

LỜI GIẢI ĐỀ THI HSG TOÁN THPT TỈNH TÂY NINH NĂM 2021

Hồ Phạm Quốc Toàn¹

Email: hophamquoctoan@gmail.com



A. Đề bài (Ngày thi thứ nhất)

Câu 1. (5.0 điểm)

1. Cho a, b, c là ba số thực dương sao cho $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \frac{9}{9 - 2(ab + bc + ca)} + \frac{27}{abc}.$$

2. Cho n là số nguyên dương, đặt $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$. Chứng minh

$$\frac{1}{S_1^2} + \frac{1}{2S_2^2} + \frac{1}{3S_3^2} + \dots + \frac{1}{nS_n^2} < 2.$$

Câu 2. (5.0 điểm)

1. Tìm các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ biết hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn:

$$f(x)f(y) - f(x+y) = \sin x \sin y, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

2. Cho các hàm số f, g xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn:

$$f(x + g(y)) = 2x + y + 2021, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Xác định biểu thức của $g(x + f(y))$.

Câu 3. (5.0 điểm)

Cho tam giác ABC có M, P lần lượt là các điểm trên các cạnh AC và BC sao cho MP song song với AB . Gọi D là giao điểm của AP và BM . Chứng minh đường thẳng CD vuông góc với đường thẳng đi qua trực tâm của tam giác ADM và tam giác BDP .

Câu 4. (5.0 điểm)

1. Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$x^{2y} + (x+1)^{2y} = (x+2)^{2y}.$$

2. Tìm tất cả các số tự nhiên có ba chữ số sao cho mỗi số là trung bình cộng của các số suy ra từ số đó bằng phép hoán vị tròn các chữ số của số đó.

¹K23 SP Toán - Trường Sư phạm, Trường ĐH Đồng Tháp

B. Lời giải (Ngày thi thứ nhất)

Câu 1.

1. Cho a, b, c là ba số thực dương sao cho $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \frac{9}{9 - 2(ab + bc + ca)} + \frac{27}{abc}.$$

2. Cho n là số nguyên dương, đặt $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$. Chứng minh

$$\frac{1}{S_1^2} + \frac{1}{2S_2^2} + \frac{1}{3S_3^2} + \dots + \frac{1}{nS_n^2} < 2.$$

Lời giải.

1. Do $a + b + c = 3$ nên $9 - 2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = a^2 + b^2 + c^2$.

Khi đó

$$T = \frac{9}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{9(a + b + c)}{abc} = 9 \left(\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng Engel, ta có:

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{9}{ab + bc + ca}.$$

Từ đó suy ra

$$T \geq 9 \left(\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2}{ab + bc + ca} + \frac{7}{ab + bc + ca} \right).$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức AM - GM cho bộ 3 số thực dương, ta thu được:

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab + bc + ca} + \frac{1}{ab + bc + ca} \geq 3 \frac{1}{\sqrt[3]{(a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca)^2}}.$$

Lại có

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{(a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca)^2} &\leq \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)}{3} \\ &\leq \frac{(a + b + c)^2}{3} = 3. \end{aligned}$$

Do vậy nên

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{2}{ab + bc + ca} \geq 1.$$

Bằng biến đổi tương đương ta dễ dàng chứng minh được

$$(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$$

Từ đó, với chú ý rằng $a + b + c = 3$ nên ta thu được

$$\frac{1}{ab + bc + ca} \geq \frac{1}{3}.$$

Do đó $T \geq 9 + 21 = 30$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức T là 30, đạt được khi $a = b = c = 1$. □



Cách khác

Có thể tham khảo lời giải bài toán trên bằng khảo sát hàm số của bạn *Trang Quốc Cường - K24 CNTT, Trường ĐH Sài Gòn*.

Đặt $abc = t$ ($t > 0$). Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có được $abc \leq \frac{(a + b + c)^3}{27} = 1$.

Suy ra $0 < t \leq 1$. Và $ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \Rightarrow ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{t^2}$.

Từ đó, suy ra

$$T \geq \frac{9}{9 - 6\sqrt[3]{t^2}} + \frac{27}{t}, t \in (0; 1].$$

Khảo sát hàm số $f(t) = \frac{9}{9 - 6\sqrt[3]{t^2}} + \frac{27}{t}$ trên $(0; 1]$ và từ đó tìm được $T_{\min} = 30$ tại $a = b = c = 1$.

2. Với $k \geq 2, k \in \mathbb{N}$, ta có

$$\frac{1}{S_{k-1}} - \frac{1}{S_k} = \frac{1}{kS_{k-1}S_k} > \frac{1}{kS_k^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức trên lần lượt với $k = 2, 3, \dots, n$ và cộng theo vế các bất đẳng thức, ta suy ra

$$\begin{aligned} \frac{1}{2S_2^2} + \frac{1}{2S_3^2} + \dots + \frac{1}{nS_n^2} &< 1 - \frac{1}{S_n} \quad (\text{do } S_1 = 1). \\ \Rightarrow \frac{1}{2S_2^2} + \frac{1}{2S_3^2} + \dots + \frac{1}{nS_n^2} &< 1. \end{aligned}$$

Từ đó, ta cộng vào hai vế của bất đẳng thức trên với $\frac{1}{S_1^2} = 1$, ta được

$$\frac{1}{S_1^2} + \frac{1}{2S_2^2} + \frac{1}{3S_3^2} + \dots + \frac{1}{nS_n^2} < 2.$$

Vậy ta hoàn tất chứng minh. □

Câu 2.

1. Tìm các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ biết hàm số f liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn:

$$f(x)f(y) - f(x+y) = \sin x \sin y, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

2. Cho các hàm số f, g xác định trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn:

$$f(x + g(y)) = 2x + y + 2021, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Xác định biểu thức của $g(x + f(y))$.

Lời giải.

1. **Cách 1.** Giả sử có hàm số f thỏa mãn:

$$f(x)f(y) - f(x+y) = \sin x \sin y, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Cho $x = 0, y = 0$ vào (1), ta có: $(f(0))^2 - f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$ hoặc $f(0) = 1$.

Nếu $f(0) = 0, y = 0$ thay vào (1), ta có: $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Điều này không xảy ra vì $x = \frac{\pi}{2}, y = \frac{\pi}{2}$ thì (1) không thỏa.

Nếu $f(0) = 1$, thay $y = -x$ vào (1), ta có:

$$f(x)f(-x) - 1 = -\sin^2 x, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Thay $x = \frac{\pi}{2}$ vào (2), ta được: $f\left(\frac{\pi}{2}\right)f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ hoặc $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Nếu $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, thay $y = \frac{\pi}{2}$ vào (1), ta có:

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Nếu $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, thay $y = -\frac{\pi}{2}$ vào (1), ta có:

$$f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Từ (3) và (4), ta suy ra $f(x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Thay $f(x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$ vào (1) thấy thỏa mãn.

Vậy $f(x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$. □

Cách 2. Phương trình đề cho được viết lại $f(x+y) = f(x)f(y) - \sin x \sin y, \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Thêm vào biến mới z ta có:

$$\begin{aligned} f(x+y+z) &= f(x)f(y+z) - \sin x \sin(y+z) \\ &= f(x)[f(y)f(z) - \sin y \sin z] - \sin x (\sin y \cos z + \cos y \sin z) \\ &= f(x)f(y)f(z) - f(x)\sin y \sin z - \sin x \sin y \cos z - \sin x \cos y \sin z. \end{aligned}$$

Tương tự, ta có:

$$f(y+x+z) = f(x)f(y)f(z) - f(y)\sin x \sin y - \sin y \sin x \cos z - \sin y \cos x \sin z.$$

Mà $f(x+y+z) = f(y+x+z)$ nên ta có được:

$$\sin z [f(x)\sin y - f(y)\sin x] = \sin z (\sin y \cos x - \cos y \sin x), \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Cho $z = \frac{\pi}{2}$, ta thu được:

$$\sin y [f(x) - \cos x] = \sin x [f(y) - \cos y], \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Trong (5), cho $y = \frac{\pi}{2}$ ta được:

$$f(x) = \cos x + f\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ (1), cho $x = y = \frac{\pi}{4}$, ta được:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1\right)^2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Vậy $f(x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại thấy thỏa mãn (1). □

Bài toán. (Chọn đội tuyển Ấn Độ năm 2004).

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(x+y) = f(x)f(y) - c \sin x \sin y, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

trong đó c là hằng số lớn hơn 1.

2. Xét

$$f(x+g(y)) = 2x + y + 2021, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Từ (6), cho $y = 0$, ta được:

$$f(x+g(0)) = 2x + 2021, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x + 2021 - 2g(0), \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow f(x+g(y)) = 2(x+g(y)) + 2021 - 2g(0) = 2x + y + 2021, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow g(y) = \frac{1}{2}y + g(0), \forall y \in \mathbb{R}.$$

Do đó,

$$\begin{aligned} g(x+f(y)) &= \frac{1}{2}(x+f(y)) + g(0), \forall x, y \in \mathbb{R}. \\ &= \frac{1}{2}(x+2y+2021-2g(0)) + g(0), \forall x, y \in \mathbb{R}. \\ &= \frac{1}{2}x + y + \frac{2021}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

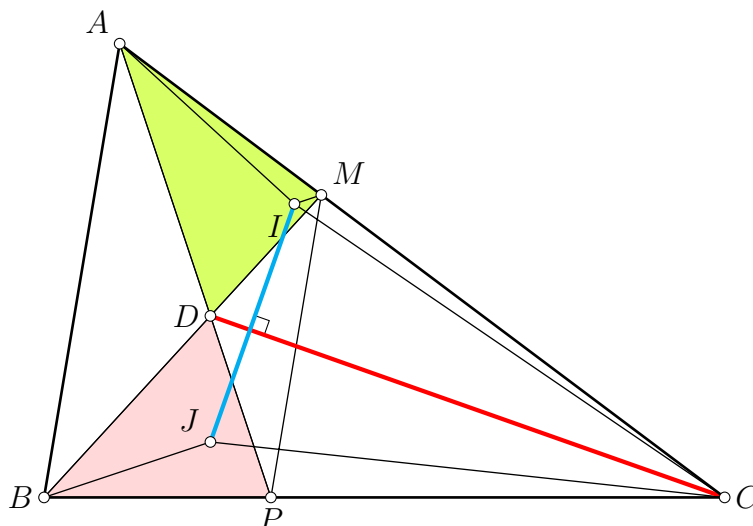
$$\text{Vậy } g(x+f(y)) = \frac{1}{2}x + y + \frac{2021}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Câu 3.

Cho tam giác ABC có M, P lần lượt là các điểm trên các cạnh AC và BC sao cho MP song song với AB . Gọi D là giao điểm của AP và BM . Chứng minh đường thẳng CD vuông góc với đường thẳng đi qua trực tâm của tam giác ADM và tam giác BDP .

Chứng minh.

Gọi I, J lần lượt là trực tâm của các tam giác ADM và tam giác BDP .



Vì $P \in BC$ nên tồn tại $0 < k < 1$ để $\overrightarrow{CP} = k\overrightarrow{CB}$.

Do $MP \parallel AB$ nên suy ra $\overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{CA}$.

Ta có

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} + x\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{CA} + x(k\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) \text{ trong đó } 0 < x < 1.$$

Mặt khác, ta cũng có

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + y\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CB} + y(k\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}) \text{ trong đó } 0 < y < 1.$$

Dễ dàng chứng minh được $x = y = \frac{k}{k+1}$ và suy ra $\overrightarrow{CD} = \frac{k}{k+1}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$.

Với I là trực tâm của tam giác ADM , ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BM} &= 0 \iff (\overrightarrow{CI} - \overrightarrow{CA})(\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CB}) = 0 \\ &\iff (\overrightarrow{CI} - \overrightarrow{CA})(k\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}) = 0 \\ &\iff k\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CI} - \overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{CB} - kCA^2 + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Và

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{AP} &= 0 \iff (\overrightarrow{CI} - \overrightarrow{CM})(\overrightarrow{CP} - \overrightarrow{CA}) = 0 \\ &\iff (\overrightarrow{CI} - k\overrightarrow{CA})(k\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}) = 0 \\ &\iff k\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CI} - \overrightarrow{CI} \cdot \overrightarrow{CA} - k^2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + kCA^2 = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Từ (7) và (8), ta suy ra

$$\begin{aligned} k\overrightarrow{CI} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) - \overrightarrow{CI} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) + (1 - k^2)\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} &= 0 \\ \iff (k - 1)\overrightarrow{CI} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) - (k - 1)(k + 1)\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} &= 0 \\ \iff \overrightarrow{CI} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) - (k + 1)\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} &= 0. \text{ (do } k \neq 1) \end{aligned} \quad (9)$$

Hoàn toàn tương tự, với J là trực tâm của tam giác BDP , ta có

$$\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \iff k\overrightarrow{CJ} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CJ} \cdot \overrightarrow{CA} - kCB^2 + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = 0. \quad (10)$$

Và

$$\overrightarrow{PJ} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \iff k\overrightarrow{CJ} \cdot \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CJ} \cdot \overrightarrow{CB} - k^2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + kCB^2 = 0. \quad (11)$$

Từ (10) và (11), ta suy ra

$$\overrightarrow{CJ} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) - (k + 1)\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0. \quad (12)$$

Kết hợp (9) và (12), ta có được

$$(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})(\overrightarrow{CI} - \overrightarrow{CJ}) = 0.$$

Từ đó, với chú ý rằng $\overrightarrow{CD} = \frac{k}{k+1}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$, ta suy ra $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{JI} = 0$ hay $CD \perp JI$.

Vậy CD vuông góc với đường thẳng đi qua trực tâm của tam giác ADM và tam giác BDP . $\square$

Câu 4.

1. Tìm các nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$x^{2y} + (x+1)^{2y} = (x+2)^{2y}.$$

2. Tìm tất cả các số tự nhiên có ba chữ số sao cho mỗi số là trung bình cộng của các số suy ra từ số đó bằng phép hoán vị tròn các chữ số của số đó.

Lời giải.

1. Xét phương trình $x^{2y} + (x+1)^{2y} = (x+2)^{2y}$ với x, y nguyên dương.

Với $y = 1$ thì phương trình đã cho trở thành

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = 3.$$

Vì x, y nguyên dương nên $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$ là một nghiệm nguyên dương của phương trình đã cho.

Với $y > 1$, đặt $x+1 = 2a$, a nguyên dương. Khi đó, phương trình đã cho trở thành

$$(2a)^{2y} = (2a+1)^{2y} - (2a-1)^{2y} \quad (13)$$

$$\Leftrightarrow (2a)^{2y} = 2 \left(C_{2y}^1 (2a)^{2y-1} + C_{2y}^3 (2a)^{2y-3} + \dots + C_{2y}^{2y-3} (2a)^3 + C_{2y}^{2y-1} (2a) \right)$$

$$\Leftrightarrow (2a)^{2y} - 2C_{2y}^1 (2a)^{2y-1} - 2C_{2y}^3 (2a)^{2y-3} - \dots - 2C_{2y}^{2y-3} (2a)^3 = 2y \cdot 2a \quad (14)$$

Vì $y \geq 2$ nên vế trái của (14) chia hết cho $(2a)^3$ dẫn đến y chia hết cho a^2 .

Mặt khác, phương trình (13) tương đương với

$$\begin{aligned} 1 &= \left(1 + \frac{1}{2a}\right)^{2y} - \left(1 - \frac{1}{2a}\right)^{2y} \\ \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{2a}\right)^{2y} &= 1 + \left(1 - \frac{1}{2a}\right)^{2y} < 2 \end{aligned}$$

Và ta cũng có

$$\left(1 + \frac{1}{2a}\right)^{2y} > C_{2y}^0 + C_{2y}^1 = 1 + \frac{y}{a}.$$

Từ hai đánh giá trên, ta suy ra $1 + \frac{y}{a} < 2$ hay $y < a$. Điều này mâu thuẫn với lập luận $a^2 | y$.

Vì lẽ đó nên phương trình đã cho không tồn tại nghiệm nguyên dương khi $y > 1$.

Vậy $(x; y) = (3; 1)$ là nghiệm nguyên dương duy nhất của phương trình đã cho.

**Nhận xét**

Khi $y > 1$, ta có phương trình $(x+1)^{2y} = (x+2)^{2y} - x^{2y}$.

Vì vế phải của phương trình là một số chẵn nên vế trái của nó cũng là một số chẵn. Do đó, ta mới đặt $x+1 = 2a$, a nguyên dương.

Bằng việc sử dụng các đánh giá bất đẳng thức đã chỉ ra điều mâu thuẫn và từ đó chứng tỏ phương trình không tồn tại nghiệm nguyên dương khi $y > 1$.

Bài 1. (Australian MO).

Xác định tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình:

$$(x+1)^4 - (x-1)^4 = y^3.$$

Bài 2. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $8x - y^2 + z^2 = 16$ (với $y < x < 10$).

Bài 3. (Lucian Dragomir - Romanian Mathematical Competitions 2008).

Xác định số nguyên x sao cho: $\log_3(1+2^x) = \log_2(1+x)$.

2. Gọi số tự nhiên cần tìm dạng $\overline{abc}$, trong đó $a, b, c \in \mathbb{N}$ và $\begin{cases} 1 \leq a \leq 9 \\ 0 \leq b, c \leq 9 \end{cases}$.

Theo đề ra, ta có được

$$\begin{aligned} \overline{abc} = \frac{\overline{bca} + \overline{cab}}{2} &\Leftrightarrow 100a + 10b + c = \frac{101b + 110c + 11a}{2} \\ &\Leftrightarrow 7a = 3b + 4c \\ &\Leftrightarrow 7(a - b) = 4(c - b) \end{aligned}$$

Suy ra $a - b$ chia hết cho 4. Mà $\begin{cases} 1 \leq a \leq 9 \\ 0 \leq b, c \leq 9 \end{cases}$ nên suy ra $-8 \leq a - b \leq 9$.

Vì vậy $a - b$ là các số $-8; -4; 0; 4; 8$.

Trường hợp 1 $a - b = -8 \Rightarrow b = a + 8 \leq 9 \Rightarrow a \leq 1$.

Do đó, ta tìm được $\begin{cases} a = 1 \\ b = 9 \\ c = -5 \end{cases}$ (không thỏa mãn).

Trường hợp 2 $a - b = -4 \Rightarrow b = a + 4 \leq 9 \Rightarrow a \leq 5$.

$1 \leq a \leq 5$	$0 \leq b = a + 4 \leq 9$	$0 \leq c = \frac{7a - 3b}{4} \leq 9$
1	5	-2 (loại)
2	6	-1 (loại)
3	7	0
4	8	1
5	9	2

Trường hợp 3 $a - b = 0 \Rightarrow a = b = c$.

Do đó, các số cần tìm là 111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999.

Trường hợp 4 $a - b = 4 \Rightarrow a = b + 4 \leq 9 \Rightarrow b \leq 5$.

$1 \leq a = b + 4 \leq 9$	$0 \leq b \leq 5$	$0 \leq c = \frac{7a - 3b}{4} \leq 9$
4	0	7
5	1	8
6	2	9
7	3	10 (loại)
8	4	11 (loại)
9	5	12 (loại)

Trường hợp 5 $a - b = 8 \Rightarrow a = b + 8 \leq 9 \Rightarrow b \leq 1$.

$1 \leq a = b + 8 \leq 9$	$0 \leq b \leq 1$	$0 \leq c = \frac{7a - 3b}{4} \leq 9$
8	0	14 (loại)
9	1	15 (loại)

Vậy có 15 số tự nhiên cần tìm: 370, 481, 592, 407, 518, 629, 111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999.

HẾT NGÀY THỨ NHẤT

LỜI GIẢI ĐỀ THI HSG TOÁN THPT TỈNH TÂY NINH NĂM 2021

Hồ Phạm Quốc Toàn¹
Email: hophamquoctoan@gmail.com



A. Đề bài (Ngày thi thứ hai)

Câu 1. (5.0 điểm)

Giải hệ phương trình trên tập số thực:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^4 + y^4 + z^4 = 98 \end{cases}.$$

Câu 2. (5.0 điểm)

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x - f(y)) = f(x) + xf(y) + f(f(y)) \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 3. (5.0 điểm)

Với n là số tự nhiên, $n \geq 2$, đặt $A_n = 7^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^7}}}}$ (n lần số 7, ví dụ $A_2 = 7^7$; $A_3 = 7^{7^7}$; $A_4 = 7^{7^{7^7}}$).
Chứng minh rằng $A_n + 17$ chia hết cho 20.

Câu 4. (5.0 điểm)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Điểm D là điểm đối xứng với A qua O . Tiếp tuyến với đường tròn (O) tại D cắt BC tại E . Đường thẳng OE cắt AB, AC lần lượt tại M, N . Chứng minh rằng $OM = ON$.

¹K23 SP Toán - Trường Sư phạm, Trường ĐH Đồng Tháp

B. Lời giải (Ngày thi thứ hai)

Câu 1.

Giải hệ phương trình trên tập số thực:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^4 + y^4 + z^4 = 98 \end{cases}.$$

Lời giải.

Đặt $p = x + y + z, q = xy + yz + zx, r = xyz$.

Ta thấy ngay $p = 4$.

Ta có:

$$2q = p^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 4^2 - 14 = 2 \Rightarrow q = 1.$$

Ký hiệu $S_n = x^n + y^n + z^n, n \in \mathbb{N}$.

Ta có:

$$\begin{aligned} S_n - pS_{n-1} + qS_{n-2} - rS_{n-3} &= 0 \\ \Leftrightarrow S_n &= pS_{n-1} - qS_{n-2} + rS_{n-3}. \end{aligned}$$

Dễ dàng tìm được $S_0 = 3; S_1 = 4; S_2 = 14$ và

$$S_3 = 4.14 - 1.4 + r.3 = 52 + 3r.$$

$$S_4 = 4.(52 + 3r) - 1.14 + r.4 = 194 + 16r.$$

Theo đề cho thì

$$S_4 = 98 \Rightarrow 194 + 16r = 98 \Rightarrow r = -6.$$

Theo định lý Viète bậc ba thì x, y, z là nghiệm phương trình

$$t^3 - 4t^2 + t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \\ t = 3 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ là $(x; y; z) = (-1; 2; 3)$ và các hoán vị của nó. □



Nhận xét

Với ý tưởng chung để giải bài toán này là sử dụng các tính chất nghiệm của đa thức, đồng nhất hệ số của đa thức,... để đưa bài toán phức tạp về các bài toán đa thức quen thuộc.

Bài 1. Biết hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 15 \\ x^4 + y^4 + z^4 = 35 \end{cases}$$
 có một bộ nghiệm $(x; y; z)$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 < 10$. Hãy tính $x^5 + y^5 + z^5$.

Bài 2. (*Mathematical Olympiad Treasures - Titu Andreescu, Bogdan Enescu*).
Tìm các số thực của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 18 \\ x^7 + y^7 + z^7 = 2058 \end{cases}.$$

Bài 3. (*Olympic Toán Sinh viên Toàn quốc - 2009*).

Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 0 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta luôn có $x^{2n+1} + y^{2n+1} + z^{2n+1} = 0$.

Câu 2.

Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x - f(y)) = f(x) + xf(y) + f(f(y)), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Lời giải.

Giả sử f là hàm số thỏa mãn đề bài.

Dễ thấy $f(x) \equiv 0$ thỏa mãn các yêu cầu đề bài.

Giả sử $f(x) \not\equiv 0$, tức là $\exists x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0) \neq 0$.

Từ đề, ta viết lại:

$$f(x - f(y)) - f(x) = xf(y) + f(f(y)) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Gọi $P(u; v)$ là phép thế bộ $(x; y)$ bởi bộ $(u; v)$ vào (1)

$$\bullet P(x; x_0) \Rightarrow f(x - f(x_0)) - f(x) = xf(x_0) + f(f(x_0)), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vì tập giá trị của vế phải là $\mathbb{R}$ nên suy ra tập giá trị của vế trái cũng là $\mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \exists u, v \in \mathbb{R} : t = f(u) - f(v). \quad (2)$$

$$\bullet P(f(y); y) \Rightarrow f(0) - f(f(y)) = f^2(y) + f(f(y)), \forall y \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow f(f(y)) = -\frac{1}{2}f^2(y) + \frac{1}{2}f(0). \quad (3)$$

$$\bullet P(f(x); y) \Rightarrow f(f(x) - f(y)) - f(f(x)) = f(x)f(y) + f(f(y)), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow f(f(x) - f(y)) = f(f(x)) + f(x)f(y) + f(f(y)), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Kết hợp với (2) và (3), suy ra

$$\begin{aligned} f(f(x) - f(y)) &= \frac{1}{2}f^2(x) + \frac{1}{2}f(0) + f(x)f(y) + f(f(y)), \forall x, y \in \mathbb{R} \\ &= -\frac{1}{2}[f^2(x) - 2f(x)f(y) + f^2(y)] + f(0), \forall x, y \in \mathbb{R} \\ &= -\frac{1}{2}[f(x) - f(y)]^2 + f(0), \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Do (2), $\forall t \in \mathbb{R} : t = f(x) - f(y)$ nên ta thu được $f(t) = -\frac{1}{2}t^2 + f(0), \forall t \in \mathbb{R}$. (4)

Trong (4), thay t bởi $f(x) : f(f(x)) = -\frac{1}{2}(f(x))^2 + f(0), \forall x \in \mathbb{R}$. (5)

Từ (3), (5) suy ra: $-\frac{1}{2}(f(x))^2 + f(0) = -\frac{1}{2}(f(x))^2 + \frac{1}{2}f(0) \Rightarrow f(0) = 0$. (6)

Từ (4), (6) ta thu được: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Thay hàm số vừa tìm vào đề bài, ta có:

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{1}{2}y^2\right) &= -\frac{1}{2}x^2 + x\left(-\frac{1}{2}y^2\right) + f\left(-\frac{1}{2}y^2\right) \\ \Rightarrow -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}y^2\right)^2 &= -\frac{1}{2}x^2 + x\left(-\frac{1}{2}y^2\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}y^2\right)^2 \\ \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}y^4 - \frac{1}{2}xy^2 &= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{8}y^4 \text{ đúng với mọi } x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Vậy có hai hàm số thỏa mãn đề là $f(x) \equiv 0$ và $f(x) = -\frac{1}{2}x^2, \forall x \in \mathbb{R}$.



Nhận xét

Bài toán trên là một minh họa cho việc giải phương trình hàm dựa vào giá trị của đối số và giá trị của hàm số.

Bài toán trên cũng đã từng có mặt trong **Korean MO - 2003**.

Bài tập rèn luyện

Bài 1. (IMO shortlist - 2002; VAIMO 2 German Pre TST - 2003).

Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 2. (IMO - 1999).

Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x - f(y)) = f(x) + xf(y) + f(f(y)) - 1, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 3. (Viet Nam TST - 2004).

Tìm tất cả các giá trị của a sao cho tồn tại duy nhất một hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(x^2 + y + f(y)) = [f(x)]^2 + ay, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 3.

Với n là số tự nhiên, $n \geq 2$, đặt $A_n = 7^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^7}}}}$ (n lần số 7, ví dụ $A_2 = 7^7$; $A_3 = 7^{7^7}$; $A_4 = 7^{7^{7^7}}$).
 Chứng minh rằng $A_n + 17$ chia hết cho 20.

Lời giải.

Ta sẽ đi chứng minh bằng quy nạp: Với mọi số tự nhiên $n, n \geq 2$: $A_n = 20a_n + 3$. (1)
 Với $n = 2$, ta có $A_2 = 7^7 = 7^3 \cdot 7^4$ mà

$$\begin{aligned} 7^3 &= 343 = 20 \cdot 17 + 3 = 20m + 3. \\ 7^4 &= 2401 = 20 \cdot 120 + 1 = 20n + 1. \end{aligned}$$

Nên

$$\begin{aligned} A_2 &= (20m + 3)(20n + 1) = 20^2 mn + 20(m + 3n) + 3 \\ &= 20[20mn + (m + 3n)] + 3 = 20a_2 + 3. \end{aligned}$$

Do đó, (1) đúng với $n = 2$.

Giả sử (1) đúng với $n = k \geq 2, k \in \mathbb{N}$, tức là $A_k = 20a_k + 3$.

Ta cần chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$.

Thật vậy

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= 7^{A_k} = 7^{20a_k+3} = (7^4)^{5a_k} \cdot 7^3 = (20n + 1)^{5a_k} \cdot (20m + 3) \\ &= [(20n)^{5a_k} + C_{5a_k}^1 (20n)^{5a_k-1} + \dots + C_{5a_k}^{5a_k-1} (20n) + 1] \cdot (20m + 3) \\ &= 20m [(20n)^{5a_k} + C_{5a_k}^1 (20n)^{5a_k-1} + \dots + C_{5a_k}^{5a_k-1} (20n) + 1] + \\ &\quad + 20n [(20n)^{5a_k-1} + C_{5a_k}^1 (20n)^{5a_k-2} + \dots + C_{5a_k}^{5a_k-1}] \cdot 3 + 3 \\ &= 20a_{k+1} + 3. \end{aligned}$$

Vậy (1) đúng với $n = k + 1$. Theo nguyên lý quy nạp toán học, ta có (1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Từ (1) có: $A_n + 17 = 20a_n + 3 + 17 = 20(a_n + 1)$ nên $A_n + 17$ chia hết cho 20. □

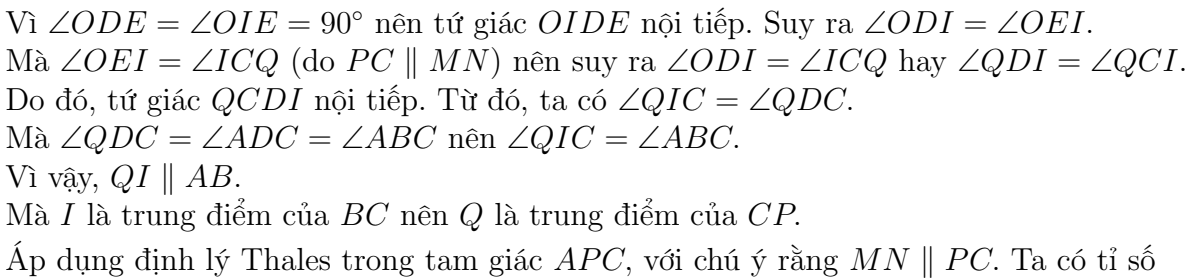
Câu 4.

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Điểm D là điểm đối xứng với A qua O . Tiếp tuyến với đường tròn (O) tại D cắt BC tại E . Đường thẳng OE cắt AB, AC lần lượt tại M, N . Chứng minh rằng $OM = ON$.

Chứng minh.**Cách 1.**

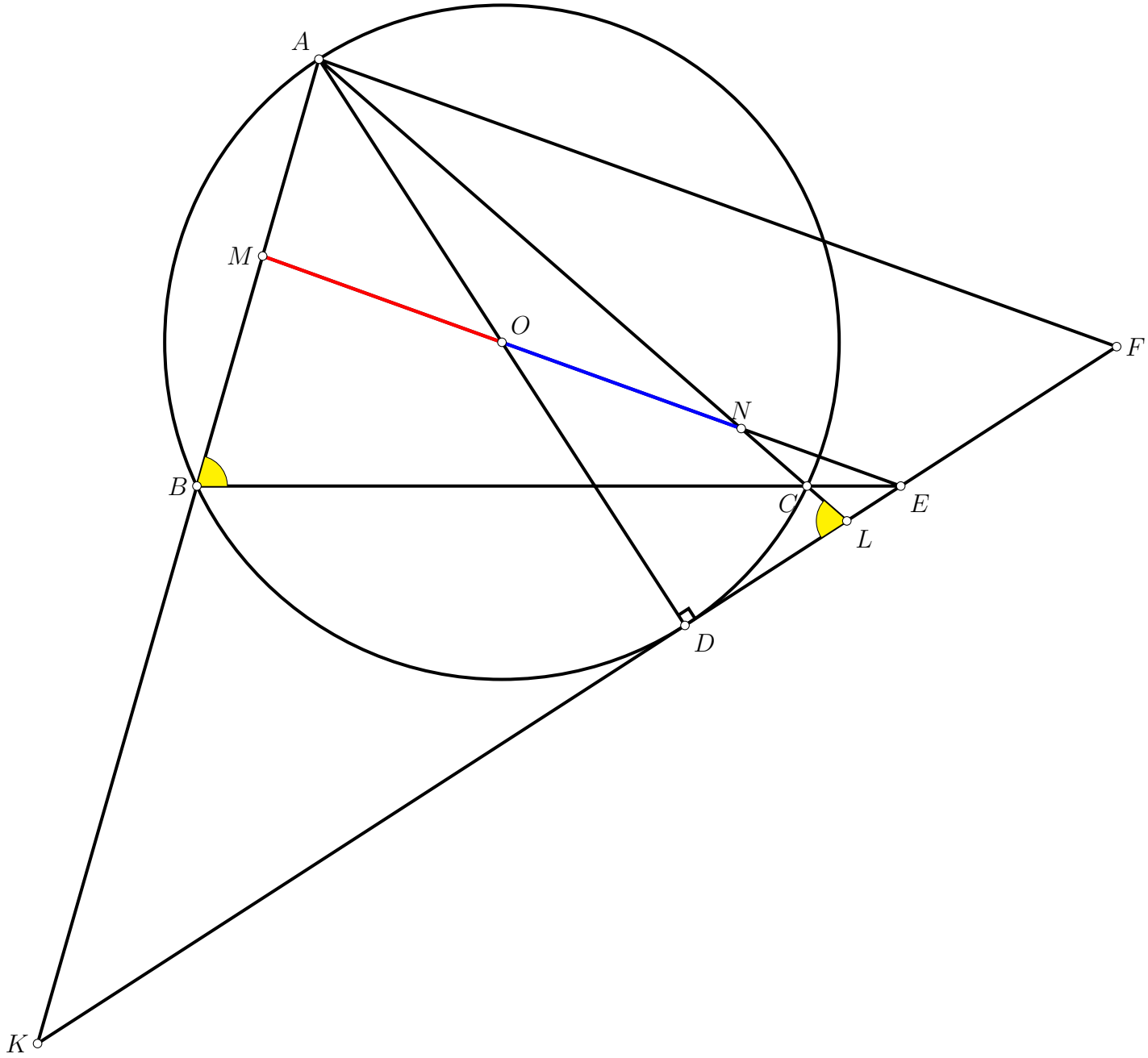
Gọi I là trung điểm của BC , suy ra $OI \perp BC$.

Từ C , kẻ $CP \parallel MN$ ($P \in AB$) và CP giao với AD tại Q .



Vì $PQ = CQ$ nên ta thu được $OM = ON$.

Cách 2. Gọi K, L theo thứ tự là giao điểm của AB, AC với DE . Trên DE lấy điểm F sao cho $AF \parallel OE$.



Bằng biến đổi cung và góc, ta thấy rằng:

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\text{sđ } \widehat{AC} = \frac{1}{2}\text{sđ } \widehat{ACD} - \frac{1}{2}\text{sđ } \widehat{CD} = \frac{1}{2}\text{sđ } \widehat{ABD} - \frac{1}{2}\text{sđ } \widehat{CD} = \angle CLD.$$

Do đó, tứ giác $BKCL$ nội tiếp.

Từ đó, xét phương tích của điểm E đối với đường tròn (O) , ta có:

$$\mathcal{P}_{E/(O)} = \overline{ED}^2 = \overline{EB} \cdot \overline{EC} = \overline{EK} \cdot \overline{EL}.$$

Mặt khác, vì O là trung điểm của AD và $AF \parallel OE$ nên E là trung điểm của FD .

Vậy, theo hệ thức Newton, ta có được $(FDKL) = -1$.

Suy ra $A(FOMN) = -1$.

Từ đó, với chú ý rằng $AF \parallel MN$, theo định lý về chùm điều hòa, ta có: $OM = ON$. □

HẾT NGÀY THỨ HAI
