

Câu 1: (THPT Chuyên Hùng Vương-Phú Thọ-lần 1-NH2017-2018) Phát biểu nào trong các phát biểu sau là đúng ?

- A.** Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trái tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.
B. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm phải tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.
C. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm $-x_0$.
D. Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

Lời giải

Chọn D

Ta có định lý sau:

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

Câu 2: (THPT Yên Lạc-Vĩnh Phúc-lần 1-năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ xác định trên

$\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Đạo hàm của hàm số $f(x)$ là:

- A.** $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$. **B.** $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$. **C.** $f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$. **D.** $f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$.

Lời giải

Chọn D

$$f'(x) = \frac{2 \cdot 1 - 1(-1)}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$$

Câu 3: (THPT Yên Lạc-Vĩnh Phúc-lần 1-đề 2-năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ xác định

trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Đạo hàm của hàm số $f(x)$ là:

- A.** $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$. **B.** $f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$. **C.** $f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$. **D.** $f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}$.

Lời giải

Chọn D

$$f'(x) = \frac{2 \cdot 1 - 1(-1)}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2}$$

Câu 4: (THPT Yên Lạc 2-Vĩnh Phúc-lần 1-năm 2017-2018) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$

thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 2$. Kết quả đúng là

- A.** $f'(2) = 3$. **B.** $f'(x) = 2$. **C.** $f'(x) = 3$. **D.** $f'(3) = 2$.

Lời giải

Chọn D

Theo định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm ta có

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 2 = f'(3).$$

Câu 5: (THPT Yên Lạc 2-Vĩnh Phúc-lần 1-năm 2017-2018) Đạo hàm của hàm số $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

bằng biểu thức nào sau đây?

A. $-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$. **B.** $-2\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$. **C.** $2\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$. **D.** $\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y = \sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right) \Rightarrow y' = \left(\frac{\pi}{2}-2x\right)' \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right) = -2\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$.

Câu 6: (THPT Hai Bà Trưng-Vĩnh Phúc-lần 1-năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$. Tính

$f'(x)$?

A. $f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$. **B.** $f'(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$. **C.** $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$. **D.** $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = \frac{(x-2)' \cdot (x-1) - (x-2) \cdot (x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{x-1-(x-2)}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2}$.

Câu 7: (THPT Việt Trì-Phú Thọ-lần 1-năm 2017-2018) Tính đạo hàm của hàm số $y = 2\sin 3x + \cos 2x$.

A. $y' = 6\cos 3x - 2\sin 2x$. **B.** $y' = 2\cos 3x + \sin 2x$.
C. $y' = -6\cos 3x + 2\sin 2x$. **D.** $y' = 2\cos 3x - \sin 2x$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = (2\cos 3x) \cdot 3 - (\sin 2x) \cdot 2 = 6\cos 3x - 2\sin 2x$.

Câu 8: (SGD Vĩnh Phúc-KSCL lần 1 năm 2017-2018) Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{\sin 2x}$.

A. $y' = -\frac{\cos 2x}{\sin^2 2x}$. **B.** $y' = \frac{2\cos 2x}{\sin^2 2x}$. **C.** $y' = -\frac{2\cos x}{\sin^2 2x}$. **D.** $y' = -\frac{2\cos 2x}{\sin^2 2x}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = -\frac{(\sin 2x)'}{\sin^2 2x} = -\frac{2\cos 2x}{\sin^2 2x}$.

Câu 9: (SGD Vĩnh Phúc-KSCL lần 1 năm 2017-2018) Tính đạo hàm của hàm số $y = -x^5 + x^3 + 2x^2$.

A. $y' = -5x^4 + 3x^2 + 4x$. **B.** $y' = 5x^4 + 3x^2 + 4x$.
C. $y' = -5x^4 - 3x^2 - 4x$. **D.** $y' = 5x^4 - 3x^2 - 4x$.

Lời giải

Chọn A

$y' = -5x^4 + 3x^2 + 4x$.

Câu 10: (THPT Lê Văn Thịnh-Bắc Ninh-lần 1 năm 2017-2018) Hàm số $y = \frac{(x-2)^2}{1-x}$ có đạo hàm là

A. $y' = -2(x-2)$. **B.** $y' = \frac{x^2+2x}{(1-x)^2}$. **C.** $y' = \frac{-x^2+2x}{(1-x)^2}$. **D.** $y' = \frac{x^2-2x}{(1-x)^2}$.

Lời giải

Chọn C

$$y' = \frac{2(x-2)(1-x) - (x-2)^2(-1)}{(1-x)^2} = \frac{-x^2+2x}{(1-x)^2}.$$

Câu 1: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc-MĐ 903 lần 1-năm 2017-2018) Cho hàm số $y = x^3 + 1$ gọi Δx là số gia của đối số tại x và Δy là số gia tương ứng của hàm số, tính $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

- A. $3x^2 - 3x.\Delta x + (\Delta x)^3$. B. $3x^2 + 3x.\Delta x + (\Delta x)^2$.
C. $3x^2 + 3x.\Delta x - (\Delta x)^2$. D. $3x^2 + 3x.\Delta x + (\Delta x)^3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có :

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 + 1 - (x^3 + 1) = 3x^2.\Delta x + 3x.\Delta^2 x + \Delta^3 x = \Delta x(3x^2 + 3x.\Delta x + \Delta^2 x)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x.\Delta x + \Delta^2 x = 3x^2 + 3x.\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Câu 2: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc-lần 1 MĐ 904 năm 2017-2018) Hàm số $y = x^2 + x + 1$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là

- A. $y' = 3x$. B. $y' = 2 + x$. C. $y' = x^2 + x$. D. $y' = 2x + 1$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y' = (x^2 + x + 1)' = 2x + 1.$$

Câu 3: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc-lần 1 MĐ 904 năm 2017-2018) Đạo hàm của hàm số $y = \sin^2 2x$ trên $\mathbb{R}$ là ?

- A. $y' = -2 \sin 4x$. B. $y' = 2 \sin 4x$. C. $y' = -2 \cos 4x$. D. $y' = 2 \cos 4x$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } y' = 2 \sin 2x.(2 \cos 2x) = 4 \sin 2x \cos 2x = 2 \sin 4x.$$

Câu 4: (THPT Thạch Thành 2-Thanh Hóa-lần 1 năm 2017-2018) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^2 - x - 2$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là:

- A. $2x - y = 0$. B. $2x - y - 4 = 0$. C. $x - y - 1 = 0$. D. $x - y - 3 = 0$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } x = 1 \Rightarrow y = -2.$$

$$y' = 2x - 1; y'(1) = 1.$$

$$\text{Vậy phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ } x = 1 \text{ là: } y = 1(x - 1) - 2 \Leftrightarrow x - y - 3 = 0.$$

Câu 5: (THPT Thăng Long-Hà Nội-lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x) = \sin 2x$. Tính $f'(x)$.

- A. $f'(x) = 2 \sin 2x$. B. $f'(x) = \cos 2x$. C. $f'(x) = 2 \cos 2x$. D. $f'(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } f(x) = \sin 2x, \text{ suy ra } f'(x) = 2 \cos 2x.$$

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = (-x^7 + 2x^5 + 3x^3)' = -7x^6 + 10x^4 + 9x^2$.

Câu 11: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc - lần 3 năm 2017-2018) Cho đồ thị hàm số

$(C): y = f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$. Từ điểm $A\left(\frac{19}{12}; 4\right)$ kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến tới (C) .

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Gọi k hệ số góc của tiếp tuyến đi qua $A\left(\frac{19}{12}; 4\right)$ tới (C) .

Phương trình tiếp tuyến (Δ) là: $y = k\left(x - \frac{19}{12}\right) + 4$.

(Δ) tiếp xúc với $(C) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 3x^2 + 5 = k\left(x - \frac{19}{12}\right) + 4, (1) \\ 6x^2 - 6x = k, (2) \end{cases}$ có nghiệm

Thay k từ (2) vào (1) ta được:

$$2x^3 - 3x^2 + 5 = (6x^2 - 6x)\left(x - \frac{19}{12}\right) + 4 \Leftrightarrow 4x^3 - 6x^2 - 19x + 2 = (x^2 - x)(12x - 19)$$

$$\Leftrightarrow 8x^3 - 25x^2 + 19x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = \frac{1}{8} \end{cases}. \text{ Vậy từ điểm } A\left(\frac{19}{12}; 4\right) \text{ kẻ được 3 tiếp tuyến tới } (C).$$

Câu 12: (THPT Kinh Môn 2-Hải Dương năm 2017-2018) Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số

$y = \frac{x+2}{x+1}$ tại điểm có hoành độ $x = 0$ là

A. $y = x + 2$.

B. $y = -x + 2$.

C. Kết quả khác.

D. $y = -x$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Đạo hàm: $y' = -\frac{1}{(x+1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = y'(0).x + y(0) \Leftrightarrow y = -x + 2$.

Câu 13: (THPT Hộ Lộ 2-Thanh Hóa năm 2017-2018) Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x + 1$ có đồ thị là

(C) . Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M\left(1; \frac{1}{3}\right)$ là:

A. $y = 3x - 2$.

B. $y = x - \frac{2}{3}$.

C. $y = -3x + 2$.

D. $y = -x + \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$y' = x^2 + 2x - 2$ suy ra $y'(1) = 1$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M\left(1; \frac{1}{3}\right)$ là

$$y = 1\left(x - 1\right) + \frac{1}{3} = x - \frac{2}{3}.$$

Câu 1: (THPT Chuyên Lam Sơn-Thanh Hóa-lần 2 năm 2017-2018) Phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3 + 3x^2 - 2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là

- A.** $y = 9x - 7$. **B.** $y = 9x + 7$. **C.** $y = -9x - 7$. **D.** $y = -9x + 7$.

Lời giải

Chọn A

$$y' = 3x^2 + 6x$$

$$\text{Có } x_0 = 1 \Rightarrow y(1) = 2 \text{ và } y'(1) = 9$$

$$\text{Khi đó phương trình tiếp tuyến tại điểm } (1; 2) \text{ có dạng } y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 \Leftrightarrow y = 9x - 7.$$

Câu 2: (THPT Can Lộc-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số

$$y = \frac{4}{x-1} \text{ tại điểm có hoành độ } x = -1.$$

- A.** $y = -x + 1$. **B.** $y = -x - 3$. **C.** $y = x - 3$. **D.** $y = -x + 3$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } y(-1) = -2 \text{ và } y' = \frac{-4}{(x-1)^2} \Rightarrow y'(-1) = -1.$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến tại điểm } A(-1; -2) \text{ là } y = -(x+1) - 2 = -x - 3.$$

Câu 3: (THPT Chuyên Tiền Giang-lần 1 năm 2017-2018) Tìm đạo hàm y' của hàm số $y = \sin x + \cos x$.

- A.** $y' = 2 \cos x$. **B.** $y' = 2 \sin x$. **C.** $y' = \sin x - \cos x$. **D.** $y' = \cos x - \sin x$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y' = (\sin x + \cos x)' = \cos x - \sin x.$$

Câu 4: (THPT Chuyên ĐHS - Hà Nội - Lần 1 năm 2017 - 2018) Một vật rơi tự do với phương trình chuyển động là $S = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó t tính bằng giây (s), S tính bằng mét (m) và

$$g = 9,8 \text{ m/s}^2. \text{ Vận tốc của vật tại thời điểm } t = 4\text{s} \text{ là}$$

- A.** $v = 9,8 \text{ m/s}$. **B.** $v = 78,4 \text{ m/s}$. **C.** $v = 39,2 \text{ m/s}$. **D.** $v = 19,6 \text{ m/s}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Vận tốc là đạo hàm của quãng đường theo đơn vị thời gian } v_{(t)} = (S_{(t)})' = \left(\frac{1}{2}gt^2\right)' = gt$$

$$\text{Vậy vận tốc tại thời điểm } t = 4\text{s} \text{ là } v_{(4)} = g.4 = 39,2(\text{m/s}).$$

Câu 5: (THPT Chuyên ĐHS - Hà Nội - Lần 1 năm 2017 - 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo

hàm thỏa mãn $f'(6) = 2$. Giá trị của biểu thức $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6}$ bằng

- A.** 12. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là D và $x_0 \in D$. Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn)

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ thì giới hạn gọi là đạo hàm của hàm số tại x_0

Vậy kết quả của biểu thức $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6} = f'(6) = 2$.

Câu 6: (THPT Trần Phú – Hà Tĩnh - Lần 2 năm 2017 – 2018) Tính đạo hàm của hàm số $y = e^x - \ln 3x$.

A. $y' = e^x - \frac{1}{3x}$. **B.** $y' = e^x - \frac{1}{x}$. **C.** $y' = e^x - \frac{3}{x}$. **D.** $y' = e^x + \frac{1}{x}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $y' = e^x - \frac{3}{3x} = e^x - \frac{1}{x}$.

Câu 1: (THPT Nghè – Hà Tĩnh – Lần 2 năm 2017 – 2018) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số

$$y = \frac{x-1}{x+2} \text{ tại điểm có hoành độ bằng } -3 \text{ là}$$

- A.** $y = -3x - 5$. **B.** $y = -3x + 13$. **C.** $y = 3x + 13$. **D.** $y = 3x + 5$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến và đồ thị hàm số.

Theo giả thiết $x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = 4$ suy ra $M(-3; 4)$. Có $y' = \frac{3}{(x+2)^2} \Rightarrow y'(-3) = 3$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại $M(-3; 4)$ là: $y = 3x + 13$.

Câu 2: (SGD Bắc Ninh – Lần 2 - năm 2017-2018) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$

tại điểm có hoành độ bằng -2 ?

- A.** $y = 3x + 5$. **B.** $y = -3x + 1$. **C.** $y = 3x + 11$. **D.** $y = -3x - 1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = \frac{3}{(x+1)^2}$

Phương trình tiếp tuyến tại $M(x_0; y_0)$ có dạng $(\Delta): y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

Theo đề: $x_0 = -2 \Rightarrow f(-2) = 5; f'(-2) = 3$

Vậy $y = 3(x + 2) + 5 = 3x + 11$.

Câu 3: Cho hàm số $y = -2x^3 + 6x^2 - 5$ có đồ thị (C) . Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M thuộc (C) và có hoành độ bằng 3 là

- A.** $y = 18x - 49$. **B.** $y = -18x - 49$. **C.** $y = -18x + 49$. **D.** $y = 18x + 49$.

Câu 4: Cho hàm số $y = -2x^3 + 6x^2 - 5$ có đồ thị (C) . Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M thuộc (C) và có hoành độ bằng 3 là

- A.** $y = 18x - 49$. **B.** $y = -18x - 49$. **C.** $y = -18x + 49$. **D.** $y = 18x + 49$.

Lời giải

Chọn C

$y' = f'(x) = -6x^2 + 12x$, giả sử điểm $M(x_0; y_0)$ thì $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = -5, f'(3) = -18$

Vậy phương trình tiếp tuyến $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 = -18(x - 3) - 5 = -18x + 49$.

Câu 5: Cho đường cong (C) có phương trình $y = \frac{x-1}{x+1}$. Gọi M là giao điểm của (C) với trục tung. Tiếp tuyến của (C) tại M có phương trình là

- A.** $y = -2x - 1$. **B.** $y = 2x + 1$. **C.** $y = 2x - 1$. **D.** $y = x - 2$.

Câu 6: Cho đường cong (C) có phương trình $y = \frac{x-1}{x+1}$. Gọi M là giao điểm của (C) với trục tung. Tiếp tuyến của (C) tại M có phương trình là

- A.** $y = -2x - 1$. **B.** $y = 2x + 1$. **C.** $y = 2x - 1$. **D.** $y = x - 2$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } M(0; -1), y' = \frac{2}{(x+1)^2} \Rightarrow y'(0) = 2.$$

Tiếp tuyến của (C) tại M có phương trình là $y = 2x - 1$.

Câu 7: Đạo hàm của hàm số $f(x) = x^2 - 5x - 1$ tại $x = 4$ là

- A.** -1 . **B.** -5 . **C.** 2 . **D.** 3 .

Câu 8: Đạo hàm của hàm số $f(x) = x^2 - 5x - 1$ tại $x = 4$ là

- A.** -1 . **B.** -5 . **C.** 2 . **D.** 3 .

Lời giải

Chọn D

$$f(x) = x^2 - 5x - 1 \Rightarrow f'(x) = 2x - 5 \Rightarrow f'(4) = 3.$$

Câu 9: Hệ số góc k của tiếp tuyến đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$ tại điểm $M(1; 2)$ là

- A.** $k = 12$. **B.** $k = 3$. **C.** $k = 5$. **D.** $k = 4$.

Câu 10: Hệ số góc k của tiếp tuyến đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$ tại điểm $M(1; 2)$ là

- A.** $k = 12$. **B.** $k = 3$. **C.** $k = 5$. **D.** $k = 4$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } k = y'(1) = 3.$$

Câu 11: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin^2 3x$.

- A.** $y' = 6 \cos 3x$. **B.** $y' = 3 \cos 6x$. **C.** $y' = 3 \sin 6x$. **D.** $y' = 6 \sin 6x$.

Câu 12: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin^2 3x$.

- A.** $y' = 6 \cos 3x$. **B.** $y' = 3 \cos 6x$. **C.** $y' = 3 \sin 6x$. **D.** $y' = 6 \sin 6x$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y' = 2 \sin 3x (\sin 3x)' = 6 \sin 3x \cos 3x = 3 \sin 6x.$$

Câu 13: Cho $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x$, $f'(x) < 0$ Tìm x sao cho.

- A.** $x > \frac{4}{3}$ hoặc $x < -1$. **B.** $-1 < x < \frac{4}{3}$. **C.** $x \geq \frac{4}{3}$ hoặc $x \leq -1$. **D.** $-1 \leq x \leq \frac{4}{3}$.

Câu 14: Cho $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x$, $f'(x) < 0$ Tìm x sao cho.

A. $x > \frac{4}{3}$ hoặc $x < -1$. **B.** $-1 < x < \frac{4}{3}$. **C.** $x \geq \frac{4}{3}$ hoặc $x \leq -1$. **D.** $-1 \leq x \leq \frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x) = 3x^3 - x - 4$, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 3x^3 - x - 4 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < \frac{4}{3}$.

Câu 15: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{2x-1}$ có đồ thị (C) . Hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ bằng 0 là

A. 0. **B.** 4. **C.** -4. **D.** 1.

Câu 16: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{2x-1}$ có đồ thị (C) . Hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ bằng 0 là

A. 0. **B.** 4. **C.** -4. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $y' = \frac{-4}{(2x-1)^2}$ nên hệ số góc tại điểm có hoành độ bằng 0 là $y'(0) = -4$.

Câu 17: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ tại điểm $A(3;1)$ là

A. $y = -9x - 26$. **B.** $y = 9x - 26$. **C.** $y = -9x - 3$. **D.** $y = 9x - 2$.

Câu 1: (THTT Số 1-484 tháng 10 năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ có đồ thị (C) .

Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm thuộc đồ thị (C) có hoành độ là nghiệm phương trình $2f'(x) - x.f''(x) - 6 = 0$?

A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$; $f''(x) = 6x - 12$.

$$2f'(x) - x.f''(x) - 6 = 0 \Leftrightarrow 2(3x^2 - 12x + 9) - x(6x - 12) - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow -12x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Khi $x = 1 \Rightarrow f'(1) = 0$; $f(1) = 5$. Suy ra có một phương trình tiếp tuyến là $y = 5$.

Câu 2: (THPT Chuyên Quang Trung-Bình Phước-lần 1-năm 2017-2018) Cho hàm số

$y = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 2$ có đồ thị là (C) . Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc $k = -9$.

A. $y + 16 = -9(x + 3)$.

B. $y - 16 = -9(x - 3)$.

C. $y = -9(x + 3)$.

D. $y - 16 = -9(x + 3)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M\left(x_0; \frac{x_0^3}{3} + 3x_0^2 - 2\right)$ là tiếp điểm.

$$\text{Ta có: } k = f'(x_0) \Leftrightarrow x_0^2 + 6x_0 = -9 \Leftrightarrow x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = f(x_0) = 16$$

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) thỏa mãn đầu bài là: $y - 16 = -9(x + 3)$.

Câu 3: (THPT Chuyên Quang Trung-Bình Phước-lần 1-năm 2017-2018) Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 1}$.

Nghiệm của phương trình $y'.y = 2x + 1$ là:

A. $x = 2$.

B. $x = 1$.

C. Vô nghiệm.

D. $x = -1$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. Khi đó ta có $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

$$\text{Nghiệm của phương trình } y'.y = 2x + 1 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot \sqrt{x^2 - 1} = 2x + 1 \text{ suy ra } x = 2x + 1 \Leftrightarrow x = -1.$$

Tuy nhiên do điều kiện xác định nên phương trình vô nghiệm.

Trình bày lại

Tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$. Khi đó ta có $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

$$\text{Nghiệm của phương trình } y'.y = 2x + 1 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot \sqrt{x^2 - 1} = 2x + 1. \text{ĐK: } x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty).$$

$$\Leftrightarrow x = 2x + 1 \Leftrightarrow x = -1: \text{ Không thỏa mãn.}$$

KL: phương trình vô nghiệm.

Câu 4: (THPT Lê Hồng Phong-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x + 3$ (C) tại điểm $M(1;2)$ là:

- A. $y = 3x - 1$. B. $y = 2x + 2$. C. $y = 2 - x$. **D. $y = x + 1$.**

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 3x^2 - 2 \Rightarrow y'(1) = 1$.

Vậy phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm $M(1;2)$ là: $y = 1(x - 1) + 2 = x + 1$.

Câu 5: (THPT Chuyên Bắc Ninh-lần 1-năm 2017-2018) Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin^2 2x - \cos 3x$.

- A. $f'(x) = 2 \sin 4x - 3 \sin 3x$. B. $f'(x) = 2 \sin 4x + 3 \sin 3x$.
C. $f'(x) = \sin 4x + 3 \sin 3x$. D. $f'(x) = 2 \sin 2x + 3 \sin 3x$

Lời giải

Chọn B

$f'(x) = 2 \sin 2x \cdot (\sin 2x)' + 3 \sin 3x = 2 \cdot 2 \cdot \sin 2x \cdot \cos 2x + 3 \sin 3x = 2 \sin 4x + 3 \sin 3x$.

Câu 6: (THPT Xuân Hòa-Vĩnh Phúc-năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{4 - x}}{4} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$.

Khi đó $f'(0)$ là kết quả nào sau đây?

- A. $\frac{1}{4}$. **B. $\frac{1}{16}$.** C. $\frac{1}{32}$. D. Không tồn tại.

Lời giải

Chọn B

Với $x \neq 0$ xét:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3 - \sqrt{4 - x}}{4} - \frac{1}{4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{4 - x}}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - (4 - x)}{4x(2 + \sqrt{4 - x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4(2 + \sqrt{4 - x})} = \frac{1}{4(2 + \sqrt{4 - 0})} = \frac{1}{16} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

Câu 7: (THPT Xuân Hòa-Vĩnh Phúc-năm 2017-2018) Cho hàm số $y = \cos^2 x$. Khi đó $y^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ bằng

- A. -2 . B. 2 . **C. $2\sqrt{3}$.** D. $-2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

$y' = 2 \cos x \cdot (-\sin x) = -\sin 2x$; $y'' = -2 \cos 2x$; $y^{(3)} = -4(-\sin 2x) = 4 \sin 2x$.

$$\Rightarrow y^{(3)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \sin 2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}.$$

Câu 8: (THPT Chuyên ĐH Vinh-GK1-năm 2017-2018) Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A.** 24(m/s). **B.** 108(m/s). **C.** 64(m/s). **D.** 18(m/s).

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } v = s' = -\frac{3}{2}t^2 + 12t = -\frac{3}{2}(t^2 - 8t + 16) + 24 = 24 - \frac{3}{2}(t - 4)^2 \leq 24$$

Vậy $\max_{[0;6]} v(t) = 24(\text{m/s})$ tại thời điểm $t = 4$ (giây).

Câu 9: (THPT Yên Lạc-Vĩnh Phúc-lần 1-năm 2017-2018) Cho đồ thị $(H): y = \frac{2x-4}{x-3}$. Lập phương

trình tiếp tuyến của đồ thị (H) tại giao điểm của (H) và Ox .

- A.** $y = 2x$. **B.** $y = -2x + 4$. **C.** $y = -2x - 4$. **D.** $y = 2x - 4$.

Lời giải

Chọn B

$$(H) \cap Ox \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$y' = \frac{-2}{(x-3)^2} \Rightarrow y'(2) = -2$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến: } y = -2(x - 2) \Leftrightarrow y = -2x + 4$$

Câu 10: (THPT Yên Lạc-Vĩnh Phúc-lần 1-năm 2017-2018) Cho hàm số $y = \sin 2x$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.** $y^2 - (y')^2 = 4$. **B.** $4y + y'' = 0$. **C.** $4y - y'' = 0$. **D.** $y = y' \cdot \tan 2x$.

Lời giải

Chọn B

$$y' = 2 \cos 2x \Rightarrow y'' = -4 \sin 2x.$$

$$y^2 - (y')^2 = \sin^2 2x - 4 \cos^2 2x \neq 4 \Rightarrow \text{A sai.}$$

$$4y + y'' = 4 \sin 2x - 4 \sin 2x = 0 \Rightarrow \text{B đúng.}$$

Tương tự ta kiểm tra được C, D sai.

Câu 11: (THPT Yên Lạc-Vĩnh Phúc-lần 1-năm 2017-2018) Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S(t) = 1 + 3t^2 - t^3$. Vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất khi t bằng bao nhiêu

- A.** $t = 2$. **B.** $t = 1$. **C.** $t = 3$. **D.** $t = 4$.

Lời giải

Chọn B

Chất điểm chuyển động theo quy luật $S(t) = 1 + 3t^2 - t^3$. Vì vận tốc của chuyển động ở thời điểm t chính là $S'(t)$; ta đi tìm giá trị lớn nhất của hàm số $S'(t)$.

$$\text{Ta có } S'(t) = (1 + 3t^2 - t^3)' = 6t - 3t^2 = -3(t^2 - 2t) = 3 - 3(t - 1)^2 \leq 3, \forall t \in \mathbb{R}$$

$\max_{\mathbb{R}} S'(t) = 3$ khi $t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Vậy **Chọn B**

Câu 12: (THPT Yên Lạc-Vĩnh Phúc-lần 1-đề 2-năm 2017-2018) Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số

$$y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - 1 \text{ tại điểm có hoành độ } x_0 = -1 \text{ bằng}$$

- A. -2. B. Đáp số khác. C. 2. D. 0.

Lời giải

Chọn A

$$y' = x^3 + x \Rightarrow y'(-1) = -2.$$

Câu 13: (THPT Yên Lạc-Vĩnh Phúc-lần 1-đề 2-năm 2017-2018) Cho đồ thị $(H): y = \frac{2x-4}{x-3}$. Lập

phương trình tiếp tuyến của đồ thị (H) tại giao điểm của (H) và Ox .

- A. $y = 2x$. B. $y = -2x + 4$. C. $y = -2x - 4$. D. $y = 2x - 4$.

Lời giải

Chọn B

$$(H) \cap Ox \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 2 : A(2; 0)$$

$$y' = \frac{-2}{(x-3)^2} \Rightarrow y'(2) = -2$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến: } y = -2(x-2) \Leftrightarrow y = -2x + 4$$

Câu 14: (THPT Yên Lạc-Vĩnh Phúc-lần 1-đề 2-năm 2017-2018) Cho hàm số $y = \sin 2x$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $y^2 - (y')^2 = 4$. B. $4y + y'' = 0$. C. $4y - y'' = 0$. D. $y = y' \cdot \tan 2x$.

Lời giải

Chọn B

$$y' = 2 \cos 2x \Rightarrow y'' = -4 \sin 2x.$$

$$y^2 - (y')^2 = \sin^2 2x - 4 \cos^2 2x \neq 4 \Rightarrow \text{A sai.}$$

$$4y + y'' = 4 \sin 2x - 4 \sin 2x = 0 \Rightarrow \text{B đúng.}$$

Tương tự ta kiểm tra được C, D sai.

Câu 15: (THPT Yên Lạc-Vĩnh Phúc-lần 1-đề 2-năm 2017-2018) Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S(t) = 1 + 3t^2 - t^3$. Vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất khi t bằng bao nhiêu

- A. $t = 2$. B. $t = 1$. C. $t = 3$. D. $t = 4$.

Lời giải

Chọn B

Chất điểm chuyển động theo quy luật $S(t) = 1 + 3t^2 - t^3$. Vì vận tốc của chuyển động ở thời điểm t chính là $S'(t)$; ta đi tìm giá trị lớn nhất của hàm số $S'(t)$.

$$\text{Ta có } S'(t) = (1 + 3t^2 - t^3)' = 6t - 3t^2 = -3(t^2 - 2t) = 3 - 3(t-1)^2 \leq 3, \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\max_{\mathbb{R}} S'(t) = 3 \text{ khi } t-1 = 0 \Leftrightarrow t = 1. \text{ Vậy } \text{Chọn B}$$

Câu 16: (THPT Yên Lạc 2-Vĩnh Phúc-lần 1-năm 2017-2018) Cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 2x - 1$ (C) . Gọi x_1, x_2 là hoành độ các điểm M, N trên (C) mà tại đó tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y = x - 2018$. Khi đó $x_1 + x_2$ bằng

- A. -1. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. $-\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 3x^2 - 4x + 2$.

x_1, x_2 là nghiệm của phương trình

$$y' = 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 2 = 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } x_1 + x_2 = \frac{4}{3}.$$

Câu 17: (THPT Yên Lạc 2-Vĩnh Phúc-lần 1-năm 2017-2018) Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 1$ (C). Tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y = 3x + 2$ là

- A.** $y = 3x$. **B.** $y = 3x - 6$. **C.** $y = -3x + 3$. **D.** $y = 3x + 6$.

Lời giải

Chọn A

$$y' = (-x^3 + 3x^2 + 1)' = -3x^2 + 6x$$

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 3x + 2$ nên hệ số góc $k = 3$; phương trình tiếp tuyến có dạng $y = 3x + m$ ($m \neq 2$)

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm thì $f'(x_0) = -3x_0^2 + 6x_0 = k$.

$$\text{Xét phương trình } -3x_0^2 + 6x_0 = 3 \Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 3 \Rightarrow m = 0$$

Vậy phương trình tiếp tuyến $y = 3x$.

Câu 18: (THPT Yên Lạc 2-Vĩnh Phúc-lần 1-năm 2017-2018) Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 9$ (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có tung độ bằng 9.

- A.** $y = 1; y = 9x - 1$. **B.** $y = 19; y = 9x - 8$. **C.** $y = 9; y = 9x - 18$. **D.** $y = 0; y = 9x - 1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = (x^3 - 3x^2 + 9)' = 3x^2 - 6x$; phương trình tiếp tuyến tại $(x_0; y_0)$ là

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

$$\text{Tại điểm có tung độ bằng 9 suy ra } y_0 = 9 \Rightarrow 9 = x_0^3 - 3x_0^2 + 9 \Leftrightarrow x_0^3 - 3x_0^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 3 \end{cases}.$$

Phương trình tiếp tuyến tại $M(0; 9)$ là $y = f'(0)(x - 0) + 9 \Rightarrow y = 9$.

Phương trình tiếp tuyến tại $N(3; 9)$ là $y = f'(3)(x - 3) + 9 \Rightarrow y = 9x - 18$.

Câu 19: (THPT Nguyễn Khuyến-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 5x + 1$ tại điểm có tung độ bằng 1 là

- A.** $x + y - 2 = 0$. **B.** $5x - y + 1 = 0$. **C.** $x + y - 1 = 0$. **D.** $5x + y + 1 = 0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 6x^2 + 5$

Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

Theo giả thiết có $y_0 = 1$ suy ra $2x_0^3 + 5x_0 + 1 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 0$.

Hệ số góc của tiếp tuyến là $k = y'(0) = 5$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 5(x - 0) + 1$ hay $5x - y + 1 = 0$.

Câu 20: (THPT Nguyễn Khuyến-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018) Tính đạo hàm của hàm số

$$y = (x - 2)\sqrt{x^2 + 1}.$$

A. $y' = \frac{2x^2 - 2x - 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$. **B.** $y' = \frac{2x^2 + 2x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$. **C.** $y' = \frac{2x^2 - 2x + 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$. **D.** $y' = \frac{2x^2 - 2x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y' = (x - 2)' \sqrt{x^2 + 1} + (x - 2)(\sqrt{x^2 + 1})' = \sqrt{x^2 + 1} + \frac{(x - 2)x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2x^2 - 2x + 1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Câu 21: (THPT Nguyễn Khuyến-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018) Tìm tất cả các phương trình tiếp

tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x + 1}{x - 1}$ song song với đường thẳng $y = -3x + 15$.

A. $y = -3x + 1, y = -3x - 7$.

B. $y = -3x - 1, y = -3x + 11$.

C. $y = -3x - 1$.

D. $y = -3x + 11, y = -3x + 5$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $M(x_0; y_0)$, $x_0 \neq 1$ là tiếp điểm

$$y' = -\frac{3}{(x - 1)^2}$$

Đồ thị hàm số song song với $y = -3x + 15$ nên ta có $f'(x_0) = -3$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{(x_0 - 1)^2} = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 2 \end{cases}$$

Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -1 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là: $y = -3x - 1$

Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 5 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến là: $y = -3x + 11$.

Câu 22: (THPT Nguyễn Khuyến-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018) Tính đạo hàm của hàm số

$$y = \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right):$$

A. $y' = -\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}$. **B.** $y' = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}$. **C.** $y' = \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}$. **D.** $y' = -\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}$.

Giải:

Chọn A

$$y' = \left(\frac{\pi}{4} - x \right)' \cdot \frac{1}{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right)} = - \frac{1}{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right)}$$

Câu 23: (THPT Nguyễn Khuyến-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018) Một chuyển động xác định bởi phương trình $S(t) = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$. Trong đó t được tính bằng giây, S được tính bằng mét. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. Vận tốc của chuyển động bằng 0 khi $t = 0$ s hoặc $t = 2$ s.
- B. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3$ s là **Error! Not a valid link.**
- C. Gia tốc của chuyển động bằng 0 m/s^2 khi $t = 0$ s.
- D. Vận tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 2$ s là $v = 18 \text{ m/s}$.

Lời giải

Chọn B

Vận tốc của chuyển động tại thời điểm t có phương trình là $v(t) = S'(t) = 3t^2 - 6t - 9$.

Gia tốc của chuyển động tại thời điểm t có phương trình là $a(t) = v'(t) = 6t - 6$.

Tại thời điểm $t = 3$ s ta có $a(3) = 6 \cdot 3 - 6 = 12 \text{ m/s}^2$.

Câu 24: (THPT Hai Bà Trưng-Vĩnh Phúc-lần 1-năm 2017-2018) Có bao nhiêu tiếp tuyến với đồ thị hàm số $(\zeta): y = x^3 - 3x^2 + 2$ song song với đường thẳng $\Delta: y = 9x - 25$?

- A. 2.
- B. 3.
- C. 1.**
- D. 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$. Tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta: y = 9x - 25$ thì hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình $3x^2 - 6x = 9 \Rightarrow x = -1; x = 3$.

Với $x = -1 \Rightarrow y = -2$ ta có tiếp tuyến là $y = 9(x + 1) - 2 \Leftrightarrow y = 9x + 7$.

Với $x = 3 \Rightarrow y = 2$ ta có tiếp tuyến là $y = 9(x - 3) + 2 \Leftrightarrow y = 9x - 25$ (loại vì trùng với đường thẳng Δ).

Vậy chỉ có một tiếp tuyến thỏa mãn.

Câu 25: (THPT Hai Bà Trưng-Vĩnh Phúc-lần 1-năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x) = \sin^2 3x$. Tính $f'(x)$?

- A. $f'(x) = 2 \sin 6x$.
- B. $f'(x) = 3 \sin 6x$.**
- C. $f'(x) = 6 \sin 6x$.
- D. $f'(x) = -3 \sin 6x$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x) = 2 \sin 3x (\sin 3x)' = 6 \sin 3x \cos 3x = 3 \sin 6x$.

Câu 26: (THPT Hai Bà Trưng-Vĩnh Phúc-lần 1-năm 2017-2018) Một chất điểm chuyển động theo quy

luật $S = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 9t$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và

S (mét) là quãng đường vật chuyển động trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của chất điểm là bao nhiêu?

- A. 88(m/s). **B.** 25(m/s). C. 100(m/s). D. 11(m/s).

Lời giải

Chọn B

Ta có $v = S' = -t^2 + 8t + 9, t \in (0;10)$

$v' = -2t + 8$. Xét $v' = 0 \Rightarrow t = 4 \in (0;10)$

Bảng biến thiên:

t	0	4	10	
v'		+	0	-
v	$v(0)$	$\nearrow$ 25 $\searrow$	$v(10)$	

Vậy vận tốc lớn nhất của chất điểm là 25(m/s) tại $t = 4$.

Câu 27: (THPT Số 2-485 tháng 11-năm học 2017-2018) Cho hàm số $y = \sin^2 x$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $2y' + y'' = \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$. B. $2y + y' \cdot \tan x = 0$.
C. $4y - y'' = 2$. **D.** $4y' + y''' = 0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = \sin 2x, y'' = 2\cos 2x, y''' = -4\sin 2x$.

$2y' + y'' = 2(\sin 2x + \cos 2x) = 2\sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$, suy ra loại đáp án A.

$2y + y' \cdot \tan x = 2\sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x \cdot \tan x = 4\sin^2 x$, suy ra loại đáp án B.

$4y - y'' = 4\sin^2 x - 2\cos 2x = 2 - 4\cos 2x$, suy ra loại đáp án C.

Vậy đáp án đúng là D.

Cách khác

Ta thấy $4y' + y''' = 4\sin 2x - 4\sin 2x = 0$, suy ra **Chọn D**

Câu 28: (THPT Việt Trì-Phú Thọ-lần 1-năm 2017-2018) Một vật chuyển động theo quy luật

$s(t) = -\frac{1}{2}t^3 + 12t^2, t$ (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động, s (mét)

là quãng đường vật chuyển động trong t giây. Tính vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 10$ (giây).

- A. 80(m/s). B. 70(m/s). **C.** 90(m/s). D. 100(m/s).

Lời giải

Chọn C

Ta có vận tốc tức thời tại thời điểm t là đạo hàm cấp một của quãng đường s tại thời điểm t .

$$v(t) = s'(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 24t \Rightarrow v(10) = \frac{-3 \cdot 100}{2} + 240 = 90 \text{ (m/s)}.$$

Câu 29: (THPT Việt Trì-Phú Thọ-lần 1-năm 2017-2018) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 3x^3 - x^2 - 7x + 1$ tại điểm $A(0; 1)$ là:

- A. $y = 0$. B. $y = x + 1$. C. $y = 1$ **D. $y = -7x + 1$.**

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 9x^2 - 2x - 7$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A(0; 1)$ là:
 $y = y'(0)(x - 0) + 1 = -7x + 1$.

Câu 30: (THPT Thạch Thành-Thanh Hóa-năm 2017-2018) Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2 + 5t + 2$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi $t = 3$ là

- A. 24 m/s^2 . B. 17 m/s^2 . C. 14 m/s^2 . **D. 12 m/s^2 .**

Lời giải

Chọn D

Ta có gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t bằng đạo hàm cấp hai của phương trình chuyển động tại thời điểm t .

$$s' = 3t^2 - 6t + 5$$

$$s'' = 6t - 6 \Rightarrow s''(3) = 6 \cdot 3 - 6 = 12.$$

Do đó, gia tốc của chuyển động khi $t = 3$ là 12 m/s^2 .

Câu 31: (TT Diệu Hiền-Cần Thơ-tháng 10-năm 2017-2018) Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ song song với trục hoành?

- A. 2. **B. 1.** C. 0. D. 3.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = 4x^3 - 4x$.

Cách 1: Vì tiếp tuyến song song với trục nên tiếp tuyến có hệ số góc bằng 0 $\Leftrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \pm 1$.

* Với $x = 0 \Rightarrow y = 1$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $(0; 1)$ là

$$y = y'(0)(x - 1) + 1 \Leftrightarrow y = 1. \text{ Tiếp tuyến này song song với trục hoành nên nhận.}$$

* Với $x = \pm 1 \Rightarrow y = 0$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại các điểm $(\pm 1; 0)$ là

$$y = y'(0)(x \mp 1) + 0 \Leftrightarrow y = 0. \text{ Tiếp tuyến này trùng với trục hoành nên loại.}$$

Vậy có đúng 1 tiếp tuyến song song với trục hoành.

Cách 2: Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $y' = 4x^3 - 4x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \pm 1$.

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số song song với trục hoành là các tiếp tuyến tại các điểm cực trị có tung độ khác 0.

Mà các điểm cực trị của đồ thị hàm số có tọa độ là $(0; 1)$ và $(\pm 1; 0)$ nên suy ra có đúng 1 tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 32: (TT Diệu Hiền-Cần Thơ-tháng 10-năm 2017-2018) Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2$, có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $y''(x) = 0$ là:

- A.** $y = -x - \frac{7}{3}$. **B.** $y = x - \frac{7}{3}$. **C.** $y = -x + \frac{7}{3}$. **D.** $y = \frac{7}{3}x$.

Lời giải

Chọn A

$$y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2$$

$$y' = x^2 + 2x$$

$$y'' = 2x + 2$$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y(-1) = -\frac{4}{3}$$

Tại $M\left(-1; -\frac{4}{3}\right)$, ta có hệ số góc tiếp tuyến $k_t = y'(-1) = -1$

Vậy phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M\left(-1; -\frac{4}{3}\right)$ là: $y = -(x+1) - \frac{4}{3} \Leftrightarrow y = -x - \frac{7}{3}$.

Câu 33: (TT Diệu Hiền-Cần Thơ-tháng 10-năm 2017-2018) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 2$ có hệ số góc $k = -9$, có phương trình là:

- A.** $y + 16 = -9(x + 3)$. **B.** $y - 16 = -9(x - 3)$. **C.** $y - 16 = -9(x + 3)$. **D.** $y = -9(x + 3)$.

Lời giải

Chọn C

$y' = x^2 + 6x$, tiếp tuyến có hệ số góc $k = -9$ thì hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình $x^2 + 6x = -9 \Leftrightarrow x = -3$

Với $x = -3 \Rightarrow y = -16$. Do đó phương trình tiếp tuyến là $y - 16 = -9(x + 3)$.

Câu 34: (Trường BDVH218LTT-khoa 1-năm 2017-2018) Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 5$ có đồ thị (C).

Tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ 1 cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng bao nhiêu?

- A.** 6. **B.** 5. **C.** -4. **D.** -3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 4x^3 - 8x$ nên $y'(1) = -4$.

Với $x = 1 \Rightarrow y = 2$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm (1; 2) là $d: y = -4(x - 1) + 2$ hay $y = -4x + 6$.

Giao điểm của d với trục tung là $M(0; 6)$.

Câu 35: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc-lần 2-năm 2017-2018) Tìm số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$, biết tiếp tuyến đó đi qua điểm $M(-1; -9)$.

- A.** 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 12x^2 - 12x$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M_o(x_o; y_o)$ có dạng: $(\Delta): y = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$.

$$(\Delta): y = (12x_o^2 - 12x_o)(x - x_o) + 4x_o^3 - 6x_o^2 + 1.$$

$$\text{Do } M(-1; -9) \in (\Delta) \text{ nên } -9 = (12x_o^2 - 12x_o)(-1 - x_o) + 4x_o^3 - 6x_o^2 + 1.$$

$$\Leftrightarrow -8x_o^3 - 6x_o^2 + 12x_o + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_o = -1 \\ x_o = \frac{5}{4} \end{cases}.$$

Số tiếp tuyến thỏa yêu cầu là 2.

Câu 36: (THPT Quảng Xương-Thanh Hóa-lần 1-năm 2017-2018) Cho hai hàm số $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2}}$ và

$g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2}}$. Gọi d_1, d_2 lần lượt là tiếp tuyến của mỗi đồ thị hàm số $f(x), g(x)$ đã cho tại

giao điểm của chúng. Hỏi góc giữa hai tiếp tuyến trên bằng bao nhiêu?

A. 90° .

B. 60° .

C. 45° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn A

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2}} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2\sqrt{2}}, \quad g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2}} \Rightarrow g'(x) = x\sqrt{2}.$$

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường } \frac{1}{x\sqrt{2}} = \frac{x^2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\text{Giao điểm của hai đường là } A\left(1; \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$d_1 \text{ có hệ số góc là } k_1 = f'(1) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad d_2 \text{ có hệ số góc là } k_2 = g'(1) = \sqrt{2}.$$

Nhận xét: $k_1.k_2 = -1$ nên $d_1 \perp d_2$.

Câu 37: (THPT Bình Xuyên-Vĩnh Phúc-năm 2017-2018) Đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{3x+1}{x-1}$ cắt trục

tung tại điểm A . Tiếp tuyến của (C) tại A có phương trình là

A. $y = -4x - 1$.

B. $y = -5x - 1$.

C. $y = 4x - 1$.

D. $y = 5x - 1$.

Lời giải

Chọn A

Tọa độ điểm $A(0; -1)$.

$$\text{Đạo hàm } y' = \frac{-4}{(x-1)^2} \Rightarrow y'(0) = -4.$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến tại } A \text{ là } y = -4(x-0) - 1 \Leftrightarrow y = -4x - 1.$$

Câu 38: (THPT Nguyễn Đức Thuận-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018) Đạo hàm của hàm số

$f(x) = \sqrt{2-3x^2}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{-3x}{\sqrt{2-3x^2}}.$

B. $\frac{1}{2\sqrt{2-3x^2}}.$

C. $\frac{-6x^2}{2\sqrt{2-3x^2}}.$

D. $\frac{3x}{\sqrt{2-3x^2}}.$

Lời giải

Chọn A

Ta có $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$

$$f'(x) = (\sqrt{2-3x^2})' = \frac{(2-3x^2)'}{2\sqrt{2-3x^2}} = \frac{-6x}{2\sqrt{2-3x^2}} = \frac{-3x}{\sqrt{2-3x^2}}.$$

Câu 39: (THPT Nguyễn Đức Thuận-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số

$y = x^3 - 3x + 2$ vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{9}x$ là

A. $y = -\frac{1}{9}x + 18, y = -\frac{1}{9}x + 5.$

B. $y = \frac{1}{9}x + 18 ; y = \frac{1}{9}x - 14.$

C. $y = 9x + 18 ; y = 9x - 14.$

D. $y = 9x + 18 ; y = 9x + 5.$

Lời giải

Chọn C

$$y' = 3x^2 - 3.$$

Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{9}x$ nên tiếp tuyến có hệ số góc $k = 9.$

$$\text{Mặt khác } y'(x_0) = k \Rightarrow 3x_0^2 - 3 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ x_0 = -2 \end{cases}.$$

Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 4$ do đó phương trình tiếp tuyến là: $y = 9(x - 2) + 4 \Leftrightarrow y = 9x - 14.$

Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 0$ do đó phương trình tiếp tuyến là: $y = 9(x + 2) \Leftrightarrow y = 9x + 18.$

Câu 40: (THPT Nguyễn Đức Thuận-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018) Cho hàm số $y = \sin 2x$. Hãy chọn câu đúng.

A. $y^2 + (y')^2 = 4.$

B. $4y - y'' = 0.$

C. $4y + y'' = 0.$

D. $y = y' \tan 2x.$

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R}.$

Ta có $y' = 2 \cos 2x$ và $y'' = -4 \sin 2x.$

$$4y + y'' = 4 \sin 2x - 4 \sin 2x = 0.$$

Câu 41: (THPT Cổ Loa-Hà Nội-lần 1-năm 2018) Tiếp tuyến với đồ thị $(C): y = x^3 - 3x^2 - 2$ song song với đường thẳng $(d): y = 9x + 3$ có phương trình là

A. $y = 9x - 29$ và $y = 9x + 3.$

B. $y = 9x - 29.$

C. $y = 9x - 25.$

D. $y = 9x - 25$ và $y = 9x + 15.$

Lời giải

Chọn B

$$y' = 3x^2 - 6x.$$

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình $3x^2 - 6x = 9 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Với $x = -1$ ta có $y = -6$ phương trình tiếp tuyến là $y + 6 = 9(x + 1) \Leftrightarrow y = 9x + 3$ (loại).

Với $x = 3$ ta có $y = -2$ phương trình tiếp tuyến là $y + 2 = 9(x - 3) \Leftrightarrow y = 9x - 29$.

Câu 42: (THTT Số 3-486 tháng 12 năm 2017-2018) Cho $f(x) = \sqrt{1+3x} - \sqrt[3]{1+2x}$, $g(x) = \sin x$. Tính giá trị của $\frac{f'(0)}{g'(0)}$.

A. $\frac{5}{6}$.

B. $-\frac{5}{6}$.

C. 0.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{1+3x}} - \frac{2}{3\sqrt[3]{(1+2x)^2}} \Rightarrow f'(0) = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$$

$$\text{Lại có } g'(x) = \cos x \Rightarrow g'(0) = 1$$

$$\text{Suy ra } \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{5}{6}.$$

Câu 43: (THPT Lục Ngạn-Bắc Ninh-lần 1 năm 2017-2018) Cho đồ thị $(C): y = \frac{2x+1}{x-1}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại giao điểm của đồ thị (C) và trục hoành là

A. $4x + 3y - 2 = 0$.

B. $4x - 3y - 2 = 0$.

C. $4x + 3y + 2 = 0$.

D. $4x - 3y + 2 = 0$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị } (C) \text{ và trục hoành là } \frac{2x+1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

$$y' = -\frac{3}{(x-1)^2} \Rightarrow y'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{4}{3}.$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến cần tìm: } y = -\frac{4}{3}\left(x + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow 4x + 3y + 2 = 0.$$

Câu 44: (THPT Triệu Sơn 3-Thanh Hóa năm 2017-2018) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2$ tại điểm M có hoành độ bằng -1 là:

A. $y = -9x - 13$.

B. $y = 9x + 5$.

C. $y = 9x - 13$.

D. $y = -3x - 7$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } y' = 3x^2 - 6x.$$

$$\text{Gọi } M(x_0; y_0) \text{ là tiếp điểm } \Rightarrow x_0 = -1.$$

$$\text{Vậy } y'(x_0) = y'(-1) = 9; y_0 = f(-1) = -4.$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm } M(x_0; y_0) \text{ là } y = 9(x + 1) - 4 \Leftrightarrow y = 9x + 5.$$

Câu 45: (THPT Triệu Sơn 3-Thanh Hóa năm 2017-2018) Đạo hàm của hàm số $y = \sin^2 3x$ là

A. $y = -3 \sin 6x$.

B. $y = 6 \sin^2 3x \cdot \cos 3x$.

C. $y = 3 \sin 6x$.

D. $y = 6 \sin 6x$.

Lời giải

Chọn C

* $y = \sin^2 3x$ suy ra $y' = 2 \sin 3x (\sin 3x)' = 2 \sin 3x \cdot \cos 3x \cdot (3x)' = 3 \sin 6x$.

Câu 1: (THPT Triệu Sơn 1-lần 1 năm 2017-2018) Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{\cos 2x}$.

A. $y' = \frac{\sin 2x}{2\sqrt{\cos 2x}}$. B. $y' = \frac{-\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$. C. $y' = \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$. D. $y' = \frac{-\sin 2x}{2\sqrt{\cos 2x}}$.

Lời giải

Chọn B

$$y' = (\sqrt{\cos 2x})' = \frac{(\cos 2x)'}{2\sqrt{\cos 2x}} = \frac{-2\sin 2x}{2\sqrt{\cos 2x}} = \frac{-\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}.$$

Câu 2: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc-MĐ 903 lần 1-năm 2017-2018) Đạo hàm của hàm số $y = 2x^5 - 4x^3 - x^2$ là

A. $y' = 10x^4 - 3x^2 - 2x$. B. $y' = 5x^4 - 12x^2 - 2x$.

C. $y' = 10x^4 + 12x^2 - 2x$. D. $y' = 10x^4 - 12x^2 - 2x$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = (2x^5 - 4x^3 - x^2)' = 10x^4 - 12x^2 - 2x$.

Câu 3: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc-lần 1 MĐ 904 năm 2017-2018) Hàm số nào sau đây không có đạo hàm trên $\mathbb{R}$?

A. $y = |x - 1|$. B. $y = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$. C. $y = \sin x$. D. $y = \sqrt{2 - \cos x}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y = |x - 1|$, do đó: $y = \begin{cases} x - 1, & x \geq 1 \\ 1 - x, & x < 1 \end{cases}$ khi đó: $y' = \begin{cases} 1, & x > 1 \\ -1, & x < 1 \end{cases}$

Tại $x = 1$: $y'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{x - 1} = 1$.

$$y'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - x}{x - 1} = -1.$$

Do $y'(1^+) \neq y'(1^-)$ nên hàm số không có đạo hàm tại 1.

Các hàm số còn lại xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$.

Câu 4: (THPT Kim Liên-Hà Nội năm 2017-2018) Cho hàm số $y = -x^3 + 2x^2$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $y = x$.

A. 2. B. 3. C. 1. D. 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = -3x^2 + 4x$.

Gọi $M(x_0; -x_0^3 + 2x_0^2)$ là tiếp điểm. Hệ số góc tiếp tuyến của (C) tại M là: $k = -3x_0^2 + 4x_0$.

Vì tiếp tuyến của (C) tại M song song với đường thẳng $y = x$ nên ta có:

$$-3x_0^2 + 4x_0 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Tại $x_0 = 1 \Rightarrow M(1; 1)$: Phương trình tiếp tuyến là: $y = x$ (loại).

Tại $x_0 = \frac{1}{3} \Rightarrow M\left(\frac{1}{3}; \frac{5}{27}\right)$: Phương trình tiếp tuyến là: $y = x - \frac{4}{27}$ (thỏa mãn).

Câu 5: (THPT Chuyên Lương Văn Tụy-Ninh Bình lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số $y = \frac{5}{3}x^3 - x^2 + 4$ có đồ thị (C) . Tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = 3$ có hệ số góc là

A. 39.

B. 40.

C. 51.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ x_0 là $k = f'(x_0)$.

Hàm số $y = \frac{5}{3}x^3 - x^2 + 4$ có $y' = 5x^2 - 2x$.

Suy ra tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = 3$ có hệ số góc $k = y'(3) = 39$.

Câu 6: (THPT Đoàn Thượng-Hải Dương-lần 2 năm 2017-2018) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-2}$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là?

A. $y = 4x - 1$.

B. $y = -4x + 7$.

C. $y = -4x + 1$.

D. $y = 4x + 7$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = \frac{-4}{(x-2)^2}$; $y(1) = -3$; $y'(1) = -4$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -4(x-1) - 3 \Leftrightarrow y = -4x + 1$.

Câu 7: (THPT Đoàn Thượng-Hải Dương-lần 2 năm 2017-2018) Tính đạo hàm của hàm số sau

$$y = \frac{\sin x}{\sin x - \cos x}.$$

A. $y' = \frac{-1}{(\sin x - \cos x)^2}.$

B. $y' = \frac{1}{(\sin x - \cos x)^2}.$

C. $y' = \frac{-1}{(\sin x + \cos x)^2}.$

D. $y' = \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}.$

Lời giải

Chọn A

$$y' = \frac{\cos x(\sin x - \cos x) - \sin x(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2} = \frac{-1}{(\sin x - \cos x)^2}.$$

Câu 8: (THPT Hà Huy Tập-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 2x$ có đồ thị (C) . Gọi x_1, x_2 là hoành độ các điểm M, N trên (C) mà tại đó tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = -x + 2017$. Khi đó $x_1 + x_2$ bằng

A. -1.

B. $\frac{1}{3}$.

C. $\frac{4}{3}$.

D. $\frac{-4}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 3x^2 - 4x + 2$.

Tiếp tuyến của (C) vuông góc với đường thẳng $y = -x + 2017$ nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k = 1$.

$$\text{Lúc đó } 3x^2 - 4x + 2 = 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } x_1 + x_2 = \frac{4}{3}.$$

Câu 9: (THPT Triệu Thị Trinh-lần 1 năm 2017-2018) Tính $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ biết $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

A. -2 . B. $\frac{1}{2}$. C. 0 . **D. $-\frac{1}{2}$.**

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{1 + \sin x} \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{1 + \sin \frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}$$

Câu 10: (THPT Triệu Thị Trinh-lần 1 năm 2017-2018) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số

$$y = \frac{x-1}{x+2} \text{ tại điểm có hoành độ bằng } -3 \text{ là:}$$

A. $y = -3x - 5$. **B. $y = 3x + 13$.** C. $y = 3x + 5$. D. $y = -3x + 13$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Tập xác định của hàm số } D = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

$$\text{Đạo hàm của hàm số là } y' = \frac{3}{(x+2)^2}.$$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng -3 là:

$$y = f'(-3)(x+3) + f(-3) \Leftrightarrow y = 3(x+3) + 4 \Leftrightarrow y = 3x + 13.$$

Câu 11: (THPT Thăng Long-Hà Nội-lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{2x-1}$. Tính $f'''(-1)$.

A. $-\frac{8}{27}$. B. $\frac{2}{9}$. C. $\frac{8}{27}$. D. $-\frac{4}{27}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Tập xác định } D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

$$f'(x) = \frac{-2}{(2x-1)^2}, f''(x) = \frac{8}{(2x-1)^3}.$$

$$\text{Khi đó } f'''(-1) = -\frac{8}{27}.$$

Câu 12: (THPT Thăng Long-Hà Nội-lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x+1}$ có đồ thị (C) .

Phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại giao điểm của đồ thị (C) với trục tung là

- A.** $y = -x + 2$. **B.** $y = -x + 1$. **C.** $y = x - 2$. **D.** $y = -x - 2$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(a; b)$ là giao điểm của đồ thị (C) với trục tung.

Ta có $M \in (C) \Rightarrow b = \frac{a+2}{a+1}$ và $M \in Oy \Rightarrow a = 0 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow M(0; 2)$.

Phương trình cần tìm có dạng $d: y = y'(0) \cdot (x - 0) + 2$.

Lại có $y' = \frac{-1}{(x+1)^2} \Rightarrow y'(0) = -1 \Rightarrow d: y = -x + 2$.

Câu 13: (THPT Chuyên ĐHSPT-Hà Nội-lần 1 năm 2017-2018) Phương trình các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 1$ tại các điểm có tung độ bằng 5 là

- A.** $y = 20x - 35$. **B.** $y = -20x - 35$ và $y = 20x + 35$.
C. $y = 20x - 35$ và $y = -20x - 35$. **D.** $y = -20x + 35$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = 5 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} f'(-2) = -20 \\ f'(2) = 20 \end{cases}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là

☒ $y = -20(x + 2) + 5 = -20x - 35$,

☒ $y = 20(x - 2) + 5 = 20x - 35$.

Câu 14: (THPT Yên Lạc-Vĩnh Phúc-lần 3 năm 2017-2018) Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)$ (m/s) có gia tốc $a(t) = v'(t) = -2t + 10$ (m/s²). Vận tốc ban đầu của vật là 5 m/s. Tính vận tốc của vật sau 5 giây.

- A.** 30 m/s. **B.** 25 m/s. **C.** 20 m/s. **D.** 15 m/s.

Lời giải

Chọn A

Có $v(t) = \int a(t) dt = \int (-2t + 10) dt = 10t - t^2 + C$.

Lại có $v(0) = 5 \Leftrightarrow C = 5$. Vậy $v(t) = 10t - t^2 + 5$.

Khi đó vận tốc của vật sau 5 giây là $v(5) = 10 \cdot 5 - 5^2 + 5 = 30$ (m/s).

Câu 15: (THPT Số 4-487 tháng 1 năm 2017-2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0 = 2$.

Tìm $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - xf(2)}{x - 2}$.

- A.** 0. **B.** $f'(2)$. **C.** $2f'(2) - f(2)$. **D.** $f(2) - 2f'(2)$.

Lời giải

Chọn C

Do hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0 = 2$ suy ra $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2)$.

$$\text{Ta có } I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - xf(2)}{x - 2} \Leftrightarrow I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - 2f(2) + 2f(2) - xf(2)}{x - 2}$$

$$\Leftrightarrow I = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(f(x) - f(2))}{x - 2} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(2)(x - 2)}{x - 2} \Leftrightarrow I = 2f'(2) - f(2).$$

Câu 16: (SGD Bắc Ninh năm 2017-2018) Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{\cos 4x}{2} + 3 \sin 4x$.

A. $y' = 12 \cos 4x - 2 \sin 4x$.

B. $y' = 12 \cos 4x + 2 \sin 4x$.

C. $y' = -12 \cos 4x + 2 \sin 4x$.

D. $y' = 3 \cos 4x - \frac{1}{2} \sin 4x$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = -2 \sin 4x + 12 \cos 4x$.

Câu 17: (SGD Ninh Bình năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x) = \cos 2x$. Tính $P = f''(\pi)$.

A. $P = 4$.

B. $P = 0$.

C. $P = -4$.

D. $P = -1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x) = -2 \sin 2x$; $f''(x) = -4 \cos 2x$.

Do đó: $f''(\pi) = -4$.

Câu 18: (THPT Chuyên ĐH KHTN-Hà Nội năm 2017-2018) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 1$ biết tiếp điểm có hoành độ bằng 1.

A. $y = -8x - 6$.

B. $y = 8x - 6$.

C. $y = -8x + 10$.

D. $y = 8x + 10$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 4x^3 + 4x$, $y'(1) = 8$

Phương trình tiếp tuyến: $y = y'(1) \cdot (x - 1) + y(1) \Rightarrow y = 8x - 6$.

Câu 19: (THPT Chuyên Lê Quý Đôn-Đà Nẵng năm 2017-2018) Cho đồ thị (C) của hàm số

$y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$. Phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y = 3x + 1$ là phương trình nào sau đây ?

A. $y = 3x - 1$.

B. $y = 3x$.

C. $y = 3x - \frac{29}{3}$.

D. $y = 3x + \frac{29}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Vì tiếp tuyến d của (C) song song với đường thẳng $y = 3x + 1$ nên $d: y = 3x + b$ ($b \neq 1$).

$$d \text{ là tiếp tuyến của } (C) \text{ khi và chỉ khi HPT sau có nghiệm: } \begin{cases} \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1 = 3x + b \\ x^2 - 4x + 3 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 1 \\ x = 0 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ b = 1 \end{cases} (L) \text{ hoặc } \begin{cases} x = 4 \\ b = -\frac{29}{3} \end{cases}. \text{ Vậy phương trình tiếp tuyến } y = 3x - \frac{29}{3}.$$

Câu 20: (THPT Chuyên Phan Bội Châu-Nghệ An- lần 1 năm 2017-2018) Phương trình tiếp tuyến của

đồ thị $y = \frac{2x-1}{x-1}$ tại điểm $A(2;3)$ là

- A.** $y = -3x + 9$. **B.** $y = -x + 5$. **C.** $y = 3x - 3$. **D.** $y = x + 1$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$y' = \frac{-1}{(x-1)^2} \Rightarrow y'(2) = -1.$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y = \frac{2x-1}{x-1}$ tại điểm $A(2;3)$ là $y = -x + 5$.

Câu 21: (THPT Chuyên Quốc Học-Huế năm 2017-2018) Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 3x + 1$ có đồ thị (C). Có tất cả bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $y = 3x + 2018$?

- A.** 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm.

$$y' = 4x^3 - 4x.$$

Vì tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $y = 3x + 2018$ nên

$$y'(x_0) = 3 \Leftrightarrow 4x_0^3 - 4x_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 3 \\ x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -3 \\ x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1 \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(1;3)$ là: $y = 3x$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(-1;-3)$ là: $y = 3x$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(0;1)$ là: $y = 3x + 1$.

Câu 22: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc-lần 3 MĐ 234 năm học 2017-2018) Tính đạo hàm của hàm số

$$y = x^3 - 2x^2 + \frac{5}{x} + 7.$$

- A.** $y' = \frac{x^4}{4} - 6x^3 + 5\ln|x| + 7x$. **B.** $y' = x^2 - 2x - \frac{5}{x^2}$.
C. $y' = 3x^2 - 4x - \frac{5}{x}$. **D.** $y' = 3x^2 - 4x - \frac{5}{x^2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 4x - \frac{5}{x^2}$.

Câu 23: (THPT Hoài Ân-Hải Phòng năm 2017-2018) Tìm hệ số góc tiếp tuyến k của đồ thị hàm số

$y = \frac{x+2}{1-x}$ tại giao điểm của nó với trục hoành.

- A.** $k = -3$. **B.** $k = -\frac{1}{3}$. **C.** $k = \frac{1}{3}$. **D.** $k = 3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\frac{x+2}{1-x} = 0 \Rightarrow x = -2$ là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành.

Do $y' = \frac{3}{(1-x)^2} \Rightarrow y'(-2) = \frac{1}{3}$. Vậy hệ số góc cần tìm là: $k = \frac{1}{3}$.

Câu 24: (THPT Hoài Ân-Hải Phòng năm 2017-2018) Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^2 - x + 1)^3$ tại điểm

$x = -1$.

- A.** 27. **B.** -27. **C.** 81. **D.** -81.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 3(x^2 - x + 1)^2 (x^2 - x + 1)' = 3(2x - 1)(x^2 - x + 1)^2$.

Suy ra $y'(-1) = -81$.

Câu 25: (THPT Hoài Ân-Hải Phòng năm 2017-2018) Tính đạo hàm của hàm số

$y = \sin^6 x + \cos^6 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x$.

- A.** 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Có: $y = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) + 3 \sin^2 x \cos^2 x = 1$.

$\Rightarrow y' = 0$.

Câu 26: (THPT Kinh Môn 2-Hải Dương năm 2017-2018) Đạo hàm của hàm số $y = \sin 2x$ là

- A.** $y' = 2 \cos x$. **B.** $y' = 2 \cos 2x$. **C.** $y' = -2 \cos 2x$. **D.** $y' = \cos 2x$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = (\sin 2x)' = (2x)' \cos 2x = 2 \cos 2x$.

Câu 27: (THPT Ninh Giang-Hải Dương năm 2017-2018) Cho hàm số: $y = \frac{2x+4}{x^2+4x+3}$. Phương trình

$y'' = 0$ có nghiệm là:

- A.** $x = -4$. **B.** $x = -2$. **C.** $x = 0$. **D.** $x = 2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y = \frac{2x+4}{x^2+4x+3} = \frac{2(x+2)}{(x+2)^2-1}$.

$$y' = \left(\frac{2(x+2)}{(x+2)^2 - 1} \right)' = \frac{2(x+2)^2 - 2 - 2(x+2) \cdot 2(x+2)}{\left[(x+2)^2 - 1 \right]^2} = \frac{-2(x+2)^2 - 2}{\left[(x+2)^2 - 1 \right]^2}.$$

$$\begin{aligned} y'' &= \left(\frac{-2(x+2)^2 - 2}{\left[(x+2)^2 - 1 \right]^2} \right)' = \frac{-4(x+2)\left[(x+2)^2 - 1 \right]^2 - [-2(x+2)^2 - 2] \cdot 2\left[(x+2)^2 - 1 \right] \cdot 2(x+2)}{\left[(x+2)^2 - 1 \right]^4} \\ &= \frac{4(x+2)\left[(x+2)^2 - 1 \right] \left[-(x+2)^2 + 1 + 2(x+2)^2 + 2 \right]}{\left[(x+2)^2 - 1 \right]^4} \\ &= \frac{4(x+2)\left[(x+2)^2 - 1 \right] \left[(x+2)^2 + 3 \right]}{\left[(x+2)^2 - 1 \right]^4}. \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } y'' = 0 \Leftrightarrow \frac{4(x+2)\left[(x+2)^2 - 1 \right] \left[(x+2)^2 + 3 \right]}{\left[(x+2)^2 - 1 \right]^4} = 0.$$

Điều kiện $(x+2)^2 - 1 \neq 0$.

Khi đó $y'' = 0 \Leftrightarrow x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$.

Câu 28: (THPT Phan Đăng Lưu-Huế-lần 1 năm 2017-2018) Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{3}x - 5$ và tiếp điểm có hoành độ dương.

A. $y = -3x + 10$. **B.** $y = -3x + 2$. **C.** $y = -3x + 6$. **D.** $y = -3x - 2$.

Lời giải

Chọn A

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm ($x_0 > 0$).

Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = \frac{1}{3}x - 5$ nên ta có: $y'(x_0) = -3$

$$\Leftrightarrow \frac{-3}{(x_0 - 1)^2} = -3 \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow x_0^2 - 2x_0 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \text{ (loại)} \\ x_0 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 4.$$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -3(x - 2) + 4 = -3x + 10$.

Câu 29: (THPT Quảng Xương 1-Thành Hóa năm 2017-2018) Cho hàm số $y = \frac{1}{x}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng ?

A. $y''y^3 + 2 = 0$. **B.** $y''y = 2(y')^2$. **C.** $y''y + 2(y')^2 = 0$. **D.** $y''y^3 = 2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = -\frac{1}{x^2}$; $y'' = \frac{2}{x^3}$.

$$\square\square y''y^3 + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^3} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^3 + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^6} + 2 = 0 \text{ (vô lí).}$$

$$\square y''y = 2(y')^2 \Leftrightarrow \frac{2}{x^3} \cdot \frac{1}{x} = 2\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{2}{x^4} = \frac{2}{x^4} \text{ (đúng).}$$

$$\square y''y + 2(y')^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^3} \cdot \frac{1}{x} + 2\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{x^4} = 0 \text{ (vô lí).}$$

$$\square y''y^3 = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{x^3} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^3 = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{x^6} = 2 \text{ (vô lí).}$$

Câu 30: (THPT Trần Hưng Đạo-TP HCM năm 2017-2018) Một vật chuyển động theo quy luật

$$s = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 9t, \text{ với } t \text{ (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và } s \text{ (mét)}$$

là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A.** 89 (m/s). **B.** 109 (m/s). **C.** 71 (m/s). **D.** $\frac{25}{3}$ (m/s).

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } v(t) = s'(t) = t^2 - 2t + 9.$$

$$\text{Ta có: } v' = 2t - 2 \Rightarrow v' = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

$$\text{Tính: } v(1) = 8; v(10) = 89, v(0) = 9.$$

Vậy vận tốc lớn nhất là 89(m/s).

Câu 31: (THPT Tú Kỳ-Hải Dương năm 2017-2018) Một chất điểm chuyển động có phương trình $S = 2t^4 + 6t^2 - 3t + 1$ với t tính bằng giây (s) và S tính bằng mét (m). Hỏi gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3(s)$ bằng bao nhiêu?

- A.** 64 (m/s²). **B.** 228 (m/s²). **C.** 88 (m/s²). **D.** 76 (m/s²).

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có vận tốc tức thời của chuyển động được tính theo công thức:

$$v(t) = (S(t))' = 8t^3 + 12t - 3.$$

Khi đó gia tốc tức thời của chuyển động được tính theo công thức:

$$a(t) = 24t^2 + 12 \Rightarrow a(3) = 24 \cdot 3^2 + 12 = 228 \text{ (m/s}^2\text{)}.$$

Vậy gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3(s)$ là 228(m/s²).

Câu 32: (THPT Xuân Trường-Nam Định năm 2017-2018) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 3x^2$ tại điểm M có tung độ bằng 5 có phương trình là:

- A.** $y = -12x - 7$. **B.** $y = 12x - 7$. **C.** $y = -12x + 17$. **D.** $y = 12x + 17$.

Lời giải

Chọn B

Hoành độ tiếp điểm là nghiệm của của phương trình: $2x^3 + 3x^2 = 5 \Leftrightarrow x = 1$.

$$\text{Ta có: } y' = 6x^2 + 6x \Rightarrow y'(1) = 12.$$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = 12(x-1) + 5 = 12x - 7 \Leftrightarrow y = 12x - 7$.

Câu 33: (THPT Xuân Trường-Nam Định năm 2017-2018) Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C) .

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M_0(1;0)$ là:

- A.** $y = -3x + 3$. **B.** $y = -3x + 1$. **C.** $y = 3x + 1$. **D.** $y = 3x + 3$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$; $y'(1) = -3$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = -3(x-1) + 0 \Leftrightarrow y = -3x + 3$.

Câu 34: (THPT Đô Lương 4-Nghệ An năm 2017-2018) Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x) = x \sin x - 3$ là biểu thức nào trong các biểu thức sau?

- A.** $f''(x) = 2 \cos x - x \sin x$. **B.** $f''(x) = -x \sin x$.
C. $f''(x) = \sin x - x \cos x$. **D.** $f''(x) = 1 + \cos x$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = f'(x) = (x \sin x - 3)' = \sin x + x \cos x$

Vậy $y'' = f''(x) = (\sin x + x \cos x)' = 2 \cos x - x \sin x$.

Câu 35: (THPT Đô Lương 4-Nghệ An năm 2017-2018) Một vật giao động điều hòa có phương trình quãng đường phụ thuộc thời gian $s = A \sin(\omega t + \varphi)$. Trong đó A, ω, φ là hằng số, t là thời gian. Khi đó biểu thức vận tốc của vật là?

- A.** $v = A \cos(\omega t + \varphi)$. **B.** $v = -A\omega \cos(\omega t + \varphi)$.
C. $v = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$. **D.** $v = -A \cos(\omega t + \varphi)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có vận tốc của vật đó là

$v = s' = (A \sin(\omega t + \varphi))' = A(\omega t + \varphi)' \cos(\omega t + \varphi) = A\omega \cos(\omega t + \varphi)$.

Câu 36: (THPT Đô Lương 4-Nghệ An năm 2017-2018) Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ tại giao điểm có tung độ $y_0 = 1$ là?

- A.** $y = -x + 1$. **B.** $y = x + 1$. **C.** $y = -3x + 1$. **D.** $y = 3x + 1$.

Lời giải

Chọn A

Gọi tọa độ tiếp điểm là $M(x_0; y_0)$ với $(x_0 \neq 1)$, $y_0 = 1 \Leftrightarrow 1 = \frac{2x_0-1}{x_0-1} \Leftrightarrow x_0 = 0$

Ta có $y' = \frac{-1}{(x-1)^2}$ $y'(x_0) = y'(0) = \frac{-1}{(0-1)^2} = -1$

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = -1(x-0) + 1 \Leftrightarrow y = -x + 1$.

Câu 37: (THPT Đô Lương 4-Nghệ An năm 2017-2018) Với a, b thỏa mãn để hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \text{ khi } x \geq 1 \\ ax + b & ; \text{ khi } x < 1 \end{cases} \text{ có đạo hàm tại } x_0 = 1. \text{ Khi đó giá trị của biểu thức } S = \log_2(3a + 2b)$$

bằng?

A. $S = 1$.

B. $S = 2$.

C. $S = 3$.

D. $S = 4$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 1 \Rightarrow$ hàm số liên tục tại $x_0 = 1$.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 1 = a + b \Leftrightarrow b = 1 - a.$$

$$\text{Khi } b = 1 - a \text{ ta có: } f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \text{ khi } x \geq 1 \\ ax + 1 - a & ; \text{ khi } x < 1 \end{cases}.$$

$$\text{Hàm số có đạo hàm tại } x_0 = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{ax + 1 - a - 1}{x - 1} \Leftrightarrow 2 = a \Rightarrow b = -1.$$

$$\text{Vậy } S = \log_2(3a + 2b) = \log_2(3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1)) = 2.$$

Câu 38: (THPT Đô Lương 4-Nghệ An năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{khi } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ có đạo

hàm tại điểm $x_0 = 0$ là?

A. $f'(0) = 0$.

B. $f'(0) = 1$.

C. $f'(0) = -2$.

D. Không tồn tại.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có: } f(0) = 1; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1)^2 = 1; \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2) = 0.$$

$$\text{Ta thấy } f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \text{ nên hàm số không liên tục tại } x_0 = 0.$$

Vậy hàm số không có đạo hàm tại $x_0 = 0$.

Câu 39: (THPT Chuyên Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình năm 2017-2018) Nếu $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$ thì

$f'(2)$ bằng

A. -3 .

B. -5 .

C. 0 .

D. 1 .

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x - 2)(x - 1) - (x^2 - 2x + 5)}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2}.$$

$$\text{Do đó } f'(2) = \frac{2^2 - 2 \cdot 2 - 3}{(2 - 1)^2} = -3.$$

Câu 40: (THPT số 5-488 tháng 2 năm 2018) Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = -t^3 + 3t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Tính vận tốc của chuyển động tại thời điểm gia tốc triệt tiêu.

A. 12 m/s .

B. 0 m/s .

C. 11 m/s .

D. 6 m/s .

Lời giải

Chọn A

Vận tốc của chuyển động chính là đạo hàm cấp một của quãng đường: $v = S' = -3t^2 + 6t + 9$

Gia tốc của chuyển động chính là đạo hàm cấp hai của quãng đường: $a = S'' = -6t + 6$

Gia tốc triệt tiêu khi $S'' = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Khi đó vận tốc của chuyển động là $S'(1) = 12 \text{ m/s}$.

Câu 41: (THPT Hoàng Hoa Thám-Hung Yên-lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số $y = \sin^2 2x$. Giá trị của biểu thức $y^{(3)} + y'' + 16y' + 16y - 8$ là kết quả nào sau đây?

A. -8 .

B. 0 .

C. 8 .

D. $16 \sin 4x$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y = \sin^2 2x \Rightarrow y = \frac{1 - \cos 4x}{2}$; $y' = 2 \sin 4x$; $y'' = 8 \cos 4x$; $y^{(3)} = -32 \sin 4x$.

Khi đó $y^{(3)} + y'' + 16y' + 16y - 8 = -32 \sin 4x + 8 \cos 4x + 32 \sin 4x + 8(1 - \cos 4x) - 8 = 0$

- Câu 1: (SGD Bà Rịa Vũng Tàu-đề 1 năm 2017-2018)** Tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = x^3 - 4x + 1$ tại điểm có hoành độ bằng 2 có phương trình là
- A. $y = -8x + 17$. B. $y = 8x - 16$. C. $y = 8x + 15$. **D. $y = 8x - 15$.**

Lời giải

Chọn D

Đạo hàm: $y' = 3x^2 - 4$. Suy ra: $y'(2) = 8$. Ta có: $y(2) = 1$.

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = 8(x - 2) + 1 \Leftrightarrow y = 8x - 15$.

- Câu 2: (SGD Bà Rịa Vũng Tàu-đề 1 năm 2017-2018)** Số tự nhiên n thỏa $C_n^1 + 2.C_n^2 + \dots + n.C_n^n = 11264$ thì
- A. $n = 10$. **B. $n = 11$.** C. $n = 12$. D. $n = 9$.

Lời giải

Chọn B

Xét khai triển $(x + 1)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \dots + C_n^n x^n$.

Đạo hàm hai vế ta được: $n(x + 1)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + \dots + nC_n^n x^{n-1}$.

Thay $x = 1$ ở hai vế ta được $1.C_n^1 + 2.C_n^2 + \dots + n.C_n^n = n.2^{n-1}$.

Do đó $n.2^{n-1} = 11264$.

Xét hàm số $f(t) = t.2^{t-1}$ trên $(0; +\infty)$ ta có: $f'(t) = 2^{t-1} + t.2^{t-1} \ln 2 > 0 \forall t > 0$.

Do đó hàm số $f(t) = t.2^{t-1}$ đồng biến trên $(0; +\infty)$. Mà $f(11) = 11264$. Vậy $n = 11$.

- Câu 3: (THPT Lý Thái Tổ-Bắc Ninh-lần 1 năm 2017-2018)** Phương trình $3^{2x+1} - 28.3^x + 9 = 0$ có hai nghiệm là x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) Tính giá trị $T = x_1 - 2x_2$.
- A. $T = -3$. B. $T = 0$. C. $T = 4$. **D. $T = -5$.**

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } 3^{2x+1} - 28.3^x + 9 = 0 \Leftrightarrow 3.(3^x)^2 - 28.3^x + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 9 \\ 3^x = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Vậy $T = x_1 - 2x_2 = -1 - 2.2 = -5$.

- Câu 4: (THPT Kinh Môn-Hải Dương lần 1 năm 2017-2018)** Cho $f(x) = \sin^3 ax$, $a > 0$. Tính $f'(\pi)$.
- A. $f'(\pi) = 3 \sin^2(a\pi) \cdot \cos(a\pi)$. **B. $f'(\pi) = 0$.**
- C. $f'(\pi) = 3a \sin^2(a\pi)$. D. $f'(\pi) = 3a \sin^2(a\pi) \cdot \cos(a\pi)$.

Lời giải

Chọn D

$f(x) = \sin^3 ax \Rightarrow f'(x) = 3a \sin^2 ax \cos ax \Rightarrow f'(\pi) = 3a \sin^2 a\pi \cdot \cos a\pi = 0$.

- Câu 5: (THPT Lê Quý Đôn-Hải Phòng lần 1 năm 2017-2018)** Cho hàm số $y = x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 6x + \frac{481}{27}$.

Tìm số các tiếp tuyến với đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y = 2x - \frac{7}{3}$.

- A. 3. B. 2. **C. 1.** D. 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = 3x^2 - 5x - 6$

Tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 2x - \frac{7}{3}$ nên $y'(x_0) = 3x_0^2 - 5x_0 - 6 = 2$

$$\Leftrightarrow 3x_0^2 - 5x_0 - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = \frac{8}{3} \end{cases}.$$

*Với $x_0 = -1$, phương trình tiếp tuyến có dạng: $y = 2x - \frac{1205}{54}$. (nhận)

*Với $x_0 = \frac{8}{3}$, phương trình tiếp tuyến có dạng: $y = 2x - \frac{7}{3}$. (loại)

Vậy có một tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 2x - \frac{7}{3}$.

Câu 6: (THTT số 6-489 tháng 3 năm 2018) Tìm số hạng không chứa x trong khai triển nhị thức

Newton của $\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^n$ ($x \neq 0$), biết rằng $1.C_n^1 + 2.C_n^2 + 3.C_n^3 + \dots + n.C_n^n = 256n$ (C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử).

A. 489888.

B. 49888.

C. 48988.

D. 4889888.

Lời giải

Chọn C

Xét khai triển $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + C_n^3x^3 + \dots + C_n^nx^n$ (1)

Đạo hàm hai vế của (1) ta được: $n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2x + 3C_n^3x^2 + \dots + nC_n^nx^{n-1}$ (2)

Trong công thức (2) ta cho $x=1$ ta được:

$$n2^{n-1} = C_n^1 + 2.C_n^2 + 3.C_n^3 + \dots + n.C_n^n \Leftrightarrow n.2^{n-1} = 256n \Leftrightarrow 2^{n-1} = 256 \Leftrightarrow n = 9.$$

$$\text{Khi đó, } \left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^n = \left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^9 = \sum_{k=0}^9 C_9^k (-3)^k 2^{9-k} x^{18-3k}.$$

Do đó số hạng không chứa x trong khai triển $\left(2x^2 - \frac{3}{x}\right)^9$ nếu $18-3k=0$ hay $k=6$.

Suy ra số hạng cần tìm là $C_9^6 (-3)^6 2^3 = 489888$.

Câu 7: (THPT Nguyễn Trãi-Đà Nẵng-lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 7x + 2$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A(0;2)$ là

A. $y = 7x + 2$.

B. $y = -7x + 2$.

C. $y = 7x - 2$.

D. $y = -7x - 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = x^2 - 6x + 7$. Do đó $y'(0) = 7$.

Phương trình tiếp tuyến là $y = 7x + 2$.

Câu 8: (THPT Lê Xoay-Vĩnh phúc-lần 1 năm 2017-2018) Gọi đường thẳng $y = ax + b$ là phương trình

tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ tại điểm có hoành độ $x = 1$. Tính $S = a - b$.

A. $S = \frac{1}{2}$.

B. $S = 2$.

C. $S = -1$.

D. $S = 1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = \frac{1}{2}.$$

$$y' = \frac{3}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{3}{4}$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến có dạng: } y = \frac{3}{4}(x-1) + \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow S = a - b = 1.$$

Câu 9: (THPT Chuyên Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6$ tại điểm có hoành độ là nghiệm của phương trình $f''(x) = 0$ có hệ số góc bằng

A. -4 .

B. $\frac{47}{12}$.

C. $-\frac{13}{4}$.

D. $-\frac{17}{4}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } f'(x) = x^2 - x - 4 \Rightarrow f''(x) = 2x - 1. \text{ Suy ra } f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Do đó hệ số góc của tiếp tuyến là } f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{17}{4}.$$

Câu 10: (THPT Chuyên Trần Phú-Hải Phòng-lần 2 năm 2017-2018) Đạo hàm của hàm số

$$y = (x^3 - 2x^2)^2 \text{ bằng}$$

A. $6x^5 - 20x^4 - 16x^3$.

B. $6x^5 - 20x^4 + 4x^3$.

C. $6x^5 + 16x^3$.

D. $6x^5 - 20x^4 + 16x^3$.

Lời giải

Chọn D

$$y' = 2(x^3 - 2x^2) \cdot (x^3 - 2x^2)' = 2(x^3 - 2x^2)(3x^2 - 4x) = 6x^5 - 20x^4 + 16x^3.$$

Câu 11: (PTNK-ĐHQG TP HCM-lần 1 năm 2017-2018) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm

số $y = x^3 + 3x^2 - 20$ song song với đường thẳng $y = 24x + 5$.

A. $y = 24x + 60$ và $y = 24x - 48$.

B. $y = 24x - 48$ và $y = 24x - 60$.

C. $y = 24x + 12$ và $y = 24x - 18$.

D. $y = 24x - 12$ và $y = 24x - 60$.

Lời giải

Chọn A

Giả sử $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến.

Ta có $y' = 3x^2 + 6x$.

Do tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 20$ song song với đường thẳng $y = 24x + 5$ nên

$$\text{ta được } y'(x_0) = 24 \Leftrightarrow 3x_0^2 + 6x_0 = 24 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 0 \\ x_0 = -4 \Rightarrow y_0 = -36 \end{cases}.$$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(2; 0)$ là $y = 24(x - 2) + 0 \Leftrightarrow y = 24x - 48$ (nhận).

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(-4; -36)$ là $y = 24(x + 4) - 36 \Leftrightarrow y = 24x + 60$ (nhận).

Câu 12: (THPT Hồng Bàng – Hải Phòng – năm 2017 – 2018) Cho đường cong

$(C): y = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ và đường thẳng $d: 3x - y + 4 = 0$. Phương trình nào dưới đây là

phương trình của đường thẳng tiếp xúc với (C) và song song với d ?

A. $y = 3x + \frac{268}{27}$.

B. $y = 3x + 4$.

C. $81x - 27y + 32 = 0$.

D. $81x - 27y + 140 = 0$.

Lời giải

Chọn D

Tiếp tuyến song song với d nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k = 3$, mà $k = y'(x_0)$.

$$\text{Suy ra } 3x_0^2 + 4x_0 + 3 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -\frac{4}{3} \end{cases}. \text{ Do đó ta có hai điểm } M(0; 4), N\left(-\frac{4}{3}; \frac{32}{27}\right).$$

Tại $M(0; 4)$, ta có tiếp tuyến là $y = 3x + 4$ trùng với d nên không thỏa.

$$\text{Tại } N\left(-\frac{4}{3}; \frac{32}{27}\right) \text{ ta có tiếp tuyến là } y = 3\left(x + \frac{4}{3}\right) + \frac{32}{27} \Leftrightarrow 81x - 27y + 140 = 0.$$

Câu 13: (THPT Quảng Xương I – Thanh Hóa – năm 2017 – 2018) Cho hàm số $y = x^3 - 2x + 1$ có

đồ thị (C) . Hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại điểm $M(-1; 2)$ bằng

A. 3.

B. -5.

C. 25.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

$y' = 3x^2 - 2$. Hệ số góc cần tìm là $k = f'(-1) = 1$.

Câu 14: (THPT Kim Liên – Hà Nội - Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x}{x + 1}$. Viết phương

trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A\left(1; \frac{-1}{2}\right)$.

A. $y = \frac{1}{2}(x + 1) - \frac{1}{2}$.

B. $y = \frac{1}{4}(x + 1) + \frac{1}{2}$.

C. $y = \frac{1}{4}(x - 1) - \frac{1}{2}$.

D. $y = \frac{1}{2}(x - 1) + \frac{1}{2}$.

Lời giải

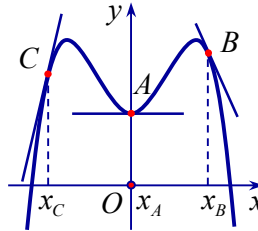
Chọn C

$$\text{TXĐ: } \mathbb{R} \setminus \{-1\}. \text{ Ta có } y' = \frac{x^2 + 2x - 2}{(x + 1)^2}$$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A\left(1; \frac{-1}{2}\right)$ là $y = y'(1)(x-1) - \frac{1}{2}$

Vậy $d: y = \frac{1}{4}(x-1) - \frac{1}{2}$.

Câu 15: (THPT Kim Liên – Hà Nội - Lần 2 năm 2017 – 2018) Hình bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Biết rằng tại các điểm A, B, C đồ thị hàm số có tiếp tuyến được thể hiện trên hình vẽ bên dưới.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f'(x_C) < f'(x_A) < f'(x_B)$.

B. $f'(x_B) < f'(x_A) < f'(x_C)$.

C. $f'(x_A) < f'(x_C) < f'(x_B)$.

D. $f'(x_A) < f'(x_B) < f'(x_C)$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào hình vẽ ta có: $f'(x_A) = 0$, $f'(x_B) < 0$, $f'(x_C) > 0$.

Vậy $f'(x_B) < f'(x_A) < f'(x_C)$.

Câu 16: (THPT Trần Phú – Hà Tĩnh - Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho hàm số $y = x^3 + 2x^2 + 1$ có đồ thị là (C) . Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(1; 4)$ là

A. $y = 3x + 1$.

B. $y = 7x - 3$.

C. $y = 7x + 2$.

D. $y = -x + 5$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 3x^2 + 4x$. Do đó $y'(1) = 7$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(1; 4)$ là $y = 7x - 3$.

Câu 17: (ĐHQG TPHCM – Cơ Sở 2 – năm 2017 – 2018) Trong 3 đường thẳng $(d_1): y = 7x - 9$, $(d_2): y = 5x + 29$, $(d_3): y = -5x - 5$ có bao nhiêu đường thẳng là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 2x - 4$.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

+ Xét $(d_1): y = 7x - 9$.

(d_1) là tiếp tuyến của đồ thị khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 - 2x - 4 = 7x - 9 \\ 3x^2 + 6x - 2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0 \\ 3x^2 + 6x - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -5 \\ x = 1 \\ x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy (d_1) là tiếp tuyến của đồ thị.

+ Xét $(d_2): y = 5x + 29$.

(d_2) là tiếp tuyến của đồ thị khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 - 2x - 4 = 5x + 29 \\ 3x^2 + 6x - 2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 3x^2 - 7x - 33 = 0 \\ 3x^2 + 6x - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{-3 + \sqrt{30}}{3} \\ x = \frac{-3 - \sqrt{30}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

Vậy (d_2) không là tiếp tuyến của đồ thị.

+ Xét $(d_3): y = -5x - 5$.

(d_3) là tiếp tuyến của đồ thị khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 - 2x - 4 = -5x - 5 \\ 3x^2 + 6x - 2 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0 \\ 3x^2 + 6x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$$

Vậy (d_3) là tiếp tuyến của đồ thị.

Câu 1: (Tạp chí THPT – Tháng 4 năm 2017 – 2018) Cho hàm số $f(x) = \frac{m}{3}x^3 - (m-2)x^2 + x + 2$. Để đạo

hàm $f'(x)$ bằng bình phương của một nhị thức bậc nhất thì giá trị m là

A. -1 hoặc 1.

B. 1 hoặc 4.

C. -4 hoặc 4.

D. Không có giá trị nào.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x) = mx^2 - 2(m-2)x + 1$. Để $f'(x)$ là bình phương của một nhị thức bậc nhất thì $m \neq 0$ và $f'(x) = 0$ có nghiệm kép.

Suy ra: $\Delta = (2(m-2))^2 - 4.m.1 = 4m^2 - 20m + 16 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \vee m = 4$ (thỏa $m \neq 0$).

Câu 2: (THPT Chuyên Nguyễn Quang Diệu – Đồng Tháp – Lần 5 năm 2017 – 2018) Biết trên đồ thị

(C): $y = \frac{x-1}{x+2}$ có hai điểm mà tiếp tuyến tại các điểm đó đều song song với đường thẳng d :

$3x - y + 15 = 0$. Tìm tổng S các tung độ tiếp điểm.

A. $S = 3$.

B. $S = 6$.

C. $S = -4$.

D. $S = 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = \frac{3}{(x+2)^2} \quad \forall x \neq -2$; đường thẳng $d: 3x - y + 15 = 0 \Leftrightarrow y = 3x + 15$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Khi đó: $y'(x_0) = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{(x_0+2)^2} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -2 \\ x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = 4 \end{cases}$. Vậy tổng $S = 2$.

Câu 3: (THPT Chuyên Hùng Vương – Gia Lai – Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho hàm số

$f(x) = x^3 + mx^2 + x + 1$. Gọi k là hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M có hoành độ

$x = 1$. Tất cả các giá trị thực của tham số m để thỏa mãn $k.f(-1) < 0$.

A. $m > 2$.

B. $m \leq -2$.

C. $-2 < m < 1$.

D. $m \geq 1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x) = 3x^2 + 2mx + 1$; $k = f'(1) = 4 + 2m$; $k.f(-1) = (4 + 2m)(m - 1)$.

Khi đó: $k.f(-1) < 0 \Leftrightarrow (4 + 2m)(m - 1) < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 1$.

Câu 4: (SGD Hà Tĩnh – Lần 2 năm 2017 – 2018) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$

song song với đường thẳng $y = 3x + 1$ có phương trình là

A. $y = 3x - \frac{29}{3}$.

B. $y = 3x - \frac{29}{3}, y = 3x + 1$.

C. $y = 3x + \frac{29}{3}$.

D. $y = 3x - 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 3x + 1$ nên có hệ số góc $k = 3$.

Ta có $y' = x^2 - 4x + 3$ nên có phương trình $x^2 - 4x + 3 = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$.

+ Với $x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(0;1)$ nên phương trình tiếp tuyến là $y = 3x + 1$ (loại).

+ Với $x = 4 \Rightarrow y = \frac{7}{3} \Rightarrow B\left(4; \frac{7}{3}\right)$ nên có phương trình tiếp tuyến là $y = 3x - \frac{29}{3}$ (thỏa mãn).

Câu 5: (THPT Chu Văn An – Hà Nội - năm 2017-2018) Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = t^2 - \frac{1}{6}t^3$ (m). Tìm thời điểm t (giây) mà tại đó vận tốc v (m/s) của chuyển động đạt giá trị lớn nhất.

A. $t = 2$

B. $t = 0.5$.

C. $t = 2.5$.

D. $t = 1$.

Lời giải

Chọn A

Vận tốc của chất điểm chuyển động theo quy luật: $v(t) = s'(t) = 2t - \frac{1}{2}t^2$.

Vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất khi $v(t) = 2t - \frac{1}{2}t^2$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow t = 2$.

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+2}$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta: 3x - y + 2 = 0$ là

A. $y = 3x + 14$.

B. $y = 3x + 14$, $y = 3x + 2$.

C. $y = 3x + 5$, $y = 3x - 8$.

D. $y = 3x - 8$.

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+2}$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta: 3x - y + 2 = 0$ là

A. $y = 3x + 14$.

B. $y = 3x + 14$, $y = 3x + 2$.

C. $y = 3x + 5$, $y = 3x - 8$.

D. $y = 3x - 8$.

Lời giải

Chọn A

Vì tiếp tuyến song song với $\Delta: 3x - y + 2 = 0$ nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k = 3$. Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm khi đó $y'(x_0) = k$ hay $\frac{3}{(x_0+2)^2} = 3 \Leftrightarrow (x_0+2)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = -3 \end{cases}$.

Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = -1$ khi đó tiếp tuyến là $y = 3(x+1) - 1 = 3x + 2$ (loại vì trùng với Δ).

Với $x_0 = -3 \Rightarrow y_0 = 5$ khi đó tiếp tuyến là $y = 3(x+3) + 5 = 3x + 14$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$. Tính $f'''(1)$.

A. 3.

B. -3.

C. $\frac{3}{2}$.

D. 0.

Câu 9: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{2x-1}$. Tính $f'''(1)$.

A. 3.

B. -3.

C. $\frac{3}{2}$.

D. 0.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned}\text{Ta có: } f(x) &= \sqrt{2x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x-1)'}{2\sqrt{2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}} \\ \Rightarrow f''(x) &= \frac{-\left(\sqrt{2x-1}\right)'}{2x-1} = \frac{-1}{(2x-1)\sqrt{2x-1}} = \frac{-1}{\sqrt{(2x-1)^3}} \\ \Rightarrow f'''(x) &= \frac{\left(\sqrt{(2x-1)^3}\right)'}{(2x-1)^3} = \frac{3(2x-1)^2}{(2x-1)^3 \sqrt{(2x-1)^3}} = \frac{3}{\sqrt{(2x-1)^5}}.\end{aligned}$$

$$\text{Vậy } f'''(1) = 3.$$

Câu 10: Cho hàm số $y = -x^3 + 4x^2 + 2x - 3$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 7x - 5$

A. $y = 7x - \frac{499}{27}$. **B.** $y = 7x - 5$. **C.** $y = 7x - \frac{131}{27}$. **D.** $y = 7x + \frac{131}{27}$.

Câu 11: Cho hàm số $y = -x^3 + 4x^2 + 2x - 3$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 7x - 5$

A. $y = 7x - \frac{499}{27}$. **B.** $y = 7x - 5$. **C.** $y = 7x - \frac{131}{27}$. **D.** $y = 7x + \frac{131}{27}$.

Lời giải

Chọn C

$$y' = -3x^2 + 8x + 2.$$

$$\text{Tiếp tuyến của } (C) \text{ song song với đường thẳng } y = 7x - 5 \Rightarrow f'(x_0) = 7$$

$$\Rightarrow -3x_0^2 + 8x_0 - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\text{Với } x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 2. \text{ Phương trình tiếp tuyến } y = 7x - 5 \text{ (loại).}$$

$$\text{Với } x_0 = \frac{5}{3} \Rightarrow y_0 = \frac{184}{27}. \text{ Phương trình tiếp tuyến } y = 7x - \frac{131}{27}.$$

Câu 12: Tiếp tuyến của parabol $y = x^2$ vuông góc với đường thẳng $y = x + 2$ có phương trình là
A. $x + y + 1 = 0$. **B.** $x - y + 1 = 0$. **C.** $4x - 4y + 1 = 0$. **D.** $4x + 4y + 1 = 0$.

Câu 13: Tiếp tuyến của parabol $y = x^2$ vuông góc với đường thẳng $y = x + 2$ có phương trình là
A. $x + y + 1 = 0$. **B.** $x - y + 1 = 0$. **C.** $4x - 4y + 1 = 0$. **D.** $4x + 4y + 1 = 0$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Vì tiếp tuyến của } (P) \text{ vuông góc với đường thẳng } y = x + 2 \text{ nên nó có dạng } \Delta: y = -x + c.$$

$$\Delta \text{ tiếp xúc với } (P) \text{ khi phương trình } x^2 + x - c = 0 \text{ có nghiệm kép } \Leftrightarrow 1 + 4c = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{1}{4}$$

$$\text{Khi đó } \Delta: y = -x - \frac{1}{4} \text{ hay } 4x + 4y + 1 = 0.$$

Câu 14: Gọi M là giao điểm của trục tung với đồ thị hàm số $(C): y = \sqrt{x^2 + x + 1}$. Tiếp tuyến của (C) tại M có phương trình là

A. $y = \frac{1}{2}x + 1.$ **B.** $y = -\frac{1}{2}x + 1.$ **C.** $y = -x + 1.$ **D.** $y = x + 1.$

Câu 15: Gọi M là giao điểm của trục tung với đồ thị hàm số $(C): y = \sqrt{x^2 + x + 1}$. Tiếp tuyến của (C) tại M có phương trình là

A. $y = \frac{1}{2}x + 1.$ **B.** $y = -\frac{1}{2}x + 1.$ **C.** $y = -x + 1.$ **D.** $y = x + 1.$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $y' = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}.$

$$x_0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y'(0) = \frac{1}{2} \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(0;1)$ có dạng

$$y = \frac{1}{2}(x-0) + 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 1.$$

Câu 16: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{4}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ là

A. $y = -x - 3.$ **B.** $y = x - 1.$ **C.** $y = -x + 2.$ **D.** $y = -x - 1.$

Câu 17: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{4}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x_0 = -1$ là

A. $y = -x - 3.$ **B.** $y = x - 1.$ **C.** $y = -x + 2.$ **D.** $y = -x - 1.$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = -\frac{4}{(x-1)^2} \Rightarrow y'(-1) = -1.$

Theo giả thiết ta có $x_0 = -1$ nên $y_0 = -2 \Rightarrow$ tiếp điểm $M(-1; -2).$

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(-1; -2)$ là $y = -1(x+1) - 2$

$$\Leftrightarrow y = -x - 3.$$

Câu 18: Tìm đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x^2 + 2x + 3}{x^2 + x + 3}.$

A. $2 - \frac{3}{x^2 + x + 3}.$ **B.** $\frac{6x+3}{(x^2 + x + 3)^2}.$ **C.** $\frac{3}{(x^2 + x + 3)^2}.$ **D.** $\frac{x+3}{x^2 + x + 3}.$

Câu 19: Tìm đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x^2 + 2x + 3}{x^2 + x + 3}.$

A. $2 - \frac{3}{x^2 + x + 3}.$ **B.** $\frac{6x+3}{(x^2 + x + 3)^2}.$ **C.** $\frac{3}{(x^2 + x + 3)^2}.$ **D.** $\frac{x+3}{x^2 + x + 3}.$

Lời giải

Chọn B

Cách 1. Ta có: $y = \frac{2x^2 + 2x + 3}{x^2 + x + 3} = 2 - \frac{3}{x^2 + x + 3} \Rightarrow y' = \frac{3(2x+1)}{(x^2 + x + 3)^2} = \frac{6x+3}{(x^2 + x + 3)^2}$.

Cách 2. Áp dụng công thức tính nhanh:

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f} \Rightarrow y' = \frac{(ae - db)x^2 + 2(af - dc)x + bf - ec}{(dx^2 + ex + f)^2}.$$

Ta có $y = \frac{2x^2 + 2x + 3}{x^2 + x + 3} \Rightarrow y' = \frac{6x+3}{(x^2 + x + 3)^2}$.

Câu 20: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-2}{x+1}$ tại giao điểm với trục tung là:

- A.** $y = 4x - 2$. **B.** $y = 4x - 2$. **C.** $y = 4x - 2$. **D.** $y = 4x - 2$.

Câu 21: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-2}{x+1}$ tại giao điểm với trục tung là:

- A.** $y = 4x - 2$. **B.** $y = 4x - 2$. **C.** $y = 4x - 2$. **D.** $y = 4x - 2$.

Lời giải

Chọn A

Giao điểm của $y = \frac{2x-2}{x+1}$ với trục tung là: $M(0; -2)$.

Ta có: $y' = \frac{4}{(x+1)^2} \Rightarrow y'(0) = \frac{4}{(0+1)^2} = 4$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-2}{x+1}$ tại $M(0; -2)$ là:

$$y = y'(0)(x-0) - 2 \quad y = 4x - 2.$$

Câu 22: Từ điểm $M(-1; -9)$ có thể vẽ được bao nhiêu tiếp tuyến tới đồ thị hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$

- A.** 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 23: Từ điểm $M(-1; -9)$ có thể vẽ được bao nhiêu tiếp tuyến tới đồ thị hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$

- A.** 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Lấy điểm $A(x_0; 4x_0^3 - 6x_0^2 + 1)$ thuộc đồ thị hàm số, tiếp tuyến tại A có phương trình

$$y = (12x_0^2 - 12x_0)(x - x_0) + 4x_0^3 - 6x_0^2 + 1.$$

Để tiếp tuyến qua M thì

$$-9 = (12x_0^2 - 12x_0)(-1 - x_0) + 4x_0^3 - 6x_0^2 + 1 \Leftrightarrow -8x_0^3 - 6x_0^2 + 12x_0 + 10 = 0$$

Phương trình có hai nghiệm $x_0 = -1$ và $x_0 = \frac{5}{4}$. Nên qua M có thể kẻ được hai tiếp tuyến tới đồ thị hàm số.

Câu 24: Một chất điểm chuyển động trong 20 giây đầu tiên có phương trình $s(t) = \frac{1}{12}t^4 - t^3 + 6t^2 + 10t$,

trong đó $t > 0$ với t tính bằng giây (s) và $s(t)$ tính bằng mét (m). Hỏi tại thời điểm gia tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất thì vận tốc của vật bằng bao nhiêu?

A. $17(\text{m/s})$.

B. $18(\text{m/s})$.

C. $28(\text{m/s})$.

D. $13(\text{m/s})$.

Câu 25: Cho hàm số $y = \cos x + m \sin 2x (C)$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị m để tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = \pi$, $x = \frac{\pi}{3}$ song song hoặc trùng nhau.

A. $m = -\frac{\sqrt{3}}{6}$.

B. $m = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

C. $m = \sqrt{3}$.

D. $m = -2\sqrt{3}$.

Câu 26: Một chất điểm chuyển động trong 20 giây đầu tiên có phương trình $s(t) = \frac{1}{12}t^4 - t^3 + 6t^2 + 10t$, trong đó $t > 0$ với t tính bằng giây (s) và $s(t)$ tính bằng mét (m). Hỏi tại thời điểm gia tốc của vật đạt giá trị nhỏ nhất thì vận tốc của vật bằng bao nhiêu?

A. $17(\text{m/s})$.

B. $18(\text{m/s})$.

C. $28(\text{m/s})$.

D. $13(\text{m/s})$.

Lời giải

Chọn C

Vận tốc của chuyển động là $v(t) = s'(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 12t + 10$.

Gia tốc của chuyển động là $a(t) = v'(t) = t^2 - 6t + 12 = (t - 3)^2 + 3$.

Vậy gia tốc đạt giá trị nhỏ nhất khi $t = 3$. Khi đó vận tốc của vật bằng $v(3) = 28(\text{m/s})$.

Câu 27: Cho hàm số $y = \cos x + m \sin 2x (C)$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị m để tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x = \pi$, $x = \frac{\pi}{3}$ song song hoặc trùng nhau.

A. $m = -\frac{\sqrt{3}}{6}$.

B. $m = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

C. $m = \sqrt{3}$.

D. $m = -2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = -\sin x + 2m \cos 2x$.

Theo đề: $y'(\pi) = y'\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow 2m = -\frac{\sqrt{3}}{2} - m \Leftrightarrow m = -\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 28: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \ln(x^2 - x + 1)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$.

A. $y = x - 1$.

B. $y = x + 1$.

C. $y = x + 1 - \ln 3$.

D. $y = x - 1 + \ln 3$.

Câu 29: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x + \sqrt{x^2 + 1}$ tại điểm có hoành độ $x = 0$ là:

A. $y = x - 1$.

B. $y = x + 1$.

C. $y = x - \sqrt{2}$.

D. $y = x + \sqrt{2}$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
B	C	B	D	D	C	B	C	D	C	C	B	B	B	D	D	B	D	D	D	D	D	A	B	C

26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
C	C	C	B	A	A	A	B	A	D	C	D	C	B	B	B	D	A	B	D	B	A	A	A	B

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 30: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \ln(x^2 - x + 1)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$.

- A.** $y = x - 1$. **B.** $y = x + 1$. **C.** $y = x + 1 - \ln 3$. **D.** $y = x - 1 + \ln 3$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } x = 1 \Rightarrow y = 0; y' = \frac{2x-1}{x^2-x+1} \Rightarrow y'(1) = 1.$$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $y = x - 1$

Câu 31: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x + \sqrt{x^2 + 1}$ tại điểm có hoành độ $x = 0$ là:

- A.** $y = x - 1$. **B.** $y = x + 1$. **C.** $y = x - \sqrt{2}$. **D.** $y = x + \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } x = 0 \Rightarrow y = 1; y' = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \Rightarrow y'(0) = 1.$$

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x + \sqrt{x^2 + 1}$ tại điểm có hoành độ $x = 0$ là: $y = x + 1$.

Câu 32: Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $(C): y = \frac{3}{2}x^4 + x^2 - 1$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: x + 8y = 0$.

- A. $y = -8x + \frac{13}{2}$. B. $y = 8x + \frac{13}{2}$. C. $y = -8x - \frac{13}{2}$. D. $y = 8x - \frac{13}{2}$.

Câu 33: Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $(C): y = \frac{3}{2}x^4 + x^2 - 1$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: x + 8y = 0$.

- A. $y = -8x + \frac{13}{2}$. B. $y = 8x + \frac{13}{2}$. C. $y = -8x - \frac{13}{2}$. **D. $y = 8x - \frac{13}{2}$.**

Lời giải

Chọn D

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M có dạng $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$

Ta có: $y' = 6x^3 + 2x \Rightarrow y'(x_0) = 6x_0^3 + 2x_0$.

Vì tiếp tuyến của đường cong $(C): y = \frac{3}{2}x^4 + x^2 - 1$ vuông góc với đường thẳng $d: x + 8y = 0$

nên $\left(-\frac{1}{8}\right)(6x_0^3 + 2x_0) = -1 \Leftrightarrow 6x_0^3 + 2x_0 - 8 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = \frac{3}{2}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến là: $y = 8(x - 1) + \frac{3}{2} \Leftrightarrow y = 8x - \frac{13}{2}$.

Câu 34: Cho $\left(\frac{2x^2 - 3x + 5}{x - 3}\right)' = \frac{ax^2 - bx + c}{(x - 3)^2}$. Tính $S = a + b + c$.

- A. $S = 0$. B. $S = 12$. C. $S = -6$. D. $S = 18$.

Câu 35: Cho $\left(\frac{2x^2 - 3x + 5}{x - 3}\right)' = \frac{ax^2 - bx + c}{(x - 3)^2}$. Tính $S = a + b + c$.

- A. $S = 0$. B. $S = 12$. C. $S = -6$. **D. $S = 18$.**

Lời giải

Chọn D

Ta có $\left(\frac{2x^2 - 3x + 5}{x - 3}\right)' = \frac{(4x - 3)(x - 3) - (2x^2 - 3x + 5)}{(x - 3)^2} = \frac{2x^2 - 12x + 4}{(x - 3)^2}$.

Theo giả thiết $\left(\frac{2x^2 - 3x + 5}{x - 3}\right)' = \frac{ax^2 - bx + c}{(x - 3)^2} \Rightarrow \frac{2x^2 - 12x + 4}{(x - 3)^2} = \frac{ax^2 - bx + c}{(x - 3)^2} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 12 \\ c = 4 \end{cases}$.

Vậy $S = a + b + c = 2 + 12 + 4 = 18$.

Câu 36: 1D5-1] Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ tại điểm $A(3; 1)$ là

- A. $y = -9x - 26$. **B. $y = 9x - 26$.** C. $y = -9x - 3$. D. $y = 9x - 2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow y'(3) = 3.3^2 - 6.3 = 9$.

Vậy phương trình tiếp tuyến tại điểm A là $y = 9(x - 3) + 1 \Leftrightarrow y = 9x - 26$.

Câu 1: (THPT Chuyên Hùng Vương-Phú Thọ-lần 1-NH2017-2018) Đạo hàm bậc 21 của hàm số

$$f(x) = \cos(x+a) \text{ là}$$

A. $f^{(21)}(x) = -\cos\left(x+a+\frac{\pi}{2}\right).$

B. $f^{(21)}(x) = -\sin\left(x+a+\frac{\pi}{2}\right).$

C. $f^{(21)}(x) = \cos\left(x+a+\frac{\pi}{2}\right).$

D. $f^{(21)}(x) = \sin\left(x+a+\frac{\pi}{2}\right).$

Lời giải

Chọn C

$$f'(x) = -\sin(x+a) = \cos\left(x+a+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = -\sin\left(x+a+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x+a+\frac{2\pi}{2}\right)$$

...

$$f^{(21)}(x) = \cos\left(x+a+\frac{21\pi}{2}\right) = \cos\left(x+a+\frac{\pi}{2}\right)$$

Câu 2: (THPT Nguyễn Khuyến-Nam Định-lần 1-năm 2017-2018) Có hai tiếp tuyến của đồ thị hàm số

$$y = \frac{3x-2}{x-1} \quad (C) \text{ đi qua điểm } A(9;0). \text{ Tích hệ số góc của hai tiếp tuyến đó bằng}$$

A. $-\frac{3}{8}.$

B. $\frac{3}{8}.$

C. $\frac{9}{64}.$

D. $-\frac{9}{64}.$

Lời giải

Chọn C

$$\text{TXĐ } \mathbb{R} \setminus \{1\}. \quad y' = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

Đường thẳng d đi qua điểm $A(9;0)$ với hệ số góc k có phương trình $y = k(x-9).$

Đường thẳng d tiếp xúc với đồ thị (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} \frac{3x-2}{x-1} = k(x-9) & (1) \\ \frac{-1}{(x-1)^2} = k & (2) \end{cases}$$

Thế (2) vào (1), ta có

$$\frac{3x-2}{x-1} = \frac{-1}{(x-1)^2} \cdot (x-9) \Leftrightarrow (3x-2)(x-1) = 9-x$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 4x - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{7}{3} \end{cases}$$

Do đó tích hệ số góc của hai tiếp tuyến đó bằng $y'(-1) \cdot y'\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{-1}{(-1-1)^2} \cdot \frac{-1}{\left(\frac{7}{3}-1\right)^2} = \frac{9}{64}$.

Cách 2. $y' = \frac{-1}{(x-1)^2}$.

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ A ($x_0 \neq 1$).

Phương trình tiếp tuyến là: $y = \frac{-1}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \frac{3x_0-2}{x_0-1}$.

Tiếp tuyến qua $A \Leftrightarrow \frac{x_0-9}{(x_0-1)^2} + \frac{3x_0-2}{x_0-1} = 0 \Leftrightarrow x_0-9 + (3x_0-2)(x_0-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = \frac{7}{3} \end{cases}$.

Hai hệ số góc của hai tiếp tuyến kẻ từ A là $y'(-1) \cdot y'\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{9}{64}$.

Câu 3: (THPT Hai Bà Trưng-Vĩnh Phúc-lần 1-năm 2017-2018) Trên đường thẳng $y = 2x + 1$ có bao

nhiều điểm kẻ được đến đồ thị (ξ) của hàm số $y = \frac{x+3}{x-1}$ đúng một tiếp tuyến?

A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Gọi $A(a; 2a+1) \in d : y = 2x + 1$.

Gọi k là hệ số góc của đường thẳng d' đi qua $A(a; 2a+1)$.

Suy ra phương trình $d' : y = k(x-a) + 2a+1$

Xét hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{x+3}{x-1} = k(x-a) + 2a+1 \\ \frac{-4}{(x-1)^2} = k \end{cases} \quad (1) \quad x \neq 1$$

$$\Rightarrow \frac{x+3}{x-1} = \frac{-4}{(x-1)^2}(x-a) + 2a+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ 2ax^2 - 2(2a+4)x + 6a+4 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Đề từ $A(a; 2a+1)$ chỉ kẻ được một tiếp tuyến đến (ξ) thì $\Leftrightarrow$ pt(1) có một nghiệm

$\Leftrightarrow$ pt(2) có một nghiệm khác 1.

Có các khả năng sau:

KN1: pt(2) là phương trình bậc nhất có nghiệm $x \neq 1$

ĐK: $\begin{cases} a = 0 \\ -8x + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2} : \text{T/m. Vậy } a = 0 \text{ là một giá trị cần tìm}$

KN2: pt(2) là phương trình bậc hai có nghiệm kép $x \neq 1$

$$\text{ĐK: } \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = (2a+4)^2 - 2a(6a+4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ -8a^2 + 8a + 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases} \\ x_1 = x_2 = \frac{2a+4}{2a} \neq 1 \end{cases}$$

KN3: pt(2) là phương trình bậc hai có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm $x = 1$

$$\text{ĐK: } \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = (2a+4)^2 - 2a(6a+4) > 0 \Leftrightarrow a = 1 \\ 2a - 2(2a+4) + 6a + 4 = 0 \end{cases}$$

KL: Có 4 giá trị a , tương ứng với 4 điểm thỏa mãn ycbt.

Câu 4: (THPT Việt Trì-Phú Thọ-lần 1-năm 2017-2018) Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có đồ thị (C) . Gọi

$A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ với $x_A > x_B$ là các điểm thuộc (C) sao cho các tiếp tuyến tại A , B song song với nhau và $AB = 6\sqrt{37}$. Tính $S = 2x_A - 3x_B$.

A. $S = -9$.

B. $S = 15$.

C. $S = 90$.

D. $S = -45$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 3.$$

Tiếp tuyến của (C) tại A , B song song với nhau

$$\Rightarrow y'(x_A) = y'(x_B) \Leftrightarrow 3x_A^2 - 3 = 3x_B^2 - 3 \Leftrightarrow x_A = -x_B, \text{ vì } x_A \neq x_B$$

Suy ra $A(x_A; x_A^3 - 3x_A + 1)$, $B(-x_A; -x_A^3 + 3x_A + 1)$, với $x_A > 0 > x_B$

$$\text{Ta lại có: } AB^2 = 4x_A^2 + (-2x_A^3 + 6x_A)^2 = 1332$$

$$\Leftrightarrow x_A^2 + x_A^2(x_A^4 - 6x_A^2 + 9) = 333 \Leftrightarrow x_A^6 - 6x_A^4 + 10x_A^2 - 333 = 0 \Leftrightarrow x_A = 3 \Rightarrow x_B = -3.$$

$$\text{Vậy } S = 2x_A - 3x_B = 15.$$

Câu 5: (THPT Ngô Sĩ Liên-Bắc Giang-lần 1-năm 2017-2018) Đạo hàm của hàm số $y = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x}$ tại

điểm $x = \frac{\pi}{6}$ là:

A. $-\frac{8}{3}$.

B. $\frac{8}{3}$.

C. $\frac{16}{3}$.

D. $-\frac{16}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{-\cos 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x} = -2 \cot 2x.$$

$$\text{Do đó } y' = -2 \frac{-2}{\sin^2 2x} = \frac{4}{\sin^2 2x} \Rightarrow y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{16}{3}.$$

Câu 6: (THPT Chuyên Hùng Vương-Bình Phước-lần 2-năm 2017-2018) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$. Trong các khẳng định

(I): Tồn tại một số $c \in (a; b)$ sao cho $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

(II): Nếu $f(a) = f(b)$ thì luôn tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

(III): Nếu $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(a; b)$ thì giữa hai nghiệm đó luôn tồn tại một nghiệm của $f'(x)$.

Số khẳng định đúng trong ba khẳng định trên là

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

(I) đúng (theo định lý Lagrange).

(II) đúng vì với $f(a) = f(b)$,

theo (I) suy ra tồn tại $c \in (a; b)$ sao cho $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$.

(III) đúng vì với $\alpha, \beta \in (a; b)$ sao cho $f(\alpha) = f(\beta) = 0$.

Ta có $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ nên $f(x)$ liên tục trên đoạn $[\alpha; \beta]$ và có đạo hàm trên khoảng $(\alpha; \beta)$.

Theo (II) suy ra luôn tồn tại một số $c \in (\alpha; \beta)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Câu 7: (THPT Số 3-486 tháng 12 năm 2017-2018) Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{x-2} - 27$ song song với trục hoành là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm. Vì tiếp tuyến song song trục hoành nên tiếp tuyến có hệ số góc

$y'(x_0) = 0$ và $y(x_0) \neq 0$.

Ta có $y' = \frac{2x^3 - 6x^2}{(x-2)^2}$. Do đó $y'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 2x_0^2(x_0 - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 3 \end{cases}$.

Ta có $y(0) = -27 \neq 0$ (nhận) và $y(3) = 0$ (loại vì khi đó tiếp tuyến trùng trục hoành).

Vậy chỉ có một tiếp tuyến thỏa mãn đề bài.

Câu 8: (THPT Số 3-486 tháng 12 năm 2017-2018) Có bao nhiêu điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = x(x^2 - 3)$ sao cho tiếp tuyến tại M của (C) cắt (C) và trục hoành lần lượt tại hai điểm phân biệt A (khác M) và B sao cho M là trung điểm của AB ?

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: y .

$$y = x(x^2 - 3) = x^3 - 3x \Rightarrow y' = 3x^2 - 3.$$

Phương trình tiếp tuyến (d) tại $M(x_0; x_0^3 - 3x_0)$ của (C) là

$$y = (3x_0^2 - 3)(x - x_0) + x_0^3 - 3x_0 \Rightarrow y = (3x_0^2 - 3)x - 2x_0^3.$$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C) :

$$(3x_0^2 - 3)x - 2x_0^3 = x^3 - 3x \Leftrightarrow x^3 - 3x_0^2x + 2x_0^3 = 0 \Leftrightarrow (x - x_0)^2(x + 2x_0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ x = -2x_0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x_A = -2x_0$, vì A khác M nên $x_0 \neq 0$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và trục hoành:

$$(3x_0^2 - 3)x - 2x_0^3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2x_0^3}{3x_0^2 - 3} \quad (x_0 \neq 1, x_0 \neq -1).$$

Khi đó $x_A = -2x_0$, $x_B = \frac{2x_0^3}{3x_0^2 - 3}$, $x_M = x_0$, $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$.

Do A, B và M thẳng hàng nên để M là trung điểm của AB thì

$$x_A + x_B = 2x_M \Rightarrow -2x_0 + \frac{2x_0^3}{3x_0^2 - 3} = 2x_0 \Rightarrow 10x_0^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \pm\sqrt{\frac{6}{5}}.$$

Vậy có 2 điểm M thỏa mãn bài toán.

Câu 9: (THPT Lục Ngạn-Bắc Ninh-lần 1 năm 2017-2018) Cho khai triển

$$(x-2)^{80} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{80}x^{80}.$$

Tổng $S = 1.a_1 + 2.a_2 + 3.a_3 + \dots + 80.a_{80}$ có giá trị là:

A. -70.

B. 80.

C. 70.

D. -80.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Đặt } f(x) = (x-2)^{80} = a_0 + a_1x + \dots + a_{80}x^{80}.$$

$$\text{Ta có } f'(x) = 80(x-2)^{79} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + 80a_{80}x^{79}.$$

$$\text{Thay } x = 1, \text{ ta được } 1.a_1 + 2.a_2 + \dots + 80.a_{80} = f'(1) = 80.(1-2)^{79} = -80.$$

Câu 10: (THPT Lục Ngạn-Bắc Ninh-lần 1 năm 2017-2018) Cho đồ thị $(C): y = \frac{x+2}{x-1}$, tiếp tuyến với đồ

thị (C) tại một điểm bất kì thuộc (C) luôn tạo với hai đường tiệm cận của (C) một tam giác có diện tích không đổi. Diện tích đó bằng

A. 8.

B. 4.

C. 10.

D. 6.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm; $y_0 = 1 + \frac{3}{x_0 - 1}$.

Ta có $y' = \frac{-3}{(x-1)^2}$ suy ra $y'(x_0) = \frac{-3}{(x_0 - 1)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(x_0; y_0)$ là $y = \frac{-3}{(x_0 - 1)^2}(x - x_0) + 1 + \frac{3}{x_0 - 1}$.

Phương trình tiệm cận đứng: $x - 1 = 0$.

Phương trình tiệm cận ngang: $y - 1 = 0$.

Gọi $I(1; 1)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận.

$A\left(1; 1 + \frac{6}{x_0 - 1}\right)$ là giao điểm của tiếp tuyến với tiệm cận đứng.

$B(2x_0 - 1; 1)$ là giao điểm của tiếp tuyến với tiệm cận ngang.

Diện tích tam giác IAB : $S = \frac{1}{2}.IA.IB = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{|x_0 - 1|} 2|x_0 - 1| = 6$.

Câu 1: (THPT Kiến An-Hải Phòng năm 2017-2018) Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = x^2 + 2x + 1$, M là điểm di động trên (C) ; Mt, Mz là các đường thẳng đi qua M sao cho Mt song song với trục tung đồng thời tiếp tuyến tại M là phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng Mt, Mz . Khi M di chuyển trên (C) thì Mz luôn đi qua điểm cố định nào dưới đây?

- A.** $M_0\left(-1; \frac{1}{4}\right)$. **B.** $M_0\left(-1; \frac{1}{2}\right)$. **C.** $M_0(-1; 1)$. **D.** $M_0(-1; 0)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi tọa độ điểm M là: $M(x_0; (x_0 + 1)^2)$.

Phương trình đường thẳng Mz có dạng: $y = k(x - x_0) + (x_0 + 1)^2 \Leftrightarrow kx - y - kx_0 + (x_0 + 1)^2 = 0$.

Phương trình đường thẳng Mt là: $x = x_0 \Leftrightarrow x - x_0 = 0$.

Phương trình đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng Mt, Mz là:

$$\frac{x - x_0}{1} - \frac{kx - y - kx_0 + (x_0 + 1)^2}{\sqrt{k^2 + 1}} = 0 \text{ hoặc } \frac{x - x_0}{1} + \frac{kx - y - kx_0 + (x_0 + 1)^2}{\sqrt{k^2 + 1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow y = (k + \sqrt{k^2 + 1})x + kx_0 - x_0\sqrt{k^2 + 1} + (x_0 + 1)^2$$

$$\text{hoặc } y = (k - \sqrt{k^2 + 1})x + kx_0 + x_0\sqrt{k^2 + 1} + (x_0 + 1)^2.$$

Mặt khác tiếp tuyến tại M là phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng Mt, Mz nên:

$$\begin{cases} y'(x_0) = k + \sqrt{k^2 + 1} \\ y'(x_0) = k - \sqrt{k^2 + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 + 2 = k + \sqrt{k^2 + 1} \\ 2x_0 + 2 = k - \sqrt{k^2 + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 1 = \frac{1}{2}(k + \sqrt{k^2 + 1}) \\ x_0 + 1 = \frac{1}{2}(k - \sqrt{k^2 + 1}) \end{cases} (*).$$

Thay (*) vào phương trình đường thẳng Mz ta có:

+) Với $x_0 + 1 = \frac{1}{2}(k + \sqrt{k^2 + 1})$ ta có:

$$Mz: kx - y - kx_0 + (x_0 + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow y = kx + k - k(x_0 + 1) + (x_0 + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow y = kx + k - k \cdot \frac{1}{2}(k + \sqrt{k^2 + 1}) + \left[\frac{1}{2}(k + \sqrt{k^2 + 1})\right]^2 \Leftrightarrow y = kx + k + \frac{1}{4}.$$

+) Với $x_0 + 1 = \frac{1}{2}(k - \sqrt{k^2 + 1})$ ta có:

$$Mz: kx - y - kx_0 + (x_0 + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow y = kx + k - k(x_0 + 1) + (x_0 + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow y = kx + k - k \cdot \frac{1}{2}(k - \sqrt{k^2 + 1}) + \left[\frac{1}{2}(k - \sqrt{k^2 + 1})\right]^2 \Leftrightarrow y = kx + k + \frac{1}{4}.$$

Do đó phương trình đường thẳng Mz : $y = kx + k + \frac{1}{4}$.

Gọi $M_0(x_0; y_0)$ là tọa độ điểm cố định mà Mz luôn đi qua ta có: $y_0 = kx_0 + k + \frac{1}{4} \forall k \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow k(x_0 + 1) + \frac{1}{4} - y_0 = 0 \forall k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 1 = 0 \\ \frac{1}{4} - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow M_0 \left(-1; \frac{1}{4} \right).$$

Vậy Mz luôn đi qua điểm cố định $M_0 \left(-1; \frac{1}{4} \right)$.

Câu 2: (THPT Chuyên Vĩnh Phúc-lần 3 MĐ 234 năm học 2017-2018) Cho hàm số

$$y = f(x) = \frac{1 - \cos 3x \cos 5x \cos 7x}{\sin^2 7x}. \text{ Tính } \lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

A. $\frac{83}{49}$.

B. $\frac{105}{49}$.

C. $\frac{15}{49}$.

D. $\frac{83}{98}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x \cos 5x \cos 7x}{\sin^2 7x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x + \cos 3x - \cos 3x \cos 5x + \cos 3x \cos 5x - \cos 3x \cos 5x \cos 7x}{\sin^2 7x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{\sin^2 7x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x(1 - \cos 5x)}{\sin^2 7x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x \cos 5x(1 - \cos 7x)}{\sin^2 7x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{3x}{2}}{\sin^2 7x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{5x}{2}}{\sin^2 7x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{7x}{2}}{\sin^2 7x} \\ &= \frac{2 \left(\frac{9}{4} + \frac{25}{4} + \frac{49}{4} \right)}{49} = \frac{83}{98}. \end{aligned}$$

Câu 3: (THPT Ninh Giang-Hải Dương năm 2017-2018) Cho hàm số: $y = \frac{2x+1}{x+1}$ (C). Số tiếp tuyến

của đồ thị (C) song song với đường thẳng $\Delta: y = x + 1$ là:

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Hàm số: } y = \frac{2x+1}{x+1} \text{ (C) có tập xác định } D = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \text{ và } y' = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến của (C), điều kiện $x_0 \neq -1$.

Vì tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $\Delta: y = x + 1$ nên tiếp tuyến có hệ số góc $k = 1$.

$$\text{Ta có: } \frac{1}{(x_0+1)^2} = 1 \Leftrightarrow (x_0+1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -2 \end{cases}.$$

Với $x_0 = 0$ có $M(0; 1)$, phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(0; 1)$ là: $y = 1(x - 0) + 1 = x + 1$.

Với $x_0 = -2$ có $M(-2;3)$, phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(-2;3)$ là:

$$y = 1(x+2) + 3 = x + 5.$$

Vậy có một tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $\Delta: y = x + 1$.

Câu 4: (THPT Chuyên Biên Hòa-Hà Nam-lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $[f(1+2x)]^2 = x - [f(1-x)]^3$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1.

A. $y = -\frac{1}{7}x - \frac{6}{7}$. **B.** $y = \frac{1}{7}x - \frac{8}{7}$. **C.** $y = -\frac{1}{7}x + \frac{8}{7}$. **D.** $y = -x + \frac{6}{7}$.

Lời giải

Chọn A

Từ giả thiết $[f(1+2x)]^2 = x - [f(1-x)]^3$, đặt $f(1) = a$ và $f'(1) = b$.

$$\text{Ta cho } x = 0 \Rightarrow a^2 = -a^3 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -1 \end{cases}.$$

Đạo hàm 2 vế ta được $4f(1+2x) \cdot f'(1+2x) = 1 + 3[f(1-x)]^2 f'(1-x)$.

Cho $x = 0$ ta có $4ab = 1 + 3a^2b$.

☒ Xét $a = 0$ thay vào $4ab = 1 + 3a^2b$ vô lý.

☒ Xét $a = -1$ thay vào $-4b = 1 + 3b \Leftrightarrow b = -\frac{1}{7}$. Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là

$$y = -\frac{1}{7}(x-1) - 1 = -\frac{1}{7}x - \frac{6}{7}.$$

Câu 5: (THPT Yên Định-Thanh Hóa-lần 1 năm 2017-2018) Lập phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f^2(1+2x) = x - f^3(1-x)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$?

A. $y = -\frac{1}{7}x - \frac{6}{7}$. **B.** $y = -\frac{1}{7}x + \frac{6}{7}$. **C.** $y = \frac{1}{7}x - \frac{6}{7}$. **D.** $y = \frac{1}{7}x + \frac{6}{7}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $f^2(1+2x) = x - f^3(1-x)$.

Suy ra $4 \cdot f(1+2x) \cdot f'(1+2x) = 1 + 3f^2(1-x) f'(1-x)$.

Cho $x = 0$ ta được $f^2(1) = -f^3(1)$, (1)

và $4 \cdot f(1) \cdot f'(1) = 1 + 3f^2(1) f'(1)$, (2).

Từ (1) suy ra $f(1) = -1$ vì $f(1) = 0$ không thỏa mãn (2).

Thay vào (2) ta được $f'(1) = -\frac{1}{7}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$ là:

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) \text{ hay } y = -\frac{1}{7}x - \frac{6}{7}.$$

Câu 6: (THPT Mộ Đức-Quảng Ngãi-lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại

$x = 1$. Gọi d_1, d_2 lần lượt là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x) = xf(2x-1)$ tại điểm có hoành độ $x = 1$. Biết rằng hai đường thẳng d_1, d_2 vuông góc với nhau, khẳng định nào sau đây đúng

- A.** $\sqrt{2} < |f(1)| < 2$. **B.** $|f(1)| \leq \sqrt{2}$. **C.** $|f(1)| \geq 2\sqrt{2}$. **D.** $2 \leq |f(1)| < 2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $g'(x) = f(2x-1) + 2x.f'(2x-1) \Rightarrow g'(1) = f(1) + 2f'(1)$.

d_1 có hệ số góc là $f'(1)$.

d_2 có hệ số góc là $g'(1) = f(1) + 2f'(1)$.

Mà $d_1 \perp d_2 \Rightarrow f'(1).g'(1) = -1 \Leftrightarrow f'(1).[f(1) + 2f'(1)] = -1 \Leftrightarrow f(1) = \frac{-2[f'(1)]^2 - 1}{f'(1)}$ (do

$$f'(1) \neq 0) \Rightarrow |f(1)| = \left| \frac{2[f'(1)]^2 + 1}{f'(1)} \right|.$$

Xét hàm số $h(t) = \left| \frac{2t^2 + 1}{t} \right|$

BBT:

t	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$				
$h'(t)$		$-$	0	$+$	$ $	$-$	0	$+$	
$h(t)$	$+\infty$		$+\infty$	$ $	$+\infty$		$2\sqrt{2}$		$+\infty$

Vậy $h(t) \geq 2\sqrt{2} \quad \forall t \neq 0 \Rightarrow |f(1)| \geq 2\sqrt{2}$.

Cách khác: Xét $h(t) = \left| \frac{2t^2 + 1}{t} \right|$

Với $t > 0$ ta có: $\left| \frac{2t^2 + 1}{t} \right| = \frac{2t^2 + 1}{t} = 2t + \frac{1}{t} \geq 2\sqrt{2t \cdot \frac{1}{t}} = 2\sqrt{2}$.

Với $t < 0$ ta có: $\left| \frac{2t^2 + 1}{t} \right| = -\frac{2t^2 + 1}{t} = (-2t) + \left(-\frac{1}{t}\right) \geq 2\sqrt{(-2t) \cdot \left(-\frac{1}{t}\right)} = 2\sqrt{2}$.

Vậy $h(t) \geq 2\sqrt{2} \quad \forall t \neq 0 \Rightarrow |f(1)| \geq 2\sqrt{2}$.

Câu 1: (THPT Phan Châu Trinh-DakLak-lần 2 năm 2017-2018) Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2$ có đồ thị (C) và điểm $M(m;0)$ sao cho từ M vẽ được ba tiếp tuyến đến đồ thị (C) , trong đó có hai tiếp tuyến vuông góc với nhau. Khi đó khẳng định nào sau đây đúng.

- A.** $m \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$. **B.** $m \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$. **C.** $m \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$. **D.** $m \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 3x^2 + 6x$.

Gọi $A(a; a^3 + 3a^2)$ thuộc đồ thị hàm số.

Phương trình tiếp tuyến d của đồ thị hàm số tại A là $y = (3a^2 + 6a)(x - a) + a^3 + 3a^2$.

$$M(m;0) \in d \Leftrightarrow (3a^2 + 6a)(m - a) + a^3 + 3a^2 = 0 \Leftrightarrow 2a^3 - 3(m-1)a^2 - 6ma = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 2a^2 - 3(m-1)a - 6m = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Khi $a = 0$ ta có phương trình tiếp tuyến $y = 0$.

Đối với đồ thị hàm số không có tiếp tuyến nào vuông góc với $y = 0$ nên yêu cầu bài toán tương đương phương trình (1) có hai nghiệm a_1 và a_2 khác 0 thỏa $y'(a_1) \cdot y'(a_2) = -1$

$$\Leftrightarrow (3a_1^2 + 6a_1)(3a_2^2 + 6a_2) = -1 \Leftrightarrow 9a_1 \cdot a_2 [a_1 \cdot a_2 + 2(a_1 + a_2) + 4] + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9(-3m)[-3m + 3(m-1) + 4] + 1 = 0 \Leftrightarrow -27m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{27}$$

Thay $m = \frac{1}{27}$ vào (1) thử lại có 2 nghiệm phân biệt khác 0.

Câu 2: (THPT Can Lộc-Hà Tĩnh-lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $[f(2x+1)]^2 + [f(1-x)]^3 = x$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 1.

Câu này gõ sai đáp án nên không có đáp án nào đúng, em đã sửa lại đáp án B

- A.** $y = \frac{1}{7}x - \frac{6}{7}$. **B.** $y = -\frac{1}{7}x + \frac{6}{7}$. **C.** $y = \frac{1}{7}x - \frac{5}{7}$. **D.** $y = -\frac{1}{7}x + \frac{6}{7}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Từ } [f(2x+1)]^2 + [f(1-x)]^3 = x \quad (*), \text{ cho } x=0 \text{ ta có } [f(1)]^2 + [f(1)]^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(1) = -1 \end{cases}$$

Đạo hàm hai vế của (*) ta được $4 \cdot f(2x+1) \cdot f'(2x+1) - 3[f(1-x)]^2 \cdot f'(1-x) = 1$.

$$\text{Cho } x=0 \text{ ta được } 4f(1) \cdot f'(1) - 3[f(1)]^2 \cdot f'(1) = 1 \Leftrightarrow f(1) \cdot f'(1) \cdot [4 - 3f(1)] = 1 \quad (**).$$

Nếu $f(1) = 0$ thì (**) vô lý, do đó $f(1) = -1$, khi đó (**) trở thành

$$-f'(1) \cdot [4+3] = 1 \Leftrightarrow f'(1) = -\frac{1}{7}$$

$$\text{Phương trình tiếp tuyến } y = -\frac{1}{7}(x-1)-1 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{7}x + \frac{6}{7}.$$

Câu 3: (THPT Chuyên Hùng Vương-Phú Thọ-lần 2 năm 2017-2018) Cho hàm số

$y = \sin 3x \cdot \cos x - \sin 2x$. Giá trị của $y^{(10)}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ gần nhất với số nào dưới đây?

- A.** 454492. **B.** 2454493. **C.** 454491. **D.** 454490.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y = \sin 3x \cdot \cos x - \sin 2x = \frac{1}{2}(\sin 4x + \sin 2x) - \sin 2x = \frac{1}{2}(\sin 4x - \sin 2x)$$

$$\text{Mặt khác theo quy nạp ta chứng minh được } (\sin ax)^{(n)} = (-1)^{n-1} a^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} - ax\right)$$

$$\text{Do đó } y^{(10)}(x) = \frac{1}{2}\left((-1)^9 4^{10} \cdot \sin(5\pi - 4x) - (-1)^9 \cdot 2^{10} \cdot \sin(5\pi - 2x)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-4^{10} \cdot \sin 4x + 2^{10} \sin 2x\right)$$

$$\Rightarrow y^{(10)}\left(\frac{\pi}{3}\right) \approx 454490.13$$

Câu 4: (THTT số 6-489 tháng 3 năm 2018) Cho hàm số $y = \sqrt{1+3x-x^2}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A.** $(y')^2 + y \cdot y'' = -1$. **B.** $(y')^2 + 2y \cdot y'' = 1$. **C.** $y \cdot y'' - (y')^2 = 1$. **D.** $(y')^2 + y \cdot y'' = 1$.

Lời giải

Chọn A

$$y = \sqrt{1+3x-x^2} \Rightarrow y^2 = 1+3x-x^2$$

$$\Rightarrow 2y \cdot y' = 3-2x \Rightarrow 2 \cdot (y')^2 + 2y \cdot y'' = -2 \Rightarrow (y')^2 + y \cdot y'' = -1$$

Câu 5: (THTT số 6-489 tháng 3 năm 2018) Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x} & \text{khi } 0 < x < x_0 \\ x^2 + 12 & \text{khi } x \geq x_0 \end{cases}$. Biết rằng ta

luôn tìm được một số dương x_0 và một số thực a để hàm số f có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$. Tính giá trị $S = x_0 + a$.

- A.** $S = 2(3-2\sqrt{2})$. **B.** $S = 2(1+4\sqrt{2})$. **C.** $S = 2(3-4\sqrt{2})$. **D.** $S = 2(3+2\sqrt{2})$.

Lời giải

Chọn B

+ Khi $0 < x < x_0$: $f(x) = a\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{x}}$. Ta có $f'(x)$ xác định trên $(0; x_0)$ nên liên

tục trên khoảng $(0; x_0)$.

+ Khi $x > x_0$: $f(x) = x^2 + 12 \Rightarrow f'(x) = 2x$. Ta có $f'(x)$ xác định trên $(x_0; +\infty)$ nên liên tục trên khoảng $(x_0; +\infty)$.

+ Tại $x = x_0$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{a\sqrt{x} - a\sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{a(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{a}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{a}{2\sqrt{x_0}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{x^2 + 12 - (x_0^2 + 12)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} (x + x_0) = 2x_0.$$

Hàm số f có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Leftrightarrow \frac{a}{2\sqrt{x_0}} = 2x_0.$$

Khi đó $f'(x_0) = \frac{a}{2\sqrt{x_0}} = 2x_0$ và $f'(x) = \begin{cases} \frac{a}{2\sqrt{x}} & \text{khi } 0 < x < x_0 \\ 2x & \text{khi } x \geq x_0 \end{cases}$ nên hàm số f có đạo hàm liên

tục trên khoảng $(0; +\infty)$.

$$\text{Ta có } \frac{a}{2\sqrt{x_0}} = 2x_0 \Leftrightarrow a = 4x_0\sqrt{x_0} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác: Hàm số } f \text{ liên tục tại } x_0 \text{ nên } x_0^2 + 12 = a\sqrt{x_0} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $x_0 = 2$ và $a = 8\sqrt{2}$

$$\text{Vậy } S = a + x_0 = 2(1 + 4\sqrt{2}).$$

Câu 6: (THPT Đặng Thúc Hứa-Nghệ An-lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số

$y = x^3 + 3mx^2 + (m+1)x + 1$ có đồ thị (C) . Biết rằng khi $m = m_0$ thì tiếp tuyến với đồ thị (C)

tại điểm có hoành độ bằng $x_0 = -1$ đi qua $A(1; 3)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $-1 < m_0 < 0$. **B.** $0 < m_0 < 1$. **C.** $1 < m_0 < 2$. **D.** $-2 < m_0 < -1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 3x^2 + 6mx + m + 1$.

Với $x_0 = -1$ thì $y_0 = 2m - 1$, gọi $B(-1; 2m - 1) \Rightarrow \overline{AB} = (-2; 2m - 4)$.

Tiếp tuyến tại B đi qua A nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k = -m + 2$.

Mặt khác: hệ số góc của tiếp tuyến là $k = y'(x_0)$.

Do đó ta có: $3(x_0)^2 + 6m_0x_0 + m_0 + 1 = -m_0 + 2$

$$\Leftrightarrow 3 - 6m_0 + m_0 + 1 = -m_0 + 2 \Leftrightarrow -4m_0 = -2 \Leftrightarrow m_0 = \frac{1}{2}.$$

Câu 7: (THPT Đặng Thúc Hứa-Nghệ An-lần 1 năm 2017-2018) Cho hàm số

$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ ax - b - 1 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$. Khi hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0 = 0$. Hãy tính

$T = a + 2b$.

- A.** $T = -4$. **B.** $T = 0$. **C.** $T = -6$. **D.** $T = 4$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(0) = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax^2 + bx + 1) = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax - b - 1) = -b - 1.$$

Để hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 0$ thì hàm số phải liên tục tại $x_0 = 0$ nên

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x). \text{ Suy ra } -b - 1 = 1 \Leftrightarrow b = -2.$$

$$\text{Khi đó } f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x + 1, & x \geq 0 \\ ax + 1, & x < 0 \end{cases}.$$

Xét:

$$+) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax^2 - 2x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax - 2) = -2.$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (a) = a.$$

Hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 0$ thì $a = -2$.

Vậy với $a = -2, b = -2$ thì hàm số có đạo hàm tại $x_0 = 0$ khi đó $T = -6$.

Câu 8: (SGD Phú Thọ – lần 1 - năm 2017 – 2018) Cho hàm số $y = \sin^2 x$. Tính $y^{(2018)}(\pi)$.

A. $y^{(2018)}(\pi) = 2^{2017}$. **B.** $y^{(2018)}(\pi) = 2^{2018}$. **C.** $y^{(2018)}(\pi) = -2^{2017}$. **D.** $y^{(2018)}(\pi) = -2^{2018}$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y = \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

$$\text{Khi đó } y' = \sin 2x; \quad y'' = 2 \cdot \cos 2x = 2 \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right); \quad y''' = -2^2 \cdot \sin 2x = 2^2 \cdot \sin\left(2x + \pi\right) \dots$$

$$y^{(n)} = 2^{n-1} \sin\left[2x + \frac{(n-1)\pi}{2}\right].$$

$$\text{Vậy } y^{(2018)} = 2^{2017} \cdot \sin\left(2 \cdot \pi + \frac{2017\pi}{2}\right) = 2^{2017} \cdot \sin\left(1010\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 2^{2017}.$$

Câu 9: (SGD Phú Thọ – lần 1 - năm 2017 – 2018) Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C) và

điểm $A(0; a)$. Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của a trong đoạn $[-2018; 2018]$ để từ điểm A kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) sao cho hai tiếp điểm nằm về hai phía của trục hoành?

A. 2017. **B.** 2020. **C.** 2018. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng d đi qua điểm $A(0; a)$, hệ số góc k có phương trình: $y = kx + a$.

Để d là tiếp tuyến của (C) thì hệ phương trình $\begin{cases} \frac{x+2}{x-1} = kx + a & (*) \\ \frac{-3}{(x-1)^2} = k & (**) \end{cases}$ có nghiệm.

Thay $(**)$ vào $(*)$ ta được: $\frac{x+2}{x-1} = \frac{-3x}{(x-1)^2} + a$

$$\Leftrightarrow (a-1)x^2 - 2(a+2)x + a+2 = 0 \text{ với } x \neq 1. \quad (1)$$

Do từ A kẻ được hai tiếp tuyến đến (C) nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 1 \\ \Delta' = 3(a+2) > 0 \\ a-1-2(a+2)+a+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -2 \\ a \neq 1 \end{cases}. \quad (2)$$

Khi đó tọa độ hai tiếp điểm là $M\left(x_1; \frac{x_1+2}{x_1-1}\right)$ và $N\left(x_2; \frac{x_2+2}{x_2-1}\right)$ với x_1, x_2 là nghiệm của (1)

$$\text{do đó } x_1 + x_2 = \frac{2(a+2)}{a-1}, \quad x_1 x_2 = \frac{a+2}{a-1}.$$

Hai tiếp điểm nằm về hai phía của trục hoành khi

$$\frac{x_1+2}{x_1-1} \cdot \frac{x_2+2}{x_2-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4}{x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1} < 0 \Leftrightarrow \frac{9a+6}{-3} < 0 \Leftrightarrow a > -\frac{2}{3}.$$

Kết hợp điều kiện (2) suy ra $\begin{cases} a > -\frac{2}{3} \\ a \neq 1 \end{cases}$ nên trên đoạn $[-2018; 2018]$ số giá trị nguyên của a

thỏa yêu cầu bài toán là 2018.

Câu 10: (THPT Yên Lạc – Vĩnh Phúc – lần 4 - năm 2017 – 2018) Gọi S là tập hợp các điểm thuộc đường thẳng $y = 2$ mà qua mỗi điểm thuộc S đều kẻ được hai tiếp tuyến phân biệt tới đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{x-1}$ đồng thời hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau. Tính tổng hoành độ T của tất cả các điểm thuộc S .

A. $T = 2\sqrt{3}$.

B. $T = 3$.

C. $T = -1$.

D. $T = 2$.

Lời giải

Chọn D

$$y = \frac{x^2}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}$$

Gọi điểm $A(a; 2) \in (d): y = 2$. Đường thẳng đi qua A có dạng $y = k(x-a) + 2$

$$\text{Điều kiện tiếp xúc: } \begin{cases} \frac{x^2}{x-1} = k(x-a) + 2 \\ \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = k \end{cases} \Rightarrow (1-a)^2 k^2 - 4k - 4 = 0$$

$$\text{Để 2 tiếp tuyến vuông góc nhau} \Rightarrow \frac{-4}{(1-a)^2} = -1 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -1 \end{cases}$$

Vậy tổng hai hoành độ là 2.

Câu 11: (THPT Hồng Bàng – Hải Phòng – năm 2017 – 2018) Phương trình tiếp tuyến với đồ thị $(C): y = 2x^3 - 6x^2 + 3$ có hệ số góc nhỏ nhất là

- A.** $6x + y - 5 = 0$. **B.** $6x + y + 5 = 0$. **C.** $6x - y + 3 = 0$. **D.** $6x + y - 7 = 0$.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 6x^2 - 12x.$$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại x_0 là $k = y'(x_0)$.

$$\Leftrightarrow k = 6x_0^2 - 12x_0 = 6(x_0^2 - 2x_0) = 6(x_0 - 1)^2 - 6 \geq -6.$$

Hệ số góc nhỏ nhất bằng -6 khi $x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = -1$.

Phương trình tiếp tuyến là $y = -6(x - 1) - 1 \Leftrightarrow 6x + y - 5 = 0$.

Câu 12: (THPT Chuyên Thoại Ngọc Hầu – An Giang - Lần 3 năm 2017 – 2018) Gọi

$M(x_M; y_M)$ là một điểm thuộc $(C): y = x^3 - 3x^2 + 2$, biết tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) tại điểm $N(x_N; y_N)$ (khác M) sao cho $P = 5x_M^2 + x_N^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính OM .

- A.** $OM = \frac{5\sqrt{10}}{27}$. **B.** $OM = \frac{7\sqrt{10}}{27}$. **C.** $OM = \frac{\sqrt{10}}{27}$. **D.** $OM = \frac{10\sqrt{10}}{27}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 6x$.

Gọi $M(x_M; y_M)$ là một điểm thuộc $(C): y = x^3 - 3x^2 + 2$, suy ra tiếp tuyến của (C) tại M có phương trình là $y = (3x_M^2 - 6x_M)(x - x_M) + x_M^3 - 3x_M^2 + 2$.

Tiếp tuyến của (C) tại M cắt (C) tại điểm $N(x_N; y_N)$ (khác M) nên x_M, x_N là nghiệm của phương trình: $x^3 - 3x^2 + 2 = (3x_M^2 - 6x_M)(x - x_M) + x_M^3 - 3x_M^2 + 2$

$$\Leftrightarrow (x^3 - x_M^3) - 3(x^2 - x_M^2) - (3x_M^2 - 6x_M)(x - x_M) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - x_M)^2 (x + 2x_M - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_M \\ x = -2x_M + 3 \end{cases} \Rightarrow x_N = -2x_M + 3.$$

$$\text{Khi đó } P = 5x_M^2 + x_N^2 = 5x_M^2 + (-2x_M + 3)^2 = 9x_M^2 - 12x_M + 9 \geq 9\left(x_M - \frac{2}{3}\right)^2 + 5.$$

$$\text{Vậy } P \text{ đạt giá trị nhỏ nhất bằng } 5 \text{ khi } x_M = \frac{2}{3}. \text{ Khi đó } M\left(\frac{2}{3}; \frac{26}{27}\right) \Rightarrow OM = \frac{10\sqrt{10}}{27}.$$

Câu 13: (THPT Thuận Thành 2 – Bắc Ninh - Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$ có đồ thị (C) và điểm $A(1; a)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để có đúng hai tiếp tuyến của (C) đi qua A ?

- A.** 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x_0; \sqrt{x_0^2 - 2x_0 + 3})$ là tiếp điểm.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M có dạng là $y - \sqrt{x_0^2 - 2x_0 + 3} = \frac{x_0 - 1}{\sqrt{x_0^2 - 2x_0 + 3}}(x - x_0)$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x_0 - 1}{\sqrt{x_0^2 - 2x_0 + 3}} \cdot x + \frac{3 - x_0}{\sqrt{x_0^2 - 2x_0 + 3}}.$$

Vì tiếp tuyến của (C) tại M đi qua điểm $A(1; a)$ nên ta có:

$$a = \frac{x_0 - 1}{\sqrt{x_0^2 - 2x_0 + 3}} + \frac{3 - x_0}{\sqrt{x_0^2 - 2x_0 + 3}} = \frac{2}{\sqrt{x_0^2 - 2x_0 + 3}} \Leftrightarrow a\sqrt{x_0^2 - 2x_0 + 3} = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a^2(x_0^2 - 2x_0 + 3) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a^2x_0^2 - 2ax_0 + 3a^2 - 4 = 0(*) \end{cases}.$$

Vì qua A kẻ được đúng hai tiếp tuyến đến (C) nên $(*)$ phải có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' = -3a^4 + 5a^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' = -3a^2 + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ -\frac{\sqrt{15}}{3} < a < \frac{\sqrt{15}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < \frac{\sqrt{15}}{3}.$$

Vì $a \in \mathbb{Z}$ nên $a = 1$.

Câu 14: (ĐHQG TPHCM – Cơ Sở 2 – năm 2017 – 2018) Cho đồ thị $(C): y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ và điểm $A(m; -10)$. Gọi S là tập tất cả các giá trị thực của m để có đúng 2 tiếp tuyến của (C) qua A . Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

- A. 3. B. 5. C. $\frac{19}{4}$. D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi d là đường thẳng qua $A(m; -10)$ có hệ số góc k .

Suy ra $d: y = k(x - m) - 10$.

d là tiếp tuyến của (C) khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x + 10 = k(x - m) - 10 & (1) \\ 3x^2 - 6x - 9 = k \end{cases}$$

Thế k vào (1), ta được $2x^3 - (3m + 3)x^2 + 6mx + 9m - 20 = 0$ (*).

Để có đúng 2 tiếp tuyến của (C) qua A thì phương trình (*) có 2 nghiệm.

Suy ra đồ thị hàm số $f(x) = 2x^3 - (3m + 3)x^2 + 6mx + 9m - 20$ có 2 cực trị, trong đó có 1 cực trị thuộc trục hoành.

Ta có $f'(x) = 6x^2 - 2(3m + 3)x + 6m$.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow f(1) = 12m - 21 \\ x = m \Rightarrow f(m) = -m^3 + 3m^2 + 9m - 20 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} 12m - 21 = 0 \\ -m^3 + 3m^2 + 9m - 20 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{7}{4} \\ m = 4 \\ m = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ \frac{7}{4}; 4; \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2} \right\}. \text{ Suy ra } T = \frac{7}{4} + 4 + \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} + \frac{-1 - \sqrt{21}}{2} = \frac{19}{4}.$$

Câu 15: (THPT Trần Phú – Đà Nẵng - Lần 2 – năm 2017 – 2018) Cho hàm số $y = x^3 - mx^2 - mx + 2m - 3$ có đồ thị là (C) , với m là tham số thực. Gọi T là tập tất cả các giá trị nguyên của m để mọi đường thẳng tiếp xúc với (C) đều có hệ số góc dương. Tính tổng các phần tử của T .

A. 3.

B. 6.

C. -6.

D. -3.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 3x^2 - 2mx - m$. Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ suy ra hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại

$$M \text{ có hệ số góc là } k = y'(x_0) = 3x_0^2 - 2mx_0 - m = 3\left(x_0 - \frac{m}{3}\right)^2 - \left(\frac{m^2}{3} + m\right) \geq -\left(\frac{m^2 + 3m}{3}\right).$$

Để mọi đường thẳng tiếp xúc với (C) đều có hệ số góc dương thì :

$$-\left(\frac{m^2 + 3m}{3}\right) > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{m^2 + 3m}{3}\right) < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 0.$$

$\Rightarrow$ Tập các giá trị nguyên của m là: $T = \{-2; -1\}$. Vậy tổng các phần tử của T là: -3.

Câu 1: (Tạp chí THPT – Tháng 4 năm 2017 – 2018) Cho hàm số $f(x) = (x+1)\left(1+\frac{x}{2}\right)^2 \dots \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, với $n \in \mathbb{N}^*$. Giá trị $f'(0)$ bằng?

- A. 0. B. 1. C. n . D. $\frac{1}{n}$.

Lời giải

Chọn C

Xét với $x \geq 0$.

Ta có: $f(0) = (1+0)(1+0)^2 \dots (1+0)^n = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } f(x) &= (x+1)\left(1+\frac{x}{2}\right)^2 \dots \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \Leftrightarrow \ln f(x) = \ln \left[(x+1)\left(1+\frac{x}{2}\right)^2 \dots \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \right] \\ &\Leftrightarrow \ln f(x) = \ln(x+1) + 2\ln\left(1+\frac{x}{2}\right) + \dots + n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right). \end{aligned}$$

Lấy đạo hàm hai vế ta được:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{1+\frac{x}{2}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{x}{n}} \Rightarrow f'(0) = \underbrace{(1+1+\dots+1)}_n \cdot f(0) = n.$$

Vậy $f'(0) = n$.

Câu 2: (THPT Chuyên Lương Thế Vinh - Hà Nội - Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho hàm số $y = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{khi } x \geq 2 \\ x^3 - x^2 - 8x + 10 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Biết hàm số có đạo hàm tại điểm $x = 2$. Giá trị của $a^2 + b^2$ bằng

- A. 20. B. 17. C. 18. D. 25.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y = \begin{cases} x^2 + ax + b & \text{khi } x \geq 2 \\ x^3 - x^2 - 8x + 10 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y' = \begin{cases} 2x + a & \text{khi } x \geq 2 \\ 3x^2 - 2x - 8 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$$

Hàm số có đạo hàm tại điểm $x = 2 \Rightarrow 4 + a = 0 \Rightarrow a = -4$.

Mặt khác hàm số có đạo hàm tại điểm $x = 2$ thì hàm số liên tục tại điểm $x = 2$.

$$\text{Suy ra } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$$

$$\Rightarrow 4 + 2a + b = -2 \Rightarrow b = 2.$$

$$\text{Vậy } a^2 + b^2 = 20.$$

Câu 3: (THPT Nghèn – Hà Tĩnh – Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho $S = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + 4C_n^4 + \dots + nC_n^n$. Biết $S \vdots 5$. Hỏi có bao nhiêu giá trị của n thỏa mãn biết $40 < n < 100$.

- A. 11. B. 10. C. 12. D. 13.

Lời giải

Chọn A

Ta có $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + C_n^4 x^4 + \dots + C_n^n x^n$.

Lấy đạo hàm 2 vế ta được: $n(1+x)^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 x + 3C_n^3 x^2 + 4C_n^4 x^3 + \dots + nC_n^n x^{n-1}$.

Cho $x=1$ ta có $n.2^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + 4C_n^4 + \dots + nC_n^n$.

Suy ra $S = n.2^{n-1}$. Theo giả thiết $S \vdots 5$ nên $n \vdots 5$

Giả sử $n = 5k$, mà $40 < n < 100$ suy ra $8 < k < 20$.

Vậy có 11 giá trị n thỏa mãn.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = (2018+x)(2017+2x)(2016+3x)\dots(1+2018x)$. Tính $f'(1)$.

- A. 2019.2018^{1009} . B. 2018.1009^{2019} . **C. 1009.2019^{2018}** . D. 2018.2019^{1009} .

Lời giải

Chọn C

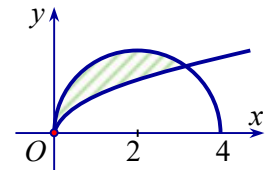
$$f'(x) = (2017+2x)(2016+3x)\dots(1+2018x) + \dots + (2018+x)(2017+2x)(2016+3x)\dots 2018 + (2018+x).2.(2016+3x)\dots(1+2018x).$$

Suy ra

$$f'(1) = 2019^{2017} + 2.2019^{2017} + 3.2019^{2017} + \dots + 2018.2019^{2017} = 2019^{2017} (1+2+3+\dots+2018) \\ = 2019^{2017} \cdot \frac{2018.2019}{2} = 1009.2019^{2018}.$$

Câu 5: Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (m-1)x + 2m$ (C_m). Gọi S là tập tất cả các giá trị của m để từ điểm $M(1;2)$ kẻ được đúng 2 tiếp tuyến với (C_m). Tổng tất cả các phần tử của tập S là

- A. $\frac{4}{3}$. B. $\frac{81}{109}$.
C. $\frac{3}{4}$. **D. $\frac{217}{81}$** .



Câu 6: Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (m-1)x + 2m$ (C_m). Gọi S là tập tất cả các giá trị của m để từ điểm $M(1;2)$ kẻ được đúng 2 tiếp tuyến với (C_m). Tổng tất cả các phần tử của tập S là

- A. $\frac{4}{3}$. B. $\frac{81}{109}$. C. $\frac{3}{4}$. **D. $\frac{217}{81}$** .

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 3x^2 - 4x + (m-1)$.

Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $M(1;2)$ là $y = kx - k + 2$.

Điều kiện tiếp xúc của (C_m) và tiếp tuyến là
$$\begin{cases} x^3 - 2x^2 + (m-1)x + 2m = kx - k + 2 & (1) \\ 3x^2 - 4x + (m-1) = k & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta có:

$$x^3 - 2x^2 + (m-1)x + 2m = 3x^2 - 4x + (m-1)x - 3x^2 + 4x - (m-1) + 2.$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 5x^2 + 4x - 3(m-1) = 0(*).$$

Đề qua $M(1;2)$ kẻ được đúng 2 tiếp tuyến với (C_m) thì phương trình (*) có đúng 2 nghiệm phân biệt.

(*) là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị
$$\begin{cases} y = 2x^3 - 5x^2 + 4x \\ y = 3(m-1) \end{cases}$$

Xét $y = 2x^3 - 5x^2 + 4x$:

$$y' = 6x^2 - 10x + 4.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		1		$\frac{28}{27}$		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên: để (*) có đúng 2 nghiệm phân biệt thì:
$$\begin{cases} 3(m-1) = 1 \\ 3(m-1) = \frac{28}{27} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{4}{3} \\ m = \frac{109}{81} \end{cases}.$$

Do đó: $S = \left\{ \frac{4}{3}; \frac{109}{81} \right\}.$

Vậy tổng các phần tử của S là $\frac{217}{81}.$

Câu 7: Tổng $C_{2018}^1 - 2.5C_{2018}^2 + 3.5^2C_{2018}^3 - \dots - 2018.5^{2017}C_{2018}^{2018}$ bằng

- A. $-1009.2^{4034}.$ B. $-1009.2^{4035}.$
C. $1009.2^{4035}.$ D. $1009.2^{4034}.$

Câu 8: Tổng $C_{2018}^1 - 2.5C_{2018}^2 + 3.5^2C_{2018}^3 - \dots - 2018.5^{2017}C_{2018}^{2018}$ bằng

- A. $-1009.2^{4034}.$ B. $-1009.2^{4035}.$ C. $1009.2^{4035}.$ D. $1009.2^{4034}.$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $(1-x)^{2018} = C_{2018}^0 - xC_{2018}^1 + x^2C_{2018}^2 - x^3C_{2018}^3 + \dots + x^{2018}C_{2018}^{2018}.$

Suy ra: $-(1-x)^{2018} = -C_{2018}^0 + xC_{2018}^1 - x^2C_{2018}^2 + x^3C_{2018}^3 - \dots - x^{2018}C_{2018}^{2018}.$

Lấy đạo hàm hai vế, ta được:

$$2018(1-x)^{2017} = C_{2018}^1 - 2xC_{2018}^2 + 3x^2C_{2018}^3 - \dots - 2018x^{2017}C_{2018}^{2018}.$$

Cho $x = 5$. Khi đó:

$$C_{2018}^1 - 2.5C_{2018}^2 + 3.5^2C_{2018}^3 - \dots - 2018.5^{2017}C_{2018}^{2018} = 2018.(1-5)^{2017} = 2018.(-4)^{2017} = -1009.2^{4035}.$$

Câu 9: Trên đồ thị (C) của hàm số $y = x^3 - 3x$ có bao nhiêu điểm M mà tiếp tuyến với (C) tại M cắt (C) tại điểm thứ hai N thỏa mãn $MN = \sqrt{333}.$

- A. 0. B. 4. C. 1. D. 2.

Câu 14: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ có đồ thị (C) và điểm $A(m; 2)$. Tìm tập hợp S là tập tất cả các giá trị thực của m để có ba tiếp tuyến của (C) đi qua A .

A. $S = (-\infty; -1) \cup \left(\frac{4}{3}; 2\right) \cup (2; +\infty)$.

B. $S = (-\infty; -2) \cup \left(\frac{5}{3}; 2\right) \cup (2; +\infty)$.

C. $S = (-\infty; -1) \cup \left(\frac{5}{3}; 2\right) \cup (2; +\infty)$.

D. $S = (-\infty; -1) \cup \left(\frac{5}{3}; 3\right) \cup (3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

* Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(x_0; y_0)$ là

$$y = (-3x_0^2 + 6x_0)(x - x_0) - x_0^3 + 3x_0^2 - 2.$$

* Để tiếp tuyến đi qua $A(m; 2)$ điều kiện là $2 = (-3x_0^2 + 6x_0)(m - x_0) - x_0^3 + 3x_0^2 - 2$

$$\Leftrightarrow (3x_0^2 - 6x_0)m = 2x_0^3 - 3x_0^2 - 4 \quad (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ 2x_0^2 + (1 - 3m)x_0 + 2 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Để có ba tiếp tuyến của (C) đi qua A điều kiện là phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \text{phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt đều khác 2} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9m^2 - 6m - 15 > 0 \\ m \neq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m \in S = (-\infty; -1) \cup \left(\frac{5}{3}; 2\right) \cup (2; +\infty).$$

Câu 15: Cho hàm số $(C_m): y = x^3 - 2x^2 + (m-1)x + 2m$, với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để từ điểm $M(1; 2)$ có thể vẽ đến (C_m) đúng hai tiếp tuyến.

A. $m < \frac{4}{3}$.

B. $\frac{4}{3} < m < \frac{109}{81}$.

C. $m > \frac{109}{81}$.

D. $m = \frac{4}{3}$ hoặc $m = \frac{109}{81}$.

Câu 16: Cho hàm số $(C_m): y = x^3 - 2x^2 + (m-1)x + 2m$, với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để từ điểm $M(1; 2)$ có thể vẽ đến (C_m) đúng hai tiếp tuyến.

A. $m < \frac{4}{3}$.

B. $\frac{4}{3} < m < \frac{109}{81}$.

C. $m > \frac{109}{81}$.

D. $m = \frac{4}{3}$ hoặc $m = \frac{109}{81}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 3x^2 - 4x + m - 1$. Giả sử $A(a; a^3 - 2a^2 + (m-1)a + 2m)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến.

Phương trình tiếp tuyến tại A là $y = (3a^2 - 4a + m - 1)(x - a) + a^3 - 2a^2 + (m-1)a + 2m$.

Do tiếp tuyến qua $M(1; 2)$ nên: $2 = (3a^2 - 4a + m - 1)(1 - a) + a^3 - 2a^2 + (m-1)a + 2m$

$$\Leftrightarrow -2a^3 + 5a^2 - 4a + 3m - 3 = 0 \quad (*).$$

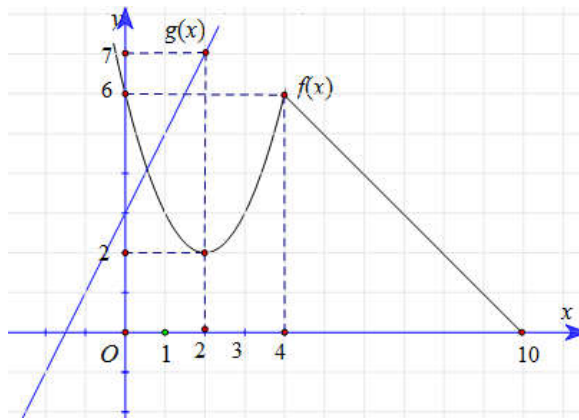
Để từ M kẻ được hai tiếp tuyến đến đồ thị (C_m) thì $(*)$ có đúng hai nghiệm.

Xét hàm số $g(a) = -2a^3 + 5a^2 - 4a + 3m - 3$, $g'(a) = -6a^2 + 10a - 4$, $g'(a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = \frac{2}{3} \end{cases}$.

Do đó $y_{CT} = 3m - \frac{109}{27}$, $y_{CD} = 3m - 4$.

Để (*) có đúng hai nghiệm thì $\begin{cases} y_{CT} = 0 \\ y_{CD} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{4}{3} \\ m = \frac{109}{81} \end{cases}$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)$, $g(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Tính $h'(2)$ (đạo hàm của hàm số $h(x)$ tại $x = 2$).

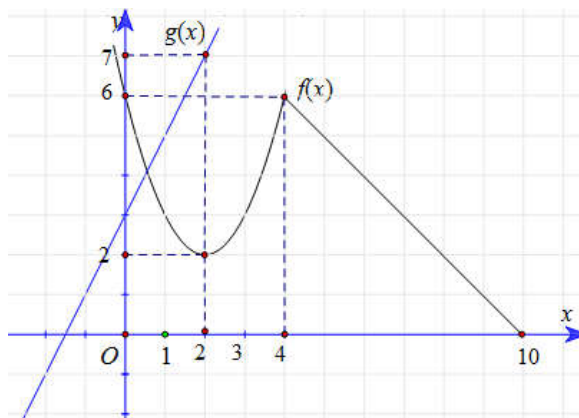


- A. $h'(2) = \frac{4}{49}$. B. $h'(2) = -\frac{4}{49}$. C. $h'(2) = \frac{2}{7}$. D. $h'(2) = -\frac{2}{7}$.

Câu 18: Cho đồ thị $(C): y = x^3 + 3x^2 + 1$. Gọi $A_1(1; 5)$ là điểm thuộc (C) . Tiếp tuyến của (C) tại A_1 cắt (C) tại A_2 , tiếp tuyến của (C) tại A_2 cắt (C) tại A_3 , ..., tiếp tuyến của (C) tại A_n cắt (C) tại A_{n+1} . Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho A_n có hoành độ lớn hơn 2^{2018} .

- A. 2^{2017} . B. 2019. C. 2^{2018} . D. 2018.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$, $g(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Tính $h'(2)$ (đạo hàm của hàm số $h(x)$ tại $x = 2$).



A. $h'(2) = \frac{4}{49}$. **B.** $h'(2) = -\frac{4}{49}$. **C.** $h'(2) = \frac{2}{7}$. **D.** $h'(2) = -\frac{2}{7}$.

Lời giải

Chọn B

Xét $x \in (-\infty; 4)$.

Ta có đồ thị $y = g(x)$ là đường thẳng nên $g(x)$ có dạng $g(x) = ax + b$ và đồ thị $y = g(x)$ đi qua hai điểm $(0; 3)$ và $(2; 7)$ nên $g(x) = 2x + 3$.

Ta có đồ thị $y = f(x)$ là Parabol nên $f(x)$ có dạng $f(x) = cx^2 + dx + e$ và đồ thị $y = f(x)$ đi qua điểm $(0; 6)$ và có đỉnh là $(2; 2)$ nên $f(x) = x^2 - 4x + 6$.

$$\text{Suy ra } h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 4x + 6}{2x + 3} \text{ khi } x \in (-\infty; 4),$$

$$\text{Ta có } h'(x) = \frac{(2x - 4)(2x + 3) - 2(x^2 - 4x + 6)}{(2x + 3)^2} \text{ mà } 2 \in (-\infty; 4) \text{ nên } h'(2) = -\frac{4}{49}.$$

Câu 20: Cho đồ thị $(C): y = x^3 + 3x^2 + 1$. Gọi $A_1(1; 5)$ là điểm thuộc (C) . Tiếp tuyến của (C) tại A_1 cắt (C) tại A_2 , tiếp tuyến của (C) tại A_2 cắt (C) tại A_3 , ..., tiếp tuyến của (C) tại A_n cắt (C) tại A_{n+1} . Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho A_n có hoành độ lớn hơn 2^{2018} .

A. 2^{2017} . **B.** 2019. **C.** 2^{2018} . **D.** 2018.

Lời giải

Chọn B

Gọi $A_k(x_k; x_k^3 + 3x_k^2 + 1) \in (C)$.

Phương trình tiếp tuyến tại A_k là:

$$\Delta_k; y = (3x_k^2 + 6x_k)(x - x_k) + x_k^3 + 3x_k^2 + 1.$$

$$A_{k+1} = (C) \cap \Delta_k, (x_{k+1} \neq x_k)$$

$$\text{Suy ra } x^3 + 3x^2 = (3x_k^2 + 6x_k)(x - x_k) + x_k^3 + 3x_k^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_k \\ x^2 + xx_k + x_k^2 + 3(x + x_k) = 3x_k^2 + 6x_k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -2x_k - 3 \text{ hay } x_{k+1} = -2x_k - 3 \Leftrightarrow (x_{k+1} + 1) = -2(x_k + 1)$$

$$\Leftrightarrow y_{k+1} = -2y_k \text{ là một cấp số nhân với } y_1 = 2, q = -2.$$

$$y_n = y_1(-2)^{n-1} = 2 \cdot (-2)^{n-1}.$$

$$\Rightarrow x_n + 1 = 2 \cdot (-2)^{n-1} \Rightarrow x_n = -1 + 2 \cdot (-2)^{n-1}.$$

$$x_n > 2^{2018} \Rightarrow n = 2019.$$

Câu 21: Biết hàm số $f(x) - f(2x)$ có đạo hàm bằng 18 tại $x = 1$ và đạo hàm bằng 1000 tại $x = 2$. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) - f(4x)$ tại $x = 1$.

- A.** 2018. **B.** 1982. **C.** -2018. **D.** 1018.

Câu 22: Biết hàm số $f(x) - f(2x)$ có đạo hàm bằng 18 tại $x = 1$ và đạo hàm bằng 1000 tại $x = 2$. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) - f(4x)$ tại $x = 1$.

- A.** 2018. **B.** 1982. **C.** -2018. **D.** 1018.

Lời giải

Chọn A

- Ta có: $(f(x) - f(2x))' = f'(x) - 2f'(2x)$

Theo giả thiết ta được:
$$\begin{cases} f'(1) - 2f'(2) = 18 \\ f'(2) - 2f'(4) = 1000 \end{cases} \Rightarrow f'(1) - 4f'(4) = 2018$$

Vậy $(f(x) - f(4x))'_{x=1} = f'(1) - 4f'(4) = 2018$.

Câu 23: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{2x+2}$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu tiếp tuyến của (C) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có trọng tâm nằm trên đường thẳng $y = -x$.

- A.** 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 24: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{2x+2}$ có đồ thị (C) . Có bao nhiêu tiếp tuyến của (C) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có trọng tâm nằm trên đường thẳng $y = -x$.

- A.** 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có $y' = \frac{4}{(2x+2)^2}$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M\left(m; \frac{m-1}{2m+2}\right)$, $(m \neq -1)$ là:

$$y = \frac{4}{(2m+2)^2}(x-m) + \frac{m-1}{2m+2}.$$

Tiếp tuyến này cắt Ox và Oy lần lượt tại $A\left(-\frac{1}{2}m^2 + m + \frac{1}{2}; 0\right)$ và $B\left(0; \frac{m^2 - 2m - 1}{2(m+1)^2}\right)$ với $m \notin \{1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\}$.

Trong tâm tam giác OAB thuộc đường thẳng $y = -x \Rightarrow \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}m^2 + m + \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{3}\left(\frac{m^2 - 2m - 1}{2(m+1)^2}\right)$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m - 1 = \frac{m^2 - 2m - 1}{(m-1)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m - 1 = 0 \\ (m-1)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 + \sqrt{2} \\ m = 1 - \sqrt{2} \\ m = 2 \\ m = 0 \end{cases}.$$

So với điều kiện ta được $m = 2$ hoặc $m = 0$.

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa mãn đề bài là $y = \frac{1}{9}x - \frac{1}{18}$; $y = x - \frac{1}{2}$.

Câu 1: (SGD Hà Nội-lần 11 năm 2017-2018) Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị (C) . Hỏi có bao nhiêu điểm trên đường thẳng $d: y = 9x - 14$ sao cho từ đó kẻ được hai tiếp tuyến với (C) .

A. 3 điểm.

B. 4 điểm.

C. 2 điểm.

D. 1 điểm.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y = x^3 - 3x + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 3$.

Gọi x_0 là hoành độ tiếp điểm, phương trình tiếp tuyến có dạng

$$y = (3x_0^2 - 3)(x - x_0) + x_0^3 - 3x_0 + 2$$

Gọi $M(m; 9m - 14)$ là điểm nằm trên đường thẳng $d: y = 9x - 14$.

Tiếp tuyến đi qua điểm M khi và chỉ khi $9m - 14 = (3x_0^2 - 3)(m - x_0) + x_0^3 - 3x_0 + 2$ (1)

$$\Leftrightarrow (x_0 - 2)[2x_0^2 - (3m - 4)x_0 + 8 - 6m] = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 2)[2x_0^2 - (3m - 4)x_0 + 8 - 6m] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ 2x_0^2 - (3m - 4)x_0 + 8 - 6m = 0 = g(x_0) \end{cases} \quad (2)$$

Yêu cầu đề bài $\Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm phân biệt có một nghiệm bằng 2 hoặc (2) có nghiệm

$$\text{kép khác } 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ g(2) = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \Delta = 0 \\ g(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 + 24m - 48 > 0 \\ -12m + 24 = 0 \\ 9m^2 + 24m - 48 = 0 \\ -12m + 24 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{4}{3} \\ m = -4 \end{cases}.$$

Vậy có 3 điểm M thỏa đề bài.

Câu 2: -----HẾT----- (THPT Chuyên Lương Thế Vinh – Đồng Nai – Lần 2 năm 2017 – 2018) Cho hàm số $y = |x|^3 - 3x^2 + 1$ có đồ thị (C) . Hỏi trên trục Oy có bao nhiêu điểm A mà qua A có thể kẻ đến (C) đúng ba tiếp tuyến?

A. 0.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Chọn C

Nhận xét: hàm số đã cho là hàm số chẵn và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Việc chứng minh hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, ta chỉ cần chứng minh hàm số có đạo hàm tại $x = 0$.

Thật vậy, ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|^3 - 3x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2|x| - 3x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x|x| - 3x) = 0$$

Nên hàm số có đạo hàm tại $x = 0$ và .

Vì hàm số đã cho là hàm số chẵn nên đồ thị (C) của nó đối xứng qua Oy . Do đó từ điểm A trên trục Oy nếu kẻ được một tiếp tuyến d đến (C) thì ảnh của d qua phép đối xứng trục Oy cũng là một tiếp tuyến của (C) .

Vậy để qua điểm A trên trục Oy có thể kẻ đến (C) đúng ba tiếp tuyến thì điều kiện cần và đủ là có một tiếp tuyến vuông góc với trục tung và một tiếp tuyến với nhánh phải của đồ thị (C) , tức là phần đồ thị của hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, với $x \geq 0$.

Gọi $M(0; m)$ thuộc Oy và (Δ) là tiếp tuyến qua $M(0; m)$ có hệ số góc k . Ta có:
 $(\Delta): y = kx + m$.

Điều kiện tiếp xúc là:

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 1 = kx + m \\ 3x^2 - 6x = k \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } x^3 - 3x^2 + 1 = x(3x^2 - 6x) + m \Leftrightarrow m = -2x^3 + 3x^2 + 1 \quad (*)$$

Yêu cầu đề bài tương đương phương trình $(*)$ có đúng một nghiệm $x = 0$ và một nghiệm $x > 0$.

Phương trình $(*)$ có nghiệm $x = 0$ nên $m = 1$.

$$\text{Thử lại, với } m = 1 \text{ thì } (*) \text{ trở thành: } -2x^3 + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ (đúng).}$$

Vậy $m = 1$.

Câu 3: (THPT Trần Phú – Đà Nẵng - Lần 2 – năm 2017 – 2018) Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có đồ thị (C) .

Gọi S là tập hợp tất cả giá trị thực của k để đường thẳng $d: y = k(x+1) + 2$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt M, N, P sao cho các tiếp tuyến của (C) tại N và P vuông góc với nhau. Biết $M(-1; 2)$, tính tích tất cả các phần tử của tập S .

A. $\frac{1}{9}$.

B. $-\frac{2}{9}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. -1 .

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d :

$$x^3 - 3x = k(x+1) + 2 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 - x - 2 - k) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 2 \\ x^2 - x - 2 - k = 0(1) \end{cases}$$

d cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt khác -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{(1)} > 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > -\frac{9}{4} \\ k \neq 0 \end{cases}$$

Khi đó, d cắt (C) tại $M(-1; 2)$, $N(x_1; y_1)$, $P(x_2; y_2)$ với x_1, x_2 là nghiệm của (1).

$$\text{Theo định lý Viète: } \begin{cases} S = x_1 + x_2 = 1 \\ P = x_1 x_2 = -k - 2 \end{cases}$$

$$\text{Tiếp tuyến tại } N \text{ và } P \text{ vuông góc với nhau} \Leftrightarrow y'(x_1) \cdot y'(x_2) = -1 \Leftrightarrow (3x_1^2 - 3)(3x_2^2 - 3) = -1$$

$$\Leftrightarrow 9x_1^2 x_2^2 - 9(x_1^2 + x_2^2) + 9 = -1 \Leftrightarrow 9P^2 + 18P - 9S^2 + 9 = -1$$

$$\Leftrightarrow 9k^2 + 18k + 1 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{-3 \pm 2\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy tích các phân tử trong S là $\frac{1}{9}$.

Câu 1: (SGD Thanh Hóa – năm 2017 – 2018) Cho hàm số $f(x) = (3x^2 - 2x - 1)^9$. Tính đạo hàm cấp 6 của hàm số tại điểm $x = 0$.

A. $f^{(6)}(0) = -60480$. **B.** $f^{(6)}(0) = -34560$. **C.** $f^{(6)}(0) = 60480$. **D.** $f^{(6)}(0) = 34560$.

Lời giải

Chọn .

Giả sử $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{18}x^{18}$.

Khi đó $f^{(6)}(x) = 6!a_6 + b_7x + b_8x^2 + \dots + b_{18}x^{12} \Rightarrow f^{(6)}(0) = 720a_6$.

Ta có $(3x^2 - 2x - 1)^9 = -(1 + 2x - 3x^2)^9 = -\sum_{k=0}^9 C_9^k (2x - 3x^2)^k$

$= -\sum_{k=0}^9 C_9^k \sum_{i=0}^k C_k^i (2x)^{k-i} (-3x^2)^i = -\sum_{k=0}^9 \sum_{i=0}^k C_9^k C_k^i 2^{k-i} (-3)^i x^{k+i}$.

Số hạng chứa x^6 ứng với k, i thỏa mãn $\begin{cases} 0 \leq i \leq k \leq 9 \\ k+i=6 \end{cases}$

$\Rightarrow (k; i) \in \{(6; 0), (5; 1), (4; 2), (3; 3)\}$

$\Rightarrow a_6 = -\left[C_9^6 C_6^0 2^6 (-3)^0 + C_9^5 C_5^1 2^4 (-3)^1 + C_9^4 C_4^2 2^2 (-3)^2 + C_9^3 C_3^3 2^0 (-3)^3\right] = -84$

$\Rightarrow f^{(6)}(0) = 720 \cdot (-84) = -60480$.

Câu 2: (THPT Chuyên Thái Bình – Thái Bình – Lần 5 năm 2017 – 2018) Cho các hàm số $f(x),$

$g(x), h(x) = \frac{f(x)}{3-g(x)}$. Hệ số góc của các tiếp tuyến của các đồ thị hàm số đã cho tại điểm có

hoành độ $x_0 = 2018$ bằng nhau và khác 0. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f(2018) \geq -\frac{1}{4}$. **B.** $f(2018) \leq -\frac{1}{4}$. **C.** $f(2018) \geq \frac{1}{4}$. **D.** $g(2018) \leq \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x_0) = g'(x_0) = h'(x_0) \neq 0$ mà $h'(x) = \frac{f'(x)[3-g(x)] + g'(x)f(x)}{[3-g(x)]^2}$

Ta có $h'(x_0) = \frac{f'(x_0)[3-g(x_0)] + g'(x_0)f(x_0)}{[3-g(x_0)]^2} \Leftrightarrow [3-g(x_0)]^2 = 3-g(x_0) + f(x_0)$.

Đặt $a = g(x_0)$ nên $f(x_0) = a^2 - 5a + 6 = \left(a - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$.

Vậy $f(2018) \geq -\frac{1}{4}$, dấu "=" xảy ra khi $g(2018) = \frac{5}{2}$.

Câu 3: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ đều có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn:

$f^3(2-x) - 2f^2(2+3x) + x^2 \cdot g(x) + 36x = 0$, với $\forall x \in \mathbb{R}$. Tính $A = 3f(2) + 4f'(2)$.

A. 11.

B. 13.

C. 14.

D. 10.

-----HẾT-----

BẢNG ĐÁP ÁN THAM KHẢO ĐỀ 176

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
A	D	A	A	D	D	C	A	C	C	B	A	D	C	D	C	D	A	A	B	B	C	B	D	D
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
B	B	A	A	C	C	A	C	C	A	D	D	B	B	C	B	C	A	B	B	A	C	D	D	D

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 4: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ đều có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn:

$$f^3(2-x) - 2f^2(2+3x) + x^2 \cdot g(x) + 36x = 0, \text{ với } \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tính } A = 3f(2) + 4f'(2).$$

A. 11.

B. 13.

C. 14.

D. 10.

Lời giải

Chọn D

Với $\forall x \in \mathbb{R}$, ta có $f^3(2-x) - 2f^2(2+3x) + x^2 \cdot g(x) + 36x = 0$ (1).

Đạo hàm hai vế của (1), ta được

$$-3f^2(2-x) \cdot f'(2-x) - 12f(2+3x) \cdot f'(2+3x) + 2x \cdot g(x) + x^2 \cdot g'(x) + 36 = 0 \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2), thay } x=0, \text{ ta có } \begin{cases} f^3(2) - 2f^2(2) = 0 & (3) \\ -3f^2(2) \cdot f'(2) - 12f(2) \cdot f'(2) + 36 = 0 & (4) \end{cases}$$

Từ (3), ta có $f(2) = 0 \vee f(2) = 2$.

Với $f(2) = 0$, thế vào (4) ta được $36 = 0$ (vô lí).

Với $f(2) = 2$, thế vào (4) ta được $-36 \cdot f'(2) + 36 = 0 \Leftrightarrow f'(2) = 1$.

Vậy $A = 3f(2) + 4f'(2) = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 10$.

-----**HẾT**-----