THS. TRẦN ĐÌNH CƯ

CS 1: P5, Dãy 14 tập thể xã tắc. Đường Ngô Thời Nhậm
CS 2: Trung Tâm luyện thi - 18 kiệt 87 Bùi Thị Xuân
CS 3: Trung tâm cao thắng - 11 Đống Đa

BÀI GIẢNG CHUYÊN SÂU

TOÁN 12



LƯU HÀNH NỘI BỘ

MỤC LỤC

CHƯƠNG I. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ 1

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ 1

Dạng 1. *Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số cho bởi công thức* $y=f(x)$ *.....2*

Dạng 2. *Xét tính đơn điệu của hàm số* $y=f(x)$ *khi cho hàm số* $y=f'(x)$ *.....4*

Dạng 3: *Tìm tham số để hàm số đơn điệu trên tập xác định.....5*

Dạng 4: *Xét tính đơn điệu hàm số bậc cao, căn thức, lượng giác có chứa tham số.....7*

Dạng 5. *Xét tính đơn điệu của hàm số trên trên khoảng cho trước 10*

Dạng 6: *Phương pháp cô lập tham số m, phương pháp hàm số 16*

Dạng 7. *Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số* $y=f(x)$, $y=f(u(x))$, $y=f(u(x))\pm h(x)$ *... khi biết bảng biến thiên của hàm số.....19*

Dạng 8: *Tìm khoảng đồng, biến nghịch biến của hàm số* $y=f(x), y=f(u(x))$ *khi biết đồ thị của hàm số* $y=f(x)$ *.....21*

Dạng 9: *Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số* $y=f(x)$, $y=f(u(x))$, $y=f(u(x))\pm h(x)$ *... khi biết đồ thị của hàm số* $y=f'(x)$ *.....25*

Dạng 10. Ứng dụng tính đơn điệu vào giải phương trình, bất phương trình, tìm điều kiện có nghiệm của phương trình 29

BÀI 2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ 35

Dạng 1: *Cho hàm số* $f(x)$ *hoặc* $f'(x)$*. Tìm điểm cực trị, giá trị cực trị.....36*

Dạng 2. *Tìm (điểm) cực trị thông qua bảng xét dấu, bảng biến thiên của đạo hàm.....39*

Dạng 3. *Tìm (điểm) cực trị thông qua đồ thị* f, f', f'' *.....41*

Dạng 4: *Cực trị hàm bậc ba 43*

Dạng 5. *Cực trị hàm bậc bốn trùng phương.....55*

Dạng 6. *Cực trị hàm phân thức 64*

Dạng 7: *Cực trị của hàm chứa căn.....69*

Dạng 8: *Cực trị của hàm bậc cao và hàm lượng giác 71*

Dạng 9:*Tìm cực trị của hàm số chứa trị tuyệt đối 73*

Dạng 10: *Tìm cực trị của hàm số trị tuyệt đối nếu biết bảng biến thiên hoặc đồ thị.....75*

BÀI 3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ 107

Dạng 1: *Tìm GTLN – GTNN của hàm số y = f(x) trên một khoảng 108*

Dạng 2: *Tìm GTLN và GTNN của hàm số trên một đoạn 110*

Dạng 3: *Tìm GTLN – GTNN của hàm số y = \|f(x)\| trên đoạn [a; b] 113*

Dạng 4: *Tìm điều kiện tham số để GTLN của hàm số y = \|f(x) + g(m)\| trên đoạn [a; b] đạt GTNN 116*

Dạng 5: *TÌM GTLN-GTNN khi cho đồ thị - bảng biến thiên 118*

Dạng 6. *Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác 120*

Dạng 7. *Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số khác 124*

Dạng 8. *Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức nhiều biến 125*

Dạng 9. *Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số y = f(u(x)),y = f(u(x))±h(x)... khi biết bảng biến thiên hoặc đồ thị của hàm số y = f(x) 129*

Dạng 10. *Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số* $\mathbf{y=f(u(x))}$, $\mathbf{y=f(u(x))\pm h(x)}$... *Khi biết đồ thị của hàm số* $\mathbf{y=f'(x)}$ *..... 131*

Dạng 11. *Ứng dụng của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trong các bài toán thực tế 133*

Dạng 12. *Tìm m để* $F(x;m)=0$ *có nghiệm trên tập D 137*

Dạng 13. *Tìm m để bất phương trình* $F(x;m)>0;F(x;m)\ge 0;F(x,m)<0;F(x;m)\le 0$ *có nghiệm trên tập D* *139*

BÀI 4. TIỆM CẬN 143

Dạng 1. *Xác định các đường tiệm cận dựa vào định nghĩa 143*

Dạng 2: *Tiệm cận của đồ thị hàm số* $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ *..... 144*

Dạng 3: Tiệm cận của đồ thị hàm số phân thức hữu tỷ.....147

Dạng 4 Tiệm cận của đồ thị hàm số vô tỷ.....149

Dạng 5: Biết đồ thị, bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$, xác định tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\frac{A}{g(x)}$ với A là số thực khác 0, $g(x)$ xác định theo $f(x)$ 150

Dạng 6: Biết đồ thị, bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$, xác định tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\frac{\varphi(x)}{g(x)}$ với $\varphi(x)$ là một biểu thức theo x, $g(x)$ là biểu thức theo $f(x)$ 153

Dạng 7: Biện luôn số đường tiệm cận của đồ thị hàm số phân thức $y=\frac{f(x)}{g(x)}$, với $f(x)$ và $g(x)$ là các đa thức 157

Dạng 8: Biện luận số đường tiệm cận của đồ thị hàm số chứa căn thức 160

Dạng 9: Biện luận số đường tiệm cận của đồ thị hàm ẩn.....164

Dạng 10: Bài toán liên quan đến đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ 168

Dạng 11: Bài toán về khoảng cách từ điểm trên đồ thị hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ đến các đường tiệm cận 171

Dạng 12: Bài toán liên quan giữa tiếp tuyến và tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ 174

BÀI 5. TIẾP TUYẾN 178

Dạng 1: Sự tiếp xúc của hai đường cong.....178

Dạng 2. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $M(x_0;y_0)$.....181

Dạng 3: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số khi biết hệ số góc dựa vào các quan hệ song song, vuông góc,... 186

Dạng 4: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ khi biết mối quan hệ của tiếp tuyến với các đường tiệm cận của đồ thị hàm số.....191

Dạng 5. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua điểm $M(x_0;y_0)$ cho trước. 198

Dạng 6: Xác định các điểm M để có k tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y=f(x)$ đi qua điểm M.....200

Dạng 7: Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số ẩn tại điểm có hoành độ $x=x_0$ cho trước.....202

Dạng 8. Tìm các điểm trên đồ thị hàm số $y=f(x)$ mà tiếp tuyến tại các điểm đó song song với nhau hoặc có cùng hệ số góc k. 206

Dạng 9: Một số dạng toán khác 209

BÀI 6. ĐỒ THỊ HÀM SỐ VÀ SỰ TƯƠNG GIAO 214

Dạng 1: *Dựa vào Đồ thị hàm số 214*

Dạng 2: *Bảng biến thiên 215*

Dạng 3 *: Phép suy đồ thị 216*

Dạng 4: *Xác định dấu của các tham số của hàm số dựa vào tính chất đồ thị 220*

Dạng 5: *Xác đinh số nghiệm của phương trình dựa vào đồ thị hoặc bảng biến thiên 224*

Dạng 6: *Biện luận số nghiệm của phương trình 228*

CHƯƠNG II. HÀM SỐ LŨY THỪA. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT 239

BÀI 1. LŨY THỪA 239

Dạng 1: *Các phép toán biến đổi lũy thừa 240*

Dạng 2: *So sánh, đẳng thức và bất đẳng thức đơn giản 244*

BÀI 2. HÀM SỐ LŨY THỪA 247

Dạng 1. Tìm tập xác định của hàm số lũy thừa 251

Dạng 2: Đồ thị hàm số lũy thừa 253

BÀI 3. LÔGARIT 256

Dạng 1. *Tính giá trị của biểu thức không có điều kiện. Rút gọn biểu thức.* ***258***

Dạng 2. *Đẳng thức chứa logarit* ***264***

Dạng 3. *Biểu thị biểu thức theo một biểu thức đã cho và từ đó tìm GTLN, GTNN* ***268***

BÀI 4. HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LÔGARIT 275

Dạng 1. *Tìm tập xác định của hàm số chứa mũ – lôgarit.* ***281***

Dạng 2: *Đồ thị hàm số* ***285***

Dạng 3: *Xét tính đơn điệu, cực trị, GTLN và GTNN của hàm số mũ, logarit* ***289***

Dạng 4: *Tìm GTLN và GTNN của hàm số mũ, logarit nhiều biến* ***295***

Dạng 5: *Bài toán lãi suất* ***303***

BÀI 5. PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT 313

Dạng 1: *Phương pháp đưa về cùng cơ số 315*

Dạng 2: *Phương pháp đặt ẩn phụ 320*

Dạng 3: *Phương pháp logarit hóa, mũ hóa 335*

Dạng 4: *Phương biến đổi thành tích 337*

Dạng 5: *Phương pháp sử dụng tính đơn điệu 342*

BÀI 6. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT 354

Dạng 1: *Phương pháp biến đổi tương đương đưa về cùng cơ số 354*

Dạng 2: *Phương pháp đặt ẩn phụ 362*

Dạng 3: *Phương pháp logarit hóa 371*

Dạng 4: *Phương pháp sử dụng tính đơn điệu 373*

CHƯƠNG 3: NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

BÀI 1: NGUYÊN HÀM VÀ PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM 381

Dạng 1: *Tìm nguyên hàm bằng các phép biến đổi sơ cấp 383*

Dạng 2: *Phương pháp đổi biến dạng 1, đặt* $\mathbf{u = u(x)}$ *..... 395*

Dạng 3: *Tìm nguyên hàm bằng cách đổi biến dạng 2 ..... 401*

Dạng 4: *Tìm nguyên hàm bằng phương pháp nguyên hàm từng phần 403*

Dạng 5: *Các bài toán thực tế ứng dụng nguyên hàm 409*

BÀI 2: TÍCH PHÂN 412

Dạng 1: *Tính tích phân bằng cách sử dụng định nghĩa, tính chất 417*

Dạng 2: *Tính tích phân bằng phương pháp đổi biến 422*

Dạng 3: *Tính tích phân bằng phương pháp tích phân từng phần 428*

Dạng 4: *Tích phân chứa dấu giá trị tuyệt đối 432*

Dạng 5: *Tính tích phân các hàm đặc biệt, hàm ẩn 438*

Dạng 6: *Bất đẳng thức tích phân 456*

BÀI 3. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC TÍCH PHÂN 464

Dạng 1: *Tính diện tích giới hạn bởi 1 đồ thị 465*

Dạng 2: *Tính diện tích giới hạn bởi 2 hai đồ thị 469*

Dạng 3: *Tính thể tích vật thể tròn xoay dựa vào định nghĩa 476*

Dạng 4: *Tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi 1 đồ thị 481*

Dạng 5: Tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị *487*

Dạng 6: Tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi nhiều đồ thị..... *493*

Dạng 7: Một số bài toán thực tế ứng dụng tích phân *498*

Dạng 8: Bài toán thực tế..... *504*

Dạng 9: Các bài toán bản chất đặt sắc của tích phân *514*

CHƯƠNG 4. SỐ PHỨC

BÀI 1&2. KHÁI NIỆM SỐ PHỨC VÀ CÁC PHÉP TOÁN CỦA SỐ PHỨC..... 519

Dạng 1: Thực hiện các phép toán của số phức, tìm phần thực phần ảo..... *524*

Dạng 2. Tìm số phức liên hợp, tính môđun số phức *529*

Dạng 3. Bài toán liên quan đến điểm biểu diễn số phức *531*

Dạng 4. Tìm số phức thỏa mãn điều kiện cho trước..... *532*

Dạng 5: Bài toán tập hợp điểm biểu diễn số phức *535*

BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ THỰC 551

Dạng 1: Giải phương trình. Tính toán biểu thức nghiệm 552

Dạng 2: Định lí Vi-ét và ứng dụng..... 554

Dạng 3: Phương trình quy về phương trình bậc hai..... 558

BÀI 4. CỰC TRỊ SỐ PHỨC..... 561

Dạng 1: Phương pháp hình học..... 562

Dạng 2: Phương pháp đại số 569

HÌNH HỌC

CHƯƠNG I. KHỐI ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

BÀI 1. KHÁI NIỆM VỀ KHỐI ĐA DIỆN..... 576

Dạng 1. Điều kiện để một hình là hình đa diện – khối đa diện. *580*

Dạng 2. Xác định số đỉnh, cạnh, mặt của một khối đa diện *581*

Dạng 3. Phân chia, lắp ghép các khối đa diện *583*

Dạng 4: Phép biến hình trong không gian *586*

BÀI 2: KHỐI ĐA DIỆN LỒI – KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU..... 593

Dạng 1: Nhận diện đa diện lồi, đa diện đều 595

Dạng 2: Các đặc điểm của khối đa diện đều..... 597

BÀI 3. THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN..... 600

Dạng 1. *Thể tích khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy 603*

Dạng 2. *Thể tích khối chóp có mặt bên vuông góc với đáy 608*

Dạng 3. *Thể tích khối chóp đều 611*

Dạng 4. *Thể tích khối chóp biết trước một đường thẳng vuông góc với đáy 616*

Dạng 5. *Thể tích khối chóp có các cạnh bên bằng nhau hoặc các cạnh bên, mặt bên cùng tạo với đáy những góc bằng nhau 619*

Dạng 6. *Thể tích lăng trụ đứng 624*

Dạng 7. T*hể tích lăng trụ xiên 628*

Dạng 8 . *Thể tích hình hộp 632*

Dạng 9. *Tỉ số thể tích khối chóp 635*

Dạng 10. *Tỉ số thể tích khối lăng trụ 642*

Dạng 11: *Tỉ số thể tích khối hộp 644*

Dạng 12. *Tách hình để tính thể tích 647*

Dạng 13. *Phục hình và trải phẳng 656*

Dạng 14.*Bài toán cực trị liên quan đến thể tích khối đa diện 661*

Dạng 15: *Sử dụng thể tích để tính khoảng cách 673*

CHƯƠNG II: NÓN – TRỤ - CẦU

BÀI 1: MẶT NÓN 679

Dạng 1: *Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, độ dài đường sinh, chiều cao, bán kính đáy, thiết diện của hình nón 682*

Dạng 2: T*ính thể tích khối nón, bài toán cực trị 687*

Dạng 3 *Bài toán thực tế về hình nón, khối nón 701*

BÀI 2: MẶT TRỤ 704

Dạng 1: *Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, diện tích thiết diện, chiều cao, bán kính đáy, diện tích đáy của hình trụ 705*

Dạng 2: *Thể tích khối trụ, bài toán cực trị 708*

Dạng 3: *Bài toán thực tế về khối trụ. 714*

BÀI 3: MẶT CẦU – KHỐI CẦU 720

Dạng 1. *Mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện 722*

Dạng 2. *Mặt cầu nội tiếp khối đa diện 732*

Dạng 3. *Bài toán cực trị 733*

Dạng 4. *Bài toán thực tế 735*

Dạng 5. *Dạng toán tổng hợp 737*

CHƯƠNG 3: PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN Oxyz

BÀI 1: HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN 740

Dạng 1: *Tìm tọa độ điểm, vectơ trong hệ trục Oxyz 743*

Dạng 2. *Tích có hướng 745*

Dạng 3. *Ứng dụng của tích có hướng để tính diện tích và thể tích 747*

Dạng 4: *Phương trình mặt cầu 749*

BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG 752

Dạng 1: *Xác định vectơ pháp tuyến và viết phương trình mặt phẳng 755*

Dạng 2. *Viết phương trình mặt phẳng liên quan đến mặt cầu 758*

Dạng 3. *Phương trình mặt phẳng đoạn chắn 760*

Dạng 4. *Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng 762*

Dạng 5. *Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng 764*

Dạng 6. *Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng 765*

Dạng 7. *Góc giữa hai mặt phẳng 767*

Dạng 8. *Một số bài toán cực trị 767*

BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG 771

Dạng 1: *Viết phương trình đường thẳng 776*

Dạng 2: *Viết phương trình đường thẳng bằng phương pháp tham số hóa 779*

Dạng 3. *Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng 786*

Dạng 4: *Góc giữa hai đường thẳng 787*

Dạng 5: *Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng 790*

Dạng 6: *Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau 792*

Dạng 7: *Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng 793*

Dạng 8: *Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng 796*

Dạng 9: *Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu 798*

Dạng 10: *Một số bài toán cực trị 803*

CHƯƠNG I. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

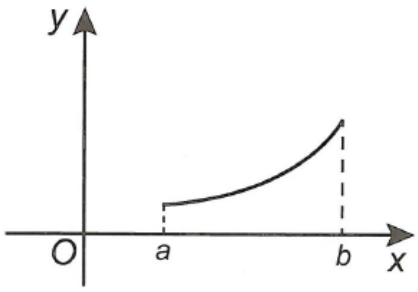
BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Định nghĩa

Cho hàm số f xác định trên khoảng (đoạn hoặc nửa khoảng) K.

* Hàm số f gọi là đồng biến (tăng) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K;\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

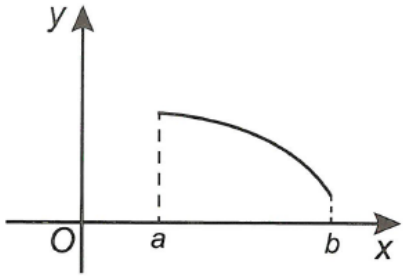


Hàm số đồng biến

Nhận xét:

- Hàm số $f(x)$ đồng biến trên K thì đồ thị hàm số là đường đi lên từ trái sang phải, biểu diễn trong bảng biến thiên là dấu mũi tên hướng lên từ trái sang phải.

* Hàm số f gọi là nghịch biến (giảm) trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K; x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$



Hàm số nghịch biến

Nhận xét:

Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên K thì đồ thị hàm số là đường đi xuống từ trái sang phải, biểu diễn trong bảng biến thiên là dấu mũi tên hướng xuống từ trái sang phải.

2. Định lý

Định lí thuận

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng K.

Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số đồng biến trên khoảng K.

Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng K.

Nếu $f'(x)=0, \forall x \in K$ thì hàm số không đổi trên khoảng K.

Định lí đảo

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng K.

Nếu hàm số f đồng biến trên khoảng K thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$.

Nếu hàm số f nghịch biến trên khoảng K thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$.

B. PHÂN DẠNG VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số cho bởi công thức $y=f(x)$

1. Phương pháp giải

Thực hiện các bước như sau:

Bước 1. Tìm tập xác định D.

Bước 2. Tính đạo hàm $y'=f'(x)$.

Bước 3. Tìm các giá trị x mà $f'(x)=0$ hoặc những giá trị làm cho $f'(x)$ không xác định.

Bước 4. Lập bảng biến thiên hoặc xét dấu trực tiếp đạo hàm.

Bước 5. Kết luận tính đơn điệu của hàm số $y=f(x)$ (chọn đáp án).

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hàm số $f(x)=\left(1-x^2\right)^{2019}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$.

D. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm $f'(x)=2019.\left(1-x^2\right)^{2018}.\left(1-x^2\right)'=2019.\left(1-x^2\right)^{2018}.(-2x)$

Vì $2019.\left(1-x^2\right)^{2018} \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên dấu của đạo hàm cùng dấu với $(-x)$.

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	1	↘	0	↘	$-\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$.

Chú ý: *Dấu hiệu mở rộng khi kết luận khoảng đồng biến* $(-\infty;0)$.

Bài tập 2. Cho hàm số $f(x)=x^3+x^2+8x+\cos x$. Với hai số thực a,b sao cho $a<b$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $f(a)=f(b)$. **B.** $f(a)>f(b)$.

C. $f(a)<f(b)$. **D.** $f(a)\geq f(b)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=3x^2+2x+8-\sin x=(3x^2+2x+1)+(7-\sin x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó $a<b\Rightarrow f(a)<f(b)$.

Bài tập 3. Hàm số $y=|x^2-2x-3|$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;3)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y=|x^2-2x-3|=\sqrt{(x^2-2x-3)^2}\Rightarrow y'=\dfrac{(2x-2)(x^2-2x-3)}{\sqrt{(x^2-2x-3)^2}}$

$y'=0\Leftrightarrow 2x-2=0\Leftrightarrow x=1$; y' không xác định nếu $x=-1;x=3$.

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
y	$+\infty$	↘	0	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$ và $(3;+\infty)$.

Chú ý: - *Vì* $|f(x)|=\sqrt{f^2(x)}$ *nên có thể xét tính đơn điệu của hàm số* $y=\sqrt{f^2(x)}$ *để suy ra kết quả.*

- Đạo hàm $y'=\dfrac{f'(x).f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$.

Dạng 2. Xét tính đơn điệu của hàm số $y=f(x)$ khi cho hàm số $y=f'(x)$

1. Phương pháp giải

Thực hiện theo ba bước như sau:

Bước 1. Tìm các giá trị x mà $f'(x)=0$ hoặc những giá trị làm cho $f'(x)$ không xác định.

Bước 2. Lập bảng biến thiên hoặc xét dấu trực tiếp đạo hàm.

Bước 3. Kết luận tính đơn điệu của hàm số $y=f(x)$ (chọn đáp án).

2. Bài tập

Bài tập 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x)=x^2(x-1)$. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;0);(1;+\infty)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow x^2(x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Bài tập 2. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x+1)^2(x-1)^3(2-x)$. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào, trong các khoảng dưới đây?

A. $(-1;1)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=\pm1\end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$

$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

Bài tập 3. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng $(0;3)$ có tính chất

$f'(x)\geq 0, \forall x\in(0;3)$ và $f'(x)=0,\ \forall x\in(1;2)$.

Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

B. Hàm số $f(x)$ không đổi trên khoảng $(1;2)$.

C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$.

D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Vì $f'(x)=0,\ \forall x\in(1;2)$ nên $f(x)$ là hàm hằng trên khoảng $(1;2)$.

Trên các khoảng $(0;2),(1;3),(0;3)$ hàm số $y=f(x)$ thỏa $f(x)\geq 0$ nhưng $f'(x)=0,\ \forall x\in(1;2)$ nên $f(x)$ không đồng biến trên các khoảng này.

2. Bài tập:

Dạng 3: Tìm tham số để hàm số đơn điệu trên tập xác định

1. Phương pháp giải

* Đối với hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ ta thực hiện theo các bước sau

Bước 1. Tính $y'=3ax^2+2bx+c$ (1).

Bước 2. Xét hai trường hợp

Trường hợp 1: $a=0$, thay trực tiếp vào (1) để xét.

Trường hợp 2: $a\neq 0$, tính $\Delta'=b^2-3ac$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta'=b^2-3ac\leq 0\end{cases}$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta'=b^2-3ac\leq 0\end{cases}$

Bước 3. Kết luận (chọn đáp án).

* Đối với hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ ta thực hiện theo các bước sau

Bước 1. Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$

Bước 2. Tính $y' = \dfrac{ad - bc}{(cx + d)^2}$

Hàm số đồng biến trên các khoảng xác định $\Leftrightarrow ad - bc > 0$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định $\Leftrightarrow ad - bc < 0$

Bước 3. Kết luận.

2. Bài tập:

Bài tập 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-20;2]$ để hàm số $y = x^3 - x^2 + 3mx - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 20. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 23.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 2x + 3m$

Hàm số trên đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow 3x^2 - 2x + 3m \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \leq 0 \\ 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 - 9m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \dfrac{1}{9}$

Do m là số nguyên thuộc đoạn $[-20;2]$ nên có $m = 1; m = 2$.

Bài tập 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $y = (m^2 - 1)x^3 + (m - 1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3(m^2 - 1)x^2 + 2(m - 1)x - 1$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty) \Leftrightarrow y' \leq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Với $m = 1$ ta có $y' = -1 < 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Với $m = -1$ ta có $y' = -4x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{1}{4} \Rightarrow m = -1$ không thỏa mãn.

• Với $m \neq \pm 1$ ta có $y' \leq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ \Delta' = 4m^2 - 2m - 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ -\dfrac{1}{2} \leq m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \leq m < 1$

Từ các trường hợp ta được $-\frac{1}{2} \le m \le 1$. Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0;1\}$

Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Bài tập 3. Các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{mx+1}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó là

A. $m \ge -1$. **B.** $m > -1$. **C.** $m > 1$. **D.** $m \ge 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Ta có $y = \frac{mx+1}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{m-1}{(x-1)^2}$

Xét $m = 1$, hàm số trở thành $y = 1$. (hàm hằng)

Xét $m \ne 1$, hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó khi và chỉ khi

$y' > 0, \forall x \ne -1 \Leftrightarrow m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$.

Lưu ý: *Với* $m = 1$ *thì* $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Bài tập 4. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{mx+1}{x+m}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định là

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$

Ta có $y' = \frac{m^2-1}{(x+m)^2}$

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow y' = \frac{m^2-1}{(x+m)^2} < 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$.

Dạng 4: Xét tính đơn điệu hàm số bậc cao, căn thức, lượng giác có chứa tham số

1. Phương pháp giải

Sử dụng các kiến thức

Điều kiện cần để $y = (x-a)^{2m+1}.g(x)$ $(m \in \mathbb{N})$ không đổi dấu khi x đi qua a là $g(a) = 0$.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên K và $\min\limits_K f(x) = A$.

Khi đó bất phương trình $f(x) \ge m$ nghiệm đúng với mọi $x \in K$ khi và chỉ khi $m \le A$.

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên K và $\max\limits_{K} f(x) = B$.

Khi đó bất phương trình $f(x) \le m$ nghiệm đúng với mọi $x \in K$ khi và chỉ khi $m \ge B$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số

$y = x^9 + \left(3m^2 - m\right)x^6 + \left(m^3 - 3m^2 + 2m\right)x^4 + 2019$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 9x^8 + 5\left(3m^2 - m\right)x^4 + 4\left(m^3 - 3m^2 + 2m\right)x^3$

$\Rightarrow y' = x^3\left[9x^5 + 5\left(3m^2 - m\right)x + 4\left(m^3 - 3m^2 + 2m\right)\right] = x^3.g(x)$

với $g(x) = 9x^5 + 5\left(3m^2 - m\right)x + 4\left(m^3 - 3m^2 + 2m\right)$.

Nếu $g(0) \ne 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ne 0 \\ m \ne 2 \\ m \ne 1 \end{array}\right.$

thì y' sẽ đổi dấu khi đi qua điểm $x = 0 \Rightarrow$ hàm số sẽ có khoảng đồng biến và nghịch biến. Do đó để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì điều kiện cần là $g(0) = 0$

$\Leftrightarrow m\left(m^2 - 3m + 2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \\ m = 2 \end{array}\right.$

Thử lại:

+ Với $m = 0$ có $y' = 9x^8 \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

+ Với $m = 1$ có $y' = x^4\left(9x^4 + 10\right) \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

+ Với $m = 2$ có $y' = x^4\left(9x^4 + 50\right) \ge 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy với $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \\ m = 2 \end{array}\right.$ thì hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lưu ý: *Nếu $g(0) \ne 0$ thì y' luôn đổi dấu khi x qua 0, do đó nếu $g(x) = 0$ vô nghiệm thi sẽ luôn có một khoảng đồng biến và một khoảng nghịch biến.*

Bài tập 2. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=-m^2x^5-mx^3-\left(m^2-m-20\right)x^2+2019$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A. -4. **B.** 1. **C.** -1. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có

$f'(x)=-5m^2x^4-3mx^2-2\left(m^2-m-20\right)x$

$=x\left[-5m^2x^3-3mx-2\left(m^2-m-20\right)\right]=x.g(x)$.

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $f'(x)\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ (*)

Nếu $x=0$ không phải là nghiệm của $g(x)$ thì $f'(x)$ sẽ đổi dấu khi x đi qua $x=0$, lúc đó điều kiện (*) không được thỏa mãn.

Do đó điều kiện cần để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ là $x=0$ là nghiệm của

$$g(x)=0\Leftrightarrow m^2-m-20=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-4\\m=5\end{array}\right.$$

Thử lại:

+ Với $m=-4$ thì $f'(x)=-80x^4+12x^2=x^2\left(12-80x^2\right)$, do đó $m=-4$ không thỏa mãn.

+ Với $m=5$ thì $f'(x)=-125x^4-15x^2=-x^2\left(125x^2+15\right)\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ do đó $m=5$ thỏa mãn.

Vậy $S=\{5\}$ nên tổng các phần tử của S bằng 5.

Lưu ý: *$f'(x)$ đổi dấu qua các nghiệm của phương trình* $12-80x^2=0$.

Bài tập 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2018;2018]$ để hàm số $y=\sqrt{x^2+1}-mx-1$ đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$.

A. 2018. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 2017.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-m$

Theo yêu cầu bài toán $y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-m\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow m \le \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}},\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}; g'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}\left(x^2+1\right)} > 0$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$	-1	↗	1	↗	

Vậy $m \le -1$ mà $m \in [-2018; 2018]$ nên có 2018 giá trị nguyên.

Bài tập 4. Tìm tất cả các giá trị của $m \in \mathbb{R}$ để hàm số $y = \sin x + \cos x + mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $-\sqrt{2} \le m \le \sqrt{2}$.

B. $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$.

C. $m \ge \sqrt{2}$.

D. $m > \sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = \cos x - \sin x + m$

Hàm đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \cos x - \sin x + m \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \sin x - \cos x \le m, \forall x \in \mathbb{R}$

Xét hàm $f(x) = \sin x - \cos x$ trên $\mathbb{R}$

Ta có $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \Rightarrow -\sqrt{2} \le f(x) \le \sqrt{2}, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \max\limits_{\mathbb{R}} f(x) = \sqrt{2}$

Do đó $f(x) \le m, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \max\limits_{\mathbb{R}} f(x) \le m \Leftrightarrow m \ge \sqrt{2}$

Dạng 5. Xét tính đơn điệu của hàm số trên trên khoảng cho trước

1. Phương pháp giải

* Đối với hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Giả sử phương trình $y = ax^2 + bx + c\ (a \ne 0)$ có hai nghiệm x_1, x_2. Ta nhắc lại các mối liên hệ nghiệm về tam thức bậc hai

Khi đó

$x_1 < \alpha < x_2 \Leftrightarrow af(\alpha) < 0$.

$\alpha \le x_1 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 > 2\alpha \\ (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) \ge 0 \end{cases}$.

$x_1 < x_2 \le \beta \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 < 2\beta \\ (x_1 - \beta)(x_2 - \beta) \ge 0 \end{cases}$.

$x_1 < \alpha < \beta < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} af(\alpha) < 0 \\ af(\beta) < 0 \end{cases}$.

* Để hàm số $y = f(x;m) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đơn điệu trên đoạn có độ dài bằng k

Thực hiện theo các bước sau

Bước 1. Tính $y' = f'(x;m) = 3ax^2 + 2bx + c$

Bước 2. Hàm số đơn điệu trên $(x_1;x_2) \Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a \ne 0 \end{cases}$

Theo định lý Vi-ét $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

Bước 3. Hàm số đơn điệu trên khoảng có độ dài bằng $k \Leftrightarrow |x_1 - x_2| = k \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = k^2$

Bước 4. Giải các điều kiện để suy ra giá trị m cần tìm.

* Hàm số $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ đơn điệu trên khoảng $(\alpha;\beta)$ cho trước

Thực hiện theo các bước sau

Bước 1. Hàm số xác định trên

$$(\alpha;\beta) \Leftrightarrow -\frac{d}{c} \ne (\alpha;\beta) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{d}{c} \le \alpha \\ -\dfrac{d}{c} \ge \beta \end{array} \right.$$

Bước 2. Tính $y' = \dfrac{ad - bc}{(cx + d)^2}$.

Hàm số đồng biến trên các khoảng xác định $\Leftrightarrow ad - bc > 0$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định $\Leftrightarrow ad - bc < 0$

Bước 3. Kết luận

2. Bài tập

Bài tập 1. Các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ là

A. $m < 1$. **B.** $m \le 1$. **C.** $m < 2$. **D.** $m > 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=6x^2-6(2m+1)x+6m(m+1)$

Để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ thì ta xét hai trường hợp

- Trường hợp 1: Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\Rightarrow y'\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \Delta\leq 0\Leftrightarrow (2m+1)^2-4m(m+1)\leq 0\Leftrightarrow 1\leq 0$ (vô lí).

- Trường hợp 2: Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn

$$x_1<x_2\leq 2\Leftrightarrow x_1-2<x_2-2\leq 0\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\ x_1+x_2-4<0\\ x_1x_2-2(x_1+x_2)+4\geq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}1>0\\ 2m-3<0\\ m(m+1)-2(2m+1)+4\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\in\mathbb{R}\\ m<\dfrac{3}{2}\\ m\in(-\infty;1]\cup[2;+\infty)\end{cases}\qquad m\in(-\infty;1]$$

Lưu ý: - *Hàm số đồng biến trên* $\mathbb{R}$ *thì sẽ đồng biến trên khoảng* $(2;+\infty)$.

- *Bảng biến thiên của hàm số* $f(x)=y'$ *khi phương trình* $y'=0$ *có hai nghiệm* x_1,x_2.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗		↘		↗	

Bài tập 2. Các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=-\dfrac{1}{3}x^3+(m-1)x^2+(m+3)x-10$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$ là

A. $m\geq\dfrac{12}{7}$. **B.** $m<\dfrac{12}{7}$. **C.** $m\in\mathbb{R}$. **D.** $m>\dfrac{7}{12}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=-x^2+2(m-1)x+m+3=g(x)$.

Do y là hàm số bậc ba với hệ số $a<0$ nên hàm số đồng biến trên $(0;3)\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $x_1\leq 0<3\leq x_2\Leftrightarrow\begin{cases}-1.g(0)\leq 0\\ -1.g(3)\leq 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m+3 \ge 0 \\ 7m-12 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge \frac{12}{7}$.

Bài tập 3. Các giá trị thực của tham số m để $f(x) = -x^3 + 3x^2 + (m-1)x + 2m - 3$ trên một khoảng có độ dài lớn hơn 1 là

A. $m \ge 0$. **B.** $m \le 0$. **C.** $-\frac{5}{4} < m < 0$. **D.** $m > -\frac{5}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = -3x^2 + 6x + m - 1$

Hàm số đồng biến trên một khoảng có độ dài lớn hơn 1 khi và chỉ khi $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_2 - x_1| > 1$.

Để $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' > 0$

$\Leftrightarrow 3m + 6 > 0 \Leftrightarrow m > -2$

Theo định lý Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = \frac{1-m}{3} \end{cases}$

Với $|x_2 - x_1| > 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 - 1 > 0 \Leftrightarrow 4m + 5 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{5}{4}$

Kết hợp, ta được $m > -\frac{5}{4}$

Bài tập 4. Các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x + 3$ nghịch biến trên một khoảng có độ dài lớn hơn 3 là

A. $m > 6$. **B.** $m \in (0;6)$. **C.** $m < 0$. **D.** $m < 0; m > 6$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6(m-2)$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 - m \end{array} \right.$

Hàm số nghịch biến trên một khoảng có độ dài lớn hơn 3

$\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ sao cho $|x_1 - x_2| > 3$ (1)

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \neq 2-m \\ \left|-1-(2-m)\right| > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ |m-3| > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 6 \end{array}\right.$.

Bài tập 5. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = \dfrac{x+3}{x+4m}$ nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

A. 1. **B.** 3. **C.** vô số. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-4m\}$

Để hàm số xác định trên $(2;+\infty)$ thì $-4m \le 2 \Leftrightarrow m \ge -\dfrac{1}{2}$

Ta có $y' = \dfrac{4m-3}{(x+4m)^2}$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty) \Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in (2;+\infty)$

$\Leftrightarrow \dfrac{4m-3}{(x+4m)^2} < 0, \forall x \in (2;+\infty) \Leftrightarrow 4m-3 < 0 \Leftrightarrow m < \dfrac{3}{4}$

Vậy có một số nguyên $m = 0$ thỏa mãn.

Bài tập 6. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \dfrac{x+2}{x+5m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-10)$?

A. 2. **B.** Vô số. **C.** 1. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-5m\}$

Ta có $y' = \dfrac{5m-2}{(x+5m)^2}$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-10) \Leftrightarrow \begin{cases} y' > 0, \forall x \in (-\infty;-10) \\ -5m \notin (-\infty;-10) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5m-2 > 0 \\ -5m \ge -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{2}{5} \\ m \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{2}{5} < m \le 2$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1;2\}$.

Bài tập 7. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx-4}{m-x}$ nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$

Ta có $y'=\dfrac{m^2-4}{(m-x)^2}$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;1)\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-4<0\\ m\notin(-3;1)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-2<m<2\\ \left[\begin{array}{l}m\le -3\\ m\ge 1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow 1\le m<2$

Do $m\in\mathbb{Z}$, nên $m=1$.

Vậy có một giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập 8. Các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{2\cos x+3}{2\cos x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{3}\right)$ là

A. $m\in(-3;1]\cup[2;+\infty)$. **B.** $m\in(-3;+\infty)$.

C. $m\in(-\infty;-3)$. **D.** $m\in(-\infty;-3]\cup[2;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đặt $t=\cos x$, với $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{3}\right)\Rightarrow t\in\left(\dfrac{1}{2};1\right)$

Khi đó $y=f(t)=\dfrac{2t+3}{2t-m}$

$D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{m}{2}\right\}$.

Vì hàm số $t=\cos x$ nghịch biến trên $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{3}\right)$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{3}\right)$. Khi và chỉ khi hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

Hàm số $y=f(t)=\dfrac{2t+3}{2t-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$ khi và khi và chỉ khi

$$\begin{cases} f'(t)=\dfrac{-2m-6}{(2t-m)^2}>0,\forall t\in\left(\dfrac{1}{2};1\right) \\ \dfrac{m}{2}\notin\left(\dfrac{1}{2};1\right) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2m-6>0\\ m\notin(1;2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<-3\\ m\notin(1;2)\end{cases}\Leftrightarrow m\in(-\infty;-3)$$

Dạng 6: Phương pháp cô lập tham số m, phương pháp hàm số

1. Phương pháp giải

Thực hiện theo các bước sau

Bước 1. Tính $y'=f'(x)$

Bước 2. Chuyển về bài toán tìm tham số về một bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x\in D$.

Hàm số đồng biến trên $D\Leftrightarrow f'(x)\geq 0,\forall x\in D$, dấu bằng tại hữu hạn điểm trên đó.

Hàm số nghịch biến trên $D\Leftrightarrow f'(x)\leq 0,\forall x\in D$, dấu bằng tại hữu hạn điểm trên đó.

Bước 3. Kết luận (chọn đáp án).

2. Bài tập

Bài tập 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên không âm của tham số m sao cho hàm số $y=-x^4+(2m-3)x^2+m$ nghịch biến trên đoạn $[1;2]$?

A. 2 . **B.** Vô số. **C.** 3 . **D.** 4 .

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$

Ta có $y'=-4x^3+2(2m-3)x=x(-4x^2+4m-6)$

Hàm số nghịch biến trên đoạn $[1;2]$ khi $y'\leq 0,\forall x\in[1;2]$

$\Leftrightarrow -4x^2+4m-6\leq 0$; $\forall x\in[1;2]\Leftrightarrow m\leq x^2+\dfrac{3}{2},\forall x\in[1;2]$

$\Leftrightarrow m\leq\min\limits_{[1;2]}\left(x^2+\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{5}{2}$

Kết hợp với m nguyên không âm suy ra $m\in\{0;1;2\}$

Vậy có ba giá trị nguyên không âm của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{4}x^4+mx-\dfrac{3}{2x}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 2 . **B.** 1. **C.** 3 . **D.** 0 .

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Hàm số luôn xác định trên khoảng $(0;+\infty)$.

Hàm số $y=\frac{1}{4}x^4+mx-\frac{3}{2x}$ đồng biến trên $(0;+\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (0;+\infty)$ và

$\Leftrightarrow x^3+m+\frac{3}{2x^2} \geq 0, \forall x \in (0;+\infty) \Leftrightarrow x^3+\frac{3}{2x^2} \geq -m, \forall x \in (0;+\infty)$ (1)

Xét hàm số $f(x)=x^3+\frac{3}{2x^2}$ trên $(0;+\infty)$

$f'(x)=3x^2-\frac{3}{x^3}=\frac{3(x^5-1)}{x^3}; f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên

x	0		1		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	$\frac{5}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

$(1) \Leftrightarrow -m \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow m \geq -\frac{5}{2}$

Mà m là số nguyên âm nên $m \in \{-2;-1\}$.

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn.

Bài tập 3. Cho hàm số $y=\frac{1}{4}(8m^3-1)x^4-2x^3+(2m-7)x^2-12x+2018$ với m là tham số. Số các giá trị nguyên m thuộc đoạn $[-2018;2018]$ để hàm số đã cho đồng biến trên $\left[\frac{-1}{2};\frac{-1}{4}\right]$ là

A. 2016. **B.** 2019. **C.** 2010. **D.** 2015.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$

Ta có $y'=(8m^3-1)x^3-6x^2+2(2m-7)x-12$

Hàm số đã cho đồng biến trên $\left[\frac{-1}{2};\frac{-1}{4}\right]$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in \left[\frac{-1}{2};\frac{-1}{4}\right]$

$\Leftrightarrow (8m^3-1)x^3-6x^2+2(2m-7)x-12 \geq 0, \forall x \in \left[\frac{-1}{2};\frac{-1}{4}\right]$

$\Leftrightarrow (2mx)^3+2(2mx) \geq (x+2)^3+2(x+2)$ (*), $\forall x \in \left[\frac{-1}{2};\frac{-1}{4}\right]$

Xét $f(t)=t^3+2t; f'(t)=3t^2+2>0, \forall t\in\mathbb{R}$

Suy ra $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Từ (*) ta có $2mx\ge x+2, \forall x\in\left[\frac{-1}{2};\frac{-1}{4}\right]\Leftrightarrow m\le\frac{x+2}{2x}, \forall x\in\left[\frac{-1}{2};\frac{-1}{4}\right]$

$\Leftrightarrow m\le\min\limits_{\left[\frac{-1}{2};\frac{-1}{4}\right]}\frac{x+2}{2x}\Leftrightarrow m\le-\frac{7}{2}$.

Do m nguyên và $m\in[-2018;2018]$ nên có 2015 giá trị của m thỏa mãn.

Bài tập 5. Cho hàm số $y=\left|x^3-mx+1\right|$. Gọi S là tập hợp các số tự nhiên m sao cho hàm số đồng biến trên $[1;+\infty)$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 10.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $g(x)=x^3-mx+1$

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$. Do đó hàm số $y=\left|g(x)\right|$ đồng biến trên $[1;+\infty)$ khi và chỉ khi

$\begin{cases}g'(x)\ge0, \forall x\in[1;+\infty)\\ g(x)\ge0, \forall x\in[1;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2-m\ge0, \forall x\in[1;+\infty)\\ x^3-mx+1\ge0, \forall x\in[1;+\infty)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m\le3x^2, \forall x\in[1;+\infty)\\ m\le x^2+\frac{1}{x}, \forall x\in[1;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le\min\limits_{[1;+\infty)}\left(3x^2\right), \forall x\in[1;+\infty)\\ m\le\min\limits_{[1;+\infty)}\left(x^2+\frac{1}{x}\right), \forall x\in[1;+\infty)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m\le3\\ m\le2\end{cases}\Leftrightarrow m\le2\Rightarrow m\in\{0;1;2\}$.

Lưu ý: *Vì* $y=\left|g(x)\right|=\sqrt{g^2(x)}$ *nên ta có thể chuyển bài toán về xét tính đơn điệu của hàm số* $y=\sqrt{g^2(x)}$.

- Tính đạo hàm $y'=\frac{g'(x).g(x)}{\sqrt{g^2(x)}}$.

- Hàm số $y=\left|ax^3+bx^2+cx+d\right|$ *đồng biến trên* $[\alpha;+\infty)$ *khi và chỉ khi* $y'>0$ *với* $\forall x\in[\alpha;+\infty)$.

Trường hợp 1: $\begin{cases}g'(x)\ge0, \forall x\in[\alpha;+\infty)\\ g(\alpha)\ge0\end{cases}$

Trường hợp 2: $\begin{cases}g'(x)\le0, \forall x\in[\alpha;+\infty)\\ g(\alpha)\le0\end{cases}$

Dạng 7. Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y=f(x)$, $y=f(u(x))$, $y=f(u(x))\pm h(x)$ … khi biết bảng biến thiên của hàm số

1. Phương pháp giải

Bước 1: Tìm đạo hàm của hàm số $y=f(u(x))$, $y=f(u(x))\pm h(x)\ldots$

$y'=u'(x).f'(u(x))$, $y'=u'(x).f'(u(x))\pm h'(x)$

Bước 2: Từ bảng biến thiên xác định nghiệm phương trình $f'(x)=0$, nghiệm của bất phương trình $f'(x)\ge 0$ và nghiệm của bất phương trình $f'(x)\le 0$.

Bước 3: Đánh giá các khoảng thỏa mãn $y'\ge 0, y'\le 0$

Bước 4: Kết luận khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y=f(x)$, $y=f(u(x))$, $y=f(u(x))\pm h(x)$ …

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=f(x^2+2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-3;-2)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;0)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đặt $g(x)=f(x^2+2x)$

Ta có $g'(x)=f'(x^2+2x).(2x+2)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x^2+2x=-2\\x^2+2x=0\\x^2+2x=3\end{array}\right.\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=0\\x=-2\\x=1\\x=3\end{array}\right.$$

Bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		1		$+\infty$
$2x+2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f'(x^2+2x)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu của $g'(x)$ suy ra hàm số $g(x)=f(x^2+2x)$ đồng biến trên $(-\infty;-3),(-2;-1)$ và $(0;1)$, nên hàm số đồng biến trên $(0;1)$.

Lưu ý: - *Thông qua bảng xét dấu* $f'(x)\rightarrow$ *xác định được nghiệm của phương trình* $f'(x)=0$.

- *Hàm số* $y=f(x^2+2x)$ *đồng biến* $\rightarrow$ *đánh giá* $y'\geq 0$ *với* $y'=(2x+2)f'(x^2+2x)$ *(giải bất phương trình tích)*

Chú ý:

Nếu $f(x)=0\Leftrightarrow x=a$ *thì* $f(u(x))=0\Leftrightarrow u(x)=a$.

- *Bảng xét dấu* $g'(x)$ *chính là bảng xét dấu của tích* $(2x+2)f'(x^2+2x)$.

Bài tập 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=g(x)=3f(-x+2)+x^3+3x^2-9x-1$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-2;1)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $y'=g'(x)=3x^2+6x-9-3f'(2-x)$.

Hàm số $y=g(x)$ nghịch biến khi và chỉ khi

$y'=g'(x)\leq 0\Leftrightarrow x^2+2x-3\leq f'(2-x)$ (1).

Nhận xét:

• Xét $(2;+\infty)$

Với $x=3\Rightarrow(1)\Leftrightarrow 12\leq f'(-1)=0\Rightarrow$ loại.

• Xét $(0;2)$

Với $x=\frac{3}{2}\Rightarrow (1)\Leftrightarrow \frac{9}{4}\le f'\left(-\frac{1}{2}\right)<0\Rightarrow$ loại.

• Xét $(-\infty;-2)$

Với $x=-4\Rightarrow (1)\Leftrightarrow 5\le f'(6)<0\Rightarrow$ loại.

Xét $(-2;1)$ thỏa mãn (1) vì

$$\begin{cases}x^2+2x-3\le 0\\ f'(2-x)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+2x-3\le 0\\ \left[\begin{array}{l}2-x\le -1\\ 1\le 2-x\le 5\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3\le x\le 1\\ \left[\begin{array}{l}x\ge 3\\ -3\le x\le 1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow -3\le x\le 1$$

Lưu ý: - *Thông qua bảng xét dấu* $f'(x)\to$ *xác định được nghiệm của bất phương trình* $f'(x)\ge 0$ *và nghiệm của bất phương trình* $f'(x)\le 0$.

- *Hàm số* $y=g(x)$ *nghịch biến* $\to$ *đánh giá* $y'\le 0$.

Với dạng toán này cần tìm những giá trị của x *sao cho* $\begin{cases}f'(2-x)\ge 0\\ -x^2-2x+3\ge 0\end{cases}$.

Dạng 8: Tìm khoảng đồng, biến nghịch biến của hàm số $y=f(x), y=f(u(x))$ khi biết đồ thị của hàm số $y=f(x)$

1. Phương pháp giải

Bước 1: Tìm đạo hàm của hàm số $y=f(u(x))$, $y'=u'(x)f'(u(x))$.

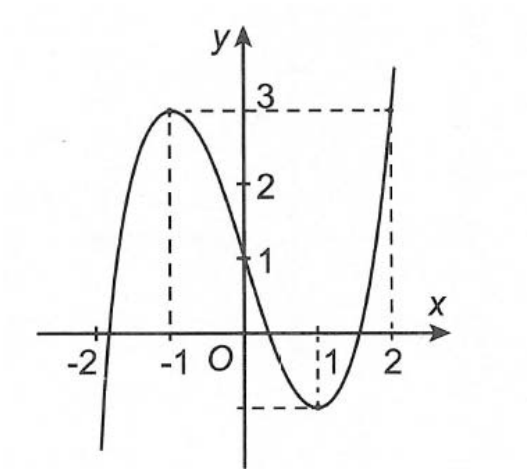
Bước 2: Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ xác định được hàm số $y=f(x)$ hoặc (nghiệm phương trình $f'(x)=0$, nghiệm của bất phương trình $f'(x)\ge 0$ và nghiệm của bất phương trình $f'(x)\le 0$).

Bước 3: Đánh giá các khoảng thỏa mãn $y'\ge 0, y'\le 0$.

Bước 4: Kết luận khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y=f(x)$, $y=f(u(x))$

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Đặt hàm số $y=g(x)=f(2x-1)$. Hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng



A. $(-1;0)$. **B.** $(-8;-1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(0;1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Cách 1: Hàm số $y=g(x)=f(2x-1)$ có $y'=g'(x)=2f'(2x-1)$

Hàm số nghịch biến khi và chỉ khi

$y'=2f'(2x-1)\Leftrightarrow -1<2x-1<1\Leftrightarrow 0<x<1$

Cách 2: Hàm số $y=f(x)$ có dạng $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ \ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$.

Ta có $f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

Theo đồ thị, hai điểm $A(-1;3)$ và $B(1;-1)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Ta có

$$\begin{cases} f(-1)=3 \\ f(1)=-1 \\ f'(-1)=0 \\ f'(1)=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -a+b-c+d=3 \\ a+b+c+d=-1 \\ 3a-2b+c=0 \\ 3a+2b+c=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=-3 \\ d=1 \end{cases}$$

Vậy $f(x)=x^3-3x+1$

$y=g(x)=f(2x-1)=(2x-1)^3-3(2x-1)+1$;

$y'=g'(x)=6(2x-1)^2-6$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix} 2x-1=-1 \\ 2x-1=1 \end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix} x=0 \\ x=1 \end{bmatrix}$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên $(0;1)$.

Lưu ý: *Từ đồ thị hàm số* $y=f(x)\rightarrow$ *xác định hàm* $y=f(x)$. *và hàm* $y=f(2x-1)\rightarrow$ *khảo sát và tìm khoảng nghịch biến của hàm số.*

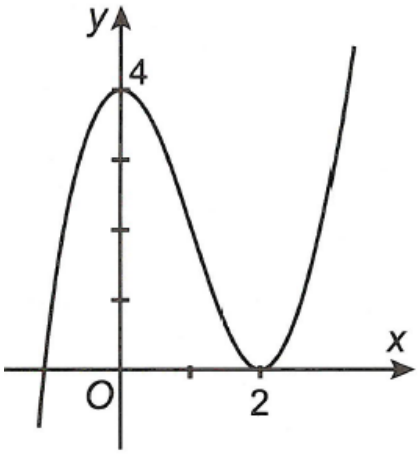
Chú ý:

Nếu hàm số $y=f(x)$ *đồng biến trên* $(a;b)$ *thì hàm số* $f(mx+n)$*:*

Đồng biến trên $\left(\frac{a-n}{m};\frac{b-n}{m}\right)$ *nếu* $m>0$.

Nghịch biến trên $\left(\frac{b-n}{m};\frac{a-n}{m}\right)$ *nếu* $m<0$.

Bài tập 2. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình bên. Đặt $y=g(x)=f(x^2+x+2)$.



Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

B. $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

C. $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

D. $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, có đồ thị như hình vẽ.

Nhận xét $A(0;4)$ và $M(2;0)$ là hai điểm cực trị của hàm số.

Ta có $\begin{cases}f(0)=4\\f(2)=0\\f'(0)=0\\f'(2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}d=4\\8a+4b+2c+d=0\\3a-2b+c=0\\12a+4b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-3\\c=0\\d=4\end{cases}$

Tìm được hàm số $y=x^3-3x^2+4$

Ta có $y=g(x)=\left(x^2+x+2\right)^3-3\left(x^2+x+2\right)^2+4$

$y'=g'(x)=(2x+1)\left[3\left(x^2+x+2\right)^2-6\left(x^2+x+2\right)\right]$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2} \\ x=0 \\ x=-1 \end{array}\right.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		$-\dfrac{1}{2}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy $y=g(x)$ nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{-1}{2};0\right)$.

Lưu ý: - *Từ đồ thị hàm số* $y=f(x)$ *xác định được hàm* $y=f(x)$ *và hàm* $y=f\left(x^2+x+2\right)\rightarrow$ *khảo sát và tìm khoảng nghịch biến của hàm số.*

- *Có thể sử dụng* $y'=(2x+1).f'\left(x^2+x+2\right)$

$y'=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+1=0 \\ f'\left(x^2+x+2\right)=0 \end{array}\right.$$

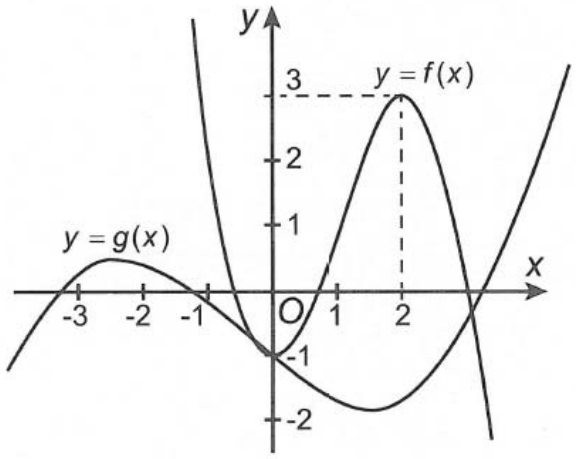
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+1=0 \\ x^2+x+2=0 \\ x^2+x+2=2 \end{array}\right.$$

Bài tập 3. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ và $y=g(x)=-f(mx+1)$, $m>0$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên đúng một khoảngcó độ dài bằng 3. Giá trị m là

A. 3. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Hàm số $y=g(x)=-f(mx+1)$ nghịch biến trên khoảng có độ dài bằng 3 nên $g'(x)=-mf'(mx+1)\le 0\Leftrightarrow f'(mx+1)\ge 0$ trên một khoảng có độ dài bằng 3.

Ta có $f'(mx+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}mx+1=0\\mx+1=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-1}{m}\\x=\dfrac{1}{m}\end{array}\right.$

Bảng xét dấu $f'(mx+1)$

x	$-\infty$		$\dfrac{-1}{m}$		$\dfrac{1}{m}$		$+\infty$
$f'(mx+1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$f'(mx+1)\ge 0\Leftrightarrow x\in\left[-\dfrac{1}{m};\dfrac{1}{m}\right]$

Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow 3=\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{m}\right)\Leftrightarrow m=\dfrac{2}{3}$

Lưu ý: *Từ đồ thị hàm số $y=f(x)\rightarrow$ xác định hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)=f(mx+1)$ kết hợp với phần nhận xét ở Bài tập 1 cho kết quả.*

- Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0;2)\rightarrow$ Hàm số $y=-f(mx+1)$ nghịch biến trên $\left(\dfrac{0-1}{m};\dfrac{2-1}{m}\right)$ có độ dài bằng $\dfrac{2}{m}=3\Leftrightarrow m=\dfrac{2}{3}$.

Dạng 9: Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y=f(x)$, $y=f(u(x))$, $y=f(u(x))\pm h(x)$ … khi biết đồ thị của hàm số $y=f'(x)$

1. Phương pháp giải

Bước 1: Tìm đạo hàm của hàm số $y=f\left(u(x)\right)$, $y=f\left(u(x)\right)\pm h(x)$ …

$y'=u'(x)f'\left(u(x)\right)$, $y'=u'(x).f'\left(u(x)\right)\pm h'(x)$

Bước 2: Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ xác định nghiệm phương trình $f'(x)=0$, nghiệm của bất phương trình $f'(x)\ge 0$ và nghiệm của bất phương trình $f'(x)\le 0$.

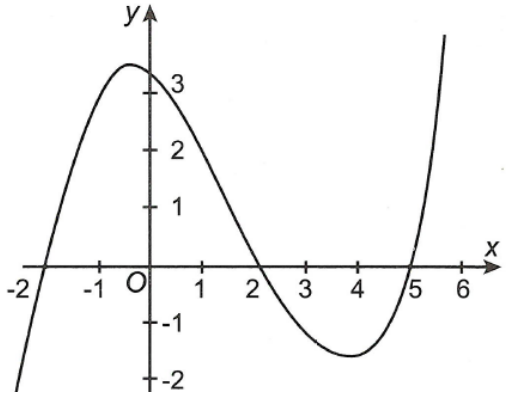
Bước 3: Đánh giá các khoảng thỏa mãn

$y'\ge 0, y'\le 0$

Bước 4: Kết luận khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y=f(x)$, $y=f\left(u(x)\right)$, $y=f\left(u(x)\right)\pm h(x)$ …

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y=g(x)=f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng



A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(1;3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Từ đồ thị $(C): y=f'(x); f'(x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<x<2\\x>5\end{array}\right.$ (1)

Mà $g'(x)=-2.f'(3-2x)$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $g'(x)<0\Leftrightarrow f'(3-2x)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<3-2x<2\\3-2x>5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}<x<\frac{5}{2}\\x<-1\end{array}\right.$

Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$ và $(-\infty;-1)$.

Lưu ý: *Thông qua đồ thị hàm số* $y=f'(x)\rightarrow$

$f'(x)\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2\le x\le 2\\5\le x\end{array}\right.$.

$f'(x) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -2 \\ 2 \le 5 \le x \end{array}\right.$.

Hàm số $y = f(3-2x)$ *nghịch biến* $\rightarrow$ *đánh giá* $y' = -2f'(3-2x) \le 0$.

Chú ý:

Dựa vào giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ *với trục hoành* $\rightarrow$ *chọn hàm cụ thể thỏa mãn*

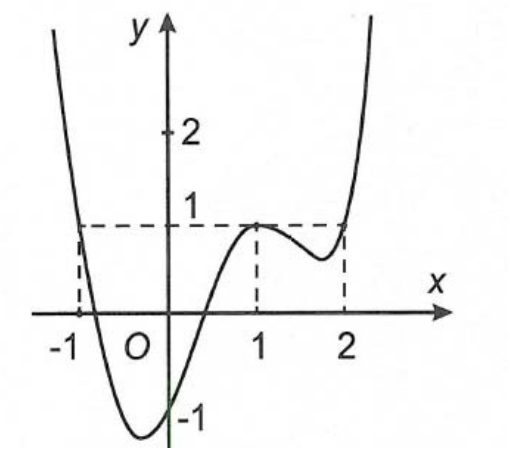
$y = f'(x) = (x+2)(x-2)(x-5)$

$\rightarrow y' = -2f'(3-2x)$.

Lập bảng xét dấu.

$\rightarrow$ *Kết luận.*

Bài tập 2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(x-1) + \dfrac{2019 - 2018x}{2018}$ trên khoảng nào dưới đây?



A. $(2;3)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(1;2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $g'(x) = f'(x-1) - 1$

Do đó $y' > 0 \Leftrightarrow f'(x-1) > 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1 < -1 \\ x-1 > 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 3 \end{array}\right.$

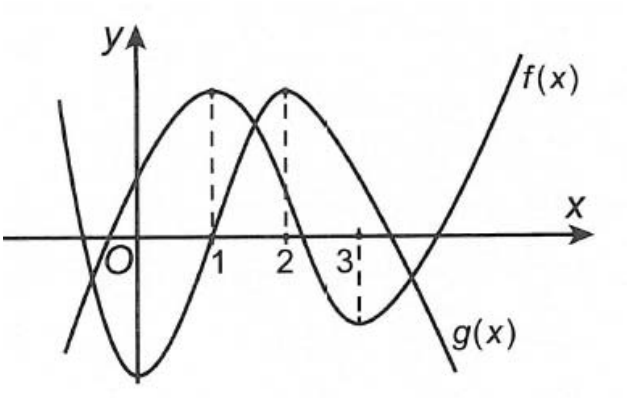
Vậy hàm số đồng biến trên $(-1;0)$.

Nhận xét: *Hàm số* $g(x)$ *có* $g'(x) = f'(x-1) - 1$.

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$, *ta có* $f'(x) > 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ x > 2 \end{array}\right.$

$f'(x) \le 1 \Leftrightarrow -1 \le x \le 2$.

Bài tập 3. Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Biết rằng hai hàm số $f(2x-1)$ và $g(ax+b)$ có cùng khoảng nghịch biến $(m;n)$, $m,n\in\mathbb{N}$. Khi đó giá trị của biểu thức $(4a+b)$ bằng



A. 0. **B.** -2. **C.** -4. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$

Hàm số $y=f(2x-1)$ có $y'=2f'(2x-1)$

Với $y'<0\Leftrightarrow 2.f'(2x-1)<0\Leftrightarrow f'(2x-1)<0\Leftrightarrow 1<2x-1<3\Leftrightarrow 1<x<2$

Vậy hàm số $y=f(2x-1)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$

Hàm số $y=g(ax+b)$ có đạo hàm $y'=a.g'(ax+b)$

$$y'=a.g'(ax+b)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}ax+b=0\\ax+b=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{b}{a}\\x=\dfrac{2-b}{a}\end{array}\right.$$

Nếu $a>0\Rightarrow -\dfrac{b}{a}<\dfrac{2-b}{a}$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\dfrac{b}{a}\right);\left(\dfrac{2-b}{a};+\infty\right)$ (không thỏa mãn).

Nếu $a<0\Rightarrow -\dfrac{b}{a}>\dfrac{2-b}{a}$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{2-b}{a};-\dfrac{b}{a}\right)$

Do hàm số có cùng khoảng nghịch biến là $(1;2)$ nên $\begin{cases}\dfrac{2-b}{a}=1\\-\dfrac{b}{a}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2}{a}=-1\\\dfrac{b}{a}=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\b=4\end{cases}$.

Vậy $4a+b=-4$.

Dạng 10. Ứng dụng tính đơn điệu vào giải phương trình, bất phương trình, tìm điều kiện có nghiệm của phương trình

1. Phương pháp giải

* Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và đồng biến (hoặc nghịch biến) trên tập D, ta có

Với mọi $u,v\in D$ mà $f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v$

Nhận xét: $f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow x=x_0$. Do đó phương trình $f(x)=0$ có nhiều nhất một nghiệm

* Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và đồng biến (hoặc nghịch biến) trên tập D, ta có

Với mọi $u,v\in D: f(u)\ge f(v)\Leftrightarrow u\ge v$.

Với mọi $u,v\in D: f(u)\le f(v)\Leftrightarrow u\le v$.

* Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục và có $\min\limits_D f(x)=A$, $\max\limits_D=B$ thì phương trình $f(x)=g(m)$ có nghiệm thuộc tập hợp $D\Leftrightarrow A\le g(m)\le B$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Biết phương trình $27x^3-23x+1=\sqrt[3]{26x-1}$ có một nghiệm thực dương $x=\frac{a}{b}+\frac{1}{6}\sqrt{\frac{c}{d}}$ với b,c,d là các số nguyên tố. Khẳng định đúng là

A. $6(a+d)=b+c+1$.

B. $6(a+d)=b+c-1$.

C. $5(a+d)=b+c-1$.

D. $5(a+d)=b+c+1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình

$27x^3-23x+1=\sqrt[3]{26x-1}\Leftrightarrow(3x)^3+3x=(26x-1)+\sqrt[3]{26x-1}$. (1)

Xét hàm số $f(t)=t^3+t\Rightarrow f'(t)=3t^2+1>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Phương trình (1): $f(3x)=f\left(\sqrt[3]{26x-1}\right)\Leftrightarrow 3x=\sqrt[3]{26x-1}\Leftrightarrow 27x^3-26x+1=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1<0\\ x=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}\Rightarrow x=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}\end{array}\right.$ là nghiệm có dạng đã cho

$\Rightarrow a=1,b=2,c=23,d=3$

$\Rightarrow 6(a+d)=b+c-1$.

Bài tập 2. Biết phương trình $8x^3-12x^2+10x-3=(10x+1)\sqrt{10x-1}$ có một nghiệm thực dương $x=\dfrac{a+\sqrt{b}}{c}$ với $a,b,c\in\mathbb{N}$ và a,c là các số nguyên tố cùng nhau.

Khẳng định đúng là

A. $2(a+c)=b+3$.

B. $4(a+c)=b-3$.

C. $2(a+c)=b-3$.

D. $4(a+c)=b+3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Nhận xét:

- Vế trái là đa thức bậc ba, vế phải chứa căn bậc hai nên ta biến đổi để xuất hiện $\left(\sqrt{10x-1}\right)^3$. Ta có

$$(10x+1)\sqrt{10x-1}=\left[(10x-1)+2\right]\sqrt{10x-1}=\left(\sqrt{10x-1}\right)^3+2\sqrt{10x-1}$$

Khi đó phương trình có dạng $(ax+b)^3+2(ax+b)=\left(\sqrt{10x-1}\right)^3+2\sqrt{10x-1}$

Điều kiện $x\ge\dfrac{1}{10}$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow(2x-1)^3+2(2x-1)=\left(\sqrt{10x-1}\right)^3+2\sqrt{10x-1}$ (1).

Xét hàm số $f(t)=t^3+2t\Rightarrow f'(t)=3t^2+2>0$, $\forall t\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Phương trình

$$(1)\Leftrightarrow f(2x-1)=f\left(\sqrt{10x-1}\right)\Leftrightarrow 2x-1=\sqrt{10x-1}\Leftrightarrow\begin{cases}2x-1\ge 0\\(2x-1)^2=10x-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{1}{2}\\2x^2-7x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{7+\sqrt{41}}{4}$$

$\Rightarrow a=7,b=41,c=4\Rightarrow 4(a+c)=b+3$.

Bài tập 3. Biết phương trình $\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt[3]{2x+1}-3}=\dfrac{1}{x+2}$, có một nghiệm thực $x=\dfrac{a+\sqrt{b}}{2}$, với $a,b,c\in\mathbb{N}$ và c là số nguyên tố. Khẳng định đúng là

A. $2ac=b+1$.

B. $ac=b-2$.

C. $2ac=b-1$.

D. $ac=b+2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

kiện $\begin{cases} x \neq 13 \\ x \geq -1 \end{cases}$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow (x+2)\sqrt{x+1} - 2(x+2) = \sqrt[3]{2x+1} - 3$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+1}\right)^3 + \sqrt{x+1} = \left(\sqrt[3]{2x+1}\right)^3 + \sqrt[3]{2x+1} \Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+1}\right) = f\left(\sqrt[3]{2x+1}\right)$ (1)

với $f(t) = t^3 + t$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$, có $f'(t) = 3t^2 + 1,\ \forall t \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt[3]{2x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ \left(\sqrt{x+1}\right)^6 = \left(\sqrt[3]{2x+1}\right)^6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{-1}{2} \\ x^3 - x^2 - x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow a = 1, b = 5, c = 2 \Rightarrow 2ac = b - 1.$

Bài tập 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) < 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Tất cả các giá trị thực của x để $f\left(\dfrac{1}{x}\right) > f(2)$ là

A. $x \in \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$.

B. $x \in (-\infty; 0) \cup \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

C. $x \in \left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right)$.

D. $x \in (-\infty; 0) \cup \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $f'(x) < 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Do đó $f\left(\dfrac{1}{x}\right) > f(2) \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} < 2 \Leftrightarrow \dfrac{1-2x}{x} < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0) \cup \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$

Bài tập 5. Bất phương trình $\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4-x} \geq 2\sqrt{3}$ có tập nghiệm là $[a; b]$. Tổng $a + b$ có giá trị bằng

A. -2.

B. 4.

C. 5.

D. 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điều kiện: $-2 \leq x \leq 4$

Xét $f(x) = \sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16} - \sqrt{4-x}$ trên đoạn $[-2; 4]$.

Có $f'(x) = \dfrac{3\left(x^2 + x + 1\right)}{\sqrt{2x^3 + 3x^2 + 6x + 16}} + \dfrac{1}{2\sqrt{4-x}}, \forall x \in (-2; 4)$, do đó hàm số đồng biến trên $[-2; 4]$.

Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow f(x) \geq f(1) = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x \geq 1$

So với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $S = [1;4] \Rightarrow a + b = 5$.

Bài tập 6. Cho $f(x) = x^3 + x - 2^m$ .Tổng các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(f(x)) = x$ có nghiệm trên đoạn $[1;4]$ là

A. 6. **B.** 9. **C.** 21. **D.** 22.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đặt $t = f(x) \Rightarrow \begin{cases} t = f(x) \\ f(t) = x \end{cases} \Rightarrow f(t) + t = f(x) + x$. (1)

Xét hàm số $g(u) = f(u) + u = u^3 + 2u - 2^m$ có $g'(u) = 3u^2 + 2 > 0$, $\forall u \in \mathbb{R}$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow t = x \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow x^3 = 2^m$. (2)

Phương trình $f(f(x)) = x$ có nghiệm trên đoạn $[1;4] \Leftrightarrow (2)$ có nghiệm trên đoạn $[1;4] \Leftrightarrow 1^3 \leq 2^m \leq 4^3 \Rightarrow m \in \{0;1;2;3;4;5;6\}$

Tổng các giá trị là $(1+2+3+4+5+6) = 21$.

Bài tập 7. Cho hàm số $f(x) = x^5 + 3x^3 - 4m$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\sqrt[3]{f(x) + m}\right) = x^3 - m$ có nghiệm trên đoạn $[1;2]$?

A. 15. **B.** 16. **C.** 17. **D.** 18.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $t = \sqrt[3]{f(x) + m} \Rightarrow f(x) = t^3 - m$, kết hợp với phương trình ta có hệ phương trình

$\begin{cases} f(t) = x^3 - m \\ f(x) = t^3 - m \end{cases} \Rightarrow f(t) + t^3 = f(x) + x^3$.(1)

Xét hàm số $g(u) = f(u) + u^3 = u^5 + 4u^3 - 4m$

$\Rightarrow g'(u) = 5u^4 + 12u^2 > 0, \forall u \in [1;2] \Rightarrow$ Hàm số đồng biến đoạn $[1;2]$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow t = x \Leftrightarrow f(x) = x^3 - m \Leftrightarrow x^5 + 2x^3 = 3m$ (2)

Với $x \in [1;2], 3 \leq x^5 + 2x^3 \leq 48$

$\Rightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm trên đoạn $[1;2] \Leftrightarrow 3 \leq 3m \leq 48 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 16$

Bài tập 8. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\sqrt{m + 2\sqrt{m + 2\sin x}} = \sin x$ có nghiệm thực?

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Điều kiện $\sin x \ge 0$.

Ta có $\sqrt{m+2\sqrt{m+2\sin x}} = \sin x \Leftrightarrow m+2\sqrt{m+2\sin x} = \sin^2 x$.

$\Leftrightarrow m+2\sin x+2\sqrt{m+2\sin x} = \sin^2 x+2\sin x$ (1)

Xét hàm số $f(t) = t^2+2t$

$f'(t) = 2t+2 > 0, \forall t \ge 0 \Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Phương trình $(1) \Leftrightarrow f\left(\sqrt{m+2\sin x}\right) = f(\sin x) \Leftrightarrow \sqrt{m+2\sin x} = \sin x$

$\Leftrightarrow \sin^2 x-2\sin x = m$

Đặt $\sin x = t \Rightarrow t \in [0;1]$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $t^2-2t = m$ có nghiệm trên $[0;1]$.

Xét hàm số $g(t) = t^2-2t$, $t \in [0;1]$

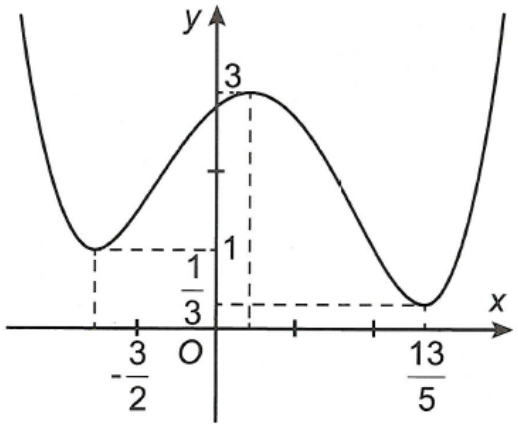
Ta có $g'(t) = 2t-2; g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Suy ra $\max\limits_{[0;1]} g(t) = 0; \min\limits_{[0;1]} g(t) = -1$

Do đó phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-1 \le m \le 0$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 0; m = -1$.

Bài tập 9. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình $\dfrac{9m^3+m}{\sqrt{3f^2(x)+8}} = f^2(x)+3$ có 3 nghiệm thực phân biệt?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Phương trình $\Leftrightarrow 27m^3+3m=\left(3f^2\left(x\right)+9\right)\sqrt{3f^2\left(x\right)+8}$

$\Leftrightarrow \left(3m\right)^3+3m=\left(\sqrt{3f^2\left(x\right)+8}\right)^3+\sqrt{3f^2\left(x\right)+8}$

$\Leftrightarrow g\left(3m\right)=g\left(\sqrt{3f^2\left(x\right)+8}\right)$ (1)

Xét hàm số $g\left(t\right)=t^3+t\Rightarrow g'\left(t\right)=3t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

Do đó $\left(1\right)\Leftrightarrow\sqrt{3f^2\left(x\right)+8}=3m\Leftrightarrow\begin{cases}3m\geq\sqrt{8}\\f^2\left(x\right)=\dfrac{9m^2-8}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=\sqrt{\dfrac{9m^2-8}{3}}\left(2\right)\\f\left(x\right)=-\sqrt{\dfrac{9m^2-8}{3}}\left(3\right)\end{array}\right.$

Dựa vào hình vẽ thì phương trình (3) vô nghiệm (vì $f\left(x\right)>0,\forall x$)

Do đó để phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\left(2\right)$ có ba nghiệm phân biệt hay $\left[\begin{array}{l}\sqrt{\dfrac{9m^2-8}{3}}=3\\\sqrt{\dfrac{9m^2-8}{3}}=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{\sqrt{35}}{5}\\m=\dfrac{\sqrt{11}}{3}\end{array}\right.$.

BÀI 2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Khái niệm cực trị của hàm số

Định nghĩa

Giả sử hàm số f xác định trên $K\left(K\subset\mathbb{R}\right)$ và $x_0\in K$

a) x_0 được gọi là điểm cực đại của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $\left(a;b\right)\subset K$ chứa điểm x_0 sao cho $f\left(x\right)<f\left(x_0\right),\forall x\in\left(a;b\right)\setminus\left\{x_0\right\}$.

Khi đó $f\left(x_0\right)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số f.

b) x_0 được gọi là điểm cực tiểu của hàm số f nếu tồn tại một khoảng $\left(a;b\right)\subset K$ chứa điểm x_0 sao cho $f\left(x\right)>f\left(x_0\right),\forall x\in\left(a;b\right)\setminus\left\{x_0\right\}$.

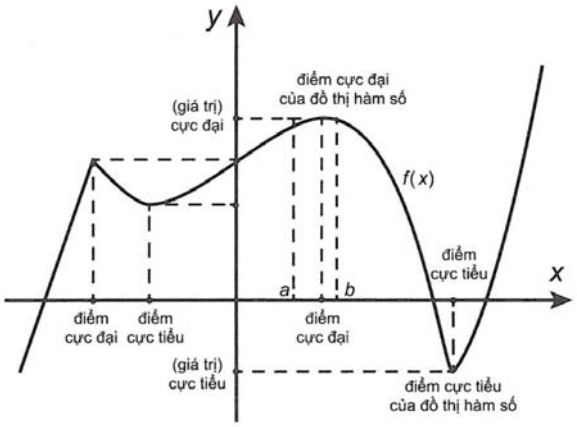
Khi đó $f\left(x_0\right)$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số f.

Chú ý:

1) Điểm cực đại (cực tiểu) x_0 được gọi chung là điểm cực trị. Giá trị cực đại (cực tiểu) $f\left(x_0\right)$ của hàm số được gọi chung là cực trị. Hàm số có thể đạt cực đại hoặc cực tiểu tại nhiều điểm trên tập hợp K.

2) Nói chung, giá trị cực đại (cực tiểu) $f\left(x_0\right)$ không phải là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên tập K; $f\left(x_0\right)$ chỉ là giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của hàm số f trên một khoảng $\left(a;b\right)$ chứa x_0.

3) Nếu x_0 là một điểm cực trị của hàm số f thì điểm $\left(x_0;f\left(x_0\right)\right)$ được gọi là điểm cực trị của đồ thị hàm số f.



2. Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị

Định lí 1

Giả sử hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0. Khi đó, nếu f có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'\left(x_0\right)=0$.

Chú ý:

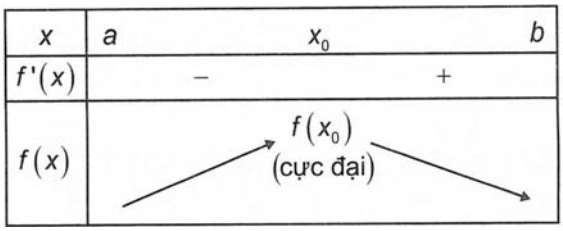
1) Điều ngược lại có thể không đúng. Đạo hàm f' có thể bằng 0 tại điểm x_0 nhưng hàm số f không đạt cực trị tại điểm x_0.

2) Hàm số có thể đạt cực trị tại một điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm.

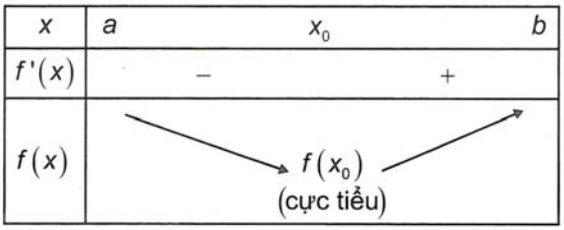
3. Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị

Định lí 2

a) Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0.



b) Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0.



Định lí 3

Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp một trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0, $f'(x_0)=0$ và f có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0.

a) Nếu $f''(x_0)<0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0.

b) Nếu $f''(x_0)>0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0.

Nếu $f''(x_0)=0$ thì ta chưa thể kết luận được, cần lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu đạo hàm.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP BÀI TẬP

Dạng 1: Cho hàm số $f(x)$ hoặc $f'(x)$. Tìm điểm cực trị, giá trị cực trị

1. Phương pháp

Cách 1: Lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu

Bước 1. Tìm $f'(x)$

Bước 2. Tìm các điểm $x_i\,(i=1,2,...)$ tại đó đạo hàm bằng không hoặc hàm số liên tục nhưng không có đạo hàm.

Bước 3. Xét dấu $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ đổi dấu khi x qua điểm x_i thì hàm số đạt cực trị tại điểm x_i.

Cách 2: Dùng định lý 3

Bước 1: Tìm $f'(x)$

Bước 2: Tìm các nghiệm $x_i\,(i=1,2,...)$ của phương trình $f'(x)=0.$

Bước 3: Tính $f''(x_i)$

- Nếu $f''(x_i)<0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_i.
- Nếu $f''(x_i)>0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_i.

Nếu $f''(x_i)=0$ thì ta lập bảng biến thiên để xác định điểm cực trị.

***** Tìm (điểm) cực trị thông qua đạo hàm $f'(x)$: Ta đi đếm số nghiệm bội lẻ của phương trình đạo hàm

2. Bài tập

Bài tập 1: Giá trị cực đại của hàm số $f(x)=x-2\sqrt{x^2+1}$ là số nào dưới đây?

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}.$ **B.** $\sqrt{3}.$ **C.** $-\sqrt{3}.$ **D.** $-\frac{\sqrt{3}}{3}.$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x)=1-\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}.$

Từ đó: $f'(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}=2x\Leftrightarrow\begin{cases}2x\ge 0\\ x^2+1=4x^2\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{3}.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\sqrt{3}$	↘	$-\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại điểm $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$, giá trị cực đại của hàm số là $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\sqrt{3}.$

Bài tập 2: Các điểm cực đại của hàm số $f(x)=x-2\sin x$ có dạng (với $k\in\mathbb{Z}$)

A. $x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi.$ **B.** $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi.$

C. $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi.$ **D.** $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi.$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x)=1-2\cos x$. Khi đó $f'(x)=0\Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$

$f''(x)=2\sin x$

Vì $f''\left(\frac{\pi}{3}+k2\pi\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}+k2\pi\right)=2\sin\frac{\pi}{3}>0$ nên $x=\frac{\pi}{3}+k2\pi$ là điểm cực tiểu.

Vì $f''\left(-\frac{\pi}{3}+k2\pi\right)=2\sin\left(-\frac{\pi}{3}+k2\pi\right)=2\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-2\sin\frac{\pi}{3}<0$ nên $x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi$ là điểm cực đại

Bài tập 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x^2-1)(x^3-3x+2)(x^2-2x)$.

Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là

A. 6. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $f'(x)=(x-2)(x-1)^3x(x+1)(x+2)$ và $f'(x)=0$ có 5 nghiệm bội lẻ nên có 5 điểm cực trị.

Bài tập 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x-1)(x-4)^2$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f(x^2)$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $\left[f(x^2)\right]'=2x.f'(x^2)=2x^5(x^2-1)(x^2-4)^2$

Phương trình $\left[f(x^2)\right]'=0$ có 3 nghiệm bội lẻ là $x=0,x=\pm1$ nên số điểm cực trị của hàm số $y=f(x^2)$ là 3.

Chú ý:

Đạo hàm của hàm số hợp $\left(f\left(u(x)\right)\right)'=f'\left(u(x)\right).u'(x)$ *hay* $f'_x=f'_u.u'_x.$

Bài tập 5: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có $f'(x)\geq 3x+\frac{1}{x^2}-\frac{7}{2},\forall x>0$.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số có đúng một điểm cực trị trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số có ít nhất một điểm cực trị trên $(0;+\infty)$.

C. Hàm số không có điểm cực trị nào trên $(0;+\infty)$.

D. Hàm số có đúng hai điểm cực trị trên $\mathbb{R}$.

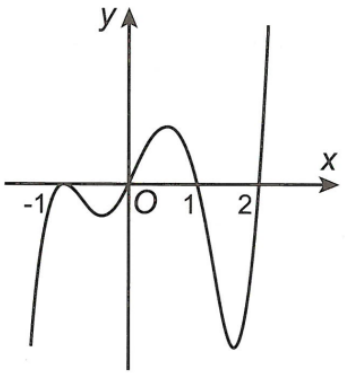
Hướng dẫn giải

Chọn C.

Với $\forall x>0$ ta có: $f'(x)\ge 3x+\frac{1}{x^2}-\frac{7}{2}=\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}x+\frac{1}{x^2}-\frac{7}{2}\ge 3\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^2}-\frac{7}{2}>0$.

Vậy hàm số không có cực trị trên $(0;+\infty)$.

Bài tập 6: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x)=(x^2-x-2)(x^3-6x^2+11x-6)g(x)$ với $g(x)$ là hàm đa thức có đồ thị như hình vẽ dưới đây ($g(x)$ đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và trên $(2;+\infty)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là



A. 5. **B.** 2.

C. 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Dựa vào đồ thị, phương trình $g(x)=0$ có 3 nghiệm bội lẻ là $x=0, x=1, x=2$ và một nghiệm bội chẵn là $x=-1$.

Tóm lại, phương trình $y'=0$ chỉ có $x=-1, x=0, x=2$ và $x=3$ là nghiệm bội lẻ, nên hàm số có 4 điểm cực trị.

Dạng 2. Tìm (điểm) cực trị thông qua bảng xét dấu, bảng biến thiên của đạo hàm

Bài tập 1: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$		-5		$-1/3$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Số điểm cực tiểu của hàm số $y=f(x)$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương 1 lần nên có 1 điểm cực tiểu.

Bài tập 2: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$		-5		-3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đạo hàm đổi dấu hai lần nên có hai điểm cực trị.

Bài tập 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$	-1	0	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0 $+$	‖	$-$	0 $+$ 0	$-$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Chắc chắn hàm số có 3 điểm cực trị là $x = -1, x = 2, x = 3$.

Xét tại điểm $x = 0$, đạo hàm đổi dấu, hàm số không có đạo hàm tại điểm $x = 0$, nhưng theo đề bài, hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(0)$ xác định. Vậy hàm số có tổng cộng 4 điểm cực trị.

Bài tập 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$	-2	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0 $-$	‖	$+$ 0 $-$	‖	$+$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

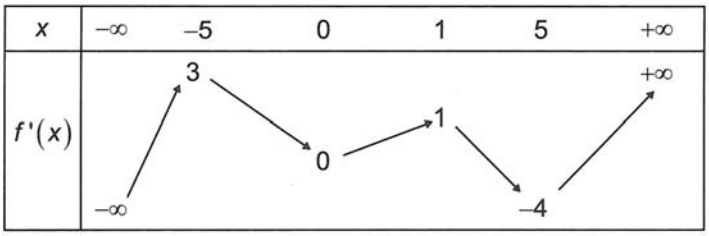
A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Hàm số có 3 điểm cực trị là $x = -2, x = 2, x = 3$ (hàm số không đạt cực trị tại điểm $x = 1$ vì hàm số không xác định tại điểm $x = 1$).

Bài tập 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên của $f'(x)$ như hình vẽ dưới đây

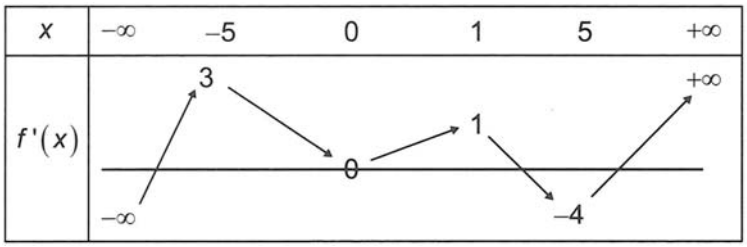


Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

A. 4 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 5

Hướng dẫn giải

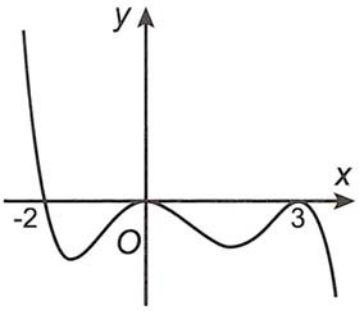
Chọn C.



Dễ thấy phương trình $f'(x)=0$ có ba nghiệm bội lẻ nên hàm số có 3 điểm cực trị.

Dạng 3. Tìm (điểm) cực trị thông qua đồ thị f, f', f''

Bài tập 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f''(x)$ như hình vẽ dưới đây (đồ thị $y=f''(x)$ chỉ có 3 điểm chung với trục hoành như hình vẽ). Số điểm cực trị tối đa của hàm số là

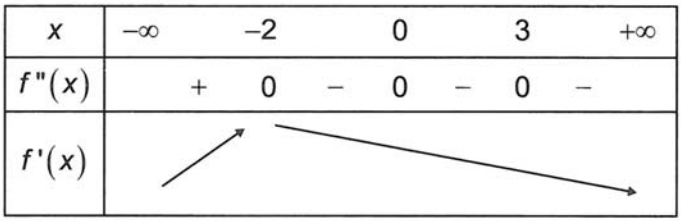


A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

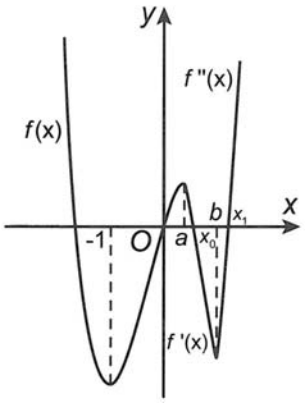
Chọn D.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ như sau



Nhận thấy trục hoành cắt đồ thị hàm số $y=f'(x)$ tại tối đa 2 điểm nên $f'(x)=0$ có tối đa 2 nghiệm phân biệt. Vậy hàm số $y=f(x)$ có tối đa 2 điểm cực trị.

Bài tập 2: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức. Trên hình vẽ là đồ thị hàm số $y=f(x)$ trên $(-\infty;a]$ (và hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-1]$), đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ trên $[a;b]$ (và $f'(x_0)=0$), đồ thị của hàm số $y=f''(x)$ trên $[b;+\infty)$ (và hàm số $y=f''(x)$ luôn đồng biến trên $[b;+\infty)$, $f''(x_1)=0$). Hỏi hàm số $y=f(x)$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?



A. 1. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Bảng xét dấu bên dưới được lập từ các suy luận sau:

x	$-\infty$	-1	a	x_0	b	x_1	$+\infty$
$f''(x)$					$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0 $+$	$+$	0 $-$			

* Hàm số $y=f(\mathrm{x})$ nghịch biến trên $(-\infty;-1)$ nên $f'(\mathrm{x})<0,\forall \mathrm{x}\in(-\infty;-1)$ và đồng biến trên $(-1;a)$ nên $f'(\mathrm{x})>0,\forall \mathrm{x}\in(-1;a)$.

* Hàm số $y=f'(\mathrm{x})$ có $f'(\mathrm{x})>0,\forall \mathrm{x}\in(a;\mathrm{x}_0)$ và $f'(\mathrm{x})<0,\forall \mathrm{x}\in(\mathrm{x}_0;b)$

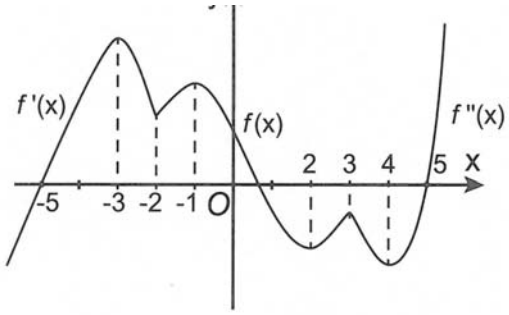
$f'(\mathrm{x})<0,\forall \mathrm{x}\in(\mathrm{x}_0;b]$.

* Hàm số $y=f''(\mathrm{x})$ có $f''(\mathrm{x})<0,\forall \mathrm{x}\in(b;\mathrm{x}_1)$ mà $f'(b)<0\Rightarrow f'(\mathrm{x})<0,\forall \mathrm{x}\in(b;\mathrm{x}_1)$

Lại có $f''(\mathrm{x})>0,\forall \mathrm{x}\in(\mathrm{x}_1;+\infty)$. Vậy trong khoảng $(\mathrm{x}_1;+\infty)$, phương trình $f'(\mathrm{x})=0$ có tối đa 1 nghiệm, và nếu có đúng 1 nghiệm thì $f'(\mathrm{x})$ đổi dấu khi qua nghiệm ấy.

Vậy $f'(\mathrm{x})$ có tối đa 3 nghiệm (bội lẻ) nên hàm số $y=f(\mathrm{x})$ có tối đa 3 điểm cực trị.

Bài tập 3: Cho hàm số $y=f(\mathrm{x})$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên $\mathbb{R}$. Trên hình vẽ là đồ thị hàm số $y=f(\mathrm{x})$ trên đoạn $[-2;3]$, đồ thị của hàm số $y=f'(\mathrm{x})$ trên $(-\infty;-2]$, đồ thị của hàm số $y=f''(\mathrm{x})$ trên $[3;+\infty)$. Hỏi hàm số $y=f(\mathrm{x})$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?



A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Bảng xét dấu bên dưới được lập từ các suy luận sau:

+ Đồ thị của hàm số $y = f''(x)$ trên $[3;+\infty)$ cắt trục hoành tại điểm $x = 5, f''(x) < 0$ khi $x \in (3;5)$ và $f''(x) > 0$ khi $x \in (5;+\infty)$.

+ Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $(-\infty;-2]$ cắt trục hoành tại điểm $x = -5, f'(x) < 0$ khi $x \in (-\infty;-5)$ và $f'(x) > 0$ khi $x \in (-5;-2)$.

+ Đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;3]$: hàm số đồng biến trên $(-2;-1)$ và $(2;3)$; hàm số nghịch biến trên $(-1;2)$

x	$-\infty$	-5	-3	-2	-1	2	3	4	5	$+\infty$
$f''(x)$								$-$	0	$+$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu trên, đồ thị $f'(x)$ cắt trục hoành tối đa tại 2 điểm trên $(3;+\infty)$, khi đó trên $(2;+\infty)$ thì $f'(x)$ đổi dấu 2 lần, trên $(-\infty;2)$ thì $f'(x)$ đổi dấu 3 lần nên hàm số $y = f(x)$ có tối đa 5 điểm cực trị.

Dạng 4: Cực trị hàm bậc ba

1. Phương pháp

Bước 1. Hàm số đạt cực đại (cực tiểu) tại điểm x_0 thì $f'(x_0) = 0$, tìm được tham số.

Bước 2. Với giá trị tham số tìm được, ta thế vào hàm số ban đầu để thử lại.

Chú ý: Đối với hàm bậc ba, ta có thể làm trắc nghiệm như sau:

+) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$.

+) Hàm số đạt cực đại tại $x = x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$.

2. Bài tập

Bài tập 1: Tìm m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại điểm $x = 3$.

A. $m = -1$. **B.** $m = -5$. **C.** $m = 5$. **D.** $m = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m^2 - 4 \Rightarrow y'' = 2x - 2m$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$ thì

$$y'(3) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 5 \end{array} \right.$$

- Với $m = 1, y''(3) = 2.3 - 2.1 = 4 > 0$ suy ra $x = 3$ là điểm cực tiểu.
- Với $m = 5, y''(3) = 2.3 - 2.5 = -4 < 0$ suy ra $x = 3$ là điểm cực đại.

Bài tập 2: Hàm số $y = ax^3 + x^2 - 5x + b$ đạt cực tiểu tại $x = 1$ và giá trị cực tiểu bằng 2, giá trị của $H = 4a - b$ là

A. $H = 1$. **B.** $H = -1$. **C.** $H = -2$. **D.** $H = 3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2x - 5 \Rightarrow y'' = 6ax + 2$.

+) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1 \Rightarrow y'(1) = 0 \Leftrightarrow a = 1$.

+) Thay $a = 1$ ta thấy $y''(1) = 6 + 2 = 8 > 0$ nên $x = 1$ là điểm cực tiểu.

+) Mặt khác ta có: $y(1) = 2 \Leftrightarrow 1 + 1 - 5 + b = 2 \Leftrightarrow b = 5$.

Vậy $H = 4.1 - 5 = -1$.

Bài tập 3: Hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0, f(0) = 0$ và đạt cực đại tại điểm $x = 1, f(1) = 1$. Giá trị của biểu thức $T = a + 2b - 3c + d$ là

A. $T = 2$. **B.** $T = 3$. **C.** $T = 4$. **D.** $T = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Do hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 0, f(0) = 0$ và đạt cực đại tại điểm $x = 1, f(1) = 1$ nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} f'(0)=0 \\ f(0)=0 \\ f'(1)=0 \\ f(1)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ d=0 \\ 3a+2b=0 \\ a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow T=4.$$

Bài tập 4: Giá trị của *m* để hàm số $y=x^3+mx-1$ có cực đại và cực tiểu là

A. $m \geq 0$. **B.** $m \leq 0$. **C.** $m > 0$. **D.** $m < 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Hàm số $y=x^3+mx-1$ có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt hay $3x^2+m=0$ có hai nghiệm phân biệt.

Do đó $m<0$.

Chú ý: *Do hàm bậc ba có đạo hàm là tam thức bậc hai nên các yêu cầu sau: hàm số có cực trị, hàm số có cực đại và cực tiểu, hàm số có hai cực trị có cách làm giống nhau, tức là* $y'=0$ *có hai nghiệm phân biệt.*

Bài tập 5: Với giá trị nào của *m* thì hàm số $y=\frac{m}{3}x^3+x^2+x+7$ có cực trị?

A. $m \in (1;+\infty) \cup \{0\}$. **B.** $m < 1$.

C. $m \in (-\infty;1) \setminus \{0\}$. **D.** $m \leq 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $y'=mx^2+2x+1$.

+) Với $m=0$, hàm số trở thành $y=x^2+x+7$, đồ thị là một parabol nên hiển nhiên có cực trị.

Vậy $m=0$ thỏa mãn yêu cầu.

+) Xét $m \neq 0$, để hàm số có cực trị thì $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0$

$\Leftrightarrow 1-m>0 \Leftrightarrow m<1$.

Hợp cả hai trưởng hợp, khi $m<1$ thì hàm số có cực trị.

Chú ý: *Với bài toán hỏi "có cực trị" và hệ số của bậc ba (bậc cao nhất) có chứa tham số thì nên chia hai trường hợp: Hệ số của bậc cao nhất bằng 0 và khác 0.*

Bài tập 6: Tìm các giá trị của *m* để hàm số $y=mx^3-3mx^2-(m-1)x+2$ **không** có cực trị.

A. $0<m<\frac{1}{4}$. **B.** $0 \leq m<\frac{1}{4}$.

C. $0 \leq m \leq \frac{1}{4}$. **D.** $0<m \leq \frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $y' = 3mx^2 - 6mx - m + 1.$

+) Với $m = 0$, hàm số trở thành $y = x + 2$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên không có cực trị, nhận $m = 0$.

+) Xét $m \neq 0$, hàm số không có cực trị khi $y' = 0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta' = 9m^2 - 3m(1-m) \le 0 \Leftrightarrow 12m^2 - 3m \le 0 \Leftrightarrow 0 < m \le \frac{1}{4}.$$

Hợp cả hai trường hợp, khi $0 \le m \le \frac{1}{4}$ thì hàm số không có cực trị.

Bài tập 7: Số giá trị nguyên của tham số $m \in [-20;20]$ để hàm số

$y = \left(\frac{m-1}{3}\right)x^3 + (m^2-4)x^2 + (m^2-9)x + 1$ có hai điểm cực trị trái dấu là

A. 18. **B.** 17. **C.** 19. **D.** 16.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$y' = (m-1)x^2 + 2(m^2-4)x + (m^2-9).$

Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu khi $y' = 0$ có hai nghiệm trái dấu

$$\Leftrightarrow (m-1)(m^2-9) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -3 \\ 1 < m < 3 \end{array}\right.$$

Vậy $m \in \{-20;-19;...;-4;2\}$, có 18 giá trị của m.

Bài tập 8: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = mx^3 + m(m-1)x^2 - (m+1)x - 1$ có hai điểm cực trị đối nhau?

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $y' = 3mx^2 + 2m(m-1)x - (m+1).$

Hàm số có hai điểm cực trị đối nhau $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm đối nhau

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3m \neq 0 \\ \Delta' > 0 \\ S = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2(m-1)^2 + 3m(m+1) > 0 \\ m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Bài tập 9: Giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 + (m-1)x^2 + (m+2)x - 6$ có hai điểm cực trị có hoành độ dương là

A. $m<\frac{1}{4}.$ **B.** $0<m<\frac{1}{4}.$ **C.** $m<0.$ **D.** $-\frac{1}{4}<m<0.$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $y'=mx^2+2(m-1)x+m+2.$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị có hoành độ dương $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt dương

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\S>0\\P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m-1)^2-m(m+2)>0\\\frac{-(m-1)}{m}>0\\\frac{m+2}{m}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<\frac{1}{4}\\0<m<1\Leftrightarrow 0<m<\frac{1}{4}.\\\left[\begin{array}{l}m>0\\m<-2\end{array}\right.\end{cases}$$

Bài tập 10: Cho hàm số $y=x^3+(1-2m)x^2+(2-m)x+m+2$. các giá trị của m để đồ thị hàm số có điểm cực đại, cực tiểu, đồng thời hoành độ của điểm cực tiểu nhỏ hơn 1 là

A. $\left[\begin{array}{l}m<-1\\\frac{5}{4}<m<\frac{7}{5}.\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}m<-1\\\frac{5}{4}<m<\frac{8}{5}.\end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l}m<-1\\\frac{5}{4}<m<\frac{7}{5}.\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}m<-2\\\frac{3}{2}<m<\frac{5}{2}.\end{array}\right.$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $y'=3x^2+2(1-2m)x+2-m$.

Đồ thị hàm số có điểm cực đại, cực tiểu khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow\Delta'=(1-2m)^2-3(2-m)>0\Leftrightarrow 4m^2-m-5>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-1\\m>\frac{5}{4}\end{array}\right.$$

Khi đó, giả sử x_1, x_2 (với $x_1<x_2$) là hai nghiệm của phương trình $y'=0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	CĐ	↘	CT	↗	$+\infty$

Khi đó, yêu cầu bài toán trở thành:

$$x_2<1\Leftrightarrow\frac{2m-1+\sqrt{4m^2-m-5}}{3}<1\Leftrightarrow\sqrt{4m^2-m-5}<4-2m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4-2m \ge 0 \\ 4m^2-m-5 < 4m^2-16m+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le 2 \\ m < \dfrac{7}{5} \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{7}{5}.$$

Kết hợp điều kiện có cực trị thì $m < -1$ và $\frac{5}{4} < m < \frac{7}{5}$ thỏa mãn yêu cầu.

Chú ý: *Có thể dùng Vi-ét để lời giải đơn giản hơn như sau:*

Xét $x_1 < x_2 < 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 < 2 \\ (x_1-1)(x_2-1) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1 < 3 \\ 2-m+2(1-2m)+3 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m < \dfrac{7}{5} \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{7}{5}$$

Bài tập 11: Tìm các giá trị thực của tham số m sao cho điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 + mx - 1$ nằm bên phải trục tung.

A. $m < 0$. **B.** $0 < m < \frac{1}{3}$. **C.** $m < \frac{1}{3}$. **D.** Không tồn tại.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $y' = 3x^2 + 2x + m$.

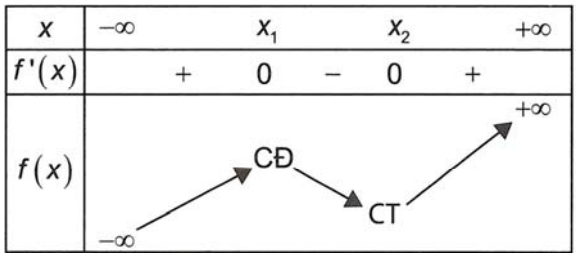
Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' = 1 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{3} (1).$

Khi đó, giả sử x_1, x_2 (với $x_1 < x_2$) là hai nghiệm của phương trình $y' = 0$ thì

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{2}{3} \\ x_1 . x_2 = \dfrac{m}{3} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên



Do $x_1 + x_2 = -\frac{2}{3} < 0$ nên điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 + mx - 1$ nằm bên phải trục tung

$\Leftrightarrow x_1.x_2 < 0 \Leftrightarrow \frac{m}{3} < 0 \Leftrightarrow m < 0$ (2).

Từ (1), (2) ta có $m < 0$

Bài tập 12: Giá trị của *m* để hàm số $= \frac{1}{3}x^3 - (m-2)x^2 + (4m-8)x + m + 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < -2 < x_2$ là

A. m < 2.

B. m < 2 hoặc m > 6.

C. $m < \frac{3}{2}$ hoặc m > 6.

D. $m < \frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $y' = x^2 - 2(m-2)x + (4m-8)$.

Yêu cầu bài toán trở thành

$$(x_1 + 2)(x_2 + 2) < 0 \Leftrightarrow (4m-8) + 4(m-2) + 4 < 0 \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}$$

Bài tập 13: Gọi *S* là tập các giá trị thực của tham số *m* để hàm số $y = (x-m)(x^2 - 2x - m - 1)$ có hai điểm cực trị x_1 , x_2 thỏa $|x_1.x_2| = 1$. Tổng tất cả các phần tử của *S* bằng

A. 2.

B. – 2.

C. 4.

D. 0.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $y' = 3x^2 - 2(m+2)x + m - 1$.

Hàm số có hai điểm cực trị khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 + m + 7 > 0$ (luôn đúng).

Theo định lí Vi-ét ta có:

$$x_1.x_2 = \frac{m-1}{3} \Rightarrow |x_1.x_2| = 1 \Leftrightarrow |m-1| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = -2 \end{array}\right.$$

Vậy tổng cần tìm bằng $4 + (-2) = 2$.

Bài tập 14: Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-20; 20]$ để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1 , x_2 sao cho $|x_1 - x_2| \geq 2\sqrt{6}$?

A. 38.

B. 35.

C. 34.

D. 37.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m$.

Hàm số có hai điểm cực trị khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - m > 0$ (*).

Theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1.x_2 = m \end{cases}$.

Khi đó

$|x_1 - x_2| \geq 2\sqrt{6} \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1.x_2 \geq 24 \Leftrightarrow 4m^2 - 4m \geq 24 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \geq 3 \\ m \leq -2 \end{array}\right.$ (thỏa mãn(*)).

Do *m* nguyên và $m \in [-20;20]$ nên $m \in \{-20;-19;...;-2;3;4;...;20\}$.

Vậy có 37 giá trị của *m*.

Bài tập 15: Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 9x - m$. Tổng tất cả các giá trị của tham số *m* thỏa mãn hàm số đạt cực trị tại hai điểm x_1 , x_2 sao cho $3x_1 - 2x_2 = m + 6$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** – 2. **D.** – 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 9$

Hàm số có hai điểm cực trị khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' = 9(m+1)^2 - 27 > 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 > 3$ (*).

Theo định lí Vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1.x_2 = 3 \end{cases}$.

Từ $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ 3x_1 - 2x_2 = m + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = m + 2 \\ x_2 = m \end{cases}$ thế vào $x_1.x_2 = 3$ ta được

$m(m+2) = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -3 \end{array}\right.$ thỏa mãn (*).

Bài tập 16: Có bao nhiêu giá trị của tham số *m* để hàm số $y = 2x^3 + 9mx^2 + 12m^2x$ có điểm cực đại x_{CD}, điểm cực tiểu x_{CT} thỏa mãn $x_{CD}^2 = x_{CT}$?

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $y' = 6x^2 + 18mx + 12m^2 = 6(x+m)(x+2m)$.

Hàm số có hai điểm cực trị khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq 0$ (*)

Trường hợp 1: m < 0 khi đó, lập bảng xét dấu đạo hàm dễ thấy

$x_{CD} = -m, x_{CT} = -2m$

Khi đó:

$x_{CD}^2 = x_{CT} \Leftrightarrow m^2 = -2m \Leftrightarrow m = -2$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2: m > 0 lập bảng xét dấu đạo hàm ta có $x_{CD} = -2m, x_{CT} = -m$.

$x_{CD}^2 = x_{CT} \Leftrightarrow 4m^2 = -m \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{4}$, loại.

Vậy $m = -2$ thỏa mãn đề bài.

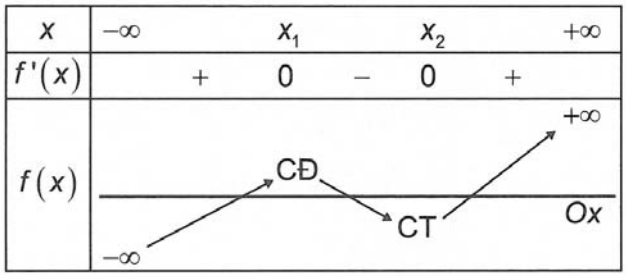
Bài tập 17: Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-18;18]$ để đồ thị hàm số $y = (x-1)(x^2 + 2mx + 1)$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành?

A. 34. **B.** 30. **C.** 25. **D.** 19.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Bảng biến thiên của hàm số bậc ba khi có hai cực trị và hai điểm cực trị của đồ thị nằm về hai phía trục hoành là



Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành thì $y = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow x^2 + 2mx + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1^2 + 2m.1 + 1 \neq 0 \\ \Delta' = m^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -1 \end{array}\right. \end{cases}.$$

Do m nguyên và $m \in [-18;18]$ nên $m \in \{-18;-17;....;-2;2;3;....;18\}$

Vậy có 34 giá trị của m thỏa mãn đề.

Bài tập 18: Cho hàm số $y = 2x^3 - 3mx^2 + x + m$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m trong khoảng $(-10;10)$ để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm về hai phía của đường thẳng $y = x - 6$. Số phần tử của tập S là

A. 9. **B.** 12. **C.** 7. **D.** 11.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đặt $f(x)=2x^3-3mx^2+m+6.$

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left(2x^3-3mx^2+m+6\right)'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=m\end{array}\right.$.

Xét $g(x)=g(x)-x+6$. Đồ thị hàm số đã cho có hai cực trị nằm về hai phía đường thẳng $y=x=6$

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\neq 0\\g(0).g(m)<0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m\neq 0\\(m+12)\left(-m^3+12\right)<0\end{array}\right.$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ và thuộc $(-10;10)$ nên $m\in\{3;4;.....9\}$.

Bài tập 19: Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^2-2$ có đồ thị *(C)* và điểm $C(1;4)$. Tổng các giá trị nguyên dương của *m* để *(C)* có hai điểm cực trị *A*, *B* sao cho tam giác *ABC* có diện tích bằng 4 là

A. 6. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $y'=0\Leftrightarrow 3x^2-6mx=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2m\end{array}\right.$.

Đồ thị *(C)* luôn có hai điểm cực trị với mọi *m* nguyên dương (vì *m* là số nguyên dương nên phương trình $y'=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt).

Khi đó $A\left(0;4m^2-2\right),B\left(2m;-4m^3+4m^2-2\right)$

$\Rightarrow AB=\sqrt{4m^2+16m^6}=2|m|\sqrt{4m^4+1}.$

$(AB):\dfrac{x-0}{2m-0}=\dfrac{y-\left(4m^2-2\right)}{-4m^3}\Leftrightarrow 2m^2x+y-4m^2+2=0.$

Thế tọa độ *C* vào phương trình đường thẳng (*AB*), dễ thấy $C\notin(AB)$.

$d(C,AB)=\dfrac{\left|2m^2+4-4m^2+2\right|}{\sqrt{4m^4+1}}=\dfrac{2\left|m^2-3\right|}{\sqrt{4m^4+1}}.$

$S_{ABC}=\dfrac{1}{2}.AB.d(C,AB)=4\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}.2|m|.\sqrt{4m^4+1}.\dfrac{2\left|m^2-3\right|}{\sqrt{4m^4+1}}=4$

$\Leftrightarrow\left|m\left(m^2-3\right)\right|=2\Leftrightarrow m^6-6m^4+9m^2-4=0$

$\Leftrightarrow\left(m^2-1\right)^2\left(m^2-4\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\pm 1\\m=\pm 2\end{array}\right.$.

Do *m* nguyên dương nên ta nhận được $m=1,m=2$. Tổng là 3.

Chú ý: *Học sinh nên kiểm tra điều kiện để hàm số có hai điểm cực trị và điều kiện để ba điểm A, B, C không thẳng hàng (dù trong bài toán này, nếu "quên" thì không ảnh hưởng đến kết quả).*

Ta có thể tính nhanh diện tích như sau:

Ta có $\overrightarrow{OA}=\left(0;4m^2-2\right)$ *và* $\overrightarrow{OB}=\left(2m;-4m^3+4m^2-2\right)$

Khi đó: $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|2m\left(4m^2-2\right)\right|=4$

Bài tập 20: Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+\left(m^2-3\right)x$ có hai điểm cực trị x_1,x_2 sao cho giá trị biểu thức $P=\left|x_1\left(x_2-2\right)-2\left(x_2+1\right)\right|$ đạt giá trị lớn nhất?

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $y'=x^2-2x+m^2-3.$

Hàm số có hai điểm cực trị khi $1-\left(m^2-3\right)>0\Leftrightarrow -2<m<2.$

Theo định lí Vi-ét $\begin{cases}x_1+x_2=2\\x_1.x_2=m^2-3\end{cases}.$

$P=\left|x_1\left(x_2-2\right)-2\left(x_2+1\right)\right|=\left|x_1x_2-2\left(x_1+x_2\right)-2\right|$

$=\left|m^2-3-2.2-2\right|=\left|m^2-9\right|\le 9.$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m=0$ (thỏa mãn).

Bài tập 21: Gọi x_1,x_2 là hai điểm cực trị của $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}mx^2-4x-10$. Giá trị lớn nhất của $S=\left(x_1^2-1\right)\left(x_2^2-16\right)$ là

A. 16. **B.** 32. **C.** 4. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $y'=x^2-mx-4$. Do $a=1,c=-4$ trái dấu nhau nên $y'=0$ luôn có hai nghiệm trái dấu hay hàm số luôn có hai điểm cực trị.

Theo định lí Vi-ét: $\begin{cases}x_1+x_2=m\\x_1.x_2=-4\end{cases}.$

Khi đó $S=\left(x_1x_2\right)^2-\left(16x_1^2+x_2^2\right)+16\le\left(x_1x_2\right)^2-2\sqrt{16x_1^2.x_2^2}+16=0.$

Dấu "=" xảy ra khi $16x_1^2=x_2^2\Leftrightarrow x_2=-4x_1\Rightarrow m=\pm 3.$

Bài tập 21: Tìm m để đồ thị hàm số $(C):y=x^3+\left(m+3\right)x^2-\left(2m+9\right)x+m+6$ có hai điểm cực trị và khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường thẳng qua hai điểm cực trị đạt giá trị lớn nhất

A. $m \in \left\{-6+\frac{3}{\sqrt{2}};-6-\frac{3}{\sqrt{2}}\right\}$.

B. $m \in \left\{-3-\frac{3}{\sqrt{2}};-3+\frac{3}{\sqrt{2}}\right\}$.

C. $m \in \left\{-3-6\sqrt{2};-3+6\sqrt{2}\right\}$.

D. $m \in \left\{-6-6\sqrt{2};-6+6\sqrt{2}\right\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $y' = 3x^2 + 2(m+3)x - 2m - 9 = (3x^2 + 6x - 9) + (2mx - 2m)$

$= (x-1)(3x+9+2m)$.

Hàm số có hai cực trị khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 3+9+2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -6$

Một trong hai điểm cực trị là $A(1;1)$ và $\overrightarrow{OA} = (1;1) \Rightarrow OA = \sqrt{2}$ và $k_{(OA)} = 1$.

Đường thẳng d qua hai điểm cực trị có hệ số góc là $k_d = -\left[\frac{2}{3}(2m+9) + \frac{2}{9}(m+3)^2\right]$

Ta có $d[O;d] \le OA = \sqrt{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi $d \perp OA \Leftrightarrow k_d.k_{(OA)} = -1 \Leftrightarrow -\left[\frac{2}{3}(2m+9) + \frac{2}{9}(m+3)^2\right] = -1$

$\Leftrightarrow m = -6 \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Bài tập 22: Giả sử A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ và đường thẳng (AB) đi qua gốc tọa độ. Giá trị lớn nhất $P_{\min}$ của $P = abc + ab + c$ bằng

A. $P_{\min} = -9$.

B. $P_{\min} = 1$.

C. $P_{\min} = -\frac{16}{25}$.

D. $P_{\min} = -\frac{25}{9}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đường thẳng qua hai cực trị là $(AB): y = \left(\frac{2}{3}b - \frac{2a^2}{9}\right)x + c - \frac{ab}{9}$.

Do (AB) qua gốc O nên $c - \frac{ab}{9} = 0 \Leftrightarrow ab = 9c$.

Khi đó $P = abc + ab + c = 9c^2 + 10c = \left(3c + \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{25}{9} \ge -\frac{25}{9}, \forall c \in \mathbb{R}$.

Vậy $P_{\min} = -\frac{25}{9}$ khi $\begin{cases} c = -\frac{5}{9} \\ ab = -5 \end{cases}$.

Bài tập 23: Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ có hai điểm cực trị A, B. Gọi M, N là hai giao điểm của đường thẳng (AB) và đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 3$. Biết MN lớn nhất. Khoảng cách từ điểm $E(3;1)$ đến (AB) bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $y' = 3x^2 - 3m$.

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$.

Viết hàm số dưới dạng $y = \frac{x}{3}(3x^2 - 3m) - 2mx + 2 = \frac{x}{3}y' - 2mx + 2$

Suy ra đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho là $(AB): y = -2mx + 2$.

Đường thẳng (AB) luôn đi qua điểm cố định là $M(0;2)$.

Đường tròn (C) tâm $I(1;1)$, bán kính $R = \sqrt{3}$ và $d[I;(AB)] \le IM = 1 < \sqrt{3} = R$ nên đường thẳng luôn cắt đường tròn tại hai điểm M, N.

Giả sử $I(1;1) \in (AB) \Rightarrow 1 = -2m + 2 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$.

Vậy khi $m = \frac{1}{2}$ (thỏa mãn hàm số có hai điểm cực trị) thì (AB) qua $I(1;1)$, cắt đường tròn (C) tại hai điểm M, N với $MN = 2R$ là lớn nhất. Khi đó: $d[E(3;1);(AB): y + x - 2 = 0] = \sqrt{2}$.

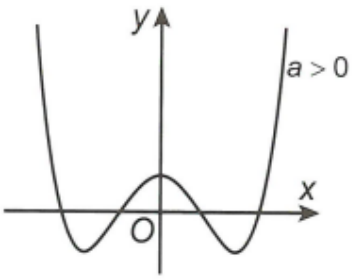
Dạng 5. Cực trị hàm bậc bốn trùng phương

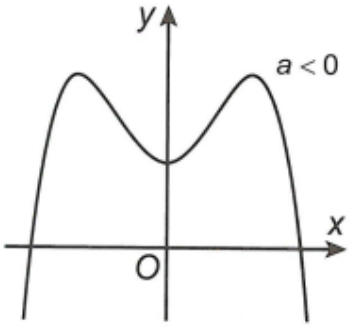
1. Phương pháp

Xét hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, $(a \ne 0)$, có đạo hàm là $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$.

+ Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow ab < 0$.
+ Đồ thị hàm số có đúng một điểm cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có đúng một nghiệm $\Leftrightarrow ab \ge 0$.
+ Đồ thị hàm số hoặc có đúng một điểm cực trị hoặc có ba điểm cực trị, và luôn có một điểm cực trị nằm trên trục tung.
+ Đồ thị hàm số có ba cực trị:
  - Nếu $a > 0$ hàm số có hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại;
  - Nếu $a < 0$ hàm số có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu.

Chú ý rằng ba điểm cực trị của đồ thị hàm số luôn tạo thành một tam giác cân.

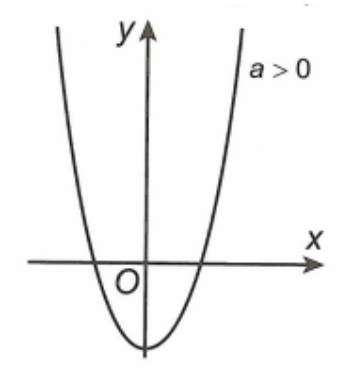


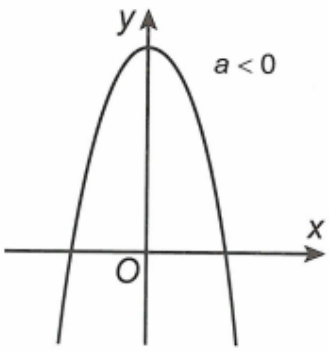


+ Khi hàm số có một cực trị:

  $a > 0$ thì điểm cực trị là điểm cực tiểu;

  $a < 0$ thì điểm cực trị là điểm cực đại.





+ Đồ thị hàm số $y = \left|ax^4 + bx^2 + c\right|$ có nhiều điểm cực trị nhất (bảy cực trị) khi đồ thị hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị và đồ thị của nó cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt.

+ Đồ thị hàm số $y = \left|ax^4 + bx^2 + c\right|$ có ít điểm cực trị nhất (một cực trị) khi đồ thị hàm số $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có một điểm cực trị và đồ thị của nó không có điểm chung hoặc chỉ tiếp xúc với trục hoành.

2. Bài tập

Bài tập 1. Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-20;20]$ để đồ thị hàm số $y = mx^4 + \left(m^2 - 9\right)x^2 + 1$ có ba điểm cực trị?

A. 20. **B.** 19. **C.** 18. **D.** 17.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $y' = 4mx^3 + 2\left(m^2 - 9\right)x = 2x\left[2mx^2 + \left(m^2 - 9\right)\right]$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2mx^2 + m^2 - 9 = 0 \end{array}\right.$ (1).

Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt hay (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow 2m\left(m^2 - 9\right) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -3 \\ 0 < m < 3 \end{array}\right.$.

Vậy có 19 giá trị của m thỏa mãn đề bài.

Bài tập 2. Tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 3mx^2 - 4$ có ba điểm cực trị phân biệt và hoành độ của chúng trong khoảng $(-2;2)$ là

A. $\left(-\frac{8}{3};0\right)$. **B.** $\left(0;\frac{8}{3}\right)$. **C.** $\left(-\frac{3}{2};0\right)$. **D.** $\left(0;\frac{3}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $y' = 4x^3 + 6mx$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2x^2 = -3m \end{array}\right.$ (2).

Để thỏa mãn đề bài phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 0 và thuộc khoảng $(-2;2)$ $\Leftrightarrow 0 < -\frac{3m}{2} < 4 \Leftrightarrow 0 > m > -\frac{8}{3}$.

Bài tập 3. Biết rằng hàm số $y = x^4 - 2\left(m^2 + 1\right)x^2 + 2$ có điểm cực tiểu. Giá trị lớn nhất của cực tiểu là

A. 1. **B.** -1. **C.** 0. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$y' = 4x^3 - 4\left(m^2 + 1\right)x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m^2 + 1 \end{array}\right.$.

Rõ ràng phương trình $y' = 0$ luôn có ba nghiệm phân biệt.

Lập bảng biến thiên, dễ thấy $x = \pm\sqrt{m^2 + 1}$ là các điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

Giá trị cực tiểu là $y_{CT} = 2 - \left(m^2 + 1\right)^2 = 1 - \left(m^4 + 2m^2\right) \le 1$ (dấu "=" xảy ra khi $m = 0$).

Bài tập 4. Với giá trị nào của k thì hàm số $y = kx^4 + \left(k - 1\right)x^2 + 1 - 2k$ chỉ có một cực trị?

A. $0 < k \le 1$. **B.** $0 \le k \le 1$. **C.** $\left[\begin{array}{l} k \ge 1 \\ k < 0 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} k \ge 1 \\ k \le 0 \end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

+ Với $k=0$, hàm số trở thành $y=-x^2+1$ có đồ thị là một parabol nên có đúng một cực trị. Do đó $k=0$ thỏa mãn đề bài.

+ Với $k\neq 0$. Ta có $y'=4kx^3+2(k-1)x=2x\left(2kx^2+k-1\right)$.

Để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì phương trình $2kx^2+k-1=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm $x=0\Leftrightarrow k(k-1)\geq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k\geq 1 \\ k<0 \end{array}\right.$.

Kết hợp hai trường hợp ta được các giá trị cần tìm là $k\geq 1$ hoặc $k\leq 0$.

Chú ý: *x=0 là nghiệm của phương trình* $2kx^2+k-1=0$

Bài tập 5. Giá trị của m để hàm số $y=(m+1)x^4-2mx^2+2m+m^4$ đạt cực đại tại $x=2$ là

A. $m=\frac{4}{3}$. **B.** $m=-\frac{4}{3}$. **C.** $m=-\frac{3}{4}$. **D.** $\varnothing$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $y'=4(m+1)x^3-4mx\Rightarrow y''=12(m+1)x^2-4m$.

Để hàm số đạt cực đại tại $x=2$ thì $y'(2)=0\Rightarrow 32(m+1)-8m=0\Rightarrow m=-\frac{4}{3}$.

Với $m=-\frac{4}{3}$ thì $y''(2)=12\left(-\frac{4}{3}+1\right).2^2-4\left(-\frac{4}{3}\right)<0$, suy ra $x=2$ là điểm cực đại.

Chú ý: *Nếu* $f'(x_0)=f''(x_0)=0$ *thì ta lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu đạo hàm để kiểm tra.*

Bài tập 6. Cho hàm số $y=\frac{1}{2}x^4-\frac{3}{2}mx^2+x$ có $x=m$ là một điểm cực trị. Tổng các giá trị của m là

A.1. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** -1. **D.** $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$y'=2x^3-3mx+1\Rightarrow y''=6x^2-3m$.

Hàm số đạt cực trị tại điểm $x=m\Rightarrow y'(m)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

- Với $m=1$, ta có: $y''(1)=6-3>0$ $x=1$ là điểm cực tiểu (cực trị) nên $m=1$ thỏa mãn.
- Với $m=-\frac{1}{2}$, ta có: $y''\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}>0$ $x=-\frac{1}{2}$ là điểm cực tiểu (cực trị) nên $m=-\frac{1}{2}$ thỏa mãn.

Vậy tổng các giá trị của m thỏa mãn điều kiện trên là $1+\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

Bài tập 7. Biết đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có hai điểm cực trị là $A(0;2)$, $B(2;-14)$. Giá trị của $y(1)$ là

A. $y(1)=-5$. **B.** $y(1)=-4$. **C.** $y(1)=-2$. **D.** $y(1)=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $y'=4ax^3+2bx$.

Các điểm $A(0;2)$, $B(2;-14)$ thuộc đồ thị hàm số nên $\begin{cases}c=2\\16a+4b+c=-14\end{cases}(1)$.

Mặt khác, hàm số đạt cực trị tại điểm $x=2$, suy ra $32a+4b=0\,(2)$.

Từ $(1);(2)$ ta có $y=x^4-8x^2+2$.

Dễ thấy hàm số có các điểm cực trị là $A(0;2)$, $B(2;-14)$ nên $y=x^4-8x^2+2$ là hàm số cần tìm.

Khi đó $y(1)=-5$.

Bài tập 8. Biết rằng đồ thị hàm số $y=x^4-2(m-1)x^2+3m$ có A là điểm cực đại và B, C là hai điểm cực tiểu. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=OA+\frac{12}{BC}$ là

A. 9. **B.** 8. **C.** 12. **D.** 15.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $y'=4x^3-4(m-1)x$. Cho $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2=m-1\end{array}\right.$.

Hàm số có ba điểm cực trị nên $m>1$.

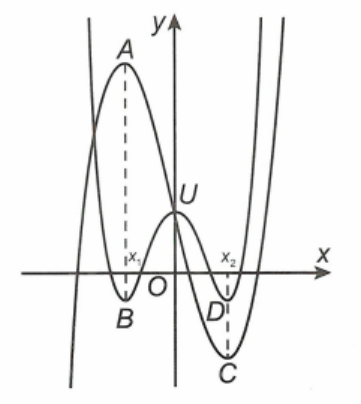
Khi đó tọa độ ba điểm cực trị là $A(0;3m)$, $B\left(\sqrt{m-1};5m-m^2-1\right)$ và $C\left(-\sqrt{m-1};5m-m^2-1\right)$. Suy ra $OA=3m$, $BC=2\sqrt{m-1}$.

Ta có $P=OA+\frac{12}{BC}=3m+\frac{6}{\sqrt{m-1}}=\left[3(m-1)+\frac{3}{\sqrt{m-1}}+\frac{3}{\sqrt{m-1}}\right]+3$

$\geq 3+3\sqrt[3]{3(m-1)\left(\frac{3}{\sqrt{m-1}}\right)^2}=12$.

Dấu "=" xảy ra khi $3(m-1)=\frac{3}{\sqrt{m-1}}\Leftrightarrow m=2$.

Bài tập 9. Cho đồ thị hàm số $(C_1): y = f(x) = x^4 + ax^2 + b$ và đồ thị hàm số $(C_2): y = g(x) = x^3 + mx^2 + nx + p$ như hình vẽ dưới. Gọi B, D là hai điểm cực tiểu của (C_1) và A, C lần lượt là điểm cực đại và điểm cực tiểu của (C_2) (A, C đối xứng nhau qua $U \in Oy$). Biết hoành độ của A, B bằng nhau và hoành độ của C, D bằng nhau. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để $AB \le 3$?



A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Phân tích: *dựa vào đồ thị ta có* $b = p$ *và* $m = 0$. *Khi đó:* $(C_2): y = x^3 + nx + b$

Ta cần tìm tung độ của điểm A *và* B *(theo* a*).*

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = \dfrac{-a}{2} \end{array}\right. \text{ và } g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{-n}{3}.$$

Theo đề bài ta có $a, n < 0$ và $\dfrac{-a}{2} = \dfrac{-n}{3} \Leftrightarrow n = \dfrac{3}{2}a$.

Khi đó:

$$y_B = f\left(-\sqrt{\frac{-a}{2}}\right) = b - \frac{a^2}{4};\ y_A = g\left(-\sqrt{\frac{-n}{3}}\right) = b - a\sqrt{\frac{-a}{2}}.$$

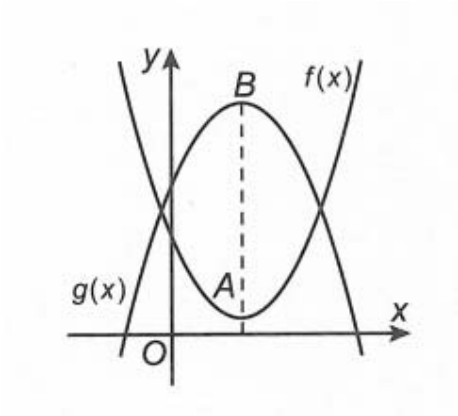
$$AB = \left|\frac{a^2}{4} + 2\frac{-a}{2}.\sqrt{\frac{-a}{2}}\right| = t^4 + 2t^3 \text{ trong đó } t = \sqrt{\frac{-a}{2}} > 0.$$

Xét $AB \le 3 \Leftrightarrow t^4 + 2t^3 \le 3 \Leftrightarrow t \le 1 \Rightarrow \sqrt{\dfrac{-a}{2}} \le 1 \Leftrightarrow a \ge -2$.

Do $a < 0$ nên $a \in \{-2; -1\}$.

Bài tập 10. Cho hai hàm đa thức $y = f(x), y = g(x)$ có đồ thị là hai đường cong như hình vẽ. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đúng một điểm cực trị là A, đồ thị hàm số $y = g(x)$ có đúng một điểm cực

trị là B (với $x_A = x_B$) và $AB = \frac{7}{2}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-10;10)$ để hàm số



$y = \left| \left| f(x) - g(x) \right| + m \right|$ có đúng bảy điểm cực trị?

A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi x_1, x_2 với $x_1 < x_2$ là hoành độ giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$ (dựa vào đồ thị đã cho, hai đồ thị chỉ có hai giao điểm đã kể trên, tức là

$$f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \\ x = x_2 \end{array} \right. .$$

Xét $h(x) = \left| f(x) - g(x) \right| + m$.

Ta có: $h'(x) = \left[f'(x) - g'(x) \right] . \frac{f(x) - g(x)}{\left| f(x) - g(x) \right|}$.

Cho $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_A = x_B$. Ta có bảng biến thiên của $h(x)$ như sau

x	$-\infty$		x_1		x_A		x_2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$\frac{7}{2}+m$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên của $h(x)$, yêu cầu bài toán trở thành $m < 0 < m + \frac{7}{2} \Leftrightarrow -\frac{7}{2} < m < 0$.

Do m nguyên và $m \in (-10;10)$ nên $m \in \{-3;-2;-1\}$.

Bài tập 11. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị $y = x^4 - 2m^2x^2 + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

A. $m = \pm 1$. **B.** $m = 0$. **C.** $m = \pm 2$. **D.** $m = 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $y' = 4x^3 - 4m^2x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m^2 \end{array}\right.$.

Hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi $m \neq 0$.

Khi đó tọa độ ba điểm cực trị là $A(0;1), B\left(m;-m^4+1\right), C\left(-m;-m^4+1\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \left(m;-m^4\right), \overrightarrow{AC} = \left(-m;-m^4\right)$, dễ thấy $AB = AC$.

Do đó tam giác ABC vuông cân tại A khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

$\Leftrightarrow -m^2 + m^8 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$ (do $m \neq 0$).

Bài tập 12. Giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + 3m$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có góc bằng $60°$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(\frac{5}{2};\frac{13}{5}\right)$. **B.** $\left(\frac{12}{5};\frac{5}{2}\right)$. **C.** $\left(2;\frac{11}{5}\right)$. **D.** $\left(\frac{11}{5};\frac{12}{5}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $y' = 4x^3 - 4(m-1)x$. Xét $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & \\ x^2 = m-1 & (2) \end{array}\right.$.

Hàm số có ba điểm cực trị khi $m > 1$.

Khi đó tọa độ ba điểm cực trị là $A(0;3m), B\left(\sqrt{m-1};5\text{m}-m^2-1\right)$ và $C\left(-\sqrt{m-1};5\text{m}-m^2-1\right)$.

Suy ra $AB^2 = AC^2 = (m-1)+(m-1)^4$; $BC = 2\sqrt{m-1}$.

Tam giác ABC là tam giác cân tại A, có một góc bằng $60°$ nên là tam giác đều

$\Leftrightarrow AB = BC \Leftrightarrow (m-1)+(m-1)^4 = 4(m-1) \Leftrightarrow m = 1+\sqrt[3]{3}$.

Bài tập 13. Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = 2x^4 - 4mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có một góc bằng $30°$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $y' = 8x^3 - 8mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = m \end{array}\right.$.

Hàm số có ba cực trị khi và chỉ khi $m > 0$.

Khi đó tọa độ ba điểm cực trị là $A(0;1), B\left(\sqrt{m};-2m^2+1\right), C\left(-\sqrt{m};-2m^2+1\right)$

$\Rightarrow AB^2 = AC^2 = m+4m^4$, $BC = 2\sqrt{m}$.

Do đó tam giác ABC cân tại A.

+ *Trường hợp 1:* $\widehat{BAC} = 30°$, ta có $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{2AB^2 - BC^2}{2AB^2} \Leftrightarrow \left(2-\sqrt{3}\right)AB^2 = BC^2$

$$\Leftrightarrow \left(2-\sqrt{3}\right)\left(m+4m^4\right) = 2m$$
$$\Leftrightarrow 4\left(2-\sqrt{3}\right)m^3 = \sqrt{3}$$

Phương trình này có đúng một nghiệm thực.

+ *Trường hợp 2:* $\widehat{ABC} = 30°$, khi đó

$BC = \sqrt{3}.AB \Leftrightarrow 3AB^2 = BC^2 \Leftrightarrow 3m+12m^4 = 4m \Leftrightarrow 12m^3 = 1$.

Phương trình này có đúng một nghiệm thực.

Bài tập 14. Cho đồ thị hàm số $(C): y = x^4 - 2\left(m^2+1\right)x^2 + m^4$. Gọi A, B, C là ba điểm cực trị của (C) và S_1, S_2 lần lượt là phần diện tích phía trên và phía dưới trục hoành của tam giác ABC. Có bao nhiêu giá trị của tham số m sao cho $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{1}{3}$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $y' = 4x^3 - 4\left(m^2+1\right)x$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = m^4 \\ x^2 = m^2+1 \Rightarrow y = -2m^2-1 \end{array}\right.$.

Hàm số luôn có ba điểm cực trị với mọi tham số m.

Gọi $A\left(0;m^4\right)$, $B\left(\sqrt{m^2+1};-2m^2-1\right)$, $C\left(-\sqrt{m^2+1};-2m^2-1\right)$ là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Ta có $OA = m^4$, $h = d\left(A;(BC)\right) = m^4+2m^2+1$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{S_{ABC}-S_1}{S_1} = 3 \Leftrightarrow \frac{S_{ABC}}{S_1} = 4 \Leftrightarrow \left(\frac{h}{OA}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{m^4+2m^2+1}{m^4} = 2$$

$\Leftrightarrow m^4 - 2m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

Vậy có hai giá trị của tham số thỏa mãn đề bài.

Lưu ý: *Do hai tam giác đồng dạng nên tỉ lệ diện tích bằng bình phương tỉ lệ đồng dạng, với tỉ lệ đồng dạng là tỉ lệ đường cao.*

Bài tập 15 . Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-(m+1)x^2+m(m+2)x-\frac{m^3}{3}$ có đồ thị (C) với m là tham số. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị (C) và parabol $(P): y=x^2-2mx+8$ có chung một điểm cực trị. Tổng bình phương tất cả các phần tử của S là

A. 8. **B.** 10. **C.** 16. **D.** 18.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

+ (P) có điểm cực trị là $M(m;-m^2+8)$.

+ $f'(x)=x^2-2(m+1)x+m(m+2)$

$$\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\Rightarrow A(m;m^2)\\x=m+2\Rightarrow B(m+2;y_B)\neq M\end{array}\right.$$

Vì hai đồ thị hàm số có chung một điểm cực trị nên $A\equiv M\Leftrightarrow m^2=-m^2+8\Leftrightarrow m=\pm 2$.

Bài tập 16. Biết hai hàm số $f(x)=x^3+ax^2+2x-1$ và $g(x)=-x^3+bx^2-3x+1$ có chung ít nhất một điểm cực trị. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|a|+|b|$ là

A. $\sqrt{30}$. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** $3+\sqrt{6}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Giả sử điểm cực trị chung của $f(x)$ và $g(x)$ là $x_0\neq 0$, suy ra

$$\begin{cases}f'(x_0)=0\\g'(x_0)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3{x_0}^2+2ax_0+2=0\\-3{x_0}^2+2bx_0-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\left(-3x_0-\frac{2}{x_0}\right)\\b=\frac{1}{2}\left(3x_0+\frac{3}{x_0}\right)\end{cases}.$$

Khi đó $P=|a|+|b|=\frac{1}{2}\left(\left|3x_0+\frac{2}{x_0}\right|+3\left|x_0+\frac{1}{x_0}\right|\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(6|x_0|+\frac{5}{|x_0|}\right)\overset{AM-GM}{\geq}\frac{1}{2}.2\sqrt{6|x_0|.\frac{5}{|x_0|}}=\sqrt{30}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $6|x_0|=\frac{5}{|x_0|}\Leftrightarrow|x_0|=\frac{\sqrt{30}}{6}$.

Khi đó $|a|=\frac{9\sqrt{30}}{20}$ và $|b|=\frac{11\sqrt{30}}{20}$.

Chú ý: *Khi A và B cùng dấu thì $|A+B|=|A|+|B|$. Hiển nhiên x_0 và $\frac{1}{x_0}$ cùng dấu.*

Bất đẳng thức $AM-GM$:

$$\frac{x+y}{2}\geq 2\sqrt{xy},\forall x,y\geq 0$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=y$.

Dạng 6. Cực trị hàm phân thức

1. Phương pháp

Xét $y=\frac{u(x)}{v(x)}$. Ta có $y'=\frac{u'(x).v(x)-v'(x).u(x)}{v^2(x)}$.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm cực trị. Khi đó $y'(x_0)=0$.

Suy ra $u'(x_0).v(x_0)-v'(x_0).u(x_0)=0\Rightarrow y_0=\frac{u(x_0)}{v(x_0)}=\frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$.

+ Đường cong qua các điểm cực trị (nếu có) của đồ thị hàm số $y=\frac{u(x)}{v(x)}$ là $y=\frac{u'(x)}{v'(x)}$.

+ Nói riêng, đường thẳng qua các điểm cực trị (nếu có) của đồ thị hàm số $y=\frac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ là $y=\frac{2ax+b}{d}$.

Chú ý:

$$\left(\frac{ax^2+bx+c}{dx+e}\right)'=\frac{adx^2+2aex+\begin{vmatrix}b & c\\ d & e\end{vmatrix}}{(dx+e)^2}.\left(\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}\right)'=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}x^2+2\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}x+\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}}{(a_2x^2+b_2x+c_2)^2}.$$

2. Bài tập

Bài tập 1. Giá trị của m để hàm số $y=\frac{x^2+mx+3m-1}{x}$ có cực trị là

A. $m>\frac{1}{3}$. **B.** $m\ge\frac{1}{3}$. **C.** $m<\frac{1}{3}$. **D.** $m\le\frac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Điều kiện $x\ne 0$. Ta có $y'=\frac{x^2-3m+1}{x^2}$.

Hàm số có cực trị khi $x^2-3m+1=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$\Leftrightarrow 3m-1>0\Leftrightarrow m>\frac{1}{3}$.

Bài tập 2. Giá trị của m để hàm số $y=\frac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực đại tại $x=1$ là

A. $m=2$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=1$.

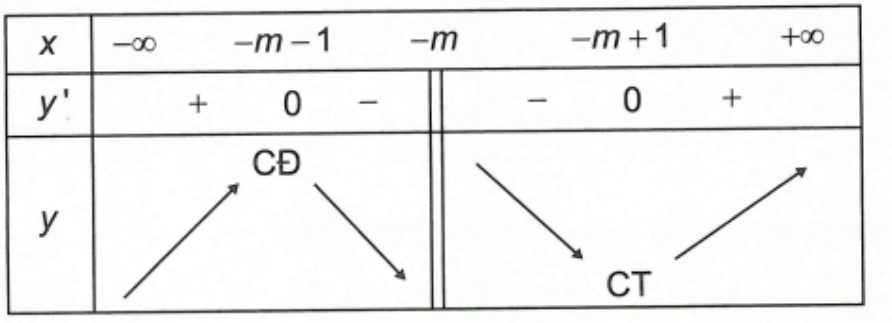
Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điều kiện: $x\ne -m$.

Ta có $y'=\frac{x^2+2mx+m^2-1}{(x+m)^2}$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-m-1\\ x=-m+1\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đạt cực đại tại $x=1 \Leftrightarrow -m-1=1 \Leftrightarrow m=-2$.

Bài tập 3. Cho hàm số $y=x+p+\dfrac{q}{x+1}$ (với p, q là tham số thực). Biết hàm số đạt cực đại tại $x=-2$, giá trị cực đại bằng -2. Tổng $S=p+2q$ bằng

A. $S=2$. **B.** $S=0$. **C.** $S=1$. **D.** $S=3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Điều kiện: $x\neq -1$.

Ta có: $y'=1-\dfrac{q}{(x+1)^2}$.

Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=-2$, giá trị cực đại bằng -2 nên

$\begin{cases}1-q=0\\-2+p-q=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}q=1\\p=1\end{cases}$.

Thử lại $p=q=1$ thỏa mãn nên $S=1+2=3$.

Bài tập 4. Giá trị của m để khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+mx}{1-x}$ bằng 10 là

A. $m=10$. **B.** $m=8$. **C.** $m=4$. **D.** $m=2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điều kiện: $x\neq 1$.

Ta có $y'=\dfrac{-x^2+2x+m}{(1-x)^2}$.

Hàm số có hai cực trị khi $-x^2+2x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác

$\Leftrightarrow\begin{cases}-1+2+m\neq 0\\\Delta'=1+m>0\end{cases}\Leftrightarrow m>-1$.

Khi đó theo định lý Vi-ét ta có $\begin{cases}x_1+x_2=2\\x_1.x_2=-m\end{cases}$.

Đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị là $(d): y=-2x-m$.

Tọa độ hai điểm cực trị của đồ thị là $A(x_1;-2x_1-m)$, $B(x_2;-2x_2-m)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;2x_1-2x_2)$.

Theo yêu cầu của đề bài ta có

$(x_1-x_2)^2+4(x_1-x_2)^2=100 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1.x_2=20$

$\Leftrightarrow 4+4m=20$

$\Leftrightarrow m=4$.

Bài tập 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y=mx+\dfrac{1}{x}$ có hai điểm cực trị và tất cả các điểm cực trị đều thuộc hình tròn tâm O, bán kính 6?

A. 10. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 7.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Điều kiện: $x\neq 0$. Ta có: $y'=m-\dfrac{1}{x^2}$.

Hàm số có hai điểm cực trị khi $m>0$. Khi đó $y'=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{\sqrt{m}} \\ x=-\dfrac{1}{\sqrt{m}} \end{cases}$.

Tọa độ hai điểm cực trị của đồ thị là $A\left(\dfrac{1}{\sqrt{m}};2\sqrt{m}\right)$, $B\left(-\dfrac{1}{\sqrt{m}};-2\sqrt{m}\right)$.

Theo đề bài ta có $OA^2=OB^2=\dfrac{1}{m}+4m\leq 36 \Leftrightarrow 4m^2-36m+1\leq 0$.

Do $m\in\mathbb{Z}$, $m>0$ nên $m\in\{1;2;3...;8\}$.

Vậy có 8 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Bài tập 6. Có bao nhiêu giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-|m|x+4}{x-|m|}$ có hai điểm cực trị A, B và ba điểm A, B, $C(4;2)$ phân biệt thẳng hàng?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Điều kiện: $x\neq |m|$.

Ta có $y'=\dfrac{x^2-2|m|x+m^2-4}{(x-|m|)^2}=\dfrac{(x-|m|)^2-4}{(x-|m|)^2}$.

Cho $y'=0\Leftrightarrow \left(x-\left|m\right|\right)^2-4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\left|m\right|+2\Rightarrow y=\left|m\right|+4 \\ x=\left|m\right|-2\Rightarrow y=\left|m\right|-4 \end{array}\right.$.

Do $\left|m\right|+2\neq \left|m\right|-2$, $\forall m$ nên $y'=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt.

Do đó đồ thị hàm số luôn có hai điểm cực trị. Khi đó đường thẳng qua hai điểm cực trị là $\left(AB\right):y=2x-\left|m\right|$. Ba điểm A, B, $C\left(4;2\right)$ phân biệt thẳng hàng khi và chỉ khi $\left\{\begin{array}{l} C\left(4;2\right)\in \left(AB\right) \\ \left|m\right|+2\neq 4 \\ \left|m\right|-2\neq 4 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left|m\right|=6 \\ \left|m\right|\neq 2 \\ \left|m\right|\neq 6 \end{array}\right.$.

Suy ra không có giá trị nào của m thỏa mãn đề bài.

Bài tập 7. Cho hàm số $\left(C\right):y=\dfrac{x^2+2\left(m+1\right)x+m^2+4m}{x+2}$. Có bao nhiêu giá trị thực của m để đồ thị hàm số $\left(C\right)$ có điểm cực đại, cực tiểu A, B sao cho tam giác OAB vuông?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Điều kiện: $x\neq -2$. Ta có $y'=\dfrac{x^2+4x+4-m^2}{\left(x+2\right)^2}$.

Ta có $x^2+4x+4-m^2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m-2 \\ x=-m-2 \end{array}\right.$.

Hàm số có điểm cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi $m\neq 0$.

Tọa độ các điểm cực trị của đồ thị là

$A\left(-m-2;-2\right)$, $B\left(m-2;4m-2\right)\Rightarrow \overrightarrow{AB}=\left(2m;4m\right)$

Dễ thấy $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AB}\neq \vec{0}$.

Trường hợp 1: Tam giác OAB vuông tại O

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0\Leftrightarrow -m^2-8m+8=0\Leftrightarrow m=-4\pm 2\sqrt{6}$ (thỏa mãn)

Trường hợp 2: Tam giác OAB vuông tại $A\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AB}=0$

$\Leftrightarrow 2m\left(-m-2\right)-2.4m=0\Leftrightarrow -m-2-4=0\Leftrightarrow m=-6$ (thỏa mãn)

Trường hợp 3: Tam giác OAB vuông tại $B\Leftrightarrow \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{AB}=0$

$\Leftrightarrow 2m\left(m-2\right)+\left(4m-2\right)4m=0\Leftrightarrow m-2+2\left(4m-2\right)=0\Leftrightarrow m=\dfrac{2}{3}$ (thỏa mãn)

Vậy có bốn giá trị thực của m thỏa mãn đề bài.

Bài tập 8. Cho hàm số $\left(C\right):y=\dfrac{x^2-mx-1}{x^2+1}$ với m là tham số. Giá trị thực của m để đồ thị hàm số $\left(C\right)$ có hai điểm cực trị A, B sao cho đường thẳng $\left(AB\right)$ đi qua điểm $M\left(-1;2\right)$ là

A. $m=8$. **B.** $m=6$. **C.** $m=4$. **D.** $m=2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=\dfrac{mx^2+4x-m}{\left(x^2+1\right)^2}$.

Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi $mx^2+4x-m=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ \Delta'=4+m^2>0\end{cases}\Leftrightarrow m\neq 0$.

Đường cong qua hai điểm cực trị có phương trình là $y=\dfrac{2x-m}{2x}$.

Ta viết phương trình đường cong dưới dạng $y=\dfrac{2x-m+k\left(mx^2+4x-m\right)}{2x}$.

Ta chọn k sao cho nghiệm của mẫu là nghiệm của tử để có thể rút gọn thành hàm số bậc nhất. Vì $x=0$ là nghiệm của mẫu, nên thế $x=0$ vào tử ta được $-m+k\left(-m\right)=0\Rightarrow k=-1$.

Với $k=-1$: $y=\dfrac{2x-m-mx^2-4x+m}{2x}=-\dfrac{m}{2}x-1\Rightarrow\left(AB\right):y=-\dfrac{m}{2}x-1$.

Điểm $M\left(-1;2\right)\in\left(AB\right)\Rightarrow 2=\dfrac{m}{2}-1\Leftrightarrow m=6$ (thỏa mãn).

Dạng 7: Cực trị của hàm chứa căn

Bài tập 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in\left[-10;10\right]$ để hàm số $y=-2x+2+m\sqrt{x^2-4x+5}$ có cực tiểu?

A. 7. **B.** 16. **C.** 8. **D.** 14.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y'=-2+m.\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$ và $y''=\dfrac{m}{\sqrt{\left(x^2-4x+5\right)^3}}$.

$y'=0\Leftrightarrow 2\sqrt{\left(x-2\right)^2+1}=m\left(x-2\right)\Leftrightarrow\begin{cases}m\left(x-2\right)>0\\ \left(m^2-4\right)\left(x-2\right)^2=4\quad(1)\end{cases}$.

Hàm số có cực tiểu khi và chỉ khi (1) có nghiệm $\Rightarrow m^2-4>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>2\\ m<-2\end{array}\right.$.

Khi đó, (1) có hai nghiệm phân biệt là $x_{1;2}=2\pm\dfrac{2}{\sqrt{m^2-4}}$.

- Với $m>2$, thì $x_1=2+\dfrac{2}{\sqrt{m^2-4}}$ thỏa mãn $y'\left(x_1\right)=0$ và $y''\left(x_1\right)>0$, suy ra x_1 là điểm cực tiểu, nhận $m>2$.

Chú ý: *Để làm trắc nghiệm ta có thể làm như sau: Hàm số đạt cực tiểu khi hệ sau có nghiệm:*

$\begin{cases}y'=0\\ y''>0\end{cases}$

- Với $m<-2$, thì $x_2=2-\dfrac{2}{\sqrt{m^2-4}}$ thỏa mãn $y'(x_2)=0$ và $y''(x_2)<0$, suy ra x_2 là điểm cực đại, loại, do $m<-2$.

Do m nguyên, $m>2$ và $m\in[-10;10]$ nên $m\in\{3;4;...;9;10\}$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m(x-2)>0\\(m^2-4)(x-2)^2=4\\m>0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}m>0,x>2\\m^2-4>0\end{cases}\Rightarrow m>2$$

Bài tập 2. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=x+m.\sqrt{x^2+1}$ có điểm cực trị và tất cả các điểm cực trị thuộc hình tròn tâm O, bán kính $\dfrac{\sqrt{82}}{3}$?

A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=1+m.\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Cho $y'=0\Leftrightarrow m=-\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$, $(x\neq 0)$.

Xét $g(x)=-\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}\Rightarrow g'(x)=\dfrac{1}{x^2.\sqrt{x^2+1}}>0$, $\forall x\neq 0$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-1$; $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=1$; $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to0^-}g(x)=+\infty$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$	$+$		$+$		
$g(x)$	1	$\nearrow$ $+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$ -1	

Hàm số có cực trị khi $m\in\mathbb{R}\setminus[-1;1]$.

Gọi $A(a;b)$ là điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Khi đó $m=-\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{a}$ và $b=a-\dfrac{a^2+1}{a}=-\dfrac{1}{a}\Rightarrow A\left(a;-\dfrac{1}{a}\right)$.

Ta có: $OA=\sqrt{a^2+\dfrac{1}{a^2}}\le\dfrac{\sqrt{82}}{3}\Rightarrow\dfrac{1}{9}\le a^2\le 9$.

Vậy $|m|=\left|\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}\right|=\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}\in\left[\frac{\sqrt{10}}{3};\sqrt{10}\right]$.

Kết hợp với các điều kiện $m\in\mathbb{Z}$, $m\in\mathbb{R}\setminus[-1;1]$, ta được $m\in\{-3;-2;2;3\}$.

Bài tập 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=2x+\frac{mx}{\sqrt{x^2+2}}$ có điểm cực trị và tất cả các điểm cực trị thuộc hình tròn tâm O, bán kính $\sqrt{68}$?

A. 16. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y=2x+\frac{mx}{\sqrt{x^2+2}}\Rightarrow y'=2+\frac{2m}{\left(\sqrt{x^2+2}\right)^3}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

$y'=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+2}=-\sqrt[3]{m}$.

Hàm số có cực trị khi và chỉ khi $-\sqrt[3]{m}>\sqrt{2}\Leftrightarrow m<-2\sqrt{2}$.

Chú ý: *Hàm số không thể đạt cực trị tại điểm* $x=0$.

Gọi $A(a;b)$ $(a\neq 0)$ là điểm cực trị của đồ thị hàm số, khi đó:

$\sqrt{a^2+2}=-\sqrt[3]{m}$ và $b=2a+\frac{ma}{\sqrt{a^2+2}}=2a+\frac{ma}{-\sqrt[3]{m}}=a\left(2-\sqrt[3]{m^2}\right)=a\left(-a^2\right)=-a^3$.

Theo đề bài ta có $OA\le\sqrt{68}\Leftrightarrow a^2+b^2\le\sqrt{68}\Leftrightarrow a^2+a^6\le\sqrt{68}\Leftrightarrow a^2\le 4$.

Ta có:

$0<a^2\le 4\Leftrightarrow\sqrt{2}<\sqrt{a^2+2}\le\sqrt{6}\Leftrightarrow\sqrt{2}<-\sqrt[3]{m}\le\sqrt{6}\Leftrightarrow-6\sqrt{6}<m\le-2\sqrt{2}$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ và $-6\sqrt{6}<m\le-2\sqrt{2}$ nên $m\in\{-14;-13;...;-4;-3\}$.

Vậy có 12 giá trị của tham số m thỏa mãn đề bài.

Dạng 8: Cực trị của hàm bậc cao và hàm lượng giác

Bài tập 1. Biết rằng tồn tại các số thực a, b, c sao cho hàm số $f(x)=x^6+ax^4+bx^2+3x+c$ đạt cực trị tại điểm $x=2$. Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=-2$ là

A. 0. **B.** -3. **C.** 3. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $f'(x)=6x^5+4ax^3+2bx+3$.

Hàm số đạt cực trị tại điểm $x=2$ nên $f'(2)=0\Rightarrow 6.2^5+4.a.2^3+4b+3=0$.

Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=-2$ là

$f'(-2)=0 \Rightarrow -6.2^5-4.a.2^3-4b+3=3-\left(6.2^5+4.a.2^3+4b\right)=6$.

Bài tập 2. Biết rằng tồn tại các số thực a, b, c sao cho hàm số $f(x)=a.\sin^2 x-b.\cos 3x+x+c$ đạt cực trị tại điểm $x=-\dfrac{\pi}{6}$. Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=\dfrac{\pi}{6}$ là

A. 0. **B.** -1. **C.** 2. **D.** -2.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $f'(x)=a.\sin 2x+3b.\sin 3x+1$.

Hàm số đạt cực trị tại điểm $x=-\dfrac{\pi}{6}$, suy ra $f'\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=0 \Rightarrow -a.\sin\dfrac{\pi}{3}-3b.\sin\dfrac{\pi}{2}+1=0$.

Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=\dfrac{\pi}{6}$ là

$f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=a.\sin\dfrac{\pi}{3}+3b.\sin\dfrac{\pi}{2}+1=2$.

Bài tập 3. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^8+(m-4)x^5-\left(m^2-16\right)x^4+1$ đạt cực tiểu tại điểm $x=0$?

A. 8. **B.** Vô số. **C.** 7. **D.** 9.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $y'=8x^7+5(m-4)x^4-4\left(m^2-16\right)x^3=x^3\left[8x^4+5(m-4)x-4\left(m^2-16\right)\right]=x^3.g(x)$

- Với $g(x)=8x^4+5(m-4)x-4\left(m^2-16\right)$. Ta xét các trường hợp sau:

  - Nếu $m^2-16=0 \Leftrightarrow m=\pm 4$.

  + Khi $m=4$ ta có $y'=8x^7 \Rightarrow x=0$ là điểm cực tiểu.

  + Khi $m=-4$ ta có $y'=x^4\left(8x^3-40\right) \Rightarrow x=0$ không là điểm cực tiểu.

  - Nếu $m^2-16\neq 0 \Leftrightarrow m\neq \pm 4 \Rightarrow g(0)\neq 0$.

  Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=0$

  $\Leftrightarrow$ Đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua điểm $x=0$

  $\Leftrightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)>0\\ \lim\limits_{x\to 0^+} g(x)>0\end{cases} \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} g(x)>0$

  $\Leftrightarrow -4\left(m^2-16\right)>0 \Leftrightarrow m^2-16<0 \Leftrightarrow -4<m<4 \Rightarrow m\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$.

  Tổng hợp các trường hợp ta có: $m\in\{-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$.

  Vậy có tám giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu.

Bài tập 4. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=x^8+(m-2)x^5-(m^2-4)x^4+1$ đạt cực tiểu tại $x=0$?

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** Vô số.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $y'=8x^7+5(m-2)x^4-4(m^2-4)x^3=x^3.h(x)$ với $h(x)=8x^4+5(m-2)x-4(m^2-4)$.

Ta xét các trường hợp sau:

- Nếu $m^2-4=0\Leftrightarrow m=\pm 2$.
  - Khi $m=2$ thì $y'=8x^7\Rightarrow x=0$ là điểm cực tiểu nên $m=2$ thỏa mãn.
  - Khi $m=-2$ thì $y'=x^4(8x^3-20)\Rightarrow x=0$ không là điểm cực tiểu.
- Nếu $m^2-4\neq 0\Leftrightarrow m\neq\pm 2\Rightarrow h(0)\neq 0$.

Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=0$ khi và chỉ khi giá trị đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua điểm $x=0$.

Do đó $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-}h(x)>0\\ \lim\limits_{x\to 0^+}h(x)>0\end{cases}\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 0}h(x)>0$

$\Rightarrow -4(m^2-4)>0\Leftrightarrow -2<m<2\Rightarrow m\in\{-1;0;1\}$.

Tổng hợp các trường hợp ta có $m\in\{-1;0;1;2\}$.

Vậy có bốn giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu.

Dạng 9:Tìm cực trị của hàm số chứa trị tuyệt đối

1. Phương pháp

Bước 1. Tập xác định và tính đạo hàm

Đạo hàm hàm chứa trị tuyệt đối với công thức:

$$(|u|)'=\left(\sqrt{u^2}\right)'=\frac{u'.u}{|u|}.$$

Chú ý: $|u|=\begin{cases}u \text{ khi } u\geq 0\\ -u \text{ khi } u<0.\end{cases}$

Bước 2. Giải phương trình đạo hàm bằng 0 và tìm những điểm làm cho đạo hàm không xác định (nhưng hàm số xác định tại những điểm đó).

Bước 3. Lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu đạo hàm.

2. Bài tập:

Bài tập 1. Số điểm cực đại của hàm số $f(x)=x-2\sqrt{x^2-2|x|+2}$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f'(x)=1-2\dfrac{x-\dfrac{x}{|x|}}{\sqrt{x^2-2|x|+2}}$

Hàm số không có đạo hàm tại điểm $x=0$.

- Khi $x<0$ ta có

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+2x+2}=2x+2\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -1\\3x^2+6x+2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{-3+\sqrt{3}}{3}=x_1.$$

- Khi $x>0$ ta có

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2-2x+2}=2x-2\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\3x^2-6x+2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{3+\sqrt{3}}{3}=x_2.$$

Bảng xét dấu y':

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	0	$-$	0

Vậy hàm số có hai điểm cực đại.

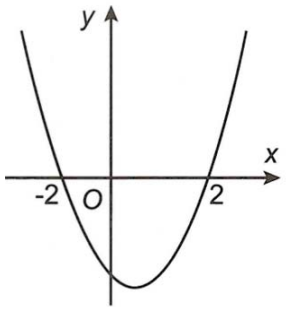
Bài tập 2. Số điểm cực trị của hàm số $y=(x+1)|x-2|$ là

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

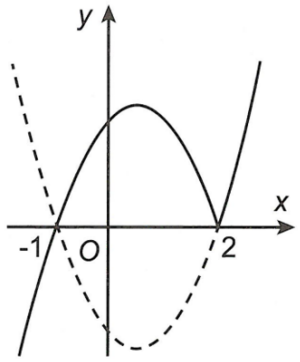
Ta có đồ thị của hàm số $y=(x+1)(x-2)$ như sau.



Vì $y=(x+1)|x-2|=\begin{cases}(x+1)(x-2),\ x\geq 2\\-(x+1)(x-2),\ x<2\end{cases}$

nên để vẽ đồ thị hàm số đã cho, ta giữ nguyên đồ thị $y=(x+1)(x-2)$ khi $x\geq 2$ và lấy đối xứng qua trục hoành phần đồ thị $y=(x+1)(x-2)$ ứng với $x<2$.

Dễ thấy hàm số $y=(x+1)|x-2|$ có hai điểm cực trị (xem hình vẽ dưới đây):



Dạng 10: Tìm cực trị của hàm số trị tuyệt đối nếu biết bảng biến thiên hoặc đồ thị

1. Phương pháp

Khi cho trước bảng biến thiên của hàm số, tìm cực trị của hàm số chứa giá trị tuyệt đối:

Ta dùng các phép biến đổi đồ thị chứa giá trị tuyệt đối để lập bảng biến thiên hoặc bảng xét dấu.

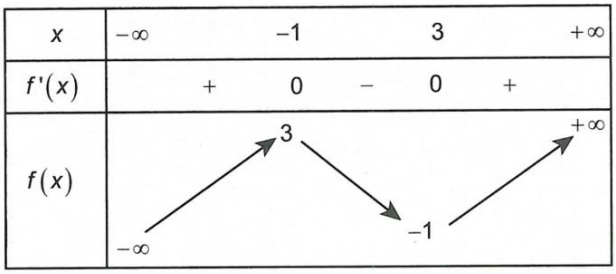
Chú ý: Cách nhẩm nhanh số điểm cực trị của hàm số.

Bước 1. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x\right)$.

Bước 2. Tìm số nghiệm bội lẻ của phương trình $f\left(x\right)=0$

Bước 3. Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ là tổng số điểm của cả hai bước trên.

Ví dụ: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

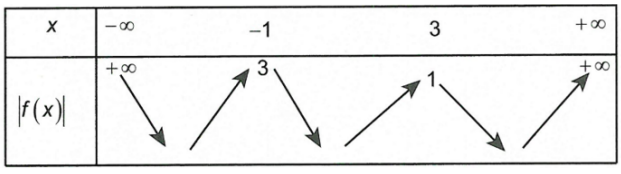


Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$.

Hướng dẫn giải

Dễ thấy trục hoành cắt đồ thị $y=f\left(x\right)$ tại ba điểm phân biệt.

Bảng biến thiên của $y=\left|f\left(x\right)\right|$:



Suy ra hàm số có 5 điểm cực trị.

Nhẩm nhanh số cực trị

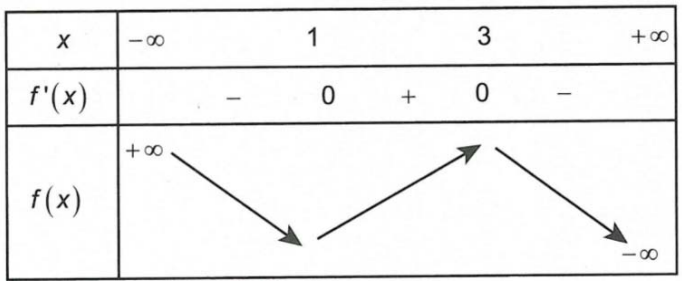
Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $y=f(x)$ có hai điểm cực trị.

Dễ thấy trục hoành cắt đồ thị $y=f(x)$ tại ba điểm phân biệt. Số nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x)=0$ là 3.

Suy ra hàm số có năm điểm cực trị.

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:



Số cực trị của hàm số $y=f(|x|)$ là

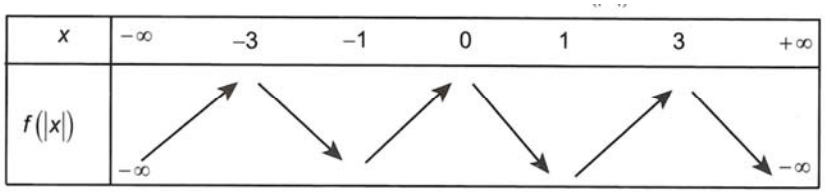
A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Khi $x\geq 0$ thì $f(|x|)=f(x)$ nên bảng biến thiên của $y=f(x)$ trên $[0;+\infty)$ cũng chính là bảng biến thiên của $y=f(|x|)$ trên $[0;+\infty)$.

Do đồ thị $y=f(|x|)$ nhận trục tung làm trục đối xứng nên ta có bảng biến thiên của $y=f(|x|)$ trên $\mathbb{R}$ như sau:



Suy ra hàm số có 5 điểm cực trị.

Bài tập 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây:

Chú ý: *Có thể nhẩm nhanh số điểm cực trị như sau:*

Số điểm cực trị của hàm $y=f(|x|)$ *bằng hai lần số điểm cực trị dương của hàm số* $y=f(x)$ *rồi cộng thêm 1.*

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	3	↘	-4	↗	$+\infty$

Biết $f(0)+f(0,5)\le 0$. Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f\left(|x|\right)\right|$ là

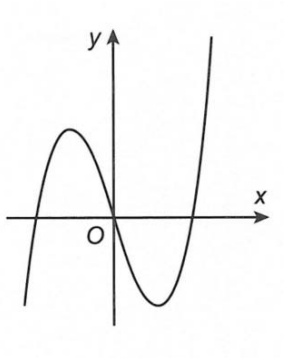
A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Hàm số đã cho đồng biến trên $(-1;1)$ nên $f(0)<f(0,5)$.

Bài tập 3. Cho hàm số $f(x)=x\left(x^2-3\right)$ có đồ thị như hình vẽ



Gọi số điểm cực trị của hàm số $g(x)=x\left(x+\sqrt{3}\right)\left|x-\sqrt{3}\right|$ và $h(x)=\left(x+\sqrt{3}\right)\left|x^2-x\sqrt{3}\right|$ lần lượt là m, n. Giá trị của $m+n$ là

A. 7. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

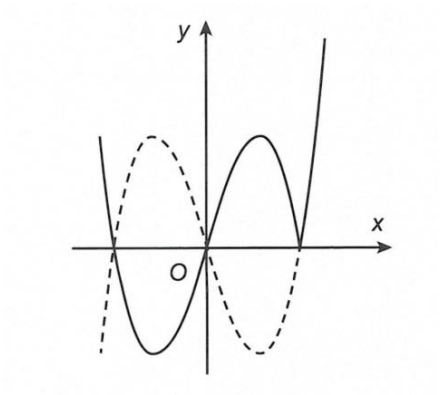
Hướng dẫn giải

Chọn A.

+) Xét $g(x)=x\left(x+\sqrt{3}\right)\left|x-\sqrt{3}\right|=\begin{cases}x(x^2-3),\ x\ge\sqrt{3}\\-x(x^2-3),\ x<\sqrt{3}\end{cases}$, suy ra đồ thị của $g(x)$ gồm hai phần được suy ra từ đồ thị ban đầu như sau:

+ Phần 1: là đồ thị hàm $f(x)$ tương ứng với $x\ge\sqrt{3}$.

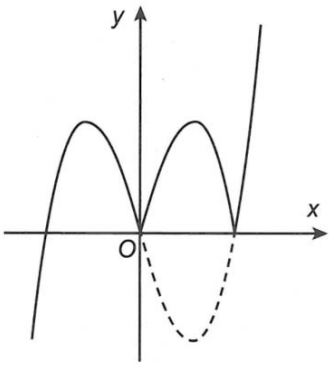
+ Phần 2: là phần đối xứng với phần đồ thị hàm $f(x)$ qua trục Ox khi $x<\sqrt{3}$. Đồ thị hàm số $g(x)$ là đường nét liền ở hình dưới đây.



Từ đồ thị hàm số $g(x)$, ta có số điểm cực trị là 3 hay $m=3$.

+) Xét $h(x)=\left(x+\sqrt{3}\right)\left|x^2-x\sqrt{3}\right|=\begin{cases}x(x^2-3),\ x\in\left(-\infty;\sqrt{3}\right]\cup\left[0;+\infty\right)\\-x(x^2-3),x\in\left(0;\sqrt{3}\right).\end{cases}$

Suy ra đồ thị của $h(x)$ gồm 2 phần được suy ra từ đồ thị ban đầu như sau:



+ Phần 1: đồ thị hàm $f(x)$ ứng với $x\ge\sqrt{3}$ và với $x\le 0$.

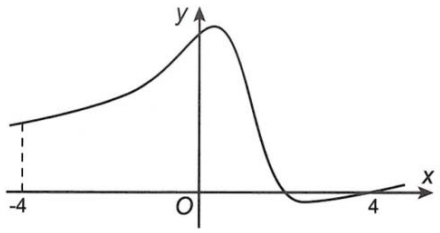
+ Phần 2: là phần đối xứng với phần đồ thị hàm $f(x)$ khi $0<x<\sqrt{3}$.

Đồ thị hàm số $h(x)$ là đường nét liền ở hình dưới đây.

Từ đồ thị hàm số $h(x)$, ta có số điểm cực trị là 4 hay $n=4$.

Vậy $m+n=3+4=7$.

Bài tập 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



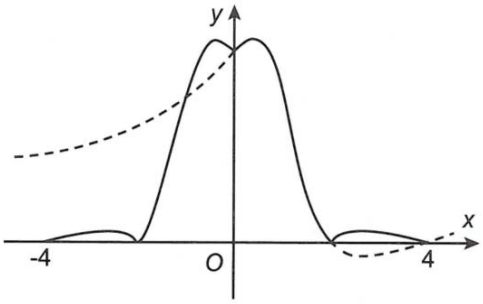
Số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f\left(|x|\right)\right|$ trên $(-4;4)$ là

A. 5. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có đồ thị $y=\left|f\left(|x|\right)\right|$ như sau:



Vậy số điểm cực trị của hàm số $y=\left|f\left(|x|\right)\right|$ trên $(-4;4)$ là 7.

Chú ý:

Đề bài hỏi số điểm cực trị trong khoảng $(-4;4)$ nên các điểm $x=\pm 4$ không là điểm cực trị.

Dạng 11: Một số bài toán sử dụng phép dịch chuyển đồ thị

1. Phương pháp

Cho đồ thị hàm số $(C):y=f(x)$

- Đồ thị hàm số $(C_1):y=f(x-a)$ có được bằng cách dịch chuyển đồ thị hàm số (C) qua bên phải a đơn vị nếu $a>0$ và dịch qua trái a đơn vị nếu $a<0$.
- Đồ thị hàm số $(C_2):y=f(x)+b$ có được bằng cách dịch chuyển đồ thị hàm số (C) lên trên b đơn vị nếu $b>0$ và dịch xuống dưới b đơn vị nếu $b<0$.

Chú ý : Khi tịnh tiến đồ thị lên – xuống, trái – phải thì số điểm cực trị của hàm số (C), (C_1), (C_2) là bằng nhau.

Chú ý : Số điểm cực trị của các hàm số sau là bằng nhau:

$y=m\left|f\left(|x+p|+q\right)+t\right|+n$ (1);

$y = m\left|f\left(\left|x+p\right|+q\right)+t\right|$ (2);

$y = \left|f\left(\left|x+p\right|+q\right)+t\right|$ (3);

$y = \left|f\left(\left|x\right|+q\right)+t\right|$ (4);

Từ (1) qua (2): dịch chuyển lên xuống không làm thay đổi số điểm cực trị.

Từ (2) qua (3): phóng to và thu nhỏ không làm thay đổi số điểm cực trị.

Từ (3) qua (4): dịch trái phải không làm thay đổi số điểm cực trị.

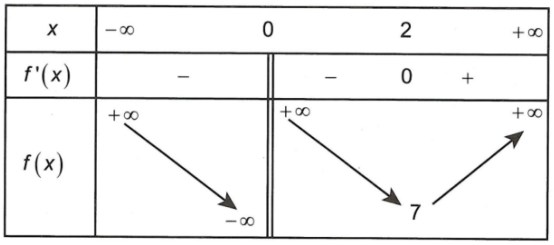
Để tìm số điểm cực trị của hàm số, ta có thể làm như sau:

Bước 1. Tìm hàm số có cùng số điểm cực trị với hàm ban đầu.

Bước 2. Dựa vào đồ thị, bảng biến thiên, bảng xét dấu đạo hàm của đề bài mà suy ra số điểm cực trị của hàm tìm được ở bước 1.

2.Bài tập:

Bài tập 1. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.



Số điểm cực trị của hàm số $y = \left|f\left(x+3\right)-9\right|$ là

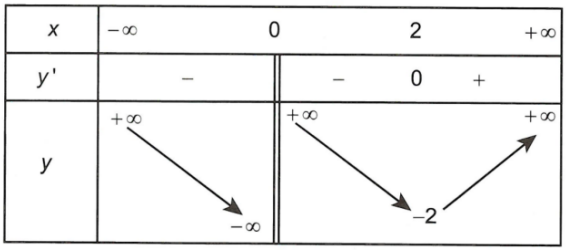
A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

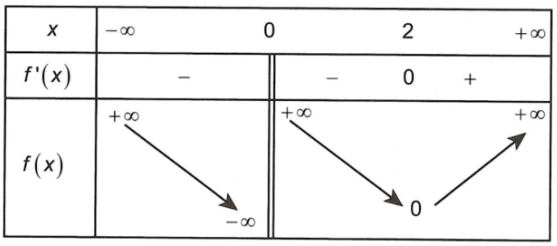
Số điểm cực trị của các hàm số sau đây là như nhau:

$y = \left|f\left(x+3\right)-9\right|$; $y = \left|f\left(x\right)-9\right|$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f\left(x\right)-9$ là



Suy ra số điểm cực trị của hàm số $y = \left|f\left(x\right)-9\right|$ là 4.

Bài tập 2. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và liên tục trên từng khoảng xác định, có bảng biến thiên như hình vẽ.



Đồ thị hàm số $y=2\left|f(x-1)-1\right|+1$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

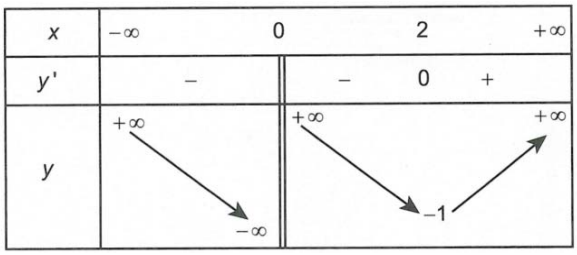
Hướng dẫn giải

Chọn B.

Số điểm cực trị của các hàm số sau đây là như nhau:

$y=2\left|f(x-1)-1\right|+1;\ y=2\left|f(x-1)-1\right|;\ y=\left|f(x-1)-1\right|;\ y=\left|f(x)-1\right|$

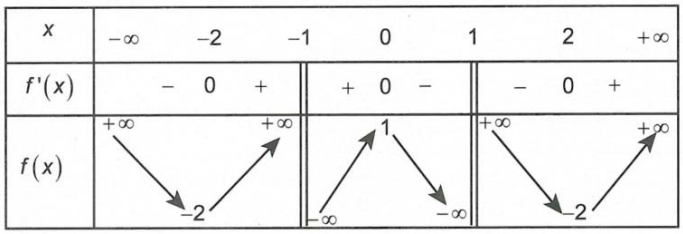
Hàm số $y=f\left(x\right)-1$ có bảng biến thiên như hình vẽ:



Suy ra số điểm cực trị của hàm $y=\left|f(x)-1\right|$ là 4.

Vậy hàm số $y=2\left|f(x-1)-1\right|+1$ có 4 điểm cực trị.

Bài tập 3. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$ và liên tục trên từng khoảng xác định, có bảng biến thiên như hình vẽ.



Đồ thị hàm số $y=\left|2f\left(x+2\right)-1\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5. **B.** 9, **C.** 7. **D.** 6.

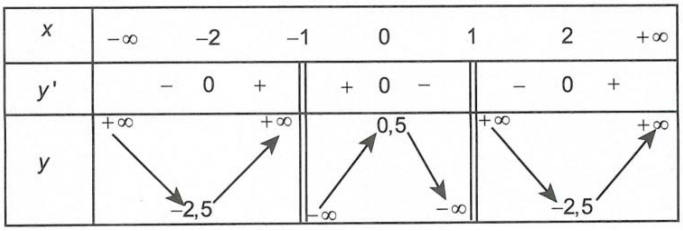
Hướng dẫn giải

Chọn B.

Số điểm cực trị của các hàm số sau đây là như nhau:

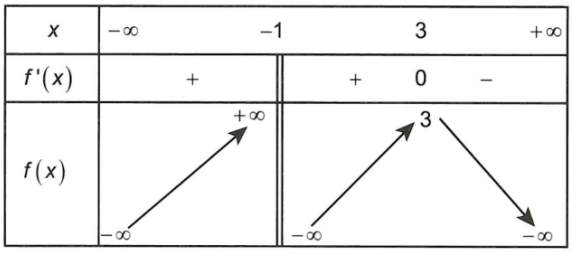
$y=\left|2f\left(x+2\right)-1\right|;\ y=\left|f\left(x+2\right)-\frac{1}{2}\right|;\ y=\left|f\left(x\right)-\frac{1}{2}\right|$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)-\dfrac{1}{2}$ là



Từ đó suy ra số cực trị của hàm số $y=\left|f\left(x\right)-\dfrac{1}{2}\right|$ là 9 nên số cực trị của hàm số $y=\left|2f\left(x+2\right)-1\right|$ cũng là 9.

Bài tập 4. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{-1\right\}$ và liên tục trên từng khoảng xác định, có bảng biến thiên như hình vẽ.



Hàm số $y=2f\left(\left|x-2\right|\right)-3$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

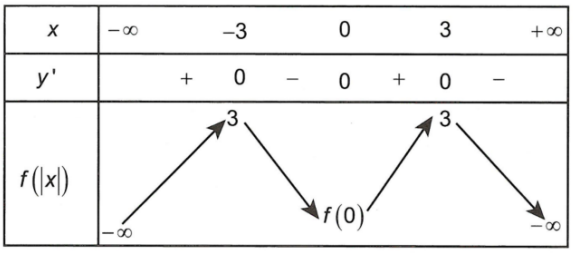
Chọn A.

Số điểm cực trị của các hàm số sau đây là như nhau:

$y=2f\left(\left|x-2\right|\right)-3;\ y=2f\left(\left|x-2\right|\right);\ y=f\left(\left|x-2\right|\right);\ y=f\left(\left|x\right|\right)$

(vì ba hàm đầu có số nghiệm của đạo hàm là như nhau; từ hàm thứ tư, ta dịch qua phải 2 đơn vị sẽ được đồ thị hàm thứ ba).

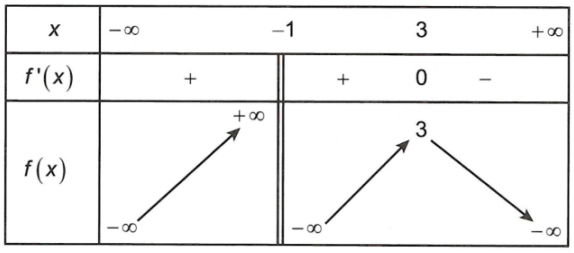
Từ bảng biến thiên đã cho, suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$:



Dựa vào bảng biến thiên, ta có hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ có 3 điểm cực trị.

Do đó hàm số $y=2f\left(\left|x-2\right|\right)-3$ có 3 điểm cực trị.

Bài tập 5. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và liên tục trên từng khoảng xác định, có bảng biến thiên như hình vẽ.



Biết $f(0).f(1)<0$. Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\left|2f\left(\left|x-2\right|\right)-3\right|$ là

A. 5. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 6.

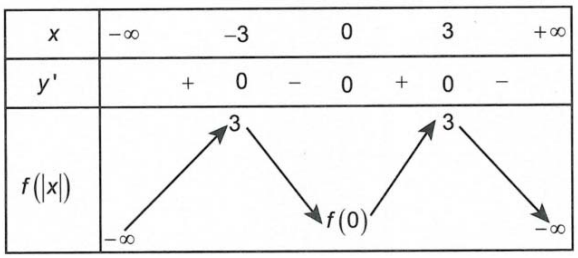
Hướng dẫn giải

Chọn C.

Quan sát bảng biến thiên, rõ ràng hàm số đã cho đồng biến trên $(-1;3)$, suy ra $f(0)<f(1)$. Lại do $f(0).f(1)<0$ nên $f(0)<0<f(1)$.

Tương tự như ở Bài tập 4, số điểm cực trị của hàm $y=\left|2f\left(\left|x-2\right|\right)-3\right|$ bằng với số cực trị của hàm $y=\left|f\left(\left|x\right|\right)\right|$.

Bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ là:

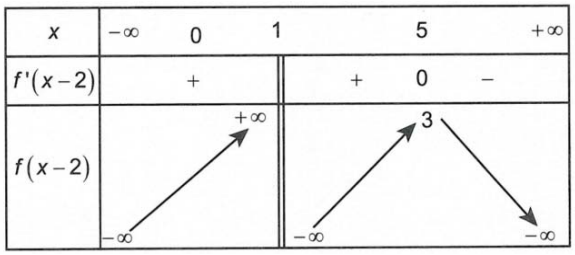


Đến đây, ta dễ dàng suy ra được số điểm cực trị của hàm $y=\left|f\left(\left|x\right|\right)\right|$ là 7.

Vậy hàm số $y=\left|2f\left(\left|x-2\right|\right)-3\right|$ có 7 điểm cực trị.

Chú ý: *Nếu* $f(x)\geq 0$ *thì hàm số* $y=\left|2f\left(\left|x-2\right|\right)-3\right|$ *chỉ có 5 điểm cực trị.*

Bài tập 6. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và liên tục trên từng khoảng xác định, có bảng biến thiên như hình vẽ. Đồ thị hàm số $y=3f\left(\left|x\right|-2\right)+1$ có bao nhiêu điểm cực trị?



A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

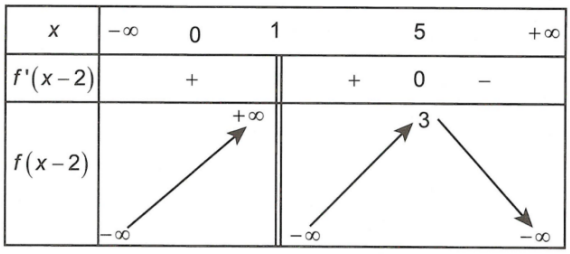
Chọn A

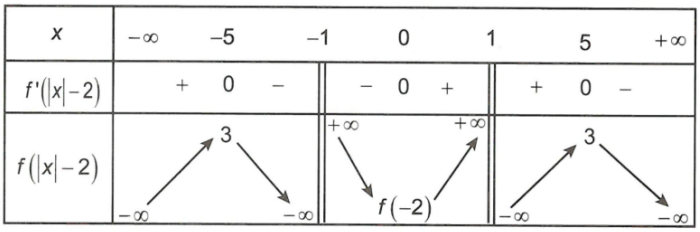
Số điểm cực trị của các hàm số sau đây là như nhau:

$y=3f\left(|x|-2\right)+1$; $y=3f\left(|x|-2\right)$ và $y=f\left(|x|-2\right)$.

Để vẽ được bảng biến thiên hoặc đồ thị của hàm số $y=f\left(|x|-2\right)$, ta dịch bảng biến thiên (đồ thị) của hàm số $y=f\left(x\right)$ qua phải 2 đơn vị rồi lấy đối xứng phần bên phải trục Oy qua Oy (bỏ phần bên trái Oy).

Sau đây lần lượt là bảng biến thiên của $y=f\left(x-2\right)$ và $y=f\left(|x|-2\right)$





Vậy hàm số ban đầu có 3 điểm cực trị.

Dạng 12: Định tham số để hàm số chứa dấu trị tuyệt đối có *n* điểm cực trị

1. Phương pháp

Xét bài toán: Định tham số để đồ thị hàm số $y=f\left(|x|\right)$ hoặc $y=\left|f\left(|x|\right)\right|$ có n điểm cực trị.

Bước 1. Lập bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$

Bước 2. Dựa vào bảng biến thiên, suy ra tham số thỏa mãn yêu cầu đề bài

2. Bài tập

Bài tập 1. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in\left[-5;5\right]$ để hàm số ***Lời bình:*** *Ta có thể nhìn*

$y=\left|x^3-6x^2+(9-m)x+2m-2\right|$ có 5 điểm cực trị?

A. 6. **B.** 8 **C.** 5. **D.** 7.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Xét $f(x)=x^3-6x^2+(9-m)x+2m-2$

Cho $f(x)=0\Leftrightarrow x^3-6x^2+(9-m)x+2m-2=0$

$$\Leftrightarrow x^3-6x^2+9x-2-mx+2m=0$$
$$\Leftrightarrow (x-2)\left(x^2-4x+1-m\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\x^2-4x+1-m=0\end{array}\right.$$

Hàm số $y=\left|x^3-6x^2+(9-m)x+2m-2\right|$ có 5 điểm cực trị khi $f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt và chỉ khi $x^2-4x+1-m=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 2

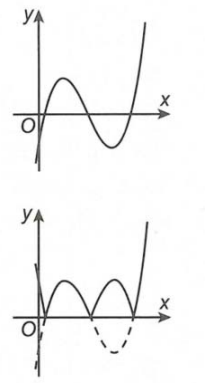
$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=4-(1-m)>0\\2^2-4.2+1-m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}m>-3\\m\neq -3\end{cases}\Leftrightarrow m>-3.$

Do m nguyên $m\in[-5;5]$ nên $m\in\{-2;-1;0;1;2;3;4;5\}$.

Vậy có 8 giá trị của m thỏa mãn đề bài.

rõ những kết luận này từ việc biến đổi đồ thị.

Từ đồ thị $y=f(x)$ suy ra đồ thị $y=\left|f(x)\right|$



Bài tập 2. Có bao nhiêu giá trị của m để hàm số $y=|x|^3-(2m+1)x^2+3m|x|-5$ có 5 điểm cực trị.

A. $m\in\left(0;\frac{1}{4}\right)$. **B.** $m\in\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup(1;+\infty)$.

C. $m\in(1;+\infty)$. **D.** $m\in(-\infty;0]$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

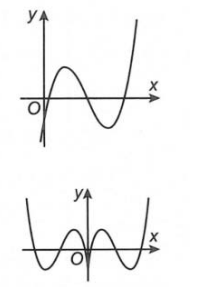
Xét $f(x)=x^3-(2m+1)x^2+3mx-5$.

Suy ra $f'(x)=3x^2-2(2m+1)x+3m$.

Hàm số $y=|x|^3-(2m+1)x^2+3m|x|-5$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y=f(x)$ có 2 điểm cực trị dương $\Leftrightarrow f'(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt dương

Lời bình: *Ta có thể nhìn rõ những kết luận này từ việc biến đổi đồ thị.*

Từ đồ thị $y=f(x)$ suy ra đồ thị $y=f(|x|)$.



$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (2m+1)^2 - 9m > 0 \\ 2m+1 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 5m + 1 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ 0 < m < \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Bài tập 3. Có bao nhiêu số nguyên của tham số $m \in (-2021; 2020)$ để hàm số $f(x) = x^2 - 2m|x - m + 2020| + 2021$ có 3 điểm cực trị?

A. 1009. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 1008

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$$f'(x) = 2x - 2m\frac{x - m + 2020}{|x - m + 2020|} = \begin{cases} 2x - 2m, \ x - m + 2020 > 0 \\ 2x + 2m, \ x - m + 2020 < 0. \end{cases}$$

Dễ thấy hàm số không có đạo hàm tại điểm $x = m - 2020$.

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{cases} 2x - 2m = 0 \\ x - m + 2020 > 0 \end{cases} \right.$
$\left. \begin{cases} 2x + 2m = 0 \\ x - m + 2020 < 0 \end{cases} \right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ \begin{cases} x = -m \\ 2m - 2020 < 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = -m, \ m > 1010. \end{array} \right.$$

Nếu $m \le 1010$ thì $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = m$ và không có đạo hàm tại điểm $x = m - 2020$ nên không có đủ 3 điểm cực trị. Do đó loại trường hợp này.

Khi $m > 1010$, ta có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	$-m$	$m-2020$	m	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$-$	0 $+$

Vậy hàm số có 3 điểm cực trị với $m > 1010$.

Mà $m \in (-2021; 2020)$ nên $m \in \{1011; 1012; ...; 2019\}$.

Vậy có 1009 số thỏa mãn đề bài.

Bài tập 4. Cho hàm số $f(x) = x^3 + mx^2 + nx - 2$ với *m*, *n* là các số thực thỏa mãn $\begin{cases} m + n < 1 \\ 2m - n > 5 \end{cases}$. Số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hàm số $f(x)=x^3+mx^2+nx-2$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty\\ f(-2)=-8+4m-2n-2=2(2m-n-5)>0\\ f(1)=1+m+n-2=m+n-1<0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}f(x).f(-2)<0\\ f(-2).f(1)<0\\ f(1).\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)<0\end{cases}$$

Suy ra phương trình $f(x)=0$ có ít nhất 3 nghiệm. Mà $f(x)=0$ là phương trình bậc 3 nên có tối đa 3 nghiệm. Vậy $f(x)=0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

Vậy hàm số $y=|f(x)|$ có đúng 5 điểm cực trị.

Bài tập 5. Cho hàm số $y=\left|\frac{1}{3}x^3+mx\sqrt{x^2+1}\right|$ với *m* là tham số thực. Đồ thị của hàm số đã cho có nhiều nhất bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Xét $f(x)=\frac{1}{3}x^3+mx\sqrt{x^2+1}$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=x^2+m\frac{2x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow m=-\frac{x^2\sqrt{x^2+1}}{2x^2+1}=g(x)$.

Ta có $g'(x)=\frac{x\left(2x^4-3x^2+2\right)}{(2x^2+1)^2\sqrt{x^2+1}}$. Bảng biến thiên $g(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $f'(x)=0$ có tối đa 2 nghiệm khác 0 khi $m<0$. Do hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)=0$ có tối đa 3 nghiệm phân biệt. Nếu tồn tại giá trị của tham số m sao cho phương trình $f(x)=0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt thì hàm số $y=\left|\frac{1}{3}x^3+mx\sqrt{x^2+1}\right|$ có 5 điểm cực trị.

Ta có $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2=-3m\sqrt{x^2+1}.\end{array}\right.\quad(2)$

Khi $m<0$ thì (2) $\Leftrightarrow x^4-9m^2x^2-9m^2=0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt khác 0.

Vậy phương trình $f(x)=0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt nếu $m<0$.

Vậy số điểm cực trị tối đa của hàm số $y=\left|\frac{1}{3}x^3+mx\sqrt{x^2+1}\right|$ là 5.

Bài tập 6. Có bao nhiêu số nguyên của $m\in[0;2021]$ để hàm số $y=|x|^3+(m-1)x$ có đúng một điểm cực trị?

A. 2021. **B.** 2022. **C.** 21. **D.** 20.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta sẽ chứng minh hàm số trên luôn có đúng 1 điểm cực trị với mọi tham số m.

Hiển nhiên hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=\frac{3x^3}{|x|}+m-1=\begin{cases}3x^2+m-1, x>0\\-3x^2+m-1, x<0.\end{cases}$

Đạo hàm không xác định tại điểm $x=0$.

+) Khi $m=1$ thì $y'=\begin{cases}3x^2, x>0\\-3x^2, x<0\end{cases}$

Hàm số không có đạo hàm tại điểm $x=0$ và đạo hàm đổi dấu khi đi qua điểm $x=0$ (vì $\lim\limits_{x\to0^+}y'>0, \lim\limits_{x\to0^-}y'<0$).

Vậy hàm số chỉ đạt cực trị tại $x=0$.

+) Khi $m>1$, ta có $y'>0, \forall x>0$ và $\lim\limits_{x\to0^-}y'<0$.

Cho $y'=0\Leftrightarrow x=-\sqrt{\frac{m-1}{3}}$ và đạo hàm đổi dấu khi đi qua điểm đó nên hàm số cũng chỉ có 1 điểm cực trị.

+) Tương tự với $m<1$, hàm số cũng chỉ đạt cực trị tại điểm $x=\sqrt{\frac{1-m}{3}}$.

Vậy hàm số luôn có 1 điểm cực trị với mọi tham số *m*.

Do *m* nguyên và $m\in[0;2021]$ nên có 2022 giá trị của *m*.

Dạng 13: Cho bảng biến thiên, định giá trị tham số để hàm số trị tuyệt đối có *n* điểm cực trị

1. Phương pháp

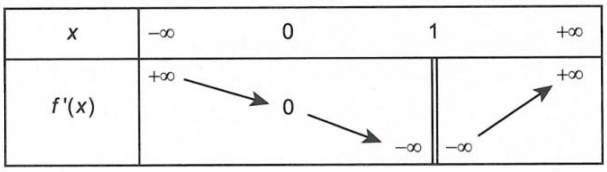
Bài toán: Cho bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ hoặc cho bảng biến thiên, bảng xét dấu của $f'(x)$.

Yêu cầu tìm giá trị của tham số *m để* hàm số $g(x,m)$ có *n* điểm cực trị.

Đưa hàm số $g(x,m)$ về hàm số đơn giản hơn (nếu có thể). Sau đó sử dụng các phép biến đổi đồ thị hàm trị tuyệt đối.

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, có đạo hàm trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ như sau



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-20;20]$ để hàm số $g(x)=2f(|x|-m)+2^{2020}$ có nhiều điểm cực trị nhất?

A. 21. **B.** 19. **C.** 22. **D.** 20.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Số điểm cực trị của $g(x)=2f(|x|-m)+2^{2020}$ bằng với số điểm cực trị của hàm số $h(x)=f(|x|-m)$.

Ta có $h'(x)=\dfrac{x}{|x|}f'(|x|-m)$.

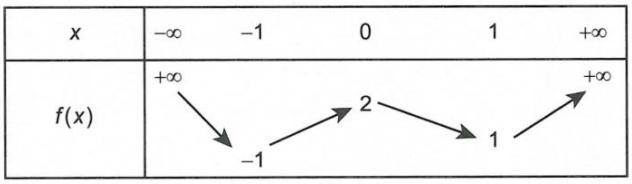
Hiển nhiên hàm số không có đạo hàm tại điểm $x=0$.

Cho $h'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|x|-m=0\\|x|-m=x_1>1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|x|=m\\|x|=x_1+m.\end{array}\right.$

Hàm số $h(x)=f(|x|-m)$ có nhiều điểm cực trị nhất khi và chỉ khi $h'(x)=0$ có nhiều nghiệm dương nhất hay $0<m$.

Do m nguyên và $m\in[-20;20]$ nên $m\in\{1;2;3;...;20\}$.

Bài tập 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ như sau:



Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f(|x^4-4x^2+m|)$ có nhiều điểm cực trị nhất?

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $g'(x)=(4x^3-8x)\dfrac{x^4-4x^2+m}{|x^4-4x^2+m|}f'\left(|x^4-4x^2+m|\right)$.

Ta có $|x^4-4x^2+m|\geq 0$.

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $f'\left(|x^4-4x^2+m|\right)=0$ vô nghiệm (*).

Hàm số $g(x)$ có nhiều điểm cực trị nhất khi $g'(x)=0$ có nhiều nghiệm phân biệt nhất.

Kết hợp với (*), ta có hệ phương trình $\begin{cases} x^4-4x^2+m=0 \\ 4x^3-8x=0 \end{cases}$ có nhiều nghiệm phân biệt nhất $\Leftrightarrow x^4-4x^2+m=0$ có nhiều nghiệm nhất và tất cả các nghiệm đều khác 0 và khác $\pm\sqrt{2}$ (vì $4x^3-8x=0$ luôn có ba nghiệm phân biệt là 0; $\pm\sqrt{2}$) $\Leftrightarrow m=-x^4+4x^2$ có nhiều nghiệm nhất và tất cả các nghiệm đều khác 0 và khác $\pm\sqrt{2}$ (**).

Lập bảng biến thiên của $y=-x^4+4x^2$ ta có:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Do đó (**) $\Leftrightarrow 0<m<4$.

Vậy có ba giá trị nguyên là $m\in\{1;2;3\}$.

Dạng 14: Cho đồ thị, định tham số để có hàm số có *n* điểm cực trị

1. Phương pháp

Bước 1. Tìm hàm số đơn giản hơn có cùng số điểm cực trị với hàm ban đầu

Bước 2. Dựa vào đồ thị, xác định số cực trị của hàm đơn giản ở bước 1.

2. Bài tập

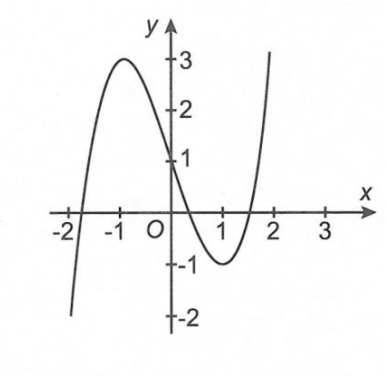
Bài tập 1. Cho đường cong như hình vẽ là đồ thị của hàm số $y=f(x)$. Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số *m* để hàm số $y=f\left(|x+3|+m\right)$ có 5 điểm cực trị.

A. $m\in(-\infty;-1]$.

B. $m\in(-1;1)$.

C. $m\in(1;+\infty)$.

D. $m\in(-\infty;-1)$.



Hướng dẫn giải

Chọn D.

Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(\left|x+3\right|+m\right)$ bằng với số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=f\left(\left|x\right|+m\right)$.

Ta có $g'\left(x\right)=\dfrac{x}{\left|x\right|}.f'\left(\left|x\right|+m\right)$.

Dựa vào đồ thị, ta có $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|x\right|+m=1\\\left|x\right|+m=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left|x\right|=1-m\\\left|x\right|=-1-m\end{array}\right.\left(*\right)$

(chú ý rằng hàm số $g\left(x\right)$ không có đạo hàm tại điểm $x=0$).

Hàm số $y=f\left(\left|x+3\right|+m\right)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow g\left(x\right)=f\left(\left|x\right|+m\right)$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$(*) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -1-m>0\Leftrightarrow m<-1$.

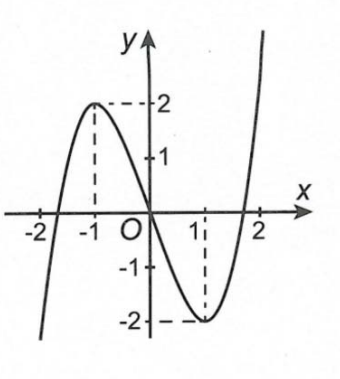
Bài tập 2. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* để hàm số $y=\left|f\left(x\right)+m\right|$ có nhiều điểm cực trị nhất.

A. $m\in\left(-2;2\right)$.

B. $m\in\left[-2;2\right]$.

C. $m\in\left(-1;1\right)$.

D. $m\in\left[-1;1\right]$.

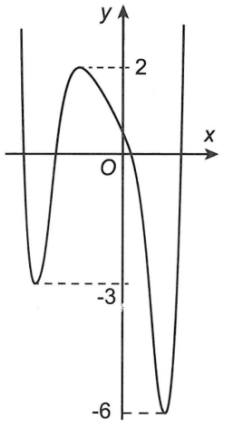


Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)+m\right|$ có nhiều điểm cực trị nhất khi và chỉ khi $y=f\left(x\right)+m$ cắt trục hoành tại nhiều điểm nhất $\Leftrightarrow -2<m<2$.

Bài tập 3. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Gọi *S* là tập hợp các số nguyên dương của *m* để hàm số $y=\left|f\left(x+2020\right)+\frac{1}{3}m^2\right|$ có 5 điểm cực trị. Tổng tất cả các phần tử của *S* là

A. 5. **B.** 10. **C.** 6. **D.** 7.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có số điểm cực trị của hàm $y=\left|f\left(x+2020\right)+\frac{1}{3}m^2\right|$ bằng số điểm cực trị của hàm $y=\left|f\left(x\right)+\frac{1}{3}m^2\right|$.

Xét hàm $g\left(x\right)=f\left(x\right)+\frac{1}{3}m^2$.

Dựa vào đồ thị ta có số điểm cực trị của hàm $g\left(x\right)$ bằng số điểm cực trị của hàm $f\left(x\right)$ và bằng 3.

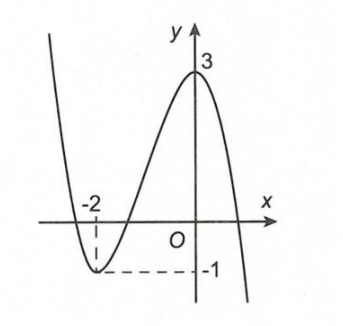
Suy ra hàm số $y=\left|f\left(x+2020\right)+\frac{1}{3}m^2\right|$ có 5 điểm cực trị thì số giao điểm của $g\left(x\right)$ với trục Ox (không kể các điểm tiếp xúc) là 2.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{3}m^2\ge 2 \\ -6<-\frac{1}{3}m^2\le -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow 9<m^2<18 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3\le m<3\sqrt{2} \\ -3\sqrt{2}<m\le -3. \end{array}\right.$$

Do *m* nguyên dương nên $m\in\left\{3;4\right\}$.

Vậy tổng các giá trị là 7.

Bài tập 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Số giá trị nguyên của tham số *m* để đồ thị hàm số $g(x)=\left|f^3(x)-3f(x)+m\right|$ có đúng 9 điểm cực trị là



A. 16. **B.** 17. **C.** 15. **D.** 18.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Xét $h(x)=f^3(x)-3f(x)+m$.

Suy ra $h'(x)=0\Leftrightarrow 3f'(x)\left[f^2(x)-1\right]=0$.

Dựa vào đồ thị, ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$

$f(x)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1<-2\\x=x_2\in(-2;0)\\x=x_3>0\end{array}\right.$ (đạo hàm đều đổi dấu khi đi qua cả 3 nghiệm đều là nghiệm đơn và khác 2 nghiệm trên).

$f(x)=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_4>x_3\\x=-2\end{array}\right.$ (trong đó $x=x_4$ là nghiệm đơn $x=-2$ là nghiệm kép).

Ta tính các giá trị: $h(x_1)=h(x_2)=h(x_3)=m-2$

$h(x_4)=h(-2)=m+2$ và $h(0)=m+18$

Bảng biến thiên $h(x)$:

x	$-\infty$	x_1	-2	x_2	0	x_3	x_4	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$m-2$	$\nearrow$	$m+2$	$\searrow$	$m-2$	$\nearrow$	$m+18$	$\searrow$	$m-2$	$\nearrow$	$m+2$	$\searrow$	$-\infty$

Suy ra hàm số $h(x)$ luôn có 6 điểm cực trị.

Đồ thị hàm số $g(x)=\left|f^3(x)-3f(x)+m\right|$ có đúng 9 điểm cực trị tương đương đồ thị $y=h(x)$ cắt trục hoành tại đúng 3 điểm (không kể những điểm tiếp xúc) $\Leftrightarrow m+2\le 0<18+m\Leftrightarrow -18<m\le -2$.

Vậy $m \in \{-17;-16;...;-2\}$ hay có 16 giá trị nguyên của m.

Dạng 15. Biết được đồ thị của hàm số $f(x)$ tìm (số điểm) cực trị của hàm ẩn

1. Phương pháp

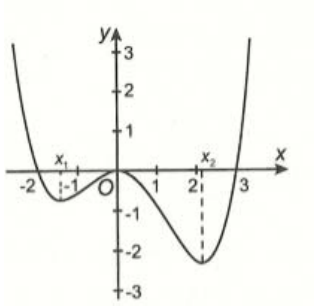
Bước 1. Tìm đạo hàm của hàm số $y = f(u(x))$: $y' = u'(x).f'(u(x))$.

Bước 2. Từ đồ thị hàm số, xác định số nghiệm bội lẻ của phương trình $y' = 0$.

Bước 3. Kết luận cực trị của hàm số $y = f(u(x))$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới (chỉ đạt cực trị tại 3 điểm và cũng chỉ có 3 điểm chung với trục hoành). Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = [f(x)]^2$ là



A. 5. **B.** 4.

C. 3. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $g'(x) = 2f'(x).f(x)$. Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \quad (1) \\ f(x) = 0 \quad (2). \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị trên, ta có:

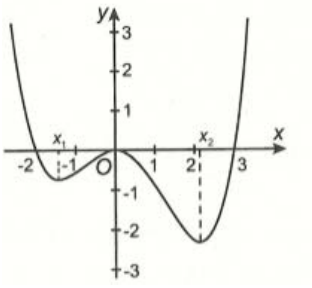
$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \\ x = 0 \\ x = x_2 \end{array}\right.$ (các nghiệm đều là nghiệm bội lẻ).

$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 3 \\ x = 0 \end{array}\right.$ (trong đó $x = 0$ nghiệm kép,hai nghiệm kia là nghiệm đơn).

Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm bội lẻ.

Do vậy số điểm cực trị của hàm số $g(x) = [f(x)]^2$ là 5.

Bài tập 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới (chỉ đạt cực trị tại 3 điểm và cũng chỉ có 3 điểm chung với trục hoành). Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f[f(x)]$ là



Chú ý: *Chỉ cần quan tâm đến nghiệm bội lẻ hoặc nghiệm mà đạo hàm đổi dấu khi đi qua của phương trình* $f'(x) = 0$

A. 6 **B.** 7

C. 8 **D.** 9

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $g'(x)=f'(x).f'\left[f(x)\right]$.

Cho $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll} f'(x)=0 & (1)\\ f'\left[f(x)\right]=0 & (2)\end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị trên ta có:

$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=x_1\\ x=0\\ x=x_2\end{array}\right.$ (các nghiệm đều là nghiệm bội lẻ).

$(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f(x)=x_1\\ f(x)=0\\ f(x)=x_2.\end{array}\right.$

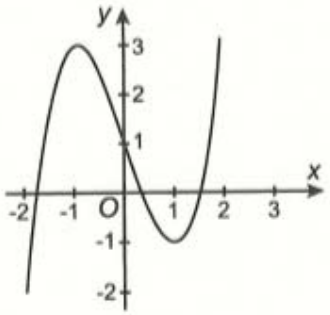
Phương trình $f(x)=x_1$ với $x_1\in(-2;-1)$ có 2 nghiệm đơn khác với 3 nghiệm $x=x_1;x=0;x=x_2$.

Phương trình $f(x)=0$ có 2 nghiệm đơn là $x=-2,x=3$ (khác với 5 nghiệm đơn trên) và nghiệm kép $x=0$.

Phương trình $f(x)=x_2$ với $x_2\in(2;3)$ có 2 nghiệm đơn khác với tất cả các nghiệm trên.

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có tổng cộng 9 nghiệm bội lẻ nên hàm số $g(x)=f\left[f(x)\right]$ có tổng cộng 9 điểm cực trị.

Bài tập 3. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đúng 2 điểm cực trị $x=-1,x=1$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Hỏi hàm số $y=3f\left(x^3-6x^2+9x+1\right)+2020$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2. **B.** 3.

C. 4. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Chọn C

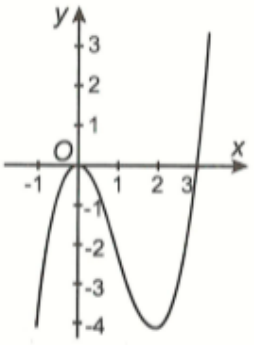
Do hàm số $y=f(x)$ có đúng hai điểm cực trị $x=-1,x=1$ nên phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm bội lẻ phân biệt $x=-1,x=1$.

Ta có: $y'=3\left(3x^2-12x+9\right)f'\left(x^3-6x^2+9x+1\right)$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x^2-12x+9=0\\ x^3-6x^2+9x+1=-1\\ x^3-6x^2+9x+1=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=3\end{array}\right.\\ x=x_0\in(-1;0)\\ x(x-3)^2=0.\end{array}\right.$$

Vì $y'=0$ có các nghiệm lẻ là $x=x_0, x=1$ và $x=3$ nên hàm số $y=3f\left(x^3-6x^2+9x+1\right)+2020$ có tất cả 4 điểm cực trị.

Bài tập 4. Biết rằng hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y=5f\left[f(x-3)+1\right]-20$ là



A. 6. **B.** 5.

C. 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Số điểm cực trị của hàm số $y=5f\left[f(x-3)+1\right]-20$ bằng với số điểm cực trị của hàm số $y=f\left[f(x-3)+1\right]$ và cũng bằng với số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left[f(x)\right]$.

Ta có: $g'(x)=f'(x).f'\left[f(x)\right]$.

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}f'(x)=0 & (1)\\ f'\left[f(x)\right]=0 & (2)\end{array}\right.$$

Dựa vào đồ thị, ta có

$(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=2\end{array}\right.$ (trong đó $x=0$ và $x=2$ là nghiệm bội lẻ).

$$(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}f(x)=0 & (3)\\ f(x)=2 & (4)\end{array}\right.$$

$(3)\Leftrightarrow x=3$ (nghiệm đơn) hoặc $x=0$ (nghiệm kép).

$(4)\Leftrightarrow x=x_0>3$ (nghiệm đơn).

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có 4 nghiệm bội lẻ nên $g(x)$ có 4 điểm cực trị

Suy ra hàm số $y=5f\left[f(x-3)+1\right]-20$ cũng có 4 điểm cực trị.

Dạng 16. Tìm (số điểm) cực trị hàm ẩn biết đồ thị của hàm số $f'(x)$

1. Phương pháp

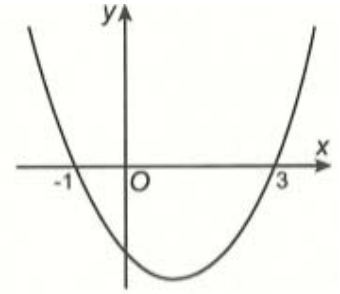
Bài toán: Cho trước đồ thị của hàm số $f'(x)$. Tìm (số điểm) cực trị của (đồ thị) hàm số $f(u)$.

+ Nếu $f'(x)=0$ có các nghiệm x_i, thì $f'(u)=0 \Leftrightarrow u=x_i$.

+ Chúng ta chỉ cần quan tâm đến các nghiệm bội lẻ của phương trình.

2. Bài tập mẫu

Bài tập 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(3-x^2)$ đạt cực tiểu tại điểm



A. $x=0$. **B.** $x=2$.

C. $x=\pm 2$. **D.** $x=-2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Phương trình $f'(x)=0$ có 2 nghiệm bội lẻ là $x=-1, x=3$.

Ta có: $g'(x)=\left[f(3-x^2)\right]'=-2x.f'(3-x^2)$.

Cho $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 3-x^2=-1 \\ 3-x^2=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=4 \\ x^2=0 \end{array}\right.$

Suy ra $g'(x)=0$ có 3 nghiệm bội lẻ là $x=0, x=\pm 2$.

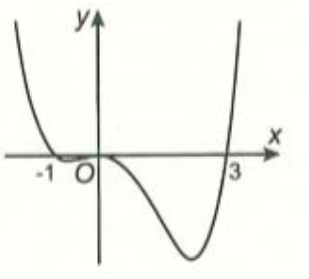
Vì $g'(3)=-6.f'(6)<0$ nên ta có bảng xét dấu $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Lưu ý: *Do các nghiệm đều là nghiệm bội lẻ, nên $g'(x)$ đổi dấu khi đi qua mỗi nghiệm ấy. Chính vì vậy mà ta chỉ cần biết dấu của một khoảng nào đó sẽ suy ra dấu ở các khoảng còn lại. Do hàm số liên tục, nên chỉ cần biết dấu tại 1 điểm, ta sẽ biết dấu ở khoảng chứa điểm đó.*

Ở bài này, ta xét tại điểm $x=3\in(2;+\infty)$.

Bài tập 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số cực trị của hàm số $h(x)=f\left(x^2-2x\right)$ là

A. 2. **B.** 4.

C. 3. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

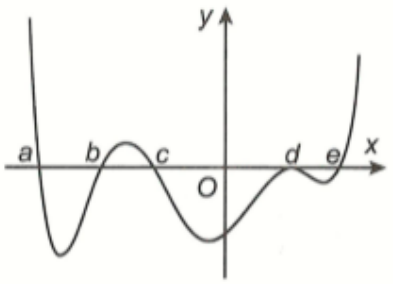
Ta có: $\mathrm{h}'(x)=(2x-2).f'\left(x^2-2x\right).$

Dựa vào đồ thị, ta có $\mathrm{h}'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-2x=-1\\x^2-2x=3.\end{array}\right.$

Phương trình trên chỉ có 3 nghiệm bội lẻ là $x=\pm1, x=3$ nên hàm số $h(x)$ chỉ có 3 điểm cực trị.

Chú ý: *Ta chỉ cần quan tâm đến nghiệm bội lẻ, nên trong bài này ta bỏ qua nghiệm x=0 của phương trình* $f'(x)=0$ *(là nghiệm bội chẵn nên đạo hàm không đổi dấu khi qua nghiệm này). Ta cũng không cần xét đến phương trình* $x^2-2x=-1$

Bài tập 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ:



Biết $f(a)>f(c)>0; f(b)<0<f(e).$

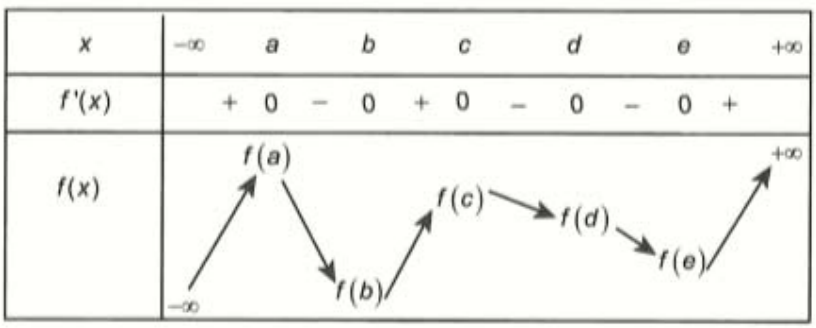
Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=\left[f(x+m)\right]^2$ là

A. 5. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 8.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Từ đồ thị của đạo hàm, ta có bảng biến thiên sau:



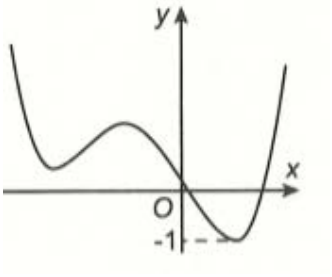
Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $y=f(x)$ có 4 điểm cực trị, suy ra hàm số $y=f(x+m)$ cũng có 4 điểm cực trị và $f'(x+m)=0$ có 4 nghiệm bội lẻ phân biệt. Khi $f(a)>f(c)>0; f(b)<0<f(e)$ thì đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt nên đồ thị hàm số $y=f(x+m)$ cũng cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Ta có $g(x)=\left[f(x+m)\right]^2 \Rightarrow g'(x)=2f'(x+m).f(x+m).$

Cho $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x+m)=0 \ (1) \\ f(x+m)=0 \ (2). \end{array}\right.$

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt, phương trình (2) có 3 nghiệm phân biệt khác với 4 nghiệm của phương trình (1). Vậy $g'(x)$ có 7 nghiệm (bội lẻ) phân biệt hay $g(x)$ có 7 điểm cực trị.

Bài tập 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, hàm số $y=f'(x-2)$ có đồ thị như hình dưới. Số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ là



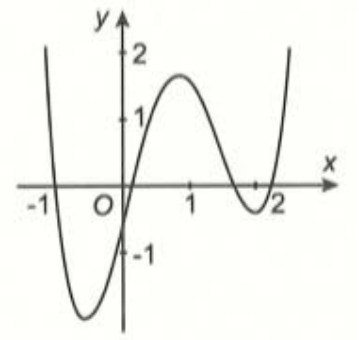
A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có số điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$ bằng với số điểm cực trị của $y=f(x-2)$. Vì hàm số $y=f(x-2)$ có 2 điểm cực trị nên hàm số $y=f(x)$ có 2 điểm cực trị.

Bài tập 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị $y=f'(x-2)$ như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y=2f(x-3)-4$ là



A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Nhận xét: Số điểm cực trị của hàm số $y=2f\left(x-3\right)-4$ bằng với số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x\right)$ và bằng với số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x-2\right)$. Ta có đồ thị hàm số $y=f'\left(x-2\right)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt nên hàm số $y=f\left(x-2\right)$ có 4 điểm cực trị. Vậy hàm số $y=2f\left(x-3\right)-4$ có 4 điểm cực trị.

Dạng 17. Biết được $f'\left(x\right)$ hoặc bảng xét dấu, bảng biến thiên của $f'\left(x\right)$, tìm số điểm cực trị của hàm ẩn

Bài tập 1. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(4-x\right)\left(x^3-1\right)+2x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2\right)-x^4-m$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $g'\left(x\right)=2x\left[\left(4-x^2\right)\left(x^6-1\right)+2x^2\right]-4x^3=2x\left(4-x^2\right)\left(x^6-1\right)$.

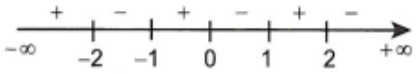
$$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm1\\x=\pm2.\end{array}\right.$$

Lập bảng xét dấu $g'\left(x\right)$:

x	$-\infty$	-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu, ta có hàm số $g\left(x\right)$ có 2 điểm cực tiểu.

Lưu ý: *Khi làm trắc nghiệm, ta có thể lập bảng xét dấu thu gọn như sau:*



Bài tập 2. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=x^2\left(x-1\right)\left(x-2\right)^4,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2+x-1\right)$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có:

$g'(x)=(2x+1)f'\left(x^2+x-1\right)$

$=(2x+1)\left(x^2+x-1\right)^2\left(x^2+x-2\right)\left(x^2+x-3\right)^4$

Dễ thấy $g'(x)=0$ có 3 nghiệm đơn là $x=-2, x=-\frac{1}{2}, x=1$ nên hàm số có 3 điểm cực trị.

Bài tập 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$ 0	$+$	0	$-$	0

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(x)-x^3+\frac{3}{2}x^2+6x+2020$ là

A. 3. **B.** 2.

C. 1. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $g'(x)=f'(x)-3\left(x^2-x-2\right)$.

Nhận xét: $g'(-1)=g'(2)=0$.

- Khi $\left[\begin{array}{l}x>2\\x<-1\end{array}\right.$ thì $\begin{cases}f'(x)<0\\-3\left(x^2-x-2\right)<0\end{cases}\Rightarrow g'(x)<0$.
- Khi $-1<x<2$ thì $\begin{cases}f'(x)>0\\-3\left(x^2-x-2\right)>0\end{cases}\Rightarrow g'(x)>0$.

Tức là $g'(x)$ đổi dấu khi đi qua 2 điểm $x=-1$ và $x=2$.

Vậy hàm số $g(x)$ có hai điểm cực trị.

Bài tập 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2\left(x^2-2x\right)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f\left(x^2-8x+m\right)$ có 5 điểm cực trị?

A. 17. **B.** 16.

C. 14. **D.** 15.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đặt $g(x)=f\left(x^2-8x+m\right)$.

Ta có: $f'(x)=(x-1)^2x(x-2)$ suy ra

$g'(x)=(2x-8)f'\left(x^2-8x+m\right)$

$=(2x-8)\left(x^2-8x+m-1\right)^2\left(x^2-8x+m\right)\left(x^2-8x+m-2\right).$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\ \left(x^2-8x+m-1\right)^2=0\ (1)\\ \left(x^2-8x+m\right)=0\quad (2)\\ \left(x^2-8x+m-2\right)=0\quad (3)\end{array}\right.$$

Các phương trình (1), (2), (3) không có nghiệm chung từng đôi một và (1) nếu có các nghiệm thì nghiệm ấy là nghiệm bội chẵn.

Suy ra $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi (2) và (3) đều có 2 nghiệm phân biệt khác 4

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}16-m>0\\ 16-m+2>0\\ 16-32+m\neq 0\\ 16-32+m-2\neq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m<16\\ m<18\\ m\neq 16\\ m\neq 18\end{array}\right.\Leftrightarrow m<16.$$

Do m nguyên dương và $m<16$ nên có 15 giá trị m cần tìm.

Bài tập 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(x-2)(x-3)^2\left(x^2+2mx+5\right)$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên $m>-20$ để hàm số $g(x)=f\left(|x|\right)$ có đúng 5 điểm cực trị?

A. 6. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Do tính chất đối xứng qua trục Oy của đồ thị hàm số $f\left(|x|\right)$ nên hàm số $g(x)=f\left(|x|\right)$ có đúng 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow f(x)$ có 2 điểm cực trị dương $\Leftrightarrow f'(x)=0$ có 2 nghiệm bội lẻ phân biệt và dương $(*)$.

Xét $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2\\ (x-3)^2=0\\ x^2+2mx+5=0(1).\end{array}\right.$

Để thỏa mãn $(*)$ ta có các trường hợp sau:

+) (1) có nghiệm kép hoặc vô nghiệm khi và chỉ khi

$\Delta'=m^2-5\le 0\Leftrightarrow-\sqrt{5}\le m\le\sqrt{5}$.

Do m nguyên âm nên $m\in\{-2;-1;0;1;2\}$.

+) (1) có 2 nghiệm dương phân biệt, trong đó có 1 nghiệm bằng 1, nghiệm còn lại khác 2.

Ta có (1) nhận $x=1$ là nghiệm khi $1^2+2.1.m+5=0\Rightarrow m=-3$. Khi $m=-3$, thế vào (1) ta thấy phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt là $x=1$ và $x=5$. Vậy $m=-3$ thỏa mãn.

+) (1) có 2 nghiệm dương phân biệt, trong đó có 1 nghiệm bằng 2, nghiệm còn lại khác 1.

Nếu (1) nhận $x=2$ là nghiệm thì $2^2+2.2.m+5=0\Rightarrow m=-\dfrac{9}{4}\notin\mathbb{Z}$.

Trường hợp này không có giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Vậy $m\in\{-3;-2;-1;0;1;2\}$.

Bài tập 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0

Hàm số $g(x)=3f\left(-x^4+4x^2-6\right)+2x^6-3x^4-12x^2$ có tất cả bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $g'(x)=-12x\left(x^2-2\right)\left[f'\left(-2-\left(x^2-2\right)^2\right)-\left(x^2+1\right)\right]$.

Dựa vào bảng xét dấu, ta có $f'(x)<0,\forall x\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

Ta có $-2-\left(x^2-2\right)^2\le -2$ nên $\Rightarrow f'\left[-2-\left(x^2-2\right)^2\right]\le 0$.

Suy ra $f'\left[-2-\left(x^2-2\right)^2\right]-\left(x^2+1\right)<0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó $g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$, cả 3 nghiệm đều là nghiệm bội lẻ.

Vì $-12f'\left(-2-\left(x^2-2\right)^2\right)-\left(x^2+1\right)>0$ nên $g'(x)$ cùng dấu với $h(x)=x\left(x^2-2\right)$ nên dễ thấy hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực tiểu.

Bài tập 7. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Số cực đại của hàm số $g(x)=\left[f\left(2x^2+x\right)\right]^2$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có

$$g'(x)=2.(4x+1).f'\left(2x^2+x\right).f\left(2x^2+x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{4}\\f'\left(2x^2+x\right)=0\\f\left(2x^2+x\right)=0.\end{array}\right.$$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có

$$f'\left(2x^2+x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x^2+x=-2\\2x^2+x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Dựa vào bảng biến thiên ta có phương trình $f(x)=0\Leftrightarrow x=x_0>1.$

Khi đó $f\left(2x^2+x\right)=0\Leftrightarrow 2x^2+x-x_0=0.$

Vì $ac=2(-x_0)<0$ nên phương trình này luôn có 2 nghiệm trái dấu là

$$x_1=-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{1+8x_0}}{4};x_2=-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{1+8x_0}}{4}.$$

Ta có $x_1<-\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{1+8}}{4}<-1$ và $x_2>-\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{1+8}}{4}=\dfrac{1}{2},\forall x_0>1.$

Ta có bảng xét dấu của $g'(x)$:

x	$-\infty$	x_1	-1	$\frac{-1}{4}$	$\frac{1}{2}$	x_2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$ 0	$-$ 0	$+$ 0	$-$ 0	$+$

Từ đó suy ra hàm số $g(x)$ chỉ có 2 điểm cực đại.

Bài tập 8. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên $f'(x)$ như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0 $+$	0 $-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 2	$\nearrow$ 5	$\searrow$ $-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^3-3x\right)-\dfrac{1}{5}x^5-\dfrac{2}{3}x^3+3x+20$ trên đoạn $[-1;2]$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $g'(x)=\left(x^2-1\right)\left[3f'\left(x^3-3x\right)-x^2-3\right]$.

Dễ thấy khi $x\in[-1;2]$ thì $\left(x^3-3x\right)\in[-2;2]$ và khi ấy $f'\left(x^3-3x\right)\in[-3;1]$.

Suy ra $3f'\left(x^3-3x\right)-x^2-3\le 0$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} f'\left(x^3-3x\right)=1 \\ x^2=0 \end{cases}\Rightarrow f(0)=1$ (vô lí).

Vậy $3f'\left(x^3-3x\right)-x^2-3<0,\forall x\in[-1;2]$.

Khi đó $g'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm 1$ (đều có 2 nghiệm đơn).

Bảng xét dấu $g'(x), x\in[-1;2]$ là

x	-1		1		2
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	

Vậy hàm số $g(x)=f\left(x^3-3x\right)-\frac{1}{5}x^5-\frac{2}{3}x^3+3x+20$ trên đoạn $[-1;2]$ chỉ có 1 điểm cực trị.

Bài tập 9. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)$ với $x\in\mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số *m* để hàm số $g(x)=f(x)-mx$ có 4 điểm cực trị?

A. 5. **B.** 6.

C. 7. **D.** 8.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $g'(\mathrm{x})=f'(x)-m.$

Cho $g'(\mathrm{x})=0\Leftrightarrow f'(x)-m=0\Leftrightarrow\left(x^2-6x+5\right)\left(x^2-6x+8\right)-m=0.$

Đặt $t=(x-3)^2$, $t\ge 0$, phương trình trở thành:

$(t-4)(t-1)-m=0\Leftrightarrow t^2-5t+4-m=0\ (1).$

Hàm số $g(x)=f(x)-mx$ có 4 điểm cực trị khi và chỉ khi (1) có 2 nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=25-4(4-m)>0\\ S=5>0\\ P=4-m>0\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{9}{4}<m<4.$

Do m nguyên và $m \in \left(-\frac{9}{4};4 \right)$ nên $m \in \{-2;-1;0;1;2;3\}$.

Bài tập 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x\sqrt{8-x^2}, \forall x \in \left[-\sqrt{8};\sqrt{8} \right]$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x) - m^2 x - 2m$ có 2 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Hàm số $g(x) = f(x) - m^2 x - 2m$ xác định trên $\left[-\sqrt{8};\sqrt{8} \right]$.

Đạo hàm $g'(x) = f'(x) - m^2 = x\sqrt{8-x^2} - m^2$.

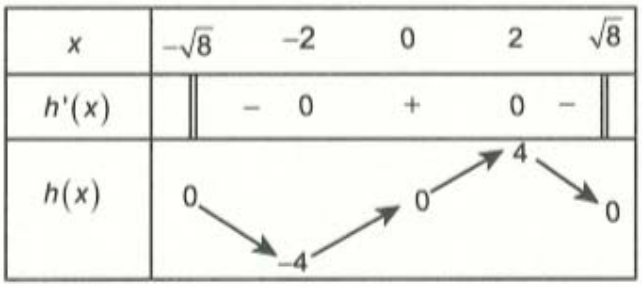
Hàm số $g(x) = f(x) - m^2 x - 2m$ có 2 điểm cực trị khi $g'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt và $g'(x)$ đổi dấu qua các nghiệm đó (1).

Ta có: $x\sqrt{8-x^2} - m^2 = 0 \Leftrightarrow x\sqrt{8-x^2} = m^2$ $(*)$.

Xét hàm số $h(x) = x\sqrt{8-x^2}, x \in \left[-\sqrt{8};\sqrt{8} \right]$.

Có $h'(x) = \frac{8-2x^2}{\sqrt{8-x^2}}$. Cho $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Bảng biến thiên của hàm $h(x)$:



Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $(*)$ có tối đa 2 nghiệm hay $g'(x) = 0$ có tối đa 2 nghiệm.

Vậy $(1) \Leftrightarrow 0 < m^2 < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \neq 0. \end{cases}$

Vì m nguyên nên $m \in \{-1;1\}$.

BÀI 3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D.

+) Số M được gọi là **giá trị lớn nhất (GTLN)** của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \le M$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$.

Kí hiệu: $M = \max\limits_{D} f(x)$

+) Số m được gọi là **giá trị nhỏ nhất (GTNN)** của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \ge m$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$

Kí hiệu: $m = \min\limits_{D} f(x)$

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA

Số M được gọi là **giá trị lớn nhất (GTLN)** của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \le M$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$.

Kí hiệu: $M = \max\limits_{D} f(x)$

↑

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D

↓

Số m được gọi là **giá trị nhỏ nhất (GTNN)** của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \ge m$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$.

Kí hiệu: $m = \min\limits_{D} f(x)$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Tìm GTLN – GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên một khoảng

1. Phương pháp giải

Ta thực hiện các bước sau

Bước 1. Tìm tập xác định (nếu đề chưa cho khoảng).

Bước 2. Tính $y' = f'(x)$; tìm các điểm mà đạo hàm bằng không hoặc không xác định.

Bước 3. Lập bảng biến thiên

Bước 4. Kết luận

Lưu ý: Có thể dùng máy tính cầm tay để giải.

Bước 1. Để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên miền (a; b) ta sử dụng máy tính Casio với lệnh MODE 7 (MODE 9 lập bảng giá trị)

Bước 2. Quan sát bảng giá trị máy tính hiển thị, giá trị lớn nhất xuất hiện là max, giá trị nhỏ nhất xuất hiện là min.

- Ta thiết lập miền giá trị của biến x Start a End b Step $\frac{b-a}{19}$ (có thể làm tròn để Step đẹp).

Chú ý: Khi đề bài liên có các yếu tố lượng giác sinx, cosx, tanx… ta chuyển máy tính về chế độ Radian.

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hàm số $f(x) = -\frac{1}{3}x^6 + \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\max\limits_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{17}{30}$

B. $\max\limits_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{47}{30}$

C. $\max\limits_{\mathbb{R}} f(x) = \frac{67}{30}$

D. Hàm số không tồn tại giá trị lớn nhất

Hướng dẫn giải

Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R}$

Ta có $f'(x) = -2x^5 + 2x^4 - x + 1 = -(x-1)(2x^4+1)$

Khi đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -(x-1)(2x^4+1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{47}{30}$	↘	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $\max\limits_{\mathbb{R}} f(x)=\dfrac{47}{30}$ tại $x=1$

Bài tập 2. Gọi a là giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{6-8x}{x^2+1}$ trên khoảng $(-\infty;1)$. Khi đó giá trị của biểu thức $P=\dfrac{6-8a}{a^2+1}$ bằng

A. $\dfrac{22}{5}$ **B.** $\dfrac{6}{13}$ **C.** $-\dfrac{58}{65}$ **D.** $-\dfrac{74}{101}$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Hàm số liên tục trên khoảng $(-\infty;1)$

Ta có $f'(x)=\dfrac{8x^2-12x-8}{\left(x^2+1\right)^2}$

Khi đó $f'(x)=0\Leftrightarrow 8x^2-12x-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\notin(-\infty;1)\\ x=-\dfrac{1}{2}\in(-\infty;1)\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	8	↘	-1

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $\max\limits_{(-\infty;1)} f(x)=8\Rightarrow P=\dfrac{6-8a}{a^2+1}=-\dfrac{58}{65}$

Bài tập 3. Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x)=1$ **B.** $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x)=\dfrac{1}{3}$

C. $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x)=3$ **D.** Hàm số không có giá trị nhỏ nhất

Hướng dẫn giải

Chọn B

Tập xác định $D=\mathbb{R}$

Ta có

$$y=f(x)=1-\frac{2x}{x^2+x+1}\Rightarrow y'=-\frac{2\left(x^2+x+1\right)-2x(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2}=\frac{2x^2-2}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$

Do đó $y'=0\Leftrightarrow 2x^2-2=0\Leftrightarrow x=\pm 1$

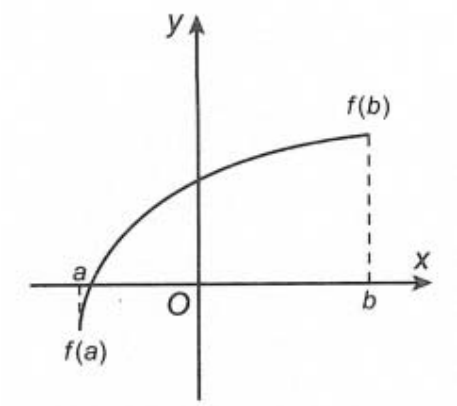
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	1	↗	3	↘	$\frac{1}{3}$	↗	1

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = \dfrac{1}{3}$ tại $x = 1$

Dạng 2: Tìm GTLN và GTNN của hàm số trên một đoạn

1. Phương pháp giải



Bước 1. Tính $f'(x)$

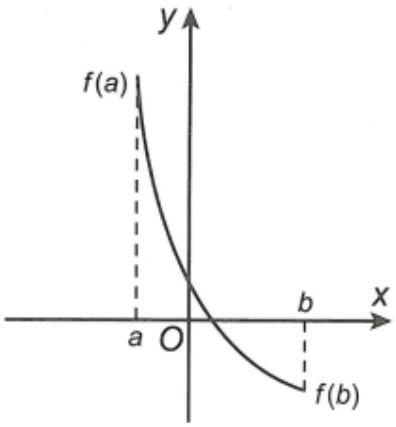
Bước 2. Tìm các điểm $x_i \in (a; b)$ mà tại đó $f'(x_i) = 0$ hoặc $f'(x_i)$ không xác định

Bước 3. Tính $f(a)$, $f(x_i)$, $f(b)$

Bước 4. Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên.

Khi đó $M = \max\limits_{[a; b]} f(x)$ và $m = \min\limits_{[a; b]} f(x)$

Chú ý:



+) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên đoạn [a; b] thì $\begin{cases}\max f(x)=f(b)\\ \min f(x)=f(a)\end{cases}$

+) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên đoạn [a; b] thì $\begin{cases}\max f(x)=f(a)\\ \min f(x)=f(b)\end{cases}$

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$. Giá trị của $\left(\min\limits_{[2;\,3]} y\right)^2+\left(\max\limits_{[2;\,3]} y\right)^2$ bằng

A. 16 **B.** $\dfrac{45}{4}$ **C.** $\dfrac{25}{4}$ **D.** $\dfrac{89}{4}$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $y'=\dfrac{-3}{(x-1)^2}<0,\ \forall x\neq 1$, do đó hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1);(1;+\infty)\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên [2; 3].

Do đó $\min\limits_{[2;\,3]} y=y(3)=\dfrac{5}{2};\ \max\limits_{[2;\,3]} y=y(2)=4$

Vậy $\left(\min\limits_{[2;\,3]} y\right)^2+\left(\max\limits_{[2;\,3]} y\right)^2=\left(\dfrac{5}{2}\right)^2+4^2=\dfrac{89}{4}$

Bài tập 2. Gọi *M, m* lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=x+\sqrt{4-x^2}$

Giá trị của biểu thức $P=M+m$ bằng

A. $2\left(\sqrt{2}-1\right)$ **B.** $2\left(\sqrt{2}+1\right)$ **C.** $\sqrt{2}+1$ **D.** $\sqrt{2}-1$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Tập xác định $D=[-2;\,2]$

Ta có $y'=1-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}=\dfrac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}},\ x\in(-2;\,2)$

$y'=0\Leftrightarrow\sqrt{4-x^2}=x\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ x=\pm 2\in(-2;\,2)\end{cases}$

$y\left(\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2};\ y\left(-\sqrt{2}\right)=0;\ y(2)=2;\ y(-2)=-2$

Vậy $M=2\sqrt{2},\ m=-2\Rightarrow P=2\sqrt{2}-2=2\left(\sqrt{2}-1\right)$

Bài tập 3. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2x^3-3x^2+m$ trên đoạn [0; 5] bằng 5 khi *m* bằng

A. 6 **B.** 10 **C.** 7 **D.** 5

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Hàm số xác định và liên tục trên $D=[0;5]$

Ta có $y'=0\Leftrightarrow 6x^2-6x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in D \\ x=1\in D \end{array}\right.$

$f(0)=m;\ f(1)=m-1;\ f(5)=175+m$

Dễ thấy $f(5)>f(0)>f(1),\ \forall m\in\mathbb{R}$ nên $\min\limits_{[0;5]} f(x)=f(1)=m-1$

Theo đề bài $\min\limits_{[0;5]} f(x)=5\Leftrightarrow m-1=5\Leftrightarrow m=6$

Bài tập 4. Gọi A, B là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{x+m^2+m}{x-1}$ trên đoạn [2; 3]. Tất cả các giá trị thực của tham số *m* để $A+B=\dfrac{13}{2}$ là

A. $m=1;\ m=-2$ **B.** $m=-2$

C. $m=\pm 2$ **D.** $m=-1;\ m=2$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Hàm số đã cho liên tục trên đoạn [2; 3]

Ta có $y'=\dfrac{-\left(m^2+m+1\right)}{(x-1)^2}<0,\ \forall m$

$\Rightarrow A=y(3)=\dfrac{m^2+m+3}{2};\ B=y(2)=m^2+m+2$

Do đó $A+B=\dfrac{13}{2}\Leftrightarrow \dfrac{m^2+m+3}{2}+m^2+m+2=\dfrac{13}{2}$

$\Leftrightarrow 3m^2+m-6=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-2 \end{array}\right.$

Bài tập 5. Biết hàm số $y=x^3+3mx^2+3(2m-1)x+1$ (với *m* là tham số) trên đoạn [-2; 0] đạt giá trị lớn nhất bằng 6. Các giá trị của tham số *m* là

A. $m=1$ **B.** $m=0$ **C.** $m=3$ **D.** $m=-1$

Hướng dẫn giải

Chọn D

$$y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1-2m \end{array}\right.$$

Vì $y(-2)=-1;\ y(0)=1$ và theo bài ra $\max\limits_{[-2;0]} y=6$ nên giá trị lớn nhất không đạt tại $x=-2;\ x=0$. Do đó giá trị lớn nhất đạt tại $y(-1)$ hoặc $y(1-2m)$.

Ta có $y(-1)=-3m+3,\ y(1-2m)=(1-2m)^2(m-2)+1$

- *Trường hợp 1:* Xét $-3m+3=6 \Leftrightarrow m=-1$

Thử lại với $m=-1$, ta có $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \in [-2;\ 0] \\ x=3 \notin [-2;\ 0] \end{array}\right.$ nên $m=-1$ là một giá trị cần tìm.

- *Trường hợp 2:* Xét $\begin{cases} (1-2m)^2(m-2)+1=6 \\ -2<1-2m<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-2m)^2(m-2)=5 \quad (1) \\ \dfrac{1}{2}<m<\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Vì $\dfrac{1}{2}<m<\dfrac{3}{2} \Rightarrow m-2<0 \Rightarrow (1-2m)^2(m-2)<0$ nên (1) vô nghiệm

Dạng 3: Tìm GTLN – GTNN của hàm số $y=|f(x)|$ trên đoạn [a; b]

1. Phương pháp giải

Thực hiện theo các bước sau

Bước 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;\ b]$, giả sử thứ tự là *M, m.*

Bước 2.

+) Tìm $\max\limits_{[a;\ b]} y=\max\{|M|;\ |m|\}$

+) Tìm $\min\limits_{[a;\ b]} y$

- *Trường hợp 1:* $M.m<0 \Rightarrow \min\limits_{[a;\ b]} y=0$

- *Trường hợp 2:* $m \geq 0 \Rightarrow \min\limits_{[a;\ b]} y=m$

- *Trường hợp 3:* $M \leq 0 \Rightarrow \min\limits_{[a;\ b]} y=|M|=-M$

Bước 3. Kết luận.

*** Tìm tham số để GTLN của hàm số $y=|f(x)|$ trên đoạn $[\alpha, \beta]$ bằng k**

Thực hiện theo các bước sau

Bước 1. Tìm $\max\limits_{[\alpha;\ \beta]} f(x)=\max\limits_{[\alpha;\ \beta]}\{|A|;\ |B|\}$

Bước 2. Xét các trường hợp

+) $|A|=k$ tìm *m,* thử lại các giá trị *m* đó

+) $|B|=k$ tìm *m,* thử lại các giá trị *m* đó

2. Bài tập

Bài tập 1. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^3-9x^2+24x-68\right|$ trên đoạn [-1; 4] bằng

A. 48 **B.** 52 **C.** -102 **D.** 0

Hướng dẫn giải

Chọn A

Bảng biến thiên của hàm số $y=x^3-9x^2+24x-68$ trên $[-1;\ 4]$

x	-1		2		4
y'		$+$	0	$-$	
y	-102	↗	-48	↘	-52

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $y=\left|x^3-9x^2+24x-68\right|$ trên đoạn $[-1;\,4]$ là

x	-1		2		4
y'		$-$	0	$+$	
y	102	↘	48	↗	52

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left|x^3-9x^2+24x-68\right|$ trên đoạn $[-1;\,4]$ bằng 48.

Cách khác: Theo trường hợp 3 thì $M=-48<0\Rightarrow \min y=48$

Bài tập 2: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số *m* sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{x^2+mx+m}{x+1}\right|$ trên đoạn [1; 2] bằng 2.

Số phần tử của tập S là

A. 3 **B.** 1 **C.** 4 **D.** 2

Hướng dẫn giải

Chọn D

Xét hàm số $y=f(x)=\dfrac{x^2+mx+m}{x+1}$

Ta có $y'=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\notin[1;\,2]\\x=-2\notin[1;\,2]\end{array}\right.$

Mặt khác $f(1)=\dfrac{2m+1}{2};\ f(2)=\dfrac{3m+4}{3}$

Do đó $\max\limits_{[1;\,2]} y=\max\left\{\left|\dfrac{2m+1}{2}\right|;\left|\dfrac{3m+4}{3}\right|\right\}$

- *Trường hợp 1:*

$$\max_{[1;\,2]} y=\left|\frac{2m+1}{2}\right|=2\rightarrow\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{3}{2}\\m=-\dfrac{5}{2}\end{array}\right.$$

+) Với $m=\dfrac{3}{2}\Rightarrow\left|\dfrac{3m+4}{3}\right|=\dfrac{17}{6}>2$ (loại)

+) Với $m=-\frac{5}{2}\Rightarrow\left|\frac{3m+4}{3}\right|=\frac{7}{6}<2$ (thỏa mãn)

- Trường hợp 2:

$$\max_{[1;\,2]} y=\left|\frac{3m+4}{3}\right|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\frac{2}{3}\\ m=-\frac{10}{3}\end{array}\right.$$

+) Với $m=\frac{2}{3}\Rightarrow\left|\frac{2m+1}{2}\right|=\frac{7}{6}<2$ (thỏa mãn)

+) Với $m=-\frac{10}{3}\Rightarrow\left|\frac{2m+1}{2}\right|=\frac{17}{6}>2$ (loại)

Vậy có hai giá trị của *m* thỏa mãn.

Bài tập 3. Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số *m* sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left|\frac{1}{4}x^4-14x^2+48x+m-30\right|$ trên đoạn [0; 2] không vượt quá 30. Tổng các phần tử của S bằng

A. 108 **B.** 120 **C.** 210 **D.** 136

Hướng dẫn giải

Chọn D

Xét hàm số $g(x)=\frac{1}{4}x^4-14x^2+48x+m-30$ trên đoạn [0; 2]

Ta có $g'(x)=x^3-28x+48\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-6\notin[0;\,2]\\ x=2\in[0;\,2]\\ x=4\notin[0;\,2]\end{array}\right.$

Để $\max_{[0;\,2]}\left|g(x)\right|\le 30\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left|g(0)\right|\le 30\\ \left|g(2)\right|\le 30\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left|m-30\right|\le 30\\ \left|m+14\right|\le 30\end{array}\right.\Leftrightarrow 0\le m\le 16$

$\Rightarrow m\in\{0;1;\,2;...;\,15;\,16\}$

Tổng các phần tử của S là 136.

Bài tập 4. Biết giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\sqrt{4-x^2}+x-\frac{1}{2}\right|+m$ bằng 18.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $0<m<5$ **B.** $10<m<15$

C. $5<m<10$ **D.** $15<m<20$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Xét hàm số $g(x)=\sqrt{4-x^2}+x-\frac{1}{2}$ liên tục trên tập xác định [-2; 2]

Ta có $g'(x)=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}+1\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}+1=0,\ x\in(-2;\ 2)$

$\Leftrightarrow \sqrt{4-x^2}=x\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 0 \\ 4-x^2=x^2 \end{cases}\Leftrightarrow x=\sqrt{2}\in(-2;\ 2)$

$g(-2)=-\frac{5}{2};\ g\left(\sqrt{2}\right)=\frac{-1+4\sqrt{2}}{2};\ g(2)=\frac{3}{2}$

Do đó $\max\limits_{[-2;\ 2]}\left|g(x)\right|=\frac{5}{2}$ khi $x=-2$, suy ra giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\frac{5}{2}+m$

Theo bài ra $\frac{5}{2}+m=18\Leftrightarrow m=15{,}5$. Vậy $15<m<20$

Dạng 4: Tìm điều kiện tham số để GTLN của hàm số *y = |f(x) + g(m)|* trên đoạn [a; b] đạt GTNN

1. Phương pháp giải

Thực hiện các bước sau

Bước 1. Tìm $\alpha=\max\limits_{[a;\ b]}f(x);\ \beta=\min\limits_{[a;\ b]}f(x)$

Bước 2. Gọi M là giá trị lớn nhất của

$y=\left|f(x)+g(m)\right|$ thì

$M=\max\left\{\left|\alpha+g(m)\right|;\left|\beta+g(m)\right|\right\}\geq\frac{\left|\alpha+g(m)\right|+\left|\beta+g(m)\right|}{2}=\frac{\left|\alpha+g(m)\right|+\left|-\beta-g(m)\right|}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\left|\alpha+g(m)\right|=\left|\beta+g(m)\right|$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{\left|\alpha+g(m)\right|+\left|-\beta-g(m)\right|}{2}\geq\frac{\left|\alpha+g(m)-\beta-g(m)\right|}{2}=\frac{\left|\alpha-\beta\right|}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\left[\alpha+g(m)\right]\left[-\beta-g(m)\right]\geq 0$

Bước 3. Kết luận $\min M=\frac{\left|\alpha-\beta\right|}{2}$ khi $g(m)=\frac{-\alpha-\beta}{2}$

2. Bài tập

Bài tập 1: Biết rằng giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^2+2x+m-4\right|$ trên đoạn [-2; 1] đạt giá trị nhỏ nhất, giá trị của tham số *m* bằng

A. 1 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $f(x)=x^2+2x$

Ta có $f'(x)=2x+2;\ f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1\in[-2;\ 1]$

$f(-2)=0;\ f(1)=3;\ f(-1)=-1$

Do đó $\max\limits_{[-2;\,1]} f(x)=3;\ \min\limits_{[-2;\,1]} f(x)=-1$

Suy ra $\max\limits_{[-2;\,1]} y=\max\left\{|m-5|;\,|m-1|\right\}$

$\geq \dfrac{|m-5|+|m-1|}{2} \geq \dfrac{|5-m+m-1|}{2}=2$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$\begin{cases}|m-5|=|m-1| \\ (5-m)(m-1)\geq 0\end{cases} \Rightarrow m=3$ (thỏa mãn)

Bài tập 2: Để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\sqrt{2x-x^2}-3m+4\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất thì m bằng

A. $m=\dfrac{3}{2}$ **B.** $m=\dfrac{5}{3}$ **C.** $m=\dfrac{4}{3}$ **D.** $m=\dfrac{1}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Tập xác định $D=[0;\,2]$

Đặt $f(x)=\sqrt{2x-x^2},\ x\in D$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}} \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

$f(0)=0;\ f(2)=0;\ f(1)=1$

Suy ra $P=\max\limits_{D} y=\max\left\{|3m-4|;\,|3m-5|\right\} \geq \dfrac{|3m-4|+|3m-5|}{2} \geq \dfrac{|5-3m+3m-4|}{2}=\dfrac{1}{2}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}|3m-4|=|3m-5| \\ (5-3m)(3m-4)\geq 0\end{cases} \Rightarrow m=\dfrac{3}{2}$ (thỏa mãn)

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số là nhỏ nhất khi $m=\dfrac{3}{2}$

Bài tập 3. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x,\,m)=\left|x^2-2x+5\right|+mx$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. 2 **B.** 5 **C.** 8 **D.** 9

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $\min f(x,\,m)\leq f(0,\,m)=5,\ \forall m\in\mathbb{R}$

Xét $m=2$ ta có $f(x,\,2)=\left|x^2-2x+5\right|+2x\geq x^2-2x+5+2x\geq 5,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Dấu bằng xảy ra tại $x=0$. Suy ra $\min f(x,\,2)=5,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Do đó $\begin{cases}\min f(x,\,m)\le 5,\ \forall m\in\mathbb{R}\\ \min f(x,\,2)=5,\ \forall x\in\mathbb{R}\end{cases}\Rightarrow \max\left(\min f(x,\,m)\right)=5$, đạt được khi $m=2$

Tổng quát: $y=\left|ax^2+bx+c\right|+mx$

Trường hợp 1: $a.c>0\ \Rightarrow \max\left(\min y\right)=c$

Đạt được khi $m=-b$

Bài tập 4. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x,\,m)=\left|x^2-4x-7\right|+mx$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. 7 **B.** -7 **C.** 0 **D.** 4

Hướng dẫn giải

Chọn C

Phương trình $x^2-4x-7=0$ luôn có hai nghiệm trái dấu $x_1<0<x_2$

Trường hợp 1: Nếu $m\ge 0$

Ta có $\min f(x,\,m)\le f(x,\,m)=mx_1\le 0,\ \forall m\in\mathbb{R}$

Xét $m=0$ ta có $f(x,\,0)=\left|x^2-4x-7\right|\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Dấu bằng xảy ra tại $x=x_{1,\,2}$.

Suy ra $\min f(x,\,0)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Do đó $\begin{cases}\min f(x,\,m)\le 0,\ \forall m\in\mathbb{R}\\ \min f(x,\,0)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}\end{cases}\Rightarrow \max\left(\min f(x,\,m)\right)=0$ khi $m=0$

Trường hợp 2: Nếu $m<0$

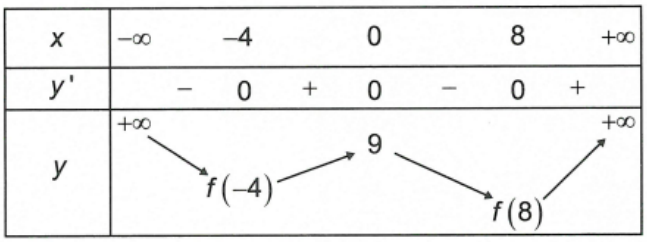
Ta có $\min f(x,\,m)\le f(x_2,\,m)=mx_2<0,\ \forall m\in\mathbb{R}\Rightarrow \max\left(\min f(x,m)\right)<0$

So sánh cả hai trường hợp thì $\max\left(\min f(x,m)\right)=0$ khi $m=0$

Trường hợp 2: $a.c<0\Rightarrow \max\left(\min y\right)=0$ *Đạt được khi* $m=0$

Dạng 5: TÌM GTLN-GTNN khi cho đồ thị - bảng biến thiên

Bài tập 1. Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới



Biết $f(-4)>f(8)$, khi đó giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $\mathbb{R}$ bằng

A. 9 **B.** $f(-4)$ **C.** $f(8)$ **D.** -4

Hướng dẫn giải

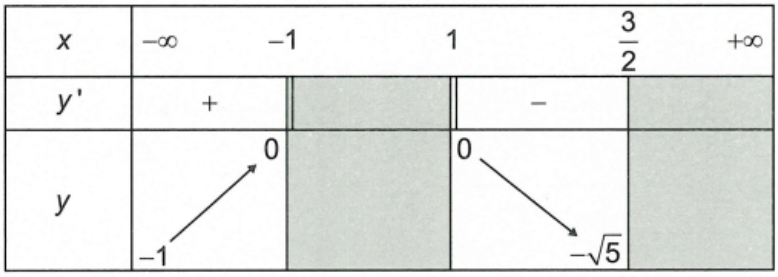
Chọn C

Từ bảng biến thiên ta có $f(x) \ge f(-4),\ \forall x \in (-\infty; 0]$ và $f(x) \ge f(8),\ \forall x \in (0; +\infty)$.

Mặt khác $f(-4) > f(8)$ suy ra $\forall x \in (-\infty; +\infty)$ thì $f(x) \ge f(8)$

Vậy $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x) = f(8)$

Bài tập 2. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp $D = (-\infty; -1] \cup \left[1; \dfrac{3}{2}\right]$ và có bảng biến thiên như sau



Khẳng định đúng là

A. $\max\limits_{D} f(x) = 0$; không tồn tại $\min\limits_{D} f(x)$

B. $\max\limits_{D} f(x) = 0$; $\min\limits_{D} f(x) = -\sqrt{5}$

C. $\max\limits_{D} f(x) = 0$; $\min\limits_{D} f(x) = -1$

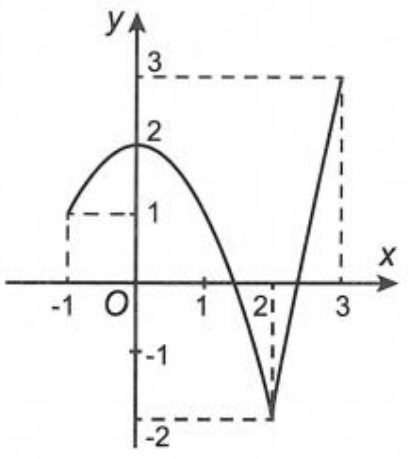
D. $\min\limits_{D} f(x) = 0$; không tồn tại $\max\limits_{D} f(x)$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên thì $\max\limits_{D} f(x) = f(\pm 1) = 0;\ \min\limits_{D} f(x) = f\left(\dfrac{3}{2}\right) = -\sqrt{5}$

Bài tập 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị của $M - m$ bằng

A. 1 **B.** 3 **C.** 4 **D.** 5

Hướng dẫn giải

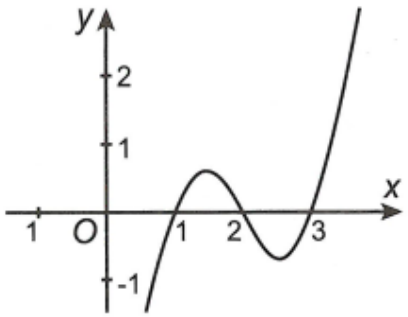
Chọn D

Dựa vào đồ thị suy ra

$M = f(3) = 3;\ m = f(2) = -2$

Vậy $M - m = 5$

Bài tập 4. Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $[1;3]$ tại x_0. Khi đó giá trị của $x_0^2 - 2x_0 + 2019$ bằng bao nhiêu?

A. 2018 **B.** 2019 **C.** 2021 **D.** 2022

Hướng dẫn giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có bảng biến thiên như sau

x	1		2		3
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$f(1)$	↗	$f(2)$	↘	$f(3)$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số $y = f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $[1;3]$ tại $x_0 = 2$.

Vậy $x_0^2 - 2x_0 + 2019 = 2019$

Dạng 6. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số lượng giác

1. Phương pháp giải

Ghi nhớ: Điều kiện của các ẩn phụ

- Nếu $\left[\begin{array}{l} t = \sin x \\ t = \cos x \end{array}\right. \Rightarrow -1 \le t \le 1$

- Nếu $\left[\begin{array}{l} t = |\cos x| \\ t = \cos^2 x \end{array}\right. \Rightarrow 0 \le t \le 1$

- Nếu $\left[\begin{array}{l} t=|\sin x| \\ t=\sin^2 x \end{array}\right. \Rightarrow 0 \le t \le 1$

- Nếu $t=\sin x \pm \cos x=\sqrt{2}.sni\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$

Bước 1. Đặt ẩn phụ và tìm điều kiện cho ẩn phụ

Bước 2. Giải bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số theo ẩn phụ

Bước 3. Kết luận (Chọn đáp án)

2. Bài tập

Bài tập 1. Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=2\cos 2x+2\sin x$ là

A. $M=\frac{9}{4}; m=-4$ **B.** $M=4; m=0$

C. $M=0; m=-\frac{9}{4}$ **D.** $M=4; m=-\frac{9}{4}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $y=2\cos 2x+2\sin x=2\left(1-2\sin^2 x\right)+2\sin x=-4\sin^2 x+2\sin x+2$

Đặt $t=\sin x, t\in[-1;1]$, ta được $y=-4t^2+2t+2$

Ta có $y'=0 \Leftrightarrow -8t+2=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{4}\in(-1;1)$

Vì $\left\{\begin{array}{l} y(-1)=-4 \\ y(1)=0 \\ y\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{4} \end{array}\right.$ nên $M=\frac{9}{4}; m=-4$

Bài tập 2. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{\cos^2 x+|\cos x|+1}{|\cos x|+1}$ bằng

A. $\frac{3}{2}$ **B.** $\frac{5}{2}$ **C.** $\frac{7}{2}$ **D.** 3

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $t=|\cos x| \Rightarrow 0 \le t \le 1$, ta được $y=f(t)=\frac{t^2+t+1}{t+1}$ với $0 \le t \le 1$

Vì $f'(t)=\frac{t^2+2t}{(t+1)^2} \ge 0, \forall t\in[0;1]$ nên $\min\limits_{[0;1]} f(t)=f(0)=1; \max\limits_{[0;1]} f(t)=f(1)=\frac{3}{2}$

Suy ra tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho bằng

$\min\limits_{[0;\,1]} f(t) + \max\limits_{[0;\,1]} f(t) = 1 + \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2}$

Bài tập 3. Giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \cos^4 x + \sqrt{3}\sin^2 x + 2$ là

A. $M = 2 + \sqrt{3}$ **B.** $M = 3$

C. $M = \dfrac{5}{4} + \sqrt{3}$ **D.** $M = 3 + \sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $t = \cos^2 x \Rightarrow 0 \le t \le 1$, ta được $y = t^2 + \sqrt{3}(1-t) + 2$ với $t \in [0;\,1]$

Ta có $y' = 2t - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \in (0;\,1)$

Vì $y(0) = 2 + \sqrt{3};\ y\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{5}{4} + \sqrt{3};\ y(1) = 3$ nên $M = 2 + \sqrt{3}$

Bài tập 4. Cho hàm số $y = \dfrac{\left|\sin^2 x - (m+1)\sin x + 2m + 2\right|}{\sin x - 2}$ (với m là tham số thực).

Giá trị lớn nhất của hàm số đạt giá trị nhỏ nhất khi m bằng

A. $-\dfrac{3}{2}$ **B.** $\dfrac{1}{2}$ **C.** $\dfrac{3}{2}$ **D.** $-\dfrac{1}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Xét $f(x) = \dfrac{\sin^2 x - \sin x + 2}{\sin x - 2}$

Đặt $t = \sin x \Rightarrow -1 \le t \le 1$, ta được $f(t) = \dfrac{t^2 - t + 2}{t - 2}$ với $t \in [-1;\,1]$

Ta có $f'(t) = \dfrac{t^2 - 4t}{(t-2)^2} = 0 \Rightarrow t^2 - 4t = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \in (-1;\,1) \\ t = 4 \notin (-1;\,1) \end{array}\right.$

Vì $f(-1) = \dfrac{-4}{3};\ f(1) = -2;\ f(0) = -1$ nên $\max\limits_{[-1;\,1]} f(t) = -1$ và $\min\limits_{[-1;\,1]} f(t) = -2$

Hay $-2 \le \dfrac{\sin^2 x - \sin x + 2}{\sin x - 2} \le -1,\ \forall x$

Mặt khác $y = \left|\dfrac{\sin^2 x - \sin x + 2}{\sin x - 2} - m\right| = \left|f(x) - m\right|,\ \forall -2 \le f(x) \le -1$

Do đó $\max\limits_{\mathbb{R}} y = \max\limits_{[-2;\,-1]} \left|f(x) - m\right| = \max\left\{|m+2|, |m+1|\right\} = \max\left\{|m+2|, |-m-1|\right\}$

$\Rightarrow \max y \ge \dfrac{|m+2| + |-m-1|}{2} \ge \dfrac{|(m+2) + (-m-1)|}{2} = \dfrac{1}{2}$

Dấu bằng đạt được khi $\begin{cases}|m+2|=|-m-1| \\ (m+2)(-m-1)\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow m=-\dfrac{3}{2}$

Bài tập 5. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|1+2\cos x|+|1+2\sin x|$ bằng

A. $\sqrt{2}-1$ **B.** $\sqrt{3}-1$ **C.** 1 **D.** $2-\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn B

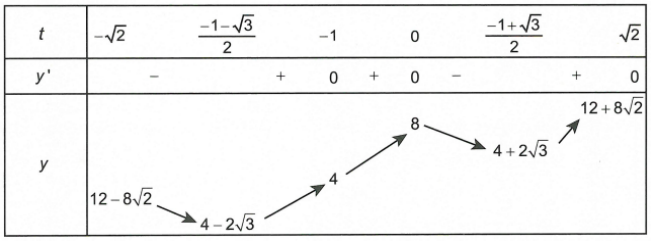
Ta có $P^2=6+4(\sin x+\cos x)+2|1+2(\sin x+\cos x)+4\sin x\cos x|$

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}.\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ với $|t|\le\sqrt{2}\Rightarrow \sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$

Xét $y=P^2=6+4t+2|2t^2+2t-1|=\begin{cases}4t^2+8t+4 & khi\ \ t\le\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2};\ t\ge\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ -4t^2+8 & khi\ \ \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}<t<\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

$\Rightarrow y'=\begin{cases}8t+8 & khi\ \ t<\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2};\ t>\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \\ -8t & khi\ \ \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}<t<\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\end{cases}$

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên, suy ra $\min\limits_{[-\sqrt{2};\sqrt{2}]} f(t)=4-2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}-1\right)^2$

$\Rightarrow \min P=\sqrt{3}-1$

Bài tập 6. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\sin x+\cos 2x$ trên đoạn $[0;\pi]$ là

A. $\max\limits_{[0;\pi]} y=\dfrac{5}{4}$ **B.** $\max\limits_{[0;\pi]} y=1$ **C.** $\max\limits_{[0;\pi]} y=2$ **D.** $\max\limits_{[0;\pi]} y=\dfrac{9}{8}$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $t=\sin x\Rightarrow \cos 2x=1-2\sin^2 x=1-2t^2$, với $x\in[0;\pi]\Rightarrow t\in[0;1]$

Ta được $f(t)=-2t^2+t+1$ với $t\in[0;1]$

Ta có $f'(t)=-4t+1=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{4}\in(0;1)$

Do $f(0)=1;\ f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{8};\ f(1)=0$ nên $\max\limits_{[0;\,1]} f(t)=\frac{9}{8}$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $\max\limits_{[0;\,\pi]} y=\frac{9}{8}$

Dạng 7. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số khác

Bài tập 1. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=4\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^3+\frac{6x}{x^2+1}-1$ bằng

A. $\frac{5}{2}$ **B.** -5 **C.** $-\frac{9}{2}$ **D.** 3

Hướng dẫn giải

Chọn A

Do $x^2+1\ge 2|x|\Rightarrow \frac{|x|}{x^2+1}\le\frac{1}{2}$

Đặt $t=\frac{x}{x^2+1}\Rightarrow |t|\le\frac{1}{2}$

Khi đó $y=4t^3+6t-1$ với $t\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$

Vì $y'=12t^2+6>0,\ \forall t$ nên hàm số đồng biến trên $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]$

Do đó $\max\limits_{\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right]} y=y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}$

Bài tập 2. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{-x+9}$ lần lượt là

A. $2;\sqrt{2}$ **B.** $4;2$ **C.** $4;\sqrt{2}$ **D.** $4;2\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Tập xác định $D=[1;9]$

Ta có $y'=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}-\frac{1}{2\sqrt{-x+9}}=0\Rightarrow\sqrt{x-1}=\sqrt{-x+9}\Rightarrow x=5\in(1;9)$

Vì $y(1)=y(9)=2\sqrt{2};\ y(5)=4$ nên $\max y=4;\ \min y=2\sqrt{2}$.

Nhận xét: *với hàm số* $y=\sqrt{x+a}+\sqrt{-x+b}\ \ (-a\le x\le b;\ a+b\ge 0)$ *thì*

$$\begin{cases} y\ge 0 \\ y^2=a+b+2\sqrt{x+a}.\sqrt{-x+b}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} y^2\ge a+b \\ y^2\le a+b+(x+a)+(-x+b)=2(a+b)\end{cases}$$

Suy ra $\sqrt{a+b}\le y\le 2\sqrt{a+b}$ *dấu bằng luôn xảy ra.*

Bài tập 3. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}-\sqrt{(x+1)(3-x)}$ bằng

A. $\frac{-5}{2}$ **B.** -2 **C.** -4 **D.** 2

Hướng dẫn giải

Chọn A

Tập xác định của hàm số là $D=[-1;3]$

Đặt $t=\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}\Rightarrow t^2=4-2\sqrt{(x+1)(3-x)}\Rightarrow\sqrt{(x+1)(3-x)}=\frac{4-t^2}{2}$

Do $t^2=4-2\sqrt{(x+1)(3-x)}\le 4,\ \forall x\in[-1;3]$, từ đó suy ra $-2\le t\le 2$

Bài toán quy về tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(t)=\frac{t^2}{2}+t-2$ trên đoạn $[-2;2]$.

Ta có $g'(t)=t+1=0\Leftrightarrow t=-1\in(-2;2)$

Lại có $g(-2)=-2;\ g(2)=2;\ g(-1)=\frac{-5}{2}$

Suy ra giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{-5}{2}$

Nhận xét: Với hàm số $y=\sqrt{x+a}-\sqrt{-x+b}\ (-a\le x\le b;\ a+b\ge 0)$ *thì*

$y^2=a+b-2\sqrt{x+a}.\sqrt{-x+b}\le a+b$

$\Rightarrow -\sqrt{a+b}\le y\le\sqrt{a+b}$

Dạng 8. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức nhiều biến

Bài tập 1. Cho biểu thức $P=\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$ với $x^2+y^2\ne 0$. Giá trị nhỏ nhất của P bằng

A. 3. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** 1. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

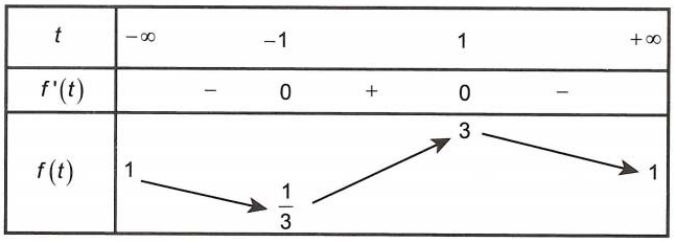
Chọn B.

- Nếu $y=0$ thì P =1. (1)
- Nếu $y\ne 0$ thì $P=\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}=\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2+\left(\frac{x}{y}\right)+1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2-\left(\frac{x}{y}\right)+1}$.

  Đặt $t=\frac{x}{y}$, khi đó $P=f(t)=\frac{t^2+t+1}{t^2-t+1}$.

$f'(t)=\dfrac{-2t^2+2}{(t^2-t+1)^2}=0\Leftrightarrow -2t^2+2=0\Leftrightarrow t=\pm 1.$

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên ta có $P=f(t)\ge\dfrac{1}{3}.(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $P=f(t)\ge\dfrac{1}{3}\Rightarrow \min P=\dfrac{1}{3}.$

Bài tập 2. Cho hai số thực x,y thỏa mãn $x\ge 0;y\ge 0$ và $x+y=1$. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{x}{y+1}+\dfrac{y}{x+1}$ lần lượt là

A. $\dfrac{1}{2}$ và 1. **B.** 0 và 1. **C.** $\dfrac{2}{3}$ và 1. **D.** 1 và 2.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $P=\dfrac{x}{y+1}+\dfrac{y}{x+1}=\dfrac{x(x+1)+y(y+1)}{(x+1)(y+1)}=\dfrac{(x+y)^2-2xy+1}{xy+x+y+1}=\dfrac{2-2xy}{2+xy}.$

Đặt $t=xy$ ta được $P=\dfrac{2-2t}{2+t}.$

Vì $x\ge 0;y\ge 0\Rightarrow t\ge 0.$

Mặt khác $1=x+y\ge 2\sqrt{xy}\Leftrightarrow xy\le\dfrac{1}{4}\Rightarrow t\le\dfrac{1}{4}.$

Khi đó, bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(t)=\dfrac{2-2t}{2+t}$ trên $\left[0;\dfrac{1}{4}\right].$

Xét hàm số $g(t)=\dfrac{2-2t}{2+t}$ xác định và liên tục trên $\left[0;\dfrac{1}{4}\right].$

Ta có $g'(t)=\dfrac{-6}{(2+t)^2}<0$ với $\forall t\in\left(0;\dfrac{1}{4}\right)$

$\Rightarrow$ hàm số $g(t)$ nghịch biến trên đoạn $\left[0;\dfrac{1}{4}\right].$

Do đó $\begin{cases}\min\limits_{\left[0;\frac{1}{4}\right]} g(t)=g\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{2}{3}\\ \max\limits_{\left[0;\frac{1}{4}\right]} g(t)=g(0)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\min P=\frac{2}{3}\\ \max P=1\end{cases}$.

Bài tập 3. Cho x, y là các số thực thỏa mãn $(x-3)^2+(y-1)^2=5$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{3y^2+4xy+7x+4y-1}{x+2y+1}$ bằng

A. 3. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{114}{11}$. **D.** $2\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$(x-3)^2+(y-1)^2=5\Rightarrow x^2+y^2-6x-2y+5=0.$

$P=\dfrac{(3y^2+4xy+7x+4y-1)+(x^2+y^2-6x-2y+5)}{x+2y+1}$

$=\dfrac{4y^2+4xy+x^2+x+2y+4}{x+2y+1}=\dfrac{(2y+x)^2+(x+2y)+4}{x+2y+1}$

Đặt $t=x+2y.$

$(1^2+2^2)\left[(x-3)^2+(y-1)^2\right]\ge\left[(x-3)+(2y-2)\right]^2$

$\Rightarrow(x+2y-5)^2\le 25\Leftrightarrow 0\le x+2y\le 10.$

Ta được $P=f(t)=\dfrac{t^2+t+4}{t+1}=t+\dfrac{4}{t+1},0\le t\le 10.$

Xét $f'(t)=1-\dfrac{4}{(t+1)^2}=0\Rightarrow(t+1)^2=4\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\in(0;10)\\ t=-3\notin(0;10)\end{array}\right.$

Vì $f(0)=4;f(10)=\dfrac{114}{11};f(1)=3\Rightarrow\min P=3$ khi $t=1$.

Bài tập 4. Gọi x_0,y_0,z_0 là ba số thực dương sao cho biểu thức

$P=\dfrac{3}{2x+y+\sqrt{8yz}}-\dfrac{8}{\sqrt{2(x^2+y^2+z^2)+4xz}+3}-\dfrac{1}{x+y+z}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Tổng $x_0+y_0+z_0$ bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $P=\dfrac{3}{2x+y+2\sqrt{2yz}}-\dfrac{8}{\sqrt{2y^2+2(x+z)^2}+3}-\dfrac{1}{x+y+z}$

$\geq \dfrac{3}{2(x+y+z)}-\dfrac{8}{(x+y+z)+3}-\dfrac{1}{x+y+z}$.

Đặt $x+y+z=t>0$. Khi đó $P=f(t)=\dfrac{1}{2t}-\dfrac{8}{t+3},(t>0)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{3(t-1)(5t+3)}{2t^2(t+3)^2}=0\Leftrightarrow t=1$.

Bảng biến thiên

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	0

Suy ra $P\geq -\dfrac{3}{2}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ y=2z \\ y=x+z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z=\dfrac{1}{4} \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Do đó $x_0+y_0+z_0=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}=1.$

Bài tập 5. Cho x,y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} x^2-xy+3=0 \\ 2x+3y-14\leq 0 \end{cases}$.

Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P=3x^2y-xy^2-2x^3+2x$ bằng

A. 8. **B.** 0. **C.** 12. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Với điều kiện bài toán $x,y>0$ và $x^2-xy+3=0\Rightarrow y=\dfrac{x^2+3}{x}=x+\dfrac{3}{x}$.

Lại có

$2x+3y-14\leq 0\Leftrightarrow 2x+3\left(x+\dfrac{3}{x}\right)-14\leq 0\Leftrightarrow 5x^2-14x+9\leq 0\Leftrightarrow x\in\left[1;\dfrac{9}{5}\right].$

Từ đó $P=3x^2\left(x+\dfrac{3}{x}\right)-x\left(x+\dfrac{3}{x}\right)^2-2x^3+2x=5x-\dfrac{9}{x}$.

Xét hàm số $f(x)=5x-\dfrac{9}{x};\forall x\in\left[1;\dfrac{9}{5}\right]\Rightarrow f'(x)=5+\dfrac{9}{x^2}>0;\forall x\in\left[1;\dfrac{9}{5}\right].$

Suy ra hàm số đồng biến trên $\left[1;\dfrac{9}{5}\right]$

$\Rightarrow f(1) \le f(x) \le f\left(\frac{9}{5}\right) \Rightarrow -4 \le f(x) \le 4 \Rightarrow \max P + \min P = 4 + (-4) = 0$.

Bài tập 6. Cho x, y, z là ba số thực thuộc đoạn $[1;9]$ và $x \ge y, x \ge z$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{y}{10y - x} + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{y+z} + \frac{z}{z+x}\right)$ bằng

A. $\frac{11}{18}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Thật vậy $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \ge \frac{2}{1+\sqrt{ab}} \Leftrightarrow \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \left(\sqrt{ab} - 1\right) \ge 0$ đúng do $ab \ge 1$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi a = b hoặc ab = 1.

Áp dụng bất đẳng thức trên $P = \frac{1}{10 - \frac{x}{y}} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{z}{y}} + \frac{1}{1+\frac{x}{z}}\right) \ge \frac{1}{10 - \frac{x}{y}} + \frac{1}{1+\sqrt{\frac{x}{y}}}$.

Đặt $\sqrt{\frac{x}{y}} = t \in [1;3]$. Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{10 - t^2} + \frac{1}{1+t}$ trên đoạn $[1;3]$.

$f'(t) = \frac{2t}{(10-t^2)^2} - \frac{1}{(1+t)^2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t^4 - 2t^3 - 24t^2 - 2t + 100 = 0$.

$\Leftrightarrow (t-2)(t^3 - 24t - 50) = 0 \Leftrightarrow t = 2$ do $t^3 - 24t - 50 < 0, \forall t \in [1;3]$.

Bảng biến thiên

t	1		2		3
$f'(t)$		−	0	+	
$f(t)$	$\frac{11}{18}$	↘	$\frac{1}{2}$	↗	$\frac{5}{4}$

Suy ra $P_{\min} = \frac{1}{2}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} x = 4y \\ \left[\begin{array}{l} \frac{z}{y} = \frac{x}{z} \\ \frac{x}{y} = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ z = 2y \end{cases}$

Dạng 9. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số y = f(u(x)),y = f(u(x))±h(x)… khi biết bảng biến thiên hoặc đồ thị của hàm số y = f(x)

1. Phương pháp giải

Thực hiện theo một trong hai cách

Cách 1:

Bước 1. Đặt t = u(x).

Đánh giá giá trị của t trên khoảng K.

Chú ý: Có thể sử dụng khảo sát hàm số, bất đẳng thức để đánh giá giá trị của t = u(x).

Bước 2. Từ bảng biến thiên hoặc đồ thị của hàm số cho ta giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số y = f(t).

Bước 3. Kết luận.

Cách 2:

Bước 1. Tính đạo hàm $y' = u'(x)f'(u(x))$.

Bước 2. Tìm nghiệm $y' = u'(x)f'(u(x)) = 0$.

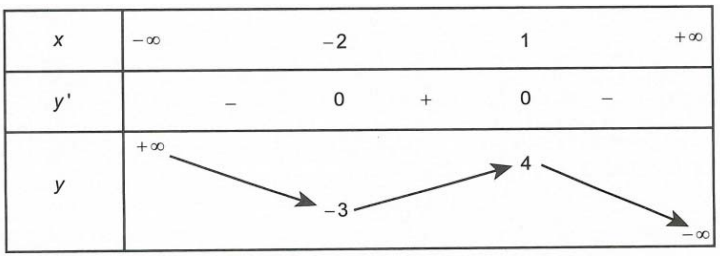
Bước 3. Lập bảng biến thiên.

Bước 4. Kết luận về giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x), y = f(u(x))$,

$y = f(u(x)) \pm h(x)$...

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Hàm số $y = f(|x-1|)$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;2]$ bằng

A. $f(-2)$. **B.** $f(2)$. **C.** $f(1)$. **D.** $f(0)$.

Hướng dẫn giải

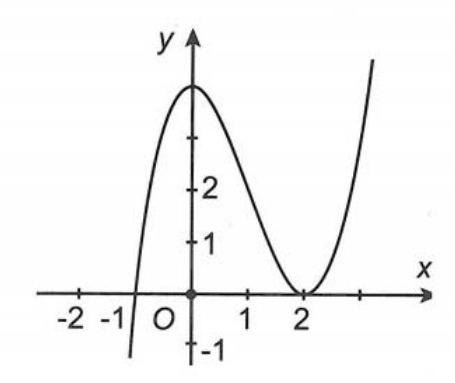
Chọn D.

Đặt $t = |x-1|, \forall x \in [0;2] \Rightarrow t \in [0;1]$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số $y = f(t)$ có giá trị nhỏ nhất $\min\limits_{[0;1]} f(t) = f(0)$.

Bài tập 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau. Khi đó hàm số $y = f(2-x^2)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên $\left[0;\sqrt{2}\right]$ bằng

A. $f(-2)$. **B.** $f(2)$. **C.** $f(1)$. **D.** $f(0)$.



Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $t = 2 - x^2$. Từ $x \in \left[0;\sqrt{2}\right] \Leftrightarrow 0 \le x^2 \le 2 \Leftrightarrow 2 \ge 2 - x^2 \ge 0 \Rightarrow t \in \left[0;2\right]$.

Dựa vào đồ thị, hàm số $y = f(t)$ có giá trị nhỏ nhất $\min\limits_{[0;2]} f(t) = f(2)$.

Bài tập 3. Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x+3)$ trên đoạn $\left[0;2\right]$ là

A. 64. **B.** 65. **C.** 66. **D.** 67.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hàm số có dạng $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$. Từ bảng biến thiên ta có

$$\begin{cases} f(0) = 3 \\ f(1) = 2 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ a + b + c = 2 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b = -2 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^4 - 2x^2 + 3.$$

Đặt $t = x + 3, x \in \left[0;2\right] \Leftrightarrow t \in \left[3;5\right]$.

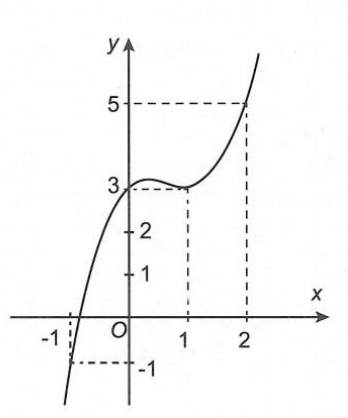
Dựa vào đồ thị, hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên đoạn $\left[3;5\right]$.

Do đó $\min\limits_{[0;2]} f(x+3) = \min\limits_{[3;5]} f(t) = f(3) = 66$.

Dạng 10. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $\mathbf{y = f\left(u(x)\right)}$, $\mathbf{y = f\left(u(x)\right) \pm h(x)}$… Khi biết đồ thị của hàm số $\mathbf{y = f'(x)}$

Bài tập 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Biết rằng đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như dưới đây.



Lập hàm số $g(x)=f(x)-x^2-x$.

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $g(-1)>g(1)$.

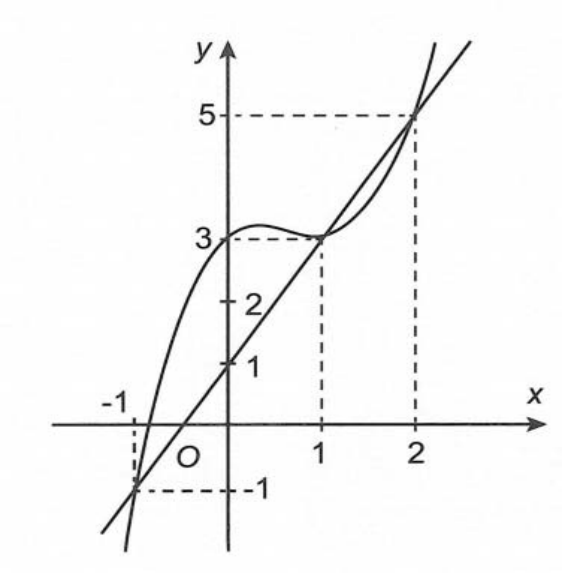
B. $g(-1)=g(1)$.

C. $g(1)=g(2)$.

D. $g(1)>g(2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Ta có $g'(x)=f'(x)-2x-1$.

Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=2x+1$ ta có $g'(x)=0$

$$\Leftrightarrow f'(x)=2x+1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\\x=2\end{array}\right.\ .$$

Bảng biến thiên

x	-1		1		2
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$g(x)$	$g(-1)$	↗	$g(1)$	↘	$g(2)$

Ta chỉ cần so sánh trên đoạn $[-1;2]$. Đường thẳng $y=2x+1$ là đường thẳng đi qua các điểm $A(-1;-1)$, $B(1;3)$, $C(2;5)$ nên đồ thị hàm số $y=f'(x)$ và đường thẳng $y=2x+1$ cắt nhau tại 3 điểm.

Dạng 11. Ứng dụng của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trong các bài toán thực tế

Bài tập 1. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s = 3t^2 - t^3$. Thời điểm t (giây) mà tại đó vận tốc $v(m/s)$ của chất điểm chuyển động đạt giá trị lớn nhất là

A. t = 2s **B.** t = 5s **C.** t = 1s **D.** t =3s

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $v(t) = s'(t) = 6t - 3t^2 \Rightarrow v(t) = -3(t-1)^2 + 3 \le 3, \forall t \in \mathbb{R}$

Giá trị lớn nhất của $v(t) = 3$ khi $t = 1$.

Bài tập 2. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 7 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. 180 (m/s) **B.** 36 (m/s) **C.** 144 (m/s) **D.** 24 (m/s)

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $v(t) = s'(t) = -t^2 + 12t$

$v'(t) = -2t + 12 = 0 \Leftrightarrow t = 6$

Vì $v(6) = 36; v(0) = 0; v(7) = 35$ nên vận tốc lớn nhất đạt được bằng 36 (m/s).

Bài tập 3. Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được cho bởi công thức $c(t) = \frac{t}{t^2+1}(mg/L)$. Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

A. 4 giờ **B.** 1 giờ **C.** 3 giờ **D.** 2 giờ

Hướng dẫn giải

Chọn B

Xét hàm số $c(t) = \frac{t}{t^2+1}(t > 0)$

$$c'(t) = \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \in (0;\infty) \\ t = -1 \notin (0;\infty) \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

t	0	1	$+\infty$
$c'(t)$	+	0	–
$c(t)$	0 ↗	$c(1)$	↘ 0

Với t = 1 (giờ) thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất.

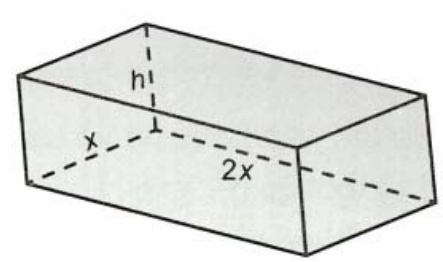
Bài tập 4. Người ta xây một bể chứa nước với dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3}m^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây bể là 600.000 đồng $/m^2$. Hãy xác định kích thước của bể sao cho chi phí thuê nhân công thấp nhất. Chi phí đó là

A. 75 triệu đồng **B.** 85 triệu đồng **C.** 90 triệu đồng **D.** 95 triệu đồng

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi $x(m)$ là chiều rộng của đáy bể, khi đó chiều dài của đáy bể là $2x(m)$ và $h(m)$ là chiều cao bể



Bể có thể tích bằng $2x^2h=\frac{500}{3}\Leftrightarrow h=\frac{250}{3x^2}$

Diện tích cần xây $S=2\left(xh+2xh\right)+2x^2=6x\frac{250}{3x^2}+2x^2=\frac{500}{x}+2x^2$

Xét hàm $f\left(x\right)=\frac{500}{x}+2x^2,\left(x>0\right);f'\left(x\right)=\frac{-500}{x^2}+4x\Rightarrow f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=5$

Bảng biến thiên

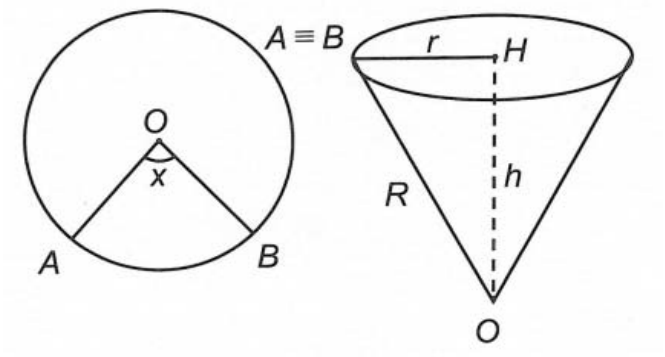
x	0	5	$+\infty$
$f'(x)$	–	0	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	150	↗ $+\infty$

Do đó $\min\limits_{(0;+\infty)}f\left(x\right)=f\left(5\right)=150$

Chi phí thuê nhân công thấp nhất khi diện tích xây dựng là nhỏ nhất và bằng $S_{\min}=150$

Vậy giá thuê nhân công thấp nhất là 150.600000 = 90.000.000 đồng.

Bài tập 5. Bác Hoàng có một tấm thép mỏng hình tròn, tâm O, bán kính 4 dm. Bác định cắt ra một hình quạt tròn tâm O, quấn rồi hàn ghép hai mép của hình quạt tròn lại để tạo thành một đồ vật dạng mặt nón tròn xoay (tham khảo hình vẽ). Dung tích lớn nhất có thể của đồ vật mà bác Hoàng tạo ra bằng bao nhiêu? (bỏ qua phần mối hàn và độ dày của tấm thép)



A. $\frac{128\pi\sqrt{3}}{27}dm^3$ **B.** $\frac{128\pi\sqrt{3}}{81}dm^3$ **C.** $\frac{16\pi\sqrt{3}}{27}dm^3$ **D.** $\frac{64\pi\sqrt{3}}{27}dm^3$

Hướng dẫn giải

Khi hàn hai mép của hình quạt tròn, độ dài đường sinh của hình nón bằng bán kính của hình quạt tròn, tức là $OA = 4dm$

Chọn A

Thể tích của hình nón $V = \frac{1}{3}\pi.r^2.h = \frac{1}{3}\pi.\left(16 - h^2\right).h$ với $0 < h < 4$

Ta có $V'(h) = \frac{1}{3}\pi.\left(16 - 3h^2\right) \Rightarrow V'(h) = 0 \Leftrightarrow h = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

h	0		$\frac{4\sqrt{3}}{3}$		4
$V'(h)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$V(h)$	‖ 0	↗	$\frac{128\pi\sqrt{3}}{27}$	↘	‖ 0

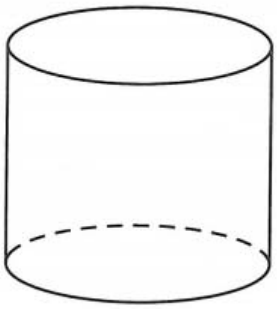
Dựa vào bảng biến thiên, suy ra thể tích lớn nhất của hình nón là $\frac{128\pi\sqrt{3}}{27}dm^3$.

Bài tập 6. Người ta làm chiếc thùng phi dạng hình trụ, kín hai đáy, với thể tích theo yêu cầu là $2\pi m^3$. Hỏi bán kính đáy R và chiều cao h của thùng phi bằng bao nhiêu để khi làm thì tiết kiệm vật liệu nhất

A. $R = \frac{1}{2}m; h = 8m$ **B.** $R = 1m; h = 2m$ **C.** $R = 2m; h = \frac{1}{2}m$ **D.** $R = 4m; h = \frac{1}{5}m$

Hướng dẫn giải

Chọn B



Từ giả thiết ta có $V=\pi R^2h=2\pi\Rightarrow h=\dfrac{2}{R^2}$

Diện tích toàn phần của thùng phi là $S_{tp}=2\pi Rh+2\pi R^2=2\pi\left(R^2+\dfrac{2}{R}\right)$

Xét hàm số $f\left(R\right)=R^2+\dfrac{2}{R}$ với $R\in\left(0;+\infty\right)$

Ta có $f'\left(R\right)=2R-\dfrac{2}{R^2}=\dfrac{2\left(R^3-1\right)}{R^2}$

$f'\left(R\right)=0\Leftrightarrow R=1$

Bảng biến thiên

R	0		1		$+\infty$
$f'(R)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(R)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra diện tích toàn phần đạt giá trị nhỏ nhất khi $R=1\Rightarrow h=2$

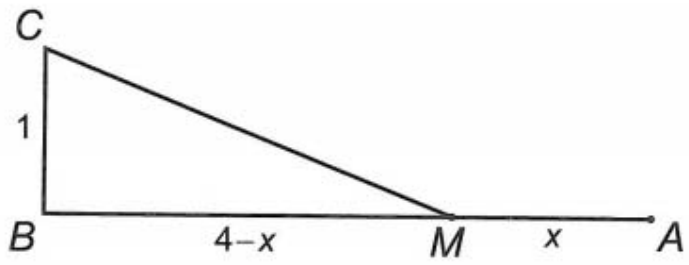
Vậy để tiết kiệm vật liệu nhất khi làm thùng phi thì $R=1m;h=2m$.

Bài tập 7. Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở A đến một hòn đảo ở C như hình vẽ. Khoảng cách từ C đến B là 1 km. Bờ biển chạy thẳng từ A đến B với khoảng cách là 4km. Tổng chi phí lắp đặt cho 1km dây điện trên biển là 40 triệu đồng, còn trên đất liền là 20 triệu đồng. Tính tổng chi phí nhỏ nhất để hoàn thành công việc trên (làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy)

A. 120 triệu đồng **B.** 164,92 triệu đồng **C.** 114,64 triệu đồng **D.** 106,25 triệu đồng

Hướng dẫn giải

Chọn C



Gọi M là điểm trên đoạn thẳng AB để lắp đặt đường dây điện ra biển nối với điểm C

Đặt $AM = x \Rightarrow BM = 4 - x \Rightarrow CM = \sqrt{1 + (4-x)^2} = \sqrt{17 - 8x + x^2}, x \in [0;4]$

Khi đó tổng chi phí lắp đặt là $y = x.20 + 40\sqrt{x^2 - 8x + 17}$ (đơn vị: triệu đồng)

$$y' = 20 + 40.\frac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+17}} = 20.\frac{\sqrt{x^2-8x+17} + 2(x-4)}{\sqrt{x^2-8x+17}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-8x+17} = 2(4-x) \Leftrightarrow x = \frac{12-\sqrt{3}}{3}$$

Ta có $y\left(\frac{12-\sqrt{3}}{3}\right) = 80 + 20\sqrt{3} \approx 114,64; y(0) = 40\sqrt{17} \approx 164,92; y(4) = 120$

Do đó chi phí nhỏ nhất để hoàn thành công việc là 114,64 triệu đồng.

Dạng 12. Tìm m để $F(x;m) = 0$ có nghiệm trên tập D

1. Phương pháp giải

Thực hiện theo các bước sau

Bước 1. Cô lập tham số m và đưa về dạng $f(x) = g(m)$

Bước 2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(x)$ trên D

Bước 3. Dựa vào bảng biến thiên để xác định giá trị tham số $A(m)$ sao cho đường thẳng $y = g(m)$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$

Bước 4. Kết luận

Chú ý:

+)Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên D thì phương trình $f(x) = g(m)$ có nghiệm khi và chỉ khi

$\min\limits_D f(x) \le g(m) \le \max\limits_D f(x)$

+)Nếu bài toán yêu cầu tìm tham số để phương trình có k nghiệm phân biệt, ta chỉ cần dựa vào bảng biến thiên để xác định điều kiện sao cho đường thẳng $y = g(m)$ nằm ngang cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại k điểm phân biệt

2. Bài tập

Bài tập1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-100;100]$ để phương trình $2\sqrt{x+1} = x + m$ có nghiệm thực?

A. 100 **B.**101 **C.** 102 **D.** 103

Hướng dẫn giải

Chọn D

Điều kiện $x \ge -1$

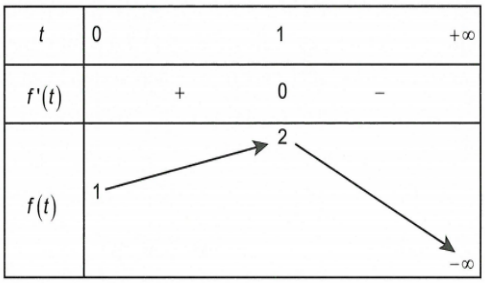
Đặt $t = \sqrt{x+1} \Rightarrow \begin{cases} t \ge 0 \\ x = t^2 - 1 \end{cases}$

Ta được phương trình $2t = t^2 - 1 + m \Leftrightarrow m = -t^2 + 2t + 1$

Xét hàm số $f(t) = -t^2 + 2t + 1, t \ge 0$

$f'(t) = -2t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có nghiệm khi $m \le 2 \Rightarrow -100 \le m \le 2$

Vậy có 103 giá trị nguyên m thỏa mãn

Bài tập 2. Cho phương trình $m\left(\sqrt{x^2 - 2x + 2 + 1}\right) - x^2 + 2x = 0$ (m là tham số). Biết rằng tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm thuộc đoạn $\left[0; 1 + 2\sqrt{2}\right]$ là đoạn $[a; b]$. Giá trị của biểu thức $T = -a + 2b$ là

A. $T = 4$ **B.** $T = \frac{7}{2}$ **C.** $T = 3$ **D.** $T = \frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$

Xét hàm số $t(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$ trên đoạn $\left[0; 1 + 2\sqrt{2}\right]$

$t'(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} \Rightarrow t' = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Vì $t(0) = \sqrt{2}; t(1) = 1; t\left(1 + 2\sqrt{2}\right) = 3$ nên $t \in [1; 3]$

Yêu cầu của bài toán tương đương với phương trình $m(t+1) = t^2 - 2$ có nghiệm thuộc đoạn $[1; 3] \Leftrightarrow m = \frac{t^2 - 2}{t + 1}$ có nghiệm thuộc đoạn $[1; 3]$ (1)

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 - 2}{t + 1}$ trên đoạn $[1; 3]$

$f'(t)=\dfrac{t^2+2t+2}{(t+1)^2}>0,\forall t\in[1;3]$ khi hàm số đồng biến trên đoạn $[1;3]$

Để phương trình (1) đã cho có nghiệm thì $\min\limits_{[1;3]} f(t)\le m\le \max\limits_{[1;3]} f(t)$

$\Leftrightarrow f(1)\le m\le f(3)\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}\le m\le \dfrac{7}{4}$

Vậy $a=-\dfrac{1}{2};b=\dfrac{7}{4}\Rightarrow T=4$.

Bài tập 3. Giá trị nhỏ nhất của tham số m để hệ phương trình $\begin{cases} x+y=2 \\ x^4+y^4=m \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$ có nghiệm là m_0

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m_0\in(-20;-15)$ **B.** $m_0\in(-12;-8)$ **C.** $m_0\in\left(\dfrac{-3}{2};0\right)$ **D.** $m_0\in\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{9}{4}\right)$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $\begin{cases} x+y=2 \quad (1) \\ x^4+y^4=m(2) \end{cases}$

Từ (1) suy ra $y=2-x$ thay vào (2) ta được (2) $\Rightarrow x^4+(2-x)^4=m$ (3)

Xét hàm số $f(x)=x^4+(2-x)^4$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$

$f'(x)=4x^3-4(2-x)^3\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x^3=(2-x)^3\Leftrightarrow x=2-x\Leftrightarrow x=1$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Hệ đã cho có nghiệm thực khi và chỉ khi phương trình (3) có nghiệm thực

Dựa vào bảng biến thiên ta được $m\ge 2\Rightarrow m_0=2\in\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{9}{4}\right)$.

Dạng 13. Tìm m để bất phương trình $F(x;m)>0;F(x;m)\ge 0;F(x,m)<0;F(x;m)\le 0$ có nghiệm trên tập D

1. Phương pháp giải

Thực hiện theo các bước sau

Bước 1. Cô lập tham số m và đưa về dạng $g(m) > f(x)$ hoặc $g(m) \ge f(x)$ hoặc $g(m) \le f(x)$ hoặc $g(m) < f(x)$

Bước 2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(x)$ trên D

Bước 3. Dựa vào bảng biến thiên xác định các giá trị của tham số m

Bước 4. Kết luận

Chú ý: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và có giá trị lớn nhất; giá trị nhỏ nhất trên D thì

+) Bất phương trình $g(m) \le f(x)$ có nghiệm trên D $\Leftrightarrow g(m) \le \max\limits_{D} f(x)$

+) Bất phương trình $g(m) \le f(x)$ nghiệm đúng $\forall x \in D \Leftrightarrow g(m) \le \min\limits_{D} f(x)$

+) Bất phương trình $g(m) \ge f(x)$ có nghiệm trên $D \Leftrightarrow g(m) \ge \min\limits_{D} f(x)$

+) Bất phương trình $g(m) \ge f(x)$ nghiệm đúng $\forall x \in D \Leftrightarrow g(m) \ge \max\limits_{D} f(x)$

2. Bài tập

Bài tập 1: Các giá trị của tham số m để bất phương trình $x + \dfrac{4}{x-1} - m \ge 0$ có nghiệm trên khoảng $(-\infty;1)$ là

A. $m < 5$ **B.** $m \le -3$ **C.** $m \le 1$ **D.** $m \ge 3$

Hướng dẫn giải

Chọn B

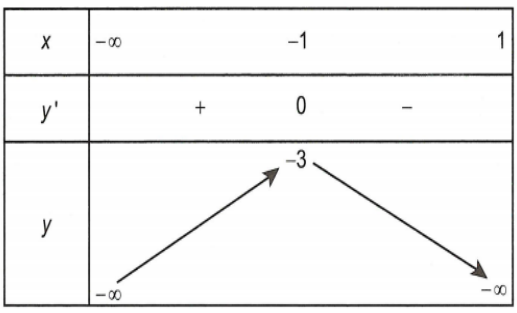
Bất phương trình đã cho tương đương với $x + \dfrac{4}{x-1} \ge m$

Xét hàm số $y = x + \dfrac{4}{x-1}$ trên khoảng $(-\infty;1)$

$$y' = 1 - \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 4}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \notin (-\infty;1) \\ x = -1 \in (-\infty;1) \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên, để bất phương trình $x+\frac{4}{x-1}-m\ge 0$ có nghiệm trên khoảng $(-\infty;1)$ thì $m\le -3$.

Bài tập 2. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số $m\in[0;2019]$ để bất phương trình $x^2-m+\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}\le 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-1;1]$. Số các phần tử của tập S là

A. 1 **B.** 2020 **C.** 2019 **D.** 2

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $t=\sqrt{1-x^2}$, với $x\in[-1;1]\Rightarrow t\in[0;1]$

Bất phương trình đã cho trở thành $t^3-t^2+1-m\le 0\Leftrightarrow m\ge t^3-t^2+1$ (1)

Yêu cầu của bài toán tương đương với bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $t\in[0;1]$

Xét hàm số $f(t)=t^3-t^2+1\Rightarrow f'(t)=3t^2-2t$

$$f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\notin(0;1)\\ t=\frac{2}{3}\in(0;1)\end{array}\right.$$

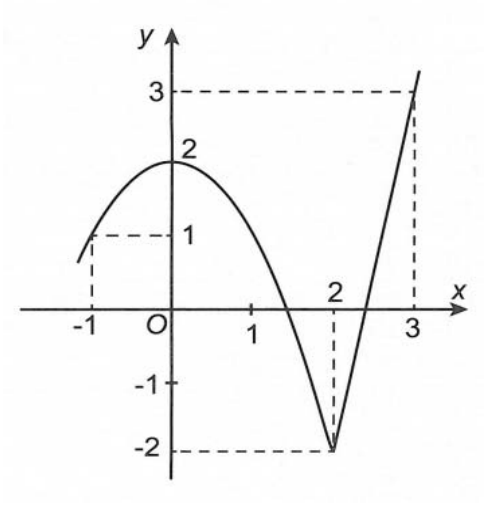
Vì $f(0)=f(1)=1; f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{23}{27}$ nên $\max\limits_{[0;1]} f(t)=1$

Do đó bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $t\in[0;1]$ khi và chỉ khi $m\ge 1$

Mặt khác m là số nguyên thuộc $[0;2019]$ nên $m\in\{1;2;3;...;2019\}$

Vậy có 2019 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Bài tập 3. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Bất phương trình $f(x)+\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}\ge m$ có nghiệm thuộc $[-1;3]$ khi và chỉ khi

A. $m\le 7$

B. $m\ge 7$

C. $m\le 2\sqrt{2}-2$

D. $m\ge 2\sqrt{2}-2$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Xét hàm số $P=\sqrt{x+1}+\sqrt{7-x}$ trên đoạn $[-1;3]$

Ta có $P^2 = 8 + 2\sqrt{(x+1).(7-x)} \le 8 + (x+1) + (7-x) = 16 \Rightarrow P \le 4$

Dấu bằng xảy ra khi $x = 3$

Suy ra $\max\limits_{[-1;3]} P = 4$ tại $x = 3$ (1)

Mặt khác dựa vào đồ thị của $f(x)$ ta có $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = 3$ tại $x = 3$ (2)

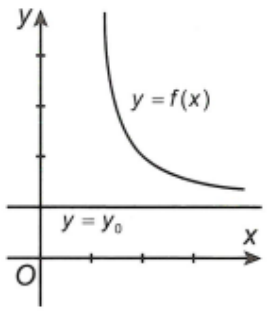
Từ (1) và (2) suy ra $\max\limits_{[-1;3]} \left(f(x) + \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x} \right) = 7$ tại $x = 3$

Vậy bất phương trình $f(x) + \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x} \ge m$ có nghiệm thuộc $[-1;3]$ khi và chỉ khi $m \le \max\limits_{[-1;3]} \left(f(x) + \sqrt{x+1} + \sqrt{7-x} \right) \Leftrightarrow m \le 7$.

BÀI 4. TIỆM CẬN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

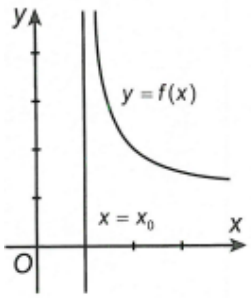
Đường thẳng $y = y_0$ được gọi là đường tiệm cận ngang (gọi tắt là tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim\limits_{x \to -\infty} = y_0$



Đường thẳng $x = x_0$ được gọi là đường tiệm cận đứng (gọi tắt là tiệm cận đứng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$;

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$.



B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Xác định các đường tiệm cận dựa vào định nghĩa

1. Phương pháp giải

Tiệm cận ngang

Đường thẳng $y = y_0$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = y_0$

Tiệm cận đứng

Đường thẳng $x = x_0$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty;\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$

2. Bài tập

Bài tập 1: Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng

A. 2 (đvdt) **B.** 3 (đvdt) **C.** 1 (đvdt) **D.** 4 (đvdt)

Hướng dẫn giải

Chọn A

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=1$ và tiệm cận ngang là $y=2$. Khi đó hình chữ nhật tạo bởi hai đường tiệm cận và hai trục tọa độ có các kích thước là 1 và 2 nên có diện tích $S=1.2=2$ (đvdt)

Bài tập 2: Biết các đường tiệm cận của đường cong $(C): y=\dfrac{6x+1-\sqrt{x^2-2}}{x-5}$ và trục tung cắt nhau tạo thành một đa giác (H). Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. (H) là một hình chữ nhật có diện tích bằng 8

B. (H) là một hình vuông có diện tích bằng 4

C. (H) là một hình vuông có diện tích bằng 25

D. (H) là một hình chữ nhật có diện tích bằng 10

Hướng dẫn giải

Chọn D

Tập xác định $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right)\setminus\{5\}$

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x+1-\sqrt{x^2-2}}{x-5}=5\Rightarrow y=5$ là tiệm cận ngang của (C)

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x+1-\sqrt{x^2-2}}{x-5}=7\Rightarrow y=7$ là tiệm cận ngang của (C)

$\lim\limits_{x\to5^+} y=+\infty;\ \lim\limits_{x\to5^-}=-\infty\Rightarrow x=5$ là tiệm cận đứng của (C)

Vậy đồ thị có ba đường tiệm cận là $y=5;\ y=7;\ x=5$ cùng với trục tung tạo thành một hình chữ nhật có kích thước 2×5 nên có diện tích bằng 10.

Dạng 2: Tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

1. Phương pháp giải

Để tồn tại các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ thì $c\neq0$ và $ad-bc\neq0$

Khi đó phương trình các đường tiệm cận là

+ Tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}$

+ Tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{c}$

2. Bài tập

Bài tập 1: Giá trị của tham số thực *m* để đồ thị hàm số $y=\dfrac{(2m-1)x+1}{x-m}$ có đường tiệm cận ngang $y=3$ là

A. $m=1$ **B.** $m=0$ **C.** $m=2$ **D.** $m=3$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Điều kiện để đồ thị hàm số có tiệm cận là

$-m(2m-1)-1\neq 0\Leftrightarrow 2m^2-m+1\neq 0\Rightarrow \forall m\in\mathbb{R}$

Phương trình đường tiệm cận ngang là $y=2m-1$ nên có $2m-1=3\Leftrightarrow m=2$.

Bài tập 2: Tập hợp các giá trị thực của tham số *m* để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{mx-1}$ có tiệm cận đứng là

A. $\mathbb{R}$ **B.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ **C.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ **D.** $\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Điều kiện để đồ thị hàm số có tiệm cận là $\begin{cases}m\neq 0\\-1+m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\m\neq 1\end{cases}$

Bài tập 3. Tập hợp các giá trị của tham số *m* để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-3}{mx-1}$ không có tiệm cận đứng là

A. $\mathbb{R}$ **B.** $\left\{0;\dfrac{1}{3}\right\}$ **C.** $\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$ **D.** $\{0\}$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Điều kiện để đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng là

$$\begin{bmatrix}m=0\\-1+3m=0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}m=0\\m=\dfrac{1}{3}\end{bmatrix}$$

Bài tập 4: Cho hàm số $y=\dfrac{ax+b}{x+1}$. Biết đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $A(0;-1)$ và có đường tiệm cận ngang là $y=1$. Giá trị $a+b$ bằng

A. 1 **B.** 0 **C.** 3 **D.** 2

Hướng dẫn giải

Chọn B

Điều kiện để đồ thị hàm số có tiệm cận là $a-b\neq 0$

Do đồ thị hàm số đi qua điểm $A(0;-1)$ nên $b=-1$

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=a\Rightarrow a=1$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy $a+b=0$

Bài tập 5: Biết rằng đồ thị của hàm số $y=\dfrac{(a-3)x+a+2019}{x-(b+3)}$ nhận trục hoành làm tiệm cận ngang và trục tung làm tiệm cận đứng. Khi đó giá trị của $a+b$ bằng

A. 3 **B.** -3 **C.** 6 **D.** 0

Hướng dẫn giải

Chọn D

Điều kiện để đồ thị hàm số có tiệm cận là $-(a-3)(b+3)-(a+2019)\neq 0$

Phương trình các đường tiệm cận là

$\begin{cases}x=b+3\\y=a-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b+3=0\\a-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-3\\a=3\end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy $a+b=0$

Bài tập 6: Giá trị thực của tham số *m* để đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{2x+m}$ đi qua điểm $A(1;2)$ là

A. $m=4$ **B.** $m=-2$ **C.** $m=-4$ **D.** $m=2$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Điều kiện để đồ thị hàm số có đường tiệm cận là $m-2\neq 0\Leftrightarrow m\neq 2$

Đường tiệm cận đứng là $x=-\dfrac{m}{2}\Rightarrow -\dfrac{m}{2}=1\Leftrightarrow m=-2$ (thỏa mãn)

Bài tập 7: Cho hàm số $y=\dfrac{mx+1}{x-2m}$ với tham số $m\neq 0$. Giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số thuộc đường thẳng nào dưới đây?

A. $x+2y=0$ **B.** $2x+y=0$ **C.** $x-2y=0$ **D.** $y=2x$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Điều kiện để đồ thị hàm số có đường tiệm cận là $-2m^2-1\neq 0\Rightarrow \forall m\in\mathbb{R}$.

Phương trình các đường tiệm cận là $x=2m;\ y=m$ nên tọa độ giao điểm của hai đường tiệm cận là $I(2m;m)$ thuộc đường thẳng $x=2y$

Bài tập 8: Tất cả các giá trị thực của tham số *m* để đồ thị hàm số $y=\dfrac{4x-5}{x-m}$ có tiệm cận đứng nằm bên phải trục tung là

A. $m>0$ và $m\neq\dfrac{5}{4}$ **B.** $m>0$

C. $m>0$ và $m\neq\dfrac{3}{4}$ **D.** $m<0$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Điều kiện để đồ thị hàm số có tiệm cận là $-4m+5\neq 0\Leftrightarrow m\neq\dfrac{5}{4}$

Phương trình đường tiệm cận đứng là $x=m$

Để tiệm cận đứng nằm bên phải trục tung thì $m>0$

Vậy điều kiện cần tìm là $\begin{cases}m>0\\ m\neq\dfrac{5}{4}\end{cases}$

Dạng 3: Tiệm cận của đồ thị hàm số phân thức hữu tỷ

1. Phương pháp giải

- Tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{A}{f(x)}$ với A là số thực khác 0 và $f(x)$ là đa thức bậc $n>0$.

- Đồ thị hàm số $y=\dfrac{A}{f(x)}$ luôn có tiệm cận ngang $y=0$.

- Đường thẳng $x=x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{A}{f(x)}$ khi và chỉ khi x_0 là nghiệm của $f(x)$ hay $f(x_0)=0$

- Tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ với $f(x)$, $g(x)$ là các đa thức bậc khác 0.

- Điều kiện để đồ thị hàm số $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ có tiệm cận ngang là bậc $f(x)\leq$ bậc $g(x)$.

- Điều kiện để đường thẳng $x=x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ là x_0 là nghiệm của $g(x)$ nhưng không là nghiệm của $f(x)$ hoặc x_0 là nghiệm bội n của $g(x)$, đồng thời là nghiệm bội m của $f(x)$ và $m<n$

2. Bài tập

Bài tập 1: Tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx^2-2x+1}{2x+1}$ có tiệm cận đứng là

A. $m=8$ **B.** $m=0$ **C.** $m\neq 4$ **D.** $m\neq -8$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$. Đặt $g(x) = mx^2 - 2x + 1$

Để đồ thị hàm số có tiệm cận đứng thì $x = -\frac{1}{2}$ không là nghiệm của $g(x)$

$\Leftrightarrow g\left(-\frac{1}{2}\right) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{m}{4} + 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -8$

Bài tập 2: Biết đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2 - 2mx + n + 6}$ (m, n là tham số) nhận đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng, giá trị của $m + n$ bằng

A. 6 **B.** 10 **C.** -4 **D.** -7

Hướng dẫn giải

Chọn C

Điều kiện: $x^2 - 2mx + n + 6 \neq 0$. Đặt $g(x) = x^2 - 2mx + n + 6$

Do $x = 1$ là nghiệm của $f(x) = x - 1$ nên đồ thị hàm số đã cho nhận đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng thì $x = 1$ phải là nghiệm kép của phương trình

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(1) = -2m + n + 7 = 0 \\ \Delta' = m^2 - n - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2m - 7 \\ m^2 - 2m + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = -5 \end{cases}$$

Vậy $m + n = -4$.

Bài tập 3: Biết đồ thị hàm số $y = \frac{(2m-n)x^2 + mx + 1}{x^2 + mx + n - 6}$ nhận trục hoành và trục tung làm hai tiệm cận. Giá trị $m + n$ bằng

A. 8 **B.** 9 **C.** 6 **D.** -6

Hướng dẫn giải

Chọn B

Điều kiện $x^2 + mx + n - 6 \neq 0$

Phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = 2m - n$

$\Rightarrow 2m - n = 0$ (1)

Đặt $f(x) = (2m-n)x^2 + mx + 1$ và $g(x) = x^2 + mx + n - 6$

Nhận thấy $f(0) \neq 0$ với mọi m, n nên đồ thị nhận trục tung $x = 0$ là tiệm cận đứng thì $g(0) = 0 \Leftrightarrow n - 6 = 0 \Leftrightarrow n = 6$. Kết hợp với (1) suy ra $m = 3$.

Vậy $m + n = 9$

Bài tập 4: Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + x - 1}{4x^2 + bx + 9}$ có đồ thị (C) (a, b là các số thực dương và $ab = 4$). Biết rằng (C) có tiệm cận ngang $y = c$ và có đúng một tiệm cận đứng. Giá trị của tổng $T = 3a + b - 24c$ bằng

A. 8 **B.** 9 **C.** 6 **D.** 11

Hướng dẫn giải

Chọn D

Điều kiện $4x^2+bx+9\neq 0$

Phương trình tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y=\frac{a}{4}\Rightarrow \frac{a}{4}=c$

Đồ thị (C) có một tiệm cận đứng nên ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Phương trình $4x^2+bx+9=0$ có nghiệm kép $x=x_0$ và không là nghiệm của $ax^2+bx+1=0$

$\Leftrightarrow b^2-144=0\Leftrightarrow b=\pm 12$. Vì $b>0$ nên $b=12\Rightarrow a=\frac{1}{3}\Rightarrow c=\frac{1}{12}$

Thử lại ta có hàm số $y=\frac{\frac{1}{3}x^2+x-1}{4x^2+12x-9}$ (thỏa mãn)

Vậy $T=3.\frac{1}{3}+12-24.\frac{1}{12}=11$

Trường hợp 2: $4x^2+bx+9=0$ có hai nghiệm phân biệt và một trong hai nghiệm thỏa mãn $ax^2+x-1=0$. Điều này không xảy ra vì $ab=4$.

Chú ý: *a; b > 0 nên mẫu số (nếu có) hai nghiệm đều âm, tử số hai nghiệm trái dấu.*

Dạng 4 Tiệm cận của đồ thị hàm số vô tỷ

Cho hàm số vô tỷ $y=f(x)$

- Tìm tập xác định D của hàm số.

- Để tồn tại tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$ thì trong tập xác định D của hàm số phải chứa ít nhất một trong hai kí hiệu -∞ hoặc +∞ và tồn tại ít nhất một trong hai giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty} y$ hoặc $\lim\limits_{x\to+\infty} y$ hữu hạn.

2. Bài tập

Bài tập 1: Biết đồ thị hàm số $y=2x+\sqrt{ax^2+bx+4}$ có tiệm cận ngang $y=-1$

Giá trị $2a-b^3$ bằng

A. 56 **B.** -56 **C.** -72 **D.** 72

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Điều kiện $ax^2+bx+4\geq 0$

Để đồ thị hàm số có tiệm cận ngang thì $a>0$

Khi đó, ta có

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x+\sqrt{ax^2+bx+4}\right)=+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{ax^2+bx+4}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{(a-4)x^2+bx+4}{\sqrt{ax^2+bx+4}-2x} = -1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-4=0 \\ \dfrac{b}{-\sqrt{a-2}} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=4 \\ b=4 \end{array}\right. . \text{ Vậy } 2a-b^3 = -56$$

Chú ý: *Để* $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -1$ *thì bậc tử phải bằng bậc mẫu nên phải có* $a-4=0$. *Khi đó* $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \dfrac{b}{-\sqrt{a-2}}$

Bài tập 2: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{mx+\sqrt{x^2-2x+3}}{2x-1}$ có một đường tiệm cận ngang là $y=2$?

A. 0 **B.** Vô số **C.** 1 **D.** 2

Hướng dẫn giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \dfrac{m+1}{2}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \dfrac{m-1}{2}$

Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là $y=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{m+1}{2}=2 \\ \dfrac{m-1}{2}=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=5 \end{array}\right.$

Dạng 5: Biết đồ thị, bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$, xác định tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{A}{g(x)}$ với A là số thực khác 0, $g(x)$ xác định theo $f(x)$

1. Phương pháp giải

- Xác định tiệm cận đứng:

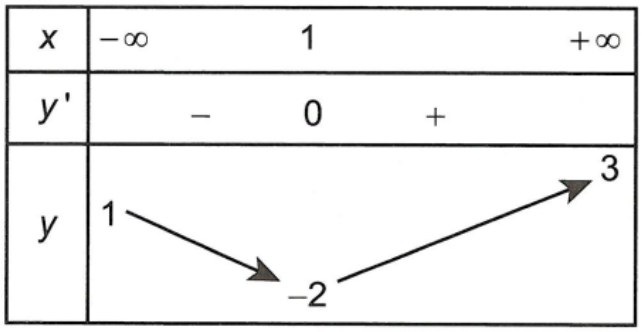
+ Số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{A}{g(x)}$ là số nghiệm của phương trình $g(x)=0$.

+ Dựa vào đồ thị, bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ để xác định số nghiệm của phương trình $g(x)=0$ để suy ra số đường tiệm cận đứng.

- Xác định tiệm cận ngang: dựa vào nhánh vô tận của đồ thị, bảng biến thiên của hàm số để xác định.

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.



Tổng số đường tiệm cận của hàm số $y=\dfrac{1}{f\left(x\right)+1}$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

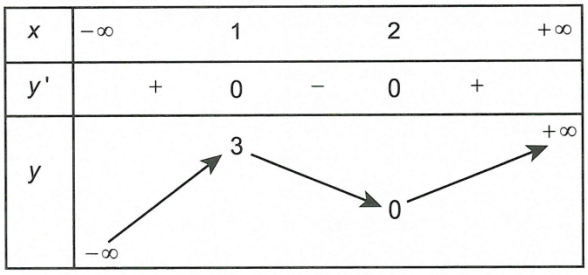
Số đường tiệm cận đứng của đồ thị là số nghiệm của phương trình $f\left(x\right)+1=0\Leftrightarrow f\left(x\right)=-1$.

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình có hai nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f\left(x\right)+1}$ có hai đường tiệm cận đứng.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f\left(x\right)+1}=\dfrac{1}{3+1}=\dfrac{1}{4}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f\left(x\right)+1}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$ nên đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $y=\dfrac{1}{4}$ và $y=\dfrac{1}{2}$.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f\left(x\right)+1}$ có bốn đường tiệm cận.

Bài tập 2. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.



Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f\left(x^3+x\right)+3}$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $t=x^3+x$, ta có khi $x\to-\infty$ thì $t\to-\infty$ và khi $x\to+\infty$ thì $t\to+\infty$.

Mặt khác ta có $t' = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên với mọi $t \in \mathbb{R}$ phương trình $x^3 + x = t$ có duy nhất một nghiệm x.

Số đường tiệm cận đứng của đồ thị là số nghiệm của phương trình

$f(t) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(t) = -3$.

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình có duy nhất một nghiệm nên đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{f\left(x^3 + x\right) + 3}$

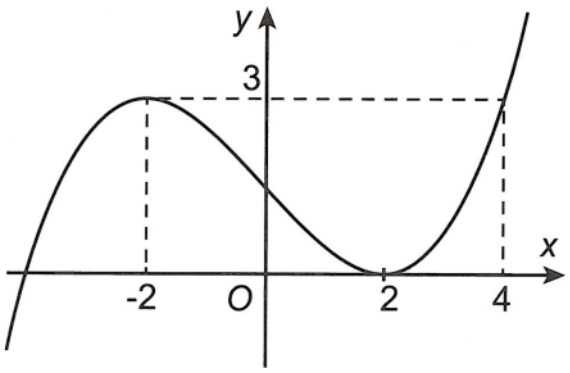
có một tiệm cận đứng.

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{f\left(x^3 + x\right) + 3} = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{1}{f(t) + 3} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{f\left(x^3 + x\right) + 3} = \lim\limits_{t \to -\infty} \dfrac{1}{f(t) + 3} = 0$ nên đồ thị hàm số

$y = \dfrac{1}{f\left(x^3 + x\right) + 3}$ có một tiệm cận ngang là $y = 0$.

Vậy đồ thị có hai đường tiệm cận

Bài tập 3. Cho hàm số bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \left(a, b, c, d \in \mathbb{R}\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{1}{f\left(4 - x^2\right) - 3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đặt $t = 4 - x^2$, ta có khi $x \to \pm\infty$ thì $t \to -\infty$.

Khi đó $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = \lim\limits_{t \to -\infty} \dfrac{1}{f(t) - 3} = 0$ nên $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $g(x)$.

Mặt khác $f\left(4 - x^2\right) - 3 = 0 \Leftrightarrow f\left(4 - x^2\right) = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4 - x^2 = -2 \\ 4 - x^2 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{6} \\ x = 0 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $g(x)$ có ba đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có bốn đường tiệm cận.

Dạng 6: Biết đồ thị, bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$, xác định tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\varphi(x)}{g(x)}$ với $\varphi(x)$ là một biểu thức theo x, $g(x)$ là biểu thức theo $f(x)$

1. Phương pháp giải

- Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)$ tìm nghiệm của phương trình $g(x)=0$ và xác định biểu thức $g(x)$.

- Rút gọn biểu thức $\dfrac{\varphi(x)}{g(x)}$ và tìm tiệm cận đứng, tiệm cận ngang.

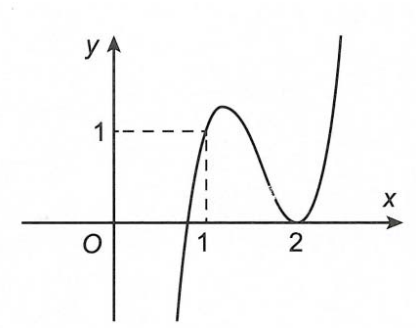
Chú ý:

- Điều kiện tồn tại của $\varphi(x)$.

- Sử dụng tính chất nếu đa thức $g(x)$ có nghiệm là $x=x_0$ thì $g(x)=(x-x_0).g_1(x)$, ở đó $g_1(x)$ là một đa thức.

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ.



Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x^2-3x+2)\sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 4. **B.** 6.

C. 3. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điều kiện xác định $\begin{cases}x\ge 1\\ x\ne 0\\ f^2(x)-f(x)\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ f(x)\ne 0\\ f(x)\ne 1\end{cases}$.

Xét phương trình $f^2(x)-f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}f(x)=0 & (1)\\ f(x)=1 & (2)\end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị ta thấy

- Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x=x_1<1$ (loại) và $x=2$ (nghiệm kép).

- Phương trình (2) có ba nghiệm phân biệt $x=1$, $x=x_2\in(1;2)$, $x=x_3>2$.

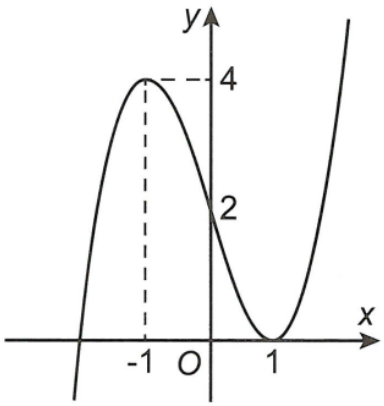
Khi đó

$$f^2(x)-f(x)=f(x)\left[f(x)-1\right]=a^2(x-x_1)(x-2)^2(x-1)(x-x_2)(x-x_3)$$

Suy ra $g(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{a^2x(x-x_1)(x-2)(x-x_2)(x-x_3)}$,

trong đó $x_1<1$, $x_2\in(1;2)$, $x_3>2$ nên đồ thị hàm số $y=g(x)$ có ba tiệm cận đứng là $x=2$; $x=x_2$; $x=x_3$.

Bài tập 2. Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Đặt $g(x)=\dfrac{x^2-x}{f^2(x)-2f(x)}$. Đồ thị hàm số $y=g(x)$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Điều kiện xác định $f^2(x)-2f(x)\neq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)\neq 0\\f(x)\neq 2\end{array}\right.$.

Ta có $f^2(x)-2f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\f(x)=2\end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị ta có $f(x)=0$ có hai nghiệm $x=x_1<0$ và $x=1$ (nghiệm kép).

$$f(x)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_2\in(x_1;-1)\\x=0\\x=x_3>1\end{array}\right.$$

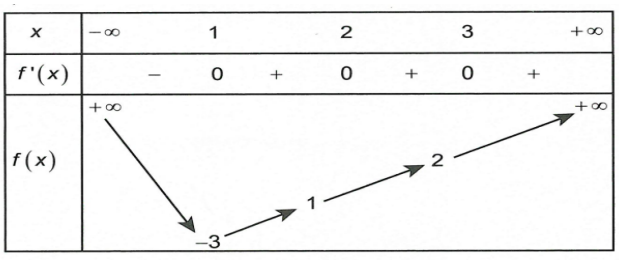
Vậy biểu thức $f^2(x)-2f(x)=f(x)\left[f(x)-2\right]$

$$=a^2(x-x_1)(x-1)^2.x(x-x_2)(x-x_3).$$

Khi đó ta có $g(x)=\dfrac{x^2-x}{f^2(x)-2f(x)}=\dfrac{1}{a^2(x-1)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}$.

Vậy đồ thị hàm số có bốn đường tiệm cận đứng.

Bài tập 3. Cho $f(x)$ là hàm đa thức bậc 6 có bảng biến thiên như sau



Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x-3)\left(x^2-4x+3\right)}{f'(x)\left[f(x)-2\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Điều kiện $\begin{cases} f'(x)\neq 0 \\ f(x)\neq 2 \end{cases}$.

Ta có $(x-3)\left(x^2-4x+3\right)=(x-3)^2(x-1)$; $f'(x).\left[f(x)-2\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f(x)=2 \end{array}\right.$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có

$f'(x)=0$ có nghiệm là $x=1$; $x=2$ (nghiệm kép); $x=3$ (nghiệm kép)

$\Rightarrow f'(x)=a(x-1)(x-2)^2(x-3)^2$ với $a>0$.

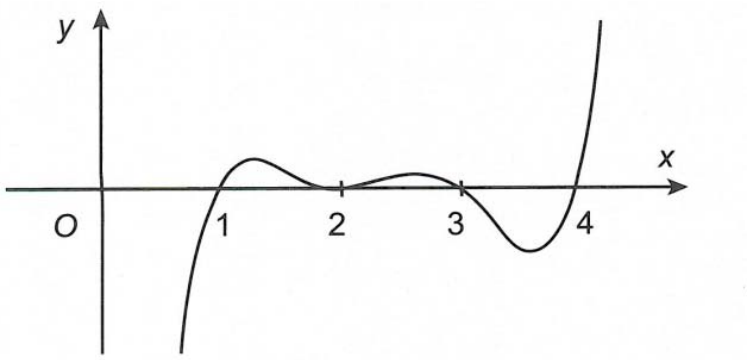
$f(x)=2$ có hai nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=x_1<1 \\ x=x_2\in(2;3) \end{array}\right.$ nên $f(x)=(x-x_1)(x-x_2).p(x)$ với $p(x)$ là một đa thức bậc 4 và $p(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Khi đó $g(x)=\dfrac{1}{a(x-2)^2(x-x_1)(x-x_2).p(x)}$.

Vậy đồ thị hàm số $y=g(x)$ có ba đường tiệm cận đứng.

Chú ý: *Do f(x) là hàm đa thức bậc 6 nên f'(x) là hàm đa thức bậc 5.*

Bài tập 4. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm đa thức bậc 6 thỏa mãn $3f(1)-2<0$ và $3f(a)-a^3+3a>0,\forall a>2$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ.



Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{x+1}{3f(x+2)-x^3+3x}$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

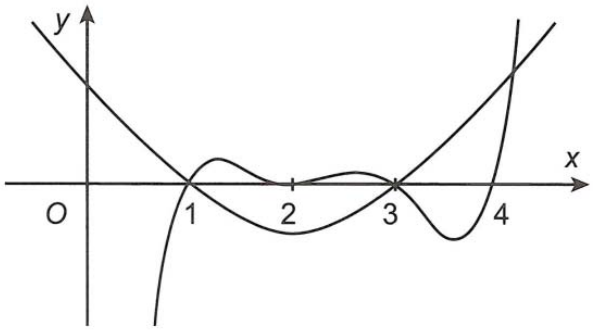
Chọn B.

Đặt $h(x)=3f(x+2)-x^3+3x$. Điều kiện $h(x)\neq 0$.

Ta có $h'(x)=3f'(x+2)-3x^2+3$, $h'(x)=0\Leftrightarrow f'(x+2)=x^2-1$.

Đặt $t=x+2$, ta được $f'(t)=t^2-4t+3$. (*)

Vẽ đồ thị hàm số $y=t^2-4t+3$ vào cùng hệ trục có đồ thị hàm số $y=f'(t)$ ta được hình vẽ sau



Dựa vào đồ thị ta thấy (*) có ba nghiệm là $t=1;\ t=3;\ t=a>4$.

Suy ra phương trình $h'(x)=0$ có nghiệm đơn $x=-1;\ x=1;\ x=a-2=b>2$.

Ta có bảng biến thiên của $h(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		b		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	↘	$h(-1)$	↗	$h(1)$	↘	$h(b)$	↗	$+\infty$

Vì $h(-1)=3f(1)-2<0$ và $h(b)=3f(a)-(a-2)^3+3(a-2)=3f(a)-a^3+3a+6a^2-12a+2>0$ với mọi $a>4$ nên phương trình $h(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x=x_1<-1; x=x_2\in(-1;1)$.

Vậy đồ thị hàm số $y=g(x)$ có hai tiệm cận đứng.

Dạng 7: Biện luôn số đường tiệm cận của đồ thị hàm số phân thức $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, với $f(x)$ và $g(x)$ là các đa thức

1. Phương pháp giải

Điều kiện đề đồ thị hàm số $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ có tiệm cận ngang khi và chỉ khi bậc $f(x)\le$ bậc $g(x)$. Khi đó đồ thị hàm số $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ có đúng một đường tiệm cận ngang.

Điều kiện để đồ thị hàm số $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ có tiệm cận đứng $x=x_0$

Trường hợp 1: $x=x_0$ là nghiệm của phương trình $g(x)=0$ nhưng không là nghiệm của phương trình $f(x)=0$.

Trường hợp 2: $x=x_0$ là nghiệm bội *n* của phương trình $g(x)=0$, đồng thời là nghiệm bội *m* của phương trình $f(x)=0$ thì $n>m$.

Ta có $f(x)=(x-x_0)^m.f_1(x)$ với $f_1(x)$ không có nghiệm $x=x_0$ và $g(x)=(x-x_0)^n.g_1(x)$ với $g_1(x)$ không có nghiệm $x=x_0$. Khi đó

$$y=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{(x-x_0)^m.f_1(x)}{(x-x_0)^n.g_1(x)}=\frac{f_1(x)}{(x-x_0)^{n-m}.g_1(x)}$$

nên $x=x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho.

2. Bài tập

Bài tập 1. Gọi *S* là tập các giá trị nguyên dương của tham số *m* để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{x^2+2x+m^2-3m}$ có ba tiệm cận. Tổng các giá trị của tập *S* bằng

A. 6. **B.** 19. **C.** 3. **D.** 15.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điều kiện $x^2+2x+m^2-3m\ne 0$.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=0\Rightarrow$ đồ thị hàm số luôn có một tiệm cận ngang $y=0$.

Số đường tiệm cận đứng của hàm số đã cho là số nghiệm khác -2 của phương trình $x^2+2x+m^2-3m=0$ nên để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{x^2+2x+m^2-3m}$ có ba tiệm cận thì phương trình $x^2+2x+m^2-3m=0$ phải có hai nghiệm phân biệt khác -2.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-m^2+3m>0 \\ m^2-3m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3-\sqrt{13}}{2}<m<\dfrac{3+\sqrt{13}}{2} \\ m\neq 0, m\neq 3 \end{cases}$.

Do m nguyên dương nên $m\in\{1;2\}$.

Vậy tổng các giá trị của tập S bằng 3.

Bài tập 2. Tổng tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+m}{x^2-3x+2}$ có đúng hai đường tiệm cận là

A. -5 **B.** 4 **C.** -1 **D.** 5

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Điều kiện $x\neq 1; x\neq 2$.

Vì $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=1$ nên đồ thị luôn có một đường tiệm cận ngang $y=1$ với mọi m.

Ta có $x^2-3x+2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Xét $f(x)=x^2+m$. Để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận thì $f(x)$ phải nhận $x=1$ hoặc $x=2$ là nghiệm hay $\left[\begin{array}{l} f(1)=0 \\ f(2)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+1=0 \\ m+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-4 \end{array}\right.$.

- Với $m=-1$, ta có hàm số $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\dfrac{x+1}{x-2}$ nên đồ thị có hai đường tiệm cận là $x=2; y=1$ (thỏa mãn).
- Với $m=-4$, ta có hàm số $y=\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\dfrac{x+2}{x-1}$ nên đồ thị có hai đường tiệm cận là $x=1; y=1$ (thỏa mãn).

Vậy $S=\{-1;-4\}$ nên tổng các giá trị m bằng -5.

Bài tập 3. Tính tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-mx-m+5}$ không có đường tiệm cận đứng

A. -12. **B.** 12. **C.** 15. **D.** -15.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Điều kiện $x^2-mx-m+5\neq 0$.

Đặt $f(x)=x^2-3x+2, g(x)=x^2-mx-m+5$.

Ta có $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$ là nghiệm đơn của tử thức.

Để đồ thị không có tiệm cận đứng, ta có các trường hợp sau

Trường hợp 1. Phương trình $g(x)=0$ vô nghiệm $\Delta=m^2+4m-20<0 \Leftrightarrow -2-2\sqrt{6}<m<-2+2\sqrt{6}$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-6;-5;...;2\}$

Trường hợp 2. $f(x)=0$ nhận đồng thời $x=1$ và $x=2$ làm nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} 1-m-m+5=0 \\ 4-2m-m+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=3$.

Thử lại, ta có $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-3x+2}=1$, khi đó đồ thị hàm số $y=1$ không có tiệm cận $\Rightarrow$ loại.

Vậy các giá trị nguyên của *m* để đồ thị không có tiệm cận đứng là $m \in \{-6;-5;...;2;3\}$ nên tổng bằng -15.

Bài tập 4. Tập hợp các giá trị thực của tham số *m* để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{\left(mx^2-2x+1\right)\left(4x^2+4mx+1\right)}$ có đúng một đường tiệm cận là

A. $\{-1;0\}$ **B.** $\{0\}$ **C.** $(-\infty;-1)\cup\{0\}$ **D.** $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Điều kiện $\begin{cases} mx^2-2x+1\neq 0 \\ 4x^2+4mx+1\neq 0 \end{cases}$.

- Với $m=0$, hàm số có dạng $y=\dfrac{-1}{4x^2+1}$.

Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận ngang $y=0$.

Do đó $m=0$ là một giá trị cần tìm.

- Với $m\neq 0$.

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=0$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $y=0$.

Để đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận thì

+ *Trường hợp 1.* Hai phương trình $f(x)=mx^2-2x+1=0$ và $g(x)=4x^2+4mx+1=0$ cùng vô nghiệm

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-m<0 \\ 4m^2-4<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>1 \\ -1<m<1 \end{cases} \Rightarrow$ vô nghiệm

+ *Trường hợp 2.* Phương trình $\left(mx^2-2x+1\right)\left(4x^2+4mx+1\right)=0$ có nghiệm duy nhất là $x=\frac{1}{2}$. Khi đó $x=\frac{1}{2}$ là nghiệm của một trong hai phương trình $f\left(x\right)=0$ hoặc $g\left(x\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{m}{4}=0\\1+2m+1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-1\end{array}\right.$$

Do $m\neq 0$ nên $m=-1$.

Thử lại, với $m=-1$ thì hàm số là

$$y=\frac{2x-1}{\left(-x^2-2x+1\right)\left(4x^2-4x+1\right)}=\frac{1}{\left(-x^2-2x+1\right)\left(2x-1\right)}$$

Khi đó, đồ thị hàm số đã cho có các tiệm cận đứng là $x=-1\pm\sqrt{2},x=\frac{1}{2}\Rightarrow m=-1$ không thỏa mãn.

Vậy tập hợp tham số *m* cần tìm là $m\in\left\{0\right\}$.

Dạng 8: Biện luận số đường tiệm cận của đồ thị hàm số chứa căn thức

1. Phương pháp giải

Thực hiện theo các bước sau

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2. Xác định các đường tiệm cận.

- Tiệm cận ngang

+ Điều kiện cần: Để đồ thị hàm số chứa căn thức có tiệm cận ngang thì trong tập xác định phải có các khoảng $\left(-\infty;a\right)$ hoặc $\left(b;+\infty\right)$.

+ Điều kiện đủ là: Tồn tại một trong các giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}=a$ hoặc $\lim\limits_{x\to+\infty}=b$ thì đường thẳng $y=a$ hoặc $y=b$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

* Tiệm cận đứng: Tồn tại giá trị x_0 để một trong các giới hạn $\lim\limits_{x\to x_0^+}y=-\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to x_0^-}y=+\infty$ thì $x=x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho

2. Bài tập mẫu

Bài tập 1. Tất cả các giá trị thực của tham số *m* để đồ thị hàm số $y=\frac{\sqrt{mx^2-4}}{x-3}$ có đúng ba tiệm cận là

A. $m\geq\frac{4}{9}$ **B.** $m>0$ **C.** $0<m<\frac{4}{9}$ **D.** $\forall m\in\mathbb{R}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Điều kiện $\begin{cases} mx^2-4\ge 0 \\ x\ne 3 \end{cases}$.

Để đồ thị hàm số có tiệm cận ngang thì $m>0$.

Khi đó tập xác định của hàm số là $D=\left[-\infty;-\dfrac{2}{\sqrt{m}}\right)\cup\left(\dfrac{2}{\sqrt{m}};+\infty\right]\setminus\{3\}$.

Nếu $m\le 0$ thì $mx^2-4<0$

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{mx^2-4}}{x-3}=\sqrt{m}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{mx^2-4}}{x-3}=-\sqrt{m}$ nên đồ thị hàm số

có hai tiệm cận ngang là $y=\pm\sqrt{m}$

Để tồn tại tiệm cận đứng $x=3$ thì $3\ge\dfrac{2}{\sqrt{m}}\Leftrightarrow m\ge\dfrac{4}{9}$.

Kết hợp lại ta có $m\ge\dfrac{4}{9}$.

Bài tập 2. Tất cả các giá trị thực của tham số *m* để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1-\sqrt{x^2+3x}}{x^2+(m+1)x-m-2}$ có đúng hai đường tiệm cận là

A. $m\in\mathbb{R}$ **B.** $\begin{cases}\left[\begin{array}{l} m\ge 1 \\ m\le -2 \end{array}\right. \\ m\ne -3\end{cases}$ **C.** $\begin{cases} m\le -2 \\ m\ne -3 \end{cases}$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m\ge 1 \\ m\le -2 \end{array}\right.$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Điều kiện $\begin{cases} x^2+3x\ge 0 \\ x^2+(m+1)x-m-2\ne 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\le -3;x\ge 0 \\ x\ne 1;x\ne -m-2 \end{cases}$.

Tập xác định $D=(-\infty;-3]\cup[0;+\infty)\setminus\{1;-m-2\}$

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=0,\forall m\in D\Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Để đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận thì phải có một đường tiệm cận đứng.

- Với $m=-3$ thì $D=(-\infty;-3]\cup[0;+\infty)\setminus\{1\}$.

Khi đó, ta có hàm số $y=\dfrac{x+1-\sqrt{x^2+3x}}{x^2-2x+1}=\dfrac{-1}{(x-1)\left(x+1+\sqrt{x^2+3x}\right)}$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 1^+}y=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to 1^-}y=-\infty$ nên $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $\Rightarrow m=-3$ thỏa mãn.

- Với $m\ne -3$, ta có

$\lim\limits_{x\to 1} y = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+1-\sqrt{x^2+3x}}{x^2+(m+1)x-m-2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-1}{(x+m+2)\left(x+1+\sqrt{x^2+3x}\right)} = \dfrac{-1}{4(m+3)}$

$\Rightarrow x=1$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Để đường $x=-m-2$ là tiệm cận đứng thì $\left[\begin{array}{l} -m-2\le -3 \\ -m-2\ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge 1 \\ m\le -2 \end{array}\right.$.

Khi đó $\lim\limits_{x\to(-m-2)^+} y=\pm\infty$ (tùy theo m) nên $x=-m-2$ là tiệm cận đứng khi $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} m\ge 1 \\ m\le -2 \end{array}\right. \\ m\ne -3 \end{cases}$.

Kết hợp cả hai trường hợp, ta có $\left[\begin{array}{l} m\ge 1 \\ m\le -2 \end{array}\right.$.

Bài tập 3. Tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x+\sqrt{mx^2+1}$ có tiệm cận ngang là

A. $m>1$ **B.** $0<m<1$ **C.** $m=1$ **D.** $m=-1$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Trường hợp 1. Với $m=0$ thì hàm số là $y=x+1$ nên đồ thị không có tiệm cận ngang. Do đó $m=0$ không phải giá trị cần tìm.

Trường hợp 2. Với $m<0$ thì hàm số có tập xác định là $D=\left[-\dfrac{1}{\sqrt{-m}};\dfrac{1}{\sqrt{-m}}\right]$ nên không tồn tại $\lim\limits_{x\to-\infty} y$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y \Rightarrow$ đồ thị không có tiệm cận ngang.

Do đó $m<0$ không phải giá trị cần tìm.

Trường hợp 3. Với $m>0$ thì hàm số có tập xác định là $D=\mathbb{R}$.

Xét $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{mx^2+1}\right)=+\infty$.

Xét $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{mx^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(1-m)x^2-1}{x-\sqrt{mx^2+1}}$.

Để đồ thị hàm số có tiệm cận ngang thì $1-m=0\Leftrightarrow m=1$.

Bài tập 4. Tập tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{mx^2-3mx+2}}$ có bốn đường tiệm cận phân biệt là

A. $(0;+\infty)$ **B.** $\left(\dfrac{9}{8};+\infty\right)$ **C.** $\left(\dfrac{8}{9};+\infty\right)$ **D.** $\left(\dfrac{8}{9};+\infty\right)\setminus\{1\}$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Điều kiện $mx^2-3mx+2>0$. (*)

Trường hợp 1. Với $m=0$, ta có $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{2}}$ nên đồ thị không có đường tiệm cận.

Do đó $m=0$ không phải giá trị cần tìm.

Trường hợp 2. Với $m<0$.

Phương trình $mx^2-3mx+2=0$ có $\Delta=9m^2-8m>0,\forall m<0$ nên $mx^2-3mx+2>0\Leftrightarrow x\in\left[x_1;x_2\right]$ (với x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình $mx^2-3mx+2=0$) nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang, chỉ có tối đa hai tiệm cận đứng

Nếu $\Delta\le 0$ thì hàm số có tập xác định là $D=\varnothing$

Do đó $m<0$ không phải giá trị cần tìm.

Trường hợp 3. Với $m>0$.

Xét phương trình $mx^2-3mx+2=0$.

- Nếu $\Delta=9m^2-8m<0\Leftrightarrow 0<m<\dfrac{8}{9}$. Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $mx^2-3mx+2>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng mà chỉ có hai tiệm cận ngang là $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{m}}$ vì $\lim\limits_{x\to+\infty}=\dfrac{1}{\sqrt{m}}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}=\dfrac{-1}{\sqrt{m}}$.

- Nếu $\Delta=9m^2-8m=0\Leftrightarrow m=\dfrac{8}{9}$.

Khi đó, hàm số trở thành $y=\dfrac{3(x-2)}{\sqrt{8x^2-24x+18}}=\dfrac{3(x-2)}{\sqrt{2}\left|2x-3\right|}$ nên đồ thị hàm số chỉ có một tiệm cận đứng và hai tiệm cận ngang.

- Nếu $\Delta=9m^2-8m>0\Rightarrow m>\dfrac{8}{9}$.

Hàm số xác định trên các khoảng $(-\infty;x_1)$ và $(x_2;+\infty)$.

Khi đó đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là $y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{m}}$.

Để đồ thị hàm số đã cho có bốn đường tiệm cận thì đồ thị hàm số phải có hai đường tiệm cận đứng.

Vì $x=1$ là nghiệm của tử $f(x)=x-1$ nên để đồ thị có hai tiệm cận đứng thì $x=1$ không phải là nghiệm của phương trình $mx^2-3mx+2=0\Leftrightarrow m-3m+2\ne 0\Leftrightarrow m\ne 1$.

Vậy giá trị của *m* cần tìm là $\begin{cases}m>\dfrac{8}{9}\\ m\ne 1\end{cases}$.

Nếu $x=1$ là nghiệm của phương trình $g(x)=0$, do phương trình $g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt nên phương trình $g(x)=0$ có một nghiệm nữa $x=a\ne 1$ thì $g(x)=m(x-1).(x-a)$. Khi đó hàm số có dạng $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{m(x-1).(x-a)}}$ nên chỉ có một tiệm cận

đứng là $x=a$.

Bài tập 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{1+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-(1-m)x+2m}}$ có hai tiệm cận đứng?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Điều kiện $\begin{cases}x\ge -1\\ x^2-(1-m)x+2m>0\end{cases}$.

Đặt $f(x)=x^2-(1-m)x+2m$

Để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng thì phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2\ge -1$.

Trường hợp 1. $f(x)$ có nghiệm $x=-1\Leftrightarrow f(-1)=0\Leftrightarrow m=-2$.

Khi đó hàm số có dạng $y=\dfrac{1+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-3x-4}}$ có tập xác định là $D=(4;+\infty)$ nên chỉ có một tiệm cận đứng.

Trường hợp 2. $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2>-1\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\ (x_1+1)(x_2+1)>0\\ x_1+x_2>-2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(1-m)^2-8m>0\\ 2m+1-m+1>0\\ 1-m>-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<5-2\sqrt{6}\\ m>5+2\sqrt{6}\end{array}\right.\\ m>-2\\ m<3\end{cases}\Rightarrow -2<m<5-2\sqrt{6}$$

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m=-1;m=0$

Dạng 9: Biện luận số đường tiệm cận của đồ thị hàm ẩn

Bài tập 1. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	1	↗	3	↗	2	↘	-1

Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2020}{f(x)-m}$ có nhiều nhất bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điều kiện $f(x)\neq m$.

Để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2020}{f(x)-m}$ có đường tiệm cận đứng thì phương trình $f(x)=m$ phải có nghiệm.

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f'(x)$ suy ra phương trình $f'(x)=0$ có đúng hai nghiệm là $\left[\begin{array}{l}x=a\\x=b\end{array}\right.$

với $-1<a<1<b$.

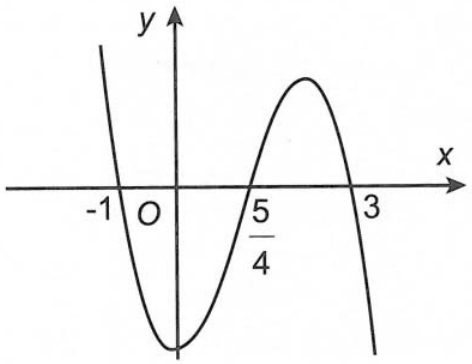
Từ đó ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		a		1		b		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		0		$+$		0		$-$	
$f(x)$		↘		$f(a)$		↗			$f(b)$	↘	

Suy ra phương trình $y=f(x)$ có nhiều nhất là ba nghiệm phân biệt.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2020}{f(x)-m}$ có nhiều nhất ba đường tiệm cận đứng.

Bài tập 2. Cho hàm số $g(x)=\dfrac{2020}{h(x)-m^2-m}$ với $h(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx$. $(m,n,p,q\in\mathbb{R},m\neq 0)$, $h(0)=0$. Hàm số $y=h'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $g(x)$ có hai tiệm cận đứng?

A. 2. **B.** 11. **C.** 71. **D.** 2019

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Từ đồ thị suy ra $h'(x)=m(x+1)(4x-5)(x-3)=m\left(4x^3-13x^2-2x+15\right)$ và $m<0$ nên $h(x)=m\left(x^4-\frac{13}{3}x^3-x^2+15x\right)$ do $h(0)=0$.

Đồ thị $g(x)$ có hai đường tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ phương trình $h(x)=m^2+m$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow x^4-\frac{13}{3}x^3-x^2+15x=m+1$ có hai nghiệm phân biệt.

Đặt $f(x)=x^4-\frac{13}{3}x^3-x^2+15x$.

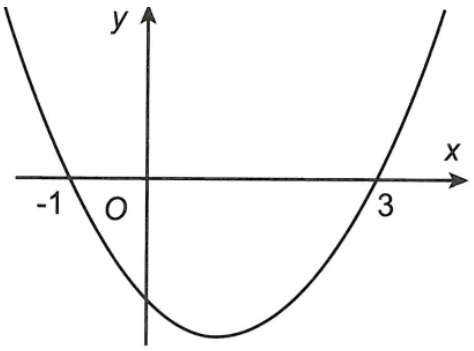
Ta có bảng biến thiên của $f(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{4}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{32}{3}$	$\nearrow$	$\frac{8575}{768}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Vì $m<0$ nên $m+1\in\left(\frac{-32}{3};1\right)\Leftrightarrow m\in\left(\frac{-35}{3};0\right)$.

Vậy có 11 số nguyên m.

Bài tập 3. Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số bậc 3. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây và $f(-1)<20$.



Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{f(x)-20}{f(x)-m}$ (m là tham số thực) có bốn tiệm cận khi và chỉ khi

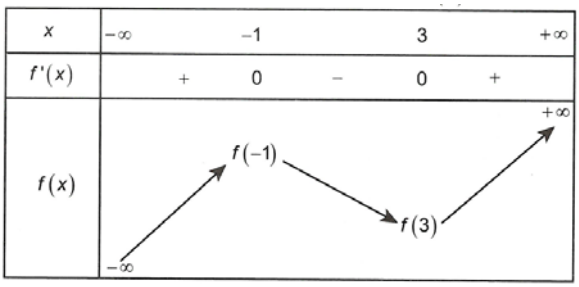
A. $m<f(3)$ **B.** $f(3)<m<f(-1)$ **C.** $m>f(-1)$ **D.** $f(3)\le m\le f(-1)$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Điều kiện $f(x)\neq m$.

Từ đồ thị hàm số $f'(x)$, ta có bảng biến thiên hàm số $f(x)$ là



- Nếu $m=20$ thì đồ thị hàm số không có đủ bốn tiệm cận.

- Nếu $m\neq 20$ thì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)-20}{f(x)-m}=1\Rightarrow$ Đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có phương trình $f(x)=20$ có một nghiệm $x=a>3$ vì $f(-1)<20$.

Suy ra đồ thị hàm số $g(x)$ có bốn tiệm cận khi phương trình $f(x)=m$ có ba nghiệm phân biệt khác $a\Leftrightarrow f(3)<m<f(-1)$.

Bài tập 4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$; $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2020;2020]$ để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+3x}+x}{\sqrt{2f(x)-f^2(x)+m}}$ có tiệm cận ngang nằm bên dưới đường thẳng $y=-1$.

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điều kiện $\begin{cases} x \le -3; x \ge 0 \\ 0 \le f(x) \le 2 \\ \sqrt{2f(x) - f^2(x)} + m \ne 0 \end{cases}$

Do $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ nên khi $x \to +\infty$ thì $2f(x) - f^2(x) \to -\infty$ vì vậy $\sqrt{2f(x) - f^2(x)}$ không có nghĩa khi x đủ lớn. Do đó không tồn tại $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

Xét $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$.

Vì $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ nên $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{2f(x) - f^2(x)} = \sqrt{\lim\limits_{x \to -\infty} \left[2f(x) - f^2(x) \right]} = 1$;

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} + x \right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{3}{-\left(\sqrt{1 - \frac{3}{x}} + 1 \right)} = -\frac{3}{2}$$

Từ đó $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \dfrac{-3}{2m + 2}$ với $m \ne -1$.

Khi đó đồ thị hàm số $g(x)$ có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = \dfrac{-3}{2m + 2}$.

Để tiệm cận ngang tìm được ở trên nằm dưới đường thẳng $y = -1$ thì

$$\frac{-3}{2m + 2} < -1 \Leftrightarrow -1 < m < \frac{1}{2}$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 0$.

Dạng 10: Bài toán liên quan đến đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$

1. Phương pháp giải

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ có đường tiệm cận khi và chỉ khi $ad - bc \ne 0, c \ne 0$.

Khi đó, phương trình đường tiệm cận đứng là $x = -\dfrac{d}{c}$.

Phương trình đường tiệm cận ngang là $y = \dfrac{a}{c}$.

- Tọa độ giao điểm của hai đường tiệm cận là điểm $I\left(-\dfrac{d}{c}; \dfrac{a}{c} \right)$ và cũng là tâm đối xứng của đồ thị.

- Hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có các kích thước là $\left| -\dfrac{d}{c} \right|$ và $\left| \dfrac{a}{c} \right|$ nên có chu vi là

$C = 2\left(\left|\frac{d}{c}\right| + \left|\frac{a}{c}\right|\right)$ và diện tích là $S = \left|\frac{ad}{c^2}\right|$

2. Bài tập mẫu

Bài tập 1. Giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx-1}{2x+m}$ có đường tiệm cận đứng đi qua điểm $A\left(-1;\sqrt{2}\right)$ là

A. $m = -2$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = \sqrt{2}$. **D.** $m = -1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $ad - bc = m^2 + 2 \neq 0, \forall m$ nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -\frac{m}{2}$.

Để tiệm cận đứng đi qua điểm $A\left(-1;\sqrt{2}\right)$ thì $-\frac{m}{2} = -1 \Leftrightarrow m = 2$.

Bài tập 2. Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+3}{x-1}$ tạo với hai trục tọa độ một hình chữ nhật có diện tích bằng

A. 3 (đvdt) **B.** 6 (đvdt) **C.** 1 (đvdt) **D.** 2 (đvdt)

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Phương trình các đường tiệm cận là $x = 1; y = 2$.

Do đó hai đường tiệm cận và hai trục tọa độ tạo thành hình chữ nhật diện tích bằng 1.2 = 2 (đvdt).

Bài tập 3. Tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2mx+m}{x-1}$ có đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số cùng hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 8 là

A. $m \neq \pm 2$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = \pm\frac{1}{2}$. **D.** $m = \pm 4$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Điều kiện để đồ thị hàm số có tiệm cận là $-2m - m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó phương trình hai đường tiệm cận là $x = 1$ và $y = 2m$.

Theo công thức tính diện tích hình chữ nhật tạo bởi hai tiệm cận và hai trục tọa độ, ta có $S = |2m|$.

Theo giả thiết thì $|2m| = 8 \Leftrightarrow m = \pm 4$.

Bài tập 4. Cho đồ thị hai hàm số $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$ và $g(x)=\dfrac{ax+1}{x+2}$ với $a\neq\dfrac{1}{2}$. Tất cả các giá trị thực dương của tham số *a* để các tiệm cận của hai đồ thị hàm số tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 4 là

A. $a=6$. **B.** $a=4$. **C.** $a=3$. **D.** $a=1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$ có hai đường tiệm cận là $x=-1$ và $y=2$.

Điều kiện để đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{ax+1}{x+2}$ có tiệm cận là $2a-1\neq 0\Leftrightarrow a\neq\dfrac{1}{2}$.

Với điều kiện đó thì đồ thị hàm số $g(x)$ có hai đường tiệm cận là $x=-2$ và $y=a$.

Hình chữ nhật được tạo thành từ bốn đường tiệm cận của hai đồ thị trên có hai kích thước là 1 và $|a-2|$.

Theo giả thiết, ta có $|a-2|.1=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=6\\a=-2\end{array}\right.$.

Vì $a>0$ nên $a=6$.

Bài tập 5. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Hai đường tiệm cận của (C) cắt nhau tại *I*. Đường thẳng $d:y=2x+b$ (*b* là tham số thực) cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt *A, B*. Biết $b<0$ và diện tích tam giác *AIB* bằng $\dfrac{15}{4}$. Giá trị của *b* bằng

A. -1. **B.** -3. **C.** -2. **D.** -4

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có tọa độ điểm $I(1;1)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và *d* là

$$\frac{x+1}{x-1}=2x+b\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\f(x)=2x^2+(b-3)x-b-1=0\ (*)\end{cases}.$$

Đường thẳng *d* cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=b^2+2b+17>0\\f(1)=-2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\forall b\in\mathbb{R}$.

Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của (*).

Khi đó $A(x_1;2x_1+b)$, $B(x_2;2x_2+b)$.

Ta có $\overrightarrow{IA}=(x_1-1;2x_1+b-1)$; $\overrightarrow{IB}=(x_2-1;2x_2+b-1)$.

Diện tích tam giác IAB là $S=\frac{1}{2}\left|(x_1-1)(2x_2+b-1)-(x_2-1)(2x_1+b-1)\right|$

$=\frac{1}{2}\left|(b+1)(x_1-x_2)\right|=\frac{1}{2}|b+1|.\frac{\sqrt{b^2+2b+17}}{2}$.

Theo giả thiết thì $\frac{|b+1|\sqrt{b^2+2b+17}}{4}=\frac{15}{4}$

$\Leftrightarrow (b+1)^2\left[(b+1)^2+16\right]=225\Leftrightarrow (b+1)^2=9\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=2 \\ b=-4 \end{array}\right.$.

Do $b<0$ nên $b=-4$.

Chú ý:

- Với tam giác ABC có $\overrightarrow{AB}=(a;b);\overrightarrow{AC}=(c;d)$ thì $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|ad-bc|$.

- Nếu phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thì $|x_1-x_2|=\frac{\sqrt{\Delta}}{a}$

Bài tập 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường tròn (C_1) và (C_2) lần lượt có phương trình $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ và $(x+1)^2+y^2=1$. Biết đồ thị hàm số $y=\frac{ax+b}{x+c}$ đi qua tâm của (C_1), đi qua tâm của (C_2) và có các đường tiệm cận tiếp xúc với cả (C_1) và (C_2). Tổng $a+b+c$ là

A. 5. **B.** 8. **C.** 2. **D.** -1.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(1;2)$; $R_1=1$ và (C_2) có tâm $I_2(-1;0)$; $R_2=1$.

Điều kiện để đồ thị hàm số có tiệm cận là $ac-b\neq 0$.

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y=\frac{ax+b}{x+c}$.

Khi đó ta có các đường tiệm cận (C) là $x=-c$ và $y=a$.

Ta có $I_1,I_2\in(C)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\frac{a+b}{c+1}=2\\ \frac{-a+b}{c-1}=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}c\neq\pm 1\\ a=b\\ a=c+1\end{array}\right.$.

Đường thẳng $x=-c$ tiếp xúc với cả (C_1) và (C_2) nên $\left\{\begin{array}{l}|c+1|=1\\ |c-1|=1\end{array}\right.\Rightarrow c=0$

$\Rightarrow a=b=1$

Khi đó tiệm cận ngang của (C) là $y=1$ tiếp xúc với cả (C_1), (C_2) thỏa mãn bài toán.

Vậy $a=b=1;c=0\Rightarrow a+b+c=2$.

Dạng 11: Bài toán về khoảng cách từ điểm trên đồ thị hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ đến các đường tiệm cận

1. Phương pháp giải

Giả sử đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có các đường tiệm cận là $\Delta_1: x=-\dfrac{d}{c}$ và $\Delta_2: y=\dfrac{a}{c}$.

Gọi $M\left(x_0;\dfrac{ax_0+b}{cx_0+d}\right)$ là điểm bất kì trên đồ thị.

Khi đó $d_1=d\left(M;\Delta_1\right)=\left|x_0+\dfrac{d}{c}\right|=\left|\dfrac{cx_0+d}{c}\right|$ và $d_2=d\left(M;\Delta_2\right)=\left|\dfrac{ax_0+b}{cx_0+d}-\dfrac{a}{c}\right|=\left|\dfrac{ad-bc}{c\left(cx_0+d\right)}\right|$.

Vậy ta luôn có $d_1.d_2=\left|\dfrac{ad-bc}{c^2}\right|=K$ là một số không đổi.

Khi đó $d_1+d_2\ge 2\sqrt{d_1d_2}=2\sqrt{K}$ nên $\min\left(d_1+d_2\right)=2\sqrt{K}$ khi $d_1=d_2$

$\Leftrightarrow\left|\dfrac{cx_0+d}{c}\right|=\left|\dfrac{ad-bc}{c\left(cx_0+d\right)}\right|\Leftrightarrow\left(cx_0+d\right)^2=\left|ad-bc\right|$.

Bài tập: Xét hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có hai đường tiệm cận là $x=1$ và $y=2$. Khi đó tích các khoảng cách từ điểm *M* bất kỳ trên đồ thị đến hai đường tiệm cận là $d=\left|\dfrac{-2+1}{1}\right|=1$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Gọi *M* là giao điểm của đồ thị $y=\dfrac{2x-1}{2x+3}$ với trục hoành. Khi đó tích các khoảng cách từ điểm *M* đến hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số đã cho bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** 8. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi d_1, d_2 lần lượt là khoảng cách từ *M* đến tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Áp dụng công thức, ta có $d_1.d_2=\left|\dfrac{6+2}{4}\right|=2$.

Bài tập 2. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$ (C). Gọi *M* là điểm bất kỳ trên (C), *d* là tổng khoảng cách từ *M* đến hai đường tiệm cận của đồ thị. Giá trị nhỏ nhất của *d* bằng

A. 10. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi d_1, d_2 lần lượt là khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho.

Áp dụng công thức, ta có $d_1.d_2 = \left|\frac{-4+3}{1}\right| = 1$.

Khi đó $d = d_1 + d_2 \geq 2\sqrt{d_1.d_2} = 2$.

Vậy $d_{\min} = 2$.

Bài tập 3. Cho hàm số $y = \frac{1-3x}{3-x}$ có đồ thị (C). Điểm M có hoành độ dương, nằm trên (C) sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng gấp hai lần khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang của (C). Khoảng cách từ M đến tâm đối xứng của (C) bằng

A. 5. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Giả sử $M\left(x_0; \frac{3x_0-1}{x_0-3}\right) \in (C)\ (x_0 > 0; x_0 \neq 3)$.

Đồ thị (C) có tiệm cận đứng $\Delta_1 : x = 3$, tiệm cận ngang $\Delta_2 : y = 3$ và tâm đối xứng $I(3;3)$.

Khi đó $d_1 = d(M;\Delta_1) = |x_0 - 3|$ và $d_2 = d(M;\Delta_2) = \frac{8}{|x_0-3|}$.

Theo giả thiết $d_1 = 2d_2 \Leftrightarrow |x_0 - 3| = \frac{16}{|x_0-3|} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 7 \\ x_0 = -1 \end{array}\right. \Rightarrow x_0 = 7$ (do $x_0 > 0$).

Vậy $M(7;5) \Rightarrow IM = 2\sqrt{5}$.

Bài tập 4. Cho hàm số $y = \frac{4x-5}{x+1}$ có đồ thị (H). Gọi $M(x_0;y_0)$ với $x_0 < 0$ là một điểm thuộc đồ thị (H) thỏa mãn tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của (H) bằng 6. Giá trị của biểu thức $S = (x_0 + y_0)^2$ bằng

A. 4. **B.** 0. **C.** 9. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đồ thị (H) có tiệm cận đứng $\Delta_1 : x = -1$ và tiệm cận ngang $\Delta_2 : y = 4$.

Gọi $M\left(x_0; \frac{4x_0-5}{x_0+1}\right) \in (H), x_0 \neq -1, x_0 < 0$.

Khi đó $d_1 = d(M;\Delta_1) = |x_0 + 1|$ và $d_2 = d(M;\Delta_2) = \frac{9}{|x_0+1|} \Rightarrow d_1.d_2 = 9$.

Ta có $d_1+d_2\ge 2\sqrt{d_1d_2}=6$ nên $\min\left(d_1+d_2\right)=6$ khi

$$d_1=d_2\Leftrightarrow \left|x_0+1\right|=\frac{9}{\left|x_0+1\right|}\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=2 \\ x_0=-4 \end{array}\right.$$

Do $x_0<0$ nên $M\left(-4;7\right)\Rightarrow S=9$.

Dạng 12: Bài toán liên quan giữa tiếp tuyến và tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

1. Phương pháp giải

Giả sử đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị $\left(C\right)$ có các đường tiệm cận là $\Delta_1:x=-\dfrac{d}{c}$, $\Delta_2:y=\dfrac{a}{c}$ và $I\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$.

Gọi $M\left(x_0;\dfrac{ax_0+b}{cx_0+d}\right)$ là điểm bất kỳ trên đồ thị.

Khi đó tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại M là

$$d:y=\frac{ad-bc}{\left(cx_0+d\right)^2}\left(x-x_0\right)+\frac{ax_0+b}{cx_0+d}.$$

Gọi $A=d\cap\Delta_1$

$$\Rightarrow A\left(-\frac{d}{c};\frac{2bc-ad+acx_0}{c\left(cx_0+d\right)}\right)\Rightarrow IA=\left|\frac{2\left(ad-bc\right)}{c\left(cx_0+d\right)}\right|.$$

$B=d\cap\Delta_2$

$$\Rightarrow B\left(2x_0+\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)\Rightarrow IB=\left|\frac{2\left(cx_0+d\right)}{c}\right|.$$

Do đó $IA.IB=\dfrac{4\left|ad-bc\right|}{c^2}=K$ là một số không đổi.

Do ΔIAB vuông tại I nên

$S_{\Delta IAB}=\dfrac{1}{2}IA.IB=\dfrac{2\left|ad-bc\right|}{c^2}=\dfrac{1}{2}K$ là một số không đổi.

Ngoài ra, ta có $\begin{cases} x_A+x_B=2x_M \\ y_A+y_B=2y_M \end{cases}$ nên M luôn là trung điểm của AB.

Ta có các dạng câu hỏi thường gặp sau

Câu 1: Tính diện tích tam giác IAB.

$S_{\Delta IAB}=\dfrac{1}{2}IA.IB=\dfrac{2\left|ad-bc\right|}{c^2}=\dfrac{1}{2}K$.

Câu 2: Tìm điểm $M\in\left(C\right)$ hoặc viết phương trình tiếp tuyến của $\left(C\right)$ biết tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông có

a) Cạnh huyền nhỏ nhất.

$AB=\sqrt{IA^2+IB^2}\ge\sqrt{2IA.IB}=\sqrt{2K}$.

Dấu bằng xảy ra khi $IA=IB$.

b) Chu vi nhỏ nhất

Ta có

$IA+IB+AB\ge 2\sqrt{IA.IB}+\sqrt{2IA.IB}=2\sqrt{K}+\sqrt{2K}$

Dấu bằng xảy ra khi $IA=IB$.

c) Bán kính đường tròn ngoại tiếp nhỏ nhất.

Ta có $R=\dfrac{1}{2}AB\ge\sqrt{\dfrac{K}{2}}$

Dấu bằng xảy ra khi $IA=IB$.

d) Bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất.

Ta có $r=\dfrac{S}{p}=\dfrac{K}{IA+IB+AB}$

Vậy r lớn nhất khi $IA+IB+AB$ nhỏ nhất và bằng $2\sqrt{K}+\sqrt{2K}$.

Dấu bằng xảy ra khi $IA=IB$.

e) Khoảng cách từ I đến tiếp tuyến lớn nhất.

Gọi H là hình chiếu của I lên d, ta có

$$\frac{1}{IH^2}=\frac{1}{IA^2}+\frac{1}{IB^2}\ge\frac{2}{IA.IB}=\frac{2}{K}\Rightarrow IH\le\sqrt{\frac{K}{2}}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $IA=IB$.

Nhận xét: Các câu hỏi trên thì đẳng thức đều xảy ra khi $IA=IB$ nên ΔIAB vuông cân tại *I*. Gọi α là góc giữa tiếp tuyến *d* và tiệm cận ngang Δ_2 thì $\alpha=(d;\Delta_2)=(d;Ox)=45°$ nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k=\pm\tan 45°=\pm 1$.

Vậy các bài toán trong câu 2 ta quy về bài toán viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ khi biết hệ số góc $k=1$ hoặc $k=-1$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ bằng 3 thuộc (C) cắt các đường tiệm cận của (C) tạo thành tam giác có diện tích bằng

A. 4. **B.** $2+\sqrt{2}$. **C.** $4+2\sqrt{2}$. **D.** 2

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Áp dụng công thức, ta có $S=\frac{2|-2+1|}{1}=2$.

Bài tập 2. Cho hàm số $y=\frac{x-1}{2x-3}$ (C). Gọi *I* là giao điểm của hai tiệm cận của đồ thị hàm số (C). Khoảng cách từ *I* đến tiếp tuyến bất kỳ của đồ thị (C) đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** 1. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Tọa độ giao điểm của hai đường tiệm cận là $I\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$

Gọi *A*, *B* là giao điểm của tiếp tuyến *d* tại $M\in(C)$ bất kỳ với hai đường tiệm cận.

Khi đó ta có $IA.IB=\frac{4|ad-bc|}{c^2}=\frac{4|-3+2|}{4}=1$.

Gọi H là hình chiếu của I trên d, ta có $\frac{1}{IH^2}=\frac{1}{IA^2}+\frac{1}{IB^2}\ge\frac{2}{IA.IB}=2\Rightarrow IH\le\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $IH_{\max}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài tập 3. Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x-2}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận của (C). Biết tiếp tuyến Δ của (C) tại M cắt các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang tại A và B sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích nhỏ nhất. Khi đó, diện tích lớn nhất của tam giác tạo bởi Δ và hai trục tọa độ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(28;29)$. **B.** $(29;30)$. **C.** $(27;28)$. **D.** $(26;27)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $y'=\frac{-3}{(x-2)^2}<0$.

Theo lý thuyết thì để diện tích đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB nhỏ nhất thì AB nhỏ nhất. Khi đó hệ số góc của tiếp tuyến Δ phải là $k=\pm1$.

Do $y'<0,\forall x$ nên $k=-1$.

Xét phương trình $y'=k\Rightarrow\frac{-3}{(x-2)^2}=-1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=2-\sqrt{3}\\x=2+\sqrt{3}\end{array}\right.$.

- Với $x=2-\sqrt{3}\Rightarrow y=2-\sqrt{3}\Rightarrow$ Tiếp tuyến $\Delta_1: y=-\left(x-2+\sqrt{3}\right)+2-\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow y=-x+4-2\sqrt{3}.$$

Khi đó Δ_1 cắt Ox, Oy tại hai điểm $M\left(4-2\sqrt{3};0\right), N\left(0;4-2\sqrt{3}\right)$ và $S_{OMN}=\frac{1}{2}\left(4-2\sqrt{3}\right)^2$.

- Với $x=2+\sqrt{3}\Rightarrow y=2+\sqrt{3}\Rightarrow$ tiếp tuyến $\Delta_1: y=-\left(x-2-\sqrt{3}\right)+2+\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow y=-x+4+2\sqrt{3}.$$

Khi đó Δ_1 cắt Ox, Oy tại hai điểm $P\left(4+2\sqrt{3};0\right), N\left(0;4+2\sqrt{3}\right)$ và $S_{OPQ}=\frac{1}{2}\left(4+2\sqrt{3}\right)^2\approx27,85$.

Bài tập 4. Cho hàm số $y=\frac{x-1}{x+2}$, gọi d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng $m-2$. Biết đường thẳng d cắt tiệm cận đứng của đồ thị hàm số tại điểm $A(x_1;y_1)$ và cắt tiệm cận ngang của đồ thị hàm số tại điểm $B(x_2;y_2)$. Gọi S là tập hợp các số m sao cho $x_2+y_1=-5$. Tổng bình phương các phần tử của S bằng

A. 4. **B.** 9. **C.** 0. **D.** 10.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Điều kiện $m-2\neq 2\Leftrightarrow m\neq 0$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $\Delta : x=-2$ và tiệm cận ngang $\Delta' : y=1$.

Ta có $y'=\dfrac{3}{(x+2)^2}\Rightarrow y'(m-2)=\dfrac{3}{m^2}$ và $y(m-2)=\dfrac{m-3}{m}$.

Phương trình đường thẳng d là $y=\dfrac{3}{m^2}(x-m+2)+\dfrac{m-3}{m}$.

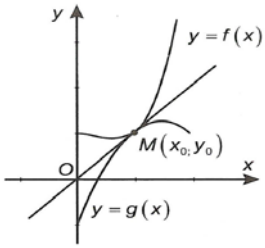
$A=d\cap\Delta\Rightarrow A\left(-2;\dfrac{m-6}{m}\right);\ B=d\cap\Delta'\Rightarrow B(2m-2;1)$

Do đó $x_2+y_1=-5\Leftrightarrow 2m-2+\dfrac{m-6}{m}=-5\Leftrightarrow 2m^2+4m-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-3\end{array}\right.$.

Vậy $S=(-3)^2+1^2=10$.

BÀI 5. TIẾP TUYẾN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM



Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0. Ta nói rằng hai đường cong $(C): y = f(x)$ và $(C'): y = g(x)$ tiếp xúc với nhau tại điểm $M(x_0; y_0)$ nếu M là một tiếp điểm chung của chúng.

(C) và (C') có tiếp tuyến chung tại M.

Điều kiện tiếp xúc:

Hai đường cong (C): $y = f(x)$ và $(C'): y = g(x)$ tiếp xúc với nhau $\Leftrightarrow$ hệ phương trình $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ có nghiệm.

Nghiệm của hệ phương trình là hoành độ tiếp điểm của hai đường cong đó.

B. PHÂN DẠNG VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Sự tiếp xúc của hai đường cong

1. Phương pháp giải

Cho hai đường cong (C): $y = f(x)$ và $(C'): y = g(x)$. Điều kiện để hai đường cong tiếp xúc với nhau là hệ phương trình $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ có nghiệm.

- Nghiệm $x = x_0$ của hệ trên là hoành độ của tiếp điểm của hai đường cong đã cho.

- Hệ trên có bao nhiêu nghiệm thì hai đường cong (C) và (C') tiếp xúc với nhau tại bấy nhiêu điểm.

2. Bài tập

Bài tập 1: Đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 1$ tiếp xúc với đường thẳng nào dưới đây?

A. $y = x + 1$. **B.** $y = -2x + 1$.

C. $y = -x + 1$. **D.** $y = 2x + 1$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Áp dụng điều kiện tiếp xúc của hai đường cong $(C): y = f(x)$ và $(C'): y = g(x)$ là hệ phương trình $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$ có nghiệm.

Ta có $y' = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên các phương án **B, C** bị loại.

Xét phương án **A.** $y = x + 1$. Ta có hệ $\begin{cases} x^3 + x + 1 = x + 1 \\ 3x^2 + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy đường thẳng $y = x + 1$ tiếp xúc với đồ thị hàm số đã cho.

Bài tập 2. Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = -2x + m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ là

A. $\{7;-1\}$. **B.** $\{-1\}$. **C.** $\{6\}$. **D.** $\{6;-1\}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Đường thẳng $y = -2x + m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$ khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} = -2x + m \\ \dfrac{-2}{(x-1)^2} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} = -2x + m \\ (x-1)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} = -2x + m \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ m = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ m = 7 \end{cases} \end{array} \right.$$

Vậy $m \in \{-1;7\}$ thì đường thẳng d tiếp xúc với (C).

Bài tập 3: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C_m) của hàm số $y = x^3 - 4mx^2 + 7mx - 3m$ tiếp xúc với parabol $(P): y = x^2 - x + 1$. Tổng giá trị các phần tử của S bằng

A. $\dfrac{11}{4}$. **B.** $\dfrac{331}{4}$. **C.** $\dfrac{9}{4}$. **D.** -4.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Để (C_m) tiếp xúc với (P) thì hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^3 - 4mx^2 + 7mx - 3m = x^2 - x + 1 \\ 3x^2 - 8mx + 7m = 2x - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - (4m+1)x^2 + (7m+1)x - 3m - 1 = 0 \ (1) \\ 3x^2 - 2(4m+1)x + 7m + 1 = 0 \ (2) \end{cases}$$

Giải (1), ta có (1) $\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 4mx + 3m + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - 4mx + 3m + 1 = 0 \end{array} \right.$$

+ Với $x = 1$ thay vào (2) được $m = 2$

+ Xét hệ $\begin{cases} x^2 - 4mx + 3m + 1 = 0 \ (3) \\ 3x^2 - 2(4m+1)x + 7m + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (2m-1)x = m + 1 (4)$.

• Nếu $m=\frac{1}{2}$ thì (4) vô nghiệm.

• Nếu $m\neq\frac{1}{2}$ thì (4) $\Leftrightarrow x=\frac{m+1}{2m-1}$.

Thay $x=\frac{m+1}{2m-1}$ vào (3) ta được $\left(\frac{m+1}{2m-1}\right)^2-4m\left(\frac{m+1}{2m-1}\right)+3m+1=0$

$\Leftrightarrow 4m^3-11m^2+5m+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\ m=-\frac{1}{4}\\ m=1\end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy $S=\left\{2;-\frac{1}{4};1\right\}$ nên tổng các phần tử trong S bằng $\frac{11}{4}$.

Bài tập 4: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2}(m+2)x^2+2mx+1$ tiếp xúc với đường thẳng $y=1$. Tổng giá trị các phần tử của S bằng

A. 10. **B.** $\frac{20}{3}$. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** $\frac{32}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Xét hệ phương trình $\begin{cases}\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2}(m+2)x^2+2mx+1=1(1)\\ x^2-(m+2)x+2m=0(2)\end{cases}$

Giải phương trình (2) ta được $\left[\begin{array}{l}x=m\\ x=2\end{array}\right.$.

+ Với $x=m$, thay vào (1) ta được $-\frac{m^3}{6}+m^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\ m=6\end{array}\right.$.

+ Với $x=2$, thay vào (1), ta được $m=\frac{2}{3}$.

Vậy tập hợp các giá trị của tham số thực để đồ thị hàm số đã cho tiếp xúc với đường thẳng $y=1$ là $S=\left\{0;6;\frac{2}{3}\right\}$ nên tổng các phần tử trong S bằng $\frac{20}{3}$.

Bài tập 5. Biết đồ thị của hàm số $(C): y=x^3+ax^2+bx+c(a,b,c\in\mathbb{R})$, tiếp xúc với trục hoành tại gốc tọa độ và cắt đường thẳng $x=1$ tại điểm có tung độ bằng 3. Tổng a + 2b + 3c bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 3.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Vì (C) tiếp xúc với Ox tại gốc tọa độ nên $x=0$ là nghiệm của hệ phương trình

$\begin{cases} x^3+ax^2+bx+c=0 \\ 3x^2+2ax+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ c=0 \end{cases}$

Mặt khác (C) đi qua điểm $A(1;3)$ nên $a+b+c+1=3 \Rightarrow a=2$.

Vậy $a+2b+3c=2.$

Bài tập 6. Họ parabol $(P_m): y=mx^2-2(m-3)x+m-2(m\neq 0)$ luôn tiếp xúc với đường thẳng d cố định khi m thay đổi. Đường thẳng d đi qua điểm nào dưới đây?

A. $A(1;-8)$. **B.** $B(0;-2)$. **C.** $C(0;2)$. **D.** $D(1;8)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $y=mx^2-2(m-3)x+m-2=m(x^2-2x+1)+6x-2$

$\Leftrightarrow y=m(x-1)^2+6x-2$.

Xét đường thẳng $d: y=6x-2$ thì hệ phương trình

$\begin{cases} m(x-1)^2+6x-2=6x-2 \\ 2m(x-1)+6=6 \end{cases}$ luôn có nghiệm $x=1$ với mọi $m\neq 0$.

Vậy (P_m) luôn tiếp xúc với đường thẳng $d: y=6x-2$.

Đường thẳng d đi qua điểm $B(0;-2)$.

Nhận xét: *Nếu có thể viết lại hàm số* (P_m) theo dạng $y=m(ax+b)^2+cx+d$ thì (P_m) *luôn tiếp xúc với đường* $y=cx+d$.

Dạng 2. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $M(x_0;y_0)$

1. Phương pháp giải

Thực hiện theo các bước sau

Bước 1: Tính $y'=f'(x)$ và $f'(x_0)$.

Bước 2: Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

Bước 3: Thực hiện các yêu cầu còn lại của bài toán. Kết luận.

Chú ý:

- Nếu bài toán chỉ cho x_0 thì ta cần tìm $y_0=f(x_0)$ và $f'(x_0)$.

- Nếu bài toán chỉ cho y_0 thì ta cần tìm x_0 bằng cách giải phương trình $f(x)=y_0$.

- Giá trị $f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $M(x_0;y_0)$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Gọi M là điểm thuộc đồ thị hàm số $(C): y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ có tung độ bằng 5. Tiếp tuyến của đồ thị (C) tại M cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A, B. Diện tích tam giác OAB bằng

A. $\dfrac{125}{6}$ (đvdt). **B.** $\dfrac{117}{6}$ (đvdt) **C.** $\dfrac{121}{6}$ (đvdt) **D.** $\dfrac{119}{6}$ (đvdt)

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $M(2;5)\in(C); y'=\dfrac{-3}{(x-1)^2}; y'(2)=-3$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M(2;5)$ là $d: y=-3x+11$.

Khi đó d cắt Ox, Oy tại $A\left(\dfrac{11}{3};0\right)$ và $B(0;11)\Rightarrow OA=\dfrac{11}{3}; OB=11.$

Vậy $S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}OA.OB=\dfrac{1}{2}.\dfrac{11}{3}.11=\dfrac{121}{6}$(đvdt)

Bài tập 2. Cho hàm số $y=\dfrac{x+b}{ax-2}(ab\neq -2, a\neq 0)$. Biết rằng a và b là các giá trị thỏa mãn tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A(1;-2)$ song song với đường thẳng $d: 3x+y-4=0$. Khi đó giá trị của $a-3b$ bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** –1. **D.** –2.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $y'=\dfrac{-2-ab}{(ax-2)^2}\Rightarrow y'(1)=\dfrac{-2-ab}{(a-2)^2}$

Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: 3x+y-4=0\Leftrightarrow y=-3x+4$ nên $y'(1)=-3\Leftrightarrow\dfrac{-2-ab}{(a-2)^2}=-3$.

Mặt khác $A(1;-2)$ thuộc đồ thị hàm số nên $-2=\dfrac{1+b}{a-2}\Leftrightarrow b=-2a+3.$

Khi đó ta có hệ $\begin{cases}\dfrac{-2-ab}{(a-2)^2}=-3\\ b=-2a+3\end{cases}\Rightarrow 5a^2-15a+10=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=2\\ a=1\end{array}\right.$

+ Với $a=2\Rightarrow b=-1\Rightarrow ab=-2$ (loại)

+ Với $a=1\Rightarrow b=1$ (thỏa mãn điều kiện).

Khi đó ta có hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$.

$y' = \dfrac{-3}{(x-2)^2} \Rightarrow y'(1) = -3$ nên phương trình tiếp tuyến là $y = -3x + 1$ song song với đường thẳng $y = -3x + 4$.

Vậy $a - 3b = -2$.

Bài tập 3. Trong tất cả các đường thẳng tiếp xúc với đồ thị hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ thì đường thẳng d có hệ số góc lớn nhất. Phương trình đường thẳng d là

A. $y = 6x + 2$. **B.** $y = 2x + 2$. **C.** $y = 1$. **D.** $y = 3x + 1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $y' = -3x^2 - 6x + 3$

Gọi $M(x_0; y_0)$ thuộc đồ thị hàm số. Khi đó hệ số góc của tiếp tuyến tại $M(x_0; y_0)$ là

$k = -3x_0^2 - 6x_0 + 3 = -3(x_0 + 1)^2 + 6 \le 6$

$\Rightarrow k_{\max} = 6 \Leftrightarrow x_0 = -1$ hay $M(-1; -4)$.

Phương trình đường thẳng d là $y = 6(x + 1) - 4 \Leftrightarrow y = 6x + 2$.

Nhận xét: *Đối với hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ thì tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất (nhỏ nhất) là tiếp tuyến tại điểm uốn của đồ thị $U(x_0; f(x_0))$, với x_0 là nghiệm của phương trình $y'' = 0$.*

+ Nếu $a > 0$ thì hệ số góc $k = f'(x_0)$ là nhỏ nhất.

+ Nếu $a < 0$ thì hệ số góc $k = f'(x_0)$ là lớn nhất.

Bài tập 4. Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + (m-1)x + 2m$ có đồ thị (C_m). Giá trị thực của tham số m để tiếp tuyến của đồ thị (C_m) tại điểm có hoành độ $x = 1$ song song với đường thẳng $y = 3x + 10$ là

A. $m = 2$. **B.** $m = 4$. **C.** $m = 0$. **D.** không tồn tại m.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

có $y' = 3x^2 - 4x + m - 1 \Rightarrow y'(1) = m - 2$.

Tiếp tuyến của (C_m) tại điểm có hoành độ $x = 1$ có phương trình là

$y = (m-2)(x-1) + 3m - 2 \Leftrightarrow y = (m-2)x + 2m$

Do tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 3x + 10$ nên $\begin{cases} m - 2 = 3 \\ 2m \neq 10 \end{cases}$ (vô lí)

Vậy không tồn tại m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập 5. Cho hàm số $f(x)=x^3+mx^2+x+1$. Gọi k là hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M có hoành độ $x=1$. Tất cả các giá trị thực của tham số m để thỏa mãn $k.f(-1)<0$ là

A. $m\le -2$. **B.** $-2<m<1$. **C.** $m\ge 1$. **D.** $m>2$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $f'(x)=3x^2+2mx+1\Rightarrow k=f'(1)=4+2m$.

Do đó $k.f(-1)=(4+2m)(m-1)$

Để $k.f(-1)<0$ thì $(4+2m)(m-1)<0\Leftrightarrow -2<m<1$.

Bài tập 6. Cho hàm số $y=x^3+3mx^2+(m+1)x+1$, với m là tham số thực, có đồ thị (C). Biết rằng khi $m=m_0$ thì tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có hoành độ $x_0=-1$ đi qua $A(1;3)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $-2<m_0<-1$. **B.** $-1<m_0<0$ **C.** $0<m_0<1$ **D.** $1<m_0<2$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi B là tiếp điểm của tiếp tuyến đi qua $A(1;3)$ khi $m=m_0$

Ta có $y'=3x^2+6mx+m+1$.

Với $x_0=-1$ thì $y_0=2m-1\Rightarrow B(-1;2m-1)$ và $y'(-1)=-5m+4$.

Tiếp tuyến tại B của (C) có phương trình là $y=(-5m+4)(x+1)+2m-1$.

Do tiếp tuyến đi qua $A(1;3)$ nên $2(-5m+4)+2m-1=3\Leftrightarrow m=\frac{1}{2}$.

Vậy $m_0=\frac{1}{2}\in(0;1)$.

Bài tập 7. Cho hàm số $y=\frac{x^2}{2-x}$ có đồ thị (C). Gọi M là một điểm thuộc (C) có khoảng cách từ M đến trục hoành bằng hai lần khoảng cách từ M đến trục tung, M không trùng với gốc tọa độ O và có tọa độ nguyên. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại M là

A. $y=-8$. **B.** $y=-64$. **C.** $y=-12$. **D.** $y=-9$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A.

Giả sử $M\left(a;\frac{a^2}{2-a}\right)$ là một điểm thuộc (C).

Do $d\left(M;Ox\right)=2d\left(M;Oy\right)$ nên $\left|\frac{a^2}{2-a}\right|=2\left|a\right|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{a^2}{2-a}=2a\\\frac{a^2}{2-a}=-2a\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\a=\frac{4}{3}\\a=4\end{array}\right.$

Theo giả thiết thì M không trùng với gốc tọa độ O và có tọa độ nguyên nên $a=4\Rightarrow M\left(4;-8\right)$.

Khi đó $y'=\frac{4x-x^2}{\left(2-x\right)^2}\Rightarrow y'\left(4\right)=0$

Phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=-8$.

Bài tập 8. Cho hàm số $y=\frac{x+1}{x+2}$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d:y=-2x+m-1$ (m là tham số thực).

Gọi k_1, k_2 là hệ số góc tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của d và (C). Tích $k_1.k_2$ bằng

A. 4. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-2\right\}$.

Ta có $y'=\frac{1}{\left(x+2\right)^2}$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d)

$$\frac{x+1}{x+2}=-2x+m-1\left(\text{ với }x\neq-2\right)$$

$$\Rightarrow 2x^2+\left(6-m\right)x+3-2m=0\left(1\right)$$

Để đường thẳng (d) cắt đồ thị hàm số (C) tại hai điểm thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt khác –2.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=\left(6-m\right)^2-8\left(3-2m\right)>0\\8-2\left(6-m\right)+3-2m\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+4m+12>0\\-1\neq0\end{cases}\Rightarrow\forall m\in\mathbb{R}$$

Vậy (C) luôn cắt (d) tại hai điểm phân biệt $A\left(x_1;y_1\right)$ và $B\left(x_2;y_2\right)$, với x_1,x_2 là nghiệm của phương trình (1).

Theo định lý Vi-ét ta có $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{m-6}{2}\\x_1.x_2=\frac{3-2m}{2}\end{cases}$

Ta có $k_1.k_2=\frac{1}{\left(x_1+2\right)^2}.\frac{1}{\left(x_2+2\right)^2}=\frac{1}{\left[x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)+4\right]^2}$

$$= \frac{1}{\left[\frac{3-2m}{2}+2.\frac{m-6}{2}+4\right]^2} = 4$$

Bài tập 9. Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$ có đồ thị (C) với m là tham số thực. Gọi A là điểm thuộc đồ thị (C) có hoành độ bằng 1. Giá trị của tham số thực m để tiếp tuyến Δ của đồ thị (C) tại A cắt đường tròn $(\gamma): x^2 + (y-1)^2 = 4$ tạo thành một dây cung có độ dài nhỏ nhất là

A. $m = -\frac{13}{16}$. **B.** $m = \frac{13}{16}$. **C.** $m = -\frac{16}{13}$. **D.** $m = \frac{16}{13}$.

Hướng dẫn giải

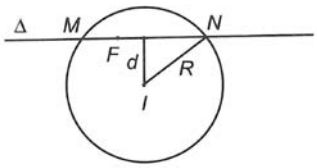
Đường tròn $(\gamma): x^2 + (y-1)^2 = 4$ có tâm $I(0;1)$, $R = 2$.

Ta có $A(1;1-m); y' = 4x^3 - 4mx \Rightarrow y'(1) = 4 - 4m$.

Suy ra phương trình tiếp tuyến $\Delta: y = (4-4m)(x-1) + 1 - m$.

Dễ thấy Δ luôn đi qua điểm cố định $F\left(\frac{3}{4};0\right)$ và điểm F nằm trong đường tròn (γ).

Giả sử Δ cắt (γ) tại M, N, Khi đó



$MN = 2\sqrt{R^2 - d^2(I;\Delta)} = 2\sqrt{4 - d^2(I;\Delta)}$.

Do đó MN nhỏ nhất $\Leftrightarrow d(I;\Delta)$ lớn nhất

$\Leftrightarrow d(I;\Delta) = IF \Rightarrow \Delta \perp IF$.

Khi đó đường thẳng Δ có 1 vectơ chỉ phương $\vec{u} \perp \overrightarrow{IF} = \left(\frac{3}{4};-1\right); \vec{u} = (1;4-4m)$ nên

$\vec{u}.\overrightarrow{IF} = 0 \Leftrightarrow 1.\frac{3}{4} - (4-4m) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{13}{16}$.

Dạng 3: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số khi biết hệ số góc dựa vào các quan hệ song song, vuông góc,...

1. Phương pháp giải

Thực hiện theo một trong hai cách sau:

Cách 1:

Bước 1. Xác định hệ số góc k của tiếp tuyến dựa vào giả thiết bài toán.

Bước 2. Giải phương trình $f'(x) = k$ để tìm $x = x_0$ là hoành độ của tiếp điểm.

Tính $y_0 = f(x_0) \Rightarrow M(x_0;y_0)$.

Khi đó phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y = k(x - x_0) + y_0$

Điểm $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị hàm số đã cho.

Cách 2:

Bước 1. Xác định hệ số góc k của tiếp tuyến dựa vào giả thiết bài toán.

Bước 2. Vì tiếp tuyến có hệ số góc là k nên phương trình tiếp tuyến có dạng $y = kx + b$. Dựa vào điều kiện tiếp xúc của tiếp tuyến với (C) ta tìm giá trị của b.

Lưu ý:

- Phương trình $f'(x) = k$ có bao nhiêu nghiệm thì có bấy nhiêu tiếp điểm.

- Một số trường hợp xác định hệ số góc của đường thẳng thường gặp.

Cho hai đường thẳng

$d_1 : y = k_1 x + b_1;\ d_2 : y = k_2 x + b_2$.

+ *Trường hợp 1*: $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow k_1.k_2 = -1.$

+ *Trường hợp 2*: $d_1 // d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$

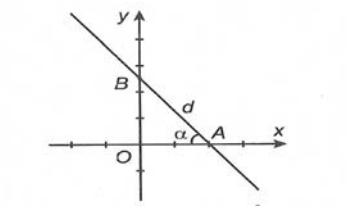
+ *Trường hợp 3*: Góc $(d_1; d_2) = \alpha \Rightarrow \tan\alpha = \left|\dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1.k_2}\right|$.

Đặc biệt:

1. Nếu góc giữa $d : y = kx + b$ với Ox bằng $\alpha (0° < \alpha < 90°)$ thì $|k| = \tan\alpha$.

2. Nếu đường thẳng d cắt Ox, Oy tại hai điểm A, B mà $OB = m.OA$ thì

$|k| = \tan\alpha = \dfrac{OB}{OA} = m$.



+ *Trường hợp 4:* Nếu đường thẳng d đi qua hai điểm $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ thì $k = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

2. Bài tập

Bài tập 1: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ song song với trục Ox là

A. $y = 3,\ y = -1.$ **B.** $y = 3,\ y = -2.$

C. $x = 3,\ x = -1.$ **D.** $y = 2,\ y = -1.$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Do tiếp tuyến song song với trục Ox nên tiếp tuyến có tiếp điểm là các điểm cực trị và có phương trình $y = y_0$ với y_0 là giá trị cực trị của hàm số đã cho.

Ta có $y' = 3x^2 - 3;\ y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Do hàm số đã cho là hàm bậc ba nên các điểm cực trị là $A(1;-1),\ B(-1;3)$.

Vậy phương trình các đường tiếp tuyến cần tìm là $y = -1;\ y = 3$.

Bài tập 2: Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến này cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm A, B thoả mãn $OA = 4OB$ là

A. $\left[\begin{array}{l} y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{4} \\ y = -\dfrac{1}{4}x - \dfrac{13}{4} \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} y = -\dfrac{1}{4}x - \dfrac{5}{4} \\ y = -\dfrac{1}{4}x - \dfrac{13}{4} \end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l} y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{4} \\ y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{13}{4} \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} y = -\dfrac{1}{4}x - \dfrac{5}{4} \\ y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{13}{4} \end{array}\right.$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Do tiếp tuyến cắt Ox, Oy tại hai điểm A, B mà $OA = 4OB$.

Khi đó ΔOAB vuông tại O và ta có $|k| = \tan\widehat{OAB} = \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow k = \pm\dfrac{1}{4}$.

Ta có: $y' = -\dfrac{1}{(x-1)^2}$

Xét phương trình $-\dfrac{1}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{4}$ (vô nghiệm).

Xét phương trình $-\dfrac{1}{(x-1)^2} = -\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1 \end{array}\right.$

+ Với $x = 3$ thì $y = \dfrac{5}{2}$. Phương trình tiếp tuyến là

$y = -\dfrac{1}{4}(x-3) + \dfrac{5}{2} = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{13}{4}$.

+ Với $x = -1$ thì $y = \dfrac{3}{2}$. Phương trình tiếp tuyến là

$y = -\dfrac{1}{4}(x+1) + \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{4}$

Bài tập 3: Đường thẳng nào dưới đây là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+3}{x+2}$ chắn hai trục tọa độ một tam giác vuông cân?

A. $y=x+2$. **B.** $y=x-2$. **C.** $y=-x+2$ **D.** $y=\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi A, B là giao điểm của tiếp tuyến lần lượt với Ox, Oy.

Vì ΔOAB vuông cân tại O nên $OA=OB$.

Do đó $|k|=\tan\widehat{OAB}=\frac{OB}{OA}=1\Leftrightarrow k=\pm 1$.

Ta có $y'=\frac{1}{(x+2)^2}$

Xét phương trình $\frac{1}{(x+2)^2}=-1$ (vô nghiệm).

Xét phương trình $\frac{1}{(x+2)^2}=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-3\end{array}\right.$.

+ Với $x=-1$ thì $y=1$. Phương trình tiếp tuyến là $y=(x+1)+1=x+2$.

+ Với $x=-3$ thì $y=3$. Phương trình tiếp tuyến là $y=(x+3)+3=x+6$.

Bài tập 4: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}mx^3+(m-1)x^2+(4-3m)x+1$ có đồ thị là (C_m). Tất cả các giá trị thực của tham số m để trên đồ thị (C_m) tồn tại một điểm duy nhất có hoành độ âm mà tiếp tuyến tại đó vuông góc với đường thẳng $d: x+2y-3=0$ là

A. m < 12 hoặc $m>\frac{2}{3}$. **B.** m < 0 hoặc m > 1.

C. m < 0 hoặc $m>\frac{1}{3}$. **D.** m < 0 hoặc $m>\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $d: x+2y-3=0\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ nên hệ số góc của d là $-\frac{1}{2}$.

Do tiếp tuyến vuông góc với d nên hệ số góc của tiếp tuyến là k thì

$k.\left(-\frac{1}{2}\right)=-1\Leftrightarrow k=2.$

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến với (C_m) thì x_0 là nghiệm của phương trình $y'=k\Leftrightarrow mx^2+2(m-1)x+4-3m=2$.

$\Leftrightarrow mx^2+2(m-1)x+2-3m=0(*)$

Theo bài toán thì ta phải tìm m để (*) có duy nhất một nghiệm âm.

+ Trường hợp 1: Nếu $m=0$ thì (*) $\Leftrightarrow -2x=-2\Leftrightarrow x=1$ (loại).

+ Trường hợp 2: Nếu $m\neq 0$. Ta thấy phương trình (*) có hai nghiệm là $x=1$ và $x=\dfrac{2-3m}{m}$.

Do đó để (*) có một nghiệm âm thì $\dfrac{2-3m}{m}<0\Leftrightarrow m<0$ hoặc $m>\dfrac{2}{3}$.

Bài tập 5: Biết tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+2$ tại điểm $A(-1;1)$ vuông góc với đường thẳng $d:x-2y+3=0$. Giá trị a^2-b^2 bằng

A. 13. **B.** –2. **C.** –5. **D.** 10.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $d:x-2y+3=0\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$ nên $k_d=\dfrac{1}{2}$

Vì tiếp tuyến vuông góc với d nên phải có hệ số góc bằng –2.

Ta có $y'=4ax^3+2bx=2x\left(2ax^2+b\right)$

Vì điểm $A(-1;1)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị nên $x=-1$ là nghiệm của phương trình $2x\left(2ax^2+b\right)=-2\Rightarrow -2\left(2a+b\right)=-2\Leftrightarrow 2a+b=1$.

Mặt khác điểm A thuộc đồ thị hàm số nên $a+b+2=1\Leftrightarrow a+b=-1$.

Vậy ta có hệ $\begin{cases}2a+b=1\\a+b=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=-3\end{cases}\Rightarrow a^2-b^2=-5.$

Bài tập 6: Cho hàm số $y=x^3-3x^2-9x+1$ có đồ thị là (C). Số tiếp tuyến của (C) tạo với đường thẳng $d:y=-x+1$ một góc α thỏa mãn $\cos\alpha=\dfrac{5}{\sqrt{41}}$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến cần tìm.

Ta có $\cos\alpha=\dfrac{5}{\sqrt{41}}\left(0°<\alpha<90°\right)\Rightarrow\tan\alpha=\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1}=\dfrac{4}{5}$.

Vì d có hệ số góc bằng –1 nên $\tan\alpha=\left|\dfrac{k+1}{1-k}\right|=\dfrac{4}{5}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=-9\\k=-\dfrac{1}{9}\end{array}\right.$

Ta có $y'=3x^2-6x-9$.

+ Trường hợp 1: $k=-9\Leftrightarrow x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Từ đó ta tìm được hai tiếp tuyến $y=-9x+1$ và $y=-9x-3$.

+ Trường hợp 2: $k=-\frac{1}{9}\Leftrightarrow 27x^2-54x-80=0\Leftrightarrow x=\frac{9\pm\sqrt{321}}{9}$

Từ đó ta tìm được hai tiếp tuyến là $y=-\frac{1}{9}\left(x-\frac{9\pm\sqrt{321}}{9}\right)+y\left(x_0\right)$

Vậy có bốn tiếp tuyến cần tìm.

Bài tập 7: Cho hàm số $y=\frac{1}{8}x^4-\frac{7}{4}x^2$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm A thuộc đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt $M\left(x_1;y_1\right);N\left(x_2;y_2\right)$ (M, N khác A) thỏa mãn $y_1-y_2=3\left(x_1-x_2\right)$

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Do tiếp tuyến đi qua hai điểm $M\left(x_1;y_1\right);N\left(x_2;y_2\right)$ nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=3$.

Ta có $y'=\frac{1}{2}x^3-\frac{7}{2}x$.

Xét phương trình $\frac{1}{2}x^3-\frac{7}{2}x=3\Leftrightarrow x=3;\ x=-1;\ x=-2.$

Mặt khác để tiếp tuyến của hàm số trùng phương cắt được đồ thị tại hai điểm phân biệt thì tiếp điểm A chỉ có thể chạy trong phần đồ thị từ điểm cực tiểu thứ nhất sang điểm cực tiểu thứ hai (trừ hai điểm uốn).

Khi đó phương trình $y'=0\Leftrightarrow x^3-7x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{7}\end{array}\right.$

Do đó hai điểm cực tiểu là $x=-\sqrt{7}$ và $x=\sqrt{7}$ nên hoành độ của tiếp điểm $x_0\in\left(-\sqrt{7};\sqrt{7}\right)$

Vậy chỉ có $x_0=-1;\ x_0=-2$ thỏa mãn.

Dạng 4: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ khi biết mối quan hệ của tiếp tuyến với các đường tiệm cận của đồ thị hàm số

1. Phương pháp giải

Với hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ (với $c\neq 0;ad-bc\neq 0$) thì đồ thị hàm số có hai tiệm cận là $x=-\frac{d}{c};\ y=\frac{a}{c}$.

Gọi $I\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận (và cũng là tâm đối xứng của đồ thị).

Khi đó tiếp tuyến tại điểm $M(x_0;y_0)$ *bất kì của đồ thị cắt tiệm cận đứng tại điểm* $A\left(-\frac{d}{c};\frac{2bc-ad+acx_0}{c(cx_0+d)}\right)$ *và cắt tiệm cận ngang tại điểm* $B\left(2x_0+\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$.

Ta có $IA=\left|\frac{2(ad-bc)}{c(cx_0+d)}\right|$; $IB=\left|\frac{2(cx_0+d)}{c}\right|$

$\Rightarrow IA.IB=\frac{4|ad-bc|}{c^2}=K$ *là hằng số không đổi.*

Suy ra $S_{\Delta IAB}=\frac{2|ad-bc|}{c^2}$.

Khi đó các bài toán sau là tương đương:

Tìm điểm $M\in(C)$ hoặc viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến tạo với hai tiệm cận một tam giác vuông có

a) Cạnh huyền nhỏ nhất

$AB=\sqrt{IA^2+IB^2}\geq\sqrt{2IA.IB}=\sqrt{2K}$

Dấu bằng xảy ra khi $IA=IB$.

b) Chu vi nhỏ nhất

Ta có $IA+IB+AB\geq 2\sqrt{IA.IB}+\sqrt{2IA.IB}=2\sqrt{K}+\sqrt{2K}$

Dấu bằng xảy ra khi $IA=IB$.

c) Bán kính đường tròn ngoại tiếp nhỏ nhất

Ta có $R=\frac{1}{2}AB\geq\sqrt{\frac{K}{2}}$.

Dấu bằng xảy ra khi $IA=IB$.

d) Bán kính đường tròn nội tiếp lớn nhất

Ta có $r=\frac{S}{p}=\frac{K}{IA+IB+AB}$

Vậy r lớn nhất khi $IA+IB+AB$ nhỏ nhất và bằng $2\sqrt{K}+\sqrt{2K}$.

Dấu bằng xảy ra khi $IA=IB$.

e) Khoảng cách từ I đến tiếp tuyến lớn nhất

Gọi H là hình chiếu của I lên d, ta có $\frac{1}{IH^2}=\frac{1}{IA^2}+\frac{1}{IB^2}\geq\frac{2}{IA.IB}=\frac{2}{K}\Rightarrow IH\leq\sqrt{\frac{K}{2}}$

Dấu bằng xảy ra khi $IA=IB$.

Nhận xét: Các câu hỏi trên thì đẳng thức đều xảy ra khi $IA=IB$ nên ΔIAB vuông cân tại I.

Gọi α là góc giữa tiếp tuyến d và tiệm cận ngang Δ_2 thì $\alpha=\left(d;\Delta_2\right)=\left(d;Ox\right)=45°$ nên hệ số góc của tiếp tuyến là $k=\pm\tan 45°=\pm 1$.

2. Bài tập

Bài tập 1: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu cặp điểm A, B thuộc (C) mà tiếp tuyến tại đó song song với nhau?

A. Không tồn tại cặp điểm đó. **B.** Vô số số cặp điểm.

C. 2. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Giả sử $A\left(a;\dfrac{a+1}{a-1}\right)$, $B\left(b,\dfrac{b+1}{b-1}\right)$ với $a\neq b;\ a,b\neq 1$.

Do tiếp tuyến tại A, B song song với nhau nên $y'\left(a\right)=y'\left(b\right)\Leftrightarrow\dfrac{-2}{\left(a-1\right)^2}=\dfrac{-2}{\left(b-1\right)^2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\a+b=2\end{array}\right.$

Do $a\neq b$ nên chỉ có $a+b=2$. Vậy có vô số cặp điểm A, B thỏa mãn.

Nhận xét: *Hai điểm A, B phân biệt thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ mà tiếp tuyến tại đó song song với nhau thì A, B đối xứng với nhau qua tâm đối xứng I.*

Bài tập 2: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{4x-3}{2x+1}$ cùng với hai tiệm cận tạo thành một tam giác có diện tích bằng

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi $M\left(x_0;y_0\right)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị. Khi đó tiếp tuyến tại M cắt hai tiệm cận tại A, B và I là giao điểm của hai tiệm cận.

Theo lý thuyết đã nêu thì $S_{\Delta IAB}=\dfrac{2\left|4+6\right|}{4}=5.$.

Bài tập 3: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị (C). Tiếp tuyến tại điểm $M\left(a;b\right)\in\left(C\right),\ a>0$ tạo với hai tiệm cận của (C) một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng $\sqrt{2}$. Giá trị của $a+2b$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi A, B là giao điểm của tiếp tuyến với hai đường tiệm cận và I là giao điểm của hai đường tiệm cận. Do ΔIAB vuông tại I nên bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔIAB là $R=\frac{1}{2}AB=\sqrt{2}\Leftrightarrow AB=2\sqrt{2}$.

Theo lý thuyết, ta có $IA.IB=4,\ AB=\sqrt{IA^2+IB^2}\geq\sqrt{2IA.IB}=2\sqrt{2}$.

Dấu " = " xảy ra khi $IA=IB$. Khi đó hệ số góc của tiếp tuyến $k=\pm1$.

Mặt khác $k=y'(a)=-\frac{1}{(a-1)^2}<0\Rightarrow k=-1$.

Ta có $-\frac{1}{(a-1)^2}=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\a=2\end{array}\right.$. Do $a>0\Rightarrow a=2\Rightarrow b=3.$ Vậy $a+2b=8.$

Bài tập 4: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=\frac{2x+m}{x-2}$, m là tham số khác –4 và d là một tiếp tuyến của (C). Gọi S là tập các giá trị thực của tham số m để d tạo với hai đường tiệm cận của (C) một tam giác có diện tích bằng 2, tổng giá trị các phần tử của S bằng

A. –11. **B.** 8. **C.** 3. **D.** –8.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi A, B lần lượt là các giao điểm của tiếp tuyến với hai đường tiệm cận và I là giao điểm của hai tiệm cận.

Theo lý thuyết, ta có $IA.IB=4|m+4|\Rightarrow S_{\Delta IAB}=2|m+4|$

Vậy ta có $2|m+4|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-3\\m=-5\end{array}\right.$

$\Rightarrow S=\{-5;-3\}$ nên tổng các phần tử của S bằng –8.

Bài tập 5: Gọi Δ là tiếp tuyến tại điểm $M(x_0;y_0),x_0<0$ thuộc đồ thị của hàm số $y=\frac{x+2}{x+1}$ sao cho khoảng cách từ $I(-1;1)$ đến A đạt giá trị lớn nhất. Giá trị $x_0.y_0$ bằng

A. –1. **B.** 0. **C.** –2. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi A, B là giao điểm của A với hai đường tiệm cận.

Theo lý thuyết $d(I;\Delta)$ lớn nhất khi $IA=IB\Rightarrow k=\pm1$.

Mặt khác $k=y'(x_0)=-\frac{1}{(x_0+1)^2}<0\Rightarrow k=-1$.

Vậy $-\frac{1}{(x_0+1)^2}=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=-2\end{array}\right.$

Do $x_0 < 0 \Rightarrow x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow x_0.y_0 = 0$.

Bài tập 6: Cho hàm số $y = \dfrac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị là (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tạo với hai tiệm cận một tam giác có chu vi nhỏ nhất là

A. $\Delta : y = -x - 1$ và $\Delta : y = -x + 17$

B. $\Delta : y = -x - 1$ và $\Delta : y = -x + 7$

C. $\Delta : y = -x - 21$ và $\Delta : y = -x + 7$

D. $\Delta : y = -x - 3$ và $\Delta : y = -x + 2$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi A, B là giao điểm của tiếp tuyến tại điểm $M\left(x_0; y_0\right) \in \left(C\right)$ với hai tiệm cận và I là giao điểm của hai đường tiệm cận. Khi đó ΔIAB vuông tại I.

Theo lý thuyết, chu vi ΔIAB là $IA + IB + AB \geq 2\sqrt{IA.IB} + \sqrt{2IA.IB} = 8 + 4\sqrt{2}$ vì $IA.IB = \dfrac{4\left|ad - bc\right|}{c^2} = 16$

Do đó chu vi nhỏ nhất bằng $8 + 4\sqrt{2}$ khi $IA = IB \Rightarrow k = \pm 1$.

Mặt khác $k = y'\left(x_0\right) = -\dfrac{4}{\left(x_0 - 1\right)^2} < 0 \Rightarrow k = -1$.

Vậy ta có $-\dfrac{4}{\left(x_0 - 1\right)^2} = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 3 \\ x_0 = -1 \end{array}\right.$

Với $x_0 = 3$ thì $y_0 = 4$. Do đó phương trình tiếp tuyến là $y = -\left(x - 3\right) + 4 = -x + 7$

Với $x_0 = -1$ thì $y_0 = 0$. Do đó phương trình tiếp tuyến là $y = -\left(x + 1\right) = -x - 1$

Bài tập 7: Cho hàm số $y = \dfrac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị (C). Một tiếp tuyến bất kỳ với (C) cắt đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của (C) lần lượt tại A và B, biết $I\left(1;2\right)$. Giá trị lớn nhất của bán kính đường tròn nội tiếp tam giác IAB bằng

A. $7 - 3\sqrt{2}$. **B.** $8 - 4\sqrt{2}$. **C.** $4 - 2\sqrt{2}$ **D.** $8 - 3\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi A, B là giao điểm của tiếp tuyến tại điểm $M\left(x_0; y_0\right) \in \left(C\right)$ với hai tiệm cận và I là giao điểm của hai đường tiệm cận và ΔIAB vuông tại I.

Theo lý thuyết, ta có $IA.IB = \dfrac{4\left|ad - bc\right|}{c^2} = 16 \Rightarrow S_{\Delta IAB} = 8$.

Khi đó bán kính đường tròn nội tiếp ΔIAB lớn nhất xảy ra khi

$IA = IB = 4 \Rightarrow AB = 4\sqrt{2} \Rightarrow p = \dfrac{IA + IB + AB}{2} = 4 + 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow r_{\max} = \dfrac{8}{4 + 2\sqrt{2}} = 4 - 2\sqrt{2}$

Bài tập 8: Cho hàm số $y = \dfrac{2x}{x+2}$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\dfrac{1}{18}$ là

A. $y = \dfrac{9}{4}x + \dfrac{1}{2};\ y = \dfrac{4}{9}x + \dfrac{2}{9}.$

B. $y = \dfrac{9}{4}x + \dfrac{31}{2};\ y = \dfrac{4}{9}x + \dfrac{2}{9}.$

C. $y = \dfrac{9}{4}x + \dfrac{1}{2};\ y = \dfrac{4}{9}x + \dfrac{4}{9}.$

D. $y = \dfrac{9}{4}x + \dfrac{1}{2};\ y = \dfrac{4}{9}x + \dfrac{1}{9}.$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi $M\left(a; \dfrac{2a}{a+2}\right)(a \neq -2)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến. Khi đó phương trình tiếp tuyến d của (C) tại M là

$y = y'(a)(x-a) + \dfrac{2a}{a+2} \Leftrightarrow y = \dfrac{4}{(a+2)^2}(x-a) + \dfrac{2a}{a+2}$.

Gọi A, B lần lượt là các giao điểm của d với hai trục Ox, Oy.

Tọa độ các điểm A, B là $A\left(-\dfrac{a^2}{2}; 0\right)$, $B\left(0; \dfrac{2a^2}{(a+2)^2}\right)$.

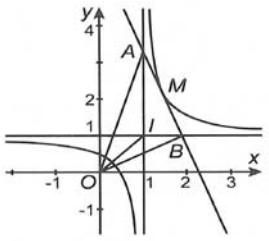
Vậy $S_{OAB} = \dfrac{1}{2}OA.OB = \dfrac{a^4}{2(a+2)^2} = \dfrac{1}{18} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3a^2 = a+2 \\ 3a^2 = -a-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = -\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$

Với $a = 1 \Rightarrow d_1 : y = \dfrac{4}{9}(x-1) + \dfrac{2}{3} = \dfrac{4}{9}x + \dfrac{2}{9}.$

Với $a = -\dfrac{2}{3} \Rightarrow d_2 : y = \dfrac{9}{4}\left(x + \dfrac{2}{3}\right) - 1 = \dfrac{9}{4}x + \dfrac{1}{2}$

Bài tập 9: Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{2x-2}$ có đồ thị (C). Gọi $M(x_0; y_0)$, $x_0 > 0$ là điểm thuộc (C), biết tiếp tuyến của (C) tại M cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại A và B sao cho $S_{\Delta OIB} = 8S_{\Delta OIA}$ (I là giao hai đường tiệm cận). Giá trị biểu thức $S = x_0 - 4y_0$ bằng

A. $\frac{13}{4}$. **B.** -2. **C.** 2. **D.** $\frac{7}{4}$.



Hướng dẫn giải

Chọn B.

Do góc $\widehat{OIA}=\widehat{OIB}$ nên $\frac{S_{\Delta OIA}}{S_{\Delta OIB}}=\frac{IA}{IB}=\frac{1}{8}$.

Mà $|k|=\tan\widehat{IBA}=\frac{IA}{IB}$ nên $|k|=\frac{1}{8}\Leftrightarrow k=\pm\frac{1}{8}$.

Mặt khác $k=y'(x_0)=\frac{-2}{4(x_0-1)^2}<0\Rightarrow k=-\frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow\frac{-1}{2(x_0-1)^2}=-\frac{1}{8}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=3\\x_0=-1\end{array}\right.$.

Do $x_0>0$ nên $x_0=3\Rightarrow y_0=\frac{5}{4}\Rightarrow S=x_0-4y_0=-2$

Bài tập 10: Cho hàm số $y=\frac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị là (C). Phương trình tiếp tuyến tại điểm M thuộc (C) cắt tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt tại A, B sao cho côsin góc $\widehat{ABI}$ bằng $\frac{4}{\sqrt{17}}$ với $I(2;2)$ là

A. $y=-\frac{1}{4}x-\frac{3}{2};\ y=-\frac{1}{4}x-\frac{7}{2}$

B. $y=-\frac{1}{4}x-\frac{3}{2};\ y=-\frac{1}{4}x+\frac{7}{2}$

C. $y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2};\ y=-\frac{1}{4}x-\frac{7}{2}$

D. $y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2};\ y=-\frac{1}{4}x+\frac{7}{2}$

Hướng dẫn giải:

Chọn D.

Ta có $|k|=\tan\widehat{ABI}=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\widehat{ABI}}-1}=\frac{1}{4}\Rightarrow k=\pm\frac{1}{4}$

Giả sử $M(x_0;y_0)\in(C)$ thì $k=y'(x_0)=\frac{-1}{(x_0-2)^2}<0\Rightarrow k=-\frac{1}{4}$.

Xét phương trình $\frac{-1}{(x_0-2)^2}=-\frac{1}{4}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=4\end{array}\right.$

+ Với $x_0=0$ thì $y_0=\frac{3}{2}$. Phương trình tiếp tuyến là $y=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}$.

+ Với $x_0=4$ thì $y_0=\frac{5}{2}$. Phương trình tiếp tuyến là $y=-\frac{1}{4}(x-4)+\frac{5}{2}=-\frac{1}{4}x+\frac{7}{2}$

Dạng 5. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ đi qua điểm $M(x_0;y_0)$ cho trước.

1. Phương pháp giải

Thực hiện một trong hai cách sau

Cách 1:

Bước 1. Giả sử tiếp tuyến có hệ số góc k, khi đó phương trình tiếp tuyến có dạng $y=k(x-x_0)+y_0$.

Bước 2. Tìm k là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}f(x)=k(x-x_0)+y_0\\f'(x)=k\end{cases}$$

Từ đó suy ra phương trình của tiếp tuyến.

Cách 2:

Bước 1. Giả sử $A(a;f(a))$ là tiếp điểm của tiếp tuyến với đồ thị hàm số đã cho nên phương trình tiếp tuyến tại điểm A là $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

Bước 2. Do tiếp tuyến đi qua $M(x_0;y_0)$ nên a là nghiệm của phương trình $f'(a)(x_0-a)+f(a)=y_0$.

Tìm a và suy ra phương trình tiếp tuyến.

2. **Bài tập**

Bài tập 1: Cho đồ thị hàm số $(C):y=\frac{-x+1}{x-2}$. Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua điểm $A(2;-1)$?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $y'=\frac{1}{(x-2)^2},\forall x\neq 2$.

Gọi tọa độ tiếp điểm là $M\left(x_0;\dfrac{-x_0+1}{x_0-2}\right)$ với $x_0\neq 2$. Khi đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M là $y=\dfrac{1}{\left(x_0-2\right)^2}\left(x-x_0\right)+\dfrac{-x_0+1}{x_0-2}$.

Do tiếp tuyến đi qua điểm $A\left(2;-1\right)$ nên ta có phương trình

$\dfrac{\left(2-x_0\right)}{\left(x_0-2\right)^2}+\dfrac{-x_0+1}{x_0-2}=-1\Leftrightarrow\dfrac{-x_0}{x_0-2}=-1$ (vô nghiệm).

Vậy không có tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu đề bài.

.

Nhận xét: *Đối với đồ thị hàm số* $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ *thì không có tiếp tuyến nào của đồ thị hàm số đi qua điểm* $I\left(-\dfrac{d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ *là giao điểm của hai đường tiệm cận.*

Bài tập 2: Cho hàm số $y=\dfrac{1}{2}x^4-3x^2-\dfrac{3}{2}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị (C) đi qua điểm $A\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$ và có hệ số góc k có dạng $y=kx+\dfrac{3}{2}$.

Để Δ tiếp xúc với (C) thì hệ phương trình $\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^4-3x^2+\dfrac{3}{2}=kx+\dfrac{3}{2}\ (1)\\ 2x^3-6x=k\ (2)\end{cases}$ có nghiệm x.

Thế (2) vào (1), ta có $\dfrac{1}{2}x^4-3x^2+\dfrac{3}{2}=\left(2x^3-6x\right)x+\dfrac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x^2\left(x^2-2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$.

+ Với $x=0\Rightarrow k=0\Rightarrow\Delta_1:y=\dfrac{3}{2}$.

+ Với $x=\sqrt{2}\Rightarrow k=-2\sqrt{2}\Rightarrow\Delta_2:y=-2\sqrt{2}\,\mathrm{x}+\dfrac{3}{2}$.

+ Với $x=-\sqrt{2}\Rightarrow k=2\sqrt{2}\Rightarrow\Delta_3:y=2\sqrt{2}\,\mathrm{x}+\dfrac{3}{2}$.

Vậy có ba tiếp tuyến thỏa mãn.

Dạng 6: Xác định các điểm M để có k tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ đi qua điểm M

1. Phương pháp giải

Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1. Xây dựng tọa độ điểm $M(a;b)$.

Bước 2. Giả sử d là đường thẳng đi qua M và có hệ số góc k. Khi đó phương trình đường thẳng $d: y = k(x-a)+b$.

Bước 3. Để d là tiếp tuyến của (C) thì hệ phương trình $(*)\begin{cases} f(x) = k(x-a)+b \\ f'(x) = k \end{cases}$ có nghiệm.

Dựa vào số nghiệm của hệ trên suy ra số tiếp tuyến tương ứng bài toán yêu cầu.

Nhận xét:

- Nếu $f(x)$ là hàm số bậc 2, bậc 3, bậc nhất trên bậc nhất thì hệ (*) có bao nhiêu nghiệm thì tương ứng với bấy nhiêu tiếp tuyến.

- Nếu $f(x)$ là hàm số trùng phương có 3 điểm cực trị thì nếu hệ (*) có nghiệm không phải là hoành độ của 2 điểm cực tiểu (cực đại) thì mỗi nghiệm ứng với một tiếp tuyến của đồ thị (C).

2. Bài tập

Bài tập 1: Cho hàm số $y = -x^3 + 6x^2 + 2$ có đồ thị (C) và điểm $M(m;2)$. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của m để qua M có hai tiếp tuyến với đồ thị (C).

Tổng các phần tử của S bằng

A. $\frac{20}{3}$. **B.** $\frac{13}{2}$. **C.** 4. **D.** $\frac{16}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi d là đường thẳng đi qua $M(m;2)$ và có hệ số góc k.

Khi đó phương trình của d là $y = k(x-m)+2$.

Để có đúng hai tiếp tuyến của (C) đi qua M thì hệ phương trình

$\begin{cases} k = -3x^2 + 12x \\ -x^3 + 6x^2 + 2 = k(x-m)+2 \end{cases}$ phải có hai nghiệm phân biệt.

Từ hệ trên, ta có $-x^3 + 6x^2 + 2 = (-3x^2 + 12x)(x-m)+2$

$\Leftrightarrow x\left[2x^2 - 3(m+2)x + 12m\right] = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ 2x^2 - 3(m+2)x + 12m = 0 \ (*) \end{bmatrix}$

Để hệ có đúng hai nghiệm, ta xét các trường hợp sau

+ Trường hợp 1: Phương trình (*) có nghiệm kép khác 0

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9(m+2)^2 - 96m = 0 \\ 12m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 6 \\ m = \dfrac{2}{3} \end{cases}.$

+ Trường hợp 2: Phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 0

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9(m+2)^2 - 96m > 0 \\ 12m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$

Vậy $S = \left\{6; \dfrac{2}{3}; 0\right\}$ nên tổng các phần tử bằng $\dfrac{20}{3}$.

Bài tập 2: Cho hàm số $\sqrt{x^2 - 2x + 3}$ có đồ thị (C) và điểm $A(1; a)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để có đúng hai tiếp tuyến của (C) đi qua A ?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$ xác định trên $\mathbb{R}$, $y' = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}$.

Gọi k là hệ số góc của đường thẳng Δ đi qua $A(1; a)$.

Phương trình đường thẳng $\Delta : y = k(x-1) + a$.

Đường thẳng Δ tiếp xúc với đồ thị (C) khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 2x + 3} = k(x-1) + a \quad (1) \\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}} = k \quad (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta được $\sqrt{x^2 - 2x + 3} = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}(x-1) + a$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + a\sqrt{x^2 - 2x + 3} \Leftrightarrow a\sqrt{x^2 - 2x + 3} = 2$

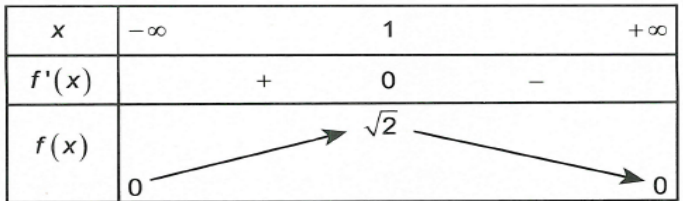
$\Leftrightarrow a = \dfrac{2}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}} \quad (3).$

Qua A có đúng hai tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{-2(x-1)}{(x^2 - 2x - 3)\sqrt{x^2 - 2x + 3}}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên ta có (3) có hai nghiệm phân biệt thì $a\in\left(0;\sqrt{2}\right]$. Mà a nguyên nên $a=1$.

Dạng 7: Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số ẩn tại điểm có hoành độ $x=x_0$ cho trước

1. Phương pháp giải

Từ biểu thức của hàm ẩn, tìm cách tính các giá trị $y_0=f\left(x_0\right)$ và $f'\left(x_0\right)$.

Áp dụng công thức viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại điểm có hoành độ $x=x_0$.

Chú ý công thức đạo hàm của hàm số hợp: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm trên khoảng K, $u=u\left(x\right)$ là hàm số xác định và có đạo hàm trên K và có giá trị trên khoảng K. Khi đó $\left(f\left(u\right)\right)'=u'.f'\left(u\right)$.

2. Bài tập

Bài tập 1: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2f\left(2x\right)+f\left(1-2x\right)=12x^2,\forall x\in\mathbb{R}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ tại điểm có hoành độ bằng 1 là

A. $y=2x+2.$ **B.** $y=4x-6.$

C. $y=2x-6.$ **D.** $y=4x-2.$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta cần tính $f\left(1\right),f'\left(1\right)$.

Từ giả thiết $2f\left(2x\right)+f\left(1-2x\right)=12x^2,\forall x\in\mathbb{R}$. (*)

Chọn $x=0$ và $x=\dfrac{1}{2}$, ta được $\begin{cases}2f\left(0\right)+f\left(1\right)=0\\2f\left(1\right)+f\left(0\right)=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f\left(0\right)=-1\\f\left(1\right)=2\end{cases}$.

Lấy đạo hàm hai vế (*) ta được $4.f'\left(2x\right)-2.f'\left(1-2x\right)=24x,\forall x\in\mathbb{R}$

Chọn $x=0$ và $x=\dfrac{1}{2}$, ta được $\begin{cases}4f'\left(0\right)-2f'\left(1\right)=0\\4f'\left(1\right)-2f'\left(0\right)=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f'\left(0\right)=2\\f'\left(1\right)=4\end{cases}$.

Vậy $f\left(1\right)=2;f'\left(1\right)=4$ nên phương trình tiếp tuyến là $y=4\left(x-1\right)+2=4x-2$.

Bài tập 2: Cho các hàm số $y=f(x), y=g(x)=f(f(x)), y=h(x)=f(x^3+2)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị lần lượt là $(C_1),(C_2),(C_3)$. Đường thẳng $x=2$ cắt $(C_1),(C_2),(C_3)$ lần lượt tại A, B, C. Biết phương trình tiếp tuyến của (C_1) tại A và của (C_2) tại B lần lượt là $y=3x+4$ và $y=6x+13$. Phương trình tiếp tuyến của (C_3) tại C là

A. $y=24x-23.$ **B.** $y=10x-21.$

C. $y=-12x+49.$ **D.** $y=2x-5.$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Để giải bài toán, ta cần tính $h'(2)$ và $h(2)$.

Phương trình tiếp tuyến của (C_1) tại A là

$$y=f'(2)(x-2)+f(2)=3x+4\Rightarrow\begin{cases}f'(2)=3\\-2f'(2)+f(2)=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f'(2)=3\\f(2)=10\end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến của (C_2) tại B là

$$y=f'(2).f'(f(2))(x-2)+f(f(2))=f'(2).f'(10)(x-2)+f(10)=6x+13.$$

$$\Rightarrow\begin{cases}f'(2).f'(10)=6\\-2f'(2).f'(10)+f(10)=13\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f'(10)=2\\f(10)=25\end{cases}$$

Ta có $h'(x)=\left(f\left(x^3+2\right)\right)'=3x^2.f'\left(x^3+2\right)$ nên $h'(2)=12f'(10)=24$ và $h(2)=f(10)=25$.

Phương trình tiếp tuyến của (C_3) tại C là

$$y=h'(2)(x-2)+h(2)=24(x-2)+25=24x-23.$$

Bài tập 3: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định có đạo hàm và nhận giá trị dương trên $\mathbb{R}$. Biết tiếp tuyến của hai đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)=\dfrac{f(x)}{f\left(x^2\right)}$ cùng tại điểm có hoành độ $x_0=1$ có hệ số góc lần lượt là 12 và –3. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $g'(x)=\left(\dfrac{f(x)}{f\left(x^2\right)}\right)'=\dfrac{f\left(x^2\right).f'(x)-f(x).2x.f'\left(x^2\right)}{f^2\left(x^2\right)}$

Từ giả thiết ta có $f'(1)=12$ và $g'(1)=-3,\ f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \frac{f(1).f'(1)-2f(1).f'(1)}{f^2(1)}=-3 \Leftrightarrow -\frac{f'(1)}{f(1)}=-3 \Leftrightarrow f(1)=4.$$

Bài tập 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi Δ_1, Δ_2 lần lượt là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)=x^2.f(4x-3)$ tại điểm có hoành độ $x=1$. Biết hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 vuông góc nhau và Δ_1 không song song với Ox, Oy . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\sqrt{3}<|f(1)|<2.$ **B.** $|f(1)|<2.$

C. $|f(1)|\geq 2.$ **D.** $2\leq|f(1)|<2\sqrt{3}.$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $g'(x)=\left(x^2.f(4x-3)\right)'=2x.f(4x-3)+4x^2.f'(4x-3)$.

Ta có hệ số góc của các tiếp tuyến Δ_1, Δ_2 lần lượt là $f'(1)$ và $g'(1)=2f(1)+4f'(1)$.

Theo giả thiết thì $f'(1).g'(1)=-1$ và $f'(1)\neq 0$.

$\Leftrightarrow f'(1).\left(2f(1)+4f'(1)\right)=-1$

$\Leftrightarrow 2f(1)=-\frac{1}{f'(1)}-4f'(1)\Rightarrow 2|f(1)|=\frac{1}{|f'(1)|}+4|f'(1)|\geq 4\Leftrightarrow|f(1)|\geq 2$.

Bài tập 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f\left(x^3+3x+1\right)=2x-1$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x=-3$ là

A. $y=\frac{1}{3}x$. **B.** $y=\frac{1}{3}x-2$. **C.** $y=\frac{1}{3}x-3$. **D.** $y=\frac{1}{3}x+2.$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Để viết phương trình tiếp tuyến tại điểm $x=-3$, ta cần tính $f(-3)$ và $f'(-3)$.

Với $x=-1$ suy ra $f(-3)=-3$.

Do $f\left(x^3+3x+1\right)=2x-1\Rightarrow\left(3x^2+3\right)f'\left(x^3+3x+1\right)=2$.

Với $x=-1\Rightarrow 6f'(-3)=2\Rightarrow f'(-3)=\frac{1}{3}$.

Do đó phương trình tiếp tuyến cần tìm là

$y=f'(-3)(x+3)+f(-3)\Leftrightarrow y=\frac{1}{3}(x+3)-3\Leftrightarrow y=\frac{1}{3}x-2$.

Bài tập 6: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Gọi $(C_1),(C_2)$ và (C_3) lần lượt là đồ thị của các hàm số $f(x),g(x)=f\left(x^2\right)$ và $h(x)=f\left(x^3\right)$. Biết $f(1)=1$ và tổng hệ số góc của hai tiếp tuyến tại điểm

có hoành độ $x=1$ của $(C_1),(C_2)$ bằng –3. Phương trình tiếp tuyến của (C_3) tại điểm có hoành độ $x=1$ là

A. $y=-x+2.$ **B.** $y=-3x-2.$ **C.** $y=-x-1.$ **D.** $y=-3x+4.$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta cần tính $h(1),\ h'(1)$.

Ta có $g'(x)=2xf'(x^2),\ h'(x)=3x^2f'(x^3)$.

Theo giả thiết, ta có $f'(1)+g'(1)=-3\Leftrightarrow f'(1)+2f'(1)=-3\Leftrightarrow f'(1)=-1$.

Do đó $h'(1)=3f'(1)=-3$ và $h(1)=f(1)=1$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=-3(x-1)+1=-3x+4$.

Bài tập 7: Cho hai hàm số $f(x),g(x)$ đều có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f^3(2-x)-2f^2(2+3x)+x^2g(x)+36x=0$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là

A. $y=-x.$ **B.** $y=2x-3.$ **C.** $y=-2x+3.$ **D.** $y=x.$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $f^3(2-x)-2f^2(2+3x)+x^2g(x)+36x=0,\forall x\in\mathbb{R}(1)$

Thay $x=0$ vào (1) ta có $f^3(2)-2f^2(2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(2)=0\\f(2)=2\end{array}\right.$

Lấy đạo hàm hai vế của (1) ta được

$-3f^2(2-x).f'(2-x)-12f(2+3x).f'(2+3x)+2x.g(x)+x^2.g'(x)+36=0.(2)$

Thay $x=0$ vào (2) ta có $-3f^2(2).f'(2)-12f(2).f'(2)+36=0.(3)$

+ Với $f(2)=0$ thay vào (3) thì $36=0$ (vô lý).

+ Với $f(2)=2$ thay vào (3) thì $f'(2)=1$ nên phương trình tiếp tuyến là $y=x$.

Bài tập 8: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\left[f(x)\right]^3+6f(x)=-3x+10$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm có hoành độ $x=1$ là

A. $y=-x+2.$ **B.** $y=x.$ **C.** $y=\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}.$ **D.** $y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}.$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta cần tính $f(1),\ f'(1)$.

Thay $x=1$ vào đẳng thức $\left[f\left(x\right)\right]^3+6f\left(x\right)=-3x+10$, ta có

$\left[f\left(1\right)\right]^3+6f\left(1\right)=-3+10\Leftrightarrow\left[f\left(1\right)\right]^3+6f\left(1\right)-7=0\Leftrightarrow f\left(1\right)=1.$

Theo bài ra ta có $\left[f\left(x\right)\right]^3+6f\left(x\right)=-3x+10$ đúng với mọi x nên đạo hàm hai vế ta được $3.\left[f\left(x\right)\right]^2.f'\left(x\right)+6f'\left(x\right)=-3,\forall x\in\mathbb{R}$.

Thay $x=1$ vào ta có $3\left[f\left(1\right)\right]^2.f'\left(1\right)+6f'\left(1\right)=-3$.

Vì $f\left(1\right)=1$ nên $f'\left(1\right)=-\frac{1}{3}$.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$.

$\sqrt{2}<\left|f\left(1\right)\right|<2.$

Dạng 8. Tìm các điểm trên đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ mà tiếp tuyến tại các điểm đó song song với nhau hoặc có cùng hệ số góc k.

1. Phương pháp giải

Giả sử hai điểm $A\left(x_A;f\left(x_A\right)\right),B\left(x_B;f\left(x_B\right)\right)\left(x_A\neq x_B\right)$ thuộc đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ mà tiếp tuyến tại hai điểm đó song song với nhau hoặc có cùng hệ số góc k thì x_A,x_B là hai nghiệm của phương trình $f'\left(x\right)=k$.

Khi đó ta có biểu thức liên hệ giữa x_A,x_B. Từ đó giải quyết yêu cầu bài toán đưa ra.

Đối với hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}\left(c\neq0;ad-bc\neq0\right)$ có tâm đối xứng là $I\left(-\frac{d}{c};\frac{a}{c}\right)$. Nếu A, B là hai điểm thuộc đồ thị có tiếp tuyến tại A, B song song với nhau thì I là trung điểm của AB.

2. **Bài tập mẫu**

Bài tập 1: Cho hàm số $y=\frac{x+1}{2x-1}$ có đồ thị (H). Gọi $A\left(x_1;y_1\right),B\left(x_2;y_2\right)$ là hai điểm phân biệt thuộc (H) sao cho tiếp tuyến của (H) tại A, B song song với nhau. Độ dài nhỏ nhất của đoạn thẳng AB bằng

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** $2\sqrt{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $y'=\frac{-3}{\left(2x-1\right)^2}$. Do tiếp tuyến của (H) tại A, B song song với nhau nên

$y'\left(x_1\right)=y'\left(x_2\right)\Leftrightarrow\frac{-3}{\left(2x_1-1\right)^2}=\frac{-3}{\left(2x_2-1\right)^2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=x_2\\x_1+x_2=1\end{array}\right.$

Vì $x_1 \neq x_2$ nên $x_1 + x_2 = 1$.

Khi đó do vai trò của A, B như nhau nên ta có thể giả sử $x_1 = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}, a > 0$ thì $A\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}; \frac{a+3}{2a}\right), B\left(-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}; \frac{a-3}{2a}\right)$.

Gọi $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ là giao điểm của hai đường tiệm cận.

Ta thấy $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 = 2x_I \\ y_1 + y_2 = 1 = 2y_I \end{cases}$ nên I là trung điểm của AB.

Ta có $\overrightarrow{IA} = \left(\frac{a}{2}; \frac{3}{2a}\right) \Rightarrow IA = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{9}{4a^2}} \geq \sqrt{2\sqrt{\frac{a^2}{4}.\frac{9}{4a^2}}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

Vì I là trung điểm của AB nên $AB = 2IA \geq 2\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{6}$.

Vậy $AB_{\min} = \sqrt{6}$ khi $\frac{a^2}{4} = \frac{9}{4a^2} \Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow a = \sqrt{3}$

Bài tập 2: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{2x-1}$ có đồ thị (H). Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là hai điểm phân biệt thuộc (H) sao cho tiếp tuyến của (H) tại A , B có cùng hệ số góc k . Biết diện tích tam giác OAB bằng $\frac{1}{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $k < -9$. **B.** $-9 \leq k < -6$. **C.** $-6 \leq k < -3$. **D.** $-3 \leq k < 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $y' = -\frac{3}{(2x-1)^2}$

Tiếp tuyến tại A, B của (H) có cùng hệ số góc k nên x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình $-\frac{3}{(2x-1)^2} = k \Rightarrow k < 0$.

Suy ra $4kx^2 - 4kx + k + 3 = 0 (*)$ nên $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1.x_2 = \frac{k+3}{4k} \end{cases}$

Khi đó do vai trò của A, B như nhau nên ta có thể giả sử $x_1 = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}, a > 0$ thì $A\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}; \frac{a+3}{2a}\right), B\left(-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}; \frac{a-3}{2a}\right)$.

Áp dụng công thức tính diện tích tam giác ABC nếu có $\overrightarrow{AB}=(a;b)$, $\overrightarrow{AC}=(c;d)$ thì $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|ad-bc|$.

Ta có $\overrightarrow{OA}=\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2};\frac{a+3}{2a}\right)$, $\overrightarrow{OB}=\left(-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2};\frac{a-3}{2a}\right)$

$\Rightarrow S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\left|\left(\frac{a+1}{2}\right)\frac{a-3}{2a}-\left(\frac{-a+1}{2}\right).\frac{a+3}{2a}\right|=\frac{1}{4}\left|\frac{a^2-3}{a}\right|=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow\left|\frac{a^2-3}{a}\right|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a^2-2a-3=0\\a^2+2a-3=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=3\\a=1\end{array}\right.$ (vì a > 0).

+ Với $a=3\Rightarrow x_1=2;x_2=-1\Rightarrow k=-\frac{1}{3}$.

+ Với $a=1\Rightarrow x_1=1;x_2=0\Rightarrow k=-3$.

Vậy giá trị của k là $k=-3;\ k=-\frac{1}{3}$.

Bài tập 3: Cho hàm số $y=x^3-3x+1$ có đồ thị (C). Gọi $A(x_A;y_A),B(x_B;y_B)$ với $x_A>x_B$ là các điểm thuộc (C) sao cho tiếp tuyến tại A, B song song với nhau và $AB=6\sqrt{37}$. Giá trị $2x_A-3x_B$ bằng

A. 15. **B.** 90. **C.** – 15. **D.** – 90.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $y'=3x^2-3$.

Do tiếp tuyến của (C) tại A, B song song với nhau nên $y'(x_A)=y'(x_B)$

$\Leftrightarrow 3x_A^2-3=3x_B^2-3\Leftrightarrow x_A+x_B=0$ (do $x_A>x_B$).

Giả sử $A(a,a^3-3a+1)$, $B(-a,-a^3+3a+1)$ với a > 0 thuộc (C).

Khi đó $AB^2=4a^2+(2a^3-6a)^2=4a^6-24a^4+40a^2=6\sqrt{37}$

$\Leftrightarrow 4a^6-24a^4+40a^2-1332=0\Leftrightarrow a^2=9\Rightarrow a=3$ (vì a > 0)

$\Rightarrow x_A=3;x_B=-3$ nên $2x_A-3x_B=15$.

Bài tập 4: Cho hàm số $y=\frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi A, B là hai điểm phân biệt thuộc (C) và tiếp tuyến của (C) tại A, B song song với nhau. Đường thẳng AB cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại M, N diện tích tam giác OMN bằng $\frac{1}{4}$. Độ dài đoạn MN bằng

A. $\sqrt{10}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\frac{3\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $y'=\dfrac{-3}{(x-1)^2}$. Gọi $A(x_1;y_1), B(x_2;y_2)$.

Khi đó $y'(x_1)=y'(x_2)\Leftrightarrow (x_1-1)^2=(x_2-1)^2\Leftrightarrow x_1+x_2=2$.

Do đó tâm đối xứng $I(1;1)$ của (C) là trung điểm của đoạn thẳng AB.

Gọi hệ số góc của đường thẳng AB là k.

Phương trình đường thẳng AB là $y=k(x-1)+1$.

Điều kiện để đường thẳng $d: y=k(x-1)+1$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B là phương trình $\dfrac{x+2}{x-1}=k(x-1)+1(*)$ có hai nghiệm phân biệt $x\neq 1$.

Ta có $(*)\Leftrightarrow kx^2-2kx+k-3=0$ có hai nghiệm phân biệt $x\neq 1$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} k\neq 0 \\ k^2-k(k-3)>0\Leftrightarrow k>0 \\ k-2k+k-3\neq 0 \end{cases}$$

Vì M, N là giao điểm của AB với Ox, Oy nên $M\left(\dfrac{k-1}{k};0\right)$, $N(0;1-k)$.

Suy ra $S_{\Delta OMN}=\dfrac{(k-1)^2}{2|k|}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow 2(k-1)^2=|k|\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=2 \\ k=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Ta có $MN^2=(k-1)^2+\dfrac{(k-1)^2}{k^2}=(k-1)^2\left(1+\dfrac{1}{k^2}\right)$

+ Với $k=2\Rightarrow MN=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

+ Với $k=\dfrac{1}{2}\Rightarrow MN=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Vậy trong cả hai trường hợp thì $MN=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Dạng 9: Một số dạng toán khác

Bài tập 1: Gọi A là điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=x^4-3x^2+2$ và có hoành độ a. Có bao nhiêu số nguyên a sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt B, C khác A?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $y' = 4x^3 - 6x;\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{array}\right.$.

$y'' = 12x^2 - 6; y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Tọa độ các điểm có hoành độ a nguyên để tiếp tuyến tại điểm đó cắt trục hoành tại hai điểm thỏa mãn

$\begin{cases} -\dfrac{\sqrt{6}}{2} < a < \dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ a \neq \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}; a \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow a \in \{-1;0;1\}$.

Vậy có ba giá trị nguyên của a thỏa mãn.

Nhận xét: *Đối với đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ mà đồ thị có ba điểm cực trị (khi ab < 0) thì tiếp tuyến của đồ thị tại các điểm có hoành độ nằm giữa hai điểm cực tiểu (cực đại), trừ điểm uốn sẽ luôn cắt đồ thị tại hai điểm khác nữa.*

Bài tập 2: Gọi A là điểm thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 - 3x^2 + 2$ và có hoành độ a . Có bao nhiêu số nguyên a sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt (C) tại hai điểm phân biệt B, C khác A và diện tích tam giác OBC bằng $2\sqrt{3}$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $y' = 4x^3 - 6x; y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{array}\right.$.

$y'' = 12x^2 - 6; y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Tọa độ các điểm có hoành độ a nguyên để tiếp tuyến tại điểm đó cắt trục hoành tại hai điểm nữa thì

$\begin{cases} -\dfrac{\sqrt{6}}{2} < a < \dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ a \neq \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow a \in \{-1;0;1\}$

+ Với $a = -1 \Rightarrow A(-1;0)$. Khi đó phương trình tiếp tuyến là $y = 2(x+1)$.

Xét phương trình $x^4 - 3x^2 + 2 = 2(x+1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$ nên $B(0;2), C(2;6) \Rightarrow S_{\Delta OBC} = 2$ (loại).

+ Với $a=0\Rightarrow A(0;2)$. Khi đó phương trình tiếp tuyến là $y=2$ nên $B\left(-\sqrt{3};2\right),C\left(\sqrt{3};2\right)\Rightarrow S_{\Delta OBC}=2\sqrt{3}$ (thỏa mãn).

+ Với $a=1\Rightarrow A(1;0)$. Khi đó phương trình tiếp tuyến là $y=-2(x-1)$ nên $B(0;2),C(-2;6)\Rightarrow S_{\Delta OBC}=2$ (loại).

Vậy $a=0$.

Bài tập 3: Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+2}$ có đồ thị (C). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của m sao cho tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x=m-2$ cắt tiệm cận đứng tại $A(x_1;y_1)$, cắt tiệm cận ngang tại $B(x_2;y_2)$ thỏa mãn $x_2+y_1=-5$. Tổng giá trị các phần tử của S bằng

A. 4. **B.** -2. **C.** -4. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đồ thị (C) có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang lần lượt là $x=-2$ và $y=1$.

Ta có $y'=\dfrac{3}{(x+2)^2}, y'(m-2)=\dfrac{3}{m^2}$.

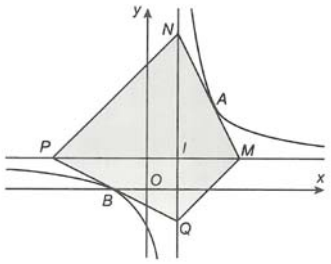
Gọi $M\left(m-2;\dfrac{m-3}{m}\right)\in(C), m\neq 0$, tiếp tuyến của (C) tại M có phương trình là $y=\dfrac{3}{m^2}(x-m+2)+\dfrac{m-3}{m}$.

Giao điểm của tiếp tuyến với tiệm cận đứng là $A\left(-2;\dfrac{m-6}{m}\right)$ và tiệm cận ngang là $B(2m-2;1)$.

Theo giả thiết ta có $\dfrac{m-6}{m}+2m-2=-5\Leftrightarrow 2m^2+4m-6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-3\end{array}\right.$.

Vậy $m_1+m_2=-2$.

Bài tập 4: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C). Gọi A, B là hai điểm nằm trên hai nhánh của (C) và các tiếp tuyến của (C) tại A, B cắt các đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng lần lượt tại các cặp M, N và P, Q. Diện tích tứ giác MNPQ nhỏ nhất bằng



A. 16. **B.** 32. **C.** 8.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận. Theo tính chất của tiếp tuyến đồ thị hàm số bậc nhất trên bậc nhất thì $IM.IN=IP.IQ=8$.

Ta có $S_{MNPQ}=\frac{1}{2}MP.NQ=\frac{1}{2}\left(IM+IP\right)\left(IN+IQ\right)=\frac{1}{2}\left(IM.IN+IP.IQ+IM.IQ+IN.IP\right)$

$=\frac{1}{2}\left(8+8+IM.IQ+IN.IP\right)=8+\frac{1}{2}\left(\frac{64}{IN.IP}+IN.IP\right)\ge 8+\frac{1}{2}.2\sqrt{64}=16$.

Vậy $S_{\min}=16$ khi $\frac{64}{IN.IP}=IN.IP\Rightarrow IN.IP=8$ hay $IN=IQ=IM=IP=2\sqrt{2}$ tức là MNPQ là hình vuông.

Bài tập 5: Cho hàm số $y=\frac{1}{2}x^4-x^3-6x^2+7$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để có ít nhất hai tiếp tuyến của (C) song song hoặc trùng với đường thẳng $d:y=mx$?

A. 27. **B.** 28. **C.** 26. **D.** 25.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

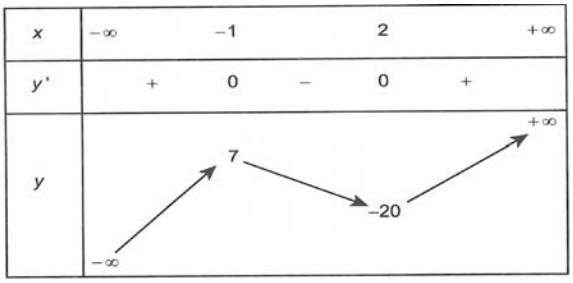
Giả sử $M\left(a;b\right)$ là tiếp điểm. Ta có $y'=2x^3-3x^2-12x$.

Tiếp tuyến của (C) tại M song song hoặc trùng với đường thẳng $d:y=mx$ nên a là nghiệm của phương trình $2x^3-3x^2-12x=m\left(*\right)$.

Để có ít nhất hai tiếp tuyến của (C) song song hoặc trùng với đường thẳng d thì phương trình (*) có ít nhất hai nghiệm.

Xét $f\left(x\right)=2x^3-3x^2-12x$ có $y'=6x^2-6x-12;\ y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên, để phương trình (*) có ít nhất hai nghiệm thì $-20\le m\le 7$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\left\{-20,-19,...,6,7\right\}$.

Vậy có 28 giá trị m thỏa mãn.

Bài tập 6: Cho đường cong $\left(C\right):y=\frac{x+1}{x-1}$ và điểm $I\left(1;1\right)$. Hai điểm A và B thuộc cùng một nhánh của đồ thị sao cho $IA=IB$. Gọi k_1 và k_2 lần lượt là hệ số góc của tiếp tuyến tại A và B. Khi tiếp tuyến tại A và B của (C) tạo với nhau một góc $15°$, giá trị biểu thức $\left|k_1+k_2\right|$ bằng

A. $2\sqrt{6}-2\sqrt{2}$. **B.** $4\left(2-\sqrt{3}\right)$. **C.** $2\sqrt{6}+2\sqrt{2}$. **D.** $4\left(2+\sqrt{3}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Do $IA = IB$ nên $k_1.k_2 = 1$.

Ta có $\tan 15° = \left|\dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1.k_2}\right|$

$\Leftrightarrow \left|k_1 - k_2\right| = 2\left(2 - \sqrt{3}\right)$

$\Leftrightarrow \left(k_1 - k_2\right)^2 = 28 - 16\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \left(k_1 + k_2\right)^2 = 32 - 16\sqrt{3} \Rightarrow \left|k_1 + k_2\right| = 4\sqrt{2 - \sqrt{3}} = 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}$.

Nhận xét: *Đối với đồ thị hàm số* $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ *có tâm đối xứng là I. Cho A, B là hai điểm thuộc cùng một nhánh của đồ thị hàm số thỏa mãn* $IA = IB$.

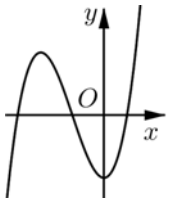
Gọi k_1, k_2 *là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại A, B.*

Ta có $k_1 k_2 = \dfrac{1}{c}$.

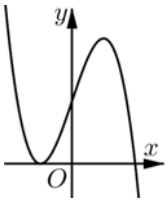
BÀI 6. ĐỒ THỊ HÀM SỐ VÀ SỰ TƯƠNG GIAO

Dạng 1: Dựa vào Đồ thị hàm số

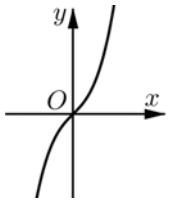
Bài tập 1. Hình dạng có thể có của đồ thị hàm số $y=x^3+bx^2-x+d$ là những hình nào trong các hình sau đây?



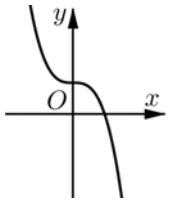
(Hình I)



(Hình II)



(Hình III)



(Hình IV)

A. (I). **B.** (III). **B.** (I) hoặc (III). **D.** (II) hoặc (IV).

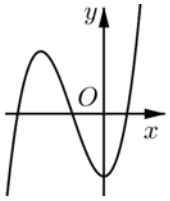
Hướng dẫn giải.

Chọn A.

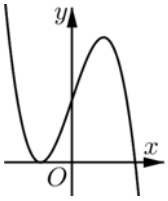
Hàm số $y=x^3+bx^2-x+d$ có hệ số của x^3 dương nên loại (II) và (IV).

Xét $y'=3x^2+2bx-1$ có $\Delta'_{y'}=b^2+3>0,\forall b\in\mathbb{R}.$ Do đó hàm số có hai cực trị.

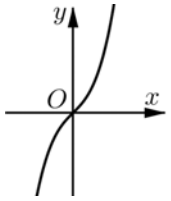
Bài tập 2. Biết rằng hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ có đồ thị là một trong các dạng dưới đây:



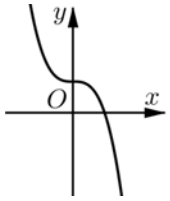
(Hình I)



(Hình II)



(Hình III)



(Hình IV)

Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Đồ thị như (I) có được khi $a<0$ và $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt.

B. Đồ thị như (II) có được khi $a>0$ và $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt.

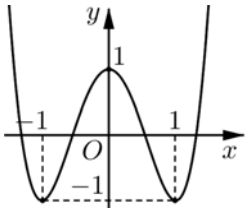
C. Đồ thị như (III) có được khi $a>0$ và $f'(x)=0$ vô nghiệm.

D. Đồ thị như (IV) có được khi $a>0$ và $f'(x)=0$ có có nghiệm kép.

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Bài tập 3. Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình bên $(a,b,c\in\mathbb{R})$. Tính $f(2)$.



A. $f(2)=15.$ **B.** $f(2)=16.$

C. $f(2)=17.$ **D.** $f(2)=18.$

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

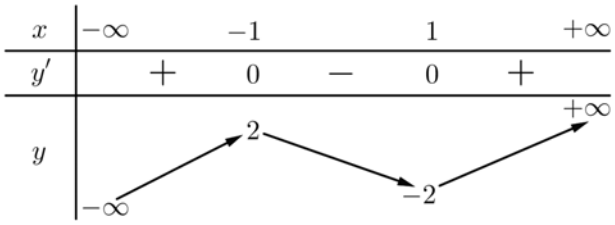
Ta có $y'=f'(x)=4ax^3+2bx=2x\left(2ax^2+b\right).$

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $A(0;1), B(1;-1)$ và đồ thị hàm số đạt cực tiểu tại $B(1;-1)$ nên ta có hệ phương trình: $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=-1 \\ f'(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ a+b+c=-1 \\ 4a+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-4 \\ c=1 \end{cases}$.

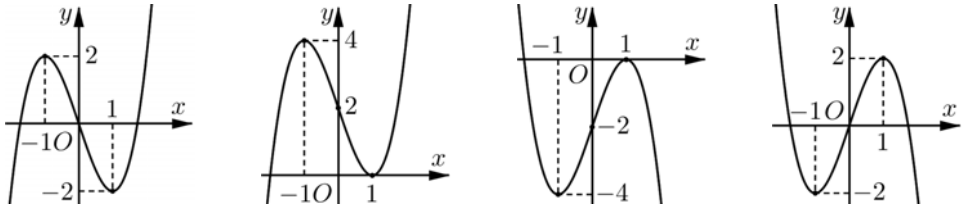
Do đó: $y=f(x)=2x^4-4x^2+1 \longrightarrow f(2)=17$.

Dạng 2: Bảng biến thiên

Bài tập 1. Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên sau:



Đồ thị nào trong các phương án A, B, C, D thể hiện hàm số $y=f(x)$?



A **B** **C** **D**

Hướng dẫn giải.

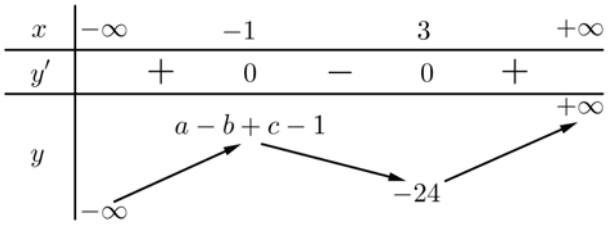
Chọn A.

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy:

• Hàm số có giá trị cực đại bằng 2 và giá trị cực tiểu bằng -2. Loại đáp án B và C.

• Khi $x \to +\infty$ thì $y \to +\infty$ nên chỉ có đáp án A là phù hợp.

Bài tập 2. Cho hàm số $y=f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ có bảng biến thiên như hình vẽ:



Tính giá trị của biểu thức $P=a+b+3c$.

A. $P=-9$. **B.** $P=-3$. **C.** $P=3$. **D.** $P=9$.

Hướng dẫn giải.

Chọn B.

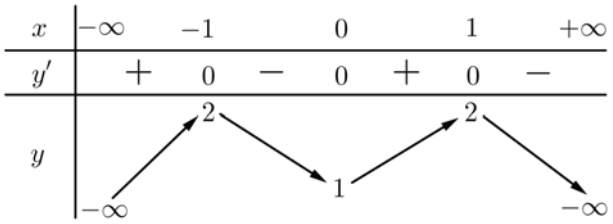
Đạo hàm $y'=3x^2+2ax+b$.

Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm là -1 và 3 $\Leftrightarrow \begin{cases} 3-2a+b=0 \\ 27+6a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=-9 \end{cases}$.

Lại có $f(3)=-24 \longrightarrow 27+9a+3b+c=-24 \longrightarrow c=3$.

Vậy $P=a+b+3c=-3$.

Bài tập 3. Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2+c\ (a\neq 0)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:



Tính giá trị của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2$.

A. $P=2$. **B.** $P=4$. **C.** $P=6$. **D.** $P=8$.

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

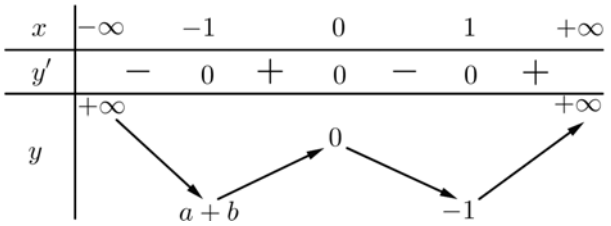
Đạo hàm $y'=4ax^3+2bx=2x\left(2ax^2+b\right)$.

Phương trình $y'=0$ có nghiệm $x=1\ \Leftrightarrow 2a+b=0$. (1)

Lại có $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ a+b+c=2 \end{cases}$. (2)

Giải hệ (1) và (2), ta được $a=-1,\ b=2,\ c=1\longrightarrow P=a^2+b^2+c^2=6$.

Bài tập 4. Cho hàm số $y=f(x)=ax^4+bx^2\ (a\neq 0)$ có bảng biến thiên như hình vẽ:



Hiệu $a-b$ bằng

A. -3. **B.** -1. **C.** 1. **D.** 3.

Hướng dẫn giải.

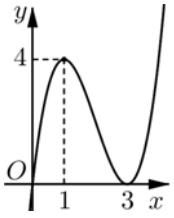
Chọn D.

Đạo hàm $f'(x)=4ax^3+2bx=2x\left(2ax^2+b\right)$.

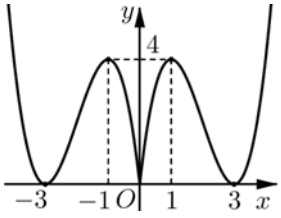
Từ bảng biến thiên, ta có $\begin{cases} f'(1)=0 \\ f(1)-1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} 2(2a+b)=0 \\ a+b=-1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$.

Dạng 3 : Phép suy đồ thị

Bài tập 1. Cho hàm số $y=x^3-6x^2+9x$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào trong bốn đáp án A, B, C, D dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y=-x^3+6x^2-9x.$ **B.** $y=|x|^3+6|x|^2+9|x|.$

C. $y=\left|x^3-6x^2+9x\right|.$ **D.** $y=|x|^3-6x^2+9|x|.$

Hướng dẫn giải.

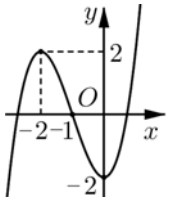
Chọn D.

Nhắc lại lí thuyết: Đồ thị hàm số $y=f(|x|)$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ bằng cách

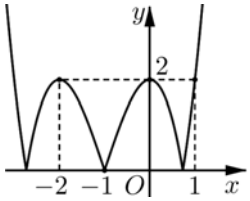
• Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y=f(x)$ với $x\ge 0.$

• Sau đó lấy đối xứng phần đồ thị vừa giữ ở trên qua trục Oy.

Bài tập 2. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-2$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?



Hình 1



Hình 2

A. $y=|x|^3+3x^2-2.$ **B.** $y=\left|x^3+3x^2-2\right|.$

C. $y=\left||x|^3+3x^2-2\right|.$ **D.** $y=-x^3-3x^2+2.$

Hướng dẫn giải.

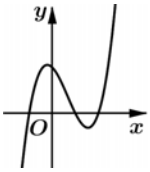
Chọn B.

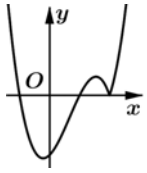
Nhắc lại lí thuyết: Đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ bằng cách

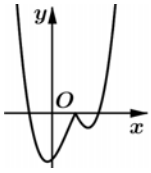
• Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y=f(x)$ với $y\ge 0.$

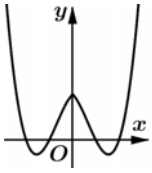
• Lấy đối xứng phần đồ thị hàm số $y=f(x)$ với $y<0$ qua trục Ox.

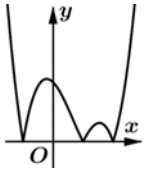
Bài tập 3. Cho hàm số $y=(x-2)\left(x^2-1\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hình nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y=|x-2|\left(x^2-1\right)$?



A. 

B. 

C. 

D. 

Hướng dẫn giải.

Chọn A.

Ta có $y=|x-2|\left(x^2-1\right)=\begin{cases}(x-2)\left(x^2-1\right) & \text{khi } x\ge 2\\ -(x-2)\left(x^2-1\right) & \text{khi } x<2\end{cases}.$

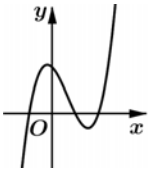
Suy ra đồ thị của hàm số $y=|x-2|\left(x^2-1\right)$ như sau:

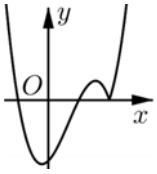
• Giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y=(x-2)\left(x^2-1\right)$ với $x\ge 2$ (bên phải đường thẳng $x=2$).

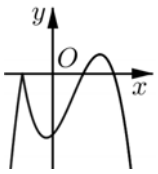
• Lấy đối xứng phần đồ thị $y=(x-2)\left(x^2-1\right)$ với $x<2$ qua trục hoành.

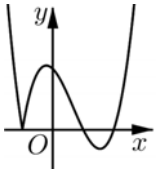
Hợp hai phần đồ thị ở trên ta được đồ thị hàm số cần tìm.

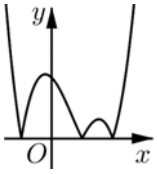
Bài tập 4. Cho hàm số $y=(x-2)(x^2-1)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hình nào dưới đây trong các đáp án A, B, C, D là đồ thị của hàm số $y=|x+1|(x^2-3x+2)$?



A. 

B. 

C. 

D. 

Hướng dẫn giải.

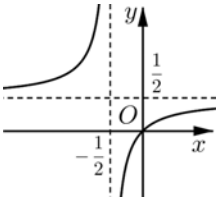
Chọn C.

Ta có $y=|x+1|(x^2-3x+2)=\begin{cases}(x-2)(x^2-1) & \text{khi } x\geq -1\\ -(x-2)(x^2-1) & \text{khi } x<-1\end{cases}$.

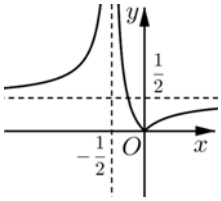
Suy ra đồ thị của hàm số $y=|x+1|(x^2-3x+2)$ giống hoàn toàn phần đồ thị của hàm số $y=(x-2)(x^2-1)$ với $x\geq -1$ (bên phải đường thẳng $x=-1$).

Đối chiếu các đáp án ta

Bài tập 5. Cho hàm số $y=\dfrac{x}{2x+1}$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào trong các đáp án A, B, C, D dưới đây?



Hình 1



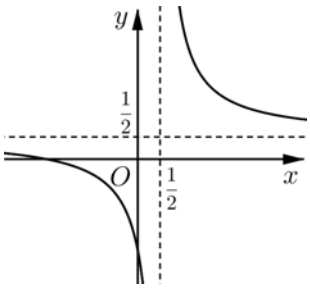
Hình 2

A. $y=\left|\dfrac{x}{2x+1}\right|$. **B.** $y=\dfrac{|x|}{2|x|+1}$. **C.** $y=\dfrac{x}{2|x|+1}$. **D.** $y=\left|\dfrac{|x|}{2|x|+1}\right|$.

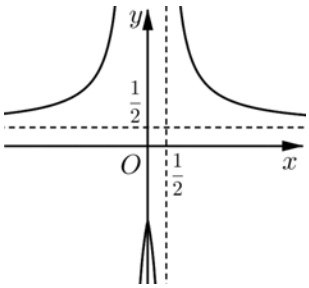
Hướng dẫn giải.

Chọn A.

Bài tập 6. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x-1}$ có đồ thị như Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào trong các đáp án A, B, C, D dưới đây?



Hình 1



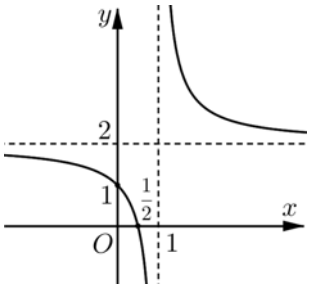
Hình 2

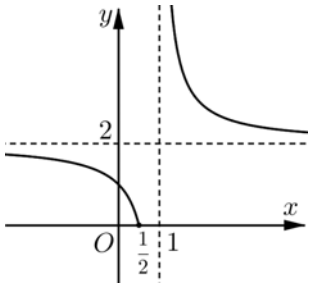
A. $y=-\left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right)$. **B.** $y=\dfrac{|x|+2}{2|x|-1}$ **C.** $y=\left|\dfrac{x+2}{2x-1}\right|$. **D.** $y=\dfrac{|x|+2}{2x-1}$.

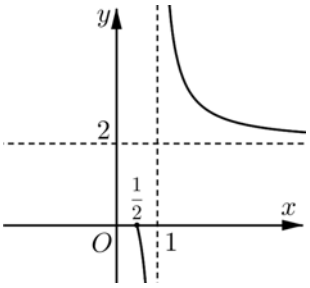
Hướng dẫn giải.

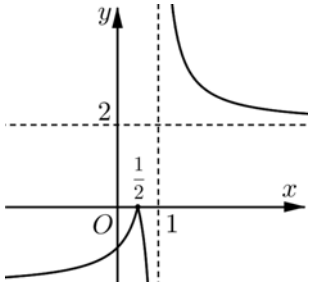
Chọn B.

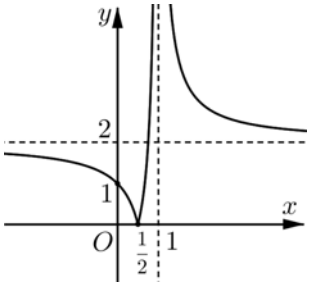
Bài tập 7. Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị như hình bên. Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{|2x-1|}{x-1}$ có đồ thị là hình nào trong các đáp án sau:



A.


B.


C.


D.


Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Ta có $y=\dfrac{|2x-1|}{x-1}=\begin{cases}\dfrac{2x-1}{x-1} & \text{khi } x\ge\dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{2x-1}{x-1} & \text{khi } x<\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

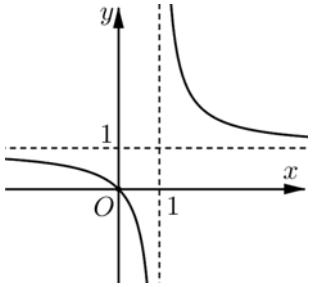
Do đó đồ thị hàm số $y=\dfrac{|2x-1|}{x-1}$ được suy từ đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ bằng cách:

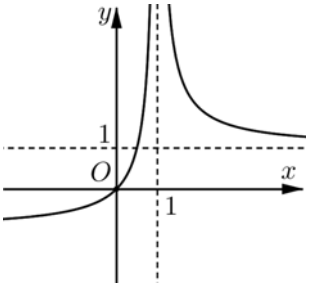
• Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ phía bên phải đường thẳng $x=\dfrac{1}{2}$.

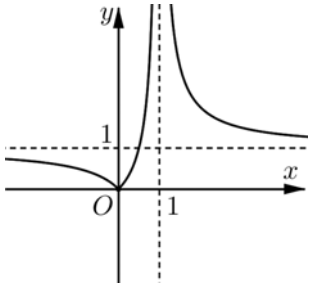
• Lấy đối xứng phần đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ phía bên trái đường thẳng $x=\dfrac{1}{2}$ qua trục hoành.

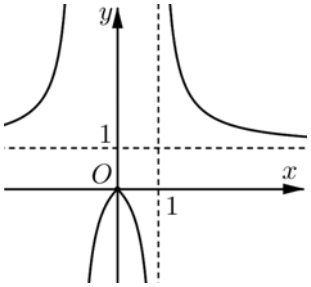
Hợp hai phần đồ thị ở trên ta được toàn bộ đồ thị hàm số $y=\dfrac{|2x-1|}{x-1}$.

Bài tập 8. Trong các đồ thị hàm số sau, đồ thị nào là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x}{|x-1|}$?

A. 

B. 

C. 

D. 

Hướng dẫn giải.

Chọn B.

Ta có $y=\dfrac{x}{|x-1|}=\begin{cases}\dfrac{x}{x-1} & \text{khi } x>1\\ -\dfrac{x}{x-1} & \text{khi } x<1\end{cases}$.

Do đó đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{|x-1|}$ được suy từ đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x-1}$ bằng cách:

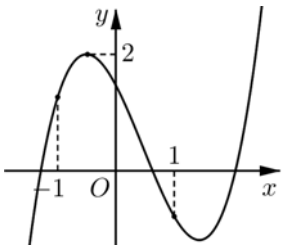
• Giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x-1}$ phía bên phải đường thẳng $x=1$.

• Lấy đối xứng phần đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{x-1}$ phía bên trái đường thẳng $x=1$ qua trục hoành.

Hợp hai phần đồ thị ở trên ta được toàn bộ đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{|x-1|}$.

Dạng 4: Xác định dấu của các tham số của hàm số dựa vào tính chất đồ thị

Bài tập 1. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $a>0,\ b>0,\ c<0,\ d>0$.

B. $a<0,\ b<0,\ c<0,\ d<0$.

C. $a>0,\ b<0,\ c<0,\ d>0$.

D. $a>0,\ b>0,\ c>0,\ d<0$.

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

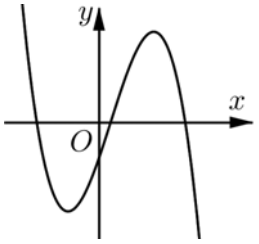
Ta có $y'=3ax^2+2bx+c$.

Đồ thị hàm số thể hiện $a>0;$ cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $d>0$.

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy $\begin{cases}x_{CT}>1\\ -1<x_{CĐ}<0\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}x_{CĐ}+x_{CT}>0\\ x_{CĐ}.x_{CT}<0\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{2b}{3a} > 0 \longrightarrow \dfrac{b}{a} < 0 \xrightarrow{a>0} b < 0 \\ \dfrac{c}{3a} < 0 \longrightarrow \dfrac{c}{a} < 0 \xrightarrow{a>0} c < 0 \end{cases}$. Vậy $a > 0,\ b < 0,\ c < 0,\ d > 0.$

Bài tập 2: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a < 0,\ b > 0,\ c > 0,\ d < 0.$

B. $a < 0,\ b < 0,\ c > 0,\ d < 0.$

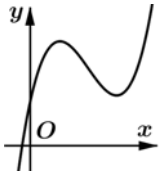
C. $a > 0,\ b < 0,\ c < 0,\ d > 0.$

D. $a < 0,\ b > 0,\ c < 0,\ d < 0.$

Hướng dẫn giải.

Chọn A.

Bài tập 3. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào dưới đây là đúng?



A. $ac > 0,\ bd < 0.$ **B.** $ac > 0,\ bd > 0.$

C. $ac < 0,\ bd < 0.$ **D.** $ac < 0,\ bd > 0.$

Hướng dẫn giải.

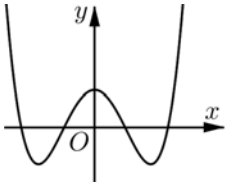
Chọn A.

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c.$

• Dễ dàng suy ra $a > 0$ và $d > 0.$

• Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị đều dương nên phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt, suy ra $\dfrac{c}{3a} > 0$ và $-\dfrac{2b}{3a} > 0 \xrightarrow{a>0} b < 0.$ Vậy $ac > 0,\ bd < 0.$

Bài tập 4. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $a > 0,\ b > 0,\ c < 0.$ **B.** $a > 0,\ b < 0,\ c < 0.$

C. $a > 0,\ b < 0,\ c > 0.$ **D.** $a < 0,\ b > 0,\ c < 0.$

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

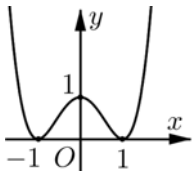
Đồ thị hàm số thể hiện $a > 0.$

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị nên $ab < 0 \xrightarrow{a>0} b < 0.$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $c > 0.$

Vậy $a > 0,\ b < 0,\ c > 0.$

Bài tập 5. Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?



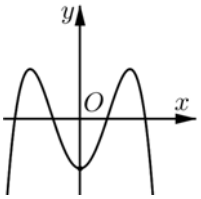
A. $a < 0,\ b > 0,\ c = 1.$ **B.** $a > 0,\ b < 0,\ c = 1.$

C. $a > 0,\ b > 0,\ c = 1.$ **D.** $a > 0,\ b > 0,\ c > 0.$

Hướng dẫn giải.

Chọn B.

Bài tập 6. Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



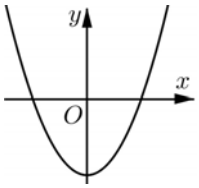
A. $a<0,\ b>0,\ c>0.$ **B.** $a<0,\ b>0,\ c<0.$

C. $a<0,\ b<0,\ c>0.$ **D.** $a<0,\ b<0,\ c<0.$

Hướng dẫn giải.

Chọn B.

Bài tập 7. Hàm số $y=ax^4+bx^2+c\ (a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $a>0,\ b\geq 0,\ c<0.$ **B.** $a>0,\ b<0,\ c\leq 0.$

C. $a>0,\ b\geq 0,\ c>0.$ **D.** $a<0,\ b<0,\ c<0.$

Hướng dẫn giải.

Chọn A.

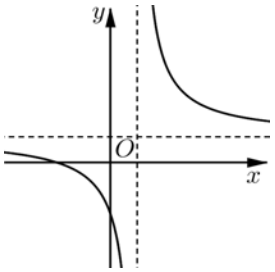
Dựa vào dáng điệu đồ thị suy ra $a>0$.

Hàm số có 1 điểm cực trị nên $ab\geq 0\xrightarrow{a>0}b\geq 0.$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $c<0.$

Vậy $a>0,\ b\geq 0,\ c<0.$

Bài tập 8. Hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $a>0$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $b>0,\ c>0,\ d<0.$

B. $b>0,\ c<0,\ d<0.$

C. $b<0,\ c<0,\ d<0.$

D. $b<0,\ c>0,\ d<0.$

Hướng dẫn giải.

Chọn A.

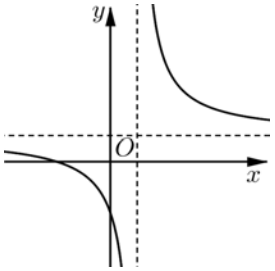
Từ đồ thị hàm số, ta thấy

• Khi $y=0\longrightarrow x=-\dfrac{b}{a}<0\xrightarrow{a>0}b>0.$ • Khi $x=0\longrightarrow y=\dfrac{b}{d}<0\xrightarrow{b>0}d<0$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=-\dfrac{d}{c}>0\xrightarrow{d<0}c>0.$

Vậy $b>0,\ c>0,\ d<0.$

Bài tập 99. Hàm số $y=\dfrac{bx-c}{x-a}$ $(a\neq 0;\ a,\ b,\ c\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



A. $a>0,\ b>0,\ c-ab<0.$

B. $a>0,\ b>0,\ c-ab>0.$

C. $a>0,\ b>0,\ c-ab=0.$

D. $a>0,\ b<0,\ c-ab<0.$

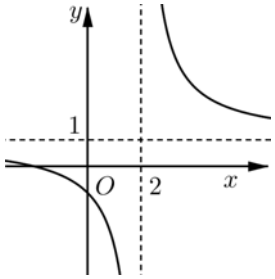
Hướng dẫn giải.

Chọn A.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=a>0;$ tiệm cận ngang $y=b>0.$

Mặt khác, ta thấy dạng đồ thị là đường cong đi xuống (từ trái sang phải) nên suy ra đạo hàm $y'=\dfrac{c-ab}{(x-a)^2}<0,\forall x\neq a\longrightarrow c-ab<0.$ Vậy $a>0,\ b>0,\ c-ab<0.$

Bài tập 10. Đường cong ở hình bên là đồ thị hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ với $a,\ b,\ c,\ d$ là các số thực. Mệnh đề nào sau đây là đúng ?



A. $y'<0,\ \forall x\neq 1.$ **B.** $y'<0,\ \forall x\neq 2.$

C. $y'>0,\ \forall x\neq 1.$ **D.** $y'>0,\ \forall x\neq 2.$

Hướng dẫn giải

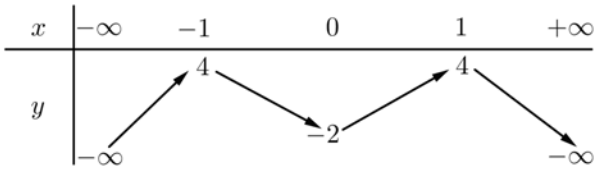
Chọn B.

Dựa vào hình vẽ, ta thấy hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định và đường thẳng $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Suy ra $y'<0,\ \forall x\neq 2$.

Dạng 5: Xác đinh số nghiệm của phương trình dựa vào đồ thị hoặc bảng biến thiên

Bài tập 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Số nghiệm thực của phương trình $2|f(x)|-7=0$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

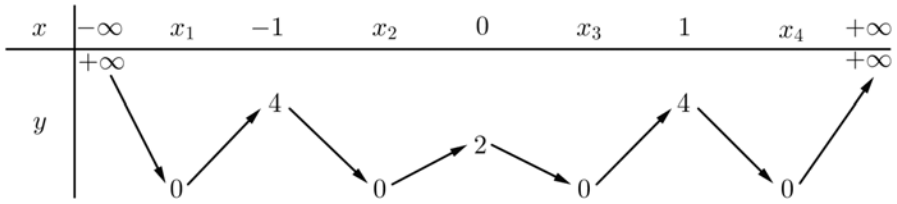
Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Ta có $2|f(x)|-7=0\Leftrightarrow|f(x)|=\frac{7}{2}\Leftrightarrow f(x)=\pm\frac{7}{2}$.

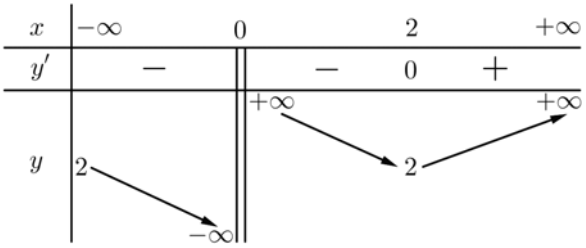
Dựa vào BBT, suy ra $f(x)=\frac{7}{2}$ có 4 nghiệm; $f(x)=-\frac{7}{2}$ có 2 nghiệm.

Cách 2. Từ BBT của hàm số $f(x)$, suy ra BBT của hàm số $|f(x)|$ như sau



Dựa vào BBT $\longrightarrow 2|f(x)|-7=0\Leftrightarrow|f(x)|=\frac{7}{2}$ có 6 nghiệm.

Bài tập 2. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và có bảng biến thiên như sau



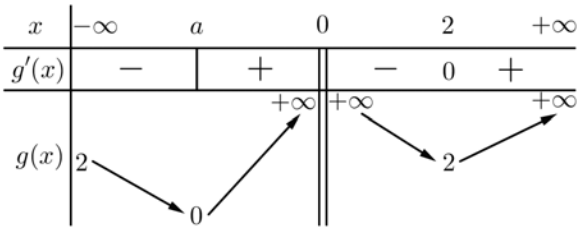
Gọi m là số nghiệm của phương trình $|f(x)|=3$ và n là số nghiệm của phương trình $f(|x|)=3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m+n=4$. **B.** $m+n=6$. **C.** $m+n=7$. **D.** $m+n=8$.

Hướng dẫn giải.

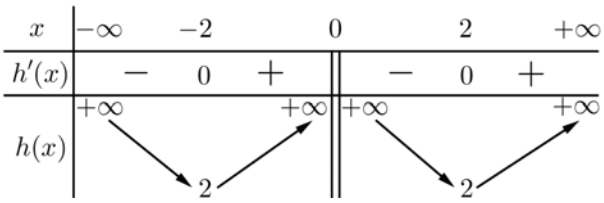
Chọn C.

Từ BBT của hàm số $f(x)$, suy ra BBT của hàm số $g(x)=|f(x)|$ như hình bên(trong đó a là hoành độ giao điểm của đồ thị $y=f(x)$ với trục hoành).



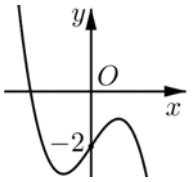
Dựa vào BBT $\longrightarrow|f(x)|=3$ có 3 nghiệm.

Từ BBT của hàm số $f(x)$, suy ra BBT của hàm $h(x)=f(|x|)$ như hình bên. Dựa vào BBT $\longrightarrow f(|x|)=3$ có 4 nghiệm.



Vậy $m+n=3+4=7.$

Bài tập 3. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi phương trình $[f(x)]^2=4$ có bao nhiêu nghiệm?

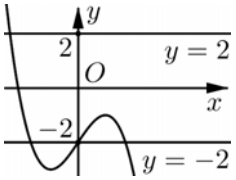


A. 2.
B. 3.
C. 4.
D. 5.

Hướng dẫn giải.

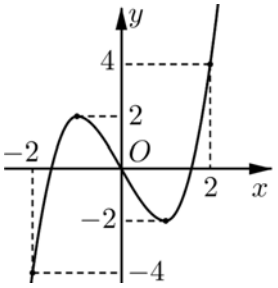
Chọn C.

Ta có $[f(x)]^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=2\quad(1)\\f(x)=-2\quad(2)\end{array}\right.$. Do đó số nghiệm của phương trình $[f(x)]^2=4$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $f(x)$ với hai đường thẳng $y=2$ và $y=-2.$



Dựa vào đồ thị ta thấy: Phương trình (1) có 1 nghiệm; Phương trình (2) có 3 nghiệm. Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Bài tập 4: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ. Hỏi phương trình $|f(x)-1|=1$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt trên $[-2;2]$?



A. 3.
B. 4.
C. 5.
D. 6.

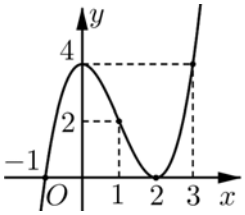
Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Ta có $|f(x)-1|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\quad(1)\\f(x)=2\quad(2)\end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy (1) có 3 nghiệm; (2) có 2 nghiệm.

Bài tập 5: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x^2+4$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi phương trình $\dfrac{f[f(x)]}{3f^2(x)-5f(x)+4}=1$ có bao nhiêu nghiệm ?



A. 4.
B. 5.
C. 6.
D. 8.

Hướng dẫn giải.

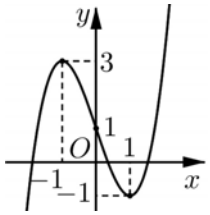
Chọn C.

Ta có $\dfrac{f\left[f\left(x\right)\right]}{3f^2\left(x\right)-5f\left(x\right)+4}=1\Leftrightarrow f^3\left(x\right)-3f^2\left(x\right)+4=3f^2\left(x\right)-5f\left(x\right)+4$

$$\Leftrightarrow f^3\left(x\right)-6f^2\left(x\right)+5f\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}f\left(x\right)=0 & (1)\\ f\left(x\right)=1 & (2).\\ f\left(x\right)=5 & (3)\end{array}\right.$$

Dựa vào đồ thị ta thấy (1) có 2 nghiệm; (2) có 3 nghiệm; (3) có 1 nghiệm.

Bài tập 6. Cho hàm bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hỏi phương trình $f\left(\left|x-2\right|\right)=-\dfrac{1}{2}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1. **B.** 3.

C. 4. **D.** 6.

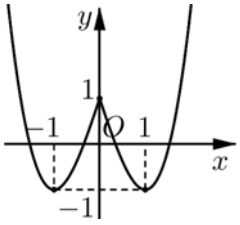
Hướng dẫn giải.

Chọn C.

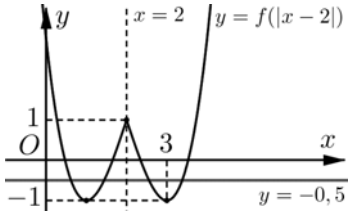
Đồ thị hàm số $f\left(\left|x-2\right|\right),$ được suy từ đồ thị $f\left(x\right)$ bằng cách:

• Lấy đối xứng phần đồ thị hàm số $f\left(x\right)$ phía bên phải Oy (xóa phần đồ thị bên trái Oy) qua Oy (xem Hình 1);

• Tịnh tiến đồ thị ở bước trên sang phải 2 đơn vị (xem Hình 2).



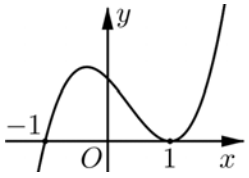
Hình 1.



Hình 2.

Từ đồ thị của hàm số $f\left(\left|x-2\right|\right),$ suy ra phương trình đã cho có 4 nghiệm.

Bài tập 7. Cho hàm số $y=\left(x-1\right).f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng $y=m^2-m$ cắt đồ thị hàm số $y=\left|x-1\right|.f\left(x\right)$ tại hai điểm có hoành độ nằm ngoài đoạn $[-1;1]$.

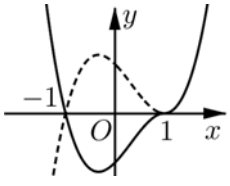


A. $m>0$. **B.** $m<1$. **C.** $0<m<1$. **D.** $m>1$ hoặc $m<0$.

Hướng dẫn giải.

Chọn D.

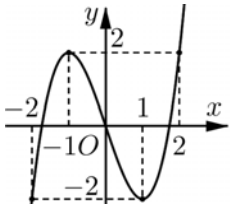
Từ đồ thị hàm số $y=\left(x-1\right).f\left(x\right),$ suy ra đồ thị hàm số $f\left(x\right)\left|x-1\right|$ như hình bên.



Dựa vào đồ thị, suy ra phương trình $\left|x-1\right|.f\left(x\right)=m^2-m$ có hai nghiệm có hoành độ nằm ngoài đoạn $[-1;1]$ khi và chỉ khi

$$m^2-m>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>1\\m<0\end{array}\right.$$

Bài tập 8. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi phương trình $f\left[f(x)\right]=0$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt?



A. 3. **B.** 5.

C. 7. **D.** 9.

Hướng dẫn giải.

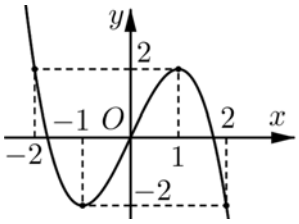
Chọn D.

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x),$ ta suy ra phương trình

$$f\left[f(x)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}f(x)=a\ (-2<a<-1) & (1)\\f(x)=b\ (0<b<1) & (2).\\f(x)=c\ (1<c<2) & (3)\end{array}\right.$$

Mỗi phương trình đều có 3 nghiệm.

Bài tập 9. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thực của phương trình $f\left(f(x)\right)=-2$ là



A. 2. **B.** 4.

C. 5. **D.** 9.

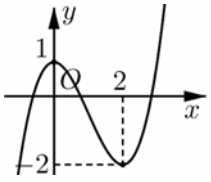
Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Từ đồ thị $y=f(x),$ suy ra phương trình $f\left(f(x)\right)=-2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}f(x)=-1 & (1)\\f(x)=2 & (2)\end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị, ta thấy (1) có 3 nghiệm; (2) có 2 nghiệm.

Bài tập 10. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm của phương trình $2f\left(x^2\right)+3=0$ là



A. 0. **B.** 2.

C. 4. **D.** 6.

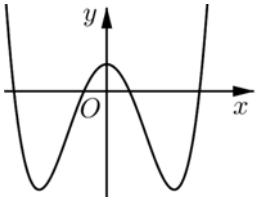
Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Đặt $t=x^2\ \ (t\geq 0).$ Khi đó phương trình đã cho trở thành: $f(t)=-\frac{3}{2}.\ \ (*)$

Số nghiệm của $(*)$ chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=-\frac{3}{2}.$ Dựa vào đồ thị, phương trình $(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t_1<0\ (\text{loại})\\0<t_2<2\longrightarrow x=\pm\sqrt{t_2}\\t_3>2\longrightarrow x=\pm\sqrt{t_3}\end{array}\right.$.

Bài tập 11. Cho hàm số $y=x^4+mx^2+n$ với $m,n\in\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Biết phương trình $x^4+mx^2+n=0$ có k nghiệm thực phân biệt, $k\in\mathbb{N}^*$. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $k=2,\ mn<0.$ **B.** $k=2,\ mn>0.$

C. $k=4,\ mn<0.$ **D.** $k=4,\ mn>0.$

Hướng dẫn giải.

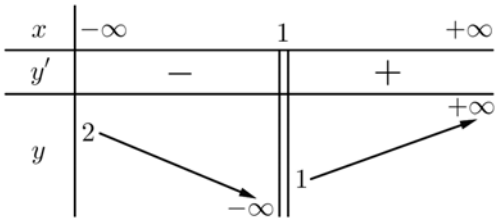
Chọn C.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy phương trình $x^4+mx^2+n=0$ có 4 nghiệm phân biệt, suy ra $k=4.$

Do đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị nên $m<0,$ ta thấy hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ dương nên $n>0\longrightarrow mn<0.$

Dạng 6: Biện luận số nghiệm của phương trình

Bài tập 1. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\},$ liên tục trên từng khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt đường thẳng $y=2m-1$ tại hai điểm phân biệt.

A. $1<m<\frac{3}{2}.$ **B.** $1\le m<\frac{3}{2}.$ **C.** $1\le m\le\frac{3}{2}.$ **D.** $1<m<2.$

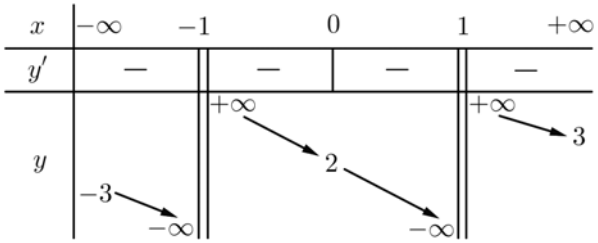
Hướng dẫn giải.

Chọn A.

YCBT $\Leftrightarrow 1<2m-1<2\Leftrightarrow 1<m<\frac{3}{2}.$

Nhận xét: Sai lầm hay gặp là cho $1\le 2m-1\le 2\Leftrightarrow 1\le m\le\frac{3}{2}.$

Bài tập 2. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\},$ liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên sau:



Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=2m+1$ cắt đồ thị hàm số đã cho tại hai điểm phân biệt.

A. $m\le -2.$ **B.** $m\ge 1.$ **C.** $m\le -2,\ m\ge 1.$ **D.** $m<-2,\ m>1.$

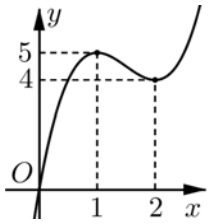
Hướng dẫn giải.

Chọn D.

YCBT $\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2m+1>3 \\ 2m+1<-3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m>1 \\ m<-2 \end{bmatrix}.$

Nhận xét: Nếu yêu cầu bài toán có duy nhất một nghiệm thực $\Leftrightarrow -3 \le 2m+1 \le 3.$

Bài tập 3. Cho hàm số $y=f(x)=2x^3-9x^2+12x$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(|x|)+m=0$ có 6 nghiệm phân biệt.



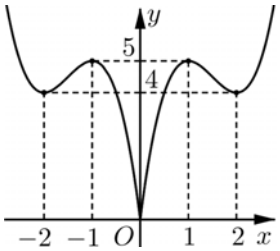
A. $m<-5.$ **B.** $-5<m<-4.$

C. $4<m<5.$ **D.** $m>-4.$

Hướng dẫn giải.

Chọn B.

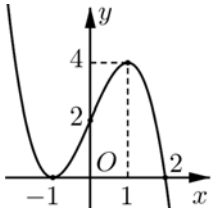
Trước tiên từ đồ thị hàm số $y=f(x)$, ta suy ra đồ thị hàm số $y=f(|x|)$ như hình vẽ.



Ta có $f(|x|)+m=0 \Leftrightarrow f(|x|)=-m.$

Do đó YCBT $\Leftrightarrow 4<-m<5 \Leftrightarrow -5<m<-4.$

Bài tập 4. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2|f(x)|-m=0$ có 4 nghiệm phân biệt?



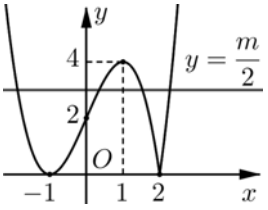
A. $3.$ **B.** $4.$

C. $7.$ **D.** $8.$

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Trước tiên từ đồ thị hàm số $y=f(x),$ ta suy ra đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ như hình vẽ.



Ta có $2|f(x)|-m=0 \Leftrightarrow |f(x)|=\frac{m}{2}.$

Do đó YCBT $\Leftrightarrow 0<\frac{m}{2}<4 \Leftrightarrow 0<m<8.$

Bài tập 5. Tập hợp các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=(x-1)(x^2+mx+m)$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt là

A. $(0;4).$ **B.** $(4;+\infty).$

C. $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};0\right).$ **D.** $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup(4;+\infty).$

Hướng dẫn giải.

Chọn D.

Phtrình hđgđ: $(x-1)\left(x^2+mx+m\right)=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=1 \\ x^2+mx+m=0 \ (1) \end{bmatrix}$.

YCBT $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác $1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1^2+m.1+m \neq 0 \\ \Delta = m^2-4m>0 \end{cases}$.

Phương trình hoành độ giao điểm $ax^3+bx^2+cx+d=0$.

• Nếu nhẩm được một nghiệm x_0 thì phương trình tương đương $\begin{bmatrix} x=x_0 \\ ax^2+b'x+c'=0 \end{bmatrix}$.

• Cô lập tham số m và lập bảng biến thiên hoặc dùng đồ thị.

• Nếu không nhẩm được nghiệm và không cô lập được m thì bài toán được giải quyết theo hướng tích hai cực trị, cụ thể:

◦ Đồ thị cắt trục hoành đúng ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow y_{CD}.y_{CT}<0.$

◦ Đồ thị có hai điểm chung với trục hoành $\Leftrightarrow y_{CD}.y_{CT}=0.$

◦ Đồ thị có một điểm chung với trục hoành $\Leftrightarrow y_{CD}.y_{CT}>0$ hoặc hàm số không có cực trị.

Chú ý: Nếu $y'=3ax^2+2bx+c=0$ nhẩm được hai nghiệm thì tính y_{CD}, y_{CT} dễ dàng. Trường hợp không nhẩm được nghiệm thì dùng mối liên hệ hai nghiệm đó là hệ thức Viet.

Bài tập 6. Tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2$ cắt đường thẳng $y=m$ tại ba điểm phân biệt là

A. $(-4;0)$. **B.** $(0;+\infty)$.

C. $(-\infty;-4)$. **D.** $(-\infty;-4)\cup(0;+\infty)$.

Hướng dẫn giải.

Chọn A.

Xét hàm bậc ba $y=x^3-3x^2,$ có

$$y'=3x^2-6x \longrightarrow y'=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=0 \longrightarrow y_{CD}=0 \\ x=2 \longrightarrow y_{CT}=-4 \end{bmatrix}.$$

Dựa vào dáng điệu của đồ thị hàm bậc ba, ta có YCBT $\Leftrightarrow y_{CT}<m<y_{CD} \Leftrightarrow -4<m<0.$

Bài tập 7. Cho phương trình $2x^3-3x^2=2m+1.$ Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt.

A. $m=-\frac{1}{2},\ m=-1.$ **B.** $m=-\frac{1}{2},\ m=-\frac{5}{2}.$

C. $m=\frac{1}{2},\ m=\frac{5}{2}.$ **D.** $m=1,\ m=-\frac{5}{2}.$

Hướng dẫn giải.

Chọn A.

Xét hàm bậc ba $f(x)=2x^3-3x^2,$ có

$$f'(x)=6x^2-6x \longrightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=0 \longrightarrow y_{CD}=0 \\ x=1 \longrightarrow y_{CT}=-1 \end{bmatrix}.$$

Dựa vào dáng điệu của đồ thị hàm bậc ba, ta có YCBT $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m+1=y_{CD} \\ 2m+1=y_{CT} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2m+1=0 \\ 2m+1=-1 \end{array}\right.$.

Bài tập 8. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-mx^2+4$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt.

A. $m\neq 0$. **B.** $m>0$. **C.** $m\neq 3$. **D.** $m>3$.

Hướng dẫn giải.

Chọn D.

Ta có $y'=3x^2-2mx=x(3x-2m)\longrightarrow y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{2m}{3} \end{array}\right.$.

YCBT $\Leftrightarrow$ Hàm số có hai điểm cực trị và hai giá trị cực trị trái dấu

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{2m}{3}\neq 0 \\ y(0).y\left(\dfrac{2m}{3}\right)<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m\neq 0 \\ 4.\left(\dfrac{-4m^3}{27}+4\right)<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m>3.$$

Bài tập 9. Tìm giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+2$ có đúng hai điểm chung với trục hoành.

A. $m=\dfrac{1}{6}$. **B.** $m=\sqrt[3]{2}$. **C.** $m=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$. **D.** $m=\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Ta có $y'=3x^2-6mx=3x(x-2m)\longrightarrow y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2m \end{array}\right.$.

YCBT $\Leftrightarrow$ hàm số có hai điểm cực trị và tích hai cực trị bằng 0

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2m\neq 0 \\ y(0).y(2m)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m\neq 0 \\ 2.\left(-4m^3+2\right)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow m=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Bài tập 10. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $x^3-3mx+2=0$ có nghiệm duy nhất.

A. $m\leq 0$. **B.** $0<m<1$. **C.** $m<1$. **D.** $m>1$.

Hướng dẫn giải.

Chọn B.

Ta có $y'=3x^2-3m=3\left(x^2-m\right)\longrightarrow y'=0\Leftrightarrow x^2=m$.

Khi đó yêu cầu bài toán tương đương với:

● **TH1.** Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có nghiệm kép hoặc vô nghiệm $\Leftrightarrow m\leq 0$.

● **TH2.** Hàm số có hai cực trị y_{CD}, y_{CT} thỏa mãn $y_{CD}.y_{CT}>0$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m>0 \\ y\left(-\sqrt{m}\right).y\left(\sqrt{m}\right)>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m>0 \\ \left(2+2m\sqrt{m}\right)\left(2-2m\sqrt{m}\right)>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m>0 \\ m<1 \end{array}\right. \Leftrightarrow 0<m<1.$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $m<1$.

Bài tập 11. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = m(x-1)+1$ cắt đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x - 1$ tại ba điểm phân biệt $A(1;1)$, B, C.

A. $m \neq 0$. **B.** $m < \frac{9}{4}$. **C.** $0 \neq m < \frac{9}{4}$. **D.** $m = 0$, $m > \frac{9}{4}$.

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Phtrình hđgđ: $-x^3 + 3x - 1 = m(x-1)+1$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2 + x - 2 + m\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 1 \\ x^2 + x - 2 + m = 0 \quad (*) \end{bmatrix}.$$

YCBT $\Leftrightarrow$ $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác $1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9 - 4m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{9}{4} \\ m \neq 0 \end{cases}$.

Bài tập 12. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ cắt đường thẳng $d: y = m(x-1)$ tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 5$.

A. $m > -3$. **B.** $m = -3$. **C.** $m > -2$. **D.** $m = -2$.

Hướng dẫn giải.

Chọn D.

Phtrình hđgđ: $x^3 - 3x^2 + 2 = m(x-1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 1 \\ x^2 - 2x - m - 2 = 0 \quad (*) \end{bmatrix}$.

Để $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác $1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 + m + 2 > 0 \\ 1^2 - 2.1 - m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -3$.

Giả sử $x_1 = 1$. Khi đó x_2, x_3 là hai nghiệm của $(*)$. Theo Viet, ta có: $\begin{cases} x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 x_3 = -m - 2 \end{cases}$.

YCBT $\Leftrightarrow x_2^2 + x_3^2 = 4 \Leftrightarrow (x_2 + x_3)^2 - 2x_2x_3 = 4 \Leftrightarrow 4 + 2(m+2) = 4 \Leftrightarrow m = -2$.

Bài tập 13. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = x + 4$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4$ (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, B, C sao cho tam giác MBC có diện tích bằng 4, với $M(1;3)$.

A. $m = 3$. **B.** $m = 2$, $m = 3$. **C.** $m = -2$, $m = -3$. **D.** $m = -2$, $m = 3$.

Hướng dẫn giải.

Chọn A.

Phtrình hđgđ: $x^3 + 2mx^2 + (m+3)x + 4 = x + 4 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 \\ x^2 + 2mx + m + 2 = 0 \quad (*) \end{bmatrix}$.

Để d cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - m - 2 > 0 \\ m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m > 2 \\ -2 \neq m < -1 \end{bmatrix}.$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của $(*)$. Theo định lí Viet, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1.x_2 = m + 2 \end{cases}$.

Giải sử $B(x_1; x_1 + 4)$, $C(x_2; x_2 + 4)$. Ta có $BC = \sqrt{2(x_2 - x_1)^2}$ và $d[M,d] = \frac{|1 - 3 + 4|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

YCBT: $S_{\triangle MBC}=4\Leftrightarrow\frac{1}{2}d(M,d)BC=4\Leftrightarrow(x_2-x_1)^2=16\Leftrightarrow(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=16$

$$\Leftrightarrow m^2-m-6=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}m=3(\text{thỏa mãn})\\m=-2(\text{loại})\end{bmatrix}.$$

Bài tập 14. Tập hợp các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d:y=-mx$ cắt đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2-m+2$ (C) tại ba điểm phân biệt $A,\ B,\ C$ sao cho $AB=BC$ là

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-\infty;3)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

Hướng dẫn giải.

Chọn B.

Phtrình hđgđ: $x^3-3x^2-m+2=-mx\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=1\\x^2-2x+m-2=0\quad(*)\end{bmatrix}$.

Để d cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow(*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\1^2-2.1+m-2\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-(m-2)>0\\m\neq3\end{cases}\Leftrightarrow m<3.$$

Gọi $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm của $(*)$. Theo định lí Viet, ta có $x_1+x_2=2.$

Giả sử $x_2>1$ thì $x_1=2-x_2<1$, suy ra $x_1<1<x_2.$

Theo giả thiết $BA=BC$ nên B là trung điểm của AC do đó $x_B=1$ và $x_A=x_1,\ x_C=x_2$. Khi đó ta có $x_A+x_C=2x_B$ nên d luôn cắt (C) tại ba điểm phân biệt $A,\ B,\ C$ thỏa mãn $AB=BC.$ Vậy với $m<3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập 15. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+6mx-8$ cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lập thành cấp số cộng.

A. $m=1.$ **B.** $m=2,\ m=-1.$ **C.** $m=-1.$ **D.** $m=2.$

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Ta có $ax^3+bx^2+cx+d=0\xrightarrow{\text{Viet}}x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}\xrightarrow{x_1+x_3=2x_2}x_2=-\frac{b}{3a}.$

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3-3mx^2+6mx-8=0.\ (*)$

Từ giả thiết suy ra phương trình $(*)$ có một nghiệm $x=m.$

Thay $x=m$ vào phương trình $(*),$ ta được $m^3-3m.m^2+6m.m-8=0\leftrightarrow\begin{bmatrix}m=-1\\m=2\end{bmatrix}.$

Thử lại: • Với $m=-1,$ ta được $x^3+3x^2-6x-8=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}x=-4\\x=-1\\x=2\end{bmatrix}:$ thỏa mãn.

•Với $m=2,$ ta được $x^3-6x^2+12x-8=0\Leftrightarrow x=2:$ không thỏa mãn.

Vậy $m=-1$ là giá trị cần tìm.

Bài tập 16. Với điều kiện nào của tham số k thì phương trình $4x^2(1-x^2)=1-k$ có bốn nghiệm phân biệt?

A. $0<k<2.$ **B.** $k<3.$ **C.** $-1<k<1.$ **D.** $0<k<1.$

Hướng dẫn giải.

Chọn D.

Xét hàm trùng phương $y=4x^2\left(1-x^2\right)=-4x^4+4x^2,$ có

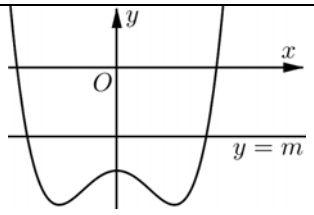
$$y'=-16x^3+8x\longrightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\longrightarrow y(0)=0\\ x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\longrightarrow y\left(\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=1\end{array}\right.\cdot$$

YCBT $\Leftrightarrow y_{\text{CT}}<1-k<y_{\text{CD}}\Leftrightarrow 0<1-k<1\Leftrightarrow 0<k<1.$

Biện luận số nghiệm của phương trình $ax^4+bx^2+c=m\ \ (a>0,\ b<0).\qquad (1)$

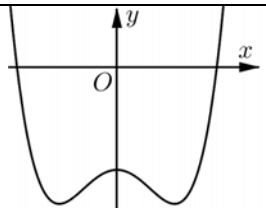
Cách 1. Phương trình $ax^4+bx^2+c=m$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm trùng phương $y=ax^4+bx^2+c$ và đường thẳng $y=m$ (có phương song song với trục hoành)

Do hệ số $a>0,\ b<0$ nên đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có dạng như sau:

Dựa vào đồ thị ta có: • (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow m<y_{\text{CT}}.$ • (1) có 2 nghiệm $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=y_{\text{CT}}\\ m>y_{\text{CD}}\end{array}\right.\cdot$ • (1) có 3 nghiệm $\Leftrightarrow m=y_{\text{CD}}.$ • (1) có 4 nghiệm $\Leftrightarrow y_{\text{CT}}<m<y_{\text{CD}}.$	

Cách 2. Phương trình $ax^4+bx^2+c=m\longleftrightarrow ax^4+bx^2+c-m=0.\quad (2)$

Do hệ số $a>0,\ b<0$ nên đồ thị hàm số $y=ax^4+bx^2+c-m$ có dạng như sau:

Ta có các trường hợp sau: • (2) vô nghiệm $\Leftrightarrow y_{\text{CT}}>0.$ • (2) có 2 nghiệm $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y_{\text{CT}}=0\\ y_{\text{CD}}<0\end{array}\right.\cdot$ • (2) có 3 nghiệm $\Leftrightarrow y_{\text{CD}}=0.$ • (2) có 4 nghiệm $\Leftrightarrow y_{\text{CT}}<0<y_{\text{CD}}.$	

Bài tập 17. Cho hàm số $y=x^4-m(m+1)x^2+m^3$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt.

A. $m>1.$ **B.** $m>-\sqrt{2}.$ **C.** $m>\sqrt{2}.$ **D.** $0<m\neq 1.$

Hướng dẫn giải.

Chọn D.

Xét hàm trùng phương $y=x^4-m(m+1)x^2+m^3,$ có

$$y'=4x^3-2m(m+1)x\longrightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\longrightarrow y=m^3\\ x^2=\dfrac{m(m+1)}{2}\longrightarrow y=-\dfrac{m^2(m+1)^2}{4}+m^3\end{array}\right.\cdot$$

YCBT $\Leftrightarrow$ hàm số có ba điểm cực trị và $y_{\text{CT}}<0<y_{\text{CD}}$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{m(m+1)}{2}>0\\ -\dfrac{m^2(m+1)^2}{4}+m^3<0<m^3\end{array}\right.\Leftrightarrow 0<m\neq 1\ .$$

Bài tập 18. Cho hàm số $y=-x^4+2(2+m)x^2-4-m$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số không có điểm chung với trục hoành?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Xét hàm trùng phương $y=-x^4+2(2+m)x^2-4-m,$ có

$$y'=-4x^3+4(2+m)x \longrightarrow y'=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=0 \\ x^2=2+m \end{bmatrix}.$$

Dựa vào dáng điệu của hàm trùng phương với hệ số của x^4 âm, ta có các trường hợp sau thỏa mãn yêu cầu bài toán:

● Hàm số có một cực trị và cực trị đó âm $\Leftrightarrow \begin{cases} 2+m\le 0 \\ y(0)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+m\le 0 \\ -4-m<0 \end{cases} \Leftrightarrow -4<m\le -2.$

● Hàm số có ba điểm cực trị và giá trị cực đại âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2+m>0 \\ y\left(\pm\sqrt{2+m}\right)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+m>0 \\ m^2+3m<0 \end{cases} \Leftrightarrow -2<m<0.$$

Kết hợp hai trường hợp ta được $-4<m<0 \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m=\{-3;-2;-1\}.$

Bài tập 19. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y=x-2m$ cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-3}{x+1}$ (C) tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

A. $0<m<1$. **B.** $m<-2,\ m>5.$ **C.** $1<m<\dfrac{3}{2}$. **D.** $0<m<\dfrac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{x-3}{x+1}=x-2m \quad (x\ne -1)$

$$\Leftrightarrow x-3=(x-2m)(x+1) \Leftrightarrow x^2-2mx-2m+3=0. \quad (*)$$

YCBT $\Leftrightarrow$ $(*)$ có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'>0 \\ S>0 \\ P>0 \end{cases} \Leftrightarrow 1<m<\dfrac{3}{2}.$

Bài tập 20. Gọi d là đường thẳng đi qua $A(1;0)$ và có hệ số góc $m.$ Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để d cắt đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt thuộc hai nhánh của đồ thị.

A. $m<0.$ **B.** $m\ne 0.$ **C.** $m>0.$ **D.** $0<m\ne 1.$

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Đường thẳng d có dạng $y=m(x-1)=mx-m.$

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{x+2}{x-1}=mx-m \quad (x\ne 1)$

$$\Leftrightarrow x+2=(mx-m)(x-1) \Leftrightarrow \underbrace{mx^2-(2m+1)x+m-2}_{g(x)}=0. \quad (*)$$

YCBT $\Leftrightarrow$ $(*)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$ thỏa mãn $x_1 < 1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ mg(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m\left[m-(2m+1)+m-2\right] < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0.$$

Bài tập 21. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = -x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{-2x+1}{x+1}$ (C) tại hai điểm $A,\ B$ sao cho $AB = 2\sqrt{2}$.

A. $\begin{bmatrix} m = -7 \\ m = 1 \end{bmatrix}$. **B.** $\begin{bmatrix} m = -7 \\ m = 5 \end{bmatrix}$. **C.** $\begin{bmatrix} m = -2 \\ m = 1 \end{bmatrix}$. **D.** $\begin{bmatrix} m = -1 \\ m = 1 \end{bmatrix}$.

Hướng dẫn giải.

Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{-2x+1}{x+1} = -x + m \quad (x \neq -1)$

$$\Leftrightarrow -2x+1 = (-x+m)(x+1) \Leftrightarrow x^2 - (m+1)x + 1 - m = 0. \quad (*)$$

Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ $(*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta = (m+1)^2 - 4(1-m) > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m > -3 + 2\sqrt{3} \\ m < -3 - 2\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Theo đinh lí Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m+1 \\ x_1 x_2 = 1-m \end{cases}$. Giả sử $A(x_1; -x_1 + m)$ và $B(x_2; -x_2 + m)$.

YCBT: $AB = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow AB^2 = 8 \Leftrightarrow 2(x_2 - x_1)^2 = 8 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 4$

$$\Leftrightarrow (m+1)^2 - 4(1-m) = 4 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m = 1 \\ m = -7 \end{bmatrix} \text{(thỏa mãn)}.$$

Bài tập 22. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = x - m + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho độ dài AB ngắn nhất.

A. $m = -3$. **B.** $m = -1$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = 3$.

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{2x}{x-1} = x - m + 2 \quad (x \neq 1)$

$$\Leftrightarrow 2x = (x-m+2)(x-1) \Leftrightarrow x^2 - (m+1)x + m - 2 = 0. \ (*)$$

Ta có $\Delta = m^2 - 2m + 9 > 0,\ \forall m \in \mathbb{R}$ nên d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt.

Gọi $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm của $(*)$. Theo định lí Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m+1 \\ x_1 x_2 = m-2 \end{cases}$.

Giả sử $A(x_1; x_1 - m + 2)$ và $B(x_2; x_2 - m + 2)$ là tọa độ giao điểm của d và (C).

Ta có $AB^2 = 2(x_2 - x_1)^2 = 2(x_1 + x_2)^2 - 8x_1 x_2 = 2(m+1)^2 - 8(m-2) = 2(m-1)^2 + 16 \geq 16.$

Dấu "$=$" xảy ra $\Leftrightarrow m = 1$.

Bài tập 23. Tìm giá trị thực của tham số k sao cho đường thẳng $d: y = x + 2k + 1$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x+1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho các khoảng cách từ A và B đến trục hoành là bằng nhau.

A. $k = -4$. **B.** $k = -3$. **C.** $k = -1$. **D.** $k = -2$.

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{2x+1}{x+1} = x + 2k + 1 \quad (x \neq -1)$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 = (x + 2k + 1)(x + 1) \Leftrightarrow x^2 + 2kx + 2k = 0. \quad (*)$$

Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ $(*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = k^2 - 2k > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} k > 2 \\ k < 0 \end{bmatrix}.$$

Gọi $x_1 \neq x_2$ là hai nghiệm của $(*)$. Giả sử $A(x_1; x_1 + 2k + 1)$ và $B(x_2; x_2 + 2k + 1)$.

YCBT : $d[A, Ox] = d[B, Ox] \Leftrightarrow |x_1 + 2k + 1| = |x_2 + 2k + 1|$

$\Leftrightarrow x_1 + 2k + 1 = -(x_1 + 2k + 1)$ (do $x_1 \neq x_2$)

$\Leftrightarrow x_1 + x_2 = -4k - 2 \Leftrightarrow -2k = -4k - 2 \Leftrightarrow k = -1$ (thỏa mãn).

Bài tập 24. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB vuông tại O, với O là gốc tọa độ.

A. $m = -2$. **B.** $m = -\dfrac{1}{2}$. **C.** $m = 0$. **D.** $m = 1$.

Hướng dẫn giải.

Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{2x-1}{x-1} = x + m \quad (x \neq 1)$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 = (x + m)(x - 1) \Leftrightarrow x^2 + (m - 3)x + 1 - m = 0. \quad (*)$$

Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ $(*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 2m + 5 > 0, \ \forall m \in \mathbb{R}.$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của $(*)$. Theo định lí Viet, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 - m \\ x_1 x_2 = 1 - m \end{cases}$.

Giả sử $A(x_1; x_1 + m)$ và $B(x_2; x_2 + m)$.

YCBT $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + (x_1 + m)(x_2 + m) = 0 \Leftrightarrow 2x_1 x_2 + m(x_1 + x_2) + m^2 = 0$

$\Leftrightarrow 2(1 - m) + m(3 - m) + m^2 = 0 \Leftrightarrow m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -2.$

Bài tập 25. Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = -3x + m$ cắt đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho trọng tâm tam giác OAB thuộc đường thẳng $\Delta: x - 2y - 2 = 0$, với O là gốc tọa độ.

A. $m = -2$. **B.** $m = 0$. **C.** $m = -\dfrac{1}{5}$. **D.** $m = -\dfrac{11}{5}$.

Hướng dẫn giải.

Chọn D.

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x+1}{x-1}=-3x+m \quad (x\neq 1)$

$$\Leftrightarrow 2x+1=(-3x+m)(x-1)\Leftrightarrow 3x^2-(1+m)x+m+1=0. \qquad (*)$$

Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ $(*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta=m^2-10m-11>0\Leftrightarrow \begin{bmatrix} m<-1 \\ m>11 \end{bmatrix}.$$

Gọi $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm của $(*)$. Theo Viet, ta có $x_1+x_2=\frac{1+m}{3}$ và $x_1x_2=\frac{m+1}{3}$.

Giả sử $A(x_1;-3x_1+m)$ và $B(x_2;-3x_2+m)$. Suy ra $G\left(\frac{x_1+x_2}{3};\frac{-3(x_1+x_2)+2m}{3}\right)$.

YCBT : $G\in\Delta\longrightarrow \frac{x_1+x_2}{3}-2.\frac{-3(x_1+x_2)+2m}{3}-2=0$

$$\Leftrightarrow \frac{1+m}{9}-2.\frac{-(m+1)+2m}{3}-2=0\Leftrightarrow m=-\frac{11}{5}(\text{thỏa mãn}).$$

Câu 65. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d:y=2x+m$ cắt đồ thị hàm số $y=\frac{2x-4}{x-1}$ (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho $4S_{\Delta IAB}=15,$ với I là giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị.

A. $m=-5.$ **B.** $m=5.$ **C.** $m=\pm 5.$ **D.** $m=0.$

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{2x-4}{x-1}=2x+m \quad (x\neq 1)$

$$\Leftrightarrow 2x-4=(2x+m)(x-1)\Leftrightarrow 2x^2+(m-4)x-m+4=0. \quad (*)$$

Để d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ $(*)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta=m^2-16>0\Leftrightarrow \begin{bmatrix} m<-4 \\ m>4 \end{bmatrix}.$$

Gọi $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm của $(*)$. Theo Viet, ta có $x_1+x_2=\frac{4-m}{2}$ và $x_1x_2=\frac{4-m}{2}$.

Giả sử $A(x_1;2x_1+m)$ và $B(x_2;2x_2+m)$.

YCBT: $4S_{IAB}=15\Leftrightarrow 2AB.d[I,AB]=15\Leftrightarrow 2AB.\frac{|m|}{\sqrt{5}}=15\Leftrightarrow 4AB^2.m^2=1125$

$$\Leftrightarrow 20(x_1-x_2)^2m^2=1125\Leftrightarrow 4\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]m^2=225$$

$$\Leftrightarrow (m^2-16)m^2=225\Leftrightarrow m^2=25\Leftrightarrow m=\pm 5(\text{thỏa mãn}).$$

BÀI 1. LŨY THỪA

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. Khái niệm lũy thừa

1. Lũy thừa với số mũ nguyên

Cho n là một số nguyên dương, a là một số thực tùy ý. **Lũy thừa** bậc n của a là tích của n thừa số a.

$$a^n = \underbrace{a.a...a}_{n \text{ thừa số } a};\ a^1 = a$$

Trong biểu thức a^n, a được gọi là **cơ số**, số nguyên n là **số mũ**

Với $a \neq 0$, $n = 0$ hoặc n là một số nguyên âm, lũy thừa bậc n của số a là số a^n xác định bởi: $a^0 = 1;\ a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Chú ý:

□ Kí hiệu $0^0, 0^n$ (n nguyên âm) không có nghĩa.

□ Với $a \neq 0$ và n nguyên, ta có $a^n = \dfrac{1}{a^{-n}}$

2. Phương trình $x^n = b$

a) Trường hợp n lẻ: Với mọi số thực b, phương trình có nghiệm duy nhất

b) Trường hợp n chẵn

- Với $b < 0$, phương trình vô nghiệm
- Với $b = 0$, phương trình có một nghiệm $x = 0$
- Với $b > 0$, phương trình có hai nghiệm đối nhau

3. Căn bậc n

a)Khái niệm: Với n nguyên dương, căn bậc n của số thực a là số thực b sao cho $b^n = a$.

Ta thừa nhận hai khẳng định sau:

□ Khi n là số lẻ, mỗi số thực a chỉ có một căn bậc n. Căn đó được kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$

□ Khi n là số chẵn, mỗi số thực dương a có đúng hai căn bậc n là hai số đối nhau là $\sqrt[n]{a}$ (còn gọi là căn bậc số học của a) và $-\sqrt[n]{a}$.

b) Tính chất căn bậc n: Với *a, b ≥ 0, m, n ∈ N*, p, q ∈ Z* ta có:

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$; $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} (b > 0)$;

$\sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p (a > 0)$; $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Nếu $\dfrac{p}{n} = \dfrac{q}{m}$ *thì* $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q}$ $(a > 0)$; *Đặc biệt* $\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & (n\,le) \\ |a|, & (n\,chan) \end{cases}$$

4. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ

Cho số thực a dương và r là một số hữu tỉ. Giả sử $r = \dfrac{m}{n}$, trong đó m là một số nguyên, còn n là một số nguyên dương. Khi đó, lũy thừa của a với số mũ r là số a^r xác định bởi $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

4. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ: (SGK)

II. TÍNH CHẤT CỦA LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC

Cho a,b là những số dương; $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

$a^{\alpha}.a^{\beta}=a^{\alpha+\beta}$; $\dfrac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}=a^{\alpha-\beta}$; $\left(a^{\alpha}\right)^{\beta}=a^{\alpha\beta}$; $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\alpha}=\dfrac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$

Nếu $a>1$ thì $a^{\alpha}>a^{\beta}\Leftrightarrow\alpha>\beta$

Nếu $a<1$ thì $a^{\alpha}>a^{\beta}\Leftrightarrow\alpha<\beta$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Các phép toán biến đổi lũy thừa

1. Phương pháp:

Ta cần nắm các công thức biến đổi lũy thừa sau:

- Với $a\neq 0;b\neq 0$ và $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ ta có

$a^{\alpha}.a^{\beta}=a^{\alpha+\beta}$; $\dfrac{a^{\alpha}}{a^{\beta}}=a^{\alpha-\beta}$; $(a^{\alpha})^{\beta}=a^{\alpha.\beta}$; $(ab)^{\alpha}=a^{\alpha}.b^{\alpha}$; $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\alpha}=\dfrac{a^{\alpha}}{b^{\alpha}}$

- Với $a, b\geq 0$, $m, n\in N^*$, $p, q\in Z$ ta có:

$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$; $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}(b>0)$; $\sqrt[n]{a^{p}}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^{p}(a>0)$;

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

Nếu $\dfrac{p}{n}=\dfrac{q}{m}$ thì $\sqrt[n]{a^{p}}=\sqrt[m]{a^{q}}\ (a>0)$; *Đặc biệt* $\sqrt[n]{a}=\sqrt[mn]{a^{m}}$

Công thức đặc biệt

$f\left(x\right)=\dfrac{a^{x}}{a^{x}+\sqrt{a}}$ thì $f\left(x\right)+f\left(1-x\right)=1.$

Thật vậy, ta có:

$$f\left(1-x\right)=\frac{\frac{a}{a^{x}}}{\frac{a}{a^{x}}+\sqrt{a}}=\frac{a}{a+\sqrt{a}.a^{x}}\Rightarrow f\left(1-x\right)=\frac{\sqrt{a}}{a^{x}+\sqrt{a}}$$

Nên: $f\left(x\right)+f\left(1-x\right)=1.$

2. Bài tập

Bài tập 1. Viết biểu thức $\dfrac{\sqrt{2\sqrt[3]{4}}}{16^{0,75}}$ về dạng lũy thừa 2^{m} ta được $m=?$.

A. $-\dfrac{13}{6}$. **B.** $\dfrac{13}{6}$. **C.** $\dfrac{5}{6}$. **D.** $-\dfrac{5}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$\frac{\sqrt{2\sqrt[3]{4}}}{16^{0,75}}=\frac{\sqrt{2}.\sqrt[6]{2^2}}{\left(2^4\right)^{\frac{3}{4}}}=\frac{2^{\frac{5}{6}}}{2^3}=2^{\frac{-13}{6}}$.

Bài tập 2. Cho $x>0$; $y>0$. Viết biểu thức $x^{\frac{4}{5}}.\sqrt[6]{x^5\sqrt{x}}$ về dạng x^m và biểu thức $y^{\frac{4}{5}}:\sqrt[6]{y^5\sqrt{y}}$ về dạng y^n. Ta có $m-n=?$

A. $-\frac{11}{6}$ **B.** $\frac{11}{6}$ **C.** $\frac{8}{5}$ **D.** $-\frac{8}{5}$

Hướng dẫn giải

Chọn B

$x^{\frac{4}{5}}.\sqrt[6]{x^5\sqrt{x}}=x^{\frac{4}{5}}.x^{\frac{5}{6}}.x^{\frac{1}{12}}=x^{\frac{103}{60}}\Rightarrow m=\frac{103}{60}$

$y^{\frac{4}{5}}:\sqrt[6]{y^5\sqrt{y}}=y^{\frac{4}{5}}:\left(y^{\frac{5}{6}}.y^{\frac{1}{12}}\right)=y^{-\frac{7}{60}}\Rightarrow n=-\frac{7}{60}\Rightarrow m-n=\frac{11}{6}$

Bài tập 3. Biết $4^x+4^{-x}=23$ tính giá trị của biểu thức $P=2^x+2^{-x}$:

A. 5. **B.** $\sqrt{27}$. **C.** $\sqrt{23}$. **D.** 25.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Do $2^x+2^{-x}>0,\forall x\in\mathbb{R}$

Nên $2^x+2^{-x}=\sqrt{\left(2^x+2^{-x}\right)^2}=\sqrt{2^{2x}+2+2^{-2x}}=\sqrt{4^x+4^{-x}+2}=\sqrt{23+2}=5$.

Bài tập 4. Biểu thức thu gọn của biểu thức $P=\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}+2}{a+2a^{\frac{1}{2}}+1}-\frac{a^{\frac{1}{2}}-2}{a-1}\right).\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)}{a^{\frac{1}{2}}},(a>0,a\neq\pm1),$ có dạng $P=\frac{m}{a+n}.$ Khi đó biểu thức liên hệ giữa m và n là:

A. $m+3n=-1$. **B.** $m+n=-2$. **C.** $m-n=0$. **D.** $2m-n=5$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$P=\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}+2}{a+2a^{\frac{1}{2}}+1}-\frac{a^{\frac{1}{2}}-2}{a-1}\right).\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)}{a^{\frac{1}{2}}}=\left(\frac{\sqrt{a}+2}{\left(\sqrt{a}+1\right)^2}-\frac{\sqrt{a}-2}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+1\right)}\right).\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}$

$=\left(\frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+1}-\frac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}-1}\right).\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{2\sqrt{a}}{a-1}.\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{2}{a-1}.$

Do đó $m=2;n=-1$.

Bài tập 5. Cho số thực dương x. Biểu thức $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}}}}$ được viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ có dạng $x^{\frac{a}{b}}$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó, biểu thức liên hệ giữa a và b là:

A. $a+b=509$. **B.** $a+2b=767$. **C.** $2a+b=709$. **D.** $3a-b=510$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}}}}=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\cdot x^{\frac{1}{2}}}}}}}}=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x^{\frac{3}{2}}}}}}}}$

$=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}}}}}=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x^{\frac{7}{4}}}}}}}=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\cdot x^{\frac{7}{8}}}}}}}$

$=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x^{\frac{15}{8}}}}}}}=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\cdot x^{\frac{15}{16}}}}}}=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x^{\frac{31}{16}}}}}}=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{xx^{\frac{31}{32}}}}}=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x^{\frac{63}{32}}}}}$

$=\sqrt{x\sqrt{x\cdot x^{\frac{63}{64}}}}=\sqrt{x\sqrt{x^{\frac{127}{64}}}}=\sqrt{x\sqrt{x^{\frac{127}{128}}}}=\sqrt{x\cdot x^{\frac{255}{128}}}=\sqrt{x^{\frac{255}{128}}}=x^{\frac{255}{256}}$. Do đó $a=255, b=256$.

Nhận xét: $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}}}}=x^{\frac{2^8-1}{2^8}}=x^{\frac{255}{256}}$.

Bài tập 6. Cho $a>0$; $b>0$. Viết biểu thức $a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a}$ về dạng a^m và biểu thức $b^{\frac{2}{3}}:\sqrt{b}$ về dạng b^n. Ta có $m+n=?$

A. $\frac{1}{3}$ **B.** -1 **C.** 1 **D.** $\frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn C

$a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a}=a^{\frac{2}{3}}.a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{5}{6}}\Rightarrow m=\frac{5}{6}; b^{\frac{2}{3}}:\sqrt{b}=b^{\frac{2}{3}}:b^{\frac{1}{2}}=b^{\frac{1}{6}}\Rightarrow n=\frac{1}{6}$

$\Rightarrow m+n=1$

Bài tập 7. Viết biểu thức $\sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{8}}}$ về dạng 2^x và biểu thức $\frac{2\sqrt{8}}{\sqrt[3]{4}}$ về dạng 2^y. Ta có $x^2+y^2=?$

A. $\frac{2017}{567}$ **B.** $\frac{11}{6}$ **C.** $\frac{53}{24}$ **D.** $\frac{2017}{576}$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $\sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{8}}}=\frac{\sqrt{2}.\sqrt[4]{2}}{\sqrt[8]{2^3}}=2^{\frac{3}{8}}\Rightarrow x=\frac{3}{8}; \frac{2\sqrt{8}}{\sqrt[3]{4}}=\frac{2.2^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{2}{3}}}=2^{\frac{11}{6}}\Rightarrow y=\frac{11}{6}\Rightarrow x^2+y^2=\frac{53}{24}$

Bài tập 8. Cho $a = 1 + 2^{-x}$, $b = 1 + 2^{x}$. Biểu thức biểu diễn b theo a là:

A. $\frac{a-2}{a-1}$. **B.** $\frac{a-1}{a}$. **C.** $\frac{a+2}{a-1}$. **D.** $\frac{a}{a-1}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $a = 1 + 2^{-x} > 1, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $2^x = \frac{1}{a-1}$

Do đó: $b = 1 + \frac{1}{a-1} = \frac{a}{a-1}$.

Bài tập 9. Cho các số thực dương a và b. Biểu thức thu gọn của biểu thức $P = \left(2a^{\frac{1}{4}} - 3b^{\frac{1}{4}}\right).\left(2a^{\frac{1}{4}} + 3b^{\frac{1}{4}}\right).\left(4a^{\frac{1}{2}} + 9b^{\frac{1}{2}}\right)$ có dạng là $P = xa + yb$. Tính $x + y$?

A. $x + y = 97$. **B.** $x + y = -65$. **C.** $x - y = 56$. **D.** $y - x = -97$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có:

$$P = \left(2a^{\frac{1}{4}} - 3b^{\frac{1}{4}}\right).\left(2a^{\frac{1}{4}} + 3b^{\frac{1}{4}}\right).\left(4a^{\frac{1}{2}} + 9b^{\frac{1}{2}}\right) = \left(\left(2a^{\frac{1}{4}}\right)^2 - \left(3b^{\frac{1}{4}}\right)^2\right).\left(4a^{\frac{1}{2}} + 9b^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \left(4a^{\frac{1}{2}} - 9b^{\frac{1}{2}}\right).\left(4a^{\frac{1}{2}} + 9b^{\frac{1}{2}}\right) = \left(4a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(9b^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 16a - 81b.$$

Do đó: $x = 16, y = -81$.

Bài tập 10. Cho các số thực dương phân biệt a và b. Biểu thức thu gọn của biểu thức $P = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} - \frac{\sqrt{4a} + \sqrt[4]{16ab}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}}$ có dạng $P = m\sqrt[4]{a} + n\sqrt[4]{b}$. Khi đó biểu thức liên hệ giữa m và n là:

A. $2m - n = -3$. **B.** $m + n = -2$. **C.** $m - n = 0$. **D.** $m + 3n = -1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$P = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} - \frac{\sqrt{4a} + \sqrt[4]{16ab}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}} = \frac{\left(\sqrt[4]{a}\right)^2 - \left(\sqrt[4]{b}\right)^2}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} - \frac{2\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{a} + 2\sqrt[4]{a}\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}}.$$

$$= \frac{\left(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}\right)}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} - \frac{2\sqrt[4]{a}\left(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}\right)}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}} = \sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} - 2\sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{b} - \sqrt[4]{a}.$$

Do đó $m = -1; n = 1$.

Bài tập 11: Cho $f\left(x\right) = \frac{2018^x}{2018^x + \sqrt{2018}}$. Tính giá trị biểu thức sau đây ta được

$$S = f\left(\frac{1}{2019}\right) + f\left(\frac{2}{2019}\right) + ... + f\left(\frac{2018}{2019}\right)$$

A. $S = 2018$. **B.** $S = 2019$. **C.** $S = 1009$. **D.** $S = \sqrt{2018}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $f\left(1-x\right)=\dfrac{\sqrt{2018}}{2018^{x}+\sqrt{2018}}\Rightarrow f\left(x\right)+f\left(1-x\right)=1$

Suy ra $S=f\left(\dfrac{1}{2019}\right)+f\left(\dfrac{2}{2019}\right)+...+f\left(\dfrac{2018}{2019}\right)=f\left(\dfrac{1}{2019}\right)+f\left(\dfrac{2018}{2019}\right)+$

$+f\left(\dfrac{2}{2019}\right)+f\left(\dfrac{2017}{2019}\right)+...+f\left(\dfrac{1009}{2019}\right)+f\left(\dfrac{1010}{2019}\right)=1009.$

Bài tập 12: Cho $9^{x}+9^{-x}=23.$ Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{5+3^{x}+3^{-x}}{1-3^{x}-3^{-x}}$ ta được

A. $-2.$ **B.** $\dfrac{3}{2}.$ **C.** $\dfrac{1}{2}.$ **D.** $-\dfrac{5}{2}.$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $9^{x}+9^{-x}=23\Leftrightarrow\left(3^{x}+3^{-x}\right)^{2}=25\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^{x}+3^{-x}=5\\3^{x}+3^{-x}=-5\ \left(\text{loại}\right)\end{array}\right.$

Từ đó, thế vào $P=\dfrac{5+\left(3^{x}+3^{-x}\right)}{1-\left(3^{x}+3^{-x}\right)}=\dfrac{5+5}{1-5}=-\dfrac{5}{2}.$

Dạng 2: So sánh, đẳng thức và bất đẳng thức đơn giản

1. Phương pháp

Ta cần lưu ý các tính chất sau

Cho $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$. Khi đó

- $a>1:\ a^{\alpha}>a^{\beta}\Leftrightarrow\alpha>\beta;$
- $0<a<1:\ a^{\alpha}>a^{\beta}\Leftrightarrow\alpha<\beta$

Với $0<a<b,\ m\in\mathbb{Z}$ ta có:

- $a^{m}<b^{m}\Leftrightarrow m>0;$ $a^{m}>b^{m}\Leftrightarrow m<0$
- Với $a<b$, n là số tự nhiên lẻ thì $a^{n}<b^{n}$
- Với a,b là những số dương, n là một số nguyên dương khác không $a^{n}=b^{n}\Leftrightarrow a=b$

Chú ý: Nếu n là số nguyên dương lẻ và $a<b$ thì $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$.

Nếu n là số nguyên dương chẵn và $0<a<b$ thì $\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b}$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Với giá trị nào của a thì đẳng thức $\sqrt{a.\sqrt[3]{a.\sqrt[4]{a}}}=\sqrt[24]{2^5}.\frac{1}{\sqrt{2^{-1}}}$ đúng?

A. $a=1$. **B.** $a=2$. **C.** $a=0$. **D.** $a=3$.

Hướng dẫn giải.

Chọn B

Ta có $\begin{cases}\sqrt{a.\sqrt[3]{a.\sqrt[4]{a}}}=\left[a.\left(a.a^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{17}{24}}\\ \sqrt[24]{2^5}.\frac{1}{\sqrt{2^{-1}}}=2^{\frac{5}{24}}.2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{17}{24}}\end{cases}\rightarrow\sqrt{a.\sqrt[3]{a.\sqrt[4]{a}}}=\sqrt[24]{2^5}.\frac{1}{\sqrt{2^{-1}}}\Leftrightarrow a=2.$

Bài tập 2. Cho số thực $a\neq 0$. Với giá trị nào của x thì đẳng thức $\frac{1}{2}\left(a^x+a^{-x}\right)=1$ đúng?

A. $x=1$. **B.** $x=0$. **C.** $x=a$. **D.** $x=\frac{1}{a}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $\frac{1}{2}\left(a^x+a^{-x}\right)=1\Leftrightarrow a^x+\frac{1}{a^x}=2\Leftrightarrow\left(a^x\right)^2-2a^x+1=0$

$\Leftrightarrow\left(a^x-1\right)^2=0\Leftrightarrow a^x=1\Leftrightarrow x=0$.

Bài tập 3. Tìm tất cả các giá trị của a thỏa mãn $\sqrt[15]{a^7}>\sqrt[5]{a^2}$.

A. $a=0$. **B.** $a<0$. **C.** $a>1$. **D.** $0<a<1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $\sqrt[15]{a^7}>\sqrt[5]{a^2}\Leftrightarrow a^{\frac{7}{15}}>a^{\frac{2}{5}}\Leftrightarrow a^{\frac{7}{15}}>a^{\frac{6}{15}}\longrightarrow a>1$.

Bài tập 4. Tìm tất cả các giá trị của a thỏa mãn $(a-1)^{-\frac{2}{3}}<(a-1)^{-\frac{1}{3}}$.

A. $a>2$. **B.** $a>1$. **C.** $1<a<2$. **D.** $0<a<1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $-\frac{2}{3}<-\frac{1}{3}$, kết hợp với $(a-1)^{-\frac{2}{3}}<(a-1)^{-\frac{1}{3}}$. Suy ra hàm số đặc trưng $y=(a-1)^x$ đồng biến $\longrightarrow$ cơ số $a-1>1\Leftrightarrow a>2$.

Bài tập 5. Nếu $a^{\frac{1}{2}}>a^{\frac{1}{6}}$ và $b^{\sqrt{2}}>b^{\sqrt{3}}$. Tìm mối các điều kiện của đáp án a và b

A. $a<1;0<b<1$. **B.** $a>1;b<1$.

C. $0<a<1;b<1$. **D.** $a>1;0<b<1$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Vì $\begin{cases}\frac{1}{2}>\frac{1}{6}\\ a^{\frac{1}{2}}>a^{\frac{1}{6}}\end{cases}\Rightarrow a>1$ và $\begin{cases}\sqrt{2}<\sqrt{3}\\ b^{\sqrt{2}}>b^{\sqrt{3}}\end{cases}\Rightarrow 0<b<1$

Bài tập 6. Kết luận nào đúng về số thực a nếu $(a-1)^{-\frac{2}{3}}<(a-1)^{-\frac{1}{3}}$

A. $a>2$. **B.** $a>0$. **C.** $a>1$. **D.** $1<a<2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Do $-\frac{2}{3}<-\frac{1}{3}$ và số mũ không nguyên nên $(a-1)^{-\frac{2}{3}}<(a-1)^{-\frac{1}{3}}$ khi $a-1>1\Leftrightarrow a>2$.

Bài tập 7. Kết luận nào đúng về số thực a nếu $(2a+1)^{-3}>(2a+1)^{-1}$

A. $\left[\begin{array}{l}-\frac{1}{2}<a<0\\ a<-1\end{array}\right.$. **B.** $-\frac{1}{2}<a<0$. **C.** $\left[\begin{array}{l}0<a<1\\ a<-1\end{array}\right.$. **D.** $a<-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Do $-3<-1$ và số mũ nguyên âm nên $(2a+1)^{-3}>(2a+1)^{-1}$ khi $\left[\begin{array}{l}0<2a+1<1\\ 2a+1<-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\frac{1}{2}<a<0\\ a<-1\end{array}\right.$.

Bài tập 8. Kết luận nào đúng về số thực a nếu $\left(\frac{1}{a}\right)^{-0,2}<a^2$

A. $0<a<1$. **B.** $a>0$. **C.** $a>1$. **D.** $a<0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$\left(\frac{1}{a}\right)^{-0,2}<a^2\Leftrightarrow a^{0,2}<a^2$

Do $0,2<2$ và có số mũ không nguyên nên $a^{0,2}<a^2$ khi $a>1$.

HÀM SỐ LŨY THỪA

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Khái niệm hàm lũy thừa

Hàm số lũy thừa là hàm số có dạng $y = x^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$.

Chú ý: Tập xác định của hàm số lũy thừa phụ thuộc vào giá trị của α

- Với α nguyên dương thì tập xác định là R

- Với α nguyên âm hoặc bằng 0, tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

- Với α không nguyên thì tập xác định là $(0;+\infty)$

Theo định nghĩa, đẳng thức $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ chỉ xảy ra nếu $x > 0.$ Do đó, hàm số $y = x^{\frac{1}{n}}$ không đồng nhất với hàm số $y = \sqrt[n]{x}\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$. Bài tập $y = \sqrt[3]{x}$ là hàm số căn bậc 3, xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$; còn hàm số lũy thừa $y = x^{\frac{1}{3}}$ chỉ xác định khi $x > 0$

2.Đạo hàm của hàm số lũy thừa

$$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha.x^{\alpha-1} \text{ với } x > 0; \quad \left(u^{\alpha}\right)' = \alpha.u^{\alpha-1}.u', \text{với } u > 0$$

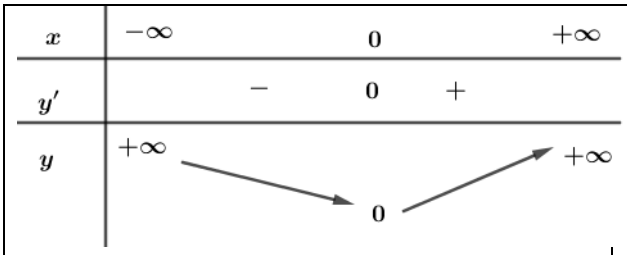
$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}, \text{ với mọi } x > 0 \text{ nếu } n \text{ chẵn, với mọi } x \neq 0 \text{ nếu } n \text{ lẻ}$$

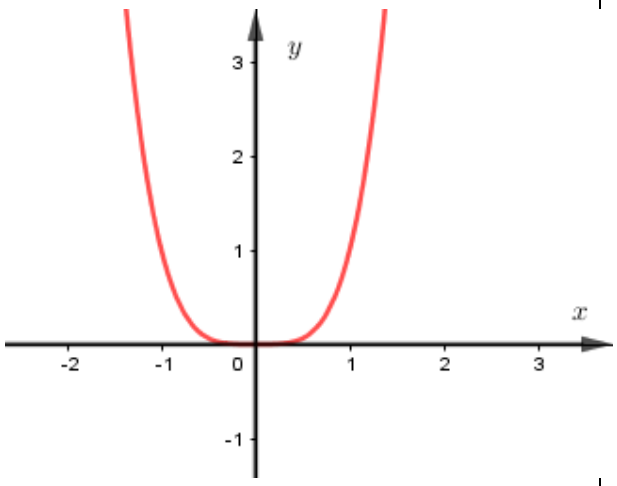
$$\left(\sqrt[n]{u}\right)' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}, \text{ với mọi u} > 0 \text{ nếu } n \text{ chẵn, với mọi u} \neq 0 \text{ nếu } n \text{ lẻ}$$

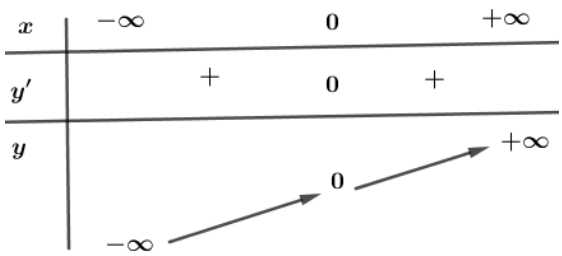
3.Khảo sát hàm số lũy thừa

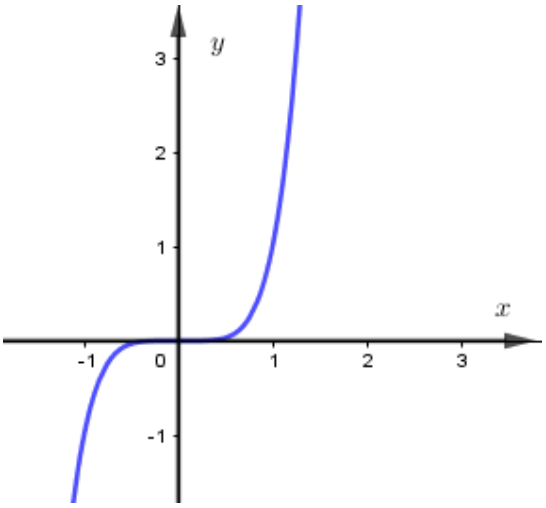
Tập xác định của hàm số lũy thừa $y = x^{\alpha}$ luôn chứa khoảng $(0;+\infty)$ với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$. Trong trường hợp tổng quát ta khảo sát hàm số $y = x^{\alpha}$ trên khoảng này**.**

<table>
<tr><td colspan="2">$\alpha \in \mathbb{N}^*$</td></tr>
<tr><td>$\alpha = 2n,\ n \in \mathbb{N}^*$</td><td>$\alpha = 2n+1,\ n \in \mathbb{N}$</td></tr>
<tr><td>Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
Sự biến thiên:
$y = x^{2n} \Rightarrow y' = 2n.x^{2n-1}$.
$y' = 0 \Rightarrow x = 0$.
Bảng biến thiên</td><td>Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
Sự biến thiên:
$y = x^{2n+1} \Rightarrow y' = (2n+1).x^{2n} \Rightarrow y' \geq 0\ \forall x \in D$.
$\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên D.
Bảng biến thiên</td></tr>
</table>

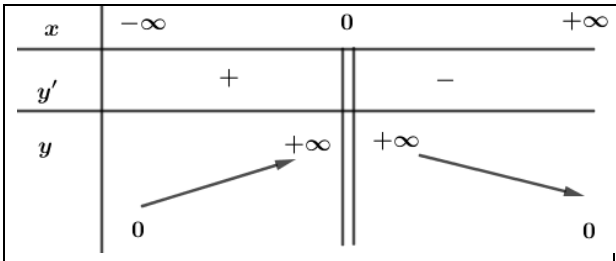
<table>
<tr>
<td>


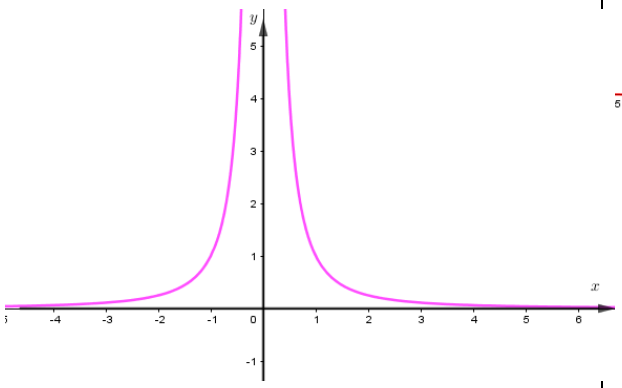
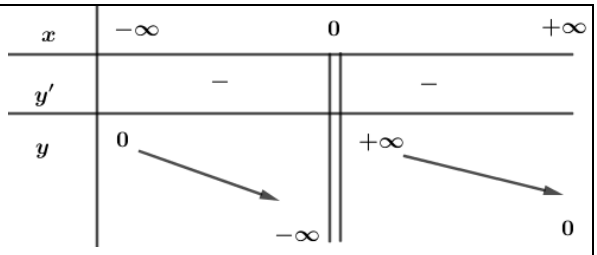
Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.
Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$.
Đồ thị:


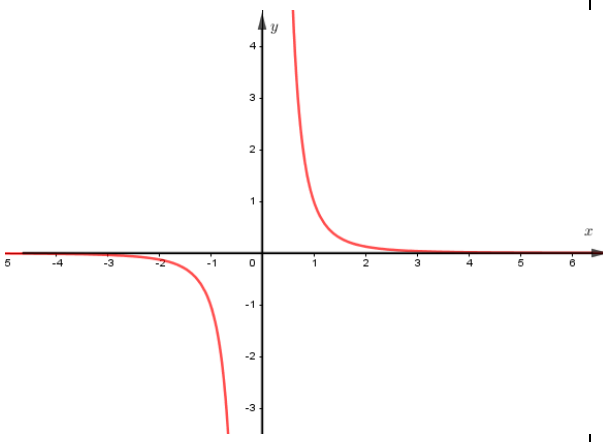
</td>
<td>


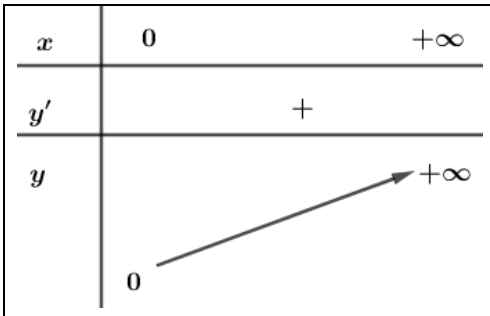
Đồ thị:


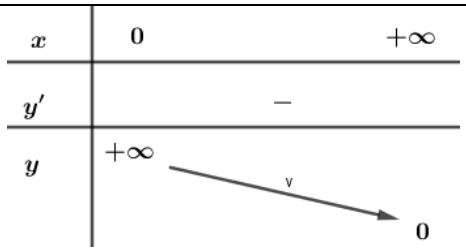
</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">$\alpha \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\alpha = 2k,\ k \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$</td>
<td>$\alpha = 2k+1,\ k \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Tập xác định: $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
Sự biến thiên:
$y = x^{2n} \Rightarrow y' = 2n.x^{2n-1}$.
Giới hạn:
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0$ là TCN.
$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} y = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^-} y = +\infty\end{cases} \Rightarrow x = 0$ là TCĐ.
Bảng biến thiên</td>
<td>Tập xác định: $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
Sự biến thiên:
$y = x^{2k+1} \Rightarrow y' = (2k+1).x^{2k} \Rightarrow y' < 0\ \forall x \in D$.
$\Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên D.
Giới hạn:
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = 0 \Rightarrow y = 0$ là TCN.
$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} y = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^-} y = -\infty\end{cases} \Rightarrow x = 0$ là TCĐ.
Bảng biến thiên</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td> 

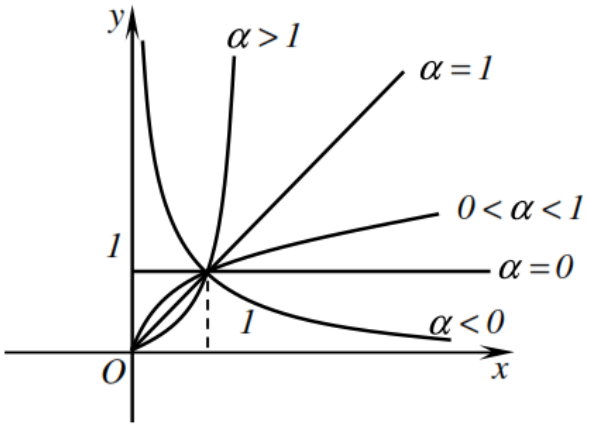
Hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$.
Hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$.
Đồ thị:
  </td>
<td> 

Đồ thị:
  </td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">$\alpha \notin \mathbb{Z}$
Trong giới hạn chương trình ta chỉ khảo sát trên $(0;+\infty)$.</td>
</tr>
<tr>
<td>$\alpha > 0$</td>
<td>$\alpha < 0$</td>
</tr>
<tr>
<td>Tập khảo sát: $D=(0;+\infty)$.
Sự biến thiên:
$y'=\alpha.x^{\alpha-1}>0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.
Giới hạn: $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = 0;\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty$.
$\Rightarrow$ Hàm số không có tiệm cận.
Bảng biến thiên</td>
<td>Tập khảo sát: $D=(0;+\infty)$.
Sự biến thiên:
$y'=\alpha.x^{\alpha-1}<0 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$.
Giới hạn:
$\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty \Rightarrow$ TCĐ: $x=0$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha = 0 \Rightarrow$ TCN: $y=0$
Bảng biến thiên</td>
</tr>
</table>

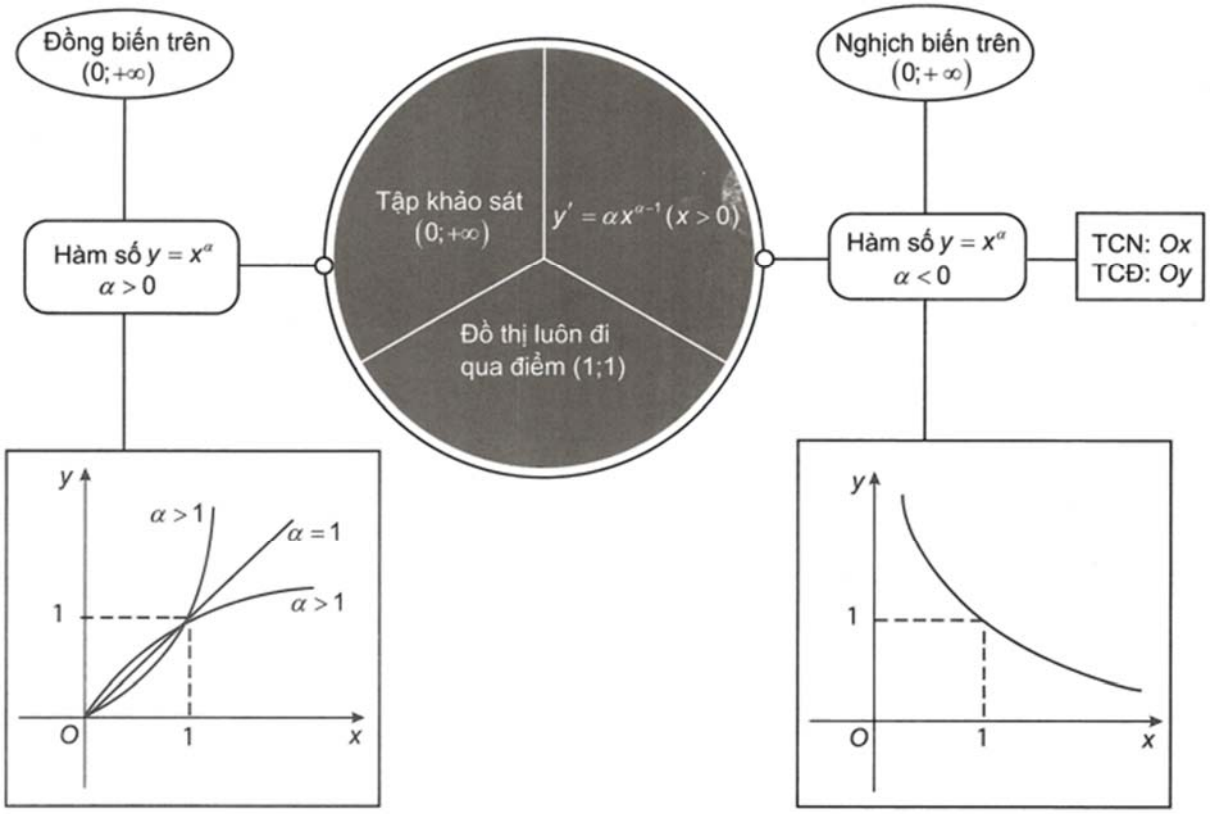




Đồ thị hàm số luôn đi qua điểm $A(1;1)$.



HÀM SỐ LŨY THỪA



B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm tập xác định của hàm số lũy thừa

1. Phương pháp giải

Ta tìm điều kiện xác định của hàm số $y=\left[f\left(x\right)\right]^{\alpha}$, dựa vào số mũ α của nó như sau:

• Nếu α là số nguyên dương thì không có điều kiện xác định của $f\left(x\right)$.

• Nếu α là số nguyên âm hoặc bằng 0 thì điều kiện xác định là $f\left(x\right)\neq 0$.

• Nếu α là số không nguyên thì điều kiện xác định là $f\left(x\right)>0$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\left(x^2+m\right)^{\sqrt{2}}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. mọi giá trị m. **B.** $m\neq 0$. **C.** $m>0$. **D.** $m\geq 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Để hàm số $y=\left(x^2+m\right)^{\sqrt{2}}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ thì $x^2+m>0\Leftrightarrow m>0$.

Bài tập 2. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{4-x^2}+\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}+x+1.$

A. $D=[-2;2].$ **B.** $D=[-2;2]\setminus\{1\}.$

C. $D=(-\infty;-2)\cup(2;+\infty).$ **D.** $D=(-2;2)\setminus\{1\}.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases}4-x^2\ge 0\\ x\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2\le x\le 2\\ x\ne 1\end{cases}.$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=[-2;2]\setminus\{1\}.$

Bài tập 3. Tìm tập xác định D của hàm số $y=(x-2)^{\sqrt{5}}+\left(x^2-9\right)^{\frac{3}{5}}+x^2-5x-2.$

A. $D=(-\infty;-3)\cup(3;+\infty).$ **B.** $D=(2;+\infty).$

C. $D=(3;+\infty).$ **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-3,3,2\}.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases}x-2>0\\ x^2-9>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>2\\ \left[\begin{array}{l}x<-3\\ x>3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x>3.$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(3;+\infty).$

Bài tập 4. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\left(x^2-5x+4\right)^{\sqrt{2}-3}-\sqrt{x^2+3x+7}+x^{-3}+x^2-2x+1.$

A. $D=(-\infty;1)\cup(4;+\infty)\setminus\{0\}.$ **B.** $D=(-\infty;1)\cup(4;+\infty).$

C. $D=(1;4).$ **D.** $D=[1;4].$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases}x^2-5x+4>0\\ x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<1\\ x>4\end{array}\right.\\ x\ne 0\end{cases}.$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(-\infty;1)\cup(4;+\infty)\setminus\{0\}.$

Bài tập 5: Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-2018;2018)$ để hàm số $y=\left(x^2-2x-m+1\right)^{\sqrt{5}}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$?

A. 4036. **B.** 2018. **C.** 2017. **D.** Vô số

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Vì số mũ $\sqrt{5}$ không phải là số nguyên nên hàm số xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow x^2-2x-m+1>0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' < 0 \\ a>0 \left(\text{luôn đúng vì } a=1>0\right) \end{cases}$

$\Leftrightarrow 1-\left(-m+1\right)>0$

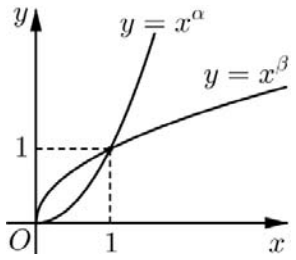
$\Leftrightarrow m>0$

Mà $\begin{cases} m \in (-2018;2018) \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m \in \{1,2,3,...,2017\}$.

Vậy có 2017 giá trị nguyên của tham số *m* thỏa mãn yêu cầu.

Dạng 2: Đồ thị hàm số lũy thừa

Bài tập 1. Cho các hàm số lũy thừa $y=x^{\alpha}$, $y=x^{\beta}$ trên $(0;+\infty)$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $0<\beta<\alpha<1$.
B. $\alpha<0<\beta<1$.
C. $0<\beta<1<\alpha$.
D. $\beta<0<1<\alpha$.

Hướng dẫn giải.

Chọn C.

Từ hình vẽ ta thấy hàm số

- $y=x^{\alpha}$ đồng biến trên $(1;+\infty)$ và nằm trên đường thẳng $y=x$ nên $\alpha>1$.
- $y=x^{\beta}$ đồng biến trên $(1;+\infty)$ và nằm dưới đường thẳng $y=x$ nên $0<\beta<1$.

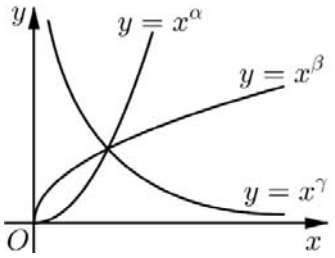
Vậy $0<\beta<1<\alpha$.

Bài tập 2. Cho các hàm số lũy thừa $y=x^{\alpha}$, $y=x^{\beta}$, $y=x^{\gamma}$ trên $(0;+\infty)$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\gamma<\alpha<\beta$.
B. $\beta<\gamma<\alpha$.

C. $\alpha<\gamma<\beta.$

D. $\gamma<\beta<\alpha.$



Hướng dẫn giải.

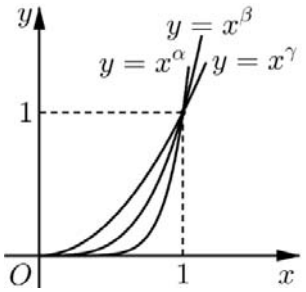
Chọn D.

Từ hình vẽ ta thấy hàm số

• $y=x^{\gamma}$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$ nên $\gamma<0.$

• như câu trên ta có $0<\beta<1<\alpha.$ Vậy $\gamma<0<\beta<1<\alpha.$

Bài tập 3. Cho các hàm số lũy thừa $y=x^{\alpha},\ y=x^{\beta},$ $y=x^{\gamma}$ trên $(0;+\infty)$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?



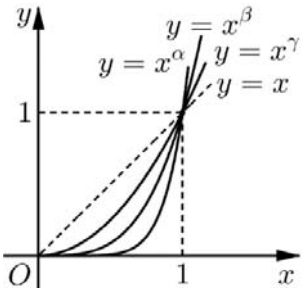
A. $\gamma<\beta<\alpha<0.$

B. $0<\gamma<\beta<\alpha<1.$

C. $1<\gamma<\beta<\alpha.$

D. $0<\alpha<\beta<\gamma<1.$

Hướng dẫn giải.



Chọn C.

Dựa vào đồ thị, ta có

• Với $0<x<1$ thì

$$x^{\alpha}<x^{\beta}<x^{\gamma}<x^{1}\longrightarrow\alpha>\beta>\gamma>1.$$

• Với $x>1$ thì

$$x^{1}<x^{\gamma}<x^{\beta}<x^{\alpha}\longrightarrow 1<\gamma<\beta<\alpha.$$

Vậy với mọi $x>0,$ ta có $\alpha>\beta>\gamma>1.$

Nhận xét. Ở đây là so sánh với đường $y=x=x^{1}.$

Bài tập 4. Cho hàm số $y=(x-1)^{-\frac{1}{4}}.$ Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận đứng.

B. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=-1.$

C. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=0.$

D. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x=1.$

Hướng dẫn giải.

Chọn D.

Bài tập 5. Cho hàm số $y = x^{-\frac{1}{2}}$. Cho các khẳng định sau:

i) Hàm số xác định với mọi x.

ii) Đồ thị hàm số luôn đi qua điểm $(1;1)$.

iii) Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

iv) Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Trong các khẳng định trên có bao nhiêu khẳng định đúng?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải.

Chọn B.

Ta có khẳng định ii) và iv) là đúng.

i) sai vì hàm số đã cho xác định khi $x > 0$.

iii) sai vì hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

BÀI 3. LÔGARIT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Khái niệm lôgarit

Cho hai số dương a,b với $a\neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^{\alpha}=b$ được gọi là lôgarit cơ số a của b, và ký hiệu là $\log_a = b$.

Nhận xét: $\log_a b=\alpha \Leftrightarrow a^{\alpha}=b\ \left(a,b>0,a\neq 1\right)$

Bài tập: $\log_2 8=3\Leftrightarrow 2^3=8$

Chú ý: Không có lôgarit của số âm và số 0.

2. Tính chất

Cho $a,b>0,a\neq 1$. Ta có:

$$\boxed{\begin{array}{ll}\log_a=0; & \log_a a=1\\ a^{\log_a b}=b; & \log_a\left(a^{\alpha}\right)=\alpha\end{array}}$$

3. Quy tắc tính lôgarit

a. Lôgarit của một tích

Cho $a,b_1,b_2>0$ với $a\neq 1$, ta có:

$$\boxed{\log_a(b_1b_2)=log_ab_1+log_ab_2}$$

Chú ý: Định lý trên có thể mở rộng cho tích của n số dương:

$$\log_a\left(b_1...b_n\right)=\log_a b_1+...+\log_a b_n$$

trong đó $a,b_1,b_2,...,b_n>0,a\neq 1$.

Bài tập:

- $\log_{\pi}\frac{1}{2}+\log_{\pi}2=\log_{\pi}\left(\frac{1}{2}.2\right)=\log_{\pi}1=0;$
- $\log_3\frac{1}{2}+\log_3\frac{2}{3}+\log_3\frac{3}{4}+...+\log_3\frac{7}{8}+\log_3\frac{8}{9}$

$=\log_3\left(\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{3}{4}.....\frac{7}{8}.\frac{8}{9}\right)$

$=\log_3\frac{1}{9}=-2.$

b. Lôgarit của một thương

Cho $a,b_1,b_2>0$ với $a\neq 1,$ ta có:

$$\boxed{\log_a=\frac{b_1}{b_2}=\log_a b_1-\log_a b_2}$$

Đặc biệt: $\boxed{\log_a\frac{1}{b}=-\log_a b}\ \left(a>0,b>0\right).$

Bài tập:

- $\log_5\frac{125}{25}=\log_5 125-\log_5 25=3-2=1;$
- $\log_7\frac{1}{49}=-\log_7 49=-2.$

c. Lôgarit của một lũy thừa

Bài tập:

Cho hai số dương $a, b,\ a \neq 1$. Với mọi α, ta có:

$$\boxed{\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b}$$

Đặc biệt:

$$\boxed{\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n}\log_a b}$$

4. Đổi cơ số

Cho $a, b, c > 0; a \neq 1; c \neq 1,$ ta có:

$$\boxed{\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}}$$

Đặc biệt: $\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}\ (b \neq 1);$

$$\boxed{\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha}\log_a b}\ (\alpha \neq 0).$$

5. Lôgarit thập phân – lôgarit tự nhiên

a. Lôgarit thập phân

Lôgarit thập phân là lôgarit cơ số 10. Với $b > 0,\ \log_{10} b$ thường được viết là $\log b$ hoặc $\lg b$.

b. Lôgarit tự nhiên

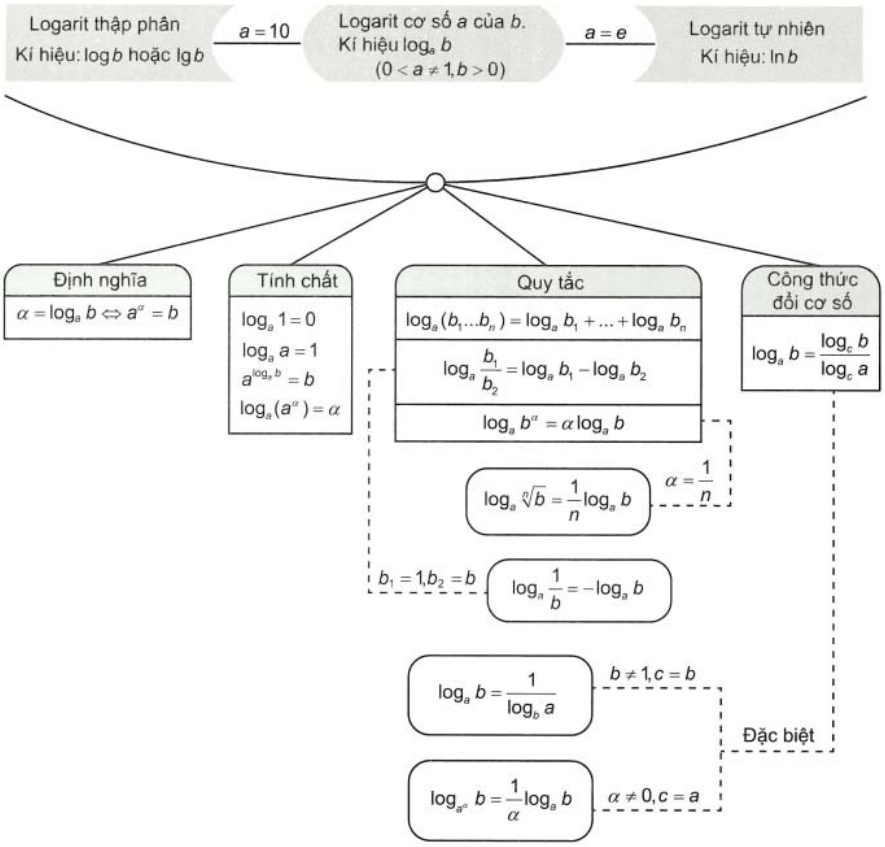
Lôgarit tự nhiên là lôgarit cơ số e. Với $b > 0,\ \log_e b$ được viết là $\ln b$.

- $\log_2 8^3 = 3\log_2 8 = 3.3 = 9;$
- $\log_2 \sqrt[4]{8} = \frac{1}{4}\log_2 8 = \frac{1}{4}.3 = \frac{3}{4}.$

Bài tập:

- $\log_8 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 8} = \frac{4}{3};$
- $\log_3 27 = \frac{1}{\log_{27} 3} = 3;$
- $\log_{128} 2 = \log_{2^7} 2 = \frac{1}{7}\log_2 2 = \frac{1}{7}.$

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA



B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Tính giá trị của biểu thức không có điều kiện. Rút gọn biểu thức.

1. Phương pháp giải

Để tính $\log_a b$ ta có thể biến đổi theo một trong các cách sau:

- $b = a^\alpha$, từ đó suy ra $\log_a b = \log_a a^\alpha = \alpha$;
- $a = b^\alpha$, từ đó suy ra $\log_a \mathrm{b} = \log_{b^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha}$;
- $a = c^\alpha$, $b = c^\beta$, từ đó ta suy ra

$$\log_a b = \log_{c^\alpha} c^\beta = \frac{\beta}{\alpha}.$$

- Để tính $b^{\log_a c}$, ta biến đổi $b = a^\alpha$, từ đó suy ra $b^{\log_a c} = a^{\alpha \log_a c} = c^\alpha$

Bài tập:

- $\log_{32} 128 = \log_{2^5} 2^7 = \dfrac{7}{5}$;
- $32^{\log_2 9} = 2^{5\log_2 9} = 9^5$.

2. Bài tập

Bài tập 1: Cho $a,\mathrm{b},\mathrm{c},\mathrm{d}>0$. Rút gọn biểu thức $\mathrm{S}=\ln\frac{a}{b}+\ln\frac{b}{c}+\ln\frac{c}{d}+\ln\frac{d}{a}$ ta được

A. $S=1.$ **B.** $\mathrm{S}=0.$

C. $S=\ln\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}\right).$ **D.** $S=\ln\left(abcd\right).$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $S=\ln\frac{a}{b}+\ln\frac{b}{c}+\ln\frac{c}{d}+\ln\frac{d}{a}=\ln\left(\frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{d}.\frac{d}{a}\right)=\ln 1=0.$

Bài tập 2: Cho $a,b>0$ và $a,b\neq 1$, biểu thức $P=\log_{\sqrt{a}}b^3.\log_b a^4$ bằng

A. 6 **B.** 24 **C.** 12. **D.** 18.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có : $P=\log_{\sqrt{a}}b^3.\log_b a^4=\log_{\frac{1}{a^2}}b^3.\log_b a^4=\frac{3}{\frac{1}{2}}.4.\log_a b.\frac{1}{\log_a b}=24.$

Bài tập 3: Cho a,b là các số thực dương thỏa mãn $a\neq 1,\ a\neq\sqrt{b}$ và $\log_a b=\sqrt{3}.$ Biến đổi biểu thức $\mathrm{P}=\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}}\sqrt{\frac{b}{a}}$ ta được

A. $P=-5+3\sqrt{3}.$ **B.** $P=-1+\sqrt{3}.$

C. $P=-1-\sqrt{3}.$ **D.** $P=-5-3\sqrt{3}.$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có:

$$P=\frac{\log_a\sqrt{\frac{b}{a}}}{\log_a\frac{\sqrt{b}}{a}}=\frac{\frac{1}{2}\left(\log_a b-1\right)}{\log_a\sqrt{b}-1}=\frac{\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{\frac{1}{2}\log_a b-1}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-2}=-1-\sqrt{3}.$$

Bài tập 4 : Biến đổi biểu thức $P=\log_{a^2}\left(a^{10}b^2\right)+\log_{\sqrt{a}}\left(\dfrac{a}{\sqrt{b}}\right)+\log_{\sqrt[3]{b}}b^{-2}$ (với $0<a\neq 1,\ 0<b\neq 1$) ta được

A. $P=2.$ **B.** $P=1.$ **C.** $P=\sqrt{3}.$ **D.** $P=\sqrt{2}.$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Sử dụng các quy tắc biến đổi lôgarit ta có:

$$P=\log_{a^2}\left(a^{10}b^2\right)+\log_{\sqrt{a}}\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right)+\log_{\sqrt[3]{b}}b^{-2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\log_a a^{10}+\log_a b^2\right]+2\left[\log_a a-\log_a\sqrt{b}\right]+3.\left(-2\right)\log_b b$$

$$=\frac{1}{2}\left[10+2\log_a b\right]+2\left[1-\frac{1}{2}\log_a b\right]-6=1.$$

Bài tập 5. Rút gọn biểu thức $P=\left(\log_b^3 a+2\log_b^2 a+\log_b a\right)\left(\log_a b-\log_{ab} b\right)-\log_b a$ với $0<a,b\neq 1$.

A. $P=1$. **B.** $P=2$. **C.** $P=0$. **D.** $P=3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $P=\left(\log_b^3 a+2\log_b^2 a+\log_b a\right)\left(\log_a b-\log_{ab} b\right)-\log_b a$

$$=\log_b a\left(\log_b^2 a+2\log_b a+1\right)\left(\log_a b-\frac{1}{\log_b ab}\right)-\log_b a$$

$$=\log_b a\left(\log_b a+1\right)^2\left(\log_a b-\frac{1}{\log_b a+1}\right)-\log_b a$$

$$=\log_b a\left(\log_b a+1\right)^2\left(\frac{\log_a b\left(\log_b a+1\right)-1}{\log_b a+1}\right)-\log_b a$$

$$=\log_b a\left(\log_b a+1\right)\left(\log_a b\log_b a+\log_a b-1\right)-\log_b a$$

$$=\log_b a\left(\log_b a+1\right)\log_a b-\log_b a$$

$$=\log_b a+1-\log_b a=1.$$

Bài tập 6. Cho $a>0$, $b>0$ thỏa mãn $\log_{2a+2b+1}\left(4a^2+b^2+1\right)+\log_{4ab+1}\left(2a+2b+1\right)=2$. Giá trị của $a+2b$ bằng:

A. $\frac{15}{4}$. **B.** 5. **C.** 4. **D.** $\frac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $4a^2+b^2\ge 4ab$, với mọi $a,b>0$. Dấu '=' xảy ra khi $b=2a\ (1)$.

Khi đó

$2=\log_{2a+2b+1}\left(4a^2+b^2+1\right)+\log_{4ab+1}\left(2a+2b+1\right)$

$\ge \log_{2a+2b+1}\left(4ab+1\right)+\log_{4ab+1}\left(2a+2b+1\right)$.

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy ta có $\log_{2a+2b+1}\left(4ab+1\right)+\log_{4ab+1}\left(2a+2b+1\right)\ge 2$.

Dấu '=' xảy ra khi $\log_{2a+2b+1}\left(4ab+1\right)=1\Leftrightarrow 4ab+1=2a+2b+1\ (2)$.

Từ (1) và (2) ta có $8a^2-6a=0\Leftrightarrow a=\frac{3}{4}$. Suy ra $b=\frac{3}{2}$. Vậy $a+2b=\frac{15}{4}$.

Bài tập 7. Cho $a^{\log_3 7}=27$, $b^{\log_7 11}=49$, $c^{\log_{11}25}=\sqrt{11}$. Tính $S=a^{(\log_3 7)^2}+b^{(\log_7 11)^2}+c^{(\log_{11}25)^2}$.

A. $S=33$. **B.** $S=469$. **C.** $S=489$. **D.** $S=3141$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có:

$a^{\log_3 7}=27\Leftrightarrow \log_3 7=\log_a 27\Leftrightarrow \log_3 7.\log_3 7=\log_a 27.\log_3 7$

$\Leftrightarrow \left(\log_3 7\right)^2=3\log_a 3.\log_3 7\Leftrightarrow \left(\log_3 7\right)^2=\log_a 7^3\Rightarrow a^{(\log_3 7)^2}=a^{\log_a 7^3}=7^3$.

Tương tự ta có $b^{\log_7 11}=49\Rightarrow b^{(\log_7 11)^2}=11^2$; $b^{\log_{11}25}=\sqrt{11}\Rightarrow c^{(\log_{11}25)^2}=5$.

Vậy $S=a^{(\log_3 7)^2}+b^{(\log_7 11)^2}+c^{(\log_{11}25)^2}=7^3+11^2+5=469$.

Bài tập 8. Đặt $\log_7 2=a$, $\log_7 3=b$, $Q=\log_7\frac{1}{2}+\log_7\frac{2}{3}+...+\log_7\frac{2014}{2015}+\log_7\frac{2015}{2016}$. Tính Q theo a, b.

A. $5a+2b-1$. **B.** $5a-2b-1$. **C.** $5a+2b+1$. **D.** $-5a-2b-1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $Q=\log_7\frac{1}{2}+\log_7\frac{2}{3}+...+\log_7\frac{2014}{2015}+\log_7\frac{2015}{2016}$

$=\left(\log_7 1-\log_7 2\right)+\left(\log_7 2-\log_7 3\right)+...+\left(\log_7 2014-\log_7 2015\right)+\left(\log_7 2015-\log_7 2016\right)$

$=\log_7 1-\log_7 2016=-\log_7 2016=-\left(\log_7 32.9.7\right)=-\left(\log_7 32+\log_7 9+\log_7 7\right)$

$=-\left(\log_7 2^5+\log_7 3^2+1\right)=-5\log_7 2-2\log_7 3-1=-5a-2b-1$.

Bài tập 9. Cho hai số thực dương a,b $(a\ne 1)$ thỏa mãn các điều kiện $\log_a b=\frac{b}{4}$ và $\log_2 a=\frac{16}{b}$. Tính tổng $S=a+b$.

A. $S=12$. **B.** $S=10$. **C.** $S=16$. **D.** $S=18$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $\begin{cases}\log_a b=\dfrac{b}{4}\\ \log_2 a=\dfrac{16}{b}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=a^{\frac{b}{4}}\\ a=2^{\frac{16}{b}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\left(2^{\frac{16}{b}}\right)^{\frac{b}{4}}\\ a=2^{\frac{16}{b}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2^{\frac{16}{b}\cdot\frac{b}{4}}\\ a=2^{\frac{16}{b}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=16\\ a=2\end{cases}$.

Vậy ta có $S=16+2=18$.

Bài tập 10. Gọi x_1,x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2-20x+2=0$. Tính giá trị của biểu thức $P=\log(x_1+x_2)-\log x_1-\log x_2$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 10.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $P=\log(x_1+x_2)-\log x_1-\log x_2=\log\left(x_1+x_2\right)-\log\left(x_1.x_2\right)=\log\dfrac{x_1+x_2}{x_1.x_2}$.

Vì x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2-20x+2=0$ nên ta có $x_1+x_2=20$; $x_1.x_2=2$.

Vậy ta có $P=\log\dfrac{20}{2}=1$.

Bài tập 11. Cho $M=\dfrac{1}{\log_a x}+\dfrac{1}{\log_{a^2} x}+...+\dfrac{1}{\log_{a^{16}} x}$. Tính M.

A. $M=\dfrac{272}{\log_a x}$. **B.** $M=\dfrac{136}{\log_a x}$. **C.** $M=\dfrac{1088}{\log_a x}$. **D.** $M=\dfrac{272}{3\log_a x}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $M=\dfrac{1}{\log_a x}+\dfrac{1}{\log_{a^2} x}+...+\dfrac{1}{\log_{a^{16}} x}=\log_x a+\log_x a^2+...+\log_x a^{16}$

$=\log_x a+\log_x a^2+...+\log_x a^{16}=\log_x a+2\log_x a+...+16\log_x a$

$=\left(1+2+...+16\right)\log_x a=\dfrac{16\left(1+16\right)}{2}\log_x a=\dfrac{136}{\log_a x}$.

Bài tập12. Với x,y,z là các số nguyên dương thỏa mãn $x\log_{1512}2+y\log_{1512}3+z\log_{1512}7=1$. Tính giá trị của biểu thức $Q=x+y+3z$.

A. 1512. **B.** 12. **C.** 9. **D.** 7.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có

$x\log_{1512}2+y\log_{1512}3+z\log_{1512}7=1\Leftrightarrow\log_{1512}2^x+\log_{1512}3^y+\log_{1512}7^z=\log_{1512}1512$

$\Leftrightarrow\log_{1512}2^x.3^y.7^z=\log_{1512}1512\Leftrightarrow 2^x.3^y.7^z=1512\Leftrightarrow 2^x.3^y.7^z=2^3.3^3.7\Rightarrow\begin{cases}x=3\\y=3\\z=1\end{cases}.$

Vậy $Q=3+3+1.3=9$.

Bài tập 13. Giá trị biểu thức $P=\dfrac{1}{\log_2 2017!}+\dfrac{1}{\log_3 2017!}+...+\dfrac{1}{\log_{2017}2017!}$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có

$P=\dfrac{1}{\log_2 2017!}+\dfrac{1}{\log_3 2017!}+...+\dfrac{1}{\log_{2017}2017!}=\log_{2017!}2+\log_{2017!}3+...+\log_{2017!}2017$

$=\log_{2017!}(2.3...2017)=\log_{2017!}2017!=1$.

Bài tập 14. Giả sử $0<x<\dfrac{\pi}{2};\cos x=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$. Giá trị của biểu thức

$\log\sin x+\log\cos x+\log\tan x$ là

A. $-\dfrac{3}{\sqrt{10}}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$. **C.** $\dfrac{3}{10}$. **D.** -1.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\dfrac{9}{10}=\dfrac{1}{10}$.

Khi đó $\log\sin x+\log\cos x+\log\tan x=\log(\sin x.\cos x.\tan x)=\log\sin^2 x\ \log\dfrac{1}{10}=-1$.

Bài tập 15. Cho $\log_7 12=x$, $\log_{12}24=y$ và $\log_{54}168=\dfrac{axy+1}{bxy+cx}$, trong đó a, b, c là các số nguyên. Tính giá trị biểu thức $S=a+2b+3c$.

A. $S=4$. **B.** $S=19$. **C.** $S=10$. **D.** $S=15$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $\log_{54}168=\dfrac{\log_7(24.7)}{\log_7 54}=\dfrac{\log_7 24+1}{\log_7 54}=\dfrac{\log_7 12\log_{12}24+1}{\log_7 54}$

$=\dfrac{\log_7 12\log_{12}24+1}{\log_7 12\log_{12}54}=\dfrac{xy+1}{x.\log_{12}54}$

Tính $\log_{12}54=\log_{12}(27.2)=3\log_{12}3+\log_{12}2=3\log_{12}\dfrac{3.2.12.24}{2.12.24}+\log_{12}\dfrac{24}{12}$.

$= 3\log_{12}\frac{12^3}{24^2} + \log_{12}\frac{24}{12} = 3\left(3-2\log_{12}24\right)+\left(\log_{12}24-1\right) = 8-5\log_{12}24 = 8-5y.$

Do đó: $\log_{54}168 = \frac{xy+1}{x\left(8-5y\right)} = \frac{xy+1}{-5xy+8x}.$

Vậy $\begin{cases} a=1 \\ b=-5 \\ c=8 \end{cases} \Rightarrow S = a+2b+3c = 15.$

Bài tập 16. Với a,b thỏa mãn để hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases} x^2 \ khi \ x\ge 1 \\ ax+b \ khi \ x<1 \end{cases}$ có đạo hàm tại $x_0=1$. Khi đó giá trị biểu thức $S=\log_2\left(3a+2b\right)$ bằng?

A. $S=1.$ **B.** $S=2.$ **C.** $S=3.$ **D.** $S=4.$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm tại $x_0=1$ suy ra:.

+ Hàm số liên tục tại $x_0=1$: $\lim\limits_{x\to 1^+}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1^-}f\left(x\right)=f\left(1\right)\Leftrightarrow a+b=1 \qquad (1).$

+ Tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f\left(x\right)-f\left(1\right)}{x-1}.$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f\left(x\right)-f\left(1\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f\left(x\right)-f\left(1\right)}{x-1}.$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{ax+b-1}{x-1}.$

$\Leftrightarrow 2=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{ax+b-\left(a+b\right)}{x-1}.$

$\Leftrightarrow a=2 \qquad (2).$

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}.$

$S=\log_2\left(3a+2b\right)=\log_2 4=2.$

Dạng 2. Đẳng thức chứa logarit

1. Phương pháp

2. Bài tập

Bài tập 1: Cho $x,y>0$ và $x^2+4y^2=12xy.$ Khẳng đinh nào sau đây đúng?

A. $\log_2\left(x+2y\right)=\log_2 x+\log_2 y+1.$

B. $\log_2\left(\frac{x+2y}{4}\right)=\log_2 x-\log_2 y.$

C. $\log_2\left(x+2y\right)=2+\frac{1}{2}\left(\log_2 x+\log_2 y\right).$

D. $4\log_2\left(x+2y\right)=\log_2 x+\log_2 y.$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Với $x,y>0$, ta có: $x^2+4y^2=12xy\Leftrightarrow\left(x+2y\right)^2=16xy$

$\Leftrightarrow\log_2\left(x+2y\right)^2=\log_2 16xy$

$\Leftrightarrow 2\log_2\left(x+2y\right)=4+\log_2 x+\log_2 y$

$\Leftrightarrow\log_2\left(x+2y\right)=2+\frac{1}{2}\left(\log_2 x+\log_2 y\right).$

Bài tập 2: Cho x,y là các số thực lớn hơn 1 thỏa mãn $x^2+9y^2=6xy$. Tính $M=\frac{1+\log_{12}x+\log_{12}y}{2\log_{12}(x+3y)}$.

A. $M=\frac{1}{4}.$ **B.** $M=1.$ **C.** $M=\frac{1}{2}.$ **D.** $M=\frac{1}{3}.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $x^2+9y^2=6xy\Leftrightarrow\left(x-3y\right)^2=0\Leftrightarrow x=3y.$

Vậy ta có

$M=\frac{1+\log_{12}x+\log_{12}y}{2\log_{12}\left(x+3y\right)}=\frac{1+\log_{12}3y+\log_{12}y}{2\log_{12}6y}=\frac{\log_{12}12+\log_{12}3+\log_{12}y+\log_{12}y}{2\left(\log_{12}6+\log_{12}y\right)}$

$=\frac{\log_{12}36+2\log_{12}y}{\log_{12}36+2\log_{12}y}=1.$

Bài tập 3: Cho biểu thức $B=3^{\log_3 a}-\log_5 a^2.\log_a 25$ với a là số dương, khác 1. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $B\geq 2a+5.$ **B.** $\log_{a^2-4}B=1.$ **C.** $B=a-4.$ **D.** $B>3.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có

$B=3^{\log_3 a}-\log_5 a^2.\log_a 25=a-2\log_5 a.\log_a 25=a-2\log_5 a.\log_a 5^2=a-4\log_5 a.\log_a 5$

$=a-4.$

Vậy $B=a-4.$

Bài tập 4: Gọi c là cạnh huyền, a và b là hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông. Trong các khẳng định sau khẳng định nào đúng?

A. $\log_{b+c} a+\log_{c-b} a=2\log_{b+c} a.\log_{c-b} a$.

B. $\log_{b+c} a+\log_{b-c} a=2\log_{b+c} a.\log_{b-c} a$.

C. $\log_{b+c} a+\log_{c-b} a=\log_{b+c} a.\log_{c-b} a$.

D. $\log_{b+c} a+\log_{b-c} a=4\log_{b+c} a.\log_{b-c} a$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $c^2=a^2+b^2\Leftrightarrow c^2-b^2=a^2\Leftrightarrow (c+b).(c-b)=a^2\Leftrightarrow \log_a(c+b).(c-b)=2$

$\Leftrightarrow \log_a(b+c)+\log_a(c-b)=2\Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_a(b+c)}+\dfrac{1}{\log_a(c-b)}=2$

$\Leftrightarrow \log_{b+c} a+\log_{c-b} a=2\log_{b+c} a.\log_{c-b} a$ (đpcm).

Bài tập 5: Cho $\log_{27} 5=a$, $\log_8 7=b$, $\log_2 3=c$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\log_{12} 35=\dfrac{3b+2ac}{c+2}$.

B. $\log_{12} 35=\dfrac{3b+3ac}{c+2}$.

C. $\log_{12} 35=\dfrac{3b+2ac}{c+3}$.

D. $\log_{12} 35=\dfrac{3b+3ac}{c+1}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có : $\log_{27} 5=a\Leftrightarrow \log_3 5=3a$; $\log_8 7=b\Rightarrow \log_2 7=3b$; $\log_2 3=c$

$$\log_{12} 35=\frac{\log_3 5}{\log_3 12}=\frac{\log_3 5+\log_3 7}{\log_3 3+\log_3 4}=\frac{3a+\dfrac{\log_2 7}{\log_2 3}}{1+2\log_3 2}=\frac{3a+\dfrac{3b}{c}}{1+2.\dfrac{1}{c}}=\frac{3ac+3b}{c+2}.$$

Bài tập 6: Cho $\log_{\frac{1}{4}}(y-x)-\log_4\dfrac{1}{y}=1$, với $y>0, y>x$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $3x=4y$.

B. $x=3y$.

C. $x=\dfrac{3}{4}y$.

D. $y=\dfrac{3}{4}x$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có

$\log_{\frac{1}{4}}(y-x)-\log_4\dfrac{1}{y}=1\Leftrightarrow -\log_4(y-x)+\log_4 y=1\Leftrightarrow \log_4 y=1+\log_4(y-x)$

$\Leftrightarrow \log_4 y=\log_4 4.(y-x)\Leftrightarrow y=4(y-x)\Leftrightarrow x=\dfrac{3}{4}y$.

Bài tập 7: Số thực dương a,b thỏa mãn $\log_4 a=\log_{12} b=\log_{16}(a+b)$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $\dfrac{a}{b}\in\left(\dfrac{2}{3};1\right)$.

B. $\dfrac{a}{b}\in\left(0;\dfrac{2}{3}\right)$

C. $\dfrac{a}{b}\in(9;12)$.

D. $\dfrac{a}{b}\in(9;16)$.

Hướng dẫn giải.

Chọn B.

Giả sử $\log_4 a = \log_{12} b = \log_{16}(a+b) = \text{t}$. Khi đó, ta có: $a = 4^t; b = 12^t; a+b = 16^t$. Từ đây, ta có phương trình: $4^t + 12^t = 16^t \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^t + \left(\frac{3}{4}\right)^t = 1\ (*)$.

Vế trái của phương trình $(*)$ nghịch biến nên $(*)$ có 1 nghiệm duy nhất là $t = 1$. Suy ra $a = 4; b = 12$ suy ra $\frac{a}{b} = \frac{1}{3} \in \left(0; \frac{2}{3}\right)$.

Bài tập8: Có tất cả bao nhiêu số dương a thỏa mãn đẳng thức

$$\log_2 a + \log_3 a + \log_5 a = \log_2 a.\log_3 a.\log_5 a.$$

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có

$$\log_2 a + \log_3 a + \log_5 a = \log_2 a.\log_3 a.\log_5 a$$
$$\Leftrightarrow \log_2 a + \log_3 2.\log_2 a + \log_5 2.\log_2 a = \log_2 a.\log_3 5.\log_5 a.\log_5 a$$
$$\Leftrightarrow \log_2 a.\left(1 + \log_3 2 + \log_5 2\right) = \log_2 a.\log_3 5.\log_5^2 a$$
$$\Leftrightarrow \log_2 a.\left(1 + \log_3 2 + \log_5 2 - \log_3 5.\log_5^2 a\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 a = 0 \\ 1 + \log_3 2 + \log_5 2 - \log_3 5.\log_5^2 a = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ \log_5 a = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \log_3 2 + \log_5 2}{\log_3 5}} \end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = 5^{\pm\sqrt{\frac{1+\log_3 2+\log_5 2}{\log_3 5}}} \end{array}\right.$$

Bài tập 9: Cho n là một số nguyên dương, tìm n sao cho

$$\log_a 2019 + 2^2 \log_{\sqrt{a}} 2019 + 3^2 \log_{\sqrt[3]{a}} 2019 + ... + n^2 \log_{\sqrt[n]{a}} 2019 = 1008^2.2017^2.\log_a 2019$$

A. 2017. **B.** 2019. **C.** 2016. **D.** 2018.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt

$$\log_a 2019 + 2^2 \log_{\sqrt{a}} 2019 + 3^2 \log_{\sqrt[3]{a}} 2019 + ... + n^2 \log_{\sqrt[n]{a}} 2019 = 1008^2.2017^2.\log_a 2019$$

$(*)$.

Ta có $n^2 \log_{\sqrt[n]{a}} 2019 = n^3 \log_a 2019$.

Vậy VT $(*) = \left(1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3\right)\log_a 2019 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.\log_a 2019$.

Hay từ $(*)$ ta có

$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.\log_a 2019 = 1008^2.2017^2.\log_a 2019 \Leftrightarrow n^2(n+1)^2 = 2^2.1008^2.2017^2$

$\Leftrightarrow n^2(n+1)^2 = 2016^2.2017^2 \Leftrightarrow n^2+n-4066272=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=2016 \\ n=-2017 \end{array}\right. \Rightarrow n=2016$ (vì $n\in\mathbb{N}^*$).

Bài tập 10: Cho $\log_2\left(x^2+y^2\right)=1+\log_2 xy$, với $xy>0$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. $x>y$. **B.** $x<y$. **C.** $x=y$. **D.** $x=y^2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $\log_2\left(x^2+y^2\right)=1+\log_2 xy \Leftrightarrow \log_2\left(x^2+y^2\right)=\log_2 2xy \Leftrightarrow x^2+y^2=2xy \Leftrightarrow (x-y)^2=0$

$\Leftrightarrow x=y$.

Dạng 3. Biểu thị biểu thức theo một biểu thức đã cho và từ đó tìm GTLN, GTNN

1. Phương pháp giải

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hai số thực x, y thỏa mãn $\log_{x^2+y^2}(2x-4y)=1$. Tính $P=\frac{x}{y}$ khi biểu thức $S=4x+3y-5$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $P=\frac{8}{5}$. **B.** $P=\frac{9}{5}$. **C.** $P=-\frac{13}{4}$. **D.** $P=\frac{17}{44}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $\log_{x^2+y^2}(2x-4y)=1 \Rightarrow 2x-y=x^2+y^2+1 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=4$.

Khi đó ta có $S=4x+3y-5=4(x-1)+3(y+2)-7\le\sqrt{\left(4^2+3^2\right)\left((x-1)^2+(y+2)^2\right)}-7=3$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\left\{\begin{array}{l} \frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{3} \\ 4x+3y-5=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{13}{5} \\ y=-\frac{4}{5} \end{array}\right.$.

Vậy ta có $P=\frac{x}{y}=\frac{\frac{13}{5}}{-\frac{4}{5}}=-\frac{13}{4}$.

Bài tập 2. Xét các số thực a, b thỏa mãn $a>b>1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=\log_{\frac{a}{b}}^2\left(a^2\right)+3\log_b\left(\frac{a}{b}\right)$.

A. $P_{\min}=19$. **B.** $P_{\min}=13$. **C.** $P_{\min}=14$. **D.** $P_{\min}=15$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Với điều kiện đề bài, ta có

$$P=\log_{\frac{a}{b}}^2\left(a^2\right)+3\log_b\left(\frac{a}{b}\right)=\left[2\log_{\frac{a}{b}}a\right]^2+3\log_b\left(\frac{a}{b}\right)=4\left[\log_{\frac{a}{b}}\left(\frac{a}{b}.b\right)\right]^2+3\log_b\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$=4\left[1+\log_{\frac{a}{b}}b\right]^2+3\log_b\left(\frac{a}{b}\right).$$

Đặt $t=\log_{\frac{a}{b}}b>0$ (vì $a>b>1$), ta có $P=4\left(1+t\right)^2+\frac{3}{t}=4t^2+8t+\frac{3}{t}+4=f\left(t\right)$.

Ta có $f'(t)=8t+8-\frac{3}{t^2}=\frac{8t^3+8t^2-3}{t^2}=\frac{\left(2t-1\right)\left(4t^2+6t+3\right)}{t^2}$

Vậy $f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$. Khảo sát hàm số, ta có $P_{\min}=f\left(\frac{1}{2}\right)=15$.

Bài tập 3. Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3\frac{1-xy}{x+2y}=3xy+x+2y-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P=x+y$.

A. $P_{\min}=\frac{9\sqrt{11}-19}{9}$.

B. $P_{\min}=\frac{9\sqrt{11}+19}{9}$.

C. $P_{\min}=\frac{18\sqrt{11}-29}{9}$.

D. $P_{\min}=\frac{2\sqrt{11}-3}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$\log_3\frac{1-xy}{x+2y}=3xy+x+2y-4$

$\Leftrightarrow\log_3\left(1-xy\right)-\log_3\left(x+2y\right)=3\left(xy-1\right)+\left(x+2y\right)-1$

$\Leftrightarrow\log_3 3\left(1-xy\right)-\log_3\left(x+2y\right)=3\left(xy-1\right)+\left(x+2y\right)$

$\Leftrightarrow\log_3 3\left(1-xy\right)+3\left(1-xy\right)=\log_3\left(x+2y\right)+\left(x+2y\right)$

Xét $f\left(t\right)=\log_3 t+t$, $\left(t>0\right)$

$f'\left(t\right)=\frac{1}{t\ln 3}+1>0,\forall t>0$

Suy ra : $f\left(3\left(1-xy\right)\right)=f\left(x+2y\right)\Leftrightarrow 3-3xy=x+2y\Leftrightarrow x=\frac{3-2y}{1+3y}$

Điều kiện $\frac{1-xy}{x+2y}>0\Leftrightarrow\frac{5y-2}{6y^2+3}>0\Leftrightarrow y>\frac{2}{5}$

$P=x+y=y+\frac{3-2y}{1+3y}$

$$P' = 1 + \frac{-11}{(1+3y)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{-1-\sqrt{11}}{3} \\ y = \dfrac{-1+\sqrt{11}}{3} \end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên ta có $P_{\min} = \dfrac{2\sqrt{11}-3}{3}$.

Bài tập 4. Cho các số thực $a,b,c \in [1;2]$ thỏa mãn điều kiện $\log_2^3 a + \log_2^3 b + \log_2^3 c \le 1$

Khi biểu thức $P = a^3 + b^3 + c^3 - 3\left(\log_2 a^a + \log_2 b^b + \log_2 c^c\right)$ đạt giá trị lớn nhất thì giá trị của $a+b+c$ bằng

A. 3. **B.** $3.2^{\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}}$. **C.** 4. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x\log_2 x - \log_2^3 c$ với $x \in [1;2]$.

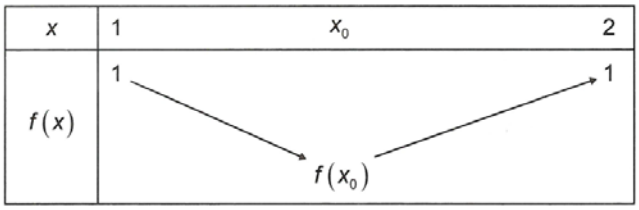
Ta có đạo hàm $f'(x) = 3x^2 - 3\log_2 x - \dfrac{3}{\ln 2} - \dfrac{3\log_2^2 x}{x\ln 2}$;

$f''(x) = 6x - \dfrac{3}{x\ln 2} - \dfrac{6log_2 x}{x^2\ln^2 2} + \dfrac{3\log_2^2 x}{x^2\ln 2}$.

Vì $f'''(x) = 6\left(1 - \dfrac{1}{x^3\ln^3 2}\right) + \dfrac{3}{x^2\ln 2} + \dfrac{6\log_2 x(3-\log_2 x)}{x^3\ln^2 2} > 0 \ \forall x \in [1;2]$ nên

$f''(x) \ge f''(1) \approx 1,67 > 0.$

Như vậy hàm số $f'(x)$ đồng biến và có nghiệm duy nhất trên $[1;2]$ vì $f'(1) < 0; f'(2) > 0$ và có đồ thị lõm trên $[1;2]$. Do đó ta có bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên ta nhận thấy rằng $f(x) \le 1$ cho nên

$P \le 3 + \log_2^3 a + \log_2^3 b + \log_2^3 c \le 4$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1, c = 2$ và các hoán vị.

Bài tập 5. Trong tất cả các cặp $(x;y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4) \ge 1$. Với giá trị nào của m thì tồn tại duy nhất cặp $(x;y)$ sao cho $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 - m = 0$?

A. $\left(\sqrt{10} - \sqrt{2}\right)^2$.

B. $\left(\sqrt{10} - \sqrt{2}\right)^2$ và $\left(\sqrt{10} + \sqrt{2}\right)^2$.

C. $\sqrt{10} - \sqrt{2}$ và $\sqrt{10} + \sqrt{2}$.

D. $\sqrt{10} - \sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Điều kiện: $4x + 4y - 4 \ge 0$.

Ta có $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4) \ge 1$

$\Leftrightarrow 4x + 4y - 4 \ge x^2 + y^2 + 2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 \le 2$ (C_1).

Miền nghiệm của bất phương trình là hình tròn (cả bờ) (C_1) có tâm $I_1(2;2)$ bán kính $R_1 = \sqrt{2}$.

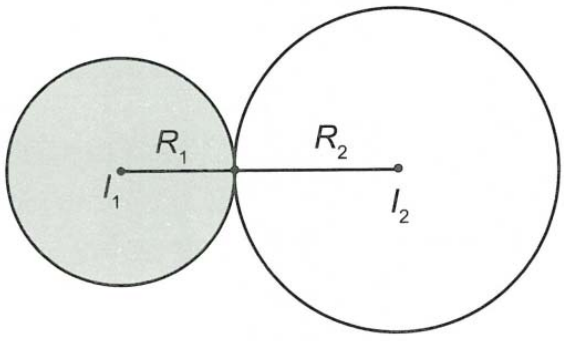
Mặt khác: $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 2 - m = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-1)^2 = m$ $(*)$.

Với $m = 0$ thì $x = -1; y = 1$ (không thỏa mãn $(x-2)^2 + (y-2)^2 \le 2$).

Với $m > 0$ thì $(*)$ là đường tròn (C_2) có tâm $I_2(-1;1)$ bán kính $R_2 = \sqrt{m}$.

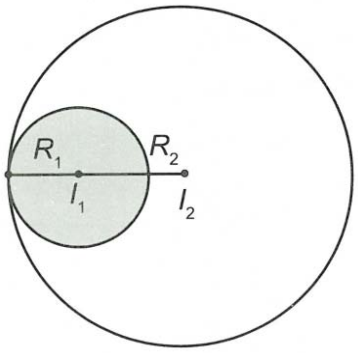
Để tồn tại duy nhất cặp $(x;y)$ thì (C_1) và (C_2) tiếp xúc với nhau.

Trường hợp 1: (C_1) và (C_2) tiếp xúc ngoài.



Khi đó: $R_1 + R_2 = I_1I_2 \Leftrightarrow \sqrt{m} + \sqrt{2} = \sqrt{10} \Leftrightarrow m = \left(\sqrt{10} - \sqrt{2}\right)^2$.

Trường hợp 2: $\left(C_1\right)$ nằm trong $\left(C_2\right)$ và hai đường tròn tiếp xúc trong.



Khi đó: $R_2 - R_1 = I_1I_2 \Leftrightarrow \sqrt{m} - \sqrt{2} = \sqrt{10} \Leftrightarrow m = \left(\sqrt{10} + \sqrt{2}\right)^2$.

Vậy $m = \left(\sqrt{10} - \sqrt{2}\right)^2$ và $m = \left(\sqrt{10} + \sqrt{2}\right)^2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập 6. Xét các số thực *a, b* thỏa mãn $a > b > 1$. Giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = \log^2_{\frac{a}{b}}\left(a^2\right) + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right)$ bằng

A. $P_{\min} = 19$. **B.** $P_{\min} = 13$. **C.** $P_{\min} = 14$. **D.** $P_{\min} = 15$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có:

$$P = \log^2_{\frac{a}{b}}\left(a^2\right) + 3\log_b\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{2}{\log_a \frac{a}{b}}\right)^2 + 3\left(\log_b a - 1\right)$$

$$= \left(\frac{2}{1 - \log_a b}\right)^2 + 3\left(\log_b a - 1\right).$$

Đặt $\log_a b = t \ \left(0 < t < 1\right)$. Khi đó $P = \frac{4}{\left(1-t\right)^2} + \frac{3}{t} - 3 = f\left(t\right)$ với $0 < t < 1$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{8}{(1-t)^3}-\dfrac{3}{t^2}\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}.$

Bảng biến thiên:

t	0		$\dfrac{1}{3}$		1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	15	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có $P_{\min}=15.$

Bài tập 7. Cho hai số thực *x, y* thỏa mãn:

$$x^2+y^2\geq 3 \text{ và } \log_{x^2+y^2}\left[x\left(4x^2-3x+4y^2\right)-3y^2\right]\geq 2$$

Gọi *M* và *m* lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x-y.$

Khi đó biểu thức $T=2\left(M+m+1\right)$ có giá trị gần nhất số nào sau đây?

A. 7. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

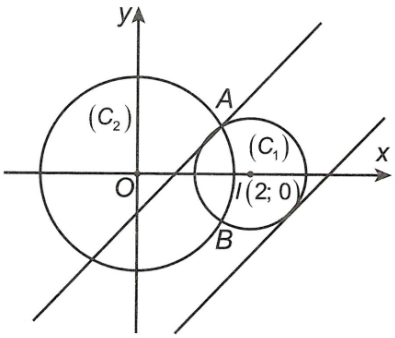
Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $\log_{x^2+y^2}\left[x\left(4x^2-3x+4y^2\right)-3y^2\right]\geq 2\Leftrightarrow \log_{x^2+y^2}\left[\left(x^2+y^2\right)\left(4x-3\right)\right]\geq 2$

$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2\right)\left(4x-3\right)\geq \left(x^2+y^2\right)^2\Leftrightarrow \left(x-2\right)^2+y^2\leq 1.$

Tập hợp các số thực *x, y* thỏa mãn: $\begin{cases}x^2+y^2\geq 3\\ \left(x-2\right)^2+y^2\leq 1\end{cases}$ những điểm thuộc miền trong hình tròn $\left(C_1\right)$ có tâm $I\left(2;0\right)$, bán kính $R_1=1$ và nằm ngoài hình tròn $\left(C_2\right)$ có tâm $O\left(0;0\right)$ và bán kính $R_2=\sqrt{3}.$



Biểu thức: $P = x - y \Rightarrow x - y - P = 0$ là họ đường thẳng Δ song song với đường $y = x$.

Các giao điểm của hai hình tròn là $A\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right), B\left(\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

P đạt giá trị nhỏ nhất khi đường thẳng Δ đi qua A.

Khi đường thẳng Δ qua điểm A, ta có: $\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-P_{\min}=0 \Rightarrow P_{\min}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$.

P đạt giá trị lớn nhất khi đường thẳng Δ tiếp xúc với đường tròn $\left(C_1\right)$ ta có:

$$d\left(I;\Delta\right)=R_1 \Leftrightarrow \frac{\left|2-P\right|}{\sqrt{1+1}}=1 \Leftrightarrow P=2\pm\sqrt{2} \Leftrightarrow P_{\max}=2+\sqrt{2}.$$

Do đó $T=2\left(M+m+1\right)=2\left(2+\sqrt{2}+\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)\approx 10.$

BÀI 4. HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LÔGARIT

A. KIẾN THỨC CO BẢN CẦN NẮM

1. Hàm số mũ

Định nghĩa

Hàm số $y = a^x \left(a > 0;\ a \neq 1\right)$ được gọi là hàm số mũ cơ số a.

Tập xác định

Hàm số $y = a^x \left(a > 0;\ a \neq 1\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Đạo hàm

Hàm số $y = a^x \left(a > 0;\ a \neq 1\right)$ có đạo hàm tại mọi x.

Đặc biệt: $\left(e^x\right)' = \mathrm{e}^x$.

$$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$$

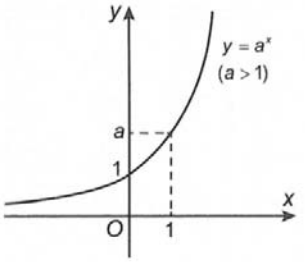
$$\left(a^u\right)' = a^u \ln a.u'$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0,\ \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty\ \left(a > 1\right);$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty,\ \lim_{x\to+\infty} a^x = 0\ \left(0 < a < 1\right).$$

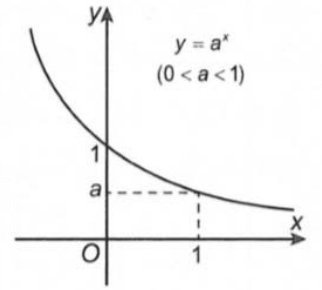
Sự biến thiên

- Khi $a > 1$ hàm số luôn đồng biến.
- Khi $0 < a < 1$ hàm số luôn nghịch biến.



Đồ thị

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là trục Ox và luôn đi qua các điểm $\left(0;1\right),\ \left(1;a\right)$ và nằm phía trên trục hoành.



2. Hàm số lôgarit

Định nghĩa

Hàm số $y = \log_a x\ \left(a > 0;\ a \neq 1\right)$ được gọi là hàm số lôgarit cơ số a.

Tập xác định

Tập xác định: $(0;+\infty)$.

Đạo hàm

Hàm số $y=\log_a x\ (a>0;\ a\neq 1)$ có đạo hàm tại mọi x dương và $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$.

Đặc biệt: $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

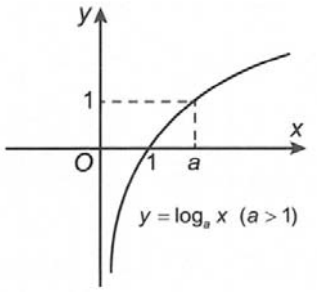
Giới hạn đặc biệt

$\lim\limits_{x\to 0^+}\log_a x=-\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty\ (a>1)$;

$\lim\limits_{x\to 0^+}\log_a x=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=-\infty\ (0<a<1)$.

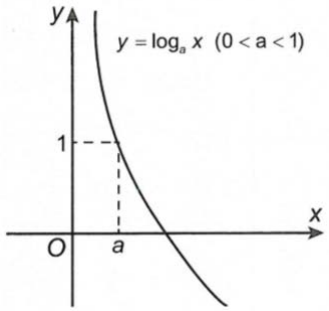
Sự biến thiên

- Khi $a>1$ hàm số luôn đồng biến.
- Khi $0<a<1$ hàm số luôn nghịch biến.



Đồ thị

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là trục Oy và luôn đi qua các điểm $(1;0),\ (a;1)$ và nằm bên phải trục tung.



Nhận xét: Đồ thị của các hàm số $y=a^x$ và $y=\log_a x\ (a>0,\ a>1)$ đối xứng với nhau qua đường thẳng $y=x$.

Ứng dụng

1. Lãi đơn là số tiền lãi chỉ tính trên số tiền gốc mà không tính trên số tiền lãi do số tiền gốc sinh ra, tức là tiền lãi của kì hạn trước không được tính vào vốn để tính lãi cho kì hạn kế tiếp, cho dù đến kì hạn người gửi không đến rút tiền ra.

Công thức tính: Khách hàng gửi vào ngân hàng A đồng với lãi đơn r (% / kì hạn) thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn

lãi sau n kì hạn ($n \in \mathbb{N}^*$) là: $\boxed{S_n = A + nAr = A(1+nr)}$

2. Lãi kép là tiền lãi của kì hạn trước nếu người gửi không rút ra thì được tính vào vốn để tính lãi cho kì hạn sau.

Công thức tính: Khách hàng gửi vào ngân hàng A đồng với lãi kép r (% / kì hạn) thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n kì hạn ($n \in \mathbb{N}^*$) là: $\boxed{S_n = A(1+r)^n}$.

3. Tiền gửi hàng tháng: Mỗi tháng gửi đúng cùng một số tiền vào một thời gian cố định.

Công thức tính: Đầu mỗi tháng, khách hàng gửi vào ngân hàng số tiền A đồng với lãi kép r (% / tháng) thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n tháng ($n \in \mathbb{N}^*$) (nhận tiền cuối tháng, khi ngân hàng đã tính lãi) là S_n.

Ta có $\boxed{S_n = \frac{A}{r}\left[(1+r)^n - 1\right](1+r)}$.

4. Gửi ngân hàng và rút tiền gửi hàng tháng

Gửi ngân hàng số tiền là A đồng với lãi suất r (% / tháng). Mỗi tháng vào ngày ngân hàng tính lãi, rút ra số tiền là X đồng.

Công thức tính: $\boxed{X = \left[A(1+r)^n - S_n\right]\frac{r}{(1+r)^n - 1}}$.

Khi đó số tiền còn lại sau n tháng là $\boxed{S_n = A(1+r)^n - X\frac{(1+r)^n - 1}{r}}$

5. Vay vốn trả góp: Vay ngân hàng số tiền là A đồng với lãi suất r (% / tháng). Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ cách nhau đúng một tháng, mỗi hoàn nợ số tiền là X đồng và trả hết tiền nợ sau đúng n tháng.

Công thức tính: Cách tính số tiền còn lại sau n tháng giống hoàn toàn công thức tính gửi ngân hàng và rút tiền hàng tháng

nên ta có $\boxed{S_n = A(1+r)^n - X\frac{(1+r)^n - 1}{r}}$.

$n = \log_{(1+r)}\left(\frac{S_n}{A}\right)$;

$r\% = \sqrt[n]{\frac{S_n}{A}} - 1$;

$A = \frac{S_n}{(1+r)^n}$

$n = \log_{(1+r)}\left(\frac{S_n.r}{A(1+r)} + 1\right)$;

$n = \log_{(1+r)}\left(\frac{S_n.r}{A(1+r)} + 1\right)$;

$A = \frac{S_n.r}{(1+r)\left[(1+r)^n - 1\right]}$

Để sau đúng *n* tháng trả hết nợ thì $S_n = 0$ nên

$$A(1+r)^n - X\frac{(1+r)^n - 1}{r} = 0.$$

Suy ra mỗi lần hoàn nợ số tiền là $\boxed{X = \frac{A(1+r)^n .r}{(1+r)^n - 1}}$.

6. Bài toán tăng lương: Một người được lãnh lương khởi điểm là *A* (đồng/tháng). Cứ sau *n* tháng thì lương người đó được tăng thêm *r* (% / tháng). Hỏi sau *kn* tháng, người đó lĩnh được bao nhiêu tiền?

Công thức tính: Lương nhận được sau *kn* tháng là

$$\boxed{S_{kn} = An.\frac{(1+r)^k - 1}{r}}.$$

7. Bài toán tăng trưởng dân số

Công thức tính tăng trưởng dân số:

$$\boxed{X_m = X_n(1+r)^{m-n}, m, n \in \mathbb{Z}^+, m \geq n}$$

Trong đó: *r %* là tỉ lệ tăng dân số từ năm *n* đến năm *m;*

X_m dân số năm *m*, X_n dân số năm *n.*

Từ đó ta có công thức tính tỉ lệ tăng dân số là $\boxed{r\% = \sqrt[m-n]{\frac{X_m}{X_n}} - 1}$

8. Lãi kép liên tục

Gửi vào ngân hàng *A* đồng với lãi kép *r (%* / năm) thì số tiền nhận được cả vốn lẫn lãi sau *n* năm ($n \in \mathbb{N}^*$) là: $S_n = A(1+r)^n$.

Giả sử ta chia mỗi năm thành *m* kì hạn để tính lãi và lãi suất mỗi kì hạn là $\frac{r}{m}\%$ thì số tiền thu được sau *n* năm là:

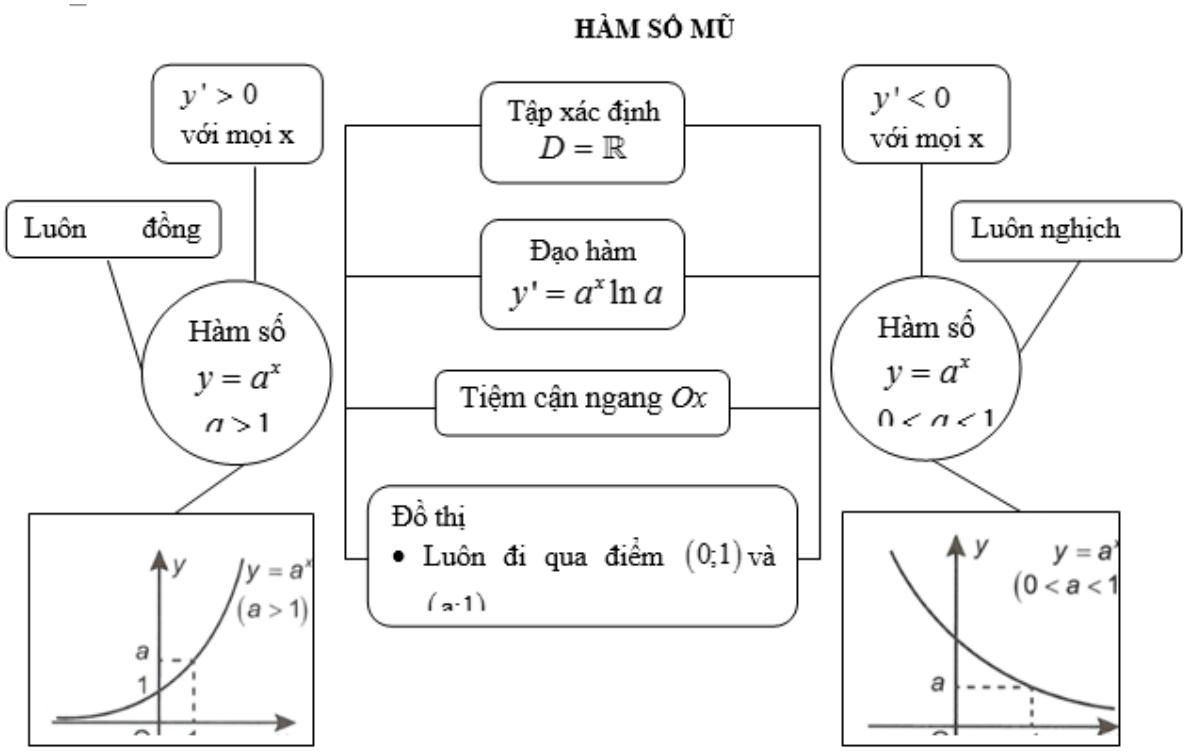
$$S_n = A\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{m.n}$$

Khi tăng số kì hạn của mỗi năm lên vô cực, tức là $m \to +\infty$, gọi là hình thức lãi kép liên tục thì người ta chứng minh được số tiền nhận được cả gốc lẫn lãi là:

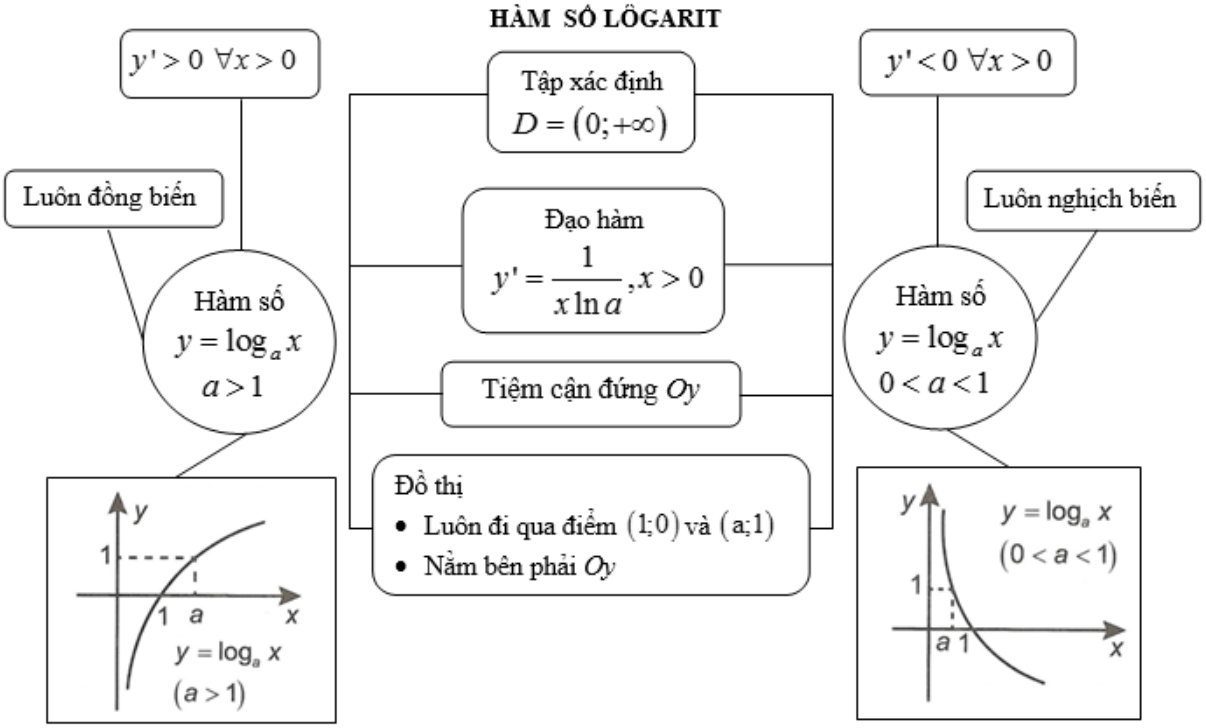
$\boxed{S = Ae^{n.r}}$ (công thức tăng trưởng mũ).

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA

HÀM SỐ MŨ



HÀM SỐ LÔGARIT



B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1. Tìm tập xác định của hàm số chứa mũ – lôgarit.

1. Phương pháp giải

* Hàm số $y = a^x \left(a > 0; a \neq 1\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

* Hàm số $y = \log_a x \left(a > 0; a \neq 1\right)$ có tập xác định là $\left(0; +\infty\right)$.

* Tìm điều kiện của tham số để hàm số $y = \log_a f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$ trong đó $f\left(x\right)$ là một tam thức bậc hai.

Áp dụng tính chất

- Tam thức bậc hai $f\left(x\right) = ax^2 + bx + c > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$.

* Tìm điều kiện của tham số để hàm số $y = \log_a f\left(x\right)$ xác định trên khoảng D.

- Cô lập tham số m.
- Sử dụng phương pháp khảo sát hàm số.

2. Bài tập

Bài tập 1: Điều kiện xác định D của hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{\log_9 \dfrac{2x}{x+1} - \dfrac{1}{2}}}$ là

A. $x < -3$ **B.** $x > -1$ **C.** $-3 < x < -1$ **D.** $0 < x < 3$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} \log_9 \dfrac{2x}{x+1} > \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2x}{x+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x}{x+1} > 9^{\frac{1}{2}} \\ \dfrac{2x}{x+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{2x}{x+1} > 3$

$\Leftrightarrow \dfrac{x+3}{x+1} < 0 \Leftrightarrow -3 < x < -1$

Bài tập 2: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \ln\left(x^2 - 2mx + 4\right)$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$?

A. 5 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 3

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Hàm số xác định $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 4 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ 4m^2 - 16 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 2$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-1;0;1\}$

Bài tập 3: Tìm m để hàm số $y = \log_2\left[(m+2)x^2 + 2(m+2)x + m + 3\right]$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

A. $m \le -2$ **B.** $m > -2$ **C.** $m < -2$ **D.** $m \ge -2$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Hàm số xác định trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow (m+2)x^2 + 2(m+2)x + m + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (*).

Trường hợp 1: $a \ne 0$.

$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 2 > 0 \\ 4(m+2)^2 - 4(m+2)(m+3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ -m - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2$.

Trường hợp 2: $a = 0 \Leftrightarrow m = -2$, ta có

$(*) \Leftrightarrow 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (đúng), nhận $m = -2$

Vậy $m \ge -2$.

Bài tập 4: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nằm trong khoảng $(-10;10)$ để hàm số $y = \log_2\left(4^x - 2^x + m\right)$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$?

A. 9 **B.** 10 **C.** 11 **D.** 8

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$ khi $4^x - 2^x + m > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ (1).

Đặt $t = 2^x, t > 0$.

Khi đó (1) trở thành $t^2 - t + m > 0\ \forall t \in (0;+\infty) \Leftrightarrow m > -t^2 + t\ \forall t \in (0;+\infty)$

$\Leftrightarrow m > \max\limits_{(0;+\infty)} f(t) = \dfrac{1}{4}$ với $f(t) = -t^2 + t$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in (-10;10)$ nên $m \in \{1;2;3;...;8;9\}$.

Bài tập 5: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số *m* nằm trong khoảng $(-10;10)$ để hàm số $y = \dfrac{1}{m\log_3^2 x - 4\log_3 x + m + 3}$ xác định trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 13 **B.** 11 **C.** 12 **D.** 10

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Hàm số xác định $\forall x \in (0;+\infty) \Leftrightarrow m\log_3^2 x - 4\log_3 x + m + 3 \neq 0, \forall x \in (0;+\infty)$ (*).

Đặt $t = \log_3 x, t \in \mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow mt^2 - 4t + m + 3 = 0$ vô nghiệm.

Trường hợp 1: $m = 0$. Phương trình có nghiệm (loại $m = 0$).

Trường hợp 2: $m \neq 0$. Phương trình vô nghiệm khi và chỉ khi

$\Delta' < 0 \Leftrightarrow 4 - m(m+3) < 0 \Leftrightarrow m < -4$ hoặc $m > 1$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in (-10;10)$ nên $m \in \{-9;-8;-7;-6;-5;2;3;...8;9\}$.

Vậy có 13 giá trị nguyên thỏa mãn.

Bài tập 6: Hàm số $y = \log_2\left(4^x - 2^x + m\right)$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$ khi.

A. $m \geq \dfrac{1}{4}$. **B.** $m > \dfrac{1}{4}$. **C.** $m > 0$. **D.** $m < \dfrac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Hàm số $y = \log_2\left(4^x - 2^x + m\right)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi.

$4^x - 2^x + m > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m > 2^x - 4^x \ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m > \max\left(2^x - 4^x\right) = \dfrac{1}{4}$.

Bài tập 7: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{m\log_3^2 x - 4\log_3 x + m + 3}$ xác định trên khoảng $(0;+\infty)$.

Hướng dẫn giải

Đặt $t = \log_3 x$, khi đó $x \in (0;+\infty) \Leftrightarrow t \in \mathbb{R}$.

$y=\dfrac{1}{m\log_3^2 x-4\log_3 x+m+3}$ trở thành $y=\dfrac{1}{mt^2-4t+m+3}$.

Hàm số $y=\dfrac{1}{m\log_3^2 x-4\log_3 x+m+3}$ xác định trên khoảng $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi hàm số $y=\dfrac{1}{mt^2-4t+m+3}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow f(t)=mt^2-4t+m+3$ vô nghiệm.

$\Leftrightarrow \Delta'=4-m^2-3m<0 \Leftrightarrow m<-4; m>1$.

Bài tập 8: Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{\ln\left(x^2-16\right)}{x-5+\sqrt{x^2-10x+25}}$ là:

A. $(5;+\infty)$. **B.** $(-\infty;\ 5)$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{5\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Viết lại $y=\dfrac{\ln\left(x^2-16\right)}{x-5+\sqrt{x^2-10x+25}}=\dfrac{\ln\left(x^2-16\right)}{x-5+\sqrt{(x-5)^2}}=\dfrac{\ln\left(x^2-16\right)}{x-5+|x-5|}$.

Biểu thức $\dfrac{\ln\left(x^2-16\right)}{x-5+|x-5|}$ có nghĩa khi và chỉ khi $\begin{cases}x^2-16>0\\ x-5+|x-5|\neq 0\end{cases}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2>16\\ |x-5|\neq 5-x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|x|>4\\ 5-x<0\end{cases} \Leftrightarrow x>5$.

Suy ra hàm số có tập xác định là $(5;+\infty)$.

Bài tập 9: Cho hàm số $y=\dfrac{1}{(x-m)\log_2\left[x^2-2(2m-1)x+4m^2\right]}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho xác định với mọi $x\in(1;+\infty)$.

A. $m\in(-\infty;2)$. **B.** $m\in(-1;1]$. **C.** $m\in(-\infty;1)$. **D.** $m\in(-\infty;1]$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Hàm số $y=\dfrac{1}{(x-m)\log_2\left[x^2-2(2m-1)x+4m^2\right]}$ xác định với $\forall x\in(1;+\infty)$ khi

$$\begin{cases} x-m\neq 0 \\ x^2-2(2m-1)x+4m^2>0 \ (\text{lđ}) \text{ với } \forall x\in(1;+\infty) \\ x^2-2(2m-1)x+4m^2\neq 1 \ (\text{lđ}) \end{cases}$$

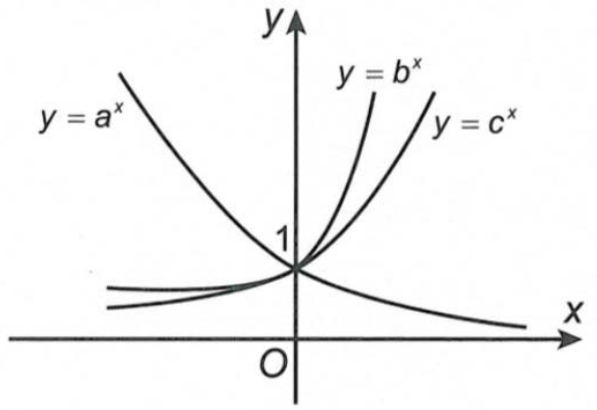
$\Leftrightarrow m\notin(1;+\infty)\Leftrightarrow m\le 1$

Dạng 2: Đồ thị hàm số

1. Phương pháp

2. Bài tập

Bài tập 1: Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị các hàm số $y=a^x, y=b^x, y=c^x$ được cho trong hình vẽ sau



Mệnh đề nào đúng?

A. $a<b<c$ **B.** $a<c<b$

C. $b<c<a$ **D.** $c<a<b$

Hướng dẫn giải

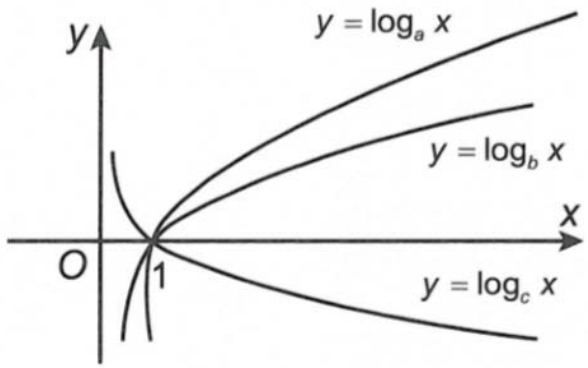
Chọn B.

Ta có: $y=a^x$ nghịch biến nên $0<a<1$.

Mặt khác, $y=b^x, y=c^x$ đồng biến, đồng thời cho $x=1\Rightarrow y=b>y=c$.

Vậy $a<c<b$

Bài tập 2: Từ các đồ thị $y=\log_a x$, $y=\log_b x$, $y=\log_c x$ đã cho ở hình vẽ sau:



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $0 < a < b < 1 < c$ **B.** $0 < c < 1 < a < b$

C. $0 < c < a < 1 < b$ **D.** $0 < c < 1 < b < a$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

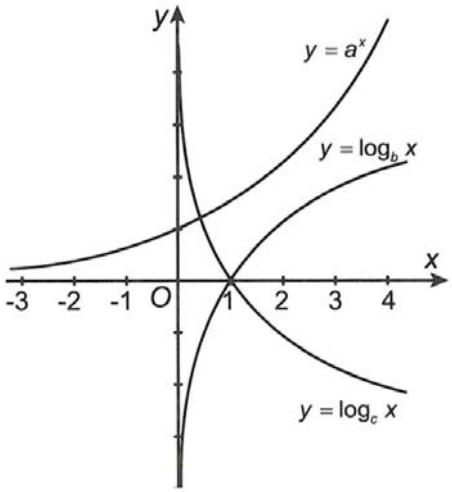
Ta có: $y = \log_c x$ nghịch biến nên $0 < c < 1$.

Mặt khác, $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ đồng biến nên $a, b > 1$ đồng thời cho $y = 1$ thì $x = a < x = b$.

Vậy $0 < c < 1 < a < b$.

Bài tập 3: Cho các hàm số $y = a^x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ có đồ thị như hình vẽ.

Chọn mệnh đề đúng?



A. $b < c < a$ **B.** $a < c < b$ **C.** $c < b < a$ **D.** $c < a < b$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $y=\log_c x$ nghịch biến nên $0<c<1$ còn $y=\log_b x$ và $y=a^x$ đồng biến nên $b>1$ và $a>1$.

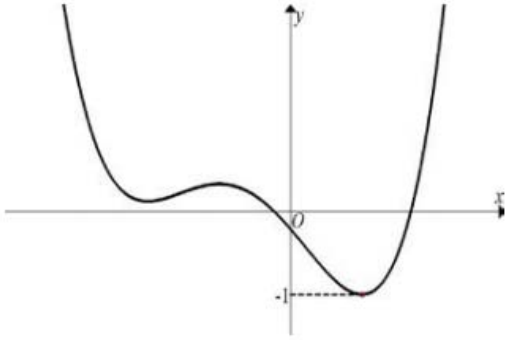
Xét $y=a^x$: Với $x=1\Rightarrow y=a\Rightarrow 1<a<2$.

Xét $y=\log_b x$: Với $y=1\Rightarrow x=b\Rightarrow b=2$.

Do đó $a<b$

Vậy $c<1<a<b$.

Bài tập 4: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=3^{f(x)}-4^{f(x)}$.



A. 5. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $y=g\left(x\right)=3^{f(x)}-4^{f(x)}$.

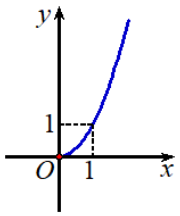
Quan sát đồ thị, ta thấy hàm số $y=f\left(x\right)$ có ba điểm cực trị.

Ta có $y'=f'\left(x\right).\left[3^{f(x)}.\ln 3-4^{f(x)}.\ln 4\right]\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'\left(x\right)=0\\3^{f(x)}.\ln 3-4^{f(x)}.\ln 4=0\end{array}\right.$.

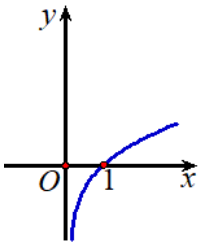
$3^{f(x)}.\ln 3-4^{f(x)}.\ln 4=0\Leftrightarrow\left(\frac{3}{4}\right)^{f(x)}=\frac{\ln 4}{\ln 3}\Leftrightarrow f\left(x\right)=\log_{\frac{3}{4}}\left(\frac{\ln 4}{\ln 3}\right)\approx -0,8$. Phương trình này có hai nghiệm phân biệt khác các nghiệm của phương trình $f'\left(x\right)=0$ nên hàm số $y=3^{f(x)}-4^{f(x)}$ có năm điểm cực trị.

Bài tập 5: Cho hàm số $f(x)=x\ln x$. Một trong bốn đồ thị cho trong bốn phương án A, B, C, D dưới đây là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$. Tìm đồ thị đó?

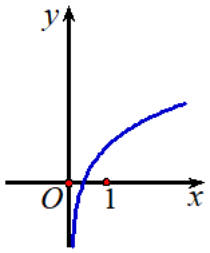
A.



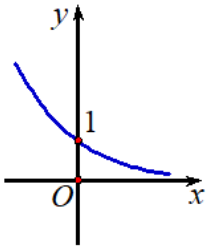
B.



C.



D.



Hướng dẫn giải

Chọn C.

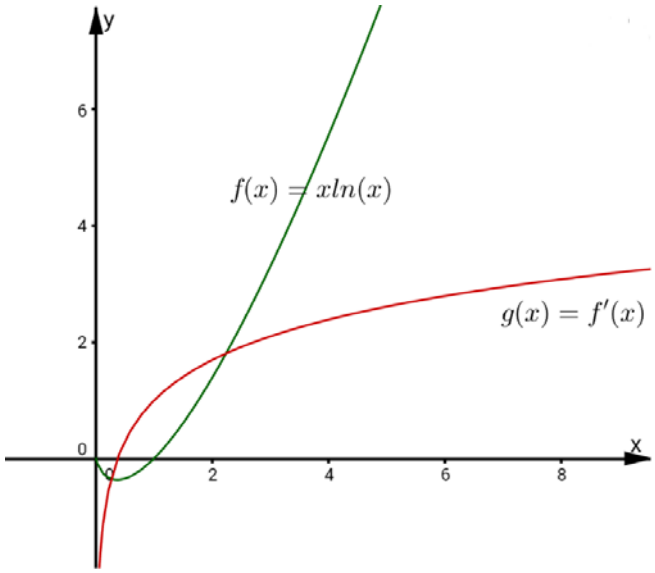
Tập xác định $D=(0;+\infty)$

Ta có $f(x)=x\ln x\Rightarrow f'(x)=g(x)=\ln x+1$.

Ta có $g(1)=1$ nên đồ thị hàm số đi qua điểm $(1;1)$. Loại hai đáp án B và D

Và $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(g(x)\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln(x)+1\right]$. Đặt $t=\dfrac{1}{x}$. Khi $x\to 0^+$ thì $t\to+\infty$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(g(x)\right)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left[\ln\left(\dfrac{1}{t}\right)+1\right]=-\lim\limits_{t\to+\infty}\left[\ln(t)\right]+1=-\infty$ nên loại đáp án **A.**



Cách 2 : Ta nhận thấy $f\left(x\right)=x\ln x\Rightarrow f'\left(x\right)=g\left(x\right)=\ln x+1$ nằm bên phải trục tung và không đi qua $(1;0)$. Vậy chọn đáp án **C.**

Dạng 3: Xét tính đơn điệu, cực trị, GTLN và GTNN của hàm số mũ, logarit

1. Phương pháp.

Phương pháp chung:

Bước 1: Tìm tập xác định

Bước 2: Tìm đạo hàm $f'\left(x\right)$. Tìm các điểm x_i làm cho $f'\left(x\right)=0$ hoặc không xác định.

Bước 3: Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập BBT.

Bước 4: Kết luận.

Ngoài ra cần chú ý tính chất của hàm số mũ và hàm số logarit:

+) Hàm số $y=a^x$ và hàm số $y=\log_a x$ đồng biến trên TXĐ $\Leftrightarrow a>1$.

+) Hàm số $y=a^x$ và hàm số $y=\log_a x$ nghịch biến trên TXĐ $\Leftrightarrow 0<a<1$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Gọi a, b lần lượt là số điểm cực đại và số điểm cực tiểu của hàm số $y=\left(x^3+3x+1\right)e^{-2x}$. Tính $2a-b$.

A. 0. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

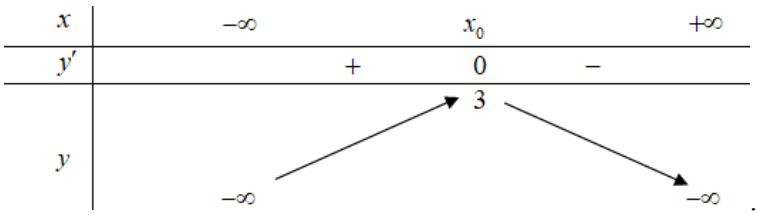
Chọn C.

Ta có $y=\left(x^3+3x+1\right)e^{-2x}$. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$y' = \left(x^3+3x+1\right)' e^{-2x} + \left(x^3+3x+1\right)\left(e^{-2x}\right)' = \left(3x^2+3\right)e^{-2x} - 2e^{-2x}\left(x^3+3x+1\right).$

$= e^{-2x}\left(-2x^3+3x^2-6x+1\right)$; $y' = 0$ có một nghiệm là x_0.

Bảng biến thiên:



Suy ra hàm số có 1 điểm cực đại và 0 điểm cực tiểu.

Vậy $2a-b=2$.

Bài tập 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 \ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{e};e\right]$.

A. $\min\limits_{\left[\frac{1}{e};e\right]} y = -\frac{1}{e^2}$. **B.** $\min\limits_{\left[\frac{1}{e};e\right]} y = -e$. **C.** $\min\limits_{\left[\frac{1}{e};e\right]} y = -\frac{1}{e}$. **D.** $\min\limits_{\left[\frac{1}{e};e\right]} y = -\frac{1}{2e}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

•Đạo hàm $y' = 2x\ln x + x^2\frac{1}{x} = 2x\ln x + x = x\left(2\ln x+1\right)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \notin \left(\frac{1}{e};e\right) \\ x = \frac{1}{\sqrt{e}} \in \left(\frac{1}{e};e\right) \end{array}\right.$.

•Tính các giá trị: $y\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e^2}$, $y(e) = e^2$, $y = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e}$.

•Vậy $\min\limits_{\left[\frac{1}{e};e\right]} y = -\frac{1}{2e}$.

Bài tập 3. Cho $1 < x < 64$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \log_2^4 x + 12\log_2^2 x.\log_2\frac{8}{x}$.

A. 82. **B.** 96. **C.** 64. **D.** 81.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$P = \log_2^4 x + 12\log_2^2 x.\log_2\frac{8}{x} = \log_2^4 x + 12\log_2^2 x.\left(\log_2 8 - \log_2 x\right) = \log_2^4 x + 12\log_2^2 x.\left(3-\log_2 x\right)$

.

Đặt $t=\log_2 x$, do $1<x<64$ nên $0<t<6$.

$f(t)=t^4+12t^2.(3-t)$ với $0<t<6$.

$$f'(t)=4t^3-36t^2+72t\ ;f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=3\\t=6\end{array}\right.$$

t	0		3		6
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$		↗	81	↘	

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $P=81$.

Bài tập 4. Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=\dfrac{3^{-x}-3}{3^{-x}-m}$ nghịch biến trên $(-1;1)$.

A. $m<\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{3}<m<3$. **C.** $m\le\dfrac{1}{3}$. **D.** $m>3$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $y=\dfrac{3^{-x}-3}{3^{-x}-m}=\dfrac{3.3^x-1}{m3^x-1}$

Đặt $t=3^x$. Vì $x\in(-1;1)$ nên $t\in\left(\dfrac{1}{3};3\right)$.

Khi đó $y=\dfrac{3t-1}{mt-1}\Rightarrow y'=\dfrac{m-3}{(mt-1)^2}$

+ Với $m=0$ thỏa mãn.

+ Với $m\neq 0$. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m-3<0\\\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{m}\le\dfrac{1}{3}\\\dfrac{1}{m}\ge 3\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow m\in\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right]\setminus\{0\}$.

Bài tập 5. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\ln\left(x^2+1\right)-2mx+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. Không tồn tại m. **B.** $m\ge\dfrac{1}{2}$. **C.** $m\le-\dfrac{1}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}<m<\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hàm số $y=\ln\left(x^2+1\right)-2mx+2$ xác định với $\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=\left[\ln\left(x^2+1\right)-2mx+2\right]'=\dfrac{2x}{x^2+1}-2m$

Để hàm số $y=\ln\left(x^2+1\right)-2mx+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y'\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

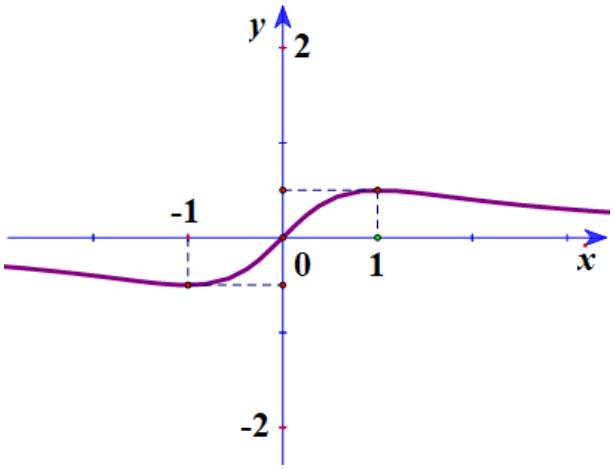
$\Leftrightarrow \dfrac{2x}{x^2+1}-2m\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \dfrac{x}{x^2+1}\ge m,\forall x\in\mathbb{R}$.

Xét hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{x}{x^2+1}$ xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$; $g'\left(x\right)=\dfrac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}$.

$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=\pm 1$.

Lập bảng biến thiên của $g\left(x\right)$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0



Theo bảng biến thiên trên thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ hay $y'\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m\le -\dfrac{1}{2}$.

Bài tập 6. Có bao nhiêu giá trị của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)=\left|e^{2x}-4e^{x}+m\right|$ trên $\left[0;\ln 4\right]$ bằng 6.

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

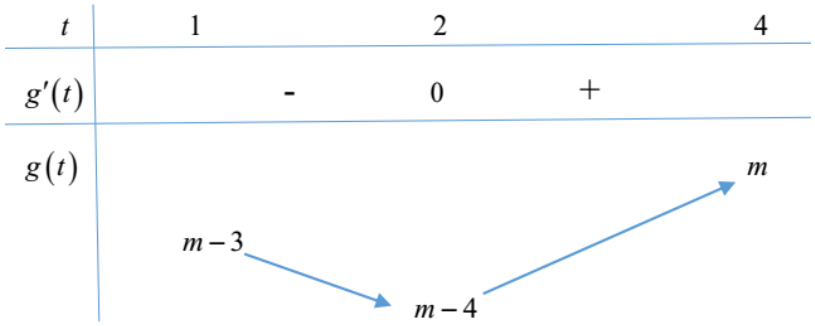
Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $t=e^x$, với $x\in[0;\ln 4]\Rightarrow t\in[1;4]$. Khi đó $f(x)=|t^2-4t+m|=|g(t)|$.

Có $g'(t)=2t-4\ \Rightarrow g'(t)=0\Leftrightarrow t=2$.

Ta có bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên ta thấy $\min\limits_{[0;4]}|g(t)|=6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-6\\m-4=6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-6\\m=10\end{array}\right.$.

Bài tập 7. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left(20x^2+20x-1283\right)e^{40x}$ trên tập hợp các số tự nhiên là:

A. -1283. **B.** $-163.e^{280}$. **C.** $157.e^{320}$. **D.** $-8.e^{300}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $y'=(40x+20)e^{40x}+40\left(20x^2+20x-1283\right)e^{40x}=20e^{40x}\left(40x^2+42x-2565\right)$

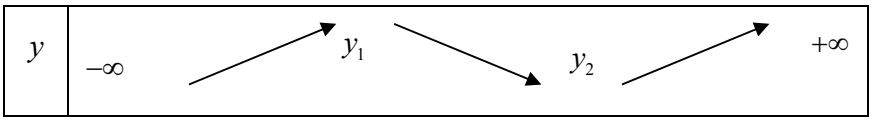
$$y'=0\Leftrightarrow 40x^2+42x-2565=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{15}{2}\\x=-\dfrac{171}{20}\end{array}\right.$$

Đặt $y_1=y\left(-\dfrac{171}{20}\right);\ y_2=y\left(\dfrac{15}{2}\right)$

$y(7)=-163.e^{280};\ y(8)=157.e^{320}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\dfrac{171}{20}$		$\dfrac{15}{2}$		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	



Dựa vào bảng biến thiên ta có Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left(20x^2+20x-1283\right)e^{40x}$ trên tập hợp các số tự nhiên là $-163.e^{280}$.

Bài tập 8. Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=4^x-2^{x+2}-mx+1$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

A. $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\ln 2\right]$.

B. $(-\infty;0]$.

C. $(-\infty;-2\ln 2]$.

D. $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\ln 2\right]$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $y=4^x-2^{x+2}-mx+1\Rightarrow y'=4^x.\ln 4-4.2^x.\ln 2-m=\left(4^x-2.2^x\right).\ln 4-m$

Theo đề $y'\geq 0,\forall x\in(-1;1)\Leftrightarrow\left(4^x-2.2^x\right).\ln 4-m\geq 0,\quad \forall x\in(-1;1)$

$\Leftrightarrow m\leq\left(4^x-2.2^x\right).\ln 4=g(x),\qquad \forall x\in(-1;1)$

$\Leftrightarrow m\leq \underset{(-1;1)}{Min}\, g(x)$

$\underset{(-1;1)}{Min}\, g(x)=-\ln 4$.

Bài tập 9. Giá trị nhỏ nhất của tham số m ðể hàm số $y=\frac{e^x-m-2}{e^x-m^2}$ ðồng biến trên khoảng $\left(\ln\frac{1}{4};0\right)$ gần nhất với số nào sau ðây:

A. $0,03$.

B. 1.

C. $-0,45$.

D. $-1,01$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đặt $e^x=t$. Suy ra $y=\frac{t-m-2}{t-m^2}$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{4};1\right)$.

$y'=\frac{-m^2+m+2}{\left(t-m^2\right)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{4};1\right)$ cần:

$$\begin{cases} -m^2+m+2>0 \\ m\notin\left(\frac{1}{4};1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<m<2 \\ \left[\begin{array}{l} m\ge 1 \\ m\le \frac{1}{4} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1\le m<2 \\ -1<m\le \frac{1}{4} \end{array}\right.$$. Suy ra chọn **C.**

Bài tập 10. Cho hàm số $y=\left(\frac{4}{2017}\right)^{e^{3x}-(m-1)e^x+1}$. Tìm m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

A. $m<3e^2+1$.

B. $3e^2+1\le m\le 3e^3+1$.

C. $3e^3+1\le m<3e^4+1$.

D. $m\ge 3e^4+1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

- $y'=\left(\frac{4}{2017}\right)^{e^{3x}-(m-1)e^x+1}.\ln\left(\frac{4}{2017}\right).\left(e^{3x}-(m-1)e^x+1\right)'$

$=y'=\left(\frac{4}{2017}\right)^{e^{3x}-(m-1)e^x+1}.\ln\left(\frac{4}{2017}\right).\left(3e^{3x}-(m-1)e^x\right)$.

- Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2)$ $\Leftrightarrow$ $y'=\left(\frac{4}{2017}\right)^{e^{3x}-(m-1)e^x+1}.\ln\left(\frac{4}{2017}\right).\left(3e^{3x}-(m-1)e^x\right)\ge 0,\forall x\in(1;2)$ (*), mà $\begin{cases} \left(\frac{4}{2017}\right)^{e^{3x}-(m-1)e^x+1}>0,\forall x\in\mathbb{R} \\ \ln\left(\frac{4}{2017}\right)<0 \end{cases}$. Nên (*) $\Leftrightarrow$ $3e^{3x}-(m-1)e^x\le 0,\forall x\in(1;2)$ $\Leftrightarrow$ $3e^{2x}+1\le m,\forall x\in(1;2)$.

- Đặt $g(x)=3e^{2x}+1,\forall x\in(1;2)$, $g(x)=3e^{2x}.2>0,\forall x\in(1;2)$.

x	1		2
$g'(x)$	|	+	|
$g(x)$	|	↗	|

Vậy (*) xảy ra khi $m\ge g(2)\Leftrightarrow m\ge 3e^4+1$.

Dạng 4: Tìm GTLN và GTNN của hàm số mũ, logarit nhiều biến

1. Phương pháp

PP1: Sử dụng các bất đẳng thức cổ điển như: Côsi, Bunhiacôpski và một số BĐT quen thuộc khác

PP2: Sử dụng phương pháp dồn biến:

+) Biến đổi biểu thức đã cho theo một biểu thức chung mà ta đặt là biến t.

+) Biểu diễn biểu thức đã cho theo t ta được hàm $f(t)$. Tìm điều kiện cho t.

+) Lập bảng biến thiên của $f(t)$. Suy ra kết quả.

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho 2 số dương a và b thỏa mãn $\log_2(a+1)+\log_2(b+1)\ge 6$. Giá trị nhỏ nhất của $S=a+b$ là.

A. $\min S=8$. **B.** $\min S=14$. **C.** $\min S=12$. **D.** $\min S=16$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $\begin{cases}\log_2(a+1)=x\\ \log_2(b+1)=y\end{cases}\Rightarrow x+y\ge 6$.

Ta có $\begin{cases}a+1=2^x\\ b+1=2^y\end{cases}\Rightarrow a+b+2=2^x+2^y\ge 2\sqrt{2^{x+y}}=2.\sqrt{2^6}=16\Rightarrow a+b\ge 14$.

Bài tập 2. Cho các số thực m,n thỏa mãn $m>n>1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=\log^2_{\frac{m}{n}}\left(m^2\right)+3\log_n\left(\frac{m}{n}\right)$.

A. $P_{\min}=13$. **B.** $P_{\min}=15$. **C.** $P_{\min}=16$. **D.** $P_{\min}=14$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Do $m>n>1$ nên ta có.

$$P=\log^2_{\frac{m}{n}}\left(m^2\right)+3\log_n\left(\frac{m}{n}\right)=\left(2\log_{\frac{m}{n}}m\right)^2+3\left(\log_n m-1\right)$$
$$=\frac{4}{\left(\log_m\frac{m}{n}\right)^2}+3\left(\log_n m-1\right)=\frac{4}{\left(1-\log_m n\right)^2}+\frac{3}{\log_m n}-3.$$

Do $m>n>1$ nên $\begin{cases}\log_m n<\log_m m=1\\ \log_m n>\log_m 1=0\end{cases}$.

Xét hàm số $y=\frac{4}{(1-x)^2}+\frac{3}{x}-3$ trên $(0;1)$.

Ta có $y'=\frac{8}{(1-x)^3}-\frac{3}{x^2}$.

$$\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\frac{8}{(1-x)^3}-\frac{3}{x^2}=0\Leftrightarrow\frac{3x^3-x^2+9x-3}{x^2(1-x)^3}=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}.$$

Bảng biến thiên.

x	0		$\frac{1}{3}$		1
y'		$-$	0	$+$	
y		↘	15	↗	

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức là $P_{\min}=15$.

Bài tập 3. Cho ba số thực a, b, $c\in\left(\frac{1}{4};1\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức. $P=\log_a\left(b-\frac{1}{4}\right)+\log_b\left(c-\frac{1}{4}\right)+\log_c\left(a-\frac{1}{4}\right)$.

A. $P_{\min}=1$. **B.** $P_{\min}=3$. **C.** $P_{\min}=3\sqrt{3}$. **D.** $P_{\min}=6$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Vợi mọi $x\in\left(\frac{1}{4};1\right)$ ta có $x^2-x+\frac{1}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\geq 0\Rightarrow x^2\geq x-\frac{1}{4}$.

Lấy logarit 2 vế, ta được $\log_t x^2\leq\log_t\left(x-\frac{1}{4}\right)$ (với $t\in(0;1)$ (*).

Áp dụng BĐT (*) ta được: $\log_a\left(b-\frac{1}{4}\right)\geq\log_a b^2=2\log_a b$.

$\log_b\left(c-\frac{1}{4}\right)\geq\log_b c^2=2\log_b c$.

$\log_c\left(a-\frac{1}{4}\right)\geq\log_c a^2=2\log_c a$.

Suy ra $P\geq 2\left[\log_a b+\log_b c+\log_c a\right]\geq 2.3\sqrt[3]{\log_a b.\log_b c.\log_c a}=6=P_{\min}$.

Bài tập 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left(\log_a b^2\right)^2+6\left(\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}}\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)^2$ với a,b là các số thực thỏa mãn $\sqrt{b}>a>1$.

A. 30. **B.** 40. **C.** 60. **D.** 50.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $\left(\log_a b^2\right)^2=4\left(\log_a b\right)^2$. Đặt $\log_a b=t$.

$$\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}}\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\frac{1}{2}\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}}\frac{b}{a}=\frac{1}{2}\left(\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}}b-\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}}a\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\log_b\frac{\sqrt{b}}{a}}-\frac{1}{\log_a\frac{\sqrt{b}}{a}}\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{1}{2}-\log_b a}-\frac{1}{\frac{1}{2}\log_a b-1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{1-2\log_b a}-\frac{2}{\log_a b-2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{2\log_a b-6+4\log_b a}{\log_a b+4\log_b a-4}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{2t-6+\frac{4}{t}}{t+\frac{4}{t}-4}=\frac{1}{2}\frac{2\left(t^2-3t+2\right)}{t^2-4t+4}=\frac{(t-1)(t-2)}{(t-2)^2}=\frac{t-1}{t-2}.$$

Ta được $P=4t^2+6\left(\frac{t-1}{t-2}\right)^2$.

Với $\sqrt{b}>a>1\Rightarrow b>a^2$ (*) Lấy log cơ số $a>1$ hai vế của (*) ta được $\log_a b>2$ nên $t>2$.

*) Xét hàm số $f(t)=4t^2+6\left(\frac{t-1}{t-2}\right)^2, t\in D=(2;+\infty)$.

Ta được.

$$f'(t)=8t-\frac{12(t-1)}{(t-2)^2}=0\Rightarrow 8t\left(t^2-4t+4\right)-12(t-1)=0\Leftrightarrow 8t^3-32t^2+20t+12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\ t=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\\ t=\frac{1-\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$$

.

Do $t>2$ nên $f'(t)=0$ có nghiệm $t=3$.

Ta có $\lim\limits_{t\to 2^+}f(t)=+\infty; f(3)=60; \lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=+\infty$ nên hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng $60.$.

Bài tập 5. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_3\left[(x+1)(y+1)\right]^{y+1}=9-(x-1)(y+1)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+2y$.

A. $P_{\min}=\frac{11}{2}$. **B.** $P_{\min}=\frac{27}{5}$. **C.** $P_{\min}=-5+6\sqrt{3}$. **D.** $P_{\min}=-3+6\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $\log_3\left[(x+1)(y+1)\right]^{y+1}=9-(x-1)(y+1)\Leftrightarrow\log_3(x+1)+x+1=\frac{9}{y+1}+\log_3\frac{9}{y+1}$.

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t,\ t>1;\ f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 3}+1>0,\ \forall t>1$.

Suy ra $f(x+1)=f\left(\dfrac{9}{y+1}\right)\Leftrightarrow x+1=\dfrac{9}{y+1}\Leftrightarrow x=\dfrac{8-y}{y+1}\Rightarrow P=\dfrac{8-y}{y+1}+2y=\dfrac{2y^2+y+8}{y+1}$.

Bảng biến thiên của hàm số $P=\dfrac{2y^2+y+8}{y+1},\ y>1$

x	1		$\dfrac{-2+\sqrt{18}}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$\dfrac{11}{2}$	↘	$-3+6\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

Vậy $P_{\min}=-3+6\sqrt{2}$.

Bài tập 6. Trong **các** nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn bất phương trình $\log_{x^2+2y^2}(2x+y)\ge 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T=2x+y$ bằng:

A. 9. **B.** $\dfrac{9}{8}$. **C.** $\dfrac{9}{4}$. **D.** $\dfrac{9}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Bất PT $\Leftrightarrow \log_{x^2+2y^2}(2x+y)\ge 1\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2y^2>1 \\ 2x+y\ge x^2+2y^2 \end{cases}(I),\quad \begin{cases} 0<x^2+2y^2<1 \\ 0<2x+y\le x^2+2y^2 \end{cases}(II)$.

Xét T= $2x+y$.

TH1: (x; y) thỏa mãn (II) khi đó $0<T=2x+y\le x^2+2y^2<1$.

TH2: (x; y) thỏa mãn (I) $x^2+2y^2\le 2x+y\Leftrightarrow (x-1)^2+(\sqrt{2}y-\dfrac{1}{2\sqrt{2}})^2\le\dfrac{9}{8}$. Khi đó.

$$2x+y=2(x-1)+\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}y-\frac{1}{2\sqrt{2}})+\frac{9}{4}\le\sqrt{(2^2+\frac{1}{2})\left[(x-1)^2+(\sqrt{2}y-\frac{1}{2\sqrt{2}})^2\right]}+\frac{9}{4}\le\sqrt{\frac{9}{2}.\frac{9}{8}}+\frac{9}{4}=\frac{9}{2}.$$

Suy ra : $\max T=\dfrac{9}{2}\Leftrightarrow (x;y)=(2;\dfrac{1}{2})$.

Bài tập 7. Cho hai số thực $a,\ b$ thỏa mãn $1>a\ge b>0$. Tính giá trị nhỏ nhất $T_{\min}$ của biểu thức sau $T=\log_a^2 b+\log_{a.b}a^{36}$.

A. $T_{\min}=16$. **B.** $T_{\min}=13$.

C. $T_{\min}$ không tồn tại. **D.** $T_{\min}=19$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$T=\log_a^2 b+\log_{a.b} a^{36}=\log_a^2 b+\dfrac{36}{\log_a ab}=\log_a^2 b+\dfrac{36}{1+\log_a b}$.

Đặt $t=\log_a b$, vì $1>a\ge b>0\Rightarrow \log_a b\ge \log_b b\Rightarrow t\ge 1$.

Xét $f(t)=t^2+\dfrac{36}{1+t}\Rightarrow f'(t)=2t-\dfrac{36}{(1+t)^2}$. Cho $f'(t)=0\Rightarrow t=2$.

Hàm số $f(t)$ liên tục trên $[1;+\infty)$ có $\begin{cases} f(1)=19 \\ f(2)=16 \\ \lim\limits_{t\to+\infty} f(t)=+\infty \end{cases}\Rightarrow \underset{[1;+\infty)}{Min} f(t)=16\Rightarrow \underset{[1;+\infty)}{Min} T=16$.

Bài tập 8. Xét các số thực a, b thỏa mãn $a\ge b>1$. Biết rằng biểu thức $P=\dfrac{1}{\log_{ab} a}+\sqrt{\log_a \dfrac{a}{b}}$ đạt giá trị lớn nhất khi $b=a^k$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $k\in\left(\dfrac{3}{2};2\right)$. **B.** $k\in(2;3)$. **C.** $k\in\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $k\in(-1;0)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $P=\dfrac{1}{\log_{ab} a}+\sqrt{\log_a \dfrac{a}{b}}=\log_a ab+\sqrt{1-\log_a b}=1+\log_a b+\sqrt{1-\log_a b}$.

Khi $b=a^k\Rightarrow P=1+k+\sqrt{1-k}$. Đặt $t=\sqrt{1-k}$. Với $k\le 1$.

$\Rightarrow P=-t^2+t+2=-\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}\le\dfrac{9}{4}$.

$\Rightarrow$ Max $P=\dfrac{9}{4}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}\Rightarrow k=\dfrac{3}{4}\in\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$.

Bài tập 9. Xét các số thực a, b thỏa mãn $a>b>1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=\log_{\frac{a}{b}}^2(a^2)+3\log_b\left(\dfrac{a}{b}\right)$.

A. $P_{\min}=19$. **B.** $P_{\min}=13$. **C.** $P_{\min}=14$. **D.** $P_{\min}=15$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Với điều kiện đề bài, ta có.

$$P=\log_{\frac{a}{b}}^2(a^2)+3\log_b\left(\frac{a}{b}\right)=\left[2\log_{\frac{a}{b}}a\right]^2+3\log_b\left(\frac{a}{b}\right)=4\left[\log_{\frac{a}{b}}\left(\frac{a}{b}.b\right)\right]^2+3\log_b\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$=4\left[1+\log_{\frac{a}{b}}b\right]^2+3\log_b\left(\frac{a}{b}\right)$$

Đặt $t=\log_{\frac{a}{b}}b>0$ (vì $a>b>1$), ta có $P=4(1+t)^2+\frac{3}{t}=4t^2+8t+\frac{3}{t}+4=f(t)$.

Ta có $f'(t)=8t+8-\frac{3}{t^2}=\frac{8t^3+8t^2-3}{t^2}=\frac{(2t-1)(4t^2+6t+3)}{t^2}$.

Vậy $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$. Khảo sát hàm số, ta có $P_{\min}=f\left(\frac{1}{2}\right)=15$.

Bài tập 10. Cho các số thực a,b,c không âm thoả mãn $2^a+4^b+8^c=4$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=a+2b+3c$. Giá trị của biểu thức $4^M+\log_M m$ bằng

A. $\frac{2809}{500}$. **B.** $\frac{281}{50}$. **C.** $\frac{4096}{729}$. **D.** $\frac{14}{25}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$2^a+4^b+8^c=4\Leftrightarrow 2^a+2^{2b}+2^{3c}=4$.

Đặt $\begin{cases}x=2^a\\y=2^{2b}\\z=2^{3c}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y+z=4\\x,y,z\ge 1\end{cases}$.

$S=a+2b+3c=\log_2 x+\log_2 y+\log_2 z=\log_2(xyz)$.

Ta có $xyz\le\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3=\left(\frac{4}{3}\right)^3\Rightarrow S\le 3\log_2\frac{4}{3}$.

Dấu bằng xảy ra $x=y=z=\frac{4}{3}$.

Do đó $M=3\log_2\frac{4}{3}\Leftrightarrow a=2b=3c=\log_2\frac{4}{3}$.

Mặt khác

$$xyz=(x-1)(y-1)(z-1)+(x-1)(y-1)+(y-1)(z-1)+(z-1)(x-1)+(x+y+z)-2$$
$$=(x-1)(y-1)(z-1)+(x-1)(y-1)+(y-1)(z-1)+(z-1)(x-1)+2\geq 2.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} x=1;y=1;z=2 \\ x=1;y=2;z=1 \\ x=2;y=1;z=1 \end{array}\right.$.

Suy ra $m=1$.

Vậy $4^M+\log_M m=\left(\frac{4}{3}\right)^6=\frac{4096}{729}$.

Bài tập 11. Cho các số thực a,b,c,d thoả mãn $\frac{1}{2^a}+\frac{1}{4^b}+\frac{1}{8^c}+\frac{1}{16^d}=\frac{1}{4}$. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=a+2b+3c+4d$. Giá trị của biểu thức $\log_2 m$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** 4. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$$\frac{1}{2^a}+\frac{1}{4^b}+\frac{1}{8^c}+\frac{1}{16^d}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow 2^{-a}+2^{-2b}+2^{-3c}+2^{-4d}=\frac{1}{4}.$$

Đặt $\begin{cases} x=2^{-a} \\ y=2^{-2b} \\ z=2^{-3c} \\ t=2^{-4d} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x+y+z+t=\frac{1}{4} \\ x,y,z,t>0 \end{cases}$.

$$S=a+2b+3c+4d=-\left(\log_2 x+\log_2 y+\log_2 z+\log_2 t\right)=-\log_2(xyzt).$$

Ta có $xyzt\leq\left(\frac{x+y+z+t}{4}\right)^4=\frac{1}{16^4}=2^{-16}\Rightarrow S\geq 16$.

Dấu bằng xảy ra $x=y=z=t=\frac{1}{16}$.

Do đó $m=16\Leftrightarrow\begin{cases} a=4 \\ b=2 \\ c=\frac{4}{3} \\ d=1 \end{cases}$.

Bài tập 12. Cho a, b, c là các số thực lớn hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức:

$$P=\frac{4}{\log_{\sqrt{bc}} a}+\frac{1}{\log_{ac}\sqrt{b}}+\frac{8}{3\log_{ab}\sqrt[3]{c}}.$$

A. $P_{\min}=20$. **B.** $P_{\min}=10$. **C.** $P_{\min}=18$. **D.** $P_{\min}=12$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $P=\frac{4}{2\log_{bc} a}+\frac{1}{\frac{1}{2}\log_{ac} b}+\frac{8}{\log_{ab} c}=2\log_a bc+2\log_b ac+8\log_c ab$

$=2\log_a b+2\log_a c+2\log_b a+2\log_b c+8\log_c a+8\log_c b$

$=\left(2\log_a b+2\log_b a\right)+\left(2\log_a c+8\log_c a\right)+\left(2\log_b c+8\log_c b\right)$.

Vì a, b, c là các số thực lớn hơn 1 nên: $\log_a b, \log_b a, \log_a c, \log_c a, \log_b c, \log_c b>0$. Do đó

áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$P\ge 2\sqrt{2\log_a b.2\log_b a}+2\sqrt{2\log_a c.8\log_c a}+2\sqrt{2\log_b c.8\log_c b}=4+8+8=20$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\log_a b=\log_b a\\ \log_a c=4\log_c a\\ \log_b c=4\log_c b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\ c=a^2\\ c=b^2\end{cases}\Leftrightarrow a=b=\sqrt{c}>1$.

Vậy $P_{\min}=20$.

Dạng 5: Bài toán lãi suất

1. Phương pháp

2. Bài tập

Bài tập 1: Một người gửi tiết kiệm số tiền 80 000 000 đồng với lãi suất 6,9% một năm. Biết rằng tiền lãi hàng năm được cộng vào tiền gốc, hỏi sau 5 năm người đó rút được cả tiền gốc lẫn tiền lãi gần với con số nào sau đây?

A. 105370000 đồng **B.** 111680000 đồng

C. 107667000 đồng **D.** 116570000 đồng

Hướng dẫn giải

Chọn B

Gọi A là số tiền gửi ban đầu, r là lãi suất hàng năm.

Ghi nhớ:

Khách hàng gửi vào ngân hàng A đồng với lãi kép r (% / kì hạn) thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n kì hạn $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ là:

$$\boxed{S_n=A\left(1+r\right)^n}$$

Số tiền gốc và lãi sau năm thứ nhất là $S_1 = A + A.r = A(1+r)$.

Số tiền gốc và lãi sau năm thứ hai là $S_2 = S_1 + S_1.r = A(1+r)^2$.

…

Số tiền gốc và lãi người đó rút ra được sau 5 năm là

$S_5 = A.(1+r)^5 = 80000000.(1+6,9\%)^5 \approx 111680799$ (đồng)

Bài tập 2: Một người gửi ngân hàng 100 triệu với lãi suất 0,5% một tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được cộng vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó có nhiều hơn 125 triệu?

Từ công thức lãi kép $S_n = A(1+r)^n$, *ta suy ra* $n = \log_{(1+r)}\left(\frac{S_n}{A}\right)$.

A. 45 tháng **B.** 46 tháng **C.** 47 tháng **D.** 44 tháng

Hướng dẫn giải

Chọn A

Sau *n* tháng, tổng số tiền gốc và lãi là: $100(1+0,5\%)^n$.

Theo đề bài: $100(1+0,5\%)^n > 125 \Leftrightarrow n > \log_{(1+0,5\%)}\frac{125}{100} \approx 44,74$

Vậy sau ít nhất 45 tháng, người đó có nhiều hơn 125 triệu.

Bài tập 3: Bác Toản gửi số tiền 58 triệu đồng vào một ngân hàng theo hình thức lãi kép và ổn định trong 9 tháng thì lĩnh về được 61758000 đồng. Hỏi lãi suất ngân hàng hàng tháng là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất không thay đổi trong thời gian gửi.

Từ công thức lãi kép $S_n = A(1+r)^n$, ta có $r = \sqrt[n]{\frac{S_n}{A}} - 1$.

A. 0.8% **B.** 0,6% **C.** 0,7% **D.** 0,5%

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi *r* là lãi suất tiền gửi của ngân hàng theo tháng. A, S_n lần lượt là số tiền gửi ban đầu và số tiền sau $n = 9$ tháng. Áp dụng công thức lãi kép ta có

$S_n = A(1+r)^n \Leftrightarrow 61758000 = 58000000(1+r)^9$

$\Leftrightarrow r = \sqrt[9]{\frac{61758000}{58000000}} - 1 \approx 7.10^{-3} = 0,7\%$

Vậy lãi suất ngân hàng hàng tháng là 0,7%

Bài tập 4: Để đủ tiền mua nhà, anh An vay ngân hàng 500 triệu theo phương thức trả góp với lãi suất 0,85% mỗi tháng. Nếu sau mỗi tháng, kể từ thời điểm vay, anh An trả nợ cho ngân hàng số tiền cố định là 10 triệu đồng bao gồm cả tiền lãi vay và tiền gốc. Biết phương thức trả lãi và gốc không thay đổi trong suốt quá trình anh An trả nợ. Hỏi sau bao nhiêu tháng anh trả hết nợ ngân hàng?

A. 65 **B.** 66 **C.** 67 **D.** 68

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $A = 500$ triệu là số tiền đã vay, $X = 10$ triệu là số tiền trả trong mỗi tháng và $r = 0,85\%$ là lãi suất ngân hàng, *n* là số tháng anh An phải trả hết nợ.

Theo đề bài:

Cuối tháng thứ nhất anh An còn nợ số tiền là

$A + Nr - X = A(1+r) - X$.

Cuối tháng thứ hai anh An còn nợ số tiền là

$\left[A(1+r) - X\right] + \left[A(1+r) - X\right]r - X = A(1+r)^2 - X\left[(1+r)+1\right].$

Cuối tháng thứ ba anh An còn nợ số tiền là

$\left[A(1+r)^2 - X\left[(1+r)+1\right]\right](1+r) - X = A(1+r)^3 - X\left[(1+r)^2 + (1+r) + 1\right]$

…

Cuối tháng thứ n anh An còn nợ số tiền là

$A(1+r)^n - X\left[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + ... + (1+r) + 1\right]$

Bài toán vay vốn trả góp: *Vay ngân hàng số tiền là A đồng với lãi suất r (% / tháng). Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ cách nhau đúng một tháng, mỗi hoàn nợ số tiền là X đồng và trả hết tiền nợ sau đúng n tháng.*

Cách tính số tiền còn lại sau n tháng là:

$S_n = A(1+r)^n - X\frac{(1+r)^n - 1}{r}.$

Để sau đúng n tháng trả hết nợ thì

$A(1+r)^n - X\frac{(1+r)^n - 1}{r} = 0.$

Suy ra

$n = \log_{(1+r)}\left(\frac{X}{X - Ar}\right).$

Để sau n tháng, anh An trả hết nợ thì

$$A(1+r)^n - X\left[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + ... + (1+r) + 1\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow A(1+r)^n = X\left[(1+r)^{n-1} + (1+r)^{n-2} + ... + (1+r) + 1\right]$$

$$\Leftrightarrow A(1+r)^n = X\frac{(1+r)^n - 1}{r} \Leftrightarrow (1+r)^n = \frac{X}{X - Ar} \Leftrightarrow n = \log_{(1+r)}\left(\frac{X}{X - Ar}\right)$$

Áp dụng ta có: $n = \log_{(1+0,0085)}\left(\frac{10}{10 - 500.0,0085}\right) \Leftrightarrow n \approx 65,38$.

Vậy anh An phải trả trong vòng 66 tháng.

Bài tập 5: Bác An có 400 triệu đồng mang đi gửi tiết kiệm ở hai kì hạn khác nhau đều theo hình thức lãi kép. Bác gửi 200 triệu đồng theo kì hạn quý với lãi suất 2,1% một quý; 200 triệu còn lại bác gửi theo kì hạn tháng với lãi suất 0,73% một tháng. Sau khi gửi được đúng 1 năm, bác rút tất cả số tiền ở loại kì hạn theo quý và gửi theo tháng. Hỏi sau đúng 2 năm kể từ khi gửi tiền lần đầu, bác An thu được tất cả bao nhiêu tiền lãi? (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn).

A. 75,304 triệu đồng **B.** 75,303 triệu đồng

C. 470,656 triệu đồng **D.** 475,304 triệu đồng

Hướng dẫn giải

Chọn A

Công thức tính lãi kép là $S_n = A(1+r)^n$.

Tổng số tiền bác An thu được sau 1 năm theo kì hạn quý là:

$S_1 = 200(1+2,1\%)^4$ triệu đồng

Tổng số tiền bác An thu được sau 1 năm theo kì hạn tháng là:

$S_2 = 200(1+0,73\%)^{12}$ triệu đồng

Tổng số tiền bác An thu được sau 1 năm là $S_1 + S_2$ triệu đồng.

Tổng số tiền bác An thu được sau 2 năm là

$S = (S_1 + S_2)(1 + 0,73\%)^{12} = 475,304$ triệu đồng.

Vậy tiền lãi bác An thu được sau 2 năm là $L = S - 400 = 75,304$ triệu đồng.

Bài tập 6: Một người vay ngân hàng số tiền 350 triệu đồng, mỗi tháng trả góp 8 triệu đồng và lãi suất cho số tiền chưa trả là 0,79% một tháng. Kì trả đầu tiên là cuối tháng thứ nhất. Hỏi số tiền phải trả ở kì cuối là bao nhiêu để người này hết nợ ngân hàng? (làm tròn đến hàng nghìn)

A. 2921000 đồng **B.** 7084000 đồng

C. 2944000 đồng **D.** 7140000 đồng

Hướng dẫn giải

Chọn D

Kì trả đầu tiên là cuối tháng thứ nhất nên đây là bài toán vay vốn trả góp cuối kì.

Gọi A là số tiền vay ngân hàng, B là số tiền trả trong mỗi chu kì, $d = r\%$ là lãi suất cho số tiền chưa trả trên một chu kì, n là số kì trả nợ.

Số tiền còn nợ ngân hàng (tính cả lãi) trong từng chu kì như sau:

+ Đầu kì thứ nhất là A

+ Cuối kì thứ nhất là $A(1+d) - B$.

+ Cuối kì thứ hai là

$$\left[A(1+d) - B\right](1+d) - B = A(1+d)^2 - B\left[(1+d) + 1\right]$$

+ Cuối kì thứ ba là

$$\left[A(1+d)^2 - B\left[(1+d)+1\right]\right](1+d) - B = A(1+d)^3 - B\left[(1+d)^2 + (1+d) + 1\right]$$

…

+ Theo giả thiết quy nạp, cuối kì thứ n là

$$A(1+d)^n - B\left[(1+d)^{n-1} + ... + (1+d) + 1\right] = A(1+d)^n - B\frac{(1+d)^n - 1}{d}$$

Vậy số tiền còn nợ (tính cả lãi) sau n chu kì là

$A(1+d)^n - B\dfrac{(1+d)^n - 1}{d}$.

Người đó trả hết nợ ngân hàng khi $A(1+d)^n - B\dfrac{(1+d)^n - 1}{d} = 0$

$\Leftrightarrow 350.1,0079^n - 8.\dfrac{1,0079^n - 1}{0,0079} = 0 \Leftrightarrow n \approx 53,9$.

Tức là phải mất 54 tháng người này mới trả hết nợ.

Cuối tháng thứ 53, số tiền còn nợ (tính cả lãi) là

$S_{53} = 350.1,0079^{53} - 8.\dfrac{1,0079^{53} - 1}{0,0079}$ (triệu đồng)

Kì trả nợ tiếp theo là cuối tháng thứ 54, khi đó phải trả số tiền S_{53} và lãi của số tiền này nữa là $S_{53} + 0,0079.S_{53} = S_{53}.1,0079 \approx 7,139832$ (triệu đồng).

Bài tập 7: Ông A vay dài hạn ngân hàng 300 triệu, với lãi suất 12% năm. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một năm kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ, hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một năm, số tiền hoàn ở mỗi lần là như nhau và trả hết nợ sau đúng 4 năm kể từ ngày vay. Hỏi theo cách đó, số tiền m mà ông A sẽ phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ.

A. $m = \dfrac{36(1,12)^4}{(1,12)^4 - 1}$ (triệu đồng) **B.** $m = 36(1,12)^2$ (triệu đồng)

C. $m = \dfrac{36(1,12)^3 - 1}{(1,12)^3}$ (triệu đồng) **D.** $m = \dfrac{300(1,12)^4}{(1,12)^4 - 1}$ (triệu đồng)

Hướng dẫn giải

Chọn A

Số tiền nợ sau năm thứ nhất: $T_1 = 300(1+12\%) - m = 300p - m$, với $p = 1+12\% = 1,12$.

Số tiền nợ sau năm thứ hai: $T_2 = (300p - m)p - m = 300p^2 - mp - m$

Số tiền nợ sau năm thứ ba:

$T_3 = \left(300p^2 - mp - m\right)p - m = 300p^3 - mp^2 - mp - m$

Trả hết nợ sau năm thứ tư: $\left(300p^3 - mp^2 - mp - m\right)p - m = 0$

$\Leftrightarrow 300p^4 - mp^3 - mp^2 - mp - m = 0 \Leftrightarrow 300p^4 - m\left(p^3 + p^2 + p + 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow 300p^4 - m.\dfrac{\left(p^4 - 1\right)}{p - 1} = 0 \Leftrightarrow 300\left(1{,}12\right)^4 = m.\dfrac{\left[\left(1{,}12\right)^4 - 1\right]}{0{,}12}$

$\Leftrightarrow m = \dfrac{300\left(1{,}12\right)^4.\left(0{,}12\right)}{\left(1{,}12\right)^4 - 1} \Leftrightarrow m = \dfrac{36\left(1{,}12\right)^4}{\left(1{,}12\right)^4 - 1}$

Vậy $m = \dfrac{36\left(1{,}12\right)^4}{\left(1{,}12\right)^4 - 1}$.

Bài tập 8: Một người mỗi đầu tháng gửi vào ngân hàng *T* triệu đồng với lãi suất kép 0,6% một tháng. Biết cuối tháng thứ 15 thì số tiền cả gốc lẫn lãi sẽ thu về là 10 triệu đồng. Hỏi số tiền *T* gần với số nào nhất trong các số sau đây?

A. 535000 đồng **B.** 635000 đồng

C. 613000 đồng **D.** 643000 đồng

Hướng dẫn giải

Chọn B

Sau tháng gửi đầu tiên số tiền cả gốc và lãi thu được là $T\left(1 + r\right)$

Sau tháng thứ hai số tiền cả gốc và lãi thu được là $T\left(1 + r\right)^2 + T\left(1 + r\right)$.

…

Sau tháng thứ 15, số tiền cả gốc và lãi thu được là

$T\left(1 + r\right)^n + T\left(1 + r\right)^{n-1} + ... + T\left(1 + r\right)$.

Để số tiền cả gốc lẫn lãi thu về là 10 triệu đồng thì

Bài toán tiền gửi ngân hàng: *Đầu mỗi tháng, khách hàng gửi vào ngân hàng số tiền A đồng với lãi kép r (% / tháng) thì số tiền khách hàng nhận được cả vốn lẫn lãi sau n tháng* $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ *(nhận tiền cuối tháng, khi ngân hàng đã tính lãi) là*

$S_n = \dfrac{A}{r}\left[\left(1 + r\right)^n - 1\right]\left(1 + r\right)$.

$T(1+r)^{15}+T(1+r)^{14}+...+T(1+r)=10000000$

$\Leftrightarrow T(1+r)\dfrac{(1+r)^{15}-1}{r}=10000000\Rightarrow T\approx 635.000$ (đồng).

Bài tập 9: Một huyện A có 100 000 dân. Với mức tăng dân số bình quân 1,8% năm thì sau ít nhất bao nhiêu năm nữa dân số sẽ vượt 150 000 dân.

A. 22 **B.** 23 **C.** 27 **D.** 28

Hướng dẫn giải

Chọn B

Giả sử sau *n* năm nữa thì dân số sẽ vượt 150 000 dân.

Áp dụng công thức: $X'=X(1+r)^n$.

Suy ra $n=\log_{1+r}\left(\dfrac{X'}{X}\right)=\log_{1+1,8\%}\dfrac{150000}{100000}=22,72796911$.

Công thức tính tăng trưởng dân số:

$$\boxed{X_m=X_n(1+r)^{m-n}}$$

$$\left(m,n\in\mathbb{Z}^+,m\ge n\right)$$

Trong đó: r % là tỉ lệ tăng dân số từ năm n đến năm m; X_m dân số năm m, X_n dân số năm n.

Bài tập 10: Tỉ lệ tăng dân số hàng năm ở Việt Nam được duy trì ở mức 1,05%. Theo số liệu của Tổng cục Thống kê, dân số của Việt Nam năm 2014 là 90728900 người. Với tốc độ tăng dân số như thế thì vào năm 2030, dân số của Việt Nam là:

A. 106118331 người **B.** 198049810 người

C. 107232574 người **D.** 108358516 người

Hướng dẫn giải

Chọn C

Áp dụng công thức: $X_{2030}=X_{2014}(1+r)^n$

Trong đó: $X_{2014}=90728900;\ r=1,05;\ n=16$

Ta được dân số đến hết năm 2030 là: $X_{2030}=107232574$.

Bài tập 11: Trong vật lý, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bởi công thức: $m(t)=m_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{T}}$, trong đó m_0 là khối lượng ban đầu của chất phóng xạ *(tại thời điểm* $t=0$*)*; *T* là chu kì bán rã (*tức là*

khoảng thời gian để một nửa khối lượng chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Chu kì bán rã của Cabon ^{14}C là khoảng 5730 năm. Cho trước mẫu Cabon có khối lượng 100g. Hỏi sau khoảng thời gian *t* thì khối lượng còn bao nhiêu gam?

A. $m(t)=100.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5730}}$ **B.** $m(t)=100.\mathrm{e}^{-\frac{t\ln 2}{5730}}$

C. $m(t)=100\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{100t}{5730}}$ **D.** $m(t)=100.\mathrm{e}^{-\frac{100t}{5730}}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Theo công thức: $m(t)=m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{T}}$ ta có:

$m(t)=100.\frac{1}{2}^{\frac{t}{5730}}$

Bài tập 12: Cường độ ánh sáng đi qua môi trường khác không khí (chẳng hạn sương mù, nước,…) sẽ giảm dần tùy thuộc độ dày của môi trường và hằng số μ gọi là khả năng hấp thu của môi trường, tùy thuộc môi trường thì khả năng hấp thu tính theo công thức $I=I_0e^{-\mu x}$ với *x* là độ dày của môi trường đó và được tính bằng đơn vị mét. Biết rằng nước biển có $\mu=1,4$. Hãy tính cường độ ánh sáng giảm đi bao nhiêu khi từ độ sâu 2m xuống đến 20m?

A. $e^{25,2}$ **B.** $e^{22,5}$ **C.** $e^{32,5}$ **D.** $e^{52,5}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Cường độ ánh sáng thay đổi khi từ độ sâu x_1 đến độ sâu x_2 là:

$\frac{I_1}{I_2}=\frac{I_0e^{-\mu x_1}}{I_0e^{-\mu x_2}}=e^{\mu(x_2-x_1)}$.

Thay $x_1=2;\ x_2=20,\ \mu=1,4$ ta có $\frac{I_1}{I_2}=e^{25,2}$.

BÀI 5. PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. PHƯƠNG TRÌNH MŨ

1. Phương trình mũ cơ bản

Phương trình mũ cơ bản là phương trình có dạng $a^x = b \quad (a > 0; a \neq 1)$

- Nếu $b > 0$ thì phương trình có duy nhất một nghiệm $x = \log_a b$;
- Nếu $b = 0$ hoặc $b < 0$ thì phương trình vô nghiệm.

2. Cách giải một số phương trình mũ cơ bản

a) Đưa về cùng cơ số

$$\boxed{a^{A(x)} = a^{B(x)} \Leftrightarrow A(x) = B(x), (a > 0, a \neq 1)}$$

b) Phương pháp đặt ẩn phụ

$\alpha a^{2x} + \beta . a^x + \gamma = 0$. Đặt $t = a^x, (t > 0)$

c) Logarit hóa

Nếu phương trình cho ở dạng $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ b > 0 \\ f(x) = \log_a b \end{cases}$.

II. PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

1. Phương trình logarit cơ bản: là phương trình có dạng $\log_a x = b$ với $0 < a \neq 1$

$\log_a x = b \Leftrightarrow \quad x = a^b$

2. Cách giải một số phương trình mũ cơ bản

a) Đưa về cùng cơ số

$$\boxed{\log_a f(x) = \log_a g(x) \overset{a>0, a\neq 1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} f(x) > 0 \ (hoac\ g(x) > 0) \\ f(x) = g(x) \end{cases}}$$

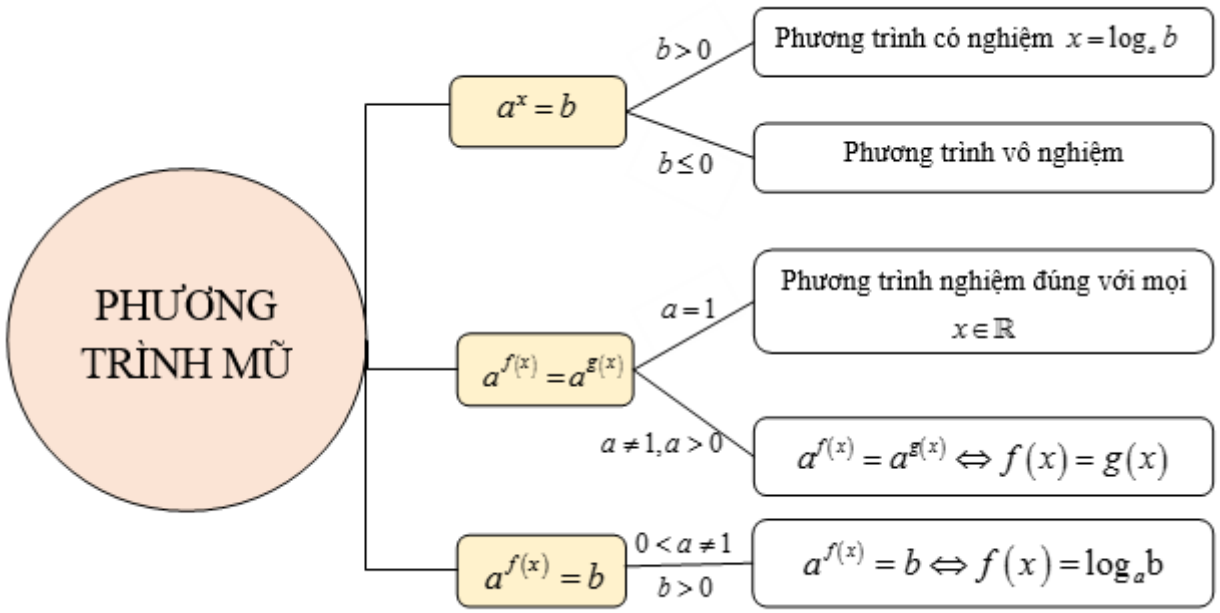
b) Phương pháp đặt ẩn phụ

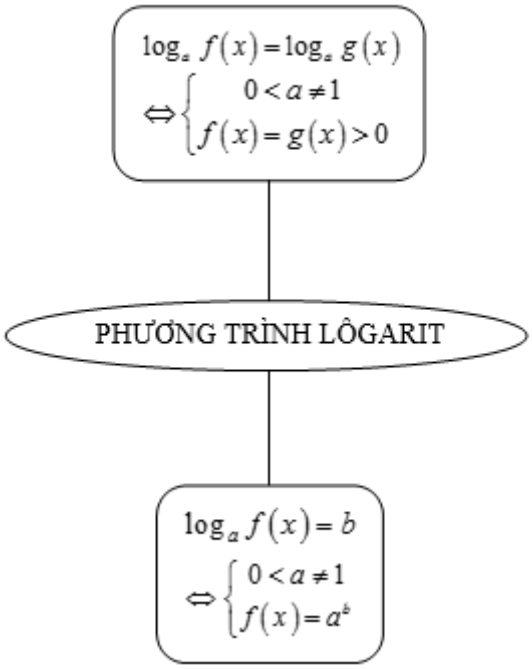
$\alpha \log_a^2 x + \beta . \log_a x + \gamma = 0$. Đặt $t = \log_a x, (x > 0)$

c) Mũ hóa

$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = a^b \end{cases}$

HỆ THỐNG HÓA BẰNG SƠ ĐỒ





B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Phương pháp đưa về cùng cơ số

1. Phương pháp

Phương pháp đưa phương trình mũ về cùng cơ số

- Biến đổi các hàm số có mặt trong phương trình về cùng cơ số, sau đó rút gọn, đưa về dạng cơ bản hoặc về dạng: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$. (Với $0 < a \neq 1$). (Thường gặp)

- Nếu cơ số a thay đổi thì: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ (a-1)\left[f(x) - g(x)\right] = 0 \end{cases}$ (Ít gặp).

Phương pháp đưa phương trình loga về cùng cơ số

Biến đổi phương trình để đưa về dạng cơ bản đã nêu hoặc là dạng: $\log_a M = \log_a N \Leftrightarrow M = N$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Tìm tích số của tất cả các nghiệm thực của phương trình $7^{x^2 - x + \frac{3}{2}} = 49\sqrt{7}$

A. -1. **B.** 1. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

$$7^{x^2 - x + \frac{3}{2}} = 49\sqrt{7} \Leftrightarrow 7^{x^2 - x + \frac{3}{2}} = 7^{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Khi đó tích các nghiệm là: $\frac{1-\sqrt{5}}{2} . \frac{1+\sqrt{5}}{2} = -1$.

Bài tập 2. Cho phương trình $\left(7 + 4\sqrt{3}\right)^{x^2 + x - 1} = \left(2 + \sqrt{3}\right)^{x-2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Phương trình có hai nghiệm không dương.

B. Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.

C. Phương trình có hai nghiệm trái dấu.

D. Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt.

Lời giải

Chọn A

Do $7+4\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^2$ nên phương trình ban đầu tương đương với

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{2\left(x^2+x-1\right)}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{x-2}\Leftrightarrow 2x^2+2x-2=x-2\Leftrightarrow 2x^2+x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm không dương.

Bài tập 3. Phương trình $\log_4\left(x+1\right)^2+2=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{4-x}+\log_8\left(4+x\right)^3$ có bao nhiêu nghiệm?

A. Vô nghiệm. **B.** Một nghiệm. **C.** Hai nghiệm. **D.** Ba nghiệm.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $-4<x<4$ và $x\neq -1$.

Ta có $\log_4\left(x+1\right)^2+2=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{4-x}+\log_8\left(4+x\right)^3\Leftrightarrow\log_2\left(4\left|x+1\right|\right)=\log_2\left[\left(4-x\right)\left(4+x\right)\right]$

$$\Leftrightarrow 4\left|x+1\right|=16-x^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4\left(x+1\right)=16-x^2\\4\left(x+1\right)=x^2-16\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+4x-12=0\\x^2-4x-20=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-6\\x=2+2\sqrt{6}\\x=2-2\sqrt{6}\end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện, phương trình đã cho có hai nghiệm $x=2$ và $x=2-2\sqrt{6}$.

Bài tập 4. Tập nghiệm S của phương trình $\left(\dfrac{4}{7}\right)^x\left(\dfrac{7}{4}\right)^{3x-1}-\dfrac{16}{49}=0$ là

A. $S=\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$. **B.** $S=\left\{2\right\}$. **C.** $\left\{\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right\}$. **D.** $S=\left\{-\dfrac{1}{2};2\right\}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\left(\dfrac{4}{7}\right)^x\left(\dfrac{7}{4}\right)^{3x-1}-\dfrac{16}{49}=0\Leftrightarrow\left(\dfrac{4}{7}\right)^{-2x+1}=\left(\dfrac{4}{7}\right)^2\Leftrightarrow -2x+1=2\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

Cách trắc nghiệm: Nhập VT phương trình vào máy tính, dùng nút Calc thử các nghiệm.

Bài tập 5. Phương trình $8^{\frac{2x-1}{x+1}}=0,25.\left(\sqrt{2}\right)^{7x}$ có tích các nghiệm bằng?

A. $\dfrac{4}{7}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{7}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $8^{\frac{2x-1}{x+1}}=0,25.\left(\sqrt{2}\right)^{7x}\Leftrightarrow 2^{3.\frac{2x-1}{x+1}}=2^{-2}.2^{\frac{7x}{2}}\Leftrightarrow 2^{3.\frac{2x-1}{x+1}}=2^{-2}.2^{\frac{7x}{2}}\Leftrightarrow 2^{3.\frac{2x-1}{x+1}}=2^{\frac{7x-4}{2}}$

$\Leftrightarrow 3.\frac{2x-1}{x+1}=\frac{7x-4}{2}\Leftrightarrow 7x^2-9x+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{2}{7}\end{array}\right.$.

Vậy tích các nghiệm bằng $1.\frac{2}{7}=\frac{2}{7}$.

Bài tập 6. Tìm số nghiệm của phương trình $27^{\frac{x-2}{x-1}}=\frac{\sqrt{3}^{7x}}{243}$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x\neq 1$.

Ta có: $27^{\frac{x-2}{x-1}}=\frac{3^{\frac{7x}{2}}}{3^5}\Leftrightarrow 3^{\frac{3x-6}{x-1}}=3^{\frac{7x-10}{2}}\Leftrightarrow \frac{3x-6}{x-1}=\frac{7x-10}{2}$

$\Leftrightarrow 6x-12=\left(7x-10\right)\left(x-1\right)\Leftrightarrow 7x^2-23x+22=0$ (PT vô nghiệm)

Bài tập 7. Cho phương trình $2\log_3\left(x^3+1\right)=\log_3\left(2x-1\right)^2+\log_{\sqrt{3}}\left(x+1\right)$. Tổng các nghiệm của phương trình là

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} x^3+1>0 \\ \left(2x-1\right)^2>0 \\ x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x>-1 \\ x\neq\frac{1}{2}\end{cases}$

Ta có: $2\log_3\left(x^3+1\right)=\log_3\left(2x-1\right)^2+\log_{\sqrt{3}}\left(x+1\right)$

$\Leftrightarrow 2\log_3\left(x^3+1\right)=2\log_3\left|2x-1\right|+2\log_3\left(x+1\right)\Leftrightarrow \log_3\left(x^3+1\right)=\log_3\left|2x-1\right|\left(x+1\right)$

$\Leftrightarrow x^3+1=\left|2x-1\right|\left(x+1\right)$

Trường hợp 1: $x>\frac{1}{2}$. Ta có: $x^3+1=|2x-1|(x+1) \Leftrightarrow x^3+1=(2x-1)(x+1)$

$\Leftrightarrow x^3-2x^2-x+2=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=2 \vee x=1$. So sánh điều kiện nên $x=2 \vee x=1$.

Trường hợp 2: $x<\frac{1}{2}$. Ta có: $x^3+1=|2x-1|(x+1) \Leftrightarrow x^3+1=(1-2x)(x+1)$

$\Leftrightarrow x^3+2x^2+x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right.$. So sánh điều kiện nên $x=0$.

Kết luận: Tổng các nghiệm của phương trình là $0+1+2=3$.

Bài tập 8. Cho n là số nguyên dương và $a>0$, $a\neq 1$. Tìm n sao cho

$$\log_a 2019+\log_{\sqrt{a}} 2019+\log_{\sqrt[3]{a}} 2019+...+\log_{\sqrt[n]{a}} 2019=2033136.\log_a 2019 .$$

A. $n=2017$. **B.** $n=2016$. **C.** $n=2018$. **D.** $n=2019$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\log_a 2019+\log_{\sqrt{a}} 2019+\log_{\sqrt[3]{a}} 2019+...+\log_{\sqrt[n]{a}} 2019=2033136.\log_a 2019$

$\Leftrightarrow \log_a 2019+2.\log_a 2019+3.\log_a 2019+...+n.\log_a 2019=2033136.\log_a 2019$

$\Leftrightarrow (1+2+3+...+n).\log_a 2019=2033136.\log_a 2019$

$\Leftrightarrow \left(\frac{n(n+1)}{2}-2033136\right).\log_a 2019=0 \ (a>0, a\neq 1)$

$\Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2}=2033136 \Leftrightarrow n^2+n-4066272=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=2016 \\ n=-2017 \end{array}\right.$.

Do n là số nguyên dương nên $n=2016$.

Bài tập 9. Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $2\log_4(x-3)+\log_4(x-5)^2=0$ là:

A. 8. **B.** $8+\sqrt{2}$. **C.** $8-\sqrt{2}$. **D.** $4+\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

ĐKXĐ: $\left\{\begin{array}{l} x-3>0 \\ x-5\neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x>3 \\ x\neq 5 \end{array}\right.$.

$2\log_4(x-3)+\log_4(x-5)^2=0 \Leftrightarrow 2\log_4\left[(x-3)(|x-5|)\right]=0$

$\Leftrightarrow (x-3)(|x-5|)=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x-3)(x-5)=1 \text{ khi } x>5\\(x-3)(5-x)=1 \text{ khi } 3<x<5\end{array}\right.$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-8x+15=1 \quad \text{khi } x>5\\-x^2+8x-15=1 \text{ khi } 3<x<5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4+\sqrt{2}\\x=4\end{array}\right.$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình là $8+\sqrt{2}$.

Bài tập 10. Giải phương trình $\frac{1}{\log_2 x}+\frac{1}{\log_3 x}+...+\frac{1}{\log_{2018} x}=2018$ có nghiệm là

A. $x=2018.2018!$. **B.** $x=\sqrt[2018]{2018!}$. **C.** $x=2017!$. **D.** $x=(2018!)^{2018}$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $0<x\neq 1$.

Ta có $\frac{1}{\log_2 x}+\frac{1}{\log_3 x}+...+\frac{1}{\log_{2018} x}=2018 \Leftrightarrow \log_x 2+\log_x 3+...+\log_x 2018=2018$

$\Leftrightarrow \log_x(2.3...2018)=2018 \Leftrightarrow \log_x(2018!)=2018 \Leftrightarrow x^{2018}=2018! \Leftrightarrow x=\sqrt[2018]{2018!}$.

Bài tập 11. Số nghiệm của phương trình: $\log_4(\log_2 x)+\log_2(\log_4 x)=2$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases}x>0\\\log_2 x>0\end{cases} \Leftrightarrow x>1$.

Ta có: $\log_4(\log_2 x)+\log_2(\log_4 x)=2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2(\log_2 x)+\log_2\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right)=2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\log_2 x)^{\frac{3}{2}}=4 \Leftrightarrow \log_2 x=4 \Leftrightarrow x=16$ thỏa điều kiện.

Bài tập 12. Phương trình $\left(\frac{3}{4}\right)^x \cdot \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{8}{x}}}=\frac{9}{16}$ có hai nghiệm x_1 và x_2. Tổng $S=x_1+x_2$ là

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3

Lời giải

Chọn C

Đk: $x \neq 0$

Xét phương trình $\left(\frac{3}{4}\right)^x \cdot \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{8}{x}}} = \frac{9}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{4}{x}} = \frac{9}{16}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-\frac{4}{x}} = \frac{9}{16} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{x-\frac{4}{x}} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Leftrightarrow x - \frac{4}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 4 = 0 \ (1)$

Vì $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình (1) và $1.(-4) < 0$ nên

Phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 và $x_1 + x_2 = 2$. Vậy $S = 2$.

Dạng 2: Phương pháp đặt ẩn phụ

1. Phương pháp

<u>Loại 1</u>: Phương trình có dạng $b_k a^{kf(x)} + b_{k-1} a^{(k-1)f(x)} + ... + b_1 a^{f(x)} + b_0 = 0$

Khi đó ta đặt: $t = a^{f(x)}$ điều kiện: $t > 0$. Ta được một phương trình đại số ẩn t, giải pt đại số này ta biết được nghiệm của phương trình ẩn t.

Nếu có nghiệm t thì cần xét xem có thỏa điều kiện $t > 0$ hay không. Nếu thỏa điều kiện thì giải phương trình $t = a^{f(x)}$ để tìm nghiệm của phương trình đã cho.

<u>Ví dụ</u>: $4^{x+1} - 6.2^{x+1} + 8 = 0 \Leftrightarrow (2^{x+1})^2 - 6.2^{x+1} + 8 = 0$

Đặt $t = 2^{x+1}$. Điều kiện $t > 0$. Ta có $t^2 - 6t + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 4 \end{array}\right.$

☞ Với t = 2 ta có $2^{x+1} = 2 \Leftrightarrow x = 0$

☞ Với t = 4 ta có $2^{x+1} = 4 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = 0$ và $x = 1$.

<u>Loại 2</u>: Phương trình đưa được về dạng: $\alpha_1 a^{f(x)} + \frac{\alpha_2}{a^{f(x)}} + \alpha_3 = 0$

<u>Hướng giải</u>: Đặt $t = a^{f(x)}$.

<u>Ví dụ 1:</u> Giải phương trình $5^{x-1} + 5^{3-x} = 26 \Leftrightarrow \frac{5^x}{5} + \frac{125}{5^x} - 26 = 0$

Đặt $t = 5^x; t > 0$ Ta được phương trình: $\frac{t}{5} + \frac{125}{t} - 26 = 0 \Leftrightarrow \frac{t^2}{5} - 26t + 125 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t = 125 & \text{(nhận)} \\ t = 5 & \text{(nhận)} \end{array}\right.$

☞ Với t =125 ta có $5^x = 125 \Leftrightarrow x = 3$.

☞ Với t = 5 ta có $5^x = 5 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: x = 1 và x = 3.

Lưu ý: Một số những cặp số là nghịch đảo của nhau. Ví dụ: $\sqrt{2} \pm 1;\ 2 \pm \sqrt{3};\ 3 \pm \sqrt{8}$,...

Loại 3: Phương trình có dạng: $\alpha_1 a^{2f(x)} + \alpha_2 (ab)^{f(x)} + \alpha_3 b^{2f(x)} = 0$

Hướng giải: Chia cả hai vế cho $b^{2f(x)}$ ta được phương trình $\alpha_1 \left(\frac{a}{b}\right)^{2f(x)} + \alpha_2 \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} + \alpha_3 = 0$

Ta đặt: $t = \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}$ điều kiện: t > 0, giải phương trình ẩn t, sau đó tìm nghiệm x.

Chú ý: Cũng có thể chia hai vế phương trình cho: $(ab)^{f(x)}$ hoặc: $a^{2f(x)}$.

Ví dụ: Giải phương trình $9^x + 6^x = 2.4^x$.

$$9^x + 6^x = 2.4^x \Leftrightarrow (\frac{9}{4})^x + \left(\frac{6}{4}\right)^x - 2 = 0 \Leftrightarrow (\frac{3}{2})^{2x} + \left(\frac{3}{2}\right)^x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \\ \left(\frac{3}{2}\right)^x = -2 (\text{Vô nghiệm}) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 0$$

Một số dạng phương trình logarit sử dụng phương pháp đặt ẩn phụ thường gặp:

Ví dụ1: Giải phương trình $\frac{1}{5 - \lg x} + \frac{2}{1 + \lg x} = 1$.

Phân tích: Ta nhận thấy trong phương trình chỉ có một hàm số lôgarit duy nhất, đó là $\lg x$. Vì vậy ta giải pt bằng cách đặt $t = \lg x$.

Đặt $t = \lg x$ đk $t \neq 5$ và $t \neq -1$.Ta được phương trình:

$$\frac{1}{5-t} + \frac{2}{1+t} = 1 \Leftrightarrow \frac{-t+11}{(5-t)(1+t)} = 1 \Rightarrow -t + 11 = 5 - 4t - t^2 \Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \ (\text{thỏa điều kiện}) \\ t = 3 \ (\text{thỏa điều kiện}) \end{array}\right.$$

☞ Với t = 2 ta có $\lg x = 2 \Leftrightarrow x = 100$

☞ Với t = 3 ta có $\lg x = 3 \Leftrightarrow x = 1000$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm x = 100; x = 1000.

Ví dụ 2: Giải phương trình $\log_2^2(x-1)^2+\log_2(x-1)^3=7.$

Điều kiện: $x>1$

$\log_2^2(x-1)^2+\log_2(x-1)^3=7 \Leftrightarrow 4\log_2^2(x-1)+3\log_2(x-1)-7=0$

Đặt $t=\log_2(x-1)$, ta được phương trinh: $4t^2+3t-7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\dfrac{-7}{4} \end{array}\right.$

☞ Với t =1 ta có $\log_2(x-1)=1 \Leftrightarrow x-1=2 \Leftrightarrow x=3$

☞ Với $t=\dfrac{-7}{4}$ ta có $\log_2(x-1)=\dfrac{-7}{4} \Leftrightarrow x-1=2^{\frac{-7}{4}} \Leftrightarrow x=1+2^{\frac{-7}{4}}$. Kết luận:....

2. Bài tập

Bài tập 1. Phương trình $\left(\sqrt{2}-1\right)^x+\left(\sqrt{2}+1\right)^x-2\sqrt{2}=0$ có tích các nghiệm là:

A. -1. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$\left(\sqrt{2}-1\right)^x+\left(\sqrt{2}+1\right)^x-2\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^x}+\left(\sqrt{2}+1\right)^x-2\sqrt{2}=0.$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}+1\right)^{2x}-2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)^x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\sqrt{2}+1\right)^x=\sqrt{2}-1 \\ \left(\sqrt{2}+1\right)^x=\sqrt{2}+1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Vậy tích các nghiệm của phương trình là -1.

Bài tập 2. Phương trình $9^{x+1}-13.6^x+4^{x+1}=0$ có 2 nghiệm x_1, x_2. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. Phương trình có 2 nghiệm nguyên. **B.** Phương trình có 2 nghiệm vô tỉ.

C. Phương trình có 1 nghiệm dương. **D.** Phương trình có 2 nghiệm dương.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $9^{x+1}-13.6^x+4^{x+1}=0 \Leftrightarrow 9.9^x-13.6^x+4.4^x=0 \Leftrightarrow 9.\dfrac{9^x}{4^x}-13.\dfrac{6^x}{4^x}+4=0$

$$\Leftrightarrow 9.\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-13.\left(\frac{3}{2}\right)^{x}+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=1\\ \left(\frac{3}{2}\right)^{x}=\frac{4}{9}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-2\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm nguyên.

Bài tập 3. Tính tổng của tất cả các nghiệm thực của phương trình $\left(3^x-9\right)^3+\left(9^x-3\right)^3=\left(9^x+3^x-12\right)^3$.

A. 3. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** 4. **D.** $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $\begin{cases}a=3^x-9\\ b=9^x-3\end{cases}$.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow a^3+b^3=\left(a+b\right)^3 \Leftrightarrow 3ab\left(a+b\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=0\\ b=0\\ a+b=0\end{array}\right.$.

- $a=0 \Leftrightarrow x=2$.
- $b=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.
- $a+b=0 \Leftrightarrow 9^x+3^x-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^x=3\\ 3^x=-4\ (VN)\end{array}\right. \Leftrightarrow x=1$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình là $\frac{7}{2}$.

Bài tập 4. Tích các nghiệm của phương trình $\log_x\left(125x\right)\log_{25}^2 x=1$ bằng

A. $\frac{7}{25}$. **B.** $\frac{630}{625}$. **C.** $\frac{1}{125}$. **D.** 630.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $0<x\neq 1$, ta có:

$$\log_x\left(125x\right)\log_{25}^2 x=1 \Leftrightarrow \log_{25}^2 x+\log_{25}^2 x.\log_x 125=1 \Leftrightarrow \log_{25}^2 x+\frac{3}{2}\log_{25} x-1=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_{25} x = \dfrac{1}{2} \\ \log_{25} x = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = \dfrac{1}{25^2} \end{array}\right. .$$

Vậy tích các nghiệm của phương trình là: $\dfrac{1}{125}$.

Bài tập 5. Phương trình $\log_x 2 + \log_2 x = \dfrac{5}{2}$

A. Có hai nghiệm dương. **B.** Vô nghiệm.

C. Có một nghiệm âm. **D.** Có một nghiệm âm và một nghiệm dương.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $0 < x \neq 1$.

$$\log_x 2 + \log_2 x = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} + \log_2 x - \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = \sqrt{2} \end{array}\right. .$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm dương.

Bài tập 6. Gọi S là tập nghiệm của phương trình $2^{x^2-x} + 2^{x^2-x-2} = 4^{x^2-x-1} + 1$. Số phần tử của tập S là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Xét phương trình: $2^{x^2-x} + 2^{x^2-x-2} = 4^{x^2-x-1} + 1 \Leftrightarrow 2^{x^2-x} + \dfrac{2^{x^2-x}}{4} = 4^{x^2-x-1} + 1$

$\Leftrightarrow 4.2^{x^2-x} + 2^{x^2-x} = 4.4^{x^2-x-1} + 4 \Leftrightarrow 5.2^{x^2-x} = 2^{2\left(x^2-x\right)} + 4$

$\Leftrightarrow 2^{2\left(x^2-x\right)} - 5.2^{x^2-x} + 4 = 0$. Đặt $t = 2^{x^2-x}$, $t > 0$

Phương trình trở thành: $t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 4 \end{array}\right.$

Với $t = 1 \Rightarrow 2^{x^2-x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Với $t=4\Rightarrow 2^{x^2-x}=2^2\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-1\end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình $S=\{-1;0;1;2\}$ có 4 phần tử.

Bài tập 7. Gọi a là một nghiệm của phương trình $4.2^{2\log x}-6^{\log x}-18.3^{2\log x}=0$. Khẳng định nào sau đây là đúng khi đánh giá về a.

A. $(a-10)^2=1$. **B.** $a^2+a+1=2$.

C. a cũng là nghiệm của phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log x}=\frac{9}{4}$. **D.** $a=10^2$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x>0$. Chia hai vế cho $3^{2\log x}$ ta được phương trình:

$$4.\left(\frac{2}{3}\right)^{2\log x}-\left(\frac{2}{3}\right)^{\log x}-18=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\frac{2}{3}\right)^{\log x}=\frac{9}{4}\\\left(\frac{2}{3}\right)^{\log x}=-2(VN)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^{\log x}=\frac{9}{4}.$$

Bài tập 8. Biết phương trình $2\log_2 x+3\log_x 2=7$ có hai nghiệm thực $x_1<x_2$. Tính giá trị của biểu thức $T=(x_1)^{x_2}$

A. $T=64$. **B.** $T=32$. **C.** $T=8$. **D.** $T=16$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $\begin{cases}x>0\\x\neq 1\end{cases}$.

Ta có: $2\log_2 x+3\log_x 2=7\Leftrightarrow 2\log_2 x+\frac{3}{\log_2 x}=7$

$$\Leftrightarrow 2\log_2^2 x-7\log_2 x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x=3\\\log_2 x=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=8\\x=\sqrt{2}\end{array}\right.\text{ (thỏa mãn).}$$

$\Rightarrow x_1=\sqrt{2}$; $x_2=8\Rightarrow T=(x_1)^{x_2}=\left(\sqrt{2}\right)^8=16$.

Bài tập 9. Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $2^{2x^2+1}-5.2^{x^2+3x}+2^{6x+1}=0$ bằng

A. 4. **B.** 10. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Ta có $2^{2x^2+1}-5.2^{x^2+3x}+2^{6x+1}=0\Leftrightarrow 2.2^{2x^2}-5.2^{x^2+3x}+2.2^{6x}=0$.

Vì $2^{6x}>0$, chia cả 2 vế của phương trình cho 2^{6x}, ta được $2.2^{2x^2-6x}-5.2^{x^2-3x}+2=0$.

Đặt $t=2^{x^2-3x}$, điều kiện $t>0$.

Ta có phương trình: $2t^2-5t+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2(N)\\t=\dfrac{1}{2}(N)\end{array}\right.$.

+ Với $t=2\Rightarrow 2^{x^2-3x}=2\Leftrightarrow x^2-3x-1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}$.

+ Với $t=\dfrac{1}{2}\Rightarrow 2^{x^2-3x}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x^2-3x=-1\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Vậy tổng các nghiệm bằng 6.

Bài tập 10. Cho phương trình $\log_5\left(5^x-1\right).\log_{25}\left(5^{x+1}-5\right)=1$. Khi đặt $t=\log_5\left(5^x-1\right)$, ta được phương trình nào dưới đây?

A. $t^2-1=0$. **B.** $t^2+t-2=0$. **C.** $t^2-2=0$. **D.** $2t^2+2t-1=0$.

Lời giải

Chọn B

$\log_5\left(5^x-1\right).\log_{25}\left(5^{x+1}-5\right)=1\ \ (1)$

TXĐ: $D=(0;+\infty)$.

Ta có $\log_{25}\left(5^{x+1}-5\right)=\log_{5^2}\left(5.5^x-5\right)=\dfrac{1}{2}\left(\log_5\left(5^x-1\right)+1\right)$.

Đặt $t=\log_5\left(5^x-1\right)\ \ (t>0)$.

Phương trình (1) trở thành $t.\dfrac{1}{2}(t+1)=1\Leftrightarrow t^2+t-2=0$.

Bài tập 11. Gọi a là một nghiệm của phương trình $4.2^{2\log x}-6^{\log x}-18.3^{2\log x}=0$. Khẳng định nào sau đây đúng khi đánh giá về a?

A. $(a-10)^2=1$.

B. a cũng là nghiệm của phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log x}=\frac{9}{4}$.

C. $a^2+a+1=2$.

D. $a=10^2$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $x>0$.

Chia cả hai vế của phương trình cho $3^{2\log x}$ ta được $4\left(\frac{3}{2}\right)^{2\log x}-\left(\frac{3}{2}\right)^{\log x}-18=0$.

Đặt $t=\left(\frac{3}{2}\right)^{\log x}$, $t>0$.

Ta có $4t^2-t-18=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{9}{4} \\ t=-2(L) \end{array}\right.$.

Với $t=\frac{9}{4} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{\log x}=\frac{9}{4} \Leftrightarrow \log x=2 \Leftrightarrow x=100$.

Vậy $a=100=10^2$.

Bài tập 12. Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2^2 x+\sqrt{\log_2 x+1}=1$

A. $2^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$. **B.** 1. **C.** $2^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $\begin{cases} x>0 \\ \log_2 x+1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\ge \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x\ge \frac{1}{2}$.

Đặt $\sqrt{\log_2 x+1}=t$, $(t\ge 0) \Rightarrow \log_2 x=t^2-1$ ta có phương trình

$\left(t^2-1\right)^2+t=1\Leftrightarrow t^4-2t^2+t=0\Leftrightarrow t\left(t^3-2t+1\right)=0\Leftrightarrow t\left(t-1\right)\left(t^2-2t+1\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\ \left(t/m\right)\\ t=1\ \left(t/m\right)\\ t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\ \left(t/m\right)\\ t=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\ \left(loai\right)\end{array}\right.$$

Với $t=0$ thì $\log_2 x=-1\Leftrightarrow x=2^{-1}$.

Với $t=1$ thì $\log_2 x=0\Leftrightarrow x=2^0$.

Với $t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ thì $\log_2 x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow x=2^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$.

Vậy tích các nghiệm của phương trình là $2^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$.

Bài tập 13. Phương trình $2^{\sin^2 x}+2^{1+\cos^2 x}=m$ có nghiệm khi và chỉ khi

A. $4\le m\le 3\sqrt{2}$. **B.** $3\sqrt{2}\le m\le 5$. **C.** $0<m\le 5$. **D.** $4\le m\le 5$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $2^{\sin^2 x}+2^{1+\cos^2 x}=m\Leftrightarrow 2^{\sin^2 x}+2^{2-\sin^2 x}=m\Leftrightarrow 2^{\sin^2 x}+\dfrac{4}{2^{\sin^2 x}}=m\ \ (*)$.

Đặt $t=2^{\sin^2 x}$, $t\in[1;2]$, $(*)$ trở thành $t+\dfrac{4}{t}=m$.

Xét hàm số $f(t)=t+\dfrac{4}{t}$ với $t\in[1;2]$. Ta có $f'(t)=1-\dfrac{4}{t^2}=\dfrac{t^2-4}{t^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\notin(1;2)\\ t=-2\notin(1;2)\end{array}\right.$.

Khi đó $f(1)=5$; $f(2)=4$. Do đó $\min\limits_{[1;2]} f(t)=4$ và $\max\limits_{[1;2]} f(t)=5$.

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có nghiệm $t\in[1;2]$

$\Leftrightarrow \min\limits_{[1;2]} f(t)\le m\le \max\limits_{[1;2]} f(t)\Leftrightarrow 4\le m\le 5$.

Vậy: $4\le m\le 5$.

Bài tập 14. Cho phương trình $4^{\sqrt{1-x^2}}-(m-2).2^{\sqrt{1-x^2}}+2m+1=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10;20]$ để phương trình có nghiệm?

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện: $x\in[-1;1]$.

Với $\forall x\in[-1;1]$ thì $0\le\sqrt{1-x^2}\le 1$, do đó, $2^0\le 2^{\sqrt{1-x^2}}\le 2^1$ hay $1\le 2^{\sqrt{1-x^2}}\le 2$.

Đặt $t=2^{\sqrt{1-x^2}}\Rightarrow t\in[1;2]$. Phương trình trở thành: $t^2-(m-2)t+2m+1=0$

$\Leftrightarrow t^2+2t+1=m(t-2)\Leftrightarrow\dfrac{t^2+2t+1}{t-2}=m$ (do $t=2$ không là nghiệm của phương trình).

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2+2t+1}{t-2}$ trên $[1;2)$.

Có $f'(x)=\dfrac{t^2-4t-5}{(t-2)^2}$, $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\notin[1;2)\\x=5\notin[1;2)\end{array}\right.$.

Lập bảng biến thiên

Do đó, để phương trình đã cho có nghiệm thì $m\le -4$.

Suy ra, giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-10;20]$ để phương trình có nghiệm là

$m\in\{-10;-9;-8;-7;-6;-5;-4\}$.

Vậy có 7 giá trị cần tìm của m.

Bài tập 15. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $4^x-m.2^{x+1}+2m=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1+x_2=3$?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Phương trình $\Leftrightarrow 4^x-2m.2^x+2m=0\ (1)$

Đặt $t=2^x$, $t>0$ phương trình trở thành $t^2-2m.t+2m=0\ (2)$.

Để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1+x_2=3$ điều kiện là phương trình (2) có hai nghiệm t_1, $t_2>0$ thỏa mãn $t_1.t_2=2^{x_1}.2^{x_2}=2^{x_1+x_2}=8$. Vậy điều kiện là

$$\begin{cases} \Delta' = m^2 - 2m > 0 \\ -\dfrac{b}{a} = 2m > 0 \\ \dfrac{c}{a} = 2m = 8 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4 .$$

Bài tập 16. Cho phương trình $\log_2^2 x - \left(m^2 - 3m\right)\log_2 x + 3 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 = 16$.

A. $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 4 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 4 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 1 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = -4 \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn B

$\log_2^2 x - \left(m^2 - 3m\right)\log_2 x + 3 = 0 \quad (1)$.

Điều kiện $x > 0$.

Đặt $\log_2 x = t$. Ta được phương trình $t^2 - \left(m^2 - 3m\right)t + 3 = 0 \quad (2)$.

Ta có: $x_1 x_2 = 16 \Leftrightarrow \log_2\left(x_1 x_2\right) = 4 \Leftrightarrow \log_2 x_1 + \log_2 x_2 = 4$.

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 = 16$ khi và chỉ khi (2) có hai nghiệm phân biệt t_1, t_2 thỏa mãn $t_1 + t_2 = 4$.

Vậy suy ra $m^2 - 3m = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m = -1 \end{array}\right.$.

Thử lại thấy thỏa mãn.

Bài tập 17. Giá trị của m để phương trình $9^x + 3^x + m = 0$ có nghiệm là:

A. $m > 0$. **B.** $m < 0$. **C.** $m > 1$. **D.** $0 < m < 1$.

Lời giải

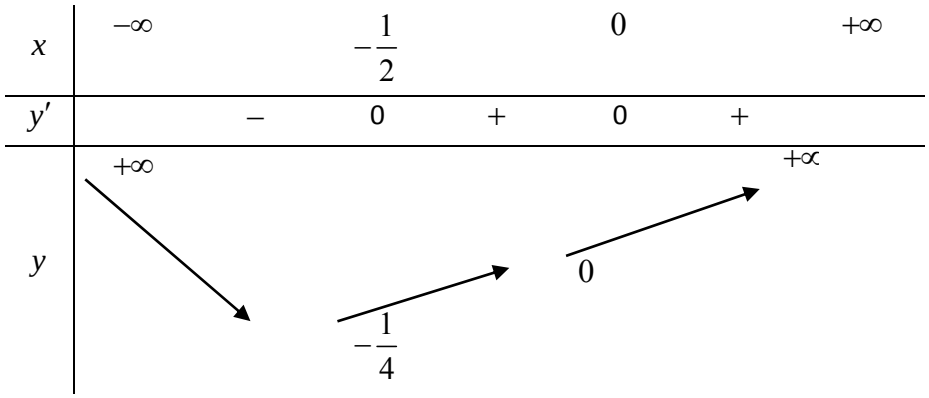
Chọn B

Đặt $t = 3^x$ với $t > 0$. Khi đó phương trình đã cho trở thành: $t^2 + t + m = 0$ (*).

Phương trình đề cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (*) có ít nhất một nghiệm dương.

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t$ có $f'(t) = 2t + 1$. Xét $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -\dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $t^2+t=-m$ có ít nhất một nghiệm dương khi và chỉ khi $-m>0\Leftrightarrow m<0$.

Bài tập 18. Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $4^x-m.2^{x+1}+2m=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1+x_2=3$?

A. $m=4$. **B.** $m=3$. **C.** $m=2$. **D.** $m=1$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $t=2^x$, $t>0$.

Phương trình đã cho có 2 nghiệm x_1, x_2 thoả mãn $x_1+x_2=3$ khi phương trình $t^2-2m.t+2m=0$ có 2 nghiệm $t>0$ thoả mãn $t_1.t_2=2^{x_1}.2^{x_2}=2^{x_1+x_2}=8$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\ t_1.t_2=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-2m>0\\ 2m=8\end{cases}\Leftrightarrow m=4$$

Bài tập 19. Với điều kiện nào sau đây của m thì phương trình $9^x-m.3^x+6=0$ có hai nghiệm phân biệt?

A. $|m|>2\sqrt{6}$. **B.** $|m|>\sqrt{6}$. **C.** $m>\sqrt{6}$. **D.** $m>2\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t=3^x\left(t>0\right)$ thì phương trình trở thành $t^2-mt+6=0\ (1)$.

Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt khi (1) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 24 > 0 \\ m > 0 \\ 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |m| > 2\sqrt{6} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2\sqrt{6}.$$

Bài tập 20. Tìm tất cả các giá trị tham số m để phương trình $9.9^{x^2-2x} - (2m+1)15^{x^2-2x+1} + (4m-2)5^{2x^2-4x+2} = 0$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

A. $m > 1$ hoặc $m < \frac{1}{2}$. **B.** $\frac{3-\sqrt{6}}{2} < m < \frac{3+\sqrt{6}}{2}$.

C. $\frac{1}{2} < m < 1$. **D.** $m > \frac{3+\sqrt{6}}{2}$ hoặc $m < \frac{3-\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

$9.9^{x^2-2x} - (2m+1)15^{x^2-2x+1} + (4m-2)5^{2x^2-4x+2} = 0 \Leftrightarrow 9^{(x-1)^2} - (2m+1)15^{(x-1)^2} + (4m-2)25^{(x-1)^2} = 0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{2(x-1)^2} - (2m+1)\left(\frac{3}{5}\right)^{(x-1)^2} + 4m - 2 = 0.$

Đặt $t = \left(\frac{3}{5}\right)^{(x-1)^2}$. Do $(x-1)^2 \geq 0$ nên $0 < t \leq 1$.

Phương trình có dạng: $t^2 - (2m+1)t + 4m - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 2m-1 \end{array}\right.$. Do $0 < t \leq 1$ nên $t = 2m-1$.

Để phương trình có 2 nghiệm thực phân biệt thì $0 < 2m-1 < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < m < 1$.

Bài tập 21. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4.4^{x^2+2x} + (2m-2)6^{x^2+2x+1} - (6m+3)3^{2x^2+4x+2} = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $-1 < m < \frac{-1}{2}$. **B.** $m > 4 + 3\sqrt{2}$ hoặc $m < 4 - 3\sqrt{2}$.

C. $4 - 3\sqrt{2} < m < 4 + 3\sqrt{2}$. **D.** $m > -1$ hoặc $m < \frac{-1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Viết lại phương trình ta được: $\left(\frac{4}{9}\right)^{x^2+2x+1} + (2m-2)\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+2x+1} - (6m+3) = 0.$

Do $x^2+2x+1=(x+1)^2\ge 0$ nên $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+2x+1}\le 1$

Đặt $t=\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+2x+1}$, $0<t\le 1$. Phương trình trở thành:

$$t^2+(2m-2)t-(6m+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=-2m-1 \end{array}\right.$$

Để phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt thì $0<-2m-1<1 \Leftrightarrow -1<m<-\frac{1}{2}$.

Vậy giá trị cần tìm của m là $-1<m<-\frac{1}{2}$.

Bài tập 22. Cho phương trình $e^{3x}-2.e^{2x+\ln 3}+e^{x+\ln 9}+m=0$, với m là tham số thực. Tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có nghiệm duy nhất là

A. $m<0$ hoặc $m=4$. **B.** $m=0$ hoặc $m<-4$.

C. $-4\le m<0$. **D.** $m>0$ hoặc $m=-4$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

$e^{3x}-2.e^{2x+\ln 3}+e^{x+\ln 9}+m=0 \Leftrightarrow e^{3x}-2.e^{2x}.e^{\ln 3}+e^{x}.e^{\ln 9}+m=0 \Leftrightarrow e^{3x}-6.e^{2x}+9.e^{x}+m=0$.

Đặt $t=e^x$ $(t>0)$, phương trình tương đương với $m=-t^3+6t^2-9t$.

Xét $f(t)=-t^3+6t^2-9t$ trên $(0;+\infty)$.

$f'(t)=-3t^2+12t-9$, $f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=3 \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

t	0		1		3		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên: với $m=0$ hoặc $m<-4$ thì phương trình có nghiệm duy nhất.

Chú ý:

Ta không lấy giá trị $x=0$ nên tại $m=0$ đường thẳng $y=m$ vẫn cắt đồ thị tại duy nhất một điểm (điểm tiếp xúc tại $x=3$).

Bài tập 23. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4^{x^2}-2^{x^2+2}+6=m$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt là

A. $\{3\}$. **B.** $\{2\}$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(2;3)$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=2^{x^2}$. Do $x^2\ge 0\Rightarrow t\ge 1$.

Ta có phương trình $t^2-4t+6-m=0\ (1)$.

Do với mỗi $t>1$ thì có hai nghiệm $x=\pm\sqrt{\log_2 t}$, còn với $t=1$ chỉ có một nghiệm $x=0$. Nên để phương trình ban đầu có đúng 3 nghiệm thì phương trình (1) có một nghiệm $t_1=1$ và một nghiệm $t_2>1$.

Phương trình (1) có nghiệm $t=1$ khi $1-4+6-m=0\Leftrightarrow m=3$.

Thay $m=3$ vào (1), ta có: $t^2-4t+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=3\end{array}\right.$. Vậy $m=3$ thỏa mãn.

Bài tập 24. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để phương trình $\sqrt{m+\sqrt{m+e^x}}=e^x$ có nghiệm thực?

A. 9. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases}m+e^x\ge 0\\m+\sqrt{m+e^x}\ge 0\end{cases}$.

Đặt $t=\sqrt{m+e^x}\ (t\ge 0)$ ta suy ra: $\begin{cases}m+t=e^{2x}\\t^2=m+e^x\end{cases}$

$\Rightarrow e^{2x}-t^2=t-e^x\Leftrightarrow\left(e^x-t\right)\left(e^x+t+1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}e^x-t=0\quad(1)\\e^x+t+1=0\,(2)\end{array}\right.$.

Phương trình (2) vô nghiệm vì $e^x+t+1>0$.

Phương trình (1) tương đương với $e^x=t\Leftrightarrow e^x=\sqrt{m+e^x}\Leftrightarrow m=e^{2x}-e^x\ (3)$

Phương trình $\sqrt{m+\sqrt{m+\mathrm{e}^x}}=\mathrm{e}^x$ $(*)$ có nghiệm thực khi phương trình (3) có nghiệm thực.

Xét hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x$ với $x\in\mathbb{R}$, ta có: $f'(x)=2\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x=0\Leftrightarrow \mathrm{e}^x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=-\ln 2$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)=\Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x$ là

Lập bảng biến thiên

Số nghiệm của (3) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x$ và đường thẳng $y=m$.

Dựa vào bẳng biến thiên suy ra phương trình (3) có nghiệm khi $m\ge -\dfrac{1}{4}$.

Kết hợp với giả thiết m là số nguyên nhỏ hơn 10 ta suy ra $m\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Vậy có 10 giá trị thỏa mãn.

Dạng 3: Phương pháp logarit hóa, mũ hóa

1. **Phương pháp**
2. **Bài tập**

Bài tập 1. Phương trình $27^{\frac{x-1}{x}}.2^x=72$ có một nghiệm viết dưới dạng $x=-\log_a b$, với a, b là các số nguyên dương. Tính tổng $S=a+b$.

A. $S=4$. **B.** $S=5$. **C.** $S=6$. **D.** $S=8$.

3. **Lời giải**

Chọn B

Điều kiện $x\ne 0$.

Phương trình $27^{\frac{x-1}{x}}.2^x=72\Leftrightarrow 3^{3\left(\frac{x-1}{x}\right)}.2^x=3^2.2^3\Leftrightarrow \dfrac{3^{\frac{3x-3}{x}}}{3^2}=\dfrac{2^3}{2^x}\Leftrightarrow 3^{\frac{3x-3}{x}-2}=2^{3-x}$

$\Leftrightarrow 3^{\frac{x-3}{x}}=2^{3-x}\Leftrightarrow \dfrac{x-3}{x}=\log_3 2^{3-x}\Leftrightarrow \dfrac{x-3}{x}=-(x-3)\log_3 2\Leftrightarrow (x-3)\left(\dfrac{1}{x}+\log_3 2\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\-\log_3 2=\dfrac{1}{x}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3(N)\\x=-\log_2 3(N)\end{array}\right.$.

Suy ra $\begin{cases}a=2\\b=3\end{cases}$. Vậy tổng $S=a+b=5$.

Bài tập 2. Phương trình $\log_2(5-2^x)=2-x$ có hai ngiệm x_1, x_2. Tính $P=x_1+x_2+x_1x_2$.

A. 11. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $2^x < 5$

$$\log_2\left(5-2^x\right)=2-x \Leftrightarrow 5-2^x=2^{2-x} \Leftrightarrow 5-2^x=\frac{4}{2^x} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^x=1\\2^x=4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow P=x_1+x_2+x_1x_2=2.$$

Bài tập 3. Gọi S là tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $7^{x^2}.3^{-x}=1$. Tìm S.

A. $S=\log_7 3.$ **B.** $S=\log_3 7.$ **C.** $S=\log_2 3.$ **D.** $S=\log_3 2.$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Lấy logarit cơ số 3 hoặc cơ số 7 hai vế.

Ta có:

$$7^{x^2}.3^{-x}=1 \Leftrightarrow \log_3\left(7^{x^2}.3^{-x}\right)=\log_3 1 \Leftrightarrow \log_3 7^{x^2}+\log_3 3^{-x}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2.\log_3 7-x=0 \Leftrightarrow x\left(x\log_3 7-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=\dfrac{1}{\log_3 7}=\log_7 3\end{array}\right.$$

Vậy tổng các nghiệm là $S=\log_7 3.$

Bài tập 4. Phương trình $3^x.5^{\frac{2x-1}{x}}=15$ có một nghiệm dạng $x=-\log_a b$, với a, b là các số nguyên dương lớn hơn 1 và nhỏ hơn 8. Giá trị của $P=a+2b$ bằng bao nhiêu?

A. $P=8.$ **B.** $P=5.$ **C.** $P=13.$ **D.** $P=3.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $3^x.5^{\frac{2x-1}{x}}=15 \Leftrightarrow \dfrac{3^x.5^{\frac{2x-1}{x}}}{3.5}=1 \Leftrightarrow 3^{x-1}.5^{\frac{x-1}{x}}=1 \Leftrightarrow \log_3\left(3^{x-1}.5^{\frac{x-1}{x}}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \log_3 3^{x-1}+\log_3 5^{\frac{x-1}{x}}=0 \Leftrightarrow x-1+\frac{x-1}{x}.\log_3 5=0$$

$$\Leftrightarrow (x-1).\left(1+\frac{1}{x}.\log_3 5\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\log_3 5\end{array}\right.$$

Vậy $a=3, b=5$ suy ra $a+2b=13.$

Dạng 4: Phương biến đổi thành tích

1. Phương pháp

(thường sử dụng trong trường hợp hai vế không cùng cơ số).

Hướng giải: Biến đổi phương trình về dạng:

$a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x).\log_c a = g(x).\log_c b.(0 < a,b \neq 1,\ 0 < c \neq 1).$

Lưu ý: Ta thường lôgarit hóa hai vế với cơ số a hoặc b.

2. Bài tập

Bài tập 1. Giải phương trình $\log_2 x.\log_3 x + x.\log_3 x + 3 = \log_2 x + 3\log_3 x + x$. Ta có tổng tất cả các nghiệm bằng

A. 35. **B.** 5. **C.** 10. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x > 0$.

$\log_2 x.\log_3 x + x.\log_3 x + 3 = \log_2 x + 3\log_3 x + x \Leftrightarrow \left(\log_2 x + x - 3\right)\left(\log_3 x - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ \log_2 x + x - 3 = 0 \end{array}\right.$.

Ta có hàm số $f\left(x\right) = \log_2 x + x$ liên tục và đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$ và $f\left(2\right) = 3$ nên phương trình $\log_2 x + x - 3 = 0$ có một nghiệm $x = 2$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm bằng 5.

Bài tập 2. Số nghiệm của phương trình $4.\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-2x} + 25.2^x = 100 + 100^{\frac{x}{2}}$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** vô nghiệm.

Lời giải

Chọn B

Ta có $4.\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{-2x} + 25.2^x = 100 + 100^{\frac{x}{2}}$

$\Leftrightarrow 4.5^x + 25.2^x = 100 + 10^x \Leftrightarrow \left(4 - 2^x\right).\left(5^x - 25\right) = 0 \Leftrightarrow x = 2.$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm.

Bài tập 3. Số nghiệm của phương trình $\log_2 x.\log_3\left(2x-1\right) = 2\log_2 x$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

ĐK: $x>\frac{1}{2}$.

$\log_2 x.\log_3(2x-1)=2\log_2 x$

$\Leftrightarrow \log_2 x.(\log_3(2x-1)-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x=0\\ \log_3(2x-1)-2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ 2x-1=9\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\ (n)\\ x=5\ (n)\end{array}\right.$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm.

Bài tập 3. Biết n là số rự nhiên thỏa mãn phương trình $3^x-3^{-x}=2\cos nx$ có 2018 nghiệm. Tìm số nghiệm của phương trình $9^x+9^{-x}=4+2\cos 2nx$.

A. 4036. **B.** 2018. **C.** 4035. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn A

$9^x+9^{-x}=4+2\cos 2nx \Leftrightarrow 9^x+9^{-x}-2.3^x.3^{-x}=2+2\cos 2nx$

$\Leftrightarrow (3^x-3^{-x})^2=4\cos^2 nx \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^x-3^{-x}=2\cos nx\ (1)\\ 3^x-3^{-x}=-2\cos nx\ (2)\end{array}\right.$

Khi đó nếu (1) và (2) có nghiệm chung thì $3^x-3^{-x}=3^{-x}-3^x \Leftrightarrow 3^x=3^{-x} \Leftrightarrow x=0$

Thay $x=0$ vào (1) ta được $3^0-3^0=2\cos 0 \Leftrightarrow 0=2$, tức là (1) và (2) không có nghiệm chung.

Mặt khác ta thấy nếu x_0 là nghiệm của (1) thì $-x_0$ sẽ là nghiệm của (2)

Mà (1) có 2018 nghiệm nên (2) cũng có 2018 nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 4036 nghiệm.

Bài tập 4. Cho phương trình $\log_2\left(x-\sqrt{x^2-1}\right).\log_3\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\log_6\left|x-\sqrt{x^2-1}\right|$. Biết phương trình có một nghiệm là 1 và một nghiệm còn lại có dạng $x=\frac{1}{2}\left(a^{\log_b c}+a^{-\log_b c}\right)$ (với a, c là các số nguyên tố và $a>c$). Khi đó giá trị của $a^2-2b+3c$ bằng:

A. 0. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ x - \sqrt{x^2 - 1} > 0 \end{cases}$ $(*)$

$\log_2\left(x - \sqrt{x^2-1}\right).\log_3\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) = \log_6\left|x - \sqrt{x^2-1}\right|$

$\Leftrightarrow \log_2\left(x - \sqrt{x^2-1}\right).\log_3 \dfrac{1}{\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)} = \log_6\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)$

$\Leftrightarrow -\log_2\left(x - \sqrt{x^2-1}\right).\log_3 6.\log_6\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) = \log_6\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)$

$\Leftrightarrow \log_6\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)\left[\log_3 6.\log_2\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) + 1\right] = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \log_6\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) = 0 & (1) \\ \log_3 6.\log_2\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) + 1 = 0 & (2) \end{array}\right.$

$(1) \Leftrightarrow x - \sqrt{x^2-1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x^2 - 1 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$

$(2) \Leftrightarrow \log_2\left(x - \sqrt{x^2-1}\right).\log_3 6 = -1 \Leftrightarrow \log_2\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) = \log_6 3$

$\Leftrightarrow x - \sqrt{x^2-1} = 2^{\log_6 3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 2^{\log_6 3} \\ x^2 - 1 = \left(2^{\log_6 3} - x\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}\left(2^{\log_6 3} + 2^{-\log_6 3}\right).$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}\left(3^{\log_6 2} + 3^{-\log_6 2}\right)$. (thỏa mãn $(*)$)

Như vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x = 1$, $x = \dfrac{1}{2}\left(3^{\log_6 2} + 3^{-\log_6 2}\right)$.

Khi đó $a = 3$, $b = 6$, $c = 2$. Vậy $a^2 - 2b + 3c = 3$.

Bài tập 5. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $m.3^{x^2-7x+12} + 3^{2x-x^2} = 9.3^{10-5x} + m$ có ba nghiệm thực phân biệt. Tìm số phần tử của S.

A. 3. **B.** Vô số. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $m.3^{x^2-7x+12}+3^{2x-x^2}=9.3^{10-5x}+m \Leftrightarrow m\left(3^{x^2-7x+12}-1\right)-3^{2x-x^2}\left(3^{x^2-7x+12}-1\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(3^{x^2-7x+12}-1\right)\left(m-3^{2x-x^2}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3^{x^2-7x+12}-1=0\\ m-3^{2x-x^2}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\ x=4\\ 2x-x^2-\log_3 m=0(*)\end{array}\right.$.

Phương trình đã cho có ba nghiệm thực phân biệt, ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $(*)$ có một nghiệm $x=3$ và nghiệm còn lại khác 3 và 4.

Thay $x=3$ vào $(*)$ ta được $\log_3 m=-3 \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{27}$. Khi đó $(*)$ trở thành

$-x^2+2x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=3\end{array}\right.$ (Thỏa yêu cầu).

Trường hợp 2: $(*)$ có một nghiệm $x=4$ và nghiệm còn lại khác 3 và 4.

Thay $x=4$ vào $(*)$ ta được $\log_3 m=-8 \Leftrightarrow m=3^{-8}$.

Khi đó $(*)$ trở thành $-x^2+2x+8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4\\ x=-2\end{array}\right.$ (Thỏa yêu cầu).

Trường hợp 3: $(*)$ có nghiệm kép khác 3 và $4 \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=1-\log_3 m=0\\ \log_3 m\neq -3\\ \log_3 m\neq -8\end{cases} \Leftrightarrow m=3$.

Bài tập 6. Phương trình $\ln\left(x-\dfrac{1}{2}\right).\ln\left(x+\dfrac{1}{2}\right).\ln\left(x+\dfrac{1}{4}\right).\ln\left(x+\dfrac{1}{8}\right)=0$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases}x-\dfrac{1}{2}>0\\ x+\dfrac{1}{2}>0\\ x+\dfrac{1}{4}>0\\ x+\dfrac{1}{8}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>\dfrac{1}{2}\\ x>-\dfrac{1}{2}\\ x>-\dfrac{1}{4}\\ x>-\dfrac{1}{8}\end{cases} \Leftrightarrow x>\dfrac{1}{2}$.

Khi đó:

$$\ln\left(x-\frac{1}{2}\right).\ln\left(x+\frac{1}{2}\right).\ln\left(x+\frac{1}{4}\right).\ln\left(x+\frac{1}{8}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\ln\left(x-\frac{1}{2}\right)=0\\ \ln\left(x+\frac{1}{2}\right)=0\\ \ln\left(x+\frac{1}{4}\right)=0\\ \ln\left(x+\frac{1}{8}\right)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-\frac{1}{2}=1\\ x+\frac{1}{2}=1\\ x+\frac{1}{4}=1\\ x+\frac{1}{8}=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{3}{2}\\ x=\frac{1}{2}\\ x=\frac{3}{4}\\ x=\frac{7}{8}\end{array}\right.$$

So với điều kiện, ta được tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\frac{3}{2};\frac{3}{4};\frac{7}{8}\right\}$.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm.

Bài tập 7. Gọi a là một nghiệm của phương trình $\left(26+15\sqrt{3}\right)^x+2\left(7+4\sqrt{3}\right)^x-2\left(2-\sqrt{3}\right)^x=1$. Khi đó giá trị của biểu thức nào sau đây là đúng?

A. $a^2+a=2$. **B.** $\sin^2 a+\cos a=1$. **C.** $2+\cos a=2$. **D.** $3^a+2\mathrm{a}=5$.

Lời giải.

Chọn B

Ta có $\left(26+15\sqrt{3}\right)^x+2\left(7+4\sqrt{3}\right)^x-2\left(2-\sqrt{3}\right)^x=1$.

$\Leftrightarrow\left(2+\sqrt{3}\right)^{3x}+2\left(2+\sqrt{3}\right)^{2x}-2\left(2+\sqrt{3}\right)^{-x}=1$

$\Leftrightarrow\left(2+\sqrt{3}\right)^{4x}+2\left(2+\sqrt{3}\right)^{3x}-\left(2+\sqrt{3}\right)^{x}-2=0$

$\Leftrightarrow\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{3x}-1\right]\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{x}+2\right]=0$

$\Leftrightarrow\left(2+\sqrt{3}\right)^{x}=1 \Leftrightarrow x=0. \Rightarrow a=0 \Rightarrow \sin^2 a+\cos a=1.$

Bài tập 8. Gọi A là tập tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho tập nghiệm của phương trình $x.2^x=x\left(x-m+1\right)+m\left(2^x-1\right)$ có hai phần tử. Tìm số phần tử của A.

A. 1. **B.** Vô số. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Xét phương trình $x.2^x=x\left(x-m+1\right)+m\left(2^x-1\right)$

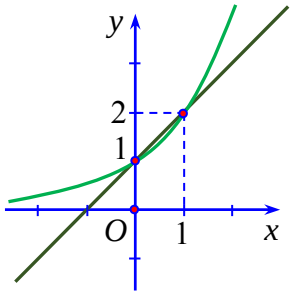
$\Leftrightarrow (x-m)\left(2^x-x-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ 2^x=x+1 \end{array}\right.$.

Mà phương trình $2^x=x+1$ có hai nghiệm là $x=0$; $x=1$.

Thật vậy: dựa vào hình vẽ

❍ Với $x\le 0$ hoặc $x\ge 1$ thì $2^x\ge x+1$, đẳng thức xảy ra khi $x=0$ hoặc $x=1$.

❍ Với $0<x<1$ thì $2^x<x+1$ $\Rightarrow$ phương trình $2^x=x+1$ vô nghiệm.



Do đó tập A có hai phần tử khi $m=0$ hoặc $m=1$.

Dạng 5: Phương pháp sử dụng tính đơn điệu

1. Phương pháp

* Ta thường sử dụng các tính chất sau:

- Tính chất 1: Nếu hàm số f tăng (hoặc giảm) trong khỏang (a;b) thì phương trình f(x) = C có không quá một nghiệm trong khoảng (a;b). (do đó nếu tồn tại $x_0 \in$(a;b) sao cho f(x_0) = C thì đó là nghiệm duy nhất của phương trình f(x) = C)
- Tính chất 2 : Nếu hàm f tăng trong khoảng (a;b) và hàm g là hàm một hàm giảm trong khoảng (a;b) thì phương trình f(x) = g(x) có nhiều nhất một nghiệm trong khoảng (a;b) .

(do đó nếu tồn tại $x_0 \in$ (a;b) sao cho f(x_0) = g(x_0) thì đó là nghiệm duy nhất của phương trình f(x) = g(x))

2. Bài tập

Bài tập 1. Số nghiệm của phương trình $2018^x+x^2=\sqrt{2016+\sqrt[3]{2017+\sqrt[5]{2018}}}$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(x)=2018^x+x^2-\sqrt{2016+\sqrt[3]{2017+\sqrt[5]{2018}}}$, $D=\mathbb{R}$.

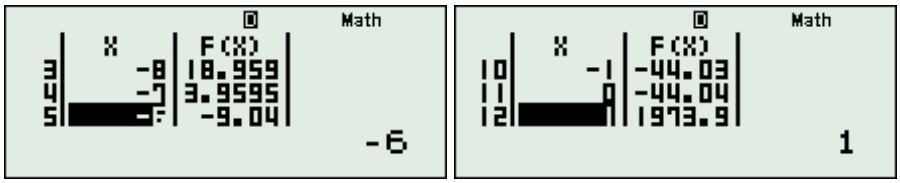
Suy ra $f'(x)=2018^x.\ln 2018+2x$

M, A, B liên tục trên $\mathbb{R}$.

$f'(x)=2018^x.\ln 2018+2x$

$f''(x)=2018^x.\ln^2 2018+2>0,\ \forall x$

Từ đó $f'(x)$ đồng biến trên D mà $f'(-1).f'(0)<0$ nên $f'(x)=0$ có nghiệm duy nhất trong khoảng $(-1;0)$ suy ra phương trình $f(x)=0$ có nhiều nhất hai nghiệm, mặt khác nhập hàm số vào TABLE của casio (START -10 END 10 STEP 1), ta được:



Dựa vào TABLE ta được $\begin{cases} f(-7).f(-6)<0 \\ f(0).f(1)<0 \end{cases}$

Vậy phương trình đã cho chỉ có hai nghiệm trên hai khoảng $(-7;-6)$ và $(0;1)$.

Chú ý: Máy tính hiển thị "Insufficient MEM" thì tiến hành cài đặt để không xuất hiện $g(x)$ bằng cách bấm SHIFT MODE mũi tên xuống, 5, 1.

Bài tập 2. Tập nghiệm của phương trình $\log\left(x^2-x-6\right)+x=\log(x+2)+4$ là:

A. $\{1\}$. **B.** $\{4\}$. **C.** $\{3\}$. **D.** $\{2\}$.

Lời giải.

Chọn B

Điều kiện: $\begin{cases} x^2-x-6>0 \\ x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>3.$

Phương trình đã cho tương đương với

$\log(x+2)(x-3)+x=\log(x+2)+4 \Leftrightarrow \log(x-3)=4-x(*).$

Vế trái của phương trình cuối là hàm tăng, còn vế phải là hàm giảm nên nghiệm của phương trình(nếu có) là duy nhất.

Bằng cách nhẩm nghiệm ta chọn kết quả $x=4$.

Bài tập 3. Cho x, y là các số thực thỏa $\log_2 x=3\log_6 y=3\log(x+y)$. Tìm giá trị $T=x-y$.

A. $T=28$. **B.** $T=22$. **C.** $T=34$. **D.** $T=30$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $\log_2 x=3\log_6 y=3\log(x+y)=3t \Rightarrow \begin{cases} x=8^t \\ y=6^t \\ x+y=10^t \end{cases} \Rightarrow 8^t+6^t=10^t \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^t+\left(\frac{3}{5}\right)^t=1 \ (1)$.

Nhận xét: $t=2$ là nghiệm của phương trình (1).

Với $t>2$: $\left(\frac{4}{5}\right)^t+\left(\frac{3}{5}\right)^t<\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2=1$. Vậy $t>2$ không là nghiệm của phương trình (1).

Với $t<2$: $\left(\frac{4}{5}\right)^t+\left(\frac{3}{5}\right)^t>\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2=1$. Vậy $t<2$ không là nghiệm của phương trình (1).

Vậy $t=2$ là nghiệm duy nhất của (1).

Khi đó, ta có $\begin{cases} x=8^2=64 \\ y=6^2=36 \end{cases} \Rightarrow T=x-y=28$.

Bài tập 4. Phương trình $2^{\sin^2 x}+3^{\cos^2 x}=4.3^{\sin^2 x}$ có bao nhiêu nghiệm thuộc $[-2017;2017]$.

A. 1284. **B.** 4034. **C.** 1285. **D.** 4035.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $2^{\sin^2 x}+3^{\cos^2 x}=4.3^{\sin^2 x} \Leftrightarrow 2^{\sin^2 x}+3^{1-\sin^2 x}=4.3^{\sin^2 x}$

Đặt $\sin^2 x=t$ với $t\in[0;1]$, ta có phương trình

$2^t+\frac{3}{3^t}=4.3^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^t+3.\left(\frac{1}{9}\right)^t=4$. Vì hàm số $f(t)=\left(\frac{2}{3}\right)^t+3.\left(\frac{1}{9}\right)^t$ nghịch biến với $t\in[0;1]$

nên phương trình có nghiệm duy nhất $t=0$. Do đó $\sin x=0 \Leftrightarrow x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Vì $x\in[-2017;2017]$ nên ta có $-2017\le k\pi\le 2017 \Leftrightarrow \frac{-2017}{\pi}\le k\le\frac{2017}{\pi}$ nên có 1285 giá trị nguyên của k thỏa mãn. Vậy có 1285 nghiệm.

Bài tập 5. Tìm số nghiệm của phương trình $2^x+3^x+4^x+...+2017^x+2018^x=2017-x$.

A. 1. **B.** 2016. **C.** 2017. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $f(x)=2^x+3^x+4^x+...+2017^x+2018^x$

Ta có $f'(x)=2^x\ln 2+3^x\ln 3+...+2018^x\ln 2018>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $y=2^x+3^x+4^x+...+2017^x+2018^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $g(x)=2017-x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác $f(0)=g(0)=2017$.

Do đó, phương trình $f(x)=g(x)$ có nghiệm duy nhất $x=0$.

Bài tập 6. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để phương trình $\frac{a}{3^x+3^{-x}}=3^x-3^{-x}$ có nghiệm duy nhất.

A. $a\in\mathbb{R}$. **B.** $-1<a<0$. **C.** $a>0$. **D.** không tồn tại a.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\frac{a}{3^x+3^{-x}}=3^x-3^{-x}\Leftrightarrow a=\left(3^x+3^{-x}\right)\left(3^x-3^{-x}\right)\Leftrightarrow a=3^{2x}-3^{-2x}\ (1)$.

Xét hàm số $f(x)=3^{2x}-3^{-2x}$.

Có $f'(x)=2.3^{2x}+2.3^{-2x}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó, hàm số $y=f(x)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra với mọi giá trị của a thì (1) luôn có nghiệm duy nhất.

Bài tập 7. Số nghiệm của phương trình $\frac{x^2}{2}+x-\ln\left(x^2-2\right)=2018$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x)=\frac{x^2}{2}+x-\ln\left(x^2-2\right)$ với $x\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

Ta có $f'(x)=x+1-\frac{2x}{x^2-2}$; $f''(x)=1+\frac{2x^2+4}{\left(x^2-2\right)^2}>0, \forall x\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

Nên suy ra hàm số $f'(x)=x+1-\frac{2x}{x^2-2}$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)$ và $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

Mặ khác $f'(2).f'\left(\sqrt{3}\right)=1.\left(1-\sqrt{3}\right)<0$ và $f'(-3).f'(-2)=-\frac{8}{7}.1<0$ nên $f'(x)$ có đúng một nghiệm $a\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)$ và đúng một nghiệm $b\in\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

Ta có bảng biến thiên

Ta có $f(a)<f\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{3}{2}-\sqrt{3}<2018$ và $f(b)<f\left(\sqrt{3}\right)=\frac{3}{2}+\sqrt{3}<2018$

Bài tập 8. Tìm số thực a để phương trình: $9^x+9=a3^x\cos(\pi x)$, chỉ có duy nhất một nghiệm thực

A. $a=-6$. **B.** $a=6$. **C.** $a=-3$. **D.** $a=3$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Giả sử x_0 là nghiệm của phương trình. Ta có $9^{x_0}+9=a.3^{x_0}\cos(\pi x_0)$.

Khi đó $2-x_0$ cũng là nghiệm của phương trình.

Thật vậy $9^{2-x_0}+9=a3^{2-x_0}\cos\left[\pi\left(2-x_0\right)\right]\Leftrightarrow\frac{81}{9^{x_0}}+9=a\frac{9}{3^{x_0}}\cos\left(\pi x_0\right)$

$\Leftrightarrow 9^{x_0}+9=a.3^{x_0}\cos\left(\pi x_0\right)$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $x_0=2-x_0\Leftrightarrow x_0=1$.

Với $x_0=1\Rightarrow a=-6$.

Ngược lại, với $a=-6$, phương trình $9^x+9=-6.3^x\cos(\pi x)\Leftrightarrow 3^x+\frac{9}{3^x}=-6\cos(\pi x)$.

+ $3^x+\frac{9}{3^x}\ge 6$

+ $-6\cos(\pi x)\le 6$

Khi đó dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}3^x+\frac{9}{3^x}=6\\ \cos\pi x=-1\end{cases}\Leftrightarrow x=1$.

Vậy $9^{x_0}+9=a.3^{x_0}\cos(\pi x_0)$ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $a=-6$.

Bài tập 9. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tồn tại cặp số $(x;y)$ thỏa mãn $e^{2x+y+1}-e^{3x+2y}=x+y-1$, đồng thời thỏa mãn $\log_2^2(2x+y-1)-(m+4)\log_2 x+m^2+4=0$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $e^{2x+y+1}-e^{3x+2y}=x+y-1\Leftrightarrow e^{2x+y+1}+(2x+y+1)=e^{3x+2y}+(3x+2y)$.

Xét hàm số $f(t)=e^t+t$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(t)=e^t+1>0$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình có dạng: $f(2x+y+1)=f(3x+2y)\Leftrightarrow 2x+y+1=3x+2y\Leftrightarrow y=1-x$.

Thế vào phương trình còn lại ta được: $\log_2^2 x-(m+4)\log_2 x+m^2+4=0$.

Đặt $t=\log_2 x$, phương trình có dạng: $t^2-(m+4)t+m^2+4=0$.

Để phương trình có nghiệm thì $\Delta\geq 0\Leftrightarrow -3m^2+8m\geq 0\Leftrightarrow 0\leq m\leq\frac{8}{3}$.

Do đó có 3 số nguyên m thỏa mãn.

Bài tập 10. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tồn tại cặp số $(x;y)$ thỏa mãn $e^{3x+5y}-e^{x+3y+1}=1-2x-2y$, đồng thời thỏa mãn $\log_3^2(3x+2y-1)-(m+6)\log_3 x+m^2+9=0$.

A. 6. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $e^{3x+5y}-e^{x+3y+1}=1-2x-2y\Leftrightarrow e^{3x+5y}+(3x+5y)=e^{x+3y+1}+(x+3y+1)$.

Xét hàm số $f(t)=e^t+t$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(t)=e^t+1>0$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình có dạng: $f(3x+5y)=f(x+3y+1)\Leftrightarrow 3x+5y=x+3y+1\Leftrightarrow 2y=1-2x$.

Thế vào phương trình còn lại ta được: $\log_3^2 x-(m+6)\log_3 x+m^2+9=0$.

Đặt $t=\log_3 x$, phương trình có dạng: $t^2-(m+6)t+m^2+9=0$.

Để phương trình có nghiệm thì $\Delta\geq 0\Leftrightarrow -3m^2+12m\geq 0\Leftrightarrow 0\leq m\leq 4$.

Do đó có 5 số nguyên m thỏa mãn.

Bài tập 11. Gọi $x_0=\dfrac{a+b\sqrt{3}}{c}$ là một nghiệm lớn hơn 1 của phương trình $2x\left[\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{x}}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{1-x}+1\right]=2x^2-1$.

Giá trị của $P=a+b+c$ là

A. $P=6$. **B.** $P=0$. **C.** $P=2$. **D.** $P=4$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định: $x\neq 0$.

$2x\left[\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{x}}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{1-x}+1\right]=2x^2-1\Leftrightarrow 3^{\frac{1}{2x}}-3^{x-1}+1=x-\dfrac{1}{2x}$

$\Leftrightarrow 3^{\frac{1}{2x}}+\dfrac{1}{2x}=3^{x-1}+x-1\ (1)$. Xét hàm số $f(t)=3^t+t\ (t\neq 0)$, $f'(t)=3^t.\ln 3+1>0$

$(1)\Leftrightarrow f\left(\dfrac{1}{2x}\right)=f(x-1)\Leftrightarrow \dfrac{1}{2x}=x-1\Leftrightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}\Rightarrow a=1,\ b=1,\ c=2$. Vậy $P=4$.

Bài tập 12. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $\ln\left(m+\ln\left(m+x\right)\right)=x$ có nhiều nghiệm nhất.

A. $m\geq 0$. **B.** $m>1$. **C.** $m<\mathrm{e}$. **D.** $m\geq -1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\ln\left(m+\ln\left(m+x\right)\right)=x\quad (1)$.

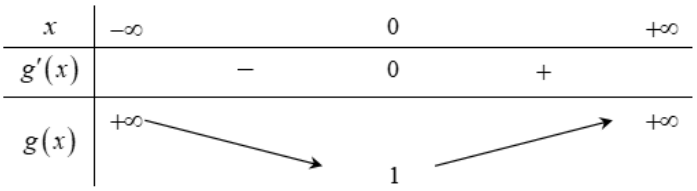
Điều kiện $x>\mathrm{e}^{-m}-m$.

Đặt $\ln\left(m+x\right)=y$ ta được $\mathrm{e}^y-m=x$. Thay vào (1) ta được $\ln\left(m+y\right)=x\Leftrightarrow \mathrm{e}^x-m=y$.

Ta có hệ $\begin{cases}\mathrm{e}^x-m=y\\ \mathrm{e}^y-m=x\end{cases}\Rightarrow \mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y=y-x\Rightarrow \mathrm{e}^x+x=\mathrm{e}^y+y$. Do hàm số $f(t)=\mathrm{e}^t+t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên suy ra $x=y\Rightarrow x=\ln\left(x+m\right)\Leftrightarrow \mathrm{e}^x-x=m$.

Xét hàm số $g(x)=\mathrm{e}^x-x;\ g'(x)=\mathrm{e}^x-1;\ g'(x)=0\Leftrightarrow x=0$.

BBT



Suy ra phương trình có nhiều nhất là hai nghiệm $\Leftrightarrow m>1$. (chú ý nghiệm luôn thỏa điều kiện).

Bài tập 13. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình

$$\log_2 \frac{3x^2+3x+m+1}{2x^2-x+1} = x^2-5x+2-m$$

Có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

A. 3. **B.** Vô số. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $3x^2+3x+m+1>0$.

Ta có:

$$\log_2 \frac{3x^2+3x+m+1}{2x^2-x+1} = x^2-5x+2-m \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{3x^2+3x+m+1}{2x^2-x+1}\right)-1 = x^2-5x+1-m$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{3x^2+3x+m+1}{4x^2-2x+2} = x^2-5x+1-m$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(3x^2+3x+m+1\right)-\log_2\left(4x^2-2x+2\right)=\left(4x^2-2x+2\right)-\left(3x^2+3x+m+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(3x^2+3x+m+1\right)+\left(3x^2+3x+m+1\right)=\log_2\left(4x^2-2x+2\right)+\left(4x^2-2x+2\right) \qquad (1)$$

Xét hàm số: $f(t)=t+\log_2 t$ trên $(0;+\infty)$, ta có $f'(t)=1+\frac{1}{t.\ln 2}>0$, $\forall t\in(0;+\infty)$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Suy ra: $(1)\Leftrightarrow f\left(4x^2-2x+2\right)=f\left(3x^2+3x+m+1\right)$

$\Leftrightarrow 4x^2-2x+2=3x^2+3x+m+1 \Leftrightarrow x^2-5x=m-1$ (2). Điều này đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Xét hàm số: $g(x)=x^2-5x$ trên $\mathbb{R}$, ta có $g'(x)=2x-5=0\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$.

Bảng biến thiên:

- Theo bảng biến thiên ta thấy: phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1 khi và chỉ khi $-\frac{25}{4} < m-1 < -4 \Leftrightarrow -\frac{21}{4} < m < -3$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-5;-4\}$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập 14. Cho phương trình $\log_2\left(x-\sqrt{x^2-1}\right).\log_5\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=\log_m\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương khác 1 của m sao cho phương trình đã cho có nghiệm x lớn hơn 2?

A. Vô số. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định: $x > \sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow x \geq 1$.

Đặt $t=\log_2\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$ thì $t'=\frac{1-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x-\sqrt{x^2-1}}.\frac{1}{\ln 2}=\frac{\sqrt{x^2-1}-x}{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\sqrt{x^2-1}}.\frac{1}{\ln 2}$

$=\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}\ln 2}<0$

BBT:

x	1		$+\infty$
t'		$-$	
t	0	$\searrow$	$-\infty$

Do $x>2 \Rightarrow t<\log_2\left(2-\sqrt{3}\right)$.

Phương trình trở thành $t.\log_5 2^t=\log_m\frac{1}{2^t} \Leftrightarrow t.\log_5 2=-\log_m 2 \Leftrightarrow \log_5 m=-\frac{1}{t}$

Ycbt $\log_5 m<-\frac{1}{\log_2\left(2-\sqrt{3}\right)} \Leftrightarrow m<5^{-\frac{1}{\log_2\left(2-\sqrt{3}\right)}}$. Do $m \in \mathbb{N}^*$ và $m \neq 1$ nên $m=2$.

Bài tập 15. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số *m* để phương trình $\sqrt[3]{3m+27\sqrt[3]{3m+27.2^x}}=2^x$ có nghiệm thực?

A. 6. **B.** 4.

C. Vô số. **D.** Không tồn tại *m*.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $\sqrt[3]{3m+27\sqrt[3]{3m+27.2^x}}=2^x \Leftrightarrow 27\sqrt[3]{3m+27.2^x}=2^{3x}-3m. \quad (1)$

Đặt $2^x=u,$ điều kiện: $u>0$ và $\sqrt[3]{3m+27.2^x}=v \Rightarrow v^3=3m+27.u. \quad (2)$

(1) trở thành $u^3=27v+3m. \quad (3)$

Từ (3) và (2) suy ra $u^3-27v=v^3-27u \Leftrightarrow (u-v).\left(u^2+uv+v^2+27\right)=0$

$\Leftrightarrow u=v.$

Do $u^2+uv+v^2+4=\left(u+\frac{1}{2}v\right)^2+\frac{3v^2}{4}+27>0, \forall u,v\in\mathbb{R},$ nên

$\sqrt[3]{3m+27u}=u \Leftrightarrow m=\frac{u^3-27u}{3},$ với $u>0.$

Xét hàm số $f(u)=\frac{u^3-27u}{3}$ với $u>0.$

Ta có $f'(u)=\frac{1}{3}\left(3u^3-27\right); f'(u)=0 \Leftrightarrow u=3$ do $u>0.$

Suy ra $\min\limits_{(0;+\infty)} f(u)=-54.$ Do đó có vô số giá trị nguyên của *m* để phương trình có nghiệm thực.

Bài tập 16. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số *m* để phương trình $4^x-m.2^x+2m-5=0$ có hai nghiệm trái dấu?

A. Vô số. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $4^x-m.2^x+2m-5=0 \Leftrightarrow \left(2^x\right)^2-m.2^x+2m-5=0$

Đặt $t=2^x, t>0,$ phương trình thành $t^2-mt+2m-5=0 \ (2).$

Đặt $f(t)=t^2-mt+2m-5$

Nhận xét rằng với một giá trị $t>0$ ta tìm được một nghiệm *x* nên để phương trình có hai nghiệm $x_1<0<x_2$ thì phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $t_2>t_1>0$ đồng thời $t_1<1<t_2$ (vì $2^{x_1}<2^0<2^{x_2}$). Từ đó, ta có:

$$\begin{cases} \Delta>0 \\ P>0 \\ S>0 \\ 1.f(t)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4(2m-5)>0 \\ 2m-5>0 \\ m>0 \\ 1.(1-m+2m-5)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-8m+20>0 \\ m>\frac{5}{2} \\ m>0 \\ m<4 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{2}<m<4.$$

Vậy chỉ có một giá trị nguyên của tham số *m* thỏa đề.

Bài tập 17. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số *m* để phương trình $2^x+3=m\sqrt{4^x+1}\,(*)$ có nghiệm duy nhất?

A. 3. **B.** Vô số. **C.** 1. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đặt $t=2^x, t>0,$ phương trình $(*)\Leftrightarrow t+3=m\sqrt{t^2+1}\Leftrightarrow m=\dfrac{t+3}{\sqrt{t^2+1}}\quad (1).$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t+3}{\sqrt{t^2+1}}$ xác định trên tập $D=(0;+\infty).$

Ta có $f'(t)=\dfrac{1-3t}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}.$ Cho $f'(t)=0\Leftrightarrow 1-3t=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\dfrac{1}{3}$		$+\infty$
y'			$+$		0	$-$	
y		3	$\nearrow$		$\sqrt{10}$	$\searrow$	1

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy với $1<m\le 3$ hoặc $m=\sqrt{10}$ phương trình có nghiệm duy nhất nên có hai giá trị nguyên của tham số *m*.

Bài tập 18. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số *m* để phương trình $2.4^{\sqrt{x}-1}-5.2^{\sqrt{x}-1}+m=0,(*)$ có nghiệm?

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $t=2^{\sqrt{x}-1},$ điều kiện $t\ge\dfrac{1}{2}$ vì $\sqrt{x}-1\ge -1.$

Khi đó $(*)\Leftrightarrow 2t^2-5t=-m.$

Xét hàm số $y=-2t^2+5t$ trên $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right).$

Ta có $y'=-4t+5.$ Cho $y'=0\Leftrightarrow 4t-5=0\Leftrightarrow t=\dfrac{5}{4}.$

x	$-\infty$		$\dfrac{1}{2}$		$\dfrac{5}{4}$		$+\infty$
y'			$+$		0	$-$	
y		2	$\nearrow$		$\dfrac{25}{8}$	$\searrow$	$-\infty$

Do đó phương trình có nghiệm khi $m \le \frac{25}{8}$.

BÀI 6. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

A. KIẾN THỨC SÁCH GIÁO KHOA CẦN NẮM

I. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

1. Bất phương trình mũ cơ bản

2. Cách giai bất phương trình mũ đơn giản

a) Đưa về cùng cơ số

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \end{array}\right.$$

b) Đặt ẩn phụ

$\alpha a^{2f(x)} + \beta a^{f(x)} + \lambda = 0$. Đặt $t = a^{f(x)}, (t > 0)$

c) Phương pháp logarit hóa

$$a^{f(x)} > b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) < \log_a b \end{cases} \\ \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > \log_a b \end{cases} \end{array}\right.$$

$$a^{f(x)} > b^{g(x)} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x).\log_a^b \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) < g(x).\log_a^b \end{cases} \end{array}\right.$$

II. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

1. Bất phương pháp logarit cơ bản

2. Cách giải một số bất phương trình logarit đơn giản

a) Đưa về cùng cơ số

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \end{array}\right.$$

b) Phương pháp mũ hóa

$$\log_a f(x) > b \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>1 \\ f(x)>a^b \end{cases} \\ \begin{cases} 0<a<1 \\ 0<f(x)<a^b \end{cases} \end{array}\right.$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Phương pháp biến đổi tương đương đưa về cùng cơ số

1. Phương pháp

a. Bất phương trình mũ cơ bản

● Bất phương trình $a^{f(x)} \le a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1\\f(x)\le g(x)\end{cases}\\\begin{cases}a=1\\\text{bất kỳ}\end{cases}\\\begin{cases}0<a<1\\f(x)\ge g(x)\end{cases}\end{array}\right.$ (hoặc $\begin{cases}a>0\\(a-1)\left[f(x)-g(x)\right]\le 0\end{cases}$).

● Bất phương trình $a^{f(x)} < b$ (với $b>0$) $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1\\f(x)\le \log_a b\end{cases}\\\begin{cases}0<a<1\\f(x)\ge \log_a b\end{cases}\end{array}\right.$.

● Bất phương trình $a^{f(x)} > b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>0\\b\le 0\\f(x)\ \text{có nghĩa}\end{cases}\\\begin{cases}a>1\\b>0\\f(x)>\log_a b\end{cases}\\\begin{cases}0<a<1\\b>0\\f(x)<\log_a b\end{cases}\end{array}\right.$.

b. Bất phương trình logarit cơ bản

● Bất phương trình $\log_a f(x) \le \log_a g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1\\0<f(x)\le g(x)\end{cases}\\\begin{cases}0<a<1\\f(x)\ge g(x)\end{cases}\end{array}\right.$ (hoặc

$\begin{cases}0<a\ne 1\\f(x)>0\\g(x)>0\\(a-1)\left[f(x)-g(x)\right]\le 0\end{cases}$).

● Bất phương trình $\log_a f(x) \le b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1\\0<f(x)\le a^b\end{cases}\\\begin{cases}0<a<1\\f(x)\ge a^b\end{cases}\end{array}\right.$.

● Bất phương trình $\log_a f(x) \ge b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1\\f(x)>a^b\end{cases}\\\begin{cases}0<a<1\\0<f(x)\le a^b\end{cases}\end{array}\right.$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho bất phương trình $\log_7\left(x^2+2x+2\right)+1>\log_7\left(x^2+6x+5+m\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình trên có tập ngiệm chứa khoảng $(1;3)$?

A. 35. **B.** 36. **C.** 34. **D.** 33.

Lời giải

Chọn C

$$bpt\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+6x+5+m>0\\ \log_7\left[7\left(x^2+2x+2\right)\right]>\log_7\left(x^2+6x+5+m\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-x^2-6x-5\\ 6x^2+8x+9>m\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m>\max\limits_{(1;3)}f(x)\\ m<\min\limits_{(1;3)}g(x)\end{cases},\text{ với } f(x)=-x^2-6x-5;\ g(x)=6x^2+8x+9$$

Xét sự biến thiên của hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$

❍ $f'(x)=-2x-6<0,\forall x\in(1;3)\Rightarrow f(x)$ luôn nghịch biến trên khoảng $(1;3)$

$\Rightarrow\max\limits_{(1;3)}f(x)=f(1)=-12$

❍ $g'(x)=12x+8>0,\forall x\in(1;3)\Rightarrow g(x)$ luôn đồng biến trên khoảng $(1;3)$

$\Rightarrow\min\limits_{(1;3)}g(x)=g(1)=23$

Khi đó $-12<m<23$

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-11;-10;...;22\}$

Vậy có tất cả 34 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập 2. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\log_2\left(7x^2+7\right)\geq\log_2\left(mx^2+4x+m\right)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$. Tổng các phần tử của S là

A. 10. **B.** 11. **C.** 12. **D.** 13.

Lời giải

Chọn C

BPT có tập nghiệm $\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}mx^2+4x+m>0\\ 7x^2+7\geq mx^2+4x+m\end{cases},\ \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}mx^2+4x+m>0\ \ (1)\\ (7-m)x^2-4x+7-m\geq\ \ (2)\end{cases},\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Ta có: $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}a=m>0\\ \Delta_1'=4-m^2<0\end{cases}\Leftrightarrow m>2$.

Ta có: $(2)\Leftrightarrow\begin{cases}a=7-m>0\\ \Delta_2'=4-(7-m)^2\leq0\end{cases}\Leftrightarrow7-m\geq2\Leftrightarrow m\leq5$.

Do đó $\begin{cases}m>2\\ m\leq5\end{cases}\Leftrightarrow2<m\leq5$, mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m=\{3;4;5\}$.

Vậy $S=3+4+5=12$.

Bài tập 3. Bất phương trình $\log_2\dfrac{x^2-6x+8}{4x-1}\geq0$ có tập nghiệm là $T=\left(\dfrac{1}{4};a\right]\cup[b;+\infty)$. Hỏi $M=a+b$ bằng

A. $M=12$. **B.** $M=8$. **C.** $M=9$. **D.** $M=10$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\log_2\dfrac{x^2-6x+8}{4x-1}\ge 0\Leftrightarrow\dfrac{x^2-6x+8}{4x-1}\ge 1\Leftrightarrow\dfrac{x^2-10x+9}{4x-1}\ge 0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{cases}x^2-10x+9\ge 0\\4x-1>0\end{cases}\begin{cases}x^2-10x+9\le 0\\4x-1<0\end{cases}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{4}<x\le 1\\x\ge 9\end{array}\right.$$

Nên $T=\left(\dfrac{1}{4};1\right]\cup[9;+\infty)\Rightarrow M=a+b=1+9=10$.

Bài tập 4. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2\left(x^2-1\right)\right)\le -1$ là:

A. $S=\left[1;\sqrt{5}\right]$. **B.** $S=\left(-\infty;-\sqrt{5}\right]\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right)$.

C. $S=\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]$. **D.** $S=\left[-\sqrt{5};-1\right)\cup\left(1;\sqrt{5}\right]$.

Lời giải

Chọn B

* ĐKXĐ: $\begin{cases}\log_2\left(x^2-1\right)>0\\x^2-1>0\end{cases}\Leftrightarrow x^2-1>1\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

Bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2\left(x^2-1\right)\right)\le -1\Leftrightarrow\log_2\left(x^2-1\right)\ge\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}=2\Leftrightarrow\left(x^2-1\right)\ge 4$

$\Leftrightarrow x^2\ge 5\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\sqrt{5}\right]\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right)$.

* Kết hợp điều kiện ta được: $x\in\left(-\infty;-\sqrt{5}\right]\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right)$.

Bài tập 5. Bất phương trình $\ln\left(2x^2+3\right)>\ln\left(x^2+ax+1\right)$ nghiệm đúng với mọi số thực x khi:

A. $-2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}$. **B.** $0<a<2\sqrt{2}$. **C.** $0<a<2$. **D.** $-2<a<2$.

Lời giải

Chọn D

$\ln\left(2x^2+3\right)>\ln\left(x^2+ax+1\right)$ nghiệm đúng với mọi số thực x

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+ax+1>0\\2x^2+3>x^2+ax+1\end{cases},\forall x\in\mathbb{R}.\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+ax+1>0\\x^2-ax+2>0\end{cases},\forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-4<0\\a^2-8<0\end{cases}\Leftrightarrow a^2-4<0\Leftrightarrow -2<a<2.$$

Bài tập 6. Bất phương trình $\left(3^x-1\right)\left(x^2+3x-4\right)>0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên nhỏ hơn 6?

A. 9. **B.** 5. **C.** 7. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C

$$\left(3^x-1\right)\left(x^2+3x-4\right)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{cases}3^x-1>0\\x^2+3x-4>0\end{cases}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases}x>0\\x<-4\vee x>1\end{cases}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>1\\-4<x<0\end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện nghiệm nguyên nhỏ hơn 6 ta thấy các giá trị thỏa là $\{-3;-2;-1;2;3;4;5\}$.

Bài tập 7. nghiệm của bất phương trình $\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^{2x^2+x+1}\le\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^{1-x}$ là

A. $\left[-1;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

B. $\left[0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

C. $(-1;0)$.

D. $\left[-1;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Lời giải

Chọn D

Do $x^2+\frac{1}{2}>0\forall x$ nên $\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^{2x^2+x+1}\le\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^{1-x} \Leftrightarrow \left[\begin{cases}x^2+\frac{1}{2}=1\\2x^2+x+1\le 1-x\end{cases}\right. \left[\begin{cases}x^2+\frac{1}{2}>1\\2x^2+x+1\le 1-x\end{cases}\right. \left[\begin{cases}0<x^2+\frac{1}{2}<1\\2x^2+x+1\ge 1-x\end{cases}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\\\begin{cases}x\in\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right)\\x\in[-1;0]\end{cases}\\\begin{cases}x\in\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\x\in(-\infty;-1]\cup[0;+\infty)\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\\x\in\left[-1;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\x\in\left[0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\ x\in\left[-1;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\cup\left[0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

Bài tập 8. Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2-3x-10}}>\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$ là

A. 1. **B.** 0. **C.** 9. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2-3x-10}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x-10} < x-2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x-10 \ge 0 \\ x-2>0 \\ x^2-3x-10 < (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \le -2 \\ x \ge 5 \end{array}\right. \\ x>2 \\ x<14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 5 \le x < 14$$

Vậy tập tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình đã cho là $\{5;6;7;8;9;10;11;12;13\}$.

Bài tập 9. Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_m\left(2x^2+x+3\right) \le \log_m\left(3x^2-x\right)$ với m là tham số thực dương khác 1, biết $x=1$ là một nghiệm của bất phương trình đã cho.

A. $S=(-2;0)\cup\left(\frac{1}{3};3\right]$. **B.** $S=[-1;0]\cup\left(\frac{1}{3};3\right]$.

C. $S=(-1;0)\cup(1;3]$. **D.** $S=[-1;0)\cup\left(\frac{1}{3};3\right]$.

Lời giải

Chọn D

Do $x=1$ là nghiệm nên ta có $\log_m 6 \le \log_m 2 \Rightarrow 0<m<1$.

Bất phương trình tương đương với $\begin{cases} 2x^2+x+3 \ge 3x^2-x \\ 3x^2-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-3 \le 0 \\ 3x^2-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le x \le 3 \\ x<0; x>\frac{1}{3} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \le x < 0 \\ \frac{1}{3} < x \le 3 \end{array}\right. .$$

Vậy $S=[-1;0)\cup\left(\frac{1}{3};3\right]$.

Bài tập 10. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình: $1+\log_5\left(x^2+1\right) \ge \log_5\left(mx^2+4x+m\right)$ thỏa mãn với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A. $-1<m\le 0$. **B.** $-1<m<0$. **C.** $2<m\le 3$. **D.** $2<m<3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$1+\log_5\left(x^2+1\right) \ge \log_5\left(mx^2+4x+m\right) \Leftrightarrow \log_5\left(5x^2+5\right) \ge \log_5\left(mx^2+4x+m\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} mx^2+4x+m>0 \\ 5x^2+5 \ge mx^2+4x+m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx^2+4x+m>0 \ (1) \\ (m-5)x^2+4x+(m-5) \le 0 \ (2) \end{cases}$$

Để bất phương trình đã cho thỏa mãn với mọi $x \in \mathbb{R}$ điều kiện là cả (1) và (2) đều thỏa mãn với mọi $x \in \mathbb{R}$. Điều kiện là $\begin{cases} 0 < m < 5 \\ 4 - m^2 < 0 \\ 4 - (m-5)^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \le 3$.

Bài tập 11. Bất phương trình $\ln\left(2x^2+3\right) > \ln\left(x^2+ax+1\right)$ nghiệm đúng với mọi số thực x khi:

A. $-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$. **B.** $0 < a < 2\sqrt{2}$. **C.** $0 < a < 2$. **D.** $-2 < a < 2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\ln\left(2x^2+3\right) > \ln\left(x^2+ax+1\right)$ nghiệm đúng với mọi số thực x

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+ax+1 > 0 \\ 2x^2+3 > x^2+ax+1 \end{cases} \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+ax+1 > 0 \\ x^2-ax+2 > 0 \end{cases} \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2-4 < 0 \\ a^2-8 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a^2-4 < 0 \Leftrightarrow -2 < a < 2$.

Bài tập 12. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên không dương của m để phương trình $\log_{\frac{1}{5}}(x+m) + \log_5(2-x) = 0$ có nghiệm. Tập S có bao nhiêu tập con?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$\log_{\frac{1}{5}}(x+m) + \log_5(2-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x > 0 \\ x+m > 0 \\ \log_5(2-x) = \log_5(x+m) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > -m \\ 2-x = x+m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > -m \\ x = \dfrac{2-m}{2} \end{cases}$.

Do đó phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $\begin{cases} \dfrac{2-m}{2} < 2 \\ \dfrac{2-m}{2} > -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m > -2 \end{cases} \Leftrightarrow m > -2$.

Mà m là số nguyên không dương nên $m \in \{-1;0\}$. Suy ra $S = \{-1;0\}$.

Vậy số tập con của S bằng $2^2 = 4$.

Chú ý:

- Các tập con của S là: $\varnothing$, $\{-1\}$, $\{0\}$, S.
- Một tập hợp có n phần tử thì số tập con của nó là n^2.

Bài tập 13. Tìm các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_{0,02}\left(\log_2\left(3^x+1\right)\right)>\log_{0,02} m$ có nghiệm với mọi $x\in(-\infty;0)$.

A. $m>9$. **B.** $m<2$. **C.** $0<m<1$. **D.** $m\ge 1$.

Lời giải

Chọn D

$\log_{0,02}\left(\log_2\left(3^x+1\right)\right)>\log_{0,02} m$

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

ĐK tham số m : $m>0$

Ta có: $\log_{0,02}\left(\log_2\left(3^x+1\right)\right)>\log_{0,02} m\Leftrightarrow\log_2\left(3^x+1\right)<m$

Xét hàm số $f(x)=\log_2\left(3^x+1\right),\ \forall x\in(-\infty;0)$ có $f'=\dfrac{3^x.\ln 3}{\left(3^x+1\right)\ln 2}>0,\ \forall x\in(-\infty;0)$

Bảng biến thiên $f(x)$:

x	$-\infty$		0
f'		$+$	
f	0	$\nearrow$	1

Khi đó với yêu cầu bài toán thì $m\ge 1$.

Bài tập 14. Nghiệm của bất phương trình $\log_2\left(\sqrt{3x+1}+6\right)-1\ge\log_2\left(7-\sqrt{10-x}\right)$ là

A. $1\le x\le\dfrac{369}{49}$. **B.** $x\ge\dfrac{369}{49}$. **C.** $x\le 1$. **D.** $x\le\dfrac{369}{49}$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $-\dfrac{1}{3}\le x\le 10$. $(*)$

Ta có $\log_2\left(\sqrt{3x+1}+6\right)-1\ge\log_2\left(7-\sqrt{10-x}\right)\Leftrightarrow\sqrt{3x+1}+6\ge 14-2\sqrt{10-x}$

$\Leftrightarrow\sqrt{3x+1}\ge 8-2\sqrt{10-x}\Leftrightarrow 3x+1\ge 64-32\sqrt{10-x}+4(10-x)$ (Do $(*)$)

$\Leftrightarrow 32\sqrt{10-x}\ge 103-7x\overset{(*)}{\Leftrightarrow}1024(10-x)\ge 10609+49x^2-1442x$

$\Leftrightarrow 49x^2-418x+369\le 0\Leftrightarrow 1\le x\le\dfrac{369}{49}$.

Bài tập 15. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$: $1+\log_6\left(x^2+1\right)\ge\log_6\left(mx^2+2x+m\right)$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $mx^2+2x+m>0$.

Ta có $1+\log_6\left(x^2+1\right)\ge\log_6\left(mx^2+2x+m\right)\Leftrightarrow\log_6\left[6\left(x^2+1\right)\right]\ge\log_6\left(mx^2+2x+m\right)$

$\Leftrightarrow 6\left(x^2+1\right)\ge mx^2+2x+m\Leftrightarrow(m-6)x^2+2x+m-6\le 0$.

Điều kiện bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} mx^2+2x+m>0, \forall x\in\mathbb{R} & (1) \\ (m-6)x^2+2x+m-6\le 0, \forall x\in\mathbb{R} & (2) \end{cases}$

◆ Giải (1): Do $m=0$ không thỏa (1) nên $(1)\Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ \Delta'=1-m^2<0 \end{cases} \Leftrightarrow m>1$.

◆ Giải (2): Do $m=6$ không thỏa (2) nên:

$$(2)\Leftrightarrow \begin{cases} m<6 \\ \Delta'=1-(m-6)^2\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<6 \\ -m^2+12m-35\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<6 \\ \left[\begin{array}{l} m\le 5 \\ m\ge 7 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m\le 5.$$

Suy ra $1<m\le 5$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m.

Dạng 2: Phương pháp đặt ẩn phụ

1. Phương pháp

a. Bất phương trình mũ

Tổng quát: $f\left[a^{g(x)}\right]=0 \quad (0<a\ne 1) \Leftrightarrow \begin{cases} t=a^{g(x)}>0 \\ f(t)=0 \end{cases}$.

Ta thường gặp các dạng:

- $m.a^{2f(x)}+n.a^{f(x)}+p=0$
- $m.a^{f(x)}+n.b^{f(x)}+p=0$, trong đó $a.b=1$. Đặt $t=a^{f(x)}$, $t>0$, suy ra $b^{f(x)}=\dfrac{1}{t}$.
- $m.a^{2f(x)}+n.(a.b)^{f(x)}+p.b^{2f(x)}=0$. Chia hai vế cho $b^{2f(x)}$ và đặt $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{f(x)}=t>0$.

b. Bất phương logarit

Tổng quát: $f\left[\log_a f(x)\right]=0 \quad (0<a\ne 1) \Leftrightarrow \begin{cases} t=\log_a f(x) \\ f(t)=0 \end{cases}$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Tìm số các nghiệm nguyên của bất phương trình $4.3^{\log(100x^2)}+9.4^{\log(10x)}<13.6^{1+\log x}$.

A. 10. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 11

Lời giải

Chọn C

ĐK: $x>0$.

PT $\Leftrightarrow 4.3^{2.\log(10x)}+9.2^{2.\log(10x)}<13.6^{\log(10x)} \Leftrightarrow 4.\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2\log(10x)}-13.\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\log(10x)}+9<0$

Đặt $t=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\log(10x)}>0$ thì phương trình trở thành:

$4t^2-13t+9<0\Leftrightarrow 1<t<\dfrac{9}{4}$.

Do đó $1<\left(\frac{3}{2}\right)^{\log(10x)}<\frac{9}{4}\Leftrightarrow 1<\log(10x)<2\Leftrightarrow 1<x<10$

Số các nghiệm nguyên của bất phương trình là 8.

Bài tập 2. Xét bất phương trình $\log_2^2 2x-2(m+1)\log_2 x-2<0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

A. $m\in(0;+\infty)$. **B.** $m\in\left(-\frac{3}{4};0\right)$. **C.** $m\in\left(-\frac{3}{4};+\infty\right)$. **D.** $m\in(-\infty;0)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x>0$

$\log_2^2 2x-2(m+1)\log_2 x-2<0$

$\Leftrightarrow(1+\log_2 x)^2-2(m+1)\log_2 x-2<0\quad(1)$.

Đặt $t=\log_2 x$.Vì $x>\sqrt{2}$ nên $\log_2 x>\log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}$. Do đó $t\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$

(1) thành $(1+t)^2-2(m+1)t-2<0\Leftrightarrow t^2-2mt-1<0\ (2)$

Cách 1: Yêu cầu bài toán tương đương tìm m để bpt (2) có nghiệm thuộc $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Xét bất phương trình (2) có: $\Delta'=m^2+1>0,\ \forall m\in\mathbb{R}$.

$f(t)=t^2-2mt-1=0$ có $ac<0$ nên (2) luôn có 2 nghiệm phân biệt $t_1<0<t_2$.

Khi đó cần $\frac{1}{2}<t_2\Leftrightarrow m+\sqrt{m^2+1}>\frac{1}{2}\Leftrightarrow m>-\frac{3}{4}$.

Cách 2: $t^2-2mt-1<0\ \Leftrightarrow f(t)=\frac{t^2-1}{2t}<\mathrm{m}\ \left(t>\frac{1}{2}\right)$

Khảo sát hàm số $f(t)$ trong $(0;+\infty)$ ta được $m\in\left(-\frac{3}{4};+\infty\right)$.

Bài tập 3. Cho bất phương trình: $9^x+(m-1).3^x+m>0\ (1)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình (1) nghiệm đúng $\forall x>1$.

A. $m\ge-\frac{3}{2}$. **B.** $m>-\frac{3}{2}$. **C.** $m>3+2\sqrt{2}$. **D.** $m\ge3+2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=3^x$

Vì $x>1\Rightarrow t>3$ Bất phương trình đã cho thành: $t^2+(m-1).t+m>0$ nghiệm đúng $\forall t\ge3$

$\Leftrightarrow\frac{t^2-t}{t+1}>-m$ nghiệm đúng $\forall t>3$.

Xét hàm số $g(t)=t-2+\frac{2}{t+1},\forall t>3, g'(t)=1-\frac{2}{(t+1)^2}>0,\forall t>3$. Hàm số đồng biến trên $[3;+\infty)$ và $g(3)=\frac{3}{2}$. Yêu cầu bài toán tương đương $-m\le\frac{3}{2}\Leftrightarrow m\ge-\frac{3}{2}$.

Bài tập 4. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [0;10]$ để tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{\log_2^2 x + 3\log_{\frac{1}{2}} x^2 - 7} < m\left(\log_4 x^2 - 7\right)$ chứa khoảng $(256;+\infty)$.

A. 7. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ \log_2^2 x + 3\log_{\frac{1}{2}} x^2 - 7 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \log_2^2 x - 6\log_2 x - 7 \ge 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \left[\begin{array}{l} \log_2 x < -1 \\ \log_2 x > 7 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \left[\begin{array}{l} x \le \frac{1}{2} \\ x \ge 128 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x \le \frac{1}{2} \\ x \ge 128 \end{array}\right.$

Với điều kiện trên bất phương trình trở thành $\sqrt{\log_2^2 x - 6\log_6 x - 7} < m\left(\log_2 x - 7\right)$ $(*)$

Đặt $t = \log_2 x$ thì $t > 8$ vì $x \in (256;+\infty)$

$(*) \Leftrightarrow \sqrt{(t+1)(t-7)} < m(t-7) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{t+1}{t-7}} < m, \forall t > 8$. Đặt $f(t) = \sqrt{\frac{t+1}{t-7}}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \ge \max\limits_{(8;+\infty)} f(t)$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{\frac{t+1}{t-7}}$ trên khoảng $(8;+\infty)$

Ta có $f'(t) = \frac{-4}{(t-7)^2}.\sqrt{\frac{t-7}{t+1}} < 0, \forall t > 8 \Rightarrow f(t)$ luôn nghịch biến trên khoảng $(8;+\infty)$

Do đó $\max\limits_{(8;+\infty)} f(t) = f(8) = 3 \Rightarrow m \ge 3$.

Mà $m \in [0;10]$ nên $m \in \{3;4;...;10\}$.

Vậy có 8 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập 5. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2\left(5^x - 1\right).\log_2\left(2.5^x - 2\right) \ge m$ có nghiệm với mọi $x \ge 1$.

A. $m \ge 6$. **B.** $m > 6$. **C.** $m \le 6$. **D.** $m < 6$.

Lời giải

Chọn C.

Điều kiện của bất phương trình: $x > 0$.

Ta có $\log_2\left(5^x - 1\right).\log_2\left(2.5^x - 2\right) \ge m \Leftrightarrow \log_2\left(5^x - 1\right).\left[1 + \log_2\left(5^x - 1\right)\right] \ge m$ (1).

Đặt $t = \log_2\left(5^x - 1\right)$, với $x \ge 1$ ta có $t \ge 2$. Khi đó (1) trở thành $m \le t^2 + t$ (2).

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t$ trên $[2;+\infty)$ ta có $f'(t) = 2t + 1 > 0$, $\forall t \in [2;+\infty)$.

Do đó để bất phương trình đã cho có nghiệm với mọi $t \ge 2$ thì $m \le \min\limits_{[2;+\infty)} f(t)$ hay $m \le 6$.

Bài tập 6. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $9^{\sqrt{x^2-3x+m}} + 2.3^{\sqrt{x^2-3x+m}-2+x} < 3^{2x-3}$ có nghiệm?

A. 6 . **B.** 4 . **C.** 9 . **D.** 1.

Lời giải

Chọn D.

Điều kiện $x^2-3x+m\ge 0$ (*)

$9^{\sqrt{x^2-3x+m}}+2.3^{\sqrt{x^2-3x+m}-2+x}<3^{2x-3}\Leftrightarrow 3^{2\left(\sqrt{x^2-3x+m}-x\right)}+\frac{2}{9}.3^{\sqrt{x^2-3x+m}-x}-\frac{1}{27}<0$

$\Leftrightarrow 0<3^{\sqrt{x^2-3x+m}-x}<3^{-2}\Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+m}-x<-2\Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+m}<x-2$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+m\ge 0 \\ x-2>0 \\ x^2-3x+m<x^2-4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+m\ge 0 \\ x>2 \\ x<4-m \end{cases} \Rightarrow 4-m>2\Leftrightarrow m<2$.

Do m nguyên dương nên $m=1$ thỏa mãn (*).

Bài tập 7. Bất phương trình $\frac{\log_2\frac{x}{2}}{\log_2 x}-\frac{\log_2 x^2}{\log_2 x-1}\le 1$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương nhỏ hơn 10 .

A. 7 . **B.** 8 . **C.** 9 . **D.** 6 .

Lời giải

Chọn A

Điều kiện của bất phương trình là $x>0$. Khi đó $\frac{\log_2\frac{x}{2}}{\log_2 x}-\frac{\log_2 x^2}{\log_2 x-1}\le 1$

$\Leftrightarrow \frac{\log_2 x-1}{\log_2 x}-\frac{2\log_2 x}{\log_2 x-1}\le 1$

Đặt $t=\log_2 x$. Ta có $\frac{t-1}{t}-\frac{2t}{t-1}\le 1\Leftrightarrow \frac{(t-1)^2-2t^2}{t(t-1)}\le 1\Leftrightarrow \frac{(t-1)^2-2t^2}{t(t-1)}-1\le 0$

$\Leftrightarrow \frac{-2t^2-t+1}{t(t-1)}\le 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\le -1 \\ 0<t\le \frac{1}{2} \\ t>1 \end{array}\right.$

Trả lại ẩn ta có $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x\le -1 \\ 0<\log_2 x\le \frac{1}{2} \\ \log_2 x>1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le \frac{1}{2} \\ 1<x\le \sqrt{2} \\ x>2 \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện $x>0$ ta có $0<x\le\frac{1}{2}$ hoặc $1<x\le\sqrt{2}$ hoặc $x>2$.

Khi đó bất phương trình có 7 nghiệm nguyên dương nhỏ hơn 10 .

Bài tập 8. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $m.4^x+(m-1).2^{x+2}+m-1>0$ nghiệm đúng $\forall x\in\mathbb{R}$?

A. $m\le 3$. **B.** $m\ge 1$. **C.** $-1\le m\le 4$. **D.** $m\ge 0$.

Lời giải

Chọn B.

Bất phương trình $\Leftrightarrow m.4^x+4(m-1).2^x+m-1>0 \Leftrightarrow m\left(4^x+4.2^x+1\right)>1+4.2^x$

$\Leftrightarrow m>\dfrac{1+4.2^x}{4^x+4.2^x+1}$

Đặt $2^x=t$ (Điều kiện $t>0$). Khi đó $m>\dfrac{4t+1}{t^2+4t+1}$. Để bất phương trình ban đầu nghiệm đúng $\forall x\in\mathbb{R}$ thì bất phương trình $m>\dfrac{4t+1}{t^2+4t+1}$ nghiệm đúng $\forall t>0$.

Đặt $f(t)=\dfrac{4t+1}{t^2+4t+1}\Rightarrow f'(t)=-\dfrac{4t^2+2t}{\left(t^2+4t+1\right)^2}<0,\forall t>0$.

Hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$. Khi đó $m>\dfrac{4t+1}{t^2+4t+1}$ $\forall t>0$ khi và chỉ khi $m\ge f(0)=1$

Bài tập 9. Tìm tất cả các giá trị của tham số m bất phương trình $4^{x-1}-m\left(2^x+1\right)>0$ có nghiệm $\forall x\in\mathbb{R}$.

A. $m\in(-\infty;0]$.

B. $m\in(0;+\infty)$.

C. $m\in(0;1)$.

D. $m\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $4^{x-1}-m\left(2^x+1\right)>0\Leftrightarrow m<\dfrac{4^{x-1}}{2^x+1}\Leftrightarrow m<\dfrac{4^x}{4\left(2^x+1\right)}$.

Đặt $t=2^x, t>0$. Yêu cầu bài toán tương đương với $m<\dfrac{t^2}{4(t+1)},\forall t\in(0;+\infty)$.

Đặt $f(t)=\dfrac{t^2}{4(t+1)}, t>0$, $f'(t)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2t(t+1)-t^2}{(t+1)^2}\right)=\dfrac{1}{4}.\dfrac{t^2+2t}{(t+1)^2}$.

$f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=-2\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên (Bổ sung các đầu mũi tên trong bbt là $\pm\infty$ vào nhé)

t	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(t)$		↗		↘	‖	↘		↗	
							0		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên có $m\le 0$.

Bài tập 10. Xét bất phương trình $\log_2^2 2x-2(m+1)\log_2 x-2<0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

A. $m\in(0;+\infty)$.

B. $m\in\left(-\dfrac{3}{4};0\right)$.

C. $m\in\left(-\dfrac{3}{4};+\infty\right)$.

D. $m\in(-\infty;0)$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x>0$

$\log_2^2 2x-2(m+1)\log_2 x-2<0$

$\Leftrightarrow (1+\log_2 x)^2-2(m+1)\log_2 x-2<0 \quad (1)$.

Đặt $t=\log_2 x$ .Vì $x>\sqrt{2}$ nên $\log_2 x>\log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}$. Do đó $t\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$

(1) thành $(1+t)^2-2(m+1)t-2<0\Leftrightarrow t^2-2mt-1<0 \quad (2)$

Cách 1: Yêu cầu bài toán tương đương tìm m để bpt (2) có nghiệm thuộc $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Xét bất phương trình (2) có: $\Delta'=m^2+1>0,\ \forall m\in\mathbb{R}$.

$f(t)=t^2-2mt-1=0$ có $ac<0$ nên (2) luôn có 2 nghiệm phân biệt $t_1<0<t_2$.

Khi đó cần $\frac{1}{2}<t_2\Leftrightarrow m+\sqrt{m^2+1}>\frac{1}{2}\Leftrightarrow m>-\frac{3}{4}$.

Cách 2: $t^2-2mt-1<0 \quad \Leftrightarrow f(t)=\frac{t^2-1}{2t}<\text{m}\ \left(t>\frac{1}{2}\right)$

Khảo sát hàm số $f(t)$ trong $(0;+\infty)$ ta được $m\in\left(-\frac{3}{4};+\infty\right)$.

Bài tập 11. Tìm giá trị gần đúng tổng các nghiệm của bất phương trình sau:

$$\left(\sqrt{2\log_x^2\frac{22}{3}-2\log_x\frac{22}{3}+5}-\sqrt{13}+\sqrt{\frac{2}{\log_{\frac{22}{3}}^2 x}-\frac{4}{\log_{\frac{22}{3}}x}+4}\right)\left(24x^6-2x^5+27x^4-2x^3+1997x^2+2016\right)\le 0$$

A. $12,3$. **B.** 12. **C.** $12,1$. **D.** $12,2$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $0<x\ne 1$.

Ta có $24x^6-2x^5+27x^4-2x^3+1997x^2+2016$

$=\left(x^3-x^2\right)^2+\left(x^3-1\right)^2+22x^6+26x^4+1997x^2+2015>0,\ \forall x$.

Do đó bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\sqrt{2\log_x^2\frac{22}{3}-2\log_x\frac{22}{3}+5}-\sqrt{13}+\sqrt{\frac{2}{\log_{\frac{22}{3}}^2 x}-\frac{4}{\log_{\frac{22}{3}}x}+4}\right)\le 0.$$

Đặt $t=\log_x\frac{22}{3}$, ta có bất phương trình

$\sqrt{2t^2-2t+5}+\sqrt{2t^2-4t+4}\le\sqrt{13}$

$\Leftrightarrow\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}+\sqrt{(1-t)^2+1^2}\le\sqrt{\frac{13}{2}}$.

Đặt $\vec{u}=\left(t-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ và $\vec{v}=(1-t;1)$. Ta có $|\vec{u}|+|\vec{v}|\ge|\vec{u}+\vec{v}|=\sqrt{\frac{13}{2}}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{t-\frac{1}{2}}{1-t}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 2t-1=3-3t\Leftrightarrow t=\frac{4}{5}\Rightarrow x=\left(\frac{22}{3}\right)^{\frac{5}{4}}=12,06$.

Bài tập 12. Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để bất phương trình $4^x-m.2^{x+1}+3-2m\le 0$ có nghiệm thực.

A. $m\ge 2$. **B.** $m\le 3$. **C.** $m\le 5$. **D.** $m\ge 1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $4^x-m.2^{x+1}+3-2m\le 0\Leftrightarrow \left(2^x\right)^2-2m.2^x+3-2m\le 0$

Đặt $2^x=t\ (t>0)$.

Ta có bất phương trình tương đương với $t^2-2m.t+3-2m\le 0\Leftrightarrow \frac{t^2+3}{2t+2}\le m$

Xét $f(t)=\frac{t^2+3}{2t+2}$ trên $(0;+\infty)$.

$f'(t)=\frac{2t^2+4t-6}{(2t+2)^2}$; $f'(t)=0\Leftrightarrow \begin{cases}t=1\\ t=-3\end{cases}$.

Bảng biến thiên

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy để bất phương trình có nghiệm thực thì $m\ge 1$.

Bài tập 13. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $4\left(\log_2\sqrt{x}\right)^2+\log_2 x+m\ge 0$ nghiệm đúng với mọi giá trị $x\in(1;64)$.

A. $m\le 0$. **B.** $m\ge 0$. **C.** $m<0$. **D.** $m>0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $4\left(\log_2\sqrt{x}\right)^2+\log_2 x+m\ge 0\Leftrightarrow \left(\log_2 x\right)^2+\log_2 x+m\ge 0$.

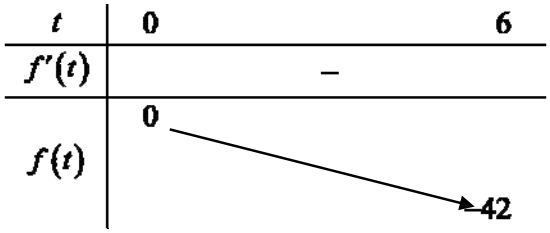
Đặt $\log_2 x=t$, khi $x\in(1;64)$ thì $t\in(0;6)$.

Khi đó, ta có $t^2+t+m\ge 0\Leftrightarrow m\ge -t^2-t\ (*)$.

Xét hàm số $f(t)=-t^2-t$ với $t\in(0;6)$.

Ta có $f'(t)=-2t-1<0,\forall t\in(0;6)$.

Ta có bảng biến thiên:



Bất phương trình đã cho đúng với mọi $x \in (1;64)$ khi và chỉ khi bất phương trình $(*)$ đúng với mọi $t \in (0;6) \Leftrightarrow m \geq 0$.

Bài tập 14. Có bao nhiêu giá trị dương của tham số thực m để bất phương trình $\sqrt{\log_2^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 3} \geq m^2 \left(\log_4 x^2 - 3\right)$ có nghiệm duy nhất thuộc $[32;+\infty)$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x > 0 \\ \log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \dfrac{1}{2} \\ x \geq 8 \end{cases}$.

Hàm số xác định trên $[32;+\infty)$.

$\sqrt{\log_2^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 3} \geq m^2 \left(\log_4 x^2 - 3\right) \Leftrightarrow \sqrt{\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3} \geq m^2 \left(\log_2 x - 3\right)$.

Đặt $t = \log_2 x$. Khi $x \geq 32$, ta có miền giá trị của t là $[5;+\infty)$.

Bất phương trình có dạng: $\sqrt{t^2 - 2t - 3} \geq m^2 (t-3) \Leftrightarrow m^2 \leq \dfrac{\sqrt{t^2 - 2t - 3}}{t-3} \Leftrightarrow m^2 \leq \sqrt{\dfrac{t+1}{t-3}}$.

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t+1}{t-3}$ trên $[5;+\infty)$ có $f'(t) = \dfrac{-4}{(t-3)^2}$ nên hàm số nghịch biến trên $[5;+\infty)$

.

Do $\lim\limits_{x \to +\infty} f(t) = 1$ và $f(5) = 3$ nên ta có $1 < f(t) \leq 3$.

Do với mỗi t có duy nhất một giá trị x nên để bất phương trình đãcho có nghiệm duy nhất thuộc $[32;+\infty)$ khi và chỉ bất phương trình $m^2 \leq \sqrt{f(t)}$ có nghiệm duy nhất trên $[5;+\infty)$.

Khi đó: $m^2 = \sqrt{3} \Leftrightarrow m = \sqrt[4]{3}$. Do đó không có số nguyên dương m thỏa mãn.

Bài tập 15. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $9^{\sqrt{x^2-3x+m}} + 2.3^{\sqrt{x^2-3x+m}-2+x} < 3^{2x-3}$ có nghiệm?

A. 6. **B.** 4. **C.** 9. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $x^2 - 3x + m \geq 0$ $(*)$

$9^{\sqrt{x^2-3x+m}} + 2.3^{\sqrt{x^2-3x+m}-2+x} < 3^{2x-3} \Leftrightarrow 3^{2\left(\sqrt{x^2-3x+m}-x\right)} + \dfrac{2}{9}.3^{\sqrt{x^2-3x+m}-x} - \dfrac{1}{27} < 0$

$\Leftrightarrow 0 < 3^{\sqrt{x^2-3x+m}-x} < 3^{-2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+m} - x < -2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+m} < x - 2$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+m \ge 0 \\ x-2>0 \\ x^2-3x+m < x^2-4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+m \ge 0 \\ x>2 \\ x<4-m \end{cases} \Rightarrow 4-m>2 \Leftrightarrow m<2.$$

Do m nguyên dương nên $m=1$ thỏa mãn (*).

Bài tập 16. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2\left(5^x-1\right).\log_2\left(2.5^x-2\right) \ge m$ có nghiệm với mọi $x \ge 1$.

A. $m \ge 6$. **B.** $m>6$. **C.** $m \le 6$. **D.** $m<6$.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện của bất phương trình: $x>0$.

Ta có $\log_2\left(5^x-1\right).\log_2\left(2.5^x-2\right) \ge m \Leftrightarrow \log_2\left(5^x-1\right).\left[1+\log_2\left(5^x-1\right)\right] \ge m \ (1)$.

Đặt $t=\log_2\left(5^x-1\right)$, với $x \ge 1$ ta có $t \ge 2$. Khi đó (1) trở thành $m \le t^2+t \ (2)$.

Xét hàm số $f(t)=t^2+t$ trên $[2;+\infty)$ ta có $f'(t)=2t+1>0$, $\forall t \in [2;+\infty)$.

Do đó để bất phương trình đã cho có nghiệm với mọi $t \ge 2$ thì $m \le \min\limits_{[2;+\infty)} f(t)$ hay $m \le 6$.

Bài tập 17. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $m.4^x+(m-1).2^{x+2}+m-1>0$ nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$?

A. $m \le 3$. **B.** $m \ge 1$. **C.** $-1 \le m \le 4$. **D.** $m \ge 0$.

Lời giải

Chọn B

Bất phương trình $\Leftrightarrow m.4^x+4(m-1).2^x+m-1>0 \Leftrightarrow m\left(4^x+4.2^x+1\right)>1+4.2^x$

$$\Leftrightarrow m>\frac{1+4.2^x}{4^x+4.2^x+1}$$

Đặt $2^x=t$ (Điều kiện $t>0$). Khi đó $m>\dfrac{4t+1}{t^2+4t+1}$. Để bất phương trình ban đầu nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$ thì bất phương trình $m>\dfrac{4t+1}{t^2+4t+1}$ nghiệm đúng $\forall t>0$.

Đặt $f(t)=\dfrac{4t+1}{t^2+4t+1} \Rightarrow f'(t)=-\dfrac{4t^2+2t}{\left(t^2+4t+1\right)^2}<0, \forall t>0$.

Hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$. Khi đó $m>\dfrac{4t+1}{t^2+4t+1}$ $\forall t>0$ khi và chỉ khi $m \ge f(0)=1$

Bài tập 18. Tìm tất cả các giá trị của tham số m bất phương trình $4^{x-1}-m\left(2^x+1\right)>0$ có nghiệm $\forall x \in \mathbb{R}$.

A. $m \in (-\infty;0]$. **B.** $m \in (0;+\infty)$.

C. $m \in (0;1)$. **D.** $m \in (-\infty;0) \cup (1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $4^{x-1}-m\left(2^x+1\right)>0 \Leftrightarrow m<\dfrac{4^{x-1}}{2^x+1} \Leftrightarrow m<\dfrac{4^x}{4\left(2^x+1\right)}$.

Đặt $t=2^x, t>0$. Yêu cầu bài toán tương đương với $m<\dfrac{t^2}{4(t+1)}, \forall t\in(0;\ +\infty)$.

Đặt $f(t)=\dfrac{t^2}{4(t+1)}, t>0$, $f'(t)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{2t(t+1)-t^2}{(t+1)^2}\right)=\dfrac{1}{4}.\dfrac{t^2+2t}{(t+1)^2}$.

$f'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=-2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên (Bố sung các đầu mũi tên trong bbt là $\pm\infty$ vào nhé)

t	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(t)$		↗		↘	‖	↘	0	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên có $m\le 0$.

Dạng 3: Phương pháp logarit hóa

1. Phương pháp

Với bất phương tình $a^{f(x)}>b^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a>1 \\ f(x)>g(x).\log_a b \end{cases} \\ \begin{cases} 0<a<1 \\ f(x)<g(x).\log_a b \end{cases} \end{array}\right.$

2. Bài tập

Bài tập 1. Nghiệm của bất phương trình $8^{\frac{x}{x+2}}>36.3^{2-x}$ là

A. $\left[\begin{array}{l} -3<x<2 \\ x>4 \end{array}\right.$.

B. $\left[\begin{array}{l} -\log_2 6<x<-2 \\ x>4 \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} -4<x<-2 \\ x>1 \end{array}\right.$.

D. $\left[\begin{array}{l} -\log_3 18<x<-2 \\ x>4 \end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $8^{\frac{x}{x+2}}>36.3^{2-x} \Leftrightarrow 2^{\frac{x-4}{x+2}}>3^{4-x} \Leftrightarrow \log_3 2^{\frac{x-4}{x+2}}>\log_3 3^{4-x}$

$$\Leftrightarrow \frac{x-4}{x+2}\log_3 2>4-x \Leftrightarrow (x-4)\left(\frac{\log_3 2}{x+2}+1\right)>0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-4>0 \\ \begin{cases} x-4<0 \\ \dfrac{\log_3 2}{x+2}+1<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>4 \\ \begin{cases} x<4 \\ \dfrac{\log_3 2+2+x}{x+2}<0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>4 \\ \begin{cases} x<4 \\ \dfrac{\log_3 18+x}{x+2}<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>4 \\ \begin{cases} x<4 \\ -\log_3 18<x<-2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>4 \\ -\log_3 18<x<-2 \end{array}\right.$$

Bài tập 2. Bất phương trình $2^x.5^{\frac{2x}{x+1}}<10$ có tập nghiệm là $(-\infty;-b)\cup(-a;a)$. Khi đó $b-a$ bằng

A. $\log_2 5$. **B.** $-\log_5^2$. **C.** 1. **D.** $2+\log_2 5$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $2^x.5^{\frac{2x}{x+1}}<10 \Leftrightarrow \dfrac{2^x.5^{\frac{2x}{x+1}}}{2.5}<1 \Leftrightarrow 2^{x-1}.5^{\frac{x-1}{x+1}}<1 \Leftrightarrow \log_5\left(2^{x-1}.5^{\frac{x-1}{x+1}}\right)<\log_5 1$

$\Leftrightarrow (x-1).\log_5 2+\dfrac{x-1}{x+1}<0 \Leftrightarrow (x-1).\left(\log_5 2+\dfrac{1}{x+1}\right)<0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-1).(\mathrm{x}.\log_5 2+\log_5 2+1)}{x+1}<0.$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-\log_2 10$	-1	1	$+\infty$
VT	$-$	$+$	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu ta có $\dfrac{(x-1).(x.\log_5 2+\log_5 2+1)}{x+1}<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x<1 \\ -\infty<x<-\log_2 10 \end{array}\right.$.

Do đó $\begin{cases} a=1 \\ b=\log_2 10 \end{cases} \Rightarrow b-a=\log_2 5.$

Bài tập 3. Có bao nhiêu số nguyên dương m trong đoạn $[-2018;2018]$ sao cho bất phương trình sau đúng với mọi $x\in(1;100)$: $(10x)^{m+\frac{\log x}{10}}\geq 10^{\frac{11}{10}\log x}$.

A. 2018. **B.** 4026. **C.** 2013. **D.** 4036.

Lời giải

Chọn A

$(10x)^{m+\frac{\log x}{10}}\geq 10^{\frac{11}{10}\log x} \Leftrightarrow \left(m+\dfrac{\log x}{10}\right)(\log x+1)\geq \dfrac{11}{10}\log x \Leftrightarrow (\log x+10m)(\log x+1)-11\log x\geq 0$

$\Leftrightarrow 10m(\log x+1)+\log^2 x-10\log x\geq 0$.

Do $x\in(1;100)\Rightarrow \log x\in(0;2)$. Do đó

$10m(\log x+1)+\log^2 x-10\log x\geq 0 \Leftrightarrow 10m\geq \dfrac{10\log x-\log^2 x}{\log x+1}$.

Đặt $t=\log x$, $t\in(0;2)$, xét hàm số $f(t)=\dfrac{10t-t^2}{t+1}$. Ta có: $f'(t)=\dfrac{10-2t-t^2}{(t+1)^2}>0\ \forall t\in(0;2)$.

Do đó $f(0)<f(t)<f(2) \Leftrightarrow 0<f(t)<\dfrac{16}{3}$.

Để $10m\geq \dfrac{10\log x-\log^2 x}{\log x+1}$ đúng với mọi $x\in(1;100)$ thì $10m\geq \dfrac{16}{3}\Rightarrow m\geq \dfrac{8}{15}$.

Do đó $m\in\left[\dfrac{8}{15};2018\right]$ hay có 2018 số thỏa mãn.

Dạng 4: Phương pháp sử dụng tính đơn điệu

1. Phương pháp

Nếu hàm số $y=f(x)$ luôn đồng biến trên D thì $f(u)>f(v)\Leftrightarrow u>v,\ \forall u,v\in D$.

Nếu hàm số $y=f(x)$ luôn nghịch biến trên D thì $f(u)>f(v)\Leftrightarrow u<v,\ \forall u,v\in D$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $2^{2x^2-15x+100}-2^{x^2+10x-50}+x^2-25x+150<0$

A. 6. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Đặt $a=2x^2-15x+100$; $b=x^2+10x-50$ ta có bất phương trình:

$2^a-2^b+a-b<0 \Leftrightarrow 2^a+a<2^b+b \Leftrightarrow a<b$

(do hàm số $y=2^x+x$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$)

Với $a<b \Leftrightarrow 2x^2-15x+100<x^2+10x-50 \Leftrightarrow x^2-25x+150<0$

$\Leftrightarrow x\in(10;15)$. Vậy bất phương trình có 4 nghiệm nguyên.

Bài tập 2. Tìm số nguyên m nhỏ nhất để bất phương trình $\log_3\left(x^2+x+1\right)+2x^3\le 3x^2+\log_3 x+m-1$ (ẩn x) có ít nhất hai nghiệm phân biệt.

A. $m=3$. **B.** $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-1$.

Lời giải

Chọn B

$\log_3\left(x^2+x+1\right)+2x^3\le 3x^2+\log_3 x+m-1 \quad (1)$

Điều kiện $x>0$.

$(1)\Leftrightarrow \log_3\left(\dfrac{x^2+x+1}{x}\right)+2x^3-3x^2\le m-1 \Leftrightarrow \log_3\left(1+x+\dfrac{1}{x}\right)+2x^3-3x^2\le m-1$.

Xét $f(x)=\log_3\left(1+x+\dfrac{1}{x}\right)+2x^3-3x^2$, với $x>0$.

$f'(x)=\dfrac{1-\dfrac{1}{x^2}}{\left(1+x+\dfrac{1}{x}\right)\ln 3}+6x^2-6x$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Với $x\in(0;1)\Rightarrow f'(x)<0$; với $x\in(1;+\infty)\Rightarrow f'(x)>0$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy bất phương trình có ít nhất hai nghiệm $\Leftrightarrow m-1>0\Leftrightarrow m>1$. Vậy $m=2$.

Bài tập 3. Gọi a là số thực lớn nhất để bất phương trình $x^2-x+2+a\ln\left(x^2-x+1\right)\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $a\in(2;3]$. **B.** $a\in(8;+\infty)$. **C.** $a\in(6;7]$. **D.** $a\in(-6;-5]$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t=x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$ suy ra $t\ge\dfrac{3}{4}$

Bất phương trình $x^2-x+2+a\ln\left(x^2-x+1\right)\ge 0\Leftrightarrow t+a\ln t+1\ge 0\Leftrightarrow a\ln t\ge -t-1$

Trường hợp 1: $t=1$ khi đó $a\ln t\ge -t-1$ luôn đúng với mọi a.

Trường hợp 2: $\dfrac{3}{4}\le t<1$

Ta có $a\ln t\ge -t-1,\ \forall t\in\left[\dfrac{3}{4};1\right)\Leftrightarrow a\le\dfrac{-t-1}{\ln t},\forall t\in\left[\dfrac{3}{4};1\right)$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{-t-1}{\ln t}\Rightarrow f'(t)=-\dfrac{\ln t-1-\dfrac{1}{t}}{\ln^2 t}\geq 0,\forall t\in\left[\dfrac{3}{4};1\right)$ do đó

$a\leq\dfrac{-t-1}{\ln t},\forall t\in\left[\dfrac{3}{4};1\right)\Leftrightarrow a\leq\dfrac{-7}{4\ln\dfrac{3}{4}}$

Trường hợp 3: $t>1$

Ta có $a\ln t\geq -t-1,\ \forall t\in(1;+\infty)\Leftrightarrow a\geq\dfrac{-t-1}{\ln t},\forall t\in(1;+\infty)$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{-t-1}{\ln t}\Rightarrow f'(t)=-\dfrac{\ln t-1-\dfrac{1}{t}}{\ln^2 t},\ \forall t\in(1;+\infty)$.

Xét hàm số $g(t)=\ln t-1-\dfrac{1}{t}\Leftrightarrow g'(t)=\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t^2}>0$

Vậy $g(t)=0$ có tối đa một nghiệm.

Vì $g(1)=-2;\lim\limits_{t\to+\infty}g(t)=+\infty$ vậy $g(t)=0$ có duy nhất một nghiệm trên $(1;+\infty)$

Do đó $f'(t)=0$ có duy nhất một nghiệm là t_0. Khi đó $\ln t_0=\dfrac{t_0+1}{t_0}$ suy ra $f(t_0)=-t_0$

Bảng biến thiên

t	1		t_0		$+\infty$
f'	$\|\|$	$+$	0	$-$	
f	$\|\|$	$-\infty\nearrow$	$-t_0$	$\searrow$	$-\infty$

Vậy $a\geq\dfrac{-t-1}{\ln t},\forall t\in(1;+\infty)\Leftrightarrow a\geq -t_0$.

Vậy $-t_0\leq a\leq\dfrac{-7}{4\ln\dfrac{3}{4}}$.

Vậy số thực a thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $a\in(6;7]$.

Bài tập 4. Biết tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình $4^{\sin^2 x}+5^{\cos^2 x}\leq m.7^{\cos^2 x}$ có nghiệm là $m\in\left[\dfrac{a}{b};+\infty\right)$ với a,b là các số nguyên dương và $\dfrac{a}{b}$ tối giản. Tổng $S=a+b$ là:

A. $S=13$. **B.** $S=15$. **C.** $S=9$. **D.** $S=11$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $4^{\sin^2 x}+5^{\cos^2 x}\leq m.7^{\cos^2 x}\Leftrightarrow 4.\left(\dfrac{1}{28}\right)^{\cos^2 x}+\left(\dfrac{5}{7}\right)^{\cos^2 x}\leq m$.

Xét $f(x)=4.\left(\frac{1}{28}\right)^{\cos^2 x}+\left(\frac{5}{7}\right)^{\cos^2 x}$ với $x\in\mathbb{R}$. Do $\begin{cases}\left(\frac{1}{28}\right)^{\cos^2 x}\geq\frac{1}{28}\\ \left(\frac{5}{7}\right)^{\cos^2 x}\geq\frac{5}{7}\end{cases}$ nên $f(x)\geq\frac{4}{28}+\frac{5}{7}$ hay

$f(x)\geq\frac{6}{7}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $\cos^2 x=1\Leftrightarrow\sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi$.

Vậy $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x)=\frac{6}{7}$. Bất phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $m\geq\min\limits_{\mathbb{R}} f(x)\Leftrightarrow m\geq\frac{6}{7}$ hay

$m\in\left[\frac{6}{7};+\infty\right)\Rightarrow S=13$.

Bài tập 5. Với giá trị nào của tham số m thì bất phương trình $2^{\sin^2 x}+3^{\cos^2 x}\geq m.3^{\sin^2 x}$ có nghiệm?

A. $m\leq 4$. **B.** $m\geq 4$. **C.** $m\leq 1$. **D.** $m\geq 1$.

Lời giải

Chọn A

Chia hai vế của bất phương trình cho $3^{\sin^2 x}>0$, ta được

$\left(\frac{2}{3}\right)^{\sin^2 x}+3.\left(\frac{1}{9}\right)^{\sin^2 x}\geq m$

Xét hàm số $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{\sin^2 x}+3.\left(\frac{1}{9}\right)^{\sin^2 x}$ là hàm số nghịch biến.

Ta có: $0\leq\sin^2 x\leq 1$ nên $1\leq y\leq 4$

Vậy bất phương trình có nghiệm khi $m\leq 4$. Chọn đáp án A

Bài tập 6. Tìm số nguyên m nhỏ nhất để bất phương trình $\log_3\left(x^2+x+1\right)+2x^3\leq 3x^2+\log_3 x+m-1$ (ẩn x) có ít nhất hai nghiệm phân biệt.

A. $m=3$. **B.** $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-1$.

Lời giải

Chọn B

$\log_3\left(x^2+x+1\right)+2x^3\leq 3x^2+\log_3 x+m-1\quad(1)$

Điều kiện $x>0$.

$(1)\Leftrightarrow\log_3\left(\frac{x^2+x+1}{x}\right)+2x^3-3x^2\leq m-1\Leftrightarrow\log_3\left(1+x+\frac{1}{x}\right)+2x^3-3x^2\leq m-1$.

Xét $f(x)=\log_3\left(1+x+\frac{1}{x}\right)+2x^3-3x^2$, với $x>0$.

$f'(x)=\frac{1-\frac{1}{x^2}}{\left(1+x+\frac{1}{x}\right)\ln 3}+6x^2-6x$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Với $x\in(0;1)\Rightarrow f'(x)<0$; với $x\in(1;+\infty)\Rightarrow f'(x)>0$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy bất phương trình có ít nhất hai nghiệm $\Leftrightarrow m-1>0 \Leftrightarrow m>1$. Vậy $m=2$.

Bài tập 7. Biết tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\left(\sqrt{x^2-x+4}+1\right)+2\log_5\left(x^2-x+5\right)<3$ là $(a;b)$.

Khi đó tổng $a+2b$ bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x)=\log_3\left(\sqrt{x^2-x+4}+1\right)+2\log_5\left(x^2-x+5\right)$.

$$\Rightarrow f'(x)=(2x-1)\left(\frac{1}{2\left(\sqrt{x^2-x+4}+1\right)\sqrt{x^2-x+4}\ln 3}+\frac{2}{\left(x^2-x+5\right)\ln 5}\right)$$

Dễ đánh giá $g(x)=\dfrac{1}{2\left(\sqrt{x^2-x+4}+1\right)\sqrt{x^2-x+4}\ln 3}+\dfrac{2}{\left(x^2-x+5\right)\ln 5}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	2	$\searrow$		$\nearrow$	5

Có $f(0)=f(1)=3$ và dựa vào bảng biến thiên ta có $f(x)<3 \Leftrightarrow x\in(0;1)$

Vậy $a=0;b=1$; suy ra $a+2b=2$

Bài tập 8. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số a $(a>0)$ thỏa mãn $\left(2^a+\dfrac{1}{2^a}\right)^{2017}\le\left(2^{2017}+\dfrac{1}{2^{2017}}\right)^a$.

A. $0<a<1$. **B.** $1<a<2017$. **C.** $a\ge 2017$. **D.** $0<a\le 2017$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\left(2^a+\dfrac{1}{2^a}\right)^{2017}\le\left(2^{2017}+\dfrac{1}{2^{2017}}\right)^a$

$$\Rightarrow 2017\log_2\left(2^a+\frac{1}{2^a}\right)\le a\log_2\left(2^{2017}+\frac{1}{2^{2017}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\log_2\left(2^a+\frac{1}{2^a}\right)}{a} \le \frac{\log_2\left(2^{2017}+\frac{1}{2^{2017}}\right)}{2017}.$$

Xét hàm số $y=f(x)=\dfrac{\log_2\left(2^x+\frac{1}{2^x}\right)}{x}=\dfrac{\log_2\left(4^x+1\right)-x}{x}=\dfrac{\log_2\left(4^x+1\right)}{x}-1$.

Ta có $y'=\dfrac{1}{\ln 2}\left[\dfrac{\frac{\left(4^x+1\right)'}{4^x+1}.x-\ln\left(4^x+1\right)}{x^2}\right]=\dfrac{1}{\ln 2}\left[\dfrac{4^x.\ln 4.x-\left(4^x+1\right)\ln\left(4^x+1\right)}{x^2\left(4^x+1\right)}\right]<0$

$$y'=\frac{1}{\ln 2}\left[\frac{4^x.\ln 4^x-\left(4^x+1\right)\ln\left(4^x+1\right)}{x^2\left(4^x+1\right)}\right]<0,\ \forall x>0.$$

Nên $y=f(x)$ là hàm giảm trên $(0;+\infty)$.

Do đó $f(a)\le f(2017),(a>0)$ khi $0<a\le 2017$.

Bài tập 9. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $4\left(\log_2\sqrt{x}\right)^2+\log_2 x+m\ge 0$ nghiệm đúng với mọi giá trị $x\in(1;64)$.

A. $m\le 0$. **B.** $m\ge 0$. **C.** $m<0$. **D.** $m>0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $4\left(\log_2\sqrt{x}\right)^2+\log_2 x+m\ge 0 \Leftrightarrow \left(\log_2 x\right)^2+\log_2 x+m\ge 0$.

Đặt $\log_2 x=t$, khi $x\in(1;64)$ thì $t\in(0;6)$.

Khi đó, ta có $t^2+t+m\ge 0 \Leftrightarrow m\ge -t^2-t$ $(*)$.

Xét hàm số $f(t)=-t^2-t$ với $t\in(0;6)$.

Ta có $f'(t)=-2t-1<0,\forall t\in(0;6)$.

Ta có bảng biến thiên:

t	0		6
$f'(t)$		$-$	
$f(t)$	0	↘	-42

Bất phương trình đã cho đúng với mọi $x\in(1;64)$ khi và chỉ khi bất phương trình $(*)$ đúng với mọi $t\in(0;6)\Leftrightarrow m\ge 0$.

Bài tập 10. Giả sử $S=(a,b]$ là tập nghiệm của bất phương trình $5x+\sqrt{6x^2+x^3-x^4}\log_2 x>\left(x^2-x\right)\log_2 x+5+5\sqrt{6+x-x^2}$. Khi đó $b-a$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ 6+x-x^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ -2 \le x \le 3 \end{cases}$. $D=(0;3]$.

$5x+\sqrt{6x^2+x^3-x^4}\log_2 x > \left(x^2-x\right)\log_2 x+5+5\sqrt{6+x-x^2}$

$\Leftrightarrow 5x+x\sqrt{6+x-x^2}\log_2 x > x(x-1)\log_2 x+5+5\sqrt{6+x-x^2}$

$\Leftrightarrow (x-1)(5-x\log_2 x)+\sqrt{6+x-x^2}\left(x\log_2 x-5\right)>0$

$\Leftrightarrow (5-x\log_2 x)\left(x-1-\sqrt{6+x-x^2}\right)>0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5-x\log_2 x>0 \\ x-1-\sqrt{6+x-x^2}>0 \end{cases} (I) \\ \begin{cases} 5-x\log_2 x<0 \\ x-1-\sqrt{6+x-x^2}<0 \end{cases} (II) \end{array}\right.$.

 Giải hệ (I).

$\begin{cases} 5-x\log_2 x>0 (1) \\ x-1-\sqrt{6+x-x^2}>0 (2) \end{cases}$

Giải (1) $5-x\log_2 x>0$.

Xét hàm số $f(x)=x\left(\frac{5}{x}-\log_2 x\right)=xg(x)$ với $x\in(0;3]$

Ta có $g'(x)=-\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x\ln 2}<0 \forall x\in(0;3]$.

Lập bảng biến thiên

x	0		3
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$		↘	$\frac{5}{3}-\log_2 3\approx 0,08$

Vậy $f(x)=x\left(\frac{5}{x}-\log_2 x\right)>0 \forall x\in(0;3]$.

Xét bất phương trình (2): $\sqrt{6+x-x^2}<x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 6+x-x^2<(x-1)^2 \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-3x-5>0 \\ x>1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x>\frac{5}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x>\frac{5}{2}. \\ x>1 \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ (I) là $D=\left(\frac{5}{2};3\right]$.

□ Hệ (II) vô nghiệm.

Vậy $S=\left(\frac{5}{2},3\right]$.

$b-a=3-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$.

Bài tập 11. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(-9;9)$ của tham số m để bất phương trình $3\log x\le 2\log\left(m\sqrt{x-x^2}-(1-x)\sqrt{1-x}\right)$ có nghiệm thực?

A. 6. **B.** 7. **C.** 10. **D.** 11.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $\begin{cases}0<x<1\\ m\sqrt{x-x^2}-(1-x)\sqrt{1-x}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x<1\\ m\sqrt{x}-(1-x)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x<1\\ m>\frac{(1-x)}{\sqrt{x}}>0\end{cases}$.

Bất phương trình đã cho tương đương

$\log x^3\le\log\left(m\sqrt{x-x^2}-(1-x)\sqrt{1-x}\right)^2$

$\Leftrightarrow x^3\le\left(m\sqrt{x-x^2}-(1-x)\sqrt{1-x}\right)^2$

$\Leftrightarrow x\sqrt{x}\le\left(m\sqrt{x-x^2}-(1-x)\sqrt{1-x}\right)$

$\Leftrightarrow m\ge\frac{x\sqrt{x}+(1-x)\sqrt{1-x}}{\sqrt{x-x^2}}=\frac{x}{\sqrt{1-x}}+\frac{1-x}{\sqrt{x}}$.

Áp dụng bất đẳng thức cô si ta có

$\left(\frac{x}{\sqrt{1-x}}+\sqrt{1-x}\right)+\left(\frac{1-x}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)\ge 2\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}$.

Vì vậy $m\ge\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$.

Khảo sát hàm số $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$ trên $(0;1)$ ta được $f(x)\ge\sqrt{2}\approx 1,414$.

Vậy m có thể nhận được các giá trị $2,3,4,5,6,7,8$.

CHƯƠNG 3: NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

BÀI 1: NGUYÊN HÀM VÀ PHƯƠNG PHÁP TÌM NGUYÊN HÀM

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. NGUYÊN HÀM VÀ TÍNH CHẤT

1. Nguyên hàm

Định nghĩa: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K (K là khoảng hoặc đoạn hoặc nửa đoạn của $\mathbb{R}$). Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K nếu $F'(x)=f(x)$ với mọi $x\in K$.

Định lý 1: Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì với mỗi hằng số C, hàm số $G(x)=F(x)+C$ cũng là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K.

Định lý 2: Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì mọi nguyên hàm của $f(x)$ đều có dạng $F(x)+C$, với C là một hằng số.

Hai định lý trên cho thấy:

Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì $F(x)+C, C\in\mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của $f(x)$ trên K. Kí hiệu

$$\boxed{\int f(x)dx=F(x)+C.}$$

Chú ý: Biểu thức $f(x)dx$ chính là vi phân của nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$, vì $dF(x)=F'(x)dx=f(x)dx$.

2. Tính chất của nguyên hàm

Tính chất 1

$$\boxed{\int f'(x)dx=f(x)+C}$$

Tính chất 2

$\boxed{\int kf(x)dx=k\int f(x)dx}$, k là hằng số khác 0.

Tính chất 3

$$\boxed{\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx.}$$

3. Sự tồn tại của nguyên hàm

Định lý 3: Mọi hàm số *f(x)* liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K.

4. Bảng nguyên hàm

Nguyên hàm của hàm số sơ cấp	**Nguyên hàm của hàm số hợp $(u=u(x))$**	**Nguyên hàm của hàm số hợp $(u=ax+b;a\neq 0)$**
$\int dx=x+C$	$\int du=u+C$	$\int d(ax+b)=ax+b+C$
$\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C(\alpha\neq-1)$	$u=\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C(\alpha\neq-1)$	$\int(ax+b)^{\alpha}dx=\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C(\alpha\neq-$

$\int \frac{1}{x}dx = \ln\left\|x\right\| + C$	$\int \frac{1}{u}du = \ln\left\|u\right\| + C$	$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln\left\|ax+b\right\| + C$
$\int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} + C$	$\int \frac{1}{u^2}du = -\frac{1}{u} + C$	$\int \frac{1}{(ax+b)^2}dx = -\frac{1}{a}.\frac{1}{ax+b} + C$
$\int \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$	$\int \sqrt{u}du = \frac{2}{3}u\sqrt{u} + C$	$\int \sqrt{ax+b}dx = \frac{1}{a}.\frac{2}{3}(ax+b)\sqrt{ax+b} + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{u}}du = 2\sqrt{u} + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}}dx = \frac{1}{a}.2\sqrt{ax+b} + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^u du = e^u + C$	$\int e^{ax+b}dx = \frac{2}{a}e^{ax+b} + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\,(a>0, a\neq 1)$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C\,(a>0, a\neq 1)$	$\int a^{mx+n}dx = \frac{1}{m}.\frac{a^{mx+n}}{\ln a} + C\,(a>0, a\neq 1)$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \sin u du = -\cos u + C$	$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \cos u du = \sin u + C$	$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + C$
$\int \tan x dx = -\ln\left\|\cos x\right\| + C$	$\int \tan u du = -\ln\left\|\cos u\right\| + C$	$\int \tan(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\ln\left\|\cos(ax+b)\right\| +$
$\int \cot x dx = \ln\left\|\sin x\right\| + C$	$\int \cot u du = \ln\left\|\sin u\right\| + C$	$\int \cot(ax+b)dx = \frac{1}{a}\ln\left\|\sin(ax+b)\right\| + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 u}du = -\cot u + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u}du = \tan u + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\sin x}dx = \ln\left\|\tan\frac{x}{2}\right\| + C$	$\int \frac{1}{\sin u}du = \ln\left\|\tan\frac{u}{2}\right\| + C$	$\int \frac{dx}{\sin(ax+b)} = \frac{1}{a}\ln\left\|\tan\frac{ax+b}{2}\right\| + C$
$\int \frac{1}{\cos x}dx = \ln\left\|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\| +$	$\int \frac{1}{\cos u}du = \ln\left\|\tan\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\| +$	$\int \frac{1}{\cos(ax+b)}dx$ $= \frac{1}{a}\ln\left\|\tan\left(\frac{ax+b}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$

II. PHƯƠNG PHÁP TÍNH NGUYÊN HÀM

1. Phương pháp đổi biến số

Định lý 1: Nếu $\int f(u)du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ có đạo hàm liên tục thì:

$$\int f[u(x)].u'(x)dx = F[u(x)] + C$$

Hệ quả: Với $u = ax + b(a \neq 0)$ ta có

$$\boxed{\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.}$$

2. Phương pháp tính nguyên hàm từng phần:

Định lý 2: Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm liên tục trên K thì:

$$\boxed{\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.}$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Tìm nguyên hàm bằng các phép biến đổi sơ cấp

1. Phương pháp giải

- Biến đổi các hàm số dưới dấu nguyên hàm về dạng tổng, hiệu của các biểu thức chứa *x*, trong đó mỗi biểu thức chứa *x* là những dạng cơ bản có trong bảng nguyên hàm.
- Áp dụng các công thức nguyên hàm trong bảng nguyên hàm cơ bản để tìm nguyên hàm.

2. Bài tập

Bài tập 1. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \dfrac{2^x - 1}{e^x}$ là

A. $\dfrac{2^x}{e^x \ln 2} + e^{-x} + C$ **B.** $\dfrac{2^x}{e^x(\ln 2 - 1)} - e^{-x} + C$

C. $\dfrac{2^x}{e^x(\ln 2 - 1)} + e^{-x} + C$ **D.** $\dfrac{2^x}{e^x(\ln 2 - 1)} + e^{x} + C$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $\int \dfrac{2^x - 1}{e^x} dx = \int \left(\dfrac{2}{e}\right)^x dx - \int e^{-x} dx = \dfrac{2^x}{e^x(\ln 2 - 1)} + e^{-x} + C$.

Bài tập 2. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x(x+2)^{2019}$ là

A. $-\dfrac{(x+2)^{2021}}{2021} - \dfrac{(x+2)^{2020}}{1010} + C$ **B.** $\dfrac{(x+2)^{2020}}{2021} - \dfrac{(x+2)^{2018}}{1009} + C$

C. $\dfrac{(x+2)^{2021}}{2021} + \dfrac{(x+2)^{2020}}{1010} + C$ **D.** $\dfrac{(x+2)^{2021}}{2021} - \dfrac{(x+2)^{2020}}{1010} + C$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $\int x(x+2)^{2019}\,dx=\int\left[(x+2)-2\right](x+2)^{2019}\,dx$

$=\int(x+2)^{2020}\,dx-2\int(x+2)^{2019}\,dx=\dfrac{(x+2)^{2021}}{2021}-\dfrac{(x+2)^{2020}}{1010}+C$

Bài tập 3. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{e^{2x}+1}$ là

A. $x+\ln\sqrt{e^{2x}+1}+C$ **B.** $x-\dfrac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right)+C$

C. $\ln\left(e^{2x}+1\right)+C$ **D.** $x-\ln\left(e^{2x}+1\right)+C$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $\dfrac{1}{e^{2x}+1}=\dfrac{\left(e^{2x}+1\right)-e^{2x}}{e^{2x}+1}=1-\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$.

Do đó $\int\dfrac{1}{e^{2x}+1}dx=\int\left(1-\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\right)dx=\int dx-\dfrac{1}{2}\int\dfrac{d\left(e^{2x}+1\right)}{e^{2x}+1}=x-\dfrac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right)+C$

Bài tập 4. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}$ là:

A. $\dfrac{1}{6}\left[\left(\sqrt{x+2}\right)^3-\left(\sqrt{x-2}\right)^3\right]+C$ **B.** $\dfrac{1}{6}\left[\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}\right]+C$

C. $\dfrac{1}{6}\sqrt{x+2}+\dfrac{1}{6}(x-2)\sqrt{x-2}+C$ **D.** $\dfrac{1}{6}(x+2)\sqrt{x+2}-\dfrac{1}{6}\sqrt{x-2}+C$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $\int\dfrac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}dx=\int\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}{4}dx$

$=\dfrac{1}{4}\left[\dfrac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+2}-\dfrac{2}{3}(x-2)\sqrt{x-2}\right]+C=\dfrac{1}{6}(x+2)\sqrt{x+2}-\dfrac{1}{6}(x-2)\sqrt{x-2}+C$

Chú ý: Sử dụng kĩ thuật nhân liên hợp: $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}=\dfrac{a-b}{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}$.

Lưu ý: $\int\sqrt{ax+b}dx=\dfrac{2}{3a}(ax+b)\sqrt{ax+b}+C$.

Bài tập 5. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{5x-13}{x^2-5x+6}$ là:

A. $2\ln|x-3|-3\ln|x+2|+C$ **B.** $3\ln|x-3|+2\ln|x-2|+C$

C. $2\ln|x+3|+3\ln|x+2|+C$ **D.** $2\ln|x-3|+3\ln|x-2|+C$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $\frac{5x-13}{x^2-5x+6}=\frac{5x-13}{(x-2)(x-3)}$

Ta sẽ phân tích: $5x-13=A(x-2)+B(x-3)\ \ (1)$

Thế $x=2$ và $x=3$ lần lượt vào (1) ta có $B=3$ và $A=2$.

Khi đó $\int\frac{5x-13}{x^2-5x+6}dx=\int\frac{2(x-2)+3(x-3)}{(x-2)(x-3)}dx=\int\frac{2}{x-3}dx+\int\frac{3}{x-2}dx$

$=2\ln|x-3|+3\ln|x-2|+C$

Bài tập 6. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{1-x^4}{x^5+x}$ là:

A. $\ln|x|+\frac{1}{2}\ln(x^4+1)+C$ **B.** $\ln|x|-\ln(x^4+1)+C$

C. $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^4+1)+C$ **D.** $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^4+1)+C$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $\int\frac{1-x^4}{x^5+x}dx=\int\frac{(1+x^4)-2x^4}{x(x^4+1)}dx=\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{2x^3}{x^4+1}dx=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^4+1)+C$

Bài tập 7. Nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{3x^2+3x+3}{x^3-3x+2}$ là:

A. $\ln|x+2|+2\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+C$ **B.** $\ln|x+2|-2\ln|x-1|+\frac{3}{x-1}+C$

C. $2\ln|x+2|+\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+C$ **D.** $2\ln|x+2|+\ln|x-1|+\frac{3}{x-1}+C$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $\int\frac{3x^2+3x+3}{x^3-3x+2}dx=\int\frac{3x^2+3x+3}{(x-1)^2(x+2)}dx$.

Ta phân tích $3x^2+3x+3=A(x-1)^2+B(x-1)(x+2)+C(x+2)$.

Ta có thể dùng các giá trị riêng, tính ngay $A=1,C=3$ và $B=2$.

(thay $x=-2\Rightarrow A=1;x=1\Rightarrow C=3$ và $x=0\Rightarrow B=2$).

Khi đó $\int\frac{3x^2+3x+3}{(x-1)^2(x+2)}dx=\int\frac{1}{x+2}dx+2\int\frac{1}{x-1}dx+3\int\frac{1}{(x-1)^2}dx=\ln|x+2|+2\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+C$.

Lưu ý: Ta có kiến thức tổng quát dùng cho các nguyên hàm hữu tỉ $I=\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$, với $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức, cụ thể như sau:

- Nếu $\deg(P(x))\geq\deg(Q(x))$ thì ta thực hiện phép chia $P(x)$ cho $Q(x)$ (ở đây, kí hiệu $\deg(P(x))$ là bậc của đa thức $P(x)$).
- Khi $\deg(P(x))<\deg(Q(x))$ thì ta quan sát mẫu số $Q(x)$ ta tiến hành phân tích thành các nhân tử, sau đó, tách $P(x)$ theo các tổ hợp của các nhân tử đó. Đến đây, ta sẽ sử dụng đồng nhất thức (hoặc giá trị riêng) để đưa về dạng tổng của các phân thức.

Một số trường hợp đồng nhất thức thường gặp

Trường hợp 1: $\frac{1}{(ax+b)(cx+d)}=\frac{1}{ad-bc}\left(\frac{a}{ax+b}-\frac{c}{cx+d}\right)$.

Trường hợp 2: $\frac{mx+n}{(ax+b)(cx+d)}=\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{cx+d}=\frac{(Ax+Ba)x+Ad+Bb}{(ax+b)(cx+d)}$.

Ta đồng nhất thức $mx+n=(Ax+Ba)x+Ad+Bb\quad(1)$.

Cách 1. Phương pháp đồng nhất hệ số.

Đồng nhất đẳng thức, ta được $\begin{cases}Ac+Ba=m\\Ad+Bb=n\end{cases}$. Suy ra *A, B*.

Cách 2. Phương pháp giá trị riêng.

Lần lượt thay $x=-\frac{b}{a};x=-\frac{d}{c}$ vào hai vế của (1), tìm được *A, B*.

Trường hợp 3: $\frac{mx+n}{(ax+b)^2}=\frac{A}{ax+b}+\frac{B}{(ax+b)^2}$.

Trường hợp 4: $\frac{mx+n}{(ax+b)^2(cx+d)}=\frac{A}{(ax+b)^2}+\frac{B}{cx+d}+\frac{C}{ax+b}$

$\Rightarrow mx+n=A(cx+d)+B(ax+b)^2+C(ax+b)(cx+d)\quad(*)$

Lần lượt thay $x=-\frac{b}{a};x=-\frac{d}{c};x=0$ vào hai vế của (*) để tìm *A, B, C*.

Trường hợp 5: $\frac{1}{(x-m)(ax^2+bx+c)}=\frac{A}{x-m}+\frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}$ với $\Delta=b^2-4ac<0$.

Trường hợp 6: $\frac{1}{(x-a)^2+(x-b)^2}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}+\frac{C}{x-b}+\frac{D}{(x-b)^2}$.

Bài tập 8. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{2}{2x-1}; f(0)=1$ và $f(1)=2$. Giá trị của biểu thức $P=f(-1)+f(3)$ là:

A. $3\ln 5+\ln 2$ **B.** $3\ln 2+\ln 5$ **C.** $3+2\ln 5$ **D.** $3+\ln 15$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{2}{2x-1}dx=\ln|2x-1|+C=\begin{cases}\ln(2x-1)+C_1 \ khi\ x>\frac{1}{2}\\ \ln(1-2x)+C_2 \ khi\ x<\frac{1}{2}\end{cases}$$

Vì $\begin{cases}f(0)=1\\ f(1)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_2=1\\ C_1=2\end{cases}$.

Suy ra $f(x)=\begin{cases}\ln(2x-1)+2 \ khi\ x>\frac{1}{2}\\ \ln(1-2x)+1 \ khi\ x<\frac{1}{2}\end{cases}$.

Do đó $P=f(-1)+f(3)=3+\ln 3+\ln 5=3+\ln 15$

Bài tập 9. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, thỏa mãn $f'(x)=\frac{2}{x^2-1}; f(-3)+f(3)=2\ln 2$ và $f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=0$. Giá trị của biểu thức $P=f(-2)+f(0)+f(4)$ là:

A. $2\ln 2-\ln 5$ **B.** $6\ln 2+2\ln 3-\ln 5$ **C.** $2\ln 2+2\ln 3-\ln 5$ **D.** $6\ln 2-2\ln 5$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{2}{x^2-1}dx=\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$$

Hay $f(x)=\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C=\begin{cases}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+C_1 \ khi\ x>1\\ \ln\frac{1-x}{1+x}+C_2 \ khi -1<x<1\\ \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+C_3 \ khi\ x<-1\end{cases}$

Theo bài ra, ta có: $\begin{cases}f(-3)+f(3)=2\ln 2\\ f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1+C_3=2\ln 2\\ C_2=0\end{cases}$

Do đó $f(-2)+f(0)+f(4)=\ln 3+C_3+C_2+\ln\frac{3}{5}+C_1=2\ln 2+2\ln 3-\ln 5$.

Bài tập 10. Nguyên hàm $P=\int x.\sqrt[3]{x^2+1}dx$ là:

A. $P=\frac{3}{8}\left(x^2+1\right)\sqrt[3]{x^2+1}+C$ **B.** $P=\frac{3}{8}\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}+C$

C. $P=\frac{3}{8}\sqrt[3]{x^2+1}+C$ **D.** $P=\frac{3}{4}\left(x^2+1\right)\sqrt[3]{x^2+1}+C$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có: $\int x.\sqrt[3]{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\int\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{3}}d\left(x^2+1\right)=\frac{3}{8}\left(x^2+1\right)^{\frac{4}{3}}+C$.

Bài tập 11. Nguyên hàm của hàm số $\int\left(\sin x-\cos x\right)\sin xdx$ là:

A. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{4}\cos 2x+C$ **B.** $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$

C. $x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x+C$ **D.** $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $\int\left(\sin x-\cos x\right)\sin xdx=\int\left(\sin^2 x-\sin x\cos x\right)dx$

$=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}-\frac{\sin 2x}{2}\right)dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)+C$

Bài tập 12. Nguyên hàm của hàm số $\int\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$ là:

A. $-\tan x-\cot x+C$ **B.** $\tan x-\cot x+C$ **C.** $\tan x+\cot x+C$ **D.** $\cot x-\tan x+C$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $\int\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x.\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx=\tan x-\cot x+C$.

Bài tập 13. Nguyên hàm của hàm số $\int\frac{1}{4\cos^4 x-4\cos^2 x+1}dx$ là:

A. $\frac{\cot 2x}{2}+C$ **B.** $\tan 2x+C$ **C.** $\cot 2x+C$ **D.** $\frac{\tan 2x}{2}+C$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $\int\frac{1}{4\cos^4 x-4\cos^2 x+1}dx=\int\frac{1}{(2\cos^2 x-1)^2}dx=\int\frac{1}{\cos^2 2x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\cos^2 2x}d(2x)=\frac{\tan 2x}{2}+C$

Bài tập 14. Nguyên hàm của hàm số $\int \tan^3 x dx$ là:

A. $\frac{\tan^2 x}{2}+\ln\left|\cos x\right|+C$ **B.** $\frac{\tan^2 x}{2}-\ln\left|\sin x\right|+C$

C. $\frac{\tan^2 x}{2}-\ln\left|\cos x\right|+C$ **D.** $\frac{\tan^4 x}{4\cos^2 x}+C$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Từ $\tan^3 x=\tan x\left(1+\tan^2 x\right)-\tan x$

Suy ra $\int \tan^3 x dx=\int \tan x d\left(\tan x\right)+\int \frac{d\left(\cos x\right)}{\cos x}=\frac{\tan^2 x}{2}+\ln\left|\cos x\right|+C$.

Bài tập 15. Gọi $F\left(x\right)$ là nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\sin 2x\tan x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}$. Giá trị của $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$ là:

A. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\pi}{12}$ **B.** $\frac{\sqrt{3}+1}{2}-\frac{\pi}{12}$ **C.** $\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\pi}{12}$ **D.** $\frac{\sqrt{3}-1}{2}-\frac{\pi}{12}$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $F\left(x\right)=\int \sin 2x.\tan x dx=\int 2\sin x.\cos x.\frac{\sin x}{\cos x}dx=2\int \sin^2 x dx$.

Suy ra $F\left(x\right)=\int\left(1-\cos 2x\right)dx=x-\frac{\sin 2x}{2}+C$.

Theo giả thiết, ta có: $F\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\Leftrightarrow\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3}+C=\frac{\sqrt{3}}{4}\Rightarrow C=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}$.

Vậy $F\left(x\right)=x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}$.

Do đó $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}-\frac{\pi}{12}$.

Bài tập 16. Gọi $F\left(x\right)$ là nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\cos^4 2x$ thỏa mãn $F\left(0\right)=2019$. Giá trị của $F\left(\frac{\pi}{8}\right)$ là:

A. $\frac{3\pi+16153}{64}$ **B.** $\frac{3\pi+129224}{8}$ **C.** $\frac{3\pi+129224}{64}$ **D.** $\frac{3\pi-129224}{32}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $\cos^4 2x = \left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1+2\cos 4x+\cos^2 4x\right)$

$= \frac{1}{4}\left(1+2\cos 4x+\frac{1+\cos 8x}{2}\right) = \frac{1}{8}\left(3+4\cos 4x+\cos 8x\right)$

Do đó $F(x) = \frac{1}{8}\int\left(3+4\cos 4x+\cos 8x\right)dx = \frac{1}{8}\left(3x+\sin 4x+\frac{1}{8}\sin 8x\right)+C$

Mà $F(0) = 2019$ nên ta có $C = 2019$.

Vậy $F(x) = \frac{1}{8}\left(3x+\sin 4x+\frac{1}{8}\sin 8x\right)+2019$.

Do đó $F\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{3\pi+129224}{64}$

Bài tập 17. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{\cos^5 x}{1-\sin x}$, với $x \neq \frac{\pi}{2}+k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và thỏa mãn $F(\pi) = \frac{3}{4}$. Giá trị của $F\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ là:

A. $\frac{2}{3}$ **B.** 0. **C.** $\frac{5}{3}$ **D.** $\frac{1}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta thấy: $\frac{\cos^5 x}{1-\sin x} = \cos^3 x\left(1+\sin x\right) = \left(1-\sin^2 x\right)\cos x+\cos^3 x.\sin x$

$\Rightarrow F(x) = \int\left(1-\sin^2 x\right)d\left(\sin x\right)-\int\cos^3 x d\left(\cos x\right) = \sin x-\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\cos^4 x}{4}+C$

Theo giả thiết, ta có $F(\pi) = \frac{3}{4}$ nên $C = 1$.

Vậy $F(x) = \sin x-\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\cos^4 x}{4}+C$

Do đó $F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{3}$.

Chú ý:

Với $n \in \mathbb{N}^*$, ta có: $\int\cos^n x.\sin x dx = -\int\cos^n x d\left(\cos x\right) = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}+C$ và $\int\sin^n x.\cos x dx = \int\sin^n x d\left(\sin x\right) = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1}+C$.

Bài tập 18. Biết $\int\frac{\cos x}{5\sin x-9}dx = \frac{a}{b}\ln\left|5\sin x-9\right|+C, \left(a,b \in \mathbb{Z}^+\right)$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị $2a-b$ là

A. 10. **B.** –4.

C. 7. **D.** –3.

Hướng dẫn giải

CHỌN D

$\int \frac{\cos x}{5\sin x-9}dx=\frac{1}{5}\int \frac{d(5\sin x-9)}{5\sin x-9}=\frac{1}{5}\ln|5\sin x-9|+C$

Vậy $a=1,b=5.$ Nên $2a-b=-3.$

Bài tập 19. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=(1+\sin x)^2$ biết $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}.$

A. $F(x)=\frac{3}{2}x+2\cos x-\frac{1}{4}\sin 2x.$

B. $F(x)=\frac{3}{2}x-2\cos x-\frac{1}{4}\sin 2x.$

C. $F(x)=\frac{3}{2}x-2\cos x+\frac{1}{4}\sin 2x.$

D. $F(x)=\frac{3}{2}x+2\cos x+\frac{1}{4}\sin 2x.$

Hướng dẫn giải

CHỌN B

Ta có

$\int (1+\sin x)^2 dx=\int (1+2\sin x+\sin^2 x)dx=\int \left(1+2\sin x+\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx$

$=\frac{3}{2}x-2\cos x-\frac{1}{4}\sin 2x+c$

$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3\pi}{4}\Leftrightarrow \frac{3}{2}\frac{\pi}{2}-2\cos\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4}\sin\pi+c=\frac{3\pi}{4}\Leftrightarrow c=0.$

Vậy $F(x)=\frac{3}{2}x-2\cos x-\frac{1}{4}\sin 2x.$

Bài tập 20. Cho $\int \frac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}dx=F(x)+C$ và $F(\pi)=a+b.$ Tính $A=(a+b)^6.$

A. –2. **B.** 2. **C.** 1. **D.** –1.

Hướng dẫn giải

CHỌN C

Ta có: $F(x)=\int \frac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}dx=\int \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x+\cos x}dx$

$=\int \frac{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}{\sin x+\cos x}dx=\int (\cos x-\sin x)dx=\sin x+\cos x.$

$\Rightarrow F(\pi)=-1=a+b\Rightarrow A=1.$

Bài tập 21. Cho tích phân $\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = a$. Tính $A = 12\cot^2 2x$ theo a.

A. $4a^2$. **B.** $2a^2$. **C.** $3a^2$. **D.** a^2.

Hướng dẫn giải

CHỌN C

Ta có: $F(x) = \int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$

$= \tan x - \cot x.$

Theo đề:

$\tan x - \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x\cos x} = \frac{-2\cos 2x}{\sin 2x} = a$

$\Rightarrow \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = -\frac{a}{2}$

$A = 12.\frac{\cos^2 2x}{\sin^2 2x} = 12.\left(-\frac{a}{2}\right)^2 = 3a^2.$

Bài tập 22. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}}dx$ và $F(0) + 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Tính $2F(0) - F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $\frac{7}{9}$. **B.** $-\frac{7}{9}$. **C.** 0. **D.** 1

Lời giải

CHỌN B

Ta có

$d\left(\cos^2 x + 4\sin^2 x\right) = \left(-2\sin x\cos x + 8\sin x\cos x\right)dx = 6\sin x\cos x dx = 3\sin 2x dx$

$\Rightarrow \sin 2x dx = \frac{1}{3}d\left(\cos^2 x + 4\sin^2 x\right).$

Do đó :

$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(\cos^2 x + 4\sin^2 x\right)}{\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}} = \frac{2}{3}\int \frac{d\left(\cos^2 x + 4\sin^2 x\right)}{2\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}} = \frac{2}{3}\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x} + C$

$F(0) + 2F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3} + 2.\frac{4}{3} + 3C = 1 \Rightarrow C = -\frac{7}{9}.$

Vậy $2F(0) - F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.\frac{2}{3} + 2C - \frac{4}{3} - C = C = -\frac{7}{9}$

Bài tập 23. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{8-x^2}}$ trên khoảng $\left(-2\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$ thỏa mãn $F(2)=0$. Khi đó phương trình $F(x)=x$ có nghiệm là:

A. $x=0$ **B.** $x=1$ **C.** $x=-1$ **D.** $x=1-\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $F(x)=\int\dfrac{x}{\sqrt{8-x^2}}dx=-\int\dfrac{1}{2\sqrt{8-x^2}}d\left(8-x^2\right)=-\sqrt{8-x^2}+C$

Mặt khác $F(2)=0\Rightarrow-\sqrt{8-x^2}+C=0\Leftrightarrow C=2$

Vậy $F(x)=-\sqrt{8-x^2}+2$.

Xét phương trình $F(x)=x\Leftrightarrow-\sqrt{8-x^2}+2=x\Leftrightarrow\sqrt{8-x^2}=2-x\Leftrightarrow\begin{cases}2-x\ge0\\8-x^2=(2-x)^2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\le2\\2x^2-4x-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le2\\\left[\begin{array}{l}x=1-\sqrt{3}\\x=1+\sqrt{3}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=1-\sqrt{3}$$

Bài tập 24. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ và $F(1)=\dfrac{1}{2}$. Tổng $S=F(1)+F(2)+F(3)+...+F(2019)$ là

A. $\dfrac{2019}{2020}$ **B.** $\dfrac{2019.2021}{2020}$ **C.** $2018\dfrac{1}{2020}$ **D.** $-\dfrac{2019}{2020}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phân tích $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^4+2x^3+x^2}=\dfrac{2x+1}{x^2(x+1)^2}=\dfrac{2x+1}{\left(x^2+x\right)^2}$

Khi đó $F(x)=\int\dfrac{2x+1}{\left(x^2+x\right)^2}dx=\int\dfrac{1}{\left(x^2+x\right)^2}d\left(x^2+x\right)=-\dfrac{1}{x^2+x}+C$.

Mặt khác $F(1)=\dfrac{1}{2}\Rightarrow-\dfrac{1}{2}+C=\dfrac{1}{2}\Rightarrow C=1$.

Vậy $F(x)=-\dfrac{1}{x^2+x}+1=-\dfrac{1}{x(x+1)}+1=-\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)+1$.

Do đó $S=F(1)+F(2)+F(3)+...+F(2019)=-\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2019}-\frac{1}{2020}\right)+2019$

$=-\left(1-\frac{1}{2020}\right)+2019=2018+\frac{1}{2020}=2018\frac{1}{2020}$

Bài tập 25. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(0)=2\sqrt{2}, f(x)>0$ và $f(x).f'(x)=(2x+1)\sqrt{1+f^2(x)}, \forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị $f(1)$ là:

A. $6\sqrt{2}$ **B.** $\sqrt{10}$ **C.** $5\sqrt{3}$ **D.** $2\sqrt{6}$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $f(x).f'(x)=(2x+1)\sqrt{1+f^2(x)}\Leftrightarrow\frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=2x+1$.

Suy ra $\int\frac{f(x).f'(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}dx=\int(2x+1)dx\Leftrightarrow\int\frac{d\left(1+f^2(x)\right)}{2\sqrt{1+f^2(x)}}=\int(2x+1)dx\Leftrightarrow\sqrt{1+f^2(x)}=x^2+x+C$

Theo giả thiết $f(0)=2\sqrt{2}$, suy ra $\sqrt{1+\left(2\sqrt{2}\right)^2}=C\Leftrightarrow C=3$

Với $C=3$ thì $\sqrt{1+f^2(x)}=x^2+x+3\Rightarrow f(x)=\sqrt{\left(x^2+x+3\right)^2-1}$

Vậy $f(1)=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

Bài tập 26. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-2;1]$ thỏa mãn $f(0)=3$ và $\left(f(x)\right)^2.f'(x)=3x^2+4x+2$. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ là:

A. $2\sqrt[3]{42}$ **B.** $2\sqrt[3]{15}$ **C.** $\sqrt[3]{42}$ **D.** $\sqrt[3]{15}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $\left(f(x)\right)^2.f'(x)=3x^2+4x+2\quad(*)$

Lấy nguyên hàm hai vế của đẳng thức (*) ta được:

$\int\left(f(x)\right)^2.f'(x)dx=\int\left(3x^2+4x+2\right)dx\Leftrightarrow\frac{1}{3}f^3(x)=x^3+2x^2+2x+C\Leftrightarrow f^3(x)=3x^3+6x^2+6x+3C$

Theo giả thiết, ta có $f(0)=3$ nên

$\left(f(0)\right)^3=3\left(0^3+2.0^2+2.0+C\right)\Leftrightarrow 27=3C\Leftrightarrow C=9\Rightarrow f^3(x)=3x^3+6x^2+6x+27$

Ta tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=3x^3+6x^2+6x+27$ trên đoạn $[-2;1]$.

Ta có $g'(x)=9x^2+12x+6>0,\forall x\in[-2;1]$ nên đồng biến trên đoạn $[-2;1]$.

Vậy $\max\limits_{[-2;1]} f(x) = \sqrt[3]{\max\limits_{[-2;1]} g(x)} = \sqrt[3]{42}$.

Dạng 2: Phương pháp đổi biến dạng 1, đặt $u = u(x)$

1. Phương pháp giải

Định lí: Cho $\int f(u)du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì

$$\int f\left[u(x)\right]u'(x)dx = F\left[u(x)\right] + C$$

Các bước thực hiện đổi biến:

Xét $I = \int f\left(u(x)\right)u'(x)dx$

Bước 1: Đặt $u = u(x)$, suy ra $du = u'(x)dx$

Bước 2: Chuyển nguyên hàm ban đầu về ẩn u ta được $I = \int f(u)du = F(u) + C$, trong đó $F(u)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(u)$.

Bước 3: Trả về biến x ban đầu, ta có nguyên hàm cần tìm là $I = F\left(u(x)\right) + C$

Hệ quả: nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K và $a, b \in \mathbb{R}; a \neq 0$ ta có: $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x^2.e^{x^3+1}$, biết $F(-1) = \frac{1}{3}$ là:

A. $F(x) = \frac{1}{3}e^{x^3+1} + C$ **B.** $F(x) = \frac{1}{3}e^{x^3+1} + 2019$ **C.** $F(x) = \frac{1}{3}e^{x^3+1} + \frac{1}{3}$ **D.** $F(x) = \frac{1}{3}e^{x^3+1}$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đặt $u = x^3 + 1$ ta có $du = 3x^2dx \Rightarrow x^2dx = \frac{1}{3}du$

Suy ra $\int f(x)dx = \int e^u \frac{1}{3}du = \frac{1}{3}e^u + C$

Do đó $F(x) = \frac{1}{3}e^{x^3+1} + C$.

Mặt khác $F(-1) = \frac{1}{3}$ nên $C = 0$. Vậy $\int f(x)dx = \frac{1}{3}e^{x^3+1}$.

Lưu ý: Ta có thể viết như sau: $\int f(x)dx = \int x^2e^{x^3+1}dx = \frac{1}{3}\int e^{x^3+1}d\left(x^3+1\right) = \frac{1}{3}e^{x^3+1} + C$

Chú ý: Với các viết $x^2dx=\frac{1}{3}d\left(x^3+1\right)$, ta có thể tính nguyên hàm đã cho một cách đơn giản và nhanh gọn.

Bài tập 2. Nguyên hàm $M=\int\frac{2\sin x}{1+3\cos x}dx$ là:

A. $M=\frac{1}{3}\ln\left(1+3\cos x\right)+C$ **B.** $M=\frac{2}{3}\ln\left|1+3\cos x\right|+C$

C. $M=-\frac{2}{3}\ln\left|1+3\cos x\right|+C$ **D.** $M=-\frac{1}{3}\ln\left|1+3\cos x\right|+C$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đặt $u=1+3\cos x$, ta có $du=-3\sin xdx$ hay $2\sin xdx=-\frac{2}{3}du$.

Khi đó $M=-\frac{2}{3}\int\frac{1}{u}du=-\frac{2}{3}\ln\left|u\right|+C$

Vậy $M=\int\frac{2\sin x}{1+3\cos x}dx=-\frac{2}{3}\ln\left|1+3\cos x\right|+C$

Bài tập 3. $\mathrm{I}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(\mathrm{x}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2\mathrm{x}+2\left(1+\sin\mathrm{x}+\cos\mathrm{x}\right)}\mathrm{dx}=\frac{4-3\sqrt{\mathrm{a}}}{\mathrm{b}},\left(\mathrm{a},\mathrm{b}\in\mathbb{Z}^+\right)$. Tìm tỉ lệ $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{2}{1}$. **D.** $\frac{3}{1}$.

Hướng dẫn giải

CHỌN B

Đặt $\mathrm{t}=\sin\mathrm{x}+\cos\mathrm{x}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{dt}=\left(\cos\mathrm{x}-\sin\mathrm{x}\right)\mathrm{dx}=-\sqrt{2}\sin\left(\mathrm{x}-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{dx}\\ \sin 2\mathrm{x}=\mathrm{t}^2-1\end{cases}$

và $\mathrm{x}:0\to\frac{\pi}{4}$ thì $\mathrm{t}:1\to\sqrt{2}$.

$\Rightarrow\mathrm{I}_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_1^{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{t}^2-1+2\left(1+\mathrm{t}\right)}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\int\limits_1^{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{dt}}{\left(\mathrm{t}+1\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{\mathrm{t}+1}\Big|_1^{\sqrt{2}}=\frac{4-3\sqrt{2}}{4}$.

Bài tập 4. Cho $\int\cos^3\mathrm{x}\sin\mathrm{x}\mathrm{dx}=\mathrm{F}\left(\mathrm{x}\right)+\mathrm{C}$ và $\mathrm{F}\left(0\right)=\mathrm{a}+\mathrm{b}-\frac{1}{4}$.

Tính $\mathrm{A}=\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2+2018$.

A. 2018. **B.** 2016. **C.** 2022. **D.** 2020.

Hướng dẫn giải

CHỌN A

$\int \cos^3 x \sin x dx$

Đặt $u = \cos x \Rightarrow -du = \sin x dx$.

$\int \cos^3 x \sin x dx = -\int u^3 du = -\frac{u^4}{4} + C = -\frac{\cos^4 x}{4} + C$

$\Rightarrow F(0) = -\frac{1}{4} = a + b - \frac{1}{4} \Rightarrow a + b = 0.$

$A = a^3 + b^3 + 2018 = (a+b)^2 - 2ab(a+b) + 2018 = 2018.$

Chú ý: chú ý rằng với $a > 0$ và $m, n \in \mathbb{Z}; n > 0$ ta luôn có: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Bài tập 5. Nguyên hàm $R = \int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx$ là:

A. $R = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} \right| + C$

B. $R = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| + C$

C. $R = \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} \right| + C$

D. $R = \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| + C$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đặt $u = \sqrt{x+1} \Rightarrow u^2 = x+1$. Suy ra $x = u^2 - 1$ và $dx = 2udu$.

Khi đó $R = \int \frac{2u}{(u^2-1)u} du = \int \frac{2}{u^2-1} du = \int \left(\frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1} \right) du = \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + C$.

Vậy $R = \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| + C$

Bài tập 6. Nguyên hàm $S = \int x^3 \sqrt{x^2+9} dx$ là:

A. $S = \frac{(x^2+9)^2 \sqrt{x^2+9}}{5} - 3(x^2+9)\sqrt{x^2+9} + C$

B. $S = \frac{(x^2+9)^4 \sqrt{x^2+9}}{5} - 3(x^2+9)\sqrt{x^2+9} + C$

C. $S = \frac{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}{5} - 3(x^2+9)^2 \sqrt{x^2+9} + C$

D. $S = \frac{(x^2+9)^2 \sqrt{x^2+9}}{5} - 3\sqrt{x^2+9} + C$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Xét $S=\int x^3\sqrt{x^2+9}dx=\int x^2\sqrt{x^2+9}xdx$.

Đặt $u=\sqrt{x^2+9}\Rightarrow u^2=x^2+9$. Suy ra $x^2=u^2-9$ và $xdx=udu$.

Khi đó $S=\int\left(u^2-9\right)u.udu=\int\left(u^4-9u^2\right)du=\frac{u^5}{5}-3u^3+C$.

Vậy $S=\frac{\left(x^2+9\right)^2\sqrt{x^2+9}}{5}-3\left(x^2+9\right)\sqrt{x^2+9}+C$

Bài tập 7. Nguyên hàm $T=\int\frac{1}{x\sqrt{\ln x+1}}dx$ là:

A. $T=\frac{1}{2\sqrt{\ln x+1}}+C$ **B.** $T=2\sqrt{\ln x+1}+C$

C. $T=\frac{2}{3}\left(\ln x+1\right)\sqrt{\ln x+1}+C$ **D.** $T=\sqrt{\ln x+1}+C$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $T=\int\frac{1}{x\sqrt{\ln x+1}}dx=\int\frac{1}{\sqrt{\ln x+1}}d\left(\ln x+1\right)=2\sqrt{\ln x+1}+C$.

Bài tập 8. Nguyên hàm $U=\int\frac{\left(x-2\right)^{2020}}{\left(x+1\right)^{2022}}dx$ là:

A. $U=\frac{1}{3}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2021}+C$ **B.** $U=\frac{1}{6060}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2020}+C$

C. $U=\frac{1}{6063}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2021}+C$ **D.** $U=\frac{1}{6069}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2023}+C$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Xét $U=\int\frac{\left(x-2\right)^{2020}}{\left(x+1\right)^{2022}}dx=\int\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2020}\frac{1}{\left(x+1\right)^2}dx$

Đặt $u=\frac{x-2}{x+1}\Rightarrow du=\frac{3}{\left(x+1\right)^2}dx\Rightarrow\frac{1}{3}du=\frac{1}{\left(x+1\right)^2}dx$.

Suy ra. $U=\frac{1}{3}\int u^{2020}du=\frac{1}{6063}u^{2021}+C$. Vậy $U=\frac{1}{6063}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^{2021}+C$

Lưu ý:

$$\int\frac{\left(ax+b\right)^n}{\left(cx+d\right)^{n+2}}dx=\frac{1}{n+1}\frac{1}{ad-bd}\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{n+1}+C$$

Bài tập 9. Xét nguyên hàm $V=\int \frac{\ln^2 x}{x\left(1+\sqrt{\ln x+1}\right)}dx$. Đặt $u=1+\sqrt{1+\ln x}$, khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\frac{dx}{x}=\left(2u-2\right)du$ **B.** $V=\int \frac{\left(u^2-2u\right)^2}{u}.\left(2u-2\right)du$

C. $V=\frac{2}{5}u^5-\frac{5}{2}u^4+\frac{16}{3}u^3-4u^2+C$ **D.** $V=\frac{u^5}{5}+\frac{u^4}{2}-\frac{16}{3}u^3+4u^2+C$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đặt $u=1+\sqrt{1+\ln x}\Rightarrow \left(u-1\right)^2=1+\ln x\Leftrightarrow \ln x=u^2-2u\Rightarrow \frac{dx}{x}=\left(2u-2\right)du$.

Khi đó $V=\int \frac{\ln^2 x}{x\left(1+\sqrt{\ln x+1}\right)}dx=\int \frac{\left(u^2-2u\right)^2}{u}.\left(2u-2\right)du$

$=2\int \left(u^4-5u^3+8u^2-4u\right)du=\frac{2}{5}u^5-\frac{5}{2}u^4+\frac{16}{3}u^3-4u^2+C$

Bài tập 10. Gọi $F\left(x\right)$ là nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)=\sin^2 2x.\cos^3 2x$ thỏa $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$. Giá trị $F\left(2019\pi\right)$ là:

A. $F\left(2019\pi\right)=-\frac{1}{15}$ **B.** $F\left(2019\pi\right)=0$ **C.** $F\left(2019\pi\right)=-\frac{2}{15}$ **D.** $F\left(2019\pi\right)=\frac{1}{15}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $u=\sin 2x\Rightarrow du=2\cos 2xdx\Rightarrow \frac{1}{2}du=\cos 2xdx$

Ta có $F\left(x\right)=\int \sin^2 2x.\cos^3 2xdx=\frac{1}{2}\int u^2.\left(1-u^2\right)du=\frac{1}{2}\int \left(u^2-u^4\right)du$

$=\frac{1}{6}u^3-\frac{1}{10}u^5+C=\frac{1}{6}\sin^3 2x-\frac{1}{10}\sin^5 2x+C$

$F\left(\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow \frac{1}{6}\sin^3\frac{\pi}{2}-\frac{1}{10}\sin^5\frac{\pi}{2}+C=0\Leftrightarrow C=-\frac{1}{15}$

Vậy $F\left(x\right)=\frac{1}{6}\sin^3 2x-\frac{1}{10}\sin^5 2x-\frac{1}{15}$

Do đó $F\left(2019\pi\right)=-\frac{1}{15}$

Bài tập 11. Biết rằng $\int \frac{(2x+3)dx}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1} = -\frac{1}{g(x)} + C$ (với C là hằng số). Gọi S là tập nghiệm của phương trình $g(x) = 0$. Tổng các phần tử của S bằng:

A. 0. **B.** $-3+\sqrt{5}$ **C.** -3 **D.** $-3-\sqrt{5}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Vì $x(x+1)(x+2)(x+3)+1 = (x^2+3x)(x^2+3x+2)+1 = \left[(x^2+3x)+1\right]^2$ nên ta đặt $u = x^2+3x$, khi đó $du = (2x+3)dx$

Nguyên hàm ban đầu trở thành $\int \frac{du}{(u+1)^2} = -\frac{1}{u+1} + C$.

Suy ra $\int \frac{(2x+3)dx}{x(x+1)(x+2)(x+3)+1} = -\frac{1}{x^2+3x+1} + C$

Vậy $g(x) = x^2+3x+1; g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2+3x+1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-3-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$.

Do đó $S = \left\{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}; \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Tổng giá trị các phần tử của S bằng -3.

Bài tập 12. $I = \int \frac{3\cos 2x - \sin 4x}{2-\sin x - \cos x} dx = F(x) + C$. Tính $F(1)$, biết rằng $F(x)$ không chứa hệ số tự do.

A. $\frac{17}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{15}{3}$. **D.** $\frac{9}{3}$.

Hướng dẫn giải

CHỌN A

$$I = \int \frac{3\cos 2x - \sin 4x}{2-\sin x - \cos x} dx = \int \frac{(3-2\sin 2x)\cos 2x}{2-\sin x - \cos x} dx$$
$$= \int \frac{(3-2\sin 2x)(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{2-(\sin x + \cos x)} dx$$

Đặt $t = \sin x + \cos x \Rightarrow \begin{cases} dt = (\cos x - \sin x)dx \\ \sin 2x = t^2 - 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int\frac{\left[3-2\left(t^2-1\right)\right].t}{2-t}dt=\int\frac{2t^3-5t}{t-2}dt=\int\left(2t^2+4t+3+\frac{6}{t-2}\right)dt$$

$$=\left(\frac{2}{3}t^3+2t^2+3t+6\ln\left|t-2\right|\right)+C.$$

Dạng 3: Tìm nguyên hàm bằng cách đổi biến dạng 2

1. Phương pháp giải

Kiến thức cần nhớ:

Ta đã biết các đẳng thức sau:

$\sin^2 t+\cos^2 t=1$, với mọi $t\in\mathbb{R}$.

$1+\tan^2 t=\dfrac{1}{\cos^2 t},\forall t\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

$1+\cot^2 t=\dfrac{1}{\sin^2 t},\forall t\neq k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$

Với các bài toán sau đây thì ta không thể giải quyết ngay bằng nguyên hàm cơ bản cũng như đổi biến số ở dạng 1, đòi hỏi người học phải trang bị tư duy đổi biến theo kiểu "**lượng giác hóa**" dựa vào các hằng đẳng thức lượng giác cơ bản và một số biến đổi thích hợp, cụ thể ta xem xét các nguyên hàm sau đây:

Các kĩ thuật đổi biến dạng 2 thường gặp và cách xử lí.

Bài toán 1: Tính $A_1=\int\dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

Bài toán 1: Tính $A_1=\int\dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$

Đặt $x=\left|a\right|\sin t$, với $t\in\left(\dfrac{-\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ hoặc $x=\left|a\right|\cos t$ với $t\in\left(0;\pi\right)$

Bài toán 2: Tính $A_2=\int\dfrac{dx}{a^2+x^2}$

Bài toán 2: Tính $A_2=\int\dfrac{dx}{a^2+x^2}$

Đặt $x=\left|a\right|\tan t$, với $t\in\left(\dfrac{-\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Bài toán 3: Tính $A_3=\int\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}dx$

Bài toán 3: Tính $A_3=\int\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}dx$

Đặt $x=a\cos 2t$ với $t\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$

Bài toán 4: Tính $A_4=\int\sqrt{\left(x-a\right)\left(x-b\right)}dx$

Bài toán 4: Tính $A_4=\int\sqrt{\left(x-a\right)\left(x-b\right)}dx$

Đặt $x=a+\left(b-a\right)\sin^2 t$ với $t\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$

Bài toán 5: Tính $A_5 = \int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx$

Bài toán 5: Tính $A_5 = \int \sqrt{x^2 - a^2}\,dx$

Đặt $x = \dfrac{|a|}{\sin t}$ với $t \in \left[\dfrac{-\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$

2. Bài tập

Bài tập 1. Nguyên hàm $I = \int \dfrac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}}dx$ là:

A. $\arcsin\dfrac{x}{2} - \dfrac{x\sqrt{4-x^2}}{4} + C$

B. $2\arccos\dfrac{x}{2} - \dfrac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + C$

C. $\arccos\dfrac{x}{2} - \dfrac{x\sqrt{4-x^2}}{4} + C$

D. $2\arcsin\dfrac{x}{2} - \dfrac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + C$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đặt $x = 2\sin t$ với $t \in \left(\dfrac{-\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Ta có $\cos t > 0$ và $dx = 2\cos t dt$.

Khi đó $I = \int \dfrac{4\sin^2 t}{\sqrt{4 - 4\sin^2 t}} 2\cos t dt = \int 4\sin^2 t dt$ (vì $\cos t > 0, \forall t \in \left(\dfrac{-\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$).

Suy ra $I = 2\int (1 - \cos 2t)\,dt = 2t - \sin 2t + C$

Từ $x = 2\sin t \Rightarrow t = \arcsin\dfrac{x}{2}$ và $\sin 2t = 2\sin t.\cos t = \dfrac{x\sqrt{4-x^2}}{2}$

Vậy $I = \int \dfrac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}}dx = 2\arcsin\dfrac{x}{2} - \dfrac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + C$

Bài tập 2. Nguyên hàm $I = \int \dfrac{1}{\sqrt{\left(1 - x^2\right)^3}}dx$ là:

A. $\sqrt[3]{\left(1 - x^2\right)^2} + C$

B. $\dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}} + C$

C. $\dfrac{x}{\sqrt{\left(1 - x^2\right)^3}} + C$

D. $\dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{x} + C$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $x = \cos t, t < 0 < \pi \Rightarrow dx = -\sin t.dt$.

Khi đó $I = -\int \dfrac{\sin t.dt}{\sin^3 t}dt = -\int \dfrac{dt}{\sin^2 t} = \cot t + C$ hay $I = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}} + C$

Vậy $\int \dfrac{1}{\sqrt{\left(1 - x^2\right)^3}}dx = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}} + C$

Ví dụ 3. Nguyên hàm $I=\int\frac{1}{1+x^2}dx$ là:

A. $\arctan x+C$ **B.** $\text{arccot}\, x+C$ **C.** $\arcsin x+C$ **D.** $\arccos x+C$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $x=\tan t$ với $t\in\left(\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, ta có $dx=\left(1+\tan^2 t\right)dt$.

Khi đó $I=\int\frac{1}{1+\tan^2 t}\left(1+\tan^2 t\right)dt=\int dt=t+C$

Vậy $I=\int\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+C$

Dạng 4: Tìm nguyên hàm bằng phương pháp nguyên hàm từng phần

1. Phương pháp giải

Với $u=u(x)$ và $v=v(x)$ là các hàm số có đạo hàm trên khoảng K thì ta có: $(u.v)'=u'v.v'u$

Viết dưới dạng vi phân $d(uv)=vdu+udv$

Khi đó lấy nguyên hàm hai vế ta được: $\int d(uv)=\int vdu+\int udv$

Từ đó suy ra $\int udv=uv-\int vdu\ \ (1)$

Công thức (1) là công thức nguyên hàm từng phần.

Dấu hiệu nhận biết phải sử dụng phương pháp nguyên hàm từng phần.

Bài toán: Tìm $I=\int u(x).v(x)dx$, trong đó $u(x)$ và $v(x)$ là hai hàm có tính chất khác nhau, chẳng hạn:

$u(x)$ là hàm số đa thức, $v(x)$ là hàm số lượng giác.

$u(x)$ là hàm số đa thức, $v(x)$ là hàm số mũ.

$u(x)$ là hàm số logarit, $v(x)$ là hàm số đa thức.

$u(x)$ là hàm số mũ, $v(x)$ là hàm số lượng giác.

Phương pháp nguyên hàm từng phần

Bước 1: Đặt $\begin{cases}u=u(x)\\dv=v(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=u'(x)dx\\v=\int v(x)dx\end{cases}$

Bước 2: Áp dụng công thức (1), ta được: $\int udv=uv-\int vdu$

Lưu ý: Đặt $u=u(x)$ (ưu tiên) theo thứ tự: **"Nhất lốc, nhì đa, tam lượng, tứ mũ"**. Tức là, nếu có logarit thì ưu tiên đặt *u* là logarit, không có logarit thì ưu tiên *u* là đa thức,… thứ tự ưu tiên sắp xếp như thế.

Còn đối với nguyên hàm $v=\int v(x)dx$ ta chỉ cần **Chọn một hằng số thích hợp.** Điều này sẽ được làm rõ qua các Bài tập minh họa ở cột bên phải.

2. Bài tập

Bài tập 1. Kết quả nguyên hàm $I=\int x\ln\left(2+x^2\right)dx$ là:

A. $\frac{x^2+2}{2}\ln\left(x^2+2\right)+\frac{x^2}{2}+C$ **B.** $\left(x^2+2\right)\ln\left(x^2+2\right)-\frac{x^2}{2}+C$

C. $\left(x^2+2\right)\ln\left(x^2+2\right)+x^2+C$ **D.** $\frac{x^2+2}{2}\ln\left(x^2+2\right)-\frac{x^2}{2}+C$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(2+x^2\right)\\dv=xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{2x}{x^2+2}dx\\v=\frac{x^2+2}{2}\end{cases}$

Khi đó $I=\frac{x^2+2}{2}\ln\left(x^2+2\right)-\int xdx=\frac{x^2+2}{2}\ln\left(x^2+2\right)-\frac{x^2}{2}+C$

Chú ý: Thông thường thì với $dv=xdx\Rightarrow v=\frac{x^2}{2}$

Tuy nhiên trong trường hợp này, ta để ý $v=\frac{x^2+2}{2}$ mang lại sự hiệu quả.

Bài tập 2. Kết quả nguyên hàm $I=\int\frac{\ln\left(\sin x+2\cos x\right)}{\cos^2 x}dx$ là:

A. $\left(\tan x+2\right).\ln\left(\sin x+2\cos x\right)-x+2\ln\left|\cos x\right|+C$

B. $\left(\tan x+2\right).\ln\left(\sin x+2\cos x\right)-x-2\ln\left|\cos x\right|+C$

C. $\left(\tan x+2\right).\ln\left(\sin x+2\cos x\right)-x-2\ln\left(\cos x\right)+C$

D. $\left(\cot x+2\right).\ln\left(\sin x+2\cos x\right)-x-2\ln\left|\cos x\right|+C$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(\sin x+2\cos x\right)\\dv=\frac{dx}{\cos^2 x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{\cos x-2\sin x}{\sin x+2\cos x}dx\\v=\tan x+2=\frac{\sin x+2\cos x}{\cos x}\end{cases}$

Khi đó $I=\left(\tan x+2\right)\ln\left(\sin x+2\cos x\right)-\int\frac{\cos x-2\sin x}{\cos x}dx$

$=\left(\tan x+2\right)\ln\left(\sin x+2\cos x\right)-x-2\ln\left|\cos x\right|+C$

Chú ý: Ở Bài tập này, Chọn $v=\tan x+2$ có thể rút gọn được ngay tử và mẫu trong nguyên hàm $\int vdu$.

Bài tập 3. Kết quả nguyên hàm $I=\int x^2\sin 5xdx$ là:

A. $-\frac{1}{5}x^2\cos 5x-\frac{2}{25}x\sin 5x+\frac{2}{125}\cos 5x+C$ **B.** $-\frac{1}{5}x^2\cos 5x+\frac{2}{25}x\sin 5x-\frac{2}{125}\cos 5x+C$

C. $\frac{1}{5}x^2\cos 5x-\frac{2}{25}x\sin 5x+\frac{2}{125}\cos 5x+C$ **D.** $-\frac{1}{5}x^2\cos 5x+\frac{2}{25}x\sin 5x+\frac{2}{125}\cos 5x+C$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Phân tích: Ở đây ta sẽ ưu tiên $u=x^2$ là đa thức, tuy nhiên vì bậc của *u* là 2 nên ta sẽ từng phần hai lần mới thu được kết quả. Nhằm tiết kiệm thời gian, tôi gợi ý với phương pháp "sơ đồ đường chéo" cụ thể như sau:

Bước 1: Chia thành 3 cột:

+ Cột 1: Cột *u* luôn lấy đạo hàm đến 0.

+ Cột 2: Dùng để ghi rõ dấu của các phép toán đường chéo.

+ Cột 3: Cột *dv* luôn lấy nguyên hàm đến khi tương ứng với cột 1.

Bước 2: Nhân chéo kết quả của 2 cột với nhau. Dấu của phép nhân đầu tiên sẽ có dấu (+), sau đó đan dấu (-), (+), (-),… rồi cộng các tích lại với nhau.

Đạo hàm cho đến khi về 0	Dấu	Lấy nguyên hàm tương ứng
$u=x^2$	+	$dv=\sin 5xdx$
$2x$	−	$-\frac{1}{5}\cos 5x$
2	+	$-\frac{1}{25}\sin 5x$
0		$\frac{1}{125}\cos 5x$

Khi đó $I=-\frac{1}{5}x^2\cos 5x+\frac{2}{25}x\sin 5x+\frac{2}{125}\cos 5x+C$

Chú ý:

Kĩ thuật này rất đơn giản và tiết kiệm nhiều thời gian.

Trong kĩ thuật tìm nguyên hàm theo sơ đồ đường chéo, yêu cầu độc giả cần tính toán chính xác đạo

hàm và nguyên hàm ở hai cột 1 và 3. Nếu nhầm lẫn thì rất đáng tiếc.

Bài tập 4. Nguyên hàm $I=\int x^4e^{3x}dx$ là:

A. $I=\left(\frac{x^4}{3}-\frac{4x^3}{3^2}+\frac{12x^2}{3^3}-\frac{24x}{3^4}+\frac{24}{3^5}\right)e^{3x}+C$ **B.** $I=\frac{x^5}{5}.\frac{e^{3x}}{3}+C$

C. $I=\left(\frac{x^4}{3}+\frac{4x^3}{3^2}-\frac{12x^2}{3^3}+\frac{24x}{3^4}-\frac{24}{3^5}\right)e^{3x}+C$ **D.** $I=\left(\frac{x^4}{3}-\frac{4x^3}{3^2}+\frac{12x^2}{3^3}\right)e^{3x}+C$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Nếu làm thông thường thì từng phần 4 lần ta mới thu được kết quả. Ở đây, chúng tôi trình bày theo sơ đồ đường chéo cho kết quả và nhanh chóng hơn.

Đạo hàm cho đến khi về 0	Dấu	Lấy nguyên hàm tương ứng
$u=x^4$	+	$dv=e^{3x}dx$
$4x^3$	–	$\frac{1}{3}e^{3x}$
$12x^2$	+	$\frac{1}{3^2}e^{3x}$
$24x$	–	$\frac{1}{3^3}e^{3x}$
24	+	$\frac{1}{3^4}e^{3x}$
0		$\frac{1}{3^5}e^{3x}$

Vậy $I=\left(\frac{x^4}{3}-\frac{4x^3}{3^2}+\frac{12x^2}{3^3}-\frac{24x}{3^4}+\frac{24}{3^5}\right)e^{3x}+C$.

Bài tập 5. Nguyên hàm $I=\int e^x\sin xdx$ là:

A. $2e^x\left(\sin x+\cos x\right)+C$ **B.** $2e^x\left(\sin x-\cos x\right)+C$

C. $\frac{1}{2}e^x\left(\sin x-\cos x\right)+C$ **D.** $\frac{1}{2}e^x\left(\sin x+\cos x\right)+C$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phân tích: Sự tồn tại của hàm số mũ và lượng giác trong cùng một nguyên hàm sẽ rất dễ gây cho người học sự nhầm lẫn, nếu ta sẽ không biết điểm dừng thì có thể sẽ bị lạc vào vòng luẩn quẩn. Ở đây, để tìm được kết quả thì ta phải từng phần hai lần như trong Bài tập 3. Tuy nhiên, với sơ đồ đường chéo thì sao? Khi nào sẽ dừng lại?

Đạo hàm u cho đến khi lặp lại	Dấu	Lấy nguyên hàm tương ứng
$\boxed{u=\sin x}$	+	$dv=e^x dx$
$\cos x$	−	e^x
$\boxed{-\sin x}$	+	e^x (dừng lại)

Khi đó, ta sẽ có thể kết luận $I=e^x\sin x-e^x\cos x-\int e^x\sin x dx$.

Hay $2I=e^x\sin x-e^x.\cos x$. Vậy $I=\frac{1}{2}e^x\left(\sin x-\cos x\right)+C$

Chú ý: Chỉ dừng lại khi đạo hàm của nó có dạng giống dòng đầu tiên. Dòng cuối thu được $-\int \sin x e^x dx=-I$.

Bài tập 6. Tìm $I=\int \ln^n\left(ax+b\right)v\left(x\right)dx$, trong đó $v\left(x\right)$ là hàm đa thức, $n\in\mathbb{N}^*$ và $a,b\in\mathbb{R};a\neq 0$

Hướng dẫn giải

Phân tích: Vì ưu tiên $u\left(x\right)=\ln^n\left(ax+b\right)$ nên $du=\frac{na.\ln^{n-1}\left(ax+b\right)}{ax+b}dx$ và tiếp tục đạo hàm thì cột 1 sẽ không về 0 được, vì vậy phải chuyển lượng $t\left(x\right)=\frac{na}{ax+b}$ từ cột 1 sang nhân với $v\left(x\right)$ ở cột 3 để rút gọn bớt; tiếp tục quá trình như thế cho đến khi đạo hàm cột 1 về 0, và chú ý sử dụng quy tắc đan dấu bình thường.

Bài tập 6.1. Kết quả nguyên hàm $I=\int x.\ln x dx$ là:

A. $\frac{x^2}{2}.\ln 2-\frac{x^2}{4}+C$ **B.** $\frac{x^2}{2}.\ln 2+\frac{x^2}{4}+C$ **C.** $\frac{x^2}{4}.\ln 2-\frac{x^2}{2}+C$ **D.** $\frac{x^2}{4}.\ln 2+\frac{x^2}{2}+C$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đạo hàm cho đến khi về 0	Dấu	Lấy nguyên hàm tương ứng	Lượng t(x) phải chuyển từ cột 1 để nhân thêm với
$u=\ln x$	+	$dv=xdx$	
$\frac{1}{x}$		$\frac{x^2}{2}$	$\boxed{\frac{1}{x}}$
1	−	$\frac{x}{2}$	
0		$\frac{x^2}{4}$	

Vậy $I=\int x.\ln x dx=\frac{x^2}{2}.\ln 2-\frac{x^2}{4}+C$

Chú ý: chuyển lượng $t(x)=\frac{1}{x}$ bên cột 1 sang nhân với $v(x)=\frac{x^2}{2}$ ta thu được kết quả $\frac{x}{2}$. Khi đó bên cột 1 còn lại 1, đạo hàm của nó bằng 0; bên cột 3 có nguyên hàm của $\frac{x}{2}$ là $\frac{x^2}{4}$.

Bài tập 6.2. Kết quả nguyên hàm $I=\int(4x-1).\ln^3(2x)dx$ là:

A. $(2x^2-x)\ln^3(2x)-(3x^2-3x)\ln^2(2x)-(3x^2-6x)\ln(2x)+\frac{3x^2}{2}+6x+C$

B. $(2x^2-x)\ln^3(2x)-(3x^2-3x)\ln^2(2x)+(3x^2-6x)\ln(2x)-\frac{3x^2}{2}+6x+C$

C. $(2x^2-x)\ln^3(2x)+(3x^2-3x)\ln^2(2x)+(3x^2-6x)\ln(2x)-\frac{3x^2}{2}+6x+C$

D. $(2x^2-x)\ln^3(2x)+(3x^2-3x)\ln^2(2x)+(3x^2-6x)\ln(2x)-\frac{3x^2}{2}-6x+C$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đạo hàm cho đến khi về 0	Dấu	Lấy nguyên hàm tương ứng	Lượng $t(x)$ phải chuyển từ cột 1 để nhân thêm với cột 3
$u=\ln^3(2x)$	+	$dv=(4x-1)dx$	
$\frac{3}{x}.\ln^2(2x)$		$2x^2-x$	$\boxed{\frac{3}{x}}$
$\ln^2(2x)$	−	$6x-3$	
$\frac{2}{x}.\ln(2x)$		$3x^2-3x$	$\boxed{\frac{2}{x}}$
$\ln(2x)$	+	$6x-6$	
$\frac{1}{x}$		$3x^2-6x$	$\boxed{\frac{1}{x}}$
1	−	$3x-6$	
0		$\frac{3x^2}{2}-6x$	

Vậy $I=(2x^2-x)\ln^3(2x)-(3x^2-3x)\ln^2(2x)+(3x^2-6x)\ln(2x)-\frac{3x^2}{2}+6x+C$

Chú ý:

Chuyển $\frac{3}{x}$, nhân với $(2x^2-x)$ thu được $(6x-3)$

Chuyển $\frac{2}{x}$, nhân với $\left(3x^2-3x\right)$ thu được $\left(6x-6\right)$.

Chuyển $\frac{1}{x}$, nhân với $\left(3x^2-6x\right)$ thu được $\left(3x-6\right)$.

Bài tập 7. Cho $F\left(x\right)=\left(x-1\right)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f\left(x\right)e^{2x}$. Biết rằng hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Nguyên hàm của hàm số $f'\left(x\right)e^{2x}$ là:

A. $\left(2-x\right)e^x+C$ **B.** $\left(2+x\right)e^x+C$ **C.** $\left(1-x\right)e^x+C$ **D.** $\left(1+x\right)e^x+C$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $F'\left(x\right)=f\left(x\right)e^{2x}\Leftrightarrow e^x+\left(x-1\right)e^x=f\left(x\right).e^{2x}\Leftrightarrow f\left(x\right).e^{2x}=x.e^x$.

Xét $\int f'\left(x\right)e^{2x}dx$

Đặt $\begin{cases}u=e^{2x}\\dv=f'\left(x\right)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2e^{2x}dx\\v=f\left(x\right)\end{cases}$

Do đó $I=f\left(x\right).e^{2x}-2\int f\left(x\right)e^xdx=xe^x-2\left(x-1\right)e^x+C$

Vậy $I=\int f'\left(x\right)e^{2x}dx=\left(2-x\right)e^x+C$

Dạng 5: Các bài toán thực tế ứng dụng nguyên hàm

1. Phương pháp giải

Ý nghĩa vật lí của đạo hàm:

Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S=S\left(t\right)$, với $S\left(t\right)$ là quãng đường mà chất điểm đó đi được trong thời gian *t*, kể từ thời điểm ban đầu.

Gọi $v\left(t\right)$ và $a\left(t\right)$ lần lượt là vận tốc tức thời và gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm *t*, ta có:

$v\left(t\right)=S'\left(t\right)$ và $a\left(t\right)=v'\left(t\right)$.

Từ đó ta có: $S\left(t\right)=\int v\left(t\right)dt$ và $v\left(t\right)=\int a\left(t\right)dt$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Một vật chuyển động với gia tốc $a\left(t\right)=\frac{3}{t+1}\left(m/s^2\right)$, trong đó *t* là khoảng thời gian tính từ thời điểm ban đầu. Vận tốc ban đầu của vật là. Hỏi vận tốc cảu vật tại giây thứ 10 bằng bao nhiêu?

A. 10 m/s. **B.** 15,2 m/s. **C.** 13,2 m/s. **D.** 12 m/s.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Vận tốc của vật tại thời điểm t được tính theo công thức: $v(t)=\int a(t)dt=\int\frac{3}{t+1}dt=3\ln|t+1|+C$

Vì vận tốc ban đầu (lúc $t=0$) của vật là $v_0=6m/s$ nên:

$v(0)=3\ln|0+1|+C=6\Leftrightarrow C=6\Rightarrow v(t)=3\ln|t+1|+6$.

Vận tốc của vật chuyển động tại giây thứ 10 là: $v(10)=3\ln|10+1|+6\approx 13,2(m/s)$.

Bài tập 2. Một vận động viên điền kinh chạy với gia tốc $a(t)=-\frac{1}{24}t^3+\frac{5}{16}t^2\left(m/s^2\right)$, trong đó t là khoảng thời gian tính từ lúc xuất phát. Hỏi vào thời điểm 5 (s) sau khi xuất phát thì vận tốc của vận động viên là bao nhiêu?

A. 5,6 m/s. **B.** 6,51 m/s. **C.** 7,26 m/s. **D.** 6,8 m/s.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Vận tốc $v(t)$ chính là nguyên hàm của gia tốc $a(t)$ nên ta có:

$$v(t)=\int a(t)dt=\int\left(-\frac{1}{24}t^3+\frac{5}{16}t^2\right)dt=-\frac{1}{96}t^4+\frac{5}{48}t^3+C$$

Tại thời điểm ban đầu $(t=0)$ thì vận động viên ở tại vị trí xuất phát nên vận tốc lúc đó là:

$v_0=0\Rightarrow v(0)=0\Leftrightarrow-\frac{1}{96}.0^4+\frac{5}{48}.0^3+C=0\Leftrightarrow C=0$.

Vậy công thức vận tốc là $v(t)=-\frac{1}{96}t^4+\frac{5}{48}t^3$

Vận tốc của vận động viên tại giây thứ 5 là $v(5)=6,51\,m/s$.

Chú ý: Gia tốc của vật chuyển động là $a(t)=\frac{3}{t+1}\left(m/s^2\right)$. Ta tính $v(t)=\int a(t)dt$, kết hợp với điều kiện vận tốc ban đầu $v_0=6m/s$. Suy ra công thức tính vận tốc $v(t)$ tại thời điểm t và tính được $v(10)$.

Bài tập 3. Một nhà khoa học tự chế tên lửa và phóng tên lửa từ mặt đất với vận tốc ban đầu là 20 m/s. Giả sử bỏ qua sức cản của gió, tên lửa chỉ chịu tác động của trọng lực. Hỏi sau 2s thì tên lửa đạt đến tốc độ là bao nhiêu?

A. 0,45 m/s. **B.** 0,4 m/s. **C.** 0,6 m/s. **D.** 0,8 m/s.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Xem như tại thời điểm $t_0=0$ thì nhà khoa học phóng tên lửa với vận tốc đầu 20 m/s. Ta có $s(0)=0$ và $v(0)=20$.

Vì tên lửa chuyển động thẳng đứng nên gia tốc trọng trường tại mọi thời điểm t là $s^n(t) = -9,8\ m/s^2$.

Nguyên hàm của gia tốc là vận tốc nên ta có vận tốc của tên lửa tại thời điểm t là $v(t) = \int -9,8dt = -9,8t + C_1$.

Do $v(0) = 20$ nên $-9,8t + C_1 = 20 \Leftrightarrow C_1 = 20 \Rightarrow v(t) = -9,8t + 20$.

Vậy vận tốc của tên lửa sau 2s là $v(2) = -9,8.2 + 20 = 0,4(m/s)$.

BÀI 2: TÍCH PHÂN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

I. ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT CỦA TÍCH PHÂN

1. Định nghĩa tích phân

Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, với $a<b.$

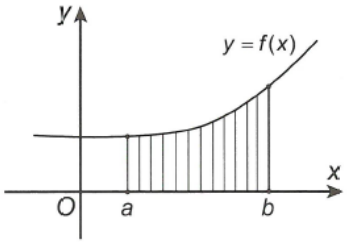
Nếu $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ thì giá trị $F(b)-F(a)$ được gọi là tích phân của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

Kí hiệu $\boxed{\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)}$ (1)

Công thức (1) còn được gọi là công thức Newton – Leibnitz; *a* và *b* được gọi là cận dưới và cận trên của tích phân.

Ý nghĩa hình học của tích phân

Giả sử hàm số $y=f(x)$ là hàm số liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$. Khi đó, tích phân $\int_a^b f(x)dx$ chính là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=f(x)$, trục hoành *Ox* và hai đường thẳng $x=a, x=b,$ với $a<b.$



$$\boxed{S=\int_a^b f(x)dx}$$

Chẳng hạn: *$F(x)=x^3+C$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)=3x^2$ nên tích phân*

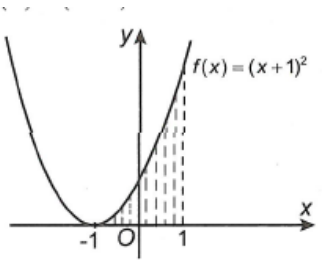
$$\int_0^1 f(x)dx=F(x)\Big|_0^1=F(1)-F(0)$$

$$=(1^3+C)-(0^3+C)=1.$$

Lưu ý: *Giá trị của tích phân không phụ thuộc vào hằng số C.*

Trong tính toán, ta thường chọn $C=0.$

Chẳng hạn: *Hàm số $f(x)=x^2+2x+1$ có đồ thị (C) và $f(x)=(x+1)^2\geq 0$, với $\forall x\in\mathbb{R}$.*



Diện tích "tam giác cong" giới hạn bởi (C), trục Ox và hai đường thẳng $x=-1$ và $x=1$ là $S=\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_{-1}^1 (x^2+2x+1)dx$

$$=\left(\frac{x^3}{3}+x^2+x\right)\Big|_{-1}^1=\frac{8}{3}.$$

Lưu ý: *Ta còn gọi hình phẳng trên là "hình thang cong".*

2. Tính chất cơ bản của tích phân

Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số liên tục trên khoảng K, trong đó K có thể là khoảng, nửa khoảng hoặc đoạn và $a,b,c \in K$, khi đó:

a. Nếu $b=a$ thì $\boxed{\int_a^a f(x)dx=0}$

b. Nếu $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì ta có:

$$\boxed{\int_a^b f'(x)dx=f(x)\Big|_a^b=f(b)-f(a)}$$

Chẳng hạn: *Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên đoạn $[-1;2]$ thỏa mãn $f(-1)=8$ và $f(2)=-1$.*

Khi đó

$$\int_{-1}^{2} f'(x)dx=f(x)\Big|_{-1}^{2}=f(2)-f(-1)=-9$$

Lưu ý: *Từ đó ta cũng có*

$$\boxed{f(b)=f(a)+\int_a^b f'(x)dx}$$

và $\boxed{f(a)=f(b)-\int_a^b f'(x)dx}$

c. Tính chất tuyến tính

$$\boxed{\int_a^b\left[k.f(x)+h.g(x)\right]dx=k\int_a^b f(x)dx+h.\int_a^b g(x)dx}$$

Với mọi $k,h\in\mathbb{R}$.

d. Tính chất trung cận

$\boxed{\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx}$, với $c\in(a;b)$

e. Đảo cận tích phân

$$\boxed{\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx}$$

f. Nếu $f(x)\ge 0,\ \forall x\in[a;b]$ thì $\int_a^b f(x)dx\ge 0$ và $\int_a^b f(x)dx=0$ khi $f(x)=0$.

g. Nếu $f(x)\ge g(x),\forall x\in[a;b]$ thì

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx}$$

h. Nếu $m = \min\limits_{[a;b]} f(x)$ và $M = \max\limits_{[a;b]} f(x)$ thì

$$\boxed{m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)}$$

i. Tích phân không phụ thuộc vào biến, tức là ta luôn có

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(y)dy = ...}$$

II. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

1. Phương pháp đổi biến số

Đổi biến dạng 1

Bài toán: Giả sử ta cần tính tích phân $I = \int_a^b f(x)dx$, trong đó ta có thể phân tích $f(x) = g(u(x))u'(x)$ thì ta thực hiện phép đổi biến số.

Lưu ý: *Phương pháp đổi biến số trong tích phân cơ bản giống như đổi biến số trong nguyên hàm, ở đây chỉ thêm bước* ***đổi cận.***

Phương pháp:

+ Đặt $u = u(x)$, suy ra $du = u'(x)dx$.

+ Đổi cận:

x	a	b
u	$u(a)$	$u(b)$

+ Khi đó $\boxed{I = \int_a^b f(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} g(u)du = G(u)\Big|_{u(a)}^{u(b)}}$, với $G(u)$ là nguyên hàm của $g(u)$.

Đổi biến dạng 2

Dấu hiệu	***Cách đặt***
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = \lvert a\rvert \sin t; t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = \frac{\lvert a\rvert}{\sin t};\ t \in \left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = \lvert a\rvert \tan t; t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$	$x=a.\cos 2t; t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$
$\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	$x=a.\cos 2t; t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	$x=a+(b-a)\sin^2 t; t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

2. Phương pháp tích phân từng phần

Bài toán: Tính tích phân $\boxed{I=\int_a^b u(x).v'(x)dx}$

Chú ý: *Cần phải lựa chọn u và dv hợp lí sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân* $\int_a^b vdu$ *dễ tính hơn* $\int_a^b udv$.

Hướng dẫn giải

Đặt $\begin{cases}u=u(x)\\dv=v'(x)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=u'(x)dx\\v=v(x)\end{cases}$

Khi đó $\boxed{I=(u.v)\Big|_a^b-\int_a^b v.du}$ (công thức tích phân từng phần)

III. TÍCH PHÂN CÁC HÀM SỐ ĐẶC BIỆT

1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-a;a]$. Khi đó

Đặc biệt $\boxed{\int_{-a}^a f(x)dx=\int_0^a\left[f(x)+f(-x)\right]dx}$ (1)

+ Nếu $f(x)$ là hàm số lẻ thì ta có $\boxed{\int_{-a}^a f(x)dx=0}$ (1.1)

+ Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn thì ta có $\boxed{\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx}$ (1.2)

và $\boxed{\int_{-a}^a\frac{f(x)}{1+b^x}dx=\frac{1}{2}\int_0^a f(x)dx}$ $(0<b\neq 1)$ (1.3)

2. Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì $\boxed{\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx}$

Hệ quả: Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$, khi đó: $\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx}$

3. Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a+b-x)=f(x)$ thì $\boxed{\int_a^b xf(x)dx=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx}$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Tính tích phân bằng cách sử dụng định nghĩa, tính chất

1. Phương pháp giải

Sử dụng các tính chất của tích phân.

Sử dụng bảng nguyên hàm và định nghĩa tích phân để tính tích phân.

2. Bài tập

Bài tập 1: Biết tích phân $I=\int_1^2 \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}+x\sqrt{x+1}}=a\sqrt{2}+b\sqrt{3}+c$, với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Giá trị biểu thức $P=a+b+c$ là

A. $P=8.$ **B.** $P=0.$ **C.** $P=2.$ **D.** $P=6.$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\neq 0,\forall x\in[1;2]$ nên

$$I=\int_1^2 \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}.\sqrt{x+1}}dx=\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}dx-\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx=\left(2\sqrt{x}-2\sqrt{x+1}\right)\Big|_1^2$$

$=4\sqrt{2}-2\sqrt{3}-2.$ Suy ra $a=4,b=c=-2$ nên $P=a+b+c=0.$

Nhân liên hợp $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}.$

Bài tập 2: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{3}$ và $f'(x)=x\left[f(x)\right]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị $f(1)$ bằng

A. $f(1)=\frac{2}{3}.$ **B.** $f(1)=\frac{3}{2}.$ **C.** $f(1)=-\frac{2}{3}.$ **D.** $f(1)=\frac{1}{3}.$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Từ $f'(x)=x\left[f(x)\right]^2$ (1), suy ra $f'(x)\geq 0$ với mọi $x\in[1;2]$.

Suy ra $f(x)$ là hàm không giảm trên đoạn $[1;2]$ nên $f(x)\leq f(2)<0$, $\forall x\in[1;2]$.

Chia 2 vế hệ thức (1) cho $\left[f(x)\right]^2$ ta được $\frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}=x,\forall x\in[1;2].$ (2)

Lấy tích phân 2 vế trên đoạn $[1;2]$ hệ thức (2), ta được

$$\int_1^2 \frac{f'(x)}{\left[f(x)\right]^2}dx=\int_1^2 xdx\Leftrightarrow\left[\frac{-1}{f(x)}\right]\Big|_1^2=\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2\Leftrightarrow\frac{1}{f(1)}-\frac{1}{f(2)}=\frac{3}{2}.$$

Do $f(2)=-\frac{1}{3}$ nên suy ra $f(1)=-\frac{2}{3}$.

Chú ý rằng đề bài cho $f(2)$, yêu cầu tính $f(1)$, ta có thể sử dụng nguyên hàm để tìm hằng số C. Tuy nhiên ta cũng có thể dựa vào định nghĩa của tích phân để xử lí.

Bài tập 3: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ thỏa mãn $f'(x)=\frac{2}{2x-1}$ và $f(0)=1, f(1)=-2$. Khi đó $f(-1)+f(3)$ bằng

A. $-1+\ln 15$. **B.** $3+\ln 5$. **C.** $-2+\ln 3$. **D.** $-1-\ln 15$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $\int_{-1}^{0} f'(x)dx = f(0)-f(-1)$ nên suy ra $f(-1)=f(0)-\int_{-1}^{0} f'(x)dx$.

$=1-\int_{-1}^{0} f'(x)dx$.

Tương tự ta cũng có

$f(3)=f(1)+\int_{1}^{3} f'(x)dx$

$=-2+\int_{1}^{3} f'(x)dx$.

Vậy $f(-1)+f(3)=-1-\int_{-1}^{0} f'(x)dx+\int_{1}^{3} f'(x)dx=-1-\ln|2x-1|\Big|_{-1}^{0}+\ln|2x-1|\Big|_{1}^{3}$.

Vậy $f(-1)+f(3)=-1+\ln 15$.

Bài tập 4: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx=7$ và $\int_0^1 x^3.f'(x)dx=-1$. Giá trị $I=\int_0^1 f(x)dx$ là

A. 1. **B.** $\frac{7}{4}$. **C.** $\frac{7}{5}$. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $\int_0^1 [f'(x)]^2 dx=7$ (1).

$\int_0^1 x^6 dx=\frac{1}{7}\Rightarrow\int_0^1 49x^6 dx=7$ (2).

và $\int_0^1 14x^3.f'(x)dx=-14$ (3).

Cộng hai vế (1), (2) và (3) suy ra

$\int_0^1\left[f'(x)+7x^3\right]^2dx=0$ mà $\left[f'(x)+7x^3\right]^2\geq 0$

$\Rightarrow f'(x)=-7x^3.$

Hay $f(x)=-\frac{7x^4}{4}+C.$

$f(1)=0\Rightarrow -\frac{7}{4}+C=0\Rightarrow C=\frac{7}{4}.$

Do đó $f(x)=-\frac{7x^4}{4}+\frac{7}{4}.$

Vậy $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(-\frac{7x^4}{4}+\frac{7}{4}\right)dx=\frac{7}{5}.$

Bài tập 5: Cho $f(x),g(x)$ là hai hàm số liên tục trên đoạn $[-1;1]$ và $f(x)$ là hàm số chẵn, $g(x)$ là hàm số lẻ. Biết $\int_0^1 f(x)dx=5;\int_0^1 g(x)dx=7$. Giá trị của $A=\int_{-1}^1 f(x)dx+\int_{-1}^1 g(x)dx$ là

A. 12. **B.** 24. **C.** 0. **D.** 10.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Vì $f(x)$ là hàm số chẵn nên $\int_{-1}^1 f(x)dx=2\int_0^1 f(x)dx=2.5=10$

Vì $g(x)$ là hàm số lẻ nên $\int_{-1}^1 g(x)dx=0$.

Vậy $A=10.$

Bài tập 6: Cho $\int_0^1\frac{xdx}{(2x+1)^2}=a+b\ln 3$ với *a, b* là các số hữu tỉ. Giá trị của $a+b$ bằng

A. $\frac{5}{12}.$ **B.** $-\frac{1}{3}.$ **C.** $\frac{1}{4}.$ **D.** $\frac{1}{12}.$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $\int_0^1\frac{xdx}{(2x+1)^2}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x+1-1}{(2x+1)^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{(2x+1)^2}\right)dx$

$$=\left(\frac{1}{4(2x+1)}+\frac{1}{4}\ln(2x+1)\right)\Big|_0^1=-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\ln 3.$$

Vậy $a=-\frac{1}{6}, b=\frac{1}{4}\Rightarrow a+b=\frac{1}{12}.$

Bài tập 7: Cho $\int_2^3\frac{2x+3}{x^2+x}dx=a\ln 2+b\ln 3,$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Giá trị biểu thức a^2-ab-b là

A. 11. **B.** 21. **C.** 31. **D.** 41.

Hướng dẫn giải

Ta có $\int_2^3\frac{2x+3}{x^2+x}dx=\int_2^3\frac{2x+1+2}{x^2+x}dx=\int_2^3\left(\frac{2x+1}{x^2+x}+\frac{2}{x^2+x}\right)dx$

$$=\int_2^3\left(\frac{2x+1}{x^2+x}+\frac{2}{x}-\frac{2}{x+1}\right)dx=\left(\ln|x^2+x|+2\ln|x|-2\ln|x+1|\right)\Big|_2^3=-5\ln 2+4\ln 3$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=-5\\b=4\end{cases}\rightarrow a^2-ab-b=41.$$

Chọn D.

Bài tập 8. Biết rằng tích phân $\int_1^2\frac{5x+6}{x^2+5x+6}dx=a\ln 2+b\ln 3+c\ln 5,$ với a,b,c là các số nguyên. Giá trị biểu thức $S=a+bc$ là bao nhiêu?

A. $S=-62.$ **B.** $S=10.$ **C.** $S=20.$ **D.** $S=-10.$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $\int_1^2\frac{5x+6}{x^2+5x+6}dx=\int_1^2\frac{5x+6}{(x+2)(x+3)}dx=\int_1^2\left(\frac{9}{x+3}-\frac{4}{x+2}\right)dx$

$$=\left(9\ln|x+3|-4\ln|x+2|\right)\Big|_1^2=9\ln 5+4\ln 3-26\ln 2.$$

Suy ra $a=-26, b=4, c=9.$ Vậy $S=a+bc=-26+4.9=10.$

Bài tập 9: Cho $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x+\sin x.\cos x+1}{\cos^4 x+\sin x.\cos^3 x}dx=a+b\ln 2+c\ln\left(1+\sqrt{3}\right),$ với a,b,c là các số hữu tỉ. Giá trị abc bằng

A. 0. **B.** –2. **C.** –4. **D.** –6.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x+\sin x.\cos x+1}{\cos^4 x+\sin x.\cos^3 x}dx=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\cos^2 x+\sin x.\cos x+\sin^2 x}{\cos^2 x\left(\cos^2 x+\sin x.\cos x\right)}dx$

$=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2+\tan x+\tan^2 x}{\cos^2 x\left(1+\tan x\right)}dx=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2+\tan x+\tan^2 x}{\left(1+\tan x\right)}d\left(\tan x\right)$

$=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\tan x+\frac{2}{\left(1+\tan x\right)}\right)d\left(\tan x\right)=\frac{\tan^2 x}{2}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}+2\ln\left|\tan x+1\right|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$

$=1-2\ln 2+2\ln\left(\sqrt{3}+1\right)$. Suy ra $a=1,b=-2,c=2$ nên $abc=-4$.

Bài tập 10: Cho hàm số $f\left(x\right)=\begin{cases}e^x+m, & khi\ x\geq 0\\ 2x\sqrt{3+x^2}, & khi\ x<0\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Biết $\int_{-1}^{1} f\left(x\right)dx=ae+b\sqrt{3}+c\left(a,b,c\in\mathbb{Q}\right)$. Tổng $T=a+b+3c$ bằng

A. 15. **B.** -10. **C.** -19. **D.** -17.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Do hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số liên tục tại $x=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(x\right)=f\left(0\right)\Leftrightarrow 1+m=0\Leftrightarrow m=-1$.

Ta có $\int_{-1}^{1} f\left(x\right)dx=\int_{-1}^{0} f\left(x\right)dx+\int_{0}^{1} f\left(x\right)dx=I_1+I_2$

$I_1=\int_{-1}^{0} 2x\sqrt{3+x^2}dx=\int_{-1}^{0}\left(3+x^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(3+x^2\right)=\frac{2}{3}\left(3+x^2\right)\sqrt{3+x^2}\Big|_{-1}^{0}=2\sqrt{3}-\frac{16}{3}$.

$I_2=\int_{0}^{1}\left(e^x-1\right)dx=\left(e^x-x\right)\Big|_{0}^{1}=e-2$.

Suy ra $\int_{-1}^{1} f\left(x\right)dx=I_1+I_2=e+2\sqrt{3}-\frac{22}{3}$. Suy ra $a=1;b=2;c=-\frac{22}{3}$.

Vậy $T=a+b+3c=1+2-22=-19$.

Bài tập 11: Biết $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+3^{-x}}dx=m$. Giá trị của $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+3^{x}}dx$ bằng

A. $\pi-m$. **B.** $\frac{\pi}{4}+m$. **C.** $\pi+m$. **D.** $\frac{\pi}{4}-m$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos^2 x}{1+3^{-x}}dx+\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos^2 x}{1+3^{x}}dx=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^2 xdx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(1+\cos 2x\right)dx=\pi.$

Suy ra $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos^2 x}{1+3^{x}}dx=\pi-m.$

Dạng 2: Tính tích phân bằng phương pháp đổi biến

1. Phương pháp giải

Nắm vững phương pháp đổi biến số dạng 1 và dạng 2, cụ thể:

Đổi biến dạng 1

Bài toán: Giả sử ta cần tính $I=\int\limits_{a}^{b}f\left(x\right)dx,$ trong đó ta có thể phân tích $f\left(x\right)=g\left(u\left(x\right)\right)u'\left(x\right).$

Bước 1: Đặt $u=u\left(x\right),$ suy ra $du=u'\left(x\right)dx.$

Bước 2: Đổi cận

x	a	B
u	$u\left(a\right)$	$u\left(b\right)$

Bước 3: Tính

$$I=\int\limits_{a}^{b}f\left(x\right)dx=\int\limits_{u(a)}^{u(b)}g\left(u\right)du=G\left(u\right)\Big|_{u(a)}^{u(b)}$$

Với $G\left(u\right)$ là một nguyên hàm của $g\left(u\right).$

Đổi biến dạng 2

Bài toán: Giả sử ta cần tính $I=\int\limits_{a}^{b}f\left(x\right)dx$, ta có thể đổi biến như sau:

Bước 1: Đặt $x=\varphi\left(t\right),$ ta có $dx=\varphi'\left(t\right)dt.$

Bước 2: Đổi cận

x	a	b
t	α	β

Bước 3:

Tính $I=\int\limits_{\alpha}^{\beta}f\left(\varphi\left(t\right)\right).\varphi'\left(t\right)dt=\int\limits_{\alpha}^{\beta}g\left(t\right)dt=G\left(t\right)\Big|_{\alpha}^{\beta}$

Với $G\left(t\right)$ là một nguyên hàm của $g\left(t\right).$

Dấu hiệu	***Cách đặt***

$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=\lvert a\rvert\sin t, t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=\frac{\lvert a\rvert}{\sin t}, t\in\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=\lvert a\rvert\tan t, t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$
$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$	$x=a.\cos 2t, t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$
$\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$	$x=a.\cos 2t, t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right)$
$\sqrt{(x-a)(b-x)}$	$x=a+(b-a)\sin^2 t, t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

2. Bài tập mẫu

Bài tập 1: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^2 x+3\sin x+2}dx=a\ln 2+b\ln 3,$ với a,b là các số nguyên.

Giá trị của $P=2a+b$ là

A. 3. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^2 x+3\sin x+2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(\sin x+1)(\sin x+2)}d(\sin x)$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin x+1}-\frac{1}{\sin x+2}\right)d(\sin x)=\left(\ln\lvert\sin x+1\rvert-\ln\lvert\sin x+2\rvert\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\ln 2-\ln 1-(\ln 3-\ln 2)=2\ln 2-\ln 3$

Suy ra $a=2,b=-1\Rightarrow 2a+b=3.$

Bài tập 2: Biết $I=\int_0^{\ln 2}\frac{dx}{e^x+3e^{-x}+4}=\frac{1}{c}(\ln a-\ln b+\ln c)$, với a,b,c là các số nguyên tố.

Giá trị của $P=2a-b+c$ là

A. $P=-3.$ **B.** $P=-1.$ **C.** $P=4.$ **D.** $P=3.$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $I=\int_0^{\ln 2}\frac{dx}{e^x+3e^{-x}+4}=\int_0^{\ln 2}\frac{e^x dx}{e^{2x}+4e^x+3}$.

Đặt $t=e^x\Rightarrow dt=e^x dx$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=1, x=\ln 2\Rightarrow t=2$.

Khi đó

$$I=\int_1^2\frac{1}{t^2+4t+3}dt=\frac{1}{2}\int_1^2\left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+3}\right)dt=\frac{1}{2}\ln\frac{t+1}{t+3}\Big|_1^2=\frac{1}{2}\left(\ln 3-\ln 5+\ln 2\right).$$

Suy ra $a=3,b=5,c=2$. Vậy $P=2a-b+c=3$.

Bài tập 3: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{1+\sin x}=\frac{a\sqrt{3}+b}{c}$, với $a,b\in\mathbb{Z},c\in\mathbb{Z}^+$ và *a, b, c* là các số nguyên tố cùng nhau.

Giá trị của tổng $a+b+c$ bằng

A. 5. **B.** 12. **C.** 7. **D.** −1.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{1+\sin x}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{dx}{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)}{\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2}dx.$

Đặt $t=1+\tan\frac{x}{2}\Rightarrow 2dt=\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=1; x=\frac{\pi}{6}\Rightarrow t=3-\sqrt{3}$.

$$I=\int_1^{3-\sqrt{3}}\frac{2dt}{t^2}=-\frac{2}{t}\Big|_1^{3-\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}+3}{3}.$$

Suy ra $a=-1,b=3,c=3$ nên $a+b+c=5$.

Lưu ý:

$1+\sin x=\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2$. *Chia tử và mẫu cho* $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

Bài tập 4: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(2x)dx=8$. Giá trị của $I=\int_0^{\sqrt{2}}xf\left(x^2\right)dx$ là

A. 4. **B.** 8. **C.** 16. **D.** 64.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $x^2=2u\Rightarrow 2xdx=2du\Rightarrow xdx=du$.

Đổi cận $x=0\Rightarrow u=0, x=\sqrt{2}\Rightarrow u=1.$

Khi đó $I=\int\limits_0^1 f\left(2u\right)du=\int\limits_0^1 f\left(2x\right)dx=8.$

Bài tập 5: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\left(0;+\infty\right)$ sao cho $x^2+xf\left(e^x\right)+f\left(e^x\right)=1;$ với mọi $x\in\left(0;+\infty\right)$. Giá trị của $I=\int\limits_{\sqrt{e}}^{e}\frac{f\left(x\right).\ln x}{x}dx$ là

A. $I=-\frac{1}{8}.$ **B.** $I=-\frac{2}{3}.$ **C.** $I=\frac{1}{12}.$ **D.** $I=\frac{3}{8}.$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Với $x\in\left(0;+\infty\right)$ ta có $x^2+xf\left(e^x\right)+f\left(e^x\right)=1\Rightarrow f\left(e^x\right)=\frac{1-x^2}{1+x}=1-x.$

Đặt $\ln x=t\Leftrightarrow x=e^t\Rightarrow dt=\frac{dx}{x}.$

Đổi cận $x=\sqrt{e}\Rightarrow t=\frac{1}{2}; x=e\Rightarrow t=1.$

Khi đó $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}t.f\left(e^t\right)dt=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}t\left(1-t\right)dt=\frac{1}{12}.$

Bài tập 6: Biết $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin x-\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx=\frac{-11}{13}\ln 2+b\ln 3+c\pi,\left(b,c\in\mathbb{Q}\right)$. Giá trị của $\frac{b}{c}$ là

A. $\frac{22}{3}.$ **B.** $\frac{22\pi}{3}.$ **C.** $\frac{22}{3\pi}.$ **D.** $\frac{22\pi}{13}.$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Phân tích $\frac{3\sin x-\cos x}{2\sin x+3\cos x}=\frac{m\left(2\sin x+3\cos x\right)+n\left(2\cos x-3\sin x\right)}{2\sin x+3\cos x}$

$$=\frac{\left(2m-3n\right)\sin x+\left(3m+2n\right)\cos x}{2\sin x+3\cos x}$$

Đồng nhất hệ số ta có $\begin{cases}2m-3n=3\\3m+2n=-1\end{cases}\Leftrightarrow m=\frac{3}{13}; n=-\frac{11}{13}.$

Suy ra $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin x-\cos x}{2\sin x+3\cos x}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{3}{13}\left(2\sin x+3\cos x\right)-\frac{11}{13}\left(2\cos x-3\sin x\right)}{2\sin x+3\cos x}dx.$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{3}{13}-\frac{11}{13}.\frac{2\cos x-3\sin x}{2\sin x+3\cos x}\right]dx=\frac{3}{13}(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{11}{13}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos x-3\sin x}{2\sin x+3\cos x}dx.$$

$$=\frac{3\pi}{26}-\frac{11}{13}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\left(2\sin x+3\cos x\right)}{2\sin x+3\cos x}dx=\frac{3\pi}{26}-\frac{11}{13}\ln\left|2\sin x+3\cos x\right|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{3\pi}{26}-\frac{11}{13}\ln 2+\frac{11}{13}\ln 3.\ \text{Do đó}\ \begin{cases}b=\dfrac{11}{13}\\ c=\dfrac{3}{26}\end{cases}\Rightarrow\frac{b}{c}=\frac{11}{13}.\frac{26}{3}=\frac{22}{3}$$

Bài tập 7: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x.f\left(\cos^2 x\right)dx=2$ và $\int_e^{e^2}\frac{f\left(\ln^2 x\right)}{x\ln x}dx=2$. Giá trị của $I=\int_{\frac{1}{4}}^{2}\frac{f\left(2x\right)}{x}dx$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 8.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đặt $A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x.f\left(\cos^2 x\right)dx=2\Leftrightarrow\int_{0.}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x.\cos x}{\cos^2 x}.f\left(\cos^2 x\right)dx=2.$

Đặt $t=\cos^2 x\Rightarrow dt=-2\sin x\cos xdx\Rightarrow-\frac{1}{2}dt=\sin x\cos xdx.$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=1$ và $x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=\frac{1}{2}$. Khi đó $A=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f\left(t\right)}{t}dt=4.$

Đặt $B=\int_e^{e^2}\frac{f\left(\ln^2 x\right)}{x\ln x}dx=2\Leftrightarrow\int_e^{e^2}\frac{\ln x.f\left(\ln^2 x\right)}{x\ln^2 x}dx=2.$

Tương tự ta có $B=\int_1^4\frac{f\left(t\right)}{t}dt=4.$

Giá trị của $I=\int_{\frac{1}{4}}^{2}\frac{f\left(2x\right)}{x}dx.$ Đặt $t=2x\Rightarrow dx=\frac{1}{2}dt.$

Đổi cận $x=\frac{1}{4}\Rightarrow t=\frac{1}{2}$ và $x=2\Rightarrow t=4.$

Khi đó $I=\int_{\frac{1}{2}}^{4}\frac{f\left(t\right)}{t}dt=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f\left(t\right)}{t}dt+\int_1^4\frac{f\left(t\right)}{t}dt=4+4=8$

Bài tập 8: Cho $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x+3)(x+1)^3}}dx = \sqrt{a}-\sqrt{b}$; với a,b là các số nguyên. Giá trị của biểu thức a^b+b^a bằng

A. 17. **B.** 57. **C.** 145. **D.** 32.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Giá trị của $I = \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x+3)(x+1)^3}}dx = \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{\frac{x+3}{x+1}}}\frac{dx}{(x+1)^2}$.

Đặt $t = \sqrt{\frac{x+3}{x+1}} \Rightarrow 2tdt = \frac{-2}{(x+1)^2}dx \Rightarrow \frac{dx}{(x+1)^2} = -tdt$.

Đổi cận $x=0 \Rightarrow t=\sqrt{3}, x=1 \Rightarrow t=\sqrt{2}$.

Ta có $I = \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{\frac{x+3}{x+1}}}\frac{dx}{(x+1)^2} = \int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} \frac{1}{t}(-t)dt = \int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dt = t\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$.

Mà $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{(x+3)(x+1)^3}}dx = \sqrt{a}-\sqrt{b}$ nên suy ra $a=3, b=2$.

Từ đó ta có giá trị $a^b+b^a = 3^2+2^3 = 17$.

Bài tập 9: Cho $\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{\frac{x}{x^3+1}}dx = \frac{1}{a}\ln\left(\frac{a}{b}+\sqrt{b}\right)$, với a,b là các số nguyên tố. Giá trị của biểu thức $P=2(a+b)$ bằng

A. 12. **B.** 10. **C.** 18. **D.** 15.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Biến đổi $I = \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{\frac{x}{x^3+1}}dx = \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{\frac{x}{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}}dx = \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x.\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}}dx = \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}}.\frac{1}{x^4}dx$.

Đặt $u = \sqrt{1+\frac{1}{x^3}} \Rightarrow u^2 = 1+\frac{1}{x^3} \Rightarrow 2udu = -\frac{3}{x^4}dx$ và $x^3 = \frac{1}{u^2-1}$.

Đổi cận $x=\frac{1}{2} \Rightarrow u=3; x=1 \Rightarrow u=\sqrt{2}$.

Ta có $I = \int\limits_{\sqrt{2}}^3 \frac{\frac{2udu}{3}}{(u^2-1).u} = \frac{2}{3}\int\limits_{\sqrt{2}}^3 \frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\Big|_{\sqrt{2}}^3 = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)$.

Suy ra $a=3,b=2$. Vậy $P=2(a+b)=10$.

Dạng 3: Tính tích phân bằng phương pháp tích phân từng phần

Bài tập 1. Cho tích phân $I=\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx=\frac{b}{c}+a\ln 2$ với a là số thực b và c là các số dương, đồng thời $\frac{b}{c}$ là phân số tối giản. Giá trị của biểu thức $P=2a+3b+c$ là

A. $P=6$. **B.** $P=5$. **C.** $P=-6$. **D.** $P=4$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=\frac{dx}{x^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{dx}{x}\\ v=\frac{-1}{x}\end{cases}$.

Khi đó $I=\frac{-\ln x}{x}\Big|_1^2+\int_1^2\frac{1}{x^2}dx=\left(\frac{-\ln x}{x}+\frac{-1}{x}\right)\Big|_1^2=\frac{1}{2}-\frac{\ln 2}{2}$.

Suy ra $b=1,c=2,a=\frac{-1}{2}$. Do đó $P=2a+3b+c=4$.

+ *Ưu tiên logarit.*

+ *Đặt* $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=\frac{dx}{x^2}\end{cases}$.

Bài tập 2: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{1+\cos 2x}dx=a\pi+b\ln 2$, với a,b là các số hữu tỉ. Giá trị của $T=16a-8b$ là

A. $T=4$. **B.** $T=5$. **C.** $T=2$. **D.** $T=-2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $A=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{1+\cos 2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{2\cos^2 x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2 x}dx.$

Đặt $\begin{cases}u=x\Rightarrow du=dx\\ dv=\frac{1}{\cos^2 x}dx\Rightarrow v=\tan x\end{cases}$

Khi đó

$$A=\frac{1}{2}\left[x\tan x\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{4}\\0\end{matrix}\right.-\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x dx\right]=\frac{1}{2}\left[\left(x\tan x+\ln\left|\cos x\right|\right)\left|\begin{matrix}\frac{\pi}{4}\\0\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2\right)=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2.$$

Vậy $a=\frac{1}{8},b=\frac{-1}{4}$ do đó $16a-8b=2+2=4.$

+ *Biến đổi* $1+\cos 2x=2\cos^2 x.$
+ *Ưu tiên đa thức.*
+ *Đặt* $\begin{cases}u=x\\dv=\frac{1}{\cos^2 x}dx\end{cases}.$

Bài tập 3: Cho $I=\int\limits_0^1 xe^{2x}dx=a.e^2+b$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Giá trị của tổng $a+b$ là

A. $\frac{1}{2}.$ **B.** $\frac{1}{4}.$ **C.** $0.$ **D.** $1.$

Hướng dẫn giải

Sử dụng phương pháp từng phần.

Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=e^{2x}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=\frac{1}{2}e^{2x}\end{cases}.$

Khi đó $I=u.v\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.-\int\limits_0^1 v.du=\frac{1}{2}x.e^{2x}\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{2x}dx=\frac{1}{2}x.e^{2x}\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.-\frac{1}{4}e^{2x}\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}.$

Suy ra $a.e^2+b=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}.$

Đồng nhất hệ số hai vế ta có $a=\frac{1}{4},b=\frac{1}{4}.$ Vậy $a+b=\frac{1}{2}.$

Chọn A.

+ *Ưu tiên đa thức.*
+ *Đặt* $\begin{cases}u=x\\dv=e^{2x}dx\end{cases}.$

Bài tập 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(2)=16$ và $\int\limits_0^2 f(x)dx=4.$ Tích phân $\int\limits_0^4 xf'\left(\frac{x}{2}\right)dx$ bằng

A. 112. **B.** 12. **C.** 56. **D.** 144.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $t=\frac{x}{2}\Rightarrow x=2t\Rightarrow dx=2dt.$

Đổi cận $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x=4\Rightarrow t=2\end{cases}$. Do đó $\int\limits_0^4 xf'\left(\frac{x}{2}\right)dx=\int\limits_0^2 4tf'(t)\,dt=\int\limits_0^2 4xf'(x)\,dx.$

Đặt $\begin{cases}u=4x\\ dv=f'(x)\,dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=4dx\\ v=f(x)\end{cases}.$

Suy ra

$$\int\limits_0^2 4xf'(x)\,dx=\left[4xf(x)\right]\Big|_0^2-\int\limits_0^2 4f(x)\,dx=8f(2)-4\int\limits_0^2 f(x)\,dx=8.16-4.4=112.$$

Bài tập 5. Cho $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\sin x+2\cos x)}{\cos^2 x}dx=a\ln 3+b\ln 2+c\pi$ với a,b,c là các số hữu tỉ.

Giá trị của *abc* bằng

A. $\frac{15}{8}$. **B.** $\frac{5}{8}$. **C.** $\frac{5}{4}$. **D.** $\frac{17}{8}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $\begin{cases}u=\ln(\sin x+2\cos x)\\ dv=\frac{dx}{\cos^2 x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\frac{\cos x-2\sin x}{\sin x+2\cos x}dx\\ v=\tan x+2\end{cases}.$

Khi đó

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\sin x+2\cos x)}{\cos^2 x}dx=(\tan x+2)\ln(\sin x+2\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-2\sin x}{\cos x}dx$$

$$=3\ln\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)-2\ln 2-\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}(1-2\tan x)dx$$

$$=3\ln 3-\frac{7}{2}\ln 2-\left(x+2\ln|\cos x|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=3\ln 3-\frac{7}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}-2\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=3\ln 3-\frac{5}{2}\ln 2-\frac{\pi}{4}.$$

Suy ra $a=3,b=-\frac{5}{2},c=-\frac{1}{4}$. Vậy $abc=18.$

Bài tập 6. Biết $\int_1^2 (x+1)^2 e^{x-\frac{1}{x}} dx = me^{\frac{p}{q}} - n,$ trong đó m,n,p,q là các số nguyên dương và $\frac{p}{q}$ là phân số tối giản. Giá trị của $T = m+n+p+q$ là

A. $T = 11.$ **B.** $T = 10.$ **C.** $T = 7.$ **D.** $T = 8.$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có

$$I = \int_1^2 (x+1)^2 e^{x-\frac{1}{x}} dx = \int_1^2 \left(x^2+2x+1\right) e^{x-\frac{1}{x}} dx = \int_1^2 \left(x^2+1\right) e^{x-\frac{1}{x}} dx + \int_1^2 2xe^{x-\frac{1}{x}} dx.$$

Xét $I_1 = \int_1^2 \left(x^2+1\right) e^{x-\frac{1}{x}} dx = \int_1^2 x^2.e^{x-\frac{1}{x}}.\frac{x^2+1}{x^2} dx = \int_1^2 x^2.e^{x-\frac{1}{x}} d\left(x-\frac{1}{x}\right) = \int_1^2 x^2 d\left(e^{x-\frac{1}{x}}\right)$

$$= x^2 e^{x-\frac{1}{x}}\Big|_1^2 - \int_1^2 e^{x-\frac{1}{x}} d\left(x^2\right) = x^2 e^{x-\frac{1}{x}}\Big|_1^2 - \int_1^2 2xe^{x-\frac{1}{x}} dx$$

$$\Rightarrow I_1 + \int_1^2 2xe^{x-\frac{1}{x}} dx = x^2 e^{x-\frac{1}{x}}\Big|_1^2 \Rightarrow I = x^2 e^{x-\frac{1}{x}}\Big|_1^2 = 4e^{\frac{3}{2}} - 1$$

$\Rightarrow m = 4, n = 1, p = 3, q = 2.$

Khi đó $T = m+n+p+q = 4+1+3+2 = 10.$

Bài tập 7. Tìm số thực $\mathrm{m} > 1$ thỏa mãn $\int_1^{\mathrm{m}} (\ln \mathrm{x} + 1)\,\mathrm{dx} = \mathrm{m}.$

A. $\mathrm{m} = 2\mathrm{e}.$ **B.** $\mathrm{m} = \mathrm{e}.$ **C.** $\mathrm{m} = \mathrm{e}^2.$ **D.** $\mathrm{m} = \mathrm{e}+1.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

$$\mathrm{A} = \int_1^{\mathrm{m}} (\ln \mathrm{x} + 1)\,\mathrm{dx} = \int_1^{\mathrm{m}} \ln \mathrm{x}\,\mathrm{dx} + \int_1^{\mathrm{m}} \mathrm{dx}$$

$$\mathrm{I} = \int_1^{\mathrm{m}} \ln \mathrm{x}\,\mathrm{dx}$$

Đặt $\begin{cases} \mathrm{u} = \ln \mathrm{x} \\ \mathrm{dv} = \mathrm{dx} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{du} = \dfrac{1}{\mathrm{x}}\mathrm{dx} \\ \mathrm{v} = \mathrm{x} \end{cases}$

$$\Rightarrow \mathrm{I} = \mathrm{x}\ln \mathrm{x}\Big|_1^{\mathrm{m}} - \int_1^{\mathrm{m}} \mathrm{dx}$$

$$\mathrm{A} = \mathrm{x}\ln \mathrm{x}\Big|_1^{\mathrm{m}} = \mathrm{m}\ln \mathrm{m} = \mathrm{m} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \mathrm{m} = \mathrm{e} \\ \mathrm{m} = 0 \end{array}\right.$$

Bài tập 8. Đặt $I_k = \int_1^e \ln\frac{k}{x}dx$, k nguyên dương. Ta có $I_k < e-2$ khi:

A. $k \in \{1;2\}$. **B.** $k \in \{2;3\}$. **C.** $k \in \{4;1\}$. **D.** $k \in \{3;4\}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\text{Đặt}\begin{cases} u = \ln\frac{k}{x} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -\frac{1}{x}dx \\ v = x \end{cases} \Rightarrow I_k = \left(x.\ln\frac{k}{x}\right)\Big|_1^e + \int_1^e dx = (e-1)\ln k - 1 \Rightarrow I_k < e-2$$

$$\Leftrightarrow (e-1)\ln k - 1 < e-2 \Leftrightarrow \ln k < \frac{e-3}{e-1} \Leftrightarrow \ln k < 1 - \frac{2}{e-1}$$

Do k nguyên dương nên $k \in \{1;2\}$.

Bài tập 9. Tìm m để $\int_0^1 e^x (x+m)dx = e$.

A. $m = 0$. **B.** $m = e$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = \sqrt{e}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt

$$\begin{cases} u = x + m \\ dv = e^x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = e^x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^1 e^x (x+m)dx = e^x (x+m)\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e^x (x+m-1)\Big|_0^1 = me - m + 1$$

Mặt khác: $I = e \Rightarrow me - m + 1 = e \Leftrightarrow m(e-1) = e-1 \Leftrightarrow m = 1$.

Dạng 4: Tích phân chứa dấu giá trị tuyệt đối

1. Phương pháp

Bài toán: Tính tích phân $I = \int_a^b g(x)dx$

(với $g(x)$ là biểu thức chứa ẩn trong dấu giá trị tuyệt đối)

PP chung:

Xét dấu của biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối trên $[a;b]$

Dựa vào dấu để tách tích phân trên mỗi đoạn tương ứng (sử dụng tính chất 3 để tách)

Tính mỗi tích phân thành phần.

Đặc biệt: Tính tích phân $I = \int_a^b |f(x)|dx$

Cách giải

Cách 1:

+) Cho $f(x)=0$ *tìm nghiệm trên* $[a;b]$

+) Xét dấu của $f(x)$ *trên* $[a;b]$*, dựa vào dấu của* $f(x)$ *để tách tích phân trên mỗi đoạn tương ứng (sử dụng tính chất 3 để tách)*

+) Tính mỗi tích phân thành phần.

Cách 2:

+) Cho $f(x)=0$ *tìm nghiệm trên* $[a;b]$ giả sử các nghiệm đó là $x_1;x_2;...x_n$

(với $x_1<x_2<...<x_n$).

Khi đó $I=\int\limits_a^{x_1}|f(x)|\mathrm{d}x+\int\limits_{x_1}^{x_2}|f(x)|\mathrm{d}x+\int\limits_{x_2}^{x_3}|f(x)|\mathrm{d}x+...+\int\limits_{x_n}^{b}|f(x)|\mathrm{d}x$

$\Rightarrow I=\left|\int\limits_a^{x_1}f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int\limits_{x_1}^{x_2}f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int\limits_{x_2}^{x_3}f(x)\mathrm{d}x\right|+...+\left|\int\limits_{x_n}^{b}f(x)\mathrm{d}x\right|$

+) Tính mỗi tích phân thành phần

2. Bài tập

Bài tập 1: $\mathrm{S}=\int\limits_{-1}^{2}\left|\mathrm{x}^2-\mathrm{x}-2\right|\mathrm{d}\mathrm{x}=\dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}},\left(\mathrm{a},\mathrm{b}\in\mathbb{Z}^+\right),\dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$ là phân số tối giản. Giá trị $a+b$ bằng

A. 11. **B.** 25. **C.** 100. **D.** 50.

Hướng dẫn giải

Chọn A

$$\mathrm{S}=\int\limits_{-1}^{2}\left|\mathrm{x}^2-\mathrm{x}-2\right|\mathrm{d}\mathrm{x}=-\int\limits_{-1}^{2}\left(\mathrm{x}^2-\mathrm{x}-2\right)\mathrm{d}\mathrm{x}=-\left(\frac{\mathrm{x}^3}{3}-\frac{\mathrm{x}^2}{2}-2\mathrm{x}\right)\Bigg|_{-1}^{2}$$
$$=-\left[\left(\frac{8}{3}-\frac{4}{2}-4\right)-\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right)\right]=\frac{9}{2}$$

Bài tập 2: $\mathrm{I}=\int\limits_0^{\pi}\sqrt{1-\sin 2\mathrm{x}}\mathrm{d}\mathrm{x}=\mathrm{a}\sqrt{\mathrm{a}},\left(\mathrm{a}\in\mathbb{N}^*\right)$. Hỏi a^3 là bao nhiêu?

A. 27. **B.** 64. **C.** 125. **D.** 8.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $\sqrt{1-\sin 2\mathrm{x}}=\sqrt{\left(\sin\mathrm{x}-\cos\mathrm{x}\right)^2}=\left|\sin\mathrm{x}-\cos\mathrm{x}\right|=\sqrt{2}\left|\sin\left(\mathrm{x}-\dfrac{\pi}{4}\right)\right|$.

Với $x\in[0;\pi]\Rightarrow x-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$.

+ Với $x-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4};0\right]$ thì $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)<0$

+ Với $x-\frac{\pi}{4}\in\left[0;\frac{3\pi}{4}\right]$ thì $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0$

$\Rightarrow I=-\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx+\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)dx=2\sqrt{2}.$

Chọn 3: Biết $I=\int_1^5\frac{2|x-2|+1}{x}dx=4+a\ln 2+b\ln 5,$ với a, b là các số nguyên. Giá trị $S=a-b$ bằng

A. 9. **B.** 11. **C.** 5. **D.** –3.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có: $I=\int_1^5\frac{2|x-2|+1}{x}dx=\int_1^2\frac{2|x-2|+1}{x}dx+\int_2^5\frac{2|x-2|+1}{x}dx$

$=\int_1^2\frac{2(2-x)+1}{x}dx+\int_2^5\frac{2(x-2)+1}{x}dx=\int_1^2\frac{5-2x}{x}dx+\int_2^5\frac{2x-3}{x}dx$

$=\int_1^2\left(\frac{5}{x}-x\right)dx+\int_2^5\left(2-\frac{3}{x}\right)dx=\left(5\ln|x|-x\right)\Big|_1^2+\left(2x-3\ln|x|\right)\Big|_2^5$

$=8\ln 2-3\ln 5+4\Rightarrow\begin{cases}a=8\\b=-3\end{cases}\Rightarrow a-b=11.$

Bài tập 4: Cho tích phân $\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx=ab$ và $a+b=2+2\sqrt{2}.$ Giá trị của a và b lần lượt là

A. $\begin{cases}a=2\\b=2\sqrt{2}\end{cases}.$ **B.** $\begin{cases}a=2\sqrt{2}\\b=2\end{cases}.$

C. $\begin{cases}a=2\sqrt{2}\\b=-2\end{cases}\vee\begin{cases}a=2\\b=2\sqrt{2}\end{cases}.$ **D.** $\begin{cases}a=2\sqrt{2}\\b=2\end{cases}\vee\begin{cases}a=2\\b=2\sqrt{2}\end{cases}.$

Hướng dẫn giải

Chọn D

$\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}|\sin x|dx=\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin x dx-\sqrt{2}\int_{\pi}^{2\pi}\sin x dx$

$=-\sqrt{2}\cos x\Big|_0^{\pi}+\sqrt{2}\cos x\Big|_{\pi}^{2\pi}=4\sqrt{2}.$

$\Rightarrow\begin{cases}ab=4\sqrt{2}\\a+b=2+2\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow X^2-\left(2+2\sqrt{2}\right)X+4\sqrt{2}=0\Rightarrow\begin{cases}a=2\sqrt{2}\\b=2\end{cases}\vee\begin{cases}a=2\\b=2\sqrt{2}\end{cases}.$

Bài tập 5: Tính tích phân $I=\int_0^1 x\left|x-a\right|\mathrm{d}x, a>0$ ta được kết quả $I=f(a)$. Khi đó tổng $f(8)+f\left(\frac{1}{2}\right)$ có giá trị bằng:

A. $\frac{24}{91}$. **B.** $\frac{91}{24}$. **C.** $\frac{17}{2}$. **D.** $\frac{2}{17}$

Hướng dẫn giải

Chọn B

TH1: Nếu $a\geq 1$ khi đó $I=-\int_0^1 x\left(x-a\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{-x^3}{3}+\frac{ax^2}{2}\right)\Big|_0^1=\frac{a}{2}-\frac{1}{3}\Rightarrow f(8)=\frac{8}{2}-\frac{1}{3}=\frac{11}{3}$

TH 2: Nếu $0<a<1$ khi đó $I=-\int_0^a x\left(x-a\right)\mathrm{d}x+\int_a^1 x\left(x-a\right)\mathrm{d}x$

$=\left(\frac{-x^3}{3}+\frac{ax^2}{2}\right)\Big|_0^a+\left(\frac{x^3}{3}-\frac{ax^2}{2}\right)\Big|_a^1=\frac{a^3}{3}-\frac{a}{2}+\frac{1}{3}\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{24}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{1}{8}$

Khi đó $f(8)+f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{3}+\frac{1}{8}=\frac{91}{24}$.

Bài tập 6: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa $\int_0^1 f\left(2x\right)\mathrm{d}x=2$ và $\int_0^2 f\left(6x\right)\mathrm{d}x=14$. Giá trị $\int_{-2}^2 f\left(5\left|x\right|+2\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 30. **B.** 32. **C.** 34. **D.** 36.

Lời giải

Chọn B

+ Xét $\int_0^1 f\left(2x\right)\mathrm{d}x=2$.

Đặt $u=2x\Rightarrow \mathrm{d}u=2\mathrm{d}x$; $x=0\Rightarrow u=0$; $x=1\Rightarrow u=2$.

Nên $2=\int_0^1 f\left(2x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^2 f\left(u\right)\mathrm{d}u\Rightarrow\int_0^2 f\left(u\right)\mathrm{d}u=4$.

+ Xét $\int_0^2 f\left(6x\right)\mathrm{d}x=14$.

Đặt $v=6x\Rightarrow \mathrm{d}v=6\mathrm{d}x$; $x=0\Rightarrow v=0$; $x=2\Rightarrow v=12$.

Nên $14=\int_0^2 f\left(6x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\int_0^{12} f\left(v\right)\mathrm{d}v\Rightarrow\int_0^{12} f\left(v\right)\mathrm{d}v=84$.

+ Xét $\int_{-2}^2 f\left(5\left|x\right|+2\right)\mathrm{d}x=\int_{-2}^0 f\left(5\left|x\right|+2\right)\mathrm{d}x+\int_0^2 f\left(5\left|x\right|+2\right)\mathrm{d}x$.

□ Tính $I_1=\int\limits_{-2}^{0} f\left(5|x|+2\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=5|x|+2$.

Khi $-2<x<0$, $t=-5x+2\Rightarrow \mathrm{d}t=-5\mathrm{d}x$; $x=-2\Rightarrow t=12$; $x=0\Rightarrow t=2$.

$I_1=\dfrac{-1}{5}\int\limits_{12}^{2} f\left(t\right)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{5}\left[\int\limits_{0}^{12} f\left(t\right)\mathrm{d}t-\int\limits_{0}^{2} f\left(t\right)\mathrm{d}t\right]=\dfrac{1}{5}\left(84-4\right)=16$.

□ Tính $I_1=\int\limits_{0}^{2} f\left(5|x|+2\right)\mathrm{d}x$.

Đặt $t=5|x|+2$.

Khi $0<x<2$, $t=5x+2\Rightarrow \mathrm{d}t=5\mathrm{d}x$; $x=2\Rightarrow t=12$; $x=0\Rightarrow t=2$.

$I_2=\dfrac{1}{5}\int\limits_{2}^{12} f\left(t\right)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{5}\left[\int\limits_{0}^{12} f\left(t\right)\mathrm{d}t-\int\limits_{0}^{2} f\left(t\right)\mathrm{d}t\right]=\dfrac{1}{5}\left(84-4\right)=16$.

Vậy $\int\limits_{-2}^{2} f\left(5|x|+2\right)\mathrm{d}x=32$.

Bài tập 7: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[0;4\right]$ và $\int\limits_{0}^{2} f\left(x\right)\mathrm{d}x=1;\int\limits_{0}^{4} f\left(x\right)\mathrm{d}x=3$. Giá trị $\int\limits_{-1}^{1} f\left(|3x-1|\right)\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$\int\limits_{-1}^{1} f\left(|3x-1|\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-1}^{1/3} f\left(1-3x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{1/3}^{1} f\left(3x-1\right)\mathrm{d}x$.

$=-\dfrac{1}{3}\int\limits_{-1}^{1/3} f\left(1-3x\right)\mathrm{d}\left(1-3x\right)+\dfrac{1}{3}\int\limits_{1/3}^{1} f\left(3x-1\right)\mathrm{d}\left(3x-1\right)$.

$=-\dfrac{1}{3}\int\limits_{4}^{0} f\left(t\right)\mathrm{d}t+\dfrac{1}{3}\int\limits_{0}^{2} f\left(t\right)\mathrm{d}\left(t\right)=-\dfrac{1}{3}\left(-3\right)+\dfrac{1}{3}.1=\dfrac{4}{3}$.

Bài tập 8. $S=\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left|y^4-4y^2+3\right|dy=\dfrac{a-24\sqrt{3}}{b}$. Giá tị $A+2B$ bằng

A. 80. **B.** 83. **C.** 142. **D.** 79.

Hướng dẫn giải

Chọn C

$\left|y^4-4y^2+3\right|=\left|\left(y^2-1\right)\left(y^2-3\right)\right|$

Xét dấu $\left(y^2-1\right)\left(y^2-3\right)$, ta có:

y	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y^2-1		+		+	0	-		+		+	
y^2-3		+	0	-		-	0	-	0	+	
$(y^2-1)(y^2-3)$		+	0	-	0	-	0	-	0	+	

$$S=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left|\left(4-4y^2\right)-\left(1-y^4\right)\right|dy=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left|y^4-4y^2+3\right|dy$$

$$=\int_{-\sqrt{3}}^{-1}-\left(y^4-4y^2+3\right)dy+\int_{-1}^{1}\left(y^4-4y^2+3\right)dy+\int_{1}^{\sqrt{3}}-\left(y^4-4y^2+3\right)dy$$

$$=-\left(\frac{y^5}{5}-\frac{4y^3}{3}+3y\right)\Bigg|_{-\sqrt{3}}^{-1}+\left(\frac{y^5}{5}-\frac{4y^3}{3}+3y\right)\Bigg|_{-1}^{1}-\left(\frac{y^5}{5}-\frac{4y^3}{3}+3y\right)\Bigg|_{1}^{\sqrt{3}}$$

$$=\frac{112-24\sqrt{3}}{15}.$$

Bài tập 9. $S=\int_0^1\sqrt{4x^2-4x+1}dx=\frac{a}{b},\left(a,b\in\mathbb{Z}^+\right),\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị $\sqrt{a+4b}$ bằng

A. 1. **B.** –3. **C.** 35. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $I_7=\int_0^1\sqrt{(2x-1)^2}dx=\int_0^1\left|2x-1\right|dx$

$$\Rightarrow I_7=\int_0^1\left|2x-1\right|dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\left|2x-1\right|dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\left|2x-1\right|dx=\int_0^{\frac{1}{2}}(1-2x)dx+\int_{\frac{1}{2}}^1(2x-1)dx=\frac{1}{2}.$$

Suy ra: $a=1,b=2.$

Bài tập 10. $I=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\sin x}dx=A\sqrt{B}$, biết $A=2B$ Giá trị A^3+B^3 bằng

A. 72. **B.** 8. **C.** 65. **D.** 35.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $\sqrt{1+\sin x}=\sqrt{\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2}=\left|\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right|=\sqrt{2}\left|\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$

Với $x\in[0;2\pi]\Rightarrow\frac{x}{2}\in[0;\pi]\Rightarrow\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{5\pi}{4}\right]$.

+ Với $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4};\pi\right]$ thì $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)>0$

+ Với $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\in\left[\pi;\frac{5\pi}{4}\right]$ thì $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)<0$

$\Rightarrow I=\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)dx-\sqrt{2}\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)dx=4\sqrt{2}$.

Bài tập 11. Cho tích phân $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 x}dx=a\sqrt{3}+b.$ Giá trị $A=a-b-4$ bằng

A. 2. **B.** -5. **C.** 5. **D.** -8.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$I=\int\limits_0^2\sqrt{1-\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 x}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\left(\sin x-\sqrt{3}\cos x\right)^2}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin x-\sqrt{3}\cos x\right|dx$.

$\sin x-\sqrt{3}\cos x=0\Leftrightarrow\tan x=\sqrt{3}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\pi$.

Do $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ nên $x=\frac{\pi}{3}$.

$$I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\left|\sin x-\sqrt{3}\cos x\right|dx+\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left|\sin x-\sqrt{3}\cos x\right|dx=\left|\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\sin x-\sqrt{3}\cos x\right)dx\right|+\left|\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin x-\sqrt{3}\cos x\right)dx\right|$$

$$=\left|\left(-\cos x-\sqrt{3}\sin x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}\right|+\left|\left(-\cos x-\sqrt{3}\sin x\right)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\right|=\left|-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+1\right|+\left|-\sqrt{3}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right|=3-\sqrt{3}.$$

$\Rightarrow a=-1;\ b=3\Rightarrow A=-8$

Dạng 5: Tính tích phân các hàm đặc biệt, hàm ẩn

1. Phương pháp giải

a. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-a;a]$. Khi đó

Bài tập 1: Tích phân $I=\int\limits_{-1}^{1}\cos x.\ln\frac{2+x}{2-x}dx$ bằng

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a}\left[f(x)+f(-x)\right]dx} \quad (1)$$

Chứng minh

Ta có $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx.$

Xét $I = \int_{-a}^{0} f(x)dx.$ Đổi biến $x = -t \Rightarrow dx = -dt.$

Đổi cận $x = -a \Rightarrow t = a; x = 0 \Rightarrow t = 0$

Khi đó

$$I = \int_{a}^{0} f(-t)(-dt) = \int_{0}^{a} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(-x)dx$$

Do đó (1) được chứng minh.

Đặc biệt

+ Nếu $f(x)$ là hàm số lẻ thì ta có

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0} \quad (1.1).$$

+ Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn thì ta có

$$\boxed{\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx} \quad (1.2)$$

+ Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn thì ta cũng có

$$\boxed{\int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+b^x}dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} f(x)dx} \quad (0 < b \neq 1)$$

(1.3).

Chứng minh (1.3):

Đặt $A = \int_{-a}^{a} \frac{f(x)}{1+b^x}dx$ (*).

Đổi biến $x = -t \Rightarrow dx = -dt.$

Đổi cận $x = -a \Rightarrow t = a; x = a \Rightarrow t = -a$

Khi đó $A = \int_{a}^{-a} \frac{f(-1)}{1+b^{-t}}(-dt) = \int_{-a}^{a} \frac{b^t.f(t)}{1+b^t}dt.$

A. $-1.$ **B.** $2.$

C. $0.$ **D.** $1.$

Hướng dẫn giải

Hàm số $f(x) = \cos x.\ln\frac{2+x}{2-x}$ xác định và liên tục trên đoạn $[-1;1].$

Mặt khác, với $\forall x \in [-1;1] \Rightarrow -x \in [-1;1]$ và

$$f(-x) = \cos(-x).\ln\frac{2-x}{2+x} = -\cos x.\ln\frac{2+x}{2-x} = -f(x).$$

Do đó hàm số $f(x) = \cos x.\ln\frac{2+x}{2-x}$ là hàm số lẻ.

Vậy $I = \int_{-1}^{1} \cos x.\ln\frac{2+x}{2-x}dx = 0.$

Chọn C.

Bài tập 2: Cho $y = f(x)$ là hàm số chẵn, liên tục trên đoạn $[-6;6].$

Biết rằng $\int_{-1}^{2} f(x)dx = 8$ và $\int_{1}^{3} f(-2x)dx = 3.$

Tính $\int_{-1}^{6} f(x)dx.$

A. $I = 11.$ **B.** $I = 5.$

C. $I = 2.$ **D.** $I = 14.$

Hướng dẫn giải

Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-6;6]$ ta có

$$\int_{1}^{3} f(-2x)dx = 3 \Leftrightarrow \int_{1}^{3} f(2x)dx = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}F(2x)\Big|_{1}^{3} = 3.$$

Do đó $F(6) - F(2) = 6$ hay $\int_{2}^{6} f(x)dx = 6.$

Vậy $I = \int_{-1}^{6} f(x)dx = \int_{-1}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{6} f(x)dx = 14.$

Hay $A=\int\limits_{-a}^{a}\frac{b^x.f(x)}{1+b^x}dx$ (**).

Suy ra

$$2A=\int\limits_{-a}^{a}f(x)dx\Leftrightarrow A=\frac{1}{2}\int\limits_{-a}^{a}f(x)dx.$$

Chọn D.

Bài tập 3: Tích phân $I=\int\limits_{-1}^{1}\frac{x^{2020}}{e^x+1}dx$ có giá trị là

A. $I=0.$ **B.** $I=\frac{2^{2020}}{2019}.$

C. $I=\frac{2^{2021}}{2021}.$ **D.** $I=\frac{2^{2019}}{2019}.$

Hướng dẫn giải

Áp dụng bài toán (1.3) ở cột bên trái cho hàm số $f(x)=x^{2020}$ và $b=e$ ta có

Ta có

$$I=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1}x^{2020}dx=\frac{x^{2021}}{2021}\Big|_{-1}^{1}=\frac{2.2^{2021}}{2021}\Rightarrow I=\frac{2^{2021}}{2021}.$$

Chọn C.

b. Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì

$$\boxed{\int\limits_{a}^{b}f(x)dx=\int\limits_{a}^{b}f(a+b-x)dx}$$

Hệ quả: hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$, khi đó:

$$\boxed{\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx-\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx}$$

Bài tập 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa điều kiện $f(x)+f(-x)=2\cos x,$ với $\forall x\in\mathbb{R}$.

Giá trị của $N=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$ là

A. $N=-1.$ **B.** $N=0.$

C. $N=1.$ **D.** $N=2.$

Hướng dẫn giải

Ta có $N=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(-x)dx$

Suy ra $2N=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)+f(-x)\right]dx=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}2\cos xdx.$

Vậy $N=2\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=2\sin x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}=2.$

Chọn D.

c. Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a+b-x)=f(x)$ thì

$$\boxed{\int_a^b xf(x)\,dx=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx}$$

d. Nếu $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(x)\geq 0$ với $\forall x\in[a;b]$ thì $\int_a^b f(x)\,dx\geq 0$ và $\int_a^b f(x)\,dx=0$ khi $f(x)=0.$

Bài tập 5: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x)+f(2-x)=x(2-x),\forall x\in\mathbb{R}.$

Giá trị tích phân $G=\int_0^2 f(x)\,dx$ là

A. $G=2.$ **B.** $G=\frac{1}{2}.$

C. $G=\frac{2}{3}.$ **D.** $G=\frac{1}{3}.$

Hướng dẫn giải

Ta có $G=\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2 f(2-x)\,dx$

Suy ra $2G=\int_0^2\left[f(x)+f(-x)\right]dx=\int_0^2 x(2-x)\,dx$

Vậy $G=\frac{1}{2}\int_0^2 x(2-x)\,dx=\frac{2}{3}.$

Chọn C.

Bài tập 6: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $f(1)=0,\ \int_0^1\left[f'(x)\right]^2dx=7$ và $\int_0^1 x^2f(x)\,dx=\frac{1}{3}.$ Tích phân $\int_0^1 f(x)\,dx$ bằng

A. $\frac{7}{5}.$ **B.** 1.

C. $\frac{7}{4}.$ **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Đặt $\begin{cases}u=f(x)\\dv=x^2dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=f'(x)\,dx\\v=\frac{x^3}{3}\end{cases}$

Ta có $\int_0^1 x^2f(x)\,dx=\left.\frac{x^3f(x)}{3}\right|_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1 x^3f'(x)\,dx$

$\Rightarrow-\frac{1}{3}\int_0^1 x^3.f'(x)dx=\frac{1}{3}\Rightarrow\int_0^1 x^3.f'(x)\,dx=-1.$

Cách 1: Ta có $\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx = 7$ (1).

$\int_0^1 x^6 dx = \frac{x^7}{7}\Big|_0^1 = \frac{1}{7} \Rightarrow \int_0^1 49x^6 dx = \frac{1}{7}.49 = 7$ (2).

$\int_0^1 x^3.f'(x)dx = -1 \Rightarrow \int_0^1 14x^3.f'(x)dx = -14$ (3).

Cộng hai vế (1), (2) và (3) suy ra

$\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx + \int_0^1 49x^6 dx + \int_0^1 14x^3.f'(x)dx = 0$

$\Rightarrow \int_0^1 \left[f(x) + 7x^3\right]^2 dx = 0.$

Do $\left[f'(x) + 7x^3\right]^2 \geq 0 \Rightarrow \int_0^1 \left[f'(x) + 7x^3\right]^2 dx \geq 0$. Mà

$\int_0^1 \left[f'(x) + 7x^3\right]^2 dx = 0 \Rightarrow f'(x) = -7x^3.$

$f(x) = -\frac{7x^4}{4} + C.$

Mà $f(1) = 0 \Rightarrow -\frac{7}{4} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{7}{4}.$

Do đó $f(x) = -\frac{7x^4}{4} + \frac{7}{4}.$

Vậy $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(-\frac{7x^4}{4} + \frac{7}{4}\right)dx = \frac{7}{5}.$

Một số kĩ thuật giải tích phân hàm ẩn

Loại 1: Biểu thức tích phân đưa về dạng: $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x)$

Cách giải:

+ Ta có $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = \left[u(x)f(x)\right]'$

+ Do đó $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x) \Leftrightarrow \left[u(x)f(x)\right]' = h(x)$

Suy ra $u(x)f(x) = \int h(x)dx$

Suy ra được $f(x)$

Loại 2: Biểu thức tích phân đưa về dạng: $f'(x) + f(x) = h(x)$

Cách giải:

+ Nhân hai vế với $e^x \Rightarrow e^x.f'(x)+e^x.f(x)=e^x.h(x) \Leftrightarrow \left[e^x.f(x)\right]'=e^x.h(x)$

Suy ra $e^x.f(x)=\int e^x h(x)dx$

Suy ra được $f(x)$

Loại 3: Biểu thức tích phân đưa về dạng: $f'(x)-f(x)=h(x)$

Cách giải:

+ Nhân hai vế với $e^{-x} \Rightarrow e^{-x}.f'(x)+e^{-x}.f(x)=e^{-x}.h(x) \Leftrightarrow \left[e^{-x}.f(x)\right]'=e^{-x}.h(x)$

Suy ra $e^{-x}.f(x)=\int e^{-x}h(x)dx$

Suy ra được $f(x)$

Loại 4: Biểu thức tích phân đưa về dạng: $f'(x)+p(x)f(x)=h(x)$

Cách giải:

+ Nhân hai vế với $e^{\int p(x)dx} \Rightarrow f'(x).e^{\int p(x)dx}+p(x).e^{\int p(x)dx}.f(x)=h(x).e^{\int p(x)dx}$
$\Leftrightarrow \left[f(x).e^{\int p(x)dx}\right]'=h(x).e^{\int p(x)dx}$

Suy ra $f(x).e^{\int p(x)dx}=\int e^{\int p(x)dx}.h(x)dx$

Suy ra được $f(x)$

Công thức $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^b f(a+b-x)dx$

2. Bài tập

Bài tập 1: Cho số thực $a>0$. Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục và luôn dương trên đoạn $[0;a]$ thỏa mãn $f(x).f(a-x)=1$. Giá trị tích phân $I=\int\limits_0^a \frac{1}{1+f(x)}dx$ là

A. $I=\frac{2a}{3}$. **B.** $I=\frac{a}{2}$. **C.** $I=\frac{a}{3}$. **D.** $I=a$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $t=a-x \Rightarrow dt=-dx$. Đổi cận $x=0 \Rightarrow t=a; x=a \Rightarrow t=0$.

Khi đó $I=\int\limits_0^a \frac{1}{1+f(a-t)}dt=\int\limits_0^a \frac{1}{1+f(a-x)}dx=\int\limits_0^a \frac{1}{1+\frac{1}{f(x)}}dx=\int\limits_0^a \frac{f(x)}{1+f(x)}dx.$

$\Rightarrow 2I=\int\limits_0^a \frac{1}{1+f(x)}dx+\int\limits_0^a \frac{f(x)}{1+f(x)}dx=\int\limits_0^a 1.dx=a$. Vậy $I=\frac{a}{2}$.

Ta có thể chọn hàm số $f(x)=1$, *với mọi* $x\in[0;a]$ *thỏa mãn yêu cầu đề bài.*

Khi đó $I=\int\limits_0^a \frac{1}{1+f(x)}dx=\int\limits_0^a \frac{1}{2}dx=\frac{a}{2}$.

Bài tập 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;1]$ và $f(-x)+2019f(x)=e^x, \forall x\in[-1;1]$. Tích phân $M=\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx$ bằng

A. $\frac{e^2-1}{2019e}$. **B.** $\frac{e^2-1}{e}$. **C.** $\frac{e^2-1}{2020e}$. **D.** 0.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $M=\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx=\int\limits_{-1}^{1} f(-x)dx$.

Do đó $2020M=2019\int\limits_{-1}^{1} f(x)dx+\int\limits_{-1}^{1} f(-x)dx=\int\limits_{-1}^{1}\left[f(-x)+2019f(x)\right]dx$.

Suy ra $M=\frac{1}{2020}\int\limits_{-1}^{1} e^x dx=\frac{e^2-1}{2020e}$.

Nếu $f(x)$ *liên tục trên đoạn* $[a;b]$ *thì* $\int\limits_a^b f(x)dx=\ =\int\limits_a^b f(a+b-x)dx$

Bài tập 3. Cho $f(x)$ là một hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f(-x)=\sqrt{2-2\cos 2x}$.

Giá trị tích phân $P=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx$ là

A. $P=3$. **B.** $P=4$. **C.** $P=6$. **D.** $P=8$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $P=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)dx$

$\Rightarrow 2P=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left[f(x)+f(-x)\right]dx=\int\limits_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\sqrt{2-2\cos 2x}dx=4\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}}|\sin x|dx$.

Hay $P=2\int\limits_{0}^{\pi}\sin xdx-2\int\limits_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\sin xdx=-2\cos x\Big|_{0}^{\pi}+2\cos x\Big|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}=6.$

Bài tập 4: Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x)+f'(x)=\sin x$ với mọi x và $f(0)=1.$ Tích phân $e^{\pi}.f(\pi)$ bằng

A. $\frac{e^{\pi}-1}{2}.$ **B.** $\frac{e^{\pi}-1}{2}.$ **C.** $\frac{e^{\pi}+3}{2}.$ **D.** $\frac{\pi+1}{2}.$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $f(x)+f'(x)=\sin x$ nên $e^{x}f(x)+e^{x}f'(x)=e^{x}.\sin x,\forall x\in\mathbb{R}.$

$\Leftrightarrow\left[e^{x}f(x)\right]'=e^{x}.\sin x$ hay $\int\limits_{0}^{\pi}\left[e^{x}f(x)\right]'dx=\int\limits_{0}^{\pi}e^{x}.\sin xdx$

$\Leftrightarrow\left[e^{x}f(x)\right]\Big|_{0}^{\pi}=\frac{1}{2}\left[e^{x}(\sin x-\cos x)\right]\Big|_{0}^{\pi}\Leftrightarrow e^{\pi}f(\pi)-f(0)=\frac{1}{2}\left(e^{\pi}+1\right)$

$\Leftrightarrow e^{\pi}f(\pi)=\frac{e^{\pi}+3}{2}.$

Để ý rằng $\left(e^{x}\right)'=e^{x}$ nên nếu nhân thêm hai vế của $f(x)+f'(x)=\sin x$ với e^{x} thì ta sẽ có ngay $\left(e^{x}.f(x)\right)'=e^{x}.\sin x.$

Bài tập 5: Cho hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kì $\frac{\pi}{2}$ và có đạo hàm liên tục thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left[f'(x)\right]^{2}dx=\frac{\pi}{4}$ và $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x).\cos xdx=\frac{\pi}{4}.$ Giá trị của $f(2019\pi).$

A. $-1.$ **B.** $0.$ **C.** $\frac{1}{2}.$ **D.** $1.$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Bằng phương pháp tích phân từng phần ta có

$\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x).\cos xdx=\left[f(x).\sin x\right]\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f'(x).\sin xdx.$ Suy ra $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f'(x).\sin xdx=-\frac{\pi}{4}.$

Mặt khác $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^{2}xdx=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\left[\frac{2x-\sin 2x}{4}\right]\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{\pi}{4}.$

Suy ra

$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f'(x)\right]^2dx+2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xf'(x)dx+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx=0\Leftrightarrow\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f'(x)+\sin x\right]^2dx=0.$

$\Rightarrow f'(x)=-\sin x.$ Do đó $f(x)=\cos x+C.$ Vì $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ nên $C=0.$

Ta được $f(x)=\cos x\Rightarrow f(2019\pi)=\cos(2019\pi)=-1.$

Bài tập 6: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thoả mãn $3f(x)+xf'(x)=x^{2018}$ với mọi $x\in[0;1]$. Tính $I=\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

A. $I=\frac{1}{2018\times2021}.$ **B.** $I=\frac{1}{2019\times2020}.$

C. $I=\frac{1}{2019\times2021}.$ **D.** $I=\frac{1}{2018\times2019}.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Từ giả thiết $3f(x)+xf'(x)=x^{2018},$ nhân hai vế cho x^2 ta được

$$3x^2f(x)+x^3f'(x)=x^{2020}\Leftrightarrow\left[x^3f(x)\right]'=x^{2020}.$$

Suy ra $x^3f(x)=\int x^{2020}\mathrm{d}x=\frac{x^{2021}}{2021}+C.$

Thay $x=0$ vào hai vế ta được $C=0\Rightarrow f(x)=\frac{x^{2018}}{2021}.$

Vậy $\int\limits_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int\limits_0^1\frac{1}{2021}x^{2018}\mathrm{d}x=\frac{1}{2021}.\frac{1}{2019}x^{2019}\Big|_0^1=\frac{1}{2021\times2019}.$

Bài tập 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;4]$, thỏa mãn $f(x)+f'(x)=e^{-x}\sqrt{2x+1}$ với mọi $x\in[0;4]$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $e^4f(4)-f(0)=\frac{26}{3}.$ **B.** $e^4f(4)-f(0)=3e.$

C. $e^4f(4)-f(0)=e^4-1.$ **D.** $e^4f(4)-f(0)=3.$

Lời giải

Chọn A

Nhân hai vế cho e^x để thu được đạo hàm đúng, ta được

$$e^xf(x)+e^xf'(x)=\sqrt{2x+1}\Leftrightarrow\left[e^xf(x)\right]'=\sqrt{2x+1}.$$

Suy ra $e^xf(x)=\int\sqrt{2x+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}+C.$

Vậy $e^4 f(4) - f(0) = \frac{26}{3}$.

Bài tập 8: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x) - 2018 f(x) = 2018 x^{2017} e^{2018x}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2018$. Giá trị $f(1)$ bằng

A. $2018e^{-2018}$. **B.** $2017e^{2018}$. **C.** $2018e^{2018}$. **D.** $2019e^{2018}$.

Lời giải

Chọn D

Nhân hai vế cho e^{-2018x} để thu được đạo hàm đúng, ta được

$$f'(x)e^{-2018x} - 2018 f(x)e^{-2018x} = 2018x^{2017} \Leftrightarrow \left[f(x)e^{-2018x} \right]' = 2018x^{2017}.$$

Suy ra $f(x)e^{-2018x} = \int 2018x^{2017} \mathrm{d}x = x^{2018} + C$.

Thay $x = 0$ vào hai vế ta được $C = 2018 \Rightarrow f(x) = \left(x^{2018} + 2018 \right) e^{2018x}$.

Vậy $f(1) = 2019e^{2018}$.

Bài tập 9: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f'(x) + xf(x) = 2xe^{-x^2}$ và $f(0) = -2$. Giá trị $f(1)$ bằng

A. e. **B.** $\frac{1}{e}$. **C.** $\frac{2}{e}$. **D.** $-\frac{2}{e}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Nhân hai vế cho $e^{\frac{x^2}{2}}$ để thu được đạo hàm đúng, ta được

$$f'(x)e^{\frac{x^2}{2}} + f(x)xe^{\frac{x^2}{2}} = 2xe^{-\frac{x^2}{2}} \Leftrightarrow \left[e^{\frac{x^2}{2}} f(x) \right]' = 2xe^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Suy ra $e^{\frac{x^2}{2}} f(x) = \int 2xe^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = -2e^{-\frac{x^2}{2}} + C$.

Thay $x = 0$ vào hai vế ta được $C = 0 \Rightarrow f(x) = -2e^{-x^2}$.

Vậy $f(1) = -2e^{-1} = -\frac{2}{e}$.

Bài tập 10: Xét hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $2f(x) + 3f(1-x) = \sqrt{1-x}$. Tích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{2}{15}$. **D.** $\frac{3}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $2f(x)+3f(1-x)=\sqrt{1-x}$ (1).

Đặt $t=1-x$, thay vào (1), ta được: $2f(1-t)+3f(t)=\sqrt{t}$ hay $2f(1-x)+3f(x)=\sqrt{x}$ (2).

Từ (1) & (2), ta được: $f(x)=\frac{3}{5}\sqrt{x}-\frac{2}{5}\sqrt{1-x}$.

Do đó, ta có: $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{3}{5}\int_0^1\sqrt{x}\,\mathrm{d}x-\frac{2}{5}\int_0^1\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{5}-\frac{4}{15}=\frac{2}{15}$.

Cách 2. Công thức $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$

Lấy tích phân 2 vế ta được $2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+3\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$

$5\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\Rightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{15}$.

Chú ý: Ta có thể dùng công thức $\int_{x_1}^{x_2} f\left(ax+b\right)\mathrm{d}x=\int_{ax_1+b}^{ax_2+b} f\left(x\right)\mathrm{d}x$. Khi đó:

Từ $2f\left(x\right)+3f\left(1-x\right)=\sqrt{1-x}$ suy ra: $2\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x+3\int_0^1 f\left(1-x\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-x}\mathrm{d}x$

$\Leftrightarrow 2\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x-3\int_1^0 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1-x}\mathrm{d}x\Leftrightarrow 5\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{15}$.

$\mathrm{I}=\frac{1}{2}\int_1^2\mathrm{f}\left(\mathrm{t}\right)\mathrm{dt}=\frac{1}{2}\int_1^2\mathrm{f}\left(\mathrm{x}\right)\mathrm{dx}=\frac{\mathrm{a}}{2}$.

Bài tập 11: Cho $\mathrm{y}=\mathrm{f}\left(\mathrm{x}\right)$ là hàm số chẵn, có đạo hàm trên đoạn $\left[-6;6\right]$. Biết rằng $\int_{-1}^2\mathrm{f}\left(\mathrm{x}\right)\mathrm{dx}=8$ và $\int_1^3\mathrm{f}\left(-2\mathrm{x}\right)\mathrm{dx}=3$. Giá trị $\int_{-1}^6 f\left(x\right)dx$ bằng

A. 1. **B.** e. **C.** -1. **D.** 14.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $\mathrm{y}=\mathrm{f}\left(\mathrm{x}\right)$ là hàm số chẵn nên $\mathrm{f}\left(2\mathrm{x}\right)=\mathrm{f}\left(-2\mathrm{x}\right)$ suy ra $\int_1^3\mathrm{f}\left(-2\mathrm{x}\right)\mathrm{dx}=\int_1^3\mathrm{f}\left(2\mathrm{x}\right)\mathrm{dx}=3.$

Mặt khác: $\int_1^3\mathrm{f}\left(2\mathrm{x}\right)\mathrm{dx}=\frac{1}{2}\int_1^3\mathrm{f}\left(2\mathrm{x}\right)\mathrm{d}\left(2\mathrm{x}\right)=\frac{1}{2}\int_2^6\mathrm{f}\left(\mathrm{x}\right)\mathrm{dx}=3\Rightarrow\int_2^6\mathrm{f}\left(\mathrm{x}\right)\mathrm{dx}=6.$

Vậy $I=\int\limits_{-1}^{6} f(x)dx=\int\limits_{-1}^{2} f(x)dx+\int\limits_{2}^{6} f(x)dx=8+6=14.$

Bài tập 12: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số k để $\int\limits_{1}^{k}(2x-1)dx=4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}.$

A. $\left[\begin{array}{l}k=1\\k=2\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}k=1\\k=-2\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}k=-1\\k=-2\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}k=-1\\k=2\end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $\int\limits_{1}^{k}(2x-1)dx=\dfrac{1}{2}\int\limits_{1}^{k}(2x-1)d(2x-1)=\dfrac{(2x-1)^2}{4}\Big|_{1}^{k}=\dfrac{(2k-1)^2}{4}-\dfrac{1}{4}$

Mà $4\lim\limits_{x\to 0}=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}=4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}=2$

Khi đó $\int\limits_{1}^{k}(2x-1)dx=4\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}\Leftrightarrow\dfrac{(2k-1)^2-1}{4}=2\Leftrightarrow(2k-1)^2=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=2\\k=-1\end{array}\right.$.

Bài tập 13: Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên đoạn $[0;a]$ thỏa mãn $\begin{cases}f(x).f(a-x)=1\\f(x)>0,\ \forall x\in[0;a]\end{cases}$ và $\int\limits_{0}^{a}\dfrac{dx}{1+f(x)}=\dfrac{ba}{c}$, trong đó b, c là hai số nguyên dương và $\dfrac{b}{c}$ là phân số tối giản. Khi đó $b+c$ có giá trị thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(11;22)$. **B.** $(0;9)$. **C.** $(7;21)$. **D.** $(2017;2020)$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Đặt $t=a-x\Rightarrow dt=-dx$

Đổi cận $x=0\Rightarrow t=a;\ x=a\Rightarrow t=0$

Lúc đó $I=\int\limits_{0}^{a}\dfrac{dx}{1+f(x)}=\int\limits_{a}^{0}\dfrac{-dt}{1+f(a-t)}=\int\limits_{0}^{a}\dfrac{dx}{1+f(a-x)}=\int\limits_{0}^{a}\dfrac{dx}{1+\dfrac{1}{f(x)}}=\int\limits_{0}^{a}\dfrac{f(x)dx}{1+f(x)}$

Suy ra $2I=I+I=\int\limits_{0}^{a}\dfrac{dx}{1+f(x)}+\int\limits_{0}^{a}\dfrac{f(x)dx}{1+f(x)}=\int\limits_{0}^{a}1dx=a$

Do đó $I=\dfrac{1}{2}a\Rightarrow b=1;\ c=2\Rightarrow b+c=3.$

Cách 2: Chọn $f(x)=1$ là một hàm thỏa các giả thiết. Dễ dàng tính được $I=\frac{1}{2}a \Rightarrow b=1;\ c=2 \Rightarrow b+c=3.$

Bài tập 14: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx=4,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x dx=2.$ Giá trị của tích phân $\int_0^3 f(x)dx$ bằng

A. 2. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 10.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

● Xét $\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx=4.$ Đặt $t=\sqrt{x} \Rightarrow t^2=x,$ suy ra $2tdt=dx.$

Đổi cận $\begin{cases} x=1 \to t=1 \\ x=9 \to t=3 \end{cases}.$

Suy ra $4=\int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx=2\int_1^3 f(t)2dt \Rightarrow \int_1^3 f(t)dt=2.$

● Xét $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x dx=2.$ Đặt $u=\sin x,$ suy ra $du=\cos x dx.$

Đổi cận $\begin{cases} x=0 \to u=0 \\ x=\frac{\pi}{2} \to u=1 \end{cases}.$ Suy ra $2=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\cos x dx=\int_0^1 f(t)dt.$

Vậy $I=\int_0^3 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^3 f(x)dx=4.$.

Bài tập 15: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)dx=4,\ \int_0^1 \frac{x^2 f(x)}{x^2+1}dx=2.$ Giá trị của tích phân $I=\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $I=6$. **B.** $I=2$. **C.** $I=3$. **D.** $I=1$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN A

Xét $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\tan x)dx=4.$

Đặt $t=\tan x,$ suy ra $\mathrm{d}t=\dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\left(\tan^2 x+1\right)\mathrm{d}x\Rightarrow \mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$

Đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=0\\ x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t=1\end{cases}.$ Khi đó $4=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} f\left(\tan x\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{f\left(t\right)}{t^2+1}\mathrm{d}t=\int_0^1 \frac{f\left(x\right)}{x^2+1}\mathrm{d}x.$

Từ đó suy ra $I=\displaystyle\int_0^1 f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{f\left(x\right)}{x^2+1}\mathrm{d}x+\int_0^1 \frac{x^2 f\left(x\right)}{x^2+1}\mathrm{d}x=4+2=6.$

Bài tập 16: Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f\left(\cos^2 x\right)\mathrm{d}x=1,$ $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{f\left(\ln^2 x\right)}{x\ln x}\mathrm{d}x=1.$ Giá trị của tích phân $I=\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{f\left(2x\right)}{x}\mathrm{d}x$ bằng

A. $1.$ **B.** $2.$ **C.** $3.$ **D.** $4.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

● Xét $A=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.f\left(\cos^2 x\right)\mathrm{d}x=1.$ Đặt $t=\cos^2 x.$

Suy ra

$$\mathrm{d}t=-2\sin x\cos x\mathrm{d}x=-2\cos^2 x\tan x\mathrm{d}x=-2t.\tan x\mathrm{d}x\longrightarrow \tan x\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}t}{2t}.$$

Đổi cận: $\begin{cases}x=0\Rightarrow t=1\\ x=\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow t=\dfrac{1}{2}\end{cases}.$

Khi đó $1=A=-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x\Rightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x=2.$

● Xét $B=\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{f\left(\ln^2 x\right)}{x\ln x}\mathrm{d}x=1.$ Đặt $u=\ln^2 x.$

Suy ra $\mathrm{d}u=\dfrac{2\ln x}{x}\mathrm{d}x=\dfrac{2\ln^2 x}{x\ln x}\mathrm{d}x=\dfrac{2u}{x\ln x}\mathrm{d}x\Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\dfrac{\mathrm{d}u}{2u}.$

Đổi cận: $\begin{cases}x=e\Rightarrow u=1\\ x=e^2\Rightarrow u=4\end{cases}.$

Khi đó $1=B=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_1^4 \frac{f\left(u\right)}{u}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_1^4 \frac{f\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x\Rightarrow \int_1^4 \frac{f\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x=2.$

● Xét tích phân cần tính $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(2x\right)}{x}\mathrm{d}x.$

Đặt $v=2x,$ suy ra $\begin{cases}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\mathrm{d}v\\ x=\dfrac{v}{2}\end{cases}$. Đổi cận: $\begin{cases}x=\dfrac{1}{4}\Rightarrow v=\dfrac{1}{2}\\ x=2\Rightarrow v=4\end{cases}.$

Khi đó $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{4}\frac{f\left(v\right)}{v}\mathrm{d}v=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{4}\frac{f\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{4}\frac{f\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x=2+2=4.$

Bài tập 17: Cho hàm số $f\left(x\right)$ nhận giá trị dương, có đạo hàm liên tục trên $\left[0;2\right]$. Biết $f\left(0\right)=1$ và $f\left(x\right)f\left(2-x\right)=e^{2x^2-4x}$ với mọi $x\in\left[0;2\right]$. Giá trị tích phân $I=\int\limits_{0}^{2}\frac{\left(x^3-3x^2\right)f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{14}{3}.$ **B.** $-\frac{32}{5}.$ **C.** $-\frac{16}{3}.$ **D.** $-\frac{16}{5}.$

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Từ giả thiết $f\left(x\right)f\left(2-x\right)=e^{2x^2-4x}\xrightarrow{x=2}f\left(2\right)=1.$

Ta có $I=\int\limits_{0}^{2}\frac{\left(x^3-3x^2\right)f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}\mathrm{d}x.$ Đặt $\begin{cases}u=x^3-3x^2\\ \mathrm{d}v=\dfrac{f'\left(x\right)}{f\left(x\right)}\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mathrm{d}u=\left(3x^2-6x\right)\mathrm{d}x\\ v=\ln\left|f\left(x\right)\right|\end{cases}.$

Khi đó

$I=\left(x^3-3x^2\right)\ln\left|f\left(x\right)\right|\Big|_0^2-\int\limits_0^2\left(3x^2-6x\right)\ln\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x$

$\overset{f(2)=1}{=}-3\int\limits_0^2\left(x^2-2x\right)\ln\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=-3J.$

Ta có $J=\int\limits_0^2\left(x^2-2x\right)\ln\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x\overset{x=2-t}{=}\int\limits_2^0\left[\left(2-t\right)^2-2\left(2-t\right)\right]\ln\left|f\left(2-t\right)\right|\mathrm{d}\left(2-t\right)$

$=\int\limits_2^0\left[\left(2-x\right)^2-2\left(2-x\right)\right]\ln\left|f\left(2-x\right)\right|\mathrm{d}\left(2-x\right)=\int\limits_0^2\left(x^2-2x\right)\ln\left|f\left(2-x\right)\right|\mathrm{d}x.$

Suy ra

$2J=\int\limits_0^2\left(x^2-2x\right)\ln\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x+\int\limits_0^2\left(x^2-2x\right)\ln\left|f\left(2-x\right)\right|\mathrm{d}x$

$=\int\limits_0^2\left(x^2-2x\right)\ln\left|f\left(x\right)f\left(2-x\right)\right|\mathrm{d}x$

$=\int\limits_0^2\left(x^2-2x\right)\ln e^{2x^2-4x}\mathrm{d}x=\int\limits_0^2\left(x^2-2x\right)\left(2x^2-4x\right)\mathrm{d}x=\frac{32}{15}\Rightarrow J=\frac{16}{15}.$

Vậy $I=-3J=-\dfrac{16}{5}$.

Bài tập 18: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ và thỏa mãn $2f(x)+f(-x)=\cos x.$ Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $I=-2$. **B.** $I=\dfrac{2}{3}$. **C.** $I=\dfrac{3}{2}$. **D.** $I=2$.

Hướng dẫn giải

ĐÁN ÁN B

Từ giả thiết, thay x bằng $-x$ ta được $2f(-x)+f(x)=\cos x.$

Do đó ta có hệ

$$\begin{cases}2f(x)+f(-x)=\cos x\\2f(-x)+f(x)=\cos x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4f(x)+2f(-x)=2\cos x\\f(x)+2f(-x)=\cos x\end{cases}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}\cos x.$$

Khi đó $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}.$

Bài tập 19: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$ và thỏa mãn $f(x)+2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=3x.$ Giá trị của tích phân $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\dfrac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{5}{2}$. **D.** $\dfrac{7}{2}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Từ giả thiết, thay x bằng $\dfrac{1}{x}$ ta được $f\left(\dfrac{1}{x}\right)+2f(x)=\dfrac{3}{x}.$

Do đó ta có hệ

$$\begin{cases}f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x\\f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{3}{x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x\\4f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{6}{x}\end{cases}\longrightarrow f(x)=\frac{2}{x}-x.$$

Khi đó $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\dfrac{f(x)}{x}dx=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(\dfrac{2}{x^2}-1\right)dx=\left(-\dfrac{2}{x}-x\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}=\dfrac{3}{2}.$

Cách khác. Từ $f\left(x\right)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x\Rightarrow f\left(x\right)=3x-2f\left(\frac{1}{x}\right).$

Khi đó $I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\left(3-2\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\right)\mathrm{d}x=3\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x-2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\mathrm{d}x.$

Xét $J=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\mathrm{d}x.$ Đặt $t=\frac{1}{x}$, suy ra $\mathrm{d}t=-\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-t^2\mathrm{d}x\Rightarrow\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t.$

Đổi cận: $\begin{cases}x=\frac{1}{2}\to t=2\\x=2\to t=\frac{1}{2}\end{cases}.$

Khi đó $J=\int\limits_{2}^{\frac{1}{2}}tf\left(t\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{f\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x=I.$

Vậy $I=3\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x-2I\Rightarrow I=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{d}x=\frac{3}{2}..$

Bài tập 20: Cho hàm số $f\left(x\right)$ thỏa mãn $\left[f'\left(x\right)\right]^2+f\left(x\right).f''\left(x\right)=15x^4+12x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ và $f\left(0\right)=f'\left(0\right)=1.$ Giá trị của $f^2\left(1\right)$ bằng

A. $\frac{5}{2}.$ **B.** $\frac{9}{2}.$ **C.** 8. **D.** 10.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Nhận thấy được $\left[f'\left(x\right)\right]^2+f\left(x\right).f''\left(x\right)=\left[f\left(x\right).f'\left(x\right)\right]'.$

Do đó giả thiết tương đương với $\left[f\left(x\right).f'\left(x\right)\right]'=15x^4+12x.$

Suy ra $f\left(x\right).f'\left(x\right)=\int\left(15x^4+12x\right)\mathrm{d}x=3x^5+6x^2+C\xrightarrow{f(0)=f'(0)=1.}C=1$

$\Rightarrow f\left(x\right).f'\left(x\right)=3x^5+6x^2+1$

$\Rightarrow\int f\left(x\right).f'\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\left(3x^5+6x^2+1\right)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\frac{f^2\left(x\right)}{2}=\frac{x^6}{2}+2x^3+x+C'.$

Thay $x=0$ vào hai vế ta được $\frac{f^2\left(0\right)}{2}=C'\Rightarrow C'=\frac{1}{2}.$

Vậy $f^2(x)=x^6+4x^3+2x+1\Rightarrow f^2(1)=8.$

Bài tập 22: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(\tan x)=\cos^4 x,\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị $I=\int_0^1 f(x)dx$ bằng

A. $\frac{2+\pi}{8}$. **B.** 1. **C.** $\frac{2+\pi}{4}$. **D.** $\frac{\pi}{4}$.

Hướng dẫn giải

ĐAP ÁN A

$$f(\tan x)=\cos^4 x\Leftrightarrow f(\tan x)=\left(\frac{1}{\tan^2 x+1}\right)^2$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{(x^2+1)^2}\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx=\frac{2+\pi}{8}$$

Dạng 8: Bất đẳng thức tích phân

1. Phương pháp

Áp dụng các bất đẳng thức:

+ Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ thì $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)dx|$

+ Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và $m \le f(x) \le M$ thì $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

+ Nếu $f(x), g(x)$ liên tục trên $[a;b]$ thì $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)dx.\int_a^b g^2(x)dx$ dấu "=" xẩy ra khi và chỉ khi $f(x) = k.g(x)$.

+ Bất đẳng thức AM-GM

2. Bài tập

Bài tập 1: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1) = 0$, $\int_0^1 [f'(x)]^2 \mathrm{d}x = 7$ và $\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$. Giá trị phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. 1. **B.** $\frac{7}{5}$. **C.** $\frac{7}{4}$. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Dùng tích phân từng phần ta có $\int_0^1 x^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}f(x)\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x$. Kết hợp với giả thiết $f(1) = 0$, ta suy ra $\int_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x = -1$.

Theo Holder $(-1)^2 = \left(\int_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \int_0^1 x^6 \mathrm{d}x.\int_0^1 [f'(x)]^2 \mathrm{d}x = \frac{x^7}{7}\Big|_0^1 .7 = 1$.

Vậy đẳng thức xảy ra nên ta có $f'(x) = kx^3$, thay vào $\int_0^1 x^3 f'(x)\mathrm{d}x = -1$ ta được $k = -7$.

Suy ra $f'(x) = -7x^3 \Rightarrow f'(x) = -7x^3, \forall x \in [0;1] \Rightarrow f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + C$

$\xrightarrow{f(1)=0} C = \frac{7}{4} \Rightarrow f(x) = -\frac{7}{4}x^4 + \frac{7}{4} \Rightarrow \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{7}{5}$.

Bài tập 2: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=1$, $\int_0^1 x^5 f(x)\mathrm{d}x=\frac{11}{78}$ và $\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}(f(x))=\frac{4}{13}$. Giá trị $f(2)$ bằng

A. 2. **B.** $\frac{251}{7}$. **C.** $\frac{256}{7}$. **D.** $\frac{261}{7}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Theo Holder $\left(\frac{2}{13}\right)^2=\left(\int_0^1 x^6 f'(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\int_0^1 x^{12}dx.\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{1}{13}.\frac{4}{13}=\frac{4}{169}.$

$\Rightarrow f'(x)=2x^6\Rightarrow f(x)=\frac{2}{7}x^7+C\xrightarrow{f(1)=1}C=\frac{5}{7}.$

Vậy $f(x)=\frac{2}{7}x^7+\frac{5}{7}\Rightarrow f(2)=\frac{261}{7}.$

Bài tập 3: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=2, f(0)=0$ và $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=4.$ Tích phân $\int_0^1\left[f^3(x)+2018x\right]\mathrm{d}x.$ bằng

A. 0. **B.** 1011. **C.** 2018. **D.** 2022.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Theo Holder $2^2=\left(\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\int_0^1\mathrm{d}x.\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=1.4=4.$

$\Rightarrow f'(x)=2\Rightarrow f(x)=2x+C\xrightarrow{f(0)=0}C=0.$

Vậy $f(x)=2x\Rightarrow\int_0^1\left[f^3(x)+2018x\right]\mathrm{d}x=1011.$

Bài tập 4: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(1)=ef(0)$ và $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{f^2(x)}+\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x\le 2.$ Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $f(1)=\sqrt{\frac{2e}{e-1}}.$ **B.** $f(1)=\frac{2(e-2)}{e-1}.$

C. $f(1)=\sqrt{\frac{2e^2}{e^2-1}}.$ **D.** $f(1)=\sqrt{\frac{2(e-2)}{e-1}}.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{f^2(x)}+\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x=\int_0^1\left[\frac{1}{f^2(x)}+\left[f'(x)\right]^2\right]\mathrm{d}x \overset{\text{AM-GM}}{\geq} 2\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x$

$=2\ln\left|f(x)\right|\Big|_0^1=2\ln\left|f(1)\right|-2\ln\left|f(0)\right|=2\ln\left|\frac{f(1)}{f(0)}\right|=2\ln e=2.$

Mà $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{f^2(x)}+\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 \mathrm{d}x\leq 2$ nên dấu "=" xảy ra, tức là $f'(x)=\frac{1}{f(x)}\Leftrightarrow f(x)f'(x)=1$

$\Rightarrow \int f(x)f'(x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}x\Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2}=x+C\Rightarrow f(x)=\sqrt{2x+2C}.$

Theo giả thiết $f(1)=ef(0)$ nên ta có $\sqrt{2+2C}=e\sqrt{2C}\Leftrightarrow 2+2C=e^2 2C\Leftrightarrow C=\frac{1}{e^2-1}$

$\Rightarrow f(x)=\sqrt{2x+\frac{2}{e^2-1}}\Rightarrow f(1)=\sqrt{2+\frac{2}{e^2-1}}=\sqrt{\frac{2e^2}{e^2-1}}.$

Bài tập 5: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương trên $[0;1]$, có đạo hàm dương và liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $f(0)=1$ và $\int_0^1\left[f^3(x)+4\left[f'(x)\right]^3\right]\mathrm{d}x\leq 3\int_0^1 f'(x)f^2(x)\mathrm{d}x$. Giá trị $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $2\left(\sqrt{e}-1\right)$. **B.** $2\left(e^2-1\right)$. **C.** $\frac{\sqrt{e}-1}{2}$. **D.** $\frac{e^2-1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho ba số dương ta có

$f^3(x)+4\left[f'(x)\right]^3=4\left[f'(x)\right]^3+\frac{f^3(x)}{2}+\frac{f^3(x)}{2}$

$\geq 3\sqrt[3]{4\left[f'(x)\right]^3.\frac{f^3(x)}{2}.\frac{f^3(x)}{2}}=3f'(x)f^2(x).$

Suy ra $\int_0^1\left[f^3(x)+4\left[f'(x)\right]^3\right]\mathrm{d}x\geq 3\int_0^1 f'(x)f^2(x)\mathrm{d}x.$

Mà $\int_0^1\left[f^3(x)+4\left[f'(x)\right]^3\right]\mathrm{d}x\leq 3\int_0^1 f'(x)f^2(x)\mathrm{d}x$ nên dấu "=" xảy ra, tức là

$4\left[f'(x)\right]^3=\frac{f^3(x)}{2}=\frac{f^3(x)}{2}\Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{2}f(x)$

$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{2}\Rightarrow \int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\mathrm{d}x\Rightarrow \ln\left|f(x)\right|=\frac{1}{2}x+C\Rightarrow f(x)=e^{\frac{1}{2}x+C}.$

Theo giả thiết $f(0)=1\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=e^{\frac{1}{2}x}\Rightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=2\left(\sqrt{e}-1\right).$

Bài tập 6: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;\pi]$, thỏa mãn $\int_0^{\pi} f'(x)\sin x\mathrm{d}x=-1$ và $\int_0^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$. Giá trị tích phân $\int_0^{\pi} xf(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $-\frac{6}{\pi}$. **B.** $-\frac{4}{\pi}$. **C.** $\frac{2}{\pi}$. **D.** $\frac{4}{\pi}$.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Theo Holder $(1)^2=\left[\int_0^{\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x\right]^2\le\int_0^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x\int_0^{\pi}\cos^2 x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}.\frac{\pi}{2}=1.$

$\Rightarrow f(x)=\frac{2}{\pi}\cos x\Rightarrow\int_0^{\pi} xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\frac{2x\cos x}{\pi}\mathrm{d}x=-\frac{4}{\pi}.$

Bài tập 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa t $f(1)=0$, $\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{8}$ và $\int_0^1\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}$. Giá trị của ích phân $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ bằng

A. $\frac{1}{\pi}$. **B.** $\frac{2}{\pi}$. **C.** $\frac{\pi}{2}$. **D.** π.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN B

Theo Holder

$\left(-\frac{\pi}{4}\right)^2=\left(\int_0^1\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)f'(x)\mathrm{d}x\right)^2\le\int_0^1\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\mathrm{d}x.\int_0^1\left[f'(x)\right]^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.\frac{\pi^2}{8}.$

$\Rightarrow f'(x)=-\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\Rightarrow f(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)+C\xrightarrow{f(1)=0}C=0.$

Vậy $f(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\Rightarrow\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}.$

Bài tập 8: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương trên $[0;1]$, có đạo hàm dương liên và tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $\int_0^1\sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}\mathrm{d}x\ge 1$ và $f(0)=1$, $f(1)=e^2$. Giá trị của $f\left(\frac{1}{2}\right)$ bằng

A. 1. **B.** 4. **C.** $\sqrt{e}$. **D.** e.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN C

Hàm dưới dấu tích phân là $\sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}=\sqrt{x}.\sqrt{\frac{f'(x)}{f(x)}}$, $\forall x\in[0;1]$. Điều này làm ta liên tưởng đến đạo hàm đúng $\frac{f'(x)}{f(x)}$, muốn vậy ta phải đánh giá theo $\text{AM}-\text{GM}$ như sau:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}+mx\geq 2\sqrt{m}.\sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}} \text{ với } m\geq 0 \text{ và } x\in[0;1].$$

Do đó ta cần tìm tham số $m\geq 0$ sao cho

$$\int_0^1\left[\frac{f'(x)}{f(x)}+mx\right]\mathrm{d}x\geq 2\sqrt{m}.\int_0^1\sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}\mathrm{d}x$$

hay

$$\ln|f(x)|\Big|_0^1+m\frac{x^2}{2}\Big|_0^1\geq 2\sqrt{m}.1\Leftrightarrow \ln|f(1)|-\ln|f(0)|+\frac{m}{2}$$

$$\geq 2\sqrt{m}\Leftrightarrow 2-0+\frac{m}{2}\geq 2\sqrt{m}.$$

Để dấu "=" xảy ra thì ta cần có $2-0+\frac{m}{2}=2\sqrt{m}\Leftrightarrow m=4.$

Với $m=4$ thì đẳng thức xảy ra nên $\frac{f'(x)}{f(x)}=4x$

$$\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\int 4x\mathrm{d}x\Leftrightarrow\ln|f(x)|=2x^2+C\Rightarrow f(x)=e^{2x^2+C}.$$

Theo giả thiết $\begin{cases}f(0)=1\\ f(1)=e^2\end{cases}\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=e^{2x^2}\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}.$

Cách 2. Theo Holder

$$1^2\leq\left(\int_0^1\sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}\mathrm{d}x\right)^2=\left(\int_0^1\sqrt{x}.\sqrt{\frac{f'(x)}{f(x)}}\mathrm{d}x\right)^2\leq\int_0^1 x\mathrm{d}x.\int_0^1\frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.\ln\frac{f(1)}{f(0)}=1.$$

Vậy đẳng thức xảy ra nên ta có $\frac{f'(x)}{f(x)}=kx,$ thay vào $\int_0^1\sqrt{\frac{xf'(x)}{f(x)}}\mathrm{d}x=1$ ta được $k=4.$

Suy ra $\frac{f'(x)}{f(x)}=4x.$ (làm tiếp như trên)

Bài tập 9: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thỏa mãn $\int_0^1 \left[f(x)f'(x)\right]^2 dx \le 1$ và $f(0)=1,\ f(1)=\sqrt{3}.$ Giá trị của $f\left(\frac{1}{2}\right)$ bằng

A. $\sqrt{2}.$ **B.** 3. **C.** $\sqrt{e}.$ **D.** $e.$

Lời giải

ĐÁP ÁN A

Hàm dưới dấu tích phân là $\left[f(x)f'(x)\right]^2$. Điều này làm ta liên tưởng đến đạo hàm đúng $f(x)f'(x)$, muốn vậy ta phải đánh giá theo $\text{AM}-\text{GM}$ như sau:

$$\left[f(x)f'(x)\right]^2 + m \ge 2\sqrt{m}.f(x)f'(x) \text{ với } m \ge 0.$$

Do đó ta cần tìm tham số $m \ge 0$ sao cho

$$\int_0^1 \left(\left[f(x)f'(x)\right]^2 + m\right)dx \ge 2\sqrt{m}\int_0^1 f(x)f'(x)dx.$$

hay

$$1+m \ge 2\sqrt{m}.\frac{f^2(x)}{2}\Big|_0^1 \Leftrightarrow 1+m \ge 2\sqrt{m}.$$

Để dấu "=" xảy ra thì ta cần có $1+m=2\sqrt{m} \Leftrightarrow m=1.$

Với $m=1$ thì đẳng thức xảy ra nên $\left[f(x)f'(x)\right]^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)f'(x)=1 \\ f(x)f'(x)=-1 \end{array}\right.$.

- $f(x)f'(x)=-1 \Rightarrow \int_0^1 f(x)f'(x)dx = -\int_0^1 dx \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2}\Big|_0^1 = -x\Big|_0^1 \Leftrightarrow 1=-1.$ (vô lý)

- $f(x)f'(x)=1 \Rightarrow \int f(x)f'(x)dx = \int dx \Leftrightarrow \frac{f^2(x)}{2} = x+C \Rightarrow f(x)=\sqrt{2x+2C}.$

Theo giả thiết $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow C=\frac{1}{2} \Rightarrow f(x)=\sqrt{2x+1} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}.$

Cách 2. Ta có $\int_0^1 f(x)f'(x)dx = \frac{f^2(x)}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left[f^2(1)-f^2(0)\right]=1.$

Theo Holder $1^2 = \left(\int_0^1 1.f(x)f'(x)dx\right)^2 \le \int_0^1 1^2 dx.\int_0^1 \left[f(x)f'(x)\right]^2 dx \le 1.1=1.$

Vậy đẳng thức xảy ra nên ta có $f'(x)f(x)=k,$ thay vào $\int_0^1 f(x)f'(x)dx=1$ ta được $k=1.$ Suy ra $f'(x)f(x)=1.$(làm tiếp như trên)

Bài tập 10: Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $[1;2]$, thỏa mãn $\int_1^2 \frac{[f'(x)]^2}{xf(x)}\mathrm{d}x \le 24$ và $f(1)=1,\ f(2)=16.$ Giá trị của $f(\sqrt{2})$ bằng

A. 1. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 2. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

ĐÁP ÁN D

Hàm dưới dấu tích phân là $\frac{[f'(x)]^2}{xf(x)}=\frac{1}{x}.\frac{[f'(x)]^2}{f(x)}$. Điều này làm ta liên tưởng đến đạo hàm đúng $\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$, muốn vậy ta phải đánh giá theo $\mathrm{AM}-\mathrm{GM}$ như sau:

$$\frac{[f'(x)]^2}{xf(x)}+mx\ge 2\sqrt{m}\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\ \text{ với }\ m\ge 0\ \text{ và }\ x\in[1;2].$$

Do đó ta cần tìm tham số $m\ge 0$ sao cho

$$\int_1^2\left(\frac{[f'(x)]^2}{xf(x)}+mx\right)\mathrm{d}x\ge 2\sqrt{m}\int_1^2\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x$$

hay

$$24+\frac{2m}{3}\ge 4\sqrt{m}\sqrt{f(x)}\Big|_1^2\Leftrightarrow 24+\frac{2m}{3}\ge 4\sqrt{m}\left[\sqrt{f(2)}-\sqrt{f(1)}\right]\Leftrightarrow 24+\frac{2m}{3}\ge 12\sqrt{m}\Leftrightarrow m=16.$$

Để dấu "=" xảy ra thì ta cần có $24+\frac{2m}{3}=12\sqrt{m}\Leftrightarrow m=16.$

Với $m=16$ thì đẳng thức xảy ra nên $\frac{[f'(x)]^2}{xf(x)}=16x\Rightarrow\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}=2x$

$$\Rightarrow\int\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x=\int 2x\mathrm{d}x\Leftrightarrow\sqrt{f(x)}=x^2+C\Rightarrow f(x)=\left(x^2+C\right)^2.$$

Theo giả thiết $\begin{cases}f(1)=1\\ f(2)=16\end{cases}\Rightarrow C=0\Rightarrow f(x)=x^4\Rightarrow f(\sqrt{2})=4.$

Cách 2. Ta có $\int_1^2\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x=2.\int_1^2\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x=2\sqrt{f(x)}\Big|_1^2=2\left[\sqrt{f(2)}-\sqrt{f(1)}\right]=6.$

Theo Holder $6^2=\left(\int_1^2\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x\right)^2=\left(\int_1^1\sqrt{x}.\frac{f'(x)}{\sqrt{xf(x)}}\mathrm{d}x\right)^2\le\int_1^2x\mathrm{d}x.\int_1^2\frac{[f'(x)]^2}{xf(x)}\mathrm{d}x\le\frac{x^2}{2}\Big|_1^2.24=36.$

Vậy đẳng thức xảy ra nên ta có $\frac{f'(x)}{\sqrt{xf(x)}}=k\sqrt{x}\Leftrightarrow\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}=kx,$ thay vào $\int_1^2\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x=6$ ta được $k=4.$ Suy ra $\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}=4x.$ (làm tiếp như trên)

Bài tập 11: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[0;1]$, và $f(1)-f(0)=\frac{\sqrt{14}}{2}.$ Biết rằng $0\le f'(x)\le 2\sqrt{2x},\forall x\in[0;1]$. Khi đó, giá trị của tích phân $\int_0^1[f'(x)]^2\,dx$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(2;4)$. **B.** $\left(\frac{13}{3};\frac{14}{3}\right)$. **C.** $\left(\frac{10}{3};\frac{13}{3}\right)$. **D.** $(1;3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Do $0\le f'(x)\le 2\sqrt{2x},\forall x\in[0;1]$ nên $0\le(f'(x))^2\le 8x,\forall x\in[0;1].$

Suy ra $\int_0^1[f'(x)]^2\,dx\le\int_0^1 8x\,dx$ hay $\int_0^1[f'(x)]^2\,dx\le 4$ (1).

Mặt khác, áp dụng BĐT Cauchy-Schwarz, ta có:

$$\left(\int_0^1 f'(x)\,dx\right)^2\le\int_0^1 1^2\,dx.\int_0^1[f'(x)]^2\,dx\Leftrightarrow[f(1)-f(0)]^2\le\int_0^1[f'(x)]^2\,dx$$

$$\Leftrightarrow\frac{7}{2}\le\int_0^1[f'(x)]^2\,dx$$

Vậy $\frac{7}{2}\le\int_0^1[f'(x)]^2\,dx\le 4.$

BÀI 3. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC TÍCH PHÂN

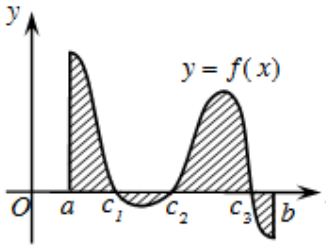
A. KIẾN THỨC SÁCH GIÁO KHOA CẦN NẮM

I. DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG

1. Định lý 1: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, không âm trên $[a;b]$. Khi đó diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và 2 đường thẳng $x=a, x=b$ là: $S=\int_a^b f(x)dx$

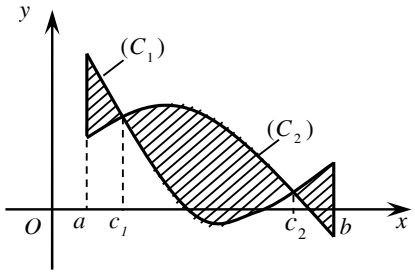
2. Bài toán liên quan

Bài toán 1: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được xác định: $S=\int_a^b |f(x)|dx$



$$(H)\begin{cases} y=f(x) \\ y=0 \\ x=a \\ x=b \end{cases} \qquad \boxed{S=\int_a^b |f(x)|dx}$$

Bài toán 2: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, $y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ được xác định: $S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$



$$(H)\begin{cases} (C_1): y=f_1(x) \\ (C_2): y=f_2(x) \\ x=a \\ x=b \end{cases}$$

$$\boxed{S=\int_a^b |f_1(x)-f_2(x)|dx}$$

Chú ý: Nếu trên đoạn $[a;b]$, hàm số $f(x)$ không đổi dấu thì: $\int_a^b |f(x)|dx=\left|\int_a^b f(x)dx\right|$

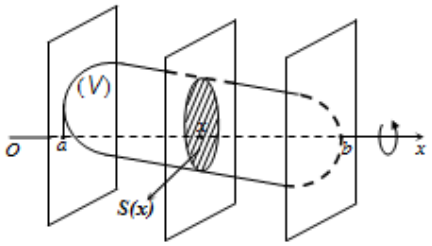
Bài toán 3: Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=g(y)$, $x=h(y)$ và hai đường thẳng $y=c$, $y=d$ được xác định: $S=\int_c^d |g(y)-h(y)|dy$

Bài toán 4: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị $(C_1): f_1(x), (C_2): f_2(x)$ là: $S=\int_{x_1}^{x_2} |f(x)-g(x)|dx$. Trong đó: x_1, x_2 tương ứng là nghiệm của phương trình $f(x)=g(x), (x_1<x_2)$

II. THỂ TÍCH CỦA KHỐI TRÒN XOAY

1. Thể tích vật thể

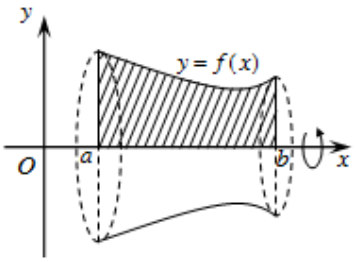
Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b; $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x, $(a \le x \le b)$. Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$.



$$V = \int_a^b S(x)dx$$

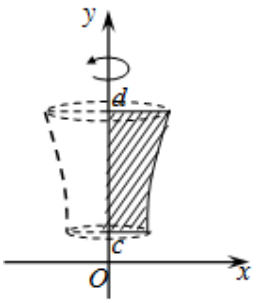
2. Thể tích khối tròn xoay

Bài toán 1: Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox:



$$\begin{cases} (C): y = f(x) \\ (Ox): y = 0 \\ x = a \\ x = b \end{cases} \qquad V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Bài toán 2: Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = g(y)$, trục hoành và hai đường thẳng $y = c$, $y = d$ quanh trục Oy:



$$\begin{cases} (C): x = g(y) \\ (Oy): x = 0 \\ y = c \\ y = d \end{cases} \qquad V_y = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy$$

Bài toán 3: Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox: $V = \pi \int_a^b \left| f^2(x) - g^2(x) \right| dx$.

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Tính diện tích giới hạn bởi 1 đồ thị

1. Phương pháp:

a/ ***Phương pháp 1:***

$$S = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

* Xét dấu biểu thức $f(x)$; $x \in [a;b]$, phá dấu trị tuyệt đối và tính tích phân.

b/ Phương pháp 2:

* Giải phương trình $f(x)=0$; chọn nghiệm trong $[a;b]$. Giả sử các nghiệm là $\alpha;\beta$ với $\alpha<\beta$.

* Áp dụng tính chất liên tục của hàm số $f(x)$ trên $[a;b]$; ta có:

$$S=|\int_a^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x|+|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\mathrm{d}x|+|\int_{\beta}^{b} f(x)\mathrm{d}x|$$

2. Các Bài tập mẫu:

Bài tập 1: Tính diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $\mathrm{y}=\mathrm{x}^2$, trục hoành và đường thẳng $\mathrm{x}=2$.

A. $\mathrm{S}=\frac{8}{9}$. **B.** $\mathrm{S}=\frac{16}{3}$. **C.** $\mathrm{S}=16$. **D.** $\mathrm{S}=\frac{8}{3}$.

Hướng dẫn giải

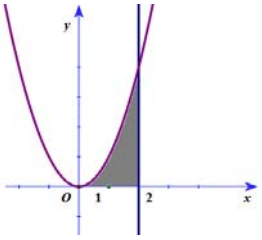
CHỌN D

Nhận thấy rằng, để tính diện tích ta cần phải tìm được 2 cận. Để tìm thêm cận còn lại ta giải phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $(\mathrm{P}):\mathrm{y}=\mathrm{x}^2$ với trục hoành.

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $(\mathrm{P}):\mathrm{y}=\mathrm{x}^2$ với trục hoành: $\mathrm{x}^2=0\Leftrightarrow\mathrm{x}=0$

Áp dụng công thức ta có $\mathrm{S}=\int_0^2\left|\mathrm{x}^2\right|\mathrm{dx}=\frac{8}{3}$.

Nhận xét: Nếu ta vẽ đồ thị hàm số $\mathrm{y}=\mathrm{x}^2$ và đường thẳng $\mathrm{x}=2$ ta dễ dàng xác định được hình phẳng giới hạn bởi các đường này. Từ đó ta dễ dàng tính được diện tích S.



Bài tập 2: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $\mathrm{y}=\mathrm{x}^2.\mathrm{e}^{\mathrm{x}}$, trục hoành và đường thẳng $\mathrm{x}=1$

A. $\mathrm{e}-2$. **B.** $2+\mathrm{e}$. **C.** $2-\mathrm{e}$. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

CHỌN A

Phương trình hoành độ giao điểm $\mathrm{x}^2\mathrm{e}^{\mathrm{x}}=0\Leftrightarrow\mathrm{x}=0$

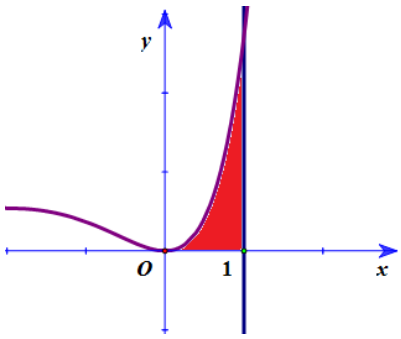
Ta có:

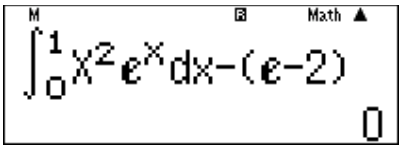
$$\mathrm{S}=\int_0^1\mathrm{x}^2\mathrm{e}^{\mathrm{x}}\mathrm{dx}=\int_0^1\mathrm{x}^2\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{x}}\right)=\mathrm{x}^2\mathrm{e}^{\mathrm{x}}\Big|_0^1-\int_0^1\mathrm{e}^{\mathrm{x}}\mathrm{d}\left(\mathrm{x}^2\right)$$

$$=\mathrm{e}-2\int_0^1\mathrm{xe}^{\mathrm{x}}\mathrm{dx}=\mathrm{e}-2\int_0^1\mathrm{xd}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{x}}\right)=\mathrm{e}-2\mathrm{xe}^{\mathrm{x}}\Big|_0^1+2\int_0^1\mathrm{e}^{\mathrm{x}}\mathrm{dx}$$

$= e - 2e + 2e^x\Big|_0^1 = -e + 2e - 2 = e - 2.$

Lời bình: Bài toán trên đã có 1 cận, ta chỉ cần tìm thêm 1 cận nữa bằng cách giải phương trình hoành độ giao điểm. Sau đó áp dụng công thức. Nếu vẽ đồ thị bài này để tìm hình phẳng giới hạn bởi các đường là không nên vì đồ thị hàm số hơi phức tạp. Việc tìm được công thức $S = \int_0^1 x^2 e^x dx$ và tính tích phân này ta có thể dùng MTCT để tính và chọn Chọn.





Bài tập 3: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = \sqrt{1 - x^2}$ và trục hoành:

A. $\pi - 2$. **B.** $\frac{\pi}{4}$. **C.** 1. **D.** $\frac{\pi}{2}$.

Hướng dẫn giải

CHỌN D

Phương trình hoành độ giao điểm của, Ox là $\sqrt{1 - x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

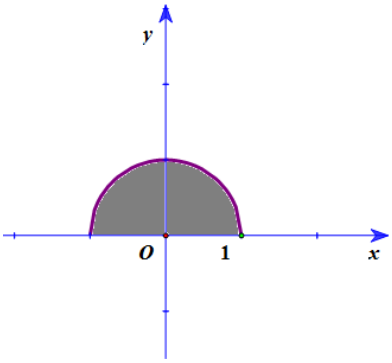
Khi đó, diện tích hình phẳng cần tìm là $S = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} dx$.

Đặt $x = \sin t \Leftrightarrow dx = \cos t dt$ và $\begin{cases} x = 1 \to t = \frac{\pi}{2} \\ x = -1 \to t = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

Suy ra $S = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t}.\cos t dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{2}$

Lời bình: Bài toán trên chưa có cận, ta phải giải phương trình hoành độ giao điểm để tìm cận. Sau đó áp dụng công thức. Việc tìm được công thức $S = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2} dx$ và tính tích phân này tương đối phức tạp, do đó ta có thể dùng MTCT để tính và chọn Chọn.

Nếu vẽ được đồ thị thì ta xác định được hình phẳng và diện tích của nó dễ dàng, đó chính là diện tích của nữa đường tròn bán kính bằng 1. Do đó: $S = \frac{1}{2}\pi R^2 = \frac{\pi}{2}$.



Bài tập 4: Tính diện tích S hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \ln x, x = e, x = \frac{1}{e}$ và trục hoành

A. $S = 2 - \frac{2}{e}$. **B.** $S = 1 - \frac{1}{e}$. **C.** $S = 2 + \frac{2}{e}$. **D.** $S = 1 + \frac{1}{e}$.

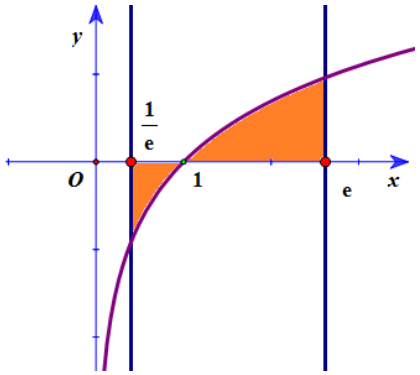
Hướng dẫn giải

CHỌN A

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $y = \ln x$ và trụ hoành là

$\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

$$S = \int_{\frac{1}{e}}^{e} |\ln x| dx = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} \ln x dx + \int_{1}^{e} \ln x.dx = (x - x\ln x)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} + (x\ln x - x)\Big|_{1}^{e} = 2 - \frac{2}{e}.$$



Bài tập 5: Diện tích tam giác được cắt ra bởi các trục tọa độ và tiếp tuyến của đồ thị $y = \ln x$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục Ox là:

A. $S = \frac{2}{3}$ **B.** $S = \frac{1}{4}$ **C.** $S = \frac{2}{5}$ **D.** $S = \frac{1}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm: $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Ta có: $y' = (\ln x)' = \frac{1}{x'}.y'(1) = 1$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y = \ln x$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục Ox là:

$y = 1(x - 1) + 0$ hay $y = x - 1$

Đường thẳng $y = x - 1$ cắt Ox tại điểm $A(1;0)$ và cắt Oy tại điểm $B(0;-1)$.

Tam giác vuông OAB có $OA = 1, OB = 1 \Rightarrow S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}OA.OB = \frac{1}{2}$

$$S_D = \int_a^b |f(x)|dx = \int_a^0 |f(x)|dx + \int_0^b |f(x)|dx = -\int_a^0 f(x)dx + \int_0^b f(x)dx$$

Bài tập 6: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = 2\sqrt{ax}\,(a > 0)$, trục hoành và đường thẳng $x = a$ bằng ka^2. Tính giá trị của tham số k.

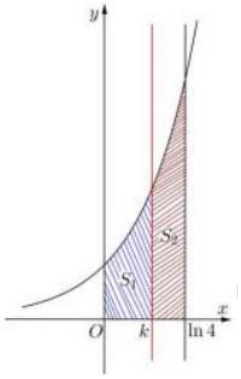
A. $k = \frac{7}{3}$ **B.** $k = \frac{4}{3}$ **C.** $k = \frac{12}{5}$ **D.** $k = \frac{6}{5}$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Có $S=\int_0^a\left|2\sqrt{ax}\right|dx=2\sqrt{a}.\frac{2}{3}.x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a=\frac{4}{3}a^2=ka^2\Rightarrow k=\frac{4}{3}$

Bài tập 7: Cho hình cong giới hạn bởi các đường $y=e^x, y=0, x=0$ và $x=\ln 4$. Đường thẳng $x=k$ với $0<k<\ln 4$ chia thành hai phần có diện tích là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1=2S_2$.



A. $k=\frac{2}{3}\ln 4$

B. $k=\ln 2$

C. $k=\ln\frac{8}{3}$

D. $k=\ln 3$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Do $S_1=2S_2\Rightarrow S_1=\frac{2}{3}S=\frac{2}{3}\int_0^{\ln 4}\left|e^x\right|dx=\frac{2}{3}\int_0^{\ln 4}e^x dx=\frac{2}{3}e^x\Big|_0^{\ln 4}=2$

Do đó: $S_1=\int_0^k\left|e^x\right|dx=e^k-1=2\Leftrightarrow e^k=3\Leftrightarrow k=\ln 3$

Dạng 2: Tính diện tích giới hạn bởi 2 hai đồ thị

1. Phương pháp:

Công thức tính $S=\int_a^b|f(x)-g(x)|\,dx$. Tính như dạng 1.

2. Một số bài tập mẫu

Bài tập 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị

$$y=\frac{1}{\cos^2 x};y=\frac{1}{\sin^2 x};x=\frac{\pi}{6};\quad x=\frac{\pi}{3}$$

Lời giải

Ta có: $S=\int_{\pi/6}^{\pi/3}\left|\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right|dx$

Trong trường hợp này nếu chọn cách xét dấu biểu thức $y=\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x};\ x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$

hoặc vẽ đồ thị hàm số $y=\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x};\ x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$ là khá khó khăn.

Vì vậy ta chọn cách sau:

+ Xét phương trình: $\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}=0;\ x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]\Leftrightarrow\cos^2 x-\sin^2 x=0\ x\in\left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right]$

$\Leftrightarrow \cos 2x = 0;\ x \in \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$

Từ đó suy ra: $S = \left|\int_6^{\pi/4}\left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx\right| + \left|\int_{4/4}^{\pi/3}\left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx\right.$

$\Rightarrow S = |(\tan x + \cot x)|\frac{\pi/4}{\pi/6}| + |(\tan x + \cot x)\left|\frac{\pi}{\pi}\right|_4| = 2\left(\frac{4\sqrt{3}}{3} - 2\right).$

Bài tập 2 : Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x^2+1};\quad y = \frac{x^2}{2}$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị trên:

$\frac{1}{x^2+1} = \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow x^4 + x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Vì vậy hình phẳng đã cho có diện tích là: $S = \int_{-1}^{1}\left|\frac{1}{x^2+1} - \frac{x^2}{2}\right|dx$

Do trên $(-1;1)$ phương trình $\frac{1}{x^2+1} = \frac{x^2}{2}$ vô nghiệm nên ta có:

$S = \int_{-1}^{1}\left|\frac{1}{x^2+1} - \frac{x^2}{2}\right|dx = \left|\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1}\frac{x^2}{2}\mathrm{d}x\right|$

Tính $I_1 = \int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2+1}dx$.

+/ Đặt $x = \tan t;\ t \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos^2 t}dt$

+/ Đổi cận: $\left[\begin{array}{l} x = -1 \Rightarrow t = -\frac{\pi}{4} \\ x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} \end{array}\right. \Rightarrow I_1 = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\frac{1}{\cos^2 t}}{1+\tan^2 t}dt = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$

$I_2 = \int_{-1}^{1}\frac{x^2}{2}dx = \frac{1}{3}$

Thay thế vào ta được: $S = \left|\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}\right| = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$.

Bài tập 3: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = \left|x^2 - 4x + 3\right|$ và $y = 3$.

Hướng dẫn giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị trên:

$$\left|x^2-4x+3\right|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x+3=3 \\ x^2-4x+3=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$$

Khi đó: $S=\int_0^4 \left|\left|x^2-4x+3\right|-3\right| dx = \left|\int_0^4 \left(x^2-4x+3\left|-3\right|\right) dx\right|$

$$\Rightarrow S=\left|\int_0^1 \left(\left|x^2-4x+3\right|-3\right) dx+\int_1^3 \left(\left|x^2-4x+3\right|-3\right) dx+\int_3^4 \left(\left|x^2-4x+3\right|-3\right) dx$$

$$\Rightarrow S=\left|\int_0^1 \left(x^2-4x\right) dx+\int_1^3 \left(-x^2+4x-6\right) dx+\int_3^4 \left(x^2-4x\right) dx\right|$$

$$\Rightarrow S=S=\left(\frac{x^3}{3}-2x^2\right)\Bigg|_0^1+\left(-\frac{x^3}{3}+2x^2-6x\right)\Bigg|_1^3+\left(\frac{x^3}{3}-2x^2\right)\Bigg|_3^4=8.$$

Bài tập 4: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị: $y=\sin|x|$; $y=|x|-\pi$.

Hướng dẫn giải

Xét phương trình hoành độ: $\sin|x|=|x|-\pi$

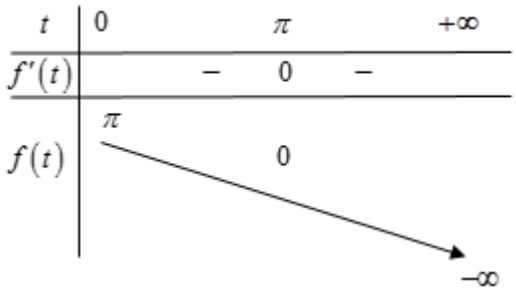
Đặt $|x|=t$

Khi đó trở thành: $\sin t=t-\pi \Leftrightarrow \sin t-t+\pi=0$

Xét hàm số $f(t)=\sin t-t+\pi$; $t\in[0,+\infty)$.

$\Rightarrow f'(t)=\cos t-1\le 0 \quad \forall t\in[0,+\infty)$.

BBT của hàm số $f(t)$ như sau:



$\Rightarrow$ phương trình có nghiệm duy nhất $t=\pi$.

$\Rightarrow$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt: $x=-\pi$ và $x=\pi$.

$$\Rightarrow S=\int_{-\pi}^{\pi}|\sin|x|-|x|+\pi|dx=\left|\int_{-\pi}^{\pi}(\sin|x|-|x|+\pi)dx\right|.$$

3. Bài tập

Bài tập 1: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y=-x^2+3x+3$ và đường thẳng $(d): y=2x+1$ là:

A. $\frac{7}{3}$ **B.** $\frac{13}{3}$ **C.** $\frac{19}{6}$ **D.** 11

Hướng dẫn giải

Chọn B

Xét phương trình $-x^2+3x+3=2x+1\Leftrightarrow -x^2+x+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $(P): y=-x^2+3x+3$ và đường thẳng $(d): y=2x=1$ là

$$S=\int_1^2\left|\left(-x^2+3x+3\right)-(2x-1)\right|dx=\int_{-1}^2\left(2+x-x^2\right)dx=\left(2x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^2=\frac{13}{3}$$

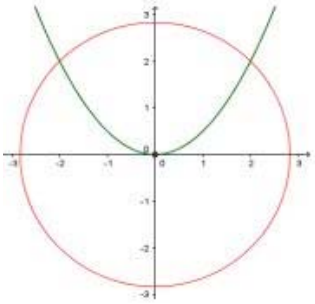
Vậy $S=\frac{13}{3}$.

Bài tập 2: Parabol $y=\frac{x^2}{2}$ chia hình tròn có tâm tại gốc tọa độ, bán kính $2\sqrt{2}$ thành 2 phần. Tỉ số diện tích của chúng thuộc khoảng nào:

A. $(0,4;0,5)$ **B.** $(0,5;0,6)$ **C.** $(0,6;0,7)$ **D.** $(0,7;0,8)$

Hướng dẫn giải

Chọn A



Phương trình đường tròn: $x^2+y^2=8\Rightarrow x^2=8-y^2$

Thế vào phương trình parabol, ta được $y=\frac{8-y^2}{2}\Leftrightarrow y^2+2y-8=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=-4(l) \end{array}\right.\Rightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=\pm 2$$

Diện tích phần được tạo bởi phần đường tròn phía trên với Parabol là:

$$S_1=\int_{-2}^2\left(\sqrt{8-x^2}-\frac{x^2}{2}\right)dx=\int_{-2}^2\sqrt{8-x^2}dx-\int_{-2}^2\frac{x^2}{2}dx=I_1-I_2;\ I_2=\int_{-2}^2\frac{x^2}{2}dx=\frac{x^3}{6}\Bigg|_{-2}^2=\frac{8}{3}$$

Tính $I_1=\int_{-2}^2\sqrt{8-x^2}dx=2\int_0^2\sqrt{8-x^2}dx$

Đặt $x=2\sqrt{2}\sin t\Rightarrow dx=2\sqrt{2}\cos tdt; x=0\rightarrow t=0;\ x=2\rightarrow t=\frac{\pi}{4}$

$$I_1=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\sqrt{2}\cos t2\sqrt{2}\cos tdt=16\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 tdt=16\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2t+1}{2}dt=4+2\pi$$

$S_1 = I_1 - I_2 = 4 + 2\pi - \frac{8}{3} = \frac{4}{3} + 2\pi$

Diện tích hình tròn: $S = \pi R^2 = 8\pi \Rightarrow S_2 = S - S_1 = 8\pi - \left(\frac{4}{3} + 2\pi\right) = 6\pi - \frac{4}{3}$

$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{4}{3} + 2\pi}{6\pi - \frac{4}{3}} \simeq 0,435 \in (0,4;0,5)$.

Bài tập 3: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$ và đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{4\sqrt{2}}$

A. $2\pi + 4$ **B.** $2\pi + \frac{4}{3}$ **C.** $2\pi - \frac{4}{3}$ **D.** $\frac{8}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm:

$\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x^2}{4\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = -16 (1) \\ x^2 = 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$. Khi đó $S = \int\limits_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \left|\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{4\sqrt{2}}\right| = 2\pi + \frac{4}{3}$

Bài tập 4: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $my = x^2$, $mx = y^2$ (với $m > 0$). Tìm giá trị của m để $S = 3$.

A. $m = 1$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = 3$. **D.** $m = 4$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Vì $m > 0$ nên từ $my = x^2$ ta suy $y = \frac{x^2}{m} \geq 0$;

Từ $mx = y^2$ nên $x \geq 0$ và $y = \sqrt{mx}$.

Xét phương trình $\frac{x^2}{m} = \sqrt{mx} \Leftrightarrow x^4 = m^3 x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = m \end{array}\right.$

Khi đó diện tích hình phẳng cần tìm là:

$S = \int\limits_0^m \left|\sqrt{mx} - \frac{x^2}{m}\right| dx = \left|\int\limits_0^m \left(\sqrt{mx} - \frac{x^2}{m}\right) dx\right|$

$= \left|\left(\frac{2\sqrt{m}}{3}.x\sqrt{x} - \frac{x^3}{3m}\right)\Big|_0^m\right| = \left|\frac{1}{3}m^2\right| = \frac{1}{3}m^2$

Yêu cầu bài toán $S=3\Leftrightarrow \frac{1}{3}m^2=3\Leftrightarrow m^2=9\Leftrightarrow m=3$ (vì $m>0$).

Bài tập 5: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm $y=x^2$ và $y=\frac{2x}{x-1}$ là $S=a+b\ln 2$ với a, b là những số hữu tỷ. Giá trị của $a+b$ là

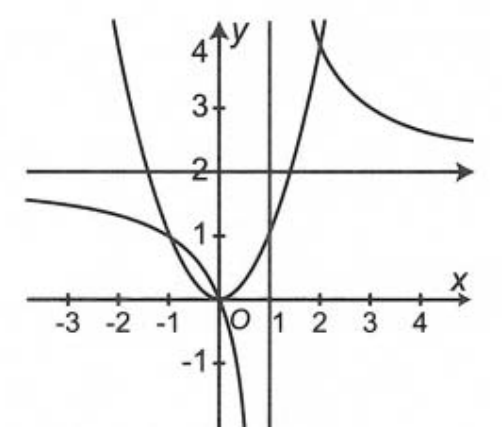
A. $-\frac{1}{3}$. **B.** 2. **C.** $-\frac{2}{3}$. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_1): $y=x^2$ và (C_2): $y=\frac{2x}{x-1}$ là

$$x^2=\frac{2x}{x-1}(x\neq 1)\Rightarrow x^3-x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\\x=2\end{array}\right.$$



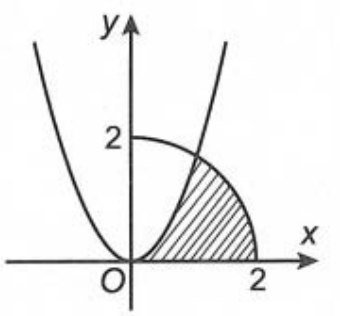
Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S=\int_{-1}^{0}\left(\frac{2x}{x-1}-x^2\right)dx=\int_{-1}^{0}\left(2+\frac{2}{x-1}-x^2\right)dx=\left(2x+2\ln|x-1|-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{0}=\frac{5}{3}-2\ln 2$$

Suy ra $a=\frac{5}{3}$ và $b=-2$

Vậy $a+b=-\frac{1}{3}$

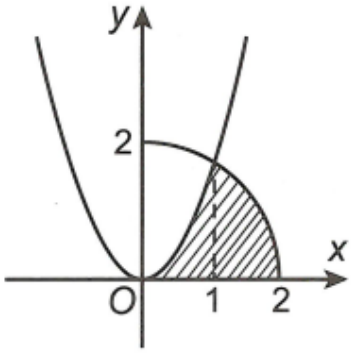
Bài tập 6: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi parabol $y=\sqrt{3}x^2$, cung tròn có phương trình $y=\sqrt{4-x^2}$ (với $0\le x\le 2$) và trục hoành (phần tô đậm trong hình vẽ). Diện tích của (H) là



A. $\dfrac{4\pi+\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\dfrac{4\pi-\sqrt{3}}{6}$.

C. $\dfrac{4\pi+2\sqrt{3}-3}{6}$. **D.** $\dfrac{5\sqrt{3}-2\pi}{3}$.

Hướng dẫn giải



Phương trình hoành độ giao điểm của parabol $y=\sqrt{3}x^2$ và cung tròn $y=\sqrt{4-x^2}$ (với $0\le x\le 2$) là $\sqrt{4-x^2}=\sqrt{3}x^2\Leftrightarrow 4-x^2=3x^4\Leftrightarrow x=1$.

Diện tích của (H) là

$$S=\int_0^1\sqrt{3}x^2dx+\int_1^2\sqrt{4-x^2}dx=\frac{\sqrt{3}}{3}x^3\Big|_0^1+I=\frac{\sqrt{3}}{3}+I \text{ với } I=\int_1^2\sqrt{4-x^2}dx.$$

Đặt $x=2\sin t$, $t\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]\Rightarrow dx=2\cos t.dt$

Đổi cận $x=1\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{6}$, $x=2\Rightarrow t=\dfrac{\pi}{2}$.

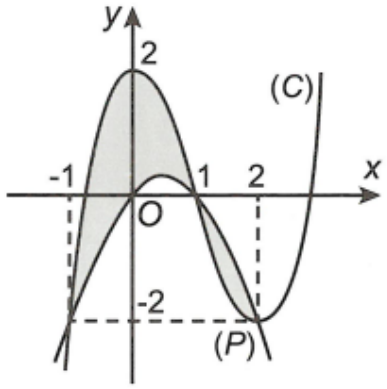
$$I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2 t}.2\cos t.dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}4\cos^2 t.dt=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}2\left(1+\cos 2t\right).dt=\left(2x+\sin 2t\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vậy $S=\dfrac{\sqrt{3}}{3}+I=\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{4\pi-\sqrt{3}}{6}$

Chọn B.

Bài tập 7: Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm đa thức bậc ba và parabol (P) có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần **tô đậm** của hình vẽ có diện tích bằng



A. $\frac{37}{12}$. **B.** $\frac{7}{12}$. **C.** $\frac{11}{12}$. **D.** $\frac{5}{12}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Vì đồ thị hàm bậc ba và đồ thị hàm bậc hai cắt trục tung tại các điểm có tung độ lần lượt là $y=2$ và $y=0$ nên ta xét hai hàm số là $y=ax^3+bx^2+cx+2$, $y=mx^2+nx$ (với $a,\ m\neq 0$).

Suy ra (C): $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+2$ và (P): $y=g(x)=mx^2+nx$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (P) là:

$ax^3+bx^2+cx+2=mx^2+nx \Leftrightarrow \left(ax^3+bx^2+cx+2\right)-\left(mx^2+nx\right)=0$.

Đặt $P(x)=\left(ax^3+bx^2+cx+2\right)-\left(mx^2+nx\right)$.

Theo giả thiết, (C) và (P) cắt nhau tại các điểm có hoành độ lần lượt là $x=-1$, $x=1$, $x=2$ nên $P(x)=a(x+1)(x-1)(x-2)$.

Ta có $P(0)=2a$.

Mặt khác, ta có $P(0)=f(0)-g(0)=2\Rightarrow a=1$.

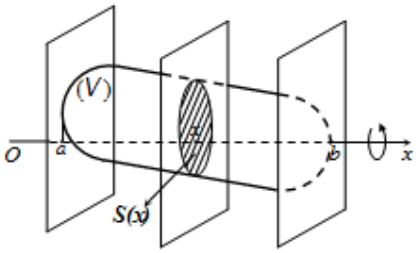
Vậy diện tích phần tô đậm là $S=\int_{-1}^{2}\left|(x+1)(x-1)(x-2)\right|dx=\frac{37}{12}$

Dạng 3: Tính thể tích vật thể tròn xoay dựa vào định nghĩa

1. Phương pháp:

Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b; $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x, $(a\le x\le b)$.

Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a,b]$.



$$V=\int_a^b S(x)dx$$

2. Các Bài tập mẫu:

Bài tập 1: Cho phần vật thể B giới hạn bởi hai mặt phẳng có phương trình $x=0$ và $x=2$. Cắt phần vật thể B bởi mặt phẳng vuông góc trục Ox tại điểm có hoành độ $x\ (0\le x\le 2)$, ta được diện tích là một tam giác đều có độ dài cạnh bằng $x\sqrt{2-x}$. Tính thể tích V của phần vật thể B.

Lời giải

Một tam giác đều cạnh a có diện tích $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Do tam giác đều cạnh $x\sqrt{2-x}$ có diện tích là $S(x)=\dfrac{x^2(2-x)\sqrt{3}}{4}$.

Suy ra thể tích $S=\int_0^2 S(x)dx=\int_0^2 \dfrac{x^2(2-x)\sqrt{3}}{4}dx=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\int_0^2 x^2(2-x)dx \xrightarrow{Casio} \dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{4}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Bài tập 2: Trong không gian $Oxyz$, cho vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=0$ và $x=\pi$, biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng $x,(0\le x\le\pi)$ là một tam giác đều cạnh là $2\sqrt{\sin x}$.Tính thể tích của vật thể đó.

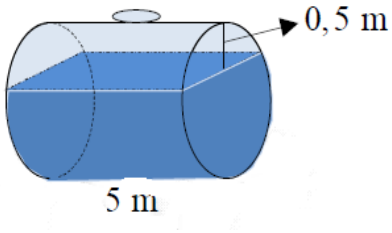
Lời giải

Một tam giác đều cạnh a có diện tích $S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Do đó tam giác đều cạnh $2\sqrt{\sin x}$ có diện tích là $S(x)=\dfrac{4\sin x.\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}\sin x$

Suy ra thể tích $V=\int_0^2 S(x)\,dx=\int_0^2 \sqrt{3}\sin x dx=2\sqrt{3}$

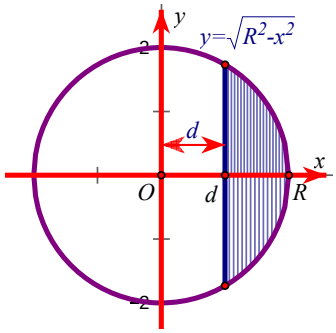
Bài tập 3: Một bồn trụ đang chứa dầu được đặt nằm ngang có chiều dài bồn là $5m$, bán kính đáy $1m$. Người ta rút dầu ra trong bồn tương ứng với $0,5m$ của đường kính đáy. Tính thể tích gần đúng của dầu còn lại trong bồn



Lời giải

* Thể tích cả khối trụ $V_1 = \pi R^2 h = \pi.1^2.5 = 5\pi\left(m^3\right)$

* Tính thể tích phần khối trụ bị mất đi

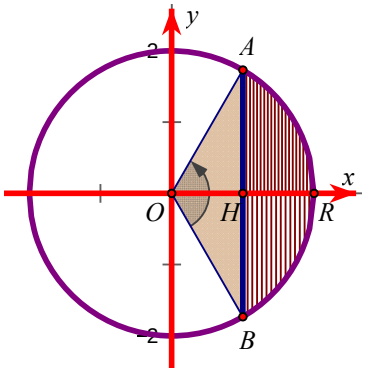


+ Cách 1: $S_{viên\ phân} = 2\int_{d}^{R}\sqrt{R^2-x^2}dx \ = 2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-x^2}dx \approx 0,61$

$V_2 = S_{viên\ phân}.h = 2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-x^2}dx \times 5 \approx 3,07$

Suy ra thể tích khối trụ còn lại $V = V_1 - V_2 = 5\pi - 2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-x^2}dx \times 5 \approx 12,637\ \left(m^3\right)$

+ Cách 2: Tính góc ở tâm $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{OH}{R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{2\alpha}{3}$

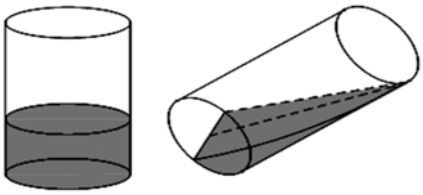


$S_{viên\ phân} = \frac{1}{2}R^2\left(\alpha - \sin\alpha\right) = \frac{1}{2}.\left(\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right) \approx 0,614$

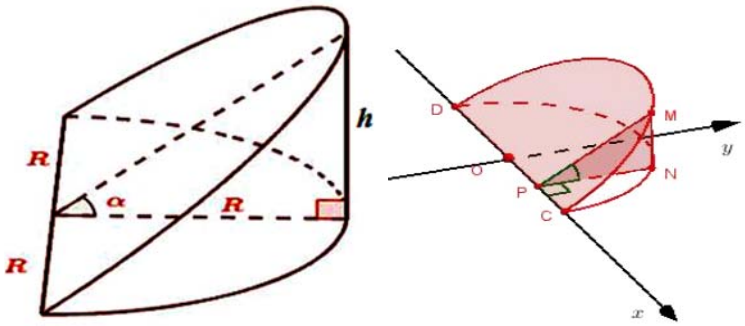
$V_2 = S_{viên\ phân}.h = \frac{1}{2}.\left(\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right) \times 5$

$$V = V_1 - V_2 = 5\pi - \frac{1}{2}.\left(\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right)\times 5 \approx 12,637\ (m^3)$$

Bài tập 4: Bạn A có một cốc thủy tinh hình trụ, đường kính trong lòng đáy cốc là $6\,cm$, chiều cao trong lòng cốc là $10\,cm$ đang đựng một lượng nước. Bạn A nghiêng cốc nước, vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì ở đáy mực nước trùng với đường kính đáy. Tính thể tích lượng nước trong cốc



Lời giải



Phân tích: Thể tích nước có hình dạng "cái nêm"; có 2 phương pháp tính thể tích này

+ Cách 1 – Chứng minh công thức bằng PP tích phân: Xét thiết diện cắt cốc thuỷ tinh tại vị trí x $(-R \le x \le R)$ bất kỳ; ta có diện tích thiết diện là

$S(x) = \frac{1}{2}.\sqrt{R^2 - x^2}.\left(\sqrt{R^2 - x^2}.\tan\alpha\right) = \frac{1}{2}(R^2 - x^2)\tan\alpha$; thể tích.

$$V = \int_{-R}^{R} S(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\tan\alpha \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}R^3\tan\alpha\ .$$

Cách 2:

Gọi S là diện tích thiết diện do mặt phẳng có phương vuông góc với trục Ox với khối nước, mặt phẳng này cắt trục Ox tại điểm có hoành độ $h \ge x \ge 0$. Ta có:

$\frac{r}{R} = \frac{h-x}{h} \Leftrightarrow r = \frac{(h-x)R}{h}$, vì thiết diện này là nửa hình tròn bán kính r

$$\Rightarrow S(x) = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{\pi(h-x)^2R^2}{2h^2}$$

Thể tích lượng nước chứa trong bình là.

Bài giải

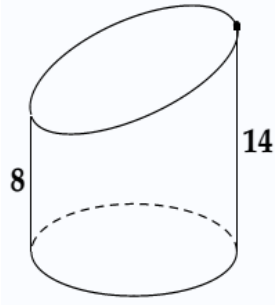
+ Cách 1: Áp dụng công thức tính thể tích cái nêm biết góc giữa mặt cắt và mặt đáy bằng α là

$\boxed{V = \frac{2}{3}R^2h = \frac{2}{3}R^3.\tan\alpha}$ với $\tan\alpha = \frac{h}{R}$ ta được $V = \frac{2}{3}R^3.\frac{h}{R} = \frac{2}{3}.3^2.10 = 60(cm^3)$

+ Cách 2: Tính trực tiếp bài toán bằng PP tích phân. $\Rightarrow S(x)=\frac{1}{2}\pi r^2=\frac{\pi(h-x)^2R^2}{2h^2}$; thể tích

$V=\int_0^h S(x)dx=\frac{9\pi}{200}\int_0^{10}(10-x)^2dx=60\pi(cm^3)$. $V=\int_0^h S(x)dx$

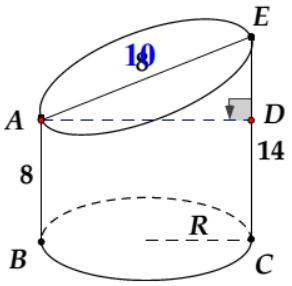
Bài tập 5: Cắt một khối trụ bởi một mặt phẳng ta được một khối như hình vẽ bên. Biết rằng thiết diện là một hình elip có độ dài trục lớn bằng 10, khoảng cách từ điểm thuộc thiết diện gần mặt đáy nhất và điểm thuộc thiết diện xa mặt đáy nhất lần lượt là 8 và 14. Tính thể tích của.



Lời giải

Tính các số đo: $\begin{cases}AB=8\\AE=10\\DE=14-8=6\end{cases}\Rightarrow AD=\sqrt{AE^2-DE^2}=8$; suy ra bán kính khối trụ là

$R=\frac{AD}{2}=4$.



♦ Cách 1: Thể tích khối bằng thể tích "khối trụ trung bình":

$V_{(H)}=\pi R^2.\left(\frac{AB+CE}{2}\right)=\pi.4^2.11=176\pi\,(đvtt)$

♦ Cách 2: Áp dụng công thức tính thể tích "cái nêm": Lấy mặt phẳng (P) vuông góc với đường sinh của hình trụ và đi qua điểm A, khi đó chia khối (H) thành hai khối:

+ Khối 1: là khối trụ chiều cao $h=8$, bán kính $r=4$ nên thể tích $V_1=\pi r^2h=128\pi$

+ Khối 2: là phân nửa một khối trụ có chiều cao $DE=6$ và bán kính $r=4$ nên thể tích

$V_2=\frac{1}{2}.\pi r^2.AD=\frac{1}{2}.\pi.4^2.6=48\pi$

+ Vậy $V_{(H)}=V_1+V_2=128\pi+48\pi=176\pi\,(đvtt)$

3. Bài tập

Câu 1: Cho (T) là vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=0$, $x=1$. Tính thể tích V của (T) biết rằng khi cắt (T) bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng x, $0\le x\le 1$, ta được thiết diện là tam giác đều có cạnh bằng $\sqrt{1+x}$.

A. $V=\frac{3}{2}\cdot$. **B.** $V=\frac{3\sqrt{3}}{8}\pi$. **C.** $V=\frac{3\sqrt{3}}{8}$. **D.** $V=\frac{3}{2}\pi$.

Lời giải

Chọn C

Ta có diện tích tam giác đều cạnh bằng $\sqrt{1+x}$ là $S(x)=\frac{\left(\sqrt{1+x}\right)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}(1+x)}{4}$.

Thể tích của vật thể (T) là $V=\int_0^1 S(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\sqrt{3}(1+x)}{4}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{8}(1+x)^2\Big|_0^1=\frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot$.

Câu 2: Cho vật thể (T) giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0;x=2$. Cắt vật thể (T) bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x(0\le x\le 2)$ ta thu được thiết diện là một hình vuông có cạnh bằng $(x+1)e^x$. Thể tích vật thể (T) bằng

A. $\frac{\pi\left(13e^4-1\right)}{4}$. **B.** $\frac{13e^4-1}{4}$. **C.** $2e^2$. **D.** $2\pi e^2$.

Lời giải

Chọn B

Diện tích thiết diện là $S(x)=(x+1)^2e^{2x}$.

Thể tích của vật thể (T) là $V=\int_0^2 S(x)dx=\int_0^2(x+1)^2e^{2x}dx$.

$$V=\frac{1}{2}(x+1)^2e^{2x}\Big|_0^2-\int_0^2(x+1)e^{2x}dx=\frac{9e^4-1}{2}-\left(\frac{x+1}{2}e^{2x}\Big|_0^2-\frac{1}{2}\int_0^2e^{2x}dx\right)$$

$$=\frac{9e^4-1}{2}-\frac{3e^4-1}{2}+\frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^2=3e^4+\frac{1}{4}e^4-\frac{1}{4}=\frac{13e^4-1}{4}.$$

Dạng 4: Tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi 1 đồ thị

1. Phương pháp:

Vật thể tròn xoay sinh bởi miền hình phẳng được giới hạn: Đồ thị $y=f(x)$; trục $Ox(y=0)$; $x=a$, $x=b$; quay xung quanh Ox.

- Nếu thiếu cận thì giải phương trình $f(x)=0$ để bổ sung cận.

- Tính thể tích theo công thức: $V_{Ox}=\pi\int_a^b f^2(x)dx$

2. Các Bài tập mẫu:

Bài tập 1: Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=2x-x^2$ và trục hoành. Tính thể tích V của vật thể tròn xoay được sinh ra bởi hình phẳng đó khi nó quay quanh trục Ox.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $2x-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Thể tích của vật thể tròn xoay cần tìm $V=\pi\int\limits_0^2\left(2x-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\dfrac{16\pi}{15}$.

Bài tập 2: Cho miền hình phẳng giới hạn bởi: $y=xe^x$, Ox $x=1$ quay xung quanh Ox. Tính thể tích của vật thể tạo thành.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số: $y=xe^x$ và trục Ox $xe^x=0\Leftrightarrow x=0$

Vậy vật thể tròn xoay có thể tích là: $V=\pi\int_0^1\left(xe^x\right)^2dx=\pi\int_0^1\left(x^2e^{2x}\right)dx$

$$\Rightarrow V=\pi\left(\frac{1}{2}x^2e^{2x}\right)_0^1-\int_0^1xe^{2x}dx=\pi\frac{e^2}{2}-\pi\int_0^1xe^{2x}dx$$

$$\Rightarrow V=\frac{\pi e^2}{2}-\pi\left(\frac{1}{2}xe^{2x}\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1e^{2x}dx\right)=\frac{\pi}{4}e^{2x}\Big|_0^1=\frac{\pi\left(e^2-1\right)}{4}.$$

Bài tập 3: Cho miền hình phẳng giới hạn bởi: $y=x^2-4x, y=0$; quay xung quanh Ox. tính thể tích của vật thể tạo thành.

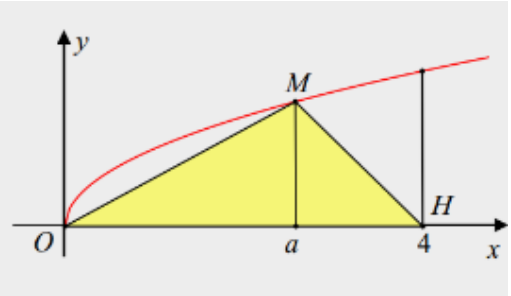
Lời giải

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số: $y=x^2-4x$ và đường thẳng $y=0$ là nghiệm của phương trình: $x^2-4x=0\ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=4\end{array}\right.$

Vật thể tạo thành có thể tích là:

$$V=\pi\int_0^4\left(x^2-4x\right)^2dx=\pi\int_0^4\left(x^4-8x^3+16x^2\right)dx=\pi\left(\frac{x^5}{5}-2x^4+\frac{16x^3}{3}\right)\Big|_0^4=\frac{512\pi}{15}$$

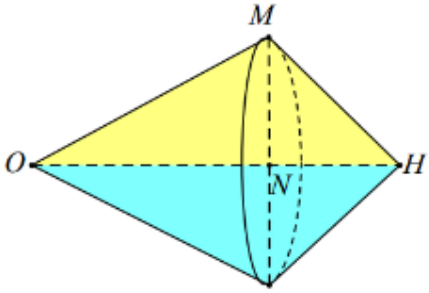
Bài tập 4: Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quanh hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x};y=0;x=4$ và trục Ox. Đường thẳng $x=a\left(0<a<4\right)$ cắt đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ tại M.



Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác MOH quanh trục Ox. Biết rằng $V = 2V_1$. Tính a

Lời giải

Ta có $V = \pi\int_0^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi\int_0^4 x\mathrm{d}x = 8\pi \Rightarrow V_1 = \frac{V}{2} = 4\pi$.



Tam giác MOH quanh trục Ox tạo nên hai khối nón chung đáy. Gọi N là hình chiếu vuông góc của M trên trục Ox. Suy ra $r = MN = y_M = y(a) = \sqrt{a}$.

$\Rightarrow V_1 = \frac{1}{3}OH.\pi.r^2 = \frac{1}{3}.4\pi.\left(\sqrt{a}\right)^2 = \frac{4\pi a}{3}$.

Suy ra $4\pi = \frac{4\pi a}{3} \Rightarrow a = 3$.

Bài tập 5: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi độ thị hàm số $y = \sqrt{\frac{x}{4-x^2}}$; trục Ox và đường thẳng $x = 1$. Tính thể tích khối tròn xoay thu được khi quay quanh hình (H) xung quanh trục Ox.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $\sqrt{\frac{x}{4-x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Theo bài toán thì thể tích của vật thể tròn xoay cần tìm

$V = \pi\int_0^1 \frac{x}{4-x^2}dx = -\frac{\pi}{2}\ln\left|4-x^2\right|\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}\ln\frac{4}{3} = \frac{\pi}{2}\ln\frac{a}{b}.$

Do đó $a=4, b=3 \Rightarrow a+b=7$.

3. Bài tập

Câu 1: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2+3,\ y=0,\ x=0,\ x=2$. Gọi V là thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox. Mệnh đề nào sau đây đúng?

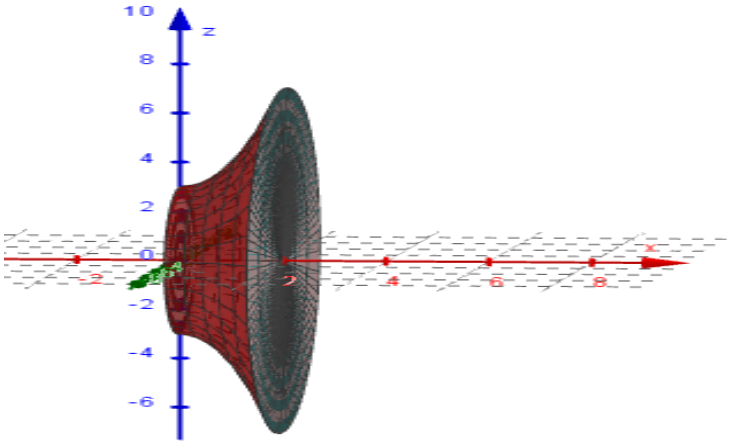
A. $V=\pi\int_0^2\left(x^2+3\right)^2\,\mathrm{d}x$.

B. $V=\int_0^2\left(x^2+3\right)\mathrm{d}x$.

C. $V=\int_0^2\left(x^2+3\right)^2\,\mathrm{d}x$.

D. $V=\pi\int_0^2\left(x^2+3\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải



Thể tích của vật thể được tạo nên là $V=\pi\int_0^2\left(x^2+3\right)^2\,\mathrm{d}x$.

Câu 2: Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành do quay xung quanh trục hoành một elip có phương trình $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. V có giá trị gần nhất với giá trị nào sau đây?

A. 550 **B.** 400 **C.** 670 **D.** 335

Lời giải

Chọn D

Quay elip đã cho xung quanh trục hoành chính là quay hình phẳng:

$$H=\left\{y=4\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}, y=0, x=-5, x=5\right\}.$$

Vậy thể tích khối tròn xoay sinh ra bởi H khi quay xung quanh trục hoành là:

$$V=\pi\int_{-5}^{5}\left(16-\frac{16x^2}{25}\right)dx=\pi\left(16x-\frac{16x^3}{75}\right)\Big|_{-5}^{5}=\frac{320\pi}{3}\simeq 335{,}1$$

Câu 3: Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{m^2-x^2}$ (m là tham số khác 0) và trục hoành. Khi (H) quay xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích V. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $V<1000\pi$.

A. 18. **B.** 20. **C.** 19. **D.** 21.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của đường cong và trục hoành là: $\sqrt{m^2-x^2}=0\Leftrightarrow x=\pm m$

Thể tích vật thể tròn xoay cần tính là: $V=\pi\int\limits_{-|m|}^{|m|}(m^2-x^2)dx=\pi(m^2x-\frac{1}{3}x^3)\Big|_{-|m|}^{|m|}=\frac{4\pi m^2|m|}{3}$

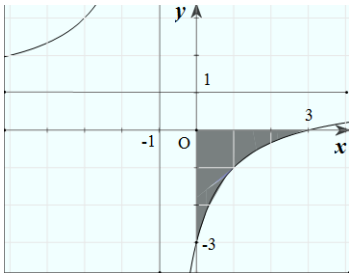
Ta có: $V<1000\pi\Leftrightarrow\frac{4\pi m^2|m|}{3}<1000\pi\Leftrightarrow|m|^3<750\Leftrightarrow-\sqrt[3]{750}<m<\sqrt[3]{750}$.

Ta có $\sqrt[3]{750}\simeq 9,08$ và $m\neq 0$. Vậy có 18 giá trị nguyên của m.

Câu 8 : Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường cong $y=\frac{x-3}{x+1}$, trục hoành và trục tung. Khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành có thể tích $V=\pi(a+b\ln 2)$ với a,b là các số nguyên. Tính $T=a+b$.

A. $T=3$. **B.** $T=6$. **C.** $T=10$. **D.** $T=-1$.

Lời giải



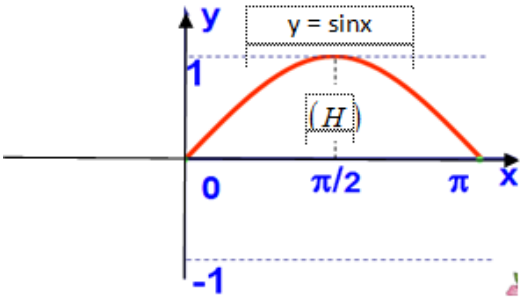
Dựa vào đồ thị hàm số trên ta có:

$$V=\pi\int_0^3\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^2dx=\pi\int_0^3\left(1-\frac{4}{x+1}\right)^2dx=\pi\int_0^3\left(1-\frac{8}{x+1}+\frac{16}{(x+1)^2}\right)dx$$

$$=\pi\left(x-8\ln(x+1)-\frac{16}{x+1}\right)\Big|_0^3=\pi(15-16\ln 2)\Rightarrow a=15;\mathrm{b}=-16.$$

Vậy $T=a+b=-1$.

Câu 4: Cho hình (H) trong hình vẽ dưới đây quay quanh trục Ox tạo thành một khối tròn xoay có thể tích bằng bao nhiêu?



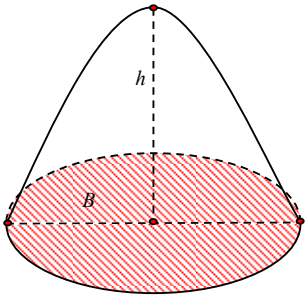
A. $\dfrac{\pi^2}{2}$. **B.** $\dfrac{\pi}{2}$. **C.** 2π. **D.** $2\pi^2$.

Lời giải

Thể tích khối tròn xoay nhận được khi quay hình (H) quanh trục Ox là

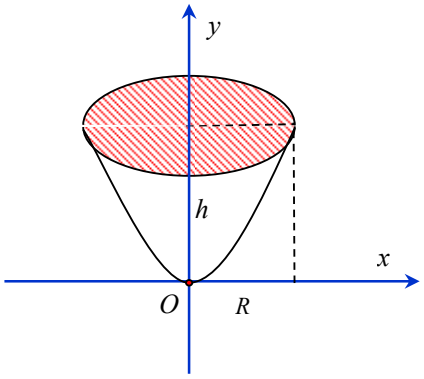
$$V=\pi\int_0^{\pi}(\sin x)^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2}.$$

Câu 5: Vật thể parabolide tròn xoay như hình vẽ bên dưới có đáy có diện tích $B=3$ chiều cao $h=4$. Thể tích của vật thể trên là



A. $V=\dfrac{1}{3}\pi$. **B.** $V=6$. **C.** $V=\dfrac{1}{4}\pi$. **D.** $V=8$.

Lời giải



Đường cong parabol có dạng: $y=ax^2$ và đi qua điểm có tọa độ $(R;h)$ nên ta có:

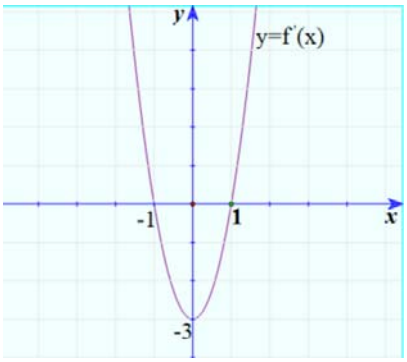
$$y=\frac{h}{R^2}x^2$$

$$\Rightarrow x=\pm\frac{R\sqrt{y}}{\sqrt{h}}$$

Thể tích của khối tròn xoay trên là: $V=\pi\int\limits_0^h \frac{R^2}{h}y\mathrm{d}y=\pi\frac{R^2}{h}.\frac{1}{2}y^2\Big|_0^h=\frac{1}{2}\pi R^2h$.

Áp dụng công thức ta có: $V=\frac{1}{2}\pi R^2h=\frac{1}{2}Bh=\frac{1}{2}.3.4=6$.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,(a,b,c,d\in\mathbb{R},a\neq 0)$ có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng $y=4$ tại điểm có hoành độ âm và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ cho bởi hình vẽ dưới đây. Tính thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng H giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành khi quay xung quanh trục Ox.



A. $\frac{725}{35}\pi$. **B.** $\frac{1}{35}\pi$. **C.** 6π. **D.** Chọn khác.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)\Rightarrow f'(x)=3(x^2-1)$.

Khi đó $f(x)=\int f'(x)dx=x^3-3x+C$.

Điều kiện đồ thị hàm số $f(x)$ tiếp xúc với đường thẳng $y=4$ là:

$$\begin{cases}f(x)=4\\f'(x)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-3x+C=4\\3(x^2-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\C=2\end{cases}\text{ suy ra } f(x)=x^3-3x^2+2(C).$$

$+(C)\cap Ox\Rightarrow$ hoành độ giao điểm là $x=-2;x=1$.

+Khi đó $V=\pi\int\limits_{-2}^{1}(x^3-3x^2+2)^2dx=\frac{729}{35}\pi$.

Dạng 5: Tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi 2 đồ thị

1. Phương pháp:

Nếu hình phẳng D được giới hạn bởi các đường $y=f(x), y=g(x), x=a, x=b$ thì thể tích khối tròn xoay sinh bởi khi quay D quanh trục Ox được tính bởi công thức: $V=\pi\int\limits_a^b\left|f^2(x)-g^2(x)\right|dx$

2. Các Bài tập mẫu:

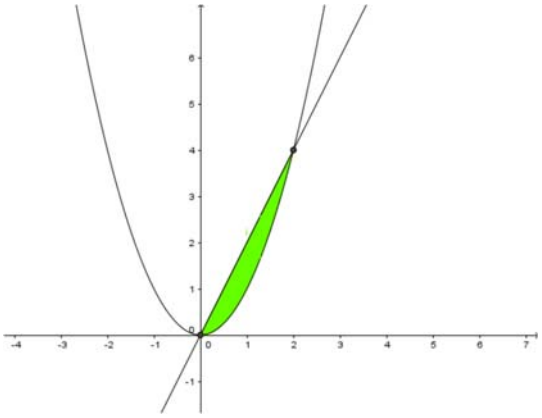
Bài tập 1: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=a.x^2, y=bx, (a,b\neq 0)$ quay xung quanh trục Ox. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. $V=\pi.\dfrac{b^3}{a^3}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)$.

B. $V=\pi.\dfrac{b^5}{5a^3}$.

C. $V=\pi.\dfrac{b^5}{3a^3}$.

D. $V=\pi.\dfrac{b^5}{a^3}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)$

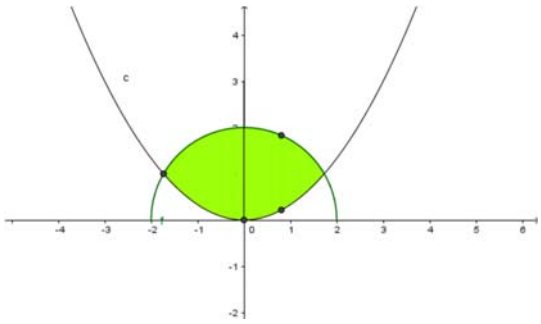


Hướng dẫn giải

Chọn D

Tọa độ giao điểm của hai đường $y=a.x^2$ và $y=b.x$ là các điểm $O(0;0)$ và $A\left(\dfrac{b}{a};\dfrac{b^2}{a}\right)$. Vậy thể tích của khối tròn xoay cần tính là: $V=\int\limits_0^{\frac{b}{a}}\pi b^2x^2dx-\int\limits_0^{\frac{b}{a}}\pi a^2x^4dx=\pi\dfrac{b^5}{a^3}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)$.

Bài tập 2: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{4-x^2}$, $y=\dfrac{1}{3}x^2$ quay xung quanh trục *Ox*. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:



A. $V=\dfrac{24\pi\sqrt{3}}{5}$. **B.** $V=\dfrac{28\pi\sqrt{3}}{5}$.

C. $V=\dfrac{28\pi\sqrt{2}}{5}$. **D.** $V=\dfrac{24\pi\sqrt{2}}{5}$

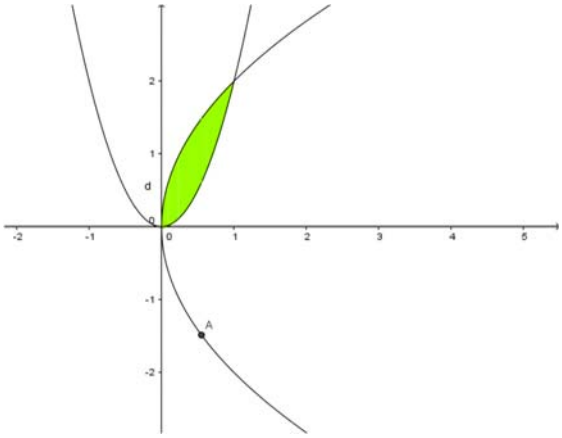
Hướng dẫn giải

Chọn B

Tọa độ giao điểm của hai đường $y=\sqrt{4-x^2}$ và $y=\dfrac{1}{3}x^2$ là các điểm $A\left(-\sqrt{3};1\right)$ và $B\left(\sqrt{3};1\right)$. Vậy thể tích của khối tròn xoay cần tính là:

$$V=\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\pi\left(4-x^2\right)dx-\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\pi.\frac{1}{9}x^4dx=\pi\frac{28\sqrt{3}}{5}.$$

Bài tập 3: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=2x^2,\ y^2=4x$ quay xung quanh trục *Ox*. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:



A. $V=\dfrac{88\pi}{5}$. **B.** $V=\dfrac{9\pi}{70}$. **C.** $V=\dfrac{4\pi}{3}$. **D.** $V=\dfrac{6\pi}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Với $x\in\left[0;2\right]$ thì $y^2=4x\Leftrightarrow y=\sqrt{4x}$

Tọa độ giao điểm của đường $y=2x^2$ với $y^2=4x$ là các điểm $O(0;0)$ và $A(1;2)$. Vậy thể tích của khối tròn xoay cần tính là: $V=\int\limits_0^1\pi.4xdx-\int\limits_0^1\pi.4x^4dx=\pi.\dfrac{6}{5}$.

Bài tập 4: Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng D giới hạn bởi các đường elip $x^2+9y^2=9$ quay quanh Ox bằng:

A. π. **B.** 2π. **C.** 3π. **D.** 4π

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có: $x^2+9y^2=9\Leftrightarrow y^2=\dfrac{9-x^2}{9}\Rightarrow V=\pi\int\limits_{-3}^{3}y^2dx=\pi\int\limits_{-3}^{3}\dfrac{9-x^2}{9}dx=4\pi$.

Bài tập 5: Thể tích của khối tròn xoay khi quay hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x},y=x$ quanh trục Ox bằng:

A. $\pi\int\limits_0^1\left(\sqrt{x}-x\right)dx$.

B. $\pi\int\limits_0^1\left(x-\sqrt{x}\right)dx$.

C. $\pi\int\limits_0^1\left(x-x^2\right)dx$.

D. $\pi\int\limits_0^1\left(x^2-x\right)dx$

Hướng dẫn giải

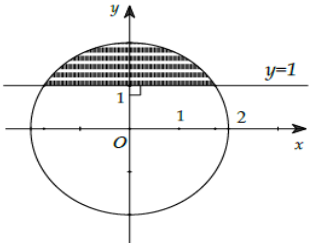
Chọn D

Xét phương trình $\sqrt{x}-x\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge0\\x-x^2\end{cases}\Rightarrow x=0;x=1$.

Và $\sqrt{x}\ge x\,\forall x\in[0;1]\Rightarrow V=\pi\int\limits_0^1\left((\sqrt{x})^2-x^2\right)dx=\pi\int\limits_0^1\left(x-x^2\right)dx$.

3. Bài tập

Câu 1: Quay hình phẳng như hình được tô đậm trong hình vẽ bên quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là:



A. $V=4\sqrt{3}\pi$.

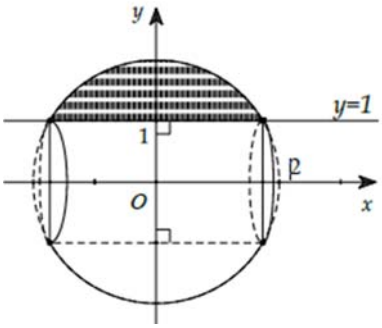
B. $V=6\sqrt{3}\pi$.

C. $V=5\sqrt{3}\pi$.

D. $V=2\sqrt{3}\pi$

Hướng dẫn giải

Chọn A

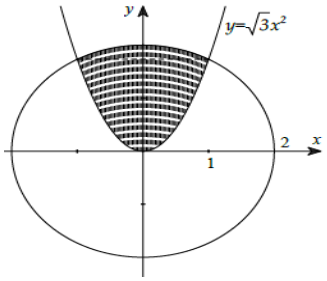


Xét hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+y^2=4\\y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=3\\y=1\end{cases}\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$.

Do đối xứng nhau qua Oy nên:

$$V = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \left[\left(4 - x^2\right) - 1^2 \right] dx = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(3 - x^2\right) dx = 2\pi \left(3x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}\,\pi .$$

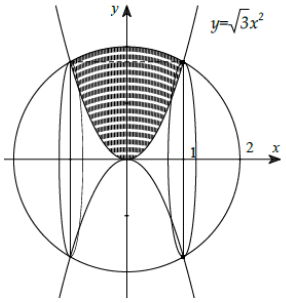
Câu 2: Quay hình phẳng như hình được tô đậm trong hình vẽ bên quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích:



A. $V = \dfrac{46\pi}{9}$. **B.** $V = \dfrac{46\pi}{15}$. **C.** $V = \dfrac{23\pi}{9}$. **D.** $V = 13\pi$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



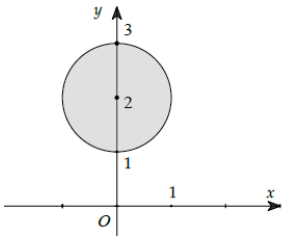
Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = \sqrt{3}x \end{cases} \Rightarrow x = \pm 1$.

Do đối xứng nhau qua Oy nên

$$V = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \left[\left(4 - x^2\right) - \left(\sqrt{3}x\right)^2 \right] dx - 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(4 - x^2 - 3x^4\right) dx$$

$$= 2\pi \left(4x - \frac{x^5}{3} - \frac{3x^5}{5} \right) \Bigg|_0^{\sqrt{3}} = \frac{46\pi}{15}.$$

Câu 3: Quay hình phẳng như hình được tô đậm trong hình vẽ bên quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là:



A. $V = 3\pi^2$. **B.** $V = \pi^2$. **C.** $V = \dfrac{2\pi^2}{3}$. **D.** $V = 2\pi^2$

Hướng dẫn giải

Chọn D

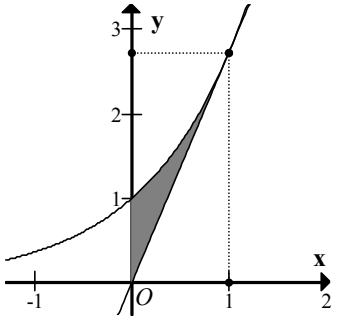
Ta có: $x^2+(y-1)^2=1\Leftrightarrow(y-1)^2=1-x^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1+\sqrt{1-x^2}\\y=1-\sqrt{1-x^2}\end{array}\right.$

Ta có: $V=2\pi\int_0^1\left[\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2-\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^2\right]dx=8\pi\int_0^1\sqrt{1-x^2}dx$

Đặt $x=\sin t$; $\left(t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\right)$

$\Rightarrow V=8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 tsdt-4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=4\pi\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2\pi^2$.

Câu 4: Cho hình (H) giới hạn bởi các đường cong $(C):y=e^x$, tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(1;e)$ và trục Oy. Thể tích của khối tròn xoay khi quay (H) quanh trục Ox bằng:



A. $\frac{e-2}{2}$. **B.** $\frac{e^2-1}{3}$. **C.** $\frac{e^2+1}{2}$. **D.** $\frac{e^2-3}{6}$

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=e^x$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $M(1;e)$ là $y=e(x-1)+e\Leftrightarrow y=ex.$

Diện tích của (H) bằng: $V=\pi\int_0^1\left(e^{2x}-e^2x^2\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{e^2}{3}x^3\right)\Big|_0^1=\frac{e^2-3}{6}$.

Câu 5: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=x^2-4, y=2x-4, x=0, x=2$. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox bằng:

A. $-\frac{32\pi}{5}$. **B.** 6π. **C.** -6π. **D.** $\frac{32\pi}{5}$.

Lời giải

Chọn D

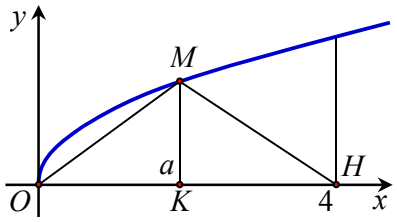
Suy ra thể tích cần tìm là $V=\pi\int\limits_0^2\left(x^2-4\right)^2\mathrm{d}x-\pi\int\limits_0^2\left(2x-4\right)^2\mathrm{d}x=\dfrac{32\pi}{5}$.

Dạng 6: Tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi nhiều đồ thị

1. Phương pháp:

2. Các Bài tập mẫu:

Bài tập 1: Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, $y=0$ và $x=4$ quanh trục Ox. Đường thẳng $x=a\ (0<a<4)$ cắt đồ thị hàm $y=\sqrt{x}$ tại M.



Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox. Biết rằng $V=2V_1$. Khi đó

A. $a=2$. **B.** $a=2\sqrt{2}$. **C.** $a=\dfrac{5}{2}$. **D.** $a=3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $\sqrt{x}=0\Leftrightarrow x=0$. Khi đó $V=\pi\int\limits_0^4 x\mathrm{d}x=8\pi$

Ta có $M\left(a;\sqrt{a}\right)$

Khi quay tam giác OMH quanh trục Ox tạo thành hai hình nón có chung đáy:

- Hình nón $\left(N_1\right)$ có đỉnh là O, chiều cao $h_1=OK=a$, bán kính đáy $R=MK=\sqrt{a}$;
- Hình nón $\left(N_2\right)$ thứ 2 có đỉnh là H, chiều cao $h_2=HK=4-a$, bán kính đáy $R=MK=\sqrt{a}$

Khi đó $V_1=\dfrac{1}{3}\pi R^2h_1+\dfrac{1}{3}\pi R^2h_2=\dfrac{4}{3}\pi a$

Theo đề bài $V=2V_1\Leftrightarrow 8\pi=2.\dfrac{4}{3}\pi a\Rightarrow a=3$.

Bài tập 2: Cho hình thang cong giới hạn bởi các đường $y=e^x,y=0,x=0,x=\ln 4$. Đường thẳng x = k $\left(0<k<\ln 4\right)$ chia thành hai hình phẳng là S_1 và S_2 như hình vẽ bên. Quay S_1,S_2 quanh trục Ox được khối tròn xoay có thể tích lần lượt là V_1,V_2. Với giá trị nào của k thì $V_1=2V_2$

A. $k=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{32}{3}$. **B.** $k=\dfrac{1}{2}\ln 11$. **C.** $k=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{11}{3}$. **D.** $k=\ln\dfrac{32}{3}$

Hướng dẫn giải

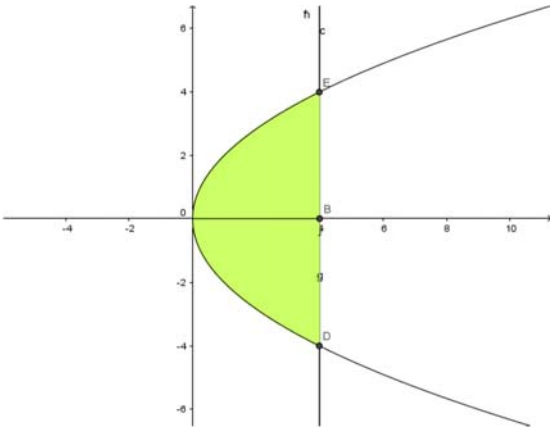
Chọn B

Ta có:

$$V_1 = \pi\int_0^k \left(e^x\right)^2 dx = \pi\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)\Big|_0^k = \frac{\pi e^{2k}}{2} - \frac{\pi}{2}; V_2 = \pi\int_k^{\ln 4} \left(e^x\right)^2 dx = \pi\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)\Big|_k^{\ln 4} = 8\pi - \frac{\pi e^{2k}}{2}$$

Theo giả thiết: $V_1 = 2V_2 \Leftrightarrow \frac{\pi e^{2k}}{2} - \frac{\pi}{2} = 2\left(8\pi - \frac{\pi e^{2k}}{2}\right) \Leftrightarrow e^{2k} = 11 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}\ln 11$

Bài tập 3: Cho hình phẳng *D* giới hạn bởi các đường $y^2 = 4x$ và đường thẳng $x = 4$. Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi *D* xoay quanh trục *Ox* là:



A. 32π. **B.** 64π.
C. 16π. **D.** 4π.

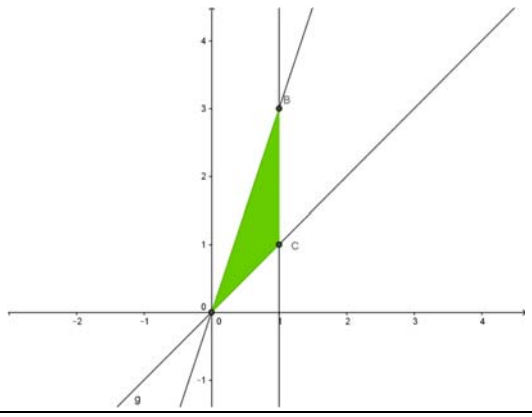
Hướng dẫn giải :

Chọn A

Giao điểm của hai đường $y^2 = 4x$ và $x = 4$ là $D(4;-4)$ và $E(4;4)$. Phần phía trên Ox của đường $y^2 = 4x$ có phương trình $y = 2\sqrt{x}$. Từ hình vẽ suy ra thể tích của khối tròn xoay cần tính là:

$V = \int_0^4 \pi\left(2\sqrt{x}\right)^2 dx = 32\pi$.

Bài tập 4: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 3x$, $y = x$, $x = 0$, $x = 1$ quay xung quanh trục *Ox*. Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:



A. $V=\frac{8\pi}{3}$. **B.** $V=\frac{4\pi}{3}$. **C.** $V=\frac{2\pi}{3}$. **D.** $V=\pi$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Tọa độ giao điểm của đường $x=1$ với $y=x$ và $y=3x$ là các điểm $C(1;1)$ và $B(3;1)$. Tọa độ giao điểm của đường $y=3x$ với $y=x$ là $O(0;0)$. Vậy thể tích của khối tròn xoay cần tính là:

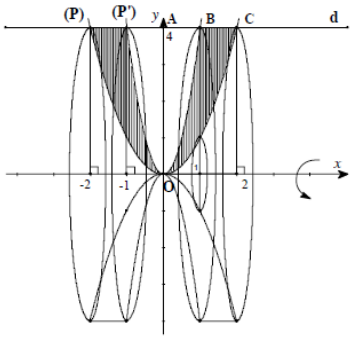
$V=\int_0^1 \pi.9x^2dx-\int_0^1 \pi.x^2dx=\pi\frac{8}{3}$.

Bài tập 5: Trên mặt phẳng Oxy, cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $(P):y=x^2;(P'):y=4x^2;(d):y=4$. Thể tích của khối tròn xoay khi quay quanh trục Ox bằng:

A. $\frac{9\pi}{5}$. **B.** $\frac{4\pi}{5}$. **C.** $\frac{7\pi}{5}$. **D.** 2π.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Đặt V là thể tích cần tìm

Xét phương trình hoành độ giao điểm của và: $x^2-4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của và: $4x^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$

V_{OAC} là thể tích khối tròn xoay sinh bởi khi quay: $\left[\begin{array}{l}y=x^2\\y=4\\Oy\end{array}\right.$ quanh Ox

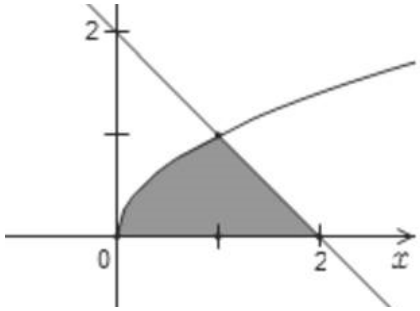
V_{OAB} là thể tích khối tròn xoay sinh bởi khi quay: $\left[\begin{array}{l}y=4x^2\\y=4\\Oy\end{array}\right.$ quanh Ox

Lúc đó: $V=V_{OAC}-V_{OAB}=\pi\int_0^2\left[4-\left(x^2\right)^2\right]dx-\pi\int_0^2\left[4-\left(4x^2\right)^2\right]dx=\pi\int_0^2\left(4-x^2\right)dx-\pi\int_0^1\left(4-16x^4\right)dx$

$=\pi\left(4x-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2-\pi\left(4x-16\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^1=\pi\left(8-\frac{32}{5}-4+\frac{16}{5}\right)=\frac{4\pi}{5}$

3. Bài tập trắc nghiệm:

Câu 1: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $(P): y=\sqrt{x}, y=0, y=2-x$. Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình (H) xung quanh trục Ox là:



A. $\frac{4\sqrt{2}-1}{3}\pi$. **B.** $\frac{7}{6}$. **C.** $\frac{8\sqrt{2}+3}{6}\pi$. **D.** $\frac{5}{6}\pi$.

Lời giải

Chọn D

$$\sqrt{x}=2-x \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le 2 \\ x=(2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le x\le 2 \\ x^2-5x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$$

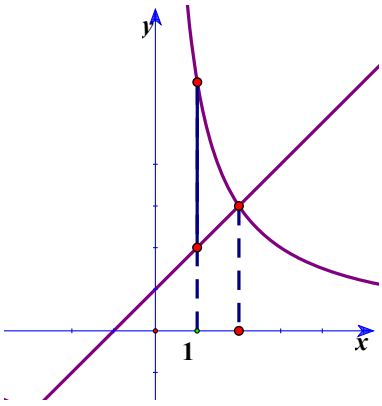
$$V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x}\right)^2 dx+\pi\int_1^2(2-x)^2 dx=\frac{5}{6}\pi.$$

Câu 2: Cho hình (H) giới hạn bởi các đường $y=x+1;\ y=\frac{6}{x};\ x=1$. Quay hình (H) quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là:

A. $\frac{13\pi}{6}$. **B.** $\frac{125\pi}{6}$. **C.** $\frac{35\pi}{3}$. **D.** 18π.

Lời giải

Chọn C



Phương trình hoành độ giao điểm: $x+1=\frac{6}{x} \Leftrightarrow x^2+x-6=0 (x\ne 0) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-3 (l) \end{array}\right.$

Vì $\frac{6}{x} > x+1 > 0$ với $x \in (1;2)$ nên thể tích cần tính là

$V = \pi \int_1^2 \left(\frac{6}{x}\right)^2 dx - \pi \int_1^2 (x+1)^2 dx = \frac{35\pi}{3}$.

Câu 3: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = 3x; y = x; x = 1$. Quay (H) xung quanh trục Ox ta được khối tròn xoay có thể tích là:

A. $\frac{8\pi}{3}$. **B.** $\frac{8\pi^2}{3}$. **C.** $8\pi^2$. **D.** 8π.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm: $3x = x \Leftrightarrow x = 0$ và $3x > x > 0$ với $x \in (0;1)$.

Thể tích cần tính là $V = \pi \int_0^1 (3x)^2 dx - \pi \int_0^1 x^2 dx = \frac{8\pi}{3}$.

Câu 4: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2, y = 2x$. Thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục Ox bằng:

A. $\frac{16\pi}{15}$. **B.** $\frac{21\pi}{15}$. **C.** $\frac{32\pi}{15}$. **D.** $\frac{64\pi}{15}$.

Lời giải

Chọn D

Hoành độ giao điểm của đồ thị 2 hàm số $y = x^2$ và $y = 2x$ là nghiệm của phương trình

$$x^2 = 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành là

$$V = \pi \int_0^2 (2x)^2 dx - \pi \int_0^2 (x^2)^2 dx = \pi \left(\frac{4}{3}x^3\right)\Big|_0^2 - \pi \left(\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2 = \frac{64\pi}{15}.$$

Câu 5: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{4 - x^2}$, $y = \frac{1}{3}x^2$ quay xung quanh trục Ox.

Thể tích của khối tròn xoay tạo thành bằng:

A. $V = \frac{28\pi\sqrt{2}}{5}$. **B.** $V = \frac{28\pi\sqrt{3}}{5}$. **C.** $V = \frac{24\pi\sqrt{2}}{5}$. **D.** $V = \frac{24\pi\sqrt{3}}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Giải phương trình $\sqrt{4 - x^2} = \frac{1}{3}x^2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$

Thể tích cần tìm là $V=\pi\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^2\mathrm{d}x-\pi\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(\frac{x^2}{3}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{28\pi\sqrt{3}}{5}$.

Dạng 7: Một số bài toán thực tế ứng dụng tích phân

1. Phương pháp giải

***** Một vật chuyển động có phương trình vận tốc $v(t)$ trong khoảng thời gian từ $t=a$ đến $t=b(a<b)$ sẽ di chuyển được quãng đường là:

$$\boxed{S=\int\limits_a^b v(t)\,dt}$$

Ví dụ 1: Một vật chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=160-10t(m/s)$. Quãng đường mà vật chuyển động từ thời điểm $t=0(s)$ đến thời điểm mà vật dừng lại là

A. $1028m$. **B.** $1280m$.

C. $1308m$. **D.** $1380m$.

Hướng dẫn giải

Khi vật dừng lại thì

$v(t)=160-10t=0\Leftrightarrow t=16$

Do đó $S=\int\limits_0^{16}v(t)\,dt=\int\limits_0^{16}(160-10t)\,dt$

$=\left(160t-5t^2\right)\Big|_0^{16}=1280(m)$.

Chọn B.

***** Một vật chuyển động có phương trình gia tốc $a(t)$ thì vận tốc của vật đó sau khoảng thời gian $[t_1;t_2]$ là:

$$\boxed{v=\int\limits_{t_1}^{t_2}a(t)\,dt}$$

Ví dụ 2: Một chiếc ô tô chuyển động với vận tốc $v(t)$ (m/s), có gia tốc

$a(t)=v'(t)=\frac{3}{2t+1}\left(m/s^2\right)$.

Vận tốc của ô tô sau 10 giây (làm tròn đến hàng đơn vị) là

A. 4,6 *m/s*. **B.** 7,2 *m/s*.

C. 1,5 *m/s*. **D.** 2,2 *m/s*.

Hướng dẫn giải

Vận tốc của ô tô sau 10 giây là

$v=\int\limits_0^{10}\frac{3}{2t+1}dt=\frac{3}{2}\ln|2t+1|\Big|_0^{10}=\frac{3}{2}\ln 21\approx 4,6(m/s)$.

Chọn A.

***** Điện lượng chuyển qua tiết diện của dây dẫn của đoạn mạch trong thời gian từ t_1 đến t_2 là:

$$\boxed{Q=\int_{t_1}^{t_2} I(t)\,dt}$$

2. Bài tập

Bài tập 1: Một vật chuyển động với vận tốc 10 *m/s* thì tăng tốc với gia tốc $a(t)=3t+t^2$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu tăng tốc.

A. $\frac{4300}{3}m.$ **B.** 4300 $m.$ **C.** 430 $m.$ **D.** $\frac{430}{3}m.$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Hàm vận tốc $v(t)=\int a(t)\,dt=\int\left(3t+t^2\right)dt=\frac{3t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+C.$

Lấy mốc thời gian lúc tăng tốc $\Rightarrow v(0)=10\Rightarrow C=10.$

Ta được $v(t)=\frac{3t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+10.$

Sau 10 giây, quãng đường vật đi được là

$$S=\int_0^{10}\left(\frac{3t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+10\right)dt=\left(\frac{t^3}{2}+\frac{t^4}{12}+10t\right)\Big|_0^{10}=\frac{4300}{3}(m)$$

$$\boxed{v(t)=\int a(t)\,dt}$$

Bài tập 2: Dòng điện xoay chiều hình sin chạy qua một đoạn mạch LC có biểu thức cường độ là $i(t)=I_0\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)$. Biết $i=q'$ với q là điện tích tức thời ở tụ điện. Tính từ lúc $t=0$, điện lượng chuyển qua tiết diện thẳng của dây dẫn của đoạn mạch đó trong thời gian từ 0 đến $\frac{\pi}{\omega}$ là

A. $\frac{\pi\sqrt{2}I_0}{\omega}.$ **B.** 0. **C.** $\frac{2I_0}{\omega}.$ **D.** $\frac{\pi I_0}{\omega\sqrt{2}}.$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Điện lượng chuyển qua tiết diện của dây dẫn của đoạn mạch trong thời gian từ 0 đến $\frac{\pi}{\omega}$ là

$$Q=\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} I(t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} I_0\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)dt=\frac{I_0}{\omega}\sin\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{\omega}}=\frac{2I_0}{\omega}.$$

$Q(t)=\int I(t)\,dt$

Bài tập 3: Gọi $h(t)(cm)$ là mức nước trong bồn chứa sau khi bơm được *t* giây. Biết rằng $h'(t)=\frac{1}{5}\sqrt[3]{t+8}$ và lúc đầu bồn không có nước. Tìm mức nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây (chính xác đến 0,01*cm*)

A. 2,67 *cm*. **B.** 2,66 *cm*. **C.** 2,65 *cm*. **D.** 2,68 *cm*.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Mức nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây là

$$\int_0^6 h'(t)\,dt=\int_0^6 \frac{1}{5}\sqrt[3]{t+8}\,dt=\left[\frac{3}{20}(t+8)\sqrt[3]{t+8}\right]\Big|_0^6\approx 2,66(cm)$$

Bài tập 3: Một viên đá được bắn thẳng đứng lên trên với vận tốc ban đầu là 40 m/s từ một điểm cao 5 m cách mặt đất. Vận tốc của viên đá sau t giây được cho bởi công thức $v(t)=40-10t$ m/s. Tính độ cao lớn nhất viên đá có thể lên tới so với mặt đất.

A. 85 m. **B.** 80 m. **C.** 90 m. **D.** 75 m.

Lời giải

Chọn A

Gọi h là quãng đường lên cao của viên đá.

$v(t)=h'(t)\Rightarrow h(t)=\int v(t)\,\mathrm{d}t=\int(40-10t)\,\mathrm{d}t=40t-5t^2+c$

Tại thời điểm $t=0$ thì $h=5$. Suy ra $c=5$.

Vậy $h(t)=40t-5t^2+5$

$h(t)$ lớn nhất khi $v(t)=0\Leftrightarrow 40-10t=0\Leftrightarrow t=4$. Khi đó $h(4)=85\,\mathrm{m}$.

Bài tập 4: Một ô tô chạy với vận tốc 20 m/s thì người lái đạp phanh còn được gọi là "thắng". Sau khi đạp phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t)=-40t+20$ trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Quãng đường ô tô di chuyển từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là bao nhiêu?

A. 2 m. **B.** 3 m. **C.** 4 m. **D.** 5 m.

Lời giải

Chọn D

Lấy mốc thời gian là lúc ô tô bắt đầu đạp phanh $(t=0)$

Gọi T là thời điểm ô tô dừng lại. Khi đó vận tốc lúc dừng là $v(T)=0$

Vậy thời gian từ lúc đạp phanh đến lúc dừng là $v(T)=0 \Leftrightarrow -40T+20=0 \Leftrightarrow T=\frac{1}{2}$

Gọi $s(t)$ là quãng đường ô tô đi được trong khoảng thời gian T.

Ta có $v(t)=s'(t)$ suy ra $s(t)$ là nguyên hàm của $v(t)$

Vậy trong $\frac{1}{2}(\text{s})$ ô tô đi được quãng đường là: $\int_t^T v(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{1}{2}}(-40t+20)\,\mathrm{d}t=\left(-20t^2+20t\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}=5$

Bài tập 5: Một ô tô xuất phát từ A chuyển dộng với vận tốc nhanh dần đều, 10 giây sau, ô tô đạt vận tốc 5 và từ thời điểm đó ô tô chuyển động đều. Ô tô thứ hai cũng xuất phát từ A nhưng sau ô tô thứ nhất là 10 giây, chuyển động nhanh dần đều và đuổi kịp ô tô thứ nhất sau 25 giây. Vận tốc ô tô thứ hai tại thời điểm đó là

A. 12. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

Ta có gia tốc trong 10 s đầu của ô tô thứ nhất là $a=\frac{v-v_0}{t-t_0}=\frac{5}{10}=0,5\left(\text{m/s}^2\right)$

Trong 10 s đầu, ô tô thứ nhất chuyển động nhanh dần với vận tốc $v(t)=0,5t$

$\Rightarrow$ Quãng đường ô tô thứ nhất đi được trong 10 s là $\int_0^{10}0,5t\mathrm{dt}=25(\text{m})$.

Trong 25 s tiếp theo, ô tô thứ nhất đi được $5.25=125$

Vậy quãng đường ô tô thứ nhất đi được đến khi bị đuổi kịp là $25+125=150(\text{m})$

Mặt khác $S=S_0+\frac{1}{2}at^2$

$\Rightarrow$ Gia tốc của ô tô thứ hai là $a=\frac{2(S-S_0)}{t^2}=\frac{2.150}{25^2}=0,48\left(\text{m/s}^2\right)$

Vậy khi đuổi kịp ô tô thứ nhất, vận tốc của ô tô thứ hai là $v_t=v_0+at=12$.

Bài tập 6: Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t)=7t$ đi được 5, người lái xe phát hiện chướng ngại vật và phanh gấp, ô tô tiếp tục chuyển động chậm dần đều với gia tốc

$a=-70\left(\mathrm{m/s}^2\right)$. Tính quãng đường $S\left(\mathrm{m}\right)$ đi được của ô tô từ lúc bắt đầu chuyển bánh cho đến khi dừng hẳn.

A. $S=95,70\left(\mathrm{m}\right)$. **B.** $S=87,50\left(\mathrm{m}\right)$. **C.** $S=94,00\left(\mathrm{m}\right)$. **D.** $S=96,25\left(\mathrm{m}\right)$.

Lời giải

Chọn D

Quãng đường ô tô đi được từ lúc xe lăn bánh đến khi được phanh.

$$S_1=\int_0^5 v_1\left(t\right)\mathrm{dt}=\int_0^5 7t\mathrm{dt}=7\frac{t^2}{2}\Big|_0^5=87,5\left(\mathrm{m}\right).$$

Vận tốc $v_2\left(t\right)\left(\mathrm{m/s}\right)$ của ô tô từ lúc được phanh đến khi dừng hẳn thỏa mãn

$v_2\left(t\right)=\int\left(-70\right)\mathrm{dt}=-70t+C$, $v_2\left(5\right)=v_1\left(5\right)=35\Rightarrow C=385$. Vậy $v_2\left(t\right)=-70t+385$.

Thời điểm xe dừng hẳn tương ứng với t thỏa mãn $v_2\left(t\right)=0\Leftrightarrow t=5,5\left(\mathrm{s}\right)$.

Quãng đường ô tô đi được từ lúc xe được phanh đến khi dừng hẳn.

$$S_2=\int_5^{5,5} v_1\left(t\right)\mathrm{dt}=\int_5^{5,5}\left(-70t+385\right)\mathrm{dt}=8,75\left(\mathrm{m}\right).$$

Quãng đường cần tính $S=S_1+S_2=96,25\left(\mathrm{m}\right)$.

Bài tập 7: Một vật di chuyển với gia tốc $a\left(t\right)=-20\left(1+2t\right)^{-2}\left(m/s^2\right)$. Khi $t=0$ thì vận tốc của vật là $30\left(m/s\right)$. Tính quãng đường vật đó di chuyển sau 2 giây.

A. $S=46m$. **B.** $S=47m$. **C.** $S=48m$. **D.** $S=49m$.

Lời giải :

Chọn C

Vận tốc vật là : $v\left(t\right)=\int a\left(t\right)dt=\int-20\left(1+2t\right)^{-2}dt=10\left(1+2t\right)^{-1}+C$.

Khi $t=0$ thì $v\left(0\right)=10.\left(1\right)^{-1}+C=30\Leftrightarrow C=20$.

Nên $v\left(t\right)=10\left(1+2t\right)^{-1}+20\left(m/s\right)$.

Suy ra : $S=\int_0^2\left(10\left(1+2t\right)^{-1}+20\right)dt\approx 48\left(m\right)$

Bài tập 8: Vật chuyển động với vận tốc ban đầu $5m/s$ và có gia tốc được xác định bởi công thức $a=\frac{2}{t+1}\ \left(m/s^2\right)$. Vận tốc của vật sau 10s đầu tiên là

A. $10m/s$. **B.** $9m/s$. **C.** $11m/s$. **D.** $12m/s$

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Ta có $v(t)=\int \frac{2}{t+1}dt=2\ln(t+1)+c$

Mà vận tốc ban đầu 5m/s tức là : $v(0)=5\Leftrightarrow 2\ln(0+1)+c=5\Leftrightarrow c=5$.

Nên $v(t)=2\ln(t+1)+5$

Vận tốc của vật sau 10s đầu tiên là : $v(10)=2\ln(11)+5\approx 9,8$

Chọn Chọn **A.**

Bài tập 9: Trong giờ thực hành môn Vật Lí. Một nhóm sinh viên đã nghiên cứu về sự chuyển động của các hạt. Trong quá trình thực hành thì nhóm sinh viên này đã phát hiện một hạt prôton di chuyển trong điện trường với biểu thức gia tốc là: $a=-20(1+2t)^{-2}$.Với t của ta được tính bằng giây. Nhóm sinh viên đã tìm hàm vận tốc v theo t, biết rằng khi $t=0$ thì $v=30m/s^2$. Hỏi biểu thức đúng là?

A. $v=\left(\frac{10}{1+2t}+25\right)cm/s^2$.

B. $v=\left(\frac{10}{1+t}+20\right)cm/s^2$.

C. $v=\left(\frac{10}{1+2t}+10\right)cm/s^2$.

D. $v=\left(\frac{10}{1+2t}+20\right)cm/s^2$

Hướng dẫn giải :

Chọn D

Trước hết để giải bài toán này ta cũng chú ý. Biểu thức vận tốc v theo thời gian t có gia tốc a là: $v=\int a.dt$

Áp dụng công thức trên, ta có : $v=\int adt=\int \frac{-20}{(1+2t)^2}dt$

Đến đây ta đặt :

$u=1+2t\Rightarrow du=2dt\Rightarrow dt=\frac{du}{2}$

$v=\int \frac{-10}{u}du=\int -10u^{-2}du=\frac{10}{u}+K=\frac{10}{1+2t}+K$

Với $t=0, v=30\Rightarrow K=20$

Vậy biểu thức vận tốc theo thời gian là : $v=\left(\frac{10}{1+2t}+20\right)cm/s^2$.

Bài tập 10: Người ta tổ chức thực hành nghiên cứu thí nghiệm bằng cách như sau. Họ tiến hành quan sát một tia lửa điện bắn từ mặt đất bắn lên với vận tốc $15m/s$. Hỏi biểu thức vận tốc của tia lửa điện là?

A. $v=-9,8t+15$.

B. $v=-9,8t+13$.

C. $v=9,8t+15$.

D. $v=-9,8t-13$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Tia lửa chịu sự tác động của trọng lực hướng xuống nên ta có gia tốc $a=-9,8\left(m/s^2\right)$

Ta có biểu thức vận tốc v theo thời gian t có gia tốc a là :

$$v=\int adt=\int -9,8dt=-9,8t+C$$

Ở đây, với : $t=0,v=15m/s\Rightarrow C=15$

Vậy ta được biểu thức vận tốc có dạng : $v=-9,8t+15$

Bài tập 11: Người ta tổ chức thực hành nghiên cứu thí nghiệm bằng cách như sau. Họ tiến hành quan sát một tia lửa điện bắn từ mặt đất bắn lên với vận tốc $15m/s$. Hỏi sau 2,5 giây thì tia lửa điện đấy có chiều cao là bao nhiêu?

A. $6.235\left(m\right)$. **B.** $5.635\left(m\right)$. **C.** $4.235\left(m\right)$. **D.** $6.875\left(m\right)$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Tia lửa chịu sự tác động của trọng lực hướng xuống nên ta có gia tốc $a=-9,8\left(m/s^2\right)$

Ta có biểu thức vận tốc v theo thời gian t có gia tốc a là :

$$v=\int adt=\int -9,8dt=-9,8t+C$$

Ở đây, với $t=0,v=15m/s\Rightarrow C=15$

Vậy ta được biểu thức vận tốc có dạng:

$v=-9,8t+15$

Lấy tích phân biểu thức vận tốc, ta sẽ có được bểu thức quãng đường:

$$s=\int vdt=\int\left(-9,8t+15\right)dt=-4,9\,t^2+15t+K$$

Theo đề bài, ta được khi $t=0\Rightarrow s=0\Rightarrow K=0.$

Vậy biểu thức tọa độ của quảng đường là : $s=-4,9t^2+15t.$

Khi $t=2,5\left(s\right)$, ta sẽ được $s=6,875\left(m\right)$.

Dạng 8: Bài toán thực tế

1. Phương pháp: Vận dụng các kiến thức về tích phân và bài toán ứng dụng.

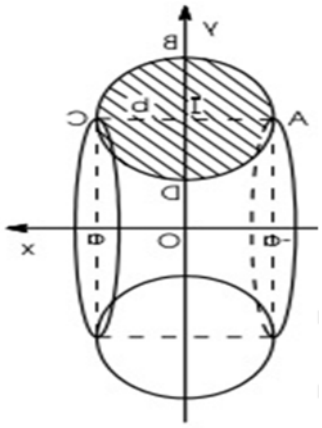
2. Các Bài tập mẫu:

Bài tập 1: Tính thể tích hình xuyến tạo thành do quay hình tròn $\left(C\right):x^2+\left(y-2\right)^2=1$ quanh trục Ox

.

Hướng dẫn giải:

Hình tròn (C) có tâm $I(0;2)$, bán kính $R=1$ là $x^2+(y-2)^2=1$



Ta có $(y-1)^2=1-x^2\,(-1\le x\le 1)\Rightarrow\left[\begin{array}{l} y=2+\sqrt{1-x^2} \\ y=2-\sqrt{1-x^2}\end{array}\right.$

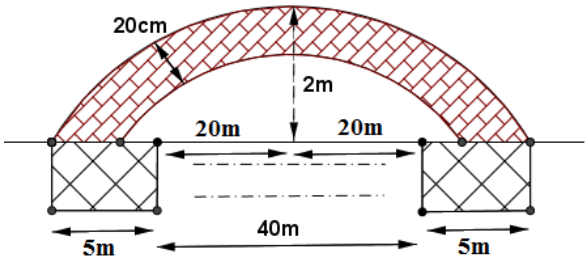
Thể tích cần tính:

$$V=\pi\int_{-1}^{1}\left[\left(2+\sqrt{1-x^2}\right)^2-\left(2-\sqrt{1-x^2}\right)^2\right]dx=4\pi^2$$

Bài tập 2: Thành phố định xây cây cầu bắc ngang con sông dài $500m$, biết rằng người ta định xây cầu có 10 nhịp cầu hình dạng parabol,mỗi nhịp cách nhau $40m$,biết 2 bên đầu cầu và giữa mối nhịp nối người ta xây 1 chân trụ rộng $5m$. Bề dày nhịp cầu không đổi là $20cm$. Biết 1 nhịp cầu như hình vẽ. Hỏi lượng bê tông để xây các nhịp cầu là bao nhiêu

A. $20m^3$**.** **B.** $50m^3$**.**

C. $40m^3$. **D.** $100m^3$.

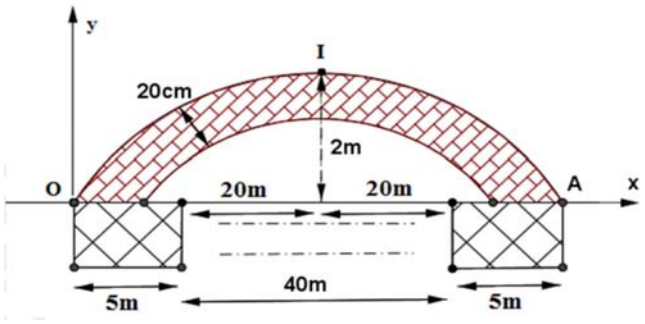


Hướng dẫn giải:

Chọn C

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ với gốc $O(0;0)$ là chân cầu,

đỉnh $I(25;2)$, điểm $A(50;0)$



Gọi Parabol trên có phương trình: $(P_1): y_1 = ax^2 + bx + c = ax^2 + bx \left(O \in (P_1)\right)$

$\Rightarrow y_2 = ax^2 + bx - \dfrac{20}{100}ax = ax^2 + bx - \dfrac{1}{2}$ là phương trình parabol dưới

Ta có $I, A \in (P_1) \Rightarrow (P_1): y_1 = -\dfrac{2}{625}x^2 + \dfrac{4}{25}x \Rightarrow y_2 = -\dfrac{2}{625}x^2 + \dfrac{4}{25}x - \dfrac{1}{5}$

Khi đó diện tích mỗi nhịp cầu là $S = S_1$ với S_1 là phần giới hạn bởi $y_1; y_2$ trong khoảng $(0;25)$

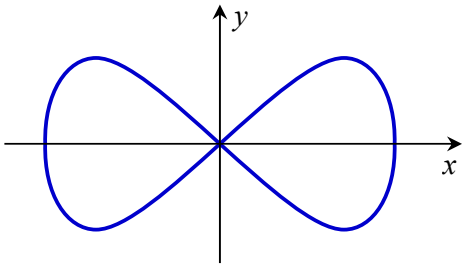
$$S = 2\left(\int_0^{0,2} \left(-\frac{2}{625}x^2 + \frac{4}{25}x \right) dx + \int_{0,2}^{15} \frac{1}{5} dx \right) \approx 0,9m^2$$

Vì bề dày nhịp cầu không đổi nên coi thể tích là tích diện tích và bề dày $V = S.0,2 \approx 1,98m^3 \Rightarrow$ số lượng bê tông cần cho mỗi nhịp cầu $\approx 2m^3$

Vậy mười nhịp cầu hai bên cần $\approx 40m^3$ bê tông

Chọn Chọn. **C.**

Bài tập 3: Trong Công viên Toán học có những mảnh đất mang hình dáng khác nhau. Mỗi mảnh được trồng một loài hoa và nó được tạo thành bởi một trong những đường cong đẹp trong toán học. Ở đó có một mảnh đất mang tên Bernoulli, nó được tạo thành từ đường Lemniscate có phương trình trong hệ tọa độ Oxy là $16y^2 = x^2\left(25 - x^2\right)$ như hình vẽ bên.



Tính diện tích S của mảnh đất Bernoulli biết rằng mỗi đơn vị trong hệ tọa độ Oxy tương ứng với chiều dài 1 mét.

A. $S = \dfrac{125}{6}\left(m^2\right)$.

B. $S = \dfrac{125}{4}\left(m^2\right)$.

C. $S = \dfrac{250}{3}\left(m^2\right)$.

D. $S = \dfrac{125}{3}\left(m^2\right)$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Vì tính đối xứng trụ nên diện tích của mảnh đất tương ứng với 4 lần diện tích của mảnh đất thuộc góc phần tư thứ nhất của hệ trục tọa độ Oxy.

Từ giả thuyết bài toán, ta có $y=\pm\frac{1}{4}x\sqrt{5-x^2}$.

Góc phần tư thứ nhất $y=\frac{1}{4}x\sqrt{25-x^2};x\in[0;5]$

Nên $S_{(I)}=\frac{1}{4}\int_0^5 x\sqrt{25-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{125}{12}\Rightarrow S=\frac{125}{3}(m^3)$

Bài tập 4: Một Bác thợ gốm làm một cái lọ có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x+1}$ và trục Ox quay quanh trục Ox biết đáy lọ và miệng lọ có đường kính lần lượt là $2dm$ và $4dm$, khi đó thể tích của lọ là:

A. $8\pi\ dm^2$..

B. $\frac{15}{2}\pi\ dm^3$..

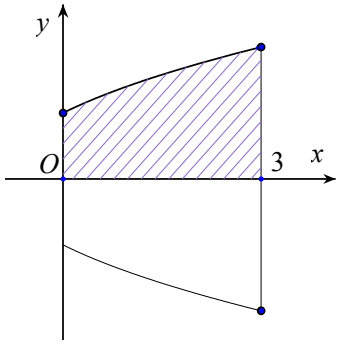
C. $\frac{14}{3}\pi\ dm^2$..

D. $\frac{15}{2}\ dm^2$.

Lời giải

Chọn B

- $r_1=y_1=1\Rightarrow x_1=0$



- $r_2=y_2=2\Rightarrow x_2=3$

Suy ra: $V=\pi\int_0^3 y^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^3(x+1)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_0^3=\frac{15}{2}\pi$

Bài tập 5: Để kéo căng một lò xo có độ dài tự nhiên từ $10cm$ đến $15cm$ cần lực $40N$. Tính công (A) sinh ra khi kéo lò xo có độ dài từ $15cm$ đến $18cm$.

A. $A=1,56\ (J)$.

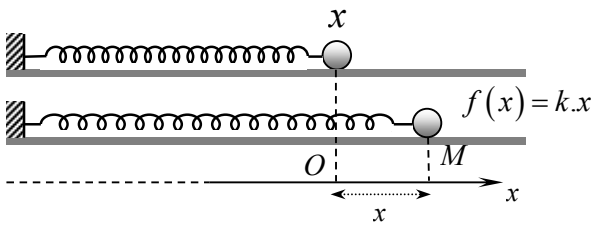
B. $A=1\ (J)$.

C. $A=2,5\ (J)$.

D. $A=2\ (J)$.

Lời giải

Chọn A



Theo Định luật Hooke, lực cần dùng để giữ lò xo giãn thêm x mét từ độ dài tự nhiên là $f(x)=kx$, với $k(N/m)$ là độ cứng của lò xo. Khi lò xo được kéo giãn từ độ dài $10cm$ đến $15cm$, lượng kéo giãn là $5\ cm=0.05\ m$. Điều này có nghĩa $f(0.05)=40$, do đó:

$$0,05k=40\Leftrightarrow k=\frac{40}{0,05}=800(N/m)$$

Vậy $f(x)=800x$ và công cần để kéo dãn lò xo từ $15cm$ đến $18cm$ là:

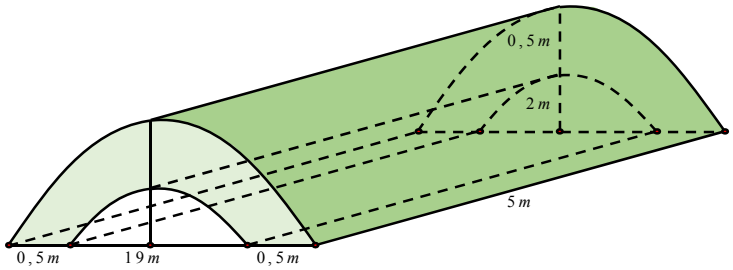
$$A=\int_{0,05}^{0,08}800\,\mathrm{d}x=400x^2\Big|_{0,05}^{0,08}=400\left[(0,08)^2-(0,05)^2\right]=1,56(J)$$

Góc phần tư thứ nhất $y=\frac{1}{4}x\sqrt{25-x^2};x\in[0;5]$

Nên $S_{(I)}=\frac{1}{4}\int_0^5 x\sqrt{25-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{125}{12}\Rightarrow S=\frac{125}{3}(m^3)$

3. Bài tập trắc nghiệm:

Câu 1: Trong chương trình nông thôn mới, tại một xã X có xây một cây cầu bằng bê tông như hình vẽ. Tính thể tích khối bê tông để đổ đủ cây cầu.

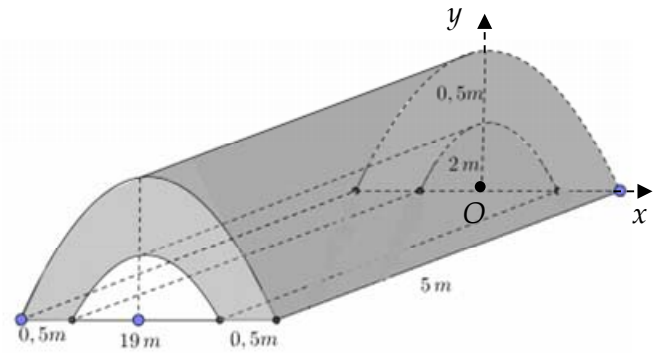


A. $19m^3$. **B.** $21m^3$. **C.** $18m^3$. **D.** $40m^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.



Ta có

Gọi $(P_1): y = ax^2 + c$ là Parabol đi qua hai điểm $A\left(\frac{19}{2};0\right), B(0;2)$

Nên ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} 0 = a.\left(\frac{19}{2}\right)^2 + 2 \\ 2 = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{8}{361} \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow (P_1): y = -\frac{8}{361}x^2 + 2$

Gọi $(P_2): y = ax^2 + c$ là Parabol đi qua hai điểm $C(10;0), D\left(0;\frac{5}{2}\right)$

Nên ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} 0 = a.(10)^2 + \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{40} \\ b = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow (P_2): y = -\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}$

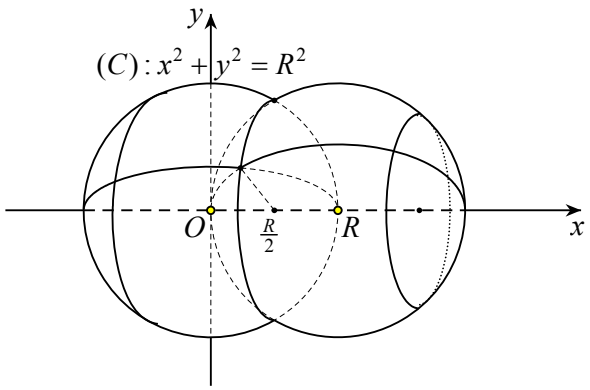
Ta có thể tích của bê tông là: $V = 5.2\left[\int_0^{10}\left(-\frac{1}{40}x^2 + \frac{5}{2}\right)dx - \int_0^{\frac{19}{2}}\left(-\frac{8}{361}x^2 + 2\right)dx\right] = 40m^3$.

Câu 2: Cho hai mặt cầu (S_1), (S_2) có cùng bán kính R thỏa mãn tính chất: tâm của (S_1) thuộc (S_2) và ngược lại. Tính thể tích phần chung V của hai khối cầu tạo bởi (S_1) và (S_2).

A. $V = \pi R^3$. **B.** $V = \frac{\pi R^3}{2}$. **C.** $V = \frac{5\pi R^3}{12}$. **D.** $V = \frac{2\pi R^3}{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C



Gắn hệ trục Oxy như hình vẽ

Khối cầu $S(O,R)$ chứa một đường tròn lớn là $(C): x^2+y^2=R^2$

Dựa vào hình vẽ, thể tích cần tính là

$$V=2\pi\int_{\frac{R}{2}}^{R}\left(R^2-x^2\right)\mathrm{d}x=2\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{\frac{R}{2}}^{R}=\frac{5\pi R^3}{12}.$$

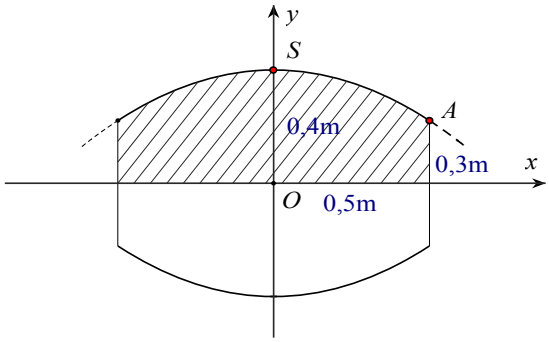
Câu 3: Một thùng rượu có bán kính các đáy là 30cm, thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy có bán kính là 40cm, chiều cao thùng rượu là 1m. Biết rằng mặt phẳng chứa trục và cắt mặt xung quanh thùng rượu là các đường parabol, hỏi thể tích của thùng rượu là bao nhiêu?



A. $425,2$ lit. **B.** 425162 lit. **C.** 212581 lit. **D.** $212,6$ lit.

Hướng dẫn giải

Chọn A



• Gọi $(P): y=ax^2+bx+c$ là parabol đi qua điểm $A(0,5;0,3)$ và có đỉnh $S(0;0,4)$. Khi đó, thể tích thùng rượu bằng thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi (P), trục hoành và hai đường thẳng $x=\pm 0,5$ quay quanh trục Ox.

• Dễ dàng tìm được $(P): y=-\frac{2}{5}x^2+0,4$

• Thể tích thùng rượu là:

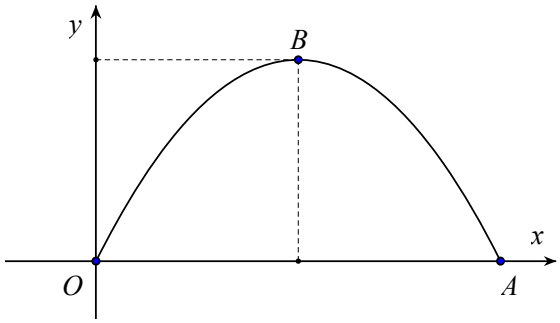
$$V=\pi\int_{-0,5}^{0,5}\left(-\frac{2}{5}x^2+0,4\right)^2dx=2\pi\int_{0}^{0,5}\left(-\frac{2}{5}x^2+0,4\right)^2dx=\frac{203\pi}{1500}\approx 425,5\ (\text{l}).$$

Câu 4: Bác Năm làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là 2,25 mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng. Vậy số tiền bác Năm phải trả là:

A. 33750000 đồng. **B.** 12750000 đồng. **C.** 6750000 đồng. **D.** 3750000 đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn C



• Gắn parabol (P) và hệ trục tọa độ sao cho (P) đi qua $O(0;0)$

• Gọi phương trình của parbol là: $(P):\ y=ax^2+bx+c$

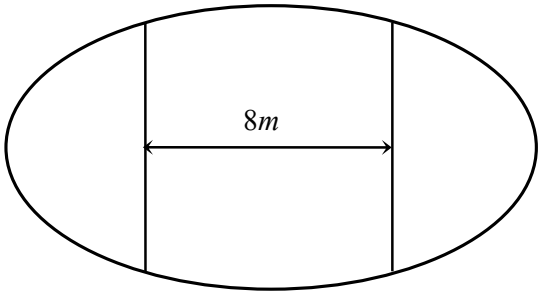
Theo đề ra, (P) đi qua ba điểm $O(0;0)$, $A(3;0)$, $B(1,5;2,25)$.

Từ đó, suy ra $(P):\ y=-x^2+3x$

• Diện tích phần Bác Năm xây dựng: $S=\int_0^3\left|-x^2+3x\right|dx=\frac{9}{2}$

• Vậy số tiền bác Năm phải trả là: $\frac{9}{2}.1500000=6750000$.

Câu 5: Ông An có một mảnh vườn hình Elip có độ dài trục lớn bằng $16m$ và độ dài trục bé bằng $10m$. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng $8m$ và nhận trục bé của elip làm trục đối xứng. Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng/$1m^2$. Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó?



A. 7.862.000 đồng. **B.** 7.653.000 đồng. **C.** 7.128.000 đồng. **D.** 7.826.000 đồng.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Giả sử elip có phương trình $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Từ giả thiết ta có $2a=16\Rightarrow a=8$ và $2b=10\Rightarrow b=5$

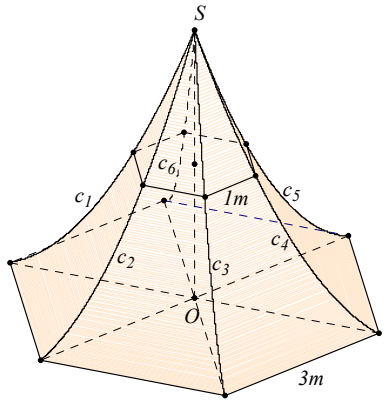
Vậy phương trình của elip là $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{25}=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l} y=-\frac{5}{8}\sqrt{64-y^2}\ \ (E_1) \\ y=\frac{5}{8}\sqrt{64-y^2}\ \ (E_1) \end{array}\right.$

Khi đó diện tích dải vườn được giới hạn bởi các đường (E_1); (E_2); $x=-4$; $x=4$ và diện tích của dải vườn là $S=2\int\limits_{-4}^{4}\frac{5}{8}\sqrt{64-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{5}{2}\int\limits_{0}^{4}\sqrt{64-x^2}\,\mathrm{d}x$

Tính tích phân này bằng phép đổi biến $x=8\sin t$, ta được $S=80\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

Khi đó số tiền là $T=80\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right).100000=7652891,82\simeq 7.653.000$.

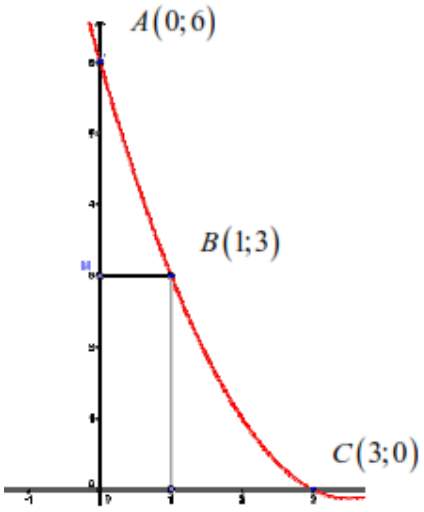
Câu 6: Người ta dựng một cái lều vải có dạng hình "chóp lục giác cong đều" như hình vẽ bên. Đáy của là một hình lục giác đều cạnh $3m$. Chiều cao $SO=6m$. Các cạnh bên của là các sợi dây c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6 nằm trên các đường parabol có trục đối xứng song song với SO. Giả sử giao tuyến của với mặt phẳng vuông góc với SO là một lục giác đều và khi qua trung điểm của SO thì lục giác đều có cạnh bằng $1m$. Tính thể tích phần không gian nằm bên trong cái lều đó.



A. $\frac{135\sqrt{3}}{5}(m^3)$. **B.** $\frac{96\sqrt{3}}{5}(m^3)$. **C.** $\frac{135\sqrt{3}}{4}(m^3)$. **D.** $\frac{135\sqrt{3}}{8}(m^3)$

Hướng dẫn giải

Chọn D



Đặt hệ tọa độ như hình vẽ, ta có parabol cần tìm đi qua 3 điểm có tọa độ lần lượt là $A(0;6), B(1;3), C(3;0)$ nên có phương trình là $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{7}{2}x+6$

Theo hình vẽ ta có cạnh của thiết diện là BM

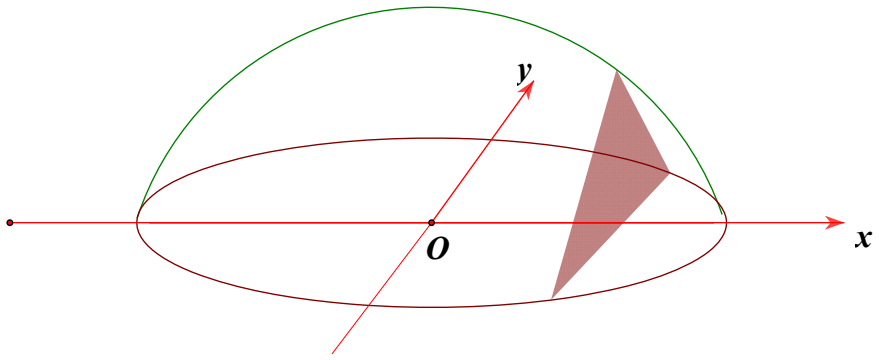
Nếu ta đặt $t=OM$ thì $BM=\frac{7}{2}-\sqrt{2t+\frac{1}{4}}$

Khi đó diện tích của thiết diện lục giác:

$S(t)=6.\frac{BM^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{7}{2}-\sqrt{2t+\frac{1}{4}}\right)^2$, với $t\in[0;6]$

Vậy thể tích của túp lều theo đề bài là: $V=\int_0^6 S(t)dt=\int_0^6 \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{7}{2}-\sqrt{2t+\frac{1}{4}}\right)^2 dt=\frac{135\sqrt{3}}{8}$..

Câu 7: Một vật có kích thước và hình dáng như hình vẽ dưới đây. Đáy là hình tròn giới hạn bởi đường tròn $x^2+y^2=16$, cắt vật bởi các mặt phẳng vuông góc với trục Ox ta được thiết diện là tam giác đều. Thể tích của vật thể là:



A. $V=\frac{32\sqrt{3}}{3}$.. **B.** $V=\frac{256\sqrt{3}}{3}$..

C. $V=\frac{256}{3}$.. **D.** $V=\frac{32}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

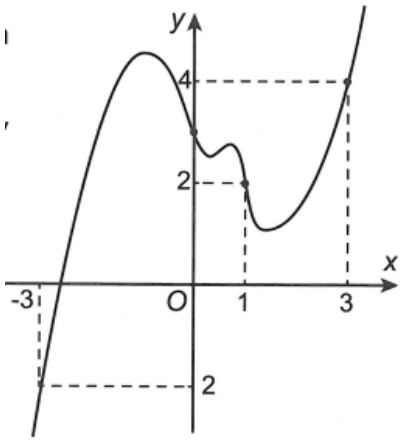
Giải phương trình $x^2+y^2=16\Leftrightarrow y^2=16-x^2\Leftrightarrow y=\pm\sqrt{16-x^2}$

Diện tích thiết diện là $S(x)=\frac{1}{2}\left|2\sqrt{16-x^2}\right|^2.\sin\frac{\pi}{3}=\left(16-x^2\right)\sqrt{3}$

Thể tích cần tìm là $V=\int_{-4}^{4}S(x)dx=\sqrt{3}\int_{-4}^{4}\left(16-x^2\right)dx=\frac{256\sqrt{3}}{3}$.

Dạng 9: Các bài toán bản chất đặt sắc của tích phân

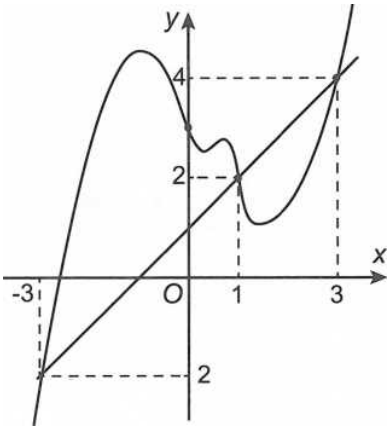
Bài tập 1: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị trên $\left[-2;6\right]$ như hình vẽ bên. Biết các miền A, B, $x=2$ có diện tích lần lượt là 32; 2; 3. Tích phân $\int_{-2}^{2}\left[f\left(2x+2\right)+1\right]dx$ bằng



A. $\frac{45}{2}$. **B.** 41. **C.** 37. **D.** $\frac{41}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Ta có $\int\limits_{-2}^{2}\left[f\left(2x+2\right)+1\right]dx=\int\limits_{-2}^{2}f\left(2x+2\right)dx+4$

Xét $I_1=\int\limits_{-2}^{2}f\left(2x+2\right)dx$.

Đặt $t=2x+2\Rightarrow dt=2dx\Rightarrow dx=\dfrac{dt}{2}$

Đổi cận: $x=-2\Rightarrow t=-2$; $x=2\Rightarrow t=6$.

Suy ra $I_1=\dfrac{1}{2}\int\limits_{-2}^{6}f\left(t\right)dt$.

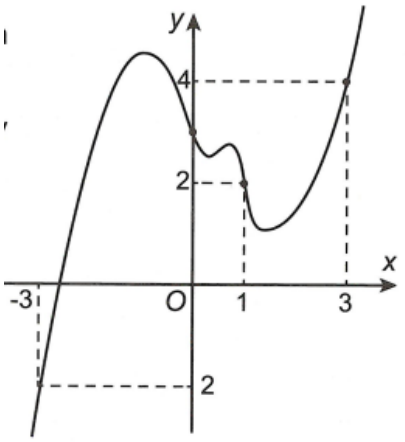
Gọi x_1; x_2 là các hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ với trực hoành $\left(-2<x_1<x_2<6\right)$. Ta có

$$I_1=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{-2}^{x_1}f\left(t\right)df+\int\limits_{x_1}^{x_2}f\left(t\right)df+\int\limits_{x_2}^{6}f\left(t\right)df\right)=\frac{1}{2}\left(S_A-S_B+S_C\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(32-2+3\right)=\frac{33}{2}$$

Vậy $\int\limits_{-2}^{2}\left[f\left(2x+2\right)+1\right]dx=I_1+4=\dfrac{33}{2}+4=\dfrac{41}{2}$

Bài tập 2: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$ như hình bên. Đặt $g\left(x\right)=2f\left(x\right)-\left(x+1\right)^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $g(3)>g(-3)>g(1)$.

B. $g(-3)>g(3)>g(1)$.

C. $g(1)>g(-3)>g(3)$.

D. $g(1)>g(3)>g(-3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $g'(x)=2f'(x)-2(x+1)$

$g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=x+1$. Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $f'(x)$ và đường thẳng d: $y=x+1$.

Dựa vào đồ thị ta thấy: $g'(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=x+1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\pm 3\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$g(-3)$	↗	$g(1)$	↘	$g(3)$	↗	$+\infty$

Suy ra $g(-3)<g(1)$ và $g(3)<g(1)$

Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích các hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f'(x)$, đường thẳng d: $y=x+1$ trên các đoạn $[-3;1]$ và $[1;3]$ ta có:

+) Trên đoạn $[-3;1]$ ta có $f'(x)\geq x+1$ nên $S_1=\int\limits_{-3}^{1}\left|g'(x)\right|dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-3}^{1}\left[f'(x)-(x+1)\right]dx$.

+) Trên đoạn $[1;3]$ ta có $f'(x) \le x+1$ nên $S_2 = \int_1^3 |g'(x)|dx = \frac{1}{2}\int_1^3 [(x+1)f'(x)]dx$.

Dựa vào đồ thị ta thấy $S_1 > S_2$ nên ta có:

$$g(x)\Big|_{-3}^{1} > -g(x)\Big|_{1}^{3} \Leftrightarrow g(1)-g(-3) > -g(3)+g(1) \Leftrightarrow g(3) > g(-3).$$

Vậy $g(1) > g(3) > g(-3)$.

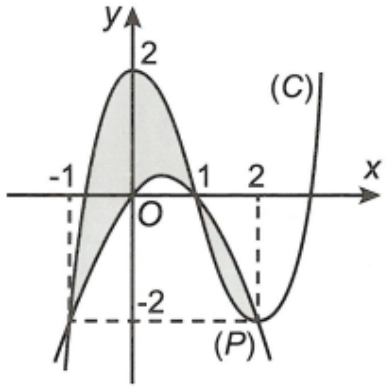
Lưu ý:

- Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $f'(x)$ và đường thẳng d: $y = x+1$ chính là nghiệm của phương trình $g'(x) = 0$.

- Lập bảng biến thiên ta thấy $g(1)$ lớn hơn $g(\pm 3)$. Ta chỉ cần so sánh $g(3)$ và $g(-3)$.

- So sánh diện tích dựa vào đồ thị.

Ví dụ 4: Hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị (C) của hàm đa thức bậc ba và parabol (P) có trục đối xứng vuông góc với trục hoành. Phần **tô đậm** của hình vẽ có diện tích bằng



A. $\frac{37}{12}$. **B.** $\frac{7}{12}$. **C.** $\frac{11}{12}$. **D.** $\frac{5}{12}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Vì đồ thị hàm bậc ba và đồ thị hàm bậc hai cắt trục tung tại các điểm có tung độ lần lượt là $y = 2$ và $y = 0$ nên ta xét hai hàm số là $y = ax^3 + bx^2 + cx + 2$, $y = mx^2 + nx$ (với $a,\ m \ne 0$).

Suy ra (C): $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 2$ và (P): $y = g(x) = mx^2 + nx$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (P) là:

$$ax^3 + bx^2 + cx + 2 = mx^2 + nx \Leftrightarrow (ax^3 + bx^2 + cx + 2) - (mx^2 + nx) = 0.$$

Đặt $P(x)=\left(ax^3+bx^2+cx+2\right)-\left(mx^2+nx\right)$.

Theo giả thiết, (C) và (P) cắt nhau tại các điểm có hoành độ lần lượt là $x=-1$, $x=1$, $x=2$ nên $P(x)=a(x+1)(x-1)(x-2)$.

Ta có $P(0)=2a$.

Mặt khác, ta có $P(0)=f(0)-g(0)=2\Rightarrow a=1$.

Vậy diện tích phần tô đậm là $S=\int_{-1}^{2}\left|(x+1)(x-1)(x-2)\right|dx=\frac{37}{12}$

CHƯƠNG 4. SỐ PHỨC

BÀI 1&2. KHÁI NIỆM SỐ PHỨC VÀ CÁC PHÉP TOÁN CỦA SỐ PHỨC

A. LÝ THUYẾT

I. KHÁI NIỆM VỀ SỐ PHỨC

1. Số phức

Định nghĩa

Cho số phức z có dạng: $z=a+bi$ với $a,b\in\mathbb{R}$, trong đó a gọi là phần thực của z, b gọi là phần ảo của z, i gọi là đơn vị ảo thỏa mãn $i^2=-1$.

Đặc biệt:

Tập hợp các số phức, kí hiệu là $\mathbb{C}$.

Số phức z là số thực nếu $b=0$.

Số phức z là số thuần ảo nếu $a=0$.

Số phức $z=0+0i=0$ vừa là số thực, vừa là số ảo (còn gọi là số thuần ảo).

Bài tập:

+) $z=5-\frac{2}{7}i\in\mathbb{C}$;

+) $z=-\sqrt{2}+\pi i\in\mathbb{C}$;

+) $z=\frac{4}{3}i, w=\cos\frac{\pi}{12}i, u=-i,\ldots$ là các số thuần ảo.

Số phức liên hợp

Số phức liên hợp của số phức z, kí hiệu $\bar{z}$, là $\bar{z}=a-bi$.

Bài tập

+) Số phức $z=5-\frac{2}{7}i$ có số phức liên hợp là $\bar{z}=5+\frac{2}{7}i$;

+) Số phức $z=\frac{4}{3}i$ có số phức liên hợp là $\bar{z}=-\frac{4}{3}i$.

Nhận xét: *Mỗi số thực có số phức liên hợp là chính nó.*

Môđun của số phức

Môđun của số phức z, kí hiệu là $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Bài tập:

Số phức $z=5-\frac{2}{7}i$ có môđun

$$|z|=\sqrt{5^2+\left(-\frac{2}{7}\right)^2}=\frac{\sqrt{1229}}{7}$$

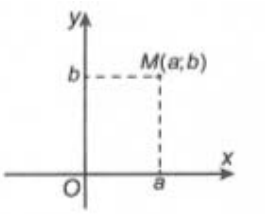
2. Hai số phức bằng nhau

Định nghĩa

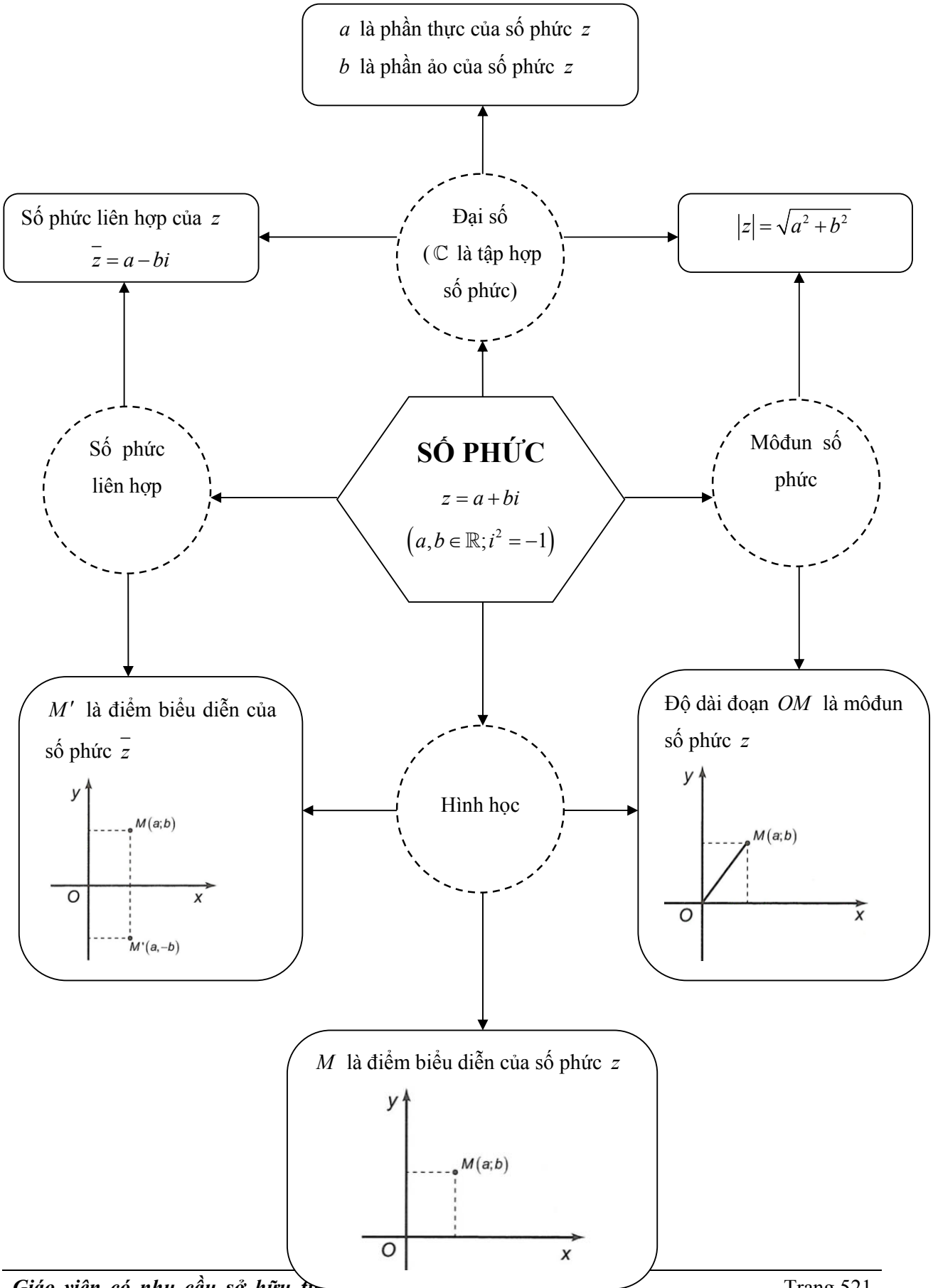
Hai số phức $z_1=a_1+b_1i$ và $z_2=a_2+b_2i$ được gọi là bằng

Bài tập:

Số phức $z=a+bi$ bằng 0 khi và chỉ khi $\begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}$

nhau khi và chỉ khi $\begin{cases} a_1 = a_2 \\ b_1 = b_2 \end{cases}$. **3. Biểu diễn hình học của số phức** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, mỗi số phức $z = a + bi; a, b \in \mathbb{R}$ được biểu diễn bởi điểm $M(a;b)$. Ngược lại, mỗi điểm $M(a;b)$ biểu diễn duy nhất một số phức là $z = a + bi$.  	*hay* $z = 0$. ***Nhận xét:*** *+)* $OM = \|z\|$; *+) Nếu* z_1, z_2 *có các điểm biểu diễn lần lượt là* M_1, M_2 *thì* $M_1M_2 = \|z_1 - z_2\|$.

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA



II. CÁC PHÉP TOÁN SỐ PHỨC

1. Phép cộng số phức

Định nghĩa

Tổng của hai số phức $z=a+bi, z'=a'+b'i\left(a,b,a',b'\in\mathbb{R}\right)$ là số phức $z+z'=a+a'+\left(b+b'\right)i.$

Bài tập:

$\left(5+4i\right)+\left(3-2i\right)=8+2i.$

Tính chất

Với mọi $z,z',z''\in\mathbb{C}$ ta có:

Tính chất kết hợp: $\left(z+z'\right)+z''=z+\left(z'+z''\right);$

Tính chất giao hoán: $z+z'=z'+z;$

Cộng với 0: $z+0=0+z=z;$

$z+\left(-z\right)=\left(-z\right)+z=0.$

Bài tập:

$z=5-\frac{2}{7}i$ có số đối là $-z=-5+\frac{2}{7}i.$

2. Phép trừ số phức

Hiệu của hai số phức $z=a+bi, z'=a'+b'i\left(a,b,a',b'\in\mathbb{R}\right)$:

$z-z'=z+\left(-z'\right)=\left(a-a'\right)+\left(b-b'\right)i.$

Bài tập:

$\left(5+4i\right)-\left(3-2i\right)=2+6i.$

3. Phép nhân số phức

Định nghĩa

Tích của hai số phức $z=a+bi, z'=a'+b'i\left(a,b,a',b'\in\mathbb{R}\right)$ là số phức $zz'=aa'-bb'+\left(ab'+a'b\right)i.$

Bài tập:

$\left(5+4i\right)\left(3-2i\right)=\left(15+8\right)+\left(12-10\right)i=23+2i.$

Tính chất

Với mọi $z,z',z''\in\mathbb{C}$ ta có:

- Tính chất giao hoán: $zz'=z'z;$
- Tính chất kết hợp: $\left(zz'\right)z''=z\left(z'z''\right);$
- Nhân với 1: $1.z=z.1=z;$
- Tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng: $z\left(z'+z''\right)=zz'+zz''.$

Chú ý:

• Ta có thể thực hiện phép cộng và phép nhân các số phức theo các quy tắc như phép toán cộng và nhân các số thực.

° Các hằng đẳng thức của các số thực cũng đúng đối với các số phức.

Bài tập: $z^2+4=z^2-\left(2i\right)^2=\left(z-2i\right)\left(z+2i\right).$

4. Phép chia cho số phức khác 0

Số nghịch đảo của số phức $z\neq 0$ kí hiệu là $z^{-1},$ là số phức thỏa mãn $zz^{-1}=1,,$ hay $z^{-1}=\frac{1}{\left|z\right|^2}\overline{z}.$

Thương của phép chia số phức z' cho số phức z khác 0,

Bài tập:

$z=3-2i$ có số phức nghịch đảo là

$\frac{1}{z}=\frac{1}{13}.\left(3+2i\right)=\frac{3}{13}+\frac{2}{13}i.$

Bài tập:

kí hiêu là $\frac{z'}{z}=z'z^{-1}=\frac{z'\overline{z}}{|z|^2}$.

$\frac{5+4i}{3-2i}=\frac{(5+4i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{7+22i}{13}=\frac{7}{13}+\frac{22}{13}i.$

CÁC PHÉP TOÁN VỚI SỐ PHỨC

Phép cộng số phức

Tổng của hai số phức $z=a+bi$ và $z'=a'+b'i\,(a,b,a',b'\in\mathbb{R})$ là số phức $z+z'=a+a'+(b+b')i.$

Tính chất phép cộng số phức

Với mọi $z,z',z''\in\mathbb{C}$ ta có

$(z+z')+z''=z+(z'+z'');$

$z+z'=z'+z;$

$z+0=0+z=z;$

$z+(-z)=(-z)+z=0.$

Phép trừ số phức

Hiệu của hai số phức $z=a+bi$ và $z'=a'+b'i\,(a,b,a',b'\in\mathbb{R})$ là số phức $z-z'=(a-a')+(b-b')i.$

Phép nhân số phức

Tích của hai số phức $z=a+bi$ và $z'=a'+b'i\,(a,b,a',b'\in\mathbb{R})$ là số phức $zz'=aa'-bb'+(ab'+a'b)i.$

Tính chất phép nhân số phức

Với mọi $z,z',z''\in\mathbb{C}$ ta có

$zz'=z'z;$

$(zz')z''=z(z'z'');$

$1.z=z.1=z;$

$z(z'+z'')=zz'+zz''.$

Phép chia số phức khác 0

Số nghịch đảo của số phức $z\neq 0$ kí hiệu là z^{-1} là số phức thỏa mãn $zz^{-1}=1$ hay $z^{-1}=\frac{1}{|z|^2}\overline{z}.$

Thương của phép chia số phức z' cho số phức $z\neq 0$, kí hiệu là $\frac{z'}{z}=z'z^{-1}=\frac{z'\overline{z}}{|z^2|}.$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Thực hiện các phép toán của số phức, tìm phần thực phần ảo

1. Phương pháp giải

Cho hai số phức $z=a+bi$ và $z'=a'+b'i$, trong đó $a,b,a',b'\in\mathbb{R}$. Khi đó:

- $z+z'=a+a'+(b+b')i;$
- $z-z'=(a-a')+(b-b')i;$
- $zz'=aa'-bb'+(ab'+a'b)i;$
- $\dfrac{z'}{z}=\dfrac{z'\overline{z}}{|z|^2}.$

Bài tập:

Hai số phức $z_1=3-7i, z_2=4+3i$ có

$z_1+z_2=(3+4)+(-7+3)i=7-4i;$

$z_1-z_2=(3-4)+(-7-3)i=-1-10i;$

$z_1z_2=(3.4-(-7).3)+(3.3+4.(-7))i=33-19i;$

$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{(3-7i)(4-3i)}{(4+3i).(4-3i)}=-\dfrac{9}{25}-\dfrac{37}{25}i.$

2. Bài tập

Bài tập 1: Tất cả các số phức z thỏa mãn $2z-3(1+i)=iz+7-3i$ là

A. $z=\dfrac{8}{5}-\dfrac{4}{5}i.$ **B.** $z=4-2i.$ **C.** $z=\dfrac{8}{5}+\dfrac{4}{5}i.$ **D.** $z=4+2i.$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $2z-3(1+i)=iz+7-3i\Leftrightarrow(2-i)z=10\Leftrightarrow z=\dfrac{10}{2-i}\Leftrightarrow z=4+2i.$

Bài tập 2: Cho số phức $z=a+bi(a,b\in\mathbb{R})$ thỏa mãn $z+1+3i-|z|i=0$. Giá trị của $S=a-3b$ là

A. $S=-\dfrac{7}{3}.$ **B.** $S=3.$ **C.** $S=-3.$ **D.** $S=\dfrac{7}{3}.$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $z+1+3i-|z|i=0$

$$\Leftrightarrow a+1+\left(b+3-\sqrt{a^2+b^2}\right)i=0\Leftrightarrow\begin{cases}a+1=0\\ b+3=\sqrt{a^2+b^2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ \begin{cases}b\ge-3\\ (b+3)^2=1+b^2\end{cases}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=-\dfrac{4}{3}\end{cases}\Rightarrow S=3.$$

Bài tập 3. Tính $C=1+(1+i)+(1+i)^2+(1+i)^3+...+(1+i)^{20}$

Hướng dẫn giải

Áp dụng công thức của cấp số nhân:

Ta có:

$$C = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + ... + (1+i)^{20} = u_1.\frac{1-q^{21}}{1-q}$$

$$= 1.\frac{1-(1+i)^{21}}{1-(1+i)} = \frac{1-(1+i)^{21}}{-i}.$$

Ta có:

$$(1+i)^2 = 2i$$

$$\Rightarrow (1+i)^{21} = (1+i)^{20}.(1+i) = (2i)^{10}.(1+i) = -2^{10}(1+i) = -2^{10} - i.2^{10}$$

Do đó: $C = \frac{1+2^{10}+i.2^{10}}{-i} = -2^{10} + (1+2^{10})i.$

Bài tập 4. Tính tổng $S = i + 2i^2 + 3i^3 + ... + 2012.i^{2012}$.

A. $-1006 + 1006i$ **B.** $1006 + 1006i$ **C.** $-1006 - 1006i$ **D.** $1006 - 1006i$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Cách 1.

Ta có $iS = i^2 + 2i^3 + 3i^4 + ... + 2012i^{2013}$

$$\Rightarrow S - iS = i + i^2 + i^3 + ... + i^{2012} - 2012.i^{2013}$$

Dãy số $i, i^2, i^3, ..., i^{2012}$ là một cấp số nhân có công bội $q = i$ và có 2012 số hạng, suy ra:

$$i + i^2 + i^3 + ... + i^{2012} = i.\frac{1-i^{2012}}{1-i} = 0$$

Do đó: $S - iS = -2012.i^{2013} = -2012i \Rightarrow S = \frac{-2012i}{1-i} = 1006 - 1006i$

Cách 2. Dãy số $1, x, x^2, ..., x^{2012}$ là một cấp số nhân gồm 2013 số hạng và có công bội bằng x.

Xét $x \neq 1, x \neq 0$ ta có: $1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^{2012} = \frac{1-x^{2013}}{1-x} (1)$

Lấy đạo hàm hai vế của (1) ta được:

$$1 + 2x + 3x^2 + ... + 2012x^{2011} = \frac{2012.x^{2013} - 2013x^{2012} + 1}{(1-x)^2} (2)$$

Nhân hai vế của (2) cho x ta được:

$$x + 2x^2 + 3x^3 + ... + 2012x^{2012} = \frac{2012.x^{2014} - 2013x^{2013} + x}{(1-x)^2} (3)$$

Thay $x = i$ vào (3) ta được:

$$S = i + 2i^2 + 3i^2 + ... + 2012i^{2012} = \frac{2012i^{2014} - 2013i^{2013} + i}{(1-i)^2}$$

Với $i^{2014} = -1,\ i^{2013} = i$

Vậy $S = \frac{-2012 - 2012i}{-2i} = 1006 - 1006i.$

Bài tập 5. Cho α, β hai số phức liên hiệp thỏa mãn $\frac{\alpha}{\beta^2} \in R$ và $|\alpha - \beta| = 2\sqrt{3}.$ Tính $|\alpha|.$

A. $\sqrt{3}$ **B.** 3 **C.** 2 **D.** $\sqrt{5}$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $\alpha = x + iy \Rightarrow \beta = x - iy$ với $x, y \in R.$

Không giảm tính tổng quát, ta coi $y \geq 0.$

Vì $|\alpha - \beta| = 2\sqrt{3}$ nên $|2iy| = 2\sqrt{3} \Rightarrow y = \sqrt{3}.$

Do α, β hai số phức liên hợp nên $\alpha.\beta \in \mathbb{R},$ mà $\frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{\alpha^3}{(\alpha\beta)^2} \in \mathbb{R}$ do đó $\alpha^3 \in \mathbb{R}.$ Nhưng ta có

$\alpha^3 = x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i$ nên $\alpha^3 \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $3x^2y - y^3 = 0 \Leftrightarrow y(3x^2 - y^2) = 0 \Rightarrow x^2 = 1.$

Vậy $|\alpha| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+3} = 2.$

Bài tập 6. Tìm c biết a,b và c các số nguyên dương thỏa mãn: $c = (a + bi)^3 - 107i.$

A. 400 **B.** 312 **C.** 198 **D.** 123

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $c = (a + bi)^3 - 107i = a^3 - 3ab^2 + i(3a^2b - b^3 - 107).$ Nên c là số nguyên dương thì $3a^2b - b^3 - 107 = 0.$ Hay $b(3a^2 - b^2) = 107.$

Vì $a, b \in Z^+$ và 107 là số nguyên tố nên xảy ra:

- $b = 107; 3a^2 - b^2 = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{11450}{3} \notin Z$ (loại).
- $b = 1; 3a^2 - b^2 = 107 \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$ (thỏa mãn). Vậy nên $c = a^3 - 3ab^2 = 6^3 - 3.6.1^2 = 198.$

Bài tập 7. Cho số phức z có phần ảo bằng 164 và với số nguyên dương n thỏa mãn $\frac{z}{z+n} = 4i.$ Tìm n.

A. $n=14$ **B.** $n=149$ **C.** 697 **D.** 789

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $z=x+164i$ ta có:

$$\frac{z}{z+n}=4i\Leftrightarrow\frac{x+164i}{x+164i+n}=4i\Leftrightarrow x+164i=-656+4(x+n)i$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x=-656\\x+n=41\end{cases}\Rightarrow n=697.$$

Vậy giá trị cần tìm của n là 697.

Bài tập 8. Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z}=\frac{\left(1-\sqrt{3}i\right)}{1-i}$ .Tìm mô đun của số phức $\bar{z}+iz$

A. $\sqrt{2}$ **B.** $\sqrt{3}$ **C.** 5 **D.** $\sqrt{7}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

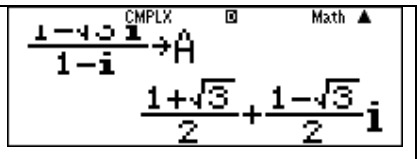
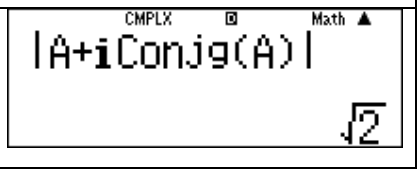
Từ $\bar{z}$ ta phải suy ra được z và thay vào biểu thức $\bar{z}+iz$ rồi tìm môđun:

$$\bar{z}=\frac{\left(1-\sqrt{3}i\right)}{1-i}=\frac{\left(1-\sqrt{3}i\right)(1+i)}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}i$$

Suy ra: $z=\frac{1+\sqrt{3}}{2}-\frac{1-\sqrt{3}}{2}i\Rightarrow i.z=\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i$

Do đó: $\bar{z}+iz=1+i\Rightarrow\left|\bar{z}+iz\right|=\sqrt{2}$.

Dùng MTCT:

Bước 1: Lưu $\frac{\left(1-\sqrt{3}i\right)}{1-i}\to A$	
Bước 2: Tính $\left\|A+i\bar{A}\right\|$	

Lời bình: Nhận thấy rằng với số phức $z=a+bi$ bất kì ta đều có $z+i\bar{z}=(1+i)(a+b)$ hay $\frac{z+i\bar{z}}{1+i}=a+b\in\mathbb{R},\forall z\in\mathbb{C}$. Về phương diện hình học thì $\frac{z+i\bar{z}}{1+i}$ luôn nằm trên trục Ox khi biểu diễn trong mặt phẳng phức.

Bài tập 9. Tìm số thực m biết: $z=\frac{i-m}{1-m(m-2i)}$ và $z\bar{z}=\frac{2-m}{2}$ (trong đó i là đơn vị ảo)

A. $\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=1\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}m=0\\m=-1\end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l}m=0\\m=1\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}m=2\\m=1\end{array}\right.$

Định hướng: Quan sát thấy z cho ở dạng thương hai số phức. Vì Vậy cần phải đơn giản z bằng cách nhân liên hiện ở mẫu. Từ $z\Rightarrow\overline{z}$. Thay z và $\overline{z}$ vào $z\overline{z}=\frac{2-m}{2}$ ta tìm được m

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có:

$$z=\frac{i-m}{1-m(m-2i)}=\frac{(i-m)\left(1-m^2-2mi\right)}{\left(1-m^2\right)^2+4m^2}=\frac{-m\left(1-m^2\right)+2m+i\left(1-m^2+2m^2\right)}{\left(1+m^2\right)^2}$$

$$=\frac{m\left(1+m^2\right)+i\left(1+m^2\right)}{\left(1+m^2\right)^2}=\frac{m}{1+m^2}+\frac{i}{1+m^2}\Rightarrow\overline{z}=\frac{m}{1+m^2}+\frac{i}{1+m^2}$$

Như vậy:

$$z\overline{z}=\frac{2-m}{2}\Rightarrow\frac{m^2+1}{\left(m^2+1\right)^2}=-\frac{1}{2}(m-2)\Leftrightarrow\frac{1}{1+m^2}=-\frac{1}{2}(m-2)\Leftrightarrow m^3-2m^2+m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=1\end{array}\right.$$

Bài tập 10. Tìm phần thực của số phức: $z=(1+i)^n, n\in\mathbb{N}$ thỏa mãn phương trình: $\log_4(n-3)+\log_4(n+9)=3$.

A. 6 **B.** –8 **C.** 8 **D.** 9

Hướng dẫn giải

Chọn C

Điều kiện: $n>3, n\in\mathbb{N}$

Phương trình $\log_4(n-3)+\log_4(n+9)=3\Leftrightarrow\log_4(n-3)(n+9)=3$

$(n-3)(n+9)=4^3\Leftrightarrow n^2+6n-9=0\Leftrightarrow n=7(do: n>3)$

$$z=(1+i)^7=(1+i).\left[(1+i)^2\right]^3=(1+i).(2i)^3=(1+i).(-8i)=8-8i$$

Vậy phần thực của số phức z là 8.

Bài tập 11. Cho số phức $z=\frac{m+3i}{1-i}(m\in\mathbb{R})$. Tìm m, biết số phức $w=z^2$ có môđun bằng 9.

A. $\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=1\end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l}m=3\\m=-1\end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l}m=3\\m=1\end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l}m=3\\m=-3\end{array}\right.$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có:

$$w = z^2 = \frac{m^2 - 9 + 6mi}{-2i} = -3m + \left(\frac{m^2 - 9}{2}\right)i \left|w\right| = 9 \Leftrightarrow \sqrt{9m^2 + \left(\frac{m^2 - 9}{2}\right)^2} = 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{m^4 + 18m^2 + 81} = 9 \Leftrightarrow m^2 - 9 = 18 \Leftrightarrow m^2 = 9 \Leftrightarrow m = \pm 3$$

Vậy giá trị cần tìm là $m = \pm 3$

Bài tập 12. Cho số phức $z = \frac{i - m}{1 - m(m - 2i)}, m \in \mathbb{R}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của số thực k sao cho tồn tại m để $|z - 1| \geq k$

A. $k = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ **B.** $k = \frac{\sqrt{5} + 2}{2}$ **C.** $k = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ **D.** $k = \frac{\sqrt{5} - 2}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $z = \frac{i - m}{-i^2 + mi - m^2} = \frac{-1}{i - m} \Rightarrow z - 1 = \frac{1 - m + i}{m - i}$

$$|z - 1| = \frac{|1 - m + i|}{|m - i|} = \sqrt{\frac{m^2 - 2m + 2}{m^2 + 1}} \Rightarrow |z - 1| \geq k \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq 0 \\ \frac{m^2 - 2m + 2}{m^2 + 1} \geq k^2 \end{cases}$$

Xét hàm số $f(m) = \frac{m^2 - 2m + 2}{m^2 + 1}$

Ta có: $f'(m) = \frac{2(m^2 - m + 1)}{(m^2 + 1)^2} \Rightarrow f'(m) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$

Lập bảng biến thiên ta có $\min f(m) = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow$ Yêu cầu bài toán $k^2 \geq \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow k \geq \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$

Vậy $k = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ là giá trị phải tìm.

Dạng 2. Tìm số phức liên hợp, tính môđun số phức

1. Phương pháp giải

- Số phức $z = a + bi$ có $\bar{z} = a - bi$ và $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Chú ý: Nếu $z = a + bi$ thì $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Bài tập: Số phức liên hợp của số phức $z = (2 - 3i)(3 + 2i)$ là

A. $\bar{z} = 12 - 5i.$ **B.** $\bar{z} = -12 + 5i.$

$z+\bar{z}=2a; z.\bar{z}=a^2+b^2.$

C. $\bar{z}=-12-5i.$ **D.** $\bar{z}=12+5i.$

Hướng dẫn giải

Ta có $z=(2-3i)(3+2i)=6-5i-6i^2=12-5i$

$\Rightarrow \bar{z}=12+5i.$

Chọn D.

2. Bài tập mẫu

Bài tập 1: Cho số phức $z=a+bi,$ với a,b là các số thực thỏa mãn

$a+bi+2i(a-bi)+4=i,$ với i là đơn vị ảo. Môđun của $\omega=1+z+z^2$ là

A. $|\omega|=\sqrt{229}.$ **B.** $|\omega|=\sqrt{13}.$ **C.** $|\omega|=229.$ **D.** $|\omega|=13.$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $a+bi+2i(a-bi)+4=i \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=-4 \\ b+2a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases}.$ Suy ra $z=2-3i.$

Do đó $\omega=1+z+z^2=-2-15i.$ Vậy $|\omega|=\sqrt{(-2)^2+(-15)^2}=\sqrt{229}$

Bài tập 2: Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z}=\dfrac{1+3i}{1-i}.$ Môđun của số phức $w=i.\bar{z}+z$ là

A. $|w|=4\sqrt{2}.$ **B.** $|w|=\sqrt{2}.$ **C.** $|w|=3\sqrt{2}.$ **D.** $|w|=2\sqrt{2}.$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $\bar{z}=\dfrac{1+3i}{1-i}=-1+2i.$

$\Rightarrow z=-1-2i \Rightarrow w=i.(-1+2i)+(-1-2i)=-3-3i.$

$\Rightarrow |w|=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}.$

Bài tập 3: Cho z_1,z_2 là các số phức thỏa mãn $|z_1|=|z_2|=1$ và $|z_1-2z_2|=\sqrt{6}.$

Giá trị của biểu thức $P=|2z_1+z_2|$ là

A. $P=2.$ **B.** $P=\sqrt{3}.$ **C.** $P=3.$ **D.** $P=1.$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $z_1=a_1+b_1i; a_1,b_1\in\mathbb{R},$ $z_2=a_2+b_2i; a_2,b_2\in\mathbb{R}.$

Suy ra $a_1^2+b_1^2=a_2^2+b_2^2=1$ và $|z_1-2z_2|=\sqrt{6} \Leftrightarrow a_1.a_2+b_1.b_2=\dfrac{-1}{4}.$

Ta có: $2z_1+z_2=2a_1+a_2+(2b_1+b_2)i$

$\Rightarrow |2z_1+z_2|=\sqrt{(2a_1+a_2)^2+(2b_1+b_2)^2}=2\sqrt{(a_1^2+b_1^2)+\frac{1}{4}.(a_2^2+b_2^2)+(a_1a_2+b_1b_2)}$

Suy ra $P=|2z_1+z_2|=2.$

Dạng 3. Bài toán liên quan đến điểm biểu diễn số phức

Bài tập 1: Cho A,B,C lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $4-3i,(1+2i)i,\frac{1}{i}.$ Số phức có điểm biểu diễn D sao cho $ABCD$ là hình bình hành là

A. $z=-6-4i.$ **B.** $z=-6+3i.$ **C.** $z=6-5i.$ **D.** $z=4-2i.$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có

A là điểm biểu diễn của số phức $4-3i$ nên $A(4;-3).$

B là điểm biểu diễn của số phức $(1+2i)i=-2+i$ nên $B(-2;1).$

C là điểm biểu diễn của số phức $\frac{1}{i}=-i$ nên $C(0;-1).$

Điều kiện để $ABCD$ là hình bình hành là $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_D-x_A=x_C-x_B \\ y_D-y_A=y_C-y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D=x_C+x_A-x_B=6 \\ y_D=y_C+y_A-y_B=-5 \end{cases} \Rightarrow D(6;-5) \Rightarrow z=6-5i.$

Bài tập 2: Cho tam giác ABC có ba đỉnh A,B,C lần lượt là điểm biểu diễn hình học của các số phức $z_1=2-i,z_2=-1+6i,z_3=8+i.$ Số phức z_4 có điểm biểu diễn hình học là trọng tâm của tam giác ABC. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $z_4=3-2i.$ **B.** $|z_4|=5.$

C. $(z_4)^2=13+12i.$ **D.** $\overline{z_4}=3-2i.$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có: $A(2;-1),B(-1;6),C(8;1).$

Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC.$

$\Rightarrow G(3;2) \Leftrightarrow z_4=3+2i \Rightarrow \overline{z_4}=3-2i.$

Bài tập 3: Cho các số phức z_1,z_2 thoả mãn $|z_1|=3,|z_2|=4,|z_1-z_2|=5$. Gọi A,B lần lượt là các điểm biểu diễn số phức z_1,z_2 trên mặt phẳng toạ độ. Diện tích S của ΔOAB (với O là gốc toạ độ) là

A. $S=5\sqrt{2}$. **B.** $S=6$. **C.** $S=\dfrac{25}{2}$. **D.** $S=12$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $|z_1|=OA=3,\ |z_2|=OB=4,\ |z_1-z_2|=AB=5$

$\Rightarrow \Delta OAB$ vuông tại O (vì $OA^2+OB^2=AB^2$)

$\Rightarrow S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}OA.OB=\dfrac{1}{2}.3.4=6.$

Dạng 4. Tìm số phức thỏa mãn điều kiện cho trước

Bài tập 1: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $\begin{cases}|z-i|=|z-1|\\|z-2i|=|z|\end{cases}$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đặt $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R}).$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+(y-1)^2=(x-1)^2+y^2\\x^2+(y-2)^2=x^2+y^2\end{cases}\Rightarrow x=y=1.$

Do đó $z=1+i$ nên có một số phức thỏa mãn.

Bài tập 2: Có bao nhiêu số phức z thỏa điều kiện $|z.\bar{z}+z|=2$ và $|z|=2$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $|z.\bar{z}+z|=2\Leftrightarrow||z|^2+z|=2\Leftrightarrow|z+4|=2.$

Suy ra điểm M biểu diễn số phức z là giao của hai đường tròn $(C_1):x^2+y^2=4$

và $(C_2):(x+4)^2+y^2=4.$

Vì $I_1I_2=R_1+R_2$ (I_1,I_2 là tâm của các đường tròn $(C_1),(C_2)$) nên (C_1) và (C_2)tiếp xúc nhau).

Suy ra: Có một số phức z thỏa mãn yêu cầu.

Bài tập 3: Có bao nhiêu số phức thỏa mãn $|z|(z-6-i)+2i=(7-i)z$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Nhận xét: Từ giả thiết, ứng với mỗi $|z|$ cho ta duy nhất một số phức z.

Đặt $|z|=a\ge 0, a\in\mathbb{R}$, khi đó ta có

$|z|(z-6-i)+2i=(7-i)z$

$\Leftrightarrow a(z-6-i)+2i=(7-i)z$

$\Leftrightarrow (a-7+i)z=6a+ai-2i$

$\Leftrightarrow (a-7+i)z=6a+(a-2)i$

$\Leftrightarrow |(a-7+i)||z|=|6a+(a-2)i|$

$\Leftrightarrow \left[(a-7)^2+1\right]a^2=36a^2+(a-2)^3$

$\Leftrightarrow a^4-14a^3+13a^2+4a-4=0\Leftrightarrow (a-1)\left(a^3-13a^2+4\right)=0.$

Hàm số $f(a)=a^3-13a^2\,(a\ge 0)$ có bảng biến thiên:

a	0		$\frac{26}{3}$		$+\infty$
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	0	↘	$-\frac{8788}{27}$	↗	$+\infty$

Đường thẳng $y=-4$ cắt đồ thị hàm số $f(a)$ tại hai điểm nên phương trình $a^3-13a^2+4=0$ có hai nghiệm khác 1 (do $f(1)\ne 0$). Thay giá trị môđun của z vào giả thiết ta được 3 số phức thỏa mãn điều kiện.

Bài tập 4: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để có đúng hai số phức z thỏa mãn $|z-(2m-1)-i|=10$ và $|z-1+i|=|\overline{z}-2+3i|$?

A. 40. **B.** 41. **C.** 165. **D.** 164.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Giả sử $z=x+yi\,(x,y\in\mathbb{R})$ và $M(x,y)$ là điểm biểu diễn số phức z.

Ta có: $|z-(2m-1)-i|=10\Leftrightarrow |z-(2m-1)-i|^2=100$

$\Leftrightarrow \left[x-(2m-1)\right]^2+(y-1)^2=100.$

Khi đó điểm biểu diễn số phức z nằm trên đường tròn (C) có tâm $I(2m-1;1)$, bán kính $R=10$.

Lại có $|z-1+i|=|\overline{z}-2+3i|\Leftrightarrow |(x-1)+(y+1)i|^2=|(x-2)+(3-y)i|^2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=(x-2)^2+(3-y)^2\Leftrightarrow 2x+8y-11=0.$

Khi đó điểm biểu diễn số phức z cũng nằm trên đường thẳng $\Delta: 2x+8y-11=0$

Có đúng hai số phức z thỏa mãn nếu đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại 2 điểm phân biệt.

Tức là $d\left(I,\Delta\right)<10\Leftrightarrow\frac{\left|2\left(2m-1\right)+8-11\right|}{\sqrt{2^2+8^2}}<10\Leftrightarrow\frac{5-20\sqrt{17}}{4}<m<\frac{5+20\sqrt{17}}{4}.$

Vậy có 41 giá trị nguyên của m để có đúng hai số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập 5: Cho hai số phức z_1 và z_2 thỏa mãn $\left|z_1\right|=3,\left|z_2\right|=4,\left|z_1-z_2\right|=\sqrt{37}.$ Hỏi có bao nhiêu số z mà $z=\frac{z_1}{z_2}=a+bi$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $z_1=x+yi,z_2=c+di\left(x,y,c,d\in\mathbb{R}\right).$ Ta có:

$\left|z_1\right|=3\Rightarrow x^2+y^2=9;$

$\left|z_2\right|=4\Rightarrow c^2+d^2=16;$

$\left|z_1-z_2\right|=\sqrt{37}\Rightarrow x^2+y^2+c^2+d^2-2xc-2yd=37\Leftrightarrow xc+yd=-6.$

Lại có:

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x+yi}{c+di}=\frac{xc+yd}{c^2+d^2}+\frac{yc-xd}{c^2+d^2}i=-\frac{3}{8}+bi.$ Suy ra $a=-\frac{3}{8}.$

Mà $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{\left|z_1\right|}{\left|z_2\right|}=\frac{3}{4}=\sqrt{a^2+b^2}\Leftrightarrow a^2+b^2=\frac{9}{16}\Rightarrow b^2=\frac{9}{16}-a^2=\frac{27}{64}\Rightarrow b=\pm\frac{3\sqrt{3}}{8}$

Vậy có hai số phức z thỏa mãn.

Bài tập 6: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất số phức z thỏa mãn $z.\bar{z}=1$ và $\left|z-\sqrt{3}+i\right|=m$. Số phần tử của S là

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Dễ thấy $m>0.$

Đặt $z=a+bi;a,b\in\mathbb{R}$ ta có hệ phương trình.

$$\begin{cases}a^2+b^2=1\\\left(a-\sqrt{3}\right)^2+\left(b+1\right)^2=m^2\end{cases}$$

Phương trình $a^2+b^2=1$ là đường tròn tâm $O,$ bán kính $R=1$.

Phương trình $\left(a-\sqrt{3}\right)^2+\left(b+1\right)^2=m^2$ là đường tròn tâm $I\left(\sqrt{3};-1\right),$ bán kính $R=m$.

Có duy nhất số phức thỏa mãn đề bài

$\Leftrightarrow$ Hệ phương trình $\begin{cases}a^2+b^2=1\\\left(a-\sqrt{3}\right)^2+\left(b+1\right)^2=m^2\end{cases}$ có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow$ Hai đường tròn này tiếp túc với nhau

$\Leftrightarrow OI = |m \pm 1| \Leftrightarrow |m \pm 1| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 3 \end{array}\right.$ (thỏa mãn $m > 0$).

Vậy, có hai số thực thỏa mãn.

Bài tập 7: Có tất cả bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z| = 1$ và $\left|\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}\right| = 1$.

A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đặt $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$. Ta có

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1.$

$\left|\frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}\right| = \left|\frac{z^2 + \bar{z}^2}{z.\bar{z}}\right| = \frac{\left|(a+bi)^2 + (a-bi)^2\right|}{|z|^2} = |2a^2 - 2b^2| = 1.$

Ta có hệ: $\left\{\begin{array}{l} a^2 + b^2 = 1 \\ |2a^2 - 2b^2| = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2 + b^2 = 1 \\ a^2 - b^2 = \frac{1}{2} \end{array}\right.$ hoặc $\left\{\begin{array}{l} a^2 + b^2 = 1 \\ a^2 - b^2 = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a^2 = \frac{3}{4} \\ b^2 = \frac{1}{4} \end{array}\right.$ hoặc $\left\{\begin{array}{l} a^2 = \frac{1}{4} \\ b^2 = \frac{3}{4} \end{array}\right.$.

Suy ra $(a;b) \in \left\{\left(\frac{1}{2}; \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right); \left(-\frac{1}{2}; \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right); \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \pm\frac{1}{2}\right); \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \pm\frac{1}{2}\right)\right\}$.

Vậy có 8 cặp số $(a;b)$ do đó có 8 số phức thỏa mãn.

Dạng 5: Bài toán tập hợp điểm biểu diễn số phức

1. Phương pháp giải

Sử dụng các định nghĩa, tính chất hình học đã biết.

Cho trước các điểm cố định $I, F_1, F_2; F_1F_2 = 2c(c > 0)$

Tập hợp các điểm M thoả mãn $MI = R(R > 0)$ là đường tròn tâm I bán kính R.

Tập hợp các điểm M thoả mãn $MF_1 + MF_2 = 2a(a > c)$

là elip có hai tiêu điểm là F_1, F_2.

Tập hợp các điểm M thoả mãn $MF_1 = MF_2$ là đường

Bài tập:

Trên mặt phẳng Oxy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thoả mãn $|z + 2 - 5i| = 4$ là đường tròn tâm $I(-2;5)$, bán kính $R = 2$.

trung trực của đoạn thẳng F_1F_2.

2. Bài tập

Bài tập 1: Xét các số phức z thỏa mãn $(z-6)(8+\bar{z}.i)$ là số thực. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là một đường tròn, có tâm $I(a;b)$ và bán kính R. Giá trị $a+b+R$ bằng

A. 6. **B.** 4. **C.** 12. **D.** 24.

Chú ý:
Trong mặt phẳng Oxy, $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ là phương trình đường tròn có tâm $I(a;b)$ và bán kính $R>0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $z=x+yi(x,y\in\mathbb{R})$.

Vì $(z-6)(8+\bar{z}.i)=[(x-6)+yi][(y+8)+xi]$ là số thực nên

$$x(x-6)+y(y+8)=0\Leftrightarrow(x-3)^2+(y+4)^2=25.$$

Tập hợp tất cả các điểm biểu diễn của z là đường tròn có tâm $I(3;-4)$, bán kính $R=5$.

Vậy $a+b+R=4$.

Bài tập 2: Cho số phức z thỏa mãn $|z-3|+|z+3|=10$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là

A. Một parabol.
B. Một đường tròn.
C. Một elip.
D. Một hypebol.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi $z=x+yi(x,y\in\mathbb{R})$ thì $|z-3|+|z+3|=10\Leftrightarrow|(x-3)+yi|+|(x+3)+yi|=10(*)$

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z và các điểm $F_1(3;0),F_2(-3;0)$. Dễ thấy $F_1F_2=6=2c$

Khi đó: $|z-3|+|z+3|=10\Leftrightarrow MF_1+MF_2=10=2a$.

Vậy tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là elip có hai tiêu điểm F_1,F_2, độ dài trục lớn là $2a=10$

Bài tập 3: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=10$ và $w=(6+8i)\bar{z}+(1-2i)^2$. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn có tâm là

A. $I(-3;-4)$. **B.** $I(3;4)$. **C.** $I(1;-2)$. **D.** $I(6;8)$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có

$w=(6+8i)\bar{z}+(1-2i)^2$

$\Leftrightarrow w-(-3-4i)=(6+8i)\bar{z}$

$\Leftrightarrow |w-(-3-4i)|=\sqrt{6^2+8^2}\,|\bar{z}|$

$\Leftrightarrow |w-(-3-4i)|=10.10 \Leftrightarrow |w-(-3-4i)|=100$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức w là đường tròn (C) có tâm $I(-3;-4)$.

Bài tập 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm biểu biễn các số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|=|\bar{z}+1+2i|$ là đường thẳng có phương trình

A. $x-2y+1=0.$ **B.** $x+2y=0.$

C. $x-2y=0.$ **D.** $x+2y+1=0.$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đặt $z=x+yi(x,y\in\mathbb{R})\Rightarrow\bar{z}=x-yi.$

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức z.

Ta có: $|z-1+2i|=|\bar{z}+1+2i|$

$\Leftrightarrow |x+yi-1+2i|=|z-yi+1+2i|$

$\Leftrightarrow |(x-1)+(y+2)i|=|(x+1)+(2-y)i|$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(2-y)^2}$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+4y+4=x^2+2x+1+y^2-4y+4$

$\Leftrightarrow x-2y=0.$

Vậy tập hợp các điểm biểu biễn các số phức z thỏa mãn yêu cầu bài toán là đường thẳng có phương trình là $x-2y=0.$

Bài tập 5. Giả sử M(z) là điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức z. Tập hợp những điểm M(z) thỏa mãn điều $|2+z|=|i-z|$ là

A. Đường thẳng $4x+2y+3=0$ **B.** Đường thẳng $4x-2y+3=0$

A. Đường thẳng $x+2y-3=0$ **D.** Đường thẳng $x+9y-3=0$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Cách 1. Đặt $z=x+yi;(x,y\in\mathbb{R}).$ là số phức đã cho và $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng phức

Ta có $|z+2|=|i-z| \Leftrightarrow |(x+2)+yi|=|x+(y-1)i| \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2+y^2}=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$

$\Leftrightarrow 4x+2y+3=0$. Vậy tập hợp điểm M cần tìm là đường thẳng $4x+2y+3=0$

Cách 2. $|z+2|=|i-z| \Leftrightarrow |z-(-2)|=|i-z|$ $(*)$

Đặt $z=x+yi;(x,y\in\mathbb{R})$.là số phức đã cho và $M(x;y)$là điểm biểu diễn của z trong mặt phẳng phức, Điểm A biểu diễn số -2 tức $A(-2;0)$và điểm B biểu diễn số phức i tức $B(0;1)$

Khi đó $(*)\Leftrightarrow MA=MB$. Vậy tập hợp điểm M cần tìm là đường trung tực của AB: $4x+2y+3=0$.

Bài tập 6. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+2i|=|\overline{z}+1-i|$ là

A. Đường thẳng $x+y+3=0$ **B.** Đường thẳng $x-2y+3=0$

A. Đường thẳng $x+2y+3=0$ **D.** Đường thẳng $x-y-1=0$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Giả sử $z=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$, điểm $M(x;y)$ biểu diễn z. Theo bài ra ta có:

$|x+(y+2)i|=|(x+1)-(y+1)i| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y+2)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}$

$\Leftrightarrow 4y+4=2x+2y+2 \Leftrightarrow x-y-1=0$

Suy ra M thuộc đường thẳng có phương trình $x-y-1=0$.

Vậy tập hợp điểm biểu diễn các số phức z là đường thẳng có phương trình $x-y-1=0$.

Bài tập 7. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $5|(1-i)z+3-2i|=|(1-7i)z+i|$ là

A. Đường thẳng **B.** Đường tròn

A. Đường elip **D.** Đường Parabol

Hướng dẫn giải

Chọn A

Nhận thấy $5|1+i|=5\sqrt{2}=|1-7i|$

Ta có $5|(1-i)z+3-2i|=|(1-7i)z+i|$

$$\Leftrightarrow \left|5(1-i)\right|.\left|z+\frac{3-2i}{5+5i}\right|=\left|1-7i\right|.\left|z+\frac{i}{1-7i}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|z+\frac{3-2i}{5+5i}\right|=\left|z+\frac{i}{1-7i}\right| \Leftrightarrow \left|z+\frac{1}{10}-\frac{1}{2}i\right|=\left|z-\frac{7}{50}+\frac{1}{50}i\right|$$

Vậy tập hợp M là đường trung trực AB, với $A\left(-\frac{1}{10};\frac{1}{2}\right), B\left(\frac{7}{50};\frac{1}{50}\right)$.

Bài tập 8. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z+\bar{z}+3\right|=4$ là

A. Hai đuờng thẳng $x=\frac{1}{2},\ x=-\frac{7}{2}$ **B.** Hai đuờng thẳng $x=-\frac{1}{2},\ x=-\frac{7}{2}$

A. Hai đuờng thẳng $x=\frac{1}{2},\ x=\frac{7}{2}$ **D.** Hai đuờng thẳng $x=-\frac{1}{2},\ x=\frac{7}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Đặt $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$

Lúc đó:

$$\left|z+\bar{z}+3\right|=4 \Leftrightarrow \left|x+yi+x-yi+3\right|=4 \Leftrightarrow \left|2x+3\right|=4 \Leftrightarrow 4x^2+12x+9=16$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+12x-7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ x=-\frac{7}{2} \end{array}\right.$$

Vậy tập hợp điểm M là hai đường thẳng $x=\frac{1}{2}; x=-\frac{7}{2}$ song song với trục tung.

Bài tập 9. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|z-\bar{z}+1-i\right|=2$ là

A. Hai đuờng thẳng $y=\frac{1+\sqrt{3}}{2}; y=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ **B.** Hai đuờng thẳng $y=\frac{1+\sqrt{3}}{2}; y=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

A. Hai đuờng thẳng $y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}; y=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ **D.** Hai đuờng thẳng $y=\frac{1-\sqrt{5}}{2}; y=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$

Lúc đó:

$$\left|z-\bar{z}+1-i\right|=2\Leftrightarrow\left|x+yi-x+yi+1-i\right|=2\Leftrightarrow\left|1-(2y-1)i\right|=2$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{1+(2y-1)^2}=2\Leftrightarrow 1+4y^2-4y+1=4\Leftrightarrow 4y^2-4y-2=0$$

$$\Leftrightarrow 2y^2-2y-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\\ y=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$$

Vậy tập hợp điểm M là hai đường thẳng $y=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2};y=\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ song song với trục hoành.

Bài tập 10. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $2|z+1|=|z-\bar{z}-2|$ là

A. Hai đuờng thẳng $x=0,\ y=0$.

B. Hai đuờng thẳng $x=0,\ y=-2$.

C. Hai đuờng thẳng $x=0,\ x=-2$.

D. Hai đuờng thẳng $x=2,\ y=-2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức $z=x+yi,\ (x,y\in\mathbb{R})$ thỏa $2|z+1|=|z-\bar{z}-2|$

$$\Leftrightarrow 2|x+yi+1|=|x+yi-(x-yi)-2|\Leftrightarrow 2|x+1+yi|=|-2+2yi|$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{(-2)^2+(2y)^2}\Leftrightarrow x^2+2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-2\end{array}\right.$$

Vậy tập hợp các điểm M cần tìm là hai đường thẳng $x=0,\ x=-2$.

Bài tập 11. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-1+i|=2$ là

A. Đường thẳng $x-y-2=0$

B. Đường tròn $(x+1)^2+(y+1)^2=4$

C. Đường thẳng $x+y-2=0$

D. Đường tròn tâm $I(1;-1)$ và bán kính $R=2.$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Xét hệ thức: $|z-1+i|=2$ Đặt $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$.

Khi đó: $(1)\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=2\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+1)^2=4$

Vậy, tập hợp những điểm M(z) thỏa mãn hệ thức (1) là đường tròn tâm $I(1;-1)$ và bán kính $R=2$.

Bài tập 12. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $\left|\frac{z}{z-1}\right|=3$ là

A. Đường tròn $x^2+y^2-\frac{18}{8}y-\frac{9}{8}=0$

B. Đường tròn $x^2+y^2-\frac{18}{8}y+\frac{9}{8}=0$

C. Đường tròn $x^2+y^2+\frac{18}{8}y+\frac{9}{8}=0$

D. Đường tròn tâm $I\left(0;\frac{9}{8}\right)$ và bán kính $R=\frac{1}{8}.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{Z})$. Ta có

$$\left|\frac{z}{z-1}\right|=3\Leftrightarrow|z|=3|z-1|\Leftrightarrow x^2+y^2-\frac{18}{8}y+\frac{9}{8}=0$$

Vậy, tập hợp những điểm M(z) thỏa mãn hệ thức (1) là đường tròn tâm $I\left(0;\frac{9}{8}\right)$ và bán kính $R=\frac{3}{8}.$

Bài tập 13. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z+3-2i|=|2z+1-2i|$ là

A. Đường tròn $x^2+y^2-\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}y+\frac{8}{3}=0$

B. Đường tròn $x^2+y^2+\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}y-\frac{8}{3}=0$

C. Đường tròn $x^2+y^2-\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}y-\frac{8}{3}=0$

D. $x^2+y^2-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}y-\frac{8}{3}=0$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $z=x+yi;(x,y\in\mathbb{R})$.

Ta có: $|z+3-2i|=|2z+1-2i|$

$$\Leftrightarrow|(x+3)+(y-2)i|=|(2x+1)+(2y-2)i|\Leftrightarrow(x+3)^2+(y-2)^2=(2x+1)+(2y-2)^2$$
$$\Leftrightarrow 3x^2+3y^2-2x-4y-8=0$$

Suy ra: Tập hợp các điểm biểu diễn z là phương trình đường tròn (C): $x^2+y^2-\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}y-\frac{8}{3}=0$.

Bài tập 14. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-i|=|(1+i)z|$ là

A. Đường tròn $x^2+(y+1)^2=2$ **B.** Đường tròn $x^2+(y-1)^2=2$

C. Đường tròn $(x-1)^2+(y+1)^2=2$ **D.** $(x+1)^2+(y+1)^2=2$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn của số phức $z=x+yi;(x,y\in\mathbb{R})$.

Suy ra $|z-i|=\sqrt{x^2+(y-1)^2}\Leftrightarrow|(1+i)z|=|(1+i)(x+yi)|=\sqrt{(x-y)^2+(x+y)^2}$

Nên $|z-i|=|(1+i)z|\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=(x-y)^2+(x+y)^2\Leftrightarrow x^2+(y+1)^2=2$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn $x^2+(y+1)^2=2$.

Bài tập 15. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-4i|+|z+4i|=10$ là

A. Đường elip $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ **B.** Đường elip $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

C. Đường elip $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ **D.** Đường elip $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Xét hệ thức: $|z-4i|+|z+4i|=10$

Đặt $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$. Lúc đó

$(4)\Leftrightarrow\sqrt{x^2+(y-4)^2}+\sqrt{x^2+(y+4)^2}=10\Leftrightarrow\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$

Vậy tập hợp điểm M là đường elip có hai tiêu điểm là $F_1(0;4);F_2(0;-4)$ và độ dài trục lớn là 16.

Bài tập 16. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2|+|z+2|=5$ là

A. Đường tròn

B. Đường elip

C. Đường parabol

D. Đường thẳng

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $z=x+yi;(x,y\in\mathbb{R}).$

Ta có: $|z-2|+|z+2|=5$

$\Leftrightarrow|(x-2)+yi|+|(x+2)+yi|=5\Leftrightarrow\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x+2)^2+y^2}=5\ (1)$

Xét $A(2;0);B(-2;0);I(x;y)\Rightarrow IA+IB=5$

Vậy tập hợp điểm biểu diễn số phức z chính là tập hợp các điểm I thỏa mãn $IA+IB=5$, đó chính là một elip có tiêu cự $c=\frac{AB}{2}=2;a=\frac{IA+IB}{2}=\frac{5}{2}$

Bài tập 17. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $|2+z|>|z-2|$ là

A. Tập hợp các điểm là nửa mặt phẳng ở bên phải trục tung

B. Tập hợp các điểm là nửa mặt phẳng ở bên trái trục tung

C. Tập hợp các điểm là nửa mặt phẳng phía trên trục hoành

D. Tập hợp các điểm là nửa mặt phẳng phía dưới trục hoành

Hướng dẫn giải

Chọn A

Xét hệ thực: $|2+z|>|z-2|\ (1)$. Đặt $z=x+yi,(x,y\in\mathbb{R}).$

Khi đó: $(3)\Leftrightarrow 8x>0$

Tập hợp những điểm M(z) thỏa mãn điều kiện (1) là nửa mặt phẳng ở bên phải trục tung, tức các điểm (x,y) mà $x>0$

Bài tập 18. Tập hợp các điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn các số phức z thỏa mãn điều kiện $1\le|z+1-i|\le 2$ là

A. Tập hợp các điểm là hình tròn có tâm $I(1;-1)$, bán kính 2

B. Tập hợp các điểm là hình vành khăn có tâm tại $A(-1;1)$ và các bán kính lớn và nhỏ lần lượt là $2;1$

C. Tập hợp các điểm là hình tròn có tâm $I(1;-1)$, bán kính 1

D. Tập hợp các điểm là hình vành khăn có tâm tại $I(1;-1)$ và các bán kính lớn và nhỏ lần lượt là $2;1$

Hướng dẫn giải

Chọn 18 B

Xét hệ thực: $1 \le |z+1-i| \le 2 \ (2)$. Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

Khi đó: $(2) \Leftrightarrow 1 \le (x+1)^2 + (y-1)^2 \le 4$

Vậy tập hợp những điểm M(z) thỏa mãn điều kiện (2) là hình vành khăn có tâm tại $A(-1;1)$ và các bán kính lớn và nhỏ lần lượt là $2;1$

Bài tập 19. Tìm tất cả các điểm của mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z sao cho $\frac{\overline{z+i}}{z+i}$ là số thực.

A. Tập hợp điểm gồm hai trục tọa độ

B. Tập hợp điểm là trục hoành

C. Tập hợp điểm gồm hai trục tọa độ bỏ đi điểm $A(0;1)$

D. Tập hợp điểm là trục tung, bỏ đi $A(0;1)$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.

Ta có: $\frac{\overline{z+i}}{z+i} = \frac{x + (y+1)(1-y) + [x(y+1) - x(1-y)]i}{x^2 + (1-y)^2}$

$\frac{\overline{z+i}}{z+i}$ là số thực $\Leftrightarrow x(y+1) - x(1-y) = 0 \Leftrightarrow xy = 0.$

Mặt khác: $x^2 + (y-1)^2 \ne 0 \Leftrightarrow$ cả mặt phẳng phức bỏ đi điểm $(0;1)$

Tóm lại: $\text{ycbt} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right. \\ (x,y) \neq (0;1) \end{cases}$. Vậy các điểm của mặt phẳng phức cần tìm gồm hai trục tọa độ bỏ đi điểm $A(0;1)$

Bài tập 14. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z sao cho $u = \dfrac{z+2+3i}{z-i}$ là một số thuần ảo.

A. Đường tròn tâm $I(-1;-1)$ bán kính $R = \sqrt{5}$

B. Đường tròn tâm $I(-1;-1)$ bán kính $R = \sqrt{5}$ trừ đi hai điểm $A(0;1); B(-2;-3)$.

C. Đường tròn tâm $I(1;1)$ bán kính $R = 5$

D. Đường tròn tâm $I(1;1)$ bán kính $R = 5$ trừ đi hai điểm $A(0;1); B(-2;-3)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$

Ta có:

$$u = \frac{z+2+3i}{z-i} = \frac{\left[x+2+(y+3)i\right]\left[x-(y-1)i\right]}{x^2+(y-1)^2} = \frac{x^2+y^2+2x+2y-3+2(2x-y+1)i}{x^2+(y-1)^2}$$

$$u \text{ là số thuần ảo} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+2x+2y-3=0 \\ 2x-y+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2+(y+1)^2=5 \\ \left[\begin{array}{l} (x,y) \neq (0;1) \\ (x,y) \neq (-2;-3) \end{array}\right. \end{cases}$$

Vậy tập hợp điểm z là đường tròn tâm $I(-1;-1)$ bán kính $R = \sqrt{5}$ trừ đi hai điểm $A(0;1); B(-2;-3)$.

Bài tập 21. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z = x + yi$ thỏa mãn điều kiện $|x| + |y| = 1$ là

A. Ba cạnh của tam giác

B. Bốn cạnh của hình vuông

C. Bốn cạnh của hình chữ nhật

D. Bốn cạnh của hình thoi

Hướng dẫn giải

Chọn B

Gọi M là điểm biểu diễn số phức z.

Ta có: $|x|+|y|=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 & \text{khi } x\ge 0, y\ge 0 \\ x-y=1 & \text{khi } x\ge 0, y\le 0 \\ -x+y=1 & \text{khi } x\le 0, y\ge 0 \\ -x-y=1 & \text{khi } x\le 0, y\le 0 \end{cases}$

Vậy tập hợp điểm M là 4 cạnh của hình vuông.

Bài tập 22. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $\frac{z+i}{z+1}+\frac{\bar{z}+i}{\bar{z}+1}$ là số thuần ảo.

A. Đường tròn tâm $I\left(-\frac{1}{2};0\right)$ bán kính $R=\frac{1}{2}$

B. Đường tròn tâm $I\left(-\frac{1}{2};0\right)$ bán kính $R=\frac{1}{2}$ trừ đi hai điểm $(-1;0)$.

C. Đường tròn tâm $I\left(-\frac{1}{2};0\right)$ bán kính $R=\frac{1}{4}$

D. Đường tròn tâm $I\left(-\frac{1}{2};0\right)$ bán kính $R=\frac{1}{4}$ trừ đi hai điểm $(0;1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Giả sử $z=x+yi$ và điểm biểu diễn số phức z là $M(x;y)$.

Ta có: $\frac{z+i}{z+1}+\frac{\bar{z}+i}{\bar{z}+1}=\frac{2|z|^2+z+\bar{z}+i(z+\bar{z})+2i}{|z|^2+z+\bar{z}+1}=\frac{2(x^2+y^2)+2x+2(x+1)i}{(x+1)^2+y^2}$

$\frac{z+i}{z+1}+\frac{\bar{z}+i}{\bar{z}+1}$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x^2+y^2)+2x=0 \\ (x+1)^2+y^2\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4} \\ (x;y)\ne(-1;0) \end{cases}$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$ bỏ đi điểm $(-1;0)$.

Bài tập 23. Tìm quỹ tích các điểm trên mặt phẳng phức biểu diễn cho số phức $w=iz+1$, biết z là số phức thỏa mãn: $\left|(\bar{z}-2i+1)^3\right|=8$.

A. Đường tròn $(C):(x-3)^2+(y-1)^2=4$

B. Đường tròn $(C):(x+3)^2+(y+1)^2=2$

C. Đường tròn $(C):(x-3)^2+(y+1)^2=4$

D. Đường tròn $(C):(x-3)^2+(y-1)^2=4$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $|z^3|=|z|^3$ nên $\left|(\bar{z}-2i+1)^3\right|=2^3\Leftrightarrow\left|(\bar{z}-2i+1)\right|=2 \quad (*)$

Đặt $w=x+yi$

Ta lại có $w=iz+1\Leftrightarrow z=i-iw\Rightarrow\bar{z}=-i+i.\overline{w}$. (*) trở thành:

$$\left|i\overline{w}-3i+1\right|=2\Leftrightarrow\sqrt{(y+1)^2+(x-3)^2}=2\Leftrightarrow(y+1)^2+(x-3)^2=4$$

Vậy quỹ tích các điểm biểu diễn w trên mặt phẳng phức là đường tròn $(C):(x-3)^2+(y+1)^2=4$.

Bài tập 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức w thỏa mãn: $w=\bar{z}+2+i$, biết z là số phức thỏa $|z-1+2i|=1$.

A. Đường tròn tâm $I(1;2)$ bán kính $R=\sqrt{2}$

B. Đường tròn tâm $I(2;1)$ bán kính $R=2$

C. Đường tròn tâm $I(1;1)$ bán kính $R=1$

D. Đường tròn tâm $I(3;3)$, bán kính $R=1$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Gọi $w=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})\Rightarrow M(x;y)$ là điểm biểu diễn cho số w trên hệ trục Oxy.

$$\bar{z}=w-2-i=x-2+(y-1)i\Rightarrow z=x-2+(1-y)i$$
$$|z-1+2i|=1\Leftrightarrow|x-3+(3-y)i|=1\Leftrightarrow(x-3)^2+(y-3)^2=1$$

Vây tập hợp điểm biểu diễn số phức w là một đường tròn tâm $I(3;3)$, bán kính $R=1$.

Bài tập 25. Trong mặt phẳng phức Oxy, tìm tập hợp các điểm M biểu diễn số phức $w=(1-2i)z+3$ biết z là số phức thỏa mãn: $|z+2|=5$.

A. Đường tròn tâm $I(1;2)$ bán kính $R=\sqrt{5}$

B. Đường tròn tâm $I(2;1)$ bán kính $R=5$

C. Đường tròn tâm $I(1;4)$ bán kính $R=5\sqrt{5}$.

D. Đường tròn tâm $I(1;3)$, bán kính $R=5$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Theo giả thiết: $|z+2|=5\Leftrightarrow\left|\frac{a-1+(b-4)i}{1-2i}\right|=5\Leftrightarrow|a-1+(b-4)i|=5|1-2i|$

$\Leftrightarrow\sqrt{(a-1)^2+(b-4)^2}=5\sqrt{5}\Leftrightarrow(a-1)^2+(b-4)^2=125$

Vậy tập hợp điểm M thỏa mãn đề bài là đường tròn tâm $I(1;4)$ bán kính $R=5\sqrt{5}$.

Bài tập 26. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z'=(1-i\sqrt{3})z-2$ với $|z+1|\le 2$.

A. Hình tròn tâm $I(-3;\sqrt{3})$, $R=4$.

B. Đường tròn tâm $I(-3;\sqrt{3})$, $R=4$.

C. Hình tròn tâm $I(1;-4)$ bán kính $R=5$.

D. Đường tròn tâm $I(1;3)$, bán kính $R=5$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Giả sử ta có $\begin{cases}z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})\\ z'=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})\end{cases}$

Khi đó:

$z'=(1-i\sqrt{3})z-2\Leftrightarrow x+yi=(1-i\sqrt{3})(a+bi)-2\Leftrightarrow x+yi=a+b\sqrt{3}-2+(b-a\sqrt{3})$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=a+b\sqrt{3}-2\\ y=b-a\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{x-y\sqrt{3}+2}{4}\\ b=\frac{\sqrt{3}x+y+2\sqrt{3}}{4}\end{cases}$

Theo bài ra ta có:

$$|z+1|\le 2\Leftrightarrow (a+1)^2+b^2\le 4\Leftrightarrow \left(\frac{x-y\sqrt{3}+2}{4}+1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}x+y+2\sqrt{3}}{4}\right)^2\le 4$$

$$\Leftrightarrow \left(x-y\sqrt{3}+6\right)^2+\left(\sqrt{3}x+y+2\sqrt{3}\right)^2\le 64\Leftrightarrow 4x^2+4y^2+24x-8\sqrt{3}y-16\le 0$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+6x-2\sqrt{3}y-4\le 0\Leftrightarrow (x+3)^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2\le 16$$

Vậy quỹ tích các điểm biểu diễn số phức z′ là hình tròn tâm $I\left(-3;\sqrt{3}\right)$, $R=4$.

Bài tập 27. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn trong mặt phẳng phức $w=\left(1+i\sqrt{3}\right)z+2$ biết rằng số phức z thỏa mãn $|z-1|\le 2.$

A. Hình tròn tâm $I\left(-3;\sqrt{3}\right)$, $R=4$.

B. Đường tròn tâm $I(3;3)$ bán kính $R=4$

C. Đường tròn tâm $I\left(3;\sqrt{3}\right)$ bán kính $R=4$.

D. Hình tròn tâm $I\left(3;\sqrt{3}\right)$ bán kính $R=4.$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $z=a+bi,(a,b\in\mathbb{R})$ và $w=x+yi,(x,y\in\mathbb{R})$

Ta có: $|z-1|\le 2\Leftrightarrow (a-1)^2+b^2\le 4\ (*)$

Từ

$$w=\left(1+i\sqrt{3}\right)z+2\Rightarrow x+yi=\left(1+i\sqrt{3}\right)(a+bi)+2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=a-b\sqrt{3}+2\\ y=\sqrt{3}a+b\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x-3=a-1-b\sqrt{3}\\ y-\sqrt{3}=\sqrt{3}(a-1)+b\end{cases}$$

$$\Rightarrow (x-3)^2+(y-3)^2=4\left[(a-1)^2+b^2\right]\le 16\ (\text{Do }(*))$$

Vậy tập hợp các điểm cần tìm là hình tròn tâm $I\left(3;\sqrt{3}\right)$ bán kính $R=4.$

Bài tập 28. Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức $z'=2z+3-i$ với $|3z+i|^2\le z\bar{z}+9$.

A. Hình tròn tâm $I\left(-3;\sqrt{3}\right)$, $R=4$.

B. Đường tròn tâm $I(3;3)$ bán kính $R=4$

C. Đường tròn tâm $I\left(3;\sqrt{3}\right)$ bán kính $R=4$.

D. Hình tròn tâm $I\left(3;-\frac{7}{4}\right)$, $R=\frac{\sqrt{73}}{4}$

Giải

Chọn D

Giả sử ta có $\begin{cases} z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R}) \\ z'=x+yi\ (x,y\in\mathbb{R}) \end{cases}$

Khi đó $z'=2x+3-i\Leftrightarrow x+yi=(2a+3)+(2b-1)i\Leftrightarrow\begin{cases} x=2a+3 \\ y=2b-1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=\frac{x-3}{2} \\ b=\frac{y+1}{2} \end{cases}$

Theo bài ra ta có:

$|3z+i|^2\le z\bar{z}+9\Leftrightarrow 9a^2+(3b+1)^2\le a^2+b^2+9\Leftrightarrow 4a^2+4b^2+3b-4\le 0$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+1)^2+\frac{3}{2}(y+1)-4\le 0\Leftrightarrow (x-3)^2+\left(y+\frac{7}{4}\right)^2\le\frac{73}{16}$

Vậy quỹ tích các điểm biểu diễn số phức z′ là hình tròn tâm $I\left(3;-\frac{7}{4}\right)$, $R=\frac{\sqrt{73}}{4}$

Bài tập 29. Cho các số phức z thỏa mãn $|z|=4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=(3+4i)z+i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=4$. **B.** $r=5$. **C.** $r=20$. **D**. $r=22$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi $w=a+bi$, ta có $w=a+bi=(3+4i)z+i\Leftrightarrow z=\frac{a+(b-1)i}{3+4i}=\frac{[a+(b-1)i](3-4i)}{9-16i^2}$

$=\frac{3a+4b-4}{25}+\frac{(3b-4a-3)}{25}.i\Rightarrow|z|=\frac{\sqrt{(3a+4b-4)^2+(3b-4a-3)^2}}{25}$

Mà $|z|=4$ nên $\Leftrightarrow(3a+4b-4)^2+(3b-4a-3)^2=100^2\Leftrightarrow a^2+b^2-2b=399$

Theo giả thiết, tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w=(3+4i)z+i$ là một đường tròn nên ta có $a^2+b^2-2b=399\Leftrightarrow a^2+(b-1)^2=400\Rightarrow r=\sqrt{400}=20$

BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HỆ SỐ THỰC

A. LÍ THUYẾT

1. Căn bậc hai của một phức

Định nghĩa

Cho số phức w. Mỗi số phức z thỏa mãn $z^2 = w$ được gọi là một căn bậc hai của w

Tìm căn bậc hai của số phức w

- w là số thực.
  - + Nếu $w < 0$ thì w có hai căn bậc hai là $i\sqrt{-w}$ và $-i\sqrt{-w}$
  - + Nếu $w \geq 0$ thì w có hai căn bậc hai là $\sqrt{w}$ và $-\sqrt{w}$
- $w = a + bi \ (a, b \in \mathbb{R}),\ b \neq 0$

  Nếu $z = x + iy$ là căn bậc hai của w thì $(x + iy)^2 = a + bi$

  Do đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$

  Mỗi nghiệm của hệ phương trình cho ta một căn bậc hai của w

Nhận xét:

+) Số 0 có đúng một căn bậc hai là 0

+) Mỗi số phức khác 0 có hai căn bậc hai là hai số đối nhau (khác 0)

2. Giải phương trình bậc hai với hệ số thực

Xét phương trình $az^2 + bz + c = 0 \ (a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0)$

Ta có $\Delta = b^2 - 4ac$

- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm thực $x = -\dfrac{b}{2a}$
- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có hai nghiệm thực phân biệt:

  $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a};\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình có hai nghiệm thực phân biệt:

  $x_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a};\ x_2 = \dfrac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

Chú ý:

Mọi phương trình bậc n:

$A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots + A_{n-1} z + A_n = 0$

luôn có n nghiệm phức (không nhất thiết phân biệt) với n nguyên dương.

Hệ thức Vi-ét đối với phương trình bậc hai với hệ số thực

Phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$ có hai nghiệm

phân biệt x_1, x_2 (thực hoặc phức) thì

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Giải phương trình. Tính toán biểu thức nghiệm

1. Phương pháp giải

Cho phương trình:

$$az^2 + bz + c = 0 \ \ (a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0)$$

- Giải pương trình bậc hai với hệ số thực
- Áp dụng các phép toán trên tập số phức

để biến đổi biểu thức

Ví dụ: Xét phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$

a) Giải phương trình trên tập số phức

b) Tính $|z_1| + |z_2|$

Hướng dẫn giải

a) Ta có: $\Delta' = 1 - 5 = -4 = (2i)^2$

Phương trình có hai nghiệm là:

$z_1 = 2 + 2i$; $z_2 = 2 - 2i$

b) Ta có $|z_1| = |z_2| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

Suy ra $|z_1| + |z_2| = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

2. Bài tậ

Bài tập 1. Trong các số sau, số nào là nghiệm của phương trình $z^2 + 1 = z \ \ (z \in \mathbb{C})$?

A. $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ **B.** $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\dfrac{1+\sqrt{2}i}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $z^2 + 1 = z \ \ (z \in \mathbb{C}) \Leftrightarrow z^2 - 2.z.\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} = -\dfrac{3}{4} \Leftrightarrow \left(z - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3i^2}{4}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}i}{2} \\ z - \dfrac{1}{2} = \dfrac{-\sqrt{3}i}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2} \\ z = \dfrac{1-\sqrt{3}i}{2} \end{array}\right.$$

Bài tập 2. Phương trình $z^2 + az + b = 0 \ \ (a, b \in \mathbb{R})$ có nghiệm phức là $3 + 4i$. Giá trị của $a + b$ bằng

A. 31 **B.** 5 **C.** 19 **D.** 29

Hướng dẫn giải

Chọn C

Chú ý: *Nếu* z_0 là

Cách 1: Do $z=3+4i$ là nghiệm của phương trình $z^2+az+b=0$ nên ta có:

$(3+4i)^2+a(3+4i)+b=0 \Leftrightarrow (3a+b-7)+(4a+24)i=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}3a+b-7=0\\4a+24=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-6\\b=25\end{cases}$

Do đó $a+b=19$

nghiệm của phương trình bậc hai với hệ số thực thì $\overline{z_0}$ cũng là nghiệm của phương trình

Cách 2: Vì $z_1=3+4i$ là nghiệm của phương trình $z^2+az+b=0$ nên $z_2=3-4i$ cũng là nghiệm của phương trình đã cho

Áp dụng hệ thức Vi-ét vào phương trình trên ta có $\begin{cases}z_1+z_2=-a\\z_1.z_2=b\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}(3+4i)+(3-4i)=-a\\(3+4i)(3-4i)=b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-6\\b=25\end{cases} \Rightarrow a+b=19$

Bài tập 3. Gọi z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $z^2+6z+34=0$. Giá trị của $|z_0+2-i|$ là

A. $\sqrt{17}$ **B.** 17 **C.** $2\sqrt{17}$ **D.** $\sqrt{37}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

ra có $\Delta'=-25=(5i)^2$. Phương trình có hai nghiệm là $z=-3+5i$; $z=-3-5i$

Do đó $z_0=-3+5i \Rightarrow |z_0+2-i|=|-1+4i|=\sqrt{17}$

Bài tập 4. Gọi z_1 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2-2z+5=0$

Tọa độ điểm biểu diễn số phức $\dfrac{7-4i}{z_1}$ trên mặt phẳng phức là

A. $P(3;2)$ **B.** $N(1;-2)$ **C.** $Q(3;-2)$ **D.** $M(1;2)$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có $z^2-2z+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z=1+2i\\z=1-2i\end{array}\right.$

Theo yêu cầu của bài toán ta chọn $z_1=1-2i$. Khi đó:

$\dfrac{7-4i}{z_1}=\dfrac{7-4i}{1-2i}=\dfrac{(7-4i)(1+2i)}{1^2+2^2}=3+2i$

Vậy điểm biểu diễn của số phức là $P(3;2)$

Bài tập 5. Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-4z+5=0$. Giá trị của biểu thức $(z_1-1)^{2019}+(z_2-1)^{2019}$ bằng

A. 2^{1009} **B.** 2^{1010} **C.** 0 **D.** -2^{1010}

Hướng dẫn giải

Chọn D

Xét phương trình $z^2-4z+5=0\Leftrightarrow(z-2)^2=-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z_1=2+i\\z_2=2-i\end{array}\right.$

Khi đó ta có: $(z_1-1)^{2019}+(z_2-1)^{2019}=(1+i)^{2019}+(1-i)^{2019}$

$=(1+i).\left((1+i)^2\right)^{1009}+(1-i).\left((1-i)^2\right)^{1009}$

$=(1+i).(2i)^{1009}+(1-i).(-2i)^{1009}$

$=(2i)^{1009}\left((1+i)-(1-i)\right)=(2i)^{1010}=\left(i^2\right)^{505}.2^{1010}=-2^{1010}$

Dạng 2: Định lí Vi-ét và ứng dụng

1. Phương pháp giải

Định lí Vi-ét: Cho phương trình:

$$az^2+bz+c=0;\ a,b,c\in\mathbb{R};\ a\neq0$$

có hai nghiệm phức z_1, z_2 thì $\begin{cases}z_1+z_2=-\dfrac{b}{a}\\z_1.z_2=\dfrac{c}{a}\end{cases}$

Ví dụ: Phương trình $z^2-4z+24=0$ có hai nghiệm phức z_1, z_2 nên

$z_1+z_2=4;\ z_1.z_2=24$

Chú ý: *Học sinh hay nhầm lẫn:* $z_1+z_2=\dfrac{b}{a}$

2. Bài tập

Bài tập 1: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-2z+5=0$. Giá trị của biểu thức $z_1^2+z_2^2$ bằng

A. 14 **B.** –9 **C.** –6 **D.** 7

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi z_1, z_2 là nghiệm của phương trình $z^2-2z+5=0$

Theo định lí Vi-ét ta có: $\begin{cases}z_1+z_2=2\\z_1.z_2=5\end{cases}$

Suy ra $z_1^2+z_2^2=(z_1+z_2)^2-2z_1z_2=2^2-2.5=-6$

Bài tập 2: Phương trình bậc hai nào sau đây có nghiệm là $1+2i$? *Chúng ta có thể giải từng*

A. $z^2-2z+3=0$ **B.** $z^2+2z+5=0$

C. $z^2-2z+5=0$ **D.** $z^2+2z+3=0$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Phương trình bậc hai có hai nghiệm phức là liên hợp của nhau nên phương trình bậc hai có nghiệm $1+2i$ thì nghiệm còn lại là $1-2i$

Khi đó tổng và tích của hai nghiệm lần lượt là 2; 5

Vậy số phức $1+2i$ là nghiệm của phương trình $z^2-2z+5=0$

phương trình:

+) $z^2-2z+3=0$

$\Leftrightarrow (z-1)^2=2i^2$

$\Leftrightarrow z-1=\pm i\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow z=1\pm i\sqrt{2}$

+) $z^2+2z+5=0$

$\Leftrightarrow (z+1)^2=4i^2$

$\Leftrightarrow z+1=\pm 2i$

$\Leftrightarrow z=-1\pm 2i$

+) $z^2-2z+5=0$

$\Leftrightarrow (z-1)^2=4i^2$

$\Leftrightarrow z-1=\pm 2i$

$\Leftrightarrow z=1\pm 2i$

+) $z^2+2z+3=0$

$\Leftrightarrow (z+1)^2=2i^2$

$\Leftrightarrow z+1=\pm i\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow z=-1\pm i\sqrt{2}$

Bài tập 3: Kí hiệu z_1, z_2 là nghiệm phức của phương trình $2z^2+4z+3=0$. Tính giá trị biểu thức $P=\left|z_1z_2+i\left(z_1+z_2\right)\right|$

A. $P=1$ **B.** $P=\frac{7}{2}$ **C.** $P=\sqrt{3}$ **D.** $P=\frac{5}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $2z^2+4z+3=0$

Theo định lý Vi-ét ta có $\begin{cases} z_1+z_2=-2 \\ z_1.z_2=\frac{3}{2} \end{cases}$

Ta có $P=\left|z_1z_2+i\left(z_1+z_2\right)\right|=\left|\frac{3}{2}+i(-2)\right|=\left|\frac{3}{2}-2i\right|=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+(-2)^2}=\frac{5}{2}$

Bài tập 4: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình

Cách khác:

Ta có:

$z^2-4z+7=0$. Giá tị của $P=z_1^3+z_2^3$ bằng

A. –20 **B.** 20

C. $14\sqrt{7}$ **D.** $28\sqrt{7}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Theo định lý Vi-ét ta có $\begin{cases} z_1+z_2=4 \\ z_1.z_2=7 \end{cases}$

Suy ra $z_1^3+z_2^3=\left(z_1+z_2\right)\left(z_1^2-z_1z_2+z_2^2\right)$

$=\left(z_1+z_2\right)\left(\left(z_1+z_2\right)^2-3z_1z_2\right)$

$=4.\left(4^2-3.7\right)=-20$

$z^2-4z+7=0$

$\Leftrightarrow \left(z-2\right)^2=3i^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z_1=2-\sqrt{3}i \\ z_2=2+\sqrt{3}i \end{array}\right.$

Do đó:

$z_1^3+z_2^3$

$=\left(2-\sqrt{3}i\right)^3+\left(2+\sqrt{3}i\right)^3$

$=-20$

Bài tập 5: Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $3z^2-2z+27=0$. Giá trị của $z_1\left|z_2\right|+z_2\left|z_1\right|$ bằng

A. 2 **B.** 6 **C.** $3\sqrt{6}$ **D.** $\sqrt{6}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Áp dụng định lý Vi-ét, ta có $z_1+z_2=\dfrac{2}{3}$ và $z_1.z_2=9$

Mà $\left|z_1\right|=\left|z_2\right|=\sqrt{\left|z_1\right|\left|z_2\right|}=\sqrt{\left|z_1.z_2\right|}=\sqrt{9}=3$

Do đó $z_1\left|z_2\right|+z_2\left|z_1\right|=z_1.3+z_2.3=3\left(z_1+z_2\right)=3.\dfrac{2}{3}=2$

Bài tập 6: Cho số thực $a>2$ và gọi z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2-2z+a=0$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. z_1+z_2 là số thực **B.** z_1-z_2 là số ảo

C. $\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}$ là số ảo **D.** $\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_1}$ là số thực

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $z_1+z_2=-\dfrac{b}{a}=2$. Đáp án **A** đúng

Phương trình bậc hai với hệ số thực có hai nghiệm là số phức liên hợp. Gọi $z_1=x+yi$; $x,y\in\mathbb{R}$ là một nghiệm, nghiệm còn lại là $z_2=x-yi$

Suy ra $z_1-z_2=2yi$ là số ảo. Đáp án B đúng

$$\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}=\frac{z_1^2+z_2^2}{z_1.z_2}=\frac{\left(z_1+z_2\right)^2-2z_1z_2}{z_1.z_2}=\frac{4-2a}{a}\in\mathbb{R}$$

Vậy C là đáp án sai và D đúng

Dạng 3: Phương trình quy về phương trình bậc hai

1. Phương pháp giải

- Nắm vững cách giải phương trình bậc hai với hệ số thực trên tập số phức
- Nắm vững cách giải một số phương trình quy về bậc hai, hệ phương trình đại số bậc cao;…

Ví dụ: Giải phương trình: $z^4 - z^2 - 6 = 0$ trên tập số phức.

Hướng dẫn giải

Đặt $z^2 = t$, ta có phương trình:

$$t^2 - t - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3 \\ t = -2 \end{array}\right.$$

Với $t = 3$ ta có $z^2 = 3 \Rightarrow z = \pm\sqrt{3}$

Với $t = -2$ ta có $z^2 = -2 \Rightarrow z = \pm i\sqrt{2}$

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm $z = \pm\sqrt{3}$; $z = \pm i\sqrt{2}$

2. Bài tậpmẫu

Bài tập 1: Tổng môđun bốn nghiệm phức của phương trình $2z^4 - 3z^2 - 2 = 0$ là

A. $3\sqrt{2}$ **B.** $5\sqrt{2}$ **C.** $2\sqrt{5}$ **D.** $2\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta có: $2z^4 - 3z^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 = 2 \\ z^2 = -\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}.i^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \sqrt{2} \\ z = -\sqrt{2} \\ z = \dfrac{\sqrt{2}}{2}i \\ z = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}i \end{array}\right.$

Khi đó, tổng môđun bốn nghiệm phức của phương trình đã cho bằng $\left|\sqrt{2}\right| + \left|-\sqrt{2}\right| + \left|\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right| + \left|-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right| = 3\sqrt{2}$

Bài tập 2: Kí hiệu z_1, z_2, z_3, z_4 là bốn nghiệm phức của phương trình $z^4 + 4z^2 - 5 = 0$. Giá trị của $|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_4|^2$ bằng

A. $2 + 2\sqrt{5}$ **B.** 12 **C.** 0 **D.** $2 + \sqrt{5}$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có: $z^4 + 4z^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 = 1 \\ z^2 = -5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 1 \\ z = -1 \\ z = \sqrt{5}i \\ z = -\sqrt{5}i \end{array}\right.$

Phương trình có bốn nghiệm lần lượt là: $z_1=1,\ z_2=-1,\ z_3=-i\sqrt{5},\ z_4=i\sqrt{5}$

Do đó: $|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2+|z_4|^2=1^2+1^2+\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2=12$

Bài tập 3: Gọi $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$ là các nghiệm phức của phương trình $\left(z^2+z\right)^2+4\left(z^2+z\right)-12=0$.

Giá trị của biểu thức $S=|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2+|z_4|^2$ là

A. $S=18$ **B.** $S=16$ **C.** $S=17$ **D.** $S=15$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có: $\left(z^2+z\right)^2+4\left(z^2+z\right)-12=0$

Đặt $t=z^2+z$, ta có $t^2+4t-12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=-6\end{array}\right.$

Suy ra: $\left[\begin{array}{l}z^2+z-2=0\\z^2+z+6=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z_1=1\\z_2=-2\\z_3=\dfrac{-1+i\sqrt{23}}{2}\\z_4=\dfrac{-1-i\sqrt{23}}{2}\end{array}\right.$

Suy ra $S=1^2+(-2)^2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{23}}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(-\dfrac{\sqrt{23}}{2}\right)^2=17$

Bài tập 4: Gọi $z_1,\ z_2$ là hai nghiệm của phương trình $\dfrac{|z|^4}{z^2}+\overline{z}=-4$. Khi đó $|z_1+z_2|$ bằng

A. 1 **B.** 4 **C.** 8 **D.** 2

Hướng dẫn giải

Chọn A

Điều kiện: $z\neq 0$

Ta có: $\dfrac{|z|^4}{z^2}+\overline{z}=-4\Leftrightarrow\left(\dfrac{|z|^2}{z}\right)^2+\overline{z}=-4\Leftrightarrow\left(\dfrac{z.\overline{z}}{z}\right)^2+\overline{z}=-4$

$\Leftrightarrow\overline{z}^2+\overline{z}+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\overline{z}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{15}}{2}i\\\overline{z}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{15}}{2}i\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}z=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{15}}{2}i\\z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{15}}{2}i\end{array}\right.$

Vậy $|z_1+z_2|=\left|-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{15}}{2}i-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{15}}{2}i\right|=|-1|=1$

Bài tập 5: Cho số thực *a,* biết rằng phương trình $z^4+az^2+1=0$ có bốn nghiệm $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$ thỏa mãn $\left(z_1^2+4\right)\left(z_2^2+4\right)\left(z_3^2+4\right)\left(z_4^2+4\right)=441$. Tìm *a*

A. $\left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-\dfrac{19}{2} \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=\dfrac{19}{2} \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=-\dfrac{19}{2} \end{array}\right.$ **D.** $\left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=\dfrac{19}{2} \end{array}\right.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Nhận xét: $z^2+4=z^2-(2i)^2=(z+2i)(z-2i)$

Đặt $f(x)=z^4+az^2+1$, ta có:

$$\left(z_1^2+4\right)\left(z_2^2+4\right)\left(z_3^2+4\right)\left(z_4^2+4\right)=\prod_{k=1}^{4}\left(z_k+2i\right).\prod_{k=1}^{4}\left(z_k-2i\right)=f(-2i).f(2i)$$

$$=\left(16i^4+4ai^2+1\right)\left(16i^4+4ai^2+1\right)=(17-4a)^2$$

Theo giả thiết, ta có $(17-4a)^2=441\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=\dfrac{19}{2} \end{array}\right.$

Bài tập 6: Cho số phức z thỏa mãn $11z^{2018}+10iz^{2017}+10iz-11=0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $2\le|z|<3$ **B.** $0\le|z|<1$ **C.** $1<|z|<2$ **D.** $\dfrac{1}{2}\le|z|<\dfrac{3}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Ta có $z^{2017}(11z+10i)=11-10iz\Leftrightarrow z^{2017}=\dfrac{11-10iz}{11z+10i}\Rightarrow|z|^{2017}=\left|\dfrac{11-10iz}{11z+10i}\right|$

Đặt $z=a+bi$ có

$$\left|\frac{11-10iz}{11z+10i}\right|=\left|\frac{11-10i(a+bi)}{11(a+bi)+10i}\right|=\sqrt{\frac{(10b+11)^2+100a^2}{121a^2+(11b+10)^2}}=\sqrt{\frac{100\left(a^2+b^2\right)+220b+121}{121\left(a^2+b^2\right)+220b+100}}$$

Đặt $t=|z|\ (t\ge0)$ ta có phương trình $t^{2017}=\sqrt{\dfrac{100t^2+220b+121}{121t^2+220b+100}}$

Nếu $t\ge1\Rightarrow VT\ge1;\ VP\le1$

Nếu $t\le1\Rightarrow VT\le1;\ VP\ge1$

Nếu $t=1\Rightarrow|z|=1$

BÀI 4. CỰC TRỊ SỐ PHỨC

A. LÍ THUYẾT TRỌNG TÂM

1. Các bất đẳng thức thường dùng

a. Cho các số phức z_1, z_2 ta có:

+) $|z_1|+|z_2| \geq |z_1+z_2|$ (1).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} z_1 = 0 \\ z_1 \neq 0, \exists k \in \mathbb{R}, k \geq 0, z_2 = kz_1 \end{array}\right.$.

+) $|z_1+z_2| \geq \big||z_1|-|z_2|\big|$ (2).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} z_1 = 0 \\ z_1 \neq 0, \exists k \in \mathbb{R}, k \leq 0, z_2 = kz_1 \end{array}\right.$.

b. Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz

Cho các số thực a, b, x, y ta có: $ax+by \leq \sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ay = bx$.

2. Một số kết quả đã biết

a. Cho hai điểm A, B cố định. Với điểm M bất kỳ luôn có bất đẳng thức tam giác:

+) $MA+MB \geq AB$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M$ nằm giữa hai điểm A, B.

+) $|MA-MB| \leq AB$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow B$ nằm giữa hai điểm A, M.

b. Cho hai điểm A, B nằm cùng phía đối với đường thẳng d và M là điểm di động trên d. Ta có:

+) $|MA-MB| \leq AB$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ Ba điểm A, M, B thẳng hàng.

+) Gọi A' là điểm đối xứng với A qua d, khi đó ta có

$MA+MB = MA'+MB \geq A'B$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ Ba điểm A', M, B thẳng hàng.

c. Cho hai điểm A, B nằm khác phía đối với đường thẳng d và M là điểm di động trên d. Ta có:

+) $MA+MB \geq AB$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M$ nằm giữa hai điểm A, B.

+) Gọi A' là điểm đối xứng với A qua d, khi đó ta có

$|MA-MB| = |MA'-MB| \leq A'B$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ Ba điểm A', M, B thẳng hàng.

d. Cho đoạn thẳng PQ và điểm A không thuộc PQ, M là điểm di động trên đoạn thẳng PQ, khi đó $\max AM = \max\{AP, AQ\}$. Để tìm giá trị nhỏ nhất của AM ta xét các trường hợp sau:

+) Nếu hình chiếu vuông góc H của A trên đường thẳng PQ nằm trên đoạn PQ thì $\min AM = AH$.

+) Nếu hình chiếu vuông góc H của A trên đường thẳng PQ không nằm trên đoạn PQ thì $\min AM = \min\{AP; AQ\}$.

e. Cho đường thẳng Δ và điểm A không nằm trên Δ. Điểm M trên Δ có khoảng cách đến A nhỏ nhất chính là hình chiếu vuông góc của A trên Δ.

f. Cho x, y là các tọa độ của các điểm thuộc miền đa giác $A_1A_2...A_n$. Khi đó giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của biểu thức $F = ax + by$ (a, b là hai số thực đã cho không đồng thời bằng 0) đạt được tại một trong các đỉnh của miền đa giác.

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA



Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz

Với các số thực a, b, x, y ta có

$$|ax + by| \le \sqrt{\left(a^2 + b^2\right)\left(x^2 + y^2\right)}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$.

Các bất đẳng thức thường dùng

Bất đẳng thức tam giác

$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$. Dấu "=" xảy ra khi $z_1 = kz_2\,(k \ge 0)$.

$|z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|$. Dấu. "=" xảy ra khi $z_1 = kz_2\,(k \le 0)$.

$|z_1 + z_2| \ge \left||z_1| - |z_2|\right|$. Dấu. "=" xảy ra khi $z_1 = kz_2\,(k \le 0)$.

$|z_1 \quad z_2| \quad |z_1| \quad |z_2|$ Dấu "=" xảy ra khi $z_1 = kz_2\,(k \ge 0)$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Phương pháp hình học

1. Phương pháp giải

Bước 1: Chuyển đổi ngôn ngữ bài toán số phức

Vi dụ: Cho số phức z thỏa mãn $2\left(z - \bar{z}\right) = i\left(z + \bar{z}\right)^2$. Giá trị nhỏ nhất của $|z + 3i|$ bằng

A. 3. **B.** $\sqrt{3}$.

C. $2\sqrt{3}$. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

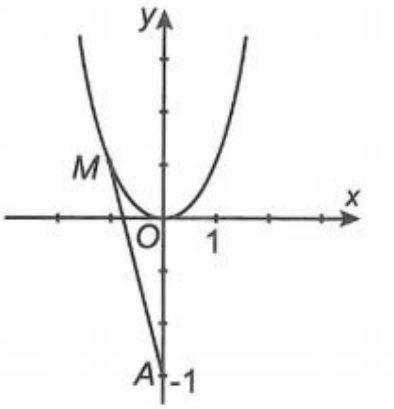
Giả sử $z = x + yi\,(x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = x - yi$. Khi đó

sang ngôn ngữ hình học.

$2\left(z-\bar{z}\right)=i\left(z+\bar{z}\right)^2 \Leftrightarrow 2\left(2yi\right)=4x^2i \Leftrightarrow y=x^2$.

Gọi $M\left(x;y\right);A\left(0;-3\right)$ lần lượt là điểm biểu diễn cho số phức $z;-3i$ thì $\left|z+3i\right|=MA$.

Bước 2: Sử dụng một số kết quả đã biết để giải bài toán hình học.



Parabol $y=x^2$ có đỉnh tại điểm $O\left(0;0\right)$, trục đối xứng là đường thẳng $x=0$. Hơn nữa, điểm A thuộc trục đối xứng của parabol, nên ta có: $MA\geq OA=3$. Suy ra, $\min MA=3$ khi $M\equiv O$.

Bước 3: Kết luận cho bài toán số phức.

Vậy $\min\left|z+3i\right|=3$, khi $z=0$. **Chọn A.**

2. Bài tập mẫu

Bài tập 1: Cho số phức z thỏa mãn $\left|z-3-4i\right|=1$. Môđun lớn nhất của số phức z bằng

A. 7. **B.** 6.

C. 5. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn B

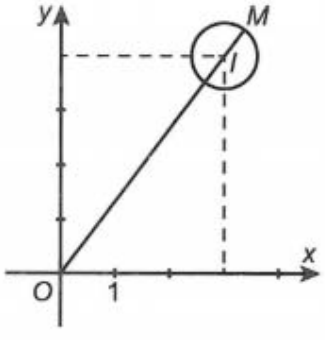
Gọi $M\left(x;y\right),I\left(3;4\right)$ là các điểm biểu diễn lần lượt cho các số phức $z;3+4i$. Từ giả thiết $\left|z-3-4i\right|=1\Rightarrow MI=1$.

Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z thỏa mãn giả thiết là đường tròn tâm $I\left(3;4\right)$, bán kính $r=1$.

Mặt khác $\left|z\right|=OM$. Mà OM đạt giá trị lớn nhất bằng $OI+r$, khi M là giao điểm của đường thẳng OM với đường tròn tâm $I\left(3;4\right)$, bán

Nhận xét:

$OI-r\leq OM=\left|z\right|\leq OI+r$



kính $r=1$. Hay $M\left(\frac{18}{5};\frac{24}{5}\right)$.

Do đó, $\max|z|=OI+r=5+1=6$, khi $z=\frac{18}{5}+\frac{24}{5}i$.

Bài tập 2: Trong các số phức z thỏa mãn $|z-2-4i|=|z-2i|$, số phức z có môđun nhỏ nhất là

A. $z=2-2i$. **B.** $z=1+i$.

C. $z=2+2i$. **D.** $z=1-i$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

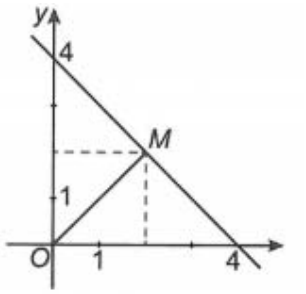
Đặt $z=x+yi(x,y\in\mathbb{R})$. Khi đó $|z-2-4i|=|z-2i|\Leftrightarrow x+y-4=0$ (d).

Vậy tập hợp điểm M biểu diễn số phức z là đường thẳng d.

Do đó $|z|=OM$ nhỏ nhất khi M là hình chiếu của O trên d.

Suy ra $M(2;2)$ hay $z=2+2i$.

Nhận xét: Trong tất cả các đoạn thẳng kẻ từ điểm O đến đường thẳng d, đoạn vuông góc OM ngắn nhất.



Bài tập 3: Cho số phức z thỏa mãn $|z+3|+|z-3|=10$. Giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là

A. 3. **B.** 4.

C. 5. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Cách 1:

Gọi $F_1(-3;0),F_2(3;0)$, có trung điểm là $O(0;0)$. Điểm M biểu diễn số phức z.

Theo công thức trung tuyến thì $|z|^2=OM^2=\frac{MF_1^2+MF_2^2}{2}-\frac{F_1F_2^2}{4}$.

Với mọi số thực a,b ta có bất đẳng thức: $a^2+b^2\geq\frac{(a+b)^2}{2}$

Ta có $MF_1^2+MF_2^2\geq\frac{\left(MF_1^2+MF_2^2\right)^2}{2}=50$.

Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases}MF_1=MF_2\\MF_1+MF_2=10\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}M(-4;0)\\M(4;0)\end{array}\right.\Rightarrow\min|z|=\sqrt{\frac{50}{2}-\frac{36}{4}}=4,$$

Khi $z=4i$ hoặc $z=-4i$.

Cách 2:.

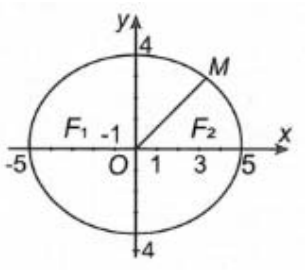
Gọi $F_1(-3;0), F_2(3;0)$, $M(x;y);(x,y\in\mathbb{R})$ lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $-3;3;z$.

Ta có $F_1F_2=2c=6\Rightarrow c=3$. Theo giả thiết ta có $MF_1+MF_2=10$, tập hợp điểm M là đường elip có trục lớn $2a=10\Rightarrow a=5$; trục bé $2b=2\sqrt{a^2-c^2}=2\sqrt{25-9}=8$.

Mặt khác $OM=|z|$ nhỏ nhất bằng 4 khi $z=4i$ hoặc $z=-4i$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $|z|$ bằng 4.

Với mọi điểm M nằm trên elip, đoạn OM ngắn nhất là đoạn nối O với giao điểm của trục bé với elip.



Bài tập 4: Xét số phức z thỏa mãn $4|z+i|+3|z-i|=10$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là

A. $\frac{60}{49}$. **B.** $\frac{58}{49}$.

C. $\frac{18}{7}$. **D.** $\frac{16}{7}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Gọi $A(0;-1), B(0;1)$, đoạn thẳng AB có trung điểm $O(0;0)$. Điểm M biểu diễn số phức z.

Theo công thức trung tuyến $|z|^2=OM^2=\frac{MA^2+MB^2}{2}-\frac{AB^2}{4}$.

Theo giả thiết $4MA+3MB=10$. Đặt $MA=a\Rightarrow MB=\frac{10-4a}{3}$.

Khi đó

$|MA-MB|=\frac{|10-7a|}{3}\le AB=2\Rightarrow -6\le 10-7a\le 6\Leftrightarrow \frac{4}{7}\le a\le\frac{16}{7}$.

Ta có $MA^2+MB^2=a^2+\left(\frac{10-4a}{3}\right)^2=\frac{(5a-8)^2+36}{9}$.

Do $-\frac{36}{7}\le 5a-8\le\frac{24}{7}\Rightarrow 0\le(5a-8)^2\le\frac{576}{49}$ nên

$$\begin{cases} MA^2+MB^2 \ge 4 \\ MA^2+MB^2 \le \dfrac{260}{49} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |z| \ge 1 \\ |z|^2 \le \dfrac{81}{49} \Rightarrow |z| \le \dfrac{9}{7} \end{cases}.$$

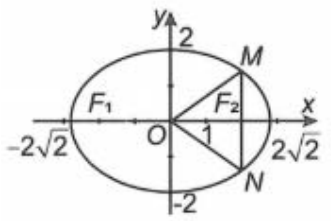
Đẳng thức $|z|=1$ khi $z=\pm\dfrac{24}{25}+\dfrac{7}{25}i$. Đẳng thức $|z|=\dfrac{9}{7}$ khi $z=\dfrac{9}{7}i$.

Vậy tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$ là $\dfrac{16}{7}$.

Bài tập 5: Cho z là số phức thay đổi thỏa mãn $|z-2|+|z+2|=4\sqrt{2}$.

Trong mặt phẳng tọa độ gọi M,N là điểm biểu diễn số phức z và $\bar{z}$.

Giá trị lớn nhất của diện tích tam giác OMN là



A. 1. **B.** $\sqrt{2}$.

C. $4\sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đặt $z=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right) \Rightarrow \bar{z}=x-yi$.

Gọi $F_1(-2;0), F_2(2;0), M(x;y), N(x;-y)$ lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $-2;2;z;\bar{z}$.

Do M,N là điểm biểu diễn số phức z và $\bar{z}$ nên suy ra M,N đối xứng nhau qua Ox.

Khi đó $S_{\Delta OMN}=|xy|$.

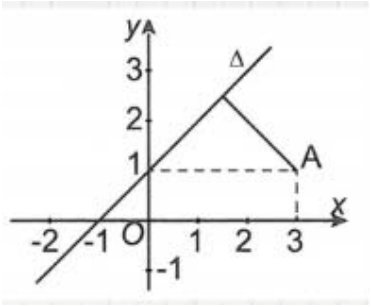
Ta có $F_1F_2=2c=4 \Rightarrow c=2$. Theo giả thiết ta có $MF_1+MF_2=4\sqrt{2}$, tập hợp điểm M thỏa điều kiện trên là elip có trục lớn $2a=4\sqrt{2} \Rightarrow a=2\sqrt{2}$; trục bé $2b=2\sqrt{a^2-c^2}=2\sqrt{8-4}=4 \Rightarrow b=2$.

Nên elip có phương trình $(E):\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

Do đó $1=\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4} \ge 2\sqrt{\dfrac{x^2}{8}.\dfrac{y^2}{4}}=\dfrac{|xy|}{2\sqrt{2}} \Rightarrow S_{\Delta OMN}=|xy| \le 2\sqrt{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x=2 \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$.

Bài tập 6: Cho số phức z thỏa mãn $|z+i|=|\overline{z}+2+i|$. Giá trị nhỏ nhất của $P=|(i-1)z+4-2i|$ là



A. 1. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

C. 3. **D.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi $z=x+yi(x,y\in\mathbb{R})$; $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z.

Ta có $|z+i|=|\overline{z}+2+i|\Leftrightarrow|x+(y+1)i|=|x+2-(y-1)i|$

$\Leftrightarrow x^2+(y+1)^2=(x+2)^2+(y-1)^2\Leftrightarrow x-y+1=0\ (\Delta)$.

Ta có $P=|(i-1)z+4-2i|=|(i-1)|\left|z+\frac{4-2i}{(i-1)}\right|=\sqrt{2}|z-3-i|$

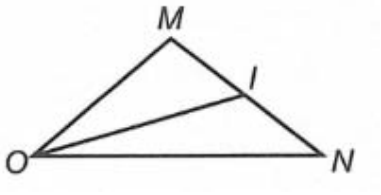
$=\sqrt{2}\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}=\sqrt{2}MA$, với $A=(3;1)$.

$\Rightarrow P_{\min}=\sqrt{2}MA_{\min}=\sqrt{2}d(A,\Delta)=\sqrt{2}\frac{|3-1+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3$.

Đẳng thức xảy ra khi M là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng Δ hay $M\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)\Rightarrow z=\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i$.

Bài tập 7: Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $|z_1+z_2|=6$ và $|z_1-z_2|=2$.

Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z_1|+|z_2|$. Khi đó môđun của số phức $M+mi$ là



A. $\sqrt{76}$. **B.** 76.

C. $2\sqrt{10}$. **D.** $2\sqrt{11}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Ta gọi A,B lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức z_1,z_2.

Từ giả thiết $|z_1+z_2|=6\Rightarrow|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=6\Leftrightarrow|\overrightarrow{OI}|=3$ với I là trung điểm của đoạn thẳng AB.

$|z_1-z_2|=2\Rightarrow|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|=2\Leftrightarrow AB=2$.

Ta có $OA^2+OB^2=2OI^2+\dfrac{AB^2}{2}=20$.

$P=|z_1|+|z_2|=OA+OB\Rightarrow P^2\le\left(1^2+1^2\right)\left(OA^2+OB^2\right)=40$.

Vậy $\max P=2\sqrt{10}=M$.

Mặt khác, $P=|z_1|+|z_2|=\left|\overrightarrow{OA}\right|+\left|\overrightarrow{OB}\right|\ge\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|=6$.

Vậy $\min P=6=m$.

Suy ra $|M+mi|=\sqrt{40+36}=\sqrt{76}$.

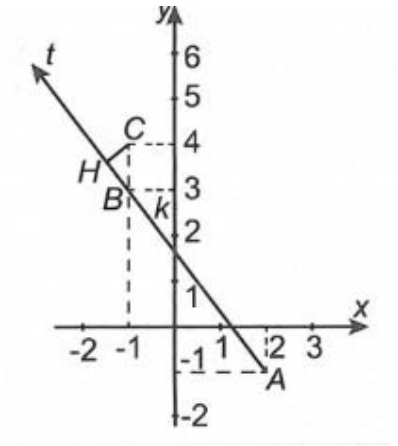
Bài tập 8: Cho số phức z thỏa mãn $|z-2+i|-|z+1-3i|=5$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+1-4i|$ bằng

A. 1. **B.** $\dfrac{3}{5}$.

C. $\dfrac{1}{5}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Gọi $M(x;y)$ là điểm biểu diễn số phức z ; gọi $A(2;-1),B(-1;3)$ là điểm biểu diễn số phức $2-i;-1+3i$. Ta có $AB=5$.

Từ giả thiết $|z-2+i|-|z+1-3i|=5$

$\Rightarrow\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}-\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}=5$

$\Rightarrow MA-MB=5\Rightarrow MA-MB=AB\Rightarrow MA=MB+AB$.

Suy ra M,A,B thẳng hàng (B nằm giữa M và A). Do đó quỹ tích điểm M là tia Bt ngược hướng với tia BA.

$P=|z+1-4i|=\sqrt{(x+1)^2+(y-4)^2}$, với $C(-1;4)\Rightarrow P=MC$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-3;4)$ phương trình đường thẳng $AB:4x+3y-5=0$.

$CH=d(C,AB)=\dfrac{|4(-1)+3.4-5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{3}{5}$, $CB=\sqrt{(-1+1)^2+(3-4)^2}=1$.

Do đó $\min P=CH=\dfrac{3}{5}$ khi H là giao điểm của đường thẳng AB và đường thẳng đi qua điểm C và vuông góc với AB.

Dạng 2: Phương pháp đại số

1. Phương pháp giải

Các bất đẳng thức thường dùng:

1. Cho các số phức z_1, z_2 ta có:

a. $|z_1|+|z_2|\geq|z_1+z_2|$ (1)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} z_1=0 \\ z_1\neq 0, \exists k\in\mathbb{R}, k\geq 0, z_2=kz_1 \end{array}\right.$

b. $|z_1+z_2|\geq\big||z_1|-|z_2|\big|$.(2)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} z_1=0 \\ z_1\neq 0, \exists k\in\mathbb{R}, k\leq 0, z_2=kz_1 \end{array}\right.$

2. Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz

Cho các số thực a,b,x,y ta có $ax+by\leq\sqrt{\left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ay=bx$.

2. Bài tập

Bài tập 1: Cho số phức $z=a+(a-3)i,(a\in\mathbb{R})$. Giá trị của a để khoảng cách từ điểm biểu diễn số phức z đến gốc tọa độ là nhỏ nhất bằng

A. $a=\dfrac{3}{2}$. **B.** $a=\dfrac{1}{2}$.

C. $a=1$. **D.** $a=2$.

Nhận xét: Lời giải có sử dụng đánh giá

$$x^2\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$$

Hướng dẫn giải

Chọn A

$|z|=\sqrt{a^2+(a-3)^2}=\sqrt{2\left(a-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{9}{2}}\geq\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=\dfrac{3}{2}$. Hay $z=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{2}i$.

Bài tập 2: Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i|=|z-2i|$, số phức z có môđun nhỏ nhất là

A. $z=1+2i$. **B.** $z=-1-i$.

C. $z=2+2i$. **D.** $z=-1+i$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi $z=a+bi\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$.

$\left|z-2-4i\right|=\left|z-2i\right|\Leftrightarrow\left|\left(a-2\right)+\left(b-4\right)i\right|=\left|a+\left(b-2\right)i\right|\Leftrightarrow -a-b+4=0$.

$\Rightarrow z=\left(4-b\right)+bi\Rightarrow\left|z\right|=\sqrt{\left(4-b\right)^2+b^2}=\sqrt{2\left(b-2\right)^2+8}\geq 2\sqrt{2}$.

Suy ra $\min\left|z\right|=2\sqrt{2}\Leftrightarrow b=2\Rightarrow a=2\Rightarrow z=2+2i$.

Bài tập 3: Cho số phức z thỏa mãn $\left|\dfrac{z-1}{z-2i}\right|=1$, biết $\left|z+\dfrac{3}{2}-5i\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của $\left|z\right|$bằng

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi $z=a+bi\left(z\neq 2i\right)\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$.

$\left|\dfrac{z-1}{z-2i}\right|=1\Leftrightarrow\left|z-1\right|=\left|z-2i\right|\Leftrightarrow 2a-4b+3=0\Rightarrow 2a+3=4b$

$\Rightarrow\left|z+\dfrac{3}{2}-5i\right|=\sqrt{\left(2b\right)^2+\left(b-5\right)^2}=\sqrt{5\left(b-1\right)^2+20}\geq 2\sqrt{5}$

Suy ra $\min\left|z+\dfrac{3}{2}-5i\right|=2\sqrt{5}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\Rightarrow z=\dfrac{1}{2}+i\\ b=1\end{cases}$

Vậy $\left|z\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Bài tập 4: Cho hai số phức z_1,z_2 thỏa mãn $z_1-z_2=3+4i$ và $\left|z_1+z_2\right|=5$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $\left|z_1\right|+\left|z_2\right|$ là

A. 5. **B.** $5\sqrt{3}$.

C. $12\sqrt{5}$. **D.** $5\sqrt{2}$.

Nhận xét: Lời giải sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $2\left(\left|z_1\right|^2+\left|z_2\right|^2\right)=\left|z_1+z_2\right|^2+\left|z_1-z_2\right|^2=5^2+3^2+4^2=50$.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta có

$|z_1|+|z_2| \le \sqrt{2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

Gọi $z_1 = x+yi, z_2 = a+bi; a,b,x,y \in \mathbb{R}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} z_1 - z_2 = 3+4i \\ |z_1+z_2| = 5 \\ |z_1|^2+|z_2|^2 = 25 \\ |z_1| = |z_2| \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{2} \\ y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ và $\begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = -\dfrac{7}{2} \end{cases}$. Hay $z_1 = \dfrac{7}{2}+\dfrac{1}{2}i; z_2 = \dfrac{1}{2}-\dfrac{7}{2}i$.

Thay z_1, z_2 vào giả thiết thỏa mãn.

Vậy, giá trị lớn nhất của biểu thức $|z_1|+|z_2|$ bằng $5\sqrt{2}$.

Bài tập 5: Cho số phức z thỏa mãn $|z|=1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = |1+z|+3|1-z|$ bằng

A. $2\sqrt{10}$. **B.** $6\sqrt{5}$.

C. $3\sqrt{15}$. **D.** $2\sqrt{5}$.

Nhận xét: Lời giải sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $P \le \sqrt{\left(1^2+3^2\right)\left(|1+z|^2+|1-z|^2\right)} = \sqrt{20\left(|1|^2+|z|^2\right)} = 2\sqrt{10}$

Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} |z|=1 \\ |1+z| = \dfrac{|1-z|}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^2+y^2+1+\dfrac{5x}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{4}{5} \\ y = \pm\dfrac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow z = -\frac{4}{5} \pm \frac{3}{5}i .$$

Vậy $\max P = 2\sqrt{10}$.

Bài tập 6: Cho số phức z thỏa mãn $|z-1+2i|=2$. Giá trị lớn nhất của $|z+3-i|$ bằng

A. 6. **B.** 7.

C. 8. **D.** 9.

Nhận xét: Lời giải sử dụng bất đẳng thức $|z_1|+|z_2| \ge |z_1+z_2|$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $|z+3-i|=|(z-1+2i)+(4-3i)|\le|z-1+2i|+|4-3i|=7$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}z-1+2i=k(4-3i),k>0\\|z-1+2i|=2\end{cases}\Rightarrow z=\frac{13}{5}-\frac{16}{5}i$.

Vậy giá trị lớn nhất của $|z+3-i|$ bằng 7.

Bài tập 7: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-3+4i|=4$. Gọi M và m là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của môđun số phức z. Giá trị của $M.m$ bằng

A. 9. **B.** 10.

C. 11. **D.** 12.

Nhận xét: Lời giải sử dụng bất đẳng thức

$|z_1|+|z_2|\ge|z_1+z_2|$ và

$\big||z_1|-|z_2|\big|\le|z_1-z_2|$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $|z|=|(z-3+4i)+(3-4i)|\le|z-3+4i|+|3-4i|=4+5=9=M$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}z-3+4i=k(3-4i),(k>0)\\|z-3+4i|=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=\frac{4}{5}\\z=\frac{27}{5}-\frac{36}{5}i\end{cases}$.

Mặt khác

$|z|=|(z-3+4i)+(3-4i)|\ge\big||z-3+4i|-|3-4i|\big|=|4-5|=1=m$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}z-3+4i=k(3-4i),(k<0)\\|z-3+4i|=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=-\frac{4}{5}\\z=\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\end{cases}$

Bài tập 8: Cho số phức z thỏa mãn $|z^2+4|=|z(z+2i)|$. Giá trị nhỏ nhất của $|z+i|$ bằng

A. 2. **B.** $\sqrt{2}$.

C. 1. **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Chú ý: Với mọi số phức z_1,z_2 :

$|z_1.z_2|=|z_1|.|z_2|$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $|z^2+4|=|z(z+2i)|\Leftrightarrow|(z+2i)(z-2i)|=|z(z+2i)|$

$\Leftrightarrow |z+2i|.|z-2i| = |z|.|z+2i|$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |z+2i| = 0 \\ |z| = |z-2i| \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -2i \\ |z| = |z-2i| \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -2i \\ z = a+i, a \in \mathbb{R} \end{array}\right.$

Do đó $\left[\begin{array}{l} |z+i| = |-2i+i| = 1 \\ |z+i| = |(a+i)+i| = \sqrt{a^2+4} \geq 2 \end{array}\right. \Rightarrow \min|z+1| = 1$.

Bài tập 9: Tìm số phức z thỏa mãn $(z-1)(\bar{z}+2i)$ là số thực và $|z|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $z = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$. **B.** $z = -\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$.

C. $z = -\frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$. **D.** $z = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi $z = a+bi; a,b \in \mathbb{R}$.

Ta có $(z-1)(\bar{z}+2i) = \left[(a-1)a - b(2-b)\right] + (2a+b-2)i$

Do đó $(z-1)(\bar{z}+2i)$ là số thực $\Leftrightarrow 2a+b-2=0 \Leftrightarrow b = 2-2a$

Khi đó $|z| = \sqrt{a^2+(2-2a)^2} = \sqrt{5\left(a-\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}} \geq \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a = \frac{4}{5} \\ b = \frac{2}{5} \end{cases}$

$\min|z| = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{5} \\ b = \frac{2}{5} \end{cases}$. Vậy $z = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i$.

Bài tập 10: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-1| = \sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |z+i| + |z-2-i|$.

A. $\max T = 8\sqrt{2}$. **B.** $\max T = 4$.

C. $\max T = 4\sqrt{2}$. **D.** $\max T = 8$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $z=x+yi\left(x,y\in\mathbb{R}\right)$, ta có

$\left|z-1\right|=\sqrt{2}\Leftrightarrow\left|x-1+yi\right|=\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{\left(x-1\right)^2+y^2}=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2+y^2=2\Leftrightarrow x^2+y^2=2x+1$ (*).

Lại có

$T=\left|z+i\right|+\left|z-2-i\right|=\left|x+\left(y+1\right)i\right|+\left|x-2+\left(y-1\right)i\right|$

$=\sqrt{x^2+y^2+2y+1}+\sqrt{x^2+y^2-4x-2y+5}$

Kết hợp với (*) ta được

$T=\sqrt{2x+2y+2}+\sqrt{6-2x-2y}=\sqrt{2\left(x+y\right)+2}+\sqrt{6-2\left(x+y\right)}$

Đặt $T=x+y$, khi đó $T=f\left(t\right)=\sqrt{2t+2}+\sqrt{6-2t}$ với $t\in\left[-1;3\right]$.

Cách 1: Sử dụng phương pháp hàm số

Ta có $f'\left(t\right)=\frac{1}{\sqrt{2t+2}}-\frac{1}{\sqrt{6-2t}};f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow t=1$.

Mà $f\left(1\right)=4,f\left(-1\right)=2\sqrt{2},f\left(3\right)=2\sqrt{2}$. Vậy $\max f\left(t\right)=f\left(1\right)=4$.

Cách 2: Sử dụng phương pháp đại số

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$T=\sqrt{2t+2}+\sqrt{6-2t}\le\sqrt{\left(1+1\right).8}=4$.

Đẳng thức xảy ra khi $t=1$.

Bài tập 11: Cho số phức z thỏa mãn $\left|z\right|=1$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $\left|z+1\right|+\left|z^2+z+1\right|$. Khi đó giá trị của $M+m$ bằng

A. 5. **B.** 6.

C. $\frac{5}{4}$. **D.** $\frac{9}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đặt $z=a+bi\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$ và $t=\left|z+1\right|$. Khi đó

$t^2=\left(z+1\right)\left(\overline{z}+1\right)=\left|z\right|^2+1+z+\overline{z}=2+2a\Rightarrow a=\frac{t^2-2}{2}$.

Ta có

$\left|z^2+z+1\right|=\left|a^2-b^2+2abi+a+bi+1\right|=\left|a^2+\left(1-b^2\right)+a+b\left(2a+1\right)i\right|$

$=\sqrt{\left(2a^2+a\right)^2+b^2\left(2a+1\right)^2}=\sqrt{a^2\left(2a+1\right)^2+\left(1-a^2\right)\left(2a+1\right)^2}$

$=\left|2a+1\right|=\left|t^2-1\right|$

$\Rightarrow\left|z+1\right|+\left|z^2+z+1\right|=t+\left|t^2-1\right|$ (với $0\le t\le 2$, do $a^2\le 1$).

Xét hàm số $f\left(t\right)=t+\left|t^2-1\right|$ với $t\in\left[0;2\right]$.

Trường hợp 1: $t\in\left[0;1\right]\Rightarrow f\left(t\right)=t+1-t^2=-t^2+t+1\le f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{4}$

và có $f\left(0\right)=f\left(1\right)=1$ nên $\begin{cases}\max\limits_{[0;1]}f\left(t\right)=\dfrac{5}{4}\\ \min\limits_{[0;1]}f\left(t\right)=1\end{cases}$.

Trường hợp 2:

$t\in\left[1;2\right]\Rightarrow f\left(t\right)=t+t^2-1=t^2+t-1, f'\left(t\right)=2t+1>0,\forall t\in\left[1;2\right]$

Do đó hàm số luôn đồng biến trên $\left[1;2\right]\Rightarrow$ $\begin{cases}\max\limits_{[1;2]}f\left(t\right)=f\left(2\right)=5\\ \min\limits_{[1;2]}f\left(t\right)=f\left(1\right)=1\end{cases}$.

Vậy $\begin{cases}M=\max\limits_{[0;2]}f\left(t\right)=5\\ m=\min\limits_{[0;2]}f\left(t\right)=1\end{cases}\Rightarrow M+m=6$.

CHƯƠNG I: KHỐI ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

BÀI 1. KHÁI NIỆM VỀ KHỐI ĐA DIỆN

A. LÍ THUYẾT

I – KHỐI LĂNG TRỤ VÀ KHỐI CHÓP

Khối lăng trụ là phần không gian được giới hạn bởi một hình lăng trụ kể cả hình lăng trụ ấy.

Khối chóp là phần không gian được giới hạn bởi một hình chóp kể cả hình chóp ấy.

Khối chóp cụt là phần không gian được giới hạn bởi một hình chóp cụt kể cả hình chóp cụt ấy.

II – KHÁI NIỆM VỀ HÌNH ĐA DIỆN VÀ KHỐI ĐA DIỆN

1. Khái niệm về hình đa diện

Hình đa diện là hình được tạo bởi một số hữu hạn các đa giác thỏa mãn hai tính chất:

- Hai đa giác phân biệt chỉ có thể hoặc không có điểm chung, hoặc chỉ có một đỉnh chung, hoặc chỉ có một cạnh chung.
- Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác.

Mỗi đa giác như trên được gọi là một mặt của hình đa diện.

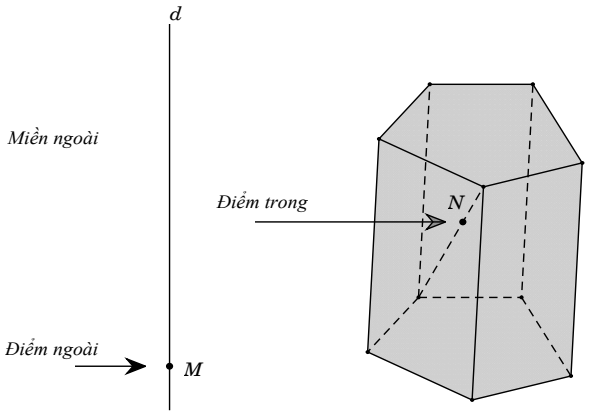
Các đỉnh, các cạnh của đa giác ấy theo thứ tự gọi là các đỉnh, các cạnh của hình đa diện.

2. Khái niệm về khối đa diện

Khối đa diện là phần không gian được giới hạn bởi một hình đa diện, kể cả hình đa diện đó.

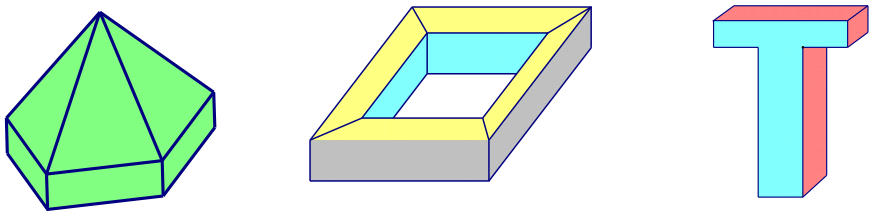
Những điểm không thuộc khối đa diện được gọi là điểm ngoài của khối đa diện. Tập hợp các điểm ngoài được gọi là miền ngoài của khối đa diện. Những điểm thuộc khối đa diện nhưng không thuộc hình đa diện ứng với đa diện ấy được gọi là điểm trong của khối đa diện. Tập hợp các điểm trong được gọi là miền trong của khối đa diện.

Mỗi khối đa diện được xác định bởi một hình đa diện ứng với nó. Ta cũng gọi đỉnh, cạnh, mặt, điểm trong, điểm ngoài… của một khối đa diện theo thứ tự là đỉnh, cạnh, mặt, điểm trong, điểm ngoài… của hình đa diện tương ứng.

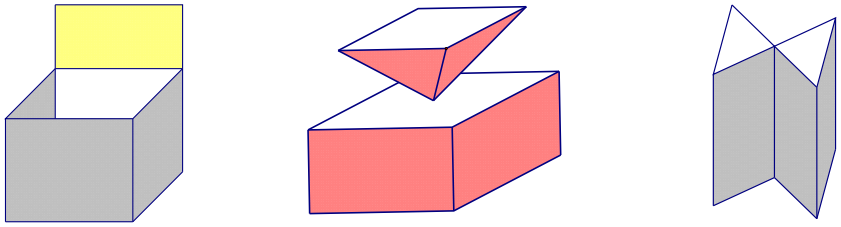


Ví dụ

- Các hình dưới đây là những khối đa diện:



- Các hình dưới đây không phải là những khối đa diện:



Hình a Hình b Hình c

Giải thích: Hình a không phải là hình đa diện vì tồn tại cạnh không phải là cạnh chung của hai mặt; Hình b không phải là hình đa diện vì có một điểm đặc biệt trong hình, điểm đó không phải là đỉnh chung của hai đa giác; Hình c không phải là hình đa diện vì tồn tại một cạnh là cạnh chung của bốn đa giác.

III – HAI ĐA DIỆN BẰNG NHAU

1. Phép dời hình trong không gian

Trong không gian, quy tắc đặt tương ứng mỗi điểm M với điểm M' xác định duy nhất được gọi là một phép biến hình trong không gian.

Phép biến hình trong không gian được gọi là phép dời hình nếu nó bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm tùy ý.

a) Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$, là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'}=\vec{v}$. Kí hiệu là $T_{\vec{v}}$.

b) Phép đối xứng qua mặt phẳng (P) là phép biến hình biến mỗi điểm thuộc (P) thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc (P) thành điểm M' sao cho (P) là mặt phẳng trung trực của MM'.

Nếu phép đối xứng qua mặt phẳng (P) biến hình $(\mathscr{H})$ thành chính nó thì (P) được gọi là mặt phẳng đối xứng của $(\mathscr{H})$.

c) Phép đối xứng tâm O là phép biến hình biến điểm O thành chính nó, biến mỗi điểm M khác O thành điểm M' sao cho O là trung điểm của MM'.

Nếu phép đối xứng tâm O biến hình $(\mathscr{H})$ thành chính nó thì O được gọi là tâm đối xứng của $(\mathscr{H})$.

d) Phép đối xứng qua đường thẳng Δ là là phép biến hình biến mọi điểm thuộc đường thẳng Δ thành chính nó, biến mỗi điểm M không thuộc Δ thành điểm M' sao cho Δ là đường trung trực của MM'.

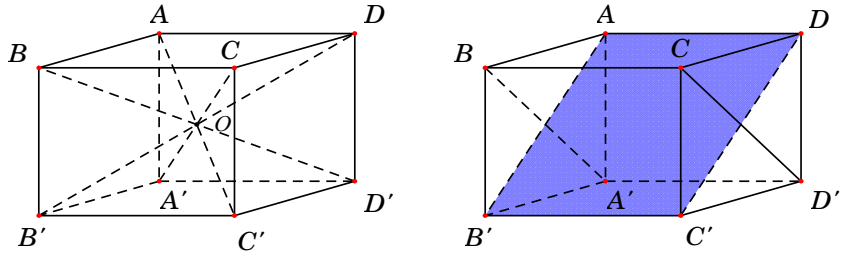
Nếu phép đối xứng qua đường thẳng Δ biến hình $(\mathscr{H})$ thành chính nó thì Δ được gọi là trục đối xứng của $(\mathscr{H})$.

Nhận xét

- Thực hiện liên tiếp các phép dời hình sẽ được một phép dời hình.
- Phép dời hình biến đa diện $(\mathscr{H})$ thành đa diện $(\mathscr{H}')$, biến đỉnh, cạnh, mặt của $(\mathscr{H})$ thành đỉnh, cạnh, mặt tương ứng của $(\mathscr{H}')$.

Ví dụ: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó:

- Các hình chóp $A.A'B'C'D'$ và $C'.ABCD$ bằng nhau (vì qua phép đối xứng tâm O hình chóp $A.A'B'C'D'$ biến thành hình chóp $C'.ABCD$).
- Các hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và $AA'D'.BB'C'$ bằng nhau (vì qua phép đối xứng qua mặt phẳng $(AB'C'D)$ thì hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ biến thành hình lăng trụ $AA'D'.BB'C'$).



2. Hai hình bằng nhau

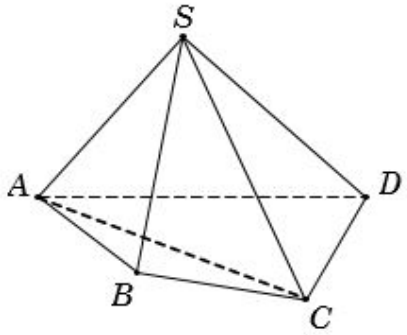
Hai hình được gọi là nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

Đặc biệt, hai đa diện được gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến đa diện này đa diện kia.

IV – PHÂN CHIA VÀ LẮP GHÉP CÁC KHỐI ĐA DIỆN

Nếu khối đa diện $(\mathscr{H})$ là hợp của hai khối đa diện $(\mathscr{H}_1)$ và $(\mathscr{H}_2)$ sao cho $(\mathscr{H}_1)$ và $(\mathscr{H}_2)$ không có chung điểm trong nào thì ta nói có thể phân chia được khối đa diện $(\mathscr{H})$ thành hai khối đa diện $(\mathscr{H}_1)$ và $(\mathscr{H}_2)$. Khi đó ta cũng nói có thể ghép hai khối đa diện $(\mathscr{H}_1)$ và $(\mathscr{H}_2)$ để được khối đa diện $(\mathscr{H})$.

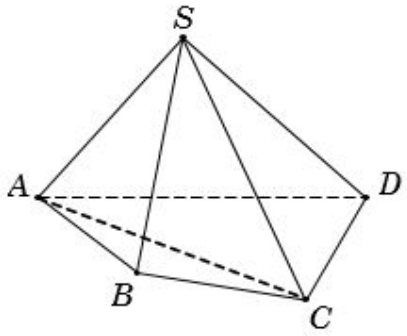
Ví dụ 1. Với khối chóp tứ giác $S.ABCD$, xét hai khối chóp tam giác $S.ABC$ và $S.ACD$.



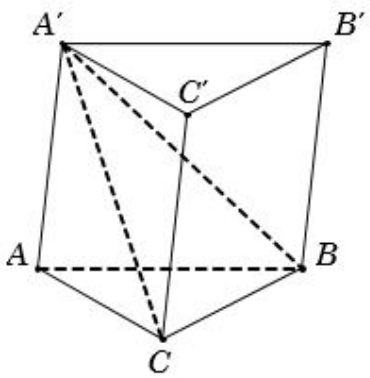
Ta thấy rằng:

● Hai khối chóp $S.ABC$ và $S.ACD$ không có điểm trong chung (tức là không tồn tại điểm trong của khối chóp này là điểm trong của khối chóp kia và ngược lại).

● Hợp của hai khối chóp $S.ABC$ và $S.ACD$ chính là khối chóp $S.ABCD$. Vậy khối chóp $S.ABCD$ được phân chia thành hai khối chóp $S.ABC$ và $S.ACD$ hay hai khối chóp $S.ABC$ và $S.ACD$ được ghép lại thành khối chóp $S.ABCD$.



Ví dụ 2. Cắt khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bởi mặt phẳng $(A'BC)$.



Khi đó, khối lăng trụ được phân chia thành hai khối đa diện $A'ABC$ và $A'BCC'B'$.

Nếu ta cắt khối chóp $A'BCC'B'$ bởi mặt phẳng $(A'B'C)$ thì ta chia khối chóp $A'BCC'B'$ thành hai khối chóp $A'BCB'$ và $A'CC'B'$.

Vậy khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ được chia thành ba khối tứ diện là $A'ABC$, $A'BCB'$ và $A'CC'B'$.

MỘT SỐ KẾT QUẢ QUAN TRỌNG

+) Kết quả 1: Một khối đa diện bất kì có ít nhất 4 mặt.

+) Kết quả 2: Mỗi hình đa diện có ít nhất 4 đỉnh.

+) Kết quả 3: Cho (H) là đa diện mà tất các mặt của nó là những đa giác có p cạnh. Nếu số mặt của (H) là lẻ thì p phải là số chẵn.

+) Kết quả 4: Cho (H) là đa diện có m mặt, mà các mặt của nó là những đa giác có p cạnh. Khi đó số cạnh của (H) là $c=\dfrac{pm}{2}$.

+) Kết quả 5: Mỗi khối đa diện có các mặt là các tam giác thì tổng số các mặt của nó phải là một số chẵn.

+) Kết quả 6: Mỗi khối đa diện bất kì luôn có thể được phân chia thành những khối tứ diện

+) Kết quả 7: Mỗi đỉnh của một đa diện là đỉnh chung của ít nhất 3 cạnh.

+) Kết quả 8: Nếu khối đa diện có mỗi đỉnh là đỉnh chung của 3 cạnh thì số đỉnh phải là số chẵn.

Tổng quát: Một đa diện mà mỗi đỉnh của nó đều là đỉnh chung của một số lẻ mặt thì tổng đỉnh là một số chẵn.

+) Kết quả 9: Mỗi hình đa diện có ít nhất 6 cạnh.

+) Kết quả 10: Không tồn tại hình đa diện có 7 cạnh.

+) Kết quả 11: Với mỗi số nguyên $k \geq 3$ luôn tồn tại một hình đa diện có $2k$ cạnh.

+) Kết quả 12: Với mỗi số nguyên $k \geq 4$ luôn tồn tại một hình đa diện có $2k+1$ cạnh.

+) Kết quả 13: Không tồn tại một hình đa diện có

+) Số mặt lớn hơn hoặc bằng số cạnh;

+) Số đỉnh lớn hơn hoặc bằng số cạnh.

+) Kết quả 14: Tồn tại khối đa diện có $2n$ mặt là những tam giác đều.

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Điều kiện để một hình là hình đa diện – khối đa diện.

1. Phương pháp giải

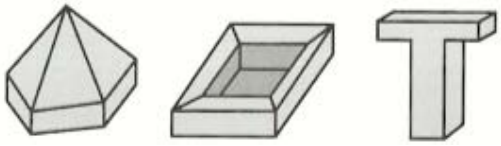
Hình đa diện là hình được tạo bởi một số hữu hạn các đa giác thỏa mãn hai tính chất:

+) Hai đa giác phân biệt chỉ có thể hoặc không có điểm chung, hoặc chỉ có một đỉnh chung, hoặc chỉ có một cạnh chung.

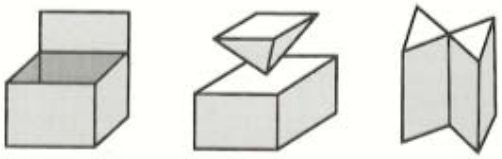
+) Mỗi cạnh của đa giác nào cũng là cạnh chung của đúng hai đa giác.

Ví dụ:

Các hình dưới đây là những khối đa diện :

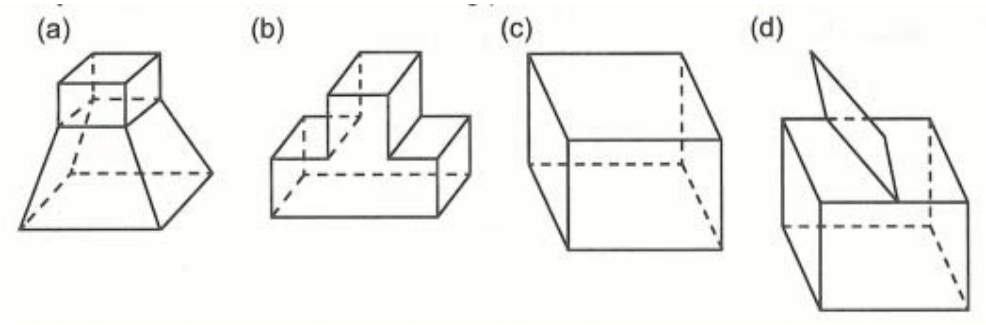


Các hình dưới đây không phải là khối đa diện:



2. Bài tập

Bài tập 1: Cho các hình sau. Hình không phải hình đa diện là



A. Hình (a). **B.** Hình (b). **C.** Hình (c). **D.** Hình (d).

Hướng dẫn giải

Chọn D.

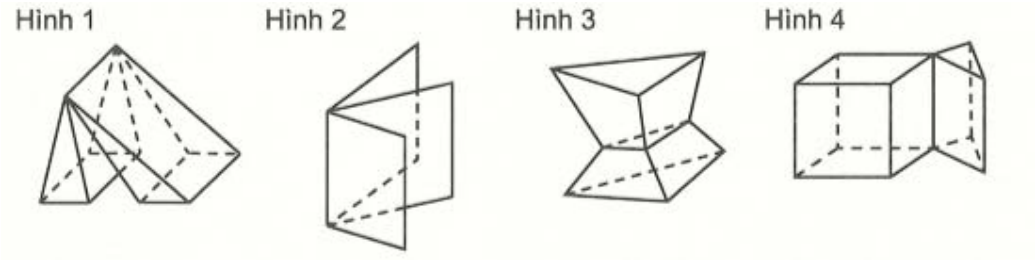
Áp dụng các tính chất của hình đa diện:

Mỗi cạnh là cạnh chung của đúng hai mặt;

Hai mặt bất kì hoặc có một đỉnh chung, hoặc có một cạnh chung, hoặc không có điểm chung nào.

Hình d vi phạm quy tắc: có cạnh trên cùng chỉ là cạnh của một mặt.

Bài tập 2: Trong các hình dưới đây, hình nào là hình đa diện?



A. Hình 1. **B.** Hình 2. **C.** Hình 3. **D.** Hình 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Hình 1 không phải là hình đa diện vì có một cạnh là cạnh chung của 4 đa giác, loại A.

Hình 2 không phải là hình đa diện vì có một cạnh là cạnh chung của 3 đa giác, loại B.

Hình 4 không phải là hình đa diện vì có một cạnh là cạnh chung của 4 đa giác, loại D.

Hình 3 là hình đa diện vì nó thỏa mãn khái niệm hình đa diện.

Dạng 2. Xác định số đỉnh, cạnh, mặt của một khối đa diện

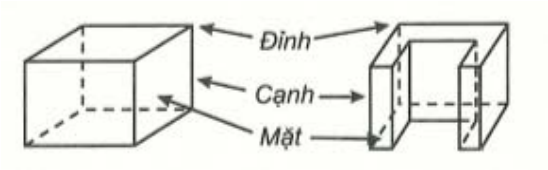
1. Phương pháp giải

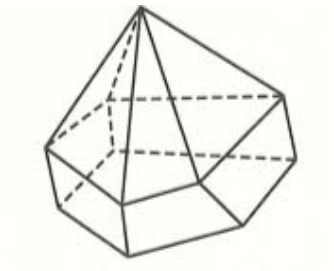
Mỗi đa giác gọi là một mặt của hình đa diện.

Các đỉnh, cạnh của các đa giác ấy theo thứ tự được gọi là các đỉnh, cạnh của hình đa diện.

Ví dụ:

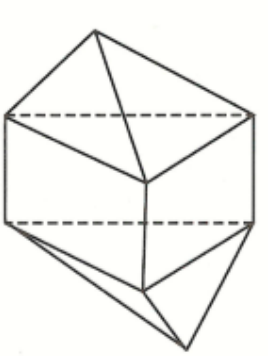
Hình sau đây có 11 đỉnh, 20 cạnh, 11 mặt





2. Bài tập

Bài tập 1. Số mặt của hình đa diện ở hình vẽ dưới đây là ?



A. 11. **B.** 10.

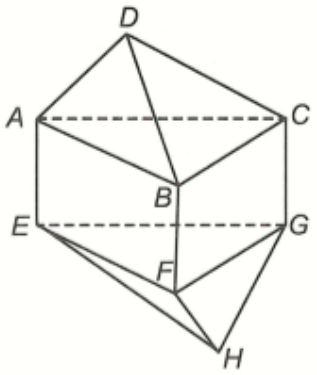
C. 12. **D.** 9.

Hướng dẫn giải

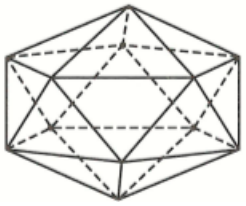
Chọn D

Hình đa diện trên có 9 mặt là

$(ABD);(BDC);(ADC);(ABFE);(BFGC);(ACGE);$
$(HFE);(HFG);(EHG).$



Bài tập 2: Cho hình đa diện như hình vẽ bên. Hỏi có bao nhiêu đoạn thẳng nối 2 đỉnh của hình đa diện nhưng không là cạnh của hình đa diện?



A. 66. **B.** 30.

C. 36. **D.** 102.

Chú ý:

Hình đa diện có n đỉnh thì sẽ có C_n^2 cạnh nối 2 đỉnh của hình đa diện

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có khối đa 20 mặt có 12 đỉnh.

Số đoạn thẳng được tạo thành 12 đỉnh trên là C_{12}^2 cạnh.

Số cạnh của khối 20 mặt trên là 30 cạnh.

Vậy số đoạn thẳng nối hai đỉnh của hình đa diện nhưng không phải là cạnh của hình đa diện là $C_{12}^2 - 30 = 36$.

nhưng không là cạnh của hình đa diện là hiệu của C_n^2 và số cạnh khối đa diện.

Bài tập 3. Cho một hình chóp có số đỉnh là 2018, số cạnh của hình chóp đó là

A. 2019.. **B.** 1009.

C. 4036. **D.** 4034.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Hình chóp có 2018 đỉnh thì đa giác đáy có 2017 đỉnh, nên có 2017 cạnh đáy và 2017 cạnh bên.

Vậy hình chóp có $2017 + 2017 = 4034$ cạnh

Chú ý:

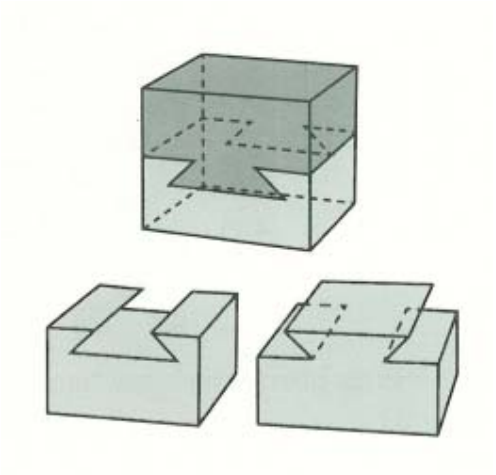
+ Hình chóp có n đỉnh thì sẽ có $2.(n-1)$ cạnh.

+ Hình chóp có n đỉnh thì sẽ có n mặt.

Dạng 3. Phân chia, lắp ghép các khối đa diện

1. Phương pháp giải

Nếu khối đa diện (H) là hợp của hai khối đa diện $(H_1),(H_2)$ sao cho (H_1) và (H_2) không có chung điểm trong nào thì ta nói có thể chia được khối đa diện (H) thành hai khối đa diện (H_1) và (H_2), hay có thể lắp ghép hai khối đa diện (H_1) và (H_2) với nhau để được khối đa diện (H).



2. Bài tập

Bài tập 1. Cho khối tứ diện $ABCD$. Lấy điểm M nằm giữa A và B, điểm N nằm giữa C và D. Bằng hai mặt phẳng (CDM) và (ABN), ta chia khối tứ diện đó thành bốn khối tứ diện nào sau đây ?

A. $MANC, BCDN, AMND, ABND$.

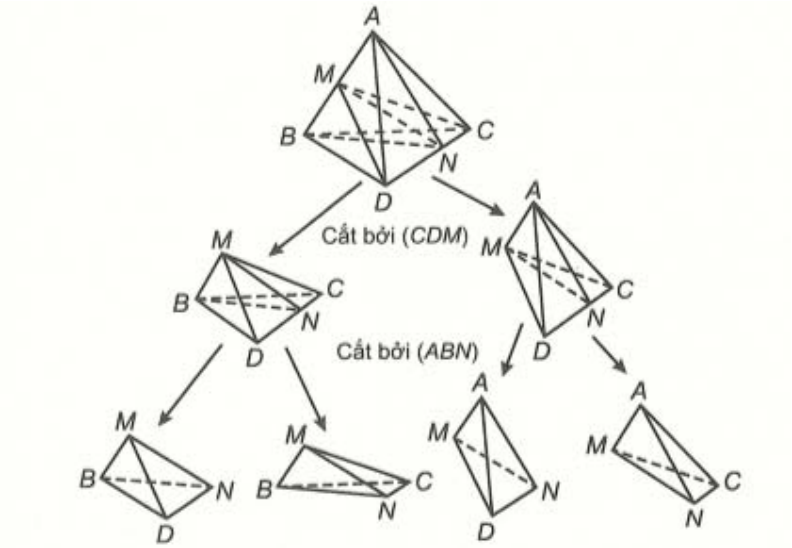
B. $NACB, BCMN, ABND, MBND$.

C. $ABCN, ABND, AMND, MBND$.

D. $MBND, MBNC, AMDN, AMNC$.

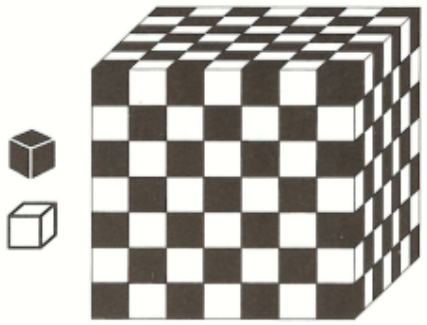
Hướng dẫn giải

Chọn D.



Dựa vào hình vẽ, ta thấy hai mặt phẳng (CDM) và (ABN) chia khối tứ diện $ABCD$ thành bốn khối tứ diện là $MBDN, MBNC, AMDN, AMNC$.

Bài tập 2. Các khối lập phương đen và trắng xếp chồng lên nhau xen kẽ màu tạo thành một khối rubik $7\times5\times7$ (như hình vẽ).



Gọi x là số khối lập phương nhỏ màu đen, y khối lập phương nhỏ màu trắng. Giá trị $x-y$ là

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Có 7 lớp hình vuông xếp chồng lên nhau. Mỗi lớp có $7\times 5=35$ khối nhỏ.

Ta thấy hai lớp dưới đáy, một khối đen chồng lên một khối trắng (hay ngược lại) nên số lượng khối đen, trắng bằng nhau.

Tương tự 6 lớp bên dưới có số lượng khối đen, trắng bằng nhau.

Ta xét lớp trên cùng có $4+3+4+3+4=18$ khối màu đen và có $3+4+3+4+3=17$ khối màu trắng $\Rightarrow x-y=1$.

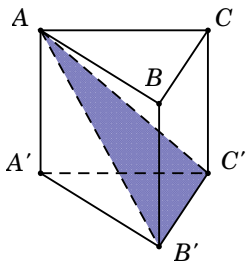
Bài tập 3. Mặt phẳng $(AB'C')$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành các khối đa diện nào?

A. Một khối chóp tam giác và một khối chóp tứ giác.
B. Hai khối chóp tam giác.
C. Một khối chóp tam giác và một khối chóp ngũ giác.
D. Hai khối chóp tứ giác.

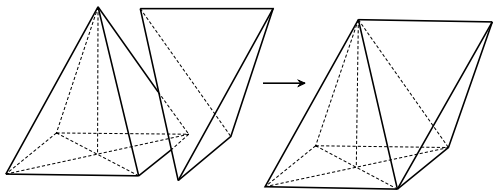
Hướng dẫn giải

Chọn A

Dựa vào hình vẽ, ta thấy mặt phẳng $(AB'C')$ chia khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ thành khối chóp tam giác $A.A'B'C'$ và khối chóp tứ giác $A.BCC'B'$.



Bài tập 4. Lắp ghép hai khối đa diện $(\mathscr{H}_1)$, $(\mathscr{H}_2)$ để tạo thành khối đa diện $(\mathscr{H})$, trong đó $(\mathscr{H}_1)$ là khối chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng a, $(\mathscr{H}_2)$ là khối tứ diện đều cạnh a sao cho một mặt của $(\mathscr{H}_1)$ trùng với một mặt của $(\mathscr{H}_2)$ như hình vẽ. Hỏi khối da diện $(\mathscr{H})$ có tất cả bao nhiêu mặt?



A. 5. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Khối đa diện $(\mathscr{H})$ có đúng 5 mặt.

Sai lầm hay gặp: Khối chóp tứ giác đều có 5 mặt. Khối tứ diện đều có 4 mặt.
Ghép hai hình lại như hình vẽ ta được khối đa diện $(\mathscr{H})$ có 8 mặt.

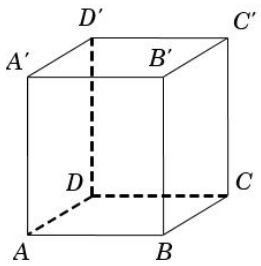
Bài tập 5. Có thể chia một hình lập phương thành bao nhiêu khối tứ diện bằng nhau?

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Lần lượt dùng mặt phẳng $(BDD'B')$ ta chia thành hai khối lập phương thành hai khối lăng trụ $ABD.A'B'D'$ và $BCD.B'C'D'$.



● Với khối $ABD.A'B'D'$ ta lần lượt dùng các mặt phẳng $(AB'D')$ và $(AB'D)$ chia thành ba khối tứ diện bằng nhau.

● Tương tự với khối $BCD.B'C'D'$.

Vậy có tất cả 6 khối tứ diện bằng nhau.

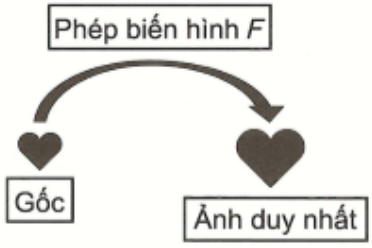
Dạng 4: Phép biến hình trong không gian

1. Phương pháp giải

Phép biến hình F biến điểm M thành điểm M' duy nhất và kí hiệu

$M' = F(M)$.

Qua phép biến hình F, mỗi hình (H) được biến thành hình (H') gồm tất cả các ảnh của các điểm thuộc hình (H).



Hai hình (H) và (H') gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

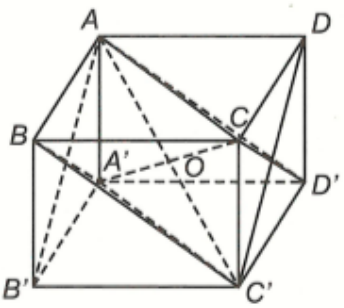
Ví dụ: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

Khi đó:

+ Các hình chóp $A.A'B'C'D'$ và $C'.ABCD$ bằng nhau (vì qua phép đối xứng tâm O hình chóp $A.A'B'C'D'$ biến thành hình chóp $C'.ABCD$).

+ Các hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và $AA'D'.BB'C'$ bằng nhau (qua phép đối xứng qua mặt phẳng $(AB'C'D)$ thì hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ biến thành hình lăng trụ

$AA'D'.BB'C'$.



+ Hai hình tứ diện $ABCD$ và $A'B'C'D'$ bằng nhau nếu chúng có các cạnh tương ứng bằng nhau, nghĩa là:

$AB = A'B'$, $BC = B'C'$, CD=C′D′ , DA=D′A′ , $AC = A'C'$, BD = $B'D'$.

Hình (H) được gọi là đồng dạng với hình (H') nếu có phép vị tự biến hình (H) thành hình (H_1) mà hình (H_1) bằng hình (H').

2. Bài tập

Bài tập 1: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$. Ảnh của đoạn thẳng AB qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{CC'}$ là:

A. Đoạn thẳng C′D′ .

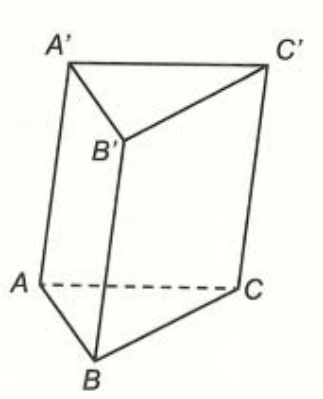
B. Đoạn thẳng DD' .

C. Đoạn thẳng CD .

D. Đoạn thẳng $A'B'$.

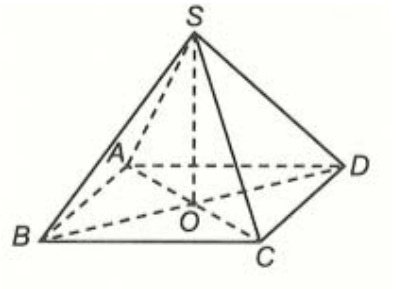
Hướng dẫn giải

Chọn D.



Ta có $\begin{cases} T_{\overrightarrow{CC'}}(A) = A' \\ T_{\overrightarrow{CC'}}(B) = B' \end{cases} \Rightarrow T_{\overrightarrow{CC'}}(AB) = AB'$.

Bài tập 2: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ như hình vẽ. Phép đối xứng qua mặt phẳng (SAC) biến hình chóp S.ABD thành hình chóp nào sau đây?



A. $S.ABC$.

B. $S.AB$D.

C. $S.ABO$.

D. $S.A$DC.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $\begin{cases} Đ_{(SAC)}(S) = S \\ Đ_{(SAC)}(A) = A \\ Đ_{(SAC)}(B) = D \\ Đ_{(SAC)}(D) = B \end{cases} \Rightarrow Đ_{(SAC)}(S.AB\text{D}) = S.ADB.$

.

Bài tập 3. Cho hai đường thẳng song song d, d′ và một điểm O không nằm trên chúng. Có bao nhiêu phép vị tự tâm O biến d thành d′?

A. Có một. **B.** Không có.

C. Có hai. **D.** Có một hoặc không có.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

+ Trong trường hợp O, d, d′ đồng phẳng thì tồn tại duy nhất phép vị tự tâm O biến d thành d′.

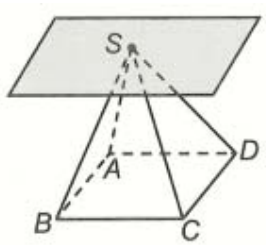
+ Trong trường hợp $O \notin (\text{d}, \text{d}')$ thì không tồn tại phép vị tự tâm O biến d thành d′.

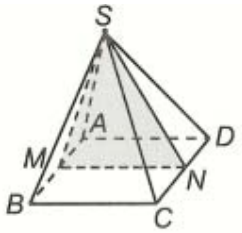
Bài tập 4. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Số mặt phẳng qua điểm S và cách đều các điểm $A, B, C,$ D là

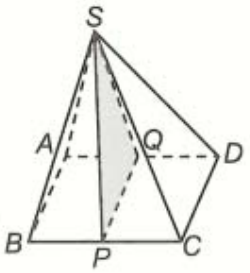
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 5.

Hướng dẫn giải

Chọn C.







Có ba mặt phẳng gồm:

+ Một mặt phẳng qua đỉnh hình chóp và song song với $(ABCD)$.

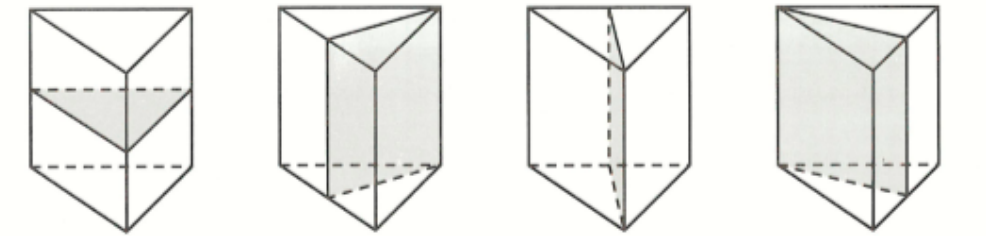
+ Hai mặt phẳng qua đỉnh hình chóp và qua hai trung điểm của cặp cạnh đối của hình vuông $ABCD$.

Bài tập 5. Hình lăng trụ tam giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Hình lăng trụ tam giác đều có bốn mặt đối xứng gồm:

Ba mặt là mặt phẳng chứa một cạnh bên và hai trung điểm của hai cạnh đáy không chung đỉnh với cạnh bên đó.

Một mặt phẳng chứa trung điểm của ba cạnh bên của hình lăng trụ.

Bài tập 6. Gọi n_1, n_2, n_3 lần lượt là số trục đối xứng của khối tứ diện đều, khối chóp tứ giác đều và khối lập phương. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $n_1 = 0, n_2 = 0, n_3 = 6.$ **B.** $n_1 = 0, n_2 = 1, n_3 = 9.$

C. $n_1 = 3, n_2 = 1, n_3 = 9.$ **D.** $n_1 = 0, n_2 = 1, n_3 = 3.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Khối tứ diện đều có 3 trục đối xứng (đi qua trung điểm của các cặp cạnh đối diện). Khối chóp tứ giác đều có 1 trục đối xứng (đi qua đỉnh và tâm của mặt tứ giác). Khối lập phương có 9 trục đối xứng (Loại 1: đi qua tâm của các mặt đối diện ; Loại 2: đi qua trung điểm các cặp cạnh đối diện).

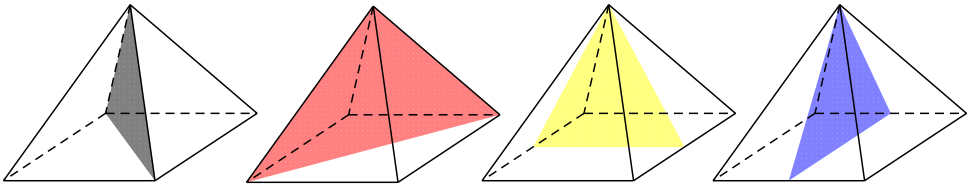
Bài tập 7. Hình chóp tứ giác đều có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 4 mặt phẳng. **B.** 1 mặt phẳng. **C.** 2 mặt phẳng. **D.** 3 mặt phẳng.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Hình chóp tứ giác đều có 4 mặt phẳng đối xứng bao gồm:



- 2 mặt phẳng đi qua đỉnh hình chóp và chứa đường trung bình của đáy.
- 2 mặt phẳng đi qua đỉnh hình chóp và chứa đường chéo của đáy.

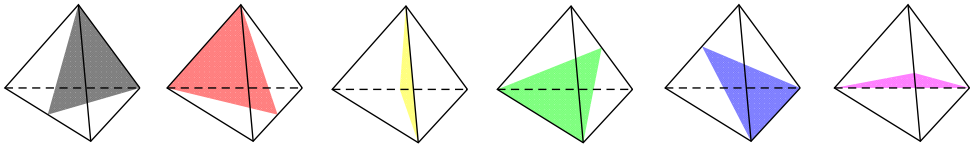
Bài tập 8. Số mặt phẳng đối xứng của hình tứ diện đều là:

A. 4 mặt phẳng. **B.** 6 mặt phẳng. **C.** 8 mặt phẳng. **D.** 10 mặt phẳng.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Các mặt phẳng đối xứng của hình tứ diện đều là các mặt phẳng chứa một cạnh và qua trung điểm cạnh đối diện.



Vậy hình tứ diện đều có 6 mặt phẳng đối xứng.

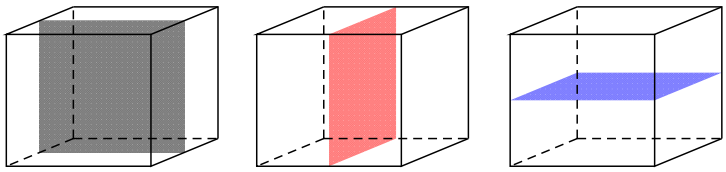
Bài tập 9. Hình hộp chữ nhật có ba kích thước đôi một khác nhau có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 4 mặt phẳng. **B.** 6 mặt phẳng. **C.** 9 mặt phẳng. **D.** 3 mặt phẳng.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Hình hộp chữ nhật (không là hình lập phương) có các mặt phẳng đối xứng là các mặt các mặt phẳng trung trực của các cặp cạnh đối.



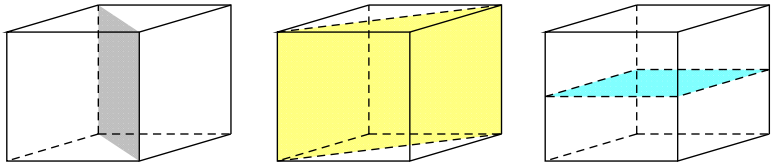
Bài tập 10. Một hình hộp đứng có đáy là hình thoi (không phải là hình vuông) có bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

A. 4 mặt phẳng. **B.** 1 mặt phẳng. **C.** 2 mặt phẳng. **D.** 3 mặt phẳng.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Hình hộp đứng có đáy là hình thoi (không phải là hình chữ nhật) có 3 mặt phẳng đối xứng bao gồm:



- 2 mặt phẳng chứa đường chéo của đáy và vuông góc với đáy.
- Một mặt phẳng là mặt phẳng trung trực của cạnh bên.

Bài tập 11. Hình lập phương có tất cả bao nhiêu mặt phẳng đối xứng?

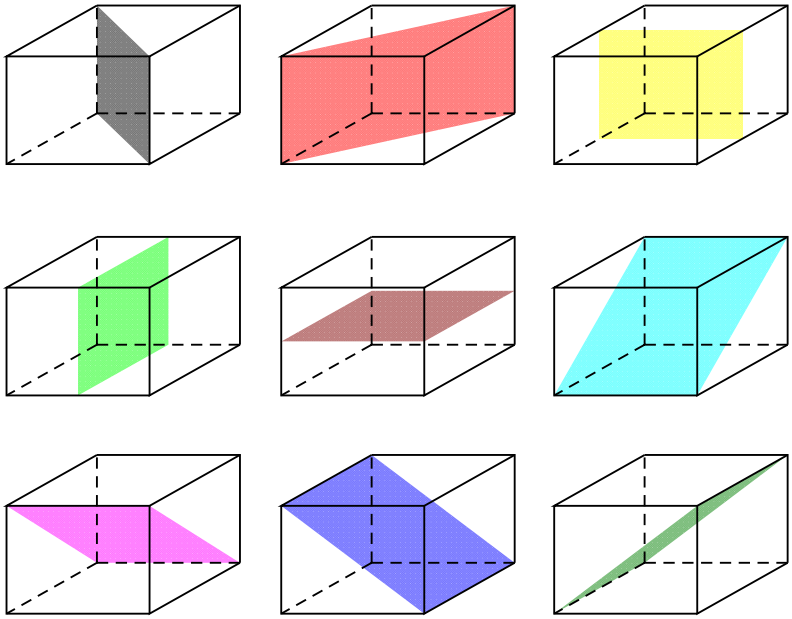
A. 8 mặt phẳng. **B.** 9 mặt phẳng.

C. 10 mặt phẳng. **D.** 12 mặt phẳng.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Có 9 mặt đối xứng (như hình vẽ sau).



Bài tập 12. Số mặt phẳng đối xứng của hình bát diện đều là:

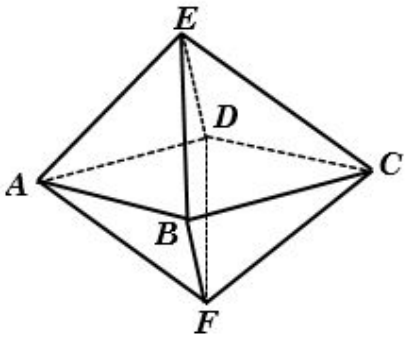
A. 4 mặt phẳng. **B.** 9 mặt phẳng.

C. 6 mặt phẳng. **D.** 12 mặt phẳng.

Hướng dẫn giải

Chọn B

Gọi bát diện đều $ABCDEF$. Có 9 mặt phẳng đối xứng, bao gồm: 3 mặt phẳng $(ABCD)$, $(BEDF)$, $(AECF)$ và 6 mặt phẳng mà mỗi mặt phẳng là mặt phẳng trung trực của hai cạnh song song (chẳng hạn AB và CD).



Bài tập 13. Có tất cả bao nhiêu mặt phẳng cách đều bốn đỉnh của một tứ diện?

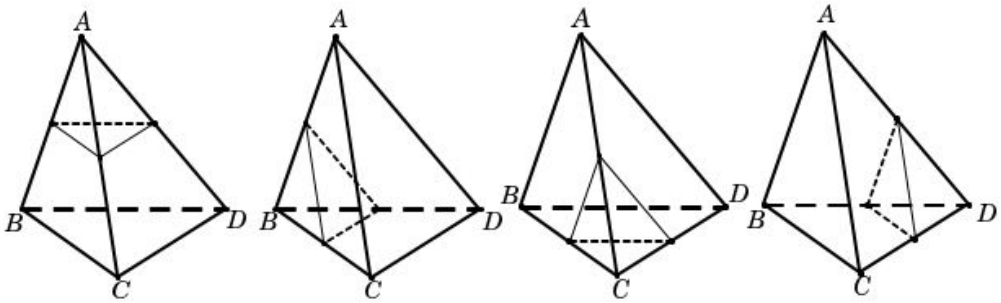
A. 1 mặt phẳng.
B. 4 mặt phẳng.
C. 7 mặt phẳng.
D. Có vô số mặt phẳng.

Hướng dẫn giải

Chọn C

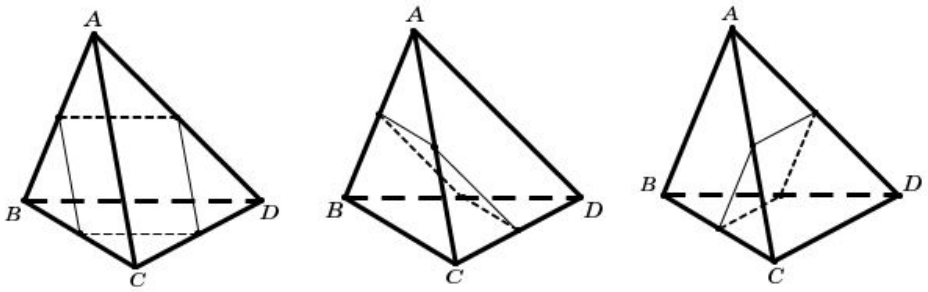
Có 2 loại mặt phẳng thỏa mãn đề bài là:

● Loại 1: Mặt phẳng qua trung điểm của 3 cạnh bên có chung đỉnh. Có 4 mặt phẳng thỏa mãn loại này (vì có 4 đỉnh)



Nhận xét. Loại này ta thấy có 1 điểm nằm khác phía với 3 điểm còn lại.

● Loại 2: Mặt phẳng qua trung điểm của 4 cạnh (4 cạnh này thuộc 2 cặp cạnh, mỗi cặp cạnh là chéo nhau). Có 3 mặt phẳng như thế.



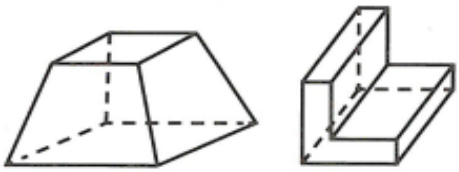
Nhận xét. Loại này ta thấy có 2 điểm nằm khác phía với 2 điểm còn lại.

BÀI 2: KHỐI ĐA DIỆN LỒI – KHỐI ĐA DIỆN ĐỀU

A. LÍ THUYẾT

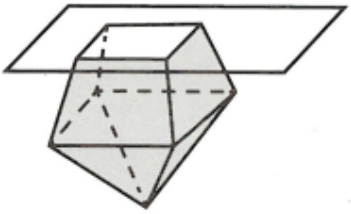
1. Khối đa diện lồi

Khối đa diện được gọi là khối đa diện lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kì của khối đa diện thuộc khối đa diện.



Khối đa diện lồi *Khối đa diện không lồi*

Lưu ý: *Một khối đa diện là khối đa diện lồi khi và chỉ khi miền trong của nó luôn nằm về một phía đối với mỗi mặt phẳng đi qua một mặt của nó.*

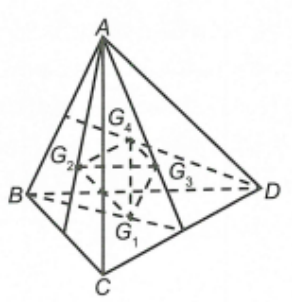


Một số kết quả quan trọng về khối đa diện lồi

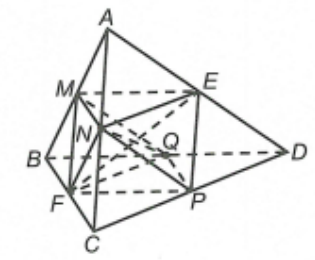
Cho một khối tứ diện đều: Khi đó:

+) Các trọng tâm của các mặt của nó là các đỉnh của một khối tứ diện đều.

Bài tập:

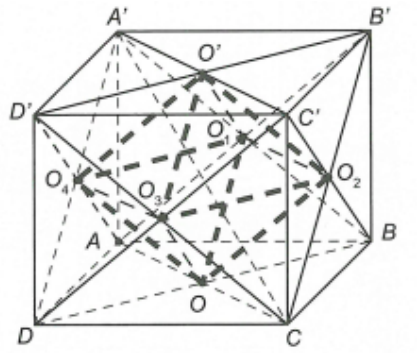


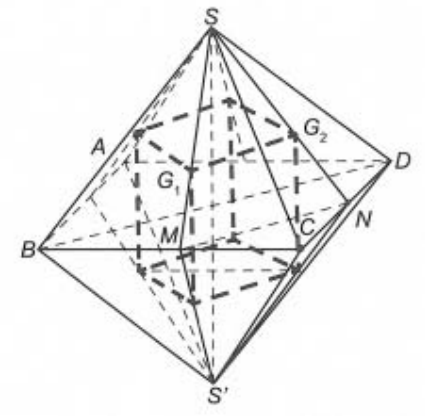
+) Các trung điểm của các cạnh của nó là các đỉnh của một khối bát diện đều (khối tám mặt đều).



Tâm của các mặt của một khối lập phương là các đỉnh của một khối bát diện đều.

Tâm của các mặt của một khối bát diện đều là các đỉnh của một hình lập phương.





Hai đỉnh của một khối bát diện đều được gọi là hai đỉnh đối diện nếu chúng không cùng thuộc một cạnh của khối đó. Đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện gọi là đường chéo của khối bát diện đều. Khi đó:

+) Ba đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

+) Ba đường chéo đôi một vuông góc với nhau.

+) Ba đường chéo bằng nhau.

2. Khối đa diện đều

Khối đa diện đều là khối đa diện lồi có tính chất sau đây:

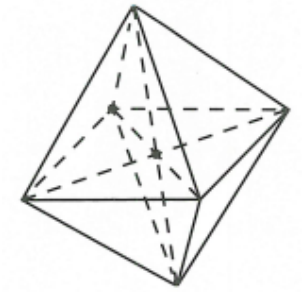
+) Mỗi mặt của nó là một đa giác đều n cạnh.

+) Mỗi đỉnh của nó là đỉnh chung của đúng p mặt.

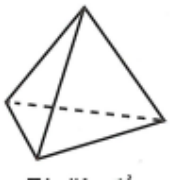
Khối đa diện đều như vậy được gọi là khối đa diện đều loại $\{n;p\}$.

Định lí: Chỉ có năm loại khối đa điện đều.

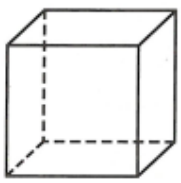
Đó là loại $\{3;3\},\{4;3\},\{3;4\},\{5;3\}$ và $\{3;5\}$.



Các khối đa diện đều:



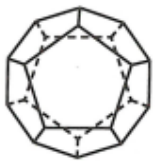
Tứ diện đều



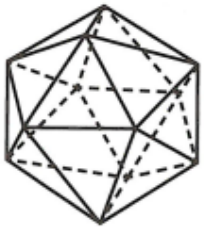
Khối lập phương



Khối bát diện đều

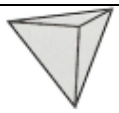
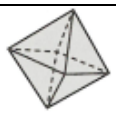
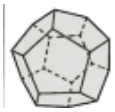
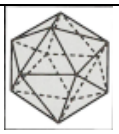


Khối 12 mặt đều



Khối 20 mặt đều

Bảng tóm tắt năm loại khối đa diện đều

Khối đa diện đều		***Số đỉnh***	***Số cạnh***	***Số mặt***	***Loại***	***Số MPĐX***
Tứ diện đều		4	6	4	$\{3;3\}$	6
Khối lập phương		8	12	6	$\{4;3\}$	9
Bát diện đều		6	12	8	$\{3;4\}$	9
Mười hai mặt đều		20	30	12	$\{5;3\}$	15
Hai mươi mặt đều		12	30	20	$\{3;5\}$	15

Chú ý: *Giả sử khối đa diện đều loại* $\{n;p\}$ *có Đ đỉnh, C cạnh và M mặt. Khi đó:* $p.Đ = 2C = n.M$.

Công thức Ơ-le: Trong một đa diện lồi nếu gọi $Đ$ là số đỉnh, C là số cạnh, M là số mặt thì ta có: $Đ - C + M = 2$.

Tâm đối xứng của một hình: Nếu phép đối xứng qua tâm I biến hình (H) thành chính nó thì I là tâm đối xứng của hình (H).

Mặt phẳng đối xứng của một hình: Nếu phép đối xứng qua mặt phẳng (P) biến hình (H) thành chính nó thì (P) là mặt phẳng đối xứng qua hình (H).

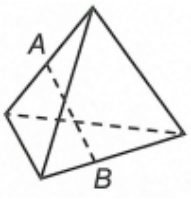
B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

Dạng 1: Nhận diện đa diện lồi, đa diện đều

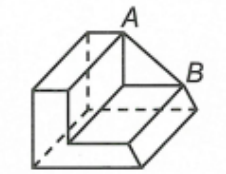
1. Phương pháp giải

Khối đa diện được gọi là khối đa diện lồi nếu đoạn thẳng nối hai điểm bất kì của khối đa diện thuộc khối đa diện.

Ví dụ:



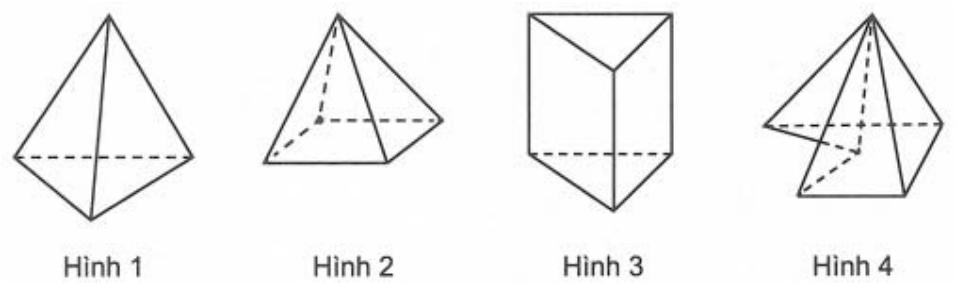
Khối đa diện lồi



Khối đa diện không lồi

2. Bài tập

Bài tập 1: Trong các hình dưới đây hình nào không phải khối đa diện lồi?

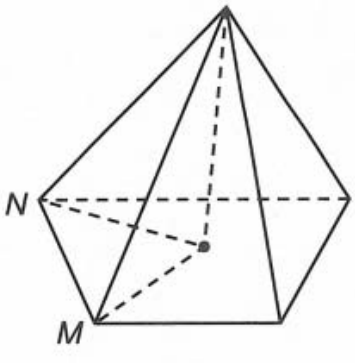


A. Hình 1. **B.** Hình 2. **C.** Hình 3. **D.** Hình 4.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Đường nối đoạn *MN* không thuộc khối hình 4 nên hình 4 không phải khối đa diện lồi.



Bài tập 2: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Hình hộp là đa diện lồi.

B. Tứ diện là đa diện lồi.

C. Hình tạo bởi hai tứ diện đều ghép vào nhau là một hình đa diện lồi.

D. Hình lập phương là đa diện lồi.

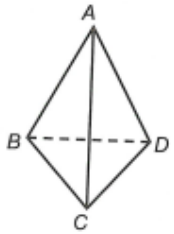
Hướng dẫn giải

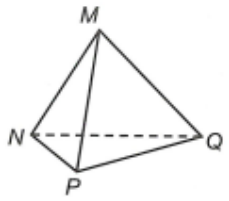
Chọn C.

Các đáp án **A, B, D** đều đúng dựa vào khái niệm hình đa diện lồi.

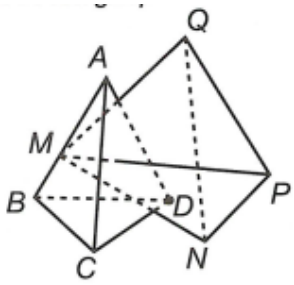
Hai tứ diện đều ghép vào nhau có thể không tạo thành một hình đa diện lồi.

Hai tứ diện (đều là các đa diện lồi) nhưng khi ghép với nhau có thể không tạo thành một hình đa diện lồi.





Hai tứ diện ABCD và MNPQ trước khi ghép.



Sau khi ghép hai tứ diện ABCD và MNPQ ta được hình mới không phải hình đa diện lồi.

Dạng 2: Các đặc điểm của khối đa diện đều

1. Phương pháp giải

Chỉ có năm loại khối đa diện đều. Đó là loại $\{3;3\},\{4;3\},\{3;4\},\{5;3\}$ và $\{3;5\}$.

Dựa vào bảng tóm tắt phần lý thuyết các thông số: Đỉnh cạnh mặt của các khối đa diện để giải toán.

Dựa vào tính chất phép biến hình để tìm mặt phẳng đối xứng, tâm đối xứng, trục đối xứng,… của các loại khối đa diện.

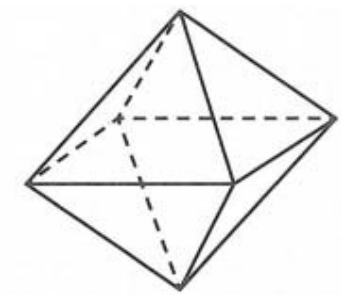
Công thức Ơ-le: Trong một đa diện lồi nếu gọi $Đ$ là số đỉnh, C là số cạnh, M là số mặt thì ta có công thức $Đ - C + M = 2$.

2. Bài tập

Bài tập 1: Hình bát diện đều có tất cả bao nhiêu cạnh?

A. 6 **B.** 8 **C.** 12 **D.** 20

Hình bát diện đều



Hướng dẫn giải

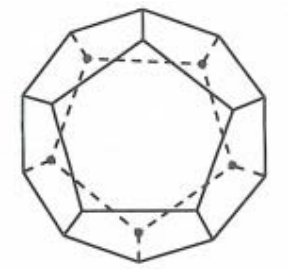
Chọn C.

Hình bát diện đều có 12 cạnh.

Bài tập 2: Khối mười hai mặt đều có bao nhiêu đỉnh?

Khối mười hai mặt đều

A. 12 **B.** 16 **C.** 20 **D.** 36



Hướng dẫn giải

Chọn C.

Khối mười hai mặt đều có 20 đỉnh.

Bài tập 3: Cho khối đa diện đều loại $\{3;4\}$. Tổng các góc phẳng tại một đỉnh của khối đa điện đó bằng

A. 180° **B.** 240° **C.** 324° **D.** 360°

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Khối đa diện đều loại $\{3;4\}$ là khối bát diện đều. Mỗi đỉnh là đỉnh chung của 4 mặt.

Vậy tổng các góc phẳng tại một đỉnh của khối đa diện đó bằng $60°.4 = 240°$.

Bài tập 4: Cho hình đa diện đều loại $\{4;3\}$ cạnh $a.$ Gọi S là tổng diện tích tất cả các mặt của hình đa diện đó. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = 4a^2.$ **B.** $S = 6a^2.$ **C.** $S = 8a^2.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đa diện đều loại $\{4;3\}$ là khối lập phương nên có 6 mặt là các hình vuông cạnh a. Vậy hình lập phương có tổng diện tích tất cả các mặt là $S = 6a^2.$

Bài tập 5: Cho hình bát diện đều cạnh $a.$ Gọi S là tổng diện tích tất cả các mặt của hình bát diện đó. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = 4\sqrt{3}a^2.$ **B.** $S = \sqrt{3}a^2.$ **C.** $S = 2\sqrt{3}a^2.$

Hướng dẫn giải

Chọn C

Hình bát diện đều là hình có tám mặt bằng nhau và mỗi mặt là một tam giác đều. Gọi S_0 là diện tích tam giác đều cạnh $a \longrightarrow S_0 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$

Vậy diện tích S cần tính là $S = 8.S_0 = 8.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}\,a^2.$

Bài tập 6: Cho hình 20 mặt đều có cạnh bằng $2.$ Gọi S là tổng diện tích tất cả các mặt của hình đa diện đó. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $S = 10\sqrt{3}.$ **B.** $S = 20\sqrt{3}.$ **C.** $S = 20.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Hình 20 đều là hình có 20 mặt bằng nhau và mỗi mặt là một tam giác đều.

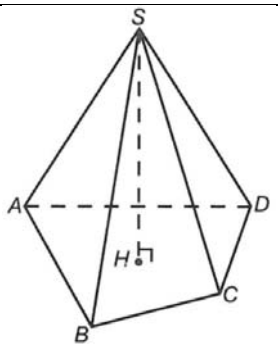
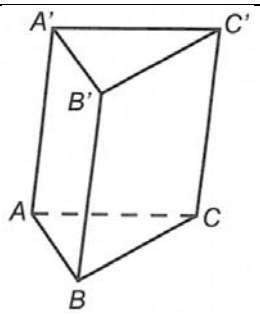
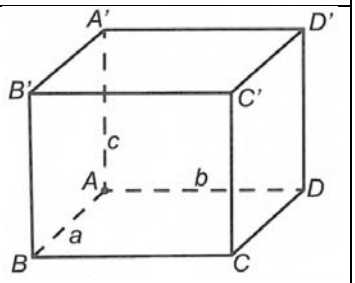
Gọi S_0 là diện tích tam giác đều cạnh bằng $2 \longrightarrow S_0 = \dfrac{2^2.\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}.$

Vậy diện tích S cần tính là $S = 20.S_0 = 20\sqrt{3}.$

BÀI 3. THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

A. LÍ THUYẾT

Công thức tính thể tích khối chóp, lăng trụ

<table>
<tr>
<td>Thể tích khối chóp: $\boxed{V=\frac{1}{3}S_{đáy}.h}$.
Trong đó: $S_{đáy}$: Diện tích mặt đáy.
h: Độ dài chiều cao khối chóp.</td>
<td> 
</td>
</tr>
<tr>
<td>Thể tích khối lăng trụ: $V=S_{đáy}.h$
Trong đó: $S_{đáy}$: Diện tích mặt đáy.
h: Chiều cao của khối chóp.</td>
<td> 
</td>
</tr>
<tr>
<td>Thể tích khối hộp chữ nhật: $V=a.b.c$
Thể tích khối lập phương: $V=a^3$</td>
<td>Chú ý: Lăng trụ đứng có chiều cao chính là cạnh bên.</td>
</tr>
<tr>
<td></td>
<td> 

Chú ý:
+) Đường chéo của hình vuông cạnh a là: $a\sqrt{2}$.
+) Đường chéo của hình lập phương cạnh a là: $a\sqrt{3}$
+) Đường chéo của hình hộp chữ nhật có ba kích thước a, b, c là: $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.
+) Đường cao của tam giác đều cạnh a là: $\frac{a\sqrt{3}}{2}$</td>
</tr>
</table>

CÁC CÔNG THỨC HÌNH PHẲNG CẦN NẮM

1. Hệ thức lượng trong tam giác

a) Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH.

+) $AB^2 + AC^2 = BC^2$; +) $AC^2 = CH.BC$;

+) $AH.BC = AB.AC$; +) $AB^2 = BH.BC$;

+) $AH^2 = BH.HC$; +) $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$;

+) $AB = BC.\sin C = BC.\cos B = AC.\tan C = AC.\cot B$.

b) Cho ΔABC có độ dài ba cạnh a, b, c; độ dài các trung tuyến m_a, m_b, m_c; bán kính đường tròn ngoại tiếp R; bán kính đường tròn nội tiếp r, nửa chu vi p.

+) Định lí hàm số cosin:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$;

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca.\cos B$;

$c^2 = a^2 + b^2 = 2ab.\cos C$.

+) Định lí hàm số sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

+) Độ dài trung tuyến:

$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$; $m_b^2 = \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4}$; $m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$.

2. Các công thức tính diện tích

a) Tam giác:

+) $S = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c$

+) $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$

+) $S = \frac{abc}{4R}$

+) $S = pr$ (p: nửa chu vi của tam giác).

+) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

+) ΔABC vuông tại A: $S = \frac{AB.AC}{2} = \frac{BC.AH}{2}$

+) ΔABC đều, cạnh a: $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

b) Hình vuông: $S = a^2$ (a: cạnh hình vuông)

c) Hình chữ nhật: $S = ab$ (a, b: hai kích thước)

d) Hình bình hành:

$S =$ đáy $\times$ chiều cao $= AB.AD.\sin\widehat{BAD}$

e) Hình thoi: $S = AB.AD.\sin\widehat{BAD} = \dfrac{1}{2}AC.BD$

f) Hình thang: $S = \dfrac{1}{2}(a+b)h$ (a, b: hai đáy, h: chiều cao)

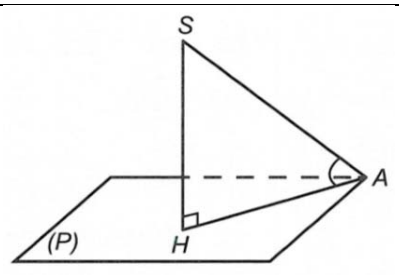
g) Tứ giác có hai đường chéo vuông góc: $S = \dfrac{1}{2}AC.BD$

NHẮC LẠI CÁCH XÁC ĐỊNH CAC GÓC TRONG KHÔNG GIAN

Góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy

Để tính góc $\widehat{(SA,(P))}$, ta gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên (P). Khi đó HA là hình chiếu vuông góc của SA trên (P).

Vậy $\widehat{(SA,(P))} = \widehat{(SA,AH)} = \widehat{SAH}$.



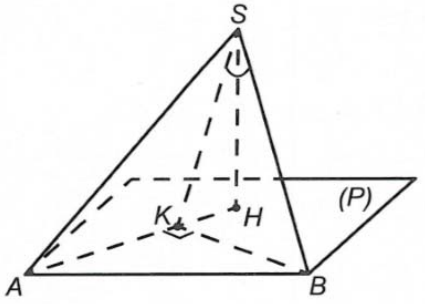
Góc giữa cạnh bên và mặt đứng

Để tính góc $\widehat{(SB,(SAH))}$ biết $(SAH) \perp (P)$ ta dựng $BK \perp AH\,(K \in AH)$. Vì $\begin{cases} BK \perp AH \\ BK \perp SH \end{cases}$ nên $BK \perp (SAH)$

Khi đó K là hình chiếu vuông góc của B trên (SAH)

$\Rightarrow SK$ là hình chiếu vuông góc của SB trên (SAH)

Vậy $\widehat{(SB,(SAH))} = \widehat{(SB,SK)} = \widehat{BSK}$



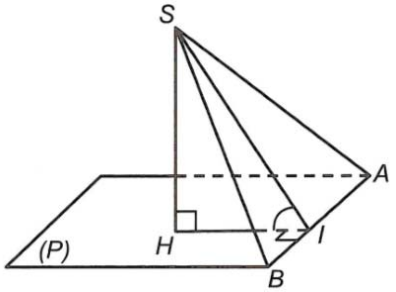
Góc giữa hai mặt phẳng

Góc giữa hai mặt phẳng bằng góc giữa hai đường thẳng lần lượt thuộc hai mặt phẳng cùng vuông góc với giao tuyến.

Góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy

Để tính góc $\widehat{((SAB),(P))}$, ta gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên (P).

Kẻ $HI \perp AB\,(I \in AB)$



$\Rightarrow \begin{cases} AB \perp HI \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHI) \Rightarrow AB \perp SI$

Vậy $\widehat{((SAB),(P))} = \widehat{(SI,HI)} = \widehat{SIH}$.

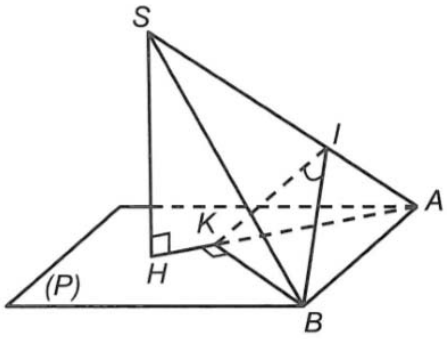
Góc giữa mặt bên và mặt đứng

Để tính góc $\widehat{((SAB),(SAH))}$ biết $(SAH) \perp (P)$, ta kẻ $BK \perp HA (K \in HA) \Rightarrow \begin{cases} BK \perp HA \\ BK \perp SH \end{cases} \Rightarrow BK \perp (SHA)$.

Kẻ $KI \perp SA (I \in SA)$

$\Rightarrow \begin{cases} SA \perp KI \\ SA \perp BK \end{cases} \Rightarrow SA \perp (BKI) \Rightarrow SA \perp BI$

Vậy $\widehat{((SAB),(SAH))} = \widehat{(KI,BI)} = \widehat{BIK}$.



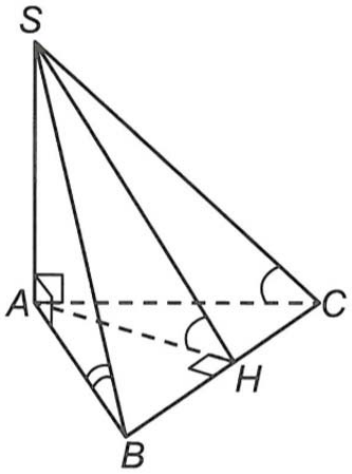
II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Thể tích khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy

1. Phương pháp

Hình chóp có cạnh bên vuông góc với đáy, thì cạnh bên đó chính là chiều cao của khối chóp.

MÔ HÌNH 1



Hình chóp $S.ABC$, cạnh SA vuông góc với đáy.

+ Đáy là tam giác ABC.

+ Đường cao SA.

+ Cạnh bên SB, SC, SA.

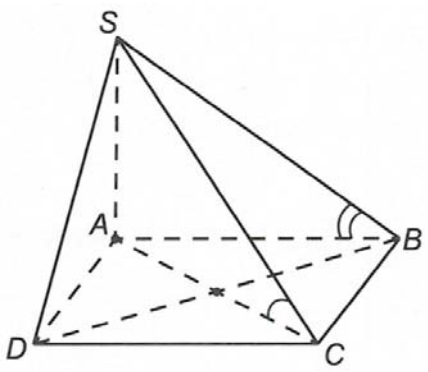
+ ΔSAB, ΔSAC là các tam giác vuông tại A.

+ Góc giữa cạnh SB với đáy ABC là góc $\widehat{SBA}$.

+ Góc giữa cạnh SC với đáy ABC là góc $\widehat{SCA}$.

+ Góc giữa mặt bên SBC với đáy là góc $\widehat{SHA}$ với H là hình chiếu vuông góc của A trên BC.

MÔ HÌNH 2



Hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật (hình vuông) và SA vuông góc với đáy.

+ Đáy là hình chữ nhật (hình vuông) $ABCD$.

+ Đường cao SA.

+ Cạnh bên SA, SB, SC, SD.

+ ΔSAB, ΔSAC, ΔSAD là các tam giác vuông tại A.

+ Góc giữa cạnh SB với đáy $ABCD$ là $\widehat{SBA}$.

+ Góc giữa cạnh SC với đáy $ABCD$ là $\widehat{SCA}$.

+ Góc giữa cạnh SD với đáy $ABCD$ là $\widehat{SDA}$.

+ Góc giữa mặt bên SBC với đáy $ABCD$ là $\widehat{SBA}$

+ Góc giữa mặt bên SCD với đáy $ABCD$ là $\widehat{SDA}$

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Cạnh bên $SA=a$ và vuông góc với đáy. Diện tích tam giác SBC bằng $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. a^3. **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a^3}{3}$. **D.** $\frac{2a^3}{3}$.

Lời giải.

Chọn C.

Đặt cạnh hình vuông là $x>0$.

Suy ra $SB=\sqrt{SA^2+AB^2}=\sqrt{a^2+x^2}$.

Dễ thấy $BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp SB$ nên ta có $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}=S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}SB.BC=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+x^2}.x\longrightarrow x=a.$

Vậy thể tích khối chóp: $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SA=\frac{a^3}{3}$.

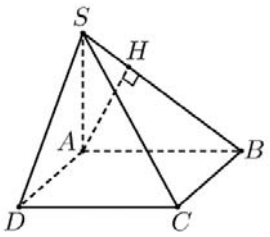
Bài tập 2. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

A. a^3. **B.** $\frac{a^3}{2}$. **C.** $\frac{a^3}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}a^3}{9}$.

Lời giải.

Chọn C.

Gọi H là hình chiếu của A trên SB.



Dễ dang chứng minh được

$$AH \perp (SBC) \Rightarrow d[A,(SBC)] = AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \longrightarrow SA = a.$

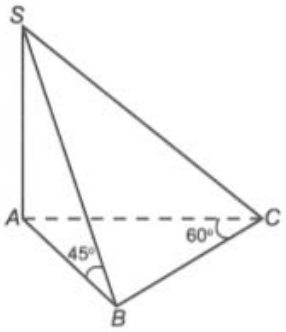
Vậy thể tích khối chóp: $V = \frac{1}{3} S_{ABCD}.SA = \frac{a^3}{3}.$

Bài tập 3. Cho hình chóp $S.ABC$ đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = a$, $\widehat{ACB} = 60°$ cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và SB tạo với mặt đáy một góc bằng $45°$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Ta có ΔABC vuông tại B nên

$$BC = AB.\cot\widehat{ACB} = a.\cot 60° = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BA.BC = \frac{1}{2} a.\frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$$

Ta có AB là hình chiếu vuông góc của SB trên (ABC)

$$\Rightarrow \left(\widehat{SB,(ABC)}\right) = \left(\widehat{SB,AB}\right) = \widehat{SBA} = 45°$$

ΔSAB vuông tại A nên

$SA = AB.\tan\widehat{SBA} = AB.\tan 45° = a$.

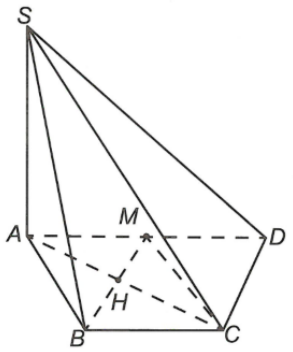
Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC}.SA = \frac{1}{3}\frac{a^2.\sqrt{3}}{6}.a = \frac{a^3\sqrt{3}}{18}$

Bài tập 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, $(AD \,//\, BC)$, cạnh $AD = 2a$, $AB = BC = CD = a$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, cạnh SC tạo với mặt phẳng đáy góc $60°$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{a^3}{3}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ **C.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$ **D.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Gọi M là trung điểm AD. Ta chia hình thang cân $ABCD$ thành ba tam giác $ABM, BCM, CDM,$ ba tam giác này là các tam giác đều cạnh a.

Do đó $S_{ABCD} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{4}$.

Ta có AC là hình chiếu vuông góc của SC trên $(ABCD) \Rightarrow \left(\widehat{SC,(ABCD)}\right) = \left(\widehat{SC,AC}\right) = \widehat{SCA} = 60°$.

Lại có AH là đường cao trong tam giác đều ABM nên $AH = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = 2AH = a\sqrt{3}$.

ΔSAC vuông tại A nên

$SA = AC.\tan\widehat{SCA} = AC.\tan 60° = 3a$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.SA = \dfrac{1}{3}.\dfrac{3a^2.\sqrt{3}}{4}.3a = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{4}$.

Nhận xét: *Việc chia nhỏ hình thang cân ABCD thành ba tam giác đều sẽ giúp ta thuận tiện trong việc tính diện tích đáy.*

Chú ý: *Nếu ABC là tam giác đều thì* $S_{ABC} = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4}$

Bài tập 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi $AC = 2a$, $BD = 3a$, $AC \perp BD$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, cạnh SC tạo với mặt phẳng đáy góc α thỏa mãn $\tan\alpha = \dfrac{1}{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\dfrac{2a^3}{3}$ **B.** $\dfrac{a^3}{3}$ **C.** $\dfrac{a^3}{4}$ **D.** $\dfrac{a^3}{12}$

Hướng dẫn giải

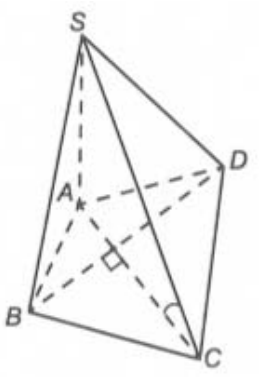
Chọn A.

Ta có $AC \perp BD \Rightarrow S_{ABCD} = \dfrac{AC.BD}{2} = 3a^2$.

Do AC là hình chiếu vuông góc của SC trên $(ABCD)$ nên $\left(\widehat{SC,(ABCD)}\right) = \left(\widehat{SC,AC}\right) = \widehat{SCA} = \alpha$

$\Rightarrow SA = AC.\tan\alpha = \dfrac{2a}{3}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}S_{S.ABCD}.SA = \dfrac{1}{3}3a^2.\dfrac{2a}{3} = \dfrac{2a^3}{3}$.

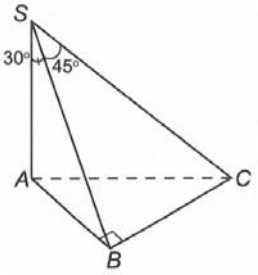


Bài tập 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau, $SB = a\sqrt{3}$, $\widehat{BSC} = 45°$, $\widehat{ASB} = 30°$. Thể tích khối chóp $SABC$ là V. Tỉ số $\dfrac{a^3}{V}$ là

A. $\dfrac{8}{3}$ **B.** $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\dfrac{4}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Ta có: $SA \perp (ABC) \Rightarrow (SAB) \perp (ABC)$.

Mà $\begin{cases}(SBC) \perp (SAB), (ABC) \perp (SAB)\\ (SBC) \cap (ABC) = BC\end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow \Delta ABC$, ΔSBC là các tam giác vuông tại B.

Xét ΔSAB vuông tại A có: $AB = SB.\sin\widehat{ASB} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $SA = SB.\cos\widehat{ASB} = \dfrac{3a}{2}$

Xét ΔSBC vuông tại B có: $BC = SB.\tan\widehat{BSC} = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.BC = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.a\sqrt{3} = \dfrac{3a^2}{4}$

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SA = \dfrac{1}{3}.\dfrac{3a^2}{4}.\dfrac{3a}{2} = \dfrac{3a^3}{8} \Rightarrow \dfrac{a^3}{V} = \dfrac{8}{3}$

Tổng quát:

Cho hình chóp $S.ABC$ có *SA vuông góc với mặt phẳng* (ABC), hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) *vuông góc với nhau,* $\widehat{BSC}=\alpha$, $\widehat{ASB}=\beta$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ *là:* $V_{S.ABC}=\dfrac{SB^3.\sin 2\alpha.\tan\beta}{12}$

Chứng minh:

Xét ΔSAB *vuông tại A có:* $AB=SB.\sin\alpha$; $SA=SB.\cos\alpha$

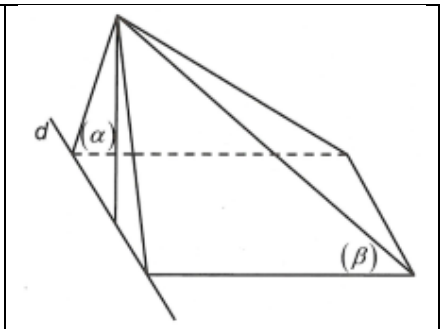
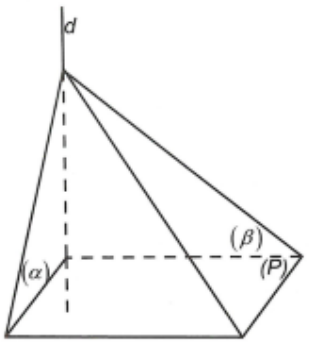
Xét ΔSBC *vuông tại B có:* $BC=SB.\tan\beta$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}AB.BC=\dfrac{1}{2}.SB^2.\sin\alpha.\tan\beta$

Vậy $V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}.S_{\Delta ABC}.SA=\dfrac{SB^2\sin\alpha\tan\beta SB\cos\alpha}{6}=\dfrac{SB^3.\sin 2\alpha.\tan\alpha}{12}$

Dạng 2. Thể tích khối chóp có mặt bên vuông góc với đáy

1. Phương pháp

Hình chóp có một mặt bên vuông góc với đáy thì chân đường cao nằm trên giao tuyến của mặt phẳng đó và đáy. Ta có: $\begin{cases}(\alpha)\perp(\beta)\\(\alpha)\cap(\beta)=d\\a\subset(\alpha)\\a\perp d\end{cases}\Rightarrow a\perp(\beta).$	
Hình chóp có hai mặt vuông góc với đáy thì giao tuyến của chúng sẽ vuông góc với đáy. Ta có: $\begin{cases}(\alpha)\perp(P)\\(\beta)\perp(P)\\(\alpha)\cap(\beta)=d\end{cases}\Rightarrow d\perp(P).$	

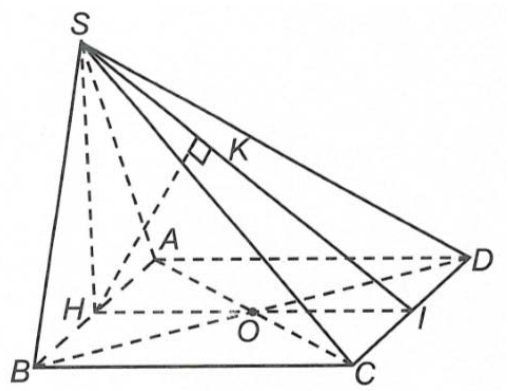
2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$, $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, khoảng cách giữa AB và SC bằng $\dfrac{3a}{2}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

A. $V=a^3\sqrt{3}$ **B.** $V=2a^3\sqrt{3}$ **C.** $V=\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{3}$ **D.** $V=3a^3\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Gọi *H, I* lần lượt là trung điểm của *AB, CD,* kẻ $HK \perp SI$.

Vì tam giác *SAB* cân tại *S* và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy

Suy ra $SH \perp (ABCD)$.

$$\begin{cases} CD \perp HI \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SIH) \Rightarrow CD \perp HK \Rightarrow HK \perp (SCD)$$

$$CD \,//\, AB \Rightarrow d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(H, (SCD)) = HK$$

Suy ra $HK = \frac{3a}{2}; HI = AD = a\sqrt{3}$

Trong tam giác vuông *SHI* ta có $SH = \sqrt{\frac{HI^2 . HK^2}{HI^2 - HK^2}} = 3a$

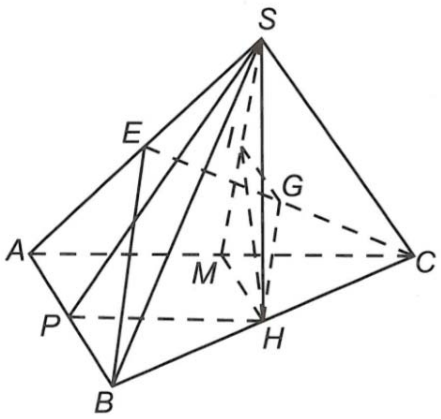
Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SH . S_{ABCD} = \frac{1}{3} 3a . a^2 \sqrt{3} = a^3 \sqrt{3}$.

Bài tập 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy *ABC* là tam giác vuông tại *A*, $AB = A\sqrt{2}$, $AC = A\sqrt{5}$. Hình chiếu của điểm *S* trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm của đoạn thẳng *BC*. Biết rằng góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SAC) bằng $60°$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{5a^3\sqrt{6}}{12}$ **B.** $\frac{5a^3\sqrt{10}}{12}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{210}}{24}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{30}}{12}$

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Gọi H là trung điểm của BC.

Ta có $(SAB)\cap(SAC)=SA$, kẻ $BE\perp SA$ và $GH\ //\ BE$,

Suy ra $\left(\widehat{(SAC),(SAB)}\right)=\left(\widehat{GH,(SAC)}\right)=\widehat{HGI}=60°$.

Đặt $SH=h$, ta tính được $SA=\sqrt{h^2+\frac{7a^2}{4}}$ và $SP=\sqrt{h^2+\frac{5a^2}{4}}$.

Vậy $BE=\frac{2S_{SAB}}{SA}=\frac{a\sqrt{2}.\sqrt{h^2+\frac{5a^2}{4}}}{\sqrt{h^2+\frac{7a^2}{4}}}\Rightarrow HG=\frac{BE}{2},\ HI=\frac{SH.HM}{SM}=\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}.h}{\sqrt{h^2+\frac{a^2}{2}}}$

Tam giác GIH vuông tại I có

$$\frac{IH}{HG}=\sin 60°\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}.\sqrt{h^2+\frac{5a^2}{4}}}{\sqrt{h^2+\frac{7a^2}{4}}}=\frac{h.\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{h^2+\frac{a^2}{2}}}$$

$$\Rightarrow h^4+\frac{7a^2}{4}h^2-\frac{15a^4}{8}=0\Rightarrow h=\frac{2a\sqrt{3}}{4}$$

Vậy $V_{SABC}=\frac{1}{6}AB.AC.SH=\frac{a^3\sqrt{30}}{12}$.

Bài tập 3. Cho hình chóp $S.ABC$ với các mặt phẳng $(SAB),\ (SBC),\ (SAC)$ vuông góc với nhau từng đôi một, diện tích các tam giác *SAB, SBC, SAC* lần lượt là $20\ \text{cm}^2,\ 27\ \text{cm}^2,\ 30\ \text{cm}^2$. Thể tích khối chóp $SABC$ là

A. $40\sqrt{3}\ \text{cm}^3$ **B.** $40\ \text{cm}^3$ **C.** $60\ \text{cm}^3$ **D.** $60\sqrt{3}\ \text{cm}^3$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SAC) vuông góc với nhau từng đôi một nên $SA \perp SB$, $SA \perp SC$, $SB \perp SC$.

$S_{SAB} = 20 \text{ cm}^2 \Rightarrow SA.SB = 40 \text{ cm}^2$

$S_{SBC} = 27 \text{ cm}^2 \Rightarrow SB.SC = 54 \text{ cm}^2$

$S_{SAC} = 30 \text{ cm}^2 \Rightarrow SA.SC = 60 \text{ cm}^2$

$\Rightarrow (SA.SB.SC)^2 = 40.54.60 = 129600 \Rightarrow SA.SB.SC = 360$

Do $(SAB),(SBC),(SAC)$ vuông góc với nhau từng đôi một $\Rightarrow AS \perp (SBC)$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC}.SA = \frac{1}{6} SA.SB.SC = 60 \text{ cm}^3$.

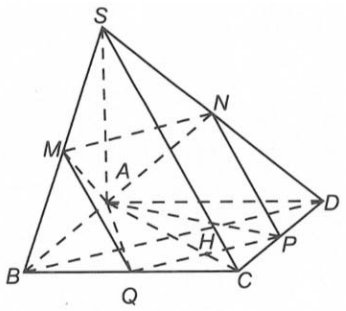
Bài tập 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy, biết $SC = a\sqrt{3}$. Gọi *M, N, P, Q* lần lượt là trung điểm của *SB, SD, CD, BC.* Thể tích của khối chóp $A.MNPQ$ là

A. $\frac{a^3}{3}$ **B.** $\frac{a^3}{8}$ **C.** $\frac{a^3}{12}$ **D.** $\frac{a^3}{4}$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $\begin{cases} MN \,//\, PQ \\ MN = PQ \\ NP \perp PQ (BD \perp SC) \end{cases}$



$\Rightarrow MNPQ$ là hình chữ nhật.

Suy ra $V_{A.MNPQ} = 2V_{A.MQP} = 2V_{M.AQP}$

Ta có $d(M;(AQP)) = \frac{1}{2} SA$

Mà $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = a \Rightarrow d(M;(AQP)) = \frac{1}{2} SA = \frac{a}{2}$

$S_{\Delta AQP} = \frac{1}{2} AH.QP = \frac{1}{2}.\frac{3}{4} AC.\frac{1}{2} BD = \frac{3}{16} AC.BD = \frac{3}{16}\left(a\sqrt{2}\right)^2 = \frac{3}{8} a^2$

Do đó: $V_{M.AQP} = \frac{1}{3} d(M;(AQP)).S_{\Delta AQP} = \frac{1}{3}.\frac{a}{2}.\frac{3}{8} a^2 = \frac{a^3}{16}$

Vậy $V_{A.MNPQ} = 2V_{M.AQP} = 2.\frac{a^3}{16} = \frac{a^3}{8}$

Dạng 3. Thể tích khối chóp đều

1. Phương pháp

Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

Trong hình chóp đều:

+) Đáy là một đa giác đều

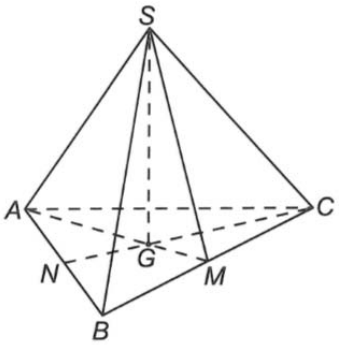
+) Đường cao hình chóp qua tâm của đa giác đáy.

+) Các mặt bên là các tam giác cân và bằng nhau .

Đường cao vẽ từ đỉnh của một mặt bên gọi là trung đoạn của hình chóp đều.

+) Các cạnh bên hợp với đáy các góc bằng nhau

+) Các mặt bên hợp với đáy các góc bằng nhau.



Chú ý:

+) Phân biệt hình chóp tam giác đều khác với hình chóp có đáy là tam giác đều. Hình chóp tam giác đều là hình chóp có đáy là tam giác đều và các cạnh bên bằng nhau. Nói một cách khác, hình chóp tam giác đều là ***hình chóp có đáy là tam giác đều nhưng điều ngược lại không đúng.***

+) Hình chóp tứ giác đều là hình chóp đều có đáy là hình vuông.

2. Bài tập

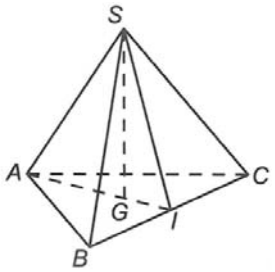
Bài tập 1. Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $2a$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

A. $V=\dfrac{\sqrt{11}a^3}{12}$ **B.** $V=\dfrac{\sqrt{13}a^3}{12}$ **C.** $V=\dfrac{\sqrt{11}a^3}{6}$ **D.** $V=\dfrac{\sqrt{11}a^3}{4}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$S.ABC$ là hình chóp tam giác đều và G là trọng tâm tam giác ABC. Khi đó $SG\perp(ABC)$. Do đáy là tam giác đều nên gọi I là trung điểm cạnh BC, khi đó AI là đường cao của tam giác đáy.



Theo định lý Pi-ta-go ta có

$AI=\sqrt{a^2-\dfrac{a^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, và $AG=\dfrac{2}{3}AI=\dfrac{2a\sqrt{3}}{3.2}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong tam giác SGA vuông tại G ta có $SG=\sqrt{4a^2-\dfrac{a^2}{3}}=\dfrac{\sqrt{11}a}{\sqrt{3}}$.

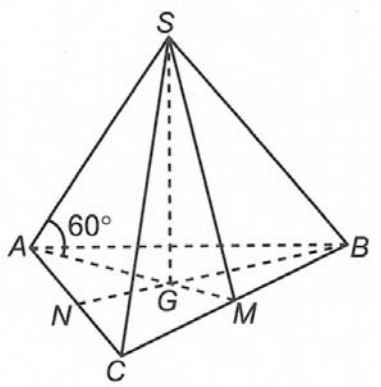
Vậy $V=\frac{1}{3}.\frac{1}{2}a\frac{a\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{11}a}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{11}a^3}{12}$

Bài tập 2. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng $60°$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **C.** $V=\frac{a^3.\sqrt{5}}{12}$ **D.** $V=\frac{a^3.\sqrt{3}}{10}$

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Ta có $S_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

$S.ABC$ là hình chóp tam giác đều và G là trọng tâm tam giác ABC. Khi đó $SG\perp(ABC)$.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên

$AG=\frac{2}{3}AM=\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Xét tam giác SAG vuông tại G có

$SG=AG.\tan 60°=a$

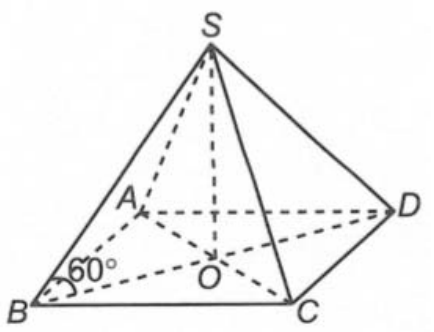
Vậy $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SG.S_{ABC}=\frac{1}{3}.a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Bài tập 3. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên tạo với mặt phẳng đáy một góc $60°$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

A. $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$ **B.** $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$ **C.** $V=\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **D.** $V=\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Ta có $S_{ABCD}=a^2$.

Gọi $O=AC\cap BD$.

Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO\perp(ABCD)$.

Ta có $\widehat{(SB,(ABCD))}=\widehat{(SB,OB)}=\widehat{SBO}$.

Tam giác SOB vuông tại O, có

$SO=OB.\tan\widehat{SBO}=\frac{a\sqrt{2}}{2}.\tan 60°=\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

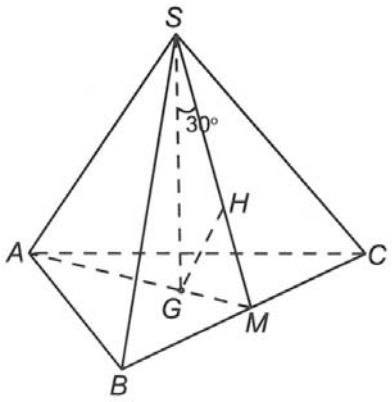
Vậy $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}.S_{ABCD}.SO=\frac{1}{3}.a^2.\frac{a\sqrt{6}}{2}=\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Bài tập 4. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, góc giữa SG và mặt phẳng (SBC) là $30°$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Tam giác ABC đều cạnh a nên $S_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Hạ $GH\perp SM\left(H\in SM\right)\Rightarrow GH\perp\left(SBC\right)\Rightarrow\left(\widehat{SG,\left(SBC\right)}\right)=\widehat{GSM}=30°$.

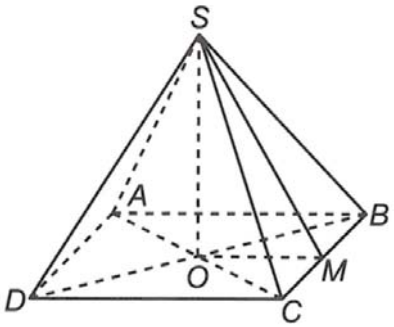
$SG=GM.\cot\widehat{GSM}=\frac{1}{3}.AM.\cot 30°=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{3}=\frac{a}{2}$

Vậy $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.S_{ABC}.SG=\frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a}{2}=\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Bài tập 5. Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau, đường cao của một mặt bên là $a\sqrt{3}$. Thể tích V của khối chóp đó là

A. $V=\frac{2\sqrt{2}}{3}a^3$ **B.** $V=\frac{4\sqrt{2}}{3}a^3$ **C.** $V=\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$ **D.** $V=\frac{\sqrt{2}}{9}a^3$

Hướng dẫn giải

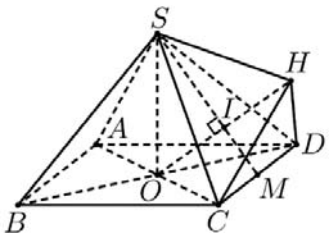


Ta có $SM=a\sqrt{3}$. Do ΔSBC đều nên $SC=BC=2a$.

$\Rightarrow SO=\frac{AC}{2}=\frac{2a\sqrt{2}}{2}=a\sqrt{2}$.

Vậy thể tích khối chóp đó là $V=\frac{1}{3}SO.S_{ABCD}=\frac{1}{3}a\sqrt{2}.4a^2=\frac{4a^3\sqrt{2}}{3}$.

Bài tập 6. Cho khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, cạnh bằng a. Cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm của CD, H là điểm đối xứng của O qua SM (tham khảo hình vẽ bên). Thể tích khối đa diện $ABCDSH$ bằng



A. $\frac{a^3\sqrt{10}}{12}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{10}}{18}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{10}}{24}$. **D.** $\frac{5a^3\sqrt{10}}{24}$.

Lời giải.

Chọn D.

Khối đa diện $ABCDSH$ được chia thành hai khối chóp $S.ABCD$ và $H.SCD$.

• $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.SO=\frac{1}{3}S_{ABCD}.\sqrt{SB^2-OB^2}=\frac{a^3\sqrt{10}}{6}$.

• Vì H đối xứng với O qua SM nên $d[O,(SCD)]=d[H,(SCD)]$.

Suy ra $V_{HSCD}=V_{OSCD}=\frac{1}{4}V_{S.ABCD}=\frac{a^3\sqrt{10}}{24}$.

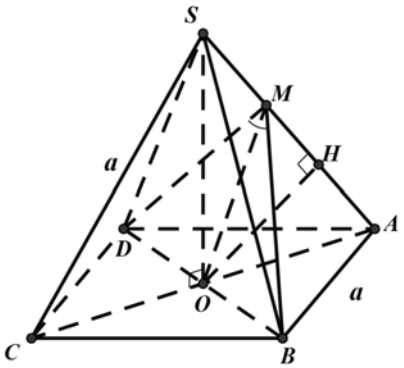
Vậy thể tích khối đa diện cần tính: $V=V_{S.ABCD}+V_{H.SCD}=\frac{5a^3\sqrt{10}}{24}$.

Bài tập 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ đều có cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a. Cho điểm $M\in SA$ sao cho diện tích S của ΔMBD nhỏ nhất. Giá trị S bằng

A. $\frac{3a}{4}$. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}a}{4}$. **D.** $\frac{a}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C



Gọi S là diện tích ΔMBD

$\Rightarrow S=\frac{1}{2}BD.MO=\frac{1}{2}a\sqrt{2}.MO \quad (1)$

$\Rightarrow \min S$ xảy ra $\Leftrightarrow \min MO$ xảy ra

Nhưng $\min MO=d\left[O,SA\right]=OH$

Vì tứ diện đều nên $O=AB\cap CD$ thì SO là đường cao.

$\Rightarrow \Delta SOA$ vuông tại O (2)

Trong đó:

$$\begin{cases} OA=\frac{a\sqrt{2}}{2} \\ SO=\sqrt{SA^2-OA^2}=\sqrt{a^2-\frac{2a^2}{4}}=\sqrt{\frac{2a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$\overset{(2)}{\Rightarrow}\Delta SOA$ vuông cân tại $O\Rightarrow OH=OA.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{a}{2}$

$\overset{(1)}{\Rightarrow}\min S=\frac{1}{2}.a\sqrt{2}.\frac{a}{2}=\frac{\sqrt{2}a}{4}$ xảy ra khi H là trung điểm SA.

Dạng 4. Thể tích khối chóp biết trước một đường thẳng vuông góc với đáy

1. Phương pháp

Hình chóp có cạnh bên vuông góc với đáy, thì cạnh bên đó chính là chiều cao của khối chóp.

Việc tính *SH* ta thường dựa vào hệ thức lượng trong tam giác vuông.

Đề bài thường cho mối quan hệ về góc giữa đường thẳng với mặt phẳng hoặc góc giữa hai mặt phẳng xác định độ dài đường cao.

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A, cạnh $BC=2a$, gọi M là trung điểm BC, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của AM, tam giác SAM vuông tại S. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

Chú ý:

Trong tam giác vuông đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền.

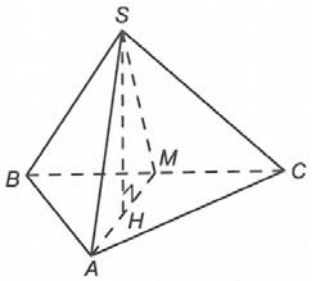
A. $\frac{a^3}{6}$ **B.** $\frac{a^3}{2}$ **C.** $\frac{a^3}{3}$ **D.** $\frac{a^3}{9}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có ΔABC vuông cân tại A, $BC=2a$

$\Rightarrow AM=\frac{BC}{2}=a\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AM.BC=a^2$



Xét ΔSAM vuông tại S có: $SH = \dfrac{AM}{2} = \dfrac{a}{2}$

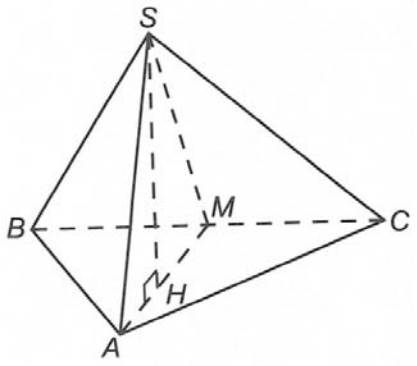
Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.S_{ABC}.SH = \dfrac{1}{3}.a^2.\dfrac{a}{2} = \dfrac{a^3}{6}$

Bài tập 2. Cho hình chóp $S.ABC$, đáy là tam giác ABC có $AB = 19$ cm, $BC = 20$ cm, $AC = 37$ cm, cạnh bên SA=$\sqrt{985}$ cm. Gọi M là trung điểm của BC, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là điểm H thỏa mãn $\overrightarrow{AH} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AM}$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là

A. 570cm^3 **B.** 760cm^3 **C.** 1520cm^3 **D.** 1140cm^3

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Ta có $p = \dfrac{AB + BC + AC}{2} = 38$ cm.

$\Rightarrow S_{ABC} = \sqrt{38(38-19)(38-20)(38-37)} = 114$ cm^2.

$AM = \sqrt{\dfrac{AB^2 + AC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4}} = 3\sqrt{85}$ cm

$\Rightarrow AH = \dfrac{1}{3}AM = \sqrt{85}$ cm

ΔSAH vuông tại H có: $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = 30$ cm

Vậy $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.S_{ABC}.SH = \dfrac{1}{3}.114.30 = 1140$ cm^3

Chú ý:

Khi biết độ dài ba cạnh thì diện tích tam giác được tính theo công thức Hê-rông.

Tam giác ABC có:

$BC = a; AC = b; AB = c$

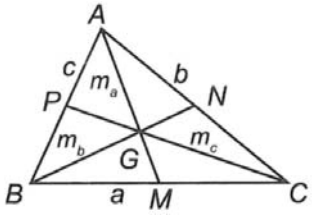
Nửa chu vi: $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

Khi đó:

$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

.

Công thức độ dài trung tuyến:



$m_a^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$.

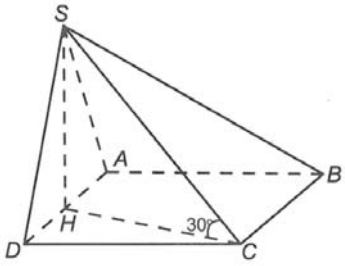
$m_b^2 = \dfrac{a^2 + c^2}{2} - \dfrac{b^2}{4}$.

$m_c^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{2} - \dfrac{c^2}{4}$.

Bài tập 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB = a$, $AD = 2a$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của AD. Cạnh SC tạo với đáy một góc bằng $30°$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{a^3}{3}$ **B.** $\frac{2a^3\sqrt{6}}{9}$ **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$

Hướng dẫn giải



Chọn B.

Ta có $S_{ABCD} = AB.AD = 2a^2$.

Do HC là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD) \Rightarrow \widehat{(SC,(ABCD))} = \widehat{SCH} = 30°$

+ Xét tam giác DHC vuông tại D có:

$HC = \sqrt{DH^2 + DC^2} = a\sqrt{2}$

+ Xét tam giác SHC vuông tại H có:

$SH = HC.\tan\widehat{SCH} = HC.\tan 30° = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.SH = \frac{1}{3}.2a^2.\frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{2a^3\sqrt{6}}{9}$.

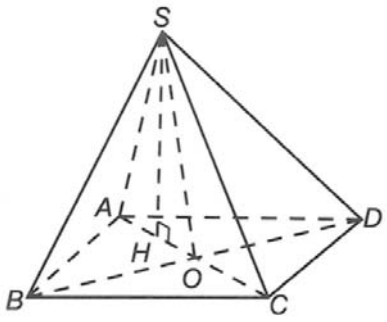
Bài tập 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O, cạnh $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, tam giác SAC vuông tại S. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy trùng với trung điểm H của đoạn AO. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $\frac{a^3}{2}$ **B.** $\frac{a^3}{4}$ **C.** $\frac{a^3}{6}$ **D.** $\frac{a^3}{8}$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.BC = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$



Xét ΔABC vuông tại B có:

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a$

Xét ΔSAC vuông tại S có:

$SO = AO = \frac{AC}{2} = a \Rightarrow HO = \frac{AO}{2} = \frac{a}{2}$

Xét ΔSHO vuông tại H có:

$SH = \sqrt{SO^2 - HO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC}.SH = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{4}$

Bài tập 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAC} = 60°$, hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm G của tam giác ABC. Mặt phẳng (SAC) hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc $45°$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\frac{a^3}{6}$ **C.** $\frac{a^3}{12}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $\widehat{BAC} = 60°$ nên tam giác ABC đều

$\Rightarrow S_{ABCD} = 2.S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

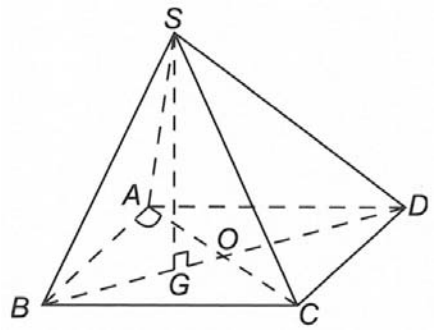
Gọi $O = AC \cap BD$

Ta có $AC \perp BD, AC \perp SG$

$\Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp SO$

Mặt khác $OB \perp AC$

$\Rightarrow \widehat{((SAC),(ABCD))} = \widehat{SOB} = 45°$



Xét tam giác SOG vuông tại G:

$SG = OG.\tan\widehat{SOB} = OG.\tan 45° = \frac{1}{3}BO = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SG.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{6}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{12}$.

Dạng 5. Thể tích khối chóp có các cạnh bên bằng nhau hoặc các cạnh bên, mặt bên cùng tạo với đáy những góc bằng nhau

1. Phương pháp

- Hình chóp có các cạnh bên bằng nhau hoặc cạnh bên cùng tạo với đáy những góc bằng nhau thì chân

Ví dụ: Cho hình chóp $S.ABC$, đáy ABC có $AB = 10$ cm, $BC = 12$ cm, $AC = 14$ cm, các mặt bên

đường cao trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp mặt đáy.

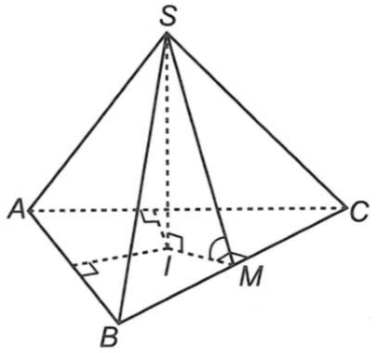
- Hình chóp có các mặt bên cùng tạo với đáy những góc bằng nhau thì chân đường cao chính là tâm đường tròn nội tiếp mặt đáy.

cùng tạo với mặt phẳng đáy các góc bằng nhau và đều bằng α thỏa mãn $\tan\alpha = 3$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. 228 cm^3 **B.** 576 cm^3

C. 192 cm^3 **D.** 384 cm^3

Hướng dẫn giải



Ta có $p = \dfrac{AB + BC + AC}{2} = 18(\text{cm})$

$S = \sqrt{18(18-10)(18-12)(18-14)} = 24\sqrt{6}(\text{cm}^2)$

Các mặt bên cùng tạo với mặt phẳng đáy các góc bằng nhau nên hình chiếu của S trên (ABC) là tâm đường tròn nội tiếp $\Delta ABC \Rightarrow SI \perp (ABC)$.

$S = p.r \Rightarrow IM = r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}(\text{cm})$

ΔSIM vuông tại I có

$SI = IM.\tan\widehat{SMI} = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}.3 = 4\sqrt{6}(\text{cm})$.

Vậy

$V_{SABC} = \dfrac{1}{3}.S_{ABBC}.SI = \dfrac{1}{3}.24\sqrt{6}.4\sqrt{6} = 192(\text{cm}^3)$

Chọn C.

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a, các cạnh bên bằng nhau và đều bằng $a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{6}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{4}$

Các cạnh bên bằng nhau nên hình chiếu của S trên (ABC) là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Do ΔABC đều nên

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow SG \perp (ABC)$

ΔABC đều $\Rightarrow AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AG = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

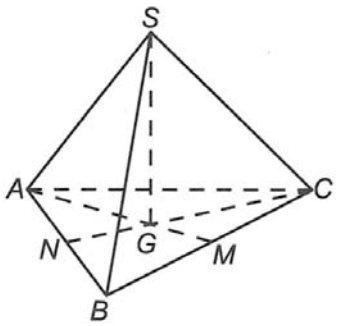
ΔSGA vuông tại G có

$SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$

Vậy $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}.S_{ABC}.SG = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{2a\sqrt{6}}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$

hình chiếu vuông góc của S trên (ABC) là trọng tâm G

$\Rightarrow SG \perp (ABC)$



Bài tập 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120°$, các cạnh bên bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng đáy các góc $30°$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$ **B.** $\dfrac{a^3}{4}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$ **D.** $\dfrac{a^3}{12}$

Cạnh bên bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng đáy các góc $30°$ nên hình chiếu của S trên (ABC) là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Các cạnh bên bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng đáy các góc $30°$ nên hình chiếu O của S trên (ABC) là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC

$\Rightarrow SO \perp (ABC)$

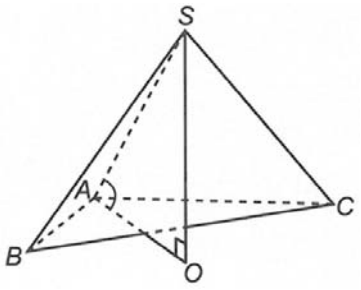
$\Rightarrow \left(\widehat{(SA),(ABC)}\right) = \widehat{SAO} = 30°$

ΔABC có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\widehat{BAC}} = a\sqrt{3}$

$S = \dfrac{abc}{4R} \Rightarrow \dfrac{a.a.a\sqrt{3}}{4.OA} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow OA = a$

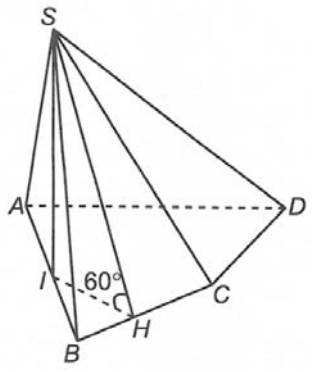
ΔSAO có $SO = AO.\tan\widehat{SAO} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

Vậy $V_{SABC} = \dfrac{1}{3}.S_{AABC}.SO = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a^3}{12}$



$\left(\widehat{(SA),(ABC)}\right) = \widehat{SAO} = 30°$.

Bài tập 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi và góc tạo bởi các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCD), (SDA) với mặt đáy lần lượt là $90°$, $60°$, $60°$, $60°$. Biết rằng tam giác SAB vuông cân tại S, $AB = a$ và chu vi tứ giác $ABCD$ là $9a$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.



A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$ **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$

C. $V = \dfrac{2a^3\sqrt{3}}{9}$ **D.** $V = a^3\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Gọi I là trung điểm AB.

Kẻ $IH \perp BC\,(H \in BC)$, ta có góc giữa $\widehat{((SBC),(ABCD))} = \widehat{SHI}$

Do các mặt (SBC), (SCD), (SDA) tạo với $(ABCD)$ các góc bằng nhau và bằng $60°$ nên các khoảng cách từ I đến các cạnh CD, DA bằng nhau và bằng IH.

Ta có $SI = IH.\tan 60° \Rightarrow IH = \dfrac{SI}{\tan 60°} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$

$S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}(BC + CD + DA).HI = \dfrac{1}{2}(9a - AB).\dfrac{a\sqrt{6}}{6} = \dfrac{2a^2\sqrt{6}}{3}$

Vậy $V = \dfrac{1}{3}SI.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\dfrac{2a^2\sqrt{6}}{6} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{9}$

Kẻ $IH \perp BC$ ta có $\widehat{((SBC),(ABCD))} = \widehat{SHI}$.

Do các mặt (SBC), (SCD), (SDA) tạo với $(ABCD)$ các góc bằng nhau nên các khoảng cách từ I đến các cạnh CD, DA bằng nhau từ đó tính được $SI = IH.\tan\widehat{SIH}$

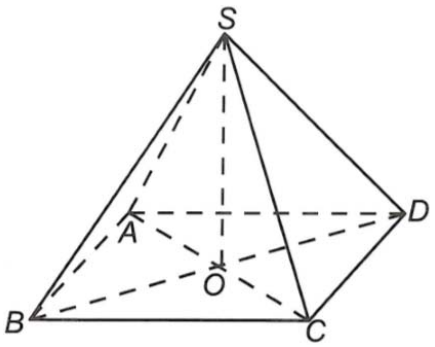
Bài tập 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật cạnh $AB = a$, $AD = 2a$. Đỉnh S cách đều các đỉnh $A, B, C, D,$ của mặt đáy và $SB = a\sqrt{5}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{8}$ **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{6}$ **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{4}$ **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{15}}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Đỉnh S cách đều các đỉnh A, B, C, D nên tâm hình chữ nhật là chân đường cao hạ từ đỉnh xuống đáy.



Ta có $S_{ABCD} = AB.AD = 2a^2$.

$AC \cap DB = \{O\}$. Do S các đều các đỉnh $A,B,C,D \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

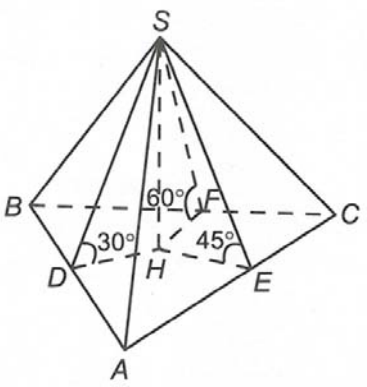
Ta có $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = a\sqrt{5}$

$\Rightarrow SB = SD = BD = a\sqrt{5}$ nên ΔSBD là tam giác đều

$\Rightarrow SO = \dfrac{BD\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{15}}{2}.2a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{15}}{3}$.

Bài tập 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh *a.* Các mặt bên (SAB), (SAC), (SBC) lần lượt tạo với đáy các góc là $30°$, $45°$, $60°$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của S trên (ABC) nằm trong tam giác ABC.



A. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8\left(4+\sqrt{3}\right)}$ **B.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$

C. $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4\left(4+\sqrt{3}\right)}$ **D.** $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{2\left(4+\sqrt{3}\right)}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC).

Kẻ $HD \perp AB(D \in AB)$, $HE \perp AC(E \in AC)$,

$HF \perp BC(F \in BC)$.

Ta có $HD = SH.\cot 30° = \sqrt{3}SH$, $HE = SH.\cot 45° = SH$,

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC).

Kẻ $HD \perp AB(D \in AB)$

$HE \perp AC(E \in AC)$

$HF \perp BC(F \in BC)$

$HF = SH.\cot 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}SH$

Ta có $S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ mà $S_{ABC} = S_{HAB} + S_{HBC} + S_{HAC}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}SH\left(1+\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right).a = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow SH = \dfrac{3a}{2\left(4+\sqrt{3}\right)}$

Vậy $V_{S.ABCD} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{3a}{2\left(4+\sqrt{3}\right)}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{8\left(4+\sqrt{3}\right)}$

Tam giác ABC bị chia thành 3 tam giác nhỏ do đó

$S_{ABC} = S_{HAB} + S_{HBC} + S_{HAC}$.

Diện tích các tam giác nhỏ biểu diễn theo cạnh SH và hệ thức lượng các tam giác vuông. Từ đó tìm được SH.

Dạng 6. Thể tích lăng trụ đứng

1. Phương pháp

Hình lăng trụ đứng: Là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với đáy. Độ dài cạnh bên là chiều cao của hình lăng trụ đứng.

Các mặt bên là các hình chữ nhật. Các mặt bên đều vuông góc với đáy.

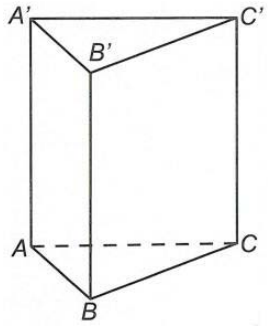
Hình lăng trụ đều: Là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều. Các mặt bên đều là các hình chữ nhật bằng nhau.

Ví dụ: Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\dfrac{3a^3}{4}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

C. $\dfrac{3a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\dfrac{a^3}{4}$.

Hướng dẫn giải



Ta có ΔABC đều cạnh a $\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.AA' = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.a = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Chọn B.

2. Bài tập

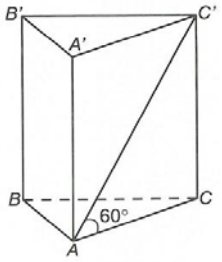
Bài tập 1. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy là tam giác ABC vuông tại A, $AB = a, \widehat{ABC} = 30°$ cạnh $C'A$ hợp với mặt đáy góc $60°$.Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\frac{a^3}{6}$. **B.** $\frac{a^3}{2}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C



ΔABC vuông tại A có $AC = AB.\tan\widehat{ABC} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.AB.AC = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}$.

Ta có $\left(\widehat{C'A(ABC)}\right) = \widehat{C'AC} = 60°$.

$\Delta ACC'$ vuông tại C có $CC' = AC.\tan\widehat{C'AC} = a$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{AABC}.CC' = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}.a = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

ΔABC vuông tại A có:

$AC = AB.\tan\widehat{ABC}$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.$

Ta có $\left(\widehat{C'A(ABC)}\right) = \widehat{C'AC}$

$= 60°$

từ đó dựa vào hệ thức lương trong $\Delta ACC'$ vuông tại C tính được

$CC' = AC.\tan\widehat{C'AC}.$

Bài tập 2. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác vuông tại A, cạnh $AC = a, \widehat{ABC} = 30°$, cạnh BC' hợp với mặt bên $(ACC'A)$ góc $30°$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

A. $a^3\sqrt{6}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

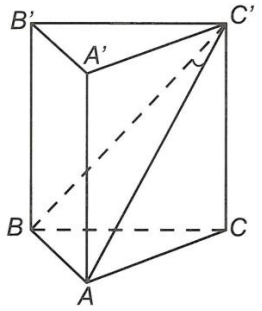
C. $2a^3\sqrt{3}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

ΔABC vuông tại A có:

$AB = AC.\cot\widehat{ABC}$



Ta có $BA \perp (ACC'A') \Rightarrow \left(\widehat{BC',(ACC'A')}\right) = \widehat{BC'A} = 30°$.

ΔABC vuông tại A có $AB = AC.\cot \widehat{ABC} = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB.AC = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

$\Delta ABC'$ vuông tại A có

$AC' = AB.\cot \widehat{AC'B} = a\sqrt{3}.\sqrt{3} = 3a$.

$\Delta ACC'$ vuông tại C có $CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2} = 2a\sqrt{2}$.

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.CC' = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.2a\sqrt{2} = a^3\sqrt{6}$.

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB.AC$

dựa vào hệ thức lượng trong ΔABC *vuông tại A tính được* $AC' = AB.\cot \widehat{AC'B}$.

$\Delta ACC'$ *vuông tại C tính được chiếu cao lăng trụ* $CC' = \sqrt{AC'^2 - AC^2}$

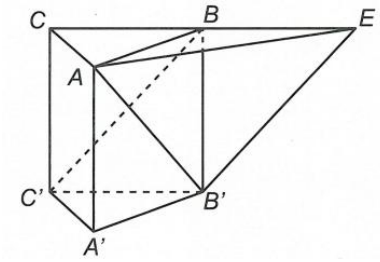
Bài tập 3: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a và $AB' \perp BC'$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $V = \frac{7a^3}{8}$. **B.** $V = a^3\sqrt{6}$.

C. $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{8}$. **D.** $V = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C



Gọi E là điểm đối xứng của C qua điểm $B \Rightarrow AB = \frac{1}{2} CE = a$.

Khi đó tam giác ACE vuông tại $A \Rightarrow AE = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

Tứ giác $BC'B'E$ là hình bình hành $\Rightarrow BC' // B'E$.

Do $AB' \perp BC' \Rightarrow AB' \perp B'E$.

Ta lấy điểm E là điểm đối xứng với C qua B.

Khi đó tam giác ACE vuông tại A.

Tứ giác $BC'B'E$ *là hình bình hành* $\Rightarrow BC' // B'E$.

Do $AB' \perp BC'$

$\Rightarrow AB' \perp B'E$.

Ta có $BC' = B'E = AB'$ *nên tam giác* $AB'E$ *vuông cân tại* B'.

Nên tính được $AB' = \frac{AE}{\sqrt{2}}$.

Mặt khác, ta có $BC' = B'E = AB'$ nên tam giác $AB'E$ vuông cân tại B'

$\Rightarrow AB' = \dfrac{AE}{\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}.$

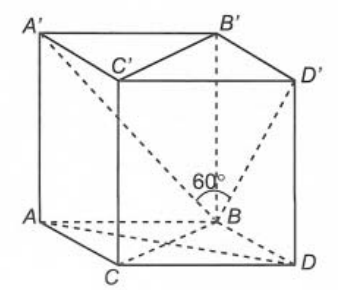
Xét tam giác $AA'B'$ vuông tại A'

$\Rightarrow AA' = \sqrt{AB'^2 - A'B'^2} = \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 - a^2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.$

Vậy $V = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{8}.$

Dựa vào định lý Py-ta-go trong tam giác $AA'B'$ vuông tại A tính được

$AA' = \sqrt{AB'^2 - A'B'^2}.$



Bài tập 4: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, cạnh $BC = a\sqrt{2}$, góc giữa hai đường thẳng AC' và BA' bằng $60°$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{2}.$ **B.** $\dfrac{a^3}{2}.$

C. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}.$ **D.** $\dfrac{a^3}{3}.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

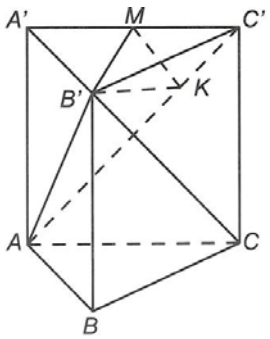
Ta có $BC = a\sqrt{2} \Rightarrow AB = AC = a \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{a^2}{2}.$

Lấy D, D' sao cho $ABDC.A'B'D'C$ là hình hộp

$\Rightarrow BD' // AC' \Rightarrow \widehat{A'BD'} = \left(\widehat{AC', BA'}\right) = 60°$

Mà $AB = AC \Rightarrow A'B = BD' \Rightarrow \Delta A'BD'$ đều.

Do $A'B'C'D'$ là hình chữ nhật, $A'D' = B'C' = a\sqrt{2} \Rightarrow A'B = a\sqrt{2} = AA' = a$.



Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.AA' = \dfrac{a^3}{2}.$

Bài tập 5: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = BC = a$. Biết rằng góc giữa hai mặt phẳng (ACC') và $(AB'C')$ bằng $60°$. Thể tích khối chóp $B'.ACC'A'$ bằng

A. $\dfrac{a^3}{3}.$ **B.** $\dfrac{a^3}{6}.$

C. $\frac{a^3}{2}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Gọi M là trung điểm của $A'C'$. Do tam giác $A'B'C'$ vuông cân tại B' nên $B'M \perp A'C' \Rightarrow MB' \perp (AA'C'C)$.

Thể tích khối chóp $B'.ACC'A'$ là $V_{B'.ACC'A'} = \frac{1}{3}B'M.AA'.AC$.

Ta có $B'M = \frac{a\sqrt{2}}{2}, AC = a\sqrt{2}$.

Do $MB' \perp (AA'C'C) \Rightarrow MB' \perp AC'$.

Kẻ $MK \perp AC' \Rightarrow B'K \perp AC'$.

Vậy góc giữa hai mặt phẳng (ACC') và $(AB'C')$ là $\widehat{MKB'} \Rightarrow \widehat{MKB'} = 60°$.

Trong tam giác vông MKB' ta có $\tan 60° = \frac{MB'}{MK} \Rightarrow MK = \frac{MB'}{\tan 60°} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Trong tam giác vuông MKC' ta có

$$\tan \widehat{MC'K} = \frac{MK}{\sqrt{MC^2 - MK^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{6}}{\sqrt{\frac{2a^2}{4} - \frac{6a^2}{36}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Mặt khác trong tam giác vuông $AA'C$ ta có

$$AA' = A'C'.\tan \widehat{MC'K} = \frac{\sqrt{2}}{2}a\sqrt{2} = a$$

Vậy $V_{B'.AA'C'C} = \frac{1}{3}B'M.AA'.AC = \frac{1}{3}a.\frac{a\sqrt{2}}{2}.a\sqrt{2} = \frac{a^3}{3}$.

Gọi M là trung điểm của $A'C'$.

Do tam giác $A'B'C'$ vuông cân tại B' nên $B'M \perp A'C'$

$\Rightarrow MB' \perp (AA'C'C)$.

Dạng 7. Thể tích lăng trụ xiên

1. Phương pháp

Lăng tru xiên có cạnh bên không vuông góc với đáy. Chiều cao là khoảng cách từ một đỉnh bất kì của mặt đáy này đến mặt đáy đối diện. Để tính chiều cao ta dựa vào hệ thức lượng trong tam giác.

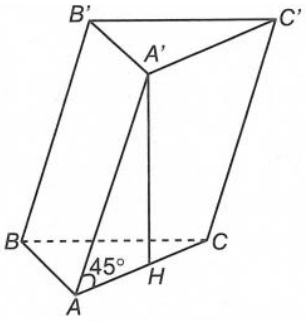
Ví dụ: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ tam giac ABC vuông cân tại A, cạnh $AA' = a\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) là trong điểm của AC, góc tạo bởi AA' với (ABC) bằng $45°$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

A. $\frac{3a^3\sqrt{6}}{2}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. **D.** $a^3\sqrt{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm $AC \Rightarrow A'H \perp (ABC)$;

$\widehat{(AA',(ABC))} = \widehat{A'AH} = 45°$.

Xét tam giác $A'HA$ vuoong cân tại H có

$A'H = AA'.\sin\widehat{A'AH} = a\sqrt{3}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$,

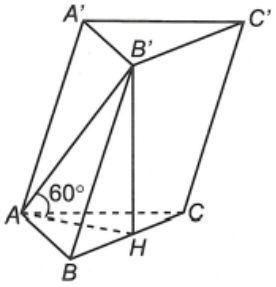
$\Rightarrow AH = AH' = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow AB = AC = 2AH = a\sqrt{6}$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = 3a^2$.

Vây $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.A'H = 3a^2.\frac{a\sqrt{6}}{2}.\frac{3a^3\sqrt{6}}{2}$.

2. Bài tập

Bài tập 1: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ đây là tam giác ABC vuông tại A, $AB = a, BC = a\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc của B' trên mặt phẳng (ABC) trùng với chân đường cao H kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC, góc tạo bởi AB' với (ABC) bằng $60°$. Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là



A. $\frac{\sqrt{3}a^3}{4}$. **B.** $\frac{3\sqrt{3}a^3}{4}$.

C. $\frac{a^3}{3}$. **D.** a^3.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB.AC = \frac{1}{2} a.a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $B'H \perp (ABC)$

$\Rightarrow \widehat{(AB',(ABC))} = \widehat{B'AH} = 60°$

Xét tam giác ABC vuông tại A có

$AH = \frac{AB.AC}{BC} = \frac{a.a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Xét tam giác AHB' vuông tại H có

$B'H = AH.\tan\widehat{B'AH} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.\tan 60° = a\sqrt{2}$.

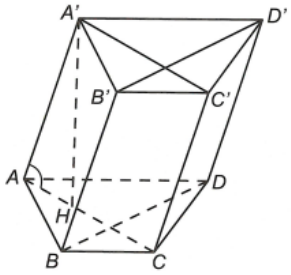
Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC}.B'H = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}.a\sqrt{2} = a^3$

Ta có $\widehat{(AB',(ABC))} = \widehat{B'AH} = 60°$

Tam giác ABC vuông tại A có nên: $AH = \frac{AB.AC}{BC}$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác AHB' *vuông tại H ta tính được chiều cao:* $B'H = AH.\tan\widehat{B'AH}$

Bài tập 2. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ đáy là hình thang cân $ABCD$ có $AC \perp BD, AC = 2a$, cạnh AA' tạo với mặt phẳng đáy góc $60°$. Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng *(ABCD)* là điểm H thuộc đoạn AC sao cho $AH = \frac{1}{3}HC$. Thể tích của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ là



A. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$. **B.** $2a^3\sqrt{3}$.

C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. **D.** $a^3\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

$ABCD$ là hình thang cân $\Rightarrow AC = BD = 2a$

$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC.BD = 2a^2$

$AH = \frac{1}{3}HC \Rightarrow AH = \frac{1}{4}AC = \frac{a}{2}$

$\widehat{(AA',(ABCD))} = \widehat{A'AH} = 60°$

Xét tam giác $A'HA$ vuoong tại H có

Tứ giác ABCD có hai đường chéo $AC \perp BD$

$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC.BD.$

$\widehat{(AA',(ABCD))} = \widehat{A'AH} = 60°$

$A'H = AH.\tan\widehat{A'AH} = \frac{a}{2}.\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.A'H = 2a^2.\frac{a\sqrt{3}}{2} = a^3\sqrt{3}$.

Bài tập 3. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$, khoảng cách từ C đến đường thẳng BB' bằng 2, khoảng cách từ A đến các đường thẳng BB' và CC' lần lượt bằng 1 và $\sqrt{3}$, hình chiếu vuông góc A lên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm M của $B'C'$ và $A'M = 2$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C$ bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** 1.

C. 2. **D.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Gọi N là trung điểm BC, $AN = A'M = 2$.

Kẻ $AE \perp BB'$ tại E, $AF \perp CC'$ tại F.

Ta có $EF \cap MN = \{H\}$ nên H là trung điểm EF.

Lại có $\begin{cases} AE \perp AA' \\ AF \perp AA' \end{cases} \Rightarrow AA' \perp (AEF) \Rightarrow AA' \perp EF \Rightarrow EF \perp BB'$.

Khi đó

$d(A, BB') = AE = 1, d(A, CC') = AF = \sqrt{3}, d(C, BB') = EF = 2$

Ta có $AE^2 + AF^2 = EF^2 \Rightarrow \Delta AEF$ vuông tại $A \Rightarrow AH = \frac{EF}{2} = 1$.

Mặt khác $\begin{cases} AA' \perp (AEF) \\ MN // AA' \end{cases} \Rightarrow MN \perp (AEF) \Rightarrow MN \perp AH$.

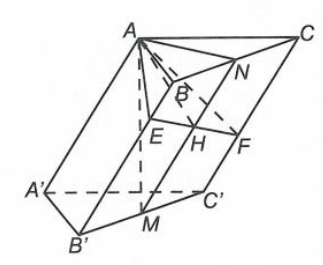
Xét ΔAMN vuông tại A có $AM = \frac{AH.AN}{\sqrt{AN^2 - AH^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Ta có $\begin{cases} (AA'NM) \perp (ABC) \\ (AA'NM) \perp (AEF) \\ (AA'NM) \cap (ABC) = AN \\ (AA'NM) \cap (AEF) = AH \end{cases} \Rightarrow \widehat{((ABC),(AEF))} = \widehat{HAN}$.

$\Rightarrow \frac{1}{2} AE.AF = S_{\Delta ABC}.\frac{AH}{AN} \xrightarrow{\frac{AH}{AN} = \frac{1}{2}} \Rightarrow S_{\Delta ABC} = AE.AF = \sqrt{3}$

Vậy $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC}.AM = \frac{2\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3} = 2$.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác $A'HA$ vuông tại H ta tính được chiều cao: $A'H = AH.\tan\widehat{A'AH}$



Gọi N là trung điểm BC. $AN = A'M = 2$.

Kẻ $AE \perp BB'$ tại E, $AF \perp CC'$ tại F.

Ta có $EF \cap MN = \{H\}$ nên H là trung điểm EF.

Ta có $\begin{cases} AE \perp AA' \\ AF \perp AA'' \end{cases}$

$\Rightarrow AA' \perp (AEF)$

$\Rightarrow AA' \perp EF \Rightarrow EF \perp BB'$

Khi đó $d(A, BB') = AE = 1$,

$d(A, CC') = AF = \sqrt{3}$,

$d(C, BB') = EF = 2$.

ΔAMN vuông tại A ta tính được chiều cao AM.

Diện tích tam giác AEF tính theo công thức

$S_{\Delta AEF} = S_{\Delta ABC}.\cos\widehat{HAN}$

Tổng quát các dạng bài này:

$$V=\frac{d_{(A,BB')}.d_{(A,CC')}.A'M^2}{\sqrt{4A'M^2-d^2_{(C,BB')}}}$$

Dạng 8 . Thể tích hình hộp

1. Phương pháp

Hình hộp: Là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành. Có bốn mặt bên đều là các hình bình hành.

Hình hộp đứng: Là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành. Có bốn mặt bên đều là các hình chữ nhật.

Hình hộp chữ nhật: Là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật. Sau mặt của hình hộp chữ nhật đều là các hình chữ nhật.

Hình lập phương: Là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau. Sáu mặt đều là các hình vuông.

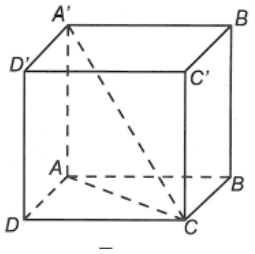
Ví dụ: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $A'C=4\sqrt{3}$.

Thể tích khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ là

A. $2\sqrt{3}$. **B.** $4\sqrt{3}$.

C. 64. **D.** 125.

Hướng dẫn giải



Đặt $AB=x\Rightarrow AC=x\sqrt{2}$.

$\Delta A'AC$ vuông tại A có

$A'C=\sqrt{AA^2+AC^2}=\sqrt{2x^2+x^2}=x\sqrt{3};$

$A'C=4\sqrt{3}\Rightarrow x\sqrt{3}=4\sqrt{3}\Rightarrow x=4.$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'}=4^3=64$.

Chọn C.

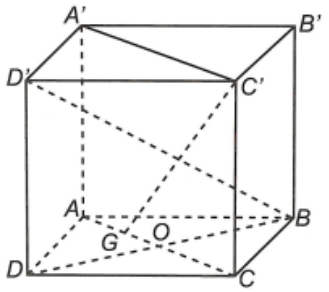
2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD}=120°$ .Gọi G là trọng tâm tam giác ABD, góc tạo bởi $C'G$ và mặt đáy bằng $30°$. Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là

A. a^3. **B.** $\frac{a^3}{3}$.

C. $\frac{a^3}{6}$. **D.** $\frac{a^3}{12}$.

Hướng dẫn giải



Ta có $S_{ABCD} = AB.AD.\sin\widehat{BAD} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Do $\widehat{BAD} = 120° \Rightarrow \Delta ACD$ đều $\Rightarrow AC = a$ và $CG = CO + OG = \dfrac{2}{3}AC = \dfrac{2a}{3}$.

Lại có $\left(\widehat{C'G,(ABCD)}\right) = \widehat{C'GC} = 30°$

Xét $\Delta C'CG$ vuông tại C có $CC' = CG.\tan\widehat{C'GC} = \dfrac{2a\sqrt{3}}{9}$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD}.CC' = \dfrac{a^3}{3}$

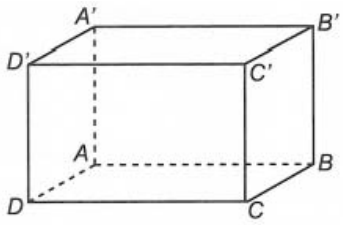
Chọn B.

Bài tập 2. Một tấm bìa hình vuông có cạnh 50cm. Người ta cắt bỏ đi ở một góc tấm bìa hình vuông cạnh 16cm rồi gấp lại thành một cái hộp chữ nahat không có nắp. Thể tích khối hộp chữ nhật là

A. 5184 cm^3. **B.** 8704 cm^3.

C. 4608 cm^3. **D.** 18496 cm^3.

Hướng dẫn giải



$AA' = BB' = CC' = DD' = 16cm$ nên $ABCD$ là hình vuông có $AB = 50 - 2.16 = 18(cm)$.

$\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = AB.AC.AD = 18.18.16 = 5184(cm^3)$.

Chọn A.

$S_{ABCD} = AD.AD.\sin\widehat{BA}$

Góc tạo bởi C'G và mặt đáy $\left(\widehat{C'G,(ABCD)}\right) = \widehat{C'}$

Áp dụng hệ thức lượng trong $\Delta C'CG$ *vuông tại C tính được* $CC' = CG.\tan\widehat{C'GC}$.

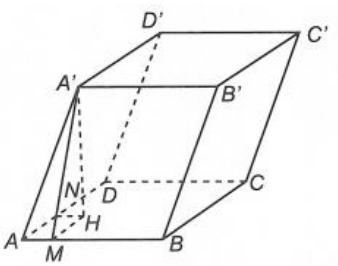
Khi cắt bỏ một góc tấm bìa một hình vuông cạnh 16cm thì cạnh đáy còn lại là $50 - 2.16 = 18(cm)$, *chiều cao là 16cm.*

Bài tập 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AB=\sqrt{15},\ AD=5$. Hai mặt bên $(ABB'A')$ và $(ADD'A')$ lần lượt tạo với mặt phẳng đáy những góc $30°$ và $60°$, cạnh bên có độ dài bằng 1. Thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là

A. 21. **B.** $\frac{15\sqrt{65}}{12}$.

C. $\frac{15\sqrt{65}}{13}$. **D.** $\frac{\sqrt{21}}{2}$.

Hướng dẫn giải



Ta có $S_{ABCD}=AB.AD=5\sqrt{15}$

Kẻ $A'H\perp(ABCD), MH\perp AB, NH\perp AD\ (M\in AB; N\in AD)$

$\Rightarrow\left(\widehat{(ABB'A'),(ABCD)}\right)=\widehat{A'MH}=30°;$

$\left(\widehat{(ADD'A'),(ABCD)}\right)=\widehat{A'NH}=60°$

Đặt $A'H=x$, khi đó $A'N=\frac{x}{\sin 60°}=\frac{2x\sqrt{3}}{3}$,

$AM=NH=\frac{x\sqrt{3}}{3}, A'M=2x.$

Xét $\Delta A'AM$ vuông tại M có

$A'A^2=AM^2+A'M^2\Rightarrow 1=4x^2+\frac{x^2}{3}\Rightarrow x=\frac{3\sqrt{39}}{39}$

Vậy $V_{ABCD.A'B'C'D'}=S_{ABCD}.A'H=5\sqrt{15}.\frac{3\sqrt{39}}{39}=\frac{15\sqrt{65}}{13}.$

Chọn B.

Ta có

$S_{ABCD}=AB.AD=5\sqrt{}$

Kẻ

$A'H\perp(ABCD),$

$MH\perp AB, NH\perp A$

$\Rightarrow\left(\widehat{(ABB'A'),(ABCD)}\right)$

$\left(\widehat{(ADD'A'),(ABCD)}\right.$

Xét $\Delta A'AM$ *vuông tại M có*

$A'A^2=AM^2+A'M^2$

Mà $A'N=\frac{A'H}{\sin 60°},$

$AM=NH, A'M=2$

	Từ đó suy ra $A'H$.

Dạng 9. Tỉ số thể tích khối chóp

1. Phương pháp

So sánh thể tích khối chóp cần tính với một khối đa diện khác đã biết trước hoặc dễ dàng tính thể tích.

Trong phương pháp này, ta thường hay sử dụng kết quả của các bài toán sau

Kết quả 1.

Cho hình chóp $S.ABC$. Lấy A',B',C' tương ứng trên các cạnh SA,SB,SC

Khi đó

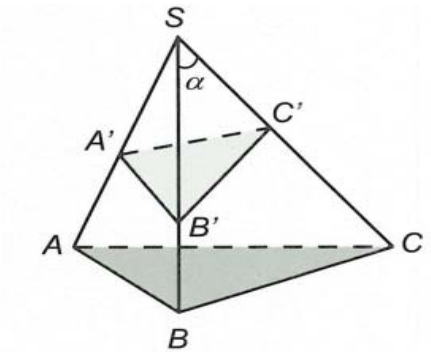
$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$$

Chú ý: Kết quả trên vẫn đúng nếu như trong các điểm A',B',C' có thể có điểm $A\equiv A',B\equiv B',C\equiv C'$

Thông thường, đối với bài toán này, đề thường cho điểm chia đoạn theo tỉ lệ, song song, hình chiếu…

Công thức chỉ đúng khi đáy là tam giác. Nếu đáy là tứ giác, ngũ giác… ta phải phân chia đáy thành các tam giác và tính tổng thể tích các khối có đáy là tam giác.

Chứng minh



Đặt $\alpha=\widehat{B'SC'}=\widehat{BSC}$

Ta có $\frac{d\left(A',(SBC)\right)}{d\left(A,(SBC)\right)}=\frac{SA'}{SA}$

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\frac{V_{A'.SB'C'}}{V_{A.SBC}}=\frac{\frac{1}{3}d\left(A',(SB'C')\right).S_{\Delta SB'C'}}{\frac{1}{3}d\left(A,(SBC)\right).S_{\Delta SBC}}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}d\left(A',(SBC)\right).\frac{1}{2}SB'.SC'.\sin\alpha}{\frac{1}{3}d\left(A,(SBC)\right).\frac{1}{2}SB.SC.\sin\alpha}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$$

(điều phải chứng minh)

Chứng minh

1. Chứng minh $a+c=b+d$

Kết quả 2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt phẳng (P) cắt

SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D' với

$$\frac{SA}{SA'} = a; \frac{SB}{SB'} = b; \frac{SC}{SC'} = c; \frac{SD}{SD'} = d$$

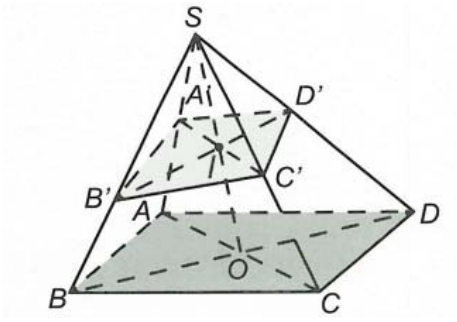
$$(a; b; c; d > 0)$$

Khi đó ta có hai công thức quan trọng sau

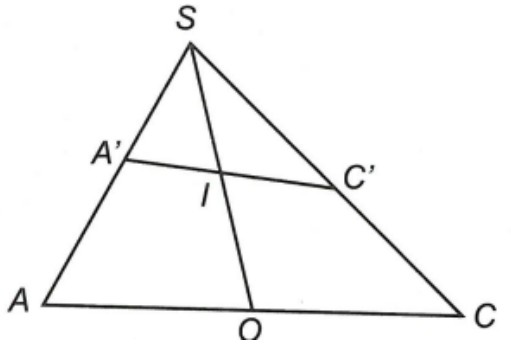
1. $$\boxed{a + c = b + d}$$

2. $$\boxed{\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}} = \frac{a+b+c+d}{4abcd}}$$

Chú ý: Các công thức 1, 2 chỉ áp dụng cho hình chóp có đáy là hình bình hành. Các công thức này được ứng dụng rất nhiều trong các bài toán tìm thiết diện cũng như thể tích khối đa diện nên tận dụng khi làm trắc nghiệm để không phải làm theo phương pháp chia nhỏ đáy thành các tam giác.



Gọi O là tâm hình bình hành, I là giao điểm của SO và



$(A'B'C'D')$

Ta có $S_{SAO} = S_{SOC} \Rightarrow \frac{S_{SA'I}}{S_{SAO}} + \frac{S_{SC'I}}{S_{SCO}} = \frac{2S_{SA'C'}}{S_{SAC}}$

$$\Leftrightarrow \frac{SA'.SI.\sin\widehat{A'SI}}{SA.SO.\sin\widehat{ASO}} + \frac{SC'.SI.\sin\widehat{C'SI}}{SC.SO.\sin\widehat{CSO}}$$

$$= 2.\frac{SA'.SC'\sin\widehat{A'SC'}}{SA.SC\sin\widehat{ASC}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{SA'.SI}{SA.SO} + \frac{SC'.SI}{SC.SO} = 2.\frac{SA'.SC'}{SA.SC}$$

Nhân cả hai vế của đẳng thức với $\frac{SA.SC.SO}{SA'.SC'.SI}$

ta được $\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = 2.\frac{SO}{SI}$ (1)

Chứng minh tương tự $\frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = 2.\frac{SO}{SI}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'}$

Hay $a + c = b + d$ (điều phải chứng minh)

2. Chứng minh $\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}=\frac{a+b+c+d}{4abcd}$

Ta có $\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}=\frac{V_{S.A'B'C'}}{2V_{S.ABC}}+\frac{V_{S.A'D'C'}}{2V_{S.ADC}}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}+\frac{SA'}{SA}.\frac{SD'}{SD}.\frac{SC'}{SC}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{abc}+\frac{1}{acd}\right)=\frac{d+b}{2abcd}$

Do $a+c=b+d$ suy ra $b+d=\frac{a+b+c+d}{2}$

Vậy $\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}=\frac{a+b+c+d}{4abcd}$

(điều phải chứng minh)

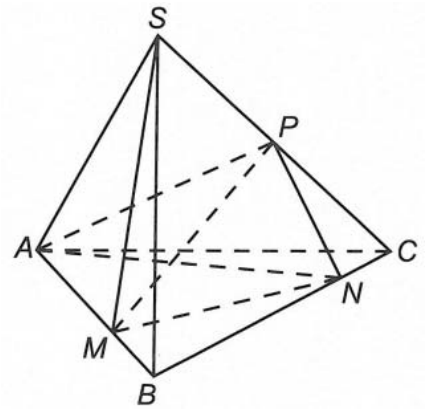
2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hình chóp SABC, trên các cạnh AB, BC, SC lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $AM=2MB, BN=4NC, SP=PC$. Tỉ số thể tích của hai khối chóp S.BMN và A.CPN là

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** $\frac{5}{6}$. **D.** 1.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Ta có $\frac{V_{S.BMN}}{V_{S.ABC}}=\frac{V_{B.MNS}}{V_{\text{B.ACS}}}=\frac{BM}{BA}.\frac{BN}{BC}.\frac{BS}{BS}=\frac{1}{3}.\frac{4}{5}=\frac{4}{15}$

$\frac{V_{A.CPN}}{V_{S.ABC}}=\frac{V_{C.ANP}}{V_{\text{C.ABS}}}=\frac{CA}{CA}.\frac{CN}{CB}.\frac{CP}{CS}=\frac{1}{5}.\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$

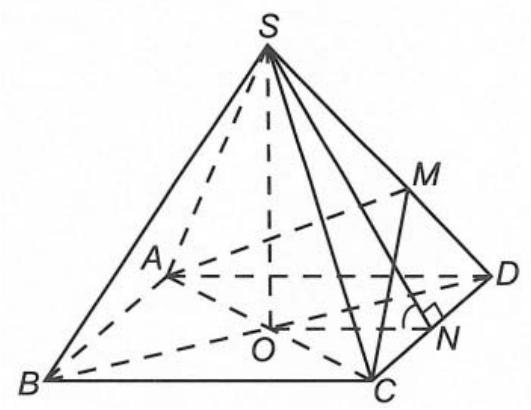
$\frac{V_{S.BMN}}{V_{A.CNP}}=\frac{4}{15}:\frac{1}{10}=\frac{8}{3}$

Bài tập 2. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy là α thỏa mãn $\cos\alpha=\frac{1}{3}$. Mặt phẳng (P) qua AC và vuông góc với mặt phẳng (SAD) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện có thể tích là V_1 và V_2 với $V_1<V_2$. Tỉ lệ $\frac{V_1}{V_2}$ gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau?

A. $0,11$. **B.** $0,13$. **C.** $0,7$. **D.** $0,9$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$.

Vì $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều nên $SO\perp(ABCD)$

Gọi N là trung điểm CD

$$\Rightarrow\begin{cases}CD\perp SN, CD\perp ON\\(SCD)\cap(ABCD)=CD\end{cases}\Rightarrow\left(\widehat{(SCD),(ABCD)}\right)=\widehat{SNO}=\alpha$$

Kẻ $CM\perp SD$

Ta có $\begin{cases}AC\perp BD\\AC\perp SO\end{cases}\Rightarrow AC\perp(SBD)\Rightarrow AC\perp SD$

$\Rightarrow SD\perp(ACM)\Rightarrow(ACM)\perp(SAD)$ nên mặt phẳng (P) là (ACM)

Xét tam giác SON vuông tại O có $SN=\frac{ON}{\cos\widehat{SNO}}=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{1}{3}}=\frac{3a}{2}$

$$SO=\sqrt{SN^2-ON^2}=\sqrt{\left(\frac{3a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=a\sqrt{2}$$

Xét tam giác SOD vuông tại O có

$$SD=\sqrt{SO^2+OD^2}=\sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2+\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{10}}{2}$$

Ta có $S_{\Delta SCD}=\frac{1}{2}CM.SD=\frac{1}{2}SN.CD\Rightarrow CM=\frac{SN.CD}{SD}=\frac{\frac{3a}{2}.a}{\frac{a\sqrt{10}}{2}}=\frac{3a\sqrt{10}}{10}$

Xét tam giác MCD vuông tại M có

$$DM=\sqrt{CD^2-CM^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{3a\sqrt{10}}{10}\right)^2}=\frac{a\sqrt{10}}{10}$$

Ta có $\frac{V_{MACD}}{V_{SABCD}}=\frac{V_{MACD}}{2.V_{SACD}}=\frac{1}{2}.\frac{DM}{DS}.\frac{DA}{DA}.\frac{DC}{DC}=\frac{1}{2}.\frac{DM}{DC}=\frac{1}{2}.\frac{\frac{a\sqrt{10}}{10}}{\frac{a\sqrt{10}}{2}}=\frac{1}{10}$

$$\Rightarrow V_{MACD}=\frac{1}{10}V_{SABCD}$$

Mặt phẳng (P) chia khối chóp $S.ABCD$ thành 2 khối $MACD$ và $SABCM$

$$V_{SABCD}=V_{MACD}+V_{SABCM}\Rightarrow V_{SABCM}=\frac{9}{10}V_{SABCD}$$

Do đó $\frac{V_{MACD}}{V_{SABCM}}=\frac{1}{9}\approx 0,11$

Tổng quát: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a, góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy là α. Mặt phẳng (P) qua AC và vuông góc với mặt phẳng (SAD) chia khối chóp $S.ABCD$ thành hai khối đa diện có thể tích là V_1 và V_2 với $V_1<V_2$. Tỉ số thể tích của hai khối đa diện là $\frac{V_1}{V_2}=\cos^2\alpha$

Hướng dẫn giải

Ta có $SD=\sqrt{SN^2+ND^2}=\sqrt{ON^2.\frac{1}{\cos^2\widehat{SNO}}+ND^2}$

$$=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}+1}=\frac{a}{2.\cos\alpha}\sqrt{\cos^2\alpha+1}$$

Ta có $S_{\Delta SCD}=\frac{1}{2}CM.SD=\frac{1}{2}SN.CD$

$$\Rightarrow CM=\frac{SN.CD}{SD}=\frac{\frac{a}{2}\frac{1}{\cos\alpha}.a}{\frac{a}{2\cos\alpha}\sqrt{\cos^2\alpha+1}}=\frac{a}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}$$

$$\Rightarrow DM=\sqrt{CD^2-CM^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{1+\cos^2\alpha}}=\frac{a.\cos\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}$$

$$\frac{V_{MACD}}{V_{SABCD}}=\frac{V_{MACD}}{2.V_{SACD}}=\frac{1}{2}.\frac{DM}{DS}.\frac{DA}{DA}.\frac{DC}{DC}=\frac{1}{2}.\frac{DM}{DS}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\frac{a\cos\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}}{\frac{a}{2\cos\alpha}}=\frac{\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha}$$

$$V_{MACD}=\frac{\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha}V_{SABCD}\Rightarrow V_{SABCM}=\left(1-\frac{\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha}\right)V_{SABCD}=\frac{1}{1+\cos^2\alpha}V_{SABCD}$$

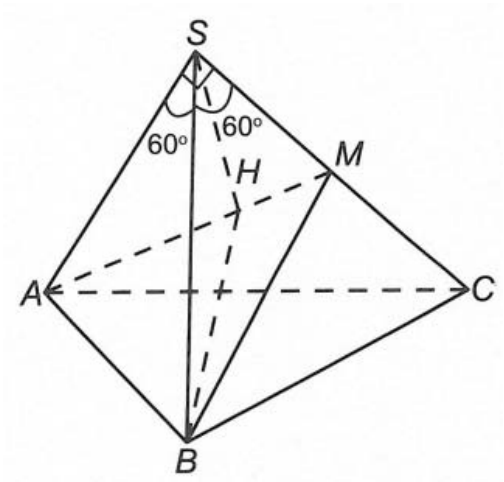
Do vậy $\frac{V_{MACD}}{V_{SABCM}}=\cos^2\alpha$.

Bài tập 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=a;SC=2a,\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=60^0,\widehat{ASC}=90^0$. Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng V. Tỉ số $\frac{6V}{a^3}$ bằng

A. $\frac{4\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Gọi M là trung điểm SC.

Ta có $SM=a\Rightarrow\Delta SAM$ vuông cân tại S.

Gọi H là trung điểm của AM.

Ta có $AM^2=\sqrt{SA^2+SM^2}=a\sqrt{2}$

$$\Rightarrow SH=\frac{1}{2}AM=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Vì $SM=SB=a$ và $\widehat{BSC}=60^0$ nên ΔBSM đều

$\Rightarrow BM = a$

ΔSAB có $SA = SB = a; \widehat{\text{ASB}}=60^0$ nên là tam giác đều $\Rightarrow AB = SA = a$

Suy ra $AB = BM = a \Rightarrow \Delta ABM$ cân tại B.

Mặt khác $AB^2 + BM^2 = 2a^2$ và $AM^2 = 2a^2 \Rightarrow AB^2 + BM^2 = AM^2$

$\Rightarrow \Delta ABM$ vuông cân tại B (định lý Py-ta-go đảo) $\Rightarrow BH = \frac{1}{2}AM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Ta có $SH^2 + BH^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a^2 \Rightarrow SH^2 + BH^2 = SB^2 = a^2$

$\Rightarrow \Delta SHB$ vuông cân tại H (định lý py-ta-go đảo).

Ta có $SH \perp AM, SH \perp HB \Rightarrow SH \perp (ABM)$.

$$S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2}AB.BM = \frac{a^2}{2} \Rightarrow V_{S.ABM} = \frac{1}{3}SH.S_{\Delta ABM} = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{2}}{2}\frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

$$\frac{V_{S.ABC}}{V_{S.ABM}} = \frac{SC}{SM} = 2 \Rightarrow V_{S.ABC} = 2V_{S.ABM} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6} \Rightarrow \frac{6V}{a^3} = \sqrt{2}$$

Tổng quát: Cho chóp $S.ABC$ có $SA = a, SB = b; SC = c$ và $\widehat{\text{ASB}}=\alpha, \widehat{\text{BSC}}=\beta, \widehat{\text{ASC}} = \gamma$. Thể tích khối chóp $S.ABC$ là

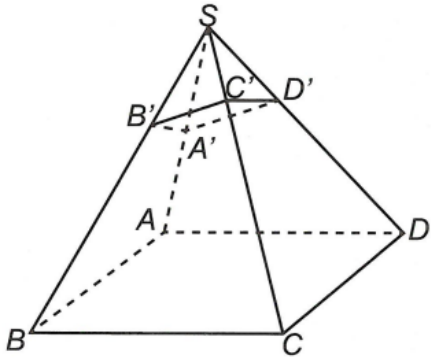
$$V_{S.ABC} = \frac{abc}{6}\sqrt{1-\cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

Bài tập 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABCD là hình bình hành. Trên các cạnh SA, SB, SC lần lượt lấy các điểm A', B', C' sao cho $SA = 2SA'; SB = 3SB'; SC = 4SC'$, mặt phẳng $(A'B'C')$ cắt cạnh SD tại D'. Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hai khối chóp $S.A'B'C'D'$ và $S.ABCD$. Khi đó tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{1}{24}$. **B.** $\frac{1}{26}$. **C.** $\frac{7}{12}$. **D.** $\frac{7}{24}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Cách 1. Phân chia đáy thành 2 tam giác

$$\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}\Rightarrow 2+4=3+\frac{SD}{SD'}\Rightarrow\frac{SD}{SD'}=3\Rightarrow SD=3SD'$$

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}=\frac{1}{24}\Rightarrow V_{S.A'B'C}=\frac{1}{24}S_{S.ABCD}$$

$$\frac{V_{S.A'C'D'}}{V_{S.ACD}}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SD'}{SD}.\frac{SC'}{SC}=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}=\frac{1}{24}\Rightarrow V_{S.A'B'C}=\frac{1}{24}S_{S.ACD}$$

$$\Rightarrow V_{S.A'B'C'D'}=V_{S.A'B'C'}+V_{S.A'C'D'}=\frac{V_{S.ABC}+V_{S.ACD}}{24}\Rightarrow\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}=\frac{1}{24}$$

Cách 2. Áp dụng trực tiếp công thức

Ta có $\frac{V_{S.A'B'C'D'}}{V_{S.ABCD}}=\frac{\frac{SA}{SA'}+\frac{SB}{SB'}+\frac{SC}{SC'}+\frac{SD}{SD'}}{4.\frac{SA}{SA'}.\frac{SB}{SB'}.\frac{SC}{SC'}.\frac{SD}{SD'}}=\frac{2+4+3+3}{4.2.4.3.3}=\frac{1}{24}$

Dạng 10. Tỉ số thể tích khối lăng trụ

1. Phương pháp

Trong phương pháp này, ta thường hay sử dụng kết quả của bài toán

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các điểm M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho

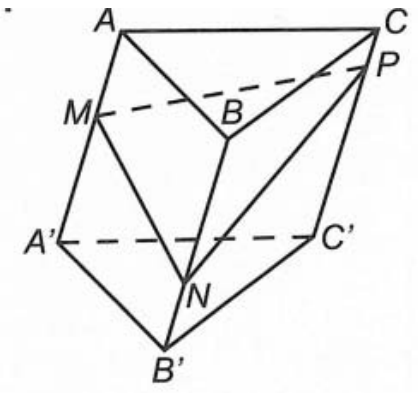
$$\frac{AM}{AA'}=a,\frac{BN}{BB'}=b,\frac{CP}{CC'}=c$$

Khi đó $\frac{V_{ABCMNP}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\frac{a+b+c}{3}$

Đặc biệt:

$$\frac{V_{A.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\frac{a}{3},\frac{V_{M.BCPN}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\frac{b+c}{3}$$

Chứng minh



Ta có

$$V_{A.BCC'B'}=V_{ABC.A'B'C'}-V_{A.A'B'C'}$$

$$=V_{ABC.A'B'C'}-\frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}=\frac{2V_{ABC.A'B'C'}}{3}$$

Ta có $\frac{V_{M.ABC}}{V_{ABC.A'B'C'}}=\frac{\frac{1}{3}d\left(M;(ABC)\right).S_{ABC}}{d\left(A';(ABC)\right).S_{ABC}}$

$$= \frac{1}{3}\frac{d\left(M;(ABC)\right)}{d\left(A';(ABC)\right)} = \frac{1}{3}\frac{AM}{AA'} = \frac{1}{3}a$$

Suy ra $\boxed{V_{M.ABC} = \frac{a}{3}.V_{ABC.A'B'C'}}$

Ta có

$$AM\,//\left(BCC'B'\right) \Rightarrow d\left(M;BCPN\right) = d\left(A;BCPN\right)$$

$$\Rightarrow V_{M.BCPN} = V_{A.BCPN}$$

Suy ra $\frac{V_{M.BCPN}}{V_{A.BCC'B'}} = \frac{V_{A.BCPN}}{V_{A.BCC'B'}} = \frac{S_{BCPN}}{S_{BCC'B'}}$

$$= \frac{\frac{1}{2}(BN+CP).d\left(C;BB'\right)}{BB'.d\left(C;BB'\right)} = \frac{BN+CP}{2BB'}$$

$$= \frac{BN}{2BB'} + \frac{CP}{2BB'} = \frac{BN}{2BB'} + \frac{CP}{2CC'} = \frac{b+c}{2}$$

$$\Rightarrow V_{M.BCPN} = \frac{b+c}{2}V_{A.BCC'B'}$$

$$\Rightarrow V_{M.BCPN} = \frac{b+c}{2}.\frac{2V_{ABC.A'B'C'}}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{M.BCPN} = \frac{b+c}{3}.V_{ABC.A'C'B'}}$$

Mặt khác

$$V_{ABCMNP} = V_{M.ABC} + V_{M.BCPN} = \frac{a+b+c}{3}.V_{ABC.A'B'C'}$$

$\frac{V_{ABCMNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{a+b+c}{3}$ (điều phải chứng minh).

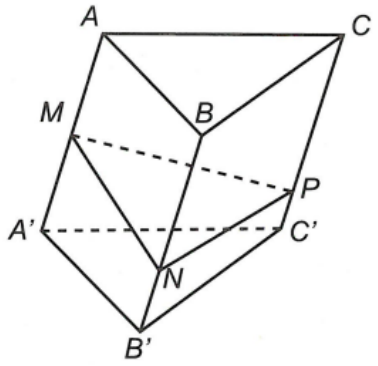
2. Bài tập

Bài tập 1. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có M, N, P lần lượt thuộc các cạnh AA', BB', CC' sao cho $AM = MA', BN = 3NB', CP = 3PC'$. Đặt V_1 là thể tích của khối đa diện $ABCMNP, V_2$ là thể tích khối đa diện còn lại. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ là

A. $\frac{3}{2}$. **B.** 2. **C.** 3. **D.** $\frac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Ta có $MA = MA' \Rightarrow \dfrac{MA}{AA'} = \dfrac{1}{2}; BN = 3NB' \Rightarrow \dfrac{BN}{BB'} = \dfrac{3}{4}; CP = 3PC' \Rightarrow \dfrac{CP}{CC'} = \dfrac{3}{4}$

Đặt $V = V_{ABC.A'B'C'}$

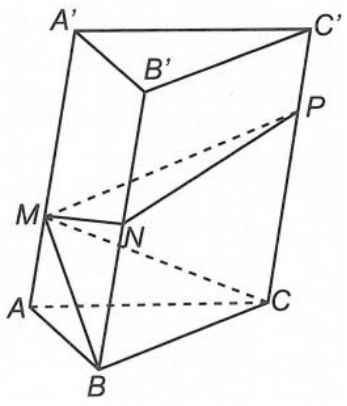
Suy ra $\dfrac{V_1}{V} = \dfrac{\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{4}}{3} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow V_1 = \dfrac{2}{3}V \Rightarrow V_2 = V - V_1 = \dfrac{1}{3}V \Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2} = 2$

Bài tập 2. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có thể tích là V và độ dài cạnh bên $AA' = 6$. Trên cạnh $A'A, B'B, C'C$ lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $AM = 2, BN = x, CP = y$ với x, y là các số dương thỏa mãn $xy = 12$. Biết rằng thể tích khối đa diện $ABC.MNP$ bằng $\dfrac{1}{2}V$. Giá trị của $x^2 + y^2$ bằng

A. 24. **B.** 25. **C.** 10. **D.** 17.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Ta có $\dfrac{AM}{AA'} = \dfrac{1}{3}; \dfrac{BN}{BB'} = \dfrac{x}{6}; \dfrac{CP}{CC'} = \dfrac{y}{6}; \dfrac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{6}\right) = \dfrac{1}{2}.$

Suy ra $x + y = 7 \Rightarrow (x + y)^2 = 49 \Rightarrow x^2 + y^2 = 49 - 2xy \Rightarrow x^2 + y^2 = 25$

Dạng 11: Tỉ số thể tích khối hộp

1. Phương pháp

Cho hình khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$, mặt phẳng (α) cắt các cạnh $AA', BB', CC', \mathrm{DD}'$ lần lượt tại M, N, P, Q sao cho

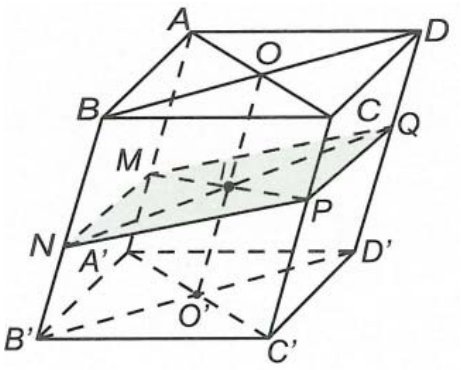
$$\frac{AM}{AA'}=a, \frac{BN}{BB'}=b, \frac{CP}{CC'}=c, \frac{DQ}{\mathrm{DD}'}=d$$

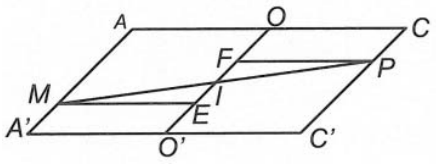
Khi đó ta có

$$\frac{V_{ABDC.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}}=\frac{1}{4}(a+b+c+d)$$

$$=\frac{1}{2}(a+c)=\frac{1}{2}(b+d)$$

Chứng minh





Xét mặt phẳng $ACC'A'$

Từ M, P ta lần lượt kẻ các đường thẳng song song với AC cắt OO' theo thứ tự E, F

Ta có $\frac{AM}{AA'}+\frac{CP}{CC'}=\frac{OE}{\mathrm{OO}'}+\frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{OO}'}$

$$=\frac{OI+IE}{\mathrm{OO}'}+\frac{\mathrm{OI}-\mathrm{IF}}{\mathrm{OO}'}=\frac{2OI}{\mathrm{OO}'}$$

Tương tự xét mặt phẳng $B\mathrm{DD}'B$

Ta cũng có $\frac{BN}{BB'}+\frac{DQ}{\mathrm{DD}'}=\frac{2OI}{\mathrm{OO}'}$

Do đó

$$\frac{AM}{AA'}+\frac{CP}{CC'}=\frac{BN}{BB'}+\frac{DQ}{\mathrm{DD}'}\Rightarrow a+c=b+d$$

Chia khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ thành hai khối $ABC.A'B'C'$ và $ACD.A'C'D'$

Áp dụng tỉ số thể tích của khối lăng trụ tam giác ta được

$$\frac{V_{ABDC.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}}=\frac{1}{4}(a+b+c+d)$$

$$=\frac{1}{2}(a+c)=\frac{1}{2}(b+d)$$

2. Bài tập

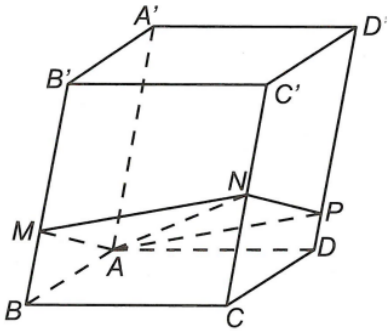
Bài tập 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có N là trung điểm CC'. Mặt phẳng (α) đi qua AN cắt các cạnh BB', DD' lần lượt tại M, P. (α) chia khối lập phương thành hai phần có thể tích tương ứng bằng V_1 và $V_2\,(V_1 < V_2)$. Tỉ số $\dfrac{V_2}{V_1}$ bằng

A. $\dfrac{7}{3}$. **B.** 2. **C.** 3. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Từ giả thiết ta có



$$\frac{V_{ABCDPNM}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{\dfrac{AA}{AA'} + \dfrac{CN}{CC'}}{2} = \frac{0 + \dfrac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

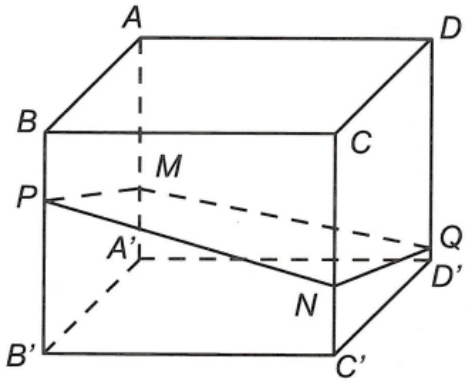
Vậy $\dfrac{V_{ABCDPNM}}{V_{AMNPA'B'C'D'}} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \dfrac{V_2}{V_1} = 3$

Bài tập 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng $36cm^3$. Gọi hai điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh AA', CC' sao cho $AM = 2A'M, CN = 3C'N$. Một mặt phẳng đi qua M, N lần lượt cắt cạnh BB', DD' tại P và Q. Thể tích khối $ABCDMPNQ$ bằng

A. $18cm^3$. **B.** $22cm^3$. **C.** $10,5cm^3$. **D.** $25,5cm^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Ta có $\dfrac{V_{ABCDMPNQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \dfrac{\dfrac{AM}{AA'} + \dfrac{CN}{CC'}}{2} = \dfrac{\dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4}}{2} = \dfrac{17}{24}$

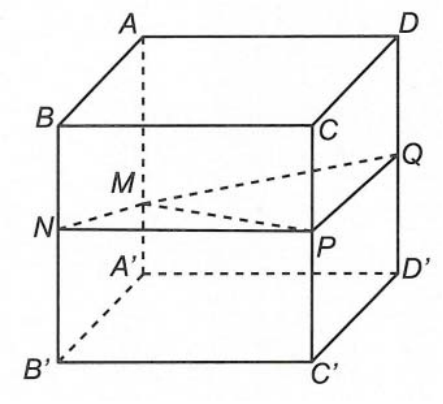
$$V_{ABCDMPNQ} = \frac{17}{24} V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{17}{24}.36 = 25,5cm^3$$

Bài tập 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng V. Gọi M, N, P lần lượt thuộc các cạnh $AA', BB', CC', \mathrm{DD}'$ sao cho $AM = 2A'M, 2BN = 3B'N; 3CP = 4C'P; 4DQ = 5D'Q$. Thể tích khối $ABCDMNPQ$ bằng

A. $\frac{572V}{945}$. **B.** $\frac{13V}{21}$. **C.** $\frac{26V}{45}$. **D.** $\frac{559V}{945}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Ta có $\frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'} = \frac{2}{3} + \frac{4}{7} = \frac{26}{21}; \frac{BN}{BB'} + \frac{DQ}{\mathrm{DD}'} = \frac{3}{5} + \frac{5}{9} = \frac{52}{45}$

$\frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'} > \frac{BN}{BB'} + \frac{DQ}{\mathrm{DD}'}$

Cạnh MP sẽ lệch trên. Khối đa diện lồi $ABCDMNPQ$ được chia thành hai khối đa diện theo cạnh MP là BACNMP và DACQMP.

Ta có $\frac{V_{BACNMP}}{V_{BACB'A'C'}} = \frac{1}{3}\left(\frac{BN}{BB'} + \frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{5} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7}\right) = \frac{193}{315}$

$\Rightarrow V_{BACNMP} = \frac{193}{315} V_{BACB'A'C'} = \frac{193V}{630}$.

$\frac{V_{DACQMP}}{V_{DACD'A'C'}} = \frac{1}{3}\left(\frac{DQ}{\mathrm{DD}'} + \frac{AM}{AA'} + \frac{CP}{CC'}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{9} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7}\right) = \frac{113}{189}$

$\Rightarrow V_{DACQMP} = \frac{113}{189} V_{DACD'A'C'} = \frac{113V}{378}$

Vậy $V_{ABCDMNPQ} = V_{BACNMP} + V_{DACQMP} = \frac{193V}{630} + \frac{113V}{378} = \frac{572V}{945}$

Dạng 12. Tách hình để tính thể tích

1. Phương pháp

Để tính thể tích các khối da diện phức tạp ta không tính trực tiếp mà tính gián tiếp thông

Ví dụ: Cắt khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bởi các mặt phẳng $(AB'D'), (CB'D'), (B'AC)$

qua việc tính thể tích các khối đơn giản (khối chóp, khối lăng trụ).

+ Khối đa diện A được tạo bởi các khối đơn giản $A_1, A_2, ...A_n$. Khi đó

$V_A = V_{A_1} + V_{A_2} + ... + V_{A_n}$.

+ Khối đa diện A được bổ sung thêm các khối cơ bản $A_1, A_2, ...A_n$ để tạo thành khối cơ bản B

Khi đó $V_A = V_B - \left(V_{A_1} + V_{A_2} + ... + V_{A_n}\right)$.

+ Ta có thể sử dụng khôi phục lại hình ẩn ban đầu để tính toán dễ dàng hơn.

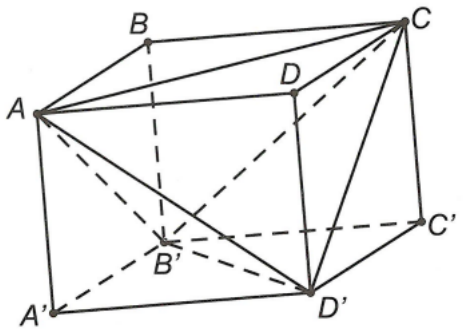
+ Sử dụng phương pháp trải hình trên mặt phẳng để dễ hình dung và tính toán thuận tiện hơn.

$,\left(D'AC\right)$ ta được khối đa diện có thể tích lớn nhất là

A. $A'AB'D'$. **B.** $D'ADC$.

C. $ACB'D'$. **D.** $CC'B'D'$.

Hướng dẫn giải



Cắt khối hộp bởi các mặt phẳng $\left(AB'D'\right)$, $\left(CB'D'\right), \left(B'AC\right), \left(D'AC\right)$ ta được 5 khối tứ diện $AA'B'D', B'ABC, CC'B'D', D'DAC,$ $AB'D'C$.

Gọi V là thể tích của khối hộp.

$V_{AA'B'D'} = V_{B'ABC} = V_{CC'B'D'} = V_{D'ADC} = \frac{1}{6}V$

Suy ra $V_{ACB'D'} = \frac{1}{3}V$ nên tứ diện $ACB'D'$ có thể tích lớn nhất

Chọn C.

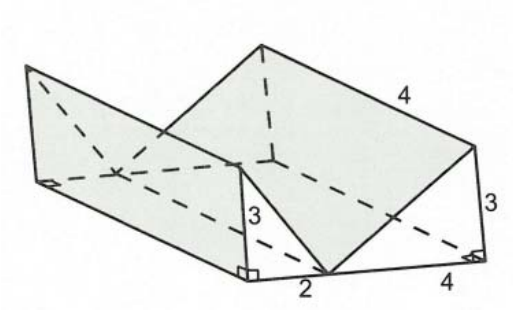
2. Bài tập

Bài tập 1. Một khúc gỗ có dạng và độ dài các cạnh được cho như hình vẽ. Thể tích khúc gỗ là

A. V = 12. **B.** V = 96. **C.** V = 36. **D.** V = 24.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Khúc gỗ được chia thành 2 phần, mỗi phần là một lăng trụ tam tam giác có đáy là các tam giác vuông, chiều cao khối lăng trụ bằng 4.

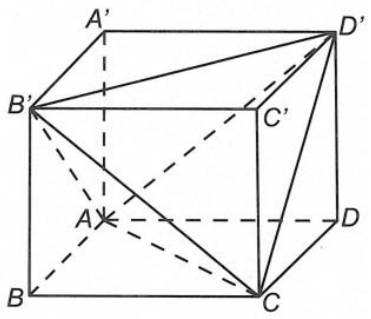
Thể tích khối gỗ là $V = V_1 + V_2 = 4.\frac{1}{2}.3.2 + 4.\frac{1}{2}.3.4 = 36$.

Bài tập 2. Một hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có ba kích thước là 2 cm, 3 cm và 6 cm. Thể tích của khối tứ diện A.CB'D' bằng

A. $8cm^3$. **B.** $12cm^3$. **C.** $16cm^3$. **D.** $4cm^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Khối hộp được tạo thành từ 5 khối B.AB'C; D.ACD'; A'.B'AD'; C.B'C'D'; A.CB'D'.

Ta có $V_{ABCD.A'B'C'D'} = V_{B.AB'C} + V_{D.ACD'} + V_{A'.B'AD'} + V_{C.B'C'D'} + V_{A.CB'D'}$

$\Rightarrow V_{ABCD.A'B'C'D'} = 4V_{B.AB'C} + V_{A.CB'D'} \Rightarrow V_{A.CB'D'} = V_{ABCD.A'B'C'D'} - 4V_{B.AB'C}$

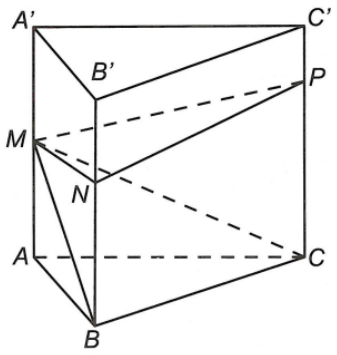
$\Rightarrow V_{A.CB'D'} = V_{ABCD.A'B'C'D'} - 4\frac{1}{6}V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{3}V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{1}{3}.2.3.6 = 12cm^3$.

Bài tập 3. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có thể tích bằng V. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh AA', BB', CC' sao cho AM = $\frac{1}{2}$AA'; BN = $\frac{2}{3}$BB'; CP = $\frac{3}{4}$CC'. Thể tích khối chóp M.BCPN là

A. $\frac{7V}{36}$. **B.** $\frac{17V}{36}$. **C.** $\frac{7V}{18}$. **D.** $\frac{11V}{18}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Ta có $V = V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC}$

$\Rightarrow V_{M.ABC} = V_{M.A'B'C'} = \frac{1}{3}MA.S_{ABC} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}.AA'.S_{ABC} = \frac{V}{6}$.

Mặt khác $\frac{V_{A'B'C'.MNP}}{V_{A'B'C'.ABC}} = \frac{1}{3}\left(\frac{A'M}{AA'} + \frac{B'N}{BB'} + \frac{C'P}{CC'}\right)$

$\Rightarrow V_{A'B'C'.MNP} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)V_{A'B'C'.ABC} \Rightarrow V_{A'B'C'.MNP} = \frac{13}{36}V$.

$\Rightarrow V_{M.BCPN} = V_{A'B'C'.ABC} - V_{M.ABC} - V_{A'B'C'.MNP} = V - \frac{V}{6} - \frac{13}{36}V = \frac{17V}{36}$.

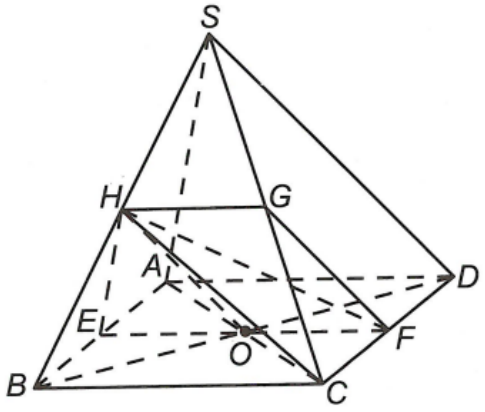
Bài tập 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Hai cạnh AC, BD cắt nhau tại O. Mặt phẳng (P) đi qua điểm O và song song với mặt phẳng (SAD) cắt khối chóp S.ABCD tạo thành hai khối có thể tích lần lượt là V_1; $V_2 (V_1 < V_2)$. Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\frac{5}{11}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $\frac{7}{13}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Cách 1:



Gọi h, V, S_{ABCD} lần lượt là chiều cao, thể tích và diện tích đáy của hình chóp S.ABCD. Mặt phẳng (P) cắt hình chóp S.ABCD tạo thành thiết diện như hình vẽ. Khi đó $V_{HGFCBE}=V_1$ và thể tích phần còn lại là $V_2(V_1<V_2)$.

Ta có $V_{HGFCBE}=V_{H.BEO}+V_{H.BOC}+V_{H.OCF}+V_{G.HCF}$

$$=\frac{1}{3}.\frac{h}{2}S_{\triangle BEO}+\frac{1}{3}.\frac{h}{2}S_{\triangle BOC}+\frac{1}{3}.\frac{h}{2}S_{\triangle OCF}+\frac{1}{2}V_{B.GCF}$$

$$=\frac{1}{3}.\frac{h}{2}\left(S_{\triangle BEO}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle OCF}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}.\frac{h}{2}.S_{\triangle BCF}\right)$$

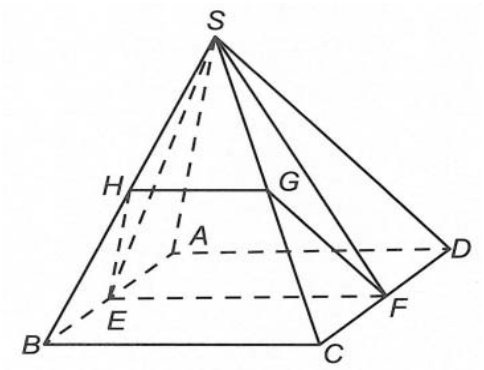
$$=\frac{1}{3}.\frac{h}{2}.S_{BEFC}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}.\frac{h}{2}.\frac{S_{ABCD}}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.h.\frac{S_{ABCD}}{2}+\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\left(\frac{1}{3}h.S_{ABCD}\right)=\frac{1}{4}V+\frac{1}{16}V=\frac{5}{16}V.$$

Suy ra $V_1=\frac{5}{16}V$. Do đó $V_2=V-V_1=V-\frac{5}{16}V=\frac{11}{16}V$.

Vậy $\frac{V_1}{V_2}=\frac{5}{11}$.

Cách 2:



Ta có $V_{S.ADFE}=\frac{1}{3}.h.S_{ADFE}=\frac{1}{3}.h.\frac{S}{2}=\frac{V}{2}$.

Lại có $\frac{V_{S.EFGH}}{V_{S.EFCB}}=\frac{\frac{SE}{SE}+\frac{SF}{SF}+\frac{SB}{SH}+\frac{SC}{SG}}{4.\frac{SE}{SE}.\frac{SF}{SF}.\frac{SB}{SH}.\frac{SC}{SG}}=\frac{1+1+2+2}{4.1.1.2.2.}=\frac{3}{8}$

$\Rightarrow V_{S.EFGH}=\frac{3}{8}V_{S.EFCB}=\frac{3V}{16}$.

Do đó $V_{SADFGHE}=V_{S.ADFE}+V_{S.EFGH}=\frac{V}{2}+\frac{3V}{16}=\frac{11V}{16}=V_2$ suy ra $V_1=\frac{5}{16}V$.

Vậy $\frac{V_1}{V_2}=\frac{5}{11}$.

Bài tập 5. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh 2a, gọi M là trung điểm của BB' và P thuộc cạnh DD' sao cho $DP=\frac{1}{4}\text{DD}'$. Mặt phẳng (AMP) cắt CC' tại N. Thể tích khối đa diện AMNPBCD bằng

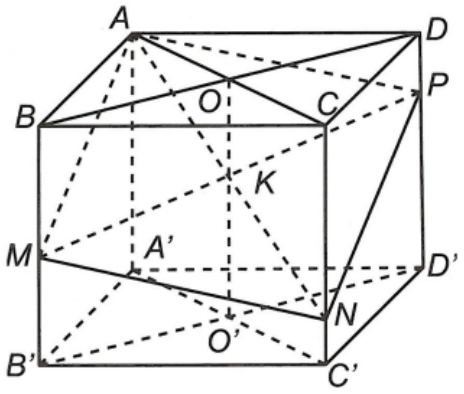
A. $V=2a^3$. **B.** $V=3a^3$. **C.** $V=\frac{9a^3}{4}$. **D.** $V=\frac{11a^3}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Thể tích khối lập phương ABCD.A'B'C'D' là $V=(2a)^3=8a^3$.

Cách 1: Gọi O, O' lần lượt là tâm hai hình vuông ABCD và A'B'C'D', gọi K=OO' $\cap$ MP, khi đó N=AK $\cap$ CC'.



Ta có $OK=\frac{1}{2}(DP+BM)$

$=\frac{1}{2}\left(a+\frac{a}{2}\right)=\frac{3a}{4}\Rightarrow CN=2OK=\frac{3a}{2}$.

$S_{BMNC}=\frac{1}{2}(BM+CN).BC=\frac{1}{2}\left(a+\frac{3a}{2}\right).2a=\frac{5a^2}{2}$.

$V_{A.BMNC}=\frac{1}{3}.S_{BMNC}.AB=\frac{1}{3}.\frac{5a^2}{2}.2a=\frac{5a^3}{3}$.

$S_{DPNC}=\frac{1}{2}(DP+CN).CD=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}+\frac{3a}{2}\right).2a=2a^2$.

$V_{A.DPNC}=\frac{1}{3}.S_{DPNC}.AD=\frac{1}{3}.2a^2.2a=\frac{4a^3}{3}$.

$V=V_{A.BMNC}+V_{A.DPNC}=\frac{5a^3}{3}+\frac{4a^3}{3}=3a^3$.

Cách 2:

Áp dụng công thức tính tỉ số thể tích khối hộp, ta có

$\frac{V_{AMNPBCD}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}}=\frac{1}{2}.\left(\frac{BM}{BB'}+\frac{DP}{DD'}\right)\Rightarrow\frac{V_{AMNPBCD}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{8}$

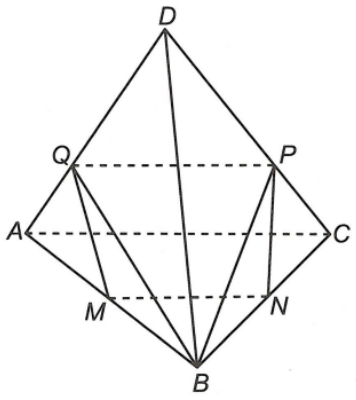
$\Rightarrow V_{AMNPBCD}=\frac{3}{8}.8a^3=3a^3$.

Bài tập 6. Cho tứ diện đều ABCD có cạnh bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và BC. Điểm P trên cạnh CD sao cho PD=2CP. Mặt phẳng (MNP) cắt AD tại Q. Thể tích khối đa diện BMNPQD bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{16}$. **B.** $\frac{25\sqrt{2}}{432}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{48}$. **D.** $\frac{13\sqrt{2}}{432}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Ta có MN//AC và PQ = (MNP) $\cap$ (ACD) $\Rightarrow$ PQ//AC $\Rightarrow \frac{DQ}{DA}=\frac{DP}{DC}=\frac{2}{3}$.

Thể tích khối tứ diện đều ABCD là $V=V_{ABCD}=\frac{\sqrt{2}}{12}$.

Chia khối đa diện cần tính thành các khối tứ diện D.PQB; B.MNQ; B.PQN.

Ta có $V_{BMNPQD}=V_{D.PQB}+V_{B.MNQ}+V_{B.PQN}$.

Trong đó $V_{D.PQB}=\frac{DQ}{DA}.\frac{DB}{DB}.\frac{DP}{DC}.V=\left(\frac{2}{3}\right)^2 V=\frac{4}{9}V$.

$V_{B.MNQ}=\frac{BM}{BA}.\frac{BN}{BC}.\frac{BQ}{BQ}.V_{B.ACQ}=\left(\frac{1}{2}\right)^2.V_{B.ACQ}=\frac{1}{4}.\frac{S_{ACQ}}{S_{ACD}}.V=\frac{1}{4}.\frac{AQ}{AD}.V=\frac{1}{12}V$.

$V_{B.PQN}=\frac{BP}{BP}.\frac{BQ}{BQ}.\frac{BN}{BC}.V_{B.PQC}=\frac{1}{2}.V_{B.PQC}=\frac{1}{2}.\frac{S_{PQC}}{S_{ACD}}.V=\frac{1}{6}V$.

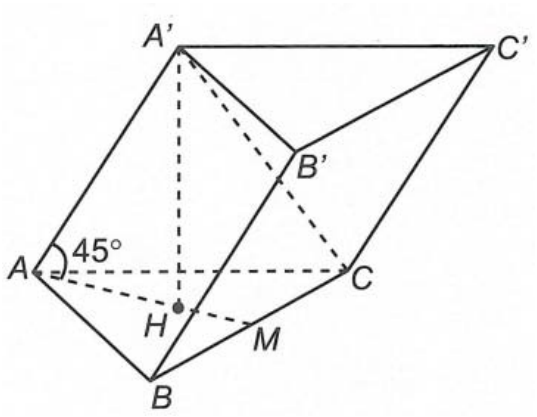
Vậy $V_{BMNPQD}=\left(\frac{4}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{6}\right)V=\frac{25\sqrt{2}}{432}$.

Bài tập 7. Cho khối lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a. Cạnh AA'=2a và tạo với đáy một góc 45°. Thể tích khối tứ diện ACA'B' là

A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{12}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{8}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{4}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Gọi H là hình chiếu của A' trên (ABC).

$\triangle ABC$ đều cạnh a $\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Ta có $\left(\widehat{AA',(ABC)}\right) = \widehat{A'AH} = 45^\circ$.

$\triangle A'AH$ vuông tại H có $A'H = AA'.\sin\widehat{A'AH} = a\sqrt{2}$.

$V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC}.A'H = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Khối lăng trụ được chia làm ba khối chóp C.A'B'C', B'.ABC và A.CA'B'.

Ta có $V_{C.A'B'C'} = \dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$ và $V_{B'.ABC} = \dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'}$

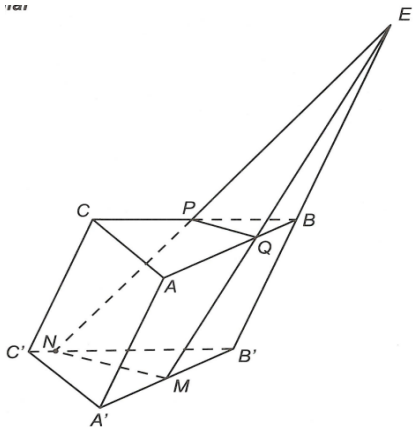
$\Rightarrow V_{ACA'B'} = V_{ABC.A'B'C'} - V_{C.A'B'C'} - V_{B'.ABC} = \dfrac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Bài tập 8. Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có thể tích bằng 15. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm trên cạnh A'B', B'C', BC sao cho M là trung điểm của A'B', B'N= $\dfrac{4}{5}B'C'$ và BP=$\dfrac{3}{5}BC$. Đường thẳng NP cắt đường thẳng BB' tại E và đường thẳng EM cắt đường thẳng AB tại Q. Thể tích khối đa diện lồi AQPCA'MNC' bằng

A. $\dfrac{23}{64}$. **B.** $\dfrac{49}{16}$. **C.** $\dfrac{83}{8}$. **D.** $\dfrac{45}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Ta có $\frac{EB}{EB'}=\frac{EQ}{EM}=\frac{EP}{EN}=\frac{BP}{B'N}=\frac{3}{4}$

$\Rightarrow \frac{d\left(E,\left(A'B'C'\right)\right)}{d\left(B,\left(A'B'C'\right)\right)}=\frac{EB'}{BB'}=4\Rightarrow d\left(E,\left(A'B'C'\right)\right)=4d\left(B,\left(A'B'C'\right)\right)$

Lại có $\frac{S_{B'MN}}{S_{A'B'C'}}=\frac{B'M}{B'A'}.\frac{B'N}{B'C'}=\frac{1}{2}.\frac{4}{5}=\frac{2}{5}.$

$\Rightarrow V_{E.MB'N}=\frac{1}{3}d\left(E,(MB'N)\right).S_{MB'N}=\frac{1}{3}.4d\left(B,(A'B'C')\right).\frac{2}{5}S_{A'B'C'}$

$=\frac{8}{15}V_{ABC.A'B'C'}=\frac{8}{15}.15=8.$

$\frac{V_{E.QPB}}{V_{E.MB'N}}=\frac{EP}{EN}.\frac{EQ}{EM}.\frac{EB}{EB'}=\left(\frac{EB}{EB'}\right)^3=\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}\Rightarrow V_{E.QPB}=\frac{27}{64}V_{E.MB'N}.$

Suy ra $V_{BQP.B'MN}=V_{E.MB'N}-V_{E.BQP}=V_{E.MB'N}-\frac{27}{64}V_{E.MB'N}=\frac{37}{64}V_{E.MB'N}=\frac{37}{64}.8=\frac{37}{8}.$

Vậy $V_{AQPCA'MNC'}=V_{ABC.A'B'C'}-V_{BQP.B'MN}=15-\frac{37}{8}=\frac{83}{8}.$

Dạng 13. Phục hình và trải phẳng

Bài tập 1. Cho tứ diện ABCD có $\widehat{DAB}=\widehat{CBD}=90^\circ$; AB=a; $AC=a\sqrt{5}$; $\widehat{ABC}=135^\circ$. Biết góc giữa hai mặt phẳng (ABD), (BCD) bằng 30°. Thể tích của tứ diện ABCD bằng

A. $\frac{a^3}{2\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{a^3}{\sqrt{2}}$. **C.** $\frac{a^3}{3\sqrt{2}}$. **D.** $\frac{a^3}{6}$.

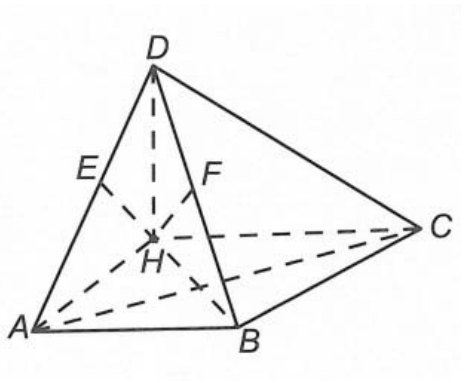
Hướng dẫn giải

Chọn D.

Dựng $DH\perp(ABC)$.

Ta có $\begin{cases}BA\perp DA\\BA\perp DH\end{cases}\Rightarrow BA\perp AH$;

$\begin{cases}BC\perp DB\\BC\perp DH\end{cases}\Rightarrow BC\perp BH$.



Tam giác AHB có AB=a, $\widehat{ABH}=45^\circ$

$\Rightarrow \triangle HAB$ vuông cân tại A

$\Rightarrow$AH=AB=a.

Áp dụng định lý cosin, ta có BC=$a\sqrt{2}$.

Vậy $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}.BA.BC.\sin\widehat{CBA}=\frac{1}{2}.a.a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{a^2}{2}$.

Dựng $\begin{cases}HE\perp DA\left(E\in AD\right)\\HF\perp DB\left(F\in BD\right)\end{cases}\Rightarrow HE\perp(DAB)$ và $HF\perp(DBC)$.

Suy ra $\left(\widehat{(DBA),(DBC)}\right)=\left(\widehat{HE,HF}\right)=\widehat{EHF}$

Đặt DH=x, khi đó $HE=\frac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}}, HF=\frac{xa\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2+x^2}}$.

Suy ra $\cos\widehat{EHF}=\frac{HE}{HF}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{x^2+2a^2}}{\sqrt{2x^2+2a^2}}\Rightarrow x=a$.

Vậy $V_{ABCD}=\frac{1}{3}.DH.S_{\triangle ABC}=\frac{a^3}{6}$.

Bài tập 2 Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=4; AC=BD=5;$ $AD=BC=6$. Thể tích của khối tứ diện $ABCD$ là

A. $\frac{15\sqrt{6}}{4}$ **B.** $\frac{15\sqrt{6}}{2}$

C. $\frac{45\sqrt{6}}{4}$ **D.** $\frac{45\sqrt{6}}{2}$

Chú ý: Cho khối tứ diện gần đều có độ dài các cạnh

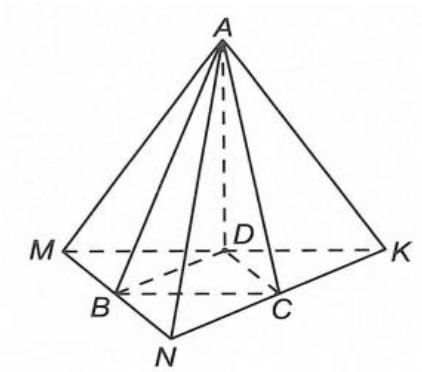
$\begin{cases}AB=CD=a\\AC=BD=b\\AD=BC=c\end{cases}$

Hướng dẫn giải

Chọn A

Dựng tứ diện AMNK sao cho B, C, D lần lượt là trung điểm của các cạnh MN, NK, KM.

Tứ diện AMNK có AM, AN, AK đôi một vuông góc.



Đặt $\begin{cases} x = a^2 + b^2 - c^2 \\ y = b^2 + c^2 - a^2 \\ z = a^2 + c^2 - b^2 \end{cases}$

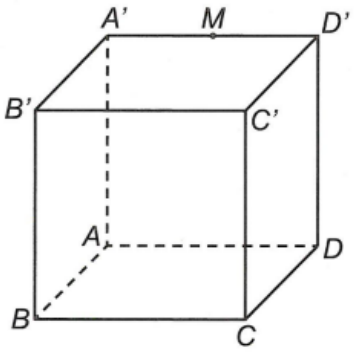
Khi đó $V_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{xyz}$

$$\begin{cases} AM^2 + AN^2 = 64 \\ AN^2 + AK^2 = 100 \\ AK^2 + AM^2 = 144 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM^2 = 54 \\ AN^2 = 10 \\ AK^2 = 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM = 3\sqrt{6} \\ AN = \sqrt{10} \\ AK = 3\sqrt{10} \end{cases}$$

$$V_{AMNK} = \frac{1}{6}AM.AN.AK = \frac{1}{6}.3\sqrt{6}\sqrt{10}.3\sqrt{10} = 15\sqrt{6}$$

Vậy $V_{ABCD} = \frac{V_{AMNK}}{4} = \frac{15\sqrt{6}}{4}$

Bài tập 3. Một con kiến đang ở vị trí M là trung điểm cạnh $A'D'$ của một chiếc hộp hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh 5cm.



Con kiến muốn bò qua sáu mặt của chiếc hộp rồi quay trở lại M. Quãng đường bò đi ngắn nhất của con kiến là

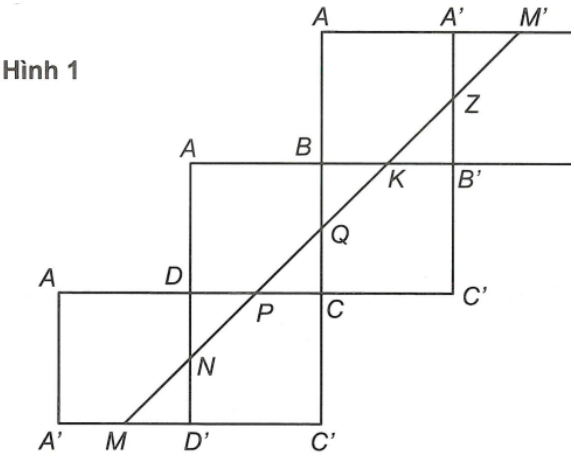
A. $16\sqrt{2}cm$. **B.** $15\sqrt{2}cm$.

C. $12\sqrt{2}cm$. **D.** $13\sqrt{2}cm$.

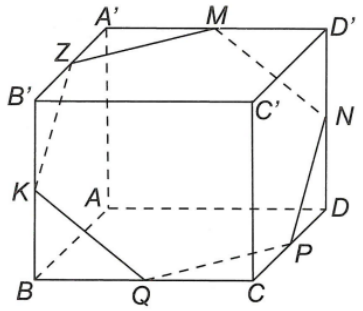
Hướng dẫn giải

Chọn B.

Hình 1



Hình 2



Trải sáu mặt phẳng của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ như hình vẽ 1. Để đi đường ngắn nhất từ M đến $M'(M \equiv M'$ hay M' là trung điểm $A'D'$ trên mặt khai triển) thì con kiến cần bò theo đoạn MM'. Trên chiếc hộp, đường đi ngắn nhất của con kiến là đường $MNPQKZM$ như hình 2 với N, P, Q, K, Z lần lượt là trung điểm của $DD', CD, BC, BB', A'B'$.

Quãng đường ngắn nhất con kiến bò là đoạn $MNPQKZM$.

Ta có $MNPQKZM = MN + NP + PQ + QK + KZ + ZM$.

Các đoạn thẳng con kiến bò trên các mặt hình lập phương đều có độ dài bằng nửa độ dài đường chéo hình vuông.

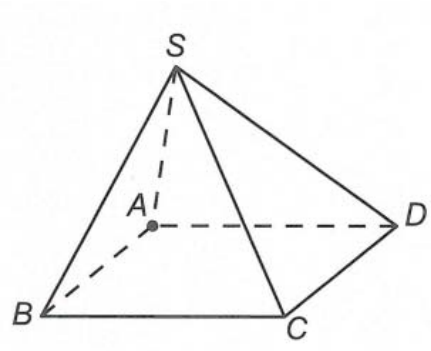
Do đó quãng đường con kiến bò ngắn nhất là $6.\dfrac{5\sqrt{2}}{2} = 15\sqrt{2}$

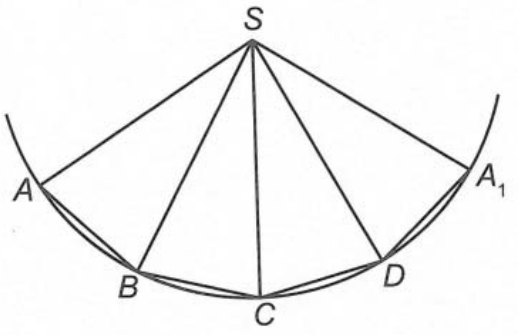
Bài tập 4. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ một con kiến bò từ đỉnh A của đáy để đi tất cả các mặt xung quanh rồi trở về vị trí A. Biết cạnh bên bằng 6cm, cạnh đáy bằng 4cm. Quãng đường ngắn nhất mà con kiến đi là

A. $13,48cm$. **B.** $10,25cm$. **C.** $12,05cm$. **D.** $11,73cm$.

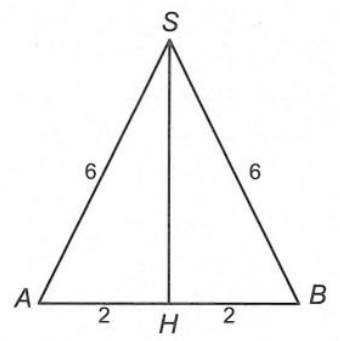
Hướng dẫn giải

Chọn D.





Trải hình chóp thành hình như hình vẽ trên. Khi đó quãng đường ngắn nhất con kiến phải bò là AA_1



Ta có $\sin \widehat{\mathrm{ASH}} = \frac{AH}{SA} = \frac{1}{3} \Rightarrow \widehat{\mathrm{ASH}} = 19^0 28' \Rightarrow \widehat{\mathrm{ASA}_1} = 8.19^0 28' = 155^0 46'$

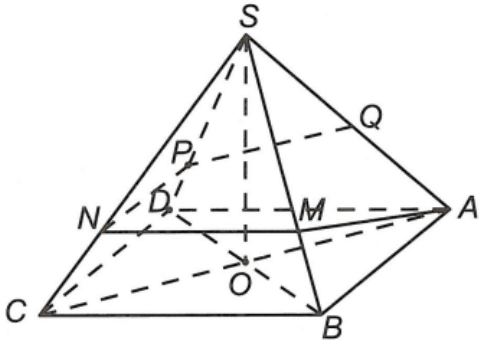
$\Rightarrow AA_1 = \sqrt{SA^2 + SA_1^2 - 2SA.SA_1 \cos \widehat{\mathrm{ASA}_1}} = 11,73cm$

Bài tập 13. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA = a$ và $\widehat{SAB} = \frac{11\pi}{24}$. Gọi Q là trung điểm cạnh SA. Trên các cạnh SB, SC, SD lần lượt lấy các điểm M, N, P không trùng với các đỉnh của hình chóp. Giá trị nhỏ nhất của tổng $AM + MN + NP + PQ$ theo a là

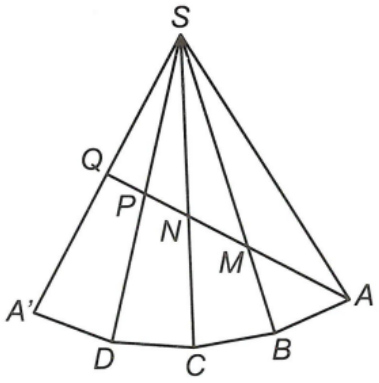
A. $\frac{a\sqrt{2}\sin\frac{11\pi}{24}}{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ **D.** $\frac{a\sqrt{3}\sin\frac{11\pi}{12}}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Trải phẳng



Do hình chóp tứ giác đều nên mỗi mặt bên đều là các tam giác cân, theo giả thiết $\widehat{SAB}=\dfrac{11\pi}{24}$ nên

$\widehat{ASB}=\pi-\dfrac{22\pi}{24}=\dfrac{\pi}{12}$ (1)

Cắt hình chóp theo cạnh bên SA rồi trải các mặt bên thành một mặt phẳng ta được hình vẽ như trên sao cho khi ghép lại thì $A\equiv A'$. Khi đó, tổng $AM+MN+NP+PQ$ là tổng các đường gấp khúc nên tổng này nhỏ nhất nếu xảy ra các điểm A,Q,M,N,P thẳng hàng và Q là hình chiếu của A trên SA'.

Đồng thời theo (1) ta có $\widehat{ASA'}=4.\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}$ (2)

Suy ra $\Delta ASA'$ là tam giác đều.

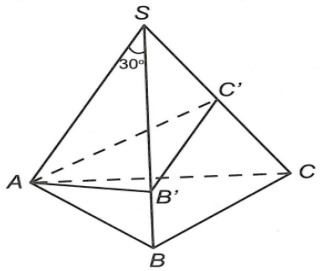
Vậy $AQ=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ hay GTNN của tổng $AM+MN+NP+PQ=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Bài tập 6 Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $\widehat{ASB}=30^0, SA=1$. Lấy B',C' lần lượt thuộc cạnh SB,SC sao cho chu vi tam giác $AB'C'$ nhỏ nhất. Tỉ số $\dfrac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}}$ gần giá trị nào nhất trong các giá trị sau?

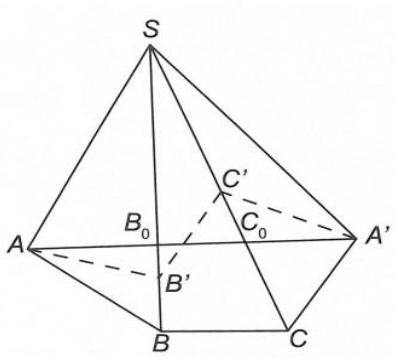
A. $0,55$. **B.** $0,65$. **C.** $0,45$. **D.** $0,75$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Trải phẳng



Cắt tứ diện theo các cạnh SA, AC, AB rồi trải lên mặt (SBC).

Tam giác SBC giữ nguyên; tam giác SAB lật thành tam giác ΔSAB; tam giác SAC thành tam giác $\Delta SCA'$

Do đó $AC' = A'C', SA' = SA = 1$

$\widehat{ASA'} = \widehat{ASB} + \widehat{BSC} + \widehat{CSA'} = 3.30^0 = 90^0$ và $SA' = SA = 1$ nên $\Delta SAA'$ là tam giác vuông cân tại S.

$C_{AB'C'} = AB' + B'C' + AC' = AB' + B'C' + A'C' \geq AA' = \sqrt{2}$ không đổi.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi A, B', C', A' thẳng hàng tức là khi $B' = B_0, C' = C_0$.

Ta có $\frac{SB'}{SB} = \frac{SB_0}{SB} = \frac{SB_0}{SA} = \frac{\sin \widehat{SAB_0}}{\sin \widehat{SB_0A}} = \frac{\sin 45^0}{\sin 105^0} = -1 + \sqrt{3}$

Vậy $\frac{V_{S.AB'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC} = \left(\frac{SB'}{SB}\right)^2 = 4 - 2\sqrt{3} \approx 0,54$.

Dạng 14.Bài toán cực trị liên quan đến thể tích khối đa diện

1. Phương pháp

Bước 1: Chọn ẩn. Ẩn này có thể là góc α hoặc cạnh thích hợp trong khối đa diện.

Bước 2: Với ẩn số được chọn ở bước 1, ta xem đó như là các yếu tố đã cho để tính thể tích V của khối đa diện theo các phương pháp đã biết.

Bước 3: Ta có một hàm số $f(x), \forall x \in D$ mà cần tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của nó.

Dùng bất đẳng thức cổ điển

(Cô-si hay Bunhiacopxki) hoặc sử dụng tính đơn điệu của hàm để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.

1. Bất đẳng thức Cô-si.

$a)$ Cho $a \geq 0, b \geq 0$ ta có $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

$b)$ Cho $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ ta có $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

$c)$ Cho $a_1 \ge 0, a_2 \ge 0, \ \ldots, \ a_n \ge 0$

Ta có $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1.a_2 \ldots a_n}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Các bất đẳng thức cơ bản.

Các dạng hay sử dụng.

$+)$ $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \ge 2, \forall a, b > 0; \ \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} \ge \dfrac{8}{\left(a+b\right)^2}; \ a + \dfrac{1}{a} \ge 2, \forall a > 0$

$+)$ $4ab \le \left(a+b\right)^2 \le 2\left(a^2 + b^2\right)$

$+)$ $3\left(ab + bc + ca\right) \le \left(a+b+c\right)^2 \le 3\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$

$+)$ $\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)\left(\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}\right) \ge n^2$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n} \ge \dfrac{n^2}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}.$

2. Bất đẳng thức Bunhiacopxki.

a. Dạng đa thức Bất đẳng thức Bunhiacopxki.

Cho 2 bộ số $\left(n \in Z, n \ge 2\right): a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $\left(b_1, b_2, \ldots, b_n\right)$ ta có

$\left(a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + \ldots + a_n^{\ 2}\right).\left(b_1^{\ 2} + b_2^{\ 2} + \ldots + b_n^{\ 2}\right)$

$\ge \left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n\right)^2$

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \ldots = \dfrac{a_n}{b_n}.$

b. Dạng phân thức

Cho 2 bộ số $\left(n \in Z, n \ge 2\right): a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $\left(b_1, b_2, \ldots, b_n\right)$ với $\forall b_1, b_2, \ldots, b_n > 0.$

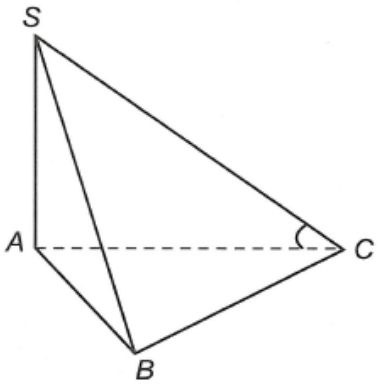
Ta có $\dfrac{a_1^{\ 2}}{b_1} + \dfrac{a_2^{\ 2}}{b_2} + \ldots + \dfrac{a_n^{\ 2}}{b_n} \ge \dfrac{\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)^2}{b_1 + b_2 + \ldots + b_n}.$

Bài tập: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại C và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Cho $SC = a$, mặt phẳng $\left(SBC\right)$ tạo với mặt đáy một góc α. Thể tích khối chóp $S.ABC$ đạt giá trị lớn nhất là

A. $\dfrac{a^3}{16}$. **B.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{27}$. **C.** $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{48}$. **D.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{24}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Ta có $\left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right)=\left(\widehat{SC,AC}\right)=\widehat{SCA}=\alpha$

Xét ΔSAC vuông tại A có

$\begin{cases}SA=SC.\sin\alpha=a\sin\alpha\\AC=SC.\cos\alpha=a\cos\alpha\end{cases}$

$\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SA=\frac{1}{3}.\left(\frac{1}{2}AC^2\right).SA=\frac{1}{6}.\left(a\cos\alpha\right)^2.a\sin\alpha=\frac{a^3}{6}\cos^2\alpha.\sin\alpha.$

$V_{S.ABC}$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi biểu thức

$P=\cos^2\alpha.\sin\alpha.=\left(1-\sin^2\alpha\right).\sin\alpha$ đạt giá trị lớn nhất

Cách 1:

Đặt $t=\sin\alpha$. Vì $0<\alpha<90°$ nên $0<\sin\alpha<1$

$\Rightarrow 0<t<1$

Ta có $P=f\left(t\right)=\left(1-t^2\right)t=-t^3+t$ xác định và liên tục trên $\left(0;1\right)$.

$$f'\left(t\right)=-3t^2+1\Rightarrow f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{\sqrt{3}}{3}\ \text{(nhan)}\\t=-\frac{\sqrt{3}}{3}\ \text{(loai)}\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

t	$+\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		1		$-\infty$
$f'(t)$			0		$+$		0	$-$			
$f(t)$							$\frac{2\sqrt{3}}{9}$				

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $\max\limits_{(0;1)}f\left(t\right)=\frac{2\sqrt{3}}{9}$ khi $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $\max V_{S.ABC}=\frac{a^3}{6}.P_{\max}=\frac{a^3}{6}.\frac{2\sqrt{3}}{9}=\frac{a^3\sqrt{3}}{27}$ khi và chỉ khi $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Cách 2:

Vì $0<\alpha<90^\circ \Rightarrow \sin\alpha>0$

$\Rightarrow P^2=\left(1-\sin^2\alpha\right)^2\sin^2\alpha \qquad =\dfrac{\left(1-\sin^2\alpha\right)\left(1-\sin^2\alpha\right)\left(2\sin^2\alpha\right)}{2}.$

Áp dụng Cô-si cho 3 số dương $1-\sin^2\alpha, 1-\sin^2\alpha$ và $2\sin^2\alpha$, ta được:

$\left(1-\sin^2\alpha\right)\left(1-\sin^2\alpha\right)\left(2\sin^2\alpha\right)$

$\le\left[\dfrac{\left(1-\sin^2\alpha\right)+\left(1-\sin^2\alpha\right)+\left(2\sin^2\alpha\right)}{3}\right]^3=\dfrac{8}{27}$

$\Rightarrow\dfrac{\left(1-\sin^2\alpha\right)\left(1-\sin^2\alpha\right)\left(2\sin^2\alpha\right)}{2}\le\dfrac{4}{27}$

$\Rightarrow P^2{}_{\max}=\dfrac{4}{27}\Rightarrow P_{\max}=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}.$

Đẳng thức xảy ra khi $1-\sin^2\alpha=2\sin^2\alpha\Leftrightarrow\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

Vậy $\max V_{S.ABC}=\dfrac{a^3}{6}.P_{\max}=\dfrac{a^3}{6}.\dfrac{2\sqrt{3}}{9}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{27}.$

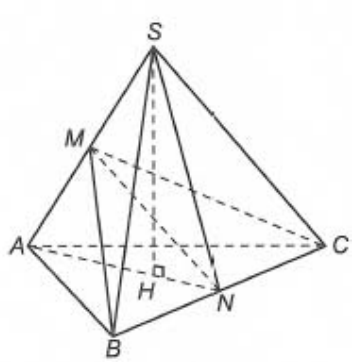
2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA là đoạn thẳng thay đổi sao cho $SA=x$, $x\in\left(0;\sqrt{3}\right)$, các cạnh còn lại đều bằng 1. Thể tích khối chóp $S.ABC$ đạt giá trị lớn nhất là

A. $\dfrac{1}{4}$ **B.** $\dfrac{1}{16}$ **C.** $\dfrac{1}{12}$ **D.** $\dfrac{1}{8}$

Hướng dẫn giải

Chọn D



Tổng quát: *Cho hình chóp S.ABC có SA là đoạn thẳng thay đổi sao cho SA=x, các cạnh còn lại đều bằng a (a là hằng số) với*

Ta có tam giác ABC đều $\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SA và BC.

Ta có ΔSAB và ΔSAC là hai tam giác cân tại B và C nên $\begin{cases}SA\perp BM\\SA\perp CM\end{cases}$

$\Rightarrow SA\perp(BCM)\Rightarrow SA\perp BC.$

Mặt khác $BM=CM=\sqrt{AB^2-(AM)^2}=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}\Rightarrow \Delta BMC$ cân tại M.

Suy ra $MN\perp BC\Rightarrow BC\perp(SAN).$

Kẻ $SH\perp AN$. Do $BC\perp(SAN)\Rightarrow BC\perp SH\Rightarrow SH\perp(ABC).$

Ta có $MN=\sqrt{SN^2-SM^2}=\sqrt{\frac{3}{4}-\frac{x^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{3-x^2}.$

$S_{\Delta SAN}=\frac{1}{2}SA.NM=\frac{1}{2}SH.AN\Rightarrow SH=\frac{SA.NM}{AN}\Rightarrow SH=\frac{x\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{3}}.$

$S_{\Delta .ABC}=\frac{1}{3}S_{\Delta .ABC}.SH=\frac{x\sqrt{3-x^2}}{12}\le\frac{1}{12}.\left(\frac{x^2+3-x^2}{2}\right)=\frac{1}{8}.$

Vậy $\max V_{S.ABC}=\frac{1}{8}$ đạt được khi và chỉ khi $x^2=3-x^2\Leftrightarrow x^2=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{6}}{2}.$

$x\in\left(0;a\sqrt{3}\right)$. *Thể tích khối chóp* $S.ABC$ *đạt giá trị lớn nhất là* $V_{S.ABC}=\frac{a^3}{8}.$

Bài tập 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$. Tam giác SAB vuông tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng SD và mặt phẳng (SBC), với $\alpha<45°$. Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối chóp $S.ABCD$

A. $4a^3$ **B.** $\frac{8a^3}{3}$

C. $\frac{4a^3}{3}$ **D.** $\frac{2a^3}{3}$

Hướng dẫn giải

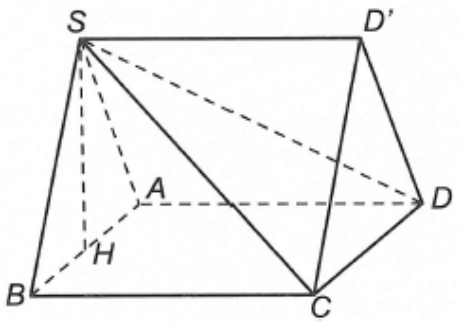
Chọn C

Gọi D' là đỉnh thứ tư của hình bình hành $SADD'$.

Khi đó $DD'//SA$ mà $SA\perp(SBC)$

Nên $DD'\perp(SBC)$

Ta có $\widehat{(SD,(SBC))}=\alpha=\widehat{DSD'}=\widehat{SDA},$



Do đó $SA = AD.\tan\alpha = 2a\tan\alpha.$

Đặt $\tan\alpha = x,\ x \in (0;1)$

Gọi H là hình chiều của S lên AB, ta có

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{4a^2}{3}.SH.$

Do đó $V_{S.ABCD}$ đạt giá trị lớn nhất khi SH lớn nhất.

Vì ΔSAB vuông tại S nên

$SH = \frac{SA.SB}{AB} = \frac{SA\sqrt{AB^2 - SA^2}}{AB} = \frac{2ax\sqrt{4a^2 - 4a^2x^2}}{2a} = 2ax\sqrt{1-x^2}.$

$\Rightarrow SH \le 2a.\frac{x^2 + 1 - x^2}{2} = a.$

Từ đó $\max SH = a$ khi $\tan\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

Vậy $\max V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}a.4a^2 = \frac{4a^3}{3}.$

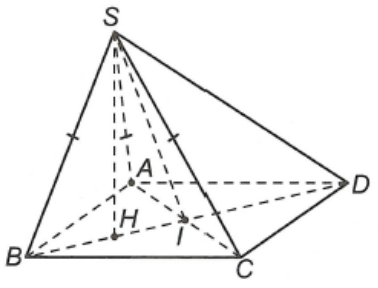
Bài tập 3. Khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, $SA = SB = SC = a,$ cạnh SD thay đổi. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{a^3}{2}$ **B.** $\frac{a^3}{8}$ **C.** $\frac{3a^3}{8}$ **D.** $\frac{a^3}{4}$

Hướng dẫn giải

Chọn D

Gọi I là tâm hình thoi $ABCD$, H là hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$, suy ra $H \in BI$.



Ta có $SI^2 = SA^2 - IA^2 = a^2 - IA^2,$

$IB^2 = AB^2 - IA^2 = a^2 - IA^2$ suy ra $SI = IB.$

Khi đó tam giác SBD vuông tại S.

Đặt $SD = x$.

Ta có $SB.SD = SH.BD \Leftrightarrow a.x = SH.BD \Leftrightarrow SH = \dfrac{a.x}{BD}$

Ta có $V_{SABCD} = \dfrac{1}{3}SH.\dfrac{1}{2}AC.BD = \dfrac{1}{3}.\dfrac{ax}{BD}.\dfrac{1}{2}AC.BD = \dfrac{1}{6}ax.AC.$

Lại có $BD^2 = SB^2 + SD^2 = a^2 + x^2$ suy ra $IB^2 = \dfrac{a^2 + x^2}{4}$

$\Rightarrow IA^2 = a^2 - \dfrac{a^2 + x^2}{4} = \dfrac{3a^2 - x^2}{4}.$

Suy ra $AC = 2IA = 2\sqrt{\dfrac{3a^2 - x^2}{4}} = \sqrt{3a^2 - x^2}.$

$V_{SABCD} = \dfrac{1}{6}ax.\sqrt{3a^2 - x^2} \le \dfrac{a}{6}.\dfrac{x^2 + 3a^2 - x^2}{2} = \dfrac{a^3}{4}.$

Bài tập 4 : Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 2, $SA = 2$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Gọi M, N là hai điểm thay đổi trên hai cạnh AB, AD sao cho mặt phẳng (SMC) vuông góc với mặt phẳng (SNC). Tính tổng $T = \dfrac{1}{AN^2} + \dfrac{1}{AM^2}$ khi thể tích khối chóp $S.AMCN$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $T = 2.$ **B.** $T = \dfrac{5}{4}.$

C. $T = \dfrac{2 + \sqrt{3}}{4}.$ **D.** $T = \dfrac{13}{9}.$

Hướng dẫn giải

Chọn B

Đặt $AM = x, AN = y.$

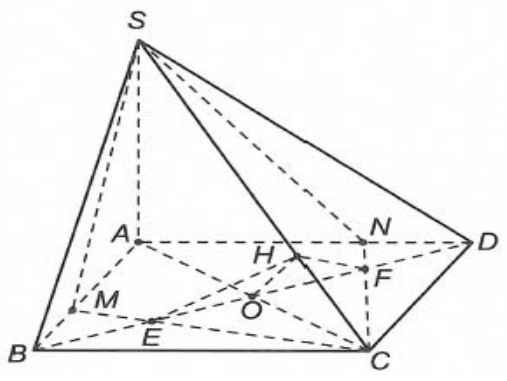
Gọi

$\{O\} = AC \cap DB;\ \{\mathrm{E}\} = BD \cap CM;$

$\{F\} = BD \cap CN.$

H là hình chiếu vuông góc của

O trên SC, khi đó: $HO = \sqrt{\dfrac{2}{3}}.$



Ta có $\begin{cases} SC \perp OH \\ SC \perp BD \end{cases} \Rightarrow SC \perp (HBD) \Rightarrow \begin{cases} SC \perp HE \\ SC \perp HF \end{cases}.$

Do đó góc giữa (SCM) và (SCN) bằng góc giữa HE và HF. Suy ra $HE \perp HF.$

Mặt khác $V_{S.AMCN}=\frac{1}{3}SA.S_{AMCN}=\frac{2}{3}\left(x+y\right).$

Ta có $x>0,y>0$ và nếu $x\neq 2,y\neq 2$ thì gọi K là trung điểm của AM, khi đó

$$\frac{OE}{EB}=\frac{KM}{MB}=\frac{x}{4-2x}\Rightarrow\frac{OE}{x}=\frac{EB}{4-2x}=\frac{OB}{4-x}\Rightarrow OE=\frac{x\sqrt{2}}{4-x}.$$

Tương tự $OF=\frac{y\sqrt{2}}{4-y}$ mà $OE.OF=OH^2\Leftrightarrow\left(x+2\right)\left(y+2\right)=12.$

Nếu $x=2$ hoặc $y=2$ thì ta có $OE.OF=OH^2\Leftrightarrow\left(x+2\right)\left(y+2\right)=12.$

Suy ra $V_{S.AMCN}=\frac{1}{3}SA.S_{AMCN}=\frac{2}{3}\left(x+y\right)=\frac{2}{3}\left[\left(x+2\right)+\left(y+2\right)-4\right]$

$$=\frac{2}{3}\left[\left(x+2\right)+\frac{12}{x+2}-4\right].$$

Do đó $\max V_{S.AMCN}=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}\\\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow T=\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AN^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{5}{4}.$

Bài tập 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A với $AB=1,AC=\sqrt{3}.$ Hình chiếu của S trên mặt phẳng đáy là điểm H sao cho các mặt phẳng $\left(SAB\right)$ và $\left(SAC\right)$ cùng tạo với SH góc $30°$ và mặt phẳng $\left(SBC\right)$ tạo với mặt phẳng đáy một góc $60°$. Thể tích lớn nhất của khối chóp $S.ABC$ là

A. $V_{\max}=\frac{1+\sqrt{3}}{4}.$ **B.** $V_{\max}=\frac{3-\sqrt{3}}{4}.$

C. $V_{\max}=\frac{\sqrt{3}-1}{4}.$ **D.** $V_{\max}=\frac{3+\sqrt{3}}{4}.$

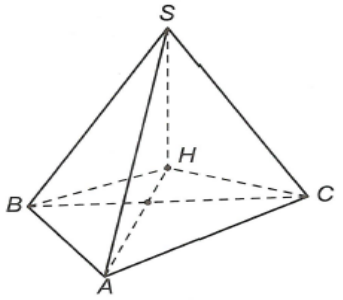
Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $\left(\widehat{SH,\left(SAB\right)}\right)=\left(\widehat{SH,\left(SAC\right)}\right)=30°$ nên hai mặt phẳng $\left(SAB\right)$ và $\left(SAC\right)$ sẽ cùng tạo với mặt phẳng đáy một góc $60°$.

Suy ra $d\left(H,AB\right)=d\left(H,AC\right)=d\left(H,BC\right)$

tức H hoặc là tâm nội tiếp hoặc là tâm bàng tiếp các góc A,B,C của tam giác.



Ta có $S=\frac{\sqrt{3}}{2};p=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ còn các cạnh $a=2,b=\sqrt{3},c=1.$

Khi đó $r=\dfrac{S}{p}=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}; r_a=\dfrac{S}{p-a}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2};$

$r_b=\dfrac{S}{p-b}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}; r_c=\dfrac{S}{p-c}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}.$

Chiều cao chóp lớn nhất khi $SH_{\max}=r_a\sqrt{3}=\dfrac{3+3\sqrt{3}}{2}\Rightarrow V_{\max}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}.$

Bài tập 6. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng a, góc tạo bởi mặt bên và mặt phẳng đáy là α với $\alpha\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ đạt giá trị lớn nhất là

A. $\dfrac{4a^3\sqrt{7}}{49}.$ **B.** $\dfrac{4a^3\sqrt{3}}{27}.$

C. $\dfrac{2a^3\sqrt{3}}{9}.$ **D.** $\dfrac{4a^3\sqrt{15}}{75}.$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

$AC\cap BD=\{O\}\Rightarrow SO\perp(ABCD)$

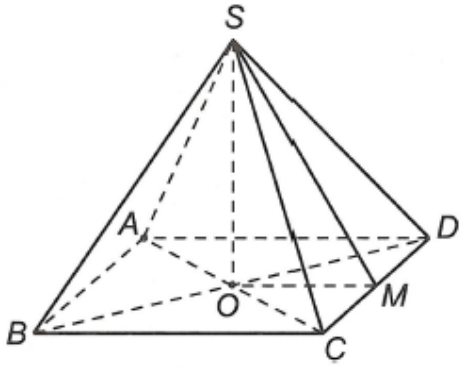
Gọi M là trung điểm của CD

$\Rightarrow\left(\widehat{(SCD),(ABCD)}\right)=\widehat{SMO}=\alpha.$

Gọi độ dài một cạnh hình vuông là x.

Tam giác SMC vuông tại M có

$SM=\sqrt{SC^2-CM^2}=\sqrt{a^2-\dfrac{x^2}{4}}.$



Tam giác SOM vuông tại O có:

$OM=SM.\cos\widehat{SMO}=\cos\alpha.\sqrt{a^2-\dfrac{x^2}{4}}$

$\Rightarrow\dfrac{x}{2}=\cos\alpha.\sqrt{a^2-\dfrac{x^2}{4}}\Rightarrow\dfrac{x^2}{4}=\left(a^2-\dfrac{x^2}{4}\right)\cos^2\alpha$

$\Rightarrow x^2=\dfrac{4a^2\cos^2\alpha}{1+\cos^2\alpha}=\dfrac{4a^2.\dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}}{1+\dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}}=\dfrac{4a^2}{2+\tan^2\alpha}\Rightarrow x=\dfrac{2a}{\sqrt{2+\tan^2\alpha}}.$

$\Rightarrow S_{ABCD}=\dfrac{4a^2}{2+\tan^2\alpha}.$

Ta có: $SO = OM.\tan\widehat{SMO} = \frac{x}{2}.\tan\alpha = \frac{a.\tan\alpha}{\sqrt{2+\tan^2\alpha}}$.

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SO = \frac{1}{3}.\frac{4a^2}{2+\tan^2\alpha}.\frac{a.\tan\alpha}{\sqrt{2+\tan^2\alpha}} = \frac{4a^3.\tan\alpha}{3\sqrt{\left(2+\tan^2\alpha\right)^3}}$.

Do $\alpha \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \tan\alpha > 0$. Thể tích khối chóp đạt giá trị lớn nhất khi $\frac{4}{3}.\frac{a^3.\tan\alpha}{\sqrt{\left(2+\tan^2\alpha\right)^3}}$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta xét $f\left(\alpha\right) = \frac{\tan^2\alpha}{\left(2+\tan^2\alpha\right)^3}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số dương $\frac{\tan^2\alpha}{2+\tan^2\alpha}; \frac{1}{2+\tan^2\alpha}; \frac{1}{2+\tan^2\alpha}$.

Ta có $f\left(\alpha\right) = \frac{\tan^2\alpha}{\left(2+\tan^2\alpha\right)^3} = \frac{\tan^2\alpha}{2+\tan^2\alpha}.\frac{1}{2+\tan^2\alpha}.\frac{1}{2+\tan^2\alpha}$

$\le \left[\frac{1}{3}\left(\frac{\tan^2\alpha}{2+\tan^2\alpha}+\frac{1}{2+\tan^2\alpha}+\frac{1}{2+\tan^2\alpha}\right)\right]^3 = \frac{1}{27}$.

$f\left(\alpha\right) = \frac{1}{27} \Leftrightarrow \frac{\tan^2\alpha}{2+\tan^2\alpha} = \frac{1}{2+\tan^2\alpha} \Leftrightarrow \tan^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$.

Vậy $\max V_{SABCD} = \frac{4a^3}{3\sqrt{\left(2+1\right)^3}} = \frac{4a^3\sqrt{3}}{27}$.

Bài tập 7. Một hình hộp chữ nhật có diện tích toàn phần là S. Thể tích lớn nhất của khối hộp chữ nhật là

A. $\frac{S\sqrt{S}}{3}$.

B. $\frac{S\sqrt{S}}{36}$.

C. $\frac{S\sqrt{6S}}{36}$.

D. $\frac{S\sqrt{3S}}{9}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi chiều dài, chiều rộng, chiều cao của hình hộp chữ nhật lần lượt là a,b,c với $a,b,c>0$.

Ta có $S = 2ab+2ac+2bc$

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$:

$S = 2ab+2ac+2bc \ge 3\sqrt[3]{2ab.2ac.2bc} = 6\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$

$6\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \le S \Rightarrow a^2b^2c^2 \le \frac{S^3}{216} \Rightarrow abc \le \sqrt{\frac{S^3}{216}} = \frac{S\sqrt{6S}}{36}.$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$ hình hộp chữ nhật trở thành hình lập phương.

Bài tập 8. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác vuông tại A. Khoảng cách từ AA' đến $(BCC'B')$ và khoảng cách từ C đến (ABC') đều bằng x không đổi, góc giữa hai mặt phẳng (ABC') và (ABC) bằng $\alpha \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Để thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ nhỏ nhất thì góc α có giá trị gần nhất giá trị nào sau đây?

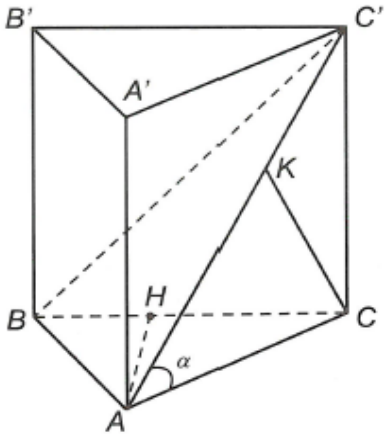
Trong các hình hộp chữ nhật có cùng diện tích toàn phần thì hình lập phương thì có thể tích lớn nhất.

A. 25° **B.** 35°

C. 45° **D.** 55°

Hướng dẫn giải

Chọn B



Dựng $AH \perp BC\ (H \in BC)$,

$CK \perp AC'(K \in AC')$

Ta có $d\left(AA';(BCC'B')\right) = AH = x$ và

$d\left(C;(ABC')\right) = CK = x$

$\widehat{\left((ABC');(ABC)\right)} = \widehat{CAC'} = \alpha.$

Xét tam giác ACK vuông tại K có

$AC = \frac{CK}{\sin\alpha} = \frac{x}{\sin\alpha}.$

Xét tam giác ACC' vuông tại C có $CC' = AC.\tan\alpha = \frac{x}{\sin\alpha}.\tan\alpha = \frac{x}{\cos\alpha}.$

Xét tam giác ABC vuông tại A có

$\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AH^2} - \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AB = \frac{AH.AC}{\sqrt{AH^2 - AC^3}} = \frac{x^2}{\sqrt{x^2\left(1-\sin^2\alpha\right)}} = \frac{x}{\cos\alpha}.$

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

$V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{2}AB.AC.CC' = \frac{x^3}{2\sin\alpha\cos^2\alpha}.$

Để thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là nhỏ nhất thì $\sin\alpha\cos^2\alpha$ lớn nhất.

Ta có $\sin^2\alpha\cos^4\alpha = \frac{1}{2}2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\cos^2\alpha$

$\le \frac{1}{2}\left(\frac{2\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha}{3}\right) = \frac{8}{54} \Rightarrow \sin\alpha\cos^2\alpha \le \frac{2\sqrt{3}}{9} \Rightarrow V \ge \frac{3x^3\sqrt{3}}{4}.$

Vậy $V_{\min}=\dfrac{3x^3\sqrt{3}}{4}$.

Đẳng thức xảy ra khi $2\sin^2\alpha=\cos^2\alpha\Rightarrow\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\alpha\approx 35°$.

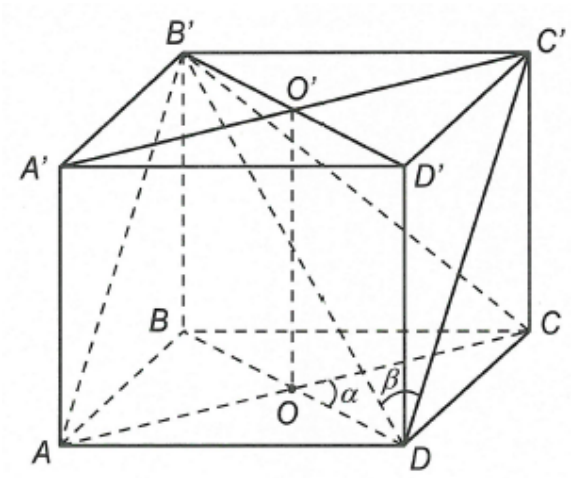
Bài tập 9. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB<BC$ và $BD=3cm$. Hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và $(BDD'B')$ hợp với nhau một góc $\alpha\left(0<\alpha\le\dfrac{\pi}{2}\right)$. Đường chéo $B'D$ hợp với mặt phẳng $(CDD'C')$ một góc $\beta\left(0<\beta<\dfrac{\pi}{2}\right)$. Hai góc α,β thay đổi nhưng thỏa mãn hình hộp $ADD'A'.BCC'B'$ luôn là hình lăng trụ đều. Giá trị lớn nhất thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$

A. $\sqrt{3}\ \text{cm}^3$ **B.** $2\sqrt{3}\ \text{cm}^3$

C. $6\sqrt{3}\ \text{cm}^3$ **D.** $12\sqrt{3}\ \text{cm}^3$

Hướng dẫn giải

Chọn B



Ta có $\left(\widehat{(ACC'A');(BDD'B')}\right)=\widehat{COD}=\alpha$

$\Rightarrow\widehat{CBD}=\dfrac{\alpha}{2}\Rightarrow BC=BD.\cos\widehat{CBD}=3\cos\dfrac{\alpha}{2}$

Lại có $CD=BD.\sin\widehat{CBD}=3\sin\dfrac{\alpha}{2}$

Ta có $\left(\widehat{B'D;(CDD'C')}\right)=\widehat{B'DC'}=\beta$

Do $ADD'A'.BCC'B'$ luôn là hình lăng trụ đều nên $BC=CC'$

$V_{ABCD.A'B'C'D'}=BC.CD.CC'=27.\sin\dfrac{\alpha}{2}.\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$

Xét $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cos^4\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}.2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}.\cos^2\dfrac{\alpha}{2}.\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$

$$\le \frac{1}{2}\left(\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{3}\right)^3=\frac{4}{27}.$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2}=\cos^2\frac{\alpha}{2}\Rightarrow\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha=2\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\le\frac{2\sqrt{3}}{9}\Rightarrow V\le 6\sqrt{3}.$$

Dạng 15: Sử dụng thể tích để tính khoảng cách

1. Phương pháp

- Để tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng ta sử dụng phương pháp đổi đỉnh và áp dụng công thức $V=\frac{1}{3}h.S\Rightarrow h=\frac{3V}{S}$.
- Trong đó V là thể tích khối đa diện, S là diện tích đáy và h là khoảng cách từ đỉnh đến mặt đáy.
- Để tính khoảng cách hai đường thẳng chéo nhau ta áp dụng công thức $V=\frac{1}{6}AB.CD.\sin\left(\widehat{AB,CD}\right)d\left(AB;CD\right)\Rightarrow d\left(AB;CD\right)=\frac{6V}{AB.CD.\sin\left(\widehat{AB,CD}\right)}$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông ở B. Cạnh SA vuông góc với đáy. Biết $SA=a,AB=b.$ Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $\left(SBC\right)$ là

A. $\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

B. $\frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

C. $\frac{ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}$.

D. $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

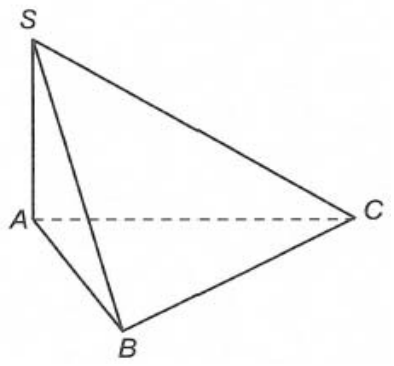
Hướng dẫn giải

Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $\left(SBC\right)$ bằng chiều cao của hình chóp A.SBC .

Do đó:

$d\left(A,\left(SBC\right)\right)=$

Chọn D



Ta có $d\left(A,\left(SBC\right)\right)=\dfrac{3V_{A.SBC}}{S_{SBC}}$.

Ta có:

$V_{A.SBC}=V_{S.ABC}=\dfrac{1}{3}SA.S_{ABC}=\dfrac{1}{6}SA.AB.BC.$

Mặt khác $SA\perp\left(SBC\right)\Rightarrow SA\perp BC$ mà

ΔABC vuông tại B nên $BC\perp BA$.

Suy ra $BC\perp SB$ hay ΔSBC vuông tại B

$\Rightarrow S_{SBC}=\dfrac{1}{2}BC.BS.$

Vậy $d\left(A,\left(SBC\right)\right)=\dfrac{3.\dfrac{1}{6}SA.AB.BC}{\dfrac{1}{2}SB.BC}=\dfrac{SA.AB}{SB}=\dfrac{SA.AB}{\sqrt{SA^2+AB^2}}=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

Bài tập 2. Cho tứ diện đều cạnh bằng 1 và điểm I nằm trong tứ diện.

Tổng khoảng cách từ I đến các mặt của tứ diện là

A. $\sqrt{6}$.

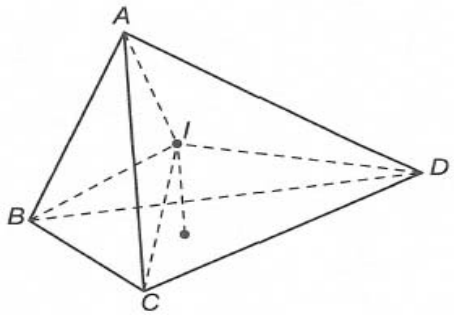
B. $\dfrac{\sqrt{6}}{9}$.

C. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D



Xét tứ diện đều $ABCD$ có diện tích đáy là $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ và chiều cao là $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ nên thể tích tứ diện đều $ABCD$ là

$V=\dfrac{\sqrt{2}}{12}.$

Gọi h_1,h_2,h_3,h_4 lần lượt là khoảng cách từ I đến các mặt $\left(BCD\right),\ \left(ACD\right),\ \left(ABD\right),\ \left(ABC\right).$

Đặt $V_1=V_{IBCD},\ V_2=V_{IACD},\ V_3=V_{IABD},\ V_4=V_{IABC}.$

Ta có $V=V_1+V_2+V_3+V_4.$

Cách trắc nghiệm: *Chọn đặc biệt $I\equiv A$. Khi đó tổng khoảng cách từ I đến các mặt của tứ diện bằng khoảng cách từ A đến $\left(BCD\right)$ và bằng $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.*

$V_1 = \frac{1}{3}h_1.S_{BCD} \Rightarrow h_1 = \frac{3V_1}{S_{BCD}}.$

Tương tự $h_2 = \frac{3V_2}{S_{ACD}}, h_3 = \frac{3V_3}{S_{ABD}}, h_4 = \frac{3V_4}{S_{ABC}}.$

Vậy $h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = \frac{3V_1}{S_{BCD}} + \frac{3V_2}{S_{ACD}} + \frac{3V_3}{S_{ABD}} + \frac{3V_4}{S_{ABC}}.$

Tứ diện $ABCD$ là tứ diện đều nên $S_{BCD} = S_{ACD} = S_{ABD} = S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$

Suy ra $h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = \frac{3\left(V_1 + V_2 + V_3 + V_4\right)}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{3V}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$

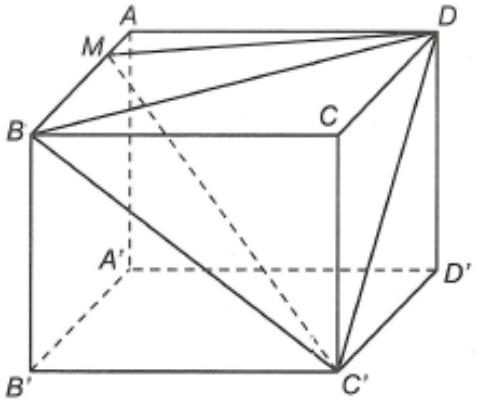
Bài tập 3. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 3, AD = 4, AA' = 5$. Lấy điểm M trên cạnh AB sao cho $BM = 4AM$. Khoảng cách từ C' đến BD bằng 4. Khoảng cách từ điểm M đến $\left(BC'D\right)$ là

A. 2 **B.** $\frac{12}{5}$

C. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ **D.** $\frac{8}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn B



Ta có $BM = 4AM \Rightarrow \frac{BM}{AB} = \frac{4}{5} \Rightarrow V_{M.BC'D} = \frac{4}{5}V_{A.BC'D}$

Mà $V_{A.BC'D} = V_{C'.ABD} = \frac{1}{3}CC'.S_{ABD} = \frac{1}{6}CC'.AB.AD = 10 \Rightarrow V_{M.BC'D} = 8.$

Ta có $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 5, S_{C'BD} = \frac{1}{2}d_{(C',BD)}.BD = 10.$

Ta có $V_{M.BC'D}=\frac{1}{3}d_{(M,(BC'D))}.S_{BC'D}\Rightarrow d_{(M,(BC'D))}=\frac{3V_{M.BC'D}}{S_{BC'D}}=\frac{12}{5}.$

Bài tập 4. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=CD=4,\ AC=BD=5,\ AD=BC=6.$

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $\left(BCD\right)$ là

A. $\frac{3\sqrt{6}}{7}.$ **B.** $\frac{3\sqrt{2}}{5}.$

C. $\frac{3\sqrt{42}}{7}.$ **D.** $\frac{\sqrt{7}}{2}.$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Áp dụng công thức tính nhanh thể tích khối tứ diện gần đều, ta có

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{\left(-a^2+b^2+c^2\right)\left(a^2-b^2+c^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)}$$

$$=\frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{\left(-4^2+5^2+6^2\right)\left(4^2-5^2+6^2\right)\left(4^2+5^2-6^2\right)}=\frac{15\sqrt{6}}{4}.$$

Ta có $p=\frac{BC+CD+DB}{2}=\frac{4+5+6}{2}=\frac{15}{2}.$

Suy ra $S_{\Delta BCD}=\sqrt{p\left(p-4\right)\left(p-5\right)\left(p-6\right)}=\frac{15\sqrt{7}}{4}.$

Ta có $d\left(A,\left(BCD\right)\right)=\frac{3V_{A.BCD}}{S_{\Delta BCD}}=\frac{3.\frac{15\sqrt{6}}{4}}{\frac{15\sqrt{7}}{4}}=\frac{3\sqrt{42}}{7}.$

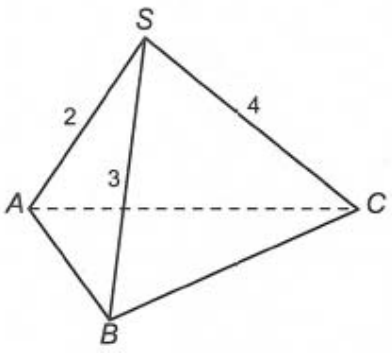
Bài tập 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=2,\ SB=3,\ SC=4$ .Góc $\widehat{ASB}=45°,\widehat{BSC}=60°,\widehat{CSA}=90°$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và BC.

A. $\frac{6\sqrt{34}}{17}.$ **B.** $\frac{4\sqrt{34}}{17}.$

C. $\frac{7\sqrt{34}}{17}.$ **D.** $\frac{3\sqrt{34}}{17}.$

Hướng dẫn giải

Chọn C



Hình chóp $S.ABC$ có $SA=a,\ SB=b,\ SC=c$ và $\widehat{ASB}=\alpha,\widehat{BSC}=\beta,\widehat{CSA}=\gamma$

$\Rightarrow V_{S.ABC}=\dfrac{abc}{6}\sqrt{1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma}\Rightarrow V_{S.ABC}=2.$

Ta có: $AC=\sqrt{20};\ BC=\sqrt{13}.$

$\cos\left(SA,BC\right)=\left|\dfrac{SB^2-SC^2+AC^2-AB^2}{2SA.BC}\right|=\left|\dfrac{3^2-4^2+20-13+6\sqrt{2}}{2.2.\sqrt{13}}\right|=\dfrac{3}{\sqrt{26}}.$

Suy ra $\sin\left(SA,BC\right)=\dfrac{\sqrt{17}}{\sqrt{26}}.$

Suy ra $d\left(SA,BC\right)=\dfrac{6V}{SA.BC.\sin\left(\widehat{SA,BC}\right)}=\dfrac{6\sqrt{34}}{17}.$

Bài tập 6. Cho tứ diện ABCD có thể tích bằng V. Trên AB lấy hai điểm M, N trên CD lấy hai điểm P, Q thỏa mãn $2\dfrac{MN}{CD}+3\dfrac{PQ}{AB}=1$. Thể tích khối MNPQ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $\dfrac{V}{8}.$ **B.** $\dfrac{V}{16}.$

C. $\dfrac{V}{24}.$ **D.** $\dfrac{V}{32}.$

Hướng dẫn giải

Chọn C.

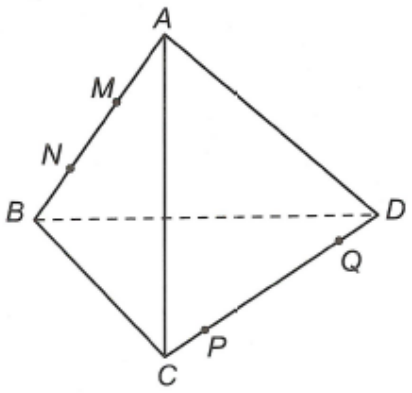
$V_{ABCD}=\frac{1}{6}AB.CD.d\left(AB,CD\right).\sin\left(AB,CD\right);$

$V_{MNPQ}=\frac{1}{6}MN.PQ.d\left(MN,PQ\right).\sin\left(MN,PQ\right).$

Do $d\left(AB,CD\right)=d\left(MN,PQ\right)$ và

$\sin\left(AB,CD\right)=\sin\left(MN,PQ\right)$ nên

$\frac{V_{MNPQ}}{V_{ABCD}}=\frac{MN.PQ}{AB.CD}.$



Ta có $2\frac{MN}{CD}+3\frac{PQ}{AB}\ge 2\sqrt{2\frac{MN}{CD}.3\frac{PQ}{AB}}=2\sqrt{6\frac{MN}{CD}.\frac{PQ}{AB}}$

$\Rightarrow\sqrt{6\frac{MN}{CD}.\frac{PQ}{AB}}\le\frac{1}{2}$ do $2\frac{MN}{CD}+3\frac{PQ}{AB}=1$

$\Rightarrow\frac{MN}{CD}.\frac{PQ}{AB}\le\frac{1}{24}\Rightarrow\frac{V_{MNPQ}}{V_{ABCD}}\le\frac{1}{24}.$

Vậy $V_{MNPQ}\le\frac{V}{24}\Rightarrow MaxV_{MNPQ}=\frac{V}{24}.$

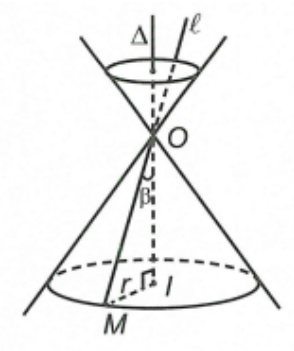
CHƯƠNG 2: MẶT NÓN, MẶT TRỤ, MẶT CẦU

BÀI 1: MẶT NÓN

A. LÍ THUYẾT TRỌNG TÂM

MẶT NÓN TRÒN XOAY

Trong mặt phẳng (P). Cho hai đường thẳng Δ là ℓ cắt nhau tại O và tạo thành góc β với $0° < \beta < 90°$. Khi quay mặt phẳng (P) xung quanh Δ thì đường thẳng ℓ sinh ra một mặt tròn xoay đỉnh O gọi là mặt nón tròn xoay (hay đơn giản là mặt nón). Khi đó:



• Đường thẳng Δ gọi là trục của mặt nón.

• Đường thẳng ℓ được gọi là đường sinh của mặt nón.

• Góc 2β gọi là góc ở đỉnh của mặt nón.

Nhận xét: Nếu M là một điểm tùy ý của mặt nón (N) khác với điểm O thì đường thẳng OM là đường sinh của mặt nón đó.

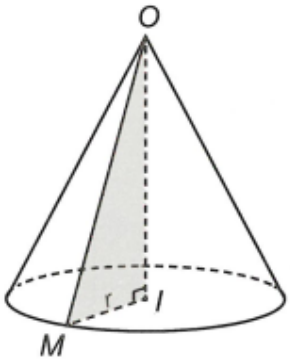
HÌNH NÓN TRÒN XOAY

Cho ΔOIM vuông tại I quay quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OMI tạo thành một hình, gọi là hình nón tròn xoay (gọi tắt là hình nón).

Khi đó:

• Đường thẳng OI gọi là trục, O là đỉnh, OI gọi là đường cao và OM gọi là đường sinh của hình nón.

• Hình tròn tâm I, bán kính $r = IM$ là đáy của hình nón.



Chú ý: *Nếu cắt mặt nón (N) bởi hai mặt phẳng song song (P) và (Q) với (P) qua O và vuông góc với Δ thì phần mặt nón (N) giới hạn bởi hai mặt phẳng (P) và (Q) và hình tròn giao tuyến của (Q) và mặt nón (N) là hình nón.*

KHỐI NÓN TRÒN XOAY

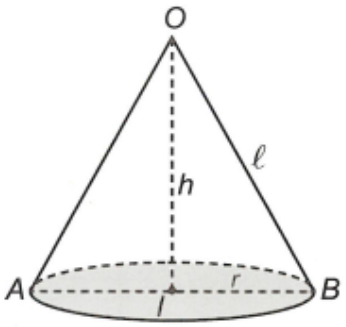
Phần không gian được giới hạn bởi một hình nón tròn xoay kể cả hình đó ta gọi là khối nón tròn xoay hay ngắn gọn là khối nón.

Các khái niệm tương tự như hình nón.

Xét khối nón có hình biểu diễn là hình bên thì ta có nhận xét:

- Nếu mp (P) chứa OI thì thiết diện của mp (P) và khối nón là một hình tam giác cân tại O.

- Nếu mp (P) vuông góc với OI (không chứa O) thì thiết diện của mp (P) và khối nón (nếu có) là một hình tròn. Hình tròn thiết diện này có diện tích lớn nhất khi mp (P) đi qua I.



Chú ý: *Vẽ hình biểu diễn hình nón hay khối nón ta thường vẽ như hình bên.*

CÔNG THỨC CẦN NHỚ

Hình nón có chiều cao là h, bán kính đáy r và độ dài đường sinh là ℓ thì có:

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi r\ell$.

- Diện tích đáy (hình tròn): $S_{ht} = \pi r^2$.

- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = \pi r\ell + \pi r^2$.

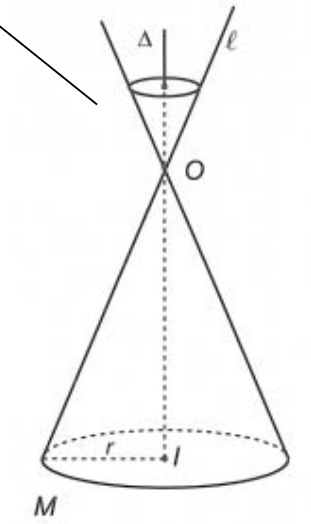
- Thể tích khối nón: $V = \frac{1}{3}S_{ht}.h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA

MẶT NÓN

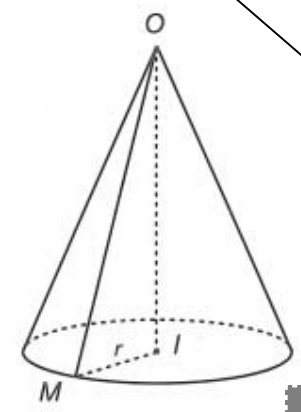
MẶT NÓN TRÒN XOAY

Trong mặt phẳng (P). Cho hai đường thẳng Δ và ℓ cắt nhau tại O và tạo thành góc β. Khi quay mặt phẳng (P) xung quanh Δ thì đường thẳng ℓ sinh ra một mặt tròn xoay đỉnh O gọi là mặt nón tròn xoay.



HÌNH NÓN TRÒN XOAY

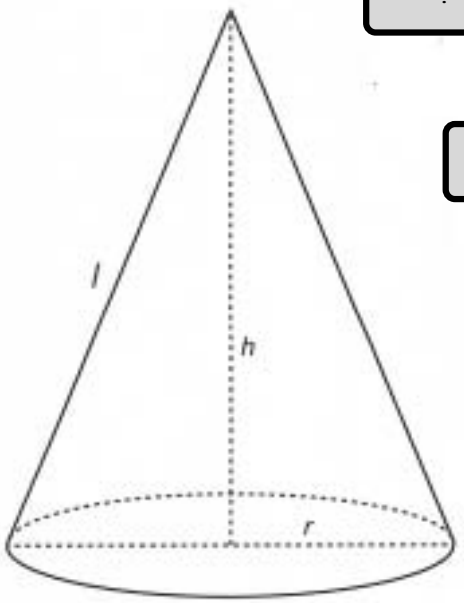
Cho ΔOMI vuông tại I quay quanh cạnh góc vuông OI thì đường gấp khúc OMI tạo thành một hình, gọi là hình nón tròn xoay.



KHỐI NÓN TRÒN XOAY

Phần không gian được giới hạn bởi một hình nón tròn xoay kể cả hình đó ta gọi là khối nón tròn xoay hay ngắn gọn là khối nón.

CÁC CÔNG THỨC



- Diện tích xung quanh → $S_{xq} = \pi r \ell$
- Diện tích đáy → $S_{ht} = \pi r^2$
- Diện tích toàn phần → $S_{tp} = \pi r \ell + \pi r^2$
- Thể tích → $V = \frac{1}{3} S_{ht}.h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, độ dài đường sinh, chiều cao, bán kính đáy, thiết diện của hình nón

1. Phương pháp giải

Nắm vững các công thức về diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, diện tích đáy. Biết sử dụng các kết quả của phần kiến thức quan hệ song song, quan hệ vuông góc, các hệ thức lượng trong tam giác… để áp dụng vào tính toán.

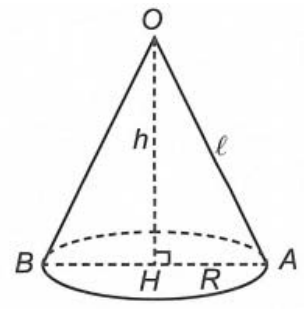
Ví dụ: Tính diện tích xung quanh của khối nón có thiết diện qua trục là tam giác vuông cân diện tích bằng 2?

A. $S=2\sqrt{2}\pi$. **B.** $S=4\pi$.

C. $S=2\pi$. **D.** $S=4\sqrt{2}\pi$.

Hướng dẫn giải

Tam giác OAB vuông cân diện tích bằng 2



$\Rightarrow \frac{1}{2}OA^2=2$

$\Rightarrow OA=OB=2$

$AB=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

$\Rightarrow h=R=\frac{AB}{2}=\sqrt{2}$

Suy ra $S_{xq}=\pi.\sqrt{2}.2=2\sqrt{2}\pi$.

Chọn A.

2. Bài tập

Bài tập 1: Cắt một hình nón bởi một mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là tam giác đều cạnh $2a$. Tính diện tích toàn phần của hình nón đó.

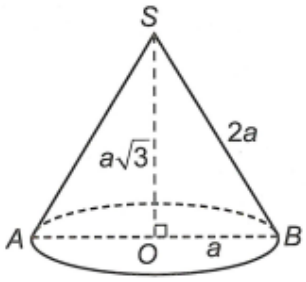
A. $6\pi a^2$. **B.** $24\pi a^2$. **C.** $3\pi a^2$. **D.** $12\pi a^2$.

Hướng dẫn giải

Chọn C

Ta có $h=\frac{2a\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3},\ \ell=2a,\ r=a$.

Diện tích toàn phần của hình nón là $S_{tp}=\pi r\ell+\pi r^2=\pi.a.2a+\pi.a^2=3\pi a^2$.



Lưu ý: *Diện tích tam giác đều cạnh x là:* $S=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}$ *và độ dài chiều cao là:* $h=\frac{x\sqrt{3}}{2}$.

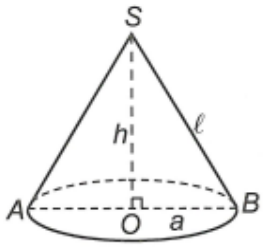
Ở bài toán này $x=2a$.

Bài tập 2: Cho hình nón có đường sinh bằng đường kính đáy, diện tích đáy của hình nón bằng 9π. Độ dài đường cao của hình nón bằng

A. $3\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\frac{9\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A



Gọi r,ℓ,h lần lượt là bán kính đường tròn đáy, đường sinh, chiều cao của hình nón đã cho.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases}\pi r^2=9\pi\\ \ell=2r\end{cases}$ nên $\begin{cases}r=3\\ \ell=6\end{cases}$.

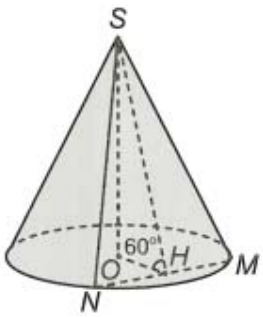
Lại có $h=\sqrt{\ell^2-r^2}$ do đó $h=\sqrt{36-9}=3\sqrt{3}$.

Bài tập 3: Thiết diện qua trục của một hình nón là tam giác vuông có cạnh góc vuông bằng 1. Mặt phẳng (α) qua đỉnh *S* của hình nón đó cắt đường tròn đáy tại *M, N*. Tính diện tích tam giác *SMN*, biết góc giữa (α) và đáy hình nón bằng $60°$.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C



Gọi *O* là tâm đường tròn đáy, *H* là trung điểm của *MN*.

Ta có *MN* là giao tuyến của đường tròn đáy và mặt phẳng (α), lại có $OH\perp MN, SH\perp MN$.

Do đó góc giữa (α) và đáy hình nón là $\widehat{SHO}=60°$.

Lưu ý: *Tam giác SMN là tam giác cân tại S và* $SM=SN=1$.

Vì thiết diện qua trục của một hình nón là tam giác vuông có cạnh góc vuông bằng 1 $\Rightarrow SO=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Xét ΔSOH vuông tại *O* có $\sin 60°=\frac{SO}{SH}\Rightarrow SH=\frac{SO}{\sin 60°}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Khi đó $MN=2\sqrt{SN^2-SH^2}=2\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Vậy diện tích tam giác *SMN* là $S_{\Delta SMN}=\frac{1}{2}SH.MN=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{6}}{3}.\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Bài tập 4: Cho hình nón đỉnh *S*, đường cao *SO*, *A* và *B* là hai điểm thuộc

đường tròn đáy sao cho khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $\widehat{SAO}=30°$, $\widehat{SAB}=60°$. Độ dài đường sinh của hình nón theo a bằng

A. $a\sqrt{2}$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $2a\sqrt{3}$. **D.** $a\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Gọi I là trung điểm của AB, dựng $OH \perp SI$.

Ta có $OH=\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

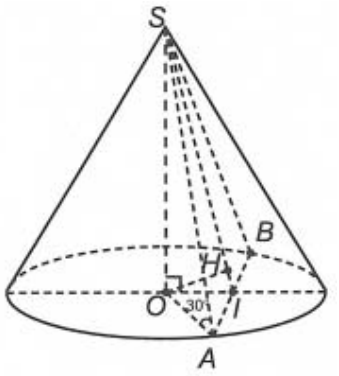
Do $\widehat{SAB}=60°$ nên tam giác SAB đều.

Suy ra $SA=SB=AB$.

Mặt khác

$\widehat{SAO}=30° \Rightarrow SO=SA.\sin 30°=\frac{1}{2}SA$

và $OA=SA.\cos 30°=\frac{SA.\sqrt{3}}{2}$.



Xét tam giác SOI ta có

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OS^2}+\frac{1}{OI^2}=\frac{1}{OS^2}+\frac{1}{OA^2-AI^2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)SA^2}+\frac{1}{\left(\frac{SA\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}SA\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{OH^2}=\frac{6}{SA^2} \Leftrightarrow SA=OH\sqrt{6}=\frac{a\sqrt{3}}{3}.\sqrt{6}=a\sqrt{2}.$$

Lưu ý:

• Ta có: $OH \perp SI$ (1)

$\begin{cases} AB \perp OI \\ AB \perp SI \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SOI)$

$\Rightarrow AB \perp OH$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $OH \perp (SAB)$, do đó $d\left(O;(SAB)\right)=OH$.

• Có thể đặt $SA=x$.

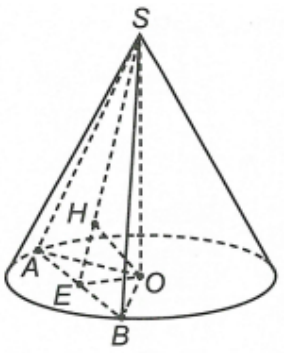
Bài tập 5: Cho hình nón đỉnh S, đáy là đường tròn tâm O bán kính bằng $2a$ và độ dài đường sinh bằng $a\sqrt{5}$. Mặt phẳng (P) qua đỉnh S cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác có chu vi bằng $2\left(1+\sqrt{5}\right)a$. Khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (P) là

A. $d=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $d=\frac{a}{2}$. **C.** $d=\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$. **D.** $d=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D

Giả sử thiết diện là tam giác SAB, khi đó ta có



Do: $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OE^2}+\frac{1}{OS^2}$

$SA+SB+AB=2\left(1+\sqrt{5}\right)a$

$\Leftrightarrow a\sqrt{5}+a\sqrt{5}+AB=2\left(1+\sqrt{5}\right)a$

$\Leftrightarrow AB=2a$.

Gọi E là trung điểm AB, ta có $AB\perp SE$, mặt khác $AB\perp SO$ nên $AB\perp\left(SOE\right)$.

Kẻ $OH\perp SE$ tại H, ($H\in SE$).

Ta thấy $OH\perp AB$ vì $OH\subset\left(SOE\right)\Rightarrow OH\perp\left(SAB\right)$.

Vậy khoảng cách từ S đến $\left(P\right)$ là OH (hay $d\left(O;\left(P\right)\right)=OH$).

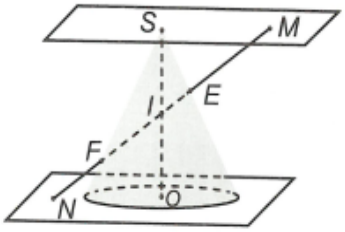
$EB=\dfrac{1}{2}AB=a, OB=R=2a, OE=\sqrt{OB^2-EB^2}=\sqrt{4a^2-a^2}=a\sqrt{3}$.

$SO=\sqrt{SB^2-OB^2}=\sqrt{5a^2-4a^2}=a$,

$OH=\dfrac{OS.OE}{\sqrt{OS^2+OE^2}}=\dfrac{a.a\sqrt{3}}{\sqrt{a^2+3a^2}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $d=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Bài tập 6: Cho hình nón tròn xoay nằm giữa hai mặt phẳng song song $\left(P\right)$ và $\left(Q\right)$ như hình vẽ. Kẻ đường cao SO của hình nón và gọi I là trung điểm của SO. Lấy $M\in\left(P\right), N\in\left(Q\right), MN=a$ và đi qua I cắt mặt nón tại E và F đồng thời tạo với SO một góc β. Biết góc giữa đường cao và đường sinh của hình nón bằng $45°$. Độ dài đoạn EF là



A. $EF=2a$.

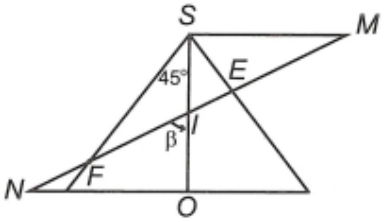
B. $EF=-\dfrac{a}{2}\tan 2\beta$.

C. $EF=-a\tan 2\beta$.

D. $EF=-2a\tan 2\beta$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Lưu ý:

$S_{\Delta SFI}+S_{\Delta SEI}=S_{\Delta SFE}$ (*)

$S_{\Delta SFI}=\dfrac{1}{2}SF.SI.\sin 45°$

$S_{\Delta SEI}=\dfrac{1}{2}SE.SI.\sin 45°$

$S_{\Delta SFE}=\dfrac{1}{2}SF.SE.\sin 90°$

Xét tam giác NIO có $OI = NI.\cos\beta = \frac{a}{2}\cos\beta, NO = NI.\sin\beta = \frac{a}{2}\sin\beta$

Xét tam giác SEF vuông tại S có

$\widehat{SEF} = \widehat{ESM} + \widehat{SME} = 45° + 90° - \beta = 135° - \beta$.

$SF = SE.\tan\widehat{SEF} = SE.\tan(135° - \beta) = SE.\frac{1+\tan\beta}{\tan\beta - 1}$.

Vì SI là độ dài đường phân giác trong góc $\widehat{FSE}$ nên

$SI = \sqrt{2}.\frac{SE.SF}{SE+SF} \Leftrightarrow \frac{a}{2}\cos\beta = \sqrt{2}\frac{SE\tan(135° - \beta)}{1+\tan(135° - \beta)}$

$\Leftrightarrow SE = \frac{a\left[1+\frac{1+\tan\beta}{\tan\beta-1}\right]\cos\beta}{2\sqrt{2}\frac{1+\tan\beta}{\tan\beta-1}} = \frac{a\sin\beta}{\sqrt{2}(1+\tan\beta)}$

Do đó

$EF = \frac{SE}{\cos\widehat{SEF}} = \frac{SE}{\cos(135° - \beta)} = \frac{a\sin\beta}{(1+\tan\beta)(-\cos\beta+\sin\beta)} = -\frac{a}{2}\tan 2\beta$.

Thay vào (*) ta được

$SI = \sqrt{2}\frac{SE.SF}{SE+SF}$.

Bài tập 7: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a, góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $60°$. Tính diện tích xung quanh S_{xq} của hình nón đỉnh S, có đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

A. $S_{xq} = \frac{\pi a^2\sqrt{3}}{3}$.

B. $S_{xq} = \frac{\pi a^2\sqrt{10}}{8}$.

C. $S_{xq} = \frac{\pi a^2\sqrt{7}}{4}$.

D. $S_{xq} = \frac{\pi a^2\sqrt{7}}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi O là tâm của tam giác ABC, khi đó $SO \perp (ABC)$.

Hình nón đỉnh S, có đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có đường sinh là SA, bán kính đường tròn đáy là OA.

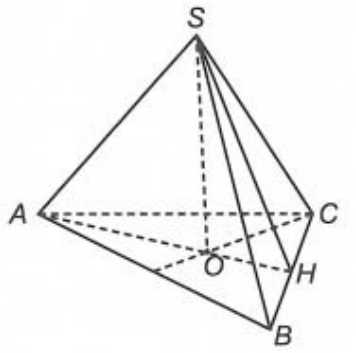
Gọi H là trung điểm của BC thì

$\widehat{((SBC);(ABC))} = \widehat{SHO} = 60°$.

Tam giác ABC đều và O là tâm của tam giác đều nên

$OH = \frac{1}{3}AH = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$;

$OA = \frac{2}{3}AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.



Tam giác SOH vuông tại O và có $\widehat{SHO}=60°$ nên

$SO=OH.\tan 60°=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}.\sqrt{3}=\dfrac{a}{2}$.

Tam giác SOA vuông tại O nên $SA=\sqrt{SO^2+OA^2}=\sqrt{\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{3a^2}{9}}=\dfrac{a\sqrt{21}}{6}$.

Diện tích xung quanh hình nón là

$S_{xq}=\pi r\ell=\pi.OA.SA=\pi.\dfrac{a\sqrt{3}}{3}.\dfrac{a\sqrt{21}}{6}=\dfrac{\pi a^2\sqrt{7}}{6}$.

Dạng 2: Tính thể tích khối nón, bài toán cực trị

1. Phương pháp

Nhìn vào công thức tính thể tích khối nón

$$V_n=\frac{1}{3}S_{ht}.h=\frac{1}{3}\pi r^2h$$

ta thấy cần xác định chiều cao và diện tích đáy (bán kính đáy) của khối nón. Đối với bài toán cực trị ta thường tính toán đưa đại lượng cần tìm cực trị phụ thuộc vào một biến sau đó dùng đánh giá (sử dụng bất đẳng thức, khảo sát hàm số…) để tìm ra kết quả.

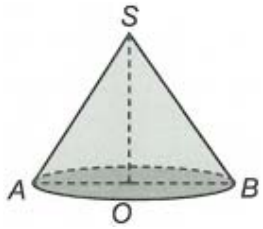
Ví dụ: Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng $60°$, diện tích xung quanh bằng $6\pi a^2$. Thể tích V của khối nón đã cho là

A. $V=\dfrac{3\pi a^3\sqrt{2}}{4}$. **B.** $V=\dfrac{\pi a^3\sqrt{2}}{4}$.

C. $V=3\pi a^3$. **D.** $V=\pi a^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn C



Thể tích $V=\dfrac{1}{3}\pi R^2h=\dfrac{1}{3}\pi.OA^2.SO$.

Ta có $\widehat{ASB}=60°\Rightarrow\widehat{ASO}=30°$

$\Rightarrow\tan 30°=\dfrac{OA}{SO}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Rightarrow SO=OA\sqrt{3}$.

Lại có

$S_{xq}=\pi R\ell=\pi.OA.SA=\pi OA.\sqrt{OA^2+SO^2}=6\pi a^2$

$\Rightarrow OA\sqrt{OA^2+3OA^2}=6a^2\Rightarrow 2OA^2=6a^2$

$\Rightarrow OA=a\sqrt{3}\Rightarrow SO=3a\Rightarrow V=\dfrac{1}{3}\pi.3a^2.3a=3\pi a^3$.

2. Bài tập

Bài tập 1: Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC}=45°, \widehat{ACB}=30°, AB=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Quay tam giác ABC xung quanh cạnh BC ta được khối tròn xoay có thể tích V bằng

A. $V=\dfrac{\pi\sqrt{3}\left(1+\sqrt{3}\right)}{2}$ **B.** $V=\dfrac{\pi\left(1+\sqrt{3}\right)}{24}$

C. $V=\dfrac{\pi\left(1+\sqrt{3}\right)}{8}$ **D.** $V=\dfrac{\pi\left(1+\sqrt{3}\right)}{3}$

Hướng dẫn giải

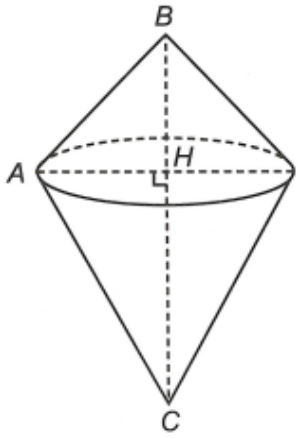
Chọn B

Ta có $\dfrac{AB}{\sin 30°}=\dfrac{AC}{\sin 45°}=\dfrac{BC}{\sin 105°}$

$$\Rightarrow\begin{cases}AC=1\\BC=\sqrt{2}\sin\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\end{cases}.$$

Gọi H là chân đường cao kẻ từ đỉnh A.

Ta có $AH.BC=AB.AC.\sin 105°\Rightarrow AH=\dfrac{1}{2}$.



Lưu ý: *V chính là tổng thể tích của hai khối nón: Khối nón có chiều cao BH đường sinh AB và khối nón có chiều cao CH và đường sinh AC.*

Suy ra thể tích khối tròn xoay cần tìm là

$$V=\frac{1}{3}\pi AH^2.BH+\frac{1}{3}\pi AH^2.CH=\frac{1}{3}\pi AH^2.BC=\frac{\pi\left(1+\sqrt{3}\right)}{24}.$$

Bài tập 2: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Hình nón (N) có đỉnh A và đường tròn đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Thể tích V của khối nón (N) là

A. $V=\dfrac{\pi\sqrt{3}a^3}{27}$ **B.** $V=\dfrac{\sqrt{6}a^3}{27}$ **C.** $V=\dfrac{\pi\sqrt{6}a^3}{9}$ **D.** $V=\dfrac{\pi\sqrt{6}a^3}{27}$

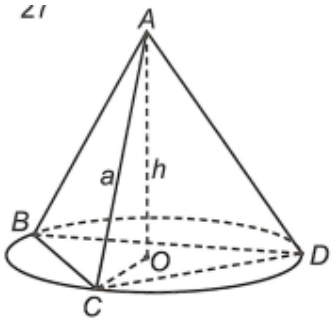
Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi O là tâm của tam giác đều BCD.

Ta có $AO=h, OC=r$

$$\Rightarrow r=\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}.$$



Suy ra

$h=\sqrt{a^2-r^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}}$.

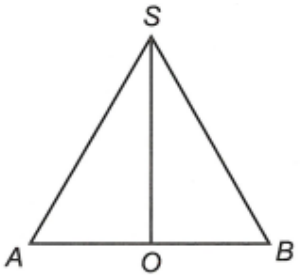
Vậy thể tích khối nón là $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi\frac{a^2}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\pi\sqrt{6}a^3}{27}$.

Bài tập 3: Cho hình nón (N) có góc ở đỉnh bằng $60°$. Mặt phẳng qua trục của (N) cắt (N) theo một thiết diện là tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 2. Thể tích khối nón (N) là

A. $V=3\sqrt{3}\pi$. **B.** $V=4\sqrt{3}\pi$. **C.** $V=3\pi$. **D.** $V=6\pi$.

Hướng dẫn giải

Chọn C



Tam giác SAB đều vì có $SA=SB$ và $\widehat{ASB}=60°$. Tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔSAB là trọng tâm tam giác. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB là $r=\frac{2}{3}SO=2\Leftrightarrow SO=3$.

Mà $SO=SA.\sin 60°\Rightarrow SA=\frac{SO}{\sin 60°}=\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3}$.

Vậy bán kính đường tròn của khối nón là $R=\frac{AB}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

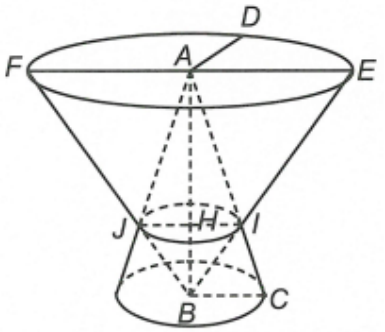
Vậy thể tích khối nón là $V=\frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{3}\right)^2.3=3\pi$.

Bài tập 4: Cho hình tứ diện $ABCD$ có $AD\perp(ABC)$, ABC là tam giác vuông tại B. Biết $BC=a, AB=a\sqrt{3}, AD=3a$. Quay các tam giác ABC và ABD (bao gồm cả điểm bên trong hai tam giác) xung quanh đường thẳng AB ta được hai khối tròn xoay. Thể tích phần chung của hai khối tròn xoay đó bằng:

A. $\frac{3\sqrt{3}\pi a^3}{16}$. **B.** $\frac{8\sqrt{3}\pi a^3}{3}$. **C.** $\frac{5\sqrt{3}\pi a^3}{16}$. **D.** $\frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{16}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Khi quay tam giác ABD quanh AB ta được khối nón đỉnh B có đường cao BA, đáy là đường tròn bán kính $AE = 3\,\text{cm}$. Gọi $I = AC \cap BE, IH \perp AB$, tại H.

Phần chung của 2 khối nón khi quay tam giác ABC và tam giác ABD quanh AB là 2 khối nón đỉnh A và đỉnh B có đáy là đường tròn bán kính IH.

Ta có ΔIBC đồng dạng với $\Delta IEA \Rightarrow \dfrac{IC}{IA} = \dfrac{BC}{AE} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow IA = 3IC$.

Mặt khác $IH \,//\, BC \Rightarrow \dfrac{AH}{AB} = \dfrac{IH}{BC} = \dfrac{AI}{AC} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow IH = \dfrac{3}{4}BC = \dfrac{3a}{4}$.

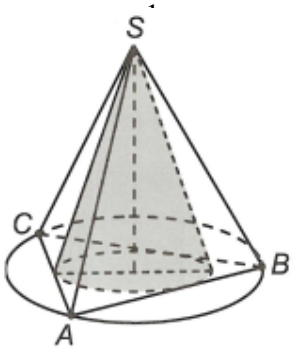
Gọi $V_1;\ V_2$ lần lượt là thể tích của khối nón đỉnh A và B có đáy là hình tròn tâm H.

$V_1 = \dfrac{1}{3}\pi IH^2.AH;\ V_2 = \dfrac{1}{3}\pi IH^2.BH$

$\Rightarrow V = V_1 + V_2 \Rightarrow V = \dfrac{\pi}{3}IH^2.AB \Rightarrow V = \dfrac{\pi}{3}.\dfrac{9a^2}{16}.a\sqrt{3} \Rightarrow V = \dfrac{3a^3\sqrt{3}}{16}\pi$.

Bài tập 5: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Hình nón có đỉnh S và có đường tròn đáy là đường tròn nội tiếp tam giác ABC gọi là hình nón nội tiếp hình chóp $S.ABC$, hình nón có đỉnh S và có đường tròn đáy là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC gọi là hình nón ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$. Tỉ số thể tích của hình nón nội tiếp và hình nón ngoại tiếp hình chóp đã cho bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$.



Hướng dẫn giải

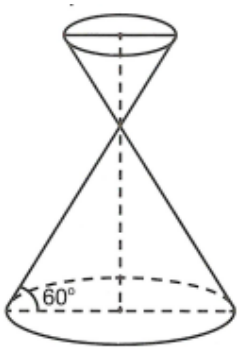
Chọn D.

Hai hình nón có cùng chiều cao nên tỉ số thể tích bằng tỉ số diện tích mặt đáy. Vì tam giác ABC đều nên bán kính đường tròn ngoại tiếp

bằng $\frac{2}{3}$ đường cao của tam giác, bán kính đường tròn nội tiếp bằng $\frac{1}{3}$ đường cao của tam giác.

Suy ra $\frac{r}{R}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{V_1}{V_2}=\frac{S_1}{S_2}=\frac{1}{4}$.

Bài tập 6: Cho một đồng hồ cát gồm 2 hình nón chung đỉnh ghép lại, trong đó đường sinh bất kỳ của hình nón tạo với đáy một góc $60°$ như hình bên dưới. Biết rằng chiều cao của đồng hồ là 30cm và tổng thể tích của đồng hồ là $1000\pi\left(cm^3\right)$. Hỏi nếu cho đầy lượng cát vào phần trên thì khi chảy hết xuống dưới, khi đó tỉ lệ thể tích lượng cát chiếm chỗ và thể tích phần dưới là bao nhiêu?



A. $\frac{1}{3\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{1}{27}$. **D.** $\frac{1}{64}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi bán kính của hình nón lớn và nón nhỏ lần lượt là $x, y\ (x>y)$.

Suy ra chiều cao của hình nón lớn và nón nhỏ lần lượt là $x\sqrt{3}, y\sqrt{3}$.

Theo giả thiết, ta có $\begin{cases}x\sqrt{3}+y\sqrt{3}=30\\\frac{1}{3}\pi x^2.x\sqrt{3}+\frac{1}{3}\pi y^2.y\sqrt{3}=1000\pi\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=10\sqrt{3}\\x^3+y^3=1000\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{20\sqrt{3}}{3},\ y=\frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

Do hai hình nón đồng dạng nên tỉ số cần tính bằng $\left(\frac{y}{x}\right)^3=\frac{1}{8}$.

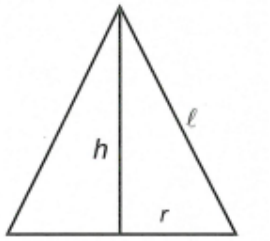
Bài tập 7: Trong tất cả các hình nón có độ dài đường sinh bằng ℓ. Hình nón có thể tích lớn nhất bằng

A. $\frac{\pi \ell^3 \sqrt{3}}{9}$. **B.** $\frac{2\pi \ell^3 \sqrt{3}}{9}$. **C.** $\frac{\pi \ell^3 \sqrt{3}}{27}$. **D.** $\frac{2\pi \ell^3 \sqrt{3}}{27}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi $h\left(0<h<\ell\right)$ là chiều cao hình nón, suy ra bán kính $r=\sqrt{\ell^2-h^2}$.



Suy ra thể tích khối nón là

$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi\left(\ell^2 h-h^3\right)=\frac{1}{3}\pi f\left(h\right)$.

Xét hàm $f\left(h\right)=\ell^2 h-h^3$ trên $\left(0;\ell\right)$.

$$f'\left(h\right)=\ell^2-3h^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} h=\frac{\ell}{\sqrt{3}} \\ h=-\frac{\ell}{\sqrt{3}}\left(khong\ thoa\ man\right) \end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên ta được

h	0		$\frac{\ell}{\sqrt{3}}$		ℓ
$f'(h)$		$+$	0	$-$	
$f(h)$		↗		↘	

Ta thấy $\max f\left(h\right)=f\left(\frac{\ell}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2\ell^3}{3\sqrt{3}}$.

Vậy $V_{\max}=\frac{2\pi \ell^3 \sqrt{3}}{27}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow h=\frac{\ell}{\sqrt{3}}$.

Bài tập 8: Trong các hình nón cùng có diện tích toàn phần bằng *S*. Hình nón có thể tích lớn nhất khi (r, ℓ lần lượt là bán kính đáy và đường sinh của hình nón)

A. $\ell=3r$. **B.** $\ell=2\sqrt{2}r$. **C.** $\ell=r$. **D.** $\ell=2r$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $S=\pi r\ell+\pi r^2\rightarrow\ell=\frac{S-\pi r^2}{\pi r}$.

Thể tích

Lưu ý: *điều kiện của*

biến khi khảo sát hàm.

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{\ell^2-r^2}=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{\frac{\left(S-\pi r^2\right)^2}{\pi^2 r^2}-r^2}=\frac{1}{3}\sqrt{S\left(Sr^2-2\pi r^4\right)}.$$

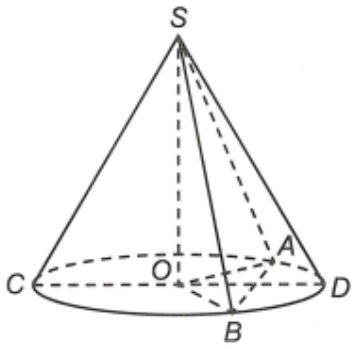
Lập bảng biến thiên cho hàm $f(r)=Sr^2-2\pi r^4$ trên $(0;+\infty)$, ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $r=\sqrt{\frac{S}{4\pi}}\to \ell=3r$.

Bài tập 9: Cho hình nón đỉnh *S* có đáy là đường tròn tâm *O*. Thiết diện qua trục hình nón là một tam giác cân với cạnh đáy bằng *a* và có diện tích là a^2. Gọi *A, B* là hai điểm bất kỳ trên đường tròn (O). Thể tích khối chóp *S.OAB* đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{a^3}{2}$. **B.** $\frac{a^3}{6}$. **C.** $\frac{a^3}{12}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

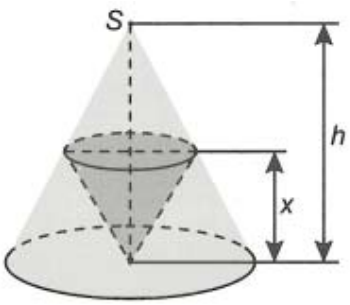


Tam giác cân *SCD*, có $S_{\Delta SCD}=\frac{1}{2}CD.SO\Leftrightarrow a^2=\frac{1}{2}a.SO\to SO=2a$.

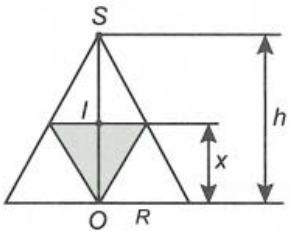
Khối chóp *S.OAB* có chiều cao $SO=2a$ không đổi nên để thể tích lớn nhất khi và chỉ khi diện tích tam giác *OAB* lớn nhất.

Mà $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}OA.OB.\sin\widehat{AOB}=\frac{1}{2}r^2.\sin\widehat{AOB}$ (với *r* là bán kính đường tròn mặt đáy hình nón). Do đó để $S_{\Delta OAB}$ lớn nhất khi $\sin\widehat{AOB}=1$. Khi đó $V_{\max}=\frac{a^3}{12}$.

Bài tập 10: Cho hình nón (N_1) có đỉnh *S*, chiều cao *h*. Một hình nón (N_2) có đỉnh là tâm của đáy (N_1) và có đáy là một thiết diện song song với đáy của (N_2) như hình vẽ.



Khối nón (N_2) có thể tích lớn nhất khi chiều cao x bằng



A. $\frac{h}{2}$. **B.** $\frac{h}{3}$. **C.** $\frac{2h}{3}$. **D.** $\frac{h\sqrt{3}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Xét mặt cắt qua trục hình nón và kí hiệu như hình vẽ. Với *O, I* lần lượt là tâm đáy của hình nón $(N_1),(N_2)$; *R, r* lần lượt là các bán kính của hai đường tròn đáy của $(N_1),(N_2)$.

Ta có $\frac{SI}{SO}=\frac{r}{R}\Leftrightarrow\frac{h-x}{h}=\frac{r}{R}\to r=\frac{R(h-x)}{h}$.

Thể tích khối nón (N_2) là

$$V_{(N_2)}=\frac{1}{3}\pi r^2x=\frac{1}{3}\pi\frac{R^2(h-x)^2}{h^2}x=\frac{\pi R^2}{3h^2}.x(h-x)^2.$$

Xét hàm $f(x)=x(h-x)^2=x^3-2hx^2+h^2x$ trên $(0;h)$. Ta có

$$f'(x)=3x^2-4hx+h^2;\ f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=h\\x=\frac{h}{3}\end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên ta có

x	0		$\frac{h}{3}$		h
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

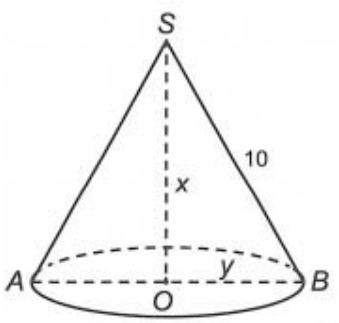
Vậy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên khoảng $(0;h)$ tại $x=\frac{h}{3}$.

Bài tập 11: Xét các hình nón có đường sinh với độ dài đều bằng 10cm. Chiều cao của hình nón có thể tích lớn nhất là

A. $5\sqrt{3}$ cm. **B.** $10\sqrt{3}$ cm. **C.** $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ cm. **D.** $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm.

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Xét hình nón có chiều cao là x cm và bán kính đáy là y cm (x, y dương).

Ta có $x^2+y^2=10^2 \Rightarrow y^2=100-x^2$, ta có điều kiện $x,\ y\in(0;10)$.

Thể tích khối nón là

$V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\left(100-x^2\right)x$.

Xét hàm số $f(x)=\left(100-x^2\right)x=100x-x^3,\ x\in(0;10)$;

$f'(x)=100-3x^2;\ f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{10\sqrt{3}}{3}$.

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{10\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗		↘	

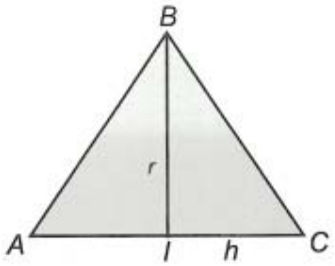
Ta thấy V lớn nhất khi $f(x)$ lớn nhất tại $x=\frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm.

Bài tập 12: Giả sử đồ thị hàm số $y=\left(m^2+1\right)x^4-2mx^2+m^2+1$ có 3 điểm cực trị là A, B, C mà $x_A<x_B<x_C$. Khi quay tam giác ABC quanh cạnh AC ta được một khối tròn xoay. Giá trị của m để thể tích của khối tròn xoay đó lớn nhất thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. $(4;6)$. **B.** $(2;4)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(0;2)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



$y' = 4\left(m^2+1\right)x^3 - 4mx = 4x\left[\left(m^2+1\right)x^2 - m\right].$

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x\left[\left(m^2+1\right)x^2 - m\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{\dfrac{m}{m^2+1}} \left(m > 0\right) \end{array}\right.$.

Với $m > 0$ thì đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị (với $x_A < x_B < x_C$) là

$A\left(-\sqrt{\dfrac{m}{m^2+1}}; -\dfrac{m^2}{m^2+1} + m^2 + 1\right)$; $B\left(0; m^2+1\right)$;

$C\left(\sqrt{\dfrac{m}{m^2+1}}; -\dfrac{m^2}{m^2+1} + m^2 + 1\right)$.

Quay ΔABC quanh AC thì được khối tròn xoay có thể tích là

$V = 2.\dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{2}{3}\pi BI^2.IC = \dfrac{2}{3}\pi\left(\dfrac{m^2}{m^2+1}\right)^2.\sqrt{\dfrac{m}{m^2+1}} = \dfrac{2}{3}\pi\sqrt{\dfrac{m^9}{\left(m^2+1\right)^5}}$.

Xét hàm $f\left(m\right) = \dfrac{m^9}{\left(m^2+1\right)^5}$.

Ta có $f'\left(m\right) = \dfrac{m^8\left(9-m^2\right)}{\left(m^2+1\right)^6}$; $f'\left(m\right) = 0 \Leftrightarrow m = 3\left(m > 0\right)$.

Ta có bảng biến thiên

m	0		3		$+\infty$
$f'(m)$		$+$	0	$-$	
$f(m)$		↗		↘	

Vậy thể tích cần tìm lớn nhất khi $m = 3$.

Bài tập 13: Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB = 6\,\text{cm}$, $AC = 3\,\text{cm}$. Gọi M điểm di động trên cạnh BC sao cho MH vuông góc với AB tại H. Cho tam giác AHM quay quanh cạnh AH tạo nên một hình nón, thể tích lớn nhất của hình nón được tạo thành là

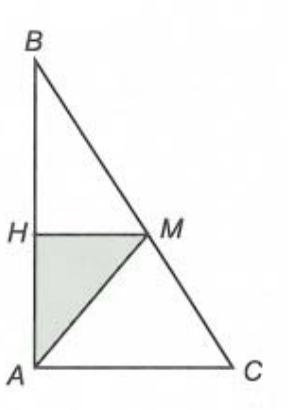
A. $\frac{\pi}{3}$. **B.** $\frac{4\pi}{3}$. **C.** $\frac{8\pi}{3}$. **D.** 4π.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Đặt $AH = x(cm),\ 0 < x < 6$.

Khi đó $BH = 6 - x(cm)$.



Xét tam giác BHM vuông tại H.

Ta có $\tan\widehat{HBM} = \frac{HM}{BH}$

$\Rightarrow HM = BH.\tan\widehat{HBM} = (6-x).\tan\widehat{HBM}$.

Mà $\tan\widehat{HBM} = \tan\widehat{ABC} = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Do đó $HM = (6-x).\frac{1}{2}$.

Thể tích của khối nón tạo thành khi tam giác AHM quay quanh cạnh AH là $V = \frac{1}{3}AH.\pi.HM^2 = \frac{\pi}{3}.x.\frac{1}{4}(6-x)^2 = \frac{\pi}{12}(x^3 - 12x^2 + 36x)$ (1).

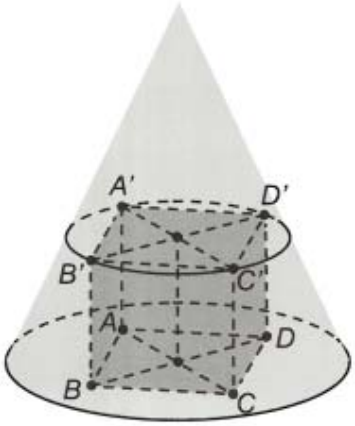
Xét hàm số $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$ với $0 < x < 6$, ta có

$$f'(x) = 3x^2 - 24x + 36;\ f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 24x + 36 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 6 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$ với $0 < x < 6$

x	0		2		6
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	32	↘	

Từ (1) và bảng biến thiên ta có thể tích lớn nhất của khối nón tạo thành là $V = \frac{\pi}{12}.32 = \frac{8\pi}{3}$.



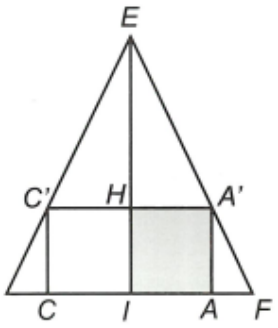
Bài tập 14: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng 1. Gọi (N) là một hình nón có tâm đường tròn đáy trùng với tâm của

hình vuông *ABCD*, đồng thời các điểm A', B', C', D' nằm trên các đường sinh của hình nón như hình vẽ. Thể tích khối nón (N) có giá trị nhỏ nhất bằng

A. $\frac{2\pi}{3}$. **B.** $\frac{3\pi}{4}$. **C.** $\frac{9\pi}{8}$. **D.** $\frac{9\pi}{16}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Xét phần mặt cắt qua trục hình nón và đi qua mặt phẳng $(AA'C'C)$, kí hiệu như hình vẽ. Với *I, H* lần lượt là tâm của hình vuông *ABCD*, $A'B'C'D'$ và đỉnh A' nằm trên đường sinh *EF* của hình nón.

Hình lập phương có thể tích bằng 1 nên $AA' = HI = 1, A'H = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Đặt $EH = x(x > 0)$. Khi đó, ta có

$$\frac{EH}{EI} = \frac{A'H}{FI} \Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{\sqrt{2}}{2FI} \to FI = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{x+1}{x}\right) = r.$$

Thể tích khối nón (N) là

$$V_{(N)} = \frac{1}{3}\pi r^2 EI = \frac{1}{6}\pi\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 (x+1) = \frac{\pi}{6}\frac{(x+1)^3}{x^2}.$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2}$ trên $(0;+\infty)$. Ta có $f'(x) = \frac{(x-2)(x+1)^2}{x^3}$.

Lập bảng biến thiên

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↘		↗	

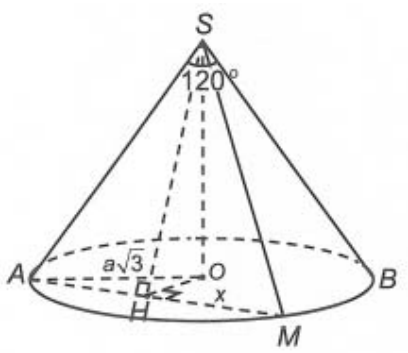
Ta được $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x)=\dfrac{27}{4}$ tại $x=2$. Suy ra $\min V_{(N)}=\dfrac{9\pi}{8}$.

Bài tập 15: Một hình nón đỉnh S bán kính đáy $R=a\sqrt{3}$, góc ở đỉnh là $120°$. Mặt phẳng qua đỉnh hình nón cắt hình nón theo thiết diện là một tam giác. Diện tích lớn nhất của tam giác đó bằng

A. $\sqrt{3}a^2$. **B.** $2a^2$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$. **D.** $2\sqrt{3}a^2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Giả sử ΔSAM là thiết diện tạo bởi mặt phẳng và hình nón.

Gọi $AM=x\left(0<x\le 2a\sqrt{3}\right)$.

Gọi H là trung điểm của AM

$\Rightarrow OH\perp AM\Rightarrow AM\perp(SOH)\Rightarrow AM\perp SH$.

Vì $\widehat{ASB}=120°\Rightarrow\widehat{ASO}=60°\Rightarrow\begin{cases}SA=\dfrac{AO}{\sin 60°}=2a\\ SO=\dfrac{AO}{\tan 60°}=a\end{cases}$.

$OH=\sqrt{OA^2-AH^2}=\sqrt{3a^2-\dfrac{x^2}{4}}\Rightarrow SH=\sqrt{OH^2+SO^2}=\sqrt{4a^2-\dfrac{x^2}{4}}$.

$S_{\Delta SAM}=\dfrac{1}{2}AM.SH=\dfrac{1}{2}x\sqrt{4a^2-\dfrac{x^2}{4}}$.

Ta có

$S'=\dfrac{1}{2}\left[\sqrt{4a^2-\dfrac{x^2}{4}}-\dfrac{x^2}{4\sqrt{4a^2-\dfrac{x^2}{4}}}\right]=\dfrac{16a^2-2x^2}{8\sqrt{4a^2-\dfrac{x^2}{4}}}\Rightarrow S'=0\Rightarrow x=2a\sqrt{2}$.

x	0	$2a\sqrt{2}$	$+\infty$
S'	$+$	0	$-$
S		$2a^2$	

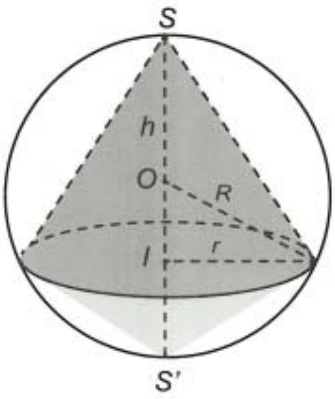
$\Rightarrow S_{\max} = 2a^2$.

Bài tập 16: Cho mặt cầu (S) bán kính R. Hình nón (N) thay đổi có đỉnh và đường tròn đáy thuộc mặt cầu (S). Thể tích lớn nhất của khối nón (N) là

A. $\frac{32\pi R^3}{81}$. **B.** $\frac{32R^3}{81}$. **C.** $\frac{32\pi R^3}{27}$. **D.** $\frac{32R^3}{27}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Ta có thể tích khối nón đỉnh S lớn hơn hoặc bằng thể tích khối nón đỉnh S'. Do đó chỉ cần xét khối nón đỉnh S có bán kính đường tròn đáy là r và đường cao là $SI = h$ với $h \ge R$. Thể tích khối nón được tạo nên bởi (N) là

$$V = \frac{1}{3}hS_{(C)} = \frac{1}{3}h.\pi.r^2$$

$$= \frac{1}{3}.h.\pi\left[R^2 - (h-R)^2\right]$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(-h^3 + 2h^2R\right).$$

Xét hàm số $f(h) = -h^3 + 2h^2R$ với $h \in [R; 2R)$.

Ta có $f'(h) = -3h^2 + 4hR$.

$f'(h) = 0 \Leftrightarrow -3h^2 + 4hR = 0 \Leftrightarrow h = 0$ (loại) hoặc $h = \frac{4R}{3}$.

Bảng biến thiên

Chú ý: *Sau khi tính được* $V = \frac{1}{3}\pi\left(-h^3 + 2h^2R\right)$ *ta có thể làm như sau:*

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(-h^3 + 2h^2R\right)$$

$$= \frac{1}{3}\pi h^2(2R - h)$$

$$= \frac{\pi}{6}h.h(4R - 2h)$$

$$\le \frac{\pi}{6}\left(\frac{h + h + 4R - 2h}{3}\right)^3$$

$$= \frac{32\pi R^3}{81}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $h = 4R - 2h \Leftrightarrow h = \frac{4R}{3}$.

h	R		$\frac{4R}{3}$		$2R$
$f'(h)$		$+$	0	$-$	
$f(h)$	R^3	↗	$\frac{32R^3}{27}$	↘	0

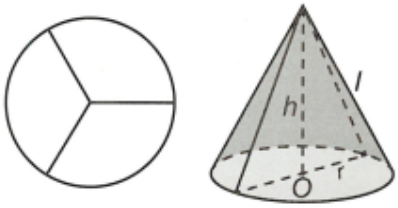
Ta có $\max f(h)=\frac{32}{27}R^3$ tại $h=\frac{4R}{3}$.

Vậy thể tích khối nón được tạo nên bởi (N) có giá trị lớn nhất là

$V=\frac{1}{3}\pi\frac{32}{27}R^3=\frac{32}{81}\pi R^3$ khi $h=\frac{4R}{3}$.

Dạng 3 Bài toán thực tế về hình nón, khối nón

Bài tập 1: Người thợ gia công của một cơ sở chất lượng cao X cắt một miếng tôn hình tròn với bán kính 60 cm thành ba miếng hình quạt bằng nhau. Sau đó người thợ ấy quấn và hàn ba miếng tôn đó để được ba cái phễu hình nón. Hỏi thể tích V của mỗi cái phễu đó bằng bao nhiêu?



A. $V=\frac{16000\sqrt{2}}{3}$ lít. **B.** $V=\frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$ lít. **C.** $V=\frac{16000\sqrt{2}\pi}{3}$ lít. **D.** $V=\frac{160\sqrt{2}\pi}{3}$ lít

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đổi 60 cm = 6 dm.

Đường sinh của hình nón tạo thành là $\ell=6$ dm.

Chu vi đường tròn ban đầu là $C=2\pi R=12\pi$.

Gọi r là bán kính đường tròn đáy của hình nón tạo thành.

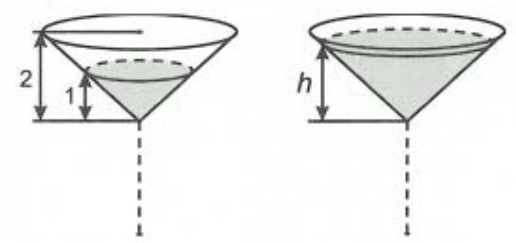
Chu vi đường tròn đáy của hình nón tạo thành là $2\pi r=\frac{2\pi.6}{3}=4\pi$ (dm) $\Rightarrow r=\frac{4\pi}{2\pi}=2$ (dm).

Đường cao của khối nón tạo thành là $h=\sqrt{\ell^2-r^2}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$.

Thể tích của mỗi phễu là $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi 2^2.4\sqrt{2}=\frac{16\sqrt{2}\pi}{3}\left(dm^3\right)=\frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$ (lít).

Bài tập 2: Hai chiếc ly đựng chất lỏng giống hệt nhau, mỗi chiếc có phần

chứa chất lỏng là một khối nón có chiều cao 2dm (mô tả như hình vẽ). Ban đầu chiếc ly thứ nhất chứa đầy chất lỏng, chiếc ly thứ hai để rỗng. Người ta chuyển chất lỏng từ ly thứ nhất sang ly thứ hai sao cho độ cao của cột chất lỏng trong ly thứ nhất còn 1dm. Tính chiều cao *h* của cột chất lỏng trong ly thứ hai sau khi chuyển (độ cao của cột chất lỏng tính từ đỉnh của khối nón đến mặt chất lỏng – lượng chất lỏng coi như không hao hụt khi chuyển. Tính gần đúng *h* với sai số không quá 0,01dm).



A. $h \approx 1,73\,\text{dm}$. **B.** $h \approx 1,89\,\text{dm}$. **C.** $h \approx 1,91\,\text{dm}$. **D.** $h \approx 1,41\,\text{dm}$.

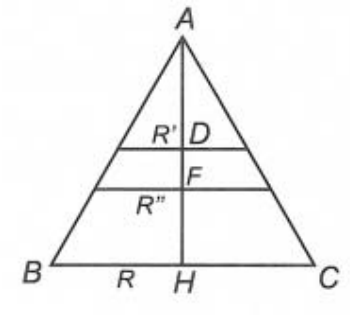
Hướng dẫn giải

Chọn C.

Có chiều cao hình nón khi đựng đầy nước ở ly thứ nhất $AH = 2$.

Chiều cao phần nước ở ly thứ nhất sau khi đổ sang ly thứ hai $AD = 1$.

Chiều cao phần nước ở ly thứ hai sau khi đổ sang ly thứ hai $AF = h$.



Theo Ta-lét ta có

$\frac{R'}{R} = \frac{AD}{AH} = \frac{1}{2}$, $\frac{R''}{R} = \frac{AF}{AH} = \frac{h}{2}$ suy ra $R' = \frac{R}{2}$, $R'' = \frac{Rh}{2}$.

Thể tích phần nước ban đầu ở ly thứ nhất $V = 2\pi R^2$.

Thể tích phần nước ở ly thứ hai $V_1 = \pi R''^2 h = \frac{\pi R^2 h^3}{4}$.

Thể tích phần nước còn lại ở ly thứ nhất $V_2 = \frac{\pi R^2}{4}$.

Mà $V = V_1 + V_2 \Leftrightarrow \frac{\pi R^2 h^3}{4} + \frac{\pi R^2}{4} = 2\pi R^2 \Leftrightarrow \frac{h^3}{4} + \frac{1}{4} = 2 \Leftrightarrow h = \sqrt[3]{7} = 1,91$.

Bài tập 2: Một bể nước lớn của khu công nghiệp có phần chứa nước là một khối nón đỉnh *S* phía dưới (hình vẽ), đường sinh $SA = 27$ mét. Có một lần lúc bể chứa đầy nước, người ta phát hiện nước trong bể không đạt yêu cầu về vệ sinh nên lãnh đạo khu công nghiệp cho thoát hết nước để làm vệ sinh bể chứa. Công nhân cho thoát nước ba lần qua một lỗ ở đỉnh

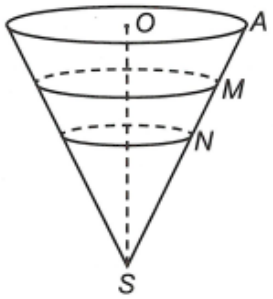
S. Lần thứ nhất khi mực nước tới điểm *M* thuộc *SA* thì dừng, lần thứ hai khi mực nước tới điểm *N* thuộc *SA* thì dừng, lần thứ ba mới thoát hết nước. Biết rằng lượng nước mỗi lần thoát bằng nhau. Tính độ dài đoạn *MN*.

A. $27\left(\sqrt[3]{2}-1\right)$ m.

B. $9\sqrt[3]{9}\left(\sqrt[3]{4}-1\right)$ m.

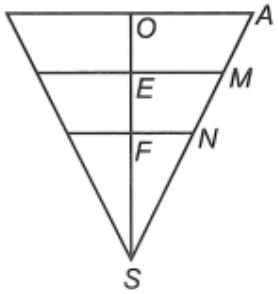
C. $9\sqrt[3]{9}\left(\sqrt[3]{2}-1\right)$ m.

D. $9\sqrt[3]{3}\left(\sqrt[3]{2}-1\right)$ m.



Hướng dẫn giải

Chọn C.



Ta gọi V_1, V_2, V lần lượt là thể tích khối nón có đường sinh là *SN, SM, SA*.

Do ΔSEM đồng dạng với ΔSOA nên ta có $\frac{SM}{SA}=\frac{SE}{SO}=\frac{EM}{OA}$.

Lại có $\frac{V_2}{V}=\frac{\frac{1}{3}\pi.EM^2.SE}{\frac{1}{3}\pi.OA^2.SA}\Leftrightarrow\frac{2}{3}=\left(\frac{SA}{SM}\right)^3\Leftrightarrow\frac{2}{3}=\left(\frac{SM}{27}\right)^3\Leftrightarrow SM=\sqrt[3]{13122}$

Tương tự $\frac{V_1}{V}=\left(\frac{SN}{SA}\right)^3\Leftrightarrow\frac{1}{3}=\left(\frac{SN}{27}\right)^3\Leftrightarrow SN=\sqrt[3]{6561}$.

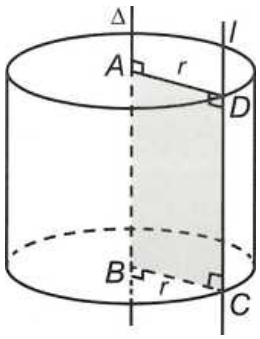
Vậy $MN=SM-SN=\sqrt[3]{13122}-\sqrt[3]{6561}$.

BÀI 2: MẶT TRỤ

A. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

MẶT TRỤ TRÒN XOAY

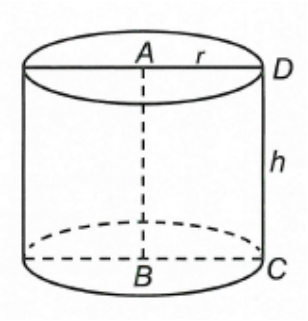
Trong mp (P) cho hai đường thẳng Δ và l song song với nhau, cách nhau một khoảng *r*. Khi quay mp (P) xung quanh Δ thì đường thẳng l sinh ra một mặt tròn xoay được gọi là mặt trụ tròn xoay hay gọi tắt là mặt trụ.



- Đường thẳng Δ được gọi là trục.
- Đường thẳng l được gọi là đường sinh.
- Khoảng cách *r* được gọi là bán kính của mặt trụ đó.

HÌNH TRỤ TRÒN XOAY

Ta xét hình chữ nhật $ABCD$. Khi quay hình đó xung quanh đường thẳng chứa một cạnh, chẳng hạn cạnh AB, thì đường gấp khúc $ABCD$ tạo thành một hình được gọi là hình trụ tròn xoay hay gọi tắt là hình trụ.



- Đường thẳng AB được gọi là trục.
- Đoạn thẳng CD được gọi là độ dài đường sinh.
- Độ dài đoạn thẳng $AB = CD = h$ được gọi là chiều cao của hình trụ (độ dài đường sinh bằng chiều cao của hình trụ).
- Hình tròn tâm *A,* bán kính $r = AD$ và hình tròn tâm B, bán kính $r = BC$ được gọi là hai đáy của hình trụ.
- Phần mặt tròn xoay được sinh ra bởi các điểm trên cạnh CD khi quay quanh AB gọi là mặt xung quanh của hình trụ.

KHỐI TRỤ TRÒN XOAY

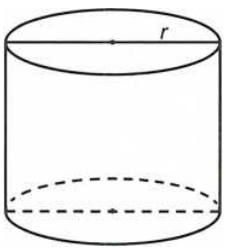
Phần không gian được giới hạn bởi một hình trụ tròn xoay kể cả hình trụ đó ta gọi là khối trụ tròn xoay hay ngắn gọn là khối trụ.

Các khái niệm tương tự như hình trụ.

CÔNG THỨC CẦN NHỚ

Cho hình trụ có chiều cao là *h,* bán kính đáy *r* thì ta có:

- Diện tích xung quanh $S_{xq} = 2\pi rh.$
- Diện tích đáy (hình tròn) $S_{ht} = \pi r^2$.
- Diện tích toàn phần $S_{tp} = S_{xq} + 2.S_D = 2\pi rh + 2\pi r^2$.
- Thể tích khối trụ $V_{kt} = B.h = \pi r^2 h$.



Chú ý: Vẽ hình biểu diễn hình trụ hay khối trụ ta thường vẽ như hình bên.

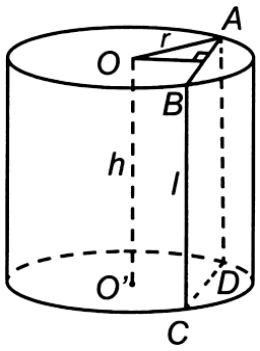
B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần, diện tích thiết diện, chiều cao, bán kính đáy, diện tích đáy của hình trụ

Bài tập 1: Cho hình trụ có chiều cao bằng $3\sqrt{3}$. Cắt hình trụ đã cho bởi mặt phẳng song song với trục và cách trục một khoảng bằng 1, thiết diện thu được có diện tích bằng 18. Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho bằng

A. $6\pi\sqrt{3}$ **B.** $6\pi\sqrt{39}$ **C.** $3\pi\sqrt{39}$ **D.** $12\pi\sqrt{3}$

Hướng dẫn giải



Chọn D.

Thiết diện thu được là hình chữ nhật $ABCD$ và $OO'//(ABCD)$, gọi I là trung điểm của AB

Ta có

$OI \perp (ABCD)$

$\Rightarrow d(OO';(ABCD)) = d(O;(ABCD)) = OI = 1$

$S_{ABCD} = AB.BC \Leftrightarrow AB.3\sqrt{3} = 18$

$\Leftrightarrow AB = 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow AI = \sqrt{3}$

$\Rightarrow r = OA = \sqrt{OI^2 + AI^2} = 2$

Diện tích xung quanh của hình trụ đã cho là $S_{xq} = 2\pi rl = 12\pi\sqrt{3}$.

Bài tập 2: Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (O) và (O'), thiết diện qua trục của hình trụ là hình vuông. Gọi A, B là hai điểm lần lượt nằm trên hai đường tròn (O) và (O'). Biết $AB = 2a$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và 00' bằng . Bán kính đáy bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Bán kính đáy bằng

A. $\frac{a\sqrt{17}}{3}$ **B.** $\frac{a\sqrt{14}}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{14}}{4}$ **D.** $\frac{a\sqrt{14}}{9}$

Hướng dẫn giải

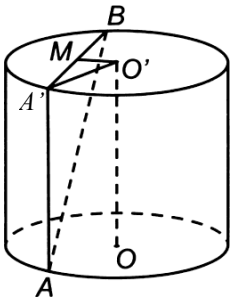
Chọn C.

Gọi r là bán kính đáy.

Do thiết diện qua trục là hình vuông nên độ dài đường sinh bằng $2r$.

Dựng đường sinh AA'.

Gọi M là trung điểm của $A'B$



Lưu ý:

+ $d(OO', AB) = O'M$.

+ Góc giữa AB và mặt đáy là góc $\widehat{ABA'}$.

+ Góc giữa AB và OO' là góc $\widehat{A'AB}$

$\Rightarrow O'M \perp (AA'B)$

$\Rightarrow d(OO', AB) = O'M$

$\Rightarrow O'M = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Ta có $A'B = \sqrt{AB^2 - AA'^2} = \sqrt{4a^2 - 4r^2}$

Mặt khác $A'M = \sqrt{O'A'^2 - O'M'^2} = \sqrt{r^2 - \dfrac{3a^2}{4}}$

$\Rightarrow \sqrt{4a^2 - 4r^2} = 2\sqrt{r^2 - \dfrac{3a^2}{4}} \Leftrightarrow r = \dfrac{a\sqrt{14}}{4}$

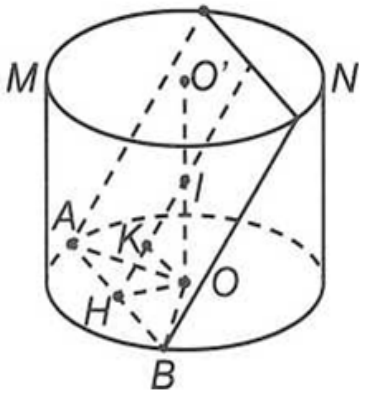
Bài tập 3: Cho hình trụ có hai đáy là hai hình tròn (*O*) và (*O*'), chiều cao *2R* và bán kính đáy *R*. Một mặt phẳng (α) đi qua trung điểm của OO' và tạo với OO' một góc $30°$. Hỏi (α) cắt đường tròn đáy theo một dây cung có độ dài bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ **B.** $\dfrac{4R}{3\sqrt{3}}$ **C.** $\dfrac{2R}{\sqrt{3}}$ **D.** $\dfrac{2R}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi I là trung điểm của OO'.



Khi đó, mặt phẳng $(\alpha)=(IAB)$

Hạ $OH \perp AB, OK \perp IH$. Dễ thấy H là trung điểm của AB và $OK \perp (IAB)$.

Suy ra

$(OO',(\alpha))=(IO,(IAB))=(OI,KI)=\widehat{KIO}=30°$ (vì ΔKIO vuông tại O)

Khi đó $KO=\frac{1}{2}IO=\frac{R}{2}$. Vì ΔHIO vuông tại O nên

$$\frac{1}{OK^2}=\frac{1}{OH^2}+\frac{1}{OI^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OK^2}-\frac{1}{OI^2}=\frac{4}{R^2}-\frac{1}{R^2}=\frac{3}{R^2}\Rightarrow OH^2=\frac{R^2}{3}$$

$$\Rightarrow AH=\sqrt{OA^2-OH^2}=\sqrt{R^2-\frac{R^2}{3}}=\frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$AB=\frac{2R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Bài tập 4: Cho hình trụ có chiều cao bằng $6\sqrt{2}$. Biết rằng một mặt phẳng không vuông góc với đáy và cắt hai mặt đáy theo hai dây cung song song AB, $A'B'$ mà $AB = A'B' = 6$, diện tích hình chữ nhật $ABB'A'$ bằng 60. Bán kính đáy của hình trụ là

A. 5. **B.** $3\sqrt{2}$ **C.** 4 **D.** $5\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

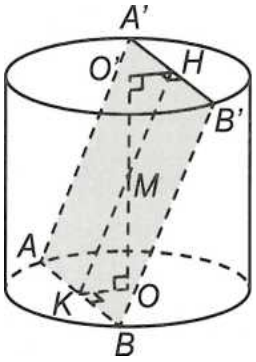
Chọn C.

Diện tích hình chữ nhật $ABB'A'$ bằng 60 (cm^2)

nên $AB.BB' = 60 \Leftrightarrow 6.BB' = 60 \Leftrightarrow BB' = 10$

Ta có $MK = 5$

Chiều cao hình trụ bằng $6\sqrt{2}$ (cm) nên $MO = 3\sqrt{2}$.



Lưu ý: *Bài tập 5 và Bài tập 6 tuy đề cho khác nhau nhưng thiết diện giống nhau. Ở Bài tập 7 dưới đây thêm một cách hỏi khác nữa dù thiết diện vẫn là vậy.*

$OK = \sqrt{MK^2 - MO^2} = \sqrt{25-18} = \sqrt{7};$

$AB = 6 \Rightarrow KB = 3.$

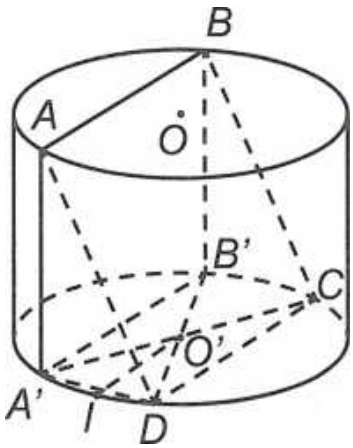
$BO = \sqrt{OK^2 + KB^2} = \sqrt{7+9} = 4$

Bài tập 5: Một hình trụ có bán kính đáy bằng chiều cao và bằng *a.* Một hình vuông *ABCD* có *AB, CD* là hai dây cung của 2 đường tròn đáy và mặt phẳng $ABCD$ không vuông góc với đáy. Diện tích hình vuông đó bằng

A. $\frac{5a^2}{4}$ **B.** $5a^2$ **C.** $\frac{5a^2\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{5a^2}{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn D



Đặt $AB = AD = 2x \Rightarrow S_{ABCD} = 4x^2$.

Gọi *A′, B′* lần lượt là hình chiếu vuông góc của *A, B* lên mặt đáy của hình trụ.

Xét tam giác *AA′D* vuông tại *A′* ta có

$A'D = \sqrt{AD^2 - AA'^2} = \sqrt{4x^2 - a^2}$

Mặt khác, gọi *I* là trung điểm của $A'D$ thì ta có:

$$A'D = 2A'I = 2\sqrt{O'A'^2 - O'I^2} = 2\sqrt{O'A'^2 - \left(\frac{1}{2}CD\right)^2}$$

$$= 2\sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{2}2x\right)^2} = 2\sqrt{a^2 - x^2}$$

Do đó $\sqrt{4x^2 - a^2} = 2\sqrt{a^2 - x^2} \Leftrightarrow 4x^2 - a^2 = 4\left(a^2 - x^2\right)$

$\Leftrightarrow 4x^2 = \frac{5a^2}{2}$. Vậy $S_{ABCD} = \frac{5a^2}{2}$ (đvdt)

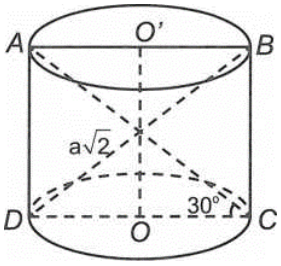
Dạng 1: Thể tích khối trụ, bài toán cực trị

Bài tập 1: Cắt một khối trụ bởi mặt phẳng qua trục ta được thiết diện là hình chữ nhật *ABCD* có cạnh *AB* và cạnh *CD* nằm trên hai đáy của khối trụ. Biết $BD = a\sqrt{2}$, $\widehat{DCA} = 30°$. Tính theo *a* thể tích khối trụ.

A. $\frac{3\sqrt{2}}{48}\pi a^3$ **B.** $\frac{3\sqrt{2}}{32}\pi a^3$ **C.** $\frac{3\sqrt{2}}{16}\pi a^3$ **D.** $\frac{3\sqrt{6}}{16}\pi a^3$

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Ta có $AC = BD = a\sqrt{2}$.

Mặt khác xét tam giác *ADC* vuông tại *D,* ta có

$AD = AC.\sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2}a \Rightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ và

$CD = AC\cos 30° = \frac{\sqrt{6}}{2}a \Rightarrow r = \frac{CD}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}a$.

Nên $V = \pi r^2 h = \pi\left(\frac{\sqrt{6}}{4}a\right)^2.\frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{3\sqrt{2}}{16}\pi a^3$.

Bài tập 2: Cho hình chữ nhật *ABCD* có *AD = 3AB.* Gọi V_1 là thể tích của khối trụ tạo thành khi cho hình chữ nhật quay xung quanh cạnh *AB,* V_2 là thể tích khối trụ tạo thành khi cho hình chữ nhật quay xung quanh cạnh *AD.* Tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$ là.

A. 9 **B.** 3 **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** $\frac{1}{9}$

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Khối trụ tạo thành khi cho hình chữ nhật *ABCD* quay xung quanh cạnh *AB* có bán kính đáy và chiều cao lần lượt là $r_1 = AD = 3AB; h_1 = AB$.

Khi đó, thể tích của khối trụ này là $V_1 = \pi r_1^2 h_1 = 9\pi AB^3$.

Khối trụ tạo thành khi cho hình chữ nhật *ABCD* quay xung quanh cạnh *AD* có bán kính đáy và chiều cao lần lượt là $r_2 = AB; h_2 = AD = 3AB$.

Khi đó, thể tích của khối trụ này là $V_2 = \pi r_2^2 h_2 = 3\pi AB^3$.

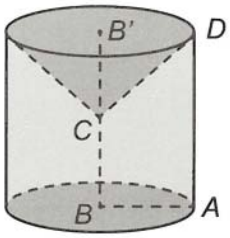
Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{9\pi AB^3}{3\pi AB^3} = 3$.

Bài tập 3: Cho hình thang *ABCD* vuông tại *Avà B* với $AB = BC = \frac{AD}{2}a$. Quay hình thang và miền trong của nó quanh đường thẳng chứa cạnh *BC.* Thể tích *V* của khối tròn xoay được tạo thành là

A. $V = \frac{4\pi a^3}{3}$ **B.** $V = \frac{5\pi a^3}{3}$ **C.** $V = \pi a^3$ **D.** $V = \frac{7\pi a^3}{3}$

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Thể tích $V = V_1 - V_2$. Trong đó V_1 là thể tích khối trụ có bán kính đáy là $BA = a$ và chiều cao $AD = 2a; V_2$ là thể tích khối nón có bán kính đáy là $B'D = a$ và chiều cao $CB' = a$

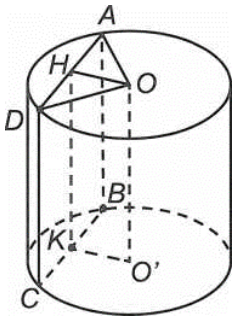
Khi đó $V = V_1 - V_2 = \pi a^2.2a - \frac{1}{3}\pi a^2.a = \frac{5\pi a^3}{3}$.

Bài tập 4: Cho hình trụ có bán kính đáy bằng *a.* cắt hình trụ bởi một mặt phẳng (P) song song với trục của hình trụ và cách trục của hình trụ một khoảng bằng $\frac{a}{2}$ ta được thiết diện là một hình vuông. Thể tích khối trụ bằng

A. $3\pi a^3$ **B.** $\pi a^3\sqrt{3}$ **C.** $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{4}$ **D.** πa^3

Hướng dẫn giải

Chọn B.



Giả sử hình vuông *ABCD* là thiết diện của hình trụ cắt bởi (P) như hình vẽ.

Gọi *H, K* lần lượt là trung điểm *AD, BC.*

Ta có $OH \perp AD \Rightarrow OH \perp (P) \Rightarrow d(O;(P)) = OH \Rightarrow OH = \frac{a}{2}$.

Do đó $AD = 2AH = 2\sqrt{OA^2 - OH^2} = 2\frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

Suy ra $OO' = AB = AD = a\sqrt{3}$.

Vậy nên $V = \pi R^2 h = \pi a^2 . a\sqrt{3} = \pi a^3\sqrt{3}$.

Bài tập 5: Cắt một khối trụ cao $18cm$ bởi một mặt phẳng, ta được khối hình dưới đây. Biết rằng thiết diện là một elip, khoảng cách từ điểm thuộc thiết diện gần đáy nhất và điểm thuộc thiết diện xa mặt đáy nhất lần lượt là $8cm$ và $14cm$. Tỉ số thể tích của hai khối được chia ra (khối nhỏ chia khối lớn) là

A. $\frac{2}{11}$ **B.** $\frac{1}{2}$ **C.** $\frac{5}{11}$ **D.** $\frac{7}{11}$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

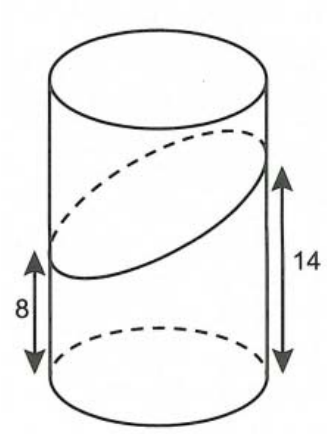
Gọi $V_1; V_2$ lần lượt là thể tích khối nhỏ và khối lớn.

Ta có thể tích khối trụ là $V = \frac{\pi R^2 (8+14)}{2} = 11\pi R^2$

(với *R* là bán kính khối trụ).

Thể tích $V_2 = \frac{\pi R^2 (8+14)}{2} = 11\pi R^2$.

Vậy $\frac{V_1}{V_2} = \frac{V - V_2}{V_2} = \frac{18\pi R^2 - 11\pi R^2}{11\pi R^2} = \frac{7}{11}$.



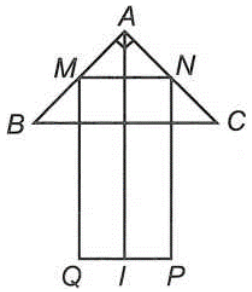
Bài tập 6: Cho tam giác vuông cân *ABC* có $AB = AC = a\sqrt{2}$ và hình chữ nhật *MNPQ* với *MQ = 3MN* được xếp chồng lên nhau sao cho *M,N* lần lượt là trung điểm của *AB, AC* (như hình vẽ). Tính thể tích *V* của vật thể tròn xoay khi quay mô hình trên quanh trục *AI,* với / là trung điểm *PQ.*

A. $V = \frac{11\pi a^3}{6}$.

B. $V = \frac{5\pi a^3}{6}$.

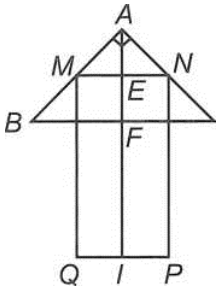
C. $V = \frac{11\pi a^3}{8}$.

D. $V = \frac{17\pi a^3}{24}$.



Hướng dẫn giải

Chọn D.



Ta có $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 2a \Rightarrow MN = a, MQ = 2a.$

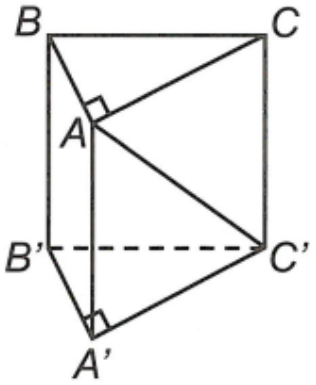
Gọi *E, F* lần lượt là trung điểm *MN* và *BC.*

$$AF = a, EF = \frac{a}{2} \Rightarrow IF = \frac{3}{2}a$$

Vậy thể tích cần tìm là tổng thể tích của khối nón có chiều cao là *AF* bán kính đáy *FB* và thề tích khối trụ có chiều cao *IF* bán kính *IQ.*

$$V = \frac{1}{3}\pi AF.FB^2 + \pi IF.IQ^2 = \frac{1}{3}\pi.a.a^2 + \pi.\frac{3}{2}a.\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{17}{24}\pi a^3.$$

Bài tập 7: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng *2a,* đáy *ABC* là tam giác vuông cân tại *A,* góc giữa *AC′* và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng $30°$ (tham khảo hình vẽ). Thể tích của khối trụ ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng



A. πa^3 **B.** $2\pi a^3$ **C.** $4\pi a^3$ **D.** $3\pi a^3$

Hướng dẫn giải

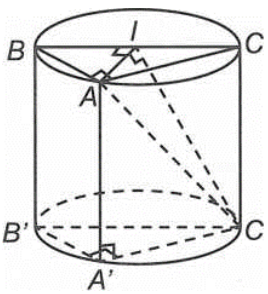
Chọn C.

Gọi bán kính của hình trụ là R.

Ta có $CC' \perp (ABC) \Rightarrow CC' \perp AI$

Lại có tam giác *ABC* là tam giác vuông cân tại *A*

nên $AI \perp BC$ do đó $AI \perp (BCC'B')$ hay góc giữa



AC' và mặt phẳng $(BCC'B')$ là $\widehat{IC'A}$.

Xét tam giác AIC' ta có $\mathrm{IC'} = \dfrac{\mathrm{AI}}{\tan \widehat{\mathrm{IC'A}}} = \mathrm{R}\sqrt{3}$

Xét tam giác CIC' ta có $IC'^2 = IC^2 + CC'^2 \Rightarrow 3R^2 = R^2 + 4a^2 \Rightarrow R = a\sqrt{2}$

Thể tích khối trụ ngoại tiếp lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = \pi R^2 h = 4\pi a^3$.

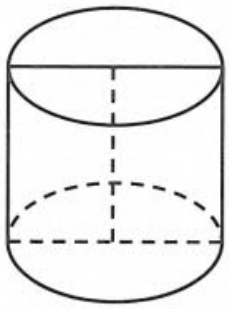
Bài tập 8: Trong tất cả các khối trụ có cùng thể tích 330, xác định bán kính đáy của khối trụ có diện tích toàn phần nhỏ nhất.

A. $\sqrt[3]{\dfrac{165}{\pi}}$ **B.** $\sqrt{\dfrac{165}{\pi}}$ **C.** $\sqrt[3]{\dfrac{330}{\pi}}$ **D.** $\sqrt{\dfrac{330}{\pi}}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$V = 330 \Leftrightarrow h\pi R^2 = 330 \Leftrightarrow h = \dfrac{330}{\pi R^2}$



Khi đó diện tích toàn phần của khối trụ là

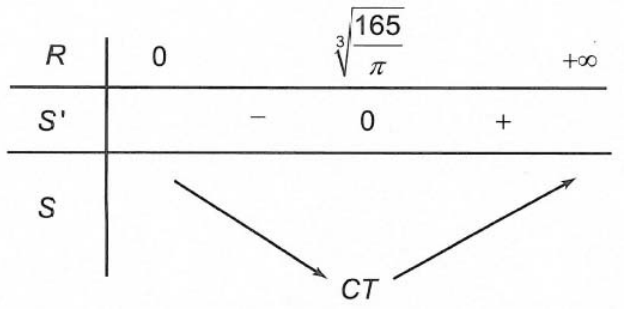
$S = h.2\pi.R + 2\pi R^2$

$\Leftrightarrow S = \dfrac{330}{\pi R^2}.2\pi R + 2\pi R^2 \Leftrightarrow S = \dfrac{660}{R} + 2\pi R^2$

Ta xem S là 1 hàm số ẩn R. Xét $S' = -\dfrac{660}{R^2} + 4\pi R$.

$S' = 0 \Leftrightarrow -\dfrac{660}{R^2} + 4\pi R = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-660 + 4\pi R^3}{R^2} = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\dfrac{165}{\pi}}$

Lập bảng biến thiên ta có



Bài toán hỏi về bán kính đáy nên ta xem bán kính đáy là ẩn, tính diện tích xung quanh theo bán kính đáy.

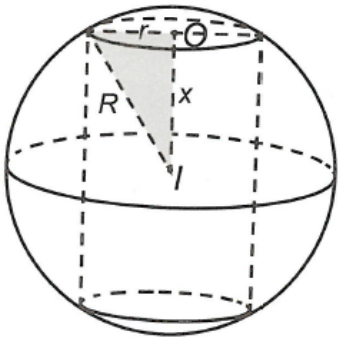
Vậy S đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $R = \sqrt[3]{\dfrac{165}{\pi}}$

Bài tập 9: Thể tích lớn nhất của khối trụ nội tiếp hình cầu có bán kính R bằng

A. $\frac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}$ **B.** $\frac{8\pi R^3\sqrt{3}}{3}$ **C.** $\frac{8\pi R^3}{27}$ **D.** $\frac{8\pi R^3\sqrt{3}}{9}$

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Gọi X là khoảng cách từ tâm I của mặt cầu đến mặt đáy của hình trụ ($0 < X < R$). Bán kính đáy của hình trụ là $r = \sqrt{R^2 - x^2}$

Thể tích của khối trụ là $V = \pi r^2 h = \pi r^2.2x = 2\pi\left(R^2 - x^2\right)x = f\left(x\right)$

$f'\left(x\right) = 2\pi R^2 - 6\pi x^2; f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{R\sqrt{3}}{3}$ (vì $x > 0$).

Ta có bảng biến thiên như sau

x	0		$\frac{R\sqrt{3}}{3}$		R
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	f_{max}	↘	

Vậy thể tích lớn nhất của khối trụ nội tiếp trong hình cầu bán kính R là

$V_{\max} = f\left(\frac{R\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{4\pi R^3\sqrt{3}}{9}$.

Dạng 3: Bài toán thực tế về khối trụ.

Ví dụ: Một cơ sở sản xuất có hai bể nước hình trụ có chiều cao bằng nhau, bán kính đáy lần lượt bằng 1m và 1,5m. Chủ cơ sở dự định làm một bể nước mới, hình trụ, có cùng chiều cao và có thể

tích bằng tổng thể tích của hai bể trên. Bán kính đáy của bể nước dự định làm gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. $1,6$ m. **B.** $2,5$ m. **C.** $1,8$ m **D.** $2,1$ m.

Hướng dẫn giải

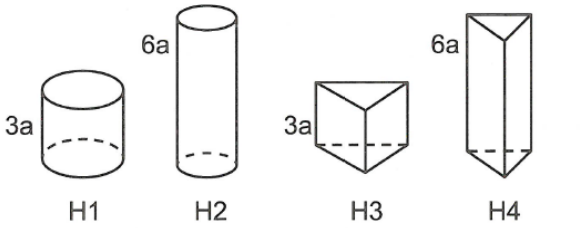
Chọn C.

Gọi r là bán kính bể dự định làm, h là chiều cao các bể.

Ta có: $\pi r^2 h = \pi\left(1^2 + 1,5^2\right)h \Rightarrow r = \sqrt{1+1,5^2} \approx 1,8(m)$.

Bài tập 1. Cho một tấm bìa hình chữ nhật có kích thước 3a, 6a. Người ta muốn tạo tấm bìa đó thành 4 hình không đáy như hình vẽ dưới đây, trong đó có hai hình trụ lần lượt có chiều cao 3a, 6a và hai hình lăng trụ tam giác đều có chiều cao lần lượt 3a, 6a.

Lưu ý: Không phải cắt nhỏ tấm bìa để tạo ra 4 hình bên vì nếu vậy không thỏa đề bài mà lấy tấm bìa lần lượt tạo thành 4 hình trong đề bài.



Trong bốn hình H1, H2, H3, H4 lần lượt theo thứ tự có thể tích lớn nhất và nhỏ nhất là

A. H1, H4. **B.** H1, H3. **C.** H2, H3. **D.** H2, H4.

Hướng dẫn giải

Chọn A

Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính của hai hình trụ ở hình H1, H2.

Gọi V_1, V_2 lần lượt là thể tích của hai hình trụ ở hình H1, H2.

C_1, C_2 lần lượt là chu vi đáy của hai hình trụ ở hình H1, H2.

Ta có: $C_1 = 2\pi R_1 = 6a \Rightarrow R_1 = \dfrac{3a}{\pi}; C_2 = 2\pi R_2 = 3a \Rightarrow R_2 = \dfrac{3a}{2\pi}$

$V_1 = 3a\pi\left(\dfrac{3a}{\pi}\right)^2 = \dfrac{27a^3}{\pi}; V_2 = 6a\pi\left(\dfrac{3a}{2\pi}\right)^2 = \dfrac{27a^3}{2\pi}$

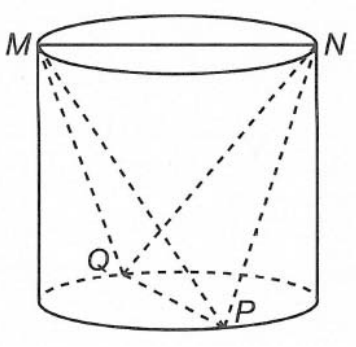
Do hai hình H3, H4 là hai hình lăng trụ tam giác đều nên ta có độ dài các cạnh đáy của hai hình H3, H4 lần lượt là 2a;a.

Thể tích hình H3, H4 lần lượt là:

$V_3 = 3a.\dfrac{1}{2}.2a.2a.\sin 60^\circ = 3\sqrt{3}a^3; V_4 = 6a.\dfrac{1}{2}.a.a.\sin 60^\circ = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}a^3$

Từ đó ta có hai hình có thể tích lớn nhất và nhỏ nhất lần lượt theo thứ tự là H1, H4.

Bài tập 2. Một người thợ có một khối đá hình trụ. Kẻ hai đường kính *MN, PQ* của hai đáy sao cho $MN \perp PQ$. Người thợ đó cắt khối đá theo các mặt cắt đi qua 3 trong 4 điểm *M, N, P, Q* để khối đá có hình tứ diện *MNPQ*. Biết *MN* = 60 cm và thể tích khối tứ diện *MNPQ* bằng 30 dm^3. Thể tích lượng đá cắt bỏ là bao nhiêu? (Làm tròn đến một chữ số thập phân sau dấu phẩy).

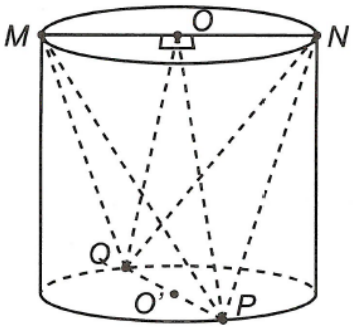


A. 101,3 dm^3. **B.** 111,4 dm^3.

C. 121,3 dm^3. **D.** 141,3 dm^3.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Gọi O, O' lần lượt là tâm đáy trên và đáy dưới của hình trụ.

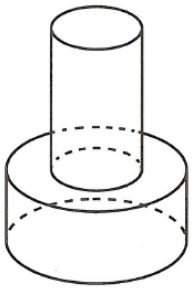
Ta có: $MN \perp (OPQ) \Rightarrow V_{MNPQ} = 2V_{N.OPQ} = 2 \cdot \frac{1}{3}.NO.S_{\Delta OPQ}$

$$= 2.S_{\Delta OPQ} = 2 \cdot \frac{1}{2}.OO' \cdot 6 = 30 \Rightarrow OO' = 5.$$

Ta có thể tích khối trụ là: $V_{KT} = OO'.\pi \cdot R^2 = 5.3^2.\pi = 45\pi$.

Vậy thể tích lượng đá cắt bỏ là: $45\pi - 30 \approx 111,4\left(dm^3\right)$.

Bài tập 3. Một khối đồ chơi gồm hai khối trụ (H_1), (H_2) xếp chồng lên nhau, lần lượt có bán kính đáy và chiều cao tương ứng là r_1, h_1, r_2, h_2 thỏa mãn $r_2 = \frac{1}{2}h_1$; $h_2 = 2h_1$ (tham khảo hình vẽ bên). Biết rằng thể tích của toàn bộ khối đồ chơi bằng 30cm^3, thể tích khối trụ (H_1) bằng



A. $24cm^3$. **B.** $15cm^3$. **C.** $20cm^3$. **D.** $10cm^3$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi thể tích của toàn bộ khối đồ chơi là *V,* thể tích của khối dưới và khối trên lần lượt là V_1 và V_2.

Ta có: $V = V_1 + V_2$

Mà $r_2 = \frac{1}{2}r_1, h_2 = 2h_1$ nên $V_2 = h_2 \cdot \pi r_2^2 = 2h_1 \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} \cdot r_1^2 = \frac{1}{2}h_1 \cdot \pi \cdot r_1^2 = \frac{1}{2}V_1$

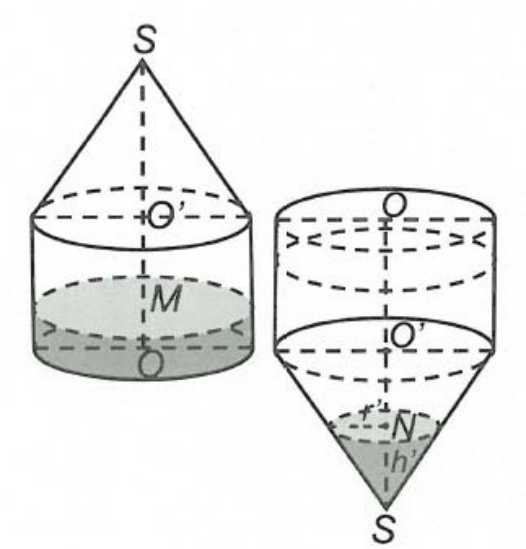
$\Rightarrow 30 = V_1 + \frac{1}{2}V_1 \Rightarrow V_1 = 20$.

Bài tập 4. Cho một dụng cụ đựng chất lỏng được tạo bởi một hình trụ và hình nón được lắp đặt như hình sau. Bán kính đáy hình nón bằng bán kính đáy hình trụ. Chiều cao hình trụ bằng chiều cao hình nón và bằng *h.* Trong bình, lượng chất lỏng có chiều cao bằng $\frac{1}{24}$ chiều cao hình trụ. Lật ngược dụng cụ theo phương vuông góc với mặt đất. Độ cao phần chất lỏng trong hình nón theo *h* là

A. $\frac{h}{8}$ **B.** $\frac{3h}{8}$ **C.** $\frac{h}{2}$ **D.** $\frac{h}{8}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Thể tích chất lỏng $V = \pi r^2 . \frac{1}{24}h = \frac{1}{24}\pi r^2 . h$

Khi lật ngược bình, thể tích phần hình nón chứa chất lỏng là $V' = \frac{1}{3}\pi r'^2 h'$

Mà $\frac{r'}{r} = \frac{h'}{h} \Rightarrow r' = \frac{h'}{h} \cdot r$. Do đó $V' = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{h'}{h} \cdot r \right)^2 \cdot h' = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \frac{h'^3}{h^2}$

Theo bài ra $V' = V \Leftrightarrow \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot \frac{h'^3}{h^2} = \frac{1}{24}\pi r^2 h \Leftrightarrow h'^3 = \frac{1}{8}h^3 \Leftrightarrow h' = \frac{h}{2}$.

Bài tập 5. Công ty của ông Bình dự định đóng một thùng phi hình trụ (có đáy dưới và nắp đậy phía trên) bằng thép không gỉ để đựng nước. Chi phí trung bình cho 1 m^2 thép không gỉ là 350000 đồng.

Với chi phí bỏ ra để làm cái thùng phi không quá 6594000 đồng, hỏi công ty ông Bình có thể có được một thùng phi đựng được tối đa bao nhiêu mét khối nước? (Lấy $\pi \approx 3,14$)

A. $12,56$ **B.** $6,28$

C. $3,14$ **D.** $9,52$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi *R, h* lần lượt là số đo bán kính và chiều cao của thùng phi hình trụ.

Với giả thiết như trên thì diện tích thép không gỉ được dùng tối đa là

$$A = \frac{6594000}{350000} = \frac{471}{25}\left(\text{m}^2\right)$$

Ta có $S_{tp} = 2\pi R(R+h) = A \Rightarrow h = \frac{A}{2\pi R} - R$

Thể tích của thùng phi là $V = \pi R^2 h = \pi R^2\left(\frac{A}{2\pi R} - R\right) = \frac{A}{2}R - \pi R^3$ (coi V là hàm số biến R).

$$V' = \frac{A}{2} - 3\pi R^2; V' = 0 \Leftrightarrow R = \sqrt{\frac{A}{6\pi}}, (R > 0)$$

Bảng biến thiên

R	0		$\sqrt{\frac{A}{6\pi}}$		$+\infty$
V'		$+$	0	$-$	
V		↗	$\frac{A}{3}\sqrt{\frac{A}{6\pi}}$	↘	

Dựa vào bảng biến thiên ta có, giá trị !ớn nhất của thể tích là

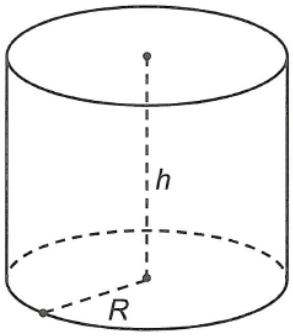
$$\max V = \frac{A}{3}\sqrt{\frac{A}{6\pi}} \approx 6,28 m^3.$$

Bài tập 6. Người ta thiết kế một thùng chứa hình trụ (như hình vẽ) có thể tích *V* nhất định. Biết rằng giá của vật liệu làm mặt đáy và nắp của thùng bằng nhau và đắt gấp 3 lần so với giá vật liệu để làm mặt xung quanh của thùng (chi phí cho mỗi đơn vị diện tích). Gọi chiều cao của thùng là *h* và bán kính đáy là *r*. Tỉ số $\frac{h}{r}$ sao cho chi phí vật liệu Sản xuất thùng là nhỏ nhất là bao nhiêu?

A. $\frac{h}{r} = \sqrt{2}$ **B.** $\frac{h}{r} = 2$ **C.** $\frac{h}{r} = 6$ **D.** $\frac{h}{r} = 3\sqrt{2}$

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Ta có $V=\pi h\cdot r^2\Rightarrow h=\dfrac{V}{\pi r^2}\Rightarrow \dfrac{h}{r}=\dfrac{V}{\pi r^3}$

Giá thành vật liệu để làm chiếc thùng là

$T=\left(2\pi rh+6\pi r^2\right)\cdot A=\left(\dfrac{2V}{r}+6\pi\cdot r^2\right)\cdot A=\left(\dfrac{V}{r}+\dfrac{V}{r}+6\pi r^2\right)\cdot A,$ trong đó A là giá của một đơn vị diện tích vật liệu làm mặt xung quanh của thùng. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho các số dương $\dfrac{V}{r},\dfrac{V}{r},6\pi r^2$ được $T\geq 3\sqrt[3]{6\pi V^2}$

Dấu " =" xảy ra khi $\dfrac{V}{r}=6\pi r^2\Leftrightarrow \dfrac{V}{\pi r^3}=6$

Vậy chi phí vật liệu sản xuất thùng là nhỏ nhất khi $\dfrac{h}{r}=6$.

BÀI 3: MẶT CẦU – KHỐI CẦU

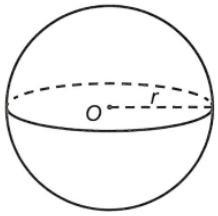
A. LÍ THUYẾT TRỌNG TÂM

Định nghĩa

- Tập hợp các điểm trong không gian cách điểm O cố định một khoảng R không đổi gọi là mặt cầu tâm O, bán kính R, kí hiệu là: $S(O;R)$. Khi đó $S(O;R)=\{M\,|\,OM=R\}$.

- Khối cầu hay hình cầu $S(O;R)$ là tập hợp tất cả các điểm M sao cho $OM \le R$.

Ta thường vẽ hay biểu diễn một mặt cầu hay khối cầu như hình sau:



Vị trí tương đối giữa mặt cầu và một điểm

Cho mặt cầu $S(O;R)$ và một điểm A. Nếu:

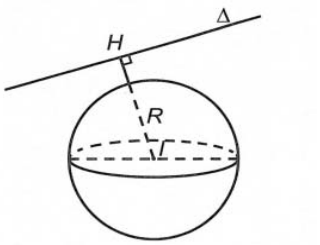
+) $OA=R$ thì điểm A nằm trên mặt cầu $S(O;R)$.

+) $OA>R$ thì ta nói điểm A nằm ngoài mặt cầu $S(O;R)$.

+) $OA<R$ thì ta nói điểm A nằm trong mặt cầu $S(O;R)$.

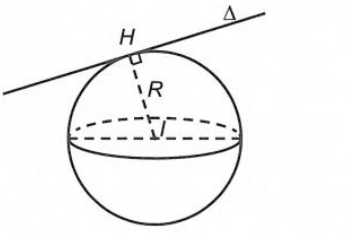
Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng

Cho mặt cầu $S(I;R)$ và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu của I lên Δ hay $d(I;\Delta)=IH$.



Nếu:

+) $IH>R:\Delta$ không cắt mặt cầu hay mặt cầu $S(I;R)$ và đường thẳng Δ không có điểm chung.

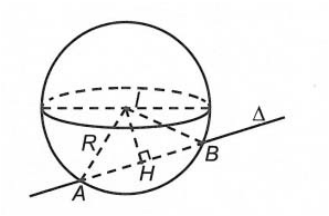


+) $IH=R$ thì Δ với mặt cầu $S(I;R)$ có một điểm chung duy nhất là H. Ta nói Δ là một tiếp tuyến của mặt cầu $S(I;R)$ và H là tiếp điểm.

+) $IH<R:\Delta$ cắt mặt cầu $S(I;R)$ tại hai điểm phân biệt.

Nhận xét:

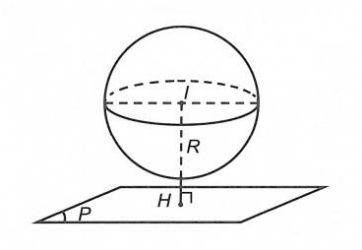
+) ΔIAB cân tại I, điểm H là trung điểm của AB và



$$R^2 = IH^2 + AH^2 = IH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2.$$

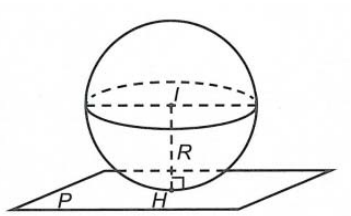
Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng

Cho mặt cầu $S(I;R)$ và mặt phẳng (P). Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên (P) hay $d(I;(P)) = IH$. Nếu:



+) $IH > R$: Mặt cầu $S(I;R)$ và mặt phẳng (P) không có điểm chung.

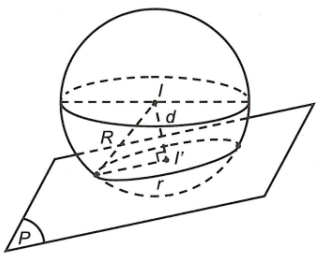
+) Nếu $IH = R$: Mặt phẳng (P) tiếp xúc mặt cầu $S(I;R)$. Lúc này ta nói mặt phẳng (P) là mặt phẳng tiếp diện của mặt cầu và H là tiếp điểm.



Lưu ý: $IH \perp (P)$

+) Nếu $IH < R$: Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu theo thiết diện là đường tròn có tâm $I'(I' \equiv H)$ và bán kính

$r = \sqrt{R^2 - IH^2} = \sqrt{R^2 - I'I^2}$.



Nhận xét: Đường tròn giao tuyến có diện tích lớn nhất khi mặt phẳng (P) đi qua tâm I của mặt cầu $S(I;R)$. Đường tròn này ta gọi là đường tròn lớn.

Công thức cần nhớ

Cho mặt cầu $S(I;R)$.

- Diện tích mặt cầu $S = 4\pi R^2$.

- Thể tích khối cầu $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. Mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện

Các khái niệm cần lưu ý:

- **Mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện:** là mặt cầu mà nó đi qua tất cả các đỉnh của hình đa diện. Tâm của mặt cầu ngoại tiếp cách đều tất cả các đỉnh của hình đa diện.

- **Trục của đa giác:** là đường thẳng đi qua tâm của đường tròn ngoại tiếp đa giác và vuông góc với mặt phẳng chứa đa giác. Mọi điểm nằm trên trục thì cách đều các đỉnh của đa giác và ngược lại.

- **Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng:** Là mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó. Mọi điểm nằm trên mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng thì cách đều hai điểm mút của đoạn thẳng và ngược lại.

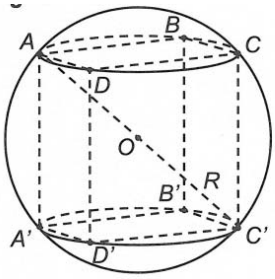
Phương pháp giải

Đối với bài toán mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện thì mấu chốt của vấn đề là phải xác định được tâm của mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện đó. Khi xác định được tâm của mặt cầu ngoại tiếp thì ta có thể tính được các yếu tố còn lại như bán kính, diện tích mặt cầu, thể tích của khối cầu...

Bài tập: Cho hình hộp chữ nhật có ba kích thước là $2a, 4a, 4a,$ với $0 < a \in R.$ Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật đã cho bằng

A. $6a$. **B.** $4a$. **C.** $3a$. **D.** $2a$.

Hướng dẫn giải



Giả sử hình hộp chữ nhật là $ABCD.A'B'C'D'$. Dễ thấy điểm O là trung điểm của AC' là tâm mặt cầu ngoại tiếp của hình hộp chữ nhật.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật là $R = OA.$

$$R = \frac{1}{2}AC' = \frac{1}{2}\sqrt{(A'A)^2 + (A'C')^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(A'A)^2 + (A'D')^2 + (D'C')^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(2a)^2 + (4a)^2 + (4a)^2} = 3a.$$

Chọn C.

Bài tập mẫu

Cách 1. Tìm một điểm cách đều các đỉnh của khối đa diện theo định nghĩa mặt cầu

Bài tập 1. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình chữ nhật, *SA* vuông góc với mặt phẳng (*ABCD*). Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD* là điểm *I* với

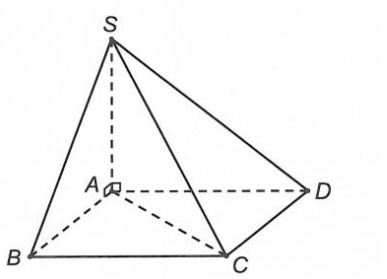
A. *I* là trung điểm của đoạn thẳng *SD*.

B. *I* là trung điểm của đoạn thẳng *AC*.

C. *I* là trung điểm của đoạn thẳng *SC*.

D. *I* là trung điểm của đoạn thẳng *SB*.

Hướng dẫn giải



Từ giả thiết ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$

$\Rightarrow \widehat{SBC} = 90^o \quad (1).$

Chứng minh tương tự ta cũng có

$CD \perp SD \Rightarrow \widehat{SDC} = 90^o \qquad (2).$

Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC \Rightarrow \widehat{SAC} = 90^o \qquad (3).$

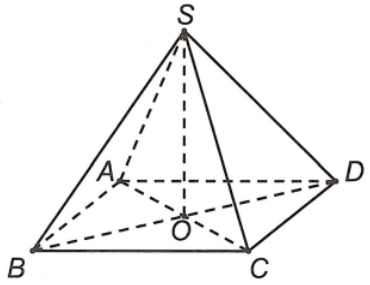
Từ (1), (2) và (3) suy ra mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD* là mặt cầu đường kính *SC* nên tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD* là trung điểm *I* của đoạn thẳng *SC*.

Chọn C.

Bài tập 2. Cho khối chóp đều *S.ABCD* có tất cả các cạnh đều bằng $a\sqrt{3}$. Thể tích *V* của khối cầu ngoại tiếp hình chóp là

A. $V = 3\pi a^3\sqrt{6}.$ **B.** $V = \pi a^3\sqrt{6}.$ **C.** $V = \dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{8}.$ **D.** $V = \dfrac{3\pi a^3\sqrt{6}}{8}.$

Hướng dẫn giải



Vì *S.ABCD* là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$.

Ta có $OD = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{1}{2}.a\sqrt{6} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2},$

$SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}.$

Vậy $OS = OA = OD = OB = OC,$ nên *O* là tâm mặt cầu ngoại tiếp S.ABCD.

Vậy thể tích khối cầu cần tìm là $V = \dfrac{4}{3}\pi.SO^3 = \pi a^3\sqrt{6}$ (đvtt)

Chọn B.

Lưu ý:

Công thức tính nhanh bán kính mặt cầu ngoại tiếp chóp đều:

$$R = \frac{a^2}{2h}$$

với a: độ dài cạnh bên, h: chiều cao hình chóp.

Bài tập 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = AB = a$. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là

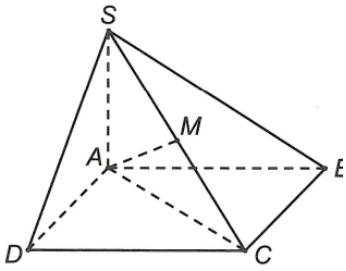
A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. **D.** $a\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải

Chứng minh tương tự như Bài tập 2 ta được kết quả

$\Rightarrow$ Ba đỉnh A, B, D đều nhìn cạnh SC dưới một góc vuông.

$\Rightarrow$ Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là trung điểm SC và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là $R = \frac{SC}{2}$.



Ta có $ABCD$ là hình vuông cạnh $a \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$.

Xét tam giác SAC vuông tại A có $SC = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}$.

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$ là $R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

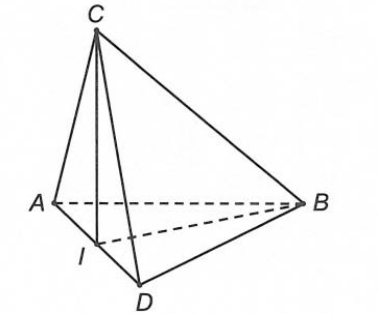
Chọn B.

Bài tập 4. Cho tứ diện $ABCD$ có các mặt ABC và BCD là các tam giác đều cạnh bằng 2, hai mặt phẳng (ABD) và (ACD) vuông góc với nhau. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải

Ta có ΔABC, ΔBCD đều cạnh bằng 2 nên $AC = CD = 2 \Rightarrow \Delta ACD$ cân tại C.



Gọi I là trung điểm $AD \Rightarrow CI \perp AD$.

Lại có $\begin{cases} (ACD) \perp (ADB) \\ (ACD) \cap (ADB) = AD \Rightarrow CI \perp (ABD) \\ IC \perp AD \end{cases}$

$\Rightarrow CI \perp IB \left(do\ IB \subset (ABD)\right)$ (1)

Ta có $\Delta ACD = \Delta ABD (c.c.c) \Rightarrow CI = IB$ (2).

Từ (1) và (2) ta có ACB vuông cân tại $I \Rightarrow CB = IB\sqrt{2} \Rightarrow IB = \frac{CB}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = IC$.

ΔDIB vuông tại $I \Rightarrow ID = \sqrt{BD^2 - IB^2} = \sqrt{2} \Rightarrow AD = 2ID = 2\sqrt{2}$.

Xét ΔADB có $AB = DB = 2; AD = 2\sqrt{2} \Rightarrow \Delta ABD$ vuông tại B.

$\Rightarrow \widehat{ABD} = 90^o \Rightarrow \widehat{ACD} = 90^o$.

Suy ra mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có đường kính là AD nên bán kính là $R = ID = \sqrt{2}$.

Chọn B.

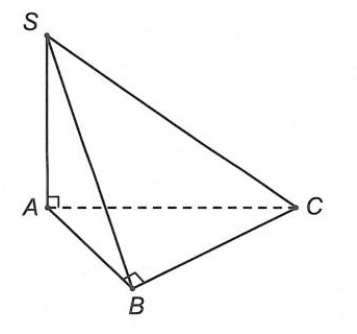
Bài tập 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B. Biết $SA = 4a, AB = 2a, BC = 4a$. Bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là

A. $3a$. **B.** $2a$. **C.** a. **D.** $6a$.

Hướng dẫn giải

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \ (do\ SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB.$

$SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AC$



Suy ra hai điểm A, B cùng nhìn SC dưới một góc vuông. Vậy tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$ là trung điểm SC, bán kính mặt cầu là $R = \dfrac{SC}{2}$.

Ta có $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 4a^2 + 16a^2 = 20a^2$

$\Rightarrow SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{16a^2 + 20a^2} = 6a$

$\begin{cases} (\alpha) // BD \\ (SBD) \cap (\alpha) = EF \end{cases} \Rightarrow BD // EF$. Vậy $R = 3a$.

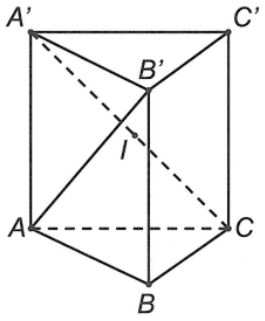
Chọn A.

Bài tập 6: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AC = a\sqrt{3}, \widehat{ACB} = 30^o$. Góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng (ABC) bằng 60°. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $A'ABC$ bằng

A. $\dfrac{a\sqrt{21}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{2}$. **C.** $\dfrac{3a}{4}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{21}}{8}$.

Hướng dẫn giải

Trong tam giác vuông ABC có $AB = AC.\sin 30^o = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



Vì $AB' \cap (ABC) = \{A\}$ và hình chiếu của B lên mặt phẳng (ABC) là B nên góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng (ABC) bằng góc giữa hai đường thẳng AB' và AB, và bằng góc $\widehat{B'AB}$ (vì tam giác $AB'B$ vuông tại B). Do đó $\widehat{B'AB} = 60^o$.

Trong tam giác vuông $AB'B$ có

$BB' = AB.\tan 60^o = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\tan 60^o = \dfrac{3a}{2}$.

Trong tam giác vuông $AA'C$ có

$A'C = \sqrt{AA'^2 + AC^2} = \sqrt{\left(\dfrac{3a}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3}a\right)^2} = \dfrac{\sqrt{21}}{2}a.$

Ta có $BC \perp AB$ và $BC \perp AA'$ nên $BC \perp (ABB'A')$, suy ra $BC \perp A'B$ hay $\widehat{A'BC} = 90^o$. Mà $\widehat{A'AC} = 90^o$, suy ra hai điểm A, B cùng nhìn $A'C$ dưới một góc vuông.

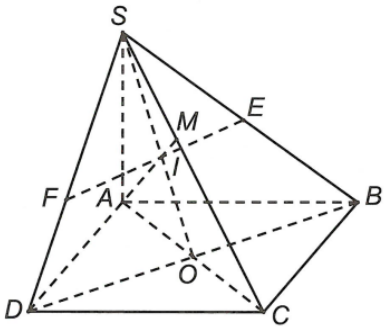
Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $A'ABC$ bằng $R=\frac{A'C}{2}=\frac{\sqrt{21}}{4}a.$

Chọn A.

Bài tập 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là hình vuông cạnh $a, SA=a\sqrt{2}$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm cạnh SC. Mặt phẳng (α) qua A và M đồng thời song song với đường thẳng BD cắt SB, SD lần lượt tại E, F. Bán kính mặt cầu đi qua 5 điểm S, A, E, M, F nhận giá trị nào sau đây?

A. a. **B.** $\frac{a}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $a\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải



Gọi I là giao điểm của AM và SO.

Dễ thấy I là trọng tâm tam giác SAC và I, E, F thẳng hàng.

Lại có $\frac{SF}{SD}=\frac{SI}{SO}=\frac{2}{3}\Rightarrow SF=\frac{2}{3}SD$

$\Rightarrow SF.SD=\frac{2}{3}SD^2=\frac{2}{3}\left(SA^2+AD^2\right)=2a^2$

$\Rightarrow SF.SD=SA^2.$

Xét tam giác vuông SAD có $SF.SD=SA^2\Rightarrow AF$ là đường cao tam giác $AF\perp SF$.

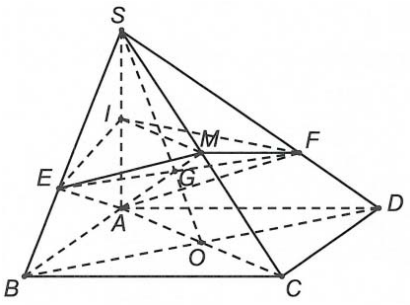
Chứng minh tương tự ta có $AE\perp SB$.

Tam giác $SA=AC=a\sqrt{2}$ nên AM vừa là trung tuyến vừa là đường cao tam giác $AM\perp SC$.

Ta có $\begin{cases}AM\perp SM\\AF\perp SF\\AE\perp SE\end{cases}$ nên mặt cầu đi qua 5 điểm S, A, E, M, F có tâm là trung điểm SA và bán kính bằng $\frac{SA}{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Chọn C.

Chú ý: Ta có thể làm như sau



Do $EF=(\alpha)\cap(SBD)$ và $(\alpha)//BD$ nên $EF//BD$.

Ta có $BD\perp AC, BD\perp SA\Rightarrow BD\perp(SAC)\Rightarrow EF\perp(SAC)\Rightarrow EF\perp SC.$

Tam giác SAC có $SA=AC=a\sqrt{2}$ nên $AM\perp SC$.

Do đó $SC \perp (AMEF) \Rightarrow SC \perp AE \quad (1)$.

Lại có $BC \perp AB, BC \perp SA$ nên $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SB$.

Chứng minh tương tự, ta được $AF \perp SD$. Từ đây, suy ra kết quả như cách bên.

Cách 2. Tâm mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện là giao điểm của trục đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy và mặt phẳng trung trực của một cạnh bên

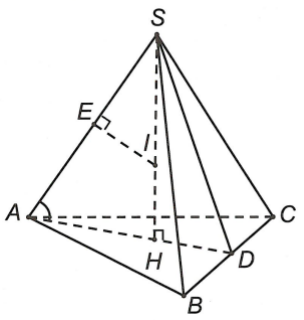
Chú ý: Trong khuôn khổ bài tập thường xoay quanh hình chóp, hình lăng trụ nên đa giác đáy ta nói đến ở đây là đáy của hình chóp hay hình lăng trụ.

Bài tập 1. Cho hình chóp đều *S.ABC* có cạnh đáy bằng *a*, cạnh bên hợp với mặt đáy một góc 60°. Gọi (*S*) là mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABC*. Thể tích của khối cầu tạo nên bởi mặt cầu (*S*) bằng

A. $\frac{32\pi a^3}{81}$. **B.** $\frac{32\pi a^3}{77}$. **C.** $\frac{64\pi a^3}{77}$. **D.** $\frac{72\pi a^3}{39}$.

Hướng dẫn giải

Gọi *H* là tâm của tam giác *ABC*, *SH* là trục của đường tròn ngoại tiếp *ABC*, mặt phẳng trung trực của *SA* qua *E* là trung điểm của *SA* và cắt *SH* tại *I*. Khi đó *I* là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABC*.



Xét trong tam giác *SAH* ta có

$$\mathrm{SH} = \mathrm{AH}.\tan 60^o = \frac{a\sqrt{3}}{3}.\tan 60^o = a; SA = \frac{SH}{\sin 60^o} = \frac{2a}{\sqrt{3}}.$$

Xét hai tam giác đồng dạng ΔSEI và ΔSHA

Ta có $\frac{SI}{SA} = \frac{SE}{SH} \Rightarrow SI = \frac{SA.SE}{SH} = \frac{\frac{2a}{\sqrt{3}}.\frac{2a}{2\sqrt{3}}}{a} = \frac{2a}{3}$

$\Rightarrow R = \frac{2a}{3}$.

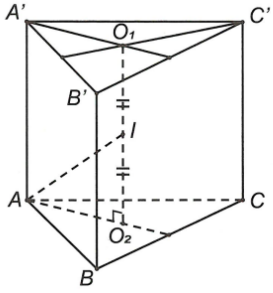
Suy ra thể tích của khối cầu tạo nên bởi mặt cầu (*S*) bằng $\frac{4}{3}\pi\left(\frac{2a}{3}\right)^3 = \frac{32\pi a^3}{81}$.

Chọn A.

Bài tập 2. Tính diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đều có tất cả các cạnh đều bằng *a*.

A. $\frac{7\pi a^2}{5}$. **B.** $\frac{7\pi a^2}{3}$. **C.** $\frac{7\pi a^2}{6}$. **D.** $3\pi a^2$

Hướng dẫn giải



Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp hai đáy lăng trụ $\Rightarrow$ O_1O_2 là trục đường tròn ngoại tiếp hai đa giác đáy.

Gọi *I* là trung điểm của $O_1O_2 \Rightarrow IA = IB = IC = IA' = IB' = IC'$.

Suy ra trung điểm *I* của O_1O_2 là tâm mặt cầu ngoại tiếp lăng trụ.

Bán kính

$$R = IA = \sqrt{AO_2^2 + IO_2^2} = \sqrt{AO_2^2 + \left(\frac{O_1O_2}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a.\sqrt{\frac{7}{12}}.$$

Do đó diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ đều có tất cả các cạnh đều bằng a là

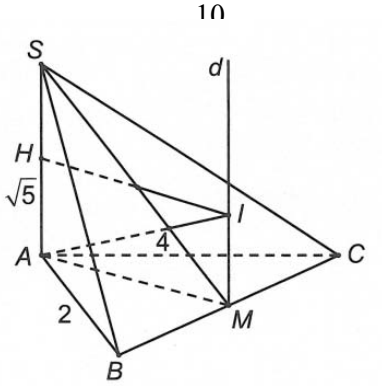
$$S = 4\pi.R^2 = 4\pi.\left(a.\sqrt{\frac{7}{12}}\right)^2 = \frac{7\pi a^3}{3}.$$

Chọn B.

Lưu ý: Mặt phẳng trung trực của một cạnh bên cắt O_1O_2 tại I là trung điểm của O_1O_2.

Bài tập 3. Cho hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác vuông tại *A*, *SA* vuông góc với mặt phẳng (*ABC*) và $AB = 2, AC = 4, SA = \sqrt{5}$. Mặt cầu đi qua các đỉnh của hình chóp *S.ABC* có bán kính là

A. $R = \frac{25}{2}$. **B.** $R = \frac{5}{2}$. **C.** $R = 5$.



Hướng dẫn giải

Gọi *M*, *H* lần lượt là trung điểm của *BC*, *SA*

Ta có tam giác *ABC* vuông tại *A* suy ra *A* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*. Qua *M* kẻ đường thẳng *d* sao cho $d \perp (ABC) \Rightarrow d$ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*.

Trong mặt phẳng kẻ đường trung trực Δ của đoạn *SA*, cắt *d* tại *I*

$$\Rightarrow \begin{cases} IA = IB = IC \\ IA = IS \end{cases} \Rightarrow IA = IB = IC = IS$$

$\Rightarrow$ I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABC*. Dễ thấy tứ giác *HAMI* là hình chữ nhật.

Ta có

$$AM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{5},$$

$$IM = \frac{1}{2}SA = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABC* là

$$R = AI = \sqrt{AM^2 + IM^2} = \sqrt{5 + \frac{5}{4}} = \frac{5}{2}.$$

Chọn B.

Lưu ý: có thể thay mặt phẳng trung trực của *SA* bằng đường trung trực của *SA* xét trong mặt phẳng (*SAM*).

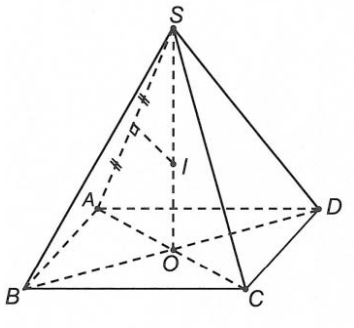
Bài tập 4. Cho hình chóp đều *S.ABCD* có tất cả các cạnh bằng *a*. Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD* là

A. $a\sqrt{2}$. **B.** a. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $2a$.

Hướng dẫn giải

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$

Vậy SO là trục của đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$



Trong (SAC) gọi (d) là trung trực của SA và I là giao điểm của (d) với SO

$$\Rightarrow \begin{cases} I \in (SO) \\ I \in (d) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IA = IB = IC = ID \\ IA = IS \end{cases}$$

$$\Rightarrow IA = IB = IC = ID = IS.$$

Vậy I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$.

Bán kính mặt cầu là $R = \dfrac{SA^2}{2SO} = \dfrac{SA^2}{2\sqrt{SA^2 - AO^2}} = \dfrac{a^2}{2\sqrt{a^2 - \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.$

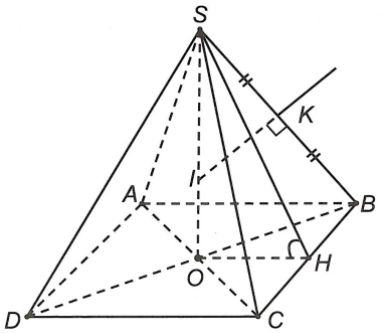
Chọn C.

Bài tập 5. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng $2a$, các mặt bên tạo với đáy một góc 60°. Diện tích S_{mc} của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là

A. $S_{mc} = \dfrac{25\pi a^2}{3}.$ **B.** $S_{mc} = \dfrac{32\pi a^2}{3}.$ **C.** $S_{mc} = \dfrac{8\pi a^2}{3}.$ **D.** $S_{mc} = \dfrac{a^2}{12}.$

Hướng dẫn giải

Trục của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy là SO. Mặt phẳng trung trực của SB cắt SO tại I, cắt SB tại K thì I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.



Gọi H là trung điểm BC thì $\widehat{SHO} = 60^o$.

Xét tam giác vuông SHO, ta có

$$\tan 60^o = \frac{SO}{OH} \Rightarrow SO = a\sqrt{3}.$$

Từ đó suy ra

$$SB = \sqrt{SO^2 + OB^2} = \sqrt{3a^2 + 2a^2} = a\sqrt{5}.$$

Ta có $\Delta SKI \backsim \Delta SOB(g.g)$.

$$\Rightarrow \frac{SK}{SO} = \frac{SI}{SB} \Rightarrow SI = \frac{SK.SB}{SO} \Rightarrow SI = \frac{a\sqrt{5}.\dfrac{a\sqrt{5}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{5a}{2\sqrt{3}} = \frac{5a\sqrt{3}}{6}.$$

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

$$S_{mc} = 4\pi R^2 = 4\pi \frac{75a^2}{36} = \frac{25\pi a^2}{3}.$$

Chọn A.

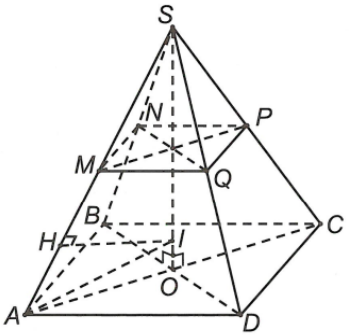
Bài tập 6. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy $a\sqrt{2}$, cạnh bên $2a$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện $ABCDMNPQ$.

A. $R = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}.$ **B.** $R = a.$ **C.** $R = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}.$ **D.** $R = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}.$

Hướng dẫn giải

Ta có $(ABCD)//(MNPQ)$. Gọi $\{O\} = AC \cap BD$.

Mà *S.ABCD* là hình chóp tứ giác đều nên $SO \perp (ABCD)$. Nên *SO* là trục của hai đáy (*ABCD*) và (*MNPQ*).



Trong mặt phẳng *(SAO)* kẻ đường trung trực d của đoạn thẳng *AM* cắt *SA, SO* tại *H, I*.

Khi đó *I* là tâm mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện *ABCDMNPQ* và bán kính là *IA*.

Ta có $SA = SB = SC = SD = 2a$

$AB = BC = CD = DA = a\sqrt{2}.$

Lại có $SH = \frac{3}{4}SA = \frac{3}{4}.2a = \frac{3a}{2} \Rightarrow HA = \frac{1}{4}SA = \frac{a}{2}.$

$\Rightarrow AC = AB\sqrt{2} = 2a \Rightarrow AO = a \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = a\sqrt{3}.$

Mặt khác $\Delta SHI \backsim \Delta SOA(g.g) \Rightarrow \frac{HI}{OA} = \frac{SH}{SO} \Rightarrow HI = \frac{OA.SH}{SO} = \frac{a.\frac{3a}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}a}{2}.$

Bán kính mặt cầu cần tìm là $R = AI = \sqrt{HI^2 + HA^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a.$

Chọn B.

Cách 3. Dựa vào trục của đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy và trục của đường tròn ngoại tiếp một mặt bên

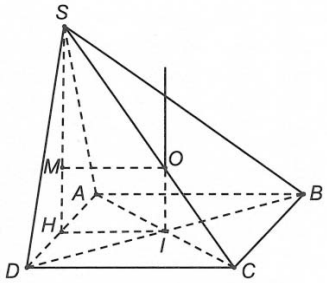
Bài tập 1. Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình chữ nhật, $AB = 2a, BC = a,$ hình chiếu của *S* lên mặt phẳng (*ABCD*) là trung điểm *H* của $AD, SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD* bằng bao nhiêu?

A. $\frac{16\pi a^2}{3}$. **B.** $\frac{16\pi a^2}{9}$. **C.** $\frac{4\pi a^3}{3}$. **D.** $\frac{4\pi a^2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Gọi *I* là giao điểm của *AC* và *BC*, qua *I* dựng đương thẳng *d* song song với $SH \Rightarrow d \perp (ABCD)$.

Gọi *M* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *SAD*, qua *M* kẻ đường thẳng *d'* vuông góc với *mp*(*SAD*), *d'* cắt *d* tại $O \Rightarrow O$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD* và bán kính bằng $R = OS = \sqrt{MO^2 + MS^2}$.



Với $OM = IH = \frac{AB}{2} = a, MS = r$ (*r* là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác *SAB*).

Lại có, ΔSAD cân tại *A*, cạnh $AD = a,$ đường cao $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ suy ra

tam giác *SAD* đều $r = AM = \frac{2}{3}SH = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow R^2 = \frac{4a^2}{3}$ (*R* là bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD*).

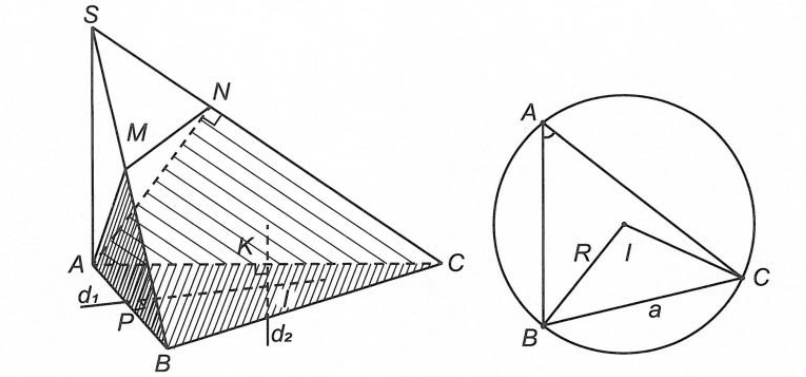
Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp hình chóp *S.ABCD* bằng $S = 4\pi R^2 = \frac{16\pi a^2}{3}$.

Chọn A.

Bài tập 2. Cho hình chóp *S.ABC* có $SA \perp (ABC)$. Gọi *M*, *N* lần lượt là hình chiếu của *A* trên *SB*, *SC*. Biết $\widehat{BAC} = \alpha, BC = a$. Diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện *ABCMN* là

A. $\frac{\pi}{\cos^2\alpha}a^2$. **B.** $\frac{\pi}{\quad}a^2$. **C.** $\frac{4\pi}{\quad}a^2$. **D.** $\frac{4\pi}{\quad}a^2$.

Hướng dẫn giải



+) Gọi *K*, *P* lần lượt là trung điểm của *AC* và *AB*.

ΔACN vuông tại $N \Rightarrow K$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔACN.

ΔABM vuông tại $M \Rightarrow P$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABM.

+) Hai mặt phẳng (*SAB*), (*ABC*) vuông góc và cắt nhau theo giao tuyến *AB* nên gọi d_1 là trục của đường tròn ngoại tiếp ΔABM thì d_1 qua P, $d_1 \subset (ABC)$ và $d_1 \perp AB$. Tương tự, gọi d_2 là trục của đường tròn ngoại tiếp ΔACN thì d_2 qua $K, d_2 \subset (ABC)$ và $d_2 \perp AC$.

+) Rõ ràng, trong mặt phẳng (*ABC*) thì $d_1 d_2$ lần lượt là đường trung trực của các cạch *AB*, *AC* nên hai đường này cắt nhau tại tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Do đó, tâm mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện *ABCMN* cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC, bán kính *R* của mặt cầu này cũng chính là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

+) Áp dụng định lí sin cho ΔABC ta được $R = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{a}{2\sin\alpha}$.

Vây diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện *ABCMN* là $S = 4\pi R^2 = \frac{\pi a^2}{\sin^2\alpha}$.

Chọn B.

Lưu ý:
Cách 2: Vẽ đường kính *AE* của đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*. Khi đó *A, M, N, B, C* cùng nhìn *AE* góc 90°.

Áp dụng định lí sin cho ΔABC ta được

$R = \dfrac{BC}{2\sin A} = \dfrac{a}{2\sin\alpha}.$

Vậy diện tích mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện $ABCMN$ là

$S = 4\pi R^2 = \dfrac{\pi a^2}{\sin^2\alpha}.$

Dạng 2. Mặt cầu nội tiếp khối đa diện

Mặt cầu nội tiếp khối đa diện là mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của khối đa diện.

Phương pháp giải

Xác định được và hiểu rõ khoảng cách từ tâm của mặt cầu nội tiếp khối đa diện tới các mặt của khối đa diện chính là bán kính của mặt cầu nội tiếp khối đa diện. Từ đó có thể tính được bán kính, diện tích xung quanh của mặt cầu, thể tích của khối cầu và giải được các bài toán liên quan.

Ví dụ: Thể tích khối cầu nội tiếp hình lập phương có cạnh bằng 1 là

A. $\dfrac{\pi}{12}.$ **B.** $\dfrac{\pi}{3}.$ **C.** $\dfrac{2\pi}{3}.$ **D.** $\dfrac{\pi}{6}.$

Hướng dẫn giải

Khối cầu nội tiếp hình lập phương có tâm trùng với tâm của hình lập phương và tiếp xúc với các mặt của hình lập phương tại tâm của các hình vuông là các mặt của hình lập phương.

Suy ra bán kính $\mathrm{R} = \dfrac{1}{2}.$

Thể tích khối cầu nội tiếp hình lập phương là $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{\pi}{6}.$

Chọn D.

Bài tập mẫu

Bài tập 1. Cho hình lập phương có thể tích bằng $64a^3$. Thể tích của khối cầu nội tiếp của hình lập phương đó bằng

A. $V = \dfrac{64\pi a^3}{3}.$ **B.** $V = \dfrac{8\pi a^3}{3}.$ **C.** $V = \dfrac{32\pi a^3}{3}.$ **D.** $V = \dfrac{16\pi a^3}{3}.$

Hướng dẫn giải

Hình lập phương có thể tích bằng $64a^3$, suy ra cạnh hình lập phương là 4a.

Khối cầu nội tiếp hình lập phương có bán kính bằng $\dfrac{1}{2}$ cạnh hình lập phương $\Rightarrow R = 2a.$

Vậy $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{32\pi a^3}{3}.$

Chọn C.

Bài tập 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại $B, AB = 8, BC = 6.$ Biết $SA = 6$ và SA vuông góc với $mp(ABC)$. Tính thể tích khối cầu có tâm thuộc phần không gian bên trong của hình chóp và tiếp xúc với tất cả các mặt của hình chóp $S.ABC$.

A. $\frac{16}{9}\pi$. **B.** $\frac{625}{81}\pi$. **C.** $\frac{256}{81}\pi$. **D.** $\frac{25}{9}\pi$.

Hướng dẫn giải

Gọi I và r lần lượt là tâm và bán kính của hình cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của hình chóp $S.ABC$.

Khi đó

$$V_{S.ABC}=V_{I.ABC}+V_{I.SBC}+V_{I.SAB}+V_{I.SAC}=\frac{1}{3}r\left(S_{\Delta ABC}+S_{\Delta SAB}+S_{\Delta SBC}+S_{\Delta SAC}\right)=\frac{r.S_{TP}}{3}$$

$$\Rightarrow r=\frac{3V_{S.ABC}}{S_{TP}}.$$

$$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.6.\frac{1}{2}.8.6=48;$$

$$S_{\Delta ABC}=S_{\Delta SAB}=24;S_{\Delta SBC}=S_{\Delta SAC}=30\Rightarrow S_{TP}=108.$$

Vậy $r=\frac{3V_{S.ABC}}{S_{TP}}=\frac{3.48}{108}=\frac{4}{3}\Rightarrow V_{mc}=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{256}{81}\pi.$

Chọn C.

Dạng 3. Bài toán cực trị

1. Phương pháp giải

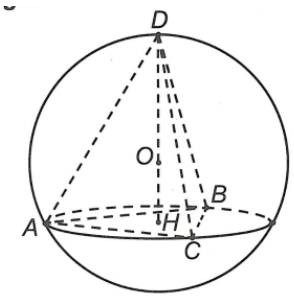
Tương tự như bài toán cực trị về hình nón, hình trụ ta thường đánh giá trực tiếp dựa vào hình hoặc biểu diễn hay quy đại lượng cần tìm cực trị phụ thuộc vào một yếu tố sau đó đánh giá tìm ra đáp án.

Ví dụ: Cho mặt cầu bán kính $R=5cm.$ Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có chu vi bằng 8πcm. Bốn điểm A, B, C, D thay đổi sao cho A, B, C thuộc đường tròn (C), điểm D thuộc $(S)\left(D\notin(C)\right)$ và tam giác ABC đều. Thể tích lớn nhất của tứ diện $ABCD$ bằng

A. $20\sqrt{3}cm^3$. **B.** $32\sqrt{3}cm^3$. **C.** $60\sqrt{3}cm^3$. **D.** $96\sqrt{3}cm^3$.

Hướng dẫn giải

Gọi H là hình chiếu của D trên mặt phẳng (P). Đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC có chu vi bằng 8πcm.



Suy ra bán kính đường tròn $R=\frac{8\pi}{2\pi}=4(cm).$

Suy ra cạnh của tam giác ABC bằng $4\sqrt{3}(cm)$

Suy ra $S_{\Delta ABC}=\frac{\left(4\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4}=12\sqrt{3}\left(cm^2\right)$ không đổi

Do đó thể tích khối tứ diện $ABCD$ lớn nhất khi $d\left(D,(ABC)\right)$ lớn nhất

$\Leftrightarrow D$ và O nằm cùng phía SO với mặt phẳng (P) và D, O, H thẳng hàng

$$\Leftrightarrow DH=DO+OH=DO+\sqrt{OA^2-AH^2}$$

$$=5+\sqrt{25-16}=8.$$

Khi đó $V_{\max}=\frac{1}{3}.12\sqrt{3}.8=32\sqrt{3}\left(cm^3\right)$.

Chọn B.

2. Bài tập mẫu

Bài tập 1. Cho hai mặt cầu $\left(S_1\right),\left(S_2\right)$ có cùng tâm *I* và bán kính lần lượt là 2 và $\sqrt{10}$. Các điểm *A*, *B* thay đổi thuộc $\left(S_1\right)$ còn *C*, *D* thay đổi thuộc $\left(S_2\right)$ sao cho có tứ diện *ABCD*. Khi thể tích khối tứ diện *ABCD* đạt giá trị lớn nhất thì khoảng cách giữa hai đường thẳng *AB* và *CD* bằng

A. $\sqrt{10}$. **B.** 3. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Để có tứ diện *ABCD* thì *AB* và *CD* không đồng phẳng.

Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính của các mặt cầu $\left(S_1\right)$ và $\left(S_2\right)\Rightarrow R_1=2;R_2=\sqrt{10}$.

Gọi *K* là trung điểm của *CD* và *h* là khoảng cách giữa hai đường thẳng *AB* và *CD*.

Ta $CD=2CK, AB\le 2R_1=4, \sin\left(AB,CD\right)\le 1$.

Thể tích khối tứ diện *ABCD* là

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}AB.CD.\sin\left(AB,CD\right).d\left(AB,CD\right)\le\frac{1}{6}.4.CD.h$$

$$\overset{Co-si}{\le}\frac{4}{3}\sqrt{h^2+CK^2}\le\frac{4}{3}\sqrt{IK^2+CK^2}.$$

Xét ΔICK vuông tại *K* có $IK^2+CK^2=CI^2=R_2^2$.

Khi đó $V_{ABCD}\le\frac{4}{3}R_2=\frac{4}{3}\sqrt{10}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}AB\perp CD\\AB=4\\h=IK=CK=\sqrt{5}\end{cases}$

Chọn C.

Bài tập 2: Cho tam giác *ABC* đều cạnh *a*, đường thẳng *d* đi qua *A* và vuông góc với mặt phẳng (*ABC*). Gọi *S* là điểm thay đổi trên đường thẳng *d*, *H* là trực tâm tam giác *SBC*. Biết rằng khi *S* thay đổi trên đường thẳng *d* thì điểm *H* nằm trên đường (*C*). Trong số các mặt cầu chứa đường (*C*), bán kính mặt cầu nhỏ nhất là

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** a. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

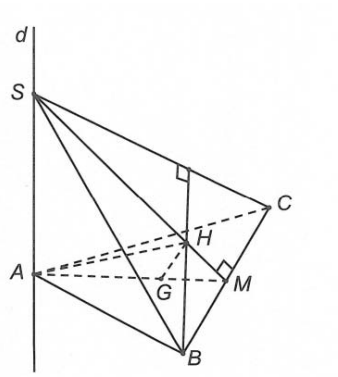
Hướng dẫn giải

Gọi *M* là trung điểm *BC* suy ra $AM\perp BC;SM\perp BC$.

Gọi *G* là trọng tâm tam giác *ABC*, vì tam giác *ABC* đều cạnh a nên $AM=\frac{a\sqrt{3}}{2};MG=\frac{1}{3}MA=\frac{a\sqrt{3}}{6}$ suy ra $MG.MA=\frac{a^2}{4}$.

Mặt khác H trực tâm tam giác SBC nên tam giác BMH và tam giác SMC là hai tam giác đồng dạng nên

$$\frac{BM}{SM}=\frac{MH}{MC}\Leftrightarrow MH.MS=BM.MC=\frac{a^2}{4}.$$



Do đó $MH.MS=MG.MA$ hay $\frac{MH}{MG}=\frac{MA}{MS}$ nên tam giác MHG và tam giác MAS đồng dạng suy ra $GH\perp SM$.

Vì H thuộc (SAM) cố định khi S thay đổi trên d và $GH\perp SM$ nên (C) là một phần của đường tròn đường kính GM do đó trong các mặt cầu chứa (C), mặt cầu có bán kính nhỏ nhất là mặt cầu nhận GM làm đường kính nên bán kính mặt cầu $R=\frac{GM}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{12}$.

Chọn C.

Dạng 4. Bài toán thực tế

1. Phương pháp giải

Nắm vững kiến thức các dạng toán trên để giải bài toán thực tế liên quan đến mặt cầu.

$$\mathrm{EV}_0=\frac{4}{3}\pi 3^3=36\pi\left(cm^3\right)$$

Bài tập: Người ta thả một viên bi có dạng hình cầu với bán kính bằng 3cm vào một cái ly dạng hình trụ đang chứa nước. Người ta thấy viên bi chìm xuống đáy ly và chiều cao của mực nước dâng lên thêm 1cm. Biết rằng chiều cao của mực nước ban đầu trong ly bằng 7,5cm. Tính thể tích V của khối nước ban đầu trong ly (kết quả lấy xấp xỉ).

A. $V=282,74cm^3$. **B.** $V=848,23cm^3$.

C. $V=636,17cm^3$. **D.** $V=1272,35cm^3$.

Hướng dẫn giải

Gọi V_0 là thể tích của viên bi.

Gọi R là bán kính của cái ly (không tính vỏ).

Theo bài ra ta có thể tích của cột nước dâng lên 1cm bằng thể tích viên bi nên ta có $\pi R^2.1=36\pi\Rightarrow R=6\left(cm\right)$

Suy ra thể tích V của khối nước ban đầu trong ly $\pi R^2.h=\pi.36.7,5=848,23\left(cm^3\right)$

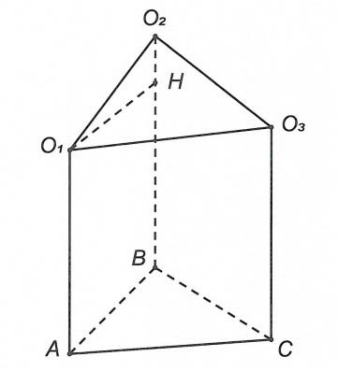
Chọn B.

2. Bài tập mẫu

Bài tập 1: Cho ba hình cầu tiếp xúc ngoài với nhau từng đôi một và cùng tiếp xúc với một mặt phẳng. Các tiếp điểm của các hình cầu trên mặt phẳng lập thành tam giác có các cạnh là 4, 2 và 3. Tích bán kính của ba hình cầu trên là

A. 12. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 9.

Hướng dẫn giải



Gọi $(O_1,r_1),(O_2,r_2),(O_3,r_3)$ lần lượt là 3 hình cầu thỏa mãn. Gọi *A*, *B*, *C* lần lượt là hình chiếu của O_1; O_2; O_3 trên mặt phẳng. Giả sử $AB=4, BC=2, AC=3$.

Ta có $O_1A=r_1; O_2B=r_2; O_3C=r_3; O_1O_2=r_1+r_2; O_2O_3=r_2+r_3; O_3O_1=r_3+r_1$.

Kẻ $O_1H\perp BO_2\ (H\in BO_2)\Rightarrow BH=r_1; O_2H=r_2-r_1$.

Theo định lý Py-ta-go ta có

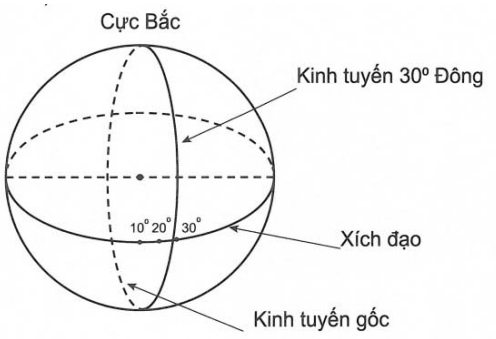
$$O_1O_2^{\,2}=O_1H^2+O_2H^2\Leftrightarrow (r_1+r_2)^2=AB^2+(r_2-r_1)^2\Leftrightarrow r_1r_2=\frac{AB^2}{4}.$$

Tương tự ta có $r_2r_3=\frac{BC^2}{4}; r_3r_1=\frac{AC^2}{4}$.

Vậy $r_1r_2r_3=\sqrt{\frac{AB^2BC^2CA^2}{64}}=3$.

Chọn B

Bài tập 2. Cho quả địa cầu có độ dài đường kinh tuyến 30° Đông là 40πcm (tham khảo hình vẽ).



Độ dài đường xích đạo là:

A. $40\sqrt{3}\pi\ cm.$ B. $40\pi\ cm.$ C. $80\pi\ cm.$ D. $\frac{80\pi}{\sqrt{3}}cm.$

Hướng dẫn giải

Đường xích đạo là đường vĩ tuyến lớn nhất. Độ dài đường xích đạo gấp hai lần đường kinh tuyến 30° Đông.

Vậy độ dài đường xích đạo là: $2.40\pi=80\pi(cm)$.

Chọn C.

Bài tập 3. Quả bóng đá được dùng thi đấu tại các giải bóng đá Việt Nam tổ chức có chu vi của thiết diện qua tâm là 68,5cm. Quả bóng được ghép nối bởi các miếng da hình lục giác đều màu trắng và đen, mỗi miếng có diện tích 49,83cm^2. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu miếng da để làm quả bóng trên?

A. ≈ 40 (miếng da). **B.** ≈ 20 (miếng da).

C. ≈ 35 (miếng da). **D.** ≈ 30 (miếng da).

Hướng dẫn giải

Vì thiết diện qua tâm là đường tròn có chu vi là 68,5cm, nên giả sử bán kính mặt cầu là R ta có $2\pi R = 68,5 \Rightarrow R = \dfrac{68,5}{2\pi}$.

Diện tích mặt cầu: $S_{xq} = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\dfrac{68,5}{2\pi}\right)^2 \approx 1493,59\left(cm^2\right)$.

Vì mỗi miếng da có diện tích 49,83cm^2 nên để phủ kín được mặt của quả bóng thì số miếng da cần là $\dfrac{1493,59}{49,83} \approx 29,97$. Vậy phải cần ≈ 30 miếng da.

Chọn D.

Dạng 5. Dạng toán tổng hợp

1. Phương pháp giải

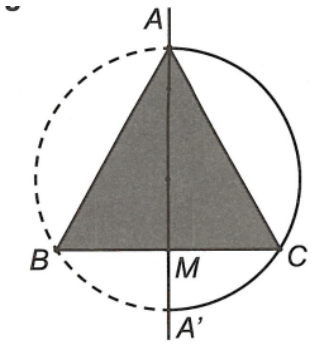
Sử dụng kiến thức về hình nón, hình trụ, hình cầu ở các dạng toán trên để giải bài toán tổng hợp.

Ví dụ: Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm I đường kính AA', M là trung điểm của BC. Khi quay tam giác ABM cùng với nửa hình tròn đường kính AA' xung quanh đường thẳng AM, ta được khối nón và khối cầu có thể tích lần lượt là V_1 và V_2. Tỷ số $\dfrac{V_1}{V_2}$ bằng

A. $\dfrac{9}{4}$. **B.** 49 **C.** $\dfrac{27}{32}$. **D.** $\dfrac{9}{32}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Gọi a là cạnh ΔABC đều, suy ra $BM = \dfrac{a}{2}; AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; IA = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Ta có $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{1}{3}\pi BM^2.AM}{\frac{4}{3}.\pi.IA^3}=\frac{1}{4}.\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2.\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^3}=\frac{9}{32}.$

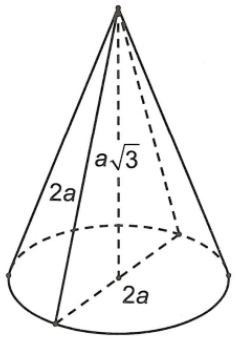
2. Bài tập

Bài tập 1. Cho hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác đều cạnh là 2a, có thể tích V_1 và hình cầu có đường kính bằng chiều cao hình nón, có thể tích V_2. Khi đó tỉ số thể tích $\frac{V_1}{V_2}$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{3}.$ **B.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{2}{3}.$ **C.** $\frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{2}.$ **D.** $\frac{V_1}{V_2}=1.$

Hướng dẫn giải

Chọn B.



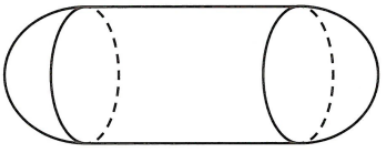
Cho hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác đều cạnh là $2a$

$\Rightarrow I=2a, R=a, h=a\sqrt{3}\Rightarrow V_1=\frac{1}{3}a\sqrt{3}\pi a^2=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi a^3;$

$V_2=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3.$

Vậy $\frac{V_1}{V_2}=\frac{2}{3}.$

Bài tập 2. Một cái bồn chứa nước gồm hai nửa hình cầu và một hình trụ (như hình vẽ).



Đường sinh của hình trụ bằng hai lần đường kính của hình cầu. Biết thể tích của bồn chứa nước là $\frac{128\pi}{3}m^3$. Tính diện tích xung quanh của cái bồn chứa nước theo đơn vị m^2.

A. 48π m^2. **B.** 50π m^2. **C.** 40π m^2. **D.** 64π m^2.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi x là bán kính hình cầu.

Ta có $l_t = 2d_c = 4R_c = 4R_t = 4x.$

Thể tích của bể nước là

$$V = V_t + V_c = \pi R_t^2 l_t + \frac{4}{3}\pi R_c^3 = \pi x^2.4x + \frac{4}{3}\pi x^3 = \frac{128\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2.$$

Diện tích xung quanh của bể nước là

$$S = 2\pi R_t.l_t + 4\pi R_c^2 = 2.2\pi.8 + 4\pi.2^2 = 48\pi\left(m^2\right).$$

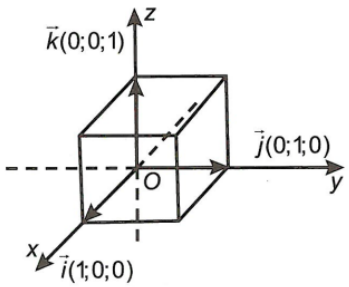
CHƯƠNG 3: PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN Oxyz

BÀI 1: HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

A. LÍ THUYẾT TRỌNG TÂM

1. Hệ tọa độ trong không gian

Hệ trục tọa độ Đề-các vuông góc trong không gian gồm ba trục x'Ox, y'Oy, z'Oz vuông góc với nhau từng đôi một.



Gọi $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz. Điểm O được gọi là gốc tọa độ.

Các mặt phẳng (Oxy), (Oyz), (Ozx) là các mặt phẳng tọa độ.

Không gian gắn với hệ tọa độ Oxyz được gọi là không gian Oxyz.

2. Tọa độ của vectơ

Trong không gian Oxyz, cho vectơ $\vec{u}$. Khi đó

$\vec{u}=(x;y;z)\Leftrightarrow \vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}.$

Chú ý:

1) $\vec{0}=(0;0;0).$

2) $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=b_1\\a_2=b_2\\a_3=b_3\end{cases}$

3) $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}\left(\vec{b}\neq\vec{0}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=kb_1\\a_2=kb_2\\a_3=kb_3\end{cases}$

Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3),\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ và k là số thực tùy ý.

Khi đó ta có:

- $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3).$
- $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1;a_2-b_2;a_3-b_3).$
- $k.\vec{a}=(ka_1;ka_2;ka_3)$
- $\vec{a}.\vec{b}=(a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3).$

Ứng dụng của tích vô hướng:

- $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3=0$
- $\vec{a}^2=\vec{a}.\vec{a}=a_1^2+a_2^2+a_3^2.$

- $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.
- $\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

Với $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$.

3. Tọa độ của một điểm

Trong không gian Oxyz, cho điểm M tùy ý.

Khi đó $M(x;y;z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Tính chất

- Nếu $A\left(x_A;y_A;y_A\right)$ và $B\left(x_B;y_B;y_B\right)$ thì

$\overrightarrow{AB}\left(x_B - x_A; y_B - y_A; z_C - z_A\right)$.

Khi đó $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 + \left(z_B - z_A\right)^2}$.

- Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là

$I\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}; \dfrac{z_A + z_B}{2}\right)$.

- Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

$G\left(\dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}; \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}; \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$.

- Tọa độ trọng tâm G của tứ diện ABCD là

$G\left(\dfrac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \dfrac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; \dfrac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right)$

Chú ý: *Trong hệ tọa độ Oxyz, cho điểm M (x; y; z) ta có các khẳng định sau:*

- $M \equiv O \Leftrightarrow M\left(0;0;0\right)$.
- $M \in \left(Oxy\right) \Leftrightarrow z = 0$, tức là $M\left(x;y;0\right)$.
- $M \in \left(Oyz\right) \Leftrightarrow x = 0$, tức là $M\left(0;y;z\right)$.
- $M \in \left(Oxz\right) \Leftrightarrow y = 0$, tức là $M\left(x;0;z\right)$.
- $M \in Ox \Leftrightarrow y = z = 0$, tức là $M\left(x;0;0\right)$.
- $M \in Oy \Leftrightarrow x = z = 0$, tức là $M\left(0;y;0\right)$.
- $M \in Oz \Leftrightarrow x = y = 0$, tức là $M\left(0;0;z\right)$.

4. Tích có hướng của hai vectơ

Định nghĩa

Trong không gian Oxyz, cho hai vectơ $\vec{b} = \left(b_1;b_2;b_3\right)$. Tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một vectơ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ và được xác định như sau:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$$

$$= \left(a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1\right).$$

Tính chất

- $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b} \Leftrightarrow \left[\vec{a},\vec{b}\right] = \vec{0}$.
- $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

- $\left[\vec{b},\vec{a}\right]=-\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.
- $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\sin\left(\vec{a};\vec{b}\right)$.

5. Phương trình mặt cầu

Trong không gian Oxyz, mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ bán kính R có phương trình là

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Ngược lại phương trình

$$x^2+y^2+z^2+2Ax+2By+2Cz+D=0\ (1).$$

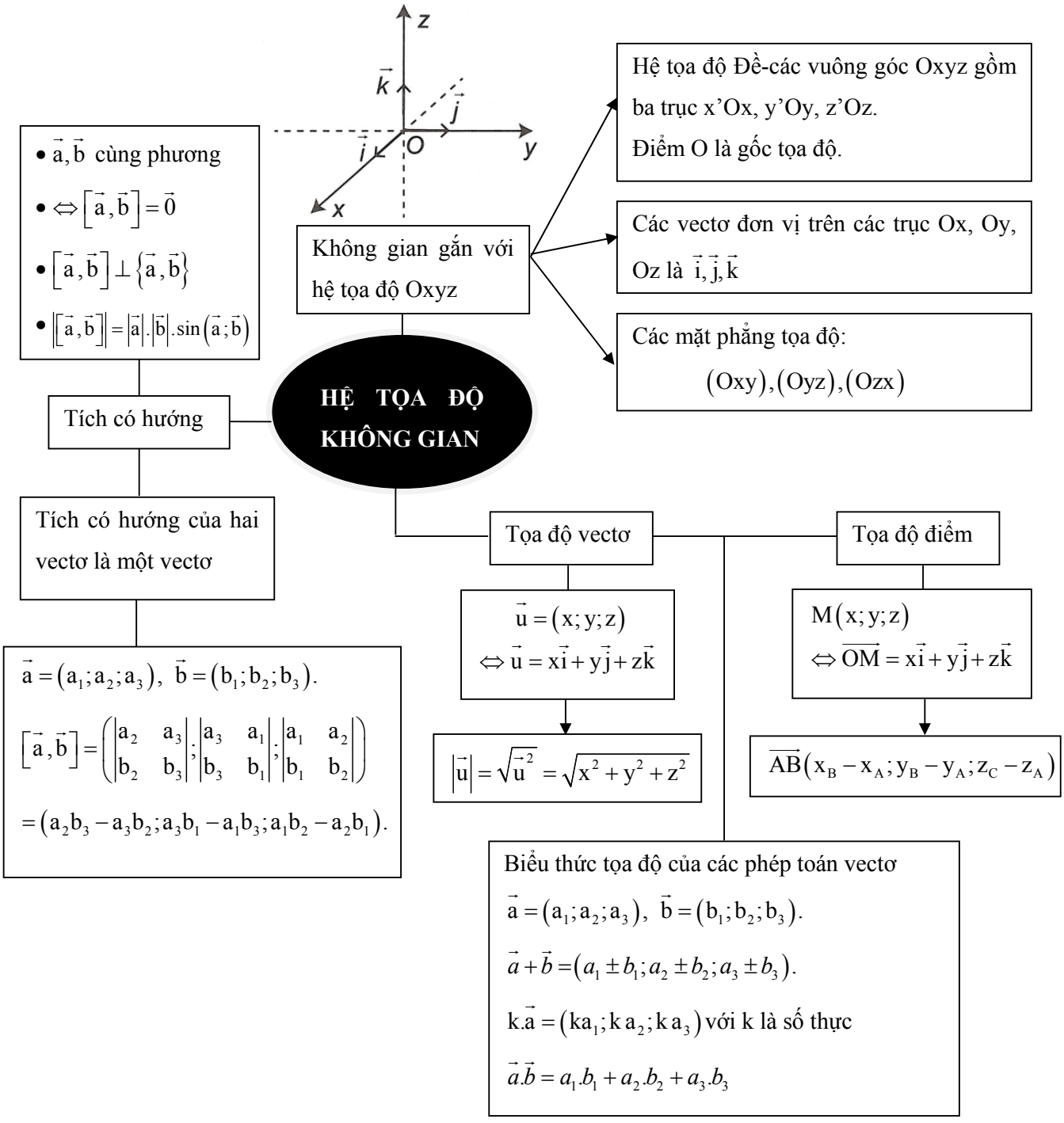
Với $A^2+B^2+C^2-D>0$ là phương trình mặt cầu tâm $I(-A;-B;-C)$

có bán kính $R=\sqrt{A^2+B^2+C^2-D}$.

Chú ý: *Điều kiện để phương trình (1) là phương trình mặt cầu là:*

$$A^2+B^2+C^2-D>0.$$

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA



B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Tìm tọa độ điểm, vectơ trong hệ trục Oxyz

1. Phương pháp

Sử dụng các định nghĩa và khái niệm có liên quan đến điểm, vectơ: Tọa độ của điểm, vectơ; độ dài vectơ, ...và các phép toán vectơ ... để tính tổng, hiệu các vectơ; tìm tọa độ trọng tâm tam giác, ...

2. Bài tập

Bài tập 1. Trong không gian Oxyz, cho $\vec{a}(-2;2;0), \vec{b}(2;2;0), \vec{c}(2;2;2)$. Giá trị của $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|$ bằng

A. 6. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** 11. **D.** $2\sqrt{11}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

T a có $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(2;6;2)$ nên $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=\sqrt{2^2+6^2+2^2}=\sqrt{44}=2\sqrt{11}$.

Bài tập 2. Trong không gian Oxyz cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(-1;0;1)$. Trọng tâm G của tam giác OAB có tọa độ là:

A. $(0;1;1)$. **B.** $\left(0;\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$. **C.** $(0;2;4)$. **D.** $(-2;-2;-2)$.

Hướng dẫn giải

Tọa độ trọng tâm tam giác là: $\begin{cases} x_G=\dfrac{1-1+0}{3}=0 \\ y_G=\dfrac{2+0+0}{3}=\dfrac{2}{3} \\ z_G=\dfrac{3+1+0}{3}=\dfrac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(0;\frac{2}{3};\frac{4}{3}\right)$.

Chọn B.

Bài tập 3. Trong không gian Oxyz, cho vectơ $\vec{a}=(1;-2;4)$, $\vec{b}=(x_0;y_0;z_0)$) cùng phương với vectơ $\vec{a}$. Biết vectơ $\vec{b}$ tạo với tia Oy một góc nhọn và $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{21}$. Giá trị của tổng $x_0+y_0+z_0$ bằng

A. -3. **B.** 6. **C.** -6. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Lại có $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{21}$. suy ra $\sqrt{k^2+4k^2+16k^2}=\sqrt{21} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k=1 \\ k=-1. \end{array}\right.$

Với $k=1$ ta có $\left|\vec{b}\right|=(1;-2;4)$, suy ra góc giữa $\vec{b}$ và Oy thỏa mãn

$\cos\left(\vec{b},Oy\right)=\dfrac{\vec{b}.\vec{j}}{\left|\vec{b}\right|.\left|\vec{j}\right|}$, trong đó $\vec{b}.\vec{j}=-2<0$.

Suy ra góc tạo bởi $\vec{b}$ và Oy là góc tù. Suy ra $k=1$ không thỏa mãn.

Với $k=-1$ ta có $\left|\vec{b}\right|=(-1;2;-4)$, suy ra góc giữa $\vec{b}$ và Oy thỏa mãn

$\cos\left(\vec{b},Oy\right)=\dfrac{\vec{b}.\vec{j}}{\left|\vec{b}\right|.\left|\vec{j}\right|}$, trong đó $\vec{b}.\vec{j}=2>0$.

Suy ra góc tạo bởi $\vec{b}$ và Oy là góc nhọn. Vậy $k=-1$ thỏa mãn.

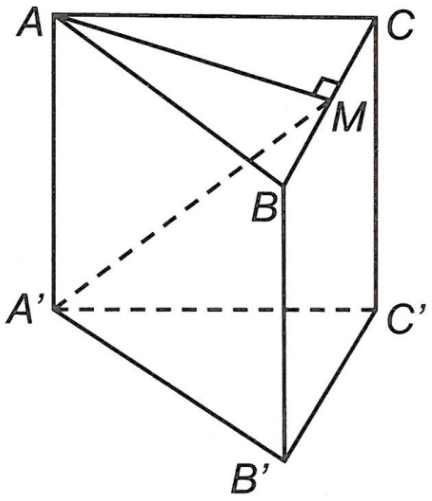
Do đó $\left|\vec{b}\right|=(-1;2;-4)$. Suy ra $x_0+y_0+z_0=-1+2-4=-3$.

Bài tập 4. Trong không gian Oxyz, cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $A'\left(\sqrt{3};-1;1\right)$, hai đỉnh B, C thuộc trục Oz và $AA'=1$ (C không trùng với O). Biết vecto $\vec{u}=(a;b;2)$ (với $a,b\in\mathbb{R}$) là một vectơ chỉ phương của đường thẳng $A'C$. Tính $T=a^2+b^2$.

A. $T=5$. **B.** $T=16$. **C.** $T=4$. **D.** $T=9$.

Hướng dẫn giải

Chọn B



Lấy M là trung điểm BC.

Khi đó ta có $\begin{cases}AM\perp BC\\AA'\perp BC\end{cases}$ nên $BC\perp A'M$ tại M;

suy ra M là hình chiếu của A' trên trục Oz

$\Rightarrow M(0;0;1)$ và $A'M=2$.

Mặt khác $AM=\sqrt{A'M^2-AA'^2}=\sqrt{3}$.

Lại có ΔABC đều nên $AM=\dfrac{\sqrt{3}}{2}BC=\sqrt{3}$

$\Rightarrow BC=2\Rightarrow MC=1$.

Gọi $C(0;0;c), c\neq 0$ suy ra $MC=|c-1|$.

$MC=1\Leftrightarrow|c-1|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=0\\c=2\end{array}\right.$ (loại $c=0$) $\Rightarrow C(0;0;2)$.

$\overrightarrow{A'C}=\left(-\sqrt{3};1;1\right)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng $A'C$

Suy ra $\vec{u}=\left(-2\sqrt{3};2;2\right)$ cũng là một vectơ chỉ phương của $A'C$.

Vậy $a=-2\sqrt{3};b=2$. Suy ra $T=a^2+b^2=16$.

Dạng 2. Tích có hướng

1. Phương pháp giải

Để tính tích có hướng của hai vectơ, ta áp dụng công thức:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)$$

$$=\left(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1\right).$$

Bài tập: Tính tích có hướng của hai vectơ

$$\vec{a}=\left(1;0;1\right),\vec{b}=\left(2;1;-1\right)$$

Hướng dẫn giải

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}\right)=\left(-1;3;1\right)$$

2. Bài tập mẫu

Bài tập 1. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Kết luận nào sau đây sai?

A. $\left[\vec{a},3\vec{b}\right]=3\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

B. $\left[\overrightarrow{2a},\vec{b}\right]=2\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

C. $\left[\overrightarrow{3a},3\vec{b}\right]=3\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

D. $\left\|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right\|=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $\left[\overrightarrow{3a},3\vec{b}\right]=3\left[\vec{a},3\vec{b}\right]=9\left[\vec{a},\vec{b}\right]$. (C sai)

Bài tập 2. Trong không gian Oxyz, cho ba vectơ $\vec{a}=\left(1;2;1\right),\vec{b}=\left(0;2;-1\right),\vec{c}=(m,1;0)$.

Tìm giá trị thực của tham số m để ba vectơ $\vec{a};\vec{b};\vec{c}$ đồng phẳng.

A. $m=1$.

B. $m=0$.

C. $m=-\frac{1}{4}$.

D. $m=\frac{1}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(-4;1;2\right)$.

Ba vectơ $\vec{a};\vec{b};\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}=0\Leftrightarrow-4m+1=0\Leftrightarrow m=\frac{1}{4}$.

Bài tập 3. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho năm điểm $A\left(0;0;3\right)$, $B\left(2;-1;0\right)$, $C\left(3;2;4\right)$, $D\left(1;3;5\right)$, $E\left(4;2;1\right)$ tạo thành một hình chóp có đáy là tứ giác. Đỉnh của hình chóp tương ứng là

A. Điểm C.

B. Điểm A.

C. Điểm B.

D. Điểm D.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Xét đáp án A, giả sử C là đỉnh của hình chóp, ta có:

$\overrightarrow{AB}=\left(2;-1;-3\right)$, $\overrightarrow{AD}=\left(1;3;2\right)$, $\overrightarrow{AE}=\left(4;2;-2\right)$, $\overrightarrow{AC}=\left(3;2;1\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AE} = 4.7 - 2.7 - 2.7 = 0 \\ \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AC} = 3.7 - 2.7 + 1.7 = 14. \end{cases}$$

Suy ra A, B, D, E đồng phẳng.

Vậy điểm C là đỉnh của hình chóp.

Bài tập 4. Trong không gian Oxyz cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;3)$, $D(2;-2;0)$.

Có tất cả bao nhiêu mặt phẳng phân biệt đi qua 3 trong 5 điểm O, A, B, C, D?

A. 10. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1;2;0)$, $\overrightarrow{AD} = (1;-2;0)$, suy ra 3 điểm A, B, D thẳng hàng.

Từ đó chúng ta xác định được vị trí các điểm trong hệ trục độ Oxyz và đếm trực tiếp ta có 5 mặt phẳng đi qua 3 trong 5 điểm O, A, B, C, D là:

(OCB), (OCA), (OCD), (OAB), (ABC)

Dạng 3. Ứng dụng của tích có hướng để tính diện tích và thể tích

1. Phương pháp giải

- Diện tích hình bình hành: $S_{\square ABCD} = \left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\right|$.
- Tính diện tích tam giác: $S_{\triangle ABC} = \left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$.
- Tính thể tích hình hộp: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = \left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$.
- Tính thể tích tứ diện: $V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm $A(1;2;0)$, $B(2;1;2)$, $C(-1;3;1)$.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

A. $3\sqrt{10}$. **B.** $\frac{3\sqrt{10}}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{10}}{5}$. **D.** $\sqrt{10}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1;-1;2), \overrightarrow{AC} = (-2;1;1)$, $\overrightarrow{BC} = (-3;2;-1)$

Suy ra $AB = AC = \sqrt{6}; BC = \sqrt{14}$.

Suy ra $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right| = \frac{\sqrt{35}}{2}$.

Gọi R_{ABC} là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ta có

$$R_{ABC}=\frac{AB.AC.BC}{4S_{ABC}}=\frac{\sqrt{6}.\sqrt{6}.\sqrt{14}}{4.\frac{\sqrt{35}}{2}}=\frac{3\sqrt{10}}{5}.$$

Bài tập 2. Trong không gian Oxyz, cho $A(2;\ 1;-1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;3)$ và D nằm trên trục Oy. Thể tích tứ diện ABCD bằng 5. Tọa độ của D là

A. $D(0;-7;0)$.

B. $D(0;8;0)$.

C. $D(0;-7;0)$ hoặc $D(0;8;0)$.

D. $D(0;7;0)$ hoặc $D(0;-8;0)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Vì $D\in Oy$ nên $D(0;y;0)$. Khi đó. Thể tích của tứ diện ABCD là

$$V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{6}|4y-2|$$

Theo đề ra, ta có $\frac{1}{6}|4y-2|=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-7\\y=8.\end{array}\right.$

Bài tập 3. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tọa độ các đỉnh $A(0;0;0)$, $B(0;a;0)$, $C\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};0\right)$ và $A'(0;0;2a)$. Gọi D là trung điểm cạnh BB' và M di động trên cạnh AA'. Diện tích nhỏ nhất của tam giác MDC' là

A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

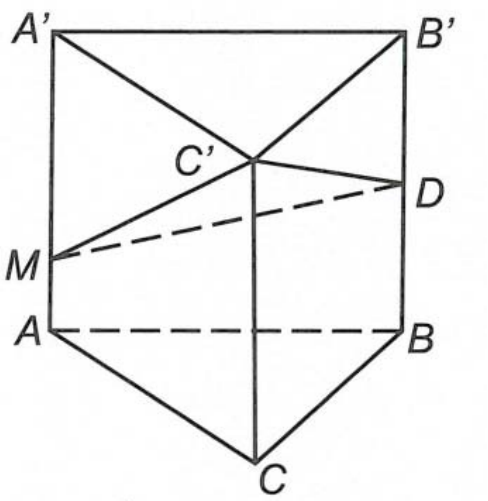
B. $\frac{a^2\sqrt{5}}{4}$.

C. $\frac{a^2\sqrt{6}}{4}$.

D. $\frac{a^2\sqrt{15}}{4}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Ta có $\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AA'}\Rightarrow C'\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};2a\right).$

$\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{BB'}\Rightarrow B'(0;a;2a).$

Điểm D là trung điểm của BB' nên $D(0;a;a).$

$M(0;0;t)$ với $0<t<2a.$ Ta có $\overrightarrow{DC'}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};a\right),\overrightarrow{DM}=(0;-a;t-a).$

Ta có:

$$S_{MDC'}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{DC'},\overrightarrow{DM}\right]\right|=\frac{a\sqrt{4t^2-12at+15a^2}}{4}=\frac{a\sqrt{(2t-3a)^2+6a^2}}{4}\geq\frac{a^2\sqrt{6}}{4}.$$

Suy ra $\min S_{\Delta MDC'}=\frac{a^2\sqrt{6}}{4}$ khi $t=\frac{3}{2}a.$

Dạng 4: Phương trình mặt cầu

1. Phương pháp giải

Cách viết phương trình mặt cầu:

- Mặt cầu tâm $I(a;b;c),$ bán kính R có phương trình

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

Bài tập: Phương trình mặt cầu tâm $I(2;-1;1),$ bán kính R = 3 là $(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=9.$

- Xét phương trình:

$$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0.\ (*)$$

Ta có $(*)\Leftrightarrow(x^2+2ax)+(y^2+2by)+(z^2+2cz)=-d$

$$\Leftrightarrow(x+a)^2+(y+b)^2+(z+c)^2=a^2+b^2+c^2-d.$$

Điều kiện để phương trình (*) là phương trình mặt cầu $a^2+b^2+c^2>d.$

Khi đó (S) có $\begin{cases}\text{tâm } I(-a;-b;-c)\\ \text{bán kính } R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}.\end{cases}$

Đặc biệt mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2=R^2$ thì (S) có

$$\begin{cases}\text{tâm } O(0;0;0)\\ \text{bán kính } R.\end{cases}$$

2. Bài tập

Bài tập 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt cầu (S) có phương trình $(S): x^2+y^2+z^2-2x+6y-6z-6=0.$ Tính diện tích mặt cầu (S)

A. $100\pi.$ **B.** $120\pi.$ **C.** $9\pi.$ **D.** $42\pi.$

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-3;3)$, bán kính $r=\sqrt{1+9+9+6}=5.$

Vậy diện tích mặt cầu là $4\pi r^2=4\pi.5^2=100\pi.$

Bài tập 2. Trong không gian Oxyz, cho điểm $I(1;-2;3).$ Viết phương trình mặt cầu tâm I, cắt trục Ox tại hai điểm A và B sao cho $AB=2\sqrt{3}.$

A. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16.$ **B.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=20.$

C. $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=25.$ **D.** $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=9.$

Chú ý:

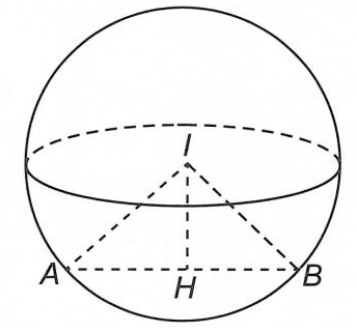
Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng Δ:

- *Xác định điểm* $M\in\Delta.$

- *Áp dụng công thức:* $d(A,\Delta)=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{AM},\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}.$

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Gọi H là trung điểm $AB\Rightarrow IH\perp AB$ tại $H\Rightarrow IH=d_{(I;(AB))}=d_{(I;Ox)}$

Lấy $M(2;0;0)\in Ox\Rightarrow IH=d_{(I,Ox)}=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IM},\vec{i}\right]\right|}{\vec{i}}=\sqrt{3}.$

Bán kính mặt cầu cần tìm là $R=IA=\sqrt{IH^2+HA^2}=4.$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=16.$

Bài tập 3. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$ và hai điểm $A(4;3;1)$, $B(3;1;3)$; M là điểm thay đổi trên (S). Gọi m, n lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $P=2MA^2-MB^2$. Giá trị $(m-n)$ bằng

A. 64. **B.** 60. **C.** 68. **D.** 48.

Hướng dẫn giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-1)$ và bán kính R = 3.

Lấy điểm E sao cho $2\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{BE}=\vec{0}\Leftrightarrow E(5;5;-1)$. Ta có $IE=5$.

Dễ thấy điểm E là điểm nằm ngoài mặt cầu (S).

Khi đó $P=2MA^2-MB^2=2\left(\overrightarrow{ME}-\overrightarrow{AE}\right)^2-\left(\overrightarrow{ME}-\overrightarrow{BE}\right)^2=ME^2+2AE^2-BE^2$.

P lớn nhất và nhỏ nhất khi và chỉ khi ME lớn nhất và nhỏ nhất.

$\max ME=IE+R=8;\min ME=IE-R=2$.

Do đó $m=\max P=64+2AE^2-BE^2;n=\min P=4+2AE^2-BE^2$.

Suy ra $m-n=60$.

Chọn B.

BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

A. LÍ THUYẾT TRỌNG TÂM

1. Phương trình mặt phẳng

Vectơ pháp tuyến

Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ là vectơ pháp tuyến của (α) nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc với (α).

Cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng

Hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ không cùng phương là cặp vectơ chỉ phương của (α) nếu các giá của chúng song song hoặc nằm trên (α).

Chú ý:

- Nếu $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của (α) thì $k\vec{n}(k \neq 0)$ cũng là vectơ pháp tuyến của (α).
- Nếu $\vec{a},\vec{b}$ là một cặp vectơ chỉ phương của (α) thì $\vec{n} = \left[\vec{a},\vec{b}\right]$ là một vectơ pháp tuyến của (α).

Phương trình tổng quát của mặt phẳng

$Ax + By + Cz + D = 0$ với $A^2 + B^2 + C^2 > 0$.

- Nếu (α) có phương trình $Ax + By + Cz + D = 0$ thì $\vec{n} = (A;B;C)$ là một vectơ pháp tuyến của (α).
- Phương trình mặt phẳng đi qua $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A;B;C)$ là:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Các trường hợp đặc biệt

Các hệ số	Phương trình mặt phẳng (α)	Tính chất mặt phẳng (α)
$D = 0$.	$Ax + By + Cz = 0$	(α) đi qua gốc tọa độ O
$A = 0$	$By + Cz + D = 0$	$(\alpha)//$ Ox hoặc $(\alpha) \supset Ox$
$B = 0$	$Ax + Cz + D = 0$	$(\alpha)//Oy$ hoặc $(\alpha) \supset Oy$
$C = 0$	$Ax + By + D = 0$	$(\alpha)//Oz$ hoặc $(\alpha) \supset Oz$
$A = B = 0$	$Cz + D = 0$	$(\alpha)//(Oxy)$ hoặc $(\alpha) \equiv (Oxy)$
$A = C = 0$	$By + D = 0$	$(\alpha)//(Oxz)$ hoặc $(\alpha) \equiv (Oxz)$
$B = C = 0$	$Ax + D = 0$	$(\alpha)//(Oyz)$ hoặc

		$(\alpha)\equiv(Oyz)$

Nếu (α) cắt các trục toạ độ tại các điểm $(a;0;0),(0;b;0),(0;0;c)$ với $abc\neq 0$ thì ta có phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn $(\alpha):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Chú ý: *Nếu trong phương trình* (α) *không chứa ẩn nào thì* (α) *song song hoặc chứa trục tương ứng.*

2. Khoảng cách từ một điểm tới mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(x_A;y_A;z_A)$ và mặt phẳng

$(\alpha):Ax+By+Cz+D=0$.

Khi đó khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (α) được tính theo công thức:

$$\mathrm{d}(A,(\alpha))=\frac{|Ax_A+By_A+Cz_A+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

3. Vị trí tương đối

Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng

$(\alpha):A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0;\quad(\beta):A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$

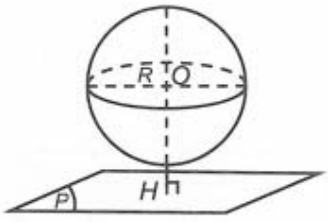
+) $(\alpha)\equiv(\beta)\Leftrightarrow\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$.

+) $(\alpha)//(\beta)\Leftrightarrow\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$.

+) $(\alpha)\cap(\beta)\Leftrightarrow\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$ hoặc $\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$.

+) $(\alpha)\perp(\beta)\Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

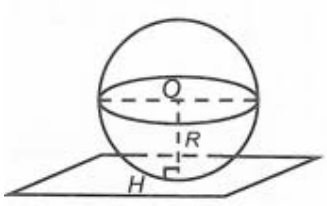
Vị trí tương đối giữa mặt phẳng và mặt cầu



Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng và mặt cầu

$(\alpha):Ax+By+Cz+D=0$;

$(S):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.



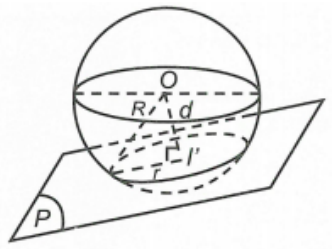
Để xét vị trí của (α) và (S) ta làm như sau:

+) Nếu $d(I,(\alpha))>R$ thì (α) không cắt (S).

+) Nếu $d(I,(\alpha))=R$ thì (α) tiếp xúc (S) tại H. Khi đó H được gọi là tiếp điểm đồng thời H là hình chiếu vuông góc của I lên (α) và (α) được gọi là tiếp diện.

+) Nếu $d\left(I,(\alpha)\right)<R$ thì (α) cắt (S) theo đường tròn có phương trình

$$(C):\begin{cases}(x-a)^2+(y-b)^2+z-c)^2=R^2\\ Ax+By+Cz+D=0.\end{cases}$$



Bán kính của (C) là $r=\sqrt{R^2-\mathrm{d}^2[I,(\alpha)]}$.

Tâm J của (C) là hình chiếu vuông góc của I trên (α).

4. Góc giữa hai mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng

$(\alpha):A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ và $(\beta):A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

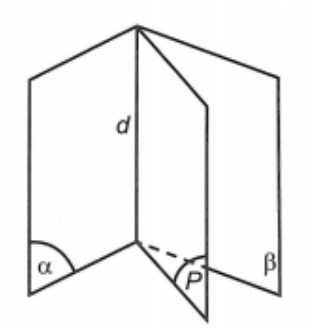
Góc giữa (α) và (β) bằng hoặc bù với góc giữa hai vectơ pháp tuyến $\vec{n}_\alpha,\vec{n}_\beta$. Tức là

$$\cos\left((\alpha),(\beta)\right)=\left|\cos\widehat{\vec{n}_\alpha,\vec{n}_\beta}\right|=\frac{\left|\vec{n}_\alpha\vec{n}_\beta\right|}{\left|\vec{n}_\alpha\right|\cdot\left|\vec{n}_\beta\right|}=\frac{\left|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Chùm mặt phẳng

- Tập hợp tất cả các mặt phẳng qua giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) được gọi là một chùm mặt phẳng.
- Gọi (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng

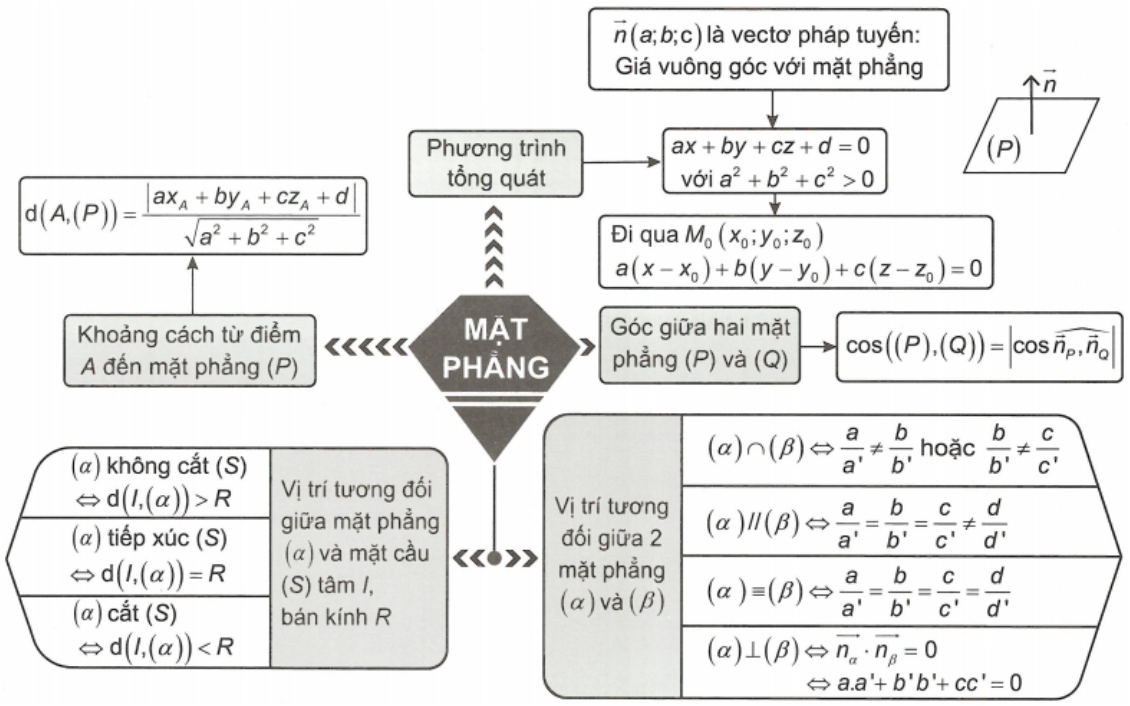
$$(\alpha):A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$
$$(\beta):A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$



Khi đó nếu (P) là mặt phẳng chứa (d) thì mặt phẳng (P) có dạng

$m\cdot\left(A_1x+B_1y+C_1z+D_1\right)+n\cdot\left(A_2x+B_2y+C_2z+D_2\right)=0$ với $m^2+n^2\neq0$

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG HÓA



B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Xác định vectơ pháp tuyến và viết phương trình mặt phẳng

1. Phương pháp

1. Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$ là $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$

2. Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ có cặp vectơ chỉ phương $\vec{a},\vec{b}$. Khi đó một vectơ pháp tuyến của (α) là $\vec{n}=[\vec{a},\vec{b}]$.

2. Bài tập

Bài tập 1: Cho mặt phẳng $(Q):x-y+2z-2=0.$ Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q), đồng thời cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại các điểm M,N sao cho $MN=2\sqrt{2}$.

A. $(P):x-y+2z+2=0$.
B. $(P):x-y+2z=0$.
C. $(P):x-y+2z\pm2=0.$
D. $(P):x-y+2z-2=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$(P)//(Q)$ nên phương trình mặt phẳng (P) có dạng $x-y+2z+D=0$ $(D\neq-2)$.

Khi đó mặt phẳng (P) cắt các trục Ox,Oy lần lượt tại các điểm $M(-D;0;0)$, $N(0;D;0)$.

Từ giả thiết: $MN=2\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{2D^2}=2\sqrt{2}\Leftrightarrow D=2$ (do $D\neq-2$).

Vậy phương trình mặt phẳng $(P):x-y+2z+2=0$.

Chú ý: *Mặt phẳng* (α) *đi qua điểm* $M(x_0;y_0;z_0)$ *và song song với mặt phẳng* $(\beta): Ax+By+Cz+D=0$ *thì* (α) *có phương trình là*

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

Bài tập 2: Cho điểm $M(1;2;5)$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm M cắt trục tọa độ Ox,Oy,Oz tại A,B,C sao cho M là trực tâm tam giác ABC. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $x+y+z-8=0$. **B.** $x+2y+5z-30=0$. **C.** $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=0$. **D.** $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $OA\perp(OBC)\Rightarrow \left.\begin{matrix}OA\perp BC\\ AM\perp BC\end{matrix}\right\}\Rightarrow BC\perp(OAM)\Rightarrow BC\perp OM$ (1)

Tương tự $AB\perp OM$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $OM\perp(ABC)$ hay $OM\perp(P)$.

Suy ra $\overrightarrow{OM}=(1;2;5)$ là vectơ pháp tuyến của (P).

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là

$x-1+2(y-2)+5(z-5)=0\Leftrightarrow x+2y+5z-30=0.$

Bài tập 3: Cho tứ diện $ABCD$ có đỉnh $A(8;-14;-10)$; AD,AB,AC lần lượt song song với Ox,Oy,Oz. Phương trình mặt phẳng (BCD) đi qua $H(7;-16;-15)$ là trực tâm ΔBCD có phương trình là

A. $x+2y+5z-100=0$. **B.** $x+2y+5z+100=0$.

C. $\frac{x}{7}+\frac{y}{-16}+\frac{z}{-15}=0$. **D.** $\frac{x}{7}+\frac{y}{-16}+\frac{z}{-15}=1$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Theo đề ra, ta có (BCD) đi qua $H(7;-16;-15)$, nhận $\overrightarrow{HA}=(1;2;5)$ là vectơ pháp tuyến. Phương trình mặt phẳng (BCD) là

$(x-7)+2(y+16)+5(z+15)=0$

$\Leftrightarrow x+2y+5z+100=0.$

Vậy $(BCD): x+2y+5z+100=0$.

Bài tập 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, lập phương trình của các mặt phẳng song song với mặt phẳng $(\beta): x+y-z+3=0$ và cách (β) một khoảng bằng $\sqrt{3}$.

A. $x+y-z+6=0; x+y-z=0$. **B.** $x+y-z+6=0$.

C. $x-y-z+6=0; x-y-z=0$. **D.** $x+y+z+6=0; x+y+z=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi (α) là mặt phẳng cần tìm. Ta có $A(0;0;3)\in(\beta)$.

Do $(\alpha)//(\beta)$ nên phương trình của mặt phẳng (α) có dạng:

$x+y-z+m=0$ với $m\neq 3$.

Ta có $\mathrm{d}((\alpha),(\beta))=\sqrt{3}\Leftrightarrow \mathrm{d}(A,(\alpha))=\sqrt{3}\Leftrightarrow \dfrac{|m-3|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$.

$\Leftrightarrow |m-3|=3\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=6 \\ m=0 \end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình của các mặt phẳng cần tìm là

$x+y-z+6=0$ và $x+y-z=0$.

Bài tập 5: Trong không gian $Oxyz,$ cho hai mặt phẳng

$$(P):x+3z+2=0,(Q):x+3z-4=0.$$

Mặt phẳng song song và cách đều (P) và (Q) có phương trình là:

A. $x+3z-1=0$. **B.** $x+3z-2=0$. **C.** $x+3z-6=0$. **D.** $x+3z+6=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Điểm $M(x;y;z)$ bất kỳ cách đều (P) và $(Q)\Leftrightarrow d(M;(P))=d(M;(Q))$

$\Leftrightarrow \dfrac{|x+3z+2|}{\sqrt{1+9}}=\dfrac{|x+3z-4|}{\sqrt{1+9}}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+3z+2=x+3z-4 \\ x+3z+2=-x-3z+4 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2=-4 \\ x+3z-1=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow x+3z-1=0.$

Vậy M thuộc $(\alpha):x+3z-1=0.$ Nhận thấy (α) song song với (P) và (Q).

Bài tập 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz,$ cho hai điểm $A(1;2;1)$, $B(3;4;0)$ và mặt phẳng $(P):ax+by+cz+46=0$. Biết rằng khoảng cách từ A,B đến mặt phẳng (P) lần lượt bằng 6 và 3. Giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ bằng

A. -3. **B.** -6. **C.** 3. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của A,B trên mặt phẳng (P).

Theo giả thiết, ta có: $AB=3,AH=6,BK=3$.

Do đó A,B ở cùng phía với mặt phẳng (P).

Lại có: $AB+BK\geq AK\geq AH.$ Mà $AB+BK=AH$ nên $H\equiv K$.

Suy ra A,B,H là ba điểm thẳng hàng và B là trung điểm của AH nên tọa độ $H(5;6;-1)$.

Vậy mặt phẳng (P) đi qua $H(5;6;-1)$ và nhận $\overrightarrow{AB}=(2;2;-1)$ là vectơ pháp tuyến nên có phương trình là $2(x-5)+2(y-6)-1(z+1)=0\Leftrightarrow 2x+2y-z-23=0$

Theo bài ra, ta có $(P):-4x-4y+2z+46=0$ nên $a=-4,b=-4,c=2$.

Vậy $T = a + b + c = -6$.

Dạng 2. Viết phương trình mặt phẳng liên quan đến mặt cầu

1. Phương pháp

Viết phương trình mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm H.

Giả sử mặt cầu (S) có tâm I và bán kính R, khi đó ta viết được phương trình mặt phẳng (α) đi qua H và có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = \overrightarrow{IH}$.

2. Bài tập

Bài tập 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 12$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z - 3 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng song song với (P) và cắt (S) theo thiết diện là đường tròn (C) sao cho khối nón có đỉnh là tâm mặt cầu và đáy là hình tròn (C) có thể tích lớn nhất.

A. $2x + 2y - z + 2 = 0$ hoặc $2x + 2y - z + 8 = 0$.

B. $2x + 2y - z - 1 = 0$ hoặc $2x + 2y - z + 11 = 0$.

C. $2x + 2y - z - 6 = 0$ hoặc $2x + 2y - z + 3 = 0$.

D. $2x + 2y - z + 2 = 0$ hoặc $2x + 2y - z + 2 = 0$.

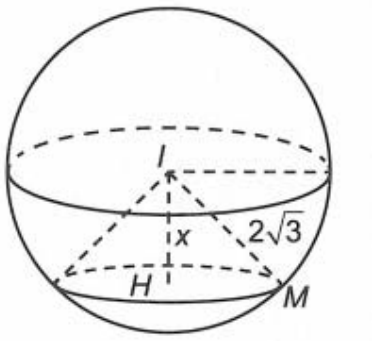
Hướng dẫn giải

Chọn B

Ta có $(\alpha) // (P)$ nên $(\alpha): 2x + 2y - z + d = 0$ $(d \neq -3)$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;3)$, bán kính $R = 2\sqrt{3}$.

Gọi (H) là khối nón thỏa mãn đề bài với đường sinh $IM = R = 2\sqrt{3}$.



Đặt $x = h = d(I,(\alpha))$. Khi đó bán kính đường tròn đáy hình nón là $r = \sqrt{12 - x^2}$.

Thể tích khối nón là $V_{(H)} = \frac{1}{3}\pi\left(12 - x^2\right)x$ với $0 < x < 2\sqrt{3}$.

Xét hàm số: $f(x) = \frac{1}{3}\pi\left(12 - x^2\right)x$ với $0 < x < 2\sqrt{3}$.

Khi đó $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 2$ hay $d(I,(\alpha)) = 2$.

Ta có $d(I,(\alpha))=2\Leftrightarrow\frac{|2.1+2\cdot(-2)-3+d|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d-5=6\\d-5=-6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d=11\\d=-1\end{array}\right.$.

.

Chú ý: *Công thức tính thể tích hình nón:*

$V=\frac{1}{3}hS=\frac{1}{3}.2\pi R.h$

Trong đó R là bán kính đáy, h là chiều cao.

Bài tập 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+(z-1)^2=4$ và điểm $A(2;2;2)$. Từ A kẻ ba tiếp tuyến AB,AC,AD với mặt cầu (B,C,D là các tiếp điểm). Phương trình mặt phẳng (BCD) là

A. $2x+2y+z-1=0$.

B. $2x+2y+z-3=0$.

C. $2x+2y+z+1=0$.

D. $2x+2y+z-5=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Ta có mặt cầu (S) có tâm I (0;0;1) và bán kính $R=2$.

Do AB,AC,AD là ba tiếp tuyến của mặt cầu (S) với B,C,D là các tiếp điểm nên

$\begin{cases}AB=AC=AD\\IB=IC=ID=R\end{cases}\Rightarrow IA$ là trục của đường tròn ngoại tiếp ΔBCD.

$\Rightarrow IA\perp(BCD)$.

Khi đó mặt phẳng (BCD) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\overrightarrow{IA}=(2;2;1)$.

Gọi J là tâm của đường tròn ngoại tiếp $\Delta BCD\Rightarrow J\in IA$ và $IJ\perp BJ$.

Ta có ΔIBA vuông tại B và $BJ\perp IA$ nên

$IB^2=IJ.IA\Rightarrow IJ=\frac{IB^2}{IA}=\frac{4}{3}\Rightarrow\overrightarrow{IJ}=\frac{4}{9}\overrightarrow{IA}$.

Đặt $J(x;y;z)$. Ta có $\overrightarrow{IJ}=(x;y;z-1);\overrightarrow{IA}=(2;2;1)$.

Từ $\overrightarrow{IJ}=\frac{4}{9}\overrightarrow{IA}$ suy ra $J\left(\frac{8}{9};\frac{8}{9};\frac{13}{9}\right)$.

Mặt phẳng (BCD) đi qua $J\left(\frac{8}{9};\frac{8}{9};\frac{13}{9}\right)$ và nhận vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;2;1)$ có phương trình:

$2\left(x-\frac{8}{9}\right)+2\left(y-\frac{8}{9}\right)+\left(z-\frac{13}{9}\right)=0\Rightarrow 2x+2y+z-5=0$.

Bài tập 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=12$ và mặt phẳng $(P):x-2y+2z+11=0$. Xét điểm M di động trên (P) và các điểm A,B,C phân biệt di động trên (S) sao cho AM,BM,CM là các tiếp tuyến của (S). Mặt phẳng (ABC) luôn đi qua điểm cố định nào dưới đây?

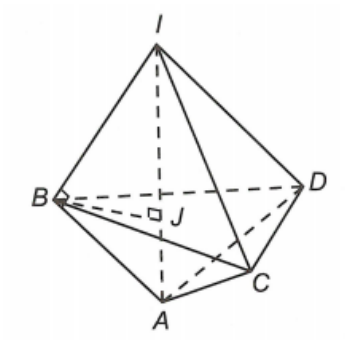
A. $\left(\frac{1}{4};-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$. **B.** $(0;-1;3)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};0;2\right)$. **D.** $(0;3;-1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$ và bán kính $R=2\sqrt{3}$.

Xét điểm $M(a;b;c)\in(P);A(x;y;z)\in(S)$ nên ta có hệ điều kiện:



$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=12\\ AI^2+AM^2=IM^2\\ a-2b+2c+11=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=12 \ (1)\\ 12+(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2 \ (2)\\ a-2b+2c+11=0 \ (3)\end{cases}$$

Lấy (1) − (2) ta có:

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-\left[12+(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\right]$$

$$=12-\left[(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow(a-1)x+(b-1)y+(c-1)z-a-b-c-9=0$$

Vậy mặt phẳng đi qua ba tiếp điểm là:

$(Q):(a-1)x+(b-1)y+(c-1)z-a-b-c-9=0$

Kết hợp với (3) suy ra mặt phẳng này luôn đi qua điểm cố định (0;3;-1).

Dạng 3. Phương trình mặt phẳng đoạn chắn

1. Phương pháp

Phương trình mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $A(a;0;0),B(0;b;0)$ và $C(0;0;c)$ với $abc\neq 0$ là:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

2. Bài tập

Bài tập 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(3;0;0),N(2;2;2)$. Mặt phẳng (P) thay đổi qua M,N cắt các trục Oy,Oz lần lượt tại $B(0;b;0),C(0;0;c)$ với $b,c\neq 0$. Hệ thức nào dưới đây là đúng?

A. $b+c=6$. **B.** $bc=3(b+c)$. **C.** $bc=b+c$. **D.** $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{6}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Mặt phẳng (P) đi qua $M(3;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$ với $b,c\neq 0$ nên phương trình mặt phẳng (P) theo đoạn chắn là: $\frac{x}{3}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

Mặt phẳng (P) đi qua $N(2;2;2)$ suy ra $\frac{2}{3}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}=1\Leftrightarrow\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{6}$.

Bài tập 2: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $G(1;4;3)$. Phương trình mặt phẳng cắt các trục tọa độ Ox,Oy,Oz lần lượt tại A,B,C sao cho G là trọng tâm tứ diện $OABC$ là

A. $\frac{x}{3}+\frac{y}{12}+\frac{z}{9}=1$.

B. $\frac{x}{4}+\frac{y}{16}+\frac{z}{12}=1$.

C. $3x+12y+9z-78=0$.

D. $4x+16y+12z-104=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Giả sử $A(a,0,0);B(0,b,0);C(0;0;c)$.

$G(1;4;3)$ là trọng tâm tứ diện $OABC\Leftrightarrow\begin{cases}x_G=\frac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4}\\y_G=\frac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4}\\x_G=\frac{z_A+z_B+z_C+z_D}{4}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}0+a+0+0=4.1\\0+0+b+0=4.4\\0+0+0+c=4.3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\b=16\\c=12\end{cases}$.

Ta có phương trình mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{4}+\frac{y}{16}+\frac{z}{12}=1$.

Bài tập 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt các trục Ox,Oy,Oz lần lượt tại ba điểm A,B,C khác với gốc tọa độ O sao cho biểu thức $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$ có giá trị nhỏ nhất.

A. $(P):x+2y+z-14=0$.

B. $(P):x+2y+3z-14=0$.

C. $(P):x+2y+3z-11=0$.

D. $(P):x+y+3z-14=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi H là trực tâm ΔABC.

Ta có $\begin{cases}BH\perp AC\\OB\perp AC\end{cases}\Rightarrow AC\perp(OBH)\Rightarrow AC\perp OH\ (1)$.

Chứng minh tương tự, ta có: $BC\perp OH\ (2)$.

Từ (1), (2) ta có $OH\perp(ABC)$.

Suy ra $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}=\frac{1}{OH^2}$.

Vậy để biểu thức $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất thì OH đạt giá trị lớn nhất. Mà $OH \le OM$ nên OH đạt giá lớn nhất bằng OM hay $H \equiv M$.

Khi đó $OM \perp (ABC)$ nên (P) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{OM}=(1;2;3)$.

Phương trình mặt phẳng (P) là

$$1(x-1)+2(y-2)+3(z-3)=0 \Leftrightarrow x+2y+3z-14=0.$$

Bài tập 4: Trong không gian $Oxyz$, có bao nhiêu mặt phẳng qua điểm $M\left(4;-4;1\right)$ và chắn trên ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz theo ba đoạn thẳng có độ dài theo thứ tự lập thành cấp số nhân có công bội bằng $\frac{1}{2}$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $abc \ne 0$ là giao điểm của mặt phẳng (P) và các trục toạ độ. Khi đó (P) có phương trình là $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} M \in (P) \\ OC=\frac{1}{2}OB=\frac{1}{4}OA \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{a}-\frac{4}{b}+\frac{1}{c}=1 \\ |c|=\frac{1}{2}|b|=\frac{1}{4}|a| \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-8, b=-4, c=2 \\ a=8, b=-4, c=-2 \\ a=16, b=-8, c=4 \end{array}\right.$$

Vậy có ba mặt phẳng thỏa mãn.

Bài tập 5: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho các điểm $A\left(1;0;0\right), B\left(0;1;0\right)$. Mặt phẳng $x+ay+bz+c=0$ đi qua các điểm A, B đồng thời cắt tia Oz tại C sao cho tứ diện $OABC$ có thể tích bằng $\frac{1}{6}$. Giá trị của $a+3b-2c$ là

A. 16. **B.** 1. **C.** 10. **D.** 6.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Mặt phẳng đi qua các điểm A, B đồng thời cắt tia Oz tại $C\left(0;0;t\right)$ với $t>0$ có phương trình là

$\frac{x}{1}+\frac{y}{1}+\frac{z}{t}=1$.

Mặt khác: $V_{\text{OABC}}=\frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{6}.\ \text{OA.OB.OC}=\frac{1}{6} \Leftrightarrow t=1$.

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm có dạng $\frac{x}{1}+\frac{y}{1}+\frac{z}{1}=1 \Leftrightarrow x+y+z-1=0$.

Vậy $a=b=1, c=-1$.

Suy ra $a+3b-2c=1+3.1+2=6$.

Dạng 4. Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng

1. Phương pháp

Cho hai mặt phẳng:

$(P): Ax + By + Cz + D = 0$;

$(P'): A'x + B'y + C'z + D' = 0$.

Khi đó:

- (P) cắt $(P') \Leftrightarrow A : B : C \neq A' : B' : C'.$
- $(P) // (P') \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$.
- $(P) \equiv (P') \Leftrightarrow \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$.
- $(P) \perp (P') \Leftrightarrow \vec{n}_{(P)} \perp \vec{n}_{(P')} \Leftrightarrow \vec{n}_{(P)}\vec{n}_{(P')} = 0$.

$\Leftrightarrow AA' + BB' + CC' = 0.$

Chú ý:

- Nếu $A = 0$ thì tương ứng $A' = 0$.
- Nếu $B = 0$ thì tương ứng $B' = 0$.
- Nếu $C = 0$ thì tương ứng $C' = 0$.

Ví dụ: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(\alpha): x + 2y - z - 1 = 0$ và $(\beta): 2x + 4y - mz - 2 = 0$.

Tìm m để (α) và (β) song song với nhau.

Hướng dẫn giải

Ta có $(\alpha) // (\beta) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{-1}{-m} \neq \frac{-1}{-2}$

(vô lý vì $\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{-2}{-1}$).

Vậy không tồn tại m để hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ song song với nhau.

2. Bài tập

Bài tập 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình

$mx + (m-1)y + z - 10 = 0$ và mặt phẳng $(Q): 2x + y - 2z + 3 = 0$.

Với giá trị nào của m thì (P) và (Q) vuông góc với nhau?

A. $m = -2$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = -1$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

$(P): mx + (m-1)y + z - 10 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (m; m-1; 1)$.

$(Q): 2x + y - 2z + 3 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_2} = (2; 1; -2)$.

$(P) \perp (Q) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow 2m + m - 1 - 2 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Dạng 5. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng

1. Phương pháp

Cho mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ và mặt cầu tâm I; bán kính R.

- (α) và (S) không có điểm chung $\Leftrightarrow d(I,(\alpha))>R$.
- (α) tiếp xúc với $(S)\Leftrightarrow d(I,(\alpha))=R$. Khi đó (α) là tiếp diện.
- (α) và (S) cắt nhau $\Leftrightarrow d(I;(\alpha))<R$.

Khi đó (O) có tâm là hình chiếu của I trên (α) và bán kính $r=\sqrt{R^2-d^2(I;(\alpha))}$.

2. Bài tập

Bài tập 1: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-6x+4y-12=0$.

Mặt phẳng nào cắt (S) theo một đường tròn có bán kính $r=3$?

A. $4x-3y-z-4\sqrt{26}=0$.

B. $2x+2y-z+12=0$.

C. $3x-4y+5z-17+20\sqrt{2}=0$.

D. $x+y+z+\sqrt{3}=0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Phương trình mặt cầu (S) là $x^2+y^2+z^2-6x+4y-12=0$.

Suy ra tâm $I(3;-2;0)$ và bán kính $R=5$.

Ta gọi khoảng cách từ tâm I của mặt cầu tới các mặt phẳng ở các đáp án là h, khi đó để mặt phẳng cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính $r=3$ thì $h=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{25-9}=4$.

Đáp án **A** loại vì $h=\dfrac{|18-4\sqrt{26}|}{\sqrt{26}}\neq 4$.

Đáp án **B** loại vì $h=\dfrac{14}{3}\neq 4$.

Chọn đáp án **C** vì $h=4$.

Đáp án **D** loại vì $h=\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\neq 4$.

Bài tập 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $I(1;2;-2)$ và mặt phẳng $(P): 2x+2y+z+5=0$. Phương trình mặt cầu tâm I cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có diện tích bằng 16π là

A. $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=36$.

B. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=9$.

C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=25$.

D. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=16$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có $a = d(I;(P)) = \dfrac{|2.1+2.2-2+5|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = 3$.

Bán kính của đường tròn giao tuyến là: $r = \sqrt{\dfrac{S}{\pi}} = \sqrt{16} = 4$.

Mặt cầu tâm I cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn nên ta có

$R^2 = a^2 + r^2 = 9+16 = 25 \Rightarrow R = 5$.

Vậy phương trình mặt cầu tâm I, bán kính $R = 5$ là:

$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 25$.

Bài tập 3: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0$ và mặt phẳng $(\alpha): 4x + 3y - 12z + 10 = 0$. Tìm phương trình mặt phẳng (β) thỏa mãn đồng thời các điều kiện: tiếp xúc với (S); song song với (α) và cắt trục Oz ở điểm có cao độ dương.

A. $4x + 3y - 12z - 78 = 0$.

B. $4x + 3y - 12z - 26 = 0$.

C. $4x + 3y - 12z + 78 = 0$.

D. $4x + 3y - 12z + 26 = 0$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R = \sqrt{1^2+2^2+3^2+2} = 4$.

Vì $(\alpha)//(\beta)$ nên phương trình (α) có dạng: $4x + 3y - 12z + d = 0, d \neq 10$.

Vì (β) tiếp xúc mặt cầu (S) nên

$$d_{(I,(\beta))} = R \Leftrightarrow \frac{|4.1+3.2-12.3+d|}{\sqrt{4^2+3^2+(-12)^2}} = 4 \Leftrightarrow |d-26| = 52 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d = -26 \\ d = 78 \end{array}\right.$$

Do (β) cắt trục Oz ở điểm có cao độ dương nên chọn $d = 78$.

Vậy phương trình mặt phẳng $(\beta): 4x + 3y - 12z + 78 = 0$.

Dạng 6. Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng

1. Phương pháp

Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ đến mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ là

$$d(M_0,(\alpha)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

2. Bài tập

Bài tập 1: Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z - 10 = 0$ và $(Q): x + 2y + 2z - 3 = 0$ bằng

A. $\dfrac{4}{3}$.

B. 3.

C. $\dfrac{8}{3}$.

D. $\dfrac{7}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Vì $(P)//(Q)$ nên $d\big((P),(Q)\big)=d\big(A,(Q)\big)$ với $A\in(P)$.

Chọn $A(0;0;5)\in(P)$ thì $d\big(A(Q)\big)=\dfrac{|0+2.0+2.5-3|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\dfrac{7}{3}$.

Chú ý: *Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song bằng khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.*
Nếu hai mặt phẳng không song song thì khoảng cách giữa chúng bằng 0.

Bài tập 2: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho $A(1;2;3),B(3;4;4)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(P):2x+y+mz-1=0$ bằng độ dài đoạn thẳng AB.

A. $m=2$. **B.** $m=-2$. **C.** $m=-3$. **D.** $m=\pm 2$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;2;1)\Rightarrow AB=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3\ \ (1)$.

Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) là

$d(A,(P))=\dfrac{|2.1+2+m\cdot 3-1|}{\sqrt{2^2+1^2+m^2}}=\dfrac{|3m+3|}{\sqrt{5+m^2}}\quad (2)$.

Vì $AB=d(A,(P))\Leftrightarrow 3=\dfrac{|3m+3|}{\sqrt{5+m^2}}\Leftrightarrow 9\left(5+m^2\right)=9(m+1)^2\Leftrightarrow m=2$.

Bài tập 3: Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A=(1;2;1)$, $B=(2;1;3)$, $C=(3;2;2),D=(1;1;1)$. Độ dài chiều cao DH của tứ diện bằng

A. $\dfrac{3\sqrt{14}}{14}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{14}}{14}$. **C.** $\dfrac{4\sqrt{14}}{7}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{14}}{7}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-1;2),\overrightarrow{AC}=(2;0;1)\Rightarrow[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}]=(-1;3;2)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC).

Vậy phương trình mặt phẳng (ABC) là

$-1(x-1)+3(y-2)+2(z-1)=0\Leftrightarrow -x+3y+2z-7=0$.

Độ dài chiều cao DH của tứ diện $ABCD$ là khoảng cách từ D đến (ABC).

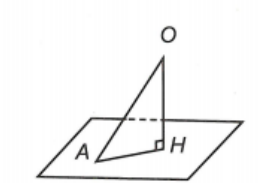
Suy ra $DH=d(D,(ABC))=\dfrac{|-1.1+3.1+2.1-7|}{\sqrt{(-1)^2+3^2+2^2}}=\dfrac{3\sqrt{14}}{14}$.

Bài tập 4: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(a;b;c)$ với $a,b,c\neq 0$. Xét (P) là mặt phẳng thay đổi đi qua điểm A. Khoảng cách lớn nhất từ điểm O đến mặt phẳng (P) bằng

A. $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **B.** $2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **C.** $3\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **D.** $4\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (P).

Khi đó

$$d(O,(P))=OH\le OA=\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Dạng 7. Góc giữa hai mặt phẳng

1. Phương pháp

Cho hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ có phương trình:

$(\alpha): A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$

$(\beta): A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$

Góc giữa $(\alpha),(\beta)$ bằng hoặc bù với góc giữa hai vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}$.

$$\cos\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{\left|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}.\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Chú ý: $0^o\le\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)\le 90^o.$

2. Bài tập

Bổ sung sau

Dạng 8. Một số bài toán cực trị

Bài tập 1: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1),B(-1;2;0),C(3;-1;2)$ và M là điểm thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x-y+2z+7=0.$

Tính giá trị nhỏ nhất của $P=\left|3\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}-7\overrightarrow{MC}\right|$.

A. $P_{\min}=20.$ **B.** $P_{\min}=5.$ **C.** $P_{\min}=25.$ **D.** $P_{\min}=27.$

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi điểm $I(x;y;z)$ sao cho $3\overrightarrow{IA}+5\overrightarrow{IB}-7\overrightarrow{IC}=\vec{0}.$

Khi đó $\begin{cases}3(1-x)+5(-1-x)-7(3-x)=0\\3(1-y)+5(2-y)-7(-1-y)=0\\3(1-z)+5(0-z)-7(2-z)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-23\\y=20\\z=-11\end{cases}\Rightarrow I(-23;20;-11).$

Xét $P=\left|3\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}-7\overrightarrow{MC}\right|=\left|3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)+5\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)-7\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)\right|.$

$=\left|\overrightarrow{MI}+\left(3\overrightarrow{IA}+5\overrightarrow{IB}-7\overrightarrow{IC}\right)\right|=\left|\overrightarrow{MI}\right|=MI.$

$P_{\min}$ khi MI ngắn nhất hay M là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (α).

Khi đó: $P_{\min}=d\left(I,(\alpha)\right)=\dfrac{\left|2.(-23)-20+2.(-11)+7\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=27.$

Bài tập 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;5;-5),B(5;-3;7)$ và mặt phẳng $(P):x+y+z=0.$ Tìm toạ độ điểm M trên mặt phẳng (P) sao cho MA^2-2MB^2 lớn nhất.

A. $M(-2;1;1)$. **B.** $M(2;-1;1)$. **C.** $M(6;-18;12)$. **D.** $M(-6;18;12)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi I thỏa mãn $\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}=\vec{0}.$

Khi đó $\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OA}-2(\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OB})=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{OI}=2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\Leftrightarrow I(13;-11;19).$

Ta có $MA^2-2MB^2=\left(\overrightarrow{MA}\right)^2-2\left(\overrightarrow{MB}\right)^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2-2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=-MI^2+\left(IA^2-2IB^2\right).$

MA^2-2MB^2 lớn nhất khi MI nhỏ nhất. Khi đó I là hình chiếu vuông góc của M lên (P).

Ta tìm được $M(6;-18;12)$.

Bài tập 3: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(m;0;0)$, $N(0;n;0)$, $P(0;0;p)$ không trùng với gốc tọa độ và thỏa mãn $m^2+n^2+p^2=3$. Giá trị lớn nhất của khoảng cách từ O đến mặt phẳng (MNP) bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{1}{27}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Do M,N,P không trùng với gốc tọa độ nên $m\neq0,n\neq0,p\neq0$.

Phương trình mặt phẳng (MNP) là: $\dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{n}+\dfrac{z}{p}=1\Leftrightarrow\dfrac{1}{m}x+\dfrac{1}{n}y+\dfrac{1}{p}z-1=0.$

Suy ra $d(O,(MNP))=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{p^2}}}.$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số dương m^2,n^2,p^2 và ba số dương $\dfrac{1}{m^2}\ \dfrac{1}{n^2},\dfrac{1}{p^2}$ ta có:

$m^2+n^2+p^2\geq3\sqrt[3]{m^2n^2p^2}$ và $\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{p^2}\geq3\sqrt[3]{\dfrac{1}{m^2n^2p^2}}.$

Suy ra $\left(m^2+n^2+p^2\right)\left(\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{p^2}\right)\geq9$

$\Leftrightarrow 3\cdot\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{p^2}\right)\geq 9\ \left(\text{do } m^2+n^2+p^2=3\right)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{p^2}\geq 3 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{p^2}}\geq \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{p^2}}}\leq \frac{1}{\sqrt{3}}$

Vậy $d(O,(MNP))\leq \frac{1}{\sqrt{3}}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m^2=n^2=p^2=1$.

Vậy giá trị lớn nhất của khoảng cách từ O đến mặt phẳng (MNP) là $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Bài tập 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-3=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+5=0$. Giả sử $M\in(P)$ và $N\in(S)$ sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với vectơ $\vec{u}=(1;0;1)$ và khoảng cách giữa M và N lớn nhất. Tính MN.

A. $MN=3$. **B.** $MN=1+2\sqrt{2}$. **C.** $MN=3\sqrt{2}$. **D.** $MN=14$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

(S) có tâm $I(-1;2;1)$ và bán kính $R=1$.

Ta có: $d(I,(P))=\frac{|-1-2.2+2.1-3|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=2>R$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của N trên mặt phẳng (P) và α là góc giữa MN và NH.

Vì $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\vec{u}$ nên góc α có số đo không đổi.

ΔMNH vuông tại H có $\alpha=\widehat{HNM}$ nên $HN=MN.\cos\alpha \Rightarrow MN=\frac{1}{\cos\alpha}.HN$

Do đó MN lớn nhất $\Leftrightarrow HN$ lớn nhất $\Leftrightarrow HN=d(I,(P))+R=3$.

Có $\cos\alpha=\left|\cos(\vec{u},\overrightarrow{n_P})\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}$ nên $MN=\frac{1}{\cos\alpha}HN=3\sqrt{2}$.

Bài tập 5: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, gọi $(P): ax+by+cz-3=0$ (với a,b,c là các số nguyên không đồng thời bằng 0) là mặt phẳng đi qua hai điểm $M(0;-1;2), N(-1;1;3)$ và không đi qua điểm $H(0;0;2)$. Biết rằng khoảng cách từ H đến mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất. Giá trị của tổng $T=a-2b+3c+12$ bằng

A. -16. **B.** 8. **C.** 12. **D.** 16.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Gọi K là hình chiếu của H lên (P), E là hình chiếu của H lên MN.

Ta có $d(H;(P))=HK$ và $d(H;MN)=HE$, $HK\leq HE$ (không đổi).

Vậy $d(H;(P))$ lớn nhất khi $K\equiv E$, với E là hình chiếu của H lên MN.

Suy ra $E\left(\frac{-1}{3};\frac{-1}{3};\frac{7}{3}\right)$.

Vậy mặt phẳng (P) cần tìm là mặt phẳng nhận $\overrightarrow{HE}=\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ làm vectơ pháp tuyến và đi qua M có phương trình là $-x-y+z-3=0$.

Suy ra $\begin{cases}a=-1\\b=-1\\c=1\end{cases}$.

Vậy $T=16$.

BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

A. LÍ THUYẾT TRỌNG TÂM

1. Phương trình đường thẳng

Vectơ chỉ phương của đường thẳng

Cho đường thẳng Δ. Vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ nếu giá của nó song song hoặc trùng với Δ.

Cho đường thẳng Δ đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(a;b;c)$.

Chú ý:

+ Nếu $\vec{u}$ là vectơ chỉ phương của Δ thì $k.\vec{u}(k \neq 0)$ cũng là vectơ chỉ phương của Δ.

+ Nếu đường thẳng Δ đi qua hai điểm A, B thì $\overrightarrow{AB}$ là một vectơ chỉ phương.

Cho đường thẳng Δ có phương trình (1) thì

+ $\vec{u}=(a;b;c)$ là một vectơ chỉ phương của Δ.

+ Với điểm $M \in \Delta$ thì $M(x_0+at;y_0+bt;z_0+ct)$ trong đó t là một giá trị cụ thể tương ứng với từng điểm M.

Phương trình tham số của đường thẳng

Phương trình tham số của đường thẳng Δ có dạng

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, \ t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad (1)$$

Phương trình chính tắc

Nếu $a,b,c \neq 0$ thì phương trình chính tắc của đường thẳng Δ có dạng

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} \quad (2)$$

2. Khoảng cách

Khoảng cách từ điểm đến đường thẳng

Cho đường thẳng Δ đi qua M_0, có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ và điểm $M \notin \Delta$. Khi đó để tính khoảng cách từ M đến Δ ta có các cách sau:

Cách 1: Sử dụng công thức: $d[M,d] = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{MM_0},\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}$.

Cách 2:

+ Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua M vuông góc với Δ.

+ Tìm giao điểm H của (P) với Δ.

+ Khi đó độ dài MH là khoảng cách cần tìm.

Cách 3:

+ Gọi $N \in d$, suy ra tọa độ N theo tham số t.

+ Tính MN^2 theo t.

+ Tìm giá trị nhỏ nhất của tam thức bậc hai.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Cho hai đường thẳng chéo nhau Δ đi qua M_0 có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ và Δ' đi qua M_0' có vectơ chỉ phương $\vec{u'}$. Khi đó khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ và Δ' được tính theo các cách sau:

Cách 1: Sử dụng công thức: $d\left(\Delta,\Delta'\right)=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\vec{u'}\right].\overrightarrow{M_0M_0'}\right|}{\left[\vec{u},\vec{u'}\right]}$.

Cách 2: Tìm đoạn vuông góc chung MN. Khi đó độ dài MN là khoảng cách cần tìm.

Cách 3: Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa qua Δ và song song với Δ'. Khi đó khoảng cách cần tìm là khoảng cách từ một điểm bất kì trên Δ' đến (P).

3. Vị trí tương đối

Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Trong không gian *Oxyz*, hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}$ đi qua $M_1\left(x_0;y_0;z_0\right)$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=\left(a;b;c\right)$, và

$d_2:\dfrac{x-x_0'}{a'}=\dfrac{y-y_0'}{b'}=\dfrac{z-z_0'}{c'}$ đi qua $M_2\left(x_0;y_0;z_0\right)$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=\left(a';b';c'\right)$.

Để xét vị trí tương đối của d_1 và d_2, ta sử dụng phương pháp sau:

Phương pháp hình học

+ d_1 trùng $d_2 \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{u_1}//\overrightarrow{u_2}\\ M_1\in d_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}\\ M_1\in d_2\end{cases}$

+ $d_1//d_2 \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=\vec{0}\\ \left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{M_1M_2}\right]\neq\vec{0}\end{cases}$ hoặc

$$\begin{cases}\overrightarrow{u_1}\parallel\overrightarrow{u_2}\\ M_1\notin d_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}\\ M_1\notin d_2\end{cases}$$

*Ta có thể dùng **phương pháp đại số** để xét vị trí tương đối: Dựa vào số nghiệm của hệ phương trình các đường thẳng.*

Chú ý trường hợp vô nghiệm

+ Nếu $\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}$ cùng phương thì $d_1//d_2$.

+ Nếu $\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}$ không cùng phương thì $d_1;d_2$ chéo nhau.

+ d_1 cắt d_2 $\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right] \neq \vec{0} \\ \left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2} = 0 \end{cases}$

+ d_1 chéo d_2 $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2} \neq 0$

Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha} = (A;B;C)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$ đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d} = (a;b;c)$.

Để xét vị trí tương đối của d và (α) ta sử dụng phương pháp sau:

Phương pháp hình học

• Nếu $\begin{cases} \overrightarrow{u_d} \perp \overrightarrow{n_\alpha} \\ M(x_0;y_0;z_0) \in (\alpha) \end{cases}$ thì $d \subset (\alpha)$.

• Nếu $\begin{cases} \overrightarrow{u_d} \perp \overrightarrow{n_\alpha} \\ M(x_0;y_0;z_0) \notin (\alpha) \end{cases}$ thì $d // (\alpha)$.

• Nếu $\overrightarrow{u_d}$ và $\overrightarrow{n_\alpha}$ cùng phương $\Leftrightarrow \overrightarrow{u_d} = k.\overrightarrow{n_\alpha}$ với $k \neq 0$ thì $d \perp (\alpha)$.

• Nếu $\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_\alpha} \neq 0$; $\overrightarrow{u_d}$ và $\overrightarrow{n_\alpha}$ không cùng phương thì d cắt (α).

Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu

Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng và mặt cầu có phương trình lần lượt là: $d: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ và $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

Để xét vị trí tương đối của d và (α) ta sử dụng phương pháp sau:

Phương pháp đại số

Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x = x_0 + at & (1) \\ y = y_0 + bt & (2) \\ z = z_0 + ct & (3) \\ Ax + By + Cz + D = 0 & (4) \end{cases}$$

Thay (1), (2), (3) vào (4), ta được

$$A(x_0 + at) + B(y_0 + bt) + C(z_0 + ct) + D = 0 (*)$$

+) Nếu phương trình (*) vô nghiệm t thì $d // (\alpha)$.

+) Nếu phương trình (*) có nghiệm t duy nhất thì d cắt (α).

+) Nếu phương trình (*) có vô số nghiệm t thì $d \subset (\alpha)$.

Chú ý: Để tìm điểm chung của đường thẳng d và mặt phẳng (α) ta giải phương trình (*), sau đó thay giá trị t vào phương trình tham số của d để tìm $(x;y;z)$

Phương pháp hình học

Bước 1: Tìm khoảng cách từ tâm I của (S) đến d.

Bước 2:

+ Nếu $d(I,d) > R$ thì d không cắt (S).

+ Nếu $d(I,d) = R$ thì d tiếp xúc (S).

+ Nếu $d(I,d) < R$ thì d cắt (S).

Phương pháp đại số

thay x, y, z từ phương trình tham số của d vào phương trình (S), khi đó ta được phương trình bậc hai theo t. Biện luận số giao điểm của (d) và (S) theo số nghiệm của phương trình bậc hai theo t.

Chú ý: *Để tìm điểm chung của đường thẳng và mặt cầu ta giải phương trình bậc hai theo t, sau đó thay giá trị của t vào phương trình tham số của d để tìm $(x;y;z)$.*

4. Góc

Chú ý: *Góc giữa hai đường thẳng là góc nhọn.*

Góc giữa hai đường thẳng

Trong không gian *Oxyz*, cho hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có các vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$.

Góc giữa d_1 và d_2 bằng hoặc bù với góc giữa $\overrightarrow{u_1}$ và $\overrightarrow{u_2}$.

Ta có: $\cos(d_1,d_2) = \left|\cos\left(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right)\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|}$.

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

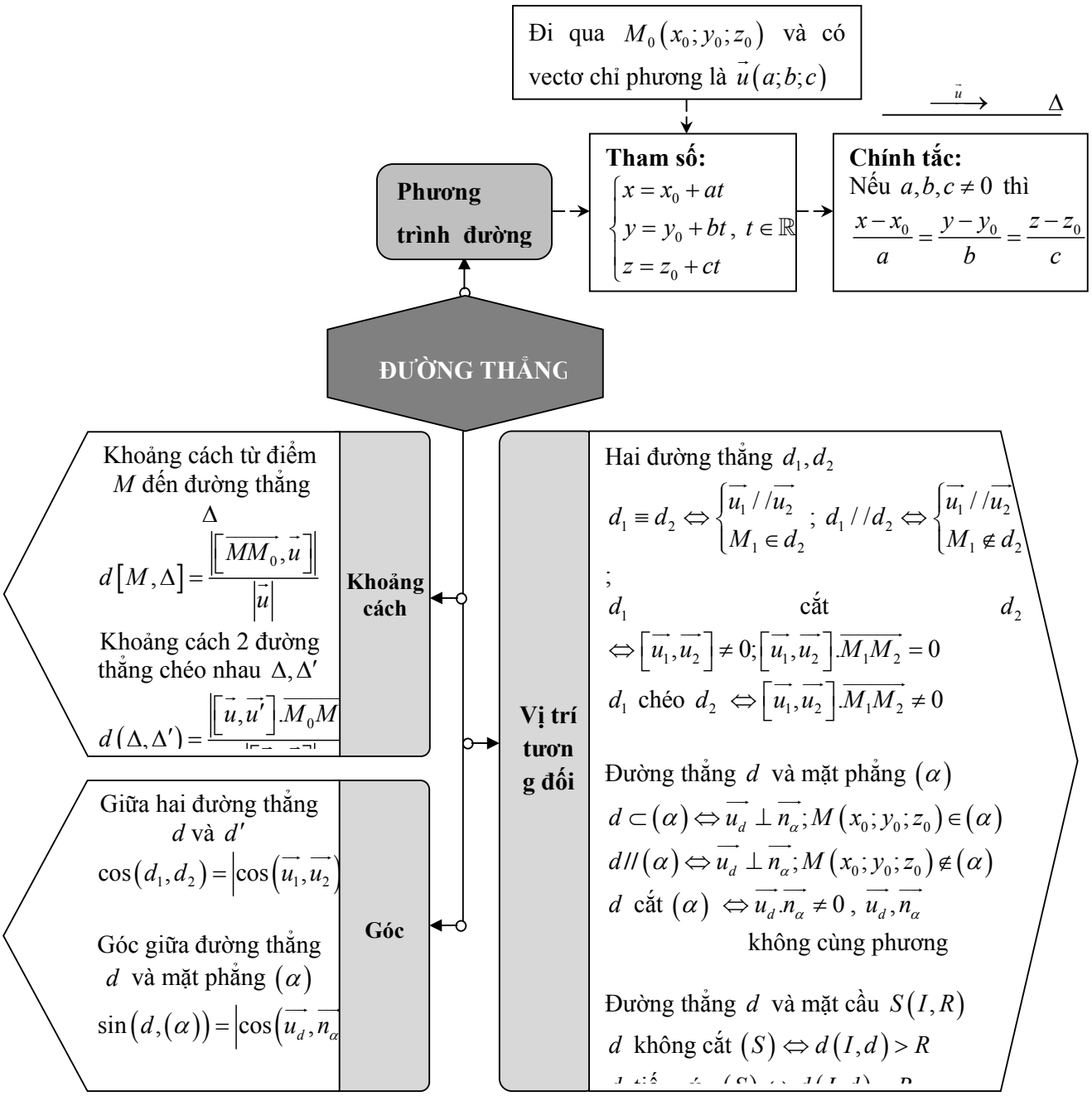
Chú ý: *Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng là góc nhọn.*

Trong không gian *Oxyz*, cho đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}$ và mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha}$.

Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) bằng góc giữa đường thẳng d với hình chiếu d' của nó trên (α).

Ta có: $\sin\left(d,(\alpha)\right) = \left|\cos\left(\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{n_\alpha}\right)\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{u_d}.\overrightarrow{n_\alpha}\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|.\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right|}$.

SƠ ĐỒ HỆ THỐNG



B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Viết phương trình đường thẳng

1. Phương pháp

- Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ có phương trình tham số là $\begin{cases}x=x_0+a_1t\\y=y_0+a_2t\\z=z_0+a_3t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.
- Đường thẳng d đi qua hai điểm *A, B*: Một vectơ chỉ phương của *d* là $\overrightarrow{AB}$.
- Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và song song với đường thẳng Δ cho trước: Vì d//Δ nên vectơ chỉ phương của Δ cũng là vectơ chỉ phương của d.
- Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) cho trước: Vì $d\perp(P)$ nên vectơ pháp tuyến của (P) cũng là vectơ chỉ phương của d.

Đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng (P), (Q).

Cách 1: Tìm một điểm và một vectơ chỉ phương

– Tìm toạ độ một điểm $A\in d$ bằng cách giải hệ phương trình mặt phẳng của (P), (Q) với việc chọn giá trị cho một ẩn.

– Tìm một vectơ chỉ phương của d: $\vec{a}=\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}\right]$.

Cách 2: Tìm hai điểm *A, B* thuộc d rồi viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm đó.

- Đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và vuông góc với hai đường thẳng d_1,d_2: Vì $d\perp d_1,d\perp d_2$ nên một vectơ chỉ phương của d là: $\vec{u}=\left[\overrightarrow{u_{d_1}},\overrightarrow{u_{d_2}}\right]$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Trong không gian *Oxyz*, cho tam giác ABC có $A(2;1;-1)$, $B(-2;3;1)$ và $C(0;-1;3)$. Gọi d là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Phương trình đường thẳng d là

A. $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{1}$.

B. $\frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$.

C. $\frac{x}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{1}$.

D. $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-4;2;2)\Rightarrow AB=\sqrt{16+4+4}=2\sqrt{6}$.

$\overrightarrow{AC}=(-2;-2;4)\Rightarrow AC=\sqrt{4+4+16}=2\sqrt{6}$.

$\overrightarrow{BC}=(2;-4;2)\Rightarrow BC=\sqrt{4+16+4}=2\sqrt{6}$.

Vậy tam giác ABC đều nên tâm đường tròn ngoại tiếp là trọng tâm $G(0;1;1)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(12;12;12)=12(1;1;1)$.

Đường thẳng d đi qua $G(0;1;1)$ và có vectơ chỉ phương cùng phương với $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$, do đó chọn $\vec{u}=(1;1;1)$.

Phương trình đường thẳng d là $\begin{cases}x=t\\y=1+t\\z=1+t\end{cases}$.

Với $t=-1$, ta có điểm $A(-1;0;0)\in d$.

Vậy đường thẳng d đi qua $A(-1;0;0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1;1)$.

Bài tập 2. Trong không gian $Oxyz$, cho hai $M(1;2;3)$, $N(3;4;5)$ và mặt phẳng $(P):x+2y+3z-14=0$. Gọi Δ là đường thẳng thay đổi nằm trong mặt phẳng (P), các điểm H,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M,N trên Δ. Biết rằng khi $MH=NK$ thì trung điểm của HK luôn thuộc một đường thẳng d cố định, phương trình của đường thẳng d là

A. $\begin{cases}x=t\\y=13-2t\\z=-4+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=t\\y=13+2t\\z=-4+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=t\\y=13-2t\\z=-4-t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1\\y=13-2t\\z=-4+t\end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Gọi I là trung điểm của HK.

Do $MH=NK$ nên $\Delta HMI=\Delta KNI\Rightarrow IM=IN$. Khi đó I thuộc mặt phẳng (Q) là mặt phẳng trung trực của đoạn MN.

Ta có (Q) đi qua trung điểm của MN là điểm $J(2;3;4)$ và nhận $\vec{n}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MN}=(1;1;1)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là $(Q):x+y+z-9=0$.

Mà $I\in A\subset(P)$. Suy ra $I\in d=(P)\cap(Q):\begin{cases}x+y+z-9=0\\x+2y+3z-14=0\end{cases}$

Tìm được $(0;13;-4)\in d$ và vectơ chỉ phương của d là $(1;-2;1)$.

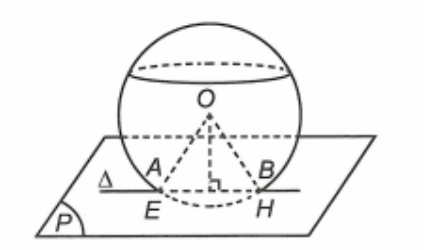
Vậy $d:\begin{cases}x=t\\y=13-2t\\z=-4+t\end{cases}$.

Bài tập 3. Trong không gian *Oxyz*. Cho điểm $E(1;1;1)$, mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=4$ và mặt phẳng $(P): x-3y+5z-3=0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E, nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm A, B sao cho ΔOAB là tam giác đều. Phương trình tham số của Δ là

A. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1+t \\ z=1+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+4t \\ y=1+3t \\ z=1+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \\ z=1-t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=1-2t \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Gọi $\vec{u}=(a;b;c)$ là một vectơ chỉ phương của Δ với $a^2+b^2+c^2>0$.

Ta có $\overrightarrow{n_P}=(1;-3;5)$.

Vì $\Delta \subset (P)$ nên $\vec{u} \perp \overrightarrow{n_P} \Rightarrow \vec{u}.\overrightarrow{n_P}=0 \Leftrightarrow a-3b+5c=0 \Leftrightarrow a=3b-5c$. (1)

Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R=2$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên AB

Ta có ΔOAB là tam giác đều cạnh R nên $OH=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

Suy ra khoảng cách từ O đến đường thẳng Δ bằng $OH=\sqrt{3}$.

Khi đó $\dfrac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{OE}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=3(a^2+b^2+c^2)$

$\Leftrightarrow (a+b+c)^2=0 \Leftrightarrow a+b+c=0$ (2)

Thay (1) vào (2) ta được:

$$3b-5c+b+c=0 \Leftrightarrow b=c \Rightarrow a=-2c.$$

Thay $c=-1$ thì $b=-1$ và $a=2$.

Ta được một vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}=(2;-1;-1)$

Vậy phương trình của đường thẳng Δ là $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \\ z=1-t \end{cases}$.

Dạng 2: Viết phương trình đường thẳng bằng phương pháp tham số hóa

1. Phương pháp

• Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$, vuông góc và cắt đường thẳng Δ.

Cách 1: Gọi H là hình chiếu vuông góc của M_0 trên đường thẳng Δ. Khi đó $H\in\Delta$, $\overrightarrow{M_0H}\perp\overrightarrow{u_\Delta}$. Khi đó đường thẳng d là đường thẳng đi qua M_0, H.

Cách 2: Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M_0 và vuông góc với d. (Q) là mặt phẳng đi qua M_0 và chứa d. Khi đó $d=(P)\cap(Q)$

• Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và cắt hai đường thẳng d_1,d_2.

Cách 1: Gọi $M_1\in d_1\cap d$, $M_2\in d_2\cap d$. Suy ra M_0,M_1,M_2 thẳng hàng. Từ đó tìm được M_1,M_2 và suy ra phương trình đường thẳng d.

Cách 2: Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M_0 và chứa d_1; (Q) là mặt phẳng đi qua M_0 và chứa d_2. Khi đó $d=(P)\cap(Q)$. Do đó một vectơ chỉ phương của d có thể chọn là $\vec{u}=\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}\right]$.

• Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) và cắt cả hai đường thẳng d_1,d_2: Tìm các giao điểm $A=d_1\cap(P)$, $B=d_2\cap(P)$. Khi đó d chính là đường thẳng AB.

• Đường thẳng d song song với Δ và cắt cả hai đường thẳng d_1,d_2: Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với Δ và chứa d_1, mặt phẳng (Q) song song với Δ và chứa d_2. Khi đó $d=(P)\cap(Q)$.

• Đường thẳng d là đường vuông góc chung của hai đường thẳng d_1,d_2 chéo nhau:

Cách làm: Gọi $M\in d_1$, $N\in d_2$. Từ điều kiện $\begin{cases}MN\perp d_1\\MN\perp d_2\end{cases}$, ta tìm được M,N. Viết phương trình đường thẳng MN chính là đường vuông góc chung của d_1,d_2.

2. Bài tập

Bài tập 1. Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng $(P):x+y-z-1=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-4}{-2}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+1}{1}$. Phương trình đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P) là

A. $\dfrac{x}{5}=\dfrac{y+2}{7}=\dfrac{z+1}{2}$.

B. $\dfrac{x}{-5}=\dfrac{y-2}{7}=\dfrac{z-1}{2}$.

C. $\dfrac{x}{-5}=\dfrac{y+2}{7}=\dfrac{z+1}{2}$.

D. $\dfrac{x}{5}=\dfrac{y-2}{7}=\dfrac{z-1}{2}$.

Hướng dẫn giảii

Chọn B.

Đường thẳng d có phương trình tham số là $\begin{cases} x = 4-2t \\ y = -2+2t \\ z = -1+t \end{cases} \left(t \in \mathbb{R}\right)$.

Lấy điểm $M = d \cap (P) \Rightarrow M\left(4-2t;-2+2t;-1+t\right) \in d$. Thay đổi tọa độ điểm M vào phương trình mặt phẳng (P) ta được: $4-2t-2+2t+1-t=0 \Leftrightarrow t=2$.

Suy ra $M\left(0;2;1\right)$.

Do đó $d \cap (P) = M\left(0;2;1\right)$.

Lấy $A\left(4;-2;-1\right) \in d$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (P).

Đường thẳng AH đi qua $A\left(4;-2;-1\right)$ và nhận $\overrightarrow{n_{(P)}} = \left(1;1;-1\right)$ làm vectơ chỉ phương nên AH có phương trình là $\begin{cases} x = 4+t_1 \\ y = -2+t_1 \\ z = -1-t_1 \end{cases} \left(t_1 \in \mathbb{R}\right)$.

Suy ra $H\left(4+t_1;-2+t_1;-1-t_1\right)$.

Thay tọa độ H vào phương trình mặt phẳng (P) được

$$4+t_1-2+t_1+1+t_1-1=0 \Leftrightarrow t_1 = -\frac{2}{3} \Rightarrow H\left(\frac{10}{3};-\frac{8}{3};-\frac{1}{3}\right).$$

MH là hình chiếu của d lên mặt phẳng (P), MH đi qua $M\left(0;2;1\right)$ và nhận $\overrightarrow{MH} = \left(\frac{10}{3};-\frac{14}{3};-\frac{4}{3}\right) = -\frac{2}{3}\left(-5;7;2\right)$ là vectơ chỉ phương nên có phương trình là $\frac{x}{-5} = \frac{y-2}{7} = \frac{z-1}{2}$.

Bài tập 2. Cho các đường thẳng $d_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$ và đường thẳng $d_2 : \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{2}$.

Phương trình đường thẳng Δ đi qua $A\left(1;0;2\right)$, cắt d_1 và vuông góc với d_2 là

A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{1}$.

B. $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{-1}$.

C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{-4}$.

D. $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Gọi $I = d_1 \cap \Delta$, $I\left(1+t,-1+2t,-t\right) \Rightarrow \overrightarrow{AI} = \left(t;2t-1;-t-2\right)$ là một vectơ chỉ phương của Δ.

Do $\vec{u}_{d_2} = \left(1;2;2\right)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d_2 và $\Delta \perp d_2$.

Suy ra $\overrightarrow{AI}.\vec{u}_{d_2}=0\Leftrightarrow t+2(2t-1)+2(-t-2)=0\Leftrightarrow 3t-6=0\Leftrightarrow t=2$.

Vậy $\overrightarrow{AI}=(2;3;-4)$. Phương trình đường thẳng Δ cần tìm là $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{-4}$.

Bài tập 3. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng $(P):3x+y-2z=0$ và hai đường thẳng $d_1:\frac{x+1}{-1}=\frac{y-6}{2}=\frac{z}{1}$ và $d_2:\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+4}{4}$.Đường thẳng vuông góc với (P) cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-2}$.

B. $\frac{x+5}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z-4}{2}$.

C. $\frac{x+2}{3}=\frac{y-8}{1}=\frac{z-1}{-2}$.

D. $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{-2}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

$d_1:\frac{x+1}{-1}=\frac{y-6}{2}=\frac{z}{1}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1-t\\y=6+2t\\z=t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$

$M\in d_1\Leftrightarrow M(-1-t;6+2t;t)$.

$d_2:\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+4}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1-3t'\\y=2-t'\\z=-4+4t'\end{cases},\ t'\in\mathbb{R}$

$N\in d_1\Leftrightarrow N(1-3t';2-t';-4+4t')$.

$\overrightarrow{MN}=(2+t-3t';-4-2t-t';-4-t+4t')$.

$(P):3x+y-2z=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(3;1;-2)$.

Đường thẳng (d) vuông góc với (P) cắt cả hai đường thẳng d_1 tại M và cắt d_2 tại N suy ra

$\overrightarrow{MN}=k\vec{n}\Leftrightarrow\begin{cases}2+t-3t'=3k\\-4-2t-t'=k\\-4-t+4t'=-2k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-2\\t'=1\\k=-1\end{cases}$

$t=-2\Rightarrow M(1;2;-2)$

Do $(d)\perp(P)$ nên $\overrightarrow{u_d}=\overrightarrow{n_{(P)}}$.

Phương trình đường thẳng d là $\begin{cases}x=1+3s\\y=2+s\\z=-2-2s\end{cases};\ s\in\mathbb{R}$.

Chọn $s=-1\Rightarrow A(-2;1;0)\in d\Rightarrow d:\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-2}$.

Bài tập 4. Viết phương trình đường thẳng d qua $A(1;2;3)$ cắt đường thẳng $d_1:\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{1}$ và song song với mặt phẳng $(P):x+y-z-2=0$.

A. $\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\\z=3+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=3\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\\z=3\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=3+t\end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Do $d\cap d_1=B\Rightarrow B(2m;m;m+2)\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(2m-1;m-2;m-1)$.

d song song với mặt phẳng (P) nên

$\overrightarrow{AB}.\vec{n}_{(P)}=0\Leftrightarrow 1(2m-1)+1.(m-2)-(m-1)=0\Leftrightarrow m=1\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(1;-1;0)$.

Vậy phương trình đường thẳng $\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\\z=3\end{cases}$.

Bài tập 5. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng $(P):2x-y+z-10=0$, điểm $A(1;3;2)$ và đường thẳng $d:\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-1}$. Tìm phương trình đường thẳng Δ cắt (P) và d lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của MN.

A. $\frac{x+6}{7}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-3}{-1}$. **B.** $\frac{x-6}{7}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+3}{-1}$.

C. $\frac{x-6}{7}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z+3}{-1}$. **D.** $\frac{x-6}{7}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z-3}{-1}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $N=\Delta\cap d\Rightarrow N(-2+2t;1+t;1-t)$.

A là trung điểm của $MN\Rightarrow M(4-2t;5-t;3+t)$.

Mà $M\in(P)$ nên tọa độ M thỏa phương trình (P), ta được:

$2(4-2t)-(5-t)+(3+t)-10=0\Leftrightarrow t=-2\Rightarrow N(-6;-1;3),M(8;7;1)$.

Suy ra $\overrightarrow{MN}=(14;8;-2)$.

Đường thẳng Δ đi qua hai điểm M và N nên có một vectơ chỉ phương $\vec{u}=\frac{1}{2}\overrightarrow{NM}=(7;4;-1)$ nên có phương trình là $\frac{x+6}{7}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-3}{-1}$.

Bài tập 6. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-3;3;-3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x-2y+z+15=0$ và mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=100$. Đường thẳng Δ qua A, nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại M,N. Để độ dài MN lớn nhất thì phương trình đường thẳng Δ là

A. $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+3}{6}$.

B. $\dfrac{x+3}{16}=\dfrac{y-3}{11}=\dfrac{z+3}{-10}$.

C. $\begin{cases} x=-3+5t \\ y=3 \\ z=-3+8t \end{cases}$.

D. $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+3}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;5)$ và bán kính $R=10$.

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-2;1)$.

Gọi H,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của I lên Δ và mặt phẳng (α).

$\Rightarrow IK\perp(\alpha)$ nên phương trình đường thẳng IK đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (α) là $\begin{cases} x=2+2t \\ y=3-2t \\ z=5+t \end{cases}$.

Tọa độ điểm K là nghiệm hệ phương trình $\begin{cases} x=2+2t \\ y=3-2t \\ z=5+t \\ 2x-2y+z+15=0 \end{cases} \Rightarrow K(-2;7;3)$.

Vì $\Delta\subset(\alpha)$ nên $IH\geq IK$. Do đó IH nhỏ nhất khi H trùng với K.

Để MN lớn nhất thì IH phải nhỏ nhất.

Khi đó đường thẳng Δ cần tìm đi qua A và K. Ta có $\overrightarrow{AK}=(1;4;6)$.

Đường thẳng Δ có phương trình là: $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+3}{6}$.

Bài tập 7. Trong không gian $Oxyz$, cho ΔABC có $A(2;3;3)$, phương trình đường trung tuyến kẻ từ B là $d:\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$, phương trình đường phân giác trong của góc C là $\Delta:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z-2}{-1}$. Đường thẳng AB có một vectơ chỉ phương là

A. $\vec{u}(2;1;-1)$.

B. $\vec{u}(1;-1;0)$.

C. $\vec{u}(0;1;-1)$.

D. $\vec{u}(1;2;1)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có phương trình tham số của Δ là: $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4 - t \\ z = 2 - t \end{cases} \Rightarrow C(2 + 2t; 4 - t; 2 - t)$.

Gọi M là trung điểm của AC nên $M = \left(2 + t; \frac{7 - t}{2}; \frac{5 - t}{2}\right)$.

Vì $M \in d$ nên $\frac{(2 + t) - 3}{-1} = \frac{\left(\frac{7 - t}{2}\right) - 3}{2} = \frac{\left(\frac{5 - t}{2}\right) - 2}{-1} \Leftrightarrow \frac{t - 1}{-1} = \frac{1 - t}{4} = \frac{1 - t}{-2} \Rightarrow t = 1$.

Suy ra $C(4; 3; 1)$.

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với Δ là: $2x - y - z + 2 = 0$.

Gọi H là giao điểm của (P) và $\Delta \Rightarrow H(2; 4; 2)$.

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua đường phân giác Δ, suy ra H là trung điểm $AA' \Rightarrow A'(2; 5; 1)$.

Do $A' \in BC$ nên đường thẳng BC có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{CA'} = (-2; 2; 0) = 2(-1; 1; 0)$.

Suy ra phương trình của đường thẳng BC là $\begin{cases} x = 4 - t \\ y = 3 + t \\ z = 1 \end{cases}$.

Vì $B = BM \cap BC \Rightarrow B(2; 5; 1) = A'$.

Đường thẳng AB có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (0; 2; -2) = 2(0; 1; -1)$.

Bài tập 8. Trong không gian hệ tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng $\Delta : \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z}{1}$ và hai điểm $A(4; -2; 4)$, $B(0; 0; -2)$. Gọi d là đường thẳng song song và cách Δ một khoảng bằng $\sqrt{5}$, gần đường thẳng AB nhất. Đường thẳng d cắt mặt phẳng (Oxy) tại điểm nào dưới đây?

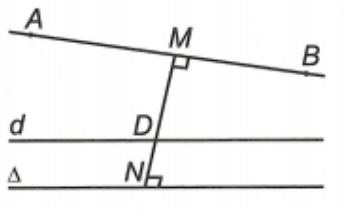
A. $(2; 1; 0)$. **B.** $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{14}{3}; 0\right)$. **C.** $(3; 2; 0)$. **D.** $(0; 0; 0)$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Phương trình tham số của đường thẳng AB có dạng: $\begin{cases} x = 4t \\ y = -2t \\ z = -2 + 6t \end{cases}$.

Để đường thẳng d thỏa mãn bài toán thì ta có hình vẽ tương ứng



Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AB và Δ là MN với $M\left(0;-5;1\right), N\left(3;1;1\right)$.

Để d gần đường thẳng AB nhất thì d phải đi qua điểm D nằm trên đoạn MN mà $DN=d\left(d,\Delta\right)=\sqrt{5}, MN=3\sqrt{5}$. Do đó $\overrightarrow{MN}=3\overrightarrow{DN}\Rightarrow D=\left(2;-1;1\right)$.

Vectơ chỉ phương của đường thẳng d là $\overrightarrow{u_{(d)}}=\left(2;-1;1\right)$.

Suy ra phương trình tham số của d là $\begin{cases}x=2+2t\\y=-1-t\\z=1+t\end{cases}$

Đường thẳng d cắt $\left(Oxy\right)$ tại điểm có $z=1+t=0\Rightarrow t=-1\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$.

Vậy giao điểm của d và $\left(Oxy\right)$ là $\left(0;0;0\right)$.

Bài tập 9. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho bốn đường thẳng

$$\Delta_1:\frac{x-2}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{-1};\ \Delta_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$$

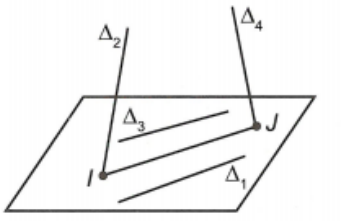
$$\Delta_3:\frac{x}{-1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{1};\ \Delta_4:\frac{x-5}{1}=\frac{y-a}{3}=\frac{z-b}{1}$$

Biết không tồn tại đường thẳng nào trong không gian mà cắt được đồng thời cả bốn đường thẳng trên. Giá trị của biểu thức $T=a-2b$ bằng

A. −2. **B.** −3. **C.** 2. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Ta có: $\Delta_1//\Delta_3$.

Gọi $\left(P\right)$ là mặt phẳng chứa Δ_1 và $\Delta_3\Rightarrow\left(P\right):x+2y-z+3=0$.

Gọi $I=\Delta_2\cap\left(P\right)\Rightarrow I\left(0;-1;1\right)$.

Gọi $J=\Delta_4\cap\left(P\right)\Rightarrow J\left(\frac{-2a+b+22}{6};\frac{3b-24}{6};\frac{-2a+7b-8}{6}\right)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{IJ}=\left(\frac{-2a+b+22}{6};\frac{3b-18}{6};\frac{-2a+7b-14}{6}\right)$.

Để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì $\overrightarrow{IJ}$ phải cùng phương với $\overrightarrow{u_{\Delta_1}}=(1;-1;-1)$.

Suy ra $\frac{-2a+b+22}{6}=\frac{3b-18}{-6}=\frac{-2a+7b-14}{-6}\Leftrightarrow a-2b=2$.

Dạng 3. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

1. Phương pháp

Cho đường thẳng $(\Delta):\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ và mặt phẳng $(\alpha):Ax+By+Cz+D=0$.

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (Δ) và (α) ta có công thức:

$$\sin\varphi=\frac{|Aa+Bb+Cc|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Chú ý: A,B,C và a,b,c không đồng thời bằng 0.

Ví dụ: Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz* cho đường thẳng $\Delta:\frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(\alpha):3x+4y+5z+8=0$.

Tính góc tạo bởi Δ và (α).

Hướng dẫn giải

Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;1;1)$.

(α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(3;4;5)$.

Ta có: $\sin\left(\widehat{\Delta,(\alpha)}\right)=\left|\cos\left(\vec{n},\vec{u}\right)\right|$

$$=\frac{|3.2+4.1+5.1|}{\sqrt{3^2+4^2+5^2}.\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Suy ra $\left(\widehat{\Delta,(\alpha)}\right)=60°$.

2. Bài tập

Bài tập 1: Trong không gian *Oxyz*, cho hai đường thẳng $\Delta:\frac{x+3}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{4}$ và mặt phẳng $(P):x+y-2z+6=0$. Biết Δ cắt mặt phẳng (P) tại A,M thuộc Δ sao cho $AM=2\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ M tới mặt phẳng (P).

A. $\sqrt{2}$. **B.** 2. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 3.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đường thẳng $\Delta:\frac{x+3}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{4}$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;1;4)$.

Mặt phẳng $(P):x+y-2z+6=0$ có vectơ chỉ phương $\vec{n}=(1;1;-2)$.

$$\sin\left(\Delta,(P)\right)=\left|\cos\left(\vec{u},\vec{n}\right)\right|=\frac{\left|\vec{u}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{n}\right|}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\sin\varphi$$

Suy ra $d\left(M,\Delta\right)=MH=MA.\sin\varphi=2\sqrt{3}.\sqrt{\frac{1}{3}}=2$.

Dạng 4: Góc giữa hai đường thẳng

1. Phương pháp

Cho hai đường thẳng:

$$\left(\Delta_1\right):\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

$$\left(\Delta_2\right):\frac{x-x_0}{a'}=\frac{y-y_0}{b'}=\frac{z-z_0}{c'}$$

Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng $\left(\Delta_1\right)$ và $\left(\Delta_2\right)$.

Ta có: $\cos\varphi=\frac{\left|aa'+bb'+cc'\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}}$.

Ví dụ: Trong không gian *Oxyz*, cho hai đường thẳng

$\Delta_1:\frac{x-1}{-2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{2}$;

$\Delta_2:\frac{x+3}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{-4}$.

Tính góc giữa hai đường thẳng trên.

Hướng dẫn giải

Vectơ chỉ phương của Δ_1 là $\vec{u_1}=\left(-2;1;2\right)$.

Vectơ chỉ phương của Δ_2 là $\vec{u_2}=\left(1;1;-4\right)$.

$$\cos\left(\Delta_1,\Delta_2\right)=\left|\cos\left(\vec{u_1},\vec{u_2}\right)\right|=\frac{\left|\vec{u_1}.\vec{u_2}\right|}{\left|\vec{u_1}\right|.\left|\vec{u_2}\right|}$$

$$=\frac{\left|(-2).1+1.1+2.(-4)\right|}{\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}.\sqrt{1^2+1^2+(-4)^2}}$$

$$=\frac{9}{3.3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy góc giữa hai đường thẳng đã cho là $45°$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Trong không gian *Oxyz*, cho đường thẳng (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P):x-z.\sin\alpha+\cos\alpha=0;\ (Q):y-z.\cos\alpha-\sin\alpha=0;\ \alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Góc giữa (d) và trục *Oz* là:

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(P)}}=\left(1;0;-\sin\alpha\right)$.

Mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(Q)}}=\left(0;1;-\cos\alpha\right)$.

(d) là giao tuyến của (P) và (Q) nên vectơ chỉ phương của (d) là:

$\overrightarrow{u_{(d)}} = \left[\overrightarrow{n_{(P)}}, \overrightarrow{n_{(Q)}}\right] = (\sin\alpha; \cos\alpha; 1)$.

Vectơ chỉ phương của (Oz) là $\overrightarrow{u_{(Oz)}} = (0;0;1)$.

Suy ra $\cos(d, Oz) = \dfrac{|0.\sin\alpha + 0.\cos\alpha + 1.1|}{\sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 1^2}.\sqrt{0+0+1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (d, Oz) = 45°$.

Vậy góc giữa (d) và trục (Oz) là $45°$.

Bài tập 2. Trong không gian *Oxyz*, d là đường thẳng đi qua điểm $A(1;-1;2)$, song song với mặt phẳng $(P): 2x - y - z + 3 = 0$, đồng thời tạo với đường thẳng $\Delta: \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{2}$ một góc lớn nhất. Phương trình đường thẳng d là

A. $\dfrac{x-1}{-4} = \dfrac{y+1}{5} = \dfrac{z-2}{3}$.

B. $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+1}{-5} = \dfrac{z-2}{3}$.

C. $\dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y+1}{5} = \dfrac{z-2}{-3}$.

D. $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+1}{5} = \dfrac{z-2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Mặt phẳng $(P): 2x - y - z + 3 = 0$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)} = (2;-1;-1)$.

Đường thẳng $\Delta: \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{2}$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}_{\Delta} = (1;-2;2)$.

Giả sử đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_d$.

Do $0° \le (d, \Delta) \le 90°$ mà theo giả thiết d tạo Δ góc lớn nhất nên $(d, \Delta) = 90° \Rightarrow \vec{u}_d \perp \vec{u}_{\Delta}$.

Lại có $d // (P)$ nên $\vec{u}_d \perp \vec{n}_{(P)}$. Do đó chọn $\vec{u}_d = \left[\vec{u}_{\Delta}, \vec{n}_{(P)}\right] = (4;5;3)$.

Vậy phương trình đường thẳng d là $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+1}{5} = \dfrac{z-2}{3}$.

Bài tập 3. Trong không gian *Oxyz*, cho đường thẳng $d: \dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y-1}{-4} = \dfrac{z+2}{3}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 1 = 0$. Đường thẳng Δ đi qua $E(-2;1;-2)$, song song với (P) có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (m;n;1)$, đồng thời tạo với d góc bé nhất. Tính $T = m^2 - n^2$.

A. $T = -5$.

B. $T = 4$.

C. $T = 3$.

D. $T = -4$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (2;-1;2)$; đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{v} = (4;-4;3)$.

$\Delta // (P) \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{n} \Leftrightarrow 2m - n + 2 = 0 \Leftrightarrow n = 2m + 2$.

Mặt khác ta có: $\cos\left(\widehat{\Delta;d}\right)=\dfrac{\left|\vec{u}.\vec{v}\right|}{\left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|}=\dfrac{\left|4m-4n+3\right|}{\sqrt{m^2+n^2+1}.\sqrt{4^2+\left(-4\right)^2+3^2}}$

$=\dfrac{\left|4m+5\right|}{\sqrt{41\left(5m^2+8m+5\right)}}=\dfrac{1}{\sqrt{41}}.\sqrt{\dfrac{\left(4m+5\right)^2}{5m^2+8m+5}}=\dfrac{1}{\sqrt{41}}.\sqrt{\dfrac{16m^2+40m+25}{5m^2+8m+5}}$.

Vì $0°\le\left(\widehat{\Delta,d}\right)\le 90°$ nên $\left(\widehat{\Delta,d}\right)$ bé nhất khi và chỉ khi $\cos\left(\widehat{\Delta,d}\right)$ lớn nhất.

Xét hàm số $f\left(t\right)=\dfrac{16t^2+40t+25}{5t^2+8t+5}\Rightarrow f'\left(t\right)=\dfrac{-72t^2-90t}{\left(5t^2+8t+5\right)^2}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{5}{4}$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$\frac{16}{5}$	↘	0	↗	5	↘	$\frac{16}{5}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $\max f(t) = f(0) = 5$.

Suy ra $\left(\widehat{\Delta, d}\right)$ bé nhất khi $m = 0 \Rightarrow n = 2$.

Do đó $T = m^2 - n^2 = -4$.

Dạng 5: Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng

1. Phương pháp

Cho đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M_0(x_0; y_0; z_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b; c)$. Khi đó khoảng cách từ điểm M_1 đến (Δ) được tính bởi công thức:

$$d(M_1, \Delta) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M_1}; \vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}.$$

Ví dụ: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-2}$.

Tính khoảng cách từ $M(-2;1;-1)$ tới d.

Hướng dẫn giải

Ta có $A(1;2;-2) \in d \Rightarrow \overrightarrow{AM}(-3;-1;1)$, $\vec{u}(1;2;-2)$.

Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d là:

$$d(M; d) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AM}; \vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|} = \frac{5\sqrt{2}}{3}.$$

2. Bài tập

Bài tập 1. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm $A(1;1;-1)$ cho trước, nằm trong mặt phẳng $(P): 2x - y - z - 2 = 0$ và cách điểm $M(0;2;1)$ một khoảng lớn nhất.

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{-1}$.

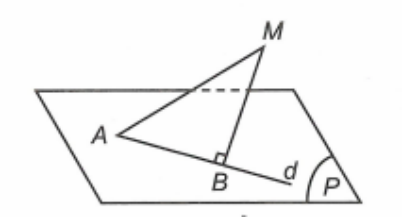
B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{1}$.

C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-1}$.

D. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{-1}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Ta gọi B là hình chiếu của M lên đường thẳng d khi đó $MB \le MA$.

Suy ra $MB_{\max} = MA$ nên đường thẳng d đi qua điểm A và vuông góc với MA.

Đồng thời đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) nên ta có

$\overrightarrow{u_d} = \left[\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{n_{(P)}}\right] = (1;3;-1)$.

Bài tập 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;-2), B(5;1;1)$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+6y+12z+9=0$. Xét đường thẳng d đi qua A và tiếp xúc với (S) sao cho khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất. Phương trình của đường thẳng d là

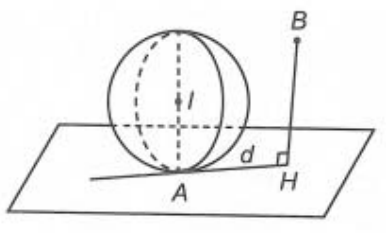
A. $\begin{cases} x=2 \\ y=1+t \\ z=-2+2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=2 \\ y=1-4t \\ z=-2+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=2+2t \\ y=1-2t \\ z=-2+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2+t \\ y=1+4t \\ z=-2-t \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+6y+12z+9=0$ có tâm $I(0;-3;-6)$ bán kính $R=6$.

$IA = 6 = R \Rightarrow A \in (S)$, $IB = 3\sqrt{10} > R$ nên B nằm ngoài (S).



Đường thẳng d đi qua A và tiếp xúc với (S) nên d nằm trong mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại A.

Mặt phẳng (P) đi qua A và nhận $\overrightarrow{IA}$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là $x+2y+2z=0$.

Gọi H là hình chiếu của B lên (P) thì tọa độ của $H(4;-1;-1)$.

Ta có: $d(B;d) \ge d(B;(P)) = BH$.

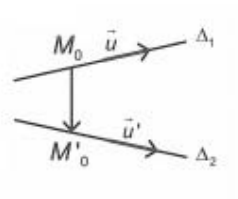
Vậy khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất khi d đi qua H. Ta có $\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{AH} = (2;-2;1)$.

Suy ra phương trình đường thẳng d là: $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - 2t \\ z = -2 + t \end{cases}$.

Dạng 6: Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

1. Phương pháp

Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau: Δ_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a;b;c)$ và đi qua $M_0(x_0;y_0;z_0)$; Δ_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u'} = (a';b';c')$ và đi qua $M_0'(x_0';y_0';z_0')$.



Khi đó khoảng cách giữa Δ_1 và Δ_2 được tính bởi công thức $d(\Delta_1,\Delta_2) = \dfrac{\left|\left[\vec{u},\vec{u'}\right].\overrightarrow{M_0M_0'}\right|}{\left|\left[\vec{u},\vec{u'}\right]\right|}$.

Nếu $\Delta_1 // \Delta_2$ ($\vec{u_1}$ và $\vec{u_2}$ cùng phương và $M_0 \notin \Delta_2$) thì $d(\Delta_1,\Delta_2) = d(M_0,\Delta_2)$

Ví dụ: Trong không gian $Oxyz$, tính khoảng cách giữa hai đường thẳng

$d_1 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{1}$ và $d_2 : \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M(1;-2;0)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u_1} = (2;-1;1)$.

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $N(1;-1;2)$ và có một vectơ chỉ phương $\vec{u_2} = (4;-2;2)$.

Do $\vec{u_1}$ cùng phương với $\vec{u_2}$ và $M \notin d_2$ nên $d_1 // d_2$.

Suy ra $d(d_1;d_2) = d(N;d_1) = \dfrac{\left|\left[\vec{u_1},\overrightarrow{MN}\right]\right|}{\left|\vec{u_1}\right|}$.

Ta có $\overrightarrow{MN} = (0;1;2)$, $\left[\vec{u},\overrightarrow{MN}\right] = (-3;-4;2)$.

Suy ra $\dfrac{\left|\left[\vec{u_1},\overrightarrow{MN}\right]\right|}{\left|\vec{u_1}\right|} = \dfrac{\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + 2^2}}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1}} = \dfrac{\sqrt{174}}{6}$.

Vậy $d(d_1;d_2) = \dfrac{\sqrt{174}}{6}$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Cho phương trình mặt phẳng $(P): 2x + y + z - 3 = 0$, đường thẳng $d' : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{1}$ và điểm $A(0;2;1)$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A, nằm trong (P) sao cho khoảng cách d và d' đạt giá trị lớn nhất.

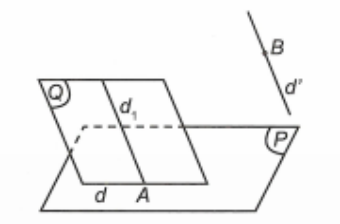
A. $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-2}{7} = \dfrac{z-1}{-9}$.

B. $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+2}{7} = \dfrac{z-1}{9}$.

C. $\frac{x}{1}=\frac{y+2}{-7}=\frac{z-1}{9}$. **D.** $\frac{x}{1}=\frac{y+2}{-7}=\frac{z-1}{-9}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.



Gọi d_1 là đường thẳng đi qua A và song song với d'.

Phương trình của d_1 là: $\begin{cases} x=t \\ y=2+2t \\ z=1+t \end{cases}$.

Trên đường thẳng d_1 lấy điểm $B(1;0;0)$.

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và d_1.

Ta có $d(d,d')=d(d',(Q))=d(B,(Q))$.

Do d_1 cố định cho nên $d(d,d')=d(B,(Q))\le d(B,d_1)$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\overrightarrow{n_{(Q)}}=\overrightarrow{BH}$ trong đó H là hình chiếu của B lên d_1.

Ta tìm được $H\left(\frac{-2}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$ nên $\overrightarrow{BH}=\left(\frac{-5}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)\Rightarrow\overrightarrow{n_{(Q)}}=(-5;2;1)$.

Ta có $\overrightarrow{u_d}=\left[\overrightarrow{n_{(P)}};\overrightarrow{n_{(Q)}}\right]=(1;7;-9)$.

Vậy phương trình của đường thẳng d là $\frac{x}{1}=\frac{y-2}{7}=\frac{z-1}{-9}$.

Lưu ý : *Vì đường thẳng d đi qua A nên ta có thể loại đáp án bằng cách thay tọa độ điểm A vào các đáp án trong bài*

Dạng 7: Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

1. Phương pháp

Trong không gian *Oxyz*, xét đường thẳng (Δ) có vectơ chỉ phương là $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và đi qua $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$.

(Δ) cắt $(\alpha)\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{n}\ne 0\Leftrightarrow Aa_1+Ba_2+Ca_3\ne 0$.

$(\Delta)//(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}.\vec{n}=0 \\ M_0 \notin (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Aa_1+Ba_2+Ca_3=0 \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D \neq 0 \end{cases}$.

$(\Delta) \subset (\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}.\vec{n}=0 \\ M_0 \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Aa_1+Ba_2+Ca_3=0 \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0 \end{cases}$

$(\Delta) \perp (\alpha) \Leftrightarrow \vec{a}$ và $\vec{n}$ cùng phương $\Leftrightarrow a_1 : a_2 : a_3 = A : B : C$.

Ta có thể biện luận vị trí tương đối dựa vào số nghiệm của phương trình đường thẳng (Δ) và mặt phẳng (α).

2. Bài tập

Bài tập 1. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng $d : \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-5}{-1}$ và mặt phẳng $(P) : 3x-3y+2z-6=0$.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. d cắt và không vuông góc với (P).

B. d song song với (P).

C. d vuông góc với (P).

D. d nằm trong (P).

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Đường thẳng d nhận $\vec{u}=(1;-3;-1)$ làm một vectơ chỉ phương.

Mặt phẳng (P) nhận $\vec{n}=(3;-3;2)$ làm một vectơ pháp tuyến.

Do $\vec{u}.\vec{n} \neq 0$ và hai vectơ này không cùng phương nên đường thẳng d cắt và không vuông góc với (P).

Bài tập 2. Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho đường thẳng có phương trình $d : \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$ và mặt phẳng $(P) : x+my+(m^2-1)z-7=0$ với m là tham số thực. Tìm m sao cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (P).

A. $m=1$.

B. $m=-1$.

C. $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=2 \end{array}\right.$.

D. $m=2$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;1;-1)$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;m;m^2-1)$.

$d//(P) \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{n}=0 \Leftrightarrow 1+m-m^2+1=0 \Leftrightarrow m^2-m-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=2 \end{array}\right.$

Thử lại ta thấy với $m=-2$ thì $d\subset(P)$ (loại). Vậy $m=-1$.

Bài tập 3. Trong không gian *Oxyz*, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(\alpha):x-y+2z-5=0$, mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $d//(\alpha)$. **B.** $d\subset(\alpha)$.

C. d cắt (α) và không vuông góc với (α). **D.** $d\perp(\alpha)$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Ta có $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=2+4t\\z=3+t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$.

Xét hệ phương trình: $\begin{cases}x=1+2t & (1)\\y=2+4t & (2)\\z=3+t & (3)\\x-y+2z-5=0 & (*)\end{cases}$

Thay (1), (2), (3) vào (*) ta được $1+2t-(2+4t)+2(3+t)-5=0$.

Phương trình này có vô số nghiệm.

Do đó, đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (α).

Bài tập 4. Trong không gian *Oxyz*, cho hai mặt phẳng

$$(P):x+2y-z-1=0,\ (Q):2x+y-z+2=0$$

và hai đường thẳng $\Delta_1:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{2},\ \Delta_2:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$.

Đường thẳng Δ song song với hai mặt phẳng $(P),(Q)$ và cắt Δ_1,Δ_2 tương ứng tại H,K. Độ dài đoạn HK bằng

A. $\dfrac{8\sqrt{11}}{7}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** 6. **D.** $\dfrac{\sqrt{11}}{7}$.

Hướng dẫn giải

Chọn A.

Ta có $\vec{u}=\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}\right]=(-1;-1;-3)$.

Gọi $H(2t;1+t;-1+2t);\ K(m;2-m;1+2m)$

$\Rightarrow\overrightarrow{HK}=(m-2t;1-m-t;2+2m-2t)$.

Vì Δ song song với 2 mặt phẳng $(P),(Q)$ nên $\overrightarrow{HK}=k\vec{u}$ nên

$\frac{m-2t}{1}=\frac{1-m-t}{1}=\frac{2+2m-2t}{3}$.

Tính ra được $m=\frac{2}{7};\ t=\frac{-3}{7}$. Suy ra $HK=\frac{8\sqrt{11}}{7}$.

Bài tập 5. Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng $(P):2\left(m^2+m+2\right)x+\left(m^2-1\right)y+(m+2)z+m^2+m+1=0$ luôn chứa đường thẳng Δ cố định khi m thay đổi. Khoảng cách từ gốc tọa độ đến Δ là?

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có: $2\left(m^2+m+2\right)x+\left(m^2-1\right)y+(m+2)z+m^2+m+1=0,\ \forall m\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow m^2(2x+y+1)+m(2x+z+1)+4x-y+2z+1=0,\ \forall m\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y+1=0\\2x+z+1=0\\4x-y+2z+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y+1=0\\2x+z+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=z\\2x+y+1=0\end{cases}$

Vậy (P) luôn chứa đường thẳng (Δ) cố định: $\begin{cases}x=-\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\\y=t\\z=t\end{cases}$

Đường thẳng Δ đi qua $A\left(-\frac{1}{2};0;0\right)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta}=\left(-\frac{1}{2};1;1\right)$.

Vậy khoảng cách từ gốc tọa độ đến Δ là: $d(O;\Delta)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{u_\Delta}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|}=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Dạng 8: Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

1. Phương pháp

Trong không gian *Oxyz*, cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ đi qua $M_1\left(x_0;y_0;z_0\right)$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(a;b;c)$ và $d_2:\frac{x-x_0'}{a'}=\frac{y-y_0'}{b'}=\frac{z-z_0'}{c'}$ đi qua $M_2\left(x_0';y_0';z_0'\right)$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=\left(a';b';c'\right)$.

Để xét vị trí tương đối của d_1 và d_2, ta sử dụng phương pháp sau:

+) d_1 trùng $d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_1} // \overrightarrow{u_2} \\ M_1 \in d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3} \\ M_1 \in d_2 \end{cases}$.

+) $d_1 // d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = \vec{0} \\ \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{M_1M_2}\right] \neq \vec{0} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} \overrightarrow{u_1} // \overrightarrow{u_2} \\ M_1 \notin d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3} \\ M_1 \notin d_2 \end{cases}$.

+) d_1 cắt $d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right] = \vec{0} \\ \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2} = 0 \end{cases}$.

+) d_1 chéo $d_2 \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{M_1M_2} \neq 0$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Trong không gian tọa độ *Oxyz*, cho hai đường thẳng

$$d_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1} \text{ và } d_2 : \frac{x+3}{4} = \frac{y+9}{8} = \frac{z+2}{m^2} \ (m \neq 0)$$

Tập hợp các giá trị m thỏa mãn $d_1 // d_2$ có số phần tử là:

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Đường thẳng d_1 đi qua $A(1;-1;2)$ và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_1} = (1;2;1)$.

Đường thẳng d_2 đi qua $B(-3;-9;-2)$ và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_2} = (4;8;m^2)$.

Đường thẳng $d_1 // d_2$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{u_1}$ cùng phương với $\overrightarrow{u_2}$ và hai đường thẳng d_1 và d_2 không trùng nhau.

Vì $\dfrac{-3-1}{1} = \dfrac{-9+1}{2} = \dfrac{-2-2}{1}$ nên B nằm trên đường thẳng d_1.

Do đó hai đường thẳng này luôn có điểm chung là B nên hai đường thẳng không thể song song.

Bài tập 2. Trong không gian tọa độ *Oxyz*, xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

$$\Delta_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3},\ \Delta_2 : \frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+2}{1}$$

A. Δ_1 song song với Δ_2. **B.** Δ_1 chéo với Δ_2.

C. Δ_1 cắt Δ_2. **D.** Δ_1 trùng với Δ_2.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Vì $\dfrac{2}{-1} \neq \dfrac{2}{-2}$ nên vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (2;2;3)$ của đường thẳng Δ_1 không cùng phương với vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = (-1;-2;1)$ của Δ_2.

Suy ra Δ_1 chéo với Δ_2 hoặc Δ_1 cắt Δ_2.

Lấy $M(1;-1;0)\in\Delta_1$, $N(3;3;-2)\in\Delta_2$. Ta có $\overrightarrow{MN}=(2;4;-2)$.

Khi đó $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{MN}=0$.

Suy ra $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Vậy Δ_1 cắt Δ_2.

Dạng 9: Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu

1. Phương pháp

Cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=x_0+a_1t & (1)\\ y=y_0+a_2t & (2)\\ z=z_0+a_3t & (3)\end{cases}$ và mặt cầu $(S):(x-a)^2+(y-b^2)+(z-c)^2=R^2$ có tâm $I(a;b;c)$, bán kính R.

Bước 1: Tính khoảng cách từ tâm I của mặt cầu (S) đến đường thẳng d là

$$h=d(I,d)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{IM_0}.\vec{a}\right]\right|}{\left|\vec{a}\right|}$$

Bước 2: So sánh $d(I,d)$ với bán kính R của mặt cầu:

- Nếu $d(I,d)>R$ thì d không cắt (S).
- Nếu $d(I,d)=R$ thì d tiếp xúc (S).
- Nếu $d(I,d)<R$ thì d cắt (S) tại hai điểm phân biệt M,N và MN vuông góc với đường kính (bán kính) mặt cầu (S).

Phương pháp đại số

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z+2)^2=25$ và đường thẳng d có phương trình $\begin{cases}x=-2+2t\\ y=2+3t\\ z=-3+2t\end{cases}$

Chứng minh d luôn cắt (S) tại hai điểm phân biệt.

Hướng dẫn giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;-2)$ và bán kính $R=5$.

Đường thẳng d đi qua $M(-2;2;-3)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;3;2)$.

Ta có $h=d(I,d)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=3$.

Vì $h<R$ nên d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt.

Ví dụ 2: Trong không gian *Oxyz*, mặt cầu

Thế (1), (2), (3) vào phương trình (S) và rút gọn đưa về phương trình bậc hai theo t $(*)$.

- Nếu phương trình (*) vô nghiệm thì d không cắt (S).
- Nếu phương trình (*) có một nghiệm thì d tiếp xúc (S).
- Nếu phương trình (*) có hai nghiệm thì d cắt (S) tại hai điểm phân biệt M, N.

Chú ý: Để tìm tọa độ M, N ta thay giá trị t vào phương trình đường thẳng d.

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z+2)^2=17$ cắt trục Oz tại hai điểm A, B. Tìm độ dài đoạn AB.

Hướng dẫn giải

Gọi M là giao điểm của (S) với trục Oz.

Ta có $M \in Oz$ nên $M(0;0;t)$.

Mà $M \in (S)$ nên $0^2+0^2+(t+2)^2=17$

$\Leftrightarrow (t+2)^2=17 \Leftrightarrow |t+2|=\sqrt{17} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2-\sqrt{17} \\ t=-2+\sqrt{17} \end{array}\right.$.

Suy ra tọa độ các giao điểm là $A\left(0;0;-2-\sqrt{17}\right)$, $B\left(0;0;-2+\sqrt{17}\right) \Rightarrow AB=2\sqrt{17}$.

2. Bài tập

Bài tập 1. Trong không gian tọa độ *Oxyz*, cho điểm $A(0;0;-2)$ và đường thẳng Δ có phương trình là $\frac{x+2}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+3}{2}$.

Phương trình mặt cầu tâm A, cắt Δ tại hai điểm B và C sao cho $BC=8$ là

A. $(x+2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=16$.

B. $x^2+y^2+(z+2)^2=25$.

C. $(x+2)^2+y^2+z^2=25$.

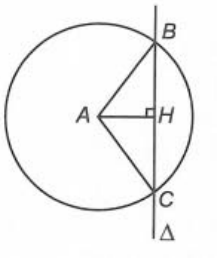
D. $x^2+y^2+(z+2)^2=16$.

Hướng dẫn giải

Chọn B.

Gọi (S) là mặt cầu tâm $A(0;0;-2)$ và có bán kính R.

Đường thẳng Δ đi qua $M(-2;2;-3)$ có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;3;2)$.



Gọi H là trung điểm BC nên $AH \perp BC$.

Ta có $AH=d(A,\Delta)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{MA}.\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}$.

Với $\begin{cases}\overrightarrow{MA}=(2;-2;1)\\ \vec{u}=(2;3;2)\end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{MA}.\vec{u}\right]=(-7;-2;10) \Rightarrow AH=\frac{\sqrt{(-7)^2+(-2)^2+10^2}}{\sqrt{2^2+3^2+2^2}}=3$.

Bán kính mặt cầu (S) là: $R=AB=\sqrt{AH^2+HB^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là: $x^2+y^2+(z+2)^2=25$.

Bài tập 2. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$ và điểm $M(1;3;-1)$. Biết rằng các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M tới mặt cầu đã cho luôn thuộc một đường tròn (C) có tâm $J(a;b;c)$.

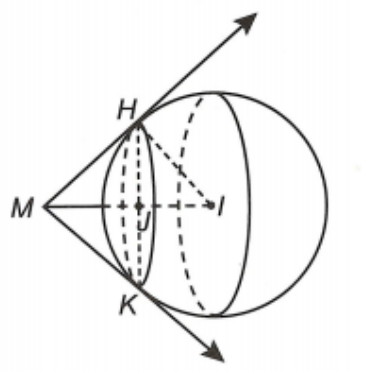
Giá trị $2a+b+c$ bằng

A. $\frac{134}{25}$. **B.** $\frac{116}{25}$. **C.** $\frac{84}{25}$. **D.** $\frac{62}{25}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

Ta có mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;2)$ và bán kính $R=3$.



Khi đó $IM=5>R\Rightarrow M$ nằm ngoài mặt cầu.

Phương trình đường thẳng MI là $\begin{cases}x=1\\x=-1+4t\\z=2-3t\end{cases}$.

Tâm $J(a;b;c)$ nằm trên MI nên $J(1;-1+4t;2-3t)$.

Xét ΔMHI vuông tại H có

$MI=5;\ IH=3\Rightarrow MH=\sqrt{MI^2-HI^2}=4$.

Mặt khác $\begin{cases}M(1;3;-1)\\J(1;-1+4t;2-3t)\end{cases}\Rightarrow MJ=\sqrt{(-4+4t)^2+(3-3t)^2}$.

$MJ.MI=MH^2\Rightarrow MJ=\frac{16}{5}$

$\Leftrightarrow(-4+4t)^2+(3-2t)^2=\frac{256}{25}$

$\Leftrightarrow 25t^2-50t+\frac{369}{25}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{9}{25}\\t=\frac{41}{25}\end{array}\right.$.

Suy ra $J\left(1;\frac{11}{25};\frac{23}{25}\right)$ hoặc $J\left(1;\frac{139}{25};\frac{-73}{25}\right)$.

+) Với $J\left(1;\frac{11}{25};\frac{23}{25}\right)$ thì $IJ=\frac{9}{5}<IM$ (nhận).

+) Với $J\left(1;\frac{139}{25};\frac{-73}{25}\right)$ thì $IJ=\frac{41}{5}>IM$ (loại).

Vậy $J\left(1;\frac{11}{25};\frac{23}{25}\right)$ nên $2a+b+c=\frac{84}{25}$.

Bài tập 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{14}{3}$ và đường thẳng d có phương trình $\frac{x-4}{3}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-4}{2}$. Gọi $A(x_0;y_0;z_0)$, $x_0>0$ là điểm nằm trên đường thẳng d sao cho từ A kẻ được ba tiếp tuyến đến mặt cầu (S) có các tiếp điểm B,C,D sao cho $ABCD$ là tứ diện đều.

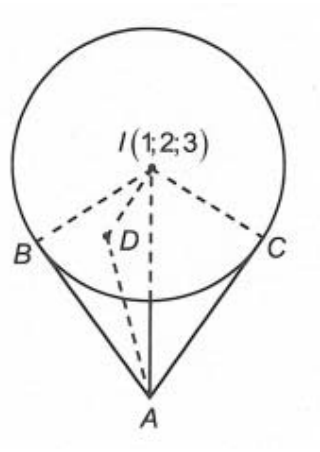
Giá trị của biểu thức $P=x_0+y_0+z_0$ là

A. 6. **B.** 16. **C.** 12. **D.** 8.

Hướng dẫn giải

Chọn C.

I là tâm mặt cầu thì $I(1;2;3)$.



Gọi O là giao điểm của mặt phẳng (BCD) và đoạn AI.

Vì theo giả thiết $AB=AC=AD$ và $IB=IC=ID=\sqrt{\frac{14}{3}}$ nên AI vuông góc với mặt phẳng (BCD) tại O. Khi đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD.

Đặt $AI=x\left(x>\sqrt{\frac{14}{3}}\right)$.

Ta có $AB=\sqrt{AI^2-IB^2}=\sqrt{x^2-\frac{14}{3}}$

$IB^2=IO.IA\Rightarrow OI=\frac{14}{3x}\Rightarrow OB=\sqrt{IB^2-IO^2}=\sqrt{\frac{14}{3}-\left(\frac{14}{3x}\right)^2}$

$\Rightarrow BD^2=OB^2+OD^2-2OB.OD.\cos 120^\circ=3OB^2$

$\Rightarrow BD=\sqrt{3}OB\Rightarrow BD=\sqrt{3}OB=\sqrt{3.\left(\frac{14}{3}-\frac{196}{9x^2}\right)}$

Do $ABCD$ là tứ diện đều nên

$AB=BD\Rightarrow\sqrt{x^2-\frac{14}{3}}=\sqrt{3\left(\frac{14}{3}-\frac{196}{9x^2}\right)}\Leftrightarrow x^2-\frac{14}{3}=14-\frac{196}{3x^2}$

$3x^4-56x^2+196=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=\frac{14}{3}\Rightarrow x=\sqrt{14}.\\ x^2=14\end{array}\right.$

$A\in d$ nên $A(4+3t;4+2t;4+t)$.

Suy ra $AI=\sqrt{14}\Leftrightarrow\sqrt{(4+3t-1)^2+(4+2t-2)^2+(4+t-3)^2}=\sqrt{14}$

$\Leftrightarrow |t+1|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A(4;4;4) \\ A(-2;0;2) \end{array}\right.$.

Do $x_0 > 0$ nên điểm A có tọa độ $A(4;4;4)$.

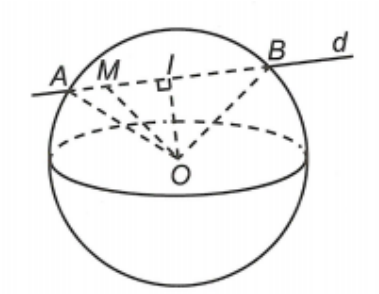
Suy ra $P=12$.

Bài tập 4. Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho ba điểm P,Q,R lần lượt di động trên ba trục tọa độ Ox,Oy,Oz (không trùng với gốc tọa độ O) sao cho $\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OQ^2}+\frac{1}{OR^2}=\frac{1}{8}$. Biết mặt phẳng (PQR) luôn tiếp xúc với mặt cầu (S) cố định. Đường thẳng (d) thay đổi nhưng luôn đi qua $M\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ và cắt (S) tại hai điểm A,B phân biệt. Diện tích lớn nhất của ΔAOB là

A. $\sqrt{15}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{17}$. **D.** $\sqrt{7}$.

Hướng dẫn giải

Chọn D.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm O trên mặt phẳng (PQR).

Dễ thấy $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OQ^2}+\frac{1}{OR^2} \Rightarrow \frac{1}{OH^2}=\frac{1}{8} \Rightarrow OH=2\sqrt{2}$.

Khi đó (PQR) luôn tiếp xúc với mặt cầu (S) tâm O, bán kính $R=2\sqrt{2}$.

Ta có $OM=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+0}=1<R$ nên điểm M nằm trong mặt cầu (S).

Gọi I là trung điểm của AB, do ΔOAB cân tại O nên $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}OI.AB$.

Đặt $OI=x$. Vì $OI \le OM$ nên $0<x\le 1$ và $AB=2\sqrt{8-x^2}$.

Ta có $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}x.2\sqrt{8-x^2}=x\sqrt{8-x^2}=\sqrt{8x^2-x^4}$.

Xét hàm số $f(x)=8x^2-x^4,\ 0<x\le 1$.

Vì $f'(x)=4x\left(4-x^2\right)>0$ với mọi $x\in(0;1]$ nên $f(x)\le f(1)=7$.

Suy ra diện tích của ΔOAB lớn nhất bằng $\sqrt{7}$ đạt được khi M là trung điểm của AB.

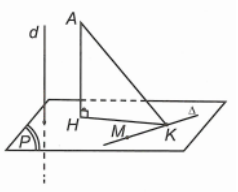
Dạng 10: Một số bài toán cực trị

Bài tập 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(-2;-2;1), A(1;2;-3)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-5}{2}=\dfrac{z}{-1}$. Tìm một vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ đi qua M, vuông góc với đường thẳng d đồng thời cách điểm A một khoảng bé nhất.

A. $\vec{u}=(2;2;-1)$. **B.** $\vec{u}=(1;7;-1)$. **C.** $\vec{u}=(1;0;2)$. **D.** $\vec{u}=(3;4;-4)$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Xét (P) là mặt phẳng qua M và $(P)\perp(d)$.

Mặt phẳng (P) qua $M(-2;-2;1)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{u_d}=(2;2;-1)$ nên có phương trình: $2x+2y-z+9=0$.

Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của A lên (P) và Δ.

Khi đó $AK\geq AH=const$ nên AK đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $K\equiv H$.

Đường thẳng AH đi qua $A(1;2;-3)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(2;2;-1)$ nên AH có phương trình tham số là $\begin{cases}x=1+2t\\y=2+2t\\z=-3-t\end{cases}$.

Vì $H\in AH$ nên $H(1+2t;2+2t;-3-t)$.

Lại $H\in(P)$ nên $2(1+2t)+2(2+2t)-(-3-t)+9=0\Leftrightarrow t=-2\Rightarrow H(-3;-2;-1)$.

Vậy $\overrightarrow{u_\Delta}=\overrightarrow{HM}=(1;0;2)$.

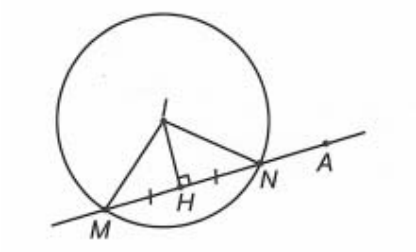
Bài tập 2: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3=0$ và điểm $A(5;3;-2)$. Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A và luôn cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt M,N.

Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=AM+4AN$.

A. $S_{\min}=30$. **B.** $S_{\min}=20$. **C.** $S_{\min}=5\sqrt{34}-9$. **D.** $S_{\min}=\sqrt{34}-3$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;1)$, bán kính $R=\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2-(-3)}=3$.

Ta có: $AI=\sqrt{(2-5)^2+(-1-3)^2+(1+2)^2}=\sqrt{34}>R$ nên A nằm ngoài mặt cầu (S).

Ta lại có: $S=AM+4AN$.

Đặt $AM=x,\ x\in\left[\sqrt{34}-3;\sqrt{34}+3\right]$.

Mà $AM.AN=AI^2-R^2=34-9=25\Rightarrow AN=\dfrac{25}{AM}$.

Do đó: $S=f(x)=x+\dfrac{100}{x}$ với $x\in\left[\sqrt{34}-3;\sqrt{34}+3\right]$.

Ta có: $f'(x)=1-\dfrac{100}{x^2}=\dfrac{x^2-100}{x}<0$ với $x\in\left[\sqrt{34}-3;\sqrt{34}+3\right]$.

Do đó: $\min\limits_{\left[\sqrt{34}-3;\sqrt{34}+3\right]}f(x)=f\left(\sqrt{34}+3\right)=5\sqrt{34}-9$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow A,M,N,I$ thẳng hàng và $AM=\sqrt{34}+3;\ AN=\sqrt{34}-3$.

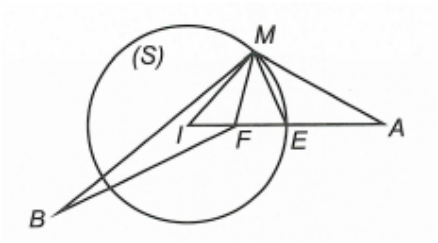
Bài tập 3: Trong không gian *Oxyz*, cho hai điểm $A(9;6;11),B(5;7;2)$ và điểm M di động trên mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=36$.

Giá trị nhỏ nhất của $AM+2MB$ bằng

A. $\sqrt{105}$. **B.** $2\sqrt{26}$. **C.** $2\sqrt{29}$. **D.** $\sqrt{102}$.

Hướng dẫn giải

Chọn C.



Mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=36$ có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=6$.

Ta có $IA=12=2R$.

Gọi E là giao điểm của IA và mặt cầu (S) suy ra E là trung điểm của IA nên $E(5;4;7)$.

Gọi F là trung điểm của IE suy ra $F(3;3;5)$.

Xét ΔMIF và ΔAIM có $\widehat{AIM}$ chung và $\dfrac{IF}{IM}=\dfrac{IM}{IA}=\dfrac{1}{2}$.

Suy ra $\Delta MIF\#\Delta AIM\,(\text{c.g.c})\Rightarrow\dfrac{MA}{MF}=\dfrac{AI}{MI}=2\Rightarrow MA=2MF$.

Do đó $AM+2MB=2(MF+MB)\ge 2BF=2\sqrt{29}$ (theo bất đẳng thức tam giác).

Dấu "=" xảy ra khi M là giao điểm FB và mặt cầu (S).