

NGÔ ĐỨC TÀI

LÊ DIÊN PHÚ

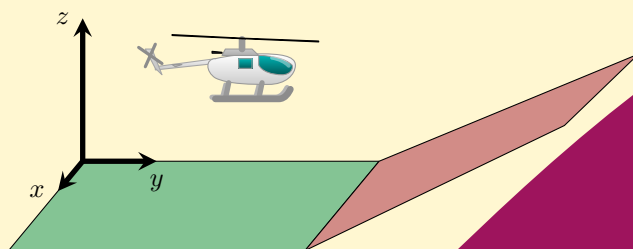
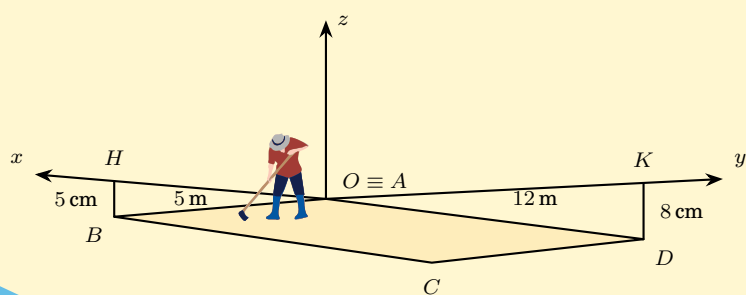
ĐINH HỮU KIẾT

CHUYÊN ĐỀ

TOÁN THỰC TẾ

ÔN THI TỐT NGHIỆP

THPTQG 2027



- Hàm số
- Vector
- Nguyên hàm tích phân
- Đường thẳng
- Mặt phẳng
- Mặt cầu

Zalo: 0889 971 004

MỤC LỤC

Chương 1. Ứng dụng đạo hàm khảo sát và vẽ đồ thị hàm số 4

Chủ đề 1. Toán thực tế liên quan đến doanh thu, lợi nhuận 5

1.1 LÝ THUYẾT CẦN NHỚ 5

1.2 BÀI TẬP ÁP DỤNG 6

Chủ đề 2. Toán thực tế liên quan đến tốc độ thay đổi một đại lượng 22

2.1 LÝ THUYẾT CẦN NHỚ 22

2.2 BÀI TẬP ÁP DỤNG 22

Chủ đề 3. Toán thực tế liên quan đến các yếu tố hình học 31

3.1 MỘT SỐ KIẾN THỨC HÌNH HỌC BỔ TRỢ 31

3.2 BÀI TẬP ÁP DỤNG 32

Chủ đề 4. Toán thực tế ứng dụng khảo sát hàm số 62

4.1 LÝ THUYẾT CẦN NHỚ 62

4.2 BÀI TẬP ÁP DỤNG 63

Chương 2. Vector và hệ tọa độ trong không gian 81

Chủ đề 1. Toán thực tế liên quan đến các phép toán vector 82

1.1 LÝ THUYẾT CẦN NHỚ 82

1.2 BÀI TẬP ÁP DỤNG 83

Chủ đề 2. Toán thực tế áp dụng các phép toán tọa độ hóa vector 92

2.1 LÝ THUYẾT CẦN NHỚ 92

2.2 BÀI TẬP ÁP DỤNG 93

Chương 3. Nguyên hàm. Tích phân và ứng dụng**128**

Chủ đề 1. Toán thực tế liên quan đến nguyên hàm, tích phân 129

- 1.1 LÝ THUYẾT CẦN NHỚ 129
- 1.2 Định nghĩa tích phân 130
- 1.3 BÀI TẬP ÁP DỤNG 131

Chủ đề 2. Toán thực tế ứng dụng tích phân tính diện tích hình phẳng 160

- 2.1 LÝ THUYẾT CẦN NHỚ 160
- 2.2 BÀI TẬP ÁP DỤNG 161

Chủ đề 3. Toán thực tế ứng dụng tích phân tính thể tích 192

- 3.1 LÝ THUYẾT CẦN NHỚ 192
- 3.2 BÀI TẬP ÁP DỤNG 195

Chương 4. Phương pháp tọa độ trong không gian**220**

Chủ đề 1. Toán thực tế liên quan đến mặt phẳng và đường thẳng 221

- 1.1 LÝ THUYẾT CẦN NHỚ 221
- 1.2 BÀI TẬP ÁP DỤNG 224

Chủ đề 2. Toán thực tế liên quan đến mặt cầu 269

- 2.1 LÝ THUYẾT CẦN NHỚ 269
- 2.2 BÀI TẬP ÁP DỤNG 270



LỜI NÓI ĐẦU

Trong những năm gần đây, đề thi tốt nghiệp THPT môn Toán ngày càng chú trọng đến việc vận dụng kiến thức vào các bài toán thực tế. Điều này đòi hỏi học sinh không chỉ nắm vững lý thuyết mà còn phải biết cách liên hệ, mô hình hóa và giải quyết các tình huống trong đời sống.

Xuất phát từ nhu cầu đó, nhóm chúng tôi biên soạn chuyên đề “Toán thực tế 12 ôn thi tốt nghiệp” nhằm hệ thống hóa các dạng bài thường gặp, giúp học sinh rèn luyện tư duy và nâng cao kỹ năng giải toán. Nội dung chuyên đề được chọn lọc, trình bày rõ ràng, bám sát cấu trúc đề thi và có tính ứng dụng và phân loại cao.

Chuyên đề này được thực hiện bởi nhóm *Ba Đường Đồng Quy* gồm ba thành viên: Ngô Đức Tài, Đinh Hữu Kiệt và Liên Diên Phú, tên nhóm được lấy cảm hứng từ hình ảnh ba đường đồng quy trong Toán học - tuy xuất phát từ những hướng khác nhau nhưng cùng gặp nhau tại một điểm chung, tượng trưng cho sự hội tụ về mục tiêu, tinh thần hợp tác và niềm đam mê học tập của cả ba thành viên.

Nội dung mỗi chuyên đề được trình bày theo hướng hệ thống, bám sát cấu trúc đề thi, kèm theo phần bài tập rèn luyện và bảng đáp án ở cuối mỗi chuyên đề nhằm giúp học sinh thuận tiện trong việc tự kiểm tra và đánh giá kết quả học tập. Trong quá trình biên soạn, dù đã cố gắng hết sức, nhóm chúng tôi khó tránh khỏi những thiếu sót, rất mong nhận được sự góp ý từ thầy cô và các bạn học sinh để chuyên đề ngày càng hoàn thiện hơn. Mọi ý kiến góp ý gửi về zalo 0889 971 004 (thầy Đức Tài).

Trong thời gian tới, nhóm chúng tôi dự định sẽ tiếp tục xây dựng và phát hành chuyên đề “Thống kê và Xác suất ôn thi tốt nghiệp 2027” nhằm hỗ trợ học sinh ôn tập một cách toàn diện hơn. Rất mong được sự quan tâm của quý thầy cô và các bạn học sinh.

Xin chân thành cảm ơn!

Nhóm biên soạn

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Mục lục của chương

1. Toán thực tế liên quan đến doanh thu, lợi nhuận 5
2. Toán thực tế liên quan đến tốc độ thay đổi một đại lượng
.....22
3. Toán thực tế liên quan đến các yếu tố hình học 31
4. Toán thực tế ứng dụng khảo sát hàm số 62



Chủ đề 1

TOÁN THỰC TẾ LIÊN QUAN
ĐẾN DOANH THU, LỢI NHUẬN

I LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Tốc độ thay đổi của doanh thu, lợi nhuận

- ✓ Nếu $C = C(x)$ là hàm chi phí, tức là tổng chi phí khi sản xuất x đơn vị hàng hoá, thì tốc độ thay đổi tức thời $C'(x)$ của chi phí đối với số lượng đơn vị hàng được sản xuất được gọi là *chi phí biên*.
- ✓ Về ý nghĩa kinh tế, chi phí biên $C'(x)$ xấp xỉ với chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo, tức là đơn vị hàng hoá thứ $x + 1$ (xem SGK Toán 11 tập hai, trang 87, bộ sách Kết nối tri thức với cuộc sống). Gọi $p(x)$ là giá bán mỗi đơn vị mà công ty có thể tính nếu bán x đơn vị. Khi đó, p được gọi là hàm cầu (hay hàm giá) và chúng ta mong đợi đó là một hàm giảm của x . Nếu x đơn vị được bán và giá mỗi đơn vị là $p(x)$ thì tổng doanh thu là

$$R(x) = x \cdot p(x)$$

và $R(x)$ được gọi là *hàm doanh thu*. Đạo hàm $R'(x)$ của hàm doanh thu được gọi là *hàm doanh thu biên* và là tốc độ thay đổi của doanh thu đối với số lượng đơn vị sản phẩm bán ra.

Nếu x đơn vị được bán, thì tổng lợi nhuận là

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

và $P(x)$ được gọi là *hàm lợi nhuận*. Hàm lợi nhuận biên là đạo hàm $P'(x)$ của hàm lợi nhuận.

2 Quy trình giải một bài toán tối ưu đơn giản



- ✓ Xác định đại lượng Q mà ta cần làm cho giá trị của đại lượng ấy lớn nhất hoặc nhỏ nhất và biểu diễn nó qua các đại lượng khác trong bài toán.
- ✓ Chọn một đại lượng thích hợp nào đó, kí hiệu là x , và biểu diễn các đại lượng khác ở Bước 1 theo x . Khi đó, đại lượng Q sẽ là hàm số của một biến x . Tìm tập xác định của hàm số $Q = Q(x)$.
- ✓ Tìm giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất của hàm số $Q = Q(x)$ bằng các phương pháp đã biết và kết luận.

II BÀI TẬP ÁP DỤNG

1 Trắc nghiệm đúng sai

Câu 1 Một công ty sau khi ra mắt sản phẩm mới đã ghi nhận lợi nhuận $P(t)$ sau t tháng kinh doanh. Trong năm đầu tiên, giả sử mối liên hệ giữa lợi nhuận và thời gian kinh doanh được mô hình hóa bởi hàm số $P(t) = -t^3 + 12t^2 + 60t - 50$, $0 \leq t \leq 12$.

- a** Lợi nhuận của công ty tại thời điểm $t = 2$ là 110 tỷ đồng.
- b** Hàm số biểu thị tốc độ tăng trưởng lợi nhuận $P'(t) = -3t^2 + 24t + 10$.
- c** Lợi nhuận của công ty đạt mức tối đa tại thời điểm $t = 10$.
- d** Tại thời điểm $t = 4$ thì tốc độ tăng trưởng lợi nhuận là lớn nhất.

Câu 2 Chi phí vận hành trung bình (tính bằng triệu đồng/chuyến) của một công ty vận tải khi vận hành x chuyến xe mỗi ngày được cho bởi hàm số $A(x) = 0,2x + 2 + \frac{500}{x}$ với $10 \leq x \leq 100$.

- a** Đạo hàm của hàm chi phí trung bình là $A'(x) = \frac{0,2x^2 + 500}{x^2}$.
- b** Chi phí trung bình trên mỗi chuyến xe thấp nhất bằng 22 triệu đồng.
- c** Nếu do giới hạn về số lượng tài xế khiến công ty chỉ có thể vận hành tối đa 40 chuyến xe mỗi ngày. Chi phí trung bình mỗi chuyến xe trong trường hợp này thấp nhất bằng 22,5 triệu đồng.
- d** Tổng chi phí vận hành của công ty vận tải trong một ngày thấp nhất bằng 1,1 tỷ đồng.

Câu 3 Một nhà sản xuất trung bình bán được 1 500 tivi màn hình phẳng mỗi tuần với giá 15 triệu đồng một chiếc. Một cuộc khảo sát thị trường chỉ ra rằng nếu cứ giảm giá bán 600 nghìn đồng (0,6 triệu đồng), số lượng tivi bán ra sẽ tăng thêm khoảng 120 tivi mỗi tuần. Gọi p (triệu đồng) là giá của mỗi tivi, x là số tivi bán ra mỗi tuần.

- a** Hàm cầu là $p = -\frac{1}{200}x + \frac{45}{2}$ (triệu đồng).
- b** Tổng doanh thu từ tiền bán tivi là $f(p) = -200p^2 + 450p$ (triệu đồng).
- c** Công ty giảm giá 3,5 triệu đồng cho người mua thì doanh thu của công ty sẽ lớn nhất.
- d** Nếu hàm chi phí hàng tuần là $C(x) = 12\,000 - \frac{7}{2}x$ (triệu đồng), trong đó x là số tivi bán ra trong tuần, nhà sản xuất nên đặt giá bán 9,5 triệu đồng thì lợi nhuận là lớn nhất.

Câu 4 Một cơ sở sản xuất khăn đang bán mỗi chiếc khăn với giá 50 000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 34 000 chiếc. Cơ sở sản xuất có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhuận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý nhận thấy rằng nếu từ mức giá 50 000 đồng mà cứ tăng thêm 1 000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 500 chiếc. Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 32 000 đồng, gọi tiền cần tăng giá mỗi chiếc khăn là x (nghìn đồng).



- a** Tổng doanh thu trung bình mỗi tháng cơ sở sản xuất thu được khi chưa tăng giá là 1 700 000 nghìn đồng.
- b** Số khăn bán ra được mỗi tháng sau khi tăng giá là $34000 - 5x$ chiếc.
- c** Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì sau khi tăng giá mỗi chiếc khăn lãi 41 nghìn đồng.
- d** Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì số khăn bán ra giảm 12 500 chiếc.

Câu 5 Một công ty bất động sản ước tính rằng lợi nhuận P (tỉ đồng) thu được từ việc xây dựng x căn hộ cao cấp trong một dự án được cho bởi hàm số $P(x) = -x^3 + 9x^2 - 15x - 50$ (với $0 < x < 8$).

- a** Nếu công ty không xây dựng căn hộ nào ($x = 0$) thì công ty vẫn chịu chi phí cố định (lỗ vốn) là 50 tỉ đồng.
- b** Hàm lợi nhuận đồng biến trên khoảng $(1; 5)$.
- c** Lợi nhuận đạt cực tiểu khi xây dựng 5 căn hộ.
- d** Để đạt lợi nhuận lớn nhất, công ty nên xây dựng 5 căn hộ.

Câu 6 Một doanh nghiệp sản xuất và tiêu thụ một loại sản phẩm. Trong một ngày, nếu doanh nghiệp sản xuất và tiêu thụ x sản phẩm ($x \in \mathbb{N}$, $1 \leq x \leq 186$) thì chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm là

$$\overline{C}(x) = x^2 - 6x + 140 + \frac{750}{x} \text{ (USD/sản phẩm.)}$$

và toàn bộ chúng được bán với giá $(1400 - 7,5x)$ (USD) một sản phẩm. Giả sử toàn bộ x sản phẩm sản xuất ra đều được tiêu thụ hết.

- a** Số tiền doanh nghiệp thu được là $F(x) = 1400x - 7,5x^2$ (USD).
- b** Chi phí doanh nghiệp phải bỏ ra là $C(x) = x^3 - 6x^2 + 140x + 750$ (USD).
- c** Lợi nhuận doanh nghiệp thu được là $P(x) = -x^3 - 1,5x^2 + 1260x - 750$ (USD).
- d** Lợi nhuận lớn nhất mà doanh nghiệp thu được là 15 850 (USD).

Câu 7 Một xưởng sản xuất một loại sản phẩm A. Phòng kinh doanh đã nghiên cứu và đưa ra các hàm số sau:

- ◆ Hàm chi phí sản xuất x sản phẩm là $C(x) = 20x + 1200$.
- ◆ Hàm giá bán của mỗi sản phẩm (khi bán ra x sản phẩm) là $p(x) = 100 - x$. (Đơn vị của x là sản phẩm, đơn vị của chi phí và giá bán là nghìn đồng).
- a** Hàm lợi nhuận $P(x)$ thu được từ việc sản xuất và bán x sản phẩm A là $P(x) = -x^2 + 80x - 1200$.
- b** Để công ty không bị lỗ, số sản phẩm cần sản xuất và bán ra phải thuộc đoạn $[20; 60]$.
- c** Doanh thu của xưởng là một hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 60)$.
- d** Nếu chính phủ áp thuế 4 nghìn đồng trên mỗi sản phẩm bán ra thì lợi nhuận tối đa của xưởng sẽ giảm đi 80 nghìn đồng so với khi chưa có thuế.

Câu 8 Số lượng sản phẩm bán được của một công ty trong x (tháng) được tính theo công thức $S(x) = 200 \left(5 - \frac{9}{x+2} \right)$, trong đó $x \geq 1$. Khi đó $S'(x)$ biểu thị tốc độ thay đổi của số lượng sản phẩm bán được theo thời gian.

- a** Công ty bán được 775 sản phẩm trong 6 tháng.
- b** Đạo hàm $S'(x) = \frac{1800}{(x+2)^2}$.
- c** Nếu công ty duy trì thời gian bán hàng đủ lâu thì số lượng sản phẩm bán được sẽ vượt mức 1000.
- d** Doanh số của công ty tăng trưởng chậm dần theo thời gian.

Câu 9 Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa ($1 \leq x \leq 18$). Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí: $C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500$. Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Gọi $B(x)$ là số tiền bán được và $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa.

- a** Biểu thức tính $B(x)$ theo x là $B(x) = 220x$ (nghìn đồng).
- b** Biểu thức tính $L(x)$ theo x là $L(x) = -x^3 + 3x^2 + 220x - 500$ (nghìn đồng).
- c** Hộ làm nghề dệt này cần sản xuất và bán ra mỗi ngày 10 mét vải lụa để thu được lợi nhuận tối đa.
- d** Lợi nhuận tối đa của hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm có thể đạt được mỗi ngày là 1 000 nghìn đồng.

Câu 10 Tại một xí nghiệp chuyên sản xuất vật liệu xây dựng, nếu trong một ngày xí nghiệp sản xuất x (m^3) sản phẩm thì phải bỏ ra các khoản chi phí bao gồm: 4 triệu đồng chi phí cố định; 0,2 triệu đồng chi phí cho mỗi mét khối sản phẩm và $0,001x^2$ triệu đồng chi phí bảo dưỡng máy móc. Biết rằng, mỗi ngày xí nghiệp sản xuất được tối đa 100 (m^3) sản phẩm. Gọi $C(x)$ là tổng chi phí để xí nghiệp sản xuất x (m^3) sản phẩm trong một ngày và $\bar{C}$ là chi phí trung bình trên mỗi mét khối sản phẩm.

- a** $C = 0,2x + 0,001x^2$ với $0 \leq x \leq 100$.
- b** Tổng chi phí sản xuất 100 (m^3) sản phẩm là 34 triệu đồng.
- c** $\bar{C} = 0,001x + \frac{4}{x} + 0,2$ với $0 \leq x \leq 100$.
- d** $\bar{C}$ có giá trị thấp nhất bằng 0,326 triệu đồng (kết quả làm tròn ba chữ số thập phân).

Câu 11 Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cung cấp cho nhà máy B. Hai nhà máy thoả thuận rằng, hằng tháng A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x) = 45 - 0,001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x) = 100 + 30x$ (triệu đồng) (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm).

- a** Chi phí để A sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là 400 triệu đồng.
- b** Số tiền A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho B là 600 triệu đồng.
- c** Lợi nhuận mà A thu được khi bán x tấn sản phẩm ($0 \leq x \leq 100$) cho B được biểu diễn bằng công thức $-0,01x^3 + 15x - 100$.
- d** A bán cho B khoảng 70,7 tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất.

Câu 12 Một công ty sau khi mở bán sản phẩm mới đã ghi nhận lợi nhuận $P(t)$ (đơn vị triệu đồng) sau t tháng kinh doanh. Trong năm đầu tiên, giả sử mối liên hệ giữa lợi



nhuận và thời gian kinh doanh được mô hình hóa bởi hàm số $P(t) = -t^3 + 15t^2 + mt + 50$ ($t \in \mathbb{N}$, $1 \leq t \leq 12$) với $m \in \mathbb{R}$. Biết sau tháng đầu tiên mở bán, công ty thu được lợi nhuận là 136 triệu đồng.

- a** Tốc độ tăng trưởng lợi nhuận của công ty là hàm số $P'(t) = -3t^2 + 30t + 50$.
- b** Lợi nhuận của công ty đạt mức tối đa tại thời điểm $t = 3$.
- c** Sau 2 tháng mở bán, lợi nhuận công ty thu về được là 246 triệu đồng.
- d** Tại thời điểm $t = 5$ thì tốc độ thay đổi lợi nhuận là lớn nhất.

Câu 13 Một cơ sở đóng giày sản xuất mỗi ngày được x đôi giày với $1 \leq x \leq 50$. Tổng chi phí sản xuất x đôi giày (đơn vị nghìn đồng) là $C(x) = x^3 - 90x^2 + 2400x + 900$. Giả sử cơ sở này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 600 nghìn đồng/một đôi.

- a** Doanh thu của cơ sở khi bán hết 45 đôi giày là 27 triệu đồng.
- b** Lợi nhuận thu được trong một ngày lớn nhất khi sản xuất và bán hết 47 đôi giày.
- c** Tổng chi phí sản xuất 25 đôi giày là 20 triệu đồng.
- d** Tổng chi phí cao nhất trong một ngày là 30 triệu đồng.

Câu 14 Một doanh nghiệp sản xuất ô tô có hàm sản xuất là hàm Cobb-Douglas

$$Q = \sqrt[3]{K^2 \cdot L},$$

trong đó K và L lần lượt là số đơn vị vốn và số đơn vị lao động mà doanh nghiệp thuê được, Q là số ô tô sản xuất ra được (đơn vị: chiếc ô tô). Giả sử giá thuê một đơn vị vốn là c_K , giá thuê một đơn vị lao động là c_L , ngoài chi phí thuê lao động và vốn, doanh nghiệp còn phải chịu một chi phí cố định là C_0 (đơn vị: trăm USD). Khi đó hàm số $F = c_K \cdot K + c_L \cdot L + C_0$ mô tả tổng chi phí mà doanh nghiệp phải bỏ ra, thường được gọi là hàm chi phí sản xuất. Từ năm 2025 thì doanh nghiệp cố định giá thuê như sau $c_K = 10$, $c_L = 5$ và chi phí cố định $C_0 = 50$ và năm 2026 doanh nghiệp dự định sản xuất 2026 chiếc ô tô. Xét dự định sản xuất năm 2026 của doanh nghiệp.

- a** $L = \frac{2026^3}{K^2}$.
- b** Hàm tổng chi phí là $F = 10K + 5 \cdot \frac{2026^3}{K^2} + 50$.
- c** $F'(K) = 10 - 5 \cdot \frac{2026^3}{K^3}$.
- d** Tổng chi phí tối thiểu doanh nghiệp chi ra để sản xuất 2026 chiếc ô tô là 3,44 (triệu USD).

2 Trả lời ngắn

Câu 1 (MH - THPTQG 2025). Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 500 sản phẩm. Nếu doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm ($1 \leq x \leq 500$) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là $F(x) = x^3 - 1999x^2 + 1001000x + 250000$ (đồng), trong khi chi phí sản xuất bình quân cho một sản phẩm là $G(x) = x + 1000 + \frac{250000}{x}$ (đồng). Doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

KQ: 

Câu 2 (CT - THPTQG 2025). Nếu một doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm trong một tháng ($x \in \mathbb{N}^*$; $1 \leq x \leq 4500$) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là $F(x) = -0,01x^2 + 450x$ (nghìn đồng), trong khi chi phí sản xuất bình quân cho mỗi sản phẩm là $G(x) = \frac{30000}{x} + 340$ (nghìn đồng). Giả sử số sản phẩm sản xuất ra luôn được bán hết. Trong một tháng, doanh nghiệp đó cần sản xuất ít nhất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được lớn hơn 100 triệu đồng?

KQ: 

Câu 3 (CT - THPTQG 2026). Một công ty nông sản có công suất chế biến không quá 180 tấn nguyên liệu một tháng. Nếu công ty chế biến x tấn nguyên liệu trong một tháng ($1 \leq x \leq 180$) thì chi phí sản xuất và doanh thu lần lượt là $C(x) = 0,002x^3 + 30x + 20$ (triệu đồng) và $R(x) = 90x$ (triệu đồng). Lợi nhuận lớn nhất mà công ty đạt được trong một tháng là bao nhiêu triệu đồng?

KQ: 

Câu 4 Một gia đình đan lưới đánh cá, mỗi ngày đan được x mét lưới ($1 \leq x \leq 18$). Tổng chi phí sản xuất x mét lưới, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí $C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500$. Giả sử gia đình làm nghề đan lưới bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Gọi $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét lưới. Hỏi lợi nhuận tối đa của gia đình đan lưới trong một ngày (đơn vị tính nghìn đồng)?

KQ: 

Câu 5 Nếu một doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm trong một tháng ($x \in \mathbb{N}$; $1 \leq x \leq 300$) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm là $F(x) = x^3 - 1999x^2 + 1001000x + 250000$ (đồng). Trong đó, chi phí vận hành máy móc bình quân cho mỗi sản phẩm khi sản xuất x sản phẩm là $G(x) = 300 + \frac{100}{x}$ (nghìn đồng), chi phí mua nguyên vật liệu để sản xuất x sản phẩm là $H(x) = 2x^3 + 100000x - 50000$ (đồng). Doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

KQ: 

Câu 6 Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 180 sản phẩm. Nếu doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm ($1 \leq x \leq 180$) thì giá bán của mỗi sản phẩm là $f(x) = 35840 - 192x$ (nghìn đồng) và chi phí sản xuất bình quân trên một sản phẩm là $g(x) = 25,6x^2 - 153,6x + 3072 + \frac{19200}{x}$ (nghìn đồng). Biết rằng mức thuế trên một sản phẩm là 512 nghìn đồng. Hỏi doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

KQ: 

Câu 7 Một doanh nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Giả sử khi sản xuất và bán hết x sản phẩm ($0 < x < 2000$), tổng số tiền doanh nghiệp thu được là $F(x) = 2000x - x^2$ (chục nghìn đồng) và tổng chi phí doanh nghiệp bỏ ra là $G(x) = x^2 + 1440x + 50$ (chục nghìn đồng). Công ty cũng phải chịu mức thuế phụ thu cho 1 đơn vị sản phẩm bán được là t (chục nghìn đồng) ($0 < t < 300$). Mức thuế phụ thu t (trên một đơn vị sản phẩm) là bao nhiêu sao cho nhà nước thu được số tiền thuế phụ thu lớn nhất và doanh nghiệp cũng thu được lợi nhuận nhiều nhất theo đúng mức thuế phụ



thu đó (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

KQ:

Câu 8 Giả sử chi phí cho xuất bản x cuốn tạp chí (gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in, ...) được cho bởi công thức $C(x) = 0,0001x^2 - 0,2x + 10\,000$, trong đó $C(x)$ được tính theo đơn vị là vạn đồng (1 vạn đồng = 10 000 đồng). Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng. Tỉ số $M(x) = \frac{T(x)}{x}$ được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn và tổng chi phí $T(x)$ (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí. Tìm chi phí trung bình thấp nhất cho một cuốn tạp chí là bao nhiêu vạn đồng, biết rằng nhu cầu hiện tại xuất bản không quá 30 000 cuốn?

KQ:

Câu 9 Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung vào chiến lược kinh doanh xe X với chi phí mua vào một chiếc là 27 triệu đồng và bán ra với giá 31 triệu đồng. Với giá bán này, số lượng xe mà khách hàng đã mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang bán chạy này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán. Bộ phận nghiên cứu thị trường ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Hỏi theo đó, giá bán mới là bao nhiêu thì lợi nhuận thu được cao nhất?

KQ:

Câu 10 Một công ty sản xuất dụng cụ thể thao nhận được một đơn đặt hàng sản xuất 300 000 quả bóng Pickleball. Công ty này sở hữu một số máy móc, mỗi máy có thể sản xuất được 60 quả bóng trong một giờ. Chi phí thiết lập máy này là 125 ngàn đồng cho mỗi máy. Khi được thiết lập, hoạt động sản xuất sẽ hoàn toàn diễn ra tự động dưới sự giám sát. Số tiền phải trả cho người giám sát là 90 ngàn đồng một giờ. Số máy móc công ty nên sử dụng là bao nhiêu để chi phí hoạt động là thấp nhất?

KQ:

Câu 11 Một cửa hàng kinh doanh máy lọc nước Karofi. Hàm cầu biểu thị liên hệ giữa giá bán của một chiếc máy với số lượng máy bán được trong một tháng là hàm bậc nhất. Khi giá bán là 5 triệu đồng một chiếc thì một tháng bán được 100 chiếc, khi giá bán là 4,5 triệu đồng một chiếc thì một tháng bán được 120 chiếc. Biết chi phí trung bình cho một chiếc máy khi bán được x chiếc là $\frac{3x + 50}{x}$. Hỏi cửa hàng cần bán với giá bao nhiêu triệu đồng một chiếc máy để lợi nhuận thu được trong một tháng lớn nhất?

KQ:

Câu 12 Sản lượng táo trên mỗi cây khi thu hoạch lệ thuộc vào mật độ cây được trồng. Với cùng một phương pháp chăm sóc như nhau, nếu trên mỗi sào đất được trồng n cây táo thì người ta ước tính trung bình sản lượng táo khi thu hoạch là $f(n) = -0,06n^2 - 0,4n + 320$ (kg/cây) (1 sào Trung bộ bằng 500 m²). Biết rằng bình quân chi phí giống và chăm sóc cho mỗi kg táo từ lúc trồng cho đến khi thu hoạch là 560 nghìn đồng mỗi cây. Giá bán mỗi kg táo là 50 nghìn đồng/kg, với giá bán này thì tất cả lượng táo thu hoạch đều được bán hết. Em hãy cho biết nên trồng trung bình bao nhiêu cây táo trên mỗi sào đất để mang về lợi nhuận cao nhất?

KQ:

Câu 13 Một doanh nghiệp dự định sản xuất x sản phẩm trong một tháng ($x \in \mathbb{N}; 100 \leq x \leq 800$). Tổng doanh thu khi bán hết x sản phẩm đó là $F(x) = -0,001x^3 + 0,6x^2 + 500x + 100\,000$ (nghìn đồng). Chi phí (điện, khấu hao máy, lương công nhân, ...) để sản xuất bình quân cho mỗi sản phẩm là $G(x) = 0,0002x^2 + \frac{40\,000}{x}$ (nghìn đồng) và chi phí để mua nguyên vật liệu khi chưa chiết khấu là $H(x) = \frac{-4}{49}x^2 + \frac{750}{49}x + \frac{1\,500\,000}{49}$ (nghìn đồng). Công ty cung cấp nguyên vật liệu đang chạy chương trình khuyến mại nhân dịp kỷ niệm thành lập công ty nên giảm 2% tổng tiền mua nguyên vật liệu cho doanh nghiệp đó. Trong một tháng, doanh nghiệp đó cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

KQ:

Câu 14 Tại một công ty sản xuất đồ chơi an toàn cho trẻ em, công ty phải chi 34 567 USD để thiết lập dây chuyền sản xuất ban đầu. Sau đó, cứ sản xuất được một sản phẩm đồ chơi X , công ty phải trả 8 USD cho nguyên liệu ban đầu và nhân công. Gọi x ($x \geq 1$) là số đồ chơi X mà công ty đã sản xuất và $C(x)$ (đơn vị: USD) là tổng số tiền bao gồm cả chi phí ban đầu mà công ty phải chi trả khi sản xuất x đồ chơi X . Khi đó chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi X là hàm số $\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$ xác định trên $[1; +\infty)$. Khi số đồ chơi sản xuất tăng lên thì chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi X giảm xuống nhưng không xuống dưới mức tối thiểu là bao nhiêu USD?

Câu 15 Năm 2025, một cửa hàng cần nhập về tổng cộng 600 chiếc điện thoại. Cửa hàng sẽ nhận theo nhiều lô hàng, mỗi lô hàng chứa số lượng điện thoại bằng nhau. Chi phí vận chuyển là 50 USD cho mỗi lô hàng, cộng thêm một loại phí vận chuyển nữa là 3 USD cho mỗi chiếc điện thoại và phí này cả năm chỉ tính cho lần vận chuyển đầu tiên. Hỏi cửa hàng đó nên nhập mỗi lô hàng bao nhiêu chiếc điện thoại để chi phí vận chuyển cả năm 2025 thấp nhất?

Câu 16 Bác An có một cửa hàng chuyên bán buôn bưởi Đoan Hùng, bác nhận thấy rằng: Nếu bán mỗi kilogram bưởi với giá 30 nghìn đồng thì mỗi tuần có 60 đơn hàng và mỗi đơn hàng mua 100 kilogram. Nếu cứ tăng giá mỗi kilogram bưởi thêm 2 nghìn đồng thì hàng tuần số đơn hàng giảm 4 đơn, đồng thời số lượng bưởi mà mỗi đơn hàng đặt mua cũng giảm đi 2 kilogram. Hỏi bác cần bán mỗi kilogram bưởi với giá bao nhiêu nghìn đồng để lợi nhuận hàng tuần thu được là lớn nhất, biết giá nhập mỗi kilogram bưởi là 24 nghìn đồng và giá bán không vượt quá 50 nghìn đồng/ 1 kilogram (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

KQ:

Câu 17 Trên một khúc sông có dòng nước lặng, một chiếc tàu chạy với tốc độ không đổi, chi phí nhiên liệu được tính bởi hai phần: Phần thứ nhất không phụ thuộc vào tốc độ và mất chi phí 630 nghìn đồng/giờ; Phần thứ hai tỉ lệ thuận với bình phương của tốc độ, khi $v = 10$ (km/h) thì chi phí phần thứ hai là 70 nghìn đồng/giờ. Tìm tốc độ của tàu để tổng chi phí nhiên liệu khi tàu chạy 1 km trên sông là ít nhất (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

Câu 18 Một xe ô tô chở khách du lịch có sức chứa tối đa là 16 hành khách. Trong một khu du lịch, một đoàn khách gồm 22 người đang đi bộ và muốn thuê xe về khách sạn. Lái



xe đưa ra thỏa thuận với đoàn khách du lịch như sau: Nếu một chuyến xe chở x (người) thì giá tiền cho mỗi người là $\frac{(40-x)^2}{2}$ (nghìn đồng). Với thỏa thuận như trên thì lái xe có thể thu được nhiều nhất bao nhiêu triệu đồng từ một chuyến chở khách (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Câu 19 Một trung tâm thương mại bán 2 500 ti vi mỗi năm. Chi phí gửi trong kho là 100 000 đồng một cái ti vi mỗi năm. Để đặt hàng, chi phí cố định cho mỗi lần đặt là 200 000 đồng cộng thêm 90 000 đồng mỗi cái ti vi. Trung tâm nên đặt hàng n lần trong mỗi năm và mỗi lần m cái để chi phí hàng tồn kho là ít nhất. Biết rằng mỗi lần đặt hàng về chỉ có một nửa trong số đó được trưng bày ở cửa hàng. Tính giá trị biểu thức $T = 20 \cdot m + 25 \cdot n$.

Câu 20 Một cơ sở sản xuất sữa hạt chất lượng cao có thể sản xuất được tối đa 300 lít mỗi ngày. Chi phí sản xuất x lít sữa mỗi ngày bao gồm: chi phí nhân công là 1 triệu đồng/ngày; chi phí nguyên vật liệu, đóng chai, bao bì là 35 nghìn đồng cho một lít sữa; chi phí bảo dưỡng máy móc là $C_b(x) = 0,00001x^2$ (triệu đồng). Ngoài ra, nếu x lít sữa sản xuất mỗi ngày vượt 200 lít thì phát sinh thêm chi phí vận hành quá tải là $C_v(x) = 0,00003(x - 200)^3$ (triệu đồng). Giá bán mỗi lít sữa là 60 nghìn đồng. Biết cơ sở bán hết lượng sữa sản xuất trong ngày. Hỏi mỗi ngày cơ sở có lợi nhuận (đơn vị: triệu đồng) đạt được nhiều nhất là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Câu 21 Một tập đoàn dự định đầu tư tổng số vốn là 20 tỷ đồng để phát triển hai dự án công nghệ A và B. Biết rằng khoản chi phí cơ sở hạ tầng cố định ban đầu là 4 tỷ đồng. Số vốn còn lại được phân bổ cho hai dự án A và B. Lợi nhuận kỳ vọng của dự án A khi đầu tư x tỷ đồng là $L_A(x) = -x^2 + 12x$. Lợi nhuận kỳ vọng của dự án B khi đầu tư y tỷ đồng là $L_B(y) = -y^2 + 20y$. Để tổng lợi nhuận kỳ vọng đạt giá trị lớn nhất thì tập đoàn nên phân bổ vốn cho dự án A bao nhiêu tỷ đồng?

Câu 22 Một công ty đang triển khai chiến dịch quảng cáo sản phẩm mới. Số tiền đầu tư quảng cáo là A (triệu đồng). Theo kết quả nghiên cứu thị trường, số lượng sản phẩm bán ra (đơn vị: sản phẩm) phụ thuộc vào chi phí quảng cáo theo hàm $q(A) = 1000 + \frac{1013}{5} \ln(1 + A)$. Biết rằng, chi phí sản xuất mỗi sản phẩm là 10 triệu đồng và giá bán mỗi sản phẩm là 20 triệu đồng. Giá trị lợi nhuận tối đa mà công ty có thể đạt được là bao nhiêu tỉ đồng (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Câu 23 Theo thống kê tại một nhà máy Z, nếu áp dụng tuần làm việc 40 giờ thì mỗi tuần có 100 tổ công nhân đi làm và mỗi tổ công nhân làm được 120 sản phẩm trong một giờ. Nếu tăng thời gian làm việc thêm 2 giờ mỗi tuần thì sẽ có 1 tổ công nhân nghỉ việc và năng suất lao động giảm 5 sản phẩm/1 tổ/1 giờ. Ngoài ra, số phế phẩm mỗi tuần ước tính là $P(x) = \frac{95x^2 + 120x}{4}$, với x là thời gian làm việc trong một tuần. Nhà máy cần áp dụng thời gian làm việc mỗi tuần mấy giờ để số lượng sản phẩm thu được mỗi tuần là lớn nhất?

Câu 24 Một xưởng in có 18 máy in, mỗi máy in in được 3 500 bản in trong một giờ. Chi phí để vận hành ban đầu cho một máy trong mỗi lần in là 80 000 đồng. Chi phí cho n máy hoạt động trong một giờ là $(60n + 100)$ nghìn đồng. Hỏi nếu in 70 000 tờ quảng cáo thì phải sử dụng bao nhiêu máy in để được lãi nhiều nhất?

Câu 25 Một công ty tái chế vận chuyển nguyên vật liệu gồm giấy và bìa carton từ thành phố A đến một nhà máy chế biến ở thành phố B dọc theo một tuyến đường cao tốc. Tốc độ tối đa cho phép trên đường cao tốc là 120 (km/h) và tốc độ tối thiểu là 60 (km/h). Gọi tốc độ xe tải vận chuyển nguyên vật liệu của công ty là x (km/h). Biết rằng loại xe tải mà công ty đang sử dụng có tốc độ tiêu thụ nhiên liệu là $12 + \frac{x^2}{450}$ lít mỗi giờ và loại nhiên liệu này có giá 20 000 đồng/lít. Đồng thời, công ty trả lương cho tài xế 120 000 đồng mỗi giờ lái xe. Xe tải nên được lái với tốc độ bao nhiêu km/h để chi phí mà công ty phải trả cho toàn bộ việc vận chuyển là ít nhất?

Câu 26 Một đại lý nhập khẩu trái cây tươi để phân phối cho các cửa hàng. Mỗi lần nhập khẩu trái cây, khoản chi phí vận chuyển (không đổi) là 25 triệu đồng. Chi phí bảo quản mỗi tạ trái cây dự trữ trong kho là 80 nghìn đồng/ngày. Thời gian bảo quản trái cây trong kho tối đa 10 ngày. Biết rằng, kể từ ngày đầu tiên nhập hàng, đại lý sẽ phân phối tối các cửa hàng 25 tạ trái cây mỗi ngày. Mỗi lần nhập hàng, đại lý phải nhập đủ trái cây cho bao nhiêu ngày phân phối để chi phí trung bình cho mỗi ngày là thấp nhất (bao gồm chi phí vận chuyển và chi phí bảo quản trong kho)?

KQ:

Câu 27 Giả sử giá của một cổ phiếu nào đó (tính bằng euro) trong một ngày nhất định (có 8 giờ giao dịch) được mô tả bởi hàm số $f(x) = 35,7 \cdot \frac{x+2}{x^2+21}$; $x \in [0; 8]$, trong đó x là thời gian (tính bằng giờ) kể từ khi phiên giao dịch mở cửa. Nếu một người mua 100 cổ phiếu và bán chúng ngay trong ngày này thì người đó có lợi nhuận tối đa là bao nhiêu euro?

KQ:

Câu 28 Theo kết quả thăm dò trước một buổi biểu diễn văn nghệ ngoài trời, nếu giá bán mỗi vé là p nghìn đồng thì sẽ có x người mua vé xem biểu diễn, giữa p và x có mối liên hệ $p = 500 \cdot e^{-0,0005x}$. Đơn vị tổ chức nên bán vé với giá bao nhiêu (nghìn đồng) thì đạt được doanh thu (tổng số tiền bán vé) cao nhất?

KQ:

Câu 29 Một doanh nghiệp dự định sản xuất không quá 400 sản phẩm. Nếu doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm ($1 \leq x \leq 400$) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm là $F(x) = x^3 - 1999x^2 + 1001000x + 250000$ (đồng). Trong đó, chi phí vận hành máy móc cho mỗi sản phẩm là $G(x) = \frac{100000x}{\frac{3}{2}x + 1}$ đồng. Tổng chi phí mua nguyên vật liệu là

$H(x) = 2x^3 + 100000x - 50000$ (đồng) nhưng do doanh nghiệp mua với số lượng lớn nên được giảm 1% cho 200 sản phẩm đầu tiên doanh nghiệp sản xuất và giảm 2% cho sản phẩm tiếp theo. Doanh nghiệp cần sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất?

KQ:

Câu 30 Một công ty chuyên phát nhanh cần vận chuyển một lô hàng trên quãng đường dài 200 km bằng một xe tải. Giả sử rằng xe chạy với vận tốc không đổi bằng v (km/h) trên suốt quãng đường đó với mức tiêu thụ dầu của xe được mô hình hóa bởi hàm số $C(v) = \frac{5}{v} + \frac{v}{512}$ (lít/km). Biết chi phí trả cho tài xế là 150 nghìn đồng/giờ và giá dầu là 20 nghìn đồng/lít. Hỏi chi phí thấp nhất (đơn vị: nghìn đồng, bao gồm tiền công



trả cho tài xế và tiền dầu) cho chuyến vận chuyển hàng đó là bao nhiêu?

KQ: 

Câu 31 Một công ty công nghệ sản xuất linh kiện điện tử. Chi phí sản xuất x linh kiện được tính theo công thức $C(x) = 0,5x^2 + 200x + 5\,000$ (USD). Khách hàng ký hợp đồng bao tiêu sản phẩm với mức giá như sau:

- ♦ Với 500 sản phẩm đầu tiên được mua với giá 1 000 USD/sản phẩm.
- ♦ Từ sản phẩm thứ 501 trở đi, giá thu mua là 800 USD/sản phẩm.

Để điều tiết sản xuất, Nhà nước áp đặt một mức thuế phụ thu là t (USD) trên mỗi đơn vị sản phẩm, nhưng chỉ áp dụng cho những sản phẩm từ thứ 501 trở đi và khi thu thuế thì mong muốn số tiền phụ thu lớn nhất. Với cách tính thuế và yêu cầu như vậy, doanh nghiệp nên sản xuất bao nhiêu linh kiện để lợi nhuận thu được lớn nhất?

KQ: 

Câu 32 Một doanh nghiệp kinh doanh một loại sản phẩm T được sản xuất trong nước. Qua nghiên cứu thấy rằng nếu chi phí sản xuất mỗi sản phẩm T là x (USD) thì số sản phẩm T các nhà máy sản xuất sẽ là $R(x) = 30x - 200$ và số sản phẩm T mà doanh nghiệp bán được trên thị trường trong nước sẽ là $Q(x) = 3\,000 - 10x$. Số sản phẩm còn dư doanh nghiệp xuất khẩu ra thị trường quốc tế với giá bán mỗi sản phẩm ổn định trên thị trường quốc tế là 150 (USD). Nhà nước đánh thuế trên mỗi sản phẩm xuất khẩu là a (USD) và luôn đảm bảo tỉ lệ giữa lợi nhuận từ việc xuất khẩu của doanh nghiệp và thuế thu được của nhà nước tương ứng là 4 : 1. Hãy tìm giá trị của a biết lợi nhuận mà doanh nghiệp thu được từ việc xuất khẩu là nhiều nhất.

KQ: 

Câu 33 Một công ty vận tải có thể huy động tối đa 10 xe tải để chuyển 60 tấn hàng hóa đến một địa điểm. Mỗi xe tải có thể chở 3 tấn hàng trong một chuyến đi (có thể đi nhiều chuyến) và mất 1 giờ để hoàn tất một chuyến. Chi phí khởi động để điều một xe tải là 100 nghìn đồng. Ngoài ra, khi cùng chạy, n xe tải tốn chi phí nhiên liệu mỗi giờ là $15(2n + 5)$ nghìn đồng. Công ty đang tính toán để sử dụng một số lượng xe tải sao cho tổng chi phí vận chuyển là thấp nhất, vậy chi phí thấp nhất ấy là bao nhiêu nghìn đồng cho đợt vận chuyển hàng nói trên?

KQ: 

Câu 34 Từ năm 2004 đến năm 2019 doanh thu $R(t)$ (tính bằng triệu đô la) của McDonald's có thể được mô hình hóa bởi $R(t) = -130,769t^3 + 2\,296,47t^2 - 11\,493,5t + 35\,493$ ($4 \leq t \leq 19$), trong đó t là đại diện cho năm, với $t = 4$ tương ứng với năm 2004. Biết rằng $R'(t)$ là hàm tốc độ doanh thu theo thời gian. Tốc độ thay đổi doanh thu của McDonald's lớn nhất vào năm nào (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị, tính theo triệu đô la mỗi năm)?

KQ: 

Câu 35 Công ty X cần vận chuyển một lượng lớn hàng hóa từ nhà kho A đến cửa hàng B, lượng hàng hóa chia ra thành nhiều chuyến đi bằng một xe tải có tải trọng tối đa là 50 tấn. Công ty cần tính toán để tối ưu hóa tốc độ vận chuyển hàng hóa của xe. Biết rằng để bốc xếp x tấn hàng hóa từ nhà kho A lên xe cần thời gian $\frac{x}{60-x}$ giờ. Sau khi xe đến B, để di chuyển mỗi tấn hàng từ xe xuống cửa hàng B cần thời gian 3 phút. Tổng

thời gian trung bình di chuyển từ nhà kho A đến cửa hàng B và quay về A là 1,2 giờ. Em hãy cho biết trong mỗi chuyến đi, xe nên vận chuyển bao nhiêu tấn hàng để khối lượng hàng hóa được vận chuyển trung bình trên mỗi giờ là lớn nhất? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

KQ: 

Câu 36 Một thí sinh dành 40 phút để làm 21 câu hỏi mức độ vận dụng và vận dụng cao trong đề thi tốt nghiệp THPT Quốc Gia môn Toán bao gồm: 14 câu hỏi vận dụng và 07 câu hỏi vận dụng cao. Nếu dành x phút cho các câu hỏi vận dụng thì tổng điểm thí sinh đạt được cho nhóm câu hỏi vận dụng là $\frac{14x}{5(x+1)}$ còn nếu dành y phút cho các câu hỏi vận dụng cao thì tổng điểm thí sinh đạt được cho nhóm câu hỏi vận dụng cao là $\frac{14y}{5(3y+1)}$. Hỏi thí sinh này nên dành bao nhiêu phút cho nhóm câu hỏi vận dụng cao để tổng điểm cho 21 câu hỏi mức độ vận dụng và vận dụng cao là lớn nhất?

KQ: 

Câu 37 Công ty chứng khoán VNStock cần xử lý 18 000 lệnh giao dịch trong một ngày làm việc (8 giờ). Hệ thống gồm các máy chủ xử lý với thông số như sau

- ◆ Năng suất 250 lệnh/giờ/máy.
- ◆ Chi phí triển khai 15 triệu đồng/máy (cài đặt ban đầu).
- ◆ Chi phí vận hành điện và bảo trì 120 000 đồng/giờ/máy.
- ◆ Chi phí nhân viên giám sát 8 triệu đồng/giờ (trả theo giờ làm việc thực tế).

Tìm chi phí thấp nhất mà công ty phải bỏ ra để thực hiện số lượng giao dịch nói trên (làm tròn đến hàng đơn vị của triệu đồng).

KQ: 

Câu 38 Một công ty muốn đầu tư vào hệ thống điện mặt trời có công suất x (đơn vị tính: MW). Theo nghiên cứu cho thấy một số thông tin sau: Chi phí đầu tư ban đầu là $C_1(x) = 1\,400 + 55x$ (tỷ đồng). Doanh thu hàng năm là $R(x) = 28x - 0,15x^2$ (tỷ đồng/năm). Chi phí vận hành hàng năm là $C_2(x) = 12 + 0,35x + 0,012x^2$ (tỷ đồng/năm). Hãy tìm công suất x (làm tròn đến hàng đơn vị) để tối đa hoá lợi nhuận trên đầu tư, được tính là tỷ lệ lợi nhuận hàng năm trên chi phí đầu tư ban đầu.

KQ: 

Câu 39 Việt Nam đang triển khai dự án đường sắt tốc độ cao chặng Thành phố Hồ Chí Minh - Nha Trang với tổng chiều dài quãng đường là 375 km. Tổng công ty đường sắt cần xác định vận tốc khai thác v (km/h) cho đoàn tàu ($200 \leq v \leq 350$) để đạt lợi nhuận cao nhất cho mỗi chuyến tàu. Qua các số liệu tính toán kỹ thuật và khảo sát thị trường, ta có các thông tin sau

- ◆ Chi phí điện năng tiêu thụ cho toàn bộ hành trình 375 km được tính toán chính xác theo công thức $C_1(v) = 15v^2$ (nghìn đồng).
- ◆ Chi phí vận hành cố định: Bao gồm nhân sự, khấu hao thiết bị và bảo trì đường ray tính cho mỗi giờ tàu chạy là 250 triệu đồng/giờ.
- ◆ Số lượng khách mua vé cho mỗi chuyến tàu phụ thuộc vào vận tốc v theo hàm số $N(v) = 4v$ (khách).
- ◆ Giá vé bình quân cố định cho toàn chặng là 1 500 000 đồng/khách.



Xác định vận tốc khai thác v để lợi nhuận ròng của một chuyến tàu là lớn nhất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

KQ:

Câu 40 Một công ty kinh doanh dịch vụ nghỉ dưỡng nhận thấy rằng: Nếu áp dụng mức giá 3 triệu đồng/người/ngày thì mỗi tháng có 140 khách đến nghỉ và mỗi khách sẽ nghỉ 12 ngày. Nếu cứ tăng giá thêm 500 nghìn đồng/người/ngày thì hàng tháng số khách đến nghỉ sẽ giảm đi 6 người và thời gian lưu trú của mỗi người khách cũng giảm 2 ngày. Ngược lại, nếu cứ giảm 500 nghìn đồng/người/ngày thì hàng tháng số khách đến nghỉ sẽ tăng thêm 6 người và thời gian lưu trú của mỗi người khách cũng tăng thêm 2 ngày. Hỏi công ty cần áp dụng mức giá bao nhiêu triệu đồng/người/ngày để lợi nhuận hàng tháng thu được là lớn nhất, biết tổng chi phí công ty phải chi cho một ngày lưu trú của mỗi người khách là 2 triệu đồng và Sở du lịch không cho công ty thu vượt quá 10 triệu đồng/người/ngày (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

KQ:

Câu 41 Một công ty công nghệ cung cấp gói lưu trữ dữ liệu doanh nghiệp với giá niêm yết 200 000 đồng/tháng và đang có 400 khách hàng. Phòng kinh doanh xác định được quy luật: Cứ giảm giá 10 000 đồng thì sẽ có thêm 50 khách hàng mới. Tuy nhiên, do hiện tượng quá tải băng thông, chi phí vận hành $C(n)$ (nghìn đồng) không cố định mà biến thiên theo hàm bậc hai của số lượng khách hàng n , được xác định bởi công thức $C(n) = 28n + 0,01n^2 + 15\,000$. Công ty cần chốt giá bán bao nhiêu nghìn đồng để lợi nhuận đạt mức tối đa?

KQ:

Câu 42 Một nhà hàng có tổng cộng 30 nhân viên. Mỗi nhân viên khi làm tăng ca được trả mức lương cố định là 400 USD/tháng. Vì nhà hàng liên tục đón những đoàn khách với số lượng lớn nhưng không thể thuê thêm nhân viên nên chủ nhà hàng này muốn khuyến khích nhân viên của mình tăng ca. Ông chủ đưa ra quy định như sau:

- ◆ Mỗi khi có thêm một nhân viên tăng ca, mức lương của tất cả nhân viên tăng ca sẽ được tăng thêm 2% so với mức lương cố định;
- ◆ Do đó, nếu có k nhân viên tăng ca thì lương cho mỗi nhân viên tăng ca sẽ tăng $2k\%$ so với mức lương cố định.

Bên cạnh tiền lương cho nhân viên thì tiền điện nước và duy trì cơ sở vật chất là cố định 8 000 USD/tháng.

Biết nhà hàng có doanh thu trung bình từ khách hàng (không tính tiền tip) là 10 000 USD/tháng.

Ngoài ra, mỗi nhân viên tăng ca trung bình sẽ được khách hàng tip 800 USD/tháng. Tuy nhiên toàn bộ tiền tip phải được nộp lại cho chủ nhà hàng và khoản tiền này sẽ được tính vào doanh thu của nhà hàng.

Để lợi nhuận của nhà hàng đạt lớn nhất thì số nhân viên tăng ca là bao nhiêu?

(Tiền tip là khoản tiền khách hàng thưởng cho nhân viên phục vụ trên tinh thần tự nguyện để cảm ơn họ đã phục vụ mình nhiệt tình, chu đáo).

Câu 43 Một doanh nghiệp sản xuất thiết bị điện tử thông minh có quy trình vận hành và chính sách thuế như sau: Trong mỗi tháng, doanh nghiệp phải chi trả một khoản chi phí cố định 200 triệu đồng, khoản chi phí này không phụ thuộc vào số lượng sản phẩm sản xuất. Ngoài ra, để hoàn thiện mỗi sản phẩm, doanh nghiệp phải chịu chi

phí biến đổi 1 triệu đồng cho mỗi sản phẩm. Mỗi sản phẩm được bán ra thị trường với giá 3 triệu đồng một sản phẩm. Nhằm khuyến khích gia tăng quy mô sản xuất, cơ quan quản lý áp dụng chính sách thuế tính theo tổng doanh thu trong tháng, với mức thuế suất giảm dần theo sản lượng. Nếu doanh nghiệp bán dưới 100 sản phẩm trong tháng, thuế suất là 10% tổng doanh thu. Nếu bán từ 100 đến dưới 300 sản phẩm, thuế suất là 8% tổng doanh thu. Nếu bán từ 300 sản phẩm trở lên, thuế suất là 5% tổng doanh thu. Gọi x là số lượng sản phẩm doanh nghiệp sản xuất và bán ra trong một tháng ($x \in \mathbb{N}^*$). Giả sử số sản phẩm doanh nghiệp sản xuất trong tháng được bán hết. Hỏi doanh nghiệp cần sản xuất tối thiểu bao nhiêu sản phẩm để bắt đầu có lãi?

Câu 44 Để hạn chế vi phạm thời gian làm việc đối với công nhân, giám đốc công ty quyết định xử lý bằng cách phạt tiền. Nhờ sự giám sát chặt chẽ của quản đốc, giám đốc công ty biết được trong một tháng, giữa tỉ lệ công nhân vi phạm đúng k lần ($1 \leq k \leq 2$) là $t_k = \frac{N_k}{N}$ (trong đó N_k là số công nhân vi phạm đúng k lần, N là tổng số công nhân) và mức phạt mỗi lần vi phạm có mối liên hệ như sau: Nếu mỗi công nhân nộp phạt x nghìn đồng ($60 \leq x \leq 300$) khi vi phạm lần thứ nhất và nộp phạt $x - 20$ nghìn đồng khi vi phạm lần thứ hai thì $t_1 = \frac{36}{x + 10}$ và $t_2 = \frac{4}{x - 30}$ (không có công nhân nào vi phạm quá hai lần). Biết rằng N không đổi và bằng 2 400. Tổng số tiền nộp phạt trong một tháng ít nhất là bao nhiêu triệu đồng? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

Câu 45 Việt Nam đang triển khai dự án đường sắt tốc độ cao chặng Thành phố Hồ Chí Minh - Nha Trang với tổng chiều dài quãng đường là 375 km. Tổng công ty đường sắt cần xác định vận tốc khai thác v (km/h) cho đoàn tàu ($200 \leq v \leq 350$) để đạt lợi nhuận cao nhất cho mỗi chuyến tàu. Qua các số liệu tính toán kỹ thuật và khảo sát thị trường, ta có các thông tin sau: Chi phí điện năng tiêu thụ cho toàn bộ hành trình được tính toán chính xác theo công thức $C_1(v) = 15v^2$ (nghìn đồng). Chi phí vận hành cố định: bao gồm nhân sự, khấu hao thiết bị và bảo trì đường ray tính cho mỗi giờ tàu chạy là 250 triệu đồng/giờ. Số lượng khách mua vé cho mỗi chuyến tàu phụ thuộc vào vận tốc v theo hàm số $N(v) = 4v$ (khách). Giá vé bình quân cố định cho toàn chặng là 1 500 000 đồng/khách. Xác định vận tốc khai thác v để lợi nhuận ròng của một chuyến tàu là lớn nhất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

KQ:

Câu 46 Một xưởng sản xuất robot hút bụi thông minh đang trong giai đoạn tăng tốc. Số lượng robot sản xuất mỗi tháng là x (chiếc), với $x \in \mathbb{N}^*$ và $10 \leq x \leq 500$. Mỗi robot được bán với giá cố định là 12 triệu đồng, tổng chi phí sản xuất mỗi tháng là $C(x) = 150 \cdot e^{0,005x} + 450$ (triệu đồng). Để xưởng đạt lợi nhuận tối thiểu là 1,5 tỷ đồng mỗi tháng, xưởng cần sản xuất và tiêu thụ ít nhất bao nhiêu robot một tháng?

KQ:

Câu 47 Một doanh nghiệp cần sản xuất một mặt hàng trong đúng 10 ngày và phải sử dụng hai máy A và B . Máy A làm việc trong x ngày và cho số tiền lãi là $x^2 + 2x$ (triệu đồng), máy B làm việc trong y ngày và cho số tiền lãi là $326y - 27y^2$ (triệu đồng). Hỏi doanh nghiệp đó cần sử dụng máy A trong bao nhiêu ngày sao cho số tiền lãi là nhiều nhất? (Biết rằng hai máy A và B không đồng thời làm việc, máy B làm việc không quá 6 ngày).

KQ:



Câu 48 Một nhà hàng có tổng cộng 30 nhân viên. Mỗi nhân viên khi làm tăng ca được trả mức lương cố định là 400 USD/tháng. Vì nhà hàng liên tục đón những đoàn khách với số lượng lớn nhưng không thể thuê thêm nhân viên nên chủ nhà hàng này muốn khuyến khích nhân viên của mình tăng ca. Ông chủ đưa ra quy định như sau:

- ◆ Mỗi khi có thêm một nhân viên tăng ca, mức lương của tất cả nhân viên tăng ca sẽ được tăng thêm 2% so với mức lương cố định;
- ◆ Do đó, nếu có k nhân viên tăng ca thì lương cho mỗi nhân viên tăng ca sẽ tăng $2k\%$ so với mức lương cố định.

Bên cạnh tiền lương cho nhân viên thì tiền điện nước và duy trì cơ sở vật chất là cố định 8 000 USD/tháng.

Biết nhà hàng có doanh thu trung bình từ khách hàng (không tính tiền tip) là 10 000 USD/tháng. Ngoài ra, mỗi nhân viên tăng ca trung bình sẽ được khách hàng tip 800 USD/tháng. Tuy nhiên toàn bộ tiền tip phải được nộp lại cho chủ nhà hàng và khoản tiền này sẽ được tính vào doanh thu của nhà hàng.

Để lợi nhuận của nhà hàng đạt lớn nhất thì số nhân viên tăng ca là bao nhiêu?

(Tiền tip là khoản tiền khách hàng thưởng cho nhân viên phục vụ trên tinh thần tự nguyện để cảm ơn họ đã phục vụ mình nhiệt tình, chu đáo).

KQ:

Câu 49 Để sản xuất một mặt hàng phục vụ ngày tết, một doanh nghiệp có kế hoạch vay ngắn hạn số tiền 150 triệu đồng trong vòng 1 tháng, với lãi suất là 4%/tháng. Tổng chi phí để sản xuất và kinh doanh x sản phẩm là $V(x) = 1,4x - 600 + \frac{50\,000}{x}$ (đơn vị: triệu đồng), với x là số nguyên dương. Biết rằng, giá bán một sản phẩm là 1,2 triệu đồng, doanh nghiệp chịu thuế thu nhập là 17% tính trên tổng lợi nhuận thu được sau khi sản xuất và bán hết x sản phẩm. Hỏi sau 1 tháng sản xuất và kinh doanh như trên, doanh nghiệp trả hết phần nợ vay ngân hàng thì còn số tiền lợi nhuận nhiều nhất là bao nhiêu (đơn vị: triệu đồng)?

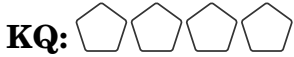
KQ:

Câu 50 Một doanh nghiệp chuyên sản xuất ô tô hạng sang, biết nhu cầu của thị trường và chi phí của loại sản phẩm này lần lượt là $Q = 5000 - \frac{P}{3}$, $C(Q) = Q^2 + 2200Q + 500$, trong đó Q là số sản phẩm và P là giá bán của một sản phẩm. Giả sử Nhà nước đánh thuế đặc biệt t (triệu đồng) trên mỗi đơn vị sản phẩm. Với mỗi mức thuế t , doanh nghiệp lựa chọn sản lượng Q để lợi nhuận đạt lớn nhất. Hãy xác định mức sản lượng Q mà doanh nghiệp sẽ sản xuất nếu Nhà nước chọn mức thuế t sao cho số tiền thuế thu được là lớn nhất.

KQ:

Câu 51 Một doanh nghiệp sản xuất thiết bị điện tử thông minh có quy trình vận hành và chính sách thuế như sau: Trong mỗi tháng, doanh nghiệp phải chi trả một khoản chi phí cố định 200 triệu đồng, khoản chi phí này không phụ thuộc vào số lượng sản phẩm sản xuất. Ngoài ra, để hoàn thiện mỗi sản phẩm, doanh nghiệp phải chịu chi phí biến đổi 1 triệu đồng cho mỗi sản phẩm. Mỗi sản phẩm được bán ra thị trường với giá 3 triệu đồng một sản phẩm. Nhằm khuyến khích gia tăng quy mô sản xuất, cơ quan quản lý áp dụng chính sách thuế tính theo tổng doanh thu trong tháng, với mức thuế suất giảm dần theo sản lượng. Nếu doanh nghiệp bán dưới 100 sản phẩm trong tháng,

thuế suất là 10% tổng doanh thu. Nếu bán từ 100 đến dưới 300 sản phẩm, thuế suất là 8% tổng doanh thu. Nếu bán từ 300 sản phẩm trở lên, thuế suất là 5% tổng doanh thu. Gọi x là số lượng sản phẩm doanh nghiệp sản xuất và bán ra trong một tháng ($x \in \mathbb{N}^*$). Tìm số sản phẩm tối thiểu để doanh nghiệp bắt đầu có lãi. KQ: 

Câu 52 Một công ty công nghệ GigaCloud chuẩn bị ra mắt dịch vụ lưu trữ đám mây cao cấp dành riêng cho các doanh nghiệp lớn. Qua phân tích dữ liệu lớn (Big Data), các chuyên gia kinh tế của công ty xác lập được mô hình cầu như sau: Nếu định giá gói cước hàng tháng là x (triệu đồng) thì số lượng doanh nghiệp đăng ký sử dụng S (nghìn doanh nghiệp) sẽ là $S(x) = \sqrt{45 - x}$ (Với điều kiện mức giá x phải nhỏ hơn 45 triệu đồng). Chi phí vận hành hệ thống của GigaCloud bao gồm hai khoản: Chi phí cố định là 10 tỷ đồng mỗi tháng (cho cơ sở hạ tầng, nhân sự cốt lõi) và chi phí vận hành. Do đặc thù bảo mật dữ liệu, khi số lượng khách hàng tăng lên thì chi phí băng thông và bảo trì tăng theo cấp số nhân. Cụ thể, chi phí này tỷ lệ thuận với bình phương số lượng khách hàng $C_v = 3S^2$ (tỷ đồng). Hãy xác định mức giá cước x mà GigaCloud cần niêm yết để đạt lợi nhuận ròng hàng tháng cao nhất? KQ: 

Câu 53 Một công ty khai thác tuyến tàu cao tốc chở khách du lịch từ đất liền ra đảo với khoảng cách 60 km. Giả sử tàu di chuyển với vận tốc v không đổi trên suốt tuyến đường. Chi phí vận hành cho mỗi giờ hoạt động của tàu bao gồm:

- ◆ Chi phí nhiên liệu: $100v^3$ (đồng), với v (km/h) là vận tốc của tàu ($v > 0$).
- ◆ Chi phí cố định (lương thủy thủ đoàn, khấu hao, bến bãi, ...): 4 000 000 đồng.

Để đảm bảo chất lượng dịch vụ, thời gian di chuyển mỗi chuyến không được vượt quá 1 giờ 30 phút. Đồng thời, vì lý do an toàn hàng hải, tàu không được chạy quá 55 km/h. Tàu có sức chứa tối đa 150 hành khách và giả sử rằng số lượng khách trên mỗi chuyến đi luôn đạt mức tối đa. Ban giám đốc thiết lập mục tiêu lợi nhuận thu được từ mỗi chuyến đi bằng 25% tổng chi phí vận hành của chuyến đó. Để đạt được mức lợi nhuận này trong điều kiện tàu được vận hành với tổng chi phí thấp nhất, giá vé mỗi hành khách phải trả là bao nhiêu nghìn đồng? KQ: 

Câu 54 Trong kế hoạch khai thác tuyến ca nô cao tốc phục vụ du lịch sinh thái trên vùng lòng hồ Thủy điện Sơn La (từ bến Mường La đi Quỳnh Nhai) có chiều dài 100 km. Ban quản lý cần xác định vận tốc khai thác v (km/h) cho ca nô ($30 \leq v \leq 70$) để đạt lợi nhuận kinh tế cao nhất. Các thông số được xác định như sau: Công suất tiêu thụ điện của động cơ ca nô là $P(v) = 10v^3$ (W). Giá điện kinh doanh tại bến sặc là 2000 đồng/kWh. Chi phí vận hành cố định: Bao gồm nhân lực lái tàu, khấu hao và bến bãi, được tính là 2500000 đồng cho mỗi giờ ca nô chạy. Số lượng khách mua vé cho mỗi chuyến phụ thuộc vào vận tốc khai thác theo hàm số: $N(v) = \frac{v}{5} + 20$ (hành khách). Giá vé bình quân cho tuyến này là 500000 đồng/khách. Hãy xác định vận tốc khai thác v để lợi nhuận ròng của mỗi chuyến ca nô trên tuyến này là lớn nhất. (Biết công thức tính điện lượng tiêu thụ là $A = P(v) \cdot t$). KQ: 



Câu 55 Chi phí đầu tư ban đầu để xây dựng một nhà máy sản xuất xe máy điện là 840 tỷ đồng. Bộ phận nghiên cứu thị trường ước tính rằng: lượng cầu đối với dòng xe này phụ thuộc vào giá bán theo hàm số $x = 100 - 2p$; trong đó p (triệu đồng) là giá niêm yết của mỗi chiếc và x (nghìn chiếc) là số lượng xe bán ra trong một năm. Chi phí để sản xuất x nghìn chiếc xe trong một năm (không bao gồm vốn đầu tư xây dựng nhà máy) được cho bởi hàm số $C(x) = 0,5x^2 + 10x + 50$ (tỷ đồng). Biết rằng nhà máy phải đóng thuế thu nhập doanh nghiệp là 20% trên lợi nhuận hàng năm (doanh thu trừ đi chi phí sản xuất). Giả sử nhà máy luôn định giá p sao cho lợi nhuận sau thuế đạt mức cao nhất. Hỏi với chiến lược giá tối ưu đó, nhà máy sẽ thu hồi được toàn bộ vốn đầu tư ban đầu sau bao nhiêu năm hoạt động?

KQ: 

Câu 56 Hãng Xtul Air – Công ty chuyên về các chuyến bay thuê chuyến vừa có hoạt động thâm nhập thị trường Việt Nam. Hãng đã cho ra mắt dịch vụ sử dụng máy bay riêng của Xtul Air, trong đó có chiếc Gulfstream G650 là máy bay phản lực thương mại lớn, sức chứa tối đa 20 người, có thể bay từ Hà Nội về TP. Hồ Chí Minh trong 1 tiếng, có giá 8 000 USD/giờ. Hãng cho biết với mỗi lần bay, hãng sẽ tốn 4 000 USD bao gồm tiền nhiên liệu và bảo hành máy móc. Ngoài ra tốn thêm 1 000 USD cho mỗi khách hàng do trọng lượng tăng thêm và các dịch vụ trên máy bay. Để khuyến khích khách hàng trải nghiệm, hãng Xtul Air áp dụng chính sách giảm giá vé cho các chuyến bay, cứ mỗi chuyến bay mọi người sẽ được giảm giá vé theo tỷ lệ phần trăm dựa trên số lượng khách hàng. Cụ thể, nếu chuyến bay có 5 người thì mỗi hành khách được giảm 15% giá vé, chuyến bay có 6 người thì mỗi khách được giảm 18% giá vé, và cứ thế ứng với n người thì vé được giảm $3n\%$ giá vé, tối đa 20 hành khách (từ 5 người thì có thể bay). Hỏi lợi nhuận của hãng cao nhất khi số khách hàng trên máy bay là bao nhiêu?

KQ: 

Chủ đề 2

TOÁN THỰC TẾ LIÊN QUAN ĐẾN
TỐC ĐỘ THAY ĐỔI MỘT ĐẠI LƯỢNG

I LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

- ✓ Nếu $s = s(t)$ là hàm vị trí của một vật chuyển động trên một đường thẳng thì $v = s'(t)$ biểu thị vận tốc tức thời của vật (tốc độ thay đổi của độ dịch chuyển theo thời gian). Tốc độ thay đổi tức thời của vận tốc theo thời gian là gia tốc tức thời của vật:

$$a(t) = v'(t) = s''(t).$$

- ✓ Nếu $C = C(t)$ là nồng độ của một chất tham gia phản ứng hoá học tại thời điểm t , thì $C'(t)$ là tốc độ phản ứng tức thời (tức là độ thay đổi nồng độ) của chất đó tại thời điểm t .
- ✓ Nếu $P = P(t)$ là số lượng cá thể trong một quần thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm t , thì $P'(t)$ biểu thị tốc độ tăng trưởng tức thời của quần thể tại thời điểm t .

II BÀI TẬP ÁP DỤNG

1 Trắc nghiệm đúng sai

Câu 1 Dân số của một quốc gia sau t (năm) bắt đầu từ năm 2023 được tính theo công thức $N(t) = 100e^{0,012t}$ (trong đó $N(t)$ được tính bằng triệu người, $0 \leq t \leq 50$) (các kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

-  a Dân số của quốc gia này ở năm 2030 vượt mức 110 triệu người.
-  b Dân số của quốc gia này ở năm 2035 vượt mức 115 triệu người.
-  c Vào năm 2030 tốc độ tăng dân số là 1,6 triệu người/năm.
-  d Vào năm 2026 tốc độ tăng dân số là 1,2 triệu người/năm.

Câu 2 Tại một khu bảo tồn thiên nhiên các nhà khoa học đã thả một số cá thể của một loài động vật quý hiếm trong một khu rừng rộng 10 hecta và theo dõi sự tăng trưởng số lượng của chúng. Họ thấy rằng số lượng cá thể của loài động vật đó sau t năm kể từ khi nuôi tại khu bảo tồn được xấp xỉ bởi hàm số $h(t) = 70 \log_2 \left(\frac{8t+1}{t+1} \right) + 30$ (cá thể, t là số thực dương) và tốc độ tăng trưởng số lượng cá thể của loài động vật đó tại thời điểm sau đúng t năm kể từ khi nuôi được xấp xỉ bởi hàm số $h'(t)$ (đơn vị: cá thể/năm).

-  a Thời điểm ban đầu, người ta thả nuôi 30 cá thể.
-  b Sau 9 tháng kể từ khi bắt đầu nuôi, số lượng cá thể của loài động vật đó là 170.
-  c Tốc độ tăng trưởng số lượng cá thể của loài động vật đó tại thời điểm đúng 6 năm kể từ khi nuôi là $\frac{10}{7}$ (cá thể/năm).
-  d Số lượng cá thể của loài động vật đó không vượt quá 240.



Câu 3 Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 8t + 1$, trong đó t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét.

- a** Vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 3$ s bằng 8 (m/s).
- b** Tại thời điểm mà chất điểm di chuyển được 13 m, vận tốc khi đó bằng 8 (m/s).
- c** Vận tốc nhỏ nhất của chất điểm là 5 (m/s).
- d** Gia tốc tại thời điểm chất điểm đạt vận tốc nhỏ nhất bằng 2 (m/s²).

Câu 4 Kính viễn vọng không gian Hubble được đưa vào vũ trụ ngày 24/4/1990 bằng tàu con thoi Discovery. Vận tốc của tàu con thoi trong sứ mệnh này, từ lúc cất cánh tại thời điểm $t = 0$ s cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi tại thời điểm $t = 126$ s, cho bởi hàm số $v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23,61t - 3,083$ (v được tính bằng feet/s, 1 feet = 0,3048 m).

- a** Vận tốc của tàu con thoi luôn tăng trong không thời gian từ lúc cất cánh đến khi tên lửa đẩy được phóng đi.
- b** Gia tốc lớn nhất à tàu con thoi có thể đạt được trong lúc thực hiện sứ mệnh trên (làm tròn đến hàng phần trăm) là 62,87 feet/s².
- c** Gia tốc của tàu con thoi tăng trong khoảng thời gian từ lúc cất cánh đến thời điểm $t = 23$ s.
- d** Gia tốc của tàu con thoi tăng trong khoảng thời gian từ $t = 21,5$ (s) đến 126 (s).

Câu 5 Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô, biết rằng thể tích V (lít) của lượng xăng trong bình xăng được tính theo thời gian bơm xăng t (phút) được cho bởi công thức

$$V(t) = 300(t^2 - t^3) + 4 \text{ với } 0 \leq t \leq 0,5.$$

Gọi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t , với $0 \leq t \leq 0,5$.

- a** Lượng xăng ban đầu trong bình là 1 lít.
- b** $V'(t) = 300(2t - 3t^2) + 4$, với $0 \leq t \leq 0,5$.
- c** Xăng chảy vào bình xăng vào thời điểm ở giây thứ 30 có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất.
- d** Lượng xăng lớn nhất bơm vào bình xăng là 41,5 lít.

Câu 6 Thể tích nước (đơn vị: m³) của một bể bơi sau t phút bơm được cho bởi công thức

$$V(t) = \frac{1}{100}(-0,5t^3 + 90t^2), \quad 0 \leq t \leq 120.$$

Gọi $v(t) = V'(t)$ là tốc độ bơm nước.

- a** Thể tích nước sau 10 phút là 80 m³.
- b** Tốc độ bơm nước tại thời điểm $t = 20$ phút là 30 m³/phút.
- c** Trong 30 phút đầu, thể tích nước lớn nhất trong bể là 675 m³.
- d** Tốc độ bơm nước cao nhất là 60 m³/phút.

Câu 7 Dân số của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức

$$f(t) = \frac{26t + 10}{t + 5} \quad (f(t) \text{ tính bằng nghìn người})$$

- a** Số dân của thị trấn vào đầu năm 1980 là 18 nghìn người.

- b** Số dân của thị trấn vào đầu năm 1995 là 23 nghìn người.
- c** Xét f là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$, vậy hàm số đồng biến trên $[0; +\infty)$.
- d** Đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm). Vào năm 1998 thì tốc độ tăng dân số là 0,125 nghìn người/năm.

Câu 8 Dựa vào thiết bị giám sát hành trình của một xe khách di chuyển trên một đường thẳng theo thời gian t (phút), với gốc tọa độ là văn phòng của công ty và chiều dương cho trước, người ta xác định được vị trí của xe tại thời điểm t (phút) được cho bởi hàm số $S(t) = \frac{1}{36}t^3 - \frac{1}{6}t^2$ (km) với $t \in [0; 6]$. Vận tốc của xe tại thời điểm t (phút) (với $t \in [0; 6]$) là $v(t)$ (km/phút) được tính theo công thức $v(t) = S'(t)$.

- a** Sau 1 phút di chuyển, xe cách văn phòng công ty một đoạn $\frac{5}{36}$ km.
- b** Vận tốc của xe tại thời điểm $t = 1$ (phút) là $-\frac{1}{4}$ (km/phút).
- c** Sau 6 phút di chuyển, xe di chuyển được quãng đường là $\frac{16}{9}$ km.
- d** Trong khoảng thời gian từ phút thứ 2 đến phút thứ 4, tốc độ xe đang tăng dần.

Câu 9 Đậu đỗ là một loại thực phẩm quen thuộc trong bữa ăn của người Việt Nam. Ngoài giá trị dinh dưỡng cao, đậu đỗ còn có nhiều công dụng tuyệt vời cho sức khỏe và sắc đẹp như: chống oxy hóa, giúp cơ bắp con người khỏe mạnh, tăng cường sức khỏe cho tim mạch con người, lợi ích cho hệ tiêu hóa, bổ thận, cung cấp vitamin bổ dưỡng cho cơ thể, đào thải độc tố, giải độc, tốt cho hệ miễn dịch, giúp huyết áp ổn định, da đẹp. Cây đậu đỗ khi trồng có chiều cao 6 cm. Khảo sát cho thấy độ cao tính bằng centimet của cây đậu đỗ tại thời điểm t kể từ khi được trồng được cho bởi hàm số $h(t) = -0,005t^4 + bt^3 + c$ (trong đó $b, c \in \mathbb{R}$), với t tính theo tuần. Giả sử $h'(t)$ là tốc độ tăng chiều cao của cây đậu đỗ sau khi trồng (đơn vị của $h'(t)$: cm/tuần). Biết $h'(5) = 5$.

- a** Hàm số $h(t)$ có công thức $h(t) = -0,005t^4 + 0,1t^3$.
- b** Giai đoạn tăng trưởng của cây đậu đỗ đó kéo dài 15 tuần.
- c** Chiều cao tối đa của cây đậu đỗ đó là 90 cm.
- d** Vào thời điểm cây đậu đỗ đó phát triển nhanh nhất thì chiều cao của cây là 56 cm.

Câu 10 Khối lượng của một cá thể sinh vật X theo thời gian t tuần ($t \geq 0$) cho bởi công thức $f(t) = 0,1 + t^2e^{-kt}$ ($k \in \mathbb{R}$, đơn vị tính bằng microgram). Biết rằng sinh vật X chỉ sống được đúng 6 tuần và khối lượng của nó lớn nhất tại thời điểm $t = 4$, đúng lúc nó sinh sản.

- a** $f'(4) = 0$.
- b** $f'(t) = 2te^{-kt}$.
- c** $k = \frac{1}{2}$.
- d** Biết rằng mỗi lần sinh sản, mỗi cá thể X sinh ra 10 cá thể con. Nếu ban đầu ($t = 0$), người ta nuôi một cá thể X vừa mới sinh thì số lượng cá thể X tại thời điểm $t = 17$ là 11 000.

Câu 11 Một hạt chuyển động trên một đường thẳng có gắn một trục tọa độ với gốc tọa độ là vị trí bắt đầu chuyển động. Tọa độ của hạt trên trục tại thời điểm t (đơn vị: giây)



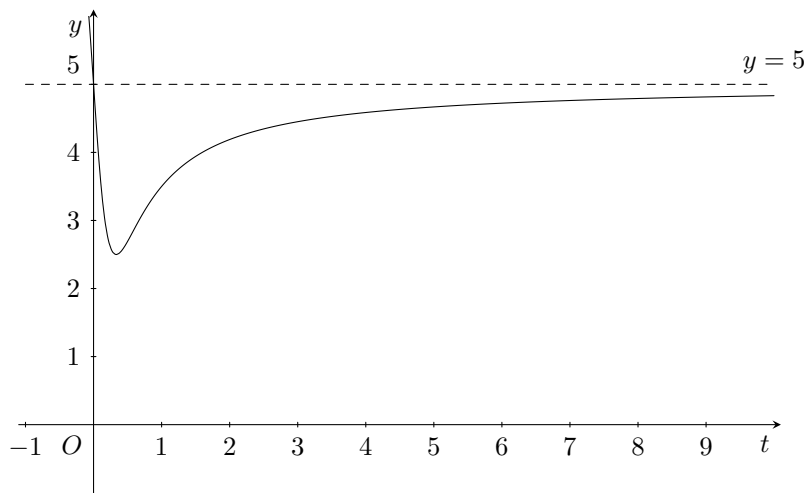
kể từ khi xuất phát được cho bởi công thức $x(t) = 2t - 3 \ln(t+1)$ (đơn vị: mét), $t \geq 0$. Hàm số $v(t) = x'(t)$ (đơn vị: mét/giây) biểu thị vận tốc chuyển động của hạt.

- a** Toạ độ của hạt tại thời điểm $t = 3$ giây là 1,84 m (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).
- b** Hạt đứng yên tại thời điểm $t = 0,5$ s.
- c** $v(t) = 2 - \frac{3}{t+1}$.
- d** Vận tốc ban đầu của hạt là -1 (m/s).

Câu 12 Một chất điểm M chuyển động trên một đường thẳng đi qua O . Để khảo sát chuyển động của M người ta gắn trên đường thẳng đó một trục tọa độ là Ox với O là điểm gốc, mỗi đơn vị trên trục tương ứng với độ dài 1 mét. Xét trong 12 giây đầu tiên, tọa độ $x(t)$ của M tại thời điểm t giây kể từ lúc bắt đầu khảo sát được cho bởi công thức $x(t) = -\frac{t^3}{3} + 6t^2 + 4$.

- a** Ban đầu M ở vị trí cách O một khoảng cách bằng 6 mét.
- b** Vận tốc tức thời của M tại thời điểm t giây ($0 \leq t \leq 12$) là $v(t) = -t^2 + 12t$ (mét/giây).
- c** Trong suốt 6 giây đầu tiên, vận tốc tức thời của M luôn tăng.
- d** Xét trong 12 giây đầu tiên, tính từ lúc bắt đầu khảo sát đến lúc M có vận tốc tức thời lớn nhất thì M đi được một quãng đường dài 148 mét.

Câu 13 Sự phân hủy của các chất hữu cơ có trong nước sẽ làm tiêu hao oxygen hòa tan trong nước. Nồng độ oxygen (mg/l) trong hồ nước sau t giờ ($t \geq 0$) khi một lượng rác thải hữu cơ bị xả vào hồ được xác định bởi hàm số (có đồ thị như hình bên): $y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}$.



- a** Tốc độ thay đổi oxygen trong hồ nước sau t giờ ($t \geq 0$) là $g(t) = \frac{130t^2 - 15}{(9t^2 + 1)^2}$.
- b** Nồng độ oxygen trong hồ nước thấp nhất sau 30 phút khi một lượng rác thải hữu cơ xả vào hồ.
- c** Vào thời điểm $t = 2$ thì tốc độ thay đổi nồng độ oxygen trong hồ nước là $\frac{52}{1369}$.
- d** Vào thời điểm $t = 1$ thì nồng độ oxygen trong hồ nước là 3,5 (mg/l).

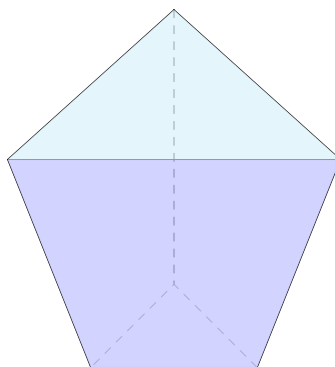
Câu 14 Để kỷ niệm 70 năm ngày thành lập trường THPT Việt Đức, các cựu học sinh tổ chức phát hành áo kỷ niệm gây quỹ học bổng. Giả sử doanh số (tính bằng số áo bán được) tuân theo quy luật logistic được mô hình hóa bằng hàm số $f(t) = \frac{7000}{1 + 69e^{-t}}$, $t \geq 0$, trong đó thời gian t được tính theo đơn vị ngày, kể từ thời điểm ngày phát hành đầu tiên (ngày 11/8/2025).

- a Sau ba ngày kể từ thời điểm ngày phát hành đầu tiên, số áo bán ra vượt quá 2000 chiếc.
- b Tổng số áo được bán ra không vượt quá 7000 chiếc.
- c Ngay tại thời điểm ngày phát hành đầu tiên, số áo được bán ra đã đạt 100 chiếc.
- d Đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ phát hành. Sau 360 giờ kể từ thời điểm phát hành đầu tiên thì tốc độ phát hành là lớn nhất.

Câu 15 Trong một số trường hợp, tin đồn lan truyền và được mô hình hóa bằng hàm số $p(t) = \frac{1}{1 + a \cdot e^{-kt}}$, trong đó $p(t)$ là tỉ lệ dân số biết tin đồn tại thời điểm t (giờ) và a, k là hằng số dương. Giả sử $a = 10$ và $k = 0,5$. Khi đó

- a $\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = 1$.
- b Tốc độ lan truyền tin đồn là $p'(t) = \frac{10e^{-0,5t}}{(1 + 10e^{-0,5t})^2}$.
- c Tốc độ lan truyền tin đồn lớn nhất sau 9,2 giờ (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).
- d Tại thời điểm tin đồn lan truyền với tốc độ lớn nhất thì có 50% dân số biết tin đồn (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Câu 16 Một cái chậu đựng nước có dạng hình chóp cụt đều đáy là các tam giác đều cạnh bằng 1 dm và 3 dm. Chiều cao chậu nước bằng 4 dm. Người ta bơm nước vào chậu với lưu lượng không đổi 0,5 lít/phút.



- a Tốc độ dâng lên của nước giảm dần.
- b Thể tích của chậu là $\frac{13\sqrt{3}}{3} \text{ dm}^3$.
- c Sau 10 phút bơm thì chiều cao của mực nước bằng 3,27 dm (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).
- d Đến phút thứ 10 thì tốc độ dâng lên của nước là 4,32 dm/phút (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

2 Trả lời ngắn

Câu 1 Sau khi phát hiện một dịch bệnh, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày phát hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t được mô tả bởi hàm số $f(t) = -t^3 + 45t^2 + 600t$ ($t \in \mathbb{N}, t \leq 30$). Nếu coi $f(t)$ là hàm số xác định trên đoạn $[0; 30]$ thì $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t . Hỏi trong 30 ngày đầu tiên, có bao nhiêu ngày mà tốc độ truyền bệnh lớn hơn 1200? **KQ:** 

Câu 2 Giả sử chiều cao (tính bằng cm) của một giống cây trồng (trong vòng một số tháng nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số $f(t) = \frac{200}{1 + 3e^{-t}}$ ($t \geq 0$), trong đó thời gian t được tính bằng tháng kể từ khi hạt bắt đầu nảy mầm. Khi đó đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ tăng chiều cao của giống cây đó. Biết rằng kể từ khi hạt giống bắt đầu nảy mầm thì sau t tháng, tốc độ tăng chiều cao của cây là lớn nhất. Tính t (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất). **KQ:** 

Câu 3 Giả sử doanh số bán hàng (đơn vị triệu đồng) của một sản phẩm mới trong vòng một số năm nhất định tuân theo quy luật logistic được mô hình hóa bằng hàm số $f(t) = 1000(t^2 + me^{-t})$, $t \geq 0$, trong đó t là thời gian tính bằng năm kể từ khi phát hành sản phẩm mới, m là tham số. Khi đó đạo hàm $f'(t)$ biểu thị tốc độ bán hàng. Tính tổng các giá trị nguyên âm của m biết rằng tốc độ bán hàng luôn tăng trong khoảng thời gian 10 năm đầu phát hành sản phẩm. **KQ:** 

Câu 4 Một công ty môi trường nhận thấy mức độ ô nhiễm $P(t)$ của một dòng sông sau t tháng xử lý được mô hình hóa bởi $P(t) = \frac{1}{3}t^3 - 8t^2 + 48t + 100$ ($0 \leq t \leq 12$). Tốc độ giảm ô nhiễm được định nghĩa là $v(t) = -P'(t)$. Hãy tìm thời điểm t (tháng) mà tại đó tốc độ giảm ô nhiễm đạt giá trị lớn nhất. **KQ:** 

Câu 5 Tại phòng thí nghiệm Sinh học, nhóm nghiên cứu nuôi cấy không liên tục vi khuẩn E.Coli ở điều kiện tối ưu. Sự sinh trưởng của quần thể vi khuẩn bao gồm 4 pha cơ bản

- ◆ Pha tiềm phát (pha lag): Vi khuẩn dần thích nghi với môi trường, tổng hợp vật chất chuẩn bị cho sự phân chia.
- ◆ Pha lũy thừa (pha log): Phân chia mạnh mẽ theo tiềm năng, số lượng tế bào tăng theo lũy thừa và đạt đến cực đại ở cuối pha.
- ◆ Pha cân bằng: Lượng tế bào sinh ra bằng lượng tế bào chết đi.
- ◆ Pha suy vong: Số lượng tế bào trong quần thể ngày càng giảm do chất dinh dưỡng cạn kiệt, chất độc hại tích lũy ngày càng nhiều.

Giả sử trong giai đoạn “Pha lũy thừa (pha log)”, số lượng của một quần thể vi khuẩn E.Coli được xác định bởi công thức $P(t) = 100e^{0,1t}$, trong đó thời gian t được tính bằng phút. Tại thời điểm $t = 20$, tốc độ tăng trưởng tức thời của quần thể E.Coli là bao nhiêu vi khuẩn/phút? (làm tròn đến hàng đơn vị).

KQ: 

Câu 6 Một chất điểm chuyển động có quãng đường được cho bởi phương trình

$s(t) = \frac{1}{6}t^4 - \frac{4}{3}t^3 + 5t^2 - 7$, trong đó $t > 0$ với t tính bằng giây (s), $s(t)$ tính bằng mét (m). Vận tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm chất điểm có gia tốc chuyển động nhỏ nhất là $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $T = 2a - 3b$. **KQ:**

Câu 7 Giả sử số lượng tế bào của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy

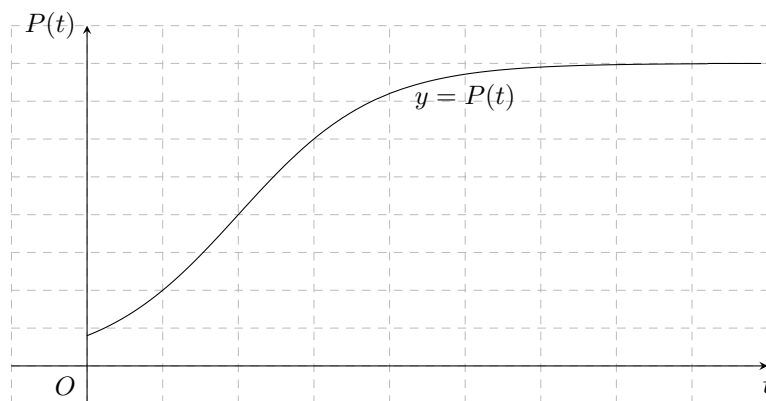
trong phòng thí nghiệm được mô hình hóa bằng hàm số $P(t) = \frac{a}{b + e^{-0,75t}}$ (với $a, b \in \mathbb{R}$), trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Đạo hàm của hàm số $y = P(t)$ biểu thị tốc độ sinh trưởng của nấm men (tính bằng tế bào/giờ) tại thời điểm t (giờ). Tại thời điểm ban đầu $t = 0$, quần thể có 24 tế bào và tốc độ sinh trưởng là 8 tế bào/giờ. Sau một thời gian về lâu dài thì số lượng tế bào của quần thể nấm men tiến về giá trị bao nhiêu? **KQ:**

Câu 8 Giả sử dân số Việt Nam được dự báo theo mô hình logistic, giai đoạn từ năm

2023 đến năm 2035 là hàm số $P(t) = \frac{120}{1 + 0,2e^{-0,06t}}$ (triệu người), trong đó t là số năm tính từ 2023. Chi phí an sinh xã hội bình quân theo đầu người được mô hình hóa bằng hàm số $C(t) = 25 - 20e^{-0,05t}$ (triệu đồng/đầu người/năm). Tính tốc độ thay đổi của tổng chi phí an sinh xã hội toàn quốc (nghìn tỷ đồng/năm) vào đầu năm 2030 (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị). **KQ:**

Câu 9 Một hồ nước ở Bắc Ontario đã phục hồi sau một vụ tràn axit khiến tất cả cá

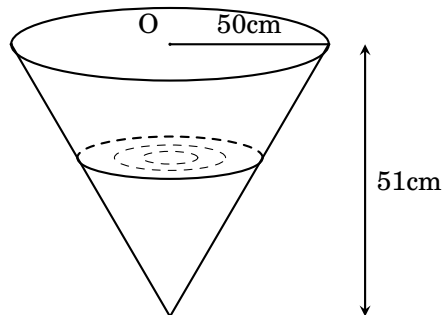
hồi ở đó chết. Một chương trình tái thả cá đã thả 800 con cá hồi vào hồ. Ba năm sau, số lượng được ước tính là 6000 con. Sức chứa của hồ được cho là 8000 con. Để đánh giá khả năng tăng trưởng, người ta mô phỏng số lượng cá trong hồ qua từng năm thông qua hàm số $P(t) = \frac{c}{1 + a \cdot b^{-t}}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên dưới (trong đó t tính theo năm kể từ lúc bắt đầu thả cá vào hồ).



Sử dụng mô hình trên hãy tính tốc độ tăng trưởng tối đa (đơn vị con/năm) của đàn cá. Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị. **KQ:**

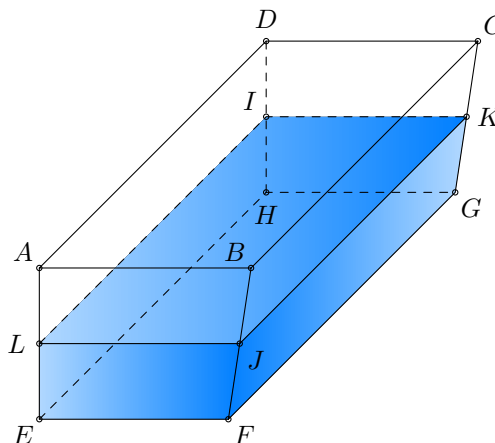


Câu 10 Có một cái bể hình nón để ngược như hình vẽ, có chiều cao 51 cm, bán kính đáy 50 cm. Một vòi nước chảy vào bể sao cho sau mỗi giây chiều cao của mực nước tăng đều lên 2 cm cho đến khi đầy bể. Hãy tính tốc độ tăng thể tích (m^3/s) của nước trong khoảng thời gian một giây ngay trước khi đầy bể (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



KQ:

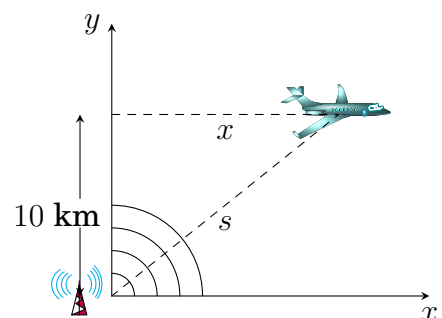
Câu 11 Cho một bể chứa nước có hình dạng là một lăng trụ đứng $AEFB.DHGC$. Mặt đáy của lăng trụ là hình thang vuông $AEFB$ (vuông tại A và E). Biết rằng chiều dài của bể $AD = 12$ m, chiều rộng của mặt bể $AB = 6$ m, chiều rộng của đáy bể $EF = 3$ m và chiều cao của bể $AE = 4$ m.



Bể được bơm nước vào với lưu lượng không đổi $P = 4 \text{ m}^3/\text{h}$. Giả sử mặt nước ($IKJL$) luôn song song với đáy ($HGFE$) của bể (tham khảo hình vẽ). Tốc độ thay đổi chiều cao mực nước tại thời điểm $t = 18$ giờ bằng bao nhiêu (đơn vị tính bằng m/h , làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

KQ:

Câu 12 Một máy bay đang bay ở độ cao 10 km so với mặt đất, thu phát tín hiệu qua một antenna radar như hình vẽ. Khi máy bay cách radar 16 km, radar phát hiện khoảng cách giữa máy bay và radar thay đổi với tốc độ 546 km/h. Tìm vận tốc của máy bay (đơn vị km/h, kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



KQ:

BẢNG ĐÁP ÁN ĐÚNG SAI Đ/S

Câu 1. S Đ S Đ

Câu 5. S S S Đ

Câu 9. S Đ S Đ

Câu 13. S S Đ Đ

Câu 2. Đ Đ S Đ

Câu 6. S Đ Đ S

Câu 10. Đ S Đ Đ

Câu 14. S Đ Đ Đ

Câu 3. S Đ Đ S

Câu 7. Đ S Đ S

Câu 11. Đ Đ Đ Đ

Câu 15. Đ S S Đ

Câu 4. Đ Đ S S

Câu 8. Đ Đ Đ S

Câu 12. S Đ Đ S

Câu 16. Đ S Đ S

ĐÁP SỐ PHẦN TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. 1 2 0 0

Câu 2. 1 , 1

Câu 3. - 3

Câu 4. 8

Câu 5. 7 4

Câu 6. 4 7

Câu 7. 4 3 , 2

Câu 8. 8 3

Câu 9. 2 1 9 7

Câu 10. 0 , 0 2

Câu 11. 0 , 0 8

Câu 12. 6 9 9



TOÁN THỰC TẾ LIÊN QUAN ĐẾN CÁC YẾU TỐ HÌNH HỌC

Chủ đề 3

1 MỘT SỐ KIẾN THỨC HÌNH HỌC BỔ TRỢ

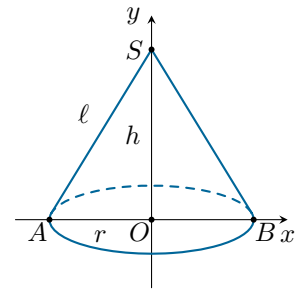
1 Công thức thể tích và diện tích hình nón

♦ Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi \cdot r \cdot \ell$.

♦ Diện tích toàn phần:

$$S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} = \pi \cdot r \cdot \ell + \pi \cdot r^2.$$

♦ Thể tích: $V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$.



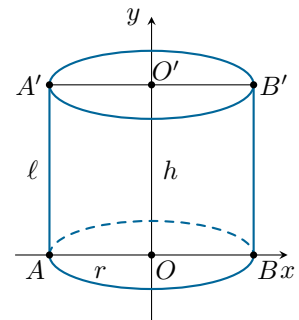
2 Công thức thể tích và diện tích hình trụ

♦ Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi \cdot r \cdot h$.

♦ Diện tích toàn phần:

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{đáy} = 2\pi \cdot r \cdot h + 2\pi \cdot r^2.$$

♦ Thể tích: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$.



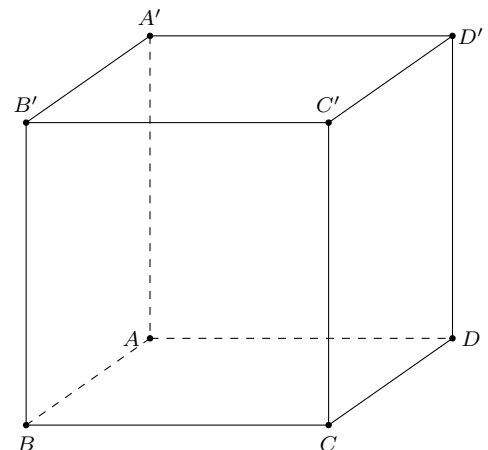
3 Công thức thể tích và diện tích hình hộp

♦ Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2(x + y)h$.

♦ Diện tích toàn phần:

$$S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} = 2(x + y)h + 2xy.$$

♦ Thể tích: $V = xy \cdot h$.



4 Công thức thể tích và diện tích hình cầu

Cho khối cầu tâm O có bán kính R.

♦ Diện tích hình cầu: $S = \frac{2}{3} \pi r^2$.

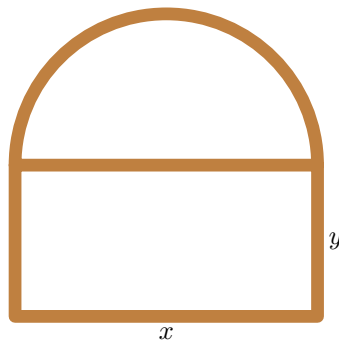
♦ Thể tích khối cầu :

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

II BÀI TẬP ÁP DỤNG

1 Trắc nghiệm đúng sai

Câu 1 Để làm một cửa sổ có dạng một hình bán nguyệt và một hình chữ nhật ghép lại như hình vẽ bên dưới, người ta dùng 8 m dây thép để làm các đường viền. Gọi x, y là độ dài cạnh của khung hình chữ nhật.

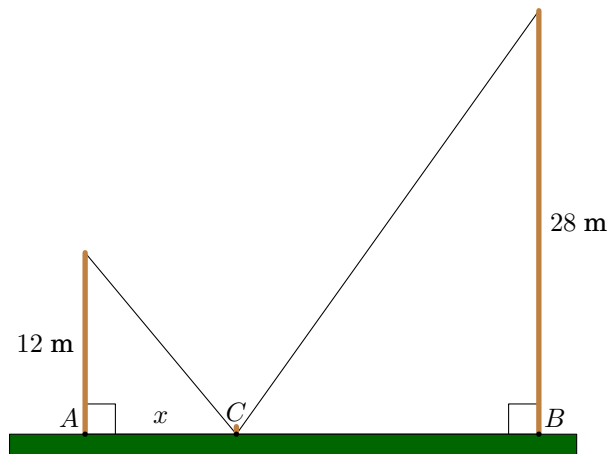


- a** Chiều dài dây để uốn ra bán nguyệt là $\frac{\pi x}{2}$.
- b** Giá trị của y tính theo x là $y = 4 - \frac{x(4 + \pi)}{4}$.
- c** Diện tích của cửa sổ là $S = 4x - x^2$.
- d** Khi diện tích của cửa sổ lớn nhất thì $y = \frac{16}{8 + \pi}$.

Câu 2 Một hộ gia đình muốn xây dựng một bể chứa nước có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, thể tích $V = 12 \text{ m}^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công và vật liệu xây đáy là 500 nghìn đồng/ m^2 , xây thành bể là 300 nghìn đồng/ m^2 . Gọi x là chiều rộng của đáy bể, h là chiều cao của bể ($x > 0, h > 0$, đơn vị: m).

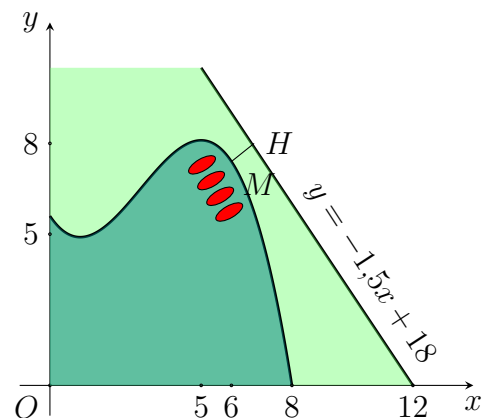
- a** Thể tích của bể được tính bằng công thức $V = 2x^2h \text{ (m}^3\text{)}$.
- b** Chiều cao của bể nước tính theo x là $h = \frac{6}{x^2} \text{ (m)}$.
- c** Tổng chi phí xây dựng bể nước là $T(x) = 500x^2 + \frac{10800}{x}$ (nghìn đồng).
- d** Tổng chi phí tối thiểu để xây dựng bể là 9 234 (nghìn đồng) (không làm tròn kết quả các phép toán trung gian, chỉ làm tròn kết quả phép toán cuối cùng đến hàng đơn vị).

Câu 3 Có hai cây cột, một cây cao 12 m và một cây cao 28 m đứng cách nhau 30 m. Chúng được giữ bằng hai sợi dây, gắn vào một cọc duy nhất nổi từ mặt đất đến đỉnh mỗi cột. Gọi x là khoảng cách từ cột cao 12 m đến cọc.



- a** Chiều dài sợi dây nối từ cọc đến đỉnh cột cao 28 m là $\sqrt{1684 + x^2}$.
- b** Tổng chiều dài của dây là $\sqrt{144 + x^2} + \sqrt{1684 - 60x + x^2}$.
- c** Tổng chiều dài ngắn nhất của dây là 48,5 m.
- d** Nếu tổng chiều dài của dây ngắn nhất thì $x \in (8; 10)$.

Câu 4 Một hồ nước nhân tạo được xây dựng trong một công viên giải trí. Trong mô hình minh họa, nó được giới hạn bởi các trục tọa độ và đồ thị hàm số (C): $y = f(x) = -0,1x^3 + 0,9x^2 - 1,5x + 5,6$. Đơn vị đo độ dài trên mỗi trục tọa độ là 100 (m).

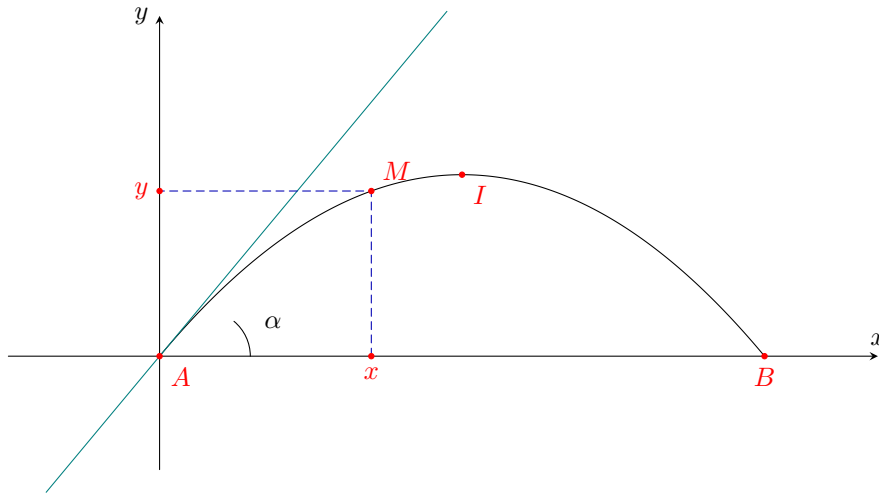


- a** Đường dạo ven hồ chạy dọc theo trục Ox dài 600 (m).
- b** Trên đường đi dạo ven hồ chạy dọc theo trục Ox , điểm cách gốc O một đoạn 500 (m) có khoảng cách theo phương thẳng đứng đến bờ hồ đối diện là lớn nhất.
- c** Khoảng cách nhỏ nhất theo phương thẳng đứng từ một điểm trên đường đi dạo ven hồ đến bờ hồ đối diện là 490 (m).
- d** Trong công viên có một con đường chạy dọc theo đồ thị hàm số $\Delta: y = -1,5x + 18$. Người ta dự định xây dựng bên bờ hồ một bến thuyền đập nước sao cho khoảng cách từ bến thuyền đến con đường này là ngắn nhất. Biết tọa độ của điểm để xây bến thuyền này là $M(a; b)$. Giá trị của $a + 5b$ bằng 43.

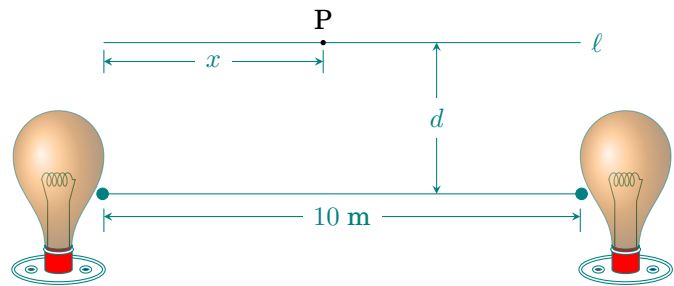
Câu 5 Xét chuyển động của một tàu lượn trên đoạn đường ray có hình dạng một phần đồ thị của hàm số $y = f(x) = \frac{135x - x^2 - x^3}{200}$ ($x \geq 0$), trong đó x là khoảng cách theo phương ngang kể từ điểm A , y là độ cao tương ứng của tàu lượn so với phương ngang AB . Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ (đơn vị trên mỗi trục là 10m). Các kết quả được làm tròn đến hàng đơn vị.

- a** Độ dài đoạn AB bằng 111m.

- b** Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại $x_0 = \frac{\sqrt{406} - 1}{3}$.
- c** Độ cao lớn nhất của tàu lượn so với phương ngang AB là 64m.
- d** Khi tàu lượn đi qua điểm A , tiếp tuyến của quỹ đạo tại A hợp với phương ngang AB một góc $\alpha \approx 34^\circ$.



Câu 6 Hai nguồn sáng có cường độ giống hệt nhau được đặt cách nhau 10 m. Một vật sẽ được đặt tại một điểm P nằm trên một đường thẳng ℓ , song song với đường nối hai nguồn sáng và cách đường đó một khoảng d m (xem hình vẽ). Ta muốn đặt điểm P trên đường ℓ sao cho cường độ chiếu sáng tại P là nhỏ nhất.



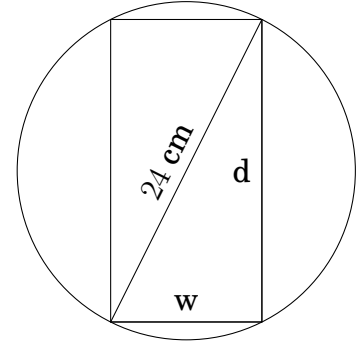
Ta cần biết rằng cường độ chiếu sáng tại điểm đơn lẻ tỉ lệ thuận với cường độ của nguồn và tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách đến nguồn đó. Đặt hệ trục tọa độ Oxy sao cho tâm O trùng với nguồn sáng bên trái, tia Ox chứa đoạn nối hai nguồn sáng, tia Oy hướng lên trên, đơn vị trên mỗi trục là m.

- a** Khoảng cách từ P đến các nguồn sáng là $r_1 = \sqrt{x^2 + d^2}$; $r_2 = \sqrt{(x + 10)^2 + d^2}$.
- b** Tổng cường độ chiếu sáng tại P là $I(x) = k \left(\frac{1}{x^2 + d^2} + \frac{1}{(x + 10)^2 + d^2} \right)$; với $k > 0$ là hằng số tỉ lệ.
- c** Khi $d = 5$ m, cường độ ánh sáng tại P đạt cực tiểu khi $x = 5$ m.
- d** Khi $d = 10$ thì cường độ ánh sáng không đạt cực tiểu khi P ở vị trí chính giữa của thanh ℓ .

Câu 7 Bạn An làm đèn lồng bằng cách dùng một sợi dây đồng dài 28 dm cắt thành ba đoạn để uốn làm khung đèn. Đoạn thứ nhất uốn thành hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng x (dm) để làm đáy, hai đoạn còn lại có độ dài bằng nhau uốn thành các đường gấp khúc ASC và BSD . Khung đèn sau khi hoàn thiện có hình dạng là một hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ và bề mặt ngoài của đèn được dán giấy màu để trang trí, không dán mặt đáy (xem các mối nối, dán là không đáng kể).

- a** Độ dài cạnh bên của khung đèn bằng $(7 - x)$ dm với $0 < x < 7$.
- b** Khi $x = 4$ thì độ dài đường cao của khung đèn là 1 dm.
- c** Khi các cạnh bằng nhau thì diện tích giấy màu cần dùng là $14\sqrt{3}$ dm².
- d** Thể tích phần không gian của đèn lồng lớn nhất khi $x \approx 3,25$ dm.

Câu 8 Độ cứng S của một thanh gỗ hình chữ nhật tỉ lệ thuận với tích của chiều rộng w và bình phương chiều dài d của nó (theo đơn vị mét). Biết rằng nếu thanh gỗ có chiều dài là 6 cm, chiều rộng là 3 cm thì độ cứng của nó bằng 108. Một khúc gỗ hình tròn có đường kính là 24 cm, người ta cắt thành một thanh gỗ hình chữ nhật như hình vẽ bên.

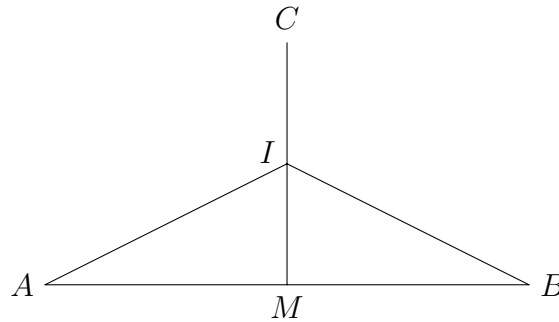


- a** Chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật liên hệ bởi công thức $d^2 + w^2 = 576$.
- b** Độ cứng của thanh gỗ là $S = 2dw^2$.
- c** Độ cứng của thanh gỗ được mô phỏng bằng hàm số $S(w) = 576w - w^3$, $\forall w \in (0; 24)$.
- d** Độ cứng lớn nhất của miếng gỗ cắt ra được là $S_{\max} = 5321$ (làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 9 Nhân dịp Tết Trung thu, bác Oanh làm các đèn lồng cho con. Mỗi đèn bác dùng một sợi dây đồng dài 24 dm cắt thành 3 đoạn để uốn làm khung đèn. Đoạn thứ nhất bác uốn thành hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng x dm để làm đáy, hai đoạn còn lại có độ dài bằng nhau uốn thành các đường gấp khúc ASC và BSD . Khung đèn sau khi hoàn thiện có hình dạng là một hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ và mặt ngoài của đèn được dán giấy màu để trang trí (xem các mô hình, dán là không đáng kể). Khi đó ta có:

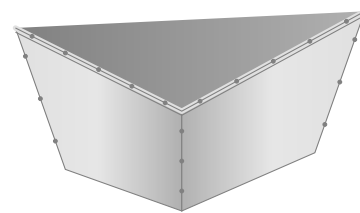
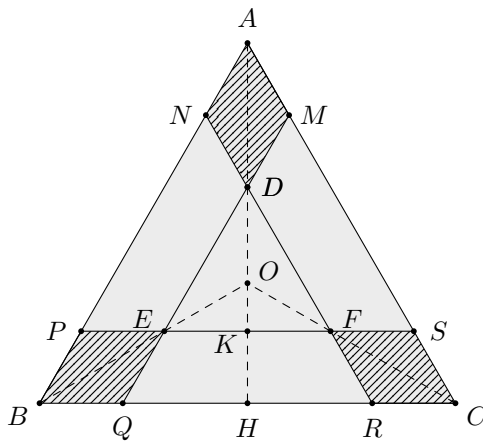
- a** Độ dài cạnh bên của khung đèn bằng $6 - x$ (dm).
- b** Khi $x = 2$ dm thì độ dài đường cao của khung đèn là $\sqrt{14}$ (dm).
- c** Khi tất cả các cạnh bằng nhau thì diện tích giấy màu cần dùng là $9(1 + \sqrt{3})$ (dm²).
- d** Thể tích phần không gian của đèn lồng lớn nhất khi $x = 2,79$ dm (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 10 Hai nhà máy được đặt tại các vị trí A và B cách nhau 8 km. Nhà máy xử lý nước thải được đặt ở vị trí C trên đường trung trực của đoạn thẳng AB , cách trung điểm M của đoạn thẳng AB một khoảng là 3 km. Người ta muốn làm đường ống dẫn nước thải từ hai nhà máy A, B đến nhà máy xử lý nước thải C gồm các đoạn thẳng AI, BI và IC , với I là vị trí nằm giữa M và C . Đặt $IM = x$ km (với $0 < x < 3$).



- a** $IA = IB = \sqrt{x^2 + 9}$ (km).
- b** Tổng độ dài đường ống được biểu diễn qua hàm số $f(x) = 2\sqrt{x^2 + 9} + 3 - x$ (km).
- c** Tổng độ dài đường ống nhỏ nhất bằng 9,9 (km) (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).
- d** Khi tổng độ dài đường ống nhỏ nhất thì góc $\widehat{AIB} = 120^\circ$.

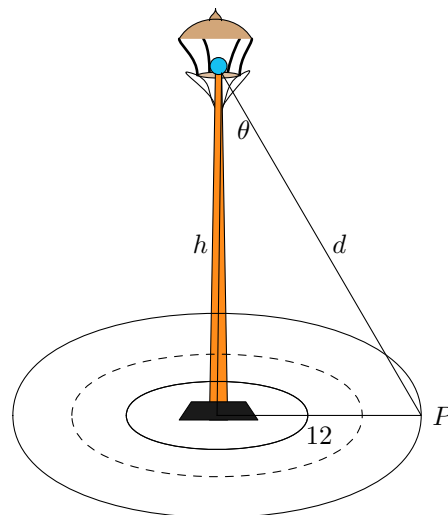
Câu 11 Anh Việt có một tấm tôn hình tam giác đều ABC với cạnh bằng 6 (dm). Bên trong tấm nhôm này anh vẽ thêm tam giác đều DEF sao cho hai tam giác có cùng trọng tâm, đồng thời các cạnh tương ứng song song nhau. Anh Việt muốn làm một chậu đựng nước dạng hình chóp cụt tam giác đều với đáy nhỏ là DEF và đáy lớn để hở. Anh cắt bỏ ba hình bình hành ở ba góc của tam giác ABC là $AMDN$, $BPEQ$, $CSFR$ (như hình vẽ). Kẻ đường cao AH và gọi O là trọng tâm tam giác ABC . Đặt $x = DN = DM$, ($0 < x < 2$).



- a** $NP = QR = SM = 6 - 2x$ (dm).
- b** $AH = 3\sqrt{3}$ (dm) và $OA = 2\sqrt{3}$ (dm).
- c** $AD = x\sqrt{3}$ (dm) và $DE = 6 - 3x$ (dm).
- d** Sau khi gập hình vuông và dùng keo dán kín các đoạn gập vào với nhau gồm DM và DN , EP với EQ , FS với FR , sức chứa tối đa của chậu xấp xỉ 4,54 (lít).



Câu 12 Một chiếc đèn được đặt trên đỉnh của một cột đèn cao h (m) để chiếu sáng một vòng xuyến giao thông đồng trục có bán kính 12 m. Cường độ ánh sáng I tại một điểm P trên vòng xuyến tỉ lệ thuận với cosin của góc θ và tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách d (m) từ nguồn sáng đến điểm P (xem hình dưới đây).



a $\cos \theta = \frac{12}{\sqrt{h^2 + 144}}.$

b $I = k \frac{\cos \theta}{d^2}$ (với k là hằng số dương).

c Nếu $I = f(h)$ thì $f'(h) = k \frac{-2h^2 + 144}{(h^2 + 144)^2 \sqrt{(h^2 + 144)^3}}.$

d Để cường độ ánh sáng I lớn nhất thì cột đèn phải cao $6\sqrt{2}$ m.

Câu 13 Một sợi dây kim loại dài 6 (cm). Người ta cắt sợi dây đó thành hai đoạn. Đoạn có độ dài x (cm) được uốn thành đường tròn và đoạn còn lại được uốn thành hình vuông ($0 < x < 6$).

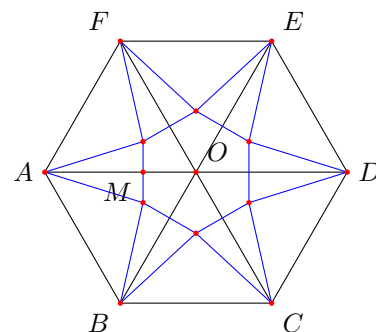
a Bán kính đường tròn là $r = \frac{x}{\pi}.$

b Diện tích hình vuông là $\left(\frac{6-x}{4}\right)^2.$

c Tổng diện tích hai hình là $\frac{(4 + \pi) \cdot x^2 - 12\pi x + 36\pi}{16\pi}.$

d Khi $x = \frac{6\pi}{2 + \pi}$ thì hình vuông và hình tròn tương ứng có tổng diện tích nhỏ nhất.

Câu 14 Từ một tấm bìa mỏng hình lục giác đều $ABCDEF$ cạnh 4 cm, bên trong có một lục giác đều nhỏ hơn. Các đường chéo AD, BE, CF cắt nhau tại O , cắt cạnh lục giác đều nhỏ tại M (như hình vẽ). Đặt $OM = x$ (cm). Bạn Khôi cắt bỏ 6 tam giác cân bằng nhau có cạnh đáy là cạnh của lục giác đều ban đầu và đỉnh là đỉnh của lục giác đều nhỏ phía trong rồi gấp lên sao cho các đỉnh A, B, C, D, E, F trùng nhau tạo thành một khối chóp lục giác đều.



a Tam giác OAB đều có cạnh bằng 4 cm.

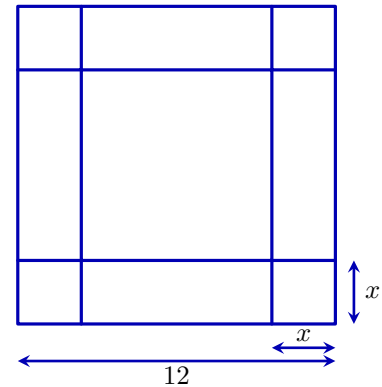
b Cạnh đáy của khối chóp lục giác đều bằng $\frac{x\sqrt{3}}{6}$ (cm).

c Đường cao của khối chóp lục giác đều bằng $\sqrt{16 - 8x}$ (cm).

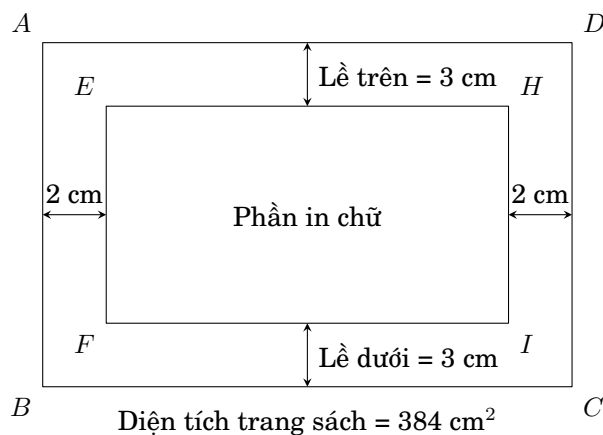
- a** Thể tích lớn nhất của khối chóp lục giác đều có thể đạt được là $\frac{256\sqrt{10}}{375} \text{ (cm}^3\text{)}$.

Câu 15 Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh x cm, rồi gấp tấm nhôm lại để được một cái hộp không nắp.

- a** Độ dài cạnh đáy của cái hộp là $(12 - 2x)$ cm.
b Thể tích cái hộp được tính theo công thức $V(x) = 4x^3 + 144x$.
c Đạo hàm của hàm thể tích là $V'(x) = 12x^2 - 96x + 144$.
d Cái hộp có thể tích lớn nhất khi $x = 2$.



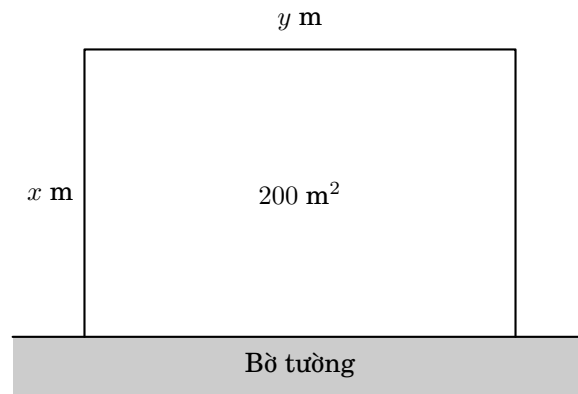
Câu 16 Một trang sách có dạng hình chữ nhật $ABCD$ với diện tích là 384 cm^2 . Sau khi để lề trên và lề dưới đều là 3 cm; để lề trái và lề phải đều là 2 cm. Phần còn lại của trang sách là hình chữ nhật $EFIH$ được in chữ. (hình vẽ bên dưới).



Gọi $AB = x \text{ (cm)}$ và $AD = y \text{ (cm)}$ lần lượt là chiều rộng và chiều dài của trang sách ($x, y > 0$)

- a** Biểu thức liên hệ giữa x và y là $xy = 384$.
b Chiều rộng EF , chiều dài IH của trang sách được in chữ lần lượt là $x - 2$ và $y - 3$.
c Phần in chữ trên trang sách có diện tích lớn nhất bằng $216 \text{ (cm}^2\text{)}$.
d Diện tích S của hình chữ nhật $EFIH$ của phần in chữ được tính bởi công thức $S = (x - 2)(y - 3)$.

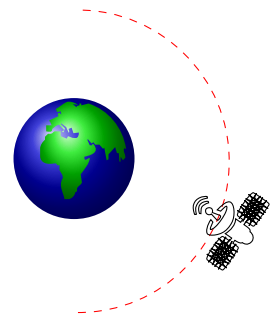
Câu 17 Cần rào ba cạnh để cùng với bờ tường có sẵn tạo thành mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích 200 m^2 (hình vẽ)



Ký hiệu $x(m)$, $y(m)$ lần lượt là độ dài các cạnh của mảnh vườn vuông góc và song song với bờ tường; $L(m)$ là tổng độ dài lưới thép cần để rào mảnh vườn. Biết rằng mỗi mét lưới thép dùng để rào mảnh vườn có đơn giá 250 nghìn đồng.

- a y được tính theo x bằng công thức $y = \frac{200}{x}$.
- b L đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = 10$ (m).
- c Số tiền tối thiểu để mua lưới thép rào mảnh vườn là 2,5 triệu đồng.
- d L được tính theo x theo công thức $L = 2x + \frac{100}{x}$.

Câu 18 Ta coi Trái Đất là hình cầu hoàn hảo với bán kính $R = 6370$ (km) và diện tích toàn phần là $S = 4\pi R^2$. Các phi hành gia từ tàu vũ trụ chỉ có thể nhìn thấy một phần bề mặt Trái Đất. Ở độ cao h , phần diện tích Trái Đất các phi hành gia có thể nhìn thấy sẽ được tính theo công thức $S_T = 2\pi R^2 \left(1 - \frac{R}{R+h}\right)$, trong đó R là bán kính Trái Đất. Gọi K là tỉ số diện tích bề mặt Trái Đất nhìn thấy được ở độ cao h với diện tích toàn phần của Trái Đất.



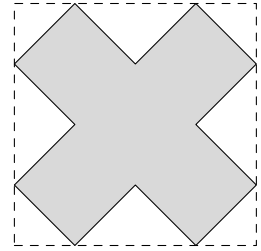
- a Công thức tính K là $K = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{h}{R+h}\right)$.
- b Trong một chuyến bay của tàu con thoi, các phi hành gia đã thực hiện một hoạt động ngoài tàu ở độ cao 280 km. Có 2,5% (làm tròn kết quả đến hàng phần mười) diện tích bề mặt Trái Đất có thể nhìn thấy ở độ cao đó.
- c Muốn nhìn thấy $\frac{1}{4}$ diện tích bề mặt Trái Đất, các phi hành gia cần đưa tàu con thoi đạt đến độ cao 6470 km.
- d Khi độ cao h càng tăng lên thì K càng tăng nhưng không vượt quá 50%.

2 Trả lời ngắn

Câu 1 Người ta muốn làm một chiếc hộp hình hộp chữ nhật có đáy hình vuông và thể tích là 10 lít. Diện tích toàn phần nhỏ nhất của hộp là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

KQ:

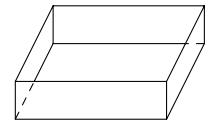
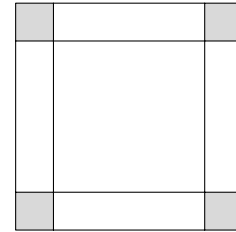
Câu 2 Từ hình vuông có cạnh bằng 6, người ta cắt bỏ các tam giác vuông cân tạo thành hình tô đậm như hình vẽ. Sau đó người ta gấp thành hình hộp chữ nhật không nắp. Thể tích lớn nhất của khối hộp bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần chục)?



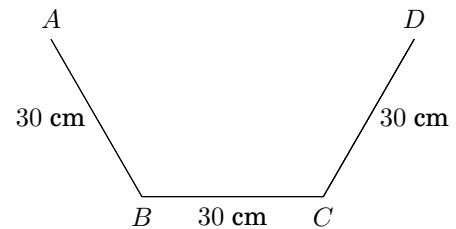
KQ: 

Câu 3 Một hộp không nắp được làm từ một mảnh các tông theo hình vẽ. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh x (cm), chiều cao là h (cm) và thể tích là 4000 cm^3 . Giá trị của x (cm) để chiếc hộp làm ra tốn ít bìa các tông nhất là

KQ: 



Câu 4 Từ một tấm tôn có kích thước $90 \text{ cm} \times 300 \text{ cm}$, người ta làm một máng thoát nước, mặt cắt ngang của máng là hình thang cân $ABCD$ có đáy lớn AD , $AB = BC = CD = 30 \text{ cm}$, minh họa hình bên. Thể tích lớn nhất của máng bằng bao nhiêu mét khối? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



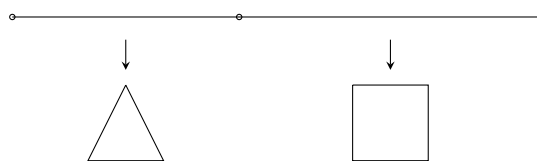
KQ: 

Câu 5 Một người có một dây ruy băng dài 130 cm, người đó cần bọc dài ruy băng này quanh một hộp quà hình trụ. Khi bọc quà, người này dùng 10 cm của dải ruy băng để thắt nơ ở trên nắp hộp (như hình vẽ). Dải ruy băng có thể bọc được hộp quà có thể tích bằng $a\pi \text{ (cm}^3\text{)}$, $a \in \mathbb{N}^*$. Giá trị lớn nhất của a là bao nhiêu?



KQ: 

Câu 6 Một sợi dây có chiều dài là 6 m, được chia thành 2 phần. Phần thứ nhất được uốn thành hình tam giác đều, phần thứ hai uốn thành hình vuông. Hỏi độ dài của cạnh hình tam giác đều bằng bao nhiêu để tổng diện tích 2 hình thu được là nhỏ nhất? Làm tròn kết quả đến hàng phần chục.

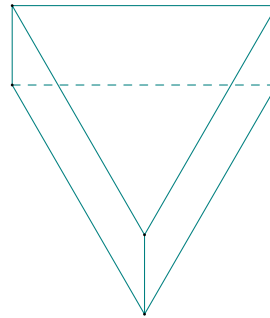
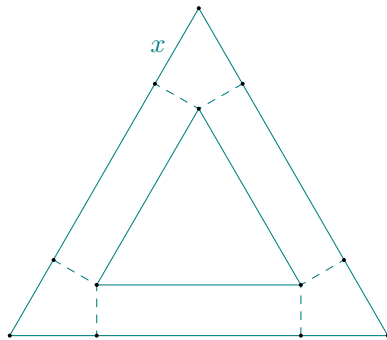


KQ: 

Câu 7 Một người muốn tạo một hộp đựng quà khối lăng trụ tam giác đều, không có nắp bằng cách cắt ba góc của một tam giác đều cạnh bằng a các đoạn bằng x , $\left(0 < x < \frac{a}{2}\right)$



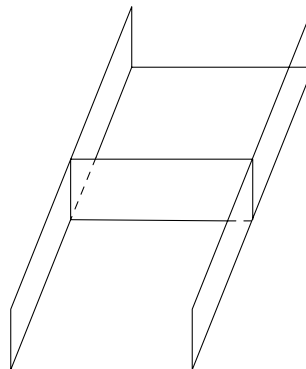
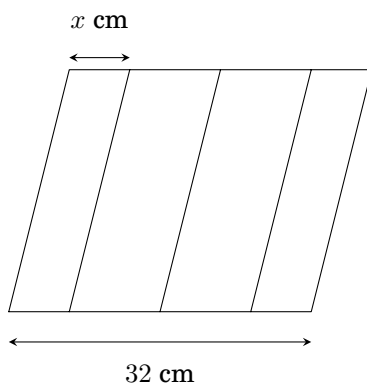
như hình vẽ, rồi gấp lại tạo thành khối lăng trụ tam giác đều. Thể tích khối lăng trụ lớn nhất là $\frac{a^3}{b}$. Hỏi giá trị của b bằng bao nhiêu?



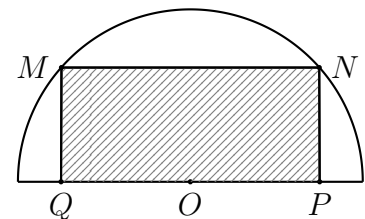
KQ: 

Câu 8 Một miếng nhôm có bề ngang 32 cm được uốn cong tạo thành máng dẫn nước bằng chia tấm nhôm thành 3 phần rồi gấp 2 bên lại theo một góc vuông như hình bên dưới. Hỏi x bằng bao nhiêu để tạo ra máng có có diện tích mặt ngang S lớn nhất để có thể cho nước đi qua nhiều nhất?

KQ: 



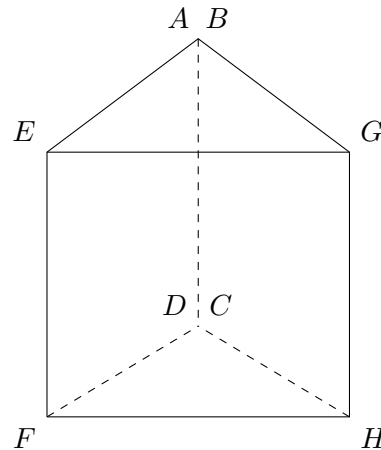
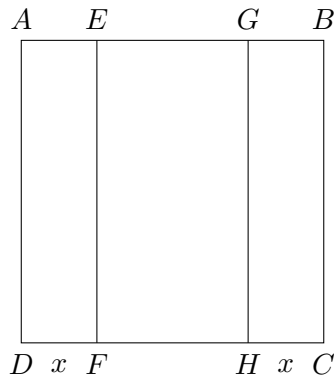
Câu 9 Từ một tấm tôn có hình dạng là nửa hình tròn tâm O bán kính $R = 3$, người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật (hình vẽ bên). Diện tích lớn nhất có thể của tấm tôn hình chữ nhật là



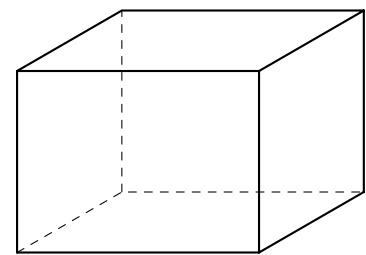
KQ: 

Câu 10 Một tấm kẽm hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 30 cm. Người ta gấp tấm kẽm theo hai cạnh EF và GH cho đến khi AD và BC trùng nhau như hình vẽ bên để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy. Khi thể tích khối lăng trụ lớn nhất thì khoảng cách từ A đến mặt phẳng $EFGH$ bằng $a\sqrt{b}$ (cm) với a, b là các số nguyên dương. Tính $T = a + 2025b$.

KQ: 

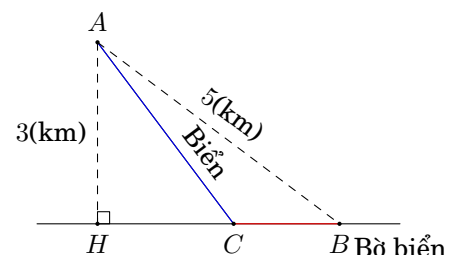


Câu 11 Bác An thiết kế một chiếc bể hình hộp chữ nhật không nắp để nuôi cá Koi trong sân vườn, với chiều cao của bể là 150 (cm) và thể tích chứa 900 (m^3). Biết giá thành để làm mặt bên là 2,8 triệu đồng/ m^2 và làm mặt đáy là 4 triệu đồng/ m^2 . Tính chi phí thấp nhất để bác An hoàn thành bể cá (làm tròn theo đơn vị triệu đồng).



KQ: 

Câu 12 Một hòn đảo A cách bờ biển 3 (km) và cách trạm điện B là 5 (km). Công ty điện lực dự định làm một tuyến đường điện từ trạm điện B dọc theo bờ biển đến một điểm C, sau đó từ C nối thẳng ra đảo A (tham khảo hình vẽ). Biết chi phí cho 1 (km) đường điện trên bờ là 30 triệu đồng và trên biển là 50 triệu đồng. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu triệu đồng để hoàn thành kế hoạch trên?



KQ: 

Câu 13 Một sân khấu ngoài trời có dạng hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 12 \text{ m}$, $AD = 8 \text{ m}$. Ban tổ chức lắp một mái bạt dạng hình chóp $S.ABCD$, với đỉnh S được đặt thẳng đứng phía trên một điểm H nằm trên đường chéo AC ($SH \perp (ABCD)$) để đón gió chéo và thoát nước tốt. Do tiêu chuẩn an toàn khác nhau của bốn cụm cáp mép mái, nhà thầu quy định trọng số riêng cho từng dây cáp và tổng “năng lượng căng quy đổi” là hằng số, nghĩa là

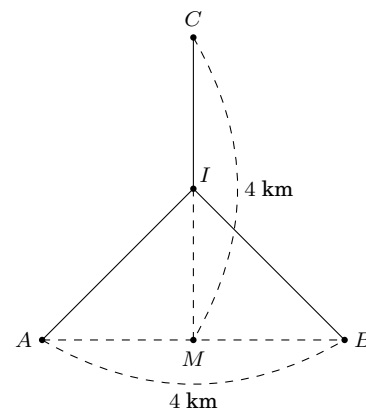
$$SA^2 + 2 \cdot SB^2 + 4 \cdot SC^2 + 5 \cdot SD^2 = 1785 \text{ (đơn vị } \text{m}^2\text{)}.$$

Tính thể tích lớn nhất (đơn vị m^3 , làm tròn đến hàng đơn vị) của khối chóp $S.ABCD$.

KQ: 

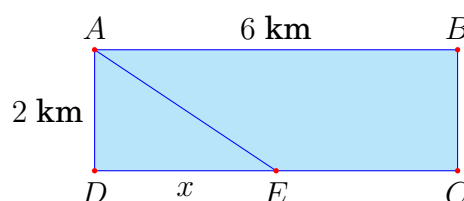


Câu 14 Hai nhà máy sản xuất đặt tại các vị trí A và B cách nhau 4 km. Một nhà máy cung cấp nước được đặt ở vị trí C nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB , cách trung điểm M của đoạn thẳng AB một khoảng 4 km. Người ta muốn làm một đường ống dẫn nước từ nhà máy nước C đến một vị trí I nằm giữa đoạn thẳng MC sau đó chia ra hai nhánh dẫn tới hai nhà máy A và B (như hình vẽ). Tổng độ dài đường ống dẫn nước nhỏ nhất bằng bao nhiêu km (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



KQ:

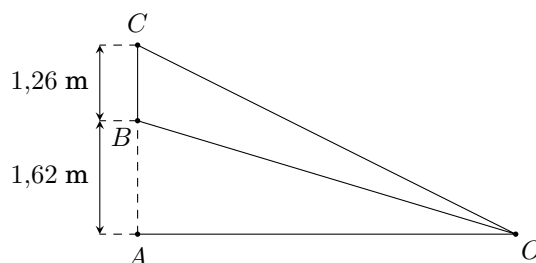
Câu 15 Một người nông dân đang đứng ở góc A của một cánh đồng hình chữ nhật $ABCD$ có chiều rộng $AD = 2$ km và chiều dài $AB = 6$ km. Người đó muốn đi đến góc đối diện C .



Người nông dân có thể đi bộ trên cánh đồng cỏ với tốc độ 4 km/h và đi bộ trên đường dọc theo cạnh CD với tốc độ 8 km/h. Để đến C nhanh nhất, người đó nên đi theo đường thẳng từ A đến một điểm E nào đó trên cạnh CD , sau đó đi bộ dọc theo đường từ E đến C . Hỏi điểm E phải cách điểm D bao xa để tổng thời gian di chuyển là ít nhất (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm)?

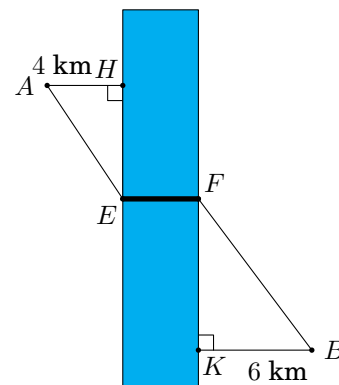
KQ:

Câu 16 Hình vẽ bên minh họa một màn hình BC có chiều cao 1,26 m được đặt thẳng đứng và mép dưới của màn hình cách mặt đất một khoảng $BA = 1,62$ m. Một chiếc đèn quan sát màn hình được đặt ở vị trí O trên mặt đất. Để góc quan sát $\widehat{BOC}$ lớn nhất thì độ dài OA bằng bao nhiêu mét?



KQ:

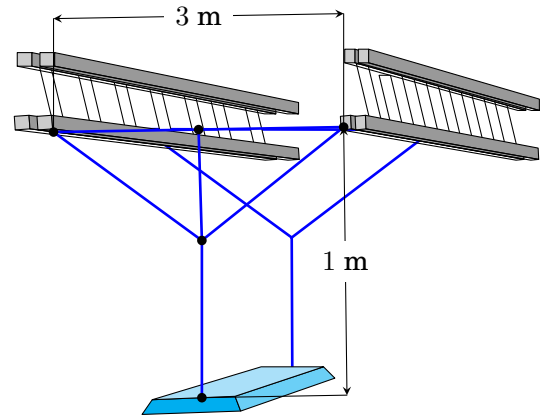
Câu 17 Hai thành phố A và B cách nhau một con sông. Người ta xây dựng một cây cầu EF bắc qua sông biết rằng thành phố A cách con sông một khoảng là $AH = 4$ km và thành phố B cách con sông một khoảng là $BK = 6$ km (như hình vẽ), biết $HE + KF = 20$ km và độ dài EF không đổi. Hỏi xây cây cầu cách thành phố A là bao nhiêu kilômét để đường đi từ thành phố A đến thành phố B là ngắn nhất (đi theo đường $AEFB$, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



KQ:

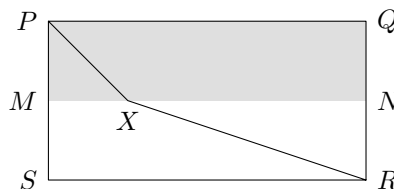
Câu 18 Trong một cửa hàng, nhà quản lý dự định treo một đồ trang trí trên cao. Vật trang trí được đặt trên giá đỡ nằm dưới thanh treo 1 m. Biết khoảng cách giữa hai thanh treo là 3 m. Biết tổng độ dài nhỏ nhất của các đoạn dây xích là $a + b\sqrt{c}$ (trong đó a, b, c là các số tự nhiên). Tính $a - b - c$.

KQ:

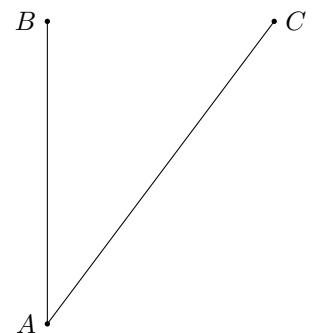


Câu 19 Một khu rừng phòng hộ hình chữ nhật $PQRS$ có chiều dài $PQ = 50$ km, chiều rộng $PS = 40$ km. Khu rừng được chia thành 2 khu vực và trồng, chăm sóc hai loại cây với độ tuổi khác, đoạn chia khu rừng là MN trong đó M là trung điểm của PS , N là trung điểm của QR . Một máy bay không người lái (drone) quan sát thực hiện bay định kì theo 2 đoạn thẳng ngẫu nhiên, xuất phát từ điểm P và kết thúc tại điểm R tạo thành đường gấp khúc PXR với X là một điểm thuộc MN . Trong khu vực $PMNQ$ máy bay bay với vận tốc 30 km/h, trong khu vực còn lại nó bay với vận tốc 20 km/h. Để thực hiện được một hành trình bay quan sát khu rừng phòng hộ trên thì máy bay bay hết ít nhất bao nhiêu phút (làm tròn đến hàng đơn vị)?

KQ:



Câu 20 Chào đón năm mới 2025, Thành phố trang trí đèn led cho biểu tượng hình chữ V được ghép từ các thanh $AB = 4$ m, $AC = 5$ m sao cho tam giác ABC vuông tại B (tham khảo hình vẽ). Một chuỗi led chạy từ B xuống A với vận tốc 4 m/phút và một chuỗi led chạy từ A đến C với vận tốc 10 m/phút. Sau khi đóng nguồn điện thì cả hai chuỗi led đồng thời xuất phát. Hỏi sau bao nhiêu giây kể từ thời điểm đóng nguồn điện thì khoảng cách giữa hai điểm sáng đầu tiên của hai chuỗi led là nhỏ nhất?

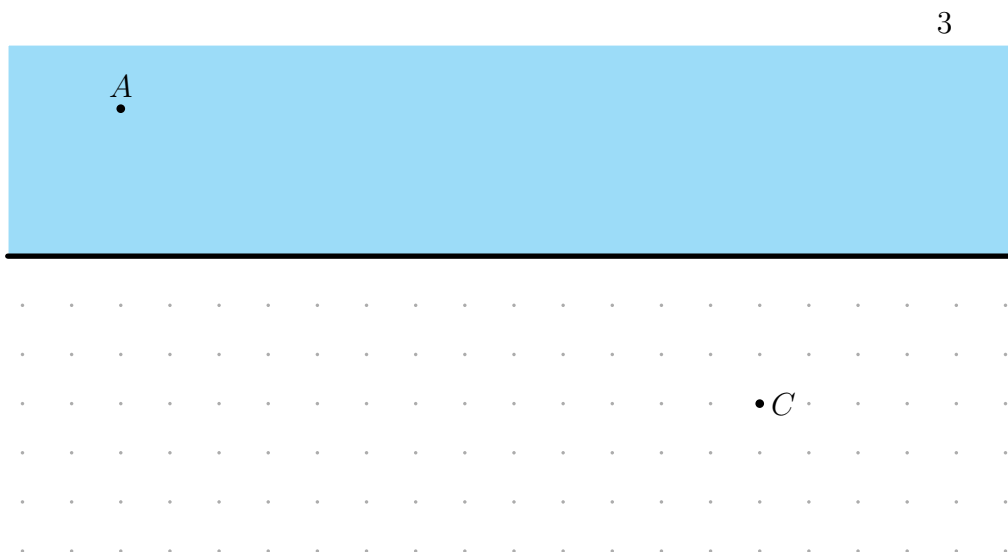


KQ:

Câu 21 Một người cưỡi ngựa xuất phát từ A đi đến C . Điểm A nằm trong vùng đất ướt nên vận tốc của ngựa khi đi trong vùng này là 12 km/h. Điểm C nằm trong vùng đất khô hơn nên vận tốc của ngựa khi đi trong vùng này là 24 km/h. Hai phần đất này giáp



nhau bởi một đường thẳng d đi qua trung điểm của AC và khoảng cách từ A và C đến đường thẳng này đều bằng 10 km.



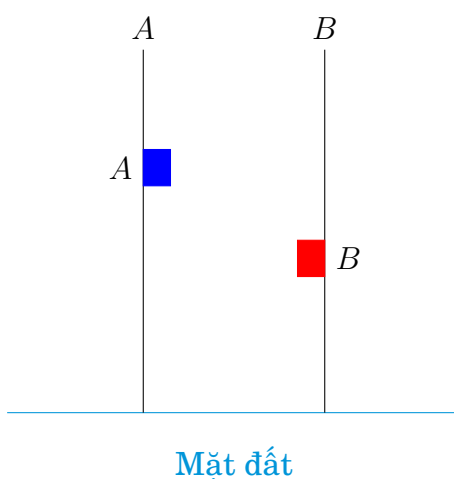
Biết $AC = 5\sqrt{41}$ km, thời gian ít nhất để đi từ A đến C là $t = \frac{a\sqrt{5}}{b}$, ($a; b \in \mathbb{N}^*$, $a; b$ nguyên tố cùng nhau). Tính $T = 3a + b$.

KQ:

Câu 22 Trong một khu quan trắc, hai thang nâng A, B di chuyển theo thời gian t (giờ), $0 \leq t \leq 12$. Độ cao (m) của chúng (so với mặt đất) được cho bởi

$$h_A(t) = 34 - \frac{\pi}{12}t - \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right) - \sin\left(\frac{\pi t}{12}\right);$$

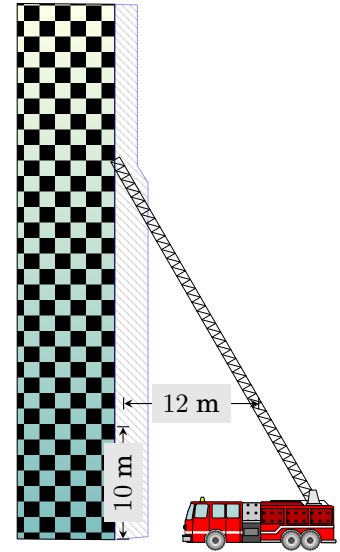
$$h_B(t) = 24 + 2 \cos\left(\frac{\pi t}{12}\right).$$



Tìm thời điểm t mà mức chênh lệch độ cao giữa hai thang nâng là lớn nhất.

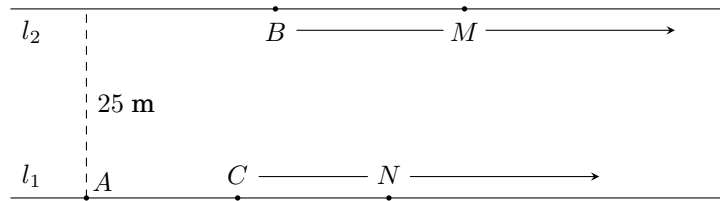
KQ:

Câu 23 Hình bên mô tả một mặt cắt ngang của một tòa nhà cao tầng. Một chiếc thang từ xe cứu hỏa lên đến mặt tường phía trước của tòa nhà phải vượt qua phần mái che cao hơn 10 m so với mặt đất và vùng mái nhô ra 12 m so với tường. Giả sử độ cao của xe cứu hỏa là không đáng kể, hãy tìm độ dài ngắn nhất của chiếc thang để các lính cứu hỏa có thể thực hiện nhiệm vụ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



KQ:

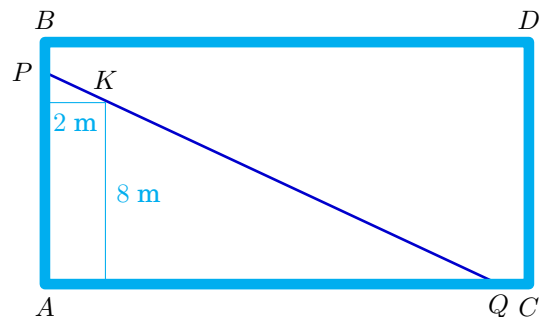
Câu 24 Hai chất điểm M, N chuyển động cùng hướng và xuất phát cùng một thời điểm trên hai đường thẳng l_1 và l_2 song song với nhau (chất điểm M xuất phát từ điểm B , chất điểm N xuất phát từ điểm C như hình vẽ). Khoảng cách giữa hai đường thẳng l_1 và l_2 là 25 mét. Điểm A cố định trên đường thẳng l_1 .



Tại thời điểm t giây ($t \geq 0$, tính từ lúc bắt đầu xuất phát), khoảng cách từ các chất điểm M và N đến A lần lượt là $d_M(t) = 56 + \frac{t}{2}$ (mét) và $d_N(t) = \frac{61t + 42}{t + 1}$ (mét). Tính khoảng cách (theo đơn vị mét) từ chất điểm M đến A tại thời điểm lần thứ hai mà hai chất điểm M và N gần nhau nhất.

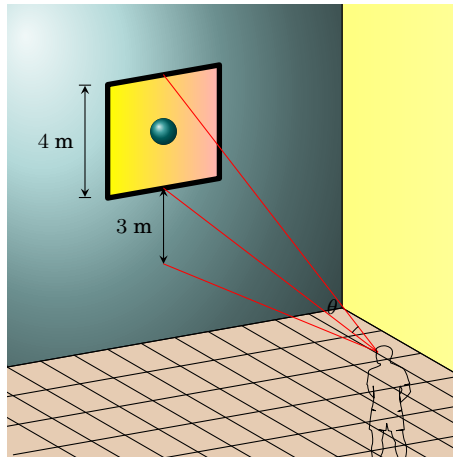
KQ:

Câu 25 Một cái hồ rộng có hình chữ nhật. Tại một góc hồ người ta đóng một cái cọc ở vị trí K cách bờ AB là 2 m và cách bờ AC là 8 m, rồi dùng một cây sào thẳng PQ ngăn một góc của hồ để thả bè (như hình vẽ). Tính chiều dài ngắn nhất của cây sào để cây sào có thể chạm vào hai bờ AB, AC và cọc K (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của mét).



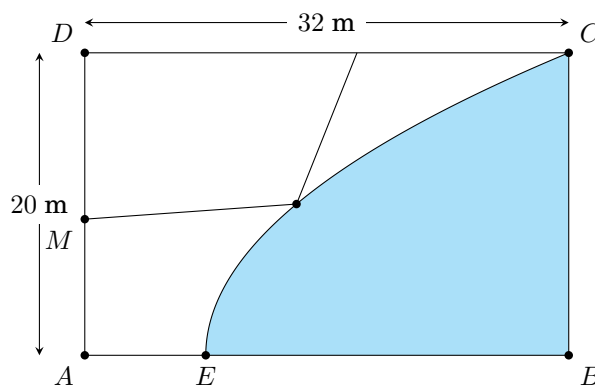
KQ:

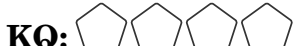
Câu 26 Một bức tranh cao 4 m được treo trên tường có mép dưới cao hơn tầm mắt người quan sát 3 m (như hình vẽ). Người quan sát phải đứng cách tường bao nhiêu mét để có được tầm nhìn thuận lợi nhất (tức là, có góc nhìn θ lớn nhất)?



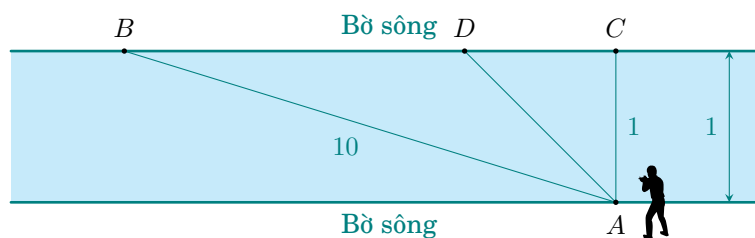
KQ: 

Câu 27 Bác An có một khu vườn hình chữ nhật $ABCD$ với kích thước $20\text{m} \times 32\text{m}$. Trong vườn có đào một cái ao để nuôi cá, ao được bao bởi cạnh BC , BE và đường cong EC là một phần của parabol đỉnh E (như hình vẽ). Biết độ dài đoạn thẳng $AE = 8\text{m}$.



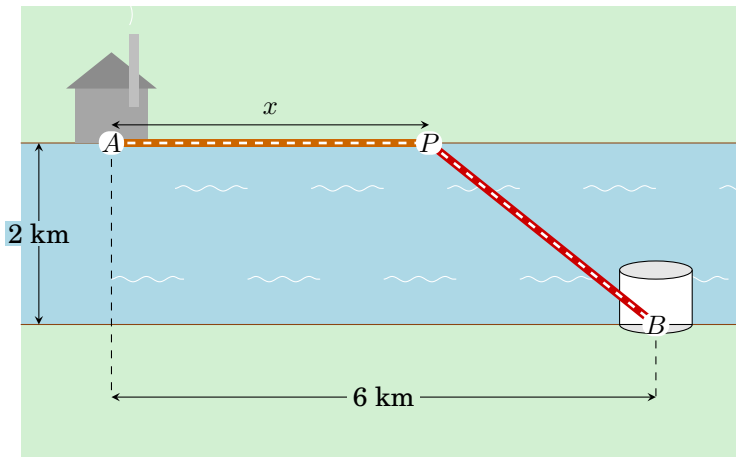
Bác An muốn làm một con đường đi từ điểm M trên cạnh AD ra một điểm trên mép bờ ao, rồi lại từ điểm đó tới một điểm trên cạnh DC . Hỏi tổng chiều dài con đường ngắn nhất là bao nhiêu mét (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục)? KQ: 

Câu 28 Một chiến sĩ đặc công đang nấp ở bờ sông, cần phải bơi qua bờ bên kia để tấn công mục tiêu. Có thể xem con sông này là thẳng và có độ rộng 100m ; vận tốc bơi của chiến sĩ bằng một phần ba vận tốc chạy bộ. Biết rằng mục tiêu tấn công cách chiến sĩ 1km theo đường chim bay. Hỏi chiến sĩ phải bơi bao nhiêu mét để đến được mục tiêu nhanh nhất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



KQ: 

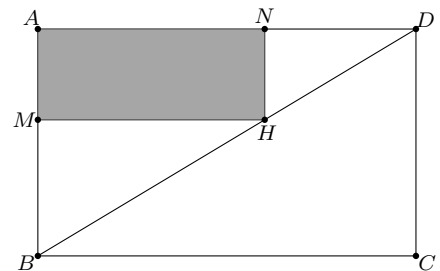
Câu 29 Người ta muốn lắp một ống dẫn dầu từ nhà máy lọc dầu ở vị trí A đến kho chứa dầu đặt ở vị trí B qua một con sông rộng 2 km, dài 6 km. Chi phí lắp đặt đường ống dẫn dầu trên mặt đất để nối từ nhà máy lọc dầu đến trạm trung chuyển tại vị trí P là 4 tỷ VNĐ/1 km và chi phí lắp đặt đường ống dẫn dầu dưới dòng sông để nối từ P đến kho chứa dầu tại vị trí B là 8 tỷ VNĐ/1 km (như hình vẽ)



Để chi phí lắp đặt ít nhất cần đặt vị trí P cách nhà máy lọc dầu là bao nhiêu kilômét? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

KQ:

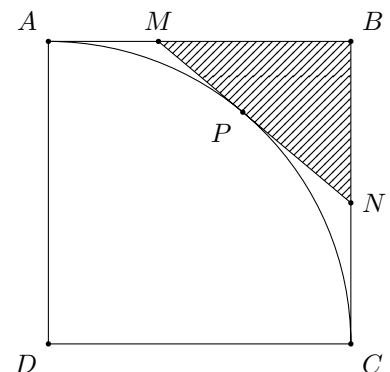
Câu 30 Trên mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích 25 m^2 , người chủ lấy một phần đất để trồng cỏ. Biết phần đất trồng cỏ này có dạng hình chữ nhật với hai đỉnh đối diện là A và H , với H thuộc cạnh BD . Hỏi số tiền lớn nhất người chủ cần chuẩn bị để trồng cỏ (miền tô đậm) là bao nhiêu (làm tròn đến nghìn đồng) với chi phí trồng cỏ là 70 000 đồng/ m^2 ?



KQ:

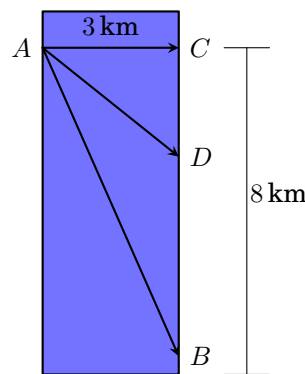
Câu 31 Cho hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng 1. Cung AC là một phần tư đường tròn tâm D , bán kính DA . Giả sử P là điểm thay đổi trên cung AC ($P \neq A, C$). Tiếp tuyến tại điểm P của cung AC cắt các đoạn thẳng AB, BC theo thứ tự tại các điểm M, N . Diện tích lớn nhất của tam giác BMN bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

KQ:



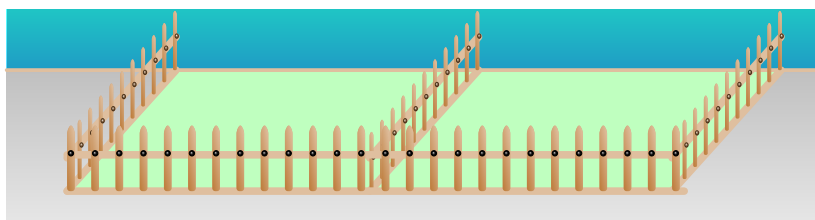


Câu 32 Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí A tới điểm B về phía hạ lưu bờ đối diện trên một bờ sông thẳng rộng 3 km (như hình vẽ). Anh chèo thuyền đến một điểm D giữa C và B và sau đó chạy đến B . Biết anh ấy có thể chèo thuyền 6 km/h, chạy 8 km/h và quãng đường $BC = 8$ km. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Khoảng thời gian ngắn nhất (đơn vị: giờ) để người đàn ông đến B là $a + \frac{b}{c}\sqrt{d}$, trong đó $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$, $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản và d là số nguyên dương. Giá trị của $a + b + c + d$ bằng bao nhiêu?



KQ:

Câu 33 Một người nông dân có 15 000 000 đồng để làm một hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông bao quanh hai khu đất trồng rau có dạng hai hình chữ nhật bằng nhau (Hình bên dưới). Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60 000 đồng/mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song với nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50 000 đồng/mét, mặt giáp với bờ sông không phải rào. Tìm diện tích lớn nhất của hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào.



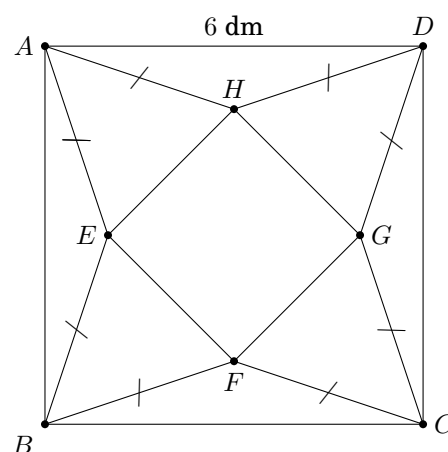
KQ:

Câu 34 Anh Hà dự định làm một cái thùng đựng dầu hình trụ bằng sắt có nắp dẹt thể tích 10m^3 . Chi phí làm mỗi m^2 đáy là 400 ngàn đồng, mỗi m^2 nắp là 200 ngàn đồng, mỗi m^2 mặt xung quanh là 300 ngàn đồng. Để chi phí làm thùng là ít nhất thì anh Hà cần chọn chiều cao của thùng là bao nhiêu mét? (Xem độ dày của tấm sắt làm thùng là không đáng kể, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

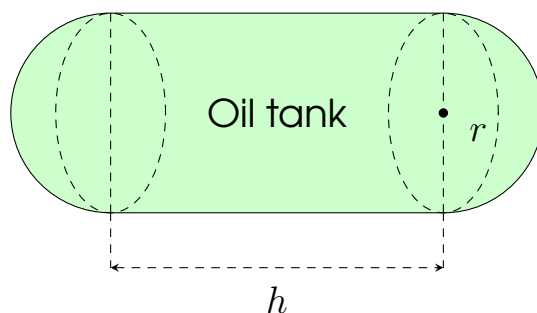
KQ:

Câu 35 Từ một tấm bìa mỏng hình vuông cạnh 6 dm, bạn Hoa cắt bỏ bốn tam giác cân bằng nhau có cạnh đáy là cạnh của hình vuông ban đầu và đỉnh là đỉnh của một hình vuông nhỏ phía trong rồi gấp lên, ghép lại tạo thành một khối chóp tứ giác đều. Thể tích của khối chóp có giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu decimét khối (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

KQ:

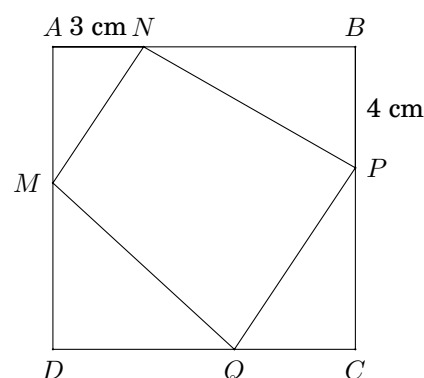


Câu 36 Một bồn chứa dầu được thiết kế với hai đầu là hai nửa hình cầu có bán kính r (m) và phần thân ở giữa là một hình trụ có bán kính đáy r (m) và chiều cao h (m) (tham khảo hình vẽ dưới đây). Toàn bộ bồn chứa được yêu cầu có thể tích là 9π (m³) và để đảm bảo tính ổn định trong quá trình vận chuyển, chiều cao h của phần hình trụ phải thỏa mãn điều kiện $h \geq 2$ (m). Chi phí để làm bồn phụ thuộc vào diện tích toàn bộ bề mặt ngoài của bồn (bao gồm mặt xung quanh của phần hình trụ và bề mặt của hai nửa hình cầu). Hãy xác định bán kính r (m) để chi phí làm bồn là nhỏ nhất (viết kết quả ở dạng số thập phân).



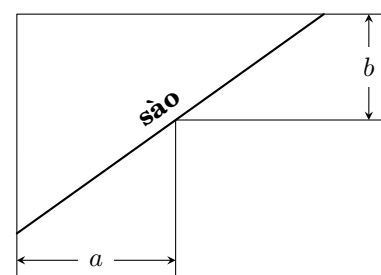
KQ:

Câu 37 Một tấm bìa hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 10 cm. Bạn An muốn tạo thành 1 hình thang $MNPQ$ ($MN \parallel PQ$) biết M, N, P, Q lần lượt nằm trên các cạnh AD, AB, BC, CD như hình minh họa sao cho đoạn $AN = 3$ cm, $BP = 4$ cm. Tính diện tích hình thang $MNPQ$ nhỏ nhất bạn An có thể tạo được (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của cm²).



KQ:

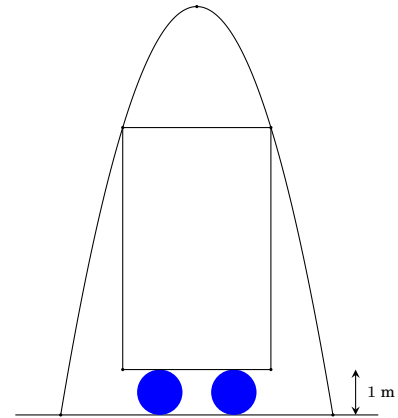
Câu 38 Để chặn đường hành lang hình chữ L, người ta dùng một que sào thẳng dài đặt kín những điểm chạm với hành lang (như hình vẽ). Biết $a = 24$ và $b = 3$. Hỏi que sào thỏa mãn điều kiện trên có chiều dài tối thiểu là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?



KQ:

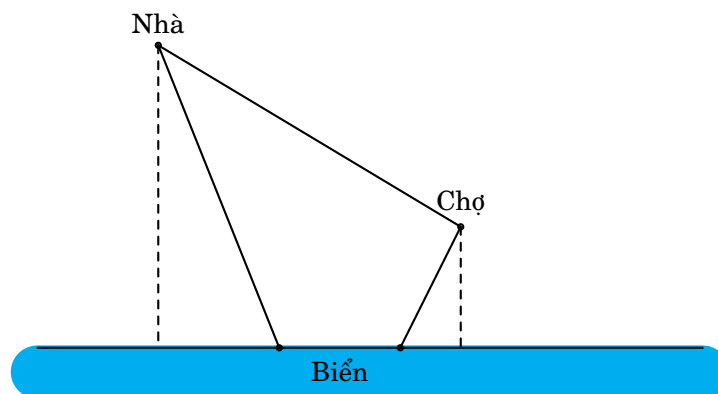


Câu 39 Một chiếc cổng hình Parabol có chiều cao 9 m, khoảng cách giữa hai chân cổng là 6 m. Để vận chuyển thùng hàng hình chữ nhật qua cổng, người ta dùng một xe kéo có chiều cao 1 m. Biết rằng mặt cắt của thùng hàng qua cổng là hình chữ nhật, hỏi diện tích hình chữ nhật đó lớn nhất là bao nhiêu m^2 để xe chở thùng hàng có thể đi qua cổng (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



KQ:

Câu 40 Nhà thầy Hùng cách bờ biển 1 km. Mỗi buổi sáng thầy chạy bộ từ nhà ra bờ biển sau đó chạy dọc bờ biển 500 m rồi thầy chạy qua chợ hải sản để lấy thức ăn trong ngày, cuối cùng thầy chạy về nhà. Biết chợ hải sản cách bờ biển 500 m và cách nhà thầy Hùng 1 km tính quãng đường ngắn nhất mà thầy Hùng đã chạy trong mỗi buổi sáng (đơn vị m và làm tròn đến hàng đơn vị).



KQ:

Câu 41 Bác An muốn xây dựng một chuồng nuôi chim bồ câu có dạng khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Từ số tiền đã chuẩn bị để mua vật liệu và dựa vào không gian sẵn có để xây dựng chuồng nuôi, bác An dự kiến xây dựng chuồng có tổng diện tích của tất cả các mặt là 36 m^2 , độ dài đường chéo AC' bằng 6 m. Với những điều kiện đó, chuồng được xây dựng tối ưu nếu thể tích chuồng lớn nhất. Hãy giúp bác An tính xem giá trị tối ưu đó của thể tích chuồng nuôi đó bằng bao nhiêu mét khối (kết quả được làm tròn đến chữ số hàng phần chục)?

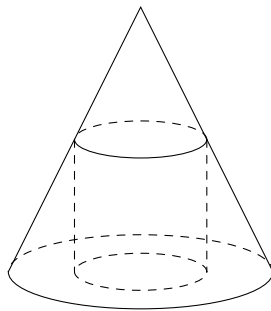
KQ:

Câu 42 Một bảo tàng khoa học muốn lắp đặt một cửa sổ trang trí lớn hình parabol trên bức tường phía tây của tòa nhà. Cửa sổ này có đỉnh cao nhất cách sàn nhà 15 mét. Một điểm trên khung cửa sổ được đo là cách trục đối xứng 5 mét và có độ cao 10 mét so với sàn nhà. Bên trong khung cửa sổ, người thiết kế muốn đặt một tấm kính màu hình chữ nhật, với hai đỉnh trên của tấm kính nằm trên đường cong của khung cửa sổ và hai đỉnh dưới của tấm kính nằm trên một thanh ngang cố định cách sàn nhà 3 mét (song

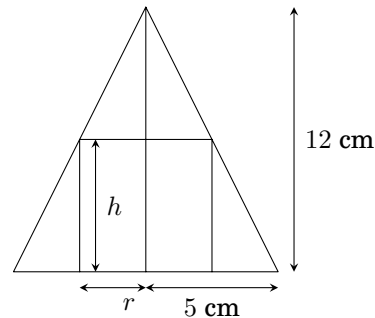
song với sàn nhà). Diện tích lớn nhất của tấm kính màu là bao nhiêu mét vuông? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

KQ:    

Câu 43 Cho một hình trụ nội tiếp trong hình nón có chiều cao bằng 12 cm và bán kính đáy bằng 5 cm (Hình 1). Người ta cắt hình nón, trụ này theo mặt phẳng chứa đường thẳng nối đỉnh và tâm hình tròn đáy của hình nón thì thu được một hình phẳng như Hình 2.



Hình 1

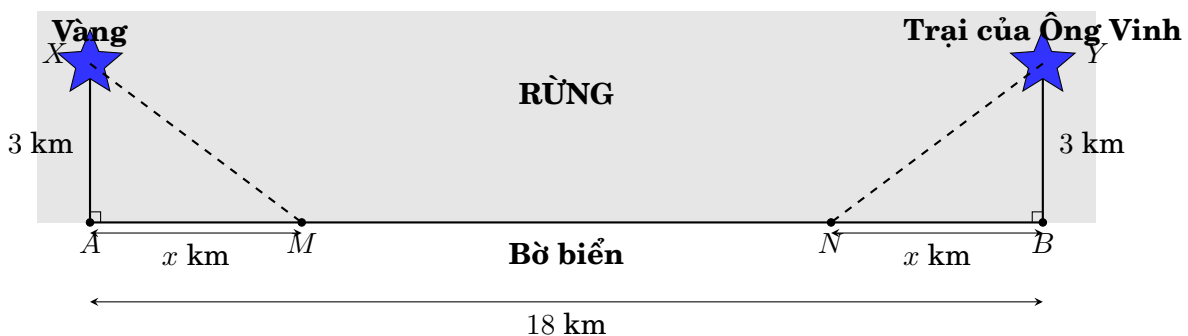


Hình 2

Tìm h để khối trụ có thể tích lớn nhất.

KQ:    

Câu 44 Ông Vinh đang ở trong rừng để đào vàng. Ông ta tìm thấy vàng ở X , cách điểm A là 3 km. Điểm A nằm trên đường bờ biển (đường bờ biển là đường thẳng). Trại của ông Vinh nằm ở Y , cách điểm B là 3 km. Điểm B cũng thuộc đường bờ biển. Biết rằng $AB = 18$ km, $AM = NB = x$ km và XA vuông góc với bờ biển, YB vuông góc với bờ biển. (Như hình vẽ sau)

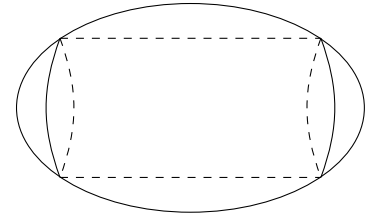


Khi đang đào vàng, Ông Vinh bị rắn cắn, chất độc lan vào máu. Sau khi bị cắn, nồng độ chất độc trong máu tăng theo thời gian được tính theo phương trình $y = 50 \log(t + 2)$. Trong đó, y là nồng độ, t là thời gian tính bằng giờ sau khi bị rắn cắn. Ông Vinh cần quay trở lại trại để lấy thuốc giải độc. Ông ấy chạy trong rừng và trên bãi biển với vận tốc lần lượt là 5 km/h và 13 km/h. Để về đến trại Ông Vinh cần chạy từ trong rừng qua điểm M, N trên bãi biển. Tính nồng độ chất độc trong máu thấp nhất khi ông Vinh về đến trại (làm tròn đáp án đến hàng phần chục).

KQ:    



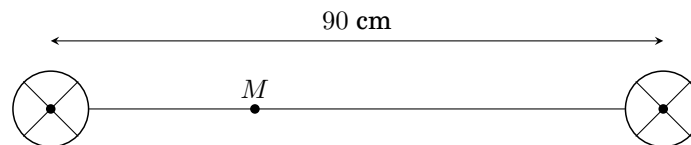
Câu 45 Một quả trứng khủng long đồ chơi bằng nhựa có thiết diện qua trục lớn là một đường elip. Biết độ dài mỗi trục là 12 cm và 8 cm. Bên trong quả trứng người ta cần thiết kế một chiếc hộp hình trụ để đựng các đồ chơi trẻ con như bóng đèn xanh đỏ, kẹo v.v... Hỏi khối trụ như thế có thể tích tối đa bao nhiêu cm^3 (làm tròn đến hàng đơn vị).



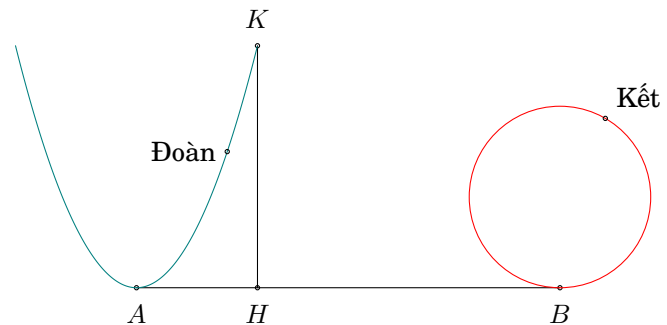
KQ:

Câu 46 Giả sử cường độ ánh sáng của một nguồn điểm tỉ lệ thuận với cường độ của nguồn sáng đó và tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách từ điểm đó đến nguồn sáng. Hai nguồn điểm có cường độ lần lượt là S và $8S$, cách nhau 90 cm. Xét một điểm M nằm trên đoạn thẳng nối hai nguồn, cường độ ánh sáng tại điểm đó nhỏ nhất thì điểm đó cách nguồn có cường độ S bằng bao nhiêu centimet? (cho biết cường độ sáng tại điểm M bằng tổng cường độ sáng mỗi nguồn tại điểm đó).

KQ:



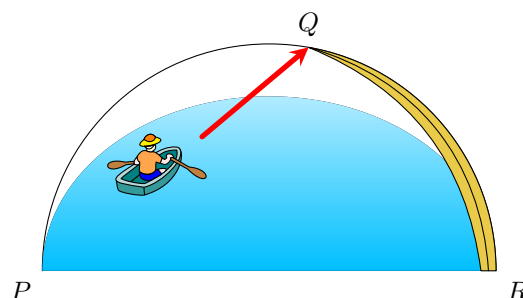
Câu 47 Khi dạo chơi trên một công viên, bạn Đoàn di chuyển trên đường parabol, bạn Kết di chuyển trên đường tròn (minh họa bằng hình vẽ bên). Khoảng cách giữa đỉnh A của parabol và tiếp điểm B của đường tròn là 16 m, $HK \perp AB$ và $AH = 6$ m, $HK = 9$ m.



Tìm khoảng cách nhỏ nhất giữa hai bạn Đoàn và Kết, biết rằng đường tròn có bán kính bằng 3 m (làm tròn đến hàng phần trăm).

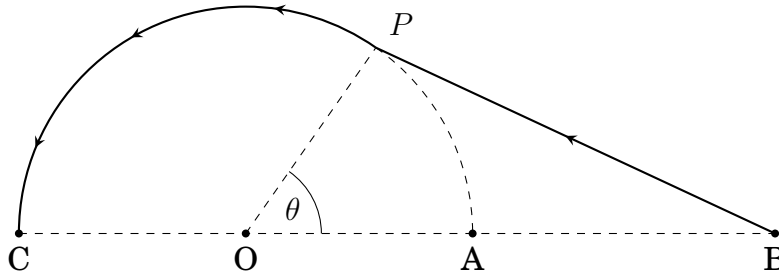
KQ:

Câu 48 Một bờ hồ có dạng nửa đường tròn bán kính bằng 2 km, đường kính là PR . Từ điểm P , bạn Nam chèo một chiếc thuyền với vận tốc 3 km/h đến điểm Q trên bờ hồ, rồi chạy bộ dọc theo bờ hồ đến điểm R với vận tốc 6 km/h. Hỏi để di chuyển từ P đến R theo cách trên thì bạn Nam mất ít thời gian nhất là bao nhiêu giờ? (Làm tròn đến hàng phần chục).



KQ:

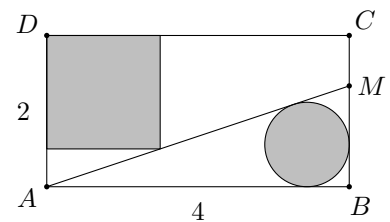
Câu 49 Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính AC và điểm B nằm trên tia OA sao cho $CO = OA = AB = 1$ (dm). Một con kiến robot bò từ điểm B dọc theo đoạn thẳng PB đến P (một điểm bất kì thuộc nửa đường tròn) với vận tốc là 1 (dm/s), sau đó từ P đi theo cung tròn $\widehat{PC}$ để đến C với vận tốc 2 (dm/s) (tham khảo hình vẽ). Đặt $\widehat{AOP} = \theta$, biết trong trường hợp tổng thời gian bò của con kiến từ B đến C là nhỏ nhất thì $\cos \theta = \frac{1 + a\sqrt{b}}{c^3}$ với a, b, c là các số nguyên tố. Tính $a + b + c$.



KQ:

Câu 50 Bạn Xuân Anh có một tờ giấy cứng hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 4$ dm, $AD = 2$ dm. Bạn chọn điểm M thuộc cạnh BC rồi dùng thước kẻ vạch và cắt tờ giấy theo đường AM , chia tờ giấy thành hai phần.

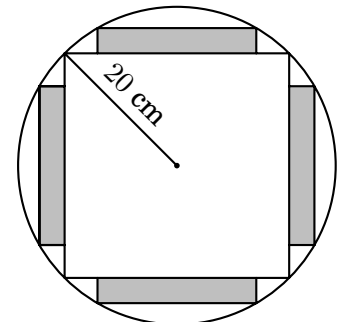
- ◆ Phần mảnh giấy chứa cạnh CD : bạn muốn cắt một hình vuông có đỉnh D , hai cạnh nằm trên đường DA và DC , đỉnh còn lại của hình vuông thuộc đường cắt AM .
- ◆ Phần mảnh giấy chứa cạnh AB : Bạn muốn cắt được một hình tròn sao cho hình tròn tiếp xúc với cả ba cạnh của tam giác ABM .



Gọi S (phần tô đậm trong hình vẽ) là tổng diện tích của hình vuông và hình tròn cắt được. Hỏi khi M di động trên BC , giá trị nhỏ nhất của S bằng bao nhiêu dm^2 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

KQ:

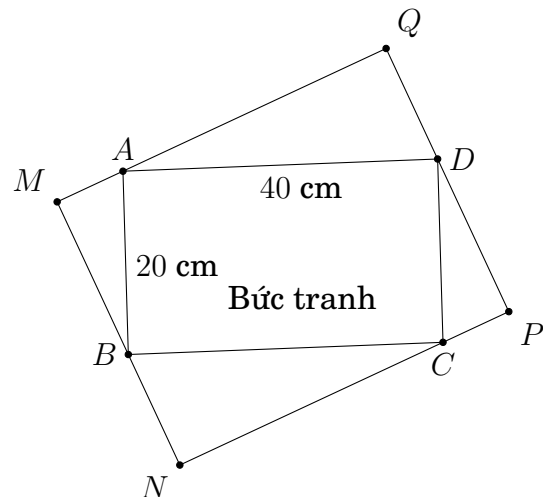
Câu 51 Một thanh dầm hình hộp chữ nhật được cắt từ một khúc gỗ hình trụ có bán kính đáy bằng 20 cm sao cho thanh dầm có diện tích mặt cắt ngang lớn nhất, tức là thanh dầm có mặt cắt ngang là hình vuông. Sau khi cắt thanh dầm đó, người ta lại cắt bốn tấm ván hình hộp chữ nhật từ bốn phần còn lại của khúc gỗ (tham khảo hình vẽ dưới đây). Xác định diện tích mặt cắt ngang tối đa của mỗi tấm ván (theo đơn vị cm^2 và làm tròn kết quả đến hàng phần chục).



KQ:

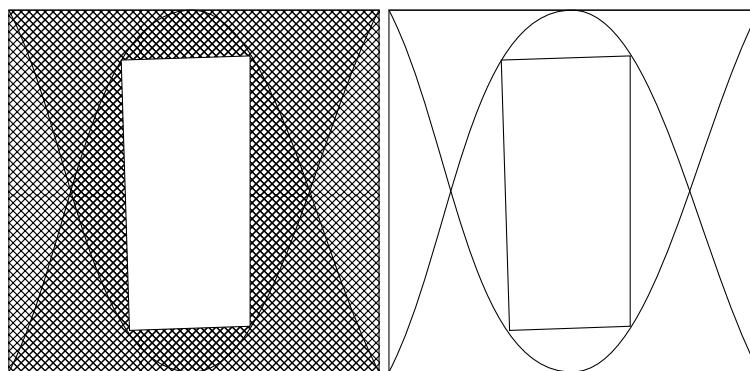


Câu 52 Bà Bích xin một bức tranh “Bính Ngọ 2026” được sơn son thếp vàng trong một hình chữ nhật $ABCD$ kích thước $20\text{ cm} \times 40\text{ cm}$. Bà treo bức tranh này trên tường trong phòng khách của bà. Để tăng điểm nhấn cho bức tranh, bà trang trí một khung hình cách điệu hình chữ nhật $MNPQ$ sao cho các điểm A, B, C, D lần lượt thuộc các cạnh QM, MN, NP, PQ (xem hình vẽ). Lúc này, bà cần tính toán phần diện tích chiếm chỗ của hình chữ nhật $MNPQ$ trên tường nhà sao cho cân đối nhất. Hỏi diện tích lớn nhất của hình chữ nhật $MNPQ$ là bao nhiêu centimet vuông?



KQ:

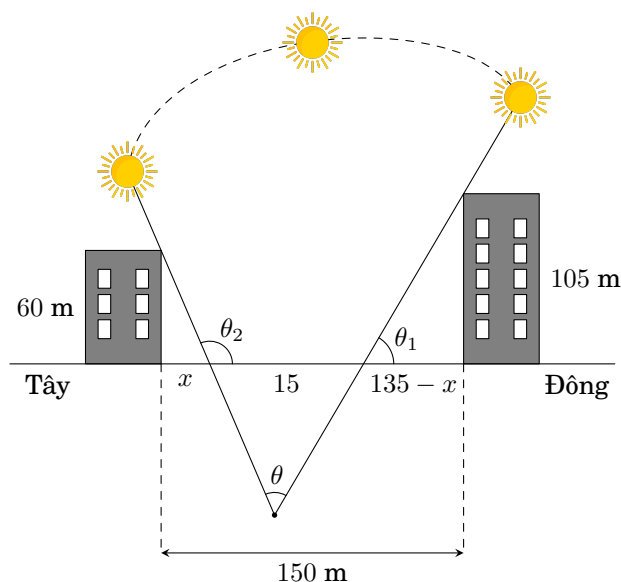
Câu 53 Một cơ sở sản xuất dự định làm các viên gạch men hình vuông cạnh 60 cm . Bề mặt viên gạch được trang trí bởi một họa tiết hình chữ nhật màu trắng có tâm trùng với tâm viên gạch. Các đỉnh của hình chữ nhật này nằm trên hai đường parabol đối xứng qua tâm viên gạch.



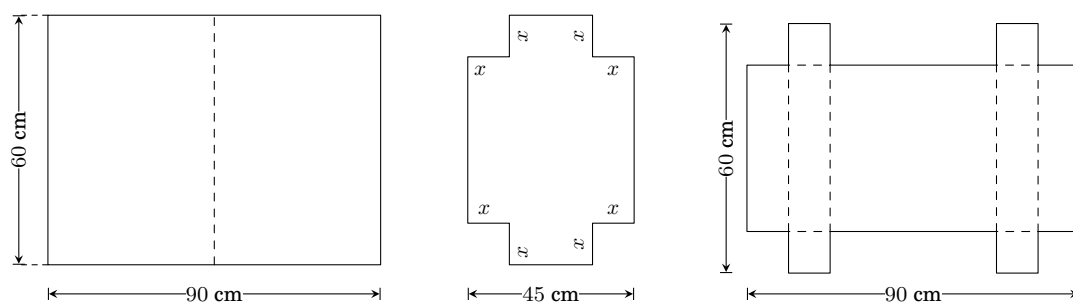
Biết rằng mỗi đường parabol có đỉnh tại trung điểm một cạnh của viên gạch và đi qua hai đầu mút của cạnh đối diện (như hình vẽ mô phỏng). Cho biết chi phí nguyên liệu phần men trắng là 80 nghìn đồng/m^2 , còn phần men màu bao quanh là $200\text{ nghìn đồng/m}^2$. Hỏi chi phí nguyên liệu thấp nhất để sản xuất một viên gạch là bao nhiêu nghìn đồng? (kết quả làm tròn đến hàng phân mười).

KQ:

Câu 54 Một vườn hoa có chiều dài 15 mét được xây dựng giữa 2 tòa nhà ở hai hướng Đông và Tây. Biết rằng 2 tòa nhà cách nhau 150 mét và độ cao của tòa nhà hướng Đông là 105 m, độ cao của tòa nhà hướng Tây là 60 mét. Người ta tìm địa điểm trồng hoa cách tòa nhà ở hướng Tây x (mét) để thời gian chiếu sáng vào vườn hoa là lớn nhất. Giá trị của x bằng bao nhiêu mét? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị). Biết thời gian ánh sáng mặt trời chiếu vào vườn hoa đạt lớn nhất khi góc θ lớn nhất (như hình vẽ).

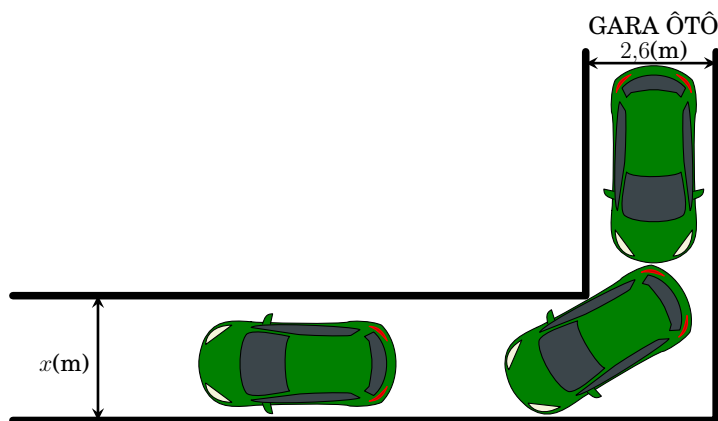


Câu 55 Một tấm bìa cứng có kích thước 60 (cm) và 90 (cm) được gấp đôi thành một hình chữ nhật 60 (cm) và 45 (cm) như hình vẽ. Sau đó, cắt ra từ các góc của hình chữ nhật vừa gấp bốn hình vuông bằng nhau có cạnh x (cm). Tấm bìa được mở ra và sáu mép được gấp lên để tạo thành một hộp chữ nhật (H) có nắp và đáy (như hình vẽ). Thể tích lớn nhất của khối (H) bằng bao nhiêu lít? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



KQ:

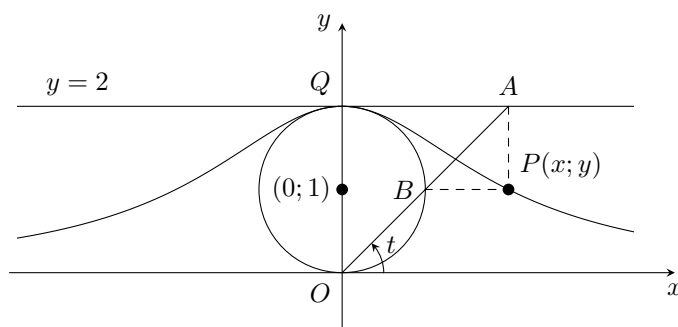
Câu 56 Hình vẽ bên dưới mô tả đoạn đường đi vào GARA ÔTÔ của bác An.



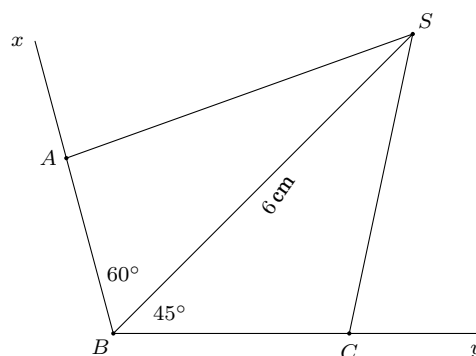
Đoạn đường đầu tiên có chiều rộng bằng x (m), đoạn đường thẳng vào cổng GARA có chiều rộng 2,6 (m). Biết kích thước xe ô tô là $5 \times 1,9$ m (chiều dài $\times$ chiều rộng). Để tính toán và thiết kế đường đi cho ô tô, người ta coi ô tô như một khối hộp chữ nhật có kích thước chiều dài là 5 (m), chiều rộng 1,9 (m). Tìm chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên để ô tô có thể đi vào GARA được? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười; giả thiết ô tô không đi ra ngoài đường, không đi nghiêng và ô tô không bị biến dạng).

Câu 57 Hình vẽ sau mô tả một đường cong Agnesi và được xây dựng trong hệ tọa độ Oxy như sau: vẽ một đường tròn có tâm $I(0; 1)$ và bán kính bằng 1, từ điểm O kẻ một đường thẳng cắt đường tròn tại điểm thứ 2 là điểm B và cắt đường thẳng $y = 2$ tại điểm A . Gọi P là giao điểm của đường thẳng qua A và vuông góc với Ox và đường thẳng qua B vuông góc với Oy . Tập hợp các điểm P tạo thành một đường cong $y = f(x)$ gọi là đường cong Agnesi. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hệ số góc lớn nhất bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

KQ:



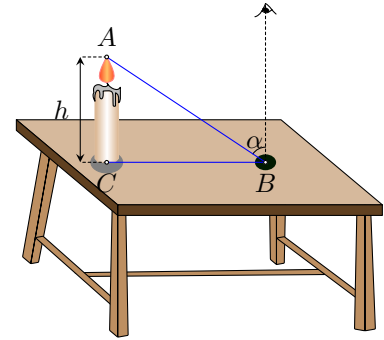
Câu 58 Một chiếc đèn pin tại vị trí S chiếu chùm sáng phân kì với góc chiếu sáng $\widehat{ASC} = 60^\circ$ không đổi, sang phía góc xBy như hình vẽ. Biết $\widehat{SBA} = 60^\circ$, $\widehat{SBC} = 45^\circ$, $SB = 6$ m. Với điều kiện A luôn thuộc tia Bx và C luôn thuộc tia By thì tổng độ dài hai đoạn BA và BC theo đơn vị mét lớn nhất bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)



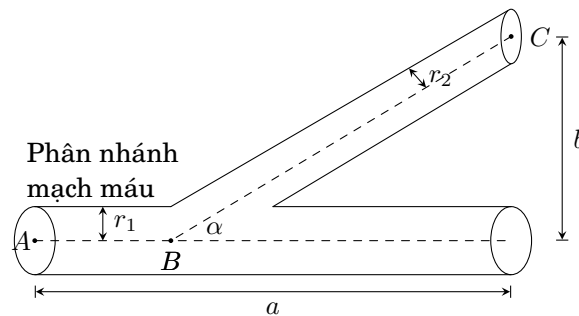
KQ:

Câu 59 Trong quang học, chúng ta biết định luật quang học về độ chiếu sáng. Nó được phát biểu như sau: Khi một nguồn sáng chiếu lên một mặt phẳng, độ chiếu sáng từ nguồn sáng A đến một điểm B cho bởi công thức $T = \frac{i \cos \alpha}{AB^2}$, trong đó i là độ phát sáng của nguồn A , α là góc phản xạ của ánh sáng lên người quan sát (coi rằng người quan sát nhìn thẳng xuống mặt bàn, tham khảo hình vẽ bên). Một đồng xu được đặt cách ngọn nến một khoảng $BC = 30$ cm. Hỏi ngọn lửa của cây nến nên đặt ở độ cao h bằng bao nhiêu để chiếu sáng rõ nhất đồng tiền xu nằm trên bàn (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)?

KQ:



Câu 60 Hệ thống mạch máu chứa các mạch máu gồm động mạch chính, động mạch con, mao mạch và tĩnh mạch để giúp đưa máu từ tim đến các cơ quan và ngược lại. Hệ thống hoạt động để tối ưu hoá (tối thiểu) năng lượng mà tim sử dụng trong quá trình bơm máu. Đặc biệt năng lượng này giảm khi sức cản của máu giảm. Hình vẽ dưới đây minh hoạ một mạch máu chính có bán kính r_1 phân nhánh với một góc α° tạo thành một mạch máu nhỏ hơn với bán kính r_2 .



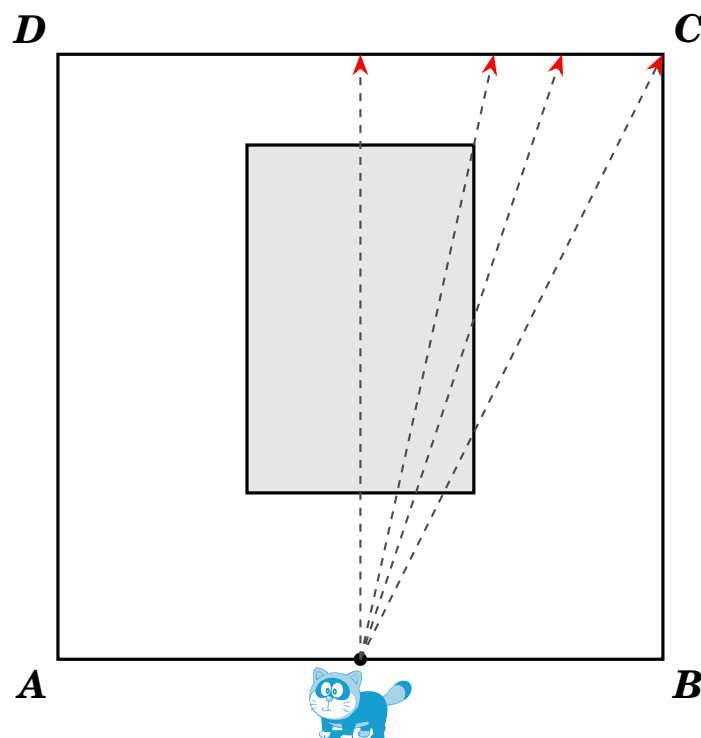
Sử dụng mô tả Định luật Poiseuille, người ta đã chứng minh được sức cản của máu theo con đường ABC là

$$R(\alpha) = C \left(\frac{a - b \cot \alpha}{r_1^4} + \frac{b}{r_2^4 \sin \alpha} \right)$$

với C, a, b là các hằng số. Khi bán kính mạch máu nhỏ bằng $\frac{2}{3}$ bán kính mạch máu chính. Xác định α để sức cản này là nhỏ nhất. (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

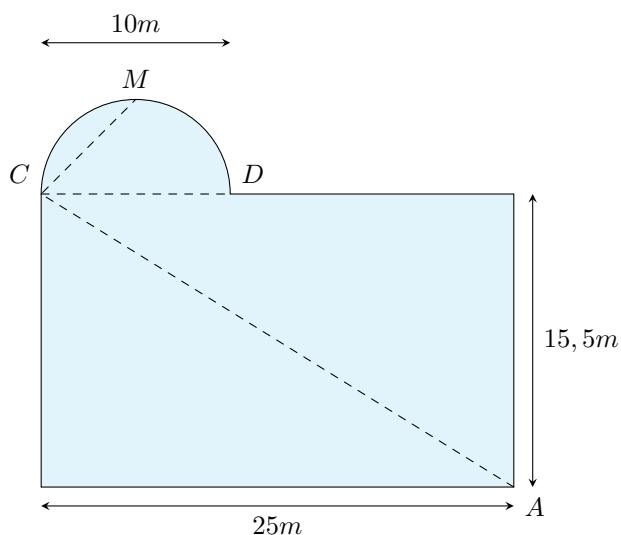
KQ:

Câu 61 Trên một khu đất hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh 200 m đang diễn ra một cuộc thi. Mỗi đội thi sẽ điều khiển con robot mà ban tổ chức cung cấp, xuất phát từ chính giữa cạnh AB , đi theo một đường thẳng và đến đích là một điểm bất kỳ trên cạnh CD . Ở chính giữa khu đất là một bãi cát hình chữ nhật có chiều dài 120 m và chiều rộng 80 m. Vận tốc của robot khi đi trên mặt đất là 3 m/s còn khi đi trên cát là 2 m/s. Gọi a là thời gian (tính theo giây) ngắn nhất mà robot đi đến đích. Khi đó giá trị $100a$ bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



KQ: 

Câu 62 Bé An thường đi bơi ở hồ Sky Garden cạnh nhà, hồ bơi có thiết kế là một hình chữ nhật với chiều dài 25 m, chiều rộng 15,5 m và bên cạnh đó là một hình bán nguyệt đường kính 10 m. Trong một lần bể bơi vắng người nên An đã thực hiện một chu trình bơi theo đoạn thẳng AC rồi bơi tiếp đoạn thẳng CM , với M là một vị trí bất kỳ trên hình bán nguyệt. Ngay sau đó bạn đi bộ theo một hướng qua điểm D dọc bờ của hồ bơi để quay lại vị trí A và kết thúc chu trình. (tham khảo hình vẽ).



Biết rằng vận tốc bơi của An là 2,4 km/h, vận tốc đi bộ là 4,8 km/h và tốc độ bơi, vận tốc đi bộ không thay đổi trong một chu trình. Hỏi thời gian chậm nhất để An thực hiện xong chu trình trên là bao nhiêu phút? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

KQ: 

BẢNG ĐÁP ÁN ĐÚNG SAI Đ/S

Câu 1. Đ Đ S Đ

Câu 6. S Đ Đ Đ

Câu 11. Đ Đ Đ Đ

Câu 16. Đ S Đ S

Câu 2. Đ Đ S Đ

Câu 7. Đ Đ S Đ

Câu 12. S Đ S Đ

Câu 17. Đ Đ S S

Câu 3. S Đ S Đ

Câu 8. Đ S Đ S

Câu 13. S Đ Đ S

Câu 18. S S S Đ

Câu 4. S Đ Đ Đ

Câu 9. Đ Đ Đ Đ

Câu 14. Đ S Đ S

Câu 5. Đ Đ S Đ

Câu 10. S S Đ Đ

Câu 15. Đ S Đ Đ

ĐÁP SỐ PHẦN TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. 2 7 , 8

Câu 2. 1 1 , 3

Câu 3. 2 0

Câu 4. 0 , 3 5

Câu 5. 1 0 0 0

Câu 6. 1 , 1 3

Câu 7. 5 4

Câu 8. 8

Câu 9. 9

Câu 10. 6 0 8 0

Câu 11. 2 8 1 2

Câu 12. 2 4 0

Câu 13. 3 1 7

Câu 14. 7 , 4 6

Câu 15. 1 , 1 5

Câu 16. 3 1

Câu 17. 8 , 9 4

Câu 18. - 4

Câu 19. 1 5 6

Câu 20. 1 6

Câu 21. 2 1

Câu 22. 1 0

Câu 23. 3 1 , 1

Câu 24. 6 5

Câu 25. 1 7 4

Câu 26. 4 , 5 8

Câu 27. 2 3 , 8

Câu 28. 1 0 6

Câu 29. 4 , 8 5

Câu 30. 4 3 8

Câu 31. 0 , 1 7

Câu 32. 1 7

Câu 33. 6 2 5 0

Câu 34. 2 , 3 4

Câu 35. 7 , 3

Câu 36. 1 , 5



Câu 37. 4 9 , 4

Câu 38. 3 3 , 5

Câu 39. 1 7 , 4

Câu 40. 1 9 3 2

Câu 41. 1 1 , 3

Câu 42. 7 1 , 6

Câu 43. 4

Câu 44. 3 2 , 6

Câu 45. 2 3 2

Câu 46. 3 0

Câu 47. 8 , 4 3

Câu 48. 1 , 0

Câu 49. 1 0

Câu 50. 3 , 1 6

Câu 51. 6 7 , 3

Câu 52. 1 8 0 0

Câu 53. 6 0 , 2

Câu 55. 2 0 , 5

Câu 57. 0 , 6

Câu 58. 6 , 1 9

Câu 59. 2 1 , 2

Câu 60. 7 9

Câu 61. 8 1 9 6

Câu 62. 1 , 4

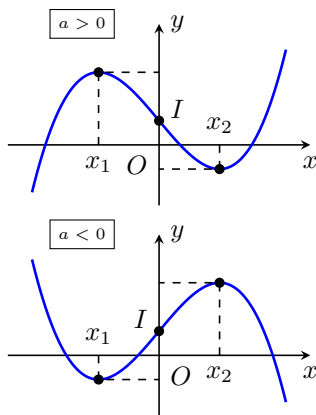
Chủ đề 4

TOÁN THỰC TẾ ỨNG DỤNG KHẢO SÁT HÀM SỐ

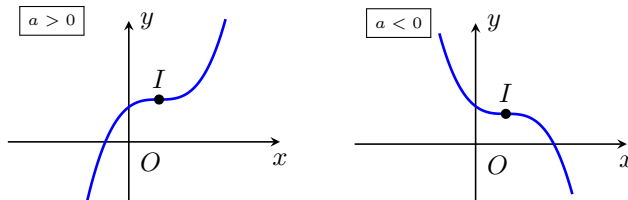
1 LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

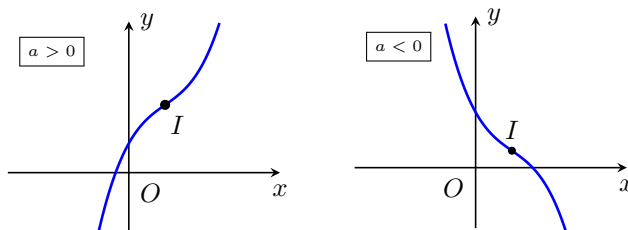
- ✓ **TH1.** $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 . Khi đó, hàm số có hai điểm cực trị $x = x_1$ và $x = x_2$.



- ✓ **TH2.** $y' = 0$ có nghiệm kép x_0 . Khi đó, hàm số không có cực trị.



- ✓ **TH3.** $y' = 0$ vô nghiệm. Khi đó, hàm số không có cực trị.



GHI NHỚ

- ① Hàm số không có điểm cực trị

$$b^2 - 3ac \leq 0 \text{ hoặc } \begin{cases} a = 0 \\ b = 0. \end{cases}$$

- ② Hàm số có hai điểm cực trị

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 3ac > 0. \end{cases}$$

- ③ Liên hệ tổng tích hai nghiệm

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{3a} \end{cases}$$

- ④ Tọa độ tâm đối xứng của đồ thị, nó chính là trung điểm của đoạn nối 2 điểm cực trị. Hoàn chỉnh tâm đối xứng là nghiệm phương trình $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a}$.

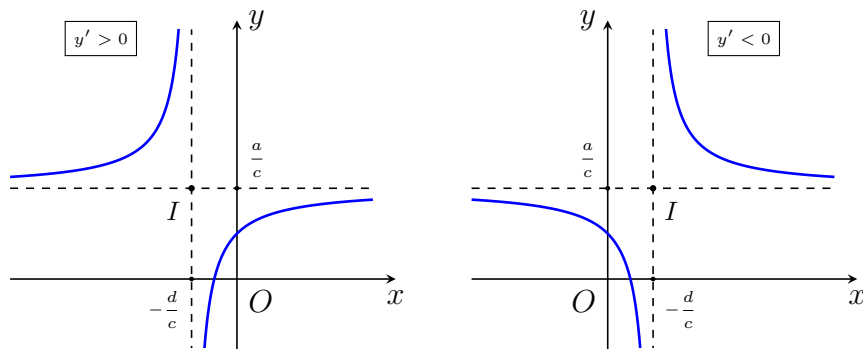
- ⑤ Đồ thị không có tiệm cận.

2) Hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$)

- ✓ Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$; Đạo hàm $y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$.

- ✓ Đồ thị nhận giao điểm của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

✓ Hình dạng đồ thị:

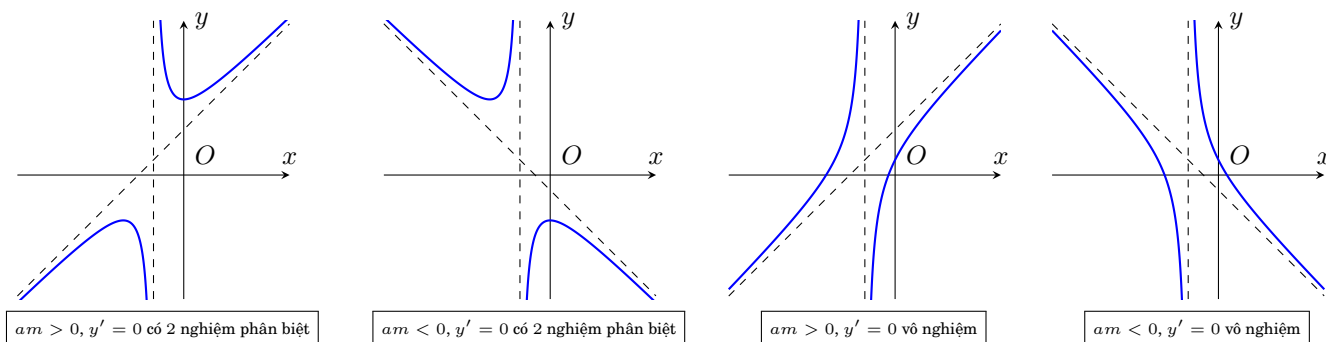


✧ Nhận xét:

- ◆ Tâm đối xứng là giao điểm I của tiệm cận đứng và tiệm cận ngang, nghĩa là $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$;
- ◆ Hai trục đối xứng là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận của nó.

3) Hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ($a \neq 0, m \neq 0$) (đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu)

- ✓ Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{n}{m}\right\}$; Đạo hàm $y' = \frac{am \cdot x^2 + 2an \cdot x + b \cdot n - m \cdot c}{(mx + n)^2}$.
- ✓ Hàm số 2 điểm cực trị khi $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt; Hàm số không có cực trị khi $y' = 0$ vô nghiệm.
- ✓ Đồ thị nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng.
- ✓ Hình dạng đồ thị:



II BÀI TẬP ÁP DỤNG

1 Trắc nghiệm đúng sai

Câu 1 Hiệu suất làm việc trung bình $E(n)$ (đơn vị: %) của một nhóm n người trong một dự án được ước tính theo công thức:

$$E(n) = \frac{3n^2 - 6n + 5}{n - 1} \quad \text{với } n \geq 2.$$

- a Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = [2; +\infty)$.
- b Hàm số hiệu suất $E(n)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$.
- c Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là $y = 3n - 3$.
- d Với số lượng thành viên nhóm từ 2 đến 4 người thì hiệu suất làm việc của nhóm cao nhất có thể đạt được là 9,67% (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 2 Trong tâm lý học, đường cong học tập mô tả sự cải thiện kỹ năng theo thời gian luyện tập. Giả sử một người học gõ máy tính, số từ gõ được mỗi phút (WPM - Words Per Minute) sau t tuần luyện tập được mô hình hóa bởi hàm số $W(t) = 90 - 60 \cdot e^{-0,2t}$.

- a Khi mới bắt đầu luyện tập ($t = 0$) người này gõ được 25 từ mỗi phút.
- b Tốc độ cải thiện khả năng gõ máy tính tại thời điểm t là $12 \cdot e^{-0,2t}$ WPM/tuần.
- c Khi t càng lớn thì tốc độ cải thiện khả năng gõ máy tính càng tăng.
- d Số WPM mà người này có thể đạt được tối đa khi luyện tập trong thời gian dài là 90 WPM.

Câu 3 Một hãng công nghệ dự định tung ra thị trường một loại tai nghe không dây mới. Chi phí sản xuất mỗi chiếc tai nghe là 500 nghìn đồng với giá bán ra niêm yết là 1,2 triệu đồng. Bộ phận bán hàng ước tính rằng, số lượng tai nghe bán được $n(x)$ phụ thuộc vào chi phí quảng cáo x (đơn vị: triệu đồng) theo công thức $n(x) = A + 30 \ln(1 + x)$. Biết rằng nếu chi $e^3 - 1$ triệu đồng cho quảng cáo thì bán được 190 sản phẩm. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau.

- a $A = 100$.
- b Hàm lợi nhuận của hãng (tính theo triệu đồng) là $L(x) = 70 + 21 \ln(x + 1) - 2x$.
- c Khi chi phí quảng cáo đang ở mức 6 triệu đồng thì lợi nhuận đạt 99 triệu đồng (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).
- d Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì số tiền chi cho quảng cáo là 19,766 triệu đồng (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn).

Câu 4 Một công ty công nghệ phát hành một video quảng cáo trên mạng xã hội. Số lượng người xem tích lũy $P(t)$ (đơn vị: người) sau thời gian t (đơn vị: ngày) được mô hình hóa bởi hàm số:

$$P(t) = \frac{100000}{1 + 999e^{-0,5t}}.$$

Số lượng người xem tối đa dự kiến trong tệp khách hàng tiềm năng là 100000 người. Tốc độ lan truyền video tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $P'(t)$.

- a Tại thời điểm bắt đầu phát hành video ($t = 0$), đã có 100 người xem video này.
- b Để đạt được 90% số lượng người xem mục tiêu (tương ứng 90000 người), công ty cần khoảng 18 ngày (làm tròn đến hàng đơn vị).
- c Sau 10 ngày kể từ khi phát hành, tổng số lượng người xem video đạt hơn 15000 người.
- d Tại thời điểm $t = 5$, tốc độ lan truyền của video vẫn đang trên đà tăng.

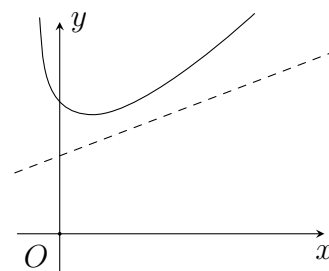
Câu 5 Một đại lý xăng dầu tại Quảng Ngãi cần làm một bồn chứa dầu hình trụ bằng tôn có thể tích $V = 54\pi$ (m³). Gọi r , h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của cái bồn dầu.

- a** Công thức để tính thể tích bồn chứa dầu là $V = \pi r^2 h$.
- b** Để diện tích toàn phần nhỏ nhất thì bán kính $r = 3$ (m).
- c** Diện tích toàn phần của bồn chứa dầu theo bán kính r là $S(r) = 2\pi \left(\frac{54}{r} + r^2 \right)$.
- d** Biết chi phí vật liệu (tôn) để làm bồn chứa là 500 000 đồng/m². Khi đó, số tiền ít nhất để mua nguyên vật liệu làm bồn chứa dầu là khoảng 81 triệu đồng (làm tròn đến hàng phần mười).

Câu 6 Lợi nhuận mỗi ngày của một xưởng khi sản xuất x (kg) một loại sản phẩm được cho bởi hàm số $L(x) = -x^3 + 24x^2 + 780x - 5000$ (nghìn đồng). Biết công suất tối đa của xưởng là 40 kg sản phẩm trong một ngày. Giả sử mỗi ngày xưởng sản xuất x (kg) sản phẩm và bán hết.

- a** $L'(x) = -3x^2 + 48x + 780$.
- b** $L'(x) = 0$ có 2 nghiệm trên đoạn $[0; 40]$.
- c** $L(0) = 0$, $L(26) = 13\,928$, $L(40) = 600$.
- d** Mỗi ngày, để lợi nhuận cao nhất thì xưởng sản xuất 26 kg sản phẩm.

Câu 7 Một doanh nghiệp kinh doanh sản xuất đồng hồ có đồ thị hàm tổng chi phí theo số sản phẩm, là một phần của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + e}$ như hình vẽ (mỗi đơn vị trên trục hoành tương ứng với 100 sản phẩm, mỗi đơn vị trên trục tung tương ứng với 1 000 USD). Biết rằng tâm đối xứng của đồ thị hàm số đó là điểm $I \left(-1; \frac{2}{3} \right)$ và đường tiệm cận xiên của đồ thị đó đi qua điểm $B(3; 2)$.



- a** Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- b** Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = 1$.
- c** Hàm số có thể viết lại dưới dạng $f(x) = \frac{1}{3}x + 1 + \frac{d}{x + 1}$, với d là số thực thuộc $\mathbb{R}$.
- d** Theo khảo sát, tổng doanh thu của doanh nghiệp này được mô tả bằng hàm số $R(x) = x^2 + 2x$ và lợi nhuận thu về khi bán 200 sản phẩm là 5 250 USD. Khi chi phí theo số sản phẩm đạt giá trị nhỏ nhất, số sản phẩm sản xuất được (làm tròn đến hàng đơn vị) là 25 sản phẩm.

Câu 8

Một nhà máy sản xuất thuốc nhuộm hoạt động tại khu vực gần một dòng sông lớn. Trong quá trình sản xuất, nhà máy này thải ra một lượng chất ô nhiễm đáng kể vào môi trường, gây ảnh hưởng nghiêm trọng đến chất lượng nước và sức khỏe cộng đồng. Để cải thiện tình hình và tuân thủ các quy định về bảo vệ môi trường, nhà máy đã quyết định đầu tư vào một hệ thống xử lý nước thải hiện đại. Chi phí để loại bỏ $x\%$ chất ô nhiễm từ nguồn nước thải được mô hình hóa bởi hàm số phân thức sau:

$$C(x) = \frac{2x + 1}{1 - \frac{x}{100}} \quad (\text{triệu đồng}), \quad 0 \leq x < 100.$$

- a** Chi phí để loại bỏ 25% chất ô nhiễm là 70 triệu đồng.
- b** Không thể loại bỏ 100% chất ô nhiễm.
- c** Để chi phí không quá 200 triệu đồng, nhà máy chỉ có thể xử lý tối đa 50% chất ô nhiễm.
- d** Nếu nhà máy giảm từ 20% chất ô nhiễm trở lên thì doanh thu sẽ tăng lên (nhờ vào việc nâng cao uy tín và hình ảnh thương hiệu) được biểu diễn bởi hàm $R(x) = 12x - 240$ (triệu đồng). Khi đó lợi nhuận do việc loại bỏ chất ô nhiễm có thể đạt hơn 180 triệu đồng.

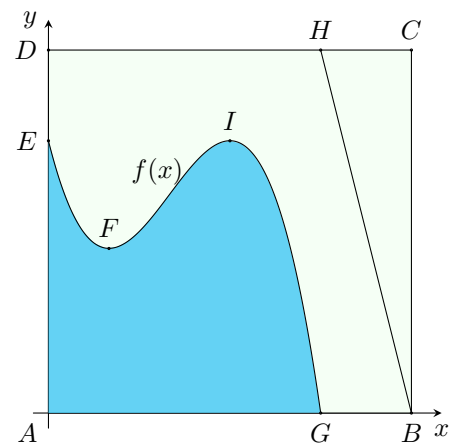
Câu 9 Giả sử chi phí tiền xăng C (nghìn đồng) khi xe đi được 100 km phụ thuộc vào tốc độ trung bình v (km/h) trên cả đoạn đường theo công thức

$$C(v) = \frac{16\,000}{v} + \frac{5}{2}v \text{ (với } 0 < v \leq 120\text{)}.$$

- a** Nếu tài xế lái xe với tốc độ trung bình là 40 (km/h) thì chi phí tiền xăng là 500 nghìn đồng.
- b** $C'(v) = \frac{16\,000}{v^2} + \frac{5}{2}$ (với $0 < v < 120$).
- c** Tài xế càng đi nhanh thì chi phí tiền xăng càng giảm.
- d** Xe đi trên đường có biển báo như hình vẽ. Biết đây là biển báo tốc độ tối đa cho phép 50 (km/h). Nếu tài xế tuân thủ luật giao thông, chi phí tiền xăng tối thiểu của tài xế khi đi 100 km trên đoạn đường này là 445 nghìn đồng.



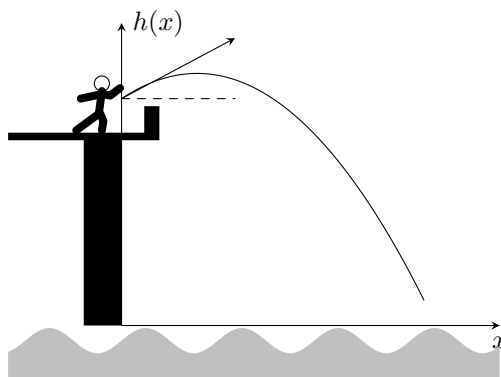
Câu 10 Ông An có một mảnh đất hình vuông $ABCD$ có cạnh $AB = 12$ m. Ông làm một hồ bơi dạng hình thang cong (phần tô đậm) và một lối đi là đoạn thẳng HB . Nếu đặt hệ trục tọa độ có gốc tại A như hình vẽ, độ dài đơn vị là 1m, thì đường cong $EFIG$ là một phần đồ thị của một hàm số bậc ba $y = f(x)$ có F là điểm cực tiểu và I là điểm cực đại. Biết $CH = DE = GB = 3$ m và các điểm F, I cách cạnh AD lần lượt là 2 m và 6 m.



- a** Phương trình của đường thẳng HB là $y = -4x + 48$.
- b** Tồn tại $a \in \mathbb{R}$ sao cho $f'(x) = a(x+2)(x+6)$.
- c** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ bằng 7 song song với đường thẳng HB .
- d** Ông An cần đặt một cái thang lên xuống hồ bơi tại một điểm trên đường cong $EFIG$ sao cho khoảng cách từ điểm đặt thang đến lối đi là ngắn nhất, khoảng cách đó bằng 2,56 m (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

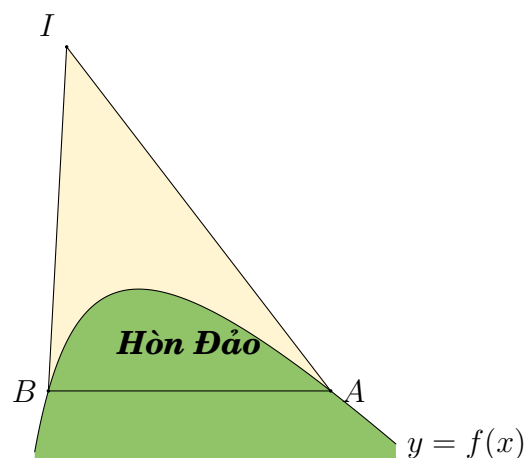


Câu 11 Một hòn đá được ném từ một cây cầu với quỹ đạo ban đầu là 25° so với phương nằm ngang. Vào thời điểm nó di chuyển được x (m) theo phương ngang, chiều cao của hòn đá so với mặt nước dưới cầu được cho bởi $h(x) = ax^2 + bx + c$ (mét) với $a, b, c \in \mathbb{R}$. Hòn đá được ném từ độ cao 3 mét so với mặt nước và đạt độ cao cực đại khi $x = 5$



- a** Giá trị $c = 3$.
- b** Đạo hàm của $h(x)$ là $h'(x) = 2ax + b$.
- c** Độ cao lớn nhất của hòn đá so với mặt nước là 4,16 mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).
- d** Hòn đá rơi xuống nước tại vị trí $x = 4,45$ mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Câu 12 Trong hệ trục Oxy đường biên của một Hòn đảo được mô hình hóa bởi hàm số $f(x) = \frac{-x^2 + 10x - 12}{x}$ ($x > 0$) (đơn vị mỗi trục là 100 m). Ban quản lý Hòn Đảo muốn xây một vùng tam giác an toàn để người dân có thể vui chơi và tắm biển ở khu vực đó. Đặt cố định một điểm ngoài biển tại tọa độ $I(2; 8)$ sau đó căng 2 tấm lưới bảo vệ IA, IB với hai điểm A, B ($x_A > x_B > 0$) nằm trên đường biên và luôn thỏa mãn $AB \parallel Ox$.



- a** Đỉnh cao nhất của Hòn đảo (điểm cực đại của đồ thị hàm số) cách điểm I một khoảng 514 m (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).
- b** Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{-x^2 + 10x - 12}{x}$ là $M(0; 10)$.
- c** Quãng đường ngắn nhất từ hòn đảo đến điểm I là 510 m (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).
- d** Nếu điều chỉnh dây phao sao cho khoảng cách từ trạm I đến dây phao AB bằng đúng chiều dài dây phao AB thì diện tích vùng an toàn $\triangle IAB$ là 650 000 m².

2 Trả lời ngắn

Câu 1 Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $N(x) = \frac{50x}{x+4}$ ($x \geq 0$) bộ phận mỗi ngày sau x ngày đào tạo. Xem $y = N(x)$ là một hàm số xác định trên $[0; +\infty)$, khi số ngày đào tạo tăng lên, hãy tính số bộ phận một nhân viên lắp ráp tối đa không vượt quá bao nhiêu?

Câu 2 Nồng độ thuốc trong máu của một bệnh nhân sau khi tiêm t giây là $P(t)$ ($\frac{mg}{ml}$). Với $P(t)$ cho bởi công thức $P(t) = \sqrt{0,09t^2 + 0,018t + 0,05} - 0,3t$. Nồng độ thuốc tồn dư, tức nồng độ thuốc vẫn còn trong cơ thể bệnh nhân trong dài hạn khi tiêm là bao nhiêu?

Câu 13 Số lượng sản phẩm bán được của một cửa hàng quần áo trong t (tháng) được cho bởi công thức: $S(t) = 200 \left(\frac{2}{3} - \frac{8}{2+t} \right)$ với $t \geq 1$. Xem $y = S(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $1; +\infty)$, biết rằng tiệm cận ngang của đồ thị hàm số có dạng $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{N}^*$, $(a, b) = 1$. Tính $P = a - 2b$.

KQ:

Câu 14 Người ta muốn làm một cái bể dạng hình hộp chữ nhật không nắp (như hình vẽ) có thể tích bằng $1m^3$. Chiều cao của bể là $5dm$, các kích thước khác là $x(m)$, $y(m)$ với $x > 0$ và $y > 0$. Diện tích toàn phần của bể (không kể nắp) là hàm số $S(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $S(x)$ là đường thẳng $y = ax + b$. Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2$.

KQ:

Câu 15 Một mảnh đất hình thang vuông có đáy lớn gấp đôi đáy nhỏ, có diện tích là $S = 24 (m^2)$. Gọi $x(m)$ là độ dài đáy nhỏ và $P(x)$ là chu vi mảnh đất đó. Tìm số tiệm cận của $P(x)$.

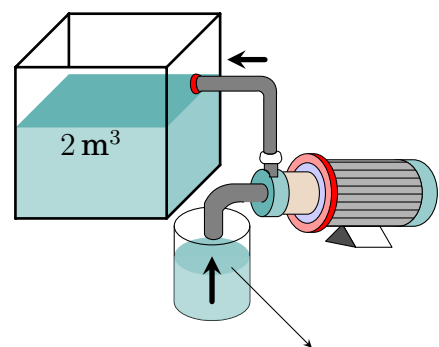
KQ:

Câu 3 Một tác giả muốn xuất bản một cuốn sách Toán học. Biết phí xuất bản là 7 triệu đồng và giá tiền in mỗi cuốn sách là 50 000 đồng. Gọi t ($t \geq 1$) là số cuốn sách sẽ in và $f(t)$ (Đơn vị nghìn đồng) là chi phí trung bình của mỗi cuốn sách. Khi đó, phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$ là $y = a$, ($a \in \mathbb{R}$). Tìm a .



KQ:

Câu 4 Một bể chứa $2m^3$ nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ không đổi với tốc độ 20 lít/phút. Nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối có trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị gam/lít) là một hàm số $f(t)$, thời gian tính bằng phút. Biết rằng tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$ là $y = 10$. Nồng độ muối trong bể sau khi bơm được 1 giờ là bao nhiêu?



KQ:



Câu 5 Một chiếc xe ô tô mới mua có giá 30 000 USD. Sau thời gian t (năm), người ta xác định giá trị của xe ô tô đó là $f(t) = \frac{30\,000 + 2\,000t}{t}$ (USD). Khi thời gian tăng lên, hỏi giá trị của xe ô tô đó không thể thấp hơn bao nhiêu (USD)?



KQ:

Câu 6 Trong một nghiên cứu tại Viện Sức khỏe Tâm thần Quốc gia, các nhà khoa học theo dõi độ dày vỏ não (cortex) của 307 trẻ em có IQ cao (121 – 149) qua tuổi t (tính bằng năm), với mô hình

$$S(t) = 0,000989t^3 - 0,0486t^2 + 0,7116t + 1,46, \quad 5 \leq t \leq 19.$$

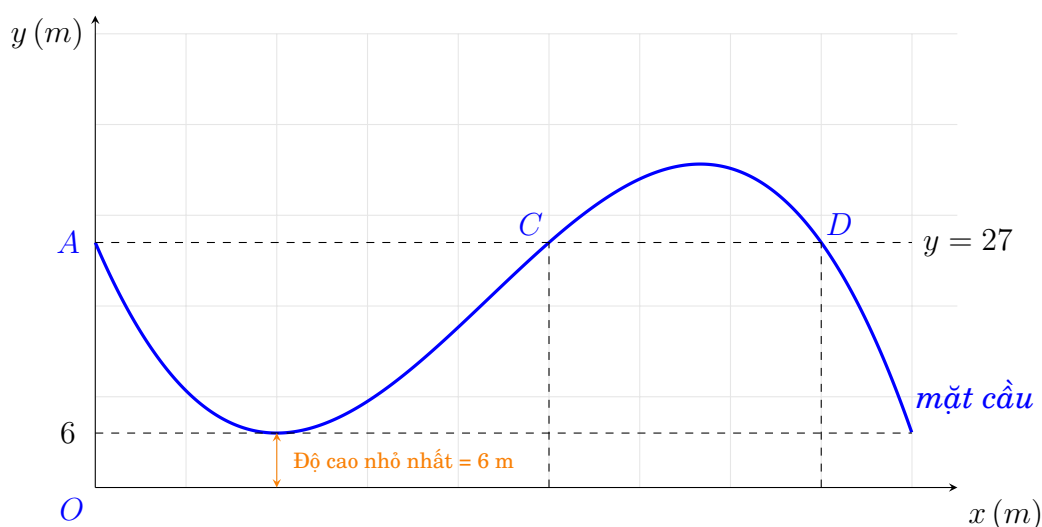
Hỏi vỏ não của trẻ có IQ siêu trí tuệ đạt độ dày cực đại vào khoảng bao nhiêu tuổi (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

KQ:

Câu 7 Trong khoảng thời gian từ ngày 01/01/2024 đến hết ngày 30/12/2024 nhóm nghiên cứu đã quan sát sự phát triển của một quần thể sinh vật X. Kết quả nghiên cứu chỉ ra rằng, tại ngày thứ t của năm 2024 (tính từ ngày 01/01/2024) số cá thể sinh vật X trong quần thể được ước lượng bởi hàm số $f(t) = -\frac{1}{300}t^3 + bt^2 + ct + 12\,000$ (con), $0 \leq t \leq 365$ và ngày 26/09/2024 là ngày có số lượng cá thể sinh vật X nhiều nhất với 55 740 con. Ngày 25/11/2024 số lượng cá thể sinh vật X được ước lượng khoảng bao nhiêu nghìn con? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

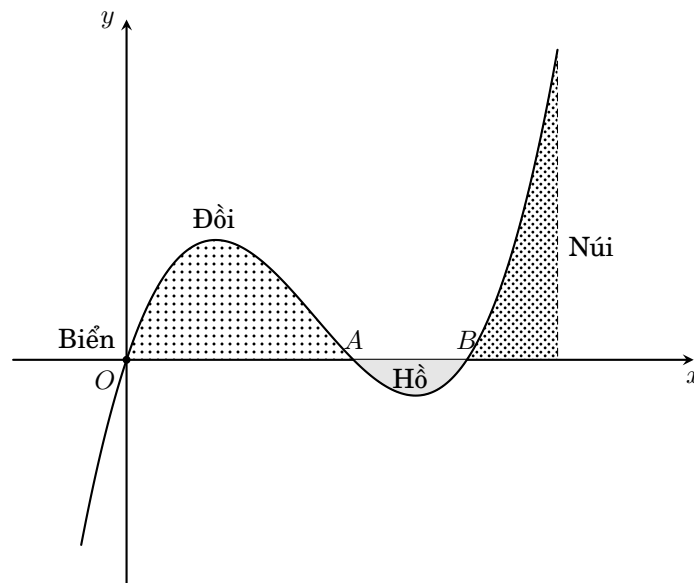
Câu 8 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy (đơn vị trên mỗi trục là mét), mặt cắt dọc của một cầu đi bộ dạng sóng được mô phỏng bằng đồ thị của hàm bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($0 \leq x < 90$) (tham khảo hình vẽ).



Mặt cầu đi qua ba mốc $A(0; 27)$, $C(50; 27)$, $D(80; 27)$. Độ cao nhỏ nhất (khoảng cách thẳng đứng từ mặt cầu tới mặt đất $y = 0$) là 6 m. Hỏi độ cao lớn nhất của mặt cầu so với mặt đất bằng bao nhiêu (đơn vị: mét, làm tròn đến một chữ số thập phân)?

KQ:

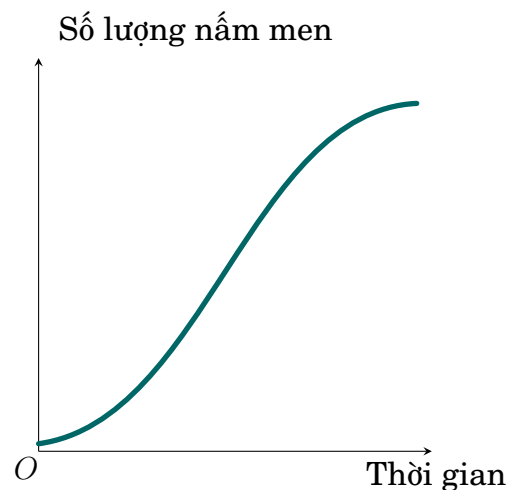
Câu 9 Lát cắt ngang của một vùng đất ven biển được mô hình hóa thành một hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ (đơn vị độ dài trên các trục là km)



Biết khoảng cách hai bên chân đồi $OA = 2$ km, độ rộng của hồ $AB = 1$ km và ngọn đồi cao 528 m. Tìm độ sâu của hồ (tính bằng mét) tại điểm sâu nhất? (làm tròn đến hàng đơn vị).

KQ:

Câu 10 Giả sử số lượng của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hoá bằng hàm số $P(t) = \frac{a}{b + e^{-0,75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu $t = 0$, quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 12 tế bào/giờ. Theo mô hình này số lượng nấm men không vượt quá bao nhiêu con?



KQ:

Câu 11 Một nhà sản xuất âm điện thực hiện một nghiên cứu kiểm soát chi phí và phát hiện ra rằng để sản xuất x âm đun nước mỗi ngày, chi phí cho mỗi âm $C(x)$ được xác định bởi công thức $C(x) = 4 \ln x + \left(\frac{30-x}{10}\right)^2$ (trăm đô la) với công suất sản xuất tối thiểu 10 âm / ngày. Cần sản xuất bao nhiêu âm đun nước để giữ giá thành mỗi âm ở mức tối thiểu?

KQ:

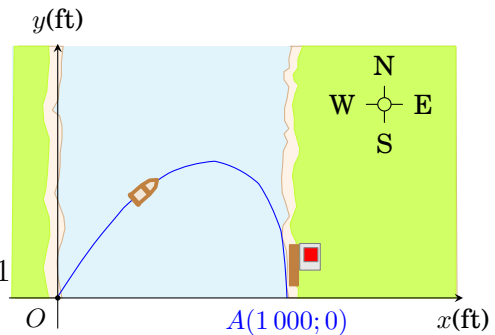


Câu 12 Một con thuyền rời bến $O(0;0)$ trên một bờ sông, luôn đi với vận tốc không đổi 20 dặm/giờ hướng về bến $A(1000;0)$ (phía đông của O) đồng thời nước sông chảy ngược lên phía bắc với tốc độ 5 dặm/giờ. Người ta cho rằng đường đi của thuyền là

$$y = 500 \left[\left(\frac{1000 - x}{1000} \right)^{3/4} - \left(\frac{1000 - x}{1000} \right)^{5/4} \right], \quad 0 \leq x \leq 1000$$

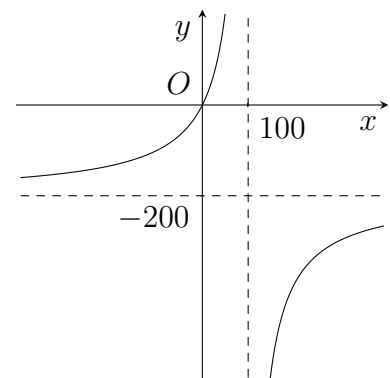
Tìm độ lệch bắc lớn nhất mà thuyền đạt được trong suốt hành trình.

KQ:



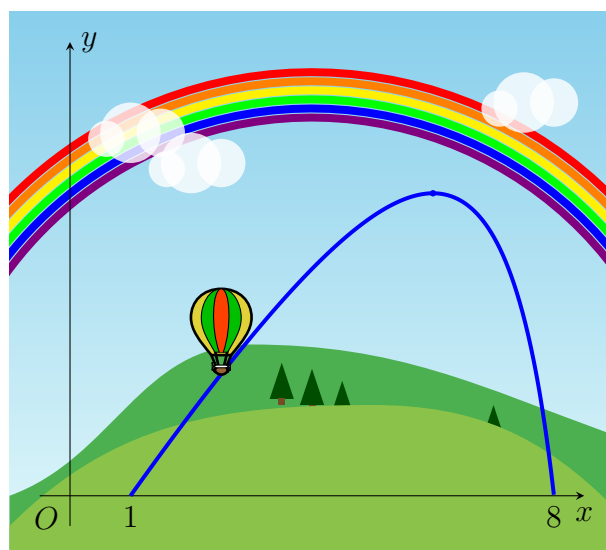
KQ:

Câu 13 Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước tính chi phí (triệu đồng) cần bỏ ra được mô hình hóa bởi hàm số có dạng $C(x) = \frac{ax + b}{-x + d}$, $0 \leq x < 100$ (như hình vẽ). Chi phí chênh lệch (theo đơn vị tỉ đồng) phải bỏ ra để loại bỏ 99% và 90% chất ô nhiễm từ khí thải của nhà máy bằng bao nhiêu?



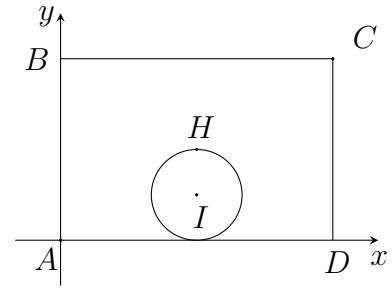
KQ:

Câu 14 Đường đi của một khinh khí cầu được gắn trong hệ trục tọa độ là một đường cong bậc hai trên bậc nhất có đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm có tọa độ là $(1;0)$ và $(8;0)$ với đơn vị trên hệ trục tọa độ là 1 (km). Biết rằng điểm cực đại của đồ thị hàm số là điểm $(6;5)$. Hỏi khi khinh khí cầu đi qua điểm cực đại và cách mặt đất 3875 (m) thì khinh khí cầu cách gốc tọa độ theo phương ngang bao nhiêu? (đơn vị: km).



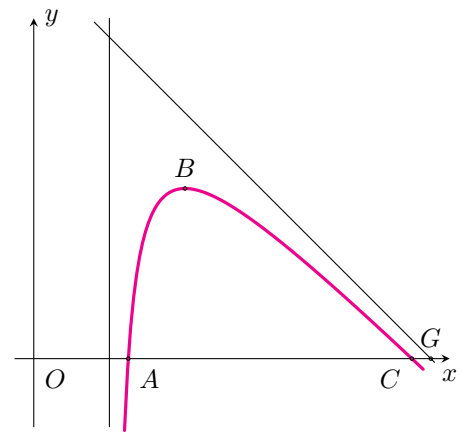
KQ:

Câu 15 Cho hình chữ nhật $ABCD$ có một cạnh nằm trên trục hoành và hai đỉnh $A(0; 0)$, $C(6; 4)$. Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AC . Đường tròn (C) có tâm $I(3; 1)$ và đi qua H . Người ta muốn thiết kế một dải LED bắt đầu từ điểm A và kết thúc tại C . Dải LED có hình dạng là một phần của đồ thị hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Biết dải LED tiếp xúc với đường tròn (C) tại H , tính $27a + 3b + c + 9d$.



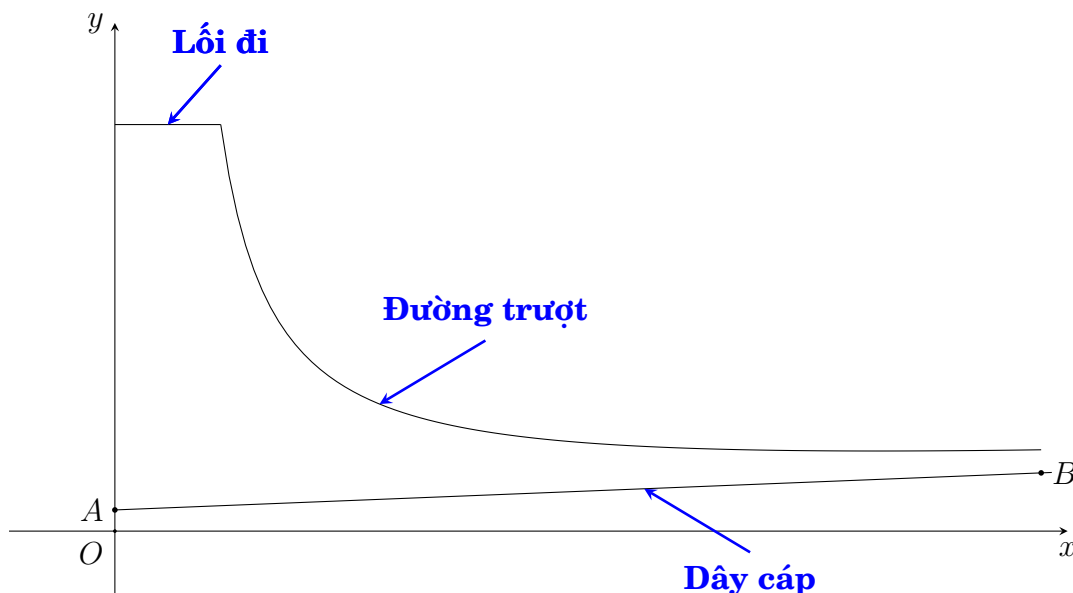
KQ:

Câu 16 Một máy bay trình diễn có đường bay gần với hệ trục Oxy được mô phỏng như hình vẽ, trục Ox gần với mặt đất. Đường bay có dạng là một phần của đồ thị của hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất $y = f(x)$ có đường tiệm cận đứng $x = 2$. Điểm G là giao điểm của đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục Ox được gọi là điểm giới hạn. Biết rằng máy bay xuất phát tại vị trí A cách gốc tọa độ O một khoảng 2,5 đơn vị và máy bay khi ở vị trí cao nhất cách điểm xuất phát 1,5 đơn vị theo phương song song với trục Ox và cách mặt đất 4,5 đơn vị. Vị trí máy bay tiếp đất cách điểm giới hạn một khoảng bằng bao nhiêu?



KQ:

Câu 17 Tại một khu vui chơi giải trí, người ta thiết kế một đường trượt Zipline, xét mặt phẳng Oxy với trục Ox nằm ngang (đơn vị: m). Đường trượt được mô tả bằng một phần của đồ thị hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 1}$, ($a \neq 0$) với chiều dài theo phương nằm ngang là 71 m. Ở điểm đầu của đường trượt, có một bục xuất phát song song với Ox , xuất phát từ một điểm thuộc Oy , dài 2 m và cao 19,2 m so với trục Ox .

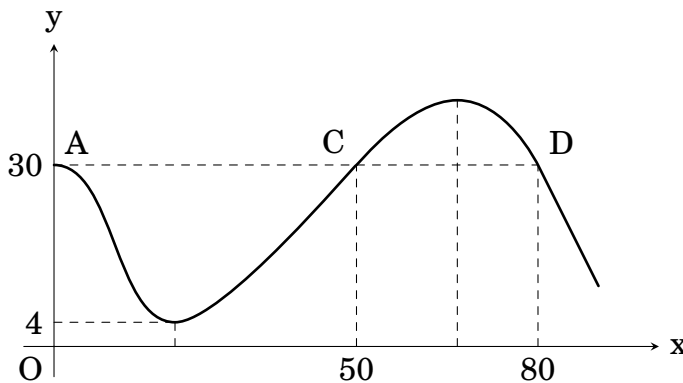




Để gia cố an toàn, người ta dùng một dây cáp AB với $A(0; 1)$ và đường thẳng AB là tiệm cận xiên của đồ thị. Tại điểm cuối của đường trượt, khoảng cách theo phương thẳng đứng giữa đường trượt và dây cáp là $0,25$ m. Hỏi điểm thấp nhất của đường trượt cao bao nhiêu mét? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

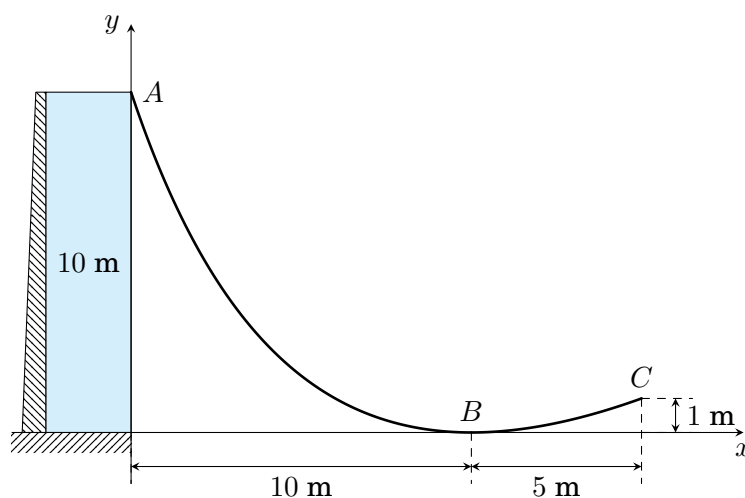
KQ: 

Câu 18 Một phần đường chạy của tàu lượn siêu tốc khi gắn hệ trục tọa độ Oxy được mô phỏng ở hình bên, đơn vị trên mỗi trục là mét. Biết đường chạy của nó là một phần đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($0 \leq x < 90$); tàu lượn siêu tốc xuất phát từ điểm A , đi qua các điểm C , D (ba điểm A , C , D nằm trên đường thẳng song song với trục Ox) đồng thời đạt độ cao nhỏ nhất so với mặt đất là 4 m. Độ cao lớn nhất mà tàu lượn siêu tốc đạt được là bao nhiêu mét so với mặt đất? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



KQ: 

Câu 19 Trong hệ trục tọa độ Oxy , đơn vị mỗi trục là mét, một đường trượt mới sẽ được xây dựng theo bản thiết kế đã trình bày như hình vẽ. Thanh trượt bắt đầu từ A và kết thúc tại C , đường cong của thanh trượt là một phần của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$, biết đồ thị hàm số $f(x)$ tiếp xúc với trục Ox tại điểm B .



Bạn Nam bắt đầu trượt từ điểm A , hỏi khi Nam cách vị trí ban đầu theo phương ngang một khoảng 5 mét thì Nam cách mặt đất bao nhiêu mét, biết trục Ox nằm trên mặt đất (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ: 

Câu 20 Nếu một điện trở R được nối với một ắc-quy có suất điện động E và điện trở trong r thì công suất tiêu thụ trên điện trở R là $P = \frac{E^2 R}{(R + r)^2}$ trong đó R, r tính bằng Ω , E tính bằng Vôn (V) và P tính bằng Oát (W). Cho $E = 12$ V và $r = 2\Omega$. Khi R biến thiên, công suất P đạt giá trị cực đại bằng bao nhiêu W?

KQ:

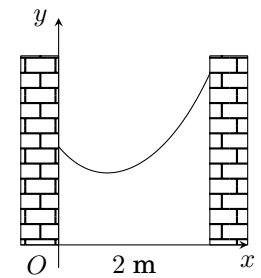
Câu 21 Giả sử chi phí đặt hàng và vận chuyển C (đơn vị: triệu đồng) của một linh kiện được sử dụng trong sản xuất một sản phẩm được xác định theo công thức $C = \frac{19\,200\,000}{x^2} + \frac{27x}{x + 3\,000}$, $x \geq 1$. Trong đó x là số linh kiện được đặt hàng và vận chuyển. Tìm x để chi phí đặt hàng và vận chuyển cho mỗi linh kiện trên là nhỏ nhất.

KQ:

Câu 22 Khi một vật lạ mắc kẹt trong khí quản ta phải ho, cơ hoành đẩy lên trên gây ra tăng áp lực trong phổi, theo đó cuống họng co thắt làm hẹp khí quản khiến luồng khí không đi qua mạnh hơn. Đối với một lượng không khí bị đẩy ra trong một khoảng thời gian cố định, khí quản càng nhỏ thì luồng không khí càng đẩy ra nhanh hơn. Vận tốc luồng khí thoát ra càng cao, lực tác động lên vật lạ càng lớn. Qua nghiên cứu một số trường hợp, người ta nhận thấy vận tốc v của luồng khí liên hệ với bán kính x của khí quản theo công thức $v(x) = k(x_0 - x) \cdot x^2$ với $\frac{1}{2}x_0 \leq x \leq x_0$. Trong đó k là hằng số ($k > 0$) và x_0 là bán kính khí quản ở trạng thái bình thường (Theo James Stewart, J. (2015). Calculus. Cengage Learning). Khi đó $x = mx_0$ thì vận tốc luồng khí của một cơn ho trong trường hợp này là lớn nhất. Tìm m (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

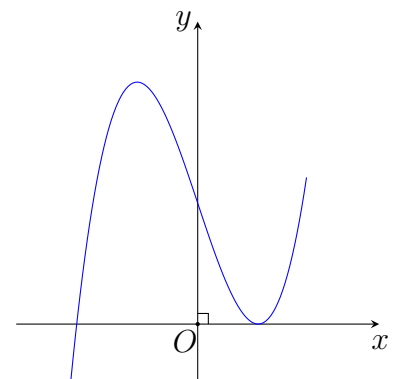
KQ:

Câu 23 Một sợi dây kim loại được treo giữa hai bức tường cách nhau 2 mét như hình vẽ bên dưới. Độ cao so với mặt đất của mỗi điểm trên sợi dây này được cho bởi hàm số $h(x) = e^{-3x} + e^x$, ($0 \leq x \leq 2$), trong đó x (mét) là khoảng cách từ mỗi điểm trên sợi dây đến bức tường phía bên trái. Biết khoảng cách ngắn nhất của một điểm trên sợi dây đến mặt đất là $\sqrt[4]{\frac{a}{b}}$ mét (với a, b là số tự nhiên và $\frac{a}{b}$ tối giản). Tính $4a + b$.



KQ:

Câu 24 Một đường ray tàu lượn trong khu vui chơi giải trí có hình dáng được mô phỏng theo đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$, ký hiệu là (C) . Để đảm bảo an toàn và tính thẩm mỹ, người ta chọn hai điểm $A(a; b)$ và $B(c; d)$ trên đường ray sao cho tiếp tuyến tại hai điểm này có cùng độ dốc (cùng hệ số góc). Đồng thời, đoạn đường nối hai trụ đỡ tại các điểm A và B phải vuông góc với một đường dây điện có phương trình $x + y - 5 = 0$. Tìm $b + d$.

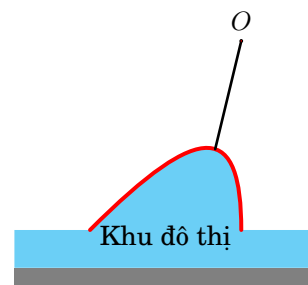


KQ:



Câu 25 Ở một vịnh biển, ngoài khơi xa có một hòn đảo nhỏ.

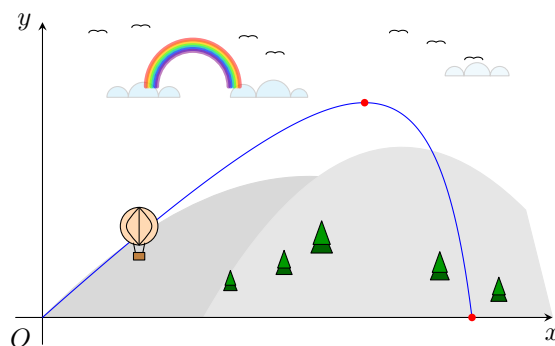
Người ta tiến hành lấn biển để xây dựng khu đô thị và làm một tuyến cáp treo nối khu đô thị với hòn đảo để phát triển du lịch. Xét trong hệ tọa độ Oxy với đơn vị tương ứng 1 km có hòn đảo ở O thì đường bao của phần đất lấn biển có dạng là một phần của đồ thị hàm số $y = \frac{-x^2 + 2}{x}$. Giả sử tuyến cáp treo được thiết kế nối đảo với đường bao của khu đô thị với độ dài ngắn nhất. Độ dài của tuyến cáp treo là bao nhiêu km (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



KQ:

Câu 26 Khi đặt trong mặt phẳng tọa độ

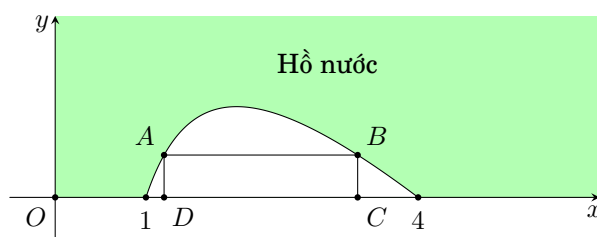
Oxy với trục Ox nằm ngang trên mặt đất, trục Oy hướng thẳng lên trên (tham khảo hình vẽ), đơn vị trong hệ trục là 1 kilômét thì đường đi của một khinh khí cầu được mô phỏng là một phần đồ thị của hàm số $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$. Biết đồ thị hàm số cắt trục hoành tại gốc tọa độ $O(0; 0)$, điểm thứ hai có tọa độ $(8; 0)$ và đạt cực đại tại điểm có tọa độ $(6; 4)$. Sau khi đi qua điểm cực đại và đang trong quá trình hạ cánh, tại thời điểm khinh khí cầu cách mặt đất 2500 mét thì hình chiếu của nó trên trục Ox cách gốc tọa độ bao nhiêu kilômét?



KQ:

Câu 27 Gia đình anh Tuấn có mảnh đất, một phần giáp với đường (là một phần của

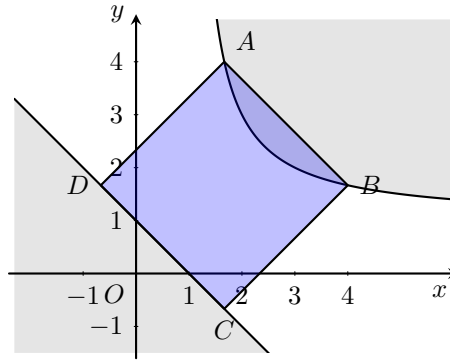
đường thẳng), phần còn lại giáp với hồ nước là đường cong được mô hình hóa bởi một phần của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{-x^2 + 5x - 4}{x}$ như hình vẽ bên dưới, đơn vị trên mỗi trục tọa độ là 10 mét. Trong mảnh đất anh Tuấn muốn rào một khu vực hình chữ nhật $ABCD$ với hai đỉnh A, B nằm trên đồ thị hàm số $f(x)$ (phần giáp hồ) và cạnh CD nằm trên trục hoành (phần giáp đường). Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu m^2 (làm tròn đến hàng đơn vị)?



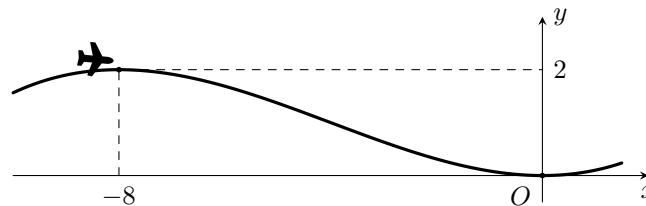
KQ:

Câu 28 Người ta muốn làm một sàn nổi hình vuông nổi liền một sân khấu nổi trên mặt hồ có bờ là một nhánh đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ với đất liền là nửa mặt phẳng giới hạn bởi đường thẳng $d: y = -x + 1$. Diện tích S của mặt sàn nổi bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến phần mười), biết hình vuông có hai đỉnh nằm trên (C) , hai đỉnh còn lại nằm trên d .

KQ:



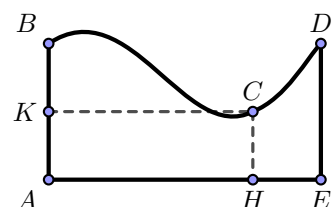
Câu 29 Một máy bay loại nhỏ bắt đầu hạ cánh, đường bay của nó khi gắn với hệ trục tọa độ Oxy được mô phỏng bởi hình ảnh minh họa (đơn vị trên mỗi trục là kilômét).



Biết đường bay của máy bay khi hạ cánh có dạng đồ thị của hàm số bậc ba; điểm bắt đầu hạ cánh có tọa độ $(-8; 2)$ là điểm cực đại và máy bay tiếp đất tại vị trí gốc tọa độ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số bậc ba đó. Hỏi khi máy bay cách vị trí tiếp đất theo phương ngang 5 kilômét thì nó còn cách mặt đất bao nhiêu kilômét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

KQ:

Câu 30 Một hồ bơi có hình dạng như phần tô đậm trong hình vẽ. Biết $AB = DE = 20$ m, $AE = 40$ m, điểm cực tiểu của bờ cong là $C(30; 10)$ (với hệ trục A là gốc). Vận tốc bơi là 2 m/s. Thời gian bơi dài nhất là bao nhiêu giây? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

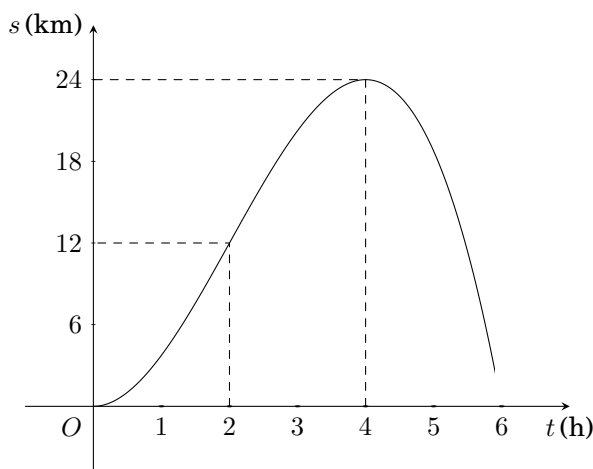


KQ:

Câu 31 Thầy Hiếu tham dự giải “Đi bộ trực tuyến Ngành Giáo dục và Đào tạo Edu Run-HCMC” năm 2025. Quãng đường thầy Hiếu đi được biểu diễn bằng hàm số $s(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ (với $a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ (trong đó t là thời gian tính bằng



giờ, s là quãng đường tính bằng km). Khi đó, vận tốc tối đa của thầy Hiếu đạt được trong quá trình đi bộ là bao nhiêu (đơn vị km/h)?



KQ: 

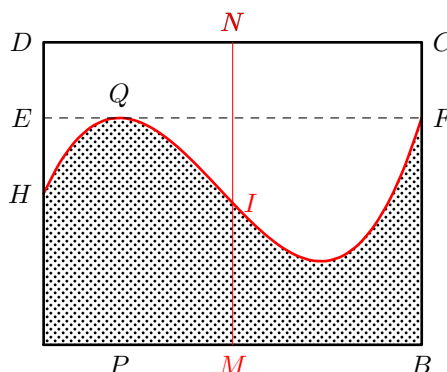
Câu 32 Một vật được phóng lên trời theo một góc xiên θ ($45^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$) so với phương ngang với vận tốc ban đầu v_0 (feet/giây) tính từ chân mặt phẳng nghiêng tạo một góc 45° so với phương ngang. Nếu bỏ qua sức cản của không khí thì quãng đường R (tính bằng feet) mà vật di chuyển lên mặt phẳng nghiêng được cho bởi hàm số

$$R(\theta) = \frac{v_0^2 \sqrt{2}}{16} \cos \theta (\sin \theta - \cos \theta).$$

Hỏi góc θ nào làm cho R lớn nhất? Làm tròn kết quả đến hàng phần chục.

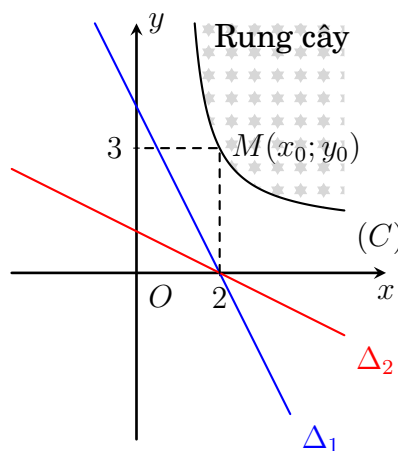
KQ: 

Câu 33 Khuôn viên của một công viên có dạng hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 100$ m; $AD = 80$ m. Người ta muốn chia công viên thành hai khu, một khu dành cho trẻ em, một khu dành cho người lớn. Để tạo thiết kế độc đáo và lạ mắt, người ta dùng một đường cong chia khuôn viên thành hai phần H_1 (không tô màu) dành cho trẻ em và H_2 (tô màu) dành cho người lớn như hình vẽ bên với $AH = 40$ m; $AE = 60$ m; $AP = 20$ m và $EF \parallel AB$; $PQ \parallel AD$. Biết rằng khi xét trong một hệ tọa độ Oxy , đường cong trong hình là một phần của đồ thị hàm số bậc ba. Phần chính giữa công viên người ta muốn mắc dây đèn trang trí dọc đoạn thẳng MN như hình. Biết giá tiền mỗi mét dây trang trí của phần dành cho trẻ em là 140 nghìn đồng và phần dành cho người lớn là 180 nghìn đồng. Tổng số tiền mắc dây đèn trang trí trên đoạn MN là bao nhiêu triệu đồng.



KQ: 

Câu 34 Mảnh đất vườn của nhà anh Điệp có một phần ranh giới cũng là một phần đường cong $(C): y = \frac{x+a}{x+b}$, bao quanh nó là sông nước. Với hệ trục tọa độ Oxy thích hợp, đơn vị trên mỗi trục là 10 mét thì đường cong (C) đi qua điểm $(2; 3)$ và có đường tiệm cận đứng $x = 1$. Hàng ngày anh Điệp phải dùng thuyền máy để vận chuyển trái cây từ khu vườn của mình đến hai tuyến đường $\Delta_1: 2x + y - 4 = 0$ và $\Delta_2: x + 2y - 2 = 0$ cho những người lái buôn từ nơi khác đến. Anh Điệp cần xác định một vị trí $M(x_0; y_0)$ thuộc khu vườn của mình để tổng khoảng cách từ vị trí M đó đến hai tuyến đường Δ_1, Δ_2 là bé nhất. Hỏi khoảng cách từ vị trí được chọn làm gốc tọa độ đến điểm M là bao nhiêu mét (làm tròn đến hàng phần chục)?

KQ: 

Câu 35 Một người quản lý ở một trang trại nuôi cá xác định rằng: Sau t tháng kể từ khi thả 300 con cá X (với $0 \leq t \leq 10$) thì khối lượng trung bình $m(t)$ tính theo kilogram của một con cá X ước tính là $m(t) = 0,45 \left(0,2 + \frac{141}{155}t - 0,05t^2 \right)$. Người này cũng nhận định tỉ lệ giữa số lượng cá X còn sống trong ao so với số lượng cá X thả ban đầu sau t tháng kể từ ngày thả là $p(t) = \frac{31}{31+t}$. Biết rằng sản lượng cá X tại một thời điểm được tính bằng tổng khối lượng của các con cá X đã thả còn sống trong ao lúc đó. Hỏi với những nhận định trên của người quản lý thì dự kiến trong tối đa 10 tháng nuôi, sản lượng cá X lớn nhất có thể đạt được là bao nhiêu (kết quả tính theo đơn vị kilogram)?

KQ: 

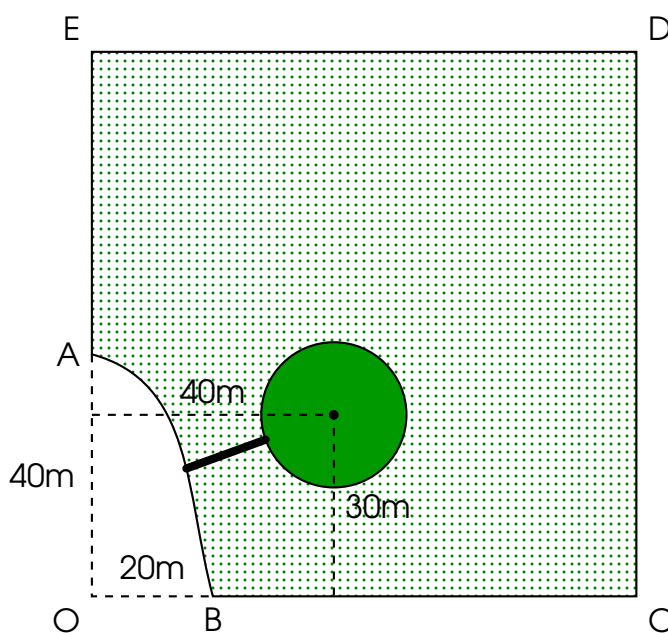
Câu 36 Một cầu thủ thực hiện cú sút bóng xoáy (banana kick), làm bóng bay theo đường cong hình bậc ba thay vì một parabol thông thường. Quỹ đạo bóng trong hệ trục tọa độ Oxy được mô tả bởi phương trình $y = \frac{x^3}{100} - \frac{x^2}{10} + \frac{253x}{100}$, với y là độ cao của bóng (m). Biết chiều cao chuẩn của khung thành là 2,44 m. Khi bóng chạm xà ngang thì góc lệch của bóng và mặt đất là bao nhiêu biết góc lệch của bóng và mặt đất là góc của đường tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{100} - \frac{x^2}{10} + \frac{253x}{100}$ tại điểm chạm xà ngang và trục Ox (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

KQ: 



Câu 37 Hình dưới mô tả một cái ao có hình $ABCDE$, ở giữa ao có một mảnh vườn hình tròn có bán kính 10 (m) . Biết rằng:

- ♦ Hai bờ AE và BC nằm trên hai đường thẳng vuông góc với nhau, hai đường thẳng này cắt nhau tại điểm O ;
- ♦ Bờ AB là một phần của một parabol có đỉnh là điểm A và có trục đối xứng là đường thẳng OA ;
- ♦ Độ dài đoạn OA và OB lần lượt là 40m và 20m ;
- ♦ Tâm I của mảnh vườn lần lượt cách bờ AE và BC là 40m và 30m . Người ta muốn bắc một cây cầu từ bờ AB của ao đến vườn.



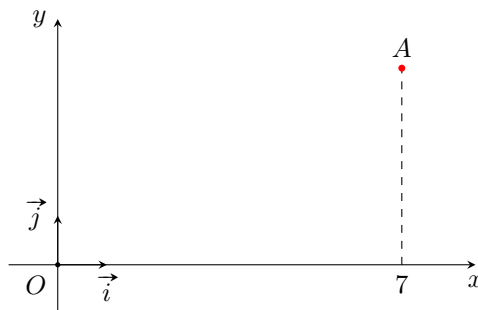
Hỏi độ dài ngắn nhất của cây cầu đó là bao nhiêu mét? (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

KQ:

Câu 38 Chú kiến bị lạc tổ, chú đang loay hoay để tìm tổ. Chú đi theo suy đoán và đặt hệ trục tọa độ Oxy thì đường đi của chú có quỹ đạo là một phần đường cong đồ thị hàm số có công thức $y = f(x) = a(x - b)^2$ (với a, b là các số thực dương). Hàm số $y = f(x)$ có tính chất. Với số thực k gọi hàm số $g(k) = \max_{[k; k+2]} f(x) - \min_{[k; k+2]} f(x)$. Hàm số $g(k)$ thỏa mãn

$$\begin{cases} g(3) = a \\ g(2) + g(6) = 32. \end{cases}$$

Biết tổ của chú nằm ngay tại gốc tọa độ O . Thời điểm 9 giờ sáng chú đang ở vị trí A (hình vẽ bên). Khoảng cách giữa chú kiến và tổ của mình là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



KQ:

BẢNG ĐÁP ÁN ĐÚNG SAI Đ/S

Câu 1. Đ S Đ Đ

Câu 4. Đ S S Đ

Câu 7. S S Đ S

Câu 10. Đ S S Đ

Câu 2. S Đ S Đ

Câu 5. Đ Đ Đ S

Câu 8. S Đ S S

Câu 11. Đ Đ S S

Câu 3. Đ S S S

Câu 6. Đ S S Đ

Câu 9. S S S Đ

Câu 12. Đ Đ S Đ

ĐÁP SỐ PHẦN TRẢ LỜI NGẮN

Câu 13. 3 9 4

Câu 14. 5

Câu 15. 2

Câu 3. 5 0

Câu 4. 3 , 7 5

Câu 5. 2 , 0 0 0

Câu 6. 1 1

Câu 7. 4 9 , 6

Câu 8. 3 5 , 6

Câu 9. 1 5 8

Câu 10. 1 0 0

Câu 11. 2 0

Câu 12. 7 6 , 6

Câu 12. 7 6 , 6

Câu 13. 1 8

Câu 14. 7 , 2

Câu 15. 2

Câu 16. 0 , 5

Câu 17. 3 , 7 8

Câu 18. 4 0 , 7

Câu 19. 1 , 6 7

Câu 20. 1 8

Câu 21. 2 4 0 0

Câu 22. 0 , 6 7

Câu 23. 1 0 5 1

Câu 24. 4

Câu 25. 1 , 2 9

Câu 26. 7 , 5

Câu 27. 1 1 1

Câu 28. 1 0 , 9

Câu 29. 1 , 3 7

Câu 30. 1 2 , 1

Câu 31. 9

Câu 32. 6 7 , 5

Câu 33. 1 2 , 7

Câu 34. 3 4 , 1

Câu 35. 4 5 9

Câu 36. 6 7

Câu 37. 1 7 , 7

Câu 38. 1 9 , 3

VECTƠ VÀ HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Mục lục của chương

1. Toán thực tế liên quan đến các phép toán vectơ 82
2. Toán thực tế áp dụng các phép toán tọa độ hóa vectơ 92

Chủ đề 1

TOÁN THỰC TẾ LIÊN QUAN
ĐẾN CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

I LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Các phép toán vectơ

♦ **Quy tắc ba điểm:** Với ba điểm A, B, C , ta có

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

♦ **Quy tắc hình bình hành:** Cho hình bình hành $ABCD$, ta có

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.$$

♦ **Quy tắc hình hộp:** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, ta có

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}.$$

♦ **Quy tắc hiệu:** Với ba điểm A, B, C ta có

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}.$$

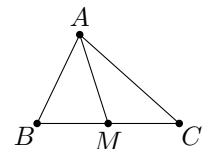
♦ **Tích của một số với một vectơ:** Cho vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ và số $k \neq 0$. Khi đó, $k \cdot \vec{a}$ là một vectơ

- ★ Có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$.
- ★ Cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$.
- ★ Ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$.

♦ **Quy tắc trung điểm:** Nếu M là trung điểm của BC thì

$$\star \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

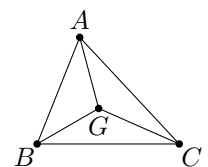
$$\star \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}), \text{ với } A \text{ là điểm bất kì.}$$



♦ **Quy tắc trọng tâm:** Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC , khi đó ta có

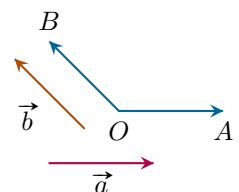
$$\star \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

$$\star \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}, \text{ với } M \text{ là điểm bất kì.}$$



♦ **Góc giữa hai vectơ:** Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Từ một điểm O bất kì, vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Khi đó, góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là góc $\widehat{AOB}$.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \widehat{AOB}$$



2 Tích vô hướng hai vectơ

♦ Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu $\vec{a} \cdot \vec{b}$, và được xác định bởi công thức $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.



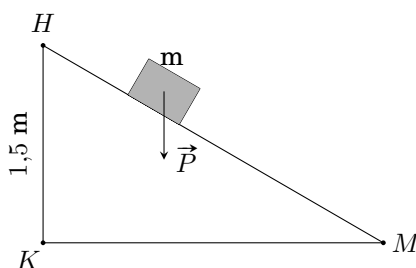
Từ công thức tích vô hướng, ta có công thức tính góc giữa hai vectơ:

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

II BÀI TẬP ÁP DỤNG

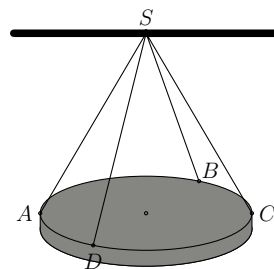
1 Trắc nghiệm đúng sai

Câu 1 Một vật khối lượng $m = 10$ (kg) trượt trên mặt phẳng nghiêng so với mặt đất một góc 30° từ độ cao $HK = 1,5$ (m). Giả sử mặt phẳng nghiêng không có ma sát và vật chỉ bị tác dụng bởi trọng lực $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$ với $\vec{g}$ là vectơ gia tốc rơi tự do của vật có độ lớn được lấy bằng 10 (m/s²).



- a) Hướng chuyển động của vật là cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{MH}$.
- b) Chiều dài quãng đường HM là 3 (m).
- c) Độ lớn của trọng lực $\vec{P}$ là 100 (N).
- d) Cho biết công A (đơn vị J) sinh bởi lực $\vec{F}$ (đơn vị N) làm vật dịch chuyển một đoạn thẳng từ C đến D có độ dài tính bằng mét, được tính theo công thức $A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{CD}$.
Vậy công của trọng lực $\vec{P}$ làm vật ở trên trượt từ vị trí H đến M bằng $150\sqrt{3}$ (J).

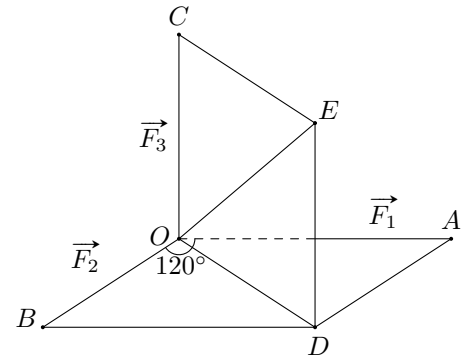
Câu 2 Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng $m = 5$ kg được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $SABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\widehat{ASC} = 60^\circ$ (Hình vẽ bên). Biết $\vec{P} = m\vec{g}$ trong đó $\vec{g}$ là vectơ gia tốc rơi tự do có độ lớn 10 m/s², $\vec{P}$ là trọng lực tác động vật có đơn vị là N, m là khối lượng của vật có đơn vị kg. Khi đó



- a) $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SD}$ là 4 vectơ đồng phẳng.
- b) $|\overrightarrow{SA}| = |\overrightarrow{SB}| = |\overrightarrow{SC}| = |\overrightarrow{SD}|$.
- c) Độ lớn của trọng lực $\vec{P}$ tác động lên chiếc đèn chùm bằng 50 N.

a Độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích bằng $\frac{25\sqrt{3}}{2}$ N.

Câu 3 Một vật nặng O được kéo từ ba hướng như hình vẽ và chịu tác dụng của 3 lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, có độ lớn lần lượt là $24\text{N}, 12\text{N}, 6\text{N}$. Biết góc tạo bởi 2 lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ là 120° và lực thứ ba vuông góc với hai lực đầu tiên.



a $\vec{BO} + \vec{BA} = \vec{BD}$.

b $\vec{OE} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$.

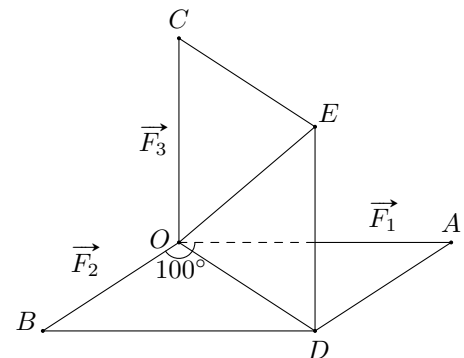
c Độ dài của vectơ $\vec{OD}$ là $|\vec{OD}| = 12\sqrt{7}$.

d Độ lớn hợp lực tác dụng vào vật O là $6\sqrt{13}$ N.

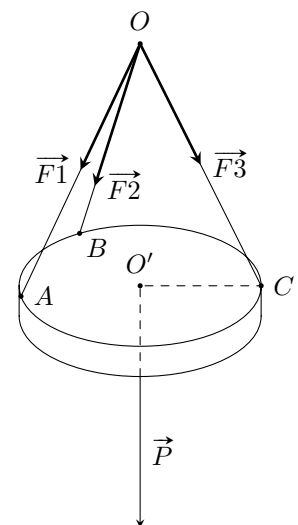
2 Trả lời ngắn

Câu 1 Ba lực cùng tác động vào một vật. Hai trong ba lực này hợp với nhau một góc 100° và có độ lớn lần lượt là 25N và 12N . Lực thứ ba vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực đã cho và có độ lớn 4N . Tính độ lớn của hợp lực của ba lực trên (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

KQ:

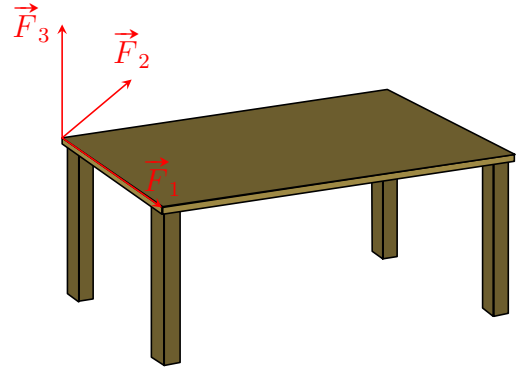


Câu 2 Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn, xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 15\text{ (N)}$. Tính trọng lượng của chiếc đèn tròn đó.



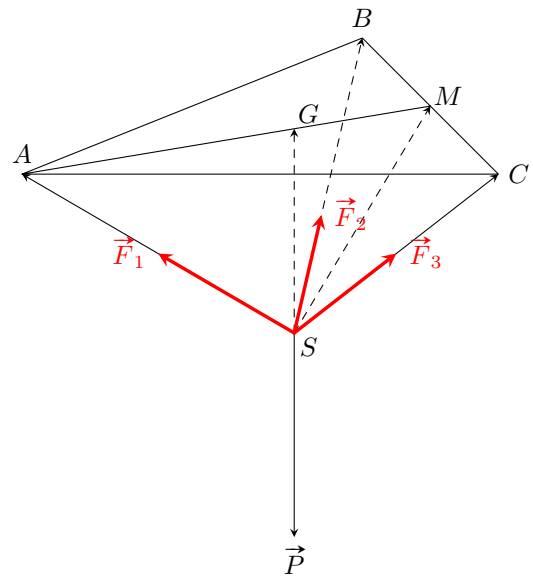


Câu 3 Có ba lực cùng tác động vào một cái bàn như hình vẽ. Trong đó hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ có giá nằm trên mặt phẳng chứa mặt bàn, tạo với nhau một góc 110° và có độ lớn lần lượt là 9 (N) và 4 (N), lực $\vec{F}_3$ vuông góc với mặt bàn và có độ lớn 7 (N). Độ lớn hợp lực của ba lực trên là a (N), tìm giá trị của a . (kết quả quy tròn về số nguyên).



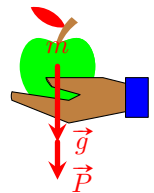
KQ:

Câu 4 Treo một vật nặng có trọng lượng 30 N bởi ba sợi dây giống hệt nhau, các sợi dây đôi một tạo với nhau một góc 90° (như hình vẽ). Gọi $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt là lực căng của ba sợi dây nói trên. Độ lớn của lực F_1 bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



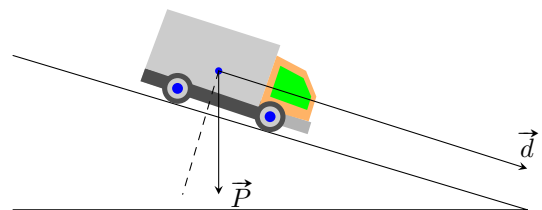
KQ:

Câu 5 Nếu một vật có khối lượng m (kg) thì lực hấp dẫn $\vec{P}$ của Trái Đất tác dụng lên vật được xác định theo công thức $\vec{P} = m\vec{g}$, trong đó $\vec{g}$ là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Tính độ lớn của lực hấp dẫn của Trái Đất tác dụng lên một quả táo có khối lượng 102 gam. Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.



KQ:

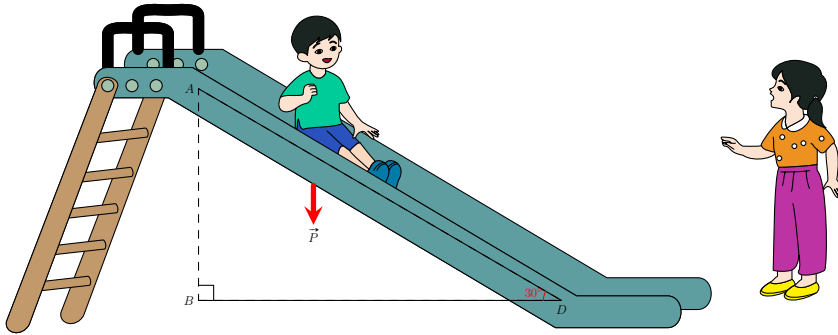
Câu 6 Cho biết công A (đơn vị: J) sinh bởi lực $\vec{F}$ tác dụng lên một vật được tính bằng công thức $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$, trong đó $\vec{d}$ là vectơ biểu thị độ dịch chuyển của vật (đơn vị của $|\vec{d}|$ là m) khi chịu tác dụng của lực $\vec{F}$.



Một chiếc xe có khối lượng 1,5 tấn đang đi xuống trên một đoạn đường dốc có góc nghiêng 5° so với phương ngang. Tính công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi xe đi hết đoạn đường dốc dài 30 m (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị), biết rằng trọng lực $\vec{P}$ được xác định bởi công thức $\vec{P} = m\vec{g}$, với m (đơn vị: kg) là khối lượng của vật và $\vec{g}$ là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Làm tròn kết quả đến hàng chục.

KQ:

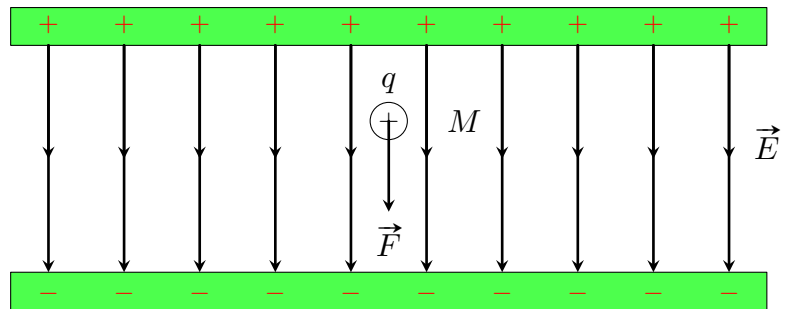
Câu 7 Một em nhỏ cân nặng $m = 25 \text{ kg}$ trượt trên cầu trượt dài $3,5 \text{ m}$. Biết rằng, cầu trượt có góc nghiêng so với phương nằm ngang là 30° (Hình vẽ).



Cho biết công $A(J)$ sinh bởi một lực $\vec{F}$ có độ dịch chuyển $\vec{d}$ được tính bởi công thức $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$. Hãy tính công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi em nhỏ trượt hết chiều dài cầu trượt. Biết rằng $\vec{P} = m\vec{g}$. Làm tròn đến hàng đơn vị.

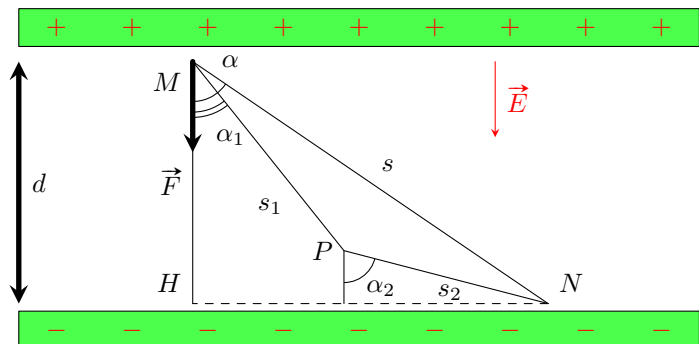
KQ:

Câu 8 Trong điện trường đều, lực tĩnh điện $\vec{F}$ (đơn vị: N) tác dụng lên điện tích điểm có điện tích q (đơn vị: C) được tính theo công thức $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$, trong đó $\vec{E}$ là cường độ điện trường (đơn vị: N/C). Tính độ lớn của lực tĩnh điện tác dụng lên điện tích điểm khi $q = 10^{-9} \text{ C}$ và độ lớn điện trường $E = 10^5 \text{ N/C}$ (Hình vẽ), ta được kết quả 10^{-a} N . Tìm a .



KQ:

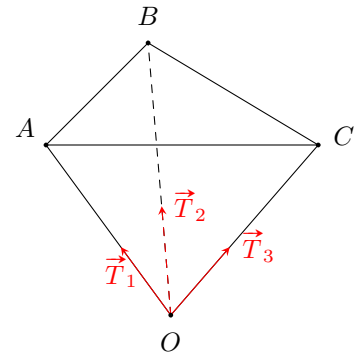
Câu 9 Một lực tĩnh điện $\vec{F}$ tác động lên điện tích điểm M trong điện trường đều làm cho M dịch chuyển theo đường gấp khúc MNP (Hình vẽ). Biết $q = 2 \cdot 10^{-12} \text{ C}$, vectơ điện trường có độ lớn $E = 1,8 \cdot 10^5 \text{ N/C}$ và $d = MH = 5 \text{ mm}$. Tính công A sinh bởi lực tĩnh điện $\vec{F}$ ta được kết quả $18 \cdot 10^{-a} \text{ N}$. Tìm a .



KQ:

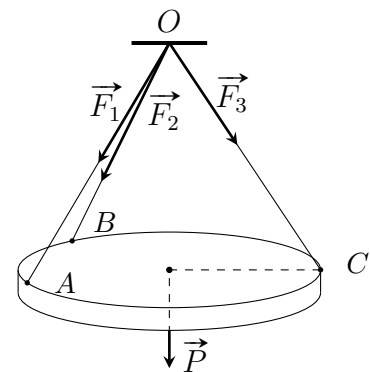


Câu 10 Người ta treo một vật trang trí O có khối lượng $m = 2 \text{ kg}$ trên trần nhà bằng các sợi dây nhẹ, không co giãn tại các điểm A, B và C . Để bảo đảm lực phân phối đều trên các dây và tính thẩm mỹ, người ta chọn độ dài các dây sao cho $OABC$ là tứ diện đều. Gọi $\vec{T}_1, \vec{T}_2$ và $\vec{T}_3$ lần lượt là các lực căng dây của ba dây treo tại A, B và C . Lấy giá trị gần đúng của gia tốc trọng trường g là 10 m/s^2 . Tính cường độ của lực căng trên mỗi dây. Làm tròn kết quả đến hàng phần chục.



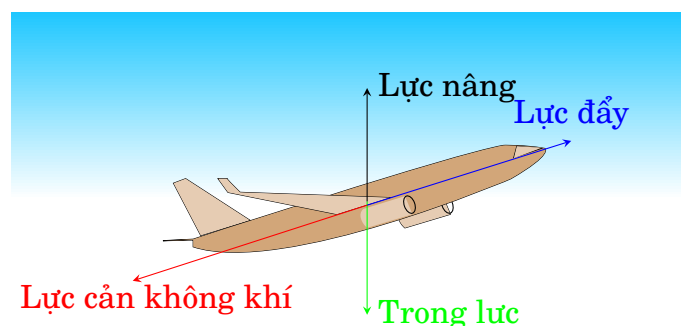
KQ:

Câu 11 Một chiếc đèn trang trí hình tròn được treo song song với mặt phẳng trần nhà nằm ngang bởi ba sợi dây không giãn OA, OB, OC đôi một vuông góc (như hình vẽ dưới đây). Biết lực căng dây tương ứng trên mỗi dây OA, OB, OC lần lượt là $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ thỏa mãn $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = 16 \text{ (N)}$. Tính trọng lượng (đơn vị: N) của chiếc đèn đó (Làm tròn kết quả đến hàng phần chục).



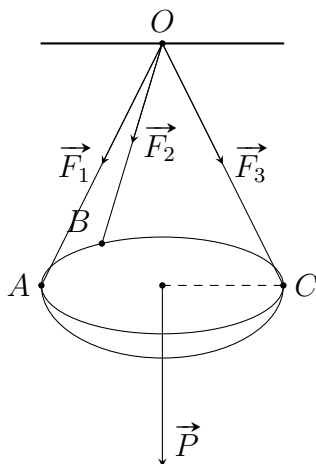
KQ:

Câu 12 Khi chuyển động trong không gian, máy bay luôn chịu tác động của bốn lực chính: lực đẩy của động cơ, lực cản của không khí, trọng lực và lực nâng khí động học. Lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và có độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay. Một chiếc máy bay tăng vận tốc từ 900 km/h lên 920 km/h , trong quá trình tăng tốc máy bay giữ nguyên hướng bay. Lực cản của không khí khi máy bay đạt vận tốc 900 km/h và 920 km/h lần lượt được biểu diễn bởi hai vectơ $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$. Biết $\vec{F}_1 = k\vec{F}_2$ với k là một số thực dương nào đó. Tính giá trị của k (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

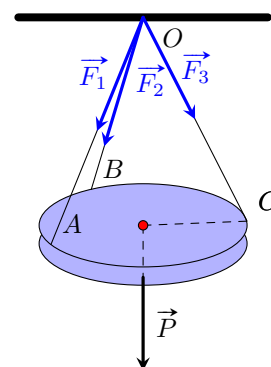


KQ:

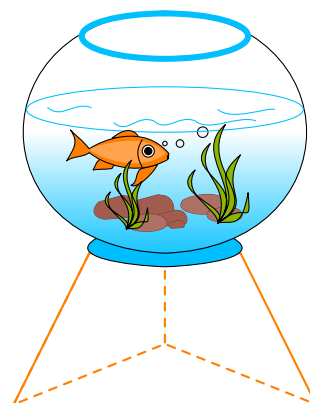
Câu 13 Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ lần lượt trên mỗi dây OA, OB, OC đều có độ lớn bằng 60 (N) . Cho biết các đường thẳng OA, OB, OC cùng tạo với mặt phẳng ngang một góc bằng 30° . Tính trọng lượng của chiếc đèn tròn đó. **KQ:**



Câu 14 Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dẫn xuất phát từ điểm O trên trần nhà lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho tam giác ABC đều. Độ dài của ba đoạn dây OA, OB, OC đều bằng L . Trọng lượng của chiếc đèn là 27 N và bán kính của chiếc đèn là $0,5 \text{ m}$. Tìm chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây, biết rằng mỗi sợi dây đó được thiết kế để chịu được lực căng tối đa là 12 N . (Chiều dài tính theo đơn vị cm và làm tròn đến hàng phần mười). **KQ:**



Câu 15 Một bình cá cảnh có dạng một chỏm cầu được đặt trên một chân đế (tham khảo hình vẽ). Biết tổng khối lượng bể cá là 20 kg , ba chân đế là ba cạnh bên của một hình chóp cắt đều có độ dài cạnh bên bằng 50 cm , hai đáy có độ dài lần lượt là 30 cm và 20 cm . Biết gia tốc trọng trường bằng 10 m/s^2 , tính độ lớn lực tác dụng của bể cá lên từng chân đế (Kết quả làm tròn đến chữ số thứ nhất phần thập phân)



KQ:

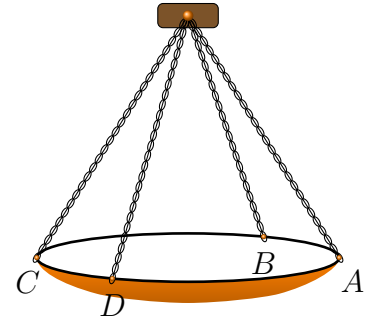
KQ:    

KQ: 

The diagram shows a tetrahedron with apex S and base triangle ABC . A point O is located on the base plane. Dashed lines represent the segments SO , AO , BO , and CO . Two red vectors, $\vec{F}_1$ and $\vec{F}_3$, originate from the apex S . Vector $\vec{F}_1$ points towards the left, and vector $\vec{F}_3$ points towards the right. The base edges AB , BC , and CA are shown with solid lines, while the internal lines from O to the vertices are dashed.

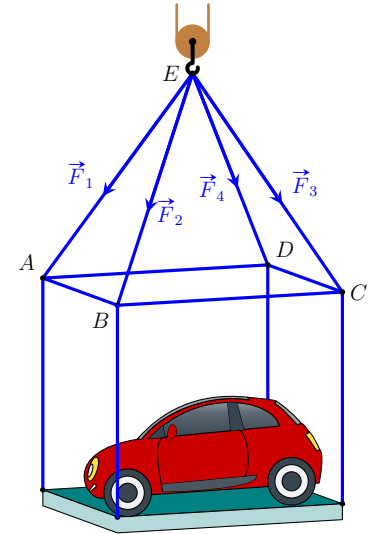
KQ: 

Câu 19 Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng $m = 5 \text{ kg}$ được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\widehat{ASC} = 60^\circ$. Biết $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$, trong đó $\vec{g}$ là vectơ gia tốc rơi tự do có độ lớn 10 m/s^2 , $\vec{P}$ là trọng lực tác dụng lên vật có đơn vị là N, m là khối lượng của vật có đơn vị kg. Độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích bằng bao nhiêu Niu-tơn (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

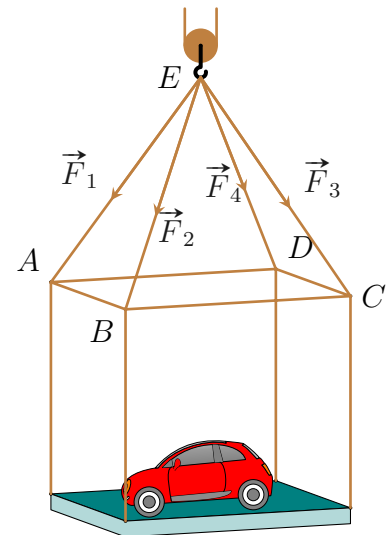


Câu 20 Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60° . Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng.

Tính trọng lượng của chiếc xe ô tô (làm tròn đến hàng đơn vị), biết rằng các lực căng $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ đều có cường độ là 4700 N và trọng lượng của khung sắt là 3000 N .



Câu 21 Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình vuông $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc 45° như hình vẽ. Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết lực căng $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = |\vec{F}_4|$, trọng lượng khung sắt là $1\,000 \text{ (N)}$ và trọng lượng của chiếc xe ô tô là $4\,000 \text{ (N)}$. Tính cường độ lực căng của mỗi đoạn dây cáp (làm tròn đến hàng đơn vị).





BẢNG ĐÁP ÁN ĐÚNG SAI Đ/S

Câu 1. S Đ Đ S

Câu 2. S Đ Đ S

Câu 3. S Đ S Đ

ĐÁP SỐ PHẦN TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. 2 6

Câu 3. 1 1

Câu 4. 1 7

Câu 5. 1

Câu 6. 3 8 4 3

Câu 7. 4 2 9

Câu 8. 4

Câu 9. 7

Câu 10. 8 , 1 2

Câu 11. 2 7 , 7

Câu 12. 0 , 9 6

Câu 13. 9 0

Câu 14. 7 5 , 6

Câu 15. 6 7 , 1

Câu 16. 3 7 , 4

Câu 17. 1 3 2

Câu 18. 1 5

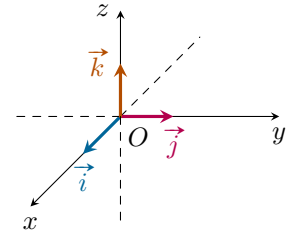
Chủ đề 2

TOÁN THỰC TẾ ÁP DỤNG CÁC
PHÉP TOÁN TỌA ĐỘ HÓA VECTƠ

I LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Hệ trục tọa độ trong không gian

- ♦ **Gốc tọa độ:** $O(0; 0; 0)$.
- ♦ **Trục tọa độ:** trục hoành Ox , trục tung Oy , trục cao Oz .
- ♦ **Mặt phẳng tọa độ:** (Oxy) , (Oyz) , (Oxz) đôi một vuông góc với nhau.
- ♦ **Vectơ đơn vị:** $\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$ và $\vec{k} = (0; 0; 1)$.



2 Tọa độ của vectơ

Trong không gian $Oxyz$, $\vec{a} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j} + a_3 \cdot \vec{k} \Leftrightarrow \vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$.

♦ Các phép toán vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$.

$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$	$k \cdot \vec{a} = (k \cdot a_1; k \cdot a_2; k \cdot a_3)$
$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$	$\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$
$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$	$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
$ \vec{a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$	$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} \cdot \vec{b} }$

3 Tọa độ của điểm

Trong không gian $Oxyz$, $\overrightarrow{OM} = x_M \cdot \vec{i} + y_M \cdot \vec{j} + z_M \cdot \vec{k} \Leftrightarrow M(x_M; y_M; z_M)$.

♦ Tọa độ điểm đặc biệt

$M \in Ox$ thì $M(x; 0; 0)$	$M \in (Oxy)$ thì $M(x; y; 0)$
$M \in Oy$ thì $M(0; y; 0)$	$M \in (Oyz)$ thì $M(0; y; z)$
$M \in Oz$ thì $M(0; 0; z)$	$M \in (Oxz)$ thì $M(x; 0; z)$

♦ **Tọa độ của vectơ** $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

♦ **Độ dài đoạn thẳng** $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

♦ Điểm M là **trung điểm** của $AB \Leftrightarrow M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$.

♦ Điểm G là **trọng tâm** của $\triangle ABC$ thì

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right).$$

II BÀI TẬP ÁP DỤNG

1 Trắc nghiệm đúng sai

Câu 1 Trong không gian $Oxyz$, đơn vị mỗi trục tính bằng km. Một tên lửa phóng từ mặt đất tại vị trí gốc tọa độ O theo một hướng với vận tốc không đổi (đặt mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất). Tên lửa đi từ điểm $O(0; 0; 0)$ đến điểm $A(140; 60; 6)$ trong 8 phút.

- ☐ a Trong 8 phút tên lửa bay được quãng đường (làm tròn đến hàng đơn vị) xấp xỉ bằng 152 km.
- ☐ b Ở phút thứ 4 độ cao của tên lửa là 3 km.
- ☐ c Tọa độ của tên lửa sau 12 phút kể từ lúc phóng là $(210; 90; 12)$.
- ☐ d Sau 10 phút tiếp theo kể từ vị trí A tên lửa đạt độ cao là 13,5 km.

Câu 2 Trong không gian $Oxyz$ với đơn vị trên mỗi trục là 1 m, một flycam bay với vận tốc có độ lớn và hướng không đổi. Tại thời điểm $t = 0$, flycam ở vị trí $A(1; 2; 3)$ và sau 10 phút nó ở vị trí $B(21; 32; 33)$.

- ☐ a Flycam không bay qua vị trí $D(5; 8; 9)$.
- ☐ b Vectơ vận tốc của flycam là $\vec{v} = (20; 30; 30)$.
- ☐ c Tốc độ (làm tròn đến hàng phần trăm) của flycam là 0,08 m/s.
- ☐ d Sau 15 phút, vị trí của flycam là $C(31; 47; 48)$.

Câu 3 Trong không gian chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho trước, trong đó xem mặt phẳng (Oxy) là mặt đất, mỗi đơn vị trên trục tương ứng với 1 km, một radar được đặt tại vị trí gốc tọa độ O phát hiện một máy bay chiến đấu di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(500; 200; 10)$ đến điểm $N(300; 800; 10)$ trong 40 phút.

- ☐ a Khoảng cách $MN = 200\sqrt{10}$ km.
- ☐ b Khi đến N máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 8 phút tiếp theo là $Q(a; b; c)$ với $a + b + c = 1030$.
- ☐ c Máy bay chiến đấu khi bay từ M đến N luôn cách mặt đất là 10 km.
- ☐ d Góc $\widehat{MON}$ được gọi là góc quét của radar khi quan sát máy bay chiến đấu bay từ M đến N . Trong tình huống trên góc quét $\widehat{MON}$ lớn hơn 45° .

Câu 4 Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo lấy km, radar phát hiện một máy bay chiến đấu di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(500; 200; 10)$ đến điểm $N(800; 300; 10)$ trong 20 phút.

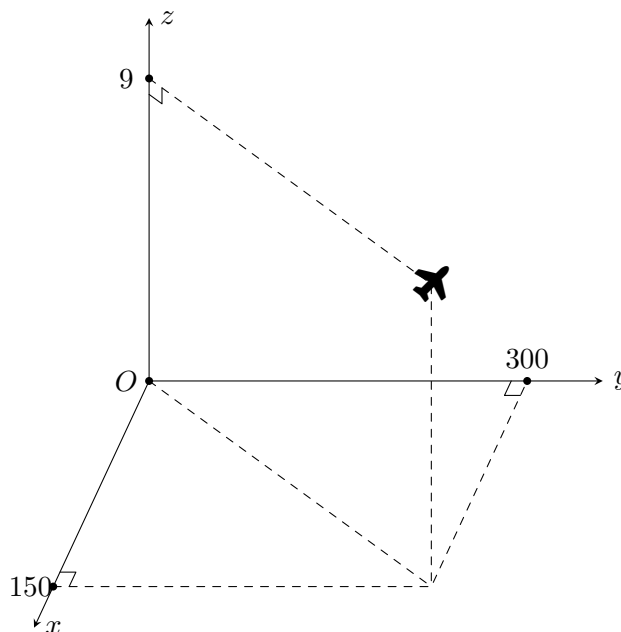
- ☐ a Máy bay đang di chuyển theo hướng tiến lại gần vị trí đặt radar.

- b** Khoảng cách $MN = 100\sqrt{10}$ km.
- c** Tốc độ của máy bay khi di chuyển từ M đến N là $150\sqrt{10}$ km/h.
- d** Nếu tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 4 phút tiếp theo là $Q(a; b; c)$ với $a + b + c = 1191$.

Câu 5 Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị đo trên các trục tọa độ là mét), mặt đất được coi là trùng với mặt phẳng (Oxy) . Một khinh khí cầu xuất phát từ $O(0; 0; 0)$ chuyển động thẳng đến điểm $A(-38; 5; 4)$, sau đó khinh khí cầu tiếp tục chuyển động thẳng đến điểm $B(638; -101; 426)$ với tốc độ 4 m/s.

- a** Khi khinh khí cầu ở vị trí A thì nó cách vị trí xuất phát 38,54 m (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).
- b** $\overrightarrow{AB} = (676; -106; 428)$.
- c** Thời gian khinh khí cầu bay từ A đến B là 3 phút 21 giây (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của giây).
- d** Khi di chuyển từ A đến B được một nửa đoạn đường thì khinh khí cầu cách mặt đất 215 m.

Câu 6 Hình vẽ sau mô tả vị trí của máy bay vào thời điểm 9h30 phút. Biết các đơn vị tính theo đơn vị km.

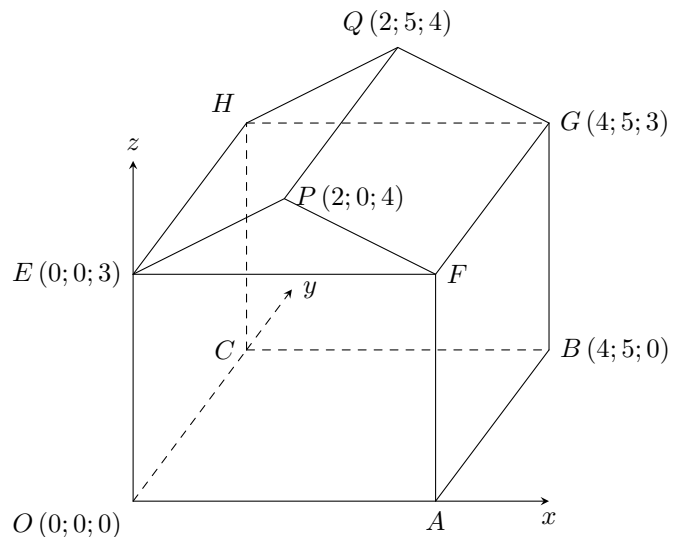


- a** Máy bay đang ở độ cao 9 km.
- b** Tọa độ của máy bay lúc 9h30 là $(150; 300; 9)$.
- c** Phi công để máy bay ở chế độ tự động và bay theo hướng đông, độ cao không đổi lúc 10h30 máy bay ở tọa độ $(150; 1086; 9)$. Khi đó vận tốc của máy bay là 776 km/h, biết vận tốc gió theo hướng đông là 10 m/s.
- d** Giả sử vận tốc và hướng gió không đổi thì sau khi bay đến vị trí lúc 10h30 thì máy bay bay ngược lại (hướng Tây) với vận tốc 800 km/h với độ cao không đổi biết lúc đó trời lặng gió thì lúc 11 giờ máy bay cách gốc tọa độ một khoảng 723 km (làm tròn đến hàng đơn vị).

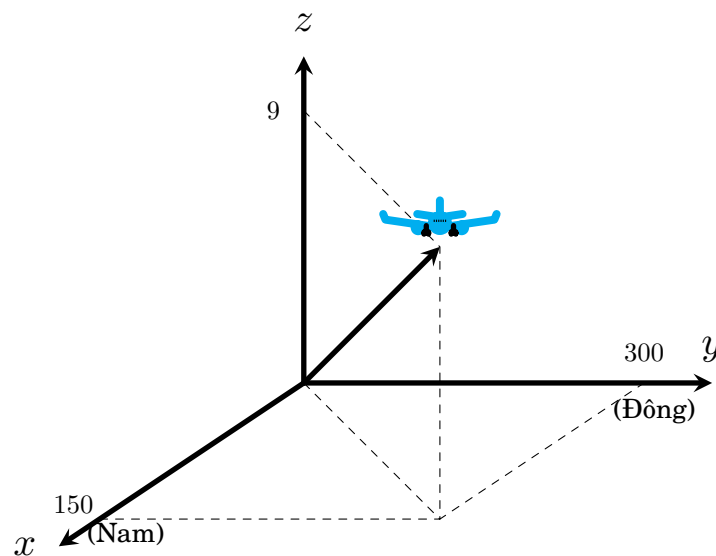


Câu 7 Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.

- a** Tọa độ của điểm $A(5; 0; 0)$.
- b** Tọa độ của điểm $H(0; 5; 3)$.
- c** Góc nhị diện có cạnh là đường thẳng PQ , hai mặt lần lượt là $(PQGF)$ và $(PQHE)$ gọi là góc của mái nhà. Số đo của góc của mái nhà bằng $53,1^\circ$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ).
- d** Chiều cao của ngôi nhà là 4.

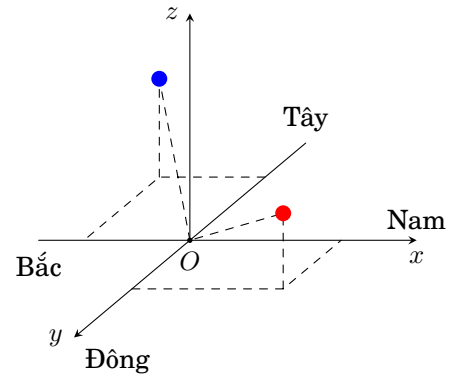


Câu 8 Hình vẽ sau mô tả vị trí của máy bay vào thời điểm 9h30 phút. Biết các đơn vị trên hình tính theo đơn vị km.



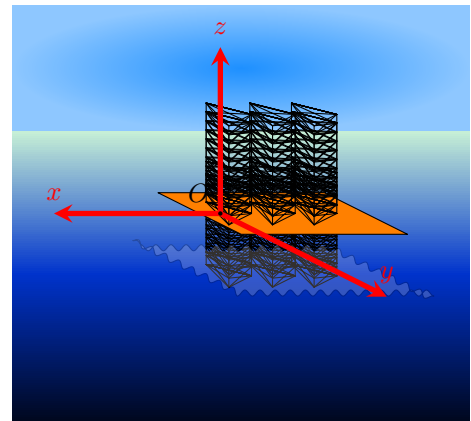
- a** Máy bay đang ở độ cao 9 km.
- b** Tọa độ của máy bay lúc này là $(300; 150; 9)$.
- c** Phi công để máy bay ở chế độ tự động với vận tốc theo hướng đông là 750 km/h, độ cao không đổi. Biết rằng gió thổi theo hướng đông với vận tốc 10 m/s. Giả sử vận tốc và hướng gió không đổi thì lúc 10h30 phút máy bay ở tọa độ là $(150; 1086; 9)$.
- d** Sau khi bay đến vị trí lúc 10h30 thì máy bay bay ngược lại (hướng tây) với vận tốc 800 km/h với độ cao không đổi, biết lúc đó trời lặng gió thì lúc 11h máy bay ở tọa độ $(686; 150; 9)$.

Câu 9 Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất cách điểm xuất phát 2 km về phía nam và 1 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 0,5 km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và 1,5 km về phía tây, đồng thời cách mặt đất 0,8 km. Chọn hệ trục $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng Oxy trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (Hình minh họa), đơn vị đo lấy theo kilomet.



- a Với hệ tọa độ đã chọn, tọa độ khinh khí cầu thứ nhất là $(2; 1; 0,5)$.
- b Với hệ tọa độ đã chọn, tọa độ khinh khí cầu thứ hai là $(-1,5; -1; 0,8)$.
- c Khoảng cách từ điểm xuất phát đến khinh khí cầu thứ nhất bằng $\sqrt{21}$ km.
- d Khoảng cách hai chiếc khinh khí cầu là 3,92 km (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 10 Trong không gian, xét hệ tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí một giàn khoan trên biển, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt biển (được gọi là mặt phẳng) với tia Ox hướng về phía nam, tia Oy hướng về phía đông, tia Oz hướng thẳng lên trời (tham khảo hình vẽ). Đơn vị đo trong không gian $Oxyz$ lấy theo kilômét. Một chiếc radar đặt tại O có phạm vi theo dõi 30 km. Một chiếc tàu thám hiểm tại vị trí A ở độ sâu 10 km so với mặt nước biển, cách O 25 km về phía nam và 15 km về phía tây. Một tàu đánh cá tại vị trí $B(-20; 15; 0)$.



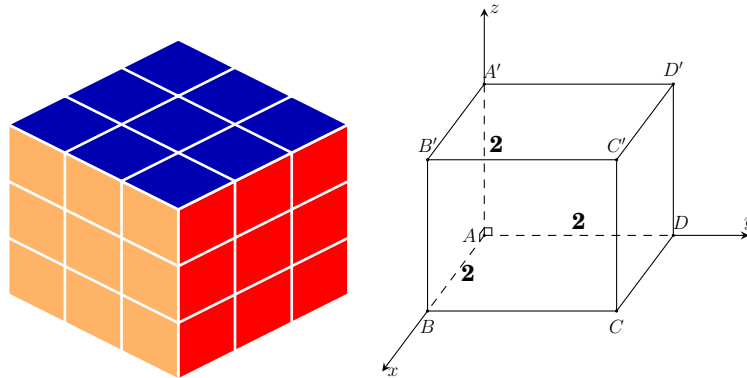
- a Một chiếc tàu của cảnh sát biển đang tuần tra di chuyển đến vị trí C cách O một khoảng 15 km về phía nam. Để radar phát hiện ra thì tàu cảnh sát biển cần di chuyển về phía đông cách O tối đa $15\sqrt{3}$ km.
- b Radar phát hiện ra tàu đánh cá tại vị trí B .
- c Khoảng cách từ chiếc tàu thám hiểm đến radar bằng $3\sqrt{58}$ km.
- d Radar không phát hiện được tàu thám hiểm đặt tại vị trí A .

Câu 11 Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét) một trạm phát sóng điện thoại của nhà mạng Vinaphone được đặt trên quả đồi ở vị trí $I(1; -2; 3)$ biết rằng điện thoại sẽ bắt được sóng tốt nếu vị trí của điện thoại cách vị trí điểm $I(1; -2; 3)$ không quá 5 000 m. Nhà các bạn Minh Hiền bạn Nhật Hoàng và bạn Phương Linh có vị trí tọa độ lần lượt là $M(1; 2; 0)$; $N(-3; 1; 0)$ và $P(2; -2; 0)$

- a Bạn Minh Hiền có thể sử dụng điện thoại tại nhà.
- b Bạn Nhật Hoàng có thể sử dụng điện thoại tại nhà.
- c Bạn Phương Linh có thể sử dụng điện thoại tại nhà.

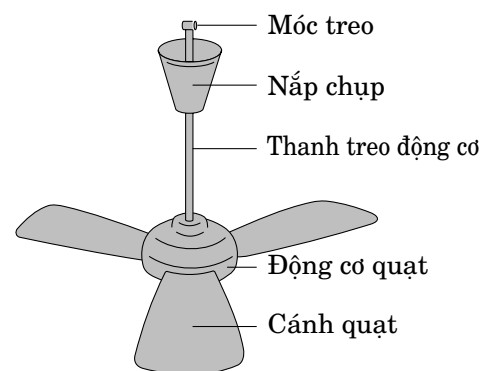
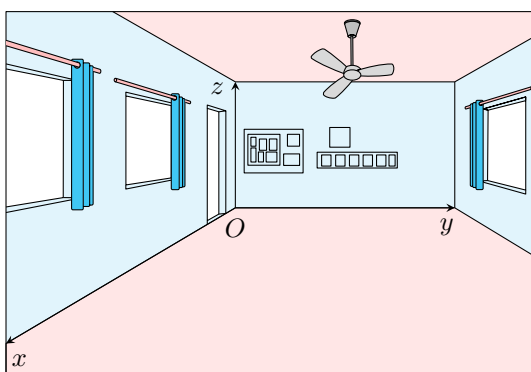
- a** Gọi Q là vị trí nằm trên đoạn thẳng đi từ nhà Minh Hiền đến nhà Nhật Hoàng sao cho tại vị trí này có thể sử dụng điện thoại. Độ dài lớn nhất của MQ là $\frac{8\sqrt{17}}{17}$.

Câu 12 Khối rubik như hình vẽ có độ dài cạnh bằng 2. Khi gắn rubik vào hệ trục tọa độ trong không gian $Oxyz$, cho ta lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0)$, $B(2; 0; 0)$, $D(0; 2; 0)$, $A'(0; 0; 2)$. Gọi N là trung điểm của AA' .



- a** Tọa độ điểm $B(2; 0; 0)$ suy ra vectơ là $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$.
- b** Tọa độ điểm $C(0; 2; 2)$.
- c** Tọa độ của điểm N là $N(0; 0; 1)$.
- d** Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AC'}$ bằng $3\sqrt{2}$.

Câu 13 Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài 10 m, chiều rộng 7 m và chiều cao 3,3 m. Bức tường có kích thước $7 \times 3,3$ được trang trí bởi một số bức tranh, một chiếc quạt trần được treo trên trần nhà tại vị trí chính giữa trần nhà của phòng học.

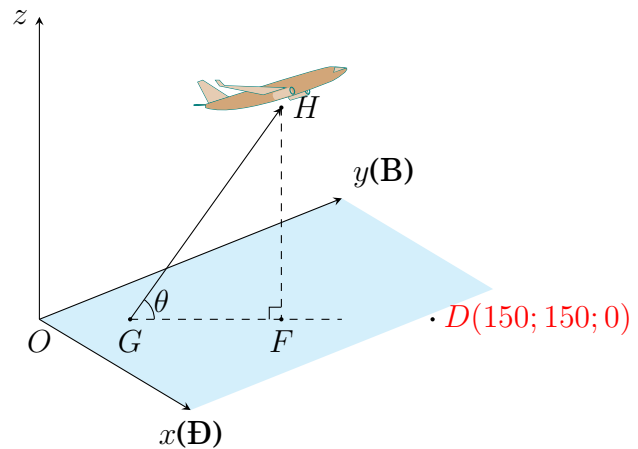


Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc tọa độ O trùng với góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn nhà như hình vẽ (các vectơ đơn vị trên các trục có độ dài 1 m). Biết rằng thanh treo động cơ của quạt có độ dài 0,8 m. Giả sử xem động cơ chiếc quạt trần là điểm I .

- a** Tọa độ của động cơ quạt là $I(a; b; c)$ với $a = 3,5$; $b = 5$; $c = 2,5$.
- b** Khoảng cách từ động cơ quạt đến sàn nhà là 2,5 m.
- c** Khoảng cách từ động cơ quạt đến bức tường có trang trí các bức tranh là 5 m.

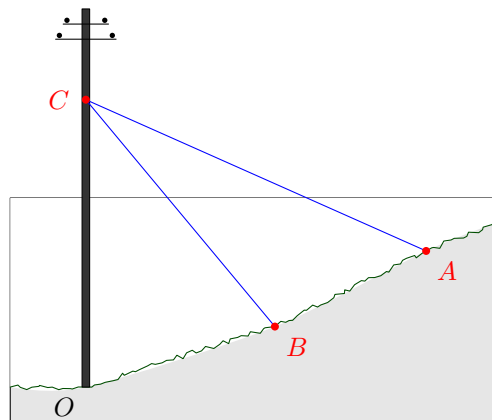
- a** Người ta muốn dùng thiết bị cảm ứng, khi có người vào phòng thì quạt tự bật, khi không có người trong phòng trong 15 phút thì quạt tắt. Giả sử tọa độ của thiết bị đó là $A(0; 2; 1)$. Khoảng cách từ thiết bị A đến động cơ quạt I nhỏ hơn 5,5 m.

Câu 14 Một chiếc trực thăng H cất cánh từ một sân bay. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$, có gốc tọa độ O là chân tháp điều khiển sân bay, trục Ox là hướng Đông, trục Oy là hướng Bắc và trục Oz là trục thẳng đứng, đơn vị trên mỗi trục là kilômét. Trực thăng cất cánh từ điểm G trên mặt đất (mặt phẳng Oxy). Vectơ $\vec{u}$ chỉ vị trí của trực thăng tại thời điểm t phút sau khi cất cánh ($t \geq 0$) có tọa độ là $\vec{u} = \left(1 + t; \frac{1}{2} + 2t; 2t\right)$. Một hòn đảo ở vị trí $D(150; 115; 0)$ (hình vẽ minh họa). Gọi M là vị trí của máy bay H tại thời điểm t phút sau khi cất cánh.



- a** Tọa độ điểm M tại thời điểm t phút sau khi máy bay H cất cánh là $M\left(1 + t; \frac{1}{2} + 2t; 2t\right)$.
- b** Tọa độ điểm G là $\left(1; \frac{1}{2}; 0\right)$.
- c** Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{MD}$ là $\left(149 - t; \frac{129}{2} - 2t; -2t\right)$.
- d** Máy bay H bay đến vị trí $M(x_0; y_0; z_0)$ thì khoảng cách từ máy bay đến D là nhỏ nhất. Khi đó $20(x_0 + y_0 + z_0) = 4320$.

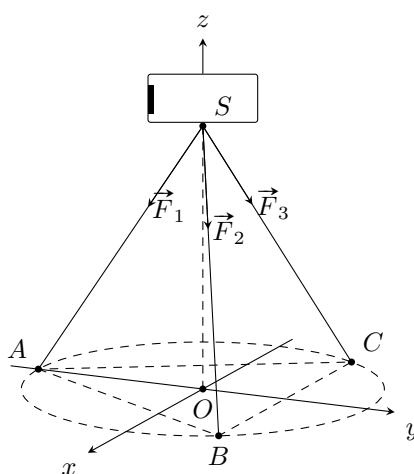
Câu 15 Trên một sườn đồi, người ta trồng một trụ điện và muốn giữ nó thẳng đứng bằng hai sợi dây neo AC và BC . Hai sợi dây này được kéo căng thành hai đoạn thẳng có chung điểm C trên trụ điện và hai đầu A, B được neo trên sườn đồi (tham khảo hình minh họa).



Giả sử trong một hệ trục tọa độ $Oxyz$ phù hợp (có đơn vị các trục tọa độ là mét), gốc trụ điện đặt tại gốc tọa độ O , đầu các sợi dây neo có tọa độ lần lượt là $A(-3; 4; 2)$, $B(4; 2; 1)$ và $C(0; 0; 5)$.

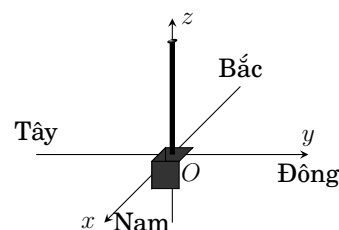
- a** Trụ điện cao hơn 5 mét.
- b** Tổng chiều dài hai sợi dây neo là gần bằng 11,83 mét.
- c** Hai sợi dây neo tạo với nhau một góc gần bằng $76,8^\circ$.
- d** Để gia cố trụ điện, người ta cần thêm sợi dây neo thứ ba. Giả sử, dây neo thứ 3 này được kéo căng tạo thành đoạn thẳng CD thỏa ba điểm A, B và D thẳng hàng. Sợi dây neo thứ 3 có độ dài ngắn nhất bằng $\frac{2\sqrt{435}}{9}$ mét.

Câu 16 Một chiếc điện thoại được đặt trên một giá đỡ có ba chân với điểm đặt $S(0; 0; 20)$ và các điểm chạm mặt đất của ba chân lần lượt là $A(0; -6; 0)$, $B(3\sqrt{3}; 3; 0)$, $C(-3\sqrt{3}; 3; 0)$ (đơn vị cm). Cho biết điện thoại có trọng lượng là 2 N và ba lực tác dụng lên giá đỡ được phân bố như hình vẽ là ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ có độ lớn bằng nhau và đo bằng đơn vị N.



- a** $\vec{SA} = (0; -6; -20)$.
- b** $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{F}(0; 0; 2)$.
- c** $|\vec{F}_1| = \frac{1}{20} |\vec{SA}|$.
- d** Biết tọa độ của lực $\vec{F}_1 = (a; b; c)$, khi đó $T = 2a + 5b + 6c = -5$.

Câu 17 Tại một điểm cao ở khu vực leo núi có một trung tâm điều hành trạm cứu hộ, trung tâm có cột ăngten đặt thiết bị thu phát vô tuyến và radar phục vụ giám sát, nhận tín hiệu cầu cứu và phát thông tin cần thiết đến trực thăng. Hệ trục tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình vẽ (đơn vị mét).

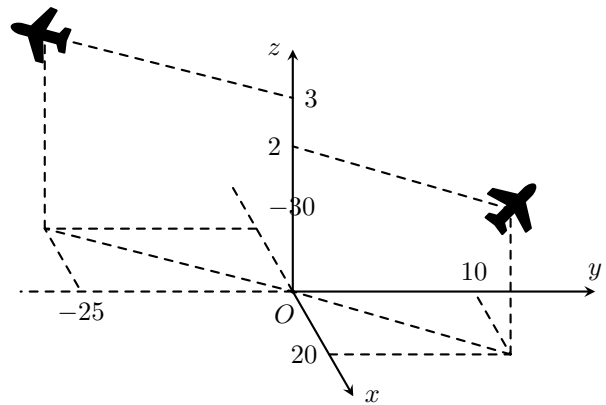


- a** Trực thăng cứu hộ đang cách trạm cứu hộ 20 m về hướng Nam, 30 mét về hướng Tây và cao 100 m so với trạm cứu hộ; tọa độ trực thăng cứu hộ là $(20; -30; 100)$.
- b** Một nhóm cứu hộ phát tín hiệu cầu cứu tại vị trí $(-300; 200; -30)$. Khi đó vectơ có điểm đầu là trực thăng, điểm cuối là vị trí cần cứu hộ có tọa độ là $(320; -230; 130)$.
- c** Khoảng cách từ trực thăng đến nơi cứu hộ (làm tròn đến hàng đơn vị) là 400 m.
- d** Trạm cứu hộ xác định vectơ vận tốc gió là $(10; 5; 1)$ (m/s), yêu cầu trực thăng sau 3 phút đến vị trí cứu hộ. Trực thăng cần thiết lập vectơ vận tốc riêng có tọa độ $\left(-\frac{106}{9}; -\frac{67}{18}; -\frac{31}{18}\right)$ (m/s) để đảm bảo đến đúng nơi, đúng thời gian theo yêu cầu.

Câu 18 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là 10 km), hai khinh khí cầu A và B bay với vectơ vận tốc lần lượt là $\vec{v}_a = (1; 2; 0)$ và $\vec{v}_b = (-2; 3; 0)$ (tọa độ vectơ vận tốc được tính theo đơn vị của hệ trục tọa độ trên giờ). Tại thời điểm $t = 0$ vị trí của khinh khí cầu A là $M(5; 4; 2)$ và vị trí của khinh khí cầu B là $N(6; 5; 3)$. Hai khinh khí cầu sẽ bay trong 10 giờ tiếp theo và dừng lại. Khi đó

- a Sau 3 giờ vị trí của khinh khí cầu A là $M'(8; 10; 2)$.
- b Khinh khí cầu B không bay qua vị trí $N'(0; 14; 3)$.
- c Khoảng cách giữa hai khinh khí cầu sau 3 giờ là 9 km.
- d Trong khoảng thời gian từ $t = 0$ đến $t = 10$ giờ, khoảng cách ngắn nhất giữa hai khinh khí cầu là 16,1 km (làm tròn đến hàng phần chục).

Câu 19 Hai chiếc máy bay không người lái cùng bay lên từ một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc thứ nhất cách điểm xuất phát về phía nam 20 km và về phía đông 10 km, đồng thời cách mặt đất 2 km. Chiếc thứ hai cách điểm xuất phát về phía tây 25 km và về phía bắc 30 km, đồng thời cách mặt đất 3 km. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc máy bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét.



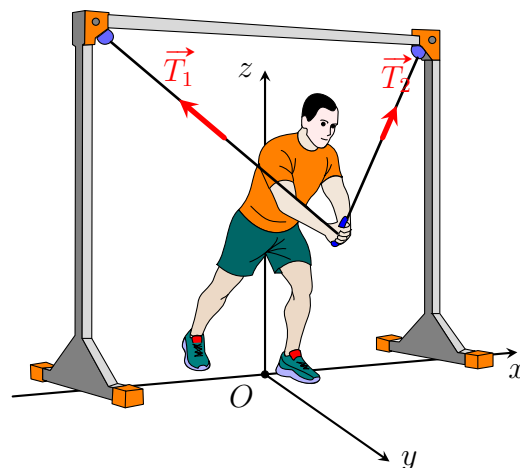
- a Sau thời gian bay nêu trên, máy bay thứ nhất ở vị trí $A(20; 10; 2)$.
- b Khoảng cách giữa hai máy bay xấp xỉ 61,04 km.
- c Vị trí của hai máy bay tạo với điểm xuất phát một góc gần bằng $16,29^\circ$.
- d Sau thời gian bay nêu trên, hai máy bay đó cùng bắn một mục tiêu di động trên mặt đất. Biết tổng khoảng cách từ mỗi máy bay đến mục tiêu là nhỏ nhất, lúc đó mục tiêu đó cách điểm xuất phát của hai máy bay là 50 km.

Câu 20 Trong một mô hình hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ với cạnh dài 5 mét, có thiết bị chiếu sáng thứ nhất di chuyển liên tục theo hướng $\vec{B'C'}$ với tốc độ 6 centimet trên giây và thiết bị chiếu sáng thứ hai di chuyển liên tục theo hướng $\vec{AC'}$ với tốc độ 12 centimet trên giây. Biết ban đầu thiết bị chiếu sáng thứ nhất ở B' và thiết bị chiếu sáng thứ hai ở A (Các kết quả đều được làm tròn đến hàng đơn vị).

- a Trong một phút đầu tiên, hai thiết bị chiếu sáng gần nhau theo thời gian.
- b Có thời điểm khoảng cách giữa hai thiết bị chiếu sáng bằng 300 centimet.
- c Khoảng cách giữa hai thiết bị chiếu sáng sau một giây là 694 centimet.
- d Khoảng cách nhỏ nhất giữa hai thiết bị chiếu sáng bằng 212 centimet.

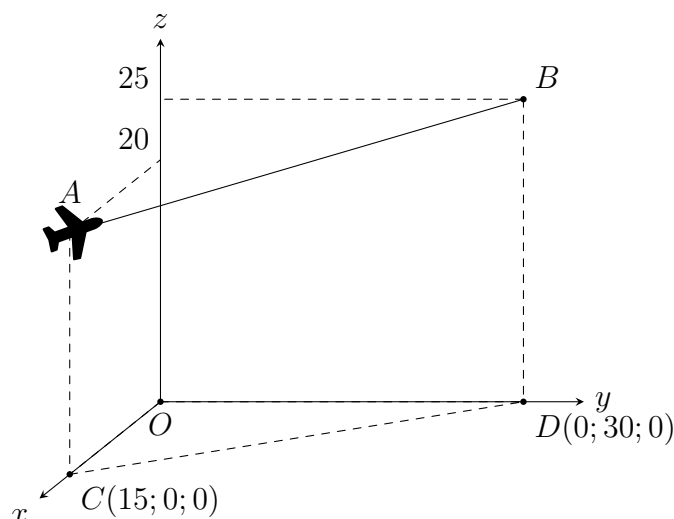


Câu 21 Bạn Mạnh rất yêu thích tập Gym và bạn thường thực hiện bài tập ép ngực với máy tập cáp chéo có tên Tiếng Anh là "Cable Crossover". Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ với đơn vị trên mỗi trục là mét có gốc tọa độ $O(0;0;0)$ nằm trên sàn ngay chính giữa hai trụ của máy tập, các trục Ox, Oy, Oz được chọn như hình vẽ minh họa. Các ròng rọc của hai dây cáp được gắn tại các điểm $A(-1,3;0;1,9)$ và $B(1,3;0;1,9)$. Khi tập thì Mạnh kéo và giữ hai tay cầm tại điểm $D(0;0,7;1,2)$ và tại đó hai tay sẽ chịu tác dụng của hai lực căng $\vec{T}_1$ và $\vec{T}_2$. Biết rằng mức tạ được cài đặt sao cho độ lớn lực căng trên mỗi sợi dây cáp đều là 320 N (kết quả tính được ở các ý đều làm tròn đến hàng phần trăm). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau.



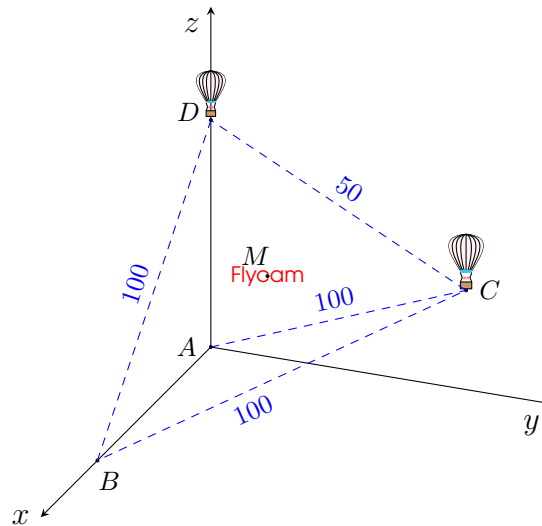
- a** Chiều dài đoạn dây cáp tính từ ròng rọc A đến tay cầm D bằng 1,63 m.
- b** Vectơ hợp lực tác dụng lên tay Mạnh có phương không song song với trục Oz .
- c** Để giữ yên hai tay tại vị trí D thì Mạnh phải tác dụng một lực giữ có độ lớn bằng 387,74 N.
- d** Để tối ưu hóa nhóm cơ ngực, huấn luyện viên yêu cầu Mạnh điều chỉnh vị trí giữ tay (thay đổi tung độ y của điểm D) sao cho góc tạo bởi hai dây cáp tại D đúng bằng 90° . Biết cao độ của tay vẫn giữ nguyên ở $z_D = 1,2$ m thì khi đó Mạnh cần giữ tay cầm ở vị trí sao cho $y_D = 0,99$ m.

Câu 22 Giả sử một máy bay đang bay trên bầu trời theo một đường thẳng từ A đến B có hình chiếu trên mặt đất là đoạn CD . Tại A , máy bay bay cách mặt đất là 20 000 m và tại B máy bay bay cách mặt đất 25 000 m. Một radar được đặt trên mặt đất tại vị trí O cách C là 15 000 m, cách D là 30 000 m và $\widehat{COD} = 90^\circ$. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị: 1 000 m) với O là vị trí đặt radar, C thuộc tia Ox , D thuộc tia Oy (xem hình vẽ).



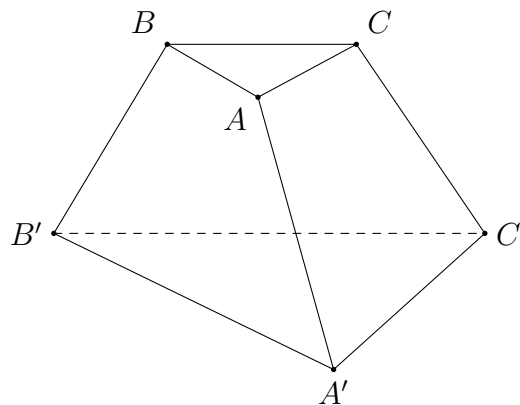
- a** Tại A , máy bay cách radar 25 km.
- b** Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Khi máy bay bay đến điểm I , máy bay cách mặt đất 22 500 m.
- c** Trên đoạn đường bay từ A đến B , máy bay đi qua vị trí $Q(12;6;22)$.
- d** Vị trí máy bay gần radar nhất có tọa độ là $\left(\frac{615}{46}; \frac{75}{23}; \frac{945}{46}\right)$.

Câu 23 Để kỷ niệm ngày thành lập quân đội Nhân Dân Việt Nam, một đơn vị tổ chức lễ duyệt binh chào mừng. Trong buổi lễ vị trí A là cột cờ, B là nơi tập kết đơn vị duyệt binh. Các khinh khí cầu tại vị trí D mang cờ Đảng, tại vị trí C mang cờ tổ quốc luôn giữ cố định vị trí. Một Flycam bay trong không gian để ghi lại hình ảnh của buổi lễ. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ gốc tọa độ tại A , điểm B thuộc tia Ox , điểm D thuộc tia Oz , mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất (Hình vẽ dưới đây). Biết tọa độ của điểm $B(50; 0; 0)$, khoảng cách giữa các vị trí $AC = BD = BC = 100$, $CD = 50$ và các đơn vị trong không gian là mét.



- a** Tọa độ của $C(a; b; c)$ với $a \cdot b \cdot c = 93\,750$.
- b** Thời điểm Flycam tại vị trí $M(x; 0; z)$ và cách đều các điểm A, B, D thì cách mặt đất $25\sqrt{3}$ (m).
- c** Số đo góc $\widehat{CBD} > 30^\circ$.
- d** Tọa độ của $D(0; 0; 50\sqrt{3})$.

Câu 24 Một công ty xây dựng đang thiết kế một tháp quan sát có dạng hình chóp cụt $ABC.A'B'C'$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho A', B', C' nằm trên mặt đất (mặt phẳng (Oxy)), còn mặt sàn trên ABC song song với mặt đất và ở độ cao 2 m so với mặt đất.



Kỹ sư chọn vị trí $A(0; 1; 2)$ làm một góc của sàn trên, điểm B nằm trên trục Oz , còn C có hoành độ dương.

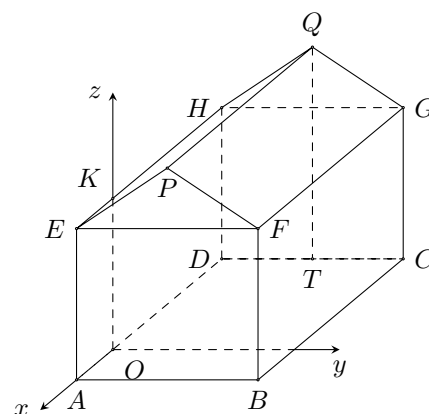


Sàn trên ABC được thiết kế là tam giác vuông cân tại A để đảm bảo mỹ quan.

Người ta cần đặt một trụ đèn tại C' sao cho độ sáng từ C' đến ba đỉnh A, B, C được tối ưu theo thiết kế, tức là biểu thức $P = \left| \overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{C'B} + 2\overrightarrow{C'C} \right|$ nhỏ nhất.

- a** Toạ độ điểm B là $(0; 0; 2)$.
- b** Toạ độ điểm C là $(1; 1; 2)$.
- c** Giá trị nhỏ nhất của biểu thức P bằng 4.
- d** Vị trí tối ưu đặt trụ đèn là $C' \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; 0 \right)$.

Câu 25 Một kho chứa hàng có dạng hình lăng trụ đứng $ABFPE.DCGQH$ với $ABFE$ là hình chữ nhật và EFQ là tam giác cân tại P . Gọi T là trung điểm của DC . Các kích thước của kho chứa lần lượt là $AB = 6$ m; $AE = 5$ m; $AD = 8$ m; $QT = 7$ m. Người ta mô hình hóa nhà kho bằng cách chọn hệ trục tọa độ có gốc tọa độ là điểm O thuộc đoạn AD sao cho $OA = 2$ m và các trục tọa độ tương ứng như hình vẽ bên.



- a** Toạ độ điểm Q là $(-6; 3; 5)$.
- b** Vectơ $\overrightarrow{OC}$ có toạ độ là $(-6; 6; 0)$.
- c** Người ta muốn lắp camera quan sát trong nhà kho tại vị trí trung điểm của FG và đầu thu dữ liệu đặt tại vị trí O . Người ta thiết kế đường dây cáp nối từ O đến K sau đó nối thẳng đến camera. Độ dài đoạn cáp tối thiểu bằng $5 + 2\sqrt{10}$ m.
- d** Mái nhà được lợp bằng tôn Hoa Sen, giá tiền mỗi mét vuông tôn là 130 000 đồng. Số tiền cần bỏ ra để mua tôn lợp mái nhà là 3 750 000 đồng (không kể hao phí do việc cắt và ghép các miếng tôn, làm tròn kết quả đến hàng nghìn).

Câu 26 Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (Đơn vị đo trên mỗi trục tọa độ dài 1 km, mặt đất là mặt phẳng (Oxy)). Lúc đó, một chiếc máy bay bắt đầu di chuyển từ điểm $A(700; 850; 100)$ với vận tốc không đổi 150 (km/h) theo hướng về điểm $B(800; 900; 200)$. Khi tới B , máy bay thay đổi hướng bay theo hướng về điểm $C(1\ 100; 1400; 300)$ với vận tốc giữ nguyên là 150 (km/h). Máy bay di chuyển theo hướng mới trong $30\sqrt{35}$ phút (tức là mới tới điểm $D \in BC$) thì bất ngờ gặp gió lớn khiến hướng bay của nó lệch đi 45° theo phương nằm ngang (tức là nếu $\vec{i}$ là vectơ chỉ phương của đường bay mới, $\vec{u}$ là vectơ hình chiếu xuống mặt đất của đoạn đường từ điểm D trở đi thì góc lượng giác $(\vec{i}; \vec{u}) = 45^\circ$) và vận tốc giảm còn 120 km/h. Máy bay tiếp tục bay theo hướng lệch trong 30 phút.

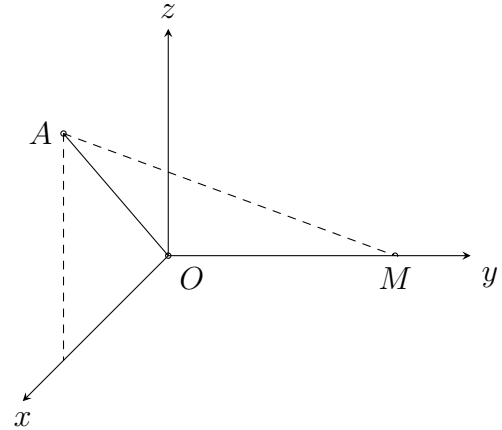
- a** Tổng thời gian bay thực tế của máy bay trong cả hành trình này là 142 phút (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).
- b** Khi bắt đầu gặp gió lớn, máy bay cách mặt đất 275km.
- c** Gọi $E(a; b; c)$ là vị trí cuối cùng của máy bay trong hành trình này. Khi đó $a + b + c = 2\ 670$ (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).
- d** Tổng quãng đường cả hành trình dài hơn 650 km.

Câu 27 Trên một đoạn cao tốc thẳng, người ta lắp một máy cảm biến tốc độ để giám sát các phương tiện. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, đơn vị tính bằng mét, mặt đường trùng với mặt phẳng Oxy , tìm đường trùng trục Oy , một máy cảm biến đặt trên cột vuông góc với mặt đường tại điểm $A(20; 0; 10)$. Một ô tô chuyển động thẳng theo trục Oy , theo chiều dương, tại thời điểm t ta coi ô tô ở điểm $M(0; y; 0)$, $y > 0$.

Tại một thời điểm đó, máy tại A ghi nhận

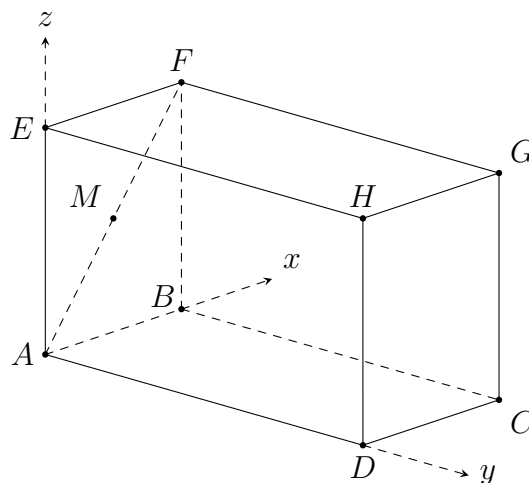
- ♦ Khoảng cách từ A đến ô tô là $AM = 200$ m.
- ♦ Tốc độ so với cảm biến (tức tốc độ xa/gần giữa ô tô và cảm biến) là 59 km/h.

Biết quy định tốc độ của các phương tiện di chuyển trên đoạn đường này tối thiểu 60 km/h và tối đa 120 km/h.



- a Khoảng cách từ ô tô đến gốc tọa độ O nhỏ hơn 198 m.
- b Vận tốc thực của ô tô so với mặt đường (so với O) tại thời điểm đó xấp xỉ 60,1 km/h (làm tròn đến hàng phần chục).
- c ô tô đang vi phạm vì chạy thấp hơn tốc độ tối thiểu.
- d Nếu máy cảm biến đo được 119,5 km/h thì chắc chắn không vi phạm.

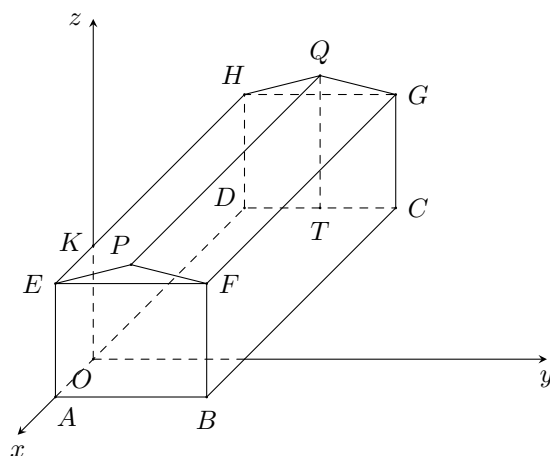
Câu 28 Một bể chứa nước hình hộp chữ nhật $ABCD.EFGH$ tại phòng thí nghiệm có kích thước $AB = 3$ dm, $AD = 4$ dm và chiều cao $AE = 5$ dm. Chọn hệ trục $Oxyz$ trong không gian có gốc tọa độ O trùng với A , tia Ox chứa điểm B , tia Oy chứa điểm D và tia Oz chứa điểm E .



- a Điểm $G(3; 4; 5)$.
- b $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{EH} = 1$.
- c $\tan((AFD), (BDC)) = \frac{5}{2}$.

- d** Một chú robot lặn mini đang ở vị trí G (góc trên-phải-sau của bể). Robot cần lặn xuống một điểm Q trên đáy bể để lấy mẫu, sau đó bơi tới M là trung điểm của cạnh AF để bàn giao mẫu. Để quãng đường đi của Robot ngắn nhất thì điểm Q cách AB và BC những đoạn bằng a và b . Khi đó $T = 9a^2 + b = 17$.

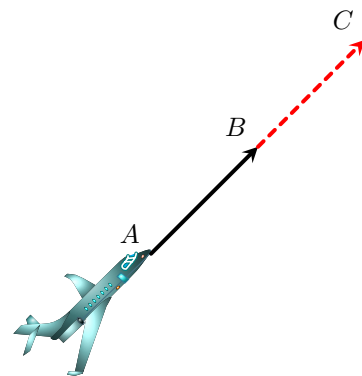
Câu 29 Một kho chứa hàng có dạng hình lăng trụ đứng $ABFPE.DCGQH$ với $ABFE$ là hình chữ nhật và EFP là tam giác cân tại P . Gọi T là trung điểm của DC . Các kích thước của kho chứa lần lượt là $AB = 6$ m; $AD = 8$ m; $QT = 7$ m. Người ta mô hình hoá nhà kho bằng cách chọn hệ trục tọa độ có gốc tọa độ là điểm O thuộc đoạn AD sao cho $OA = 2$ m và các trục tọa độ tương ứng như hình vẽ dưới đây.



- a** Tọa độ điểm Q là $(-6; 3; 5)$.
- b** Véc tơ $\overrightarrow{OC}$ có tọa độ là $(-6; 6; 0)$.
- c** Người ta muốn lắp camera quan sát trong nhà kho tại vị trí trung điểm của FG và đầu thu dữ liệu đặt tại vị trí O . Người ta thiết kế đường dây cáp nối từ O đến K sau đó nối thẳng đến camera. Độ dài đoạn cáp nối tối thiểu bằng $5 + 2\sqrt{10}$ m.
- d** Mái nhà được lợp bằng tôn Hoa Sen, giá tiền mỗi mét vuông tôn là 130 000 đồng. Số tiền cần bỏ ra để mua tôn lợp mái nhà là 3 750 000 đồng (không kể hao phí do việc cắt và ghép các miếng tôn, làm tròn kết quả đến hàng nghìn).

2 Trả lời ngắn

Câu 1 Trong không gian với hệ tọa độ $(Oxyz)$ (đơn vị đo lấy theo km), một Radar phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với tốc độ và hướng không đổi từ điểm $A(812; 600; 5)$ đến điểm $B(950; 530; 6)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên tốc độ và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo là $C(x; y; z)$. Khi đó $x + y + z$ bằng bao nhiêu?



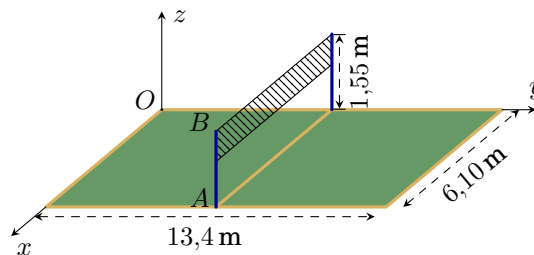
KQ:

Câu 2 Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài là 8 m, chiều rộng là 6 m và chiều cao là 3 m. Một chiếc đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn, đơn vị đo được lấy theo mét. Khi đó, tọa độ của điểm treo đèn là $I(x; y; z)$, hãy tính $x + y + z$.

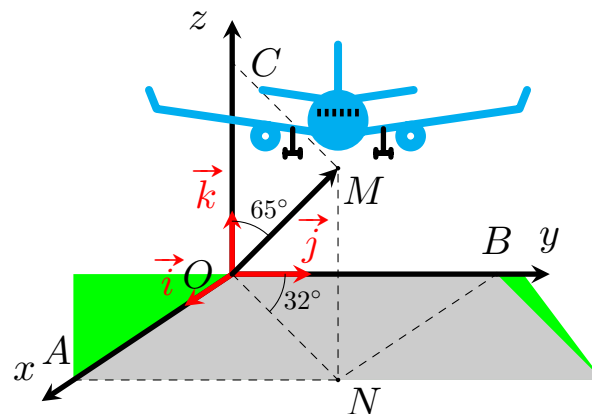
KQ:

Câu 3 Hình dưới đây mô tả một sân cầu lông với kích thước theo tiêu chuẩn quốc tế. Ta chọn hệ trục $Oxyz$ cho sân đó (đơn vị trên mỗi trục là mét) và hai điểm A, B như hình. Khi đó, tọa độ của $\overrightarrow{AB} = (a; b; c)$, hãy tính: $a + b + c$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:



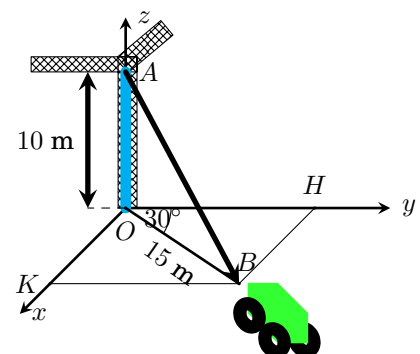
Câu 4 Một máy bay đang cất cánh từ phi trường. Với hệ tọa độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên dưới, cho biết M là vị trí của máy bay, $OM = 14$, $\widehat{NOB} = 32^\circ$, $\widehat{MOC} = 65^\circ$. Khi đó, tọa độ điểm $M(a; b; c)$. Tính $a + b + c$. (các kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



KQ:

Câu 5 Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp AB trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$ như hình bên với độ dài đơn vị trên các trục tọa độ bằng 1 (m). Biết $\overrightarrow{AB} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$. Hỏi giá trị của b bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

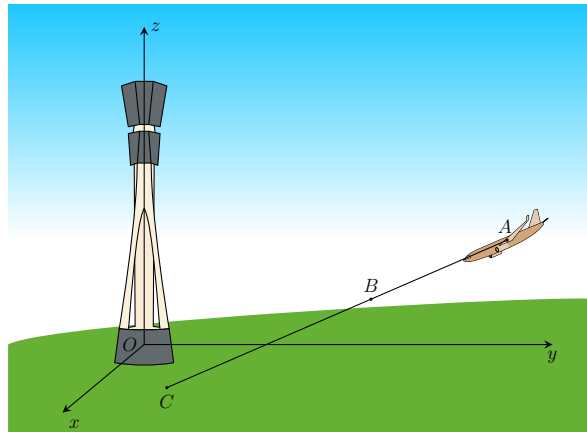
KQ:





Câu 6 Tại một sân bay, người ta chọn hệ tọa độ $Oxyz$ có gốc O tại vị trí chân của đài quan sát, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sân bay (đơn vị trên mỗi trục tọa độ tính theo kilômét). Trên màn hình radar người ta quan sát một máy bay đang hạ cánh theo đường thẳng từ vị trí $A(4; 0; 10)$ đến vị trí $B(5; 5; 6)$ và tiếp đất tại vị trí $C(a; b; 0)$. Hỏi vị trí tiếp đất của máy bay cách chân đài quan sát bao nhiêu kilômét (làm tròn kết quả đến hàng phần chục)?

KQ:



KQ:

Câu 7 Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo km), một ra-da phát hiện một máy bay không người lái tại điểm $A(800; 500; 7)$. Từ điểm A , máy bay này di chuyển với vận tốc và hướng không đổi đến điểm $B(940; 550; 8)$ trong 10 phút để tiếp cận mục tiêu. Sau khi đến B , máy bay nhanh chóng quay bay ngược từ B về A để trở lại căn cứ $C(a; b; c)$ với vận tốc như lúc ban đầu. Biết rằng trong hành trình quay về, máy bay này cũng không đổi hướng thì sau 30 phút, máy bay đã về căn cứ C . Hãy xác định $T = 3a + 2b + c - 339$.

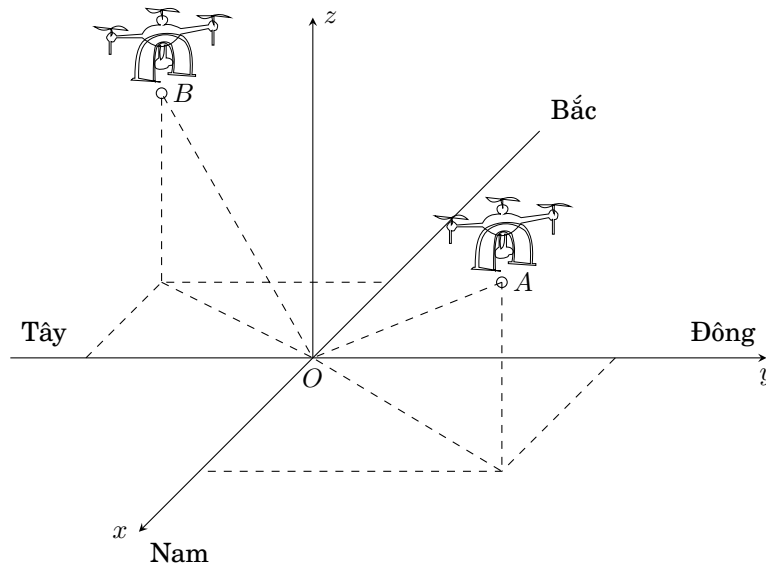
KQ:

Câu 8 Trong không gian với hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo trên các trục là kilomet, một radar phát hiện một máy bay chiến đấu di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(1000; 600; 14)$ đến điểm N trong 30 phút. Nếu đến N máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo là $Q(1400; 800; 16)$. Biết một tên lửa ở tọa độ vị trí điểm $E(100; 150; 9,5)$ được bắn ra với vận tốc không đổi gấp 5 lần vận tốc máy bay nhằm bắn trúng máy bay tại vị trí điểm N . Sau bao nhiêu phút khi máy bay bay từ M thì người điều khiển tên lửa phải bắn?

KQ:

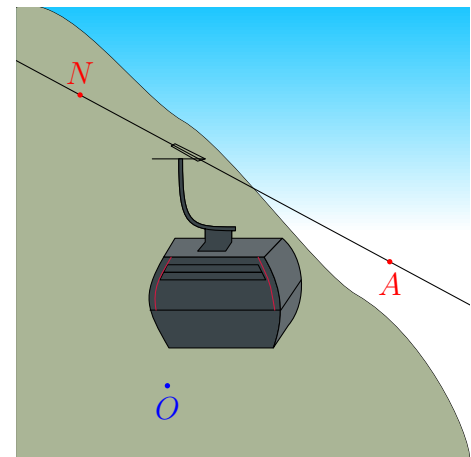
Câu 9 Hai chiếc flycam được điều khiển cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc flycam thứ nhất bay đến vị trí điểm A cách mặt đất 5 m, cách điểm xuất phát 3 m về phía nam và 2 m về phía đông. Chiếc flycam thứ hai bay đến điểm B cách mặt đất 5 m, cách điểm xuất phát 6 m về phía bắc và 6 m về phía tây. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc flycam, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất (coi như phẳng) có trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (đơn vị đo mỗi trục là mét). Trên mặt đất, người ta xác định được một vị trí sao cho tổng khoảng cách từ vị trí đó đến hai chiếc flycam ngắn

nhất. Hỏi khoảng cách từ điểm xuất phát đến vị trí đó bằng bao nhiêu mét?



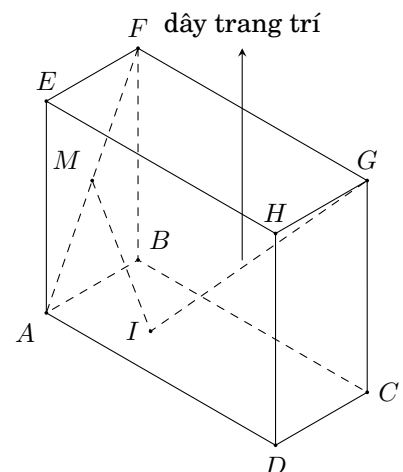
KQ:

Câu 10 Trong không gian với hệ tọa độ $(Oxyz)$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là 1 m), một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(0; 3; 0)$ và chuyển động đều theo đường cáp thẳng đến vị trí D cách A là 4050 m. Biết đường đi của cabin cùng phương với vectơ $\vec{u} = (2; -2; 1)$ và sau 3 phút kể từ khi xuất phát thì cabin đến vị trí B có hoành độ $x_B = 540$. Hỏi thời gian di chuyển của cabin trên quãng đường AD là bao nhiêu phút?



KQ:

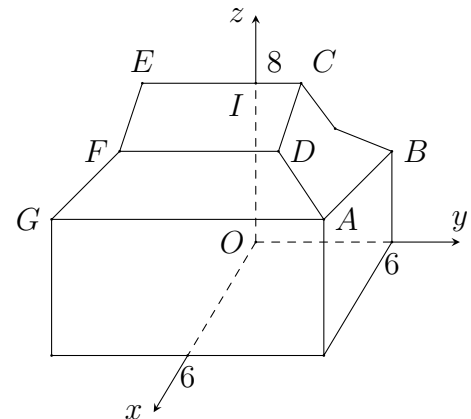
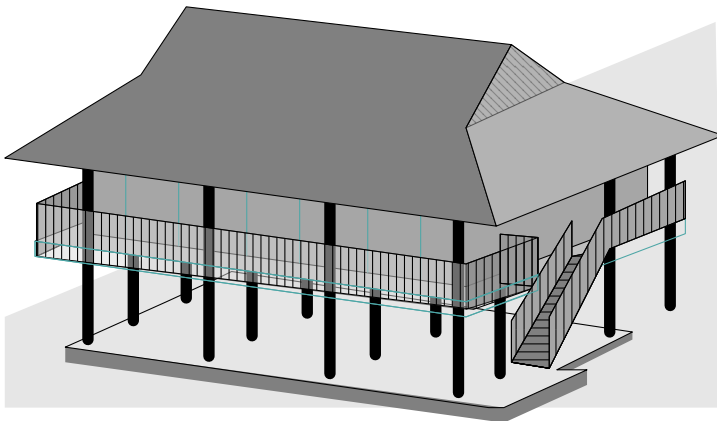
Câu 11 Một căn phòng có dạng hình hộp chữ nhật $ABCD.EFGH$ với $AB = 6$ m, $AD = 8$ m và chiều cao 10 m. Cần giăng một dây trang trí trong phòng từ điểm G đến điểm I thuộc mặt sàn của phòng, rồi từ điểm đó giăng tiếp đến vị trí điểm M là trung điểm của AF . Biết rằng I là điểm sao cho dây trang trí được dùng ít nhất, khi đó I cách góc phòng B bao nhiêu mét (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?



KQ:



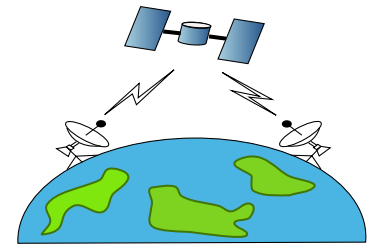
Câu 12 Trên khu vực miền núi thì người dân thường xây dựng nhà ở dạng nhà sàn và được minh họa như hình vẽ dưới đây:



Giả sử áp dụng hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ (đơn vị trên các trục là mét). Xét một bên của mái nhà gồm có một hình chữ nhật $CDFE$ và một hình thang $ADFG$ với các điểm có tọa độ lần lượt là $G(6; -6; 6)$, $C(3; 4; 8)$, $F(4; -4; 7)$ và điểm I là trung điểm CE . Biết góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{AB}$ bằng a° . Giá trị của a bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

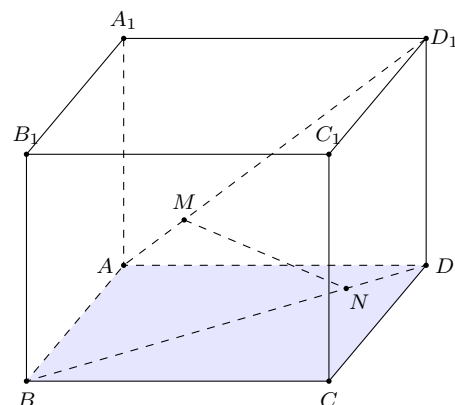
KQ:

Câu 13 Có hai trạm thu phát sóng tín hiệu mặt đất đặt ở hai điểm O, A và vệ tinh thu phát tín hiệu tại vị trí M , biết vệ tinh di chuyển luôn cách mặt đất 35 000 km. Tín hiệu tại O phát lên vệ tinh M rồi truyền đến trạm thu tại A . Xét hệ trục $Oxyz$ được chọn thỏa $O(0; 0; 0)$, $A(30; 40; 0)$, $M(x; y; 35)$ (đơn vị tọa độ là ngàn km). Biết vận tốc trung bình truyền tín hiệu giữa vệ tinh với trạm thu phát khoảng 270 000 km/s. Một tín hiệu phát từ O đến M , rồi truyền về A mất ít nhất bao nhiêu giây (làm tròn đến hàng phần trăm)?



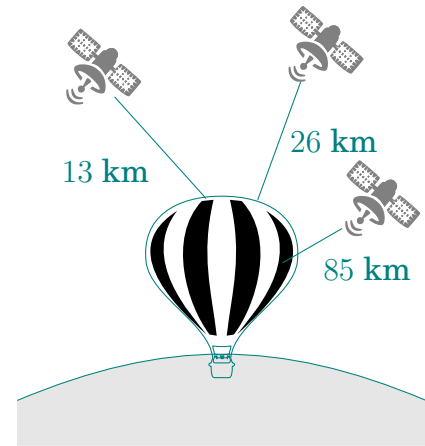
KQ:

Câu 14 Một kỹ sư thiết kế mô hình trang trí cho một sân khấu nổi có dạng hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ với độ dài các cạnh bằng 5 m. Để tạo ra nét độc đáo cho sân khấu, người kỹ sư muốn thiết kế một dàn đèn ánh sáng nổi từ một điểm M trên đoạn thẳng AD_1 xuống một điểm N trên đoạn thẳng BD thỏa mãn $AM = DN$. Dàn đèn ánh sáng có chiều dài ngắn nhất là bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



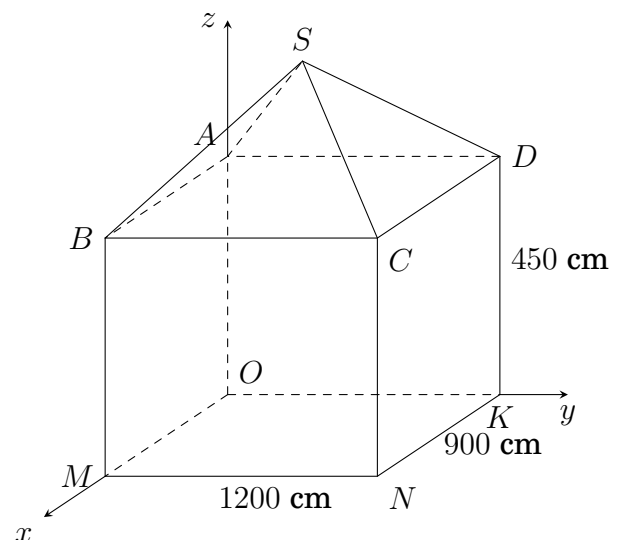
KQ:

Câu 15 Một khinh khí cầu nghiên cứu khí tượng được phóng lên để thu thập dữ liệu trong tầng bình lưu. Khinh khí cầu này có thiết bị định vị sử dụng tín hiệu từ các vệ tinh của công ty S để xác định vị trí trong không gian. Tại thời điểm quan sát, khí cầu đang bay ở độ cao 50 km và nhận được tín hiệu từ ba vệ tinh S có tọa độ trong không gian $Oxyz$ (đơn vị: km) như sau: Vệ tinh A tại vị trí $A(103; 204; 62)$, vệ tinh B tại vị trí $B(106; 208; 74)$, vệ tinh C tại vị trí $C(105; 212; 134)$. Từ thời gian truyền tín hiệu, hệ thống xác định rằng khoảng cách từ vị trí M của khinh khí cầu đến các vệ tinh là $MA = 13$ km, $MB = 26$ km, $MC = 85$ km. Tính khoảng cách từ khinh khí cầu đến gốc tọa độ O (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của km).



KQ:

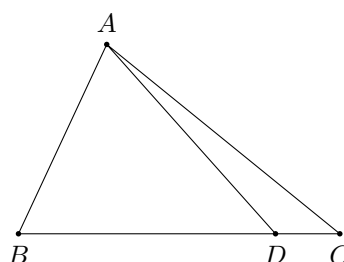
Câu 16 Một ngôi nhà gồm hai phần. Phần thân nhà dạng hình hộp chữ nhật $ABCD.OMNK$ có chiều dài 1200 cm, chiều rộng 900 cm, chiều cao 450 cm. Phần mái nhà dạng hình chóp $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng nhau và tạo với mặt đáy góc α với $\tan \alpha = \frac{1}{5}$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho M thuộc tia Ox , K thuộc tia Oy , A thuộc tia Oz (như hình vẽ). Biết $S(a; b; c)$ (đơn vị của $a; b; c$ là centimet). Tính giá trị của biểu thức $P = a + b + c$.



KQ:

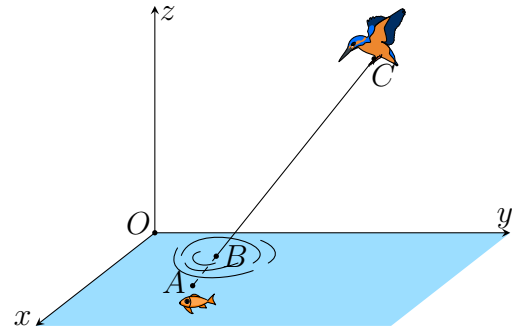
Câu 17 Trên phần mềm mô phỏng việc điều khiển drone giao hàng trong không gian $Oxyz$. Một đội gồm bốn drone giao hàng A, B, C, D xếp đội hình bay có dạng tam giác ABC và D nằm trên cạnh BC sao cho $BD = 4DC$. Tại thời điểm các drone có tọa độ là $A(80; 20; 80)$, $B(70; 20; 20)$, $C(420; 120; 120)$. Khoảng cách giữa drone A và drone D bằng bao nhiêu mét? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

KQ:



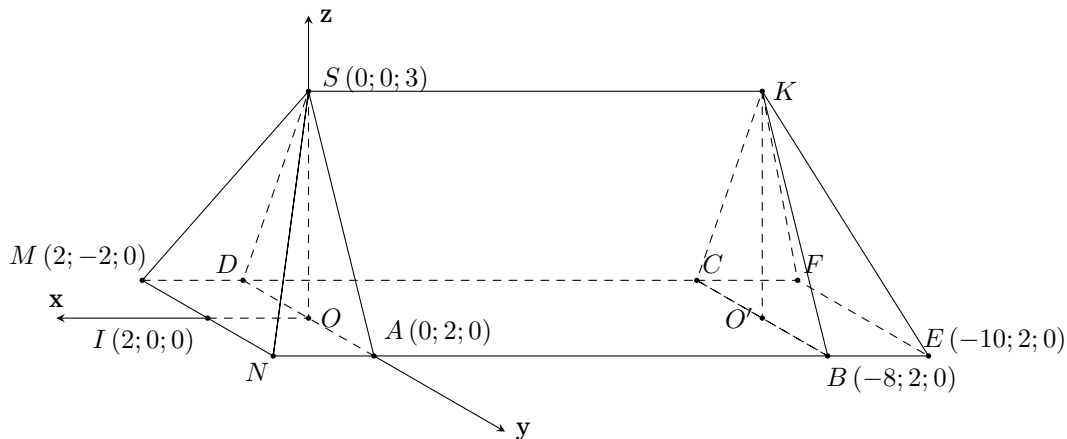


Câu 18 Với hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O nằm trên mặt nước, mặt phẳng Oxy là mặt nước, trục Oz hướng lên trên (đơn vị đo: mét), một con chim bói cá đang ở vị trí cách mặt nước 2 m, cách mặt phẳng (Oxz) , (Oyz) lần lượt là 3 m và 1 m phóng thẳng xuống vị trí con cá, biết con cá cách mặt nước 50 cm, cách mặt phẳng (Oxz) , (Oyz) lần lượt là 1 m và 1,5 m. Tọa độ điểm B lúc chim bói cá vừa tiếp xúc với mặt nước là (a, b, c) (như hình vẽ). Giá trị của $T = 5a + 15b + 25c$ bằng?



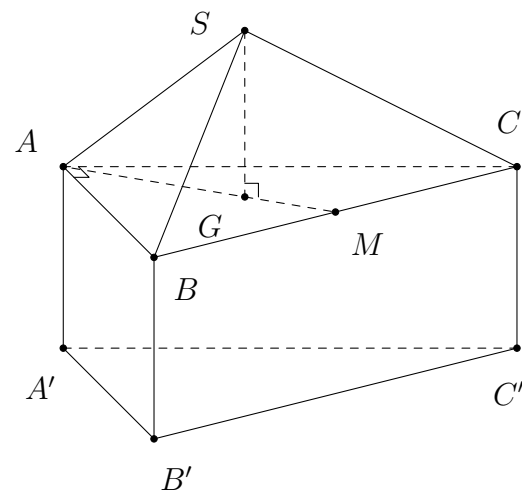
KQ:

Câu 19 Phần mái của một căn nhà có dạng là khối đa diện được mô tả và gắn trên hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Tính thể tích khối đa diện của mái nhà.



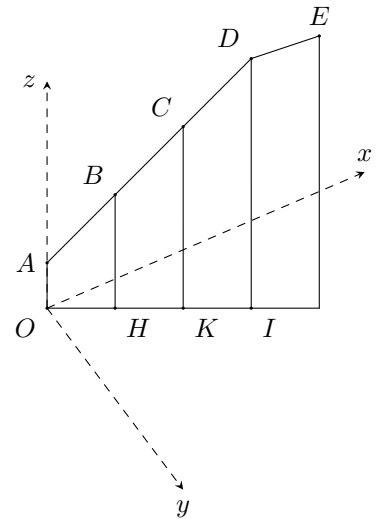
KQ:

Câu 20 Một vật không gian có dạng được mô tả như hình vẽ bên dưới. Biết rằng hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AC = 6$, $BC = 12$ và $CC' = 4$. Hình chóp $S.ABC$ có đáy là $\triangle ABC$ vuông tại A và $SA = 5$. Điểm M là trung điểm của BC và $SG \perp (ABC)$ tại điểm G là trọng tâm của $\triangle ABC$. Góc giữa hai vectơ $\vec{A'M}$ và $\vec{SC'}$ bằng bao nhiêu độ? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



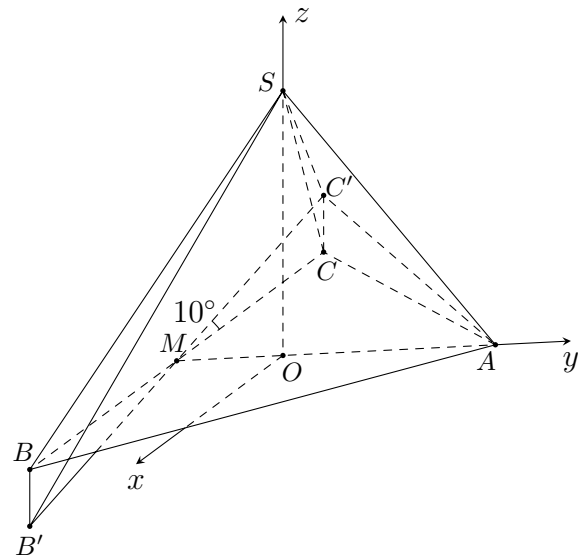
KQ:

Câu 21 Tại khu du lịch nhà đầu tư muốn xây dựng một hệ thống cáp treo đi từ ngọn đồi A sang ngọn đồi E với tốc độ không đổi là $0,5$ (m/s). Trên bản thiết kế hai ngọn đồi được đặt vào hệ trục tọa độ $Oxyz$, đơn vị trên trục là 10 m và mặt đất chính là mặt phẳng (Oxy) . Biết rằng điểm $A(0; 0; 3)$ và $E(16; 16; 10)$. Hệ thống cáp treo có thêm 3 trụ là HB, KC, ID vuông góc với mặt đất và tọa độ $H(4; 4; 0), K(8; 8; 0), I(12; 12; 0)$, các điểm A, B, C, D thẳng hàng với nhau. Một toa cáp treo đi từ điểm A đến điểm B mất 2 phút. Hỏi toa cáp treo cần bao nhiêu giây để đi từ điểm A đến điểm E (làm tròn đến đơn vị giây)?



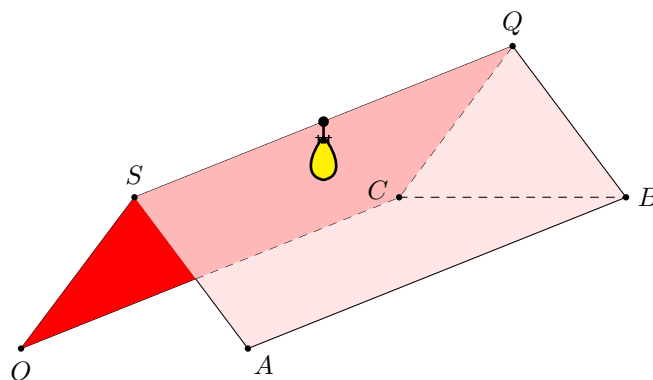
KQ:

Câu 22 Trong bản thiết kế của dự án lắp đặt đường dây điện cho vùng núi tỉnh A, các kĩ sư thiết kế các trụ điện cao 120 m. Để giữ thẳng bằng cho trụ điện, người ta kéo dây cáp nối từ đỉnh trụ S xuống mặt đất tại các điểm A, B, C sao cho $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều, khoảng cách từ chân trụ đến các điểm tiếp đất bằng $40\sqrt{3}$ m. Tuy nhiên trong thực tế, do sườn núi dốc 10° so với mặt biển nên vị trí tiếp đất của dây cáp tại A, B', C' (BB', CC' song song thân trụ điện, tham khảo hình vẽ). Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O trùng với chân trụ điện, (Oxy) song song với mặt biển, A thuộc tia Oy , trục Oz hướng lên trên. Khi đó, tổng độ dài của ba dây cáp SA, SB', SC' bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của mét)?



KQ:

Câu 23 Hình bên dưới minh họa một cái lều hai mái là hai hình chữ nhật giống nhau trong không gian $Oxyz$. Biết các kích thước của mái lều là $SA = 5$ m, $AB = 10$ m, độ cao từ S xuống mặt đất là 4 m. Bạn An muốn trang trí chiếc lều bằng cách treo các sợi dây cờ trang trí từ các góc lều O, A, B, C đến đuôi một chiếc đèn treo từ vị trí chính giữa của SQ , cách SQ bằng 30 cm. Hỏi tổng chiều dài sợi dây cờ trang trí tối thiểu bạn An cần mua là bao nhiêu mét? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

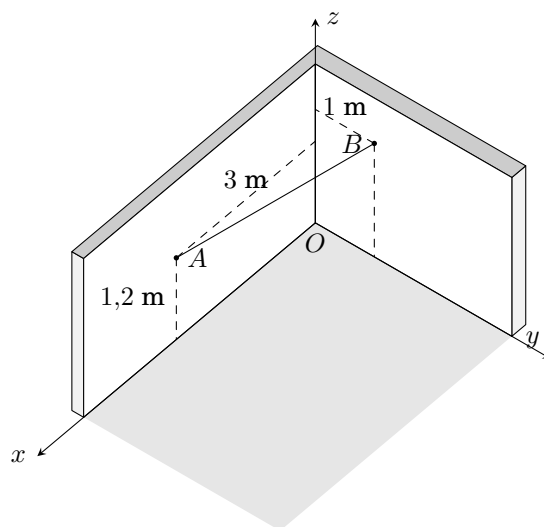


KQ:

Câu 24 Một trạm kiểm soát không lưu đặt tại một sân bay được xây dựng hệ trục tọa độ $Oxyz$ để theo dõi vị trí của các chuyến bay. Gốc tọa độ O đặt tại trạm kiểm soát không lưu. Lúc 8 giờ, máy bay thứ nhất xuất phát từ sân bay, bay theo tia OA lần lượt hợp với ba tia Ox ; Oy ; Oz các góc bằng nhau với tốc độ không đổi là 760 km/h. Sau đó 2 giờ đồng hồ, máy bay thứ hai cũng xuất phát từ sân bay, bay theo tia OB lần lượt hợp với ba tia Ox , Oy' , Oz các góc bằng nhau với tốc độ không đổi là 880 km/h. Tính khoảng cách giữa hai máy bay lúc 10 giờ 30 phút cùng ngày (theo đơn vị ki-lô-mét, làm tròn đến hàng đơn vị).

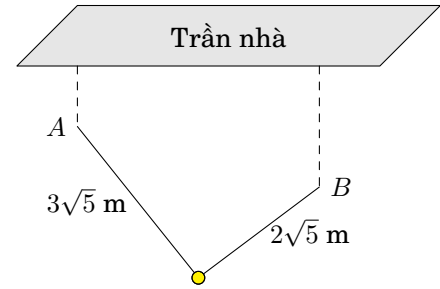
KQ:

Câu 25 Hình bên minh họa một sợi dây được căng giữa hai bức tường (vuông góc với nhau và cùng vuông góc với mặt đất). Đầu A của sợi dây nằm trên bức tường thứ nhất, cách bức tường thứ hai 3 m và cách mặt đất 1,2 m. Đầu B của sợi dây cao hơn đầu A và nằm trên bức tường thứ hai, cách bức tường thứ nhất 1 m. Biết rằng góc giữa dây căng và mặt đất không vượt quá 30° , hỏi khoảng cách từ B đến mặt đất tối đa là bao nhiêu mét? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



KQ:

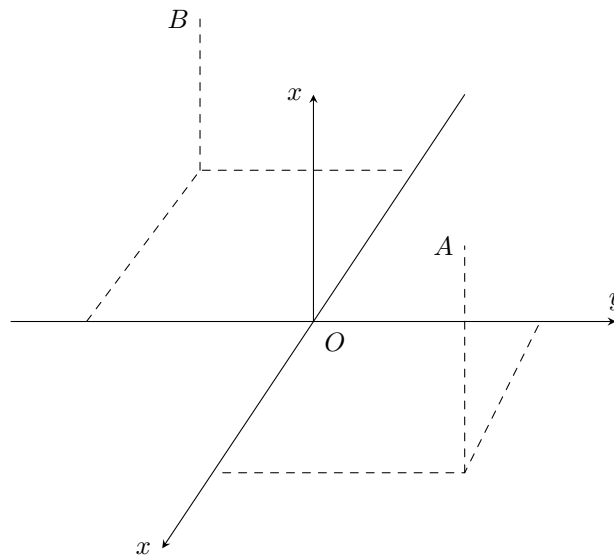
Câu 26 Một đơn vị sự kiện âm thanh, ánh sáng đang lắp đặt một đèn pha sân vận động thật hoành tráng. Trần của sân vận động song song với mặt đất, có treo hai móc thép chắc chắn A và B . Trong không gian $Oxyz$, với đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét, trần sân vận động được mô phỏng bởi mặt phẳng Oxy , tọa độ điểm A và B lần lượt là $(1; 2; -3)$ và $(6; 2; -5)$. Kỹ thuật viên dùng một sợi dây gắn đèn vào hai chiếc móc A và B sao



cho khi đèn ở vị trí cân bằng thì nó cách A một khoảng $3\sqrt{5}$ m và cách B một khoảng $2\sqrt{5}$ m. Vị trí của chiếc đèn pha là $T(a; b; c)$, tính $a + b - c$.

KQ:

Câu 27 Hai chiếc Flycam được điều khiển cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc flycam thứ nhất bay đến vị trí điểm A , chiếc flycam thứ hai bay đến điểm B . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc flycam, mặt phẳng Oxy trùng với mặt đất (coi như phẳng) có trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (đơn vị đo mỗi trục là mét).

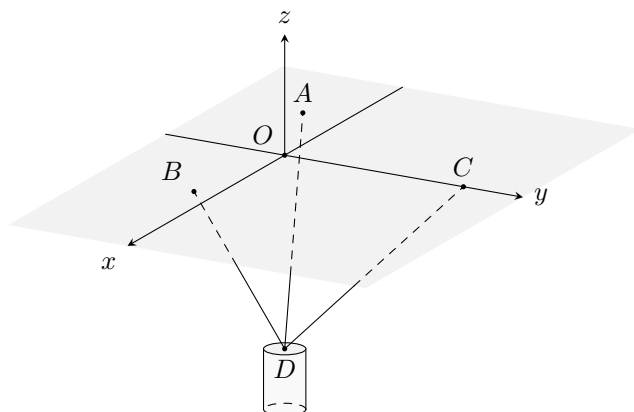


Biết điểm A cách mặt đất 4m, cách điểm xuất phát 5m về phía nam và 6m về phía đông. Vectơ $\vec{OB}$ có độ dài bằng 10 và hợp với các vectơ đơn vị trên các trục tọa độ Ox , Oy , Oz các góc lần lượt là 135° , 120° , 60° . Khoảng cách giữa hai chiếc flycam lúc đó là bao nhiêu mét? (làm tròn đến hàng chục).

KQ:



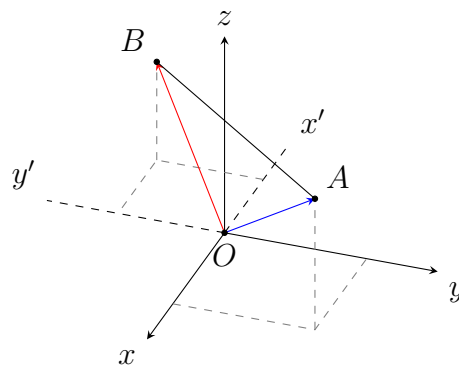
Câu 28 Trong không gian $Oxyz$, một vật được treo bằng ba sợi dây không dẫn, mỗi sợi dây có một đầu lần lượt được gắn tại các điểm $A(-2; -1; 0)$, $B(2; -1; 0)$, $C(0; 4; 0)$, còn đầu kia được gắn với vật tại điểm $D(0; 0; -4)$ như hình vẽ (trong đó mặt phẳng (Oxy) song song với mặt đất, trục Oz hướng thẳng lên trên).



Biết rằng mỗi sợi dây được thiết kế để chịu được lực căng tối đa là 15 N. Để không dây nào bị đứt thì trọng lượng tối đa của vật bằng bao nhiêu Newton (*không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần mười*)?

KQ:

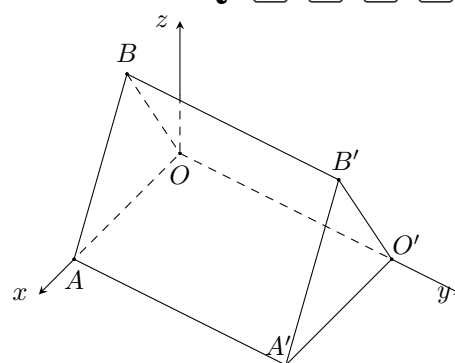
Câu 29 Trạm không lưu sân bay Đà Nẵng xây dựng hệ tọa độ $Oxyz$ (gốc O đặt tại Đà Nẵng) để theo dõi vị trí các chuyến bay. Lúc 6h máy bay A xuất phát từ Đà Nẵng đến TpHCM theo tia OA lần lượt hợp với ba tia Ox ; Oy ; Oz các góc bằng nhau với vận tốc 800 km/h.



Mười phút sau máy bay B đi Hà Nội theo tia OB hợp với ba tia Ox' ; Oy' ; Oz các góc bằng nhau với vận tốc 900 km/h (hình vẽ minh họa). Tính khoảng cách (*đơn vị km và làm tròn đến hàng đơn vị*) giữa hai máy bay A và B lúc 6h30 phút.

KQ:

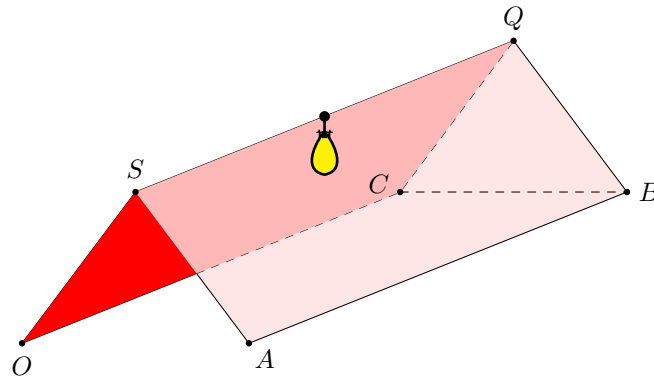
Câu 30 Những căn lều gỗ được phác thảo dưới dạng một hình lăng trụ đứng tam giác $OAB.O'A'B'$ như trong hình dưới. Với hệ trục tọa độ $Oxyz$ thể hiện như hình (đơn vị đo lấy theo centimet), hai điểm A' và B' có tọa độ lần lượt là $(240; 450; 0)$ và $(120; 450; 300)$. Mỗi căn nhà gỗ có chiều dài là a cm, chiều rộng là b cm, mỗi cạnh bên của mặt tiền có độ dài là c cm. Tính $a + b + c$ (làm tròn đến hàng đơn vị).



KQ:

Câu 30 Hình bên dưới minh họa một cái lều hai mái là hai hình chữ nhật giống nhau trong không gian $Oxyz$. Biết các kích thước của mái lều là $SA = 5\text{m}$, $AB = 10\text{m}$, độ cao từ S xuống mặt đất là 4m. Bạn An muốn trang trí chiếc lều bằng cách treo các sợi dây cờ trang trí từ các góc lều O , A , B , C đến đuôi một chiếc đèn treo từ vị trí chính giữa của SQ , cách SQ bằng 30cm. Hỏi tổng chiều dài sợi dây cờ trang trí tối thiểu bạn An cần mua

là bao nhiêu mét? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

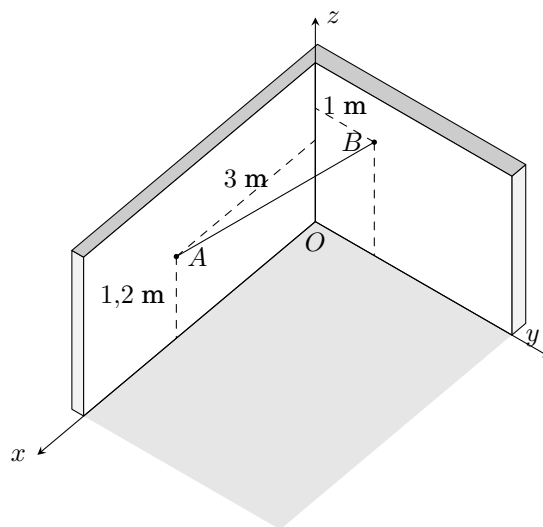


KQ:

Câu 31 Một trạm kiểm soát không lưu đặt tại một sân bay được xây dựng hệ trục tọa độ $Oxyz$ để theo dõi vị trí của các chuyến bay. Gốc tọa độ O đặt tại trạm kiểm soát không lưu. Lúc 8 giờ, máy bay thứ nhất xuất phát từ sân bay, bay theo tia OA lần lượt hợp với ba tia Ox ; Oy ; Oz các góc bằng nhau với tốc độ không đổi là 760 km/h. Sau đó 2 giờ đồng hồ, máy bay thứ hai cũng xuất phát từ sân bay, bay theo tia OB lần lượt hợp với ba tia Ox , Oy' , Oz các góc bằng nhau với tốc độ không đổi là 880 km/h. Tính khoảng cách giữa hai máy bay lúc 10 giờ 30 phút cùng ngày (theo đơn vị ki-lô-mét, làm tròn đến hàng đơn vị).

KQ:

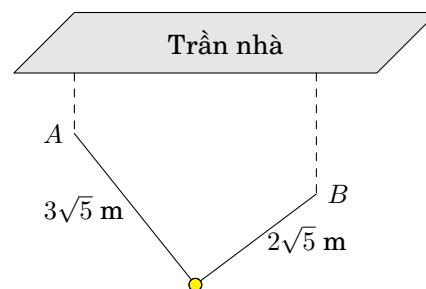
Câu 32 Hình bên minh họa một sợi dây được căng giữa hai bức tường (vuông góc với nhau và cùng vuông góc với mặt đất). Đầu A của sợi dây nằm trên bức tường thứ nhất, cách bức tường thứ hai 3 m và cách mặt đất 1,2 m. Đầu B của sợi dây cao hơn đầu A và nằm trên bức tường thứ hai, cách bức tường thứ nhất 1 m. Biết rằng góc giữa dây căng và mặt đất không vượt quá 30° , hỏi khoảng cách từ B đến mặt đất tối đa là bao nhiêu mét? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



KQ:



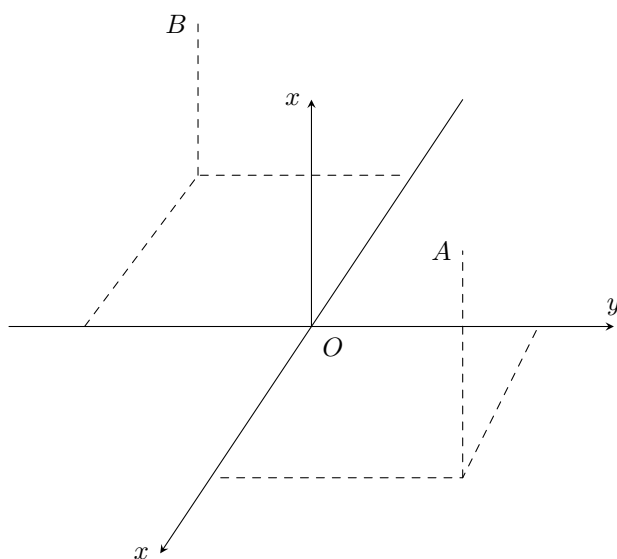
Câu 33 Một đơn vị sự kiện âm thanh, ánh sáng đang lắp đặt một đèn pha sân vận động thật hoành tráng. Trần của sân vận động song song với mặt đất, có treo hai móc thép chắc chắn A và B . Trong không gian $Oxyz$, với đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét, trần sân vận động được mô phỏng bởi mặt phẳng Oxy , tọa độ điểm A và B lần lượt là $(1; 2; -3)$ và $(6; 2; -5)$. Kỹ thuật viên dùng một sợi dây gắn đèn vào hai chiếc móc A và B sao



cho khi đèn ở vị trí cân bằng thì nó cách A một khoảng $3\sqrt{5}$ m và cách B một khoảng $2\sqrt{5}$ m. Vị trí của chiếc đèn pha là $T(a; b; c)$, tính $a + b - c$.

KQ:

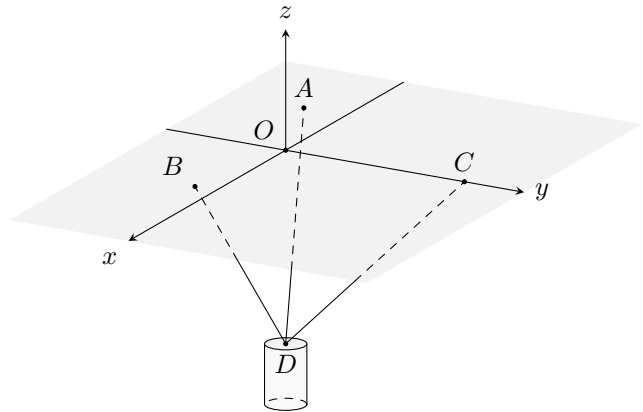
Câu 34 Hai chiếc Flycam được điều khiển cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc flycam thứ nhất bay đến vị trí điểm A , chiếc flycam thứ hai bay đến điểm B . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc flycam, mặt phẳng Oxy trùng với mặt đất (coi như phẳng) có trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (đơn vị đo mỗi trục là mét).



Biết điểm A cách mặt đất 4m, cách điểm xuất phát 5m về phía nam và 6m về phía đông. Vectơ $\overrightarrow{OB}$ có độ dài bằng 10 và hợp với các vectơ đơn vị trên các trục tọa độ Ox , Oy , Oz các góc lần lượt là 135° , 120° , 60° . Khoảng cách giữa hai chiếc flycam lúc đó là bao nhiêu mét? (làm tròn đến hàng chục).

KQ:

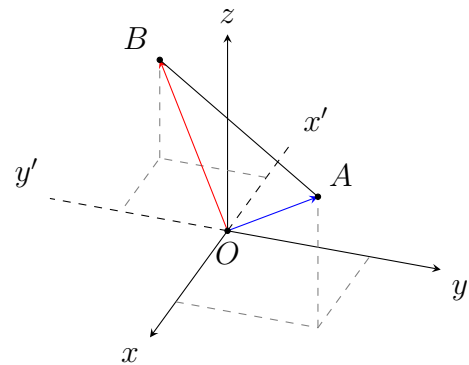
Câu 35 Trong không gian $Oxyz$, một vật được treo bằng ba sợi dây không dẫn, mỗi sợi dây có một đầu lần lượt được gắn tại các điểm $A(-2; -1; 0)$, $B(2; -1; 0)$, $C(0; 4; 0)$, còn đầu kia được gắn với vật tại điểm $D(0; 0; -4)$ như hình vẽ (trong đó mặt phẳng (Oxy) song song với mặt đất, trục Oz hướng thẳng lên trên).



Biết rằng mỗi sợi dây được thiết kế để chịu được lực căng tối đa là 15 N. Để không dây nào bị đứt thì trọng lượng tối đa của vật bằng bao nhiêu Newton (*không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần mười*)?

KQ:

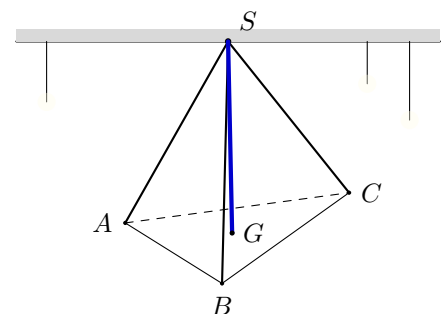
Câu 36 Trạm không lưu sân bay Đà Nẵng xây dựng hệ tọa độ $Oxyz$ (gốc O đặt tại Đà Nẵng) để theo dõi vị trí các chuyến bay. Lúc 6h máy bay A xuất phát từ Đà Nẵng đến TpHCM theo tia OA lần lượt hợp với ba tia Ox ; Oy ; Oz các góc bằng nhau với vận tốc 800 km/h.



Mười phút sau máy bay B đi Hà Nội theo tia OB hợp với ba tia Ox' ; Oy' ; Oz các góc bằng nhau với vận tốc 900 km/h (hình vẽ minh họa). Tính khoảng cách (*đơn vị km và làm tròn đến hàng đơn vị*) giữa hai máy bay A và B lúc 6h30 phút.

KQ:

Câu 37 Một kiến trúc sư đang thiết kế hệ thống đèn thả nghệ thuật cho sảnh của một khách sạn. Cấu trúc gồm một móc treo chính S gắn cố định trên trần nhà. Từ móc S , có ba sợi cáp thép treo ba bóng đèn giống nhau tại các vị trí A , B , C .

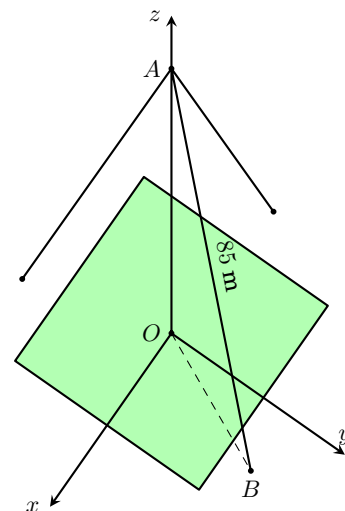


Thông số kỹ thuật được cho như sau: chiều dài ba sợi cáp đều bằng 2,4 m. Do cách bố trí nghệ thuật bất đối xứng, góc tạo bởi các sợi cáp tại móc treo S là $\widehat{ASB} = 60^\circ$, $\widehat{BSC} = 90^\circ$, $\widehat{CSA} = 120^\circ$. Để giúp dây điện và tăng độ cứng vững, kiến trúc sư lắp thêm một thanh trục cứng rỗng nối từ đỉnh S đến trọng tâm G của tam giác ABC . Tính chiều dài của thanh trục SG (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

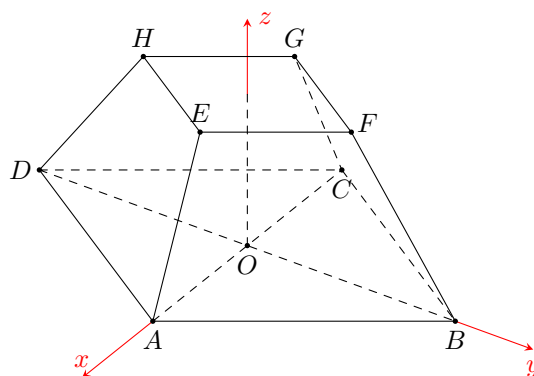


Câu 38 Một công ty viễn thông lắp đặt một cột ăng ten cao 45m trên đỉnh một ngọn đồi (hình vẽ tham khảo). Để giữ cột người ta dùng các sợi dây cáp neo với các chốt cố định trên mặt đất ở chân đồi. Xét một sợi dây cáp neo từ đỉnh A của cột ăng ten xuống một chốt cố định B ở chân đồi có độ dài là 85m. Biết chiều cao của ngọn đồi là 5m. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho gốc tọa độ O tại vị trí chân cột ăng ten trên đỉnh đồi, trục Oz trùng với cột ăng ten, mặt phẳng (Oxy) vuông góc với cột ăng ten tại O như hình vẽ. Hình chiếu vuông góc của OB lên mặt phẳng (Oxy) tạo với trục Ox một góc 30° . Biết tọa độ chốt neo $B(x; y; z)$ có hoành độ và tung độ dương. Tính tổng $x + y + z$ (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



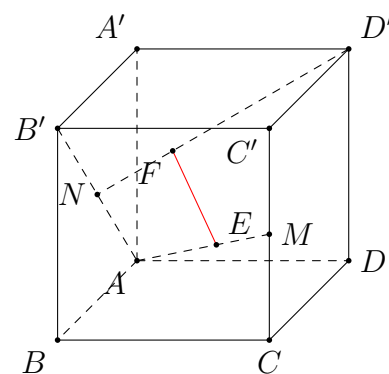
KQ:

Câu 39 Trong không gian với hệ $Oxyz$, cho các điểm $A(19; 0; 0)$, $B(0; 19; 0)$, $E(12; 0; 7)$ và $F(0; 12; 7)$. Biết rằng mặt đáy hình vuông $ABCD$ song song với mặt đỉnh hình vuông $EFGH$ (như hình vẽ). Điểm $S(0; 0; k)$ là đỉnh của hình chóp $S.EFGH$ kết hợp với khối đa diện $ABCD.EFGH$ tạo thành một khối chóp lớn $S.ABCD$. Hỏi thể tích của khối chóp $S.EFGH$ bằng bao nhiêu m^3 ? Biết rằng mỗi đơn vị tương ứng với 1 mét trong thực tế (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



KQ:

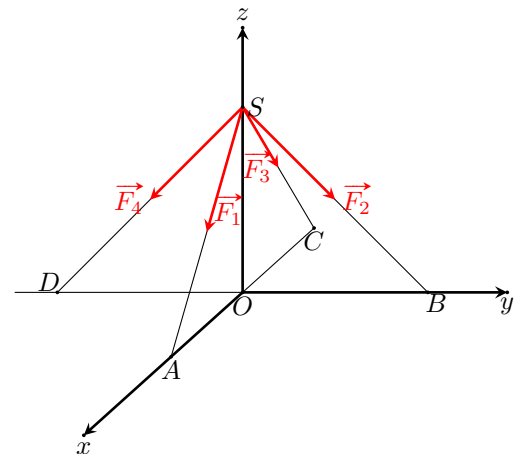
Câu 40 Bạn Minh đang được học trong phòng hình lập phương có cạnh bằng 4 mét và phát hiện ra hai con nhện đang chằng chỉ trong góc căn phòng để săn Muỗi, hai con nhện luôn di chuyển trên hai đường thẳng khác nhau. Giả sử căn phòng được mô hình hóa là hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ với $ABCD$ là nền phòng của Minh thì con nhện thứ nhất được coi như điểm E di chuyển trên đường dây tơ nối từ đỉnh A đến trung điểm M của CC' , con nhện thứ hai được coi như điểm F di chuyển trên đường dây tơ nối từ D' đến tâm N của mặt bên $ABB'A'$.



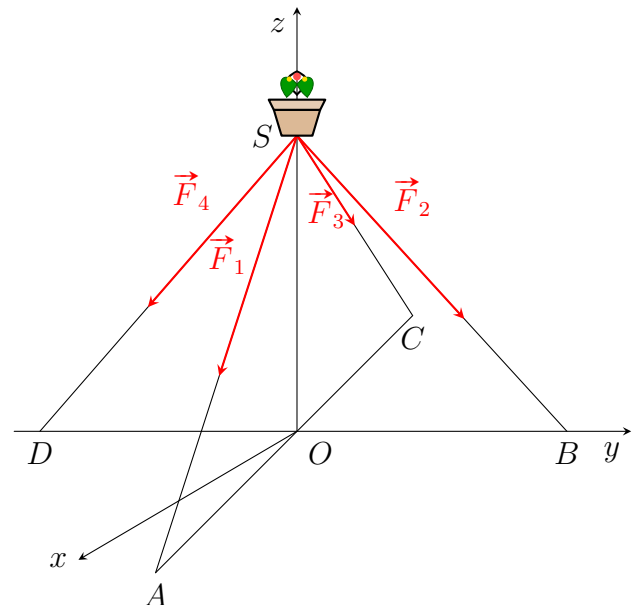
Minh tự hỏi khi đoạn thẳng nối hai con nhện EF vuông góc với chân tường phòng AB thì khoảng cách nhỏ nhất giữa hai con nhện là độ dài nhỏ nhất của EF bằng bao nhiêu? Em hãy giúp bạn Minh xác định giá trị nhỏ nhất M của đoạn thẳng EF này theo đơn vị mét. Tìm $2M$? (Không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng $2M$ đến hàng phần chục theo đơn vị tính độ dài EF là mét).

KQ:    

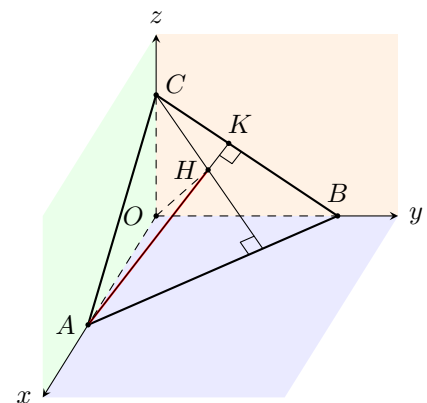
Câu 41 Một chậu cây được đặt trên một giá đỡ có bốn chân với điểm đặt $S(0; 0; 20)$ và các điểm chạm mặt đất của bốn chân lần lượt là $A(20; 0; 0)$, $B(0; 20; 0)$, $C(-20; 0; 0)$, $D(0; -20; 0)$ (đơn vị cm). Cho biết trọng lực tác dụng lên chậu cây có độ lớn 40(N) và được phân bố thành bốn lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ có độ lớn bằng nhau như Hình bên. Tính $|2\vec{F}_1 + \vec{F}_2 - 3\vec{F}_3 + \vec{F}_4|$ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

KQ:    

Câu 42 Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, có một chậu cây được đặt trên một giá đỡ có bốn chân với điểm đặt $S(0; 0; 20)$ và các điểm chạm mặt đất của bốn chân lần lượt là $A(20; 0; 0)$, $B(0; 20; 0)$, $C(-20; 0; 0)$, $D(0; -20; 0)$ (đơn vị centimet). Cho biết trọng lực tác dụng lên chậu cây có độ lớn 40 N và được phân bố thành bốn lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ có độ lớn bằng nhau như hình vẽ. Biết rằng mỗi centimet biểu diễn 1 N, tọa độ của lực $\vec{F}_4 = (a; b; c)$. Tính $a + b + c$.

KQ:    

Câu 43 Tại góc một phòng thí nghiệm, người ta thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho gốc O trùng với góc tường, các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với ba mép tường vuông góc với nhau. Một tấm kính bảo hộ hình tam giác ABC được gắn vào khung đỡ sao cho ba đỉnh A, B, C lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy, Oz . Biết rằng khoảng cách từ góc tường O đến ba đỉnh A, B, C lần lượt là 1,8 mét, 3 mét, 4 mét. Kỹ sư cần dán một dải băng cảnh báo chạy dọc từ đỉnh A đến trực tâm H của tam giác ABC . Tính độ dài của dải băng AH theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

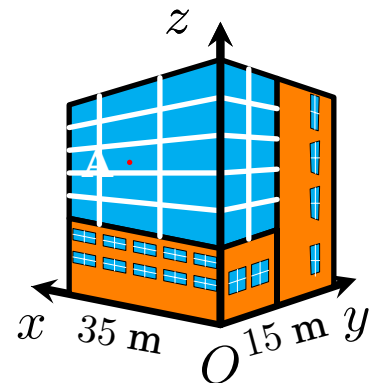
KQ:    



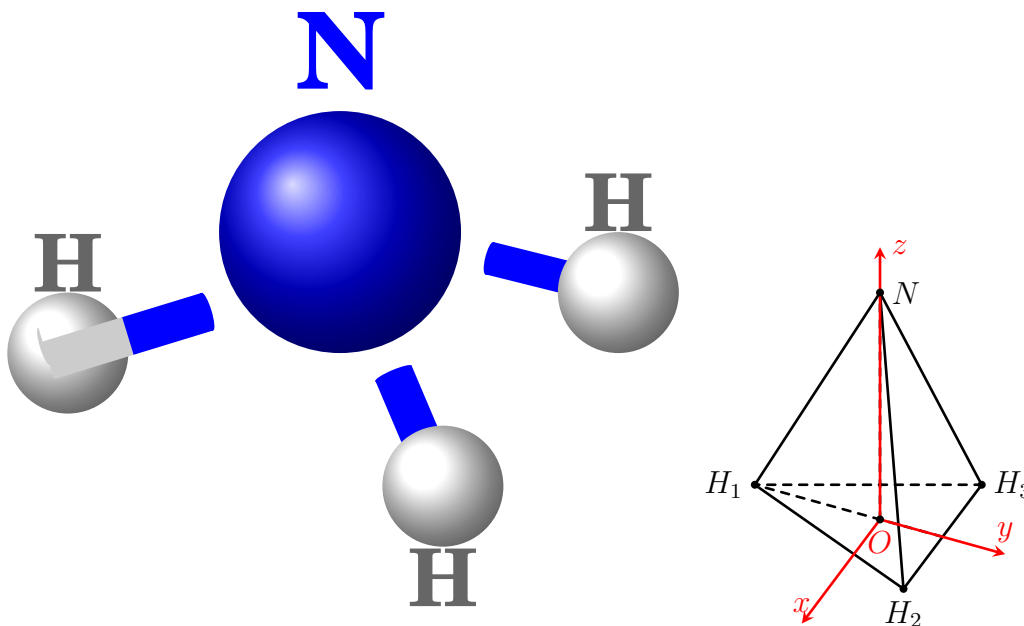
Câu 44 Một tòa nhà có dạng hình hộp chữ nhật với kích thước chiều dài 35 m, chiều rộng 15 m, chiều cao 28 m. Người ta định vị các vị trí trong tòa nhà dựa vào một hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

Chị Hương đang đứng ở vị trí $A(20; 5; 20)$ và di chuyển đến thang máy để xuống sảnh chờ đón khách. Biết vị trí vào thang máy có hoành độ $x = 15$ và tung độ $y = 3$. Hỏi chị Hương mất bao nhiêu giây để di chuyển, nếu từ vị trí A có thể đi thẳng đến cửa thang máy và chị ấy đi bộ với tốc độ $1,5\text{m/s}$? Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.

KQ: 



Câu 45 Trong Hóa học, cấu tạo của phân tử ammoniac (NH_3) có dạng hình chóp tam giác đều mà đỉnh là nguyên tử nitrogen (N) và đáy là tam giác $H_1H_2H_3$ với H_1, H_2, H_3 là vị trí của ba nguyên tử hydrogen (H). Góc tạo bởi liên kết $\text{H} - \text{N} - \text{H}$, có hai cạnh là hai đoạn thẳng nối N với hai trong ba điểm H_1, H_2, H_3 (chẳng hạn $\overline{H_1N H_2}$), gọi là góc liên kết của phân tử NH_3 . Góc này xấp xỉ 107° .



Trong không gian $Oxyz$, cho một phân tử NH_3 được biểu diễn bởi hình chóp tam giác đều $N.H_1H_2H_3$ với O là tâm của đáy. Nguyên tử nitrogen được biểu diễn bởi điểm N thuộc trục Oz , ba nguyên tử hydrogen ở các vị trí H_1, H_2, H_3 trong đó $H_1(0; -2; 0)$ và H_2H_3 song song với trục Ox (xem hình vẽ). Tính khoảng cách giữa nguyên tử nitrogen với mỗi nguyên tử hydrogen (làm tròn các kết quả tính toán đến hàng phần trăm). KQ: 

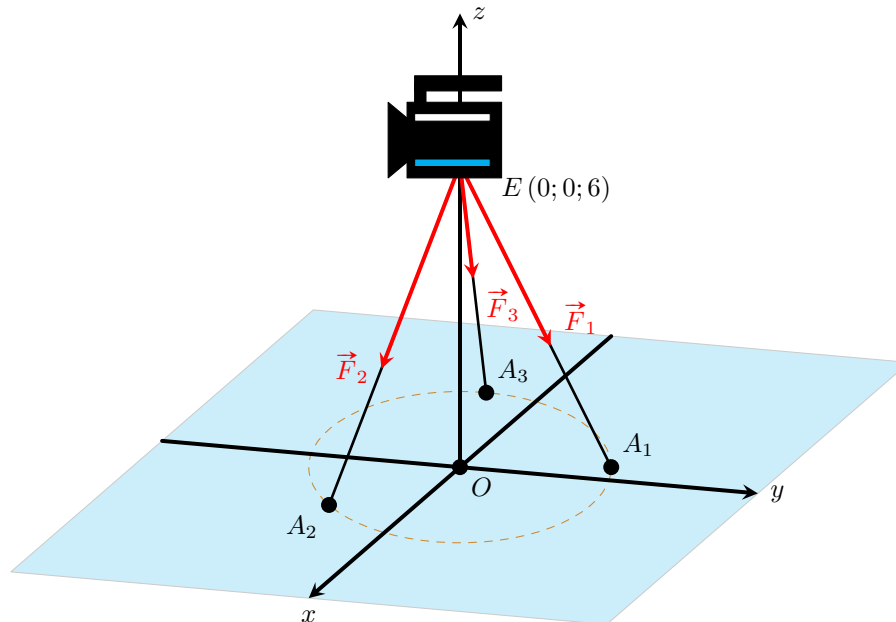
Câu 46 Một chiếc máy quay được đặt trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt $E(0; 0; 6)$

và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là

$$A_1(0; 1; 0), A_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right), A_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right).$$

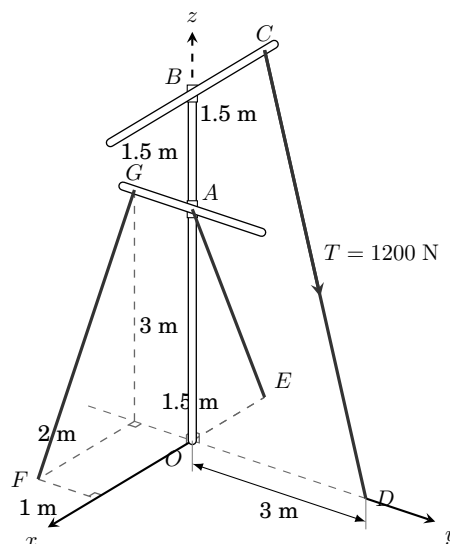
Biết rằng trọng lượng của chiếc máy là 300 N (hình vẽ). Tính $\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_3$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

KQ:



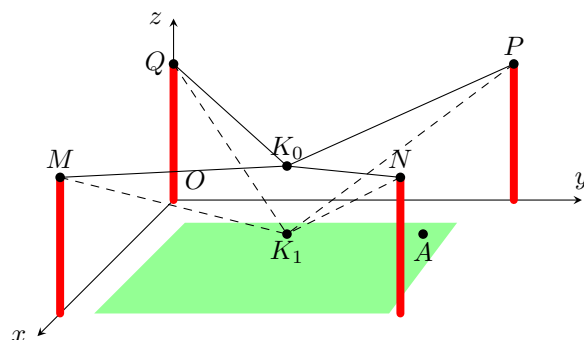
Câu 47

Một ống phun nước có hình dạng như hình vẽ dưới. Để giữ cho ống nước được cân bằng không bị nghiêng kỹ sư sử dụng ba đoạn thép để nối các điểm C, A, G với mặt đất, các đoạn thép CD, GF, AE có độ lớn lực căng lần lượt bằng 1200 N, 800 N và 600 N. Trong hệ tọa độ $Oxyz$, coi gốc tọa độ là chân ống nước, trục Oz hướng lên trời, mặt đất là mặt phẳng (Oxy) các thông số được cho như hình vẽ, đơn vị trên các hệ trục tọa độ tính bằng mét. Coi đường kính ống không đáng kể, độ lớn vectơ hợp lực của ba sợi thép tác động lên ống nước là bao nhiêu Newton (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



KQ:    

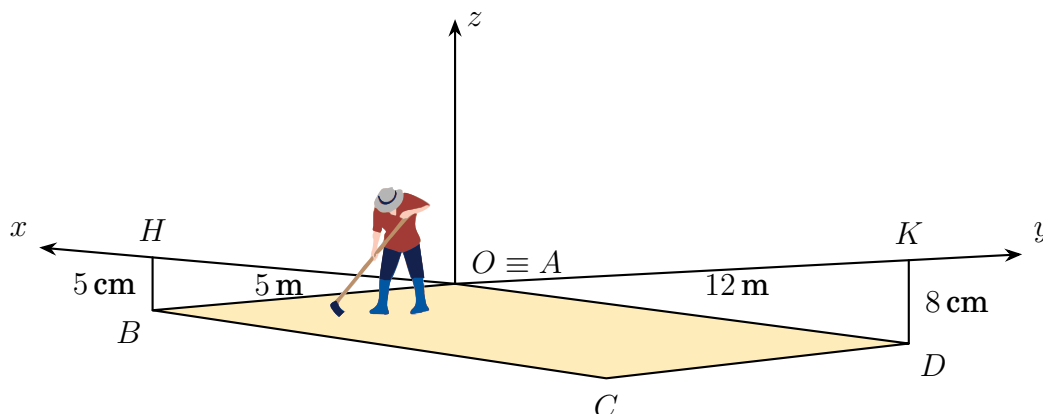
Câu 48 Người ta cần lắp một camera phía trên sân bóng để phát sóng truyền hình một trận bóng đá, camera có thể di động để luôn thu được hình ảnh rõ nét về diễn biến trên sân. Các kĩ sư dự định trồng bốn chiếc cột cao 30 m và sử dụng hệ thống cáp gắn vào bốn đầu cột để giữ camera ở vị trí mong muốn. Mô hình thiết kế được xây dựng như sau: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị độ dài trên mỗi trục là 1 m), các đỉnh của bốn chiếc cột lần lượt là các điểm $M(90; 0; 30)$, $N(90; 120; 30)$, $P(0; 120; 30)$, $Q(0; 0; 30)$ (như hình vẽ). Giả sử K_0 là vị trí ban đầu của camera có cao độ bằng 25 và $K_0M = K_0N = K_0P = K_0Q$. Để theo dõi quả bóng đến vị trí A , camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng xuống điểm K_1 có cao độ bằng 19.



Biết trung điểm đoạn K_0K_1 có tọa độ là $(a; b; c)$. Khi đó hãy tính giá trị biểu thức $T = 5a + 7b + 9c$.

KQ:    

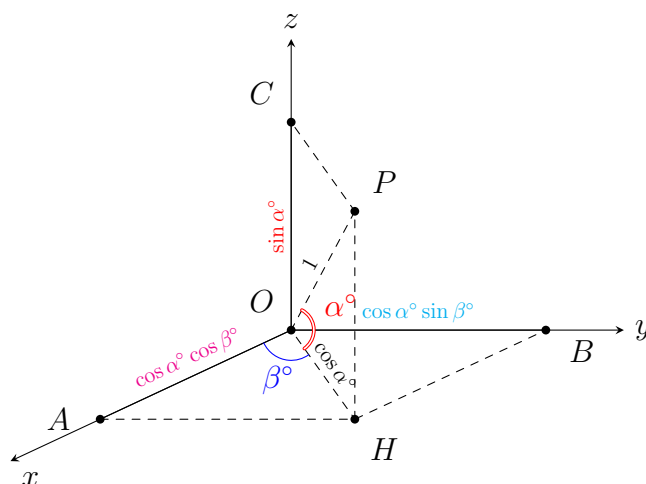
Câu 49 Ở một số vùng quê ở Việt Nam, trước mỗi nhà thường có một khoảng sân rộng để phơi lúa vào mùa gặt và cũng là nơi để tổ chức một số sự kiện: đám cưới, đám hỏi, thôi nôi. Bác Nam tính xây một sân trước cửa nhà hình chữ nhật $ABCD$ có độ dài các cạnh lần lượt là $AB = 5$ và $AD = 12$ m. Để tiện cho việc thoát nước khi trời mưa và khi rửa sân nên bác Nam xây vị trí B thấp hơn vị trí A là 5 cm, vị trí D thấp hơn vị trí A là 8 cm.



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, hãy xác định xem vị trí C thấp hơn vị trí A bao nhiêu cm? (làm tròn đến cm).

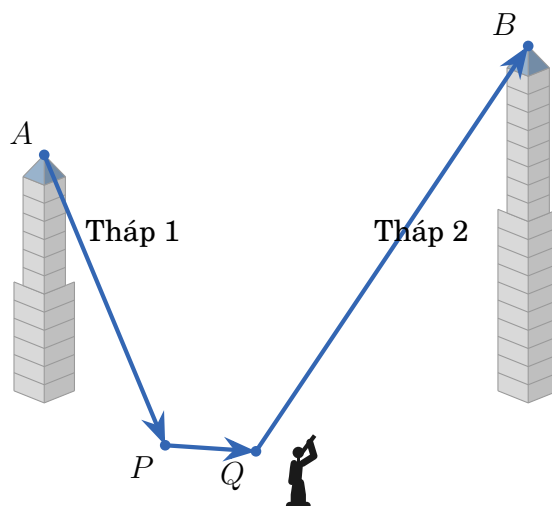
KQ:    

Câu 50 Xét Trái Đất trong không gian $Oxyz$, với O là tâm Trái Đất, tia Ox chứa giao điểm của kinh tuyến gốc và xích đạo, tia Oz chứa điểm cực Bắc N, tia Oy giao xích đạo tại điểm thuộc bán cầu Đông, một đơn vị dài trong không gian $Oxyz$ tương ứng với 6371 km trong thực tế. Biết rằng nếu điểm M có vĩ độ, kinh độ tương ứng là $\alpha^\circ\text{N}$, $\beta^\circ\text{E}$; ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$; $0^\circ < \beta < 180^\circ$) thì điểm M có tọa độ là $M(\cos \alpha^\circ \cos \beta^\circ; \cos \alpha^\circ \sin \beta^\circ; \sin \alpha^\circ)$. Tính khoảng cách giữa hai vị trí trên bề mặt Trái Đất là Cầu Hiền Lương (cũ) (Quảng Trị) có vĩ độ, kinh độ tương ứng là $17,0045^\circ\text{N}$; $107,0517^\circ\text{E}$ và Dinh Độc Lập (TP Hồ Chí Minh) có vĩ độ, kinh độ tương ứng là $10,777^\circ\text{N}$; $106,695^\circ\text{E}$ (đơn vị: km, làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



KQ:

Câu 51 Một nhân viên cứu hộ đứng ở mặt đất, điều khiển một drone chở vật tư y tế, dự kiến bay thẳng từ đỉnh A của tháp thứ nhất đến đỉnh B của tháp thứ hai. Tuy nhiên, do gặp một khu vực nhiễu sóng an ninh, nên drone phải bay thẳng từ A đến một điểm P trên mặt đất để hạ cánh. Nhân viên đó mang drone từ điểm P dọc theo hướng Tây 40 m đến điểm Q và sau đó drone bay thẳng từ Q lên đỉnh B của tháp thứ hai (Hình vẽ). Biết đỉnh A cao 100 m và có hình chiếu lên mặt đất cách vị trí người đứng ban đầu 200 m về phía Đông và 100 m về phía Nam. Đỉnh B cao 300 m và có hình chiếu lên mặt đất cách vị trí người đứng ban đầu 140 m về phía Tây và 200 m về phía Nam.

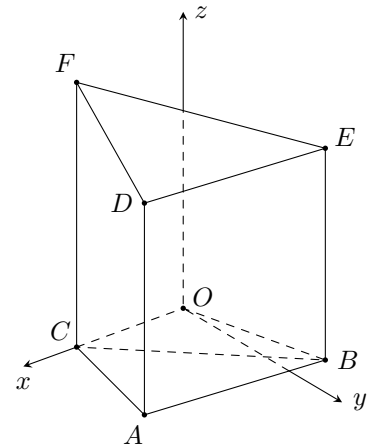




Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc tại vị trí người đứng ban đầu, mặt phẳng (Oxy) là mặt đất, trục Ox hướng Đông, trục Oy hướng Nam và trục Oz hướng thẳng đứng lên trên (đơn vị trên các trục là 100 m). Để hoàn thành nhiệm vụ, người đó chọn vị trí điểm $P(a; b; c)$ trên mặt đất sao cho tổng quãng đường bay là ngắn nhất. Tính giá trị của biểu thức $S = 2a + 4b + c$.

KQ:

Câu 52 Một giàn pin năng lượng mặt trời dạng khối đa diện $ABCDEF$. Trong không gian $Oxyz$ (mặt sàn là (Oxy) , tham khảo hình vẽ), xét khối đa diện $ABCDEF$ với $A(3; 1; 0)$, $B(-1; 5; 0)$, $C(2; 0; 0)$ và các đỉnh trên mặt trên nghiêng $D(3; 1; 6)$, $E(-1; 5; 6)$, $F(2; 0; 9)$. Một bản lề được gắn dọc theo cạnh AB . Trời nổi gió lớn, kíp kỹ thuật hạ khung bằng cách xoay đúng 90° quanh trục bản lề AB để khung nằm thấp hơn, tránh gió. Khi xoay khung 90° quanh trục AB , điểm D chạm sàn (Oxy) . Điểm F ở vị trí $F_2(a; b; c)$. Tính $T = 3a - b - 9c$.



KQ:

BẢNG ĐÁP ÁN ĐÚNG SAI Đ/S

Câu 1. Đ Đ S Đ

Câu 9. Đ S S Đ

Câu 17. Đ S S Đ

Câu 25. S Đ Đ S

Câu 2. S S Đ Đ

Câu 10. Đ Đ S Đ

Câu 18. Đ S S Đ

Câu 26. S Đ S Đ

Câu 3. Đ S Đ Đ

Câu 11. Đ S Đ Đ

Câu 19. Đ Đ S S

Câu 27. S S Đ S

Câu 4. S Đ S S

Câu 12. Đ S Đ S

Câu 20. S Đ Đ Đ

Câu 28. Đ S S Đ

Câu 5. Đ S Đ Đ

Câu 13. S Đ Đ Đ

Câu 21. Đ Đ Đ S

Câu 29. S Đ Đ S

Câu 6. Đ Đ S S

Câu 14. Đ Đ S S

Câu 22. Đ Đ S Đ

Câu 7. S Đ S Đ

Câu 15. S Đ Đ Đ

Câu 23. Đ Đ S Đ

Câu 8. Đ S Đ S

Câu 16. Đ S S Đ

Câu 24. Đ Đ S Đ

ĐÁP SỐ PHẦN TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. 1 5 5 5

Câu 2. 1 0

Câu 3. 7 , 6 5

Câu 4. 2 3 , 4

Câu 5. 1 3

Câu 6. 1 4

Câu 6. 2 8 , 2

Câu 7. 2 0 2 6

Câu 8. 6

Câu 9. 2 , 5

Câu 10. 1 5

Câu 11. 3 , 3 3

Câu 12. 4 5

Câu 13. 0 , 3 2

Câu 14. 2 , 8 9

Câu 15. 2 2 9

Câu 16. 1 6 5 0

Câu 17. 2 8 2

Câu 18. 2 8

Câu 19. 6 4

Câu 20. 1 2 3

Câu 21. 4 7 5

Câu 22. 4 1 6

Câu 23. 2 7 , 6

Câu 24. 1 8 0 2

Câu 25. 3

Câu 26. 1 5



Câu 27. 1 6 , 4

Câu 28. 3 2 , 7

Câu 29. 5 7 4

Câu 30. 1 0 1 3

Câu 30. 2 7 , 6

Câu 31. 1 8 0 2

Câu 32. 3

Câu 33. 1 5

Câu 34. 1 6 , 4

Câu 35. 3 2 , 7

Câu 36. 5 7 4

Câu 37. 1 , 3 9

Câu 38. 8 8 , 9

Câu 39. 1 1 5 2

Câu 40. 3 , 6

Câu 41. 5 1

Câu 42. - 2 0

Câu 43. 1 , 0 8

Câu 44. 1 4

Câu 45. 2 , 1 5

Câu 46. 9 8 6 1

Câu 47. 2 3 1 1

Câu 48. 8 4 3

Câu 49. 1 3

Câu 50. 6 9 0

Câu 51. 7 , 5

Câu 52. 8

NGUYÊN HÀM. TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Mục lục của chương

1. Toán thực tế liên quan đến nguyên hàm, tích phân ... 129
2. Toán thực tế ứng dụng tích phân tính diện tích hình phẳng 160
3. Toán thực tế ứng dụng tích phân tính thể tích 192



TOÁN THỰC TẾ LIÊN QUAN ĐẾN NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN

Chủ đề 1

1 LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Định nghĩa nguyên hàm



- ♦ Cho hàm số $f(x)$ xác định trên khoảng $\mathcal{K}$. Hàm số $F(x)$ gọi là **nguyên hàm** của hàm số $f(x)$ trên $\mathcal{K}$ nếu $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathcal{K}$.
- ♦ Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ thì họ các nguyên hàm của hàm số $f(x)$ là $F(x) + C$, với $C \in \mathbb{R}$.

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \text{ với } C \in \mathbb{R}$$

2 Tính chất của nguyên hàm

- ♦ $\int f'(x) dx = f(x) + C$, với $C \in \mathbb{R}$.
- ♦ $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$, với $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- ♦ $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$.

3 Nguyên hàm của một số hàm số sơ cấp

$\int 0 dx = C$	$\int 1 dx = x + C$
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$	$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$
$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + C$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

- ♦ **Một số công thức nguyên hàm đặc biệt**

$$\int (ax + b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax + b)^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + C, \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{ax + b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln |ax + b| + C$$

$$\int \sin(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cdot \cos(ax + b) + C$$

$$\int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \cdot \sin(ax + b) + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(ax + b)} dx = \frac{1}{a} \cdot \tan(ax + b) + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(ax + b)} dx = -\frac{1}{a} \cdot \cot(ax + b) + C$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax+b} + C$$

$$\int a^{mx+n} dx = \frac{1}{m} \cdot \frac{a^{mx+n}}{\ln a} + C$$

4 Ý nghĩa vật lý của nguyên hàm

♦ Một vật chuyển động có phương trình vận tốc theo thời gian t là $v(t)$ thì phương trình chuyển động của vật là $s(t) = \int v(t) dt$.

♦ Một vật chuyển động có phương trình gia tốc theo thời gian t là $a(t)$ thì phương trình vận tốc của vật là $v(t) = \int a(t) dt$.

II Định nghĩa tích phân



Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a; b]$. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$. Hiệu số $F(b) - F(a)$ gọi là **tích phân** từ a đến b (hay tích phân xác định trên đoạn $[a; b]$) của hàm số $f(x)$, kí hiệu là $\int_a^b f(x) dx$.

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

5 Tính chất của tích phân

♦ $\int_a^a f(x) dx = 0$.



$$\diamond \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

$$\diamond \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx, \text{ với } k \in \mathbb{R}.$$

$$\diamond \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

$$\diamond \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

$$\diamond \text{ Tích phân không phụ thuộc vào ẩn, nghĩa là } \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt.$$

6 Ý nghĩa vật lí của tích phân Một vật chuyển động dọc theo một đường thẳng sao cho vận tốc của nó tại thời điểm t có phương trình là $v = v(t)$. Khi đó

♦ Độ dịch chuyển của vật trong khoảng thời gian từ t_1 tới t_2 là

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t) dt.$$

♦ Quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian từ t_1 tới t_2 là

$$\int_{t_1}^{t_2} |v(t)| dt.$$

III BÀI TẬP ÁP DỤNG

1 Trắc nghiệm đúng sai

Câu 1 (CT-THPTQG 2026). Một hệ thống pin năng lượng mặt trời gồm các tấm pin được kết nối với một bộ lưu trữ điện. Trong thời gian mặt trời chiếu sáng của một ngày, năng lượng điện thu được từ các tấm pin được lưu trong bộ lưu trữ điện. Gọi $F(t)$ là năng lượng điện (kWh) lưu trữ được kể từ thời điểm hệ thống bắt đầu hoạt động đến thời điểm t , trong đó t là thời gian tính theo giờ ($0 \leq t \leq 12$) và thời điểm hệ thống bắt đầu hoạt động ứng với $t = 0$. Biết rằng $F(0) = 0$. Tốc độ lưu trữ năng lượng điện (kW) của hệ thống này là hàm số $f(t) = F'(t)$ với $0 \leq t \leq 12$. Số liệu ghi nhận được ở một ngày cụ thể trong năm cho thấy $f(t) = -0,15t^2 + 1,8t$ với $0 \leq t \leq 12$.

a $F(t) = -0,05t^3 + 0,9t^2$ với $0 \leq t \leq 12$.

b Năng lượng điện (kWh) lưu trữ được kể từ thời điểm $t = a$ đến thời điểm $t = b$ ($0 \leq a < b \leq 12$) là $\int_a^b f(t) dt$.

- c** Năng lượng điện lưu trữ được kể từ thời điểm $t = 1$ đến thời điểm $t = 5$ nhỏ hơn 15,3 kWh.
- d** Năng lượng điện lưu trữ được kể từ thời điểm $t = 1$ đến thời điểm $t = 9$ gấp hai lần năng lượng điện lưu trữ được kể từ thời điểm $t = 1$ đến thời điểm $t = 5$.

Câu 2 Giả sử lợi nhuận biên (tính bằng triệu đồng) của một sản phẩm được mô hình hóa bằng công thức $P'(x) = -0,0008x + 10,4$. Ở đây $P(x)$ là lợi nhuận (tính bằng triệu đồng) khi bán được x đơn vị sản phẩm.

- a** Lợi nhuận khi bán được 50 sản phẩm đầu tiên là 519 triệu đồng.
- b** Biết sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên a đơn vị sản phẩm lớn hơn 517 triệu đồng, khi đó giá trị nhỏ nhất của a là 101.
- c** Lợi nhuận khi bán được x đơn vị sản phẩm được tính bằng công thức $P(x) = -0,0008x + 10,4x$.
- d** Sự thay đổi của lợi nhuận khi doanh số tăng từ 50 lên 55 đơn vị sản phẩm là 51,79 triệu đồng.

Câu 3 Những ngày giáp Tết Nguyên Đán cũng là dịp bước vào vụ Đông Xuân, bà con nông dân tích cực xuống đồng cấy lúa. Qua nghiên cứu một giống lúa mới, các nhà khoa học nhận thấy một cây lúa tính từ lúc được cấy bằng một cây mạ với chiều cao 20 cm có tốc độ tăng trưởng chiều cao cho bởi hàm số $v(t) = -0,1t^3 + 1,1t^2$, trong đó t tính theo tuần, $v(t)$ tính bằng cm/tuần. Gọi $h(t)$ là chiều cao của cây lúa ở tuần thứ t ($t \geq 0$).

- a** $h(t) = -\frac{1}{40}t^4 + \frac{11}{30}t^3 + 20$.
- b** Giai đoạn tăng trưởng chiều cao của cây lúa kéo dài 12 tuần.
- c** Vào thời điểm cây lúa phát triển nhanh nhất, chiều cao của cây đã lớn hơn 80 cm.
- d** Chiều cao tối đa của cây lúa là 150 cm.

Câu 4 Mức nước trong hồ chứa của nhà máy điện thủy triều thay đổi trong suốt một ngày do nước chảy ra (khi thủy triều xuống) và nước chảy vào (khi thủy triều lên). Tốc độ thay đổi của mực nước trong hồ chứa được cho bởi hàm số $h'(t) = \frac{1}{216}(5t^2 - 120t + 480)$ (mét/giờ), trong đó $h(t)$ (mét) là mực nước trong hồ chứa tại thời điểm t giờ ($0 \leq t \leq 24$). Tại thời điểm $t = 0$ giờ, mực nước trong hồ chứa là 6 mét.

(Nguồn: A.Bigalk et al, Mathematik, Grundkrurs ma-1, Cornelsen 2016).

- a** Giá trị của hàm số $h(t)$ bằng 6 tại $t = 0$.
- b** $h(t) = \frac{5}{648}t^3 - \frac{5}{18}t^2 + \frac{20}{9}t + C$ ($0 \leq t \leq 24$) với C là một hằng số xác định.
- c** Tại thời điểm $t = 18$ giờ, mực nước trong hồ chứa là 1 mét.
- d** Mực nước trong hồ chứa không thể vượt quá 11 mét.

Câu 5 Một khinh khí cầu bay với độ cao (so với mực nước biển) tại thời điểm t là $h(t)$, trong đó t tính bằng phút, $h(t)$ tính bằng mét. Tốc độ bay của khinh khí cầu được cho bởi hàm số $v(t) = -0,12t^2 + 1,2t$ với $v(t)$ tính bằng mét/phút. Tại thời điểm xuất phát ($t = 0$) khinh khí cầu ở độ cao 520 m.

- a** $h(t) = -0,04t^3 + 0,6t^2$ ($0 \leq t \leq 29$).



- b** Tại thời điểm $t = 3$ phút, độ cao của khinh khí cầu là 524,32 m.
- c** Độ cao tối đa của khinh khí cầu khi bay là 540 m.
- d** Sau 15 phút từ khi xuất phát thì khinh khí cầu trở lại độ cao khi bắt đầu xuất phát.

Câu 6 Trong dây chuyền sản xuất sữa chua hiện đại của một nhà máy thực phẩm, từng giọt sữa chua âm thầm chuyển mình dưới tác động của hàng triệu vi khuẩn Lactic, những “nghệ nhân tí hon” kiến tạo vị chua thanh đặc trưng. Mật độ vi khuẩn (số triệu tế bào trên mỗi ml sữa chua) tại thời điểm t (giờ) được kí hiệu là $N(t)$. Ban đầu ($t = 0$ giờ), mật độ vi khuẩn đo được là $N(0) = 10$ triệu tế bào/ml. Do sự thay đổi về nguồn dinh dưỡng (đường lactose giảm) và độ pH (axit lactic tăng) nên tốc độ thay đổi mật độ vi khuẩn $N'(t)$ (đơn vị: triệu tế bào/ml mỗi giờ) được mô hình hóa bởi công thức $N'(t) = 18t - 3t^2$ (triệu tế bào/ml mỗi giờ) với t là thời gian tính bằng giờ ($0 \leq t \leq 7$).

- a** $N'(1) = 15$ triệu tế bào/ml giờ.
- b** $\int N'(t) dt = 9t^2 - t^3$.
- c** So với lúc ban đầu ($t = 0$), mật độ vi khuẩn đã tăng thêm 108 triệu tế bào/ml khi đến thời điểm $t = 6$ giờ.
- d** Tại thời điểm $t = 7$ giờ, mật độ vi khuẩn trong 1 ml sữa chua là 108 triệu tế bào/ml.

Câu 7 Cây cà chua khi trồng có chiều cao 5 cm. Tốc độ tăng chiều cao của cây cà chua sau khi trồng t tuần được cho bởi hàm số $v(t) = -0,1t^3 + t^2$ (centimét/tuần). Gọi $h(t)$ là độ cao của cây cà chua ở tuần thứ t , đơn vị: centimét.

- a** Vào thời điểm cây cà chua đó phát triển nhanh nhất, chiều cao của cây cà chua nhỏ hơn 54 cm.
- b** Cây cà chua đó có thể phát triển và cao hơn 88 cm.
- c** Tốc độ tăng chiều cao của cây cà chua sau khi trồng được 2 tuần là 3,2 centimét/tuần.
- d** Giai đoạn tăng trưởng của cây cà chua đó kéo dài 8 tuần.

Câu 8 Vào năm 2014, dân số nước ta khoảng 90,7 triệu người. Giả sử, dân số nước ta sau t năm được xác định bởi hàm số $S(t)$ (đơn vị: triệu người), trong đó tốc độ gia tăng dân số được cho bởi $S'(t) = 1,2698e^{0,014t}$, với t là số năm kể từ năm 2014, $S'(t)$ tính bằng triệu người/năm.

- a** $S(t)$ là một nguyên hàm của $S'(t)$.
- b** $S(t) = 90,7e^{0,014t} + 90,7$.
- c** Theo công thức trên, tốc độ tăng dân số nước ta năm 2034 (làm tròn đến hàng phần mười của triệu người/năm) khoảng 1,7 triệu người/năm.
- d** Theo công thức trên, dân số nước ta năm 2034 (làm tròn đến hàng đơn vị của triệu người) là khoảng 120 triệu người.

Câu 9 Một miếng thịt sống được lấy ra khỏi ngăn đá của tủ lạnh và để trên bàn để rã đông. Nhiệt độ của miếng thịt nó được lấy ra khỏi ngăn đá là -4°C và sau t giờ nhiệt độ của miếng thịt tăng với tốc độ $T'(t) = 7e^{-0,35t}$ ($^\circ\text{C}$ /giờ) (tính từ thời điểm miếng thịt được lấy ra từ ngăn đá tủ lạnh). Miếng thịt này được rã đông khi nhiệt độ của nó đạt đến 10°C .

- a** Tại thời điểm 2h tính từ lúc lấy thịt ra khỏi ngăn đá, tốc độ thay đổi nhiệt độ của miếng thịt khoảng $3,48^\circ\text{C}$ /giờ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

- b** Nhiệt độ miếng thịt tính từ thời điểm được lấy khỏi ngăn đá là $T(t) = 7e^{-0,35t} - 11$ ($^{\circ}\text{C}$).
- c** Tính từ lúc lấy thịt ra khỏi ngăn đá, cần 3,44 giờ để miếng thịt nướng được rã đông (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của giờ).
- d** Tính từ lúc lấy thịt ra khỏi ngăn đá, nhiệt độ của miếng thịt vào khoảng 0°C sau 36 phút (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của phút).

Câu 10 Tại một khu di tích vào ngày lễ hội hàng năm, tốc độ thay đổi lượng khách tham quan được biểu diễn bằng hàm số $Q'(t) = 4t^3 - 72t^2 + 288t$, trong đó t tính bằng giờ ($0 \leq t \leq 13$), $Q'(t)$ tính bằng khách/giờ (Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage). Sau 2 giờ đã có 500 người có mặt.

- a** Lượng khách tham quan được biểu diễn bởi hàm số $Q(t) = t^4 - 24t^3 + 144t^2$.
- b** Sau 5 giờ lượng khách tham quan là 1325 người.
- c** Lượng khách tham quan lớn nhất là 1296 người.
- d** Tốc độ thay đổi lượng khách tham quan lớn nhất tại thời điểm $t = 6$.

Câu 11 Giả sử rằng khi được t năm tuổi, một máy công nghiệp A tạo ra doanh thu với tốc độ $R'(t) = 588 - 3t^2$ (triệu đồng/năm), thời điểm $t = 0$ tính từ lúc máy A bắt đầu hoạt động. Biết rằng chi phí biên cho vận hành và bảo trì là $C'(t) = 48 + 12t^2$ (triệu đồng/năm), ở đây $C(t)$ là chi phí vận hành và bảo trì của máy A khi đó được t năm tuổi.

- a** Doanh thu sau 10 năm của máy A là $\int_0^{10} (588 - 3t^2) dt$ (triệu đồng).
- b** Tổng chi phí vận hành và bảo trì của máy A trong 6 năm là 1 152 (triệu đồng).
- c** Tuổi thọ hữu ích của một máy là số năm T trước khi lợi nhuận (bằng doanh thu trừ chi phí) mà nó tạo ra bắt đầu giảm. Tuổi thọ hữu ích của máy A này là 8 năm.
- d** Lợi nhuận do máy A tạo ra trong suốt thời gian tuổi thọ hữu ích của nó là 2 180 (triệu đồng).

Câu 12 Một bồn chứa nước đang chứa 200 lít nước. Người ta bắt đầu bơm nước vào bồn qua một đường ống. Tại thời điểm t (phút), tốc độ dòng chảy của nước vào bồn được xác định bởi hàm số $v(t) = 6t^2 + 8t$ (lít/phút). Gọi $V(t)$ là thể tích nước có trong bồn tại thời điểm t .

- a** Tốc độ dòng chảy của nước vào bồn tại thời điểm $t = 5$ (phút) là 190 (lít/phút).
- b** Tốc độ dòng chảy tăng theo thời gian.
- c** Hàm số thể tích $V(t)$ là một nguyên hàm của hàm tốc độ dòng chảy $v(t)$ và có dạng tổng quát là $V(t) = 6t^3 + 4t^2 + C$ (C là hằng số).
- d** Sau 10 phút bơm, nếu bồn có dung tích 2 500 lít thì nước sẽ tràn ra ngoài.

Câu 13 Một công trình xây dựng dự kiến hoàn thành trong 50 ngày. Gọi $M(t)$ là số ngày công được tính đến hết ngày thứ t (kể từ khi khởi công công trình). Trong kinh tế xây dựng, người ta đã biết rằng $M'(t) = m(t)$ với $m(t)$ là số lượng công nhân được sử dụng tại thời điểm t . Biết rằng $m(t) = 100 + 8\sqrt{t} - 2t$ ($0 \leq t \leq 50$).

- a** Có 72 công nhân được sử dụng vào ngày thứ 49.
- b** Số công nhân được sử dụng nhiều nhất vào ngày thứ 4.
- c** Trong 10 ngày đầu tiên, công trình đã cần hơn 1000 ngày công.



a Tổng cộng cần 4000 ngày công để hoàn thành công trình xây dựng đó theo dự kiến.

Câu 14 Một khinh khí cầu bay với độ cao (so với mực nước biển) tại thời điểm t ($0 \leq t \leq 29$) là $h(t)$, trong đó t tính bằng phút, $h(t)$ tính bằng mét. Tốc độ bay của khinh khí cầu được cho bởi hàm số $v(t) = at^2 + bt$, ($a, b \in \mathbb{R}$), với t tính bằng phút, $v(t)$ tính bằng mét/phút. Tại thời điểm xuất phát, khinh khí cầu ở độ cao 520 m và 5 phút sau khi xuất phát, khinh khí cầu đã ở độ cao 530 m. Khinh khí cầu sẽ trở lại độ cao khi xuất phát sau 15 phút.

a $h(0) = 520$ m.

b Độ cao của khinh khí cầu tại thời điểm t ($0 \leq t \leq 29$) là $h(t) = \int_0^t v(t) dt$.

c Giai đoạn khinh khí cầu tăng độ cao kéo dài trong 10 phút kể từ thời điểm xuất phát.

d Độ cao tối đa của khinh khí cầu là 540 m.

Câu 15 Một địa phương A bị thiệt hại do lũ lụt được trợ cấp số tiền 2 tỷ đồng. Số tiền này sẽ được giải ngân toàn bộ trong 100 ngày kể từ khi bắt đầu giải ngân. Kết quả theo dõi cho thấy tốc độ giải ngân tiền trợ cấp $M'(t)$ (đơn vị: triệu đồng/ngày) tại thời điểm t ngày ($0 \leq t \leq 100$) kể từ khi bắt đầu giải ngân được cho bởi công thức $M'(t) = k(100 - t)^2$ ($0 \leq t \leq 100$), trong đó $M(t)$ (đơn vị: triệu đồng) là số tiền đã giải ngân sau t ngày ($0 \leq t \leq 100$) kể từ khi bắt đầu giải ngân và k là hằng số khác không.

a $M(t) = k \left(10\,000t - 100t^2 + \frac{t^3}{3} \right) + C$.

b $C = 2\,000$.

c $k = 0,6$.

d Số tiền còn lại chưa giải ngân sau 40 ngày kể từ khi bắt đầu giải ngân là 432 triệu đồng.

Câu 16 Trong một nhà máy, tốc độ tiêu thụ điện năng của một dây chuyền sản xuất sau khi khởi động có xu hướng giảm dần theo thời gian và tiến về mức độ ổn định. Giả sử sau khi bắt đầu vận hành được t giờ, tốc độ tiêu thụ điện năng của dây chuyền sản xuất này được mô hình hóa bởi hàm số $E'(t) = A + e^{-0,4t}$ (đơn vị kWh/h) ($0 \leq t \leq 8$), trong đó $E(t)$ (kWh) là lượng điện năng tiêu thụ tính từ lúc bắt đầu vận hành. Biết rằng trong 8 giờ hoạt động, dây chuyền đã tiêu thụ tổng cộng 120 (kWh).

a $E(t) = At - \frac{5}{2}e^{-0,4t} + C$, với C là hằng số.

b $A = 14$ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

c Lượng điện năng tiêu thụ của dây chuyền trong 4 giờ đầu lớn hơn 65 (kWh).

d Tốc độ tiêu thụ điện năng trung bình của dây chuyền sản xuất trong khoảng thời gian từ a giờ đến b giờ được xác định bởi công thức $\bar{v} = \frac{E(b) - E(a)}{b - a}$ (kWh/h). Tốc độ tiêu thụ điện năng trung bình của dây chuyền sản xuất trong 4 giờ cuối bằng 14,6 (kWh/h) (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Câu 17 Tốc độ trao đổi chất cơ bản của sinh vật có thể tăng hoặc giảm tùy thuộc vào hoạt động của sinh vật. Cụ thể, sau khi hấp thụ chất dinh dưỡng, sinh vật thường trải qua một sự tăng đột biến trong tốc độ trao đổi chất của nó, sau đó dần dần trở lại mức cơ

bản. Bạn Hoa vừa kết thúc bữa tối trong buổi sinh nhật của mình và nạp vào mức năng lượng là 5120 J. Sau đó cô đã tiêu hao hết số năng lượng đó trong vòng 12 giờ tiếp theo. Giả sử t giờ sau bữa ăn, bạn Hoa tiêu hao được $M(t)$ kJ thì tốc độ tiêu hao năng lượng của cô được mô phỏng bởi hàm số

$$M'(t) = M_0 + te^{-0,1t^2} \text{ (kJ/h) với } t \in [0; 12].$$

- a** $M(t) = M_0 t - 5e^{-0,1t^2} + C$ với C là hằng số.
- b** $M_0 = 0,01$ (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).
- c** Năng lượng còn lại sau 6 giờ đầu là 197 J (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).
- d** Tốc độ tiêu hao năng lượng trung bình trong khoảng thời gian từ a (giờ) đến b (giờ) được tính bởi công thức $v = \frac{M(b) - M(a)}{b - a}$. Tốc độ tiêu hao năng lượng trung bình từ 6 giờ đến 12 giờ của bạn Hoa là 32,76 (J/h) (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

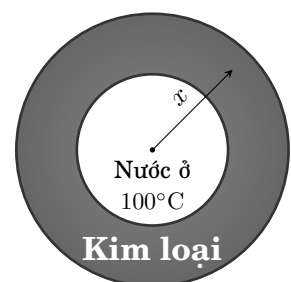
Câu 18 Một quần thể vi khuẩn ban đầu có 1 000 con. Gọi $P(t)$ là số lượng vi khuẩn của quần thể đó tại thời điểm t tính theo giờ ($t \geq 0$). Tốc độ tăng trưởng vi khuẩn của quần thể này tại thời điểm t được cho bởi hàm số $P'(t) = kt$, trong đó k là một hằng số. Biết rằng sau 2 giờ, số lượng vi khuẩn của quần thể tăng lên thành 1 400 vi khuẩn.

- a** Số lượng vi khuẩn $P(t)$ là một nguyên hàm của hàm số tốc độ tăng trưởng $P'(t)$.
- b** Số lượng vi khuẩn tại thời điểm t là $P(t) = 200t^2 + 1 000$.
- c** Sau 5 giờ, số lượng vi khuẩn tăng thêm 2 500 con so với thời điểm ban đầu.
- d** Sau 9 giờ số lượng vi khuẩn vượt quá 10 000 con.

Câu 19 Trong quá trình sản xuất giấy, việc kiểm soát bột rất quan trọng để đảm bảo chất lượng sản phẩm. Giả sử $y(x)$ là nồng độ của một chất gây bột còn dư trong bể xử lý (đơn vị mol/L) tại thời điểm x (giây), $y(x) > 0$ với $x \geq 0$. Sau khi thêm một lượng chất chống tạo bột, nồng độ chất gây bột giảm dần theo thời gian thỏa mãn hệ thức $y'(x) = -7 \cdot 10^{-4}y(x)$ với $x \geq 0$. Biết rằng tại thời điểm bắt đầu xử lý $x = 0$, nồng độ chất gây bột là 0,05 mol/L. Xét hàm số $f(x) = \ln y(x)$ với $x \geq 0$.

- a** $f'(x) = -7 \cdot 10^{-4}$.
- b** $f(x) = -7 \cdot 10^{-4}x + \ln(0,05)$.
- c** $y(30) - y(15) \approx 5,7 \cdot 10^{-4}$.
- d** Cho biết giá trị trung bình của hàm số liên tục $g(x)$ trên đoạn $[a; b]$ được định nghĩa là $\frac{1}{b-a} \int_a^b g(x) dx$. Nồng độ trung bình của chất gây bột trong khoảng thời gian từ giây thứ 20 đến giây thứ 30 bằng 0,03 mol/L.

Câu 20 Mặt cắt ngang của một ống dẫn nước nóng là hình vành khuyên như hình vẽ. Bán kính ngoài là r cm và bán kính trong là 2 cm ($r > 2$). Bên trong ống, nhiệt độ nước được duy trì ở mức 100°C . Bên trong kim loại, nhiệt độ giảm dần từ bên trong ra bên ngoài. Biết rằng nhiệt độ T ($^\circ\text{C}$) tại điểm A trên thành ống là hàm số của khoảng cách x (cm) từ A đến tâm của mặt cắt và thỏa mãn $T'(x) = -\frac{10}{x}$, với $2 \leq x \leq r$.



Mặt cắt ống



a $T(x) = -10 \ln x + C$ với C là hằng số.

b $T(x) = 100 - 10 \ln \frac{x}{2}$.

c Nếu bán kính ngoài là $r = 4$ cm thì nhiệt độ bề mặt ngoài của ống là $93,1^\circ\text{C}$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của $^\circ\text{C}$).

d Để nhiệt độ bề mặt ngoài của ống không vượt quá 90°C thì nên thiết kế ống với bán kính ngoài tối thiểu là 5,5 cm (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của cm).

Câu 21 Cây KEO LAI là một trong các loài cây không chỉ là nguyên liệu giấy quan trọng mà còn là loài cây cung cấp gỗ nguyên liệu cho các ngành khác như chế biến ván nhân tạo, chế biến đồ mộc xuất khẩu, gỗ bao bì, gỗ xây dựng. Cây phát triển với tốc độ nhanh. Kí hiệu $h(x)$ là chiều cao của một cây (tính theo mét) sau khi trồng x năm. Biết rằng sau năm đầu tiên cây cao 8 m. Trong 10 năm tiếp theo cây phát triển với tốc độ $h'(x) = \frac{9}{x}$ (m/năm).

a Biểu thức của $h(x)$ là $h(x) = 9 \ln(x) + C$.

b Sau 3 năm cây cao 20 m.

c Tốc độ phát triển của cây trong 10 năm đầu sẽ giảm dần.

d Người ta thường thu hoạch cây KEO LAI khi nó có độ cao trong khoảng từ 26 m đến 28 m sau 8 hoặc 9 năm sau khi trồng.

Câu 22 Một viên muối hình cầu có đường kính 8 cm đang tan trong nước với tốc độ giảm thể tích tại bất kỳ thời điểm nào tỷ lệ thuận với diện tích bề mặt quả cầu tại thời điểm đó. Sau 30 giây thì viên muối tan được một nửa. Gọi $V(t)$ và $r(t)$ lần lượt là thể tích và bán kính của viên muối sau t phút.

a Thể tích của viên muối sau t phút là $V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t)$.

b Tốc độ giảm thể tích của viên muối là $V'(t) = k\pi r^2(t)$ với k là hằng số.

c Giá trị của $k = -4$.

d Sau 45 giây thì thể tích của viên muối còn lại là $4,2 \text{ cm}^3$ (làm tròn đến hàng phần mười).

Câu 23 Hệ thống lọc nước bể bơi vô cùng quan trọng để nguồn nước được làm sạch thường xuyên và giữ vệ sinh cho người bơi. Trong quá trình vận hành lọc nước thì lượng nước trong bể sẽ thay đổi theo thời gian. Lượng nước trong bể giảm nếu hệ thống đang xả nước bẩn ra khỏi bể và tăng nếu hệ thống đang cấp thêm nước sạch cho bể. Biết rằng 1 gallon gần bằng 3,785 lít, dung tích của bể là 1000 gallon và thời điểm 6 giờ sáng bể chứa 250 gallon nước. Hàm số $f(t)$ liên tục trên đoạn $[0; 12]$ biểu thị cho tốc độ thay đổi lượng nước trong bể theo thời gian t giờ, từ thời điểm 6 giờ sáng đến 6 giờ chiều được cho bởi hàm số $f(t) = \begin{cases} 100t, & 0 \leq t \leq 3 \\ -200t + a, & 3 \leq t \leq 6, (a \in \mathbb{R}). \\ 100t - 900, & 6 \leq t \leq 12 \end{cases}$

Với mốc thời gian $t = 0$ tại thời điểm 6 giờ sáng.

a Tại thời điểm 9 giờ sáng, nước trong bể đang tăng với tốc độ 600 gallon/giờ.

b Giá trị của $a = 900$.

- c** Tốc độ thay đổi Lượng nước trong bể bằng 0 vào lúc 11 giờ trưa và 15 giờ chiều.
- d** Lượng nước trong bể lớn nhất trong khoảng thời gian từ 9 giờ sáng đến 18 giờ chiều là 700 gallon nước.

Câu 24 Giả sử tốc độ v (m/s) của một thang máy di chuyển từ tầng 1 lên tầng cao nhất

$$\text{theo thời gian } t \text{ được cho bởi công thức } v(t) = \begin{cases} t & \text{nếu } 0 \leq t \leq 2 \\ 2 & \text{nếu } 2 < t \leq 20 \\ 12 - 0,5t & \text{nếu } 20 < t \leq 24 \end{cases}.$$

- a** Tốc độ tại thời điểm $t = 2$ s là 2.
- b** Gia tốc chuyển động của thang máy tại thời điểm $t = 15$ s là $2 \text{ (m/s}^2\text{)}$.
- c** Quãng đường chuyển động của thang máy là 42 m.
- d** Tốc độ trung bình của thang máy là $1,75 \text{ (m/s)}$.

Câu 25 Một khinh khí cầu bay với độ cao (so với mực nước biển) tại thời điểm t ($0 \leq t \leq 29$) là $h(t)$, trong đó t tính bằng phút, $h(t)$ tính bằng mét. Tốc độ bay của khinh khí cầu được cho bởi hàm số $v(t) = at^2 + bt$, ($a, b \in \mathbb{R}$), với t tính bằng phút, $v(t)$ tính bằng mét/phút. Tại thời điểm xuất phát, khinh khí cầu ở độ cao 520 m và 5 phút sau khi xuất phát, khinh khí cầu đã ở độ cao 530 m. Khinh khí cầu sẽ trở lại độ cao khi xuất phát sau 15 phút.

- a** $h(0) = 520$ m.
- b** Độ cao của khinh khí cầu tại thời điểm t ($0 \leq t \leq 29$) là $h(t) = \int_0^t v(t) dt$.
- c** Giai đoạn khinh khí cầu tăng độ cao kéo dài trong 10 phút kể từ thời điểm xuất phát.
- d** Độ cao tối đa của khinh khí cầu là 540 m.

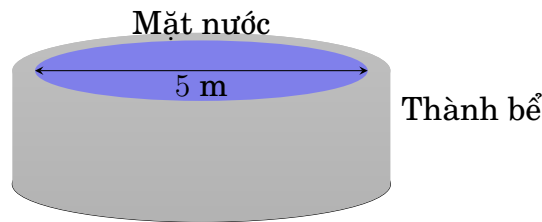
Câu 26 Tại một nhà máy sản xuất một loại phân bón, gọi $P(x)$ là lợi nhuận (tính theo triệu đồng) thu được từ việc bán x (tấn) sản phẩm trong một tuần. Khi đó đạo hàm $P'(x)$ gọi là lợi nhuận cận biên, cho biết tốc độ tăng lợi nhuận theo lượng sản phẩm bán được. Giả sử lợi nhuận cận biên (tính theo triệu đồng trên tấn) của nhà máy được ước lượng bởi công thức $P'(x) = 17 - 0,025x$ với $0 \leq x \leq 100$. Biết nhà máy lỗ 24 triệu đồng nếu không bán được lượng sản phẩm nào trong tuần.

- a** Công thức lợi nhuận (tính theo triệu đồng) thu được từ việc bán x (tấn) sản phẩm trong một tuần là $P(x) = 17x - 0,0125x^2 + C$ với C là một hằng số bất kỳ.
- b** Có thể tính được lợi nhuận của nhà máy thu được khi bán 120 tấn sản phẩm trong tuần.
- c** Lợi nhuận nhà máy thu được khi bán 80 tấn sản phẩm trong tuần là 1 tỉ 256 triệu đồng.
- d** Nếu nhà máy bán được từ 1,3 tấn sản phẩm trên tuần trở lên thì nhà máy luôn có lãi.

Câu 27 Cho một bể chứa nước và ban đầu chưa có nước. Người ta bắt đầu bơm nước vào bể với lưu lượng là $L_1(t) = 6t + 3$ (lít/phút). Cùng lúc đó, do bể có một vết nứt dưới đáy nên nước bị chảy ra ngoài với lưu lượng là $L_2(t) = 2t$ (lít/phút). Dung tích tối đa của bể là 2015 lít.

- a** Khi nước chảy vào vừa làm đầy bể, thì đã có nhiều hơn 900 lít nước bị chảy ra ngoài (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).
- b** Nếu bơm được 30 phút thì dừng thì lượng nước trong bể chưa đầy bể.
- c** Thể tích nước được bơm vào bể trong 5 phút đầu tiên là 90 lít.
- d** Thể tích nước chảy ra từ bể trong 5 phút đầu tiên là 10 lít.

Câu 28 Một bể bơi hình trụ trên mặt đất có đường kính 5 m, được bơm nước vào với tốc độ v_0 , không đổi cho đến khi mực nước cao 1 m.



Sau khi được làm đầy 1 m, bể bơi bị thủng ở đáy và nước rò rỉ ra ngoài. Bể bơi rò hết toàn bộ nước trong 8 giờ. Biết rằng lượng nước còn lại trong hồ được mô phỏng bởi hàm $h(t)$ và tốc độ nước chảy ra ngoài vào thời điểm t giờ (tính từ lúc bắt đầu đổ) được xác định bởi hàm số $h'(t) = at + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Lúc nước chảy hết ra ngoài thì vận tốc nước chảy bằng 0.

- a** Thể tích của bể bơi sau khi được làm đầy 1 m là $6,25 \text{ m}^3$.
- b** Tốc độ nước chảy ra ngoài tại thời điểm 8 giờ kể từ lúc bể bị rò bằng 0.
- c** $a = \frac{25}{128}$.
- d** Sau 4 giờ kể từ lúc bể bị rò, lượng nước bị mất đi bằng $4,6875 \text{ m}^3$.

Câu 29 Một bể chứa dầu ban đầu có 50 000 lít dầu. Gọi $V(t)$ là thể tích dầu (lít) trong bể tại thời điểm t , trong đó t tính theo giờ $0 \leq t \leq 24$. Trong quá trình bơm dầu vào bể, thể tích dầu tăng theo tốc độ được biểu diễn bởi hàm số $V'(t) = k \cdot \sqrt{t}$, với k là hằng số dương. Sau 4 giờ bơm liên tục, thể tích dầu trong bể đạt 58 000 lít. Khi đó

- a** Hàm số $V(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(t) = k \cdot \sqrt{t}$.
- b** $V(t) = \frac{2k}{3}t\sqrt{t} + C$, với $0 \leq t \leq 24$ và k, C là các hằng số.
- c** Sau 16 giờ bơm liên tục, thể tích dầu trong bể đạt được 148 000 lít.
- d** Trong quá trình bơm dầu, nếu sau mỗi giờ lượng dầu bị rò rỉ đều đặn với tốc độ 500 lít/giờ, thì tại thời điểm t bằng 9 giờ, thể tích dầu trong bể là 72 500 lít.

Câu 30 Giả sử rằng khi t năm tuổi, một máy công nghiệp A tạo ra doanh thu với tốc độ $R'(t) = 588 - 3t^2$ (triệu đồng/năm), tính từ lúc bắt đầu hoạt động ($t = 0$). Biết chi phí vận hành và bảo trì là $C'(t) = 48 + 12t^2$ (triệu đồng/năm), với $C(t)$ là chi phí vận hành và bảo trì của máy A khi nó được t năm tuổi.

- a** $C(t) = \int (48 + 12t^2) dt$.
- b** $C(t) = 48t + 4t^3 + 20$.
- c** Tổng chi phí vận hành và bảo trì trong 6 năm của máy A là 1 152 (triệu đồng).

- a** Lợi nhuận do máy A tạo ra trong suốt thời gian tuổi thọ hữu ích là 2 160 (triệu đồng), với tuổi thọ hữu ích là thời gian trước khi lợi nhuận bắt đầu giảm.

Câu 31 Một bể chứa nước có hình dạng đặc biệt đang được bơm nước vào. Biết tốc độ bơm nước $v(t)$ (đơn vị m^3/s) tại thời điểm t (giây) được cho bởi hàm số $v(t) = 6at^2 + 12t$, trong đó a là hằng số. Ban đầu, trong bể đã có một lượng nước là 10 m^3 . Sau 3 giây, thể tích nước trong bể là 100 m^3 .

- a** Một nguyên hàm của hàm số $v(t)$ là $h(t) = 2at^3 + 6t^2$.

- b** Lượng nước bơm được sau 3 giây được tính bởi công thức là $\int_0^3 v(t) dt$.

- c** Lượng nước bơm được sau 6 giây là 514 m^3 .

- d** Thể tích nước trong bể sau khi bơm được 9 giây là $1 468 \text{ m}^3$.

Câu 32 Trong thí nghiệm nuôi cấy một loại vi sinh vật, kí hiệu $f(t)$ là tổng số lượng vi sinh vật sau t giờ. Biết rằng sau 3 giờ đầu tiên thì tổng số lượng vi sinh vật là 50 con. Trong 7 giờ tiếp theo, số lượng vi sinh vật thay đổi với tốc độ $f'(t) = t^2 - 8t$ (con/giờ).

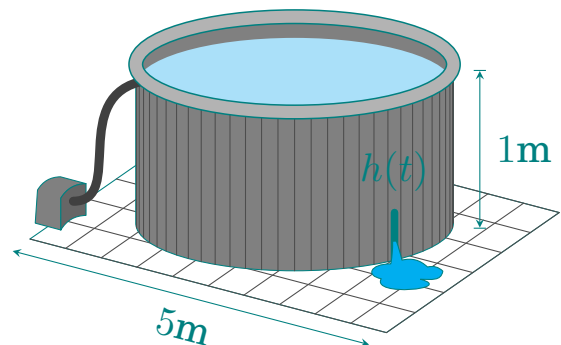
- a** Họ nguyên hàm của $f'(t)$ là $\frac{t^3}{3} - 8t^2 + C$ ($C \in \mathbb{R}$).

- b** Số lượng vi khuẩn tăng liên tục trong khoảng từ 3 giờ đến 10 giờ sau thời điểm làm thí nghiệm.

- c** Số lượng vi khuẩn là nhỏ nhất sau 8 giờ tính từ lúc bắt đầu làm thí nghiệm.

- d** Sau 6 giờ thì số lượng vi khuẩn là 5 con.

Câu 33 Một bể bơi hình trụ có đường kính 5 m và chiều cao 1 m; bể được bơm nước vào với tốc độ không đổi v_0 . Sau khi nước được bơm đầy, bể bơi bị thủng một lỗ ở đáy và nước chảy ra ngoài và bể bị chảy hết nước trong 8 giờ.



Biết tốc độ giảm chiều cao của bể bơi khi nước chảy ra ngoài vào thời điểm t giờ (tính từ lúc nước đầy bể và ngừng bơm) được cho bởi hàm số $h'(t) = at + b$, với $a, b \in \mathbb{R}$. Lúc nước chảy hết ra ngoài thì tốc độ giảm chiều cao bằng 0.

- a** Thể tích của bể bơi sau khi nước được làm đầy là $6,25\pi \text{ m}^3$.

- b** $32a + 1 = 0$ và $4b - 1 = 0$.

- c** Sau 4 giờ kể từ lúc bể bị rò, lượng nước bị mất đi bằng $\frac{75\pi}{16} \text{ m}^3$.

- d** Lượng nước bị rò rỉ ra ngoài một nửa sau $8 - 4\sqrt{2}$ giờ.

Câu 34 (CT-THPTQG 2025). Đối với ngành nuôi trồng thủy sản, việc kiểm soát lượng thuốc tồn dư trong nước là một nhiệm vụ quan trọng nhằm đáp ứng các tiêu chuẩn an toàn về môi trường. Khi nghiên cứu một loại thuốc trị bệnh trong nuôi trồng thủy sản, người ta sử dụng thuốc đó một lần và theo dõi nồng độ thuốc tồn dư trong nước kể từ lúc sử dụng thuốc. Kết quả cho thấy nồng độ thuốc $y(t)$ (đơn vị: $\text{mg}/\text{lít}$) tồn dư trong nước tại thời điểm t ngày ($t \geq 0$) kể từ lúc sử dụng thuốc, thỏa mãn $y(t) > 0$ và $y'(t) = k \cdot y(t)$



($t \geq 0$), trong đó k là hằng số khác không. Đo nồng độ thuốc tồn dư trong nước tại các thời điểm $t = 6$ (ngày); $t = 12$ (ngày) nhận được kết quả lần lượt là 2 mg/lít; 1 mg/lít. Cho biết $y(t) = e^{g(t)}$ ($t \geq 0$).

a $g(t) = kt + C$ ($t \geq 0$) với C là một hằng số xác định.

b $k = -\frac{\ln 2}{6}$.

c $C = 4 \ln 2$.

d Nồng độ thuốc tồn dư trong nước tại thời điểm $t = 21$ (ngày) kể từ lúc sử dụng thuốc lớn hơn 0,4 mg/lít.

Câu 35 Một miếng thịt sống được lấy ra khỏi ngăn đá của tủ lạnh và để trên bàn để rã đông. Nhiệt độ của miếng thịt khi nó được lấy ra khỏi ngăn đá là -4°C và sau t giờ thì nhiệt độ của miếng thịt tăng với tốc độ $T'(t) = 7e^{-0,35t}^\circ\text{C/giờ}$. Miếng thịt này được rã đông khi nhiệt độ của nó đạt đến 10°C . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a Sau 2 giờ tốc độ thay đổi nhiệt độ của miếng thịt bằng $3,48^\circ\text{C/giờ}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

b Nhiệt độ của miếng thịt bằng 0°C sau 43 phút (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của phút).

c Cần mất 2,44 giờ để miếng thịt được rã đông (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của giờ).

d Sau khi rã đông được 2 tiếng, miếng thịt được đem đi nướng trong lò nướng. Tốc độ thay đổi nhiệt độ của miếng thịt trong lò nướng sau t giờ được xác định bởi hàm số $L'(t) = 80e^{0,2t}^\circ\text{C/giờ}$. Miếng thịt được coi là chín đều nếu nhiệt độ của nó là 77°C . Thời gian để nướng chín đều miếng thịt là 48 phút (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của phút).

Câu 36 Một quần thể vi khuẩn (A) có số lượng cá thể là $P(t)$ sau t phút quan sát được phát hiện thay đổi với tốc độ là $P'(t) = ae^{0,1t} + 150e^{-0,03t}$ (vi khuẩn/phút) ($a \in \mathbb{R}$). Biết rằng lúc bắt đầu quan sát, quần thể có 200 000 vi khuẩn và đạt tốc độ tăng trưởng là 350 vi khuẩn/phút. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a Giá trị của $a = 200$.

b $P(t) = 2000e^{0,1t} - 5000e^{-0,03t} + 200000$.

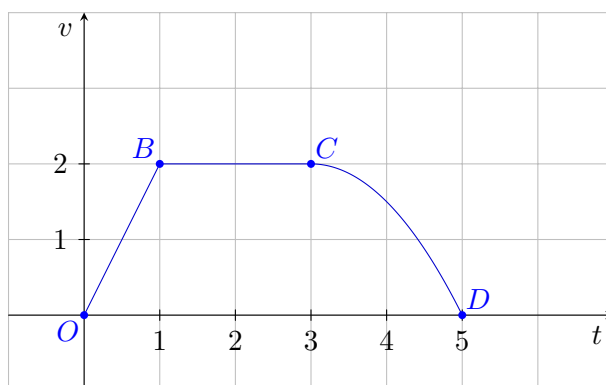
c Sau 12 phút số lượng vi khuẩn trong quần thể là 206 152 con (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

d Sau 12 phút, một quần thể vi khuẩn (B) có tốc độ tăng trưởng là $G'(t) = 500e^{0,2t}$ (vi khuẩn/phút) bắt đầu cạnh tranh nguồn thức ăn trực tiếp với quần thể (A), một cá thể tại quần thể (B) triệt tiêu một cá thể tại quần thể (A). Sau 5 phút cạnh tranh quần thể (A) bị triệt tiêu hoàn toàn. Số lượng vi khuẩn của quần thể (B) ở thời điểm bắt đầu cạnh tranh là 191 967 con (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Câu 37 Một xe ô tô đang chạy với vận tốc 65 km/h thì người lái xe bất ngờ phát hiện chướng ngại vật trên đường cách đó 50 m. Người lái xe phản ứng một giây, sau đó đạp phanh khẩn cấp. Kể từ thời điểm này, ô tô chuyển động chậm dần đều với tốc độ $v(t) = -10t + 20$ m/s, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ lúc đạp phanh. Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong t giây kể từ lúc đạp phanh. Khi đó

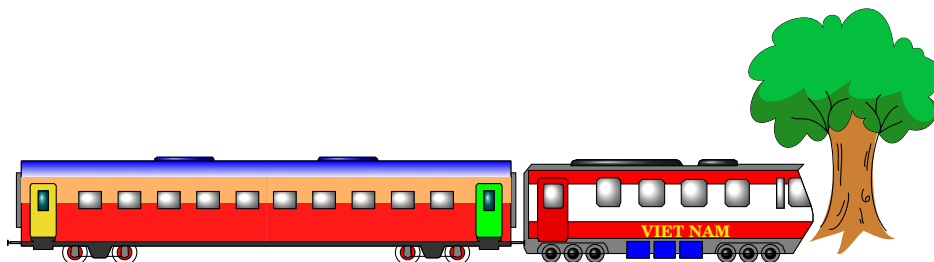
- a** Quãng đường $s(t)$ mà xe ô tô đi được trong thời gian t giây là một nguyên hàm của hàm số $v(t)$.
- b** $s(t) = -5t^2 + 20t$.
- c** Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi xe ô tô dừng hẳn là 20 giây.
- d** Kể từ lúc đạp phanh đến khi xe ô tô dừng hẳn thì xe ô tô đó không va vào chướng ngại vật ở trên đường.

Câu 38 Một chất điểm chuyển động trên đường thẳng với vận tốc $v(t)$, $0 \leq t \leq 5$ (t có đơn vị là giây và $v(t)$ có đơn vị mét/giây). Hàm số $v(t)$ có đồ thị gồm hai đoạn thẳng OB , BC và đường cong CD là một phần parabol $v(t) = at^2 + bt + c$, ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đỉnh C (như hình vẽ bên dưới).



- a** Trong một giây đầu tiên, vận tốc của chất điểm là $v(t) = 2t$, $0 \leq t \leq 1$.
- b** Quãng đường chất điểm đi được trong hai giây đầu tiên là 2 m.
- c** Giá trị của b và c là $b = 3$, $c = -\frac{5}{2}$.
- d** Quãng đường chất điểm đi được trong khoảng thời gian 5 giây là 7,7 m. (làm tròn đến hàng phần mười).

Câu 39 Một đoàn tàu đang đứng yên trong sân ga, ngay trước đầu tàu có một cái cây. Đoàn tàu khởi hành từ trạng thái đứng yên với gia tốc $a(t) = 0,005t$ (m/s^2) và đi qua cái cây trong thời gian 60 giây. Sau 80 giây đoàn tàu chuyển sang trạng thái chuyển động đều.



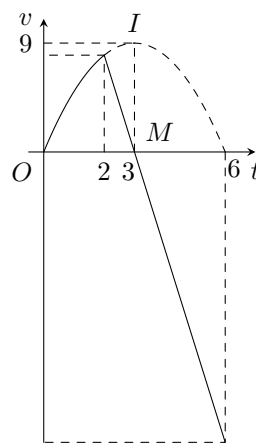
- a** Vận tốc của đoàn tàu là $v(t) = 5 \cdot 10^{-3}t^2$ m/s.
- b** Chiều dài của đoàn tàu là $l = 180$ m.
- c** Sau 80 giây, đoàn tàu chuyển động với tốc độ 57,6 km/h.

- a** Sau khi chuyển động đều một thời gian, đoàn tàu gặp một cây cầu có chiều dài 480 m. Khi đó đoàn tàu đi qua cây cầu đó trong thời gian 30 giây.

Câu 40 Một xe ô tô đang chạy trên đường cao tốc với tốc độ 90 (km/h) thì tài xế nhìn thấy biển báo trạm thu phí ở phía trước cách đó 400 (m). Sau 4 giây, tài xế đạp nhẹ phanh, kể từ đó xe chạy chậm dần đều với gia tốc 2 (m/s²) cho đến khi tốc độ xe giảm về tốc độ quy định khi qua các làn thu phí tự động là 30 (km/h). Gọi t (đơn vị giây) là thời gian kể từ lúc đạp phanh cho đến khi giảm về tốc độ 30 (km/h).

- a** Vận tốc của ô tô kể từ lúc đạp phanh đến khi giảm về tốc độ 30 (km/h) là $v(t) = 25 - 2t$ (m/s).
- b** Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi giảm về tốc độ 30 (km/h) là 9 giây.
- c** Quãng đường xe đi được kể từ lúc đạp phanh đến khi giảm về tốc độ 30 (km/h) là 139 (m) (làm tròn đến hàng đơn vị).
- d** Khi giảm về tốc độ 30 (km/h), khoảng cách giữa xe và trạm thu phí là 161 (m) (làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 41 Một chất điểm chuyển động trên trục số trong 6 giây với vận tốc v (m/s) phụ thuộc vào thời gian t (giây) có đồ thị như hình bên. Trong khoảng thời gian 2 giây từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị là một phần đường parabol có đỉnh $I(3; 9)$ và có trục đối xứng song song với trục tung. Trong khoảng thời gian còn lại, chất điểm chuyển động trên một đường thẳng có hệ số góc bằng -8 và đi qua điểm $M(3; 0)$.



- a** Phương trình của parabol là $(P): y = v(t) = -t^2 + 6t$ với $t \in [0; 2]$.
- b** Tốc độ của chất điểm tại thời điểm $t = 5$ giây là 16 m/s.
- c** Quãng đường mà chất điểm di chuyển được trong 6 giây là 36 m.
- d** Khoảng cách của chất điểm so với gốc tọa độ sau 6 giây là $\frac{68}{3}$ m.

Câu 42 Một con sư tử đang đuổi theo một con ngựa vằn và chúng cùng chạy trên một đường thẳng. Ngựa vằn đã nhận ra sư tử khi sư tử cách nó khoảng 40 m. Từ thời điểm này, sư tử đuổi theo ngựa vằn với tốc độ $v_1(t) = 15e^{-0,1t}$ m/s và ngựa vằn bỏ chạy với tốc độ $v_2(t) = 20 - 20e^{-0,1t}$ m/s (t tính bằng giây, $0 \leq t \leq 60$).

- a** Tại thời điểm ban đầu $t = 0$ giây, vận tốc của con ngựa vằn là 20 m/s.
- b** Tốc độ của sư tử giảm dần theo thời gian, trong khi tốc độ của ngựa vằn tăng dần theo thời gian.
- c** Sư tử ở gần ngựa vằn nhất khi $v_1'(t) = v_2'(t)$ và khoảng cách ngắn nhất giữa chúng là 1,72 m (làm tròn đến hàng phần trăm theo đơn vị mét).
- d** Sư tử sẽ không bắt được ngựa vằn và khoảng cách ngắn nhất giữa chúng là 1,92 m (làm tròn đến hàng phần trăm theo đơn vị mét).

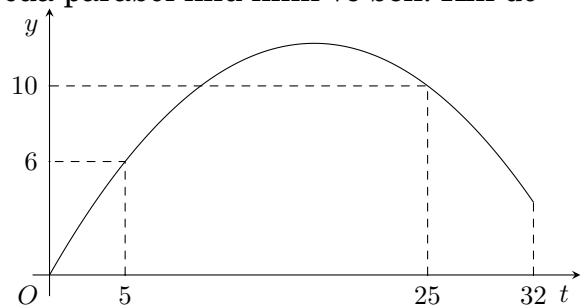
Câu 43 Trong một cuộc thử tên lửa, Triều Tiên đã cho phóng một quả tên lửa có gắn đầu đạn hạt nhân với vận tốc $v(t) = \frac{1}{90\,000\,000}t^3 + \frac{1}{500}t + 1$ (m/s) trong đó t đơn vị giây

tính từ lúc tên lửa Triều Tiên bắt đầu phóng và dự định sẽ rơi xuống một vùng biển. Đi được 1 giờ thì bay ngang vùng biển thuộc chủ quyền của Nhật Bản ngay lập tức Rada nhận được tín hiệu và gửi tín hiệu về căn cứ quân đội. Khi nhận được tín hiệu của Rada sau 30 phút quân đội Nhật Bản đã cho phóng một quả tên lửa tầm trung đã xác định sẵn mục tiêu đi với gia tốc $a(t_1) = \frac{1}{4500}t_1 + \frac{n}{100}$ (m/s²), $n > 0$ trong đó t_1 đơn vị giây tính từ lúc tên lửa tầm trung bắt đầu phóng.

- a** Vận tốc của tên lửa tầm trung được biểu thị dưới hàm $v(t_1) = \frac{1}{9000}t_1^2 + \frac{n}{100}t_1$ (m/s²), $n > 0$.
- b** Kể từ khi bị Rada phát hiện đến lúc Nhật Bản phóng tên lửa thì quả tên lửa gắn đầu đạn hạt nhân đi được 1913,4 km.
- c** Sau 15 phút phóng lên thì tên lửa tầm trung hạ được mục tiêu biết quãng đường nó đi được bằng $\frac{1}{2}$ quãng đường tên lửa Triều Tiên đi được trong 15 phút đó, khi đó giá trị $n > 100$.
- d** Giả sử hàm $h(t) = \frac{-5m}{648}t^2 + \frac{500m}{9}t + a$ ($m > 0, a \in \mathbb{R}$) (đơn vị: mét) thể hiện độ cao của quả tên lửa gắn đầu đạn hạt nhân so với mực nước biển. Khi quả tên lửa của Triều Tiên đạt độ cao lớn nhất thì quãng đường nó đi được là 483,12 km.

Câu 44 Hai vận động viên A và B tham dự một cuộc thi chạy bộ trên một đường thẳng, xuất phát cùng một thời điểm, cùng vạch xuất phát và chạy cùng chiều với vận tốc lần lượt là v_A và v_B . Trong khoảng thời gian 32 giây chạy đầu tiên ta có $v_A = \frac{1}{450}t^3 - \frac{47}{450}t^2 + \frac{64}{45}t$ (m/s); $v_B = at^2 + bt$ (m/s) (với $t \geq 0$ là thời gian tính bằng giây). Hàm số $y = at^2 + bt$ có đồ thị là một phần của parabol như hình vẽ bên. Khi đó

- a** Tốc độ chạy lớn nhất của vận động viên A trong khoảng 20 giây tính từ khi bắt đầu xuất phát là 6 m/s.
- b** $a = -\frac{1}{5}$.
- c** Quãng đường vận động viên B chạy được trong 30 giây tính từ khi bắt đầu xuất phát là 250 m (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).
- d** Sau 30 giây tính từ khi bắt đầu xuất phát, hai vận động viên cách nhau một khoảng bằng 120 m.

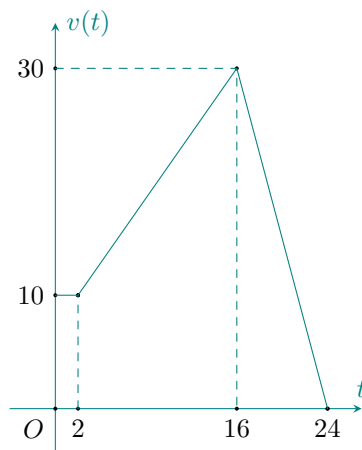


Câu 45 Cho một vật đang chuyển động thẳng đều với vận tốc bằng 108 (km/h) thì đi vào vùng có lực cản gây ra cho vật một gia tốc $a = -0,5v$ (m/s²) với v là vận tốc của vật và tính bằng m/s. Trong bài toán ta có vận tốc $v > 0$ và gốc thời gian tính từ lúc vật bắt đầu đi vào vùng có lực cản.

- a** $\ln |v(t)|$ đạo hàm theo biến thời gian t cho ta biểu thức là $\frac{v'(t)}{v(t)}$.
- b** Biểu thức vận tốc của vật là: $v(t) = e^{-0,5t}$ (m/s).
- c** Quãng đường vật đi được trong 2 giây đầu tiên trong vùng lực cản là 37,9 (m/s).

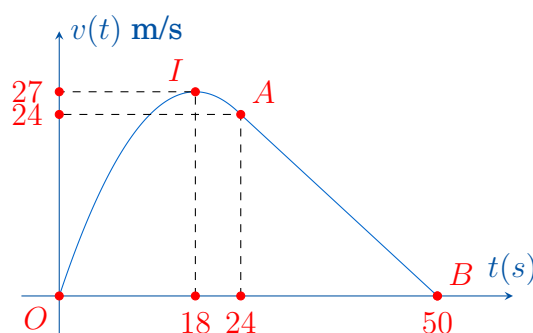
- Với giả thiết vận tốc nhỏ hơn 0,1 (m/s) thì vật dừng lại. Tổng quãng đường vật đi được trong vùng lực cản tính theo mét (làm tròn đến hàng đơn vị) là 60 m.

Câu 46 Một chất điểm chuyển động thẳng trong 24 giây với vận tốc $v(t)$ (đơn vị: m/s) là hàm số phụ thuộc thời gian t (đơn vị: giây) có đồ thị cho bởi hình vẽ sau:



- a) Tại thời điểm $t = 2$ giây, vận tốc của chất điểm bằng 10 m/s.
- b) Trong khoảng thời gian từ 2 giây đến 16 giây, đồ thị của $v(t)$ là một phần của đường thẳng có phương trình $v(t) = \frac{10}{7}t + \frac{50}{7}$ m/s.
- c) Quãng đường $s(t)$ (đơn vị: mét) mà chất điểm đi được trong khoảng thời gian t giây ($0 \leq t \leq 24$) được tính theo công thức $s(t) = \int_0^t \left(\frac{10}{7}t + \frac{50}{7} \right) dt$.
- d) Quãng đường chất điểm đi được từ lúc 0 giây đến 24 giây bằng 420 m.

Câu 47 Trong một thử nghiệm ô tô xuất phát từ trạng thái nghỉ. Người lái điều khiển xe đạt vận tốc cực đại tại $t = 18$ giây, rồi giảm tốc và dừng hẳn. Toàn bộ quá trình kéo dài 50 giây. Đồ thị vận tốc $v(t)$ (m/s) theo thời gian t (s) như hình vẽ.



Trong đó, trên đoạn $[0; 24]$ đồ thị là một phần của parabol có đỉnh $I(18; 27)$ và đi qua điểm O ; trên đoạn $(24; 50]$ đồ thị là đoạn thẳng AB với $A(24; 24)$ và $B(50; 0)$.

- a) Trong 24 giây đầu tiên, vận tốc của ô tô luôn tăng.
- b) Trong 24 giây đầu tiên, có một thời điểm mà gia tốc của ô tô bằng 2 m/s^2 .
- c) Gọi giai đoạn 1 là $[0; 24]$, giai đoạn 2 là $(24; 50]$. Độ lớn gia tốc của ô tô ngay trước thời điểm kết thúc giai đoạn 1 ($t = 24$ giây) lớn hơn độ lớn gia tốc của ô tô trong suốt giai đoạn 2 (từ 24 giây đến 50 giây).
- d) Quãng đường xe đi được trong 26 giây cuối lớn hơn 70% quãng đường xe chạy trong 24 giây đầu tiên.

Câu 48 Một hồ thủy lợi được vận hành an toàn khi thể tích nước bên trong nó nằm trong khoảng từ $20\,000\text{ m}^3$ đến $60\,000\text{ m}^3$. Sau một cơn mưa, người ta đo được lưu lượng nước (tốc độ thay đổi lượng nước) trong hồ là $Q(t) = 1000t^3 - 8000t^2 + 12\,000t$ (t tính bằng giờ, $Q(t)$ tính bằng $\text{m}^3/\text{giờ}$). Tại thời điểm bắt đầu quan sát ($t = 0$), trong hồ có $50\,000\text{ m}^3$ nước.

- a Sau 2 giờ quan sát, thể tích nước trong hồ là $50\,000 + \int_0^2 Q(t) dt\text{ m}^3$.
- b Trong khoảng thời gian từ 0 đến 4 giờ, thể tích nước trong hồ luôn tăng.
- c Trong 6 giờ đầu quan sát, thể tích nước lớn nhất trong hồ là $\frac{170\,000}{3}\text{ m}^3$.
- d Trong 6 giờ đầu quan sát, hồ luôn vận hành an toàn.

Câu 49 Một người đang điều khiển ô tô chạy trên đường cao tốc. Khi cách trạm thu phí $1\,000\text{ m}$, tốc độ của ô tô là 90 km/h . Sau đó 20 giây, người điều khiển ô tô bắt đầu giảm tốc với tốc độ $v(t) = at + b$ (m/s), trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ khi bắt đầu giảm tốc và $v(t) > 0$ với mọi $t \in [0; 30]$. Sau 30 giây kể từ khi bắt đầu giảm tốc, ô tô đến trạm thu phí.

- a Quãng đường từ vị trí ô tô bắt đầu giảm tốc đến trạm thu phí là 500 m .
- b Giá trị của b là 90 .
- c Giá trị của a là $-\frac{5}{9}$.
- d Tốc độ tối đa cho phép của phương tiện khi qua trạm thu phí là 30 km/h . Người điều khiển ô tô đã tuân thủ đúng tốc độ quy định khi đi qua trạm thu phí.

Câu 50 Một quần thể vi khuẩn ban đầu có 1000 con. Sau 2 giờ, số lượng vi khuẩn tăng lên thành 4000 con. Gọi $P(t)$ là số lượng vi khuẩn tại thời điểm t (giờ). Biết rằng tốc độ tăng trưởng của quần thể tỉ lệ thuận với số lượng vi khuẩn hiện có, tức là $P'(t) = k \cdot P(t)$, với k là hằng số khác 0 và $P(t) > 0$ với $t \geq 0$.

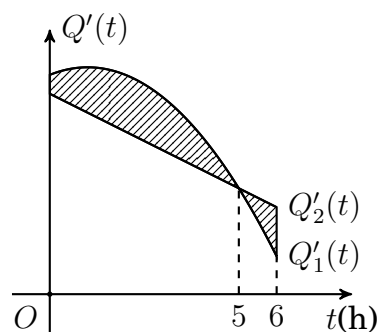
- a Hằng số tốc độ tăng trưởng của quần thể vi khuẩn là $k = \ln 2$.
- b Sau 5 giờ kể từ thời điểm ban đầu, số lượng vi khuẩn là 32000 con.
- c Công thức tính số lượng vi khuẩn tại thời điểm t là $P(t) = 4000e^{kt}$ với $t \geq 0$.
- d Để số lượng vi khuẩn đạt 64000 con, cần đúng 8 giờ kể từ thời điểm ban đầu.

Câu 51 Trong một bể xử lý nước thải, số lượng vi khuẩn gây hại tại thời điểm t được kí hiệu bằng $N(t)$ (đơn vị: con). Người ta nhận thấy rằng trong giai đoạn đầu (khi môi trường chưa bị hạn chế), tốc độ biến thiên của số lượng vi khuẩn tuân theo quy luật hàm mũ và được mô hình hóa bởi hàm số $N'(t) = A \cdot e^{kt}$, trong đó: A, k là các hằng số dương, t là thời gian (đơn vị: giờ). Từ các nghiên cứu thực nghiệm (sau khi xử lý và làm tròn số liệu), người ta ước lượng được $A = 1000 \ln 2$ và tại thời điểm $t = 1$ giờ có 3000 vi khuẩn; $N'(1) = 2000 \ln 2$. Biết rằng mức độ an toàn cho phép là không quá $129\,000$ con.

- a $k = \ln 2$.
- b Số vi khuẩn tại thời điểm $t = 6$ giờ là $63\,000$ con.
- c Số lượng vi khuẩn bắt đầu vượt ngưỡng an toàn từ sau thời điểm $t = 7$ giờ.
- d Tại thời điểm $t = 7$ giờ người ta tiến hành xử lý để giảm số lượng vi khuẩn theo quy luật: $M(t) = 129\,000 \cdot e^{-0,5(t-7)}$ với $M(t)$ là số con vi khuẩn ở thời điểm t giờ

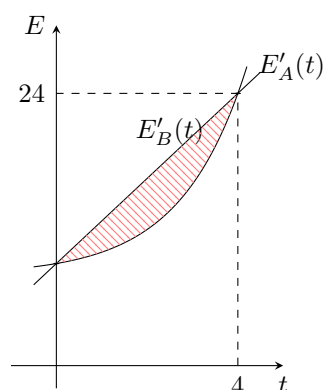
($t \geq 7$). Khi đó, sau $3 \ln 2$ giờ kể từ khi bắt đầu xử lý, số vi khuẩn còn lại 64 500 con.

Câu 52 Hình vẽ bên mô tả hiệu suất làm việc của hai công nhân tại một nhà máy trong thời gian 6 giờ. Công nhân A đang sản xuất với hiệu suất $Q'_1(t) = -2t^2 + 4t + 58$ sản phẩm mỗi giờ, trong khi công nhân B đang sản xuất với hiệu suất $Q'_2(t) = 53 + at$ sản phẩm mỗi giờ ($a \in \mathbb{R}$). Biết rằng hàm $Q_1(t)$ và $Q_2(t)$ mô phỏng số lượng sản phẩm làm được của công nhân A và công nhân B sau t giờ.



- a) Hiệu suất làm việc cực đại của công nhân A là 60 sản phẩm mỗi giờ.
- b) Giá trị $a = -3$.
- c) Sau 6 giờ làm việc, công nhân B hoàn thành được 228 sản phẩm.
- d) Sau 6 giờ làm việc, số sản phẩm hoàn thành của công nhân A nhiều hơn số sản phẩm hoàn thành của công nhân B.

Câu 53 Một chuyên gia kinh tế nghiên cứu tốc độ thay đổi lượng điện tiêu thụ của hai khu vực công nghiệp A và B từ đầu năm 2020 đến đầu năm 2024. Tốc độ thay đổi lượng điện tiêu thụ (đơn vị: triệu kWh/năm) của khu vực A và khu vực B lần lượt được mô tả bởi các hàm số: $E'_A(t) = 2^t + 8$ và $E'_B(t) = 3,75t + n$ (n là một hằng số), trong đó t là số năm kể từ đầu năm 2020 ($0 \leq t \leq 4$). Biết rằng tại thời điểm bắt đầu khảo sát ($t = 0$) và đầu năm 2024 ($t = 4$), tốc độ thay đổi lượng điện tiêu thụ của cả hai khu vực là bằng nhau (như hình vẽ).



- a) Tại thời điểm $t = 3$, tốc độ thay đổi lượng điện tiêu thụ của khu vực A là 16 triệu kWh/năm.
- b) Mốc thời gian t_0 mà tại đó tốc độ của khu vực A đạt 12 triệu kWh/năm là $t_0 = 2,5$.
- c) Tổng lượng điện tiêu thụ tăng thêm của khu vực A sau 4 năm đầu khảo sát xấp xỉ bằng 53,64 triệu kWh.
- d) Tổng lượng điện tiêu thụ tăng thêm của khu vực B nhiều hơn khu vực A một lượng xấp xỉ 10,93 triệu kWh.

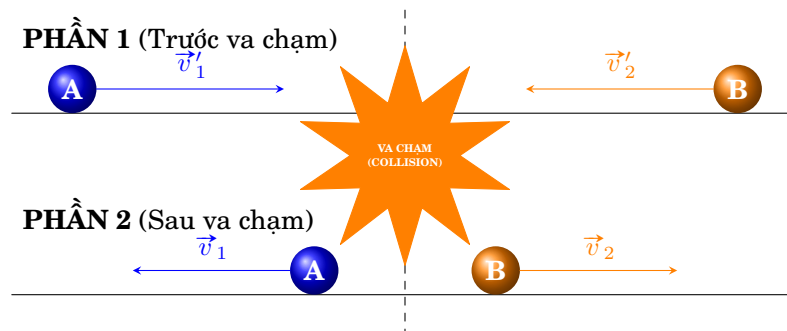
Câu 54 Một mẫu đồng vị phóng xạ (ví dụ: Iodine-131 được sử dụng trong y tế) có khối lượng ban đầu là 800 mg. Sau 5 ngày, khối lượng của mẫu chất này phân rã và chỉ còn lại 400 mg. Gọi $m(t)$ là khối lượng của mẫu chất phóng xạ tại thời điểm t (ngày). Biết rằng tốc độ phân rã của mẫu chất tỉ lệ thuận với khối lượng hiện có của nó, tức là $m'(t) = k \cdot m(t)$, với k là hằng số khác 0 và $m(t) > 0$ với $t \geq 0$.

- a) Hằng số tốc độ phân rã của mẫu chất là $k = -\frac{1}{5} \ln 2$.
- b) Sau 15 ngày kể từ thời điểm ban đầu, khối lượng mẫu chất còn lại là 100 mg.
- c) Khối lượng của mẫu chất phóng xạ được tính bởi công thức $m(t) = 400e^{kt}$ với $t \geq 0$.
- d) Để khối lượng mẫu chất phân rã chỉ còn 50 mg, cần đúng 10 ngày kể từ thời điểm ban đầu.

Câu 55 Một nghiên cứu khả năng ghi nhớ kiến thức của người học sau khi kết thúc khóa học chỉ ra rằng càng về lâu thì khả năng ghi nhớ kiến thức càng giảm. Nếu xem $f(t)$ là phần trăm kiến thức người học còn nhớ sau t tháng thì $f'(t)$ thể hiện là tốc độ thay đổi kiến thức của người học. Nghiên cứu cho thấy $f'(t) < 0$, điều này thể hiện càng về lâu thì khả năng ghi nhớ kiến thức càng giảm. Độ lớn của $f'(t)$ chính là tốc độ giảm sút kiến thức của người học. Hai bạn Thành và Công cùng tham gia một khóa học. Sau khi kết thúc khóa học, phần trăm kiến thức bạn Thành còn nhớ sau t tháng được mô hình hóa bởi hàm số $f(t) = 94 - 12 \ln(3t + 1)$, với $0 \leq t \leq 24$.

- a Tại thời điểm khóa học vừa kết thúc, bạn Thành nhớ được 94% kiến thức.
- b Tốc độ thay đổi kiến thức của bạn Thành ở thời điểm sau t tháng kết thúc khóa học là $f'(t) = -\frac{12}{3t+1}$.
- c Tại thời điểm sau 3 tháng khóa học kết thúc, tốc độ giảm sút kiến thức của bạn Thành là 1,2%/tháng.
- d Biết rằng tại mọi thời điểm, tốc độ thay đổi kiến thức của bạn Thành luôn gấp 3 lần tốc độ thay đổi kiến thức của bạn Công. Tại thời điểm kết thúc khóa học, bạn Công nhớ được 96% kiến thức. Sau 3 tháng, lượng kiến thức bạn Công còn nhớ được hơn 85%.

Câu 56 Có hai chất điểm A, B đang chuyển động thì xảy ra va chạm. Biết rằng sau khi va chạm hai chất điểm di chuyển về hai hướng ngược nhau, chất điểm A di chuyển tiếp với tốc độ $v_1(t) = 6 - 3t$ (m/s), chất điểm B di chuyển với tốc độ $v_2(t) = 12 - 4t$ (m/s) trước khi cả hai dừng lại, t là thời gian tính bằng giây, thời điểm ban đầu $t = 0$ là lúc xảy ra va chạm.



- a Quãng đường chất điểm A di chuyển được kể từ khi va chạm đến khi dừng lại là 18 m.
- b Sau va chạm chất điểm A dừng lại sau 2 s.
- c Quãng đường chất điểm A di chuyển sau khi va chạm đến khi dừng hẳn được biểu diễn bởi hàm số $s_1(t) = 6t - \frac{3}{2}t^2$ (m).
- d Khoảng cách hai chất điểm sau khi đã dừng hẳn là 23 m.

Câu 57 (MH - THPTQG 2025). Một người điều khiển ô tô đang ở đường dẫn muốn nhập làn vào đường cao tốc. Khi ô tô cách điểm nhập làn 200 m, tốc độ của ô tô là 36 km/h. Hai giây sau đó, ô tô bắt đầu tăng tốc với tốc độ $v(t) = at + b$ ($a, b \in \mathbb{R}, a > 0$),



trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc. Biết rằng ô tô nhập làn cao tốc sau 12 giây và duy trì sự tăng tốc trong 24 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc.

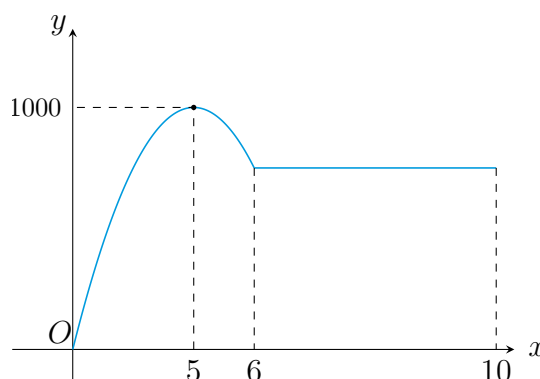
- a** Quãng đường ô tô đi được từ khi bắt đầu tăng tốc đến khi nhập làn là 180 m .
- b** Giá trị của b là 10 .
- c** Quãng đường $S(t)$ (đơn vị: mét) mà ô tô đi được trong thời gian t giây ($0 \leq t \leq 24$) kể từ khi tăng tốc được tính theo công thức $S(t) = \int_0^{24} v(t), dt$.
- d** Sau 24 giây kể từ khi tăng tốc, tốc độ của ô tô không vượt quá tốc độ tối đa cho phép là 100 km/h.

2 Trả lời ngắn

Câu 1 Cường độ dòng điện trong một dây dẫn tại thời điểm t giây được xác định bởi $I(t) = Q'(t) = 3t^2 - 6t + 5$, với $Q(t)$ là điện lượng truyền trong dây dẫn tại thời điểm t . Biết khi $t = 1$ giây, điện lượng truyền trong dây dẫn là $Q(1) = 4$. Tính điện lượng truyền trong dây dẫn khi $t = 3$.

KQ:

Câu 2 Một xe ô tô sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu chuyển động với vận tốc được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol như hình bên dưới. Biết rằng sau 5 phút thì xe đạt đến vận tốc cao nhất 1000 m/phút và bắt đầu giảm vận tốc, đi được 6 phút thì xe chuyển động đều. Hỏi quãng đường xe đã đi được trong khoảng 10 phút đầu tiên là bao nhiêu mét?



KQ:

Câu 3 Tốc độ tăng cân nặng của một bé gái trong độ tuổi từ 0 tháng đến 36 tháng được ước tính bởi hàm số $f'(t) = 0,00093t^2 - 0,04792t + 0,76806$ (kg/ tháng), với $f(t)$ là cân nặng của bé gái lúc t tháng tuổi. (Nguồn: <http://www.vinmec.com>) Hãy ước tính cân nặng của một bé gái 5 tháng tuổi, biết cân nặng của bé gái đó khi mới sinh là 3,3 kg (đơn vị: kg, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

KQ:

Câu 4 Đối với các dự án xây dựng, chi phí nhân công lao động được tính theo số ngày công. Gọi $m(t)$ là số lượng công nhân được sử dụng ở ngày thứ t (kể từ khi khởi công dự án). Gọi $M(t)$ là số ngày công được tính đến hết ngày thứ t (kể từ khi khởi công dự án). Trong kinh tế xây dựng, người ta đã biết rằng $M'(t) = m(t)$. Một công trình xây dựng dự kiến hoàn thành trong 400 ngày. Số lượng công nhân được sử dụng cho bởi hàm số $m(t) = 800 - 2t$, trong đó t tính theo ngày ($0 \leq t \leq 400$), $m(t)$ tính theo người. Đơn giá cho một ngày công lao động là 400 000 đồng. Tính chi phí (tỷ đồng) nhân công lao động của công trình đó (cho đến lúc hoàn thành).

KQ:

Câu 5 Cá hồi Thái Bình Dương đến mùa sinh sản thường bơi từ biển ngược dòng vào sông và đến thượng nguồn các dòng sông để đẻ trứng. Giả sử cá bơi ngược dòng sông với

vận tốc là $v(t) = -\frac{2t}{5} + 4$ (km/h). Nếu coi thời điểm ban đầu $t = 0$ là lúc cá bắt đầu bơi vào dòng sông thì khoảng cách xa nhất mà con cá có thể bơi được là bao nhiêu km?

KQ: 

Câu 6 Một vật chuyển động với gia tốc được cho bởi hàm số $a(t) = 5 \cos t$ m/s². Lúc bắt đầu chuyển động vật có vận tốc 2,5 m/s. Tính gia tốc của vật (đơn vị m/s²) tại thời điểm vận tốc đạt giá trị lớn nhất trong π (s) đầu tiên.

KQ: 

Câu 7 Khi nghiên cứu dịch sốt xuất huyết ở một địa phương, các chuyên gia y tế ước tính rằng tại ngày thứ m có $F(m)$ người mắc bệnh (sau khi đã làm tròn đến chữ số hàng đơn vị). Biết rằng tốc độ lan truyền bệnh là $F'(m) = \frac{150}{2m+1}$ và ngày đầu tiên ($m = 0$) người ta phát hiện ra 50 bệnh nhân. Hãy xác định số người mắc bệnh ở ngày thứ 10.

KQ: 

Câu 8 Một gia đình sản xuất chiếu cói ở Nga Sơn mỗi ngày sản xuất được x chiếc chiếu ($0 \leq x \leq 20$). Chi phí biên để sản xuất x chiếc chiếu (tính bằng nghìn đồng) cho bởi hàm số sau $C'(x) = 3x^2 - 4x + 10$. Biết rằng chi phí cố định ban đầu để sản xuất là 500 nghìn đồng. Giả sử gia đình này bán hết chiếu mỗi ngày với giá 270 nghìn đồng/chiếc chiếu. Tính lợi nhuận tối đa theo đơn vị nghìn đồng mà gia đình đó thu được?

KQ: 

Câu 9 Một hồ nước bị ô nhiễm được xử lí bằng một chất diệt khuẩn. Tốc độ phát triển của số lượng vi khuẩn sống sót được mô hình bởi $B'(t) = -\frac{3000}{(1+0,2t)^2}$, $t \geq 0$ với $B(t)$ là số lượng vi khuẩn trên mỗi ml nước và t là số ngày tính từ khi hồ nước được xử lí. Biết số lượng vi khuẩn ban đầu là 10 000 con/ml nước. Sử dụng mô hình này xác định lượng vi khuẩn sau 5 ngày.

Cho biết $\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$.

KQ: 

Câu 10 Người ta thay nước mới cho một bể bơi có dạng hình hộp chữ nhật có độ sâu là $h_1 = 280$ cm. Giả sử $h(t)$ là chiều cao (tính bằng cm) của mực nước bơm được tại thời điểm t giây, biết rằng tốc độ tăng của chiều cao mực nước tại giây thứ t là $h'(t) = \frac{1}{500} \sqrt[3]{t+3} + 3$ và lúc đầu hồ bơi không có nước. Hỏi sau bao nhiêu giây thì nước bơm được $\frac{3}{4}$ độ sâu của hồ bơi? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Cho biết $\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$.

KQ: 

Câu 11 Trong một dịch cúm, tốc độ tăng số trường hợp mắc bệnh của một thành phố được ước lượng bởi $\dot{N}(t) = 10 \cdot e^{0,2t}$ (trường hợp/ngày) trong đó $N(t)$ là số trường hợp mắc bệnh sau thời gian t ngày kể từ khi bắt đầu dịch. Biết rằng thời điểm bắt đầu dịch có 5 trường hợp mắc bệnh. Ước lượng số trường hợp mắc bệnh của thành phố sau 10 ngày dịch bắt đầu.

KQ: 



Câu 12 Chủ một trung tâm thương mại muốn cho thuê một số gian hàng như nhau. Người đó muốn tăng giá cho thuê của mỗi gian hàng thêm x (triệu đồng) ($x \geq 0$). Tốc độ thay đổi doanh thu từ các gian hàng đó được biểu diễn bởi hàm số $T'(x) = -20x + 300$, trong đó $T(x)$ tính bằng triệu đồng. Biết rằng nếu người đó tăng giá thuê cho mỗi gian hàng thêm 10 triệu đồng thì doanh thu là 12 000 triệu đồng. Tìm giá trị của x (triệu đồng) để người đó có doanh thu là cao nhất?

KQ: 

Câu 13 Theo định luật làm mát của Newton thì tốc độ làm mát của một vật tỉ lệ thuận với chênh lệch nhiệt độ giữa vật đó và môi trường xung quanh, với điều kiện là chênh lệch này không quá lớn. Giả sử $T(t)$ là nhiệt độ của vật thể (đơn vị: độ C) tại thời điểm t (đơn vị: phút) và T_s là nhiệt độ của môi trường xung quanh, chênh lệch giữa nhiệt độ của vật thể và môi trường xung quanh là $y(t) = T(t) - T_s$ thì $y'(t) = k \cdot y(t)$ với k là hằng số. Một cốc nước đang ở nhiệt độ phòng là 22°C được đưa vào ngăn mát tủ lạnh có nhiệt độ là 5°C . Sau 30 phút, nhiệt độ của cốc nước được đo lại là 16°C . Hỏi sau một tiếng trong tủ lạnh, nhiệt độ cốc nước là bao nhiêu độ C (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?

KQ: 

Câu 14 Ở giai đoạn thải trừ, giai đoạn cuối sau khi một người uống một liều thuốc, nồng độ thuốc trong máu ký hiệu là $C(t)$ (đơn vị: mg/l), giảm dần sau t giờ kể từ khi giai đoạn này bắt đầu. Khi đó, tốc độ giảm nồng độ $C'(t)$ tỉ lệ với chính nồng độ hiện có, tức là $\frac{C'(t)}{C(t)} = -k$ (k là hằng số dương). Biết rằng khi bắt đầu giai đoạn thải trừ, nồng độ thuốc còn lại là 12 mg/l và sau 6 giờ kể từ lúc bắt đầu thải trừ, nồng độ đo được là 3 mg/l. Hỏi sau khoảng thời gian bao nhiêu giờ thì nồng độ còn lại bằng 1 mg/l? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

KQ: 

Câu 15 Vì nước và dầu không hoà tan vào nhau nên nếu dầu đổ vào nước sẽ tạo thành một mảng hình trụ trên bề mặt nước. Bán kính $r(t)$ của mảng này lan ra với tốc độ tỉ lệ thuận với chiều cao $h(t)$ của mảng dầu. Giả sử một lít dầu bị đổ trên mặt hồ tĩnh lặng. Bán kính ban đầu của vết tràn là 20 cm và sau 2 giây nó tăng lên 50 cm. Hỏi sau bao nhiêu phút (làm tròn đến hàng phần mười) thì bán kính vết tràn đạt 5 mét?

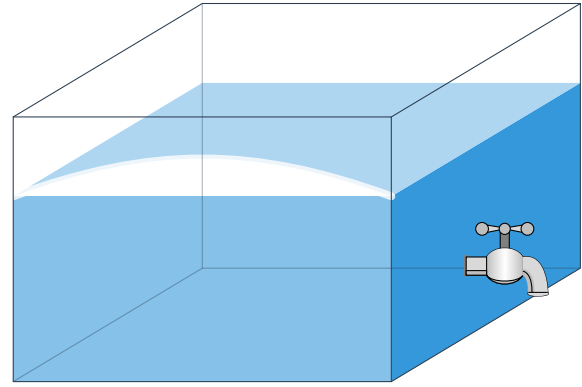
KQ: 

Câu 16 Trong một chương trình giao lưu âm nhạc đón tết vui xuân, ban đầu với sự tham dự của 1 700 khán giả. Ban tổ chức đã thống kê được số lượng khán giả ở lại sân khấu xem âm nhạc theo thời gian, được mô tả bởi một hàm số liên tục trên $[0; +\infty)$:

$$\begin{cases} 1700 - 400t, & 0 \leq t \leq 2 \\ a(t-2)^2 + b, & t > 2 \end{cases}$$
 (trong đó $f'(t)$ là số khán giả, t là số giờ kể từ khi chương trình bắt đầu, a, b là tham số thực), với hàm số $f(t)$ mô tả tổng sự hiện diện của khán giả theo thời gian t . Sau 2 giờ 30 phút số lượng khán giả ở lại sân khấu là 875. Hỏi từ khi bắt đầu cho đến khi khán giả ra về hết, trung bình mỗi giờ còn bao nhiêu khán giả ở lại tham gia chương trình âm nhạc?

KQ: 

Câu 17 Một bể nước hình hộp chữ nhật cao 1 m và có đáy là hình vuông cạnh 2 m. Ban đầu bể đầy nước. Người ta mở một cái vòi ở đáy, nước chảy ra với tốc độ tỷ lệ thuận với căn bậc hai của độ cao của nước tại bất kì thời điểm nào. Giả sử độ cao của nước trong bể tại thời điểm t là $h(t)$ và $V(t)$ là thể tích của nước hiện tại sau t phút mở vòi thì ta có $V'(t) = k \cdot \sqrt{h(t)}$, ($k \in \mathbb{R}$). Biết rằng, mực nước giảm 19 cm sau 2 phút, hỏi sau bao nhiêu phút thì bể cạn nước?



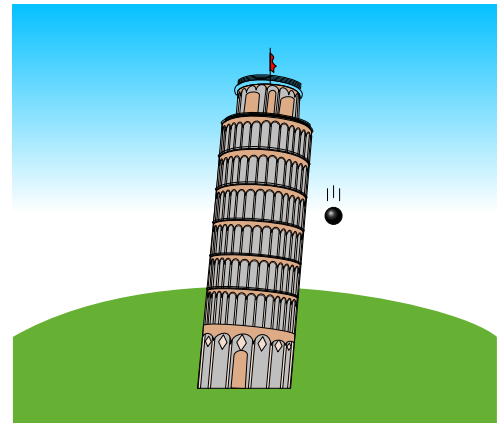
KQ:

Câu 18 Một quần thể vi sinh vật có tốc độ tăng số lượng cá thể được ước lượng bởi $P'(t) = 150\sqrt{t}$ (cá thể/ngày) với $0 \leq t \leq 10$ trong đó $P(t)$ là số lượng cá thể vi sinh vật tại thời điểm t ngày kể từ thời điểm ban đầu. Biết rằng ban đầu quần thể có 1000 cá thể. Ước lượng số cá thể của quần thể sau 5 ngày kể từ thời điểm ban đầu (kết quả làm tròn đến hàng trăm).

KQ:

Câu 19 Người ta thả một vật từ một vị trí trên cao cho rơi xuống mặt đất theo phương thẳng đứng. Biết gia tốc trọng trường tại nơi thả vật bằng $9,8 \text{ m/s}^2$. Giả sử lực tác động của không khí đối với vật trong quá trình rơi là không đáng kể. Biết rằng sau 4 giây thì vật bắt đầu chạm mặt đất. Hỏi vị trí của vật trước khi thả rơi cao bao nhiêu mét so với mặt đất (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?

KQ:



Câu 20 Công ty A và công ty B cùng ra mắt sản phẩm cạnh tranh thị trường mới vào cùng thời điểm. Thị phần được đo bằng số lượng khách hàng lũy kế.

- ♦ Công ty A: Bắt đầu với 0 khách hàng. Trong giai đoạn đầu, chiến dịch marketing hiệu quả giúp tốc độ thu hút khách hàng mới của họ tăng dần theo thời gian, được mô tả bởi hàm $f(t) = 2t + 7$ (nghìn khách hàng/tháng), với t là số tháng kể từ khi ra mắt.
- ♦ Công ty B: Nhờ có uy tín từ trước, họ bắt đầu với 10 nghìn khách hàng đặt trước sản phẩm. Sau đó, họ duy trì một tốc độ thu hút khách hàng mới ổn định là 10 nghìn khách hàng/tháng.

Hỏi sau khoảng bao nhiêu tháng kể từ khi ra mắt, tổng số lượng khách hàng lũy kế của công ty A bằng tổng số lượng khách hàng lũy kế của công ty B (tính cả 10 nghìn khách hàng ban đầu)?

KQ:



Câu 21 Một trận dịch lây lan đến mức sau khi bùng phát t tuần số người nhiễm bệnh là $N_1(t) = 0,1t^2 + 0,5t + 150$, $0 \leq t \leq 50$. Hai mươi lăm tuần sau khi dịch bệnh bùng phát, một loại vắc xin đã được phát triển và tiêm cho công chúng. Khi đó, số người nhiễm bệnh được điều chỉnh theo mô hình $N_2(t) = -0,2t^2 + 6t + 200$, $25 \leq t \leq 50$. Hãy ước tính gần đúng số người mà vắc xin đã ngăn ngừa khỏi dịch bệnh trong thời gian xảy ra dịch bệnh.

KQ:

Câu 22 Hiệu suất của tim là lưu lượng máu được bơm bởi tim trên một đơn vị thời gian (lưu lượng máu chảy vào động mạch chủ). Để đo hiệu suất của tim, người ta bơm A (mg) chất chỉ thị màu vào tâm nhĩ phải, chảy qua tim rồi vào động mạch chủ và đo nồng độ chất chỉ thị màu còn lại ở tim đến thời điểm $T(s)$ khi chất chỉ thị này tan sạch. Gọi $c(t)$ là nồng độ (mg/l) chất chỉ thị màu tại thời điểm $t(s)$ thì hiệu suất của tim được xác định bởi $F = \frac{A}{\int_0^T c(t) dt}$ (l/s). Biết $c(t) = \frac{1}{4}t(12 - t)$ với $0 \leq t \leq 12$. Tính hiệu suất của tim

khi bơm 8 mg chất chỉ thị màu vào tâm nhĩ phải (làm tròn đến hàng phần trăm theo đơn vị l/s).

KQ:

Câu 23 Trọng lực của Trái Đất tác dụng lên một vệ tinh trong quá trình vệ tinh này được phóng lên từ mặt đất tới vị trí cách tâm Trái Đất r (m) xác định bởi công thức $F(r) = G \cdot \frac{Mm}{r^2}$, trong đó $M = 6 \cdot 10^{24}$ (kg) là khối lượng Trái Đất, m (kg) là khối lượng vệ tinh và $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ là hằng số hấp dẫn.

Trọng lực này sinh công $W = \int_a^b F(h) dh$ (J) khi vệ tinh thay đổi từ vị trí cách tâm Trái Đất a (m) lên vị trí cách tâm Trái Đất b (m) (nguồn: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/wint>). Công tối thiểu để phóng một vệ tinh nặng $m = 1000$ kg từ mặt đất lên độ cao 35 780 km so với mặt đất là $a \cdot 10^{10}$ (J), biết bán kính Trái Đất là 6 370 km. Tìm giá trị của a (làm tròn đến hàng đơn vị).

KQ:

====

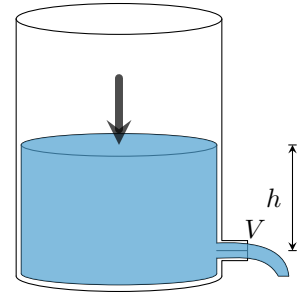
Câu 24 Ở 45°C , phản ứng hoá học phân huỷ N_2O_5 xảy ra theo phương trình $N_2O_5 \rightarrow 2NO_2 + \frac{1}{2}O_2$ với nồng độ $c(t)$ (mol/L) của N_2O_5 tại thời điểm t giây ($t \geq 0$) thỏa mãn $c'(t) = -0,0005c(t)$. Biết khi $t = 0$, nồng độ ban đầu của N_2O_5 là 0,05 mol/L và nồng độ trung bình của N_2O_5 (mol/L) từ thời điểm a giây đến thời điểm b giây ($a < b$) được cho bởi công thức $\frac{1}{b-a} \int_a^b c(t) dt$. Nồng độ trung bình của N_2O_5 từ thời điểm 10 giây đến thời điểm 20 giây là $a \cdot 10^{-4}$ (mol/L). Tính a (làm tròn đến hàng đơn vị).

KQ:

Câu 25 Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 2t$ (m/s). Đi được 12 giây, người lái xe gặp chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc $a = -12$ (m/s²). Tính quãng đường s (m) ô tô đi được từ lúc bắt đầu chuyển động đến khi dừng hẳn.

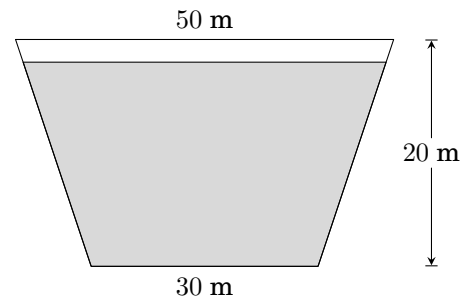
KQ:

Câu 26 Theo định luật Torricelli, tốc độ nước chảy ra từ bể tỷ lệ thuận với căn bậc hai độ sâu của nước so với miệng cống: nếu $y(t)$ là độ cao mực nước và $V(t)$ là thể tích nước còn lại trong bể tại thời điểm t , thì tốc độ thoát ra $V'(t) = -k\sqrt{y(t)}$ với $k > 0$. Xét bể hình trụ cao 9 m, bán kính $R = 2$ m, ban đầu đầy nước. Biết sau 15 phút, $y(15) = 4$ m. Hỏi sau 42 phút, thể tích nước còn lại trong bể bằng bao nhiêu lít? (làm tròn đến đơn vị).



KQ:

Câu 27 Một cái đập có mặt cắt ngang có dạng hình thang cân cao 20 mét, đáy lớn rộng 50 mét, đáy nhỏ rộng 30 mét. Nước cách đỉnh đập 4 mét (*tham khảo hình vẽ*). Áp suất thủy tĩnh tác dụng lên đập được tính theo công thức $F = 9800 \int_0^{h_0} h(x) \cdot k(x) dx$ (N), trong đó $h(x)$ và $k(x)$ lần lượt là chiều dài và độ sâu của lớp nước tại vị trí cách đáy x mét, h_0 là độ cao của nước trong hồ. Biết $F = a \cdot 10^7$ (N), tính a (*làm tròn kết quả đến hàng phần mười*).



KQ:

Câu 28 Trong kinh tế học, người ta tính toán thu nhập của một khoản đầu tư thông qua công thức $FV = \int_0^T f(t)e^{-rt} dt$ trong đó với khoảng thời gian t thì $f(t)$ là tốc độ sinh lời, T là thời gian đầu tư và r là lãi suất hàng kỳ. Bạn Nam đang cố gắng để cân nhắc giữa hai khoản đầu tư như sau

- ◆ Khoản đầu tư thứ nhất có giá 1 000 USD và dự kiến sẽ tạo ra một dòng thu nhập liên tục với tốc độ $f_1(t) = 3000e^{0,03t}$ (USD) mỗi năm.
- ◆ Khoản đầu tư thứ hai có giá 4 000 USD và được ước tính sẽ tạo ra thu nhập với tốc độ không đổi là $f_2(t) = 4000e^{0,03t}$ (USD) mỗi năm.

Giả sử lãi suất hằng năm hiện hành vẫn cố định ở mức 5% mỗi năm và được tính lãi kép liên tục. Em hãy giúp Nam chọn khoản đầu tư lời hơn bằng cách tính số Dollar chênh lệch giữa hai khoản đầu tư sau 5 năm. (Lấy giá trị dương và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

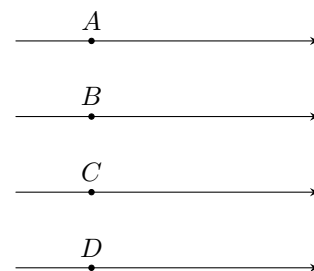
KQ:

Câu 29 Một chất điểm A xuất phát từ O , chuyển động thẳng với vận tốc $v_A(t) = \frac{1}{180}t^2 + \frac{11}{18}t$ (m/s), trong đó t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc A bắt đầu chuyển động. Từ trạng thái nghỉ, một chất điểm B cũng xuất phát từ O , chuyển động thẳng cùng hướng với A nhưng chậm hơn 5 giây so với A và có gia tốc bằng a m/s². Sau khi B xuất phát được 10 giây thì đuổi kịp A . Tìm giá trị a .

KQ:



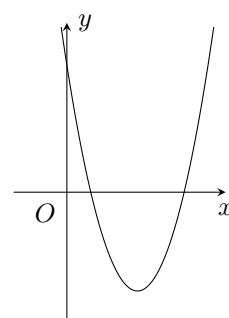
Câu 30 Trong một trò chơi điện tử, có bốn chất điểm A, B, C, D đang di chuyển trên các đường thẳng song song như hình vẽ. Lập trình viên đã lập trình vận tốc của các chất điểm A, B, C lần lượt là $v_A(t) = t + 2$; $v_B(t) = 2t$ và $v_C(t) = 11 - 2t$ (Với t tính bằng giây từ lúc bắt đầu chuyển động và v tính bằng m/s và giả thiết rằng khi $v < 0$ thì chất điểm đang di chuyển từ phải qua trái).



Biết vận tốc của chất điểm D tại một thời điểm bất kì được tính bằng vận tốc nhỏ nhất của ba chất điểm A, B, C . Quãng đường chất điểm D đi được trong 5 giây đầu tiên bằng bao nhiêu mét?

KQ:

Câu 31 Một vật chuyển động thẳng. Khi vật bắt đầu qua điểm O , người ta bắt đầu quan sát, đo đặc chuyển động của vật thì thấy vận tốc tức thời của vật tại thời điểm t (s) là $v(t)$ (m/s), hàm vận tốc $v(t)$ có đồ thị phụ thuộc thời gian là một phần của đường parabol có đỉnh $I\left(\frac{4}{3}; -\frac{7}{3}\right)$ như hình bên (với $t \geq 0$ và mốc tính thời gian là lúc bắt đầu quan sát chuyển động). Tính tổng quãng đường vật đi được từ lúc đầu đến lúc vật trở lại điểm O lần cuối cùng (kết quả tính bằng mét và làm tròn đến hàng phần trăm).



KQ:

Câu 32 Người ta quan sát một quần thể vi khuẩn đang tăng trưởng, ban đầu gồm 500 vi khuẩn. Sau một ngày và sau bốn ngày kể từ khi bắt đầu quan sát, số lượng vi khuẩn của quần thể đó tương ứng là 600 vi khuẩn, 1 300 vi khuẩn. Gọi $P(t)$ là số lượng vi khuẩn của quần thể đó tại thời điểm t ngày kể từ khi bắt đầu quan sát, $0 \leq t \leq 10$. Người ta ước tính tốc độ tăng trưởng của quần thể vi khuẩn đó được mô tả bởi $P'(t) = at + b\sqrt{t}$ (vi khuẩn/ngày), trong đó a, b là hằng số. Hỏi số lượng vi khuẩn của quần thể đó sau 9 ngày kể từ khi bắt đầu quan sát là bao nhiêu?

KQ:

Câu 33 Một người bình thường với chiều cao h cm, nặng w kilogram có diện tích bề mặt cơ thể S được mô hình hoá bởi công thức $S = \frac{1}{60} \cdot w^{0,5} \cdot h^{0,5}$ (m^2) (công thức Mosteller). Một đối tượng có chiều cao bằng 168 cm, nặng 62 kg tham gia một cuộc nghiên cứu về sức khỏe trong 5 năm. Người ta nhận thấy cân nặng của đối tượng quan sát thay đổi với tốc độ $w'(t) = 0,02t^2 + 0,2t$ kg/năm ($0 \leq t \leq 5$) và chiều cao tăng đều mỗi năm 0,5 cm. Sau 5 năm quan sát, diện tích bề mặt cơ thể của đối tượng trên tăng thêm bao nhiêu centimet vuông so với ban đầu? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

KQ:

Câu 34 Mật độ khối lượng của một thanh kim loại có chiều dài 4 mét được cho bởi công thức $\rho(x) = 1000 + x - \sqrt{x}$ (kg/m^3), trong đó x là khoảng cách bằng mét tính từ một đầu của thanh. Mật độ khối lượng trung bình (kg/m^3) trên toàn bộ chiều dài của thanh là bao nhiêu? (làm tròn đến hàng đơn vị).

KQ:

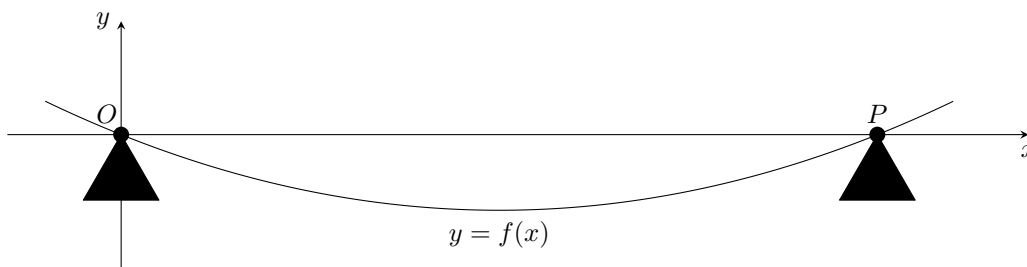
Câu 35 Một học sinh đang điều khiển xe đạp điện chuyển động thẳng đều với vận tốc k (m/s). Khi phát hiện có chướng ngại vật phía trước học sinh đó thực hiện phanh xe. Sau khi phanh, xe chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = k - 2t$ (m/s), thời gian tính bằng giây. Tìm giá trị lớn nhất của k để quãng đường xe đạp điện đi được sau khi phanh không vượt quá $9m$.

KQ:

Câu 36 Trong một nghiên cứu của V.A.Tucker và K.Schmidt-Koenig, người ta đã xác định rằng năng lượng E tiêu thụ bởi một con chim trong chuyến bay thay đổi theo tốc độ v (km/h) của con chim. Đối với một loài vẹt đuôi dài, mức tiêu hao năng lượng thay đổi theo tốc độ được cho bởi $E'(v) = \frac{0,31v^2 - 471,51}{v^2}$ với $v > 0$, trong đó E được tính bằng Jun. Quan sát cho thấy vẹt đuôi dài có xu hướng bay với tốc độ v_0 để làm giảm tiêu hao năng lượng xuống còn tối thiểu $E_{\min} = 24(J)$. Trong 4 giờ quan sát con vẹt bay với vận tốc tăng đều đặn từ 30 km/h đến 46 km/h. Tại thời điểm sau đúng một giờ quan sát, mức năng lượng tiêu hao của con vẹt đo được bằng là bao nhiêu Jun? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

KQ:

Câu 37 Một tấm ván gỗ chỉ được hỗ trợ ở hai đầu O và P , cách nhau 4 m. Tấm ván võng xuống dưới do trọng lượng của nó tạo thành một đường cong. Xét trên hệ trục Oxy như hình vẽ dưới, đơn vị mỗi trục là mét, đường cong trong hình vẽ có phương trình $y = f(x)$.



Người ta chứng minh được $f''(x) = \frac{1}{100} \left(2x - \frac{x^2}{2} \right)$ với $0 \leq x \leq 4$. Tại điểm cách P một khoảng 1 mét, tấm ván bị võng xuống bao nhiêu cm? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

KQ:

Câu 38 Trong bài này, ta xét một tình huống giả định có một học sinh sau kỳ nghỉ đã mang virus cúm quay trở lại khuôn viên trường học biệt lập. Sau khi có sự tiếp xúc giữa các học sinh, virus cúm lây lan trong khuôn viên trường. Giả thiết hệ thống chống dịch chưa được khởi động và virus cúm được lây lan tự nhiên. Gọi $P(t)$ là số học sinh bị nhiễm virus cúm ở ngày thứ t tính từ ngày học sinh mang virus cúm quay trở lại khuôn viên trường. Biết rằng tốc độ lây lan của virus cúm cho bởi công thức $P'(t) = -0,02 C e^{-0,02t}$, trong đó C là hằng số khác 0. Số học sinh bị nhiễm virus cúm sau 4 ngày là 55 học sinh. Xác định số học sinh bị nhiễm virus cúm sau 10 ngày? Làm tròn đến hàng đơn vị.

KQ:



Câu 39 Trên một mặt hồ phẳng rộng 470 mét vuông, một đợt tảo lam độc hại phát triển với tốc độ tỷ lệ thuận với căn bậc hai kích thước hiện tại của nó. Nếu ta gọi $S(t)$ là diện tích của đợt tảo này sau t ngày thì $S'(t) = k \cdot \sqrt{S(t)}$ (trong đó k là hằng số thực). Khi mới phát hiện, đợt tảo này bao phủ 16 m^2 mặt hồ. Diện tích của nó tăng gấp đôi trong 3 ngày tiếp theo, hỏi sau bao ngày tính từ lúc phát hiện đợt tảo này phủ kín mặt hồ? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

KQ: 

Câu 40 Trong một số mô hình sinh học, phản ứng của cơ thể người đối với một loại thuốc cụ thể được đo bởi một hàm số bậc ba $y = F(M)$ trong đó M là lượng thuốc được hấp thụ vào máu, đơn vị là mg, $F(M)$ là tỉ lệ đáp ứng tính theo phần trăm. Độ nhạy cảm của cơ thể đối với thuốc đó (phần trăm mỗi mg) được tính bằng đạo hàm $S = F'(M)$. Cơ thể đáp ứng tốt nhất là 100% khi nồng độ thuốc trong máu là 200 mg và độ nhạy cảm lớn nhất là 0,75% mỗi mg khi nồng độ trong máu đạt 100 mg. Tỉ lệ đáp ứng của bệnh nhân khi nồng độ thuốc trong máu đạt 240 mg bằng bao nhiêu phần trăm?

KQ: 

Câu 41 Vệ tinh Van Allen Probes được phóng lên không gian để nghiên cứu các vành đai bức xạ bao quanh Trái Đất. Vệ tinh này bay theo một quỹ đạo có chu kỳ 10 giờ-nghĩa là mỗi vòng bay quanh Trái Đất kéo dài đúng 10 giờ. Cứ mỗi vòng bay, vệ tinh lại xuyên qua vùng bức xạ mạnh và tích lũy thêm *liều bức xạ*. Biết rằng đơn vị của bức xạ là Gray (Gy) và khi tổng liều bức xạ chiếu vào vệ tinh đạt 1 000 Gray thì vệ tinh hỏng hoàn toàn. Khoảng cách từ tâm Trái Đất đến vệ tinh được mô hình hóa bằng hàm số $R(T) = 7\,000 + 3\,000T$ (km), trong đó T là thời gian tính bằng giờ, $0 \leq T \leq 10$, kể từ đầu vòng bay. Công thức *suất liều bức xạ*-tức là lượng bức xạ vệ tinh nhận được trong 1 giờ, phụ thuộc vào khoảng cách R (km) từ vệ tinh tới tâm Trái Đất, là $D(R) = 60 \cdot \left(\frac{R}{25\,000}\right)^2$ milliGray/giờ. Biết rằng do tính đối xứng và chu kỳ của quỹ đạo bay, tổng liều bức xạ vệ tinh nhận được trong một vòng bay 10 giờ được tính bằng công thức $L = 2 \cdot \int_0^5 D(R(T)) \, dT$ và $1 \text{ Gray} = 1\,000 \text{ milliGray}$. Tính số năm hoạt động của vệ tinh từ lúc bắt đầu hoạt động tới khi hỏng hoàn toàn (*không làm tròn các bước trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng tới hai chữ số thập phân sau dấu phẩy, coi một năm có 365 ngày, mỗi ngày có 24 giờ*).

KQ: 

BẢNG ĐÁP ÁN ĐÚNG SAI Đ/S

Câu 1. Đ Đ S S

Câu 16. Đ S S S

Câu 31. Đ Đ S Đ

Câu 46. Đ Đ S Đ

Câu 2. Đ Đ S Đ

Câu 17. Đ Đ Đ S

Câu 32. S S Đ Đ

Câu 47. S Đ Đ S

Câu 3. Đ S Đ S

Câu 18. Đ S Đ S

Câu 33. Đ S Đ S

Câu 48. Đ S Đ S

Câu 4. Đ Đ Đ S

Câu 19. Đ Đ S S

Câu 34. Đ Đ S S

Câu 49. Đ S Đ Đ

Câu 5. S Đ Đ Đ

Câu 20. Đ Đ S S

Câu 35. Đ S S S

Câu 50. Đ Đ S S

Câu 6. Đ S Đ Đ

Câu 21. Đ S Đ Đ

Câu 36. Đ S Đ S

Câu 51. Đ S Đ S

Câu 7. S Đ Đ S

Câu 22. Đ Đ S S

Câu 37. Đ Đ S Đ

Câu 52. Đ S Đ Đ

Câu 8. Đ S Đ Đ

Câu 23. S Đ S Đ

Câu 38. Đ S Đ Đ

Câu 53. Đ S Đ S

Câu 9. Đ S Đ S

Câu 24. Đ S Đ Đ

Câu 39. S Đ Đ S

Câu 54. Đ Đ S S

Câu 10. S Đ S S

Câu 25. Đ Đ S S

Câu 40. Đ S Đ Đ

Câu 55. Đ S S Đ

Câu 11. Đ Đ S S

Câu 26. S S Đ S

Câu 41. Đ Đ S Đ

Câu 56. S Đ Đ S

Câu 12. Đ Đ S Đ

Câu 27. Đ Đ Đ S

Câu 42. S Đ S Đ

Câu 57. Đ Đ S S

Câu 13. S Đ Đ S

Câu 28. S Đ S S

Câu 43. Đ Đ Đ Đ

Câu 14. Đ Đ S S

Câu 29. Đ Đ S Đ

Câu 44. Đ S S Đ

Câu 15. Đ S S Đ

Câu 30. Đ S Đ Đ

Câu 45. Đ S Đ Đ

ĐÁP SỐ PHẦN TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. 1 6

Câu 2. 8 1 6 0

Câu 3. 6 , 5 8

Câu 4. 6 4

Câu 5. 2 0

Câu 6. 0

Câu 7. 2 7 8

Câu 8. 1 3 0 0

Câu 9. 2 5 0 0



Câu 10. 7 2 3 4

Câu 11. 3 2 4

Câu 12. 1 5

Câu 13. 1 2

Câu 14. 1 0 , 8

Câu 15. 3 5 , 6

Câu 16. 8 8 0

Câu 17. 2 0

Câu 18. 2 1 0 0

Câu 19. 7 8 , 4

Câu 20. 5

Câu 21. 4 5 3 1

Câu 22. 0 , 1 1

Câu 23. 5

Câu 24. 4 9 6

Câu 25. 1 6 8

Câu 26. 5 0 3

Câu 27. 4 , 4

Câu 28. 1 7 5 8

Câu 29. 1 , 5

Câu 30. 1 4 , 5

Câu 31. 5 , 4 9

Câu 32. 3 2 0 0

Câu 33. 5 8 1

Câu 34. 1 0 0 1

Câu 35. 6

Câu 36. 2 4 , 2

Câu 37. 2 , 3 8

Câu 38. 1 2 8

Câu 39. 3 2

Câu 40. 8 6 , 4

Câu 41. 5 , 1 9

Chủ đề 2

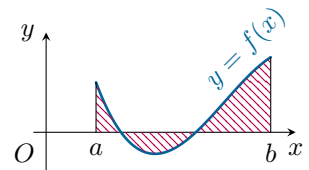
TOÁN THỰC TẾ ỨNG DỤNG TÍCH
PHÂN TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG

1 LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Ứng dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng

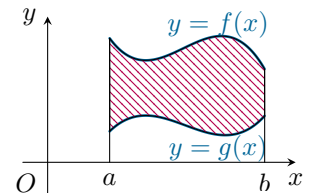
- ♦ Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, hai đường

thẳng $x = a$, $x = b$ và trục Ox là $S = \int_a^b |f(x)| dx$.



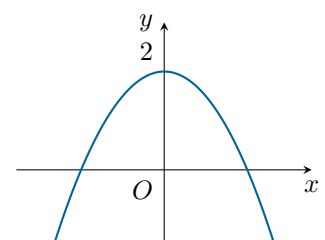
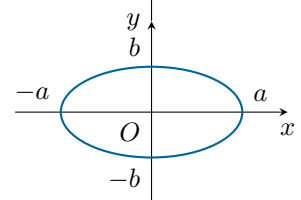
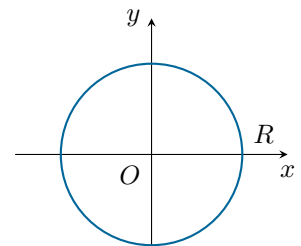
- ♦ Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ liên tục trên $[a; b]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ là

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

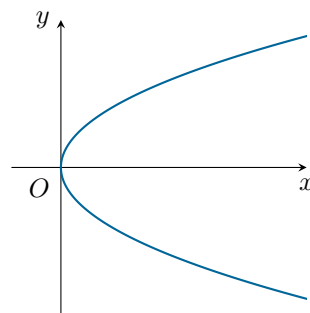


2 Một số phương trình hình phẳng cần nhớ

- ♦ Phương trình đường thẳng có dạng là $y = ax + b$. Nếu đường thẳng song song hoặc trùng với trục Ox thì phương trình có dạng $y = b$.
- ♦ Đường tròn tâm $I(a; b)$ và bán kính R có phương trình là $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. Nếu đặt hệ trục tọa độ Oxy sao cho O là tâm của đường tròn thì phương trình của đường tròn là $x^2 + y^2 = R^2$. Khi đó, phương trình của nửa đường tròn phía trên trục Ox là $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.
- ♦ Đường elip có độ dài trục lớn bằng $2a$ và trục bé bằng $2b$ có phương trình là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Khi đó, phương trình của nửa elip phía trên trục Ox là $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$.
- ♦ Parabol có trục đối xứng song song hoặc trùng với trục Oy có phương trình là $y = ax^2 + bx + c$. Ta thường đặt hệ trục sao cho trục đối xứng trùng với trục của Oy , khi đó phương trình của parabol có dạng là $y = ax^2 + c$.



- ♦ Parabol đi qua gốc tọa độ O và nhận trục Ox làm trục đối xứng có phương trình là $x = ay^2$. Khi đó, phương trình của nửa parabol phía trên trục Ox là $y = \sqrt{\frac{x}{a}}$.

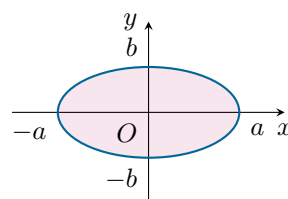


3 Diện tích và thể tích một số hình đặc biệt

Công thức diện tích hình elip

Cho hình elip có phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Khi đó diện tích của hình elip được tính theo công thức

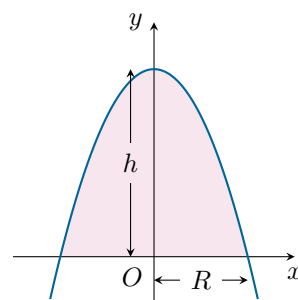
$$S = \pi ab$$



Công thức diện tích cổng parabol

Đường thẳng $y = m$ vuông góc với trục parabol (P) tạo thành một cổng parabol có diện tích được tính theo công thức

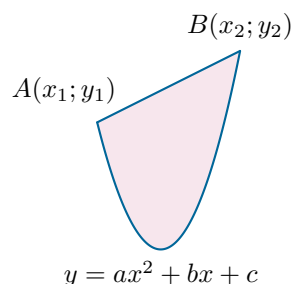
$$S = \frac{4}{3}Rh$$



Công thức diện tích parabol bị cắt bởi đường chéo

Một parabol $y = ax^2 + bx + c$ có 2 điểm A, B lần lượt có hoành độ x_1, x_2 thuộc (P) . Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và AB được tính theo công thức

$$S = \frac{a(x_1 - x_2)^3}{6}$$



II BÀI TẬP ÁP DỤNG

1 Trắc nghiệm đúng sai

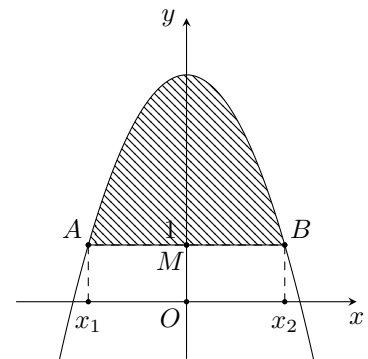
Câu 1 Các nhà kinh tế sử dụng đường cong Lorenz để minh họa sự phân phối thu nhập trong một quốc gia. Gọi x là đại diện cho phần trăm số gia đình trong một quốc gia và y là phần trăm tổng thu nhập, mô hình $y = x$ sẽ đại diện cho một quốc gia mà các gia đình có thu nhập như nhau. Đường cong Lorenz $y = f(x)$, biểu thị sự phân phối thu nhập thực tế. Diện tích giữa hai mô hình này, với $0 \leq x \leq 100$, biểu thị "sự bất bình đẳng về thu nhập" của một quốc gia. Năm 2005, đường cong Lorenz của Hoa Kỳ có thể được mô hình hóa bởi hàm số

$$y = (0,00061x^2 + 0,0218x + 1,723)^2, \quad 0 \leq x \leq 100.$$

Trong đó x được tính từ các gia đình nghèo nhất đến giàu có nhất.

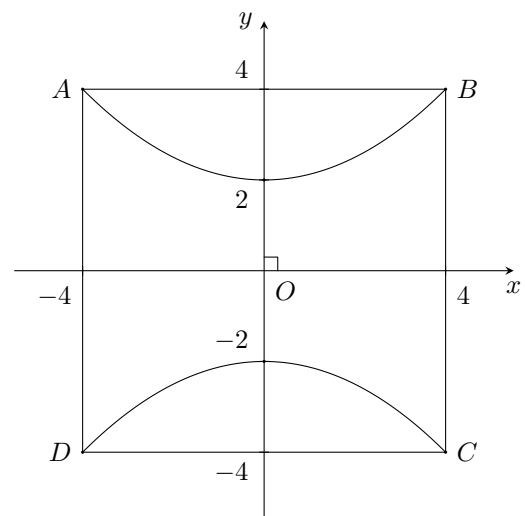
- a** Theo thứ tự từ các gia đình nghèo nhất đến giàu nhất, tổng thu nhập thực tế của 60% các gia đình đầu tiên chiếm chưa đến 30% so với tổng thu nhập của toàn bộ các gia đình.
- b** Nếu sắp xếp các gia đình theo thứ tự từ nghèo nhất đến giàu nhất, rồi chia thành 10 nhóm bằng nhau từ 1 đến 10, tổng thu nhập của các gia đình trong nhóm 3 chiếm khoảng 8,56% tổng thu nhập của toàn bộ các gia đình.
- c** Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kỳ năm 2005 được xác định bởi công thức $\int_0^{100} [x - (0,00061x^2 + 0,0218x + 1,723)^2] dx$.
- d** Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kỳ năm 2005 đã vượt quá 2000.

Câu 2 Một kiến trúc sư thiết kế bồn hoa trong công viên trên hệ trục tọa độ Oxy (đơn vị: mét). Bồn hoa là hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y = -x^2 + 4$ và trục hoành Ox . Kiến trúc sư bố trí một dải đèn LED thẳng, được mô phỏng bởi đường thẳng d đi qua điểm $M(0; 1)$, cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A và B (có hoành độ lần lượt là x_1, x_2). Dải đèn chia bồn hoa thành hai phần riêng biệt: Phần hình phẳng nằm phía trên dây cung AB được dùng để trồng Hoa Hồng, phần còn lại của bồn hoa (nằm phía dưới dây cung AB) được dùng để trồng Cỏ Nhặt.



- a** Diện tích toàn bộ bồn hoa (tổng diện tích trồng Hoa Hồng và Cỏ Nhặt) bằng 16 m^2 .
- b** Tích các hoành độ giao điểm của đường thẳng d và parabol (P) luôn bằng 3.
- c** Diện tích trồng Hoa Hồng đạt giá trị nhỏ nhất khi dải đèn LED được thiết kế nằm ngang (song song với trục hoành).
- d** Khi diện tích trồng Hoa Hồng gấp đôi diện tích trồng Cỏ Nhặt, chiều dài của dải đèn LED (tính bằng độ dài đoạn thẳng AB) xấp xỉ 3,84 mét (làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 3 Một người nông dân có một mảnh đất hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 8 m. Ông ta định chia mảnh đất thành ba phần bởi các parabol đi qua các đỉnh của hình vuông như hình vẽ, biết rằng đỉnh của parabol cách cạnh hình vuông 2 m. Ông dự định trồng hoa trên hai phần diện tích nằm giữa mỗi parabol và cạnh tương ứng của hình vuông, trồng cỏ trên phần diện tích còn lại. Chọn hệ trục Oxy sao cho $A(-4; 4)$, $B(4; 4)$, $C(4; -4)$, $D(-4; -4)$.



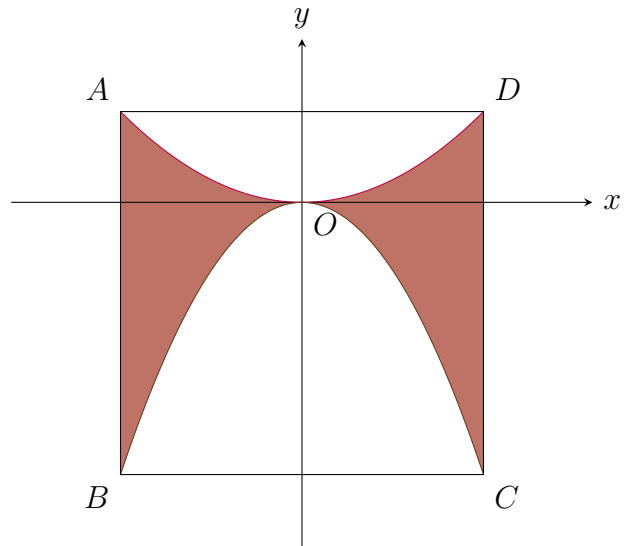
- a** Phương trình của hai parabol lần lượt là $y = \frac{x^2}{8} + 2$ và $y = -\frac{x^2}{8} - 2$.

b Diện tích trồng hoa bằng $\frac{64}{3} \text{ m}^2$.

c Nếu chi phí mua cây giống hoa là 100 000 đồng/ m^2 , cỏ là 70 000 đồng/ m^2 thì chi phí mua cây giống cho cả khu vườn là 5 120 000 đồng.

d Tỉ số diện tích đất trồng hoa và trồng cỏ bằng $\frac{1}{3}$.

Câu 4 Một công ty thiết kế mẫu huy hiệu để tặng cho khách hàng thân thiết của mình (xem hình vẽ bên). Trong đó $ABCD$ là hình vuông có cạnh bằng 4 cm, các đường cong AOD và BOC là một phần của các parabol đỉnh O . Với hệ trục tọa độ Oxy (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là centi-met) thì điểm A có tung độ bằng 1. Biết phần tô đậm trong hình vẽ được phủ vàng với chi phí 1 triệu đồng/ cm^2 , phần còn lại được phủ bạc với chi phí 300 nghìn đồng/ cm^2 , các chi phí còn lại là 500 nghìn đồng.



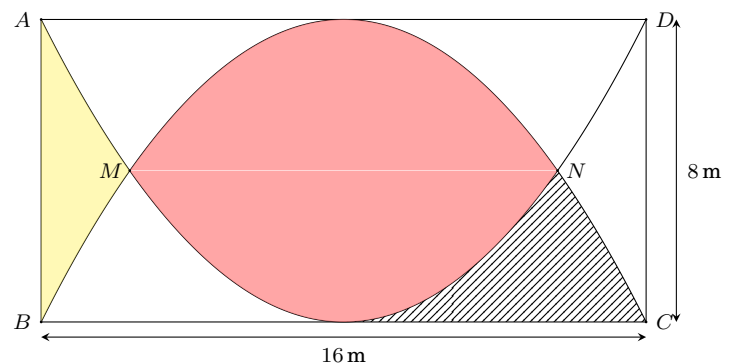
a Parabol chứa đường cong AOD có phương trình là $y = \frac{1}{16}x^2$.

b Parabol chứa đường cong BOC có phương trình là $y = -\frac{3}{4}x^2$.

c Diện tích phần tô đậm trong hình vẽ lớn hơn $5,5 \text{ cm}^2$.

d Chi phí sản xuất 1 chiếc huy hiệu trên nhỏ hơn 9 triệu đồng.

Câu 5 Một mô hình giấy trang trí có dạng hình chữ nhật $ABCD$ như hình vẽ, một học sinh muốn cắt tờ giấy theo đường dạng Parabol có đỉnh là trung điểm các cạnh dài của tờ giấy và đi qua hai đỉnh của cạnh đối diện. Gọi M, N lần lượt là các giao điểm của hai Parabol, các khẳng định sau đúng hay sai?



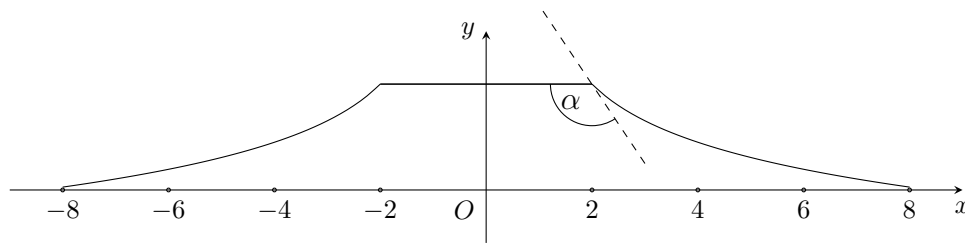
a Diện tích tam giác AMN có giá trị bằng $32\sqrt{3} \text{ m}^2$.

b Diện tích phần giấy giới hạn bởi Parabol và đoạn thẳng AB (phần tô màu vàng) có giá trị lớn hơn $8,8 \text{ m}^2$.

c Phần diện tích giới hạn bởi hai đường Parabol (phần tô màu đỏ) có giá trị bằng $60,3 \text{ m}^2$.

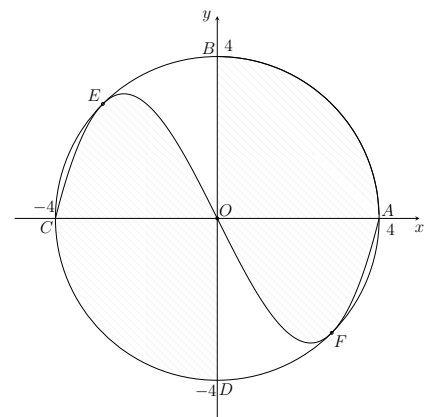
d Diện tích phần giấy giới hạn bởi Parabol và đoạn thẳng BC (phần gạch sọc) có giá trị nhỏ hơn 15 m^2 .

Câu 6 Hình vẽ bên dưới minh họa một phần khu vực thiết kế dành cho các hoạt động trượt ván, patin. Đường lên của khu vực này dẫn đến một bề mặt nằm ngang (gọi là vùng bằng phẳng), tiếp theo là đoạn dốc xuống, hai đường đối xứng nhau hai bên. Mặt trước và mặt sau của chướng ngại vật vuông góc với mặt đất ngang. Để mô tả mặt bên phía trước một cách toán học, ta xét mặt phẳng Oxy với trục Ox là phần bên dưới, trục Oy là trục đối xứng của bề mặt đang xét. Vùng bằng phẳng trải dài trong mô hình từ $-2 \leq x \leq 2$. Đường cong mặt cắt ngang của đoạn dốc xuống trong khoảng $2 \leq x \leq 8$ được mô tả bởi đồ thị của hàm số $f(x) = 2 - \ln(x - 1)$. Trong hệ tọa độ này, một đơn vị chiều dài tương ứng với một mét trong thực tế.



- a** Chiều cao của vùng bằng phẳng là 2 m.
- b** Trên khoảng $(2; 8)$ có một điểm x_0 mà tại đó, tốc độ thay đổi tức thời của hàm $f(x)$ bằng tốc độ thay đổi trung bình của hàm $f(x)$ trên khoảng này. Khi đó $x_0 \approx 4,3$ (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).
- c** Trên mô hình thì giá trị của góc $\alpha = 120^\circ$ được xác định bởi mặt phẳng nằm ngang của vùng bằng phẳng và đoạn đường dốc xuống tại cạnh chuyển tiếp (tiếp tuyến tại điểm $x = 2$).
- d** Mặt bên phía trước của chướng ngại vật được sử dụng một phần làm khu vực quảng cáo. Trong mô hình, khu vực này bao gồm hai phần diện tích, cụ thể là diện tích giữa đồ thị hàm số $f(x)$ và trục hoành trong đoạn $[2; 6]$ và một phần đối xứng với nó trong góc phần tư thứ hai. Diện tích của khu vực quảng cáo là $7,91 \text{ m}^2$ (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 7 Chào mừng tháng Thanh niên. Đoàn trường THPT X tổ chức cải tạo một khoảng đất trong khuôn viên nhà trường có hình dạng là một đường tròn có đường kính 8 m. Để tăng tính thẩm mỹ, khi thực hiện cải tạo đã chia mảnh đất đó thành hai phần bằng một đường cong là một phần của đồ thị hàm số bậc ba $y = f(x)$, phần gạch chéo dùng để trồng hoa và phần còn lại dùng để trồng cỏ, được mô hình hóa trong hệ trục Oxy như hình vẽ dưới đây. Biết đồ thị hàm số bậc ba $y = f(x)$ có tâm đối xứng trùng với gốc tọa độ, đi qua các điểm E, F lần lượt là các điểm chính giữa của các cung BC, DA và đi qua các giao điểm của đường tròn với trục Ox .



- a** Tọa độ các điểm E, F là $E(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}), F(2\sqrt{2}; -2\sqrt{2})$.
- b** Biết $f(x) = ax^3 + bx$. Khi đó $a + b = -15$.

c Diện tích phần trồng hoa là $S = 16 + 8\pi \text{ m}^2$.

d Biết chi phí trồng hoa là 180 nghìn đồng trên 1 mét vuông, trồng cỏ là 100 nghìn đồng trên 1 mét vuông. Chi phí để hoàn thành công trình trên là 8 117 nghìn đồng (làm tròn đến hàng nghìn).

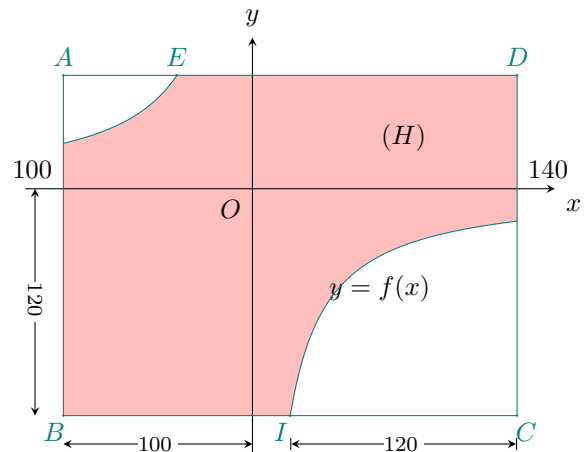
Câu 8 Một biển quảng cáo hình chữ nhật $ABCD$ có kích thước $AB = 180 \text{ cm}$, $AD = 240 \text{ cm}$. Phần được tô mờ (phần ở giữa) sẽ được dùng để in nội dung quảng cáo như hình vẽ. Tiến hành gắn hệ trục tọa độ Oxy vào biển quảng cáo (đơn vị dài trên mỗi trục là 1 cm) sao cho gốc tọa độ O nằm trong hình chữ nhật, cách cạnh AB là 100 cm, cách cạnh BC là 120 cm. Ta dùng đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{a}{x}$, sao cho nó đi qua trung điểm của cạnh BC , dựa vào đồ thị (C) này ta tô đậm được phần cần in quảng cáo. Khi đó

a Tọa độ của điểm I là $I(20; 100)$.

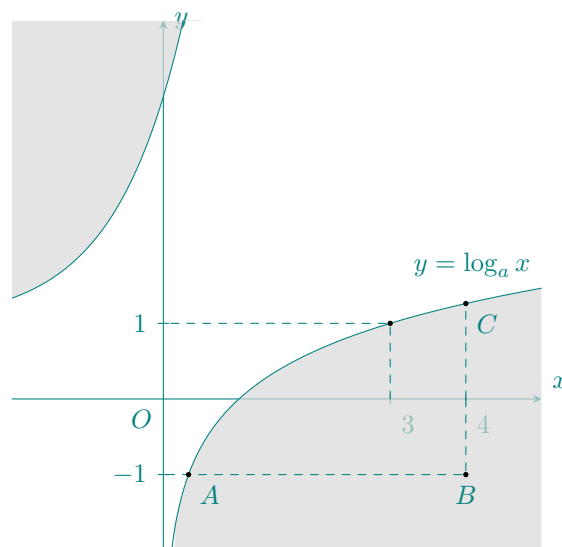
b Phương trình các đường thẳng AD , BC lần lượt là $AD: y = 60$, $BC: y = -120$.

c $a = -2400$.

d Diện tích cần in nội dung quảng cáo bằng 3,21 (đơn vị tính theo mét vuông và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Câu 9 Vịnh Hạ Long là một địa danh du lịch được nhiều người biết đến trên thế giới, nơi đây vẫn còn nhiều đảo lớn nhỏ chưa được khám phá. Một công ty du lịch quyết định khai thác khu vực có một số đảo nhỏ với hình dáng đặc biệt nếu nhìn từ trên xuống, trong đó có hai hòn đảo mà phần giới hạn đất liền của nó được mô phỏng như hai đồ thị hàm số trên hình. Với hệ trục Oxy thích hợp, đơn vị trên mỗi trục là 100 m, đường cong mô tả hòn đảo thứ nhất có dạng $y = \log_a x$ đi qua điểm có tọa độ $(3; 1)$.

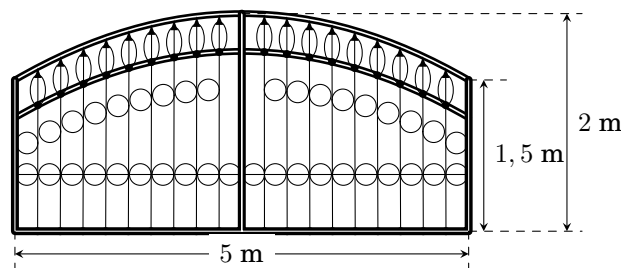


a Điểm có tọa độ $(9; 3)$ thuộc đường cong $y = \log_a x$.

- b** Chủ dự án muốn xây dựng một nơi trực tiếp nhìn ra biển để du khách tham quan, ăn uống. Họ đã lựa chọn khu vực tam giác cong ABC như trong hình (đường cong AC tiếp giáp biển); diện tích của khu vực này là 536 m^2 (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).
- c** Chủ dự án đã thuê một số kỹ sư giỏi Toán (đặc biệt giỏi về hàm số mũ- logarit) đi khảo sát khu vực này và họ nhận thấy có thể bồi đắp thêm cho hòn đảo thứ hai để đường cong giáp biển $y = g(x)$ của nó đối xứng với đường cong $y = \log_a x$ qua đường thẳng $y = x + 1$. Khi đó đường cong $g(x) = 1 + 3 \cdot 3^x$.
- d** Chủ dự án định xây một cây cầu nối liền hai đảo, khoảng cách ngắn nhất theo đường chim bay của cây cầu bằng 285 m (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

2 Trả lời ngắn

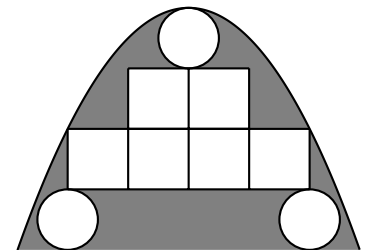
Câu 1 Ông Bình muốn làm một cổng sắt có hình dạng và kích thước giống hình vẽ, biết đường cong phía trên là một parabol. Nếu giá một mét vuông cổng sắt là $1\,200\,000$ đồng thì ông Bình phải trả bao nhiêu tiền để làm cổng sắt như vậy (số tiền phải trả tính theo đơn vị là triệu đồng)?



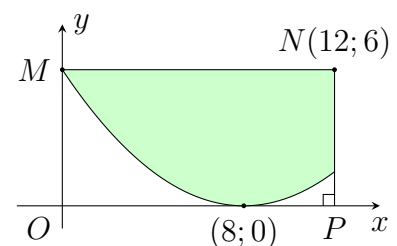
KQ:

Câu 2 Một cửa vòm có dạng hình parabol được lắp các tấm kính hình tròn đường kính 1 m và các tấm kính hình vuông có cạnh 1 m như hình vẽ. Phần còn lại của cửa được sơn màu trang trí với mức giá $1,2$ triệu đồng $/\text{m}^2$. Chi phí sơn màu là bao nhiêu triệu đồng (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)?

KQ:



Câu 3 Một bể chứa nước có diện tích mặt cắt ngang được tô màu như hình bên, ở đó đơn vị trên các trục đo bằng mét. Trên mặt cắt ngang, phần đáy của bể chứa có phương trình $y = k(x - 8)^2$. Tính diện tích của mặt cắt ngang theo mét vuông.

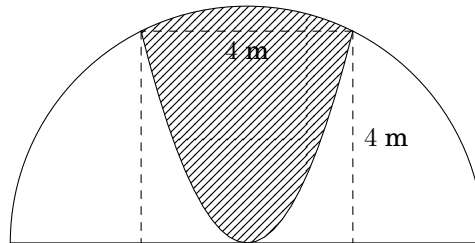


KQ:

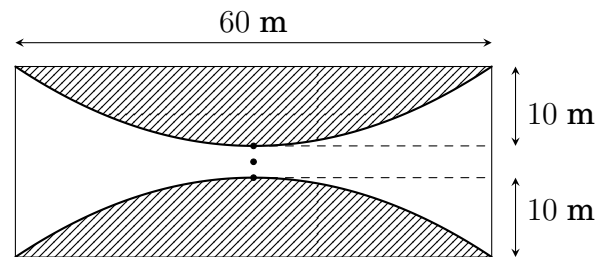


Câu 4 Một khuôn viên dạng nửa hình tròn có đường kính bằng $4\sqrt{5}$ (m). Trên đó người thiết kế hai phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm nửa hình tròn và hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn (phần gạch sọc), cách nhau một khoảng bằng 4 m, phần còn lại của khuôn viên (phần không gạch sọc) dành để trang trí cỏ nhân tạo. Biết các kích thước cho như hình vẽ và kinh phí cỏ nhân tạo là 100 000 đồng/m². Hỏi cần bao nhiêu tiền để trang trí cỏ trên phần đất đó? (Số tiền được làm tròn đến hàng nghìn).

KQ:



Câu 5 Ông Minh sở hữu một mảnh vườn hình chữ nhật. Ông Minh dự định chia mảnh vườn đó thành 2 khu vực, phần gạch sọc là trồng hoa lan, phần còn lại là trồng hoa hồng (hai đường cong là parabol có đỉnh đối xứng qua tâm của mảnh vườn và có chung trục đối xứng).



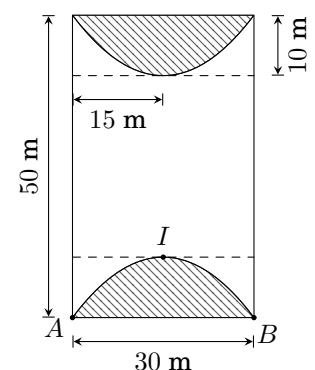
Biết tiền trả cho công nhân phần trồng hoa lan là 40 000 đồng/m², trồng hoa hồng là 50 000 đồng/m² và số tiền ông Minh trả cho công nhân trồng hoa ở hai khu vực của mảnh vườn là bằng nhau. Tính độ dài chiều còn lại của mảnh vườn đó.

KQ:

Câu 6 Ông An xây dựng một sân bóng đá mini hình chữ nhật có chiều rộng 30 (m) và chiều dài 50 (m). Để giảm bớt kinh phí cho việc trồng cỏ nhân tạo, ông An chia sân bóng ra làm hai phần (tô màu và không tô màu) như hình vẽ.

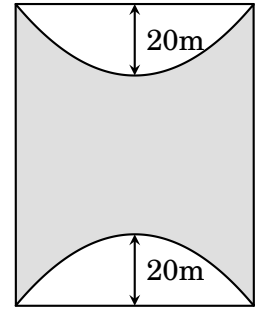
- ♦ Phần tô màu gồm hai miền diện tích bằng nhau và đường cong AIB là một parabol có đỉnh I .
- ♦ Phần tô màu được trồng cỏ nhân tạo với giá 130 nghìn đồng/m² và phần còn lại được trồng cỏ nhân tạo với giá 90 nghìn đồng/m².

Hỏi số tiền ông An phải trả để trồng cỏ nhân tạo cho sân bóng là bao nhiêu triệu đồng?



KQ:

Câu 7 (MH - THPTQG 2025). Kiến trúc sư thiết kế một khu sinh hoạt cộng đồng có dạng hình chữ nhật với chiều rộng và chiều dài lần lượt là 60 m và 80 m. Trong đó, phần được tô màu đậm là sân chơi, phần còn lại để trồng hoa. Mỗi phần trồng hoa có đường biên cong là một phần của parabol với đỉnh thuộc một trục đối xứng của hình chữ nhật và khoảng cách từ đỉnh đó đến trung điểm cạnh tương ứng của hình chữ nhật bằng 20m (xem hình minh họa). Diện tích của phần sân chơi là bao nhiêu mét vuông?

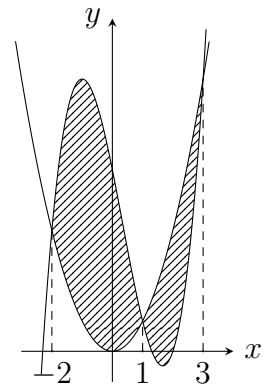


KQ:

Câu 8 Người ta dự định trồng hoa để trang trí vào phần tô đậm trong hình vẽ dưới đây. Biết rằng phần tô đậm là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số

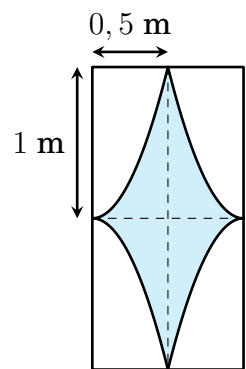
$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 6 \quad \text{và} \quad y = g(x) = -bx^2 + mx + n$$

trong đó $a, b, c, m, n \in \mathbb{R}$. Biết đồ thị hai hàm số đã cho cắt nhau tại các điểm có hoành độ lần lượt bằng $-2; 1; 3$. Chi phí để trồng hoa là 150 000 đồng/m² và đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét. Tổng chi phí để trồng hoa theo dự định là bao nhiêu nghìn đồng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



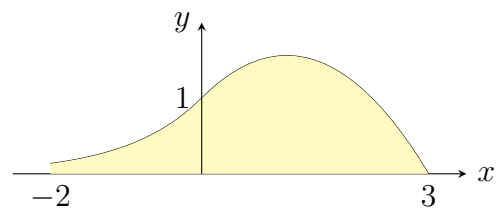
KQ:

Câu 9 Nhà bác An có tất cả 8 cánh cửa sắt hình chữ nhật với chiều dài 2 m và chiều rộng 1 m. Hai mặt của mỗi cánh cửa được thiết kế như hình vẽ dưới đây. Trong đó, phần được tô đậm được sơn màu xanh, phần còn lại được sơn màu trắng. Mỗi phần sơn màu trắng có đường biên cong là một phần của parabol có đỉnh nằm trên cạnh của hình chữ nhật. Biết rằng chi phí để sơn màu xanh là 120 nghìn đồng/m² và chi phí sơn màu trắng là 110 nghìn đồng/m². Hỏi để sơn toàn bộ số cửa sắt trên, bác An phải trả bao nhiêu triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm theo đơn vị triệu đồng)?



KQ:

Câu 10 Ở bể bơi thành phố sẽ xây một cầu trượt nước mới. Cầu trượt dài 5 m và có thể trượt từ cả hai phía. Những người thận trọng trượt về bên trái, nơi mép trượt được cho bởi $f(x) = e^x$ (trên đoạn $[-2; 0]$).



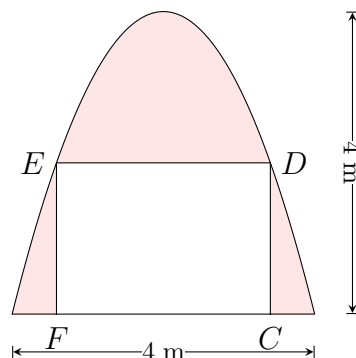
Những người ưa mạo hiểm trượt về bên phải, nơi mép trượt cao và dốc hơn, mô hình bởi $g(x) = -\frac{4}{9}x^2 + x + 1$ (trên đoạn $[0; 3]$). Tại $x = 0$ hai đường cong nối trơn với nhau. (Đơn vị x, y tính bằng mét). Hai thành bên của cầu trượt được ốp nhựa. Cần bao nhiêu m² nhựa? (Tính tổng diện tích hai mặt bên).

KQ:

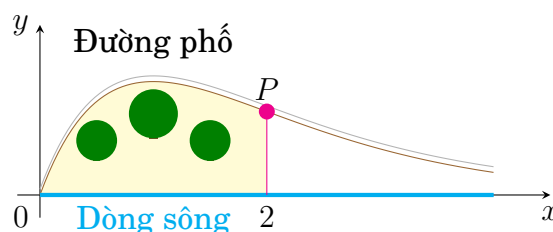


Câu 11 Một gia đình thiết kế chiếc cổng có dạng là một parabol (P) có kích thước như hình vẽ, biết chiều cao cổng bằng chiều rộng của cổng và bằng 4 m. Người ta thiết kế cửa đi là một hình chữ nhật $CDEF$ sao cho chiều cao cửa đi là $CD = 2$ m, phần còn lại dùng để trang trí. Biết chi phí phân tô đậm là 1,5 triệu đồng/m². Tính số tiền (triệu đồng) gia đình đó phải trả để trang trí phần tô đậm (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

KQ:



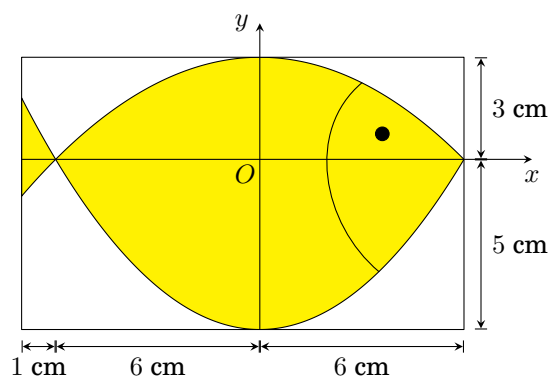
Câu 12 Con đường có phương trình $f(x) = x \cdot e^{1-x}$. Con sông nằm dọc trục Ox . Miền đất trồng cây ăn quả được giới hạn bởi đồ thị của $f(x)$, trục Ox và đường thẳng đứng qua điểm P có hoành độ $x = 2$.



Quy ước 1 đơn vị = 100 m. Mỗi cây cần 20 m². Hỏi trồng được bao nhiêu cây? Biết $F(x) = (-1 - x)e^{1-x}$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

KQ:

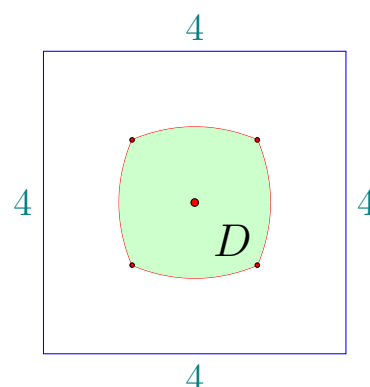
Câu 13 Họa sĩ thiết kế logo hình con cá cho một doanh nghiệp kinh doanh hải sản. Logo là hình phẳng giới hạn bởi hai parabol với các kích thước được cho trong hình sau (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là cm). Diện tích logo bằng bao nhiêu cm² (không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần mười)?



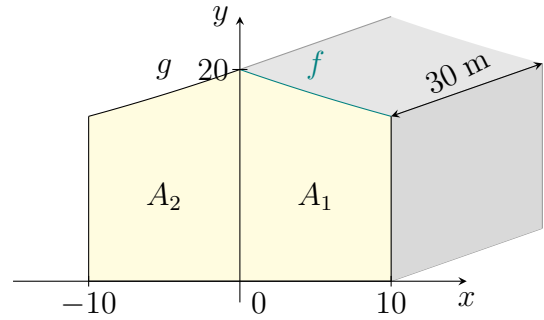
KQ:

Câu 14 Hình vẽ dưới đây cho biết một miền $\mathcal{D}$ (được tô đậm) nằm trong hình vuông cạnh bằng 4. Miền $\mathcal{D}$ này gồm những điểm có khoảng cách tới tâm hình vuông nhỏ hơn hoặc bằng khoảng cách tới cạnh gần nhất của hình vuông. Tính diện tích miền $\mathcal{D}$ (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

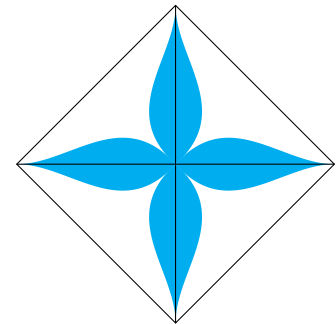


Câu 15 Thể tích không khí của chiếc lều hội chợ trong hình là bao nhiêu ML (megalit) (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)? Biết biên dạng mái lều được cho bởi hai hàm biên: $g(x) = 20 \cdot e^{\frac{1}{40}x}$ và $f(x) = 20 \cdot e^{-\frac{1}{40}x}$ trên đoạn $[-10; 10]$. Chiều dài lều là 30 m.



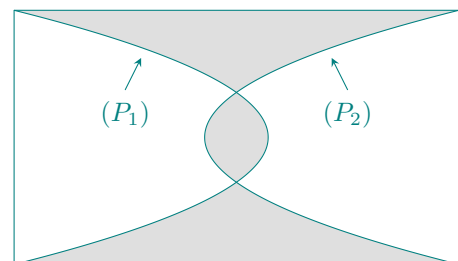
KQ:

Câu 16 Một công ty có ý định thiết kế một logo hình vuông có độ dài nửa đường chéo bằng 4. Biểu tượng 4 chiếc lá (được tô màu) được tạo thành bởi các đường cong đối xứng với nhau qua tâm của hình vuông và qua các đường chéo. Một trong số các đường cong ở nửa bên phải của logo là một phần của đồ thị hàm số bậc ba dạng $y = ax^3 + bx^2 - x$ với hệ số $a < 0$. Để kỷ niệm ngày thành lập $\frac{2}{3}$, công ty thiết kế để tỉ số diện tích được tô màu so với phần không được tô màu bằng $\frac{2}{3}$. Tính $2a + 2b$.



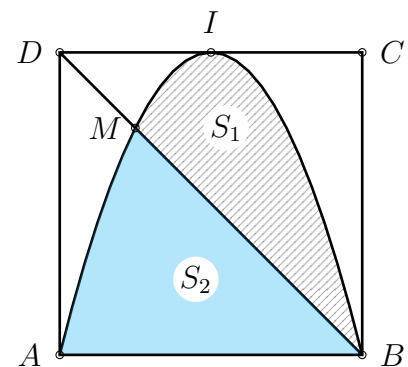
KQ:

Câu 17 Trang trí một sân hình chữ nhật kích thước 28 m $\times$ 16 m, trong đó hai Parabol (P_1) đối xứng với (P_2) qua đường thẳng đi qua hai trung điểm của chiều dài sân (hình vẽ), khoảng cách giữa hai đỉnh Parabol bằng 4 m. Chi phí trang trí cho phần tô đậm là 180 ngàn đồng trên một mét vuông, phần trắng là 160 ngàn đồng trên một mét vuông. Tổng chi phí trang trí cho sân là bao nhiêu triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



KQ:

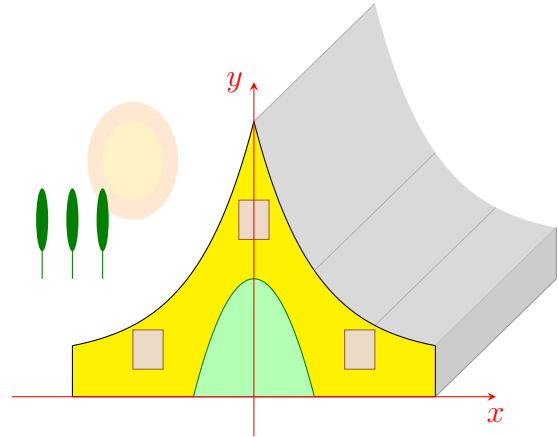
Câu 18 Một biển quảng cáo có dạng hình vuông ABCD cạnh bằng 4 m và I là trung điểm của đoạn thẳng CD. Trên tấm biển đó có đường parabol đỉnh I đi qua A, B và cắt đường chéo BD tại M (tham khảo hình vẽ). Chi phí sơn phần tô hình gạch sọc (có diện tích S_1) là 200 000 đồng/m², chi phí sơn phần tô đậm (có diện tích S_2) là 150 000 đồng/m² và phần còn lại là 120 000 đồng/m². Số tiền cần chi trả để sơn tấm biển quảng cáo là bao nhiêu nghìn đồng?



KQ:

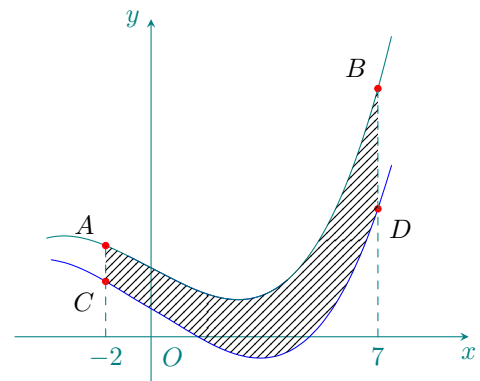


Câu 19 Mái chùa đối xứng qua trục, có biên dạng $f(x) = 6 \cdot e^{-0,5x} + 1$ ($0 \leq x \leq 6$). Cổng chùa dạng parabol, rộng 4 m và cao 3 m. Mỗi cửa sổ kích thước 1 m $\times$ 0,5 m (có 3 cửa sổ). Mặt tiền phía trước của mặt sẽ được sơn màu vàng dày 0,1 mm. Hỏi: Cần bao nhiêu lít nước sơn? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



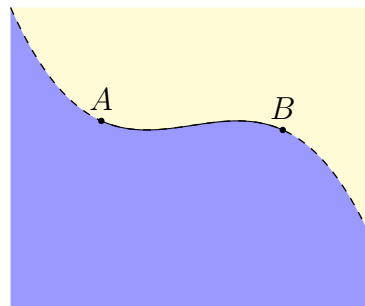
KQ:

Câu 20 Hưởng ứng chính sách hiện đại hóa nông thôn, người dân ở khu phố A đồng lòng cùng nhau góp tiền đổ bê tông một đường đi trong khu phố (phần được tô đậm trong hình vẽ). Biết rằng khi chọn hệ trục tọa độ Oxy với đơn vị độ dài trên mỗi trục tọa độ là 10 m, các đường cong AB , CD là mép đường được cho bởi đồ thị hàm số $f(x) = \frac{1}{32}x^2 - \frac{3}{8}x + \frac{5}{2}$ và $g(x) = \frac{1}{32}x^2 - \frac{5}{8}x + 1$, đồng thời lớp bê tông được đổ dày 16 cm và giá tiền 1 m³ bê tông là 1 080 000 đồng. Tính số tiền (đơn vị triệu đồng) cần dùng để đổ bê tông con đường đó (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



KQ:

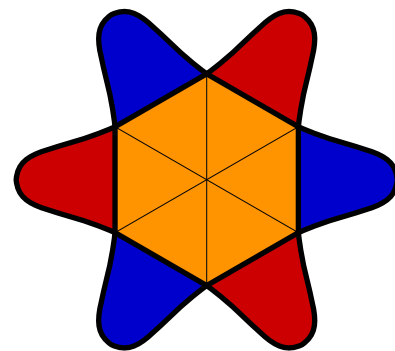
Câu 21 Một phần của bề mặt phía trên của các gợn sóng của nước biển có hình dạng đồ thị hàm số bậc ba khi gắn hệ trục tọa độ Oxy . Biết rằng đồ thị hàm số bậc ba có các điểm cực trị lần lượt là $M(-2; 1)$ và $N(0; 1,2)$, đơn vị trên hệ trục tọa độ là mét.



Hai vị trí A và B có hoành độ lần lượt là -3 và 1 nằm trên đường cong của các gợn sóng đó. Tính độ dài đường cong AB (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm). Biết rằng độ dài đường cong có phương trình $y = f(x)$ từ điểm $C(c; f(c))$ tới điểm $D(d; f(d))$ với $c < d$ được tính bởi công thức $T = \int_c^d \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.

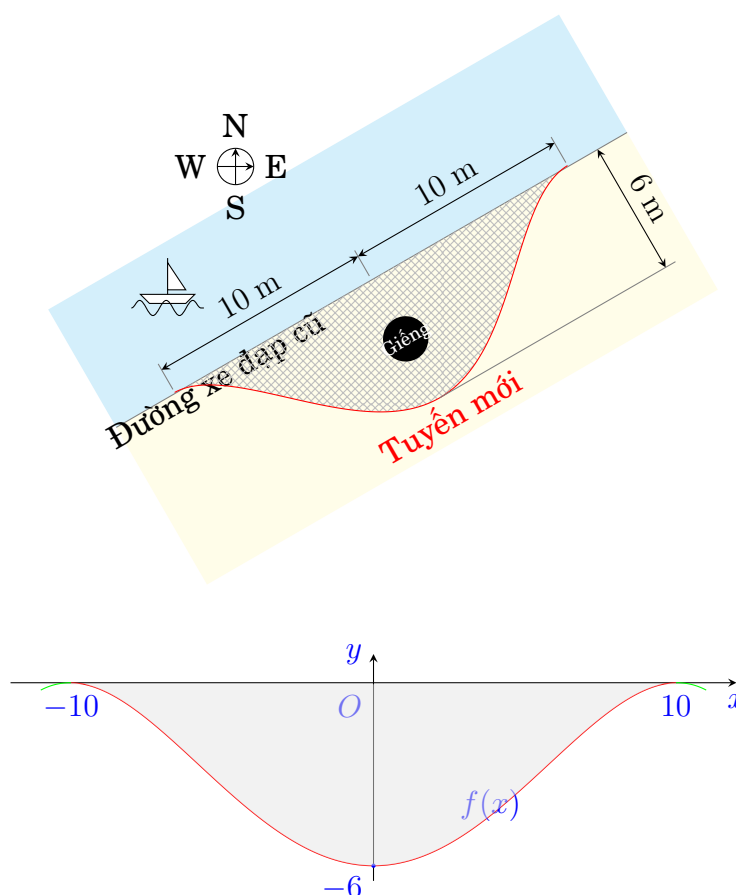
KQ:

Câu 22 Một nghệ sĩ đang thực hiện vẽ tranh tường 3D nghệ thuật để trang trí nội thất. Mỗi bức tranh gồm một hình lục giác đều có cạnh bằng 30 cm, trên mỗi cạnh của hình lục giác đều có một cánh hoa hình parabol, đỉnh của parabol cách cạnh lục giác đều 30 cm và nằm phía ngoài hình lục giác, đường parabol đó đi qua hai đầu mút của mỗi cạnh (xem hình bên). Biết tổng giá vẽ tranh 3D (bao gồm công và vật tư) là 500 000 đồng /m². Hỏi nghệ sĩ nhận được bao nhiêu tiền sau khi hoàn thành bức tranh? (Làm tròn đến nghìn đồng gần nhất).



KQ: 

Câu 23 Dọc bờ nước có một đường xe đạp. Trên một đoạn dài 20 m, người ta muốn thay bằng tuyến mới đi vòng một cái giếng (đường kính 2 m). Các đoạn nối phải trơn (chuyển tiếp êm).



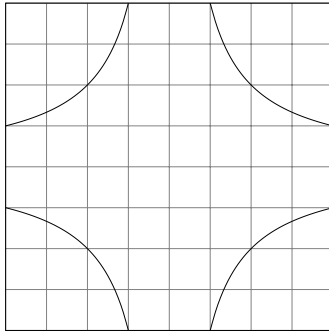
Đặt hệ trục Oxy thuận tiện như hình; do hình dạng đối xứng qua trục Oy và cần chuyển tiếp trơn vào trục Ox , ta chọn đa thức bậc 4: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$, $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$. Diện tích phần tô màu cần lát giữa bờ và tuyến mới là bao nhiêu mét vuông (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

KQ: 

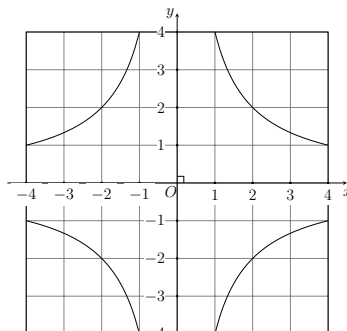
Câu 24 Họa sĩ thiết kế một loại gạch trang trí có dạng như **Hình 1**, gạch có dạng



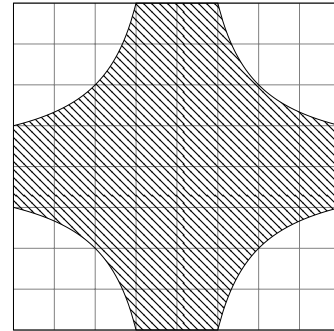
hình vuông cạnh 8 dm. Khi đặt bản vẽ trong hệ tọa độ (Oxy) với đơn vị của mỗi trục là 1 dm thì mỗi nét cong phía trong thuộc một trong hai đường hypebol $y = -\frac{4}{x}$ và $y = \frac{4}{x}$ (**Hình 2**), các cạnh của viên gạch lần lượt thuộc 4 đường thẳng $x = -4, x = 4, y = -4, y = 4$. Người ta sơn màu hồng vào phần hình được gạch chéo như **Hình 3**. Diện tích phần sơn màu hồng là bao nhiêu dm^2 (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Hình 1



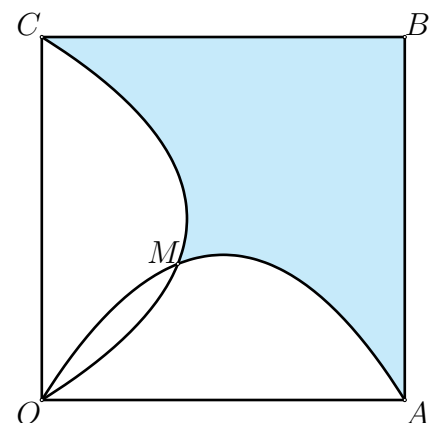
Hình 2



Hình 3

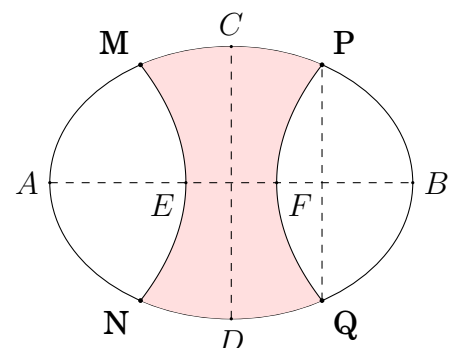
KQ:

Câu 25 Cho hình vuông $OABC$ cạnh bằng 8, điểm M nằm trong hình vuông sao cho khoảng cách từ M đến các cạnh OA, OC cùng bằng 3. Parabol (P_1) đi qua các điểm O, A, M , Parabol (P_2) đi qua các điểm O, C, M . Tính diện tích phần tô đậm (hình vẽ bên) (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



KQ:

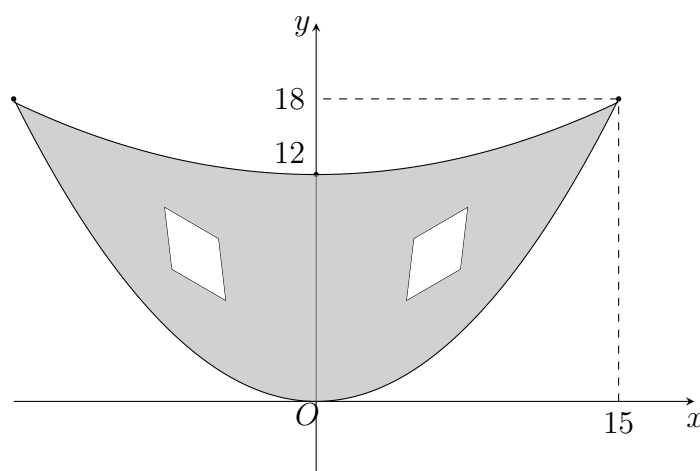
Câu 26 Vườn hoa của một trường học có hình dạng được giới hạn bởi một đường elip có bốn đỉnh A, B, C, D và hai đường parabol có các đỉnh lần lượt là E, F (phần tô đậm của hình vẽ). Hai đường parabol có cùng trục đối xứng AB , đối xứng nhau qua trục CD , hai parabol cắt elip tại các điểm M, N, P, Q .



Biết $AB = 8 \text{ m}$, $CD = 6 \text{ m}$, $MN = PQ = 3\sqrt{3} \text{ m}$, $EF = 2 \text{ m}$. Chi phí để trồng hoa trên vườn là $300\,000/\text{m}^2$. Hỏi số tiền trồng hoa cho cả vườn là bao nhiêu triệu đồng. Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm.

KQ:

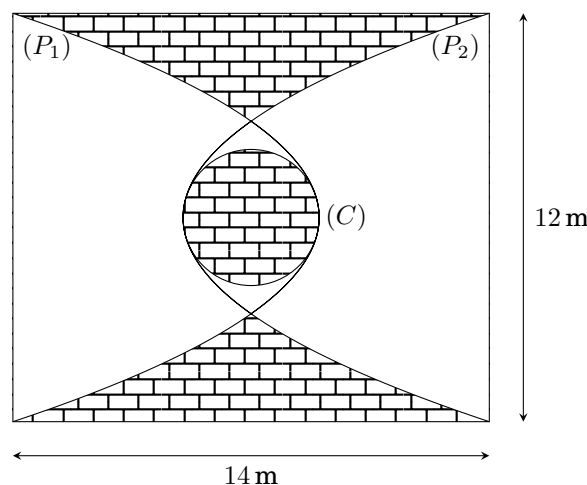
Câu 27 Để tham gia lễ hội hóa trang, Bạn An dự định làm một chiếc mặt nạ nửa mặt bằng chất liệu giấy cứng. Hình dạng của chiếc mặt nạ được bạn thiết kế trên mặt phẳng tọa độ Oxy là phần hình phẳng giới hạn bởi hai đường parabol (P_1) , (P_2) lần lượt có đỉnh là gốc tọa độ O và điểm $I(0; 12)$, cùng nhận trục Oy làm trục đối xứng và cùng đi qua điểm $M(15; 18)$. Mỗi đơn vị trên các trục tọa độ có độ dài 1 cm. Sau đó, bạn vẽ hai hình thoi bằng nhau có độ dài các đường chéo là $2\sqrt{2}$ cm và $4\sqrt{2}$ cm để khoét làm mắt (minh họa như hình vẽ dưới đây).



Công đoạn cuối cùng là tô màu xám cho một mặt của mặt nạ. Tính diện tích cần tô màu theo đơn vị cm^2 .

KQ:

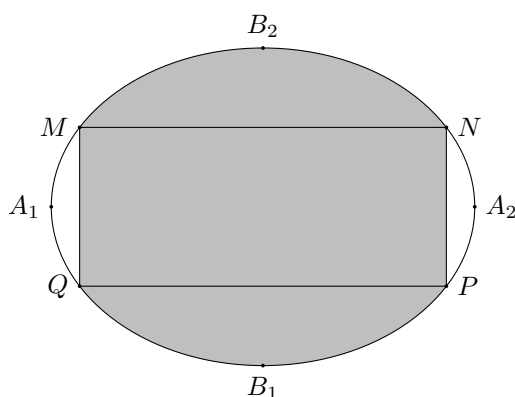
Câu 28 Người ta lát gạch trang trí một mảnh sân hình chữ nhật có kích thước $14 \text{ m} \times 12 \text{ m}$ như hình vẽ bên dưới, trong đó (P_1) , (P_2) là hai parabol đối xứng trục với nhau qua trục đối xứng vuông góc với chiều dài của mảnh sân, (C) là đường tròn có tâm trùng với tâm của mảnh sân và lần lượt có duy nhất một điểm chung với các parabol đó (tham khảo hình vẽ biết phần gạch đậm là phần lát gạch).



Chi phí cho phần lát gạch là 240 nghìn đồng một mét vuông. Trong trường hợp hình tròn (C) có diện tích lớn nhất thì chi phí lát gạch là bao nhiêu triệu đồng? (kết quả làm tròn tới hàng phần chục).

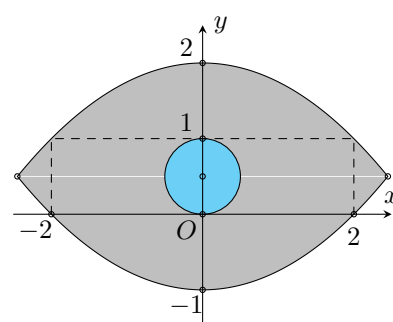
KQ:

Câu 29 Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh A_1, A_2, B_1, B_2 như hình vẽ dưới. Biết chi phí để sơn phần tô đậm là 200000 (đồng) và phần còn lại 100000 (đồng). Biết $A_1A_2 = 8 \text{ m}$, $B_1B_2 = 6 \text{ m}$ và tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật có $MQ = 3 \text{ m}$. Hỏi số tiền để sơn theo cách trên (làm tròn đến hàng phần chục, đơn vị triệu đồng) bằng



KQ: 

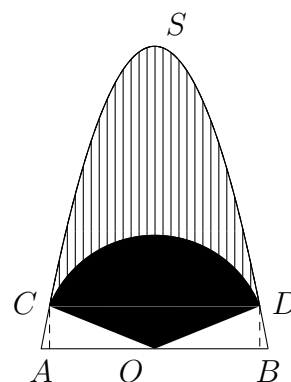
Câu 30 Bạn An thực hiện thiết kế một logo hình con mắt cho một phòng khám nhãn khoa. Logo là một hình phẳng giới hạn bởi hai parabol $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có các kích thước như hình vẽ dưới đây (phần được tô màu đen) và một hình tròn có bán kính bằng 0,5 dm ở giữa là phần con người (phần được tô màu xanh), đơn vị trên mỗi trục tọa độ là decimet.



Biết rằng chi phí để sơn phần con người hình tròn màu xanh là 25 000 đồng/dm² và chi phí để sơn phần còn lại màu đen là 20 000 đồng/dm². Chi phí để sơn logo trên là bao nhiêu nghìn đồng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

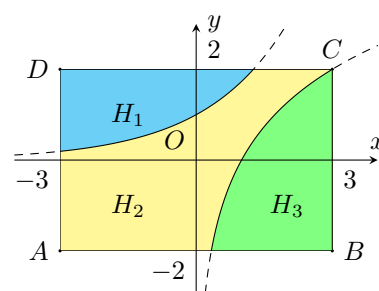
KQ: 

Câu 31 Để chuẩn bị quảng bá sản phẩm, người ta trang trí tấm pano dạng parabol như hình vẽ, biết $OS = 8$ m, $AB = 6$ m với O là trung điểm của AB . Tấm pano được chia thành ba phần để trang trí với mức chi phí khác nhau: phần trên là phần kẻ sọc giá 100 000 đồng/m², phần giữa là hình quạt tâm O bán kính 3 m được tô đậm giá 200 000 đồng/m², phần còn lại giá 150 000 đồng/m². Tính tổng chi phí để trang trí tấm pano (đơn vị triệu đồng, kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



KQ: 

Câu 32 Một bức tường hình chữ nhật $ABCD$ có kích thước 6 m $\times$ 4 m được bạn An trang trí bằng cách vẽ hai đồ thị $f(x) = a^x$, $g(x) = \log_b x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $d: y = x$ và chia thành ba phần (tham khảo hình vẽ bên). Phần H_1 được sơn màu xanh da trời, phần H_2 được sơn màu vàng, phần H_3 được sơn màu xanh lá cây.

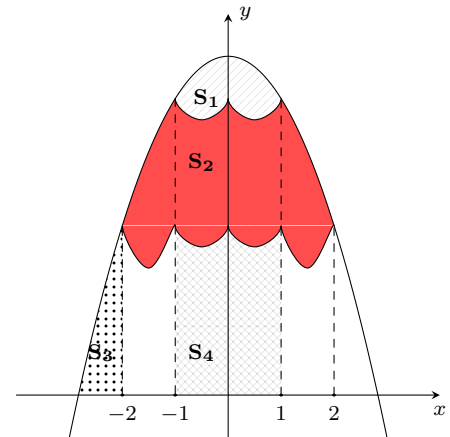


Biết rằng mỗi hộp sơn các màu chỉ sơn được 3 m² tường, đồng thời giá của hộp sơn

màu xanh da trời là 100 000 đồng/hộp, hộp sơn vàng là 140 000 đồng/hộp, hộp sơn xanh lá cây là 130 000 đồng/hộp. Tính giá tiền bạn Hà mua để sơn bức tường này? (đơn vị là triệu đồng và của hàng sơn chỉ bán số nguyên của hộp).

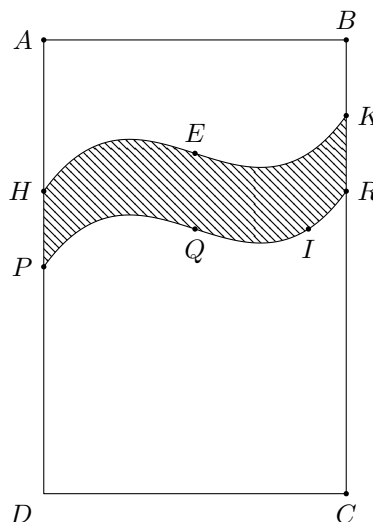
KQ:

Câu 33 Một học sinh muốn tô màu cho mô hình trang trí dạng parabol có đỉnh thuộc trục tung, hai đường cong của hàm số $y = f(x)$ và $y = f(x) + 3$ giao với parabol tại các điểm có hoành độ $x = 1, x = -1, x = 2, x = -2$ như hình vẽ. Gọi S_1, S_2, S_3, S_4 lần lượt là các phần diện tích được kí hiệu như hình vẽ. Biết rằng $S_1 + S_4 = 30 \text{ m}^2$, $S_3 = \frac{105}{71} \text{ m}^2$. Xác định diện tích S_2 (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



KQ:

Câu 34 Kiến trúc sư thiết kế một con đường để chia khu đất hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 40 \text{ m}$, $AD = 60 \text{ m}$ thành hai phần (hai lề đường là các đường cong HEK và $PQIR$). Trong đó phần giới hạn bởi đường cong HEK và các đoạn AH, AB, BK là sân chơi, phần giới hạn bởi đường cong $PQIR$ và các đoạn PD, DC, CR để trồng hoa.

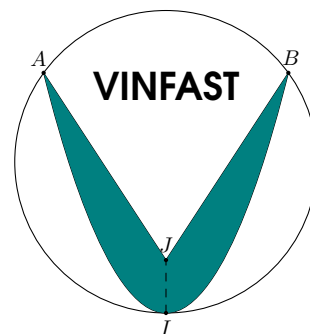


Nếu gắn một hệ trục tọa độ vuông góc có trục hoành, trục tung lần lượt cùng phương với các đường thẳng AB, AD thì đường cong $PQIR$ là một phần của đồ thị hàm số bậc ba $y = f(x)$. Đường cong HEK nhận được bằng cách tịnh tiến đường cong $PQIR$ theo phương thẳng đứng lên phía trên 10 m. Biết $AP = 30 \text{ m}$, $BR = 20 \text{ m}$, điểm Q cách các cạnh AB, AD lần lượt 25 m và 20 m, điểm I cách các cạnh AB, AD lần lượt 25 m và 35 m. Gọi S_1 là diện tích phần sân chơi và S_2 là diện tích phần trồng hoa. Tính $\frac{S_1}{S_2}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

KQ:

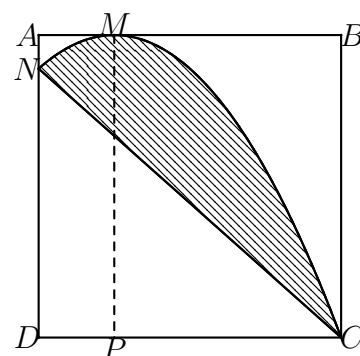


Câu 35 Lô gô gắn tại các Showroom của hãng ô tô VINFAST là một hình tròn. Phần tô đậm (nằm giữa parabol đỉnh I và đường gấp khúc AJB) được dát bạc với chi phí 10 triệu đồng/m². Phần còn lại của hình tròn được phủ sơn với chi phí 2 triệu đồng/m². Biết $AB = 2$ m, $IA = IB = \sqrt{5}$ m và $JA = JB = \frac{\sqrt{13}}{2}$ m. Tính tổng số tiền (đơn vị: triệu đồng) để dát bạc và phủ sơn toàn bộ lô gô nói trên (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).



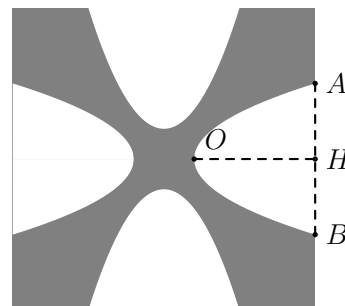
KQ:

Câu 36 Ông Duy có một mảnh vườn hình vuông cạnh bằng 8 m. Ông dự định xây một cái bể bơi đặc biệt (phần kẻ sọc trong hình vẽ bên). Biết $AM = \frac{AB}{4}$, phần đường cong đi qua các điểm C, M, N là một phần của đường Parabol có trục đối xứng là MP ($MP \parallel AD$) và chi phí để làm bể bơi là 5 triệu đồng /1 m². Số tiền ông Duy phải trả để xây cái bể bơi đó là bao nhiêu triệu đồng? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



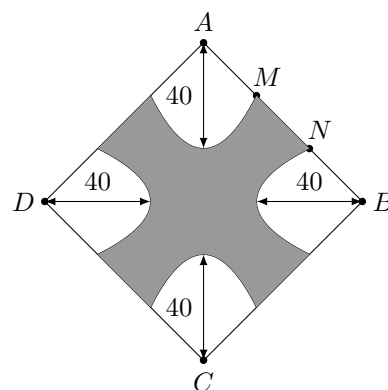
KQ:

Câu 37 Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa hình vuông cạnh bằng 10 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau có hình dạng parabol như hình vẽ bên. Biết $AB = 5$ cm, $OH = 4$ cm. Biết giá trang trí hoa văn 1cm² là 50.000 đồng, tính số tiền cần bỏ ra để trang trí hoa văn đó (đơn vị triệu đồng, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



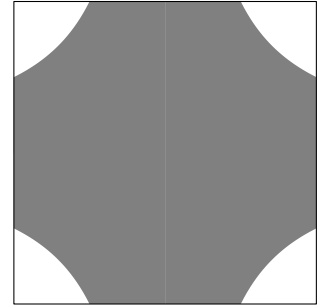
KQ:

Câu 38 Kiến trúc sư thiết kế một khu sinh hoạt cộng đồng có dạng hình vuông $ABCD$ có độ dài đường chéo $AC = 120$ m. Trong đó, phần được tô màu đậm là sân chơi, phần còn lại để trồng hoa. Mỗi phần trồng hoa có đường biên cong là một phần của đường parabol với đỉnh thuộc một trục đối xứng của hình vuông, khoảng cách từ đỉnh đó đến đỉnh tương ứng của hình vuông bằng 40 m và $AM = MN = NB$ (xem hình minh họa). Diện tích của phần sân chơi là bao nhiêu mét vuông? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



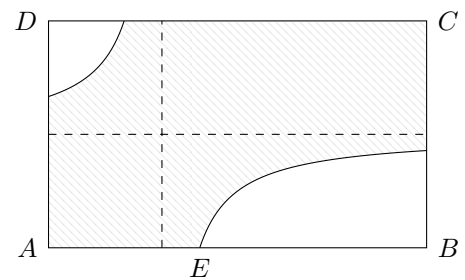
KQ:

Câu 39 Người ta thiết kế một mẫu gạch lát nền nhà có dạng hình vuông cạnh 4 dm. Bốn góc viên gạch màu trắng, phần ở giữa màu xanh (Hình vẽ). Đường viền của phần màu xanh bao gồm bốn đoạn thẳng nằm trên các cạnh hình vuông và bốn đường cong có tính chất: Tích khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc đường cong đó đến hai trục đối xứng của viên gạch (hai đường thẳng đi qua tâm viên gạch và lần lượt song song với hai cạnh vuông góc) bằng 2 dm^2 . Hãy cho biết phần màu xanh có diện tích bằng bao nhiêu decimet vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



KQ:

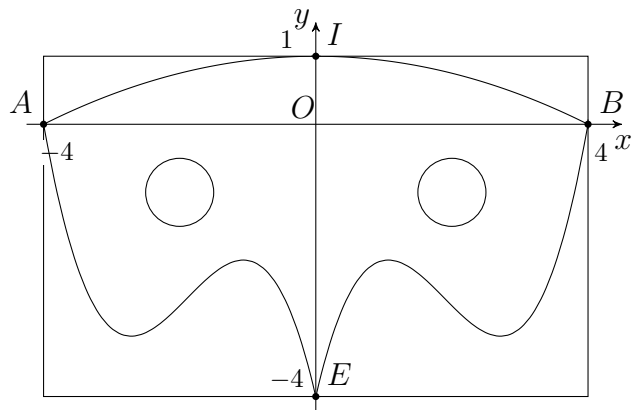
Câu 40 Một công ty thiết kế một bảng quảng cáo có dạng hình chữ nhật $ABCD$ có kích thước $AB = 10 \text{ m}$, $AD = 6 \text{ m}$. Nội dung quảng cáo được mô tả trong phần tô đậm với hai đường cong trong hình là một phần của đồ thị hàm số (C) có dạng $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ (hình minh họa).



Khoảng cách từ điểm A đến đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số (C) bằng 3 m. Đồ thị hàm số (C) cắt cạnh AB tại điểm E thỏa mãn $\frac{AE}{AB} = \frac{2}{5}$. Diện tích phần nội dung quảng cáo là bao nhiêu mét vuông? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

KQ:

Câu 41 Từ một tấm tôn phẳng hình chữ nhật có chiều dài 8 cm, chiều rộng 5 cm có gắn hệ tọa độ Oxy như hình vẽ bên. Thầy Tuấn cắt miếng tôn theo ba đường: Đường cong AIB là một phần của Parabol, các đường cong AE , EB là một phần đồ thị hàm số bậc ba. Trang trí phần còn lại để tạo thành một chiếc mặt nạ đồ chơi có trục đối xứng là trục Oy . Biết đường cong EB đi qua các điểm $(1; -2)$ và $(3; -3)$.

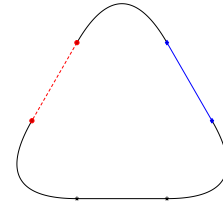
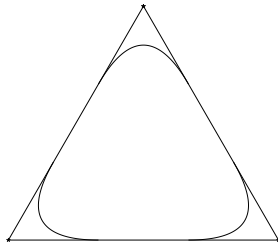


Tính diện tích chiếc mặt nạ đồ chơi của thầy Tuấn (làm tròn đến hàng phần mười theo đơn vị cm^2).

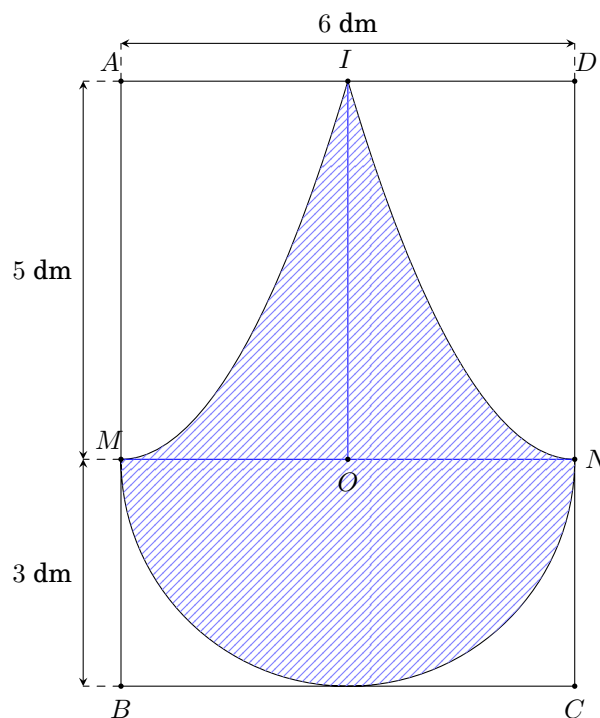
KQ:

Câu 42 Một tấm kính làm mặt bàn có hình dáng tam giác đều với 3 đỉnh được làm cong. Biết cạnh tấm kính tam giác ban đầu bằng 16 dm. Để cắt góc được đẹp thì người ta dùng đường Parabol $(P): y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{15\sqrt{3}}{2}$ có hai nhánh tiếp xúc với hai cạnh của tam giác. Biết diện tích mặt kính là $a\sqrt{b} \text{ dm}^2$, (với a là số nguyên dương và b là số nguyên tố). Giá trị của $a + b$ bằng bao nhiêu?

KQ:

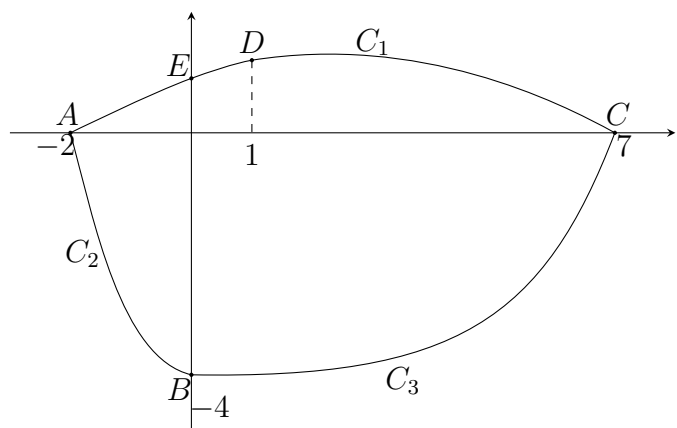


Câu 43 Để trang trí một bảng gỗ hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 8$ dm và chiều rộng $AD = 6$ dm, người ta thiết kế một logo là hình phẳng giới hạn bởi nửa đường tròn đường kính $MN = 6$ dm, tiếp xúc với BC ; hai đường cong IM, IN là một phần của các đường parabol lần lượt có đỉnh là các điểm M, N và parabol có trục đối xứng lần lượt là AB, CD , với I là trung điểm của AD (tham khảo hình vẽ). Phần logo được sơn màu xanh với chi phí 50 000 đồng/dm² và phần còn lại của bảng gỗ được sơn màu trắng với chi phí 30 000 đồng/dm². Hỏi cần bỏ ra bao nhiêu nghìn đồng để trang trí bảng gỗ trên (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



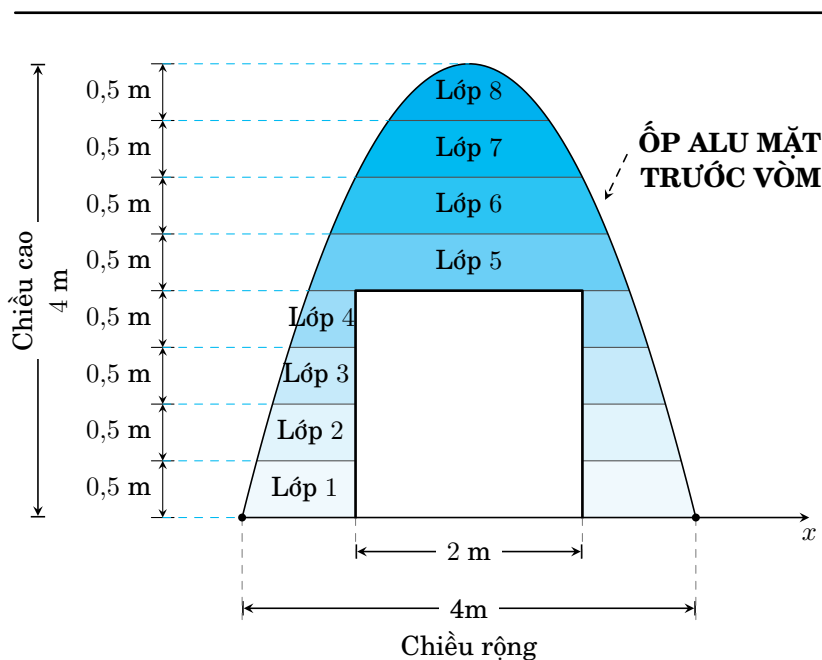
KQ:

Câu 44 Một công ty thiết kế trồng kính sao cho mỗi phần đường viền của trồng kính là một phần đồ thị của hàm số bậc hai hoặc một phần đồ thị của hàm số bậc bốn rồi ghép chúng lại với nhau như hình vẽ bên cạnh (sau đó họ sẽ điều chỉnh theo tỷ lệ phù hợp). Xét hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ bên dưới, biết rằng $A(-2; 0)$, $B(0; -4)$, $C(7; 0)$ và $D(1; k)$ với $k > 0$.



Cho biết đường cong (C_1) đi qua các điểm A, D, C là một phần của đồ thị hàm số bậc hai nào đó, đường cong (C_2) ứng với đường viền nối A với B là một phần của đồ thị hàm số $y = bx^2 + c$, còn đường cong (C_3) ứng với đường viền nối B với C là một phần của đồ thị hàm số $y = mx^4 + n$. Biết $k = \frac{k_1}{k_2}$ với $(k_1, k_2 \in \mathbb{Z}, \frac{k_1}{k_2}$ là phân số tối giản). Diện tích trong kính bằng $\frac{836}{25}$ (đơn vị diện tích). Tính $k_1 + k_2$. KQ:

Câu 45 Để chuẩn bị cho lễ hội, một đơn vị thi công dựng một cổng chào dạng vòm Parabol có chiều cao 4 m và chiều rộng chân cổng là 4 m. Ở chính giữa cổng, người ta thiết kế một lối đi hình chữ nhật cao 2 m và rộng 2 m. Phần diện tích mặt trước của cổng Parabol (sau khi đã trừ lối đi hình chữ nhật) được chia thành 8 lớp ngang, mỗi lớp cao 0,5 m để ốp tấm nhôm Alu trang trí có màu khác nhau (như bản vẽ thiết kế hình bên dưới).



Đơn giá thi công lắp tấm nhôm Alu cho cổng được tính như sau

- ◆ Lớp dưới cùng có giá là 400 nghìn đồng/m².
- ◆ Càng lên cao, giá thi công mỗi lớp tiếp theo tăng thêm 50 nghìn đồng/m² so với lớp ngay dưới nó.

Tổng chi phí ốp Alu cho phần diện tích còn lại của cổng sau khi đã loại bỏ lối đi bằng bao nhiêu nghìn đồng (không làm tròn kết quả các phép toán trung gian, chỉ làm tròn kết quả phép toán cuối cùng đến hàng đơn vị)? KQ:

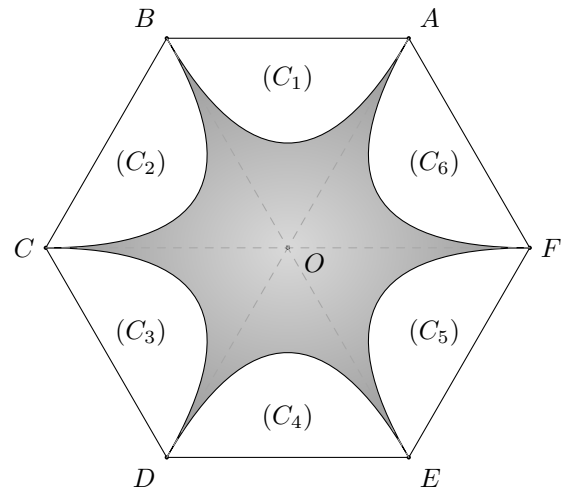
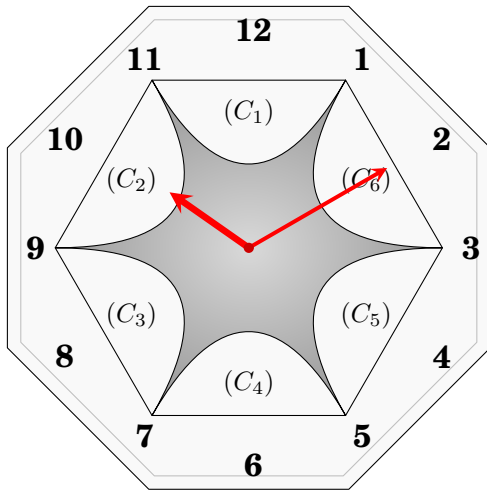
Câu 46 Trong hình bên là một chiếc đồng hồ treo tường cao cấp được thiết kế có phần ở giữa (phần tô đậm) dát vàng. Phần này được thiết kế như sau:

- ◆ Vẽ hình lục giác đều $ABCDEF$ tâm O và có cạnh bằng 4 cm;
- ◆ Vẽ parabol (C_1) tiếp xúc với các đường thẳng OA, OB lần lượt tại A và B ;
- ◆ Tương tự vẽ parabol (C_2) tiếp xúc với các đường thẳng OB, OC lần lượt tại B và C ; parabol (C_3) tiếp xúc với các đường thẳng OC, OD lần lượt tại C và D ; ...; parabol



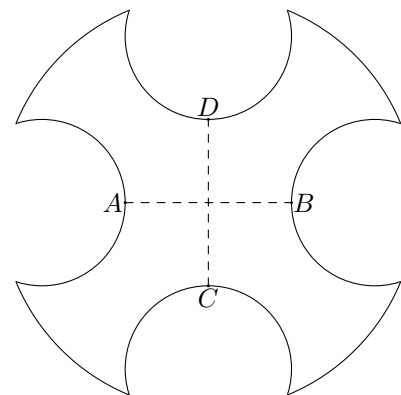
(C_6) tiếp xúc với các đường thẳng OF , OA lần lượt tại F và A .

Hình phẳng (H) được giới hạn bởi sáu parabol (C_1) , (C_2) , (C_3) , (C_4) , (C_5) , (C_6) (phần tô đậm) là phần sẽ được dát vàng. Hỏi phần dát vàng này có diện tích bằng bao nhiêu centimet vuông (không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần chục)?



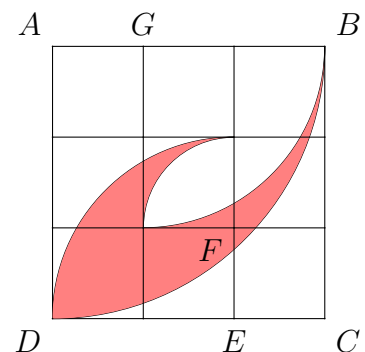
KQ:

Câu 47 Trong cơ khí chế tạo, một chi tiết máy hình đĩa tròn có dạng như hình vẽ, nhận AB và CD làm các trục đối xứng. Người ta cần phủ sơn cả hai mặt của chi tiết. Biết rằng đường tròn lớn có bán kính 5 dm, các đường tròn nhỏ đều có bán kính 2 dm, $AB = CD = 4$ dm và chi phí sơn là 82 000 đồng/m². Chi phí để sơn hoàn thiện chi tiết máy bằng bao nhiêu nghìn đồng (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



KQ:

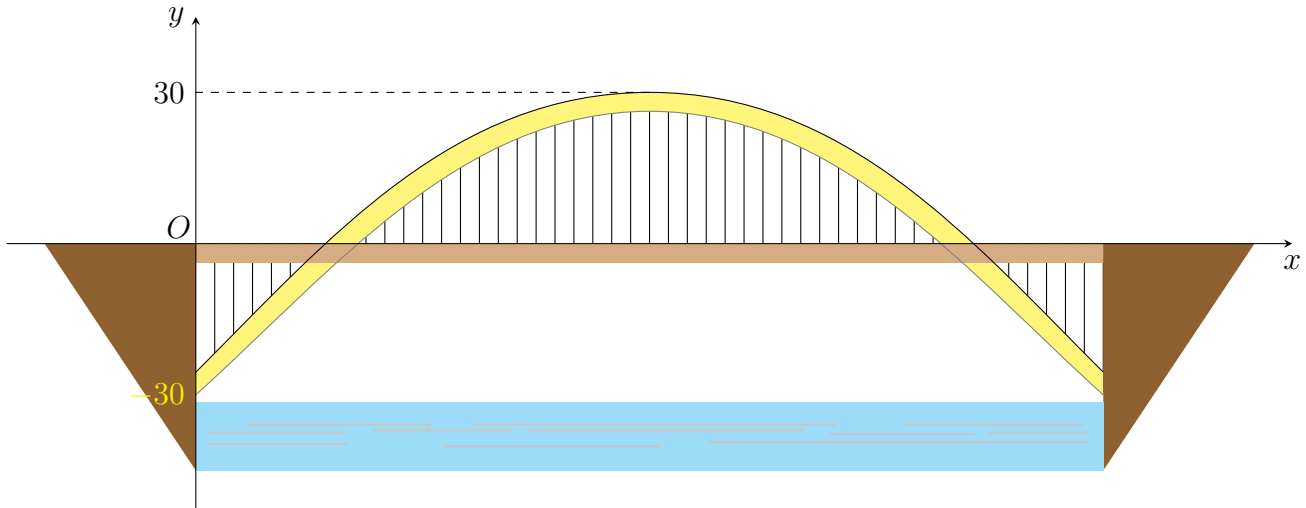
Câu 48 “Bài toán tính diện tích hình còng cua”. Từ bảng gỗ hình vuông $ABCD$ độ dài 12 cm, người ta chia hình vuông này thành 9 hình vuông nhỏ bằng nhau rồi vẽ một hình còng cua được giới hạn bởi các cung phần tư của các đường tròn tâm A , E , F , G (xem hình vẽ). Tính diện tích hình còng cua theo đơn vị cm² (phần tô đậm trong hình vẽ). Viết kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.



KQ:

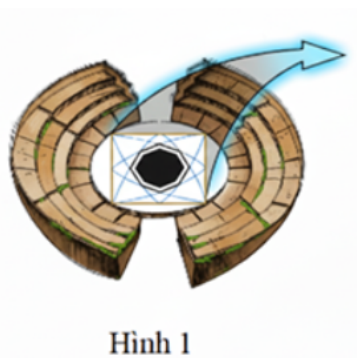
Câu 49 Một nhóm các kĩ sư muốn xây dựng một cây cầu vòm dàn thép với giá đỡ dưới

bằng thép cao cấp có hình dáng là một parabol nối từ 2 cột trụ A và B nằm bên dưới cây cầu. Biết hai cột trụ cách nhau 400 m, khoảng cách từ trụ A đến cây cầu là 50 m và AB song song với mặt đường.

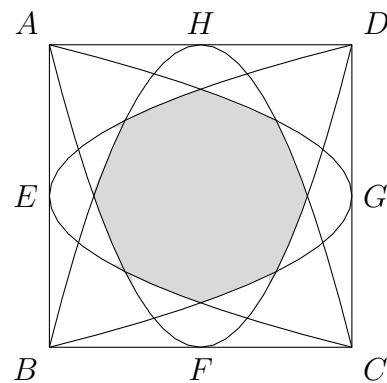


Gắn hệ trục Oxy vào cây cầu với đơn vị trục tọa độ là 10 m. Giá đỡ dưới bằng thép là đường cong parabol tạo với hai trục tọa độ các hình phẳng có diện tích S_1, S_2 như hình vẽ bên. Biết rằng $S_2 - 2S_1 = \frac{2200}{21}$. Điểm cao nhất của giá đỡ dưới bằng thép cao cấp cách mặt đường cây cầu bao nhiêu mét? (làm tròn đến hàng phần mười) **KQ:**

Câu 50 Hình 1 là một tác phẩm dự thi của nhà thiết kế sân khấu trong một cuộc thi thiết kế sân khấu ngoài trời tổ chức tại một quảng trường. Khi mở rộng sân khấu trung tâm, ta được Hình 2. Quá trình thiết kế sân khấu trung tâm được mô tả như sau



Hình 1



Hình 2

Bước 1. Vẽ hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng 2, và lấy trung điểm của bốn cạnh lần lượt là E, F, G, H .

Bước 2. Vẽ đồ thị của các hàm bậc hai đi qua ba điểm B, C, H và hàm bậc hai đi qua ba điểm F, D, A .

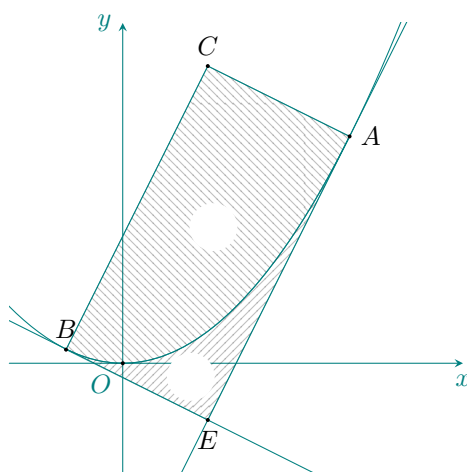
Bước 3. Tương tự như Bước 2, vẽ đồ thị của các hàm bậc hai đi qua ba điểm A, B, G và ba điểm C, D, E .



Biết rằng diện tích phần tô đen trong Hình 2 được cho bởi công thức $\frac{p\sqrt{2}+q}{3}$. Hãy tính giá trị của $p - q$. (Với p, q là các số nguyên.)

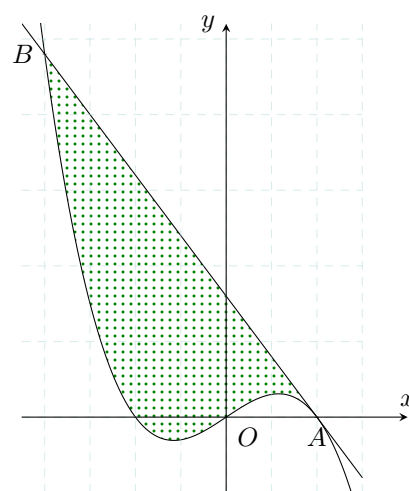
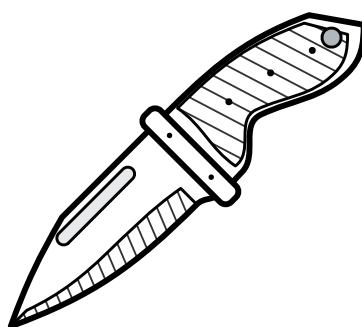
KQ: 

Câu 51 Ông Vượng mới khai phá được một mảnh đất hình chữ nhật, nhà nước chưa cấp sổ nên ông chưa biết chính xác diện tích mảnh đất là bao nhiêu. Mảnh đất của ông Vượng nằm ở một vị trí thuận lợi để trồng trọt vì có một dòng suối nhỏ chảy qua với hình dáng một parabol, dòng suối nhỏ này chia mảnh đất ra làm hai phần có diện tích S_1, S_2 ($S_1 > S_2$). Mảnh đất có diện tích S_2 được xem như hình phẳng giới hạn bởi parabol cùng hai tiếp tuyến vuông góc của parabol đó. Vào vụ Hè thu, ông Vượng quyết định trồng lúa trên phần đất có diện tích S_1 và trồng ớt trên phần đất có diện tích S_2 . Dự kiến lợi nhuận mang lại từ việc trồng lúa là 30 nghìn/m² và lợi nhuận từ việc trồng ớt là 40 nghìn/m² (trong một vụ mùa). Ông quyết định dựng hệ trục Oxy như hình vẽ với gốc O trùng với điểm cực trị của dòng suối dạng parabol, đơn vị trên mỗi trục là 100 mét. Tổng lợi nhuận theo dự kiến của ông Vượng sau vụ Hè thu này (làm tròn đến hàng đơn vị của triệu đồng) là bao nhiêu? Biết rằng diện tích con suối không đáng kể.



KQ: 

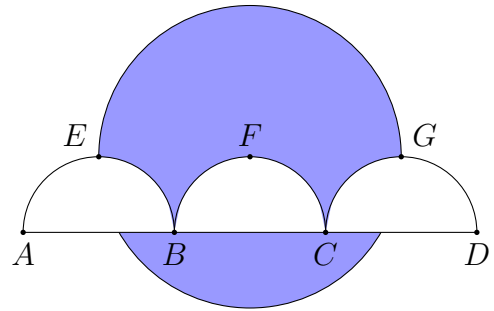
Câu 52 Hình bên minh họa một con dao với phần lưỡi dao được cho bởi một phần của đồ thị hàm số $y = 4x - x^3$ (x, y đo bằng centimét), phần sống dao AB nằm trên tiếp tuyến của đồ thị nói trên tại điểm $A(2; 0)$ và B là giao điểm của tiếp tuyến với đồ thị.



Tính diện tích của bề mặt dao theo centimét vuông. (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

KQ: 

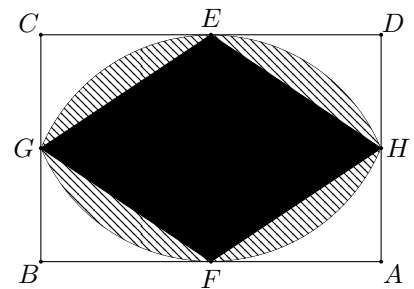
Câu 53 Trong hình vẽ bên, đoạn AD được chia làm 3 bởi các điểm B và C sao cho $AB = BC = CD = 2$. Ba nửa đường tròn có bán kính bằng 1 là $\widehat{AEB}$, $\widehat{BFC}$ và $\widehat{CGD}$ có đường kính tương ứng là AB , BC và CD . Các điểm E , F , G lần lượt là tiếp điểm của tiếp tuyến chung EG với 3 nửa đường tròn.



Một đường tròn tâm F , bán kính bằng 2. Diện tích miền bên trong đường tròn tâm F và bên ngoài 3 nửa đường tròn (miền gạch sọc) bằng bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

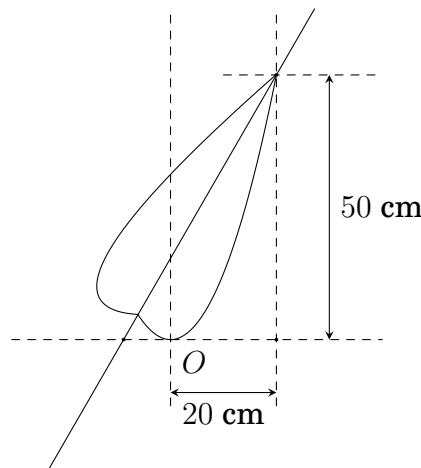
KQ: 

Câu 54 Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm O , với $AB = 6$, $BC = 4$. Gọi E , F , G , H lần lượt là trung điểm của CD , AB , BC , AD . Biết hai cung GEH , GFH lần lượt là cung tròn đi qua G , H , E và G , F , H . Tính diện tích phần hình được gạch sọc (làm tròn đến hàng phần chục).



KQ: 

Câu 55 Sau khi đọc xong truyện ngắn rất cảm động “Chiếc lá cuối cùng” của nhà văn O. Henry, bạn An muốn thiết kế hình ảnh một chiếc lá để gửi đến chị em Johnsy và Sue. Chiếc lá là một hình phẳng được giới hạn bởi hai phần parabol giống nhau. Biết một parabol có đỉnh là điểm O và trục đối xứng của hình phẳng này là một đường thẳng tạo với phương ngang góc 60° . Với các kích thước được cho như hình vẽ, hãy tính diện tích của chiếc lá. (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của cm^2)

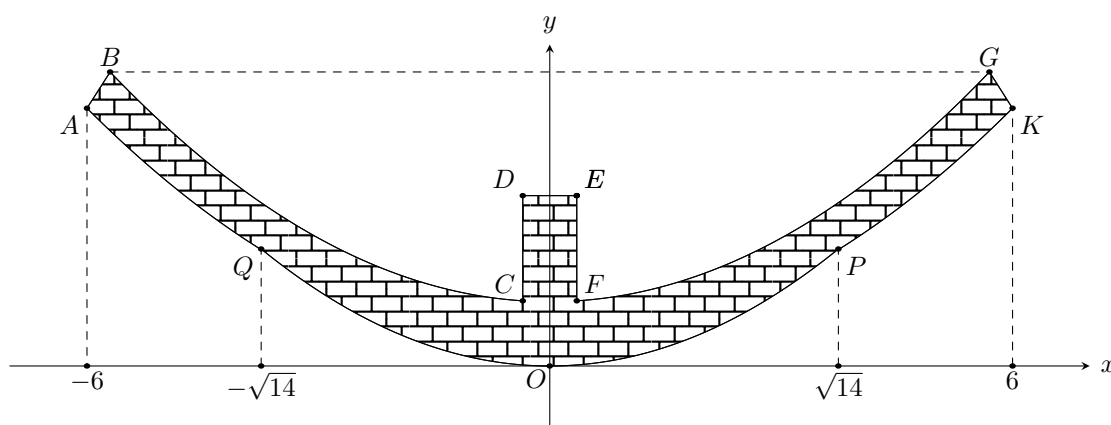


KQ: 



Câu 56 Dự án “Công viên Thiên văn học” được khởi công năm 2017 do Tập đoàn Nam Cường đầu tư và đưa vào sử dụng từ đầu năm 2024. Để tạo điểm nhấn, các kỹ sư đã thiết kế một con đường và Vọng Lâu giữa hồ. Theo một tỉ lệ nhất định, con đường ở giữa công viên được mô phỏng như hình vẽ, biết rằng trên hệ trục tọa độ tương ứng của hình vẽ thì:

- ◆ Các đường cong BC , FG là 2 phần của Parabol có phương trình $y = f(x) = 0,11x^2 + 1$.
- ◆ Các đường cong AQ , PK là 2 phần của Parabol có phương trình $y = g(x) = 0,1x^2 + 0,41$.
- ◆ Đường cong qua 3 điểm Q , O , P là một phần của Parabol có phương trình là $y = h(x) = 0,13x^2$.
- ◆ Các điểm C , D có cùng hoành độ là $-0,35$. Các điểm E , F có cùng hoành độ là $0,35$.
- ◆ Các điểm D , E có cùng tung độ là $2,65$.
- ◆ Các điểm A , Q , P , K có hoành độ lần lượt là -6 ; $-\sqrt{14}$; $\sqrt{14}$; 6 .
- ◆ Điểm B , G có hoành độ lần lượt là $-5,7$ và $5,7$.



Dựa theo số liệu ở mô tả, tính diện tích phần con đường được tô hình viên gạch trong hình vẽ (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

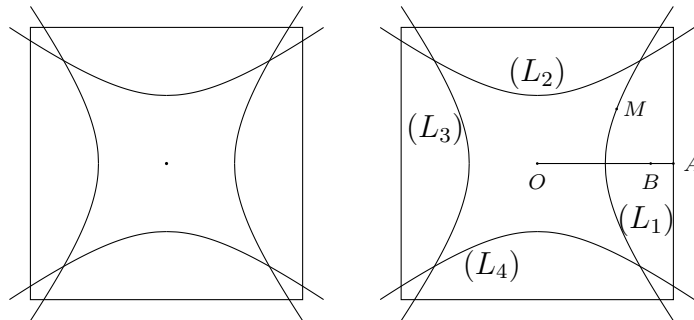
KQ:

Câu 57 Một nhóm học sinh lớp 12 đã lên bản thiết kế mẫu hoa văn cho một loại gạch men lát nền nhà. Các em vẽ 4 đường cong như hình, từ đó tạo thành một hình (H) khép kín ở giữa viên gạch để tạo điểm nhấn. Cụ thể cách dựng hình được thực hiện như sau:

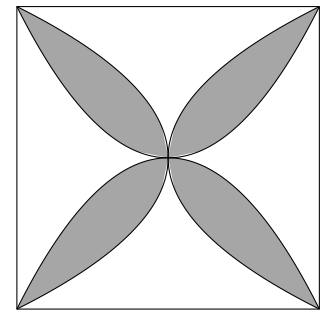
- ◆ Dựng hệ trục Oxy với điểm O là tâm của viên gạch, tia Ox hướng sang phải và tia Oy hướng lên trên, đơn vị trên mỗi trục là 5 cm.
- ◆ Các em lấy O là tâm viên gạch và A là trung điểm một cạnh viên gạch, xác định được điểm B thỏa mãn $\overrightarrow{OB} = \frac{5}{6}\overrightarrow{OA}$.
- ◆ Dựng đường thẳng $\Delta: 5x - 9 = 0$. Đường cong (L_1) là tập hợp các điểm M thỏa mãn $3MB = 5d(M, \Delta)$.
- ◆ Lấy đối xứng đường cong (L_1) qua tâm O và qua các đường chéo của viên gạch thì được các đường cong còn lại.

Biết viên gạch là hình vuông có kích thước 60 cm; hỏi diện tích hình (H) là bao nhiêu centimét vuông (làm tròn đến hàng đơn vị)?

KQ:    

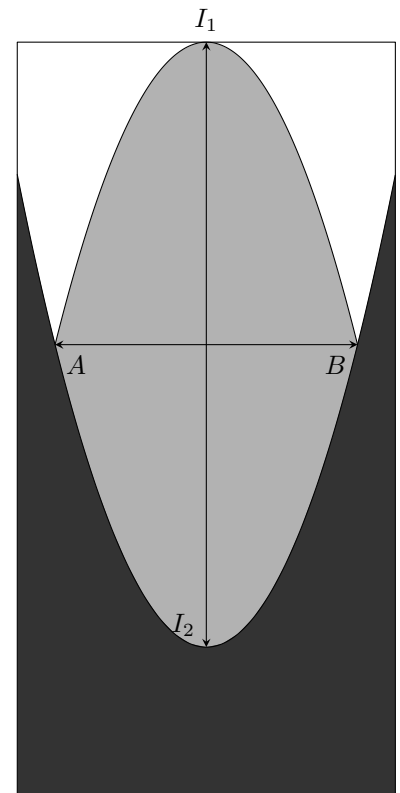


Câu 58 Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40 cm . Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (hình vẽ minh họa), chi phí phủ một lớp men trang trí bốn cánh hoa là 600.000 đồng/m² . Tính chi phí để phủ một lớp men trang trí bốn cánh hoa của một viên gạch (Đơn vị nghìn đồng).



KQ:    

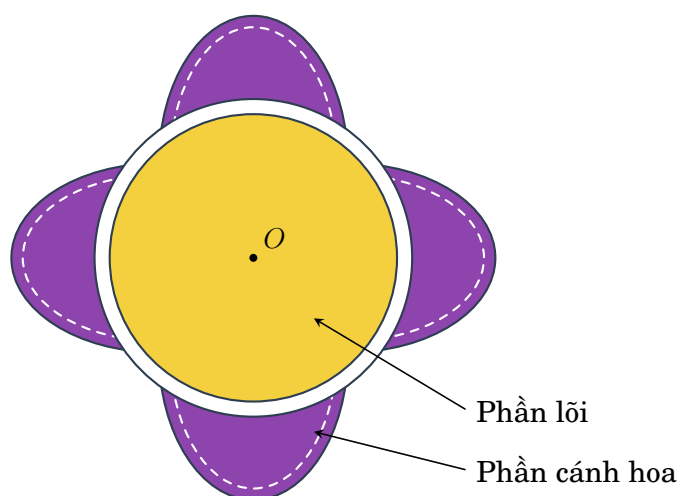
Câu 59 Một nhà sản xuất dự kiến xây dựng sân khấu cho một concept âm nhạc trên một mảnh đất hình chữ nhật có kích thước 20 m $\times$ 10 m. Nhà sản xuất mô phỏng sân khấu thông qua bản vẽ trên hệ trục Oxy như sau: vẽ hai parabol có đỉnh I_1, I_2 có cùng hoành độ, trong đó parabol đỉnh I_1 tiếp xúc với cạnh ngắn của hình chữ nhật. Vị trí giao nhau của hai parabol là A và B cùng với hai đỉnh I_1, I_2 tạo thành hình thoi có độ dài hai đường chéo là $I_1I_2 = 16$ (m) và $AB = 8$ (m) (tham khảo hình vẽ). Trên thực tế, khu vực màu đen là khu vực thiết kế dành cho khán giả, màu xám là khu vực sân khấu và màu trắng là khu vực hậu trường. Chi phí để xây dựng khu vực sân khấu, hậu trường, khán đài lần lượt là 2 triệu đồng, 200 nghìn đồng và 400 nghìn đồng mỗi mét vuông. Tổng chi phí xây dựng bằng bao nhiêu triệu đồng? Làm tròn đến hàng đơn vị.



KQ:    

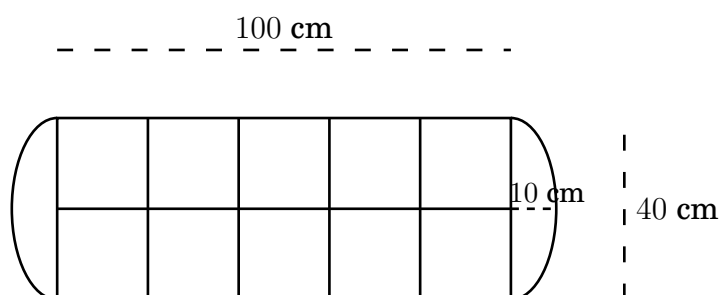


Câu 60 Để chuẩn bị quà tặng sinh nhật đặc biệt cho các thành viên trong câu lạc bộ nghệ thuật, người ta đặt hàng chế tác một vật phẩm chặn giấy bằng hợp kim cao cấp. Bề mặt của vật phẩm có dạng hai hình elip bằng nhau xếp chồng lên nhau. Biết mỗi elip có độ dài trục lớn bằng 8 cm, độ dài trục nhỏ bằng $\frac{8}{\sqrt{3}}$ cm; trục lớn của elip này vuông góc với trục lớn của elip kia tại giao điểm O của chúng. Đường tròn (O) đi qua các giao điểm của hai elip được vẽ lên bề mặt để phân chia các khu vực trang trí (như hình vẽ). Phần lõi bên trong đường tròn được dát đồng để khắc tên và lời chúc sinh nhật với chi phí 5.000 đồng/cm². Các phần cánh hoa nằm phía ngoài đường tròn được đính đá Sapphire nhân tạo với chi phí 15.000 đồng/cm². Hỏi tổng chi phí nguyên vật liệu để chế tác một vật phẩm quà tặng này là bao nhiêu nghìn đồng? (Không làm tròn các kết quả trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng đơn vị).



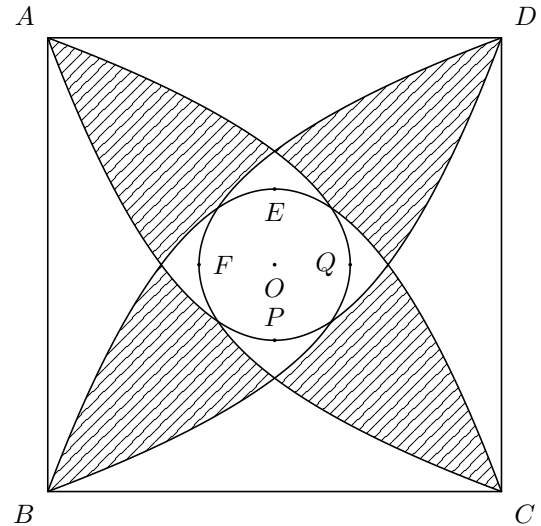
KQ:

Câu 61 Một xưởng mộc tại Mai Sơn sản xuất những chiếc bàn cờ Ô quan bằng gỗ nguyên khối. Mặt trên của bàn cờ là một mặt phẳng được thiết kế và có kích thước như hình vẽ gồm ba phần: phần chính giữa là một hình chữ nhật có chiều dài 100 cm và chiều rộng 40 cm; hai "ô quan" ở hai đầu trái và phải là hai hình phẳng bằng nhau được ghép nối liền mạch với hai cạnh chiều rộng của hình chữ nhật. Biết rằng đường bao ngoài của mỗi "ô quan" là một cung tròn. Xưởng mộc tiến hành phủ một lớp keo bảo vệ bóng lên toàn bộ bề mặt trên của chiếc bàn cờ này. Biết chi phí vật tư và nhân công để phủ keo là 100000 đồng/m². Tính tổng chi phí x (nghìn đồng) để hoàn thiện việc phủ keo cho mặt bàn cờ (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



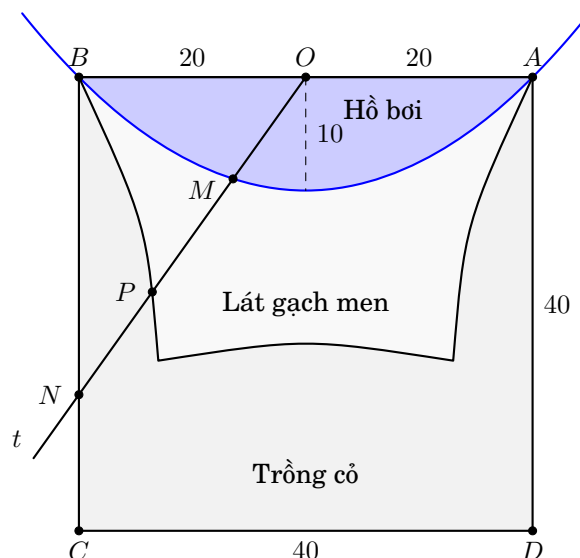
KQ:

Câu 62 Bác Tuấn trang trí bức tường hình vuông $ABCD$ có $AB = 4m$ như hình vẽ bằng cách sơn màu. Trong đó, bốn đường cong AQB, APD, BEC, CFD đều là đường parabol có các đỉnh lần lượt là Q, P, E, F . Biết rằng trục đối xứng của mỗi Parabol trùng với một trục đối xứng của hình vuông $ABCD$. Cho biết $OE = OF = OP = OQ = 1m$. Phần diện tích giới hạn bởi bốn đường Parabol nêu trên (phần gạch chéo) được sơn màu đỏ với chi phí 500 nghìn đồng cho mỗi mét vuông. Phần diện tích còn lại của bức tường được sơn màu trắng với chi phí 300 nghìn đồng cho mỗi mét vuông. Tính tổng số tiền (đơn vị: nghìn đồng) bác Tuấn cần để hoàn thành việc sơn bức tường đó. (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



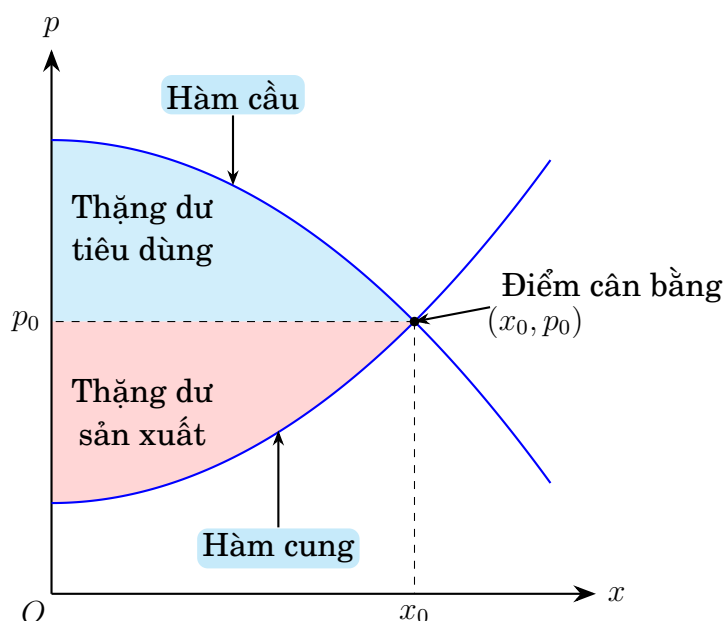
KQ: 

Câu 63 Công tử Bạc Liêu có một mảnh đất hình vuông ở một khu đô thị sầm uất, hình vuông có cạnh 40 (m), công tử dự định xây một hồ bơi được giới hạn bởi cạnh AB của hình vuông và một parabol đi qua hai đầu mút cạnh đó, đỉnh của parabol cách cạnh AB một đoạn 10 (m). Từ vị trí O là trung điểm AB , kẻ tia Ot bất kỳ cắt parabol và một cạnh khác của hình vuông theo thứ tự tại các điểm M, N . Gọi P là trung điểm MN , khi tia Ot quay quanh gốc O thì tập hợp các điểm P tạo thành đường cong (L) . Công tử dự định sử dụng một loại gạch men đặc biệt để lát nền cho toàn bộ khu vực được giới hạn bởi đường cong (L) và parabol. Phần còn lại trên mảnh đất hình vuông đó thì công tử sẽ trồng cỏ. Biết rằng chi phí xây hồ bơi là 5 (triệu đồng/m²), chi phí lát gạch men là 2 (triệu đồng/m²), chi phí trồng cỏ tự nhiên là 100 (nghìn đồng/m²). Tính tổng số tiền mà công tử Bạc Liêu phải chi trả cho toàn bộ dự án trên theo đơn vị tỷ đồng (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).



KQ:

Câu 64 Ta biết rằng hàm cầu liên quan đến giá p của một sản phẩm với nhu cầu của người tiêu dùng, hàm cung liên quan đến giá p của sản phẩm với mức độ sẵn sàng cung cấp sản phẩm của nhà sản xuất. Điểm cắt nhau $(x_0; p_0)$ của đồ thị hàm cầu $p = D(x)$ và đồ thị hàm cung $p = S(x)$ được gọi là điểm cân bằng.

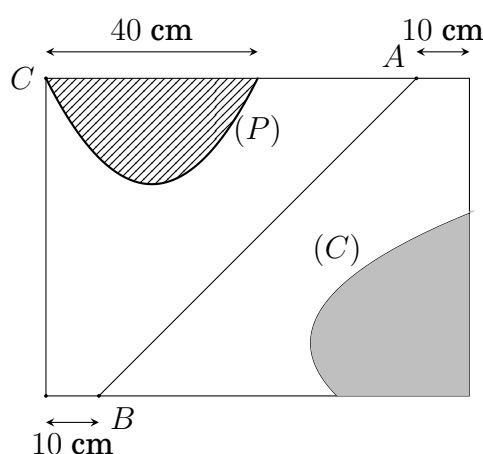


Các nhà kinh tế gọi diện tích của hình giới hạn bởi đồ thị hàm cầu, đường ngang $p = p_0$ và đường thẳng đứng $x = 0$ là thặng dư tiêu dùng. Tương tự, diện tích của hình giới hạn bởi đồ thị của hàm cung, đường nằm ngang $p = p_0$ và đường thẳng đứng $x = 0$ được gọi là thặng dư sản xuất, như trong Hình bên. (Theo R. Larson, *Brief Calculus: An Applied Approach*, 8th edition, Cengage Learning, 2009).

Giả sử hàm cung và hàm cầu của một loại sản phẩm được mô hình hóa bởi: Hàm cầu: $p = -0,36x + 9$ và hàm cung: $p = 0,14x + 2$ trong đó x là số đơn vị sản phẩm. Tìm thặng dư tiêu dùng cho sản phẩm này, làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

KQ:

Câu 65 Để trang trí một ô hình chữ nhật với kích thước $80 \text{ cm} \times 60 \text{ cm}$ trên tường căn phòng của mình, anh Bình đã tô màu 2 họa tiết giới hạn bởi các parabol (P) , parabol (C) và các cạnh của ô chữ nhật bằng màu vàng (kí hiệu sọc nghiêng) và màu xanh (vùng tô đậm) (như hình vẽ). Biết rằng các parabol (P) và (C) đối xứng nhau qua đường thẳng AB và diện tích phần màu vàng bằng $\frac{1600}{3} \text{ cm}^2$.



Tính tổng số tiền (đơn vị: triệu đồng) mà anh Bình cần phải trả để mua sơn trang trí. Biết mỗi lọ sơn, sơn được tối đa 30 cm^2 . Cho biết giá của một lọ sơn vàng là 50 000 đồng, giá của một lọ sơn xanh là 30 000 đồng (biết rằng mỗi lọ sơn không được bán lẻ).

KQ:

BẢNG ĐÁP ÁN ĐÚNG SAI Đ/S

Câu 1. Đ S S Đ

Câu 4. S Đ S S

Câu 7. Đ S Đ S

Câu 2. S S Đ Đ

Câu 5. S Đ Đ Đ

Câu 8. S Đ Đ Đ

Câu 3. Đ Đ Đ S

Câu 6. Đ S S Đ

Câu 9. S S S S

ĐÁP SỐ PHẦN TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. 1 1

Câu 2. 8 1

Câu 3. 5 4

Câu 4. 1 9 4 8

Câu 5. 2 4

Câu 6. 1 5 1

Câu 7. 3 2 0 0

Câu 8. 3 1 6 3

Câu 9. 3 6 3

Câu 10. 8 7 2

Câu 11. 7 5

Câu 12. 8 0 5

Câu 13. 6 5 4

Câu 14. 3 5

Câu 15. 1 0 6

Câu 16. 0 8

Câu 17. 7 4 4

Câu 18. 2 4 6 5

Câu 19. 2 5

Câu 20. 2 5 3

Câu 21. 4 0 7

Câu 22. 2 9 7

Câu 23. 6 1

Câu 24. 3 8 2

Câu 25. 3 2

Câu 26. 4 8 1

Câu 27. 2 2 4

Câu 28. 5 3 6 1

Câu 29. 7 3

Câu 30. 2 0 0

Câu 31. 4 4 4

Câu 32. 1 1 5

Câu 33. 2 9 3

Câu 34. 0 4 3

Câu 35. 1 9 2

Câu 36. 9 5

Câu 37. 2 3 3

Câu 38. 3 4 6 7

Câu 39. 1 3 5

Câu 40. 4 5 1

Câu 41. 2 4 9

Câu 42. 6 6

Câu 43. 1 9 2 3

Câu 44. 3 7 3 7

Câu 45. 3 8 1 4



Câu 46. 1 3 , 9

Câu 47. 6 5

Câu 48. 3 7

Câu 49. 6 4 , 3

Câu 50. 1 5

Câu 51. 3 0 9

Câu 52. 1 0 8

Câu 53. 9 , 6

Câu 54. 5 , 3

Câu 55. 7 4 5

Câu 56. 2 4 , 6

Câu 57. 1 1 6 8

Câu 58. 3 2

Câu 59. 2 1 0

Câu 60. 3 2 9

Câu 61. 4 6

Câu 62. 6 1 2 9

Câu 63. 2 , 4

Câu 64. 3 5 , 3

Câu 65. 6 6 7

Chủ đề 3

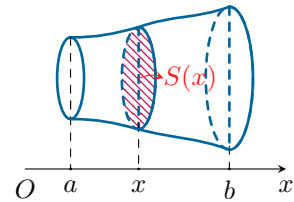
TOÁN THỰC TẾ ỨNG DỤNG
TÍCH PHẦN TÍNH THỂ TÍCH

1 LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Thể tích của vật thể

- ♦ Gọi B là phần của vật thể giới hạn bởi 2 mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại a, b . Gọi $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($a \leq x \leq b$). Khi đó, thể tích V của phần vật thể B là

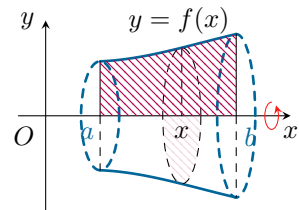
$$V = \int_a^b S(x) dx$$



2 Thể tích của khối tròn xoay

- ♦ Cho hàm số $f(x)$ liên tục, **không âm** trên $[a; b]$. Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục Ox , $x = a$, $x = b$ khi quay quanh trục Ox tạo thành một vật thể tròn xoay. Thể tích của vật thể tròn xoay là

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$



- ♦ Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$ khi quay quanh trục Ox tạo thành một vật thể tròn xoay. Thể tích của vật thể đó là

$$V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx.$$

- ♦ Hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục Oy , $y = c$, $y = d$ khi quay quanh trục Oy tạo thành một vật thể tròn xoay. Thể tích của vật thể đó là

$$V = \pi \int_c^d g^2(y) dy.$$

3 Công thức thể tích và diện tích hình nón



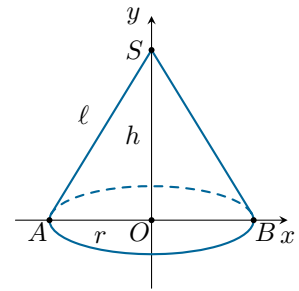
Cho đoạn thẳng SA quay xung quanh trục Oy , ta được hình nón (N) có đỉnh S và đáy là đường tròn tâm O bán kính OA . Khi đó $SA = \ell$ gọi là đường sinh, $OA = r$ gọi là bán kính đáy, $SO = h$ gọi là đường cao của hình nón. Ta có $\ell^2 = h^2 + r^2$.

♦ Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi \cdot r \cdot \ell$.

♦ Diện tích toàn phần:

$$S_{tp} = S_{xq} + S_{\text{đáy}} = \pi \cdot r \cdot \ell + \pi \cdot r^2.$$

♦ Thể tích: $V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h$.



4 Công thức thể tích và diện tích hình trụ

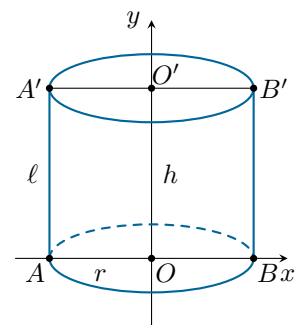
Cho đoạn thẳng AA' quay xung quanh trục Oy , ta được hình trụ (T) có đáy là đường tròn tâm O , bán kính OA . Khi đó $AA' = \ell$ gọi là đường sinh, $OA = r$ gọi là bán kính đáy, $OO' = h$ gọi là chiều cao của hình trụ. Ta có $\ell = h$.

♦ Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi \cdot r \cdot h$.

♦ Diện tích toàn phần:

$$S_{tp} = S_{xq} + 2S_{\text{đáy}} = 2\pi \cdot r \cdot h + 2\pi \cdot r^2.$$

♦ Thể tích: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$.

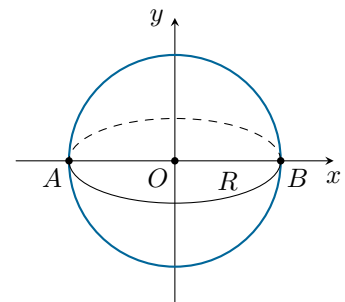


5 Công thức thể tích và diện tích hình cầu

Cho đường tròn tâm O bán kính R quay xung quanh trục Ox , ta được hình cầu tâm O bán kính R .

♦ Diện tích của mặt cầu: $S = 4\pi R^2$.

♦ Thể tích của khối cầu: $V = \frac{4}{3} \pi R^3$.

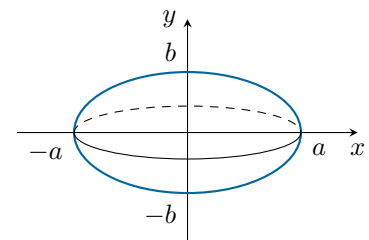


6 Công thức thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi Elip

Cho Elip (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$). Thể tích của khối tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi Elip (E)

♦ Quay trục Ox là $V = \frac{4}{3} \pi ab^2$.

♦ Quay trục Oy là $V = \frac{4}{3} \pi a^2 b$.



7 Công thức thể tích hình nôm

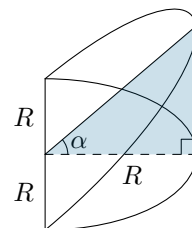
♦ Thể tích khối nôm loại I

Chọn trục Ox trùng với đường kính. Thiết diện cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($-R \leq x \leq R$) là một tam giác vuông có độ dài hai cạnh lần lượt là $\sqrt{R^2 - x^2}$ và $\sqrt{R^2 - x^2} \cdot \tan \alpha$.

Khi đó, diện tích thiết diện là $S(x) = \frac{1}{2} (R^2 - x^2) \cdot \tan \alpha$.

$\Rightarrow$ Thể tích của vật thể là

$$V = \int_{-R}^R S(x) dx = \int_{-R}^R \frac{1}{2} (R^2 - x^2) \cdot \tan \alpha dx = \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha$$



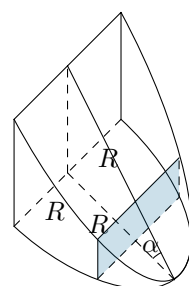
♦ Thể tích khối nêm loại II

Chọn trục Ox trùng với bán kính. Thiết diện cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq R$) là một hình chữ nhật có độ dài hai cạnh lần lượt là $2\sqrt{R^2 - x^2}$ và $(R - x) \cdot \tan \alpha$. Khi đó, diện tích thiết diện là

$$S(x) = 2\sqrt{R^2 - x^2}(R - x) \cdot \tan \alpha.$$

$\Rightarrow$ Thể tích của vật thể là

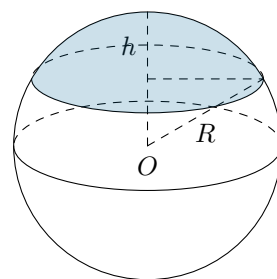
$$\begin{aligned} V &= \int_0^R S(x) dx = \int_0^R 2\sqrt{R^2 - x^2}(R - x) \cdot \tan \alpha dx \\ &= \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) R^3 \tan \alpha \end{aligned}$$



8 Công thức thể tích khối chỏm cầu

Khối chỏm cầu có bán kính R và chiều cao h ($0 < h \leq R$) sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi cung tròn có phương trình $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, trục Ox và đường thẳng $x = R - h$, $x = R$ quay quanh trục Ox . Thể tích của khối chỏm cầu là

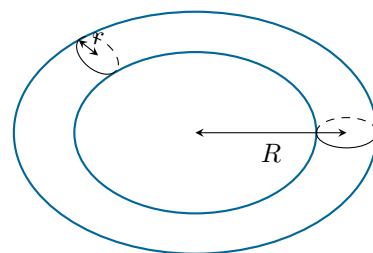
$$V = \pi \int_{R-h}^R (\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right)$$



9 Công thức thể tích cái phao

Thể tích của một cái phao có bán kính R và r như hình vẽ là

$$V = 2\pi^2 r^2 R$$

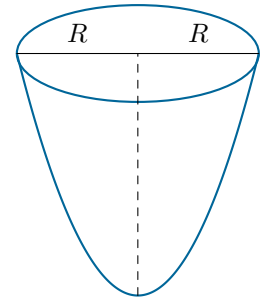


10 Công thức thể tích chảo Parabol



Khối chỏ Parbol có bán kính R và chiều cao h sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường cong có phương trình $y = \sqrt{\frac{R^2}{h}x}$, trục Ox và đường thẳng $x = 0, x = h$ quay xung quanh trục Ox . Thể tích của khối chỏ Parabol là

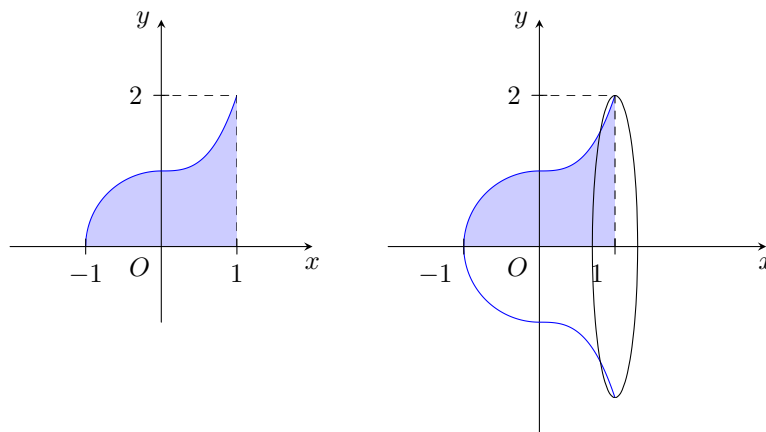
$$V = \pi \int_0^h \frac{R^2}{h} x \, dx = \frac{1}{2} \pi R^2 h$$



II BÀI TẬP ÁP DỤNG

1 Trắc nghiệm đúng sai

Câu 1 Chiếc mũ rộng vành được mô hình hóa khi cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & , -1 \leq x \leq 0 \\ x^3 + 1 & , 0 < x < 1 \end{cases}$, trục Ox và các đường thẳng $x = -1, x = 1$ quay xung quanh trục Ox (tham khảo hình vẽ). Biết đơn vị trên mỗi trục là dm.



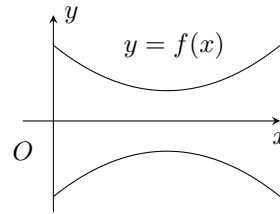
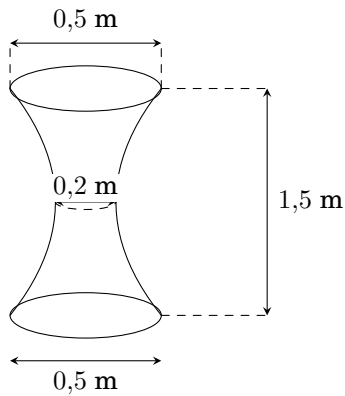
a Diện tích của hình phẳng (H) là $S = \int_{-1}^1 |\sqrt{1-x^2} + x^3 + 1| \, dx$.

b Thể tích của khối tròn xoay trên là $\frac{97}{42} \pi \, \text{dm}^3$.

c Giá trị của hàm số $f(x)$ khi $x = 1$ bằng 2.

d Vành của chiếc mũ (giao tuyến của mặt tròn xoay cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x = 1$) có diện tích bằng $2\pi \, \text{dm}^2$.

Câu 2 Một chậu nước có dạng một khối tròn xoay với thiết diện qua trục của chậu (mặt cắt đi qua hai tâm của hai đường tròn đáy) là hai đường parabol đối xứng nhau qua trục đó. Biết hai đường tròn đáy chậu cùng có bán kính 0,5 (m); thiết diện nhỏ nhất vuông góc với trục của chậu có bán kính 0,2 (m); chiều cao của chậu nước bằng 1,5 (m).



Người ta bơm nước vào chậu với tốc độ 5 (lít/phút). Xét hệ trục tọa độ Oxy với gốc O trùng với tâm đường tròn đáy của chậu nước, tia Ox chứa trục của chậu nước (đơn vị trên mỗi trục là mét). Mặt phẳng qua trục của chậu nước cho ta hai nhánh parabol như hình vẽ, gọi $y = f(x)$ là parabol nằm trên trục hoành.

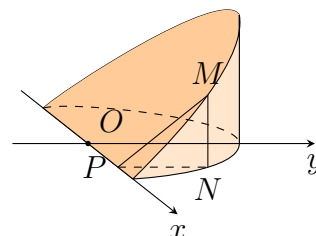
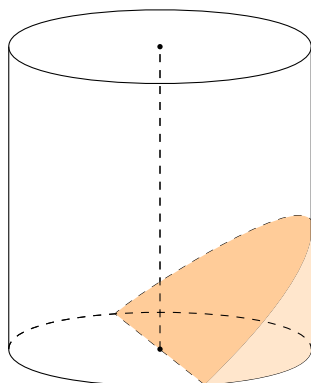
a $f(x) = \frac{8}{15}x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{2}$.

b Sức chứa tối đa của chậu nước bằng $0,5 \text{ m}^3$ (làm tròn kết quả đến hàng phần chục của mét khối).

c Sau 1,5 giờ bơm nước (làm tròn kết quả đến hàng phần chục của giờ) thì chậu đầy nước.

d Nếu bơm từ đầu như thế thì đến phút thứ 20, tốc độ dâng lên của nước bằng 0,01 (m/phút).

Câu 3 Cho một vật thể bằng gỗ có dạng hình trụ với chiều cao và bán kính đáy cùng bằng 1. Cắt khối gỗ đó bởi một mặt phẳng đi qua đường kính của một mặt đáy của khối gỗ và tạo với mặt phẳng đáy của khối gỗ một góc 30° ta thu được khối gỗ hình nêm (H) và đặt khối (H) vào hệ trục tọa độ như hình vẽ.



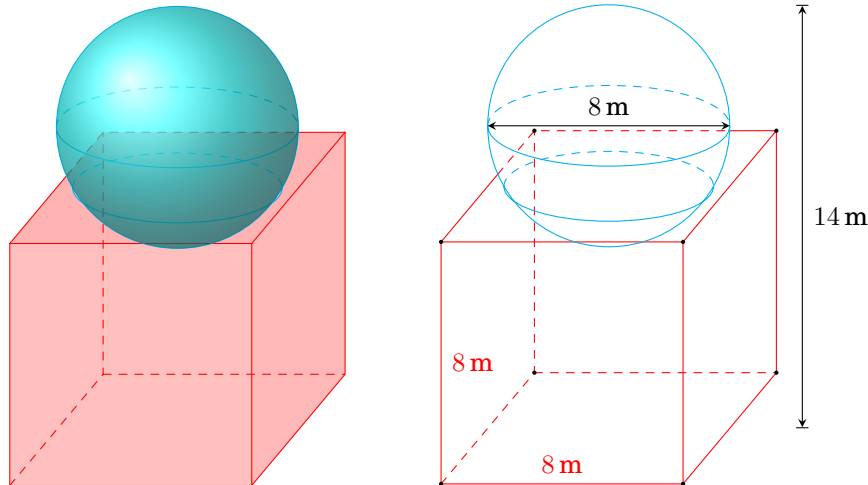
a Nửa đường tròn đáy khối gỗ hình trụ có phương trình là $y = \sqrt{1+x^2}$, $(-1 \leq x \leq 1)$.

b Một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm M có hoành độ x , cắt hình nêm theo thiết diện là $\triangle MNP$ vuông tại N và có góc $\widehat{PMN} = 30^\circ$. Lúc đó đoạn MN bằng $\sqrt{1-x^2}$.

c Diện tích tam giác MNP bằng $1 - x^2$.

d Thể tích hình nêm (H) bằng $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Câu 4 Một đồ lưu niệm bằng thủy tinh có chiều cao bằng 14 cm, được thiết kế gồm hai phần, phần dưới là một khối lập phương cạnh bằng 8 cm và phần trên là một phần của khối cầu có đường kính bằng 8 cm (được mô hình hóa bởi hình vẽ bên dưới).



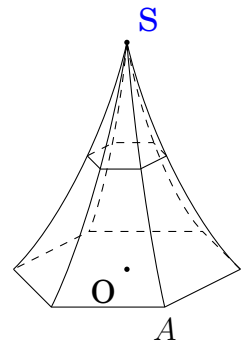
a Thể tích phần dưới (khối lập phương) bằng 512 cm^3 .

b Phần chỏm cầu có bán kính $R = 4 \text{ cm}$ và chiều cao $h = 6 \text{ cm}$.

c Thể tích của chỏm cầu (phần phía trên) bằng $70\pi \text{ cm}^3$.

d Thể tích của đồ lưu niệm đó là 738 cm^3 (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Câu 5 Có một cái chòi hình “chóp cong”, trong đó mái chòi (H) có dạng hình “chóp lục giác cong đều” như hình vẽ bên. Đáy của (H) là một hình lục giác đều tâm O , đường chéo qua tâm O có độ dài là 10 m, chiều cao $SO = 10 \text{ m}$ (SO vuông góc với mặt phẳng đáy). Các “cạnh bên” của (H) là các sợi dây thép nằm trên các đường parabol có trục đối xứng song song với SO . Giả sử hình tạo bởi các đoạn giao tuyến của (H) với mặt phẳng (α) vuông góc với SO là một lục giác đều. Biết rằng khi mặt phẳng (α) đi qua trung điểm của SO thì lục giác đều có cạnh $l = 2 \text{ m}$.



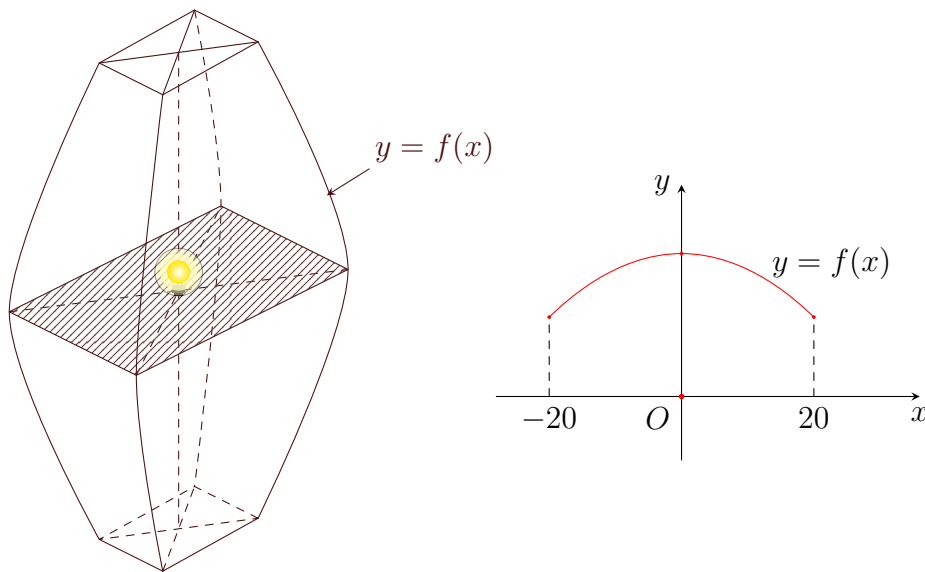
a Diện tích hình lục giác đều nói trên khi (α) đi qua trung điểm của SO là $6\sqrt{3} \text{ m}^2$.

b Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho gốc tọa độ là điểm O trên hình vẽ, S thuộc tia Oy , đỉnh A của lục giác đều thuộc tia Ox thì “cạnh bên” SA nằm trên đường parabol có phương trình $y = \frac{1}{6}x^2 - \frac{17}{6}x + 10$.

c Nếu (α) cắt SO và “cạnh bên” SA lần lượt tại M và B , mà $OM = t$ thì độ dài đoạn BM là $\frac{17}{2} - \sqrt{t + \frac{49}{4}}$.

d Thể tích phần không gian nằm bên trong mái chòi (H) là $171,4 \text{ m}^3$.

Câu 6 Cận kề ngày Tết Nguyên Đán. Bác Nghĩa muốn thiết kế một đèn lồng cao 40 cm để treo lên ở hiên nhà. Mặt cắt ngang tại mọi độ cao vuông góc với trục thẳng đứng của đèn lồng luôn là một hình vuông (xem hình vẽ). Mặt đáy và đỉnh của đèn lồng là hình vuông có cạnh $L_0 = 10\sqrt{2}$ cm. Mặt cắt ngang tại vị trí rộng nhất của đèn lồng là hình vuông (hình vuông có diện tích lớn nhất) có cạnh $L_{\max} = 14\sqrt{2}$ cm. Mặt cắt của đèn lồng theo mặt phẳng đứng chứa đường chéo đáy có dạng là hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong Parabol đối xứng nhau qua trục thẳng đứng đi qua tâm đáy của đèn lồng. Một đường cong Parabol $y = f(x)$ trong bốn đường cong để tạo ra **khung** đèn lồng được gắn trong hệ trục Oxy với trục Ox biểu diễn chiều cao của chiếc đèn lồng (đơn vị mỗi trục là 1 cm).



- a** Diện tích lớn nhất của mặt cắt ngang hình vuông, vuông góc với trục thẳng đứng bằng 196 cm^2 .
- b** Phương trình của đường cong parabol $y = f(x) = \frac{-1}{100}x^2 + 14$.
- c** Tính thể tích của chiếc đèn lồng đó là 12,95 lít (làm tròn đến hàng phần trăm).
- d** Để đảm bảo an toàn, bác Nghĩa treo một chiếc bóng đèn sợi đốt hình cầu có tâm (được xem là một điểm) đặt trên trục thẳng đứng của lồng đèn và cách đáy 22 cm. Bác quy định rằng để tránh làm cháy lớp giấy dán, khoảng cách từ mặt bóng đèn đến bất kỳ điểm nào trên lồng đèn phải ít nhất là 7 cm. Bác có thể chọn chiếc bóng đèn có bán kính lớn nhất là 2,8666 cm (làm tròn đến bốn số sau dấu phẩy).

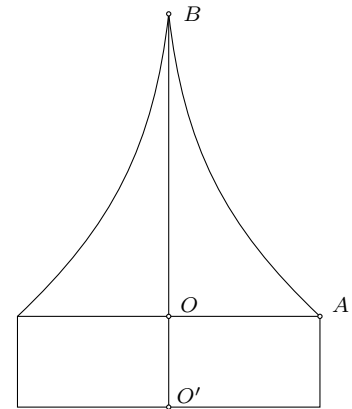
2 Trả lời ngắn

Câu 1 Bình chứa nhiên liệu của một chiếc máy bay phản lực được mô tả trong không gian là một khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{1}{8}x^2\sqrt{2-x}$ với $(0 \leq x \leq 2)$ và trục Ox quanh trục Ox (x tính theo đơn vị m). Thể tích của bình chứa bằng $\frac{a\pi}{b} \text{ m}^3$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó $a + b$ bằng

KQ:



Câu 2 Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, nhóm bạn Lan đã làm một chiếc mũ “cách điệu” cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên. Biết rằng $OO' = 6$ (cm), $OA = 10$ (cm), $OB = 20$ (cm), đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm B . Tính thể tích của chiếc mũ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

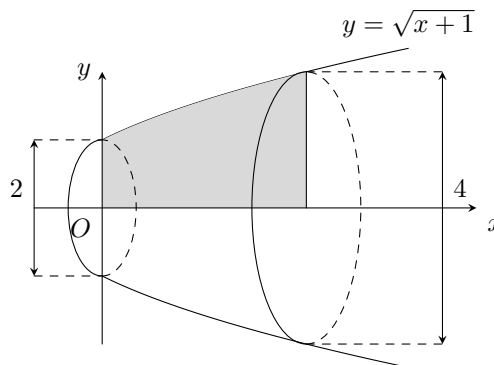


KQ:

Câu 3 Một công ty năng lượng đang xây dựng một bể chứa khí thiên nhiên hóa lỏng (LNG) có dạng hình cầu với bán kính 20 mét. Để đảm bảo an toàn và dễ dàng trong việc lắp đặt hệ thống đường ống, phần đáy và phần đỉnh của bể được cắt phẳng. Phần đáy bị cắt bởi một mặt phẳng cách tâm bể 18 mét, phần đỉnh bị cắt bởi một mặt phẳng cách tâm 15 mét (tâm nằm giữa hai mặt phẳng). Hỏi thể tích bể đó là bao nhiêu nghìn mét khối? (làm tròn đến hàng đơn vị).

KQ:

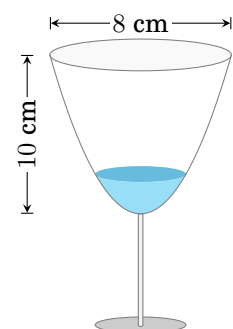
Câu 4 Một bác thợ gốm làm một cái chậu trồng cây, phần trong chậu cây có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng được tô đậm như hình sau quanh trục Ox , biết đường cong trong hình là đồ thị của hàm số $y = \sqrt{x+1}$, đáy chậu và miệng chậu có đường kính lần lượt là 2 dm và 4 dm. Dung tích của chậu là bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần chục)?



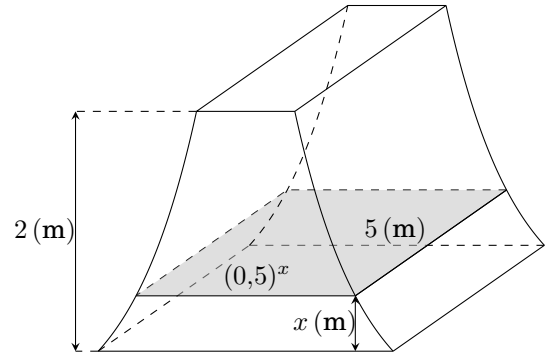
KQ:

Câu 5 Một cái li có hình dạng tròn xoay, miệng li hình tròn đường kính 8 cm, chiều cao phần thân của li là 10 cm (Hình). Nếu cắt dọc li thành hai phần bằng nhau thì vết cắt là một đường parabol. Tính thể tích tối đa mà li có thể chứa được (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của mililit).

KQ:

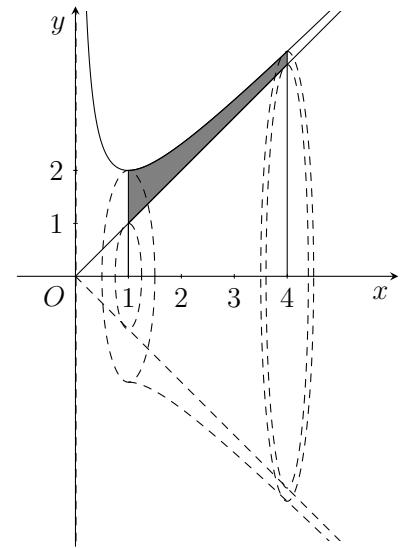


Câu 6 Một khối bê tông có chiều cao 2 mét được đặt trên mặt đất. Nếu cắt khối bê tông bởi một mặt phẳng nằm ngang và cách mặt đất x mét ($0 \leq x \leq 2$) thì được mặt cắt là một hình chữ nhật có chiều dài 5 mét và chiều rộng bằng $(0,5)^x$ mét (tham khảo hình bên). Thể tích của khối bê tông đó bằng bao nhiêu mét khối (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?



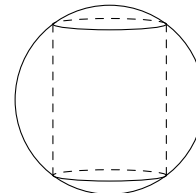
KQ:

Câu 7 Một chiếc bát thủy tinh có bề dày của phần xung quanh là một khối tròn xoay, khi xoay hình phẳng D quanh một đường thẳng a bất kỳ nào đó mà khi gắn hệ trục tọa độ Oxy (đơn vị trên trục là decimet) vào hình phẳng D tại một vị trí thích hợp, thì đường thẳng a sẽ trùng với trục Ox . Khi đó hình phẳng D được giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = x + \frac{1}{x}$, $y = x$ và hai đường thẳng $x = 1$, $x = 4$ như hình dưới đây. Thể tích của bề dày chiếc bát thủy tinh đó bằng bao nhiêu decimet khối? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

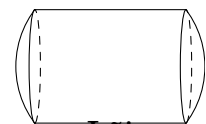


KQ:

Câu 8 Từ một quả cầu bằng đá trắng bán kính bằng 1 dm người ta khoan rút lõi ngay “chính giữa” quả cầu, trục đối xứng của lõi và quả cầu trùng nhau, đường kính lõi là 1 dm. Tính thể tích còn lại của quả cầu bằng bao nhiêu dm^3 (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



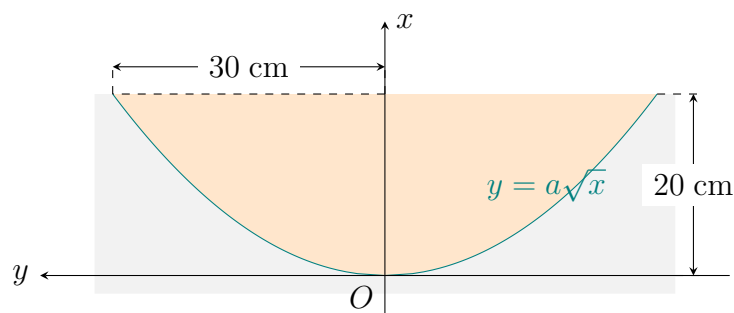
Quả cầu đá



Lõi

KQ:

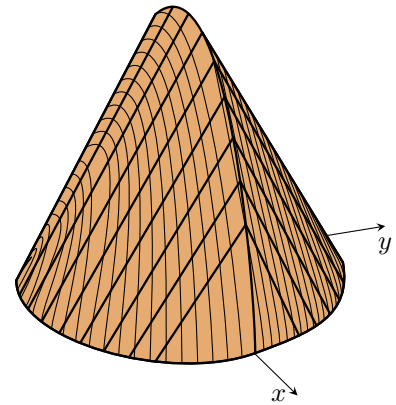
Câu 9 Một thùng làm kem có mặt cắt dạng parabol như hình. Biết phương trình đường biên có dạng $f(x) = a\sqrt{x}$, hỏi dung tích của thùng bằng bao nhiêu lít.



KQ:

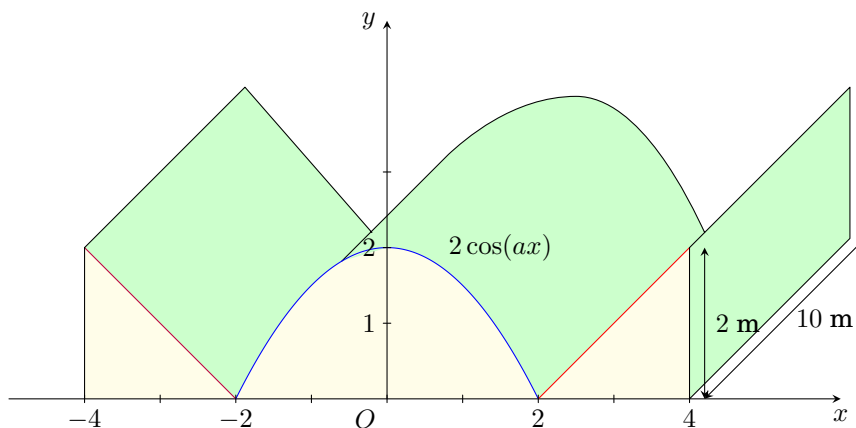


Câu 10 Cho vật thể có đáy là hình tròn có bán kính bằng 1 (tham khảo hình vẽ). Khi cắt vật thể bằng mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($-1 \leq x \leq 1$) thì được thiết diện là một tam giác đều. Thể tích V của vật thể đó là bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?



KQ:

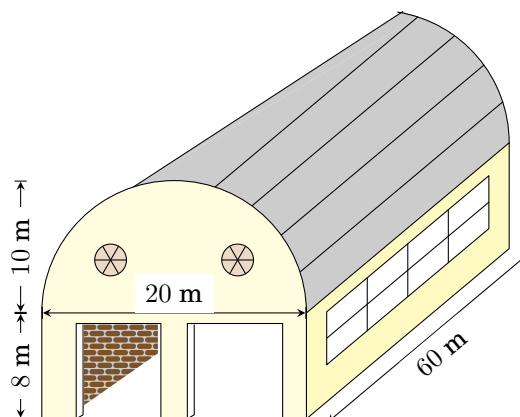
Câu 11 Một rào chắn bê tông có hình dạng như trong hình, mỗi đơn vị tương ứng với 1 mét. Khối lượng của hàng rào là bao nhiêu tấn bê tông, nếu mật độ của bê tông là $\rho = 2,3 \text{ g/cm}^3$? (làm tròn đến hàng đơn vị)



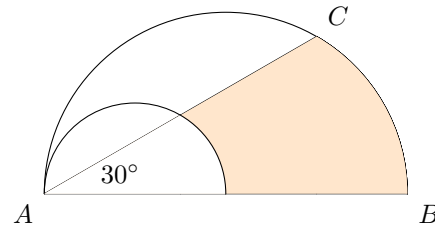
KQ:

Câu 12 Một sảnh ga có thông số như hình bên dưới, được thông gió bằng hai quạt, mỗi quạt có lưu lượng khoảng $80 \text{ m}^3/\text{phút}$. Hỏi cần bao nhiêu phút để trao đổi toàn bộ không khí trong sảnh? Mái sảnh là kết cấu gỗ dạng parabol.

KQ:

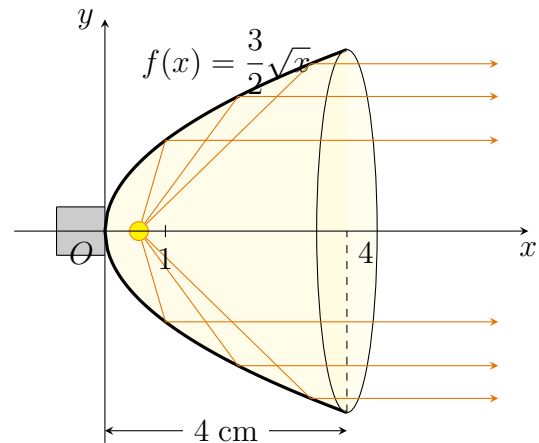


Câu 13 Cho hai nửa đường tròn như hình vẽ, biết đường kính của đường tròn lớn gấp đôi đường kính của đường tròn nhỏ. Nửa đường tròn đường kính AB có diện tích là 32π và $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Ký hiệu (H) là hình phẳng được tô màu như trong hình vẽ. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi cho hình (H) quay quanh trục AB . (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



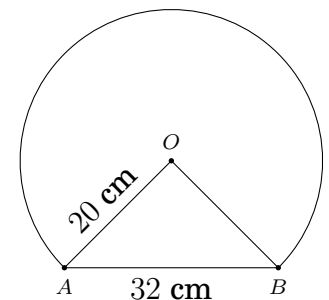
KQ:

Câu 14 Một đèn pha dạng parabol có đường biên (mặt cắt) cho bởi $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$. Chiều dài chóa là 4 cm. Hỏi: thể tích không khí bên trong là bao nhiêu cm^3 (làm tròn kết quả đến hàng phần chục)?



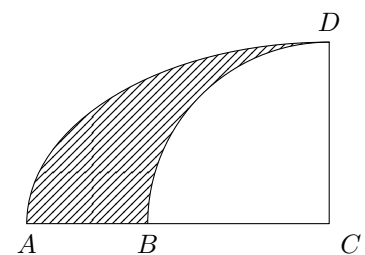
KQ:

Câu 15 Hoà sĩ thiết kế một chiếc mũ xe máy có dạng khối tròn xoay, mặt cắt đứng chứa tâm của khối tròn xoay có dạng một cung tròn bán kính 20 cm, với độ dài dây cung là 32 cm (hình bên). Thể tích của khối tròn xoay này là bao nhiêu dm^3 (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



KQ:

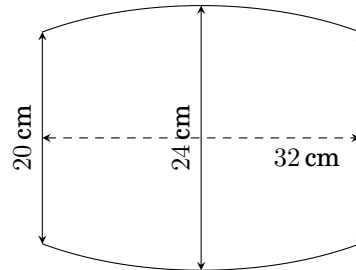
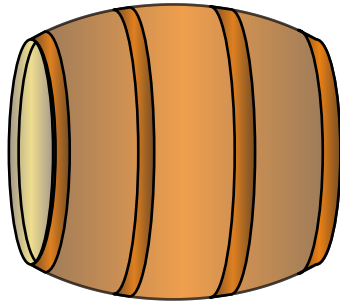
Câu 16 Một vật trang trí có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay miền (H) (phần gạch sọc trong hình vẽ bên) quanh trục AC . Biết rằng $AC = 5$ cm, $BC = 3$ cm, miền (H) được giới hạn bởi đoạn thẳng AB , cung tròn BD có tâm C , đường cong elip AD có trục AC và CD . Thể tích của vật trang trí bằng bao nhiêu centimet khối (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



KQ:

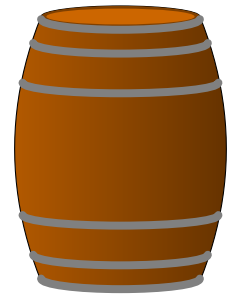


Câu 17 Một thùng chứa rượu có dạng hình tròn xoay với đường sinh là một cung của đường tròn, hai đáy là hai hình tròn bằng nhau và có đường kính bằng 20 cm, khoảng cách giữa hai đáy bằng 32 cm, đường kính lớn nhất của thân thùng là 24 cm (biết các kích thước đã trừ lớp vỏ thùng, tham khảo hình vẽ). Hỏi phần không gian bên trong thùng chứa rượu đỏ có thể tích bằng bao nhiêu lít (kết quả lấy đến chữ số hàng phần chục và không làm tròn)?



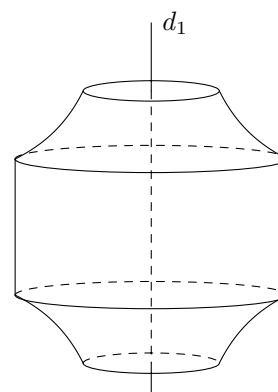
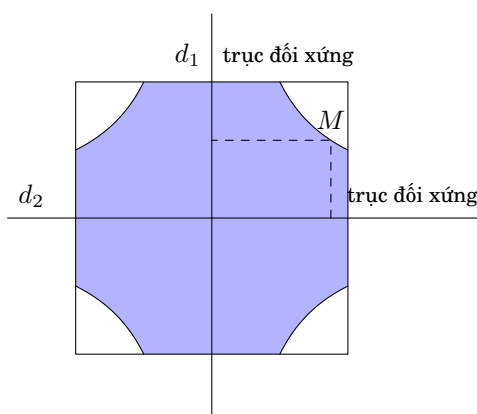
KQ:

Câu 18 Để chuẩn bị cho bữa tiệc cuối năm, công ty của ông Nam có đặt mua từ cơ sở sản xuất 7 thùng rượu với kích thước như nhau, thùng có dạng khối tròn xoay với đường sinh dạng parabol, mỗi thùng rượu có bán kính hai mặt là 40 cm và ở giữa là 50 cm. Chiều dài mỗi thùng rượu là 100 cm. Biết rằng thùng rượu chứa đầy rượu và giá mỗi lít rượu là 40 000 đồng. Tính số tiền (đơn vị: triệu đồng) mà công ty của ông Nam phải trả cho cơ sở sản xuất rượu (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



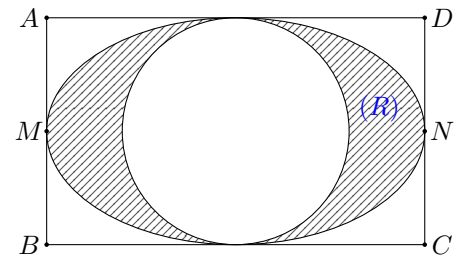
KQ:

Câu 19 Có một hình phẳng (H) (phần tô đậm trong hình vẽ) được tạo ra bằng cách vẽ một hình vuông có cạnh bằng 4. Sau đó, ở bốn góc hình vuông đó vẽ bốn đường cong đều có tính chất là: tích khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc mỗi đường cong đó đến hai trục đối xứng d_1, d_2 của hình vuông bằng 2. Khi cho hình phẳng (H) quay quanh trục d_1 ta sẽ thu được một vật thể tròn xoay, thể tích vật thể tròn xoay đó bằng bao nhiêu (không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần trăm)

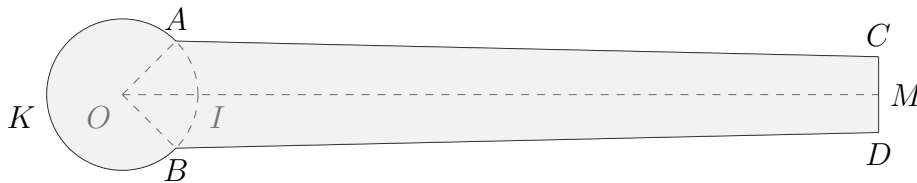


KQ:    

Câu 20 Một vật trang trí có dạng một khối tròn xoay được tạo thành khi quay miền (R) (phần gạch chéo trong hình vẽ) quanh trục MN . Biết rằng $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 6 \text{ cm}$, $AD = 10 \text{ cm}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD . Hai đường cong là hình elip có hình chữ nhật cơ sở là $ABCD$ và đường tròn tiếp xúc với hai cạnh AD và BC (tham khảo hình vẽ). Tính thể tích của vật trang trí đó (kết quả làm tròn đến hàng phần chục theo đơn vị cm^3).

KQ:    

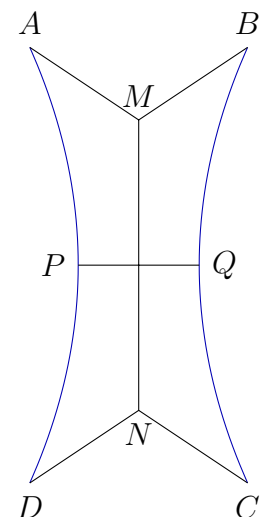
Câu 21 Hoà sĩ thiết kế một micro có dạng khối tròn xoay, mặt cắt đứng chứa trục của khối tròn xoay có dạng như hình sau, trong đó $OA = OB = OI = 2 \text{ cm}$, $MC = MD = 1 \text{ cm}$, đường thẳng OM là đường trung trực của đoạn thẳng CD , $OM = 20 \text{ cm}$, $\angle AOB = 90^\circ$.



Thể tích của micro này là bao nhiêu cm^3 ? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

KQ:    

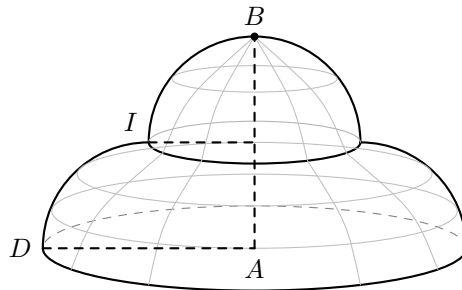
Câu 22 Một mô hình khối tròn xoay có trục là đường thẳng MN , khi ta cắt khối tròn xoay đó bởi một mặt phẳng đi qua trục của khối tròn xoay thì ta được cắt có dạng như hình bên. Biết $MN = 24 \text{ cm}$, $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = 18 \text{ cm}$, $AD = 36 \text{ cm}$, hai cung APD và BQC là một phần các đường parabol với đỉnh lần lượt tại P, Q và $PQ = 10 \text{ cm}$. Thể tích của mô hình đó bằng bao nhiêu cen-ti-mét khối (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?

KQ:    

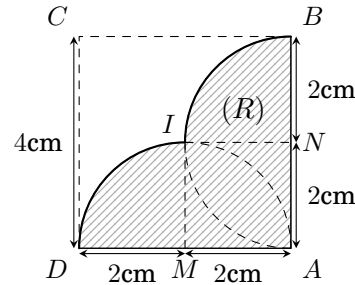
Câu 23 Một vật thể dùng để trang trí nội thất có dạng như hình (H1) bên dưới. Đây là một khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng (R) (phần gạch chéo trong hình (H2) quanh trục AB . Hình phẳng (R) được giới hạn bởi các cạnh AB, AD của hình



vuông $ABCD$ tâm I , độ dài cạnh 4 cm và các cung phần tư $\widehat{DI}$, $\widehat{IB}$ của các đường tròn bán kính bằng 2 cm với tâm lần lượt là trung điểm của các cạnh AD , AB . Thể tích của vật thể (H1) bằng bao nhiêu centimet khối (*không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần chục*)?



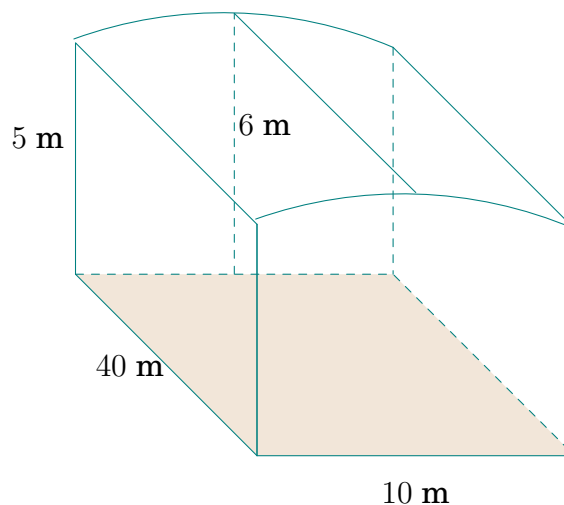
(H1)



(H2)

KQ:

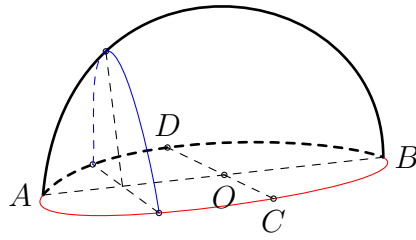
Câu 24 Một nhà kho có dạng khối hộp chữ nhật cùng phần mái phía trên được thiết kế dạng vòm cong. Chiều dài của xưởng là 40 m, chiều rộng 10 m, chiều cao 5 m; đường cắt của mái vòm khi cắt bởi mặt phẳng vuông góc với chiều dài của kho là một cung tròn, điểm cao nhất của mái vòm có chiều cao là 6 m (hình vẽ minh họa).



Để tính toán công suất cho hệ thống làm lạnh nhà kho, người ta cần ước lượng thể tích phần không gian bên trong nhà kho. Em hãy cho biết thể tích không gian bên trong nhà kho là bao nhiêu m^3 ? (*kết quả làm tròn đến hàng đơn vị*).

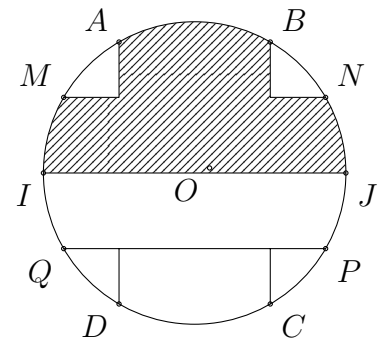
KQ:

Câu 25 Khi thi công tuyến cao tốc Nghi Sơn - Bãi Vọt, đơn vị thi công cần san một ngọn núi nhỏ. Biết đường viền chân núi là một elip có trục lớn $AB = 400$ m và trục bé $CD = 200$ m; mặt cắt bởi mặt phẳng chứa AB và vuông góc với mặt đất là nửa hình tròn đường kính AB ; mặt cắt bởi các mặt phẳng vuông góc với AB có dạng parabol với đỉnh thuộc nửa đường tròn đường kính AB (tham khảo hình vẽ). Tính thể tích ngọn núi đó theo đơn vị triệu m^3 (*làm tròn đến hàng phần trăm*).



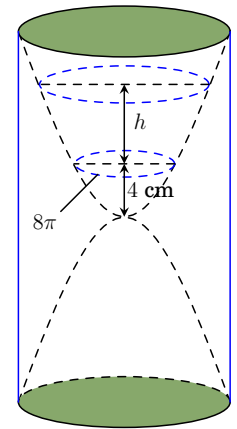
KQ:

Câu 26 Cho đường tròn tâm (O) có bán kính bằng 5 m và đường kính IJ . Các hình chữ nhật $ABCD$, $MNPQ$ nội tiếp hình tròn như hình vẽ với $AB = MQ = 5$ m và I là điểm chính giữa của cung nhỏ MQ . Người ta cần sản xuất một sản phẩm là vật thể tròn xoay khi cho hình phẳng được gạch chéo trong hình vẽ quay quanh IJ và chi phí để làm sản phẩm này là 1,2 triệu/m³. Số tiền phải chi trả để làm sản phẩm này là bao nhiêu (Đơn vị: triệu đồng và kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?



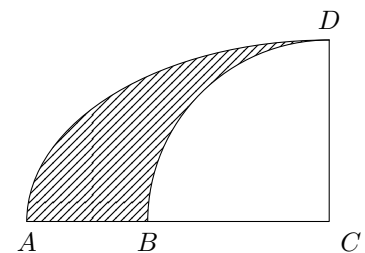
KQ:

Câu 27 Một chiếc đồng hồ cát như hình vẽ, gồm hai phần đối xứng nhau qua mặt phẳng nằm ngang và đặt trong một hình trụ. Thiết diện thẳng đứng qua trục của nó là hai Parabol chung đỉnh và đối xứng nhau qua mặt phẳng nằm ngang. Ban đầu lượng cát dồn hết ở phần trên của đồng hồ thì chiều cao của mực cát bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của bên đó. Cát chảy từ trên xuống dưới với tốc độ $v(t) = 0,2t + 13$ (cm³/phút). Khi chiều cao của cát còn 4 cm thì bề mặt trên cùng của cát tạo thành một đường tròn có chu vi bằng 8π cm. Biết sau 20 phút thì cát chảy hết xuống phần bên dưới của đồng hồ. Tính chiều cao của khối trụ bên ngoài theo cen-ti-mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



KQ:

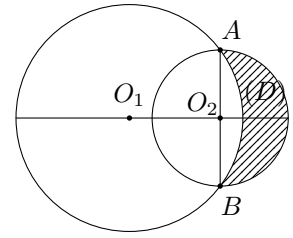
Câu 28 Một vật trang trí có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay miền (H) (phần gạch sọc trong hình vẽ bên) quanh trục AC . Biết rằng $AC = 5$ cm, $BC = 3$ cm, miền (H) được giới hạn bởi đoạn thẳng AB , cung tròn BD có tâm C , đường cong elip AD có trục AC và CD . Thể tích của vật trang trí bằng bao nhiêu centimet khối (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



KQ:



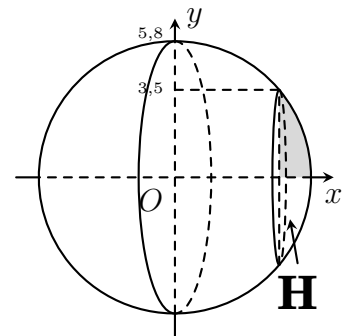
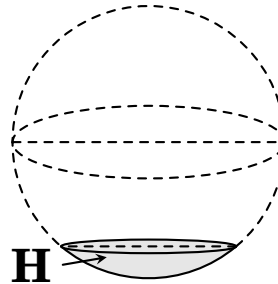
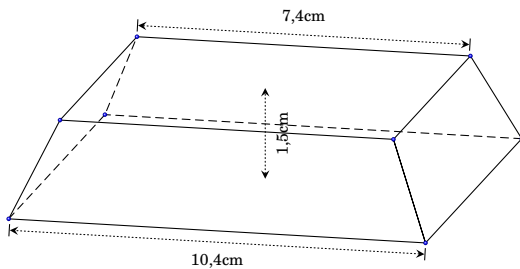
Câu 7 Cho hai đường tròn $(O_1; 5)$ và $(O_2; 3)$ cắt nhau tại hai điểm A, B sao cho AB là một đường kính của đường tròn (O_2) . Gọi (D) là hình thặng được giới hạn bởi hai đường tròn (phần ở ngoài đường tròn lớn, được gạch chéo như hình vẽ).



Một vật trang trí có dạng một khối tròn xoay được tạo thành khi quay miền (D) quanh trục O_1O_2 . Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành có $V = \frac{a\pi}{b}$ ($\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) thì $a^2 + b^3$ bằng bao nhiêu?

KQ:

Câu 8 (CT-THPTQG 2025). Để đặt một vật trang trí trên mặt bàn, người ta thiết kế một chân đế như sau. Lấy một khối gỗ có dạng khối chóp cụt tứ giác đều với độ dài hai cạnh đáy lần lượt bằng 7,4 cm và 10,4 cm, bề dày của khối gỗ bằng 1,5 cm. Sau đó khoét bỏ một phần của khối gỗ sao cho phần đó có dạng vật thể H , ở đó H nhận được bằng cách cắt khối cầu bán kính 5,5 cm bởi một mặt phẳng cắt mà mặt cắt là hình tròn có bán kính 3,5 cm (xem hình dưới).

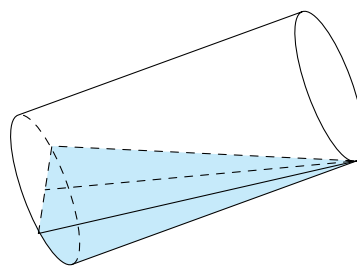
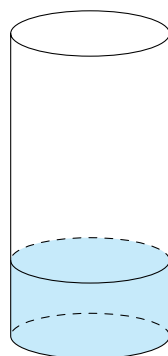


Thể tích của khối chân đế bằng bao nhiêu centimet khối (không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần mười)?

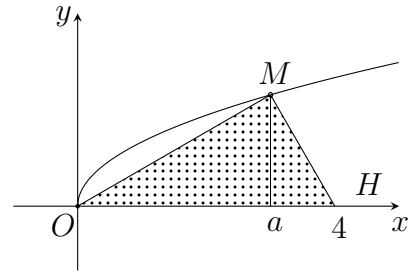
KQ:

Câu 9 Có một cốc thủy tinh hình trụ, bán kính trong lòng đáy cốc là 4 cm, chiều cao trong lòng cốc là 12 cm đang đựng một lượng nước. Tính thể tích lượng nước trong cốc (cm^3), biết rằng khi nghiêng cốc nước vừa lúc nước chạm miệng cốc, mực nước trùng với đường kính đáy.

KQ:

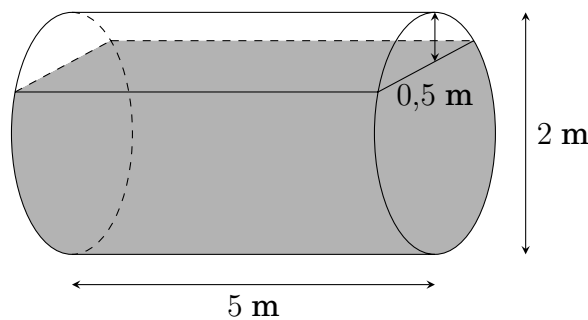


Câu 29 Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y = \sqrt{x}$, trục hoành Ox và hai đường thẳng $x = 0, x = 4$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{x}, x = 0, x = 4$ và trục Ox . Đường thẳng $x = a$ ($0 < a < 4$) cắt đồ thị hàm số $y = \sqrt{x}$ tại M . Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác MOH quanh trục Ox . Khi $V = 2V_1$. Tìm a .



KQ:

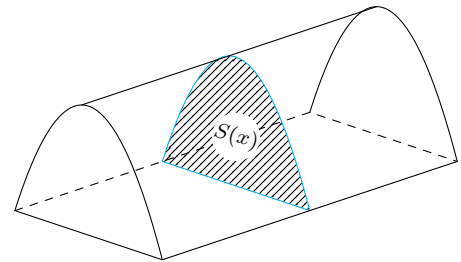
Câu 30 Một bể chứa nhiên liệu hình trụ đặt nằm ngang, có chiều dài 5 m, có bán kính đáy 1 m. Chiều cao của mực nhiên liệu là 1,5 m.



Tính thể tích phần nhiên liệu trong bể (theo đơn vị m^3 , làm tròn đến hàng phần chục).

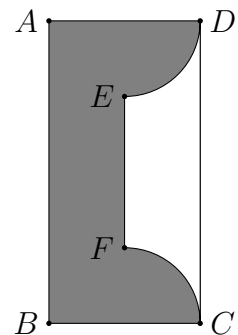
KQ:

Câu 31 Để chuẩn bị cho hội trại do Đoàn trường tổ chức, lớp 12A dự định dựng một cái lều trại có dạng hình parabol như hình vẽ. Nền của lều trại là một hình chữ nhật có kích thước bề ngang 3 mét, chiều dài 6 mét, đỉnh trại cách nền 3 mét. Tính thể tích phần không gian bên trong lều trại.



KQ:

Câu 32 Một vật trang trí có dạng khối tròn xoay tạo thành khi quay miền (R) (phần tô đậm trong hình vẽ) quay xung quanh trục AB . Miền (R) được giới hạn bởi các cạnh AD, AB, BC, EF và các cung phần tư của các đường tròn bán kính bằng 2 cm với tâm lần lượt là trung điểm của AD và BC . Biết $ABCD$ là hình chữ nhật có cạnh $AB = 8$ cm, $AD = 4$ cm; điểm E cách AD một đoạn bằng 2 cm; điểm F cách BC một đoạn bằng 2 cm. Thể tích của vật thể trang trí trên là bao nhiêu centimet khối? (quy tròn đến hàng phần mười).

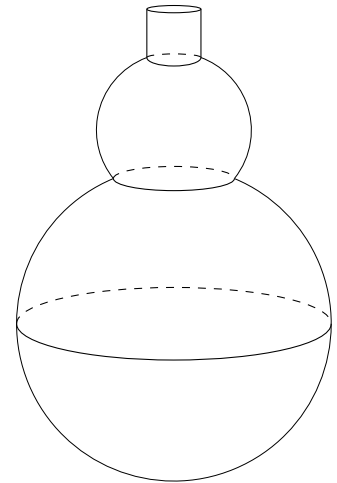


KQ:



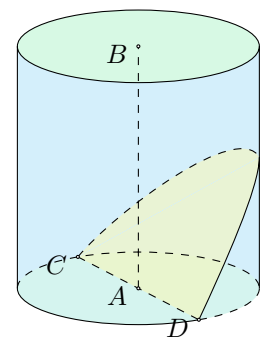
Câu 33 Người ta cắt hai hình cầu có bán kính lần lượt là $R = 13$ cm và $r = \sqrt{41}$ cm để làm hồ lô đựng rượu như hình vẽ bên. Biết đường tròn giao của hình cầu có bán kính $r' = 5$ cm và nút đựng rượu là một hình trụ có bán kính đáy bằng $\sqrt{5}$ cm, chiều cao bằng 4 cm. Giả sử độ dày vỏ hồ lô không đáng kể. Hỏi hồ lô đựng được bao nhiêu lít rượu? (kết quả làm tròn đến một chữ số thập phân sau dấu phẩy).

KQ:

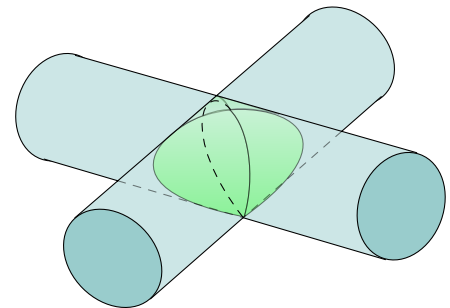


Câu 34 Cho hình trụ có bán kính đáy bằng 3. Tính thể tích vật thể tạo thành bởi đáy của hình trụ và mặt phẳng qua đường kính đáy, biết mặt phẳng tạo với đáy góc 45° .

KQ:

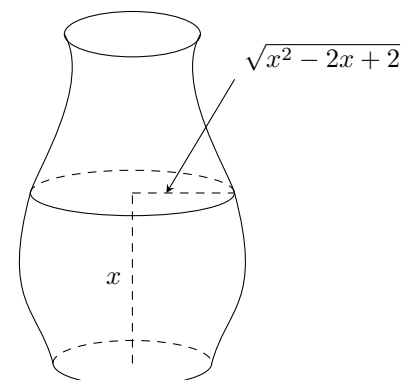


Câu 35 Cho hai khối trụ có bán kính đáy bằng 3 và có trục là hai đường thẳng cắt nhau và vuông góc với nhau (xem hình vẽ). Gọi (H) là phần giao nhau của hai khối trụ đó. Tính thể tích của (H) .



KQ:

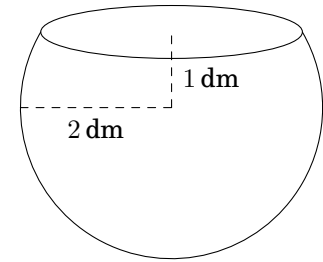
Câu 36 Một bình hoa có dạng khối tròn xoay với chiều cao là 3 dm. Khi cắt bình hoa theo một mặt phẳng vuông góc với trục của nó thì ta luôn được thiết diện là một hình tròn có bán kính $y = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$ với x là khoảng cách từ mặt cắt tới mặt đáy của bình hoa ($x \in [0; 3]$, x tính theo đơn vị dm). Đổ vào bình một lượng nước để mức nước trong bình cao bằng $\frac{1}{3}$ chiều cao của bình. Hỏi lượng nước này chiếm tỉ lệ bao nhiêu phần trăm so với thể tích của bình hoa (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?



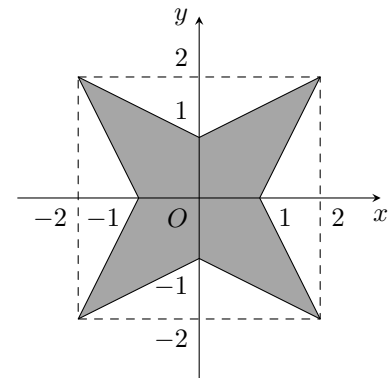
KQ:

Câu 37 Một bể cá có dạng là một phần hình cầu được tạo thành khi cắt hình cầu bán kính 2 dm bằng mặt phẳng cách tâm của hình cầu 1 dm (Hình bên). Tính dung tích của bể cá (kết quả làm tròn đến hàng phần mười của đềximét khối).

KQ:    



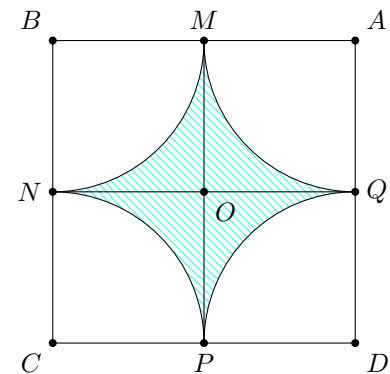
Câu 38 Bên trong hình vuông cạnh 4, dựng hình sao bốn cạnh đều như hình vẽ bên (các kích thước cần thiết cho như ở trong hình vẽ). Tính thể tích V của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình sao đó quanh trục Ox (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



KQ:    

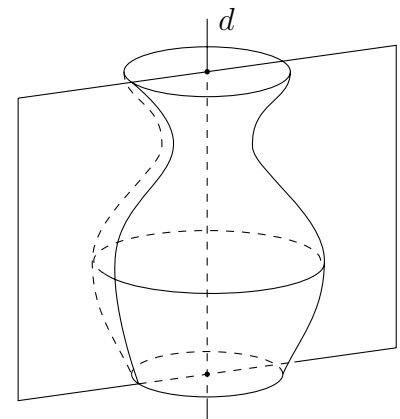
Câu 39 Cho hình vuông $ABCD$ tâm O . Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn AB, BC, CD và DA . Các cung $\widehat{QM}, \widehat{MN}, \widehat{NP}, \widehat{PQ}$ lần lượt là các cung tròn của các đường tròn tâm A, B, C, D với bán kính bằng nhau (tham khảo hình vẽ). Biết diện tích "tứ giác cong" $MNPQ$ (miền bị gạch chéo trong hình vẽ) bằng $25(4 - \pi) \text{ dm}^2$. Hỏi khi cho "tứ giác cong" $MNPQ$ quay quanh trục NQ ta thu được vật thể có thể tích bằng bao nhiêu đềximét khối (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?

KQ:    



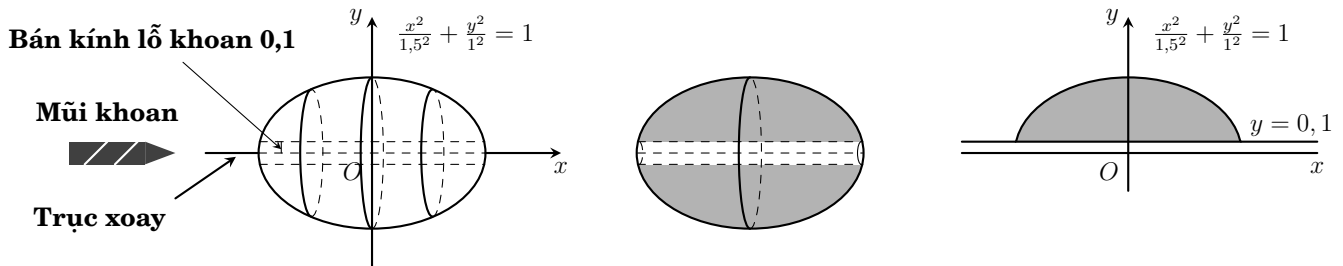
Câu 40 Xét phần đựng nước bên trong một lục bình có dạng mặt tròn xoay trong đó đường sinh là đường cong (C) quay quanh trục (d) như hình bên. Biết rằng (C) là đường cong bậc ba; chiều cao phần đựng nước là 35 cm; bán kính đáy phần đựng nước là 10 cm; bán kính miệng phần đựng nước là 14,375 cm; chỗ rộng nhất của phần đựng nước có bán kính 30 cm; độ cao của phần đựng nước tính từ đáy đến chỗ rộng nhất là 10 cm. Thể tích tối đa mà chiếc bình này đựng được là bao nhiêu lít? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:    





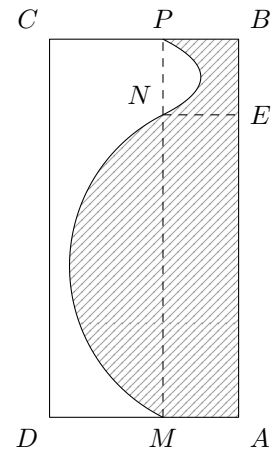
Câu 41 (CT - THPTQG 2026). Để chế tác một hạt cườm, người ta lấy một khối vật thể có dạng một khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi trục Ox và nửa trên của elip $\frac{x^2}{1,5^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$ (một đơn vị dài trên mỗi trục tọa độ tương ứng với một xăng-ti-mét trong thực tế) quanh trục Ox ; sau đó khoan dọc theo trục xoay (xem hình dưới). Lỗ khoan có dạng hình trụ với bán kính $0,1$ cm và có trục nằm trên trục xoay. Phần còn lại sau khi khoan là hạt cườm, có dạng một khối tròn xoay. Thể tích của hạt cườm đó bằng bao nhiêu xăng-ti-mét khối (không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần trăm)?



Lưu ý: Các kích thước trong hình minh họa có thể không đúng tỉ lệ thực tế.

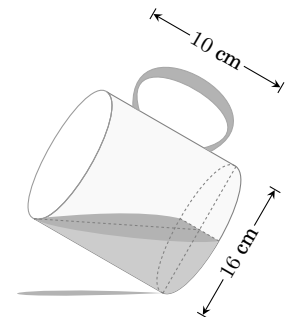
KQ:

Câu 42 Một xưởng thủy tinh mỹ nghệ cần sản xuất những chiếc bình thủy tinh cỡ lớn để ngâm một loại sâm. Chiếc bình được tạo hình bằng cách quay hình phẳng (H) (phần gạch chéo trong hình vẽ) quanh trục AB . Hình (H) nằm trong hình chữ nhật $ABCD$, giới hạn bởi các đoạn thẳng AM, BP (với M, P lần lượt thuộc các cạnh $AD, BC, MP \parallel AB$), cung tròn MN (có tâm I là trung điểm của đoạn thẳng AE nằm trên trục AB) và cung parabol NP . Biết $AB = 5$ dm, $AM = 1,5$ dm, $BP = 1,5$ dm, $BE = 1$ dm. Tiếp tuyến của cung tròn và cung parabol tại điểm tiếp giáp N là trùng nhau để đảm bảo thành bình mượt mà, chịu lực tốt và đảm bảo tính thẩm mỹ. Giả sử bề dày của thành thủy tinh không đáng kể. Hỏi chiếc bình ngâm sâm này có sức chứa tối đa khoảng bao nhiêu lít nước? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



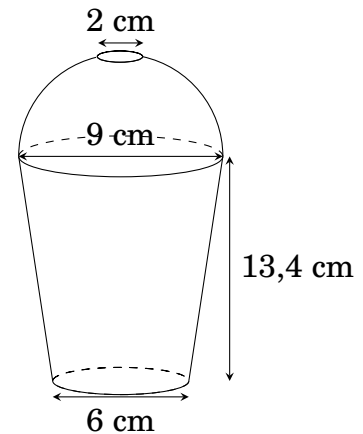
KQ:

Câu 43 Một cốc thủy tinh có dạng hình trụ đang đựng một lượng nước, bán kính trong lòng đáy cốc là 8 (cm) và chiều cao trong lòng cốc là 10 (cm). Tính thể tích lượng nước trong cốc (đơn vị cm^3), biết khi nghiêng cốc nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì ở đáy cốc mực nước trùng với đường kính của đáy cốc (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



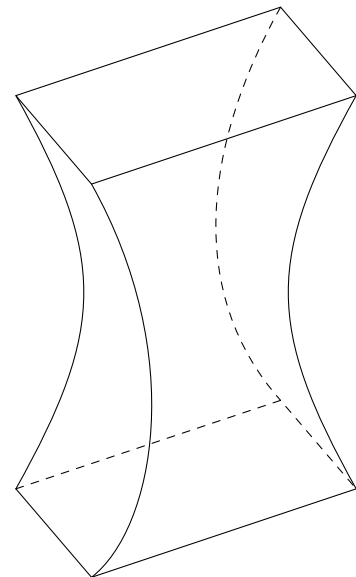
KQ:

Câu 44 Một ly trà sữa dạng hình nón cụt, có đường kính đáy ly 6 (cm), đường kính miệng ly 9 (cm), chiều cao 13,4 (cm), ở miệng ly có sử dụng một nắp đậy có hình dạng nửa mặt cầu và ở đỉnh của nửa mặt cầu này có một hình tròn có đường kính 2 (cm) để cắm ống hút, mặt phẳng chứa hình tròn này song song với mặt phẳng chứa miệng ly (tham khảo hình vẽ sau). Tính thể tích bên trong của ly bao gồm cả thể tích của nắp (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



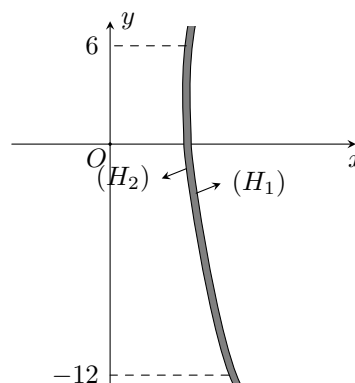
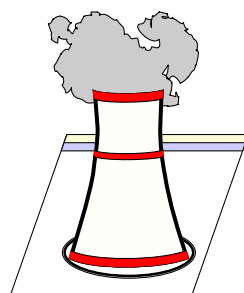
KQ:

Câu 45 Một kiến trúc sư chịu trách nhiệm thiết kế một tòa nhà cao 30 (m). Mặt cắt ngang tại mọi độ cao, vuông góc với trục thẳng đứng, luôn là một hình vuông (xem hình vẽ). Mặt đáy tòa nhà là hình vuông có cạnh $L_0 = 26$ (m), mặt đỉnh là hình vuông có cạnh $L_{30} = 20$ (m). Mặt cắt ngang tại vị trí hẹp nhất của tòa nhà là hình vuông có cạnh $L_{\min} = 13,75$ (m). Mặt cắt của tòa nhà theo mặt phẳng đứng chứa đường chéo đáy có dạng là hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong parabol đối xứng với nhau qua trục thẳng đứng đi qua tâm đáy của tòa nhà. Tính thể tích của tòa nhà đó (làm tròn đến hàng đơn vị, đơn vị tính: mét khối).



KQ:

Câu 46 Lớp vỏ của một lò phản ứng hạt nhân bằng kim loại và được tạo bởi hình phẳng (S) giới hạn bởi nhánh bên phải trục tung của các đường hypebol (H_1), (H_2) và hai đường thẳng $y = -12$, $y = 6$ khi quay quanh trục Oy như hình vẽ sau:

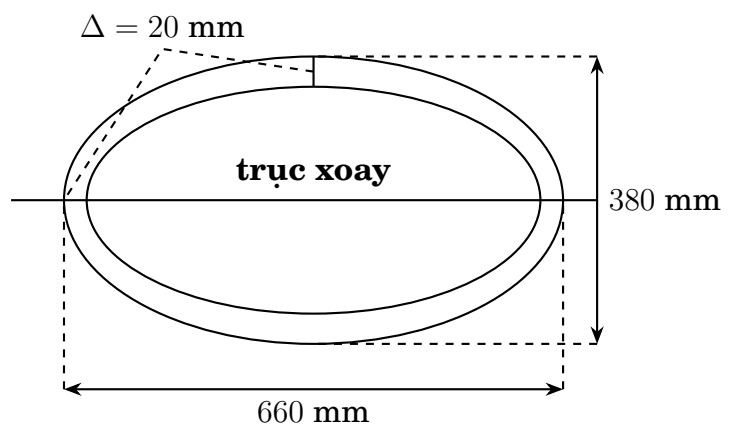
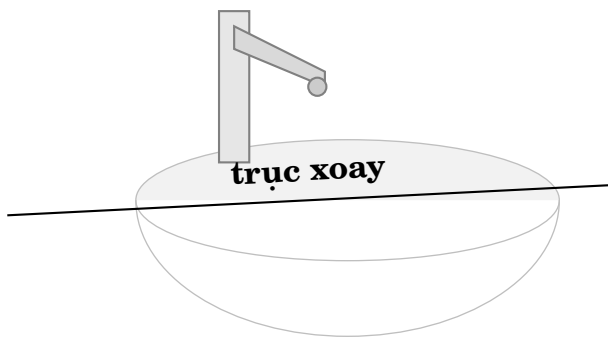




Biết (H_1) đi qua điểm $(\sqrt{30}; 0)$ có tiêu cự bằng $10\sqrt{6}$, (H_2) đi qua điểm $(5; 0)$ có tiêu cự bằng $10\sqrt{5}$ và đơn vị trên các trục tọa độ đo bằng mét. Thể tích khối kim loại cần sử dụng để làm vỏ lò phản ứng hạt nhân bằng bao nhiêu mét khối (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?

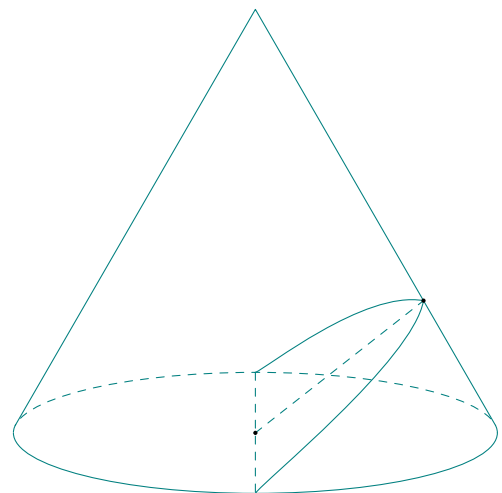
KQ: 

Câu 47 Hình elip được ứng dụng nhiều trong thực tiễn, đặc biệt là kiến trúc, xây dựng, thiết bị nội thất. Mặt trong (lọt lòng) và ngoài (phủ bì) của một bồn rửa (lavabo) bằng sứ có hình dạng là một nửa khối tròn xoay khi quay quanh một trục của 2 elip có chung các trục đối xứng (hình minh họa). Thông số kỹ thuật mặt trên của bồn rửa: dài $\times$ rộng là 660×380 mm (phủ bì) và elip (lọt lòng) có trục lớn, trục nhỏ ít hơn elip phủ bì một khoảng 40 mm. Tính thể tích chứa nước của bồn rửa (đơn vị: lít và làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



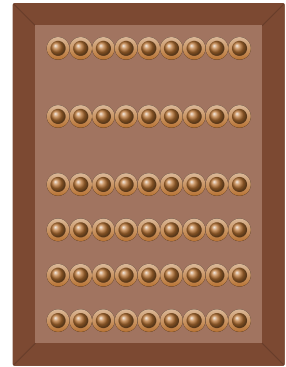
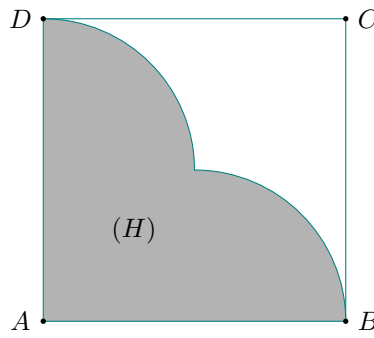
KQ: 

Câu 48 Tuấn là một học sinh giỏi lớp 12, em rất thích học môn toán. Hôm ấy sau khi đã học xong phần **Ứng dụng tích phân**, Tuấn quyết định cắt chiếc nón mà người bố hay đội đi làm ruộng để nghiên cứu. Biết rằng hình nón này có bán kính đáy bằng 20 cm, thiết diện qua trục là một tam giác đều. Dù người bố hết sức ngăn cản nhưng Tuấn đã ra tay một cách dứt khoát, cắt hình nón bởi một mặt phẳng đi qua đường kính đáy và vuông góc với đường sinh của hình nón để chia nó ra làm hai phần, phần nhỏ có dạng một hình nêm (H), tính thể tích của khối (H) theo đơn vị centimet khối, làm tròn đến hàng đơn vị.



KQ: 

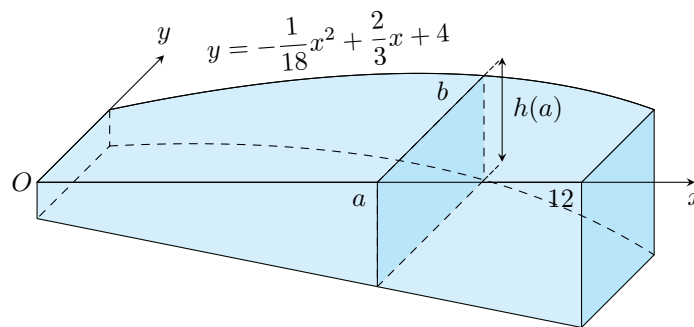
Câu 49 Trên cánh cửa được trang trí các núm có dạng một khối tròn xoay được đúc bằng chất liệu đồng, khuôn đúc của nó được tạo thành khi quay miền (H) (phần được tô màu trong hình vẽ bên) quanh trục AB . Miền (H) được giới hạn bởi các cạnh AB , AD của hình vuông $ABCD$ và các cung phần tư của các đường tròn bán kính bằng 1 cm với tâm lần lượt là trung điểm của các cạnh AD , AB .



Biết công thức tính khối lượng của một vật là $P = VD$, trong đó P là khối lượng của vật (đơn vị g), V là thể tích của vật (đơn vị cm^3) và D là khối lượng riêng của vật (đơn vị g/cm^3), khối lượng riêng của đồng là $D = 8,96 \text{ g/cm}^3$. Giá đồng trên thị trường là 200 000 đồng/kg. Giá tiền vật liệu để đúc một núm đồng trên là bao nhiêu nghìn đồng? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

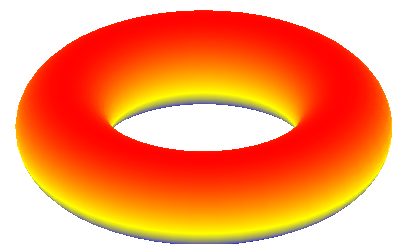
KQ:

Câu 50 Một kiến trúc sư thiết kế một hồ bơi vô cực có mặt trên của bể bơi nằm trong mặt phẳng Oxy (đơn vị trên trục là mét). Một cạnh của hồ bơi dài 12 m nằm trên trục Ox ; hai cạnh bên lần lượt nằm trên trục Oy và đường thẳng $x = 12$; cạnh còn lại (mặt vô cực) là một phần đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{18}x^2 + \frac{2}{3}x + 4$. Đáy hồ bơi không phẳng mà độ sâu tại điểm $(a; b)$ được tính theo công thức $h(a) = \frac{1}{4}a + 1$ (mét). Thể tích nước tối đa mà hồ bơi có thể chứa bằng bao nhiêu m^3 ?



KQ:

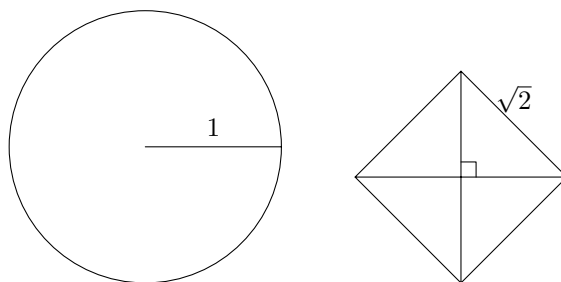
Câu 51 Trong các làng nghề chế tạo đá mỹ nghệ, người ta làm được nhiều đồ trang sức bằng đá rất đẹp. Một người thợ thủ công chế tạo vòng đeo tay hình tròn bằng đá xanh, biết rằng bán kính vòng ngoài của vòng là 7 (cm), bán kính vòng trong là 5 (cm) (hình vẽ). Tính thể tích của chiếc vòng (theo đơn vị đo là cm^3 và làm tròn đến hàng đơn vị).



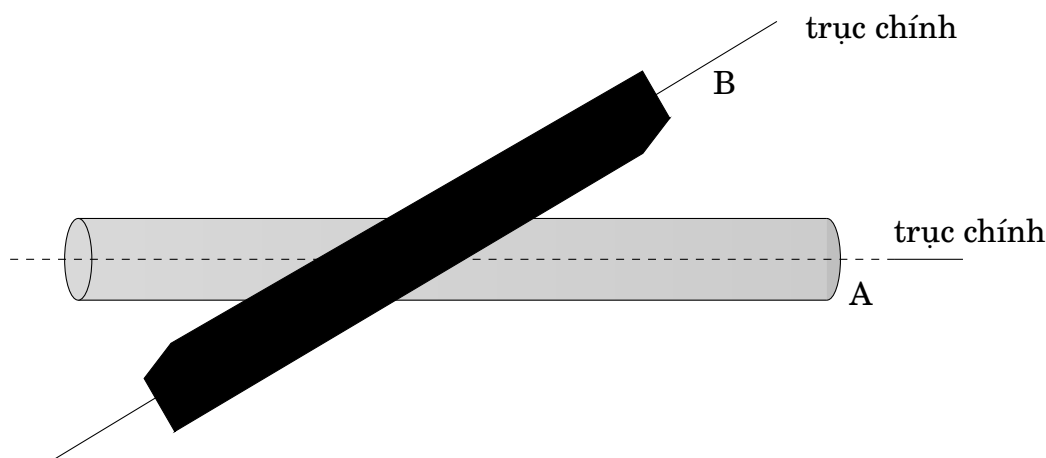
KQ:



Câu 52 Cho một thanh gỗ hình trụ A có đáy là hình tròn bán kính 1, và một thanh gỗ hình lăng trụ đứng B có đáy là hình vuông cạnh $\sqrt{2}$ như hình vẽ.



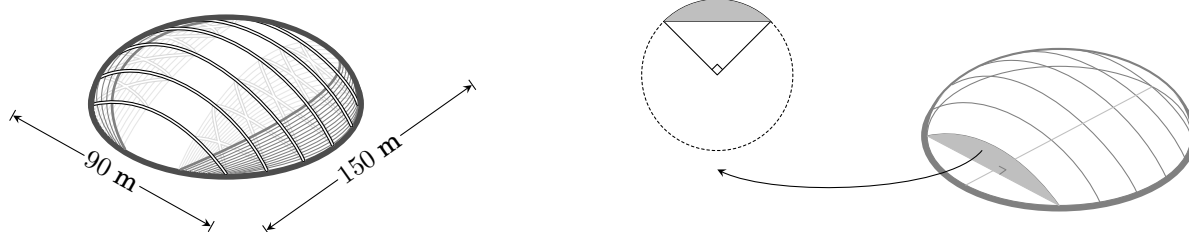
Hai thanh gỗ có trục chính cắt nhau và tạo với nhau một góc 30° .



Trong hai đường chéo của tiết diện vuông góc với trục của thanh gỗ B , có một đường chéo vuông góc với mặt phẳng chứa trục của cả hai thanh gỗ, còn đường chéo còn lại thì nằm trong mặt phẳng đó. Khi đó, phần thể tích chung của hai thanh gỗ là $a\pi + b$. Hãy tính giá trị của biểu thức $10a + 3b$, biết rằng a và b là các số hữu tỉ.

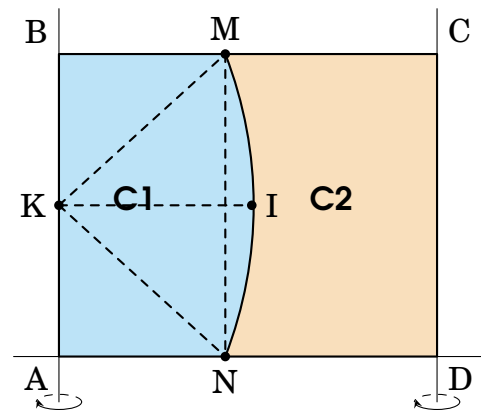
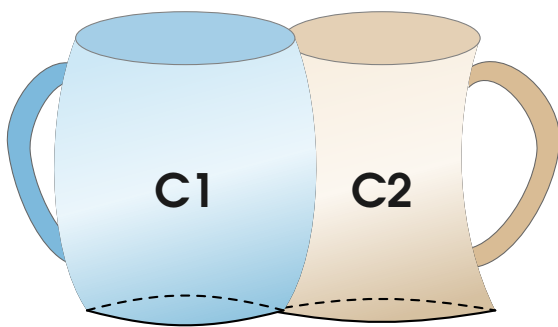
KQ:

Câu 53 Sân vận động Sport Hub (Singapore) là sân có mái vòm kỳ vĩ nhất thế giới. Đây là nơi diễn ra lễ khai mạc Đại hội thể thao Đông Nam Á được tổ chức tại Singapore năm 2015. Nền sân là một elip (E) có trục lớn dài 150 m, trục bé dài 90 m (hình vẽ). Nếu cắt sân vận động theo một mặt phẳng vuông góc với trục lớn của (E) và cắt elip ở M, N (hình vẽ) thì ta được thiết diện luôn là một phần của hình tròn có tâm I (phần tô đậm trong hình dưới) với MN là một dây cung và góc $\widehat{MIN} = 90^\circ$. Để lắp máy điều hòa không khí thì các kỹ sư cần tính thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, coi như mặt sân là một mặt phẳng và thể tích vật liệu là mái không đáng kể. Biết rằng cách tính công suất cần đủ là 200 BTU/m³. Hỏi cần bao nhiêu chiếc điều hòa công suất 50 000 BTU?



KQ:

Câu 54 Giả sử bạn Tài có hai chiếc cốc cà phê C_1 và C_2 như hình minh họa, một chiếc phình ra ngoài và một chiếc lõm vào trong. Bạn Tài nhận thấy rằng chúng có cùng chiều cao và hình dạng của chúng khớp nhau hoàn hảo. Bạn Tài tự hỏi tỉ lệ thể tích của hai chiếc cốc $\frac{V_{C_1}}{V_{C_2}}$ bằng bao nhiêu? Tất nhiên, bạn có thể đổ đầy nước vào một chiếc cốc rồi rót sang chiếc còn lại để so sánh, nhưng với tư cách là một học sinh vừa học xong các ứng dụng của tích phân, bạn quyết định tiếp cận theo hướng toán học hơn. Bỏ qua phần tay cầm, coi độ dày của cốc không đáng kể, bạn Tài nhận thấy rằng phần bên trong của cả hai chiếc cốc đều tạo bởi các mặt quay quanh trục.

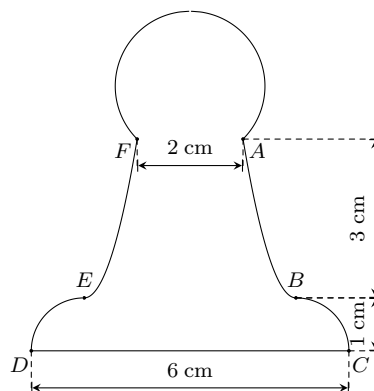


Cụ thể, C_1 do hình phẳng $ABMIN$ quay quanh AB , C_2 do hình phẳng $DCMIN$ quay quanh CD . Biết rằng $ABCD$ là hình vuông cạnh 10 cm, M, N lần lượt thuộc hai cạnh BC, AD sao cho $MN \parallel AB, BM = 4$ cm. Điểm K là trung điểm của AB và I là tâm của hình vuông $ABCD$. Cung $\widehat{MIN}$ là một phần của parabol nhận I là đỉnh. Tỉ số $\frac{V_{C_1}}{V_{C_2}}$ bằng $\frac{a}{b}$, trong đó $a, b \in \mathbb{N}, \frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a + b$.

KQ:

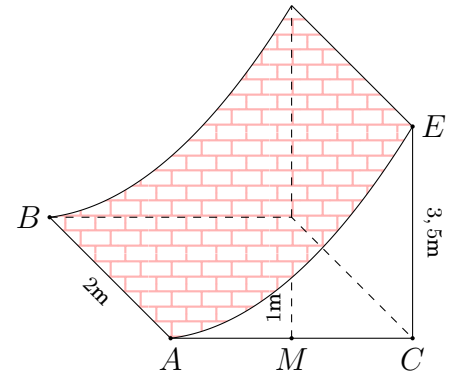
Câu 55 Mô hình của quân tốt trong bàn cờ vua là một khối tròn xoay với mặt cắt qua trục như sau: đầu của quân cờ là một phần của hình cầu có bán kính bằng $\sqrt{2}$ cm; đường cong AB và EF là một phần của parabol đỉnh B và đỉnh E ; DE và BC là một góc phần tư của đường tròn có bán kính 1 cm. Tính thể tích của mô hình quân tốt (đơn vị cm^3 và kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

KQ:



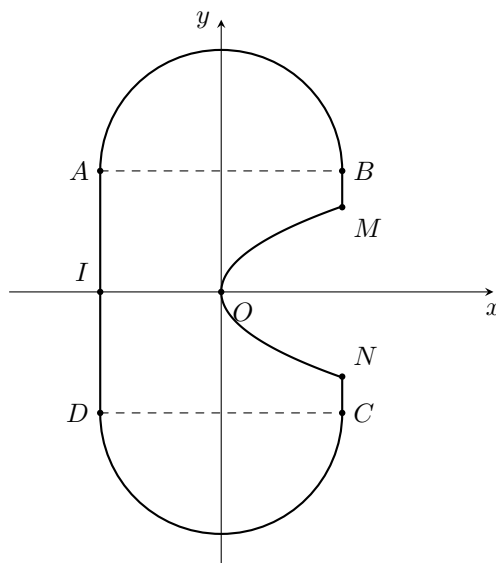


Câu 56 Chướng ngại vật “tường cong” trong một sân thi đấu X-Game là một khối bê tông có chiều cao từ mặt đất lên là 3,5 m. Giao của mặt tường cong và mặt đất là đoạn thẳng $AB = 2$ m. Thiết diện của khối tường cong cắt bởi mặt phẳng vuông góc với AB tại A là một hình tam giác vuông cong ACE với $AC = 4$ m, $CE = 3,5$ m và cạnh cong AE nằm trên một đường parabol có trục đối xứng vuông góc với mặt đất. Tại vị trí M là trung điểm của AC thì tường cong có độ cao 1 m (xem hình minh họa bên). Cần sử dụng bao nhiêu mét khối bê tông để tạo nên khối tường cong đó?



KQ:

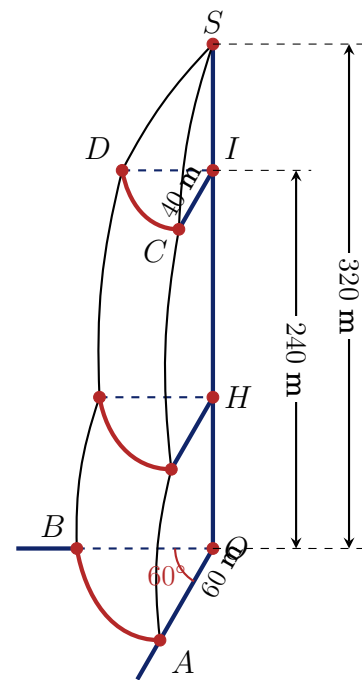
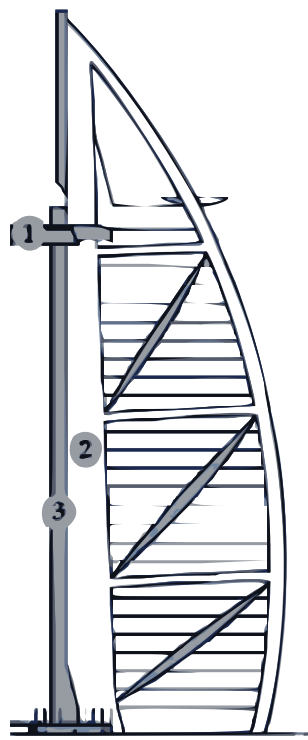
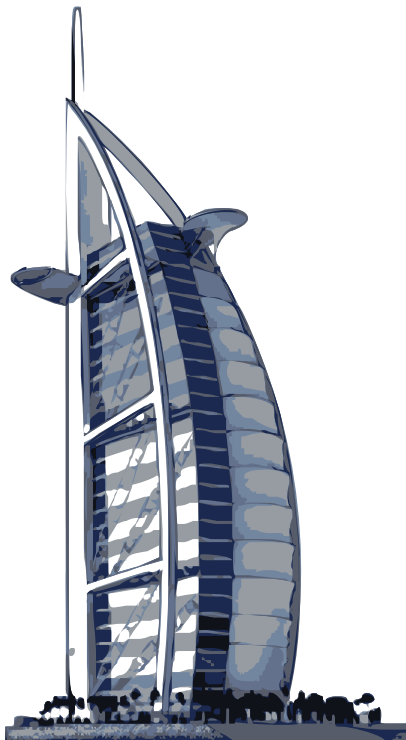
Câu 57 Bút viết của một bảng vẽ điện tử được để trong một chiếc giá là một khối tròn xoay có mặt cắt qua trục là một hình phẳng có hình dạng và các kích thước gắn với hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Biết biên của mặt cắt gồm hai nửa đường tròn đường kính AB, CD và một cung của parabol đỉnh O nhận Ox là trục đối xứng; cho $AB = CD = 3$ cm, $OI = 1$ cm, $AD = 3$ cm, $MN = 2$ cm, đơn vị trên hệ trục là 1 cm. Tính thể tích của toàn bộ giá bút, làm tròn tới hàng phần chục.

KQ:

Câu 58 Một tòa nhà hình cánh buồm được minh họa bởi hình vẽ bên, tòa nhà có chiều cao $SO = 320\text{ m}$ (m là ký hiệu của mét), gồm 56 tầng có tổng chiều cao là $OI = 240\text{ m}$ và phần còn lại phía trên là không gian sân thượng. Mặt trước hình cánh buồm, được căng bởi hai cung parabol SCA và SDB giống hệt nhau có trục đối xứng vuông góc với đường thẳng SO , các parabol này nằm trong mỗi mặt bên của tòa nhà. Hai mặt bên SOA và SOB tạo với nhau một góc 60° . Mặt sàn tầng một có dạng hình quạt tròn tâm O với bán kính $OA = 60\text{ m}$, mái của tầng 56 có dạng hình quạt tròn tâm I với bán kính $IC = 40\text{ m}$. Thiết diện ngang của tòa nhà đi qua một điểm H bất kỳ trên đoạn OI luôn là hình quạt có tâm là H . Tính thể tích của tòa nhà (chỉ tính phần chứa 56 tầng) với đơn vị là nghìn mét khối và kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.



KQ:

BẢNG ĐÁP ÁN ĐÚNG SAI Đ/S

Câu 1. ☐ S ☐ Đ ☐ Đ ☐ S

Câu 3. ☐ S ☐ Đ ☐ S ☐ Đ

Câu 5. ☐ Đ ☐ Đ ☐ Đ ☐ Đ

Câu 2. ☐ Đ ☐ Đ ☐ Đ ☐ S

Câu 4. ☐ Đ ☐ Đ ☐ S ☐ Đ

Câu 6. ☐ S ☐ Đ ☐ Đ ☐ Đ

ĐÁP SỐ PHẦN TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. 3 1

Câu 2. 3 1 4 2

Câu 3. 3 2

Câu 4. 2 3 , 6

Câu 5. 2 5 1

Câu 6. 5 , 4



Câu 7. 2 1 , 2

Câu 8. 2 , 7 2

Câu 9. 2 8 , 3

Câu 10. 2 , 3 1

Câu 11. 2 1

Câu 12. 1 1 0

Câu 13. 8 2 1

Câu 14. 5 6 , 6

Câu 15. 3 0

Câu 16. 3 7 , 7

Câu 17. 1 2 , 9

Câu 18. 1 9 2

Câu 19. 3 7 , 7

Câu 20. 7 5 , 4

Câu 21. 1 1 7

Câu 22. 3 6 7 9

Câu 23. 9 8 , 1

Câu 24. 2 2 6 9

Câu 25. 7 , 1 1

Câu 26. 5 3 4

Câu 27. 2 0 , 7

Câu 28. 3 7 , 7

Câu 7. 1 6 2 7

Câu 8. 9 4 , 7

Câu 9. 1 2 8

Câu 29. 3

Câu 30. 1 2 , 6

Câu 31. 3 6

Câu 32. 2 1 3

Câu 33. 1 0 , 2

Câu 34. 1 8

Câu 35. 1 4 4

Câu 36. 2 2

Câu 37. 2 8 , 3

Câu 38. 2 0 , 9

Câu 39. 7 5 , 3

Câu 40. 4 9 , 1

Câu 41. 6 , 1 9

Câu 42. 6 6 , 9

Câu 43. 4 2 7

Câu 44. 7 9 1

Câu 45. 8 9 7 6

Câu 46. 2 8 3

Câu 47. 1 8 , 8

Câu 48. 2 3 0 9

Câu 49. 2 2

Câu 50. 1 6 0

Câu 51. 1 1 8

Câu 52. 2 4

Câu 53. 6 4 3

Câu 54. 1 8 9

Câu 55. 1 0 3

Câu 56. 1 0

Câu 57. 6 5 , 5

Câu 58. 4 9 9

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Mục lục của chương

1. Toán thực tế liên quan đến mặt phẳng và đường thẳng 221
2. Toán thực tế liên quan đến mặt cầu 269



TOÁN THỰC TẾ LIÊN QUAN ĐẾN MẶT PHẪNG VÀ ĐƯỜNG THẲNG

Chủ đề 1

1 LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

Phương trình mặt phẳng

1 Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng

♦ Vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với mặt phẳng (P) được gọi là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

♦ Mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ có vectơ pháp tuyến là

$$\vec{n} = (A; B; C).$$

♦ Vectơ pháp tuyến của các mặt phẳng tọa độ

Mặt phẳng	Vectơ pháp tuyến
(Oxy)	$\vec{n}_{(Oxy)} = [\vec{i}, \vec{j}] = \vec{k} = (0; 0; 1)$
(Oyz)	$\vec{n}_{(Oyz)} = [\vec{j}, \vec{k}] = \vec{i} = (1; 0; 0)$
(Oxz)	$\vec{n}_{(Oxz)} = [\vec{i}, \vec{k}] = \vec{j} = (0; 1; 0)$

2 Phương trình mặt phẳng

♦ Phương trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$ là

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

♦ Mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$ và $C(0; 0; c)$, với $a \cdot b \cdot c \neq 0$ thì có phương trình là

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

3 Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng Cho mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ và $(Q): A'x + B'y + C'z + D' = 0$.

Mối quan hệ	Điều kiện
$(P) \equiv (Q)$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$
$(P) \parallel (Q)$	$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$
(P) cắt (Q)	$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$ hoặc $\frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$ hoặc $\frac{A}{A'} \neq \frac{C}{C'}$
$(P) \perp (Q)$	$AA' + BB' + CC' = 0$

4 Khoảng cách

- ◆ Khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ tới mặt phẳng (P)

$$d(M, (P)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

- ◆ Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

Cho $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ và $(Q): Ax + By + Cz + D' = 0$. Khi đó

$$d((P), (Q)) = \frac{|D - D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Phương trình đường thẳng

1 Vectơ chỉ phương của đường thẳng

- ◆ Vectơ $\vec{u}$ khác $\vec{0}$ và có giá song song hoặc trùng với đường thẳng d được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng d .

- ◆ Đường thẳng $d: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ hoặc $d: \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$ đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$.

- ◆ Vectơ chỉ phương của các trục tọa độ

Trục tọa độ	Vectơ chỉ phương
Ox	$\vec{u}_{Ox} = \vec{i} = (1; 0; 0)$
Oy	$\vec{u}_{Oy} = \vec{j} = (0; 1; 0)$
Oz	$\vec{u}_{Oz} = \vec{k} = (0; 0; 1)$

2 Phương trình đường thẳng

- ◆ Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ là

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

- ◆ Phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$ ($a; b; c \neq 0$) là

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

- 3 Vị trí tương đối của hai đường thẳng Cho d đi qua điểm M và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ và d' đi qua điểm M' và có vectơ chỉ phương $\vec{u}'$.



Vị trí	Điều kiện
$d \parallel d'$	$\begin{cases} [\vec{u}, \vec{u'}] = \vec{0} \\ [\vec{u}, \overrightarrow{MM'}] \neq \vec{0} \end{cases}$
$d \equiv d'$	$\begin{cases} [\vec{u}, \vec{u'}] = \vec{0} \\ [\vec{u}, \overrightarrow{MM'}] = \vec{0} \end{cases}$
d cắt d'	$\begin{cases} [\vec{u}, \vec{u'}] \neq \vec{0} \\ [\vec{u}, \vec{u'}] \cdot \overrightarrow{MM'} = 0 \end{cases}$
d chéo nhau d'	$[\vec{u}, \vec{u'}] \cdot \overrightarrow{MM'} \neq 0$

4 Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng Cho d đi qua điểm M và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.

Vị trí	Điều kiện	Vị trí	Điều kiện
$d \subset (P)$	$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \\ M \in (P) \end{cases}$	$d \parallel (P)$	$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \\ M \notin (P) \end{cases}$
d cắt (P)	$\vec{u} \neq k\vec{n}$	$d \perp (P)$	$\vec{u} = k\vec{n}$

5 Khoảng cách từ điểm tới đường thẳng Cho đường thẳng d đi qua A và có vectơ chỉ phương $\vec{u}$. Khi đó, khoảng cách từ M tới đường thẳng d là

$$d(M, d) = \frac{|[\overrightarrow{AM}, \vec{u}]|}{|\vec{u}|}$$

6 Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau Cho đường thẳng d đi qua điểm M , có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ và đường thẳng d' qua M' , có vectơ chỉ phương $\vec{u'}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau d và d' là

$$d(d, d') = \frac{|[\vec{u}, \vec{u'}] \cdot \overrightarrow{MM'}|}{|[\vec{u}, \vec{u'}]|}$$

Các công thức tính góc trong không gian

1 Góc giữa hai mặt phẳng

- ♦ Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) lần lượt có hai vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}$ và $\vec{n}_{(Q)}$. Khi đó góc giữa (P) và (Q) được tính theo công thức

$$\cos((P), (Q)) = |\cos(\vec{n}_P, \vec{n}_Q)| = \frac{|\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P| \cdot |\vec{n}_Q|}$$

2 Góc giữa hai đường thẳng Cho đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ và đường thẳng d' có vectơ chỉ phương $\vec{u'}$. Khi đó góc giữa hai d và d' được tính theo công thức

$$\cos(d, d') = \left| \cos(\vec{u}, \vec{u}') \right| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{u}'|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{u}'|}$$

3 Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng Cho đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$. Khi đó, góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) được tính theo công thức

$$\sin(d, (P)) = |\cos(\vec{u}, \vec{n})| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}.$$

II BÀI TẬP ÁP DỤNG

1 Trắc nghiệm đúng sai

Câu 1 Trong không gian $Oxyz$, một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(10; 3; 0)$ và chuyển động đều theo đường cáp có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; -2; 1)$ với tốc độ 4,5 m/s (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét).

a Phương trình tham số của đường cáp là $\begin{cases} x = 10 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$

b Giả sử sau thời gian t (s) kể từ lúc xuất phát ($t \geq 0$) thì cabin đến điểm M . Khi đó tọa độ điểm M là $M\left(3t + 10; -3t + 3; \frac{3t}{2}\right).$

c Cabin dừng ở điểm B có hoành độ $x_B = 550$, khi đó quãng đường AB dài 800 m.

d Đường cáp AB tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc 30° .

Câu 2 Mô hình toán học sau đây được sử dụng trong quan sát chuyển động của một vật: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ có $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz và độ dài của mỗi vectơ đơn vị đó bằng 1 kilômét. Một tên lửa phóng từ vị trí gốc tọa độ O theo hướng và vận tốc không đổi. Tên lửa bay từ điểm $O(0; 0; 0)$ đến điểm $A(140; 60; 6)$ trong 8 phút.

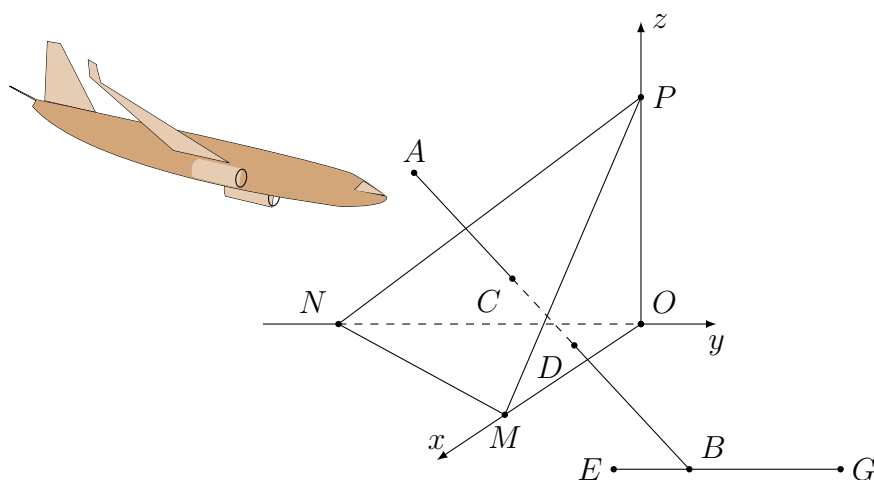
a Sau 8 phút kể từ lúc phóng, tên lửa bay được quãng đường 152,4 km (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

b Sau đúng 4 phút kể từ lúc phóng, độ cao của tên lửa là 3 km.

c Tọa độ của tên lửa sau 12 phút kể từ lúc phóng là $(210; 90; 12)$.

d Gọi (P) là mặt phẳng chứa quỹ đạo bay của tên lửa và vuông góc với mặt phẳng (Oxy) . Phương trình mặt phẳng (P) là $3x - 8y = 0$.

Câu 3 Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là ki-lô-mét), một máy bay đang ở vị trí $A(3; -1; 0,6)$ và sẽ hạ cánh ở vị trí $B(2; 3; 0)$ ở trên đường băng EG (hình vẽ). Có một lớp mây được mô phỏng bởi mặt phẳng (α) đi qua 3 điểm $M(7; 0; 0)$, $N(0; -7; 0)$ và $P(0; 0; 0,9)$.



a Đường thẳng AB có phương trình tham số là
$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + 4t \\ z = 0,6 - 0,6t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

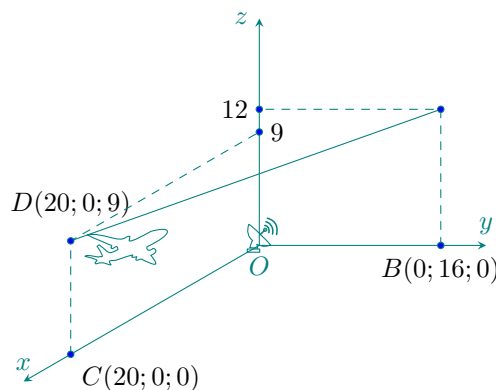
b Khi máy bay cách mặt đất 120 m thì vị trí của máy bay trên đường thẳng AB là điểm $D(2,2;2,2;0,12)$.

c Độ cao của máy bay khi xuyên qua lớp mây để hạ cánh là 0,5 km (làm tròn kết quả tới hàng phần mười).

d Theo quy định an toàn bay, người phi công phải nhìn thấy điểm cuối $G(4;6;0)$ của đường băng ở độ cao tối thiểu là 120 m. Nếu sau khi ra khỏi lớp mây tầm nhìn của người phi công là 1 500 m thì người phi công đã đạt được quy định an toàn bay.

Câu 4 Một chiếc máy bay thương mại Comac

C919 đang bay trên bầu trời theo một đường thẳng từ D đến E có hình chiếu trên mặt đất là đoạn CB . Tại vị trí D thì máy bay bay cách mặt đất 9 000 m, tại vị trí E thì máy bay cách mặt đất 12 000 m. Một radar được đặt trên mặt đất tại vị trí O cách C khoảng 20 000 m, cách B khoảng 16 000 m và $\widehat{BOC} = 90^\circ$; phạm vi theo dõi của radar là 20 km. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là 1 000 m) với O là vị trí đặt radar, B thuộc tia Oy , C thuộc tia Ox .



a Tại D , máy bay cách radar 23 000 m (làm tròn đến hàng nghìn theo đơn vị mét).

b Khi máy bay bay đến điểm I (là trung điểm của DE), máy bay cách mặt đất 10 500 m.

c Trên hành trình bay từ D đến E , máy bay sẽ đi qua điểm có tọa độ $P(16;3,2;9,6)$.

d Khoảng cách giữa vị trí đầu tiên và vị trí cuối cùng mà máy bay bay trong phạm vi theo dõi của radar là 22 000 m (làm tròn đến hàng trăm theo đơn vị mét).

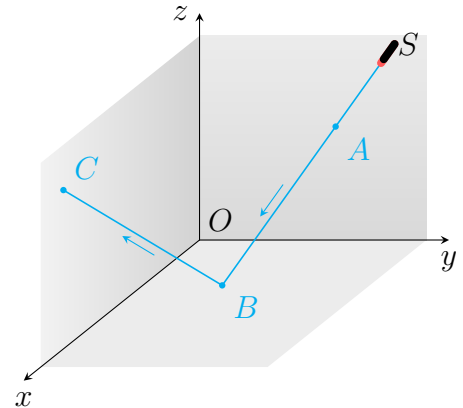
Câu 5 Trong không gian xét một hệ trục tọa độ $Oxyz$ với đơn vị trên mỗi trục lấy theo

mét. Một chiếc máy bay không người lái xuất phát từ điểm O và bay với tốc độ không đổi, vectơ thể hiện độ dịch chuyển của máy bay sau mỗi giây là $\vec{u} = (4; -1; 3)$. Cùng thời

điểm, chiếc máy bay không người lái thứ hai xuất phát từ điểm $A(24; 12; 18)$ và bay với tốc độ không đổi, vectơ thể hiện độ dịch chuyển của máy bay sau mỗi giây là $\vec{v} = (-2; 5; -3)$.

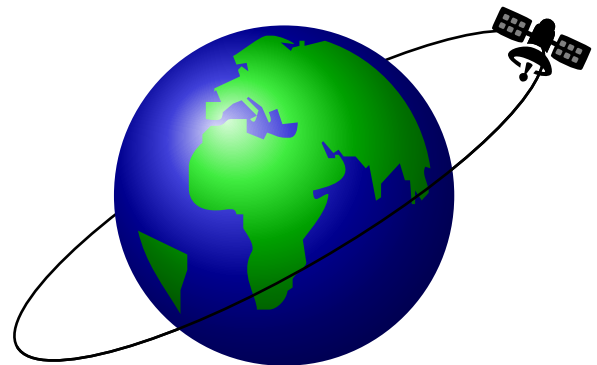
- a** Chiếc máy bay thứ nhất di chuyển trên đường thẳng có phương trình $\frac{x}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-3}$.
- b** Khoảng cách giữa hai chiếc máy bay sau khi xuất phát được 2 giây được làm tròn đến hàng phần mười là 27,5 mét.
- c** Hai chiếc máy bay có thể va chạm với nhau sau khi xuất phát.
- d** Trong 10 giây đầu tiên sau khi xuất phát, khoảng cách lớn nhất giữa hai chiếc máy bay được làm tròn đến hàng phần mười là 90,8 mét.

Câu 6 Trong hệ tọa độ $Oxyz$, đơn vị mỗi trục là mét, mặt sàn là mặt (Oxy) , trục Oz hướng lên trên, hai bức tường (1) và (2) nằm lần lượt trên các mặt phẳng (Oyz) và (Oxz) . Một tia Laze được chiếu từ điểm S xuyên qua một lỗ nhỏ tại $A(0; 6; 5)$ trên bức tường (1), tia sáng này phản xạ tại điểm B trên mặt sàn rồi đến bức tường (2) tại điểm $C(12; 0; 7)$. Theo tính chất phản xạ, ta có AB và BC cùng tạo với mặt sàn các góc bằng nhau.



- a** Tung độ điểm B là $y_B = 5$.
- b** Nếu $B(x_B; y_B; 0)$ thì $\vec{AB} = (x_B; y_B - 6; -5)$.
- c** Hình chiếu vuông góc của điểm C trên mặt sàn (Oxy) là điểm $C'(0; 0; 7)$.
- d** Biết điểm S cách lỗ A một khoảng là $SA = 3$ (mét) và $S(a; b; c)$ thì $a + b + c = 12$.

Câu 7 Vệ tinh hoạt động dựa trên nguyên lý của vật lý Newton. Một vật thể bị kéo bởi một lực hấp dẫn từ một vật thể khác sẽ chuyển động theo một quỹ đạo elip xung quanh vật thể đó. Để đưa vệ tinh lên quỹ đạo, người ta sử dụng các loại tên lửa đẩy khác nhau để cung cấp cho vệ tinh động lượng cần thiết để thoát khỏi trọng lực của Trái Đất và duy trì quỹ đạo ổn định. Để thuận tiện ta quy ước một quỹ đạo gần tròn thành một đường tròn.



Trong hệ tọa độ $Oxyz$, gốc tọa độ là tâm trái đất, một vệ tinh nhân tạo có quỹ đạo được coi như một đường tròn có bán kính 13 440 km có điểm xuất phát là điểm $B(4\,032; 0; -5\,376)$ và đây cũng là điểm gần Trái Đất nhất của vệ tinh. Quỹ đạo của vệ tinh này nằm trên mặt phẳng vuông góc với trục tung và có tâm nằm trên đường thẳng OB . Coi trái đất là hình cầu hoàn hảo có bán kính bằng 6 400 km.

- a** Phương trình mặt phẳng chứa quỹ đạo của vệ tinh là $x + z = 0$.
- b** Khi xuất phát tại điểm B vệ tinh đang ở độ cao 320 km so với mặt đất.

- c** Quỹ đạo của tên lửa là đường tròn có tâm $I(-4\,032; 0; 5\,736)$.
- d** Khi Trái Đất quay, điểm cực Nam và cực Bắc của Trái Đất không thay đổi vị trí. Biết rằng điểm cực Nam của Trái Đất có tọa độ là $M(0; 3\,840; 5\,120)$. Khoảng cách gần nhất giữa vệ tinh và điểm cực Nam bằng 10 112 km (làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 8 Để xác định vị trí của một máy bay đang bay, người ta gắn một hệ trục tọa độ không gian $Oxyz$ trong đó gốc tọa độ O đặt tại một sân bay. Biết rằng cao độ của tọa độ máy bay chính là độ cao của máy bay so với mặt đất. Đơn vị độ dài trên mỗi trục tọa độ là 100 m. Một máy bay đang bay với quỹ đạo là một đường thẳng trong không gian với vận tốc không đổi. Tại thời điểm A nào đó, máy bay ở vị trí có tọa độ $(200; 70; 118)$. Sau 50 giây, độ cao của máy bay so với mặt đất giảm 400 m. Biết rằng trong suốt quá trình bay, máy bay có đi qua qua điểm B có tọa độ $(80; 105; 113)$. Giả sử mốc thời gian tính tại thời điểm máy bay ở điểm A .

- a** Tọa độ của máy bay sau khi bay 50 giây là $(104; 98; 114)$.
- b** Khoảng cách khi máy bay ở điểm C đến sân bay là 183 m (làm tròn đến hàng đơn vị).
- c** Cao độ của tọa độ máy bay tại điểm C sau khi bay 50 giây là 114.
- d** Quãng đường máy bay đã đi được từ thời điểm đầu tiên đến B là 12 510 m (làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 9 Một kĩ sư xây dựng muốn thăm dò một mảnh đất dốc hình tứ giác $ABCD$ để sử dụng cho dự án phát triển bất động sản nhà ở. Kĩ sư sử dụng một thiết bị điện tử để xác định vị trí bốn góc của khu đất. Tọa độ của bốn vị trí góc của khu đất lần lượt $A(15; 25; 9)$, $B(20; 5; 5)$, $C(-10; -10; 2)$ và $D(-15; 10; 6)$ trong một hệ tọa độ $Oxyz$ mà gốc tọa độ O trùng với vị trí đứng của kĩ sư, mặt đất nằm ngang trùng với mặt phẳng tọa độ (Oxy) (đơn vị trên các trục tính theo mét).

- a** Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB} = (-5; 20; 4)$.
- b** Mảnh đất $ABCD$ có dạng hình bình hành.
- c** Mặt phẳng chứa mảnh đất $ABCD$ tạo với mặt đất nằm ngang một góc nhỏ hơn 10° .
- d** Diện tích của mảnh đất $ABCD$ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị) là 688 m^2 .

Câu 10 (CT - THPT2025). Mô hình toán học sau đây được sử dụng trong quan sát chuyển động của một vật. Trong không gian cho hệ tọa độ $Oxyz$ có $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz và độ dài của mỗi vectơ đơn vị đó bằng 1 mét. Cho hai điểm A và B , trong đó điểm A có tọa độ là $(7; 7; 0)$. Một vật (coi như là một hạt) chuyển động thẳng với tốc độ phụ thuộc thời gian t (giây) theo công thức $v(t) = \beta t + 300$ (m/giây), trong đó β là hằng số dương và $0 \leq t \leq 6$. Ở thời điểm ban đầu ($t = 0$) vật đi qua điểm A với tốc độ 300 m/giây và hướng tới B . Sau 2 giây kể từ thời điểm ban đầu, vật đi được quãng đường 606 mét. Gọi $\vec{u} = (a; b; c)$ là vectơ cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{AB}$. Biết rằng $|\vec{u}| = 1$ và góc giữa vectơ $\vec{u}$ lần lượt với các vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ có số đo tương ứng bằng $60^\circ, 60^\circ, 45^\circ$.

- a** $a = \cos 60^\circ$.
- b** Phương trình đường thẳng AB là $\frac{x-7}{1} = \frac{y-7}{1} = \frac{z}{2}$.
- c** $\beta = 3$.

- a** Giả sử sau 5 giây kể từ thời điểm ban đầu, vật đến điểm $B(x_B; y_B; z_B)$. Khi đó $x_B > 776$.

Câu 11 (CT - THPTQG 2026). Trong không gian xét hệ tọa độ $Oxyz$ có một đơn vị dài trên các trục tương ứng với 10 mét trên thực tế. Một mục tiêu cần được bảo vệ có vị trí ở gốc tọa độ O . Người ta thiết lập một vành đai bảo vệ quanh mục tiêu theo một đường tròn tâm O có bán kính bằng 6 đơn vị (tương ứng 60 mét trên thực tế) nằm trong mặt phẳng (Oxy) . Một máy bay không người lái (được coi như một hạt) bay theo một đường thẳng từ vị trí $M(2; 11; 3)$ đến vị trí $N(14; 2; 3)$. Tại mỗi vị trí của máy bay, khoảng cách từ máy bay đến vành đai bảo vệ là độ dài ngắn nhất của các đoạn thẳng nối từ vị trí đó đến một điểm bất kỳ trên vành đai.

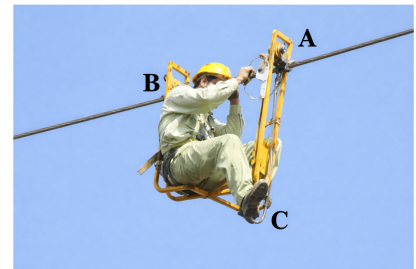
a $\overrightarrow{MN} = (12; -9; 0)$.

b Phương trình tham số của đường thẳng MN là
$$\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 11 - 3t \\ z = 0 \end{cases} \text{ với } t \in \mathbb{R}.$$

- c** Trong quá trình bay từ M đến N , khoảng cách ngắn nhất từ máy bay đến vành đai bảo vệ là 100 mét.

- d** Trong quá trình bay từ M đến N , khoảng cách từ máy bay đến vành đai bảo vệ là ngắn nhất khi máy bay ở vị trí có tọa độ là $(6; 8; 3)$.

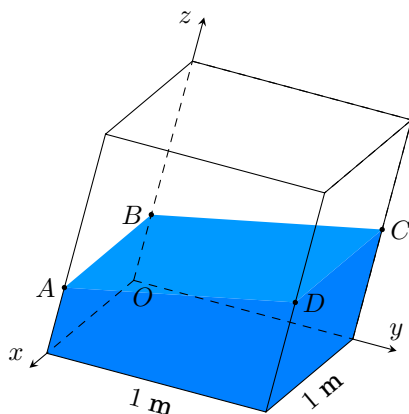
Câu 12 Năm 2011, kỹ sư Nguyễn Trí Hiếu, người Quảng Ngãi, đã sáng chế ra chiếc xe đu dây phục vụ công nhân điện lực di chuyển trên dây điện cao thế. Khi ở vị trí cân bằng, chiếc xe và đường dây điện sẽ cùng nằm trên một mặt phẳng vuông góc với mặt đất.



Xe được cấu tạo bởi khung xe có gắn hai Puly tại vị trí A và B cách mặt đất lần lượt là 20 m và 19,9 m (như hình vẽ). Xe đu dây di chuyển giống xe đạp, được kết hợp dây xích, líp, đĩa, bàn đạp, phanh; bàn đạp đặt tại vị trí C . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất (mỗi đơn vị độ dài trong không gian $Oxyz$ tương ứng với 1 m trên thực tế); tọa độ các điểm A, B, C lần lượt là $(7; 5; 20)$, $(7; 5,5; 19,9)$, $(7; 5; 19)$.

- a** Một vectơ chỉ phương của đường thẳng AB là $\vec{u} = (0; 5; 1)$.
- b** Khi người thợ điện di chuyển đến vị trí điểm D cách mặt đất 18 m thì tọa độ điểm D là $D(7; -5; 18)$.
- c** Phương trình mặt phẳng (ABC) là $x = 7$.
- d** Khoảng cách từ Puly tại A đến bàn đạp tại C là 1,03 m (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 13 Trong một bể hình lập phương cạnh 1 m có chứa một ít nước. Người ta đặt đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang. Biết rằng lúc đó mặt nước có dạng hình bình hành $ABCD$ và khoảng cách từ các điểm A, B, C đến đáy bể tương ứng là 38 cm, 46 cm, 50 cm. Trong không gian $Oxyz$, gốc tọa độ là góc của đáy bể, mỗi đơn vị trên hệ trục tọa độ tương ứng với 1 cm.



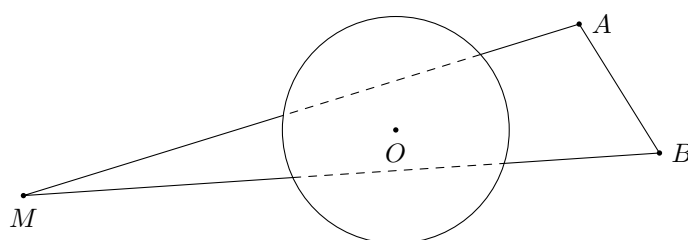
- a Điểm A có tọa độ là $(100; 0; 38)$.
- b Mặt phẳng đáy của bể nước có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2; -1; -25)$.
- c Khoảng cách từ điểm D đến đáy bể là 42 cm.
- d Góc giữa mặt nước và mặt phẳng đáy của bể nước là $5,1^\circ$ (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Câu 14 Trong không gian $Oxyz$, một viên đạn được bắn ra từ vị trí $A(1; 2; 3)$ hướng đến vị trí $B(0; 1; -6)$, bia chắn là mặt phẳng $(P): 4x - y + 2z + 13 = 0$, đơn vị là kilômet.

- a Điểm B thuộc mặt phẳng (P) .
- b Giả sử viên đạn chuyển động thẳng đều theo hướng vectơ $\vec{v}(-2; -2; -18)$ với vận tốc 800 m/s (bỏ qua mọi lực cản và chướng ngại vật), sau một phút viên đạn bắn ra đi qua điểm B.
- c Góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (P) (làm tròn đến hàng đơn vị) là 60° .
- d Hình chiếu vuông góc của A trên (Oxy) là $H(0; 2; 3)$.

Câu 15 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mắt một người quan sát đặt tại điểm $M(1; 2; 3)$ và quan sát một thanh AB với $A(7; 8; -3)$, $B(2; 3; -3)$. Một tấm bìa cứng có dạng hình tròn thuộc mặt phẳng (Oxy) có tâm $O(0; 0; 0)$, bán kính R và che khuất hoàn toàn thanh AB đối với người quan sát tại điểm M.

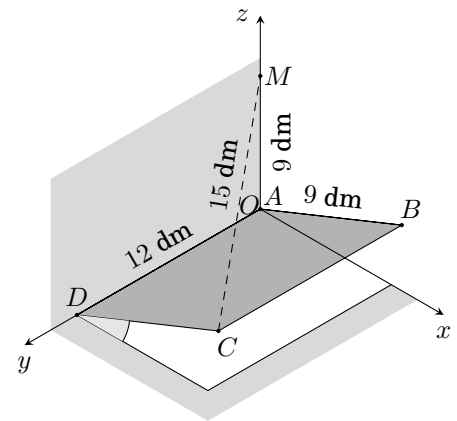
- a Vectơ $\vec{MA} = (6; 6; -6)$.
- b Đường thẳng AB tạo với mặt phẳng chứa tấm bìa một góc 30° .
- c Phương trình đường thẳng MA:
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 3 - t \end{cases}$$
- d Tấm bìa có bán kính nhỏ nhất bằng $\sqrt{41}$.



Câu 16 Trên một vùng cao nguyên rộng lớn, với hệ tọa độ $Oxyz$ thích hợp, đơn vị trên mỗi trục tọa độ là 5 mét, một con đại bàng đang đậu trên vách đá phẳng được mô hình hóa bởi phương trình $(P): 2x + 2y - z + 9 = 0$. Con đại bàng này đang ngắm các mục tiêu là hai con dê núi đang ở các vị trí $A(1; 2; -3)$ và $B(-2; -2; 1)$.

- a Con dê ở vị trí B thuộc vách núi đá nơi đại bàng đang đậu.
- b Khoảng cách giữa hai con dê núi là $\sqrt{41}$ mét.
- c Khoảng cách ngắn nhất từ đại bàng đến con dê ở vị trí A bằng 32 mét.
- d Đại bàng luôn quan sát hai con dê với một góc 90° và con dê ở vị trí B cũng đã biết được sự nguy hiểm sau lưng nó; khoảng cách xa nhất giữa nó với đại bàng bằng 11,2 mét (làm tròn đến hàng phần chục).

Câu 17 Một nắp bể nước hình chữ nhật $ABCD$ nằm cạnh bờ tường có kích thước $9\text{ dm} \times 12\text{ dm}$ được kéo ra từ mặt sàn. Do tác dụng của trọng lực nên nắp bể không thể mở ra được nếu không có người giữ. Người ta dùng một sợi dây xích dài 15 dm và kéo căng nối đỉnh C của hình chữ nhật với điểm M nằm phía trên bờ tường sao cho $AM = 9\text{ dm}$ và AM vuông góc với mặt sàn.



Chọn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ, khi đó nắp bể mở ra với mặt sàn một góc α (đơn vị trên mỗi trục tọa độ tính bằng dm). Bỏ qua độ dày của nắp bể.

- a Điểm M thuộc mặt phẳng có phương trình $z = 0$.
- b Tọa độ điểm C là $C(9 \sin \alpha; 12; 9 \cos \alpha)$.
- c Góc giữa nắp bể và mặt sàn sau khi kéo lên là $\alpha = 60^\circ$.
- d Phương trình mặt phẳng chứa nắp bể nước sau khi kéo bởi dây xích $x - \sqrt{3}z = 0$.

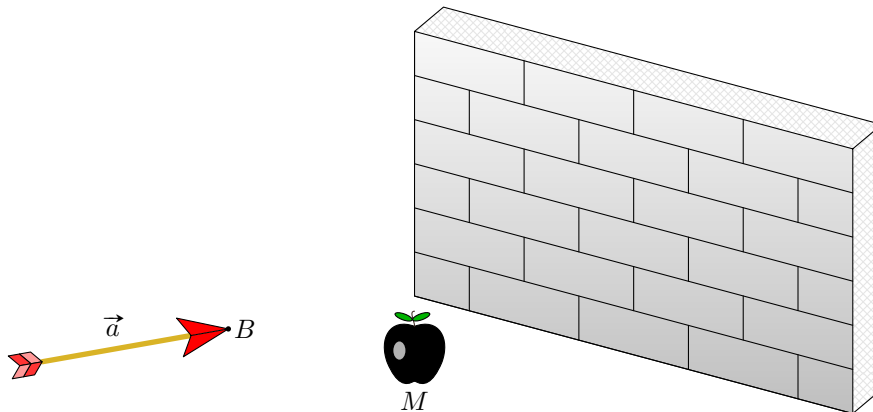
Câu 18 Trong một thành phố đang trong quá trình mở rộng, chính quyền địa phương quyết định cải thiện hạ tầng giao thông để đáp ứng nhu cầu ngày càng tăng của cư dân. Một trong những kế hoạch quan trọng là xây dựng hai con đường chính, nhằm kết nối các khu vực dân cư với các trung tâm thương mại và dịch vụ. Hai con đường này cắt nhau tại một giao lộ quan trọng, nơi sẽ được trang bị các tiện ích như đèn tín hiệu giao thông, vạch kẻ đường và khu vực dành riêng cho người đi bộ. Xét trong không gian $Oxyz$,

hai con đường lần lượt có phương trình là $d: \frac{x-1}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z+4}{1}$ và $d': \begin{cases} x = 3 - t \\ y = -2 + 4t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$

- a Đường thẳng d đi qua điểm $M(-1; 4; 4)$.
- b Hai đường thẳng cắt nhau tại điểm có tọa độ $(4; -6; -3)$.
- c Hai con đường tạo với nhau một góc lớn hơn 60° .
- d Để thiết kế giao lộ này một cách hiệu quả và an toàn, các kỹ sư cần xác định bề mặt đường nơi hai con đường gặp nhau, tức là mặt phẳng chứa d và d' . Mặt phẳng này có phương trình $8x + 7y - 10z + 20 = 0$.

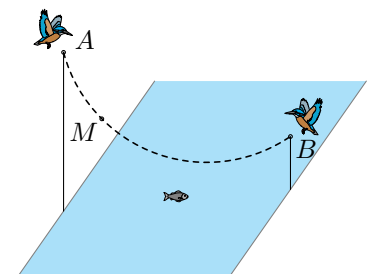


Câu 19 Một bức tường được tọa độ hóa trong không gian $Oxyz$ với đơn vị là mét bởi mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và điểm $M(1; -3; 4)$ là tọa độ của một quả táo. Khi đó



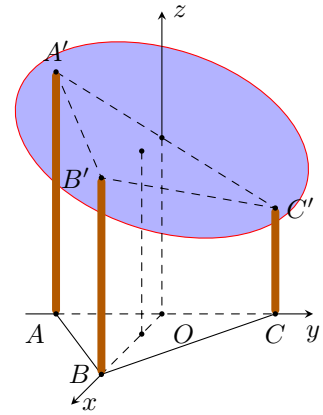
- a Quả táo cách bức tường 4 m.
- b Một người bắn một mũi tên với đầu mũi tên là $B(2; -1; 4)$ theo hướng $\vec{a} = (2; 4; 0)$ thì mũi tên bay xuyên qua trái táo.
- c Mũi tên cắm vào bức tường tại điểm $C(5; 5; 4)$.
- d Mặt đất được tọa độ hóa là mặt phẳng $(Q): y + z - 2 = 0$. Vào 12h trưa (khi bóng của vật trên mặt đất là hình chiếu thẳng đứng từ vật xuống mặt đất) sau khi mũi tên cắm vào bức tường thì bóng của mũi tên trên mặt đất dài 50 cm (làm tròn đến hàng đơn vị), biết mũi tên dài $\frac{\sqrt{39}}{10}$ cm.

Câu 20 Trong không gian $Oxyz$, cho trước mặt nước phẳng lặn trùng với mặt phẳng (Oxy) , đơn vị trên mỗi trục là mét; một chú chim bói cá đang đậu trên một cành cây ở vị trí $A(0; 0; 5)$ tiến hành bay xuống để thám thính ngang qua trên mặt hồ nước đậu trên một cành cây khác tại vị trí $B(4; 0; 4)$ theo quỹ đạo là một cung tròn hoàn hảo nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt nước đi qua điểm M thỏa mãn $\widehat{AMB} = 135^\circ$ (điểm M như hình vẽ).



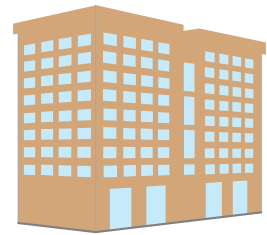
- a Quỹ đạo bay của chim bói cá thuộc mặt phẳng $y = 0$.
- b Đường tròn chứa quỹ đạo bay của chim bói cá có tâm $I\left(\frac{3}{2}; 0; \frac{5}{2}\right)$.
- c Khoảng cách ngắn nhất mà chim bói cá bay xuống sát với mặt nước nhất là 3,58 m (làm tròn đến hàng phần trăm).
- d Biết rằng vận tốc của con chim bói cá là 2 m/s thì thời gian chim bói cá bay từ điểm $A(0; 0; 5)$ tới điểm gần mặt nước nhất mất 1,5 giây (làm tròn đến hàng phần chục).

Câu 21 Một mái nhà hình tròn được đặt trên 3 cây cột trụ. Các cây cột trụ vuông góc với mặt sàn nhà phẳng và có độ cao lần lượt là 8m, 9m, 10m. Ba chân cột là ba đỉnh của một tam giác đều trên mặt sàn nhà với cạnh dài 8m. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, với B thuộc tia Ox , C thuộc tia Oy , tia Oz cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{AA'}$; gốc tọa độ O trùng với trung điểm của AC và mỗi đơn vị trên trục có độ dài 1 mét (xem hình vẽ).



- a** Tọa độ các điểm $A'(0; -4; 10)$, $B'(4\sqrt{3}; 0; 9)$, $C'(0; 4; 8)$.
- b** Phương trình mặt phẳng $(A'B'C')$ là $y + 4z - 36 = 0$.
- c** Biết độ dốc của mái nhà đạt tiêu chuẩn khoảng 27° đến 35° thì mái nhà trên ở mức đạt tiêu chuẩn.
- d** Biết rằng bề mặt mái nhà là hình tròn có tâm I trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$. Khi đó điểm I cách mặt sàn khoảng 9 mét.

Câu 22 Một tòa nhà văn phòng có dạng là khối hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ với chiều cao $AA' = 50$ m. Đáy $ABCD$ của tòa nhà là một hình chữ nhật trên mặt đất với chiều dài $AB = 40$ m và chiều rộng $AD = 30$ m. Để tạo điểm nhấn và thuận tiện cho việc di chuyển, người ta lắp đặt một thang máy kính trong suốt. Đường đi của thang máy được thiết kế là đường thẳng d đi qua trung điểm I của đường chéo AC và song song với chiều cao AA' của tòa nhà.



Trên mặt đất $(ABCD)$ thì khu vực chờ thang máy được quy hoạch là một hình tròn có tâm I và bán kính r . Từ một vị trí M bất kỳ trên đường tròn khu vực chờ này, người ta ngược nhìn lên đỉnh C' của tòa nhà để chiêm ngưỡng kiến trúc. Chọn gốc tọa độ đặt tại đỉnh A tức $A \equiv O(0; 0; 0)$, $B \in Ox$; $D \in Oy$.

- a** Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AC là $I(20; 15; 0)$.
- b** Phương trình tham số của đường thẳng d (đường đi của thang máy) là
$$\begin{cases} x = 20 \\ y = 15. \\ x = t \end{cases}$$
- c** Khoảng cách từ điểm B' đến đường đi của thang máy là 35 m.
- d** Bán kính lớn nhất $r_{\max}$ của khu vực chờ thang máy để đảm bảo góc nhìn $\widehat{CMC'}$ không nhỏ hơn 45° là 25 m.

Câu 23 Trong một khu vực khai thác mỏ, người ta đặt hệ tọa độ $Oxyz$ để mô phỏng vị trí các điểm trong không gian (tính theo mét). Vị trí của trạm quan sát nằm tại $A(0; 0; 10)$. Vị trí của giếng khoan nằm tại $B(4; 3; 0)$. Một máy bay không người lái M đang bay trên đường thẳng $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$.

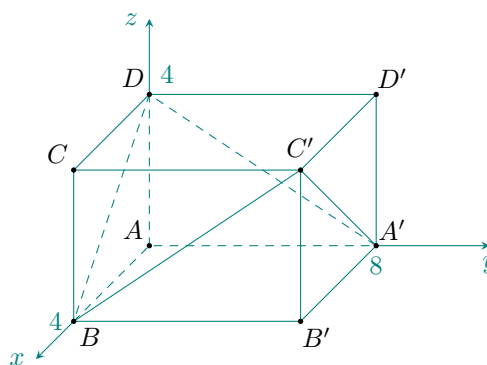
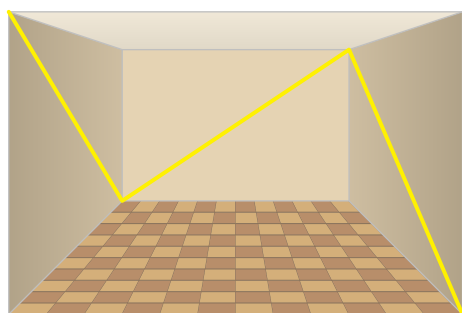
- a** Tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của giếng khoan B trên đường thẳng d là $H(1; -1; 2)$.

- b** Góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (Oxy) là $\frac{\sqrt{5}}{5}$.
- c** Khoảng cách nhỏ nhất từ máy bay M đến giếng khoan B là 5.
- d** Nếu từ A , người quan sát nhìn thấy máy bay M dưới một góc lớn nhất (góc nhìn được tạo bởi đường thẳng AM và đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (Oxy)), vị trí của M để góc này lớn nhất có tổng của các thành phần tọa độ là $\frac{34}{45}$.

Câu 24 Trong một mô hình nông nghiệp công nghệ cao, một tấm pin năng lượng mặt trời phẳng được lắp đặt nghiêng sao cho bề mặt của nó nằm trên mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z - 6 = 0$ (xét trong hệ không gian tọa độ $Oxyz$ với đơn vị đo là mét, mặt phẳng (Oxy) được xem là mặt đất phẳng). Người ta lắp đặt một robot cố định ở trên cao để kiểm tra bụi bẩn. Robot có mắt phát tia laser tại điểm $S(1; 1; 6)$. Robot thực hiện quét tia laser trên bề mặt tấm pin. Tại một thời điểm tia laser được chiếu theo đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; -2; -2)$ và chạm vào bề mặt tấm pin tại điểm M .

- a** Khoảng cách từ mắt phát tia laser S đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{4}{3}$ mét.
- b** Điểm M có tọa độ là $(1; 1; 2)$.
- c** Góc α hợp bởi tia laser Δ và mặt phẳng (P) thỏa mãn hệ thức $\sin \alpha = \frac{4}{9}$.
- d** Khi vệ sinh, nước được phun trúng điểm chạm của tia laser trên tấm pin sẽ tạo thành dòng nước chảy trên bề mặt pin xuống đất theo hướng dốc nhất, quỹ đạo chảy của dòng nằm trên một đường thẳng. Đường thẳng đó có một vectơ chỉ phương là $\vec{v} = (1; 1; 3)$.

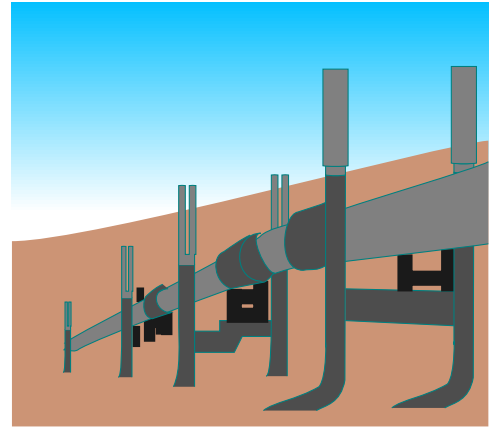
Câu 25 Trong một căn phòng có chiều ngang 4 m, chiều rộng 8 m và chiều cao 4 m, người chủ đã thiết kế 4 dây đèn LED chạy dọc theo các đường chéo của hình chữ nhật tương ứng với các bức tường căn phòng sao cho chúng có tính liên tục. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ với căn phòng là hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, trong đó điểm A là gốc tọa độ, đơn vị trên mỗi trục là mét. Chủ căn phòng quyết định sử dụng loại đèn LED neon Flex (không chói mắt) với giá thị trường khoảng 85 nghìn đồng/mét.



- a** Phương trình cạnh BD là $\begin{cases} x = 0 \\ y = 4 + t, (t \text{ là tham số}). \\ z = t \end{cases}$
- b** Số tiền để mua đèn LED trang trí trong căn phòng là 2 482 nghìn đồng (làm tròn đến hàng đơn vị của nghìn đồng).

- c** Khoảng cách từ D đến mặt phẳng $(A'BC')$ bằng 5,2 m (làm tròn đến hàng phần chục).
- d** Biết đèn LED có điểm sáng M chạy từ B đến D với tốc độ 0,2 m/s, đèn LED có điểm sáng N chạy từ A' đến C' với tốc độ 0,3 m/s. Sau 9,1 giây (làm tròn đến hàng phần chục) kể từ khi mở nguồn thì hai điểm sáng M, N có khoảng cách ngắn nhất trước khi có ít nhất một điểm sáng về đích.

Câu 26 Đường ống dẫn dầu trên không là hệ thống đường ống được treo trên các giá đỡ hoặc cột cao, dùng để vận chuyển dầu thô hoặc các sản phẩm dầu mỏ từ nơi này đến nơi khác mà không cần chôn dưới lòng đất. Hệ thống này thường được sử dụng trong các khu vực có địa hình khó khăn, vùng băng giá, rừng rậm,... những nơi mà việc đào đường ống ngầm không khả thi. Với hệ trục tọa độ $Oxyz$ thích hợp, mặt đất là mặt phẳng (Oxy) , đơn vị trên mỗi trục là mét, người ta thiết lập một đường ống dẫn



dầu trên không dọc theo đường thẳng $d: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 20 \end{cases} (t$

là tham số).

Vì địa hình phức tạp, người ta chọn điểm $A(15; 10; 15)$ để làm điểm trung chuyển dầu từ mặt đất đến đường ống này.

- a** Đường ống dẫn dầu nằm trên mặt phẳng (Oyz) .
- b** Điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxy) có tọa độ $A'(-15; -10; 15)$.
- c** Do thực tế công việc, người ta cần xác định vị trí điểm $B(0; b; 20)$ thuộc đường ống và vị trí điểm $C(m; n; 0)$ thuộc mặt đất sao cho tổng độ dài các đoạn đường AB, BC, AC nhỏ nhất. Khi đó $m + n + b = \frac{200}{7}$.
- d** Giá trị nhỏ nhất của tổng độ dài các đoạn thẳng AB, BC, AC làm tròn đến hàng chục bằng 45,5 m.

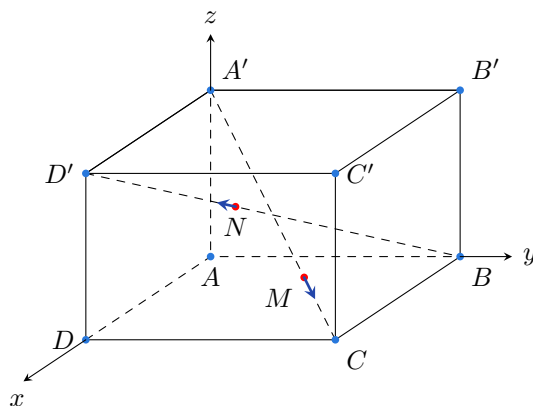
Câu 27 Một phòng trưng bày nghệ thuật dạng hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ với kích thước như sau dài $AD = 8$ mét, rộng $AB = 6$ mét, cao $AA' = 4$ mét. Kỹ sư thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ để số hóa căn phòng như sau: Gốc tọa độ $O(0; 0; 0)$ đặt tại A ; các trục Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các cạnh AD, AB, AA' (chiều dương lần lượt từ A đến D , từ A đến B , từ A đến A') (Đơn vị trên các trục tọa độ là mét). Hệ thống giám sát gồm một camera gắn tại tâm S của mặt trần $A'B'C'D'$ và một cảm biến hồng ngoại gắn tại đỉnh C (đỉnh đối diện với A trên mặt sàn $ABCD$). Camera đang giám sát một bức tranh được treo chính giữa bức tường $CDD'C'$, gọi P là tâm của bức tranh (cũng là tâm của hình chữ nhật $CDD'C'$).

- a** Tọa độ vị trí lắp đặt camera là $S(4; 3; 4)$.
- b** Khoảng cách từ camera đến tâm bức tranh P là 5 mét.
- c** Có yêu cầu góc tạo bởi trục thẳng đứng của giá treo camera (phương song song Oz , hướng xuống) và tia nhìn từ camera đến tâm bức tranh $(\overrightarrow{SP})$ phải nhỏ hơn

60°. Thiết kế hiện tại thỏa mãn yêu cầu này.

- a** Để tránh chói camera, kỹ sư cho lắp thêm một trục đèn chiếu sáng nghệ thuật, trục đèn được chọn vuông góc với mặt phẳng (SPC). Chọn một vectơ $\vec{u}$ có giá song song với trục đèn, ta có $\vec{u} = (3; 4; 6)$.

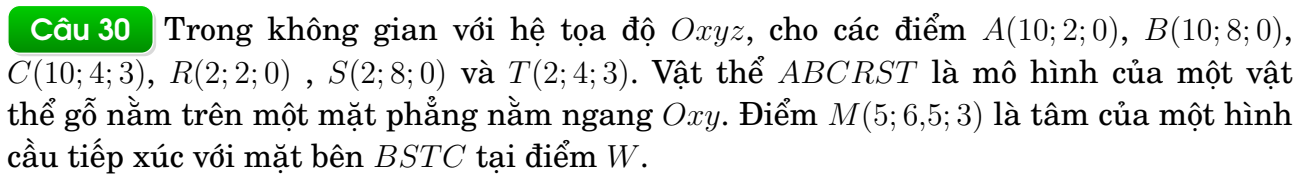
Câu 28 Trong một gian triển lãm nghệ thuật, người ta thiết kế một không gian hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có kích thước $AD = 20$ m, $AB = 10$ m, $AA' = 5$ m và được gắn vào hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho gốc tọa độ O trùng với điểm A , tia Ox chứa điểm D , tia Oy chứa điểm B , tia Oz chứa điểm A' như hình vẽ. Đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét. Người ta căng hai sợi dây cáp phát sáng vào hai đường chéo của hình hộp là $A'C$ và BD' . Giá sợi dây cáp là 100 nghìn đồng/mét.



- a** Tọa độ các điểm $B(0; 10; 0)$, $C(20; 10; 0)$, $A'(0; 0; 5)$, $D'(20; 0; 5)$.
- b** Tổng số tiền cần để mua hai sợi dây cáp phát sáng nói trên là 2613 nghìn đồng (làm tròn đến hàng đơn vị).
- c** Mặt phẳng ($A'BC$) có phương trình là $y + 2z - 10 = 0$.
- d** Trên dây $A'C$, một điểm sáng M chuyển động đều từ A' đến C với vận tốc 3 m/s. Đồng thời, trên dây BD' , điểm sáng N chuyển động đều từ B đến D' với vận tốc 2 m/s. Tính từ khi hai điểm sáng bắt đầu chuyển động đến khi có ít nhất một điểm sáng về đích thì khoảng cách nhỏ nhất giữa hai điểm sáng M và N bằng 3,77 m (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Câu 29 Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, xét mô hình phòng không như sau: Radar đặt tại gốc tọa độ $O(0; 0; 0)$, tên lửa phòng không đặt tại điểm $A(0; 100; 0)$; mỗi đơn vị trên mỗi trục tọa độ tương ứng với 10 m; mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất; giả sử mọi UAV (phương tiện bay không người lái) và tên lửa đều chuyển động thẳng đều. Tại thời điểm $t = 0$ giây, radar phát hiện ra UAV M ở tọa độ $M_0(20\,000; 0; 20)$; tại thời điểm $t = 1$ giây, radar theo dõi thấy UAV M ở tọa độ $M_1(19\,995; 1; 19,5)$. Gọi d là đường thẳng qua M_0, M_1 .

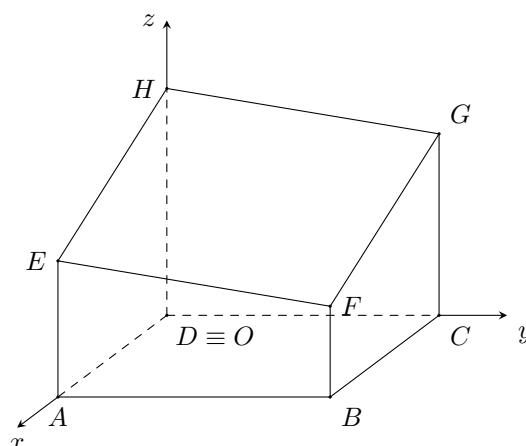
- a** Góc nghiêng của đường thẳng d và mặt đất là 0,02 rad.
- b** Khoảng cách giữa UAV M và gốc O tại thời điểm 6 giây là 19970 m.
- c** Khoảng cách ngắn nhất từ điểm A tới đường thẳng d xấp xỉ 42684 m.
- d** Tại thời điểm $t = 6$ giây, một tên lửa được phóng lên từ A và chuyển động thẳng đều với vận tốc 3400 m/s, va chạm và phá hủy UAV M tại điểm B trên d . Khi đó, sau 57,88 giây kể từ lúc phóng thì tên lửa va chạm với UAV (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của giây).



-
- The diagram illustrates a 3D geometric setup. A tetrahedron is defined by vertices A , B , C , and D . A point T lies on the edge CD . A sphere is centered at M and passes through T . A point W is located on the sphere. A plane is shown passing through T and W , intersecting the tetrahedron. A coordinate system with axes x , y , and z is shown at the origin.



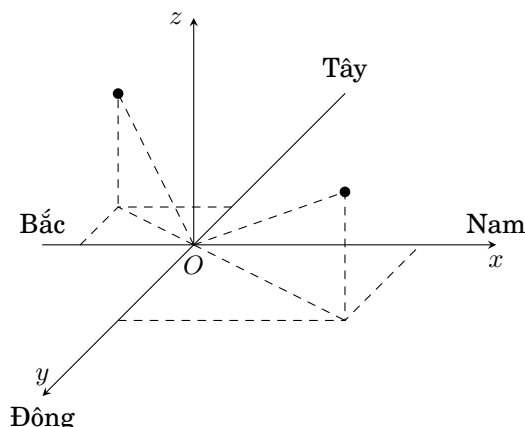
Câu 31 Sau nhà ông Sơn có mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có chiều rộng $AB = 5$ (mét) và chiều dài $AD = 6$ (mét). Ông Sơn dự định dùng mảnh đất này để trồng rau sạch nên thiết kế mái che phẳng và dốc về góc đỉnh F .



Mái lợp $EFGH$ đặt trên bốn trụ AE , BF , CG và DH đều vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ trong đó $DH = 5$ (mét), $CG = 4$ (mét) và $AE = 3$ (mét). Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có đơn vị trên mỗi trục là mét (m) như hình vẽ.

- a** Điểm $A(6; 0; 0)$.
- b** Phương trình mặt phẳng (EFG) có dạng $ax + by + cz - 150 = 0$. Khi đó $a + b + c = 23$.
- c** Giá một m^2 lưới chống nắng là 12 000 đồng. Khi đó, số tiền ông Sơn mua lưới lợp mái $EFGH$ là 386 nghìn đồng (kết quả làm tròn đến hàng nghìn đồng).
- d** Ông Sơn cần lắp đặt dây từ điểm I nằm trên cạnh AB và cách B một mét, đến điểm M nằm trên cạnh BC , đến điểm N nằm trên cạnh CG , đến điểm P nằm trên cạnh DH và đến điểm E . Biết dây luôn áp sát vào các mặt, độ dài ngắn nhất của dây là $\sqrt{305}$ (m).

Câu 32 Xét hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một điểm trong cùng một ngày. Lúc 9 giờ sáng, chiếc thứ nhất đang ở vị trí A cách điểm xuất phát 2 km về phía nam và 1 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 0,5 km. Chiếc thứ hai đang ở vị trí B nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và 1,5 km về phía tây đồng thời cách mặt đất 0,8 km. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (như hình vẽ). Lấy đơn vị đo trên mỗi trục là km.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a** Tọa độ của khinh khí cầu thứ nhất lúc 9 giờ sáng là $A(2; 1; 0,5)$.

- b** Phương trình chính tắc của đường thẳng AB là $\frac{x-2}{30} = \frac{y-1}{25} = \frac{z-0,5}{3}$.
- c** Lúc 9 giờ sáng, khoảng cách giữa hai chiếc khinh khí cầu là 3,92 km (làm tròn đến hàng phần trăm).
- d** Từ 9 giờ sáng đến 9 giờ 10 phút sáng, khinh khí cầu thứ nhất đi thẳng về hướng Nam với vận tốc 50 km/h và độ cao không đổi để đến điểm M , khinh khí cầu thứ hai chuyển động thẳng đến điểm N với vận tốc 60 km/h, biết vectơ $\overrightarrow{BN}$ cùng hướng với vectơ $\vec{u} = (2; 2; 1)$. Bỏ qua lực cản của gió, khoảng cách MN là 4,66 km (làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 33 Trong không gian $Oxyz$, đơn vị trên mỗi trục là mét, có hai chiếc chiến đấu cơ từ hai vị trí $A(40; -15; 15)$, $B(55; -10; 65)$ cần đáp xuống hai vị trí thuộc tàu sân bay hải quân để nạp nhiên liệu. Bề mặt chứa các đường băng trên tàu là mặt phẳng (P) có phương trình $3x - y + 2z - 25 = 0$.

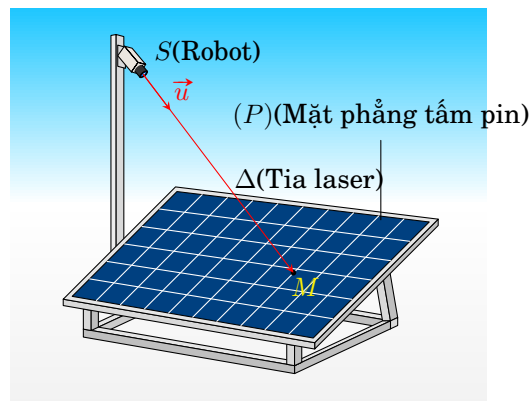
- a** Đường thẳng qua A và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình là $\frac{x-40}{3} = \frac{y+15}{1} = \frac{z-15}{-2}$.
- b** Tổng khoảng cách từ hai vị trí chiến đấu cơ đến mặt phẳng chứa đường băng là 110 m (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).
- c** Tọa độ điểm đối xứng của điểm A qua mặt phẳng (P) là $A'(-20; 5; -25)$.
- d** Người chỉ huy ở tàu sân bay phát tín hiệu để hai chiến đấu cơ đáp xuống các vị trí M, N cách nhau $5\sqrt{6}$ m. Tổng đường bay ngắn nhất $AM + BN$ bằng 115 m (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 34 Để thực hiện công tác bảo trì cầu Mỹ Thuận 2, các kỹ sư sử dụng hệ thống máy bay không người lái (UAV) tích hợp công nghệ Bathymetric LiDAR. Hệ thống này phát ra các xung laser xanh lá (green laser) theo đường thẳng từ điểm $C(20; 60; 50)$ nằm trên đỉnh tháp cầu, đi qua phao tiêu quan trắc $B(a; b; c)$ trên mặt nước và chiếu đến mục tiêu $A(15; 10; -50)$ nằm trên bề mặt lớp cát bồi lắng ở chân trụ cầu. Hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O tại mặt nước, mặt phẳng (Oxy) là mặt nước sông, trục Oz hướng thẳng đứng lên trên (đơn vị: mét).

- a** Đường thẳng AC biểu diễn quỹ đạo của tia laser có phương trình chính tắc là $\frac{x-20}{1} = \frac{y-60}{10} = \frac{z-50}{20}$.
- b** Tọa độ phao tiêu B thỏa mãn $a + b + c = 52,5$.
- c** Khi xung laser truyền trong nước, vận tốc của nó thay đổi theo thời gian t (đơn vị: ns) bởi hàm số $v(t) = 0,22 + 0,01t$ (m/ns), với $t \geq 0$ là thời gian tính từ thời điểm xung laser chạm mặt nước. Khi đó, quãng đường tia laser đã đi được trong nước sau 10 ns kể từ khi chạm mặt nước là 2,475 mét.
- d** Sau khi xác định mục tiêu A , các kỹ sư vận hành một robot dò tìm chạy trên một thanh ray bảo trì d nằm song song với mặt nước, cách mặt nước 5 m. Biết rằng hình chiếu vuông góc của thanh ray d lên mặt nước là một đường thẳng đi qua phao tiêu B và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 1; 0)$. Để nhận được tín hiệu mạnh nhất từ mục tiêu A , robot cần di chuyển đến vị trí $M(a'; b'; c')$ trên thanh ray d sao cho khoảng cách AM ngắn nhất. Khi đó $a' + b' - c' = 34$.



Câu 35 Trong một mô hình nông nghiệp công nghệ cao, một tấm pin năng lượng mặt trời phẳng được lắp đặt nghiêng sao cho bề mặt của nó nằm trên mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z - 6 = 0$ (xét trong hệ không gian tọa độ $Oxyz$ với đơn vị đo là mét, mặt phẳng (Oxy) được xem là mặt đất phẳng). Người ta lắp đặt một robot cố định ở trên cao để kiểm tra bụi bẩn. Robot có mắt phát tia laser tại điểm $S(1; 1; 6)$. Robot thực hiện quét tia laser trên bề mặt tấm pin. Tại một thời điểm tia laser được chiếu theo đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; -2; -2)$ và chạm vào bề mặt tấm pin tại điểm M .



- a** Khoảng cách từ mắt phát tia laser S đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{4}{3}$ mét.
- b** Điểm M có tọa độ là $(1; 1; 2)$.
- c** Góc α hợp bởi tia laser Δ và mặt phẳng (P) thỏa mãn hệ thức $\sin \alpha = \frac{4}{9}$.
- d** Khi vệ sinh, nước được phun trúng điểm chạm của tia laser trên tấm pin sẽ tạo thành dòng nước chảy trên bề mặt pin xuống đất theo hướng dốc nhất, quỹ đạo chảy của dòng nước nằm trên một đường thẳng. Đường thẳng đó có một vectơ chỉ phương là $\vec{v} = (1; 1; 3)$.

2 Trả lời ngắn

Câu 1 Trong một trò chơi mô phỏng bắn súng, một người chơi đặt điểm ngắm tại điểm O là giao điểm của AC và BD trong căn phòng hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có kích thước $AB = 15(\text{m})$, $AD = 20(\text{m})$, $AA' = 25(\text{m})$. Người chơi di chuyển trên đoạn BD có nhiệm vụ bắn trúng một mục tiêu di động trên mặt phẳng $(CB'D')$. Tính khoảng cách ngắn nhất từ điểm ngắm đó đến mục tiêu (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

KQ:

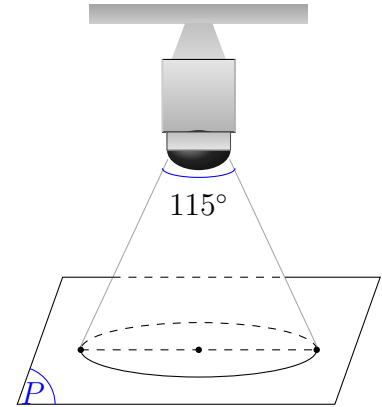
Câu 2 Trong một khung lưới ô vuông gồm các hình lập phương, người ta đưa ra một cách kiểm tra bốn nút lưới (đỉnh hình lập phương) bất kì có đồng phẳng hay không bằng cách gán hệ trục tọa độ $Oxyz$ vào khung lưới ô vuông và lập phương trình mặt phẳng đi qua ba nút lưới trong bốn nút lưới đã cho. Giả sử có ba nút lưới mà tọa độ lần lượt là $(1; 1; 10)$, $(4; 3; 1)$, $(3; 2; 5)$ và mặt phẳng đi qua ba nút lưới đó có phương trình $x + my + nz + p = 0$. Giá trị của $m + n + p$ là bao nhiêu?

KQ:

Câu 3 Gắn hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị dm) vào một ngôi nhà một tầng diện tích 250 m^2 . Mặt dưới và mặt trên của mái nhà nằm trên các mặt phẳng vuông góc Oz . Biết $A(3; 4; 33)$ thuộc mặt dưới và $B(9; 8; 35)$ thuộc mặt trên. Độ dày mái là khoảng cách giữa hai mặt phẳng ấy. Giá 1 m^3 bê tông tươi: 1 100 000 đồng; tiền công: 100 000 đồng trên 1 m^3 . Chi phí làm mái nhà bằng bao nhiêu triệu đồng?

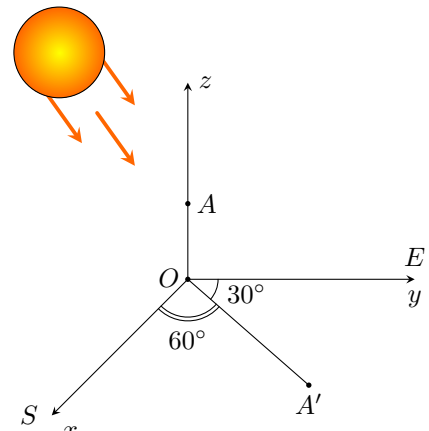
KQ:

Câu 4 Góc quan sát ngang của một camera là 115° . Trong không gian $Oxyz$, camera được đặt tại điểm $C(4; 2; 3)$ và chiếu thẳng về phía mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 3 = 0$. Biết vùng quan sát được trên mặt phẳng (P) của camera là hình tròn. Tính diện tích của vùng quan sát đó (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).



KQ:

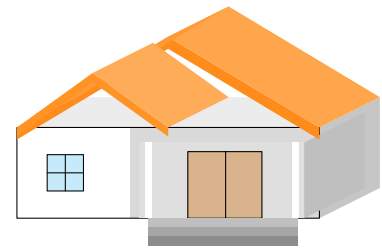
Câu 5 Trên mặt đất phẳng, người ta dựng một cây cột thẳng cao 6 m vuông góc với mặt đất, có chân cột đặt tại vị trí O trên mặt đất. Tại một thời điểm, dưới ánh nắng mặt trời cách chân cột 3 m về hướng $S60^\circ E$ (hướng tạo với hướng nam góc 60° và tạo với hướng đông góc 30°) (hình bên dưới). Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc tọa độ là O , tia Ox chỉ hướng nam, tia Oy chỉ hướng đông, tia Oz chứa cây cột, đơn vị đo là mét. phương trình đường thẳng chứa tia nắng mặt trời đi qua đỉnh cột tại thời điểm đang xét có dạng $\frac{x}{a} = \frac{y - y_0}{\sqrt{3}} = \frac{z - 6}{c}$.



Tính $a + y_0 + c$.

KQ:

Câu 6 Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét), một ngôi nhà (xem hình vẽ) có sàn nhà nằm ngang trên mặt phẳng $(\alpha): y - z - 5 = 0$. Hai mái nhà (coi như là hai phần mặt phẳng) lần lượt nằm trên các mặt phẳng $(P): 2x - 3y + z - 6 = 0$, $(Q): 2x + y - 3z + 10 = 0$.



Hỏi chiều cao ngôi nhà tính từ nóc nhà (điểm cao nhất của mái nhà) đến sàn nhà là bao nhiêu mét (không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần trăm)?

KQ:

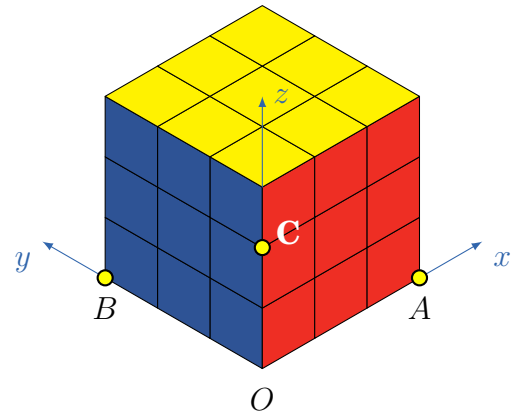
Câu 7 Một phần mềm mô phỏng vận động viên tập bắn bia mục tiêu có kích thước nhỏ $42\text{ cm} \times 42\text{ cm}$ bằng súng tiểu liên AK trong không gian $Oxyz$. Cho biết vận động viên đó sử dụng thước ngắm 3 và đứng cách xa bia mục tiêu là 100 m, trục d của nòng súng và

cọc đỡ bia d' lần lượt có phương trình $d: \begin{cases} x = t \\ y = 2 \\ z = 4 \end{cases}$ và $d': \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 + 3t' \end{cases}$. Để bắn trúng hồng

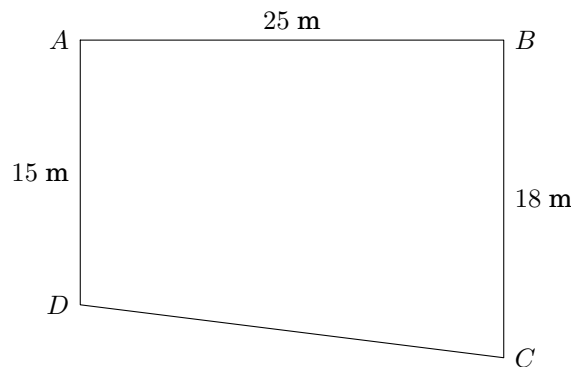
tâm (điểm 10) thì vận động viên phải ngắm bắn vào điểm $N(a; b; c) \in d'$ và cách giao điểm của d và d' một khoảng 6 cm. Khi $c < 0$, tính giá trị biểu thức $a - b + c$.

KQ: 

Câu 8 Khối rubik được gắn với hệ tọa độ $Oxyz$ có đơn vị bằng độ dài cạnh của hình lập phương nhỏ (hình vẽ). Xét bốn điểm $A(3; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C(0; 0; 2)$, $D(3k; 3k; 2k)$ với $k > 0$ đồng phẳng. Biết rằng tọa độ điểm $D(a; b; c)$. Khi đó giá trị $a + 2b + 3c$ bằng bao nhiêu?

KQ: 

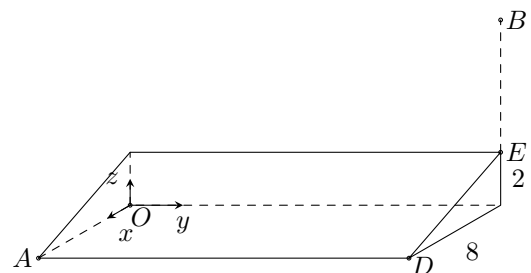
Câu 9 Một phần sân trường được định vị bởi các điểm A, B, C, D như hình vẽ



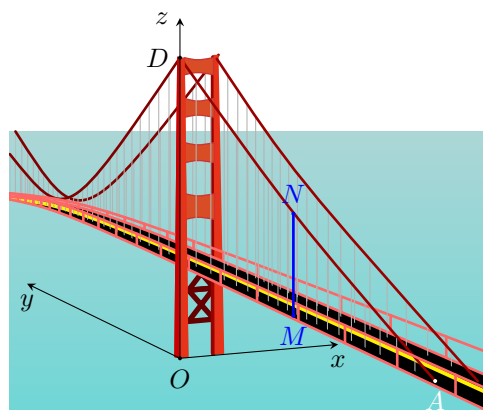
Bước đầu chúng được lấy “thăng bằng” để có cùng độ cao so với mặt đất, biết $ABCD$ là hình thang vuông ở A và B với độ dài $AB = 25$ m, $AD = 15$ m, $BC = 18$ m. Do yêu cầu kĩ thuật, khi lát phẳng phần sân trường phải thoát nước về góc sân ở C nên người ta lấy độ cao ở các điểm B, C, D lần lượt xuống thấp hơn so với độ cao ở A là 10 cm, a cm, 6 cm tương ứng sao cho bốn điểm A, B', C', D' đồng phẳng. Tìm giá trị của a .

KQ: 

Câu 10 Một buổi biểu diễn sân khấu diễn ra trên một sân khấu nghiêng về phía khán giả. Cuối buổi biểu diễn, nữ diễn viên chính rời sân khấu trong một chiếc ghế treo trên dây, di chuyển từ điểm $A(8; 0; 0)$ đến điểm $B(0; 20; 10)$. Sau khi đi được $\frac{3}{4}$ quãng đường, cô ấy dừng lại để thực hiện động tác cuối. Hãy tính khoảng cách của cô ấy đến mặt phẳng sân khấu tại thời điểm đó (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

KQ: 

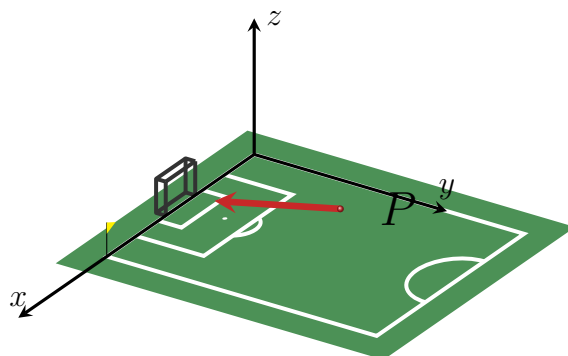
Câu 11 Cầu Cổng Vàng (The Golden Gate Bridge) ở Mỹ. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O là bệ của chân cột trụ tại mặt nước, trục Oz trùng với cột trụ, mặt phẳng (Oxy) là mặt nước và xem như trục Oy cùng phương với cầu như hình vẽ. Dây cáp AD (xem như là một đoạn thẳng) đi qua đỉnh D thuộc trục Oz và điểm A thuộc mặt phẳng (Oyz) , trong đó điểm D là đỉnh cột trụ cách mặt nước 227(m), điểm A cách mặt nước 75(m) và cách trục Oz một khoảng 343(m).



Giả sử ta dùng một đoạn dây nối điểm N trên dây cáp AD và điểm M trên thành cầu, biết M cách mặt nước 75(m) và MN song song với cột trụ. Tính độ dài MN (theo mét kết quả được làm tròn đến một chữ số thập phân) biết điểm M cách trục Oz một khoảng bằng 230(m).

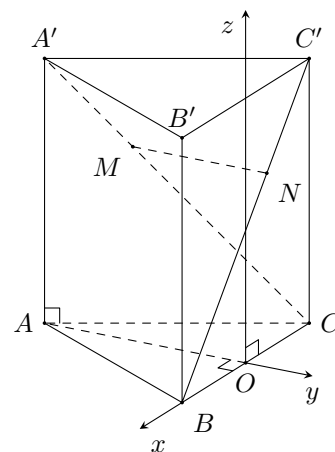
KQ:

Câu 12 Một sân bóng đá rộng 60 m. Trong một quả đá phạt, bóng được sút từ vị trí $P(3; 9; 0)$ theo hướng của vectơ $\vec{v} = (18; -6; 1)$ về phía khung thành rộng 7,20 m, cao 2,40 m. Quỹ đạo bay được giả sử là một đường thẳng. Vận tốc bóng ước tính 28,5 m/s. Tính thời gian bóng bay tới khung thành.



KQ:

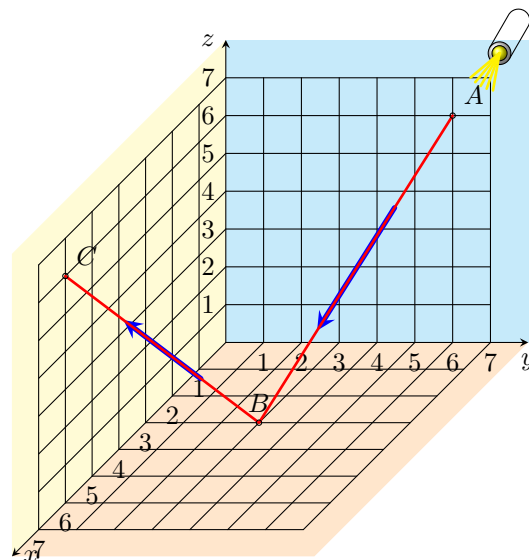
Câu 13 Một kiến trúc sư muốn xây dựng một tòa nhà biểu tượng độc lạ cho thành phố. Trên bản thiết kế tòa nhà có hình dạng là một khối lăng trụ tam giác đều, có cạnh bên bằng cạnh đáy và dài 320 mét (tham khảo hình vẽ). Kiến trúc sư muốn xây dựng một cây cầu MN bắc xuyên tòa nhà (điểm đầu thuộc cạnh $A'C'$, điểm cuối thuộc cạnh BC') và cây cầu này sẽ được dát vàng với đơn giá 4 tỷ đồng trên 1 mét dài. Vì vậy để đáp ứng bài toán kinh tế, kiến trúc sư phải chọn vị trí cây cầu sao cho MN ngắn nhất. Khi đó giá xây cây cầu này hết bao nhiêu tỉ đồng (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?



KQ:



Câu 14 Xét trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, một tia sáng xuất phát từ điểm $A(0; 6; 6)$ theo hướng của vectơ $\vec{v} = (1; -1; -2)$ và đi tới mặt phẳng (xOy) , tại đó nó bị phản xạ. Tia sáng phản xạ theo hướng của vectơ $\vec{u} = (1; -1; 2)$ cắt mặt phẳng (xOz) tại điểm $C(a; b; c)$. Giá trị của $a + b + c$ bằng bao nhiêu?



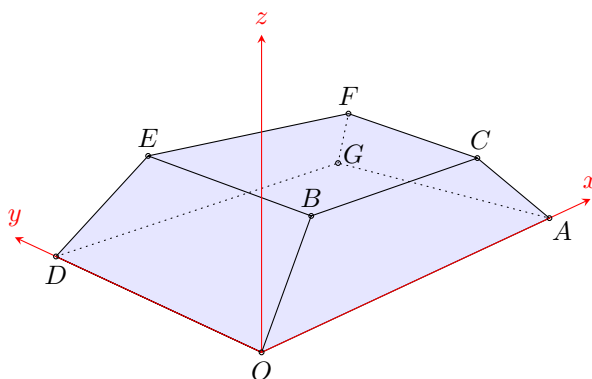
KQ:

Câu 15 Trong một trung tâm nghiên cứu robot bay, người ta bố trí một thiết bị định vị tại điểm cố định $A(1; 0; 2)$ trong không gian ba chiều với hệ tọa độ $Oxyz$ (các đơn vị tọa độ được tính bằng mét). Thiết bị này giao tiếp đồng thời với hai cảm biến: Cảm biến thứ nhất di chuyển dọc theo đường thẳng $\Delta: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{-1}$, cảm biến thứ hai được gắn trên mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + z + 1 = 0$. Giữa hai cảm biến được kết nối bằng một đường truyền BC , trong đó B nằm trên đường thẳng Δ , C nằm trên mặt phẳng (α) và thiết bị định vị tại A là trung điểm của đoạn BC . Biết rằng đường thẳng BC có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-2; a; b)$, hãy tính giá trị $a + 2b$.

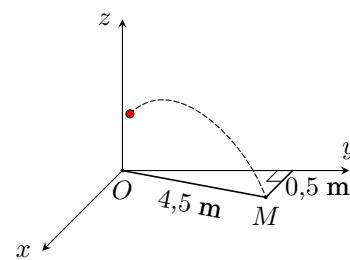
KQ:

Câu 16 Một sân vận động được xây dựng theo mô hình là hình chóp cắt $OAGD.BCFE$ có hai đáy song song với nhau. Mặt sân $OAGD$ là hình chữ nhật và được gắn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ (đơn vị trên mỗi trục là mét). Mặt sân $OAGD$ có chiều dài $OA = 100$ m, chiều rộng $OD = 60$ m và điểm $B(10; 10; 8)$. Giả sử phương trình tổng quát của mặt phẳng $(OACB)$ có dạng $ax + 4y + cz + d = 0$. Tính giá trị biểu thức $a + c + d$.

KQ:

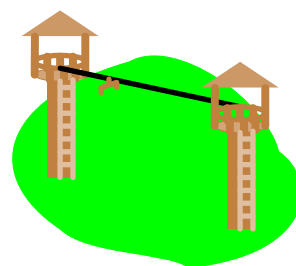


Câu 17 Trong tiết thể dục học về kĩ thuật chuyền bóng hơi, Nam và An đang tập chuyền bóng cho nhau, Nam ném bóng cho An đỡ, quả bóng bay lên cao nhưng lại lệch sang phải của Nam và rơi xuống vị trí cách An 0,5m và cách Nam 4,5m được mô tả bằng hình vẽ. Biết rằng quỹ đạo của quả bóng nằm trong mặt phẳng $(\alpha): ax + \frac{1}{2}y + cz + d = 0$ và vuông góc với mặt đất. Tính $a + c + d$ (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)?



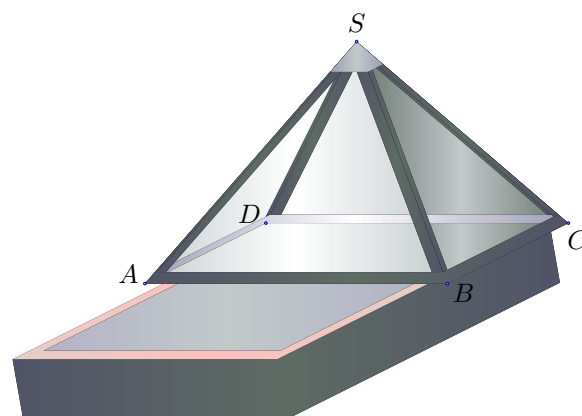
KQ:

Câu 18 Trong một khu du lịch, người ta cho du khách trải nghiệm thiên nhiên bằng cách đu theo đường trượt zipline từ vị trí A cao 15 m của tháp 1 này sang vị trí B cao 10 m của tháp 2 trong khung cảnh tuyệt đẹp xung quanh. Với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho trước (đơn vị: mét), tọa độ của A và B lần lượt là $(3; 2,5; 15)$ và $(21; 27,5; 10)$. Biết tọa độ du khách khi ở độ cao 12 m là $(a; b; c)$. Tính $P = 5a + b + c$.



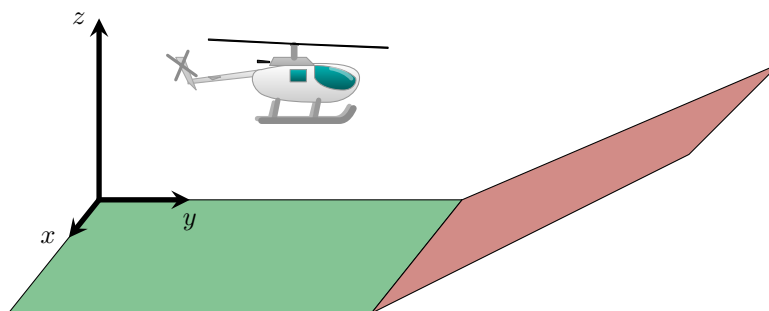
KQ:

Câu 19 Ông An thiết kế một mái che giếng trời hình chóp di động để có thể tùy thích lấy ánh sáng cho ngôi nhà của mình. Biết rằng đáy của hình chóp là hình chữ nhật có độ dài 2 cạnh đáy là 3 m và 4 m và độ cao của giếng trời là 2 m (hình vẽ minh họa). Hỏi hai mặt bên kề nhau tạo với nhau góc bao nhiêu độ (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



KQ:

Câu 20 Một chiếc trực thăng bay trong điều kiện tầm nhìn kém tiến về phía một sườn núi dốc lên, được mô tả bởi các điểm $P(0; 5; 0)$, $Q(5; 10; 2)$, $R(10; 10; 2)$.



Trực thăng bay qua các điểm $A(1; 6; 1)$ và $B(2; 7; 1)$ (đơn vị km).



Nếu trực thăng tiếp tục giữ nguyên hướng bay hiện tại, sẽ va vào sườn núi. Vì thế để tránh tai nạn, tại điểm B phi công giữ nguyên hướng theo phương $x - y$ nhưng bay lên với góc nâng sao cho đường bay song song với sườn núi. Tính góc mà phi công đã thay đổi hướng bay tại điểm B (làm tròn kết quả đến hàng phần mười, đơn vị độ).

KQ:

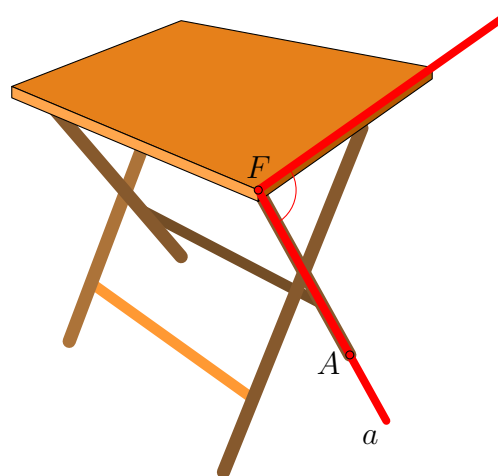
Câu 21 Tại một nút giao thông có 2 con đường khác mức. Trên thiết kế, trong không gian $Oxyz$ hai con đường đó thuộc hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$ và $d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$. Người ta muốn tạo một con đường Δ cắt d_1, d_2 lần lượt tại A và B sao cho AB nhỏ nhất. Tính độ dài AB (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

Câu 22 Một chiếc bàn gấp gọn đã được thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$. Điểm A là chân bàn tiếp xúc với

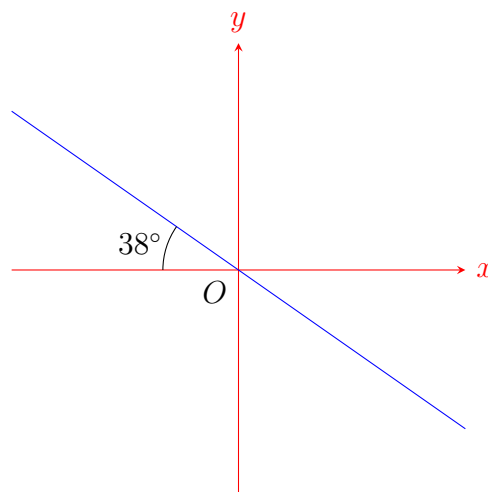
mặt đất thuộc đường thẳng $a: \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 + t \\ z = -2 + 4t \end{cases}$ cắt

mặt bàn là mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 6 = 0$ tại điểm F . Độ dài chân bàn $FA = 40\sqrt{3}$ cm, khi đó độ cao của mặt bàn tính từ mặt đất là bao nhiêu cm?



KQ:

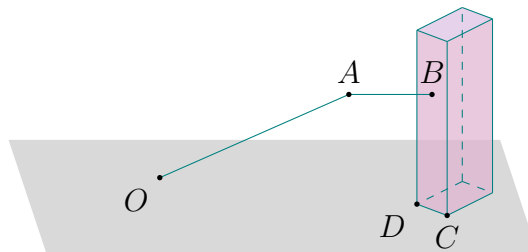
Câu 23 Manhattanhenge là một sự kiện diễn ra khi Mặt Trời mọc hoặc khi Mặt Trời lặn nằm thẳng hàng với các tuyến phố Đông - Tây thuộc mạng lưới đường phố chính tại quận Manhattan của thành phố New York. Khi mặt trời lặn, tia sáng song song mặt đất lệch một góc khoảng 38° so với hướng tây.



Giả sử mặt tiền các tòa nhà hai bên đường nằm trong 2 mặt phẳng song song cách nhau 30 m và vuông góc với mặt đất. Biết rằng mặt phẳng phía bắc đi qua gốc O của hệ trục $Oxyz$, với tia Oz vuông góc với mặt đất và hướng lên trên. Phương trình mặt phẳng thứ hai có dạng $(Q): x + ay + bz + c = 0$ với $c = \frac{m}{\sin n^\circ}$. Tính $m + n$.

KQ:

Câu 24 Một công ty logistics đang thử nghiệm hệ thống giao hàng tự động bằng máy bay không người lái (drone). Trong không gian $Oxyz$, mỗi đơn vị trên các trục tương ứng với 1 mét trên thực tế. Mặt ngoài của một tòa nhà cao tầng được xem là một phần của mặt phẳng (P) thẳng đứng, đi qua hai điểm $C(10; 50; 0)$ và $D(30; 10; 0)$.



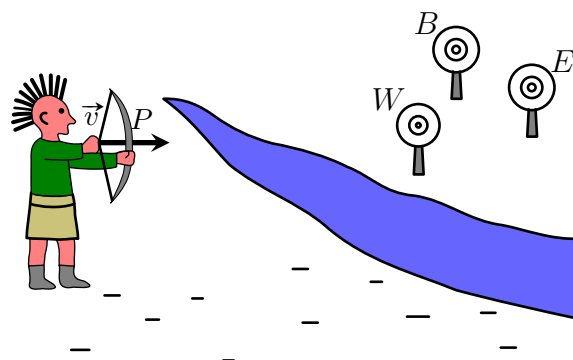
Vị trí giao hàng là điểm B nằm trên mặt phẳng (P) . Drone bắt đầu bay từ kho hàng tại gốc tọa độ $O(0; 0; 0)$. Ban đầu, nó bay theo một đường thẳng đến vị trí $A(30; 40; 120)$. Từ vị trí A , drone thay đổi đường bay, di chuyển theo phương vuông góc với mặt phẳng (P) đến vị trí giao hàng B . Tính khoảng cách từ O đến B (làm tròn đến hàng đơn vị).

KQ:

Câu 25 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, với mỗi đơn vị tương ứng 1 dm. Một cung thủ ngắm từ điểm $P(0; 0; 15)$ theo hướng của vectơ $\vec{v} = (-1; 3; 0,5)$ để bắn trúng một trong ba bia được đặt trên vùng núi.

Tọa độ các bia:

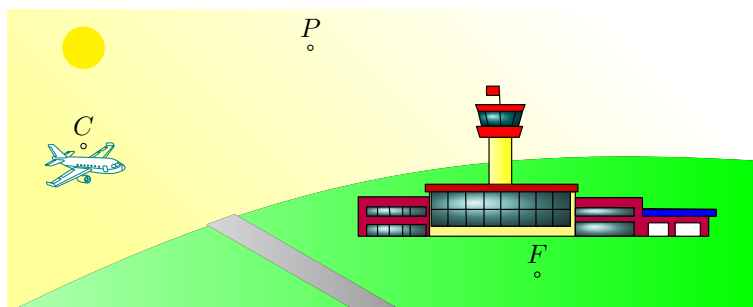
- ♦ Bia gấu: $B(-155; 465; 85)$.
- ♦ Bia sói: $W(-155; 465; 92,5)$.
- ♦ Bia nai: $E(-160; 640; 95)$.



Giả sử mũi tên bay theo đường thẳng, tính vận tốc của mũi tên là bao nhiêu m/s, nếu thời gian bay là 1 s (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

KQ:

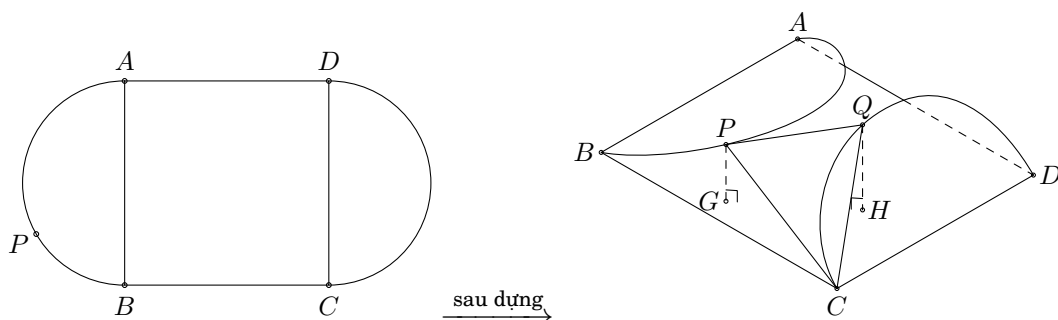
Câu 26 Xét trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ với đơn vị trên mỗi trục là kilômet, máy bay Beta đang bay tới điểm $C(10; -10; 5)$ theo hướng của vectơ $\vec{v} = (-2; 2; -1)$. Khi đến C máy bay Beta nhận lệnh từ đài kiểm soát bay đổi hướng bay theo hướng của vectơ $\vec{w} = (-5; 4; -1)$. Ở điểm P có độ cao 1000 m, máy bay Beta sẽ thực hiện một lần đổi hướng cuối cùng theo hướng của vectơ $\vec{u}$ để hạ cánh xuống sân bay $F(-12; 7; 0)$ nằm trên mặt phẳng (Oxy) . Cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{w}$ bằng bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



KQ:



Câu 27 Cho tờ giấy có hình dạng như sau: một hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 8, ở hai cạnh đối diện AB và CD lần lượt gắn hai nửa đường tròn có đường kính là mỗi cạnh ấy. Trên cung tròn AB lấy 2 điểm chia thành ba đoạn bằng nhau, lấy điểm gần B là P . Trên cung tròn CD , lấy điểm Q chia cung tròn CD thành hai đoạn bằng nhau. Gấp tờ giấy lên theo hai đường thẳng AB và CD sao cho hai nửa đường tròn dựng đứng (cùng phía) lên khỏi mặt phẳng $ABCD$. Khi đó, từ hai điểm P và Q ta hạ các đường vuông góc xuống mặt phẳng ($ABCD$) được các hình chiếu là G và H .



Người ta cho biết G và H nằm bên trong hình vuông $ABCD$ sao cho $PG = \sqrt{3}$; $QH = 2\sqrt{3}$. Gọi θ là góc giữa mặt phẳng (PCQ) và mặt phẳng $(ABCD)$. Hỏi giá trị của $70\cos^2\theta$ bằng bao nhiêu?

KQ:

Câu 28 Một tàu ngầm nghiên cứu bị mất tích. Được hai tàu trên mặt biển tìm kiếm phát hiện tàu ngầm cùng lúc.

- ◆ Tàu 1 phát hiện tàu ngầm theo hướng của vectơ $\vec{v}_1 = (-1; 3; -1)$.
- ◆ Tàu 2 phát hiện tàu ngầm cùng lúc theo hướng của vectơ $\vec{v}_2 = (4; 2; -1)$.

Tàu 1 ở vị trí $P(6; 2; 0)$, còn tàu 2 ở vị trí $Q(-4; 4; 0)$ đang neo đậu. Bốn phút sau, các tàu lại đo hướng và xác định rằng tàu ngầm hiện đang ở vị trí $B(6; 10; -1)$ (1 đơn vị độ dài = 100 m).

Tàu ngầm tiếp tục di chuyển thẳng từ B cho đến khi nổi lên mặt nước (tức $z = 0$). Tại thời điểm xác định vị trí B , một trực thăng rời khỏi tàu 1, bay thẳng đứng lên tới độ cao 1100 m (vị trí R), rồi hướng thẳng tới vị trí nổi W của tàu ngầm. Vận tốc của trực thăng là 20 m/s. Tính thời gian bay của trực thăng để đến W là bao nhiêu giây?

KQ:

Câu 29 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai lớp kính lần lượt là hai mặt phẳng có phương trình $(\alpha): 2x - 2y - z + 3\sqrt{3} = 0$, $(\beta): -4x + 4y + 2z + 12\sqrt{3} = 0$. Một nguồn sáng được chiếu vào hai tấm kính là tập hợp các đường thẳng có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; 1; 1)$ và đi qua các điểm $M(3; 0; 0)$, $N(1; 1; 1)$ và $P(3; 5; -5)$. Biết rằng các giao điểm của các đường thẳng nói trên với hai tấm kính (α) và (β) là 6 đỉnh của một khối đa diện. Thể tích V của khối đa diện tạo bởi 6 điểm đó có kết quả là $a\sqrt{b}$ với a, b nguyên dương và b là số nguyên tố. Tính giá trị của $a + b$.

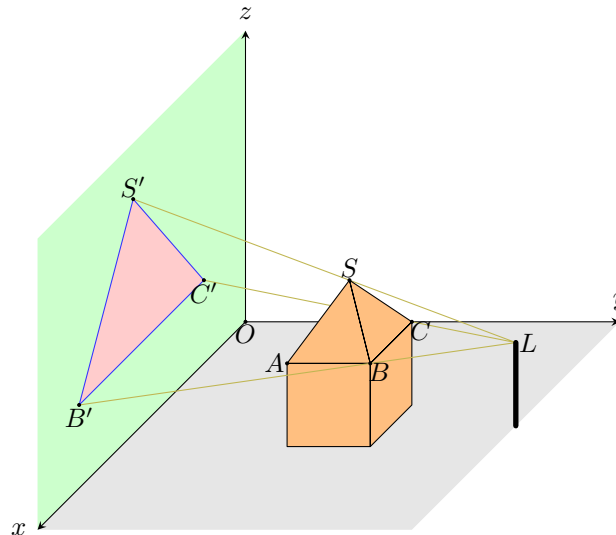
KQ:

Câu 30 Trong không gian $Oxyz$, có 3 diễn viên xiếc nhào lộn đang ở 3 vị trí $A(1; -2; 3)$, $B(3; 4; 1)$, $C(-5; 2; 1)$. Gọi (α) là một mặt phẳng lưới bảo hộ di động luôn chứa trục hoành

sao cho $A; B; C$ nằm cùng phía với (α) và $d_1; d_2; d_3$ lần lượt là khoảng cách từ $A; B; C$ đến (α) . Tiết mục xiếc sẽ được bắt đầu khi mặt phẳng (α) được điều chỉnh để biểu thức $T = d_1 + 2d_2 + 3d_3$ đạt giá trị lớn nhất. Biết T lớn nhất bằng $a\sqrt{b}$ (với $a \in \mathbb{N}; b$ là số nguyên tố). Hãy tính $S = a + b$.

KQ:

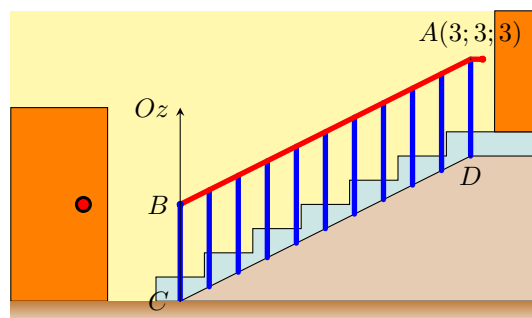
Câu 31 Trong một cảnh dựng phim có một ngôi nhà, mái nhà là một hình chóp tứ giác đều với đáy là hình vuông có các đỉnh $A(6; 4; 2), B(6; 6; 2), C(4; 6; 2), D(4; 4; 2)$ và đỉnh chóp là S . Chiều cao của hình chóp mái là 2 m.



Một đèn chiếu tại $L(5; 10; 2)$ chiếu sáng ngôi nhà từ phía bên phải. Trong mặt phẳng xOz có một tấm màn, trên đó sẽ xuất hiện bóng của ngôi nhà. Biết rằng các đỉnh B, C và S có các điểm chiếu lần lượt là B' và C' và S' . Tính $S'B' + S'C'$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

KQ:

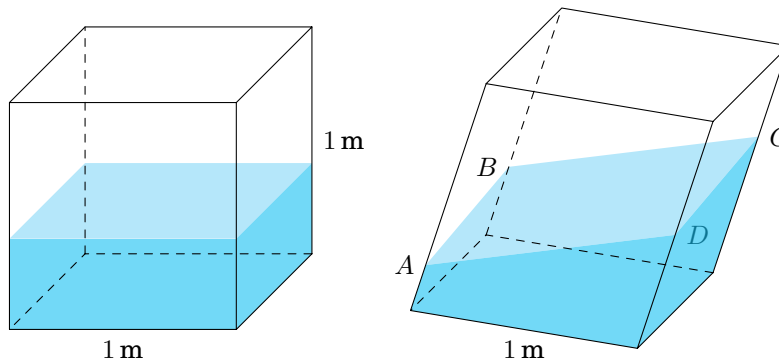
Câu 32 Một kĩ sư đang thiết kế cầu thang (như hình dưới) bao gồm phần cầu thang, phần tay vịn, trụ trên và trụ dưới tạo thành một hình bình hành. Giả sử trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên các trục tương ứng với 1 m), mặt đất là mặt phẳng có phương trình $z = 0$, trụ dưới trùng với trục Oz và điểm nối giữa tay vịn và trụ trên là điểm $A(3; 3; 3)$. Biết đường thẳng chứa tay vịn có vectơ chỉ phương là $\left(1; 1; \frac{3}{2}\right)$. Hỏi chiều dài tay vịn là bao nhiêu mét? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



KQ:

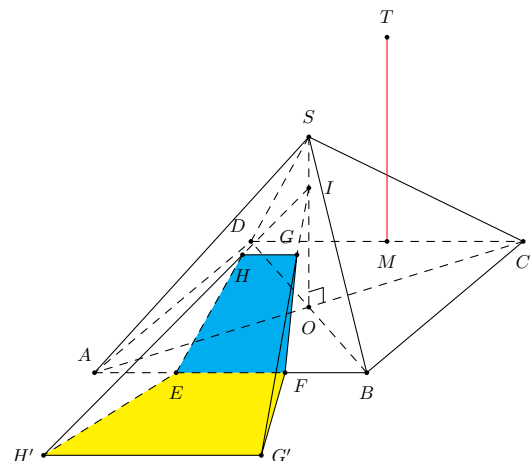


Câu 33 Trong một bể hình lập phương cạnh 1 m có chứa một ít nước. Người ta đặt đáy bể nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang. Biết rằng, lúc đó mặt nước có dạng hình bình hành $ABCD$ và khoảng cách từ các điểm A, C đến đáy bể tương ứng là 25 cm, 75 cm. Tìm khoảng cách từ điểm B đến mặt đáy bể khi góc giữa mặt nước và mặt đáy bể đạt giá trị nhỏ nhất (đơn vị tính là cm).



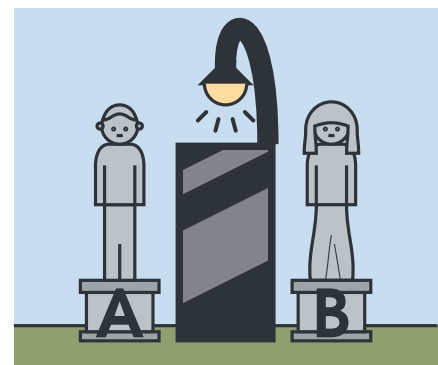
KQ:

Câu 34 Một cái lều có dạng hình chóp tứ giác đều, cạnh đáy rộng 8 m và chiều cao 3 m. Cửa vào là hình thang $EFGH$ trong đó đoạn $AE = FB$ với $EF = 4$ m; G và H lần lượt là trung điểm của các đoạn ES và FS . Một nguồn sáng đặt cách đỉnh S một mét ở phía dưới. Ánh sáng chiếu ra ngoài qua cửa vào, tạo thành một vùng được chiếu sáng $EFG'H'$. Ở giữa cạnh sau CD của lều có gắn một camera trên một cột thẳng đứng. Camera phải đặt ở độ cao ít nhất là bao nhiêu mét để quan sát được điểm K là trung điểm của $H'G'$?



KQ:

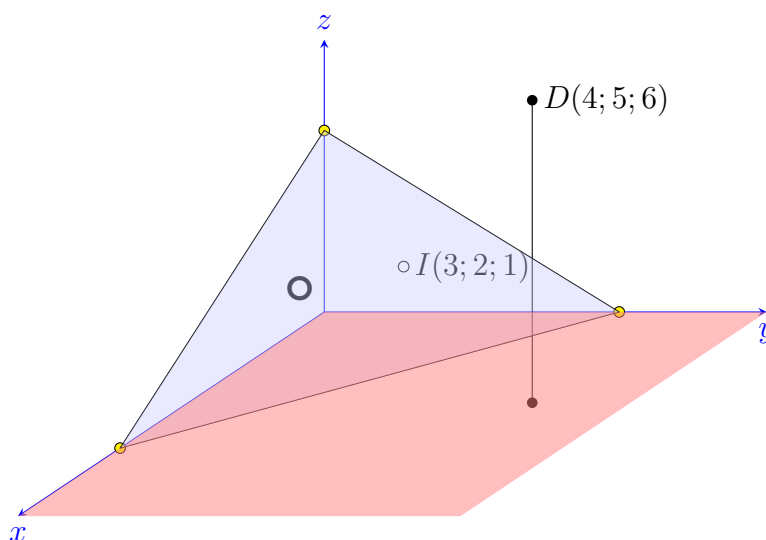
Câu 35 Trong một quảng trường, có hai bức tượng nghệ thuật được đặt cố định tại các vị trí $A(1; 2; -1)$ và $B(-2; 1; 0)$. Một trụ đèn chiếu sáng thông minh được lắp đặt trên một tấm kính lớn cố định, có phương trình $(P): x - 2y + z + 4 = 0$. Gọi tọa độ điểm đặt trụ đèn là $M(a; b; c)$.



Để tạo hiệu ứng ánh sáng đối xứng hoàn hảo giữa hai bức tượng, qua tính toán người thiết kế yêu cầu trụ đèn phải cách đều hai điểm A và B sao cho $MA^2 = MB^2 = 2,75$. Tính giá trị của $a + b + c$.

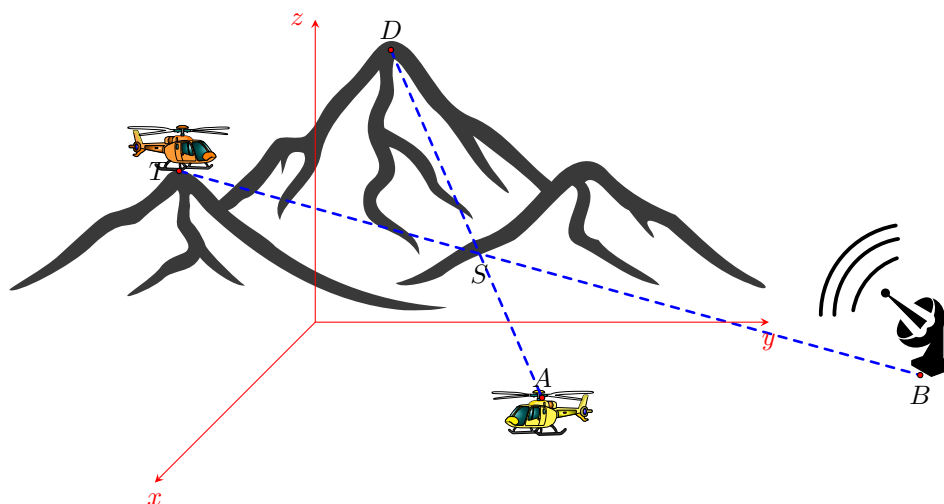
KQ:

Câu 36 Một nhóm chuyên gia đang nghiên cứu dựng một tấm kính cường lực hình tam giác để đặt vào một góc tường. Biết ba mặt của góc tường đôi một vuông góc và giao tuyến của chúng lần lượt là các tia Ox , Oy , Oz sao cho (Oxy) trùng với mặt phẳng sàn nhà, mỗi đơn vị trong hệ trục tọa độ ứng với 1m thực tế. Mặt phẳng kính luôn đi qua điểm I , điểm này cách các mặt phẳng (Oxy) , (Oyz) , (Oxz) lần lượt là 1 m, 3 m, 2 m. Khi khoảng cách từ chiếc đèn có tọa độ $D(4; 5; 6)$ tới mặt phẳng kính lớn nhất, tính diện tích tấm kính cường lực theo m^2 (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)?



KQ:

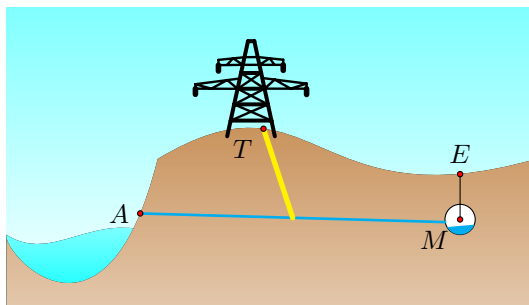
Câu 37 Trực thăng cứu hộ Alpha cất cánh lúc 10 giờ 00 từ điểm xuất phát Adlerhorst $A(10; 6; 0)$. Nó bay thẳng với vận tốc 300 km/h tới đỉnh núi Mount Devil $D(4; -3; 3)$, nơi xảy ra tai nạn. (Tọa độ tính bằng km). Cùng lúc đó, trực thăng Beta cất cánh từ đỉnh núi Tempelberg $T(7; -8; 3)$ để đưa du khách về điểm $B(4; 16; 0)$, vận tốc của nó là 350 km/h. Người ta chứng minh được rằng hai trực thăng có đường bay giao nhau tại S . Khi Alpha tới S thì Beta đã đi qua trước đó một khoảng thời gian (tính bằng giây), hãy tìm khoảng thời gian đó? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



KQ:

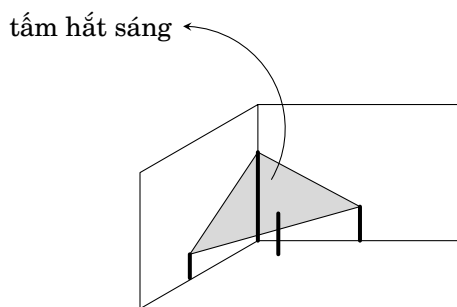


Câu 38 Tại các vị trí M có một hồ chứa nước (để trữ nước sau đó hút nước đưa lên mặt đất tại điểm E). Một kênh trần k dẫn nước từ M đến A . Từ điểm T trên mặt đất, một mũi khoan thông khí b được khoan theo hướng của vectơ $\vec{v} = (1; 1; -4)$ (1 đơn vị = 100 m). Các tọa độ $M(8; 12; -6)$, $A(11; 0; -9)$, $T(8; 2; 0)$. Hỏi chiều dài mũi khoan cần là bao nhiêu mét? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



KQ:

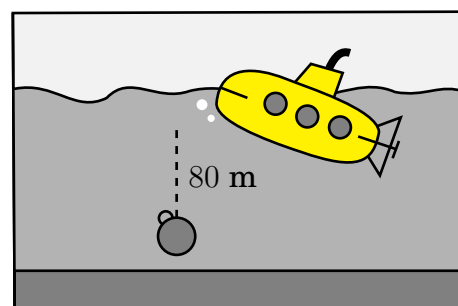
Câu 39 Trong hoạt động quay phim và chụp ảnh chuyên nghiệp, tấm hắt sáng là một công cụ không thể thiếu. Một ê-kíp nhận dự án chụp hình cho một căn hộ phục vụ cho mục đích quảng cáo. Tấm hắt sáng được đặt trên một bề mặt gỗ mỏng hình tam giác, mỗi đỉnh của mặt gỗ đặt trên một chiếc cọc lần lượt cao 2 m, 1 m và 0,5 m. Cọc cao nhất đặt ở góc tường, cọc cao 1 m sẽ đặt ở tường sau nhà, cách tường trái 2 m, cọc còn lại đặt ở tường bên trái, cách tường sau 1 m. Để đảm bảo sự chắc chắn, người ta chống một chiếc cọc vuông góc mặt đất và đỡ phía dưới mặt gỗ, cách mỗi bức tường 0,5 m (*chân cọc chống đỡ ở mặt đất*).



Hỏi chiếc cọc chống đỡ này có chiều dài bao nhiêu mét?

KQ:

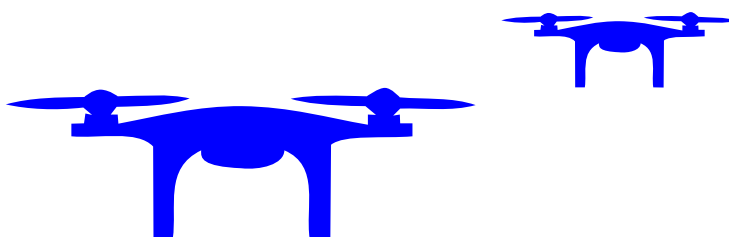
Câu 40 Xét trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ với đơn vị trên mỗi trục là mét, một tàu ngầm bắt đầu lặn tại điểm $P(100; 200; 0)$ với vận tốc $v_1 = 11,1$ hải lí/giờ hướng thẳng đến mục tiêu $Z(500; 600; -80)$ ở độ sâu 80 m. Sau đó, tàu tiếp tục di chuyển ngang hướng theo vectơ $\vec{u} = (1; 1; 0)$ với vận tốc $v_2 = 11$ hải lí/giờ.



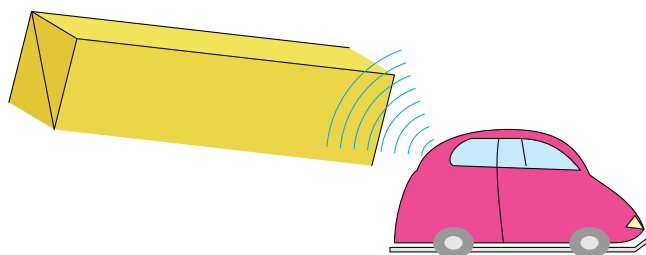
Cùng thời điểm tàu ngầm bắt đầu lặn, một quả cầu T được thả từ tàu nghiên cứu ở tọa độ $S(700; 800; 0)$ và rơi thẳng đứng xuống với vận tốc $0,5 \text{ m/s}$. Khoảng cách giữa tàu ngầm với quả cầu khi tàu ngầm đi đến thẳng dưới S bằng bao nhiêu, biết 1 hải lý bằng $1,852 \text{ km}$? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

KQ:

Câu 41 Khi khắc phục hậu quả của thiên tai, bão lũ, một trong những giải pháp nhằm tiếp tế hàng cứu trợ đến những nơi khó tiếp cận là sử dụng flycam để xác định vị trí chính xác của người cần cứu trợ, sau đó sử dụng drone để vận chuyển các vật dụng thiết yếu thả xuống cho người này, giúp họ có thể cầm cự trong khi chờ đợi lực lượng cứu hộ đến nơi. Hai chiếc drone làm nhiệm vụ chuyển hàng cứu trợ bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất bay đến điểm cách điểm xuất phát $2,5 \text{ km}$ về phía nam và $1,5 \text{ km}$ về phía đông, đồng thời cách mặt đất 60 m . Chiếc thứ hai bay đến điểm cách điểm xuất phát 3 km về phía bắc và $2,5 \text{ km}$ về phía tây, đồng thời cách mặt đất 40 m . Trong không gian, xét hệ tọa độ $Oxyz$ với gốc tọa độ O đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc drone, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất (được coi là mặt phẳng). Giả sử trong trường hợp khẩn cấp cần tìm một vị trí trên mặt đất để tiếp nhiên liệu và các vật dụng cứu trợ cho hai drone sao cho tổng khoảng cách từ vị trí tiếp nhiên liệu tới hai drone nhỏ nhất. Vị trí cần tìm cách gốc tọa độ $a \text{ km}$ theo hướng bắc và $b \text{ km}$ theo hướng tây. Khi đó $a + b$ bằng bao nhiêu?

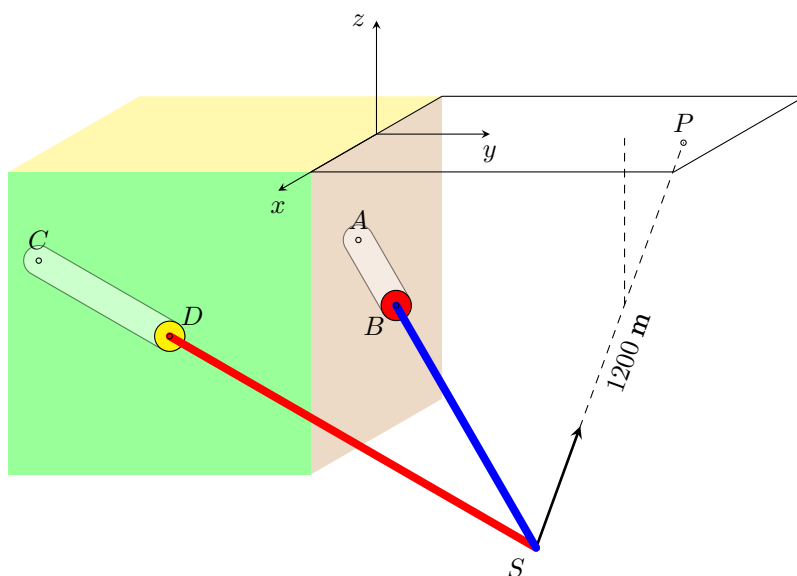
KQ: **Câu 42**

Khi phát triển hệ thống hỗ trợ đỗ xe ô tô, các nhà nghiên cứu sinh học đã sao chép hệ thống định vị của loài dơi và tích hợp các cảm biến tương ứng vào cán sau của xe. Các cảm biến được cài đặt sao cho chúng sẽ phát tín hiệu khi khoảng cách đến vật cản nhỏ hơn $3,05 \text{ m}$. Một người lái xe đang lùi thẳng về phía một mặt phẳng nghiêng, được cho bởi phương trình mặt phẳng có phương trình là $(E): 6x + 2y + 3z = 49$. Xác định được điểm $R(a; b; c)$ trên đoạn PQ , trong đó $P(6; 3; 1)$ và $Q(6; 4; 1)$ mà tại đó cảm biến bắt đầu báo động. Tính $a - b + c$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

KQ:

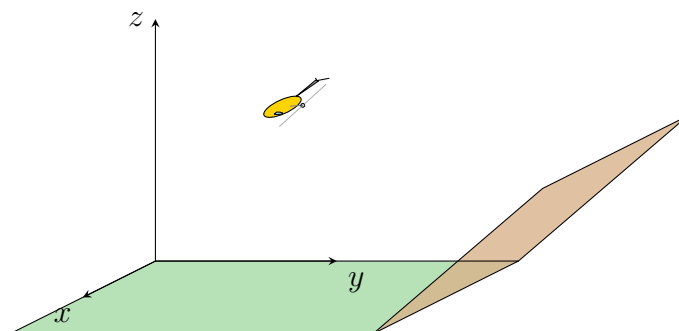


Câu 43 Xét trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ với đơn vị trên mỗi trục là 100 m, người ta đào từ điểm $A(-7; -3; -8)$ qua điểm $B(-2; 0; -9)$ một đường hầm thẳng xuyên núi có tên là Kuckucksloch. Tương tự, từ điểm $C(4; -6; -6)$ đến điểm $D(7; -1; -8)$ một đường hầm thẳng tên là Morgenstern cũng sẽ được xây dựng. Sau khi khoan xong 2 đường hầm sẽ gặp nhau tại điểm S . Từ điểm S , đường hầm Kuckucksloch tiếp tục đào theo hướng vectơ $\vec{v} = (2; 1; 2)$ cho đến khi đến điểm P trên mặt đất mà đường hầm sẽ chạm tới. Trên đoạn SP , cách P một khoảng 1200 m sẽ đào một lối thoát hiểm thẳng đứng. Độ sâu cần đào của lối thoát hiểm bằng bao nhiêu mét, biết mặt đất là mặt phẳng (Oxy) ?



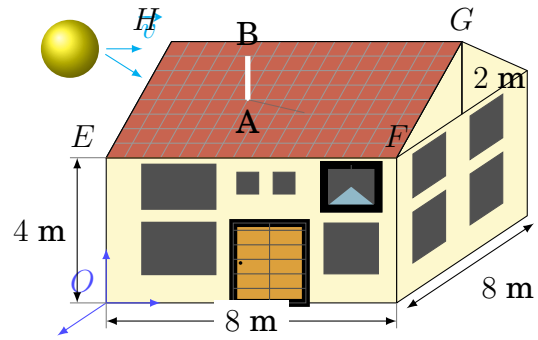
KQ: 

Câu 44 Một chiếc trực thăng bay trong điều kiện tầm nhìn kém tiến về phía một sườn núi dốc lên, được mô tả bởi các điểm $P(0; 5; 0)$, $Q(5; 10; 2)$, $R(10; 10; 2)$ Trực thăng bay qua các điểm $A(1; 6; 1)$ và $B(2; 7; 1)$ (đơn vị km). Nếu trực thăng tiếp tục giữ nguyên hướng bay hiện tại, sẽ va vào sườn núi. Vì thế để tránh tai nạn, tại điểm B phi công giữ nguyên hướng theo phương $x - y$ nhưng bay lên với góc nâng sao cho đường bay song song với sườn núi. Tính góc mà phi công đã thay đổi hướng bay tại điểm B (làm tròn kết quả đến hàng phần mười, đơn vị độ)



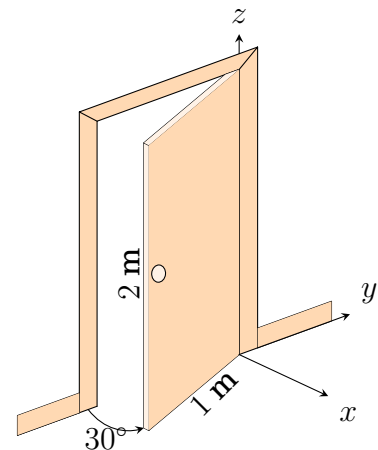
KQ: 

Câu 45 Cho ngôi nhà như hình bên phải (các kích thước tính theo mét). Một ăng-ten trên mái nhà có hai điểm đầu mút $A(-2; 2; 5)$, $B(-2; 2; 6)$. Chiều ánh sáng song song theo hướng của vectơ $\vec{v} = (2; 8; -3)$ vào ăng-ten, bóng của ăng-ten sẽ đổ xuống mặt phẳng mái $EFGH$. Chiều dài bóng của ăng-ten trên mái nhà bằng bao nhiêu mét? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.)



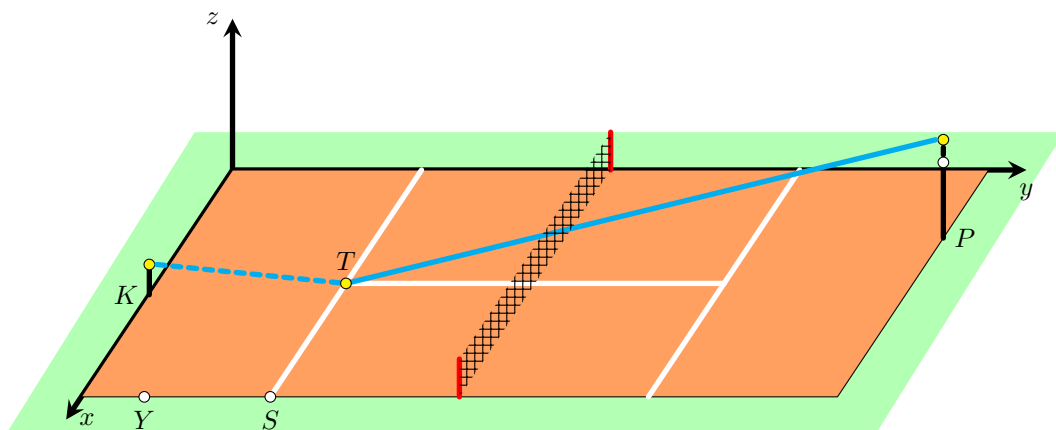
KQ:

Câu 46 Hình ảnh bên minh họa một cánh cửa hình chữ nhật có chiều rộng 1 m và chiều cao 2 m khi đang mở. Chọn hệ tọa độ như hình vẽ, biết cánh cửa tạo với bức tường một góc 30° , bờ tường vuông góc với mặt sàn. Bỏ qua bề dày của cánh cửa thì phương trình mặt phẳng chứa cánh cửa là $x + by + cz + d = 0$. Tính giá trị $9b^2 + 3c^2 + d$.



KQ:

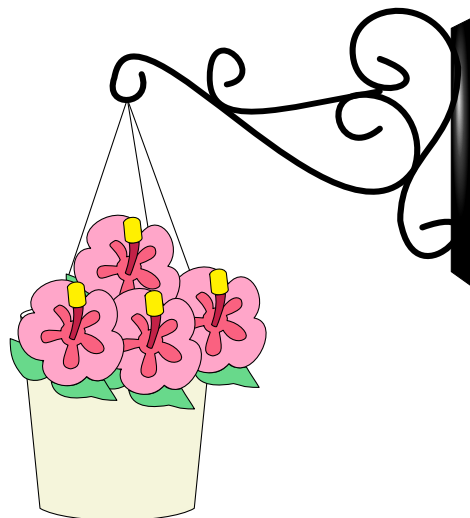
Câu 36 Sân quần vợt được mô hình hóa lý tưởng, có chiều dài 24 m và chiều rộng 10 m. Các ô giao bóng dài 6 m và rộng 5 m. Lưới cao liên tục 1 m. Mọi cú đánh đều bay theo đường thẳng.



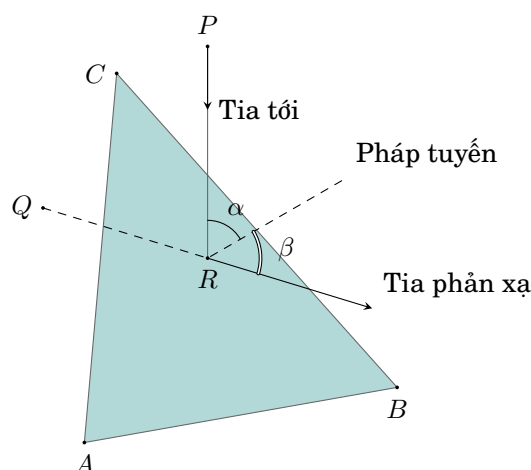
Một vận động viên đứng ở vạch cuối sân tại điểm $P(3; 24; 0)$ và cố gắng đánh quả bóng với vận tốc 144 km/h ở độ cao 3,10 m sao cho bóng rơi đúng vào điểm $T(5; 6; 0)$ của ô giao bóng. Sau khi chạm đất, bóng phản xạ theo góc α (giữ nguyên vận tốc, không đổi hướng ngang). Tại vị trí K trên vạch cuối sân bên kia đối thủ sẽ đánh trả, hãy tính thời gian đối thủ có để phản ứng là bao nhiêu giây? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

KQ: 

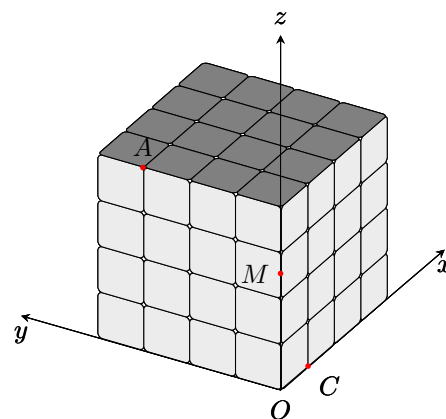
Câu 47 Để treo một chậu cây người ta cần lấy trên miệng của chậu cây đó 3 điểm và sử dụng 3 đoạn dây có độ dài bằng nhau để nối 3 điểm đó với một điểm treo (xem hình minh họa). Giả sử trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, ba điểm trên miệng của chậu cây là $A(0; 1; 2)$, $B(2; -2; 1)$, $C(-2; 0; 1)$; điểm treo $M(a; b; c)$ nằm trên mặt phẳng $(\alpha): 2x + 2y + z - 3 = 0$. Bình phương khoảng cách từ điểm M đến gốc tọa độ O bằng bao nhiêu?

KQ: 

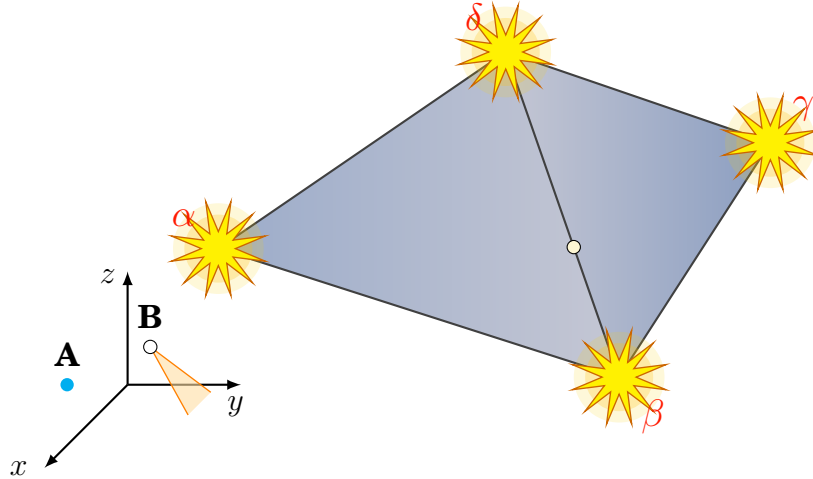
Câu 48 Trong hệ tọa độ $Oxyz$, các điểm $A(4; 0; 0)$, $B(0; 4; 0)$ và $C(0; 0; 4)$ xác định một tam giác ABC . Tam giác ABC trong mô hình đại diện cho một tấm gương. Điểm $P(2; 2; 3)$ đại diện cho vị trí của nguồn sáng, từ đó phát ra một tia sáng. Hướng của tia sáng này trong mô hình được biểu diễn bởi vectơ $\vec{v} = (-1; -1; -4)$. Tia sáng tới gương bị phản xạ lại và đi qua một điểm có tọa độ là $(5; a; b)$, tính $T = a^2 + b^2$.

KQ: 

Câu 49 Một khối rubik 4×4 được gắn với hệ tọa độ $Oxyz$ có đơn vị trên mỗi trục bằng độ dài cạnh hình lập phương nhỏ như hình vẽ. Một con kiến đang ở điểm A trên khối rubik muốn bò trên bề mặt khối rubik để đi đến điểm C . Biết rằng con kiến di chuyển theo các đoạn thẳng từ A đến $M(0; 0; m)$ rồi từ M đến C . Khi đường di chuyển của con kiến là ngắn nhất thì giá trị $m^2 + 670m + 5$ bằng bao nhiêu? (Xem như các kẽ hở trên khối rubik là không đáng kể).

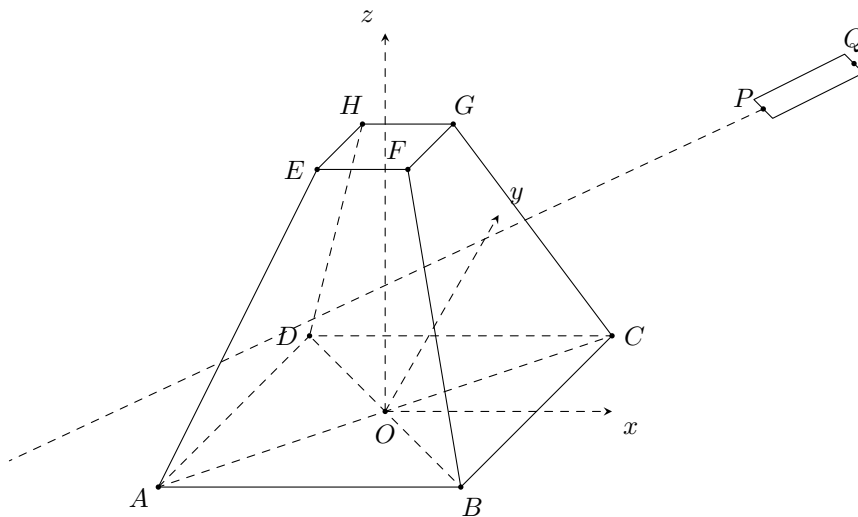
KQ: 

Câu 50 Bốn ngôi sao $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tạo thành một vùng không gian hình chóp tứ giác. Tọa độ các ngôi sao là $\alpha(4; 4; 8)$, $\beta(0; 20; 0)$, $\gamma(-16; 16; 4)$, $\delta(-8; 12; 12)$, một sao chổi bay theo đường thẳng qua hai điểm $A(10; 3; 1)$ và $B(4; 7; 3)$. Người ta thấy rằng sao chổi đi vào vùng không gian tại điểm S thuộc tam giác $\triangle\alpha\beta\gamma$ và tại đó sao chổi rời khỏi vùng không gian hình chóp này tại điểm T . Tính độ dài đường đi ST bằng bao nhiêu km (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị). (1 đơn vị = 1 000 (km)).



KQ:

Câu 51 Một khối thép không gỉ có dạng hình chóp cắt tứ giác đều. Độ dài cạnh đáy lớn 8 cm. Độ dài cạnh đáy nhỏ 4 cm. Chiều cao 8 cm.

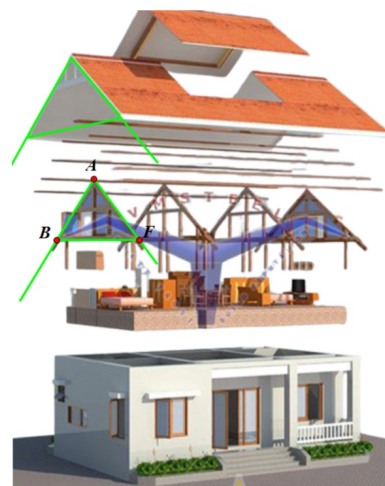


Gốc tọa độ $O(0; 0; 0)$ đặt tại tâm đáy lớn. Tia laser khoan theo đoạn PQ với $P(-3,5; 9,5; 6)$ $Q(-6; 16; 8)$. Tính độ dài kênh khoan biết đầu vào nằm trong mặt $CDHG$ và đầu ra nằm trong mặt $ABFE$.

KQ:

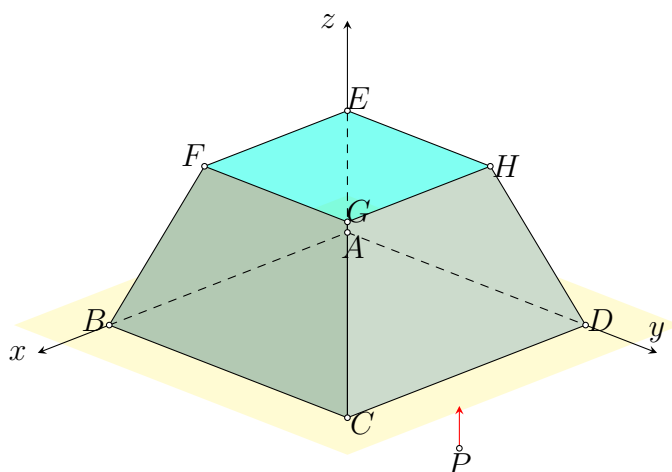


Câu 52 Một kỹ sư thiết lập một hệ tọa độ $Oxyz$ để theo dõi vị trí lắp đặt của 2 mái nhà đã được gắn với nhau tạo thành hình chữ V vào các thanh dầm sao cho chuẩn xác nhất. Biết phương trình mặt phẳng chứa 2 mái là $(P): x + 2y - 2z + 6 = 0$ và $(Q): x + 2y + z - 5 = 0$, điểm A là nóc ngói, 2 điểm B, F là rìa đuôi ngói của mỗi mái tiếp xúc giữa mái và thanh dầm như hình vẽ (các thanh dầm dài như nhau) khi cố định phần dưới của ngôi nhà. Khoảng cách $BF = 20$ m, khi đó tỉ số độ dài của thanh dầm AF và khoảng cách BF bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai)?



KQ:

Câu 53 Cho các điểm $A(0; 0; 0)$, $B(12; 0; 0)$, $C(12; 12; 0)$ và $D(0; 12; 0)$ là các đỉnh của đáy hình chóp cắt bằng kính (xem hình bên). Các đỉnh của mặt trên là $E(2; 2; 3)$, $F(10; 2; 3)$, $G(10; 10; 3)$ và $H(2; 10; 3)$. Tại điểm $P(14; 20; 0)$ đặt một tia laser bắn theo hướng vectơ $\vec{v} = (-3; -3; 0, 5)$. Tia laser sẽ cắt mặt phẳng (CDH) tại điểm $T(a; b; c)$, Tính $a + b + 2c$.



KQ:

Câu 54 Trong không gian $Oxyz$, một bức tường hình chữ nhật $ABCD$ có chiều cao 3 m được dựng vuông góc với mặt phẳng (Oxy) với hai điểm $A(3; 1; 0)$ và $B(1; 4; 0)$. Giả sử rằng mặt phẳng (Oxy) là mặt đất, trục Oz hướng lên trên và mỗi đơn vị trên hệ thống ứng với 1 m. Một trạm phát sóng được đặt tại điểm $M(5; 6; 5)$. Trạm phát sóng phát ra các sóng thẳng và truyền mọi hướng nhưng khi gặp bức tường thì bị chặn lại vì có một vùng sau bức tường không có sóng. Một chất điểm bắt đầu chuyển động thẳng đều trong mặt phẳng (Oxy) từ điểm $N(-6; -4; 0)$ qua gốc tọa độ đến chân tường với vận tốc 0,8 m/s. Tính thời gian theo giây từ lúc chất điểm bắt đầu đi vào vùng mất sóng đến lúc chất điểm chạm vào chân tường và quay về vị trí ban đầu, giả thiết độ dày của bức tường không đáng kể (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

Câu 55 Một tàu ngầm nghiên cứu bị mất tích. Được hai tàu trên mặt biển tìm kiếm phát hiện tàu ngầm cùng lúc.

- ◆ Tàu 1 phát hiện tàu ngầm theo hướng của vectơ $\vec{v}_1 = (-1; 3; -1)$.
- ◆ Tàu 2 phát hiện tàu ngầm cùng lúc theo hướng của vectơ $\vec{v}_2 = (4; 2; -1)$.

Tàu 1 ở vị trí $P(6; 2; 0)$, còn tàu 2 ở vị trí $Q(-4; 4; 0)$ đang neo đậu.

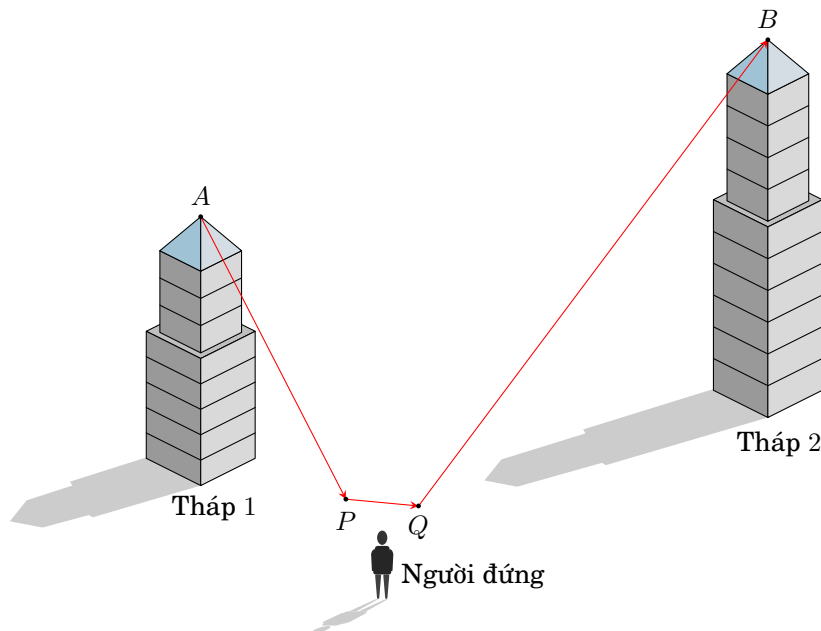
Bốn phút sau, các tàu lại đo hướng và xác định rằng tàu ngầm hiện đang ở vị trí $B(6; 10; -1)$ (1 đơn vị độ dài = 100 m). Tàu ngầm tiếp tục di chuyển thẳng từ B cho đến khi nổi lên mặt nước (tức $z = 0$). Tại thời điểm xác định vị trí B , một trực thăng rời khỏi tàu 1, bay thẳng đứng lên tới độ cao 1100 m (vị trí R), rồi hướng thẳng tới vị trí nổi W của tàu ngầm. Vận tốc của trực thăng là 20 m/s. Tính thời gian bay của trực thăng để đến W là bao nhiêu giây?

KQ:

Câu 56 Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét, một thiết bị phát tia laser được đặt tại điểm $A(4; 5; 12)$. Thiết bị này chiếu một tia sáng về phía bức tường phẳng trùng với mặt phẳng tọa độ (Oyz) . Biết rằng tia sáng phát ra luôn thay đổi nhưng luôn tạo với trục Ox một góc 45° . Gọi M là vị trí vết sáng laser chiếu lên bức tường. Khoảng cách lớn nhất từ vết sáng M đến gốc tọa độ O bằng bao nhiêu mét?

KQ:

Câu 57 Một nhân viên cứu hộ đứng ở mặt đất, điều khiển một drone chở vật tư y tế, dự kiến bay thẳng từ đỉnh A của tháp thứ nhất đến đỉnh B của tháp thứ hai. Tuy nhiên, do gặp một khu vực nhiễu sóng an ninh nên drone phải bay thẳng từ A đến một điểm P trên mặt đất để hạ cánh. Nhân viên đó mang drone từ điểm P dọc theo hướng Tây 40 m đến điểm Q và sau đó drone bay thẳng từ điểm Q lên đỉnh B của tháp thứ hai (hình vẽ). Biết đỉnh A cao 100 m và có hình chiếu lên mặt đất cách vị trí người đứng ban đầu 200 m về phía Đông và 100 m về phía Nam. Đỉnh B cao 300 m và có hình chiếu lên mặt đất cách vị trí người đứng ban đầu 140 m về phía Tây và 200 m về phía Nam.

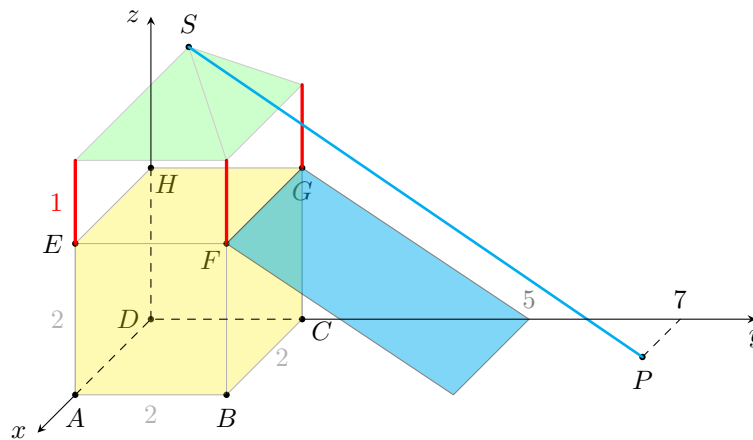


Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc tại vị trí người đứng ban đầu, mặt phẳng (Oxy) là mặt đất, trục Ox hướng Đông, trục Oy hướng Nam và trục Oz hướng thẳng đứng lên trên (đơn vị trên các trục là 100 m). Để hoàn thành nhiệm vụ, người đó chọn vị trí điểm $P(a; b; c)$ trên mặt đất sao cho tổng quãng đường bay là ngắn nhất. Giá trị của biểu thức $S = 2a + 4b + c$ bằng bao nhiêu?

KQ:



Câu 58 Tháp gồm một khối lập phương, trên đó gắn thêm một khung hộp chữ nhật, và phía trên là một khối chóp tứ giác đều. Tại độ cao bằng chiều cao khối lập phương, có gắn một mặt phẳng trượt hình chữ nhật (xem hình, các kích thước tính bằng mét).

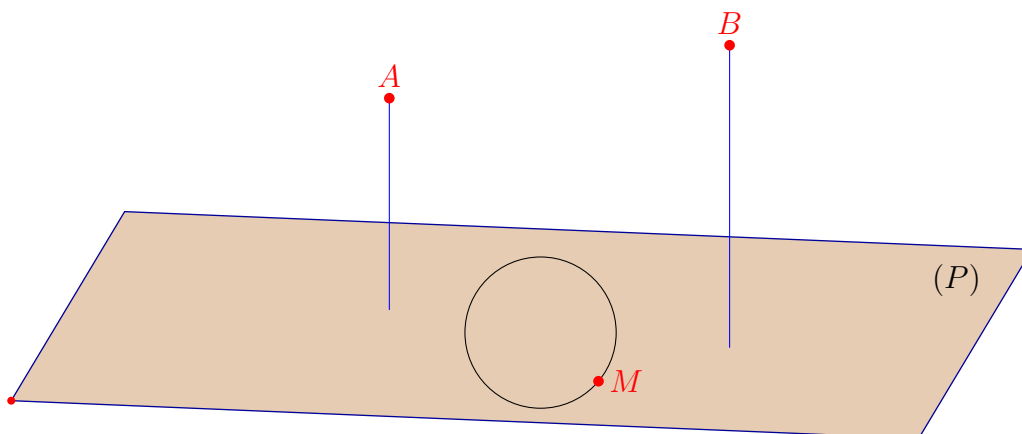


Từ đỉnh S có buộc một sợi dây xuống điểm $P(1; 7; 0)$ làm dây leo.

Trên mặt phẳng trượt, có một đĩa trẻ đứng thẳng tại vị trí chính giữa tấm trượt và với thẳng tay (vuông góc với mặt đất) nắm được dây leo. Tính chiều cao tay vịn của đĩa trẻ tính từ mặt đất.

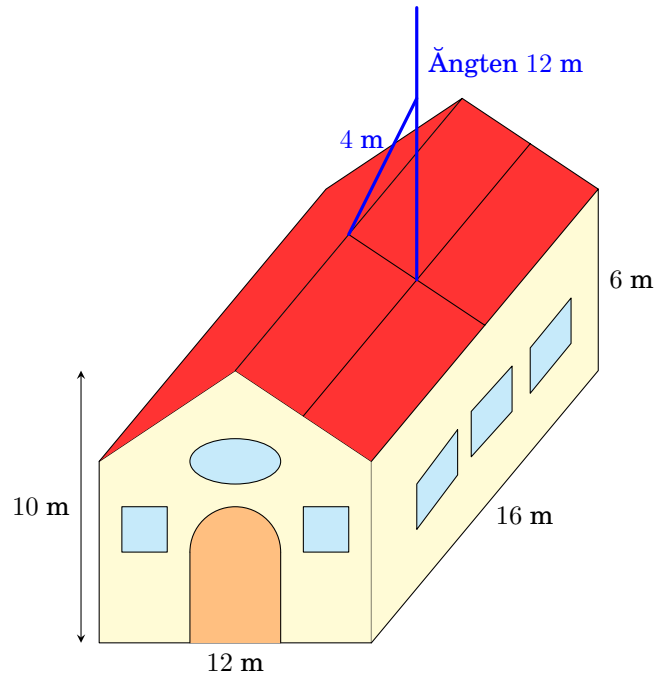
KQ:

Câu 59 Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị độ dài trên mỗi trục tính là mét), một vườn hoa nằm trên mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 12 = 0$. Có hai bóng đèn chiếu sáng cố định được đặt tại các điểm $A(40; -40; 12)$, $B(-40; 50; 38)$. Để đảm bảo kĩ thuật chiếu sáng, các kỹ sư muốn thiết kế trên mặt vườn một đường ray để lắp đặt một đèn chiếu sáng M di động trên đường ray ấy. Yêu cầu kĩ thuật đặt ra là góc tạo bởi MA với mặt vườn và góc tạo bởi MB với mặt vườn phải luôn bằng nhau. Độ dài đường ray là bao nhiêu mét (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?



KQ:

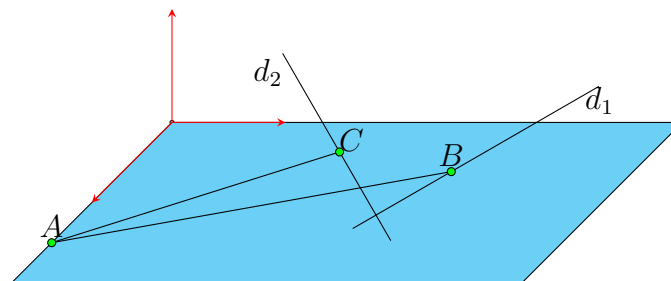
Câu 60 Chính giữa mặt bên phải của mái nhà (như hình minh họa) có một ăng-ten cao 12 m nhô ra. Ăng-ten được cố định bởi một thanh thép, đầu trên của thanh được gắn ở điểm cách đỉnh ăng-ten 4 m và đầu dưới được bắt vít tại chính giữa đỉnh mái.



Tính góc giữa thanh thép giữa thanh thép và mặt phẳng mái nhà (gắn ăng-ten) (làm tròn kết quả đến hàng phần mười, đơn vị độ).

KQ:

Câu 61 Trạm tàu cứu hộ được đặt tại vị trí $A(5; 0; 0)$ trên một hòn đảo nhỏ trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục được tính bằng km), được sử dụng làm trạm cứu hộ, cứu nạn trên biển.



Tàu du lịch B đang di chuyển (vận tốc không đổi) trên tuyến đường được mô tả bởi đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 0 \end{cases}$. Tàu chở hàng C đang di chuyển (vận tốc không đổi) trên tuyến

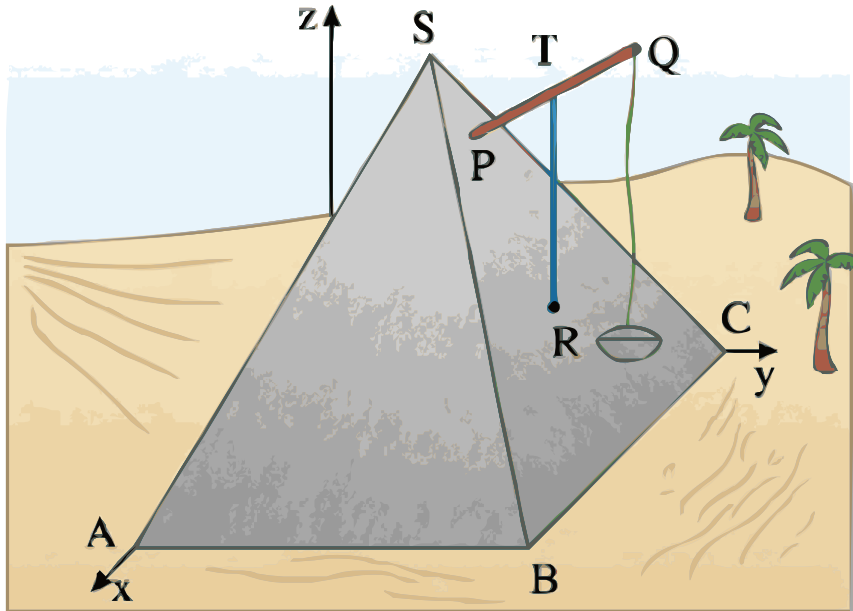
đường vận tải được mô tả bởi đường thẳng $d_2: \begin{cases} x = 2 - s \\ y = 11 + s \\ z = 0 \end{cases}$. Do thời tiết xấu, nên hai tàu

B và C gặp sự cố và cần được tiếp cận khẩn cấp. Trạm cứu hộ điều một tàu cứu hộ xuất phát từ A để lần lượt tiếp cận tàu du lịch B trước, sau đó đến tàu chở hàng C . Xét vị trí tối ưu của tàu du lịch B dừng lại và tàu chở hàng C dừng lại sao cho tổng quãng đường tàu cứu hộ cần đi $T = AB + BC + CA$ là nhỏ nhất. Khi đó $P_{\min} = \sqrt{a}$ (km), hãy tính $a + 2025$?

KQ:

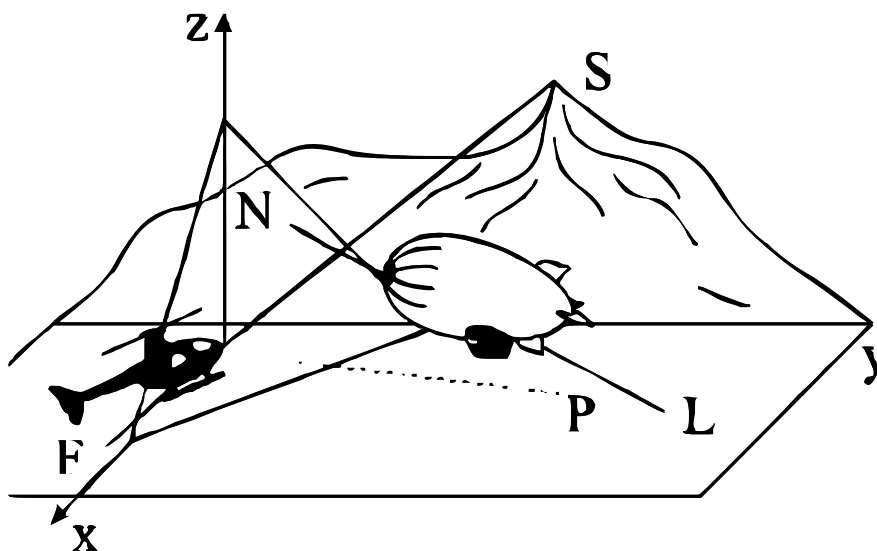


Câu 62 Một kim tự tháp có các đỉnh $A(100; 0; 0)$, $B(100; 100; 0)$, $C(0; 100; 0)$, $D(0; 0; 0)$ và đỉnh $S(50; 50; 100)$. Từ mặt bên (SBC) nhô ra một thanh PQ thẳng đứng (là một phần của cơ cấu nâng), trung điểm T của thanh PQ được đỡ bởi cột thẳng đứng RT . Biết $P(50; 60; 80)$, $Q(50; 100; 100)$. Tính chiều dài cột TR .



KQ:

Câu 63 Một khinh khí cầu l xuất phát từ sân bay $L(24; 52; 0)$ và sau đó được xác định tại $P(20; 42; 2)$. Một trực thăng h bay thẳng đều cùng thời điểm trong ngày, xuất phát từ sân bay quân sự $F(20; -8; 0)$ hướng về đỉnh núi $S(-4; 32; 16)$.

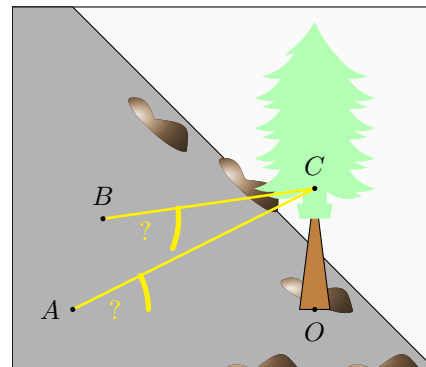


Bức tường sương mù được mô tả bởi mặt phẳng (E_{ABC}) với $A(16; 0; 0)$, $B(0; 16; 0)$, $C(0; 0; 16)$. Gọi T là vị trí mà quỹ đạo bay của khinh khí cầu l và trực thăng h cắt nhau.

Trên quỹ đạo bay tiếp theo, khinh khí cầu l đi vào tường sương mù tại N . Tính khoảng cách TN (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị) (các kích thước tính theo km).

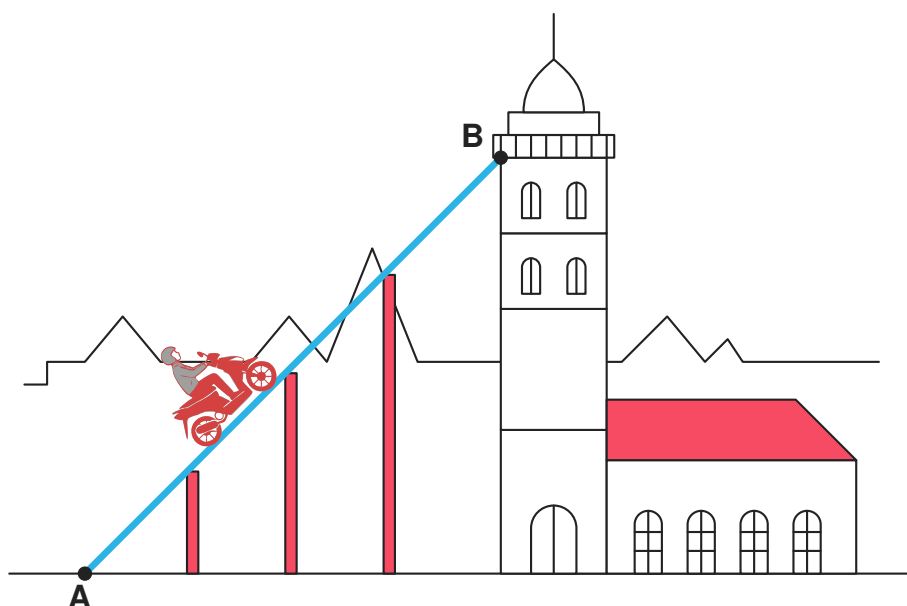
KQ:

Câu 64 Trên một sườn núi (có độ nghiêng đều), người ta trồng một cây thông và muốn giữ nó không bị nghiêng bằng hai sợi dây neo như hình vẽ. Giả thiết cây thông mọc thẳng đứng và trong một hệ tọa độ phù hợp, các điểm gốc O (gốc cây thông) và A, B (nơi buộc dây neo) có tọa độ tương ứng là $O(0; 0; 0)$, $A(5; -3; 1)$, $B(-3; -4; 2)$, đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét. Biết rằng hai dây neo đều được buộc vào cây thông tại điểm $C(0; 0; 5)$ và được kéo căng tạo thành các đoạn thẳng. Khi đó, góc tạo bởi dây neo CA và mặt phẳng sườn núi là bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của độ)?



KQ:

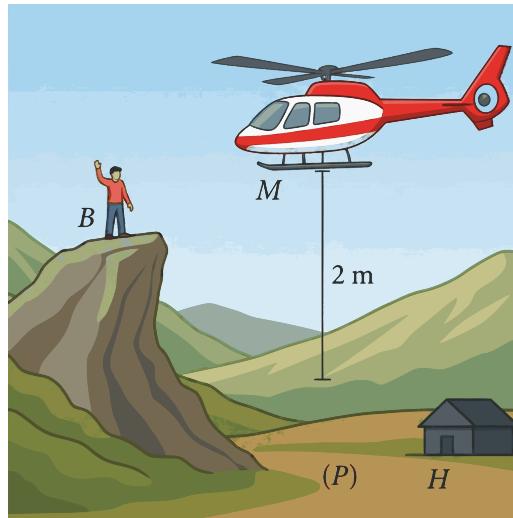
Câu 65 Một người nghệ sĩ dự định chạy xe mô tô trên đường thẳng từ điểm $A(20; 20; 0)$ lên tháp nhà thờ tại điểm $B(220; 420; 80)$ (với 1 đơn vị = 1 m).



Sợi cáp được chống đỡ bởi ba cột thẳng đứng có đỉnh tại $S_1(70; 120; 20)$, $S_2(120; 220; 30)$, $S_3(170; 300; 60)$. Hãy tìm tổng hoành độ các cột phù hợp để làm trụ đỡ.

KQ:

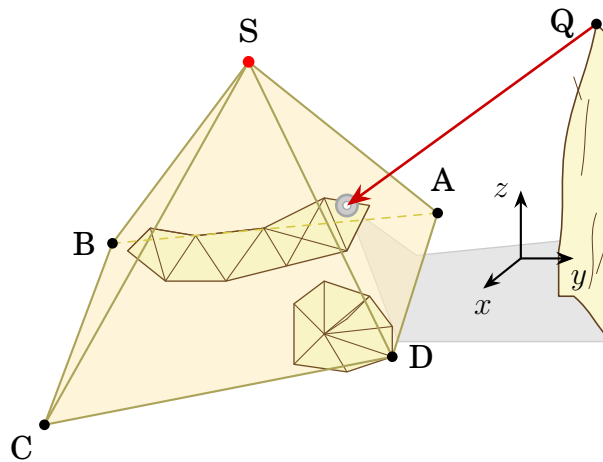
Câu 66 Một vùng núi mô phỏng bởi mặt phẳng địa hình: $(P) : x + 2y - z = 0$. Một người bị nạn đang đứng tại điểm $B(2; 1; 6)$ không nằm trên mặt đất mà đứng trên một mỏm đá cao. Một trực thăng xuất phát từ căn cứ điểm $H(1082; -809; 1624)$, bay theo đường thẳng hướng đến người bị nạn. Tuy nhiên, để đảm bảo an toàn, trực thăng chỉ được phép dừng lại tại một điểm M trên đường bay sao cho M cách mặt phẳng địa hình (P) đúng 2 mét. Sau đó từ điểm M (trong đó cao độ, tung độ, hoành độ được làm tròn đến hàng phần trăm), trực thăng thả cáp cứu hộ hỗ trợ người bị nạn.



Hãy tính **độ dài đoạn bay** từ căn cứ H đến điểm tiếp cận M (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

KQ:

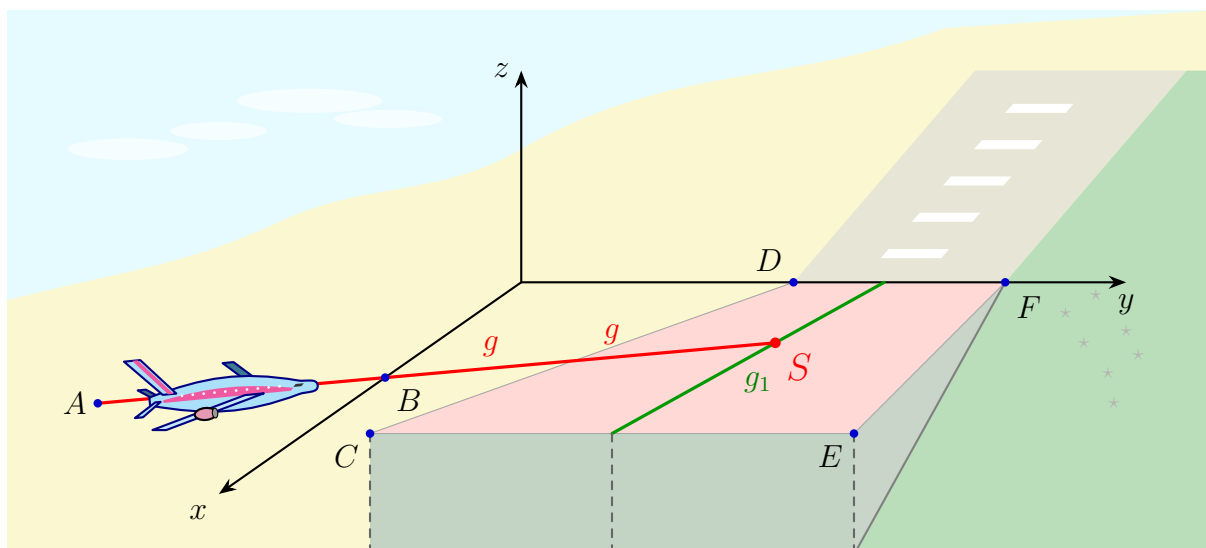
Câu 67 Trong không gian $Oxyz$, các điểm $A(0; -1; 0)$, $B(1; -4; 0)$ và $C(4; -3; 0)$ là các đỉnh thu được của đáy một kim tự tháp khối chóp tứ giác đều đã bị sụp một phần và cần được phục dựng. Mỗi đơn vị trong hệ tọa độ ứng với 100 m.



Gọi tâm M của hình vuông và tọa độ đỉnh D còn thiếu. Trên đỉnh M theo phương thẳng đứng là đỉnh S của kim tự tháp, với chiều cao 200 m. Theo mô tả, ánh sáng mặt trời vuông góc với mặt bên (SAD) chiếu qua điểm $Q\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{3}; \frac{7}{2}\right)$ vào một lối bí mật của kim tự tháp. Xác định được tọa độ điểm $P(a; b; c)$ là vị trí ban đầu của lối vào bí mật này. Tính $2a + 3b + c$.

KQ:

Câu 68 Một máy bay đang trong giai đoạn tiếp cận để hạ cánh. Nó bay theo đường thẳng g đi qua hai điểm $A(25; 2; 5)$ và $B(15; 7; 3)$. Khu vực tiếp cận hạ cánh được giới hạn bởi hai đường thẳng g_1 và g_2 , lần lượt đi qua các điểm $C(10; 4; 2)$, $D(0; 10; 0)$ và $E(10; 20; 2)$, $F(0; 14; 0)$ (các số đo tính bằng km). Đường thẳng g_i đi ở giữa khu vực tiếp cận được coi là đường lý tưởng cho hạ cánh. Xác định phương trình g_i . Đường bay g của máy bay cắt đường g_i tại S . Biết vận tốc của máy bay là 500 km/h.



Tính thời gian từ khi máy bay ở điểm A cho đến khi chạm đường lý tưởng g_i là bao nhiêu giây? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

KQ:

Câu 69 Tháp đôi Puerta de Europa, Tây Ban Nha có mặt tiền nghiêng, được mô hình hóa bởi mặt phẳng $(P): x - y + z + 1 = 0$ trong hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị mét). Chủ tòa nhà muốn treo một biển quảng cáo lên mặt tường này, nhưng vì vị trí có cửa sổ thông gió nên phải dùng cơ cấu giàn giáo như sau:

1. Khoan lỗ và cắm thanh sắt

- ◆ Khoan hai lỗ trên tường, cắm vào đó hai thanh sắt cố định sao cho đầu mút của mỗi thanh nhô ra phía ngoài.
- ◆ Gọi hai đầu mút lần lượt là điểm A và điểm B , với tọa độ $A(1; -2; 0)$, $B(2; 1; -1)$.



2. Nối khung ngang

- ◆ Hàn một thanh sắt ngang nối từ A đến B . Đây là thanh chịu lực chính để treo biển.

3. Gắn biển quảng cáo

- ◆ Hàn khung biển vào thanh ngang, xem biển như một tấm bản mỏng nằm trên cùng mặt phẳng (Q) .

Để biển áp sát tường nhất – vừa tăng tính thẩm mỹ, vừa giảm lực gió – ta cần điều chỉnh sao cho góc θ giữa mặt phẳng biển (Q) và mặt phẳng tường (P) là nhỏ nhất.

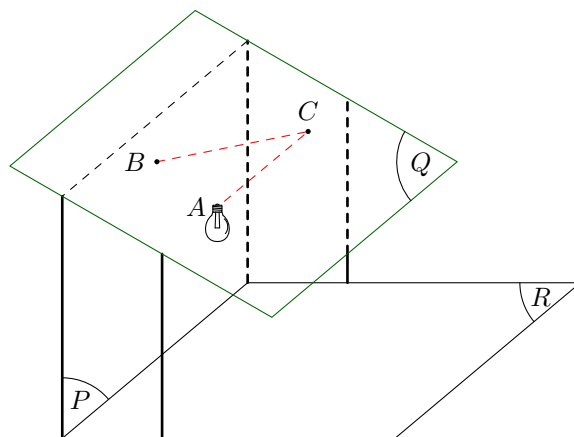
Giả sử phương trình tổng quát của biển hiệu là $(Q): ax + by + cz + d = 0$, với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Hãy tính tổng $a + b + c + d$.

KQ:



Câu 70 Mái nhà tranh của ông F được đặt vào trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ với đơn vị trên mỗi trục là mét với mặt phẳng $(R): z + 1 = 0$ là mặt đất. Một bức tường là mặt phẳng $(P): x + y - 2\sqrt{2} = 0$ và mái nhà lợp lá của ông là mặt phẳng $(Q): x - z + \sqrt{2} = 0$.

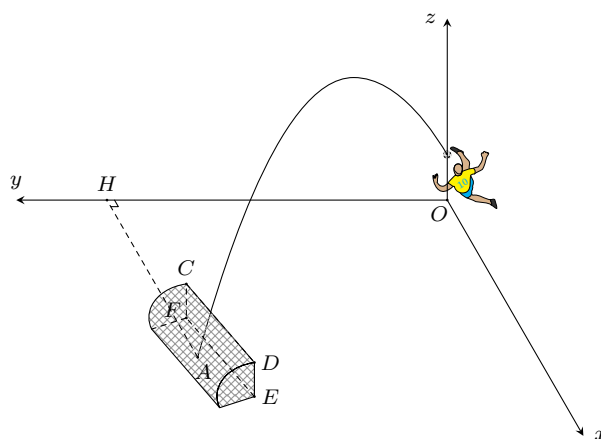


Ông F muốn đặt một bóng đèn tròn để chiếu sáng ban đêm, sau khi cố định bóng đèn tại vị trí $A(1; -1; 1)$, ông nối dây điện thẳng dài từ bóng đèn đến vị trí một khoen móc đặt tại C trên mái nhà (Q) rồi luồn dây điện thẳng đến cắm tại vị trí B nằm trên bức tường (P) . Sau khi hoàn thành và đo đạc thì ông F thấy tam giác ABC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) . Tính chiều cao mét của khoen móc C so với mặt đất (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

KQ:

Câu 71 Trong trận đấu giữa Thụy Điển và Anh tại giải vô địch bóng đá thế giới, khi thời gian trận đấu sắp kết thúc, Zlatan Ibrahimović đã thực hiện một cú xe đạp chống ngược móc bóng từ khoảng cách xa vào lưới đội tuyển Anh. Đây được coi là một trong những bàn thắng đẹp nhất lịch sử bóng đá thế giới với khoảng cách xa nhất từng được ghi bằng kỹ thuật này.

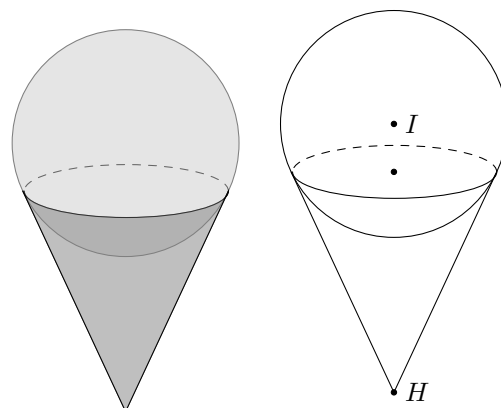
Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo mét) sao cho (Oxy) trùng với mặt đất. Tại thời điểm Zlatan Ibrahimović tung người móc bóng quả bóng thuộc tia Oz và có độ cao 2 m, bay theo quỹ đạo của một *Parabol* thuộc mặt phẳng vuông góc với mặt đất rơi xuống đất tại vị trí điểm A nằm trong khung thành.



Biết $d(A, Oy) = AH = 8$ ($H \in Oy$) và $OH = 15$. Sau khi bay lên không trung quả bóng đạt độ cao lớn nhất tại điểm có hoành độ $x = 3$. Tại thời điểm bóng bắt đầu bay vào khung thành (tức là bóng nằm trên vạch kẻ ngang của khung thành) thì độ cao của quả bóng so với mặt đất là bao nhiêu mét? Biết rằng khung thành $CDEF$ nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đất và đi qua hai điểm $M(4; 15; -2)$, $N(8; 14; 6)$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

KQ:

Câu 72 Một cơ sở sản xuất Kem làm một mô hình Kem ốc quế lớn gồm 2 phần: Phần Kem có dạng hình cầu, phần ốc quế có dạng hình nón (như hình vẽ bên). Chủ cơ sở sản xuất muốn gắn một chiếc đèn Led lớn chiếu thẳng cây kem vào buổi tối, biết rằng chiếc đèn nằm trên mặt phẳng chứa đường tròn (C) là phần tiếp xúc giữa phần Kem và phần ốc quế.



Chọn hệ trục tọa độ Oxy trong không gian thỏa mãn phần Kem hình cầu có tâm $I(1; 2; 3)$, bán kính $R_C = 3$ và phần đỉnh của hình nón là điểm $H(0; 1; -2)$ đáy là đường tròn có bán kính $R_N = \sqrt{6}$. Để tối ưu hóa lượng ánh sáng chiếc đèn có thể chiếu vào cây kem người ta tính toán rằng chiếc đèn Led sẽ phải ở vị trí $M(a; b; 2)$, $a \in \mathbb{Z}$ và từ điểm M kẻ được 2 tiếp tuyến với đường tròn (C) sao cho góc giữa 2 tiếp tuyến đó không bé hơn 60° . Có bao nhiêu vị trí đặt chiếc đèn Led thỏa mãn yêu cầu của chủ cơ sở. **KQ:**

BẢNG ĐÁP ÁN ĐÚNG SAI Đ/S

Câu 1. Đ Đ S S

Câu 10. Đ S Đ S

Câu 19. Đ S Đ S

Câu 28. Đ S Đ Đ

Câu 2. Đ Đ S S

Câu 11. Đ S S Đ

Câu 20. Đ S Đ S

Câu 29. S S Đ Đ

Câu 3. Đ Đ Đ S

Câu 12. S S Đ S

Câu 21. Đ Đ S Đ

Câu 30. Đ S S S

Câu 4. S Đ Đ Đ

Câu 13. Đ S Đ Đ

Câu 22. Đ Đ S Đ

Câu 31. Đ S Đ Đ

Câu 5. S Đ S Đ

Câu 14. Đ Đ S S

Câu 23. Đ S S S

Câu 32. Đ S Đ S

Câu 6. S Đ S Đ

Câu 15. Đ S Đ Đ

Câu 24. Đ S Đ S

Câu 33. S S Đ Đ

Câu 7. S Đ S S

Câu 16. Đ S S Đ

Câu 25. S Đ S S

Câu 34. S S S S

Câu 8. Đ S Đ Đ

Câu 17. S S S Đ

Câu 26. Đ S Đ S

Câu 35. Đ S Đ S

Câu 9. S Đ S Đ

Câu 18. S Đ S S

Câu 27. Đ S S Đ

ĐÁP SỐ PHẦN TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1.

Câu 2.

Câu 3.



Câu 4. 6 9 , 7

Câu 5. - 3

Câu 6. 6 , 3 6

Câu 7. - 3

Câu 8. 5

Câu 9. 1 7 , 2

Câu 10. 5 , 8 2

Câu 11. 5 0 , 1

Câu 12. 1

Câu 13. 5 7 2

Câu 14. 1 2

Câu 15. - 1 , 5

Câu 16. - 5

Câu 17. - 4 , 5

Câu 18. 9 8 , 5

Câu 19. 6 9 , 3

Câu 20. 1 5 , 8

Câu 21. 2 , 4 5

Câu 22. 4 0

Câu 23. 6 8

Câu 24. 1 2 6

Câu 25. 4 9 , 6

Câu 26. 0 , 9 5

Câu 27. 4 0

Câu 28. 1 3 0

Câu 29. 1 3 8

Câu 30. 1 7

Câu 31. 9 , 4

Câu 32. 6 , 1 8

Câu 33. 5 0

Câu 34. 4 , 5

Câu 35. 0 , 5

Câu 36. 3 8 , 7

Câu 37. 6 , 4

Câu 38. 8 4 9

Câu 39. 1

Câu 40. 5

Câu 41. 1 , 7

Câu 42. 3 , 0 5

Câu 43. 8 0 0

Câu 44. 1 5 , 8

Câu 45. 1 , 3 1

Câu 46. 3

Câu 46. 0 , 1 5

Câu 47. 6 2

Câu 48. 2 6

Câu 49. 6 7 6

Câu 50. 7 , 4 8

Câu 51. 7 , 2 5

Câu 52. 0 , 9 2

Câu 53. 1 9

Câu 54. 2 1 , 1

Câu 55. 1 3 0

Câu 56. 1 7

Câu 57. 7 , 5

Câu 58. 1 , 6

Câu 59. 1 7 2 0

Câu 60. 8 2 , 7

Câu 61. 2 2 6 9

Câu 62. 5 0

Câu 63. 1 1

Câu 64. 3 7

Câu 65. 7 0

Câu 66. 2 1 0 4

Câu 67. 0

Câu 68. 1 6 4

Câu 69. 1

Câu 70. 3 , 4

Câu 71. 0 , 5 6

Câu 72. 6

1 LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Phương trình mặt cầu

- ♦ Phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính R là

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

- ♦ Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ là phương trình mặt cầu khi và chỉ khi $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$. Mặt cầu đó có tâm $I(a; b; c)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

2 Vị trí tương đối giữa hai mặt cầu

Cho mặt cầu (S_1) có tâm I_1 , bán kính R_1 và mặt cầu (S_2) có tâm I_2 , bán kính R_2 .

Mối quan hệ	Điều kiện
$(S_1), (S_2)$ ngoài nhau	$I_1I_2 > R_1 + R_2$
$(S_1), (S_2)$ trong nhau	$I_1I_2 < R_1 - R_2 $
$(S_1), (S_2)$ tiếp xúc ngoài	$I_1I_2 = R_1 + R_2$
$(S_1), (S_2)$ tiếp xúc trong	$I_1I_2 = R_1 - R_2 $
$(S_1), (S_2)$ cắt nhau theo một đường tròn	$ R_1 - R_2 < I_1I_2 < R_1 + R_2$

3 Vị trí tương đối của mặt cầu và đường thẳng

Cho mặt cầu (S) có tâm I , bán kính R và đường thẳng Δ .

Mối quan hệ	Điều kiện
Δ không cắt mặt cầu (S)	$d(I, \Delta) > R$
Δ tiếp xúc với mặt cầu (S)	$d(I, \Delta) = R$
Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B	$d(I, \Delta) < R$

4 Vị trí tương đối của mặt cầu và mặt phẳng

Cho mặt cầu $(S): (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$ có tâm $I(a; b; c)$, bán kính R và mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$.

Gọi H là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P) , ta có $IH = d(I, (P))$.

Mối quan hệ	Điều kiện
Mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu (S)	$d(I, (P)) > R$
Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S)	$d(I, (P)) = R$
Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S)	$d(I, (P)) < R$

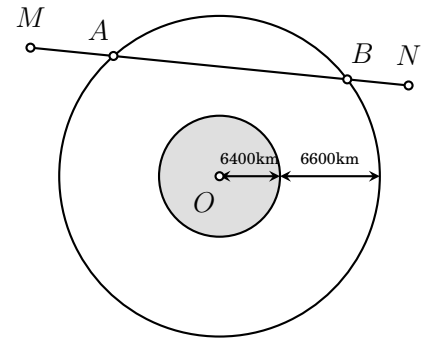


Nếu mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là một đường tròn $C(H, r)$ thì đường tròn (C) có bán kính $r = \sqrt{R^2 - IH^2}$.

II BÀI TẬP ÁP DỤNG

1 Trắc nghiệm đúng sai

Câu 1 (MH-THPTQG2025). Các thiên thạch có đường kính lớn hơn $140m$ và có thể lại gần Trái Đất ở khoảng cách nhỏ hơn 7500000 km được coi là những vật thể có khả năng va chạm gây nguy hiểm cho Trái Đất. Để theo dõi những thiên thạch này, người ta đã thiết lập các trạm quan sát các vật thể bay gần Trái Đất.



Giả sử có một hệ thống quan sát có khả năng theo dõi các vật thể ở độ cao không vượt quá 6600 km so với mực nước biển. Coi Trái Đất là khối cầu có bán kính 6400 km. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ trong không gian có gốc O tại tâm Trái Đất và đơn vị độ dài trên mỗi trục tọa độ là 1000 km. Một thiên thạch (coi như một hạt) chuyển động với tốc độ không đổi theo một đường thẳng từ điểm $M(6; 20; 0)$ đến điểm $N(-6; -12; 16)$.

a Đường thẳng MN có phương trình tham số là
$$\begin{cases} x = 6 + 3t \\ y = 20 + 8t, (t \in \mathbb{R}). \\ z = -4t \end{cases}$$

b Vị trí đầu tiên thiên thạch di chuyển vào phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là điểm $A(-3; -4; 12)$.

c Khoảng cách giữa vị trí đầu tiên và vị trí cuối cùng mà thiên thạch di chuyển trong phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là 18900 km (kết quả làm tròn đến hàng trăm theo đơn vị ki-lô-mét).

d Nếu thời gian di chuyển của thiên thạch trong phạm vi theo dõi của hệ thống quan sát là 3 phút thì thời gian nó di chuyển từ M đến N là 6 phút.

Câu 2 Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I(10; 20; 30)$ với bán kính phủ sáng là 3 km.

a Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sáng trên biển của hải đăng là $(x - 10)^2 + (y - 20)^2 + (z - 30)^2 = 3000^2$.

b Người đi biển ở vị trí $A(50; 20; 0)$ nhìn thấy được ánh sáng của ngọn hải đăng.

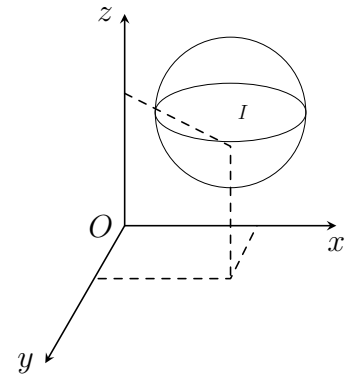
c Người đi biển ở vị trí $B(4030; 50; 40)$ nhìn thấy được ánh sáng của ngọn hải đăng.

d Nếu hai người đi biển có thể nhìn thấy ánh sáng của ngọn hải đăng thì khoảng cách giữa hai người đó không quá 6 km.



Câu 3 Hình vẽ mô phỏng một trạm thu phát sóng điện thoại di động đặt ở vị trí $I(1; 2; 2)$ trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét) và được thiết kế với đường kính phủ sóng là 10 000 m.

- a** Bán kính vùng phủ sóng của trạm phát sóng điện thoại là 5 km.
- b** Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới miền bên trong và bên ngoài vùng phủ sóng của trạm phát sóng điện thoại là $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 25$.
- c** Điểm $A(1; 2; 6)$ nằm trong vùng phủ sóng của trạm phát sóng điện thoại.
- d** Nhà bạn Mai và bạn Nam có vị trí tọa độ lần lượt là $M(1; 2; 7)$ và $N(5; 5; 5)$. Nếu cả hai bạn Mai và Nam dùng điện thoại tại nhà thì đều có thể sử dụng dịch vụ của trạm phát sóng điện thoại này.

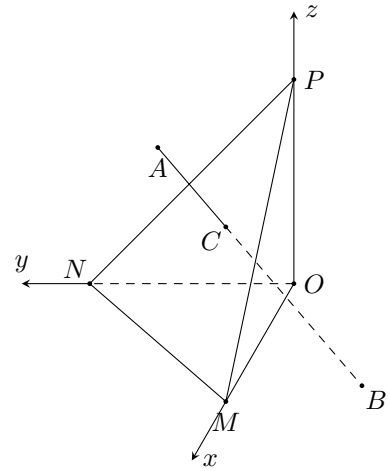


Câu 4 Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là ki-lô-mét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động được đặt ở vị trí $I(3; -2; 5)$ trên một ngôi làng ven biển và được thiết kế với bán kính phủ sóng là 6 km.



- a** Nếu sử dụng phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng trong không gian thì phương trình mặt cầu là $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 5)^2 = 36$.
- b** Một người đi tàu đến vị trí có tọa độ $M(-2; 5; 3)$ thì tại vị trí này vẫn có thể sử dụng dịch vụ của trạm thu phát sóng này.
- c** Một hòn đảo nhỏ có dạng hình tam giác với các đỉnh có tọa độ là $A(5; 7; 2)$, $B(-6; 2; 3)$, $C(2; -5; -3)$. Hòn đảo đó nằm trên mặt phẳng cách trạm thu phát sóng một khoảng 5,89 km (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).
- d** Từ vị trí $N\left(2; 1; \frac{55}{49}\right)$ trên hòn đảo, một người chèo thuyền di chuyển với vectơ vận tốc $\vec{v} = (2; 3; 0)$. Sau nửa giờ, người đó chưa thể sử dụng được dịch vụ của trạm thu phát sóng này.

Câu 5 Trong không gian cho hệ tọa độ $Oxyz$, các vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz và độ dài của mỗi vectơ đơn vị đó bằng 1 kilômét. Máy bay bắt đầu quá trình hạ cánh tại điểm $A(3; 3; 4)$ ở thời điểm ban đầu và chuyển động thẳng đều hướng về vị trí $B(3; 0; 0)$ trên đường băng. Tại gốc tọa độ O , sân bay thiết lập một trạm radar cảnh báo thiên tai có vùng phủ sóng được mô phỏng bởi một mặt cầu (S) bán kính $R = 5$ km. Trong quá trình hạ cánh, máy bay phải xuyên qua một lớp mây dày đặc được mô phỏng bởi mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $M(5; 0; 0)$, $N(0; 10; 0)$ và $P(0; 0; 10)$. Gọi C là vị trí máy bay bắt đầu xuyên qua đám mây.



- a** Phương trình mặt phẳng (α) mô phỏng lớp mây là $2x + y + z - 10 = 0$.
- b** Phương trình mặt cầu (S) mô phỏng vùng phủ sóng của radar là $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.
- c** Tại vị trí điểm C , máy bay không nằm trong vùng phủ sóng hiệu quả của radar.
- d** Tổng độ dài quãng đường máy bay di chuyển trong vùng phủ sóng của radar nhỏ hơn 4 km.

Câu 6 Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 6$. Một tấm gỗ mỏng tiếp xúc với bề mặt quả bóng, phần giao của tấm gỗ và sàn nhà là đường thẳng $d: \frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{1}$. Gọi A, B tương ứng là tiếp điểm của tấm gỗ, sàn nhà với quả bóng.

- a** Mặt cầu (S) có bán kính $R = \sqrt{6}$ và tâm $I(2; -1; -1)$.
- b** Nếu K là một điểm thuộc đường thẳng d thì $K(-2 + 2t; -1 - 3t; -t)$ với $t \in \mathbb{R}$.
- c** Hình chiếu của tâm I lên đường thẳng d là điểm K có tọa độ $(a; b; c)$ thỏa mãn $b + c < 0$.
- d** Một con kiến bò trên bề mặt quả bóng từ A đến B thì quãng đường ngắn nhất lớn hơn 45 cm.

Câu 7 Trong lĩnh vực xạ trị ung thư, chùm tia xạ được định hướng để tập trung vào khối u mô phỏng là một hình cầu $(U): (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 1$. Để giảm thiểu tổn thương cho mô lành xung quanh, người ta thiết kế một hệ thống chắn xạ. Một phần của hệ thống chắn xạ được mô hình hóa bởi mặt phẳng $(Q): x + y + z - 7 = 0$. Người ta cần xác định vùng khối u nằm phía sau mặt phẳng chắn xạ so với nguồn xạ. Giả sử nguồn xạ đặt rất xa và các tia xạ song song theo phương vectơ $\vec{v} = (1; 1; 1)$.

- a** Tâm I của khối u có tọa độ $I(2; 1; 3)$.
- b** Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng chắn xạ (Q) là $\vec{n} = (1; 1; 1)$.
- c** Tâm J của đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (Q) và khối u (U) có tọa độ thỏa mãn hệ thức $y_J = x_J - 1$.
- d** Thể tích phần khối u nằm phía sau mặt phẳng (Q) theo hướng vectơ $\vec{v}$ là $\frac{\pi}{3} \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) (\text{cm}^3)$.



Câu 8 Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, một con chim bồ câu xuất phát từ $O(0; 0; 0)$ di chuyển với vectơ vận tốc $\vec{v}_1 = (1; 2; 2)$. Cùng lúc đó, một con chim én cũng bắt đầu di chuyển từ $A(0; 0; 5)$ với vectơ vận tốc $\vec{v}_2 = (0; 3; 4)$. Tồn tại một vùng không gian nguy hiểm, nơi mà ở đó thường xuyên xuất hiện những người săn bắt chim có dạng mặt cầu $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 4)^2 = 16$. Biết rằng mỗi đơn vị trên các trục tọa độ trong không gian tương đương 1 m và đơn vị đo thời gian tính bằng giây.

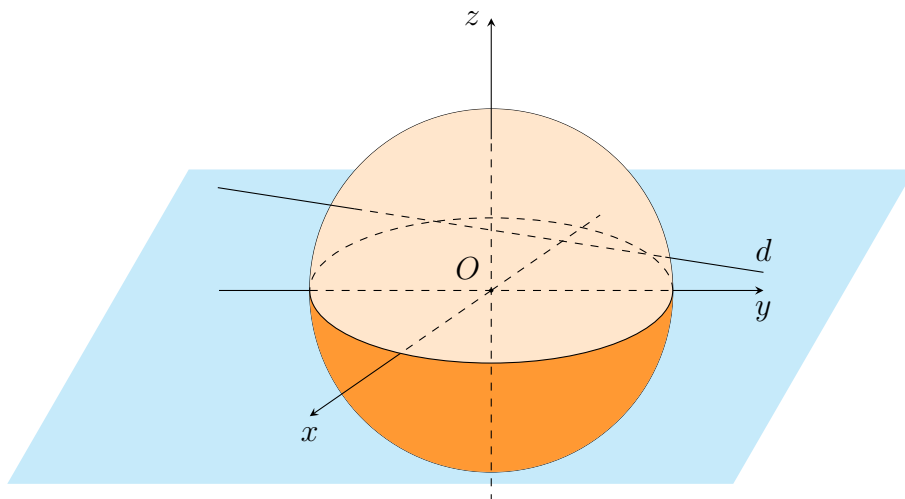
- a Tốc độ di chuyển của chim bồ câu là 3 m/s.
- b Chim én có di chuyển vào vùng nguy hiểm trong quá trình bay.
- c Thời gian mà chim bồ câu di chuyển trong vùng nguy hiểm nhỏ hơn 5 giây.
- d Khoảng cách giữa hai đường thẳng quỹ đạo của hai con chim bằng $\frac{2}{3}$ m.

Câu 9 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị đo trên các trục là km), một máy bay phản lực đang bay thẳng theo lộ trình Δ là đường thẳng có phương trình $\Delta: \frac{x - 50}{3} = \frac{y + 20}{-4} = \frac{z - 10}{1}$. Radar tại trạm kiểm soát không lưu phát hiện một khối mây dông tích điện nguy hiểm có dạng hình cầu (S) với tâm $C(200; -300; 60)$ và bán kính $R = 80$ km. Tại thời điểm quan sát, máy bay đang ở vị trí $A(50; -20; 10) \in \Delta$.

- a Một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u} = (5; -2; 1)$.
- b Đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng $(P): 4x + 3y = 140$.
- c Nếu tiếp tục giữ nguyên lộ trình Δ thì máy bay phản lực sẽ bay xuyên qua (bay vào bên trong) khối mây dông có dạng hình cầu (S).
- d Gọi M là điểm trên đường thẳng Δ mà tại đó máy bay phản lực gần tâm C của hình cầu (S) nhất. Biết rằng tốc độ máy bay phản lực không đổi là 500 km/h. Thời gian máy bay phản lực đó di chuyển từ vị trí điểm A đến điểm M nhỏ hơn 30 phút.

Câu 10 Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), đài kiểm soát không lưu của một sân bay ở vị trí $O(0; 0; 0)$ và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa 600 km. Một máy bay đang chuyển động với vận tốc 900 km/h

theo đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x = -1\,000 + 100t \\ y = -300 + 80t \\ z = 100\sqrt{11} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ và hướng về đài kiểm soát không lưu (như hình vẽ).



- a** Ranh giới vùng phát sóng bên ngoài của đài kiểm soát không lưu trong không gian là mặt cầu có bán kính bằng 300 km.
- b** Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới bên ngoài vùng phát sóng của đài kiểm soát không lưu trong không gian là $x^2 + y^2 + z^2 = 360\,000$.
- c** Máy bay đang chuyển động theo đường thẳng d đến vị trí điểm $M(-500; 100; 100\sqrt{11})$. Vị trí này nằm ngoài vùng kiểm soát không lưu của đài kiểm soát không lưu sân bay.
- d** Thời gian kể từ khi đài kiểm soát không lưu phát hiện máy bay đến khi máy bay ra khỏi vùng kiểm soát không lưu là $\frac{4}{3}$ giờ.

Câu 11 Hải đăng là một ngọn tháp (nhà hoặc khung) được thiết kế để chiếu sáng từ một hệ thống đèn và thấu kính, hoặc thời xưa là chiếu sáng bằng lửa, với mục đích hỗ trợ cho các hoa tiêu trên biển định hướng và tìm đường. Vào năm 293 trước Công nguyên, ngọn hải đăng đầu tiên đã được người Phoenicia xây dựng trên hòn đảo Pharos tại Alexandria.



Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là một mét), coi một phần mặt biển được khảo sát là mặt phẳng (Oxy) , trục Oz hướng lên trên vuông góc với mặt biển; một ngọn hải đăng đỉnh cao 50 mét so với mực nước biển (Hình bên) biết đỉnh ở vị trí $I(21; 35; 50)$, biết rằng ngọn hải đăng này được thiết kế với bán kính phủ sáng là 4km.

- a** Phương trình mặt cầu để mô tả ranh giới của vùng phủ sáng trên biển của ngọn hải đăng trên là $(x - 21)^2 + (y - 35)^2 + (z - 50)^2 = 16$.
- b** Người đi biển coi là một điểm ở vị trí $D(5121; 658; 0)$ thì có thể nhìn thấy được ánh sáng của ngọn hải đăng trên.
- c** Ngọn Hải đăng phủ một vùng sáng trên mặt biển thì bán kính vùng sáng này là 3999,7 (làm tròn đến hàng phần mười của mét) giả sử yếu tố bị che khuất bởi địa hình là không đáng kể.
- d** Giả sử người đi biển coi là một điểm từ vị trí $D(5121; 658; 0)$ di chuyển theo đường thẳng đến chân ngọn Hải đăng với tốc độ 7 hải lý/giờ; biết một hải lý bằng 1852 mét thì mất 5,27 phút (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm) để đến điểm đầu tiên nhìn thấy được ánh sáng ngọn Hải đăng trên.

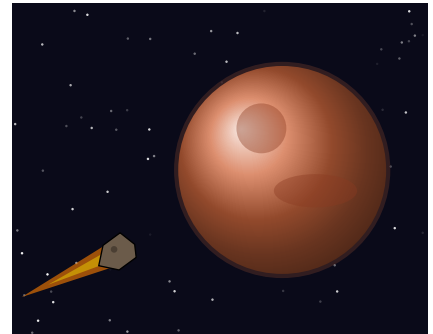
Câu 12 Coi bề mặt trái đất là mặt cầu có bán kính 6 371 km. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O tại tâm Trái Đất và đơn vị độ dài trên mỗi trục tọa độ là 6 371km. Giả sử tại một thời điểm, một thiết bị GPS trên mặt đất xác định được khoảng cách từ nó đến ba vệ tinh đặt tại các điểm có tọa độ $A(2; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C\left(0; \frac{11}{4}; \frac{\sqrt{7}}{4}\right)$ tương ứng là $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, 2.

- a** Phương trình bề mặt trái đất là $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
- b** Thiết bị GPS có tọa độ $P\left(0; \frac{3}{4}; -\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$.

c Vị trí của thiết bị GPS là 41°N , 90°E .

d Cũng tại thời điểm đó có một thiết bị GPS khác trên mặt đất cách đều hai vệ tinh A và B . Khoảng cách trên mặt đất ngắn nhất giữa hai thiết bị GPS trên là 3515 km (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 13 Trong không gian $Oxyz$, đơn vị trên mỗi trục là nghìn kilômét, quỹ đạo chuyển động của hai tiểu hành tinh lần lượt được mô hình hóa là phương trình các đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{1}$; $d_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$. Ta xem vùng khí quyển của sao Hỏa là mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 3,5^2$.



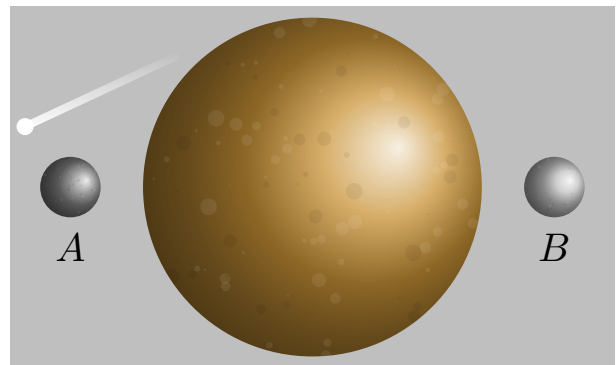
a Tiểu hành tinh thứ nhất đi qua điểm $A(-1; -2; 0)$, vectơ chỉ phương $\vec{u}_1 = (-1; -2; -1)$.

b Sao Hỏa có tâm là gốc tọa độ, bán kính tính từ tâm sao Hỏa đến điểm ngoài cùng của khí quyển là khoảng 350 km.

c Tiểu hành tinh thứ nhất có thể đi vào vùng khí quyển của sao Hỏa.

d Hai tiểu hành tinh không có nguy cơ va chạm nhau.

Câu 14 Sao Thủy gần như không có khí quyển thật sự như Trái Đất hay Sao Kim. Tuy nhiên, nó có một lớp khí rất mỏng gọi là exosphere - tức là thượng quyển loãng, gồm các hạt khí cực kỳ thưa thớt như hydro, heli, oxy, natri,... Trong không gian $Oxyz$, đơn vị trên mỗi trục là nghìn km, vùng thượng quyển loãng của Sao Thủy được mô hình hóa bởi phương trình mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4 = 0$.



Các nhà khoa học không gian đang quan sát các tiểu hành tinh ở các vị trí có tọa độ $A(4; 2; 4)$, $B(1; 4; 2)$ và xem xét sự di chuyển của chúng. Nếu tiểu hành tinh nằm trong vùng thượng quyển loãng thì nó sẽ bị hút xuống bề mặt Sao Thủy.

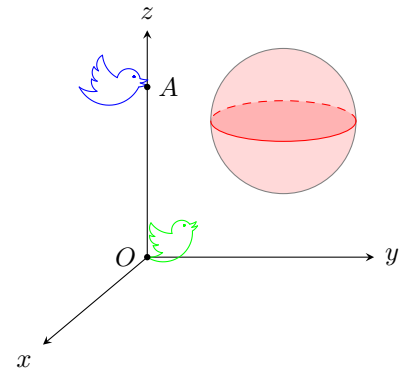
a Vùng thượng quyển loãng Sao Thủy có tâm $(1; 2; 0)$, bán kính bằng 3.

b Hai tiểu hành tinh ở các vị trí A , B sẽ bị hút xuống bề mặt Sao Thủy.

c Các nhà quan sát cho rằng có một sao chổi mang tên Haxen di chuyển theo quỹ đạo đường thẳng với vận tốc 51,5 km/s khoảng cách ngắn nhất từ tâm Sao Thủy đến Sao Chổi bằng $\frac{\sqrt{871}}{10}$ nghìn km. Thời gian Sao Chổi đi trong vùng thượng quyển loãng của Sao Thủy bằng 20 giây (làm tròn đến hàng đơn vị của giây).

d Sao Chổi Haxen di chuyển theo phương vectơ $\vec{u} = (0; 5; 2)$. Giả sử M , N là điểm đầu và điểm cuối mà sao chổi này đi qua thuộc vùng thượng quyển loãng của Sao Thủy. Giá trị nhỏ nhất của tổng $AM + BN$ bằng 3 970 km (làm tròn đến hàng đơn vị của km).

Câu 15 Trong không gian $Oxyz$, một con chim bồ câu xuất phát từ $O(0; 0; 0)$ di chuyển với vectơ vận tốc $\vec{v}_1 = (1; 2; 2)$. Cùng lúc đó, một con chim én cũng bắt đầu di chuyển từ $A(0; 0; 5)$ với vectơ vận tốc $\vec{v}_2 = (0; 3; 4)$. Tồn tại một vùng không gian nguy hiểm, nơi mà người ta thường xuyên săn bắn chim có dạng mặt cầu $(S): (x - 2)^2 + (y - 4)^2 + (z - 4)^2 = 16$. Biết rằng đơn vị độ dài trên mỗi trục tọa độ là 1,5 mét và đơn vị đo thời gian là giây.



- a** Tốc độ di chuyển của chim bồ câu là 4,5 (m/s).
- b** Chim én và chim bồ câu không va chạm nhau trong quá trình bay.
- c** Thời gian mà bồ câu di chuyển trong vùng không gian nguy hiểm nhiều hơn 3 giây.
- d** Trong quá trình bay, chim én cách vùng nguy hiểm không quá 0,5 mét.

Câu 16 Trong không gian, xét hệ tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí một giàn khoan trên biển, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt biển (được gọi là mặt phẳng) với tia Ox hướng về phía nam, tia Oy hướng về phía đông, tia Oz hướng thẳng lên trời (tham khảo hình vẽ). Đơn vị đo trong không gian $Oxyz$ lấy theo kilômét. Một chiếc radar đặt tại O có phạm vi theo dõi 30 km. Một chiếc tàu thám hiểm tại vị trí A ở độ sâu 10 km so với mặt nước biển, cách O 25 km về phía nam và 15 km về phía tây. Một tàu đánh cá tại vị trí $B(-20; 15; 0)$.

- a** Một chiếc tàu của cảnh sát biển đang tuần tra di chuyển đến vị trí C cách O 15 km về phía nam. Để radar phát hiện ra thì tàu cảnh sát biển cần di chuyển về phía đông cách O tối đa $15\sqrt{3}$ km.
- b** Radar phát hiện ra tàu đánh cá tại vị trí B .
- c** Khoảng cách từ chiếc tàu thám hiểm đến radar bằng $3\sqrt{58}$ km.
- d** Radar không phát hiện được tàu thám hiểm đặt tại vị trí A .

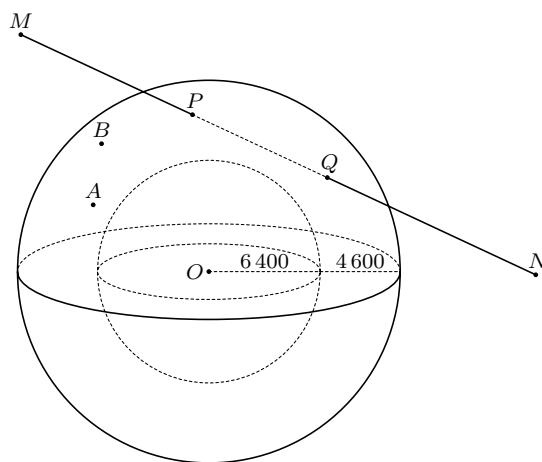
Câu 17 Ngày nay, nhờ vào hệ thống định vị toàn cầu GPS (Global Positioning System), việc di chuyển của con người hết sức thuận lợi dù bằng đường bộ, đường sắt hay đường hàng không hay đường biển. Nếu có thiết bị bắt sóng GPS, bạn luôn có thể kết nối được đến bốn vệ tinh GPS dù ở bất kì đâu trên Trái Đất. Khi thiết bị của bạn biết khoảng từ ít nhất ba vệ tinh đến nó, máy sẽ tính toán ra vị trí hiện tại của bạn bằng một quy trình gọi là Trilateration. Cho biết trái đất có dạng hình cầu bán kính bằng $\sqrt{41} \cdot 10^3$ km. Bạn An đang đứng trên mặt đất. Có ba vệ tinh báo về máy chủ tiếp nhận thông tin rằng vệ tinh thứ nhất đang cách An $3 \cdot 10^3$ km, vệ tinh thứ hai đang cách An $5 \cdot 10^3$ km, vệ tinh thứ ba đang cách An $4 \cdot 10^3$ km. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O là tâm trái đất và đơn vị độ dài trên mỗi trục là 10^3 km. Tại thời điểm vệ tinh thông báo về máy chủ thì tọa độ của các vệ tinh lần lượt là $I_1(4; 4; 6)$, $I_2(4; 9; 3)$ và $I_3(8; 4; 3)$. Xem vị trí An là điểm A và An cần di chuyển thẳng đến nhà Bình là điểm $B(4; 4; 3,01)$ với tốc độ không đổi 20 km/h.

- a** Điểm A đang nằm trên mặt cầu tâm O bán kính $\sqrt{41} \cdot 10^3$ km.
- b** Phương trình mặt cầu mô tả ranh giới bên trong và bên ngoài Trái Đất là $x^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{41}$.

c Điểm A chính là giao điểm của bốn mặt cầu: Trái Đất và ba mặt cầu tâm lần lượt là I_1, I_2, I_3 có bán kính lần lượt là khoảng cách từ các vệ tinh đến An .

d Thời gian An đi đến nhà Bình là 30 phút.

Câu 18 Các thiên thạch có đường kính lớn hơn 140 m và có thể lại gần Trái Đất ở khoảng cách nhỏ hơn 7 500 000 km được coi là những vật thể có khả năng va chạm gây nguy hiểm cho Trái Đất. Để theo dõi những thiên thạch này, các nhà nghiên cứu của trung tâm Vũ Trụ Nasa đã thiết lập các trạm quan sát các vật thể bay gần Trái Đất.



Giả sử có một hệ thống quan sát có khả năng theo dõi các vật thể ở độ cao không vượt quá 4600 km so với mực nước biển. Coi Trái Đất là khối cầu có bán kính 6400 km. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ trong không gian có gốc O tại tâm Trái Đất và đơn vị độ dài trên mỗi trục tọa độ là 1000 km. Một thiên thạch (coi như một hạt) chuyển động với tốc độ $v_1 = 2\sqrt{2} \cdot 10^3$ (km/h) không đổi theo đường thẳng xuất phát từ điểm $M(0; 5; 12)$ đến $N(12; 5; 0)$.

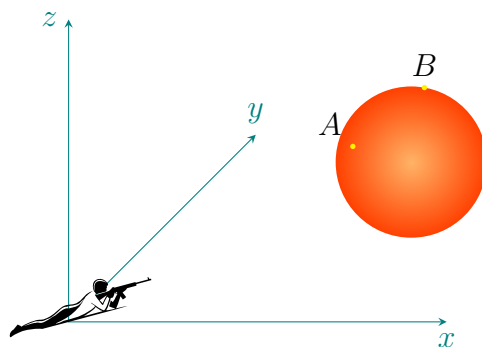
a Khoảng cách thiên thạch gần với trái đất nhất có độ dài bằng 3449 km (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

b Các nhà nghiên cứu của trung tâm vũ trụ Nasa đưa ra giả thiết nếu lúc thiên thạch đang ở vị trí M bất ngờ đổi hướng và lao xuống trái đất với phương thẳng thì quãng đường dài nhất nó có thể va chạm với trái đất là 11315 km (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

c Tại thời điểm thiên thạch đang ở vị trí M thì có 2 vệ tinh đang ở vị trí $A(-6; -5; -6)$ và $B(7; -6; 7)$ có vận tốc khác nhau di chuyển trong mặt phẳng trung trực của MN và luôn cách trái đất với khoảng cố định. Khoảng cách xa nhất của 2 vệ tinh có thể đạt là 18412 km (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

d Nếu vệ tinh A đi với vận tốc $v_2 = \frac{\pi\sqrt{97}}{3} \cdot 10^3$ (km/h) thì sẽ va chạm với thiên thạch.

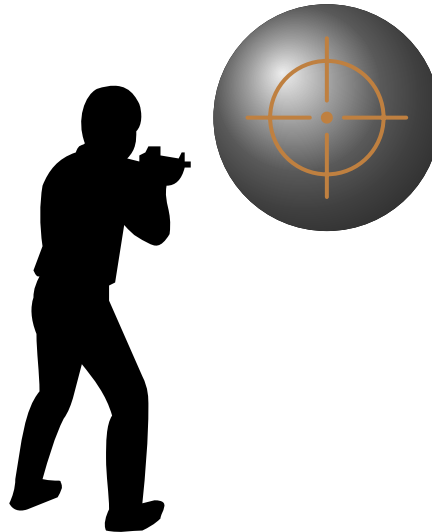
Câu 19 Trong một mô hình game 3D, với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho trước, đơn vị trên mỗi trục là mét, mặt đất là mặt phẳng (Oxy) . Người chơi cùng với khẩu súng của anh ta được xem như một chất điểm, xuất phát từ vị trí gốc tọa độ O và di chuyển trên mặt đất. Hai mục tiêu nhắm bắn là các vị trí cố định $(5; 5; 5)$, $(5; 10; 10)$.



Để tăng thêm độ hấp dẫn trò chơi, người ta dùng công nghệ hologram tạo ra một quả cầu giả lập bán kính thay đổi, có ánh sáng lấp lánh luôn đi qua hai điểm mục tiêu và lăn trên mặt đất, làm người chơi có phần hoa mắt và khó nhắm bắn trúng các mục tiêu này.

- a Mục tiêu gần nhất cách người chơi khoảng 8,5 m (làm tròn đến hàng phần chục).
- b Biết viên đạn có thể bắn xuyên qua cầu, người chơi cần đứng vị trí $(5; 0; 0)$ để bắn trúng cùng lúc hai mục tiêu.
- c Gọi M là điểm tiếp xúc của quả cầu với mặt đất thì M luôn thuộc một đường tròn cố định có bán kính bằng 8 m.
- d Khoảng cách ngắn nhất từ vị trí người chơi (gốc tọa độ O) đến điểm M bằng 5 m.

Câu 20 Trong một mô hình game 3D, với hệ trục tọa độ thích hợp, người chơi cùng với khẩu súng của anh ta được mô phỏng như một chất điểm di chuyển trên mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 3 = 0$ và nhắm bắn các mục tiêu di động trên mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z + 5 = 0$. Người chơi vẫn có thể bắn trúng mục tiêu nếu nó di chuyển trên bán cầu khuất phía sau tầm nhìn. Sau khi trò chơi bắt đầu, anh ta quyết định nhắm bắn theo phương vectơ $\vec{u} = (1; 0; 1)$.



- a Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 1)$ và bán kính $R = 1$.
- b Mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) không có điểm chung.
- c Người chơi đứng ở vị trí giao của mặt phẳng (P) với trục Ox , khoảng cách từ tâm của quả cầu đến đường bay của viên đạn bằng $\frac{\sqrt{66}}{2}$.
- d Khoảng cách lớn nhất từ vị trí người bắn đến mục tiêu bằng $3\sqrt{2}$.

Câu 21 Trong không gian $Oxyz$, đơn vị trên mỗi trục là mét, có hai chiếc chiến đấu cơ từ hai vị trí $A(40; -15; 15)$, $B(55; -10; 65)$ cần đáp xuống hai vị trí thuộc tàu sân bay hải quân để nạp nhiên liệu. Bề mặt chứa các đường băng trên tàu là mặt phẳng (P) có phương trình $3x - y + 2z - 25 = 0$.

- a Đường thẳng qua A và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình là $\frac{x - 40}{3} = \frac{y + 15}{1} = \frac{z - 15}{-2}$.
- b Tổng khoảng cách từ hai vị trí chiến đấu cơ đến mặt phẳng chứa đường băng là 110 m (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).
- c Tọa độ điểm đối xứng của điểm A qua mặt phẳng (P) là $A'(-20; 5; -25)$.

- a** Người chỉ huy ở tàu sân bay phát tín hiệu để hai chiến đấu cơ đáp xuống các vị trí M, N cách nhau $5\sqrt{6}$ m. Tổng đường bay ngắn nhất $AM + BN$ bằng 115 m (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 22 Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là mét), mặt sân quảng trường trùng với mặt phẳng (Oxy) . Một tác phẩm nghệ thuật hình cầu (S) có phương trình $(x + 10\sqrt{3})^2 + y^2 + (z - 30)^2 = 100$. Xét tại thời điểm 14h, lúc này phương của các tia nắng mặt trời được xác định bởi vectơ $\vec{u} = (1; 0; -\sqrt{3})$.

- a** Mặt cầu (S) có tâm $I(-10\sqrt{3}; 0; 30)$ và bán kính $R = 10$ (m).

- b** Phương trình đường thẳng chứa tia nắng đi qua tâm mặt cầu là
$$\begin{cases} x = -10\sqrt{3} + t \\ y = 0 \\ z = 30 - \sqrt{3}t \end{cases}.$$

- c** Gọi K là hình chiếu của tâm I theo phương tia nắng trên mặt sân, khi đó $K(10\sqrt{3}; 0; 0)$.

- d** Biết rằng hình chiếu của mặt cầu lên mặt sân là một elip, tiêu cự của elip bằng $\frac{20}{\sqrt{3}}$.

Câu 23 Trong không gian $Oxyz$ thuộc hệ thống định vị GPS, bề mặt Trái Đất được mô hình hoá bởi mặt cầu $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 9$. Hai vệ tinh truyền tín hiệu có vị trí $M(4; -4; 2), N(6; 0; 6)$.

- a** Vệ tinh ở vị trí M gần tâm mặt cầu hơn so với vệ tinh ở vị trí N .

- b** Một tín hiệu được truyền đi từ vệ tinh ở M đến vệ tinh ở N là đường thẳng có phương trình chính tắc $\frac{x - 4}{1} = \frac{y + 4}{2} = \frac{z - 2}{2}$.

- c** Mặt phẳng đi qua tâm Trái Đất và hai điểm M, N có phương trình $2x + y - 2z = 0$.

- d** Giả sử đơn vị trên mỗi trục là 2 100 km, một tín hiệu có tốc độ $3 \cdot 10^5$ km/s được truyền từ vệ tinh M đến điểm gần nhất thuộc bề mặt Trái Đất mất khoảng 0,026 giây (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn của giây).

Câu 24 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt cầu (S_1) và (S_2) có tâm lần lượt là $I(-4; -5; 0)$ và $J(6; 8; 3)$. Mặt cầu (S_2) cắt mặt phẳng (Oxy) theo thiết diện là một đường tròn có bán kính $r_2 = 4$. Mặt cầu (S_1) có bán kính $R_1 = 4$. Một điểm M có tọa độ cố định $M(1; 0; 10)$. Một điểm C di chuyển từ M đến một điểm bất kỳ thuộc mặt cầu (S_1) hoặc (S_2) . Năng lượng tiêu hao khi di chuyển của điểm C được xác định bởi hàm số $E(s) = \frac{1}{12} \cdot s^2$ (đơn vị năng lượng), trong đó s là độ dài quãng đường di chuyển. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

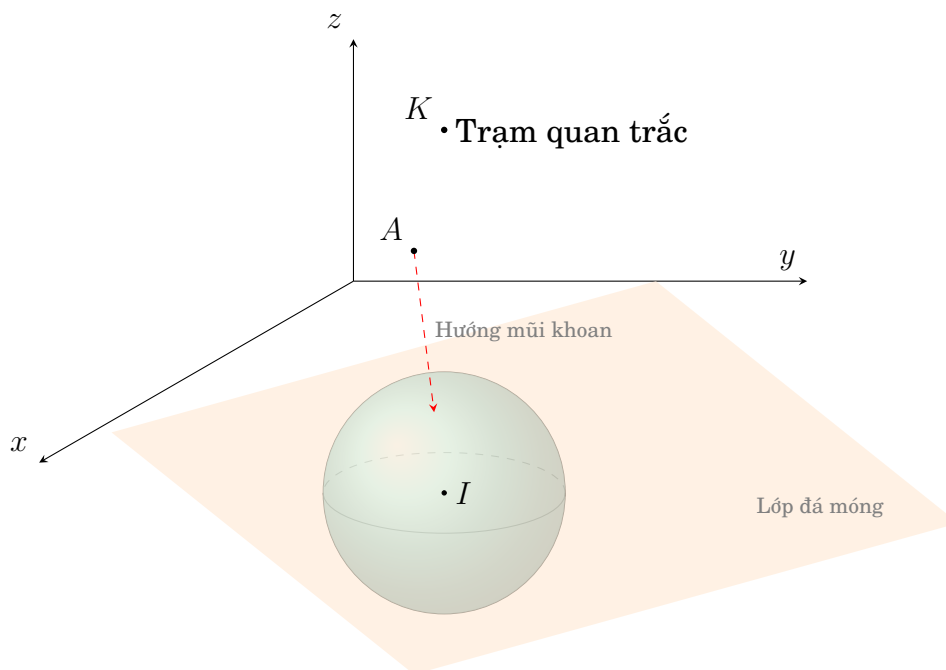
- a** Bán kính của mặt cầu (S_2) bằng 5.

- b** Năng lượng tối thiểu để điểm C di chuyển từ M đến bề mặt khối cầu tâm I là $\frac{175 - 50\sqrt{6}}{12}$ (đơn vị năng lượng).

- c** Gọi A và B lần lượt là hai điểm bất kỳ thuộc mặt cầu (S_1) và (S_2) . Độ dài lớn nhất của đoạn AB có giá trị lớn hơn 25.

- d** Năng lượng tối thiểu để điểm C di chuyển vào bên trong khối cầu (S_2) nhỏ hơn năng lượng tối thiểu để điểm C di chuyển vào bên trong khối cầu (S_1) .

Câu 25 Trong một dự án khảo sát địa chất thăm dò tài nguyên, các nhà khoa học phát hiện một túi khí tự nhiên trong lòng đất được xác định có dạng hình cầu (S), một lớp đá móng ngăn cách các địa tầng (P). Với hệ trục $Oxyz$ phù hợp, đơn vị trên mỗi trục là chục mét. Mặt cầu (S) có phương trình $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 7)^2 = 16$. Lớp đá móng là mặt phẳng (P) có phương trình $x + y + z - 15 = 0$. Để thực hiện việc khai thác, các nhà khoa học đặt mũi khoan được định hướng bắt đầu từ vị trí $A(1; 2; 1)$ và tiến tới liên tục theo phương của vectơ $\vec{u} = (1; 1; -8)$. Ngoài ra, một trạm quan trắc địa chấn được đặt cố định tại vị trí $K(2; 3; 5)$ để theo dõi các biến động cơ học trong quá trình khoan.



- a** Túi khí (S) bị lớp đá móng (P) chia thành hai phần có thể tích bằng nhau.
- b** Quỹ đạo của mũi khoan được mô tả bởi một phần đường thẳng d có phương trình chính tắc là $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-8}$.
- c** Trên quỹ đạo chuyển động của mình, mũi khoan sẽ đi xuyên qua túi khí (S) tạo thành một đoạn đường ống trong lòng túi khí có độ dài là 80 m.
- d** Khi mũi khoan bắt đầu chạm vào túi khí (S) thì tín hiệu địa chấn nhận được là mạnh nhất. Khi đó khoảng cách từ trạm quan trắc đến điểm nhận được tín hiệu mạnh nhất bằng 79 m (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 26 Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, đơn vị trên mỗi trục tương ứng với 100 m. Một trạm kiểm soát ven biển có vùng nhận diện tín hiệu là một khối cầu bán kính 800 m, tâm của trạm đặt tại $I(1; 2; 1,2)$. Vào lúc 8 giờ 00 phút sáng, một tàu đánh cá di chuyển thẳng đều từ vị trí $A(16; -13; 0)$ đến vị trí $B(-14; 17; 0)$ và đến nơi lúc 8 giờ 30 phút sáng cùng ngày.

- a** Phương trình mặt cầu ranh giới vùng tín hiệu là $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1,2)^2 = 640000$.
- b** Tại thời điểm 8 giờ 10 phút sáng, tàu nằm trong vùng nhận diện tín hiệu của trạm.
- c** Vào lúc 8 giờ 20 phút, tàu ở vị trí gần trạm kiểm soát nhất.

- ◀ Khoảng thời gian tàu nằm trong vùng nhận diện tín hiệu của trạm không quá 12 phút.

Câu 27 Hệ thống phòng không “Vòm sắt” là một trong những hệ thống đánh chặn tên lửa xa rất nổi tiếng của Israel. Để “Vòm sắt” hoạt động được chính xác người ta trang bị một Radar có khả năng phát hiện tên lửa với bán kính 417 km.



Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ một hệ thống “Vòm sắt”, Radar đang ở vị trí $O(0; 0; 0)$ và một quả tên lửa đang ở vị trí $A(688; 185; -8)$ được phóng lên và bay theo một quỹ đạo là đường thẳng có vector chỉ phương là $\vec{u} = (-91; -75; 0)$.

- ◀ Phương trình mặt cầu thể hiện vùng phủ sóng của Radar là $x^2 + y^2 + z^2 = 417$.
- ◀ Radar phát hiện quả tên lửa ngay tại vị trí được phóng lên.
- ◀ Nếu hệ thống “Vòm sắt” gặp trục trặc không thể bắn hạ tên lửa thì khoảng cách gần nhất từ hệ thống “Vòm sắt” đến quả tên lửa khoảng 300 km (sai số không quá 10 km).
- ◀ Nếu hệ thống gặp trục trặc không bắn hạ được tên lửa, biết từ khi tên lửa phóng đến khi Radar phát hiện là 3 phút, thời gian tên lửa xuất hiện trên Radar là 5 phút (coi tên lửa chuyển động đều).

2 Trả lời ngắn

Câu 1 Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là mét), một thiết bị phát sóng wifi đặt tại vị trí $A(3; 1; 1)$. Vùng phủ sóng tốt nhất của thiết bị có bán kính bằng 11 (m). Hỏi số giá trị nguyên của tham số m để một người sử dụng điện thoại tại điểm $E(-3; 8; m)$ có thể bắt được tín hiệu wifi của thiết bị nói trên. **KQ:**

Câu 2 Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một thiết bị phát sóng wifi được đặt tại vị trí $I(3; 4; 2)$. Vùng phủ sóng của thiết bị là một hình cầu có bán kính $R = 10$ m. Một người sử dụng điện thoại đứng ở vị trí $K(x - 7; 7; 1)$. Sau đó, người đó di chuyển đến vị trí $H(x + 11; 7; 1)$. Tìm giá trị nguyên của x sao cho cả hai vị trí K và H đều có thể bắt được tín hiệu wifi từ thiết bị. **KQ:**

Câu 3 Khi đặt hệ tọa độ $Oxyz$ vào không gian với đơn vị trên trục tính theo ki-lô-mét, người ta thấy rằng một không gian phủ sóng điện thoại có dạng một hình cầu (S)

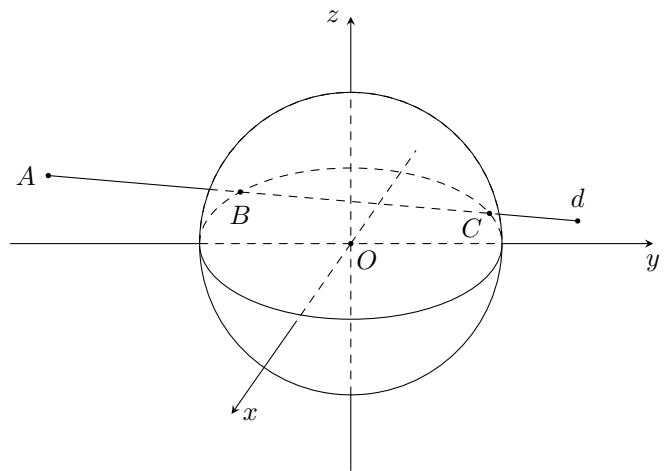
(tập hợp những điểm nằm trong và nằm trên mặt cầu tương ứng). Biết mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0$. Khoảng cách xa nhất giữa hai điểm thuộc vùng phủ sóng là bao nhiêu ki-lô-mét?

KQ:

Câu 4 Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một ngọn hải đăng được đặt ở vị trí $I(21; 35; 50)$, biết rằng ngọn hải đăng được thiết kế với bán kính phủ sóng là 4 km. Giả sử người đi biển di chuyển theo một đường thẳng từ vị trí điểm I đến vị trí điểm $D(5121; 658; 0)$. Khi người đi biển di chuyển đến điểm $H(a; b; c)$ là điểm cuối cùng trên đoạn ID mà người đi biển có thể nhìn thấy ánh sáng từ ngọn hải đăng. Lúc đó c (cao độ của điểm H) có giá trị bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

KQ:

Câu 5 Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, đài kiểm soát không lưu sân bay có tọa độ $O(0; 0; 0)$, mỗi đơn vị trên trục ứng với 1 km. Máy bay trong phạm vi cách đài kiểm soát 417 km sẽ hiển thị trên màn hình ra đa.



Một máy bay đang ở vị trí $A(222; 565; 8)$ chuyển động theo đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (91; 75; 0)$ và hướng về đài kiểm soát không lưu (như hình vẽ). Tọa độ của vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa là $M(a; b; c)$. Khi đó $a + b + c$ bằng bao nhiêu?

KQ:

Câu 6 Trong không gian $Oxyz$, đơn vị trên mỗi trục là 2000 km, người ta mô phỏng bề mặt Hỏa tinh dưới dạng mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z = 0$; một robot do thám được gửi đến bởi các nhà khoa học từ trái đất đang ở vị trí $A(2; 2; 0)$. Người ta cần đặt một thiết bị nhận tín hiệu từ robot ở vị trí B thuộc bề mặt sao Hỏa sao cho B có hoành độ dương và tam giác OAB đều. Tìm khoảng cách thực tế từ vị trí B đến vị trí $C(0; 2; 0)$, nơi đáp xuống của tàu vũ trụ (làm tròn đến hàng phần trăm của nghìn km).

KQ:

Câu 7 Phía trước của một sân vận động, người ta có đặt một quả bóng đá khổng lồ. Cách đó không xa, có một bóng đèn. Trong không gian $(Oxyz)$ (đơn vị đo là mét), giả sử mặt ngoài quả bóng (S) có phương trình $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 9$ và bóng đèn ở vị trí $M(15; 1; 6)$. Khi đó, khoảng cách xa nhất mà bóng đèn có thể chiếu đến một điểm trên quả bóng bằng MA , với MA chính là tiếp tuyến kẻ từ M đến (S) và A là tiếp điểm. Vậy MA bằng bao nhiêu mét?

KQ:

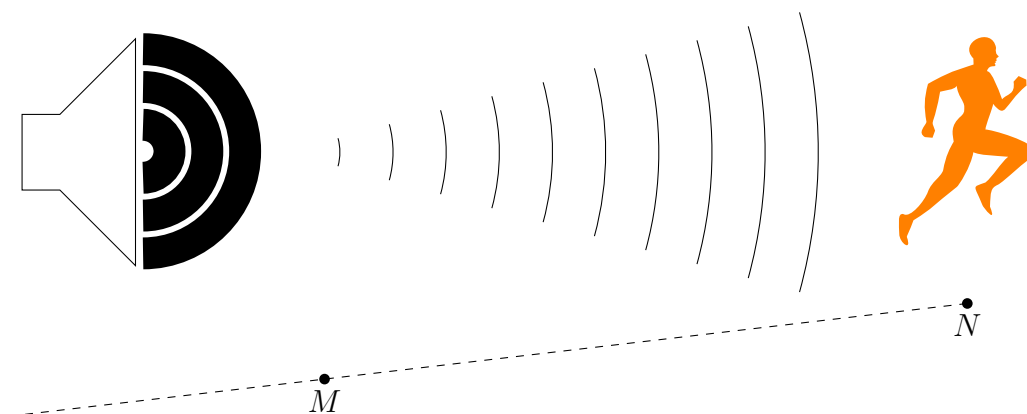
Câu 8 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là km), một máy bay đang ở vị trí $A(3; -2; 1)$ và sẽ hạ cánh ở vị trí $B(2; -5; 0)$ trên đường băng. Có một



đám mây được mô phỏng bởi mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 16$ tại $M\left(\frac{10}{9}; -\frac{25}{9}; \frac{7}{9}\right)$. Tính độ cao của máy bay khi đi xuyên qua đám mây để hạ cánh (Giả sử mặt đất ở vị trí máy bay đang bay được coi là mặt phẳng mặt phẳng (Oxy)).

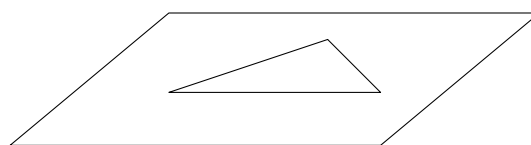
KQ:

Câu 9 Một nguồn âm phát ra sóng âm là sóng cầu (mặt đầu sóng là mặt cầu). Khi gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với đơn vị trên mỗi trục là mét, vị trí nguồn âm có tọa độ $(0; -3; -1)$, cường độ âm chuẩn phát ra có bán kính là 10 mét. Một bạn học sinh di chuyển theo phương thẳng từ vị trí $N(7; 10; -4)$ đến vị trí $M(5; 0; 2)$ để nhận nguồn âm. Khi bạn học sinh đó di chuyển từ N đến M thì vị trí đầu tiên nhận được nguồn âm là $A(x_0; y_0; z_0)$. Tính tổng $x_0 + y_0 + z_0$.



KQ:

Câu 10 Trong một tiết thực hành về quan sát quả địa cầu có một nhóm học sinh cầm một quả địa cầu sao cho nó không chạm vào mặt bàn. Trên mặt bàn có một tờ giấy hình tam giác ABC . Xét trong không gian $Oxyz$, tam giác ABC có $A(3; 0; 0)$, $B(0; 5; 0)$, $C(0; 5; 1)$.



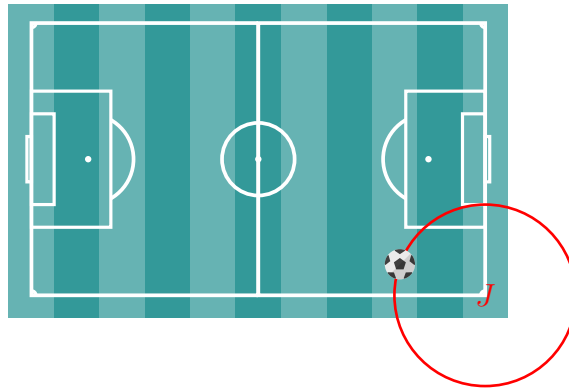
Giả sử bề mặt quả địa cầu là mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-3)^2 = \frac{49}{20}$. Cô giáo khẳng định trên quả địa cầu (S) tồn tại duy nhất một điểm $M(a; b; c)$ sao cho biểu thức $T = MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị lớn nhất và yêu cầu nhóm học sinh đó đi tìm điểm M nêu trên. Tổng $a + b + c$ bằng bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

KQ:

Câu 11 Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là ki-lô-mét), một trạm thu phát sóng điện thoại di động có đầu thu đặt tại điểm $I(1; 2; 2)$ biết rằng bán kính phủ sóng của trạm là 3 km. Hai người sử dụng điện thoại lần lượt tại $M(4; -4; 2)$ và $N(6; 0; 6)$. Gọi $E(a; b; c)$ với $a < 0$ là một điểm thuộc ranh giới vùng phủ sóng của trạm sao cho tổng khoảng cách từ E đến vị trí M và N lớn nhất. Tính $T = a + b + c$.

KQ:

Câu 12 Công nghệ hỗ trợ trọng tài VAR (Video Assistant Referee) thiết lập một hệ tọa độ $Oxyz$ để theo dõi vị trí của quả bóng M . Cho biết M đang nằm trên mặt sân có phương trình $z = 0$, đồng thời thuộc mặt cầu (S) có phương trình $(x-22)^2 + (y-4)^2 + (z-13)^2 = 194$ (đơn vị độ dài tính theo mét). Gọi J là hình chiếu tâm I của mặt cầu (S) xuống mặt sân bóng. Khoảng cách từ vị trí M của quả bóng đến điểm J là



KQ:

Câu 13 Hệ thống định vị toàn cầu (tên tiếng Anh là: Global Positioning System, viết tắt là *GPS*) là một hệ thống cho phép xác định chính xác vị trí của một vật thể trong không gian. Ta có thể mô phỏng cơ chế hoạt động của hệ thống *GPS* trong không gian như sau: Trong cùng một thời điểm, tọa độ của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước, trên mỗi vệ tinh có một máy thu tín hiệu. Bằng cách so sánh sự sai lệch về thời gian từ lúc tín hiệu được phát đi với thời gian nhận phản hồi tín hiệu đó, mỗi máy thu tín hiệu xác định được khoảng cách từ vệ tinh đến vị trí M cần tìm tọa độ. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn vệ tinh $A(0; 4; 5)$, $B(-3; -1; 3)$, $C(-2; 8; 9)$, $D(-7; 2; -3)$. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O đến điểm M biết rằng khoảng cách từ các vệ tinh đến điểm M lần lượt là $MA = 3$, $MB = 5$, $MC = 9$, $MD = 10$. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

Câu 14 Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị của các trục tọa độ là ki - lô - mét), đài kiểm soát không lưu sân bay có tọa độ $(-64; 128; 64)$. Máy bay bay trong phạm vi cách đài kiểm soát không quá 500 km thì sẽ hiển thị trên màn hình ra đa. Một máy bay N xuất hiện trên màn hình ra đa và một máy bay M nằm trong mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 1458 = 0$ sao cho hai máy bay M, N thuộc đường thẳng có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; 1; 1)$. Khoảng cách nhỏ nhất giữa hai máy bay M, N là bao nhiêu km? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

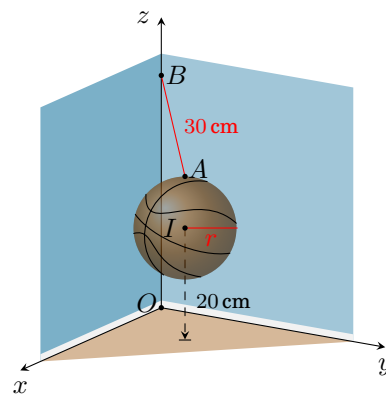
KQ:

Câu 15 Cho một hộp quà hình lập phương có cạnh bằng 10 cm. Trong hộp có một quả cầu pha lê lớn đặt vừa khít vào hộp sao cho quả cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của hộp. Ở 8 góc của hình lập phương, có 8 quả cầu pha lê nhỏ cùng tiếp xúc với các mặt hộp và tiếp xúc với quả cầu lớn. Đổ epoxy resin (một loại keo tổng hợp trong suốt dùng trong thủ công mỹ nghệ) vào đầy hộp để trang trí. Tính thể tích phần keo cần đổ, theo đơn vị lít (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

KQ:

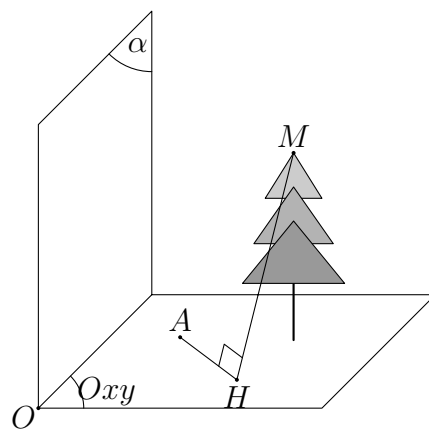


Câu 16 Một quả bóng hình cầu có bán kính r đang được treo trong một góc của tường nhà (hai bờ tường vuông góc với nhau). Một điểm B cố định nằm trên mép hai bờ tường và cách mặt đất 80 cm, sợi dây treo quả bóng có độ dài $AB = 30$ cm và đây cũng là độ dài ngắn nhất nối điểm B với mặt xung quanh của quả bóng. Biết rằng quả bóng tiếp xúc với hai bên bờ tường và điểm thấp nhất của quả bóng cách mặt đất 20 cm. Hỏi quả bóng có đường kính là bao nhiêu cm? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



KQ:

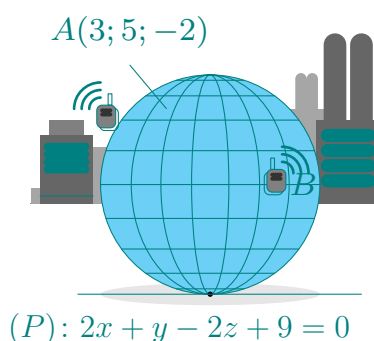
Câu 17 Tại một khu quảng trường, người ta muốn trang trí dải đèn led để chào mừng một sự kiện. Từ đỉnh M của một cái cây cao, người ta kéo dây đèn led thẳng xuống một vị trí H nào đó trên mặt đất, rồi tiếp tục kéo dây đèn led thẳng từ H đến một vị trí A cố định trên mặt đất sao cho MH luôn vuông góc với HA . Sau đó, từ vị trí H , người ta sẽ đi dây điện thẳng đến công tắc nằm trên một bức tường vuông góc với mặt đất.



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất (đơn vị trên mỗi trục tính theo mét), người ta xác định được $M(4; -2; 3)$, $A(-2; 6; 0)$ và bức tường chứa công tắc nằm trên mặt phẳng $(\alpha): 3x + 4y + 89 = 0$. Để độ dài đường dây điện phải đi là ngắn nhất, người ta đã tính toán khoảng cách nhỏ nhất từ vị trí H đến bức tường bằng a (m). Giá trị của a bằng bao nhiêu?

KQ:

Câu 18 Một công ty xây dựng một hệ thống Giám sát môi trường tại khu công nghiệp. Hai cảm biến không dây được đặt tại hai vị trí A, B trong không gian 3 chiều để thu thập dữ liệu không khí. Để đảm bảo tín hiệu truyền giữa hai cảm biến ổn định, công ty thiết kế một bóng bảo vệ tín hiệu hình ảnh cầu di động nhưng luôn đi qua cả hai cảm biến A và B . Bóng này cần tiếp xúc với mặt đất để đảm bảo tính ổn định.



Giả sử trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tọa độ các điểm là $A(3; 5; -2)$, $B(-1; 3; 2)$ và mặt đất được mô tả bằng mặt phẳng $P(x): 2x + y - 2z + 9 = 0$. Trong quá trình mô phỏng, điểm tiếp xúc giữa bóng bảo vệ và mặt đất (gọi là C) thay đổi. Kỹ sư cần xác định khoảng cách giữa gốc tọa độ $O(0; 0; 0)$ đến điểm tiếp xúc C để đánh giá mức độ ảnh hưởng từ vị trí đặt thiết bị. Gọi m_1 là giá trị lớn nhất và m_2 là giá trị nhỏ nhất của độ dài OC . Tính giá trị $m_1^2 + m_2^2$.

KQ:

KQ: 

KQ: 

KQ: 

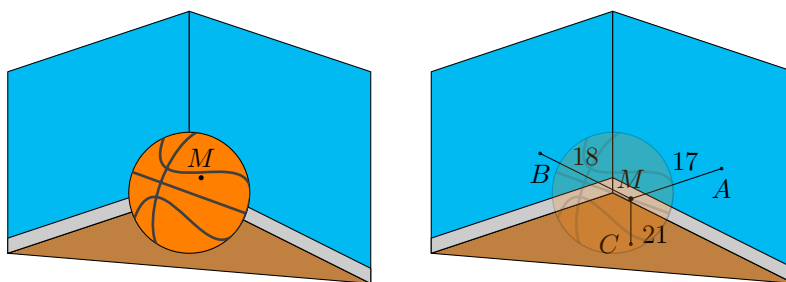
KQ: 



Câu 23 Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là mét), một kiến trúc sư cần lắp đặt một đèn chiếu sáng tại vị trí A cho một phòng triển lãm. Điểm A thay đổi trên một khung thép hình tròn là giao tuyến của mặt phẳng $(\alpha): x + y - z + 4 = 0$ và mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 6$. Đèn phát ra luồng sáng có dạng hình nón với góc ở đỉnh bằng 60° , trục của hình nón luôn vuông góc với mặt sàn $(P): x - 2y + 2z + 10 = 0$. Để đảm bảo mật độ ánh sáng tập trung cao nhất cho khu vực trưng bày dưới sàn, kiến trúc sư cần điều chỉnh đèn đến vị trí sao cho diện tích vùng chiếu sáng trên mặt sàn (P) là nhỏ nhất. Hãy tính diện tích vùng chiếu sáng nhỏ nhất đó. (Không làm tròn các kết quả trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần mười của m^2).

KQ: 

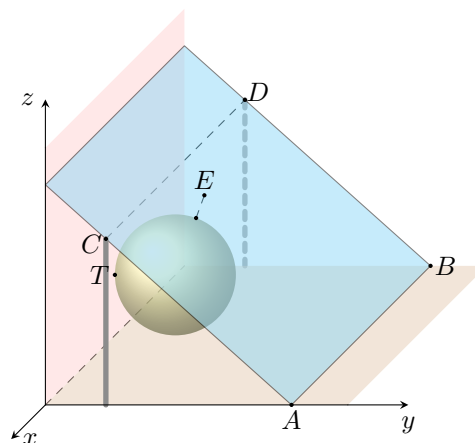
Câu 24 Một quả bóng rổ được đặt ở một góc của căn phòng hình hộp chữ nhật, sao cho quả bóng chạm và tiếp xúc với hai bức tường và nền nhà của căn phòng đó thì có một điểm trên quả bóng có khoảng cách lần lượt đến hai bức tường và nền nhà là 17 cm, 18 cm, 21 cm (tham khảo hình minh họa). Hỏi độ dài đường kính của quả bóng bằng bao nhiêu cm biết rằng quả bóng rổ tiêu chuẩn có đường kính từ 23 cm đến 24,5 cm? Kết quả là tròn đến một chữ số thập phân.



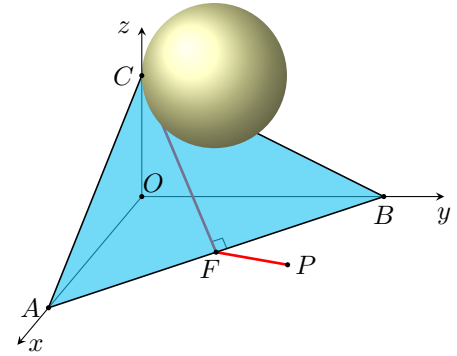
KQ: 

Câu 25 Một bồn chứa khí hình cầu (K) có đường kính 10 m tiếp xúc trực tiếp với một bức tường thẳng đứng tại điểm $T(-6; 0; 5)$. Bồn được che chắn bằng một tấm chắn nghiêng, cố định xuống mặt đất tại các điểm $A(0; 16,25; 0)$ và $B(12; 16,25; 0)$, đồng thời được chống đỡ bởi các thanh thẳng đứng tại các điểm $C(0; 5; 15)$ và $D(12; 5; 15)$ (tham khảo hình vẽ bên). Tính khoảng cách an toàn giữa tấm chắn E và mặt cầu (K) (đơn vị mét).

KQ: 



Câu 26 Một nhà sản xuất ô bi đã đặt một mô hình quả cầu khổng lồ trên mái nghiêng của nhà xưởng. Mặt mái có thể được mô tả bằng mặt phẳng $(E): x + 2y + 2z = 10$. Trong đó A, B, C là giao điểm của mặt phẳng (E) với các trục tọa độ. Một mô hình quả cầu bán kính $r = 3$ được đặt tiếp xúc với mặt phẳng (E) tại điểm C .

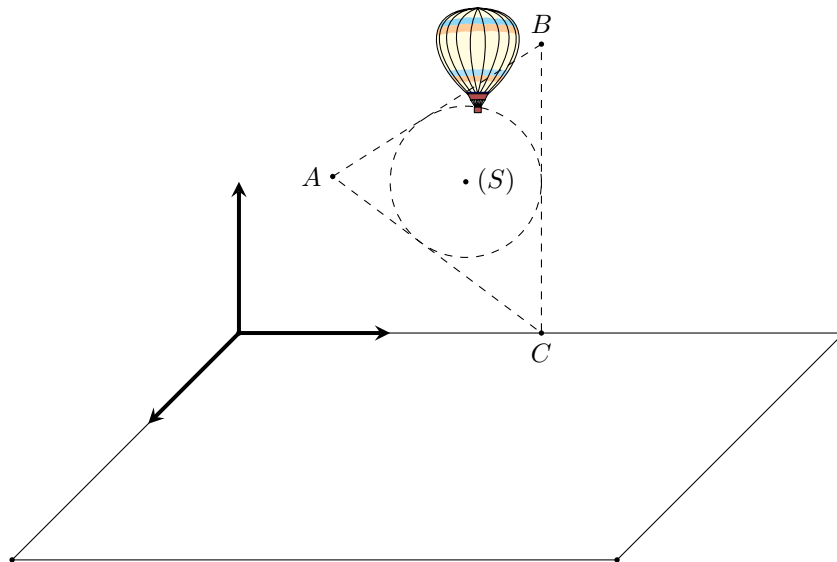


Từ C kẻ đường vuông góc với AB tại F . Khi thay thế quả cầu, nó lăn trên đường thẳng CF cho đến khi quả cầu vừa tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) tại $P(a; b; 0)$ thì dừng lại. Tính $a + b$.

KQ:

Câu 27 Tại lễ Tri ân và trưởng thành của học sinh khối 12 của một trường THPT CPV. Kết thúc buổi lễ, một học sinh khối 12 đại diện cho các bạn thả một khinh khí cầu với khát vọng bay cao và vươn xa. Trong không gian $Oxyz$, mỗi đơn vị ứng với 1 m, giả sử khinh khí cầu đang ở vị trí có phương trình là $(S): (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 10)^2 = 2$. Cùng thời điểm đó có ba chiếc flycam A, B, C cách nhau 3 km, 4 km, 5 km và tạo thành một tam giác ABC có ba cạnh tiếp xúc với mặt cầu (S) , biết rằng mặt phẳng (ABC) song song với mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 17 = 0$ và có phương trình dạng $2x + ay + bz + c = 0$. Tổng giá trị của $T = a + b + c$ bằng bao nhiêu?

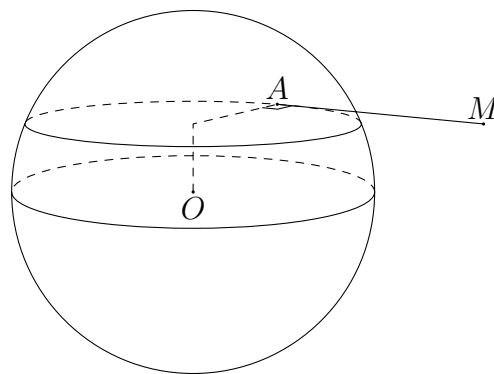
KQ:



Câu 28 Mặt cầu tâm I bán kính $R > 0$ là tập hợp tất cả các điểm trong không gian cách I một khoảng bằng R . Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, đơn vị trên hệ trục là cm, một tổ kiến có bề mặt là một mặt cầu tâm là gốc tọa độ và bán kính $R = 6$ cm, ở điểm $A(20; 0; 0)$ có 10 miếng mồi và ở điểm $B(0; 20; 0)$ có 3 miếng mồi. Một con kiến trên bề mặt tổ, mỗi lần đi đến A hoặc B tha đúng một miếng mồi về tổ. Hỏi quãng đường ngắn nhất con kiến đó đi là bao nhiêu cm để con kiến tha hết 13 miếng mồi về tổ (làm tròn kết quả hàng đơn vị)?



Câu 29 Bán kính Trái Đất lấy bằng 6 400 km, khi gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ thì bề mặt Trái Đất là mặt cầu có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 64$, đường xích đạo nằm trên mặt phẳng (Oxy) . Một tàu vũ trụ X rời khỏi bề mặt Trái Đất theo phương tiếp tuyến với đường tròn vĩ tuyến tại điểm $A(5; \sqrt{23}; 4)$, với giả thiết rằng sau khi rời khỏi bề mặt Trái Đất tàu vũ trụ X bay theo quỹ đạo thẳng với tốc độ không đổi bằng 8 km/s.

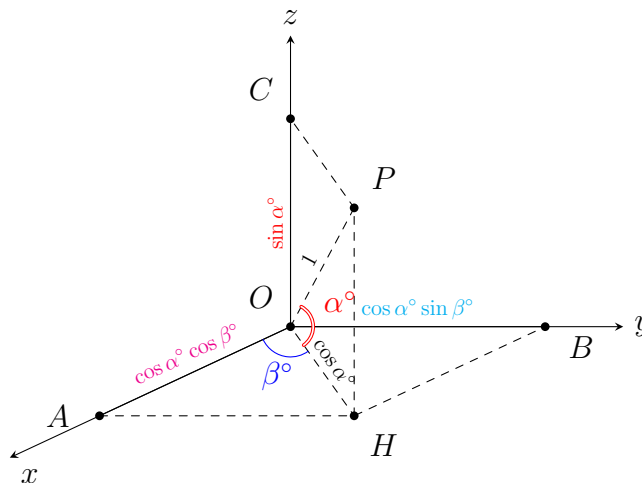
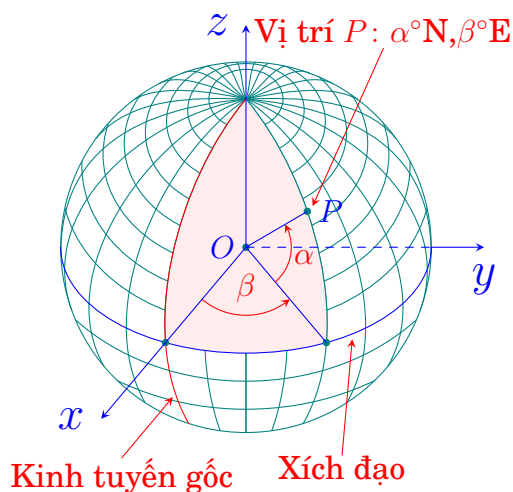


Hỏi sau đúng 20 phút kể từ khi rời khỏi bề mặt Trái Đất thì khoảng cách từ tàu vũ trụ đến một điểm trên đường tròn xích đạo ngắn nhất bằng bao nhiêu kilomet (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

KQ:

Câu 30 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, bề mặt Trái Đất có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, (1 đơn vị dài trong không gian $Oxyz$ tương ứng với 6371 km trên thực tế); vị trí P có vĩ độ, kinh độ tương ứng là α° N, β° E, ($0 < \alpha < 90$, $0 < \beta < 180$) có tọa độ $P(\cos \alpha^\circ \cos \beta^\circ; \cos \alpha^\circ \sin \beta^\circ; \sin \alpha^\circ)$. Ứng dụng Google Maps cho phép xác định khoảng cách giữa hai vị trí trên bề mặt Trái Đất khi biết vĩ độ và kinh độ của chúng. Khoảng cách giữa hai vị trí P và Q trên bề mặt Trái Đất là độ dài cung nhỏ PQ của đường tròn có tâm O và đi qua hai điểm P, Q. Tính khoảng cách trên mặt đất giữa hồ Hoàn Kiếm (Hà Nội) ở vị trí $21^\circ 02'$ N, $105^\circ 51'$ E và đảo Trường Sa ở vị trí $8^\circ 39'$ N, $111^\circ 56'$ E (đơn vị: km, kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

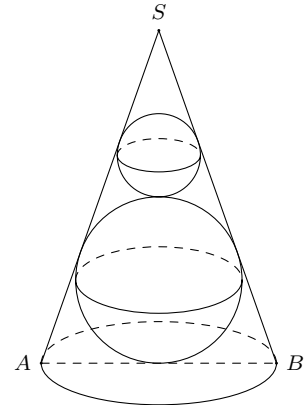
KQ:



Câu 31 Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, xét một vùng phòng thủ hình cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 49$ và một hành lang bay an toàn được giới hạn bởi hai mặt phẳng song song $(P_1): x + y + z = 5$ và mặt phẳng $(P_2): x + y + z = -5$. Một máy bay trinh sát bắt đầu xâm nhập khu vực từ điểm $M_0(6; 0; 0)$ và bay theo đường thẳng Δ có véc-tơ chỉ phương $\vec{u} = (-1; 1; 1)$. Tính chiều dài đoạn đường bay của máy bay nằm hoàn toàn trong phần giao của hành lang bay an toàn và vùng phòng thủ hình cầu (đơn vị: km).

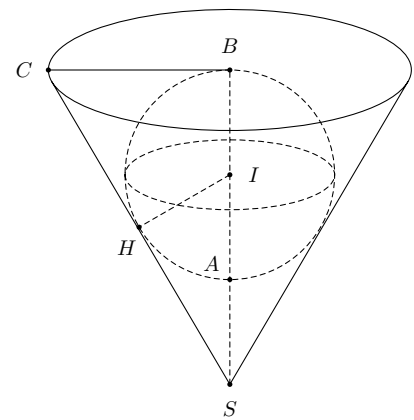
KQ:

Câu 32 Cho 2 mặt cầu $S_1(I_1, 2)$ và $S_2(I_2, 1)$ tiếp xúc ngoài nhau. Xét hình nón (N) có mặt đáy tiếp xúc với mặt cầu (S_1) và các đường sinh là tiếp tuyến chung của 2 mặt cầu $(S_1), (S_2)$ (tham khảo hình vẽ). Diện tích xung quanh của hình nón (N) bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



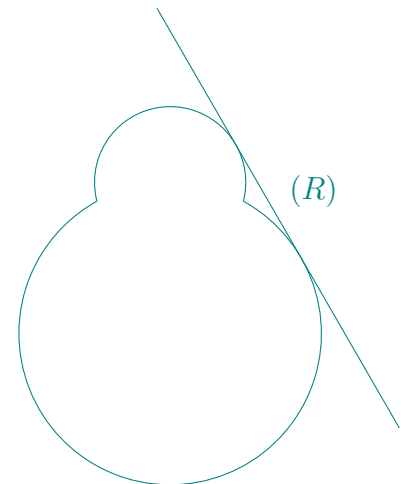
KQ:

Câu 33 Một vỏ kem ốc quế là một loại bánh khô, hình nón (N) trong không gian $Oxyz$, thường được làm bằng một chiếc bánh xốp dùng để đặt kem vào và cầm ăn mà không cần bát hoặc muỗng. Người ta thả vào vỏ kem (N) một viên kem vani hình cầu có dính hai viên socola nhỏ tại hai vị trí $A(2; 1; 3)$ và $B(6; 5; 5)$ sao cho đường kính AB có B là tâm đường tròn đáy khối nón. Khi thể tích của khối nón (N) nhỏ nhất thì mặt phẳng qua đỉnh S của khối nón (N) và song song với mặt phẳng chứa đường tròn đáy của (N) có phương trình $2x + by + cz + d = 0$. Tính giá trị của biểu thức $T = b + c + d$.



KQ:

Câu 34 Ở trung tâm nghiên cứu X có một thiết bị được đặt trên một quả đồi thuộc vùng rừng núi để đo các thông số về thời tiết khí tượng của vùng đó (nhiệt độ, áp suất khí quyển, độ ẩm, mây, gió, mưa...). Cấu tạo bên ngoài của thiết bị gồm hai mặt cầu cắt nhau là (S_1) có tâm I , bán kính bằng 4m và mặt cầu (S_2) có tâm J , bán kính bằng 2m. Để đo các thông số cần thiết, người ta lắp đặt một tấm thiết bị điện tử hình chữ nhật (R) luôn tiếp xúc với cả hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$ và có thể di chuyển quanh các chỏm cầu để truyền tín hiệu tới hộp điều hành (đường truyền không dây).



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ trong không gian với độ dài đơn vị trên mỗi trục tọa độ là 1m và $O(0; 0; 0)$ là vị trí hộp điều hành thiết bị thì $I(2; 1; 1)$ và $J(2; 1; 5)$. Khi khoảng cách từ O đến tấm thiết bị điện tử (R) ngắn nhất là lúc đường truyền tín hiệu tốt nhất. Khoảng cách ngắn nhất này bằng bao nhiêu mét? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm, tham khảo mô tả thiết bị như hình vẽ).

KQ:



Câu 35 Nhân dịp kỷ niệm ngày 30/4 lịch sử, một màn trình diễn ánh sáng nghệ thuật bằng drone quy mô lớn được tổ chức trên bầu trời TP. Hồ Chí Minh. Hàng trăm chiếc drone được lập trình để tạo thành những hình ảnh ánh ý nghĩa. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là mét), mặt đất được coi là mặt phẳng (Oxy).



♦ **Giai đoạn 1: Hình thành chữ “V” trong “VIỆT NAM”**

Ba drone D_1, D_2, D_3 được điều khiển để giữ ổn định các vị trí cố định lần lượt là $A(18; 22; 50), B(30; 12; 50), C(18; 12; 50)$. Các vị trí này tạo thành một phần của chữ “V” khổng lồ.

♦ **Giai đoạn 2: Drone đặc nhiệm di chuyển**

Một drone đặc nhiệm D_0 , ban đầu đang ở vị trí $M_0(5, 45, 30)$, nhận được lệnh di chuyển thẳng đến một vị trí M trên mặt phẳng (P): $x + y + z = 80$. Mặt phẳng (P) là mặt phẳng chính nơi các drone sẽ sắp xếp thành dòng chữ “TÔI YÊU” sau đó. Vị trí M này được chọn sao cho nó cách đều ba drone D_1, D_2, D_3 (tức là $MA = MB = MC$). Drone D_0 được lập trình bay với vận tốc không đổi là $v = 10$ m/s.

Để duy trì tín hiệu ổn định, quỹ đạo bay thẳng M_0M của drone D_0 phải hoàn toàn nằm ngoài khối cầu nhiễu sóng (S) có tâm $I(15; 25; 40)$ và bán kính $R = 4$ m (được phép tiếp xúc). Hãy tính tổng thời gian (tính bằng giây, làm tròn đến hàng phần chục) di chuyển của drone D_0 từ vị trí ban đầu M_0 đến vị trí M theo quỹ đạo thẳng đã định, biết rằng quỹ đạo này thỏa mãn điều kiện an toàn.

KQ: 

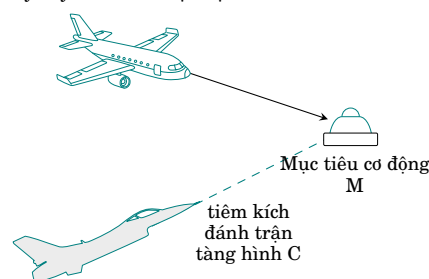
Câu 36 Trong hệ tọa độ $Oxyz$, một kịch bản tác chiến phức tạp diễn ra như sau:

♦ **Máy bay trinh sát hiện đại R:** Xuất phát từ vị trí $R_0(200; 100; 20)$ (đơn vị km), di chuyển thẳng đều với véc-tơ vận tốc không đổi $\vec{v}_R = (-20; -10; 0)$.

♦ **Mục tiêu cơ động cao M:** Xuất phát từ vị trí $M_0(10; 20; 15)$ km, di chuyển thẳng đều với véc-tơ vận tốc không đổi $\vec{v}_M = (30; 40; 0)$.

♦ **Tiêm kích đánh chặn tàng hình C:** Xuất phát từ căn cứ mặt đất tại vị trí $C_0(0; 0; 1)$ km vào thời điểm $t = 0$. Tiêm kích C bay theo một đường thẳng với tốc độ không đổi v_C để thực hiện nhiệm vụ đặc biệt.

Máy bay trinh sát hiện đại R



Nhiệm vụ đặc biệt của tiêm kích C: Tiêm kích C phải đạt được đồng thời ba điều kiện sau tại cùng một thời điểm $t > 0$:

♦ **Khóa mục tiêu tối ưu:** Ba điểm gồm tiêm kích C, mục tiêu M, và máy bay trinh sát R phải thẳng hàng.

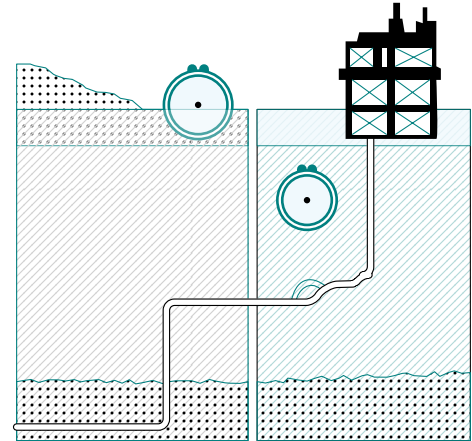
♦ **Kích hoạt vũ khí chính xác:** Tại thời điểm thẳng hàng nói trên, tiêm kích C phải nằm trên bề mặt của một “khối cầu chiến thuật” có tâm chính là mục tiêu M và bán kính $S_M = 5$ km. Điều này đảm bảo vũ khí có hiệu quả tối đa.

- ♦ **An toàn hành lang bay:** Véc-tơ chỉ phương của quỹ đạo bay của tiêm kích C phải vuông góc với véc-tơ pháp tuyến của một mặt phẳng an toàn $(\alpha): x - y + 2z - 10 = 0$.

Hãy tính tốc độ không đổi v_C (km/phút) mà tiêm kích C phải duy trì từ lúc xuất phát cho đến khi đồng thời thoả mãn cả ba điều kiện trên, biết thời điểm $t > 0$ là sớm nhất (làm tròn đến hàng phần mười).

KQ:

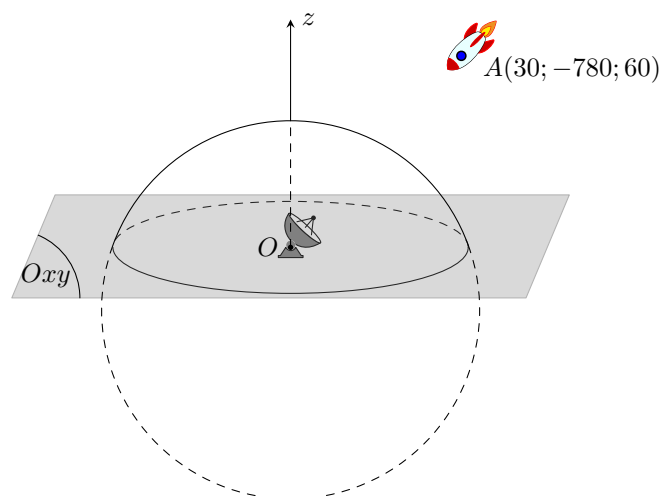
Câu 37 Trong một dự án khai thác dầu khí ngoài thềm lục địa, các kỹ sư đang lên kế hoạch lắp đặt một đoạn đường ống dẫn dầu d đặc biệt. Đường ống này cần phải tiếp xúc với hai vòm đá ngầm lớn hình cầu để có điểm tựa gia cố. Vòm đá ngầm thứ nhất (A) được xác định vị trí và kích thước trong hệ trục $Oxyz$ bởi mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 36$.



Vòm đá ngầm thứ hai (B) được xác định bởi mặt cầu $(S'): (x + 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 81$. Tuy nhiên, gần khu vực thi công có một nguồn địa nhiệt ngầm $M(4; -1; -7)$ rất không ổn định, có khả năng gây ảnh hưởng đến vật liệu và hoạt động của đường ống. Để đảm bảo an toàn và tuổi thọ tối đa cho công trình, các kỹ sư phải chọn phương án lắp đặt đường ống d sao cho nó nằm xa nhất có thể với với nguồn địa nhiệt M . Sau khi được lắp đặt, đường ống d sẽ được nối vào một trạm điều phối trung tâm E . Trạm E này nằm trên một mặt phẳng kỹ thuật (P) đã được gia cố sẵn dưới đáy biển, có phương trình $2x - y + z - 17 = 0$. Việc xác định chính xác tọa độ $E(m; n; p)$ là cực kì quan trọng để đồng bộ hóa toàn bộ hệ thống. Yêu cầu: bạn hãy giúp đội ngũ kỹ sư tính toán giá trị của $T = m + n + p$ từ tọa độ điểm E , nhằm phục vụ cho việc lập trình hệ thống điều khiển và giám sát đường ống.

KQ:

Câu 38 Hình chỏm cầu có một đáy là một phần của hình cầu bị chia bởi một mặt phẳng. Một radar có thể phát hiện các mục tiêu trong khu vực của một hình chỏm cầu với chiều rộng trên mặt đất là một hình tròn với bán kính 450 (km) và chiều cao 30 (km).



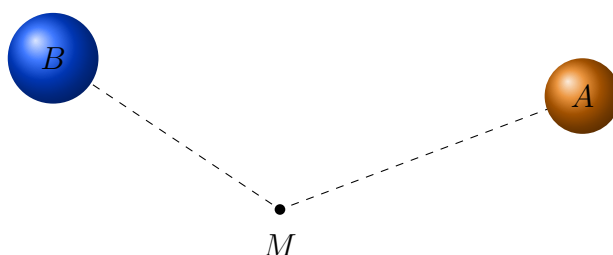
Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với mặt phẳng Oxy là mặt đất (xem mặt đất là mặt phẳng), trục Oz hướng lên cao và gốc tọa độ O trùng với vị trí của radar (tham khảo hình vẽ bên),



mỗi đơn vị trên trục là 1 (km). Một tên lửa bắt đầu từ vị trí điểm $A(30; -780; 60)$, dự định bay thẳng với vận tốc không đổi 7 (km)/giây hướng thẳng đến vị trí của radar. Thời gian dự kiến từ khi tên lửa bị radar phát hiện đến khi nó bắn trúng radar là bao nhiêu giây (làm tròn đến hàng đơn vị)?

KQ:

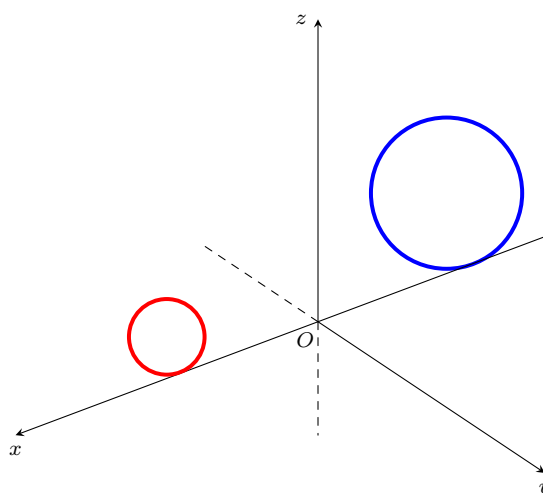
Câu 39 Tiến hành gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ vào một căn phòng triển lãm, với đơn vị dài trên mỗi trục tọa độ là 160 cm. Một người đứng tại một vị trí mà tọa độ của mắt người đó là $M(1; 0; 1)$. Người này tiến hành quan sát hai quả cầu phong thủy đá quý I và II thì cảm thấy rằng chúng to bằng nhau, quả cầu I có tâm tại $A(4; 3; 1)$, quả cầu II có tâm tại $B(0; 2; 2)$. Biết rằng quả cầu I có thể tích bằng 90 dm^3 và quả cầu II có thể tích không vượt quá 120 dm^3 . Hãy xác định thể tích quả cầu II theo đơn vị dm^3 (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



KQ:

Câu 40 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai viên bi xanh và đỏ ban đầu dạng hai mặt cầu lần lượt có phương trình là $(S_{\text{đỏ}}) : (x - 10)^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 9$ và $(S_{\text{xanh}}) : (x + 12)^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 16$. Biết mặt đất trùng với mặt phẳng Oxy và hai mặt cầu này tiếp xúc với mặt phẳng Oxy với điểm tiếp xúc nằm trên trục Ox . Truyền cho hai viên bi đỏ và xanh lần lượt các tốc độ không đổi $v_{\text{đỏ}} = 5 \text{ (m/s)}$ và $v_{\text{xanh}} = 3 \text{ (m/s)}$ thì hai viên bi lăn thẳng về phía nhau dọc theo trục Ox (điểm tiếp xúc luôn nằm trên Ox). Sau khoảng thời gian bằng bao nhiêu giây thì hai viên bi va chạm lần đầu tiên (Đơn vị trên hệ trục tọa độ là mét và kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

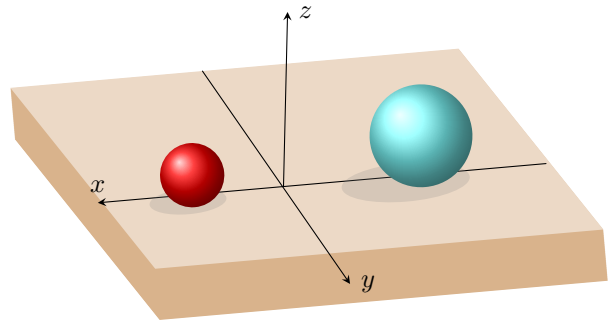


Câu 41 Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là mét), một kiến trúc sư cần lắp đặt một đèn chiếu sáng tại vị trí A cho một phòng triển lãm. Điểm A thay đổi trên

một khung thép hình tròn là giao tuyến của mặt phẳng $(\alpha): x + y - z + 4 = 0$ và mặt cầu $(S): (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = 6$. Đèn phát ra luồng sáng có dạng hình nón với góc ở đỉnh bằng 60° , trục của hình nón luôn vuông góc với mặt sàn $(P): x - 2y + 2z + 10 = 0$. Để đảm bảo mật độ ánh sáng tập trung cao nhất cho khu vực trưng bày dưới sàn, kiến trúc sư cần điều chỉnh đèn đến vị trí sao cho diện tích vùng chiếu sáng trên mặt sàn (P) là nhỏ nhất. Hãy tính diện tích vùng chiếu sáng nhỏ nhất đó. (Không làm tròn các kết quả trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần mười của m^2).

KQ:

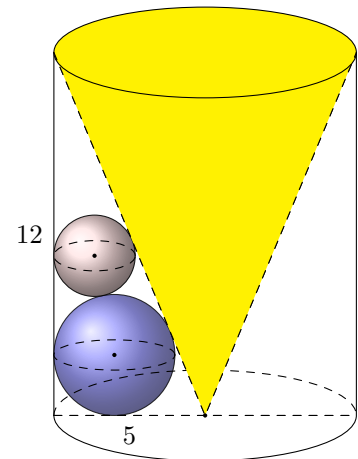
Câu 42 Trong không gian $Oxyz$ với mặt đất trùng với mặt phẳng (Oxy) , hai viên bi xanh và đỏ ban đầu dạng mặt cầu có phương trình $(S_d): (x - 10)^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 9$ và $(S_x): (x + 12)^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 16$, tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy) với điểm tiếp xúc nằm trên trục Ox . Truyền cho viên bi đỏ và xanh lần lượt các tốc độ không đổi là $v_d = 5 \text{ m/s}$ và $v_x = 3 \text{ m/s}$, hai viên bi lăn thẳng về phía nhau dọc theo trục Ox (điểm tiếp xúc luôn nằm trên Ox). Sau khoảng thời gian bằng bao nhiêu giây thì hai viên bi va chạm (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)?



KQ:

Câu 43 Người ta chế tạo một món đồ chơi trẻ em (như hình vẽ), theo các công đoạn như sau:

- ♦ **Bước 1:** Chế tạo hình trụ tròn xoay bằng thủy tinh trong suốt, chiều cao 12 cm, bán kính đường tròn đáy 5 cm.
- ♦ **Bước 2:** Đặt bên trong hình trụ một khối nón tròn xoay (phần màu vàng như hình vẽ) có đáy trùng với một đường tròn đáy của hình trụ và đỉnh trùng với tâm đường tròn đáy còn lại của hình trụ.
- ♦ **Bước 3:** Đặt vào hai quả cầu (quả cầu lớn màu màu xanh và quả cầu nhỏ màu hồng như hình vẽ), tiếp xúc với nhau và tiếp xúc với các đường sinh, mặt đáy của hình trụ và hình nón (quan sát hình vẽ).

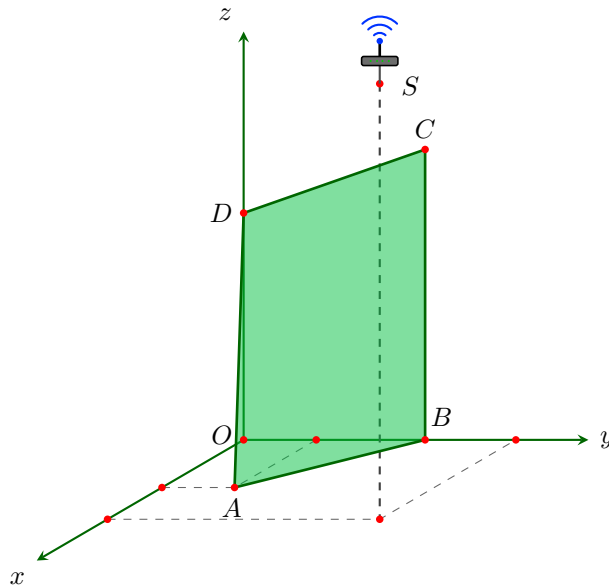


Phần còn lại bên ngoài khối nón, bên ngoài hai khối cầu và bên trong hình trụ người ta đổ đầy nước. Bỏ qua bề dày của các lớp vỏ. Hỏi thể tích nước cần đổ bằng bao nhiêu cm^3 ? (kết quả làm tròn tới hàng đơn vị).

KQ:



Câu 44 Trong không gian $Oxyz$, một bức tường hình chữ nhật $ABCD$ dựng vuông góc với mặt đất với hai điểm $A(2; 1; 0)$, $B(0; 2; 0)$ với chiều cao 3 m. Biết rằng mỗi đơn vị trong hệ trục tọa độ tương ứng với 1 m. Một trạm phát sóng với máy phát đặt tại điểm S có tọa độ $(3; 3; 6)$. Trạm phát sóng phát sóng ra xung quanh nhưng khi gặp bức tường thì bị chắn. Vì vậy sẽ có một vùng sau bức tường nơi mà không bắt được sóng. Một người đi bộ từ vị trí có tọa độ $(-4; -4; 0)$ theo hướng thẳng đến gốc tọa độ với vận tốc 1 m/s. Tính thời gian kể từ lúc bắt đầu di chuyển đến khi người đó bị mất sóng (đơn vị giây, kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



KQ: 

BẢNG ĐÁP ÁN ĐÚNG SAI Đ/S

Câu 1. ☐ Đ ☐ S ☐ Đ ☐ Đ

Câu 8. ☐ Đ ☐ S ☐ Đ ☐ S

Câu 15. ☐ Đ ☐ Đ ☐ S ☐ S

Câu 22. ☐ Đ ☐ Đ ☐ S ☐ Đ

Câu 2. ☐ Đ ☐ Đ ☐ Đ ☐ Đ

Câu 9. ☐ S ☐ Đ ☐ Đ ☐ Đ

Câu 16. ☐ Đ ☐ Đ ☐ Đ ☐ Đ

Câu 23. ☐ S ☐ Đ ☐ Đ ☐ Đ

Câu 3. ☐ Đ ☐ Đ ☐ Đ ☐ S

Câu 10. ☐ S ☐ Đ ☐ Đ ☐ S

Câu 17. ☐ Đ ☐ S ☐ Đ ☐ S

Câu 24. ☐ Đ ☐ S ☐ Đ ☐ Đ

Câu 4. ☐ Đ ☐ S ☐ Đ ☐ S

Câu 11. ☐ S ☐ S ☐ Đ ☐ Đ

Câu 18. ☐ Đ ☐ Đ ☐ S ☐ Đ

Câu 25. ☐ S ☐ Đ ☐ Đ ☐ S

Câu 5. ☐ Đ ☐ Đ ☐ S ☐ S

Câu 12. ☐ Đ ☐ S ☐ Đ ☐ S

Câu 19. ☐ S ☐ Đ ☐ S ☐ Đ

Câu 26. ☐ S ☐ Đ ☐ S ☐ Đ

Câu 6. ☐ Đ ☐ S ☐ Đ ☐ S

Câu 13. ☐ Đ ☐ S ☐ Đ ☐ Đ

Câu 20. ☐ Đ ☐ Đ ☐ Đ ☐ Đ

Câu 27. ☐ S ☐ S ☐ Đ ☐ Đ

Câu 7. ☐ Đ ☐ Đ ☐ Đ ☐ S

Câu 14. ☐ Đ ☐ S ☐ S ☐ Đ

Câu 21. ☐ S ☐ S ☐ Đ ☐ Đ

ĐÁP SỐ PHẦN TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. 1 3

Câu 4. 1 1

Câu 7. 1 4

Câu 10. 2 4 0

Câu 13. 3 7 4

Câu 16. 3 8

Câu 19. 1 8 4

Câu 22. 6

Câu 25. 1

Câu 29. 5 6 7 4

Câu 32. 7 5

Câu 35. 3 5

Câu 38. 3 7

Câu 41. 2 6 2

Câu 44. 5 2

Câu 2. 1

Câu 5. 4 6 3

Câu 8. 0 4

Câu 11. 4

Câu 14. 2 6 0

Câu 17. 1 5

Câu 20. 4

Câu 23. 2 6 2

Câu 26. 7 8

Câu 30. 1 5 2 4

Câu 33. 1 2

Câu 36. 7 2 2

Câu 39. 9 0 5

Câu 42. 1 8 8

Câu 3. 6

Câu 6. 6 9 3

Câu 9. 1 0

Câu 12. 5

Câu 15. 0 4

Câu 18. 7 6

Câu 21. 8 4 6

Câu 24. 2 3 9

Câu 27. - 2 2

Câu 31. 1 0

Câu 34. 2 5 6

Câu 37. 8 8

Câu 40. 1 8 8

Câu 43. 5 8 5