

b) Bất phương trình $\dfrac{1}{2}y^2 - \sqrt{2}(y+1) \le 0$ là bất phương trình bậc hai ẩn y vì nó có dạng $ax^2 + bx + c \le 0$, $a \ne 0$.

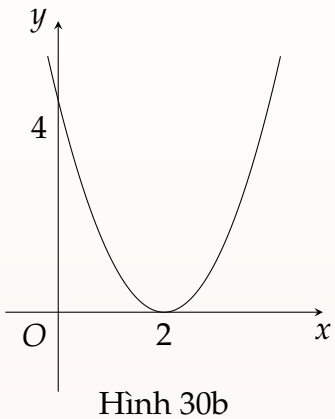
c) Bất phương trình $y^2 + x^2 - 2x \ge 0$ không phải bất phương trình bậc hai một ẩn vì ở đây xuất hiện hai ẩn x, y.

Bài 7

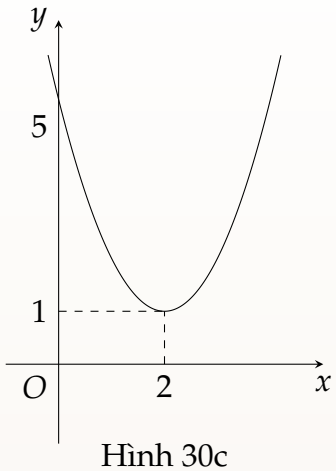
Dựa vào đồ thị hàm số bậc hai $y = f(x)$ trong các hình dưới đây, hãy viết tập nghiệm của mỗi bất phương trình sau: $f(x) > 0$; $f(x) < 0$; $f(x) \geq 0$; $f(x) \leq 0$.



Hình 30a



Hình 30b



Hình 30c

Lời giải.

a) Hình 30a:
$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$.
$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (1; 4)$.
$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1] \cup [4; +\infty)$.
$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [1; 4]$.

b) Hình 30b:
$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.
$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$.
$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 2] \cup [2; +\infty)$.
$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x = 2$.

c) Hình 30c:
$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.
$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$.
$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.
$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \varnothing$.

Bài 8

Giải các bất phương trình bậc hai sau

a) $2x^2 - 5x + 3 > 0$.

b) $-x^2 - 2x + 8 \leq 0$.

c) $4x^2 - 12x + 9 < 0$.

d) $-3x^2 + 7x - 4 \geq 0$.

Lời giải.

a) $2x^2 - 5x + 3 > 0$.
Tam thức bậc hai $2x^2 - 5x + 3$ có hai nghiệm $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{3}{2}$.

Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai ta thấy tập hợp nghiệm của bất phương trình $2x^2-5x+3>0$ là $(-\infty,1)\cup\left(\frac{3}{2},\infty\right)$.

b) $-x^2-2x+8\leq 0$.
Tam thức bậc hai $-x^2-2x+8$ có hai nghiệm $x_1=-4$, $x_2=2$.
Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai ta thấy tập hợp nghiệm của bất phương trình $-x^2-2x+8\leq 0$ là $[-4,2]$.

c) $4x^2-12x+9<0$.
Tam thức bậc hai $4x^2-12x+9$ có nghiệm duy nhất là $x=\frac{3}{2}$.
Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai ta thấy tập hợp nghiệm của bất phương trình $4x^2-12x+9<0$ là $[-4,2]$.

d) $-3x^2+7x-4\geq 0$.
Tam thức bậc hai $-3x^2+7x-4$ có hai nghiệm $x_1=1$, $x_2=\frac{4}{3}$.
Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai ta thấy tập hợp nghiệm của bất phương trình $-3x^2+7x-4\geq 0$ là $\left[1,\frac{4}{3}\right]$.

□

Bài 9

Tìm m để phương trình $2x^2+(m+1)x+m+8=0$ có nghiệm.

Lời giải.

Ta có $2x^2+(m+1)x+m+8=0$ là phương trình bậc hai một ẩn.
Vậy phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\Delta=m^2-6m-63\geq 0$. Khi đó $m=3-6\sqrt{2}$ hoặc $m=3+6\sqrt{2}$. □

Bài 10

Xét hệ tọa độ Oth trên mặt phẳng, trong đó trục Ot biểu thị thời gian t (tính bằng giây) và trục Oh biểu thị độ cao h (tính bằng mét). Một quả bóng được đá lên từ điểm $A(0;0,2)$ và chuyển động theo quỹ đạo là một cung parabol. Quả bóng đó đạt độ cao 8,5 mét sau 1 giây và đạt độ cao 6 mét sau 2 giây.

a) Hãy tìm hàm số bậc hai biểu thị quỹ đạo chuyển động của quả bóng.

b) Trong khoảng thời gian nào thì quả bóng vẫn chưa chạm đất?

Lời giải.

a) Do quỹ đạo chuyển động của quả bóng là một parabol nên suy ra hàm số biểu thị quỹ đạo này có dạng $h=at^2+bt+c$ với t là thời gian. (1)

- Do $A(0;0,2)$ thuộc quỹ đạo chuyển động của quả bóng (quả bóng xuất phát từ A) nên tọa độ của nó thỏa mãn (1). Thay $t=0$, $h=0,2$ vào (1) suy ra $c=0,2$. Khi đó (1) trở thành $h=at^2+bt+0,2$
- Theo bài quả bóng đó đạt độ cao 8,5 mét sau 1 giây và đạt độ cao 6 mét sau 2 giây. Thay $h=8,5$; $t=1$ và $h=6$; $t=2$ vào (1) ta được hệ phương trình: $\begin{cases}8=a+b+0,2\\6=4a+2b+0,2\end{cases}\Leftrightarrow$ $\begin{cases}a+b=7,8\\4a+2b=5,8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-4,9\\b=12,7\end{cases}$.

Vậy hàm số biểu thị quỹ đạo chuyển động của quả bóng là $h = -4,9t^2 + 12,7t + 0,2$.

b) Ta thấy bóng chạm đất sẽ tương ứng với thời điểm mà $h = 0$.
Khi đó $-4,9t^2 + 12,7t + 0,2 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{12,7 + \sqrt{165,21}}{9,8}$.
Vậy khoảng thời gian mà bóng chưa chạm đất là $\left[0, \dfrac{12,7 + \sqrt{165,21}}{9,8}\right)$

□

Bài 11

Công ty An Bình thông báo giá tiền cho chuyến đi tham quan của một nhóm khách du lịch như sau: 10 khách đầu tiên có giá 800 000 đồng/người. Nếu có nhiều hơn 10 người đăng kí thì cứ có thêm một người, giá vé sẽ giảm 10 000 đồng/người cho toàn bộ hành khách.

a) Gọi x là số lượng khách từ người thứ 11 trở lên của nhóm. Biểu thị doanh thu theo x.

b) Số người của nhóm khách du lịch nhiều nhất là bao nhiêu thì công ty không bị lỗ? Biết rằng chi phí thực sự cho chuyến đi là 700 000 đồng/người.

Lời giải.

a) Ta có x là số lượng khách từ người thứ 11 trở lên của nhóm.
Số tiền được giảm của mỗi khách trong nhóm là $10\,000x$ (đồng).
Khi đó số tiền nhóm khách hàng này cần phải trả (doanh thu của công ty) là

$$(80\,000 - 10\,000x) \cdot x = 80\,000x - 10\,000x^2$$

b) Để công ty không bị lỗ thì

$$80\,000x - 10\,000x^2 \geq 700\,000 \Leftrightarrow -10\,000x^2 + 80\,000x - 700,000 \geq 0 \qquad (1)$$

Tam thức bậc hai $-10\,000x^2 + 80\,000x - 700,000$ có hai nghiệm $x_1 = 1$; $x_2 = 7$. Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai ta thấy tập hợp nghiệm của bất phương trình (1) là $[1;7]$.
Vậy số người của nhóm khách nhiều nhất là 7 thì công ty sẽ không bị lỗ.

□

Bài 12

Hãy cho biết biểu thức nào sau đây là tam thức bậc hai.

a) $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ b) $f(x) = 2x - 4$

c) $f(x) = 3x^3 + 2x - 1$ d) $f(x) = x^4 - x^2 + 1$

Lời giải.

Theo định nghĩa tam thức bậc hai thì $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ là tam thức bậc hai. □

Bài 13

Xét dấu các tam thức bậc hai sau

a) $x^2 + 2x + 3$; b) $-x^2 - 4x - 4$; c) $2x^2 - 5x + 3$.

Lời giải.

a) $f(x)=x^2+2x+3$ có $\Delta=(2)^2-4.1.3=-8<0$ và $a=1>0$ nên $f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

b) $g(x)=-x^2-4x-4$ có $\Delta=0$ và $a=-1<0$ nên $g(x)=0$ có nghiệm kép $x=-2$.
Do đó $g(x)<0,\ \forall x\neq -2$.

c) Ta có $h(x)=2x^2-5x+3$ có $\Delta=1>0$ và $a=2>0$ và $h(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1=1;\ x_2=\dfrac{3}{2}$.
Do đó ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		$\dfrac{3}{2}$		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra $h(x)>0,\ \forall x\in(-\infty;1)\cup\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$ và $h(x)<0,\ \forall x\in\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$.

□

Bài 14

Xét dấu các tam thức bậc hai sau

a) $-5x^2+3x-1$; b) $x^2+12x+36$; c) $2x^2+7x-15$.

Lời giải.

a) $f(x)=-5x^2+3x-1$ có $\Delta=-11<0$ và $a=-5<0$ nên $f(x)<0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

b) $g(x)=x^2+12x+36$ có $\Delta=0$ và $a=1>0$ nên $g(x)=0$ có nghiệm kép $x=-6$ do đó $f(x)>0,\ \forall x\neq -6$.

c) Ta có $h(x)=2x^2+7x-15$ có $\Delta=169>0$ và $a=2>0$ và $h(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1=-5;\ x_2=\dfrac{3}{2}$.
Do đó ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-5		$\dfrac{3}{2}$		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra $h(x)>0,\ \forall x\in(-\infty;-5)\cup\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$ và $h(x)<0,\ \forall x\in\left(-5;\dfrac{3}{2}\right)$.

□

Bài 15

Xét dấu các tam thức bậc hai sau

a) $-x^2+4x-5$; b) x^2-6x+9; c) $-x^2+2x+1$.

Lời giải.

a) $f(x)=-x^2+4x-5$ có $\Delta=-4<0$ và $a=-1<0$ nên $f(x)<0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

b) $g(x)=x^2-6x+9$ có $\Delta=0$ và $a=1>0$ nên $g(x)$ có nghiệm kép $x=3$ và $f(x)>0,\ \forall x\neq 3$.

c) $h(x)=-x^2+2x+1$ có $\Delta=8>0$, $a=-1<0$ và có hai nghiệm phân biệt $x_1=1-\sqrt{2}$, $x_2=1+\sqrt{2}$.
Do đó ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Suy ra $h(x)<0,\ \forall x\in(-\infty;1-\sqrt{2})\cup(1+\sqrt{2};+\infty)$ và $h(x)>0,\ \forall x\in(1-\sqrt{2};1+\sqrt{2})$.

□

Bài 16

Xét dấu các tam thức bậc hai sau

a) $4x^2+4x+2$; b) $-x^2+2x-1$; c) x^2+3x-4.

Lời giải.

a) $f(x)=4x^2+4x+2$ có $\Delta'=-4<0$ và $a=4>0$ nên $f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

b) $g(x)=-x^2+2x-1$ có $\Delta'=0$ và $a=-1<0$ nên $g(x)$ có nghiệm kép $x=1$ và $g(x)<0,\ \forall x\neq 1$.

c) $h(x)=x^2+3x-4$ có $\Delta=25>0$, $a=1>0$ và có hai nghiệm phân biệt $x_1=-4$, $x_2=1$.
Do đó ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra $h(x)<0$ với mọi $x\in(-4;1)$ và $h(x)>0$ với mọi $x\in(-\infty;-4)\cup(1;+\infty)$.

□

Bài 17

Giải bất phương trình $-2x^2+5x-3\leq 0$.

Lời giải.

Đặt $f(x)=-2x^2+5x-3$. Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;1]\cup\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$.

□

Bài 18

Giải bất phương trình $x^2 - x + 10 > 0$.

Lời giải.

Tam thức $f(x) = x^2 - x + 10$ có $\Delta = -39 < 0$, hệ số $a = 1 > 0$ nên $f(x)$ luôn dương với mọi x, tức là $x^2 - x + 10 > 0$ với mọi x.
Suy ra bất phương trình có tập nghiệm là $S = \mathbb{R}$. □

Bài 19

Giải các bất phương trình sau

a) $2x^2 - 3x + 5 < 0$; b) $2x^2 + 9x + 7 \geq 0$; c) $-x^2 + 4x - 4 \geq 0$.

Lời giải.

a) Tam thức $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ có $\Delta = -31 < 0$, hệ số $a = 2 > 0$ nên $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ luôn dương (cùng dấu với a) với mọi x, tức là $2x^2 - 3x + 5 > 0$.
Suy ra bất phương trình vô nghiệm.

b) Tam thức $f(x) = 2x^2 + 9x + 7$ có $\Delta = 25 > 0$ nên $f(x)$ có hai nghiệm $x_1 = -\dfrac{7}{2}$, $x_2 = -1$.
Mặt khác $a = 2 > 0$ nên ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{7}{2}$		-1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

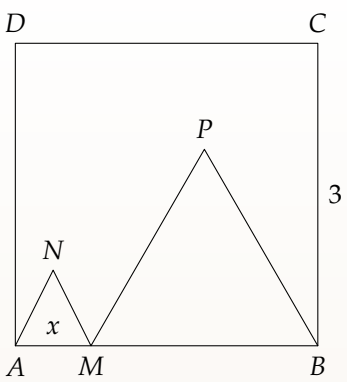
Từ bảng xét dấu ta có tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; -\dfrac{7}{2}\right] \cup [-1; +\infty)$.

c) Tam thức $f(x) = -x^2 + 4x - 4$ có $\Delta = 0$, hệ số $a = -1 < 0$ nên $f(x) = -x^2 + 4x + 4$ luôn âm (cùng dấu với a) với mọi $x \neq 2$, tức là $-x^2 + 4x - 4 < 0\ \forall x \neq 2$.
Suy ra bất phương có nghiệm duy nhất $x = 2$.

□

Bài 20

Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 3 và một điểm M di động trên cạnh AB sao cho $AM = x$. Dựng các tam giác đều AMN và MBP nằm bên trong hình vuông $ABCD$. Tìm các giá trị của x sao cho tổng diện tích của hai tam giác đều bé hơn một phần tư diện tích hình vuông $ABCD$.



Lời giải.

Ta có $AM = x,\ 0 < x < 3$ nên $MB = 3 - x$.

Tính được $S_{AMN} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}; S_{MBP} = \dfrac{(3-x)^2\sqrt{3}}{4}$.

Do đó tổng diện tích của hai tam giác đều là $\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{(3-x)^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(2x^2 - 6x + 9)$.

Mà $S_{ABCD} = 3^2 = 9$ nên theo giả thiết ta có bất phương trình

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(2x^2 - 6x + 9) < \frac{9}{4} \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 9 - 3\sqrt{3} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 - \sqrt{6\sqrt{3} - 9}}{2} < x < \frac{3 + \sqrt{6\sqrt{3} - 9}}{2} \text{ (thỏa điều kiện).}$$

Vậy $\dfrac{3 - \sqrt{6\sqrt{3} - 9}}{2} < x < \dfrac{3 + \sqrt{6\sqrt{3} - 9}}{2}$. □

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1

Trong các biểu thức sau, biểu thức nào là tam thức bậc 2?

(A) $f(x) = x + 3$.
(B) $f(x) = (m-1)x^2 + 2x + 5$.
(C) $f(x) = 2x^2 + x - 5$.
(D) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - 2}$.

Lời giải.

Tam thức bậc hai có dạng $f(x) = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$.
Vậy biểu thức $f(x) = 2x^2 + x - 5$ là tam thức bậc 2.
Chọn đáp án (C) □

Câu 2

Cho $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$. Điều kiện để $f(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ là

(A) $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$.
(B) $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases}$.
(C) $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$.
(D) $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$.

Lời giải.

Điều kiện để $f(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ là $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0. \end{cases}$

Chọn đáp án (C) □

Câu 3

Bảng xét dấu nào sau đây là của tam thức $f(x) = -x^2 - x + 6$?

(A)

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(B)

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(C)

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(D)

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Lời giải.

Ta có $f(x)=-x^2-x+6 \Rightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=2. \end{array}\right.$

Tam thức $f(x)$ có hệ số $a=-1$ nên bảng xét dấu của $f(x)$ là

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Chọn đáp án (C) □

Câu 4

Cho biểu thức $f(x)=2(x-3)$. Khẳng định nào sau đây đúng.

(A) $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$.
(B) $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$.
(C) $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 6$.
(D) $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -6$.

Lời giải.

Ta có $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$

Chọn đáp án (A) □

Câu 5

Biểu thức $f(x)$ là tam thức bậc hai, có bảng xét dấu như hình vẽ. Tìm khẳng định đúng.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

(A) $f(x)=(x-2)^2$. (B) $f(x)=(x+2)^2$. (C) $f(x)=-(x+2)^2$. (D) $f(x)=-(x-2)^2$.

Lời giải.

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $f(x) \leq 0, \forall x \neq -2$.

Vậy $f(x)=-(x+2)^2$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 6

Một nghiệm của bất phương trình $x^2-2x-2 \leq 0$ là

(A) $x=2$. (B) $x=3$. (C) $x=4$. (D) $x=5$.

Lời giải.

Một nghiệm của bất phương trình $x^2-2x-2 \leq 0$ là $x=2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 7

Số giá trị nguyên của tham số $m \in (-10;10)$ để bất phương trình $mx^2-2mx-1+2m \leq 0$ đúng với mọi x là

(A) 9. (B) 10. (C) 11. (D) 8.

Lời giải.

Để bất phương trình $mx^2-2mx-1+2m\le 0$ đúng với mọi x khi

$$\begin{cases} m<0 \\ (-m)^2-m(-1+2m)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ -m^2+m\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ \left[\begin{array}{l} m\le 0 \\ m\ge 1. \end{array}\right. \end{cases}$$

Vậy có 9 giá trị nguyên thỏa đề bài.
Chọn đáp án (B) □

Câu 8

Tìm các giá trị của tham số m để bất phương trình $-x^2+(2m-1)x+m<0$ nghiệm đúng với mọi x.

(A) $m=\dfrac{1}{2}$. (B) $m=-\dfrac{1}{2}$. (C) $m\in\mathbb{R}$. (D) Không tồn tại m.

Lời giải.

Để bất phương trình $-x^2+(2m-1)x+m<0$ nghiệm đúng với mọi x khi

$$(2m-1)^2+4m<0 \Leftrightarrow 4m^2+1<0 \Leftrightarrow m\in\varnothing.$$

Vậy không tồn tại m thỏa đề bài.
Chọn đáp án (D) □

Câu 9

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $2x^2+2(m-2)x+m-2<0$ có nghiệm.

(A) $m\in(-\infty;2)\cup(4;+\infty)$. (B) $m\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$.
(C) $m\in[2;4]$. (D) $m\in[0;2]$.

Lời giải.

Trước tiên ta tìm giá trị m để $2x^2+2(m-2)x+m-2\ge 0$ với mọi x.
Theo định lý về dấu tam thức bậc hai $2x^2+2(m-2)x+m-2\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases} 2>0 \\ \triangle'\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall m\in\mathbb{R} \\ (m-2)^2-2(m-2)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow (m-2)(m-4)\le 0 \Leftrightarrow 2\le m\le 4.$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm khi $m\in(-\infty;2)\cup(4;+\infty)$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 10

Nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x^2+3x-4>0 \\ 2x^2-8x\le 0. \end{cases}$

(A) $x\in(1;4)$. (B) $x\in[0\,;4)$. (C) $x\in[-4;1]$. (D) $x\in(1\,;4]$.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} x^2+3x-4>0 \\ 2x^2-8x\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<-4 \\ x>1 \end{array}\right. \\ 0\le x\le 4 \end{cases} \Leftrightarrow 1<x\le 4.$$

Vậy $x \in (1\,;\,4]$

Chọn đáp án (D) □

Câu 11

Cho phương trình: $x^2 - mx + m - 1 = 0$. Xác định m để phương trình có hai nghiệm $x_1,\ x_2$ thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 5$.

(A) $m = 0$. (B) $m = 3$. (C) $m = -3$. (D) $m = 1$.

Lời giải.

Theo đề bài ta có

$$\begin{cases} m^2 - 4m + 4 > 0 \\ m^2 - 2m + 2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = -1. \end{array}\right. \end{cases}$$

Vậy chọn đáp án $m = 3$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 12

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để biểu thức $f(x) = x^2 + 4x + m - 5$ luôn luôn dương.

(A) $m < 9$. (B) $m \geq 9$. (C) $m > 9$. (D) $m \in \varnothing$.

Lời giải.

Để biểu thức $f(x) = x^2 + 4x + m - 5$ luôn luôn dương khi $4 - m + 5 < 0 \Leftrightarrow m > 9$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 13

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 4m + 8 < 0$ vô nghiệm.

(A) $m \in [-1;7]$. (B) $m \in (-1;7)$.
(C) $m \in (-\infty;-1] \cup [7;+\infty)$. (D) $m \in (-1;+\infty)$.

Lời giải.

Để bất phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 4m + 8 < 0$ vô nghiệm khi $x^2 - 2(m-1)x + 4m + 8 \geq 0$ với mọi x.

$$\Leftrightarrow (m-1)^2 - 4m - 8 \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m - 7 \leq 0.$$

Vậy $m \in [-1;7]$ thì bất phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 4m + 8 < 0$ vô nghiệm.

Chọn đáp án (A) □

Câu 14

Tìm m để hệ bất phương trình $\begin{cases} -x^2 + 6x + m - 8 \leq 0 \\ x^2 + mx + 1 > 0 \end{cases}$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

(A) $-2 < m \leq -1$. (B) $-2 \leq m \leq -1$. (C) $m < -1$. (D) $m \leq -1$.

Lời giải.

Để hệ bất phương trình $\begin{cases} -x^2+6x+m-8\le 0 \\ x^2+mx+1>0 \end{cases}$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9+m-8\le 0 \\ m^2-4<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\le 0 \\ -2<m<2. \end{cases}$$

Vậy $-2<m\le -1$ thì hệ bất phương trình $\begin{cases} -x^2+6x+m-8\le 0 \\ x^2+mx+1>0 \end{cases}$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 15

Bạn An muốn trồng một vườn hoa trên mảnh vườn nhà mình. Bạn An chỉ đủ vật liệu để làm 32 m hàng rào. Hỏi diện tích lớn nhất của vườn hoa là bao nhiêu?

(A) $32\,\text{m}^2$. (B) $8\,\text{m}^2$. (C) $16\,\text{m}^2$. (D) $64\,\text{m}^2$.

Lời giải.

Diện tích lớn nhất của vườn hoa là $8\cdot 8=64\,\text{m}^2$.

Chọn đáp án (D) □

§4. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Phương trình dạng $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{dx^2+ex+f}$

Phương pháp 4.1. Để giải phương trình $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{dx^2+ex+f}$, ta thực hiện như sau:

- Bình phương hai vế và giải phương trình nhận được;
- Thử lại các giá trị x tìm được ở trên có thoả mãn phương trình đã cho hay không và kết luận nghiệm.

Ví dụ 1

Giải phương trình $\sqrt{2x^2-4x-2}=\sqrt{x^2-x-2}$.

Lời giải.

Bình phương hai vế của phương trình, ta được

$$2x^2-4x-2=x^2-x-2$$

Sau khi thu gọn ta được $x^2-3x=0$.
Từ đó $x=0$ hoặc $x=3$.
Thay lần lượt hai giá trị này của x vào phương trình đã cho, ta thấy chỉ có $x=3$ thoả mãn.
Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=3$. □

2. Phương trình dạng $\sqrt{ax^2+bx+c}=dx+e$

Phương pháp 4.2. Để giải phương trình $\sqrt{ax^2+bx+c}=dx+e$, ta thực hiện như sau:

- Bình phương hai vế và giải phương trình nhận được;
- Thử lại các giá trị x tìm được ở trên có thoả mãn phương trình đã cho hay không và kết luận nghiệm.

Ví dụ 2

Giải phương trình $\sqrt{2x^2-5x-9}=x-1$.

Lời giải.

Bình phương hai vế của phương trình ta được

$$2x^2-5x-9=x^2-2x+1$$

Sau khi thu gọn ta được $x^2-3x-10=0$.
Từ đó $x=-2$ hoặc $x=5$.
Thay lần lượt hai giá trị này của x vào phương trình đã cho, ta thấy chỉ có $x=5$ thoả mãn.
Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=5$. □

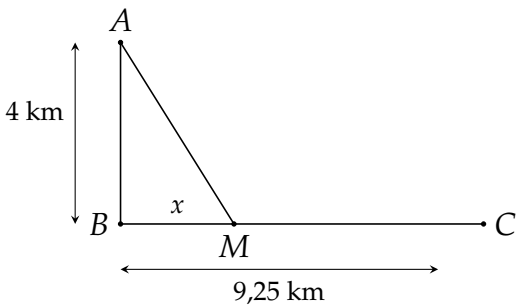
⚠ *Với $x=-2$ thì vế phải âm, vế trái không âm. Do đó, ta có thể kết luận $x=-2$ không là nghiệm của phương trình đã cho mà không cần thử lại.*

Vận dụng

Bác Việt sống và làm việc tại trạm hải đăng cách bờ biển 4 km. Hằng tuần bác chèo thuyền vào vị trí gần nhất trên bờ biển là bến Bính để nhận hàng hoá do cơ quan cung cấp. Tuần này, do trục trặc về vận chuyển nên toàn bộ số hàng vẫn đang nằm ở thôn Hoành, bên bờ biển cách bến Bính 9,25km và sẽ được anh Nam vận chuyển trên con đường dọc bờ biển tới bến Bính bằng xe kéo. Bác Việt đã gọi điện thống nhất với anh Nam là họ sẽ gặp nhau ở vị trí nào đó giữa bến Bính và thôn Hoành để hai người có mặt tại đó cùng lúc, không mất thời gian chờ nhau. Tìm vị trí hai người dự định gặp nhau, biết rằng vận tốc kéo xe của anh Nam là 5 km/h và thuyền của bác Việt di chuyển với vận tốc 4 km/h. Ngoài ra giả thiết rằng đường bờ biển từ thôn Hoành đến bến Bính là đường thẳng và bác Việt cũng luôn chèo thuyền tới một điểm trên bờ biển theo một đường thẳng.

Lời giải.

Ta mô hình hoá bài toán như hình bên: Trạm hải đăng ở vị trí A; bến Bính ở B và thôn Hoành ở C.
Giả sử bác Việt chèo thuyền cập bến ở vị trí M và ta đặt $BM = x$ $(x > 0)$.
Để hai người không phải chờ nhau thì thời gian chèo thuyền bằng thời gian kéo xe nên ta có phương trình:



$$\frac{\sqrt{x^2+16}}{4} = \frac{9{,}25-x}{5}.$$

Giải phương trình này sẽ tìm được vị trí hai người dự định gặp nhau.

□

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Giải phương trình dạng $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$

Ví dụ 1

Giải phương trình $\sqrt{2x-1} = \sqrt{x^2-3x}$.

Lời giải.

Ta có

$$\sqrt{2x-4} = \sqrt{x^2-3x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4 \geq 0 \\ 2x-4 = x^2-3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2-5x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 4.$$

Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 4$. □

Ví dụ 2

Giải phương trình $\sqrt{x^2+3} = \sqrt{2x+6}$.

Lời giải.

$$\sqrt{x^2+3}=\sqrt{2x+6}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -3\\ x^2+3=2x+6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -3\\ \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=3.\end{array}\right.\end{cases}$$

Phương trình có 2 nghiệm $x=-1; x=3$. □

Dạng 2 Giải phương trình dạng $\sqrt{f(x)}=g(x)$

Ví dụ 1

Giải phương trình $\sqrt{x^2-2x+5}=3x-1$.

Lời giải.

$$\sqrt{x^2-2x+5}=3x-1\Leftrightarrow\begin{cases}3x-1\geq 0\\ x^2-2x+5=(3x-1)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq\dfrac{1}{3}\\ 8x^2-4x-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq\dfrac{1}{3}\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=\dfrac{-1}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$. □

Ví dụ 2

Giải phương trình $\sqrt{2x^2+2}=x+1$.

Lời giải.

$$\sqrt{2x^2+2}=x+1\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -1\\ 2x^2+2=(x+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$$

Phương trình có 2 nghiệm $x=1$. □

Dạng 3 Bài toán thực tế

Ví dụ 1

Từ một tấm gỗ hình vuông cạnh 200 cm. Cắt một tấm gỗ có hình tam giác vuông, có tổng của một cạnh góc vuông và cạnh huyền bằng 120 cm và cạnh góc vuông còn lại bằng $\dfrac{\sqrt{3}}{5}$ cạnh của tấm gỗ hình vuông. Hỏi cạnh huyền của tấm gỗ hình tam giác bằng bao nhiêu?

Lời giải.

Kí hiệu cạnh góc vuông $AB=x$, $0<x<60$.
Khi đó cạnh huyền $BC=120-x$.
Cạnh góc vuông kia là $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=\sqrt{120^2-240x}$.

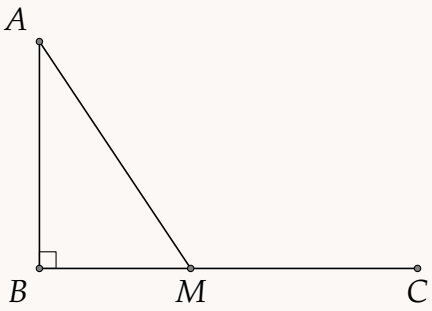
Theo giả thiết ta có

$$\sqrt{120^2 - 240x} = \frac{\sqrt{3}}{5} \cdot 200 \Leftrightarrow x = 40.$$

Vậy cạnh huyền $BC = 80$. □

Ví dụ 2

Một ngọn hải đăng đạt tại vị trí A có khoảng cách đến bờ biển $AB = 5$ km. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng bằng $BC = 7$ km. Người canh hải đăng có thể chèo đò từ A đến vị trí M trên bờ biển với vận tốc 4 km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 6 km/h. Vị trí của điểm M cách B một khoảng bao nhiêu để thời gian người đó đi đến C là 2 giờ?(làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải.

Gọi khoảng cách từ M đến B là x km $(0 \le x \le 7)$.
Khi đó, $MC = 7 - x$ và $AM = \sqrt{x^2 + 25}$.
Người đó đi từ A đến C hết khoảng thời gian là $\dfrac{7-x}{6} + \dfrac{\sqrt{x^2+25}}{4}$ giờ.
Theo giả thiết ta có

$$\frac{7-x}{6} + \frac{\sqrt{x^2+25}}{4} = 2 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+5} = 10 + 2x$$

$$\Leftrightarrow \quad 5x^2 - 40x - 55 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{20+\sqrt{895}}{9} \\ x = \dfrac{20-\sqrt{895}}{9} \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Vậy M cách B một khoảng 5,5 km. □

C BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1

Giải các phương trình $\sqrt{x+1} = \sqrt{x-1}$.

Lời giải.

$$\sqrt{x+1} = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x+1 = x-1 \\ x+1 = 1-x \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ \left[\begin{array}{l} 1 = -1 \text{, suy ra phương trình vô nghiệm.} \\ x = 0 \end{array}\right. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm phương trình là $S = \varnothing$. □

Bài 2

Giải phương trình $\sqrt{2x-4} = \sqrt{x^2-3x}$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{2x-4}=\sqrt{x^2-3x}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4\geq 0 \\ 2x-4=x^2-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2 \\ x^2-5x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=4.$$

Phương trình có nghiệm duy nhất $x=4$. □

Bài 3

Giải phương trình $\sqrt{x^2-2x+5}=3x-1$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{x^2-2x+5}=3x-1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1\geq 0 \\ x^2-2x+5=(3x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq \dfrac{1}{3} \\ 8x^2-4x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq \dfrac{1}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{-1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$. □

Bài 4

Giải phương trình $\sqrt{x^2+x+2}=2x^2+2x-2$.

Lời giải.

Đặt $t=\sqrt{x^2+x+2}$, $(t\geq 0)$ có phương trình

$$t=2t^2-6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=\dfrac{-3}{2}. \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Vậy $\sqrt{x^2+x+2}=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2. \end{array}\right.$

Phương trình có 2 nghiệm $x=1; x=-2$. □

Bài 5

Giải phương trình $\sqrt{(x-1)(x+2)}=2x^2+2x-10$.

Lời giải.

Đặt $\sqrt{(x-1)(x+2)}=t$, $(t\geq 0)$ thì $x^2+x=t^2+2$ ta có phương trình

$$t=2(t^2+2)-10 \Leftrightarrow 2t^2-t-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=\dfrac{-3}{2}. \text{(loại)} \end{array}\right.$$

Vậy $\sqrt{(x-1)(x+2)}=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-3. \end{array}\right.$

Phương trình có 2 nghiệm $x=2; x=-3$. □

Bài 6

Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{2x-3}=x-3$.

b) $\sqrt{5x+10}=8-x$.

Lời giải.

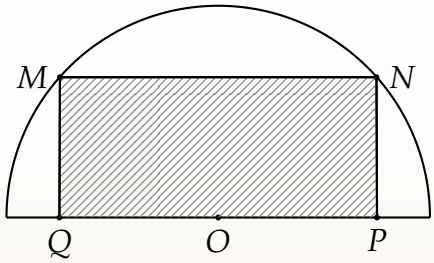
a) $\sqrt{2x-3}=x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3\geq 0 \\ 2x-3=(x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} x\geq 3 \\ x^2-8x+12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 3 \\ \left[\begin{array}{ll} x=2 & \text{(Loại)} \\ x=6 & \text{(Nhận).} \end{array}\right. \end{cases}$
Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{6\}$.

b) $\sqrt{5x+10}=8-x \Leftrightarrow \begin{cases} 8-x\geq 0 \\ 5x+10=(8-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} x\leq 8 \\ x^2-21x+54=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 8 \\ \left[\begin{array}{ll} x=18 & \text{(Loại)} \\ x=3 & \text{(Nhận).} \end{array}\right. \end{cases}$
Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{3\}$.

□

Bài 7

Từ một tấm tôn có hình dạng là nửa hình tròn bán kính $R=3$, người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật (hình vẽ bên). Tính độ dài cạnh MQ, biết chu vi hình chữ nhật bằng 12.



Lời giải.

Đặt $OQ=x$, $(0<x<3) \Rightarrow MQ=\sqrt{MO^2-OQ^2}=\sqrt{9-x^2}$.

Ta có $4x+2\sqrt{9-x^2}=12 \Leftrightarrow \sqrt{9-x^2}=6-2x \Leftrightarrow 5x^2-24x+27=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \text{ (loại)} \\ x=1{,}8. \end{array}\right.$ Vậy $MQ=\dfrac{12}{5}$.

□

Bài 8

Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{3x^2-4x-1}=\sqrt{2x^2-4x+3}$;

b) $\sqrt{x^2+2x-3}=\sqrt{-2x^2+5}$;

c) $\sqrt{2x^2+3x-3}=\sqrt{-x^2-x+1}$;

d) $\sqrt{-x^2+5x-4}=\sqrt{-2x^2+4x+2}$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\sqrt{3x^2-4x-1}=\sqrt{2x^2-4x+3} \Rightarrow 3x^2-4x-1=2x^2-4x+3$$
$$\Leftrightarrow x^2-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2. \end{array}\right.$$

Thử lại ta thấy cả hai giá trị đều thỏa mãn nên phương trình có hai nghiệm $x=2$ và $x=-2$.

b) Ta có

$$\sqrt{x^2+2x-3}=\sqrt{-2x^2+5} \Rightarrow x^2+2x-3=-2x^2+5$$
$$\Leftrightarrow 3x^2+2x-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{4}{3} \\ x=-2. \end{array}\right.$$

Thử lại ta thấy chỉ có giá trị $x=\dfrac{4}{3}$ thỏa mãn nên phương trình nghiệm duy nhất $x=\dfrac{4}{3}$.

c) Ta có

$$\sqrt{2x^2+3x-3}=\sqrt{-x^2-x+1} \Rightarrow 2x^2+3x-3=-x^2-x+1$$
$$\Leftrightarrow 3x^2+4x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{3} \\ x=-2. \end{array}\right.$$

Thử lại ta thấy cả hai giá trị $x=\dfrac{2}{3}$ và $x=-2$ không thỏa mãn nên phương trình đã cho vô nghiệm.

d) Ta có

$$\sqrt{-x^2+5x-4}=\sqrt{-2x^2+4x+2} \Rightarrow -x^2+5x-4=-2x^2+4x+2$$
$$\Leftrightarrow x^2+x-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-3. \end{array}\right.$$

Thử lại ta thấy chỉ có giá trị $x=2$ thỏa mãn nên phương trình nghiệm duy nhất $x=2$.

□

Bài 9

Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{6x^2+13x+13}=2x+4$;

b) $\sqrt{2x^2+5x+3}=-3-x$;

c) $\sqrt{3x^2-17x+23}=x-3$;

d) $\sqrt{-x^2+2x+4}=x-2$.

Lời giải.

a) Ta có

$$\sqrt{6x^2+13x+13}=2x+4 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x+4\geq 0 \\ 6x^2+13x+13=(2x+4)^2 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\geq -2 \\ 2x^2-3x-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3+\sqrt{33}}{4} \\ x=\dfrac{3-\sqrt{33}}{4}. \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=\dfrac{3+\sqrt{33}}{4}$ và $x=\dfrac{3-\sqrt{33}}{4}$.

b) Ta có

$$\sqrt{2x^2+5x+3}=-3-x \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -3-x\geq 0 \\ 2x^2+5x+3=(-3-x)^2 \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\leq -3 \\ x^2-x-6=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\varnothing.$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

c) Ta có

$$\sqrt{3x^2-17x+23}=x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3\geq 0 \\ 3x^2-17x+23=(x-3)^2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 3 \\ 2x^2-11x+14=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 3 \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\dfrac{7}{2} \end{array}\right. \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{7}{2}.$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x=\dfrac{7}{2}$.

d) Ta có

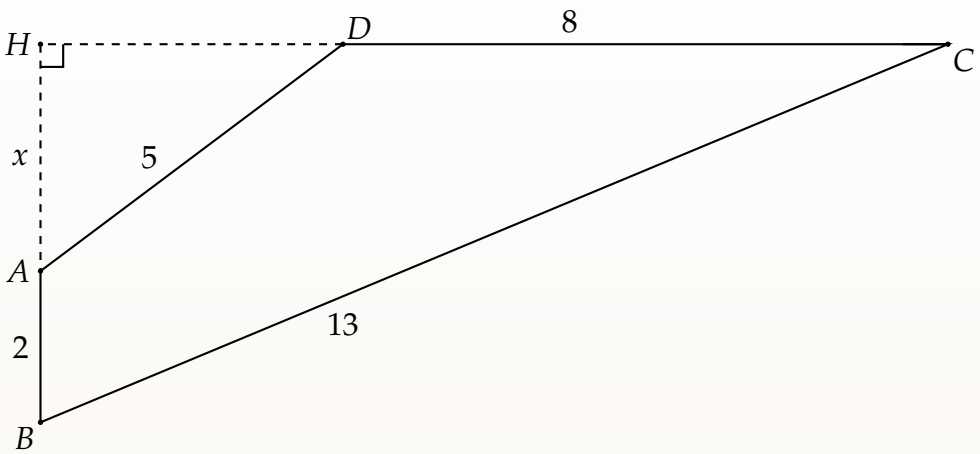
$$\sqrt{-x^2+2x+4}=x-2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2\geq 0 \\ -x^2+2x+4=(x-2)^2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2 \\ -2x^2+6x=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right. \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x=3.$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x=3$.

□

Bài 10

Cho tứ giác $ABCD$ có $AB\perp CD$; $AB=2$; $BC=13$; $CD=8$; $DA=5$ (hình bên dưới). Gọi H là giao điểm của AB và CD và đặt $x=AH$. Hãy thiết lập một phương trình để tính độ dài x, từ đó tính diện tích tứ giác $ABCD$.



Lời giải.

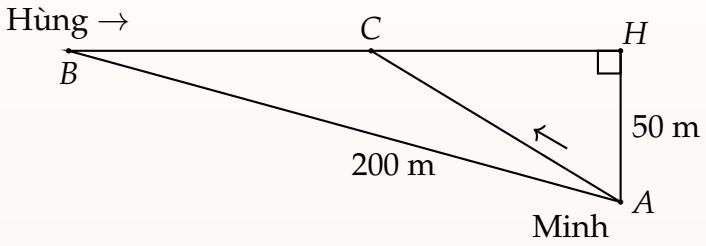
Đặt $x = HA$, $x \geq 0$.
Vì $\triangle DHA$ vuông tại H và $DA = 5$ nên ta có $DH = \sqrt{25 - x^2}$.
Vì $\triangle CHB$ vuông tại H nên theo định lý Pitago ta có

$$\begin{aligned} BC^2 = HC^2 + HB^2 &\Leftrightarrow 13^2 = \left(\sqrt{25 - x^2} + 8\right)^2 + (2 + x)^2 \\ &\Leftrightarrow 16\sqrt{25 - x^2} = 76 - 4x \\ &\Leftrightarrow 4\sqrt{25 - x^2} = 19 - x \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 19 - x \geq 0 \\ 16(25 - x^2) = (19 - x)^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 19 \\ -17x^2 + 38x + 39 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 19 \\ \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -\dfrac{13}{17} \end{array}\right. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = 3. \end{aligned}$$

Vậy $AH = 3$, suy ra $HD = 4$ nên diện tích $\triangle AHD$ là $S_{\triangle AHD} = \dfrac{1}{2} AH \cdot DH = 6$.
Diện tích $\triangle BHC$ là $S_{\triangle BHC} = \dfrac{1}{2} BH \cdot CH = 30$.
Từ đó suy ra diện tích tứ giác $ABCD$ bằng $S_{\triangle BHC} - S_{\triangle AHD} = 30 - 6 = 24$ (đơn vị diện tích). □

Bài 11

Hằng ngày bạn Hùng đều đón bạn Minh đi học tại một vị trí trên lề đường thẳng đến trường. Minh đứng tại vị trí A cách lề đường một khoảng 50 m để chờ Hùng. Khi nhìn thấy Hùng đạp xe đến địa điểm B, cách mình một đoạn 200 m thì Minh bắt đầu đi bộ ra lề đường để bắt kịp xe. Vận tốc đi bộ của Minh là 5 km/h, vận tốc xe đạp của Hùng là 15 km/h. Hãy xác định vị trí C trên lề đường (hình bên dưới) để hai bạn gặp nhau mà không bạn nào phải chờ người kia (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Lời giải.

Đặt $CH = x$, điều kiện $x > 0$.
Ta có $BC = \sqrt{BA^2 - AH^2} - x = 50\sqrt{15} - x$.
$AC = \sqrt{HC^2 + AH^2} = \sqrt{x^2 + 50^2}$.
Thời gian của Hùng đi từ B tới C bằng $\dfrac{50\sqrt{15} - x}{15}$.
Thời gian của Minh đi từ A tới C bằng $\dfrac{\sqrt{50^2 + x^2}}{5}$.
Hai bạn gặp nhau đúng thời điểm khi và chỉ khi $\dfrac{\sqrt{50^2 + x^2}}{5} = \dfrac{50\sqrt{15} - x}{15}$.
Giải phương trình $\dfrac{\sqrt{50^2 + x^2}}{5} = \dfrac{50\sqrt{15} - x}{15}$ ta được nghiệm thỏa mãn là $x = \dfrac{25}{4}(3\sqrt{7} - \sqrt{15}) \approx$

25,4.
Vậy vị trí điểm C cần tìm nằm giữa B và H và cách H một khoảng 25,4 m. □

Bài 12

Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{2x^2-3x-1}=\sqrt{2x+3}$;

b) $\sqrt{4x^2-6x-6}=\sqrt{x^2-6}$;

c) $\sqrt{x+9}=2x-3$;

d) $\sqrt{-x^2+4x-2}=2-x$.

Lời giải.

a) Bình phương hai vế của phương trình $\sqrt{2x^2-3x-1}=\sqrt{2x+3}$ ta được

$$\begin{aligned} & 2x^2-3x-1=2x+3 \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2-5x-4=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5-\sqrt{57}}{4} \\ x=\dfrac{5+\sqrt{57}}{4}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Thay lần lượt hai giá trị trên vào bất phương trình $2x+3\geq 0$, ta thấy cả hai giá trị đều thỏa mãn bất phương trình.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=\dfrac{5-\sqrt{57}}{4}$ và $x=\dfrac{5+\sqrt{57}}{4}$.

b) Bình phương hai vế của phương trình $\sqrt{4x^2-6x-6}=\sqrt{x^2-6}$ ta được

$$\begin{aligned} & 2x^2-6x-6=x^2-6 \\ \Leftrightarrow\ & x^2-6x=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=6. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Thay lần lượt hai giá trị trên vào bất phương trình $x^2-6\geq 0$, ta thấy chỉ có $x=6$ thỏa mãn bất phương trình.
Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=6$.

c) Xét phương trình $\sqrt{x+9}=2x-3$. (c)
Trước hết ta giải bất phương trình $2x-3\geq 0$. $(c.1)$
Ta có $(c.1)\Leftrightarrow 2x\geq 3\Leftrightarrow x\geq\dfrac{3}{2}$.
Bình phương hai vế của phương trình (c) ta được

$$\begin{aligned} & x+9=(2x-3)^2 \\ \Leftrightarrow\ & 4x^2-13x=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{13}{4}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Trong hai giá trị đó, chỉ có giá trị $x=\dfrac{13}{4}$ thỏa mãn $x\geq\dfrac{3}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{13}{4}$.

d) Xét phương trình $\sqrt{-x^2+4x-2}=2-x$. (d)
Trước hết ta giải bất phương trình $2-x\geq 0$. $(d.1)$
Ta có $(d.1)\Leftrightarrow x\leq 2$.
Bình phương hai vế của phương trình (d) ta được

$$\begin{aligned} & -x^2+4x-2=(2-x)^2 \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2-8x+6=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Trong hai giá trị đó, chỉ có giá trị $x=1$ thỏa mãn $x\leq 2$.
Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

□

Bài 13

Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{2-x}+2x=3$; b) $\sqrt{-x^2+7x-6}+x=4$.

Lời giải.

a) Xét phương trình $\sqrt{2-x}+2x=3$. (1)
Ta có $(1)\Leftrightarrow \sqrt{2-x}=3-2x$. (1.1)
Xét bất phương trình $3-2x\geq 0\Leftrightarrow x\leq \dfrac{3}{2}$.
Bình phương hai vế của phương trình (1.1) ta được

$$\begin{aligned} & 2-x=(3-2x)^2 \\ \Leftrightarrow\ & 4x^2-11x+7=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{7}{4}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Trong hai giá trị đó, chỉ có giá trị $x=1$ thỏa mãn $x\leq \dfrac{3}{2}$.
Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

b) Xét phương trình $\sqrt{-x^2+7x-6}+x=4$. (2)
Ta có $(2)\Leftrightarrow \sqrt{-x^2+7x-6}=4-x$. (2.1)
Xét bất phương trình $4-x\geq 0\Leftrightarrow x\leq 4$.
Bình phương hai vế của phương trình (2.1) ta được

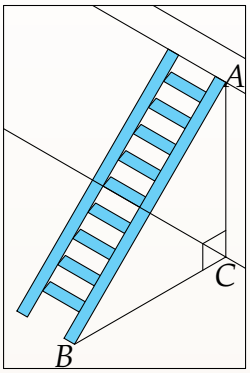
$$\begin{aligned} & -x^2+7x-6=(4-x)^2 \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2-15x+22=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\dfrac{11}{2}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Trong hai giá trị đó, chỉ có giá trị $x=1$ thỏa mãn $x\leq 4$.
Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

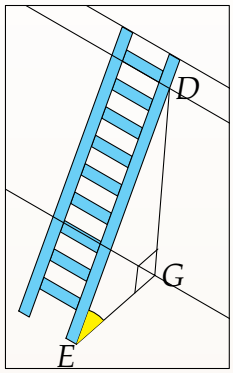
□

Bài 14

Để leo lên một bức tường, bác Nam dùng một chiếc thang có chiều dài cao hơn bức tường đó 1 m. Ban đầu, bác Nam đặt chiếc thang mà đầu trên của chiếc thang đó vừa chạm vào mép trên bức tường (Hình a). Sau đó, bác Nam dịch chuyển chân thang vào gần chân tường thêm 0,5 m thì bác Nam nhận thấy thang tạo với mặt đất một góc 60° (Hình b). Bức tường cao bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Hình a)



Hình b)

Lời giải.

Gọi chiều cao bức tường là x ($x > 0$). Chiều dài của thang là $x + 1$.
Với Hình a, ta có

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{(x+1)^2 - x^2} = \sqrt{2x+1}.$$

Với Hình b, ta có $EG = BC - 0{,}5 = \sqrt{2x+1} - 0{,}5$, $DG = x$ và $\widehat{DEG} = 60^\circ$. Do đó

$$DG = EG \cdot \tan 60^\circ \Leftrightarrow x = \left(\sqrt{2x+1} - 0{,}5\right)\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{6x+3} = x + \frac{\sqrt{3}}{2}. \qquad (*)$$

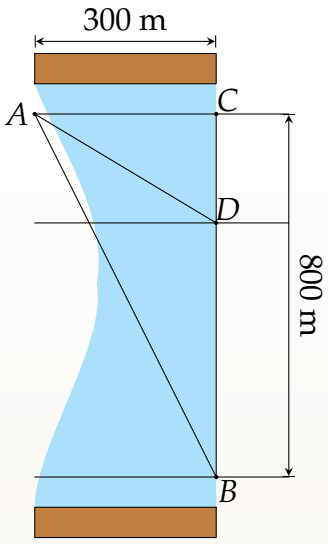
Bình phương hai vế phương trình $(*)$ ta được

$$\begin{aligned} & 6x + 3 = \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + \left(\sqrt{3} - 6\right)x - \frac{9}{4} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x \approx 4{,}7 \\ x \approx -0{,}5. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy, bức tường cao xấp xỉ 4,7 m. □

Bài 15

Một người đứng ở điểm A trên một bờ sông rộng 300 m, chèo thuyền đến vị trí D, sau đó chạy bộ đến vị trí B cách C một khoảng 800 m như hình bên. Vận tốc chèo thuyền là 6 km/h, vận tốc chạy bộ là 10 km/h và giả sử vận tốc dòng nước không đáng kể. Tính khoảng cách từ vị trí C đến D, biết tổng thời gian người đó chèo thuyền và chạy bộ từ A đến B là 7,2 phút.



Lời giải.

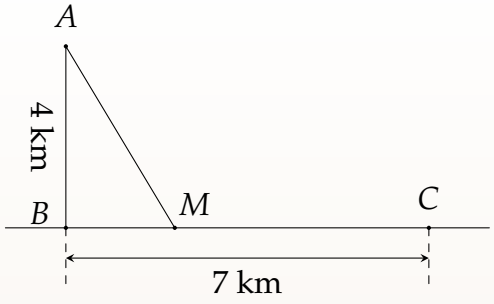
Đổi: 6 km/h= 6000 m/h; 10 km/h = 10000 m/h.
Đặt $CD = x$ $(x > 0)$, khi đó $BD = 800 - x$ và $AD = \sqrt{AC^2 + x^2} = \sqrt{90000 + x^2}$.
Ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{AD}{6} + \frac{BD}{10} = \frac{7{,}2}{60}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{\sqrt{90000 + x^2}}{6000} + \frac{800 - x}{10000} = \frac{7{,}2}{60}\\
\Leftrightarrow\ &5\sqrt{90000 + x^2} = 1200 + 3x\\
\Leftrightarrow\ &25(90000 + x^2) = (1200 + 3x)^2\\
\Leftrightarrow\ &16x^2 - 7200x + 810000 = 0\\
\Leftrightarrow\ &x^2 - 450x + 50625 = 0\\
\Leftrightarrow\ &x = 225.
\end{aligned}$$

Vậy $CD = 225$ m. □

Bài 16

Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng cách $AB = 4$ km. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng là 7 km. Người canh hải đăng có thể chèo thuyền từ A đến vị trí M trên bờ biển với vận tốc 3 km/h rồi đi bộ đến C với vận tốc 5 km/h như hình bên. Tính khoảng cách từ vị trí B đến M, biết thời gian người đó đi từ A đến C là 148 phút.



Lời giải.

Đặt $BM = x$ km $(0 < x < 7)$, khi đó $CM = 7 - x$ và $AM = \sqrt{16 + x^2}$.
Ta có

$$\frac{AM}{3} + \frac{MC}{5} = \frac{148}{60}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{16+x^2}}{3}+\frac{7-x}{5}=\frac{37}{15}\\
&\Leftrightarrow \quad 5\sqrt{16+x^2}=3x+16\\
&\Leftrightarrow \quad 25(16+x^2)=(3x+16)^2\\
&\Leftrightarrow \quad 16x^2-96x+144=0\\
&\Leftrightarrow \quad x^2-6x+9=0\\
&\Leftrightarrow \quad x=3.
\end{aligned}$$

Vậy $BM=3$ km. □

Bài 17

Giải phương trình $\sqrt{3x^2-8x-4}=\sqrt{x^2-3x-1}$.

Lời giải.

Bình phương hai vế của phương trình, ta được phương trình hệ quả

$$3x^2-8x-4=x^2-3x-1 \Leftrightarrow 2x^2-5x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3\\ x=-\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Thay lần lượt $x=3$ và $x=-\dfrac{1}{2}$ vào phương trình đã cho, ta thấy $x=-\dfrac{1}{2}$ thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm là $x=-\dfrac{1}{2}$. □

Bài 18

Giải phương trình $\sqrt{x^2+5x-3}=\sqrt{2x^2-x-3}$.

Lời giải.

Bình phương hai vế của phương trình, ta được phương trình hệ quả

$$x^2+5x-3=2x^2-x-3 \Leftrightarrow x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=6. \end{array}\right.$$

Thay lần lượt hai giá trị này của x vào phương trình đã cho, ta thấy chỉ có $x=6$ thỏa mãn.
Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=6$. □

Bài 19

Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{x^2-5x+7}=\sqrt{-3x^2-x+7}$.

b) $\sqrt{3x^2-x-6}=\sqrt{x-x^2}$.

Lời giải.

a) Bình phương hai vế của phương trình, ta được phương trình hệ quả

$$x^2-5x+7=-3x^2-x+7 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=1 \end{array}\right.$$

Thay các giá trị này của x vào phương trình đã cho, ta thấy cả hai giá trị của x đều thỏa mãn.
Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=0$ và $x=1$.

b) Bình phương hai vế của phương trình, ta được phương trình hệ quả

$$3x^2 - x - 6 = x - x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Thay các giá trị này của x vào phương trình đã cho, ta thấy không có giá trị nào của x thỏa mãn.
Vậy phương trình đã cho vô nghiệm. □

Bài 20

Cho hàm số sau $y = (x-1)(x+3)$.

a) Hàm số đã cho có phải là hàm số bậc hai không? Nếu có, hãy xác định các hệ số a, b, c của nó.

b) Thay dấu "?" bằng các số thích hợp để hoàn thành bảng giá trị sau của hàm số đã cho.

x	-3	-2	-1	0	1
y	?	?	?	?	?

Lời giải.

a) Ta có $y = (x-1)(x+3) = x^2 + 2x - 3$ là một hàm số bậc hai.
Có các hệ số lần lượt là $a = 1, b = 2, c = -3$.
b) Ta có

- $x = -3 \Rightarrow y = (-3-1)(-3+3) = 0$.
- $x = -2 \Rightarrow y = (-2-1)(-2+3) = -3$.
- $x = -1 \Rightarrow y = (-1-1)(-1+3) = -4$.
- $x = 0 \Rightarrow y = (0-1)(0+3) = -3$.
- $x = 1 \Rightarrow y = (1-1)(1+3) = 0$.

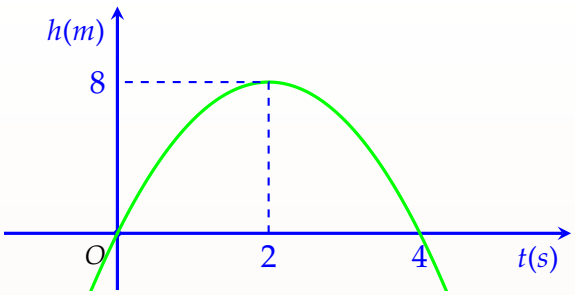
Vậy ta thay dấu "?" bằng các số là

x	-3	-2	-1	0	1
y	0	-3	-4	-3	0

□

Bài 21

Khi một quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt đến độ cao nào đó rồi rơi xuống. Hình bên dưới minh họa quỹ đạo của quả bóng là một phần của cung parabol trong mặt phẳng tọa độ Oth, trong đó t là thời gian (tính bằng giây) kể từ khi quả bóng được đá lên và h là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá từ mặt đất. Sau khoảng 2s, quả bóng đó lên đến vị trí cao nhất là 8m.



a) Tìm hàm số bậc hai biểu thị độ cao h theo thời gian t và có phần đồ thị trùng với quỹ đạo của quả bóng trong tình huống này.

b) Tính độ cao của quả bóng sau khi đá lên được 3s.

c) Sau bao nhiêu giây thì quả bóng chạm đất kể từ khi đá lên?

Lời giải.

a) Gọi hàm số bậc hai biểu thị độ cao h(m) theo thời gian t(s) là $h = f(t) = at^2 + bt + c$, $(a < 0)$.
Theo giả thiết, quả bóng được đá lên từ mặt đất, nghĩa là $f(0) = c = 0$, do đó $f(t) = at^2 + bt$.
Sau 2s, quả bóng lên đến vị trí cao nhất là 8m nên

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ f(2) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ 4a + 2b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ -4a = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 8. \end{cases}$$

Vậy $f(t) = -2t^2 + 8t$.
b) Độ cao của quả bóng sau khi đá lên được 3s là $h = f(3) = -2 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 = 6$m.
c) Quả bóng chạm đất (trở lại) khi độ cao $h = 0$, tức là

$$\begin{cases} t > 0 \\ -2t^2 + 8t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 4.$$

Vì thế sau 4s quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi đá lên. □

II. PHƯƠNG TRÌNH DẠNG $\sqrt{F(X)} = G(X)$

Bài 22

Giải phương trình $\sqrt{2x^2 - x + 3} = x + 1$

Lời giải.

Bình phương hai vế của phương trình ta được phương trình hệ quả

$$2x^2 - x + 3 = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 1 \\ x = 2. \end{bmatrix}$$

Thay các giá trị này của x vào phương trình đã cho, ta thấy cả hai giá trị đều thoả mãn.
Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 1$ và $x = 2$. □

Bài 23

Giải phương trình $\sqrt{2x^2 + x + 1} = -x - 1$

Lời giải.

Bình phương hai vế của phương trình ta được phương trình hệ quả

$$2x^2+x+1=x^2+2x+1 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0. \end{array}\right.$$

Thay các giá trị này của x vào phương trình đã cho, ta thấy cả hai giá trị đều không thoả mãn.
Vậy phương trình đã cho vô nghiệm. □

Bài 24

Giải phương trình $\sqrt{5x^2-x+3}=1-2x$.

Lời giải.

Bình phương hai vế của phương trình ta được

$$5x^2-x+3=1-4x+4x^2 \Leftrightarrow x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-2. \end{array}\right.$$

Thay các giá trị này của x vào phương trình đã cho ta được $x=-1$ và $x=-2$ thoả mãn.
Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=-1$ và $x=-2$. □

Bài 25

Giải phương trình $\sqrt{5x^2-13x+17}=x-4$.

Lời giải.

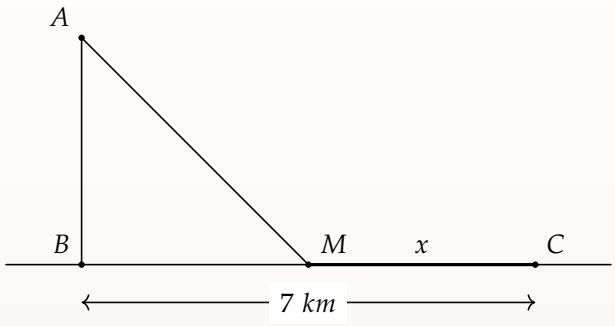
Bình phương hai vế của phương trình ta được phương trình hệ quả

$$5x^2-13x+17=x^2-8x+16 \Leftrightarrow 4x^2-5x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{1}{4}. \end{array}\right.$$

Thay các giá trị này của x vào phương trình đã cho ta thấy không giá trị nào thoả mãn.
Vậy phương trình đã cho vô nghiệm. □

Bài 26

Người thứ nhất chèo thuyền với vận tốc 6 (km/h) vào bờ biển từ một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng $AB=4$ (km). Trên bờ biển, người thứ hai đi xe máy với vận tốc 10 (km/h) từ một nhà kho ở vị trí C cách B một khoảng $BC=7$ (km) (hình vẽ bên dưới). Xác định vị trí hai người gặp nhau ở vị trí M đến C, biết hai người xuất phát cùng một lúc.



Lời giải.

Đặt $MC=x$ km điều kiện $0<x<7$.
Quãng đường $AM=\sqrt{AB^2+BM^2}=\sqrt{16+(7-x)^2}$.

Suy ra thời gian đi quãng đường AM là $\dfrac{\sqrt{16+(7-x)^2}}{6}$ giờ.

Quãng đường $MC = x$ suy ra thời gian đi quãng đường MC là $\dfrac{x}{10}$ giờ.

Giải phương trình $\dfrac{\sqrt{16+(7-x)^2}}{6} = \dfrac{x}{10}$, ta sẽ được vị trí M đến C.

Ta có

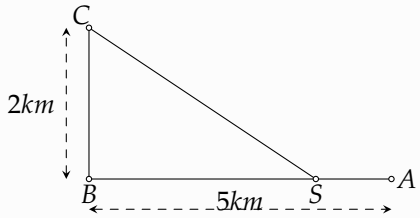
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{16+(7-x)^2}}{6} = \frac{x}{10} &\Leftrightarrow 5\sqrt{16+(7-x)^2} = 3x\\ &\Rightarrow 25(16+(7-x)^2) = 9x^2 \Rightarrow 25x^2 - 350x + 1625 = 9x^2\\ &\Rightarrow 16x^2 - 350x + 1625 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \approx 6{,}687 \text{ (nhận)}\\ x \approx 15{,}188. \text{ (loại)}\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy hai người gặp nhau ở vị trí M cách C một khoảng cách 6,687 km. □

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1

Một kĩ sư thiết kế đường dây điện từ vị trí A đến vị trí S và từ vị trí S đến vị trí C. Tiền công thiết kế mỗi ki-lô-mét đường dây từ A đến S và từ S đến C lần lượt là 3 triệu đồng và 2 triệu đồng. Biết tổng số tiền công là 17 triệu đồng. Tính số ki-lô-mét đường dây đã thiết kế. (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)



(A) 0,5 km. (B) 0,8 km. (C) 0,7 km. (D) 0,4 km.

Lời giải.

Đặt $BS = x\,(0 < x < 5)$. Khi đó $CS = \sqrt{4+x^2}$; $AS = 5 - x$.
Số ki-lô-mét đường dây đã thiết kế $(5-x) + \sqrt{4+x^2}$.
Ta có phương trình

$$\begin{aligned} & 3(5-x) + 2\sqrt{4+x^2} = 17\\ \Leftrightarrow\ & 2\sqrt{4+x^2} = 2 + 3x\\ \Leftrightarrow\ & 5x^2 + 12x - 12 = 0\\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{-6+4\sqrt{6}}{5} (\text{vì } 0 < x < 5).\end{aligned}$$

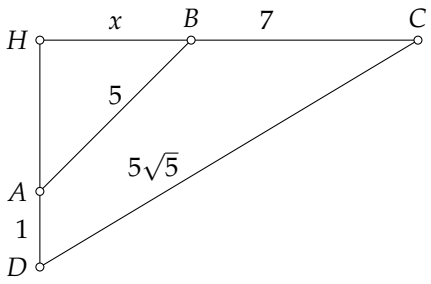
Vậy số ki-lô-mét đường dây đã thiết kế là 0,8 km
Chọn đáp án (B) □

Câu 2

Cho tứ giác $ABCD$ có $AD \perp BC$; $AD = 1$; $BC = 7$; $CD = 5\sqrt{5}$; $AB = 5$. Gọi H là giao điểm của AD và BC, đặt $HB = x$. Tính diện tích tứ giác $ABCD$.

(A) 38. (B) 19. (C) 32. (D) 16.

Lời giải.



Xét $\triangle ABH$ vuông tại H có $HA = \sqrt{25 - x^2}$.
Xét $\triangle HCD$ vuông tại H có $DC^2 = HD^2 + HC^2$ hay

$$\begin{aligned}
& 125 = (x+7)^2 + (\sqrt{25-x^2}+1)^2 \\
\Leftrightarrow\ & 25 - 7x = \sqrt{25-x^2} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} 0 < x \le \dfrac{25}{7} \\ x^2 - 7x + 12 = 0 \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 3 \text{ (nhận)} \\ x = 4 \text{ (loại)} \end{array}\right. \\ 0 < x \le \dfrac{25}{7} \end{cases} \\
\Leftrightarrow\ & x = 3.
\end{aligned}$$

Suy ra $HA = 4$; $HB = 3$; $HD = 5$; $HC = 10$.
Khi đó $S_{ABCD} = S_{\triangle HCD} - S_{\Delta HAB} = \dfrac{1}{2}HC \cdot HD - \dfrac{1}{2}HA \cdot HB = 19$ (đvdt).
Chọn đáp án (B) □

Câu 3

Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2+3x-2} = \sqrt{1+x}$ là
(A) $\varnothing$. (B) $\{-3\}$. (C) $\{1;-3\}$. (D) $\{1\}$.

Lời giải.

$$\sqrt{x^2+3x-2} = \sqrt{1+x} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+x \ge 0 \\ x^2+3x-2 = 1+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x^2+2x-3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 4

Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{x^2+2} \le x - 1$.
(A) $S = \varnothing$. (B) $S = \left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right]$. (C) $[1; +\infty)$. (D) $\left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{x^2+2} \le x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \ge 0 \\ x^2 + 2 \le x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ 2x \le -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x \le -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Vậy bất phương trình vô nghiệm.
Chọn đáp án (A) □

Câu 5

Bất phương trình $\sqrt{2x-1} \le 2x-3$ có bao nhiêu nghiệm nguyên thuộc khoảng $(0;7)$

(A) 4. (B) 5. (C) 2. (D) 6.

Lời giải.

$$\sqrt{2x-1} \le 2x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 \ge 0 \\ 2x-3 \ge 0 \\ 2x-1 \le (2x-3)^2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{3}{2} \\ 4x^2-14x+10 \ge 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{3}{2} \\ x \le 1 \vee x \ge \dfrac{5}{2} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x \ge \frac{5}{2}.$$

Kết hợp điều kiện suy ra $x \in \{3;4;5;6\}$.
Vậy bất phương trình có 4 nghiệm nguyên thuộc khoảng $(0;7)$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 6

Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1} \ge \sqrt{2x-5}$ là $[a;b]$. Khi đó a^2+b^2 bằng

(A) $\dfrac{125}{4}$. (B) $\dfrac{15}{4}$. (C) $\dfrac{61}{4}$. (D) $\dfrac{11}{4}$.

Lời giải.

Điều kiện $x \ge \dfrac{5}{2}$. Ta có

$$\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1} \ge \sqrt{2x-5} \Leftrightarrow \sqrt{x+6} \ge \sqrt{x+1}+\sqrt{2x-5}$$
$$\Leftrightarrow x+6 \ge x+1+2x-5+2\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{2x-5}$$
$$\Leftrightarrow 5-x \ge \sqrt{2x^2-3x-5}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5-x \ge 0 \\ 25-10x+x^2 \ge 2x^2-3x-5 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 5 \\ x^2+7x-30 \le 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow -10 \le x \le 3.$$

Kết hợp điều kiện suy ra $x \in \left[\dfrac{5}{2};3\right]$.
Vậy $a=\dfrac{5}{2}, b=3 \Rightarrow a^2+b^2=\dfrac{25}{4}+9=\dfrac{61}{4}$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 7

Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{x+3} \le 1-x$ là $(a;b)$. Khi đó $4a+2b$ bằng

(A) $-9-\sqrt{17}$. (B) $9+\sqrt{17}$. (C) $7+\sqrt{17}$. (D) $7-\sqrt{17}$.

Lời giải.

$$\sqrt{x+3} \le 1-x \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \ge 0 \\ x+3 \ge 0 \\ x+3 \le (1-x)^2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ x \ge -3 \\ x+3 \le 1-2x+x^2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ x \ge -3 \\ x^2-3x-2 \ge 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 \le x \le 1 \\ \left[\begin{array}{l} x \ge \dfrac{3+\sqrt{17}}{2} \\ x \le \dfrac{3-\sqrt{17}}{2} \end{array}\right. \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow -3 \le x \le \frac{3-\sqrt{17}}{2}.$$

Vậy $a=-3$, $b=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2} \Rightarrow 4a+2b=-12+2\left(\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}\right)=-9-\sqrt{17}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 8

Phương trình $\sqrt{x^2+x+2}=3x-1$ có nghiệm là

(A) $x=2$. (B) $x=0$. (C) $x=-1$. (D) $x=1$.

Lời giải.

$$\sqrt{x^2+x+2}=3x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1 \ge 0 \\ x^2+x+2=(3x-1)^2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{3} \\ 8x^2-7x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\dfrac{1}{8} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9

Nghiệm của phương trình $\sqrt{2x-3}=x-3$ là

(A) $x=6$. (B) $x=-6$. (C) $x=3$. (D) $x=0$.

Lời giải.

Ta có

$$\sqrt{2x-3}=x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-3\geq 0 \\ 2x-3=(x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 3 \\ x^2-8x+12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 3 \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=6 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=6.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=6$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10

Phương trình $x-\sqrt{2x+3}=0$ có nghiệm là

(A) $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$. (B) $x=-1$. (C) $\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$. (D) $x=3$.

Lời giải.

Ta có

$$x-\sqrt{2x+3}=0 \Leftrightarrow \sqrt{2x+3}=x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ 2x+3=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ x^2-2x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x=3$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 11

Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2+2x+4}=\sqrt{2-x}$ là

(A) $S=\{-1,-2\}$. (B) $S=\{-1,2\}$. (C) $S=\{1,-2\}$. (D) $S=\{1,2\}$.

Lời giải.

Ta có

$$\sqrt{x^2+2x+4}=\sqrt{2-x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x\geq 0 \\ x^2+2x+4=2-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 2 \\ x^2+3x+2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-2. \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{-1,-2\}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 12

Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2+10x-5}=2(x-1)$ là

(A) 2. (B) 3. (C) 4. (D) 1.

Lời giải.

$$\sqrt{x^2+10x-5}=2(x-1)\Leftrightarrow\begin{cases}2(x-1)\geq 0\\ x^2+10x-5=4x^2-8x+4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\ -3x^2+18x-9=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\ \left[\begin{array}{l}x=3+\sqrt{6}\\ x=3-\sqrt{6}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=3+\sqrt{6}.$$

Vậy phương trình có 1 nghiệm duy nhất.
Chọn đáp án (D) □

Câu 13

Phương trình $(x^2+x-6)\sqrt{2x^2-x-10}=0$ có số nghiệm âm là

(A) 3. (B) 1. (C) 2. (D) 4.

Lời giải.

Điều kiện $2x^2-x-10\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geq\dfrac{5}{2}\\ x\leq -2.\end{array}\right.$

Phương trình đã cho tương đương với $\left[\begin{array}{ll}x^2+x-6=0 & (1)\\ \sqrt{2x^2-x-10}=0 & (2)\end{array}\right.$

- $x^2+x-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\text{ (nhận)}\\ x=2\text{ (loại).}\end{array}\right.$
- $\sqrt{2x^2-x-10}=0\Leftrightarrow 2x^2-x-10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\text{ (nhận)}\\ x=\dfrac{5}{2}\text{ (nhận).}\end{array}\right.$

Vậy phương trình có 2 nghiệm âm.
Chọn đáp án (C) □

Câu 14

Biết phương trình $\sqrt{2x^2-2x+16}=x+4$ có 2 nghiệm là a,b khi đó trung bình cộng của 2 nghiệm trên là

(A) $\dfrac{-9}{2}$. (B) $\dfrac{11}{2}$. (C) -5. (D) 5.

Lời giải.

$$\sqrt{2x^2-2x+16}=x+4\Leftrightarrow\begin{cases}x+4\geq 0\\ 2x^2-2x+16=(x+4)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x^2 - 10x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 10 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 10. \end{array}\right.$$

Vậy $\dfrac{a+b}{2} = 5$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15

Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm $\sqrt{x-1} = \sqrt{1-x}$?

(A) 0. (B) Vô số nghiệm. (C) 1. (D) 2.

Lời giải.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$.

Với $x = 1$ thay vào phương trình thỏa mãn. Vậy phương trình có một nghiệm.

Chọn đáp án (C) □

Câu 16

Phương trình $\sqrt{x-2} = \sqrt{2-x}$ có bao nhiêu nghiệm?

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) Vô số.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$.

Thay $x = 2$ vào phương trình ta được $0 = 0$ hay $x = 2$ là nghiệm của phương trình.

Chọn đáp án (C) □

Câu 17

Phương trình $\left(x^2 - 6x\right)\sqrt{17 - x^2} = x^2 - 6x$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?

(A) 2. (B) 1. (C) 4. (D) 3.

Lời giải.

Điều kiện: $17 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{17} \leq x \leq \sqrt{17}$.

Ta có

$$\begin{aligned} \left(x^2 - 6x\right)\sqrt{17 - x^2} = x^2 - 6x &\Leftrightarrow \left(x^2 - 6x\right)\left(\sqrt{17 - x^2} - 1\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 6x = 0 \\ \sqrt{17 - x^2} = 1 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x(x-6) = 0 \\ 16 - x^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ (nhận)} \\ x = 6 \text{ (loại)} \\ x = \pm 4 \text{ (nhận).} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy phương trình có 3 thực phân biệt.

Chọn đáp án (D) □

Câu 18

Một học sinh đã giải phương trình $\sqrt{x^2-5}=2-x$ (1) như sau:

I) (1) $\Leftrightarrow x^2-5=(2-x)^2$.

II) $\Leftrightarrow 4x=9 \Leftrightarrow x=\dfrac{9}{4}$.

III) Vậy phương trình có một nghiệm là $x=\dfrac{9}{4}$.

Lý luận trên nếu **sai** thì sai từ giai đoạn nào?

(A) (I). (B) (III).
(C) (II). (D) Sai cả ba giai đoạn.

Lời giải.

Đúng là (1) $\Rightarrow x^2-5=(2-x)^2$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 19

Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2+3x-2}=\sqrt{1+x}$ là

(A) 3. (B) -3. (C) -2. (D) 1.

Lời giải.

Ta có

$$\sqrt{x^2+3x-2}=\sqrt{1+x} \Leftrightarrow \begin{cases}1+x\geq 0\\ x^2+3x-2=1+x\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\geq -1\\ x^2+2x-3=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x=1.$$

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình là 1.
Chọn đáp án (D) □

Câu 20

Một học sinh tiến hành giải phương trình $\sqrt{5x+6}=x-6$ như sau:

- **Bước 1**. Điều kiện $5x+6\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -\dfrac{6}{5}$.
- **Bước 2**. Phương trình đã cho tương đương

$$\sqrt{5x+6}=x-6 \Leftrightarrow 5x+6=(x-6)^2 \Leftrightarrow x^2-17x+30=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=15.\end{array}\right.$$

- **Bước 3**. Đối chiếu điều kiện, thấy cả 2 nghiệm thỏa mãn nên phương trình có 2 nghiệm $x=2, x=15$.

Lời giải của học sinh trên

(A) Sai từ bước 3. (B) Đúng. (C) Sai từ bước 1. (D) Sai từ bước 2.

Lời giải.

Sai từ bước 2, đúng là phương trình đã cho tương đương với $\begin{cases} x-6\geq 0 \\ 5x+6=(x-6)^2. \end{cases}$

Chọn đáp án (D) □

Câu 21

Phương trình $\sqrt{x^2+2x-3}=5-x$ có nghiệm là $x=\dfrac{a}{b}$. Khi đó $a+2b$ bằng

(A) 10. (B) 33. (C) 17. (D) 13.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{x^2+2x-3}=5-x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-3\geq 0 \\ 5-x\geq 0 \\ x^2+2x-3=(5-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\leq -3 \\ x\geq 1 \end{array}\right. \\ x\leq 5 \\ 12x=28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\leq -3 \\ x\geq 1 \end{array}\right. \\ x\leq 5 \\ x=\dfrac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{7}{3}.$$

Vậy $a=7; b=3$. Suy ra $a+2b=13$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22

Bất phương trình $\sqrt{x^2+x-2}\geq\sqrt{2x^2-3x-5}$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

(A) Vô số. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+x-2}\geq\sqrt{2x^2-3x-5} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-3x-5\geq 0 \\ x^2+x-2\geq 2x^2-3x-5 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\leq -1 \\ x\geq \dfrac{5}{2} \end{array}\right. \\ x^2-4x-3\leq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\leq -1 \\ x\geq \dfrac{5}{2} \end{array}\right. \\ 2-\sqrt{7}\leq x\leq 2+\sqrt{7} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \frac{5}{2}\leq x\leq 2+\sqrt{7}. \end{aligned}$$

Nghiệm nguyên của bất phương trình là $x=3; x=4$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 23

Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{2x^2-5x+2}>1-x$ là

(A) $\left(-\infty;\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cup(2;+\infty)$.
(B) $\left(-\infty;\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\cup[2;+\infty)$.
(C) $\left(-\infty;\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cup[2;+\infty)$.
(D) $\left(-\infty;\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\cup(2;+\infty)$.

Lời giải.

$$\sqrt{2x^2-5x+2}>1-x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}1-x<0\\2x^2-5x+2\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}1-x\geq 0\\2x^2-5x+2>(1-x)^2\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>1\\x\leq\dfrac{1}{2}\text{ hoặc }x\geq 2\end{cases}\\ \begin{cases}x\leq 1\\x<\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\text{ hoặc }x>\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\geq 2\\x<\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 24

Biết tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{x^2-3x-10}<x-2$ có dạng $[a;b)$. Tính $A=a+b$.

(A) 12. (B) 19. (C) 16. (D) 18.

Lời giải.

Ta có

$$\sqrt{x^2-3x-10}<x-2 \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-3x-10\geq 0\\x-2>0\\x^2-3x-10<(x-2)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\leq -2\\x\geq 5\end{array}\right.\\x>2\\x<14\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 5\leq x<14.$$

Vậy $A=a+b=19$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 25

Đặt $\sqrt{(x+5)(3-x)}=t,(t\geq 0)$ thì bất phương trình $\sqrt{(x+5)(3-x)}\leq x^2+2x+5$ trở thành

(A) $t^2+t-10\leq 0$. (B) $\sqrt{t}\leq t-10$. (C) $t^2+t-20\leq 0$. (D) $t^2+t-20\geq 0$.

Lời giải.

Đặt $\sqrt{(x+5)(3-x)}=t(t\geq 0)$.
Bất phương trình đã cho đưa về dạng $t\leq 15-t^2+5\Leftrightarrow t^2+t-20\leq 0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 26

Tổng các nghiệm của phương trình $(x+5)(2-x)=3\sqrt{x(x+3)}$ bằng

(A) 3. (B) 4. (C) -3. (D) 2.

Lời giải.

Phương trình tương đương $-x^2-3x+10=3\sqrt{x^2+3x}$
Đặt $t=\sqrt{x^2+3x}$, $t\geq 0$.
Phương trình đưa về dạng $-t^2+10=3t\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \text{ (nhận)} \\ t=-5. \text{ (loại)}\end{array}\right.$
Với $t=2\Leftrightarrow \sqrt{x^2+3x}=2\Leftrightarrow x^2+3x=4\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=1.\end{array}\right.$
Vậy tổng $S=-4+1=-3$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 27

Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{4x^2+12x+13}=3$ là

(A) $T=\{1;2\}$. (B) $T=\{-1;3\}$. (C) $T=\phi$. (D) $T=\left\{-1;-\dfrac{3}{2}\right\}$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{x^2+2x+2}=\sqrt{(x+1)^2+1}\geq 1,\forall x\in\mathbb{R}$.
$\Rightarrow \sqrt{4x^2+12x+13}=\sqrt{(2x+3)^2+4}\geq 2,\forall x\in\mathbb{R}$.
Suy ra $\left\{\begin{array}{l} x^2+2x+2=1 \\ 4x^2+12x+13=4\end{array}\right.\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right.\Rightarrow x\in\varnothing$.
Vậy phương trình vô nghiệm.

Chọn đáp án (C) □

Câu 28

Số nghiệm của phương trình $3(x-2)\sqrt{x^2+1}=x^2+x-6$ là

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Phương trình đã cho có dạng

$$\begin{aligned} 3(x-2)\sqrt{x^2+1} = x^2+x-6 = 0 \Leftrightarrow \quad & (x-2)(x+3-3\sqrt{x^2+1}) \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{bmatrix} x-2=0 \\ x+3-3\sqrt{x^2+1}=0 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{bmatrix} x=2 \\ x+3=3\sqrt{x^2+1}. \ (*) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ta thấy $(*)$ tương đương

$$\begin{cases} x \geq -3 \\ 9(x^2+1)=(x+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ 8x^2-6x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=0 \\ x=\dfrac{3}{4}. \end{bmatrix}$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm là $x=0, x=2, x=\dfrac{3}{4}$.

Chọn đáp án (D) □

§5. ÔN TẬP CHƯƠNG VI

A TRẮC NGHIỆM

Câu 1

Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ là

(A) $D=[2;+\infty)$. (B) $D=(2;+\infty)$. (C) $D=\mathbb{R}\backslash\{2\}$. (D) $D=\mathbb{R}$.

Lời giải.

Hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ xác định khi $x-2>0\Leftrightarrow x>2$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 2

Parabol $y=-x^2+2x+3$ có đỉnh là

(A) $I(-1;0)$. (B) $I(3;0)$. (C) $I(0;3)$. (D) $I(1;4)$.

Lời giải.

Đồ thị hàm số $y=ax^2+bx+c\,(a\neq 0)$ là một đường parabol có đỉnh là điểm $I\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.

Do đó, hàm $y=-x^2+2x+3$ có đỉnh $I\,(1;4)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 3

Hàm số $y=x^2-5x+4$

(A) Đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$. (B) Đồng biến trên khoảng $(-\infty;4)$.
(C) Nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$. (D) Nghịch biến trên khoảng $(1;4)$.

Lời giải.

Hàm số $y=x^2-5x+4$ đồng biến trên $\left(\dfrac{5}{2};+\infty\right)$ và nghịch biến trên $\left(-\infty;\dfrac{5}{2}\right)$.

Do đó phát biểu đúng là hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 4

Bất phương trình $x^2-2mx+4>0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ khi

(A) $m=-1$. (B) $m=-2$. (C) $m=2$. (D) $m>2$.

Lời giải.

$x^2-2mx+4>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m^2-4<0\Leftrightarrow -2<m<2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 5

Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{2x^2-3}=x-1$ là

(A) $\{-1-\sqrt{5};-1+\sqrt{5}\}$. (B) $\{-1-\sqrt{5}\}$.

Ⓒ $\{-1+\sqrt{5}\}$. Ⓓ $\varnothing$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} & \sqrt{2x^2-3}=x-1 \\ \Rightarrow\ & 2x^2-3=x^2-2x+1 \\ \Leftrightarrow\ & x^2+2x-4=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=-1+\sqrt{5} \\ x=-1-\sqrt{5}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Thay các giá trị của x vào phương trình đã cho chỉ có $x=-1+\sqrt{5}$ thỏa mãn.
Do đó tập nghiệm của phương trình là $S=\{-1+\sqrt{5}\}$
Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 6

Cho biết điểm nào sau đây không thuộc đồ thị của hàm số $y=\dfrac{1}{2}x^2$?

Ⓐ $(0;0)$. Ⓑ $(2;2)$. Ⓒ $(-2;2)$. Ⓓ $(1;2)$.

Lời giải.

Ta có

- $0=\dfrac{1}{2}\cdot 0^2$ đúng.
- $2=\dfrac{1}{2}\cdot 2^2$ đúng.
- $2=\dfrac{1}{2}\cdot(-2)^2$ đúng.
- $2=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2$ sai.

Vậy điểm $(1;2)$ không thuộc đồ thị của hàm số $y=\dfrac{1}{2}x^2$.
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 7

Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}$ là

Ⓐ $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. Ⓑ $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$.
Ⓒ $(-2;2)$. Ⓓ $[-2;2]$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x+2\geq 0 \\ 2-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -2 \\ x\leq 2. \end{cases}$
Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=[-2;2]$.
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 8

Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

(A) $y=x^2$. (B) $y=|x|$. (C) $y=x$. (D) $y=\dfrac{1}{x}$.

Lời giải.

Hàm số $y=x$ là hàm bậc nhất, hệ số $a=1>0$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ do đó đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 9

Tổng tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=-2x^2+(m+1)x+3$ nghịch biến trên khoảng $(1;5)$ là

(A) 6. (B) 3. (C) 1. (D) 15.

Lời giải.

Hàm số $y=-2x^2+(m+1)x+3$ nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{m+1}{4};+\infty\right)$.

Để hàm số $y=-2x^2+(m+1)x+3$ nghịch biến trên khoảng $(1;5)$ thì ta phải có $(1;5)\subset\left(\dfrac{m+1}{4};+\infty\right)\Leftrightarrow\dfrac{m+1}{4}\le 1\Leftrightarrow m\le 3$.

Vì m nguyên dương nên $m\in\{1;2;3\}$.

Vậy $1+2+3=6$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 10

Biết rằng khi $m=m_0$ thì hàm số $f(x)=x^3+(m^2-1)x^2+2x+m-1$ là hàm số lẻ. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $m_0\in\left(\dfrac{1}{2};3\right)$. (B) $m_0\in\left[-\dfrac{1}{2};0\right]$. (C) $m_0\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right]$. (D) $m_0\in[3;+\infty)$.

Lời giải.

Tập xác định $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.

- $\forall x\in\mathscr{D},-x\in\mathscr{D}$.
- $f(-x)=(-x)^3+(m^2-1)(-x)^2+2(-x)+m-1=-x^3+(m^2-1)x^2-2x+m-1$.

Hàm số đã cho là hàm số lẻ

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ f(-x)=-f(x),\forall x\in\mathscr{D}\\
&\Leftrightarrow\ -x^3+(m^2-1)x^2-2x+m-1=-[x^3+(m^2-1)x^2+2x+m-1],\forall x\in\mathscr{D}\\
&\Leftrightarrow\ 2(m^2-1)x^2+2(m-1)=0,\forall x\in\mathscr{D}\\
&\Leftrightarrow\ \begin{cases}m^2-1=0\\ m-1=0\end{cases}\Leftrightarrow m=1.
\end{aligned}$$

Vậy $m_0=1\in\left(\dfrac{1}{2};3\right)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 11

Bảng giá cước của một hãng taxi được cho như sau

Giá mở cửa	Giá km tiếp theo
11 000 đ/0,7 km	15 800 đ/1 km

* **Giá mở cửa**: Khi lên taxi mà quãng đường di chuyển không quá 0,7 km thì hãng taxi vẫn tính 11 000 đồng.
Gọi y (đồng) là số tiền phải trả sau khi đi x km. Hàm số của y theo x là

(A) $y=\begin{cases}11\,000 & \text{khi } x\le 0{,}7\\ 15\,800x-100 & \text{khi } x>0{,}7\end{cases}$.
(B) $y=\begin{cases}11\,000 & \text{khi } x\le 1\\ 15\,800x-150 & \text{khi } x>1\end{cases}$.
(C) $y=\begin{cases}11\,000 & \text{khi } x\le 0{,}7\\ 15\,800x-60 & \text{khi } x>0{,}7\end{cases}$.
(D) $y=\begin{cases}11\,000 & \text{khi } x\le 1\\ 15\,800x-70 & \text{khi } x>1\end{cases}$.

Lời giải.

Nếu quãng đường đi không quá 0,7 km ($x\le 0{,}7$) thì số tiền phải trả là $y=11\,000$ (đồng).
Nếu quãng đường khách đi trên 0,7 km ($x>0{,}7$) thì số tiền phải trả là

$$y=11\,000+(x-0{,}7)\cdot 15\,800=15\,800x-60\,(\text{đồng}).$$

Do đó ta có hàm số của y theo x là $y=\begin{cases}11\,000 & \text{khi } x\le 0{,}7\\ 15\,800x-60 & \text{khi } x>0{,}7.\end{cases}$

Chọn đáp án (C) □

Câu 12

Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc hai?
(A) $y=-2x^2+1$. (B) $y=4x-3$. (C) $2x^3-2x^2-1$. (D) $y=2$.

Lời giải.

Theo định nghĩa, hàm số $y=-2x^2+1$ là hàm số bậc hai.
Chọn đáp án (A) □

Câu 13

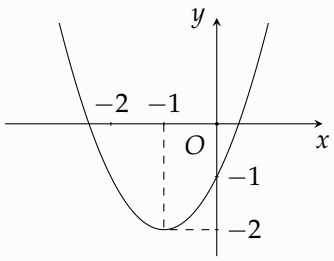
Biết parabol $(P)\colon y=2x^2+bx+c$ đi qua điểm $M(0;4)$ và có trục đối xứng là đường thẳng $x=1$. Tính $S=b+c$.
(A) $S=0$. (B) $S=1$. (C) $S=-1$. (D) $S=5$.

Lời giải.

Ta có $M\in(P)$ nên $c=4$.
Trục đối xứng $x=-\dfrac{b}{2a}=1\Leftrightarrow b=-4$.
Vậy $(P)\colon y=2x^2-4x+4\Rightarrow S=-4+4=0$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 14

Parabol dưới đây là đồ thị của hàm số nào?



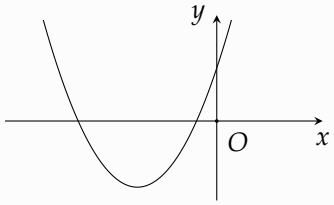
(A) $y = x^2 + 2x - 2$.
(B) $y = -x^2 - 2x + 1$.
(C) $y = x^2 + 2x - 1$.
(D) $y = x^2 - 2x - 1$.

Lời giải.

Ta có đồ thị cắt trục Oy tại -1 nên ta loại đáp án $y = x^2 + 2x - 2$ và $y = -x^2 - 2x + 1$.
Nhìn đồ thị ta có đỉnh của parabol là $(-1; -2)$.
Xét $y = x^2 + 2x - 1$ có đỉnh là $(-1; -2)$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 15

Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Mệnh đề nào sau đây đúng?



(A) $a > 0, b < 0, c > 0$.
(B) $a > 0, b > 0, c > 0$.
(C) $a > 0, b = 0, c > 0$.
(D) $a < 0, b > 0, c > 0$.

Lời giải.

Parabol có bề lõm quay lên trên nên $a > 0$.
Parabol cắt trục tung tại điểm có tọa độ $(0; c)$ nằm phía trên trục hoành nên $c > 0$.
Đỉnh của parabol nằm bên trái trục tung nên có hoành độ $-\dfrac{b}{2a} < 0$ mà $a > 0$ nên $b > 0$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 16

Cho Parabol $y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ có đỉnh $I(-1; 4)$ và đi qua $A(-2; 5)$. Tính $S = a + b + c$.
(A) $S = 9$. (B) $S = 10$. (C) $S = 8$. (D) $S = 7$.

Lời giải.

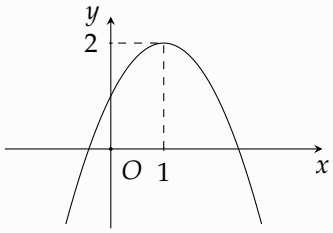
Parabol đã cho có đỉnh $I(-1; 4) \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = -1 \\ 4 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - b = 0 \\ a - b + c = 4. \end{cases}$
Parabol đã cho đi qua điểm $A(-2; 5) \Leftrightarrow 5 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \Leftrightarrow 4a - 2b + c = 5$.
Do đó $\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 5. \end{cases}$

Vậy $S = 8$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 17

Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ.



Tìm số các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0;3000]$ để phương trình $f(x) + m - 2022 = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Ⓐ 978. Ⓑ 979. Ⓒ 980. Ⓓ 981.

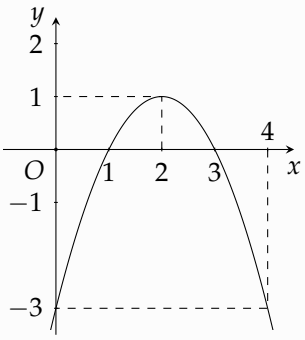
Lời giải.

Ta có $f(x) + m - 2022 = 0 \Leftrightarrow f(x) = -m + 2022$. (1)
Số nghiệm của phương trình (1) bằng số giao điểm của đồ thị các hàm số $y = f(x)$ và $y = -m + 2022$. Do đó phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -m + 2022 < 2 \Leftrightarrow m > 2020$.
Vậy số các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[0;3000]$ là 980.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 18

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

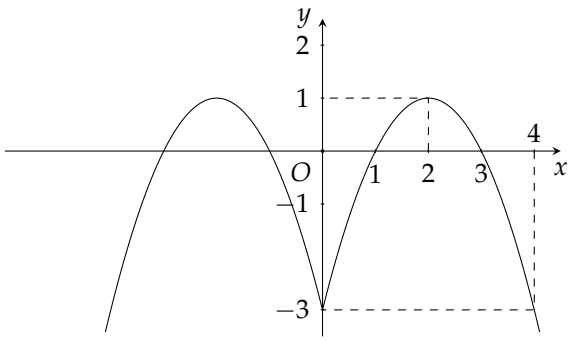


Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $f^2(|x|) + mf(|x|) - 4 + 2m = 0$ có 8 nghiệm phân biệt?

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 4. Ⓓ 1.

Lời giải.

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta suy ra đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ có dạng như hình vẽ



Ta có $f^2\left(|x|\right)+mf\left(|x|\right)-4+2m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(|x|\right)=2-m \\ f\left(|x|\right)=-2. \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(|x|)$, ta có phương trình $f(|x|)=-2$ có 4 nghiệm.

Phương trình đã cho có 8 nghiệm khi phương trình $f(|x|)=2-m$ có 4 nghiệm và $2-m\neq -2$.

Suy ra $\begin{cases} -3<2-m<1 \\ 2-m\neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1<m<5 \\ m\neq 4. \end{cases}$

Vậy có 2 giá trị nguyên của m thoả mãn.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19

Nghiệm của phương trình $|2x+1|=|x-7|$ là

(A) $x\in\{-3;2\}$. (B) $x\in\{2\}$. (C) $x\in\{-8\}$. (D) $x\in\{-8;2\}$.

Lời giải.

Ta có $|2x+1|=|x-7| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+1=x-7 \\ 2x+1=-x+7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-8 \\ x=2. \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình là $S=\{-8;2\}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 20

Tập nghiệm của phương trình $|2x-3|=|x+1|$ là tập hợp nào sau đây.

(A) $\left\{\frac{2}{3};4\right\}$. (B) $\left\{\frac{2}{3}\right\}$. (C) $\left\{\frac{2}{3};-4\right\}$. (D) $\left\{-\frac{2}{3};4\right\}$.

Lời giải.

Ta có $|2x-3|=|x+1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-3=x+1 \\ 2x-3=-x-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=\frac{2}{3}. \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình là $S=\left\{\frac{2}{3};4\right\}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 21

Tập nghiệm của phương trình $\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x+1}=\frac{5}{x-1}$ là

(A) $\left\{\frac{1}{4};-3\right\}$. (B) $\left\{\frac{1}{2};-6\right\}$. (C) $\left\{-\frac{1}{2};6\right\}$. (D) $\left\{-\frac{1}{4};3\right\}$.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x-2\neq 0 \\ x+1\neq 0 \\ x-1\neq 0. \end{cases}$

Khi đó

$$\begin{aligned} & \frac{3}{x-2}-\frac{2}{x+1}=\frac{5}{x-1} \\ \Leftrightarrow\ & 3(x-1)(x+1)-2(x-2)(x-1)=5(x-2)(x+1) \\ \Leftrightarrow\ & 3(x^2-1)-2(x^2-3x+2)=5(x^2-x-2) \\ \Leftrightarrow\ & 4x^2-11x-3=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{4} \\ x=3. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy $S=\left\{-\frac{1}{4};3\right\}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 22

Gọi S là tập nghiệm của phương trình $\frac{3}{x-2}+2x-1=\frac{1-3x}{x}$. Số phần tử của tập S là

(A) 0. (B) 2. (C) 1. (D) 3.

Lời giải.

Điều kiện $\begin{cases} x-2\neq 0 \\ x\neq 0. \end{cases}$

Khi đó

$$\begin{aligned} & \frac{3}{x-2}+2x-1=\frac{1-3x}{x} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{2x^2-5x+5}{x-2}=\frac{1-3x}{x} \\ \Leftrightarrow\ & 2x^3-5x^2+5x=-3x^2+7x-2 \\ \Leftrightarrow\ & x^3-x^2-x+1=0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Do đó $S=\{-1;1\}$.

Vậy S có 2 phần tử.

Chọn đáp án (B) □

Câu 23

Gọi S là tập nghiệm của phương trình $|2x-3|=x^2-x-7$. Tích các phần tử của tập S bằng

(A) -40. (B) $2+2\sqrt{41}$. (C) 40. (D) $-2-2\sqrt{41}$.

Lời giải.

Ta có $|2x-3|=x^2-x-7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} 2x-3\geq 0 \\ 2x-3=x^2-x-7 \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} 2x-3<0 \\ -2x+3=x^2-x-7. \end{cases} & (2) \end{array}\right.$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{3}{2} \\ x^2 - 3x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{3}{2} \\ x^2 + x - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \dfrac{3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1+\sqrt{41}}{2} \\ x = \dfrac{-1-\sqrt{41}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-1-\sqrt{41}}{2}.$$

Tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{4; \dfrac{-1-\sqrt{41}}{2}\right\}$.

Tích các phần tử của tập S bằng $-2-2\sqrt{41}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 24

Biết phương trình $\dfrac{1}{|x-1|} = 2x+3$ có một nghiệm x_0 lớn hơn 1, và $x_0 = \dfrac{a+\sqrt{b}}{4}$. Tính $S = a+b$.

(A) $S = 32$. (B) $S = 16$. (C) $S = 34$. (D) $S = 17$.

Lời giải.

Khi $x > 1$ phương trình $\dfrac{1}{|x-1|} = 2x+3 \Leftrightarrow 1 = (2x+3)(x-1) \Leftrightarrow 2x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1+\sqrt{33}}{4} \\ x = \dfrac{-1-\sqrt{33}}{4}. \end{array}\right.$$

Vì $x > 1$ nên $x_0 = \dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}$.
Do đó $a = -1, b = 33$.
Vậy $S = a+b = 32$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 25

Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

(A) $f(x) > 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$. (B) $f(x) > 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$.

(C) $f(x) > 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$. (D) $f(x) > 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $f(x) > 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 26

Tìm tập xác định của hàm số $y=\sqrt{2x^2-5x+2}$.

(A) $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right]$.
(B) $[2;+\infty)$.
(C) $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right]\cup[2;+\infty)$.
(D) $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$.

Lời giải.

Điều kiện $2x^2-5x+2\geq 0\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right]\cup[2;+\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 27

Bảng xét dấu sau đây là của tam thức bậc 2 nào?

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(A) $f(x)=-x^2+5x-6$.
(B) $f(x)=x^2+5x-6$.
(C) $f(x)=x^2-5x-6$.
(D) $f(x)=-x^2-5x+6$.

Lời giải.

Từ bảng xét dấu ta có $f(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x=2$, $x=3$ và $f(x)>0$ khi $x\in(2;3)$.
Do đó $f(x)=-x^2+5x-6$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 28

Cho bất phương trình $(2m^2+m-6)x^2+(2m-3)x-1>0$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình vô nghiệm.

(A) $-\dfrac{5}{6}<m\leq\dfrac{3}{2}$.
(B) $-\dfrac{5}{6}<m<\dfrac{3}{2}$.
(C) $-\dfrac{5}{6}\leq m<\dfrac{3}{2}$.
(D) $-\dfrac{5}{6}\leq m\leq\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Bất phương trình $(2m^2+m-6)x^2+(2m-3)x-1>0\,(*)$ vô nghiệm khi và chỉ khi

$$(2m^2+m-6)x^2+(2m-3)x-1\leq 0,\forall x\in\mathbb{R}.$$

Xét $2m^2+m-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-2\\ m=\dfrac{3}{2}.\end{array}\right.$

Với $m=-2$ thì bất phương trình $(*)\Leftrightarrow -7x-1>0\Leftrightarrow x<-\dfrac{1}{7}$, loại $m=-2$.

Với $m=\dfrac{3}{2}$ thì bất phương trình $(*)\Leftrightarrow 0x-1>0$ bất phương trình vô nghiệm nhận $m=\dfrac{3}{2}$.

Xét $2m^2+m-6\neq 0$.

$$\begin{aligned}
&(2m^2+m-6)x^2+(2m-3)x-1\leq 0,\forall x\in\mathbb{R}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}2m^2+m-6<0\\(2m-3)^2-4\cdot(2m^2+m-6)\cdot(-1)\leq 0\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}-2<m<\dfrac{3}{2}\\-\dfrac{5}{6}\leq m\leq\dfrac{3}{2}\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &-\frac{5}{6}\leq m<\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Vậy $-\dfrac{5}{6}\leq m\leq\dfrac{3}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 29

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\sqrt{(m-2)x^2-2(m-3)x+m-1}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

(A) $m>\dfrac{7}{3}$. (B) $m<\dfrac{7}{3}$. (C) $m\leq\dfrac{7}{3}$. (D) $m\geq\dfrac{7}{3}$.

Lời giải.

Hàm số có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $f(x)=(m-2)x^2-2(m-3)x+m-1\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Xét $m-2=0\Leftrightarrow m=2$ thì $f(x)=2x+1\geq 0\Leftrightarrow x\geq-\dfrac{1}{2}$, loại $m=2$.

Xét $m\neq 2$.

Ta có $f(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}m-2>0\\(m-3)^2-(m-2)(m-1)\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>2\\m\geq\dfrac{7}{3}\end{cases}\Leftrightarrow m\geq\dfrac{7}{3}$.

Vậy $m\geq\dfrac{7}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 30

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ để phương trình $x^2-mx-m^2=0$ có hai nghiệm trái dấu.

(A) 20. (B) 21. (C) 9. (D) 10.

Lời giải.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow ac<0\Leftrightarrow -m^2<0\Leftrightarrow m\neq 0$.
Suy ra $m\in\{-10;\cdots;-1;1;\cdots;10\}$.
Vậy có 20 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (A) □

Câu 31

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $x^2+(m-1)x+m-2=0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-5;5)$?

(A) 6. (B) 7. (C) 8. (D) 9.

Lời giải.

Ta có $x^2+(m-1)x+m-2=0 \Leftrightarrow (x+1)(x+m-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-m+2. \end{array}\right.$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -m+2\neq -1 \\ -5<-m+2<5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m\neq 3 \\ -3<m<7. \end{array}\right.$

Suy ra $m\in\{-2;-1;0;1;2;4;5;6\}$.

Vậy có 8 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (C) □

Câu 32

Tính tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{6-5x}=2-x$.

(A) -1. (B) 1. (C) 2. (D) 0.

Lời giải.

Ta có

$$\sqrt{6-5x}=2-x \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2-x\geq 0 \\ 6-5x=(2-x)^2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\leq 2 \\ x^2+x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\leq 2 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2. \end{array}\right.$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình bằng $1+(-2)=-1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 33

Cho phương trình $\sqrt{2x+m}=x-1$. (1)

Tất cả giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

(A) $(-3;1)$. (B) $(-2;3)$. (C) $(-3;2)$. (D) $(-2;1)$.

Lời giải.

Ta có (1) $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-1\geq 0 \\ 2x+m=(x-1)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\geq 1 \\ x^2-4x+1-m=0. \end{array}\right.$ (2)

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1 $\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \Delta>0 \\ 1<x_1<x_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \Delta>0 \\ 0<x_1-1<x_2-1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3+m>0 \\ (x_1-1)(x_2-1)>0 \\ x_1+x_2>2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m>-3 \\ x_1x_2-(x_1+x_2)+1>0 \\ x_1+x_2>2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ 1 - m - 4 + 1 > 0 \Leftrightarrow -3 < m < 2. \\ 4 > 2 \end{cases}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 34

Tập nghiệm S của phương trình $\sqrt{2x-3} = x - 3$ là

(A) $S = \{6; 2\}$. (B) $S = \{2\}$. (C) $S = \{6\}$. (D) $S = \varnothing$.

Lời giải.

Cách 1. $\sqrt{2x-3} = x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \geq 0 \\ 2x - 3 = x^2 - 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 6 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 6.$

Cách 2. Thử đáp án.
Thay $x = 2$ vào phương trình ta được $\sqrt{2 \cdot 2 - 3} = 2 - 3$ sai.
Thay $x = 6$ vào phương trình ta được $\sqrt{2 \cdot 6 - 3} = 6 - 3$ đúng.

Vậy $x = 6$ là nghiệm của phương trình.
Chọn đáp án (C) □

Câu 35

Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2 - 4} = x - 2$ là

(A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{x^2 - 4} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 4 = x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 36

Tập nghiệm S của phương trình $\sqrt{x^2 - x - 12} = 7 - x$ là

(A) $S = \varnothing$. (B) $S = \left\{-\dfrac{61}{13}\right\}$. (C) $S = \{7\}$. (D) $S = \left\{\dfrac{61}{13}\right\}$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{x^2 - x - 12} = 7 - x \Leftrightarrow \begin{cases} 7 - x \geq 0 \\ x^2 - x - 12 = 47 - 14x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 7 \\ 13x = 61 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{61}{13}.$

Vậy $S = \left\{\dfrac{61}{13}\right\}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 37

Số nghiệm của phương trình sau $x - \sqrt{2x^2 - 3x + 1} = 1$ là

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

Lời giải.

Ta có

$$x-\sqrt{2x^2-3x+1}=1 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-3x+1}=x-1$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1\geq 0 \\ 2x^2-3x+1=x^2-2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x^2-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Vậy số nghiệm của phương trình là 1.
Chọn đáp án (B) □

Câu 38

Phương trình $\sqrt{5x^2-5x-2}=2x-1$ có một nghiệm $x=\dfrac{a-c\sqrt{13}}{b}$, với a,b,c là các số nguyên và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị $2a+b+c$ bằng

(A) 0. (B) 5. (C) 3. (D) 4.

Lời giải.

Ta có

$$\sqrt{5x^2-5x-2}=2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1\geq 0 \\ 5x^2-5x-2=4x^2-4x+1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\leq \dfrac{1}{2} \\ x^2-x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq \dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2} \\ x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2} \end{array}\right. \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{1-\sqrt{13}}{2}.$$

Suy ra $a=1, b=2, c=-1$.
Vậy $2a+b+c=3$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 39

Cho phương trình $\sqrt{x^2+2x+2}=\sqrt{2x^2+2mx+2m^2+m-1}$. Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm là

(A) 6. (B) 5. (C) Vô số. (D) 8.

Lời giải.

Bình phương hai vế của phương trình đã cho ta được
$x^2+2x+2=2x^2+2mx+2m^2+m-1 \Leftrightarrow x^2+2(m-1)x+2m^2+m-3=0.$ (1)
Nhận thấy rằng tam thức bậc hai x^2+2x+2 có $a=1>0$ và $\Delta'=-1<0$. Suy ra $x^2+x+2>0$ với mọi x.
Như vậy phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm. Điều này tương đương với $\Delta'\geq 0 \Leftrightarrow (m-1)^2-(2m^2+m-3)\geq 0 \Leftrightarrow -m^2-3m+4\geq 0 \Leftrightarrow -4\leq m\leq 1$.
Vậy có 6 giá trị nguyên của thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (A) □

Câu 40

Bảng xét dấu nào sau đây là bảng xét dấu của tam thức $f(x) = -x^2 + 6x - 9$?

(A)

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

(B)

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

(C)

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

(D)

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

Lời giải.

Ta có $-x^2 + 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ và $a = -1 < 0$.
Vậy bảng xét dấu của tam thức $f(x) = -x^2 + 6x - 9$ là

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

Chọn đáp án (D) □

Câu 41

Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì đa thức $f(x) = x^2 - 6x + 8$ không dương?

(A) $[2;3]$.
(B) $(-\infty;2] \cup [4;+\infty)$.
(C) $[2;4]$.
(D) $[1;4]$.

Lời giải.

Vì $f(x)$ không dương nên $f(x) \le 0$.
Ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 4. \end{array}\right.$
Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy $x \in [2;4]$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 42

Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y = \sqrt{\dfrac{3-3x}{-x^2-2x+15}} - 1$.

(A) $\mathscr{D} = [4;+\infty)$.
(B) $\mathscr{D} = (-5;-3] \cup (3;4]$.
(C) $\mathscr{D} = (-\infty;-5)$.
(D) $\mathscr{D} = (-5;3) \cup (3;4]$.

Lời giải.

Điều kiện $\dfrac{3-3x}{-x^2-2x+15}-1\geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-x-12}{-x^2-2x+15}\geq 0.$

Đặt $f(x)=\dfrac{x^2-x-12}{-x^2-2x+15}$.

Ta có $x^2-x-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-3 \end{array}\right.$; $-x^2-2x+15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-5. \end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-5		-3		3		4		$+\infty$
$f(x)$		$-$		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu ta có $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in(-5;-3]\cup(3;4]$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 43

Số nghiệm nguyên của bất phương trình $(x-x^2)\sqrt{x^2-5x+6}\geq 0$?

(A) 4. (B) 2. (C) 0. (D) Vô số.

Lời giải.

Ta có

$$(x-x^2)\sqrt{x^2-5x+6}\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x+6=0 \\ \left\{\begin{array}{l} x^2-5x+6>0 \\ x-x^2\geq 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \text{ hoặc } x=3 \\ \left\{\begin{array}{l} x\in(-\infty;2)\cup(3;+\infty) \\ x\in[0;1] \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x\in[0;1]\cup\{2;3\}.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 44

Hàm số nào có bảng xét đấu sau?

x	$-\infty$		$-\frac{3}{5}$		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(A) $f(x)=-5x^2+2x+3$. (B) $f(x)=5x^2-2x-3$.

(C) $f(x)=-2x^2+5x-3$. (D) $f(x)=3x^2+2x-5$.

Lời giải.

Hàm số có $a<0$, có hai nghiệm là $\left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{3}{5} \\ x=1. \end{array}\right.$

Vậy $f(x)=-5x^2+2x+3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 45

Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left|\dfrac{2-3|x|}{1+x}\right| \le 1$ là

(A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) 3.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq -1$.

- Với $x \ge 0$, ta có $\left|\dfrac{2-3|x|}{1+x}\right| \le 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{2-3x}{1+x}\right| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \dfrac{2-3x}{1+x} \le 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} \le x \le \dfrac{3}{2}$.
  Kết hợp điều kiện ta được $S_1 = \left[\dfrac{1}{4}; \dfrac{3}{2}\right]$.
- Với $x < 0$, ta có $\left|\dfrac{2-3|x|}{1+x}\right| \le 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{2+3x}{1+x}\right| \le 1 \Leftrightarrow -1 \le \dfrac{2+3x}{1+x} \le 1 \Leftrightarrow -\dfrac{3}{4} \le x \le -\dfrac{1}{2}$.
  Kết hợp điều kiện ta được $S_2 = \left[-\dfrac{3}{4}; -\dfrac{1}{2}\right]$.

Do đó, tập nghiệm của bất phương trình là $S = S_1 \cup S_2 = \left[\dfrac{1}{4}; \dfrac{3}{2}\right] \cup \left[-\dfrac{3}{4}; -\dfrac{1}{2}\right]$

Vậy bất phương trình chỉ có một nghiệm nguyên $x = 1$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 46

Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-2022; 2022]$ để hàm số $y = \dfrac{2x-3}{\sqrt{(m-1)x^2 - 2mx + m + 3}}$ xác định trên $\mathbb{R}$?

(A) 2022. (B) 2025. (C) 2021. (D) 4042.

Lời giải.

Hàm số xác định khi và chỉ khi $f(x) = (m-1)x^2 - 2mx + m + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

TH 1. $m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \Rightarrow f(x) = -2x + 4 > 0$ không thỏa mãn với mọi x, suy ra $m = 1$ loại.

TH 2. $m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1$.
Khi đó $f(x) = (m-1)x^2 - 2mx + m + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = m - 1 > 0 \\ \Delta' = m^2 - (m-1)(m+3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m > \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}.$$

Vì $m \in [-2022; 2022]$, $m \in \mathbb{Z}$ suy ra $m \in \{2; 3; \cdots; 2022\}$.

Vậy có 2021 số thỏa mãn.
Chọn đáp án (C) □

Câu 47

Tập nghiệm của bất phương trình $-x^2 + 3x - 2 \ge 0$ là

(A) $[1; 2]$. (B) $[-1; 2]$. (C) $(1; 2)$. (D) $[-2; 1]$.

Lời giải.

Đặt $f(x) = -x^2 + 3x - 2$.
Hệ số $a = -1 < 0$; $f(x)$ có hai nghiệm là $x = 1; x = 2$ nên $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$. Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $[1;2]$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 48

Tìm m để $x^2 + (2m+1)x + m^2 + 3 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
(A) $m \leq \frac{11}{4}$. (B) $m < \frac{11}{4}$. (C) $m > \frac{11}{4}$. (D) $m \geq \frac{11}{4}$.

Lời giải.

Ta có $x^2 + (2m+1)x + m^2 + 3 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ (2m+1)^2 - 4(m^2+3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4m < 11 \Leftrightarrow m < \frac{11}{4}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 49

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $x^2 - 2(m+3)x - 2m + 1 < 0$ vô nghiệm.
(A) 5. (B) 6. (C) Vô số . (D) 7.

Lời giải.

Bất phương trình $x^2 - 2(m+3)x - 2m + 1 < 0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow x^2 - 2(m+3)x - 2m + 1 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ (m+3)^2 - (-2m+1) \leq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow m^2 + 8m + 8 \leq 0 \Leftrightarrow -4 - 2\sqrt{2} \leq m \leq -4 + 2\sqrt{2}.$$

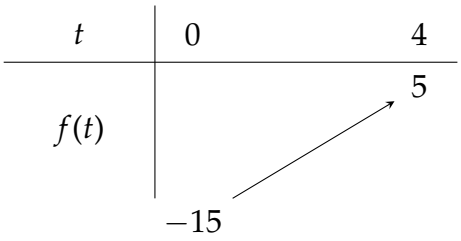
Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-6; -5; -4; -3; -2\}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 50

Tìm a để bất phương trình $\sqrt{(x+5)(3-x)} \leq x^2 + 2x + a$ nghiệm đúng với mọi x thuộc tập xác định.
(A) $a \geq 3$. (B) $a \geq 5$. (C) $a \geq 4$. (D) $a \geq 6$.

Lời giải.

Điều kiện $(x+5)(3-x) \geq 0 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 3$.
Ta có $\sqrt{(x+5)(3-x)} \leq x^2 + 2x + a \Leftrightarrow \sqrt{-x^2 - 2x + 15} - x^2 - 2x \leq a$. (1)
Đặt $t = \sqrt{-x^2 - 2x + 15} = \sqrt{-(x+1)^2 + 16} \Rightarrow 0 \leq t \leq 4$.
Ta có $t^2 = -x^2 - 2x + 15 \Rightarrow -x^2 - 2x = t^2 - 15$.
Ta được bất phương trình theo t là $t^2 + t - 15 \leq a$. (2)
Để bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $x \in [-5;3]$ thì bất phương trình (2) nghiệm đúng với mọi $t \in [0;4] \Leftrightarrow \max\limits_{[0;4]} f(t) \leq a$ với $f(t) = t^2 + t - 15$.
Bảng biến thiên



Vậy $a \geq 5$ thỏa yêu cầu bài toán.
Chọn đáp án (B) □

Câu 51

Cho phương trình $\sqrt{x^2+3x-5} = 2x^2+6x-11$. Nếu đặt $t = \sqrt{x^2+3x-5}$ thì phương trình cho trở thành phương trình nào trong các phương trình sau
(A) $2t^2-t+1=0$. (B) $t^2-t-1=0$. (C) $2t^2-t-1=0$. (D) $2t^2+t+1=0$.

Lời giải.

Ta có $\sqrt{x^2+3x-5} = 2x^2+6x-11 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3x-5} = 2(x^2+3x-5)-1$.
Đặt $t = \sqrt{x^2+3x-5}$ ta được phương trình $t = 2t^2-1 \Leftrightarrow 2t^2-t-1=0$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 52

Phương trình $\dfrac{x^2-3x-2}{x-3} = -x$ có nghiệm là a khi đó a thuộc tập
(A) $\left(\frac{1}{3};3\right)$. (B) $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. (C) $\left(\frac{1}{3};1\right)$. (D) $\varnothing$.

Lời giải.

Điều kiện $x \neq 3$.

Khi đó $\dfrac{x^2-3x-2}{x-3} = -x \Leftrightarrow x^2-3x-2 = -x(x-3) \Leftrightarrow 2x^2-6x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2} \\ x = \dfrac{3-\sqrt{13}}{2}. \end{array}\right.$

Kiểm tra các đáp án ta thấy đáp án $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ là đúng vì $\dfrac{3-\sqrt{13}}{2} \in \left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 53

Giải bất phương trình $\dfrac{3x-2}{x-1} < 2x$ được tập nghiệm là
(A) $\left(\frac{1}{2};1\right) \cup (2;+\infty)$. (B) $(-\infty;1) \cup (2;+\infty)$.
(C) $(-2;1) \cup (2;+\infty)$. (D) $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right) \cup (2;3)$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{3x-2}{x-1} < 2x \Leftrightarrow \dfrac{3x-2}{x-1} - 2x < 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2x^2+5x-2}{x-1} < 0$.
Xét dấu vế trái

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$-2x^2+5x-2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Về trái		$+$	0	$-$		$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu ta có tập nghiệm của bất phương trình là $\left(\frac{1}{2};1\right)\cup(2;+\infty)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 54

Phương trình $x^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=3$ có số nghiệm thực bằng

(A) 2. (B) 1. (C) 4. (D) 3.

Lời giải.

Điều kiện $x\neq -1$.
Khi đó

$$x^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=3 \Leftrightarrow \left(x-\frac{x}{x+1}\right)^2+2x\cdot\frac{x}{x+1}=3$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2+2\cdot\frac{x^2}{x+1}-3=0. \quad (1)$$

Đặt $t=\frac{x^2}{x+1}$. Khi đó phương trình (1) trở thành $t^2+2t-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-3.\end{array}\right.$

- Với $t=1\Rightarrow x^2-x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$ (thỏa mãn).
- Với $t=3\Rightarrow x^2+3x+3=0$ vô nghiệm.

Vậy phương trình có 2 nghiệm.
Chọn đáp án (A) □

Câu 55

Phương trình $x^2+2\sqrt{x+1}+9=7x$ có tổng các nghiệm bằng

(A) 2. (B) -2. (C) $\frac{11-\sqrt{17}}{2}$. (D) $\frac{15-\sqrt{17}}{2}$.

Lời giải.

Điều kiện $x\geq -1$.

Ta có

$$\begin{aligned} x^2+2\sqrt{x+1}+9=7x &\Leftrightarrow x^2-6x+9=x-2\sqrt{x+1}\\ &\Leftrightarrow (x-3)^2=(\sqrt{x-1}-1)^2\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=\sqrt{x-1}-1 & (1)\\ x-3=-\sqrt{x-1}+1. & (2)\end{cases}\end{aligned}$$

$(1)\Leftrightarrow x-1-\sqrt{x-1}-2=0\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x-1}=1\\ \sqrt{x-1}=-2\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$

$(2)\Leftrightarrow x-1-\sqrt{x-1}-4=0\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x-1}=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}\\ \sqrt{x-1}=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{11-\sqrt{17}}{2}.$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là $2+\dfrac{11-\sqrt{17}}{2}=\dfrac{15-\sqrt{17}}{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 56

Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số $y=\dfrac{x+4}{\sqrt{x^2-16}}$.

(A) $\mathscr{D}=(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.
(B) $\mathscr{D}=\mathbb{R}$.
(C) $\mathscr{D}=(-\infty;-4)\cup(4;+\infty)$.
(D) $\mathscr{D}=(-4;4)$.

Lời giải.

Hàm số xác định khi $x^2-16>0\Leftrightarrow x^2>16\Leftrightarrow \begin{cases}x>4\\ x<-4.\end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D}=(-\infty;-4)\cup(4;+\infty)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 57

Cho hàm số $y=x^2-2x$ có đồ thị (P). Tọa độ đỉnh của (P) là

(A) $(0;0)$.
(B) $(1;-1)$.
(C) $(-1;3)$.
(D) $(2;0)$.

Lời giải.

Hoành độ đỉnh của (P) là $x_I=-\dfrac{b}{2a}=1$.

Tung độ đỉnh của (P) là $y_I=x_I^2-2x_I=-1$.

Vậy toạ độ đỉnh của (P) là $I(1;-1)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 58

Hàm số $y=-x^2+4x-3$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

(A) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.
(B) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.
(C) Hàm số đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.
(D) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;3)$.

Lời giải.

Ta có tọa độ đỉnh $I(2;-1)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$ và nghịch biến trên $(2;+\infty)$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 59

Bất phương trình $-x^2+4mx-4<0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ khi

(A) $m=-1$. (B) $m>1$. (C) $\left[\begin{array}{l} m>1 \\ m<-1 \end{array}\right.$. (D) $-1<m<1$.

Lời giải.

Bất phương trình $-x^2+4mx-4<0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \quad -x^2+4mx-4<0, \forall x\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a<0 \\ \Delta'<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<0 \\ 4m^2-4<0 \end{cases} \Leftrightarrow -1<m<1.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 60

Biết phương trình $\sqrt{x^2+10x-5}=2(x-1)$ có đúng một nghiệm có dạng $x=a+\sqrt{b}$. Tính $a+b$.

(A) 4. (B) 7. (C) 9. (D) 12.

Lời giải.

Bình phương hai vế ta được phương trình hệ quả

$$\begin{aligned} & x^2+10x-5=4x^2-8x+4 \\ \Leftrightarrow \quad & -3x^2+18x-9=0 \\ \Leftrightarrow \quad & \left[\begin{array}{l} x=3+\sqrt{6} \\ x=3-\sqrt{6}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Thế hai giá trị của x vừa tìm được vào phương trình ban đầu, ta thấy chỉ có $x=3+\sqrt{6}$ thỏa mãn.
Suy ra $a=3, b=6$. Vậy $a+b=9$.
Chọn đáp án (C) □

B TỰ LUẬN

Bài 1

Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y=\sqrt{2x-1}+\sqrt{5-x}$; b) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.

Lời giải.

a) $y=\sqrt{2x-1}+\sqrt{5-x}$ xác định khi $\begin{cases}2x-1\geq 0\\5-x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq\dfrac{1}{2}\\x\leq 5\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\leq x\leq 5.$

Do đó $\mathscr{D}=\left[\dfrac{1}{2};5\right]$.

b) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ xác định khi $x-1>0\Leftrightarrow x>1$.

Do đó $\mathscr{D}=(1;+\infty)$.

□

Bài 2

Với mỗi hàm số dưới đây, hãy vẽ đồ thị, tìm tập giá trị, khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của nó.

a) $y=-x^2+6x-9$;

b) $y=-x^2-4x+1$;

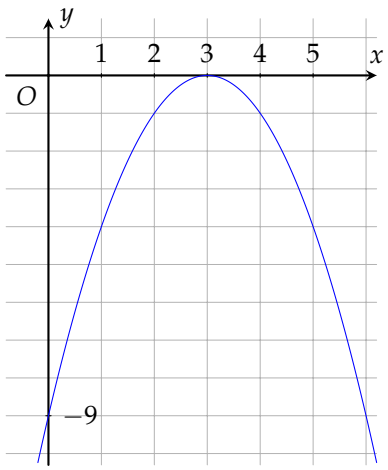
c) $y=x^2+4x$;

d) $y=2x^2+2x+1$.

Lời giải.

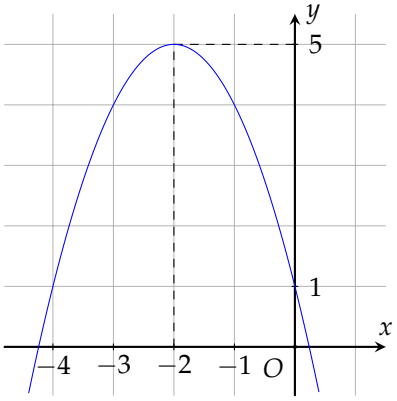
a)

Hàm số $y=-x^2+6x-9$ có $a=-1<0$ nên parabol quay bề lõm xuống dưới.
Đỉnh $I(3;0)$. Trục đối xứng là $x=3$.
Giao điểm của đồ thị với trục Oy là $(0,-9)$. Parabol tiếp xúc trục hoành tại điểm $(3;0)$.
Hàm số có tập giá trị là $\mathscr{T}=(-\infty;0]$.
Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$ và nghịch biến trên khoảng $(3;+\infty)$.



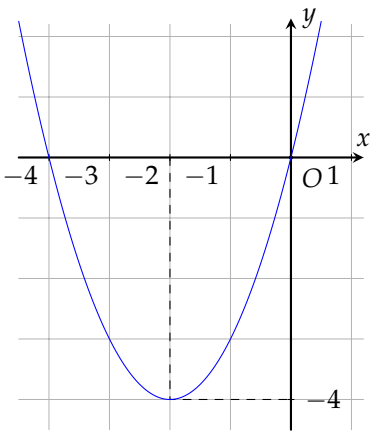
b)

Hàm số $y=-x^2-4x+1$ có $a=-1<0$ nên parabol quay bề lõm xuống dưới.
Đỉnh $I(-2;5)$. Trục đối xứng là $x=-2$.
Giao điểm của đồ thị với trục Oy là $(0,1)$. Parabol cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $-x^2-4x+1=0$, tức là $x=0$ và $x=-2$.
Hàm số có tập giá trị là $\mathscr{T}=(-\infty;5]$.
Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ và nghịch biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

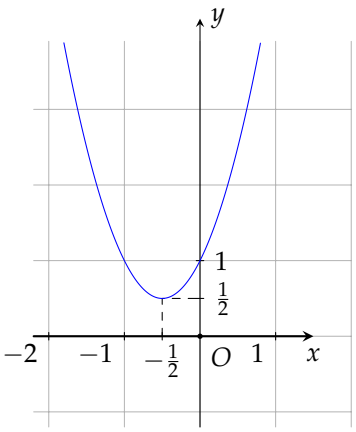


c)

Hàm số $y = x^2 + 4x$ có $a = 1 > 0$ nên parabol quay bề lõm lên trên.
Đỉnh $I(-2;-4)$. Trục đối xứng là $x = -2$.
Giao điểm của đồ thị với trục Oy là $O(0,0)$. Parabol cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $x^2 + 4x = 0$, tức là $x = 0$ và $x = -2$.
Hàm số có tập giá trị là $\mathscr{T} = [-4;+\infty)$.
Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.



Hàm số $y = 2x^2 + 2x + 1$ có $a = 2 > 0$ nên parabol quay bề lõm lên trên.
Đỉnh $I\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. Trục đối xứng là $x = -\frac{1}{2}$.
Giao điểm của đồ thị với trục Oy là $(0,\frac{1}{2})$. Parabol không cắt trục hoành.
Hàm số có tập giá trị là $\mathscr{T} = \left[\frac{1}{2};+\infty\right)$.
Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$.



□

Bài 3

Xác định parabol $(P)\colon y = ax^2 + bx + 3$ trong mỗi trường hợp sau

a) (P) đi qua hai điểm $A(1;1)$ và $B(-1;0)$;

b) (P) đi qua điểm $M(1;2)$ và nhận đường thẳng $x = 1$ làm trục đối xứng;

c) (P) có đỉnh là $N(1;4)$.

Lời giải.

a) (P) đi qua hai điểm $A(1;1)$ và $B(-1;0)$, ta có hệ

$$\begin{cases} a+b+3=1 \\ a-b+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=-2 \\ a-b=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{5}{2} \\ b=\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Khi đó $(P)\colon y = -\frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3$.

b) (P) đi qua điểm $M(1;2)$, do đó

$$a + b + 3 = 2 \Leftrightarrow a + b = -1. \qquad (1)$$

Lại có (P) nhận đường thẳng $x = 1$ là trục đối xứng, do đó

$$-\frac{b}{2a} = 1 \Leftrightarrow b = -2a. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $a=1;\ b=-2$.
Khi đó $(P)\colon y=x^2-2x+3$.

c) (P) có đỉnh là $N(1;4)$, do đó ta có

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a}=1 \\ a+b+3=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2a \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=2. \end{cases}$$

Khi đó $(P)\colon y=-x^2+2x+3$.

□

Bài 4

Giải các bất phương trình sau:

a) $2x^2-3x+1>0$;

b) $x^2+5x+4<0$;

c) $-3x^2+12x-12\geq 0$;

d) $2x^2+2x+1<0$.

Lời giải.

a) Tam thức $f(x)=2x^2-3x+1$ có $\Delta=1>0$ nên $f(x)=0$ có hai nghiệm $x=\dfrac{1}{2}$ và $x=1$, khi đó ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)\cup(1;+\infty)$.

b) Tam thức $f(x)=x^2+5x+4$ có $\Delta=9>0$ nên $f(x)=0$ có hai nghiệm $x=-4$ và $x=-1$, khi đó ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		-4		-1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-4;-1)$.

c) Tam thức $f(x)=-3x^2+12x-12$ có $\Delta=0$, hệ số $a=-3$ nên $f(x)$ luôn âm với mọi $x\neq 2$.
Do đó bất phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

d) Tam thức $f(x)=2x^2+2x+1$ có $\Delta'=-1<0$, hệ số $a=1>0$ nên $f(x)$ luôn dương với mọi $x\in\mathbb{R}$.
Do đó bất phương trình đã cho vô nghiệm.

□

Bài 5

Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{2x^2-14}=x-1$;

b) $\sqrt{-x^2-5x+2}=\sqrt{x^2-2x-3}$.

Lời giải.

a)

$$\begin{aligned}&\sqrt{2x^2-14}=x-1\\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases}x-1\geq 0\\ 2x^2-14=x^2-2x+1\end{cases}\\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases}x\geq 1\\ x^2+2x-15=0\end{cases}\\ \Leftrightarrow\ &\begin{cases}x\geq 1\\ \left[\begin{array}{l}x=3\\ x=-5\end{array}\right.\end{cases}\\ \Leftrightarrow\ &x=3.\end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=5$.

b) Bình phương hai vế của phương trình ta được

$$-x^2-5x+2=x^2-2x-3\Leftrightarrow 2x^2+3x-5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-\dfrac{5}{2}.\end{array}\right.$$

Thay lần lượt hai giá trị này của x vào phương trình đã cho, ta thấy chỉ có $x=-\dfrac{5}{2}$ thỏa mãn.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=-\dfrac{5}{2}$.

□

Bài 6

Một công ty bắt đầu sản xuất và bán một loại máy tính xách tay từ năm 2018. Số lượng loại máy tính đó bán được trong hai năm liên tiếp 2018 và 2019 lần lượt là 3,2 nghìn và 4 nghìn chiếc. Theo nghiên cứu dự báo thị trường của công ty, trong khoảng 10 năm kể từ năm 2018, số lượng máy tính loại đó bán được mỗi năm có thể được xấp xỉ bởi một hàm số bậc hai.
Giả sử t là thời gian (theo đơn vị năm) tính từ năm 2018. Số lượng loại máy tính đó bán được trong năm 2018 và năm 2019 lần lượt được biểu diễn bởi các điểm $(0;3,2)$ và $(1;4)$. Giả sử điểm $(0;3,2)$ là đỉnh đồ thị của hàm số bậc hai này.

a) Lập công thức của hàm số mô tả số lượng máy tính xách tay bán được qua từng năm.

b) Tính số lượng máy tính xách tay đó bán được trong năm 2024.

c) Đến năm bao nhiêu thì số lượng máy tính xách tay đó bán được trong năm sẽ vượt mức 52 nghìn chiếc?

Lời giải.

a) Giả sử hàm số có dạng $y = f(t) = at^2 + bt + c$, $t \geq 0$.
Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là parabol với đỉnh là $I(0;3,2)$, khi đó ta có

$$\begin{cases} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 3,2 \\ -\dfrac{b}{2a} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3,2 \\ b = 0. \end{cases}$$

Lại có đồ thị hàm số đi qua điểm $(1;4)$ nên ta có

$$a \cdot 1^2 + 3,2 = 4 \Leftrightarrow a = 0,8.$$

Do đó, hàm số mô tả số lượng máy tính xách tay được bán qua từng năm là $y = f(t) = 0,8t^2 + 3,2$.

b) Số lượng máy tính được bán trong năm 2024 bằng $f(6) = 0,8 \cdot 6^2 + 3,2 = 32$ ngàn chiếc.

c) Để $f(t) > 52 \Leftrightarrow 0,8t^2 + 3,2 > 52 \Leftrightarrow t > 7,8$.
Vậy đến năm 2026 thì số lượng máy tính xách tay đó bán được trong năm sẽ vượt mức 52 nghìn chiếc.

□

ÔN TẬP CHƯƠNG VI - PHẦN 2

Bài 7

Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau:

a) $y = \dfrac{1}{x^2 - x}$; b) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$; c) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.

Lời giải.

a) Điều kiện xác định của hàm số là $x^2 - x \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 1. \end{cases}$
Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$.

b) Điều kiện xác định của hàm số là $x^2 - 4x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 1 \\ x \geq 3. \end{array}\right.$
Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = (-\infty;1] \cup [3;+\infty]$.

c) Điều kiện xác định của hàm số là $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.
Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = (1;+\infty)$.

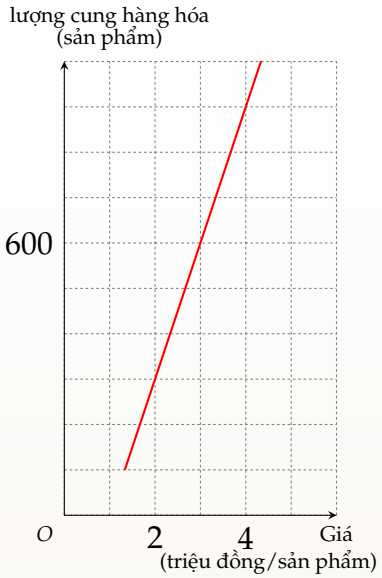
□

Bài 8

Đồ thị ở hình vẽ bên cho thấy sự phụ thuộc của lượng hàng hóa được sản xuất (cung) (đơn vị: sản phẩm) bởi giá bán (đơn vị: triệu đồng/sản phẩm) đối với một loại hàng hóa.

a) Xác định lượng hàng hóa được sản xuất khi mức giá bán một sản phẩm là 2 triệu đồng; 4 triệu đồng.

b) Biết nhu cầu thị trường đang cần là 600 sản phẩm. Hỏi với mức giá bán là bao nhiêu thì thị trường cân bằng (thị trường cân bằng khi sản lượng cung bằng sản lượng cầu)?



Lời giải.

a) Dựa vào đồ thị hàm số ta có

- Lượng hàng hóa được sản xuất khi mức bán một sản phẩm là 2 triệu đồng là 300 sản phẩm.
- Lượng hàng hóa được sản xuất khi mức bán một sản phẩm là 4 triệu đồng là 900 sản phẩm.

b) Từ đồ thị hàm số, thị trường đang cần 600 sản phẩm thì cần bán mức giá cần bán là 3 triệu đồng thì thị trường cân bằng.

□

Bài 9

Một nhà cung cấp dịch vụ Internet đưa ra hai gói khuyến mại cho người dùng như sau:

- Gói A: Giá cước 190.000 đồng/tháng.
  Nếu trả tiền cước ngay 6 tháng thì sẽ được tặng thêm 1 tháng.
  Nếu trả tiền cước ngay 12 tháng thì sẽ được tặng thêm 2 tháng.
- Gói B: Giá cước 189.000 đồng/tháng.
  Nếu trả tiền cước ngay 7 tháng thì số tiền phải trả cho 7 tháng là 1.134.000 đồng.
  Nếu trả tiền cước ngay 15 tháng thì số tiền phải trả cho 15 tháng đó là 2.268.000 đồng.

Giả sử số tháng sử dụng Internet là x (x nguyên dương).

a) Hãy lập các hàm số thể hiện số tiền phải trả ít nhất theo mỗi gói A, B nếu thời gian dùng không quá 15 tháng.

b) Nếu gia đình bạn Minh dùng 15 tháng thì nên chọn gói nào?

Lời giải.

a) Theo gói A là $f(x) = \begin{cases} 190000 \cdot x \text{ nếu } x \leq 6 \\ 190000 \cdot (x-1) \text{ nếu } 6 < x \leq 13 \\ 190000 \cdot (x-2) \text{ nếu } x > 14. \end{cases}$

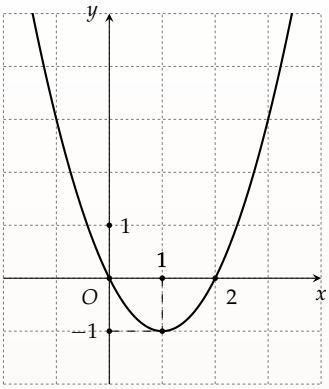
Theo gói B là $g(x) = \begin{cases} 189000 \cdot x & \text{nếu } x \leq 6 \\ 1134000 & \text{nếu } x = 7 \\ 1134000 + 189000 \cdot (x-7) & \text{nếu } 8 \leq x \leq 14 \\ 2268000 & \text{nếu } x = 15 \\ 2268000 + 189000 \cdot (x-15) & \text{nếu } x \geq 16. \end{cases}$

b) Nếu gia đình bạn Minh dùng 15 tháng thì nên chọn gói B vì gói A cần phải trả đến $19000 \times 13 = 2470000$ đồng.

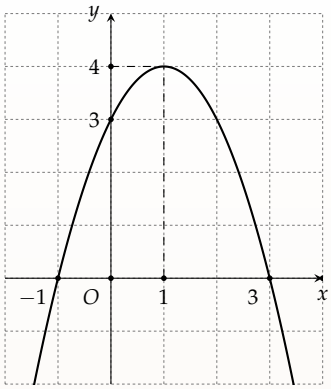
□

Bài 10

Quan sát đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ ở hình bên dưới rồi nêu:



Hình a.



Hình b.

a) Dấu của hệ số a;

b) Tọa độ đỉnh và trục đối xứng;

c) Khoảng đồng biến;

d) Khoảng nghịch biến;

e) Khoảng giá trị x mà $y > 0$;

f) Khoảng giá trị x mà $y \leq 0$.

Lời giải.

Tính chất	Hình a	Hình b
Dấu của hệ số a	$a > 0$	$a < 0$
Tọa độ đỉnh và trục đối xứng	$x = 1$	$x = 1$
Khoảng đồng biến	$(1; +\infty)$	$(-\infty; 1)$
Khoảng nghịch biến	$(-\infty; 1)$	$(1; +\infty)$
Khoảng giá trị x mà $y > 0$	$(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$	$(-1; 3)$
Khoảng giá trị x mà $y \leq 0$	$[0; 2]$	$(-\infty; -1]$ và $[3; +\infty)$

□

Bài 11

Vẽ đồ thị của mỗi hàm số sau:

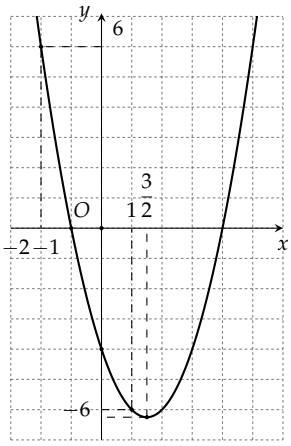
a) $y = x^2 - 3x - 4$; b) $y = x^2 + 2x + 1$; c) $y = -x^2 + 2x - 2$.

Lời giải.

a)

Ta có $a=1, b=-3, c=-4, \Delta=(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-4)=25$.

- Tọa độ đỉnh $I\left(\frac{3}{2};-\frac{25}{4}\right)$.
- Trục đối xứng $x=\frac{2}{3}$.
- Bảng giá trị



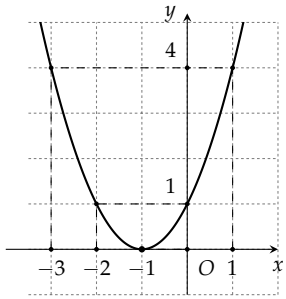
x	-2	-1	0	1
y	6	0	-4	-6

Vẽ parabol đi qua các điểm được xác định ở trên, ta nhận được đồ thị hàm số $y=x^2-3x-4$.

b)

Ta có $a=1, b=2, c=1, \Delta=(2)^2-4\cdot 1\cdot 1=0$.

- Tọa độ đỉnh $I(-1;0)$.
- Trục đối xứng $x=-1$.
- Bảng giá trị



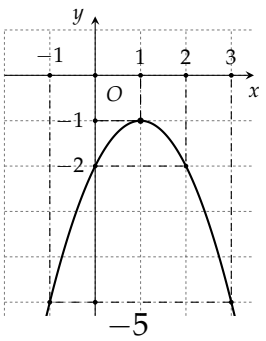
x	-3	-2	-1	0	1
y	4	1	0	1	4

Vẽ parabol đi qua các điểm được xác định ở trên, ta nhận được đồ thị hàm số $y=x^2+2x+1$.

c)

Ta có $a=-1, b=2, c=-2, \Delta=(2)^2-4\cdot(-1)\cdot(-2)=-4$.

- Tọa độ đỉnh $I(1;-1)$.
- Trục đối xứng $x=1$.
- Bảng giá trị



x	-1	0	1	2	3
y	-5	-2	-1	-2	-5

Vẽ parabol đi qua các điểm được xác định ở trên, ta nhận được đồ thị hàm số $y=-x^2+2x-2$.

□

Bài 12

Lập bảng xét dấu của mỗi tam thức bậc hai sau:

a) $f(x)=-3x^2+4x-1$; b) $f(x)=x^2-x-12$; c) $f(x)=16x^2+24x+9$.

Lời giải.

a) Tam thức bậc hai $f(x) = -3x^2 + 4x - 1$ có hai nghiệm phân biệt $x = 1$, $x = \dfrac{1}{3}$ và hệ số $a = -3 < 0$.
Ta có bảng xét dấu $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b) Tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - x - 12$ có hai nghiệm phân biệt $x = 4$, $x = -3$ và hệ số $a = 1 > 0$.
Ta có bảng xét dấu $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

c) Tam thức bậc hai $f(x) = 16x^2 + 24x + 9$ có nghiệm kép $x = -\dfrac{3}{4}$ và hệ số $a = 16 > 0$.
Ta có bảng xét dấu $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

□

Bài 13

Giải các bất phương trình sau:

a) $2x^2 + 3x + 1 \geq 0$;
b) $-3x^2 + x + 1 > 0$;
c) $4x^2 + 4x + 1 \geq 0$;
d) $-16x^2 + 8x - 1 < 0$;
e) $2x^2 + x + 3 < 0$;
f) $-3x^2 + 4x - 5 < 0$.

Lời giải.

a) Tam thức bậc hai $2x^2 + 3x + 1$ có hai nghiệm phân biệt $x = -\dfrac{1}{2}$, $x = -1$ và hệ số $a = 2 > 0$.
Ta có bảng xét dấu $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
VT		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; -1] \cup \left[-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

b) Tam thức bậc hai $-3x^2 + x + 1$ có hai nghiệm phân biệt $x = \dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$, $x = \dfrac{1-\sqrt{13}}{6}$ và hệ số $a = -3 < 0$.
Ta có bảng xét dấu $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		$\frac{1-\sqrt{13}}{6}$		$\frac{1+\sqrt{13}}{6}$		$+\infty$
VT		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(\frac{1-\sqrt{13}}{6}; \frac{1+\sqrt{13}}{6}\right)$.

c) Tam thức bậc hai $4x^2+4x+1$ có nghiệm kép $x = -\frac{1}{2}$ và hệ số $a = 4 > 0$.
Ta có bảng xét dấu $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
VT		$+$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, tập nghiệm của bất phương trình là $S = \mathbb{R}$.

d) Tam thức bậc hai $-16x^2+8x-1$ có nghiệm kép $x = \frac{1}{4}$ và hệ số $a = -16 < 0$.
Ta có bảng xét dấu $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
VT		$-$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

e) Tam thức bậc hai $2x^2+x+3$ vô nghiệm và hệ số $a = 2 > 0$.
Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai, tập nghiệm của bất phương trình là $S = \mathbb{R}$.

f) Tam thức bậc hai $-3x^2+4x-5$ vô nghiệm và hệ số $a = -3 < 0$.
Sử dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai, tập nghiệm của bất phương trình là $S = \mathbb{R}$.

□

Bài 14

Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x+2} = x$;

b) $\sqrt{2x^2+3x-2} = \sqrt{x^2+x+6}$;

c) $\sqrt{2x^2+3x-1} = x+3$.

Lời giải.

a)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+2} = x \\ x \geq 0 \\ x+2 = x^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = 2 \text{ (nhận)} \\ x = -1 \text{ (loại)} \end{array}\right. \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 2.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{2\}$.

b)

$$\sqrt{2x^2 + 3x - 2} = \sqrt{x^2 + x + 6}$$
$$\Rightarrow \quad 2x^2 + 3x - 2 = x^2 + x + 6$$
$$\Rightarrow \quad x^2 + 2x - 8 = 0$$
$$\Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -4. \end{array}\right.$$

Thay lần lượt hai giá trị trên vào bất phương trình $x^2 + x + 6 \geq 0$, ta thấy cả hai giá trị đều thỏa mãn bất phương trình.
Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{-4; 2\}$.

c)

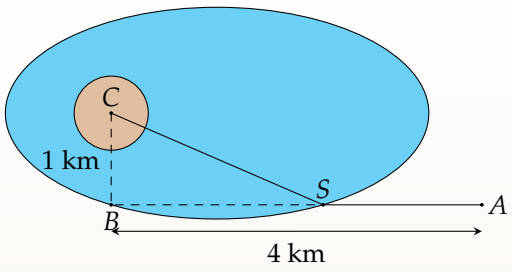
$$\sqrt{2x^2 + 3x - 1} = x + 3$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 3 \geq 0 \\ 2x^2 + 3x - 1 = x^2 + 6x + 9 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x^2 - 3x - 10 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ \left[\begin{array}{l} x = 5 \text{ (nhận)} \\ x = -2 \text{ (nhận)} \end{array}\right. \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = -2. \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-2; 5\}$.

□

Bài 15

Một kĩ sư thiết kế đường dây điện từ vị trí A đến vị trí S và từ vị trí S đến vị trí C trên cù lao như hình vẽ. Tiền công thiết kế mỗi ki-lô-mét đường dây từ A đến S và từ S đến C lần lượt là 3 triệu đồng và 5 triệu đồng. Biết tổng số tiền công là 16 triệu đồng. Tính tổng số ki-lô-mét đường dây điện đã thiết kế.



Lời giải.

Đặt $SA = x$ (km) và $0 < x < 4$, suy ra $SB = 4 - x$ và $SC = \sqrt{1 + (4 - x)^2}$.
Khi đó ta có phương trình

$$3x + 5\sqrt{1 + (4 - x)^2} = 16 \quad \Leftrightarrow \quad 5\sqrt{x^2 - 8x + 17} = 16 - 3x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16-3x \geq 0 \\ 25(x^2-8x+17) = (16-3x)^2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \dfrac{16}{3} \\ 16x^2-104x+169=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{13}{4}.$$

Vậy tổng số ki-lô-mét đường dây điện cần thiết kế là $SA+SC = \dfrac{13}{4}+\dfrac{5}{4} = \dfrac{9}{2}$ km. □

B CÂU HỎI TỰ LUẬN

Bài 16

Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y = 3\sqrt{x-1} + \dfrac{1}{2\sqrt{5-x}}$.

b) $y = 3\sqrt{2-x} - \sqrt{x+3}$.

Lời giải.

a) $y = 3\sqrt{x-1} + \dfrac{1}{2\sqrt{5-x}}$

Biểu thức $3\sqrt{x-1} + \dfrac{1}{2\sqrt{5-x}}$ có nghĩa khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 5-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x < 5.$$

Vậy hàm số có tập xác định $\mathscr{D} = [1;5)$.

b) $y = 3\sqrt{2-x} - \sqrt{x+3}$.

Biểu thức $3\sqrt{2-x} - \sqrt{x+3}$ xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 2.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathscr{D} = [-3;2]$. □

Bài 17

Với mỗi hàm số dưới đây, hãy vẽ đồ thị, tìm tập giá trị, khoảng đồng biến, khoảng nghịch biến của nó.

a) $y = x^2-2x-3$.

b) $y = x^2-2x$.

c) $y = -2x^2+4x$.

d) $y = -x^2-2x+3$.

Lời giải.

a) $y = x^2-2x-3$

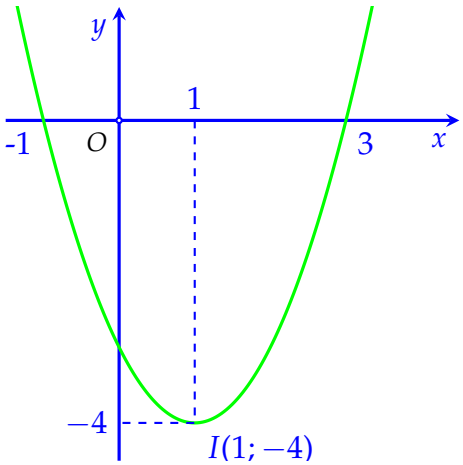
Ta có $a = 1 > 0$ nên parabol quay bề lõm lên trên.

Đỉnh $I(1;-4)$, trục đối xứng $x = 1$.

Giao điểm của đồ thị với trục Oy là $A(0;-3)$.

Parabol cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $x^2-2x-3=0$, tức là $x=-1$ và $x=3$.

Đồ thị



Từ đồ thị ta suy ra tập giá trị của hàm số là $[-4;+\infty)$. Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$, nghịch biến trên $(-\infty;1)$.

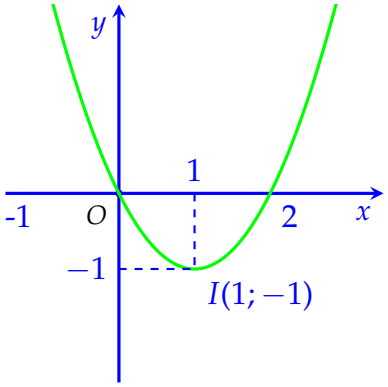
b) $y=x^2-2x$.

Ta có $a=1>0$ nên parabol quay bề lõm lên trên.

Đỉnh $I(1;-1)$, trục đối xứng $x=1$.

Giao điểm của đồ thị với trục Oy là $O(0;0)$.

Parabol cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $x^2-2x=0$, tức là $x=0$ và $x=2$.



Từ đồ thị ta suy ra tập giá trị của hàm số là $[-1;+\infty)$. Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$, nghịch biến trên $(-\infty;1)$.

c) $y=-2x^2+4x$.

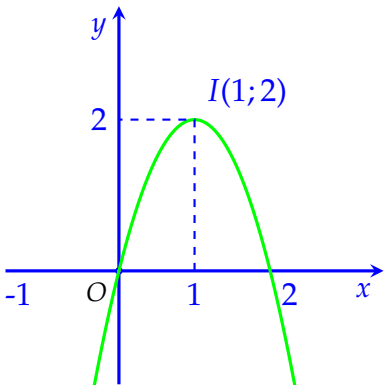
Ta có $a=-2<0$ nên parabol quay bề lõm xuống dưới.

Đỉnh $I(1;2)$, trục đối xứng $x=1$.

Giao điểm của đồ thị với trục Oy là $O(0;0)$.

Parabol cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $-2x^2+4x=0$, tức là $x=0$ và $x=2$.

Đồ thị



Từ đồ thị ta suy ra tập giá trị của hàm số là $(-\infty;2]$. Hàm số nghịch biến trên $(1;+\infty)$, đồng biến trên $(-\infty;1)$.

d) $y=-x^2-2x+3$.

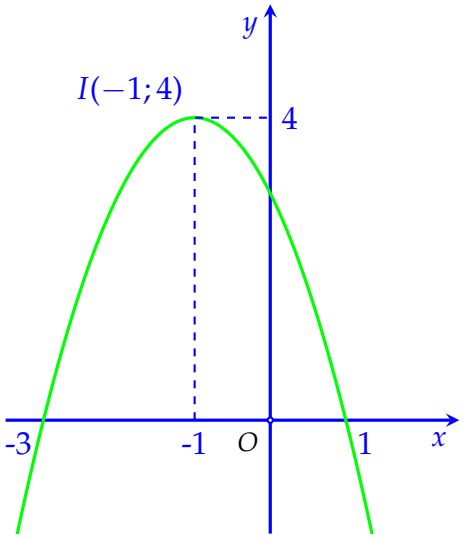
Ta có $a=-1<0$ nên parabol quay bề lõm xuống dưới.

Đỉnh $I(-1;4)$, trục đối xứng $x=-1$.

Giao điểm của đồ thị với trục Oy là $O(0;3)$.

Parabol cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $-x^2-2x+3=0$, tức là $x=1$ và $x=-3$.

Đồ thị



Từ đồ thị ta suy ra tập giá trị của hàm số là $(-\infty;4]$. Hàm số nghịch biến trên $(-1;+\infty)$, đồng biến trên $(-\infty;-1)$. □

Bài 18

Xác định parabol $(P)\colon y=ax^2+bx-2$ trong mỗi trường hợp sau

a) (P) đi qua hai điểm $A(2;4)$và $B(-1;3)$.

b) Có đỉnh là $I(-1;2)$.

c) Đi qua điểm $A(1;4)$ và nhận $x=-2$ làm trục đối xứng.

Lời giải.

a) Vì (P) đi qua hai điểm $A(2;4)$ và $B(-1;3)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}4a+2b-2=4\\a-b-2=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{8}{3}\\b=-\dfrac{7}{3}.\end{cases}$$

Vậy ta có parabol cần tìm là $(P)\colon y=\dfrac{8}{3}x^2-\dfrac{7}{3}x-2$.

b) Vì parabol có đỉnh là $I(-1;2)$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}=-1\\a-b-2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-4\\b=-8.\end{cases}$$

Vậy parabol cần tìm là $(P)\colon y=-4x^2-8x-2$.
c) Vì parabol đi qua điểm $A(1;4)$ và nhận $x=-2$ làm trục đối xứng, từ đó ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a}=-2 \\ a+b-2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{6}{5} \\ b=\dfrac{24}{5}. \end{cases}$$

Vậy parabol cần tìm là $(P)\colon y=\dfrac{6}{5}x^2+\dfrac{24}{5}x-2$. □

Bài 19

Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y=\sqrt{4+x}+\sqrt{2-x}$.

b) $y=\dfrac{-2}{\sqrt{x+1}}$.

Lời giải.

a) $y=\sqrt{4+x}+\sqrt{2-x}$.
Ta có điều kiện xác định của hàm số

$$\begin{cases} 4+x\geq 0 \\ 2-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -4 \\ x\leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -4\leq x\leq 2.$$

Vậy hàm số đã cho có tập xác định là $\mathscr{D}=[-4;2]$.
b) $y=\dfrac{-2}{\sqrt{x+1}}$.
Hàm số có nghĩa $\Leftrightarrow x+1>0\Leftrightarrow x>-1$.
Vậy $\mathscr{D}=(-1;+\infty)$. □

Bài 20

Giải các bất phương trình sau

a) $-x^2+x-1\leq 0$.

b) $4x^2+4x+1>0$.

c) $-2x^2+3x-1<0$.

d) $x^2-5x-3\geq 0$.

Lời giải.

a) Tam thức $f(x)=-x^2+x-1$ có $\Delta=-3<0$, hệ số $a=-1<0$ nên $f(x)$ luôn âm với mọi x. Tức là $f(x)<0, \forall x\in\mathbb{R}$.
Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S=\mathbb{R}$.
b) Tam thức $f(x)=4x^2+4x+1$ có $\Delta'=0$, hệ số $a=4>0$ nên $f(x)$ luôn dương với mọi $x\neq -\dfrac{1}{2}$.
Tức là $4x^2+4x+1>0, \forall x\neq -\dfrac{1}{2}$.
Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

c) Tam thức $f(x)=-2x^2+3x-1$ có $\Delta'=1>0$ nên $f(x)$ có hai nghiệm $x_1=1;\ x_2=\dfrac{1}{2}$. Mặt khác $a=-2$ nên ta có bảng xét dấu như sau

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (1; +\infty)$.

d) Tam thức $f(x) = x^2 - 5x - 3$ có $\Delta' = 37 > 0$ nên $f(x)$ có hai nghiệm $x_1 = \frac{5+\sqrt{37}}{2}; x_2 = \frac{5-\sqrt{37}}{2}$.

Mặt khác $a = 1 > 0$ nên ta có bảng xét dấu như sau

x	$-\infty$		$\frac{5-\sqrt{37}}{2}$		$\frac{5+\sqrt{37}}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S = \left(-\infty; \frac{5-\sqrt{37}}{2}\right] \cup \left[\frac{5+\sqrt{37}}{2}; +\infty\right)$. □

Bài 21

Giải các phương trình sau

a) $\sqrt{2x+3} + 6 = 3x$.

b) $\sqrt{x^2+2x+4} = \sqrt{2-x}$.

Lời giải.

a) Phương trình đã cho tương đương với $\sqrt{2x+3} = 3x - 6$. Bình phương hai vế của phương trình ta được phương trình hệ quả

$$2x + 3 = (3x-6)^2 \Leftrightarrow 2x + 3 = 9x^2 - 36x + 36 \Leftrightarrow 9x^2 - 38x + 33 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \frac{11}{9}. \end{array}\right.$$

Thay cả hai giá trị này của x vào phương trình đã cho, ta thấy chỉ có $x = 3$ thỏa mãn.
Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = 3$.

b) Bình phương hai vế của phương trình ta được phương trình hệ quả

$$x^2 + 2x + 4 = 2 - x \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -2. \end{array}\right.$$

Thay cả hai giá trị này của x vào phương trình đã cho, ta thấy $x = -1$ và $x = -2$ đều thỏa mãn.
Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = -1$ và $x = -2$. □

Bài 22

Một công ty bắt đầu sản xuất và bán một loại xe máy từ năm 2018. Số lượng loại xe máy đó bán được trong hai năm liên tiếp 2018 và 2019 lần lượt là 4 nghìn và 4,5 nghìn chiếc. Theo nghiên cứu dự báo thị trường của công ty, trong khoảng 10 năm kể từ 2018, số lượng xe máy loại đó bán được mỗi năm có thể được xấp xỉ bởi một hàm số bậc hai. Giả sử t là thời gian (theo đơn vị năm) tính từ năm 2018. Số lượng loại xe máy đó bán được trong năm 2018 và năm 2019 lần lượt được biểu diễn bởi các điểm $(0;4)$ và $(1;4{,}5)$. Giả sử điểm $(0;4)$ là đỉnh đồ thị của hàm số bậc hai này.

a) Lập công thức của hàm số mô tả số lượng xe máy bán được qua từng năm.

b) Tính số lượng xe máy đó bán được trong năm 2025.

c) Đến năm bao nhiêu thì số lượng xe máy đó bán được trong năm sẽ vượt mức 40 nghìn chiếc?

Lời giải.

a) Vì số lượng xe máy loại đó bán được mỗi năm có thể được xấp xỉ bởi một hàm số bậc hai nên gọi hàm số này có dạng $y = at^2 + bt + c$ (trong đó t là thời gian (đơn vị năm), y là số lượng xe máy bán được qua từng năm (đơn vị nghìn chiếc)).
Điểm $(0;4)$ là đỉnh đồ thị của hàm số bậc hai, ta có

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 0 \\ c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 4 \end{cases}$$

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(1;4{,}5)$, ta có $a + 4 = 4{,}5 \Leftrightarrow a = 0{,}5$.
Hàm số cần tìm là $y = 0{,}5t^2 + 4$.
b) Số lượng xe máy đó bán được trong năm 2025 là $0,5.7^2 + 4 = 28{,}5$ (nghìn chiếc).
c) Để số lượng xe máy đó bán được vượt mức 40 nghìn chiếc thì

$$0,5t^2 + 4 > 40 \Leftrightarrow t^2 > 72 \Rightarrow t > \sqrt{72} \approx 8{,}5 \Rightarrow t \approx 9 \text{ (năm)}.$$

Vậy đến năm 2027 thì số lượng xe máy đó bán được vượt mức 40 nghìn chiếc. □

Chương 3
PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

§1. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng

Định nghĩa 1.1. Véc-tơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ được gọi là véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng Δ nếu giá của nó vuông góc với Δ.

- *Nếu $\vec{n}$ là véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng Δ thì $k\vec{n}$ $(k \neq 0)$ cũng là véc-tơ pháp tuyến của Δ.*
- *Đường thẳng hoàn toàn xác định nếu biết một điểm và một véc-tơ pháp tuyến của nó.*

Ví dụ 1

Trong mặt phẳng toạ độ, cho tam giác có ba đỉnh là $A(3;1)$, $B(4;0)$, $C(5;3)$. Hãy chỉ ra một véc-tơ pháp tuyến của đường trung trực của đoạn thẳng AB và một véc-tơ pháp tuyến của đường cao kẻ từ A của tam giác ABC.

Lời giải.

Đường trung trực của đoạn AB vuông góc với AB nên có một véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AB}(1;-1)$. Đường cao kẻ từ kẻ từ A của tam giác ABC vuông góc với BC nên có một véc-tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{BC}(1;3)$. □

2. Phương trình tổng quát của đường thẳng

Định nghĩa 1.2. Trong mặt phẳng toạ độ, mọi đường thẳng đều có phương trình tổng quát dạng $ax + by + c = 0$, với a và b không đồng thời bằng 0. Ngược lại, mỗi phương trình dạng $ax + by + c = 0$, với a và b không đồng thời bằng 0, đều là phương trình của một đường thẳng, nhận $\vec{n}(a;b)$ là một véc-tơ pháp tuyến.

Ví dụ 2

Trong mặt phẳng toạ độ, lập phương trình tổng quát của đường thẳng Δ đi qua điểm $A(2;1)$ và nhận $\vec{n}(3;4)$ là một véc-tơ pháp tuyến.

Lời giải.

Đường thẳng Δ có phương trình là $3(x-2)+4(y-1)=0$ hay $3x+4y-10=0$. □

Ví dụ 3

Trong mặt phẳng toạ độ, cho tam giác có ba đỉnh $A(-1;5)$, $B(2;3)$, $C(6;1)$. Lập phương trình tổng quát của đường cao kẻ từ A của tam giác ABC.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BC}(4;-2)$.
Đường cao kẻ từ kẻ từ A của tam giác ABC vuông góc với BC nên có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}(2;-1)$.
Đường thẳng Δ có phương trình là $2(x+1)-(y-5)=0$ hay $2x-y+7=0$. □

Ví dụ 4

Trong mặt phẳng toạ độ, lập phương trình tổng quát của đường thẳng Δ đi qua điểm $A(0;b)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}(a;-1)$ với a, b là các số cho trước. Hãy chỉ ra mối liên hệ giữa đường thẳng Δ với đồ thị của hàm số $y=ax+b$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ có phương trình là $a(x-0)-1(y-b)=0$ hay $ax-y+b=0$.
Đường thẳng Δ là tập hợp những điểm $M(x;y)$ thoả mãn $ax-y+b=0$, hay là $y=ax+b$.
Do đó, đường thẳng $\Delta: ax-y+b=0$ chính là đồ thị hàm số $y=ax+b$. □

Ví dụ 5

Hãy chỉ ra một véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng Δ: $y=3x+4$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}(3;-1)$. □

Trong mặt phẳng toạ độ, cho đường thẳng Δ: $ax+by+c=0$.

- *Nếu $b=0$ thì phương trình có thể đưa về dạng $x=m$ (với $m=-\dfrac{c}{a}$) và Δ vuông góc với Ox.*
- *Nếu $b\neq 0$ thì phương trình có thể đưa về dạng $y=nx+p$ (với $n=-\dfrac{a}{b}$, $m=-\dfrac{c}{b}$).*

3. Véc-tơ chỉ phương của đường thẳng

Định nghĩa 1.3. Véc-tơ $\vec{u}$ khác $\vec{0}$ được gọi là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ nếu giá của nó song song hoặc trùng với Δ.

- *Nếu $\vec{u}$ là véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ thì $k\vec{u}$ $(k\neq 0)$ cũng là véc-tơ chỉ phương của Δ.*
- *Đường thẳng hoàn toàn xác định nếu biết một điểm và một véc-tơ chỉ phương của nó.*
- *Véc-tơ $\vec{n}(a;b)$ vuông góc với các véc-tơ $\vec{u}(-b;a)$ và $\vec{v}(b;-a)$ nên nếu $\vec{n}$ là véc-tơ pháp tuyến*

của đường thẳng Δ thì $\vec{u}$, $\vec{v}$ là hai véc-tơ chỉ phương của đường thẳng đó và ngược lại.

Ví dụ 6

Trong mặt phẳng toạ độ, cho $A(3;2)$, $B(1;-4)$. Hãy chỉ ra hai véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AB.

Lời giải.

Đường thẳng AB nhận $\overrightarrow{AB}(-2;-6)$ là một véc-tơ chỉ phương.
Lấy $\vec{u} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (1;3)$, khi đó $\vec{u}$ cũng là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AB. □

Ví dụ 7

Hãy chỉ ra một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta\colon 2x - y + 1 = 0$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{n}(1;2)$. □

4. Phương trình tham số của đường thẳng

Định nghĩa 1.4. Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $A(x_0;y_0)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}(a;b)$. Khi đó điểm $M(x;y)$ thuộc đường thẳng Δ khi và chỉ khi tồn tại số thực t sao cho $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, hay

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt. \end{cases} \qquad (2)$$

Hệ (2) được gọi là phương trình tham số của đường thẳng Δ (t là tham số).

Ví dụ 8

Lập phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua $M(2;-3)$ và có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}(4;-1)$.

Lời giải.

Phương trình tham số của đường thẳng Δ là $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -3 - t. \end{cases}$ □

Ví dụ 9

Lập phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua $M(-1;2)$ và song song với đường thẳng $d\colon 3x - 4y - 1 = 0$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ song song với đường thẳng $d\colon 3x - 4y - 1 = 0$ nên có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}(4;3)$.

Phương trình tham số của đường thẳng Δ là $\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 2 + 3t. \end{cases}$ □

Ví dụ 10

Lập phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(2;3)$ và $B(1;5)$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(2;3)$ và $B(1;5)$ nên có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-1;2)$.

Phương trình tham số của đường thẳng Δ là $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + 2t. \end{cases}$ □

Ví dụ 11

Lập phương trình tham số và phương trình tổng quát của đường thẳng Δ đi qua hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1)$ và $B(x_2;y_2)$ cho trước.

Lời giải.

Đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(x_1;y_1)$ và $B(x_2;y_2)$ nên có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$.

Phương trình tham số của đường thẳng Δ là $\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + (x_2 - x_1)t. \end{cases}$

Ta có một véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng Δ là $\vec{n} = (y_1 - y_2; x_2 - x_1)$.

Phương trình tổng quát của Δ là $((y_1 - y_2)(x - x_1) + (x_2 - x_1)(y - y_1) = 0$ □

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Xác định các yếu tố của đường thẳng

- Đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ có điểm đi qua là $M(x_0;y_0)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (a;b)$.
- Đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (a;b)$.

Ví dụ 1

Hãy chỉ ra một véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng Δ: $y = 3x + 4$.

Lời giải.

Δ: $y = 3x + 4 \Leftrightarrow 3x - y + 4 = 0$.

Véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng Δ là $\overrightarrow{n_\Delta} = (3; -1)$. □

Ví dụ 2

Trong mặt phẳng tọa độ, cho $A(3;\,2)$, $B(1;\,-4)$. Hãy chỉ ra véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AB.

Lời giải.

Đường thẳng AB nhận $\overrightarrow{AB}=(-2;\,-6)$ là một véc-tơ chỉ phương.
Lấy $\vec{u}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(1;\,3)$, khi đó $\vec{u}$ cũng là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng $\overrightarrow{AB}$. □

Ví dụ 3

Hãy chỉ ra một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng $\Delta\colon 2x-y+1=0$

Lời giải.

$\Delta\colon y=3x+4\Leftrightarrow 3x-y+4=0$.
Véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng Δ là $\overrightarrow{n_\Delta}=(2;\,-1)$.
Khi đó véc-tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\overrightarrow{n_\Delta}=(1;\,2)$. □

Ví dụ 4

Trong mặt phẳng tọa độ, cho tam giác có ba đỉnh là $A(3;\,1)$, $B(4;\,0)$, $C(5;\,3)$. Hãy chỉ ra một véc-tơ pháp tuyến của đường trung trực của đoạn thẳng AB và một véc-tơ pháp tuyến của đường cao kẻ từ A của tam giác ABC.

Lời giải.

Đường trung trực của đoạn thẳng AB vuông góc với AB nên có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{AB}=(1;\,-1)$.
Đường cao kẻ từ A của tam giác ABC vuông góc với BC nên có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{BC}=(1;\,3)$. □

Dạng 2 Viết phương trình đường thẳng

Các dạng đường thẳng:

- Đường thẳng $\Delta:\begin{cases}\text{có vectơ pháp tuyến là } \vec{n}=(a;b)\\ \text{đi qua điểm } M\left(x_0;y_0\right)\end{cases}$ có phương trình tổng quát là

$$\Delta: a\left(x-x_0\right)+b\left(y-y_0\right)=0.$$

- Đường thẳng $\Delta:\begin{cases}\text{có vectơ chỉ phương là } \vec{v}=(a;b)\\ \text{đi qua điểm } M\left(x_0;y_0\right)\end{cases}$ có phương trình tham số là

$$\Delta:\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R}).$$

Lưu ý:

- *Đường thẳng Δ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (a;b)$ thì có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (b;-a)$ hoặc $\vec{u} = (-b;a)$.*
- *Đường thẳng Δ có hệ số góc k thì có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1;k)$.*

Ví dụ 1

Viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ_1 đi qua $A(0;1)$ và có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3;4)$.

Lời giải.

Phương trình tổng quát của đường thẳng Δ_1 : $\begin{cases} \text{có vectơ pháp tuyến là } \vec{n} = (3;4) \\ \text{đi qua điểm } A\,(0;1) \end{cases}$ là

$$3(x-0)+4(y-1)=0 \Leftrightarrow 3x+4y-4=0.$$

□

Ví dụ 2

Viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ_2 đi qua $B(2;-3)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1;-2)$.

Lời giải.

Phương trình tổng quát của đường thẳng Δ_2 : $\begin{cases} \text{có vectơ chỉ phương là } \vec{v} = (1;-2) \\ \text{đi qua điểm } B\,(2;-3) \end{cases}$ là

$$\begin{cases} x = 2+1t \\ y = -3-2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

□

Ví dụ 3

Viết phương trình tham số và tổng quát của đường thẳng AB biết $A(0;1)$, $B(2;-3)$.

Lời giải.

Đường thẳng AB có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (2;-4)$, có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{AB} = (4;2)$.
Phương trình tham số của đường thẳng AB là

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1-4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Phương trình tổng quát của đường thẳng AB là

$$4(x-0)+2(y-1)=0 \Leftrightarrow 4x+2y-2=0.$$

□

Ví dụ 4

Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua $M(-1;3)$ biết hệ số góc của đường thẳng là $k=2$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ biết hệ số góc của đường thẳng là $k=2$ suy ra Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;2)$.
Phương trình tham số của Δ là

$$\begin{cases} x=-1+t \\ 3+2t \end{cases} (t\in\mathbb{R}).$$

□

Ví dụ 5

Trong mặt phẳng tọa độ, cho tam giác ABC có ba đỉnh $A(-2;5)$, $B(2;1)$, $C(5;2)$. Lập phương trình tổng quát của đường cao kẻ từ A của tam giác ABC.

Lời giải.

Gọi AH là đường cao kẻ từ A của tam giác ABC, khi đó AH vuông góc BC.
Suy ra AH có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{BC}=(3;1)$.
Phương trình đường cao AH là

$$3(x+2)+1(y-5)=0\Leftrightarrow 3x+y+1=0.$$

□

Dạng 3 Bài toán thực tế

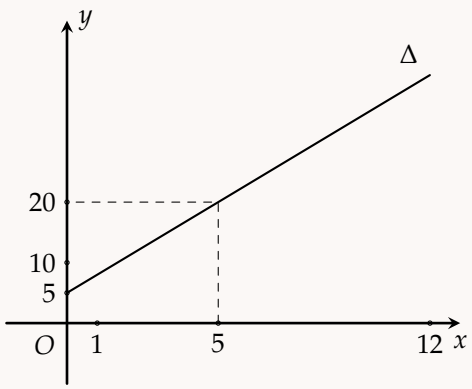
Ví dụ 1

Đường thẳng Δ ở hình bên dưới biểu thị tổng chi phí lắp đặt và tiền cước sử dụng dịch vụ Internet (đơn vị: trăm nghìn đồng) theo thời gian của một gia đình (đơn vị: tháng).

a) Viết phương trình của đường thẳng Δ.

b) Cho biết giao điểm của đường thẳng Δ với trục tung trong tình huống này có ý nghĩa gì.

c) Tính tổng chi phí lắp đặt và sử dụng Internet trong 12 tháng đầu tiên.



Lời giải.

a) Đường thẳng Δ đi qua hai điểm lần lượt có tọa độ $(0;5)$ và $(5;20)$ nên Δ có phương trình là

$$\frac{x-0}{5-0}=\frac{y-5}{20-5}\Leftrightarrow\frac{x}{5}=\frac{y-5}{15}\Leftrightarrow\frac{x}{1}=\frac{y-5}{3}\Leftrightarrow 3x-y+5=0\Leftrightarrow y=3x+5.$$

b) Giao điểm của đường thẳng Δ với trục Oy ứng với $x=0$. Thời điểm $x=0$ cho biết mức phí ban đầu lắp đặt để sử dụng Internet. Khi $x=0$ thì $y=5$, vì vậy chi phí lắp đặt ban đầu là 500000 đồng.

c) 12 tháng đầu tiên ứng với $x=12$. Do đó $y=3\cdot 12+5=41$.
Vậy tổng chi phí lắp đặt và sử dụng Internet trong 12 tháng đầu tiên là 4100000 đồng.

□

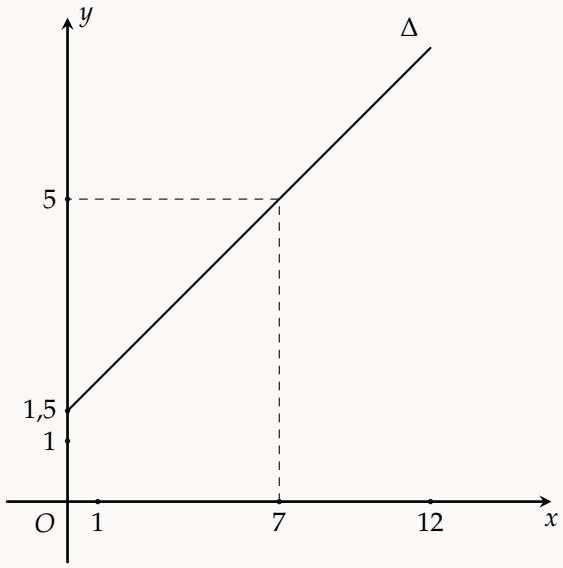
Ví dụ 2

Để tham gia một phòng tập thể dục, người tập phải trả một khoản phí tham gia ban đầu và phí sử dụng phòng tập. Đường thẳng Δ ở hình bên dưới biểu thị tổng chi phí (đơn vị: triệu đồng) tham gia một phòng tập thể dục theo thời gian tập của một người (đơn vị: tháng).

a) Viết phương trình của đường thẳng Δ.

b) Cho biết giao điểm của đường thẳng Δ với trục tung trong tình huống này có ý nghĩa gì.

c) Tính tổng chi phí mà người đó phải trả khi tham gia phòng tập thể dục với thời gian 12 tháng.



Lời giải.

a) Đường thẳng Δ đi qua hai điểm lần lượt có tọa độ $(0;\,1{,}5)$ và $(7;\,5)$ nên Δ có phương trình là

$$\frac{x-0}{7-0}=\frac{y-1{,}5}{5-1{,}5}\Leftrightarrow\frac{x}{7}=\frac{y-1{,}5}{3{,}5}\Leftrightarrow\frac{x}{2}=\frac{y-1{,}5}{1}\Leftrightarrow y=\frac{x}{2}+1{,}5.$$

b) Giao điểm của đường thẳng Δ với trục Oy ứng với $x=0$. Thời điểm $x=0$ cho biết mức phí tham gia ban đầu và phí sử dụng phòng tập. Khi $x=0$ thì $y=1{,}5$, vì vậy chi phí tham gia ban đầu và phí sử dụng phòng tập là 1500000 đồng.

c) 12 tháng đầu tiên ứng với $x=12$. Do đó $y=\dfrac{12}{2}+1{,}5=7{,}5$.
Vậy tổng chi phí mà người đó phải trả khi tham gia phòng tập thể dục với thời gian 12 tháng đầu tiên là 7500000 đồng.

□

C BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1

Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{n}=(2;1)$, $\vec{v}=(3;2)$, $A(1;3)$, $B(-2;1)$.

a) Lập phương trình tổng quát của đường thẳng Δ_1 đi qua A và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}$.

b) Lập phương trình tham số của đường thẳng Δ_2 đi qua B và có véc-tơ chỉ phương $\vec{v}$.

c) Lập phương trình tham số của đường thẳng AB.

Lời giải.

a) Phương trình tổng quát của $\Delta_1\colon 2\cdot(x-1)+1\cdot(y-3)=0$ hay $\Delta_1\colon 2x+y-5=0$.

b) Phương trình tham số của $\Delta_2\colon \begin{cases}x=-2+3t\\ y=1+2t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

c) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3;-2)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AB.
Phương trình tham số của đường thẳng AB: $\begin{cases} x = 1-3s \\ y = 3-2s \end{cases}$ $(s \in \mathbb{R})$.

□

Bài 2

Trong mặt phẳng Oxy, lập phương trình tổng quát các trục tọa độ.

Lời giải.

a) Trục Ox có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{j} = (0;1)$ nên phương trình tổng quát của Ox: $0 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-0) = 0$ hay Ox: $y = 0$.

b) Tương tự, phương trình tổng quát của Oy: $x = 0$.

□

Bài 3

Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường thẳng Δ_1: $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 3+5y \end{cases}$ và Δ_2: $2x+3y-5=0$.

a) Lập phương trình tổng quát của Δ_1.

b) Lập phương trình tham số của Δ_2.

Lời giải.

a) Ta có Δ_1: $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 3+5y \end{cases} \Rightarrow 5x-2y+1=0$.
Vậy phương trình tổng quát của Δ_1: $5x-2y+1=0$.

b) Chọn $x = 1+3s$ suy ra $y = 1-2s$.
Vậy phương trình tham số của Δ_2: $\begin{cases} x = 1+3s \\ y = 1-2s \end{cases}$ $(s \in \mathbb{R})$.

□

Bài 4

Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có $A(1;2)$, $B(3;0)$ và $C(-2;-1)$.

a) Lập phương trình đường cao kẻ từ A.

b) Lập phương trình đường trung tuyến kẻ từ B.

Lời giải.

a) Gọi AH là đường cao kẻ từ A.
Ta có AH nhận $\vec{n} = -\overrightarrow{BC} = (5;1)$ là véc-tơ pháp tuyến.
Phương trình tổng quát của đường cao AH: $5 \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-2) = 0$ hay AH: $5x+y-7=0$.

b) Ta có $M\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ là trung điểm của AC.
Đường trung tuyến BM nhận $\vec{u} = -2\overrightarrow{BM} = (7;-1)$ là véc-tơ chỉ phương.
Phương trình tham số của BM: $\begin{cases} x = 3+7t \\ y = -t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

Bài 5

Trong mặt phẳng Oxy, chứng minh rằng đường thẳng đi qua hai điểm $A(a;0)$, $B(0;b)$ với $ab \neq 0$ có phương trình là $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$. (phương trình đoạn chắn của đường thẳng)

Lời giải.

Gọi $\Delta\colon \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.

Ta có $\begin{cases}\dfrac{a}{a}+\dfrac{0}{b}=1 \quad \text{(luôn đúng)}\\ \dfrac{0}{a}+\dfrac{b}{b}=1 \quad \text{(luôn đúng)}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A\in\Delta\\ B\in\Delta.\end{cases}$

Vậy phương trình của $AB\colon \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.

Bài 6

Theo Google Maps, sân bay Nội Bài có vĩ độ 21,2° Bắc, kinh độ 105,8° Đông, sân bay Đà Nẵng có vĩ độ 16,1° Bắc, kinh độ 108,2° Đông. Một máy bay, bay từ sân bay Nội Bài đến sân bay Đà Nẵng. Tại thời điểm t giờ, tính từ lúc xuất phát, máy bay ở vị trí có vĩ độ x° Bắc, kinh độ y° Đông được tính theo công thức $\begin{cases}x=21{,}2-\dfrac{153}{40}t\\ y=105{,}8+\dfrac{9}{5}t.\end{cases}$

a) Hỏi chuyến bay từ Nội Bài đến Đà Nẵng mất mấy giờ?

b) Tại thời điểm 1 giờ kể từ lúc cất cánh, máy bay đã bay qua vĩ tuyến 17 (17° Bắc) chưa?

Lời giải.

a) Xét $x=16{,}1 \Leftrightarrow 21{,}2-\dfrac{153}{40}t=16{,}1 \Leftrightarrow t=\dfrac{4}{3}$ giờ.

b) Tại thời điểm 1 giờ, máy bay ở vĩ độ $x=21{,}2-\dfrac{153}{40}\cdot 1=17{,}37$.
Vậy máy bay chưa bay qua vĩ tuyến 17 (17° Bắc).

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1

Đường thẳng đi qua $A(-1;2)$, nhận $\vec{n}=(2;-4)$ làm véctơ pháp tuyến có phương trình là
(A) $x+2y+4=0$. (B) $x-2y+5=0$. (C) $x-2y-4=0$. (D) $x+y+4=0$.

Lời giải.

Đường thẳng đi qua $A(-1;2)$, nhận $\vec{n}=(2;-4)$ làm véctơ pháp tuyến có phương trình là

$$2(x+1)-4(y-2)=0 \Leftrightarrow x-2y+5=0.$$

Chọn đáp án (B)

Câu 2

Đường thẳng đi qua điểm $M(1;2)$ và vuông góc với vec-tơ $\vec{n}=(2;3)$ có phương trình chính tắc là

(A) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}$. (B) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{-2}$. (C) $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{3}$. (D) $\dfrac{x+1}{-3}=\dfrac{y+2}{2}$.

Lời giải.

Ta có vec-tơ pháp tuyến của đường thẳng là $\vec{n}=(2;3)$, do đó vec-tơ chỉ phương của đường thẳng là $\vec{u}=(3;-2)$.
Phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua $M(1;2)$ và có vec-tơ chỉ phương $\vec{u}=(3;-2)$ là $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{-2}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 3

Cho tam giác ABC có $A(2;0), B(0;3), C(-3;1)$. Đường thẳng qua B và song song với AC có phương trình là

(A) $x-5y+15=0$. (B) $5x-y+3=0$. (C) $5x+y-3=0$. (D) $x+5y-15=0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AC}=(-5;1)$, vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $\dfrac{x-0}{-5}=\dfrac{y-3}{1}\Leftrightarrow x+5y-15=0$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 4

Viết phương trình đường thẳng qua giao điểm của hai đường thẳng $2x-y+5=0$ và $3x+2y-3=0$ và đi qua điểm $A(-3;-2)$

(A) $5x-2y+11=0$. (B) $2x-5y+11=0$. (C) $5x+2y+11=0$. (D) $x-y-3=0$.

Lời giải.

Gọi B là tọa độ giao điểm của 2 đường thẳng.
Tọa độ B thỏa mãn hệ

$$\begin{cases}2x-y+5=0\\3x+2y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-y=-5\\3x+2y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=3\end{cases}\Rightarrow B(-1;3).$$

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;5)$, khi đó $\vec{n}_{AB}=(5;-2)$.
Phương trình đường thẳng là $AB\colon 5(x+3)-2(y+2)=0\Leftrightarrow 5x-2y+11=0$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 5

Cho hai điểm $A(4;-1); B(1;-4)$. Viết phương trình tổng quát đường trung trực của đoạn thẳng AB.

(A) $x-y=0$. (B) $x-y=1$. (C) $x+y=1$. (D) $x+y=0$.

Lời giải.

$\overrightarrow{AB}=(-3;-3)=-3(1;1)$. Gọi M là trung điểm của AB thì $M\left(\dfrac{5}{2};-\dfrac{5}{2}\right)$.

Đường trung trực của đoạn thẳng AB đi qua $M\left(\frac{5}{2};-\frac{5}{2}\right)$ và nhận $\vec{n}=(1;1)$ làm một vec-tơ pháp tuyến nên có phương trình tổng quát

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)+\left(y+\frac{5}{2}\right)=0\Leftrightarrow x+y=0.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 6

Cho đường thẳng $\Delta\colon y=-\frac{3}{2}x+1$. Vec-tơ nào sau đây không là vec-tơ chỉ phương của Δ?

(A) $(-3;2)$. (B) $(2;3)$. (C) $\left(1;-\frac{3}{2}\right)$. (D) $(-2;3)$.

Lời giải.

Đường thẳng $\Delta\colon y=-\frac{3}{2}x+1$ có hệ số góc $k=-\frac{3}{2}=\frac{u_2}{u_1}$, với $\vec{u}=(u_1;u_2)$ là VTCP của Δ.
Loại trừ các VTCP của Δ khi chọn $u_1=\{1;2;-2\}$.
Vậy vec-tơ không là VTCP cần tìm là $(-3;2)$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 7

Viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm $O\,(0;0)$ và song song với đường thẳng $\Delta\colon 3x-4y+1$.

(A) $\begin{cases}x=-3t\\y=4t\end{cases}$. (B) $\begin{cases}x=3t\\y=-4t\end{cases}$. (C) $\begin{cases}x=4t\\y=3t\end{cases}$. (D) $\begin{cases}x=4t\\y=1+3t\end{cases}$.

Lời giải.

Thay tọa độ điểm O vào phương trình đường thẳng Δ thấy không thỏa mãn.
Do hai đường thẳng song song nên đường thẳng cần tìm nhận $\vec{u}\,(4;3)$ làm vec-tơ chỉ phương.
Phương trình tham số của đường thẳng cần tìm $\begin{cases}x=4t\\y=3t.\end{cases}$
Chọn đáp án (C) □

Câu 8

Cho tam giác ABC có tọa độ các đỉnh là $A\,(1;2)$, $B\,(3;1)$, và $C\,(5;4)$. Phương trình nào sau đây là phương trình đường cao của tam giác vẽ từ A?

(A) $5x-6y+7=0$. (B) $3x-2y+5=0$. (C) $2x+3y-8=0$. (D) $3x-2y-5=0$.

Lời giải.

Đường cao vẽ từ A đi qua điểm $A\,(1;2)$ và nhận $\overrightarrow{BC}=(2;3)$ làm vec tơ pháp tuyến có phương trình $2x+3y-8=0$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 9

Cho đường thẳng $\Delta\colon\begin{cases}x=15\\y=6+7t\end{cases}$. Viết phương trình tổng quát của Δ.

(A) $x+15=0$. (B) $6x-15y=0$. (C) $x-15=0$. (D) $x-y-9=0$.

Lời giải.

Đường thẳng có vtcp $\vec{u} = (0;7)$ nên có vtpt $\vec{n} = (1;0)$.
Đường thẳng Δ đi qua điểm $(15;6)$ nên có phương trình tổng quát là $x - 15 = 0$.
Chọn đáp án Ⓒ □

§2. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG. GÓC & KHOẢNG CÁCH

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

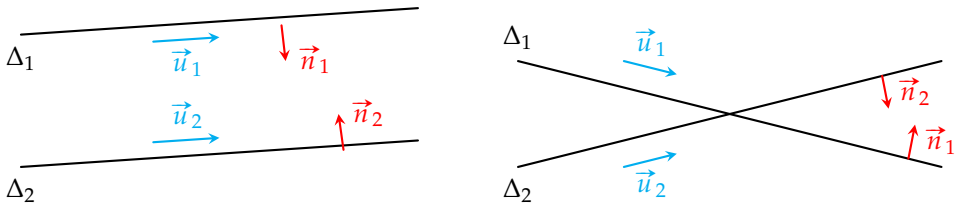
1. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Mỗi đường thẳng trong mặt phẳng toạ độ là tập hợp những điểm có toạ độ thoả mãn phương trình của đường thẳng đó. Vì vậy, bài toán tìm giao điểm của hai đường thẳng được quy về bài toán giải hệ gồm hai phương trình tương ứng.
Trên mặt phẳng toạ độ, xét hai đường thẳng $\Delta_1\colon a_1x+b_1y+c_1=0$ và $\Delta_2\colon a_2x+b_2y+c_2=0$.
Khi đó, toạ độ giao điểm của Δ_1 và Δ_2 là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0. \end{cases} \tag{3.1}$$

- Δ_1 *cắt* Δ_2 *tại* $M(x_0;y_0) \Leftrightarrow$ *hệ* (1) *có nghiệm duy nhất* $(x_0;y_0)$.
- Δ_1 *song song với* $\Delta_2 \Leftrightarrow$ *hệ* (1) *vô nghiệm.*
- Δ_1 *trùng* $\Delta_2 \Leftrightarrow$ *hệ* (1) *có vô số nghiệm.*

Chú ý



Dựa vào các véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ hoặc các véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_1, \vec{n_2}$ của Δ_1, Δ_2, ta có:

- Δ_1 và Δ_2 song song hoặc trùng nhau $\Leftrightarrow$ $\vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$ cùng phương $\Leftrightarrow$ $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ cùng phương.
- Δ_1 và Δ_2 cắt nhau $\Leftrightarrow$ $\vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$ không cùng phương $\Leftrightarrow$ $\vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ không cùng phương.

Ví dụ 1

Xét vị trí tương đối giữa đường thẳng $\Delta\colon x-\sqrt{2}y+4\sqrt{3}=0$ và mỗi đường thẳng sau:

$$\Delta_1\colon \sqrt{3}x-\sqrt{6}y+12=0$$
$$\Delta_2\colon \sqrt{2}x-2y=0$$

Lời giải.

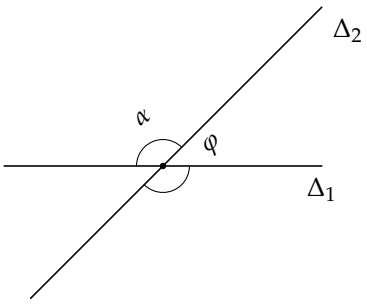
Vì $x-\sqrt{2}y+4\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \sqrt{3}(x-\sqrt{2}y+4\sqrt{3})=0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x-\sqrt{6}y+12=0$.
Vậy Δ và Δ_1 là một, tức là chúng trùng nhau.
Hai đường thẳng Δ và Δ_2 có hai véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}(1;-\sqrt{2})$ và $\vec{n}_2(\sqrt{2};-2)$ cùng phương.
Do đó, chúng song song hoặc trùng nhau.
Mặt khác, điểm $O(0;0)$ thuộc đường thẳng Δ_2 nhưng không thuộc đường thẳng Δ, nên hai đường thẳng này không trùng nhau.
Vậy Δ và Δ_2 song song với nhau. □

Giả sử hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 có hai véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ (hay hai véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$) cùng phương. Khi đó:

- *Nếu Δ_1 và Δ_2 có điểm chung thì Δ_1 trùng Δ_2.*
- *Nếu tồn tại điểm thuộc Δ_1 nhưng không thuộc Δ_2 thì Δ_1 song song với Δ_2.*

2. Góc giữa hai đường thẳng

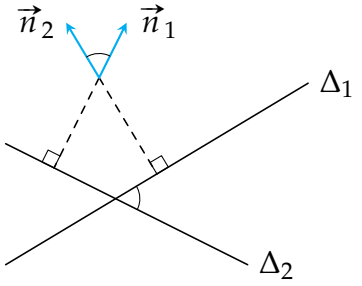
Hai đường thẳng cắt nhau tạo thành bốn góc, số đo của góc không tù được gọi là số đo góc (hay đơn giản là góc) giữa hai đường thẳng. Góc giữa hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau được quy ước bằng $0°$.



Cho hai đường thẳng

$$\Delta_1 \colon a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ và } \Delta_2 \colon a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

với các véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_1\,(a_1;b_1)$ và $\vec{n}_2\,(a_2;b_2)$ tương ứng. Khi đó, góc φ giữa hai đường thẳng đó được xác định thông qua công thức



$$\cos\varphi = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

Ví dụ 2

Tính góc giữa hai đường thẳng

$$\Delta_1 \colon \sqrt{3}x - y + 2 = 0 \text{ và } \Delta_2 \colon x - \sqrt{3}y - 2 = 0.$$

Lời giải.

Véc-tơ pháp tuyến của Δ_1 là $\vec{n}_1 = (\sqrt{3}; -1)$, của Δ_2 là $\vec{n}_2 = (1; -\sqrt{3})$.
Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2. Ta có

$$\cos\varphi = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|\sqrt{3} \cdot 1 + (-1) \cdot (-\sqrt{3})|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Do đó, góc giữa Δ_1 và Δ_2 là $\varphi = 30°$. □

Ví dụ 3

Tính góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1 \colon x = 3$ và $\Delta_2 \colon \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + t. \end{cases}$

Lời giải.

Đường thẳng Δ_1 có phương trình $x-3=0$ nên có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_1(1;0)$. Đường thẳng Δ_2 có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_2(-1;1)$ nên có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_2(1;1)$.
Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2. Ta có

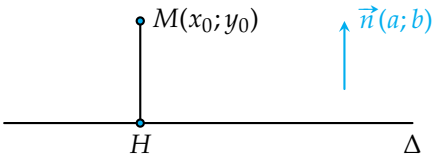
$$\cos\varphi = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|1\cdot 1 + 0\cdot 1|}{\sqrt{1^2+0^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Do đó, góc giữa Δ_1 và Δ_2 là $\varphi = 45^\circ$. □

3. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Cho điểm $M(x_0;y_0)$ và đường thẳng $\Delta\colon ax+by+c=0$. Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ, kí hiệu là $\mathrm{d}(M,\Delta)$, được tính bởi công thức

$$\mathrm{d}(M,\Delta) = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{2+b^2}}.$$



Ví dụ 4

Tính khoảng cách từ điểm $M(2;4)$ đến đường thẳng $\Delta\colon 3x+4y-12=0$.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ, ta có

$$\mathrm{d}(M,\Delta) = \frac{|3\cdot 2+4\cdot 4-12|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{10}{5} = 2.$$

Vậy khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ là 2. □

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng $\Delta_1\colon a_1x+b_1y+c_1=0$ và $\Delta_2\colon a_2x+b_2y+c_2=0$.

- Δ_1 cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$.
- $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$.
- $\Delta_1 \parallel \Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$.

Chú ý rằng việc xét vị trí tương đối của hai đường thẳng cũng được xét qua số điểm chung của Δ và Δ'. Việc xét vị trí tương đối và tính góc giữa hai đường thẳng cắt nhau cũng được thực hiện qua các véc-tơ chỉ phương của Δ và Δ'.

Ví dụ 1

Cho ba đường thẳng: $d_1 : 2x + y - 1 = 0$, $d_2 : x + 2y + 1 = 0$, $d_3 : mx - y - 7 = 0$. Chứng minh rằng các đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau và tìm giá trị của tham số m để ba đường thẳng trên đồng quy.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$.
Từ đó suy ra d_1, d_2 cắt nhau tại điểm $A(1; -1)$.
Ba đường thẳng đã cho đồng quy khi và chỉ khi d_3 cũng đi qua điểm A, hay $A \in d_3$, suy ra

$$m.1 - (-1) - 7 = 0 \Leftrightarrow m = 6.$$

□

Ví dụ 2

Cho hai đường thẳng $\Delta : (m + 3)x + 3y - 2m + 3 = 0$ và $\Delta' : 2x + 2y + 2 - 3m = 0$. Tìm giá trị của tham số m để

a) Đường thẳng Δ cắt đường thẳng Δ'.

b) Đường thẳng Δ song song với Δ'.

Lời giải.

a) Δ cắt Δ' khi và chỉ khi $\dfrac{m+3}{2} \neq \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow m \neq 0$.

b) Theo câu a), để Δ song song với Δ' thì trước hết ta phải có $m = 0$.
Với $m = 0$, khi đó dễ dàng nhận thấy $\Delta \equiv \Delta'$.
Vậy không tồn tại m để $\Delta \parallel \Delta'$.

Chú ý: Ta có thể làm theo cách sau: Δ song song với Δ' khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \dfrac{m+3}{2} = \dfrac{3}{2} \neq \dfrac{-2m+3}{2-3m} \\ 2 - 3m \neq 0 \end{cases}$$

Hệ trên vô nghiệm, do đó không tồn tại m để $\Delta \parallel \Delta'$.
□

Ví dụ 3

Cho ba đường thẳng: $d_1 : 2x + y - 1 = 0$, $d_2 : x + 2y + 1 = 0$, $d_3 : mx - y - 7 = 0$. Chứng minh rằng các đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau và tìm giá trị của tham số m để ba đường thẳng trên đồng quy.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}2x+y-1=0\\x+2y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$.
Từ đó suy ra d_1, d_2 cắt nhau tại điểm $A(1;-1)$.
Ba đường thẳng đã cho đồng quy khi và chỉ khi d_3 cũng đi qua điểm A, hay $A\in d_3$, suy ra

$$m.1-(-1)-7=0\Leftrightarrow m=6.$$

□

Ví dụ 4

Cho các đường thẳng $\Delta: 2x+3y-5=0, \Delta': 3x-2y-1=0$ và điểm $M(2;3)$.
a) Xét vị trí tương đối giữa các đường thẳng Δ và Δ'.
b) Biết d là đường thẳng đi qua điểm M và tạo với các đường thẳng Δ, Δ' một tam giác cân. Tính góc giữa các đường thẳng Δ và d.

Lời giải.

a) Ta có $\vec{n}=(2,3)$ và $\vec{n'}=(3,-2)$ là các véc-tơ pháp tuyến của Δ và Δ'.
Ta thấy $\vec{n}$ và $\vec{n'}$ không cùng phương vì $\frac{2}{3}\neq\frac{3}{-2}$, từ đó suy ra Δ và Δ' là các đường thẳng cắt nhau.
b) Ta có $\vec{n}.\vec{n'}=2.3+3.(-2)=0$, do đó Δ và Δ' là các đường thẳng vuông góc với nhau.
Gọi $A=\Delta\cap\Delta', B=\Delta\cap d, C=d\cap\Delta'$. Khi đó tam giác ABC là vuông tại A do đó nếu tam giác ABC cân thì $\widehat{B}=\widehat{C}=\frac{\pi}{4}$.
Từ đó suy ra góc giữa các đường thẳng Δ và d bằng $\frac{\pi}{4}$. □

Ví dụ 5

Viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ qua $A(1;2)$ và song song với đường thẳng $d: \begin{cases}x=-3+2t\\y=-3t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

Lời giải.

Vì $\Delta\ /\!/\ d$ nên Δ nhận véc-tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-3)$ của d làm véc-tơ chỉ phương. Do đó, Δ nhận $\vec{n}=(3;2)$ làm véc-tơ pháp tuyến.
Vậy Δ có phương trình là $3(x-1)+2(y-2)=0$, hay $\Delta: 3x+2y-7=0$. □

Ví dụ 6

Tìm m sao cho hai đường thẳng $\Delta: x+5my-4=0$ và $\Delta': 2x+3y-2=0$ song song với nhau.

Lời giải.

$\Delta\ /\!/\ \Delta'\Leftrightarrow\frac{1}{2}=\frac{5m}{3}\neq\frac{-4}{-2}\Leftrightarrow m=\frac{3}{10}$. □

Ví dụ 7

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho 3 đường thẳng d_1: $2x+y-4=0$, d_2: $5x-2y+3=0$, d_3: $mx+3y-2=0$.

a) Xét vị trí tương đối giữa d_1 và d_2.

b) Tìm giá trị của tham số m để 3 đường thẳng trên đồng quy.

Lời giải.

a) Nhận thấy $\dfrac{2}{5}\neq\dfrac{1}{-2}$, từ đó suy ra các đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau.

b) Tọa độ giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}2x+y-4=0\\5x-2y+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{5}{9}\\y=\dfrac{26}{9}\end{cases}.$$

Vậy d_1 và d_2 cắt nhau tại điểm $M\left(\dfrac{5}{9};\dfrac{26}{9}\right)$.

Vì d_1, d_2, d_3 đồng quy nên $M\in d_3$, ta có: $m.\dfrac{5}{9}+3.\dfrac{26}{9}-2=0\Leftrightarrow m=-12$

□

Dạng 2 Bài toán liên quan đến góc giữa hai đường thẳng

- Hai đường thẳng a và b cắt nhau tạo thành bốn góc. Số đo nhỏ nhất của các góc đó được gọi là số đo của góc giữa hai đường thẳng a và b, hay đơn giản là góc giữa a và b. Khi a song song hoặc trùng với b, ta quy ước góc giữa chúng bằng 0°.
- Công thức xác định góc giữa hai đường thẳng:
  Góc xác định hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có phương trình Δ_1: $a_1x+b_1y+c_1=0$ và Δ_2: $a_2x+b_2y+c_2=0$ được xác định bởi công thức

$$\cos(\Delta_1;\Delta_2)=\frac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}.$$

- Phương trình đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng Δ_1: $a_1x+b_1y+c_1=0$ và Δ_2: $a_2x+b_2y+c_2=0$ có phương trình

$$\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}}=\pm\frac{a_2x+b_2y+c_2}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}.$$

Ví dụ 1

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho các đường thẳng Δ_1 : $x+2y-\sqrt{2}=0$ và Δ_2 : $x-y=0$. Tính côsin của góc giữa các đường thẳng Δ_1 và Δ_2.

Lời giải.

Ta có $\vec{n} = (1;2)$ và $\vec{n'} = (1;-1)$ là véc-tơ pháp tuyến của các đường thẳng Δ và Δ'.
Gọi φ là góc giữa các đường thẳng Δ và Δ'. Khi đó

$$\cos\varphi = |\cos(\vec{n},\vec{n'})| = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

□

Ví dụ 2

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho các đường thẳng $\Delta\colon 3x+5y+15=0$ và $\Delta'\colon \begin{cases} x = 10-3t \\ y = 1+5t \end{cases}$. Tính góc φ giữa Δ_1 và Δ_2.

Lời giải.

Ta có $\vec{n} = (3;5)$ là một véc-tơ pháp tuyến của Δ.
$\vec{u'} = (-3;5)$ là một véc-tơ chỉ phương của Δ', suy ra Δ' có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n'} = (5;3)$.
Do $\vec{n}\cdot\vec{n'} = 0 \Rightarrow \Delta\perp\Delta'$.
Vậy $\varphi = 90^\circ$ □

Ví dụ 3

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy cho 2 đường thẳng $\Delta: x+2y-5=0$, $\Delta': 3x+my-1=0$. Tìm m để góc giữa hai đường thẳng Δ, Δ' bằng 45°.

Lời giải.

$\Delta: x+2y-5=0$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;2)$,
$\Delta': 3x+my-1=0$ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n'} = (3;m)$.
Theo bài ra ta có: $\cos 45^\circ = \dfrac{\left|\vec{n}.\vec{n'}\right|}{|\vec{n}|.\left|\vec{n'}\right|} = \dfrac{|3+2m|}{\sqrt{5}\sqrt{3^2+m^2}}$.
Từ đó suy ra $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-9. \end{array}\right.$
Vậy với $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-9 \end{array}\right.$ thì góc giữa hai đường thẳng Δ, Δ' bằng 45°. □

Dạng 3 Bài toán liên quan đến khoảng cách giữa hai đường thẳng

Định lý 2.1 (Công thức tính khoảng cách từ một điểm tới đường thẳng). Cho đường thẳng $\Delta\colon ax+by+c=0$ và điểm $M(x_0;y_0)$. Khi đó khoảng cách từ M đến Δ được tính bởi công thức

$$\mathrm{d}(M,\Delta) = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Định lý 2.2 (Vị trí của hai điểm đối với đường thẳng). Cho đường thẳng và $M(x_M;y_M) \notin \Delta$, $N(x_N;y_N) \notin \Delta$. Khi đó

- M, N cùng phía với Δ khi và chỉ khi $(ax_M+by_M+c)(ax_N+by_N+c)>0$.
- M, N khác phía với Δ khi và chỉ khi $(ax_M+by_M+c)(ax_N+by_N+c)<0$.

Ví dụ 1

Tìm khoảng cách từ điểm $M(1;2)$ đến đường thẳng $(d)\colon 4x+3y-2=0$.

Lời giải.

Áp dụng công thức tính khoảng cách ta có
$$\mathrm{d}(M,D)=\frac{|4\cdot 1+3\cdot 2-2|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{8}{5}.$$ □

Ví dụ 2

Tìm những điểm nằm trên đường thẳng $\Delta\colon 2x+y-1=0$ và có khoảng cách đến $(d)\colon 4x+3y-10=0$ bằng 2.

Lời giải.

Giả sử có điểm $M\in\Delta$, khi đó $M(m;1-2m)$.
Theo đề $\mathrm{d}(M,\Delta)=2 \Leftrightarrow \dfrac{|4m+3(1-2m)-10|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2 \Leftrightarrow |-2m-7|=10$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&2m+7=10\\&2m+7=-10\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&m=\frac{3}{2}\\&m=-\frac{17}{2}.\end{aligned}\right.$$
Vậy có hai điểm thỏa mãn điều kiện là $M_1\left(\frac{3}{2};-2\right)$ và $M_2\left(-\frac{17}{2};18\right)$. □

Ví dụ 3

Viết phương trình của đường thẳng đi qua điểm $A(1,-3)$ và có khoảng cách đến điểm $M_0(2,4)$ bằng 1.

Lời giải.

Giả sử đường thẳng Δ đi qua điểm $A(1;-3)$ có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(a;b)$. Khi đó phương trình Δ có dạng $ax+by-a+3b=0$.
Theo đề ta có
$$\begin{aligned}&\mathrm{d}(M_0,\Delta)=\frac{|2a+4b-a+3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1\\ \Leftrightarrow\ &|a+7b|=\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow 48b^2+14ab=0\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{aligned}&b=0\\&14a=-48b.\end{aligned}\right.\end{aligned}$$

Với $b=0$ chọn $a=1$ ta có $\Delta\colon x-1=0$.
Với $7a=-24b$ chọn $a=24\Rightarrow b=-7$ ta được $\Delta\colon 24x-7y-45=0$. □

Ví dụ 4

Viết phương trình của đường thẳng (d) song song với $(d')\colon 3x+4y-1=0$ và cách (d') một đoạn bằng 2.

Lời giải.

Đường thẳng $(d)\ /\!/\ (d')$ nên phương trình đường thẳng $(d)\colon 3x+4y+c=0$.
Lấy điểm $M(-1;1)\in(d')$, theo đề ta có:

$$\mathrm{d}(d,d')=\mathrm{d}(M,d)=2\Leftrightarrow\frac{|-3+4+c|}{5}=2\Leftrightarrow|c+1|=10\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=9\\c=-11\end{array}\right.$$

Với $c=9$ ta có $d\colon 3x+4y+9=0$.
Với $c=-11$ ta có $d\colon 3x+4y-11=0$. □

Ví dụ 5

Cho điểm $A(-1,2)$ và hai đường $(\Delta)\colon x-y-1=0, (\Delta')\colon x+2y-5=0$. Tìm trên đường thẳng (Δ) một điểm M sao cho khoảng cách từ M đến (Δ') bằng AM.

Lời giải.

Ta có $M\in\Delta$, suy ra $M(m,m-1)$.
$\overrightarrow{AM}=(m+1;m-3)\Rightarrow AM=\sqrt{(m+1)^2+(m-3)^2}=\sqrt{2m^2-4m+10}$.
Theo đề

$$\begin{aligned}&\frac{|m+2(m-1)-5|}{\sqrt{5}}=\sqrt{2m^2-4m+10}\Leftrightarrow|3m-7|=\sqrt{5(2m^2-4m+10)}\\\Leftrightarrow\ &(3m-7)^2=10m^2-20m+50\Leftrightarrow m^2+22m+1=0\\\Leftrightarrow\ &m=-11\pm2\sqrt{30}.\end{aligned}$$

Vậy có hai điểm thỏa mãn là $M_1(-11-2\sqrt{30};-12-2\sqrt{30})$ và $M_2(-11+2\sqrt{30};-12+2\sqrt{30})$. □

Ví dụ 6

Cho tam giác ABC. Tính diện tích tam giác ABC, với $A(-2;14)$, $B(4;-2)$, $C(5;-4)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{BC}=(1;-2)\Rightarrow BC=\sqrt{5}$. Phương trình đường thẳng BC đi qua B có dạng $2(x-4)+1(y+2)=0\Leftrightarrow 2x+y-6=0$.

Đường cao AH của tam giác ABC: $AH=\dfrac{|2(-2)+14-6|}{\sqrt{5}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

Do đó $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot AH\cdot BC=\dfrac{4\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}{10}=2$(đvdt). □

C BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1

Xét vị trí tương đối giữa các cặp đường thẳng sau:

a) $\Delta_1 : 3\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - \sqrt{3} = 0$ và $\Delta_2 : 6x + 2y - \sqrt{6} = 0$.

b) $d_1 : x - \sqrt{3}y + 2 = 0$ và $d_2 : \sqrt{3}x - 3y + 2 = 0$.

c) $m_1 : x - 2y + 1 = 0$ và $m_2 : 3x + y - 2 = 0$.

Lời giải.

a) Ta thấy $3\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow 6x + 2y - \sqrt{6} = 0$ nên $\Delta_1 \equiv \Delta_2$.

b) Xét hệ phương trình $\begin{cases} x - \sqrt{3}y + 2 = 0 \\ \sqrt{3}x - 3y + 2 = 0. \end{cases}$
Ta thấy hệ vô nghiệm nên d_1 và d_2 không có điểm chung, vậy chúng song song với nhau.

c) Ta có $\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 3x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{7} \\ y = \dfrac{5}{7}. \end{cases}$
Vậy hai đường thẳng m_1 và m_2 cắt nhau.

□

Bài 2

Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau

a) $\Delta_1 : \sqrt{3}x + y - 4 = 0$ và $\Delta_2 : x + \sqrt{3}y + 3 = 0$;

b) $d_1 : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 + 4t \end{cases}$ và $d_2 : \begin{cases} x = 3 + s \\ y = 1 - 3s \end{cases}$ (t, s là các tham số).

Lời giải.

a) Véc-tơ pháp tuyến của Δ_1 là $\vec{n}_1 = (\sqrt{3}; 1)$, của Δ_2 là $\vec{n_2} = (1; \sqrt{3})$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2. Ta có

$$\cos\varphi = |\cos(\vec{n_1}, \vec{n_2})| = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|} = \frac{|\sqrt{3} \cdot 1 + 1 \cdot (\sqrt{3})|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Do đó, góc giữa Δ_1 và Δ_2 là $\varphi = 30^\circ$.

b) Vectơ chỉ phương của d_1 là $\vec{u}_1 = (2; 4)$, của d_2 là $\vec{u_2} = (1; -3)$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2. Ta có

$$\cos\varphi = |\cos(\vec{u_1}, \vec{u_2})| = \frac{|\vec{u_1} \cdot \vec{u_2}|}{|\vec{u_1}| \cdot |\vec{u_2}|} = \frac{|2 \cdot 1 + 4 \cdot (-3)|}{\sqrt{(2)^2 + 4^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Do đó, góc giữa d_1 và d_2 là $\varphi = 45^\circ$.

□

Bài 3

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm $A(0;-2)$ và đường thẳng $\Delta\colon x+y-4=0$.

a) Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ.

b) Viết phương trình đường thẳng a đi qua điểm $M(-1;0)$ và song song với Δ.

c) Viết phương trình đường thẳng b đi qua điểm $N(0;3)$ và vuông góc với Δ.

Lời giải.

a) Áp dụng công thức tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ, ta có

$$\mathrm{d}(A,\Delta)=\frac{|0-2-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3\sqrt{2}.$$

Vậy khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ là $3\sqrt{2}$.

b) Đường thẳng a đi qua điểm $M(-1;0)$ và song song với Δ sẽ có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;1)$ nên có phương trình $1(x+1)+1(y-0)=0\Leftrightarrow x+y=0$ (thỏa mãn).
Vậy $a\colon x+y=0$.

c) Viết phương trình đường thẳng b đi qua điểm $N(0;3)$ và vuông góc với Δ nên có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(-1;1)$ nên có phương trình

$$-1(x-0)+1(y-3)=0\Leftrightarrow -x+y-3=0$$

. Vậy $b\colon -x+y-3=0$.

□

Bài 4

Trong mặt phẳng toạ độ, cho tam giác ABC có $A(1;0)$, $B(3;2)$ và $C(-2;-1)$.

a) Tính độ dài đường cao kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC.

b) Tính diện tích tam giác ABC.

Lời giải.

a) Đường thẳng BC qua $B(3;2)$ và nhận $\overrightarrow{BC}=(-5;-3)$ làm véc-tơ chỉ phương nên có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;-5)$. Suy ra đường thẳng BC có phương trình $3(x-3)-5(y-2)=0\Leftrightarrow 3x-5y-1=0$.
Độ dài đường cao kẻ từ đỉnh A của $\triangle ABC$ chính bằng $\mathrm{d}(A,BC)=\dfrac{2}{\sqrt{34}}$.

b) Ta có $BC=\sqrt{34}$, suy ra diện tích tam giác ABC là

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot \mathrm{d}(A,BC)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{34}\cdot\frac{2}{\sqrt{34}}=1.$$

□

Bài 5

Chứng minh rằng hai đường thẳng $d: y = ax + b\ (a \neq 0)$ và $d': y = a'x + b'\ (a' \neq 0)$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $aa' = -1$.

Lời giải.

Ta có $d: y = ax + b \Leftrightarrow ax - y + b = 0$ nên d có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (a; -1)$.
Tương tự d' có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n'} = (a'; -1)$.
Vậy $d \perp d' \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n'} = 0 \Leftrightarrow aa' + 1 = 0 \Leftrightarrow aa' = -1$.
Suy ra điều phải chứng minh. □

Bài 6

Trong mặt phẳng toạ độ, một tín hiệu âm thanh phát đi từ một vị trí và được ba thiết bị ghi tín hiệu đặt tại ba vị trị $O(0;0), A(1;0), B(1;3)$ nhận được cùng một thời điểm. Hãy xác định vị trí phát tín hiệu âm thanh.

Lời giải.

Gọi I là vị trí phát tín hiệu âm thanh đó, từ giả thiết suy ra $IA = IB = IO$ nên I chính là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác OAB.
Đặt $I(a;b)$ ta có

$$IA = IB = IO \Leftrightarrow \begin{cases} IA = IO \\ IB = IO \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + b^2 = a^2 + b^2 \\ (a-1)^2 + (b-3)^2 = a^2 + b^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2a + 1 = 0 \\ -2a - 6b + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

Vậy vị trí phát tín hiệu âm thanh là $I\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$. □

Bài 7

Lập phương trình tham số, phương trình chính tắc (nếu có) và phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua điểm A và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}$.

a) $A(0;1)$, $\vec{n} = (1;3)$.

b) $A(-2;3)$, $\vec{n} = (5;-1)$.

Lời giải.

a) Đường thẳng đi qua $A(0;1)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;3)$ nên có phương trình tổng quát là

$$1(x-0) + 3(y-1) = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 3 = 0.$$

Đường thẳng có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (3;-1)$ và đi qua $A(0;1)$ nên có phương trình tham số và chính tắc là

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 1 - t \end{cases}; \quad \frac{x}{3} = \frac{y-1}{-1}.$$

b) Đường thẳng đi qua $A(-2;3)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (5;-1)$ nên có phương trình tổng quát là

$$5(x+2) - (y-3) = 0 \Leftrightarrow 5x - y + 13 = 0.$$

Đường thẳng có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (1;5)$ và đi qua $A(-2;3)$ nên có phương trình tham số và chính tắc là

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 + 5t \end{cases}; \quad \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{5}.$$

□

Bài 8

Lập phương trình tham số, phương trình chính tắc (nếu có) và phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua điểm A và có hệ số góc k.

a) $A(2;4)$, $k = 2$.

b) $A(-3;1)$, $k = -2$.

Lời giải.

a) Đường thẳng đi qua $A(2;4)$ và có hệ số góc $k = 2$ nên có phương trình $y = 2(x-2)+4$, do đó có phương trình tổng quát là $2x - y = 0$. Khi đó, đường thẳng có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (1;2)$. Đường thẳng có phương trình tham số và chính tắc là

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 + 2t \end{cases}; \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{2}.$$

b) Đường thẳng đi qua $A(-3;1)$ và có hệ số góc $k = -2$ nên có phương trình $y = -2(x+3)+1$.
Do đó có phương trình tổng quát là $2x + y + 5 = 0$.
Khi đó, đường thẳng có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (1;-2)$.
Đường thẳng có phương trình tham số là $\begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 - 2t. \end{cases}$
Đường thẳng có phương trình chính tắc là $\frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{-2}$.

□

Bài 9

Lập phương trình tham số, phương trình chính tắc (nếu có) và phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua hai điểm A và B.

a) $A(2;1)$, $B(-4;5)$.

b) $A(5;3)$, $B(-2;-7)$.

Lời giải.

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-6;4)$.
Đường thẳng có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (2;3)$, véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (-3;2)$ và đi qua A suy ra
Phương trình tham số $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + 2t. \end{cases}$
Phương trình chính tắc $\frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{2}$.
Phương trình tổng quát $2x + 3y - 7 = 0$.

b) Ta có $\overrightarrow{AB} = (-7;-10)$.
Đường thẳng có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n} = (10;-7)$, véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (7;10)$ và đi qua A suy ra
Phương trình tham số $\begin{cases} x = 5+7t \\ y = 3+10t. \end{cases}$
Phương trình chính tắc $\dfrac{x-5}{7} = \dfrac{y-3}{10}$.
Phương trình tổng quát $10x - 7y - 29 = 0$.

□

Bài 10

Xét vị trí tương đối của cặp đường thẳng $d_1 \colon 2x+3y+1=0$ và $d_2 \colon 4x+5y-6=0$. Tìm tọa độ giao điểm nếu chúng cắt nhau.

Lời giải.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} 2x+3y=-1 \\ 4x+5y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{23}{2} \\ y = -8. \end{cases}$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất nên hai đường thẳng cắt nhau, tọa độ giao điểm là $M\left(\dfrac{23}{2};-8\right)$.

□

Bài 11

Xét vị trí tương đối của cặp đường thẳng $d_1 \colon \begin{cases} x = 5+t \\ y = -1 \end{cases}$ và $d_2 \colon x+y-5=0$. Tìm tọa độ giao điểm nếu chúng cắt nhau.

Lời giải.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x = 5+t \\ y = -1 \\ x+y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -1. \\ t = 1 \end{cases}$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y;t)$ là $(6;-1;1)$, do đó hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau tại điểm $M(6;-1)$. □

Bài 12

Tính góc giữa hai đường thẳng $d_1 \colon x-2y-1=0$ và $d_2 \colon x+3y-11=0$.

Lời giải.

Đường thẳng d_1 có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (1;-2)$, đường thẳng d_2 có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = (1;3)$, do đó

$$\cos(d_1,d_2) = |\cos(\vec{n}_1,\vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|1-6|}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (d_1,d_2) = 45^\circ.$$

□

Bài 13

Tính khoảng cách từ điểm $M(4;-5)$ đến đường thẳng $d \colon \begin{cases} x = 2t \\ y = 2+3t \end{cases}$.

Lời giải.

Đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$ qua điểm $A(0;2)$, có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (2;3)$ nên phương trình tổng quát của d là

$$3x - 2(y-2) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y + 4 = 0.$$

Khoảng cách từ điểm $M(4;-5)$ đến đường thẳng d bằng

$$\mathrm{d}(M,d) = \frac{|3\cdot 4 - 2\cdot(-5) + 4|}{\sqrt{9+4}} = \frac{26}{\sqrt{13}} = 2\sqrt{13}.$$

□

Bài 14

Viết phương trình các đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng $d_1\colon 3x - 4y + 12 = 0$ và $d_2\colon 12x + 5y - 20 = 0$.

Lời giải.

Điểm $M(x;y)$ nằm trên đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng d_1, d_2 khi và chỉ khi

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(M,d_1) &= \mathrm{d}(M,d_2) \\ &\Leftrightarrow \frac{|3x-4y+12|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|12x+5y-20|}{\sqrt{144+25}} \\ &\Leftrightarrow 13|3x-4y+12| = 5|12x+5y-20| \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 21x + 77y - 256 = 0 \\ 99x - 27y + 56 = 0. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vậy phương trình các đường phân giác của góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 là $21x + 77y - 256 = 0$ và $99x - 27y + 56 = 0$. □

Bài 15

Xét vị trí tương đối của mỗi cặp đường thẳng sau

a) $d_1\colon 3x + 2y - 5 = 0$ và $d_2\colon x - 4y + 1 = 0$;

b) $d_3\colon x - 2y + 3 = 0$ và $d_4\colon -2x + 4y + 10 = 0$;

c) $d_5\colon 4x + 2y - 3 = 0$ và $d_6\colon \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} + t \\ y = \dfrac{5}{2} - 2t. \end{cases}$

Lời giải.

a) Đường thẳng d_1 có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (2;-3)$, đường thẳng d_2 có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (4;1)$.
Do $\dfrac{2}{4} \neq \dfrac{-3}{1}$ nên $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ không cùng phương, suy ra d_1 cắt d_2.

b) Đường thẳng d_3 có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_3 = (2;1)$, đường thẳng d_4 có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_4 = (4;2)$. Suy ra $\vec{u}_4 = 2\vec{u}_3$.
Ta có điểm $M(-1;1) \in d_3$. Do $-2\cdot(-1) + 4\cdot 1 + 10 \neq 0$ nên $M(-1;1) \notin d_4$.
Vậy d_3 song song với d_4.

c) Đường thẳng d_5 có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_5 = (2;-4)$, đường thẳng d_6 có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (1;-2)$. Suy ra $\vec{u}_5 = 2\vec{u}_6$.
Ta có điểm $N\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right) \in d_6$. Do $4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)-3=0$ nên $N\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right) \in d_5$.
Vậy d_5 và d_6 trùng nhau.

□

Bài 16

Tính số đo góc giữa hai đường thẳng $d_1\colon 2x-y+5=0$ và $d_2\colon x-3y+3=0$.

Lời giải.

d_1 có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_1=(2;-1)$, d_2 có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}_2=(1;-3)$. Do đó, ta có

$$\cos(d_1,d_2)=|\cos(\vec{n}_1,\vec{n}_2)|=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{|2\cdot1+(-1)\cdot(-3)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Vậy $(d_1,d_2)=45^\circ$.

□

Bài 17

Tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng trong mỗi trường hợp sau

a) $A(1;-2)$ và $\Delta_1\colon 3x-y+4=0$;

b) $B(-3;2)$ và $\Delta_2\colon \begin{cases}x=-2+t\\ y=1-2t.\end{cases}$

Lời giải.

a) Ta có

$$\mathrm{d}(A,\Delta_1)=\frac{|3\cdot1-(-2)+4|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{9\sqrt{10}}{10}.$$

b) Đường thẳng Δ_2 đi qua điểm $M(-2;1)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;1)$.
Phương trình tổng quát của đường thẳng Δ_2 là

$$2\cdot(x+2)+1\cdot(y-1)=0\Leftrightarrow 2x+y+2=0.$$

Vậy $\mathrm{d}(B,\Delta_2)=\frac{|2\cdot(-3)+2+2|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

□

Bài 18

Với giá trị nào của tham số m thì hai đường thẳng sau đây vuông góc?
$\Delta_1\colon mx-y+1=0$ và $\Delta_2\colon 2x-y+3=0$.

Lời giải.

Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$m\cdot2+(-1)\cdot(-1)=0\Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}.$$

□

Bài 19

Cho ba điểm $A(2;-1)$, $B(1;2)$ và $C(4;-2)$. Tính số đo góc BAC và góc giữa hai đường thẳng AB, AC.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;3)$, $\overrightarrow{AC}=(2;-1)$. Khi đó

$$\cos\widehat{BAC}=\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{(-1)\cdot 2+3\cdot(-1)}{\sqrt{(-1)^2+3^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Suy ra $\widehat{BAC}=135^\circ$. Từ đó ta có góc giữa hai đường thẳng AB, AC bằng 45°. □

Bài 20

Cho ba điểm $A(2;4)$, $B(-1;2)$ và $C(3;-1)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua B đồng thời cách đều A và C.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng đi qua điểm $B(-1;2)$ có dạng

$$\Delta\colon a\cdot(x+1)+b\cdot(y-2)=0$$

với $a^2+b^2\neq 0$.
Δ cách đều A và C khi và chỉ khi

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(A,\Delta)=\mathrm{d}(C,\Delta)&\Leftrightarrow\frac{|a\cdot(2+1)+b\cdot(4-2)|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|a\cdot(3+1)+b\cdot(-1-2)|}{\sqrt{a^2+b^2}}\\&\Leftrightarrow|3a+2b|=|4a-3b|\\&\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&3a+2b=4a-3b\\&3a+2b=-(4a-3b)\end{aligned}\right.\\&\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}&a=5b\\&7a=b.\end{aligned}\right.\end{aligned}$$

- Với $a=5b$, chọn $a=5$ và $b=1$ ta có phương trình đường thẳng cần lập là

$$5\cdot(x+1)+1\cdot(y-2)=0\Leftrightarrow 5x+y+3=0.$$

- Với $7a=b$, chọn $a=1$ và $b=7$ ta có phương trình đường thẳng cần lập là

$$1\cdot(x+1)+7\cdot(y-2)=0\Leftrightarrow x+7y-13=0.$$

Vậy, có hai đường thẳng thỏa mãn đề bài là $5x+y+3=0$ và $x+7y-13=0$. □

Bài 21

Có hai con tàu A và B cùng xuất phát từ hai bến, chuyển động đều theo đường thẳng ngoài biển. Trên màn hình ra-đa của trạm điều khiển (được coi như mặt phẳng tọa độ Oxy với đơn vị trên các trục tính theo ki-lô-mét), tại thời điểm t (giờ), vị trí của tàu A có tọa độ được xác định bởi công thức $\begin{cases}x=3-33t\\y=-4+25t\end{cases}$, vị trí của tàu B có tọa độ là $(4-30t;3-40t)$.

a) Tính cô-sin góc giữa hai đường đi của hai tàu A và B.

b) Sau bao lâu kể từ thời điểm xuất phát hai tàu gần nhau nhất?

c) Nếu tàu A đứng yên ở vị trí ban đầu, tàu B chạy thì khoảng cách ngắn nhất giữa hai tàu bằng bao nhiêu?

Lời giải.

a) Đường thẳng mà tàu A đi có phương trình d_1: $\begin{cases} x = 3 - 33t_1 \\ y = -4 + 25t_1. \end{cases}$

Đường thẳng mà tàu B đi có phương trình d_2: $\begin{cases} x = 4 - 30t_2 \\ y = 3 - 40t_2. \end{cases}$

Đường thẳng d_1 có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (-33; 25)$, đường thẳng d_2 có véc-tơ chỉ phương $\vec{u}_2 = (-30; -40)$. Do đó

$$\cos(d_1, d_2) = \frac{|(-33)\cdot(-30) + 25\cdot(-40)|}{\sqrt{(-33)^2 + 25^2}\cdot\sqrt{(-30)^2 + (-40)^2}} = \frac{1}{5\sqrt{1714}}.$$

b) Tại thời điểm t (giờ), vị trí của tàu A và tàu B lần lượt là $M(3 - 33t; -4 + 25t)$ và $N(4 - 30t; 3 - 40t)$.
Do đó $MN = \sqrt{(3t+1)^2 + (7 - 65t)^2} = \sqrt{4234t^2 - 904t + 50}$.
MN ngắn nhất khi và chỉ khi hàm số $f(t) = 4234t^2 - 904t + 50$ đạt giá trị nhỏ nhất. Vì $f(t)$ là hàm số bậc hai nên $f(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $t = \dfrac{904}{2\cdot 4234} = \dfrac{226}{2117}$.
Vậy, sau $\dfrac{226}{2117}$ giờ sau khi xuất phát, hai tàu A, B ở gần nhau nhất.

c) Vị trí ban đầu của tàu A ứng với $t = 0$ là điểm có tọa độ $H(3; -4)$.
Đường thẳng d_2 có phương trình tổng quát là

$$40\cdot(x - 4) - 30\cdot(y - 3) = 0 \Leftrightarrow 4x - 3y + 7 = 0.$$

Khi tàu A đứng yên ở vị trí ban đầu, tàu B chạy thì khoảng cách ngắn nhất giữa hai tàu bằng khoảng cách từ điểm H đến đường thẳng d_2. Khoảng cách đó bằng

$$\mathrm{d}(H, d_2) = \frac{|4\cdot 2 - 3\cdot(-4) + 7|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 5{,}4\,(\text{km}).$$

□

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1

Cho đường thẳng d: $3x - 2y + 1 = 0$. Véc-tơ nào sau đây là một véc-tơ pháp tuyến d?

(A) $\vec{n} = (3; 2)$. (B) $\vec{n} = (2; 3)$. (C) $\vec{n} = (-3; 2)$. (D) $\vec{n} = (-2; 3)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{n} = (-3; 2)$ là một véc-tơ pháp tuyến của d.
Chọn đáp án (C)

□

Câu 2

Nếu d là đường thẳng vuông góc với $\Delta\colon 3x-2y+1=0$ thì d có một vec-tơ chỉ phương là

(A) $(2;3)$. (B) $(3;2)$. (C) $(-2;3)$. (D) $(6;-4)$.

Lời giải.

Ta có $\vec{n}=(3;-2)$ là một véc-tơ pháp tuyến của Δ. Vì $\Delta\perp d$ nên mọi véc-tơ pháp tuyến của Δ đều là véc-tơ chỉ phương của d. Do đó $2\vec{n}=(6;-4)$ là một véc-tơ chỉ phương của d.

Chọn đáp án (D) □

Câu 3

Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M(5;0)$ và có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;-3)$.

(A) $x-3y+5=0$. (B) $x-3y-5=0$. (C) $3x-y-15=0$. (D) $3x+y-15=0$.

Lời giải.

Đường thẳng qua $M(5;0)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;-3)$ có phương trình là

$$1x-3y-(1\cdot 5-3\cdot 0)=0\Leftrightarrow x-3y-5=0.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 4

Phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua hai điểm $A(-2;4)$, $B(1;0)$ là

(A) $4x+3y+4=0$. (B) $4x-3y+4=0$. (C) $4x-3y-4=0$. (D) $4x+3y-4=0$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;-4)$ là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng AB. Suy ra $\vec{n}=(4;3)$ là một véc-tơ pháp tuyến của AB. Đường thẳng AB có véc-tơ pháp tuyến $\vec{n}$ và đi qua B, suy ra phương trình đường thẳng AB là

$$4x+3y-(4\cdot 1+3\cdot 0)=0\Leftrightarrow 4x+3y-4=0.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 5

Phương trình đường trung trực của đoạn AB với $A(1;5)$, $B(-3;2)$ là

(A) $6x+8y+13=0$. (B) $-8x+6y-13=0$.
(C) $8x+6y+13=0$. (D) $8x+6y-13=0$.

Lời giải.

Gọi Δ là đường trung trực của AB. Khi đó Δ nhận véc-tơ $\overrightarrow{BA}=(4;3)$ là véc-tơ pháp tuyến. Hơn nữa, trung điểm M của đoạn AB thuộc Δ. Điểm M có tọa độ là $\left(\dfrac{1+(-3)}{2};\dfrac{5+2}{2}\right)\Rightarrow M\left(-1;\dfrac{7}{2}\right)$.

Suy ra phương trình đường thẳng Δ là

$$4x+3y-\left(4\cdot(-1)+3\cdot\frac{7}{2}\right)=0\Leftrightarrow 8x+6y-13=0.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 6

Đường thẳng $d\colon \begin{cases} x = 3 - 5t \\ y = 1 + 4t \end{cases}$ có phương trình tổng quát là

(A) $4x + 5y - 17 = 0$. (B) $4x + 5y + 17 = 0$. (C) $4x - 5y + 17 = 0$. (D) $4x - 5y - 17 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\vec{u} = (-5;4)$ là một véc-tơ chỉ phương của d. Suy ra $\vec{n} = (4;5)$ là một véc-tơ pháp tuyến của d.
Từ phương trình tham số của d ta suy ra

$$4x + 5y = 4(3 - 5t) + 5(1 + 4t) = 12 - 20t + 5 + 20t = 17.$$

Suy ra $4x + 5y = 17 \Leftrightarrow 4x + 5y - 17 = 0$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 7

Tính góc giữa hai đường thẳng $d_1\colon 4x - 2y + 5 = 0$ và $d_2\colon x - 3y + 1 = 0$.

(A) $60°$. (B) $135°$. (C) $30°$. (D) $45°$.

Lời giải.

Ta có

$$\cos(d_1, d_2) = \frac{|4 \cdot 1 + (-2) \cdot (-3)|}{\sqrt{4^2 + (-2^2)} \cdot \sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{10}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Suy ra $(d_1, d_2) = 45°$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 8

Đường thẳng $\Delta\colon 3x - 2y - 7 = 0$ cắt đường thẳng nào sau đây?

(A) $3x + 2y = 0$. (B) $3x - 2y = 0$.
(C) $-3x + 2y - 7 = 0$. (D) $6x - 4y - 14 = 0$.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{3}{3} \neq \dfrac{-2}{2}$ nên đường thẳng $3x - 2y - 7 = 0$ và đường thẳng $3x + 2y = 0$ cắt nhau.
Chọn đáp án (A) □

Câu 9

Tính khoảng cách từ $M(4;3)$ đến $\Delta\colon 6x - 8y - 101 = 0$.

(A) $10{,}1$. (B) $1{,}01$. (C) $\sqrt{101}$. (D) 101.

Lời giải.

Ta có

$$\mathrm{d}_{(M;\Delta)} = \frac{|6 \cdot 4 - 8 \cdot 3 - 101|}{\sqrt{6^2 + (-8)^2}} = \frac{101}{10} = 10{,}1.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 10

Cho hai đường thẳng $d_1\colon \begin{cases} x=2+t \\ y=-3+2t \end{cases}$ và $d_1\colon \begin{cases} x=5-t \\ y=-7+3t \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) d_1 song song d_2.
(B) d_1 trùng với d_2.
(C) d_1 và d_2 cắt nhau tại điểm có tọa độ $(-1;3)$.
(D) d_1 và d_2 cắt nhau tại điểm có tọa độ $(3;-1)$.

Lời giải.

Giả sử $M(x;y) \in d_1 \cap d_2$. Khi đó tồn tại t, t' sao cho

$$\begin{cases} x=2+t=5-t' \\ y=-3+2t=-7+3t' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2+t=5-t' \\ -3+2t=-7+3t' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=1 \\ t'=2. \end{cases}$$

Khi đó $x=2+t=3$, $y=-3+2t=-1$. Do đó d_1 và d_2 cắt nhau tại điểm có tọa độ $(3;-1)$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 11

Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng $\Delta_1\colon \begin{cases} x=4+t \\ y=1-5t \end{cases}$ và $\Delta_2\colon 2x-10y+15=0$.

(A) Trùng nhau.
(B) Song song nhau.
(C) Cắt nhau nhưng không vuông góc.
(D) Vuông góc nhau.

Lời giải.

Đường thẳng Δ_1 có vtcp $\vec{u_1}=(1;-5)$.
Đường thẳng Δ_2 có vtpt $\vec{n_2}=(2;-10) \Rightarrow \vec{u_2}=(10;2)$.
Ta có $\vec{u_1}\cdot\vec{u_2}=0$, suy ra Δ_1 và Δ_2 vuông góc với nhau.
Chọn đáp án (D) □

Câu 12

Phương trình đường thẳng cắt hai trục toạ độ tại $A(-2;0)$và $B(0;3)$ là

(A) $2x+3y-6=0$. (B) $3x-2y+6=0$. (C) $\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{2}=1$. (D) $3x-2y-6=0$.

Lời giải.

Phương trình đoạn chắn là $\dfrac{x}{-2}+\dfrac{y}{3}=1 \Leftrightarrow 3x-2y+6=0$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 13

Viết phương trình tham số của đường thẳng (d) đi qua điểm $A(1;2)$ và song song với đường thẳng $\Delta\colon 5x-13y-31=0$.

(A) $\begin{cases} x=-1+5t \\ y=2-13t \end{cases}$. (B) $\begin{cases} x=-1-13t \\ y=2+5t \end{cases}$.

(C) $\begin{cases} x = -1 + 13t \\ y = 2 + 5t \end{cases}$.

(D) Không có đường thẳng (D).

Lời giải.

Δ có vec-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (5; -13)$.
Ta có $(d) \parallel \Delta$, do đó (d) có vec-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (5; -13) \Rightarrow (d)$ có vec-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (13; 5)$.
Phương trình tham số của (d): $\begin{cases} x = -1 + 13t \\ y = 2 + 5t. \end{cases}$

Chọn đáp án (C) □

Câu 14

Giả sử đường thẳng (d) có hệ số góc k và đi qua điểm $A(-1; 7)$. Khoảng cách từ gốc toạ độ O đến (d) bằng 5 thì k bằng

(A) $k = \frac{3}{4}$ hoặc $k = -\frac{4}{3}$.

(B) $k = -\frac{3}{4}$ hoặc $k = \frac{4}{3}$.

(C) $k = -\frac{3}{4}$ hoặc $k = -\frac{4}{3}$.

(D) $k = \frac{3}{4}$ hoặc $k = \frac{4}{3}$.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng (d) là $y - 7 = k(x + 1) \Leftrightarrow kx - y + 7 + k = 0$.

$$\mathrm{d}(O, (d)) = 5 \Leftrightarrow \frac{|7 + k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 5 \Leftrightarrow k^2 + 14k + 49 = 25k^2 + 25 \Leftrightarrow 24k^2 - 14k - 24 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = \frac{4}{3} \\ k = -\frac{3}{4}. \end{array}\right.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 15

Tìm côsin góc giữa 2 đường thẳng $\Delta_1 \colon 10x + 5y - 1 = 0$ và $\Delta_2 \colon \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \end{cases}$.

(A) $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

(B) $\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

(C) $\frac{3}{5}$.

(D) $\frac{3}{10}$.

Lời giải.

vec-tơ pháp tuyến của Δ_1, Δ_2 lần lượt là $\vec{n_1} = (2; 1), \vec{n_2} = (1; 1)$.

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = |\cos(\vec{n_1}, \vec{n_2})| = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|\,|\vec{n_2}|} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 16

Cặp đường thẳng nào dưới đây là phân giác của các góc hợp bởi 2 đường thẳng $\Delta_1 \colon 3x + 4y + 1 = 0$ và $\Delta_2 \colon x - 2y + 4 = 0$.

(A) $(3 + \sqrt{5})x + 2(2 + \sqrt{5})y + 1 + 4\sqrt{5} = 0$ và $(3 - \sqrt{5})x + 2(2 - \sqrt{5})y + 1 - 4\sqrt{5} = 0$.

(B) $(3 + \sqrt{5})x + 2(2 - \sqrt{5})y + 1 + 4\sqrt{5} = 0$ và $(3 - \sqrt{5})x + 2(2 + \sqrt{5})y + 1 + 4\sqrt{5} = 0$.

(C) $(3 + \sqrt{5})x + 2(2 - \sqrt{5})y + 1 + 4\sqrt{5} = 0$ và $(3 - \sqrt{5})x + 2(2 + \sqrt{5})y + 1 - 4\sqrt{5} = 0$.

(D) $(3 - \sqrt{5})x + 2(2 - \sqrt{5})y + 1 + 4\sqrt{5} = 0$ và $(3 + \sqrt{5})x + 2(2 + \sqrt{5})y + 1 - 4\sqrt{5} = 0$.

Lời giải.

Cặp đường thẳng là phân giác của các góc tạo bởi Δ_1, Δ_2 là

$$\begin{aligned}
&\frac{|3x+4y+1|}{5} = \frac{|x-2y+4|}{\sqrt{5}} \\
\Leftrightarrow\ &\begin{bmatrix} 3x+4y+1 = \sqrt{5}(x-2y+4) \\ 3x+4y+1 = -\sqrt{5}(x-2y+4) \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow\ &\begin{bmatrix} 3x+4y+1 = \sqrt{5}(x-2y+4) \\ 3x+4y+1 = -\sqrt{5}(x-2y+4) \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow\ &\begin{bmatrix} (3-\sqrt{5})x+2(2-\sqrt{5})y+1+4\sqrt{5}=0 \\ (3+\sqrt{5})x+2(2+\sqrt{5})y+1-4\sqrt{5}=0. \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Chọn đáp án (C) □

Câu 17

Cho ΔABC với $A(4;-3)$; $B(1;1)$, $C\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$. Phân giác trong của góc B có phương trình

(A) $7x-y-6=0$. (B) $7x+y-6=0$. (C) $7x-y+6=0$. (D) $7x+y+6=0$.

Lời giải.

Gọi I là chân đường phân giác trong góc B, ta có

$$\frac{\overrightarrow{IA}}{\overrightarrow{IC}} = -\frac{BA}{BC} = -\frac{\sqrt{(1-4)^2+(1+3)^2}}{\sqrt{(1+1)^2+\left(1+\frac{1}{2}\right)^2}} = -2 \Rightarrow I \begin{cases} x = \dfrac{4+2(-1)}{1+2} = \dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{-3+2\left(-\frac{1}{2}\right)}{3} = -\dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Phân giác trong là đường thẳng qua B, I nên có phương trình

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{y-1}{1+\frac{4}{3}} \Leftrightarrow 7x-y-6=0.$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 18

Điểm $A(a;b)$ thuộc đường thẳng $d\colon \begin{cases} x=3-t \\ y=2-t \end{cases}$ và cách đường thẳng $\Delta\colon 2x-y-3=0$ một khoảng bằng $2\sqrt{5}$ và $a>0$. Tính $P=a\cdot b$.

(A) $P=132$. (B) $P=-72$. (C) $P=72$. (D) $P=-132$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ và có vec-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;-1)$.
Điểm A thuộc đường thẳng $d \Rightarrow A(3-t;2-t)$.

$$\mathrm{d}(A;\Delta) = \frac{|2(3-t)-(2-t)-3|}{\sqrt{2^2+1}} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow |-t+1| = 10 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -t+1=10 \\ -t+1=-10 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t=-9 \\ t=11. \end{bmatrix}$$

Với $t=-9 \Rightarrow A(12;11) \Rightarrow P=a\cdot b=12\cdot 11=132$.
Với $t=11 \Rightarrow A(-8;-2)$ (loại).
Chọn đáp án (A) □

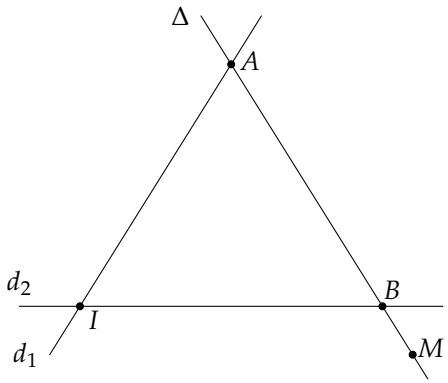
Câu 19

Trong mặt phẳng Oxy, cho $(d_1): 2x-y+5=0$; $(d_2): x+y-3=0$ cắt nhau tại I. Phương trình đường thẳng qua $M(-2;0)$ cắt $(d_1),(d_2)$ lần lượt tại A và B sao cho ΔIAB cân tại A có dạng $ax+by+2=0$. Tính $T=a-5b$.

(A) $T=9$. (B) $T=11$. (C) $T=-9$. (D) $T=-1$.

Lời giải.

(d_1) có một vtpt $\vec{n_1}=(2;-1)$;
(d_2) có một vtpt $\vec{n_2}=(1;\ 1)$.
Gọi $(\Delta): ax+by+2=0$ là đường thẳng đi qua $M(-2;\ 0)$ nên
(Δ) có một vtpt là $\vec{n}=(a;\ b)$.
Ta có tam giác IAB cân tại A nên



$$\begin{aligned}
&\widehat{AIB}=\widehat{ABI}\\
\Leftrightarrow\ &\cos(d_1,d_2)=\cos(\Delta,d_2)\\
\Leftrightarrow\ &\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|}=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{n_2}|}\\
\Leftrightarrow\ &\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{|a+b|}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}}\\
\Leftrightarrow\ &\sqrt{5}\,|a+b|=\sqrt{a^2+b^2}\\
\Leftrightarrow\ &5(a+b)^2=a^2+b^2\Leftrightarrow 2a^2+5ab+2b^2=0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l}a=-2b\\ a=-\dfrac{1}{2}b.\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Với $a=-2b \to$ chọn $b=-1; a=2 \Rightarrow (\Delta): 2x-y+2=0$ song song với (d_1) nên loại.
Với $a=-\dfrac{1}{2}b \to$ chọn $b=-2; a=1 \Rightarrow (\Delta): x-2y+2=0$ (thỏa mãn).
Vậy $T=a-5b=1+10=11$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 20

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng $\Delta: x-2y-5=0$ và các điểm $A(1;2)$, $B(-2;3)$, $C(-2;1)$. Viết phương trình đường thẳng d, biết đường thẳng d đi qua gốc tọa độ và cắt đường thẳng Δ tại điểm M sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất.

(A) $x+y=0$. (B) $x-3y=0$. (C) $2x-3y=0$. (D) $2x+y=0$.

Lời giải.

Gọi $M(2m+5;m)\in\Delta$.
Điểm $G(-1;2)$ là trọng tâm ΔABC.
Khi đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|3\overrightarrow{MG}\right|=3MG$.
Do đó $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MG$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow G$ là hình chiếu vuông góc của G trên Δ.

$\overrightarrow{GM} = (2m+6; m-2)$; VTCP của Δ là $\vec{u} = (2;1)$.
G là hình chiếu vuông góc của G trên Δ nên

$$\overrightarrow{GM} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2(2m+6) + m - 2 = 0 \Leftrightarrow 5m + 10 = 0 \Leftrightarrow m = -2 \Rightarrow M(1;-2).$$

Đường thẳng d qua gốc tọa độ $d\colon y = ax$.
$M(1;-2) \in d \Rightarrow a = -2$ do đó d có phương trình là $2x + y = 0$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 21

Cho hai điểm $P(1;6)$ và $Q(-3;-4)$ và đường thẳng $\Delta\colon 2x - y - 1 = 0$. Tọa độ điểm N thuộc Δ sao cho $|NP - NQ|$ lớn nhất.

(A) $N(1;1)$. (B) $N(-1;-3)$. (C) $N(-9;-19)$. (D) $N(3;5)$.

Lời giải.

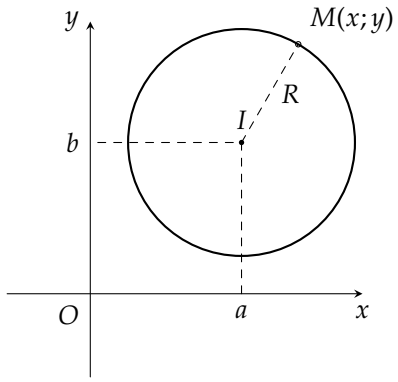
Ta có $(2.1 - 6 - 1).(-2.3 - 4 - 1) = 55 > 0 \Rightarrow P$ và Q cùng phía so với Δ.
Phương trình đường thẳng $PQ\colon 5x - 2y + 7 = 0$.
Gọi $H = \Delta \cap PQ$, tọa độ H là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ 5x - 2y + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -9 \\ y = -19 \end{cases}$.
Hay $H(-9;-19)$.
Với mọi điểm $N \in \Delta$ thì $|NP - NQ| \le |HP - HQ| = |PQ| \Rightarrow |NP - NQ|_{\max} = |PQ|$.
Dấu bằng xảy ra khi N trùng H.
Chọn đáp án (C) □

§3. ĐƯỜNG TRÒN TRONG MẶT PHẲNG TỌA ĐỘ

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Phương trình đường tròn

Đường tròn tâm I, bán kính R là tập hợp những điểm M thoả mãn điều kiện $IM = R$.



Định nghĩa 3.1. Trong mặt phẳng Oxy, điểm $M(x;y)$ thuộc đường tròn (C), tâm $I(a;b)$, bán kính R khi và chỉ khi

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \tag{1}$$

Ta gọi (1) là phương trình của đường tròn (C).

Ví dụ 1

a) Tìm tâm và bán kính của đường tròn (C) có phương trình $(x+1)^2+(y-2)^2=3$.

b) Viết phương trình đường tròn (C') có tâm $I'(2;0)$ và có bán kính bằng $\sqrt{3}$ lần bán kính đường tròn (C).

Lời giải.

a) Ta viết phương trình đường tròn (C) dưới dạng

$$(x-(-1))^2+(y-2)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2.$$

Vậy (C) có tâm $I(-1;2)$ và bán kính $R=\sqrt{3}$.

b) Đường tròn (C') có tâm $I'(2;0)$ và có bán kính $R'=\sqrt{3}\cdot R=3$ nên có phương trình

$$(x-2)^2+y^2=9.$$

□

Phương trình (1) *tương đương với*

$$x^2+y^2-2ax-2by+\left(a^2+b^2-R^2\right)=0.$$

Ví dụ 2

Cho a, b, c là các hằng số. Tìm tập hợp những điểm $M(x;y)$ thoả mãn phương trình

$$x^2+y^2-2ax-2by+c=0. \quad (2)$$

Lời giải.

Phương trình (2) tương đương với

$$(x-a)^2+(y-b)^2+c-a^2-b^2=0 \Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2-c.$$

Xét $I(a;b)$, khi đó, $IM=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ và phương trình trên trở thành

$$IM^2=a^2+b^2-c. \quad (3)$$

Từ đó, ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $a^2+b^2-c>0$ thì tập hợp những điểm M thoả mãn (2) là đường tròn tâm $I(a;b)$, bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.
- Nếu $a^2+b^2-c=0$ thì (3) $\Leftrightarrow IM=0$. Do đó, tập hợp những điểm M thoả mãn (2) chỉ gồm một điểm là $I(a;b)$.
- Nếu $a^2+b^2-c<0$ thì tập hợp những điểm M là tập rỗng.

□

Phương trình $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ là phương trình của một đường tròn (C) khi và chỉ khi $a^2+b^2-c>0$. Khi đó, (C) có tâm $I(a;b)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

Ví dụ 3

Xét xem các phương trình sau có là phương trình của đường tròn không? Hãy xác định tâm và bán kính của các đường tròn đó (nếu có).

a) $x^2+y^2+2x-6y-15=0$. (1)

b) $2x^2+2y^2+4x+8y+14=0$. (2)

Lời giải.

a) Ta có $\begin{cases}-2a=2\\-2b=-6\\c=-15\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-1\\b=3\\c=-15\end{cases} \Rightarrow a^2+b^2-c=25>0.$

Vậy phương trình (1) là phương trình của đường tròn (C) có tâm $I(-1;3)$ và bán kính $R=5$.

b) (2) $\Leftrightarrow x^2+y^2+2x+4y+7=0$.

Ta có $\begin{cases}-2a=2\\-2b=4\\c=7\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-1\\b=-2\\c=7\end{cases} \Rightarrow a^2+b^2-c=-2<0.$

Vậy phương trình (2) không là phương trình của đường tròn.

□

Ví dụ 4

Lập phương trình đường tròn đi qua ba điểm $A(-2;4)$, $B(5;5)$, $C(6;-2)$.

Lời giải.

Cách 1. Các đoạn thẳng AB, AC tương ứng có trung điểm là $M\left(\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right)$, $N(2;1)$. Đường thẳng trung trực Δ_1 của đoạn thẳng AB đi qua $M\left(\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{AB}=(7;1)$ nên phương trình của đường thẳng Δ_1 là

$$7\left(x-\frac{3}{2}\right)+1\left(y-\frac{9}{2}\right)=0 \text{ hay } 7x+y-15=0.$$

Đường thẳng trung trực Δ_2 của đoạn thẳng AC đi qua $N(2;1)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{AC}=(8;-6)$.
Vì $\overrightarrow{AC}=(8;-6)$ cùng phương với $\overrightarrow{n_2}=(4;-3)$ nên phương trình của đường thẳng Δ_2 là

$$4(x-2)-3(y-1)=0 \text{ hay } 4x-3y-5=0.$$

Tâm I của đường tròn (C) cách đều ba điểm A, B, C nên I là giao điểm của Δ_1 và Δ_2
Vậy toạ độ điểm I là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}7x+y-15=0\\4x-3y-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1.\end{cases}$$

Suy ra $I(2;1)$. Đường tròn (C) có bán kính $IA=5$.
Vậy phương trình đường tròn (C) là

$$(C):(x-2)^2+(y-1)^2=25.$$

Cách 2. Gọi phương trình đường tròn (C) có dạng là: $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$.
Do đường tròn đi qua ba điểm A, B, C nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}A(-2;4)\in(C)\\B(5;5)\in(C)\\C(6;-2)\in(C)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4+16+4a-8b+c=0\\25+25-10a-10b+c=0\\36+4-12a+4b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\\c=-20.\end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $x^2+y^2-4x-2y-20=0$.

Cách 3. Gọi $I(x;y)$ và R là tâm và bán kính đường tròn cần tìm. Ta suy ra:

$$IA=IB=IC\Leftrightarrow\begin{cases}IA^2=IB^2\\IA^2=IC^2.\end{cases}$$

nên ta có hệ

$$\begin{cases}(x+2)^2+(y-4)^2=(x-5)^2+(y-5)^2\\(x+2)^2+(y-4)^2=(x-6)^2+(y+2)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1.\end{cases}$$

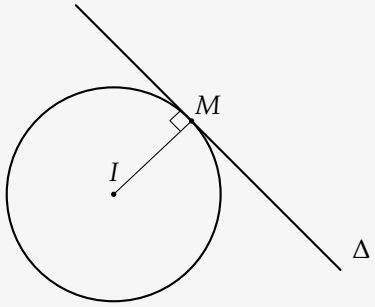
Suy ra $I(2;1)$, bán kính $IA=5$.
Vậy phương trình đường tròn cần tìm $(C):(x-2)^2+(y-1)^2=25$.

□

2. Phương trình tiếp tuyến đường tròn

Định nghĩa 3.2. Cho điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ thuộc đường tròn (C): $(x-a)^2+\left(y-b\right)^2=R^2$ (tâm $I(a;b)$, bán kính R). Khi đó, tiếp tuyến Δ của (C) tại $M\left(x_0;y_0\right)$ có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{MI}=\left(a-x_0;b-y_0\right)$ và phương trình

$$\left(a-x_0\right)\left(x-x_0\right)+\left(b-y_0\right)\left(y-y_0\right)=0.$$



Ví dụ 5

Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C):(x-2)^2+(y+3)^2=5$ tại điểm $M(3;-1)$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(2;-3)$.
Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(3;-1)$ là

$$\begin{aligned}&(3-2)(x-3)+(-1+3)(y+1)=0\\\Leftrightarrow\ &x+2y-1=0.\end{aligned}$$

Vậy phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(3;-1)$ là $x+2y-1=0$. □

Ví dụ 6

Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C):x^2+y^2-2x=0$ tại điểm $M(1;1)$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1;0)$.
Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(1;1)$ là

$$\begin{aligned}&(1-1)(x-1)+(0+1)(y-1)=0\\\Leftrightarrow\ &y=1.\end{aligned}$$

□

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1 Tìm tâm và bán kính đường tròn.

Phương pháp giải.

- *Cách 1.* Đưa phương trình về dạng $(C):x^2+y^2-2ax-2by+c=0.$ (1)
  - Nếu $a^2+b^2-c>0$ thì (1) là phương trình đường tròn (C) có tâm $I\left(a;b\right)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

- Nếu $a^2+b^2-c\le 0$ thì (1) không phải là phương trình đường tròn.

Cách 2. Đưa phương trình về dạng $(x-a)^2+(y-b)^2=m$. (2)

- Nếu $m>0$ thì (2) là phương trình đường tròn có tâm $I(a;b)$ và bán kính $R=\sqrt{m}$.
- Nếu $m\le 0$ thì (2) không phải là phương trình đường tròn.

Ví dụ 1

Xét xem các phương trình sau có là phương trình của đường tròn không? Hãy xác định tâm và bán kính của các đường tròn đó (nếu có).

a) $x^2+y^2+2x-4y+9=0$. (1)

b) $x^2+y^2-6x+4y+13=0$. (2)

c) $2x^2+2y^2-6x-4y-1=0$. (3)

d) $2x^2+y^2+2x-3y+9=0$. (4)

Lời giải.

a) Phương trình (1) có dạng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ với $a=-1;b=2;c=9$.
Ta có $a^2+b^2-c=1+4-9<0$.
Vậy phương trình (1) không phải là phương trình đường tròn.

b) Ta có $a^2+b^2-c=9+4-13=0$.
Suy ra phương trình (2) không phải là phương trình đường tròn.

c) Ta có (3) $\Leftrightarrow x^2+y^2-3x-2y-\dfrac{1}{2}=0\Leftrightarrow\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+(y-1)^2=\dfrac{15}{4}$.
Vậy phương trình (3) là phương trình đường tròn tâm $I\left(\dfrac{3}{2};1\right)$ bán kính $R=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$.

d) Phương trình (4) không phải là phương trình đường tròn vì hệ số của x^2 và y^2 khác nhau.

□

Ví dụ 2

Cho phương trình $x^2+y^2-2mx-4(m-2)y+6-m=0$. (1)
Tìm điều kiện của m để (1) là phương trình đường tròn.

Lời giải.

Ta có $a=m,b=2(m-2),c=6-m$.
Phương trình (1) là phương trình đường tròn khi và chỉ khi $a^2+b^2-c>0$.
Hay $m^2+4(m-2)^2-6+m>0\Leftrightarrow 5m^2-15m+10>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>2\\m<1.\end{array}\right.$ □

Dạng 2 Viết phương trình đường tròn.

Phương pháp giải.

- *Cách 1.*
  - Tìm tọa độ tâm $I(a;b)$ của đường tròn (C).
  - Tìm bán kính R của đường tròn (C).
  - Viết phương trình của (C) theo dạng $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.
- *Cách 2.*
  - Giả sử phương trình đường tròn (C) là $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ (hoặc $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$) $(a^2+b^2-c>0)$.
  - Từ điều kiện của đề bài thiết lập hệ phương trình với ba ẩn là a, b, c.
  - Giải hệ để tìm a, b, c, từ đó tìm được phương trình đường tròn (C).

Chú ý.

- Cho đường tròn (C) có tâm I và bán kính R. $A\in(C)\Leftrightarrow IA=R$.
- (C) tiếp xúc với đường thẳng Δ tại $A\Leftrightarrow IA=\mathrm{d}(I;\Delta)=R$.
- (C) tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1 và $\Delta_2\Leftrightarrow \mathrm{d}(I;\Delta_1)=\mathrm{d}(I;\Delta_2)=R$.
- (C) cắt đường thẳng Δ_3 theo dây cung có độ dài $a\Leftrightarrow(\mathrm{d}(I;\Delta_3))^2+\dfrac{a^2}{4}=R^2$.

Ví dụ 1

Viết phương trình đường tròn có tâm $I(3;-5)$ bán kính $R=2$.

Lời giải.

Ta có phương trình đường tròn là $(x-3)^2+(y+5)^2=2^2\Leftrightarrow x^2+y^2-6x+10y+30=0$. □

Ví dụ 2

Viết phương trình đường tròn đường kính AB với $A(1;6)$, $B(-3;2)$.

Lời giải.

Đường tròn đường kính AB có

- Tâm $I(-1;4)$ là trung điểm AB.
- Bán kính $R=\dfrac{AB}{2}=2\sqrt{2}$.

Do đó phương trình đường tròn là
$(x+1)^2+(y-4)^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2\Leftrightarrow x^2+y^2+2x-8y+9=0$. □

Ví dụ 3

Viết phương trình đường tròn (C) có tâm $I(-1;2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta\colon x-2y+7=0$.

Lời giải.

Bán kính đường tròn (C) chính là khoảng cách từ I tới đường thẳng Δ nên

$$R=\mathrm{d}(I;\Delta)=\frac{|-1-4+7|}{\sqrt{1+4}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Vậy phương trình đường tròn (C) là $(x+1)^2+(y-2)^2=\dfrac{4}{5}$. □

Ví dụ 4

Viết phương trình đường tròn tâm $I(-2;1)$, cắt đường thẳng $\Delta\colon x-2y+3=0$ tại hai điểm A,B thỏa mãn $AB=2$.

Lời giải.

Gọi h là khoảng cách từ I đến đường thẳng Δ. Ta có

$$h=\mathrm{d}(I,\Delta)=\frac{|-2-2+3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Gọi R là bán kính đường tròn, từ giả thiết suy ra

$$R=\sqrt{h^2+\frac{AB^2}{4}}=\sqrt{\frac{1}{5}+\frac{2^2}{4}}=\sqrt{\frac{6}{5}}.$$

Vậy phương trình đường tròn là $(x+2)^2+(y-1)^2=\dfrac{6}{5}$. □

Ví dụ 5

Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm $M(-2;4)$, $N(5;5)$, $P(6;-2)$.

Lời giải.

Cách 1. Gọi phương trình đường tròn (C) có dạng là $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$.
Do đường tròn đi qua ba điểm M,N,P nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}4+16+4a-8b+c=0\\25+25-10a-10b+c=0\\36+4-12a+4b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\\c=-20.\end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $x^2+y^2-4x-2y-20=0$.

Cách 2. Gọi $I(x;y)$ và R là tâm và bán kính đường tròn cần tìm. Ta suy ra

$$IM = IN = IP \Leftrightarrow \begin{cases} IM^2 = IN^2 \\ IM^2 = IP^2. \end{cases}$$

nên ta có hệ

$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y-4)^2 = (x-5)^2 + (y-5)^2 \\ (x+2)^2 + (y-4)^2 = (x-6)^2 + (y+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1. \end{cases}$$

Suy ra $I(2;1)$, bán kính $IA = 5$.
Vậy phương trình đường tròn cần tìm (C): $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$.

□

Ví dụ 6

Cho hai điểm $A(8;0)$ và $B(0;6)$.

a) Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB.

b) Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB.

Lời giải.

a) Ta có tam giác OAB vuông ở O nên tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm của cạnh huyền AB suy ra $I(4;3)$ và bán kính

$$R = IA = \sqrt{(8-4)^2 + (0-3)^2} = 5.$$

Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$.

b) Ta có $OA = 8; OB = 6; AB = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$.
Mặt khác $\dfrac{1}{2} OA \cdot OB = pr$ (vì cùng bằng diện tích tam giác ABC).
Suy ra $r = \dfrac{OA \cdot OB}{OA + OB + AB} = 2$.
Dễ thấy đường tròn cần tìm có tâm thuộc góc phần tư thứ nhất và tiếp xúc với hai trục tọa độ nên tâm của đường tròn có tọa độ là $(2;2)$.
Vậy phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB là $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$.

□

Ví dụ 7

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng d: $2x - y - 5 = 0$ và hai điểm $A(1;2)$, $B(4;1)$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm thuộc d và đi qua hai điểm A, B.

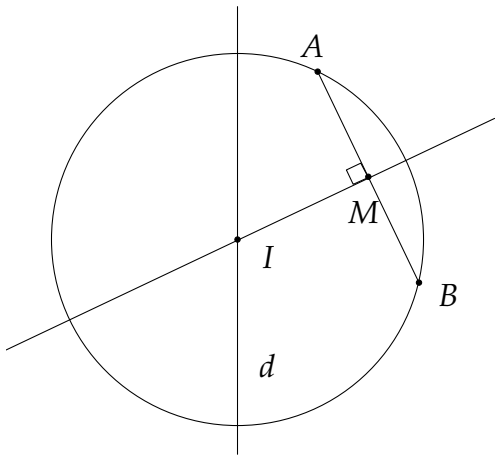
Lời giải.

Cách 1. Gọi I là tâm của (C). Do $I \in d$ nên $I(t; 2t-5)$.
Hai điểm A, B cùng thuộc (C) nên

$$IA = IB \Leftrightarrow (1-t)^2 + (7-2t)^2 = (4-t)^2 + (6-2t)^2$$
$$\Leftrightarrow t = 1.$$

Suy ra $I(1;-3)$ và bán kính $R = IA = 5$.
Vậy phương trình đường tròn cần tìm là

$$(C)\colon (x-1)^2 + (y+3)^2 = 25.$$



Cách 2. Gọi $M\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right)$ là trung điểm AB. Đường trung trực của đoạn AB đi qua M và nhận $\overrightarrow{AB} = (3;-1)$ làm véc-tơ pháp tuyến nên có phương trình $\Delta\colon 3x - y - 6 = 0$.
Tọa độ tâm I của (C) là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ 3x - y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow I(1;-3)$.
Bán kính của đường tròn bằng $R = IA = 5$.
Vậy phương trình đường tròn cần tìm $(C)\colon (x-1)^2 + (y+3)^2 = 25$.

□

Ví dụ 8

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1\colon x + 3y + 8 = 0$, $d_2\colon 3x - 4y + 10 = 0$ và điểm $A(-2;1)$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm thuộc d_1, đi qua điểm A và tiếp xúc với d_2.

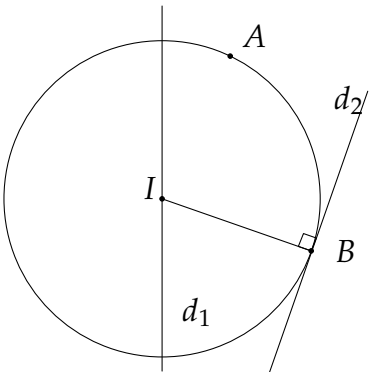
Lời giải.

Gọi I là tâm của (C). Do $I \in d_1$ nên $I(-3t-8; t)$.
Theo giả thiết bài toán, ta có

$$\mathrm{d}(I, d_2) = IA \Leftrightarrow \frac{|3(-3t-8) - 4t + 10|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \sqrt{(-3t-8+2)^2 + (t-1)^2}$$
$$\Leftrightarrow t = -3.$$

Suy ra $I(1;-3)$ và bán kính $R = IA = 5$.
Vậy phương trình đường tròn cần tìm là

$$(C)\colon (x-1)^2 + (y+3)^2 = 25.$$



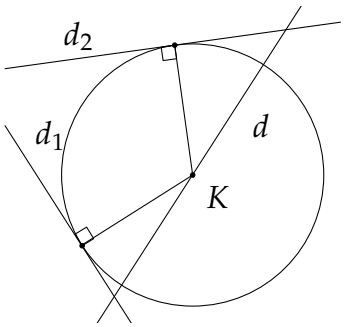
□

Ví dụ 9

Viết phương trình đường tròn (C) có tâm nằm trên đường thẳng $d\colon x - 6y - 10 = 0$ và tiếp xúc với hai đường thẳng có phương trình $d_1\colon 3x + 4y + 5 = 0$ và $d_2\colon 4x - 3y - 5 = 0$.

Lời giải.

Vì đường tròn cần tìm có tâm K nằm trên đường thẳng d nên gọi $K(6a+10;a)$ Mặt khác đường tròn tiếp xúc với d_1, d_2 nên khoảng cách từ tâm K đến hai đường thẳng này bằng nhau và bằng bán kính R suy ra



$$\frac{|3(6a+10)+4a+5|}{5} = \frac{|4(6a+10)-3a-5|}{5}$$
$$\Leftrightarrow \quad |22a+35| = |21a+35|$$
$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=\dfrac{-70}{43}. \end{array}\right.$$

- Với $a=0$ thì $K(10;0)$ và $R=7$ suy ra $(C)\colon\ (x-10)^2+y^2=49$.
- Với $a=\dfrac{-70}{43}$ thì $K\left(\dfrac{10}{43};\dfrac{-70}{43}\right)$ và $R=\dfrac{7}{43}$ suy ra

$$(C)\colon\ \left(x-\frac{10}{43}\right)^2+\left(y+\frac{70}{43}\right)^2=\left(\frac{7}{43}\right)^2.$$

Vậy có hai đường tròn thỏa mãn có phương trình là
$(C)\colon\ (x-10)^2+y^2=49$ và $(C)\colon\ \left(x-\dfrac{10}{43}\right)^2+\left(y+\dfrac{70}{43}\right)^2=\left(\dfrac{7}{43}\right)^2$. □

Ví dụ 10

Viết phương trình đường tròn tâm I thuộc đường thẳng $d_1\colon x-y+1=0$, bán kính $R=2$ và cắt đường thẳng $d_2\colon 3x-4y=0$ tại hai điểm A, B thỏa mãn $AB=2\sqrt{3}$.

Lời giải.

Tâm I thuộc đường thẳng d_1 nên suy ra $I(a;a+1)$.

$$\mathrm{d}(I,d_2)=\sqrt{R^2-\frac{AB^2}{4}}=\sqrt{4-\frac{12}{4}}=1.$$

Do đó

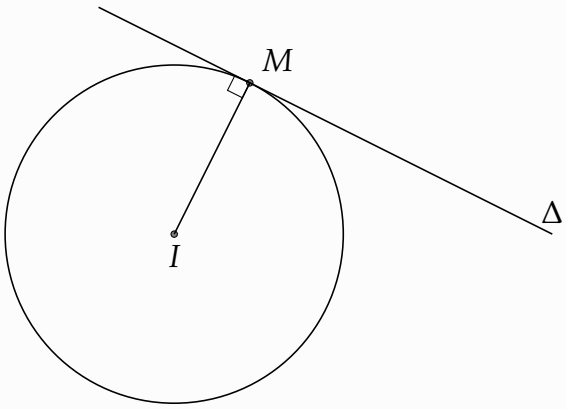
$$\frac{|3a-4(a+1)|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1 \Leftrightarrow |-a-4|=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-9. \end{array}\right.$$

- Với $a=1$ ta có $I(1;2)$, phương trình đường tròn là $(x-1)^2+(y-2)^2=4$.
- Với $a=-9$ ta có $I(-9;-8)$, phương trình đường tròn là $(x+9)^2+(y+8)^2=4$.

□

Dạng 3 Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn tại một điểm

Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) của đường tròn (C) tâm $I(a,b)$, tại điểm $M(x_0,y_0)\in(C)$.
Ta có $\overrightarrow{IM}=(x_0-a;y_0-b)$ là véc-tơ pháp tuyến của Δ.
Do đó Δ có phương trình là $(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-y_0)=0$.



Ví dụ 1

Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C)\colon (x-2)^2+(y+3)^2=5$ tại điểm $M(3;-1)$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(2;-3)$.
Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(3;-1)$ là

$$\begin{aligned}&(3-2)(x-3)+(-1+3)(y+1)=0\\ \Leftrightarrow &x+2y-1=0.\end{aligned}$$

Vậy phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(3;-1)$ là $x+2y-1=0$. □

Ví dụ 2

Cho đường tròn $(C_m)\colon x^2+y^2+2(m-1)x-2my-4=0$. Biết rằng khi m thay đổi, đường tròn (C_m) luôn đi qua điểm I cố định có hoành độ dương. Tìm giá trị của m sao cho tiếp tuyến của đường tròn (C_m) tại I song song với $(d)\colon x-2y-1=0$.

Lời giải.

Giả sử đường tròn (C_m) luôn đi qua điểm $I(x_0;y_0)$ cố định khi m thay đổi.
Khi đó ta có

$$\begin{aligned}&x_0^2+y_0^2+2(m-1)x_0-2my_0-4=0 \text{ với mọi } m\\ \Leftrightarrow &m(2x_0-2y_0)+x_0^2+y_0^2-2x_0-4=0 \text{ với mọi } m\\ \Leftrightarrow &\begin{cases}x_0=y_0\\ x_0^2+y_0^2-2x_0-4=0\end{cases}\\ \Leftrightarrow &\begin{cases}x_0=y_0\\ 2x_0^2-2x_0-4=0\end{cases}\\ \Leftrightarrow &\left[\begin{array}{l}x_0=y_0=-1\\ x_0=y_0=2.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy ta có điểm $I(2;2)$.
Đường tròn (C_m) có tâm $J(1-m;m)$. Véc-tơ pháp tuyến của tiếp tuyến của (C_m) tại I là $\overrightarrow{IJ}=(-m-$

$1; m-2)$.
Để tiếp tuyến tại I song song với $(d)\colon x-2y-1=0$ thì tồn tại k sao cho

$$\vec{IJ}=k(1;-2)\Leftrightarrow\begin{cases}-m-1=k\\ m-2=-2k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-4\\ k=3.\end{cases}$$

Vậy $m=-4$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. □

Dạng 4 Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn đi qua một điểm

Cho đường tròn (C) có tâm $I(a,b)$ và bán kính R. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $M(x_0,y_0)$.

a) Nếu $IM<R$ thì không có tiếp tuyến nào đi qua M.

b) Nếu $IM=R$ thì ta giải theo dạng 1.

c) Nếu $IM>R$ thì ta thực hiện theo các bước bên dưới.

- Gọi phương trình tiếp tuyến (Δ) của (C) đi qua M có dạng $m(x-x_0)+n(y-y_0)=0$, trong đó $m^2+n^2\neq 0$.
- Sử dụng điều kiện tiếp xúc của tiếp tuyến với đường tròn ta có $\mathrm{d}(I,\Delta)=R$. Giải phương trình trên ta tìm được quan hệ giữa a,b.

Ví dụ 1

Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) của đường tròn $(C)\colon (x-1)^2+(y-2)^2=8$ biết tiếp tuyến đi qua điểm $M(3;-2)$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R=\sqrt{8}$.
Ta có $IM=\sqrt{(3-1)^2+(-2-2)^2}=2\sqrt{5}$.
Gọi phương trình tiếp tuyến (Δ) của (C) và đi qua $M(3;-2)$ là $a(x-3)+b(y+2)=0$ $(a^2+b^2\neq 0)$.
Ta có $\mathrm{d}(I,\Delta)=\dfrac{|a(1-3)+b(2+2)|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{8}\Leftrightarrow\dfrac{|-2a+4b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{8}$.
Phương trình trên tương đương với

$$\begin{aligned}&|-2a+4b|=\sqrt{8a^2+8b^2}\\ \Leftrightarrow&(2a-4b)^2=8a^2+8b^2\\ \Leftrightarrow&8b^2-16ab-4a^2=0\\ \Leftrightarrow&2b^2-4ab-a^2=0\\ \Leftrightarrow&\left[\begin{array}{l}b=\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}a\\ b=\dfrac{2-\sqrt{6}}{2}a.\end{array}\right.\end{aligned}$$

- Nếu $b=\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}a$ thì ta chọn $a=2\Rightarrow b=2+\sqrt{6}$.
  Khi đó phương trình của tiếp tuyến (Δ) là

$$2(x-3)+(2+\sqrt{6})(y+2)=0 \text{ hay } 2x+(2+\sqrt{6})y+2\sqrt{6}-2=0.$$

Nếu $b=\dfrac{2-\sqrt{6}}{2}a$ thì ta chọn $a=2\Rightarrow b=2-\sqrt{6}$.
Khi đó phương trình của tiếp tuyến (Δ) là

$$2(x-3)+(2-\sqrt{6})(y+2)=0 \text{ hay } 2x+(2-\sqrt{6})y-2\sqrt{6}-2=0.$$

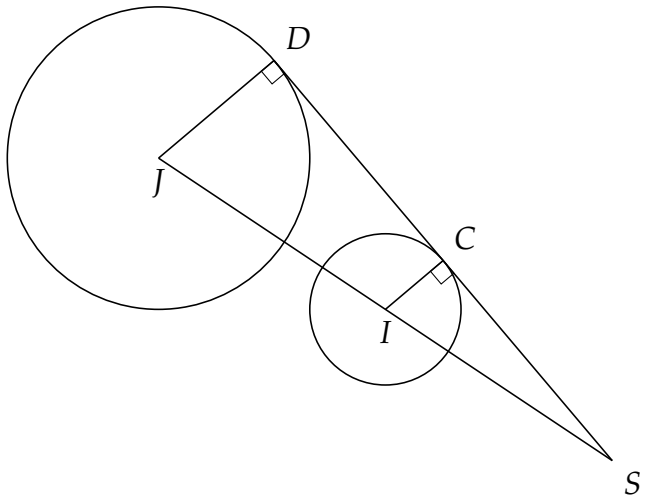
□

Ví dụ 2

Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn $(C_1)\colon x^2+y^2-2x+2y+1=0$ và $(C_2)\colon x^2+y^2+4x-2y+1=0$ sao cho (C_1)và (C_2) nằm cùng một nửa mặt phẳng bờ là tiếp tuyến đó (tiếp tuyến này được gọi là tiếp tuyến chung ngoài).

Lời giải.

Đường tròn (C_1) có tâm $I(1;-1)$ và bán kính $R_1=1$. Đường tròn (C_2) có tâm $J(-2;1)$ và bán kính $R_2=2$.



Gọi S là giao điểm của tiếp tuyến ngoài và IJ. Gọi C,D lần lượt là tiếp điểm của tiếp tuyến với đường tròn (C_1) và (C_2).
Theo định lý Thales ta có $\dfrac{SI}{SJ}=\dfrac{CI}{DJ}=\dfrac{1}{2}$.
Vì vậy ta có $\overrightarrow{SJ}=2\overrightarrow{SI}$. Do đó $\overrightarrow{OS}=2\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OJ}\Rightarrow S(4;-3)$.
Gọi phương trình tiếp tuyến (Δ) tiếp xúc với $(C_1),(C_2)$ và đi qua S là $a(x-4)+b(y+3)=0$ trong đó $a^2+b^2>0$.
Ta có

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(I,\Delta)=\frac{|2b-3a|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1&\Leftrightarrow |2b-3a|=\sqrt{a^2+b^2}\\&\Leftrightarrow 8a^2-12ab+3b^2=0\\&\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}b\\ a=\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}b.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Nếu $a=\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}b$ thì ta chọn $b=4\Rightarrow a=3+\sqrt{3}$. Khi đó phương trình tiếp tuyến (Δ) là

$$(3+\sqrt{3})x+4y-4\sqrt{3}=0.$$

Nếu $a=\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}b$ thì ta chọn $b=4\Rightarrow a=3-\sqrt{3}$. Khi đó phương trình tiếp tuyến (Δ) là

$$(3-\sqrt{3})x+4y+4\sqrt{3}=0.$$

□

Dạng 5 Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn thỏa mãn điều kiện cho trước

Cho đường tròn (C) có tâm $I(a,b)$ và bán kính R. Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) của (C) có phương xác định trước.

- Viết dạng phương trình tổng quát của Δ.
- Sử dụng điều kiện cho trước và $\mathrm{d}(I,\Delta)=R$ để tìm phương trình tổng quát của Δ.

Ví dụ 1

Tìm điều kiện của tham số a để đường thẳng $(\Delta)\colon x+(a-1)y-a=0$ tiếp xúc với đường tròn $(C)\colon x^2+y^2-2x+4y+2=0$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+2^2-2}=\sqrt{3}$.
Để đường thẳng (Δ) là tiếp tuyến của đường tròn (C) thì

$$\begin{aligned}\mathrm{d}(I,\Delta)=R&\Leftrightarrow\frac{|1-2(a-1)-a|}{\sqrt{1+(a-1)^2}}=\sqrt{3}\\&\Leftrightarrow\frac{|3-3a|}{\sqrt{a^2-2a+2}}=\sqrt{3}\\&\Leftrightarrow|3-3a|=\sqrt{3a^2-6a+6}\\&\Leftrightarrow(3-3a)^2=3a^2-6a+6\\&\Leftrightarrow 2a^2-4a+1=0\\&\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\a=1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}.\end{array}\right.\end{aligned}$$

Vậy $a=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ hoặc $a=1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ thỏa mãn đề bài. □

Ví dụ 2

Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) của đường tròn $(C)\colon x^2+y^2-2x+4y+4=0$ biết rằng tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x+2y+5=0$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$ và bán kính $R=1$.
Vì Δ vuông góc với đường thẳng $x+2y+5=0$ nên phương trình Δ có dạng $2x-y+m=0$.

Vì Δ là tiếp tuyến của (C) nên ta có

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(I,\Delta)=R &\Leftrightarrow \frac{|2+2+m|}{\sqrt{1^2+2^2}}=1\\ &\Leftrightarrow |4+m|=\sqrt{5}\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\sqrt{5}-4\\ m=-\sqrt{5}-4. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Nếu $m=\sqrt{5}-4$ thì phương trình của Δ là $2x-y+\sqrt{5}-4=0$.
Nếu $m=-\sqrt{5}-4$ thì phương trình của Δ là $2x-y-\sqrt{5}-4=0$. □

Ví dụ 3

Viết phương trình tiếp tuyến (Δ) của đường tròn (C): $x^2+y^2-2x-4y+4=0$ biết rằng tiếp tuyến hợp với đường thẳng (d): $x+y-5=0$ một góc 45°.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+2^2-4}=1$.
Gọi véc-tơ pháp tuyến của Δ là $\vec{n}_1=(a;b)$ trong đó $a^2+b^2\neq 0$.
Véc-tơ pháp tuyến của d là $\vec{n}_2=(1;1)$.
Vì (Δ) tạo với d một góc 60° nên ta có

$$\begin{aligned} |\cos(\vec{n_1},\vec{n_2})|=\cos 45^\circ &\Leftrightarrow \frac{|a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &\Leftrightarrow |a+b|=\sqrt{a^2+b^2}\\ &\Leftrightarrow (a+b)^2=a^2+b^2\\ &\Leftrightarrow ab=0\\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0\\ b=0. \end{array}\right. \end{aligned}$$

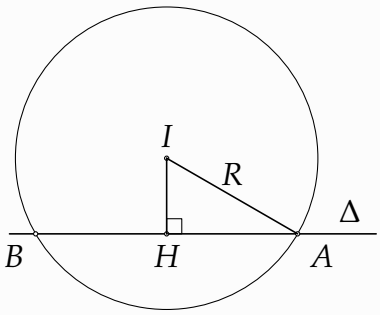
- Với $a=0$, phương trình Δ có dạng $y+m=0$.
  Có $\mathrm{d}(I,\Delta)=R\Leftrightarrow \dfrac{|2+m|}{1}=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1\\ m=-3. \end{array}\right.$
  Khi đó phương trình tiếp tuyến Δ là $y-1=0$ hoặc $y-3=0$.
- Với $b=0$, phương trình Δ có dạng $x+m=0$.
  Có $\mathrm{d}(I,\Delta)=R\Leftrightarrow \dfrac{|1+m|}{1}=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0\\ m=-2. \end{array}\right.$
  Khi đó phương trình tiếp tuyến Δ là $x=0$ hoặc $x-2=0$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm Δ là $y-1=0$ hoặc $y-3=0$ hoặc $x=0$ hoặc $x-2=0$. □

Dạng 6 Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn

Cho đường thẳng Δ: $ax+by+c=0$ và đường tròn $(\mathcal{C})$ có tâm $I(x_0;y_0)$, bán kính R. Đường thẳng Δ và đường tròn $(\mathcal{C})$ có ba vị trí tương đối.

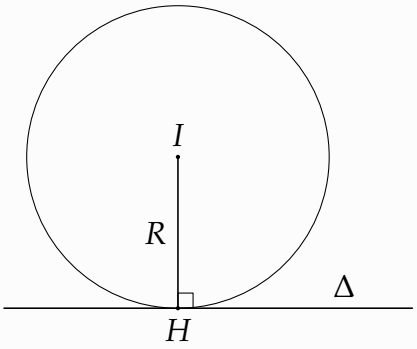
- Đường thẳng Δ và đường tròn $(\mathcal{C})$ có hai điểm chung, ta nói Δ và $(\mathcal{C})$ cắt nhau.



Hệ thức liên hệ giữa bán kính và khoảng cách từ tâm đường tròn $(\mathcal{C})$ đến đường thẳng Δ là

$$\mathrm{d}(I,\Delta)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}<R.$$

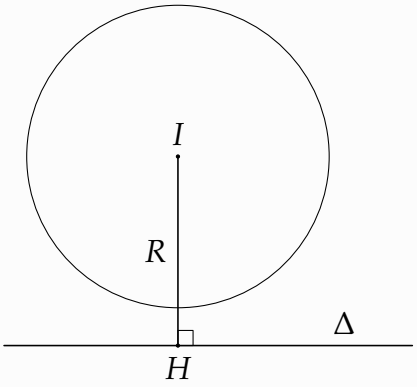
- Đường thẳng Δ và đường tròn $(\mathcal{C})$ có một điểm chung, ta nói Δ tiếp xúc với $(\mathcal{C})$. Đường thẳng Δ còn được gọi là tiếp tuyến của đường tròn $(\mathcal{C})$.



Hệ thức liên hệ giữa bán kính và khoảng cách từ tâm đường tròn $(\mathcal{C})$ đến đường thẳng Δ là

$$\mathrm{d}(I,\Delta)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=R.$$

- Đường thẳng Δ và đường tròn $(\mathcal{C})$ không có điểm chung nào, ta nói Δ và $(\mathcal{C})$ không cắt nhau.



Hệ thức liên hệ giữa bán kính và khoảng cách từ tâm đường tròn $(\mathcal{C})$ đến đường thẳng Δ là

$$\mathrm{d}(I,\Delta)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}>R.$$

Khi đường thẳng Δ cho bởi phương trình tham số $\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\end{cases}$. *Để xét vị trí tương đối với đường tròn $(\mathcal{C})$ ta có thể làm hai cách*

a) Từ phương trình tham số chuyển về phương trình tổng quát, xét vị trí tương đối giống như trên.

b) Thế phương trình tham số vào phương trình của đường tròn $(\mathcal{C})$ ta được phương trình bậc hai có ẩn t, kí hiệu phương trình $(*)$.

- *Phương trình $(*)$ vô nghiệm. Ta nói Δ và $(\mathcal{C})$ không cắt nhau.*
- *Phương trình $(*)$ có một nghiệm. Ta nói Δ tiếp xúc với $(\mathcal{C})$.*
- *Phương trình $(*)$ có hai nghiệm. Ta nói Δ và $(\mathcal{C})$ cắt nhau.*

Khi đường thẳng Δ cho bởi phương trình tổng quát $\Delta\colon ax+by+c=0$, để xét vị trí tương đối của Δ và đường tròn $(C)\colon x^2+y^2+2Ax+2By+C=0$, người ta xét hệ phương trình

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ x^2+y^2+2Ax+2By+C=0. \end{cases} \quad (*)$$

a) Hệ $(*)$ có hai nghiệm. Ta nói Δ và (C) cắt nhau.

b) Hệ $(*)$ có một nghiệm. Ta nói Δ tiếp xúc với (C).

c) Hệ $(*)$ có vô nghiệm. Ta nói Δ và (C) không cắt nhau.

Ví dụ 1

Cho đường thẳng $\Delta\colon x-2y+5=0$ và đường tròn $(C)\colon (x-2)^2+y^2=4$. Xét vị trí tương đối của Δ và (C).

Lời giải.

(C) có tâm $I(2;0)$ và bán kính $R=2$.

Ta có $\mathrm{d}(I,\Delta)=\dfrac{|2-2.0+5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{7\sqrt{5}}{5}>2$.

Vậy Δ và (C) không cắt nhau. □

Ví dụ 2

Cho đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x=-5-2t \\ y=t \end{cases}$ và đường tròn $(C)\colon x^2+y^2-4x+2y=0$. Xét vị trí tương đối của Δ và (C).

Lời giải.

Thế phương trình của Δ vào phương trình (C) ta được phương trình

$$(-5-2t)^2+t^2-4(-5-2t)+2t=0 \Leftrightarrow 5t^2+30t+45=0 \Leftrightarrow t=-3.$$

Vậy Δ tiếp xúc với (C).

□

Ví dụ 3

Cho đường thẳng $\Delta\colon \begin{cases} x=4t \\ y=2+2t \end{cases}$ và đường tròn $(C)\colon (x-3)^2+(y-1)^2=10$. Xét vị trí tương đối của Δ và (C), tìm tọa độ giao điểm nếu có.

Lời giải.

Thế phương trình của Δ vào phương trình (C) ta được phương trình

$$20t^2-20t=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t=0 \\ t=1. \end{bmatrix}$$

Vậy Δ cắt $(\mathcal{C})$.

Với $t=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$ và $t=1 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=4. \end{cases}$

Vậy tọa độ giao điểm của Δ và $(\mathcal{C})$ là $A(0;2), B(4;4)$. □

Ví dụ 4

Cho đường thẳng $\Delta\colon 6x+8y-1=0$ và đường tròn $(C)\colon x^2+y^2-2mx+4y+m^2-5=0$. Tìm m để Δ cắt $(\mathcal{C})$.

Lời giải.

$(\mathcal{C})$ có tâm $I(m;-2)$ và bán kính $R=3$.

$$\begin{aligned} \Delta \text{ cắt } (\mathcal{C}) &\Leftrightarrow \mathrm{d}(I,\Delta) < R \\ &\Leftrightarrow \frac{|6m+8\cdot(-2)-1|}{\sqrt{36+64}} < 3 \\ &\Leftrightarrow |6m-17| < 30 \\ &\Leftrightarrow -30 < 6m-17 < 30 \\ &\Leftrightarrow -\frac{13}{6} < m < \frac{47}{6}. \end{aligned}$$

Vậy $-\frac{13}{6} < m < \frac{47}{6}$. □

Dạng 7 Vị trí tương đối của hai đường tròn.

Phương pháp giải. Cho đường tròn (C) có tâm I, bán kính R và đường tròn (C') có tâm I', bán kính R'.

- Nếu $II' > R+R'$ suy ra hai đường tròn không cắt nhau và ở ngoài nhau.
- Nếu $II' < |R-R'|$ suy ra hai đường tròn không cắt nhau và lồng vào nhau.
- Nếu $II' = |R-R'|$ suy ra hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau.
- Nếu $|R-R'| < II' < R+R'$ suy ra hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

Ví dụ 1

Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường tròn $(C)\colon x^2+y^2-2x-6y-15=0$ và $(C')\colon x^2+y^2-6x-2y-3=0$. Chứng minh rằng hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B.

Lời giải.

- Cách 1. (C) có tâm $I(1;3)$ và bán kính $R=5$, (C) có tâm $I'(3;1)$ và bán kính $R=\sqrt{13}$.
  Ta có $II' = \sqrt{(3-1)^2+(1-3)^2} = 2\sqrt{2}$.
  Ta thấy $|R_1-R_2| < I_1I_2 < |R_1+R_2|$ suy ra hai đường tròn cắt nhau.
- Cách 2. Xét hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2-2x-6y-15=0 \\ x^2+y^2-6x-2y-3=0. \end{cases}$

Ta có

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x-6y-15=0 \\ x^2+y^2-6x-2y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-2x-6y-15=0 \\ x-y-3=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y+3)^2+y^2-2(y+3)-6y-15=0 \\ x=y+3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2-y-6=0 \\ x=y+3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=-2 \\ y=3 \end{array}\right. \\ x=y+3. \end{cases}$$

Suy ra hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm có tọa độ là $A(1;-2)$ và $B(6;3)$.

□

Ví dụ 2

Cho hai đường tròn $(C)\colon x^2+y^2=1$ và $(C)\colon x^2+y^2-2(m+1)x+4my-5=0$. Xác định m để (C_m) tiếp xúc với (C).

Lời giải.

Dễ thấy (C) có tâm $O(0;0)$ và bán kính $R=1$.
(C_m) có tâm $I(m+1;-2m)$ và bán kính $R'=\sqrt{(m+1)^2+4m^2+5}$.
Ta thấy $OI=\sqrt{(m+1)^2+4m^2}<R'$ điểm O nằm trong đường tròn tâm I suy ra (C) và (C_m) chỉ có thể tiếp xúc trong nhau.
Điều kiện để hai đường tròn tiếp xúc trong là
$R'-R=OI \Leftrightarrow \sqrt{(m+1)^2+4m^2+5}-1=\sqrt{(m+1)^2+4m^2}$.
Giải phương trình ta được $m=-1$ hoặc $m=\dfrac{3}{5}$. □

Ví dụ 3

Cho đường tròn $(C)\colon x^2+y^2-2x+4y-4=0$ có tâm I và đường thẳng $\Delta\colon \sqrt{2}x+my+1-\sqrt{2}=0$.

a) Tìm m để đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B.

b) Tìm m để diện tích tam giác IAB là lớn nhất.

Lời giải.

a) Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=3$
Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi
$$\mathrm{d}(I;\Delta)<R \Leftrightarrow \frac{\left|\sqrt{2}-2m+1-\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2+m^2}}<3 \Leftrightarrow 5m^2+5m+17>0 \Leftrightarrow m\in\mathbb{R}.$$

b) Ta có $S_{IAB}=\dfrac{1}{2}IA\cdot IB\cdot\sin\widehat{AIB}=\dfrac{9}{2}\sin\widehat{AIB}\le\dfrac{9}{2}$.
Suy $\max S_{IAB}=\dfrac{9}{2}$ khi và chỉ khi $\sin\widehat{AIB}=1\Leftrightarrow\widehat{AIB}=90^\circ$.

Gọi H là hình chiếu của I lên Δ khi đó $\widehat{AIH} = 45^\circ \Rightarrow IH = IA \cdot \cos 45^\circ = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Ta có $\mathrm{d}(I;\Delta) = IH \Leftrightarrow \dfrac{|1-2m|}{\sqrt{2+m^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m^2+8m+16=0 \Leftrightarrow m=-4$.

Vậy với $m=-4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

□

C BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1

Tìm tâm và bán kính của đường tròn

$$(x+3)^2+(y-3)^2=36.$$

Lời giải.

Ta viết phương trình của (C) ở dạng $(x-(-3))^2+(y-3)^2=6^2$.

Vậy (C) có tâm $I(-3;3)$ và bán kính $R=6$. □

Bài 2

Hãy cho biết phương trình nào dưới đây là phương trình của một đường tròn và tìm tâm, bán kính của đường tròn tương ứng.

a) $x^2+y^2+xy+4x-2=0$;

b) $x^2+y^2-2x-4y+5=0$;

c) $x^2+y^2+6x-8y+1=0$.

Lời giải.

a) $x^2+y^2+xy+4x-2=0$ không là phương trình đường tròn vì không có dạng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$.

b) $x^2+y^2-2x-4y+5=0$ có dạng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ với $a=1, b=2, c=5$. Vì $a^2+b^2-c=1^2+2^2-5=0$ nên tập hợp những điểm thỏa mãn $x^2+y^2-2x-4y+5=0$ chỉ gồm một điểm là $I(1;2)$.

c) $x^2+y^2+6x-8y+1=0$ có dạng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ với $a=-3, b=4, c=1$. Vì $a^2+b^2-c=(-3)^2+4^2-1=24>0$ nên tập hợp những điểm thỏa mãn $x^2+y^2+6x-8y+1=0$ là đường tròn tâm $I(-3;4)$, bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$.

□

Bài 3

Viết phương trình của đường tròn (C) trong mỗi trường hợp sau:

a) Có tâm $I(-2;5)$ và bán kính $R=7$;

b) Có tâm $I(1;-2)$ và đi qua điểm $A(-2;2)$;

c) Có đường kính AB, với $A(-1;-3)$, $B(-3;5)$;

d) Có tâm $I(1;3)$ và tiếp xúc với đường thẳng $x+2y+3=0$.

Lời giải.

a) Đường tròn (C) có tâm $I(-2;5)$ và bán kính $R=7$ nên có phương trình

$$(x+2)^2+(y-5)^2=49.$$

b) Đường tròn (C) tâm $I(1;-2)$ và đi qua điểm $A(-2;2)$ nên có bán kính

$$R=IA=\sqrt{(-2-1)^2+(2-(-2))^2}=5.$$

Vậy $(C)\colon (x-1)^2+(y+2)^2=25$.

c) Đường tròn (C) có đường kính AB nên có tâm là trung điểm I của AB và bán kính $R=\dfrac{AB}{2}$.
Suy ra $I(-2;1)$ và $R=\dfrac{\sqrt{(-3+1)^2+(5+3)^2}}{2}=\sqrt{17}$.
Vậy $(C)\colon (x+2)^2+(y-1)^2=17$.

d) Gọi $\Delta\colon x+2y+3=0$. Đường tròn (C) có tâm $I(1;3)$ và tiếp xúc với đường thẳng Δ nên có bán kính $R=\mathrm{d}(I,\Delta)=\dfrac{|1+2\cdot 3+3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=2\sqrt{5}$.
Vậy $(C)\colon (x-1)^2+(y-3)^2=20$.

□

Bài 4

Trong mặt phẳng tọa độ, cho tam giác ABC với $A(6;-2)$, $B(4;2)$, $C(5;-5)$. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác đó.

Lời giải.

Các đoạn thẳng AB, AC tương ứng có trung điểm là $M(5;0)$, $N\left(\dfrac{11}{2};-\dfrac{7}{2}\right)$.

Đường thẳng trung trực Δ_1 của đoạn thẳng AB đi qua $M(5;0)$ và có một véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{AB}(-2;4)$.
Vì $\overrightarrow{AB}(-2;4)$ cùng phương với $\vec{n}_1(1;-2)$ nên Δ_1 cũng nhận $\vec{n}_1(1;-2)$ là một véc-tơ pháp tuyến.
Do đó phương trình của Δ_1 là

$$1(x-5)-2(y-0)=0 \text{ hay } x-2y-5=0.$$

Đường thẳng trung trực Δ_2 của đoạn thẳng AC đi qua $N\left(\dfrac{11}{2};-\dfrac{7}{2}\right)$ và có véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{AC}(-1;-3)$.
Do đó phương trình của Δ_2 là

$$-1\left(x-\frac{11}{2}\right)-3\left(y+\frac{7}{2}\right)=0 \text{ hay } x+3y+5=0.$$

Tâm I của đường tròn (C) cách đều ba điểm A, B, C nên I là giao điểm của Δ_1 và Δ_2.
Vậy tọa độ của I là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x-2y-5=0 \\ x+3y+5=0. \end{cases}$
Suy ra $I(1;-2)$. Đường tròn (C) có bán kính là $IA=5$. Vậy phương trình của (C) là

$$(x+2)^2+(y+1)^2=25.$$

□

Bài 5

Trong đường tròn $(C)\colon x^2+y^2+2x-4y+4=0$. Viết phương trình tiếp tuyến d của (C) tại điểm $M(0;2)$.

Lời giải.

Ta có $(C)\colon x^2+y^2+2x-4y+4=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=1$. Suy ra đường tròn (C) có tâm $I(-1;2)$ và bán kính $R=1$.
Điểm $M(0;2)\in(C)$. Tiếp tuyến của (C) tại $M(0;2)$ có một véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{MI}=(-1;0)$ nên có phương trình

$$-1(x-0)+0(y-2)=0 \Leftrightarrow x=0.$$

□

Bài 6

Chuyển động của một vật thể trong khoảng thời gian 180 phút được thể hiện trong mặt phẳng tọa độ. Theo đó, tại thời điểm t $(0\le t\le 180)$ vật thể ở vị trí có tọa độ $(2+\sin t^\circ;4+\cos t^\circ)$.

a) Tìm vị trí ban đầu và vị trí kết thúc của vật thể.

b) Tìm quỹ đạo chuyển động của vật thể.

Lời giải.

a) Vị trí ban đầu của vật thể tại thời điểm $t=0$ là $(2;4)$.
Vị trí kết thúc của vật thể tại thời điểm $t=180$ là $(2;3)$.

b) Phương trình chuyển động của vật thể là

$$\begin{cases} x=2+\sin t^\circ \\ y=4+\cos t^\circ \end{cases} \quad 0\le t\le 180.$$

Suy ra $(x-2)^2+(y-4)^2=\sin^2 t^\circ+\cos^2 t^\circ=1$.
Vậy quỹ đạo chuyển động của vật thể là một đường tròn có tâm $I(2;4)$, bán kính $R=1$.

□

Bài 7

Phương trình nào sau đây là phương trình đường tròn?

a) $x^2+y^2-2x+2y-7=0$.

b) $x^2+y^2-8x+2y+20=0$.

Lời giải.

a) $x^2+y^2-2x+2y-7=0$. Ta có $a=1, b=-1, c=-7$.
$a^2+b^2-c=1^2+(-1)^2-(-7)=9>0$.
Vậy $x^2+y^2-2x+2y-7=0$ là phương trình đường tròn.

b) $x^2+y^2-8x+2y+20=0$. Ta có $a=4, b=-1, c=20$.
$a^2+b^2-c=4^2+(-1)^2-20=-3<0$.
Vậy $x^2+y^2-8x+2y+20=0$ không phải là phương trình đường tròn.

□

Bài 8

Tìm tâm và bán kính của đường tròn trong mỗi trường hợp sau

a) $(x+1)^2+(y-5)^2=9$.

b) $x^2+y^2-6x-2y-15=0$.

Lời giải.

a) $(x+1)^2+(y-5)^2=9$.
Tâm $I(-1;5)$, bán kính $R=3$.

b) $x^2+y^2-6x-2y-15$.
Ta có $a=3$, $b=1$, $c=-15$.
$a^2+b^2-c=3^2+1^2-(-15)=25>0$.
Vậy $x^2+y^2-6x-2y-15$ là phương trình đường tròn có tâm $I(3;1)$, bán kính $R=\sqrt{3^2+1^2-(-15)}=5$.

□

Bài 9

Lập phương trình đường tròn trong mỗi trường hợp sau

a) Đường tròn có tâm $I(-3;4)$ bán kính $R=9$.

b) Đường tròn có tâm $I(5;-2)$ và đi qua điểm $M(4;-1)$.

c) Đường tròn có tâm $I(1;-1)$ và có một tiếp tuyến là $\Delta\colon 5x-12y-1=0$.

d) Đường tròn đường kính AB với $A(3;-4)$ và $B(-1;6)$.

e) Đường tròn đi qua ba điểm $A(1;1)$, $B(3;1)$ và $C(0;4)$.

Lời giải.

a) Đường tròn có tâm $I(-3;4)$ bán kính $R=9$.

$$(C)\colon (x+3)^2+(y-4)^2=81.$$

b) Đường tròn có tâm $I(5;-2)$ và đi qua điểm $M(4;-1)$.
Ta có bán kính đường tròn là $R=IM=\sqrt{(4-5)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{2}$.

$$(C)\colon (x-5)^2+(y+2)^2=2.$$

c) Đường tròn có tâm $I(1;-1)$ và có một tiếp tuyến là $\Delta\colon 5x-12y-1=0$.
Ta có bán kính đường tròn là $R=\mathrm{d}\,(I,\Delta)=\dfrac{|5\cdot 1-12\cdot(-1)-1|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}}=\dfrac{16}{13}$.

$$(C)\colon (x-1)^2+(y+1)^2=\frac{256}{169}.$$

d) Đường tròn đường kính AB với $A(3;-4)$ và $B(-1;6)$.
Ta có tâm $I(2;1)$, bán kính $R=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\sqrt{(-1-3)^2+(6+4)^2}}{2}=\sqrt{29}$.

$$(C)\colon (x-2)^2+(y-1)^2=29.$$

e) Đường tròn đi qua ba điểm $A(1;1)$, $B(3;1)$ và $C(0;4)$.
Giả sử

$$(C)\colon x^2+y^2-2ax-2by+c=0.$$

$A\in(C)\Leftrightarrow -2a-2b+c=-2.$ (1)
$B\in(C)\Leftrightarrow -6a-2b+c=-10.$ (2)
$C\in(C)\Leftrightarrow -8b+c=-16.$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\begin{cases}a=2\\b=3\\c=8.\end{cases}$

Vậy

$$(C)\colon x^2+y^2-4x-6y+8=0.$$

□

Bài 10

Lập phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng 3 thuộc đường tròn

$$(x+2)^2+(y+7)^2=169.$$

Lời giải.

Thế $x=3$ vào phương trình đường tròn ta có

$$\begin{aligned}&(3+2)^2+(y+7)^2=169\\ \Leftrightarrow\ &(y+7)^2=144\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{aligned}y+7&=12\\y+7&=-12\end{aligned}\right.\\ \Leftrightarrow\ &\left[\begin{aligned}y&=5\\y&=-19\end{aligned}\right.\Rightarrow\left[\begin{aligned}&M(3;5)\\&M(3;-19).\end{aligned}\right.\end{aligned}$$

Đường tròn có tâm $I(-2;-7)$, bán kính $R=13$.

- Gọi Δ_1 là tiếp tuyến của đường tròn tại $M(3;5)$.
  Δ_1 qua M và có một véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{IM}=(5;12)$
  suy ra
  $$\Delta_1\colon 5(x+2)+12(y+7)=0\Leftrightarrow 5x+12y+94=0.$$
- Gọi Δ_2 là tiếp tuyến của đường tròn tại $M(3;-19)$.
  Δ_2 qua M và có một véc-tơ pháp tuyến $\overrightarrow{IM}=(5;-12)$
  suy ra
  $$\Delta_2\colon 5(x+2)-12(y+7)=0\Leftrightarrow 5x-12y-74=0.$$

□

Bài 11

Tìm m sao cho đường thẳng $3x+4y+m=0$ tiếp xúc với đường tròn

$$(x+1)^2+(y-2)^2=4.$$

Lời giải.

Gọi $\Delta\colon 3x+4y+m=0$ và $(C)\colon (x+1)^2+(y-2)^2=4$.
(C) có tâm $I(-1;2)$, bán kính $R=2$.
Theo đề bài Δ tiếp xúc (C) nên ta có

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\,(I,(\Delta))=R\\
\Leftrightarrow\ &\frac{|3\cdot(-1)+4\cdot 2+m|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2\\
\Leftrightarrow\ &\frac{|5+m|}{5}=2\\
\Leftrightarrow\ &|5+m|=10\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{aligned}&5+m=10\\&5+m=-10\end{aligned}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{aligned}&m=5\\&m=-15.\end{aligned}\right.
\end{aligned}$$

□

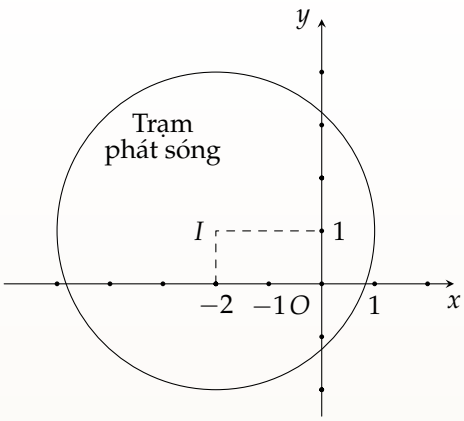
Bài 12

Hình 46 mô phỏng một trạm thu phát sóng điện thoại di động đặt ở vị trí I có tọa độ $(-2;1)$ trong mặt phẳng tọa độ (đơn vị trên hai trục là ki-lô-mét).

a) Lập phương trình đường tròn mô phỏng ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng, biết rằng trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng 3 km.

b) Nếu người dùng điện thoại ở vị trí có tọa độ $(-1;3)$ thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm này không? Giải thích.

c) Tính theo đường chim bay, xác định khoảng cách ngắn nhất để một người ở vị trí có tọa độ $(-3;4)$ di chuyển được tới vùng phủ sóng theo đơn vị ki-lô-mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Hình 46

Lời giải.

a) Phương trình đường tròn mô phỏng ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng là

$$(C)\colon (x+2)^2+(y-1)^2=9.$$

b) Nếu người dùng điện thoại ở vị trí có tọa độ $(-1;3)$ thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm này không? Giải thích.
Gọi $M(-1;3)$. Ta có $IM=\sqrt{(-1+2)^2+(3-1)^2}=\sqrt{5}<R=3$.
Vậy người dùng điện thoại sử dụng được dịch vụ của trạm.

c) Tính theo đường chim bay, xác định khoảng cách ngắn nhất để một người ở vị trí có tọa độ $(-3;4)$ di chuyển được tới vùng phủ sóng theo đơn vị ki-lô-mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Gọi $A(-3;4)$; B là giao điểm của IA với đường tròn (C).
Khoảng cách ngắn nhất mà một người ở vị trí A đi tới vùng phủ sóng là

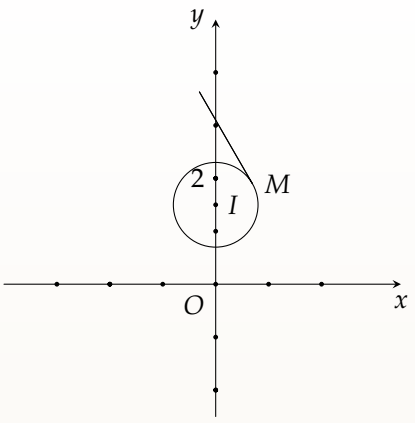
$$\begin{aligned} AB &= IA - IB \\ &= \sqrt{(-3+2)^2+(4-1)^2} - R \\ &= \sqrt{10} - 3 \\ &\approx 0{,}2. \end{aligned}$$

□

Bài 13

Ném đĩa là một môn thể thao thi đấu trong Thế vận hội Olympic mùa hè. Khi thực hiện cú ném, vận động viên thường quay lưng lại với hướng ném, sau đó xoay ngược chiều kim đồng hồ một vòng rưỡi của đường tròn để lấy đà rồi thả tay ra khỏi đĩa.

Giả sử đĩa chuyển động trên một đường tròn tâm $I\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$ bán kính 0,8 trong mặt phẳng tọa độ Oxy (đơn vị trên hai trục là mét). Đến điểm $M\left(\dfrac{\sqrt{39}}{10};2\right)$, đĩa được ném đi (Hình 47). Trong những giây đầu tiên ngay sau khi được ném đi, quỹ đạo chuyển động của chiếc đĩa có phương trình như thế nào?



Hình 47

Lời giải.

Quỹ đạo chuyển động là đường tròn

$$(C)\colon x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2 = 0{,}64.$$

Tại điểm $M\left(\dfrac{\sqrt{39}}{10};2\right)$ đĩa được ném đi theo tiếp tuyến Mt tại điểm $M\left(\dfrac{\sqrt{39}}{10};2\right) \in (C)$.
Phương trình tiếp tuyến Mt là

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\sqrt{39}}{10}-0\right)\left(x-\frac{\sqrt{39}}{10}\right)+\left(2-\frac{3}{2}\right)(y-2)=0 \\ \Leftrightarrow\ &\frac{\sqrt{39}}{10}x+\frac{1}{2}y-\frac{139}{100}=0 \\ \Leftrightarrow\ &10\sqrt{39}x+50y-139=0. \end{aligned}$$

□

Bài 14

Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng $d\colon x-2y+3=0$ và đường tròn $(C)\colon x^2+y^2-2x-4y=0$.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm của d và (C) là nghiệm hệ phương trình

$$\begin{cases} x-2y+3=0 \\ x^2+y^2-2x-4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-3 \\ 5y^2-20y+15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-3 \\ \left[\begin{array}{l} y=3 \\ y=1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy tọa độ giao điểm của d và (C) là $(3;3)$, $(-1;1)$. □

Bài 15

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm M nằm trên đường tròn

$$(C)\colon x^2+y^2+8x-6y+16=0.$$

Tính độ dài nhỏ nhất của OM.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(-4;3)$, bán kính $R=3$.

Ta có $\overrightarrow{OI}=(-4;3)$, suy ra phương trình đường thẳng OI là $\begin{cases} x=-4t \\ y=3t. \end{cases}$

$OI\cap(C)=\{M\}$. Tọa độ $(x;y)$ của M là nghiệm hệ

$$\begin{cases} x^2+y^2+8x-6y+16=0 \\ x=-4t \\ y=3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25t^2-50t+16=0 \\ x=-4t \\ y=3t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\dfrac{8}{5} \\ x=\dfrac{-32}{5} \\ y=\dfrac{24}{5} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} t=\dfrac{2}{5} \\ x=\dfrac{-8}{5} \\ y=\dfrac{6}{5}. \end{cases}$$

Suy ra $M_1\left(-\dfrac{32}{5};\dfrac{24}{5}\right)$, $M_2\left(-\dfrac{8}{5};\dfrac{6}{5}\right)$.

Ta có $OM_1=\sqrt{\left(-\dfrac{32}{5}\right)^2+\left(\dfrac{24}{5}\right)^2}=8$, $OM_2=\sqrt{\left(-\dfrac{8}{5}\right)^2+\left(\dfrac{6}{5}\right)^2}=2$.

Vậy $OM_{\min}=OM_2=2$. □

Bài 16

Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C)\colon (x-1)^2+(y-4)^2=4$. Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn (C) song song với đường thẳng $\Delta\colon 4x-3y+2=0$.

Lời giải.

Đường tròn $(C)\colon (x-1)^2+(y-4)^2=4$ có tâm $I(1;4)$ và bán kính $R=2$.

Gọi d là tiếp tuyến của (C). Vì $d\ /\!/\ \Delta$ nên đường thẳng $d\colon 4x-3y+m=0$ $(m\neq 2)$.

Ta có d là tiếp tuyến của (C) nên

$$\mathrm{d}(I;(d))=R \Leftrightarrow \frac{|4\cdot 1-3\cdot 4+m|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=2 \quad \Leftrightarrow |m-8|=10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=18 \\ m=-2 \end{array}\right. \text{(thỏa mãn điều kiện).}$$

Vậy có hai tiếp tuyến cần tìm là $4x-3y+18=0$; $4x-3y-2=0$. □

Bài 17

Cho đường tròn (C) có tâm $I(x_I;y_I)$ thuộc đường thẳng $d\colon x-y=0$, đi qua điểm $A(1;0)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta\colon x-3y+8=0$. Tính $S=x_I+y_I$ biết $x_I>0$.

Lời giải.

Vì $I \in d$ nên $x_I = y_I = a$. Ta có

$$IA = \mathrm{d}(I;\Delta) \Leftrightarrow \sqrt{a^2+(a-1)^2} = \frac{|8-2a|}{\sqrt{10}}$$
$$\Leftrightarrow 16a^2+12a-54=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{3}{2} \\ a=-\dfrac{9}{4}. \end{array}\right.$$

Vì $x_I > 0$ nên $x_I = \dfrac{3}{2}$.
Vậy $S = 3$. □

Bài 18

Lập phương trình đường tròn trong mỗi trường hợp sau

a) Đường tròn có tâm $I(2;4)$ và đi qua $A(-1;3)$.

b) Đường tròn có tâm $I(-3;2)$ và tiếp xúc với trục Ox.

c) Đường tròn có tâm $I(-3;-5)$ và tiếp xúc với trục Oy.

d) Đường tròn có tâm $I(3;4)$ và tiếp xúc với $\Delta\colon 4x-3y+15=0$.

e) Đường tròn có tâm $I(2;3)$ và tiếp xúc với $\Delta\colon 5x-12y-26=0$.

Lời giải.

a) Đường tròn có tâm $I(2;4)$ và đi qua $A(-1;3)$.
Ta có bán kính đường tròn là $R = IA = \sqrt{(-1-2)^2+(3-4)^2} = \sqrt{10}$.

$$(C)\colon (x-2)^2+(y-4)^2=10.$$

b) Đường tròn có tâm $I(-3;2)$ và tiếp xúc với trục Ox. Ta có bán kính đường tròn là $R = \mathrm{d}(I,Ox) = 2$.

$$(C)\colon (x+3)^2+(y-2)^2=4.$$

c) Đường tròn có tâm $I(-3;-5)$ và tiếp xúc với trục Oy.
Ta có bán kính đường tròn là $R = \mathrm{d}(I,Oy) = 3$.

$$(C)\colon (x+3)^2+(y+5)^2=9.$$

d) Đường tròn có tâm $I(3;4)$ và tiếp xúc với $\Delta\colon 4x-3y+15=0$.
Ta có bán kính đường tròn là $R = \mathrm{d}(I,\Delta) = \dfrac{|4\cdot 3-3\cdot 4+15|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = 3$.

$$(C)\colon (x-3)^2+(y-4)^2=9.$$

e) Đường tròn có tâm $I(2;3)$ và tiếp xúc với $\Delta\colon 5x-12y-26=0$.
Ta có bán kính đường tròn là $R = \mathrm{d}(I,\Delta) = \dfrac{|5\cdot 2-12\cdot 3-26|}{\sqrt{5^2+(-12)^2}} = 4$.

$$(C)\colon (x-2)^2+(y-3)^2=16.$$

□

Bài 19

Lập phương trình đường tròn trong mỗi trường hợp sau

a) Đường tròn đi qua hai điểm $A(2;3)$, $B(-4;3)$ và có tâm I nằm trên trục Ox.

b) Đường tròn đi qua hai điểm $A(3;1)$, $B(5;5)$ và có tâm I nằm trên trục Oy.

c) Đường tròn đi qua hai điểm $A(2;3)$, $B(-1;1)$ và có tâm I nằm trên đường thẳng $\Delta\colon x-3y-11=0$.

Lời giải.

a) Vì $I\in Ox\Rightarrow I(x;0)$.
Ta có

$$\begin{aligned}
&IA=IB\\
\Leftrightarrow\ &\sqrt{(x-2)^2+(0-3)^2}=\sqrt{(x+4)^2+(0-3)^2}\\
\Leftrightarrow\ &(x-2)^2+(0-3)^2=(x+4)^2+(0-3)^2\\
\Leftrightarrow\ &x^2-4x+4+9=x^2+8x+16+9\\
\Leftrightarrow\ &x^2-4x+4+9=x^2+8x+16+9\\
\Leftrightarrow\ &x=-1.
\end{aligned}$$

Suy ra $I(-1;0)$, bán kính $R=\sqrt{(-1-2)^2+(0-3)^2}=3\sqrt{2}$.
Vậy

$$(C)\colon (x+1)^2+y^2=18.$$

b) Vì $I\in Oy\Rightarrow I(0;y)$.
Ta có

$$\begin{aligned}
&IA=IB\\
\Leftrightarrow\ &\sqrt{(0-3)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(0-5)^2+(y-5)^2}\\
\Leftrightarrow\ &(0-3)^2+(y-1)^2=(0-5)^2+(y-5)^2\\
\Leftrightarrow\ &9+y^2-2y+1=25+y^2-10y+25\\
\Leftrightarrow\ &y=5.
\end{aligned}$$

Suy ra $I(0;5)$, bán kính $R=\sqrt{(0-3)^2+(5-1)^2}=5$.
Vậy

$$(C)\colon x^2+(y-5)^2=25.$$

c) Vì $I\in\Delta\Rightarrow I(3y+11;y)$.
Ta có

$$\begin{aligned}
&IA=IB\\
\Leftrightarrow\ &\sqrt{(3y+11-2)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(3y+11+1)^2+(y-1)^2}\\
\Leftrightarrow\ &(3y+9)^2+(y-3)^2=(3y+12)^2+(y-1)^2\\
\Leftrightarrow\ &9y^2+54y+81+y^2-6y+9=9y^2+72y+144+y^2-2y+1\\
\Leftrightarrow\ &y=-\frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

Suy ra $I\left(\frac{7}{2};-\frac{5}{2}\right)$, bán kính $R=\sqrt{\left(-\frac{15}{2}+9\right)^2+\left(-\frac{5}{2}-3\right)^2}=\frac{\sqrt{130}}{2}$.
Vậy

$$(C)\colon \left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{65}{2}.$$

Bài 20

Lập phương trình đường tròn trong mỗi trường hợp sau

a) Đường tròn đi qua điểm $A(6;-2)$ và tiếp xúc với trục Ox tại điểm $B(6;0)$.

b) Đường tròn đi qua điểm $A(2;-1)$ và tiếp xúc với trục Oy tại điểm B có tung độ là 1.

c) Đường tròn đi qua điểm $A(-2;6)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta\colon 3x-2y-6=0$ tại điểm $B(4;3)$.

Lời giải.

a) Gọi $I(a;b)$ là tâm đường tròn (C). Ta có (C) tiếp xúc Ox tại $B(6;0)$ và qua $A(6;-2)$ nên AB là đường kính của (C). Suy ra tâm I là trung điểm của AB
$\Rightarrow I(6;-1)$, bán kính $R=\dfrac{AB}{2}=1$.
Vậy $(C)\colon (x-6)^2+(y+1)^2=1$.

b) Gọi $I(a;b)$ là tâm đường tròn (C).
Do $B\in Oy$ có tung độ bằng 1 suy ra $B(0;1)$.
Ta có

$$\begin{aligned} & IA=IB \\ \Leftrightarrow\ & (a-2)^2+(b+1)^2=(a-0)^2+(b-1)^2 \\ \Leftrightarrow\ & -4a+4+4b=0 \\ \Leftrightarrow\ & a=b+1. \end{aligned}$$

Với $b=1\Rightarrow a=2\Rightarrow R=2$ suy ra $(C)\colon (x-2)^2+(y-1)^2=4$.

c) Gọi $I(a;b)$ là tâm đường tròn (C).
Ta có

$$\begin{aligned} & IA=IB \\ \Leftrightarrow\ & (a+2)^2+(b-6)^2=(a-4)^2+(b-3)^2 \\ \Leftrightarrow\ & 12a-6b+15=0 \\ \Leftrightarrow\ & 4a-2b=-5. \qquad (1) \end{aligned}$$

Δ có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;-2)$.
Do (C) tiếp xúc với Δ tại $B(3;4)\Rightarrow \overrightarrow{IB}=(4-a;3-b)$ cùng phương với $\vec{n}$
$\Rightarrow \dfrac{4-a}{3}=\dfrac{3-b}{-2}\Leftrightarrow 2a+3b=17. \qquad (2)$
Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} a=\dfrac{19}{16} \\ b=\dfrac{39}{8}. \end{cases}$
$R=IB=\sqrt{a^2+(b-1)^2}=\sqrt{\left(\dfrac{19}{16}\right)^2+\left(\dfrac{39}{8}-1\right)^2}=\dfrac{29\sqrt{5}}{16}$.
Vậy $(C)\colon \left(x-\dfrac{19}{16}\right)^2+\left(y-\dfrac{39}{8}\right)^2=\dfrac{4205}{256}$.

Bài 21

Lập phương trình đường tròn đi qua hai điểm $A(2;0)$, $B(4;2)$ và tiếp xúc với trục Oy.

Lời giải.

$(C)\colon x^2+y^2-2ax-2by+c=0$.
(C) qua $A(2;0) \Leftrightarrow -4a+c=-4.$ (1)
(C) qua $B(4;2) \Leftrightarrow -8a-4b+c=-20.$ (2)
(C) tiếp xúc $Oy \Leftrightarrow R=\mathrm{d}(I,Oy) \Leftrightarrow R=|a| \Leftrightarrow a^2+b^2-c=a^2 \Leftrightarrow c=b^2.$ (3)
Từ (1) và (3) $\Rightarrow c=4a-4=b^2 \Leftrightarrow 4a=b^2+4$.
Từ (2) suy ra $-2(b^2+4)-4b+b^2=-20 \Leftrightarrow -b^2-4b+12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=2 \\ b=-6. \end{array}\right.$

- Với $b=2 \Rightarrow c=4, a=2$.
  Suy ra $(C)\colon x^2+y^2-4x-4y+4=0$.

- Với $b=-6 \Rightarrow c=36, a=10$.
  Suy ra $(C)\colon x^2+y^2-20x+12y+36=0$.

□

Bài 22

Cho điểm $A(-7;7)$, đường thẳng $(d)\colon 3x+4y-6=0$ và đường tròn $(C)\colon x^2+y^2-4x-6y-12=0$.

a) Chứng tỏ A ở ngoài (C).

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) vẽ từ A.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) song song với (d).

d) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) vuông góc với (d).

Lời giải.

a) Chứng tỏ A ở ngoài (C).
(C) có tâm $I(2;3)$, bán kính $R=\sqrt{2^2+3^2+12}=5$.
$IA=\sqrt{(2+7)^2+(3-7)^2}=\sqrt{97}>R$.
Suy ra A ở ngoài (C).

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) vẽ từ A.

- Xét tiếp tuyến qua A và cùng phương Oy là $\Delta\colon x+7=0$.
  Ta có $\mathrm{d}(I,(\Delta))=\dfrac{|2+7|}{\sqrt{1^2+0^2}}=9\neq R \Rightarrow \Delta$ không là tiếp tuyến của (C).

- Xét tiếp tuyến qua A và có hệ số góc k là

$$\Delta\colon y=k(x+7)+7 \Leftrightarrow kx-y+7k+7=0.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}(I,(\Delta)) = R\\
\Leftrightarrow\ &\frac{|2k-3+7k+7|}{\sqrt{k^2+)(-1)^2}} = 5\\
\Leftrightarrow\ &|9k+4| = 5\sqrt{k^2+1}\\
\Leftrightarrow\ &81k^2+72k+16 = 25(k^2+1)\\
\Leftrightarrow\ &56k^2+72k-9 = 0\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} k = \dfrac{-18+15\sqrt{2}}{26}\\ k = \dfrac{-18-15\sqrt{2}}{26}. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

— Với $k = \dfrac{-18+15\sqrt{2}}{26}$ ta có phương trình tiếp tuyến là

$$\frac{-18+15\sqrt{2}}{26}x - y + \frac{56+105\sqrt{2}}{26} = 0.$$

— Với $k = \dfrac{-18-15\sqrt{2}}{26}$ ta có phương trình tiếp tuyến là

$$\frac{-18-15\sqrt{2}}{26}x - y + \frac{56-105\sqrt{2}}{26} = 0.$$

c) Gọi tiếp tuyến song song với (d) là $\Delta\colon 3x+4y+m=0\,(m\neq -6)$.
Ta có

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}(I,(\Delta)) = R\\
\Leftrightarrow\ &\frac{|3\cdot 2+4\cdot 3+m|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 5\\
\Leftrightarrow\ &|18+m| = 25\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} 18+m = 25\\ 18+m = -25 \end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} m = 7\\ m = -43 \end{array}\right. \text{(thỏa mãn)}.
\end{aligned}$$

Suy ra có 2 tiếp tuyến là $\left[\begin{array}{l} \Delta\colon 3x+4y+7=0\\ \Delta\colon 3x+4y-43=0. \end{array}\right.$

d) Gọi tiếp tuyến vuông góc với (d) là $\Delta\colon 4x-3y+m=0$.
Ta có

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}(I,(\Delta)) = R\\
\Leftrightarrow\ &\frac{|4\cdot 2-3\cdot 3+m|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = 5\\
\Leftrightarrow\ &|m-1| = 25\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} m-1 = 25\\ m-1 = -25 \end{array}\right.\\
\Leftrightarrow\ &\left[\begin{array}{l} m = 26\\ m = -24. \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Suy ra có 2 tiếp tuyến là $\left[\begin{array}{l}\Delta\colon 4x-3y+26=0\\ \Delta\colon 4x-3y-24=0.\end{array}\right.$

□

Bài 23

Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng $(d)\colon x-y-1=0$ và đường tròn $(C)\colon (x-1)^2+(y-2)^2=4$. Viết phương trình đường tròn (C') đối xứng với (C) qua đường thẳng (d). Tìm tọa độ giao điểm của (C) và (C').

Lời giải.

(C) có tâm $I(1;2)$, bán kính $R=2$.
Vì (C') đối xứng với (C) qua đường thẳng (d) nên (C') có tâm I' và bán kính $R'=R=2$. I' là điểm đối xứng của I qua (d).
Gọi (d') là đường thẳng qua I và vuông góc với (d).
Ta có $(d')\colon x+y-3=0$.
$I'=(d)\cap(d')$.
Tọa độ I' là nghiệm của hệ $\begin{cases}x-y-1=0\\ x+y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}\Rightarrow I'(2;1)$.
Vậy $(C')\colon (x-2)^2+(y-1)^2=4$. □

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1

Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy cho đường tròn $(C)\colon (x+5)^2+(y-4)^2=16$. Đường tròn (C) có tọa độ tâm I và bán kính R bằng
(A) $I(5;-4)$; $R=16$. (B) $I(-5;4)$; $R=16$. (C) $I(-5;4)$; $R=4$. (D) $I(5;-4)$; $R=4$.

Lời giải.

Đường tròn $(C)\colon (x+5)^2+(y-4)^2=16$ có tọa độ tâm $I(-5;4)$ và bán kính $R=\sqrt{16}=4$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 2

Phương trình nào sau đây là đường tròn?
(A) $2x^2+y^2-6x-8y+1=0$. (B) $x^2+y^2+6x+16=0$.
(C) $x^2+y^2-2x-8y+20=0$. (D) $x^2+y^2-4x+6y-12=0$.

Lời giải.

Phương trình đường tròn có dạng $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ $(a^2+b^2>c)$.
Xét phương án A, ta thấy không thỏa mãn dạng của phương trình đường tròn.
Xét phương án B, ta thấy $a^2+b^2=(-3)^2=9<16$ nên $x^2+y^2+6x+16=0$ không là phương trình đường tròn.
Xét phương án C, ta thấy $a^2+b^2=1+4^2=17<20$ nên $x^2+y^2-2x-8y+20=0$ không là phương trình đường tròn.
Xét phương án D, ta thấy $a^2+b^2=2^2+(-3)^2=13>-12$, thỏa mãn điều kiện.
Vậy $x^2+y^2-4x+6y-12=0$ có $a^2+b^2=2^2+(-3)^2=13>-12$ là phương trình đường tròn.
Chọn đáp án (D) □

Câu 3

Cho phương trình $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$ là phương trình đường tròn. Khi đó a,b,c thỏa mãn điều kiện nào sau đây?

(A) $a^2-b^2<c$. (B) $a^2+b^2>c$. (C) $a^2-b^2>c$. (D) $a^2+b^2<c$.

Lời giải.

Điều kiện để $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ là phương trình đường tròn là $a^2+b^2>c$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4

Cho đường tròn $(C)\colon x^2+y^2-6x+4y-12=0$. Đường tròn (C) có tâm I và bán kính R lần lượt là

(A) $I(3;-2)$, $R=5$. (B) $I(-3;2)$, $R=5$. (C) $I(-6;4)$, $R=5$. (D) $I(6;-4)$, $R=5$.

Lời giải.

Phương trình $x^2+y^2-6x+4y-12=0$ có tâm $I(3;-2)$ và bán kính $R=\sqrt{3^2+(-2)^2+12}=5$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 5

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C)\colon x^2+y^2-2x+6y-1=0$. Tâm của (C) có tọa độ là

(A) $(-2;6)$. (B) $(-1;3)$. (C) $(2;-6)$. (D) $(1;-3)$.

Lời giải.

Phương trình đường tròn $(C)\colon x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ (với $a^2+b^2-c>0$)

Ta có $\begin{cases}-2a=-2\\-2b=6\\c=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-3\\c=-1.\end{cases}$

Ta có $a^2+b^2-c=1^2+(-3)^2+1=11>0$ nên đây là phương trình đường tròn.

Vậy tâm đường tròn (C) có tọa độ là $(1;-3)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tâm I và bán kính R của đường tròn $(C)\colon x^2+y^2-2x+6y-8=0$ là

(A) $I(-1;-3)$, $R=2\sqrt{2}$. (B) $I(1;-3)$, $R=3\sqrt{2}$.
(C) $I(1;-3)$, $R=\sqrt{2}$. (D) $I(1;3)$, $R=\sqrt{2}$.

Lời giải.

Phương trình đường tròn (C) có dạng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ (với $a^2+b^2-c>0$) có tâm $I(a;b)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

Theo đề bài, ta có $\begin{cases}-2a=-2\\-2b=6\\c=-8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-3\\c=-8\end{cases}$ (thỏa mãn $a^2+b^2-c>0$).

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-3)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+(-3)^2+8}=3\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 7

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $x^2+y^2-2x-4y+m=0$ là phương trình của một đường tròn.

(A) 3. (B) 5. (C) 4. (D) vô số.

Lời giải.

Phương trình: $x^2+y^2-2x-4y+m=0$ có $\begin{cases} -2a=-2 \\ -2b=-4 \\ c=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=m. \end{cases}$.

Phương trình đã cho là phương trình đường tròn $\Leftrightarrow a^2+b^2-c>0 \Leftrightarrow 1+4-m>0 \Leftrightarrow m<5$.

Kết hợp m là giá trị nguyên dương suy ra $m \in \{1;2;3;4\}$.

Vậy có 4 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (C) □

Câu 8

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2+y^2+2(m+1)x-2my+2m^2-3m+16=0$ là phương trình của một đường tròn.

(A) $m>3$. (B) $m \le 3$. (C) $m<3$. (D) $m \ge 3$.

Lời giải.

Phương trình đường tròn (C) có dạng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ (với $a^2+b^2-c>0$)

Theo đề bài, ta có

$$\begin{cases} -2a=2(m+1) \\ -2b=-2m \\ c=2m^2-3m+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-m-1 \\ b=m \\ c=2m^2-3m+16. \end{cases}$$

Phương trình $x^2+y^2+2(m+1)x-2my+2m^2-3m+16=0$ là phương trình của một đường tròn $\Leftrightarrow a^2+b^2-c>0 \Leftrightarrow (-m-1)^2+m^2-\left(2m^2-3m+16\right)>0 \Leftrightarrow 5m-15>0 \Leftrightarrow m>3$.

Vậy $m>3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Chọn đáp án (A) □

Câu 9

Đường tròn tâm $I(3;-7)$, bán kính $R=3$ có phương trình là

(A) $(x-3)^2+(y+7)^2=3$. (B) $(x+3)^2+(y-7)^2=9$.
(C) $(x-3)^2+(y+7)^2=9$. (D) $(x+3)^2+(y+7)^2=9$.

Lời giải.

Đường tròn tâm $I(3;-7)$, bán kính $R=3$ có phương trình là $(x-3)^2+(y+7)^2=9$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 10

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho $A(-1;4)$, $B(5;-2)$. Phương trình đường tròn đường kính AB là

(A) $(x-3)^2+(y-2)^2=20$. (B) $(x-4)^2+(y-2)^2=29$.
(C) $(x-2)^2+(y-1)^2=72$. (D) $(x-2)^2+(y-1)^2=18$.

Lời giải.

Đường tròn đường kính AB có tâm $I(2;1)$ là trung điểm của AB, bán kính $R = IA = 3\sqrt{2}$.
Do đó phương trình đường tròn đường kính AB là $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 18$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 11

Đường tròn tâm $I(3;-7)$, đi qua $A(-3;-1)$ có phương trình là
(A) $(x-3)^2 + (y+7)^2 = \sqrt{72}$.
(B) $(x-3)^2 + (y+7)^2 = 72$.
(C) $(x+3)^2 + (y-7)^2 = 72$.
(D) $(x+3)^2 + (y+7)^2 = \sqrt{72}$.

Lời giải.

Đường tròn tâm $I(3;-7)$, đi qua $A(-3;-1)$ nên có bán kính $R = IA = 6\sqrt{2}$.
Do đó phương trình đường tròn tâm $I(3;-7)$, đi qua $A(-3;-1)$ là $(x-3)^2 + (y+7)^2 = 72$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 12

Đường tròn đi qua ba điểm $A(17)$, $B(-2;6)$, $C(5;-1)$ có phương trình là
(A) $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$.
(B) $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0$.
(C) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$.
(D) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$.

Lời giải.

+) Thay toạ độ điểm A vào phương án **A**, ta được $0 = 0$ (luôn đúng)
+) Thay toạ độ điểm B vào phương án **A**, ta được $0 = 0$ (luôn đúng)
+) Thay toạ độ điểm C vào phương án **A**, ta được $0 = 0$ (luôn đúng)
Do đó chọn phương án A.
+) Thay toạ độ điểm A vào phương án **B**, ta được $60 = 0$ (vô lí). Do đó phương án **B** sai.
+) Thay toạ độ điểm A vào phương án **C**, ta được $56 = 0$ (vô lí). Do đó phương án **C** sai.
+) Thay toạ độ điểm A vào phương án **D**, ta được $4 = 0$ (vô lí). Do đó phương án **D** sai.
Chọn đáp án (A) □

Câu 13

Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C_1)\colon x^2 + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0$ và điểm $A(3;4)$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm là tâm của đường tròn (C_1) và đi qua điểm A.
(A) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$.
(B) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 8$.
(C) $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 8$.
(D) $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 10$.

Lời giải.

Đường tròn $(C_1)\colon x^2 + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0$ có tâm $I(1;2)$, suy ra tâm của đường tròn (C) là $I(1;2)$.
Đường tròn (C) đi qua điểm $A(3;4)$ nên bán kính đường tròn (C) là $R = IA = 2\sqrt{2}$.
Phương trình đường tròn (C) cần tìm là $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 8$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 14

Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng $\Delta\colon x - 2y + 3 = 0$. Viết phương trình đường tròn có tâm $I(3;-2)$ và tiếp xúc với Δ.
(A) $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 20$.
(B) $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 20$.

(C) $(x+3)^2+(y-2)^2=10$. (D) $(x-3)^2+(y-2)^2=10$.

Lời giải.

Do đường tròn cần tìm tiếp xúc với đường thẳng Δ nên bán kính đường tròn là

$$R=\mathrm{d}(I,\Delta)=\frac{|3-2(-2)+3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=2\sqrt{5}.$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $(x-3)^2+(y+2)^2=20$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 15

Viết phương trình đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(2;0)$ và $B(0;1)$ và có tâm nằm trên đường thẳng $\Delta\colon x+y+1=0$.

(A) $\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\left(y+\frac{7}{6}\right)^2=\frac{85}{18}$. (B) $\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\left(y-\frac{7}{6}\right)^2=\frac{170}{6}$.
(C) $\left(x+\frac{1}{6}\right)^2+\left(y-\frac{7}{6}\right)^2=\frac{85}{18}$. (D) $\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\left(y+\frac{7}{6}\right)^2=\frac{170}{6}$.

Lời giải.

Ta có phương trình tham số của $\Delta\colon \begin{cases} x=t \\ y=-t-1. \end{cases}$
Do tâm I của (C) nằm trên Δ nên $I(t;-1-t)$.
Ta có $IA=IB\Rightarrow(2-t)^2+(1+t)^2=(-t)^2+(2+t)^2\Leftrightarrow t=\frac{1}{6}$.
Suy ra $I\left(\frac{1}{6};-\frac{7}{6}\right)$, bán kính $IA=\frac{\sqrt{170}}{6}$.
Phương trình đường tròn cần tìm có dạng $\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\left(y+\frac{7}{6}\right)^2=\frac{85}{18}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 16

Cho đường thẳng $d\colon x-3y+5=0$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm nằm trên đường thẳng $\Delta\colon 2x+y=0$ và tiếp xúc với d tại điểm $A(1;2)$

(A) $(x-3)^2+(y+6)^2=160$. (B) $(x+3)^2+(y-6)^2=\frac{64}{5}$.
(C) $(x-5)^2+(y+10)^2=160$. (D) $(x-5)^2+(y+10)^2=16$.

Lời giải.

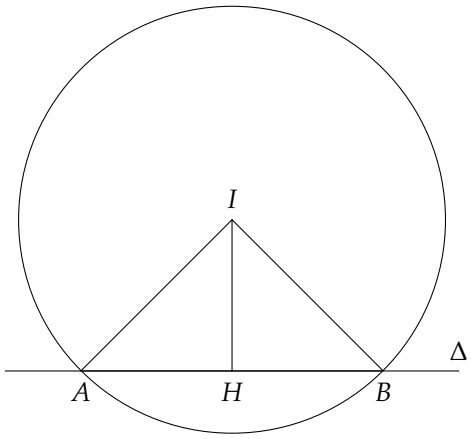
Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u_d}=(3;1)$.
Do tâm I của đường tròn (C) nằm trên đường thẳng Δ nên tọa độ $I(t;-2t)$.
Do đường tròn (C) tiếp xúc với d tại điểm $A(1;2)$ nên ta có $\vec{IA}\perp\vec{u_d}$ và $R=IA$.
Từ $\vec{IA}\perp\vec{u_d}\Leftrightarrow\vec{IA}\cdot\vec{u_d}=0\Leftrightarrow 3\cdot(1-t)+1(2+2t)=0\Leftrightarrow t=5$.
Suy ra $I(5;-10)$, $R=IA=4\sqrt{10}$.
Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $(x-5)^2+(y+10)^2=160$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 17

Cho đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$, (C) cắt đường thẳng $\Delta\colon 3x+4y+13=0$ theo một dây cung có độ dài bằng 8. Phương trình của đường tròn (C) là

(A) $x^2+y^2-2x+2y-30=0$. (B) $x^2+y^2-2x-2y+30=0$.
(C) $x^2+y^2-2x-2y-30=0$. (D) $x^2+y^2+2x+2y-30=0$.

Lời giải.



Gọi giao điểm của đường thẳng Δ và (C) là A và B, H là hình chiếu của I xuống AB.

Khi đó $\mathrm{d}(I;\Delta)=IH=\dfrac{|3\cdot 1+4\cdot 1+13|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4$.

Áp dụng định lý Pytago cho tam giác vuông AHB ta có

$$AI^2=AH^2+IH^2\Leftrightarrow R^2=4^2+4^2=32.$$

Do đó phương trình của (C) là $(x-1)^2+(y-1)^2=32\Leftrightarrow x^2+y^2-2x-2y-30=0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 18

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(1;3)$, $B(-1;-1)$, $C(1;1)$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâm $I(a;b)$. Tính $a-b$.

(A) 4. (B) -4. (C) 2. (D) 0.

Lời giải.

Vì $I(a;b)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên $IA=IB=IC=R$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}IA^2=IB^2\\IA^2=IC^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(1-a)^2+(3-b)^2=(-1-a)^2+(-1-b)^2\\(1-a)^2+(3-b)^2=(1-a)^2+(1-b)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+2b=2\\b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\b=2\end{cases}\Rightarrow I(-2;2).$$

Vậy $a-b=-4$.

Chọn đáp án (B) □

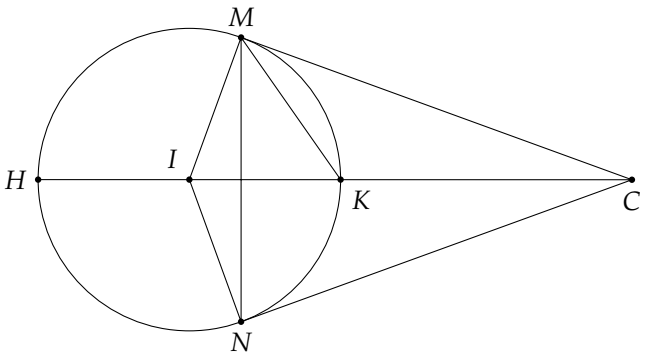
Câu 19

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) tâm I bán kính R. Từ điểm C nằm ngoài đường tròn kẻ 2 tiếp tuyến CM, CN sao cho M và N là các tiếp điểm. Đường thẳng IC cắt (C) tại K và H sao cho $CK<CH$. Biết khoảng cách từ K đến CM bằng $\sqrt{17}$ và MN có phương trình $x-4y+3=0$ và H, K lần lượt thuộc các đường thẳng $5x+y-1=0$, $2x-y-7=0$. Biết K

có tung độ âm. Phương trình đường tròn (C) là

(A) $x^2+y^2+2x-18y-71=0$.
(B) $x^2+y^2-2x+18y-71=0$.
(C) $x^2+y^2+2x-18y+71=0$.
(D) $x^2+y^2-2x-18y-71=0$.

Lời giải.



Vì $\widehat{KMC}=\widehat{KMN}=\dfrac{1}{2}\text{sđ}\widehat{MN}$, suy ra MK là phân giác trong $\widehat{CMN}$.
Lại có CK là phân giác trong $\widehat{MCN}$.
Suy ra K là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle CMN \Rightarrow \text{d}(K,CM)=\text{d}(K,MN)=\sqrt{17}$.
Gọi $K(a;2a-7)$ (với $2a-7<0$) thuộc đường thẳng $2x-y-7=0$.
Vì $d(K,MN)=\sqrt{17} \Leftrightarrow \dfrac{|a-4(2a-7)+3|}{\sqrt{17}}=\sqrt{17} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2 \\ a=\dfrac{48}{7}\ (\text{loại}) \end{array}\right. \Rightarrow K(2;-3)$.
Do $CK \perp MN \Rightarrow CK\colon 4x+y+m=0$.
Vì $K(2;-3)\in CK \Rightarrow m=-5$ nên phương trình đường thẳng $CK\colon 4x+y-5=0$.
Tọa độ điểm H là nghiệm hệ phương trình $\begin{cases} 4x+y-5=0 \\ 5x+y-1=0 \end{cases} \Rightarrow H(-4;21)$.
Do I là trung điểm $HK \Rightarrow I(-1;9)$.
Đường tròn (C) có tâm I bán kính $R=IK=\sqrt{153}$.
Vậy phương trình đường tròn là $(x+1)^2+(y-9)^2=153 \Leftrightarrow x^2+y^2+2x-18y-71=0$.

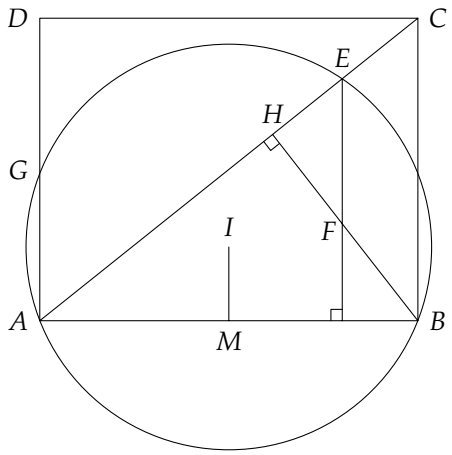
Chọn đáp án (A) □

Câu 20

Cho hình chữ nhật $ABCD$, qua B kẻ đường thẳng vuông góc với AC tại H. Gọi $E\left(\dfrac{17}{5};\dfrac{29}{5}\right)$; $F\left(\dfrac{17}{5};\dfrac{9}{5}\right)$; $G(1;5)$ lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng CH, BH, AD. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE có tâm $I(a;b)$. Tính $a+b$.

(A) 0. (B) 4. (C) 6. (D) 9.

Lời giải.



Xét tam giác $\triangle HBC$ có E là trung điểm của HC, F là trung điểm của $HB \Rightarrow EF$ là đường trung bình của tam giác $\triangle HBC \Rightarrow EF \parallel BC \Rightarrow EF \perp AB$.
Xét $\triangle ABE$, ta có $EF \perp AB, BH \perp AE \Rightarrow F$ là trực tâm của tam giác.
Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE.
Ta thấy ngay EF là đường trung bình của tam giác $\triangle HBC$.
$\Rightarrow \overrightarrow{FE} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG} \Rightarrow A(1;1)$.
Đường thẳng AE đi qua điểm $A(1;1)$; $\vec{u} = \overrightarrow{AE} = \left(\dfrac{12}{5}; \dfrac{24}{5}\right) = \dfrac{12}{5}(1;2) \Rightarrow \vec{n} = (2;-1)$.
$\Rightarrow AE: -2x + y + 1 = 0$.
Đường thẳng AB qua $A(1;1)$ và vuông góc với AG nên nhận $\overrightarrow{AG} = (0;4)$ là vectơ pháp tuyến $\Rightarrow AB: y - 1 = 0$.
Đường thẳng BH qua $F\left(\dfrac{17}{5}; \dfrac{9}{5}\right)$ và vuông góc với AE nên nhận $\overrightarrow{AE} = \dfrac{12}{5}(1;2)$ là vectơ pháp tuyến $\Rightarrow BH: x + 2y - 7 = 0$.
$B = BH \cap AB \Rightarrow$ tọa độ B là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y - 7 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow B(5;1)$.
Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE là đường tròn (C) đi qua ba điểm A, B, E có dạng là $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0;\ a^2 + b^2 - c > 0$.
Vì $A, B, E \in (C) \Rightarrow \begin{cases} -2a - 2b + c = -2 \\ -10a - 2b + c = -26 \\ -\dfrac{34}{5}a - \dfrac{58}{5}b + c = -\dfrac{226}{5} \end{cases} \Leftrightarrow a = 3; b = 3; c = 10$.
Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE có tâm $I(3;3)$. Khi đó $a + b = 6$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 21

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn tâm I có phương trình $(C): (x-2)^2 + (y-1)^2 = 10$. Gọi Δ là một tiếp tuyến của (C). Khẳng định nào sau đây là đúng?
(A) $\mathrm{d}(I, \Delta) = 5$. (B) $\mathrm{d}(I, \Delta) = \sqrt{10}$. (C) $\mathrm{d}(I, \Delta) = 10$. (D) $\mathrm{d}(I, \Delta) = \sqrt{5}$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(2;1)$, bán kính $R = \sqrt{10}$.
Vì Δ là tiếp tuyến của đường tròn (C) nên $\mathrm{d}(I, \Delta) = R = \sqrt{10}$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 22

Cho đường tròn $(C)\colon (x+3)^2+(y-2)^2=8$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(-1;4)$ là

(A) $x+y+1=0$. (B) $2x-2y-10=0$. (C) $x-2y-9=0$. (D) $x+y-3=0$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(-3;2)$.
Tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $M(-1;4)$ vuông góc với IM do đó nhận $\overrightarrow{IM}=(2;2)$ làm vectơ pháp tuyến.
Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $2(x+1)+2(y-4)=0 \Leftrightarrow x+y-3=0$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 23

Phương trình nào dưới đây là phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C)\colon (x+5)^2+(y-1)^2=20$ tại điểm $K(-1;-1)$?

(A) $y=2x+1$. (B) $y=-x-4$. (C) $y=2x+11$. (D) $y=5x+4$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(-5;1)$.
Tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $K(-1;-1)$ vuông góc với IK do đó nhận $\overrightarrow{IK}=(4;-2)$ làm vectơ pháp tuyến.
Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $4(x+1)-2(y+1)=0 \Leftrightarrow 4x-2y+2=0 \Leftrightarrow y=2x+1$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 24

Cho đường tròn $(C)\colon (x-1)^2+(y-2)^2=25$. Phương trình tiếp tuyến d của (C) tại điểm $M(-2;-2)$ là

(A) $-3x-4y+14=0$. (B) $-3x-4y+11=0$.
(C) $3x+4y+14=0$. (D) $3x+4y+15=0$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$.
Tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $M(-2;-2)$ vuông góc với IM do đó nhận $\overrightarrow{MI}=(3;4)$ làm vectơ pháp tuyến.
Vậy phương trình tiếp tuyến d là $3(x+2)+4(y+2)=0 \Leftrightarrow 3x+4y+14=0$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 25

Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C)\colon x^2+(y-2)^2=25$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d\colon 4x-3y+31=0$.

(A) $4x-3y+2=0$. (B) $4x-3y+31=0$. (C) $3x+4y+17=0$. (D) $4x-3y-19=0$.

Lời giải.

Đường tròn $(C)\colon x^2+(y-2)^2=25$ có tâm $I(0;2)$ và bán kính $R=5$.
Đường thẳng Δ song song với đường thẳng $d\colon 4x-3y+31=0$.
$\Rightarrow \Delta$ có phương trình dạng $4x-3y+c=0$ $(c\in\mathbb{R}, c\neq 31)$.

Đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đường tròn (C) khi và chỉ khi

$$d(I,\Delta)=R \Leftrightarrow \frac{|4\cdot 0-3\cdot 2+c|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=5 \Leftrightarrow \frac{|c-6|}{5}=5 \Leftrightarrow |c-6|=25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=31 \\ c=-19. \end{array}\right.$$

Ta có $c=31$ không thỏa mãn điều kiện $c\neq 31$.
Ta có $c=-19$ thỏa mãn điệu kiện $c\neq 31$, khi đó đường thẳng $\Delta\colon 4x-3y-19=0$.
Vậy phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) song song với đường thẳng d là $4x-3y-19=0$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 26

Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C)\colon x^2+y^2=16$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d\colon x+y=0$.

(A) $x-y+3\sqrt{2}=0, x-y-4\sqrt{2}=0$. (B) $x+y+4\sqrt{2}=0, x+y-4\sqrt{2}=0$.
(C) $x+y+4\sqrt{2}=0, x+y-3\sqrt{2}=0$. (D) $x-y+4\sqrt{2}=0, x-y-4\sqrt{2}=0$.

Lời giải.

Đường tròn $(C)\colon x^2+y^2=16$ có tâm $O(0;0)$ bán kính $R=4$.
Đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng $d\colon x+y=0 \Rightarrow \Delta$ có phương trình dạng $x-y+c=0$ $(c\in\mathbb{R})$.
Đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đường tròn $(C) \Leftrightarrow \mathrm{d}(O,\Delta)=R \Leftrightarrow \frac{|0-0+c|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=4 \Leftrightarrow |c|=4\sqrt{2} \Leftrightarrow c=\pm 4\sqrt{2}$.
Với $c=4\sqrt{2}$ đường thẳng Δ có phương trình là $x-y+4\sqrt{2}=0$.
Với $c=-4\sqrt{2}$ đường thẳng Δ có phương trình là $x-y-4\sqrt{2}=0$.
Vậy đường tròn (C) có hai tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng d là $x-y+4\sqrt{2}=0, x-y-4\sqrt{2}=0$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 27

Tiếp tuyến của đường tròn $(C)\colon x^2+y^2-2x=0$ đi qua điểm $M(1;1)$ là

(A) $y-1=0$. (B) $x-1=0$. (C) $2x-y-1=0$. (D) $x+y-1=0$.

Lời giải.

Ta có $(C)\colon x^2+y^2-2x=0 \Rightarrow$ đường tròn (C) có tâm $I(1;0)$ bán kính $R=1$.
$\overrightarrow{IM}=(0;1) \Rightarrow IM=1=R \Rightarrow M\in(C)$.
Đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đường tròn (C) đi qua điểm M.
Do $M\in(C)$ nên Δ nhận $\overrightarrow{IM}=(0;1)$ làm vectơ pháp tuyến.
Phương trình đường thẳng Δ là $0\cdot(x-1)+1\cdot(y-1)=0 \Leftrightarrow y-1=0$.
Vậy tiếp tuyến của đường tròn $(C)\colon x^2+y^2-2x=0$ đi qua điểm $M(1;1)$ là $y-1=0$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 28

Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C)\colon x^2+y^2-6x+2y=0$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $x+3y+10=0$.

(A) $x+3y-5=0$. (B) $3x-y=0$. (C) $x+3y-10=0$. (D) $x+3y+10=0$.

Lời giải.

Đường tròn $(C)\colon x^2+y^2-6x+2y=0$ có tâm $I(3;-1)$, bán kính $R=\sqrt{10}$.
Đường thẳng Δ song song với đường thẳng $d\colon x+3y+10=0$ nên đường thẳng $\Delta\colon x+3y+c=0$ $(c\in\mathbb{R}, c\neq 10)$.
Đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đường tròn (C) khi và chỉ khi

$$\mathrm{d}(I,\Delta)=R\Leftrightarrow\frac{|3+3\cdot(-1)+c|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\sqrt{10}\Leftrightarrow|c|=10\Leftrightarrow c=\pm 10.$$

Với $c=10$ không thỏa mãn điều kiện $c\neq 10$.
Với $c=-10$ thỏa mãn điều kiện $c\neq 10\Rightarrow$ phương trình đường thẳng Δ là $x+3y-10=0$.
Vậy đường tròn (C) có một tiếp tuyến song song với đường thẳng $x+3y+10=0$ là $x+3y-10=0$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 29

Trong mặt phẳng Oxy, cho $(C)\colon x^2+y^2-2x-2y-2=0$ và $M(3;5)$. Lập phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua điểm M.

(A) $\Delta_1\colon -3x-4y+11=0$ và $\Delta_2\colon y=3$.
(B) $\Delta_1\colon 3x+4y-11=0$ và $\Delta_2\colon y=-3$.
(C) $\Delta_1\colon 3x+4y+11=0$ và $\Delta_2\colon x=-3$.
(D) $\Delta_1\colon 3x-4y+11=0$ và $\Delta_2\colon x=3$.

Lời giải.

Ta có (C) có tâm $I(1;1)$ và bán kính $R=2$.
Ta có $IM=\sqrt{(3-1)^2+(5-1)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}>R$. Do đó qua M có hai tiếp tuyến đến (C).
Gọi Δ là đường thẳng đi qua M và tiếp xúc với (C).
Gọi $\vec{n}=(a;b)\neq\vec{0}$ là VTPT của đường thẳng Δ.
Khi đó $\Delta\colon a(x-3)+b(y-5)=0\Leftrightarrow ax+by-3a-5b=0$.
Ta có Δ là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi

$$\mathrm{d}(I;\Delta)=R\Leftrightarrow\frac{|a+b-3a-5b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2\Leftrightarrow|-2a-4b|=2\sqrt{a^2+b^2}\Leftrightarrow 3b^2+4ab=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\\ b=-\dfrac{4a}{3}.\end{array}\right.$$

Với $b=0$, chọn $a=1\Rightarrow\vec{n}=(1;0)\Rightarrow\Delta_1\colon 1(x-3)+0(y-5)=0\Leftrightarrow x=3$.
Với $b=-\dfrac{4a}{3}$, chọn $a=3\Rightarrow b=-4\Rightarrow\vec{n}=(3;-4)\Rightarrow\Delta_2\colon 3x-4y+11=0$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 30

Trong mặt phẳng (Oxy), cho $(C)\colon (x-2)^2+(y-1)^2=5$. Gọi phương trình tiếp tuyến của (C) cắt Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho $OA=2OB$ là $ax+by-9=0$, với a, b là các số nguyên dương và ước chung lớn nhất của a, b là 1. Tính $a+2b$.

(A) 5. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(2;1)$, bán kính $R=\sqrt{5}$.
Tiếp tuyến cắt Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho $OA=2OB$.
Suy ra tiếp tuyến có hệ số góc $k=\pm\dfrac{OB}{OA}=\pm\dfrac{1}{2}$.
Trường hợp 1: Với $k=\dfrac{1}{2}\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến có dạng $\Delta\colon y=\dfrac{1}{2}x+n$.

Δ là tiếp tuyến của $(C) \Leftrightarrow \mathrm{d}(I,\Delta) = R \Leftrightarrow \dfrac{|2n|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = \dfrac{5}{2} \\ n = -\dfrac{5}{2}. \end{array}\right.$

Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là $\left[\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2} \\ y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{5}{2}. \end{array}\right.$

Trường hợp 2: Với $k = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến có dạng $d\colon y = -\dfrac{1}{2}x + m$.

d là tiếp tuyến của $(C) \Leftrightarrow \mathrm{d}(I,d) = R \Leftrightarrow \dfrac{|4-2m|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{9}{2} \\ m = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là $\left[\begin{array}{l} y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{9}{2} \\ y = -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 2y - 9 = 0 \\ x + 2y + 1 = 0. \end{array}\right.$

Vậy $a = 1; b = 2 \Rightarrow a + 2b = 5$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 31

Trong mặt phẳng (Oxy), cho đường tròn $(C)\colon (x-1)^2 + (y+1)^2 = 10$. Có thể lập được bao nhiêu phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) biết tiếp tuyến tạo với $\Delta\colon 2x + y - 4 = 0$ một góc bằng 45°.

(A) 4. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-1)$ và bán kính $R = \sqrt{10}$.
Gọi tiếp điểm $M(x_0;y_0)$, khi đó phương trình tiếp tuyến có dạng

$$d\colon (x-1)(x_0-1) + (y+1)(y_0+1) = 10 \Leftrightarrow (x_0-1)x + (y_0+1)y - x_0 + y_0 - 8 = 0 \quad (1).$$

Vì $M(x_0;y_0) \in (C) \Leftrightarrow (x_0-1)^2 + (y_0+1)^2 = 10$ (2).
Đường thẳng d tạo với Δ một góc bằng 45° khi và chỉ khi

$$\cos 45^\circ = \frac{|2(x_0-1) + 1\cdot(y_0+1)|}{\sqrt{4+1}\cdot\sqrt{(x_0-1)^2 + (y_0+1)^2}} \Leftrightarrow |2x_0 + y_0 - 1| = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_0 = 6 - 2x_0 \quad (3) \\ y_0 = -4 - 2x_0. \quad (4) \end{array}\right.$$

Giải hệ phương trình tạo bởi (2), (3) ta được $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x_0 = 4 \\ y_0 = -2 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M_1(2;2) \\ M_2(4;-2). \end{array}\right.$

Giải hệ phương trình tạo bởi (2), (4) ta được $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = -4 \end{cases} \\ \begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M_3(0;-4) \\ M_4(-2;0). \end{array}\right.$

Với $M_1(2;2)$, thay vào (1) ta được tiếp tuyến $d_1\colon x + 3y - 8 = 0$.
Với $M_2(4;-2)$, thay vào (1) ta được tiếp tuyến $d_2\colon 3x - y - 14 = 0$.
Với $M_3(0;-4)$, thay vào (1) ta được tiếp tuyến $d_3\colon x + 3y + 12 = 0$.
Với $M_4(-2;0)$, thay vào (1) ta được tiếp tuyến $d_4\colon 3x - y + 6 = 0$.
Vậy có bốn tiếp tuyến d_1, d_2, d_3, d_4 tới (C) thỏa mãn điều kiện đề bài.

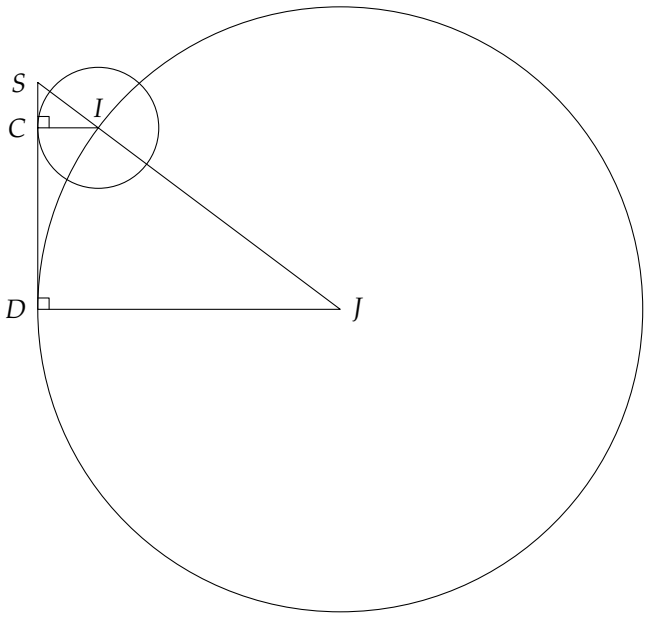
Chọn đáp án (A) □

Câu 32

Trong mặt phẳng toạ độ, cho hai đường tròn và (C_2): $(x-2)^2+y^2=16$. Biết đường thẳng d: $ax+by-10=0$ là một tiếp tuyến chung của hai đường tròn (C_1) và (C_2). Tính $S=a^2+b^2$.

(A) $S=12$. (B) $S=16$. (C) $S=20$. (D) $S=24$.

Lời giải.



Ta có (d) tiếp xúc với (C_1) nên $\dfrac{|-2a-10|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}=|2a+10|$ (1).

Ta có (d) tiếp xúc với (C_2) nên $\dfrac{|2a-10|}{\sqrt{a^2+b^2}}=4 \Leftrightarrow 4\sqrt{a^2+b^2}=|2a-10|$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $|2a-10|=4|2a+10| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2a-10=8a+40\\2a-10=-8a-40\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=-\dfrac{25}{3}\\a=-3.\end{array}\right.$

Với $a=-3$ thì ta có $\sqrt{a^2+b^2}=4 \Leftrightarrow a^2+b^2=16$. Lúc này $b=\pm\sqrt{7}$ (Nhận).

Với $a=-\dfrac{25}{3}$ thì ta có $\sqrt{a^2+b^2}=\dfrac{20}{3} \Leftrightarrow a^2+b^2=\dfrac{400}{9}$. Lúc này $b^2=-\dfrac{225}{9}$ (Loại).

Vậy $a^2+b^2=16$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 33

Một cửa hàng ăn nhanh đặt ở vị trí I trong mặt phẳng tọa độ (đơn vị trên hai trục là 1 km). Vùng giao đồ ăn của cửa hàng được mô tả bởi $(x-1)^2+(y-1)^2 \le 100$. Địa điểm nào sau đây thuộc vùng giao đồ ăn của cửa hàng?

(A) $M(7;10)$. (B) $N(-4;-8)$. (C) $P(9;-6)$. (D) $Q(-7;5)$.

Lời giải.

Ta có vị trí đặt cửa hàng là $I(1;1)$, bán kính vùng giao hàng là $R=10$.

Để nằm trong vùng được giao hàng thì khoảng cách từ cửa hàng đến địa điểm đó phải nhỏ hơn hoặc bằng R. Ta xét:

- $IM = \sqrt{(7-1)^2 + (10-1)^2} = \sqrt{117} > R$.
- $IN = \sqrt{(-4-1)^2 + (-8-1)^2} = \sqrt{106} > R$.
- $IP = \sqrt{(9-1)^2 + (-6-1)^2} = \sqrt{113} > R$.
- $IQ = \sqrt{(-7-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{80} < R$.

Vậy Q thuộc vùng giao đồ ăn của cửa hàng.
Chọn đáp án (D) □

Câu 34

Giả sử có chiếc nhẫn đường kính 20 mm muốn sửa thành chiếc nhẫn vừa với ngón tay đường kính 16 mm, người thợ tính độ dài dây cung CD để cắt chiếc nhẫn ở hai điểm C, D rồi hàn lại (hình vẽ). Tính độ dài CD.

CHỜ HỖ TRỢ HÌNH VẼ

(A) $CD = 10$ mm. (B) $CD = 14$ mm. (C) $CD = 12$ mm. (D) $CD = 16$ mm.

Lời giải.

CHỜ HỖ TRỢ HÌNH VẼ

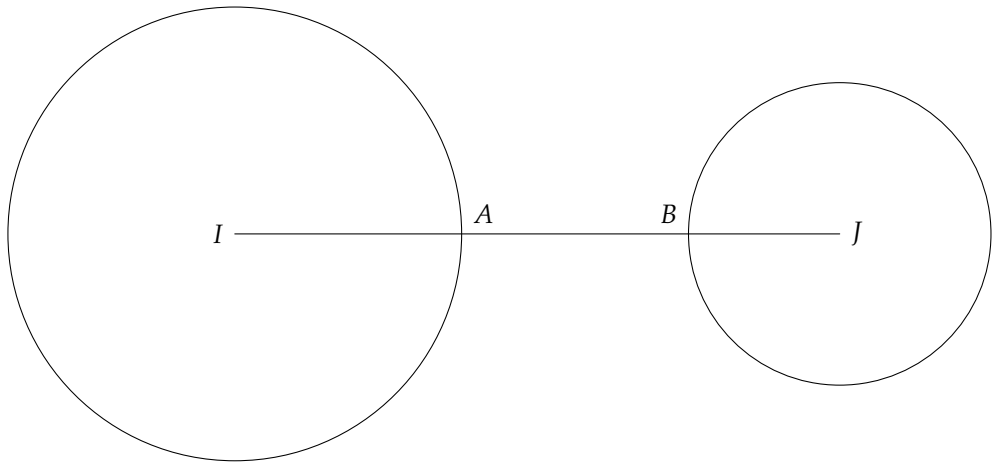
Đường tròn (C) biểu diễn cho chiếc nhẫn đường kính 20 mm.
Đường tròn (C') biểu diễn cho ngón tay đường kính 16 mm.
Ta chọn hệ trục tọa độ có gốc tọa độ O là tâm của đường tròn (C), đơn vị trên các trục là 1 mm.
Đường tròn (C) có tâm $O(0;0)$, bán kính $R = 10$ nên phương trình là $x^2 + y^2 = 100$.
Ta có $IA = 16 \Rightarrow IB = 20 - 16 = 4 \Rightarrow OI = 6$.
Điểm $D(d;-6)$ $(d > 0)$ thuộc (C) nên có $(-6)^2 + d^2 = 100 \Rightarrow d = 8$.
Vậy $CD = 2d = 16$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 35

Có hai hòn đảo xem như hình tròn là (C) có tâm ở vị trí $I(3;4)$, bán kính $R = 7$ km và (C') có tâm ở vị trí $J(15;9)$, bán kính $R' = 5$ km. Người ta dự định xây một cây cầu nối hai hòn đảo. Tính độ dài ngắn nhất của cây cầu?

(A) 4 km. (B) 3 km. (C) 2 km. (D) 1 km.

Lời giải.



Ta có khoảng cách giữa tâm của hai đảo là $IJ = \sqrt{(15-3)^2+(9-4)^2} = 13(\text{km})$.
Cây cầu có chiều dài ngắn nhất khi điểm đặt của nó nằm trên giao điểm của đường nối tâm của hai đảo với hai đường tròn. Khi đó khoảng cách ngắn nhất bằng:

$$AB = IJ - R - R' = 13 - 7 - 5 = 1(\text{km}).$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 36

Là một trong bảy kì quan thế giới, ngọn hải đăng Alexandria sừng sững nghìn năm chiếu ánh sáng dẫn đường cho nhiều con tàu cập bến Ai Cập an toàn. Ngọn hải đăng này ở tọa độ $(3;4)$, một trong các điểm được nó chiếu sáng xa nhất có tọa độ $(23;4)$. Hãy viết phương trình đường tròn biểu diễn tập hợp các điểm xa nhất mà ánh sáng từ ngọn hải đăng chiếu tới.

(A) $(x+3)^2+(y+4)^2 = 400$.
(B) $(x-23)^2+(y-4)^2 = 400$.
(C) $(x+23)^2+(y-4)^2 = 400$.
(D) $(x-3)^2+(y-4)^2 = 400$.

Lời giải.

Đường tròn biểu diễn tập hợp các điểm xa nhất mà ánh sáng từ ngọn hải đăng chiếu tới có tâm tọa độ $(3;4)$ đi qua điểm $(23;4)$ có bán kính $R = \sqrt{(23-3)^2+(4-4)^2} = 20$.
Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $(x-3)^2+(y-4)^2 = 400$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 37

Bên trong một hồ bơi, người ta dự định thiết kế hai bể sục nửa hình tròn bán kính bằng nhau và một bể sục hình tròn (tham khảo hình vẽ) để người bơi có thể tựa lưng vào thành các bể sục thư giãn.

CHỖ HỖ TRỢ HÌNH VẼ

Biết tổng chu vi của ba bể là 32 m. Tổng diện tích ba bể sục là nhỏ nhất khi bán kính mỗi bể sục bằng (trong tính toán lấy $\pi = 3{,}14$, độ dài tính theo mét và làm tròn tới chữ số thập phân thứ hai)

(A) 1,38 m và 2,26 m. (B) 1,37 m và 2,26 m. (C) 1,37 m và 2,27 m. (D) 1,38 m và 2,27 m.

Lời giải.

CHỖ HỖ TRỢ HÌNH VẼ

Gọi bán kính mỗi bể sục hình tròn và nửa hình tròn tương ứng là x, y (m) $(x, y > 0)$.
Tổng chu vi ba bể là 32 m, ta có

$$2\cdot 3{,}14\cdot x + 2\cdot 3{,}14\cdot y + 4y = 32 \Leftrightarrow y = \frac{8-1{,}57x}{2{,}57} \Leftrightarrow 1{,}57x + 2{,}57y - 8 = 0.$$

Gọi tổng diện tích của ba bể sục là S (m^2), $S > 0$.
Khi đó $3{,}14x^2 + 3{,}14y^2 = S \Leftrightarrow x^2+y^2 = \dfrac{S}{3{,}14}$.
Ta có $\dfrac{S}{3{,}14} = x^2+y^2 = x^2 + \left(\dfrac{8-1{,}57x}{2{,}57}\right)^2 = x^2 + \dfrac{1}{2{,}57^2}(1{,}57^2x^2 - 16\cdot 1{,}57x + 64)$

$$= \left(1 + \frac{1{,}57^2}{2{,}57^2}\right)x^2 - \frac{16\cdot 1{,}57}{2{,}57^2}x + \frac{64}{2{,}57^2}.$$

$S_{\min}$ khi và chỉ khi $x = \dfrac{16 \cdot 1{,}57}{2{,}57^2} : \left[2\left(1 + \dfrac{1{,}57^2}{2{,}57^2}\right)\right] = 1{,}38 > 0$ (thỏa mãn).

$\Rightarrow y = 2{,}27$.

Vậy tổng diện tích bể sục là nhỏ nhất khi bán kính của bể hình tròn và bể nửa hình tròn tương ứng là 1,38 m và 2,27 m.

Chọn đáp án (D) □

Câu 38

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, một vật chuyển động nhanh trên đường tròn có phương trình $x^2 + y^2 = 25$ Khi tới vị trí $M(3;4)$ thì vật bị văng khỏi quỹ đạo tròn và ngay sau đó, một khoảng thời gian ngắn bay theo hướng tiếp tuyến của đường tròn (tham khảo hình vẽ).

CHỜ HỖ TRỢ HÌNH VẼ

Hỏi trong khoảng thời gian ngắn ngay sau khi văng, vật chuyển động trên đường thẳng nào sau đây?

(A) $3x + 4y - 25 = 0$. (B) $3x + 4y + 25 = 0$. (C) $3x - 4y + 7 = 0$. (D) $3x - 4y - 7 = 0$.

Lời giải.

Xét đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 25$ có tâm $O(0;0)$ và bán kính $R = 5$.

Tiếp tuyến d của đường tròn (C) tại điểm $M(3;4)$ có VTPT là $\overrightarrow{OM} = (3;4)$.

Phương trình d: $3(x-3) + 4(y-4) = 0 \Leftrightarrow d$: $3x + 4y - 25 = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 39

Chuyển động của một vật thể trong khoảng thời gian 180 phút được thể hiện trong mặt phẳng tọa độ. Theo đó, tại thời điểm t $(0 \le t \le 180)$ vật thể ở vị trí có tọa độ $(2 + \sin t; 4 + \cos t)$ Quỹ đạo chuyển động của vật thể trên là

(A) Đường tròn đi qua ba điểm $A(2;5)$, $B(2;3)$ và $C(3;0)$.

(B) Nửa đường tròn đường kính AB vẽ trên nửa mặt phẳng chứa điểm $C(3;0)$, bờ AB.

(C) Đường tròn đường kính AB, với $A(2;5)$ và $B(2;3)$.

(D) Nửa đường tròn đường kính AB, với $A(2;5)$ và $B(2;3)$.

Lời giải.

Để tính quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian 180 phút ta cần tìm quỹ đạo chuyển động của vật thể.

Ta có $\begin{cases} x = 2 + \sin t \\ y = 4 + \cos t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 t = (x-2)^2 \\ \cos^2 t = (y-4)^2. \end{cases}$

Từ đẳng thức $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ suy ra: $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 1$.

Do đó vật thể chuyển động trên đường tròn (C) có tâm $I(2;4)$ và bán kính $R = 1$.

Gọi A, B lần lượt là vị trí bắt đầu và kết thúc của vật thể. Khi đó

+ Vị trí ban đầu ứng với $t = 0 \Rightarrow A(2;5)$.

+ Vị trí kết thúc ứng với $t = 180 \Rightarrow B(2;3)$.

Suy ra AB là đường kính của đường tròn (C).

Khi t thay đổi trên đoạn $[0;180]$ thì $\sin t \in [0;1]$ và $\cos t \in [-1;1]$.

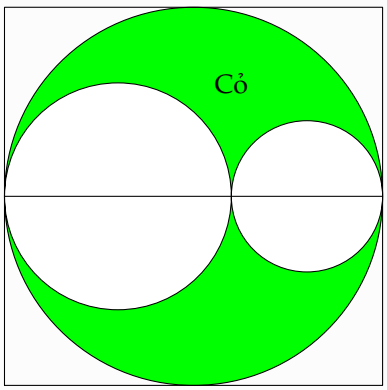
Do đó $x = 2 + \sin t \in [2;3]$ và $y = 4 + \cos t \in [3;5]$.

Vậy quỹ đạo của vật thể là nửa đường tròn đường kính AB vẽ trên nửa mặt phẳng chứa điểm $C(3;0)$, bờ AB.

Chọn đáp án (B) □

Câu 40

Thiết kế khu vườn Hạnh Phúc hình vuông cạnh 10 m như hình vẽ.



Phần được tô đậm dùng để trồng cỏ, phần còn lại lát gạch. Biết mỗi mét vuông trồng cỏ chi phí 100 nghìn đồng, mỗi mét vuông lát gạch chi phí 300 nghìn đồng. Khi diện tích phần lát gạch là nhỏ nhất thì tổng chi phí thi công vườn hoa Hạnh Phúc bằng (làm tròn đến hàng nghìn).

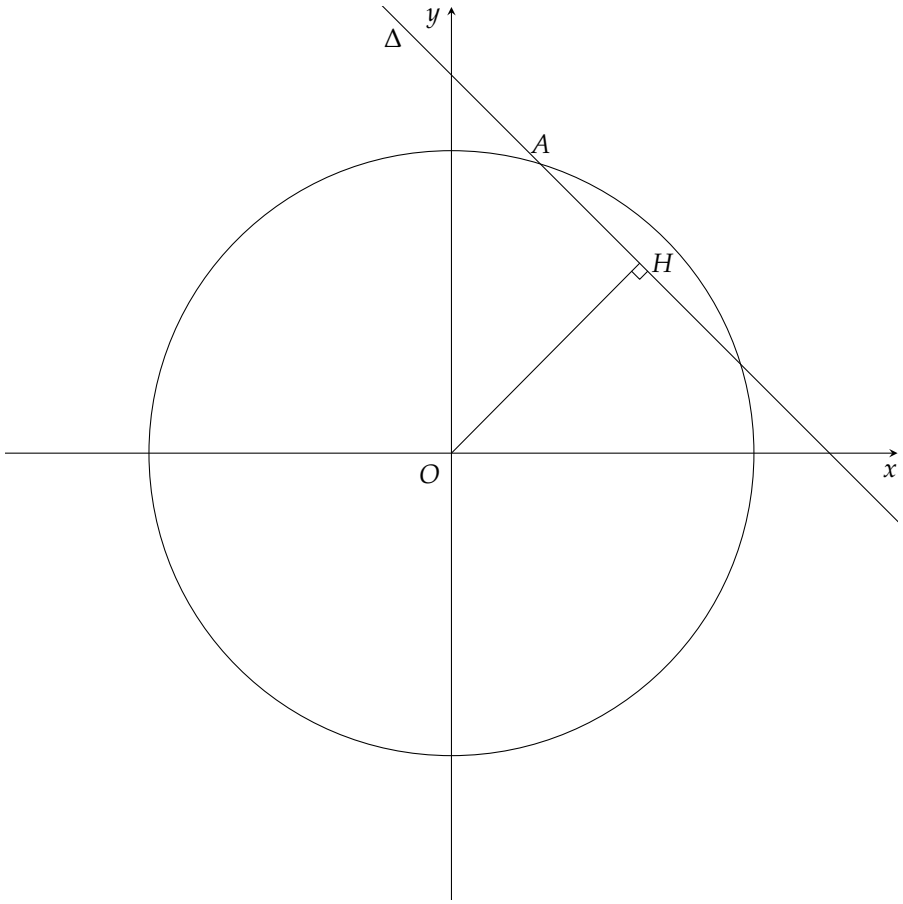
(A) 22146 nghìn đồng. (B) 20147 nghìn đồng.
(C) 24145 nghìn đồng. (D) 19144 nghìn đồng.

Lời giải.

Gọi x, y (m) lần lượt là bán kính của phần lát gạch hình tròn $(x, y > 0)$ ta có $x + y = 5$.
Gọi S (m^2) là phần diện tích được lát gạch của khu vườn $(S > 0)$, ta có

$$S = 100 - 25\pi + \pi x^2 + \pi y^2 = 100 + \pi(x^2 + y^2 - 25) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{S + 25\pi - 100}{\pi}.$$

Ta có $(C)\colon x^2 + y^2 = \dfrac{S + 25\pi - 100}{\pi}$ có tâm $O(0;0)$, bán kính $R = \sqrt{\dfrac{S + 25\pi - 100}{\pi}}$ và đường thẳng $\Delta\colon x + y - 5 = 0$.
Khi đó bài toán trở thành: Tìm R nhỏ nhất để (C) và Δ có ít nhất một điểm chung, với hoành độ và tung độ đều là các số dương.



Ta có (C) và Δ có ít nhất một điểm chung khi và chỉ khi

$$R \geq \mathrm{d}(O,\Delta) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{S+25\pi-100}{\pi}} \geq \frac{5}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow S+25\pi-100 \geq \frac{25\pi}{2} \Leftrightarrow S \geq 100-\frac{25\pi}{2}.$$

Vậy diện tích phần lát gạch nhỏ nhất bằng $S_{\min}=100-\dfrac{25\pi}{2}$.
Từ đó chi phí để thi công khu vườn Hạnh phúc là $100\cdot(100-S_{\min})+300\cdot S_{\min}=22146$ nghìn đồng.
Chọn đáp án (A) □

Câu 41

Tâm đường tròn $x^2+y^2-10x+1=0$ cách trục Oy một khoảng bằng
(A) 5. (B) 0. (C) 10. (D) -5.

Lời giải.

Đường tròn $x^2+y^2-10x+1=0$ có tâm $I(5;0)$. Khoảng cách từ I đến Oy là $d\left(I,Oy\right)=5$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 42

Một đường tròn có tâm $I(1;3)$ tiếp xúc với đường thẳng $\Delta\colon 3x+4y=0$. Hỏi bán kính đường tròn bằng bao nhiêu?
(A) 1. (B) 3. (C) 15. (D) $\dfrac{3}{5}$.

Lời giải.

Bán kính của đường tròn là $R = d(I, \Delta) = \dfrac{|3.1 + 4.3|}{3^2 + 4^2} = 3.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 43

Phương trình nào sau đây **không phải** là phương trình đường tròn?

(A) $x^2 + y^2 - 100y + 1 = 0.$ (B) $x^2 + y^2 - y = 0.$

(C) $x^2 + y^2 - 2 = 0.$ (D) $x^2 + y^2 - x + y + 4 = 0.$

Lời giải.

Xét đáp án A ta có $a^2 + b^2 - c = 0^2 + 50^2 - 1 = 2499 > 0$ là phương trình đường tròn.

Xét đáp án B ta có $a^2 + b^2 - c = 0^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 0 = \dfrac{1}{4} > 0$ là phương trình đường tròn.

Xét đáp án C ta có $a^2 + b^2 - c = 0^2 + 0^2 + 2 = 2 > 0$ là phương trình đường tròn.

Xét đáp án D ta có $a^2 + b^2 - c = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{-1}{2}\right)^2 - 4 = -\dfrac{7}{2} < 0$ không là phương trình đường tròn.

Chọn đáp án (D) □

Câu 44

Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $x^2 + y^2 + 2mx - 10y + 4m = 0$ là phương trình đường tròn và có bán kính nhỏ nhất.

(A) $m = \dfrac{1}{2}.$ (B) $m = 1.$ (C) $m = -2.$ (D) $m = 2.$

Lời giải.

Phương trình $x^2 + y^2 + 2mx - 10y + 4m = 0$ là phương trình đường tròn
$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - c > 0 \Leftrightarrow (-m)^2 + 5^2 - 4m > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 25 > 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}.$
Bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c} = \sqrt{m^2 - 4m + 25} = \sqrt{m^2 - 4m + 4 + 21} = \sqrt{(m-2)^2 + 21} \geq \sqrt{21}.$
Bán kính nhỏ nhất là $R = \sqrt{21}$ khi $m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 2.$

Chọn đáp án (D) □

Câu 45

Viết phương trình đường tròn có tâm $A(2; -5)$ và tiếp xúc với đường thẳng $d\colon 3x - 4y - 1 = 0.$

(A) $(x-2)^2 + (y+5)^2 = 25.$ (B) $(x+2)^2 + (y-5)^2 = 25.$

(C) $(x-2)^2 + (y+5)^2 = 5.$ (D) $(x+2)^2 + (y-5)^2 = 5.$

Lời giải.

Đường tròn có tâm $A(2; -5)$ và tiếp xúc với đường thẳng $d\colon 3x - 4y - 1 = 0.$
$\Rightarrow R = d(A, d) = \dfrac{|3.2 - 4.-5 - 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \dfrac{25}{5} = 5.$
Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $(x-2)^2 + (y+5)^2 = 25.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 46

Cho tam giác MNP biết $M(-6;3)$ và N, P là các điểm lần lượt thuộc các đường thẳng $\Delta_1: x-y+9=0$, $\Delta_2: 2x+y+1=0$. Gọi $Q(2;-1)$ là điểm thỏa $\overrightarrow{NQ}=3\overrightarrow{NP}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP?

(A) $(x+4)^2+(y-3)^2=4$.
(B) $(x+4)^2+\left(y-\frac{11}{3}\right)^2=\frac{10}{9}$.
(C) $(x-4)^2+(y+3)^2=2$.
(D) $(x+6)^2+(y-3)^2=\frac{5}{2}$.

Lời giải.

$N\in\Delta_1: x-y+9=0\Rightarrow N(x_N;x_N+9)$; $P\in\Delta_2: 2x+y+1=0\Rightarrow P(x_P;-2x_P-1)$.
Mà $\overrightarrow{NQ}=3\overrightarrow{NP}$. Suy ra,

$$\begin{cases}2-x_N=3(x_P-x_N)\\-1-y_N=3(y_P-y_N)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x_N-3x_P=-2\\2x_N+6x_P=-20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_N=-4\\x_P=-2\end{cases}\quad(3.2)$$

Với $x_N=-4\Rightarrow y_N=5\Rightarrow N(-4;5)$; $x_P=-2\Rightarrow y_P=3\Rightarrow P(-2;3)$.
Ta có

$$\begin{cases}\overrightarrow{MN}=(2;2)\\\overrightarrow{NP}=(2;-2)\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{NP}=0\Rightarrow\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{NP}$$

hay ΔMNP vuông tại N.
Gọi E là trung điểm $MP\Rightarrow E(-4;3)$.
Suy ra, đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP có tâm $E(-4;3)$ và bán kính $R=\frac{MP}{2}=2$.
Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP: $(x+4)^2+(y-3)^2=4$. □

Câu 47

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có $A(3;2)$ và phương trình cạnh $BD: 3x+4y-7=0$. Khi đó đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$ có phương trình là:

(A) $\left(x-\frac{9}{5}\right)^2+\left(y-\frac{2}{5}\right)^2=4$.
(B) $\left(x-\frac{9}{5}\right)^2+\left(y-\frac{1}{5}\right)^2=2$.
(C) $\left(x+\frac{9}{5}\right)^2+\left(y-\frac{2}{5}\right)^2=4$.
(D) $\left(x-\frac{9}{5}\right)^2+\left(y-\frac{2}{5}\right)^2=2$.

Lời giải.

Gọi I là tâm hình vuông $ABCD$.
Đường thẳng AC qua $A(3;2)$ và vuông góc với $BD: 3x+4y-7=0$ có phương trình là

$$AC: 4x-3y-6=0.$$

Vì $I=AC\cap BD$ nên $I\left(\frac{9}{5};\frac{2}{5}\right)$.
Ta có $IA=d(A,BD)=\frac{|3.3+4.2-7|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$.
Do đó $R=\frac{IA}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.
Vậy đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$ có tâm $I\left(\frac{9}{5};\frac{2}{5}\right)$, bán kính $R=\sqrt{2}$ có phương trình là

$$\left(x-\frac{9}{5}\right)^2+\left(y-\frac{2}{5}\right)^2=2.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 48

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(0;2)$, $\left(0;-\frac{4}{5}\right)$. Đường tròn (T) đi qua A và cắt hai đường thẳng $d\colon\ x-y-1=0$, $\Delta\colon 2x+y+2=0$ lần lượt tại M và N. Biết AM song song với BN và O, M, N thẳng hàng. Phương trình đường tròn (T) là

(A) $x^2+y^2+2x-y-1=0$. (B) $x^2+y^2+x-y+2=0$.
(C) $x^2+y^2+x+y-2=0$. (D) $x^2+y^2-x-y-2=0$.

Lời giải.

Vì $M\in d$ và $N\in\Delta\Rightarrow M(t;t-1)$, $N(s;-2s-2)$.
Nếu $t=0\Rightarrow M(0;-1)\Rightarrow A,M\in Oy$ (loại). Nếu $t\neq 0$.
Ta có: Do AM song song với BN và O,M, N thẳng hàng nên có

$$\begin{cases}\overrightarrow{OM}=k\overrightarrow{ON}\\ \overrightarrow{AM}=l\overrightarrow{BN}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{s}{t}=\frac{-2-2s}{-1+t}\\ \frac{s}{t}=\frac{-\frac{6}{5}-2s}{-3+t}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3st=s-2t\\ 15st=15s-6t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=2\\ s=-\frac{4}{5}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}M(2;1)\\ N\left(-\frac{4}{5};-\frac{2}{5}\right)\end{cases}$$

Giả sử đường tròn (T) có dạng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ $\left(a^2+b^2-c>0\right)$.
Vì đường tròn (T) qua ba điểm A, M,N nên có hệ:

$$\begin{cases}4-4b+c=0\\ 5-4a-2b+c=0\\ \frac{4}{5}+\frac{8}{5}a+\frac{4}{5}b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ b=\frac{1}{2}\\ c=-2\end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn (T) là $x^2+y^2-x-y-2=0$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 49

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+(y-3)^2=1$ và điểm $M(1;3)$ thuộc đường tròn (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $M(1;3)$.

(A) $x+3y-10=0$. (B) $x+1=0$. (C) $y-3=0$. (D) $x-1=0$.

Lời giải.

- Đường tròn (C) có tâm là $I(0;3)$.
- Tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $M(1;3)$có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{IM}=(1;0)$ nên ta có phương trình $1(x-1)+0(y-3)=0\Leftrightarrow x-1=0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 50

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2+6x-4y-4=0$. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng

$\Delta: x-4y+2022=0$.

(A) $4x+y+27=0\,;4x-y-7=0$.
(B) $x-4y+27=0\,;x-4y-7=0$.
(C) $4x+y+27=0\,;4x+y-7=0$.
(D) $4x+y-27=0\,;4x+y-7=0$.

Lời giải.

- Đường tròn (C) có tâm là $I(-3;2)$ và có bán kính $R=\sqrt{17}$.
- Đường thẳng $d\perp\Delta\Rightarrow d: 4x+y+c=0$.
- d là tiếp tuyến của $(C)\Leftrightarrow d(I,d)=R\Leftrightarrow \dfrac{|-12+2+c|}{\sqrt{4^2+1^2}}=\sqrt{17}\Leftrightarrow \begin{cases}c=27\\c=-7\end{cases}$.
- Phương trình tiếp tuyến d là $4x+y+27=0\,;4x+y-7=0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 51

Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-4x+8y-5=0$. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) song song với với đường thẳng $3x-4y+5=0$.

(A) $\left[\begin{array}{l}3x-4y-3=0\\3x-4y+47=0\end{array}\right.$.
(B) $\left[\begin{array}{l}4x+3y-25=0\\4x+3y+29=0\end{array}\right.$.
(C) $\left[\begin{array}{l}4x+3y+25=0\\4x+3y-29=0\end{array}\right.$.
(D) $\left[\begin{array}{l}3x-4y+3=0\\3x-4y-47=0\end{array}\right.$.

Lời giải.

Đường tròn $(C): x^2+y^2-4x+8y-5=0$ có tâm $I(2;-4)$ và bán kính $R=\sqrt{2^2+(-4)^2+5}=5$.
Phương trình tiếp tuyến d song song với $3x-4y+5=0$ có dạng $3x-4y+c=0\ \ (c\neq 5)$.
Do (d) tiếp xúc với đường tròn nên:

$$d(I,d)=R\Leftrightarrow \frac{|3.2-4.(-4)+c|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=5\Leftrightarrow |c+22|=25\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}c=3\\c=-47\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đường thẳng d: $3x-4y+3=0$ và $3x-4y-47=0$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 52

Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có tâm nằm trên đường thẳng $d: x-6y-10=0$ và tiếp xúc với hai đường thẳng có phương trình $d_1: 3x+4y+5=0$ và $d_2: 4x-3y-5=0$ (Biết tung độ của tâm là số không âm). Viết phương trình đường tròn (C).

(A) $(C): \left(x-\dfrac{10}{43}\right)^2+\left(y+\dfrac{70}{43}\right)^2=\left(\dfrac{7}{43}\right)^2$.
(B) $(C): (x-10)^2+y^2=49$.
(C) $(C): (x-10)^2+y^2=25$.
(D) $(C): x^2+(y-10)^2=49$.

Lời giải.

Vì đường tròn (C) có tâm I nằm trên đường thẳng $d: x-6y-10=0$ nên gọi $I(6a+10;a)$, với $a\geq 0$.

Mặt khác đường tròn tiếp xúc với d_1, d_2 nên khoảng cách từ tâm I đến hai đường thẳng này bằng nhau và bằng bán kính R suy ra

$$\frac{|3(6a+10)+4a+5|}{5}=\frac{|4(6a+10)-3a-5|}{5}\Leftrightarrow|22a+35|=|21a+35|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\text{ (tm)}\\a=\dfrac{-70}{43}\text{ (ktm)}\end{array}\right.$$

Với $a=0$ thì $I(10;0)$ và $R=\dfrac{|3(6a+10)+4a+5|}{5}=7$.
Vậy đường tròn (C) có phương trình là: $(x-10)^2+y^2=49$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 53

Phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-2y=0$ biết tiếp tuyến vuông góc đường thẳng $\Delta: x+y-1=0$ là

(A) $x+y-2=0, x+y+2=0$.
(B) $x-y+2=0, x-y-2=0$.
(C) $x-y+4=0, x-y-4=0$.
(D) $x+y+4=0, x+y-4=0$.

Lời giải.

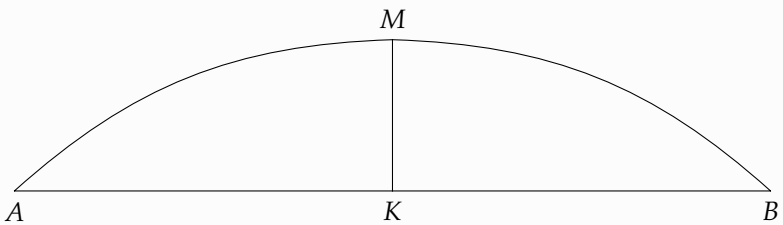
Đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-2y=0$ có tâm $I(1;1)$, $r=\sqrt{2}$.
Do tiếp tuyến vuông góc đường thẳng $\Delta: x+y-1=0$ nên tiếp tuyến có dạng $d: x-y+c=0$.
Đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (C) khi:

$$d(I,d)=r\Leftrightarrow\frac{|1-1+c|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=2\\c=-2\end{array}\right.$$

Vậy phương trình tiếp tuyến là $x-y+2=0, x-y-2=0$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 54

Một chiếc cầu được thiết kế dưới dạng 1 cung tròn (Hình vẽ)

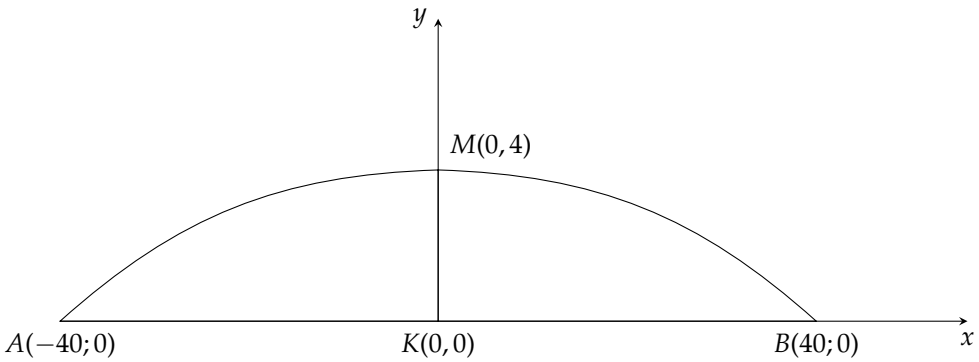


Biết độ dài $AB=80$ m, chiều cao $MK=4$ m. Tính bán kính của đường tròn chứa cung AMB (MK đi qua tâm của đường tròn chứa cung AMB)

(A) 202 m.
(B) 201 m.
(C) $2\sqrt{9401}$ m.
(D) 200 m.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ Kxy như hình vẽ $\Rightarrow A(-40;0), B(40;0), M(0;4)$.



Đường tròn chứa cung AMB có phương trình dạng: $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ đi qua A, M, B.
Nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 1600-80a+c=0 \\ 1600+80a+c=0 \\ 16+8b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ c=-1600 \\ b=198 \end{cases}$$

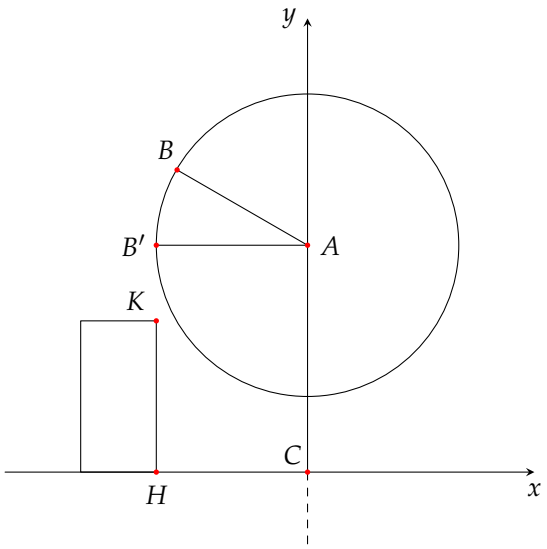
Bán kính đường tròn chứa cung $AMB \Rightarrow R=\sqrt{a^2+b^2-c}=\sqrt{0^2+198^2+1600}=202\,\text{m}$.
Vậy $R=202\,\text{m}$..
Chọn đáp án (A) □

Câu 55

Một cành cây dài 4 m, rẽ nhánh tại điểm cao 7 m trên thân cây mọc thẳng đứng so với mặt đất. Cành cây này có nguy cơ gãy tại gục A (giả sử khi gãy sẽ rơi theo một cung tròn) tại điểm rẽ nhành tại thân cây trong mùa mưa bão. Hỏi các công trình xây theo phương thẳng đứng cao 3,7m nằm theo hướng gãy của cành cây, phải cách thân cây ít nhất bao nhiêu để được an toàn?

(A) 4 m. (B) 6,17 m. (C) 7 m. (D) 2,26 m.

Lời giải.



Với gốc cây là điểm C, điểm rẽ nhánh của cành cây tại A, và điểm cuối cùng của cành cây là B, công trình xây dựng có các điểm gần thân cây nhất là HK; theo giả thiết thì $AC=7$, $AB=AB'=4\,\text{m}$; $HK=3{,}7\,\text{m}$.
Ta đặt hệ trục gắn với bài toán như hình vẽ, khi này ta có có $A=(0;7)$, $B'=(-4;7)$, $C\equiv O=(0;0)$;

điểm $K=(x;3{,}7)$, $H=(x;0)$.

Cách 1

Cung tròn tạo ra bởi điểm B khi cành cây gãy gục thuộc đường tròn tâm A và bán kính là 4, đường tròn có phương trình: $(C):x^2+(y-7)^2=4^2$.

Điểm $K=(x;3,7)$, thuộc đường thẳng $d:y=3{,}7$.

Tọa độ các điểm giao điểm của đường tròn (C) và đường thẳng d là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}x^2+(y-7)^2=4^2\\ y=3{,}7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=\dfrac{511}{100}\\ y=3{,}7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{\pm\sqrt{511}}{10}\approx\pm2{,}26\\ y=3{,}7\end{cases}$$

Vậy ta có các giao điểm là $M\left(\dfrac{\sqrt{511}}{10};3{,}7\right)$, $N\left(\dfrac{-\sqrt{511}}{10};3{,}7\right)$.

Ta thấy công trình sẽ bị cành cây va phải nếu đường tròn và đoạn MN có điểm chung. Vậy công trình phải cách thân cây ít nhất 2,26 m theo phương gãy của cành cây.

Cách 2: Công trình sẽ không bị tổn hại nếu xảy ra $AK>4$

$$\Leftrightarrow AK^2>16\Leftrightarrow x^2+(7-3{,}7)^2>16\Leftrightarrow x^2>\frac{511}{100}\Leftrightarrow|x|>\frac{\sqrt{511}}{10}$$

Hay ta có kết quả xấp xỉ $|x|>2{,}26$.

Vậy công trình phải cách thân cây ít nhất 2,26 m theo phương gãy của cành cây.

Chọn đáp án (D) □

Câu 56

Tâm của đường tròn đường kính AB với $A(1;-3)$; $B(-5;7)$ là điểm nào sau đây?

(A) $(-2;2)$. (B) $(2;2)$. (C) $(3;-1)$. (D) $(3;1)$.

Lời giải.

Ta có đường tròn đường kính AB có tâm là trung điểm I của AB. Suy ra $\begin{cases} x_I = \dfrac{1-5}{2} = -2 \\ y_I = \dfrac{-3+7}{2} = 2 \end{cases}$.

Vậy $I(-2;2)$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 57

Cho đường cong (C_m) : $x^2+y^2-8x+10y+m=0$. Với giá trị nào của m thì (C_m) là đường tròn có bán kính bằng 7 ?

(A) $m=-8$. (B) $m=4$. (C) $m=-4$. (D) $m=8$.

Lời giải.

Ta có bán kính của đường tròn là $R=\sqrt{4^2+(-5)^2-m}=7 \Leftrightarrow 41-m=49 \Leftrightarrow m=-8$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 58

Phương trình nào sau đây là phương trình đường tròn ?

(A) $4x^2+y^2-10x-6y-2=0$. (B) $x^2+y^2-4x+6y-12=0$.
(C) $x^2+2y^2-4x-8y+1=0$. (D) $x^2+y^2-2x-8y+20=0$.

Lời giải.

Loại đáp án A và C vì hệ số trước x^2 và y^2 không bằng nhau.
Xét đáp án B ta có $a^2+b^2-c=2^2+(-3)^2+12=25>0$ là phương trình đường tròn.
Xét đáp án D ta có $a^2+b^2-c=1^2+4^2-20=-3<0$ không là phương trình đường tròn.
Chọn đáp án (B) □

Câu 59

Cho đường tròn (C) có phương trình $3x^2+3y^2-6x+12y-12=0$. Biết (C) có tâm $I(a;b)$ và bán kính R, tính $a+b+R$.

(A) $a+b+R=\sqrt{57}+3$. (B) $a+b+R=\sqrt{57}-3$.
(C) $a+b+R=4$. (D) $a+b+R=2$.

Lời giải.

$3x^2+3y^2-6x+12y-12=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-2x+4y-4=0$. Ta có:

$$\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=-4 \end{cases} \Rightarrow R=\sqrt{a^2+b^2-c}=\sqrt{1+4+4}=3.$$

Vậy $a+b+R=1-2+3=2$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 60

Viết phương trình đường tròn (C) có tâm nằm trên trục hoành đồng thời đi qua hai điểm $A(2;-5)$ và $B(4;3)$.

(A) $x^2+y^2+2x-33=0$.
(B) $x^2+y^2-2x+33=0$.
(C) $x^2+y^2+2y-33=0$.
(D) $x^2+y^2-2y+33=0$.

Lời giải.

- (C) có tâm I nằm trên trục hoành $\Rightarrow I(a;0) \Rightarrow (C): x^2+y^2-2ax+c=0$.
- (C) đi qua $A(2;-5) \Leftrightarrow 4+25-4a+c=0 \Leftrightarrow -4a+c=-29$.
- (C) đi qua $B(4;3) \Leftrightarrow 16+9-8a+c=0 \Leftrightarrow -8a+c=-25$.

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} -4a+c=-29 \\ -8a+c=-25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ c=-33 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-33=0$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 61

Cho tam giác ABC có M là trung điểm BC, biết $A\left(1;\frac{3}{2}\right)$, $M\left(\frac{7}{2};3\right)$ và B, C là các điểm lần lượt thuộc các đường thẳng $d: 4x-2y+1=0$ và $d': x-2y-2=0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ?

(A) $x^2+y^2-7x-6y+\frac{15}{4}=0$.
(B) $(x-3)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$.
(C) $x^2+y^2-6x-5y+\frac{41}{4}=0$.
(D) $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+(y-3)^2=\frac{17}{2}$.

Lời giải.

- $B \in d: 4x-2y+1=0 \Rightarrow B\left(x_B;\frac{4x_B+1}{2}\right)$;
- $C \in d': x-2y-2=0 \Rightarrow C\left(x_C;\frac{x_C-2}{2}\right)$.

Vì M là trung điểm BC nên

$$\begin{cases} x_B+x_C=2x_M \\ y_B+y_C=2y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B+x_C=7 \\ 4x_B+x_C=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B=2 \\ x_C=5 \end{cases}$$

Với $x_B=2 \Rightarrow y_B=\frac{9}{2} \Rightarrow B\left(2;\frac{9}{2}\right)$
Với $x_C=5 \Rightarrow y_C=\frac{3}{2} \Rightarrow C\left(5;\frac{3}{2}\right)$.
Gọi $(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta có hệ phương trình

:

$$\begin{cases} x_A^2+y_A^2-2ax_A-2by_A+c=0 \\ x_B^2+y_B^2-2ax_B-2by_B+c=0 \\ x_C^2+y_C^2-2ax_C-2by_C+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a-3b+c=-\dfrac{13}{4} \\ -4a-9b+c=-\dfrac{97}{4} \\ -10a-3b+c=-\dfrac{109}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=\dfrac{5}{2} \\ c=\dfrac{41}{4} \end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC: $x^2+y^2-6x-5y+\dfrac{41}{4}=0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 62

Viết phương trình đường tròn đi qua 3 điểm $A(-1;1)$, $B(3;1)$, $C(1;3)$.

(A) $x^2+y^2-2x-2y-2=0$. (B) $x^2+y^2+2x-2y=0$.

(C) $x^2+y^2-2x-2y+2=0$. (D) $x^2+y^2+2x+2y-2=0$.

Lời giải.

Gọi phương trình đường tròn cần tìm có dạng

$$(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0, (a^2+b^2-c>0).$$

Vì (C) đi qua 3 điểm A; B; C nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 1+1+2a-2b+c=0 \\ 9+1-6a-2b+c=0 \\ 1+9-2a-6b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-2b+c=-2 \\ -6a-2b+c=-10 \\ -2a-6b+c=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=-2 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $x^2+y^2-2x-2y-2=0$.

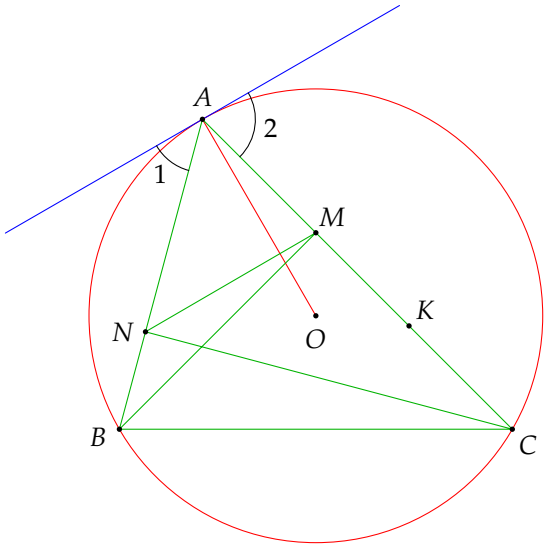
Chọn đáp án (A) □

Câu 63

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn $(C): x^2+y^2=25$, điểm $K(2;1)$ thuộc đường thẳng AC. Hai đường cao BM và CN, phương trình đường thẳng MN: $4x-3y+10=0$ và điểm A có hoành độ âm. Phương trình đường tròn tâm O tiếp xúc với đường thẳng AC là

(A) $x^2+y^2=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$. (B) $x^2+y^2=\dfrac{10}{2}$. (C) $x^2+y^2=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$. (D) $x^2+y^2=\dfrac{5}{2}$.

Lời giải.



Đường tròn (C) có tâm $O(0;0)$.
Tứ giác $BCMN$ nội tiếp nên $\widehat{ACB} = \widehat{MNA}$.
Giả sử d là tiếp tuyến của đường tròn (C) tại A, ta có $\widehat{ACB} = \widehat{A_1}$ do đó $\widehat{A_1} = \widehat{MNA}$, mà hai góc lại ở vị trí so le trong nên d song song MN suy ra $OA \perp MN$.
Phương trình đường thẳng OA đi qua $O(0;0)$ vuông góc với MN là: $3x + 4y = 0$. A là giao điểm của OA và (C) nên tọa độ A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -4 \\ y = 3 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow A(-4;3) \ (A \text{ có hoành độ âm})$$

Phương trình đường thẳng AC đi qua $A(-4;3)$, $K(2;1)$ là $x + 3y - 5 = 0$.
Đường tròn tâm O tiếp xúc với đường thẳng AC nên bán kính bằng $R = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$.
Suy ra phương trình là: $x^2 + y^2 = \dfrac{5}{2}$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 64

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ và điểm $M(1;1)$ thuộc đường tròn (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $M(1;1)$.

(A) $x + y - 1 = 0$. (B) $x + 2y + 1 = 0$. (C) $x - 2y - 1 = 0$. (D) $x - 2y + 1 = 0$.

Lời giải.

- Đường tròn (C) có tâm là $I(2;-1)$.
- Tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $M(1;1)$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{IM} = (-1;2)$ nên ta có phương trình $-1(x-1) + 2(y-1) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 1 = 0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 65

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2+y^2=4$. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc là 2.

(A) $2x-y+2\sqrt{5}-4=0$.

(B) $2x-y+2\sqrt{5}+4=0; 2x-y+2\sqrt{5}-4=0$.

(C) $2x-y+2\sqrt{5}-4=0\,; 2x-y-2\sqrt{5}-4=0$.

(D) $2x-y+2\sqrt{5}-4=0\,; 2x+y+2\sqrt{5}-4=0$.

Lời giải.

- Đường tròn (C) có tâm là $I(2;0)$ và có bán kính $R=2$.
- Đường thẳng d có hệ số góc bằng 2 có dạng $y=2x+b \Leftrightarrow 2x-y+b=0$.
- d là tiếp tuyến của (C)

$$\Leftrightarrow d(I,d)=R \Leftrightarrow \frac{|4+b|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=2\sqrt{5}-4 \\ b=-2\sqrt{5}-4 \end{array}\right.$$

- Phương trình tiếp tuyến d là $2x-y+2\sqrt{5}-4=0; 2x-y-2\sqrt{5}-4=0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 66

Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $(C):\ (x-1)^2+(y+2)^2=8$.Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn. Biết tiếp tuyến qua điểm $N(5;-2)$.

(A) $\Delta: x-5=0$.

(B) $\Delta: x+y-3=0$ hoặc $\Delta: x-y-7=0$..

(C) $\Delta: x-5=0$ hoặc $\Delta: x+y-3=0$..

(D) $\Delta: y+2=0$ hoặc $\Delta: x-y-7=0$..

Lời giải.

Đường tròn $(C):\ (x-1)^2+(y+2)^2=8$ có tâm $I(1;-2)$ và bán kính $R=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.
Phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(5;-2)$ có dạng: $(d): ax+by-5a+2b=0$ với $a^2+b^2>0$.
Để (d) là tiếp tuyến đường tròn (C) khi và chỉ khi:

$$\begin{aligned} d(I,d)=R &\Leftrightarrow \frac{|a-2b-5a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2\sqrt{2} \\ &\Leftrightarrow |-4a|=2\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2} \\ &\Leftrightarrow 16a^2=8a^2+8b^2 \\ &\Leftrightarrow a^2=b^2 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=-b \end{array}\right. \end{aligned}$$

- Với $a=b$, chọn $a=b=1$ ta được phương trình tiếp tuyến: $(d): x+y-3=0$.
- Với $a=-b$, chọn $a=1 \Rightarrow b=-1$ ta được phương trình tiếp tuyến: $(d): x-y-7=0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 67

Trong hệ trục tọa độ Oxy, phương trình đường tròn (C) có tâm I có tọa độ nguyên nằm trên đường thẳng $3x+2y=0$, qua điểm $A(2;-5)$ và tiếp xúc với trục tung có phương trình là:

(A) $(x+2)^2+(y-3)^2=4$.
(B) $(x+4)^2+(y-6)^2=5$.
(C) $(x-4)^2+(y+6)^2=5$.
(D) $(x-2)^2+(y+3)^2=4$.

Lời giải.

Do tâm I nằm trên đường thẳng $3x+2y=0$ nên tọa độ điểm $I(2t;-3t)$.
Đường tròn (C) qua điểm $A(2;-5)$ tiếp xúc với trục tung nên ta có:

$$\begin{aligned} IA=d(I,Oy) &\Leftrightarrow \sqrt{(2t-2)^2+(-3t+5)^2}=|2t| \\ &\Leftrightarrow 13t^2-38t+29=4t^2 \\ &\Leftrightarrow 9t^2-38t+29=0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\dfrac{29}{9} \end{array}\right. \end{aligned}$$

Do tâm I có tọa độ nguyên nên chọn $t=1\Rightarrow I=(2;-3)$. Khi đó bán kính $R=2$.
Vậy đường tròn $(C):\ (x-2)^2+(y+3)^2=4$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 68

Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C):\ x^2+y^2-2x-2y=0$ biết tiếp tuyến có hệ số góc $k=1$.

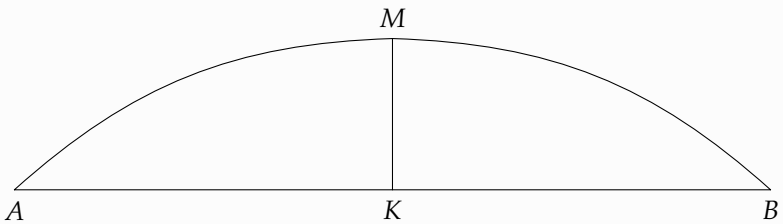
(A) $x+y-2=0, x+y+2=0$.
(B) $x-y+2=0, x-y-2=0$.
(C) $x-y+4=0, x-y-4=0$.
(D) $x+y+4=0, x+y-4=0$.

Lời giải.

Đường tròn $(C):\ x^2+y^2-2x-2y=0$ có tâm $I(1;1)$ và bán kính $r=\sqrt{2}$.
Do tiếp tuyến có hệ số góc $k=1\Rightarrow \vec{u}=(1;1)\Rightarrow \vec{n}=(1;-1)$ nên tiếp tuyến có dạng $d:\ x-y+c=0$.
Điều kiện tiếp xúc $d(I;d)=r\Leftrightarrow \dfrac{|1-1+c|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=2 \\ c=-2 \end{array}\right.$.
Vậy phương trình tiếp tuyến là $x-y+2=0, x-y-2=0$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 69

Một chiếc cầu được thiết kế dưới dạng 1 cung tròn (Hình vẽ)

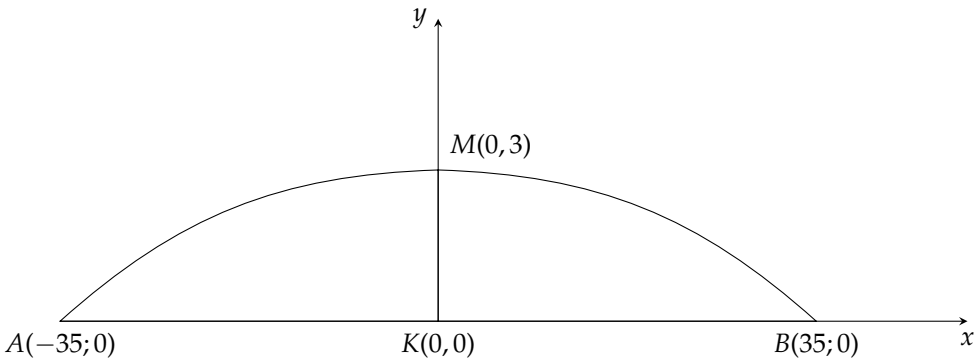


Biết độ dài $AB=70\,\text{m}$, chiều cao $MK=3\,\text{m}$. Tính bán kính của đường tròn chứa cung AMB (MK đi qua tâm của đường tròn chứa cung AMB)

(A) $\frac{607}{3}$ m. (B) 199 m. (C) 199,6 m. (D) 200 m.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ Kxy như hình vẽ $\Rightarrow A(-35;0)$, $B(35;0)$, $M(0;3)$.



Đường tròn chứa cung AMB có phương trình dạng: $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ đi qua A, M, B. Nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 1225-70a+c=0 \\ 1225+70a+c=0 \\ 9+6b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ c=-1225 \\ b=\dfrac{608}{3} \end{cases}$$

Bán kính đường tròn chứa cung $AMB \Rightarrow R=\sqrt{a^2+b^2-c}=\sqrt{0^2+\left(\dfrac{608}{3}\right)^2+1225}=\dfrac{607}{3}$ m.

Vậy $R=\dfrac{607}{3}$ m.

Chọn đáp án (A) □

Câu 70

Chuyển động của một vật thể trong khoảng thời gian 180 phút được thể hiện trong mặt phẳng tọa độ. Theo đó, tại thời điểm $t\,(0\le t\le 180)$vật thể ở vị trí có tọa độ $\left(3+\sin t^0;5+\cos t^0\right)$. Kết thúc quá trình chuyển động thì vật bị văng khỏi quỹ đạo tròn chuyển động và ngay sau đó, trong một khoảng thời gian ngắn bay theo hướng tiếp tuyến của đường tròn quỹ đạo. Trong khoảng thời gian ngắn ngay sau khi văng, vật chuyển động trên đường thẳng nào?

(A) $d_1: x-3=0$. (B) $d_2: y-3=0$. (C) $d_3: x+3=0$. (D) $d_4: y-4=0$.

Lời giải.

Quỹ đạo chuyển động của vật thể trong khoảng thời gian $t\,(0\le t\le 180)$ là đường tròn (C) có phương trình

$$(x-3)^2+(y-5)^2=1.$$

Kết thúc chuyển động, vật thể tới vị trí $M(3;4)$. Sau đó, trong khoảng thời gian ngắn vật chuyển động theo hướng tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $M(3;4)$. Tiếp tuyến này đi qua điểm $M(3;4)$và có VTPT $\vec{n}=(0;1)$nên có phương trình là $y-4=0$. □

Câu 71

Đường tròn $x^2+y^2-5y=0$ có bán kính bằng bao nhiêu?

(A) $\sqrt{5}$. (B) 25. (C) $\dfrac{25}{2}$. (D) 2,5.

Lời giải.

Ta có $x^2+\left(y-\dfrac{5}{2}\right)^2=\left(\dfrac{5}{2}\right)^2$ suy ra bán kính của đường tròn là $R=2{,}5$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 72

Đường tròn $x^2+y^2-2x+10y+1=0$ có tâm là điểm nào dưới đây?

(A) $(1;5)$. (B) $(-1;5)$. (C) $(1;-5)$. (D) $(-1;-5)$.

Lời giải.

Đường tròn $x^2+y^2-2x+10y+1=0$ có tâm là $(1;-5)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 73

Tìm m để $(C_m): x^2+y^2+4mx-2my+2m+3=0$ là phương trình đường tròn?

(A) $m<-\dfrac{3}{5}$ hoặc $m>1$. (B) $m<-\dfrac{5}{3}$.

(C) $m>1$. (D) $-\dfrac{3}{5}<m<1$.

Lời giải.

(C_m) là phương trình đường tròn khi và chỉ khi $a^2+b^2-c>0 \Leftrightarrow (-2m)^2+m^2-(2m+3)>0$ $\Leftrightarrow 5m^2-2m-3>0 \Leftrightarrow m<-\dfrac{3}{5}$ hoặc $m>1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 74

Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $x^2+y^2-2mx+4y+5m=0$ là phương trình đường tròn.

(A) $1<m<4$. (B) $1\le m\le 4$. (C) $\left[\begin{array}{l} m\le 1 \\ m\ge 4 \end{array}\right.$. (D) $\left[\begin{array}{l} m<1 \\ m>4 \end{array}\right.$.

Lời giải.

Phương trình $x^2+y^2-2mx+4y+5m=0$ là phương trình đường tròn $\Leftrightarrow a^2+b^2-c>0 \Leftrightarrow$ $m^2+(-2)^2-5m>0 \Leftrightarrow m^2-5m+4>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<1 \\ m>4 \end{array}\right.$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 75

Viết phương trình đường tròn có đường kính AB biết $A(2;-7)$ và $B(4;3)$.

(A) $(x-3)^2+(y+2)^2=26$. (B) $(x+3)^2+(y-2)^2=26$.

(C) $(x-1)^2+(y-5)^2=26$. (D) $(x+1)^2+(y+5)^2=26$.

Lời giải.

Gọi I là tâm đường tròn đường kính AB. Suy ra I là trung điểm $AB \Rightarrow I(3;-2)$.

Bán kính $R=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\sqrt{(4-2)^2+(3+7)^2}}{2}=\sqrt{26}$.

Vậy phương trình đường tròn có đường kính AB là: $(x-3)^2+(y+2)^2=26$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 76

Cho tam giác ABC có G là trọng tâm, biết $A\left(\frac{3}{2};4\right)$, $G\left(\frac{5}{2};\frac{8}{3}\right)$ và B, C là các điểm lần lượt thuộc các đường thẳng $d_1: 2x+y-3=0$, $d_2: 4x-y-20=0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC?

(A) $(x+3)^2+(y+2)^2=5$. (B) $(x-3)^2+(y-2)^2=25$.

(C) $(x+3)^2+(y+2)^2=\dfrac{5}{2}$. (D) $(x-3)^2+(y-2)^2=\dfrac{25}{4}$.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm BC.

Khi đó, ta có:

$$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{5}{2}-\dfrac{3}{2}=\dfrac{2}{3}\left(x_M-\dfrac{3}{2}\right)\\ \dfrac{8}{3}-4=\dfrac{2}{3}(y_M-4)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_M=3\\ y_M=2\end{cases}\Rightarrow M(3;2)$$

Mặt khác,

$$B\in d_1: 2x+y-3=0\Rightarrow B(x_B;3-2x_B);C\in d_2: 4x-y-20=0\Rightarrow C(x_C;4x_C-20).$$

Mà M là trung điểm $BC\Rightarrow\begin{cases}x_B+x_C=2x_M\\ y_B+y_C=2y_M\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_B+x_C=6\\ -2x_B+4x_C=21\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_B=\dfrac{1}{2}\\ x_C=\dfrac{11}{2}\end{cases}$.

Với $x_B=\dfrac{1}{2}\Rightarrow y_B=2\Rightarrow B\left(\frac{1}{2};2\right)$; $x_C=\dfrac{11}{2}\Rightarrow y_C=2\Rightarrow C\left(\frac{11}{2};2\right)$.

Ta có:

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-1;-2)\\ \overrightarrow{AC}=(4;-2)\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$$

Suy ra, $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$ hay $\triangle ABC$ vuông tại A.

Suy ra, đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâm $M(3;2)$ và bán kính $R=\dfrac{BC}{2}=\dfrac{5}{2}$.

Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC: $(x-3)^2+(y-2)^2=\dfrac{25}{4}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 77

Cho đường tròn (C) có tâm nằm trên đường thẳng $d\colon x-6y-10=0$ và tiếp xúc với hai đường thẳng có phương trình $d_1\colon 3x+4y+5=0$ và $d_2\colon 4x-3y-5=0$. Biết tung độ của tâm là số không âm, viết phương trình đường tròn (C).

(A) $(C)\colon \left(x-\dfrac{10}{43}\right)^2+\left(y+\dfrac{70}{43}\right)^2=\left(\dfrac{7}{43}\right)^2$.
(B) $(C)\colon (x-10)^2+(y)^2=49$.
(C) $(C)\colon (x-10)^2+(y+)^2=25$.
(D) $(C)\colon (x)^2+(y-10)^2=49$.

Lời giải.

Vì đường tròn (C) có tâm I nằm trên đường thẳng $d\colon x-6y-10=0$ nên gọi $I(6a+10;a)$, với $a\geq 0$.
Đường tròn tiếp xúc với d_1, d_2 nên khoảng cách từ tâm I đến hai đường thẳng này bằng nhau.
Ta có:

$$\frac{|3(6a+10)+4a+5|}{5}=\frac{|4(6a+10)-3a-5|}{5}\Leftrightarrow |22a+35|=|21a+35|\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \text{ (thỏa mãn)}\\ a=\dfrac{-70}{43} \text{ (không thỏa mãn)}\end{array}\right.$$

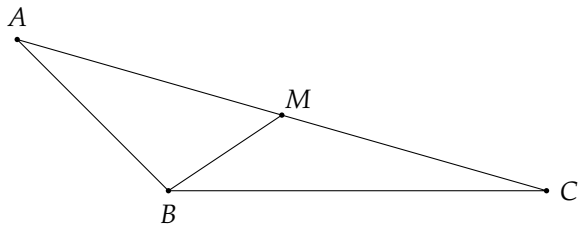
Với $a=0$ thì $I(10;0)$ và $R=\dfrac{|3(6a+10)+4a+5|}{5}=7$.
Vậy đường tròn (C) có phương trình là: $(x-10)^2+y^2=49$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 78

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $BC=2AB$, phương trình đường trung tuyến BM là $x+y-2=0$. Biết $\widehat{ABC}=120^\circ$ và $A(3;1)$. Phương trình đường tròn tâm B đi qua A là

(A) $x^2+(y-2)^2=2$.
(B) $(x-2)^2+(y-2)^2=2$.
(C) $x^2+y^2=2$.
(D) $(x-2)^2+y^2=2$.

Lời giải.



Đặt $AB=x\Rightarrow BC=2x\,(x>0)$. Áp dụng định lí Cosin vào tam giác ABC ta có

$$AC^2=AB^2+BC^2-2.AB.BC.\cos\widehat{ABC}=7x^2\Rightarrow AC=x\sqrt{7}.$$

Áp dụng công thức tính đường trung tuyến vào tam giác ABC ta được

$$BM^2=\frac{AB^2+BC^2}{2}-\frac{AC^2}{4}=\frac{3x^2}{4}.$$

Trong tam giác ABM có $AB^2=x^2$, $BM^2=\dfrac{3x^2}{4}$, $AM^2=\dfrac{7x^2}{4}$.
Suy ra, $AM^2=AB^2+BM^2\Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại $B\Rightarrow AB\perp BM$.

Phương trình đường thẳng AB đi qua A vuông góc với BM là $x-y-2=0$.
B là giao điểm của AB và BM nên tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y-2=0 \\ x-y-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow B(2;0)$$

Đường tròn tâm B đi qua A có bán kính $AB=\sqrt{2}$ suy ra phương trình là $(x-2)^2+y^2=2$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 79

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2+(y+1)^2=4$. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $M(2;1)$.

(A) $2x+y-2=0$. (B) $y+1=0$. (C) $2x-y-3=0$. (D) $y-1=0$.

Lời giải.

- Vì $(2-2)^2+(1+1)^2=4$ nên điểm $M(2;1)$ thuộc đường tròn (C).
- Đường tròn (C) có tâm là $I(2;-1)$.
- Tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $M(2;1)$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{IM}=(0;2)$ nên ta có phương trình $0(x-2)+2(y-1)=0 \Leftrightarrow y-1=0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 80

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-2x+4y-11=0$. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta: 3x-4y-31=0$.

(A) $3x+4y-9=0$. (B) $3x-4y-31=0$ và $3x-4y-9=0$.
(C) $3x-4y+9=0$. (D) $3x-4y+9=0$ và $3x-4y-31=0$.

Lời giải.

- Đường tròn (C) có tâm là $I(1;-2)$ và có bán kính $R=4$.
- Đường thẳng $d \parallel \Delta \Rightarrow d: 3x-4y+c=0$ $(c \neq -31)$.
- d là tiếp tuyến của $(C) \Leftrightarrow d(I,d)=R \Leftrightarrow \dfrac{|3+8+c|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=9 \text{ (TM)} \\ c=-31 \text{ (L)} \end{array}\right.$.
- Phương trình tiếp tuyến d là $3x-4y+9=0$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 81

Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $(C): x^2+y^2-4x+8y-5=0$. Phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $3x-4y+5=0$ là

(A) $4x+3y+29=0; 4x+3y-21=0$. (B) $4x+3y-25=0; 4x+3y+29=0$.

(C) $\begin{cases} 3x+4y+15=0 \\ 3x+4y-35=0 \end{cases}$. (D) $\begin{cases} 3x+4y-15=0 \\ 3x+4y+35=0 \end{cases}$.

Lời giải.

Đường tròn $(C): x^2+y^2-4x+8y-5=0$ có tâm $I(2;-4)$ và bán kính $R=\sqrt{2^2+(-4)^2+5}=5$.
Phương trình tiếp tuyến d vuông góc với $3x-4y+5=0$ có dạng $4x+3y+c=0$. Đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn khi và chỉ khi:

$$d(I,d)=R \Leftrightarrow \frac{|4.2+3.(-4)+c|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=5 \Leftrightarrow |c-4|=25 \Leftrightarrow \begin{cases} c=-21 \\ c=29 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường thẳng d: $4x+3y+29=0; 4x+3y-21=0$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 82

Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $(C): x^2+y^2+4x-4y-1=0$. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) đi qua điểm $M(0;-1)$ là

(A) $y-1=0; -12x+5y+5=0$. (B) $y+1=0; -12x+5y+5=0$.
(C) $y-1=0; 12x+5y+5=0$. (D) $y+1=0; 12x+5y+5=0$.

Lời giải.

Đường tròn $(C): x^2+y^2+4x-4y-1=0$ có tâm $I(-2;2)$ và bán kính $R=\sqrt{(-2)^2+2^2+1}=3$.
Phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(0;-1)$ có dạng: $d: ax+by+b=0$ với $a^2+b^2>0$.
Đường thẳng d là tiếp tuyến đường tròn (C) khi và chỉ khi:

$$\begin{aligned} d(I,d)=R &\Leftrightarrow \frac{|-2a+2b+b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=3 \\ &\Leftrightarrow |-2a+3b|=3\sqrt{a^2+b^2} \\ &\Leftrightarrow 4a^2-12ab+9b^2=9a^2+9b^2 \\ &\Leftrightarrow 5a^2+12ab=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=-\dfrac{12}{5}b \end{cases} \end{aligned}$$

Với $a=0$, chọn $b=1$ ta được phương trình tiếp tuyến $d: y+1=0$.
Với $a=-\frac{12}{5}b$, chọn $b=5 \Rightarrow a=-12$ ta được phương trình tiếp tuyến $d: -12x+5y+5=0$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 83

Phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C): $x^2+y^2-4x+2y-4=0$ song song với đường thẳng Δ: $3x+4y-17=0$ là

(A) $3x+4y-13=0$. (B) $3x+4y+13=0$. (C) $4x-3y+13=0$. (D) $4x-3y-13=9$.

Lời giải.

Đường tròn (C): $x^2+y^2-4x+2y-4=0$ có tâm $I(2;-1)$, $r=3$.
Do tiếp tuyến song song đường thẳng Δ: $3x+4y-17=0$ nên tiếp tuyến có dạng d: $3x+4y+c=0$ $(c=-17)$

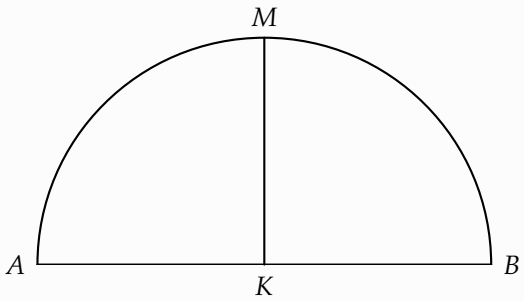
Đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (C) khi và chỉ khi:

$$d(I,d)=r \Leftrightarrow \frac{|3.2+4.(-1)+c|}{5}=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=13 \\ c=-17 \end{array}\right.$$

So với điều kiện, ta loại $c=-17$.
Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $3x+4y+13=0$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 84

Một chiếc cầu được thiết kế dạng cung tròn (Hình vẽ).

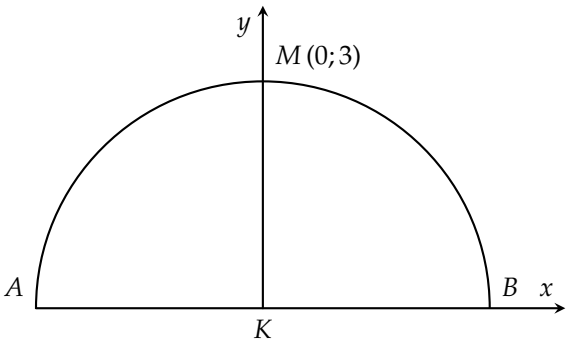


Biết độ dài $AB=60m$, chiều cao $MK=3m$. Tính bán kính của đường trìn chứa cung AMB (MK đi qua tâm của đường tròn chứa cung AMB).

(A) 151,5m. (B) 151m. (C) $3\sqrt{\frac{10001}{2}}$m. (D) 152m.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ Kxy như hình vẽ $\Rightarrow A(-30;0)$, $B(30;0)$, $M(0;3)$.



Đường tròn chứa cung AMB có phương tình dạng $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ đi qua A, M, B.
Nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 900-60a+c=0 \\ 900+60a+c=0 \\ 9+6b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ c=-900 \\ b=\frac{297}{2} \end{cases}$$

Bán kính đường tròn chứa cung AMB

$$\Rightarrow R=\sqrt{a^2+b^2-c}=\sqrt{0^2+\left(\frac{297}{2}\right)^2+900}=151{,}5\,\text{m}.$$

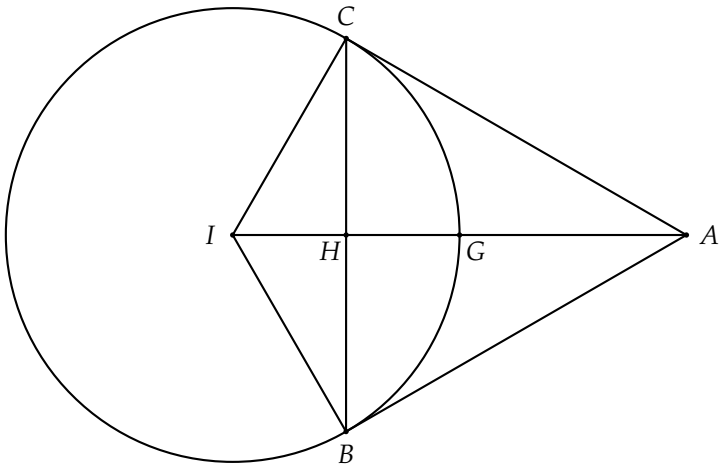
Vậy $R=151,5m$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 85

Cho đường tròn $(T): x^2+y^2+2x-4y-20=0$ và điểm $A(5;-6)$. Gọi B, C lần lượt là các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ điểm A đến đường tròn (T). Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

(A) $(x-2)^2+(y+2)^2=\dfrac{25}{4}$.
(B) $(x-2)^2+(y-2)^2=\dfrac{25}{4}$.
(C) $(x+2)^2+(y+2)^2=\dfrac{25}{4}$.
(D) $(x+2)^2+(y-2)^2=\dfrac{25}{4}$.

Lời giải.



Ta thấy điểm A nằm ngoài đường tròn (T) nên từ A luôn kẻ được 2 tiếp tuyến AB và AC đến đường tròn (T) (với B, C lần lượt là các tiếp điểm).

Đường tròn (T) có tâm $I(-1;2)$, bán kính $R=5$ và có $AI=\sqrt{(-1-5)^2+(2+6)^2}=10$.

Xét $\triangle BAI$ vuông tại B có

$$\cos\widehat{AIB}=\frac{IB}{AI}=\frac{1}{2}\Rightarrow\widehat{AIB}=60^\circ\Rightarrow\widehat{BAI}=30^\circ\Rightarrow\widehat{BAC}=60^\circ.$$

Từ đó ta có tam giác $\triangle ABC$ là tam giác đều.

Gọi H là giao điểm của BC và AI.

Trong $\triangle BAI$ vuông tại B và BH là đường cao nên

$$IH.IA=IB^2\Rightarrow IH=\frac{IB^2}{IA}=\frac{5}{2}.$$

Suy ra

$$IH=\frac{1}{4}IA\Rightarrow\overrightarrow{IH}=\frac{1}{4}\overrightarrow{IA}. \tag{3.3}$$

Gọi $H(x_0;y_0)$, từ (3.3) suy ra $\begin{cases}x_0=\dfrac{1}{2}\\ y_0=0\end{cases}\Rightarrow H\left(\frac{1}{2};0\right)$.

Do $\triangle ABC$ đều nên tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ là trọng tâm G của tam giác đó.

Khi đó ta có $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AH}\Rightarrow G(2;-2)$.

Vậy đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ có tâm $G(2;-2)$ và bán kính $r=GH=\dfrac{5}{2}$ nên có phương trình

$$(x-2)^2+(y+2)^2=\frac{25}{4}.$$

Chọn đáp án (A) □

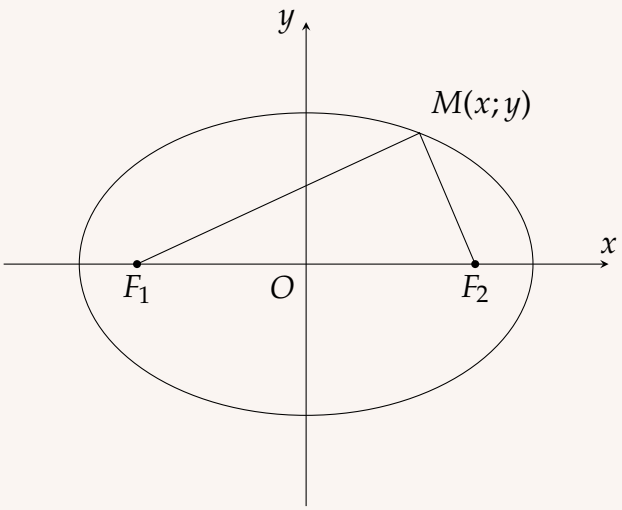
§4. BA ĐƯỜNG CONIC

A TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Elip

Các yếu tố về Elip

- Cho hai điểm cố định và phân biệt F_1, F_2. Đặt $F_1F_2 = 2c > 0$. Cho số thực a lớn hơn c. Tập hợp các điểm M sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$ được gọi là **đường elip** (hay elip). Hai điểm F_1, F_2 được gọi là hai tiêu điểm và $F_1F_2 = 2c$ được gọi là tiêu cự của elip đó.



- Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, elip có hai tiêu điểm thuộc trục hoành sao cho O là trung điểm của đoạn nối hai tiêu điểm đó, thì có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ với } a > b > 0. \qquad (1)$$

- Ngược lại, mỗi phương trình có dạng (1), với $a > b > 0$, đều là phương trình của elip có hai tiêu điểm $F_1\left(-\sqrt{a^2-b^2};0\right), F_2\left(\sqrt{a^2-b^2};0\right)$, tiêu cự $2c = 2\sqrt{a^2-b^2}$ và tổng các khoảng cách từ mỗi điểm thuộc elip đó tới hai tiêu điểm bằng $2a$.
Phương trình (1) được gọi là phương trình chính tắc của elip tương ứng.

Ví dụ 1

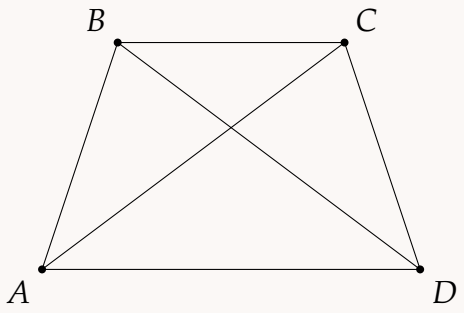
Cho elip có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$. Tìm các tiêu điểm và tiêu cự của elip. Tính tổng các khoảng cách từ mỗi điểm trên elip tới hai tiêu điểm.

Lời giải.

Ta có: $a^2 = 100, b^2 = 64$. Do đó $c = \sqrt{a^2-b^2} = 6$.
Vậy elip có hai tiêu điểm là $F_1(-6;0); F_2(6;0)$ và tiêu cự là $F_1F_2 = 2c = 12$.
Ta có $a = \sqrt{100} = 10$, nên tổng các khoảng cách từ mỗi điểm trên elip tới hai tiêu điểm bằng $2a = 20$. □

Ví dụ 2

Cho hình thang cân $ABCD$ có hai đáy BC và AD. Chứng minh rằng 2 điểm B, C cùng thuộc một elip có hai tiêu điểm là A và D.



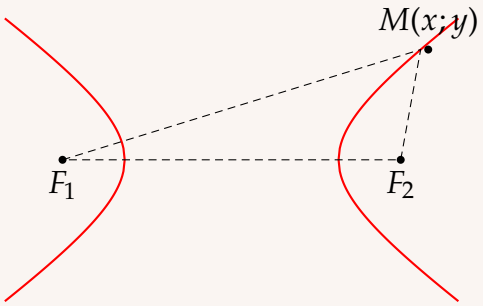
Lời giải.

Hình thang cân $ABCD$ có hai cạnh bên $AB = CD$ và hai đường chéo $BD = AC$.
Do đó, $AB + BD = CD + AC > AD$.
Vậy 2 điểm B, C cùng thuộc một elip có hai tiêu điểm là A và D. □

2. Hypebol

Các yếu tố về Hypebol

- Cho hai điểm phân biệt cố định F_1 và F_2. Đặt $F_1F_2 = 2c$. Cho số thực dương a nhỏ hơn c. Tập hợp các điểm M sao cho $|MF_1 - MF_2| = 2a$ được gọi là **đường hypebol** (hay hypebol). Hai điểm F_1, F_2 được gọi là hai tiêu điểm và $F_1F_2 = 2c$ được gọi là tiêu cự của hypebol đó.
- Hypebol có hai nhánh (như hình bên dưới), một nhánh gồm những điểm M thoả mãn $MF_1 - MF_2 = 2a$ và nhánh còn lại gồm những điểm M thoả mãn $MF_1 - MF_2 = -2a$ (hay $MF_2 - MF_1 = 2a$).



- Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, hypebol có hai tiêu điểm thuộc trục hoành sao cho O là trung điểm của đoạn nối hai tiêu điểm đó, thì có phương trình

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ với } a, b > 0. \qquad (2)$$

- Ngược lại, mỗi phương trình có dạng (2), với $a, b > 0$, đều là phương trình của hypebol có hai tiêu điểm $F_1\left(-\sqrt{a^2+b^2};0\right), F_2\left(\sqrt{a^2+b^2};0\right)$, tiêu cự $2c = 2\sqrt{a^2+b^2}$ và giá trị tuyệt đối của hiệu các khoảng cách từ mỗi điểm thuộc hypebol đến hai tiêu điểm bằng $2a$.
Phương trình (2) được gọi là phương trình chính tắc của hypebol tương ứng.

Ví dụ 3

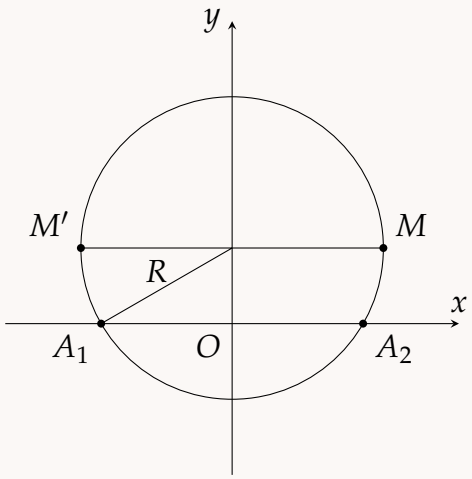
Cho hypebol có phương trình chính tắc $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{64}=1$. Tìm các tiêu điểm và tiêu cự của hypebol. Hiệu các khoảng cách từ một điểm nằm trên hypebol tới hai tiêu điểm có giá trị tuyệt đối bằng bao nhiêu?

Lời giải.

Ta có $a^2=36, b^2=64$, nên $c=\sqrt{a^2+b^2}=10$.
Vậy hypebol có hai tiêu điểm là $F_1(-10;0), F_2(10;0)$ và có tiêu cự $2c=20$.
Hiệu các khoảng cách từ một điểm nằm trên hypebol tới hai tiêu điểm có giá trị tuyệt đối bằng $2a=2\sqrt{36}=12$. □

Ví dụ 4

Trong hệ tọa độ Oxy cho $A_1(-a;0), A_2(a;0)$. Gọi (C) là đường tròn thay đổi luôn qua A_1 và A_2; MM' là đường kính của (C) và luôn vuông góc trục Oy. Chứng minh rằng 2 điểm M và M' luôn di động trên cùng một hypebol.



Lời giải.

Gọi R là bán kính của đường tròn (C).
Ta có: $x_M^2=R^2=a^2+y_M^2\Leftrightarrow x_M^2-y_M^2=a^2$.
Tương tự ta có: $x_{M'}^2-y_{M'}^2=a^2$.
Vậy 2 điểm M và M' di động trên cùng một đường hypebol $(H): x^2-y^2=a^2$. □

3. Parabol

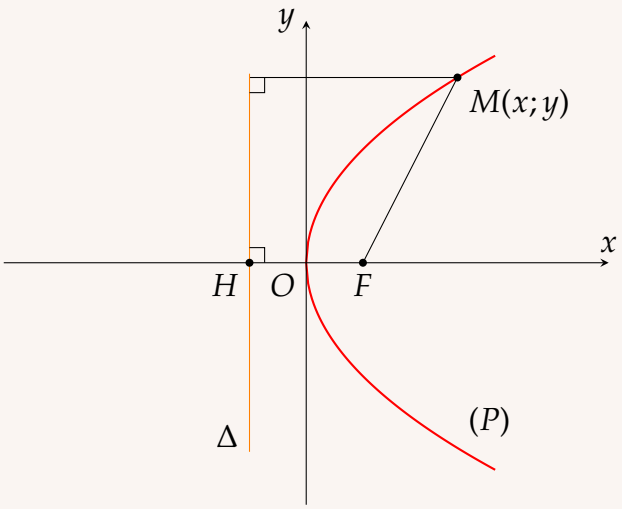
Các yếu tố về Parabol

- Cho một điểm F cố định và một đường thẳng Δ cố định không đi qua F. Tập hợp các điểm M cách đều F và Δ được gọi là **đường parabol** (hay parabol). Điểm F được gọi là tiêu điểm, Δ được gọi là đường chuẩn, khoảng cách từ F đến Δ được gọi là tham số tiêu của parabol đó.
- Xét (P) là một parabol với tiêu điểm F, đường chuẩn Δ. Gọi H là hình chiếu vuông góc của F trên Δ. Khi đó, trong hệ trục toạ độ Oxy với gốc O là trung điểm của HF, tia Ox trùng tia OF, parabol (P)

có phương trình

$$y^2 = 2px \quad (\text{với } p > 0). \qquad (3)$$

- Ngược lại, mỗi phương trình dạng (5), với $p > 0$, là phương trình chính tắc của parabol có tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ và đường chuẩn $\Delta : x = -\frac{p}{2}$.
Phương trình (3) được gọi là phương trình chính tắc của parabol (P).



Ví dụ 5

Cho parabol $(P) : y^2 = 4x$.

a) Tìm tiêu điểm F, đường chuẩn Δ của (P).

b) Tìm các điểm M trên (P) biết M cách F một đoạn bằng 2.

Lời giải.

a) Ta có $2p = 4$ nên $p = 2$. Parabol có tiêu điểm $F(1;0)$ và đường chuẩn $\Delta : x = -1$.

b) Điểm $M(x_0;y_0)$ thuộc (P) và có khoảng cách tới F bằng 2 khi và chỉ khi $y_0^2 = 4x_0$ và $MF = 2$.
Do $MF = d(M,\Delta)$ nên $d(M,\Delta) = 2$.
Mặt khác $\Delta : x + 1 = 0$ và $x_0 = \frac{y_0^2}{4} \geq 0$ nên $2 = d(M,\Delta) = |x_0 + 1| = x_0 + 1$.
Vậy $x_0 = 1$ và $y_0 = 2$ hoặc $y_0 = -2$. Vậy có hai điểm M thoả mãn bài toán với toạ độ là $(1;2)$ và $(1;-2)$.

□

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

ELIP

Dạng 1 Xác định các yếu tố của Elip

Nắm vững kiến thức về elip từ đó giải quyết các yêu cầu của bài toán.

- Tọa độ các tiêu điểm, tọa độ các đỉnh;

- Độ dài tiêu cự $F_1F_2 = 2c$;
- Tâm sai $e = \dfrac{c}{a}$;
- độ dài trục lớn $A_1A_2 = 2a$, độ dài trục bé $B_1B_2 = 2b$.

Ví dụ 1

Trong mặt phẳng Oxy cho elip $(E) : x^2 + 3y^2 = 6$. Hãy tìm tiêu cự của Elip.

Lời giải.

Ta có $(E) : \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{2} = 1$, do đó $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{2}$, $c = 2$. Độ dài tiêu cự là $2c = 4$. □

Ví dụ 2

Cho elip (E) có độ dài trục lớn bằng 26, tâm sai $e = \dfrac{12}{13}$. Hãy tìm độ dài trục nhỏ của (E).

Lời giải.

Ta có $2a = 26 \Rightarrow a = 13$.
$e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{12}{13} \Rightarrow c = 12$.
$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{169 - 144} = 5$.
Độ dài trục nhỏ là $2b = 10$. □

Ví dụ 3

Hãy tính diện tích của tứ giác tạo nên bởi các đỉnh của elip (E): $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

Lời giải.

Tọa độ các đỉnh của elip (E): $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ là $A_1(-2;0)$, $A_2(2;0)$; $B_1(0;-1)$, $B_2(0;1)$.
Vì tứ giác $A_1B_1A_2B_2$ là hình thoi có hai đường chéo $A_1A_2 = 4$ và $B_1B_2 = 2$.
Vậy diện tích tứ giác cần tìm là $S = \dfrac{1}{2} \cdot A_1A_2 \cdot B_1B_2 = 4$. □

Ví dụ 4

Một elip (E) có phương trình $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, trong đó $a > b > 0$. Biết (E) đi qua điểm $A\left(2;\sqrt{2}\right)$ và $B\left(2\sqrt{2};0\right)$ hãy tìm độ dài trục bé của (E).

Lời giải.

- (E) đi qua $B\left(2\sqrt{2};0\right)$ nên ta có $\dfrac{\left(2\sqrt{2}\right)^2}{a^2} + \dfrac{0^2}{b^2} = 1$ suy ra $a = 2\sqrt{2}$.

(E) đi qua $A\left(2;\sqrt{2}\right)$ nên ta có $\dfrac{(2)^2}{8}+\dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{b^2}=1$ suy ra $b=2$.

Do đó độ dài trục bé $2b=4$. □

Ví dụ 5

Cho elip (E) có hai tiêu điểm $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$ và điểm M thuộc (E). Biết chu vi tam giác MF_1F_2 bằng 18. Hãy tìm tâm sai của (E).

Lời giải.

Ta có $F_1F_2=8$ và $c=4$.
Chu vi $\triangle MF_1F_2$ là $C_{\triangle MF_1F_2}=MF_1+MF_2+F_1F_2=18\Rightarrow MF_1+MF_2=10=2a\Rightarrow a=5$.
Tâm sai của elip là $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{4}{5}$. □

Dạng 2 Viết phương trình chính tắc của Elip

Phương trình chính tắc (E) có dạng

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ với } a>b>0. \qquad (1)$$

Ta cần tìm các số a,b dựa vào giải thiết của bài toán.

Ví dụ 1

Hãy viết phương trình chính tắc của (E) có độ dài trục lớn bằng 8, trục nhỏ bằng 6.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}2a=8\\2b=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4\\b=3.\end{cases}$

Vậy phương trình chính tắc của (E): $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$. □

Ví dụ 2

Hãy viết phương trình chính tắc của (E) có tâm sai $e=\dfrac{4}{5}$, độ dài trục nhỏ bằng 12.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases}e=\dfrac{4}{5}\\2b=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5c=4a\\b=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}25c^2=16a^2\\b=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}25(a^2-b^2)=16a^2\\b=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=10\\b=6.\end{cases}$

Vậy phương trình của (E): $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{36}=1$. □

Ví dụ 3

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy viết phương trình chính tắc của đường elip có độ dài trục lớn và trục nhỏ lần lượt bằng 10 và 8.

Lời giải.

Ta có

$$\begin{cases} 2a = 10 \\ 2b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 4. \end{cases}$$

Vậy phương trình chính tắc của elip đã cho là $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$. □

Ví dụ 4

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, hãy viết phương trình chính tắc của e-líp có trục lớn gấp đôi trục bé và có tiêu cự bằng $4\sqrt{3}$.

Lời giải.

E-líp cần tìm có dạng $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$. Ta có

$$\begin{cases} 2c = 4\sqrt{3} \\ a = 2b \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2\sqrt{3} \\ b^2 = 4 \\ a^2 = 16. \end{cases}$$

Vậy e-líp cần tìm là $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. □

Ví dụ 5

Elip có hai đỉnh $(-3;0)$; $(3;0)$ và hai tiêu điểm $(-1;0)$ và $(1;0)$, hãy viết phương trình chính tắc của Elip đã cho.

Lời giải.

Theo đề bài ta có $\begin{cases} a = 3 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 8.$

Vậy phương trình chính tắc của elip đã cho là $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{8} = 1$. □

Ví dụ 6

Hãy viết phương trình chính tắc của elip (E) có độ dài trục lớn bằng 12, độ dài trục bé bằng tiêu cự.

Lời giải.

(E) có độ dài trục lớn bằng 12 nên $2a = 12 \Rightarrow a = 6$.
Độ dài trục bé bằng tiêu cự nên: $2b = 2c \Rightarrow b = c$.

Mà: $b^2+c^2=a^2$ nên $b^2+b^2=6^2 \Rightarrow b^2=18$.

Vậy phương trình (E) là $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{18}=1$. □

Ví dụ 7

Hãy viết phương trình chính tắc của elip có trục lớn bằng 10, tâm sai e $=\dfrac{3}{5}$.

Lời giải.

Giả sử $(E)\colon \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Vì (E) có trục lớn bằng 10 nên $2a=10 \Rightarrow a=5$.

Tâm sai $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{5} \Rightarrow c=3$. Do đó $b^2=a^2-c^2=5^2-3^2=16$.

Vậy phương trình của $(E)\colon \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$. □

Ví dụ 8

Hãy viết phương trình chính tắc của elip (E), biết rằng (E) có độ dài trục nhỏ là 2 và một trong hai tiêu điểm là $F(3;0)$.

Lời giải.

Độ dài trục nhỏ bằng 2 suy ra $2b=2 \Leftrightarrow b=1$.

Một tiêu điểm là $F(3;0)$ suy ra $c=3$ hay $a^2=b^2+c^2=1+9=10$.

Vậy phương trình đường elip là

$$(E)\colon \frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{1}=1.$$

□

Dạng 3 Tìm điểm trên Elip thỏa mãn điều kiện cho trước

Ví dụ 1

Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho elip (E) : $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{25}=1$. Tìm các điểm $M \in (E)$ sao cho $\widehat{F_1MF_2}=120^\circ$ (F_1, F_2 là hai tiêu điểm của (E)).

Lời giải.

Ta có $a=10$, $b=5$, dễ dàng tính được $c=5\sqrt{3}$.

Gọi $M\left(x;y\right) \in (E) \Rightarrow MF_1=10-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x, MF_2=10+\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$.

$F_1F_2^2=MF_1^2+MF_2^2-2MF_1\cdot MF_2\cdot\cos\widehat{F_1MF_2}$

$\Leftrightarrow (10\sqrt{3})^2=\left(10-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2+\left(10+\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2-2\left(10-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)\left(10+\dfrac{\sqrt{3}}{2}x\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow x=0, y=\pm 5$.

Vậy có hai điểm thỏa mãn đề bài là $M_1(0;5)$, $M_2(0;-5)$. □

Ví dụ 2

Cho elip $(E): \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$, $F_1(-3;0)$, $F_2(3;0)$ là các tiêu điểm của (E). Xác định tọa độ điểm $M \in (E)$, biết rằng $2MF_1 = MF_2$.

Lời giải.

Gọi $M(x_0;y_0) \in (E) \Rightarrow \dfrac{x_0^2}{25}+\dfrac{y_0^2}{16}=1$.

Elip (E) có tâm sai $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{3}{5}$, ta có $MF_1 = a+ex_0; MF_2 = a-ex_0$.

$MF_2 = 2MF_1 \Leftrightarrow a-ex_0 = 2(a+ex_0)$

$\Leftrightarrow x_0 = \dfrac{-a}{3e} = \dfrac{-5}{3\cdot\dfrac{3}{5}} = \dfrac{-25}{9} \Rightarrow y_0 = \pm\dfrac{4\sqrt{56}}{9}$.

Vậy $M\left(-\dfrac{25}{9};\dfrac{4\sqrt{56}}{9}\right)$ hoặc $M\left(-\dfrac{25}{9};-\dfrac{4\sqrt{56}}{9}\right)$. □

Ví dụ 3

Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho điểm $C(2;0)$ và elip $(E): \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$. Tìm toạ độ các điểm A, B thuộc (E), biết rằng hai điểm A, B đối xứng với nhau qua trục hoành và tam giác ABC là tam giác đều.

Lời giải.

Giả sử $A(x_0;y_0)$, $B(x_0;y_0) \in (E) \Rightarrow \dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{1}=1$. (1)

Do C là một đỉnh của (E) nằm trên trục hoành, nên tam giác ABC cân tại C.

Tam giác ABC đều khi và chỉ khi $d(C,(AB)) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}AB \Leftrightarrow 2-x_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}|y_0|$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} x_0 = \dfrac{2}{7} \\ y_0 = \pm\dfrac{4\sqrt{3}}{7}. \end{cases}$

Vậy $A\left(\dfrac{2}{7};\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\right)$, $B\left(\dfrac{2}{7};-\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\right)$ hoặc $A\left(\dfrac{2}{7};-\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\right)$, $B\left(\dfrac{2}{7};\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\right)$. □

Ví dụ 4

Cho elip $(E): \dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ và $A(4;-3)$, $B(-4;3)$. Hãy tìm M thuộc (E) sao cho diện tích tam giác MAB đạt lớn nhất.

Lời giải.

Phương trình đường thẳng $AB: 3x+4y=0$.

Ta có $M \in (E) \Rightarrow \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t. \end{cases}$

Do AB cố định nên diện tích tam giác MAB đạt giá trị lớn nhất khi $\mathrm{d}(M,(AB))$ đạt giá trị lớn nhất, điều này tương đương $\dfrac{|6\cos t + 4\sin t|}{5}$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow |5\cos t + 4\sin t|$ đạt giá trị lớn nhất.

Mà theo bất đẳng thức Bunhiacopxki $|5\cos t + 4\sin t| \le \sqrt{5^2+4^2}\cdot\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 2\sqrt{13}$.

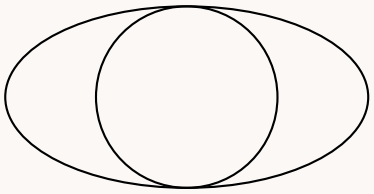
Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} \dfrac{\cos t}{5} = \dfrac{\sin t}{4} \\ |5\cos t + 4\sin t| = 2\sqrt{13} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos t = \dfrac{3}{\sqrt{13}} \\ \sin t = \dfrac{2}{\sqrt{13}} \end{cases} \\ \begin{cases} \cos t = -\dfrac{3}{\sqrt{13}} \\ \sin t = -\dfrac{2}{\sqrt{13}} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} M_1\left(\dfrac{6}{\sqrt{13}};\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right) \\ M_2\left(-\dfrac{6}{\sqrt{13}};-\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right). \end{array}\right.$

Vậy có hai điểm M thỏa yêu cầu bài toán là $M_1\left(\dfrac{6}{\sqrt{13}};\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)$, $M_2\left(-\dfrac{6}{\sqrt{13}};-\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)$. □

Dạng 4 Bài toán thực tế về Elip

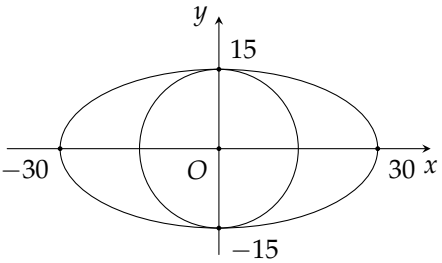
Ví dụ 1

Ông Hoàng có một mảnh vườn hình Elip có chiều dài trục lớn và trục nhỏ lần lượt là 60 m và 30 m. Ông chia mảnh vườn ra làm hai nửa bằng một đường tròn tiếp xúc trong với Elip để làm mục đích sử dụng khác nhau (xem hình vẽ). Nửa bên trong đường tròn ông trồng cây lâu năm, nửa bên ngoài đường tròn ông trồng hoa màu. Hãy tính tỉ số diện tích T giữa phần trồng cây lâu năm so với diện tích trồng hoa màu. Biết diện tích hình Elip được tính theo công thức $S = \pi ab$ với a, b lần lượt là nửa độ dài trục lớn và nửa độ dài trục bé. Biết độ rộng của đường Elip là không đáng kể.



Lời giải.

Xét hệ trục tọa độ Oxy như **hình vẽ**.



Khi đó đường tròn có bán kính là $R = 15$ và elip có nửa độ dài trục lớn là $a = 30$, nửa độ dài trục bé là $b = 15$.

Diện tích đường tròn là $S_{(C)} = \pi R^2 = \pi\cdot 15^2 = 225\pi$.

Diện tích Elip là $S_{(E)} = \pi ab = \pi 30\cdot 15 = 450\pi$.

Diện tích nửa bên ngoài đường tròn trồng hoa màu là $S = S_{(E)} - S_{(C)} = 450\pi - 225\pi = 225\pi$.

Vậy tỉ số diện tích $T = \dfrac{225\pi}{225\pi} = 1$.

□

HYPEBOL

Dạng 5 Xác định các yếu tố của Hypebol

Nắm vững kiến thức về Hypebol từ đó giải quyết các yêu cầu của bài toán.

- Tọa độ các tiêu điểm, tọa độ các đỉnh;
- Độ dài tiêu cự $F_1F_2 = 2c$;
- Tâm sai $e = \dfrac{c}{a}$;
- độ dài trục thực $A_1A_2 = 2a$, độ dài trục ảo $B_1B_2 = 2b$.

Ví dụ 1

Xác định độ dài hai trục, tiêu cự, tâm sai, tiêu điểm, của hypebol $(H) : 9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$.

Lời giải.

$(H) : 9x^2 - 16y^2 - 144 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1.$
(H) có trục thực Ox, $a = 4$, $b = 3$, $c = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$.
Từ đó trục thực $2a = 8$, trục ảo $2b = 6$.
Tiêu cự $2c = 10$, tâm sai $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{4}$.
Hai tiêu điểm $F_1(-5;0)$, $F_2(5;0)$. □

Ví dụ 2

Xác định độ dài hai trục, tiêu cự, tâm sai, tiêu điểm, của hypebol $x^2 - 4y^2 - 4 = 0$.

Lời giải.

$(H) : \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 5 \ (a > b).$
Trục thực $A_1A2 = 2a = 4$.
Trục ảo $B_1B_2 = 2b = 2$.
Tiêu điểm $F_1\left(-\sqrt{5};0\right)$, $F_2\left(\sqrt{5};0\right)$.
Tâm sai $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} > 1.$ □

Dạng 6 Viết phương trình chính tắc của Hypebol

Phương trình chính tắc (H) có dạng

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ với } a > b > 0. \qquad (1)$$

Ta cần tìm các số a, b dựa vào giải thiết của bài toán.

Ví dụ 1

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hypebol (H) đi qua điểm $M\left(5;\frac{9}{4}\right)$ và nhận điểm $F(5;0)$ làm tiêu điểm. Hãy viết phương trình chính tắc của (H).

Lời giải.

Phương trình chính tắc của (H) : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \ \ (a,b>0)$.
$F(5;0)$ làm tiêu điểm suy ra $c=5 \Rightarrow a^2+b^2=25$. (1)
$M\left(5;\frac{9}{4}\right)\in(H) \Rightarrow \frac{25}{a^2}-\frac{81}{16b^2}=1$. (2) Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases}a^2=16\\b^2=9\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a^2=\frac{625}{16}\\b^2=-\frac{225}{16}\end{cases}$ (loại).
Vậy phương trình chính tắc của (H) là $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. □

Ví dụ 2

Hypebol (H) có nửa trục thực là 4, tiêu cự bằng 10. Hãy viết phương trình chính tắc của (H).

Lời giải.

Hypebol (H) có nửa trục thực là $4 \Rightarrow a=4$.
Tiêu cự $F_1F_2=2c=10 \Rightarrow c=5$.
Ta có $b^2=c^2-a^2=9$.
Suy ra phương trình chính tắc của (H) là $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. □

Ví dụ 3

Cho hypebol (H) đi qua điểm $(6;0)$ và có tâm sai bằng $\frac{7}{6}$. Hãy viết phương trình chính tắc của hypebol (H).

Lời giải.

(H) đi qua $(6;0)$ suy ra $a=6$.
Tâm sai $e=\frac{c}{a}=\frac{7}{6} \Rightarrow c=\frac{7}{6}\cdot 6=7$.
Ta có $b^2=c^2-a^2=49-36=13$.
Phương trình chính tắc của (H) là $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{13}=1$. □

Dạng 7 Tìm tọa độ điểm thuộc Hypebol thỏa mãn điều kiện cho trước

Ví dụ 1

Cho hypebol $(H): 9x^2 - y^2 - 9 = 0$. Tìm điểm trên hypebol nhìn hai tiêu điểm dưới một góc $\dfrac{pi}{3}$.

Lời giải.

Gọi $M(x;y)$ là điểm thuộc (H) nhìn F_1, F_2 dưới một góc $\dfrac{\pi}{3}$.

Theo định lý cosin trong tam giác MF_1F_2 ta có

$F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2 - 2MF_1 \cdot MF_2 \cdot \cos\dfrac{\pi}{3}$

$\Rightarrow F_1F_2^2 = (MF_1 - MF_2)^2 + MF_1 \cdot MF_2$

$\Rightarrow 4c^2 = 4a^2 + |ex + a| \cdot |ex - a|$

$\Rightarrow 4c^2 = 4a^2 + \dfrac{c^2}{a^2}x^2 - a^2$

$\Rightarrow 40 = 4 + 10x^2 - 1 \Rightarrow x^2 = \dfrac{37}{10} \Rightarrow x_M = \pm\dfrac{\sqrt{370}}{10}.$

$y_M^2 = 9x_M^2 - 9 = \dfrac{243}{10} \Rightarrow y_M = \pm\dfrac{9\sqrt{30}}{10}.$

Vậy có 4 điểm thỏa mãn bài toán là $\left(\dfrac{\sqrt{370}}{10}; \dfrac{9\sqrt{30}}{10}\right)$, $\left(\dfrac{\sqrt{370}}{10}; -\dfrac{9\sqrt{30}}{10}\right)$, $\left(-\dfrac{\sqrt{370}}{10}; \dfrac{9\sqrt{30}}{10}\right)$, $\left(-\dfrac{\sqrt{370}}{10}; -\dfrac{9\sqrt{30}}{10}\right)$. □

Ví dụ 2

Cho Hypebol $(H): \dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$. Tìm điểm M trên (H) sao cho M thuộc nhánh phải và MF_1 nhỏ nhất (ngắn nhất).

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 1 \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = \sqrt{5}. \end{cases}$

Gọi $M\left(x_0; y_0\right) \in (H)$.

Ta có $\dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 4\left(y^2 + 1\right)$. M thuộc nhánh phải của (H) nên $x_0 \geq 2$.

$MF_1 = 2 + \dfrac{2}{\sqrt{5}}x_0 \geq 2 + \dfrac{4}{\sqrt{5}}.$

MF_1 nhỏ nhất bằng $2 + \dfrac{4}{\sqrt{5}}$ khi $M \equiv A\,(2;0)$. □

Ví dụ 3

Cho Hyperbol $(H): \dfrac{x^2}{4} - y^2 = 1$. Tìm điểm M trên (H) sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng $\Delta: y = x + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)\in(H)$. Phương trình tiếp tuyến của (H) tại M là $d:\dfrac{x\cdot x_0}{4}-y\cdot y_0=1$.

$\Delta\ /\!/\ d$ khi $\dfrac{\frac{x_0}{4}}{1}=\dfrac{-y_0}{-1}\Rightarrow y_0=\dfrac{x_0}{4}$ thay vào (H) ta có: $\dfrac{x_0^2}{4}-\left(\dfrac{x_0}{4}\right)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=\dfrac{4}{\sqrt{3}},y_0=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ x_0=-\dfrac{4}{\sqrt{3}},y_0=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}.\end{array}\right.$

Với $M\left(\dfrac{4}{\sqrt{3}};\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ta có $d\left(M,\Delta\right)=\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.

Với $M\left(-\dfrac{4}{\sqrt{3}};-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ta có $d\left(M,\Delta\right)=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$.

Vậy $M\left(-\dfrac{4}{\sqrt{3}};-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ thỏa mãn đề bài. □

PARABOL

Dạng 8 Xác định các yếu tố của Parabol

Cho Parabol (P) $y^2=2px$ với $p>0$ khi đó

- Xác định tiêu điểm của (P) : $F(\dfrac{p}{2};0)$
- Đường chuẩn $x=-\dfrac{p}{2}$
- Bán kính qua tiêu $MF=x+\dfrac{p}{2}$

Ví dụ 1

Hãy xác định tiêu điểm, đường chuẩn, bán kính qua tiêu của parabol $y^2=4x$.

Lời giải.

Từ phương trình parabol $y^2=4x\Rightarrow p=2$.
Tiêu điểm của parabol là $F(1;0)$.
Đường chuẩn $\Delta:x=-1$.
Với $M(x;y)\in(P)$ bán kính qua tiêu $MF=x+1$. □

Ví dụ 2

Hãy xác định tiêu điểm, đường chuẩn, bán kính qua tiêu của parabol $y^2=6x$.

Lời giải.

Từ phương trình parabol $y^2=6x\Rightarrow p=3$.
Tiêu điểm của parabol là $F\left(\dfrac{3}{2};0\right)$.
Đường chuẩn $\Delta:x=-\dfrac{3}{2}$.
Với $M(x;y)\in(P)$ bán kính qua tiêu $MF=x+\dfrac{3}{2}$. □

Dạng 9 Viết phương trình chính tắc của parabol

Phương trình chính tắc Parabol là

$$y^2 = 2px$$

với $p > 0$ khi đó ta cần tìm p dựa vào giả thiết bài toán để viết phương trình chính tắc (P).

Ví dụ 1

Hãy viết phương trình chính tắc của Parabol biết đường chuẩn có phương trình $x + 1 = 0$.

Lời giải.

Phương trình đường chuẩn $x = -1 \Rightarrow -\dfrac{p}{2} = -1 \Rightarrow p = 2$.
Phương trình chính tắc của parabol là $y^2 = 4x$. □

Ví dụ 2

Viết phương trình chính tắc của Parabol (P) có tiêu điểm $F(3;0)$ và đỉnh là gốc tọa độ O.

Lời giải.

Phương trình chính tắc của (P) là $y^2 = 2px$.
Tiêu điểm $F(3;0) \Rightarrow \dfrac{p}{2} = 3 \Rightarrow p = 6$.
Phương trình chính tắc của (P) là $y^2 = 12x$. □

Dạng 10 Xác định tọa độ điểm thuộc parabol thỏa mãn điều kiện cho trước

Ví dụ 1

Cho parabol $(P) : y^2 = 4x$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $MF = 3$.

Lời giải.

Phương trình $(P) : y^2 = 4x \Rightarrow p = 2$.
Ta có $MF = x_M + 1 = 3 \Rightarrow x_M = 2 \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{2}$.
Vậy có hai điểm M thỏa đề bài là $M_1\left(2; 2\sqrt{2}\right)$, $M_2\left(2; -2\sqrt{2}\right)$. □

Ví dụ 2

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol $(P) : y^2 = x$ và điểm $I(0;2)$. Xác định tọa độ hai điểm $M, N \in (P)$ sao cho $\overrightarrow{IM} = 4\overrightarrow{IN}$.

Lời giải.

Dựa vào hình dáng đồ thị parabol (P) suy ra $M(x_M; -\sqrt{x_M})$, $N(x_N; \sqrt{x_N})$ $(x_M, x_N > 0)$.

$\overrightarrow{IM} = 4\overrightarrow{IN} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M - 0 = 4(x_N - 0) \\ -\sqrt{x_M} - 2 = 4\left(\sqrt{x_N} - 2\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M - 4x_N = 0 \\ \sqrt{x_M} + 4\sqrt{x_N} = 6. \end{cases}$

Giải hệ phương trình ta được:

$x_N = 1$ và $x_M = 4$ suy ra $M(4;-2)$, $N(1;1)$.

$x_N = 9$ và $x_M = 36$ suy ra $M(36;-6)$, $N(9;3)$. □

Ví dụ 3

Cho parabol $(P): y^2 = 4x$ và đường thẳng $(d): x + y + m = 0$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B. Viết phương trình đường thẳng (d), biết rằng $OA \perp OB$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là $x^2 + 2(m-2)x + m^2 = 0$. (*)

(d) và (P) cắt nhau tại hai điểm A và B nên $(*)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' = (m-2)^2 - m^2 > 0 \Leftrightarrow -4m + 4 > 0 \Leftrightarrow m < 1$. (1)

Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thì $A(x_1; -x_1 - m)$, $B(x_2; -x_2 - m)$.

$OA \perp OB \Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 + (x_1 + m)(x_2 + m) = 0$

$\Leftrightarrow 2x_1x_2 + m(x_1 + x_2) + m^2 = 0 \Leftrightarrow 2m^2 + 2m(m-2) + m^2 = 0 \Leftrightarrow 5m^2 - 4m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \dfrac{4}{5}. \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện (1) ta nhận $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \dfrac{4}{5}. \end{array}\right.$ □

C BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1

Cho elip có phương trình $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. Tìm tiêu điểm và tiêu cự của elip.

Lời giải.

Elip có phương trình $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 3. \end{cases}$

Suy ra $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 3\sqrt{3}$. Khi đó elip có 2 tiêu điểm là $F_1\left(3\sqrt{3}; 0\right)$ và $F_2\left(-3\sqrt{3}; 0\right)$. Tiêu cự là $F_1F_2 = 2c = 6\sqrt{3}$. □

Bài 2

Cho hypebol có phương trình $\dfrac{x^2}{7} - \dfrac{y^2}{9} = 1$. Tìm tiêu điểm và tiêu cự của hypebol.

Lời giải.

Hypebol có phương trình $\dfrac{x^2}{7} - \dfrac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{7} \\ b = 3. \end{cases}$

Suy ra $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 4$. Khi đó hypebol có 2 tiêu điểm là $F_1(4;0)$ và $F_2(-4;0)$. Tiêu cự là $F_1F_2 = 2c = 8$. □

Bài 3

Cho parabol có phương trình $y^2 = 8x$. Tìm tiêu điểm và đường chuẩn của parabol.

Lời giải.

Parabol có phương trình $y^2 = 8x \Rightarrow 2p = 8 \Rightarrow p = 4$.
Khi đó parabol có tiêu điểm là $F(2;0)$. Đường chuẩn của parabol là $x = -2$. □

Bài 4

Lập phương trình chính tắc của elip đi qua điểm $A(5;0)$ và có một tiêu điểm là $F_2(3;0)$.

Lời giải.

Vì elip có một tiêu điểm là $F_2(3;0)$ nên $c = 3 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 9$.
Gọi phương trình chính tắc của elip là $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Vì elip đi qua điểm $A(5;0)$ nên ta có phương trình $\dfrac{25}{a^2} = 1 \Rightarrow a = 5$.
Vì $a^2 - b^2 = 9$ nên $b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$. Vậy phương trình chính tắc của elip là $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$. □

Bài 5

Lập phương trình chính tắc của parabol đi qua điểm $M(2;4)$.

Lời giải.

Gọi phương trình chính tắc của parabol có dạng $y^2 = 2px$ với $p > 0$.
Vì parabol đi qua điểm $M(2;4)$ nên ta có phương trình $16 = 4p \Rightarrow p = 4$. Vậy phương trình chính tắc của parabol có dạng $y^2 = 8x$ □

Bài 6

Có hai trạm phát tín hiệu vô tuyến đặt tại hai vị trí A, B cách nhau 300 km. Tại cùng một thời điểm, hai trạm cùng phát tín hiệu với vận tốc 292000 km/s để một tàu thuỷ thu và đo độ lệch thời gian. Tín hiệu từ A đến sớm hơn tín hiệu từ B là $0,0005$ s. Từ thông tin trên, ta có thể xác định được tàu thuỷ thuộc đường hypebol nào? Viết phương trình chính tắc của hypebol đó theo đơn vị kilômét.

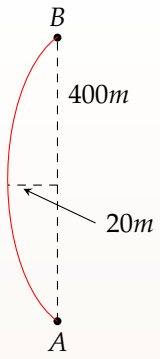
Lời giải.

Hai trạm phát tín hiệu vô tuyến đặt tại hai vị trí A, B chính là hai tiêu điểm của hypebol. Khi đó $AB = 300$ km chính là tiêu cự của hypebol. Suy ra $2c = 300 \Rightarrow c = 150$.
Vì tàu thuỷ thuộc đường hypebol và tín hiệu từ A đến sớm hơn tín hiệu từ B là $0,0005$ s nên $|MF_1 - MF_2| = 0,0005 \cdot 292000 = 146 = 2a \Rightarrow a = 73$.
Khi đó $b^2 = c^2 - a^2 = 150^2 - 73^2 = 17171$.
Phương trình chính ủa hypebol đó theo đơn vị kilômét là $\dfrac{x^2}{5329} - \dfrac{y^2}{17171} = 1$.

□

Bài 7

Khúc cua của một con đường có dạng hình parabol, điểm đầu vào khúc cua là A, điểm cuối là B, khoảng cách $AB = 400$ m. Đỉnh parabol (P) của khúc cua cách đường thẳng AB một khoảng 20 m và cách đều A, B.

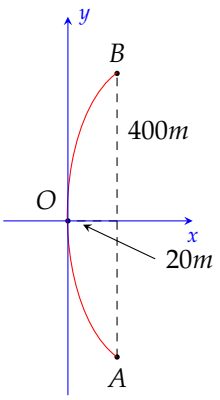


a. Lập phương trình chính tắc của (P), với 1 đơn vị đo trong mặt phẳng toạ độ tương ứng 1 m trên thực tế.

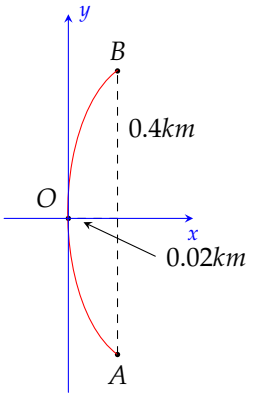
b. Lập phương trình chinh tắc của (P), với 1 đơn vị đo trong mặt phẳng toạ độ tương ứng 1 km trên thực tế.

Lời giải.

a. Chọn hệ trục toa độ Oxy như hình vẽ, với 1 đơn vị đo trong mặt phẳng toạ độ tương ứng 1 m trên thực tế.
Gọi phương trình chính tắc của parabol có dạng $y^2 = 2px$ với $p > 0$.
Vì parabol đi qua điểm $B(20;200)$ nên ta có phương trình $200^2 = 40p \Rightarrow p = 1000$.
Vậy phương trình chính tắc của parabol có dạng $y^2 = 2000x$.



b. Chọn hệ trục toa độ Oxy như hình vẽ, với 1 đơn vị đo trong mặt phẳng toạ độ tương ứng 1 km trên thực tế.
Gọi phương trình chính tắc của parabol có dạng $y^2 = 2px$ với $p > 0$.
Vì parabol đi qua điểm $B(0,02;0,2)$ nên ta có phương trình $0,2^2 = 0,04p \Rightarrow p = 1$.
Vậy phương trình chính tắc của parabol có dạng $y^2 = 2x$.



□

Bài 8

Phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của elip?

a) $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{64} = 1$; b) $\dfrac{x^2}{64} - \dfrac{y^2}{64} = 1$; c) $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{25} = 1$; d) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{64} = 1$.

Lời giải.

$\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{64} = 1$ là phương trình đường tròn.
$\dfrac{x^2}{64} - \dfrac{y^2}{64} = 1$ là phương trình hypebol.
$\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{25} = 1$ là phương trình chính tắc của eip với $a = 8, b = 5$.
$\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{64} = 1$ không phải là phương trình chính tắc elip vì $a < b$.

□

Bài 9

Cho elip (E) có phương trình chính tắc là $\dfrac{x^2}{49}+\dfrac{y^2}{25}=1$. Tìm tọa độ giao điểm của elip (E) với các trục tọa độ Ox, Oy và tọa độ các tiêu điểm của (E).

Lời giải.

Ta có $a=7, b=5, c=\sqrt{7^2-5^2}=2\sqrt{6}$.
Tọa độ giao điểm của (E) với Ox là $A_1(-7;0)$ và $A_2(7;0)$.
Tọa độ giao điểm của (E) với Oy là $B_1(0;-5)$ và $B_2(0;5)$.
Tiêu điểm của (E) là $F_1(-2\sqrt{6};0)$ và $F_2(2\sqrt{6};0)$. □

Bài 10

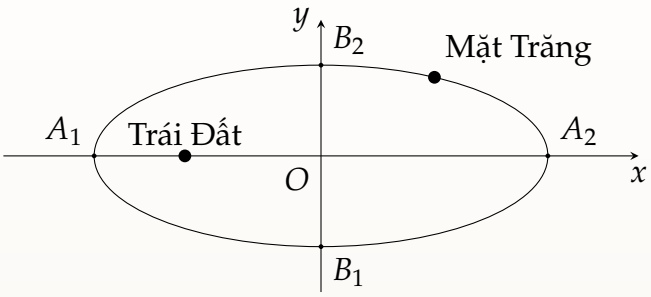
Viết phương trình chính tắc của elip (E), biết tọa độ hai giao điểm của (E) với Ox, Oy lần lượt là $A_1(-5;0)$ và $B_2(0;\sqrt{10})$.

Lời giải.

Phương trình chính tắc (E) có dạng $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ (a>b>0)$.
Ta có (E) giao với Ox, Oy lần lượt là $A_1(-5;0)$ và $B_2(0;\sqrt{10})$ nên $a=5$ và $b=\sqrt{10}$.
Vậy phương trình chính tắc của (E) là $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{10}=1,\ (a>b>0)$. □

Bài 11

Ta biết rằng Mặt Trăng chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là một elip mà Trái Đất là một tiêu điểm. Elip đó có $A_1A_2=768800$ km và $B_1B_2=767619$ km (Hình 62). Viết phương trình chính tắc của elip đó.



Hình 62

Lời giải.

Ta có $A_1A_2=768800$ km và $B_1B_2=767619$ km nên $a=384400$ và $b=\dfrac{767619}{2}$.
Vậy phương trình chính tắc của (E) là $\dfrac{x^2}{384400^2}+\dfrac{4y^2}{767619^2}=1$.

□

Bài 12

Phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của hypebol?
a) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{9}=1$; b) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{9}=1$; c) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{64}=1$; d) $\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{9}=1$.

Lời giải.

$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{9}=1$ là phương trình đường tròn.
$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{9}=1$ là phương trình chính tắc của hypebol.
$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{64}=1$ là phương trình chính tắc của hypebol.
$\dfrac{x^2}{64}-\dfrac{y^2}{9}=1$ là phương trình chính tắc của hypebol. □

Bài 13

Tìm tọa độ các đỉnh và tiêu điểm của hypebol trong các trường hợp sau:
a) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$; b) $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{25}=1$.

Lời giải.

a) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$.
Ta có $a^2=9\to a=3$, $b^2=16\to b=4$.
$c=\sqrt{a^2+b^2}=5$.
Tọa độ các đỉnh: $A_1(-3;0)$, $A_2(3;0)$.
Tọa độ tiêu điểm: $F_1(-5;0)$, $F_2(5;0)$. a) $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{25}=1$.
Ta có $a^2=36\to a=6$, $b^2=25\to b=5$.
$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{61}$.
Tọa độ các đỉnh: $A_1(-6;0)$, $A_2(6;0)$.
Tọa độ tiêu điểm: $F_1(-\sqrt{61};0)$, $F_2(\sqrt{61};0)$. □

Bài 14

Viết phương trình chính tắc hypebol (H), biết $N(\sqrt{10};2)$ nằm trên (H) và hoành độ một giao điểm của (H) với Ox bằng 3.

Lời giải.

Phương trình chính tắc của (H) có dạng $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.
Một giao điểm của (H) với Ox bằng 3 nên $a=3$.
Khi đó $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.
Điểm $N(\sqrt{10};2)$ nằm trên (H) nên $\dfrac{10}{9}-\dfrac{4}{b^2}=1\Leftrightarrow\dfrac{4}{b^2}=\dfrac{1}{9}\Leftrightarrow b^2=36\Rightarrow b=6$.
Vậy $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{36}=1$. □

Bài 15

Những phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của parabol?
a) $y^2=-2x$; b) $y^2=2x$; c) $x^2=-2y$; d) $y^2=\sqrt{5}x$.

Lời giải.

a) $y^2=-2x$ không phải là phương trình chính tắc của parabol.
b) $y^2=2x$ là phương trình chính tắc của parabol.
c) $x^2=-2y$ không phải là phương trình chính tắc của parabol.
d) $y^2=\sqrt{5}x$ là phương trình chính tắc của parabol. □

Bài 16

Tìm tọa độ tiêu điểm và viết phương trình đường chuẩn của đường parabol trong mỗi trường hợp sau:

a) $y^2 = \dfrac{5x}{2}$; b) $y^2 = 2\sqrt{2}x$.

Lời giải.

a) $y^2 = \dfrac{5x}{2}$.

Ta có $2p = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow p = \dfrac{5}{4}$.

Tọa độ tiêu điểm là $F\left(\dfrac{5}{8};0\right)$.

Phương trình đường chuẩn là $x + \dfrac{5}{8} = 0$.

b) $y^2 = 2\sqrt{2}x$.

Ta có $2p = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow p = \sqrt{2}$.

Tọa độ tiêu điểm là $F\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};0\right)$.

Phương trình đường chuẩn là $x + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0$. □

Bài 17

Viết phương trình chính tắc của parabol, biết tiêu điểm $F(6;0)$.

Lời giải.

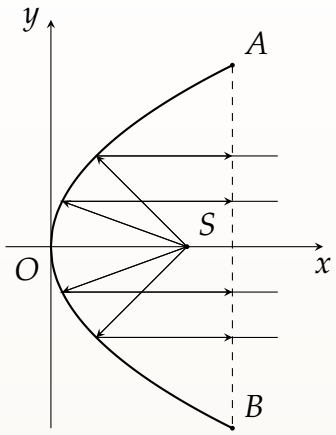
Phương trình chính tắc của parabol có dạng $y^2 = 2px$.

Tiêu điểm $F(6;0)$ nên $p = 12$.

Phương trình chính tắc của parabol có dạng $y^2 = 24x$. □

Bài 18

Một chiếc đèn có mặt cắt ngang là hình parabol (hình 63). Hình parabol có chiều rộng hai mép vành là $AB = 40$ cm và chiều sâu $h = 30$ cm (h bằng khoảng cách từ O đến AB). Bóng đèn nằm ở tiêu điểm S. Viết phương trình chính tắc của parabol đó.



Hình 63

Lời giải.

Phương trình chính tắc của parabol có dạng $y^2 = 2px$.

Từ dữ kiện bài toán ta có được parabol đi qua điểm $A(30;20)$ nên $20^2 = 2.p.30 \Leftrightarrow p = \dfrac{20}{3}$.

Vậy phương trình chính tắc của parabol là $y^2 = \dfrac{40}{3}x$ □

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C)\colon x^2 + y^2 - 2x + 8y - 1 = 0$. Bán kính R của đường tròn (C) là

(A) $R = 4$. (B) $R = \sqrt{69}$. (C) $R = 2\sqrt{3}$. (D) $R = 3\sqrt{2}$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-4)$, bán kính $R = \sqrt{1^2 + (-4)^2 - (-1)} = 3\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 2

Đường tròn (C) có tâm $I(0;5)$ và bán kính $R = 4$ có phương trình là

(A) $x^2 + (y-5)^2 = 16$. (B) $x^2 + (y-5)^2 = 2$.

(C) $(x-5)^2 + y^2 = 4$. (D) $x^2 + (y+5)^2 = 16$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(0;5)$ và bán kính $R = 4$ có phương trình là $x^2 + (y-5)^2 = 16$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 3

Phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C)\colon x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$ tại điểm $M(1;-6)$ là

(A) $x - 3y - 17 = 0$. (B) $y + 6 = 0$. (C) $y - 6 = 0$. (D) $2x - 3y - 20 = 0$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-3)$.

Tiếp tuyến của (C) tại $M(1;-6)$ đi qua $M(1;-6)$ và nhận $\overrightarrow{IM} = (0;-3)$ làm một véc tơ pháp tuyến, có phương trình $0(x-1) - 3(y+6) = 0 \Leftrightarrow -3y - 18 = 0 \Leftrightarrow y + 6 = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 4

Trong mặt phẳng Oxy, cho elip có phương trình $9x^2 + 25y^2 = 225$. Tiêu cự của elip bằng

(A) 6. (B) 15. (C) 8. (D) 4.

Lời giải.

Phương trình elip (E) có dạng $9x^2 + 25y^2 = 225 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

Theo bài ra ta có $\begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = 9 \end{cases}$.

Mà $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$.
Vậy tiêu cự của elip đã cho là $2c=8$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 5

Phương trình chính tắc của elip có độ dài trục lớn bằng 20 và tiêu cự bằng 12 là
(A) $\frac{x^2}{37}+\frac{y^2}{1}=1$. (B) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1$. (C) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$. (D) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

Lời giải.

Gọi phương trình elip là $(E)\colon \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$.
Do độ dài trục lớn bằng 20 nên $2a=20\Rightarrow a=10$.
Do tiêu cự bằng 12 nên $2c=12\Rightarrow c=6$.
Ta có $b^2=a^2-c^2=10^2-6^2=64\Rightarrow b=8$.
Vậy phương trình elip cần tìm là $(E)\colon \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 6

Trong mặt phẳng Oxy, cho hypebol có phương trình $9x^2-16y^2=144$. Điểm nào dưới đây là một tiêu điểm của hypebol?
(A) $F_1(25;0)$. (B) $F_1(0;5)$. (C) $F_1(4;0)$. (D) $F_1(-5;0)$.

Lời giải.

Phương trình hypebol có dạng $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$.
Theo bài ra ta có $9x^2-16y^2=144\Leftrightarrow \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.
Suy ra $a^2=16$, $b^2=9\Rightarrow c^2=a^2+b^2=25\Rightarrow c=5$.
Vậy hypebol có hai tiêu điểm là $F_1(-c;0)$,$F_2(c;0)$ hay $F_1(-5;0)$, $F_2(5;0)$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 7

Hypebol cắt trục hoành tại điểm $A(4;0)$ và một tiêu điểm $F_1(-5;0)$ có phương trình chính tắc là
(A) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. (B) $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{9}=1$. (C) $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$. (D) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$.

Lời giải.

Phương trình chính tắc của hyperbol có dạng $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,(a,b>0)$.

Ta có : $\begin{cases}\frac{16}{a^2}=1\\ c=5\\ b^2=c^2-a^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a^2=16\\ c^2=25\\ b^2=9\end{cases}$.

Phương trình chính tắc của Hyperbol là $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 8

Tiêu điểm của parabol $y^2 = \sqrt{3}x$ là

(A) $F\left(-\frac{\sqrt{3}}{4};0\right)$. (B) $F\left(\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$. (C) $F\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$. (D) $F\left(\frac{\sqrt{3}}{4};0\right)$.

Lời giải.

Ta có $p = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow F\left(\frac{\sqrt{3}}{4};0\right)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9

Phương trình chính tắc của parabol có tiêu điểm $F(-2;0)$ là

(A) $y^2 = -4x$. (B) $y^2 = -8x$. (C) $y^2 = -2x$. (D) $y = \frac{1}{6}x^2$.

Lời giải.

Phương trình chính tắc của parabol (P): $y^2 = 2px$.
Tiêu điểm $F(-2;0) \Rightarrow p = -4$.
Vậy phương trình parabol $y^2 = -8x$
Chọn đáp án (B) □

Câu 10

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(5;-1)$, $B(-3;7)$. Đường tròn có đường kính AB có phương trình là

(A) $x^2 + y^2 + 6x + 5y + 1 = 0$. (B) $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 22 = 0$.
(C) $x^2 + y^2 - 2x - y + 1 = 0$. (D) $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 22 = 0$.

Lời giải.

Tâm I của đường tròn là trung điểm AB nên $I(1;3)$.
Bán kính $R = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{(-3-5)^2 + (7+1)^2} = 4\sqrt{2}$.
Vậy phương trình đường tròn là $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 32 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 6y - 22 = 0$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 11

Trong mặt phẳng Oxy, phương trình tiếp tuyến đường tròn $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ tại điểm $M(-2;0)$ có phương trình là

(A) $-4x + 3y - 8 = 0$. (B) $4x + 3y + 8 = 0$.
(C) $3x + 4y + 6 = 0$. (D) $3x - 4y + 6 = 0$.

Lời giải.

Tâm đường tròn $I(2;3)$. Phương trình tiếp tuyến đường tròn tâm $I(a;b)$ tại điểm $M(x_0;y_0)$ có dạng: $(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$.
Vậy phương trình tiếp tuyến tại $M(-2;0)$ là $(-2-2)(x+2) + (0-3)(y-0) = 0$.
Hay $4x + 3y + 8 = 0$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 12

Tìm phương trình chính tắc của elip (E) có độ dài trục lớn bằng 10, tiêu cự có độ dài bằng 6.

(A) $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}=1$. (B) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$. (C) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$. (D) $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=1$.

Lời giải.

Giả sử phương trình elip có dạng (E): $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$.

Độ dài trục lớn bằng $10 \Rightarrow 2a=10 \Rightarrow a=5$.

Độ dài tiêu cự bằng $6 \Rightarrow 2c=6 \Rightarrow c=3$.

Ta có $b^2=a^2-c^2=16$.

Vậy phương trình elip có dạng (E): $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13

Tìm phương trình chính tắc của hypebol (H) biết độ dài trục thực bằng 6 và phương trình một tiệm cận là $5x-3y=0$.

(A) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$. (B) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{25}=1$. (C) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{34}=1$. (D) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{34}=1$.

Lời giải.

Giả sử phương trình chính tắc của hypebol có dạng (H): $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a,b>0)$.

(H) có độ dài trục thực bằng $6 \Rightarrow 2a=6 \Rightarrow a=3$.

Phương trình một tiệm cận của (H) là $y=\dfrac{5}{3}x \Rightarrow \dfrac{b}{a}=\dfrac{5}{3} \Rightarrow b=5$.

Vậy phương trình chính tắc của hypebol có dạng (H): $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{25}=1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 14

Phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của parabol nhận điểm $F\left(\dfrac{9}{2};0\right)$ làm tiêu điểm?

(A) $y^2=18x$. (B) $y=18x^2$. (C) $y^2=9x$. (D) $y=9x^2$.

Lời giải.

Gọi phương trình dạng chính tắc của parabol cần tìm có dạng $y^2=2px$ với $p>0$

Vì parabol nhận điểm $F\left(\dfrac{9}{2};0\right)$ làm tiêu điểm nên ta có $\dfrac{p}{2}=\dfrac{9}{2} \Rightarrow p=9$ (thỏa mãn).

Vậy $y^2=18x$ là phương trình cần tìm.

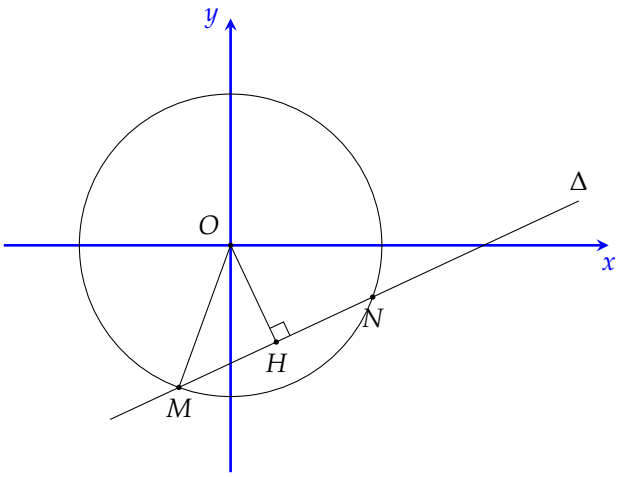
Chọn đáp án (A) □

Câu 15

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, viết phương trình đường tròn tâm $O(0;0)$ cắt đường thẳng (Δ): $x+2y-5=0$ tại hai điểm M, N sao cho $MN=4$.

(A) $x^2+y^2=9$. (B) $x^2+y^2=1$. (C) $x^2+y^2=21$. (D) $x^2+y^2=3$.

Lời giải.



Gọi R là bán kính của đường tròn (C) thỏa đề bài.
Δ không qua $O(0;0)$ nên MN không phải là đường kính của (C).
Gọi H là hình chiếu của O trên Δ thì H là trung điểm của MN.

- $MH = \dfrac{1}{2}MN = 2.$
- $OH = \mathrm{d}(O;\Delta) = \dfrac{|-5|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \sqrt{5}.$
- $R = MO = \sqrt{OH^2 + MH^2} = \sqrt{5+4} = 3.$

Vậy $(C)\colon x^2+y^2=9$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 16

Trong hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-4x+2y-4=0$, viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc dương và tiếp tuyến tạo với các trục tọa độ một tam giác cân.

(A) $x-y+3\sqrt{2}+1=0;\ x-y-3\sqrt{2}+1=0.$
(B) $x-y+3\sqrt{2}-1=0;\ x-y-3\sqrt{2}+3=0.$
(C) $x-y+3\sqrt{2}+3=0;\ x-y-3\sqrt{2}-1=0.$
(D) $x-y+3\sqrt{2}-3=0; x-y-3\sqrt{2}-3=0.$

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(2;-1)$, bán kính $R=3$.
Đường thẳng d tạo với các trục tọa độ một tam giác cân thì hệ số góc của d là $\left[\begin{array}{l} k=1 \quad \text{(thỏa mãn)} \\ k=-1 \text{ (loại).} \end{array}\right.$
Khi $k=1$ thì d có dạng $y=x+m \Leftrightarrow x-y+m=0$.
d là tiếp tuyến của $(C) \Leftrightarrow \mathrm{d}(I,d)=R \Leftrightarrow \dfrac{|2+1+m|}{\sqrt{2}}=3 \Leftrightarrow |m+3|=3\sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3\sqrt{2}-3 \\ m=-3\sqrt{2}-3. \end{array}\right.$
d có phương trình $x-y+3\sqrt{2}-3=0; x-y-3\sqrt{2}-3=0$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 17

Trong hệ tọa độ Oxy, lập phương trình chính tắc của elip (E) biết (E) đi qua điểm $M\left(\frac{3}{\sqrt{5}};\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$ và tam giác MF_1F_2 vuông tại M với F_1, F_2 là tiêu điểm của (E).

(A) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. (B) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$. (C) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$. (D) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=0$.

Lời giải.

Phương trình chính tắc của elip cần tìm là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$.

(E) đi qua điểm $M\left(\frac{3}{\sqrt{5}};\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$ nên $\frac{9}{5a^2}+\frac{16}{5b^2}=1$.

Vì tam giác MF_1F_2 vuông tại M nên $F_1F_2=2OM\Rightarrow 2c=2\sqrt{5}\Rightarrow c=\sqrt{5}\Rightarrow a^2-b^2=5$.

Vậy ta có $\begin{cases}\frac{9}{5a^2}+\frac{16}{5b^2}=1 & (1)\\ a^2-b^2=5 & (2).\end{cases}$

Từ (2): $a^2=5+b^2$ thay vào (1), ta có

$$\frac{9}{5(5+b^2)}+\frac{16}{5b^2}=1\Leftrightarrow 9b^2+80+16b^2=25b^2+5b^4\Leftrightarrow 5b^4-80=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b^2=4\text{ (thỏa mãn)}\\ b^2=-4.\end{array}\right.$$

Với $b^2=4\Rightarrow a^2=9$ nên phương trình chính tắc cần tìm là $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 18

Cho elip (E) có tâm sai $e=\frac{\sqrt{5}}{3}$ và hình chữ nhật cơ sở của elip có chu vi bằng 20. Tổng các khoảng cách từ mỗi điểm nằm trên (E) đến hai tiêu điểm có giá trị bằng bao nhiêu?

(A) 6. (B) 4. (C) C5. (D) 3.

Lời giải.

Elip có dạng phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,(a>b>0)$.

Gọi F_1 và F_2 là hai tiêu điểm của (E). Điểm $M\in(E)\Leftrightarrow MF_1+MF_2=2a$.

Ta có $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}\Rightarrow\left(\frac{c}{a}\right)^2=\frac{5}{9}\Rightarrow\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{5}{9}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{2}{3}$ (do $a>0,b>0$).

Hình chữ nhật cơ sở của elip có hai cạnh là $2a,2b$ nên ta có $2(2a+2b)=20\Rightarrow a+b=5$.

Ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases}\frac{b}{a}=\frac{2}{3}\\ a+b=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\ b=2.\end{cases}$

Vậy tổng các khoảng cách từ mỗi điểm M nằm trên (E) đến hai tiêu điểm có giá trị là $MF_1+MF_2=2a=6$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 19

Phương trình chính tắc của hypebol (H) đi qua điểm $M=(6;3)$ và có góc giữa hai đường tiệm cận bằng 60° là

(A) $(H_1)\colon \dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{3}=1;(H_2)\colon \dfrac{x^2}{33}-\dfrac{y^2}{99}=1.$
(B) $(H_1)\colon \dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{3}=-1;(H_2)\colon \dfrac{x^2}{33}-\dfrac{y^2}{99}=-1.$
(C) $(H_1)\colon \dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{3}=1;(H_2)\colon \dfrac{x^2}{99}-\dfrac{y^2}{33}=1.$
(D) $(H_1)\colon \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{3}=1;(H_2)\colon \dfrac{x^2}{99}+\dfrac{y^2}{33}=1.$

Lời giải.

Phương trình các đường tiệm cận của (H) là $y=\pm\dfrac{b}{a}x$.

Do góc giữa hai đường tiệm cận là 60° và hai đường tiệm cận đối xứng nhau qua trục Ox, nên có hai trường hợp:

- Góc giữa mỗi tiệm cận và trục hoành bằng 30°, suy ra $\dfrac{b}{a}=\tan 30^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. (1)

- Góc giữa mỗi tiệm cận và trục hoành bằng 60°, suy ra $\dfrac{b}{a}=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$. (2)

Vì $M\in(H)\Rightarrow \dfrac{36}{a^2}-\dfrac{9}{b^2}=1$. (3)

Từ (1) và (3) suy ra $a^2=9$, $b^2=3$. Ta được hybebol $(H_1)\colon \dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{3}=1$.

Từ (2) và (3) suy ra $a^2=33$, $b^2=99$. Ta được hybebol $(H_1)\colon \dfrac{x^2}{33}-\dfrac{y^2}{99}=1$.

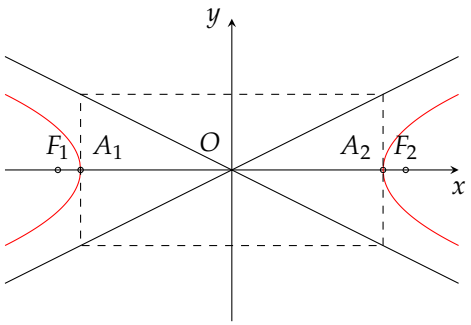
Chọn đáp án (A) □

Câu 20

Cho hyperbol có phương trình chính tắc $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$. Tìm điểm M trên Hyperbol để khoảng cách từ đến tiêu điểm $F_2(c;0)$ nhỏ nhất.

(A) $M(3;0)$. (B) $M\left(\dfrac{15}{4};-3\right)$. (C) $M\left(\dfrac{15}{4};3\right)$. (D) $M(-3;0)$.

Lời giải.



Cho hyperbol có phương trình chính tắc $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Tìm điểm M trên hyperbol để khoảng cách từ đến tiêu điểm $F_2(c;0)$ nhỏ nhất.

Với mỗi điểm $M(x_0;y_0)$ thuộc hyperbol, ta có bán kính qua tiêu của ứng với tiêu điểm $F_2(c;0)$ là $MF_2=|a-\dfrac{c}{a}x_0|$.

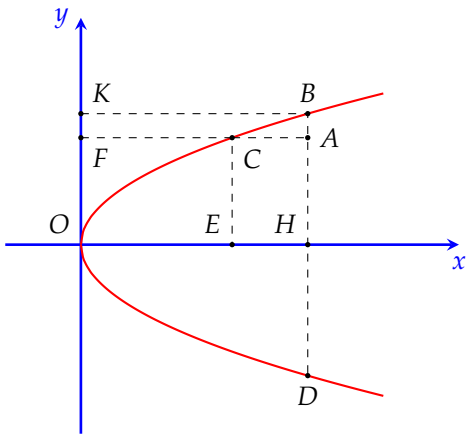
Nếu $M(x_0;y_0)$ thuộc nhánh chứa đỉnh $A_2(a;0)$ thì $x_0\geq a$ nên $a-\dfrac{c}{a}x_0<0$ (để ý rằng $c>a$).

Do đó, $MF_2 = |a - \frac{c}{a}x_0| = \frac{c}{a}x_0 - a \geq \frac{c}{a} \cdot a - a \geq c - a$.
Dấu đẳng thức xảy ra khi $x_0 = a$, tức là khi $M(x_0; y_0)$ trùng đỉnh $A_2(a; 0)$.
Nếu $M(x_0; y_0)$ thuộc nhánh chứa đỉnh $A_1(-a; 0)$ thì $x_0 \leq -a$.
Do đó, $MF_2 = |a - \frac{c}{a}x_0| = a - \frac{c}{a}(x_0) \geq a - \frac{c}{a}(-a) \geq a + c$.
Suy ra $MF_2 = |a - \frac{c}{a}x_0| \geq a + c$.
Vậy điểm $M(x_0; y_0)$ trên Hyperbol để khoảng cách từ $M(x_0; y_0)$ đến tiêu điểm $F_2(c; 0)$ nhỏ nhất khi M trùng đỉnh $A_1(-a; 0)$ và khi đó khoảng cách nhỏ nhất bằng $c - a$.
Từ phương trình hyperbol ta có $a = 3$.
Vậy tọa độ M cần tìm là $A_1(-3; 0)$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 21

Cổng của một công viên có dạng một parabol. Để đo chiều cao h của cổng, một người đo khoảng cách giữa hai chân cổng được 9 m, người đó thấy nếu đứng cách chân cổng 0,5 m thì đầu chạm cổng. Cho biết người này cao 1,6 m, chiều cao của cổng gần nhất với giá trị
(A) 7,66. (B) 7,68. (C) 7,6. (D) 7,62.

Lời giải.



Vẽ lại parabol và chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.
Gọi phương trình parabol (P) là $y^2 = 2px$, $(p > 0)$.
Ta có chiều cao của cổng là $OH = BK = h$.
Bề rộng của cổng là $BD = 9 \Rightarrow BH = 4{,}5$. Vậy điểm B có tọa độ là $(h; 4{,}5)$.
Chiều cao của người đo là $AC = 1{,}6$ và khoảng cách từ chân người đo đến chân cổng là $BA = 0{,}5$.
Suy ra $FC = FA - AC = h - 1{,}6$ và $EC = BH - AB = 4{,}5 - 0{,}5 = 4$.
Vậy điểm C có tọa độ là $(h - 1{,}6; 4)$.
Ta có hai điểm B và C nằm trên parabol nên thay tọa độ của B và C vào phương trình (P), ta được:

$$\begin{cases} 4{,}5^2 = 2ph \\ 4^2 = 2p(h - 1{,}6) \end{cases} \Rightarrow 2p = \frac{4{,}5^2}{h} = \frac{4^2}{h - 1{,}6} = \frac{4{,}5^2 - 4^2}{1{,}6} \Rightarrow h = \frac{1{,}6 \cdot 4{,}5^2}{4{,}5^2 - 4^2} \approx 7{,}62 \text{ m}.$$

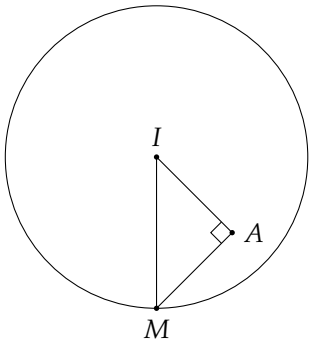
Vậy cổng công viên đó cao khoảng 7,62 m.
Chọn đáp án (D) □

Câu 22

Một bánh xe đạp hình tròn khi gắn trên hệ trục tọa độ Oxy có phương trình $(C)\colon (x-1)^2+(y-2)^2=4$. Người ta thấy một hòn sỏi M bị kẹt trên bánh xe và một điểm A nằm trên đũa xe cùng với tâm của đường tròn tạo thành một tam giác vuông cân tại A. Khi bánh xe quay tròn thì điểm A sẽ di chuyển trên một đường tròn có phương trình là

(A) $(x-1)^2+(y-2)^2=2$.
(B) $(x+1)^2+(y-2)^2=2$.
(C) $(x-1)^2+(y+2)^2=2$.
(D) $(x-1)^2+(y-2)^2=\sqrt{2}$.

Lời giải.



Đường tròn $(C)\colon (x-1)^2+(y-2)^2=4$ có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R=2$.
M nằm trên đường tròn nên $IM=2$.
Tam giác AIM vuông cân tại A nên $IA=\dfrac{IM}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.
Ta thấy điểm A cách điểm I một khoảng không đổi nên quỹ tích điểm A là đường tròn tâm I bán kính $\sqrt{2}$.
Do đó, điểm A di chuyển trên đường tròn có phương trình là $(x-1)^2+(y-2)^2=2$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 23

Ông Hoàng có một mảnh vườn hình elip có chiều dài trục lớn và trục nhỏ lần lượt là 60 m và 30 m. Ông chia thành hai nửa bằng một đường tròn tiếp xúc trong với elip để làm mục đích sử dụng khác nhau. Nửa bên trong đường tròn ông trồng cây lâu năm, nửa bên ngoài đường tròn ông trồng hoa màu. Tính tỉ số diện tích T giữa phần trồng cây lâu năm so với diện tích trồng hoa màu. Biết diện tích elip được tính theo công thức $S=\pi ab$ trong đó a, b lần lượt là độ dài nửa trục lớn và nửa trục bé của elip. Biết độ rộng của đường elip không đáng kể.

(A) $T=\dfrac{2}{3}$.
(B) $T=1$.
(C) $T=\dfrac{1}{2}$.
(D) $T=\dfrac{3}{2}$.

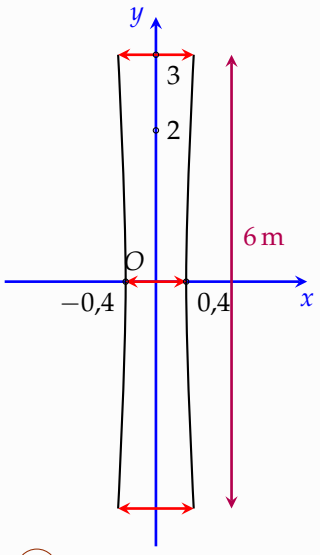
Lời giải.

Diện tích hình tròn: $S_T=\pi\cdot 15^2$, diện tích elip là $S_E=\pi\cdot 15\cdot 30$.
Tỉ số diện tích $T=\dfrac{S_T}{S_E-S_T}=\dfrac{\pi\cdot 15^2}{\pi\cdot 15\cdot 30-\pi\cdot 15^2}=\dfrac{15}{30-15}=1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 24

Một cột trụ hình hypebol, có chiều cao 6 m, chỗ nhỏ nhất ở chính giữa và rộng 0,8 m, đỉnh cột và đáy cột đều rộng 1 m. Tính độ rộng của cột ở độ cao 5 m (tính theo đơn vị mét và làm tròn tới hai chữ số sau dấu phẩy).



(A) 1,5. (B) 1,14. (C) 1,28. (D) 1,21.

Lời giải.

Gắn hệ trục tọa độ Oxy vào cột trụ hình Hypebol đã cho như hình trên.
Tiếp theo ta tìm phương trình của cột trụ hình Hypebol này.

Gọi phương trình của cột trụ là $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Vì Oy là đường trung trực của đoạn thẳng 0,8 m nên Oy chia đoạn thẳng 0,8 m thành hai đoạn bằng nhau, mỗi đoạn 0,4 m, tức Hypebol đi qua hai điểm $A_1(-0{,}4;0)$, $A_2(0{,}4;0)$.

Khi đó ta có $\dfrac{(0{,}4)^2}{a^2}-\dfrac{0^2}{b^2}=1\Leftrightarrow\dfrac{(0{,}4)^2}{a^2}=1\Leftrightarrow a=0{,}4$ (vì $a>0$).

Lúc này ta được phương trình Hypebol $\dfrac{x^2}{0{,}16}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Vì Oy là đường trung trực của đoạn thẳng 1 m nên Oy chia đoạn thẳng 1 m thành hai đoạn bằng nhau, mỗi đoạn 0,5 m, tức Hypebol đi qua hai điểm $B_1(-0{,}5;3)$, $B_2(0{,}5;3)$.

Khi đó ta có $\dfrac{0{,}5^2}{0{,}16}-\dfrac{3^2}{b^2}=1\Leftrightarrow\dfrac{3^2}{b^2}=\dfrac{9}{16}\Leftrightarrow b=4$ (vì $b>0$).

Vậy ta đã tìm được phương trình Hypebol của cột trụ: $\dfrac{x^2}{0{,}16}-\dfrac{y^2}{16}=1$.

Khi cột trụ ở độ cao 5 m thì $\dfrac{x^2}{0{,}16}-\dfrac{5^2}{16}=1\Leftrightarrow\dfrac{x^2}{0{,}16}=\dfrac{41}{16}\Leftrightarrow x^2=\dfrac{41}{100}\Leftrightarrow|x|=\dfrac{\sqrt{41}}{10}$.

Vậy độ rộng của cột ở độ cao 5 m là $2\cdot|x|=2\cdot\dfrac{\sqrt{41}}{10}=\dfrac{\sqrt{41}}{5}\approx 1{,}28$ m.

Chọn đáp án (C) □

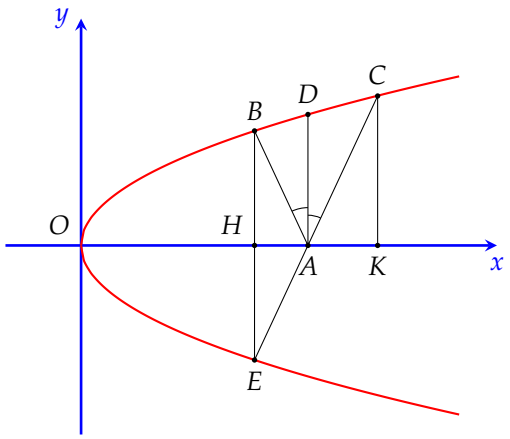
Câu 25

Trong mặt phẳng Oxy, cho parabol (P): $y^2=2px$, A là điểm trên tia Ox. Đường thẳng qua A vuông góc với Ox cắt (P) tại D. Gọi B,C là hai điểm thuộc nhánh chứa D của (P) sao cho $\widehat{DAB}=\widehat{DAC}$. Biết rằng $4AD^2=3AB\cdot AC$, số đo của góc $\widehat{BAC}$ bằng

(A) 30°. (B) 60°. (C) 120°. (D) 45°.

Lời giải.

Gọi E là điểm đối xứng của B qua Ox, ta có E, A, C thẳng hàng.
Gọi α là góc nhọn giữa đường thẳng EC và trục Ox, gọi tọa độ điểm $A(a;0)$ với $a>0$.



Khi đó phương trình đường thẳng EC có dạng $y=k(x-a),\ k\neq 0$.
Suy ra hoành độ điểm E, C là nghiệm của phương trình

$$k^2(x-a)^2=2px \Leftrightarrow k^2x^2-(2ak^2+2p)x+k^2a^2=0.$$

Áp dụng định lý Vi-ét ta có $x_Ex_C=\dfrac{k^2a^2}{k^2}=a^2=x_A^2=x_D^2$.

Suy ra $\dfrac{y_E^2}{2p}\cdot\dfrac{y_C^2}{2p}=\left(\dfrac{y_D^2}{2p}\right)^2\Rightarrow HE\cdot KC=AD^2$ (với H,K lần lượt là hình chiếu của B,C trên Ox).

Mặt khác $4AD^2=3AB\cdot AC$, suy ra $4HE\cdot KC=3AB\cdot AC\Rightarrow\dfrac{HE}{AB}\cdot\dfrac{KC}{AC}=\dfrac{3}{4}\Rightarrow\sin^2\alpha=\dfrac{3}{4}$.

Suy ra $\alpha=60^\circ\Rightarrow\widehat{BAC}=180^\circ-2\alpha=60^\circ$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 26

Trong mặt phẳng Oxy, phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của đường Elip?

(A) $\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$. (B) $\dfrac{x^2}{4^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=-1$. (C) $\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1$. (D) $\dfrac{x^2}{4^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$.

Lời giải.

Phương trình chính tắc của đường elip có dạng $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ nên chỉ có đáp án D là phương trình chính tắc của đường elip.
Chọn đáp án (D) □

Câu 27

Trong mặt phẳng Oxy, cho elip có phương trình $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$. Điểm nào dưới đây là một tiêu điểm của elip?

(A) $F_1(16;0)$. (B) $F_1(-4;0)$. (C) $F_1(0;-4)$. (D) $F_1(5;0)$.

Lời giải.

Phương trình elip (E) có dạng $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$.
Theo bài ra ta có $a^2=25,\ b^2=9\Rightarrow c^2=a^2-b^2=16\Rightarrow c=4$.
Vậy elip có hai tiêu điểm là $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$ hay $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 28

Trong mặt phẳng Oxy, cho elip có phương trình $\dfrac{x^2}{49}+\dfrac{y^2}{16}=1$. Độ dài trục nhỏ của đường elip bằng

(A) 7. (B) 4. (C) 5. (D) 8.

Lời giải.

Ta có $\dfrac{x^2}{49}+\dfrac{y^2}{16}=1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{7^2}+\dfrac{y^2}{4^2}=1 \Rightarrow a=7, b=4$.
Vậy độ dài trục nhỏ của đường elip là: $2b=2\cdot 4=8$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 29

Trong mặt phẳng Oxy, cho elip có phương trình $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{21}=1$. Tiêu cự của elip bằng

(A) 2. (B) 10. (C) $2\sqrt{21}$. (D) 4.

Lời giải.

Phương trình elip (E) có dạng $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$.
Theo bài ra ta có: $\begin{cases}a^2=25\\ b^2=21.\end{cases}$
Mà $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-21}=\sqrt{4}=2$.
Vậy tiêu cự của elip đã cho là $2c=4$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 30

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, elip $(E):\ \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ có tâm sai bằng bao nhiêu?

(A) $\dfrac{4}{5}$. (B) $\dfrac{5}{4}$. (C) $\dfrac{5}{3}$. (D) $\dfrac{3}{5}$.

Lời giải.

Phương trình chính tắc của elip có dạng (E): $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$.

$$\begin{cases}a^2=25\\ b^2=9\\ c^2=a^2-b^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=5\\ b=3\\ c=4.\end{cases}$$

Vậy tâm sai của elip $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{4}{5}$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 31

Trong hệ trục toạ độ Oxy, elip $(E):\ \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$ có tiêu cự bằng

(A) 3. (B) 6. (C) $\frac{9}{16}$. (D) $\frac{6}{7}$.

Lời giải.

Phương trình chính tắc của elip có dạng $(E)\colon \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$.

$$\begin{cases} a^2=16 \\ b^2=7 \\ c^2=a^2-b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=\sqrt{7} \\ c=3. \end{cases}$$

Vậy tiêu cự của elip $F_1F_2=2c=2\cdot 3=6$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 32

Trong hệ trục toạ độ Oxy, cho elip (E) có phương trình $9x^2+25y^2=225$. Lúc đó hình chữ nhật cơ sở của elip (E) có diện tích bằng
(A) 15. (B) 40. (C) 60. (D) 30.

Lời giải.

Ta có $9x^2+25y^2=225 \Leftrightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.
Từ đây, ta được $a=5, b=3$. Diện tích hình chữ nhật cơ sở là $S=2a\cdot 2b=60$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 33

Trong hệ trục toạ độ Oxy, cho elip $(E)\colon x^2+4y^2=1$ và cho các mệnh đề:

- (I) (E) có trục lớn bằng 4.
- (II) (E) có trục nhỏ bằng 1.
- (III) (E) có tiêu điểm $F_1\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
- (IV) (E) có tiêu cự bằng $\sqrt{3}$.

Trong các mệnh đề trên, tìm mệnh đề đúng?
(A) (I). (B) (II) và (IV). (C) (I) và (III). (D) (IV).

Lời giải.

$$(E)\colon x^2+4y^2=1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1 \Rightarrow \begin{cases} a^2=1 \\ b^2=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

$\Rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy, (E) có trục lớn bằng $2a=2$, có trục nhỏ bằng $2b=1$, có tiêu điểm $F_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, có tiêu cự bằng $2c=\sqrt{3}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 34

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xác định phương trình chính tắc của elip biết $A_1A_2 = 10$, $B_1B_2 = 6$ với A_1, A_2 là giao điểm của elip với trục Ox và B_1, B_2 là giao điểm của elip với trục Oy.

(A) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$. (B) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$. (C) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 0$. (D) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

Lời giải.

Gọi phương trình chính tắc của elip cần tìm là $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$.

$A_1A_2 = 10 \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5$.

$B_1B_2 = 6 \Rightarrow 2b = 6 \Rightarrow b = 3$.

Phương trình chính tắc của elip cần tìm là $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 35

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xác định phương trình chính tắc của elip biết giao điểm của elip với các trục tọa độ là $A_1(3;0)$, $A_2(-3;0)$, $B_1(0;2)$, $B_2(0;-2)$.

(A) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. (B) $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. (C) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 0$. (D) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$.

Lời giải.

Gọi phương trình chính tắc của elip cần tìm là $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$.

Elip giao trục Ox tại $A_1(3;0)$, $A_2(-3;0) \Rightarrow a = 3$.

Elip giao trục Oy tại $B_1(0;2)$, $B_2(0;-2) \Rightarrow b = 2$.

Phương trình chính tắc của elip cần tìm là $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 36

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xác định phương trình chính tắc của elip biết một giao điểm của elip với trục Ox là $A_1(6;0)$, elip đi qua $M\left(0;\sqrt{32}\right)$.

(A) $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. (B) $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{32} = 1$. (C) $\dfrac{x^2}{144} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. (D) $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{32} = 0$.

Lời giải.

Gọi phương trình chính tắc của elip cần tìm là $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$.

Một giao điểm của elip với trục Ox là $A_1(6;0) \Rightarrow a = 6$.

Elip đi qua $M\left(0;\sqrt{32}\right) \Leftrightarrow \dfrac{0}{a^2} + \dfrac{32}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 = 32$.

Phương trình chính tắc của elip cần tìm là $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{32} = 1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 37

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xác định phương trình chính tắc của elip biết elip đi qua $M(0;3)$, tổng khoảng cách từ một điểm trên elip tới hai tiêu điểm là $2\sqrt{34}$

(A) $\dfrac{x^2}{34}+\dfrac{y^2}{25}=1$. (B) $\dfrac{x^2}{34}+\dfrac{y^2}{9}=1$. (C) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{34}=1$. (D) $\dfrac{x^2}{34}+\dfrac{y^2}{9}=0$.

Lời giải.

Gọi phương trình chính tắc của elip cần tìm là $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$.

Elip đi qua $M(0;3) \Leftrightarrow \dfrac{0}{a^2}+\dfrac{9}{b^2}=1 \Leftrightarrow b^2=9$

Tổng khoảng cách từ một điểm trên elip tới hai tiêu điểm là $2\sqrt{34}$.

$$\Rightarrow 2a=2\sqrt{34} \Rightarrow a=\sqrt{34}.$$

Phương trình chính tắc của elip cần tìm là $\dfrac{x^2}{34}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 38

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho Elip có một tiêu điểm $F_1(-1;0)$ và khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm trên Elip bằng $2\sqrt{5}$. Phương trình chính tắc của Elip

(A) $4x^2+5y^2=20$. (B) $4x^2+5y^2=12$. (C) $5x^2+4y^2=20$. (D) $5x^2+4y^2=12$.

Lời giải.

Gọi phương trình chính tắc của elip cần tìm là $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$.

Ta có $2a=2\sqrt{5} \Leftrightarrow a=\sqrt{5}$; $b^2=a^2-c^2=\sqrt{5^2}-1^2=4$.

Vậy phương trình Elip có dạng $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1 \Leftrightarrow 4x^2+5y^2=20$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 39

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho Elip (E) đi qua điểm $M(0;3)$. Biết khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm trên (E) bằng 8. Phương trình chính tắc của Elip

(A) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$. (B) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$. (C) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{64}=1$. (D) $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

Lời giải.

Gọi phương trình chính tắc của elip cần tìm là $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$.

$M(0;3) \in (E) \Rightarrow b=3$.

Khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm trên (E) bằng $8 \Rightarrow a=4$.

Phương trình chính tắc của (E): $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 40

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, Elip có hai tiêu điểm $F_1(-1;0)$; $F_2(1;0)$ và tổng khoảng cách từ mỗi điểm trên elip đến hai tiêu điểm bằng10 có phương trình

(A) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{24}=1$. (B) $\dfrac{x^2}{24}+\dfrac{y^2}{25}=-1$. (C) $\dfrac{x^2}{24}+\dfrac{y^2}{25}=1$. (D) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{24}=-1$.

Lời giải.

Phương trình chính tắc của (E) là $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$

Tiêu điểm $F_1(-1;0) \Rightarrow c=1$.

Tổng khoảng cách từ mỗi điểm trên elip đến hai tiêu điểm bằng $10 \Rightarrow a=5$.

Mà $b^2=a^2-c^2=5^2-1^2=24$.

Vậy $(E)\colon \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{24}=1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 41

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phương trình chính tắc của (E) có tiêu cự bằng 6 và đi qua điểm $A(5;0)$ là

(A) $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{81}=1$. (B) $\dfrac{x^2}{15}+\dfrac{y^2}{16}=1$. (C) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$. (D) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

Lời giải.

Phương trình chính tắc của (E) là $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$

Do (E) có tiêu cự bằng 6 nên $2c=6 \Rightarrow c=3$.

Do (E) đi qua điểm $A(5;0)$ nên $a=5 \Rightarrow b^2=a^2-c^2=25-9=16$.

Phương trình chính tắc của (E) là $(E)\colon \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

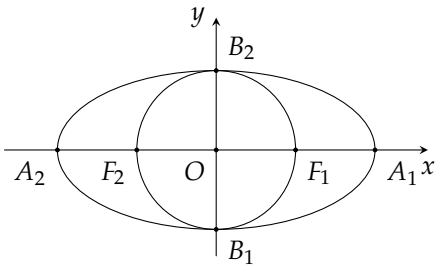
Chọn đáp án (D) □

Câu 42

Trong mặt phẳng Oxy, cho elip (E) có hai tiêu điểm là F_1, F_2. Gọi hai giao điểm của (E) với Ox là A_1, A_2 và hai giao điểm của (E) với Oy là B_1, B_2. Biết $A_1A_2=4\sqrt{2}$ và tứ giác $F_1B_1F_2B_2$ nội tiếp đường tròn, khi đó phương trình chính tắc của elip (E) là $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Tính $P=a^2-b^2$.

(A) $P=12$. (B) $P=8$. (C) $P=4$. (D) $P=2$.

Lời giải.



Phương trình chính tắc của elip (E) có dạng $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ với $a>b>0$.

Tọa độ giao điểm của (E) với Ox là $A_1(-a;0)$ và $A_2(a;0)$.
Khi đó $A_1A_2 = 2a = 4\sqrt{2}$.
Suy ra $a^2 = 8$.
Do tính đối xứng của elip nên $F_1B_1F_2B_2$ là hình thoi.
Mà $F_1B_1F_2B_2$ nội tiếp đường tròn nên $F_1B_1F_2B_2$ là hình vuông.
Suy ra $F_1F_2 = B_1B_2$ hay $b = c$.
Mặt khác ta có $b^2 = a^2 - c^2$.
Suy ra $b^2 = c^2 = \dfrac{a^2}{2} = 4$.
Vậy (E): $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ và $P = a^2 - b^2 = c^2 = 4$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 43

Trong mặt phẳng Oxy, cho elip (E) có hai tiêu điểm là F_1, F_2 . Biết (E) đi qua điểm $M\left(\dfrac{3\sqrt{5}}{5}; -\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)$ và tam giác MF_1F_2 vuông tại M, khi đó phương trình chính tắc của elip (E) là $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Tính $S = a^2 + b^2$.

(A) $S = 13$. (B) $S = 11$. (C) $S = 10$. (D) $S = \dfrac{49}{3}$.

Lời giải.

Phương trình chính tắc của elip (E) có dạng $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > b > 0$.
Ta có tọa độ hai tiêu điểm $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.
Khi đó $\overrightarrow{MF_1} = \left(-c - \dfrac{3\sqrt{5}}{5}; \dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)$ và $\overrightarrow{MF_2} = \left(c - \dfrac{3\sqrt{5}}{5}; \dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)$.
Vì tam giác MF_1F_2 vuông tại M nên $\overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} = 0$.
Suy ra $\left(-c - \dfrac{3\sqrt{5}}{5}\right) \cdot \left(c + \dfrac{3\sqrt{5}}{5}\right) + \left(\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 0 \Rightarrow c^2 = 5 \Rightarrow a^2 = b^2 + 5$. (1)
Mặt khác $M\left(\dfrac{3\sqrt{5}}{5}; -\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right) \in (E)$ suy ra $\dfrac{9}{5a^2} + \dfrac{16}{5b^2} = 1$. (2)
Thế (1) vào (2) ta có $\dfrac{9}{5\left(b^2+5\right)} + \dfrac{16}{5b^2} = 1$, suy ra $b^2 = 4$.
Do đó $a^2 = 9$.
Vậy (E): $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ và $S = a^2 + b^2 = 13$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 44

Trong mặt phẳng Oxy, cho elip (E) có hai tiêu điểm là F_1, F_2. Biết (E) đi qua điểm $M\left(-2\sqrt{13}; -3\right)$ và có bán kính đường tròn nội tiếp tam giác MF_1F_2 là 1, khi đó phương trình chính tắc của elip (E) là $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Tính $T = a^2 + 2b^2$.

(A) $T = 264$. (B) $T = 160$. (C) $T = 36$. (D) $T = 164$.

Lời giải.

Phương trình chính tắc của elip (E) có dạng $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ với $a>b>0$.

Ta có $S_{MF_1F_2}=\dfrac{MF_1+MF_2+F_1F_2}{2}\cdot r=\dfrac{1}{2}F_1F_2\cdot d(M,Ox)$.

Suy ra $\dfrac{2a+2c}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot 2c\cdot|y_M|\Rightarrow a=2c\Rightarrow a^2=4\left(a^2-b^2\right)\Rightarrow b^2=\dfrac{3a^2}{4}$. (1)

Mặt khác $M\left(-2\sqrt{13};-3\right)\in(E)$ suy ra $\dfrac{52}{a^2}+\dfrac{9}{b^2}=1$. (2)

Thế (1) vào (2) ta có $\dfrac{52}{a^2}+\dfrac{12}{a^2}=1\Rightarrow a^2=64$.

Do đó $b^2=48$.

Vậy (E): $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{48}=1$ và $T=a^2+2b^2=160$.

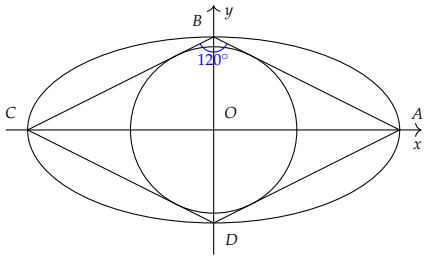
Chọn đáp án (B) □

Câu 45

Trong mặt phẳng Oxy, cho hình thoi $ABCD$ có góc $\widehat{ABC}=120^\circ$ và đường tròn nội tiếp hình thoi có phương trình $x^2+y^2=8$. Biết elip (E) đi qua các đỉnh của hình thoi và $A\in Ox$, khi đó phương trình chính tắc của elip (E) là $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Tính $T=(ab)^2$.

(A) $T=2048$. (B) $T=\dfrac{4096}{3}$. (C) $T=\dfrac{256}{3}$. (D) $T=\dfrac{1024}{3}$.

Lời giải.



Phương trình chính tắc của elip (E) có dạng $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ với $a>b>0$.

Từ giả thiết ta có $OA=a$ và $OB=b$.

Mà tam giác OAB vuông tại O có góc ABO bằng 60° nên

$$OA=OB\cdot\tan 60^\circ\Rightarrow a=\sqrt{3}b\Rightarrow a^2=3b^2 \quad (1)$$

Mặt khác vì đường tròn nội tiếp hình thoi có phương trình $x^2+y^2=8$ nên

$$\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{1}{[d(O,AB)]^2}\Rightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{8}. \quad (2)$$

Thế (1) vào (2) ta có $\dfrac{1}{3b^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{8}\Rightarrow b^2=\dfrac{32}{3}$.

Do đó $a^2=32$.

Vậy (E): $\dfrac{x^2}{32}+\dfrac{y^2}{\frac{32}{3}}=1$ và $T=(ab)^2=a^2b^2=\dfrac{1024}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 46

Cho hypebol (H) có phương trình chính tắc $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$. Tìm tiêu cự F_1F_2 của hypebol (H).

(A) $F_1F_2=3$. (B) $F_1F_2=4$. (C) $F_1F_2=8$. (D) $F_1F_2=6$.

Lời giải.

Từ phương trình chính tắc của (H) ta có $a^2=4$, $b^2=5$ nên $c=\sqrt{a^2+b^2}=3$.
Vậy (H) có tiêu cự là $F_1F_2=2c=2\cdot 3=6$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 47

Cho hypebol (H) có phương trình chính tắc $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{7}=1$. Tìm các tiêu điểm F_1; F_2 của hypebol (H).

(A) $F_1(-3;0)$, $F_2(3;0)$. (B) $F_1(-2;0)$, $F_2(2;0)$.
(C) $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$. (D) $F_1(-16;0)$, $F_2(16;0)$.

Lời giải.

Từ phương trình chính tắc của (H) ta có $a^2=9$, $b^2=7$ nên $c=\sqrt{a^2+b^2}=4$.
Vậy (H) có hai tiêu điểm là $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 48

Cho hypebol (H) có phương trình chính tắc $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}=1$. Hiệu các khoảng cách từ một điểm nằm trên (H) tới hai tiêu điểm có giá trị tuyệt đối bằng bao nhiêu?

(A) 5. (B) 10. (C) 4. (D) 8.

Lời giải.

Từ phương trình chính tắc của (H) ta có $a^2=25\Rightarrow a=5$.
Vậy hiệu các khoảng cách từ một điểm nằm trên (H) tới hai tiêu điểm có giá trị tuyệt đối bằng $2a=2\cdot 5=10$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 49

Cho hypebol(H) có phương trình chính tắc $\dfrac{x^2}{1}-\dfrac{y^2}{1}=1$. Tìm tiêu cự của hypebol (H).

(A) 2. (B) $2\sqrt{2}$. (C) 4. (D) 6.

Lời giải.

Từ phương trình chính tắc của (H) ta có $a^2=1$, $b^2=1$ nên $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}$.
Vậy (H) có tiêu cự là $F_1F_2=2c=2\sqrt{2}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 50

Hypebol $7x^2 - 9y^2 = 63$ có tiêu cự bằng

(A) 8. (B) 16. (C) 4. (D) 63.

Lời giải.

Ta có: $7x^2 - 9y^2 = 63 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{7} = 1$.

Suy ra $\begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 7 \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = \sqrt{7} \\ c = 4. \end{cases}$

Vậy hypebol có tiêu cự là: $F_1F_2 = 2c = 8$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 51

Đường hypebol $4x^2 - y^2 = 16$ có một tiêu điểm là điểm nào dưới đây?

(A) $(2;0)$. (B) $(-2;0)$. (C) $\left(2\sqrt{3};0\right)$. (D) $\left(2\sqrt{5};0\right)$.

Lời giải.

Ta có $4x^2 - y^2 = 16 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{16} = 1$.

Suy ra $\begin{cases} a^2 = 4 \\ b^2 = 16 \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \\ c = 2\sqrt{5}. \end{cases}$

Các tiêu điểm của hypebol là $\left(-2\sqrt{5};0\right)$ và $\left(2\sqrt{5};0\right)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 52

Hiệu các khoảng cách từ một điểm bất kỳ nằm trên hyperbol $4x^2 - 9y^2 = 36$ tới hai tiêu điểm có giá trị tuyệt đối bằng

(A) 4. (B) 6. (C) 12. (D) $\sqrt{5}$.

Lời giải.

Ta có $4x^2 - 9y^2 = 36 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$.

Suy ra $\begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow a = 3$.

Hiệu các khoảng cách từ một điểm bất kỳ nằm trên hypebol tới hai tiêu điểm có giá trị tuyệt đối bằng $2a = 2 \cdot 3 = 6$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 53

Cho điểm M nằm trên hypebol $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$. Nếu hoành độ điểm M bằng 8 thì khoảng cách từ M đến các tiêu điểm của hypebol là

(A) $8 \pm 4\sqrt{2}$. (B) $8 \pm \sqrt{5}$. (C) 6 và 14. (D) 5 và 13.

Lời giải.

Với $x=8$ ta có $\dfrac{8^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1\Rightarrow y=\pm 3\sqrt{3}$.
Có hai điểm M thỏa mãn là $M_1\left(8;3\sqrt{3}\right)$ và $M_2\left(8;-3\sqrt{3}\right)$.
Tiêu điểm của (H) là $F_1(-5;0)$ và $F_2(5;0)$.
$M_1F_1=M_2F_1=14$, $M_1F_2=M_2F_2=6$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 54

Phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của đường hypebol?
(A) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$. (B) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=-1$. (C) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{1}=-1$. (D) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{1}=1$.

Lời giải.

Phương trình chính tắc của đường hypebol là $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{1}=1$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 55

Viết phương trình chính tắc của đường hypebol biết tiêu cự bằng 6 và độ dài trục thực $A_1A_2=2a=4$.
(A) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$. (B) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=-1$. (C) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. (D) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$.

Lời giải.

Ta có tiêu cự $2c=6\Rightarrow c=3$ và $a=2$.
$c=\sqrt{a^2+b^2}\Rightarrow 3=\sqrt{2^2+b^2}\Rightarrow b=\sqrt{5}$.
Phương trình chính tắc của đường hypebol là $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 56

Viết phương trình chính tắc của đường hypebol (H), biết tiêu điểm $F_1\left(-\sqrt{5};0\right)$ và độ dài trục ảo $B_1B_2=2b=4$.
(A) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$. (B) $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{2}=1$. (C) $\dfrac{x^2}{1}+\dfrac{y^2}{4}=1$. (D) $\dfrac{x^2}{1}-\dfrac{y^2}{4}=1$.

Lời giải.

Ta có tiêu điểm $F_1\left(-\sqrt{5};0\right)$ suy ra $c=\sqrt{5}$.
Độ dài trục ảo $B_1B_2=2b=4$ suy ra $b=2$.
$c=\sqrt{a^2+b^2}\Rightarrow\sqrt{5}=\sqrt{a^2+4}\Rightarrow a=1$.
Phương trình chính tắc của đường hypebol là $\dfrac{x^2}{1}-\dfrac{y^2}{4}=1$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 57

Viết phương trình chính tắc của đường hypebol (H), biết toạ độ đỉnh $A_1(-5;0)$ và tâm sai $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{2}$

Ⓐ $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{\sqrt{2}}=1$. Ⓑ $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$. Ⓒ $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{4}=1$. Ⓓ $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{25}=1$.

Lời giải.

Ta có đỉnh $A_1(-5;0)$ suy ra $a=5$.
Từ giả thiết tâm sai $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{2}\Rightarrow c=5\sqrt{2}$.
$c=\sqrt{a^2+b^2}\Rightarrow 5\sqrt{2}=\sqrt{5^2+b^2}\Rightarrow b=5$.
Phương trình chính tắc của đường hypebol là $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{25}=1$.
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 58

Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình chính tắc của hypebol (H) biết (H) có một tiêu điểm là $F_2(3;0)$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -2.

Ⓐ $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{5}=1$. Ⓑ $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{1}=1$. Ⓒ $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$. Ⓓ $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$.

Lời giải.

Giả sử hypebol (H) có phương trình là $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$.
(H) cắt trục hoành tại điểm A có hoành độ bằng -2.

$$\Rightarrow A(-2;0)\in(H)\Leftrightarrow \frac{4}{a^2}-0=1\Leftrightarrow a^2=4.$$

$F_2(3;0)$ là một tiêu điểm của (H)

$$\Rightarrow c=3\Leftrightarrow c^2=9\Leftrightarrow a^2+b^2=9\Rightarrow b^2=5.$$

Vậy phương trình hypebol (H) là $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$.
Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 59

Trong mặt phẳng Oxy viết phương trình chính tắc của hypebol (H) biết (H) có tiêu cự bằng 8 và giá trị tuyệt đối của hiệu khoảng cách từ mỗi điểm thuộc (H) đến hai tiêu điểm của (H) bằng 6.

Ⓐ $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=1$. Ⓑ $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{7}=1$. Ⓒ $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{25}=1$. Ⓓ $\dfrac{x^2}{7}-\dfrac{y^2}{9}=1$.

Lời giải.

Giả sử hypebol (H) có phương trình là $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$.
Giá trị tuyệt đối của hiệu khoảng cách từ mỗi điểm thuộc (H) đến hai tiêu điểm bằng $6\Rightarrow a=3$.
(H) có tiêu cự bằng $8\Rightarrow 2c=8\Leftrightarrow c=4\Leftrightarrow a^2+b^2=16\Rightarrow b^2=16-9=7$.
Vậy phương trình hypebol (H) là $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{7}=1$.
Chọn đáp án Ⓑ □

Câu 60

Trong mặt phẳng Oxy viết phương trình chính tắc của hypebol (H) biết (H) đi qua hai điểm $A\left(4\sqrt{2};2\right)$ và $B\left(-6;-\sqrt{5}\right)$.

(A) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1$. (B) $\dfrac{x^2}{31}-\dfrac{y^2}{31}=1$. (C) $\dfrac{x^2}{24}-\dfrac{y^2}{12}=1$. (D) $\dfrac{x^2}{32}-\dfrac{y^2}{8}=1$.

Lời giải.

Giả sử hypebol (H) có phương trình là $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$.

$A\left(4\sqrt{2};2\right)\in(H)\Leftrightarrow\dfrac{32}{a^2}-\dfrac{4}{b^2}=1\quad(1)$.

$B\left(-6;-\sqrt{5}\right)\in(H)\Leftrightarrow\dfrac{36}{a^2}-\dfrac{5}{b^2}=1\quad(2)$.

Từ (1) và (2) $\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{1}{16}\\ \dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=16\\ b^2=4.\end{cases}$

Vậy phương trình hypebol (H) là $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 61

Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình chính tắc của hypebol (H) có một tiêu điểm là $F_1\left(-\sqrt{10};0\right)$ và đi qua điểm $A\left(4;-\sqrt{2}\right)$.

(A) $\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{6}=1$. (B) $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{4}=1$. (C) $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{2}=1$. (D) $\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{2}=1$.

Lời giải.

Gọi phương trình hypebol (H) là $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$.

$F_1\left(-\sqrt{10};0\right)\Rightarrow c=-\sqrt{10}\Leftrightarrow c^2=10\Leftrightarrow a^2+b^2=10\Leftrightarrow b^2=10-a^2\quad(1)$.

$A\left(4;-\sqrt{2}\right)\in(H)\Leftrightarrow\dfrac{16}{a^2}-\dfrac{2}{b^2}=1\quad(2)$.

Thay (1) vào (2) ta được:

$\dfrac{16}{a^2}-\dfrac{2}{10-a^2}=1\Leftrightarrow a^4-28a^2+160=0\Leftrightarrow\begin{cases}a^2=20\Rightarrow b^2=-20\\ a^2=8\Rightarrow b^2=2.\end{cases}$

Vậy phương trình hypebol (H) là $\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{y^2}{2}=1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 62

Cho hypebol (H) có hai tiêu điểm $F_1;F_2$ nằm trên Ox và đối xứng qua gốc tọa độ O, (H) đi qua điểm $M\left(\dfrac{4\sqrt{34}}{5},\dfrac{9}{5}\right)$ và $\widehat{F_1MF_2}=90^\circ$. Phương trình (H) có dạng $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Tính $a\cdot b$

(A) $a\cdot b=12$. (B) $a\cdot b=15$. (C) $a\cdot b=20$. (D) $a\cdot b=10$.

Lời giải.

Đặt $c=\sqrt{a^2+b^2}=OF_1=OF_2$.

Ta có $OM=\sqrt{\left(\frac{4\sqrt{34}}{5}\right)^2+\left(\frac{9}{5}\right)^2}=5.$

Mà $\widehat{F_1MF_2}=90^\circ \Rightarrow F_1F_2=2OM=10 \Rightarrow F_1(-5;0);F_2(5;0).$

Khi đó $MF_1=\sqrt{50+8\sqrt{34}}=4+\sqrt{34}$

$MF_2=\sqrt{50-8\sqrt{34}}=-4+\sqrt{34}$

$\Rightarrow |MF_1-MF_2|=8=2a \Rightarrow a=4.$

Vậy $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{25-16}=3 \Rightarrow a\cdot b=12.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 63

Cho hypebol (H) có hai tiêu điểm $F_1;F_2$ nằm trên Ox và đối xứng qua gốc tọa độ O, (H) đi qua điểm M có hoành độ -5 và $MF_1=\frac{9}{4};MF_2=\frac{41}{4}$. Phương trình đường hypebol (H) có dạng:

(A) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1.$ (B) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$ (C) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1.$ (D) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1.$

Lời giải.

Gọi phương trình đường hypebol (H) có dạng $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, trong đó $F_1F_2=2c$ mà $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

Ta có $|MF_1-MF_2|=8=2a \Rightarrow a=4.$

Gọi $M(-5;y);F_1(-c;0);F_2(c;0)$

$\Rightarrow F_1M^2=(c-5)^2+y^2;F_2M^2=(c+5)^2+y^2.$

$\Rightarrow F_1M^2-F_2M^2=-20c=-100 \Rightarrow c=5 \Rightarrow b^2=9.$

Vậy $(H):\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$

Chọn đáp án (B) □

Câu 64

Cho hypebol $(H):\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ có hai tiêu điểm $F_1;F_2$ nằm trên Ox trong đó F_1 có hoành độ âm, cho điểm M nằm trên hypebol sao cho $\widehat{F_1MF_2}=60^\circ$. Khi đó MF_2 có độ dài lớn nhất là m. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $m\in(9;10).$ (B) $m\in(10;11).$ (C) $m\in(11;12).$ (D) $m\in(12;13).$

Lời giải.

Ta có $(H):\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1 \Rightarrow a=4;b=3$

$\Rightarrow c=5 \Rightarrow F_1(-5;0);F_2(5;0);F_1F_2=10.$ Để độ dài MF_2 max

$$\Rightarrow \begin{cases} MF_2>MF_1 \\ MF_2-MF_1=2a=8 \end{cases} \Rightarrow MF_1=MF_2-8=m-8.$$

Ta có $\widehat{F_1MF_2}=60^\circ \Rightarrow F_1F_2^2=MF_1^2+MF_2^2-2MF_1\cdot MF_2\cdot\cos\widehat{F_1MF_2}.$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 100=m^2+(m-8)^2-2\cdot m(m-8)\cdot\cos 60^\circ \\ &\Rightarrow m^2-8m-36=0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m=4-2\sqrt{13} \\ m=4+2\sqrt{13} \end{cases}. \end{aligned}$$

Vậy $m = 4 + 2\sqrt{13}$ (do $m > 0$).

Chọn đáp án (C) □

Câu 65

Cho hypebol $(H)\colon 9x^2 - 16y^2 = 144$ có hai tiêu điểm $F_1; F_2$ nằm trên Ox trong đó F_1 có hoành độ âm. Đường thẳng $\Delta\colon y = m^2x - 3m - 1$ cắt hypebol tại hai điểm thuộc 2 nhánh hypebol, M là giao điểm thuộc nhánh có hoành độ dương sao cho MF_2 ngắn nhất. Tìm m.

(A) $m = -\dfrac{1}{4}$. (B) $m = 1$. (C) $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\dfrac{1}{4}. \end{array}\right.$ (D) $m = -1$.

Lời giải.

Ta có $(H)\colon 9x^2 - 16y^2 = 144 \Leftrightarrow (H)\colon \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

$\Rightarrow a = 4; b = 3; c = 5 \Rightarrow \begin{cases} F_1(-5;0); F_2(5;0) \\ A_1(-4;0); A_2(4;0). \end{cases}$

Khi đó với mọi điểm M thuộc nhánh có hoành độ dương sao cho MF_2 ngắn thì $M \equiv A_2(4;0)$

Vậy $A_2 \in \Delta\colon 4m^2 - 3m - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -\dfrac{1}{4}. \end{array}\right.$

Thử lại

+ Với $m = 1 \Rightarrow (\Delta)\, y = x - 4$, ta có phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng và hypebol là

$$9x^2 - 16(x-4)^2 - 144 = 0 \Leftrightarrow 7x^2 - 128x + 400 = 0$$

có 2 nghiệm cùng dương nên loại.

+ Với $m = -\dfrac{1}{4} \Rightarrow (\Delta)\, y = \dfrac{1}{16}x - \dfrac{1}{4}$, ta có phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng và hypebol là

$$9x^2 - 16\left(\frac{1}{16}x - \frac{1}{4}\right)^2 - 144 = 0 \Leftrightarrow \frac{143}{16}x^2 + \frac{1}{2}x - 145 = 0$$

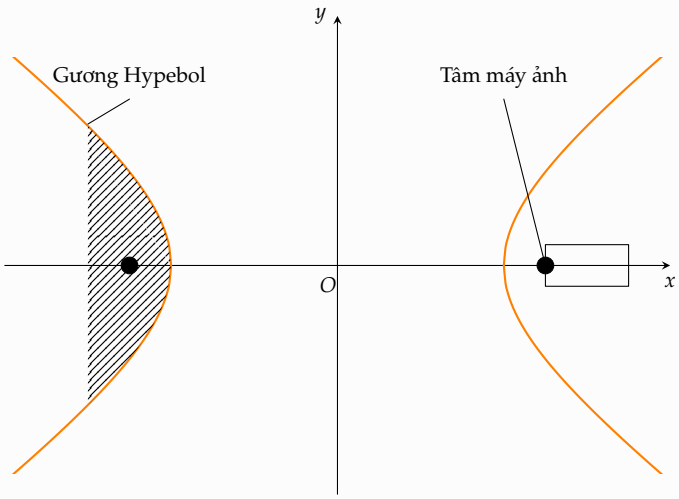
có 2 nghiệm trái dấu.

Vậy chọn $m = -\dfrac{1}{4}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 66

Để chụp toàn cảnh, ta có thể sử dụng một gương hypebol. Máy ảnh được hướng về phía đỉnh của gương và tâm quang học của máy ảnh được đặt tại một tiêu điểm của gương (xem hình).



Phương trình cho mặt cắt của gương là $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}=1$.
Tìm khoảng cách từ quang tâm của máy ảnh đến đỉnh của gương.

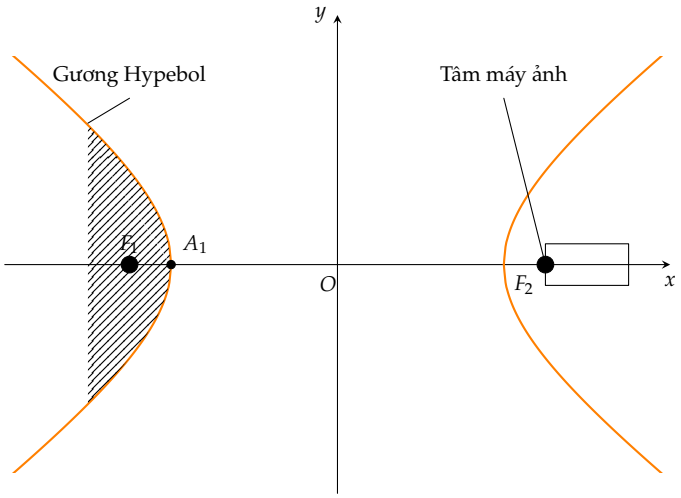
(A) $2\sqrt{39}$. (B) 5. (C) $\sqrt{39}-5$. (D) $\sqrt{39}+5$.

Lời giải.

Gọi $(H)\colon \dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}=1$.

Phương trình của gương (H) có dạng $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, với $a=5, b=4$.

Suy ra $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{39}$.

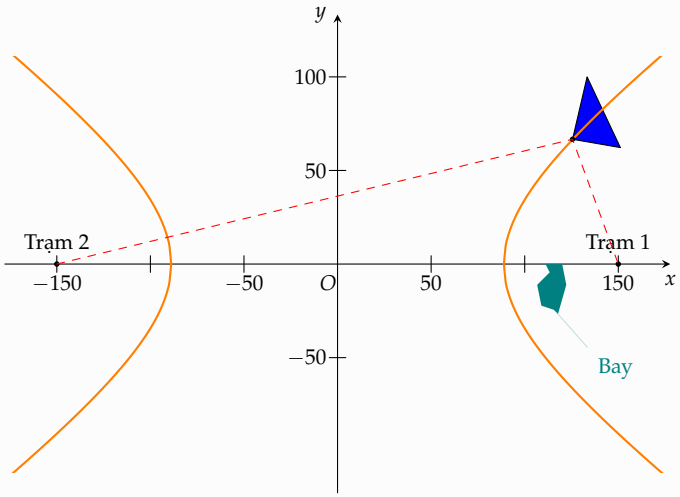


Ta tìm được tiêu điểm của gương là $F_1\left(-\sqrt{39};0\right)$, $F_2\left(\sqrt{39};0\right)$.
Đỉnh của gương là $A_1(-5;0)$.
Vậy khoảng cách từ tâm của máy ảnh tới đỉnh của gương là $F_2A_1=\sqrt{39}+5$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 67

Điều hướng LORRAN (điều hướng vô tuyến đường dài) cho máy bay và tàu thủy sử dụng các xung đồng bộ được truyền bởi hai trạm phát đặt cách xa nhau. Các xung này di chuyển với tốc độ ánh sáng (186.000 dặm/giây). Sự chênh lệch về thời gian nhận được phản xạ của các xung này từ một máy bay hoặc tàu thủy là không đổi, nên máy bay hoặc con tàu sẽ nằm trên một hyperbol có các trạm phát là các tiêu điểm. Giả sử rằng hai trạm phát, cách nhau 300 dặm,

được đặt trên một hệ tọa độ vuông góc tại các điểm có tọa độ $(-150;0)$ và $(150;0)$ và một con tàu đang đi trên một con đường là một nhánh của hypebol và có tọa độ $(x;75)$ (xem hình vẽ).



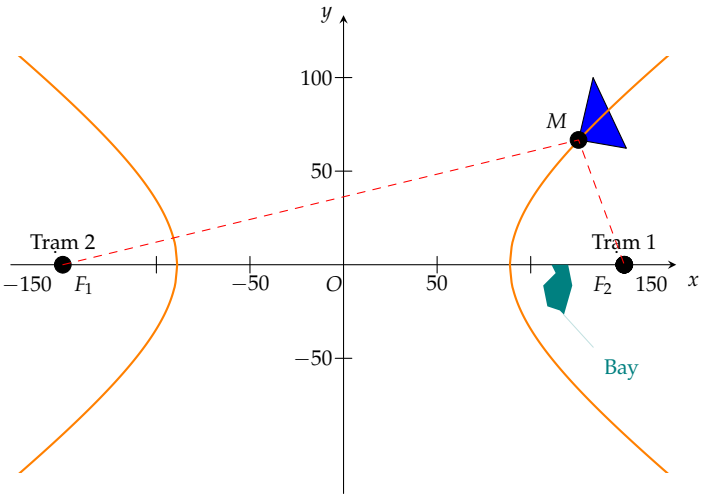
Tính gần đúng hoành độ của vị trí con tàu khi chênh lệch thời gian giữa các xung từ các trạm phát là 1000 micro giây (0,001 giây).

(A) $110,2789$. (B) $-110,2789$. (C) $52,3891$. (D) $73,4231$.

Lời giải.

Gọi đường đi của con tàu là (H) thì (H) có phương trình dạng $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Với giả thiết ta có các tiêu điểm của (H) là $F_1(-150;0)$, $F_2(150;0)$, suy ra $c=150$.



Giả sử vị trí con tàu hiện tại là $M(x;75)\in(H)$; theo giả thiết độ chênh lệch thời gian giữa các xung từ các trạm phát là 1000 micro giây (0,001 giây), tức là ta có $|MF_1-MF_2|=0,001\cdot 186\cdot 000=186$ (dặm); hay $2a=186\Rightarrow a=93$.

$$\Rightarrow b=\sqrt{c^2-a^2}=27\sqrt{19}$$

Phương trình (H): $\dfrac{x^2}{8649}-\dfrac{y^2}{13851}=1$.

Ta có $M(x;75)\in(H)\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{8649}-\dfrac{75^2}{13851}=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\approx 110,2789\\ x\approx -110,2789.\end{array}\right.$

Vậy hoành độ của con tàu gần bằng $110,2789$.

Chọn đáp án (A) □

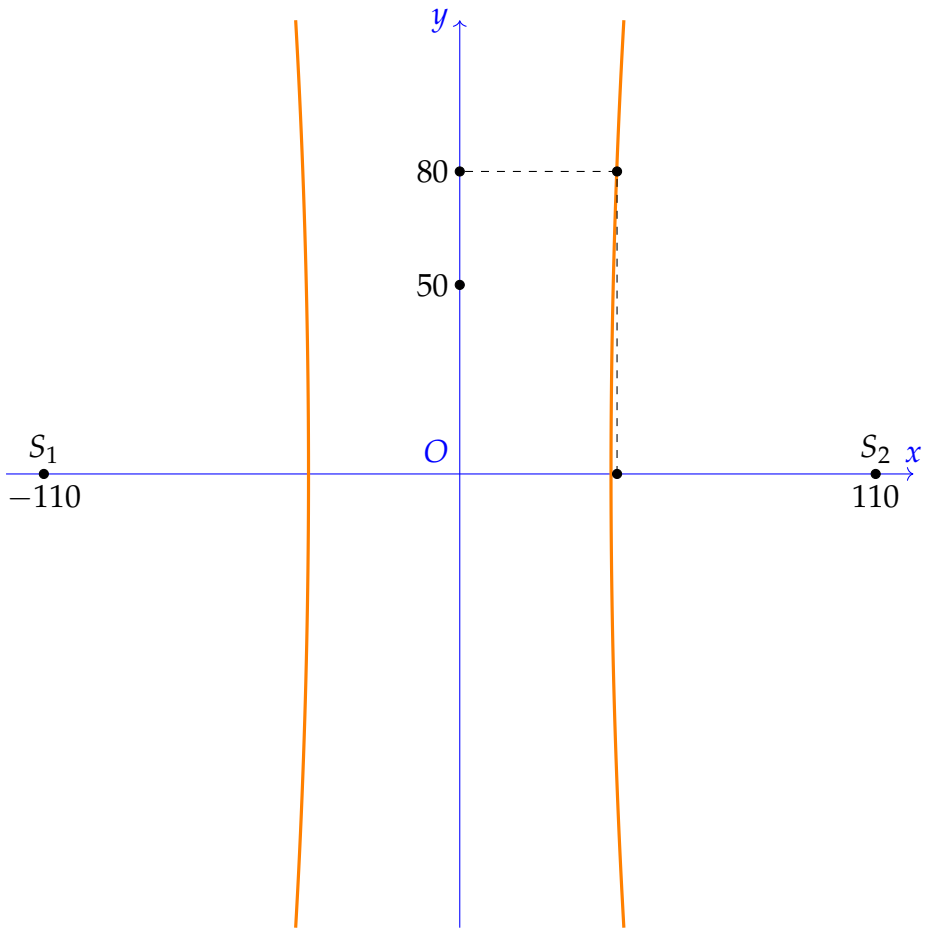
Câu 68

Một con tàu đang trên hành trình đi song song với một bờ biển thẳng và cách bờ 80 km. Hai trạm truyền tin S_1 và S_2 nằm trên bờ biển, cách xa nhau 220 km. Bằng cách tính giờ các tín hiệu vô tuyến từ hai trạm, hoa tiêu của tàu xác định rằng con tàu đang ở giữa hai trạm và ở gần S_2 hơn S_1 là 60 km. Tìm khoảng cách từ con tàu tới trạm S_2. Đáp số làm tròn đến hai chữ số thập phân.

(A) 107,89 km. (B) 167,89 km. (C) 136,01 km. (D) 75,50 km.

Lời giải.

Gọi d_1 và d_2 là các khoảng cách tương ứng từ con tàu tới S_1 và S_2, khi đó hiệu $d_1 - d_2 = 60$ và con thuyền phải nằm trên một hyperbol với tiêu điểm là S_1 và S_2, hiệu hai khoảng cách cố định bằng 60 (Hình minh họa).



Để đưa ra phương trình của hyperbol, ta biểu diễn hiệu cố định này bằng $2a$.

Như vậy, ta có $c = 110$, $a = \dfrac{1}{2} \cdot 60 = 30$, $b = \sqrt{110^2 - 30^2} = \sqrt{11200}$.

Phương trình của hyperbol này có dạng là $\dfrac{x^2}{900} - \dfrac{y^2}{11200} = 1$.

Thay $y = 80$ vào phương trình và giải theo x ta được

$$\frac{x^2}{900} - \frac{y^2}{11200} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{900} - \frac{80^2}{11200} = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{3600}{7}.$$

Do đó $x \approx 37,61$ (nghiệm âm bị loại, vì con tàu ở gần S_2 hơn S_1).

Khoảng cách từ con tàu đến S_1 bằng

$$d_1 = \sqrt{(37,61 + 110)^2 + 80^2} = \sqrt{28188,7121} \approx 167,89\text{km}.$$

Khoảng cách từ con tàu đến S_2 là

$$d_2 = \sqrt{(37,61-110)^2+80^2} = \sqrt{11640 \cdot 3121} \approx 107,89\text{km}.$$

Chọn đáp án (A) □

§3. BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 7

A BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1

Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ (t là tham số) với a, b không đồng thời bằng 0.

a) Chỉ ra một vectơ chỉ phương của d.

b) Chỉ ra một vectơ pháp tuyến của d.

c) Chỉ ra một điểm có tọa độ khác $(x_0; y_0)$ và thuộc đường thẳng d.

Lời giải.

a) Một vectơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (a; b)$.

b) Một vectơ pháp tuyến của d là $\vec{n} = (b; -a)$.

c) Một điểm có tọa độ khác $(x_0; y_0)$ và thuộc đường thẳng d là $M(x_0 + a; y_0 + b)$ (chọn $t = 1$).

□

Bài 2

Cho đường thẳng $d: ax + by + c = 0$ với a, b không đồng thời bằng 0.

a) Chỉ ra một vectơ pháp tuyến của d.

b) Chỉ ra một vectơ chỉ phương của d.

c) Cho a, b đều khác 0. Chỉ ra một điểm thuộc đường thẳng d mà không nằm trên cả hai trục toạ độ.

Lời giải.

a) Một vectơ pháp tuyến của d là $\vec{u} = (a; b)$.

b) Một vectơ chỉ phương của d là $\vec{n} = (b; -a)$.

c) Ta có nhận xét:

Nhận xét. Điểm A thuộc đường thẳng $\Delta: ax + by + c = 0$ (ĐK: $a^2 + b^2 \neq 0$) có dạng $A\left(t; \dfrac{-at - c}{b}\right)$ với $b \neq 0$ hoặc $A\left(\dfrac{-bt - c}{a}; t\right)$ với $a \neq 0$.

Áp dụng. Một điểm thuộc đường thẳng d mà không nằm trên cả hai trục toạ độ là $M\left(1; \dfrac{-a - c}{b}\right)$ với $t = 1$.

□

Bài 3

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho tam giác MNP có $M(2; 1), N(-1; 3), P(4; 2)$.

a) Tìm toạ độ của các vectơ $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}$;

b) Tính tích vô hướng $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP}$;

c) Tính độ dài các đoạn thẳng MN, MP;

d) Tính $\cos\widehat{NMP}$;

e) Tìm tọa độ trung điểm I của NP và trọng tâm G của tam giác MNP.

Lời giải.

a) $\overrightarrow{OM} = (2;1)$.
$\overrightarrow{MN} = (-3;2)$.
$\overrightarrow{MP} = (2;1)$.

b) Tích vô hướng $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP} = -3.2 + 2.1 = -4$.

c) Độ dài đoạn thẳng $MN = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.
Độ dài đoạn thẳng $MP = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

d) $\cos\widehat{NMP} = \dfrac{\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP}}{\left|\overrightarrow{MN}\right|.\left|\overrightarrow{MP}\right|} = \dfrac{-4}{\sqrt{13}.\sqrt{5}} = \dfrac{-4\sqrt{65}}{65}$.

e) Tọa độ trung điểm I của NP là
$N\left(\dfrac{x_N + x_P}{2}; \dfrac{y_N + y_P}{2}\right) = N\left(\dfrac{-1+4}{2}; \dfrac{3+2}{2}\right) = N\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{5}{2}\right)$.
Trọng tâm G của tam giác MNP là
$G\left(\dfrac{x_M + x_N + x_P}{3}; \dfrac{y_M + y_N + y_P}{3}\right) = G\left(\dfrac{2-1+4}{3}; \dfrac{1+3+2}{3}\right) = G\left(\dfrac{5}{3}; 2\right)$.

□

Bài 4

Lập phương trình tổng quát và phương trình tham số của đường thẳng d trong mỗi trường hợp sau:

a) d đi qua điểm $A(-3;2)$ và có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2;-3)$;

b) d đi qua điểm $B(-2;-5)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (-7;6)$;

c) d đi qua hai điểm $C(4;3)$ và $D(5;2)$.

Lời giải.

a) Phương trình tổng quát d đi qua điểm $A(-3;2)$ và có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2;-3)$:

$$d : 2(x+3) - 3(y-2) = 0$$

$$d : 2x - 3y + 12 = 0$$

Phương trình tham số d đi qua điểm $A(-3;2)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (3;2)$:

$$d : \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$$

b) Phương trình tham số d đi qua điểm $B(-2;-5)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(-7;6)$:

$$d:\begin{cases}x=-2-7t\\y=-5+6t\end{cases}$$

Phương trình tổng quát d đi qua điểm $B(-2;-5)$ và có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(6;7)$:

$$d:6(x+2)+7(y+5)=0$$

$$d:6x+7y+47=0$$

c) d đi qua hai điểm $C(4;3)$ và $D(5;2)$.
Phương trình tham số d đi qua điểm $C(4;3)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=\overrightarrow{CD}=(1;-1)$:

$$d:\begin{cases}x=4+t\\y=3-t\end{cases}$$

Phương trình tổng quát d đi qua điểm $C(4;3)$ và có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;1)$:

$$d:1(x-4)+1(y-3)=0$$

$$d:x+y-7=0$$

□

Bài 5

Lập phương trình đường tròn (C) trong mỗi trường hợp sau:

a) (C) có tâm $I(-4;2)$ và bán kính $R=3$;

b) (C) có tâm $P(3;-2)$ và đi qua điểm $E(1;4)$;

c) (C) có tâm $Q(5;-1)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta:3x+4y-1=0$;

d) (C) đi qua ba điểm $A(-3;2)$, $B(-2;-5)$ và $D(5;2)$.

Lời giải.

a) Phương trình đường tròn (C) có tâm $I(-4;2)$ và bán kính $R=3$:

$$(C):(x+4)^2+(y-2)^2=9$$

b) (C) có tâm $P(3;-2)$ và đi qua điểm $E(1;4)$;
Phương trình đường tròn (C) có tâm $P(3;-2)$ và bán kính $R=PE=\sqrt{(1-3)^2+(4+2)^2}=2\sqrt{10}$:

$$(C):(x-3)^2+(y+2)^2=40$$

c) (C) có tâm $Q(5;-1)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta:3x+4y-1=0$;
Phương trình đường tròn (C) có tâm $Q(5;-1)$ và bán kính
$R=d(Q,(\Delta))=\dfrac{|3.5+4.(-1)-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$:

$$(C):(x-5)^2+(y+1)^2=4$$

d) (C) đi qua ba điểm $A(-3;2)$, $B(-2;-5)$ và $D(5;2)$.
Phương trình đường tròn (C) có dạng

$$(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0$$

với $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.
Ta có

$$\begin{cases} A(-3;2)\in(C) \\ B(-2;-5)\in(C) \\ D(5;2)\in(C) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-3)^2+2^2+6a-4b+c=0 \\ (-2)^2+(-5)^2+4a+10b+c=0 \\ 5^2+2^2-10a-4b+c=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6a-4b+c=-13 \\ 4a+10b+c=-29 \\ -10a-4b+c=-29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-23 \end{cases}$$

Phương trình đường tròn (C) có tâm $I(1;-1)$ và bán kính
$R=\sqrt{1^2+(-1)^2+23}=5$:

$$(C): (x-1)^2+(y+1)^2=5$$

□

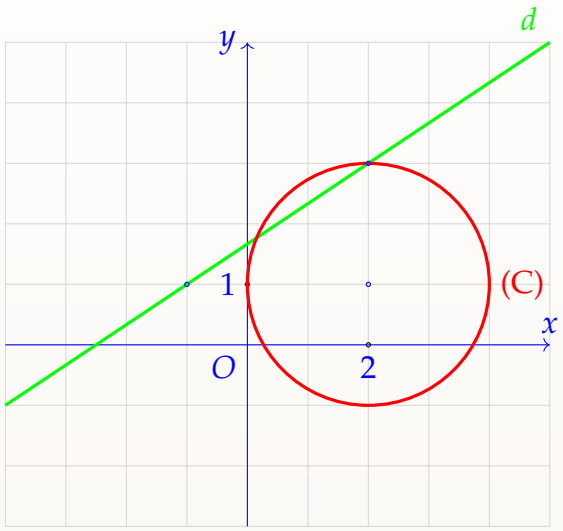
Bài 6

Quan sát *Hình 64* và thực hiện các hoạt động sau:

a) Lập phương trình đường thẳng d;

b) Lập phương trình đường tròn (C);

c) Lập phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $M(2+\sqrt{2};1+\sqrt{2})$.



Lời giải.

a) Lập phương trình đường thẳng d;
Dựa vào đồ thị hình 64, ta thấy đường thẳng d đi qua hai điểm $A(-1;1)$ và $B(2;3)$.
Phương trình tham số đường thẳng d đi qua $A(-1;1)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(3;2)$:

$$d: \begin{cases} x=-1+3t \\ y=1+2t \end{cases}$$

$(t \in \mathbb{R})$.

b) Lập phương trình đường tròn (C);
Phương trình đường tròn (C) có tâm $I(2;1)$ và bán kính $R = 2$:

$$(C) : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$$

c) Lập phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $M(2+\sqrt{2};1+\sqrt{2})$.
Gọi d là tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm M.
Khi đó d và IM vuông góc với nhau.
Phương trình đường thẳng d qua $M(2+\sqrt{2};1+\sqrt{2})$ và $\overrightarrow{IM} = (\sqrt{2};\sqrt{2})$ là vectơ pháp tuyến:

$$d : \sqrt{2}(x-2-\sqrt{2}) + \sqrt{2}(y-1-\sqrt{2}) = 0$$
$$d : (x-2-\sqrt{2}) + (y-1-\sqrt{2}) = 0$$
$$d : x+y-3-2\sqrt{2}) = 0$$

□

Bài 7

Cho hai đường thẳng

$$\Delta_1 : \sqrt{3}x + y - 4 = 0, \Delta_2 : x + \sqrt{3}y - 2\sqrt{3} = 0.$$

a) Tìm tọa độ giao điểm hai đường thẳng đã cho;

b) Tính góc α giữa hai đường thẳng đã cho.

Lời giải.

a) Tọa độ giao điểm hai đường thẳng đã cho là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{3}x + y - 4 = 0 \\ x + \sqrt{3}y - 2\sqrt{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3}x + y = 4 \\ x + \sqrt{3}y = 2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy $(\sqrt{3};1)$ tọa độ giao điểm hai đường thẳng đã cho.

b) Tính góc α giữa hai đường thẳng đã cho.

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = |\cos(\vec{n_1}, \vec{n_2})| = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|} = \frac{\left|\sqrt{3}.1 + 1.\sqrt{3}\right|}{\sqrt{3+1}.\sqrt{1+3}} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\Rightarrow (\Delta_1, \Delta_2) = 30^\circ$.

□

Bài 8

Cho biết mỗi đường conic có phương trình dưới đây là đường conic dạng nào (elip, hypebol, parabol) và tìm toạ độ tiêu điểm của đường conic đó.

a) $y^2 = 18x$;

b) $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{25} = 1$;

c) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$.

Lời giải.

a) $y^2=18x$ là đường conic dạng parabol vì có dạng $y^2=2px$ với $p=9>0$.
Tọa độ tiêu điểm của parabol là $F\left(\dfrac{p}{2};0\right)=F\left(\dfrac{9}{2};0\right)$.

b) $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{25}=1$ là đường conic dạng elip vì có dạng $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ với $a=8,b=5$ thỏa điều kiện $a>b>0$.
Suy ra $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{8^2-5^2}=\sqrt{39}$.
Tọa độ hai tiêu điểm của elip là $F_1(-c;0)=F_1\left(-\sqrt{39};0\right)$ và $F_2(c;0)=F_2\left(\sqrt{39};0\right)$.

c) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ là đường conic dạng hypebol vì có dạng $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ với $a=3,b=4$ thỏa điều kiện $a>0,b>0$.
Suy ra $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.
Tọa độ hai tiêu điểm của elip là $F_1(-c;0)=F_1(-5;0)$ và $F_2(c;0)=F_2(5;0)$.

□

Bài 9

Cho tam giác AF_1F_2, trong đó $A(0;4),F_1(-3;0),F_2(3;0)$.

a) Lập phương trình tổng quát của các đường thẳng AF_1 và AF_2.

b) Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp của tam giác AF_1F_2.

c) Lập phương trình chính tắc của elip (E) có hai tiêu điểm là F_1,F_2 sao cho (E) đi qua A.

Lời giải.

a) *Lập phương trình tổng quát của các đường thẳng AF_1.*
Ta có: Một vectơ chỉ phương của AF_1 là $\vec{u}=\overrightarrow{AF_1}=(-3;-4)$.
Suy ra một vectơ pháp tuyến của AF_1 là $\vec{n}=(4;-3)$.
Phương trình tổng quát đường thẳng AF_1 qua điểm $A(0;4)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(4;-3)$:

$$d:4(x-0)-3(y-4)=0$$

$$d:4x-3y+12=0$$

Lập phương trình tổng quát của các đường thẳng AF_2.
Ta có: Một vectơ chỉ phương của AF_2 là $\vec{u}=\overrightarrow{AF_2}=(3;-4)$.
Suy ra một vectơ pháp tuyến của AF_2 là $\vec{n}=(4;3)$.
Phương trình tổng quát đường thẳng AF_2 qua điểm $A(0;4)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(4;3)$:

$$d:4(x-0)+3(y-4)=0$$

$$d:4x+3y-12=0$$

b) Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp của tam giác AF_1F_2.
Phương trình đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác AF_1F_2 có dạng

$$(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0$$

có tâm $I(a;b)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.
Ta có

$$\begin{cases} A(0;4)\in(C) \\ F_1(-3;0)\in(C) \\ F_2(3;0)\in(C) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4^2-8b+c=0 \\ (-3)^2+6a+c=0 \\ 3^2-6a+c=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -8b+c=-16 \\ 6a+c=-9 \\ -6a+c=-9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=\dfrac{7}{8} \\ c=-9 \end{cases}$$

Phương trình đường tròn (C) có tâm $I(0;\dfrac{7}{8})$ và bán kính
$R=\sqrt{0^2+\left(\dfrac{7}{8}\right)^2+9}=\dfrac{25}{8}$:

$$(C): x^2+(y-\frac{7}{8})^2=\frac{625}{64}$$

c) Lập phương trình chính tắc của elip (E) có hai tiêu điểm là F_1, F_2 sao cho (E) đi qua A.
Phương trình chính tắc của elip (E) có dạng $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ thỏa điều kiện $a>b>0$.
Vì (E) đi qua $A(0;4)$ nên $\dfrac{0^2}{a^2}+\dfrac{4^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow \dfrac{4^2}{b^2}=1 \Leftrightarrow b^2=4^2 \Leftrightarrow b=4$. (do $b>0$)
Suy ra $a=\sqrt{c^2+b^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.
Vậy phương trình chính tắc của elip (E) có dạng $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

□

Bài 10

Trên màn hình ra-đa của đài kiểm soát không lưu sân bay A có hệ trục toạ độ Oxy (Hình 65), trong đó đơn vị trên mỗi trục tính theo ki-lô-mét và đài kiểm soát được coi là gốc toạ độ $O(0;0)$. Nếu máy bay bay trong phạm vi cách đài kiểm soát 500 km thì sẽ hiển thị trên màn hình ra-đa.
Một máy bay khởi hành từ sân bay B lúc 14 giờ. Sau thời gian t (giờ), vị trí của máy bay được xác định bởi điểm M có toạ độ như sau:

$$\begin{cases} x=\dfrac{1600}{3}-\dfrac{1400}{3}t \\ y=\dfrac{1900}{3}-\dfrac{1400}{3}t \end{cases}$$

a) Tìm vị trí của máy bay lúc 14 giờ 30 phút. Thời điểm này máy bay đã xuất hiện trên màn hình ra-đa chưa?

b) Lúc mấy giờ máy bay bay gần đài kiểm soát không lưu nhất? Tính khoảng cách giữa máy bay và đài kiểm soát không lưu lúc đó.

c) Máy bay ra khỏi màn hình ra-đa vào thời gian nào?

Lời giải.

a) Tìm vị trí của máy bay lúc 14 giờ 30 phút. Thời điểm này máy bay đã xuất hiện trên màn hình ra-đa chưa?

Lúc 14 giờ 30 phút, máy bay đã khởi hành được 30 phút $=\dfrac{1}{2}$ giờ.

Khi đó vị trí của máy bay là điểm $N(x_N;y_N)$ có tọa độ

$$\begin{cases} x_N=\dfrac{1600}{3}-\dfrac{1400}{3}.\dfrac{1}{2}=300 \\ y_N=\dfrac{1900}{3}-\dfrac{1400}{3}.\dfrac{1}{2}=400 \end{cases}$$

Do $x_N=300<500$ và $y_N=400<500$ nên ở thời điểm này máy bay đã xuất hiện trên màn hình ra-đa.

b) Lúc mấy giờ máy bay bay gần đài kiểm soát không lưu nhất? Tính khoảng cách giữa máy bay và đài kiểm soát không lưu lúc đó.

Khi máy bay gần đài kiểm soát nhất thì tọa độ của máy bay giả sử là điểm $P\left(\dfrac{1600}{3}-\dfrac{1400}{3}.t;\dfrac{1900}{3}-\dfrac{14}{3}\right.$ gần sát với tọa độ của đài kiểm soát là điểm O, tức ta có độ dài đoạn thẳng OP nhỏ nhất.

Ta tính được

$$\begin{aligned} OP^2&=\left(\frac{1600}{3}-\frac{1400}{3}.t\right)^2+\left(\frac{1900}{3}-\frac{1400}{3}.t\right)^2 \\ &=\frac{3920000}{9}t^2-\frac{9800000}{9}.t+\frac{6170000}{9} \\ &=\frac{3920000}{9}\left(t^2-\frac{5}{2}t\right)+\frac{6170000}{9} \\ &=\frac{3920000}{9}\left(t^2-\frac{5}{2}t+\frac{25}{16}\right)+500 \\ &=\frac{3920000}{9}\left(t-\frac{5}{4}\right)^2+5000\geq 5000 \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\left(t-\dfrac{5}{4}\right)^2=0\Leftrightarrow t=\dfrac{5}{4}$.

Vậy lúc 15 giờ 15 phút thì máy bay gần đài kiểm soát không lưu nhất. Khoảng cách giữa máy bay và đài kiểm soát lúc đó là $50\sqrt{2}$ km.

c) Máy bay ra khỏi màn hình ra-đa vào thời gian nào?

Khi máy bay ra khỏi màn hình ra-đa thì tọa độ của máy bay giả sử là điểm $Q\left(\dfrac{1600}{3}-\dfrac{1400}{3}.t;\dfrac{1900}{3}-\right.$ cách tọa độ của đài kiểm soát là điểm O hơn 500, tức ta có độ dài đoạn thẳng $OQ>500$.

Ta có $OQ>500\Leftrightarrow OQ^2>250000$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow\left(\frac{1600}{3}-\frac{1400}{3}.t\right)^2+\left(\frac{1900}{3}-\frac{1400}{3}.t\right)^2>250000 \\ &\Leftrightarrow\frac{3920000}{9}t^2-\frac{9800000}{9}.t+\frac{3920000}{9}>0 \\ &\Leftrightarrow t^2-\frac{5}{2}.t+1>0 \\ &\Leftrightarrow t<\frac{1}{2}\text{hoặc}t>2. \end{aligned}$$

Vậy máy bay ra khỏi màn hình ra-đa vào lúc 16 giờ.

□

Bài 11

Trong mặt phẳng tọa độ, cho $A(1;-1), B(3;5), C(-2;4)$. Tính diện tích tam giác ABC.

Lời giải.

Ta có

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A) = (2;6) \Rightarrow AB = \sqrt{2^2+6^2} = 2\sqrt{10}.$$
$$\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A; y_C - y_A) = (-3;5) \Rightarrow AC = \sqrt{(-3)^2+5^2} = \sqrt{34}.$$
$$\cos\widehat{BAC} = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{2.(-3)+6.5}{\sqrt{2^2+6^2}\sqrt{(-3)^2+5^2}} =$$

Do $\sin\widehat{BAC} > 0$ nên

$$\sin\widehat{BAC} = \sqrt{1-\cos^2\widehat{BAC}} = \sqrt{1-\left(\frac{2.(-3)+6.5}{\sqrt{2^2+6^2}\sqrt{(-3)^2+5^2}}\right)^2}$$
$$= \frac{|2.5-(-3).6|}{\sqrt{2^2+6^2}\sqrt{(-3)^2+5^2}}$$

Suy ra

$$S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin\widehat{BAC} = \frac{1}{2}|2.5-(-3).6| = 14(\text{đvdt}).$$

□

Bài 12

Trong mặt phẳng toạ độ, cho hai điểm $A(-1;0)$ và $B(3;1)$.

a) Viết phương trình đường tròn tâm A và đi qua B.

b) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng AB.

c) Viết phương trình đường tròn tâm O và tiếp xúc với đường thẳng AB.

Lời giải.

a) Viết phương trình đường tròn tâm A và đi qua B.
Phương trình đường tròn (C) có tâm $A(-1;0)$ và bán kính $R = AB = \sqrt{(3+1)^2+(1-0)^2} = \sqrt{17}$:

$$(C): (x+1)^2 + y^2 = 17$$

b) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng AB.
Ta có $\overrightarrow{AB} = (4;1)$.
Phương trình tổng quát AB đi qua điểm $A(-1;0)$ và có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1;-4)$:

$$d: 1(x+1) - 4(y-0) = 0$$
$$d: x - 4y + 1 = 0$$

c) Viết phương trình đường tròn tâm O và tiếp xúc với đường thẳng AB.
Ta có $d(O,AB) = \frac{|0-4.0+1|}{\sqrt{1^2+(-4)^2}} = \frac{\sqrt{17}}{17}$.

Phương trình đường tròn tâm $O(0;0)$ có bán kính $R = d(O,AB) = \dfrac{\sqrt{17}}{17}$:

$$(C) : (x-0)^2 + (y-0)^2 = \frac{1}{17}$$

$$(C) : x^2 + y^2 = \frac{1}{17}$$

□

Bài 13

Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$.

a) Tìm toạ độ tâm và bán kính R của (C).

b) Chứng minh rằng điểm $M(5;1)$ thuộc (C). Viết phương trình tiếp tuyến d của (C) tại M.

Lời giải.

a) Tìm toạ độ tâm và bán kính R của (C).
Từ phương trình $(C) : x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ ta suy ra $a = \dfrac{-4}{-2} = 2, b = \dfrac{6}{-2} = -3, c = -12$.
Khi đó $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c} = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 12} = 5$.
Vậy (C) có tâm $I(2;-3)$ và có bán kính $R = 5$.

b) Chứng minh rằng điểm $M(5;1)$ thuộc (C). Viết phương trình tiếp tuyến d của (C) tại M.
Thay tọa độ điểm $M(5;1)$ vào $(C) : x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ ta được

$$5^2 + 1^2 - 4.5 + 6.1 - 12 = 0$$

$$0 = 0 \text{ (luôn đúng).}$$

Vậy $M(5;1)$ thuộc (C).
Gọi d là tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm M.
Khi đó d và IM vuông góc với nhau.
Phương trình đường thẳng d qua $M(5;1)$ và $\overrightarrow{IM} = (3;4)$ là vectơ pháp tuyến:

$$d : 3(x-5) + 4(y-1) = 0$$

$$d : 3x + 4y - 19 = 0$$

□

Bài 14

Cho elip $(E) : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$.

a) Tìm các giao điểm A_1, A_2 của (E) với trục hoành và các giao điểm B_1, B_2 của (E) với trục tung. Tính A_1A_2, B_1B_2.

b) Xét một điểm bất kì $M(x_0, y_0)$ thuộc (E). Chứng minh rằng, $b^2 \le x_0^2 + y_0^2 \le a^2$ và $b \le OM \le a$.
Chú ý. A_1A_2, B_1B_2 tương ứng được gọi là trục lớn, trục nhỏ của elip (E) và tương ứng có độ dài là $2a, 2b$.

Lời giải.

a) *Giao điểm của* (E) *với trục hoành:*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{0^2}{b^2}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2}=1$$

$$\Leftrightarrow x^2=a^2$$

$$\Leftrightarrow x=\pm a$$

Vậy $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$ là giao điểm của (E) với trục hoành.
Giao điểm của (E) *với trục tung:*

$$\frac{0^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\Leftrightarrow y^2=b^2$$

$$\Leftrightarrow y=\pm b$$

Vậy $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$ là giao điểm của (E) với trục tung.
Ta có $A_1A_2=\sqrt{(-a-a)^2+(0-0)^2}=2a$.
$B_1B_2=\sqrt{(0-0)^2+(-b-b)^2}=2b$.

b) Xét một điểm bất kì $M\left(x_0,y_0\right)$ thuộc (E). Chứng minh rằng, $b^2\le x_0^2+y_0^2\le a^2$ và $b\le OM\le a$.
Chứng minh $x_0^2+y_0^2\ge b^2$.
Vì $M\left(x_0,y_0\right)$ thuộc (E) nên ta có

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$$

Suy ra $y_0^2=b^2.\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)$.
Thay y_0^2 vừa tìm được vào $x_0^2+y_0^2$:

$$x_0^2+y_0^2=x_0^2+b^2.\left(1-\frac{x_0^2}{a^2}\right)$$

$$=b^2+x_0^2.\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)$$

$$=b^2+x_0^2.\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)$$

Vì theo giả thiết $a>b>0$ nên $a^2>b^2>0$. Suy ra $a^2-b^2>0$.
Suy ra $\frac{a^2-b^2}{a^2}>0$.
Mặt khác $x_0^2\ge 0$ nên $x_0^2.\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)\ge 0$.

Do đó $b^2+x_0^2.\left(\dfrac{a^2-b^2}{a^2}\right)\geq b^2$, tức $x_0^2+y_0^2\geq b^2$.

Dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{cases} x_0=0 \\ y_0^2=b^2.\left(1-\dfrac{x_0^2}{a^2}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_0=0 \\ y_0^2=b^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_0=0 \\ y_0=\pm b\end{cases}$$

Chứng minh $x_0^2+y_0^2\leq a^2$.

Vì $M\left(x_0,y_0\right)$ thuộc (E) nên ta có

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$$

Suy ra $x_0^2=a^2.\left(1-\dfrac{y_0^2}{b^2}\right)$.

Thay x_0^2 vừa tìm được vào $x_0^2+y_0^2$:

$$\begin{aligned} x_0^2+y_0^2&=a^2.\left(1-\frac{y_0^2}{b^2}\right)+y_0^2 \\ &=a^2+y_0^2.\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right) \\ &=a^2+y_0^2.\left(\frac{b^2-a^2}{b^2}\right)\end{aligned}$$

Vì theo giả thiết $a>b>0$ nên $a^2>b^2>0$. Suy ra $a^2-b^2>0$ hay $b^2-a^2<0$.

Suy ra $\dfrac{b^2-a^2}{a^2}<0$.

Mặt khác $y_0^2\geq 0$ nên $y_0^2.\left(\dfrac{b^2-a^2}{b^2}\right)\leq 0$.

Do đó $a^2+y_0^2.\left(1-\dfrac{a^2}{b^2}\right)\leq a^2$, tức $x_0^2+y_0^2\leq a^2$.

Dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{cases} y_0=0 \\ x_0^2=a^2+y_0^2.\left(\dfrac{b^2-a^2}{b^2}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y_0=0 \\ x_0^2=a^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} y_0=0 \\ x_0=\pm a\end{cases}$$

Vậy ta đã chứng minh được $b^2\leq x_0^2+y_0^2\leq a^2$.

Chứng minh $b\leq OM\leq a$.

Ta có

$$OM=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$$

Ở chứng minh trên, ta đã chứng minh $b^2\leq x_0^2+y_0^2\leq a^2$.

Điều này tương đương với

$$\begin{aligned} &b\leq\sqrt{x_0^2+y_0^2}\leq a \\ \Leftrightarrow\ &b\leq\sqrt{x_0^2+y_0^2}\leq a \\ \Leftrightarrow\ &b\leq OM\leq a \text{ đpcm.}\end{aligned}$$

□

Bài 15

Cho hypebol có phương trình: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

a) Tìm các giao điểm A_1, A_2 của hypebol với trục hoành (hoành độ của A_1 nhỏ hơn của A_2).

b) Chứng minh rằng, nếu điểm $M(x;y)$ thuộc nhánh nằm bên trái trục tung của hypebol thì $x \le -a$, nếu điểm $M(x;y)$ thuộc nhánh nằm bên phải trục tung của hypebol thì $x \ge a$.

c) Tìm các điểm M_1, M_2 tương ứng thuộc các nhánh bên trái, bên phải trục tung của hypebol để M_1M_2 nhỏ nhất.

Lời giải.

a) Tìm các giao điểm A_1, A_2 của hypebol với trục hoành (hoành độ của A_1 nhỏ hơn của A_2).
Giao điểm của hypebol (H) với trục hoành:

$$\begin{aligned}&\frac{x^2}{a^2}-\frac{0^2}{b^2}=1\\ \Leftrightarrow\ &\frac{x^2}{a^2}=1\\ \Leftrightarrow\ &x^2=a^2\\ \Leftrightarrow\ &x=\pm a\end{aligned}$$

Vậy $A_1(-a;0), A_2(a;0)$ là giao điểm của (H) với trục hoành (vì hoành độ của A_1 nhỏ hơn của A_2).

b) *Chứng minh rằng, nếu điểm $M(x;y)$ thuộc nhánh nằm bên trái trục tung của hypebol thì $x \le -a$.*
Vì $M\left(x,y\right)$ thuộc (H) nên ta có

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Suy ra $x^2=a^2.\left(1+\dfrac{y^2}{b^2}\right) \Leftrightarrow |x|=|a|.\sqrt{\left(1+\dfrac{y^2}{b^2}\right)} \Leftrightarrow x=-a.\sqrt{\left(1+\dfrac{y^2}{b^2}\right)}$
(vì $M(x;y)$ thuộc nhánh bên trái trục tung của (H) nên $x<0$.)
Hơn nữa, ta có $\sqrt{\left(1+\dfrac{y^2}{b^2}\right)} \ge 1$ nên $-a.\sqrt{\left(1+\dfrac{y^2}{b^2}\right)} \le -a$ hay $x \le -a$.
Chứng minh rằng, nếu điểm $M(x;y)$ thuộc nhánh nằm bên phải trục tung của hypebol thì $x \ge a$.
Vì $M\left(x,y\right)$ thuộc (H) nên ta có

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Suy ra $x^2=a^2.\left(1+\dfrac{y^2}{b^2}\right) \Leftrightarrow |x|=|a|.\sqrt{\left(1+\dfrac{y^2}{b^2}\right)} \Leftrightarrow x=a.\sqrt{\left(1+\dfrac{y^2}{b^2}\right)}$
(vì $M(x;y)$ thuộc nhánh bên phải trục tung của (H) nên $x>0$.)
Hơn nữa, ta có $\sqrt{\left(1+\dfrac{y^2}{b^2}\right)} \ge 1$ nên $a.\sqrt{\left(1+\dfrac{y^2}{b^2}\right)} \ge a$ hay $x \ge a$.

c) Tìm các điểm M_1, M_2 tương ứng thuộc các nhánh bên trái, bên phải trục tung của hypebol để M_1M_2 nhỏ nhất.
Gọi $M_1(x_1;y_1), M_2(x_2;y_2)$.

Vì M_1 thuộc nhánh bên trái của (H) nên $x_1 = -a.\sqrt{\left(1+\dfrac{y_1^2}{b^2}\right)}$.

Vì M_2 thuộc nhánh bên phải của (H) nên $x_2 = a.\sqrt{\left(1+\dfrac{y_2^2}{b^2}\right)}$.

Khi đó $M_1M_2{}^2 = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 = \left(a.\sqrt{1+\dfrac{y_2^2}{b^2}}+a.\sqrt{1+\dfrac{y_1^2}{b^2}}\right)^2+(y_2-y_1)^2$.

$= a^2.\left(\sqrt{1+\dfrac{y_2^2}{b^2}}+\sqrt{1+\dfrac{y_1^2}{b^2}}\right)^2+(y_2-y_1)^2$.

Do $(y_2-y_1)^2 \geq 0, a^2>0, \dfrac{y_2^2}{b^2}, \dfrac{y_1^2}{b^2} \geq 0$ nên M_1M_2 nhỏ nhất khi và chỉ khi

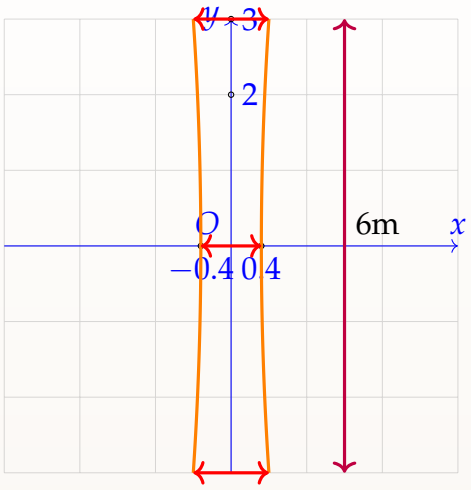
$$\begin{cases} (y_2-y_1)^2 = 0 \\ \dfrac{y_1^2}{b^2} = 0 \\ \dfrac{y_2^2}{b^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_2 = y_1 \\ y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y_1 = y_2 = 0$$

Khi đó M_1M_2 có độ dài nhỏ nhất là $= \sqrt{a^2.\left(\sqrt{1}+\sqrt{1}\right)^2} = 2a$
trong đó $M_1(-a;0) \equiv A_1, M_2(a;0) \equiv A_2$.

□

Bài 16

Một cột trụ hình hypebol (H.7.36), có chiều cao 6 m, chỗ nhỏ nhất ở chính giữa và rộng 0,8 m, đỉnh cột và đáy cột đều rộng 1 m. Tính độ rộng của cột ở độ cao 5 m (tính theo đơn vị mét và làm tròn tới hai chữ số sau dấu phẩy).



Lời giải.

Gắn hệ trục tọa độ Oxy vào cột trụ hình Hypebol đã cho như hình trên.
Tiếp theo ta tìm phương trình của cột trụ hình Hypebol này.
Gọi phương trình của cột trụ là

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Vì Oy là đường trung trực của đoạn thẳng 0,8 m nên Oy chia đoạn thẳng 0,8 m thành hai đoạn bằng nhau, mỗi đoạn 0,4 m, tức Hypebol đi qua hai điểm $A_1(-0,4;0), A_2(0,4;0)$.

Khi đó ta có

$$\frac{0,4^2}{a^2}-\frac{0^2}{b^2}=1$$
$$\Leftrightarrow \frac{0,4^2}{a^2}=1$$
$$\Leftrightarrow a=0,4.$$

(vì $a>0$)
Lúc này ta được phương trình Hypebol:

$$\frac{x^2}{0,16}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Vì Oy là đường trung trực của đoạn thẳng 1 m nên Oy chia đoạn thẳng 1 m thành hai đoạn bằng nhau, mỗi đoạn 0,5 m, tức Hypebol đi qua hai điểm $B_1(-0,5;3)$, $B_2(0,5;3)$.
Khi đó ta có

$$\frac{0,5^2}{0,16}-\frac{3^2}{b^2}=1$$
$$\Leftrightarrow \frac{3^2}{b^2}=\frac{9}{16}$$
$$\Leftrightarrow b=4.$$

(vì $b>0$)
Vậy ta đã tìm được phương trình Hypebol của cột trụ:

$$\frac{x^2}{0,16}-\frac{y^2}{16}=1$$

Khi cột trụ ở độ cao 5 m thì

$$\frac{x^2}{0,16}-\frac{5^2}{16}=1$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{0,16}=\frac{41}{16}$$
$$\Leftrightarrow x^2=\frac{41}{100}$$
$$\Leftrightarrow |x|=\frac{\sqrt{41}}{10}$$

Vậy độ rộng của cột ở độ cao 5 m là $2.|x|=2.\frac{\sqrt{41}}{10}=\frac{\sqrt{41}}{5}\approx 1,28$ m. □

B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1

Cho đường thẳng $d\colon \frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$. Một vectơ pháp tuyến của d là

(A) $\vec{n_1}=(3;5)$. (B) $\vec{n_2}=(3;-5)$. (C) $\vec{n_3}=(-5;3)$. (D) $\vec{n_4}=(5;3)$.

Lời giải.

đường thẳng $d\colon \frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1\Leftrightarrow 5x+3y-15=0$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n_4}=(5;3)$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 2

Viết phương trình tổng quát của đường thẳng d đi qua điểm $M(1;-1)$ và có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2022;2023)$.

(A) $2022x+2023y+1=0$. (B) $2022x+2023y-1=0$.
(C) $2023x-2022y-1=0$. (D) $2023x-2022y+1=0$.

Lời giải.

Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;-1)$ và có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2022;2023)$ nên ta có phương trình

$$2022(x-1)+2023(y+1)=0 \Leftrightarrow 2022x+2023y+1=0$$

Chọn đáp án (A) □

Câu 3

Cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=5=6t\\y=1-2t\end{cases}$. Vectơ nào dưới đây là một vectơ chỉ phương của d?

(A) $\vec{u_1}=(5;1)$. (B) $\vec{u_2}=(6;2)$. (C) $\vec{u_3}=(2;6)$. (D) $\vec{u_4}=(3;-1)$.

Lời giải.

Đường thẳng $d:\begin{cases}x=5=6t\\y=1-2t\end{cases}$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u_4}=(3;-1)$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 4

Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(4;-5)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;0)$ là

(A) $\begin{cases}x=4+t\\y=-5\end{cases}$. (B) $\begin{cases}x=1+4t\\y=-5t\end{cases}$. (C) $\begin{cases}x=4\\y=-5+t\end{cases}$. (D) $\begin{cases}x=4\\y=-5\end{cases}$.

Lời giải.

d đi qua điểm $M(4;-5)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;0)$ nên có phương trình: $\begin{cases}x=4+t\\y=-5\end{cases}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 5

Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng có phương trình sau: $d_1\colon 2x-y+1=0$ và $d_2\colon -4x+2y+2=0$.

(A) Căt nhau. (B) Vuông góc nhau. (C) Trùng nhau. (D) Song song nhau.

Lời giải.

Ta có: $\dfrac{2}{-4}=\dfrac{-1}{2}\neq\dfrac{1}{2}$ suy ra d_1 song song với d_2.

Chọn đáp án (D) □

Câu 6

Góc giữa hai đường thẳng $\Delta_1\colon a_1x+b_1y+c_1=0$ và $\Delta_2\colon a_2x+b_2y+c_2=0$ được xác định theo công thức:

(A) $\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\dfrac{a_1a_2+b_1b_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$.

(B) $\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\dfrac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$.

(C) $\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\dfrac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$.

(D) $\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\sqrt{\dfrac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{a_1^2+b_1^2}}$.

Lời giải.

Ta có: $\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\dfrac{|a_1a_2+b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$

Chọn đáp án (B) □

Câu 7

Trong mặt phẳng Oxy, đường tròn $(C)\colon x^2+y^2-2x+6y+1=0$ có tâm I và bán kính R là:

(A) $I(2;-6)$ và $R=\sqrt{39}$.

(B) $I(1;-3)$ và $R=\sqrt{10}$.

(C) $I(2;-6)$ và $R=3$.

(D) $I(-1;3)$ và $R=3$.

Lời giải.

Ta có $x^2+y^2-2x+6y+1=0\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+3)^2=9$.
Đường tròn đã cho có tâm $I(1;-3)$ và bán kính $R=\sqrt{9}=3$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 8

Phương trình đường tròn tâm $I(-3;4)$, có bán kính $R=2$ là

(A) $(x-3)^2+(y-4)^2=4$.

(B) $(x+3)^2+(y-4)^2-4=0$.

(C) $(x+3)^2+(y+4)^2=4$.

(D) $(x+3)^2+(y-4)^2=2$.

Lời giải.

Phương trình đường tròn tâm $I(-3;4)$, có bán kính $R=2$ là

$$(x+3)^2+(y-4)^2=4\Leftrightarrow(x+3)^2+(y-4)^2-4=0$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 9

Phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C)\colon(x+1)^2+(y-2)^2=29$ tại điểm $M(-3;7)$ là

(A) $2x+5y-41=0$. (B) $4x-5y+47=0$. (C) 2x-5y+41=0. (D) $2x-5y-29=0$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(-1;2)$.
Tiếp tuyến của (C) tại $M(-3;7)$ đi qua $M(-3;7)$ và nhận $\overrightarrow{IM}=(-2;5)$ làm một vectơ pháp tuyến, có phương trình $-2(x+3)+5(y-7)=0\Leftrightarrow-2x+5y-41=0\Leftrightarrow2x-5y+41=0$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 10

Trong mặt phẳng Oxy, cho elip có phương trình $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$. Tâm sai của elip bằng

(A) $\dfrac{3}{4}$. (B) $\dfrac{3}{\sqrt{7}}$. (C) $\dfrac{4}{\sqrt{7}}$. (D) $\dfrac{9}{4}$.

Lời giải.

Phương trinh elip (E) có dạng $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$.

Theo bài ta có: $\begin{cases}a^2=16\\b^2=7\end{cases}$

Mà $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16-7}=3$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 11

Phương trình chính tắc của elip có độ dài trục nhỏ bằng 6 và một tiêu điểm $F_1(-2;0)$ là

(A) $\dfrac{x^2}{40}+\dfrac{y^2}{36}=1$. (B) $\dfrac{x^2}{13}+\dfrac{y^2}{9}=1$. (C) $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{36}=1$. (D) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

Lời giải.

Gọi phương trình elip là $(E):\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$.

Do độ dài trục nhỏ bằng 6 nên $2b=6\Rightarrow b=3$.

Vì elip có một tiêu điểm $F_1(-2;0)$ nên $c=2$.

Ta có: $a^2=b^2+c^2=3^2+2^2=13\Rightarrow a^2=13$.

Vậy phương trình elip cần tìm là $(E):\dfrac{x^2}{13}+\dfrac{y^2}{9}=1$

Chọn đáp án (B) □

Câu 12

Trong mặt phẳng Oxy, cho hypebol có phương trình $\dfrac{x^2}{1}-\dfrac{y^2}{8}=1$. Tiêu cự của hypebol bằng

(A) 3. (B) 6. (C) 2. (D) $2\sqrt{7}$.

Lời giải.

Phương trình hypebol có dạng $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>0,b>0)$.

Suy ra $a^2=1, b^2=8\Rightarrow c^2=a^2+b^2=9\Rightarrow c=3$.

Vậy hypebol có hai tiêu điểm là $F_1(-3;0)$, $F_2(3;0)$ và tiêu cự $2c=6$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 13

Phương trình chính tắc của hypebol có tiêu cự bằng 12 và cắt trục hoành tại điểm $A(5;0)$ là

(A) $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{11}=1$. (B) $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=1$. (C) $\dfrac{x^2}{100}-\dfrac{y^2}{125}=1$. (D) $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{16}=1$.

Lời giải.

Phương trình chính tắc của hypebol có dạng $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (a,b>0)$.

Ta có $\begin{cases} 2c=12 \\ \dfrac{25}{a^2}=1 \\ b^2=c^2-a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=6 \\ a^2=25. \\ b^2=11 \end{cases}$

Phương trình chính tắc của hypebol là $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{11}=1$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 14

Đường thẳng nào là đường chuẩn của parabol $y^2=4x$

(A) $x=4$. (B) $x=2$. (C) $x=1$. (D) $x=-1$.

Lời giải.

Phương trình chính tắc của parabol $(P)\colon y^2=2px$.

Suy ra $p=2 \Rightarrow$ Phương trình đường chuẩn là $x=-\dfrac{p}{2}=-1$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 15

Phương trình chính tắc của parabol đi qua điểm $A(4;-2)$ là

(A) $y=x^2-3x-12$. (B) $y=x^2-27$. (C) $y^2=4x-4$. (D) $y^2=x$.

Lời giải.

Phương trình chính tắc của parabol $(P)\colon y^2=2px$.

$A(4;-2)\in(P) \Rightarrow 2p=\dfrac{4}{4} \Leftrightarrow 2p=1 \Leftrightarrow p=\dfrac{1}{2}$.

Vậy phương trình $(P)\colon y^2=x$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 16

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(3;6)$, $B(-4;1)$ và $C(5;-2)$. Phương trình đường cao AH của tam giác ABC là

(A) $3x-y-3=0$. (B) $x-3y+15=0$. (C) $3x-y-2=0$. (D) $3x+y+3=0$.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{BC}=(9;-3)=3(3;-1)$.

Đường thẳng AH qua $A(3;6)$ và vuông góc với BC suy ra AH nhận $\vec{n}=(3;-1)$ làm vectơ pháp tuyến.

Phương trình tổng quát của đường thẳng $AH\colon 3(x-3)-(y-6)=0 \Leftrightarrow 3x-y-3=0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 17

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác MNP có $M(-1;5)$, $N(7;2)$ và $P(-3;0)$. Phương trình đường trung tuyến kẻ từ M là

(A) $4x-3y+11=0$. (B) $3x-4y-17=0$. (C) $3x-4y-11=0$. (D) $4x+3y-11=0$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm $NP \Rightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{7+(-3)}{2} = 2 \\ y_I = \dfrac{2+0}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow I(2;1).$

Ta có: $\overrightarrow{MI} = (3;-4)$.
Đường trung tuyến d qua $M(-1;5)$ và điểm $I(2;1)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (4;3)$
Suy ra

$$d\colon 4(x+1)+3(y-5)=0 \Leftrightarrow 4x+3y-11=0.$$

Chọn đáp án (D) □

Câu 18

Phương trình tổng quát của đường thẳng Δ qua $K(6;2)$ và tạo với trục Ox một góc 60° là

(A) $\sqrt{3}x+y+(2-6\sqrt{3})=0$.
(B) $-\sqrt{3}x+y+(2-6\sqrt{3})=0$.
(C) $\sqrt{3}x+y+2(1-3\sqrt{3})=0; \sqrt{3}x+y-(1+3\sqrt{3})=0$.
(D) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}x-y+2(1-\sqrt{3})=0; \dfrac{1}{\sqrt{3}}x+y-2(1+\sqrt{3})=0$.

Lời giải.

Do đường thẳng Δ tạo với trục Ox một góc 60° nên hệ số góc của đường thẳng Δ là $k = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$ hoặc $k = \tan 120^\circ = -\sqrt{3}$.

- ***Trường hợp 1:*** Δ đi qua $K(6;2)$ có hệ số góc $k=\sqrt{3}$
  $\Rightarrow \Delta\colon y=\sqrt{3}(x-6)+2 \Leftrightarrow \sqrt{3}x-y+2(1-3\sqrt{3})=0.$
- ***Trường hợp 2:*** Δ đi qua $K(6;2)$ có hệ số góc $k=-\sqrt{3}$
  $\Rightarrow \Delta\colon y=-\sqrt{3}(x-6)+2 \Leftrightarrow \sqrt{3}x+y-2(1+3\sqrt{3})=0.$

Vậy đường thẳng cần tìm là: $\Delta_1\colon \sqrt{3}x+y+2(1-3\sqrt{3})=0$ và $\Delta_2\colon \sqrt{3}x+y-(1+3\sqrt{3})=0$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 19

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $M(3;4)$. Phương trình đường thẳng đi qua M cắt hai tia Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho $OA+OB=14$, $OA<OB$ là

(A) $\dfrac{x}{7}+\dfrac{y}{7}=1$.
(B) $\dfrac{x}{7}+\dfrac{y}{7}=1$ và $\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{8}=1$.
(C) $\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{8}=1$.
(D) $\dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{6}=1$.

Lời giải.

Gọi $A(a;0)$, $B(0;b)$. Điều kiện $0<a<b$.
Phương trình đường thẳng AB là: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.
Ta có: $OA+OB=14$ nên $a+b=14 \Leftrightarrow b=14-a \quad (1)$.
$M(3;4)\in AB \Rightarrow \dfrac{3}{a}+\dfrac{4}{b}=1 \quad (2)$.
Thay (1) vào (2) ta được $\dfrac{3}{a}+\dfrac{4}{14-a}=1$.
Từ đó ta thu được phương trình $a^2-13a+42=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=6 \\ a=7 \end{array}\right.$.

Với $a = 7 \Rightarrow b = 7$ (loại).
Với $a = 6 \Rightarrow b = 8$ (thỏa), ta thu được phương trình đường thẳng AB là $\frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 1$.
Vậy phương trình đường thẳng thỏa mãn bài toán là $\frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 1$

Chọn đáp án (C) □

Câu 20

Đường thẳng Δ đi qua giao điểm của hai đường thẳng $d_1\colon x - 2y + 2 = 0$, $d_2\colon 2x + y - 6 = 0$ và vuông góc với đường thẳng $d\colon x + 3y - 7 = 0$ có phương trình là
(A) $3x - y - 4 = 0$. (B) $x + 3y - 8 = 0$. (C) $3x - y + 4 = 0$. (D) $x + 3y + 8 = 0$.

Lời giải.

Gọi A là giao điểm của hai đường thẳng $d_1\colon x - 2y + 2 = 0$, $d_2\colon 2x + y - 6 = 0$.
Ta tìm được $A(2;2)$.
Đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng $d\colon x + 3y - 7 = 0$ nên phương trình đường thẳng Δ có dạng: $3x - y + m = 0$.
Ta có: $A(2;2) \in \Delta$ nên $3.2 - 2 + m = 0 \Leftrightarrow m = -4$.
Do đó phương trình đường thẳng thỏa mãn bài toán là $3x - y - 4 = 0$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 21

Phương trình đường thẳng đi qua giao điểm của $d\colon x - 3y - 6 = 0$ với trục Oy, có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-3;4)$ là
(A) $4x + 3y - 6 = 0$. (B) $4x + 3y + 6 = 0$.
(C) $-3x + 4y + 8 = 0$. (D) $3x - 4y + 8 = 0$.

Lời giải.

Gọi A là giao điểm của đường thẳng $d\colon x - 3y - 6 = 0$ với trục Oy.
Ta tìm được $A(0;-2)$. Do đó phương trình đường thẳng cần tìm là $\frac{x-0}{-3} = \frac{y+2}{4} \Leftrightarrow 4x + 3y + 6 = 0$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 22

Trong mặt phẳng tọa tọa độ Oxy, phương trình tham số của đường thẳng đi qua 2 điểm $A(-3;1)$ và $B(2;4)$ là
(A) $\begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 1 - 3t \end{cases}$. (B) $\begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$. (C) $\begin{cases} x = -3 - 3t \\ y = 1 + 5t \end{cases}$. (D) $\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 + 4t \end{cases}$.

Lời giải.

Đường thẳng AB nhận $\overrightarrow{AB} = (5;3)$ làm vectơ chỉ phương.
Vậy phương trình tham số của đường thẳng AB là $\begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$.

Chọn đáp án (B) □

Câu 23

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, đường thẳng d đi qua điểm $M(-3;2)$ và vuông góc với đường thẳng $\Delta\colon 2x-y+7=0$ có phương trình tổng quát là

(A) $2x-y+8=0$. (B) $x+2y-1=0$.
(C) $-3x+2y+8=0$. (D) $x+2y+7=0$.

Lời giải.

Đường thẳng Δ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;-1)$.
Vì đường thẳng d vuông góc với Δ nên $\vec{n}=(2;-1)$ là một vectơ chỉ phương của d, suy ra $\vec{u}=(1;2)$ là một vectơ pháp tuyến của d.
Vậy phương trình tổng quát của đường thẳng d là $1(x+3)+2(y-2)=0\Leftrightarrow x+2y-1=0$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 24

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta_1\colon \begin{cases}x=2+2t\\y=-1-t\end{cases}$ và $\Delta_2\colon x+3y+2=0$. Tọa độ giao điểm của Δ_1 và Δ_2 là

(A) $(4;-2)$. (B) $(5;-2)$. (C) $(-2;0)$. (D) $(2;-1)$.

Lời giải.

Xét hệ phương trình $\begin{cases}x=2+2t\\y=-1-t\\x+3y+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2+2t\\y=-1-t\\2+2t+3(-1-t)+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2+2t\\y=-1-t\\-t+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=-2.\\t=1\end{cases}$
Vậy tọa độ giao điểm của Δ_1 và Δ_2 là $(4;-2)$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 25

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba đường thẳng $\Delta\colon 2x-y-1=0$, $\Delta_1\colon x+y-5=0$ và $\Delta_2\colon x-my-11=0$. Tìm m để ba đường thẳng Δ, Δ_1 và Δ_2 đồng quy.

(A) $m=-4$. (B) $m=1$. (C) $m=-3$. (D) $m=3$.

Lời giải.

Tọa độ giao điểm M của Δ và Δ_1 là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}2x-y-1=0\\x+y-5=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}\Rightarrow M(2;3).$$

Ba đường thẳng Δ, Δ_1 và Δ_2 đồng quy khi $M\in\Delta_2\Leftrightarrow 2-3m-11=0\Leftrightarrow m=-3$.
Vậy với $m=-3$ thì ba đường thẳng trên đồng quy.
Chọn đáp án (C) □

Câu 26

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm m để góc hợp bởi hai đường thẳng $d_1\colon x-\sqrt{3}y+5=0$ và $d_2\colon mx+y+2=0$ bằng 30°.

(A) $m=0$. (B) $m=3$. (C) $m=0$, $m=-\sqrt{3}$. (D) $m=-\sqrt{3}$.

Lời giải.

Đường thẳng d_1 có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n_1} = (1; -\sqrt{3})$.
Đường thẳng d_2 có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n_2} = (m; 1)$.
Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng d_1 và d_2.
Ta có:

$$\cos\varphi = |\cos(\vec{n_1}, \vec{n_2})| = \frac{\left|m - \sqrt{3}\right|}{2 \cdot \sqrt{m^2+1}} = \cos 30^\circ \Leftrightarrow \frac{\left|m - \sqrt{3}\right|}{2 \cdot \sqrt{m^2+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m = 0 \\ m = -\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Vậy với $m = 0$, $m = -\sqrt{3}$ thì đường thẳng d_1 hợp với đường thẳng d_2 một góc 30°.
Chọn đáp án (C) □

Câu 27

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta\colon 4x + 3y - 1 = 0$. Tìm điểm M nằm trên trục Ox sao cho khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ bằng 3.

(A) $M(1;0)$, $M(3;0)$.
(B) $M(-4;0)$, $M(3;0)$.
(C) $M(4;0)$, $M\left(-\frac{7}{2};0\right)$.
(D) $M\left(\frac{7}{2};0\right)$, $M(-3;0)$.

Lời giải.

Do điểm M nằm trên trục Ox nên $M(m;0)$.
Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ là $d(M,\Delta) = \frac{|4m-1|}{5}$.
Theo bài ta có $\frac{|4m-1|}{5} = 3 \Leftrightarrow |4m-1| = 15 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m = 4 \\ m = -\frac{7}{2} \end{bmatrix}$.
Vậy điểm cần tìm là điểm $M(4;0)$ và $M\left(-\frac{7}{2};0\right)$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 28

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(0;2)$, $B(1;2)$, $C(3;6)$. Gọi d là đường phân giác trong của tam giác ABC tại góc A. Hãy xác định phương trình của đường thẳng d

(A) $x - 2y - 4 = 0$.
(B) $x - 2y + 4 = 0$ hoặc $2x + y - 2 = 0$.
(C) $2x + y - 2 = 0$.
(D) $x - 2y + 4 = 0$.

Lời giải.

Đường thẳng AB qua $A(0;2)$ và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (1;0)$.
Suy ra, vectơ pháp tuyến của đường thẳng AB là $\vec{n}_{AB} = (0;1)$.
Phương trình đường thẳng AB là $y - 2 = 0$.
Đường thẳng AC qua $A(0;2)$ và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AC} = (3;4)$. Suy ra, vectơ pháp tuyến của đường thẳng AC là $\vec{n}_{AC} = (4;-3)$.
Phương trình đường thẳng AC là $4x - 3y + 6 = 0$.
Các đường phân giác góc A có phương trình là

$$\frac{|y-2|}{\sqrt{1^2}} = \frac{|4x-3y+6|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} \Leftrightarrow 5|y-2| = |4x-3y+6| \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x - 2y + 4 = 0 & (d_1) \\ 2x + y - 2 = 0 & (d_2) \end{bmatrix}$$

Ta có $(x_B - 2y_B + 4)(x_C - 2y_C + 4) = (1 - 2\cdot 2 + 4)(3 - 2\cdot 6 + 4) = -5 < 0$.

Suy ra B, C nằm khác phía của đường thẳng d_1.
Vậy phương trình đường phân giác trong của tam giác ABC tại góc A là $x-2y+4=0$
Chọn đáp án (D) □

Câu 29

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, đường thẳng $\Delta\colon ax+by-3=0\,(a^2+b^2\neq 0)$ đi qua điểm $N(1;1)$ và cách điểm $M(2;3)$ một khoảng bằng $\sqrt{5}$ có phương trình là
(A) $x+2y-3=0$. (B) $2x+y-3=0$. (C) $2x-y-3=0$. (D) $x-2y-3=0$.

Lời giải.

Đường thẳng $\Delta\colon ax+by-3=0$ đi qua điểm $N(1;1) \Leftrightarrow a+b-3=0 \Rightarrow b=3-a$.
Suy ra $\Delta\colon ax+(3-a)y-3=0$.
Khi đó

$$d(M,\Delta)=\sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|2a+(3-a)\cdot 3-3|}{\sqrt{a^2+(3-a)^2}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow a^2-2a+1=0 \Leftrightarrow a=1 \Rightarrow b=2.$$

Vậy $\Delta\colon x+2y-3=0$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 30

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, đường tròn tâm $I(-1;2)$ và đi qua điểm $M(2;1)$ có phương trình là
(A) $x^2+y^2+2x-4y-3=0$. (B) $x^2+y^2+2x-4y-5=0$.
(C) $x^2+y^2+2x+4y-5=0$. (D) $x^2+y^2-2x-4y-5=0$.

Lời giải.

Đường tròn tâm $I(-1;2)$ và đi qua điểm $M(2;1)$ thì có bán kính là $R=IM=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$.
Khi đó, đường tròn có phương trình là

$$(x+1)^2+(y-2)^2=1 \Leftrightarrow x^2+y^2+2x-4y-5=0.$$

Chọn đáp án (B) □

Câu 31

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C)\colon x^2+y^2+2x-6y+5=0$. Phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $d\colon x+2y-15=0$ là
(A) $x+2y-1=0$ và $x+2y-3=0$. (B) $x+2y=0$ và $x+2y-10=0$.
(C) $x-2y-1=0$ và $x-2y-3=0$. (D) $x-2y=0$ và $x+2y+10=0$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(-1;3)$ và bán kính $R=\sqrt{1+9-5}=\sqrt{5}$.
Tiếp tuyến $\Delta \parallel d \Rightarrow$ phương trình $\Delta\colon x+2y+m=0;\ m\neq -15$.
Δ là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi

$$d(I,\Delta)=R \Leftrightarrow \frac{|-1+6+m|}{\sqrt{1+4}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow |m+5|=5. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+5=5 \\ m+5=-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-10 \\ m=10 \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện, ta có phương trình tiếp tuyến của (C) là $x+2y=0$ và $x+2y-10=0$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 32

Tìm phương trình chính tắc của elip đi qua điểm $M(2;0)$ là có tâm sai bằng $\frac{1}{2}$

(A) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$. (B) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$. (C) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$. (D) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

Lời giải.

Giả sử phương trình elip có dạng $(E)\colon \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$.

(E) đi qua điểm $M(2;0) \Rightarrow \frac{4}{a^2} \Rightarrow a=2$.

(E) có tâm sai bằng $\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{1}{2} \Rightarrow c=1$.

Ta có: $b^2=a^2-c^2=3$.

Vậy phương trình elip cần tìm là $(E)\colon \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

Chọn đáp án (D) □

Câu 33

Lập phương trình chính tắc của hypebol (H) biết độ dài trục thực bằng 4, tiêu cự bằng 12.

(A) $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{4}=1$. (B) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{32}=1$. (C) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{32}=1$. (D) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{32}=1$.

Lời giải.

(H) có độ dài trục thực bằng $4 \Rightarrow 2a=4 \Rightarrow a=2$.

(H) có tiêu cự bằng $12 \Rightarrow 2c=12 \Rightarrow c=6$.

Ta có $b^2=c^2-a^2=36-4=32$.

Vậy phương trình chính tắc của hypebol cần tìm là $(H)\colon \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{32}=1$

Chọn đáp án (C) □

Câu 34

Phương trình nào sau đây là phương trình chính tắc của parabol có khoảng cách từ đỉnh tới tiêu điểm bằng 2022?

(A) $y^2=4044x$. (B) $y=4044x^2$. (C) $y^2=2022x$. (D) $y=2022x^2$.

Lời giải.

Gọi phương trình chính tắc của parabol cần tìm có dạng $y^2=px$ với $p>0$.

Khoảng cách giữa tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ và đỉnh $O(0;0)$ là 2022 nên $\frac{p}{2}=2022 \Rightarrow p=4044$.

Vậy parabol có phương trình chính tắc là $y^2=4044x$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 35

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, đường thẳng đi qua điểm $M(3;-1)$ và vuông góc với phân giác của góc phần tư thứ hai có phương trình là

(A) $x+y-4=-$. (B) $x-y-4=0$. (C) $x+y+4=0$. (D) $x-y+4=0$.

Lời giải.

Ta có góc phần tư thứ hai là đường thẳng d có phương trình $x+y=0$.
Gọi Δ là đường thẳng vuông góc với d và đi qua điểm $M(3;-1)$.
Vì $\Delta \perp d$ nên $\Delta\colon x-y+c=0$.
Mà $M \in \Delta \Rightarrow 3+1+c=0 \Leftrightarrow c=-4$.
Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình là: $x-y-4=0$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 36

Cho H là trực tâm tam giác ABC, phương trình cạnh $AB\colon 7x-y+4=0$ và phương trình hai đường cao của tam giác là $BH\colon 2x+y-4=0$; $AH\colon x-y-2=0$. Viết phương trình đường cao CH của tam giác ABC.

(A) $7x-y=0$. (B) $x-7y-2=0$. (C) $x+7y-2=0$. (D) $7x+y-2=0$.

Lời giải.

Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}2x+y-4=0\\x-y-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=0\end{cases}$.
Suy ra $H(2;0)$.
Vì $CH \perp AB$ mà $AB\colon 7x-y+4=0$ nên đường thẳng CH có 1 vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;7)$.
Phương trình đường cao CH là $1(x-2)+7(y-0)=0 \Leftrightarrow x=7y-2=0$.
Chọn đáp án (C) □

Câu 37

Viết phương trình đường thẳng d đi qua $A(-2;0)$ và tạo với đường thẳng $\Delta\colon x+3y-3=0$ một góc 45°.

(A) $2x+y+4=0; x-2y+2=0$.
(B) $\left(6+5\sqrt{3}\right)x+3y+2\left(6+5\sqrt{3}\right)=0; \left(6-5\sqrt{3}\right)x+3y+2\left(6-5\sqrt{3}\right)=0$.
(C) $2x-y+4=0; x+2y+2=0$.
(D) $2x-y+4=0; x-2y+2=0$.

Lời giải.

Gọi $\vec{n}=(A;B), \left(A^2+B^2\neq 0\right)$ là một vectơ pháp tuyến của d.
Phương trình đường thẳng d có dạng $A(x+2)+By=0$.
Từ giả thiết ta có:

$$\cos(\Delta,d)=\frac{|A+3B|}{\sqrt{A^2+b^2}\cdot\sqrt{10}}=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}. \Leftrightarrow 2A^2-3AB-2B^2=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}A=2B\\B=-2A\end{bmatrix}.$$

- Với $B=-2A$: Chọn $A=1$, $B=2$ ta được phương trình đường thẳng d là $x-2y+2=0$.
- Với $A=2B$: Chọn $A=2$, $B=1$ ta được phương trình đường thẳng d là $2x+y+4=0$.

Vậy có 2 đường thẳng thỏa mãn đề bài là $2x+y+4=0; x-2y+2=0$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 38

Trong mặt phẳng tạo độ Oxy, lập phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(1;2)$ và cách đều hai điểm $M(5;1); N(3;-1)$

(A) $d\colon x-y+1=0; d\colon 2x+3y-8=0$.
(B) $d\colon x-y-1=0; d\colon 2x+3y+8=0$.
(C) $d\colon x-y-1=0; d\colon 2x+3y-8=0$.
(D) $d\colon 2x+3y+8=0$.

Lời giải.

Gọi vectơ pháp tuyến của đường thẳng d là $\vec{n} = (a;b)$. Điều kiện: $a^2+b^2 \neq 0$.
Khi đó đường thẳng d đi qua $A(1;2)$ và nhận vectơ pháp tuyến là $\vec{n}$ có dạng

$$a(x-1)+b(y-2)=0 \Leftrightarrow d\colon ax+by-a-2b=0.$$

Vì đường thẳng d cách đều hai điểm $M(5;1)$ và $N(3;-1)$

$$\Leftrightarrow d(M;d)=d(N;d) \Leftrightarrow \frac{|5a+b-a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|3a-b-a-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$\Leftrightarrow |4a-b|=|2a-3b| \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&4a-b=2a-3b\\&4a-b=3b-2a\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&a=-b\\&3a=2b\end{aligned}\right.$$

Với $a=-b$. Ta chọn $\begin{cases}a=1\\b=-1\end{cases} \Rightarrow d\colon x-y+1=0.$

Với $3a=2b$. Ta chọn $\begin{cases}a=2\\b=3\end{cases} \Rightarrow d\colon 2x+3y-8=0.$

Chọn đáp án (A) □

Câu 39

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(2;1)$, $B(4;3)$ và $C(6;7)$. Viết phương trình đường tròn có tâm là trọng tâm G của tam giác ABC và tiếp xúc với đường thẳng BC.

(A) $(x-4)^2+\left(y-\frac{11}{3}\right)^2=\frac{4}{45}$.
(B) $(x+4)^2+\left(y+\frac{11}{3}\right)^2=\frac{2\sqrt{5}}{15}$.
(C) $(x+4)^2+\left(y+\frac{11}{3}\right)^2=\frac{4}{45}$.
(D) $(x-4)^2+\left(y-\frac{11}{3}\right)^2=\frac{2\sqrt{5}}{15}$.

Lời giải.

Chọn một vectơ chỉ phương của đường thẳng BC là: $\vec{u}=(1;2)$. Khi đó, đường thẳng BC có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;-1)$. Phương trình tổng quát của đường thẳng BC đi qua $B(4;3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-1)$ là $2(x-4)-1(y-3)=0 \Leftrightarrow 2x-y-5=0$.
Gọi đường tròn cần tìm là (C).

G là trọng tâm tam giác ABC suy ra $\begin{cases}x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=4\\y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=\dfrac{11}{3}\end{cases} \Rightarrow G\left(4;\frac{11}{3}\right).$

Đường tròn (C) tiếp xúc với đường thẳng BC nên có bán kính là

$$R=d(G,BC)=\frac{2\cdot 4-\frac{11}{3}-5}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{15}.$$

Phương trình đường tròn (C) là $(x-4)^2+\left(y-\frac{11}{3}\right)^2=\frac{4}{45}$.

Chọn đáp án (A) □

Câu 40

Trong hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-8x+4y-5=0$, viết phương trình tiếp tuyến có hệ số góc âm và tiếp tuyến tạo với các trục tọa độ một tam giác cân.

(A) $x+y+5\sqrt{2}-6=0; x+y-5\sqrt{2}-6=0$.
(B) $x+y+5\sqrt{2}+2=0; x+y-5\sqrt{2}-2=0$.
(C) $x-y+5\sqrt{2}-6=0; x-y-5\sqrt{2}-6=0$.
(D) $x+y-5\sqrt{2}-2=0; x+y+5\sqrt{2}-2=0$.

Lời giải.

Đường tròn (C) có tâm $I(4;-2)$, bán kính $R=5$.

Đường thẳng d tạo với các trục tọa độ một tam giác cân thì hệ số góc của d là $\hoac{k=1 \quad (l)\\ k=-1 \quad (tm)}$.

Khi $k=-1$ thì d có dạng $y=-x+m \Leftrightarrow x+y-m=0$.

d là tiếp tuyến của $(C) \Leftrightarrow d(I,d)=R \Leftrightarrow \dfrac{|4-2-m|}{\sqrt{2}}=5 \Leftrightarrow |m-2|=5\sqrt{2} \Leftrightarrow \hoac{m=5\sqrt{2}+2\\ m=-5\sqrt{2}+2}$

nên d có phương trình $x+y-5\sqrt{2}-2=0; x+y+5\sqrt{2}-2=0$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 41

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, lập phương trình chính tắc của elip (E) biết (E) đi qua điểm $M\left(\dfrac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}};\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ và tam giác MF_1F_2 vuông tại M với F_1, F_2 là tiêu điểm của (E).

(A) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{1}=1$. (B) $\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{1}=1$. (C) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$. (D) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{1}=0$.

Lời giải.

Phương trình chính tắc của elip cần tìm là $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$.

(E) đi qua điểm $M\left(\dfrac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{2}};\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ nên $\dfrac{63}{8a^2}+\dfrac{1}{8b^2}=1$.

Vì tam giác MF_1F_2 vuông tại M nên $F_1F_2=20M \Rightarrow 2c=4 \Rightarrow c=2\sqrt{2} \Rightarrow a^2-b^2=8$.

Vậy ta có $\hoac{\dfrac{63}{8a^2}+\dfrac{1}{8b^2}=1 \quad (1)\\ a^2-b^2=8 \quad (2)}$.

Từ (2) : $a^2=8+b^2$ thay vào (1) có

$$\frac{63}{8(8+b^2)}+\frac{1}{8b^2}=1 \Leftrightarrow 63b^2+8+b^2=64b^2+8b^2 \Leftrightarrow 8b^4-8=0 \Leftrightarrow \hoac{b^2=1 \quad (tm)\\ b^2=-1}$$

Với $b^2-1 \Rightarrow a^2=9$ nên phương trình chính tắc cần tìm là $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{1}=1$

Chọn đáp án (A) □

Câu 42

Cho elip (E) có tâm sai $e=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ và hình chữ nhật cơ sở của elip cod chu vi bằng 40. Tổng các khoảng cách từ mỗi điểm nằm trên (E) đến hai tiêu điểm có giá trị bằng bao nhiêu?

(A) 12. (B) 6. (C) 8. (D) 10.

Lời giải.

Elip có dạng phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b>0)$.
Gọi F_1 và F_2 là hai tiêu điểm của (E). Điểm $M\in(E)\Leftrightarrow MF_1+MF_2=2a$.
Ta có: $e=\frac{c}{a}\frac{\sqrt{5}}{3}\Rightarrow\left(\frac{c}{a}\right)^2=\frac{5}{9}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{2}{3}$ (do $a>0$, b>0).
Hình chữ nhật cơ sở của elip có hai cạnh là $2a$, $2b$ nên ta có: $2(2a+2b)=40\Rightarrow a+b=10$.
Ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases}\frac{b}{a}=\frac{2}{3}\\ a+b=10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=6\\ b=4\end{cases}$.
Vậy tổng các khoảng cách từ mỗi điểm M nằm trên (E) đến hai tiêu điểm có giá trị là $MF_1+MF_2=2a=12$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 43

Phương trình chính tắc của hypebol (H) đi qua điểm $N(-6;3)$ và có góc giữa hai đường tiệm cận bằng 60° là

(A) $(H_1):\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1;(H_2):\frac{x^2}{33}-\frac{y^2}{99}=1$.
(B) $(H_1):\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=-1;(H_2):\frac{x^2}{33}-\frac{y^2}{99}=-1$.
(C) $(H_1):\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1;(H_2):\frac{x^2}{99}-\frac{y^2}{33}=1$.
(D) $(H_1):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{3}=1;(H_2):\frac{x^2}{99}+\frac{y^2}{33}=1$.

Lời giải.

Phương trình các đường tiệm cận của (H) là $y=\pm\frac{b}{a}x$.
Do góc giữa hai đường tiệm cận bằng 60° và hia đường tiệm cận đối xứng nhau qua trục Ox, nên có hai trường hợp:

- Góc giữa mỗi tiệm cận và trục hoành bằng 30°, suy ra $\frac{b}{a}=\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$ (1).
- Góc giữa mỗi tiệm cận và trục hoành bằng 60°, suy ra $\frac{b}{a}=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$ (2).

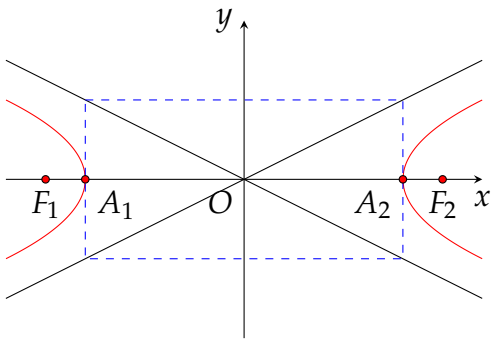
Vì $N\in(H)\Rightarrow\frac{36}{a^2}-\frac{9}{b^2}=1$ (3)
Từ (1) và (3) suy ra $a^2=9$, $b^2=3$. Ta được hypebol $(H_1):\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$.
Từ (2) và (3), suy ra $a^2=33$, $b^2=99$. Ta được hypebol $(H_2):\frac{x^2}{33}-\frac{y^2}{99}=1$.
Chọn đáp án (A) □

Câu 44

Cho hypebol có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=1$. Tìm điểm M trên hypebol để khoảng cách từ M đến tiêu điểm $F_2(c;0)$ nhỏ nhất

(A) $M(4;0)$. (B) $M\left(\frac{4\sqrt{26}}{5};1\right)$. (C) $M\left(\frac{4\sqrt{26}}{5};-1\right)$. (D) M$(-4;0)$.

Lời giải.

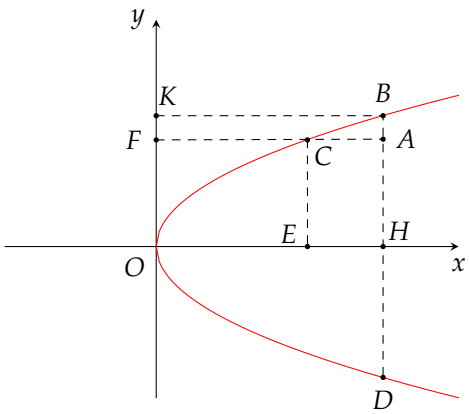


Nếu $M\left(x_0;y_0\right)$ thuộc nhánh chứa đỉnh $A_2(a;0)$ thì $x_0>a$ nên $a-\dfrac{c}{a}x_0<0$ (để ý rằng $c>a$).
Do đó, $MF_2=\left|a-\dfrac{c}{a}x_0\right|=\dfrac{c}{a}x_0-a\geq\dfrac{c}{a}a-a\geq c-a\Rightarrow MF_2\geq c-a$.
Dâu đẳng thức xảy ra khi $x_0=a$, tức là khi $M\left(x_0;y_0\right)$ trùng đỉnh $A_2(a;0)$.
Nếu $M\left(x_0;y_0\right)$ thuộc thánh chứa đỉnh $A_1(-a;0)$ thì $x_0\leq -a$.
Do đó, $MF_2=\left|a-\dfrac{c}{a}x_0\right|=a-\dfrac{c}{a}x_0\geq a-\dfrac{c}{a}(-a)\geq a+c\Rightarrow MF_2\geq a+c$.
Vậy điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ trên hypebol để khoảng cách từ $M\left(x_0;y_0\right)$ đến tiêu điểm $F_2(c;)$ nhỏ nhất khi M trùng đỉnh $A_1(-a;0)$ và khi đó khoảng cách nhỏ nhất bằng $c-a$.
Từ phương trình hypebol ta có $a=4$. Vậy tọa độ điểm M cần tìm là $(-4;0)$.
Chọn đáp án (D) □

Câu 45

Cổng của một công viên có dạng một parabol. Để đo chiều cao h của cổng, một người đo khoảng cách giữa hai chân cổng được 8m, người đó thấy nếu đứng cách chân cổng 0,5m thì đầu chạm cổng. Cho biết người này cao 1,6m, chiều cao của cổng gần nhất với giá trị
(A) 6,66m. (B) 6,68m. (C) 9,6m. (D) 6,83m.

Lời giải.



Gọi phương trình parabol (P) là $y^2=2px$, $(p>0)$.
Ta có chiều cao của cổng là $OH=BK=h\,(h>0)$.
Bề rộng của cổng là $BD=8\Rightarrow BH=4$. Vậy điểm B có tọa độ là $(h;4)$.
Chiều cao của người đó là $AC=1{,}6$ và khoảng cách từ chân người đo đến chân cổng là $BA=0{,}5$.
Suy ra,

$$FC=FA-AC=h-1{,}6, EC=BH-AB=4-0{,}5=3{,}5.$$

Vậy điểm C có tọa độ là $(h-1{,}6;3{,}5)$.
Ta có hai điểm B và C nằm trên parabol nên thay tọa độ của B và C vào phương trình (P), ta được:

$$\begin{cases} 4^2 = 2ph \\ 3{,}5^2 = 2p(h-1{,}6) \end{cases} \Rightarrow 2p = \frac{4^2}{h} \Leftrightarrow 3{,}5^2 = \frac{4^2}{h}(h-1{,}6) \Leftrightarrow 3{,}5^2 = 4^2 - \frac{4^2 \cdot 1{,}6}{h} \Rightarrow h = \frac{1{,}6 \cdot 4^2}{4^2 - 3{,}5^2} \approx 6{,}83m.$$

Vậy cổng công viên đó cao khoảng 6,83m.
Chọn đáp án (D) □

Câu 46

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A với $BC = 4\sqrt{2}$. Các đường thẳng AB và AC lần lượt đi qua các điểm $M\left(1;-\frac{5}{3}\right)$ và $N\left(0;\frac{18}{7}\right)$. Biết đường cao AH có phương trình $x+y-2=0$ và B có hoành độ dương. Đường thẳng BC có phương trình là

(A) $x-y+14=0$.
(B) $x-y-6=0$.
(C) $7x+3y-2=0$.
(D) $x-y-6=0$ và $x-y+14=0$.

Lời giải.

Gọi N' đối xứng với $N\left(0;\frac{18}{7}\right)$ qua AH, suy ra $N' \in AB$.

NN' đi qua $N\left(0;\frac{18}{7}\right)$ và vuông góc với AH nên có phương trình $x-y+\frac{18}{7}=0$.
Khi đó tọa độ giao điểm I của NN' và AH là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x-y+\frac{18}{7}=0 \\ x+y-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{2}{7} \\ y=\frac{16}{7} \end{cases} \Rightarrow I\left(-\frac{2}{7};\frac{16}{7}\right).$$

Do I là trung điểm của NN' suy ra $N'\left(-\frac{4}{7};2\right)$.

Khi đó AB đi qua $M\left(1;-\frac{5}{3}\right)$ và $N'\left(-\frac{4}{7};2\right)$ nên có phương trình $7x+3y-2=0$.

Gọi $B(-1+3t;3-7t) \in AB$ với $t > \frac{1}{3}$.
Khi đó ta có:

$$d(B,AH) = \frac{BC}{2} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|-1+3t+3-7t-2|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-1 \end{array}\right.$$

Do $t > \frac{1}{3}$ nên $t=1$ suy ra $B(2;-4)$.
Đường thẳng BC đi qua $B(2;-4)$ và vuông góc với AH nên có phương trình: $x-y-6=0$.
Chọn đáp án (B) □

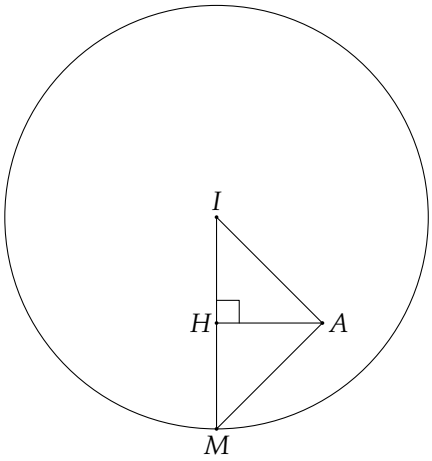
Câu 47

Một bánh xe đạp hình tròn khi gắn trên hệ trục tọa độ Oxy có phương trình (C): $(x+1)^2+(y+2)^2=16$. Người ta thấy một hòn sỏi M bị kẹt trên bánh xe và một điểm A nằm trên đĩa xe cùng với tâm của đường tròn tạo thành một tam giác cân tại A có diện tích bằng 4. Khi bánh xe quay tròn thì điểm A sẽ di chuyển trên một đường tròn có phương trình là

(A) $(x-1)^2+(y-2)^2=4$.
(B) $(x+1)^2+(y+2)^2=8$.

(C) $(x+1)^2+(y+2)^2=2$. (D) $(x+1)^2+(y+2)^2=2\sqrt{2}$.

Lời giải.



Đường tròn (C): $(x+1)^2+(y+2)^2=16$ có tâm $I(-1;-2)$ và bán kính $R=4$.
M nằm trên đường tròn nên $IM=4$.
Gọi H là trung điểm của $IM \Rightarrow IH=\dfrac{1}{2}IM=2$.
Tam giác AIM cân tại A nên $AH \perp IM$.
$S_{IAM}=\dfrac{1}{2}AH\cdot IM \Rightarrow AH=\dfrac{4\cdot 2}{4}=2$.
$IA^2=IH^2+AH^2=2^2+2^2=8 \Rightarrow IA=2\sqrt{2}$.
Ta thấy điểm A cách điểm I một khoảng không đổi nên quỹ tích điểm A là đường tròn tâm I bán kính $2\sqrt{2}$.
Do đó, điểm A di chuyển trên đường tròn có phương trình là $(x+1)^2+(y+2)^2=8$.
Chọn đáp án (B) □

Câu 48

Các hành tinh và các sao chổi khi chuyển động xung quanh mặt trời có quỹ đạo là một đường elip trong đó tâm mặt trời là một tiêu điểm. Điểm gần mặt trời nhất gọi là điểm cận nhật, điểm xa mặt trời nhất gọi là điểm viễn nhật. Trái đất chuyển động xung quanh mặt trời theo quỹ đạo là một đường elip có độ dài nửa trục lớn bằng 93.000.000 dặm. Tỉ số khoảng cách giữa điểm cận nhật và điểm viễn nhật đến mặt trời là $\dfrac{59}{61}$. Tính khoảng cách từ trái đất đến mặt trời khi trái đất ở điểm cận nhật. Lấy giá trị gần đúng.

(A) Xấp xỉ 91.455.000 dặm. (B) Xấp xỉ 91.000.000 dặm.
(C) Xấp xỉ 91.450.000 dặm. (D) Xấp xỉ 91.555.000 dặm.

Lời giải.

Ta có $A=AB\cap AC \Rightarrow$ Tọa độ A. Ta có $a=93.000.000$ và

$$\frac{a-c}{a+c}=\frac{59}{61}\Leftrightarrow 61a-61c=59a+59c\Leftrightarrow c=\frac{a}{60}=\frac{93.000.000}{60}=1.550.000$$

Suy ra khoảng cách từ trái đất đến mặt trời khi trái đất ở điểm cận nhật là: 91.450.000
Chọn đáp án (C) □

Câu 49

Một sao chổi đi qua hệ Mặt Trời theo quỹ đạo là một nhánh hypebol nhận tâm Trái Đất là một tiêu điểm, khoảng cách gần nhất từ sao chổi này đến tâm Trái Đất là 3.10^8 km và tâm sai của quỹ đạo hypebol là 3,6. Hãy lập phương trình chính tắc của hypebol chứa quỹ đạo, với 1 đơn vị đo trên mặt phẳng toạ độ ứng với trên thực tế.

(A) $\dfrac{x^2}{40{,}2}-\dfrac{y^2}{56{,}8}=1$. (B) $\dfrac{x^2}{60{,}84}-\dfrac{y^2}{45{,}8}=1$. (C) $\dfrac{x^2}{60{,}84}-\dfrac{y^2}{55{,}8}=1$. (D) $\dfrac{x^2}{20{,}84}-\dfrac{y^2}{43{,}8}=1$.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ sao cho tâm Trái Đất trùng với tiêu điểm F_1 của hypebol.

Gọi phương trình chính tắc của hypebol là $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0, b>0)$.

Theo đề bài, ta có:

- Khoảng cách gần nhất từ sao chổi này đến tâm Mặt Trời là 3.10^8 km $\Rightarrow c-a=3$.
- Tâm sai của quỹ đạo hypebol là 3,6.
  $\Rightarrow \dfrac{c}{a}=3{,}6 \Rightarrow \dfrac{a+3}{3}=3{,}6 \Rightarrow a=7{,}8 \Rightarrow a^2=60{,}84$.

Vậy phương trình chính tắc của hypebol đã cho là $\dfrac{x^2}{60{,}84}-\dfrac{y^2}{55{,}8}=1$.

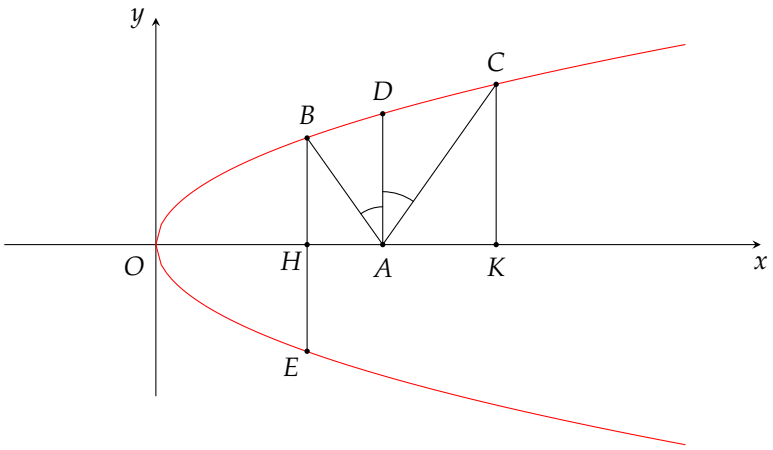
Chọn đáp án (C) □

Câu 50

Trong mặt phẳng Oxy, cho parabol $(P)\colon y^2=2px$ và điểm $A(a;0)$, $(a>0)$. Đường thẳng qua A vuông góc với Ox cắt (P) tại D; gọi B, C là hai điểm bất kì thuộc nhánh chứa D của (P) sao cho $\widehat{DAB}=\widehat{DAC}$. Khi đó tích các khoảng cách từ B và C đến trục hoành bằng

(A) $4p^2$. (B) a^2. (C) $2pa$. (D) pa.

Lời giải.



Gọi (E) là điểm đối xứng của B qua Ox, ta có E, A, C thẳng hàng.
Khi đó phương trình đường thẳng EC có dạng $y=k(x-a)$, $k\neq 0$.
Suy ra hoành độ điểm E, C là nghiệm của phương trình

$$k^2(x-a)^2=2px \Leftrightarrow k^2x^2-\left(2ak^2+2p\right)x+k^2a^2=0.$$

Áp dụng định lí Vi-ét ta có: $x_E x_C = \dfrac{k^2a^2}{k^2} = a^2 = x_A^2 = x_D^2$.

Suy ra $\dfrac{y_E^2}{2p} \cdot \dfrac{y_C^2}{2p} = \left(\dfrac{y_D^2}{2p}\right)^2 \Rightarrow y_E \cdot y_C = y_D^2 = 2pa$.

Vậy tích khoảng cách từ B và C đến trục hoành bằng $2pa$.

Chọn đáp án Ⓒ □