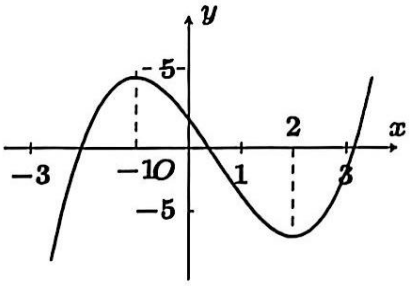
SỞ GD - ĐT TP. ĐÀ NẴNG
TRƯỜNG THPT CHUYÊN
NGUYỄN BỈNH KHIÊM

(Đề có 04 trang)

KIỂM TRA GIỮA HỌC KỲ I NĂM HỌC 2026-2027
MÔN: TOÁN 12 - Lớp Chuyên Toán
Thời gian: 90 phút *(không kể thời gian phát đề)*

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. *Học sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.*

Câu 1. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; -1)$. **B.** $(-\infty; 2)$. **C.** $(-1; 2)$. **D.** $(2; +\infty)$.

Câu 2. Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = x^4 - 2x^2 + 1$. **B.** $y = -x^3 - 3x + 2$.

C. $y = -x^3 + 3x + 2$. **D.** $y = x^3 - 3x + 2$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x) = (x-1)^2(x^2 - 5x + 6)$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = \ln x + \dfrac{4}{x}$ với $x > 0$. Giá trị cực tiểu của hàm số bằng

A. $\ln 4$. **B.** $1 + \ln 4$. **C.** $4 + \ln 4$. **D.** 4.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	-1	↗	$+\infty$

Điểm cực đại của đồ thị hàm số là

A. $(1; -1)$. **B.** $(-2; -1)$. **C.** $(1; 4)$. **D.** $(-2; 4)$.

Câu 6. Đồ thị hàm số nào sau đây có đúng 2 đường tiệm cận?

A. $y = \dfrac{x^2 + x}{2}$. **B.** $y = x^3 - 2x^2 - 1$.

C. $y = \dfrac{1 - x}{x + 2}$. **D.** $y = x + 1$.

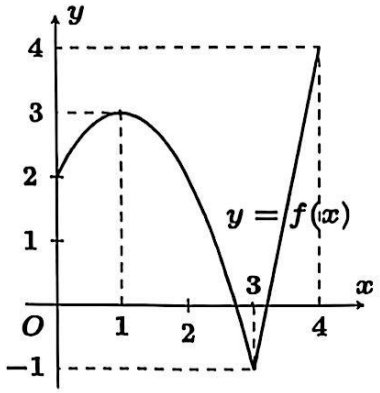
Câu 7. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x + 2025}{x - 1}$ là

A. $y = -1$. **B.** $x = 2025$. **C.** $x = 1$. **D.** $y = 2$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và liên tục trên từng khoảng xác định. Biết rằng $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$. Tổng số đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[0; 4]$ và có đồ thị như hình vẽ.



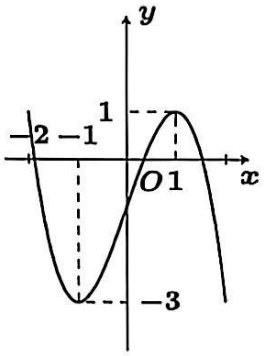
Tổng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 3]$ bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 10. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng

A. 4. **B.** 20. **C.** -16. **D.** 0.

Câu 11. Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng đường cong như hình bên?



A. $y = -x^3 + 3x - 1$.

B. $y = -x^3 + 3x + 1$.

C. $y = x^3 - 3x - 1$.

D. $y = \dfrac{x + 2}{x - 1}$.

Câu 12. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + x$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là

A. $y = 4x$. **B.** $y = 4x - 2$. **C.** $y = -4x - 2$. **D.** $y = -4x + 1$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. *Học sinh trả lời từ câu 13 đến câu 14. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.*

Câu 13. Cho hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$ có đồ thị là (C).

a) Trên đoạn $[-3; 5]$, hàm số đã cho có giá trị lớn nhất bằng 157.

b) Gọi A, B là các điểm cực trị của đồ thị (C), khi đó $AB = 2\sqrt{65}$.

c) Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -3)$ và $(1; +\infty)$.

d) Hàm số $g(x) = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	0	$-$		$+$	
$f(x)$	2	↘		↗	5	↘		↗	$+\infty$
			1				$-\infty$		-2

a) Đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận ngang.

b) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x)=2f(x)-2025$ trên $(-\infty;0]$ bằng -2023.

d) Hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. *Học sinh trả lời từ câu 15 đến câu 18.*

Câu 15. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+5}{2x-1}$. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho có dạng $y=ax+b$, giá trị của biểu thức $T=2025a-2026b$ bằng bao nhiêu?

KQ: ☐

Câu 16. Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hoá bằng hàm số $N(t)=-t^3+18t^2, 0\le t\le 18$, trong đó N là số người bị nhiễm bệnh (đơn vị là trăm người) và t là thời gian (tuần). Gọi $(a;b)$ là khoảng thời gian lâu nhất mà số người bị nhiễm bệnh tăng lên. Giá trị của biểu thức $P=a^2-2b^2$ bằng bao nhiêu?

KQ: ☐

Câu 17. Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số $f(t)=\dfrac{5000}{1+5e^{-t}}, t\ge 0$, trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi tại thời điểm tốc độ bán hàng lớn nhất kể từ khi phát hành, doanh số của sản phẩm đó là bao nhiêu?

KQ: ☐

Câu 18. Một chiếc cổng hình Parabol có chiều cao 5 m, khoảng cách giữa hai chân cổng là $2\sqrt{5}$ m. Để vận chuyển thùng hàng hình hộp chữ nhật qua cổng, người ta dùng một xe kéo có chiều cao 1 m. Biết rằng mặt cắt của thùng hàng qua cổng là hình chữ nhật, hỏi diện tích hình chữ nhật đó lớn nhất là bao nhiêu m^2 để xe chở thùng hàng có thể đi qua được cổng (*kết quả làm tròn đến hàng đơn vị*).

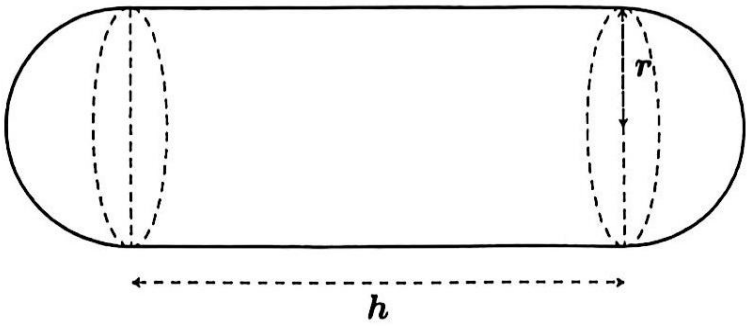
KQ: ☐

PHẦN IV. Tự luận. *Học sinh trình bày lời giải từ câu 19 đến câu 21.*

Câu 19. Tìm các hệ số a, b, c biết đồ thị hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ đi qua điểm $M(0;2)$ và có điểm cực trị là $N(-1;0)$.

Câu 20. Một bể chứa dầu được thiết kế với hai đầu là hai nửa hình cầu có bán kính r m và phần thân ở giữa là một hình trụ có bán kính đáy r m và chiều cao h m (tham khảo hình vẽ dưới đây). Toàn bộ bể chứa được yêu cầu có thể tích là 9π m^3 và để đảm

bảo tính ổn định trong quá trình vận chuyển, chiều cao h của phần hình trụ phải thỏa mãn điều kiện $h \geq 2$ (m). Chi phí để làm bể phụ thuộc vào diện tích toàn bộ bề mặt ngoài của bể (bao gồm mặt xung quanh của phần hình trụ và bề mặt của hai nửa hình cầu). Hãy xác định bán kính r m để chi phí làm bể là nhỏ nhất.



Câu 21. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i) $f(2) = 2$;

ii) $f(mn) = f(m) \cdot f(n), \forall m, n \in \mathbb{Z}^+$;

iii) $f(m) < f(n), \forall m < n$.

—— HẾT ——

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI THAM KHẢO

Được thực hiện bởi AI & TOANMATH.com

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN.

Câu 1. Từ đồ thị, hàm số đạt cực đại tại $x=-1$, đạt cực tiểu tại $x=2$ và đồ thị đi xuống trên khoảng $(-1;2)$. Vậy hàm số nghịch biến trên $(-1;2)$. Chọn C.

Câu 2. Xét $y=-x^3-3x+2$ có $y'=-3x^2-3<0, \forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Chọn B.

Câu 3. Ta có $f'(x)=(x-1)^2(x-2)(x-3)$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$ (nghiệm kép), $x=2$, $x=3$. $f'(x)$ chỉ đổi dấu khi x đi qua 2 và 3 nên hàm số có 2 điểm cực trị. Chọn C.

Câu 4. Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{4}{x^2}=\dfrac{x-4}{x^2}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=4$. $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua 4 nên giá trị cực tiểu là $f(4)=\ln 4+1$. Chọn B.

Câu 5. Hàm số đạt cực đại tại $x=-2$ và $y_{CĐ}=4$. Điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(-2;4)$. Chọn D.

Câu 6. Xét $y=\dfrac{1-x}{x+2}=-1+\dfrac{3}{x+2}$. Ta có $\lim\limits_{x\to -2^+} y=+\infty$ nên $x=-2$ là tiệm cận đứng; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=-1$ nên $y=-1$ là tiệm cận ngang. Vậy đồ thị hàm số này có đúng hai đường tiệm cận $x=-2$ và $y=-1$. Chọn C.

Câu 7. Ta có $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2x+2025}{x-1}=+\infty$ nên tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x=1$. Chọn C.

Câu 8. Vì $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2$ nên đồ thị có hai tiệm cận ngang $y=2$, $y=-2$. Vì $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$ nên $x=1$ là tiệm cận đứng. Tổng số đường tiệm cận đứng và ngang là 3. Chọn B.

Câu 9. Từ đồ thị, trên đoạn $[0;3]$ ta có $\max\limits_{[0;3]} f(x)=f(1)=3$, $\min\limits_{[0;3]} f(x)=f(3)=-1$. Tổng bằng $3+(-1)=2$. Chọn D.

Câu 10. Ta có $f'(x)=3x^2-3$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm 1\in[-3;3]$. $f(-3)=-16$, $f(-1)=4$, $f(1)=0$, $f(3)=20$. Vậy $\max\limits_{[-3;3]} f(x)=20$. Chọn B.

Câu 11. Đồ thị đi qua điểm $(1;1)$. Thay $x=1$ vào các phương án A, B, C ta được lần lượt $y=1$, $y=3$, $y=-3$; còn hàm số ở phương án D không xác định tại $x=1$. Chọn A.

Câu 12. Ta có $y'=3x^2+1$. Với $x_0=1$ thì $y_0=2$, $y'(1)=4$. Phương trình tiếp tuyến là $y=4(x-1)+2$ hay $y=4x-2$. Chọn B.

PHẦN II. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI.

Câu 13. Ta có $f'(x)=3x^2+6x-9=3(x-1)(x+3)$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-3$ hoặc $x=1$. $f'(x)>0$ trên các khoảng $(-\infty;-3)$, $(1;+\infty)$ và $f'(x)<0$ trên khoảng $(-3;1)$. $f(-3)=29$, $f(1)=-3$.

a) Đúng. Ta có $f(-3)=29$, $f(1)=-3$, $f(5)=157$ nên $\max_{[-3;5]} f(x)=157$.

b) Sai. Các điểm cực trị của đồ thị là $A(-3;29)$, $B(1;-3)$ nên $AB=\sqrt{4^2+(-32)^2}=\sqrt{1040}=4\sqrt{65}$.

c) Đúng. Vì $f'(x)>0$ trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $(1;+\infty)$ nên hàm số đồng biến trên các khoảng đó.

d) Đúng. Vì $f_{CĐ}\cdot f_{CT}=29\cdot(-3)<0$ nên phương trình $f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt. Hai điểm cực trị $x=-3$, $x=1$ của $f(x)$ có giá trị khác 0 nên $f(x)$ không đổi dấu trong lân cận mỗi điểm đó, do đó chúng vẫn là điểm cực trị của $g(x)=|f(x)|$; ba nghiệm phân biệt của $f(x)=0$ là ba điểm cực tiểu của $g(x)$ (tại đó $g(x)=0$ và $f(x)$ đổi dấu). Giữa các điểm này, $g(x)$ đơn điệu. Vậy hàm số $g(x)$ có $2+3=5$ điểm cực trị.

Câu 14.

a) Sai. Vì $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ nên đồ thị hàm số chỉ có một tiệm cận ngang là $y=2$.

b) Sai. Trên khoảng $(-2;0)$ ta có $f'(x)<0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng này; ngoài ra hàm số không xác định tại $x=2$.

c) Đúng. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0]$ nên $\min_{(-\infty;0]} f(x)=f(0)=1$. Do đó $\min_{(-\infty;0]} h(x)=2\cdot1-2025=-2023$.

d) Đúng. Hàm số liên tục tại $x=0$ và $f'(x)$ đổi dấu khi x đi qua 0 và 1; còn $x=2$ không thuộc tập xác định. Vậy hàm số có hai điểm cực trị là $x=0$ và $x=1$.

<u>PHẦN III</u>. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN.

Câu 15. Ta có $y=\dfrac{x^2-3x+5}{2x-1}=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{4}+\dfrac{15}{4(2x-1)}$. Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{15}{4(2x-1)}=0$ nên đường tiệm cận xiên là $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{4}$, suy ra $a=\dfrac{1}{2}$, $b=-\dfrac{5}{4}$. Khi đó $T=2025\cdot\dfrac{1}{2}-2026\cdot\left(-\dfrac{5}{4}\right)=\dfrac{2025}{2}+\dfrac{5065}{2}=3545$.

Đáp số: 3545.

Câu 16. Ta có $N'(t)=-3t^2+36t=-3t(t-12)$. Trên khoảng $(0;12)$ thì $N'(t)>0$, trên khoảng $(12;18)$ thì $N'(t)<0$. Do đó số người bị nhiễm bệnh tăng lên trong khoảng thời gian $(0;12)$, suy ra $a=0$, $b=12$. Vậy $P=0^2-2\cdot12^2=-288$.

Đáp số: -288.

Câu 17. Ta có $f'(t)=\dfrac{25000e^{-t}}{\left(1+5e^{-t}\right)^2}$. Đặt $u=5e^{-t}$, với $t\ge 0$ thì $u\in(0;5]$ và $f'(t)=\dfrac{5000u}{(1+u)^2}$. Xét $h(u)=\dfrac{u}{(1+u)^2}$ trên $(0;5]$ có $h'(u)=\dfrac{1-u}{(1+u)^3}$; $h'(u)=0\Leftrightarrow u=1$. $h'(u)>0$ trên $(0;1)$, $h'(u)<0$ trên $(1;5)$ nên $h(u)$ lớn nhất khi $u=1$, tức là $5e^{-t}=1\Leftrightarrow t=\ln 5$. Khi đó doanh số là $f(\ln 5)=\dfrac{5000}{1+1}=2500$.

Đáp số: 2500.

Câu 18. Chọn hệ trục Oxy với O là trung điểm đoạn nối hai chân cổng, trục Oy là trục đối xứng của cổng. Parabol có đỉnh $(0;5)$ và đi qua các điểm $\left(-\sqrt{5};0\right)$, $\left(\sqrt{5};0\right)$ nên có phương trình $y=5-x^2$. Đáy thùng hàng nằm trên đường thẳng $y=1$. Ở độ cao $y=5-x^2$ (với $0<x<2$), bề rộng lòng cổng là $2x$, nên thùng hàng có cạnh trên ở độ cao này thì chiều rộng tối đa là $2x$, đạt được khi đặt thùng đối xứng qua Oy. Khi đó hình chữ nhật có chiều rộng $2x$ và chiều cao $5-x^2-1=4-x^2$. Diện tích $S(x)=2x\left(4-x^2\right)=8x-2x^3$. $S'(x)=8-6x^2$; $S'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. $S'(x)>0$ trên $\left(0;\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$ và $S'(x)<0$ trên $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}};2\right)$ nên S lớn nhất tại $x=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, khi đó $S=\dfrac{4}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{8}{3}=\dfrac{32\sqrt{3}}{9}\approx 6{,}16\ \left(\text{m}^2\right)$.

Đáp số: 6.

<u>PHẦN IV</u>. TỰ LUẬN.

Câu 19. Ta có $y'=3x^2+2ax+b$. Đồ thị đi qua $M(0;2)$ nên $c=2$. Đồ thị có điểm cực trị $N(-1;0)$ nên $\begin{cases}y(-1)=0\\y'(-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1+a-b+2=0\\3-2a+b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-b=-1\\-2a+b=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\b=5\end{cases}$.

Thử lại: với $a=4$, $b=5$, $c=2$ thì $y=x^3+4x^2+5x+2$, $y'=3x^2+8x+5=(x+1)(3x+5)$ đổi dấu khi x đi qua -1, và $y(-1)=0$ nên $N(-1;0)$ là điểm cực trị của đồ thị.

Vậy $a=4$, $b=5$, $c=2$.

Câu 20. Thể tích bể là $V=\pi r^2h+\dfrac{4}{3}\pi r^3=9\pi\Rightarrow h=\dfrac{9}{r^2}-\dfrac{4r}{3}$.

Hàm số $h(r)=\dfrac{9}{r^2}-\dfrac{4r}{3}$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$ và $h\left(\dfrac{3}{2}\right)=4-2=2$ nên $h\ge 2\Leftrightarrow 0<r\le\dfrac{3}{2}$.

Vì chi phí làm bể tăng theo diện tích toàn bộ bề mặt ngoài của bể nên chi phí nhỏ nhất khi diện tích này nhỏ nhất. Diện tích đó là $S = 2\pi rh + 4\pi r^2 = 2\pi r\left(\frac{9}{r^2} - \frac{4r}{3}\right) + 4\pi r^2 = \frac{18\pi}{r} + \frac{4\pi r^2}{3}$.

Ta có $S'(r) = -\frac{18\pi}{r^2} + \frac{8\pi r}{3} = \frac{2\pi\left(4r^3 - 27\right)}{3r^2}$. Với $0 < r \le \frac{3}{2}$ thì $4r^3 \le \frac{27}{2} < 27$ nên $S'(r) < 0$, suy ra S nghịch biến trên $\left(0; \frac{3}{2}\right]$. Do đó S nhỏ nhất khi $r = \frac{3}{2}$.

Vậy chi phí làm bể nhỏ nhất khi bán kính $r = \frac{3}{2}$ m.

Câu 21. Từ ii) ta có $f(2) = f(2 \cdot 1) = f(2) \cdot f(1)$, mà $f(2) = 2$ nên $f(1) = 1$.

Ta chứng minh $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ bằng quy nạp. Ta có $f(1) = 1$, $f(2) = 2$. Giả sử $f(k) = k$ với mọi $k < n$ $(n \ge 3)$.

Nếu $n = 2m$ $(m < n)$ thì $f(n) = f(2) \cdot f(m) = 2m = n$.

Nếu $n = 2m + 1$ $(m \ge 1)$ thì $m + 1 < n$ nên $f(2m) = 2f(m) = 2m$, $f(2m + 2) = 2f(m + 1) = 2m + 2$. Theo iii) ta có $f(2m) < f(2m + 1) < f(2m + 2)$ hay $2m < f(2m + 1) < 2m + 2$, mà $f(2m + 1)$ là số nguyên nên $f(2m + 1) = 2m + 1$, tức là $f(n) = n$.

Thử lại: hàm số $f(n) = n$ thỏa mãn cả ba điều kiện i), ii), iii).

Vậy $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

---------- HẾT ----------