

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

I. Giới hạn hữu hạn của dãy số.

1. Giới hạn 0 của dãy số

- Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn 0 khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ nhỏ hơn một số dương bất kì cho trước, kể từ một số hạng nào đó trở đi. Kí hiệu $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ hay $u_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow +\infty$. Ta còn viết là $\lim u_n = 0$.

- Nhận xét:

- $\lim \frac{1}{n^k} = 0$, với k nguyên dương bất kì.
- $\lim q^n = 0$, với q là số thực thỏa mãn $|q| < 1$.

2. Giới hạn hữu hạn của dãy số

- Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn là số a (hay u_n dần tới a) khi n dần tới dương vô cực, nếu $\lim(u_n - a) = 0$. Khi đó, ta viết $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ hay $\lim u_n = a$ hay $u_n \rightarrow a$ khi $n \rightarrow +\infty$.

❖ **Chú ý:** Nếu $u_n = c$ (c là hằng số) thì $\lim u_n = \lim c = c$.

II. Các phép toán về giới hạn hữu hạn của dãy số.

Cho $\lim u_n = a$, $\lim v_n = b$ và c là hằng số. Khi đó:

- $\lim(u_n + v_n) = a + b$.
- $\lim(c \cdot u_n) = c \cdot a$.
- $\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}$ ($b \neq 0$).
- $\lim(u_n - v_n) = a - b$.
- $\lim(u_n \cdot v_n) = a \cdot b$.
- Nếu $u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì $a \geq 0$ và $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$

III. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn.

- Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q thỏa mãn $|q| < 1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn.

Cấp số nhân lùi vô hạn này có tổng là:

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \frac{u_1}{1 - q}.$$

IV. Giới hạn vô cực.

- Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$ nếu u_n lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi, kí hiệu $\lim u_n = +\infty$ hay $u_n \rightarrow +\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.
- Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$ nếu $\lim(-u_n) = +\infty$, kí hiệu $\lim u_n = -\infty$ hay $u_n \rightarrow -\infty$ khi $n \rightarrow +\infty$.

❖ **Chú ý:** Ta có các kết quả sau:

- $\lim u_n = +\infty$ khi và chỉ khi $\lim(-u_n) = -\infty$.
- Nếu $\lim u_n = +\infty$ hoặc $\lim u_n = -\infty$ thì $\lim \frac{1}{u_n} = 0$.
- Nếu $\lim u_n = 0$ và $u_n > 0$ với mọi n thì $\lim \frac{1}{u_n} = +\infty$.
- $\lim n^k = +\infty$ ($k \in \mathbb{N}, k \geq 1$).
- $\lim q^n = +\infty$ ($q > 1$).

B. CÁC DẠNG TOÁN.

DẠNG 1:

TÍNH GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

Phương pháp:

+ Nắm vững khái niệm cơ bản.

Ví dụ 1. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{n+1}{2n+3}$.

b) $\lim \frac{5n^2+3n-7}{n^2}$.

c) $\lim \frac{\sqrt{9n^2-n+1}}{4n-2}$.

d) $\lim \frac{n+7}{4+n^2}$.

Lời giải

a) $\lim \frac{n+1}{2n+3} = \lim \frac{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n \left(2 + \frac{3}{n}\right)} = \lim \frac{1 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{3}{n}} = \frac{1}{2}$.

b) $\lim \frac{5n^2+3n-7}{n^2} = \lim \frac{n^2 \left(5 + \frac{3}{n} - \frac{7}{n^2}\right)}{n^2} = \lim \left(5 + \frac{3}{n} - \frac{7}{n^2}\right) = 5$.

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2 - n + 1}}{4n - 2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 \left(9 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}}{n \left(4 - \frac{2}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt{9 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}{n \left(4 - \frac{2}{n} \right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}{4 - \frac{2}{n}} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{d) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+7}{4+n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1 + \frac{7}{n}}{\frac{4}{n^2} + 1} = 0.$$

DẠNG 2:

TÍNH TỔNG CỦA CÁC CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

Phương pháp:

- + Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân.
- + Sau đó áp dụng công thức tổng của cấp số nhân lùi vô hạn:

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \frac{u_1}{1 - q}.$$

Ví dụ 2. Tính tổng của các cấp số nhân lùi vô hạn:

- a) $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$
- b) $T = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \dots + \left(-\frac{1}{4}\right)^n + \dots$

Lời giải

- a) S là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = 1$ và $q = \frac{1}{2}$.

$$\text{Do đó } S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

- b) T là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn có $u_1 = 1$ và $q = -\frac{1}{4}$.

$$\text{Do đó } T = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{4}{5}.$$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 1: Tính các giới hạn sau:

a) $\lim \frac{4n^2 - n - 1}{3 + 2n^2}.$

b) $\lim \frac{(2n^2 - n)^5 (4n - 2)^4}{20n^6 (2n^2 - 3n + 1)^4}.$

c) $\lim \frac{n^2 - n + 3}{n^3 + 2n}.$

d) $\lim \frac{2n^3 - 11n + 1}{n^2 - 2}.$

e) $\lim \frac{n^2 + 2n - 2}{\sqrt{2n^2 - n} + n}.$

f) $\lim \left(2n - \sqrt{3n^2 + n - 4} \right).$

g) $\lim \frac{1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n + 1)}{3n^2 + 4}.$

h) $\lim \left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right].$

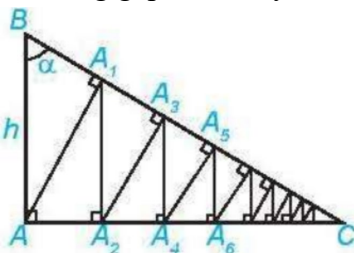
Bài 2: Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn $S = 5 + \frac{5}{6} + \frac{5}{36} + \dots + \frac{5}{6^n} + \dots$.

Bài 3: Viết các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau đây dưới dạng phân số:

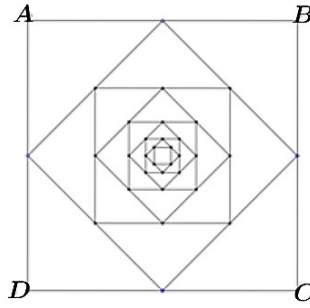
a) $2,(21) = 2,212121\dots;$

b) $5,(205) = 5,205205205\dots$

Bài 4: Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AB = 10$ cm và góc B bằng 60° (H 5.3). Từ A kẻ $AA_1 \perp BC$, từ A_1 kẻ $A_1A_2 \perp AC$, sau đó lại kẻ $A_2A_3 \perp BC$. Tiếp tục quá trình trên, ta được đường gấp khúc vô hạn $AA_1A_2A_3\dots$. Tính độ dài đường gấp khúc này.



Bài 5: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 5 cm. Lấy trung điểm bốn cạnh của hình vuông nối lại được một hình vuông mới nhỏ hơn A_1 . Tiếp tục làm như vậy tới vô hạn. Tính tổng diện tích các hình vuông $A_1, A_2, \dots$ (tham khảo hình vẽ dưới đây).



D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+5}$ bằng:

- A) $\frac{1}{2}$. B) 0. C) $+\infty$. D) $\frac{1}{5}$.

Câu 2: Tìm $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 - 2n^3 + 1}{3n^3 + 2n^2 + 1}$.

- A) $\frac{7}{3}$. B) $-\frac{2}{3}$. C) 0. D) 1.

Câu 3: Tính giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right]$.

- A) 0. B) 2. C) 1. D) $\frac{3}{2}$.

Câu 4: Gọi S là tập hợp các tham số nguyên a thỏa mãn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{n+2} + a^2 - 4a \right) = 0. \text{ Tổng các phần tử của } S \text{ bằng}$$

- A) 4. B) 3. C) 5. D) 2.

Câu 5: Cho $a \in \mathbb{R}$ sao cho giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 + a^2n + 1}{(n+1)^2} = a^2 - a + 1$. Khi đó khẳng

định nào sau đây là đúng?

- A) $0 < a < 2$. B) $0 < a < \frac{1}{2}$. C) $-1 < a < 0$. D) $1 < a < 3$.

Câu 6: Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2}{n^3 + 2n + 7}$ có giá trị bằng?

- A) $\frac{2}{3}$. B) $\frac{1}{6}$. C) 0. D) $\frac{1}{3}$.

Câu 7: Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 3}}{3x + 2}$:

- A) $-\frac{1}{3}$. B) $\frac{2}{3}$. C) $\frac{1}{3}$. D) $-\frac{2}{3}$.

Câu 8: Giới hạn $\lim \sqrt{n}(\sqrt{n+4} - \sqrt{n+3})$ bằng :

- A) 0. B) $+\infty$. C) $\frac{7}{2}$. D) $\frac{1}{2}$.

Câu 9: $\lim \frac{100^{n+1} + 3 \cdot 99^n}{10^{2n} - 2 \cdot 98^{n+1}}$ là :

- A) $+\infty$. B) 100. C) $\frac{1}{100}$. D) 0.

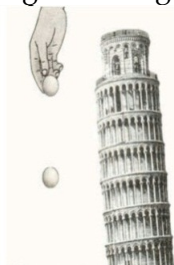
Câu 10: Tổng vô hạn sau đây $S = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{2}{3^n} + \dots$ có giá trị bằng :

- A) $\frac{8}{3}$. B) 3. C) 4. D) 2.

Câu 11: Số thập phân vô hạn tuần hoàn $3,15555\dots = 3,1(5)$ viết dưới dạng hữu tỉ là :

- A) $\frac{63}{20}$. B) $\frac{142}{45}$. C) $\frac{1}{18}$. D) $\frac{7}{2}$.

Câu 12: Từ độ cao 55,8m của tháp nghiêng Pisa nước Italia người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất. Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt trước đó. Tổng độ dài hành trình của quả bóng được thả từ lúc ban đầu cho đến khi nó nằm yên trên mặt đất thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?



- A) (67m ; 69m). B) (60m ; 63m). C) (64m ; 66m). D) (69m ; 72m).

E. HƯỚNG DẪN GIẢI



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Tính các giới hạn sau:

$$a) \lim \frac{4n^2 - n - 1}{3 + 2n^2} = \lim \frac{n^2 \left(4 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \right)}{n^2 \left(\frac{3}{n^2} + 2 \right)} = \lim \frac{4 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^2} + 2} = \frac{4 - 0 - 0}{0 + 2} = 2.$$

$$\text{b) } \lim \frac{(2n^2 - n)^5 (4n - 2)^4}{20n^6 (2n^2 - 3n + 1)^4} = \lim \frac{\left[n^2 \left(2 - \frac{1}{n} \right) \right]^5 \left[n \left(4 - \frac{2}{n} \right) \right]^4}{20n^6 \left[n^2 \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \right]^4}$$

$$= \lim \frac{n^{10} \left(2 - \frac{1}{n} \right)^5 n^4 \left(4 - \frac{2}{n} \right)^4}{20n^6 n^8 \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^4} = \lim \frac{\left(2 - \frac{1}{n} \right)^5 \left(4 - \frac{2}{n} \right)^4}{20 \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^4} = \frac{128}{5}.$$

$$\text{c) } \lim \frac{n^2 - n + 3}{n^3 + 2n} = \lim \frac{n^2 \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2} \right)}{n^3 \left(1 + \frac{2}{n^2} \right)} = \lim \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{2}{n^2}} \right) = 0 \cdot \frac{1 - 0 + 0}{1 + 0} = 0.$$

$$\text{d) } \lim \frac{2n^3 - 11n + 1}{n^2 - 2} = \lim \frac{n^3 \left(2 - \frac{11}{n} + \frac{1}{n^3} \right)}{n^2 \left(1 - \frac{2}{n^2} \right)} = \lim n \cdot \lim \frac{2 - \frac{11}{n} + \frac{1}{n^3}}{1 - \frac{2}{n^2}} = +\infty.$$

$$\text{e) } \lim \frac{n^2 + 2n - 2}{\sqrt{2n^2 - n} + n} = \lim \frac{1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}}{\sqrt{\frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}} + \frac{1}{n}} = +\infty.$$

$$\text{f) } \lim \left(2n - \sqrt{3n^2 + n - 4} \right) = \lim \left(2n - \sqrt{3n^2 + n - 4} \right) \\ = \lim n \cdot \lim \left(2 - \sqrt{3 + \frac{1}{n} - \frac{4}{n^2}} \right) = +\infty.$$

g) Xét cấp số cộng $1, 3, 5, 7, 9, \dots, 2n+1$ có số hạng đầu tiên $u_1 = 1$, công sai $d = 2$ và số hạng cuối cùng là $u_m = 2n+1$ ta có:

$$u_1 + (m-1)d = 2n+1 \Leftrightarrow 1 + 2(m-1) = 2n+1 \Leftrightarrow m = n+1.$$

Vậy cấp số cộng có $n+1$ số hạng. Suy ra tổng

$$S = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2n+1 = \frac{m}{2} (u_1 + u_m) = \frac{n+1}{2} (1 + 2n+1) = n^2 + 2n+1.$$

$$\text{Vì thế } L = \lim \frac{n^2 + 2n+1}{3n^2 + 4} = \lim \frac{n^2 \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right)}{n^2 \left(3 + \frac{4}{n^2} \right)} = \lim \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{4}{n^2}} = \frac{1+0+0}{3+0} = \frac{1}{3}.$$

h) Số hạng tổng quát $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}; (\forall k = 1, 2, \dots, n)$ do đó

$$L = \lim \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \lim \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \lim \left(\frac{n}{n+1} \right) = \lim_{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{1+0} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Nhận xét: Phân tích $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$ với $a = \frac{1}{k+1} \Big|_{k=0} = 1; b = \frac{1}{k} \Big|_{k=-1} = -1$.

Bài 2: S là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 5; q = \frac{1}{6}$.

$$\text{Do đó } S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{5}{1-\frac{1}{6}} = 6.$$

Bài 3:

a) Ta có $2, (21) = 2, 212121... = 2 + \frac{21}{10^2} + \frac{21}{10^4} + \frac{21}{10^6} + \dots$.

Dãy số $\frac{21}{10^2}; \frac{21}{10^4}; \frac{21}{10^6}; \dots$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = \frac{21}{10^2}$, công bội $q = \frac{1}{10^2}$.

$$\text{Suy ra } \frac{21}{10^2} + \frac{21}{10^4} + \frac{21}{10^6} + \dots = \frac{\frac{21}{10^2}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{7}{33}.$$

$$\text{Vậy } 2, (21) = 2, 212121... = 2 + \frac{7}{33} = \frac{73}{33}.$$

b) Ta có $5, (205) = 5, 205205205... = 5 + \frac{205}{10^3} + \frac{205}{10^6} + \frac{205}{10^9} + \dots$.

Dãy số $\frac{205}{10^3}; \frac{205}{10^6}; \frac{205}{10^9}; \dots$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = \frac{205}{10^3}$, công bội $q = \frac{1}{10^3}$.

$$\text{Suy ra } \frac{205}{10^3} + \frac{205}{10^6} + \frac{205}{10^9} + \dots = \frac{\frac{205}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^3}} = \frac{205}{999}.$$

$$\text{Vậy } 5, (205) = 5, 205205205... = 5 + \frac{205}{999} = \frac{5200}{999}.$$

Bài 4: Ta có: $AA_1 = 10 \sin 60^\circ$, $A_1A_2 = AA_1 \sin \alpha = 10 \sin^2 60^\circ, \dots, A_{n-1}A_n = 10 \sin^n 60^\circ$.

Độ dài đường gấp khúc $AA_1A_2...A_n$ bằng:

$$\begin{aligned} AA_1 + A_1A_2 + \dots + A_{n-1}A_n &= 10 \sin 60^\circ + 10 \sin^2 60^\circ + \dots + 10 \sin^n 60^\circ \\ &= 10 \sin 60^\circ (1 + \sin 60^\circ + \dots + \sin^{n-1} 60^\circ) = 10 \sin 60^\circ \cdot \frac{1 - \sin^n 60^\circ}{1 - \sin 60^\circ} \end{aligned}$$

Khi n ra vô hạn, ta có:

$$AA_1 \dots A_n \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(10 \sin 60^\circ \frac{1 - \sin^n 60^\circ}{1 - \sin 60^\circ} \right) = 10 \frac{\sin 60^\circ}{1 - \sin 60^\circ} = 30 + 20\sqrt{3}.$$

$$(\text{Do } \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ nên } \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^n 60^\circ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n = 0).$$

Bài 5: Cạnh của hình vuông A_1 bằng cạnh của hình vuông $ABCD$ nhân với $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Tương tự, ta có cạnh của hình vuông A_n bằng cạnh của hình vuông $ABCD$ nhân với $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n$.

Do đó, công thức diện tích của hình vuông A_n là $S_n = 25 \cdot \frac{1}{2^n}$.

Tổng của n hình vuông đầu tiên là:

$$S_1 + S_2 + \dots + S_n = 25 \cdot \frac{1}{2} + 25 \cdot \frac{1}{2^2} + \dots + 25 \cdot \frac{1}{2^n} = 25 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) = \frac{25}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}$$

Cho n ra vô hạn, ta có tổng diện tích của các hình vuông là:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_1 + \dots + S_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{25}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \right) = \frac{25}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = 25.$$



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1.B	2.B	3.C	4.A	5.A	6.D	7.A	8.D	9.B	10.B
11.B	12.A								

Câu 1: Chọn B. Ta có: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2 + \frac{5}{n}} = 0$.

Câu 2: Chọn B. Ta có $I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2 - 2n^3 + 1}{3n^3 + 2n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{7}{n} - 2 + \frac{1}{n^3}}{3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^3}} = -\frac{2}{3}$.

Câu 3: Chọn C. Ta có: $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

$$\text{Vậy } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

Câu 4: Chọn A. Ta có: $\lim \left(\frac{3n+2}{n+2} + a^2 - 4a \right) = \lim \left(\frac{(a^2 - 4a + 3)n + 2 + 2a^2 - 8a}{n+2} \right)$

$$= \lim \left(\frac{a^2 - 4a + 3 + \frac{2+2a^2-8a}{n}}{1 + \frac{2}{n}} \right) = a^2 - 4a + 3.$$

Theo giả thiết: $\lim \left(\frac{3n+2}{n+2} + a^2 - 4a \right) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 4a + 3 = 0 \Leftrightarrow a = 3 \vee a = 1.$

Vậy $S = \{1; 3\} \Rightarrow 1 + 3 = 4.$

Câu 5: Chọn A. Ta có $\lim \frac{an^2 + a^2n + 1}{(n+1)^2} = \lim \frac{an^2 + a^2n + 1}{n^2 + 2n + 1} = \lim \frac{a + \frac{a^2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} = a.$

$a^2 - a + 1 = a \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1.$

Câu 6: Chọn D. Ta có kết quả quen thuộc $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

Do đó $\lim \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2}{n^3 + 2n + 7} = \lim \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(n^3 + 2n + 7)}$

$= \lim \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)}{6\left(1 + \frac{2}{n^2} + \frac{7}{n^3}\right)} = \frac{1 \cdot 2}{6} = \frac{1}{3}.$

Câu 7: Chọn A. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 3}}{3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}}{3x + 2}$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}}{3 + \frac{2}{x}} = -\frac{1}{3}.$$

Câu 8: Chọn D. $\lim \sqrt{n}(\sqrt{n+4} - \sqrt{n+3}) = \lim \sqrt{n} \frac{1}{\sqrt{n+4} + \sqrt{n+3}}$

$$= \lim \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + \sqrt{1 + \frac{3}{n}}} = \frac{1}{2}.$$

Câu 9: Chọn B. $\lim \frac{100^{n+1} + 3 \cdot 99^n}{10^{2n} - 2 \cdot 98^{n+1}} = \lim \frac{100 + 3 \cdot \left(\frac{99}{100}\right)^n}{1 - 2 \cdot \left(\frac{98}{100}\right)^n} = 100.$

Câu 10: Chọn B. Ta có $2; \frac{2}{3}; \frac{2}{3^2}; \dots; \frac{2}{3^n}; \dots$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với công bội

$$q = \frac{1}{3} < 1. \quad S = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{2}{3^n} + \dots = 2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 3.$$

Câu 11: Chọn B. $3,15555\dots = 3,1(5) = 3,1 + 5\left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots\right) = 3,1 + 5 \cdot \frac{\frac{1}{10^2}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{142}{45}.$

Câu 12: Chọn A. Theo đề, mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\frac{1}{10}$

độ cao mà quả bóng đạt trước đó và sau đó lại rơi xuống từ độ cao thứ hai. Do đó độ dài hành trình của quả bóng được thả từ lúc ban đầu cho đến:

+ Thời điểm chạm đất lần thứ nhất là $d_1 = 55,8\text{m}.$

+ Thời điểm chạm đất lần thứ 2 là $d_2 = 55,8 + 2 \cdot \frac{55,8}{10}.$

+ Thời điểm chạm đất lần thứ 3 là $d_3 = 55,8 + 2 \cdot \frac{55,8}{10} + 2 \cdot \frac{55,8}{10^2}.$

+ Thời điểm chạm đất lần thứ 4 là: $d_4 = 55,8 + 2 \cdot \frac{55,8}{10} + 2 \cdot \frac{55,8}{10^2} + 2 \cdot \frac{55,8}{10^3}.$

...

+ Thời điểm chạm đất lần thứ $n, (n > 1)$ là:

$$d_n = 55,8 + 2 \cdot \frac{55,8}{10} + 2 \cdot \frac{55,8}{10^2} + \dots + 2 \cdot \frac{55,8}{10^{n-1}}.$$

Do đó độ dài hành trình của quả bóng được thả từ lúc ban đầu cho đến khi nó

nằm yên trên mặt đất là: $d = 55,8 + 2 \cdot \frac{55,8}{10} + 2 \cdot \frac{55,8}{10^2} + \dots + 2 \cdot \frac{55,8}{10^{n-1}} + \dots$ (mét).

+ Vì $2 \cdot \frac{55,8}{10}, 2 \cdot \frac{55,8}{10^2}, 2 \cdot \frac{55,8}{10^3}, \dots, 2 \cdot \frac{55,8}{10^{n-1}}, \dots,$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với

$$q = \frac{1}{10}, \quad 2 \cdot \frac{55,8}{10} + 2 \cdot \frac{55,8}{10^2} + \dots + 2 \cdot \frac{55,8}{10^{n-1}} + \dots = \frac{2 \cdot \frac{55,8}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 12,4.$$

Vậy $d = 55,8 + 2 \cdot \frac{55,8}{10} + 2 \cdot \frac{55,8}{10^2} + \dots + 2 \cdot \frac{55,8}{10^{n-1}} + \dots = 55,8 + 12,4 = 68,2.$

Bài 2

GIỚI HẠN HÀM SỐ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

I. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

1. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm

Cho điểm x_0 thuộc khoảng K và hàm số $y = f(x)$ xác định trên K hoặc $K \setminus \{x_0\}$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có **giới hạn hữu hạn** là số L khi x dần đến x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n \in K \setminus \{x_0\}$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $f(x_n) \rightarrow L$

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ hay $f(x) \rightarrow L$ khi $x \rightarrow x_0$

Nhận xét và lưu ý:

- Giới hạn của hàm số được định nghĩa thông qua khái niệm giới hạn của dãy số.
- Hàm số không nhất thiết phải xác định tại x_0 .
- Trong giải bài tập ta thường áp dụng các định lí và phương pháp để tiện cho việc tính toán thay vì việc đưa về giới hạn của dãy số.

2. Định lí và các phép toán về giới hạn hữu hạn của hàm số tại một điểm

a) Giả sử $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$. Khi đó:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)] = L.M$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{L}{M}$ với $M \neq 0$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} [cf(x)] = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ với $c \in \mathbb{R}$, nếu tồn tại $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R}$.
- Nếu $f(x) \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ thì $L \geq 0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$.

b) Một số giới hạn đặc biệt:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} x^k = x_0^k$ với k nguyên dương.

- $\lim_{x \rightarrow x_0} c = c$ với c là hằng số.

3. Giới hạn một phía

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có **giới hạn bên phải** là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$.

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; x_0)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có **giới hạn bên trái** là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì $a < x_n < x_0$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$.

Ta cũng có thể hiểu và biểu diễn giới hạn một bên như sau:

$x \rightarrow x_0^+$ nghĩa là $x \rightarrow x_0$ và $x > x_0$.

$x \rightarrow x_0^-$ nghĩa là $x \rightarrow x_0$ và $x < x_0$.

Lưu ý:

- Tính chất được thừa nhận của giới hạn một bên:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \text{ thì không tồn tại } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

- Các phép toán và định lí về giới hạn tại một điểm vẫn đúng khi ta thay $x \rightarrow x_0$ bằng $x \rightarrow x_0^+$ và $x \rightarrow x_0^-$.

- Một số giới hạn một bên thường dùng:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{x - x_0} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{1}{x - x_0} = -\infty.$$

4. Giới hạn vô cực của hàm số tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(x_0; b)$.

+ Ta nói hàm số $y = f(x)$ có **giới hạn bên phải** là $+\infty$ khi $x \rightarrow x_0$ về bên phải nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $f(x_n) \rightarrow +\infty$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow x_0} x = +\infty$ hay $f(x) \rightarrow +\infty$ khi $x \rightarrow x_0$.

+ Ta nói hàm số $y = f(x)$ có **giới hạn bên phải** là $-\infty$ khi $x \rightarrow x_0$ về bên phải nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0 < x_n < b$ và $x_n \rightarrow x_0$ thì $f(x_n) \rightarrow -\infty$.

Kí hiệu: $\lim_{x \rightarrow x_0} x = -\infty$ hay $f(x) \rightarrow -\infty$ khi $x \rightarrow x_0$.

Ta có các giới hạn thường dùng sau:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{x - x_0} = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{1}{x - x_0} = -\infty \text{ với } x_0 \in \mathbb{R}.$$

5. Quy tắc về giới hạn vô cực

a) Quy tắc 1: Quy tắc tìm giới hạn của tích

$L = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)]$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

b) Quy tắc 2: Quy tắc tìm giới hạn của thương

$L = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	+	$+\infty$
		-	$-\infty$
$L < 0$	0	+	$-\infty$
		-	$+\infty$

II. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

1. Giới hạn hữu hạn của hàm số tại vô cực

a) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có **giới hạn hữu hạn** là số L khi $x \rightarrow +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$ thì $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.

b) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-\infty; b)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có **giới hạn hữu hạn** là số L khi $x \rightarrow -\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \rightarrow -\infty$ thì $f(x_n) \rightarrow L$.

Kí hiệu $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.

Với c là hằng số và k là số nguyên dương, ta luôn có:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = c \text{ và } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{c}{x^k} = 0.$$

Các phép toán trên giới hạn hàm số vẫn đúng khi thay $x \rightarrow x_0$ bằng $x \rightarrow +\infty$ và $x \rightarrow -\infty$.

2. Giới hạn vô cực tại vô cực

a) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; +\infty)$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ với mọi dãy số (x_n) , $x_n > a$ và $x_n \rightarrow +\infty$ ta đều có $\lim f(x) = +\infty$.

Các định nghĩa: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ được phát biểu hoàn toàn tương tự.

b) Ta có các giới hạn thường dùng sau:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = +\infty$ nếu k là số chẵn;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = -\infty$ nếu k là số lẻ.

B. CÁC DẠNG TOÁN.

PHÂN LOẠI:

Các bài toán giới hạn của hàm số có 3 dạng lớn: **giới hạn tại một điểm, giới hạn một phía và giới hạn tại vô cực**. Trong hai dạng này thì ta thường gặp các **4 dạng đặc biệt** hay còn gọi là **4 dạng vô định** là: $0 \cdot \infty$; $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$ và $\infty - \infty$.

PHƯƠNG PHÁP CHUNG:

+ Nắm vững khái niệm cơ bản.

+ Nhập hàm số vào máy tính cầm tay (MTCT) để kiểm tra kết quả có ở dạng vô định hay không? Nếu có thì mỗi dạng vô định đều có phương pháp giải riêng sẽ được hướng dẫn chi tiết ở dưới.

DẠNG 1: GIỚI HẠN HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM $x \rightarrow x_0$

DẠNG 1.1: SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT CƠ BẢN

Nhận dạng chung: Nhập hàm số vào máy tính cầm tay (MTCT) sau đó cho $x = x_0$. Nếu kết quả là **một số thực** thì ra sử dụng các phép toán tổng, hiệu, tích, thương hoặc các định lý và tính chất được thừa nhận để giải.

Ví dụ 1. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 1}{2\sqrt{x}}$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ bằng:

- A. $+\infty$. B. 0. C. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

[TL] Ta có $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 1}{2\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^2 + 1}{2\sqrt{3}} = \frac{3^2 + 1}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án C.

[TN] Nhập biểu thức của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 1}{2\sqrt{x}}$ vào MTCT. Bấm phím CALC

, máy hỏi X? nhập 3 =. Máy hiển thị kết quả: $\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

Chọn đáp án C.

Ví dụ 2. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow -4} (x^2 - 7x + 5)$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow -4} (x^2 - 7x + 5) = \lim_{x \rightarrow -4} x^2 - \lim_{x \rightarrow -4} 7x + \lim_{x \rightarrow -4} 5 = (-4)^2 - 7 \lim_{x \rightarrow -4} x + 5 = 16 - 7 \cdot (-4) + 5 = 49$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 8} (\sqrt[3]{x} - \sqrt{2x} - 6)$$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow 8} (\sqrt[3]{x} - \sqrt{2x} - 6) = \lim_{x \rightarrow 8} \sqrt[3]{x} - \lim_{x \rightarrow 8} \sqrt{2x} - \lim_{x \rightarrow 8} 6 = \sqrt[3]{8} - \sqrt{2} \lim_{x \rightarrow 8} \sqrt{x} - 6 = 2 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{8} - 6 = -8$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2|x+1| - 5\sqrt{x^2-3}}{2x+3}$$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2|x+1| - 5\sqrt{x^2-3}}{2x+3} = \frac{2 \lim_{x \rightarrow -2} |x+1| - 5 \lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x^2-3}}{\lim_{x \rightarrow -2} 2x+3} = \frac{2-5}{-1} = 3.$$

DẠNG 1.2: CÁC VÔ ĐỊNH THƯỜNG GẶP

Nguyên tắc : Là phải **triệt tiêu** được yếu tố làm cho hàm số **bị vô định**.

KHỬ VÔ ĐỊNH $\frac{0}{0}$ TẠI MỘT ĐIỂM

Nhận dạng chung:

+ **Dấu hiệu 1:** Hàm số có dạng phân thức $\frac{f(x)}{g(x)}$ hoặc biểu thức có căn thức.

+ **Dấu hiệu 2:** Ta thế $x = x_0$ vào hàm số cần tính giới hạn (có thể sử dụng MTCT để kiểm tra trước là hàm số có thuộc dạng vô định hay không) và nhận thấy với $x = x_0$ lần lượt làm tử và mẫu đều bằng 0.

Phương pháp giải:

+ **Đối với hàm phân thức:** có dạng $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

Ta phân tích $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x-x_0) \cdot f_1(x)}{(x-x_0) \cdot g_1(x)}$. Khi đó $x-x_0$ là thừa số làm hàm số bị vô định sẽ bị triệt tiêu.

Một số phương pháp kết hợp có thể sử dụng:

+ Các hằng đẳng thức, nhóm hạng tử chung, chia đa thức; chia Hóc – ne.

+ Phân tích thừa số bậc 2: Cho biểu thức $ax^2 + bx + c$ ta có thể phân tích thành dạng nhân tử nếu $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$. Khi đó:

$$ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2).$$

+ Hằng đẳng thức mở rộng (áp dụng những câu khó):

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \dots + a^2 \cdot b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

+ **Đối với biểu thức chứa căn:** ta nhân lượng liên hợp để khử căn thức và tạo ra thừa số $x - x_0$ để triệt tiêu đại lượng làm hàm số vô định.

Một số dạng liên hợp thường sử dụng:

$$\bullet \sqrt{A} \pm B = \frac{A - B^2}{\sqrt{A} \mp B}$$

$$\bullet \sqrt{A} \pm \sqrt{B} = \frac{A - B}{\sqrt{A} \mp \sqrt{B}}$$

$$\bullet \sqrt[3]{A} \pm B = \frac{A \pm B^3}{(\sqrt[3]{A})^2 \mp B \cdot \sqrt[3]{A} + B^2}$$

$$\bullet \sqrt[3]{A} \pm \sqrt[3]{B} = \frac{A \pm B}{(\sqrt[3]{A})^2 \mp \sqrt[3]{A \cdot B} + (\sqrt[3]{B})^2}$$

Ví dụ 1. Tính giới hạn của các hàm số sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x+2} = 3.$$

b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 4}$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-1)(x-4)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x-1) = 4-1 = 3.$$

$$[\text{Cách biến đổi, ta bấm phương trình } x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)].$$

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - x + 15}{3 - x}$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - x + 15}{3 - x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(2x+5)(x-3)}{3-x} = \lim_{x \rightarrow 3} (-2x-5) = -11.$$

$$[\text{Cách biến đổi, ta bấm phương trình } 2x^2 - x + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-5}{2} \\ x = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } 2x^2 - x + 15 = 2\left(x + \frac{5}{2}\right)(x-3) = (2x+5)(x-3)].$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 2x - 12}{2x - 4}$$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 2x - 12}{2x - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(2x^2 + 4x + 6)}{2(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 3) = 11.$$

[Cách biến đổi, ta bấm phương trình $2x^3 - 2x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Khi đó $2x^3 - 2x - 12 = (x-2)(2x^2 + 4x + 6)$ có thể dùng phương pháp chia đa thức hoặc chia Hóc – ne để đưa về dạng nhân tử].

CÁC BÀI TẬP VẬN DỤNG TƯƠNG TỰ

$$1. \lim_{x \rightarrow 35} \frac{2x^2 - 75x + 175}{3x^2 - 95x - 350} \quad \text{Đáp án: } \frac{13}{23}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \quad \text{Đáp án: } \frac{3}{2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^4 - 16}{x^3 + 2x^2} \quad \text{Đáp án: } -8$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{x^3 + 2x - 3} \text{ (Gợi ý: } \frac{(x-1)(x+1)(x^2-2)}{(x-1)(x^2+x+3)}) \quad \text{Đáp án: } \frac{-2}{5}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 - 3x + 2} \text{ (Gợi ý: } \frac{(x-1)^2(x+1)}{(x-1)(x-2)}) \quad \text{Đáp án: } 0$$

Ví dụ 2. Tính giới hạn của các hàm số sau:

$$a) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x}$$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(3 - \sqrt{x})(3 + \sqrt{x})}{(9 - x)(3 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{9 - x}{(9 - x)(3 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{3 + \sqrt{x}} = \frac{1}{6}.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{3x^2 - 4x - 4}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{3x^2 - 4x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x+1-9}{(3x^2 - 4x - 4)(\sqrt{4x+1} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(x-2)}{(x-2)(3x+2)(\sqrt{4x+1} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{(3x+2)(\sqrt{4x+1} + 3)} = \frac{4}{(3 \cdot 2 + 2)(\sqrt{4 \cdot 2 + 1} + 3)} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{-x^2 + 5x + 6}{\sqrt{2x - 8} - 1}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 6} \frac{-x^2 + 5x + 6}{\sqrt{2x - 8} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(-x^2 + 5x + 6)(\sqrt{2x - 8} + 2)}{2x - 8 - 4} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(x + 1)(6 - x)(\sqrt{2x - 8} + 2)}{2x - 12} \\ &= \lim_{x \rightarrow 6} \frac{(x + 1)(\sqrt{2x - 8} + 2)}{-2} = \frac{(6 + 1)(\sqrt{2 \cdot 6 - 8} + 2)}{-2} = -14. \end{aligned}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + x} - 2\sqrt{3}}{x - 3}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + x} - 2\sqrt{3}}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{(x - 3)(\sqrt{x^2 + x} + 2\sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 4)}{(x - 3)(\sqrt{x^2 + x} + 2\sqrt{3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 4}{\sqrt{x^2 + x} + 2\sqrt{3}} = \frac{3 + 4}{\sqrt{3^2 + 3} + 2\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{12}. \end{aligned}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8 + x^2} - 2}{x^2}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8 + x^2} - 2}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8 + x^2 - 8}{x^2 \left[(8 + x^2)^{\frac{2}{3}} + 2\sqrt[3]{8 + x^2} + 4 \right]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(8 + x^2)^{\frac{2}{3}} + 2\sqrt[3]{8 + x^2} + 4} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

CÁC BÀI TẬP VẬN DỤNG TƯƠNG TỰ

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 3} - 2}{x - 1}$$

Đáp số: $\frac{1}{4}$

$$2. \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{2x^3 - 3x^2}$$

Đáp số: $\frac{3 + 2\sqrt{3}}{9}$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 4} - 2}{x}$$

Đáp số: $\frac{-3}{4}$

$$4. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + x} - 2\sqrt{3}}{x - 3}$$

Đáp số: $\frac{7\sqrt{3}}{12}$

$$5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-2}+1}{x^2-x}$$

Đáp số: $\frac{1}{3}$

Ví dụ 3. Tính các giới hạn sau [*sử dụng phương pháp thêm bớt đại lượng*]

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2} - \sqrt[3]{7x+1}}{\sqrt{2}(x-1)}$$

Lời giải

Nhận thấy bài toán có 2 căn thức khác bậc nên ta tính trước ngoài nháp giới hạn của $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2+x+2} = 2$ và $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{7x+1} = 2$ nên ta thêm bớt 2 và -2 vào tử để thành dạng $\sqrt{A} - B$ và $B - \sqrt[3]{A}$. Khi đó:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2} - \sqrt[3]{7x+1}}{\sqrt{2}(x-1)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2+x+2} - 2) + (2 - \sqrt[3]{7x+1})}{\sqrt{2}(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2} - 2}{\sqrt{2}(x-1)} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt[3]{7x+1}}{\sqrt{2}(x-1)} = I + J. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \text{ Tính } I &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2} - 2}{\sqrt{2}(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+2-4}{\sqrt{2}(x-1)(\sqrt{x^2+x+2}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{\sqrt{2}(x-1)(\sqrt{x^2+x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{\sqrt{2}(\sqrt{x^2+x+2}+2)} = \frac{3}{4\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \text{ Tính } J &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt[3]{7x+1}}{\sqrt{2}(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{8-7x-1}{\sqrt{2}(x-1)\left[4+2\sqrt[3]{7x+1}+(\sqrt[3]{7x+1})^2\right]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-7}{\sqrt{2}\left[4+2\sqrt[3]{7x+1}+(\sqrt[3]{7x+1})^2\right]} = \frac{-7}{12\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+x+2} - \sqrt[3]{7x+1}}{\sqrt{2}(x-1)} = I + J = \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{8-x}}{x}$$

Lời giải

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{8-x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2\sqrt{1+x} - 2) + (2 - \sqrt[3]{8-x})}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sqrt{1+x} - 1)}{x} + \frac{2 - \sqrt[3]{8-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + 1} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4 + 2\sqrt[3]{8-x} + \sqrt[3]{(8-x)^2}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{1+0} + 1} + \frac{1}{4 + 2\sqrt[3]{8-0} + \sqrt[3]{(8-0)^2}} = 1 + \frac{1}{12} = \frac{13}{12}.
\end{aligned}$$

CÁC BÀI TẬP VẬN DỤNG TƯƠNG TỰ

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{x^2+x+2} - 4}{x-1}$

Đáp số: 1

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{8x+11} - \sqrt{x+7}}{x-2}$

Đáp số: $\frac{7}{54}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{3x+1} - \sqrt{1+2x}}{x^2}$

Đáp số: 0

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM: GIỚI HẠN TẠI MỘT ĐIỂM

Câu 1: Cho các giới hạn: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 3$, hỏi $\lim_{x \rightarrow x_0} [3f(x) - 4g(x)]$

bằng:

A. 5.

B. 2.

C. -6.

D. 3.

Câu 2: Giá trị của $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 3x + 1)$ bằng?

A. 2.

B. 1.

C. $+\infty$.

D. 0.

Câu 3: Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 3}{x+1}$ bằng?

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Câu 4: Giới hạn $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} |x^2 - 4|$ bằng?

A. -5.

B. 1.

C. 5.

D. -1.

Câu 5: Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2|x+1| - 5\sqrt{x^2-3}}{2x+3}$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{7}$.

C. 7.

D. 3.

Câu 6: Biểu thức $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}$ bằng:

- A. 0. B. $\frac{2}{\pi}$. C. $\frac{\pi}{2}$. D. 1.

Câu 7: Cho $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sqrt{3x+1}-1)}{x}$ và $J = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-x-2}{x+1}$. Tính $I - J$.

- A. 6. B. 3. C. -6. D. 0.

Câu 8: Cho giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4} = \frac{a}{b}$ trong đó $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính

$$S = a^2 + b^2.$$

- A. $S = 20$. B. $S = 17$. C. $S = 10$. D. $S = 25$.

Câu 9: Tìm $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-3x^2+2}{x^3+2x-3}$.

- A. $-\frac{5}{2}$. B. $-\frac{2}{5}$. C. $\frac{1}{5}$. D. $+\infty$.

Câu 10: Cho $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+ax+b}{x^2-1} = \frac{-1}{2}$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Tổng $S = a^2 + b^2$ bằng:

- A. $S = 13$. B. $S = 9$. C. $S = 4$. D. $S = 1$.

Câu 11: Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2-3x+4}-2}{x}$ bằng:

- A. $-\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $-\frac{3}{4}$. D. $-\frac{2}{3}$.

Câu 12: Biết $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \frac{a}{b^2}$ ($\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $\sqrt{a} + b + 2018$.

- A. 2021. B. 2023. C. 2024. D. 2022.

Câu 13: Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}} = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{Z}, b > 0$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị của $a - b$ là:

- A. 1. B. -1. C. $\frac{8}{9}$. D. $\frac{1}{9}$.

Câu 14: Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+x^2}-2}{x^2}$.

- A. $\frac{1}{12}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{6}$.

Câu 15: (*) Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{8-x}}{x}$. Tính $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

- A. $\frac{1}{12}$. B. $\frac{13}{12}$. C. $+\infty$. D. $\frac{10}{11}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI : GIỚI HẠN TẠI MỘT ĐIỂM

Câu 1: Ta có $\lim_{x \rightarrow x_0} [3f(x) - 4g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} 3f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} 4g(x) = -6$ **Chọn C.**

Câu 2: Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - 3x + 1) = 0$. **Chọn D.**

Câu 3: Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 1} = \frac{1^2 - 2 \cdot 1 + 3}{1 + 1} = 1$. **Chọn A.**

Câu 4: Dễ thấy $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} |x^2 - 4| = |3 - 4| = 1$. **Chọn B.**

Câu 5: Ta có $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2|x+1| - 5\sqrt{x^2 - 3}}{2x + 3} = \frac{2 - 5}{-1} = 3$. **Chọn D.**

Câu 6: Vì $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ nên $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} = \frac{2}{\pi}$. **Chọn B.**

Câu 7: Ta có:

$$I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\sqrt{3x+1} - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{x(\sqrt{3x+1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6}{\sqrt{3x+1} + 1} = 3.$$

$$J = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-2)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x-2) = -3.$$

Khi đó $I - J = 6$.

Chọn A.

Câu 8: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{x+2} = \frac{1}{4}$.

Do đó $a = 1$; $b = 4$ suy ra $S = 1^2 + 4^2 = 17$.

Chọn B.

Câu 9: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{x^3 + 2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)(x^2 - 2)}{(x-1)(x^2 + x + 3)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x^2 - 2)}{x^2 + x + 3} = -\frac{2}{5}$.

Chọn B.

Câu 10: Vì hàm số có giới hạn hữu hạn tại $x = 1$ nên biểu thức tử nhận $x = 1$ làm nghiệm, hay $1 + a + b = 0$.

Áp dụng vào giả thiết, được:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax - 1 - a}{x^2 - 1} = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1+a)}{(x-1)(x+1)} = -\frac{1}{2}.$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1+a}{x+1} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2+a}{2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow a = -3. \text{ Suy ra } b = 2.$$

$$\text{Vậy } a^2 + b^2 = 13.$$

Chọn A.

$$\text{Câu 11: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 4} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x + 4 - 4}{x(\sqrt{x^2 - 3x + 4} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 3x + 4} + 2} = -\frac{3}{4}.$$

Chọn C.

$$\text{Câu 12: } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2} = \frac{1}{2^2}.$$

$$\text{Suy ra } a = 1; b = 2.$$

$$\sqrt{a} + b + 2018 = 1 + 2 + 2018 = 2021.$$

Chọn A.

$$\text{Câu 13: Ta có } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{((x+1)^2 - 5x - 1)(x + \sqrt{4x-3})}{(x^2 - 4x + 3)(x+1+\sqrt{5x+1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 3x)(x + \sqrt{4x-3})}{(x^2 - 4x + 3)(x+1+\sqrt{5x+1})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x + \sqrt{4x-3})}{(x-1)(x+1+\sqrt{5x+1})}$$

$$= \frac{18}{16} = \frac{9}{8}.$$

Chọn A.

$$\text{Câu 14: Ta có: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+x^2} - 2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8+x^2-8}{x^2 \left(\sqrt[3]{(8+x^2)^2} + 2\sqrt[3]{8+x^2} + 4 \right)}.$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(8+x^2)^2} + 2\sqrt[3]{8+x^2} + 4} = \frac{1}{12}.$$

Chọn A.

$$\text{Câu 15: Ta có: } \frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{8-x}}{x} = \frac{(2\sqrt{1+x} - 2) + (2 - \sqrt[3]{8-x})}{x}$$

$$= \frac{2(\sqrt{1+x} - 1)}{x} + \frac{2 - \sqrt[3]{8-x}}{x} = \frac{2}{\sqrt{1+x} + 1} + \frac{1}{4 + 2\sqrt[3]{8-x} + \sqrt[3]{(8-x)^2}}$$

$$\begin{aligned} \text{Do vậy: } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2}{\sqrt{1+x}+1} + \frac{1}{4+2\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{(8-x)^2}} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x}+1} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4+2\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{(8-x)^2}} = 1 + \frac{1}{12} = \frac{13}{12}. \end{aligned}$$

Chọn B.

DẠNG BÀI 2: GIỚI HẠN MỘT PHÍA $x \rightarrow x_0^+; x \rightarrow x_0^-$

DẠNG 2.1: SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT CƠ BẢN

Phương pháp giải: Tương tự như giải giới hạn tại một điểm nếu bài toán không gặp dạng vô định.

Ngoài ra: Có thêm một vài giới hạn đặc biệt thường dùng:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{x - x_0} = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{1}{x - x_0} = -\infty$$

Lưu ý: Ta cũng có thể hiểu và biểu diễn giới hạn một bên như sau để xét dấu hiệu số $x - x_0$ tiện cho việc nhớ công thức ở trên.

$x \rightarrow x_0^+$ nghĩa là $x \rightarrow x_0$ và $x > x_0$.

$x \rightarrow x_0^-$ nghĩa là $x \rightarrow x_0$ và $x < x_0$.

Ví dụ 1. Dùng định nghĩa, tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x+5}{x+1}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x+5}{x+1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2^-} (3x+5)}{\lim_{x \rightarrow 2^-} (x+1)} = \frac{3 \lim_{x \rightarrow 2^-} x + 5}{\lim_{x \rightarrow 2^-} x + 1} = \frac{3 \cdot 2 + 5}{2 + 1} = \frac{11}{3}.$$

b) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{4-x}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } x \rightarrow 4^- \Leftrightarrow x < 4 \Leftrightarrow 4-x > 0 \text{ Khi đó } \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{4-x} = +\infty.$$

c) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x-5}{(x-4)^2}$

Lời giải

$$\text{Ta có: } x \rightarrow 4^- \Leftrightarrow x < 4 \Leftrightarrow x-4 < 0 \Rightarrow (x-4)^2 > 0.$$

$$\text{Khi đó } \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{1}{(x-4)^2} = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow 4^-} (x-5) = 4-5 = -1.$$

Vậy $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x-5}{(x-4)^2} = +\infty \cdot (-1) = -\infty$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^4 - 6x^2 - x & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 - 3x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Tính $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

. Hỏi hàm số có giới hạn tại $x = 1$ hay không?

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^4 - 6x^2 - x) = 1^4 - 6 \cdot 1^2 - 1 = -1$.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^3 - 3x) = 1^3 - 3 \cdot 1 = -2$.

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ nên không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Ví dụ 3. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{khi } x \geq 2 \\ x - 1 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tính $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ và $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$.

Hỏi hàm số có giới hạn tại $x = 2$ hay không?

Lời giải

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 3) = 2^2 - 3 = 1$.

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 1) = 2 - 1 = 1$.

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ nên $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$.

DẠNG 2.2: CÁC DẠNG VÔ ĐỊNH THƯỜNG GẶP

DẠNG 2.2.1: KHỬ DẠNG VÔ ĐỊNH $\frac{0}{0}$

Phương pháp giải: Tương tự dạng vô định $\frac{0}{0}$ của giới hạn tại một điểm.

Ví dụ 1. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + 2\sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}$

Lời giải

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + 2\sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 1} = \frac{2}{-1} = -2$.

b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4 - x^2}{2 - x}$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4 - x^2}{2 - x} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(2 - x)(2 + x)}{2 - x} = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2 + x) = 4.$$

c)
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x - 3 + |x - 1|\sqrt{5x^2 + 4}}{x^2 - 2x + 1}$$

Lời giải

Khi $x \rightarrow 1^- \rightarrow x < 1 \Leftrightarrow x - 1 < 0 \rightarrow |x - 1| = 1 - x$.

Khi đó :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3(x - 1) + (1 - x)\sqrt{5x^2 + 4}}{(x - 1)^2} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3 - \sqrt{5x^2 + 4}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{9 - (5x^2 + 4)}{(x - 1)(3 + \sqrt{5x^2 + 4})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{5(1 - x^2)}{(x - 1)(3 + \sqrt{5x^2 + 4})} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-5(1 + x)}{3 + \sqrt{5x^2 + 4}} = \frac{-5(1 + 1)}{3 + \sqrt{5 \cdot 1^2 + 4}} = \frac{-5}{3}. \end{aligned}$$

BÀI TẬP VẬN DỤNG TƯƠNG TỰ

1.
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - 2x + |x - 1|\sqrt{x + 3}}{x^2 - 2x + 1}$$

Đáp số: $\frac{7}{4}$

2.
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2 - x|}{2x^2 - 5x + 2}$$

Đáp số: $\frac{-1}{3}$

3.
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1 + 4\sqrt{x - 1}}{1 - x + \sqrt{x - 1}}$$

Đáp số: 4

Ví dụ 2. Tính các giới hạn sau:

a)
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{3x^2 + 1} - 2x}{x - 1}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{3x^2 + 1} - 2x}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2 + 1 - 4x^2}{(x - 1)(\sqrt{3x^2 + 1} + 2x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x^2 + 1}{(x - 1)(\sqrt{3x^2 + 1} + 2x)} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)(\sqrt{3x^2 + 1} + 2x)} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(x + 1)}{(\sqrt{3x^2 + 1} + 2x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(1 + 1)}{(\sqrt{3 \cdot 1^2 + 1} + 2 \cdot 1)} = \frac{-1}{2}. \end{aligned}$$

b)
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{4x + 1} - 3}{3x^2 - 4x - 4}$$

Lời giải

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{4x+1}-3}{3x^2-4x-4} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4x+1-9}{(3x^2-4x-4)(\sqrt{4x+1}+3)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4(x-2)}{(x-2)(3x+2)(\sqrt{4x+1}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4}{(3x+2)(\sqrt{4x+1}+3)} = \frac{4}{(3 \cdot 2+2)(\sqrt{4 \cdot 2+1}+3)} = \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}}$$

Lời giải

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}} &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x^2-3x)(x+\sqrt{4x-3})}{(x^2-4x+3)(x+1+\sqrt{5x+1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x(x+\sqrt{4x-3})}{(x-1)(x+1+\sqrt{5x+1})} = \frac{3 \cdot 6}{2 \cdot 8} = \frac{9}{8}.\end{aligned}$$

Ví dụ 3. Tính các giới hạn sau:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2-x|}{2x^2-5x+2} \text{ và } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|2-x|}{2x^2-5x+2} \text{ từ đó cho kết luận về } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|2-x|}{2x^2-5x+2}.$$

Lời giải

Ta có: $x \rightarrow 2^- \Rightarrow x < 2 \Leftrightarrow 2-x > 0$.

$$\text{Khi đó } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2-x|}{2x^2-5x+2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2-x}{(x-2)(2x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-1}{2x-1} = \frac{-1}{2 \cdot 2-1} = \frac{-1}{3}.$$

Ta có: $x \rightarrow 2^+ \Rightarrow x > 2 \Leftrightarrow 2-x < 0$.

$$\text{Khi đó } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|2-x|}{2x^2-5x+2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{(x-2)(2x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{2x-1} = \frac{1}{2 \cdot 2-1} = \frac{1}{3}.$$

Ta thấy $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|2-x|}{2x^2-5x+2} \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$ vậy $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$ không tồn tại.

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x+1}{x-3} \text{ và } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x+1}{x-3} \text{ từ đó cho kết luận về } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+1}{x-3}.$$

Ta có: $x \rightarrow 3^+ \Rightarrow x > 3 \Leftrightarrow x-3 > 0$.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow 3^+} (2x+1) = 2 \cdot 3+1 = 7 > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x+1}{x-3} = +\infty.$$

Ta có: $x \rightarrow 3^- \Rightarrow x < 3 \Leftrightarrow x-3 < 0$.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow 3^-} (2x+1) = 2 \cdot 3+1 = 7 > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x+1}{x-3} = -\infty.$$

Ta thấy $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x+1}{x-3} \neq \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x+1}{x-3}$ vậy $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x+1}{x-3}$ không tồn tại.

DẠNG 2.2.2: KHỬ DẠNG VÔ ĐỊNH $0 \cdot \infty$

Nhận dạng: khi thay thử $x = x_0$ vào giới hạn ta thấy kết quả sẽ ra $0 \cdot \infty$.

Phương pháp giải: Thường ta dùng các phép biến đổi toán học để đưa về dạng $\frac{0}{0}$ sau đó áp dụng phương pháp giải khử dạng vô định $\frac{0}{0}$ đã đề cập.

Ví dụ 1. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 4^+} (4-x) \sqrt{\frac{2x+1}{x^3-64}}$

Lời giải

Ta có: $x \rightarrow 4^- \Rightarrow x < 4 \Leftrightarrow 4-x > 0 \rightarrow 4-x = \sqrt{(4-x)^2}$.

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} (4-x) \sqrt{\frac{2x+1}{64-x^3}} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \sqrt{\frac{(2x+1)(4-x)^2}{(4-x)(16+4x+x^2)}} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \sqrt{\frac{(2x+1)(4-x)}{x^2+4x+16}} = 0.$$

b) $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} (2x-1) \sqrt{\frac{x^2+1}{2x^4-x^3+8x-4}}$

Lời giải

Ta có: $x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+ \Rightarrow x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x > 1 \Leftrightarrow 2x-1 > 0 \rightarrow 2x-1 = \sqrt{(2x-1)^2}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} (2x-1) \sqrt{\frac{x^2+1}{2x^4-x^3+8x-4}} &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} \sqrt{\frac{(x^2+1)(2x-1)^2}{(2x-1)(x^3+4)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} \sqrt{\frac{(x^2+1)(2x-1)}{x^3+4}} = 0. \end{aligned}$$

BÀI TẬP VẬN DỤNG TƯƠNG TỰ

1. $\lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x^2-9} \right)$

Đáp số: $-\infty$

2. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8} \right)$

Đáp số: $\frac{1}{2}$

3. $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) \sqrt{\frac{x}{x^2-4}}$

Đáp số: 0

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM: GIỚI HẠN MỘT PHÍA

1. SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT CƠ BẢN

Câu 1: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

A. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. B. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = -\infty$. C. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^5} = +\infty$. D. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Câu 2: Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2x+1}{x-1}$ bằng:

A. $+\infty$. B. $-\infty$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 3: Giới hạn $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{3x^2+1}-x}{x-1}$ bằng?

A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. $\frac{3}{2}$. D. $-\frac{3}{2}$.

Câu 4: Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2)\sqrt{\frac{x}{x^2-4}}$ bằng:

A. $+\infty$. B. 0. C. $\frac{1}{2}$. D. Kết quả khác.

Câu 5: Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-2x-3}{x+1}$ bằng:

A. 0. B. -4. C. -3. D. 1.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ \frac{1}{8} & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Tính $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

A. $\frac{1}{8}$. B. $+\infty$. C. 0. D. $-\frac{1}{8}$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 5x+2 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^2-3 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 8$. B. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$.
C. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 7$. D. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 7$.

Câu 8: Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2)\sqrt{\frac{x}{x^2-4}}$ bằng:

- A. $+\infty$. B. 0. C. $\frac{1}{2}$. D. Kết quả khác.

Câu 9: Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x+1} - 1 \right)$ bằng :

- A. 0. B. -1. C. 1. D. $-\infty$.

2. BÀI TẬP BIỆN LUẬN THEO THAM SỐ m

Câu 10: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^3-8} & \text{khi } x > 2 \\ x + \frac{m^2}{2} - 2m & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$. Với giá trị nào của

tham số m thì hàm số có giới hạn tại $x = 2$.

- A. $m = 3$ hoặc $m = -2$. B. $m = 1$ hoặc $m = 3$.
C. $m = 0$ hoặc $m = 1$. D. $m = 2$ hoặc $m = 1$.

Câu 11: Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1 & \text{khi } x > 2 \\ 2x^2 - x + 1 & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$ có giới hạn tại $x = 2$.

- A. -1. B. -2. C. 2. D. 1.

Câu 12: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} & \text{khi } x > 0 \\ mx + m + \frac{1}{4} & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$, m là tham số. Tìm giá

trị của m để hàm số có giới hạn tại $x = 0$.

- A. $m = \frac{1}{2}$. B. $m = 1$. C. $m = 0$. D. $m = -\frac{1}{2}$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-5} & \text{khi } x \geq 3 \text{ (1)} \\ \frac{x^2-5}{x+2} & \text{khi } x < 3 \text{ (2)} \end{cases}$.

Trong biểu thức (2) ở trên, cần thay số 5 bằng số nào để hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x \rightarrow 3$?

- A. 19. B. 1.
C. -1. D. Không có số nào thỏa mãn.

BÀI GIẢI THAM KHẢO

1. SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT CƠ BẢN

Câu 1: Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ do $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ và $x > 0$. Vậy đáp án A đúng.

Suy ra đáp án B sai.

Các đáp án C và D đúng. Giải thích tương tự đáp án A. **Chọn B.**

Câu 2: Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} (-2x+1) = -1 < 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0$ và $x-1 > 0$ khi $x \rightarrow 1^+$.

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2x+1}{x-1} = -\infty$. **Chọn B.**

Câu 3: Ta có: $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{3x^2+1}-x}{x-1} = \frac{\sqrt{4}+1}{-1-1} = -\frac{3}{2}$. **Chọn D.**

Câu 4: $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) \sqrt{\frac{x}{x^2-4}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{\frac{x(x-2)^2}{x^2-4}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{\frac{(x-2)x}{x+2}} = 0$. **Chọn B.**

Câu 5: Ta có $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-2x-3}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-3)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x-3) = -4$. **Chọn B.**

Câu 6: Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2-\sqrt{x+3}}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4-x-3}{(x-1)(x+1)(2+\sqrt{x+3})}$.

$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{(x+1)(2+\sqrt{x+3})} = \frac{-1}{8}$ **Chọn D.**

Câu 7: Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (5x+2) = 5 \cdot 1 + 2 = 7$. **Chọn D**

Ta có:

Câu 8: Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) \sqrt{\frac{x}{x^2-4}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x}\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}} = 0$. **Chọn B.**

Câu 9: Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x+1} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1-(x+1)}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x+1} = -1$.

Chọn B.

2. BÀI TẬP BIỆN LUẬN THEO THAM SỐ m

Câu 10:

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{12}{x^3-8} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2+2x-8}{(x-2)(x^2+2x+4)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+4}{x^2+2x+4} = \frac{1}{2}$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(x + \frac{m^2}{2} - 2m \right) = \frac{m^2}{2} - 2m + 2.$$

Hàm số có giới hạn tại $x = 2$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

$$\Leftrightarrow \frac{m^2}{2} - 2m + 2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{m^2}{2} - 2m + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = 1 \end{cases}. \quad \text{Chọn B.}$$

Câu 11: Xét: $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + ax + 1) = 2a + 5.$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x^2 - x + 1) = 7.$$

Hàm số $y = f(x)$ có giới hạn tại $x = 2$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \Leftrightarrow 2x + 5 = 7 \Leftrightarrow a = 1. \quad \text{Chọn D.}$$

Câu 12: Ta có:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x+4) - 2^2}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x(\sqrt{x+4} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x+4} + 2} = \frac{1}{4}. \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(mx + m + \frac{1}{4} \right) = m + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Hàm số đã cho có giới hạn tại $x = 0$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} = m + \frac{1}{4} \Leftrightarrow m = 0. \quad \text{Chọn C.}$$

Câu 13: Hàm số đã cho các định trên $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x^2 - 5} = \sqrt{3^2 - 5} = 2.$$

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{x^2 - m}{x + 2} \text{ khi } x < 3 \text{ (} m \text{ là tham số, } m > 0 \text{).}$$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - m}{x + 2} = \frac{3^2 - m}{3 + 2} = \frac{9 - m}{5}.$$

Để hàm số $f(x)$ có giới hạn khi $x \rightarrow 3$ thì

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \Leftrightarrow \frac{9 - m}{5} = 2 \Leftrightarrow m = -1. \quad \text{Chọn C.}$$

DẠNG BÀI 3: GIỚI HẠN HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

DẠNG 3.1: SỬ DỤNG ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT CƠ BẢN

Ví dụ 1. Tính giới hạn của các hàm số sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 2x + 2$

Lời giải

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right) = 1$.

Nên $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 2x + 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right) = +\infty$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + 4x + 2023}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + 4x + 2023} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 \left(4 + \frac{4}{x} + \frac{2023}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} |x| \sqrt{4 + \frac{4}{x} + \frac{2023}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{4 + \frac{4}{x} + \frac{2023}{x^2}} = +\infty. \end{aligned}$$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{9x^2 - 5x + 2023}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{9x^2 - 5x + 2023} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 \left(9 - \frac{5}{x} + \frac{2023}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} |x| \sqrt{9 - \frac{5}{x} + \frac{2023}{x^2}} \\ &= -\lim_{x \rightarrow -\infty} x \sqrt{9 - \frac{5}{x} + \frac{2023}{x^2}} = +\infty. \end{aligned}$$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{5x^6 + 2x^4 + x^2 + x - 2023}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{5x^6 + 2x^4 + x^2 + x - 2023} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^6 \left(5 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} - \frac{2023}{x^6}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \sqrt[3]{5 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} - \frac{2023}{x^6}} = +\infty. \end{aligned}$$

DẠNG 3.2: CÁC DẠNG VÔ ĐỊNH THƯỜNG GẶP

Nguyên tắc: Khử được yếu tố làm giới hạn bị vô định.

DẠNG 3.2.1: KHỬ DẠNG VÔ ĐỊNH $\frac{\infty}{\infty}$ TẠI VÔ CỰC

Vô định $\frac{\infty}{\infty}$ thường có dạng phân thức $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Phương pháp giải: Đặt **nhân tử chung** x^n và x^m ra ngoài với n và m là số mũ lớn nhất của $f(x)$ và $g(x)$.

Ví dụ 1. Tính giới hạn của các hàm số sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x + 1}{-6x^3 - 6x^2 + 2}$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x + 1}{-6x^3 - 6x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(1 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)}{x^3 \left(-6 - \frac{6}{x} + \frac{2}{x^3} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{-6 - \frac{6}{x} + \frac{2}{x^3}} = \frac{-1}{6}.$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 5}{2x^2 + 1}$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 5}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{5}{x^3} \right)}{x^2 \left(2 + \frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{5}{x^3} \right)}{\left(2 + \frac{1}{x^2} \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{5}{x^3}}{2 + \frac{1}{x^2}} = +\infty.$$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 5}{3x^5 - 4x^2 + x + 1}$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 5}{3x^5 - 4x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(2 - \frac{5}{x^2} \right)}{x^5 \left(3 - \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \frac{5}{x^2}}{3 - \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}} = 0 \cdot \frac{2}{3} = 0.$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x-3)^{10} \cdot (4x+1)^{12}}{(x-5)^{22}}$$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x-3)^{10} (4x+1)^{12}}{(x-5)^{22}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{10} \left(2 - \frac{3}{x}\right)^{10} x^{12} \left(4 + \frac{1}{x}\right)^{12}}{x^{22} \left(1 - \frac{5}{x}\right)^{22}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(2 - \frac{3}{x}\right)^{10} \left(4 + \frac{1}{x}\right)^{12}}{\left(1 - \frac{5}{x}\right)^{22}} = \frac{(2-0)^{10} (4+0)^{12}}{(1-0)^{22}} = 2^{34}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x+1}{3x + \sqrt{4x^2 + 1}}$$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x+1}{3x + \sqrt{4x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x+1}{3x + |x| \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x+1}{3x + x \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(5 + \frac{1}{x}\right)}{x \left(3 + \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 + \frac{1}{x}}{3 + \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{5+0}{3 + \sqrt{4+0}} = 1.$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x+1}{3x + \sqrt{4x^2 + 1}}$$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^3 - 5x^2 + 1}}{4x + \sqrt{4x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \sqrt[3]{8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^3}}}{4x + |x| \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \sqrt[3]{8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^3}}}{4x - x \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^3}}}{4 - \sqrt{4 + \frac{1}{x}}} = \frac{\sqrt[3]{8 - 0 + 0}}{4 + \sqrt{4 + 0}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

DẠNG 3.2.2: KHỬ DẠNG VÔ ĐỊNH $\infty - \infty$ và $0 \cdot \infty$ TẠI VÔ CỰC

Phương pháp giải:

- + Đặt nhân tử chung.
- + Quy đồng mẫu phân thức.
- + Nhân chia lượng liên hợp để khử căn.
- + Chuyển về dạng $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$ đã biết.

Ví dụ 1. Tính giới hạn của các hàm số sau:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2x + 1$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty.$$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{9x^2 + 5x + 2023}$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{9x^2 + 5x + 2023} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 \left(9 + \frac{5}{x} + \frac{2023}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} |x| \sqrt{\left(9 + \frac{5}{x} + \frac{2023}{x^2} \right)}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow -\infty} x \sqrt{\left(9 + \frac{5}{x} + \frac{2023}{x^2} \right)} = +\infty.$$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{5x^6 + 2x^4 - x^3 - x - 2023}$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{5x^6 + 2x^4 - x^3 - x - 2023} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^6 \left(5 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^5} - \frac{2023}{x^6} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \sqrt[3]{5 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^5} - \frac{2023}{x^6}} = +\infty.$$

Ví dụ 2. Tính giới hạn của các hàm số sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3} - x$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 3} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 3} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{x^2 + 3} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x}}} = 0 \cdot \frac{3}{\sqrt{1+0+0}} = 0.$$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + x - 2)$

Lời giải

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} + x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 1 + (x - 2)^2}{\sqrt{x^2 - x + 1} - (x - 2)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x + 5}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(-3 + \frac{5}{x} \right)}{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(-3 + \frac{5}{x} \right)}{-x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 - \frac{2}{x} \right)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3 + \frac{5}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 - \frac{2}{x}} = \frac{-3 + 0}{\sqrt{1 - 0 + 0} + 1 - 0} = \frac{-3}{2}$$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{4 + x^2}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{4 + x^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x})^2 - (\sqrt{4 + x^2})^2}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{4 + x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - (4 + x^2)}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{4 + x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 4}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{4 + x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 - \frac{4}{x} \right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{4}{x} + 1} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 - \frac{4}{x} \right)}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{4}{x} + 1} \right)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 - x} - \sqrt{5 + 4x^2}$

Lời giải

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 - x} - \sqrt{5 + 4x^2} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - x - (5 + 4x^2)}{\sqrt{4x^2 - x} + \sqrt{5 + 4x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x - 5}{\sqrt{4x^2 - x} + \sqrt{5 + 4x^2}} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \left(1 + \frac{5}{x}\right)}{\left|x\right| \left(\sqrt{4 - \frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{5}{x^2} + 4}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \left(1 + \frac{5}{x}\right)}{-x \left(\sqrt{4 - \frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{5}{x^2} + 4}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{5}{x}}{\sqrt{4 - \frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{5}{x^2} + 4}} \\
&= \frac{1 + 0}{\sqrt{4 - 0} + \sqrt{0 + 4}} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Ví dụ 2. Tính giới hạn của các hàm số sau:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) \sqrt{\frac{x-1}{x^3+x}}$

Lời giải

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) \sqrt{\frac{x-1}{x^3+x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^3+x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+2)\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^3+x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 + \frac{2}{x}\right) \sqrt{x} \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{x^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{2}{x}\right) \sqrt{1 - \frac{1}{x}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}}} = \frac{(1+0)\sqrt{1-0}}{\sqrt{1+0}} = 1.
\end{aligned}$$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \sqrt{\frac{2x^3+x}{x^5-x^2+3}}$

Lời giải

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} x \sqrt{\frac{2x^3+x}{x^5-x^2+3}} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \sqrt{\frac{x^3 \left(2 + \frac{1}{x^3}\right)}{x^5 \left(1 - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^5}\right)}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \sqrt{\frac{2 + \frac{1}{x^3}}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^5}\right)}} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x|} \sqrt{\frac{2 + \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^5}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x} \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{2 + \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^5}}} = -\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 8x + 1} + 2x\right)$

Đáp số: -2

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 2} + x + 2)$ Đáp số: $\frac{3}{2}$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 4x + 1} - \sqrt{x^2 - 9x}$ Đáp số: $\frac{5}{2}$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt[3]{8x^3 - 5x - 1})$ Đáp số: 0

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 3) \sqrt{\frac{4x - 1}{16x^3 + 2x}}$ Đáp số: 0

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM GIỚI HẠN HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

Câu 1: Chọn kết quả đúng của $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^5 - 3x^3 + x + 1)$.

- A. 0. B. $+\infty$. C. $-\infty$. D. -4.

Câu 2: Giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 + 5x^2 - 9\sqrt{2}x - 2023)$ bằng:

- A. $-\infty$. B. 3. C. -3. D. $+\infty$.

Câu 3: Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{4x + 2}$.

- A. $\frac{1}{2}$. B. 1. C. $-\frac{1}{4}$. D. $-\frac{1}{2}$

Câu 4: Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2023x + 3}{2x^2 + 2023x}$ được:

- A. 2023. B. $\frac{1}{2}$. C. 2. D. $\frac{1}{2023}$.

Câu 5: Giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5 - 3x^3 + 1}{4x^3 - 2x^4 - x^5 - 3}$ bằng:

- A. -2. B. $\frac{1}{2}$. C. -3. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = \frac{(4x+1)^3(2x+1)^4}{(3+2x)^7}$. Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

- A. 2. B. 8. C. 4. D. 0.

Câu 7: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)^{10}(x+2)^6}{(x^2+9)^8}$ bằng:

- A. $\frac{2}{9}$. B. 1. C. -1. D. $-\frac{1}{9}$.

Câu 8: Giá trị của $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$ bằng:

- A. 0. B. -2. C. $-\infty$. D. 2.

Câu 9: Chọn kết quả đúng của $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+3x}{\sqrt{2x^2+3}}$.

- A. $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$. B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 10: Giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}-2}{x-2}$ bằng :

- A. $-\infty$. B. 1. C. $+\infty$. D. -1

Câu 11: Cho $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2+ax+3x}) = -2$. Tính giá trị của a .

- A. -6. B. 12. C. 6. D. -12

Câu 12: Tìm giới hạn $M = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-4x}-\sqrt{x^2-x})$. Ta được M bằng:

- A. $-\frac{3}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{3}{2}$. D. $-\frac{1}{2}$.

Câu 13: Biết $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{5x^2+2x+x\sqrt{5}}) = a\sqrt{5}+b$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $S = 5a+b$.

- A. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-4x}-\sqrt{x^2-x})$. B. $S = -1$. C. $S = 1$. D. $S = 5$

Câu 14: Tìm $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1-\sqrt[3]{x^3+2})$.

- A. -1. B. $-\infty$. C. $+\infty$. D. 1.

BÀI GIẢI THAM KHẢO:

TRẮC NGHIỆM GIỚI HẠN HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

Câu 1: Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-4x^5 - 3x^3 + x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-4 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}\right)$
 $= +\infty$.

$$\forall i \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-4 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5}\right) = -4 < 0. \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty. \end{cases}$$

Chọn B.

Câu 2: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 + 5x^2 - 9\sqrt{2}x - 2023) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 + 5\frac{1}{x} - 9\sqrt{2}\frac{1}{x^2} - \frac{2023}{x^3}\right)$
 $= -\infty$.

Chọn A.

Câu 3: Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{4x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{4+\frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$. **Chọn A.**

Câu 4: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-2023x+3}{2x^2+2023x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\frac{2023}{x}+\frac{3}{x^2}}{2+\frac{2023}{x}} = \frac{1}{2}$. **Chọn B.**

Câu 5: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5-3x^3+1}{4x^3-2x^4-x^5-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^5}}{\frac{4}{x^2}-\frac{2}{x}-1-\frac{3}{x^5}} = -2$. **Chọn A.**

Câu 6: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(4x+1)^3(2x+1)^4}{(3+2x)^7} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(4+\frac{1}{x}\right)^3\left(2+\frac{1}{x}\right)^4}{\left(\frac{3}{x}+2\right)^7} = 8$

Chọn B.

Câu 7: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)^{10}(x+2)^6}{(x^2+9)^8} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{10}\left(1+\frac{2}{x}\right)^6}{\left(1+\frac{9}{x^2}\right)^8} = 1$. **Chọn B.**

Câu 8: Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}} = -2$ **Chọn B**

Câu 9: Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+3x}{\sqrt{2x^2+3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\left(\frac{1}{x}+3\right)}{|x|\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}+3}{\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Chọn C

Câu 10: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}-2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}-2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}-\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{x}} = 1$. **Chọn B.**

Câu 11: Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{9x^2 + ax + 3x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{ax}{\sqrt{9x^2 + ax} - 3x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a}{-\sqrt{9 + \frac{a}{x}} - 3} = -\frac{a}{6}.$$

$$\Rightarrow -\frac{a}{6} = -2 \Leftrightarrow a = 12.$$

Chọn B.

Câu 12: Ta có: $M = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 4x} - \sqrt{x^2 - x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{\sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{x^2 - x}}$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{|x| \cdot \left(\sqrt{1 - \frac{4}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{\sqrt{1 - \frac{4}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = \frac{3}{2}.$$

Chọn C.

Câu 13: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{5x^2 + 2x} + x\sqrt{5} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{5x^2 + 2x} - x\sqrt{5}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{-\sqrt{5 + \frac{2}{x}} - \sqrt{5}}$

$$= -\frac{1}{5}\sqrt{5}. \text{ Suy ra: } a = -\frac{1}{5}, b = 0. \text{ Vậy } S = -1.$$

Chọn B.

Câu 14: Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + x - \sqrt[3]{x^3 + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{-2}{x^2 + x\sqrt[3]{x^3 + 2} + \left(\sqrt[3]{x^3 + 2} \right)^2} \right)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{-2}{x^2 \left(1 + \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x^3}} + \left(\sqrt[3]{1 + \frac{2}{x^3}} \right)^2 \right)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\frac{-2}{x^2}}{1 + \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x^3}} + \left(\sqrt[3]{1 + \frac{2}{x^3}} \right)^2} \right) = 1$$

Vậy $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 - \sqrt[3]{x^3 + 2} \right) = 1.$

Chọn D.

Chương III. GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC

Bài 3

HÀM SỐ LIÊN TỤC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

I. Hàm số liên tục tại một điểm x_0 .

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$.

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại điểm x_0 nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

- Nếu $y = f(x)$ không liên tục tại x_0 thì gọi là hàm số gián đoạn tại x_0 .

❖ **Chú ý:** Nếu hàm số $y = f(x)$ không xác định tại x_0 thì hàm số $y = f(x)$ không liên tục tại x_0 .

II. Hàm số liên tục tại trên một khoảng, trên một đoạn.

- Hàm số $y = f(x)$ xác định khoảng $(a; b)$.

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên khoảng $(a; b)$ nếu $f(x)$ liên tục tại mọi điểm trên khoảng ấy.

- Hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $[a; b]$.

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là liên tục trên đoạn $[a; b]$ nếu $f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ và $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

- Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục đoạn $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì luôn tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.

III. Một số kết quả được thừa nhận.

1) Hàm số đa thức $y = P(x)$, các hàm số lượng giác $y = \sin x, y = \cos x$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

2) Hàm phân thức $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, hàm số căn thức $y = \sqrt{P(x)}$ và các hàm số lượng giác $y = \tan x, y = \cot x$ liên tục trên từng khoảng của tập xác định của chúng.

3) Cho hai hàm số $y = f(x), y = g(x)$ liên tục tại x_0 .

- Khi đó $y = f(x) + g(x), y = f(x) - g(x), y = f(x) \cdot g(x)$ liên tục tại x_0 .

4) Hàm số $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

B. CÁC DẠNG TOÁN.

DẠNG 1:

Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{khi } x \neq x_0 \\ a & \text{khi } x = x_0 \end{cases}$ tại $x = x_0$

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 2 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$.

Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x_0 = 1$.

Giải:

Ta có: $f(x_0) = f(1) = 2$.

Với mọi $x \neq 1$ ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+2}{x+1} \right) = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2} \neq f(1).$$

Vậy hàm số $f(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 3x}{x^2 + 4x + 3} & \text{khi } x \neq -3 \\ \frac{3}{2} & \text{khi } x = -3 \end{cases}$.

Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x_0 = -3$.

Giải:

Ta có: $f(x_0) = f(-3) = \frac{3}{2}$.

Với mọi $x \neq -3$ ta có:

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{x^2 + 3x}{x^2 + 4x + 3} \right) = \lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{x(x+3)}{(x+1)(x+3)} \right) = \lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{x}{x+1} \right) = \frac{-3}{-3+1} = \frac{3}{2} = f(-3)$$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = -3$.

DẠNG 2:

Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{khi } x > x_0 \\ h(x) & \text{khi } x \leq x_0 \end{cases}$ tại $x = x_0$

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{khi } x < 2 \\ 3x - 2 & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$.

Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x_0 = 2$.

Giải:

Ta có: $f(x_0) = f(2) = 3 \cdot 2 - 2 = 4$.

Với $x > 2$ ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x - 2) = 3 \cdot 2 - 2 = 4.$$

Với $x < 2$ ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x^2 - 4}{x - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x + 2) = 2 + 2 = 4.$$

Do đó: $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4$.

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + x - 2 & \text{khi } x < 1 \\ \sqrt{x^2 + 3x - 1} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$.

Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x_0 = 1$.

Giải:

Ta có: $f(x_0) = f(1) = \sqrt{1^2 + 3 \cdot 1 - 1} = \sqrt{3}$.

Với $x > 1$ ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\sqrt{x^2 + 3x - 1} \right) = \sqrt{1^2 + 3 \cdot 1 - 1} = \sqrt{3}.$$

Với $x < 1$ ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x^2 + x - 2) = 3 \cdot 1^2 + 1 - 2 = 2$$

Do đó: $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

Vậy hàm số $f(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

DẠNG 3:

Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{khi } x \neq x_0 \\ h(m) & \text{khi } x = x_0 \end{cases}$ liên tục tại $x = x_0$

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} & \text{khi } x \neq -1. \\ 2m + 5 & \text{khi } x = -1. \end{cases}$

Tìm m để hàm số liên tục tại điểm $x_0 = -1$.

Giải:

Ta có: $f(x_0) = f(-1) = 2m + 5$.

Với mọi $x \neq -1$ ta có:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{(x + 1)(x - 2)}{x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -1} (x - 2) = -1 - 2 = -3.$$

Để hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = -1$ thì:

$$f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \Leftrightarrow 2m + 5 = -3 \Leftrightarrow m = -4.$$

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1. \\ 3x + m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$.

Tìm m để hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Giải:

Ta có: $f(x_0) = f(1) = 3 + m$.

Với mọi $x \neq 1$ ta có:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2(x - 1) + 2(x - 1)}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x - 1)(x^2 + 2)}{x - 1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2) = 1^2 + 2 = 3. \end{aligned}$$

Để hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$ thì:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Leftrightarrow 3 + m = 3 \Leftrightarrow m = 0.$$

DẠNG 4:

Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{khi } x \leq x_0 \\ h(x, m) & \text{khi } x > x_0 \end{cases}$ liên tục tại $x = x_0$

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{3x + 2} - 2}{x - 2} & \text{khi } x > 2 \\ mx + \frac{1}{4} & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$.

Tìm m để hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

Giải:

Ta có: $f(x_0) = f(2) = 2m + \frac{1}{4}$.

Với $x > 2$ ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{\sqrt[3]{3x+2} - 2}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{\left(\sqrt[3]{3x+2} - 2 \right) \left(\left(\sqrt[3]{3x+2} \right)^2 + 2\sqrt[3]{3x+2} + 2^2 \right)}{(x-2) \left(\left(\sqrt[3]{3x+2} \right)^2 + 2\sqrt[3]{3x+2} + 2^2 \right)} \right) \\&= \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{\left(\sqrt[3]{3x+2} \right)^3 - 2^3}{(x-2) \left(\left(\sqrt[3]{3x+2} \right)^2 + 2\sqrt[3]{3x+2} + 2^2 \right)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{3x+2-8}{(x-2) \left(\left(\sqrt[3]{3x+2} \right)^2 + 2\sqrt[3]{3x+2} + 2^2 \right)} \right) \\&= \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{3(x-2)}{(x-2) \left(\left(\sqrt[3]{3x+2} \right)^2 + 2\sqrt[3]{3x+2} + 2^2 \right)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{3}{\left(\sqrt[3]{3x+2} \right)^2 + 2\sqrt[3]{3x+2} + 2^2} \right) \\&= \frac{3}{\left(\sqrt[3]{3 \cdot 2 + 2} \right)^2 + 2\sqrt[3]{3 \cdot 2 + 2} + 2^2} = \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Với $x < 2$ ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(mx + \frac{1}{4} \right) = 2m + \frac{1}{4}.$$

Để hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$ thì:

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \Leftrightarrow 2m + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow m = 0.$$

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{khi } x > 1 \\ 3mx+1 & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$.

Tìm m để hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 1$.

Giải:

Ta có: $f(x_0) = f(1) = 3m + 1$.

Với $x > 1$ ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) = \frac{1}{2}.$$

Với $x < 1$ ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3mx+1) = 3m+1.$$

Để hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$ thì:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Leftrightarrow 3m + 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{6}.$$

DẠNG 5: CHỨNG MINH PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Ví dụ 1: Chứng minh phương trình: $2x^3 - 6x + 1 = 0$ có ít nhất 2 nghiệm.

Giải:

Đặt $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$ thì $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f(0) = 1; f(1) = -3; f(2) = 5$.

$f(0).f(1) = 1.(-3) = -3 < 0$ do đó $\exists x_0 \in (0; 1)$ sao cho $f(x_0) = 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm trên khoảng $(0; 1)$.

$f(1).f(2) = -3.5 = -15 < 0$ do đó $\exists x_0 \in (1; 2)$ sao cho $f(x_0) = 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm trên khoảng $(1; 2)$.

Vậy phương trình đã cho có ít nhất 2 nghiệm.

Ví dụ 2: Chứng minh rằng phương trình: $x^2 \cdot \cos x + x \cdot \sin x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$.

Giải:

Đặt $f(x) = x^2 \cdot \cos x + x \cdot \sin x + 1$ liên tục trên đoạn $[0; \pi]$.

Ta có: $f(0) = 1 > 0; f(\pi) = 1 - \pi^2 < 0$ do đó $\exists x_0 \in (0; \pi)$ sao cho $f(x_0) = 0$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm trên khoảng $(0; \pi)$.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 1: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x+10} - x - 4}{x+2} & \text{khi } x \neq -2 \\ -\frac{1}{4} & \text{khi } x = -2 \end{cases}$.

Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x_0 = -2$.

Bài 2: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{4 - \sqrt{x^2 + 2x + 8}}{x^2 - 3x + 2} & \text{khi } x < 2 \\ 2x - \frac{19}{4} & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$.

Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x_0 = 2$.

Bài 3: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} & \text{khi } x \neq 3 \\ 3m-2 & \text{khi } x = 3 \end{cases}$

Tìm m để hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 3$.

Bài 4: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 - 8} & \text{khi } x < 2 \\ mx^2 + x + 2 & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$.

Tìm m để hàm số liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

Bài 5: Chứng minh rằng phương trình: $mx(x-2) + x^4 - 2 = 0$ luôn có nghiệm với mọi m.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

Bài 1: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x} & \text{khi } x > 0 \\ 3x+a-1 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$. Với giá trị nào của a

thì hàm số đã cho liên tục tại $x_0 = 0$.

- A. $a = 1$.
- B. $a = 2$.
- C. $a = 4$.
- D. $a = 3$.

Bài 2: Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 5x + 6}$. Khi đó hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng nào?

- A. $(-2; +\infty)$.

- B. $(-2;3)$.
 C. $(-\infty;-2)$.
 D. $(-\infty;3)$.

Bài 3: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3 - 7x^2 + 7x - 2}{x^3 - 3x^2 + 7x - 5} & \text{khi } x \neq 1 \\ \frac{x}{2} + m & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Với giá trị nào của

tham số m thì hàm số liên tục tại $x_0 = 1$.

- A. $m = -\frac{1}{4}$.
 B. $m = 2$.
 C. $m = \frac{3}{4}$.
 D. $m = -\frac{3}{4}$.

Bài 4: Cho hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$. Phát biểu nào sau đây đúng?

- (I) $f(x)$ gián đoạn tại $x=1$.
 (II) $f(x)$ liên tục tại $x=1$.
 (III) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2}$.
 A. Chỉ (I).
 B. Chỉ (II).
 C. Chỉ (I) và (III).
 D. Chỉ (II) và (III).

Bài 5: Chọn giá trị $f(0)$ để hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{2x+1}-1}{x(x+1)}$ liên tục tại điểm $x_0 = 0$.

- A. 1.
 B. 2.
 C. 3.
 D. 4.

Bài 6: Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-x}{x} & \text{khi } x > 0 \\ 2x^2 + 3m + 1 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

- A. $m = 1$..

B. $m = -\frac{1}{6}$.

C. $m = 2$.

D. $m = 0$.

Bài 7: Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x^2-2mx+3m+2} & \text{khi } x < 2 \\ \sqrt{2x-4}+3 & \text{khi } x \geq 2 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $m = 1$.

B. $m = -\frac{1}{6}$.

C. $m = 5$.

D. $m = 0$.

Bài 8: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+4x-5}{x+5} & \text{khi } x \neq -5 \\ 2a-4 & \text{khi } x = -5 \end{cases}$. Với giá trị nào của

tham số a thì hàm số liên tục tại $x_0 = -5$.

A. $a = 5$.

B. $a = -10$.

C. $a = -6$.

D. $a = -1$.

Bài 9: Tìm a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{x^2-1} & \text{khi } x > 1 \\ \frac{a(x^2-2)}{x-3} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ liên tục tại $x_0 = 1$.

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{3}{4}$.

D. 1 .

Bài 10: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{khi } x > 0 \\ x & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$.

B. $f(0) = 0$.

C. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

D. $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 0$.

E. HƯỚNG DẪN GIẢI

BÀI TẬP TỰ LUYỆN



Bài 1:

Giải:

Ta có: $f(x_0) = f(-2) = -\frac{1}{4}$.

Với mọi $x \neq -2$ ta có:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{\sqrt{3x+10} - x - 4}{x+2} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{\sqrt{3x+10} - (x+4)}{x+2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{(\sqrt{3x+10} - (x+4))(\sqrt{3x+10} + (x+4))}{(x+2)(\sqrt{3x+10} + (x+4))} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{(\sqrt{3x+10})^2 - (x+4)^2}{(x+2)(\sqrt{3x+10} + (x+4))} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{-x^2 - 5x - 6}{(x+2)(\sqrt{3x+10} + (x+4))} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{-(x+2)(x+3)}{(x+2)(\sqrt{3x+10} + (x+4))} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{-(x+3)}{\sqrt{3x+10} + (x+4)} \right) \\ &= \frac{-(-2+3)}{\sqrt{3 \cdot -2 + 10} + (-2+4)} = -\frac{1}{4} = f(-2). \end{aligned}$$

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = -2$.

Bài 2:

Giải:

Ta có: $f(x_0) = f(2) = 2.2 - \frac{19}{4} = -\frac{3}{4}$.

Với $x > 2$ ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(2x - \frac{19}{4} \right) = 2.2 - \frac{19}{4} = -\frac{3}{4}.$$

Với $x < 2$ ta có:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{4 - \sqrt{x^2 + 2x + 8}}{x^2 - 3x + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{(4 - \sqrt{x^2 + 2x + 8})(4 + \sqrt{x^2 + 2x + 8})}{(x-2)(x-1)(4 + \sqrt{x^2 + 2x + 8})} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{4^2 - (\sqrt{x^2 + 2x + 8})^2}{(x-2)(x-1)(4 + \sqrt{x^2 + 2x + 8})} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{-x^2 - 2x + 8}{(x-2)(x-1)(4 + \sqrt{x^2 + 2x + 8})} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{-(x-2)(x+4)}{(x-2)(x-1)(4 + \sqrt{x^2 + 2x + 8})} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{-(x+4)}{(x-1)(4 + \sqrt{x^2 + 2x + 8})} \right) \\
&= \frac{-(2+4)}{(2-1)(4 + \sqrt{2^2 + 2 \cdot 2 + 8})} = -\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Do đó: $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\frac{3}{4}$.

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$.

Bài 3:

Giải:

Ta có: $f(x_0) = f(3) = 3m - 2$.

Với mọi $x \neq 3$ ta có:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1})^2 - 2^2} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{x+1-4} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{(3-x)(\sqrt{x+1}+2)}{-(3-x)} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(-(\sqrt{x+1}+2) \right) \\
&= -(\sqrt{3+1}+2) = -4.
\end{aligned}$$

Để hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 3$ thì:

$$f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \Leftrightarrow 3m - 2 = -4 \Leftrightarrow m = -\frac{2}{3}.$$

Bài 4:

Giải:

Ta có: $f(x_0) = f(2) = 4m + 4$.

Với $x > 2$ ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (mx^2 + x + 2) = 4m + 4.$$

Với $x < 2$ ta có:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 - 8} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{(x-2)(x+2)(x^2-1)}{(x-2)(x^2+2x+4)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{(x+2)(x^2-1)}{x^2+2x+4} \right) \\ &= \frac{(2+2)(2^2-1)}{2^2+2 \cdot 2+4} = 1. \end{aligned}$$

Để hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$ thì:

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \Leftrightarrow 4m + 4 = 1 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{4}.$$

Bài 5:

Giải:

Đặt $f(x) = mx(x-2) + x^4 - 2$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f(0) = -2; f(2) = 14$.

$f(0) \cdot f(2) = -2 \cdot 14 = -28 < 0$ do đó $\exists x_0 \in (0; 2)$ sao cho $f(x_0) = 0$ nên phương trình đã cho có nghiệm trên khoảng $(0; 2)$.

Hay phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi m .



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1.B	2.A	3.D	4.C	5.A	6.B	7.C	8.D	9.C	10.D
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------

Bài 1: Chọn B.

Để hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 0$ thì:

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \Leftrightarrow a - 1 = 1 \Leftrightarrow a = 2.$$

Bài 2: Chọn A.

Hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 5x + 6}$ có tập xác định $D = (-\infty; -3) \cup (-3; -2) \cup (-2; +\infty)$.

Nên hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(-2; +\infty)$.

Bài 3: Chọn D.

Để hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$ thì:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \Leftrightarrow m + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow m = -\frac{3}{4}.$$

Bài 4: Chọn C.

Bài 5: Chọn A.

Để hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 0$ thì:

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

Bài 6: Chọn B.

Để hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 0$ thì:

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \Leftrightarrow 3m + 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{6}.$$

Bài 7: Chọn C.

Để hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 2$ thì:

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \Leftrightarrow \frac{3}{-m + 6} = 3 \Leftrightarrow m = 5.$$

Bài 8: Chọn D.

Để hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = -5$ thì:

$$f(-5) = \lim_{x \rightarrow -5} f(x) \Leftrightarrow 2a - 4 = -6 \Leftrightarrow m = -1.$$

Bài 9: Chọn C.

Để hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x_0 = 1$ thì:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Leftrightarrow \frac{a}{2} = \frac{3}{8} \Leftrightarrow m = \frac{3}{4}.$$

Bài 10: Chọn D.

$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ nên hàm số $f(x)$ không liên tục tại điểm $x_0 = 0$.

Chương III

GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC

ÔN TẬP CHƯƠNG

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Giới hạn của dãy số.
2. Giới hạn của hàm số.
3. Hàm số liên tục.

B. CÁC DẠNG TOÁN.

1. Tính giới hạn của dãy số, hàm số.
2. Tính tổng của cấp số nhân lùi vô hạn.
3. Tính liên tục của hàm số.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN.

Bài 1. Tìm các giới hạn sau:

- | | |
|--|---|
| 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 + n^4 - n - 2}{4n^3 + 6n^2 + 9}$. | 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\sqrt[3]{n^6 - 7n^3 - 5n + 8}}{n + 12}$. |
| 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2 + 2n - 3n}}{4n + 3}$. | 4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 1)(2n + 3)}{\sqrt{n^4 - n^2 + 1}}$. |
| 5) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 2n} - 2n)$. | 6) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n + 3} - \sqrt{n + 1})$. |
| 7) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n + 3} - \sqrt[3]{n^2 + n^3})$ | 8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2 \cdot 5^n}{7 + 3 \cdot 5^n}$. |
| 9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^n - 6^n}{(-3)^{n+1} + 5^{n+1}}$. | 10) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n}{1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n}$. |

Bài 2. Tìm các giới hạn sau:

- | | |
|---|---|
| 1) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 4}$. | 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{2x - 1}}{x^2 + x - 2}$ |
| 3) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{x + 3}}{x^2 - 1}$. | 4) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 1 - \sqrt{5x + 1}}{x - \sqrt{4x - 3}}$ |
| 5) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x + 7} + 10(x - 1) - \sqrt{5 - x^2}}{5(x - 1)}$ | 6) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4x + 5} - \sqrt[3]{7 + 6x}}{(x + 1)^2 (x - 1)}$. |

Bài 3 : Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 27}{x^2 - x - 6} & , \text{ khi } x \neq 3 \\ \frac{27}{5} & , \text{ khi } x = 3 \end{cases}$

Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x = 3$

Bài 4. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 + 1} & \text{khi } x < -1 \\ m^2x^2 + 2mx - 5 & \text{khi } x \geq -1 \end{cases}$

Tìm m để hàm số liên tục tại điểm $x = -1$.

Bài 5. Chứng minh phương trình $x^2 \sin x + x \cos x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 19n}{18n + 19}$ bằng :

- A. $-\frac{19}{18}$. B. $\frac{1}{18}$. C. $+\infty$. D. -1 .

Câu 2. Tính $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 5}{n^3 + 1}$.

- A. $L = 1$. B. $L = 0$. C. $L = 3$. D. $L = -5$.

Câu 3. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} (3^n - 2^{2n})$ là:

- A. $-\infty$ B. 1 C. 3 D. $+\infty$

Câu 4. Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 3^n + 7^{n+1}}{2 \cdot 5^n + 7^n}$ là :

- A. 4. B. 2. C. 7. D. -6.

Câu 5. Tính $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 3n + 1} - n)$ bằng :

- A. -3. B. $+\infty$. C. 0. D. $-\frac{3}{2}$.

Câu 6. Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n^2 - n + 1)$ bằng :

- A. $-\infty$. B. 2. C. -2. D. $+\infty$.

Câu 7. Giá trị của $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n^3 + 2n^2 + 2)$ bằng :

- A. $-\infty$. B. -3. C. 3. D. $+\infty$.

Câu 8. Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2n^2 - 3n - 8}$ bằng :

- A. $2\sqrt{2}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\sqrt{2}$. D. $+\infty$.

Câu 9. Giá trị của $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{1 + 2n - n^3}$ bằng :

- A. $-\infty$. B. $\sqrt[3]{2}$. C. -1. D. $+\infty$.

Câu 10. Gọi S là tập hợp các tham số nguyên a thỏa mãn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n+2}{2-n} + a^2 - 4a \right) = 0. \text{ Tổng các phần tử của } S \text{ bằng :}$$

- A. 4. B. 3. C. 5. D. 2.

Câu 11. Cho $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$. Chọn đáp án đúng.

- A. $S \in (1; 2)$. B. $S \in (2; 3)$. C. $S \in [1; 2)$. D. $S \in [2; 3)$.

Câu 12. Giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2.4} + \frac{1}{4.6} + \dots + \frac{1}{2n(2n+2)} \right)$ bằng

- A. $\frac{1}{3}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. 2. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ trong đó $\lim_{x \rightarrow 2} u(x) = 2024$ và

$$\lim_{x \rightarrow 2} v(x) = 0 \text{ đồng thời } v(x) > 0 \text{ với } \forall x \in (0; 2). \text{ Khi đó } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = ?$$

- A. 0. B. $+\infty$. C. $-\infty$. D. 2019.

Câu 14. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^3 - x + 2)$. Kết quả đúng là :

- A. $-\infty$. B. $+\infty$. C. 0. D. 3.

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x) = u(x).v(x)$ trong đó $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = a > 0$ và

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} v(x) = -\infty. \text{ Khi đó khẳng định nào sau đây là đúng?}$$

- A. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. B. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.
C. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. D. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2020$.

Câu 16. Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2024}{x - 2}$.

- A. $+\infty$. B. $-\infty$. C. 0. D. -1.

Câu 17. Kết quả đúng của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 4^+} \left(\frac{1}{x-4} - \frac{2x+3}{\sqrt{x+5}-3} \right)$ là :

- A. $+\infty$. B. $-\infty$. C. 2. D. -1.

Câu 18. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} (x^4 - 4x^2 + 1)$ bằng :

- A. $+\infty$. B. $-\infty$. C. 2. D. -2.

Câu 19. Biết $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x + 1} = a + b\sqrt{2}$ (với $a; b \in \mathbb{Q}$). Giá trị của $a + b$ bằng :

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 20. Biết $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - m\sqrt{x^2 + 4}}{x + 2} = 2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $m \in (-3; -1)$. B. $m \in (-5; 0)$. C. $m \in (-1; 1)$. D. $m \in (1; 3)$.

Câu 21. Giá trị của $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2020} + x - 2}{x^{2019} + x - 2}$ bằng $\frac{a}{b}$ (với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính giá trị của $a^2 - b^2$.

- A. 4039. B. 4041. C. -4041. D. -4039.

Câu 22. Biết $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt[3]{7x + 1}}{\sqrt{2}(x - 1)} = \frac{a\sqrt{2}}{b} + c$ (với $a; b; c \in \mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản).

Giá trị của $a + b + c$ bằng

- A. 37. B. 13. C. 5. D. 51.

Câu 23. Cho $f(x)$ là hàm đa thức thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + 1}{x - 2} = a$ và tồn tại

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{f(x) + 2x + 1} - x}{x^2 - 4} = T$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $T = \frac{a - 2}{16}$. B. $T = \frac{a + 2}{16}$. C. $T = \frac{a - 2}{8}$. D. $T = \frac{a + 2}{8}$.

Câu 24. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 5x}{2x^2 + 1}$ bằng:

- A. $+\infty$. B. $-\infty$. C. $\frac{3}{2}$. D. 1.

Câu 25. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 5}{3x^2 + 1}$ bằng:

- A. $\frac{2}{3}$. B. $-\infty$. C. $+\infty$. D. 0.

Câu 26. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 7x + 12}}{3|x| - 17}$ bằng:

- A. $-\frac{2}{17}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 27. Giá trị của giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{3x^4 + 4x^5 + 2}{9x^5 + 5x^4 + 4}}$ bằng:

- A. $\frac{2}{3}$. B. $-\infty$. C. $\frac{4}{9}$. D. 0.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $[a; b]$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $(a;b)$ và $f(a).f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong $(a;b)$.

B. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong $(a;b)$.

C. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $f(a).f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ vô nghiệm trong $(a;b)$.

D. Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trong $(a;b)$ thì $f(a).f(b) < 0$.

Câu 29. Phương trình nào dưới đây có nghiệm trong khoảng $(0;1)$?

A. $2x^2 - 3x + 4 = 0$.

B. $(x-1)^{2017} - x^{2019} - 2 = 0$.

C. $3x^4 - 4x^2 + 5 = 0$.

D. $3x^{2019} - 8x + 4 = 0$.

Câu 30. Cho phương trình $(m^2 + 3)(x-1)(x^2 - 4) - x^3 + 3 = 0$ (1), với m là tham số. Khẳng định nào sau đây về phương trình (1) là khẳng định đúng?

A. (1) có đúng 4 nghiệm phân biệt.

B. (1) vô nghiệm.

C. (1) có ít nhất 2 nghiệm phân biệt.

D. (1) có đúng một nghiệm.

Câu 31. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $\begin{cases} a+c > b+1 \\ a+b+c+1 < 0 \end{cases}$. Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ và trục hoành.

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Câu 32. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$. Khẳng định nào sai trong các khẳng định sau?

A. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = -\frac{1}{2}$.

B. Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0 = 1$.

C. Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x_0 = -1$.

D. Hàm số $f(x)$ gián đoạn tại $x_0 = -\frac{1}{2}$.

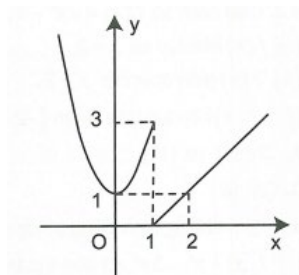
Câu 33. Hàm số $y = \frac{2x-1}{-5x+50}$ gián đoạn tại điểm nào dưới đây?

- A. $x=5$. B. $x=10$. C. $x=-5$. D. $x=11$.

Câu 34. Tìm a để các hàm số $f(x) = \begin{cases} x+2a & \text{khi } x < 0 \\ x^2+x+1 & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$ liên tục tại $x=0$.

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{4}$. C. 0. D. 1.

Câu 35. Hàm số có đồ thị như hình bên gián đoạn tại điểm có hoành độ bằng bao nhiêu?



- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 36. Tìm a để các hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{x^2-1} & \text{khi } x > 1 \\ \frac{a(x^2-2)}{x-3} & \text{khi } x \leq 1 \end{cases}$ liên tục tại $x=1$.

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{3}{4}$. D. 1.

Câu 37. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2-(a-2)x-2}{\sqrt{x+3}-2} & \text{khi } x \neq 1 \\ 8+a^2 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị của a để hàm số liên tục tại $x=1$?

- A. 2. B. 0. C. 3. D. 1.

Câu 38. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+5x+6}$. Khi đó hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty; 3)$

B. $(-3; 2)$

C. $(2; 3)$

D. $[-2; +\infty)$

Câu 39. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} & \text{khi } x > 2 \\ 3x + a & \text{khi } x \leq 2 \end{cases}$

Với giá trị nào của a thì hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. 0.

B. 1.

C. -5.

D. 3.

Câu 40. Tìm giá trị của tham số m để phương trình $(m^2 - 5x + 6)(x + 5)^{2019}(x^{2020} + 2x) + 2x - 1 = 0$ có nghiệm

A. $m \in \{2; 3\}$

B. $m \in \mathbb{R} \setminus \{2; 3\}$

C. $m \in \emptyset$

D. $m \in \mathbb{R}$

E. HƯỚNG DẪN GIẢI



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Hướng dẫn giải

Bài 1. Tìm các giới hạn sau :

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 + n^4 - n - 2}{4n^3 + 6n^2 + 9} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^4} - \frac{2}{n^5} \right)}{n^3 \left(4 + \frac{6}{n} + \frac{9}{n^3} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^4} - \frac{2}{n^5}}{4 + \frac{6}{n} + \frac{9}{n^3}}$$

$$\text{Mà } \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty \text{ và } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^4} - \frac{2}{n^5}}{4 + \frac{6}{n} + \frac{9}{n^3}} \right) = \frac{1}{4} > 0$$

$$\text{Nên } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 + n^4 - n - 2}{4n^3 + 6n^2 + 9} = +\infty.$$

$$\begin{aligned} 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\sqrt[3]{n^6 - 7n^3 - 5n + 8}}{n + 12} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2 \cdot \sqrt[3]{1 - \frac{7}{n^3} - \frac{5}{n^5} + \frac{8}{n^6}}}{n \left(1 + \frac{12}{n} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{1 - \frac{7}{n^3} - \frac{5}{n^5} + \frac{8}{n^6}}}{1 + \frac{12}{n}} \end{aligned}$$

Mà $\lim(-n) = -\infty$ và $\lim \frac{\sqrt[3]{1 - \frac{7}{n^3} - \frac{5}{n^5} + \frac{8}{n^6}}}{1 + \frac{12}{n}} = \frac{1}{1} = 1 > 0$

Nên $\lim \frac{-\sqrt[3]{n^6 - 7n^3 - 5n + 8}}{n + 12} = -\infty$.

$$\begin{aligned} 3) \lim \frac{\sqrt{9n^2 + 2n} - 3n}{4n + 3} &= \lim \frac{n\sqrt{9 + \frac{2}{n}} - 3n}{4n + 3} \\ &= \lim \frac{\sqrt{9 + \frac{2}{n}} - 3}{4 + \frac{3}{n}} = \frac{\sqrt{9 + 0} - 3}{4 + 0} = \frac{0}{4} = 0 \end{aligned}$$

$$4) \lim \frac{(n^2 + 1)(2n + 3)}{\sqrt{n^4 - n^2 + 1}} = \lim \frac{n^3 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(2 + \frac{3}{n}\right)}{n^2 \sqrt{1 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}}} = \lim n \cdot \lim \frac{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(2 + \frac{3}{n}\right)}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}}} = +\infty$$

(Vì $\lim \frac{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(2 + \frac{3}{n}\right)}{\sqrt{1 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}}} = 2 > 0$ và $\lim n = +\infty$)

$$\begin{aligned} 5) \lim \left(\sqrt{4n^2 + 2n} - 2n \right) &= \lim \frac{4n^2 + 2n - 4n^2}{\sqrt{4n^2 + 2n} + 2n} = \lim \frac{2n}{n \left(\sqrt{4 + \frac{2}{n}} + 2 \right)} \\ &= \lim \frac{2}{\sqrt{4 + \frac{2}{n}} + 2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$6) \lim \left(\sqrt{2n + 3} - \sqrt{n + 1} \right) = \lim \sqrt{n} \cdot \lim \left(\sqrt{2 + \frac{3}{n}} - \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \right).$$

Do $\lim \sqrt{n} = +\infty$ và $\lim \left(\sqrt{2 + \frac{3}{n}} - \sqrt{1 + \frac{1}{n}} \right) = \sqrt{2} - 1 > 0$.

Nên $\lim \left(\sqrt{2n + 3} - \sqrt{n + 1} \right) = +\infty$.

$$7) \lim \left(\sqrt{n^2 + 2n + 3} - \sqrt[3]{n^2 + n^3} \right) = \lim \left(\sqrt{n^2 + 2n + 3} - n \right) + \lim \left(n - \sqrt[3]{n^2 + n^3} \right).$$

Mà

$$\bullet \lim \left(\sqrt{n^2 + 2n + 3} - n \right) = \lim \frac{n^2 + 2n + 3 - n^2}{\sqrt{n^2 + 2n + 3} + n} = \lim \frac{2 + \frac{3}{n}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}} + 1} = 1.$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim \left(n - \sqrt[3]{n^2 + n^3} \right) &= \lim \frac{n^3 - (n^2 + n^3)}{n^2 + n \cdot \sqrt[3]{n^2 + n^3} + \left(\sqrt[3]{n^2 + n^3} \right)^2} \\ &= \lim \frac{-1}{1 + \sqrt[3]{\frac{1}{n}} + 1 + \left(\sqrt[3]{\frac{1}{n}} + 1 \right)^2} = \frac{-1}{1 + 1 + 1} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Vậy $\lim \left(\sqrt{n^2 + 2n + 3} - \sqrt[3]{n^2 + n^3} \right) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$

$$8) \lim \frac{3^n - 2 \cdot 5^n}{7 + 3 \cdot 5^n} = \lim \frac{\left(\frac{3}{5} \right)^n - 2}{7 \cdot \left(\frac{1}{5} \right)^n + 3} = \frac{0 - 2}{7 \cdot 0 + 3} = -\frac{2}{3}.$$

$$9) \lim \frac{(-3)^n - 6^n}{(-3)^{n+1} + 5^{n+1}} = \lim \frac{\left(-\frac{1}{2} \right)^n - 1}{3 \left(-\frac{1}{2} \right)^n + 5 \left(\frac{5}{6} \right)^n}.$$

Do $\lim \left[\left(-\frac{1}{2} \right)^n - 1 \right] = -1 < 0$; $\lim \left[3 \left(-\frac{1}{2} \right)^n + 5 \left(\frac{5}{6} \right)^n \right] = 0$ và

$$3 \left(-\frac{1}{2} \right)^n + 5 \left(\frac{5}{6} \right)^n > 0. \text{ Nên } \lim \frac{(-3)^n - 6^n}{(-3)^{n+1} + 5^{n+1}} = -\infty.$$

$$10) \lim \frac{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n}{1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n} = \lim \frac{2^{n+1} - 1}{\frac{3^{n+1} - 1}{2}} = \lim 2 \cdot \frac{\left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} - \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^{n+1}} = 0.$$

Bài 2. Tìm các giới hạn sau :

$$1) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-1)(x-4)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x-1) = 4 - 1 = 3$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{2x-1}}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{(x-1)(x+2)(x+\sqrt{2x-1})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x+2)(x+\sqrt{2x-1})} = 0$$

3)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x - \sqrt{x+3})(2x + \sqrt{x+3})}{(x-1)(x+1)(2x + \sqrt{x+3})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - x - 3}{(x-1)(x+1)(2x + \sqrt{x+3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(4x+3)}{(x-1)(x+1)(2x + \sqrt{x+3})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x+3}{(x+1)(2x + \sqrt{x+3})} = \frac{7}{8} \end{aligned}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1-\sqrt{5x+1}}{x-\sqrt{4x-3}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2-3x)(x+\sqrt{4x-3})}{(x^2-4x+3)(x+1+\sqrt{5x+1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x+\sqrt{4x-3})}{(x-1)(x+1+\sqrt{5x+1})} = \frac{3 \cdot 6}{2 \cdot 8} = \frac{9}{8}$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} + 10(x-1) - \sqrt{5-x^2}}{5(x-1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt[3]{x+7} - 2)}{5(x-1)} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{5-x^2}}{5(x-1)} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{10x-10}{5(x-1)} = \frac{1}{60} + \frac{1}{10} + 2 = \frac{127}{60}$$

$$6) \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4x+5} - \sqrt[3]{7+6x}}{(x+1)^2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4x+5} - (2x+3)}{(x+1)^2(x-1)} + \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(2x+3) - \sqrt[3]{7+6x}}{(x+1)^2(x-1)}$$

$$= 1 + (-2) = -1$$

Bài 3: Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$

$$\text{Ta có } f(3) = \frac{27}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{(x-3)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 3x + 9}{x+2} = \frac{27}{5}$$

Ta thấy $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$ nên hàm số liên tục tại $x = 3$.

Bài 4: Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x-1)(x^2 - 4)}{x^2 - x + 1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (m^2 x^2 + 2mx - 5) = m^2 - 2m - 5$$

$$f(-1) = m^2 - 2m - 5$$

Hàm số liên tục tại $x = -1$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = f(-1) \Leftrightarrow m^2 - 2m - 5 = 2 \Rightarrow m = 1 \pm \sqrt{2}$$

Bài 5.

Ta có hàm số $f(x) = x^2 \sin x + x \cos x + 1$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$f(0) \cdot f(\pi) = -\pi + 1 < 0$$

Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0; \pi)$.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. A	2. B	3. A	4. C	5. D	6. D	7. A	8. D	9. A	10. A
11. D	12. D	13. D	14. B	15. C	16. B	17. B	18. D	19. A	20. B
21. B	22. B	23. B	24. C	25. D	26. B	27. A	28. B	29. D	30. C
31. A	32. A	33. B	34. A	35. B	36. C	37. A	38. C	39. C	40. D

Câu 1. Chọn A.

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 19n}{18n + 19} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} - 19}{18 + \frac{19}{n}} = -\frac{19}{18}.$$

Câu 2. Chọn B.

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 5}{n^3 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n} - \frac{5}{n^3}}{1 + \frac{1}{n^3}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Câu 3. Chọn A.

$$\text{Ta có } \lim_{n \rightarrow \infty} (3^n - 2^{2n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (3^n - 4^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{3}{4} \right)^n - 1 \right) = -\infty.$$

Câu 4. Chọn C.

$$\lim \frac{4.3^n + 7^{n+1}}{2.5^n + 7^n} = \lim \frac{4.\left(\frac{3}{7}\right)^n + 7}{2.\left(\frac{5}{7}\right)^n + 1} = 7.$$

Câu 5. Chọn D.

$$\text{Ta có } \lim \left(\sqrt{n^2 - 3n + 1} - n \right) = \lim \left(\frac{-3n + 1}{\sqrt{n^2 - 3n + 1} + n} \right) = -\frac{3}{2}.$$

Câu 6. Chọn D.

$$\lim (2n^2 - n + 1) = \lim \left(2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \cdot \lim n^2 = +\infty.$$

Câu 7. Chọn A.

$$\lim (-n^3 + 2n^2 + 2) = \lim \left(-1 + \frac{2}{n} + \frac{2}{n^3} \right) \cdot n^3 = -\infty.$$

Câu 8. Chọn D.

$$\lim \sqrt{2n^2 - 3n - 8} = \lim \left(\sqrt{2 - \frac{3}{n} - \frac{8}{n^2}} \right) \cdot \lim n = +\infty.$$

Câu 9. Chọn A.

$$\lim \sqrt[3]{1 + 2n - n^3} = \lim \left(\sqrt[3]{\frac{1}{n^3} + \frac{2}{n^2} - 1} \right) \cdot \lim n = -\infty.$$

Câu 10. Chọn A.

$$\text{Ta có: } \lim \left(\frac{5n+2}{2-n} + a^2 - 4a \right) = 0 \Leftrightarrow \lim \left(\frac{5n+2}{2-n} \right) + a^2 - 4a = 0.$$

$$a^2 - 4a - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 5 \end{cases}. \text{ Vậy } S = \{-1; 5\} \Rightarrow -1 + 5 = 4.$$

Câu 11. Chọn D.

Ta thấy $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2^2}; \dots; \frac{1}{2^n}; \dots$ là một cấp số nhân lùi vô hạn với công bội $q = \frac{1}{2}$

và số hạng đầu $u_1 = 1$. Do đó $S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow S \in [2; 3)$.

Câu 12. Chọn D.

Ta có :

$$\lim \left(\frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{2n(2n+2)} \right) = \lim \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2} \right)$$

$$= \lim \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n+2} \right) = \frac{1}{4}.$$

Câu 13. Chọn B.

Áp dụng quy tắc tìm giới hạn vô cực có kết quả.

Câu 14. Chọn B.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^3 - x + 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \lim \left(3 - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right).$

Mặt khác: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) = 1 > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^3 - x + 2) = +\infty.$

Câu 15. Chọn C.

Áp dụng quy tắc tìm giới hạn vô cực có kết quả.

Câu 16. Chọn B.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 2024) = -2020 < 0.$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = 0, x \rightarrow 2^+ \Rightarrow x > 2 \Rightarrow x - 2 > 0$ nên $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2024}{x - 2} = -\infty.$

Câu 17. Chọn B. $\lim_{x \rightarrow 4^+} \left(\frac{1}{x-4} - \frac{2x+3}{\sqrt{x+5}-3} \right) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \left(\frac{1}{x-4} - \frac{(2x+3)(\sqrt{x+5}+3)}{x-4} \right)$

$= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1 - (2x+3)(\sqrt{x+5}+3)}{x-4}.$

Ta có

$\lim_{x \rightarrow 4^+} [1 - (2x+3)(\sqrt{x+5}+3)] = -55 < 0.$

$\lim_{x \rightarrow 4^+} (x-4) = 0, x \rightarrow 4^+ \Rightarrow x > 4 \Rightarrow x-4 > 0.$

Suy ra $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1 - (2x+3)(\sqrt{x+5}+3)}{x-4} = -\infty.$

Câu 18. Chọn D.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} (x^4 - 4x^2 + 1) = 1^4 - 4 \cdot 1^2 + 1 = -2.$

Câu 19. Chọn A.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x + 1} = \frac{1 + \sqrt{2}}{1 + 1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \Rightarrow a = b = \frac{1}{2}.$

Do vậy $a + b = 1$.

Câu 20. Chọn B

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - m\sqrt{x^2 + 4}}{x + 2} = 2 \Leftrightarrow \frac{-2m}{2} = 2 \Rightarrow -m = 2 \Leftrightarrow m = -2.$$

Suy ra $m \in (-5; 3)$.

Câu 21. Chọn B.

Ta có :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1) = n.$$

Câu 22. Chọn B.

Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2020} + x - 2}{x^{2019} + x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2020} - 1 + x - 1}{x^{2019} - 1 + x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{2019} + x^{2018} + \dots + 1)(x - 1) + x - 1}{(x^{2018} + x^{2017} + \dots + 1)(x - 1) + x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2019} + x^{2018} + \dots + 1 + 1}{x^{2018} + x^{2017} + \dots + 1 + 1} = \frac{2020 + 1}{2019 + 1} = \frac{2021}{2020} \end{aligned}$$

Suy ra $a = 2021; b = 2020 \Rightarrow a^2 - b^2 = 4041$.

Câu 23. Chọn B.

Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt[3]{7x + 1}}{\sqrt{2}(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{\sqrt{2}(x - 1)} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt[3]{7x + 1}}{\sqrt{2}(x - 1)} = \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

Suy ra $a = 1; b = 12; c = 0 \Rightarrow a + b + c = 13$.

Câu 24. Chọn C.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 5x}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{5}{x}}{2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{3}{2}.$$

Câu 25. Chọn D.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 5}{3x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}}{3 + \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{3} = 0.$$

Câu 26. Chọn B.

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 7x + 12}}{3|x| - 17} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{4 - \frac{7}{x} + \frac{12}{x^2}}}{3|x| - 17}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{4 - \frac{7}{x} + \frac{12}{x^2}}}{-3x - 17} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{4 - \frac{7}{x} + \frac{12}{x^2}}}{-3 - \frac{17}{x}} = \frac{2}{3}.$$

Câu 27. Chọn A.

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{3x^4 + 4x^5 + 2}{9x^5 + 5x^4 + 4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\frac{3}{x} + 4 + \frac{2}{x^5}}{9 + \frac{5}{x} + \frac{4}{x^5}}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}.$$

Câu 28. Chọn B.

Câu 29. Chọn D.

Xét hàm số $f(x) = 3x^{2019} - 8x + 4$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Vì hàm số liên tục trên đoạn $[0;1]$ và $f(0).f(1) = 4.(-1) < 0$ nên tồn tại $x_0 \in (0;1)$ sao cho $f(x_0) = 0$. Vậy phương trình có nghiệm trong khoảng $(0;1)$.

Câu 30. Chọn C.

Đặt $f(x) = (m^2 + 3)(x-1)(x^2 - 4) - x^3 + 3$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f(1) = -1^3 + 3 = 2 > 0$; $f(2) = -2^3 + 3 = -5 < 0$;

$f(3) = 10(m^2 + 3) - 24 = 10m^2 + 6 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Vì $f(1).f(2) < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $c_1 \in (1;2)$.

.

Vì $f(2).f(3) < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm $c_1 \in (2;3)$.

.

Vậy phương trình (1) có ít nhất 2 nghiệm phân biệt.

Câu 31. Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^3 + ax^2 + bx + c = 0(1)$.

Đặt $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Theo giả thiết $f(-1) > 0; f(1) < 0$.

+ Vì $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ nên tồn tại số $c_1 < -1$ sao cho $f(c_1) < 0$.

$f(c_1).f(-1) < 0$ nên phương trình (1) có ít nhất một nghiệm thuộc $(c_1; -1)$.

+ $f(-1).f(1) < 0$ nên phương trình (1) có ít nhất một nghiệm thuộc $(-1; 1)$.

+ Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ nên tồn tại số $c_2 > 1$ sao cho $f(c_2) > 0$.

$f(1).f(c_2) < 0$ nên phương trình (1) có ít nhất một nghiệm thuộc $(1; c_2)$.

Vì phương trình (1) là phương trình bậc ba nên có nhiều nhất là 3 nghiệm.

Vậy phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt.

Câu 32. Chọn A.

Hàm số $f(x)$ có tập xác định là $D = \left[\frac{1}{2}; +\infty \right)$. $x_0 = -\frac{1}{2} \notin \left[\frac{1}{2}; +\infty \right)$ nên hàm số đã cho gián đoạn tại $x_0 = -\frac{1}{2}$.

Câu 33. Chọn B.

Ta có $-5x + 50 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 10$. Vậy hàm số gián đoạn tại $x = 10$.

Câu 34. Chọn A.

Ta có : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + x + 1) = 1$.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 2a) = 2a$. Và $f(0) = 1$.

Hàm số liên tục tại $x = 0 \Leftrightarrow 2a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$.

Câu 35. Chọn B.

Dựa vào hình vẽ đồ thị ta thấy hàm số gián đoạn tại điểm $x = 1$.

Câu 36. Chọn C.

Ta có : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{x^2-1} = \frac{3}{8}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{a(x^2 - 2)}{x - 3} = \frac{a}{2} \text{ và } f(1) = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Hàm số liên tục tại } x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \frac{a}{2} = \frac{3}{8} \Leftrightarrow a = \frac{3}{4}.$$

Câu 37. Chọn A.

Tập xác định: $D = [-3; +\infty)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 - (a-2)x - 2}{\sqrt{x+3} - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(ax+2)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (ax+2)(\sqrt{x+3}+2) = 4(a+2). \text{ Và } f(1) = 8 + a^2. \end{aligned}$$

Hàm số đã cho liên tục tại $x = 1$ khi $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 4(a+2) = 8 + a^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 4 \end{cases}.$$

Vậy có 2 giá trị của a để hàm số đã cho liên tục tại $x = 1$.

Câu 38. Chọn C.

Nhận xét: $x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow f(x) \text{ có TXĐ } D = \mathbb{R} \setminus \{-2; -3\} \text{ nên}$

$f(x)$ liên tục trên $(-\infty; -3), (-3; -2), (-2; +\infty) \Rightarrow f(x)$ liên tục trên $(2; 3)$

Câu 39. Chọn C.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Nhận xét: Khi $x \in (2; +\infty) \Rightarrow f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2}$ xác định nên $f(x)$ liên tục trên $(2; +\infty)$.

Khi $x \in (-\infty; 2) \Rightarrow f(x) = 3x + a$ xác định nên $f(x)$ liên tục trên $(-\infty; 2)$.

Xét tại $x = 2$ $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 1) = 1$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x + a) = a + 6$.

$$f(2) = a + 6$$

Để hàm số liên tục tại $x = 2$ thì

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) \Leftrightarrow a + 6 = 1 \Leftrightarrow a = -5.$$

Câu 40. Chọn D.

$$\text{Đặt } f(x) = (m^2 - 5x + 6)(x + 5)^{2019}(x^{2020} + 2x) + 2x - 1.$$

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Xét } m^2 - 5m + 6 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 3 \end{cases}. \text{ Khi đó phương trình trở thành } 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\text{Xét } m^2 - 5m + 6 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ m \neq 3 \end{cases}.$$

Hàm $f(x)$ có bậc cao nhất là $2019 + 2020 = 4039$ là đa thức bậc lẻ nên

$f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm với $\forall m \in \mathbb{R}$.

ĐỀ KIỂM TRA CUỐI CHƯƠNG IV

(Thời gian làm bài: 45 phút)



A. PHẦN TRẮC NGHIỆM (7 điểm)

Câu 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - 2n}{n^2 + 1}$ bằng

- A. 3. B. -2. C. 0. D. 1.

Câu 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 2 \cdot 5^n}{3^n + 2 \cdot 5^n}$ bằng

- A. 1. B. 0. C. -1. D. -2.

Câu 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (5n^2 - 4n + 2)$ bằng

- A. $-\infty$. B. -4. C. 5. D. $+\infty$.

Câu 4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 3x + 1}{2 - 2x^2}$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. 2. D. -2.

Câu 5. $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{3x^2 + x}{1 - x}$ bằng

- A. $-\infty$. B. 0. C. 1. D. $+\infty$.

Câu 6. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-x^2 + x - 2}{2 - x}$ bằng

A. -2.

B. 0.

C. -8.

D. 2.

Câu 7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - 2x + 3x^3)$ bằng

A. $-\infty$.

B. 3.

C. -2.

D. $+\infty$.

Câu 8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 4x}{x^2 - 4x}$ bằng

A. 1.

B. 0.

C. -4.

D. -1.

Câu 9. Phương trình nào sau đây có nghiệm trên khoảng $(1; 2)$?

A. $2x^2 - 7x + 6 = 0$.

B. $x^2 - 9 = 0$.

C. $x^2 - x + 1 = 0$.

D. $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

Câu 10. Tính tổng $S = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \dots + \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} + \dots$

A. $S = \frac{3}{4}$.

B. $S = \frac{4}{5}$.

C. $S = \frac{-3}{4}$.

D. $S = -\frac{4}{5}$.

Câu 11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{-x^2 + 4}$ bằng

A. $-\infty$.

B. -1.

C. 2.

D. $+\infty$.

Câu 12. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{4 - x^2}$ bằng

A. $\frac{1}{4}$.

B. $-\frac{1}{4}$.

C. 4.

D. -4.

Câu 13. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 - 2x + 8}}{2x + 3}$ bằng

A. -1.

B. 1.

C. 0.

D. 2.

Câu 14. $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x - 2}{2 - x}$ bằng

A. 2.

B. 0.

C. $-\infty$.

D. $+\infty$.

Câu 15. Phương trình $x^6 - x^3 - x - 12 = 0$ có ít nhất bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(-2; 2)$?

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Câu 16. Tìm giá trị của tham số m để hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 6x + 5}{2x + 2}, & \text{khi } x \neq -1 \\ -3m^2x - 10, & \text{khi } x = -1 \end{cases} \text{ liên tục tại } x = -1$$

- A. $m = \pm 2$. B. $m = 2$. C. $m = \pm 4$. D. $m = 4$.

Câu 17. Tìm giá trị của tham số m để hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{8-x} + 3x}{x+1}, & \text{khi } x < -1 \\ m^2 + mx + \frac{5}{6}, & \text{khi } x \geq -1 \end{cases} \text{ liên tục tại } x = -1$$

- A. $m = 1; m = 2$. B. $m = -1; m = 2$.
C. $m = -1; m = -2$. D. $m = 1; m = 2$.

Câu 18. Tính $S = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 - ax} + \sqrt{2}x)$ (a là hằng số) ?

- A. $S = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. B. $S = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.
C. $S = \frac{-a\sqrt{2}}{4}$. D. $S = \frac{-a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 19. Tính $S = \lim_{x \rightarrow \sqrt{a}} \frac{x^3 - a\sqrt{a}}{x^2 - a}$ (a là hằng số và $a > 0$) ?

- A. $S = \frac{3a}{2}$. B. $S = \frac{-3a}{2}$. C. $S = \frac{3\sqrt{a}}{2}$. D. $S = \frac{-3\sqrt{a}}{2}$.

Câu 20. Biết $\lim_{x \rightarrow +\infty} (9x + 2) \sqrt{\frac{3x+1}{(2x+1)^3}} = a\sqrt{6} + b$. Tính giá trị của biểu thức

$$S = 4a - b$$

- A. $S = -9$. B. $S = 9$. C. $S = \frac{9}{2}$. D. $S = -\frac{9}{2}$.

B. PHẦN TỰ LUẬN (3 điểm)

Câu 1 (1điểm). Tính giới hạn : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-5x}{2x+4}$.

Câu 2 (1điểm). Tính giới hạn : $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{2-\sqrt{x}}$.

Câu 3 (1điểm). Tính giới hạn : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - x + 3} - 1 + 2x)$.

-----HẾT-----

ĐÁP ÁN

A. TRẮC NGHIỆM (7 điểm)

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	C	C	D	D	C	A	A	B	A	B
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	D	B	B	C	A	A	B	A	C	B

B. TỰ LUẬN (3 điểm)

Câu 1 (1 điểm). $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-5x}{2x+4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3}{x}-5}{2+\frac{4}{x}} = -\frac{5}{2}.$

Câu 2 (1 điểm). $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{2-\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(2+\sqrt{x})}{4-x} = \lim_{x \rightarrow 4} (-2-\sqrt{x}) = -4.$

Câu 3 (1 điểm).

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 - x + 3} - 1 + 2x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{4x^2 - x + 3} + 2x \right) - \lim_{x \rightarrow -\infty} 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - x + 3 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 - x + 3} - 2x} - 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x + 3}{|x| \sqrt{4 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - 2x} - 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1 + \frac{3}{x}}{-\sqrt{4 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} - 2} - 1 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}.$$