

BÀI TOÁN TƯƠNG GIAO TRONG KHÔNG GIAN OXYZ

Giáo viên soạn

Lê Thảo-THPT Nguyễn Thị Minh Khai- Hà Nội

Bùi Sỹ Khanh- THPT Trần Cao Vân- TP. HCM

Các bài toán trong không gian Oxyz không còn xa lạ với học sinh và xuất hiện nhiều trong những đề thi gần đây với nhiều câu hỏi ở các mức độ vận dụng và vận dụng cao. Để đồng hành cùng các em trong kỳ thi THPT sắp tới hy vọng bài viết này sẽ giúp các em có hướng tiếp cận và giải quyết các bài toán đó một cách dễ dàng nhất.

I. NHẮC LẠI LÝ THUYẾT**1. Tương giao giữa mặt cầu và mặt phẳng**

Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ và mặt cầu

$(S): (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính R khi đó :

+) Nếu $d(I; (P)) > R$ thì mặt cầu (S) và (P) không có điểm chung.

+) Nếu $d(I; (P)) = R$ thì mặt cầu (S) và (P) có điểm chung duy nhất là H (mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu tại H) và $IH \perp (P)$.

+) Nếu $d(I; (P)) < R$ thì mặt cầu (S) và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn tâm H bán kính r ta có :

- Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (P) và $r^2 + IH^2 = R^2$ ($d_{(I; (P))} = IH$)

- Cho điểm M nằm trong mặt cầu (S) mặt phẳng (P) đi qua M cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính r nhỏ nhất $\Leftrightarrow IM \perp (P)$

- Cho điểm M nằm trong mặt cầu (S) mặt phẳng (P) đi qua M cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính r lớn nhất $\Leftrightarrow (P)$ đi qua 2 điểm I và M .

2. Tương giao giữa mặt cầu và đường thẳng

Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Δ và mặt cầu (S) có tâm I và bán kính R khi đó :

+) Nếu $d(I; \Delta) > R$ thì mặt cầu (S) và Δ không có điểm chung.

+) Nếu $d(I; \Delta) = R$ thì mặt cầu (S) và Δ có điểm chung duy nhất là H khi đó $IH \perp \Delta$.

+) Nếu $d(I; \Delta) < R$ thì mặt cầu (S) và cắt đường thẳng Δ tại hai điểm A, B ta có một số kết quả sau :

- Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow IH \perp \Delta$ và $d_{(I; \Delta)}^2 + \frac{AB^2}{4} = R^2$ ($d_{(I; \Delta)} = IH$)

- Cho điểm M khi đó đường thẳng đi qua M cắt (S) tại hai điểm A, B sao cho độ dài AB lớn nhất là đường thẳng đi qua 2 điểm M và I

- Cho điểm M nằm trong mặt cầu (S) đường thẳng đi qua M cắt (S) tại hai điểm A, B sao cho độ dài AB nhỏ nhất là đường thẳng đi qua M và vuông góc IM .

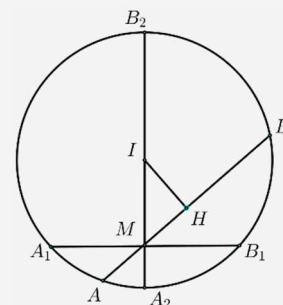
Chứng minh

$$\text{Ta có } d_{(I; \Delta)}^2 + \frac{AB^2}{4} = R^2 \Leftrightarrow AB = 2\sqrt{R^2 - d_{(I; \Delta)}^2}$$

Vì $\triangle HIM$ vuông tại H nên ta có $0 \leq IH \leq IM$

+) AB lớn nhất $\Leftrightarrow d_{(I; \Delta)} = 0 \Leftrightarrow \Delta$ qua 2 điểm I và M .

+) AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow d_{(I; \Delta)} = IM \Leftrightarrow \Delta$ vuông góc IM .



II. MỘT SỐ VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 1. (Đề minh họa lần 1 năm 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;1)$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z + 2 = 0$. Biết mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1. Viết phương trình của mặt cầu (S)

- A. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 8$ B. $(S): (x+2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 10$
C. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 8$ D. $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 10$

Phân tích và bình luận

Khi viết phương trình mặt cầu thì hai yếu tố cần thiết là tâm I và bán kính R , khi bài toán cho tâm I thì việc tìm bán kính R dựa vào các yếu tố cắt hay tiếp xúc để tính R

+) Nếu (S) tiếp xúc $(P) \Leftrightarrow R = d_{(I;(P))}$

+) Nếu (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn bán kính r ta có $R = \sqrt{r^2 + d_{(I;(P))}^2}$

+) Nếu (S) tiếp xúc $d \Leftrightarrow R = d_{(I;d)}$

+) Nếu (S) cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B ta có $R = \sqrt{\frac{AB^2}{4} + d_{(I;d)}^2}$

Lời giải

Chọn D

Gọi R, r lần lượt là bán kính của mặt cầu (S) và đường tròn giao tuyến

$$\text{Ta có } R^2 = r^2 + \left(d(I, (P))\right)^2 = 1 + \left(\frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 2|}{\sqrt{2^2 + 1 + 2^2}}\right)^2 = 10$$

Mặt cầu (S) tâm $I(2;1;1)$ bán kính $R = \sqrt{10}$ là $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 10$.

Ví dụ 2. (Mã đề 101 thi THPT năm 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu

$$(S): (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 2 \text{ và hai đường thẳng } d_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}; d_2: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}.$$

Phương trình nào dưới đây là phương trình của một mặt phẳng tiếp xúc với (S) và song song với $d_1; d_2$

- A.** $y + z + 3 = 0$ **B.** $x + z + 1 = 0$ **C.** $x + y + 1 = 0$ **D.** $x + z - 1 = 0$

Phân tích và bình luận

Để viết phương trình mặt phẳng (P) hai yếu tố cần thiết ta cần tìm là Vector pháp tuyến và điểm đi qua.
Trong một số trường hợp việc cho khuyết đi một trong hai yếu tố ta cần chú ý các điều kiện thay thế:

- + Vectơ Pháp tuyến hoặc hai vectơ chỉ phương của mặt phẳng (P) được xác định dựa vào các yếu tố song song, vuông góc hoặc cho góc làm yếu tố xác định Vector pháp tuyến.
- + Nếu bài toán chưa cho điểm đi qua thì các yếu tố thay thế thường gặp là Khoảng cách, ví dụ trên là một bài toán không cho điểm đi qua mà thay thế bằng khoảng cách.

Lời giải.

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;1-2)$; $R = \sqrt{2}$.

Vecto chỉ phương của d : $\vec{u}_d = (1;2;-1)$. Vecto chỉ phương của Δ : $\vec{u}_\Delta = (1;1;-1)$.

Gọi (P) là mặt phẳng cần viết phương trình.

Ta có $[\vec{u}_d, \vec{u}_\Delta] = (-1;0;-1)$ nên chọn một véc tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (1;0;1)$.

Mặt phẳng (P) có phương trình tổng quát dạng $x + z + D = 0$.

$$\text{Do } (P) \text{ tiếp xúc với } (S) \text{ nên } d(I; (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|-1-2+D|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow |D-3| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} D = 5 \\ D = 1 \end{cases}$$

Vậy phương trình của một mặt phẳng tiếp xúc với (S) và song song với d, Δ là $x + z + 1 = 0$

Ví dụ 3. (THPT 2017 Mã đề 105) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; -2; 6), B(0; 1; 0)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$. Mặt phẳng $(P): ax + by + cz - 2 = 0$ đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T = a + b + c$

A. $T = 3$

B. $T = 4$

C. $T = 5$

D. $T = 2$

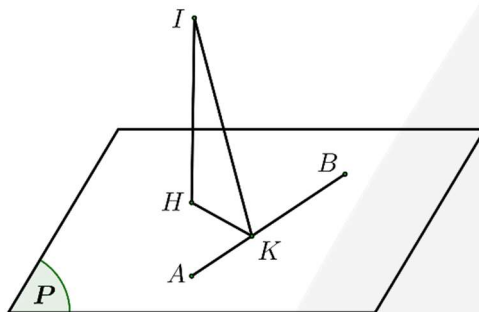
Phân tích và bình luận

Đây là bài toán viết phương trình mặt phẳng (P) khi chưa cho Vectơ pháp tuyến, nên ta xác định Vectơ pháp tuyến bằng cách chứng minh tính chất hình học để xác định hoặc gọi ra và đi tìm bán kính nhỏ nhất để xác định.

Lời giải

Chọn A

Cách 1



Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$ và bán kính $R = 5$

Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (P) và đường thẳng qua 2 điểm A, B và r là bán kính của đường tròn giao tuyến

$$\Rightarrow r = \sqrt{R^2 - IH^2} = \sqrt{25 - IH^2} \geq \sqrt{25 - IK^2} \text{ vì } IH \leq IK.$$

Vậy r nhỏ nhất khi $H \equiv K \Rightarrow (P) \perp IK$

Và $\overrightarrow{AB}(-3; 3; -6)$ đường thẳng đi qua hai điểm A, B có vectơ chỉ phương là $\vec{u}(1; -1; 2)$

$$\Rightarrow AB: \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases} \Rightarrow K(t; 1 - t; 2t) \Rightarrow \overrightarrow{IK}(t - 1; -t - 1; 2t - 3)$$

$$\text{Và } IK \perp AB \Rightarrow \overrightarrow{IK} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow t - 1 + t + 1 + 4t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow \overrightarrow{IK}(0; -2; -1)$$

$$\text{Vậy } (P): 2y + z - 2 = 0 \Rightarrow a = 0; b = 2; c = 1 \Rightarrow a + b + c = 3$$

Cách 2

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R = 5$

$$\text{Ta có } \begin{cases} A \in (P) \\ B \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 2b + 6c - 2 = 0 \\ b - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 - 2c \\ b = 2 \end{cases}$$

Bán kính của đường tròn giao tuyến là $r = \sqrt{R^2 - [d(I;(P))]^2} = \sqrt{25 - [d(I;(P))]^2}$

Bán kính của đường tròn giao tuyến nhỏ nhất khi và chỉ khi $d(I;(P))$ lớn nhất

$$\text{Ta có } d(I;(P)) = \frac{|a + 2b + 3c - 2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|2 - 2c + 4 + 3c - 2|}{\sqrt{(2 - 2c)^2 + 2^2 + c^2}} = \sqrt{\frac{(c + 4)^2}{5c^2 - 8c + 8}}$$

$$\text{Xét } f(c) = \sqrt{\frac{(c + 4)^2}{5c^2 - 8c + 8}} \Rightarrow f'(c) = \frac{-48c^2 - 144c + 192}{(5c^2 - 8c + 8)^2 \sqrt{\frac{(c + 4)^2}{5c^2 - 8c + 8}}}$$

$$f'(c) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ c = -4 \end{cases}$$

Bảng biến thiên như bên

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$\frac{1}{\sqrt{5}}$						
			0		$\sqrt{5}$		$\frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\text{Vậy } \text{Max } d(I;(P)) = \sqrt{5} \Leftrightarrow c = 1 \Rightarrow a = 0, b = 2 \Rightarrow a + b + c = 3.$$

Nhận xét: khi gặp các bài toán về lớn nhất (nhỏ nhất) trong hình học không gian $Oxyz$ thì phương pháp tối ưu là sử dụng hình học để chứng minh để tìm ra vị trí đặc biệt thoả mãn bài toán.

Ví dụ 4. (Mã đề 101 năm 2018) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 9$ và điểm $A(2; 3; -1)$. Xét các điểm M thuộc (S) sao cho đường thẳng AM tiếp xúc với (S) , M luôn thuộc mặt phẳng có phương trình là

- A. $6x + 8y + 11 = 0$ B. $3x + 4y + 2 = 0$ C. $3x + 4y - 2 = 0$ D. $6x + 8y - 11 = 0$

Phân tích và bình luận

Khi viết AM tiếp xúc với (S) thì đường thẳng đi qua 2 điểm A và M là tiếp của (S) tại $M \in (S)$ ta có 3 cách tiếp cận bài toán như sau.

Lời giải

Chọn C

Cách 1

Để thấy A nằm ngoài mặt cầu (S) . Tâm mặt cầu là $I(-1; -1; -1)$

$$\text{Và } M(x; y; z) \in (S) \Rightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 9$$

$$\text{Đường thẳng } AM \text{ tiếp xúc với } (S) \Leftrightarrow AM \perp IM \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{IM} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+1) + (y-3)(y+1) + (z+1)(z+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1-3)(x+1) + (y+1-4)(y+1) + (z+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 - (3x+4y+7) = 0 \Leftrightarrow 3x+4y-2=0.$$

Cách 2

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; -1; -1)$. Gọi (S') là mặt cầu đường kính AI

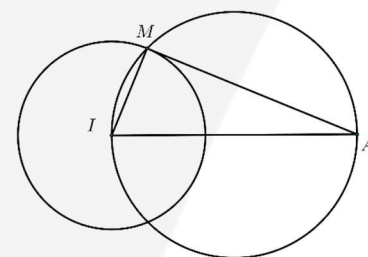
$$\Rightarrow (S'): \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = \frac{25}{4}.$$

Ta có AM tiếp xúc (S) tại $M \Rightarrow AM \perp IM \Rightarrow \widehat{AMI} = 90^\circ$

$\Rightarrow M$ thuộc giao hai mặt cầu (S) và mặt cầu (S') .

Tọa độ của M thỏa hệ phương trình:

$$\begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = \frac{25}{4} & (1) \\ (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 9 & (2) \end{cases} \xrightarrow{(1)-(2)} 6x+8y-11=-7 \Rightarrow M \in (P): 3x+4y-2=0.$$

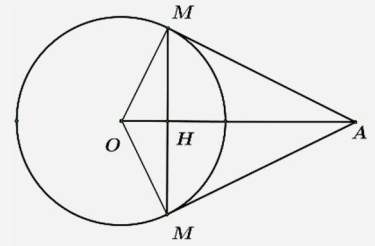


Cách 3

(S) có tâm $I(-1; -1; -1)$ bán kính $R = 3$

$A(2; 3; -1) \Rightarrow \overrightarrow{IA}(3; 4; 0)$, tính được $IA = 5$.

Mặt phẳng cố định đi qua điểm H là hình chiếu của M xuống IA và nhận $\overrightarrow{IA} = (3; 4; 0)$ làm vectơ pháp tuyến.



Do hai tam giác MHI và AMI đồng dạng nên tính được $IM^2 = IH \cdot IA \Rightarrow IH = \frac{IM^2}{IA} = \frac{9}{5}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IH} = \frac{9}{25} \overrightarrow{IA} \Rightarrow H\left(\frac{2}{25}; \frac{11}{25}; -1\right)$$

Mặt phẳng cần tìm có phương trình là: $3\left(x - \frac{2}{25}\right) + 4\left(y - \frac{11}{25}\right) = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 2 = 0$.

Ví dụ 5. (Tham khảo THPTQG 2019) Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(2; 1; 3)$, mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): (x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z - 5)^2 = 36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E , nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Phương trình của Δ là

- A. $\begin{cases} x = 2 + 9t \\ y = 1 + 9t \\ z = 3 + 8t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 3 - 3t \end{cases}$

Phân tích và bình luận

Bài toán mới cho Δ đi qua E và chưa cho Vectơ chỉ phương nên ta sẽ đi tìm véc tơ chỉ phương của đường thẳng thông qua 2 vectơ vuông góc với đường thẳng.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(3; 2; 5)$ và bán kính $R = 6$.

$IE = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6} < R \Rightarrow$ điểm E nằm trong mặt cầu (S) .

Gọi H là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P) , A và B là hai giao điểm của Δ với (S) .

Khi đó, AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow AB \perp OE$, mà $AB \perp IH$ nên $AB \perp (HIE) \Rightarrow AB \perp IE$.

Suy ra: $\overrightarrow{u_\Delta} = [\overrightarrow{n_P}; \overrightarrow{EI}] = (5; -5; 0) = 5(1; -1; 0)$.

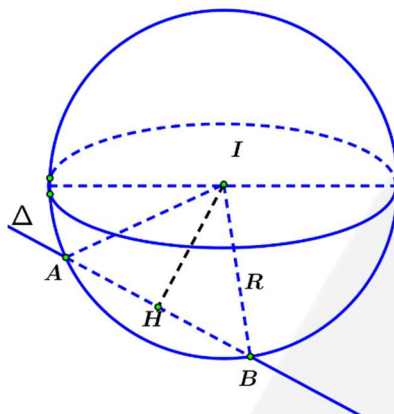
Vậy phương trình của Δ là $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 \end{cases}$

Ví dụ 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $E(1;1;1)$, mặt phẳng $(P): x - 3y + 5z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Gọi Δ là đường thẳng qua E , nằm trong mặt phẳng (P) và cắt (S) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $AB = 2$. Phương trình đường thẳng Δ là

- A. $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -3 + t \\ z = 5 + t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$

Lời giải

Chọn D



$(S): x^2 + y^2 + z^2 = 4 \Rightarrow$ Tâm $I(0;0;0)$; bán kính $R = 2$.

$(P): x - 3y + 5z - 3 = 0 \Rightarrow$ vectơ pháp tuyến của $(P): \vec{n}_P = (1; -3; 5)$.

Gọi H là hình chiếu của I lên $\Delta \Rightarrow AH = BH = \frac{AB}{2} = 1$.

Xét $\triangle IAH$ vuông tại $H \Rightarrow IH = \sqrt{IA^2 - AH^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$.

Mặt khác ta có $\vec{IE} = (1;1;1) \Rightarrow IE = \sqrt{3} = IH \Rightarrow H \equiv E \Rightarrow IE \perp \Delta$.

Đường thẳng Δ đi qua $E(1;1;1)$; vuông góc với IE và chứa trong (P) nên:

Vectơ chỉ phương của $\Delta: \vec{n}_\Delta = [\vec{n}_P; \vec{IE}] = (-8; 4; 4)$.

$\Rightarrow$ vectơ $\vec{u} = (2; -1; -1)$ cũng là vectơ chỉ phương của Δ .

Phương trình đường thẳng Δ là: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$.

Ví dụ 7. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-3;3;-3)$ thuộc mặt phẳng

$(\alpha): 2x - 2y + z + 15 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 100$. Đường thẳng Δ qua M , nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại A, B sao cho độ dài AB lớn nhất. Viết phương trình đường thẳng Δ .

A. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{3}$.

B. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+3}{6}$.

C. $\frac{x+3}{16} = \frac{y-3}{11} = \frac{z+3}{-10}$.

D. $\frac{x+3}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{8}$.

Phân tích và bình luận

Trong một đường tròn thì dây cung lớn nhất là đường kính của đường tròn, vì vậy khi độ dài AB là lớn nhất thì đó là đường kính, nên AB đi qua tâm đường tròn giao tuyến.

Lời giải

Chọn B

Ta có: Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;5)$, bán kính $R = 10$.

$$d(I, (\alpha)) = \frac{|2 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 5 + 15|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = 6 < R \Rightarrow (\alpha) \cap (S) = C(H; r), H \text{ là hình chiếu của } I \text{ lên } (\alpha).$$

Gọi Δ_1 là đường thẳng qua I và vuông góc với $(\alpha) \Rightarrow \Delta_1$ có VTCP là $\vec{u}_{\Delta_1} = (2; -2; 1)$.

$$\Rightarrow \text{PTTS } \Delta_1: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = 5 + t \end{cases}. \text{ Tọa độ } H \text{ là nghiệm của hệ:}$$

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = 5 + t \\ 2x - 2y + z + 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 7 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow H(-2; 7; 3).$$

Ta có AB có độ dài lớn nhất $\Leftrightarrow AB$ là đường kính của $(C) \Leftrightarrow \Delta \equiv MH$.

Đường thẳng MH đi qua $M(-3;3;-3)$ và có VTCP $\vec{MH} = (1; 4; 6)$.

$$\text{Suy ra phương trình } \Delta: \frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+3}{6}.$$

Ví dụ 8. (Đề tham khảo lần 2 năm 2017) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + 5 = 0$. Giả sử $M \in (P)$ và $N \in (S)$ sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với vectơ $\vec{u}(1;0;1)$ và khoảng cách giữa M và N lớn nhất. Tính MN .

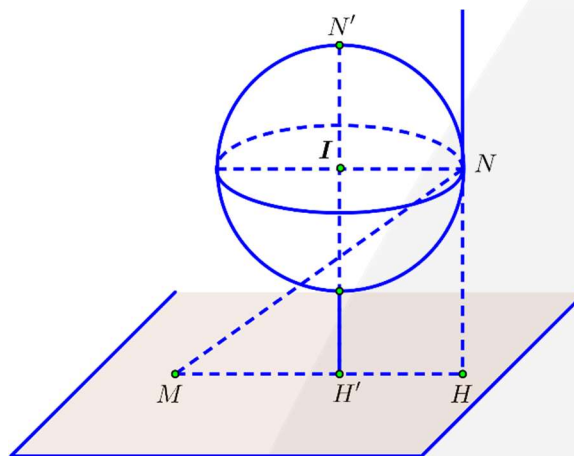
- A. $MN = 3$ B. $MN = 1 + 2\sqrt{2}$ C. $MN = 3\sqrt{2}$ D. $MN = 14$

Phân tích và bình luận

Cần chú ý khi vectơ $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với vectơ $\vec{u}$ thì $\overrightarrow{MN} = k\vec{u}$ và khoảng cách từ một điểm trên mặt cầu đến mặt phẳng là lớn nhất nếu đoạn vuông góc đó đi qua tâm.

Lời giải

Chọn C



Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n} = (1; -2; 2)$. Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 1)$ và bán kính $r = 1$. Nhận thấy rằng góc giữa $\vec{u}$ và $\vec{n}$ bằng 45° . Vì $d(I; (P)) = 2 > 1 = r$ nên (P) không cắt (S) .

Gọi H là hình chiếu của N lên (P) thì $\widehat{NMH} = 45^\circ$ và $MN = \frac{NH}{\sin 45^\circ} = NH\sqrt{2}$ nên MN lớn nhất khi và chỉ khi NH lớn nhất. Điều này xảy ra khi $N \equiv N'$ và $H \equiv H'$ với N' là giao điểm của đường thẳng d qua I , vuông góc (P) và H' là hình chiếu của I lên (P) .

Lúc đó $NH_{\max} = N'H' = r + d(I; (P)) = 3$ và $MN_{\max} = \frac{NH_{\max}}{\sin 45^\circ} = 3\sqrt{2}$.

Ví dụ 9. (VTV7 lần 1 năm học 2020-2021) Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu

$(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 9$ và mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z + 1 = 0$. Đường thẳng Δ đi qua O tiếp xúc với mặt cầu (S) và cắt (P) tại A sao cho OA nhỏ nhất có phương trình là

A. $\Delta: \frac{x}{10} = \frac{y}{7} = \frac{z}{2}$

B. $\Delta: \frac{x}{-10} = \frac{y}{7} = \frac{z}{2}$

C. $\Delta: \frac{x}{-10} = \frac{y}{-7} = \frac{z}{2}$

D. $\Delta: \frac{x}{-10} = \frac{y}{7} = \frac{z}{-2}$

Lời giải

Chọn B

$$(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 9 \Rightarrow I(1;2;-2), R=3 \text{ và } O \in (S)$$

Mặt phẳng (α) đi qua O tiếp xúc với mặt cầu (S) có phương trình $(\alpha): x + 2y - 2z = 0$

$$\text{Gọi } d = (\alpha) \cap (P) \Rightarrow \vec{u}_d = [\vec{n}_{(P)}; \vec{n}_{(\alpha)}] = (2; 2; 3)$$

Để OA nhỏ nhất thì $OA \perp d$

$$\text{Vậy } OA \perp d; OA \perp OI \Rightarrow \text{đường thẳng qua } \Delta \text{ có 1 vectơ chỉ phương } \vec{u} = [\vec{u}_d; \vec{OI}] = (-10; 7; 2)$$

$$\text{Phương trình đường } \Delta: \frac{x}{-10} = \frac{y}{7} = \frac{z}{2}$$

Ví dụ 10. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$, mặt phẳng

$(P): x - y + z + 3 = 0$ và điểm $N(1;0;-4)$ thuộc (P) . Một đường thẳng Δ đi qua N nằm trong

(P) cắt (S) tại hai điểm A, B thỏa mãn $AB = 4$. Gọi $\vec{u}(1;b;c)$, $(c > 0)$ là một vectơ chỉ phương của Δ , tổng $b+c$ bằng

A. 1.

B. 3.

C. -1.

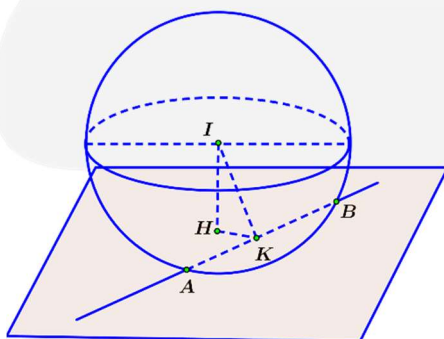
D. 45.

Phân tích và bình luận

Để tìm vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ đi qua điểm N ta đi tìm thêm một điểm thuộc đường thẳng Δ và trong các bài toán tương giao mặt cầu và đường thẳng thì điểm đặc biệt là trung điểm của đoạn thẳng AB . Vậy ta tìm các điều kiện để lập hệ phương trình tìm tọa độ trung điểm K .

Lời giải

Chọn D



Ta có mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;1)$ bán kính $R = 3$.

Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng (P) và mặt phẳng Δ .

Suy ra K là trung điểm của đoạn AB nên $AK = 2$

$$\Rightarrow d(I, \Delta) = IK = \sqrt{IA^2 - AK^2} = \sqrt{5} \text{ và } IH = d(I, (P)) = \frac{|1 - 2 + 1 + 3|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

$$\text{Ta có } \left. \begin{array}{l} IH \perp (P) \\ \Delta \subset (P) \end{array} \right\} \Rightarrow IH \perp \Delta \text{ mà } IK \perp \Delta \Rightarrow \Delta \perp KH$$

$$\text{hay } HK = d(H, \Delta) \text{ và } HK = \sqrt{IK^2 - IH^2} = \sqrt{2}.$$

$$\text{Do } IH \perp (P) \text{ nên phương trình tham số đường thẳng } IH : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + t \end{cases} \Rightarrow H(1 + t; 2 - t; 1 + t).$$

$$\text{Mà } H \in (P) \Rightarrow 1 + t - 2 + t + 1 + t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow H(0; 3; 0)$$

$$\text{Gọi } K(x; y; z) \Rightarrow \overrightarrow{IK}(x - 1; y - 2; z - 1); \overrightarrow{HK}(x; y - 3; z); \overrightarrow{NK}(x - 1; y; z + 4)$$

$$\text{Toạ độ } K \text{ thoả mãn hệ phương trình: } \begin{cases} x - y + z + 3 = 0 \\ x^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 2 \\ x(x - 1) + y(y - 3) + z(z + 4) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z + 3 = 0 \\ x - 3y - 4z + 7 = 0 \\ x^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K(-1; 2; 0) \\ K\left(\frac{15}{13}; \frac{46}{13}; \frac{-8}{13}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{NK}(-2; 2; 4) = -2(1; -1; -2) \\ \overrightarrow{NK}\left(\frac{2}{13}; \frac{46}{13}; \frac{44}{13}\right) = \frac{2}{13}(1; 23; 22) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \vec{u}(1; 23; 22) \Rightarrow b + c = 45$$

Ví dụ 10. Trong không gian $Oxyz$, cho $(P): 2x - y + z - 5 = 0$ và hai điểm $A(5; 1; 2); B(-3; 3; 0)$. Mặt nón (N) có đỉnh N nằm trên mặt phẳng (P) và đường kính đáy là AB . Một mặt cầu (S) tâm I đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với các đường sinh của mặt nón (N) . Khi thể tích khối cầu (S) lớn nhất thì $I(a; b; c)$, khi đó $a - b + 2c$ bằng

A. -4. B. 4. C. -7. D. 7.

Bài giải

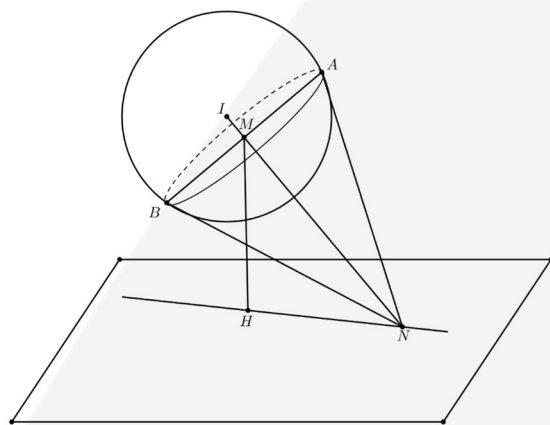
Chọn A

Ta có $\triangle ANI$ vuông tại A và $AM \perp NI$

$$\Rightarrow AM^2 = IM \cdot NM \Leftrightarrow 18 = \sqrt{R^2 - 18} \cdot h$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{18^2}{h^2} + 18 \quad (h = NM)$$

$$\Rightarrow V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \sqrt{\left(\frac{18^2}{h^2} + 18\right)^3}$$



Gọi (Q) là phẳng trung trực (Q) của đoạn thẳng AB

Và d là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và $(Q) \Rightarrow N \in d$

Vậy khi thể tích V khối cầu lớn nhất thì h nhỏ nhất $\Leftrightarrow N \equiv H \Leftrightarrow MN \perp d$

Ta có $\overrightarrow{BA}(8; -2; 2) \Rightarrow BA = 6\sqrt{2}$ và $M(1; 2; 1)$ là trung điểm A, B .

Mặt phẳng trung trực (Q) của đoạn thẳng $AB: 4x - y + z - 3 = 0$

Vì $NA = NB \Rightarrow N$ thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q)

$$\text{Gọi } d \text{ là giao tuyến của hai mặt phẳng } (P) \text{ và } (Q) \Rightarrow d: \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 + t \\ z = 8 + t \end{cases}$$

$$\Rightarrow N \in d \Rightarrow N(-1; 1 + t; 8 + t) \Rightarrow \overrightarrow{NM}(2; 1 - t; -7 - t) \Rightarrow t = -3 \Rightarrow N(-1; 2; 5)$$

$$\text{Ta có } MN = 6 \Rightarrow IM = 3 \Rightarrow \overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{MI} \Rightarrow I(2; 4; -1) \Rightarrow a - b + 2c = -4.$$

III. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Câu 1: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1)$, $B(2;2;1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + 2z = 0$. Mặt cầu (S) thay đổi qua A, B và tiếp xúc với (P) tại H . Biết H chạy trên 1 đường tròn cố định. Tìm bán kính của đường tròn đó.

- A. $3\sqrt{2}$. B. $2\sqrt{3}$. C. $\sqrt{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ và điểm $M(x_0; y_0; z_0) \in d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$

điểm A, B, C phân biệt cùng thuộc mặt cầu sao cho MA, MB, MC là tiếp tuyến của mặt cầu. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $D(1;1;2)$. Tổng $T = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$ bằng

- A. 30. B. 26. C. 20. D. 21.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;-2)$, mặt phẳng $(P): x + y + z + 1 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 7 = 0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và Δ nằm trong mặt phẳng (P) và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm B, C sao cho tam giác IBC có diện tích lớn nhất, với I là tâm của mặt cầu (S) . Phương trình của đường thẳng Δ là

- A. $\begin{cases} x = t \\ y = 1 \\ z = -2 - t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = -2 + t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = -2 \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = -2 \end{cases}$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 27$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(0;0;-4)$, $B(2;0;0)$ và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) sao cho khối nón đỉnh là tâm của (S) và đáy là đường tròn (C) có thể tích lớn nhất. Biết rằng $(P): ax + by - z + c = 0$, khi đó $a - b + c$ bằng

- A. -4. B. 8. C. 0. D. 2.

Câu 5: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 48$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(0;0;-4)$, $B(2;0;0)$ và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) . Khối nón (N) có đỉnh là tâm của (S) , đường tròn đáy là (C) có thể tích lớn nhất bằng

- A. $\frac{128\pi}{3}$. B. 39π . C. $\frac{88\pi}{3}$. D. $\frac{215\pi}{3}$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1$. Xét điểm M di động trên đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-2}$, từ M kẻ ba tiếp tuyến MA, MB, MC đến (S) với A, B, C là các tiếp điểm. Khi đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có bán kính nhỏ nhất bằng thì phương trình mặt phẳng qua 3 điểm A, B, C là $(ABC): ax + by - z + d = 0$. Khi đó $2a - b + 2d$ bằng

- A. 3. B. 1. C. 2. D. -3.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$ Cho $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-2}$ và $(P): 2x + 2y + z + 16 = 0$. Mặt cầu (S) cắt d tại A, B sao cho $AB = 8$ và cắt (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính $r = 3$. Bán kính của mặt cầu (S) nhỏ nhất có thể là

- A. 3. B. 1. C. 2. D. -3.

Câu 8: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 3a + at \\ y = -2 + t \\ z = 2 + 3a + (1+a)t \end{cases}$. Biết khi a

thay đổi luôn tồn tại một mặt cầu cố định đi qua điểm $M(1;1;1)$ và tiếp xúc với đường thẳng Δ . Tìm bán kính của mặt cầu đó.

- A. $5\sqrt{3}$. B. $4\sqrt{3}$. C. $7\sqrt{3}$. D. $3\sqrt{5}$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3), B(2;3;4)$. Một mặt cầu (S) bán kính R luôn tiếp xúc với ba mặt phẳng tọa độ và đoạn thẳng AB luôn nằm trong (S) (mọi điểm thuộc đoạn thẳng AB đều nằm trong (S)). Giá trị nguyên lớn nhất của R đạt được là

- A. 4. B. 6. C. 5. D. 3.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 4z = 0$ và $M(1;1;-1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua M và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất?

- A. $2x + y + 3z = 0$. B. $x - 3y + 2z = 0$. C. $x - y = 0$. D. $2x - y + z = 0$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(-3;3;-3)$, mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z + 15 = 0$ và mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 100$. Đường thẳng Δ qua M , nằm trên mặt phẳng (P) cắt (S) tại A, B sao cho độ dài AB lớn nhất. Phương trình đường thẳng Δ là

- A. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{3}$. B. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+3}{6}$.
C. $\frac{x+3}{16} = \frac{y-3}{11} = \frac{z+3}{-10}$. D. $\frac{x+3}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+3}{8}$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(0;1;2)$, mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 25$. Phương trình đường thẳng d đi qua điểm E nằm trong (P) và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm có khoảng cách lớn nhất là

A. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 4 - t \end{cases}$. B. $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 - t \end{cases}$. C. $\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 + t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$. D. $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - t \\ z = 2 - t \end{cases}$.

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, cho phương trình mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}$. Hai mặt phẳng $(P), (P')$ chứa d và tiếp xúc với (S) tại A và B . Đường thẳng AB đi qua điểm có tọa độ là

A. $\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{4}{3}\right)$. B. $\left(1; 1; -\frac{4}{3}\right)$. C. $\left(1; \frac{1}{3}; -\frac{4}{3}\right)$. D. $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{4}{3}\right)$.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $(S_2): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$. Một đường thẳng d vuông góc với vectơ $\vec{u} = (1; -1; 0)$, tiếp xúc với mặt cầu (S_2) và cắt mặt cầu (S_1) theo một đoạn thẳng có độ dài bằng 8. Một vectơ chỉ phương của d là

A. $\vec{u}_1 = (1; 1; \sqrt{3})$. B. $\vec{u}_2 = (1; 1; \sqrt{6})$. C. $\vec{u}_3 = (1; 1; 0)$. D. $\vec{u}_4 = (1; 1; -\sqrt{3})$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z+\sqrt{2})^2 = 9$ và hai điểm $A(-2; 0; -2\sqrt{2}), B(-4; -4; 0)$. Biết tập hợp tất cả các điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho $MA^2 + \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MB} = 16$ là một đường tròn. Bán kính của đường tròn đó bằng

A. $\sqrt{5}$. B. $\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{2}$. D. $\sqrt{3}$.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 1; 2), B(-1; 0; 4), C(0; -1; 3)$ và điểm M thuộc mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$. Khi biểu thức $MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì độ dài đoạn AM bằng

A. $\sqrt{2}$. B. $\sqrt{6}$. C. 6. D. 2.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(13; 3; -2), B(1; 0; 1)$ và phương trình hai mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $(S_2): (x-5)^2 + y^2 + z^2 = 10$. Gọi M nằm trên đường tròn giao tuyến của $(S_1), (S_2)$ thỏa mãn $P = MA^2 + 2MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của biểu thức bằng

A. $186 - 36\sqrt{2}$. B. 36. C. $18 - 6\sqrt{2}$. D. 16.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(1;1;1)$, mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 4$ và mặt phẳng $(P): x - 3y + 5z - 3 = 0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E , nằm trong (P) và cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB là tam giác đều. Phương trình của Δ là

A. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

B. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$.

D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-1}$.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 7$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z - 8 = 0$. Lấy hai điểm $A, B \in (S)$ sao cho $AB = 4$ và điểm $M \in (P)$. Giá trị nhỏ nhất của $MA^2 + 3MB^2$ bằng

A. $128 - 40\sqrt{3}$.

B. 46.

C. 48.

D. $122 - 40\sqrt{3}$.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 4$ và mặt phẳng $(P): 4x - 3z + 10 = 0$. Xét hai điểm M, N di động trên (S) sao cho $MN = 2$. Lấy điểm A nằm trên (P) . Giá trị nhỏ nhất của $Q = AM^2 + AN^2$ bằng

A. $58 - 10\sqrt{3}$.

B. $56 - 20\sqrt{3}$.

C. $58 - 20\sqrt{3}$.

D. $30 - 10\sqrt{3}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.B	3.C	4.A	5.B	6	7.A.B	8.A	9.B	10.D
11.B	12.B	13.C	14.C	15.C	16.A	17.A	18.D	19.C	20.C