

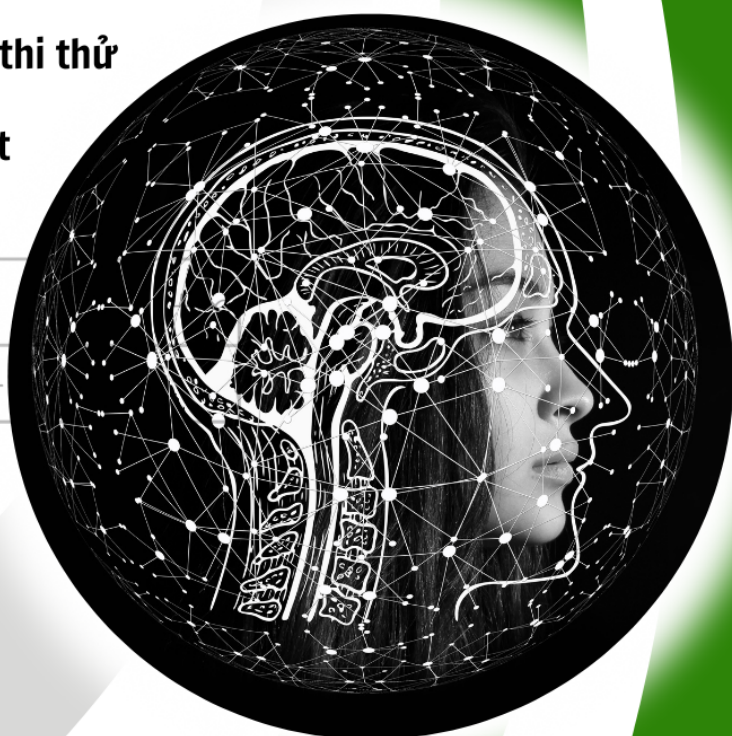
2024

PHAN NHẬT LINH
Zalo: 0817.098.716

TOÀN TẬP GHÉP TRỰC 2024 SIÊU HAY

- ✓ Phương pháp giải nhanh trắc nghiệm môn Toán
- ✓ Sưu tầm nhiều bài toán hay từ đề thi thử
- ✓ Trình bày rất khoa học và đẹp mắt

x	$-\infty$	-1	0	
$f'(2x+1)$	$-$	0	$+$	0





TOÀN TẬP VỀ PHƯƠNG PHÁP GHÉP TRỰC

Cơ sở của phương pháp ghép trực hay có thể gọi với một tên gọi khác là ghép bảng biến thiên. Phương pháp này giúp ta giải quyết bài toán hàm hợp $g = f(u(x))$. Ta thực hiện theo các bước sau đây:

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm $g = f(u(x))$. Giả sử tập xác định tìm được như sau:

$$D = (a_1; a_2) \cup (a_3; a_4) \cup \dots \cup (a_{n-1}; a_n), \text{ ở đây có thể } a_1 \equiv -\infty; a_n \equiv +\infty$$

Bước 2: Xét sự biến thiên của hàm $u = u(x)$ và hàm $y = f(x)$.

Lập bảng biến thiên kép, xét sự tương quan giữa $[x; u = u(x)]$ và $[u; g = f(u)]$

(Bảng biến thiên này thường có 3 dòng)

x	a_1	a_2		a_{n-1}	a_n		
$u(x)$	u_1	b_1	b_2 ... b_k	u_2		u_{n-1}	u_n
$f(u(x))$		$g(b_1)$	$g(b_2)$... $g(b_k)$	$g(u_2)$		$g(u_{n-1})$	$g(u_n)$

Dòng 1: Xác định các điểm đặc biệt của hàm $u = u(x)$, sắp xếp các điểm này theo thứ tự tăng dần từ trái qua phải, giả sử như sau: $a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n$ (xem chú ý số 1).

Dòng 2: Điền các giá trị $u_i = u(a_i)$, với $(i = \overline{1, \dots, n})$.

- Trên mỗi khoảng $(u_i; u_{i+1})$, với $(i = \overline{1, n-1})$ cần bổ sung các điểm kì dị $b_1, b_2, \dots, b_k$ của hàm số $y = f(x)$.
- Trên mỗi khoảng $(u_i; u_{i+1})$, với $(i = \overline{1, n-1})$, sắp xếp các điểm $u_i; b_k$ theo thứ tự, chẳng hạn: $u_i < b_1 < b_2 < \dots < b_k < u_{i+1}$ hoặc $u_i > b_1 > b_2 > \dots > b_k > u_{i+1}$ (xem chú ý số 2).

Dòng 3: Xét chiều biến thiên của hàm $g = f(u(x))$ dựa vào bảng biến thiên của hàm $y = f(x)$ bằng cách hoán đổi u đóng vai trò của x ; $f(u)$ đóng vai trò của $f(x)$. Sau khi hoàn thiện bảng biến thiên $g = f(u(x))$ ta sẽ thấy được hình dạng của đồ thị hàm số này.

Bước 3: Dùng bảng biến thiên hàm hợp $g = f(u(x))$ để giải quyết các yêu cầu của bài toán và đưa ra kết luận.



Một số chú ý quan trọng khi sử dụng phương pháp ghép trực để giải quyết các bài toán về hàm hợp:
Chú ý 1:

- Các điểm đặc biệt của $u = u(x)$ gồm: các điểm biên của tập xác định D , các điểm cực trị của hàm số $u = u(x)$.
- Nếu xét hàm $u = |u(x)|$ thì ở **dòng 1** các điểm đặc biệt còn có nghiệm của phương trình $u(x) = 0$ (là hoành độ giao điểm của hàm số $u = u(x)$ với trục Ox).
- Nếu xét hàm $u = u(|x|)$ thì ở **dòng 1** các điểm đặc biệt còn có số 0 (là hoành độ giao điểm của $u = u(x)$ và trục Oy).

Chú ý 2:

- Có thể dùng thêm các mũi tên để thể hiện chiều biến thiên của $u = u(x)$.
- Điểm đặc biệt của hàm số $y = f(x)$ gồm: các điểm tại đó $f(x)$ và $f'(x)$ không xác định, các điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.
- Nếu xét hàm $g = |f(u(x))|$ thì trong **dòng 2** các điểm đặc biệt còn có nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.
- Nếu xét hàm $g = f(u(|x|))$ thì trong **dòng 2** các điểm đặc biệt còn có số 0.

Trong các bài toán có thể sử dụng phương pháp ghép trực, đề bài sẽ cho chúng ta thông tin về đồ thị hoặc bảng biến thiên của hàm hợp $f(u(x))$ khi đã biết thông tin từ hàm số $f(x)$ và $u(x)$. Từ đó ta hình thành sơ đồ tư duy bắt buộc như sau: $x \rightarrow u(x) \rightarrow f(u(x))$.

Sau đây sẽ là một số ví dụ minh họa:

VÍ DỤ 1. [Đề chính thức THPT năm 2023] Cho hàm số $y = x^4 - 32x^2 + 4$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m thì tổng các nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-3; 2)$ của phương trình $f(x^2 + 2x + 3) = m$ bằng -4 ?

A. 145.

B. 142.

C. 144.

D. 143.

LỜI GIẢI

Chọn D

Nhận xét: Phương trình $x^2 + 2x + 3 = a$ ($a \in \mathbb{R}$) có hai nghiệm x_1, x_2 thì ta luôn có $x_1 + x_2 = -2$.

Phương trình $f(x^2 + 2x + 3) = m$ (*) có tổng nghiệm phân biệt bằng -4 khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm xảy ra trường hợp có 4 nghiệm phân biệt là x_1, x_2, x_3, x_4 tức là phương trình $f(x^2 + 2x + 3) = m$ phải có 4 nghiệm phân biệt.

Ta có: $f'(x) = 4x^3 - 64x$. Giải phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^4 - 64x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 4 \end{cases}$.

Đặt $u(x) = x^2 + 2x + 3 \Rightarrow u'(x) = 2x + 2$

Giải phương trình $u'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Ta áp dụng phương pháp ghép trực để vẽ bảng biến thiên của hàm số $f(u(x))$ như sau:

Theo đề bài ta chỉ xét trên khoảng từ $(-3; 2)$ nên dòng x ta điền giá trị 1.



Với $x=1 \Rightarrow u(-1)=2$; $x=-3 \Rightarrow u(-3)=-6$; $x=2 \Rightarrow u(2)=11$ ta điền các giá trị của u vào dòng 2.

Bây giờ chúng ta xét các khoảng của $u(x)$ nó có thể thuận chiều hoặc ngược chiều theo mũi tên.

Xét trong khoảng $(2;6)$ thì có một điểm cực trị là $x=4$ thì ta điền 4 vào dòng 2.

Tương tự trên khoảng $(2;11)$ cũng có một điểm cực trị duy nhất là 4 ta tiếp tục điền vào dòng 2

Bây giờ coi biến u tương tự như biến x và điền các giá trị tương ứng vào bảng, ta được bảng biến thiên của hàm số $f(u)$ như sau:

x	-3	-1			2
u	6	4			11
$f(u)$	148	-108			10773
		-252			

Từ bảng biến thiên, hàm số có 4 nghiệm phân biệt khi $-252 < m < -108$.

Vậy có tất cả 143 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

VÍ DỤ 2. [Đề chính thức THPT năm 2020] Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$	-4	-2	0	$+\infty$
y'	-	0	+	0	-
y	$+\infty$	-2	2	-3	$+\infty$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $6f(x^2 - 4x) = m$ có ít nhất 3 nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(0; +\infty)$?

A. 25.

B. 30.

C. 29.

D. 34.

LỜI GIẢI

Chọn D

Đặt $u = x^2 - 4x \Rightarrow u' = 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

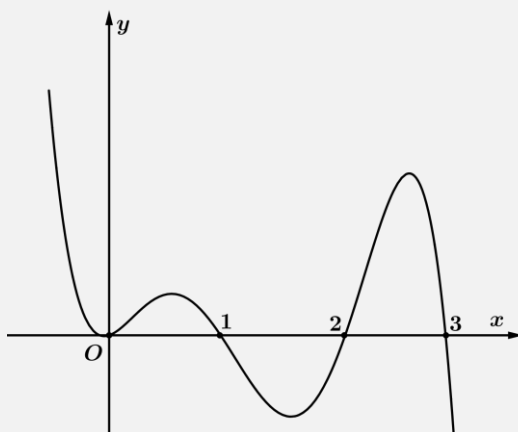
Sử dụng phương pháp ghép trục:

x	0	2			$+\infty$
u	0	-2	-4	-2	$+\infty$
$f(u)$	-3	2	-2	2	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, hàm số có ít nhất 3 nghiệm phân biệt khi $-3 < \frac{m}{6} \leq 2 \Leftrightarrow -18 < m \leq 12$.



VÍ DỤ 3. Cho hàm số đa thức $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số $m \in [0; 6]$ với $2m \in \mathbb{Z}$ để hàm số $y = f(x^2 - 2|x - 1| - 2x + m)$ có ít nhất 9 điểm cực trị?

A. 4.

B. 6.

C. 5.

D. 3.

LỜI GIẢI

Chọn D

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau:

x	$-\infty$	1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-	
$f(x)$								

$$\text{Đặt } u = x^2 - 2|x - 1| - 2x + m = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 - 2x + m & \text{khi } x \geq 1 \\ x^2 - 2 + 2x - 2x + m & \text{khi } x < 1 \end{cases} = \begin{cases} x^2 - 4x + m + 2 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^2 + m - 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

$$\text{Đạo hàm: } u' = \begin{cases} 2x^2 - 4 & \text{khi } x \geq 1 \\ 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases} \text{ và có đạo hàm không xác định tại } x = 1, \text{ phương trình } u' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Sử dụng phương pháp ghép trực kết hợp với công thức đếm nhanh số điểm cực trị:

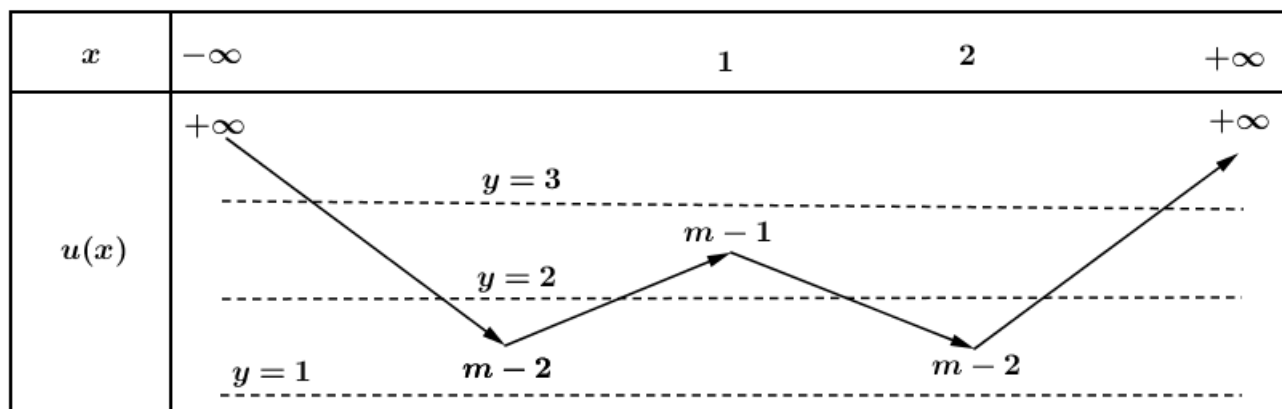
$$\text{SDCT} \{f(u(x))\} = \text{SDCT} \{u(x)\} + \text{SNBL} \begin{cases} u(x) = a \\ \dots \\ u(x) = b \end{cases}$$

$$\text{Hàm số } u(x) \text{ có ba điểm cực trị} \Rightarrow 9 = 3 + \text{SNBL} \left\{ \begin{matrix} u(x) = 1 \\ u(x) = 2 \\ u(x) = 3 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} u(x) = 1 \\ u(x) = 2 \\ u(x) = 3 \end{matrix} \right\} = 6.$$

$$\text{Tức là các phương trình } \begin{cases} u(x) = 1 \\ u(x) = 2 \\ u(x) = 3 \end{cases} \text{ có đúng 6 nghiệm bội lẻ (nghiệm đơn).}$$



Bảng ghép trục như sau:



Để có đúng 6 nghiệm bội lẻ thì có hai trường hợp xảy ra:

Trường hợp 1: $\begin{cases} m-1 \leq 3 \\ m-2 < 2 < m-1 \\ m-2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 4 \\ 3 < m < 4 \\ m \geq 3 \end{cases} \xrightarrow{2m \in \mathbb{Z}} m \in \left\{ \frac{7}{2} \right\}$

Trường hợp 2: $\begin{cases} m-1 < 3 \\ m-1 < 2 \\ m-1 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ m < 3 \\ m \leq 2 \end{cases} \xrightarrow{m \in [0; 6]; 2m \in \mathbb{Z}} m \in \left\{ 0; \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}; 2 \right\}$

Từ hai trường hợp trên suy ra có tất cả 6 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

VÍ DỤ 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x - 2024)(x^2 - 16)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x^3 - 12x| + 4m)$ có đúng 11 điểm cực trị?

A. 5.

B. 6.

C. 3.

D. 4.

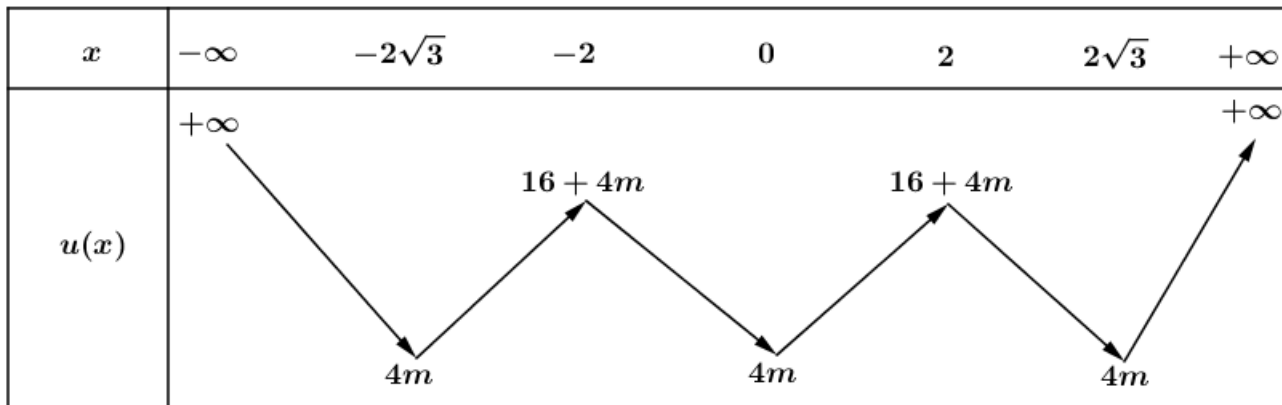
LỜI GIẢI

Chọn C

Ta có: $f'(x) = (x - 2024)(x^2 - 16) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2024 \\ x = 4 \\ x = -4 \end{cases}$

Đặt $u = |x^3 - 12x| + 4m \Rightarrow u' = \frac{(3x^2 - 12)(x^3 - 12x)}{|x^3 - 12x|} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = 0 \\ x = \pm 2\sqrt{3} \end{cases}$

Sử dụng phương pháp ghép trục:





Sử dụng công thức đếm nhanh số điểm cực trị:

$$\text{SDCT} \{f(u(x))\} = \text{SDCT} \{u(x)\} + \text{SNBL} \begin{cases} u(x) = a \\ \dots \\ u(x) = b \end{cases}$$

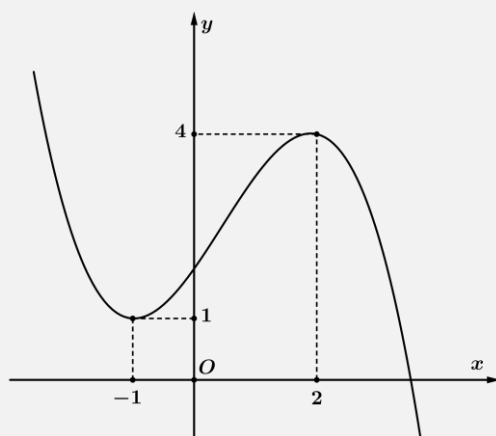
$$\text{Hàm số } u(x) \text{ có 5 điểm cực trị} \Rightarrow 11 = 5 + \text{SNBL} \left\{ \begin{cases} u(x) = 4 \\ u(x) = -4 \\ u(x) = 2024 \end{cases} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{cases} u(x) = 4 \\ u(x) = -4 \\ u(x) = 2024 \end{cases} \right\} = 6.$$

$$\text{Từ bảng biến thiên, yêu cầu bài toán suy ra } \begin{cases} u(x) = 4 \\ u(x) = -4 \\ u(x) = 2024 \end{cases} \text{ có đúng 6 nghiệm phân biệt}$$

$$\text{Yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m \geq 4 \\ 4m \geq -4 \\ 4m < 2024 < 16 + 4m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \geq -1 \\ 4m < 2024 < 16 + 4m \end{cases} \Leftrightarrow 502 < m < 506.$$

Vậy có tất cả 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

VÍ DỤ 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ dưới đây:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $|3f^2(2x) - 12f(2x) - m| = 1$ có ít nhất 7 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-\infty; 1)$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

LỜI GIẢI

Chọn A

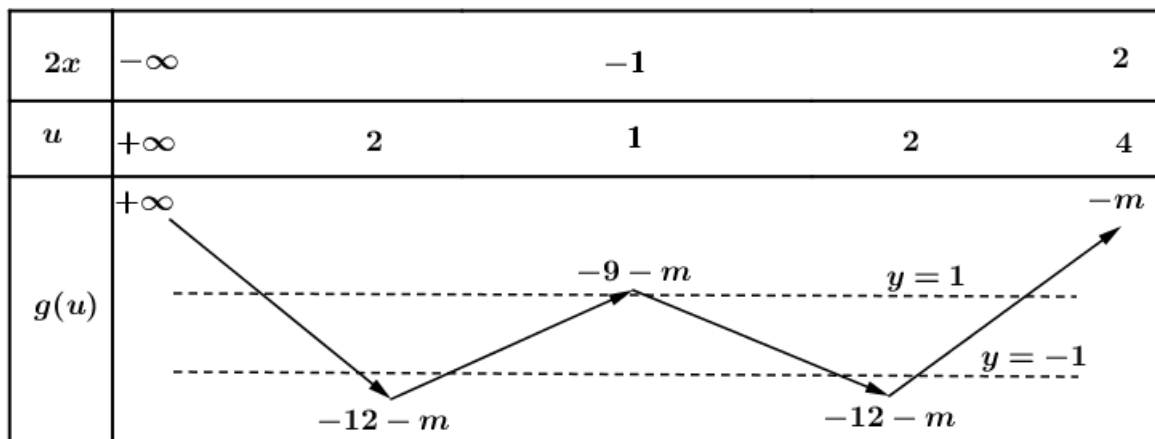
Đặt $u = f(2x)$ thì ta có $g(u) = 3f^2(2x) - 12f(2x) - m \Rightarrow g(x) = 3x^2 - 12x - m$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$-12 - m$	$+\infty$



Sử dụng phương pháp ghép trục:



Để phương trình có ít nhất 7 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} -9 - m \geq 1 \\ -12 - m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -10 \\ m > -11 \end{cases} \Leftrightarrow -11 < m \leq -10$.

Vậy có duy nhất 1 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

VÍ DỤ 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	$+$
y	0	16	4	12

Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\log_6(2f(x) + m) = \log_4(f(x))$ có đúng 4 nghiệm phân biệt?

A. 7.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

LỜI GIẢI

Chọn D

Đặt $u = \log_6(2f(x) + m) = \log_4(f(x)) \Rightarrow 2f(x) + m = 6^u$ và $f(x) = 4^u \Leftrightarrow 2f(x) = 2 \cdot 4^u$.

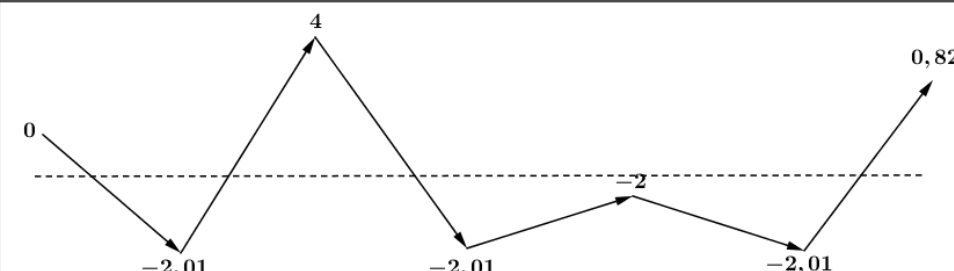
Từ đó ta suy ra: $6^u - 2 \cdot 4^u = m \Leftrightarrow 6^{\log_4 f(x)} - 2f(x) = m$

Xét hàm số $g(u) = 6^u - 2 \cdot 4^u \Rightarrow g'(u) = 6^u \ln 6 - 2 \cdot 4^u \ln 4 = 0 \Leftrightarrow 6^u \ln 6 = 2 \cdot 4^u \ln 4 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^u = \frac{2 \ln 4}{\ln 6}$

Khi đó: $u = \log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{2 \ln 4}{\ln 6}\right) \approx 1,07$. Do số không đẹp nên ta đặt $u = a$ với $a \approx 1,07$.

Sử dụng phương pháp ghép trục:

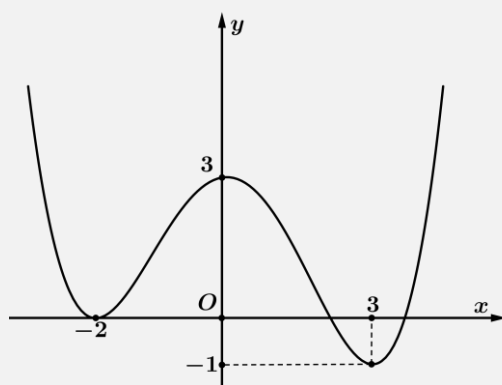


x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
$f(x)$	$(0$	16	4	12			
u	$-\infty$	a	2	a	1	a	$\log_4 12)$
$f(u)$							

Từ bảng biến thiên, để phương trình có đúng 4 nghiệm phân biệt thì $-2 < m < 0$.

Vậy có một giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

VÍ DỤ 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(1-2x) - 4f^2(1-2x) + 2|$ là:

A. 13.

B. 11.

C. 17.

D. 15.

LỜI GIẢI

Chọn D

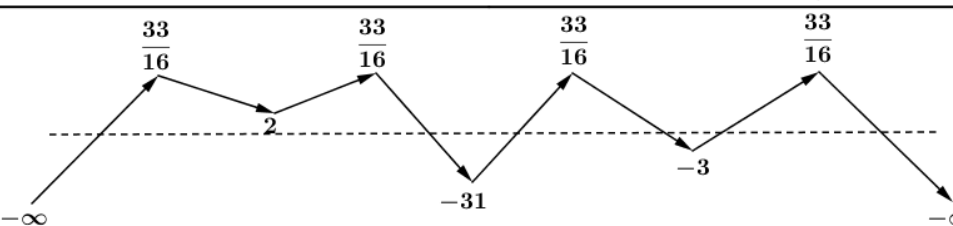
Xét hàm số $h(x) = |f(x) - 4f^2(x) + 2|$ thì khi đó $g(x) = h(1-2x)$.

Nhận xét: Số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ cũng bằng số điểm cực trị của hàm số $f(ax+b)$ với $a \neq 0$.

Xét hàm số $k(x) = f(x) - 4f^2(x) + 2$. Đặt $u = f(x)$ suy ra $u(f(x)) = f(x) - 4f^2(x) + 2$.

Khi đó hàm số có dạng: $u = x - 4x^2 + 2 \Rightarrow u' = 1 - 8x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{8}$

Sử dụng phương pháp ghép trục kết hợp với công thức đếm nhanh số điểm cực trị:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	3	$+\infty$
$u(f(x))$						



Sử dụng công thức: $|f(x)| = \text{SDCT} \{f(x)\} + \text{SNBL} \{f(x)=0\}$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $f(x)$ có 7 điểm cực trị.

Phương trình $f(x)=0$ có 6 nghiệm bội lẻ nên hàm số có tất cả 13 điểm cực trị.

VÍ DỤ 8. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$				
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$										

Hỏi hàm số $y = f^3(x) - 3f^2(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;2)$.

B. $(3;4)$.

C. $(-\infty;1)$.

D. $(2;3)$.

LỜI GIẢI

Chọn D

Đặt $u = f(x) \Rightarrow g(u) = u^3 - 3u^2$

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x^2$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0		2		$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	0	+	
$g(x)$		0				$+\infty$
	$-\infty$			-4		

Sử dụng phương pháp ghép trục:

x	$-\infty$	1		2		3		4		$+\infty$
$u = f(x)$	$-\infty$	0	2	3	2	1	2	0	2	$+\infty$
$g(u)$	$-\infty$									

Từ bảng biến thiên, hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;3)$.



VÍ DỤ 9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-4	2	4	2	$+\infty$

Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\cos x) + (3-m)f(\cos x) + 2m - 10 = 0$ có đúng 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; \pi\right]$?

A. 4.

B. 6.

C. 5.

D. 7.

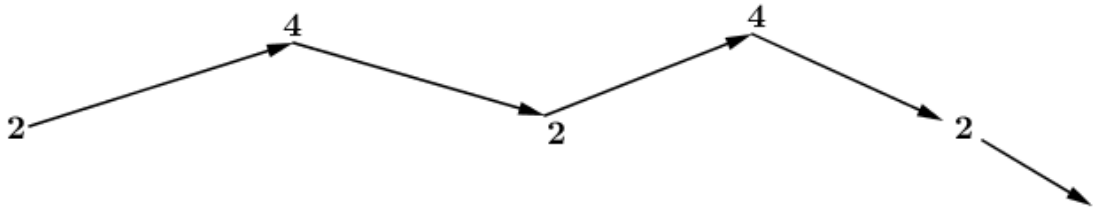
LỜI GIẢI

Chọn B

$$\text{Đặt } u = \cos x \Rightarrow u' = -\sin x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \end{cases} \text{ với } x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \pi\right]$$

$$\text{Phương trình đã cho trở thành: } f^2(u) + (3-m)f(u) + 2m - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(u) = 2 \\ f(u) = m - 5 \end{cases}$$

Sử dụng phương pháp ghép trục:

x	$-\frac{\pi}{3}$	0				π
u	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1
$f(u)$						

Từ bảng biến thiên, phương trình $f(u) = 2$ luôn có 3 nghiệm phân biệt.

Để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì $-4 \leq m - 5 < 2 \Leftrightarrow 1 \leq m < 7$.

Vậy có tất cả 6 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.



VÍ DỤ 10. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(2x+1)$ có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$	-1	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(2x+1)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Hỏi có bao nhiêu số nguyên $m \in [-2023; 2023]$ để hàm số $y = g(x) = f(|x^{2023} + 2023x| + m)$ có ít nhất 5 điểm cực trị?

A. 4046.

B. 4047.

C. 2024.

D. 2023.

LỜI GIẢI

Chọn C

Từ bảng xét dấu thì ta suy ra được hàm số $y = f(x)$ có ba điểm cực trị là $x = -1; x = 1$ và $x = 2$.

$$\text{Đặt } u = |x^{2023} + 2023x| + m \Rightarrow u' = \frac{2023x^{2022}(x^{2023} + 2023x)}{|x^{2023} + 2023x|} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Sử dụng phương pháp ghép trực:

x	$-\infty$	0					$+\infty$
u	$+\infty$	2	1	m	1	2	$+\infty$
$f(u)$	$+\infty$						

Từ bảng biến thiên, để hàm số có ít nhất 5 điểm cực trị thì $1 > m \Leftrightarrow m < 1 \xrightarrow{m \in [-2023; 2023]} -2023 \leq m < 1$
 Vậy có tất cả 2024 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

**BÀI TẬP VẬN DỤNG****Câu 1:** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	$-1/4$	0	2	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		-2		2		-4		$+\infty$

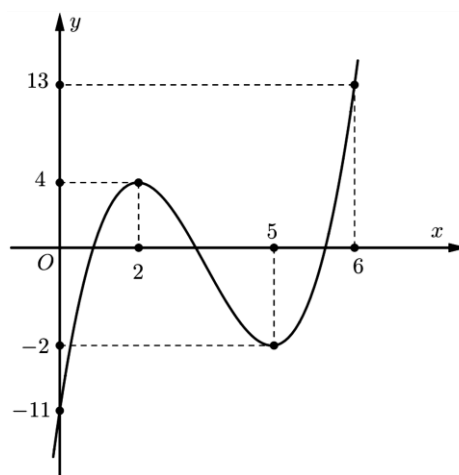
Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ của hàm số $5f(\cos^2 x - \cos x) = 1$ là

A. 11.

B. 10.

C. 9.

D. 12.

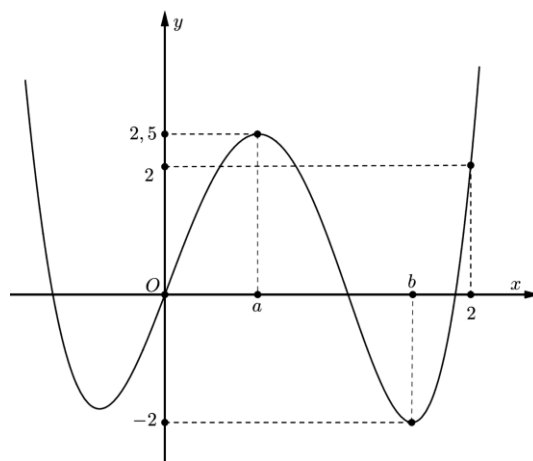
Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽGọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(f(x) + 2) = \frac{m}{2}$ có 3 nghiệm phân biệt. Số phần tử của tập S là?

A. 11.

B. 32.

C. 9.

D. 34.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.Hỏi phương trình $f(|x^3 - 3x|)$ có bao nhiêu điểm cực trị thuộc đoạn $[-2; 2]$?

A. 11.

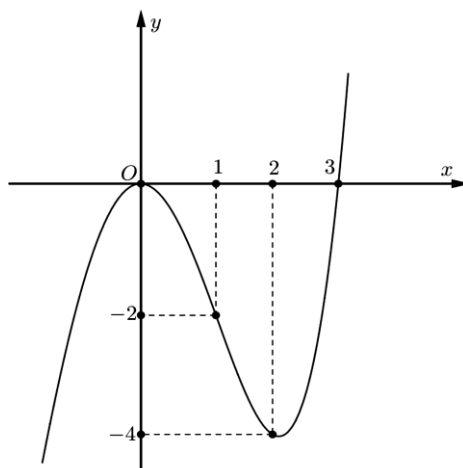
B. 17.

C. 12.

D. 15.



Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(5 - 2\sqrt{1 + 3\cos x}\right) = \frac{3m - 10}{7}$

có đúng ba nghiệm phân biệt thuộc $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

A. 11.

B. 1.

C. 12.

D. 2.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	0	
$f(x)$	$-\infty$	2	0	2	$-\infty$

Hỏi phương trình $\left|f\left(x - 1 - 2\sqrt{x - 1}\right)\right| = 1$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 12.

B. 4.

C. 5.

D. 8

Câu 6: Cho bảng biến thiên hàm số $f(5 - 2x)$ như hình vẽ dưới.

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
y	-1	3	2	4	$-\infty$

Hỏi phương trình $\left|2f\left(x^2 - 4x + 3\right) - 1\right| = 3$ có bao nhiêu nghiệm thực x tương ứng?

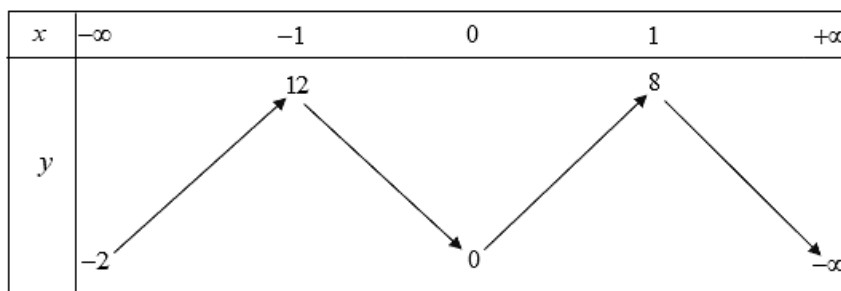
A. 6.

B. 5.

C. 7.

D. 4

Câu 7: Cho bảng biến thiên của hàm số $f(3 - 2x)$ như hình vẽ. Biết $f(4) = 3; f(0) = 0$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\left|f\left(x^3 - 3x + 2\right) - m\right| = 2$ có nhiều nghiệm nhất?



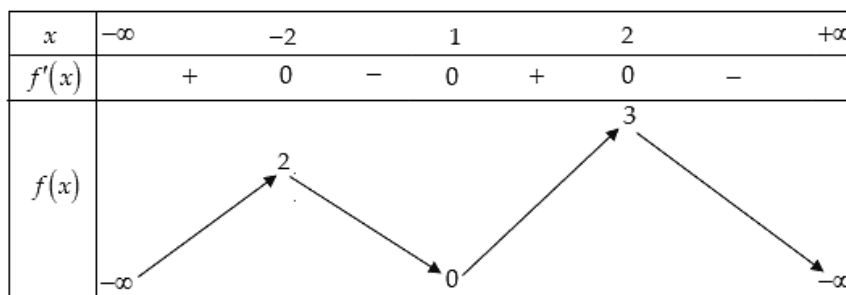
A. 7.

B. 6.

C. 5.

D. 2

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(-1) < 2 < f(5)$ và có bảng biến thiên như sau:



Số nghiệm của phương trình $f\left(\sqrt{2\cos^3(x) + 2\cos x + 5 + 2\cos x}\right) = 2$ trên khoảng $\left(0; \frac{5\pi}{2}\right)$ là?

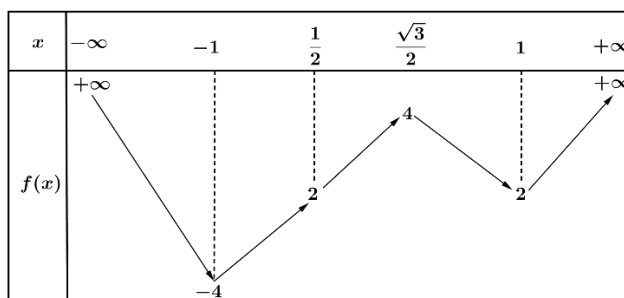
A. 2.

B. 1.

C. 5.

D. 3

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên.



Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\cos x) + (3-m)f(\cos x) + 2m - 10 = 0$ có đúng 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; \pi\right]$ là

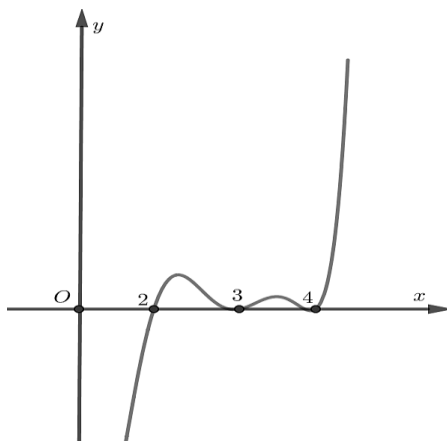
A. 5.

B. 6.

C. 7.

D. 4.

Câu 10: Cho $f(x)$ là hàm đa thức bậc 6 và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây





Hỏi hàm số $y = g(x) = f(x^2 + 4x + 5)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 2. B. 5. C. 3. D. 1.

Câu 11: Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x^2 + x) = 2024m$ có đúng bốn nghiệm?

- A. 1. B. 3. C. 4. D. 2.

Câu 12: Cho hàm số $f(x) = x^2 - 8|x|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để phương trình $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = m$ có đúng bốn nghiệm?

- A. 9. B. 12. C. 11. D. 10.

Câu 13: Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình $f(x^2 - 1) = m$ có đúng hai nghiệm?

- A. 3. B. 4. C. 2. D. 1.

Câu 14: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x^3 + 3x^2) = m$ có đúng ba nghiệm?

- A. 49. B. 50. C. 48. D. 47.

Câu 15: Cho hàm số $f(x) = x^3 + 3|x|$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để phương trình $f(x^2 - 4) = m$ có đúng hai nghiệm?

- A. 7. B. 8. C. 4. D. 6.

Câu 16: Cho hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x| + |x - 2|)$ là:

- A. 1. B. 0. C. 4. D. 3.

Câu 17: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(|x| + |x - 2|) = m$ có đúng bốn nghiệm?

- A. 16. B. 18. C. 14. D. 17.

Câu 18: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3|x|$. Biết rằng khi $m \in [a; b)$ thì hàm số $y = f[f(f(x)) + m]$ có đúng 12 điểm cực trị. Giá trị của biểu thức $M = a^2 + b^2$ bằng:

- A. 13. B. 16. C. 20. D. 25.

Câu 19: Cho hàm số $f(x) = x^4 + x^2 + 2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $g(x) = f(2|x + m| + m^2 + 1)$ đồng biến trên khoảng $(4; +\infty)$?

- A. 7. B. 8. C. 4. D. 6.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-15	-12	1	3	4	$+\infty$
y	$-\infty$	3	0	5	-5	3	$-\infty$



Số các điểm cực đại của hàm số $g(x) = \left| f\left(|2x^2 - 6x - 8| + x^2 - 13\right) \right|$ là:

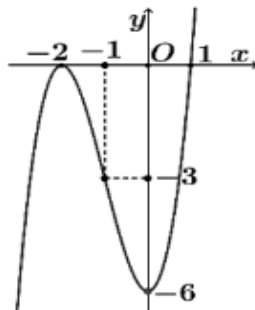
A. 8.

B. 10.

C. 9.

D. 7.

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $f(\sin x + \cos x) + 5 = 0$ trong đoạn $[0; 4\pi]$ là:



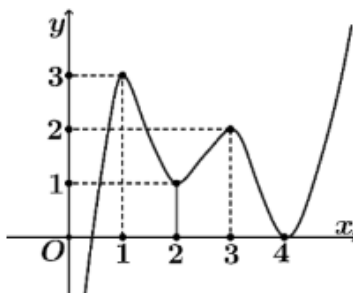
A. 7.

B. 8.

C. 4.

D. 6.

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2[f(x)]^3 - 9[f(x)]^2 = m$ có số nghiệm nhiều nhất?

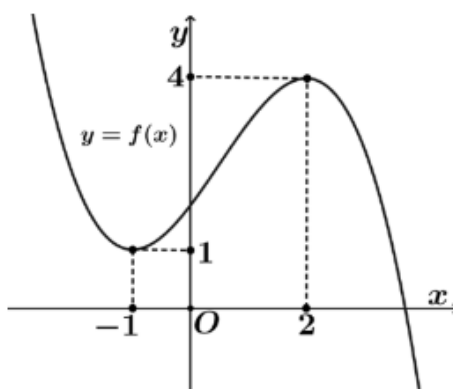
A. 11.

B. 12.

C. 13.

D. 14.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $|3f^2(2x) - 12f(2x) - m| = 1$ có ít nhất 7 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-\infty; 1)$?

A. 3.

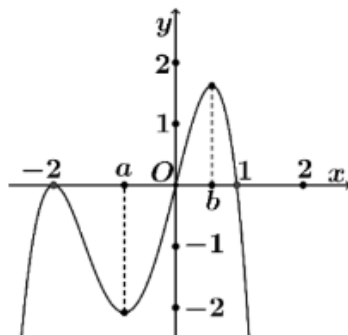
B. 4.

C. 1.

D. 2.



Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Hàm số $y = f(|x+2|(x-2))$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 2.

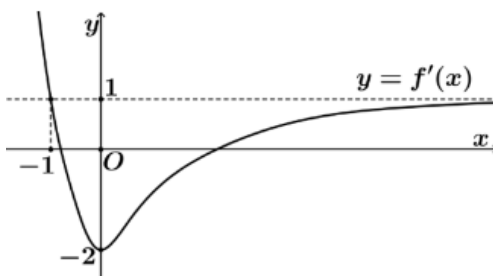
Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	8		-2		0	$-\infty$

Số giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để phương trình $[f(x)]^2 = m[f(x) + 1]$ có đúng 4 nghiệm là:

- A. 16. B. 15. C. 14. D. 13.

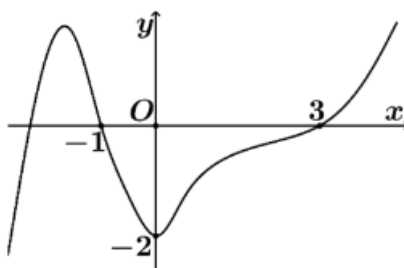
Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây (biết đường thẳng $y = 1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị)



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x) - \frac{2}{3}x^3$ là:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:

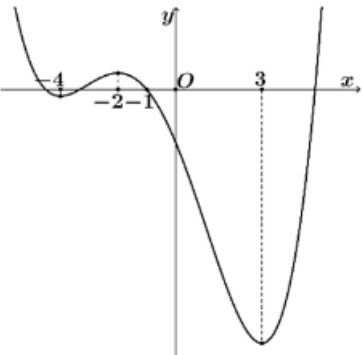


Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x) - 2\ln(x+1)$ là:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.



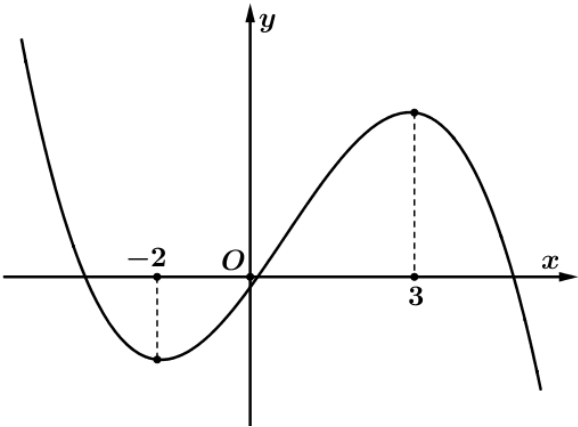
Câu 28: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây (biết rằng $f'(x)$ có ba điểm cực trị là $-4; -2$ và 3)



Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 + 2x) - x^2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Biết rằng $f(-2) = -3$; $f(3) = 4$; $f(4) = 3$ và $f(-5) = 16$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(4 - |x^2 - 6x|) = m + 2024$ có đúng 4 nghiệm phân biệt?

- A. 5. B. 6. C. 8. D. 7.



**ĐÁP ÁN CHI TIẾT**

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	$-1/4$	0	2	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		-2		2		-4		$+\infty$

Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ của hàm số $5f(\cos^2 x - \cos x) = 1$ là

A. 11.

B. 10.

C. 9.

D. 12.

Lời giải

Chọn B

Tiến hành đặt $u = \cos^2 x - \cos x$. Đạo hàm $u' = -2 \cos x \sin x + \sin x = \sin x(1 - 2 \cos x)$.

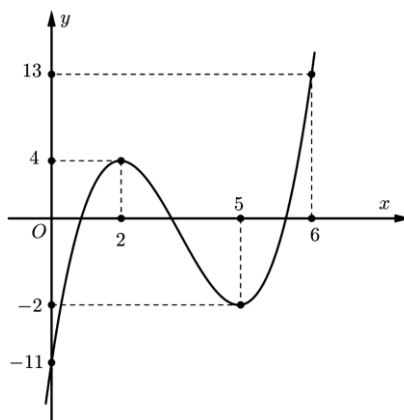
Giải phương trình: $u' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \Rightarrow x = 0; \pi; 2\pi \\ \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3} \end{cases}$

Sử dụng phương pháp ghép trực:

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	π	$\frac{5\pi}{3}$	2π	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{2}$
u	0	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	2	0	$-\frac{1}{4}$	0
$f(u)$									

Từ bảng biến thiên ta có phương trình $f(u) = \frac{1}{5}$ có tất cả 10 nghiệm phân biệt.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ





Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(f(x)+2) = \frac{m}{2}$ có 3 nghiệm phân biệt. Số phần tử của tập S là?

A. 11.

B. 32.

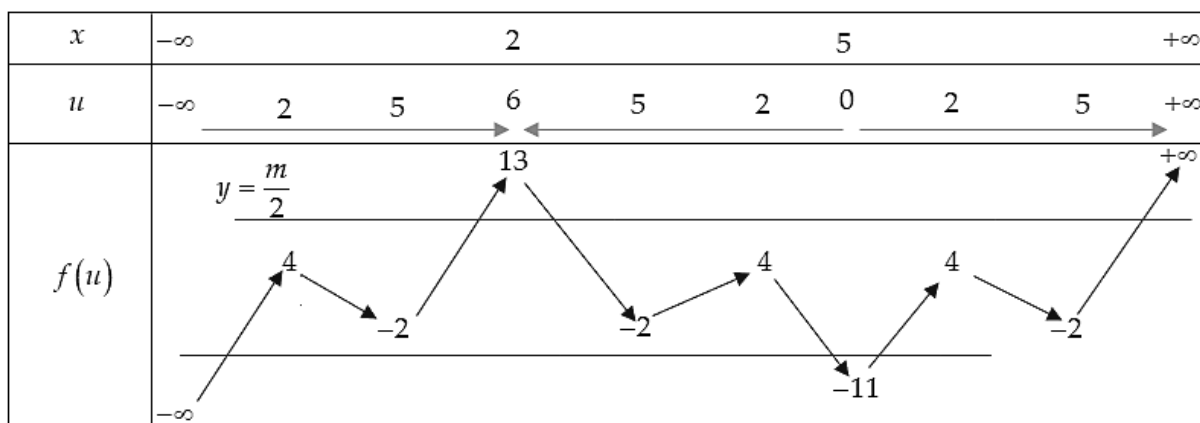
C. 9.

D. 34.

Lời giải**Chọn D**

Đặt $u = f(x) + 2$. Từ đồ thị ta thấy hàm số đạt cực trị tại $x = 2$ và $x = 5$.

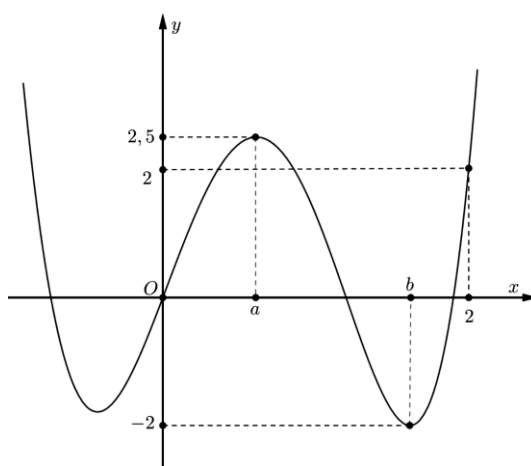
Sử dụng phương pháp ghép trục:



Từ bảng biến thiên, phương trình có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} -11 < \frac{m}{2} < -2 \\ 4 < \frac{m}{2} < 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 < m < 26 \\ -22 < m < -4 \end{cases}$

Vậy có 34 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Hỏi phương trình $f(|x^3 - 3x|)$ có bao nhiêu điểm cực trị thuộc đoạn $[-2; 2]$?

A. 11.

B. 17.

C. 12.

D. 15.

Lời giải**Chọn B**

$$\text{Đặt } u = |x^3 - 3x| = \sqrt{(x^3 - 3x)^2} \Rightarrow u' = \frac{(x^3 - 3x)(3x^2 - 3)}{\sqrt{(x^3 - 3x)^2}}.$$



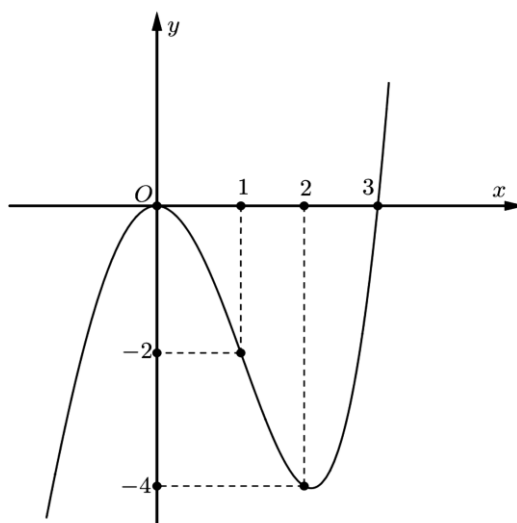
Giải phương trình đạo hàm $u' = \frac{(x^3 - 3x)(3x^2 - 3)}{\sqrt{(x^3 - 3x)^2}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm \sqrt{3} \end{cases}$.

Sử dụng phương pháp ghép trục:

x	-2	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	2
u	2	a	0	a	2	a	2
$f(u)$	2	2,5	0	2,5	2	2,5	2

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số $f(|x^3 - 3x|)$ có 17 điểm cực trị.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(5 - 2\sqrt{1 + 3\cos x}) = \frac{3m - 10}{7}$

có đúng ba nghiệm phân biệt thuộc $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

A. 11.

B. 1.

C. 12.

D. 2.

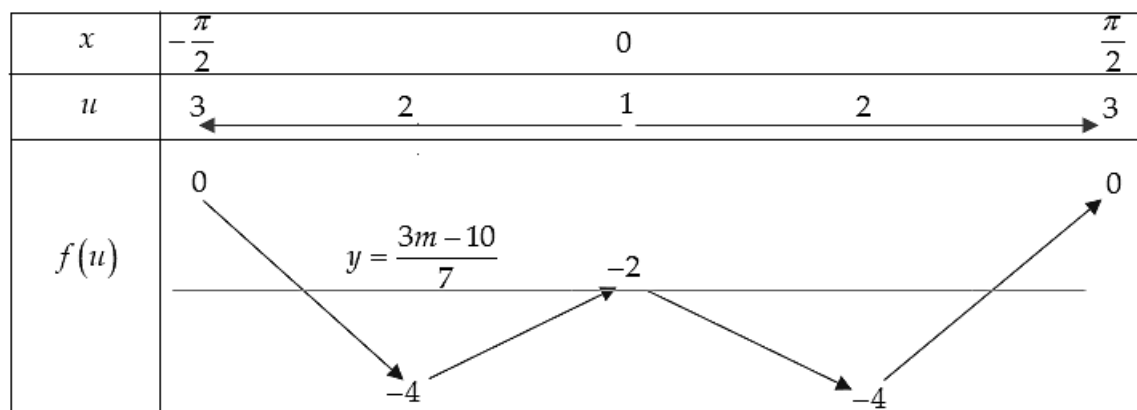
Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với $f(5 - 2\sqrt{1 + 3\cos x}) = \frac{3m - 10}{7}$.

Đặt $u = 5 - 2\sqrt{1 + 3\cos x} \Rightarrow u' = \frac{3\sin x}{\sqrt{1 + 3\cos x}}$.

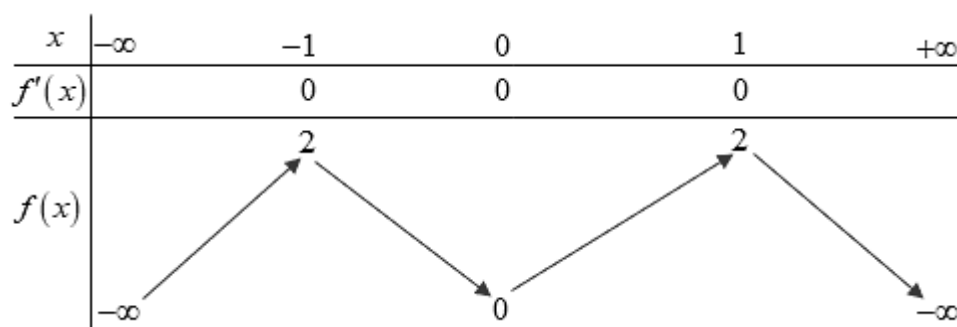
Giải phương trình đạo hàm $u' = \frac{3\sin x}{\sqrt{1 + 3\cos x}} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Sử dụng phương pháp ghép trục:



Từ bảng biến thiên, yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \frac{3m-10}{7} = -2 \Leftrightarrow m = -\frac{4}{3}$

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Hỏi phương trình $\left| f(x-1-2\sqrt{x-1}) \right| = 1$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 12.

B. 4.

C. 5.

D. 8

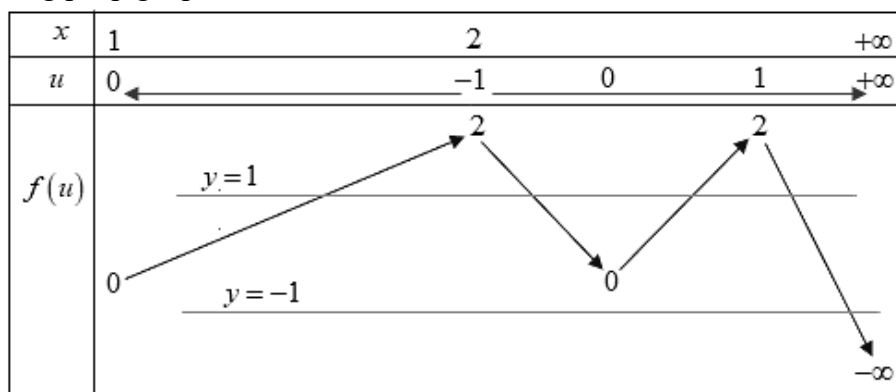
Lời giải

Chọn C

Điều kiện xác định: $x \geq 1$. Ta có: $\left| f(x-1-2\sqrt{x-1}) \right| = 1 \Rightarrow \begin{cases} f(x-1-2\sqrt{x-1}) = 1 \\ f(x-1-2\sqrt{x-1}) = -1 \end{cases}$.

Đặt $u = x-1-2\sqrt{x-1} \Rightarrow u' = 1 - \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Sử dụng phương pháp ghép trục:



Từ bảng biến thiên suy ra phương trình có 5 nghiệm phân biệt.



Câu 6: Cho bảng biến thiên hàm số $f(5-2x)$ như hình vẽ dưới.

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
y		3	2	4	
	-1				$-\infty$

Hỏi phương trình $|2f(x^2 - 4x + 3) - 1| = 3$ có bao nhiêu nghiệm thực x tương ứng?

A. 6.

B. 5.

C. 7.

D. 4

Lời giải

Chọn D

Đặt $x = 5 - 2t$, đưa bảng biến thiên hàm số $f(5-2x)$ về bảng biến thiên hàm số $f(x)$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

t	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
x	$+\infty$	3	1	-1	
$f(x)$		3	2	4	
	-1				$-\infty$

Đặt $u = x^2 - 4x + 3$, phương trình trở thành $|2f(u) - 1| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} f(u) = 2 \\ f(u) = -1 \end{cases}$.

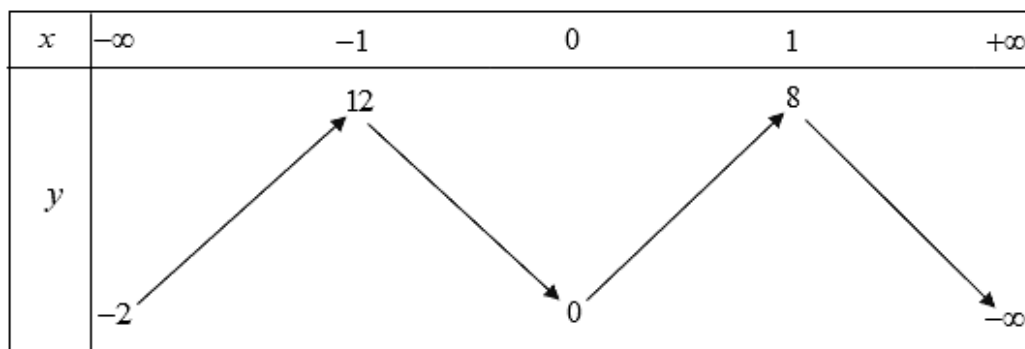
Sử dụng phương pháp ghép trục:

x	$-\infty$	2					$+\infty$	
u	$+\infty$	3		1	-1	1	3	$+\infty$
$f(u)$			3		4		3	
	-1	$y=-1$						
		$y=2$						

Từ bảng biến thiên suy ra, phương trình có tất cả 4 nghiệm thực x .



Câu 7: Cho bảng biến thiên của hàm số $f(3-2x)$ như hình vẽ. Biết $f(4)=3$; $f(0)=0$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $|f(x^3-3x+2)-m|=2$ có nhiều nghiệm nhất?



A. 7.

B. 6.

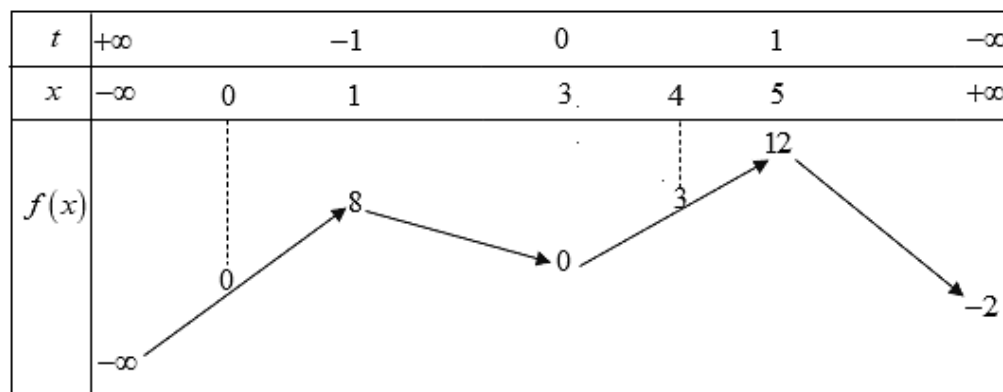
C. 5.

D. 2

Lời giải**Chọn D**

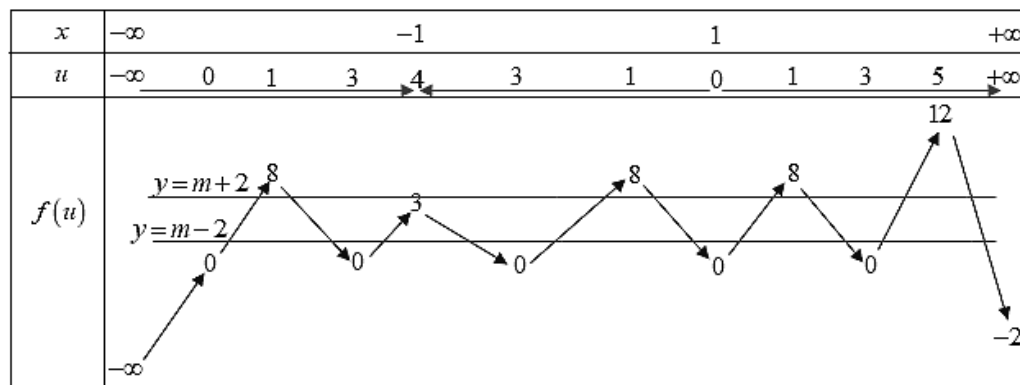
Đưa về bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ bằng cách đặt $x=3-2t \Rightarrow f(x)=f(3-2t)$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:



Đặt $u = x^3 - 3x + 2$ thì phương trình trở thành $|f(u) - m| = 2 \Rightarrow \begin{cases} f(u) = m + 2 \\ f(u) = m - 2 \end{cases}$.

Sử dụng phương pháp ghép trục:



Để phương trình có nhiều nghiệm nhất $\Leftrightarrow \begin{cases} 3 < m+2 < 8 \\ 0 < m-2 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m < 5 \Rightarrow m = \{3; 4\}$.



Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(-1) < 2 < f(5)$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	2	0	3	$-\infty$

Số nghiệm của phương trình $f\left(\sqrt{2\cos^3(x) + 2\cos x + 5} + 2\cos x\right) = 2$ trên khoảng $\left(0; \frac{5\pi}{2}\right)$ là?

A. 2.

B. 1.

C. 5.

D. 3

Lời giải

Chọn A

Ta đặt $u = \sqrt{2\cos^3(x) + 2\cos x + 5} + 2\cos x \Rightarrow u' = \sin x \left(\frac{-3\cos^2 x - 1}{\sqrt{2\cos^3(x) + 2\cos x + 5}} - 2 \right) = 0$

Giải phương trình $u' = 0$ $\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \xrightarrow{\text{với } x \in \left(0; \frac{5\pi}{2}\right)} x = \pi; 2\pi. \\ \frac{-3\cos^2 x - 1}{\sqrt{2\cos^3(x) + 2\cos x + 5}} - 2 = 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{array} \right.$

Sử dụng phương pháp ghép trực:

x	0	π	2π	$5\pi/2$
u	5	2	1	5
$f(u)$	$f(5)$	3	0	$f(\sqrt{5})$

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên.

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-4	2	4	2	$+\infty$

Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(\cos x) + (3-m)f(\cos x) + 2m - 10 = 0$ có đúng 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; \pi\right]$ là

A. 5.

B. 6.

C. 7.

D. 4.



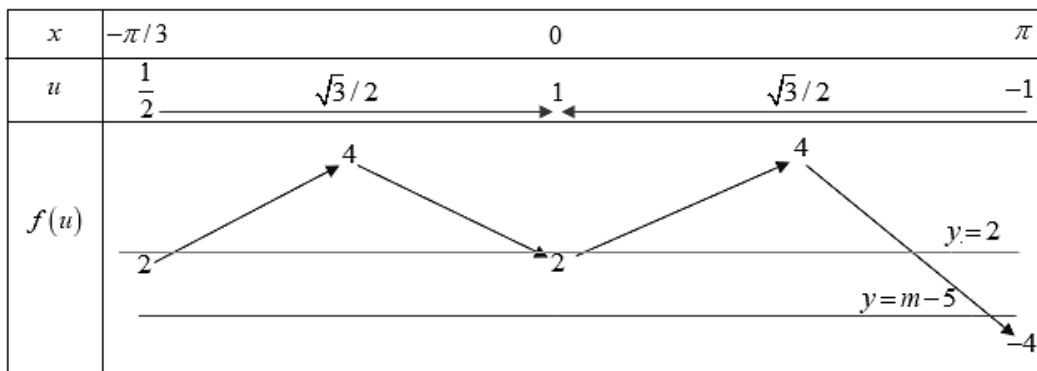
Lời giải

Chọn B

$$\text{Đặt } u = \cos x \Rightarrow u' = -\sin x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pi \end{cases} \text{ (với } x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \pi\right]).$$

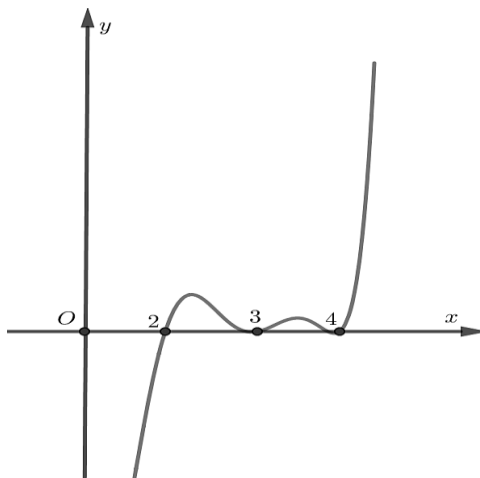
$$\text{Khi đó phương trình đã cho trở thành } f(u)^2 + (3-m)f(u) + 2m - 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(u) = 2 \\ f(u) = m - 5 \end{cases}.$$

Sử dụng phương pháp ghép trục:



Do phương trình $f(u) = 2$ có 3 nghiệm nên yêu cầu bài toán tương đương với phương trình $f(u) = m - 5$ có duy nhất một nghiệm $-4 \leq m - 5 < 2 \Leftrightarrow 1 \leq m < 7 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Câu 10: Cho $f(x)$ là hàm đa thức bậc 6 và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



Hỏi hàm số $y = g(x) = f(x^2 + 4x + 5)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2.

B. 5.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Đặt } u = x^2 + 4x + 5 \Rightarrow u' = 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

Sử dụng phương pháp ghép trục:



x	$-\infty$	-2	$+\infty$
u	$+\infty$	2	$+\infty$
$f(u)$	$+\infty$	$f(1)$	$+\infty$
		$f(2)$	$f(2)$

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 11: Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x^2 + x) = 2024m$ có đúng bốn nghiệm?

A. 1.

B. 3.

C. 4.

D. 2.

Lời giải:

Chọn A

Ta có: $f(x) = x^2 - 2x \Rightarrow f'(x) = 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Đặt $u = x^2 + x \Rightarrow u' = 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

Sử dụng phương pháp ghép trục:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
u	$+\infty$	1	$+\infty$
$f(u)$	$+\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
		$\frac{9}{16}$	

Phương trình $f(x^2 + x) = 2024m$ có đúng bốn nghiệm khi và chỉ khi đường thẳng $y = 2024m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x^2 + x)$ tại bốn điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow -1 < 2024m < \frac{9}{16} \Leftrightarrow -\frac{1}{2024} < m < \frac{9}{32384} \Rightarrow m \in \{0\}.$$

Vậy có một giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 12: Cho hàm số $f(x) = x^2 - 8|x|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để phương trình

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = m \text{ có đúng bốn nghiệm?}$$

A. 9.

B. 12.

C. 11.

D. 10.

Lời giải:

Chọn C

Ta có: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x & \text{khi } x \geq 0 \\ x^2 + 8x & \text{khi } x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x - 8 & \text{khi } x > 0 \\ 2x + 8 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ nên từ đó ta suy ra hàm số

không có đạo hàm tại $x = 0$, đồng thời $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -4 \end{cases}$. Khi đó bảng biến thiên của hàm

số $f(x)$ như sau:



x	$-\infty$	-4	0	4	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		-16	0	-16		$+\infty$

Đặt $u = x + \frac{1}{x} \Rightarrow u' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2} \forall x \in \mathbb{R}$ nên $u' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$

Sử dụng phương pháp ghép trục:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$u(x)$	$-\infty$	-4	-2	-4	$+\infty$
$f(u(x))$	$+\infty$		-12	-16	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, phương trình $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = m$ có đúng bốn nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m > -12 \\ m = -16 \end{cases}$.

Vậy $m \in \{-16; -11; -10; \dots; -1\}$ nên có tất cả 11 giá trị thỏa mãn.

Câu 13: Cho hàm số $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình $f(x^2 - 1) = m$ có đúng hai nghiệm?

A. 3.

B. 4.

C. 2.

D. 1.

Lời giải:

Chọn D

Ta có: $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$.

Khi đó: $f(-1) = -\frac{1}{2}$; $f(1) = \frac{1}{2}$

Đặt $u = x^2 - 1 \Rightarrow u' = 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Sử dụng phương pháp ghép trục:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$
$f(u(x))$	0	$\frac{1}{2}$	0

Từ bảng biến thiên, phương trình $f(x^2 - 1) = m$ có đúng hai nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} < m \leq 0 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Vậy $m = 0$ nên có 1 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 14: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x^3 + 3x^2) = m$ có đúng ba nghiệm?

A. 49.

B. 50.

C. 48.

D. 47.

Lời giải:

Chọn A

Ta có: $f(x) = x^3 - 3x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$. Khi đó: $f(-1) = 2$; $f(1) = -2$.

$$\text{Đặt } u = x^3 + 3x^2 \Rightarrow u' = 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Sử dụng phương pháp ghép trực:

x	$-\infty$			-2		0		$+\infty$	
$u(x)$	$+\infty$	-1	1	4	1	0	1	$+\infty$	
$f(u(x))$	$-\infty$		2		52		0		$+\infty$

Do đó, phương trình $f(x^3 + 3x^2) = m$ có đúng ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2 < m < 52$.

Vậy có tất cả 49 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 15: Cho hàm số $f(x) = x^3 + 3|x|$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để phương trình $f(x^2 - 4) = m$ có đúng hai nghiệm?

A. 7.

B. 8.

C. 4.

D. 6 .

Lời giải:

Chọn A

Ta có: $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x & \text{khi } x \geq 0 \\ x^3 - 3x & \text{khi } x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 3 & \text{khi } x > 0 \\ 3x^2 - 3 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ nên từ đó ta suy ra hàm số

không có đạo hàm tại $x = 0$, đồng thời $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Khi đó bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$ $	$+$	
$f(x)$			2		0		$+\infty$

Diagram illustrating the behavior of the function $f(x)$ based on the sign of the first derivative $f'(x)$ and the values of the function at critical points.

The function $f(x)$ has a local maximum at $x = -1$ with value $f(-1) = 2$ and a local minimum at $x = 0$ with value $f(0) = 0$.

Đặt $u = x^2 - 4 \Rightarrow u' = 2x = - \Leftrightarrow x = 0$

Sử dụng phương pháp ghép trực:



x	$-\infty$	0					$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$	0	-1	-4	-1	0	$+\infty$
$f(u(x))$	$+\infty$	0	2	-52	2	0	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, phương trình $f(x^2 - 4) = m$ có đúng hai nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ -52 < m < 0 \end{cases}$.

Vậy có tất cả 51 giá trị nguyên âm m thỏa mãn yêu cầu.

Câu 16: Cho hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x| + |x - 2|)$ là:

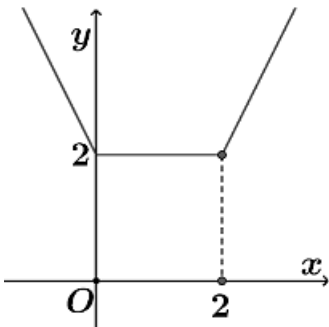
- A. 1. B. 0. C. 4. D. 3.

Lời giải:

Chọn B

Ta có: $f(x) = x^3 + 3x^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases}$. Khi đó: $f(-2) = 4$; $f(0) = 0$.

Đặt $u = |x| + |x - 2|$, ta có: $u = \begin{cases} 2x - 2 & \text{khi } x \geq 2 \\ 2 & \text{khi } 0 < x < 2 \\ -2x - 2 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$. Đồ thị hàm số $y = u(x)$ như sau:



Sử dụng phương pháp ghép trục:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$	2	2	$+\infty$
$f(u(x))$	$+\infty$	20	20	$+\infty$

Vậy hàm số $y = f(|x| + |x - 2|)$ không có điểm cực trị.



Câu 17: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(|x| + |x - 2|) = m$ có đúng bốn nghiệm?

A. 16.

B. 18.

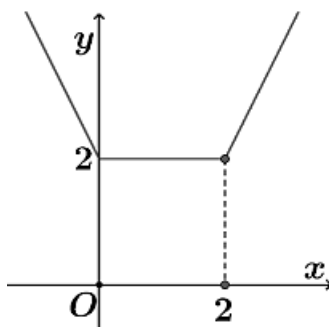
C. 14.

D. 17.

Lời giải:**Chọn D**

Ta có: $f(x) = x^3 - 6x^2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$. Khi đó: $f(0) = 0$; $f(4) = -32$.

Đặt $u = |x| + |x - 2|$, ta có: $u = \begin{cases} 2x - 2 & \text{khi } x \geq 2 \\ 2 & \text{khi } 0 < x < 2 \\ -2x - 2 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$. Đồ thị hàm số $y = u(x)$ như sau:



Sử dụng phương pháp ghép trục:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$	4	2	$+\infty$
$f(u(x))$	$+\infty$	-32	-16	$+\infty$

Vậy phương trình $f(|x| + |x - 2|) = m$ có đúng bốn nghiệm $\Leftrightarrow -32 < m < -16$.

Vậy có tất cả 17 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 18: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3|x|$. Biết rằng khi $m \in [a; b)$ thì hàm số $y = f[f(f(x)) + m]$ có đúng 12 điểm cực trị. Giá trị của biểu thức $M = a^2 + b^2$ bằng:

A. 13.

B. 16.

C. 20.

D. 25.

Lời giải:**Chọn A**

Ta có: $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x & \text{khi } x \geq 0 \\ x^3 + 3x & \text{khi } x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & \text{khi } x > 0 \\ 3x^2 + 3 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ nên từ đó ta suy ra hàm số

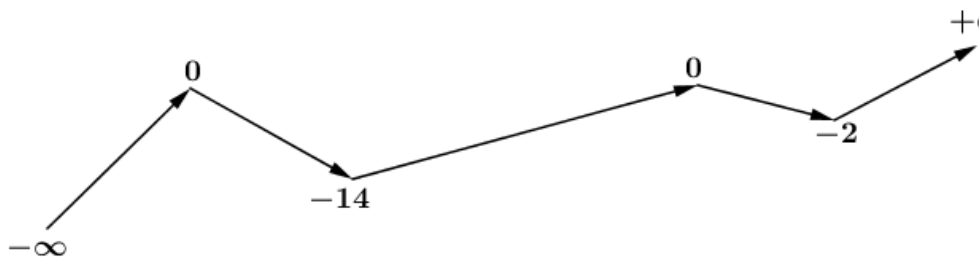
không có đạo hàm tại $x = 0$, đồng thời $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Khi đó bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:



x	$-\infty$	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$
$f(x)$			0		$+\infty$	
	$-\infty$		-2			

Đặt $u = f(f(x))$ và $t = f(x)$

Sử dụng phương pháp ghép trực:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$		
$t = f(x)$	$-\infty$	0	2	0	1	$+\infty$
$f(t)$						

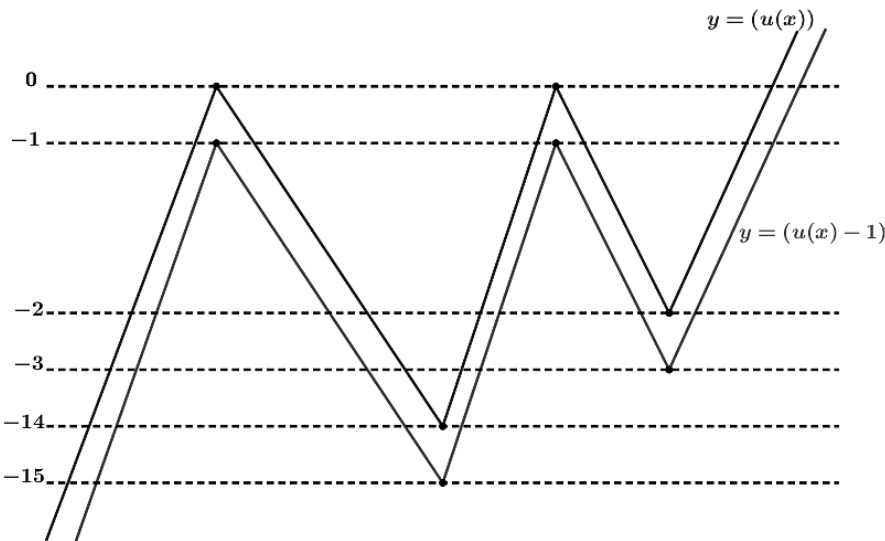
Kết hợp sử dụng công thức đếm nhanh số điểm cực trị của hàm số $f(u(x) + m)$

$$SDCT \{f(u(x))\} = SDCT \{u(x)\} + SBBL \left\{ \begin{array}{l} u(x) + m = a \\ u(x) + m = b \end{array} \right.$$

Áp dụng vào bài toán: Từ bảng biến thiên ta thấy $u(x)$ có 4 điểm cực trị nên suy ra:

$$12 = 4 + SBBL \left\{ \begin{array}{l} u(x) + m = 0 \\ u(x) + m = 1 \end{array} \right. \Rightarrow SBBL \left\{ \begin{array}{l} u(x) = -m \\ u(x) - 1 = -m \end{array} \right. = 8$$

Phác họa đồ thị hai hàm số $y = u(x)$ và $y = u(x) - 1$ trên cùng một hệ trục tọa độ



Đường thẳng $y = -m$ cắt hệ đồ thị trên tại đúng 8 điểm phân biệt $\Leftrightarrow -3 < -m \leq -2 \Leftrightarrow 2 \leq m < 3 \Rightarrow m \in [2; 3)$.

Khi đó: $a = 2; b = 3$ nên $M = a^2 + b^2 = 2^2 + 3^2 = 13$.



- Câu 19:** Cho hàm số $f(x) = x^4 + x^2 + 2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $g(x) = f(2|x+m| + m^2 + 1)$ đồng biến trên khoảng $(4; +\infty)$?
- A. 7. B. 8. C. 4. D. 6.

Lời giải:

Chọn C

Ta có: $f(x) = x^4 + x^2 + 2 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 2x$. Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Đặt $u = 2|x+m| + m^2 + 1$, hàm số $u(x)$ có một điểm cực trị là $x = -m$ và có bảng biến thiên như sau:

x	0	$-m$	$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$	$m^2 + 1$	$+\infty$

Sử dụng phương pháp ghép trục:

x	$-\infty$	$-m$	$+\infty$
u	$+\infty$	$m^2 + 1$	$+\infty$
$f(u)$	$+\infty$		$+\infty$

Từ bảng biến thiên, để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(4; +\infty)$ thì $(4; +\infty) \subset (-m; +\infty)$ nên $-m \leq 4 \Leftrightarrow m \geq -4$.

Vậy có 4 giá trị nguyên âm của tham số m thỏa mãn.

- Câu 20:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-15	-12	1	3	4	$+\infty$
y	$-\infty$	3	0	5	-5	3	$-\infty$

Số các điểm cực đại của hàm số $g(x) = \left| f(|2x^2 - 6x - 8| + x^2 - 13) \right|$ là:

- A. 8. B. 10. C. 9. D. 7.

Lời giải:

Chọn A

Đặt $u(x) = |2x^2 - 6x - 8| + x^2 - 13$.

Nhận xét: $2x^2 - 6x - 8 = 2(x^2 - 3x - 4) = 2(x+1)(x-4)$ nên ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$2x^2 - 6x - 8$			$+$	0	$-$	0	$+$

Ta có: $u(x) = \begin{cases} 2x^2 - 6x - 8 + x^2 - 13 & \text{khi } x \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty) \\ -2x^2 + 6x + 8 + x^2 - 13 & \text{khi } x \in [-1; 4] \end{cases}$

Khi đó: $u'(x) = \begin{cases} 6(x-1) & \text{khi } x \in (-\infty; -1) \cup (4; +\infty) \\ -2(x-3) & \text{khi } x \in [-1; 4] \end{cases}$

Bảng biến thiên của hàm số $u(x)$ như sau:



x	$-\infty$		-1		3		4		$+\infty$
$u'(x)$		$-$	$\parallel$	$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$	
$u(x)$	$+\infty$				4				$+\infty$

$\swarrow$ $\searrow$ $\swarrow$ $\searrow$
 $+\infty$ -12 3 $+\infty$

Xét hàm số $g(x) = \left| f\left(|2x^2 - 6x - 8| + x^2 - 13\right) \right| = f(u(x))$ có số điểm cực trị bằng $a + b$ trong đó a là số điểm cực trị của hàm số $f(u(x))$ và b là số nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ của phương trình $f(u(x)) = 0$.

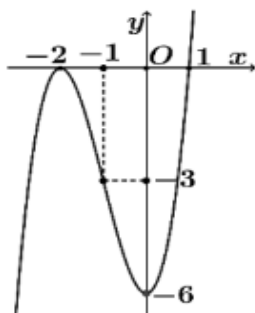
Sử dụng phương pháp ghép trực:

x	$-\infty$		-1		3		4		$+\infty$
$u(x)$	$-\infty$	4	3	1	-12	1	3	4	$+\infty$
$f(u(x))$	$-\infty$	3	-5	5	0	5	-5	3	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f(u(x))$ ta thấy $a = 9$ và $b = 8$. Suy ra hàm số $g(x)$ có 17 điểm cực trị.

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ nên số điểm cực tiểu sẽ nhiều hơn số điểm cực đại là một nên hàm số $g(x)$ có 9 điểm cực tiểu và 8 điểm cực đại.

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $f(\sin x + \cos x) + 5 = 0$ trong đoạn $[0; 4\pi]$ là:



A. 7.

B. 8.

C. 4.

D. 6.

Lời giải:

Chọn B

$$\text{Đặt } u = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow u' = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Xét trên đoạn } [0; 4\pi] \Leftrightarrow x \in \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}; \frac{13\pi}{4} \right\}.$$

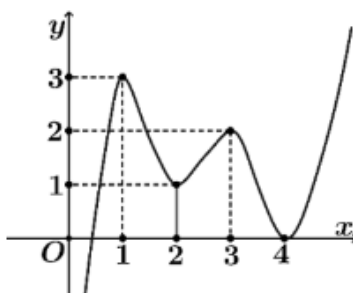
Sử dụng phương pháp ghép trực:



x	0	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{9\pi}{4}$		$\frac{13\pi}{4}$		4π
$u(x)$	1	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	0	1
$f(u(x))$										

Từ bảng biến thiên, trên đoạn $[0; 4\pi]$ thì hàm số có 8 nghiệm phân biệt.

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2[f(x)]^3 - 9[f(x)]^2 = m$ có số nghiệm nhiều nhất?

A. 11.

B. 12.

C. 13.

D. 14.

Lời giải:

Chọn B

Đặt $u = f(x)$ thì phương trình trở thành $2u^3 - 9u^2 = m$.

Xét hàm số $g(u) = 2u^3 - 9u^2 \Rightarrow g'(u) = 6u^2 - 18u = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ u = 3 \end{cases}$

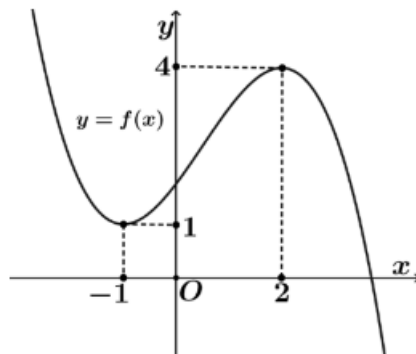
Sử dụng phương pháp ghép trục:

x	$-\infty$	1	2	3	4	4π		
$u(x)$	$-\infty$	0	3	1	2	0	3	1
$g(u(x))$	The graph shows a periodic function $g(u(x))$ plotted against $u(x)$. The x-axis has labels $-\infty, 0, 3, 1, 2, 0, 3, 1$ corresponding to the columns. The y-axis has labels $-\infty, 0, -27, -20, +\infty$. The function consists of several linear segments: from $-\infty$ to 0 (increasing), from 0 to 3 (decreasing), from 3 to 1 (increasing), from 1 to 2 (decreasing), from 2 to 0 (increasing), from 0 to 3 (decreasing), and from 3 to 1 (increasing). The peaks are at 0 and the troughs are at -27. A horizontal dashed line is drawn at $y = m$, which is between -27 and 0. The function approaches $+\infty$ as $u(x)$ approaches 4π.							

Phương trình có nhiều nghiệm nhất khi và chỉ khi $-20 < m < -7$ nên có 12 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.



Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $|3f^2(2x) - 12f(2x) - m| = 1$ có ít nhất 7 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(-\infty; 1)$?

A. 3.

B. 4.

C. 1.

D. 2.

Lời giải:

Chọn C

Ta có:

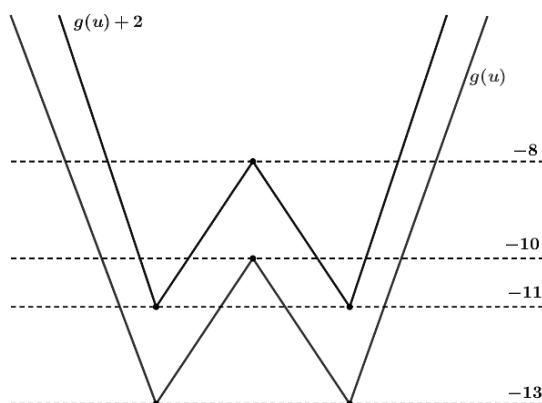
$$|3f^2(2x) - 12f(2x) - m| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3f^2(2x) - 12f(2x) - m = 1 \\ 3f^2(2x) - 12f(2x) - m = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3f^2(2x) - 12f(2x) - 1 = m \\ 3f^2(2x) - 12f(2x) + 1 = m \end{cases}$$

Đặt $u = f(2x)$, xét hàm số $g(u) = 3u^2 - 12u - 1 \Rightarrow g'(u) = 6u - 12 = 0 \Leftrightarrow u = 2$.

Sử dụng phương pháp ghép trục:

x	$-\infty$				1
$2x$	$-\infty$		-1		
$u(x)$	$+\infty$	2	1	2	
$g(u(x))$	$+\infty$	-13	-10	-13	$+\infty$

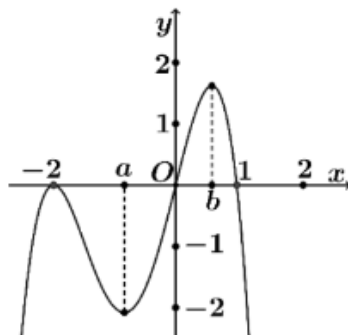
Ta cần tìm m để hệ $\begin{cases} g(u) = m \\ g(u) + 2 = m \end{cases}$ có ít nhất 7 nghiệm phân biệt. Ta phác họa đồ thị hai hàm số trên cùng một hệ trục tọa độ như sau:



Để hệ có ít nhất 7 nghiệm phân biệt thì $-11 < m \leq -10$ nên $m \in \{-10\}$.



Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Hàm số $y = f(|x+2|(x-2))$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 2.

Lời giải:

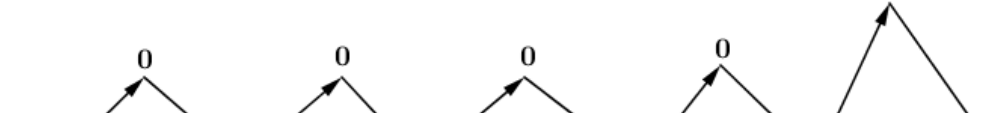
Chọn B

$$\text{Đặt } u = |x+2|(x-2) = \sqrt{(x+2)^2}(x-2)$$

$$\text{Ta có đạo hàm: } u' = \frac{x+2}{\sqrt{(x+2)^2}}(x-2) + \sqrt{(x+2)^2} = \frac{2x(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2}} \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Khi đó: $f(-2) = 0$ và $f(0) = -4$.

Sử dụng phương pháp ghép trực:

x	$-\infty$	-2				0				$+\infty$		
$u(x)$	$-\infty$	-2	a	0	a	-2	-4	-2	a	b	$+\infty$	
$f(u(x))$												

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho có 4 điểm cực tiểu.

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	8		-2		0		$-\infty$

Số giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để phương trình $[f(x)]^2 = m[f(x) + 1]$ có đúng 4 nghiệm là:

A. 16.

B. 15.

C. 14.

D. 13.

Lời giải:

Chọn D

$$\text{Phương trình đã cho tương đương với } \frac{f^2(x)}{f(x)+1} = m. \text{ Đặt } u = f(x) \text{ thì ta được } \frac{u^2}{u+1} = m.$$



Khi đó phương trình trở thành $g(f(x)) = m$.

$$\text{Xét hàm số } g(u) = \frac{u^2}{u+1} \Rightarrow g'(u) = \frac{2u(u+1) - u^2}{(u+1)^2} = \frac{u(u+2)}{(u+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ u = -2 \end{cases}.$$

Sử dụng phương pháp ghép trục:

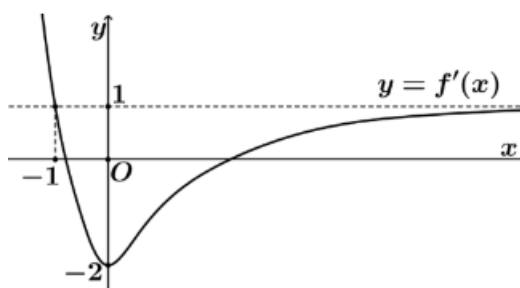
x	$-\infty$	-2				2				$+\infty$
$u = f(x)$	$(8$	0	-1	-2	-1	0	-1	-2	$-\infty$	
$g(u(x))$	$\frac{64}{9}$	$\nearrow$		0	$\searrow$		$+\infty$	$\nearrow$		$+\infty$
		$\nwarrow$		-4	$\swarrow$		0	$\nwarrow$		-4
		$-\infty$		$-\infty$	$-\infty$		$-\infty$	$-\infty$		$-\infty$

Từ bảng biến thiên, phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m < -4 \\ 0 < m < \frac{64}{9} \end{cases}$ và kết hợp với

các điều kiện $\begin{cases} m \in \mathbb{R} \\ m \in [-10; 10] \end{cases}$ nên suy ra $m \in \{-10; -9; -8; \dots; -5\} \cup \{1; 2; \dots; 7\}$.

Vậy có tất cả 13 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây (biết đường thẳng $y = 1$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị)



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x) - \frac{2}{3}x^3$ là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải:

Chọn B

$$\text{Xét đạo hàm: } g'(x) = (2x - 2)f'(x^2 - 2x) - \frac{2}{3} \cdot 3x^2 = 2[(x - 1)f'(x^2 - 2x) - x^2]$$

$$\text{Ta có: } g'(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)f'(x^2 - 2x) = x^2 \Leftrightarrow f'(x^2 - 2x) = \frac{x^2}{x - 1}.$$

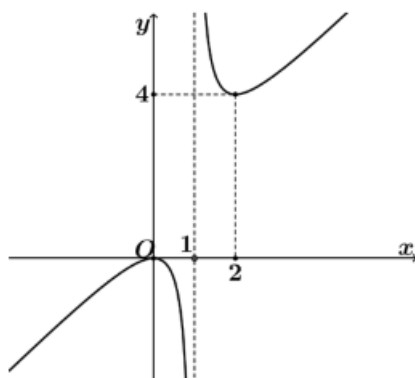
$$\text{Đặt } u = x^2 - 2x \Rightarrow u' = 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Sử dụng phương pháp ghép trục:



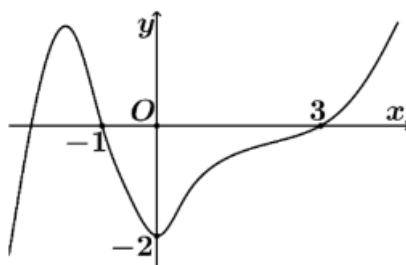
x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$	0	-1	0	$+\infty$
$f'(u(x))$	1		1		1
		-2		-2	

Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{x-1}$ được phác họa như hình vẽ sau:



Do đó phương trình $f'(x^2 - 2x) = \frac{x^2}{x-1}$ có đúng hai nghiệm phân biệt nên hàm số đã cho có đúng hai điểm cực trị.

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x) - 2\ln(x+1)$ là:

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải:

Chọn C

Hàm số $g(x)$ có tập xác định là $(-1; +\infty)$.

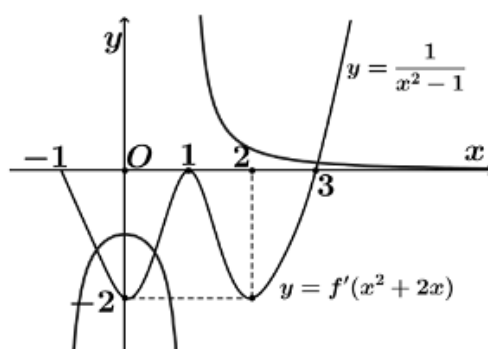
Ta có: $g'(x) = (2x-2)f'(x^2-2x) - \frac{2}{x+1} \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x^2-2x) = \frac{1}{x^2-1}$.

Đặt $u = x^2 - 2x \Rightarrow u' = 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Sử dụng phương pháp ghép trục:

x	$(-1$	0	1	2	$+\infty$
$u(x)$	$(3$	0	-1	0	$+\infty$
$f'(u(x))$	$(0$		0		$+\infty$
		-2		-2	

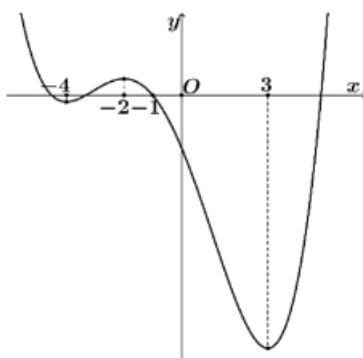
Xét hàm số $h(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$, xét sự tương giao của hai hàm số $y = h(x)$ và $y = f'(x^2 - 2x)$ trên cùng một hệ trục tọa độ như sau:



Chú ý tập xác định của hàm số $g(x)$ là $D = (-1; +\infty)$ nên ta chỉ xét trên miền xác định này. Một số trường hợp xét trên toàn $\mathbb{R}$ là sai.

Từ đồ thị ta thấy phương trình $g'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt nên hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây (biết rằng $f'(x)$ có ba điểm cực trị là $-4; -2$ và 3)



Hỏi hàm số $g(x) = f(x^2 + 2x) - x^2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1.** **B. 3.** **C. 2.** **D. 4.**

Lời giải:

Chọn B

Xét đạo hàm $g'(x) = (2x+2)f'(x^2+2x) - 2x \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x^2+2x) = \frac{x}{x+1}$.

Đăt $u = x^2 + 2x \Rightarrow u' = 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

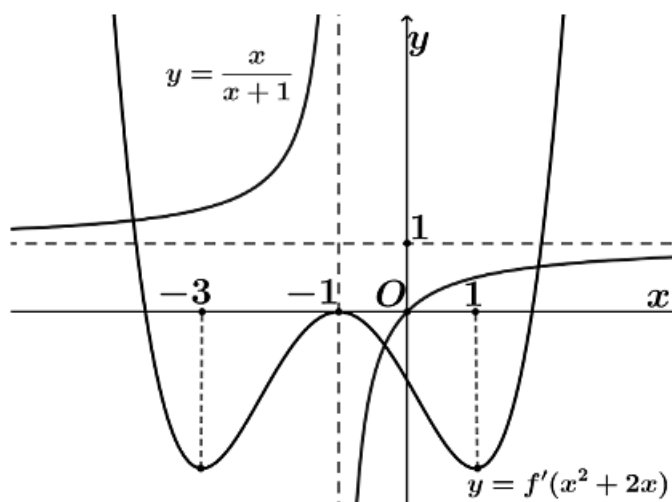
Sử dụng phương pháp ghép trực:



x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$	3	-1	3	$+\infty$
$f'(u(x))$	$+\infty$		0		$+\infty$

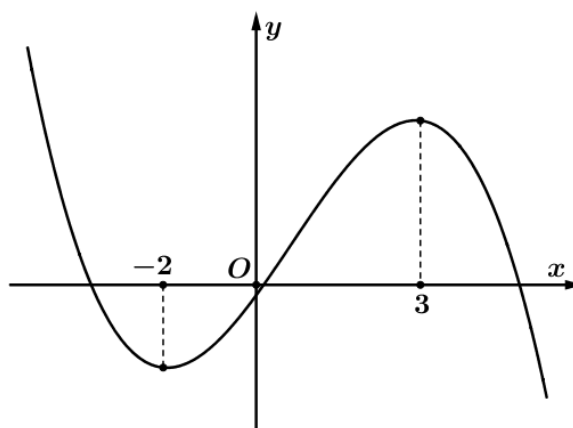
The graph shows the function $f'(u(x))$ plotted against x . The function is defined at $x = -\infty$, $x = -1$, and $x = +\infty$. The values are $+\infty$, 0 , and $+\infty$ respectively. Arrows indicate the direction of the function between these points: from $+\infty$ at $x = -\infty$ down to 0 at $x = -1$, from 0 at $x = -1$ up to $+\infty$ at $x = +\infty$, and from $+\infty$ at $x = +\infty$ down to 0 at $x = -1$.

Xét hàm số $h(x) = \frac{x}{x+1}$, xét sự tương giao của hai hàm số $y = h(x)$ và $y = f'(x^2 + 2x)$ trên cùng một hệ trục tọa độ như sau:



Từ đồ thị ta thấy phương trình $g'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt nên hàm số đã cho có đúng 3 điểm cực trị.

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Biết rằng $f(-2) = -3$; $f(3) = 4$; $f(4) = 3$ và $f(-5) = 16$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(4 - |x^2 - 6x|) = m + 2024$ có đúng 4 nghiệm phân biệt?

A. 5.

B. 6.

C. 8.

D. 7.

Lời giải:

Chọn B



Đặt $u = 4 - |x^2 - 6x| \Rightarrow u' = -\frac{(2x - 6)(x^2 - 6x)}{|x^2 - 6x|} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \\ x = 3 \end{cases}$

Sử dụng phương pháp ghép trực:

x	$-\infty$	0				3				6				$+\infty$	
u	$-\infty$	-2	3	4	3	-2	-5	-2	3	4	3	-2	$-\infty$		
$f(u)$	$+\infty$														$+\infty$

Vậy phương trình có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 4 < m + 2024 < 16 \Leftrightarrow -2020 < m < -2008$.
 Vậy có tất cả 11 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

