Chuyên đề 16 LŨY THỪA - HÀM SỐ LŨY THỪA

## TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH MỨC 5-6 ĐIỂM

### Dạng 1. Rút gọn, biến đổi, tính toán biểu thức lũy thừa

**Công thức lũy thừa**

Cho các số dương $a$, $b$ và $m, n \in \mathbb{R}$. Ta có:

| | | |
|---|---|---|
| ▪ $a^0 = 1$ | ▪ $a^n = \underbrace{a.a.....a}_{n \text{ thừa số}}$ với $n \in \mathbb{N}^*$ | ▪ $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ |
| ▪ $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$ | ▪ $a^m.a^n = a^{m+n}$ | ▪ $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ |
| ▪ $a^n b^n = (ab)^n$ | ▪ $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ | ▪ $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ $\begin{cases} * \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \\ * \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}} \end{cases}$ $(m, n \in \mathbb{N}^*)$ |

**Câu 1.** **(Nhân Chính Hà Nội 2019)** Cho $a > 0, m, n \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $a^m + a^n = a^{m+n}$. **B.** $a^m.a^n = a^{m-n}$. **C.** $(a^m)^n = (a^n)^m$. **D.** $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{n-m}$.

**Câu 2.** **(THPT Minh Khai - 2019)** Với $a > 0$, $b > 0$, $\alpha, \beta$ là các số thực bất kì, đẳng thức nào sau đây **sai**?

**A.** $\dfrac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$. **B.** $a^\alpha.a^\beta = a^{\alpha+\beta}$. **C.** $\dfrac{a^\alpha}{b^\beta} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\alpha-\beta}$. **D.** $a^\alpha.b^\alpha = (ab)^\alpha$.

**Câu 3.** **(Sở Quảng Trị 2019)** Cho $x, y > 0$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tìm đẳng thức sai dưới đây.

**A.** $(xy)^\alpha = x^\alpha.y^\alpha$. **B.** $x^\alpha + y^\alpha = (x+y)^\alpha$. **C.** $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$. **D.** $x^\alpha.x^\beta = x^{\alpha+\beta}$.

**Câu 4.** **(Nho Quan A - Ninh Bình - 2019)** Cho các số thực $a, b, m, n (a, b > 0)$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

**A.** $\dfrac{a^m}{a^n} = \sqrt[n]{a^m}$. **B.** $(a^m)^n = a^{m+n}$. **C.** $(a+b)^m = a^m + b^m$. **D.** $a^m.a^n = a^{m+n}$.

**Câu 5.** **(Cụm 8 Trường Chuyên 2019)** Với $\alpha$ là số thực bất kì, mệnh đề nào sau đây **sai**?

**A.** $\sqrt{10^\alpha} = \left(\sqrt{10}\right)^\alpha$. **B.** $\sqrt{10^\alpha} = 10^{\frac{\alpha}{2}}$. **C.** $\left(10^\alpha\right)^2 = (100)^\alpha$. **D.** $\left(10^\alpha\right)^2 = (10)^{\alpha^2}$.

**Câu 6.** **(Mã 105 2017)** Rút gọn biểu thức $Q = b^{\frac{5}{3}} : \sqrt[3]{b}$ với $b > 0$.

**A.** $Q = b^{-\frac{4}{3}}$ **B.** $Q = b^{\frac{4}{3}}$ **C.** $Q = b^{\frac{5}{9}}$ **D.** $Q = b^2$

**Câu 7.** **(Mã 110 2017)** Rút gọn biểu thức $P = x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{x}$ với $x > 0$.

**A.** $P = \sqrt{x}$ **B.** $P = x^{\frac{1}{8}}$ **C.** $P = x^{\frac{2}{9}}$ **D.** $P = x^2$

**Câu 8.** **(SGD Nam Định 2019)** Cho $a$ là số thực dương. Giá trị rút gọn của biểu thức $P = a^{\frac{4}{3}}\sqrt{a}$ bằng

**A.** $a^{\frac{7}{3}}$. **B.** $a^{\frac{5}{6}}$. **C.** $a^{\frac{11}{6}}$. **D.** $a^{\frac{10}{3}}$.

**Câu 9.** **(Mã 102 2017)** Cho biểu thức $P = \sqrt[4]{x.\sqrt[3]{x^2.\sqrt{x^3}}}$, với $x > 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $P=x^{\frac{2}{3}}$ **B.** $P=x^{\frac{1}{2}}$ **C.** $P=x^{\frac{13}{24}}$ **D.** $P=x^{\frac{1}{4}}$

**Câu 10.** **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho biểu thức $P=x^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{x}$ với $x>0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $P=x$ **B.** $P=x^{\frac{11}{6}}$ **C.** $P=x^{\frac{7}{6}}$ **D.** $P=x^{\frac{5}{6}}$

**Câu 11.** **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Rút gọn biểu thức $P=x^{\frac{1}{6}}\cdot\sqrt[3]{x}$ với $x>0$.

**A.** $P=x^{\frac{1}{8}}$ **B.** $P=\sqrt{x}$ **C.** $P=x^{\frac{2}{9}}$ **D.** $P=x^2$

**Câu 12.** **(THPT Sơn Tây Hà Nội 2019)** Cho a là số thực dương. Viết và rút gọn biểu thức $a^{\frac{3}{2018}}.\sqrt[2018]{a}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ. Tìm số mũ của biểu thức rút gọn đó.

**A.** $\frac{2}{1009}$. **B.** $\frac{1}{1009}$. **C.** $\frac{3}{1009}$. **D.** $\frac{3}{2018^2}$.

**Câu 13.** **(Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019)** Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{a^{\sqrt{3}+1}.a^{2-\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}$ với $a>0$.

**A.** $P=a$. **B.** $P=a^3$. **C.** $P=a^4$. **D.** $P=a^5$.

**Câu 14.** **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình 2019)** Biểu thức $P=\sqrt[3]{x\sqrt[5]{x^2\sqrt{x}}}=x^{\alpha}$ (với $x>0$), giá trị của $\alpha$ là

**A.** $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

**Câu 15.** **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Cho $a$ là số thực dương khác 1. Khi đó $\sqrt[4]{a^{\frac{2}{3}}}$ bằng

**A.** $\sqrt[3]{a^2}$. **B.** $a^{\frac{8}{3}}$. **C.** $a^{\frac{3}{8}}$. **D.** $\sqrt[6]{a}$.

**Câu 16.** **(Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019)** Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{a^{\sqrt{3}+1}.a^{2-\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}$ với $a>0$

**A.** $P=a$ **B.** $P=a^3$ **C.** $P=a^4$ **D.** $P=a^5$

**Câu 17.** **(THPT Lương Tài Số 2 2019)** Cho biểu thức $P=x^{-\frac{3}{4}}.\sqrt{\sqrt{x^5}}$, $x>0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** $P=x^{-2}$ **B.** $P=x^{-\frac{1}{2}}$ **C.** $P=x^{\frac{1}{2}}$ **D.** $P=x^2$

**Câu 18.** **(Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2019)** Cho biểu thức $P=\dfrac{a^{\sqrt{5}+1}.a^{2-\sqrt{5}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}$. Rút gọn $P$ được kết quả:

**A.** $a^5$. **B.** $a$. **C.** $a^3$. **D.** $a^4$.

**Câu 19.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho biểu thức $P=\sqrt[3]{x.\sqrt[4]{x^3\sqrt{x}}}$, với $x>0$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng?**

**A.** $P=x^{\frac{1}{2}}$. **B.** $P=x^{\frac{7}{12}}$. **C.** $P=x^{\frac{5}{8}}$. **D.** $P=x^{\frac{7}{24}}$.

**Câu 20.** **(THPT Thiệu Hóa – Thanh Hóa 2019)** Cho hai số thực dương $a,b$. Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b}+b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}$ ta thu được $A=a^m.b^n$. Tích của $m.n$ là

**A.** $\dfrac{1}{8}$ **B.** $\dfrac{1}{21}$ **C.** $\dfrac{1}{9}$ **D.** $\dfrac{1}{18}$

**Câu 21.** **(Sở Quảng Ninh 2019)** Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{\sqrt[3]{a^7}.a^{\frac{11}{3}}}{a^4.\sqrt[7]{a^{-5}}}$ với $a>0$ ta được kết quả $A=a^{\frac{m}{n}}$ trong đó $m,n\in N^*$ và $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $m^2-n^2=312$. **B.** $m^2+n^2=543$. **C.** $m^2-n^2=-312$. **D.** $m^2+n^2=409$.

**Câu 22.** **(Sở Vĩnh Phúc 2019)** Cho $a$ là số thực dương. Đơn giản biểu thức $P=\dfrac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{\frac{-1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{-1}{4}}\right)}$.

**A.** $P=a(a+1)$. **B.** $P=a-1$. **C.** $P=a$. **D.** $P=a+1$.

**Câu 23.** Cho $a$, $b$ là các số thực dương. Rút gọn $P=\dfrac{a^{\frac{4}{3}}b+ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$ ta được

**A.** $P=ab$. **B.** $P=a+b$. **C.** $P=a^4b+ab^4$. **D.** $P=ab(a+b)$.

**Câu 24.** **(KTNL GV Thpt Lý Thái Tổ 2019)** Cho biểu thức $\sqrt[5]{8\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}=2^{\frac{m}{n}}$, trong đó $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Gọi $P=m^2+n^2$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

**A.** $P\in(330;340)$. **B.** $P\in(350;360)$. **C.** $P\in(260;370)$. **D.** $P\in(340;350)$.

**Câu 25.** **(Sở Bắc Ninh 2019)** Cho $a>0$, $b>0$, giá trị của biểu thức $T=2(a+b)^{-1}.(ab)^{\frac{1}{2}}.\left[1+\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ bằng

**A.** 1. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

**Câu 26.** **(Đề Tham Khảo 2017)** Tính giá trị của biểu thức $P=\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2017}\left(4\sqrt{3}-7\right)^{2016}$

**A.** $P=\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2016}$ **B.** $P=1$ **C.** $P=7-4\sqrt{3}$ **D.** $P=7+4\sqrt{3}$

**Câu 27.** **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Cho biểu thức $P=\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}}}$. Mệnh đề nào trong các mệnh đề sau là đúng?

**A.** $P=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{8}}$. **B.** $P=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{18}$. **C.** $P=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{18}}$. **D.** $P=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$.

**Câu 28.** **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Cho hàm số $f(a)=\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{a^4}\right)}{a^{\frac{1}{8}}\left(\sqrt[8]{a^3}-\sqrt[8]{a^{-1}}\right)}$ với $a>0, a\neq 1$. Tính giá trị $M=f\left(2017^{2016}\right)$

**A.** $M=2017^{1008}-1$ **B.** $M=-2017^{1008}-1$ **C.** $M=2017^{2016}-1$ **D.** $M=1-2017^{2016}$

**Câu 29.** **(THPT Trần Phú 2019)** Giá trị của biểu thức $P=\dfrac{2^3.2^{-1}+5^{-3}.5^4}{10^{-3}:10^{-2}-(0,1)^0}$ là

**A.** $-9$. **B.** $-10$. **C.** $10$. **D.** $9$.

**Câu 30.** **(THPT Ngô Quyền – 2017)** Cho hàm số $f(a)=\dfrac{a^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{a^{-2}}-\sqrt[3]{a}\right)}{a^{\frac{1}{8}}\left(\sqrt[8]{a^3}-\sqrt[8]{a^{-1}}\right)}$ với $a>0$, $a\neq 1$. Tính giá trị $M=f\left(2017^{2018}\right)$.

**A.** $2017^{2018}+1$. **B.** $-2017^{1009}-1$. **C.** $2017^{1009}$. **D.** $2017^{1009}+1$.

**Câu 31.** Cho biểu thức $f(x)=\sqrt[3]{x}\sqrt[4]{x}\sqrt[12]{x^5}$. Khi đó, giá trị của $f(2,7)$ bằng

**A.** $0,027$. **B.** $27$. **C.** $2,7$. **D.** $0,27$.

**Câu 32.** Tính giá trị biểu thức $P=\dfrac{\left(4+2\sqrt{3}\right)^{2018}.\left(1-\sqrt{3}\right)^{2017}}{\left(1+\sqrt{3}\right)^{2019}}$.

**A.** $P=-2^{2017}$. **B.** $-1$. **C.** $-2^{2019}$. **D.** $2^{2018}$.

**Câu 33.** **(Chuyên Nguyễn Du-ĐăkLăk 2019)** Giá trị biểu thức $\left(3+2\sqrt{2}\right)^{2018}.\left(\sqrt{2}-1\right)^{2019}$ bằng

**A.** $\left(\sqrt{2}+1\right)^{2019}$. **B.** $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2017}$. **C.** $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2019}$. **D.** $\left(\sqrt{2}+1\right)^{2017}$.

**Câu 34.** Cho $a>0, b>0$ giá trị của biểu thức $T=2(a+b)^{-1}(ab)^{\frac{1}{2}}\left[1+\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ bằng

**A.** $1$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

## Dạng 2. So sánh các biểu thức chứa lũy thừa

- Nếu $a>1$ thì $a^\alpha>a^\beta\Leftrightarrow\alpha>\beta$;
- Nếu $0<a<1$ thì $a^\alpha>a^\beta\Leftrightarrow\alpha<\beta$.
- Với mọi $0<a<b$, ta có:

  $a^m<b^m\Leftrightarrow m>0$

  $a^m>b^m\Leftrightarrow m<0$

**Câu 1.** **(Bạc Liêu – Ninh Bình 2019)** Cho $\left(\sqrt{2}-1\right)^m<\left(\sqrt{2}-1\right)^n$. Khi đó

**A.** $m=n$. **B.** $m<n$. **C.** $m>n$. **D.** $m\neq n$.

**Câu 2.** Cho $a>1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

**A.** $a^{-\sqrt{3}}>\dfrac{1}{a^{\sqrt{5}}}$. **B.** $a^{\frac{1}{3}}>\sqrt{a}$. **C.** $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{a}>1$. **D.** $\dfrac{1}{a^{2016}}<\dfrac{1}{a^{2017}}$.

**Câu 3.** **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào SAI?

**A.** $\left(\sqrt{3}-1\right)^{2018}>\left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}$. **B.** $2^{\sqrt{2}+1}>2^{\sqrt{3}}$.

**C.** $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2017}>\left(\sqrt{2}-1\right)^{2018}$. **D.** $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2019}<\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018}$.

**Câu 4.** **(THPT Sơn Tây Hà Nội 2019)** Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $(\sqrt{5}+2)^{-2017}<(\sqrt{5}+2)^{-2018}$. **B.** $(\sqrt{5}+2)^{2018}>(\sqrt{5}+2)^{2019}$.

**C.** $(\sqrt{5}-2)^{2018}>(\sqrt{5}-2)^{2019}$. **D.** $(\sqrt{5}-2)^{2018}<(\sqrt{5}-2)^{2019}$.

**Câu 5.** **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Khẳng định nào dưới đây là đúng?

**A.** $\left(\frac{3}{7}\right)^{\sqrt{3}}>\left(\frac{5}{8}\right)^{\sqrt{3}}$. **B.** $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\pi}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-\pi}$. **C.** $3^{-\sqrt{2}}<\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$. **D.** $\left(\frac{1}{4}\right)^{-50}<\left(\sqrt{2}\right)^{100}$.

**Câu 6.** **(Nam Định - 2018)** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

**A.** $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018}<\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2017}$. **B.** $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2017}>\left(\sqrt{2}-1\right)^{2018}$.

**C.** $\left(\sqrt{3}-1\right)^{2018}>\left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}$. **D.** $2^{\sqrt{2}+1}>2^{\sqrt{3}}$.

**Câu 7.** **(THPT Tiên Lãng 2018)** Tìm tập tất cả các giá trị của $a$ để $\sqrt[21]{a^5}>\sqrt[7]{a^2}$ ?

**A.** $a>0$. **B.** $0<a<1$. **C.** $a>1$. **D.** $\frac{5}{21}<a<\frac{2}{7}$.

**Câu 8.** So sánh ba số: $(0,2)^{0,3}$, $(0,7)^{3,2}$ và $\sqrt{3}^{0,3}$.

**A.** $(0,7)^{3,2}<(0,2)^{0,3}<\sqrt{3}^{0,3}$. **B.** $(0,2)^{0,3}<(0,7)^{3,2}<\sqrt{3}^{0,3}$.

**C.** $\sqrt{3}^{0,3}<(0,2)^{0,3}<(0,7)^{3,2}$. **D.** $(0,2)^{0,3}<\sqrt{3}^{0,3}<(0,7)^{3,2}$.

Nguyễn Bảo Vương

**Câu 9.** **(THPT Cộng Hiền 2019)** Cho $a,b>0$ thỏa mãn $a^{\frac{1}{2}}>a^{\frac{1}{3}}$, $b^{\frac{2}{3}}>b^{\frac{3}{4}}$. Khi đó khẳng định nào đúng?

**A.** $0<a<1,0<b<1$. **B.** $0<a<1,b>1$. **C.** $a>1,0<b<1$. **D.** $a>1,b>1$.

**Câu 10.** So sánh ba số $a=1000^{1001}$, $b=2^{2^{64}}$ và $c=1^1+2^2+3^3+...+1000^{1000}$?

**A.** $c<a<b$. **B.** $b<a<c$. **C.** $c<b<a$. **D.** $a<c<b$.

## Dạng 3. Tìm tập xác định của hàm số lũy thừa

- **Dạng:** $\begin{cases}y=x^{\alpha}\\ y=u^{\alpha}\end{cases}$ với $u$ là đa thức đại số.
  - **Tập xác định:**

Nếu $\alpha\in\mathbb{Z}^{+}\xrightarrow{ĐK}u\in\mathbb{R}$.

Nếu $\begin{cases}\alpha\in\mathbb{Z}^{-}\\ \alpha=0\end{cases}\xrightarrow{ĐK}u\neq 0$.

Nếu $\alpha\notin\mathbb{Z}\xrightarrow{ĐK}u>0$.

**Câu 1.** **(Mã 123 2017)** Tập xác định D của hàm số $y=\left(x-1\right)^{\frac{1}{3}}$ là:.

**A.** $D=\left(1;+\infty\right)$ **B.** $D=\mathbb{R}$ **C.** $D=\mathbb{R}\setminus\left\{1\right\}$ **D.** $D=\left(-\infty;1\right)$

**Câu 2.** **(Mã 104 2017)** Tìm tập xác định $D$ của hàm số $y=\left(x^2-x-2\right)^{-3}$.

**A.** $D=(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$ **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;2\}$

**C.** $D=\mathbb{R}$ **D.** $D=(0;+\infty)$

**Câu 3.** **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Tập xác định của hàm số $y=(x-1)^{\frac{1}{5}}$ là

**A.** $[1;+\infty)$ **B.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ **C.** $(1;+\infty)$ **D.** $(0;+\infty)$

**Câu 4.** Tìm tập xác định $D$ của hàm số $y=(x^2-3x)^{-4}$.

**A.** $(0;3)$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{0;3\}$.

**C.** $D=(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$. **D.** $D=R$

**Câu 5.** **(KSCL THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Tìm tập xác định của hàm số: $y=(4-x^2)^{\frac{2}{3}}$ là

**A.** $D=(-2;2)$ **B.** $D=R\setminus\{2;-2\}$ **C.** $D=R$ **D.** $D=(2;+\infty)$

**Câu 6.** **(Thpt Lương Tài Số 2 2019)** Trong các hàm số sau đây, hàm số nào có tập xác định $D=\mathbb{R}$?

**A.** $y=(2+\sqrt{x})^{\pi}$ **B.** $y=\left(2+\frac{1}{x^2}\right)^{\pi}$ **C.** $y=(2+x^2)^{\pi}$ **D.** $y=(2+x)^{\pi}$

**Câu 7.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Tìm tập xác định $D$ của hàm số $y=(3x^2-1)^{\frac{1}{3}}$.

**A.** $D=\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$ **B.** $D=\mathbb{R}$

**C.** $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$ **D.** $D=\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]\cup\left[\frac{1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$

**Câu 8.** **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Hàm số nào dưới đây đồng biến trên tập xác định của nó?

**A.** $y=\left(\frac{1}{\pi}\right)^x$ **B.** $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ **C.** $y=\left(\sqrt{3}\right)^x$ **D.** $y=(0,5)^x$

**Câu 9.** **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Tìm tập xác định $D$ của hàm số $y=(x^2+2x-3)^{\sqrt{2}}$.

**A.** $D=\mathbb{R}$ **B.** $D=(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$ **C.** $D=(0;+\infty)$ **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-3;1\}$

**Câu 10.** **(Chuyên KHTN 2019)** Tập xác định của hàm số $y=(x-1)^{\frac{1}{2}}$ là

**A.** $(0;+\infty)$. **B.** $[1;+\infty)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

**Câu 11.** **(Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ An 2019)** Tập xác định của hàm số $y=(x^2-4x)^{\frac{2019}{2020}}$ là

**A.** $(-\infty;0]\cup[4;+\infty)$ **B.** $(-\infty;0)\cup(4;+\infty)$ **C.** $(0;4)$ **D.** $\mathbb{R}\setminus\{0;4\}$

**Câu 12.** **(THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Tập xác định của hàm số $y=(-x^2+6x-8)^{\sqrt{2}}$ là

**A.** $D=(2;4)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(4;+\infty)$. **D.** $D=\mathbb{R}$.

**Câu 13.** **(KTNL GV THPT Lý Thái Tổ 2019)** Tìm tập xác định của hàm số $y=(x^2-7x+10)^{-3}$

**A.** $\mathbb{R}\setminus\{2;5\}$. **B.** $(-\infty;2)\cup(5;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $(2;5)$.

**Câu 14.** **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Tìm tập xác định $D$ của hàm số $y=(4x^2-1)^{-3}$.

**A.** $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$. **B.** $D=\left(-\infty;\frac{-1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

**C.** $D=\mathbb{R}$. **D.** $D=\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

**Câu 15.** **(Hsg Tỉnh Bắc Ninh 2019)** Tập xác định của hàm số $y=\left(4-3x-x^2\right)^{-2019}$ là

**A.** $\mathbb{R}\setminus\{-4;1\}$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $[-4;1]$. **D.** $(-4;1)$.

**Câu 16.** **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Tìm tập xác định của $y=\left(x^2-3x+2\right)^{\frac{-1}{3}}$

**A.** $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$. **C.** $y'=\frac{2x}{\left(x^2+2\right)\ln 5}$. **D.** $\mathbb{R}$.

**Câu 17.** **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Tập xác định của hàm số $y=\left(x^2-3x+2\right)^{\pi}$ là

**A.** $(1;2)$.. **B.** $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$. **D.** $(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$

**Câu 18.** **(Sở Bắc Ninh 2019)** Tìm tập xác định $D$ của hàm số $y=\left(x^2-3x-4\right)^{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

**A.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;4\}$. **B.** $D=(-\infty;-1]\cup[4;+\infty)$.

**C.** $D=\mathbb{R}$. **D.** $D=(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)$.

**Câu 19.** **(Gia Lai 2019)** Tìm tập xác định $D$ của hàm số $y=\left(x^2-6x+9\right)^{\frac{\pi}{2}}$.

**A.** $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **B.** $D=(3;+\infty)$. **C.** $D=\mathbb{R}\setminus\{3\}$. **D.** $D=\mathbb{R}$.

**Câu 20.** **(chuyên Hà Tĩnh 2019)**Tìm tập xác định của hàm số $y=\left(x^2-3x+2\right)^{\frac{1}{3}}$ là

**A.** $\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$. **B.** $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $\mathbb{R}$.

**Câu 21.** **(Chu Văn An - Hà Nội - 2019)** Tập xác định D của hàm số $y=\left(x^3-27\right)^{\frac{\pi}{2}}$ là

**A.** $\mathrm{D}=(3;+\infty)$. **B.** $\mathrm{D}=[3;+\infty)$. **C.** $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{3\}$. **D.** $\mathrm{D}=\mathbb{R}$.

**Câu 22.** **(Bắc Ninh 2019)** Tập xác định của hàm số $y=\left(x^2-3x+2\right)^{\frac{3}{5}}+(x-3)^{-2}$ là

**A.** $D=(-\infty;+\infty)\setminus\{3\}$ **B.** $D=(-\infty;1)\cup(2;+\infty)\setminus\{3\}$.

**C.** $D=(-\infty;+\infty)\setminus(1;2)$. **D.** $D=(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

## Dạng 4. Đạo hàm hàm số lũy thừa

- **Đạo hàm:**

$$\begin{cases} y=x^{\alpha}\longrightarrow y'=\alpha x^{\alpha-1} \\ y=u^{\alpha}\longrightarrow y'=\alpha u^{\alpha-1}.\boxed{u'} \end{cases}$$

**Câu 1.** **(Sở Quảng Trị 2019)** Tìm đạo hàm của hàm số: $y=(x^2+1)^{\frac{3}{2}}$

**A.** $\frac{3}{2}(2x)^{\frac{1}{2}}$ **B.** $\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$ **C.** $3x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$ **D.** $\frac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$

**Câu 2.** **(Kiểm tra năng lực - ĐH - Quốc Tế - 2019)** Đạo hàm của hàm số $y=\left(3-x^2\right)^{\frac{2}{3}}$ tại $x=1$ là

**A.** $\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$. **B.** $-\frac{2\sqrt[3]{4}}{3}$. **C.** $-\frac{\sqrt[3]{2}}{3}$. **D.** 3 lựa chọn kia đều sai.

**Câu 3.** **(THPT Lý Nhân Tông – 2017)** Hàm số $y=\sqrt[5]{\left(x^2+1\right)^2}$ có đạo hàm là.

**A.** $y'=\dfrac{4x}{5\sqrt[5]{\left(x^2+1\right)^3}}$. **B.** $y'=2x\sqrt{x^2+1}$. **C.** $y'=4x\sqrt[5]{x^2+1}$. **D.** $y'=\dfrac{4}{\sqrt[5]{\left(x^2+1\right)^2}}$.

**Câu 4.** **(THPT Nguyễn Đăng Đạo – 2017)** Đạo hàm của hàm số $y=(2x+1)^{-\frac{1}{3}}$ trên tập xác định là.

**A.** $-\dfrac{1}{3}(2x+1)^{-\frac{4}{3}}$. **B.** $2(2x+1)^{-\frac{1}{3}}\ln(2x+1)$. **C.** $(2x+1)^{-\frac{1}{3}}\ln(2x+1)$. **D.** $-\dfrac{2}{3}(2x+1)^{-\frac{4}{3}}$.

**Câu 5.** **(Chuyên Vinh 2018)** Đạo hàm của hàm số $y=\left(x^2+x+1\right)^{\frac{1}{3}}$ là

**A.** $y'=\dfrac{1}{3}\left(x^2+x+1\right)^{\frac{8}{3}}$. **B.** $y'=\dfrac{2x+1}{2\sqrt[3]{x^2+x+1}}$. **C.** $y'=\dfrac{2x+1}{3\sqrt[3]{\left(x^2+x+1\right)^2}}$. **D.** $y'=\dfrac{1}{3}\left(x^2+x+1\right)^{\frac{2}{3}}$.

**Câu 6.** **(THPT Chuyen LHP Nam Dinh – 2017)** Tính đạo hàm của hàm số $y=(1-\cos 3x)^6$.

**A.** $y'=6\sin 3x(1-\cos 3x)^5$. **B.** $y'=6\sin 3x(\cos 3x-1)^5$.

**C.** $y'=18\sin 3x(\cos 3x-1)^5$. **D.** $y'=18\sin 3x(1-\cos 3x)^5$.

**Câu 7.** **(THPT Chuyên LHP – 2017)** Tìm đạo hàm của hàm số $y=\left(x^2+1\right)^{\frac{e}{2}}$ trên $\mathbb{R}$.

**A.** $y'=2x\left(x^2+1\right)^{\frac{e}{2}-1}$. **B.** $y'=ex\sqrt{\left(x^2+1\right)^{e-2}}$.

**C.** $y'=\dfrac{e}{2}\left(x^2+1\right)^{\frac{e}{2}-1}$. **D.** $y'=\left(x^2+1\right)^{\frac{e}{2}}\ln\left(x^2+1\right)$.

**Câu 8.** **(THPT Tứ Kỳ - Hải Dương - 2018)** Cho hàm số $y=\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{x}}}}}$, $(x>0)$. Đạo hàm của $y$ là:

**A.** $y'=e^{\frac{15}{16}}.x^{-\frac{31}{32}}$. **B.** $y'=\dfrac{\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e}}}}}{32.\sqrt[32]{x^{31}}}$. **C.** $y'=e^{\frac{15}{16}}.x^{\frac{31}{32}}$. **D.** $y'=\dfrac{\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e}}}}}{2\sqrt{x}}$.

**Câu 9.** **(Xuân Trường - Nam Định - 2018)** Tính đạo hàm của hàm số $y=\sin 2x+3^x$

**A.** $y'=2\cos 2x+x3^{x-1}$. **B.** $y'=-\cos 2x+3^x$.

**C.** $y'=-2\cos 2x-3^x\ln 3$. **D.** $y'=2\cos 2x+3^x\ln 3$.

**Câu 10.** **(THPT Thuận Thành - Bắc Ninh - 2018)** Đạo hàm của hàm số $y=(2x-1)^{\frac{1}{3}}$ là:

**A.** $y'=\dfrac{1}{3}(2x-1)^{-\frac{2}{3}}$. **B.** $y'=(2x-1)^{\frac{1}{3}}\cdot\ln|2x-1|$.

**C.** $y'=\dfrac{2}{3}(2x-1)^{\frac{4}{3}}$. **D.** $y'=\dfrac{2}{3}(2x-1)^{-\frac{2}{3}}$.

**Câu 11.** **(THPT Nghen - Hà Tĩnh - 2018)** Đạo hàm của hàm số $y=x.2^x$ là

**A.** $y'=(1+x\ln 2)2^x$. **B.** $y'=(1-x\ln 2)2^x$. **C.** $y'=(1+x)2^x$. **D.** $y'=2^x+x^2 2^{x-1}$.

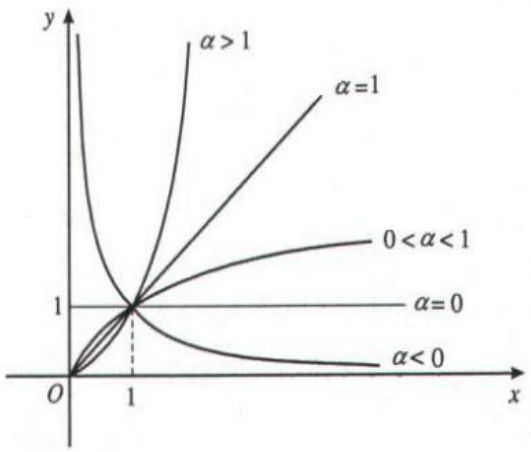
## Dạng 5. Khảo sát hàm số lũy thừa

**Khảo sát hàm số lũy thừa** $y=x^\alpha$

Tập xác định của hàm số lũy thừa $y=x^{\alpha}$ luôn chứa khoảng $(0;+\infty)$ với mọi $\alpha\in\mathbb{R}$. Trong trường hợp tổng quát, ta khảo sát hàm số $y=x^{\alpha}$ trên khoảng này.

| $y=x^{\alpha},\alpha>0.$ | $y=x^{\alpha},\alpha<0.$ |
|---|---|
| 1. Tập xác định: $(0;+\infty)$. | 1. Tập xác định: $(0;+\infty)$. |
| 2. Sự biến thiên<br>$y'=\alpha.x^{\alpha-1}>0 \quad \forall x>0.$<br>Giới hạn đặc biệt:<br>$\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\alpha}=0,\quad \lim\limits_{x\to+\infty}x^{\alpha}=+\infty.$<br>Tiệm cận: **không có**. | 2. Sự biến thiên<br>$y'=\alpha.x^{\alpha-1}<0 \quad \forall x>0.$<br>Giới hạn đặc biệt:<br>$\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\alpha}=+\infty,\quad \lim\limits_{x\to+\infty}x^{\alpha}=0.$<br>Tiệm cận:<br>*Ox* là tiệm cận ngang.<br>*Oy* là tiệm cận đứng. |
| 3. Bảng biến thiên.<br>$x$ \| $0$ \| $+\infty$<br>$y'$ \| $+$<br>$y$ \| $0$ → $+\infty$ | 3. Bảng biến thiên.<br>$x$ \| $0$ \| $+\infty$<br>$y'$ \| $-$<br>$y$ \| $+\infty$ → $0$ |

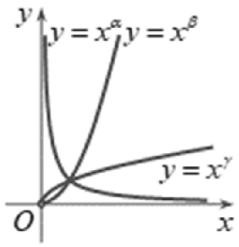
Đồ thị của hàm số.




**Câu 1.** **(THPT Phan Chu Trinh - Đắc Lắc - 2018)** Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$ ?

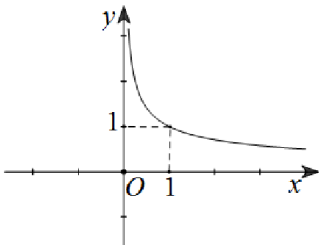
**A.** $y=2^{x}$. **B.** $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x}$. **C.** $y=\left(\sqrt{\pi}\right)^{x}$. **D.** $y=\mathrm{e}^{x}$.

**Câu 2.** Cho các hàm số lũy thừa $y=x^{\alpha}$, $y=x^{\beta}$, $y=x^{\gamma}$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề đúng là




**A.** $\alpha>\beta>\gamma.$ **B.** $\beta>\alpha>\gamma.$ **C.** $\beta>\gamma>\alpha.$ **D.** $\gamma>\beta>\alpha.$

**Câu 3.** Đường cong ở hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số nào dưới đây?




**A.** $y=2^{1-x}$. **B.** $y=x^{-\frac{1}{2}}$. **C.** $y=x^{-1}$. **D.** $y=\log_2(2x)$.

**Câu 4.** **(THPT Quốc Oai - Hà Nội - 2017)** Cho hàm số $y=x^{-\sqrt{3}}$ khẳng định nào sau đây đúng?

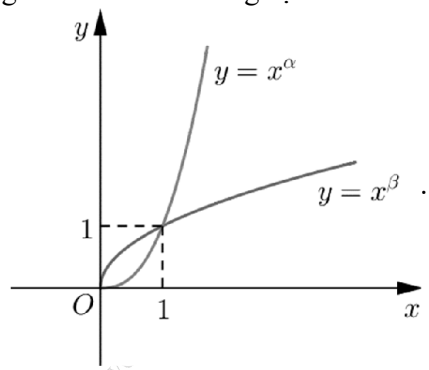
**A.** Đồ thị hàm số cắt trục $Ox$.

**B.** Đồ thị hàm số không có tiệm cận.

**C.** Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng và không có tiệm cận ngang.

**D.** Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang.

**Câu 5.** **(Chuyên Vinh 2017)** Cho là các số $\alpha,\ \beta$ là các số thực. Đồ thị các hàm số $y=x^{\alpha}, y=x^{\beta}$ trên khoảng $(0;\ +\infty)$ được cho trong hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?




**A.** $0<\alpha<1<\beta$. **B.** $\beta<0<1<\alpha$. **C.** $0<\beta<1<\alpha$. **D.** $\alpha<0<1<\beta$.

**Câu 6.** **(THPT – THD Nam Dinh- 2017)** Cho hàm số $y=x^{-\sqrt{2}}$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

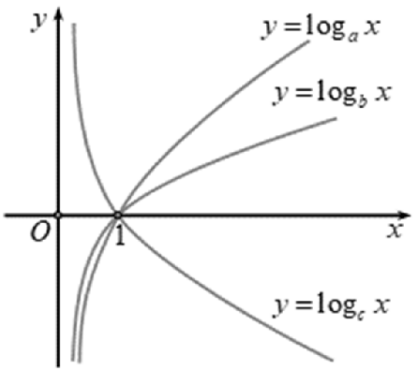
**A.** Hàm số có tập xác định là $(0;+\infty)$. **B.** Đồ thị hàm số không có tiệm cận.

**C.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$. **D.** Đồ thị hàm số không cắt trục hoành.

**Câu 7.** **(Chuyên Nguyễn Huệ 2019)** Số cực trị của hàm số $y=\sqrt[5]{x^2}-x$ là

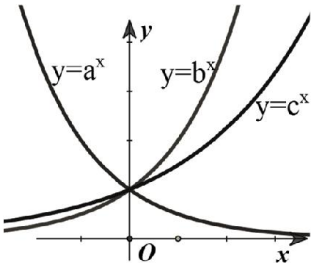
**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

**Câu 8.** **(THPT Lương Văn Tụy - Ninh Bình - 2018)** Cho $a$, $b$, $c$ là ba số dương khác 1. Đồ thị các hàm số $y=\log_a x$, $y=\log_b x$, $y=\log_c x$ được cho trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?




**A.** $a<b<c$. **B.** $c<a<b$. **C.** $c<b<a$. **D.** $b<c<a$.

**Câu 9.** **(THPT Nghen - Hà Tĩnh - 2018)** Cho ba số thực dương $a$, $b$, $c$ khác 1. Đồ thị các hàm số $y=a^x$, $y=b^x$, $y=c^x$ được cho trong hình vẽ dưới đây. Mệnh đề nào dưới đây đúng?




**A.** $1<a<c<b$. **B.** $a<1<c<b$. **C.** $a<1<b<c$. **D.** $1<a<b<c$.

**Câu 10.** **(THPT Yên Lạc - 2018)** Hàm số $y=x^2e^{2x}$ nghịch biến trên khoảng nào?

**A.** $(-\infty;0)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-1;0)$.

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 16 LŨY THỪA - HÀM SỐ LŨY THỪA

## TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH MỨC 5-6 ĐIỂM

### Dạng 1. Rút gọn, biến đổi, tính toán biểu thức lũy thừa

**Công thức lũy thừa**

Cho các số dương $a$, $b$ và $m, n \in \mathbb{R}$. Ta có:

| | | |
|---|---|---|
| ▪ $a^0 = 1$ | ▪ $a^n = \underbrace{a.a.....a}_{n \text{ thừa số}}$ với $n \in \mathbb{N}^*$ | ▪ $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ |
| ▪ $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$ | ▪ $a^m.a^n = a^{m+n}$ | ▪ $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ |
| ▪ $a^n b^n = (ab)^n$ | ▪ $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ | ▪ $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ $(m, n \in \mathbb{N}^*)$; $*\ \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$; $*\ \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$ |

**Câu 1.** **(Nhân Chính Hà Nội 2019)** Cho $a > 0, m, n \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $a^m + a^n = a^{m+n}$. **B.** $a^m.a^n = a^{m-n}$. **C.** $(a^m)^n = (a^n)^m$. **D.** $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{n-m}$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Tính chất lũy thừa

**Câu 2.** **(THPT Minh Khai - 2019)** Với $a > 0$, $b > 0$, $\alpha, \beta$ là các số thực bất kì, đẳng thức nào sau đây **sai**?

**A.** $\dfrac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$. **B.** $a^\alpha.a^\beta = a^{\alpha+\beta}$. **C.** $\dfrac{a^\alpha}{b^\beta} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\alpha-\beta}$. **D.** $a^\alpha.b^\alpha = (ab)^\alpha$.

**Lời giải**

**Chọn C**

**Câu 3.** **(Sở Quảng Trị 2019)** Cho $x, y > 0$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tìm đẳng thức sai dưới đây.

**A.** $(xy)^\alpha = x^\alpha.y^\alpha$. **B.** $x^\alpha + y^\alpha = (x+y)^\alpha$. **C.** $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$. **D.** $x^\alpha.x^\beta = x^{\alpha+\beta}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Theo tính chất của lũy thừa thì đẳng thức $x^\alpha + y^\alpha = (x+y)^\alpha$ **Sai.**

**Câu 4.** **(Nho Quan A - Ninh Bình - 2019)** Cho các số thực $a, b, m, n (a, b > 0)$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

**A.** $\dfrac{a^m}{a^n} = \sqrt[n]{a^m}$. **B.** $(a^m)^n = a^{m+n}$. **C.** $(a+b)^m = a^m + b^m$. **D.** $a^m.a^n = a^{m+n}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \Rightarrow$ Loại A

$(a^m)^n = a^{m.n} \Rightarrow$ Loại B

$(1+1)^2 \neq 1^2 + 1^2 \Rightarrow$ Loại C

$a^m.a^n = a^{m+n} \Rightarrow$ Chọn D

**Câu 5.** **(Cụm 8 Trường Chuyên 2019)** Với $\alpha$ là số thực bất kì, mệnh đề nào sau đây **sai**?

**A.** $\sqrt{10^{\alpha}}=\left(\sqrt{10}\right)^{\alpha}$. **B.** $\sqrt{10^{\alpha}}=10^{\frac{\alpha}{2}}$. **C.** $\left(10^{\alpha}\right)^2=(100)^{\alpha}$. **D.** $\left(10^{\alpha}\right)^2=(10)^{\alpha^2}$.

**Lời giải**

Theo định nghĩa và các tính chất của lũy thừa, ta thấy A, B, C là các mệnh đề đúng.

Xét mệnh đề D: với $\alpha=1$, ta có: $\left(10^1\right)^2=100\neq(10)^{1^2}=10$ nên mệnh đề D sai.

**Câu 6.** **(Mã 105 2017)** Rút gọn biểu thức $Q=b^{\frac{5}{3}}:\sqrt[3]{b}$ với $b>0$.

**A.** $Q=b^{-\frac{4}{3}}$ **B.** $Q=b^{\frac{4}{3}}$ **C.** $Q=b^{\frac{5}{9}}$ **D.** $Q=b^2$

**Lời giải**

**Chọn B**

$Q=b^{\frac{5}{3}}:\sqrt[3]{b}=b^{\frac{5}{3}}:b^{\frac{1}{3}}=b^{\frac{4}{3}}$

**Câu 7.** **(Mã 110 2017)** Rút gọn biểu thức $P=x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{x}$ với $x>0$.

**A.** $P=\sqrt{x}$ **B.** $P=x^{\frac{1}{8}}$ **C.** $P=x^{\frac{2}{9}}$ **D.** $P=x^2$

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $P=x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{x}=x^{\frac{1}{3}}.x^{\frac{1}{6}}=x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$

**Câu 8.** **(SGD Nam Định 2019)** Cho $a$ là số thực dương. Giá trị rút gọn của biểu thức $P=a^{\frac{4}{3}}\sqrt{a}$ bằng

**A.** $a^{\frac{7}{3}}$. **B.** $a^{\frac{5}{6}}$. **C.** $a^{\frac{11}{6}}$. **D.** $a^{\frac{10}{3}}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $P=a^{\frac{4}{3}}\sqrt{a}=a^{\frac{4}{3}}.a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{4}{3}+\frac{1}{2}}=a^{\frac{11}{6}}$.

**Câu 9.** **(Mã 102 2017)** Cho biểu thức $P=\sqrt[4]{x.\sqrt[3]{x^2.\sqrt{x^3}}}$, với $x>0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $P=x^{\frac{2}{3}}$ **B.** $P=x^{\frac{1}{2}}$ **C.** $P=x^{\frac{13}{24}}$ **D.** $P=x^{\frac{1}{4}}$

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có, với $x>0$: $P=\sqrt[4]{x.\sqrt[3]{x^2.\sqrt{x^3}}}=\sqrt[4]{x.\sqrt[3]{x^2.x^{\frac{3}{2}}}}=\sqrt[4]{x.\sqrt[3]{x^{\frac{7}{2}}}}=\sqrt[4]{x.x^{\frac{7}{6}}}=\sqrt[4]{x^{\frac{13}{6}}}=x^{\frac{13}{24}}$.

**Câu 10.** **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho biểu thức $P=x^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{\text{x}}$ với $x>0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $P=x$ **B.** $P=x^{\frac{11}{6}}$ **C.** $P=x^{\frac{7}{6}}$ **D.** $P=x^{\frac{5}{6}}$

**Lời giải**

**Chọn A**

$P=x^{\frac{1}{2}}.x^{\frac{1}{3}}.\sqrt[6]{\text{x}}=x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=x$

**Câu 11.** **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Rút gọn biểu thức $P=x^{\frac{1}{6}}\cdot\sqrt[3]{x}$ với $x>0$.

**A.** $P=x^{\frac{1}{8}}$ **B.** $P=\sqrt{x}$ **C.** $P=x^{\frac{2}{9}}$ **D.** $P=x^2$

**Lời giải**

**Chọn B**

Với $x>0; P=x^{\frac{1}{6}}.x^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$

**Câu 12.** **(THPT Sơn Tây Hà Nội 2019)** Cho a là số thực dương. Viết và rút gọn biểu thức $a^{\frac{3}{2018}}.\sqrt[2018]{a}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ. Tìm số mũ của biểu thức rút gọn đó.

**A.** $\frac{2}{1009}$. **B.** $\frac{1}{1009}$. **C.** $\frac{3}{1009}$. **D.** $\frac{3}{2018^2}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$a^{\frac{3}{2018}}.\sqrt[2018]{a}=a^{\frac{3}{2018}}.a^{\frac{1}{2018}}=a^{\frac{4}{2018}}=a^{\frac{2}{1009}}$. Vậy số mũ của biểu thức rút gọn bằng $\frac{2}{1009}$.

**Câu 13.** **(Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019)** Rút gọn biểu thức $P=\frac{a^{\sqrt{3}+1}.a^{2-\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}$ với $a>0$.

**A.** $P=a$. **B.** $P=a^3$. **C.** $P=a^4$. **D.** $P=a^5$.

**Lời giải**

$P=\frac{a^{\sqrt{3}+1}.a^{2-\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}=\frac{a^{\sqrt{3}+1+2-\sqrt{3}}}{a^{\left(\sqrt{2}-2\right)\left(\sqrt{2}+2\right)}}=\frac{a^3}{a^{-2}}=a^5$.

**Câu 14.** **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình 2019)** Biểu thức $P=\sqrt[3]{x\sqrt[5]{x^2\sqrt{x}}}=x^{\alpha}$ (với $x>0$), giá trị của $\alpha$ là

**A.** $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

**Lời giải**

$P=\sqrt[3]{x\sqrt[5]{x^2\sqrt{x}}}=\sqrt[3]{x\sqrt[5]{x^2.x^{\frac{1}{2}}}}=\sqrt[3]{x.\left(x^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}}=\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{2}}\Rightarrow\alpha=\frac{1}{2}$.

**Câu 15.** **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Cho $a$ là số thực dương khác 1. Khi đó $\sqrt[4]{a^{\frac{2}{3}}}$ bằng

**A.** $\sqrt[3]{a^2}$. **B.** $a^{\frac{8}{3}}$. **C.** $a^{\frac{3}{8}}$. **D.** $\sqrt[6]{a}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $\sqrt[4]{a^{\frac{2}{3}}}=\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{2}{3}.\frac{1}{4}}=a^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{a}$

**Câu 16.** **(Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019)** Rút gọn biểu thức $P=\frac{a^{\sqrt{3}+1}.a^{2-\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}$ với $a>0$

**A.** $P=a$ **B.** $P=a^3$ **C.** $P=a^4$ **D.** $P=a^5$

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $P=\frac{a^{\sqrt{3}+1}.a^{2-\sqrt{3}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}=\frac{a^3}{a^{2-4}}=a^5$

**Câu 17.** **(THPT Lương Tài Số 2 2019)** Cho biểu thức $P=x^{-\frac{3}{4}}.\sqrt{x\sqrt{x^5}}$, $x>0$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** $P=x^{-2}$ **B.** $P=x^{-\frac{1}{2}}$ **C.** $P=x^{\frac{1}{2}}$ **D.** $P=x^2$

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $P=x^{-\frac{3}{4}}.\sqrt{\sqrt{x^5}}=x^{-\frac{3}{4}}.x^{\frac{5}{4}}=x^{-\frac{3}{4}+\frac{5}{4}}=x^{\frac{1}{2}}$.

**Câu 18.** **(Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2019)** Cho biểu thức $P=\dfrac{a^{\sqrt{5}+1}.a^{2-\sqrt{5}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}$. Rút gọn $P$ được kết quả:

**A.** $a^5$. **B.** $a$. **C.** $a^3$. **D.** $a^4$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $P=\dfrac{a^{\sqrt{5}+1}.a^{2-\sqrt{5}}}{\left(a^{\sqrt{2}-2}\right)^{\sqrt{2}+2}}=\dfrac{a^{\sqrt{5}+1+2-\sqrt{5}}}{a^{\left(\sqrt{2}-2\right)\left(\sqrt{2}+2\right)}}=\dfrac{a^3}{a^{-2}}=a^5$.

**Câu 19.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho biểu thức $P=\sqrt[3]{x.\sqrt[4]{x^3\sqrt{x}}}$, với $x>0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $P=x^{\frac{1}{2}}$. **B.** $P=x^{\frac{7}{12}}$. **C.** $P=x^{\frac{5}{8}}$. **D.** $P=x^{\frac{7}{24}}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $P=\sqrt[3]{x.\sqrt[4]{x^3\sqrt{x}}}=x^{\frac{5}{8}}$

**Câu 20.** **(THPT Thiệu Hóa – Thanh Hóa 2019)** Cho hai số thực dương $a,b$. Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b}+b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}$ ta thu được $A=a^m.b^n$. Tích của $m.n$ là

**A.** $\dfrac{1}{8}$ **B.** $\dfrac{1}{21}$ **C.** $\dfrac{1}{9}$ **D.** $\dfrac{1}{18}$

**Lời giải**

**Chọn C**

$$A=\frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b}+b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}}=\frac{a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{3}}.a^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}}=\frac{a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{3}}\left(b^{\frac{1}{6}}+a^{\frac{1}{6}}\right)}{a^{\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{6}}}=a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{3}}\Rightarrow m=\frac{1}{3},\ n=\frac{1}{3}\Rightarrow m.n=\frac{1}{9}.$$

**Câu 21.** **(Sở Quảng Ninh 2019)** Rút gọn biểu thức $A=\dfrac{\sqrt[3]{a^7}.a^{\frac{11}{3}}}{a^4.\sqrt[7]{a^{-5}}}$ với $a>0$ ta được kết quả $A=a^{\frac{m}{n}}$ trong đó $m,n\in N^*$ và $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $m^2-n^2=312$. **B.** $m^2+n^2=543$. **C.** $m^2-n^2=-312$. **D.** $m^2+n^2=409$.

**Lời giải**

Ta có: $A=\dfrac{\sqrt[3]{a^7}.a^{\frac{11}{3}}}{a^4.\sqrt[7]{a^{-5}}}=\dfrac{a^{\frac{7}{3}}.a^{\frac{11}{3}}}{a^4.a^{\frac{-5}{7}}}=\dfrac{a^6}{a^{\frac{23}{7}}}=a^{\frac{19}{7}}$

Mà $A=a^{\frac{m}{n}},m,n\in N^*$ và $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản

$\Rightarrow m=19,n=7$

$\Rightarrow m^2-n^2=312$

**Câu 22.** **(Sở Vĩnh Phúc 2019)** Cho $a$ là số thực dương. Đơn giản biểu thức $P=\dfrac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{\frac{-1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{-1}{4}}\right)}$.

**A.** $P=a(a+1)$. **B.** $P=a-1$. **C.** $P=a$. **D.** $P=a+1$.

**Lời giải**

$$P=\frac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{\frac{-1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{-1}{4}}\right)}=\frac{a^{\frac{4}{3}}.a^{\frac{-1}{3}}+a^{\frac{4}{3}}a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{4}}.a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{4}}.a^{\frac{-1}{4}}}=\frac{a+a^2}{a+1}=\frac{a(a+1)}{a+1}=a.$$

**Câu 23.** Cho $a$, $b$ là các số thực dương. Rút gọn $P=\dfrac{a^{\frac{4}{3}}b+ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$ ta được

**A.** $P=ab$. **B.** $P=a+b$. **C.** $P=a^4b+ab^4$. **D.** $P=ab(a+b)$.

**Lời giải**

$$P=\frac{a^{\frac{4}{3}}b+ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}=\frac{a.a^{\frac{1}{3}}b+ab.b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}=\frac{ab\left(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}=ab.$$

**Câu 24.** **(KTNL GV Thpt Lý Thái Tổ 2019)** Cho biểu thức $\sqrt[5]{8\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}=2^{\frac{m}{n}}$, trong đó $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Gọi $P=m^2+n^2$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

**A.** $P\in(330;340)$. **B.** $P\in(350;360)$. **C.** $P\in(260;370)$. **D.** $P\in(340;350)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $\sqrt[5]{8\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}=\sqrt[5]{2^3\sqrt{2\sqrt[3]{2}}}=2^{\frac{3}{5}}.2^{\frac{1}{10}}.2^{\frac{1}{30}}=2^{\frac{3}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}}=2^{\frac{11}{15}}$

$\Rightarrow \dfrac{m}{n}=\dfrac{11}{15}\Rightarrow\begin{cases}m=11\\n=15\end{cases}\Rightarrow P=m^2+n^2=11^2+15^2=346$.

**Câu 25.** **(Sở Bắc Ninh 2019)** Cho $a>0$, $b>0$, giá trị của biểu thức $T=2(a+b)^{-1}.(ab)^{\frac{1}{2}}.\left[1+\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ bằng

**A.** 1. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

**Lời giải**

***Cách 2:***

Ta có $T=2(a+b)^{-1}.(ab)^{\frac{1}{2}}.\left[1+\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$

$=2(a+b)^{-1}.(ab)^{\frac{1}{2}}.\left[1+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{a-b}{\sqrt{ab}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=2(a+b)^{-1}.(ab)^{\frac{1}{2}}.\left[1+\dfrac{(a-b)^2}{4ab}\right]^{\frac{1}{2}}$

$$=2(a+b)^{-1}.(ab)^{\frac{1}{2}}.\left[\frac{(a+b)^2}{4ab}\right]^{\frac{1}{2}}=2\frac{1}{a+b}.(ab)^{\frac{1}{2}}.\frac{(a+b)}{2(ab)^{\frac{1}{2}}}=1.$$

**Câu 26.** **(Đề Tham Khảo 2017)** Tính giá trị của biểu thức $P=\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2017}\left(4\sqrt{3}-7\right)^{2016}$

**A.** $P=\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2016}$ **B.** $P=1$ **C.** $P=7-4\sqrt{3}$ **D.** $P=7+4\sqrt{3}$

**Lời giải**

**Chọn D**

$P=\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2017}\left(4\sqrt{3}-7\right)^{2016}=\left(7+4\sqrt{3}\right).\left[\left(7+4\sqrt{3}\right)\left(4\sqrt{3}-7\right)\right]^{2016}$

$=\left(7+4\sqrt{3}\right)(-1)^{2016}=7+4\sqrt{3}.$

**Câu 27.** **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Cho biểu thức $P=\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}}}$. Mệnh đề nào trong các mệnh đề sau là đúng?

**A.** $P=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{8}}.$ **B.** $P=\left(\frac{2}{3}\right)^{18}.$ **C.** $P=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{18}}.$ **D.** $P=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}.$

**Lời giải**

**Cách 1:**

Ta có: $P=\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}}}=\sqrt[3]{\frac{2}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}}=\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}.\frac{1}{3}+1}}=\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}.$

Nguyễn Bảo Vương

**Câu 28.** **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Cho hàm số $f(a)=\frac{a^{-\frac{1}{3}}\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{a^4}\right)}{a^{\frac{1}{8}}\left(\sqrt[8]{a^3}-\sqrt[8]{a^{-1}}\right)}$ với $a>0,a\neq 1$. Tính giá trị $M=f\left(2017^{2016}\right)$

**A.** $M=2017^{1008}-1$ **B.** $M=-2017^{1008}-1$ **C.** $M=2017^{2016}-1$ **D.** $M=1-2017^{2016}$

**Lời giải**

**Chọn B**

$f(a)=\frac{a^{-\frac{1}{3}}\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{a^4}\right)}{a^{\frac{1}{8}}\left(\sqrt[8]{a^3}-\sqrt[8]{a^{-1}}\right)}=\frac{1-a}{\sqrt{a}-1}=-1-\sqrt{a}$ nên

$M=f\left(2017^{2016}\right)=-1-\sqrt{2017^{2016}}=-1-2017^{1008}$

**Câu 29.** **(THPT Trần Phú 2019)** Giá trị của biểu thức $P=\frac{2^3.2^{-1}+5^{-3}.5^4}{10^{-3}:10^{-2}-(0,1)^0}$ là

**A.** $-9.$ **B.** $-10.$ **C.** $10.$ **D.** $9.$

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $P=\frac{2^3.2^{-1}+5^{-3}.5^4}{10^{-3}:10^{-2}-(0,1)^0}=\frac{2^{3-1}+5^{-3+4}}{10^{-3+2}-1}=\frac{4+5}{10^{-1}-1}=\frac{9}{\frac{1}{10}-1}=-10..$

**Câu 30.** **(THPT Ngô Quyền – 2017)** Cho hàm số $f(a)=\dfrac{a^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{a^{-2}}-\sqrt[3]{a}\right)}{a^{\frac{1}{8}}\left(\sqrt[8]{a^{3}}-\sqrt[8]{a^{-1}}\right)}$ với $a>0, a\neq 1$. Tính giá trị $M=f\left(2017^{2018}\right)$.

**A.** $2017^{2018}+1$. **B.** $-2017^{1009}-1$. **C.** $2017^{1009}$. **D.** $2017^{1009}+1$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $f(a)=\dfrac{a^{\frac{2}{3}}\left(a^{-\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{8}}\left(a^{\frac{3}{8}}-a^{-\frac{1}{8}}\right)}=\dfrac{1-a}{a^{\frac{1}{2}}-1}=-1-a^{\frac{1}{2}}$.

Do đó $M=f\left(2017^{2018}\right)=-1-\left(2017^{2018}\right)^{\frac{1}{2}}=-1-2017^{1009}$.

**Câu 31.** Cho biểu thức $f(x)=\sqrt[3]{x}\sqrt[4]{x}\sqrt[12]{x^5}$. Khi đó, giá trị của $f(2,7)$ bằng

**A.** $0,027$. **B.** $27$. **C.** $2,7$. **D.** $0,27$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

$f(x=2,7)=\sqrt[3]{2,7}.\sqrt[4]{2,7}.\sqrt[12]{2,7^5}=2,7$.

**Câu 32.** Tính giá trị biểu thức $P=\dfrac{\left(4+2\sqrt{3}\right)^{2018}.\left(1-\sqrt{3}\right)^{2017}}{\left(1+\sqrt{3}\right)^{2019}}$.

**A.** $P=-2^{2017}$. **B.** $-1$. **C.** $-2^{2019}$. **D.** $2^{2018}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $P=\dfrac{\left(1+\sqrt{3}\right)^{2.2018}.\left(1-\sqrt{3}\right)^{2017}}{\left(1+\sqrt{3}\right)^{2019}}=\left[\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)\right]^{2017}=-2^{2017}$.

**Câu 33.** **(Chuyên Nguyễn Du-ĐăkLăk 2019)** Giá trị biểu thức $\left(3+2\sqrt{2}\right)^{2018}.\left(\sqrt{2}-1\right)^{2019}$ bằng

**A.** $\left(\sqrt{2}+1\right)^{2019}$. **B.** $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2017}$. **C.** $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2019}$. **D.** $\left(\sqrt{2}+1\right)^{2017}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $\left(3+2\sqrt{2}\right)^{2018}.\left(\sqrt{2}-1\right)^{2019}=\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2}\right]^{2018}.\left(\sqrt{2}-1\right)^{2019}$

$=\left(\sqrt{2}+1\right)^{2018}.\left(\sqrt{2}+1\right)^{2018}.\left(\sqrt{2}-1\right)^{2018}.\left(\sqrt{2}-1\right)=\left(\sqrt{2}+1\right)^{2017}.\left[\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)\right]^{2019}$

$=\left(\sqrt{2}+1\right)^{2017}$.

**Câu 34.** Cho $a>0, b>0$ giá trị của biểu thức $T=2(a+b)^{-1}(ab)^{\frac{1}{2}}\left[1+\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{\dfrac{a}{b}}-\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2}}$ bằng

**A.** $1$. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có

$$T=2(a+b)^{-1}(ab)^{\frac{1}{2}}\left[1+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=2(a+b)^{-1}(ab)^{\frac{1}{2}}\left[1+\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=2(a+b)^{-1}(ab)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{4b}+\frac{b}{4a}+\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=2(a+b)^{-1}(ab)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{a^2+b^2+2ab}{4ab}\right]^{\frac{1}{2}}=2(a+b)^{-1}(ab)^{\frac{1}{2}}\frac{(a+b)}{2(ab)^{\frac{1}{2}}}=1.$$

## Dạng 2. So sánh các biểu thức chứa lũy thừa

- Nếu $a>1$ thì $a^{\alpha}>a^{\beta}\Leftrightarrow\alpha>\beta$;
- Nếu $0<a<1$ thì $a^{\alpha}>a^{\beta}\Leftrightarrow\alpha<\beta$.
- Với mọi $0<a<b$, ta có:

$a^m<b^m\Leftrightarrow m>0$

$a^m>b^m\Leftrightarrow m<0$

**Câu 1.** **(Bạc Liêu – Ninh Bình 2019)** Cho $\left(\sqrt{2}-1\right)^m<\left(\sqrt{2}-1\right)^n$. Khi đó

**A.** $m=n$. **B.** $m<n$. **C.** $m>n$. **D.** $m\neq n$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Do $0<\sqrt{2}-1<1$ nên $\left(\sqrt{2}-1\right)^m<\left(\sqrt{2}-1\right)^n\Leftrightarrow m>n$.

**Câu 2.** Cho $a>1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

**A.** $a^{-\sqrt{3}}>\frac{1}{a^{\sqrt{5}}}$. **B.** $a^{\frac{1}{3}}>\sqrt{a}$. **C.** $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a}>1$. **D.** $\frac{1}{a^{2016}}<\frac{1}{a^{2017}}$.

Nguyễn Bảo Vương

**Lời giải**

**Chọn A**

Vì $a>1;-\sqrt{3}>-\sqrt{5}\Rightarrow a^{-\sqrt{3}}>a^{-\sqrt{5}}\Leftrightarrow a^{-\sqrt{3}}>\frac{1}{a^{\sqrt{5}}}$.

**Câu 3.** **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào SAI?

**A.** $\left(\sqrt{3}-1\right)^{2018}>\left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}$. **B.** $2^{\sqrt{2}+1}>2^{\sqrt{3}}$.

**C.** $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2017}>\left(\sqrt{2}-1\right)^{2018}$. **D.** $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2019}<\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

**A.** $\left(\sqrt{3}-1\right)^{2018}>\left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}$. Cùng cơ số, $0<\sqrt{3}-1<1$, hàm nghịch biến, số mũ lớn hơn nên bé hơn. **Sai**

**B.** $2^{\sqrt{2}+1}>2^{\sqrt{3}}$. Cùng cơ số, $2>1$, hàm đồng biến, số mũ $\left(\sqrt{2}+1\right)^2=3+2\sqrt{2}>\left(\sqrt{3}\right)^2=3$ nên lớn hơn. **Đúng**

**C.** $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2017}>\left(\sqrt{2}-1\right)^{2018}$. Cùng cơ số, $0<\sqrt{2}-1<1$, hàm nghịch biến, số mũ bé hơn nên lớn hơn. **Đúng.**

**D.** $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2019}<\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018}$. Cùng cơ số, $0<1-\frac{\sqrt{2}}{2}<1$, hàm nghịch biến, số mũ lớn hơn nên bé hơn. **Đúng**

**Câu 4.** **(THPT Sơn Tây Hà Nội 2019)** Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $(\sqrt{5}+2)^{-2017}<(\sqrt{5}+2)^{-2018}$.

**B.** $(\sqrt{5}+2)^{2018}>(\sqrt{5}+2)^{2019}$.

**C.** $(\sqrt{5}-2)^{2018}>(\sqrt{5}-2)^{2019}$.

**D.** $(\sqrt{5}-2)^{2018}<(\sqrt{5}-2)^{2019}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$\begin{cases}0<\sqrt{5}-2<1\\2018<2019\end{cases}\Rightarrow(\sqrt{5}-2)^{2018}>(\sqrt{5}-2)^{2019}\Rightarrow C$ đúng.

$\begin{cases}\sqrt{5}+2>1\\-2017>-2018\end{cases}\Rightarrow(\sqrt{5}+2)^{-2017}>(\sqrt{5}+2)^{-2018}\Rightarrow A$ sai

$\begin{cases}\sqrt{5}+2>1\\2018<2019\end{cases}\Rightarrow(\sqrt{5}+2)^{2018}<(\sqrt{5}+2)^{2019}\Rightarrow B$ sai

$\begin{cases}0<\sqrt{5}-2<1\\2018<2019\end{cases}\Rightarrow(\sqrt{5}-2)^{2018}>(\sqrt{5}-2)^{2019}\Rightarrow D$ sai.

**Câu 5.** **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Khẳng định nào dưới đây là đúng?

**A.** $\left(\frac{3}{7}\right)^{\sqrt{3}}>\left(\frac{5}{8}\right)^{\sqrt{3}}$.

**B.** $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\pi}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-\pi}$.

**C.** $3^{-\sqrt{2}}<\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$.

**D.** $\left(\frac{1}{4}\right)^{-50}<\left(\sqrt{2}\right)^{100}$.

**Lời giải**

Ta có:

$\left(\frac{3}{7}\right)<\left(\frac{5}{8}\right)\Rightarrow\left(\frac{3}{7}\right)^{\sqrt{3}}<\left(\frac{5}{8}\right)^{\sqrt{3}}$ (vì $\sqrt{3}>0$). Phương án A Sai.

$\frac{1}{2}>\frac{1}{3}\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{-\pi}<\left(\frac{1}{3}\right)^{-\pi}$ (vì $-\pi<0$). Phương án B Đúng.

$3<5\Rightarrow3^{-\sqrt{2}}>5^{-\sqrt{2}}\Rightarrow3^{-\sqrt{2}}>\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$ (vì $-\sqrt{2}<0$). Phương án C Sai.

$\left(\frac{1}{4}\right)^{-50}<\left(\sqrt{2}\right)^{100}\Rightarrow\left(2^{-2}\right)^{-50}<(2)^{100}\Rightarrow2^{100}<2^{100}$ ( Mệnh đề sai ). Phương án D Sai.

**Câu 6.** **(Nam Định - 2018)** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

**A.** $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018}<\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2017}$.

**B.** $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2017}>\left(\sqrt{2}-1\right)^{2018}$.

**C.** $\left(\sqrt{3}-1\right)^{2018}>\left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}$.

**D.** $2^{\sqrt{2}+1}>2^{\sqrt{3}}$.

**Hướng dẫn giải**

**Chọn C**

+) $\begin{cases}0<\sqrt{2}-1<1\\2017<2018\end{cases}\Rightarrow\left(\sqrt{2}-1\right)^{2017}>\left(\sqrt{2}-1\right)^{2018}$ nên A đúng.

+) $\begin{cases}0<\sqrt{3}-1<1\\2018>2017\end{cases}\Rightarrow\left(\sqrt{3}-1\right)^{2018}<\left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}$ nên B sai.

+) $\begin{cases}2>1\\\sqrt{2}+1>\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow2^{\sqrt{2}+1}>2^{\sqrt{3}}$ nên C đúng.

+) $\begin{cases}0<1-\frac{\sqrt{2}}{2}<1\\2018>2017\end{cases}\Rightarrow\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018}<\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2017}$ nên D đúng.

**Câu 7.** **(THPT Tiên Lãng 2018)** Tìm tập tất cả các giá trị của $a$ để $\sqrt[21]{a^5} > \sqrt[7]{a^2}$ ?

**A.** $a > 0$. **B.** $0 < a < 1$. **C.** $a > 1$. **D.** $\frac{5}{21} < a < \frac{2}{7}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$\sqrt[7]{a^2} = \sqrt[21]{a^6}$.

Ta có $\sqrt[21]{a^5} > \sqrt[7]{a^2} \Leftrightarrow \sqrt[21]{a^5} > \sqrt[21]{a^6}$ mà $5 < 6$ vậy $0 < a < 1$.

**Câu 8.** So sánh ba số: $(0,2)^{0,3}, (0,7)^{3,2}$ và $\sqrt{3}^{0,3}$.

**A.** $(0,7)^{3,2} < (0,2)^{0,3} < \sqrt{3}^{0,3}$. **B.** $(0,2)^{0,3} < (0,7)^{3,2} < \sqrt{3}^{0,3}$.

**C.** $\sqrt{3}^{0,3} < (0,2)^{0,3} < (0,7)^{3,2}$. **D.** $(0,2)^{0,3} < \sqrt{3}^{0,3} < (0,7)^{3,2}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $0,2 < \sqrt{3} \Rightarrow (0,2)^{0,3} < \sqrt{3}^{0,3}$ nên loại đáp án

**Câu 9.** **(THPT Cộng Hiền 2019)** Cho $a, b > 0$ thỏa mãn $a^{\frac{1}{2}} > a^{\frac{1}{3}}, b^{\frac{2}{3}} > b^{\frac{3}{4}}$. Khi đó khẳng định nào đúng?

**A.** $0 < a < 1, 0 < b < 1$. **B.** $0 < a < 1, b > 1$. **C.** $a > 1, 0 < b < 1$. **D.** $a > 1, b > 1$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có

$a^{\frac{1}{2}} > a^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln a > \frac{1}{3}\ln a \Leftrightarrow \frac{1}{6}\ln a > 0 \Leftrightarrow a > 1$

$b^{\frac{2}{3}} > b^{\frac{3}{4}} \Leftrightarrow \frac{2}{3}\ln b > \frac{3}{4}\ln b \Leftrightarrow 0 > \frac{1}{12}\ln b \Leftrightarrow 0 < b < 1$

*Lưu ý:* Ta có thể sử dụng máy tính Casio để thử các đáp án bằng cách cho $a, b$ các giá trị cụ thể.

**Câu 10.** So sánh ba số $a = 1000^{1001}$, $b = 2^{2^{64}}$ và $c = 1^1 + 2^2 + 3^3 + ... + 1000^{1000}$?

**A.** $c < a < b$. **B.** $b < a < c$. **C.** $c < b < a$. **D.** $a < c < b$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $1^1 < 1000^{1000}; 2^2 < 1000^{1000} \; ... 999^{999} < 1000^{1000}$

$\Rightarrow c = 1^1 + 2^2 + 3^3 + ... + 1000^{1000} < 1000.1000^{1000} \Leftrightarrow c < a$

Mặt khác: $2^{10} > 1000$

$\Rightarrow 2^{64}.\ln 2 = \frac{2^4}{10}.\left(2^{10}\right)^6.\ln 2^{10} > 1000^6.\ln 1000 > 1001.\ln 1000 \Rightarrow 2^{2^{64}} > 1000^{1001} \Leftrightarrow a < b$

Vậy $c < a < b$.

## Dạng 3. Tìm tập xác định của hàm số lũy thừa

- **Dạng:** $\begin{cases} y = x^\alpha \\ y = u^\alpha \end{cases}$ với $u$ là đa thức đại số.
  - **Tập xác định:**

Nếu $\alpha \in \mathbb{Z}^+ \xrightarrow{ĐK} u \in \mathbb{R}$.

Nếu $\begin{cases} \alpha \in \mathbb{Z}^- \\ \alpha = 0 \end{cases} \xrightarrow{ĐK} u \neq 0$.

Nếu $\alpha \notin \mathbb{Z} \xrightarrow{ĐK} u > 0$.

**Câu 1.** **(Mã 123 2017)** Tập xác định D của hàm số $y=(x-1)^{\frac{1}{3}}$ là:.

**A.** $D=(1;+\infty)$ **B.** $D=\mathbb{R}$ **C.** $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ **D.** $D=(-\infty;1)$

**Lời giải**

**Chọn A**

Hàm số xác định khi $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$. Vậy $D=(1;+\infty)$.

**Câu 2.** **(Mã 104 2017)** Tìm tập xác định $D$ của hàm số $y=(x^2-x-2)^{-3}$.

**A.** $D=(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$ **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;2\}$

**C.** $D=\mathbb{R}$ **D.** $D=(0;+\infty)$

**Lời giải**

**Chọn B**

Vì $-3\in\mathbb{Z}^-$ nên hàm số xác định khi $x^2-x-2\neq 0 \Rightarrow x\neq -1; x\neq 2$. Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;2\}$.

**Câu 3.** **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Tập xác định của hàm số $y=(x-1)^{\frac{1}{5}}$ là

**A.** $[1;+\infty)$ **B.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ **C.** $(1;+\infty)$ **D.** $(0;+\infty)$

**Lời giải**

**Chọn C**

Vì $\frac{1}{5}\notin\mathbb{Z}$ nên hàm số xác định khi và chỉ khi $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$

Vậy tập xác định của hàm số $D=(1;+\infty)$

**Câu 4.** Tìm tập xác định $D$ của hàm số $y=(x^2-3x)^{-4}$.

**A.** $(0;3)$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{0;3\}$.

**C.** $D=(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$. **D.** $D=R$

**Lời giải**

**Chọn B**

Hàm số $y=(x^2-3x)^{-2}$ xác định khi $x^2-3x\neq 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x\neq 0 \\ x\neq 3 \end{bmatrix}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{0;3\}$.

**Câu 5.** **(KSCL THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Tìm tập xác định của hàm số: $y=(4-x^2)^{\frac{2}{3}}$ là

**A.** $D=(-2;2)$ **B.** $D=R\setminus\{2;-2\}$ **C.** $D=R$ **D.** $D=(2;+\infty)$

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện: $4-x^2>0 \Leftrightarrow x\in(-2;2)$. Vậy TXĐ: $D=(-2;2)$.

**Câu 6.** **(Thpt Lương Tài Số 2 2019)** Trong các hàm số sau đây, hàm số nào có tập xác định $D=\mathbb{R}$?

**A.** $y=(2+\sqrt{x})^{\pi}$ **B.** $y=\left(2+\frac{1}{x^2}\right)^{\pi}$ **C.** $y=(2+x^2)^{\pi}$ **D.** $y=(2+x)^{\pi}$

**Lời giải**

**Chọn C**

Đáp án A: Điều kiện $x\geq 0$. Tập xác định $D=[0;+\infty)$.

Đáp án B: Điều kiện $x \neq 0$. Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Đáp án C: Điều kiện $2 + x^2 > 0$ (luôn đúng). Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đáp án D: Điều kiện $2 + x > 0 \Leftrightarrow x > -2$. Tập xác định $D = (-2; +\infty)$.

**Câu 7.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Tìm tập xác định $D$ của hàm số $y = (3x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}$.

**A.** $D = \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$ **B.** $D = \mathbb{R}$

**C.** $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$ **D.** $D = \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện xác định: $3x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ x > \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$

Tập xác định $D = \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$

**Câu 8.** **(THPT** An Lão Hải Phòng 2019) **Hàm số nào dưới đây đồng biến trên tập xác định của nó?**

**A.** $y = \left(\frac{1}{\pi}\right)^x$ **B.** $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ **C.** $y = \left(\sqrt{3}\right)^x$ **D.** $y = (0,5)^x$

**Lời giải**

**Chọn C**

Hàm số $y = a^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a > 1$.

Thấy các số $\frac{1}{\pi}$; $\frac{2}{3}$; $0,5$ nhỏ hơn 1, còn $\sqrt{3}$ lớn hơn 1 nên chọn **C**.

**Câu 9.** **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Tìm tập xác định $D$ của hàm số $y = (x^2 + 2x - 3)^{\sqrt{2}}$.

**A.** $D = \mathbb{R}$ **B.** $D = (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$ **C.** $D = (0; +\infty)$ **D.** $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 1\}$

**Lời giải**

**Chọn B**

Hàm số xác định khi $x^2 + 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < -3 \end{array}\right.$.

Vậy $D = (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

**Câu 10.** **(Chuyên KHTN 2019)** Tập xác định của hàm số $y = (x - 1)^{\frac{1}{2}}$ là

**A.** $(0; +\infty)$. **B.** $[1; +\infty)$. **C.** $(1; +\infty)$. **D.** $(-\infty; +\infty)$.

**Lời giải**

Điều kiện để hàm số xác định: $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Tập xác định: $D = (1; +\infty)$.

**Câu 11.** **(Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ An 2019)** Tập xác định của hàm số $y = (x^2 - 4x)^{\frac{2019}{2020}}$ là

**A.** $(-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$ **B.** $(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$ **C.** $(0; 4)$ **D.** $\mathbb{R} \setminus \{0; 4\}$

**Lời giải**

Điều kiện $x^2 - 4x > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 4 \end{array}\right.$.

**Câu 12.** **(THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Tập xác định của hàm số $y=(-x^2+6x-8)^{\sqrt{2}}$ là

**A.** $D=(2;4)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(4;+\infty)$. **D.** $D=\mathbb{R}$.

**Lời giải**

Hàm số xác định khi và chỉ khi: $-x^2+6x-8>0\Leftrightarrow 2<x<4$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(2;4)$.

**Câu 13.** **(KTNL GV THPT Lý Thái Tổ 2019)** Tìm tập xác định của hàm số $y=\left(x^2-7x+10\right)^{-3}$

**A.** $\mathbb{R}\setminus\{2;5\}$. **B.** $(-\infty;2)\cup(5;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $(2;5)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

ĐKXĐ: $x^2-7x+10\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 2\\ x\neq 5\end{cases}$.

Vậy TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{2;5\}$.

**Câu 14.** **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Tìm tập xác định $D$ của hàm số $y=\left(4x^2-1\right)^{-3}$.

**A.** $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$. **B.** $D=\left(-\infty;\frac{-1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

**C.** $D=\mathbb{R}$. **D.** $D=\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

**Lời giải**

Điều kiện xác định của hàm số là $4x^2-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq\pm\frac{1}{2}$.

**Câu 15.** **(Hsg Tỉnh Bắc Ninh 2019)** Tập xác định của hàm số $y=\left(4-3x-x^2\right)^{-2019}$ là

**A.** $\mathbb{R}\setminus\{-4;1\}$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $[-4;1]$. **D.** $(-4;1)$.

**Lờigiải**

Vì $y=\left(4-3x-x^2\right)^{-2019}$ là hàm số lũy thừa có số mũ nguyên âm nên điều kiện xác định là

$4-3x-x^2\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\ x\neq -4\end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{-4;1\}$.

**Câu 16.** **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Tìm tập xác định của $y=\left(x^2-3x+2\right)^{\frac{-1}{3}}$

**A.** $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$. **C.** $y'=\frac{2x}{\left(x^2+2\right)\ln 5}$. **D.** $\mathbb{R}$.

**Lời giải**

Vì $-\frac{1}{3}$ không nguyên nên $y=\left(x^2-3x+2\right)^{\frac{-1}{3}}$ xác định khi

$$x^2-3x+2>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;1)\cup(2;+\infty).$$

**Câu 17.** **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Tập xác định của hàm số $y=\left(x^2-3x+2\right)^{\pi}$ là

**A.** $(1;2)$.. **B.** $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$. **D.** $(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$

**Lời giải**

**Chọn B**

Hàm số $y=\left(x^2-3x+2\right)^{\pi}$ xác định $\Leftrightarrow x^2-3x+2>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<1\\ x>2\end{array}\right.$

Tập xác định $D=(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$

**Câu 18.** **(Sở Bắc Ninh 2019)** Tìm tập xác định $D$ của hàm số $y=\left(x^2-3x-4\right)^{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

**A.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;4\}$. **B.** $D=(-\infty;-1]\cup[4;+\infty)$.

**C.** $D=\mathbb{R}$. **D.** $D=(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)$.

**Lời giải**

Hàm số xác định khi $x^2-3x-4>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1\\x>4\end{array}\right.$.

Vậy tập xác định $D$ của hàm số là: $D=(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)$.

**Câu 19.** **(Gia Lai 2019)** Tìm tập xác định $D$ của hàm số $y=\left(x^2-6x+9\right)^{\frac{\pi}{2}}$.

**A.** $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **B.** $D=(3;+\infty)$. **C.** $D=\mathbb{R}\setminus\{3\}$. **D.** $D=\mathbb{R}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Do $\frac{\pi}{2}\notin\mathbb{Z}$ nên ta có điều kiện: $x^2-6x+9>0\Leftrightarrow(x-3)^2>0\Leftrightarrow x\neq 3$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{3\}$

**Câu 20.** **(chuyên Hà Tĩnh 2019)**Tìm tập xác định của hàm số $y=\left(x^2-3x+2\right)^{\frac{1}{3}}$ là

**A.** $\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$. **B.** $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

**C.** $(1;2)$. **D.** $\mathbb{R}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện xác định là $x^2-3x+2>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

**Câu 21.** **(Chu Văn An - Hà Nội - 2019)** Tập xác định D của hàm số $y=\left(x^3-27\right)^{\frac{\pi}{2}}$ là

**A.** $\mathrm{D}=(3;+\infty)$. **B.** $\mathrm{D}=[3;+\infty)$. **C.** $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{3\}$. **D.** $\mathrm{D}=\mathbb{R}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện xác định của hàm số: $x^3-27>0\Leftrightarrow x>3$.

Do đó tập xác định của hàm số là $\mathrm{D}=(3;+\infty)$.

**Câu 22.** **(Bắc Ninh 2019)** Tập xác định của hàm số $y=\left(x^2-3x+2\right)^{\frac{3}{5}}+(x-3)^{-2}$ là

**A.** $D=(-\infty;+\infty)\setminus\{3\}$ **B.** $D=(-\infty;1)\cup(2;+\infty)\setminus\{3\}$.

**C.** $D=(-\infty;+\infty)\setminus(1;2)$. **D.** $D=(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Hàm số đã cho xác định khi $\left\{\begin{array}{l}x^2-3x+2>0\\x-3\neq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x<1\\x>2\end{array}\right.\\x\neq 3\end{array}\right.$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(-\infty;1)\cup(2;+\infty)\setminus\{3\}$.

## Dạng 4. Đạo hàm hàm số lũy thừa

▪ **Đạo hàm:**

$$\begin{cases} y = x^{\alpha} \longrightarrow y' = \alpha x^{\alpha-1} \\ y = u^{\alpha} \longrightarrow y' = \alpha u^{\alpha-1}.\boxed{u'} \end{cases}$$

**Câu 1.** **(Sở Quảng Trị 2019)** Tìm đạo hàm của hàm số: $y = (x^2+1)^{\frac{3}{2}}$

**A.** $\frac{3}{2}(2x)^{\frac{1}{2}}$ **B.** $\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$ **C.** $3x(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$ **D.** $\frac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$

**Lời giải**

**Chọn C**

Áp dụng công thức đạo hàm hợp hàm số lũy thừa : $\left([u(x)]^{\alpha}\right)' = \alpha.u^{\alpha-1}.[u(x)]'$

Ta có : $y' = \left((x^2+1)^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}.2\,\mathrm{x}.(x^2+1)^{\frac{1}{2}} = 3\,\mathrm{x}.(x^2+1)^{\frac{1}{2}}$

**Câu 2.** **(Kiểm tra năng lực - ĐH - Quốc Tế - 2019)** Đạo hàm của hàm số $y = \left(3-x^2\right)^{\frac{2}{3}}$ tại $x=1$ là

**A.** $\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$. **B.** $-\frac{2\sqrt[3]{4}}{3}$. **C.** $-\frac{\sqrt[3]{2}}{3}$. **D.** 3 lựa chọn kia đều sai.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $y = \left(3-x^2\right)^{\frac{2}{3}}$.

$\Rightarrow y' = \frac{2}{3}\left(3-x^2\right)^{-\frac{1}{3}}\left(3-x^2\right)' = \frac{2}{3}\left(3-x^2\right)^{-\frac{1}{3}}(-2x) = \frac{-4x}{3}\left(3-x^2\right)^{-\frac{1}{3}}$.

$y'(1) = \frac{-4}{3}.2^{-\frac{1}{3}} = \frac{-4}{3.\sqrt[3]{2}} = \frac{-2\sqrt[3]{4}}{3}$.

Vậy $y'(1) = \frac{-2\sqrt[3]{4}}{3}$.

**Câu 3.** **(THPT Lý Nhân Tông – 2017)** Hàm số $y = \sqrt[5]{\left(x^2+1\right)^2}$ có đạo hàm là.

**A.** $y' = \frac{4x}{5\sqrt[5]{\left(x^2+1\right)^3}}$. **B.** $y' = 2x\sqrt{x^2+1}$. **C.** $y' = 4x\sqrt[5]{x^2+1}$. **D.** $y' = \frac{4}{\sqrt[5]{\left(x^2+1\right)^2}}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Vì Áp dụng công thức $\left(u^n\right)' = n.u^{n-1}.u'$.

**Câu 4.** **(THPT Nguyễn Đăng Đạo – 2017)** Đạo hàm của hàm số $y = (2x+1)^{-\frac{1}{3}}$ trên tập xác định là.

**A.** $-\frac{1}{3}(2x+1)^{-\frac{4}{3}}$. **B.** $2(2x+1)^{-\frac{1}{3}}\ln(2x+1)$.

**C.** $(2x+1)^{-\frac{1}{3}}\ln(2x+1)$. **D.** $-\frac{2}{3}(2x+1)^{-\frac{4}{3}}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $y' = \left[(2x+1)^{-\frac{1}{3}}\right]' = \frac{-1}{3}(2x+1)'(2x+1)^{-\frac{1}{3}-1} = \frac{-2}{3}(2x+1)^{-\frac{4}{3}}$.

Nguyễn Bảo Vương

**Câu 5.** **(Chuyên Vinh 2018)** Đạo hàm của hàm số $y=\left(x^2+x+1\right)^{\frac{1}{3}}$ là

**A.** $y'=\frac{1}{3}\left(x^2+x+1\right)^{\frac{8}{3}}$. **B.** $y'=\frac{2x+1}{2\sqrt[3]{x^2+x+1}}$. **C.** $y'=\frac{2x+1}{3\sqrt[3]{\left(x^2+x+1\right)^2}}$. **D.** $y'=\frac{1}{3}\left(x^2+x+1\right)^{\frac{2}{3}}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $y'=\frac{1}{3}\left(x^2+x+1\right)^{\frac{1}{3}-1}\left(x^2+x+1\right)'=\frac{2x+1}{3\sqrt[3]{\left(x^2+x+1\right)^2}}$.

**Câu 6.** **(THPT Chuyen LHP Nam Dinh – 2017)** Tính đạo hàm của hàm số $y=\left(1-\cos 3x\right)^6$.

**A.** $y'=6\sin 3x\left(1-\cos 3x\right)^5$. **B.** $y'=6\sin 3x\left(\cos 3x-1\right)^5$.

**C.** $y'=18\sin 3x\left(\cos 3x-1\right)^5$. **D.** $y'=18\sin 3x\left(1-\cos 3x\right)^5$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $y=\left(1-\cos 3x\right)^6\Rightarrow y=6\left(1-\cos 3x\right)^5.\left(1-\cos 3x\right)'$.

$=6\left(1-\cos 3x\right)^5.3\sin 3x=18\sin 3x\left(1-\cos 3x\right)^5$.

**Câu 7.** **(THPT Chuyên LHP – 2017)** Tìm đạo hàm của hàm số $y=\left(x^2+1\right)^{\frac{e}{2}}$ trên $\mathbb{R}$.

**A.** $y'=2x\left(x^2+1\right)^{\frac{e}{2}-1}$. **B.** $y'=ex\sqrt{\left(x^2+1\right)^{e-2}}$.

**C.** $y'=\frac{e}{2}\left(x^2+1\right)^{\frac{e}{2}-1}$. **D.** $y'=\left(x^2+1\right)^{\frac{e}{2}}\ln\left(x^2+1\right)$.

Nguyễn Bảo Vương

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $y'=\left(\left(x^2+1\right)^{\frac{e}{2}}\right)'=\frac{e}{2}.2x\left(x^2+1\right)^{\frac{e}{2}-1}=ex\left(x^2+1\right)^{\frac{e}{2}-1}=ex\sqrt{\left(x^2+1\right)^{e-2}}$.

**Câu 8.** **(THPT Tứ Kỳ - Hải Dương - 2018)** Cho hàm số $y=\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{x}}}}}$, $(x>0)$. Đạo hàm của $y$ là:

**A.** $y'=e^{\frac{15}{16}}.x^{-\frac{31}{32}}$. **B.** $y'=\frac{\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e}}}}}{32.\sqrt[32]{x^{31}}}$. **C.** $y'=e^{\frac{15}{16}}.x^{\frac{31}{32}}$. **D.** $y'=\frac{\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e}}}}}{2\sqrt{x}}$.

**Lời giải**

Ta có: $y=\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e}}}}.x^{\frac{1}{32}}\Rightarrow y'=\frac{1}{32}\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e}}}}.x^{\frac{1}{32}-1}=\frac{1}{32}\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e}}}}.x^{-\frac{31}{32}}$

$=\frac{\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e}}}}}{32.\sqrt[32]{x^{31}}}$.

**Câu 9.** **(Xuân Trường - Nam Định - 2018)** Tính đạo hàm của hàm số $y=\sin 2x+3^x$

**A.** $y'=2\cos 2x+x3^{x-1}$. **B.** $y'=-\cos 2x+3^x$.

**C.** $y'=-2\cos 2x-3^x\ln 3$. **D.** $y'=2\cos 2x+3^x\ln 3$.

**Lời giải**

Hàm số $y=\sin 2x+3^x$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$ và có đạo hàm: $y'=2\cos 2x+3^x\ln 3$.

**Câu 10.** **(THPT Thuận Thành - Bắc Ninh - 2018)** Đạo hàm của hàm số $y=(2x-1)^{\frac{1}{3}}$ là:

**A.** $y'=\frac{1}{3}(2x-1)^{-\frac{2}{3}}$. **B.** $y'=(2x-1)^{\frac{1}{3}}\cdot\ln|2x-1|$.

**C.** $y'=\frac{2}{3}(2x-1)^{\frac{4}{3}}$. **D.** $y'=\frac{2}{3}(2x-1)^{-\frac{2}{3}}$.

**Lời giải**

Ta có: $y'=\frac{1}{3}(2x-1)^{-\frac{2}{3}}\cdot(2x-1)'=\frac{2}{3}(2x-1)^{-\frac{2}{3}}$.

**Câu 11.** **(THPT Nghen - Hà Tĩnh - 2018)** Đạo hàm của hàm số $y=x.2^x$ là

**A.** $y'=(1+x\ln 2)2^x$. **B.** $y'=(1-x\ln 2)2^x$. **C.** $y'=(1+x)2^x$. **D.** $y'=2^x+x^2 2^{x-1}$.

**Lời giải**

$y'=2^x+x.2^x.\ln 2=(1+x\ln 2)2^x$.

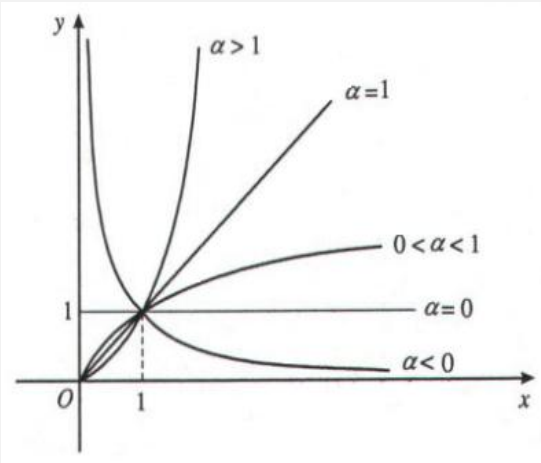
## Dạng 5. Khảo sát hàm số lũy thừa

**Khảo sát hàm số lũy thừa** $y=x^\alpha$

Tập xác định của hàm số lũy thừa $y=x^\alpha$ luôn chứa khoảng $(0;+\infty)$ với mọi $\alpha\in\mathbb{R}$. Trong trường hợp tổng quát, ta khảo sát hàm số $y=x^\alpha$ trên khoảng này.

| $y=x^\alpha,\alpha>0.$ | $y=x^\alpha,\alpha<0.$ |
|---|---|
| 1. Tập xác định: $(0;+\infty)$. | 1. Tập xác định: $(0;+\infty)$. |
| 2. Sự biến thiên<br>$y'=\alpha.x^{\alpha-1}>0 \quad \forall x>0.$<br>Giới hạn đặc biệt:<br>$\lim\limits_{x\to 0^+}x^\alpha=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}x^\alpha=+\infty.$<br>Tiệm cận: **không có**. | 2. Sự biến thiên<br>$y'=\alpha.x^{\alpha-1}<0 \quad \forall x>0.$<br>Giới hạn đặc biệt:<br>$\lim\limits_{x\to 0^+}x^\alpha=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}x^\alpha=0.$<br>Tiệm cận:<br>*Ox* là tiệm cận ngang.<br>*Oy* là tiệm cận đứng. |
| 3. Bảng biến thiên.<br>$x$: 0 → $+\infty$<br>$y'$: +<br>$y$: 0 → $+\infty$ | 3. Bảng biến thiên.<br>$x$: 0 → $+\infty$<br>$y'$: −<br>$y$: $+\infty$ → 0 |

Đồ thị của hàm số.



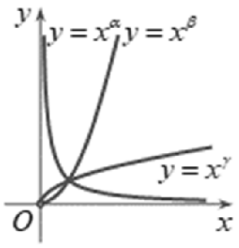

**Câu 1.** **(THPT Phan Chu Trinh - Đắc Lắc - 2018)** Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$ ?

**A.** $y=2^x$. **B.** $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$. **C.** $y=\left(\sqrt{\pi}\right)^x$. **D.** $y=\mathrm{e}^x$.

**Lời giải**

Hàm số $y=a^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $0<a<1$.

**Câu 2.** Cho các hàm số lũy thừa $y=x^\alpha$, $y=x^\beta$, $y=x^\gamma$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề đúng là




**A.** $\alpha>\beta>\gamma$. **B.** $\beta>\alpha>\gamma$. **C.** $\beta>\gamma>\alpha$. **D.** $\gamma>\beta>\alpha$.

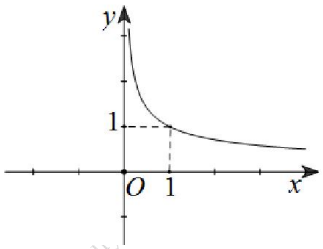
**Lời giải**

**Chọn C**

Dựa vào đồ thị ta có $\alpha<0$, $\beta>1$; $0<\gamma<1$.

Vậy $\beta>\gamma>\alpha$.

**Câu 3.** Đường cong ở hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số nào dưới đây?




**A.** $y=2^{1-x}$. **B.** $y=x^{-\frac{1}{2}}$. **C.** $y=x^{-1}$. **D.** $y=\log_2(2x)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Dựa vào đồ thị ta thấy TXĐ của hàm số là $D=(0;+\infty)$ $\Rightarrow$ loại A, **C.**

Hàm số nghịch biến trên TXĐ của nó mà hàm số $y=\log_2(2x)$ đồng biến trên TXĐ của nó nên ta loại đáp án **D.** $\Rightarrow$ chọn **B.**

**Câu 4.** **(THPT Quốc Oai - Hà Nội - 2017)** Cho hàm số $y=x^{-\sqrt{3}}$ khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** Đồ thị hàm số cắt trục $Ox$.

**B.** Đồ thị hàm số không có tiệm cận.

**C.** Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng và không có tiệm cận ngang.

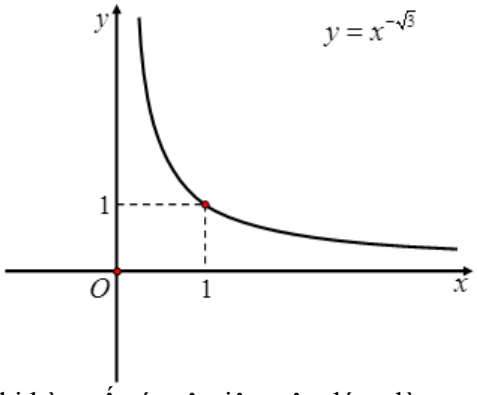
**D.** Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang.

**Lời giải**

**Chọn D**

* TXĐ: $D=(0;+\infty)$.

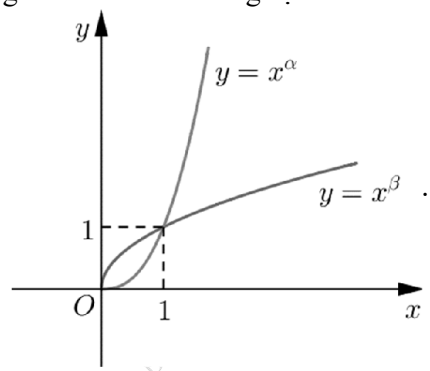
* Đồ thị hàm số:




Từ đồ thị hàm số ta thấy đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là trục $Oy$ và một tiệm cận ngang là trục $Ox$. Đáp án đúng là

**D.**

**Câu 5.** **(Chuyên Vinh 2017)** Cho là các số $\alpha, \beta$ là các số thực. Đồ thị các hàm số $y = x^{\alpha}, y = x^{\beta}$ trên khoảng $(0; +\infty)$ được cho trong hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?




**A.** $0 < \alpha < 1 < \beta$. **B.** $\beta < 0 < 1 < \alpha$. **C.** $0 < \beta < 1 < \alpha$. **D.** $\alpha < 0 < 1 < \beta$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Với $x_0 > 1$ ta có: $x_0^{\alpha} > 1 \Rightarrow \alpha > 0; x_0^{\beta} > 1 \Rightarrow \beta > 0$.

$x_0^{\alpha} > x_0^{\beta} \Rightarrow \alpha > \beta$.

**Câu 6.** **(THPT – THD Nam Dinh- 2017)** Cho hàm số $y = x^{-\sqrt{2}}$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

**A.** Hàm số có tập xác định là $(0; +\infty)$. **B.** Đồ thị hàm số không có tiệm cận.

**C.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$. **D.** Đồ thị hàm số không cắt trục hoành.

**Lời giải**

**Chọn B**

Tập xác định: $D = (0; +\infty)$, suy ra C đúng.

Do $x > 0$ nên $x^{-\sqrt{2}} > 0$, suy ra A đúng.

Ta có: $y' = -\sqrt{2}.x^{-\sqrt{2}-1} < 0; \forall x > 0$, suy ra B đúng.

Ta có $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{-\sqrt{2}} = +\infty$ nên đồ thị hàm số nhận $Oy$ làm tiệm cận đứng, đáp án D đúng.

**Câu 7.** **(Chuyên Nguyễn Huệ 2019)** Số cực trị của hàm số $y = \sqrt[5]{x^2} - x$ là

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

**Lời giải**

**Chọn B**

Tập xác định: $\mathbb{R}$. Xét $y' = \dfrac{2}{5\sqrt[5]{x^3}} - 1$

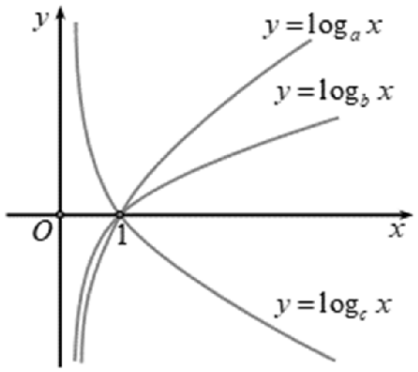
$y'=0 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\left(\frac{2}{5}\right)^5}$ ; $y'$ không xác định khi $x=0$.

Ta có bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\sqrt[3]{\left(\frac{2}{5}\right)^5}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $\|\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

$y'$ đổi dấu khi qua $x=0$ và $x=\sqrt[3]{\left(\frac{2}{5}\right)^5}$ nên hàm số có 2 cực trị.

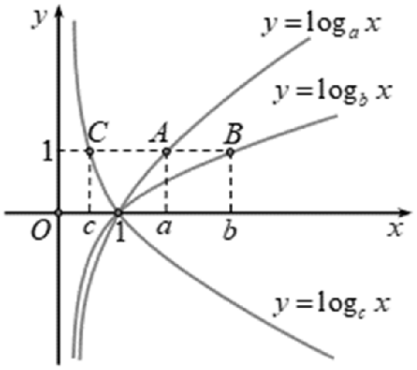
**Câu 8.** **(THPT Lương Văn Tụy - Ninh Bình - 2018)** Cho $a$, $b$, $c$ là ba số dương khác 1. Đồ thị các hàm số $y=\log_a x$, $y=\log_b x$, $y=\log_c x$ được cho trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề đúng?




**A.** $a<b<c$. **B.** $c<a<b$. **C.** $c<b<a$. **D.** $b<c<a$.

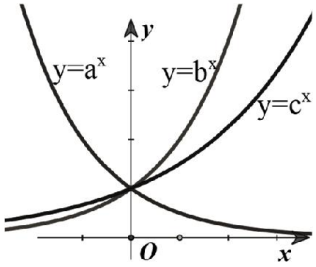
**Lời giải**

* Đồ thị các hàm số $y=\log_a x$, $y=\log_b x$, $y=\log_c x$ lần lượt đi qua các điểm $A(a;1)$, $B(b;1)$, $C(c;1)$.



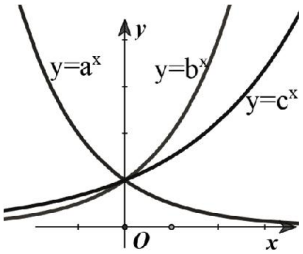

* Từ hình vẽ ta có: $c<a<b$.

**Câu 9.** **(THPT Nghen - Hà Tĩnh - 2018)** Cho ba số thực dương $a$, $b$, $c$ khác 1. Đồ thị các hàm số $y=a^x$, $y=b^x$, $y=c^x$ được cho trong hình vẽ dưới đây. Mệnh đề nào dưới đây đúng?




**A.** $1<a<c<b$. **B.** $a<1<c<b$. **C.** $a<1<b<c$. **D.** $1<a<b<c$.

**Lời giải**




Đồ thị của hàm số $y=a^x$ có hướng đi xuống nên $a<1$.

Đồ thị của các hàm số $y=b^x$ và $y=c^x$ có hướng đi lên nên $b>1$ và $c>1$. Hơn nữa đồ thị hàm số $y=b^x$ ở phía trên đồ thị hàm số $y=c^x$ nên $b>c$.

Vậy $a<1<c<b$.

**Câu 10.** **(THPT Yên Lạc - 2018)** Hàm số $y=x^2\mathrm{e}^{2x}$ nghịch biến trên khoảng nào?

**A.** $(-\infty;0)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-1;0)$.

**Lời giải**

Ta có $y'=2x\mathrm{e}^{2x}(x+1)$; giải phương trình $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\end{array}\right.$.

Do $y'<0$ với $\forall x\in(-1;0)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$.

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 17 CÔNG THỨC, BIẾN ĐỔI LOGARIT

## TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH MỨC 5-6 ĐIỂM

### Dạng 1. Câu hỏi lý thuyết

| **Công thức logarit:** | | |
|---|---|---|
| Cho các số $a, b>0,\ a\neq 1$ và $m, n\in\mathbb{R}$. Ta có: | | |
| ▪ $\log_a b=\alpha \Leftrightarrow a^\alpha=b$ | ▪ $\lg b=\log b=\log_{10} b$ | ▪ $\ln b=\log_e b$ |
| ▪ $\log_a 1=0$ | ▪ $\log_a a=1$ | ▪ $\log_a a^n=n$ |
| ▪ $\log_{a^m} b=\frac{1}{m}\log_a b$ | ▪ $\log_a b^n=n\log_a b$ | ▪ $\log_{a^m} b^n=\frac{n}{m}\log_a b$ |
| ▪ $\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$ | ▪ $\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c$ | ▪ $\begin{cases}a^{\log_a b}=b\\ a^{\log_b c}=c^{\log_b a}\end{cases}$ |
| ▪ $\log_a b.\log_b c=\log_a c,\ (b\neq 1)$ | ▪ $\frac{\log_a c}{\log_a b}=\log_b c,\ (b\neq 1)$ | ▪ $\log_a b=\frac{1}{\log_b a},\ (b\neq 1)$ |

**Câu 1.** **(Đề Minh Họa 2017).** Cho hai số thực $a$ và $b$, với $1<a<b$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

**A.** $\log_b a<1<\log_a b$ **B.** $1<\log_a b<\log_b a$ **C.** $\log_b a<\log_a b<1$ **D.** $\log_a b<1<\log_b a$

**Câu 2.** **(Mã 110 2017)** Cho $a$ là số thực dương khác $1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng với mọi số dương $x, y$?

**A.** $\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$ **B.** $\log_a\frac{x}{y}=\log_a(x-y)$

**C.** $\log_a\frac{x}{y}=\log_a x+\log_a y$ **D.** $\log_a\frac{x}{y}=\frac{\log_a x}{\log_a y}$

**Câu 3.** **(THPT Minh Khai Hà Tĩnh 2019)** Với mọi số thực dương $a,b,x,y$ và $a,b\neq 1$, mệnh đề nào sau đây sai?

**A.** $\log_a\frac{1}{x}=\frac{1}{\log_a x}$. **B.** $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$.

**C.** $\log_b a.\log_a x=\log_b x$. **D.** $\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$.

**Câu 4.** **(Chuyên Hạ Long 2019)** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

**A.** $\log_a b^\alpha=\alpha\log_a b$ với mọi số $a,b$ dương và $a\neq 1$.

**B.** $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ với mọi số $a,b$ dương và $a\neq 1$.

**C.** $\log_a b+\log_a c=\log_a bc$ với mọi số $a,b$ dương và $a\neq 1$.

**D.** $\log_a b=\frac{\log_c a}{\log_c b}$ với mọi số $a,b,c$ dương và $a\neq 1$.

**Câu 5.** **(THPT-Thang-Long-Ha-Noi- 2019)** Cho $a,b$ là hai số thực dương tùy ý và $b\neq 1$.Tìm kết luận đúng.

**A.** $\ln a+\ln b=\ln(a+b)$. **B.** $\ln(a+b)=\ln a.\ln b$.

**C.** $\ln a-\ln b=\ln(a-b)$. **D.** $\log_b a=\dfrac{\ln a}{\ln b}$.

**Câu 6.** **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Cho hai số dương $a$, $b$ $(a\neq 1)$. Mệnh đề nào dưới đây **SAI**?

**A.** $\log_a a=2a$. **B.** $\log_a a^{\alpha}=\alpha$. **C.** $\log_a 1=0$. **D.** $a^{\log_a b}=b$.

**Câu 7.** **(Sở Thanh Hóa 2019)** Với các số thực dương $a,b$ bất kì. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

**A.** $\log(ab)=\log a.\log b$. **B.** $\log\dfrac{a}{b}=\dfrac{\log a}{\log b}$.

**C.** $\log(ab)=\log a+\log b$. **D.** $\log\dfrac{a}{b}=\log b-\log a$.

**Câu 8.** **(VTED 03 2019)** Với các số thực dương $a,b$ bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $\ln(ab)=\ln a+\ln b$ **B.** $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\dfrac{\ln a}{\ln b}$ **C.** $\ln(ab)=\ln a.\ln b$ **D.** $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)=\ln b-\ln a$

**Câu 9.** **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Với các số thực dương $a$, $b$ bất kì. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $\log(ab)=\log a.\log b$. **B.** $\log\dfrac{a}{b}=\log b-\log a$.

**C.** $\log\dfrac{a}{b}=\dfrac{\log a}{\log b}$. **D.** $\log(ab)=\log a+\log b$.

**Câu 10.** Cho $a,b,c>0$, $a\neq 1$ và số $\alpha\in\mathbb{R}$, mệnh đề nào dưới đây ***sai***?

**A.** $\log_a a^c=c$ **B.** $\log_a a=1$

**C.** $\log_a b^{\alpha}=\alpha\log_a b$ **D.** $\log_a|b-c|=\log_a b-\log_a c$

## Dạng 2. Tính, rút gọn biểu thức chứa logarit

| **Công thức logarit:** | | |
|---|---|---|
| Cho các số $a, b>0,\ a\neq 1$ và $m, n\in\mathbb{R}$. Ta có: | | |
| ▪ $\log_a b=\alpha\Leftrightarrow a^{\alpha}=b$ | ▪ $\lg b=\log b=\log_{10} b$ | ▪ $\ln b=\log_e b$ |
| ▪ $\log_a 1=0$ | ▪ $\log_a a=1$ | ▪ $\log_a a^n=n$ |
| ▪ $\log_{a^m} b=\dfrac{1}{m}\log_a b$ | ▪ $\log_a b^n=n\log_a b$ | ▪ $\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$ |
| ▪ $\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$ | ▪ $\log_a\left(\dfrac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c$ | ▪ $\begin{cases}a^{\log_a b}=b\\ a^{\log_b c}=c^{\log_b a}\end{cases}$ |
| ▪ $\log_a b.\log_b c=\log_a c,\ (b\neq 1)$ | ▪ $\dfrac{\log_a c}{\log_a b}=\log_b c,\ (b\neq 1)$ | ▪ $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a},\ (b\neq 1)$ |

**Câu 11.** **[THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Cho $a,b,c$ là các số dương $(a,b\neq 1)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

**A.** $\log_a\left(\dfrac{b}{a^3}\right)=\dfrac{1}{3}\log_a b.$ **B.** $a^{\log_b a}=b.$

**C.** $\log_{a^\alpha} b=\alpha\log_a b(\alpha\neq 0)$. **D.** $\log_a c=\log_b c.\log_a b$.

**Câu 12.** **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Với $a,b$ là các số thực dương tùy ý và $a\neq 1$, $\log_{a^5} b$ bằng:

**A.** $5\log_a b$. **B.** $\frac{1}{5}+\log_a b$. **C.** $5+\log_a b$. **D.** $\frac{1}{5}\log_a b$.

**Câu 13.** **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Với $a$, $b$ là các số thực dương tùy ý và $a\neq 1$, $\log_{a^2} b$ bằng

**A.** $\frac{1}{2}+\log_a b$. **B.** $\frac{1}{2}\log_a b$. **C.** $2+\log_a b$. **D.** $2\log_a b$.

**Câu 14.** **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Với a,b là các số thực dương tùy ý và $a\neq 1$, $\log_{a^3} b$ bằng

**A.** $3+\log_a b$ **B.** $3\log_a b$ **C.** $\frac{1}{3}+\log_a b$ **D.** $\frac{1}{3}\log_a b$

**Câu 15.** **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Với $a$ là số thực dương tùy ý, $\log_5(5a)$ bằng

**A.** $5+\log_5 a$. **B.** $5-\log_5 a$. **C.** $1+\log_5 a$. **D.** $1-\log_5 a$.

**Câu 16.** **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Với $a$ là số thực dương tùy ý, $\log_2 2a$ bằng

**A.** $1+\log_2 a$. **B.** $1-\log_2 a$. **C.** $2-\log_2 a$. **D.** $2+\log_2 a$.

**Câu 17.** **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Với $a$ là số thực dương tùy ý, $\log_2 a^2$ bằng:

**A.** $2+\log_2 a$. **B.** $\frac{1}{2}+\log_2 a$. **C.** $2\log_2 a$. **D.** $\frac{1}{2}\log_2 a$.

**Câu 18.** **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Với $a$ là hai số thực dương tùy ý, $\log_2(a^3)$ bằng

**A.** $\frac{3}{2}\log_2 a$. **B.** $\frac{1}{3}\log_2 a$. **C.** $3+\log_2 a$. **D.** $3\log_2 a$.

**Câu 19.** **(Mã 103 2019)** Với $a$ là số thực dương tùy ý, $\log_2 a^3$ bằng

**A.** $3+\log_2 a$. **B.** $3\log_2 a$. **C.** $\frac{1}{3}\log_2 a$. **D.** $\frac{1}{3}+\log_2 a$.

**Câu 20.** **(Mã 102 2019)** Với $a$ là số thực dương tùy ý, $\log_5 a^3$ bằng

**A.** $\frac{1}{3}\log_5 a$. **B.** $\frac{1}{3}+\log_5 a$. **C.** $3+\log_5 a$. **D.** $3\log_5 a$.

**Câu 21.** **(Mã 104 2017)** Cho $a$ là số thực dương tùy ý khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $\log_2 a=\log_a 2$ **B.** $\log_2 a=\frac{1}{\log_2 a}$ **C.** $\log_2 a=\frac{1}{\log_a 2}$ **D.** $\log_2 a=-\log_a 2$

**Câu 22.** **(Mã 104 2019)** Với $a$ là số thực dương tùy ý, $\log_2 a^2$ bằng:

**A.** $\frac{1}{2}\log_2 a$. **B.** $2+\log_2 a$ **C.** $2\log_2 a$. **D.** $\frac{1}{2}+\log_2 a$.

**Câu 23.** **(Đề Tham Khảo 2019)** Với $a$, $b$ là hai số dương tùy ý, $\log(ab^2)$ bằng

**A.** $2(\log a+\log b)$ **B.** $\log a+\frac{1}{2}\log b$ **C.** $2\log a+\log b$ **D.** $\log a+2\log b$

**Câu 24.** **(Đề Tham Khảo 2017)** Cho $a$ là số thực dương $a\neq 1$ và $\log_{\sqrt[3]{a}} a^3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $P=\frac{1}{3}$ **B.** $P=3$ **C.** $P=1$ **D.** $P=9$

**Câu 25.** **(Mã 101 2019)** Với $a$ là số thực dương tùy ý, bằng $\log_5 a^2$

**A.** $\frac{1}{2}\log_5 a$. **B.** $2+\log_5 a$. **C.** $\frac{1}{2}+\log_5 a$. **D.** $2\log_5 a$.

**Câu 26.** **(Mã 103 2018)** Với $a$ là số thực dương tùy ý, $\ln(7a)-\ln(3a)$ bằng

**A.** $\dfrac{\ln 7}{\ln 3}$ **B.** $\ln\dfrac{7}{3}$ **C.** $\ln(4a)$ **D.** $\dfrac{\ln(7a)}{\ln(3a)}$

**Câu 27.** **(Mã 101 2018)** Với $a$ là số thực dương tùy ý, $\ln(5a)-\ln(3a)$ bằng:

**A.** $\ln\dfrac{5}{3}$ **B.** $\dfrac{\ln 5}{\ln 3}$ **C.** $\dfrac{\ln(5a)}{\ln(3a)}$ **D.** $\ln(2a)$

**Câu 28.** **(Mã 102 2018)** Với $a$ là số thực dương tùy ý, $\log_3(3a)$ bằng:

**A.** $1-\log_3 a$ **B.** $3\log_3 a$ **C.** $3+\log_3 a$ **D.** $1+\log_3 a$

**Câu 29.** Với các số thực dương $a,b$ bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng.

**A.** $\ln(ab)=\ln a+\ln b.$ **B.** $\ln(ab)=\ln a.\ln b.$

**C.** $\ln\dfrac{a}{b}=\dfrac{\ln a}{\ln b}.$ **D.** $\ln\dfrac{a}{b}=\ln b-\ln a.$

**Câu 30.** **(Mã 123 2017)** Cho $a$ là số thực dương khác $1$. Tính $I=\log_{\sqrt{a}} a.$

**A.** $I=-2.$ **B.** $I=2$ **C.** $I=\dfrac{1}{2}$ **D.** $I=0$

**Câu 31.** **(Mã 104 2018)** Với $a$ là số thực dương tùy ý, $\log_3\left(\dfrac{3}{a}\right)$ bằng:

**A.** $1-\log_3 a$ **B.** $3-\log_3 a$ **C.** $\dfrac{1}{\log_3 a}$ **D.** $1+\log_3 a$

**Câu 32.** Với các số thực dương $a$, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $\log_2\left(\dfrac{2a^3}{b}\right)=1+3\log_2 a+\log_2 b.$ **B.** $\log_2\left(\dfrac{2a^3}{b}\right)=1+\dfrac{1}{3}\log_2 a+\log_2 b.$

**C.** $\log_2\left(\dfrac{2a^3}{b}\right)=1+3\log_2 a-\log_2 b.$ **D.** $\log_2\left(\dfrac{2a^3}{b}\right)=1+\dfrac{1}{3}\log_2 a-\log_2 b.$

**Câu 33.** **(Mã 110 2017)** Cho $\log_a b=2$ và $\log_a c=3$. Tính $P=\log_a\left(b^2c^3\right).$

**A.** $P=13$ **B.** $P=31$ **C.** $P=30$ **D.** $P=108$

**Câu 34.** **(Mã 102 2019)** Cho $a$ và $b$ là hai số thực dương thỏa mãn $a^3b^2=32$. Giá trị của $3\log_2 a+2\log_2 b$ bằng

**A.** $4.$ **B.** $5.$ **C.** $2.$ **D.** $32.$

**Câu 35.** **(Đề Tham Khảo 2017)** Cho $a, b$ là các số thực dương thỏa mãn $a\neq 1$, $a\neq\sqrt{b}$ và $\log_a b=\sqrt{3}$. Tính $\mathrm{P}=\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}}\sqrt{\dfrac{b}{a}}.$

**A.** $P=-5+3\sqrt{3}$ **B.** $P=-1+\sqrt{3}$ **C.** $P=-1-\sqrt{3}$ **D.** $P=-5-3\sqrt{3}$

**Câu 36.** **(Mã 103 2019)** Cho $a$ và $b$ là hai số thực dương thỏa mãn $a^2b^3=16$. Giá trị của $2\log_2 a+3\log_2 b$ bằng

**A.** $2.$ **B.** $8.$ **C.** $16.$ **D.** $4.$

**Câu 37.** **(Mã 104 2017)** Với các số thực dương $x$, $y$ tùy ý, đặt $\log_3 x=\alpha$, $\log_3 y=\beta$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $\log_{27}\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)^3=\frac{\alpha}{2}+\beta$ **B.** $\log_{27}\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)^3=9\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)$

**C.** $\log_{27}\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)^3=\frac{\alpha}{2}-\beta$ **D.** $\log_{27}\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)^3=9\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)$

**Câu 38.** **(Mã 101 2019)** Cho $a$ và $b$ là hai số thực dương thỏa mãn $a^4b=16$. Giá trị của $4\log_2 a+\log_2 b$ bằng

**A.** $4$. **B.** $2$. **C.** $16$. **D.** $8$.

**Câu 39.** **(Dề Minh Họa 2017)** Cho các số thực dương $a,b$ với $a\neq 1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

**A.** $\log_{a^2}(ab)=\frac{1}{4}\log_a b$ **B.** $\log_{a^2}(ab)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_a b$

**C.** $\log_{a^2}(ab)=\frac{1}{2}\log_a b$ **D.** $\log_{a^2}(ab)=2+2\log_a b$

**Câu 40.** **(Mã 123 2017)** Với $a$, $b$ là các số thực dương tùy ý và $a$ khác $1$, đặt $P=\log_a b^3+\log_{a^2} b^6$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $P=6\log_a b$ **B.** $P=27\log_a b$ **C.** $P=15\log_a b$ **D.** $P=9\log_a b$

**Câu 41.** **(Đề Tham Khảo 2018)** Với $a$ là số thực dương bất kì, mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $\log(3a)=\frac{1}{3}\log a$ **B.** $\log(3a)=3\log a$ **C.** $\log a^3=\frac{1}{3}\log a$ **D.** $\log a^3=3\log a$

**Câu 42.** **(Mã 105 2017)** Cho $\log_3 a=2$ và $\log_2 b=\frac{1}{2}$. Tính $I=2\log_3\left[\log_3(3a)\right]+\log_{\frac{1}{4}} b^2$.

**A.** $I=\frac{5}{4}$ **B.** $I=0$ **C.** $I=4$ **D.** $I=\frac{3}{2}$

**Câu 43.** **(Mã 105 2017)** Cho $a$ là số thực dương khác $2$. Tính $I=\log_{\frac{a}{2}}\left(\frac{a^2}{4}\right)$.

**A.** $I=2$ **B.** $I=-\frac{1}{2}$ **C.** $I=-2$ **D.** $I=\frac{1}{2}$

**Câu 44.** **(Mã 104 2017)** Với mọi $a$, $b$, $x$ là các số thực dương thoả mãn $\log_2 x=5\log_2 a+3\log_2 b$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $x=5a+3b$ **B.** $x=a^5+b^3$ **C.** $x=a^5b^3$ **D.** $x=3a+5b$

**Câu 45.** **(Mã 104 2019)** Cho $a$ và $b$ là hai số thực dương thỏa mãn $ab^3=8$. Giá trị của $\log_2 a+3\log_2 b$ bằng

**A.** $6$. **B.** $2$. **C.** $3$. **D.** $8$.

**Câu 46.** **(Mã 105 2017)** Với mọi số thực dương $a$ và $b$ thỏa mãn $a^2+b^2=8ab$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $\log(a+b)=\frac{1}{2}(\log a+\log b)$ **B.** $\log(a+b)=\frac{1}{2}+\log a+\log b$

**C.** $\log(a+b)=\frac{1}{2}(1+\log a+\log b)$ **D.** $\log(a+b)=1+\log a+\log b$

**Câu 47.** **(Mã 123 2017)** Cho $\log_a x=3,\log_b x=4$ với $a,b$ là các số thực lớn hơn 1. Tính $P=\log_{ab} x$.

**A.** $P=12$ **B.** $P=\frac{12}{7}$ **C.** $P=\frac{7}{12}$ **D.** $P=\frac{1}{12}$

**Câu 48.** **(Mã 110 2017)** Cho $x, y$ là các số thực lớn hơn 1 thoả mãn $x^2+9y^2=6xy$. Tính $M=\dfrac{1+\log_{12}x+\log_{12}y}{2\log_{12}(x+3y)}$.

**A.** $M=\dfrac{1}{2}$. **B.** $M=\dfrac{1}{3}$. **C.** $M=\dfrac{1}{4}$. **D.** $M=1$

**Câu 49.** **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Xét tất cả các số dương $a$ và $b$ thỏa mãn $\log_2 a=\log_8(ab)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $a=b^2$. **B.** $a^3=b$. **C.** $a=b$. **D.** $a^2=b$.

**Câu 50.** **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Xét số thực $a$ và $b$ thỏa mãn $\log_3\left(3^a.9^b\right)=\log_9 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng

**A.** $a+2b=2$. **B.** $4a+2b=1$. **C.** $4ab=1$. **D.** $2a+4b=1$.

**Câu 51.** **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho $a$ và $b$ là các số thực dương thỏa mãn $4^{\log_2(ab)}=3a$. Giá trị của $ab^2$ bằng

**A.** 3. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 12.

**Câu 52.** **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $9^{\log_3(ab)}=4a$. Giá trị của $ab^2$ bằng

**A.** 3. **B.** 6. **C.** 2 **D.** 4

**Câu 53.** **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Với $a, b$ là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $\log_3 a-2\log_9 b=2$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $a=9b^2$. **B.** $a=9b$. **C.** $a=6b$. **D.** $a=9b^2$.

**Câu 54.** **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Với $a,b$ là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $\log_3 a-2\log_9 b=3$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $a=27b$. **B.** $a=9b$. **C.** $a=27b^4$. **D.** $a=27b^2$.

**Câu 55.** **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Với $a,b$ là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $\log_2 a-2\log_4 b=4$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $a=16b^2$. **B.** $a=8b$. **C.** $a=16b$. **D.** $a=16b^4$.

**Câu 56.** **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho các số thực dương $a,b$ thỏa mãn $\ln a=x;\ln b=y$. Tính $\ln\left(a^3b^2\right)$

**A.** $P=x^2y^3$ **B.** $P=6xy$ **C.** $P=3x+2y$ **D.** $P=x^2+y^2$

**Câu 57.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Giá trị của biểu thức $M=\log_2 2+\log_2 4+\log_2 8+...+\log_2 256$ bằng

**A.** 48 **B.** 56 **C.** 36 **D.** $8\log_2 256$

**Câu 58.** **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Cho $\log_8 c=m$ và $\log_{c^3}2=n$. Khẳng định **đúng** là

**A.** $mn=\dfrac{1}{9}\log_2 c$. **B.** $mn=9$. **C.** $mn=9\log_2 c$. **D.** $mn=\dfrac{1}{9}$.

**Câu 59.** **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho $a>0, a\neq 1$ và $\log_a x=-1, \log_a y=4$. Tính $P=\log_a\left(x^2y^3\right)$

**A.** $P=18$. **B.** $P=6$. **C.** $P=14$. **D.** $P=10$.

**Câu 60.** **(Sở Bình Phước 2019)** Với $a$ và $b$ là hai số thực dương tùy ý; $\log_2\left(a^3b^4\right)$ bằng

**A.** $\dfrac{1}{3}\log_2 a+\dfrac{1}{4}\log_2 b$ **B.** $3\log_2 a+4\log_2 b$ **C.** $2\left(\log_2 a+\log_4 b\right)$ **D.** $4\log_2 a+3\log_2 b$

**Câu 61.** **(Chuyên Hạ Long -2019)** Cho $P=\sqrt[20]{3\sqrt[7]{27\sqrt[4]{243}}}$. Tính $\log_3 P$?

**A.** $\frac{45}{28}$. **B.** $\frac{9}{112}$. **C.** $\frac{45}{56}$. **D.** Đáp án khác.

**Câu 62.** **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Cho các số dương $a,b,c,d$. Biểu thức $S=\ln\frac{a}{b}+\ln\frac{b}{c}+\ln\frac{c}{d}+\ln\frac{d}{a}$ bằng

**A.** 1. **B.** 0. **C.** $\ln\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}\right)$. **D.** $\ln(abcd)$.

**Câu 63.** Cho $x$, $y$ là các số thực dương tùy ý, đặt $\log_3 x=a$, $\log_3 y=b$. Chọn mệnh đề đúng.

**A.** $\log_{\frac{1}{27}}\left(\frac{x}{y^3}\right)=\frac{1}{3}a-b$. **B.** $\log_{\frac{1}{27}}\left(\frac{x}{y^3}\right)=\frac{1}{3}a+b$.

**C.** $\log_{\frac{1}{27}}\left(\frac{x}{y^3}\right)=-\frac{1}{3}a-b$. **D.** $\log_{\frac{1}{27}}\left(\frac{x}{y^3}\right)=-\frac{1}{3}a+b$.

**Câu 64.** **(THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019)** Với $a,b$ là các số thực dương tùy ý và $a$ khác 1, đặt $P=\log_a b^3+\log_{a^2} b^6$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $P=27\log_a b$. **B.** $P=15\log_a b$. **C.** $P=9\log_a b$. **D.** $P=6\log_a b$.

**Câu 65.** **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Với các số thực dương $a,b$ bất kỳ $a\neq 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $\log_a\frac{\sqrt[3]{a}}{b^2}=\frac{1}{3}-2\log_a b$. **B.** $\log_a\frac{\sqrt[3]{a}}{b^2}=3-\frac{1}{2}\log_a b$.

**C.** $\log_a\frac{\sqrt[3]{a}}{b^2}=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\log_a b$. **D.** $\log_a\frac{\sqrt[3]{a}}{b^2}=3-2\log_a b$.

Nguyễn Bảo Vương

**Câu 66.** **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho các số thực dương $a,b,c$ với $a$ và $b$ khác 1. Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** $\log_a b^2.\log_{\sqrt{b}} c=\log_a c$. **B.** $\log_a b^2.\log_{\sqrt{b}} c=\frac{1}{4}\log_a c$.

**C.** $\log_a b^2.\log_{\sqrt{b}} c=4\log_a c$. **D.** $\log_a b^2.\log_{\sqrt{b}} c=2\log_a c$.

**Câu 67.** **(Chuyên Bắc Giang -2019)** Giả sử $a,b$ là các số thực dương bất kỳ. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

**A.** $\log(10ab)^2=2+\log(ab)^2$ **B.** $\log(10ab)^2=(1+\log a+\log b)^2$

**C.** $\log(10ab)^2=2+2\log(ab)$ **D.** $\log(10ab)^2=2(1+\log a+\log b)$

**Câu 68.** **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho $\log_a b=3,\log_a c=-2$. Khi đó $\log_a\left(a^3b^2\sqrt{c}\right)$ bằng bao nhiêu?

**A.** 13 **B.** 5 **C.** 8 **D.** 10

**Câu 69.** **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Rút gọn biểu thức $M=3\log_{\sqrt{3}}\sqrt{x}-6\log_9(3x)+\log_{\frac{1}{3}}\frac{x}{9}$.

**A.** $M=-\log_3(3x)$ **B.** $M=2+\log_3\left(\frac{x}{3}\right)$ **C.** $M=-\log_3\left(\frac{x}{3}\right)$ **D.** $M=1+\log_3 x$

**Câu 70.** **(Chuyên Lê Thánh Tông 2019)** Cho $\log_8|x|+\log_4 y^2=5$ và $\log_8|y|+\log_4 x^2=7$. Tìm giá trị của biểu thức $P=|x|-|y|$.

**A.** $P=56$. **B.** $P=16$. **C.** $P=8$. **D.** $P=64$.

**Câu 71.** **(Hsg Bắc Ninh 2019)** Cho hai số thực dương $a,b$.Nếu viết $\log_2 \dfrac{\sqrt[6]{64a^3b^2}}{ab} = 1 + x\log_2 a + y\log_4 b \quad (x, y \in \mathbb{Q})$ thì biểu thức $P = xy$ có giá trị bằng bao nhiêu?

**A.** $P = \dfrac{1}{3}$ **B.** $P = \dfrac{2}{3}$ **C.** $P = -\dfrac{1}{12}$ **D.** $P = \dfrac{1}{12}$

**Câu 72.** Cho $\log_{700} 490 = a + \dfrac{b}{c + \log 7}$ với $a$, $b$, $c$ là các số nguyên. Tính tổng $T = a + b + c$.

**A.** $T = 7$. **B.** $T = 3$. **C.** $T = 2$. **D.** $T = 1$.

**Câu 73.** Cho $a$, $b$ là hai số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 = 14ab$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

**A.** $2\log_2(a+b) = 4 + \log_2 a + \log_2 b$. **B.** $\ln\dfrac{a+b}{4} = \dfrac{\ln a + \ln b}{2}$.

**C.** $2\log\dfrac{a+b}{4} = \log a + \log b$. **D.** $2\log_4(a+b) = 4 + \log_4 a + \log_4 b$.

**Câu 74.** Cho $x, y$ là các số thực dương tùy ý, đặt $\log_3 x = a$, $\log_3 y = b$. Chọn mệnh đề đúng.

**A.** $\log_{\frac{1}{27}}\left(\dfrac{x}{y^3}\right) = \dfrac{1}{3}a - b$. **B.** $\log_{\frac{1}{27}}\left(\dfrac{x}{y^3}\right) = \dfrac{1}{3}a + b$.

**C.** $\log_{\frac{1}{27}}\left(\dfrac{x}{y^3}\right) = -\dfrac{1}{3}a - b$. **D.** $\log_{\frac{1}{27}}\left(\dfrac{x}{y^3}\right) = -\dfrac{1}{3}a + b$.

**Câu 75.** **(Sở Vĩnh Phúc 2019)** Cho $\alpha = \log_a x$, $\beta = \log_b x$. Khi đó $\log_{ab^2} x^2$ bằng.

**A.** $\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$. **B.** $\dfrac{2\alpha\beta}{2\alpha+\beta}$. **C.** $\dfrac{2}{2\alpha+\beta}$. **D.** $\dfrac{2(\alpha+\beta)}{\alpha+2\beta}$.

**Câu 76.** **(THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019)** Tính giá trị biểu thức $P = \log_{a^2}\left(a^{10}b^2\right) + \log_{\sqrt{a}}\left(\dfrac{a}{\sqrt{b}}\right) + \log_{\sqrt[3]{b}}\left(b^{-2}\right)$

(với $0 < a \neq 1; 0 < b \neq 1$).

**A.** $\sqrt{3}$. **B.** $1$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $2$.

**Câu 77.** **(Toán Học Tuổi Trẻ 2019)** Đặt $M = \log_6 56, N = a + \dfrac{\log_3 7 - b}{\log_3 2 + c}$ với $a,b,c \in R$. Bộ số $a,b,c$ nào dưới đây để có $M = N$?

**A.** $a = 3, b = 3, c = 1$. **B.** $a = 3, b = \sqrt{2}, c = 1$.

**C.** $a = 1, b = 2, c = 3$. **D.** $a = 1, b = -3, c = 2$.

**Câu 78.** **(THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019)** Tính $T = \log\dfrac{1}{2} + \log\dfrac{2}{3} + \log\dfrac{3}{4} + \ldots + \log\dfrac{98}{99} + \log\dfrac{99}{100}$.

**A.** $\dfrac{1}{10}$. **B.** $-2$. **C.** $\dfrac{1}{100}$. **D.** $2$.

**Câu 79.** Cho $a,b,x > 0$; $a > b$ và $b, x \neq 1$ thỏa mãn $\log_x \dfrac{a+2b}{3} = \log_x \sqrt{a} + \dfrac{1}{\log_b x^2}$.

Khi đó biểu thức $P = \dfrac{2a^2 + 3ab + b^2}{(a+2b)^2}$ có giá trị bằng:

**A.** $P = \dfrac{5}{4}$. **B.** $P = \dfrac{2}{3}$. **C.** $P = \dfrac{16}{15}$. **D.** $P = \dfrac{4}{5}$.

Chuyên đề 17 CÔNG THỨC, BIẾN ĐỔI LOGARIT

**TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ MỨC 7-8 ĐIỂM**

| **Công thức logarit:** | | |
|---|---|---|
| Cho các số $a, b>0,\ a\neq 1$ và $m, n\in\mathbb{R}$. Ta có: | | |
| ▪ $\log_a b=\alpha \Leftrightarrow a^\alpha=b$ | ▪ $\lg b=\log b=\log_{10} b$ | ▪ $\ln b=\log_e b$ |
| ▪ $\log_a 1=0$ | ▪ $\log_a a=1$ | ▪ $\log_a a^n=n$ |
| ▪ $\log_{a^m} b=\frac{1}{m}\log_a b$ | ▪ $\log_a b^n=n\log_a b$ | ▪ $\log_{a^m} b^n=\frac{n}{m}\log_a b$ |
| ▪ $\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$ | ▪ $\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c$ | ▪ $\begin{cases}a^{\log_a b}=b\\ a^{\log_b c}=c^{\log_b a}\end{cases}$ |
| ▪ $\log_a b.\log_b c=\log_a c,\ (b\neq 1)$ | ▪ $\frac{\log_a c}{\log_a b}=\log_b c,\ (b\neq 1)$ | ▪ $\log_a b=\frac{1}{\log_b a},\ (b\neq 1)$ |

**Dạng. Biểu diễn biểu thức logarit này theo logarit khác**

**Câu 1.** **(Đề Tham Khảo 2019)** Đặt $\log_3 2=a$ khi đó $\log_{16} 27$ bằng

**A.** $\frac{3a}{4}$ **B.** $\frac{3}{4a}$ **C.** $\frac{4}{3a}$ **D.** $\frac{4a}{3}$

**Câu 2.** **(Đề Minh Họa 2017)** Đặt $a=\log_2 3, b=\log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo $a$ và $b$.

**A.** $\log_6 45=\frac{2a^2-2ab}{ab}$ **B.** $\log_6 45=\frac{a+2ab}{ab+b}$ **C.** $\log_6 45=\frac{2a^2-2ab}{ab+b}$ **D.** $\log_6 45=\frac{a+2ab}{ab}$

**Câu 3.** **(Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Đặt $a=\log_3 2$, khi đó $\log_6 48$ bằng

**A.** $\frac{3a-1}{a-1}$ **B.** $\frac{3a+1}{a+1}$ **C.** $\frac{4a-1}{a-1}$ **D.** $\frac{4a+1}{a+1}$

**Câu 4.** **(Chuyên Phan Bội Châu -2019)** Cho $\log_3 5=a,\ \log_3 6=b, \log_3 22=c$. Tính $P=\log_3\left(\frac{90}{11}\right)$ theo $a, b, c$?

**A.** $P=2a-b+c$. **B.** $P=2a+b+c$. **C.** $P=2a+b-c$. **D.** $P=a+2b-c$.

**Câu 5.** **(Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Với $\log_{27} 5=a$, $\log_3 7=b$ và $\log_2 3=c$, giá trị của $\log_6 35$ bằng

**A.** $\frac{(3a+b)c}{1+c}$ **B.** $\frac{(3a+b)c}{1+b}$ **C.** $\frac{(3a+b)c}{1+a}$ **D.** $\frac{(3b+a)c}{1+c}$

**Câu 6.** **(THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Đặt $a=\log_2 3$; $b=\log_5 3$. Nếu biểu diễn $\log_6 45=\frac{a(m+nb)}{b(a+p)}$ thì $m+n+p$ bằng

**A.** 3 **B.** 4 **C.** 6 **D.** –3

**Câu 7.** **(THPT Thiệu Hóa – Thanh Hóa 2019)** Cho các số thực dương $a$, $b$ thỏa mãn $\log_3 a=x$, $\log_3 b=y$. Tính $P=\log_3\left(3a^4b^5\right)$.

**A.** $P=3x^4y^5$ **B.** $P=3+x^4+y^5$ **C.** $P=60xy$ **D.** $P=1+4x+5y$

**Câu 8.** **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Biết $\log_6 3=a, \log_6 5=b$. Tính $\log_3 5$ theo $a,b$

**A.** $\frac{b}{a}$ **B.** $\frac{b}{1+a}$ **C.** $\frac{b}{1-a}$ **D.** $\frac{b}{a-1}$

**Câu 9.** Cho $\log_{12} 3=a$. Tính $\log_{24} 18$ theo $a$.

**A.** $\frac{3a-1}{3-a}$. **B.** $\frac{3a+1}{3-a}$. **C.** $\frac{3a+1}{3+a}$. **D.** $\frac{3a-1}{3+a}$.

**Câu 10.** **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Đặt $a=\log_2 3$ và $b=\log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo $a$ và $b$.

**A.** $\log_6 45=\frac{2a^2-2ab}{ab}$. **B.** $\log_6 45=\frac{a+2ab}{ab}$. **C.** $\log_6 45=\frac{a+2ab}{ab+b}$. **D.** $\log_6 45=\frac{2a^2-2ab}{ab+b}$.

**Câu 11.** **(HSG Bắc Ninh 2019)** Đặt $a=\ln 2, b=\ln 5$, hãy biểu diễn $I=\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{3}+\ln\frac{3}{4}+...+\ln\frac{98}{99}+\ln\frac{99}{100}$ theo $a$ và $b$.

**A.** $-2(a+b)$ **B.** $-2(a-b)$ **C.** $2(a+b)$ **D.** $2(a-b)$

**Câu 12.** **(Chuyên Bắc Ninh 2019)** Đặt $a=\log_2 3; b=\log_3 5$ Biểu diễn đúng của $\log_{20} 12$ theo $a,b$ là

**A.** $\frac{ab+1}{b-2}$. **B.** $\frac{a+b}{b+2}$. **C.** $\frac{a+1}{b-2}$. **D.** $\frac{a+2}{ab+2}$.

**Câu 13.** **(Sở Bình Phước 2019)** Cho $\log_2 3=a$, $\log_2 5=b$, khi đó $\log_{15} 8$ bằng

**A.** $\frac{a+b}{3}$ **B.** $\frac{1}{3(a+b)}$ **C.** $3(a+b)$ **D.** $\frac{3}{a+b}$

**Câu 14.** **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Giả sử $\log_{27} 5=a$; $\log_8 7=b$; $\log_2 3=c$. Hãy biểu diễn $\log_{12} 35$ theo $a$, $b$, $c$?

**A.** $\frac{3b+3ac}{c+2}$. **B.** $\frac{3b+3ac}{c+1}$. **C.** $\frac{3b+2ac}{c+3}$. **D.** $\frac{3b+2ac}{c+2}$.

**Câu 15.** **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Cho $\log_3 5=a$, $\log_3 6=b$, $\log_3 22=c$. Tính $P=\log_3\left(\frac{90}{11}\right)$ theo $a$, $b$, $c$.

**A.** $P=2a+b-c$. **B.** $P=a+2b-c$. **C.** $P=2a+b+c$. **D.** $P=2a-b+c$.

**Câu 16.** **(THPT - Yên Định Thanh Hóa 2019)** Đặt $a=\log_2 3; b=\log_3 5$. Biểu diễn $\log_{20} 12$ theo $a,b$.

**A.** $\log_{20} 12=\frac{a+b}{b+2}$. **B.** $\log_{20} 12=\frac{ab+1}{b-2}$. **C.** $\log_{20} 12=\frac{a+1}{b-2}$. **D.** $\log_{20} 12=\frac{a+2}{ab+2}$.

**Câu 17.** **(Sở Hà Nội 2019)** Nếu $\log_2 3=a$ thì $\log_{72} 108$ bằng

**A.** $\frac{2+a}{3+a}$. **B.** $\frac{2+3a}{3+2a}$. **C.** $\frac{3+2a}{2+3a}$. **D.** $\frac{2+3a}{2+2a}$.

**Câu 18.** **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Cho $\log_{30} 3=a;\log_{30} 5=b$. Tính $\log_{30} 1350$ theo $a,b$; $\log_{30} 1350$ bằng

**A.** $2a+b$ **B.** $2a+b+1$ **C.** $2a+b-1$ **D.** $2a+b-2$

**Câu 19.** **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Đặt $m=log2$ và $n=log7$. Hãy biểu diễn $log6125\sqrt{7}$ theo $m$ và $n$.

**A.** $\frac{6+6m+5n}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}(6-6n+5m)$. **C.** $5m+6n-6$. **D.** $\frac{6+5n-6m}{2}$.

**Câu 20.** **( Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho $\log_{27}5=a$, $\log_3 7=b$, $\log_2 3=c$. Tính $\log_6 35$ theo $a$, $b$ và $c$.

**A.** $\frac{(3a+b)c}{1+c}$. **B.** $\frac{(3a+b)c}{1+b}$. **C.** $\frac{(3a+b)c}{1+a}$. **D.** $\frac{(3b+a)c}{1+c}$.

**Câu 21.** **(Sở Thanh Hóa 2019)** Cho $a=\log_2 m$ và $A=\log_m 16m$, với $0<m\neq 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $A=\frac{4-a}{a}$. **B.** $A=\frac{4+a}{a}$. **C.** $A=(4+a)a$. **D.** $A=(4-a)a$.

**Câu 22.** **(THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019)** Biết $log_3 15=a$, tính $P=log_{25}81$ theo $a$ ta được

**A.** $P=2(a+1)$ **B.** $P=2(a-1)$ **C.** $P=\frac{2}{a+1}$ **D.** $\frac{2}{a-1}$

**Câu 23.** **(Chuyên Phan Bội Châu 2019)** Cho $\log_3 5=a$, $\log_3 6=b$, $\log_3 22=c$. Tính $P=\log_3\frac{90}{11}$ theo $a,b,c$.

**A.** $P=2a+b-c$ **B.** $P=a+2b-c$ **C.** $P=2a+b+c$ **D.** $P=2a-b+c$

**Câu 24.** **(Chuyên ĐHSP Hà Nội 2019)** Nếu $\log_3 5=a$ thì $\log_{45}75$ bằng

**A.** $\frac{2+a}{1+2a}$. **B.** $\frac{1+a}{2+a}$. **C.** $\frac{1+2a}{2+a}$. **D.** $\frac{1+2a}{1+a}$.

**Câu 25.** **(Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Cho $\log_3 5=a, \log_3 6=b, \log_3 22=c$. Tính $P=\log_3\left(\frac{90}{11}\right)$ theo $a$, $b$, $c$.

**A.** $P=2a+b-c$. **B.** $P=a+2b-c$. **C.** $P=2a+b+c$. **D.** $P=2a-b+c$.

**Câu 26.** **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Cho $\log_{12}3=a$. Tính $\log_{24}18$ theo $a$.

**A.** $\frac{3a+1}{3-a}$. **B.** $\frac{3a+1}{3+a}$. **C.** $\frac{3a-1}{3+a}$. **D.** $\frac{3a-1}{3-a}$.

**Câu 27.** **(THPT Nghĩa Hưng Nđ- 2019)** Đặt $\log_a b=m, \log_b c=n$. Khi đó $\log_a\left(ab^2c^3\right)$ bằng

**A.** $1+6mn$. **B.** $1+2m+3n$. **C.** $6mn$. **D.** $1+2m+3mn$.

**Câu 28.** **(Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019)** Đặt $a=\log_2 3$ và $b=\log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo $a$ và $b$

**A.** $\log_6 45=\frac{a+2ab}{ab+b}$ **B.** $\log_6 45=\frac{a+2ab}{ab}$ **C.** $\log_6 45=\frac{2a^2-2ab}{ab}$ **D.** $\log_6 45=\frac{2a^2-2ab}{ab+b}$

**Câu 29.** **(THPT Thiệu Hóa – Thanh Hóa 2019)** Cho $\log_9 5=a; \log_4 7=b; \log_2 3=c$.Biết $\log_{24}175=\frac{mb+nac}{pc+q}$.Tính $A=m+2n+3p+4q$.

**A.** 27 **B.** 25 **C.** 23 **D.** 29

**Câu 30.** **(Chuyên KHTN 2019)** Với các số $a,b>0$ thỏa mãn $a^2+b^2=6ab$, biểu thức $\log_2(a+b)$ bằng

**A.** $\frac{1}{2}(3+\log_2 a+\log_2 b)$. **B.** $\frac{1}{2}(1+\log_2 a+\log_2 b)$.

**C.** $1+\frac{1}{2}(\log_2 a+\log_2 b)$. **D.** $2+\frac{1}{2}(\log_2 a+\log_2 b)$.

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 17 CÔNG THỨC, BIẾN ĐỔI LOGARIT

## TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM

### Dạng. Một số bài toán KHÓ

| Công thức logarit: | | |
|---|---|---|
| Cho các số $a, b>0,\ a\neq 1$ và $m, n\in\mathbb{R}$. Ta có: | | |
| ▪ $\log_a b=\alpha\Leftrightarrow a^\alpha=b$ | ▪ $\lg b=\log b=\log_{10} b$ | ▪ $\ln b=\log_e b$ |
| ▪ $\log_a 1=0$ | ▪ $\log_a a=1$ | ▪ $\log_a a^n=n$ |
| ▪ $\log_{a^m} b=\frac{1}{m}\log_a b$ | ▪ $\log_a b^n=n\log_a b$ | ▪ $\log_{a^m} b^n=\frac{n}{m}\log_a b$ |
| ▪ $\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$ | ▪ $\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c$ | ▪ $\begin{cases}a^{\log_a b}=b\\ a^{\log_b c}=c^{\log_b a}\end{cases}$ |
| ▪ $\log_a b.\log_b c=\log_a c,\ (b\neq 1)$ | ▪ $\frac{\log_a c}{\log_a b}=\log_b c,\ (b\neq 1)$ | ▪ $\log_a b=\frac{1}{\log_b a},\ (b\neq 1)$ |

**Câu 1.** **(Chuyên Lam Sơn - 2020)** Cho các số thực $a$, $b$ thỏa mãn $a>b>1$ và $\frac{1}{\log_b a}+\frac{1}{\log_a b}=\sqrt{2020}$. Giá trị của biểu thức $P=\frac{1}{\log_{ab} b}-\frac{1}{\log_{ab} a}$ bằng

**A.** $\sqrt{2014}$. **B.** $\sqrt{2016}$. **C.** $\sqrt{2018}$. **D.** $\sqrt{2020}$.

**Câu 2.** **(Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ 2019)** Tìm số nguyên dương $n$ sao cho $\log_{2018} 2019+2^2\log_{\sqrt{2018}} 2019+3^2\log_{\sqrt[3]{2018}} 2019+\ldots+n^2\log_{\sqrt[n]{2018}} 2019=1010^2.2021^2\log_{2018} 2019$

**A.** $n=2021$. **B.** $n=2019$. **C.** $n=2020$. **D.** $n=2018$..

**Câu 3.** Cho hàm số $f(x)=\log_2\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+\frac{17}{4}}\right)$. Tính $T=f\left(\frac{1}{2019}\right)+f\left(\frac{2}{2019}\right)+\ldots+f\left(\frac{2018}{2019}\right)$

**A.** $T=\frac{2019}{2}$. **B.** $T=2019$. **C.** $T=2018$. **D.** $T=1009$.

**Câu 4.** **(THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Gọi $a$ là giá trị nhỏ nhất của $f(n)=\frac{\log_3 2.\log_3 3.\log_3 4\ldots\log_3 n}{9^n}$ với $n\in\mathbb{N}$ và $n\geq 2$. Hỏi có bao nhiêu giá trị của $n$ để $f(n)=a$.

**A.** 2 **B.** 4 **C.** 1 **D.** vô số

**Câu 5.** **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Cho $x$, $y$ và $z$ là các số thực lớn hơn 1 và gọi $w$ là số thực dương sao cho $\log_x w=24$, $\log_y w=40$ và $\log_{xyz} w=12$. Tính $\log_z w$.

**A.** 52. **B.** –60. **C.** 60. **D.** –52.

**Câu 6.** Cho $f(1)=1$, $f(m+n)=f(m)+f(n)+mn$ với mọi $m,n\in\mathbb{N}^*$. Tính giá trị của biểu thức $T=\log\left[\frac{f(96)-f(69)-241}{2}\right]$.

**A.** $T=9$. **B.** $T=3$. **C.** $T=10$. **D.** $T=4$.

**Câu 7.** **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Cho các số thực dương $x,y,z$ thỏa mãn đồng thời $\frac{1}{\log_2 x}+\frac{1}{\log_2 y}+\frac{1}{\log_2 z}=\frac{1}{2020}$ và $\log_2(xyz)=2020$. Tính $\log_2\left(xyz\left(x+y+z\right)-xy-yz-zx+1\right)$

**A.** $4040$. **B.** $1010$. **C.** $2020$. **D.** $2020^2$.

**Câu 8.** **(Bạc Liêu – Ninh Bình 2019)** Cho ba số thực dương $x$, $y$, $z$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân, đồng thời với mỗi số thực dương $a$ $(a\neq 1)$ thì $\log_a x$, $\log_{\sqrt{a}} y$, $\log_{\sqrt[3]{a}} z$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Tính giá trị của biểu thức $P=\frac{1959x}{y}+\frac{2019y}{z}+\frac{60z}{x}$.

**A.** $60$. **B.** $2019$. **C.** $4038$. **D.** $\frac{2019}{2}$.

**Câu 9.** **(THPT Hai Bà Trưng - Huế - 2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)=\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{2x}{1-x}\right)$ và hai số thực $m$, $n$ thuộc khoảng $\left(0;1\right)$ sao cho $m+n=1$. Tính $f\left(m\right)+f\left(n\right)$.

**A.** $2$. **B.** $0$. **C.** $1$. **D.** $\frac{1}{2}$.

**Câu 10.** **(Chuyên - Vĩnh Phúc - 2019)** Gọi $n$ là số nguyên dương sao cho $\frac{1}{\log_3 x}+\frac{1}{\log_{3^2} x}+\frac{1}{\log_{3^3} x}+...+\frac{1}{\log_{3^n} x}=\frac{190}{\log_3 x}$ đúng với mọi $x$ dương, $x\neq 1$. Tìm giá trị của biểu thức $P=2n+3$.

**A.** $P=32$. **B.** $P=23$. **C.** $P=43$. **D.** $P=41$.

**Câu 11.** Cho $x$, $y$, $z$ là ba số thực dương lập thành cấp số nhân; $\log_a x$, $\log_{\sqrt{a}} y$, $\log_{\sqrt[3]{a}} z$ lập thành cấp số cộng, với $a$ là số thực dương khác 1. Giá trị của $p=\frac{9x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{3z}{x}$ là

**A.** 13. **B.** 3. **C.** 12. **D.** 10.

**Câu 12.** **(Chuyên Nguyễn Huệ 2019)** Cho $f(1)=1$; $f(m+n)=f(m)+f(n)+mn$ với mọi $m,n\in N^*$. Tính giá trị của biểu thức

$T=\log\left[\frac{f\left(2019\right)-f\left(2009\right)-145}{2}\right]$

**A.** $3$. **B.** $4$. **C.** $5$. **D.** $10$.

**Câu 13.** Có bao nhiêu số nguyên dương $n$ để $\log_n 256$ là một số nguyên dương?

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

**Câu 14.** Cho tam giác $ABC$ có $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. Nếu $a$, $b$, $c$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân thì

**A.** $\ln\sin A.\ln\sin C=\left(\ln\sin B\right)^2$. **B.** $\ln\sin A.\ln\sin C=2\ln\sin B$.

**C.** $\ln\sin A+\ln\sin C=2\ln\sin B$. **D.** $\ln\sin A+\ln\sin C=\ln\left(2\sin B\right)$.

**Câu 15.** **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2018)** Cho $x=2018!$. Tính $A=\frac{1}{\log_{2^{2018}} x}+\frac{1}{\log_{3^{2018}} x}+...+\frac{1}{\log_{2017^{2018}} x}+\frac{1}{\log_{2018^{2018}} x}$.

**A.** $A=\frac{1}{2017}$. **B.** $A=2018$. **C.** $A=\frac{1}{2018}$. **D.** $A=2017$.

**Câu 16.** **( Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2018)** Tìm bộ ba số nguyên dương $(a;b;c)$ thỏa mãn $\log 1+\log(1+3)+\log(1+3+5)+...+\log(1+3+5+...+19)-2\log 5040=a+b\log 2+c\log 3$

**A.** $(2;6;4)$. **B.** $(1;3;2)$. **C.** $(2;4;4)$. **D.** $(2;4;3)$.

**Câu 17.** **(Phan Đình Phùng - Hà Tĩnh - 2018)** Tổng $S=1+2^2\log_{\sqrt{2}}2+3^2\log_{\sqrt[3]{2}}2+....+2018^2\log_{\sqrt[2018]{2}}2$ dưới đây.

**A.** $1008^2.2018^2$. **B.** $1009^2.2019^2$. **C.** $1009^2.2018^2$. **D.** $2019^2$.

**Câu 18.** **(ChuyêN KHTN - 2018)** Số $20172018^{20162017}$ có bao nhiêu chữ số?

**A.** 147278481. **B.** 147278480. **C.** 147347190. **D.** 147347191.

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 17 CÔNG THỨC, BIẾN ĐỔI LOGARIT

## TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH MỨC 5-6 ĐIỂM

### Dạng 1. Câu hỏi lý thuyết

| **Công thức logarit:** | | |
|---|---|---|
| Cho các số $a, b>0,\ a\neq 1$ và $m, n\in\mathbb{R}$. Ta có: | | |
| ▪ $\log_a b=\alpha \Leftrightarrow a^\alpha=b$ | ▪ $\lg b=\log b=\log_{10} b$ | ▪ $\ln b=\log_e b$ |
| ▪ $\log_a 1=0$ | ▪ $\log_a a=1$ | ▪ $\log_a a^n=n$ |
| ▪ $\log_{a^m} b=\frac{1}{m}\log_a b$ | ▪ $\log_a b^n=n\log_a b$ | ▪ $\log_{a^m} b^n=\frac{n}{m}\log_a b$ |
| ▪ $\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$ | ▪ $\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c$ | ▪ $\begin{cases}a^{\log_a b}=b\\ a^{\log_b c}=c^{\log_b a}\end{cases}$ |
| ▪ $\log_a b.\log_b c=\log_a c,\ (b\neq 1)$ | ▪ $\frac{\log_a c}{\log_a b}=\log_b c,\ (b\neq 1)$ | ▪ $\log_a b=\frac{1}{\log_b a},\ (b\neq 1)$ |

**Câu 1.** **(Đề Minh Họa 2017).** Cho hai số thực $a$ và $b$, với $1<a<b$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

**A.** $\log_b a<1<\log_a b$ **B.** $1<\log_a b<\log_b a$ **C.** $\log_b a<\log_a b<1$ **D.** $\log_a b<1<\log_b a$

**Lời giải**

**Chọn A**

**Cách 1- Tự luận:** Vì $b>a>1\Rightarrow\begin{cases}\log_a b>\log_a a\\ \log_b b>\log_b a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_a b>1\\ 1>\log_b a\end{cases}\Rightarrow\log_b a<1<\log_a b$

**Cách 2- Casio:** Chọn $a=2;b=3\Rightarrow\log_3 2<1<\log_2 3\Rightarrow$ **Đáp án D.**

**Câu 2.** **(Mã 110 2017)** Cho $a$ là số thực dương khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng với mọi số dương $x$, $y$?

**A.** $\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$ **B.** $\log_a\frac{x}{y}=\log_a(x-y)$

**C.** $\log_a\frac{x}{y}=\log_a x+\log_a y$ **D.** $\log_a\frac{x}{y}=\frac{\log_a x}{\log_a y}$

**Lời giải**

**Chọn A**

Theo tính chất của logarit.

**Câu 3.** **(THPT Minh Khai Hà Tĩnh 2019)** Với mọi số thực dương $a,b,x,y$ và $a,b\neq 1$, mệnh đề nào sau đây sai?

**A.** $\log_a\frac{1}{x}=\frac{1}{\log_a x}$. **B.** $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$.

**C.** $\log_b a.\log_a x = \log_b x$.

**D.** $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

**Lời giải**

Với mọi số thực dương $a,b,x,y$ và $a,b \neq 1$. Ta có: $\log_a \dfrac{1}{x} = \log_a x^{-1} \neq \dfrac{1}{\log_a x}$. Vậy $A$ sai.

Theo các tính chất logarit thì các phương án $B,C$ và $D$ đều đúng.

**Câu 4.** **(Chuyên Hạ Long 2019)** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

**A.** $\log_a b^{\alpha} = \alpha \log_a b$ với mọi số $a,b$ dương và $a \neq 1$.

**B.** $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ với mọi số $a,b$ dương và $a \neq 1$.

**C.** $\log_a b + \log_a c = \log_a bc$ với mọi số $a,b$ dương và $a \neq 1$.

**D.** $\log_a b = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$ với mọi số $a,b,c$ dương và $a \neq 1$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

**Câu 5.** **(THPT-Thang-Long-Ha-Noi- 2019)** Cho $a,b$ là hai số thực dương tùy ý và $b \neq 1$.Tìm kết luận đúng.

**A.** $\ln a + \ln b = \ln(a+b)$.

**B.** $\ln(a+b) = \ln a.\ln b$.

**C.** $\ln a - \ln b = \ln(a-b)$. **D.** $\log_b a = \dfrac{\ln a}{\ln b}$.

**Lời giải**

Theo tính chất làm Mũ-Log.

**Câu 6.** **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Cho hai số dương $a$, $b$ $(a \neq 1)$. Mệnh đề nào dưới đây **SAI**?

**A.** $\log_a a = 2a$.

**B.** $\log_a a^{\alpha} = \alpha$.

**C.** $\log_a 1 = 0$.

**D.** $a^{\log_a b} = b$.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Câu 7.** **(Sở Thanh Hóa 2019)** Với các số thực dương $a,b$ bất kì. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

**A.** $\log(ab) = \log a.\log b$.

**B.** $\log \dfrac{a}{b} = \dfrac{\log a}{\log b}$.

**C.** $\log(ab) = \log a + \log b$.

**D.** $\log \dfrac{a}{b} = \log b - \log a$.

**Lời giải**

Ta có $\log(ab) = \log a + \log b$.

**Câu 8.** **(VTED 03 2019)** Với các số thực dương $a,b$ bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ **B.** $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{\ln a}{\ln b}$ **C.** $\ln(ab) = \ln a.\ln b$ **D.** $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln b - \ln a$

**Lời giải**

**Chọn A.**

**Câu 9.** **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Với các số thực dương $a$, $b$ bất kì. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $\log(ab)=\log a.\log b$. **B.** $\log\frac{a}{b}=\log b-\log a$.

**C.** $\log\frac{a}{b}=\frac{\log a}{\log b}$. **D.** $\log(ab)=\log a+\log b$.

**Lời giải**

Với các số thực dương $a$, $b$ bất kì ta có:

+) $\log\frac{a}{b}=\log a-\log b$ nên ***B, C*** sai.

+) $\log(ab)=\log a+\log b$ nên ***A*** sai, ***D*** đúng.

Vậy chọn ***D.***

**Câu 10.** Cho $a,b,c>0$, $a\neq 1$ và số $\alpha\in\mathbb{R}$, mệnh đề nào dưới đây ***sai***?

**A.** $\log_a a^c=c$ **B.** $\log_a a=1$

**C.** $\log_a b^\alpha=\alpha\log_a b$ **D.** $\log_a|b-c|=\log_a b-\log_a c$

**Lời giải**

**Chọn D**

Theo tính chất của logarit, mệnh đề sai là $\log_a|b-c|=\log_a b-\log_a c$.

**Câu 11.** **[THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Cho $a,b,c$ là các số dương $(a,b\neq 1)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

**A.** $\log_a\left(\frac{b}{a^3}\right)=\frac{1}{3}\log_a b$. **B.** $a^{\log_b a}=b$.

**C.** $\log_{a^\alpha} b=\alpha\log_a b(\alpha\neq 0)$. **D.** $\log_a c=\log_b c.\log_a b$.

Nguyễn Bảo Vương

**Lời giải**

**Dạng 2. Tính, rút gọn biểu thức chứa logarit**

| **Công thức logarit:** | | |
|---|---|---|
| Cho các số $a, b>0$, $a\neq 1$ và $m, n\in\mathbb{R}$. Ta có: | | |
| ▪ $\log_a b=\alpha\Leftrightarrow a^\alpha=b$ | ▪ $\lg b=\log b=\log_{10} b$ | ▪ $\ln b=\log_e b$ |
| ▪ $\log_a 1=0$ | ▪ $\log_a a=1$ | ▪ $\log_a a^n=n$ |
| ▪ $\log_{a^m} b=\frac{1}{m}\log_a b$ | ▪ $\log_a b^n=n\log_a b$ | ▪ $\log_{a^m} b^n=\frac{n}{m}\log_a b$ |
| ▪ $\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$ | ▪ $\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c$ | ▪ $\begin{cases}a^{\log_a b}=b\\ a^{\log_b c}=c^{\log_b a}\end{cases}$ |
| ▪ $\log_a b.\log_b c=\log_a c$, $(b\neq 1)$ | ▪ $\frac{\log_a c}{\log_a b}=\log_b c$, $(b\neq 1)$ | ▪ $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$, $(b\neq 1)$ |

**Câu 12.** **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Với $a,b$ là các số thực dương tùy ý và $a\neq 1$, $\log_{a^5} b$ bằng:

**A.** $5\log_a b$. **B.** $\frac{1}{5}+\log_a b$. **C.** $5+\log_a b$. **D.** $\frac{1}{5}\log_a b$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

**Câu 13.** **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Với $a$, $b$ là các số thực dương tùy ý và $a \neq 1$, $\log_{a^2} b$ bằng

**A.** $\frac{1}{2}+\log_a b$. **B.** $\frac{1}{2}\log_a b$. **C.** $2+\log_a b$. **D.** $2\log_a b$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\log_{a^2} b=\frac{1}{2}\log_a b$.

**Câu 14.** **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Với a,b là các số thực dương tùy ý và $a \neq 1$, $\log_{a^3} b$ bằng

**A.** $3+\log_a b$ **B.** $3\log_a b$ **C.** $\frac{1}{3}+\log_a b$ **D.** $\frac{1}{3}\log_a b$

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $\log_{a^3} b=\frac{1}{3}\log_a b.$

**Câu 15.** **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Với $a$ là số thực dương tùy ý, $\log_5(5a)$ bằng

**A.** $5+\log_5 a$. **B.** $5-\log_5 a$. **C.** $1+\log_5 a$. **D.** $1-\log_5 a$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $\log_5(5a)=\log_5 5+\log_5 a=1+\log_5 a$.

Nguyễn Bảo Vương

**Câu 16.** **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Với $a$ là số thực dương tùy ý, $\log_2 2a$ bằng

**A.** $1+\log_2 a$. **B.** $1-\log_2 a$. **C.** $2-\log_2 a$. **D.** $2+\log_2 a$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$\log_2 2a=\log_2 2+\log_2 a=1+\log_2 a$.

**Câu 17.** **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Với $a$ là số thực dương tùy ý, $\log_2 a^2$ bằng:

**A.** $2+\log_2 a$. **B.** $\frac{1}{2}+\log_2 a$. **C.** $2\log_2 a$. **D.** $\frac{1}{2}\log_2 a$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Với $a>0; b>0; a\neq 1$. Với mọi $\alpha$. Ta có công thức: $\log_a b^\alpha=\alpha\log_a b.$

Vậy: $\log_2 a^2=2\log_2 a$.

**Câu 18.** **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Với $a$ là hai số thực dương tùy ý, $\log_2(a^3)$ bằng

**A.** $\frac{3}{2}\log_2 a$. **B.** $\frac{1}{3}\log_2 a$. **C.** $3+\log_2 a$. **D.** $3\log_2 a$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $\log_2(a^3)=3\log_2 a.$

**Câu 19.** **(Mã 103 2019)** Với $a$ là số thực dương tùy ý, $\log_2 a^3$ bằng

**A.** $3+\log_2 a.$ **B.** $3\log_2 a.$ **C.** $\frac{1}{3}\log_2 a.$ **D.** $\frac{1}{3}+\log_2 a.$

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\log_2 a^3 = 3\log_2 a.$

**Câu 20.** **(Mã 102 2019)** Với $a$ là số thực dương tùy ý, $\log_5 a^3$ bằng

**A.** $\frac{1}{3}\log_5 a.$ **B.** $\frac{1}{3}+\log_5 a.$ **C.** $3+\log_5 a.$ **D.** $3\log_5 a.$

**Lời giải**

**Chọn D**

$\log_5 a^3 = 3\log_5 a$

**Câu 21.** **(Mã 104 2017)** Cho $a$ là số thực dương tùy ý khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $\log_2 a = \log_a 2$ **B.** $\log_2 a = \frac{1}{\log_2 a}$ **C.** $\log_2 a = \frac{1}{\log_a 2}$ **D.** $\log_2 a = -\log_a 2$

**Lời giải**

**Chọn C**

Áp dụng công thức đổi cơ số.

**Câu 22.** **(Mã 104 2019)** Với $a$ là số thực dương tùy ý, $\log_2 a^2$ bằng:

**A.** $\frac{1}{2}\log_2 a.$ **B.** $2+\log_2 a$ **C.** $2\log_2 a.$ **D.** $\frac{1}{2}+\log_2 a.$

Nguyễn Bảo Vương

**Lời giải**

**Chọn C**

Vì $a$ là số thực dương tùy ý nên $\log_2 a^2 = 2\log_2 a$.

**Câu 23.** **(Đề Tham Khảo 2019)** Với $a$, $b$ là hai số dương tùy ý, $\log(ab^2)$ bằng

**A.** $2(\log a+\log b)$ **B.** $\log a+\frac{1}{2}\log b$ **C.** $2\log a+\log b$ **D.** $\log a+2\log b$

**Lời giải**

**Chọn D**

Có $\log(ab^2) = \log a + \log b^2 = \log a + 2\log b.$

**Câu 24.** **(Đề Tham Khảo 2017)** Cho $a$ là số thực dương $a \neq 1$ và $\log_{\sqrt[3]{a}} a^3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $P=\frac{1}{3}$ **B.** $P=3$ **C.** $P=1$ **D.** $P=9$

**Lời giải**

**Chọn D**

$\log_{\sqrt[3]{a}} a^3 = \log_{a^{\frac{1}{3}}} a^3 = 9.$

**Câu 25.** **(Mã 101 2019)** Với $a$ là số thực dương tùy ý, bằng $\log_5 a^2$

**A.** $\frac{1}{2}\log_5 a.$ **B.** $2+\log_5 a.$ **C.** $\frac{1}{2}+\log_5 a.$ **D.** $2\log_5 a.$

**Lời giải**

**Chọn D**

Vì $a$ là số thực dương nên ta có $\log_5 a^2 = 2\log_5 a$.

**Câu 26.** **(Mã 103 2018)** Với $a$ là số thực dương tùy ý, $\ln(7a) - \ln(3a)$ bằng

**A.** $\frac{\ln 7}{\ln 3}$ **B.** $\ln\frac{7}{3}$ **C.** $\ln(4a)$ **D.** $\frac{\ln(7a)}{\ln(3a)}$

**Lời giải**

**Chọn B**

$\ln(7a) - \ln(3a) = \ln\left(\frac{7a}{3a}\right) = \ln\frac{7}{3}$.

**Câu 27.** **(Mã 101 2018)** Với $a$ là số thực dương tùy ý, $\ln(5a) - \ln(3a)$ bằng:

**A.** $\ln\frac{5}{3}$ **B.** $\frac{\ln 5}{\ln 3}$ **C.** $\frac{\ln(5a)}{\ln(3a)}$ **D.** $\ln(2a)$

**Lời giải**

**Chọn A**

$\ln(5a) - \ln(3a) = \ln\frac{5}{3}$.

**Câu 28.** **(Mã 102 2018)** Với $a$ là số thực dương tùy ý, $\log_3(3a)$ bằng:

**A.** $1 - \log_3 a$ **B.** $3\log_3 a$ **C.** $3 + \log_3 a$ **D.** $1 + \log_3 a$

**Lời giải**

**Chọn D**

**Câu 29.** Với các số thực dương $a, b$ bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng.

**A.** $\ln(ab) = \ln a + \ln b$. **B.** $\ln(ab) = \ln a.\ln b$.

**C.** $\ln\frac{a}{b} = \frac{\ln a}{\ln b}$. **D.** $\ln\frac{a}{b} = \ln b - \ln a$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Theo tính chất của lôgarit: $\forall a > 0, b > 0 : \ln(ab) = \ln a + \ln b$

**Câu 30.** **(Mã 123 2017)** Cho $a$ là số thực dương khác $1$. Tính $I = \log_{\sqrt{a}} a$.

**A.** $I = -2$. **B.** $I = 2$ **C.** $I = \frac{1}{2}$ **D.** $I = 0$

**Lời giải**

**Chọn B**

Với $a$ là số thực dương khác $1$ ta được: $I = \log_{\sqrt{a}} a = \log_{a^{\frac{1}{2}}} a = 2\log_a a = 2$

**Câu 31.** **(Mã 104 2018)** Với $a$ là số thực dương tùy ý, $\log_3\left(\frac{3}{a}\right)$ bằng:

**A.** $1 - \log_3 a$ **B.** $3 - \log_3 a$ **C.** $\frac{1}{\log_3 a}$ **D.** $1 + \log_3 a$

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $\log_3\left(\frac{3}{a}\right)=\log_3 3-\log_3 a=1-\log_3 a$.

**Câu 32.** Với các số thực dương $a$, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $\log_2\left(\frac{2a^3}{b}\right)=1+3\log_2 a+\log_2 b$.

**B.** $\log_2\left(\frac{2a^3}{b}\right)=1+\frac{1}{3}\log_2 a+\log_2 b$.

**C.** $\log_2\left(\frac{2a^3}{b}\right)=1+3\log_2 a-\log_2 b$.

**D.** $\log_2\left(\frac{2a^3}{b}\right)=1+\frac{1}{3}\log_2 a-\log_2 b$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $\log_2\left(\frac{2a^3}{b}\right)=\log_2\left(2a^3\right)-\log_2\left(b\right)=\log_2 2+\log_2 a^3-\log_2 b=1+3\log_2 a-\log\ b$.

**Câu 33.** **(Mã 110 2017)** Cho $\log_a b=2$ và $\log_a c=3$. Tính $P=\log_a\left(b^2c^3\right)$.

**A.** $P=13$ **B.** $P=31$ **C.** $P=30$ **D.** $P=108$

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $\log_a\left(b^2c^3\right)=2\log_a b+3\log_a c=2.2+3.3=13$.

**Câu 34.** **(Mã 102 2019)** Cho $a$ và $b$ là hai số thực dương thỏa mãn $a^3b^2=32$. Giá trị của $3\log_2 a+2\log_2 b$ bằng

**A.** 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 32.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $\log_2 a^3b^2=\log_2 32\Leftrightarrow 3\log_2 a+2\log_2 b=5$

**Câu 35.** **(Đề Tham Khảo 2017)** Cho $a, b$ là các số thực dương thỏa mãn $a\neq 1$, $a\neq\sqrt{b}$ và $\log_a b=\sqrt{3}$.

Tính $\mathrm{P}=\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}}\sqrt{\frac{b}{a}}$.

**A.** $P=-5+3\sqrt{3}$ **B.** $P=-1+\sqrt{3}$ **C.** $P=-1-\sqrt{3}$ **D.** $P=-5-3\sqrt{3}$

**Lời giải**

**Chọn C**

**Cách 1: Phương pháp tự luận.**

$$P=\frac{\log_a\sqrt{\frac{b}{a}}}{\log_a\frac{\sqrt{b}}{a}}=\frac{\frac{1}{2}\left(\log_a b-1\right)}{\log_a\sqrt{b}-1}=\frac{\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{\frac{1}{2}\log_a b-1}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-2}=-1-\sqrt{3}.$$

**Cách 2: Phương pháp trắc nghiệm.**

Chọn $a=2$, $b=2^{\sqrt{3}}$. Bấm máy tính ta được $P=-1-\sqrt{3}$.

**Câu 36.** **(Mã 103 2019)** Cho $a$ và $b$ là hai số thực dương thỏa mãn $a^2b^3=16$. Giá trị của $2\log_2 a+3\log_2 b$ bằng

**A.** 2. **B.** 8. **C.** 16. **D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $2\log_2 a+3\log_2 b=\log_2\left(a^2b^3\right)=\log_2 16=4$

**Câu 37.** **(Mã 104 2017)** Với các số thực dương $x$, $y$ tùy ý, đặt $\log_3 x=\alpha$, $\log_3 y=\beta$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $\log_{27}\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)^3=\frac{\alpha}{2}+\beta$ **B.** $\log_{27}\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)^3=9\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)$

**C.** $\log_{27}\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)^3=\frac{\alpha}{2}-\beta$ **D.** $\log_{27}\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)^3=9\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)$

**Lời giải**

**Chọn D**

$\log_{27}\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)^3=\frac{3}{2}\log_{27}x-3\log_{27}y=\frac{1}{2}\log_3 x-\log_3 y=\frac{\alpha}{2}-\beta$.

**Câu 38.** **(Mã 101 2019)** Cho $a$ và $b$ là hai số thực dương thỏa mãn $a^4b=16$. Giá trị của $4\log_2 a+\log_2 b$ bằng

**A.** $4$. **B.** $2$. **C.** $16$. **D.** $8$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$4\log_2 a+\log_2 b=\log_2 a^4+\log_2 b=\log_2\left(a^4b\right)=\log_2 16=\log_2 2^4=4$.

**Câu 39.** **(Dề Minh Họa 2017)** Cho các số thực dương $a,b$ với $a\neq 1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

**A.** $\log_{a^2}(ab)=\frac{1}{4}\log_a b$ **B.** $\log_{a^2}(ab)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_a b$

**C.** $\log_{a^2}(ab)=\frac{1}{2}\log_a b$ **D.** $\log_{a^2}(ab)=2+2\log_a b$

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $\log_{a^2}(ab)=\log_{a^2}a+\log_{a^2}b=\frac{1}{2}.\log_a a+\frac{1}{2}.\log_a b=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\log_a b$.

**Câu 40.** **(Mã 123 2017)** Với $a$, $b$ là các số thực dương tùy ý và $a$ khác $1$, đặt $P=\log_a b^3+\log_{a^2}b^6$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $P=6\log_a b$ **B.** $P=27\log_a b$ **C.** $P=15\log_a b$ **D.** $P=9\log_a b$

**Lời giải**

**Chọn A**

$P=\log_a b^3+\log_{a^2}b^6=3\log_a b+\frac{6}{2}\log_a b=6\log_a b$.

**Câu 41.** **(Đề Tham Khảo 2018)** Với $a$ là số thực dương bất kì, mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $\log(3a)=\frac{1}{3}\log a$ **B.** $\log(3a)=3\log a$ **C.** $\log a^3=\frac{1}{3}\log a$ **D.** $\log a^3=3\log a$

**Lời giải**

**Chọn D**

**Câu 42.** **(Mã 105 2017)** Cho $\log_3 a = 2$ và $\log_2 b = \frac{1}{2}$. Tính $I = 2\log_3\left[\log_3(3a)\right] + \log_{\frac{1}{4}} b^2$.

**A.** $I = \frac{5}{4}$ **B.** $I = 0$ **C.** $I = 4$ **D.** $I = \frac{3}{2}$

**Lời giải**

**Chọn D**

$I = 2\log_3\left[\log_3(3a)\right] + \log_{\frac{1}{4}} b^2 = 2\log_3\left(\log_3 3 + \log_3 a\right) + 2\log_{2^{-2}} b = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

**Câu 43.** **(Mã 105 2017)** Cho $a$ là số thực dương khác $2$. Tính $I = \log_{\frac{a}{2}}\left(\frac{a^2}{4}\right)$.

**A.** $I = 2$ **B.** $I = -\frac{1}{2}$ **C.** $I = -2$ **D.** $I = \frac{1}{2}$

**Lời giải**

**Chọn A**

$I = \log_{\frac{a}{2}}\left(\frac{a^2}{4}\right) = \log_{\frac{a}{2}}\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 2$

**Câu 44.** **(Mã 104 2017)** Với mọi $a$, $b$, $x$ là các số thực dương thoả mãn $\log_2 x = 5\log_2 a + 3\log_2 b$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $x = 5a + 3b$ **B.** $x = a^5 + b^3$ **C.** $x = a^5 b^3$ **D.** $x = 3a + 5b$

**Lời giải**

**Chọn C**

Có $\log_2 x = 5\log_2 a + 3\log_2 b = \log_2 a^5 + \log_2 b^3 = \log_2 a^5 b^3 \Leftrightarrow x = a^5 b^3$.

**Câu 45.** **(Mã 104 2019)** Cho $a$ và $b$ là hai số thực dương thỏa mãn $ab^3 = 8$. Giá trị của $\log_2 a + 3\log_2 b$ bằng

**A.** $6$. **B.** $2$. **C.** $3$. **D.** $8$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $\log_2 a + 3\log_2 b = \log_2 a + \log_2 b^3 = \log_2\left(ab^3\right) = \log_2 8 = 3$.

**Câu 46.** **(Mã 105 2017)** Với mọi số thực dương $a$ và $b$ thỏa mãn $a^2 + b^2 = 8ab$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $\log(a+b) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$ **B.** $\log(a+b) = \frac{1}{2} + \log a + \log b$

**C.** $\log(a+b) = \frac{1}{2}(1 + \log a + \log b)$ **D.** $\log(a+b) = 1 + \log a + \log b$

**Lời giải:**

**Chọn C**

Ta có $a^2 + b^2 = 8ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 10ab$.

Lấy log cơ số $10$ hai vế ta được: $\log(a+b)^2 = \log(10ab) \Leftrightarrow 2\log(a+b) = \log 10 + \log a + \log b$.

Hay $\log(a+b) = \frac{1}{2}(1 + \log a + \log b)$.

**Câu 47.** **(Mã 123 2017)** Cho $\log_a x = 3, \log_b x = 4$ với $a, b$ là các số thực lớn hơn 1. Tính $P = \log_{ab} x$.

**A.** $P = 12$ **B.** $P = \frac{12}{7}$ **C.** $P = \frac{7}{12}$ **D.** $P = \frac{1}{12}$

**Lời giải**

**Chọn B**

$$P = \log_{ab} x = \frac{1}{\log_x ab} = \frac{1}{\log_x a + \log_x b} = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = \frac{12}{7}$$

**Câu 48.** **(Mã 110 2017)** Cho $x, y$ là các số thực lớn hơn 1 thoả mãn $x^2 + 9y^2 = 6xy$. Tính $M = \frac{1 + \log_{12} x + \log_{12} y}{2\log_{12}(x + 3y)}$.

**A.** $M = \frac{1}{2}$. **B.** $M = \frac{1}{3}$. **C.** $M = \frac{1}{4}$. **D.** $M = 1$

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $x^2 + 9y^2 = 6xy \Leftrightarrow (x - 3y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3y$.

Khi đó $M = \frac{1 + \log_{12} x + \log_{12} y}{2\log_{12}(x + 3y)} = \frac{\log_{12}(12xy)}{\log_{12}(x + 3y)^2} = \frac{\log_{12}(36y^2)}{\log_{12}(36y^2)} = 1$.

**Câu 49.** **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Xét tất cả các số dương $a$ và $b$ thỏa mãn $\log_2 a = \log_8(ab)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $a = b^2$. **B.** $a^3 = b$. **C.** $a = b$. **D.** $a^2 = b$.

Nguyễn Bảo Vương

**Lời giải**

**Chọn D**

Theo đề ta có:

$$\log_2 a = \log_8(ab) \Leftrightarrow \log_2 a = \frac{1}{3}\log_2(ab) \Leftrightarrow 3\log_2 a = \log_2(ab)$$
$$\Leftrightarrow \log_2 a^3 = \log_2(ab) \Leftrightarrow a^3 = ab \Leftrightarrow a^2 = b$$

**Câu 50.** **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Xét số thực $a$ và $b$ thỏa mãn $\log_3(3^a.9^b) = \log_9 3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng

**A.** $a + 2b = 2$. **B.** $4a + 2b = 1$. **C.** $4ab = 1$. **D.** $2a + 4b = 1$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có:

$$\log_3(3^a.9^b) = \log_9 3 \Leftrightarrow \log_3(3^a.3^{2b}) = \log_{3^2} 3$$

$$\Leftrightarrow \log_3 3^{a+2b} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow a + 2b = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2a + 4b = 1.$$

**Câu 51.** **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Cho $a$ và $b$ là các số thực dương thỏa mãn $4^{\log_2(ab)} = 3a$. Giá trị của $ab^2$ bằng

**A.** 3. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 12.

**Lời giải**

**Chọn A**

Từ giả thiết ta có : $4^{\log_2(ab)} = 3a$

$\Leftrightarrow \log_2(ab).\log_2 4 = \log_2(3a)$

$\Leftrightarrow 2(\log_2 a + \log_2 b) = \log_2 a + \log_2 3$

$\Leftrightarrow \log_2 a + 2\log_2 b = \log_2 3$

$\Leftrightarrow \log_2(ab^2) = \log_2 3$

$\Leftrightarrow ab^2 = 3$

**Câu 52.** **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $9^{\log_3(ab)} = 4a$. Giá trị của $ab^2$ bằng

**A.** 3. **B.** 6. **C.** 2 **D.** 4

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có : $9^{\log_3(ab)} = 4a \Leftrightarrow 2\log_3(ab) = \log_3(4a) \Leftrightarrow \log_3(a^2b^2) = \log_3(4a) \Rightarrow a^2b^2 = 4a$

$\Leftrightarrow ab^2 = 4$.

**Câu 53.** **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Với $a, b$ là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $\log_3 a - 2\log_9 b = 2$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $a = 9b^2$. **B.** $a = 9b$. **C.** $a = 6b$. **D.** $a = 9b^2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $\log_3 a - 2\log_9 b = 2 \Leftrightarrow \log_3 a - \log_3 b = 2 \Leftrightarrow \log_3\left(\frac{a}{b}\right) = 2 \Leftrightarrow a = 9b$.

Nguyễn Bảo Vương

**Câu 54.** **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Với $a,b$ là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $\log_3 a - 2\log_9 b = 3$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $a = 27b$. **B.** $a = 9b$. **C.** $a = 27b^4$. **D.** $a = 27b^2$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $\log_3 a - 2\log_9 b = 3 \Leftrightarrow \log_3 a - \log_3 b = 3 \Leftrightarrow \log_3 \frac{a}{b} = 3 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 27 \Leftrightarrow a = 27b$.

**Câu 55.** **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Với $a,b$ là các số thực dương tùy ý thỏa mãn $\log_2 a - 2\log_4 b = 4$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $a = 16b^2$. **B.** $a = 8b$. **C.** $a = 16b$. **D.** $a = 16b^4$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $\log_2 a - 2\log_4 b = 4$

$\Leftrightarrow \log_2 a - 2\log_{2^2} b = 4$

$\Leftrightarrow \log_2 a - 2.\frac{1}{2}\log_2 b = 4$

$\Leftrightarrow \log_2 a - \log_2 b = 4$

$\Leftrightarrow \log_2 \frac{a}{b} = 4$

$\Leftrightarrow \frac{a}{b} = 2^4$

$\Leftrightarrow a = 16b$

**Câu 56.** **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho các số thực dương $a,b$ thỏa mãn $\ln a = x; \ln b = y$. Tính $\ln\left(a^3b^2\right)$

**A.** $P = x^2y^3$ **B.** $P = 6xy$ **C.** $P = 3x + 2y$ **D.** $P = x^2 + y^2$

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $\ln\left(a^3b^2\right) = \ln a^3 + \ln b^2 = 3\ln a + 2\ln b = 3x + 2y$

**Câu 57.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Giá trị của biểu thức $M = \log_2 2 + \log_2 4 + \log_2 8 + ... + \log_2 256$ bằng

**A.** 48 **B.** 56 **C.** 36 **D.** $8\log_2 256$

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $M = \log_2 2 + \log_2 4 + \log_2 8 + ... + \log_2 256 = \log_2\left(2.4.8...256\right) = \log_2\left(2^1.2^2.2^3...2^8\right)$

$= \log_2\left(2^{1+2+3+...+8}\right) = \left(1+2+3+...+8\right)\log_2 2 = 1+2+3+...+8 = 36$.

**Câu 58.** **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Cho $\log_8 c = m$ và $\log_{c^3} 2 = n$. Khẳng định **đúng** là

**A.** $mn = \frac{1}{9}\log_2 c$. **B.** $mn = 9$. **C.** $mn = 9\log_2 c$. **D.** $mn = \frac{1}{9}$.

**Lời giải**

$mn = \log_8 c.\log_{c^3} 2 = \left(\frac{1}{3}\log_2 c\right).\left(\frac{1}{3}\log_c 2\right) = \frac{1}{9}$.

**Câu 59.** **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho $a > 0, a \neq 1$ và $\log_a x = -1, \log_a y = 4$. Tính $P = \log_a\left(x^2y^3\right)$

**A.** $P = 18$. **B.** $P = 6$. **C.** $P = 14$. **D.** $P = 10$.

**Lời giải**

Ta có $\log_a\left(x^2.y^3\right) = \log_a x^2 + \log_a y^3 = 2\log_a x + 3\log_a y = 2.(-1) + 3.4 = 10$.

**Câu 60.** **(Sở Bình Phước 2019)** Với $a$ và $b$ là hai số thực dương tùy ý; $\log_2\left(a^3b^4\right)$ bằng

**A.** $\frac{1}{3}\log_2 a + \frac{1}{4}\log_2 b$ **B.** $3\log_2 a + 4\log_2 b$ **C.** $2\left(\log_2 a + \log_4 b\right)$ **D.** $4\log_2 a + 3\log_2 b$

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $\log_2\left(a^3b^4\right) = \log_2 a^3 + \log_2 b^4 = 3\log_2 a + 4\log_2 b$ nên **B** đúng.

**Câu 61.** **(Chuyên Hạ Long -2019)** Cho $P=\sqrt[20]{3\sqrt[7]{27\sqrt[4]{243}}}$. Tính $\log_3 P$?

**A.** $\frac{45}{28}$. **B.** $\frac{9}{112}$. **C.** $\frac{45}{56}$. **D.** Đáp án khác.

**Lời giải**

Ta có: $P=\sqrt[20]{3\sqrt[7]{27\sqrt[4]{243}}} \Rightarrow P=3^{\frac{1}{20}}.27^{\frac{1}{20}.\frac{1}{7}}.243^{\frac{1}{20}.\frac{1}{7}.\frac{1}{4}}=3^{\frac{9}{112}} \Rightarrow \log_3 P=\log_3 3^{\frac{9}{112}}=\frac{9}{112}$.

**Câu 62.** **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Cho các số dương $a,b,c,d$. Biểu thức $S=\ln\frac{a}{b}+\ln\frac{b}{c}+\ln\frac{c}{d}+\ln\frac{d}{a}$ bằng

**A.** 1. **B.** 0. **C.** $\ln\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a}\right)$. **D.** $\ln(abcd)$.

**Lời giải**

**Cách 1:**

Ta có $S=\ln\frac{a}{b}+\ln\frac{b}{c}+\ln\frac{c}{d}+\ln\frac{d}{a}=\ln\left(\frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{d}.\frac{d}{a}\right)=\ln 1=0$.

**Cách 2:**

Ta có: $S=\ln\frac{a}{b}+\ln\frac{b}{c}+\ln\frac{c}{d}+\ln\frac{d}{a}=\ln a-\ln b+\ln b-\ln c+\ln c-\ln d+\ln d-\ln a=0$.

**Câu 63.** Cho $x$, $y$ là các số thực dương tùy ý, đặt $\log_3 x=a$, $\log_3 y=b$. Chọn mệnh đề đúng.

**A.** $\log_{\frac{1}{27}}\left(\frac{x}{y^3}\right)=\frac{1}{3}a-b$. **B.** $\log_{\frac{1}{27}}\left(\frac{x}{y^3}\right)=\frac{1}{3}a+b$.

**C.** $\log_{\frac{1}{27}}\left(\frac{x}{y^3}\right)=-\frac{1}{3}a-b$. **D.** $\log_{\frac{1}{27}}\left(\frac{x}{y^3}\right)=-\frac{1}{3}a+b$.

Nguyễn Bảo Vương

**Lời giải**

Do $x$, $y$ là các số thực dương nên ta có:

$\log_{\frac{1}{27}}\left(\frac{x}{y^3}\right)=-\frac{1}{3}\log_3\left(\frac{x}{y^3}\right)=-\frac{1}{3}\left(\log_3 x-\log_3 y^3\right)=-\frac{1}{3}\left(\log_3 x-3\log_3 y\right)$

$=-\frac{1}{3}\log_3 x+\log_3 y=-\frac{1}{3}a+b$.

**Câu 64.** **(THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019)** Với $a,b$ là các số thực dương tùy ý và $a$ khác 1, đặt $P=\log_a b^3+\log_{a^2} b^6$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $P=27\log_a b$. **B.** $P=15\log_a b$. **C.** $P=9\log_a b$. **D.** $P=6\log_a b$.

**Lời giải**

Ta có $P=\log_a b^3+\log_{a^2} b^6=3\log_a b+6.\frac{1}{2}\log_a b=6\log_a b$.

**Câu 65.** **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Với các số thực dương $a,b$ bất kỳ $a\neq 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $\log_a\frac{\sqrt[3]{a}}{b^2}=\frac{1}{3}-2\log_a b$. **B.** $\log_a\frac{\sqrt[3]{a}}{b^2}=3-\frac{1}{2}\log_a b$.

**C.** $\log_a \frac{\sqrt[3]{a}}{b^2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\log_a b.$ **D.** $\log_a \frac{\sqrt[3]{a}}{b^2} = 3 - 2\log_a b.$

**Lời giải**

Ta có:

$$\log_a \frac{\sqrt[3]{a}}{b^2} = \log_a \sqrt[3]{a} - \log_a b^2$$

$$= \log_a a^{\frac{1}{3}} - 2\log_a b$$

$$= = \frac{1}{3}\log_a a - 2\log_a b = \frac{1}{3} - 2\log_a b$$

**Câu 66.** **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho các số thực dương $a, b, c$ với $a$ và $b$ khác 1. Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** $\log_a b^2.\log_{\sqrt{b}} c = \log_a c$. **B.** $\log_a b^2.\log_{\sqrt{b}} c = \frac{1}{4}\log_a c$.

**C.** $\log_a b^2.\log_{\sqrt{b}} c = 4\log_a c$. **D.** $\log_a b^2.\log_{\sqrt{b}} c = 2\log_a c$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $\log_a b^2.\log_{\sqrt{b}} c = 2\log_a b.\log_{b^{\frac{1}{2}}} c = 2\log_a b.2\log_b c = 4\log_a b.\log_b c = 4\log_a c$.

**Câu 67.** **(Chuyên Bắc Giang -2019)** Giả sử $a, b$ là các số thực dương bất kỳ. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

**A.** $\log(10ab)^2 = 2 + \log(ab)^2$ **B.** $\log(10ab)^2 = (1 + \log a + \log b)^2$

**C.** $\log(10ab)^2 = 2 + 2\log(ab)$ **D.** $\log(10ab)^2 = 2(1 + \log a + \log b)$

Nguyễn Bảo Vương

**Lời giải**

**Chọn B**

$\log(10ab)^2 = \log 10^2 + \log(ab)^2 = 2 + \log(ab)^2 \Rightarrow A$ đúng

$1 + \log a + \log b = \log(10ab) \Rightarrow (1 + \log a + \log b)^2 = \log^2(10ab) \neq \log(10ab)^2 \Rightarrow B$ sai

$\log(10ab)^2 = \log 10^2 + \log(ab)^2 = 2 + 2\log(ab) \Rightarrow C$ đúng

$\log(10ab)^2 = \log 10^2 + \log(ab)^2 = 2 + 2\log(ab) = 2(1 + \log a + \log b) \Rightarrow D$ đúng

**Câu 68.** **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho $\log_a b = 3, \log_a c = -2$. Khi đó $\log_a\left(a^3 b^2 \sqrt{c}\right)$ bằng bao nhiêu?

**A.** 13 **B.** 5 **C.** 8 **D.** 10

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $\log_a\left(a^3 b^2 \sqrt{c}\right) = \log_a a^3 + \log_a b^2 + \log_a \sqrt{c} = 3 + 2\log_a b + \frac{1}{2}\log_a c = 3 + 2.3 - \frac{1}{2}.2 = 8$.

**Câu 69.** **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Rút gọn biểu thức $M = 3\log_{\sqrt{3}} \sqrt{x} - 6\log_9(3x) + \log_{\frac{1}{3}} \frac{x}{9}$.

**A.** $M = -\log_3(3x)$ **B.** $M = 2 + \log_3\left(\frac{x}{3}\right)$ **C.** $M = -\log_3\left(\frac{x}{3}\right)$ **D.** $M = 1 + \log_3 x$

**Lời giải**

**Chọn A**

ĐK: $x>0$.

$M=3\log_3 x-3\left(1+\log_3 x\right)-\log_3 x+2=-1-\log_3 x=-\left(1+\log_3 x\right)=-\log_3\left(3x\right).$

**Câu 70.** **(Chuyên Lê Thánh Tông 2019)** Cho $\log_8|x|+\log_4 y^2=5$ và $\log_8|y|+\log_4 x^2=7$. Tìm giá trị của biểu thức $P=|x|-|y|$.

**A.** $P=56$. **B.** $P=16$. **C.** $P=8$. **D.** $P=64$.

**Lời giải**

Điều kiên: $x,y\neq 0$

Cộng vế với vế của hai phương trình, ta được:

$\log_8|xy|+\log_4 x^2y^2=12\Leftrightarrow\log_2|xy|=9\Leftrightarrow|xy|=512$ (1)

Trừ vế với vế của hai phương trình, ta được:

$\log_8\left|\frac{x}{y}\right|+\log_4\frac{y^2}{x^2}=-2\Leftrightarrow\log_2\left|\frac{x}{y}\right|=3\Leftrightarrow\left|\frac{x}{y}\right|=8\Leftrightarrow|x|=8|y|$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $|y|=8\Rightarrow|x|=64\Leftrightarrow P=56$.

**Câu 71.** **(Hsg Bắc Ninh 2019)** Cho hai số thực dương $a,b$.Nếu viết $\log_2\frac{\sqrt[6]{64a^3b^2}}{ab}=1+x\log_2 a+y\log_4 b\quad(x,y\in\mathbb{Q})$ thì biểu thức $P=xy$ có giá trị bằng bao nhiêu?

**A.** $P=\frac{1}{3}$ **B.** $P=\frac{2}{3}$ **C.** $P=-\frac{1}{12}$ **D.** $P=\frac{1}{12}$

**Lời giải**

Ta có $\log_2\frac{\sqrt[6]{64a^3b^2}}{ab}=\log_2 64^{\frac{1}{6}}+\frac{1}{2}\log_2 a+\frac{1}{3}\log_2 b-\log_2 a-\log_2 b$

$=1-\frac{1}{2}\log_2 a-\frac{4}{3}\log_4 b$. Khi đó $x=-\frac{1}{2};y=-\frac{4}{3}\Rightarrow P=xy=\frac{2}{3}$

**Câu 72.** Cho $\log_{700}490=a+\frac{b}{c+\log 7}$ với $a$, $b$, $c$ là các số nguyên. Tính tổng $T=a+b+c$.

**A.** $T=7$. **B.** $T=3$. **C.** $T=2$. **D.** $T=1$.

**Lời giải**

Ta có: $\log_{700}490=\frac{\log 490}{\log 700}=\frac{\log 10+\log 49}{\log 100+\log 7}=\frac{1+2\log 7}{2+\log 7}=\frac{4+2\log 7-3}{2+\log 7}=2+\frac{-3}{2+\log 7}$

Suy ra $a=2,b=-3,c=2$

Vậy $T=1$.

**Câu 73.** Cho $a$, $b$ là hai số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2=14ab$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

**A.** $2\log_2\left(a+b\right)=4+\log_2 a+\log_2 b$. **B.** $\ln\frac{a+b}{4}=\frac{\ln a+\ln b}{2}$.

**C.** $2\log\frac{a+b}{4}=\log a+\log b$. **D.** $2\log_4\left(a+b\right)=4+\log_4 a+\log_4 b$.

**Lời giải**

Ta có $a^2+b^2=14ab\Leftrightarrow\left(a+b\right)^2=16ab$.

Suy ra $\log_4\left(a+b\right)^2=\log_4\left(16ab\right)\Leftrightarrow 2\log_4\left(a+b\right)=2+\log_4 a+\log_4 b$.

**Câu 74.** Cho $x, y$ là các số thực dương tùy ý, đặt $\log_3 x = a$, $\log_3 y = b$. Chọn mệnh đề đúng.

**A.** $\log_{\frac{1}{27}}\left(\frac{x}{y^3}\right) = \frac{1}{3}a - b$. **B.** $\log_{\frac{1}{27}}\left(\frac{x}{y^3}\right) = \frac{1}{3}a + b$.

**C.** $\log_{\frac{1}{27}}\left(\frac{x}{y^3}\right) = -\frac{1}{3}a - b$. **D.** $\log_{\frac{1}{27}}\left(\frac{x}{y^3}\right) = -\frac{1}{3}a + b$.

**Lời giải**

$$\log_{\frac{1}{27}}\left(\frac{x}{y^3}\right) = \log_{3^{-3}}\left(\frac{x}{y^3}\right) = -\frac{1}{3}\log_3\left(\frac{x}{y^3}\right) = -\frac{1}{3}\left(\log_3 x - \log_3 y^3\right) = -\frac{1}{3}\log_3 x + \log_3 y = -\frac{1}{3}a + b.$$

**Câu 75.** **(Sở Vĩnh Phúc 2019)** Cho $\alpha = \log_a x$, $\beta = \log_b x$. Khi đó $\log_{ab^2} x^2$ bằng.

**A.** $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$. **B.** $\frac{2\alpha\beta}{2\alpha+\beta}$. **C.** $\frac{2}{2\alpha+\beta}$. **D.** $\frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha+2\beta}$.

**Lời giải**

Ta có : $\log_{ab^2} x^2 = 2\log_{ab^2} x = 2.\frac{1}{\log_x ab^2} = \frac{2}{\log_x a + \log_x b^2} = \frac{2}{\frac{1}{\log_a x} + 2.\frac{1}{\log_b x}}$

$= \frac{2}{\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\beta}} = \frac{2\alpha\beta}{\beta + 2\alpha}$.

**Câu 76.** **(THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019)** Tính giá trị biểu thức $P = \log_{a^2}\left(a^{10}b^2\right) + \log_{\sqrt{a}}\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right) + \log_{\sqrt[3]{b}}\left(b^{-2}\right)$

(với $0 < a \neq 1; 0 < b \neq 1$).

Nguyễn Bảo Vương

**A.** $\sqrt{3}$. **B.** $1$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $2$.

**Lời giải**

Ta có: $P = \log_{a^2}\left(a^{10}b^2\right) + \log_{\sqrt{a}}\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right) + \log_{\sqrt[3]{b}}\left(b^{-2}\right) = 5 + \log_a b + 2 - \log_a b - 6 = 1$.

**Câu 77.** **(Toán Học Tuổi Trẻ 2019)** Đặt $M = \log_6 56, N = a + \frac{\log_3 7 - b}{\log_3 2 + c}$ với $a, b, c \in R$. Bộ số $a, b, c$ nào dưới đây để có $M = N$?

**A.** $a = 3, b = 3, c = 1$. **B.** $a = 3, b = \sqrt{2}, c = 1$.

**C.** $a = 1, b = 2, c = 3$. **D.** $a = 1, b = -3, c = 2$.

**Lời giải**

Ta có:

$$M = \log_6 56 = \frac{\log_3 56}{\log_3 6} = \frac{\log_3 2^3.7}{1 + \log_3 2} = \frac{3\log_3 2 + \log_3 7}{1 + \log_3 2} = \frac{3(1 + \log_3 2) + \log_3 7 - 3}{1 + \log_3 2} = 3 + \frac{\log_3 7 - 3}{\log_3 2 + 1}$$

Vậy $M = N \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \\ c = 1 \end{cases}$

**Câu 78.** **(THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019)** Tính $T=\log\frac{1}{2}+\log\frac{2}{3}+\log\frac{3}{4}+...+\log\frac{98}{99}+\log\frac{99}{100}$.

**A.** $\frac{1}{10}$. **B.** $-2$. **C.** $\frac{1}{100}$. **D.** $2$.

**Lời giải**

$T=\log\frac{1}{2}+\log\frac{2}{3}+\log\frac{3}{4}+...+\log\frac{98}{99}+\log\frac{99}{100}=\log\left(\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{3}{4}...\frac{98}{99}.\frac{99}{100}\right)=\log\frac{1}{100}=\log 10^{-2}=-2$.

**Câu 79.** Cho $a,b,x>0$; $a>b$ và $b,x\neq 1$ thỏa mãn $\log_x\frac{a+2b}{3}=\log_x\sqrt{a}+\frac{1}{\log_b x^2}$.

Khi đó biểu thức $P=\frac{2a^2+3ab+b^2}{(a+2b)^2}$ có giá trị bằng:

**A.** $P=\frac{5}{4}$. **B.** $P=\frac{2}{3}$. **C.** $P=\frac{16}{15}$. **D.** $P=\frac{4}{5}$.

**Lời giải**

$\log_x\frac{a+2b}{3}=\log_x\sqrt{a}+\frac{1}{\log_b x^2}\Leftrightarrow\log_x\frac{a+2b}{3}=\log_x\sqrt{a}+\log_x\sqrt{b}$

$\Leftrightarrow a+2b=3\sqrt{ab}\Leftrightarrow a^2-5ab+4b^2=0\Leftrightarrow(a-b)(a-4b)=0\Leftrightarrow a=4b$ (do $a>b$).

$P=\frac{2a^2+3ab+b^2}{(a+2b)^2}=\frac{32b^2+12b^2+b^2}{36b^2}=\frac{5}{4}$.

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 17 CÔNG THỨC, BIẾN ĐỔI LOGARIT

**TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ MỨC 7-8 ĐIỂM**

| **Công thức logarit:** | | |
|---|---|---|
| Cho các số $a, b>0,\ a\neq 1$ và $m, n\in\mathbb{R}$. Ta có: | | |
| ▪ $\log_a b=\alpha \Leftrightarrow a^\alpha=b$ | ▪ $\lg b=\log b=\log_{10} b$ | ▪ $\ln b=\log_e b$ |
| ▪ $\log_a 1=0$ | ▪ $\log_a a=1$ | ▪ $\log_a a^n=n$ |
| ▪ $\log_{a^m} b=\frac{1}{m}\log_a b$ | ▪ $\log_a b^n=n\log_a b$ | ▪ $\log_{a^m} b^n=\frac{n}{m}\log_a b$ |
| ▪ $\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$ | ▪ $\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c$ | ▪ $\begin{cases}a^{\log_a b}=b\\ a^{\log_b c}=c^{\log_b a}\end{cases}$ |
| ▪ $\log_a b.\log_b c=\log_a c,\ (b\neq 1)$ | ▪ $\frac{\log_a c}{\log_a b}=\log_b c,\ (b\neq 1)$ | ▪ $\log_a b=\frac{1}{\log_b a},\ (b\neq 1)$ |

**Dạng. Biểu diễn biểu thức logarit này theo logarit khác**

**Câu 1.** **(Đề Tham Khảo 2019)** Đặt $\log_3 2=a$ khi đó $\log_{16} 27$ bằng

**A.** $\frac{3a}{4}$ **B.** $\frac{3}{4a}$ **C.** $\frac{4}{3a}$ **D.** $\frac{4a}{3}$

**lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\log_{16} 27=\frac{3}{4}\log_2 3=\frac{3}{4.\log_3 2}=\frac{3}{4a}$

**Câu 2.** **(Đề Minh Họa 2017)** Đặt $a=\log_2 3, b=\log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo $a$ và $b$.

**A.** $\log_6 45=\frac{2a^2-2ab}{ab}$ **B.** $\log_6 45=\frac{a+2ab}{ab+b}$

**C.** $\log_6 45=\frac{2a^2-2ab}{ab+b}$ **D.** $\log_6 45=\frac{a+2ab}{ab}$

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\log_6 45=\frac{\log_2\left(3^2.5\right)}{\log_2(2.3)}=\frac{2\log_2 3+\log_2 5}{1+\log_2 3}=\frac{2a+\log_2 3.\log_3 5}{1+a}=\frac{2a+\frac{\log_2 3}{\log_5 3}}{1+a}=\frac{2a+\frac{a}{b}}{1+a}=\frac{a+2ab}{ab+b}$$

**CASIO:** Sto\Gán $A=\log_2 3, B=\log_5 3$ bằng cách: Nhập $\log_2 3$ \shift\Sto\ $A$ tương tự $B$

Thử từng đáp án A: $\frac{A+2AB}{AB}-\log_6 45\approx 1,34$ ( Loại)

Thử đáp án C: $\frac{A+2AB}{AB}-\log_6 45=0$ ( chọn ).

**Câu 3.** **(Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Đặt $a=\log_3 2$, khi đó $\log_6 48$ bằng

**A.** $\frac{3a-1}{a-1}$ **B.** $\frac{3a+1}{a+1}$ **C.** $\frac{4a-1}{a-1}$ **D.** $\frac{4a+1}{a+1}$

**Lời giải**

**Chọn D**

**Cách 1**: Giải trực tiếp

$$\log_6 48 = \log_6 6.8 = \log_6 6 + \log_6 8 = 1 + \frac{1}{\log_8 6} = 1 + \frac{1}{\log_{2^3} 2.3} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{3}(1 + \log_2 3)}$$

$$= \frac{1 + \log_2 3 + 3}{(1 + \log_2 3)} = \frac{4 + \frac{1}{a}}{1 + \frac{1}{a}} = \frac{4a + 1}{a + 1}$$. Chọn đáp án D

**Cách 2**: Dùng máy tính Casio

Ta có $\log_6 48 = 2.1605584217$. Thay $a = \log_3 2 = 0.63092975375$ vào 4 đáp án thì ta chọn đáp án D vì $\frac{4a+1}{a+1} = 2.1605584217$

**Câu 4.** **(Chuyên Phan Bội Châu -2019)** Cho $\log_3 5 = a,\ \log_3 6 = b,\ \log_3 22 = c$. Tính $P = \log_3\left(\frac{90}{11}\right)$ theo $a, b, c$?

**A.** $P = 2a - b + c$. **B.** $P = 2a + b + c$. **C.** $P = 2a + b - c$. **D.** $P = a + 2b - c$.

**Lời giải**

Ta có $\log_3 6 = b \Leftrightarrow \log_3 2 + 1 = b \Leftrightarrow \log_3 2 = b - 1$,

$\log_3 22 = c \Leftrightarrow \log_3 2 + \log_3 11 = c \Leftrightarrow \log_3 11 = c - \log_3 2 = c - b + 1$.

Khi đó $P = \log_3\left(\frac{90}{11}\right) = \log_3 90 - \log_3 11 = 2 + \log_3 2 + \log_3 5 - \log_3 11 = 2b + a - c$.

**Câu 5.** **(Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Với $\log_{27} 5 = a$, $\log_3 7 = b$ và $\log_2 3 = c$, giá trị của $\log_6 35$ bằng

**A.** $\frac{(3a+b)c}{1+c}$ **B.** $\frac{(3a+b)c}{1+b}$ **C.** $\frac{(3a+b)c}{1+a}$ **D.** $\frac{(3b+a)c}{1+c}$

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $\log_{27} 5 = a \Rightarrow a = \frac{1}{3}\log_3 5 \Rightarrow 3a = \log_3 5 \Rightarrow \log_5 3 = \frac{1}{3a}$

$\log_3 7 = b \Rightarrow \log_7 3 = \frac{1}{b}$; $bc = \log_2 3.\log_3 7 = \log_2 7 \Rightarrow \log_7 2 = \frac{1}{bc}$;

$3ac = \log_3 5.\log_2 3 = \log_2 5 \Rightarrow \log_5 2 = \frac{1}{3ac}$

$\log_6 35 = \log_6 5 + \log_6 7 = \frac{1}{\log_5 6} + \frac{1}{\log_7 6} = \frac{1}{\log_5 2 + \log_5 3} + \frac{1}{\log_7 3 + \log_7 2}$

$= \frac{1}{\frac{1}{3ac} + \frac{1}{3a}} + \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{1}{bc}} = \frac{(3a+b)c}{c+1}$

**Câu 6.** **(THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Đặt $a=\log_2 3$; $b=\log_5 3$. Nếu biểu diễn $\log_6 45=\dfrac{a(m+nb)}{b(a+p)}$ thì $m+n+p$ bằng

**A.** 3 **B.** 4 **C.** 6 **D.** –3

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\log_6 45=\frac{\log_3 45}{\log_3 6}=\frac{\log_3 9+\log_3 5}{\log_3 2+\log_3 3}=\frac{2+\dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{a}+1}=\frac{a(2b+1)}{b(1+a)}$$

Suy ra $m=1,n=2,p=1\Rightarrow m+n+p=4$

**Câu 7.** **(THPT Thiệu Hóa – Thanh Hóa 2019)** Cho các số thực dương $a$, $b$ thỏa mãn $\log_3 a=x$, $\log_3 b=y$. Tính $P=\log_3\left(3a^4b^5\right)$.

**A.** $P=3x^4y^5$ **B.** $P=3+x^4+y^5$ **C.** $P=60xy$ **D.** $P=1+4x+5y$

**Lời giải**

**Chọn D**

$P=\log_3\left(3a^4b^5\right)=\log_3 3+\log_3 a^4+\log_3 b^5=1+4\log_3 a+5\log_3 b=1+4x+5y$.

**Câu 8.** **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Biết $\log_6 3=a,\log_6 5=b$. Tính $\log_3 5$ theo $a,b$

**A.** $\dfrac{b}{a}$ **B.** $\dfrac{b}{1+a}$ **C.** $\dfrac{b}{1-a}$ **D.** $\dfrac{b}{a-1}$

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\log_6 3=a\Leftrightarrow 3=6^a,\log_6 5=b\Leftrightarrow 5=6^b\Rightarrow\log_3 5=\log_{6^a}6^b=\frac{b}{a}$$

**Câu 9.** Cho $\log_{12}3=a$. Tính $\log_{24}18$ theo $a$.

**A.** $\dfrac{3a-1}{3-a}$. **B.** $\dfrac{3a+1}{3-a}$. **C.** $\dfrac{3a+1}{3+a}$. **D.** $\dfrac{3a-1}{3+a}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $a=\log_{12}3=\dfrac{\log_2 3}{\log_2 12}=\dfrac{\log_2 3}{\log_2\left(2^2.3\right)}=\dfrac{\log_2 3}{\log_2\left(2^2\right)+\log_2 3}=\dfrac{\log_2 3}{2+\log_2 3}\Rightarrow\log_2 3=\dfrac{2a}{1-a}$.

Ta có: $\log_{24}18=\dfrac{\log_2 18}{\log_2 24}=\dfrac{\log_2\left(2.3^2\right)}{\log_2\left(2^3.3\right)}=\dfrac{1+2\log_2 3}{3+\log_2 3}=\dfrac{1+2.\dfrac{2a}{1-a}}{3+\dfrac{2a}{1-a}}=\dfrac{3a+1}{3-a}$.

Vậy $\log_{24}18=\dfrac{3a+1}{3-a}$.

**Câu 10.** **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Đặt $a=\log_2 3$ và $b=\log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo $a$ và $b$.

**A.** $\log_6 45=\dfrac{2a^2-2ab}{ab}$. **B.** $\log_6 45=\dfrac{a+2ab}{ab}$.

**C.** $\log_6 45=\dfrac{a+2ab}{ab+b}$. **D.** $\log_6 45=\dfrac{2a^2-2ab}{ab+b}$.

**Lời giải**

$$\log_6 45=\frac{\log_3 45}{\log_3 6}=\frac{\log_3 3^2.5}{\log_3 2.3}=\frac{\log_3 3^2+\log_3 5}{\log_3 2+\log_3 3}$$

$$=\frac{2+\frac{1}{\log_5 3}}{\frac{1}{\log_2 3}+1}=\frac{2+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+1}=\frac{\left(\frac{2b+1}{b}\right)}{\left(\frac{a+1}{a}\right)}=\frac{(2b+1)a}{b(a+1)}=\frac{a+2ab}{b+ab}$$

**Câu 11.** **(HSG Bắc Ninh 2019)** Đặt $a=\ln 2, b=\ln 5$, hãy biểu diễn $I=\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{3}+\ln\frac{3}{4}+...+\ln\frac{98}{99}+\ln\frac{99}{100}$ theo $a$ và $b$.

**A.** $-2(a+b)$ **B.** $-2(a-b)$ **C.** $2(a+b)$ **D.** $2(a-b)$

**Lời giải**

$$I=\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{2}{3}+\ln\frac{3}{4}+...+\ln\frac{98}{99}+\ln\frac{99}{100}$$

$$=\ln\left(\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{3}{4}...\frac{98}{99}.\frac{99}{100}\right)=\ln\frac{1}{100}=\ln 10^{-2}$$

$$=-2\ln 10=-2(\ln 2+\ln 5)=-2(a+b).$$

**Câu 12.** **(Chuyên Bắc Ninh 2019)** Đặt $a=\log_2 3; b=\log_3 5$ Biểu diễn đúng của $\log_{20}12$ theo $a,b$ là

**A.** $\frac{ab+1}{b-2}$. **B.** $\frac{a+b}{b+2}$. **C.** $\frac{a+1}{b-2}$. **D.** $\frac{a+2}{ab+2}$.

**Lời giải**

Ta có $\log_{20}12=\log_{20}3+2\log_{20}2=\frac{1}{2\log_3 2+\log_3 5}+\frac{2}{\log_2 5+2}=\frac{1}{2.\frac{1}{a}+b}+\frac{2}{ab+2}=\frac{a+2}{ab+2}$.

**Câu 13.** **(Sở Bình Phước 2019)** Cho $\log_2 3=a$, $\log_2 5=b$, khi đó $\log_{15}8$ bằng

**A.** $\frac{a+b}{3}$ **B.** $\frac{1}{3(a+b)}$ **C.** $3(a+b)$ **D.** $\frac{3}{a+b}$

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\log_{15}8=3\log_{15}2=\frac{3}{\log_2 15}=\frac{3}{\log_2 3+\log_2 5}=\frac{3}{a+b}$$

**Câu 14.** **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Giả sử $\log_{27}5=a$; $\log_8 7=b$; $\log_2 3=c$. Hãy biểu diễn $\log_{12}35$ theo $a$, $b$, $c$?

**A.** $\frac{3b+3ac}{c+2}$. **B.** $\frac{3b+3ac}{c+1}$. **C.** $\frac{3b+2ac}{c+3}$. **D.** $\frac{3b+2ac}{c+2}$.

**Lời giải**

$$\log_{27}5=a\Leftrightarrow\frac{1}{3}\log_3 5=a\Leftrightarrow\frac{\log_2 5}{\log_2 3}=3a\Leftrightarrow\log_2 5=3ac.$$

$$\log_8 7=b\Leftrightarrow\frac{1}{3}\log_2 7=b\Leftrightarrow\log_2 7=3b.$$

Xét $\log_{12}35=\dfrac{\log_2 35}{\log_2 12}=\dfrac{\log_2(5.7)}{\log_2(3.2^2)}=\dfrac{\log_2 5+\log_2 7}{\log_2 3+2}=\dfrac{3ac+3b}{c+2}$.

**Câu 15.** **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Cho $\log_3 5=a$, $\log_3 6=b$, $\log_3 22=c$. Tính $P=\log_3\left(\dfrac{90}{11}\right)$ theo $a$, $b$, $c$.

**A.** $P=2a+b-c$. **B.** $P=a+2b-c$. **C.** $P=2a+b+c$. **D.** $P=2a-b+c$.

**Lời giải**

Ta có:

$P=\log_3\left(\dfrac{90}{11}\right)=\log_3\left(\dfrac{180}{22}\right)=\log_3 180-\log_3 22=\log_3(36.5)-\log_3 22=\log_3 36+\log_3 5-\log_3 22$

$=\log_3(6^2)+\log_3 5-\log_3 22=2\log_3 6+\log_3 5-\log_3 22=a+2b-c$.

Vậy $P=a+2b-c$.

**Câu 16.** **(THPT - Yên Định Thanh Hóa 2019)** Đặt $a=\log_2 3; b=\log_3 5$. Biểu diễn $\log_{20}12$ theo $a,b$.

**A.** $\log_{20}12=\dfrac{a+b}{b+2}$. **B.** $\log_{20}12=\dfrac{ab+1}{b-2}$. **C.** $\log_{20}12=\dfrac{a+1}{b-2}$. **D.** $\log_{20}12=\dfrac{a+2}{ab+2}$.

**Lời giải**

Ta có $\log_{20}12=\dfrac{\log_2 12}{\log_2 20}=\dfrac{\log_2 4.3}{\log_2 4.5}=\dfrac{2+\log_2 3}{2+\log_2 5}=\dfrac{2+\log_2 3}{2+\log_2 3.\log_3 5}=\dfrac{a+2}{ab+2}$.

**Câu 17.** **(Sở Hà Nội 2019)** Nếu $\log_2 3=a$ thì $\log_{72}108$ bằng

**A.** $\dfrac{2+a}{3+a}$. **B.** $\dfrac{2+3a}{3+2a}$. **C.** $\dfrac{3+2a}{2+3a}$. **D.** $\dfrac{2+3a}{2+2a}$.

**Lời giải**

Ta có $\log_{72}108=\dfrac{\log_2 108}{\log_2 72}=\dfrac{\log_2(2^2.3^3)}{\log_2(2^3.3^2)}=\dfrac{2+3\log_2 3}{3+2\log_2 3}=\dfrac{2+3a}{3+2a}$.

**Câu 18.** **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Cho $\log_{30}3=a;\log_{30}5=b$. Tính $\log_{30}1350$ theo $a,b$; $\log_{30}1350$ bằng

**A.** $2a+b$ **B.** $2a+b+1$ **C.** $2a+b-1$ **D.** $2a+b-2$

**Lời giải**

Ta có $1350=30.45=30.9.5=30.3^2.5$

Nên $\log_{30}1350=\log_{30}30.3^2.5=\log_{30}30+\log_{30}3^2+\log_{30}5=1+2\log_{30}3+\log_{30}5=1+2a+b$

**Câu 19.** **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Đặt $m=log2$ và $n=log7$. Hãy biểu diễn $log6125\sqrt{7}$ theo $m$ và $n$.

**A.** $\dfrac{6+6m+5n}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}(6-6n+5m)$. **C.** $5m+6n-6$. **D.** $\dfrac{6+5n-6m}{2}$.

**Lời giải**

Ta có $\log 6125\sqrt{7}=\log 5^3 7^{\frac{5}{2}}=3\log 5+\dfrac{5}{2}\log 7=3\log\dfrac{10}{2}+\dfrac{5}{2}\log 7$

$=3(1-\log 2)+\dfrac{5}{2}\log 7=3(1-m)+\dfrac{5}{2}n=\dfrac{6+5n-6m}{2}$.

Vậy $\log_{6}125\sqrt{7}=\dfrac{6+5n-6m}{2}$.

**Câu 20.** **( Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho $\log_{27}5=a$, $\log_{3}7=b$, $\log_{2}3=c$. Tính $\log_{6}35$ theo $a$, $b$ và $c$.

**A.** $\dfrac{(3a+b)c}{1+c}$. **B.** $\dfrac{(3a+b)c}{1+b}$. **C.** $\dfrac{(3a+b)c}{1+a}$. **D.** $\dfrac{(3b+a)c}{1+c}$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Theo giả thiết, ta có $\log_{27}5=a\Leftrightarrow\dfrac{1}{3}\log_{3}5=a\Leftrightarrow\log_{3}5=3a$.

Ta có $\log_{2}5=\log_{2}3\cdot\log_{3}5=3ac$ và $\log_{2}7=\log_{2}3\cdot\log_{3}7=bc$.

Vậy $\log_{6}35=\dfrac{\log_{2}35}{\log_{2}6}=\dfrac{\log_{2}5+\log_{2}7}{\log_{2}2+\log_{2}3}=\dfrac{3ac+bc}{1+c}=\dfrac{(3a+b)c}{1+c}$.

**Câu 21.** **(Sở Thanh Hóa 2019)** Cho $a=\log_{2}m$ và $A=\log_{m}16m$, với $0<m\neq1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $A=\dfrac{4-a}{a}$. **B.** $A=\dfrac{4+a}{a}$. **C.** $A=(4+a)a$. **D.** $A=(4-a)a$.

**Lời giải**

Ta có $A=\log_{m}16m=\dfrac{\log_{2}16m}{\log_{2}m}=\dfrac{\log_{2}16+\log_{2}m}{\log_{2}m}=\dfrac{4+a}{a}$.

**Câu 22.** **(THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019)** Biết $log_{3}15=a$, tính $P=log_{25}81$ theo $a$ ta được

**A.** $P=2(a+1)$ **B.** $P=2(a-1)$ **C.** $P=\dfrac{2}{a+1}$ **D.** $\dfrac{2}{a-1}$

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $\log_{3}15=a\Rightarrow1+log_{3}5=a\Rightarrow log_{3}5=a-1$

$P=\log_{25}81=\dfrac{log_{3}81}{log_{3}25}=\dfrac{4}{2log_{3}5}=\dfrac{4}{2(a-1)}=\dfrac{2}{a-1}$

**Câu 23.** **(Chuyên Phan Bội Châu 2019)** Cho $\log_{3}5=a$, $\log_{3}6=b$, $\log_{3}22=c$. Tính $P=\log_{3}\dfrac{90}{11}$ theo $a,b,c$.

**A.** $P=2a+b-c$ **B.** $P=a+2b-c$ **C.** $P=2a+b+c$ **D.** $P=2a-b+c$

**Lời giải**

Ta có: $P=\log_{3}90-\log_{3}11=\log_{3}90+\log_{3}2-\log_{3}11-\log_{3}2$

$=\log_{3}180-\log_{3}2=\log_{3}(5.36)-\log_{3}2=\log_{3}5+2\log_{3}6-\log_{3}2=a+b-2c$

**Câu 24.** **(Chuyên ĐHSP Hà Nội 2019)** Nếu $\log_{3}5=a$ thì $\log_{45}75$ bằng

**A.** $\dfrac{2+a}{1+2a}$. **B.** $\dfrac{1+a}{2+a}$. **C.** $\dfrac{1+2a}{2+a}$. **D.** $\dfrac{1+2a}{1+a}$.

**Lời giải**

Ta có $\log_{45}75=2.\log_{45}5+\log_{45}3$.

Và $\log_{45} 5 = \dfrac{1}{\log_5 45} = \dfrac{1}{2\log_5 3 + 1} = \dfrac{1}{\dfrac{2}{a} + 1} = \dfrac{a}{a+2}; \log_{45} 3 = \dfrac{1}{\log_3 45} = \dfrac{1}{2 + \log_3 5} = \dfrac{1}{a+2}$.

Do đó $\log_{45} 75 = \dfrac{2a}{a+2} + \dfrac{1}{a+2} = \dfrac{1+2a}{2+a}$.

**Câu 25.** **(Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Cho $\log_3 5 = a,\ \log_3 6 = b,\ \log_3 22 = c.$ Tính $P = \log_3\left(\dfrac{90}{11}\right)$ theo $a, b, c.$

**A.** $P = 2a + b - c$. **B.** $P = a + 2b - c$. **C.** $P = 2a + b + c$. **D.** $P = 2a - b + c$.

**Lời giải.**

Ta có $P = \log_3\left(\dfrac{90}{11}\right) = \log_3\left(\dfrac{180}{22}\right) = \log_3\left(\dfrac{5.6^2}{22}\right) = \log_3 5 + 2\log_3 6 - \log_3 22 = a + 2b - c$.

**Câu 26.** **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Cho $\log_{12} 3 = a$. Tính $\log_{24} 18$ theo $a$.

**A.** $\dfrac{3a+1}{3-a}$. **B.** $\dfrac{3a+1}{3+a}$. **C.** $\dfrac{3a-1}{3+a}$. **D.** $\dfrac{3a-1}{3-a}$.

**Lời giải**

Ta có $a = \log_{12} 3 = \dfrac{1}{\log_3 12} = \dfrac{1}{1 + 2\log_3 2} \Leftrightarrow \log_2 3 = \dfrac{2a}{1-a}$.

Khi đó: $\log_{24} 18 = \dfrac{\log_2\left(3^2.2\right)}{\log_2\left(2^3.3\right)} = \dfrac{1 + 2\log_2 3}{3 + \log_2 3} = \dfrac{1 + 2.\dfrac{2a}{1-a}}{3 + \dfrac{2a}{1-a}} = \dfrac{1+3a}{3-a}$.

**Câu 27.** **(THPT Nghĩa Hưng Nđ- 2019)** Đặt $\log_a b = m, \log_b c = n$. Khi đó $\log_a\left(ab^2c^3\right)$ bằng

**A.** $1 + 6mn$. **B.** $1 + 2m + 3n$. **C.** $6mn$. **D.** $1 + 2m + 3mn$.

**Lời giải**

$\log_a\left(ab^2c^3\right) = \log_a a + 2\log_a b + 3\log_a c$

$= 1 + 2m + 3\dfrac{\log_b c}{\log_b a} = 1 + 2m + 3\log_a b.\log_b c = 1 + 2m + 3mn$.

**Câu 28.** **(Cụm Liên Trường Hải Phòng 2019)** Đặt $a = \log_2 3$ và $b = \log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo $a$ và $b$

**A.** $\log_6 45 = \dfrac{a + 2ab}{ab + b}$ **B.** $\log_6 45 = \dfrac{a + 2ab}{ab}$ **C.** $\log_6 45 = \dfrac{2a^2 - 2ab}{ab}$ **D.** $\log_6 45 = \dfrac{2a^2 - 2ab}{ab + b}$

**Lời giải**

**Chọn A**

$\log_6 45 = \dfrac{\log_2\left(3^2.5\right)}{\log_2\left(2.3\right)} = \dfrac{2\log_2 3 + \log_2 3.\log_3 5}{1 + \log_2 3} = \dfrac{2a + \dfrac{a}{b}}{1+a} = \dfrac{2ab + a}{ab + b}$

**Câu 29.** **(THPT Thiệu Hóa – Thanh Hóa 2019)** Cho $\log_9 5 = a;\ \log_4 7 = b;\ \log_2 3 = c$. Biết $\log_{24} 175 = \dfrac{mb + nac}{pc + q}$. Tính $A = m + 2n + 3p + 4q$.

**A.** 27 **B.** 25 **C.** 23 **D.** 29

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\log_{24}175=\log_{24}7.5^2=\log_{24}7+2\log_{24}5^2=\dfrac{1}{\log_7 24}+\dfrac{2}{\log_5 24}=$

$\dfrac{1}{\log_7 3+\log_7 2^3}+\dfrac{2}{\log_5 3+\log_5 2^3}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{\log_3 7}+\dfrac{3}{\log_2 7}}+\dfrac{2}{\dfrac{1}{\log_3 5}+\dfrac{3}{\log_2 5}}=$

$\dfrac{1}{\dfrac{1}{\log_2 7.\log_3 2}+\dfrac{3}{\log_2 7}}+\dfrac{2}{\dfrac{1}{\log_3 5}+\dfrac{3}{\log_2 3.\log_3 5}}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{2b.\dfrac{1}{c}}+\dfrac{3}{2b}}+\dfrac{2}{\dfrac{1}{2a}+\dfrac{3}{c.2a}}=$

$\dfrac{1}{\dfrac{c}{2b}+\dfrac{3}{2b}}+\dfrac{2}{\dfrac{c}{2ac}+\dfrac{3}{2ac}}=\dfrac{2b}{c+3}+\dfrac{4ac}{c+3}=\dfrac{2b+4ac}{c+3}$.

$A=m+2n+3p+4q=2+8+3+12=25$

**Câu 30.** **(Chuyên KHTN 2019)** Với các số $a,b>0$ thỏa mãn $a^2+b^2=6ab$, biểu thức $\log_2(a+b)$ bằng

**A.** $\dfrac{1}{2}(3+\log_2 a+\log_2 b)$.

**B.** $\dfrac{1}{2}(1+\log_2 a+\log_2 b)$.

**C.** $1+\dfrac{1}{2}(\log_2 a+\log_2 b)$.

**D.** $2+\dfrac{1}{2}(\log_2 a+\log_2 b)$.

**Lời giải**

Ta có: $a^2+b^2=6ab\Leftrightarrow a^2+b^2+2ab=6ab+2ab\Leftrightarrow(a+b)^2=8ab\ (*)$.

Do $a,b>0\Rightarrow\begin{cases}ab>0\\a+b>0\end{cases}$, lấy logarit cơ số 2 hai vế của $(*)$ ta được:

$\log_2(a+b)^2=\log_2(8ab)\Leftrightarrow 2\log_2(a+b)=3+\log_2 a+\log_2 b$

$\Leftrightarrow\log_2(a+b)=\dfrac{1}{2}(3+\log_2 a+\log_2 b)$.

Chuyên đề 17 CÔNG THỨC, BIẾN ĐỔI LOGARIT

## TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM

**Dạng. Một số bài toán KHÓ**

| **Công thức logarit:** | | |
|---|---|---|
| Cho các số $a, b>0,\ a\neq 1$ và $m, n\in\mathbb{R}$. Ta có: | | |
| ▪ $\log_a b=\alpha\Leftrightarrow a^\alpha=b$ | ▪ $\lg b=\log b=\log_{10} b$ | ▪ $\ln b=\log_e b$ |
| ▪ $\log_a 1=0$ | ▪ $\log_a a=1$ | ▪ $\log_a a^n=n$ |
| ▪ $\log_{a^m} b=\frac{1}{m}\log_a b$ | ▪ $\log_a b^n=n\log_a b$ | ▪ $\log_{a^m} b^n=\frac{n}{m}\log_a b$ |
| ▪ $\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$ | ▪ $\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c$ | ▪ $\begin{cases}a^{\log_a b}=b\\ a^{\log_b c}=c^{\log_b a}\end{cases}$ |
| ▪ $\log_a b.\log_b c=\log_a c,\ (b\neq 1)$ | ▪ $\frac{\log_a c}{\log_a b}=\log_b c,\ (b\neq 1)$ | ▪ $\log_a b=\frac{1}{\log_b a},\ (b\neq 1)$ |

**Câu 1.** **(Chuyên Lam Sơn - 2020)** Cho các số thực $a$, $b$ thỏa mãn $a>b>1$ và $\frac{1}{\log_b a}+\frac{1}{\log_a b}=\sqrt{2020}$. Giá trị của biểu thức $P=\frac{1}{\log_{ab} b}-\frac{1}{\log_{ab} a}$ bằng

**A.** $\sqrt{2014}$. **B.** $\sqrt{2016}$. **C.** $\sqrt{2018}$. **D.** $\sqrt{2020}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Do $a>b>1$ nên $\log_a b>0$, $\log_b a>0$ và $\log_b a>\log_a b$.

Ta có: $\frac{1}{\log_b a}+\frac{1}{\log_a b}=\sqrt{2020}$

$\Leftrightarrow \log_b a+\log_a b=\sqrt{2020}$

$\Leftrightarrow \log_b^2 a+\log_a^2 b+2=2020$

$\Leftrightarrow \log_b^2 a+\log_a^2 b=2018$ (*)

Khi đó, $P=\log_b ab-\log_a ab=\log_b a+\log_b b-\log_a a-\log_a b=\log_b a-\log_a b$

Suy ra: $P^2=\left(\log_b a-\log_a b\right)^2=\log_b^2 a+\log_a^2 b-2=2018-2=2016\Rightarrow P=\sqrt{2016}$

**Câu 2.** **(Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ 2019)** Tìm số nguyên dương $n$ sao cho

$\log_{2018} 2019+2^2\log_{\sqrt{2018}} 2019+3^2\log_{\sqrt[3]{2018}} 2019+\ldots+n^2\log_{\sqrt[n]{2018}} 2019=1010^2.2021^2\log_{2018} 2019$

**A.** $n=2021$. **B.** $n=2019$. **C.** $n=2020$. **D.** $n=2018$..

**Lời giải**

$\log_{2018} 2019+2^2\log_{\sqrt{2018}} 2019+3^2\log_{\sqrt[3]{2018}} 2019+\ldots+n^2\log_{\sqrt[n]{2018}} 2019=1010^2.2021^2\log_{2018} 2019$

$\Leftrightarrow \log_{2018} 2019+2^3\log_{2018} 2019+3^3\log_{2018} 2019+\ldots+n^3\log_{2018} 2019=1010^2.2021^2\log_{2018} 2019$

$\Leftrightarrow \left(1+2^3+3^3+\ldots+n^3\right)\log_{2018} 2019=1010^2.2021^2\log_{2018} 2019$

$\Leftrightarrow 1+2^3+3^3+\ldots+n^3=1010^2.2021^2$

$\Leftrightarrow (1+2+...+n)^2 = 1010^2.2021^2$

$\Leftrightarrow \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = 1010^2.2021^2$

$\Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 1010.2021$

$\Leftrightarrow n^2+n-2020.2021=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=2020 \\ n=-2021\ (\ell) \end{array}\right.$

**Câu 3.** Cho hàm số $f(x)=\log_2\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+\frac{17}{4}}\right)$. Tính $T=f\left(\frac{1}{2019}\right)+f\left(\frac{2}{2019}\right)+...+f\left(\frac{2018}{2019}\right)$

**A.** $T=\frac{2019}{2}$. **B.** $T=2019$. **C.** $T=2018$. **D.** $T=1009$.

**Lời giải**

Ta có: $f(1-x)=\log_2\left(1-x-\frac{1}{2}+\sqrt{(1-x)^2-(1-x)+\frac{17}{4}}\right)=\log_2\left(\sqrt{x^2-x+\frac{17}{4}}-\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)$

$f(x)+f(1-x)=\log_2\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+\frac{17}{4}}\right)+\log_2\left(\sqrt{x^2-x+\frac{17}{4}}-\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)$

$=\log_2\left[\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+\frac{17}{4}}\right)\left(\sqrt{x^2-x+\frac{17}{4}}-\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)\right]=\log_2 4=2$

$\Rightarrow T=f\left(\frac{1}{2019}\right)+f\left(\frac{2}{2019}\right)+...+f\left(\frac{2018}{2019}\right)$

$=f\left(\frac{1}{2019}\right)+f\left(\frac{2018}{2019}\right)+f\left(\frac{2}{2019}\right)+f\left(\frac{2017}{2019}\right)+...+f\left(\frac{1009}{2019}\right)+f\left(\frac{1010}{2019}\right)$

$=1009.2=2018$

**Câu 4.** **(THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Gọi $a$ là giá trị nhỏ nhất của $f(n)=\frac{\log_3 2.\log_3 3.\log_3 4...\log_3 n}{9^n}$ với $n\in\mathbb{N}$ và $n\geq 2$. Hỏi có bao nhiêu giá trị của $n$ để $f(n)=a$.

**A.** 2 **B.** 4 **C.** 1 **D.** vô số

**Lời giải**

**Chọn A**

$f(n)=\frac{\log_3 2.\log_3 3.\log_3 4...\log_3 n}{9^n}=\frac{1}{9}\log_{3^9} 2.\log_{3^9} 3.\log_{3^9} 4...\log_{3^9} n$

Ta có:

- Nếu $2\leq n\leq 3^8 \Rightarrow 0<\log_{3^9} k<1 \Rightarrow f(n)=\frac{1}{9}\log_{3^9} 2.\log_{3^9} 3.\log_{3^9} 4...\log_{3^9} n\geq f\left(3^8\right)$

- Nếu $n=3^9 \Rightarrow f\left(3^9\right)=f\left(3^8\right).\log_{3^9} 3^9=f\left(3^8\right)$

- Nếu $n>3^9 \Rightarrow \log_{3^9} n>1 \Rightarrow f(n)=f\left(3^9\right).\log_{3^9}\left(3^9+1\right)...\log_{3^9} n>f\left(3^9\right)$

Từ đó suy ra $Min\, f(n)=f\left(3^9\right)=f\left(3^8\right)$.

**Câu 5.** **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Cho $x$, $y$ và $z$ là các số thực lớn hơn 1 và gọi $w$ là số thực dương sao cho $\log_x w=24$, $\log_y w=40$ và $\log_{xyz} w=12$. Tính $\log_z w$.

**A.** $52$. **B.** $-60$. **C.** $60$. **D.** $-52$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$\log_x w=24\Rightarrow \log_w x=\dfrac{1}{24}$

$\log_y w=40\Rightarrow \log_w y=\dfrac{1}{40}$.

Lại do

$$\log_{xyz} w=12\Leftrightarrow \frac{1}{\log_w(xyz)}=12\Leftrightarrow \frac{1}{\log_w x+\log_w y+\log_w z}=12\Leftrightarrow \frac{1}{\log_w x+\log_w y+\log_w z}=12$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{24}+\frac{1}{40}+\log_w z}=12\Leftrightarrow \log_w z=\frac{1}{60}\Rightarrow \log_z w=60.$$

**Câu 6.** Cho $f(1)=1$, $f(m+n)=f(m)+f(n)+mn$ với mọi $m,n\in\mathbb{N}^*$. Tính giá trị của biểu thức $T=\log\left[\dfrac{f(96)-f(69)-241}{2}\right]$.

**A.** $T=9$. **B.** $T=3$. **C.** $T=10$. **D.** $T=4$.

**Lời giải**

**Chon B**

Có $f(1)=1$, $f(m+n)=f(m)+f(n)+mn$

$\Rightarrow$

$$f(96)=f(95+1)=f(95)+f(1)+95=f(95)+96=f(94)+95+96=...=f(1)+2+...+95+96$$

$$\Rightarrow f(96)=1+2+...+95+96=\frac{96.97}{2}=4656.$$

Tương tự $f(69)=1+2+...+68+69=\dfrac{69.70}{2}=2415$.

Vậy $T=\log\left[\dfrac{f(96)-f(69)-241}{2}\right]=\log\left(\dfrac{4656-2415-241}{2}\right)=\log 1000=3$.

**Câu 7.** **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Cho các số thực dương $x,y,z$ thỏa mãn đồng thời $\dfrac{1}{\log_2 x}+\dfrac{1}{\log_2 y}+\dfrac{1}{\log_2 z}=\dfrac{1}{2020}$ và $\log_2(xyz)=2020$. Tính $\log_2\left(xyz(x+y+z)-xy-yz-zx+1\right)$

**A.** $4040$. **B.** $1010$. **C.** $2020$. **D.** $2020^2$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $a=\log_2 x;b=\log_2 y;c=\log_2 z$.

Ta có $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2020}$ và $a+b+c=2020$

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)=1\Leftrightarrow (a+b+c)(ab+ac+bc)=abc$$

$$\Leftrightarrow a^2b+ab^2+abc+abc+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2=0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=0$$

Vì vai trò $a,b,c$ như nhau nên giả sử $a+b=0\Rightarrow c=2020\Rightarrow z=2^{2020}$ và $xy=1$.

$\log_2\left(xyz\left(x+y+z\right)-xy-yz-zx+1\right)=\log_2\left(z(x+y+z)-1-yz-zx+1\right)$

$=\log_2\left(z^2\right)=2\log_2 z=4040$

**Câu 8.** **(Bạc Liêu – Ninh Bình 2019)** Cho ba số thực dương $x$, $y$, $z$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân, đồng thời với mỗi số thực dương $a$ $(a\neq 1)$ thì $\log_a x$, $\log_{\sqrt{a}} y$, $\log_{\sqrt[3]{a}} z$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Tính giá trị của biểu thức $P=\dfrac{1959x}{y}+\dfrac{2019y}{z}+\dfrac{60z}{x}$.

**A.** $60$. **B.** $2019$. **C.** $4038$. **D.** $\dfrac{2019}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $x$, $y$, $z$ là ba số thực dường, theo thứ tự lập thành một cấp số nhân thì $y^2=x.z$ (1).

Với mỗi số thực $a$ $(a\neq 1)$, $\log_a x$, $\log_{\sqrt{a}} y$, $\log_{\sqrt[3]{a}} z$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng thì

$2\log_{\sqrt{a}} y=\log_a x+\log_{\sqrt[3]{a}} z\Leftrightarrow 4\log_a y=\log_a x+3\log_a z$ (2).

Thay (1) vào (2) ta được $2\log_a x.z=\log_a x+3\log_a z\Leftrightarrow \log_a x=\log_a z\Leftrightarrow x=z$.

Từ (1) ta suy ra $y=x=z$.

Thay vào giả thiết thì $P=1959+2019+60=4038$.

**Câu 9.** **(THPT Hai Bà Trưng - Huế - 2019)** Cho hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}\log_2\left(\dfrac{2x}{1-x}\right)$ và hai số thực $m$, $n$ thuộc khoảng $\left(0;1\right)$ sao cho $m+n=1$. Tính $f\left(m\right)+f\left(n\right)$.

**A.** $2$. **B.** $0$. **C.** $1$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$$f\left(m\right)+f\left(n\right)=\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{2m}{1-m}\right)+\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{2n}{1-n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\log_2\left(\frac{2m}{1-m}\right)+\log_2\left(\frac{2n}{1-n}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{2m}{1-m}.\frac{2n}{1-n}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{4mn}{1-m-n+mn}\right),\text{ vì } m+n=1$$

$=\dfrac{1}{2}\log_2\left(\dfrac{4mn}{mn}\right)=\dfrac{1}{2}\log_2 4=\dfrac{1}{2}.2=1$.

**Câu 10.** **(Chuyên - Vĩnh Phúc - 2019)** Gọi $n$ là số nguyên dương sao cho $\dfrac{1}{\log_3 x}+\dfrac{1}{\log_{3^2} x}+\dfrac{1}{\log_{3^3} x}+...+\dfrac{1}{\log_{3^n} x}=\dfrac{190}{\log_3 x}$ đúng với mọi $x$ dương, $x\neq 1$. Tìm giá trị của biểu thức $P=2n+3$.

**A.** $P=32$. **B.** $P=23$. **C.** $P=43$. **D.** $P=41$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\frac{1}{\log_3 x}+\frac{1}{\log_{3^2} x}+\frac{1}{\log_{3^3} x}+\ldots+\frac{1}{\log_{3^n} x}=\frac{190}{\log_3 x}$$

$$\Leftrightarrow \log_x 3+2\log_x 3+3\log_x 3+\ldots+n\log_x 3=190\log_x 3$$

$$\Leftrightarrow \log_x 3\left(1+2+3+\ldots+n\right)=190\log_x 3$$

$$\Leftrightarrow 1+2+3+\ldots+n=190$$

$$\Leftrightarrow \frac{n\left(n+1\right)}{2}=190$$

$$\Leftrightarrow n^2+n-380=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=19 \\ n=-20 \end{array}\right. \Rightarrow n=19 \text{ (do } n \text{ nguyên dương)} \Rightarrow P=2n+3=41$$

**Câu 11.** Cho $x$, $y$, $z$ là ba số thực dương lập thành cấp số nhân; $\log_a x$, $\log_{\sqrt{a}} y$, $\log_{\sqrt[3]{a}} z$ lập thành cấp số cộng, với $a$ là số thực dương khác 1. Giá trị của $p=\frac{9x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{3z}{x}$ là

**A.** 13. **B.** 3. **C.** 12. **D.** 10.

**Lời giải**

**Chọn A**

$x$, $y$, $z$ là ba số thực dương lập thành cấp số nhân nên ta có $xz=y^2$ (1).

$\log_a x$, $\log_{\sqrt{a}} y$, $\log_{\sqrt[3]{a}} z$ lập thành cấp số cộng nên:

$\log_a x+\log_{\sqrt[3]{a}} z=2\log_{\sqrt{a}} y \Leftrightarrow \log_a x+3\log_a z=4\log_a y \Leftrightarrow xz^3=y^4$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra $x=y=z$.

Vậy $p=\frac{9x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{3z}{x}=9+1+3=13$.

**Câu 12.** **(Chuyên Nguyễn Huệ 2019)** Cho $f(1)=1$; $f(m+n)=f(m)+f(n)+mn$ với mọi $m,n\in N^*$. Tính giá trị của biểu thức

$$T=\log\left[\frac{f\left(2019\right)-f\left(2009\right)-145}{2}\right]$$

**A.** 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 10.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $f(2019)=f(2009+10)=f(2009)+f(10)+20090$

Do đó $f(2019)-f(2009)-145=f(10)+20090-145$

$f(10)=f(9)+f(1)+9$

$f(9)=f(8)+f(1)+8$

.....

$f(3)=f(2)+f(1)+2$

$f(2)=f(1)+f(1)+1$

Từ đó cộng vế với vế ta được: $f(10)=10.f(1)+1+2+....+8+9=55.$

Vậy $\log\left[\dfrac{f(2019)-f(2009)-145}{2}\right]=\log\dfrac{20090-145+55}{2}=\log 10000=4.$

**Câu 13.** Có bao nhiêu số nguyên dương $n$ để $\log_n 256$ là một số nguyên dương?

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

**Lời giải**

**Chọn C**

$\log_n 256=8.\log_n 2=\dfrac{8}{\log_2 n}$ là số nguyên dương

$\Leftrightarrow \log_2 n\in\{1;2;4;8\}\Leftrightarrow n\in\{2;4;16;256\}.$

Vậy có 4 số nguyên dương.

**Câu 14.** Cho tam giác $ABC$ có $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. Nếu $a$, $b$, $c$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân thì

**A.** $\ln\sin A.\ln\sin C=(\ln\sin B)^2.$ **B.** $\ln\sin A.\ln\sin C=2\ln\sin B.$

**C.** $\ln\sin A+\ln\sin C=2\ln\sin B.$ **D.** $\ln\sin A+\ln\sin C=\ln(2\sin B).$

Nguyễn Bảo Vương

**Lời giải**

**Chọn C**

Theo định lý sin trong tam giác $ABC$ ta có: $\begin{cases}a=2R\sin A\\ b=2R\sin B\\ c=2R\sin C\end{cases}$, với $R$ là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$.

Vì $a$, $b$, $c$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân nên ta có:

$a.c=b^2\Rightarrow(2R\sin A).(2R\sin C)=(2R\sin B)^2\Rightarrow\sin A.\sin C=(\sin B)^2.$

Do $0°<\sin A,\ \sin B,\ \sin C\le 180°$ nên $\sin A,\ \sin B,\ \sin C>0.$

Vì thế ta có thể suy ra $\ln(\sin A.\sin C)=\ln\left[(\sin B)^2\right]\Rightarrow\ln\sin A+\ln\sin C=2\ln\sin B.$

**Câu 15.** **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2018)** Cho $x=2018!.$ Tính $A=\dfrac{1}{\log_{2^{2018}}x}+\dfrac{1}{\log_{3^{2018}}x}+...+\dfrac{1}{\log_{2017^{2018}}x}+\dfrac{1}{\log_{2018^{2018}}x}.$

**A.** $A=\dfrac{1}{2017}.$ **B.** $A=2018.$ **C.** $A=\dfrac{1}{2018}.$ **D.** $A=2017.$

**Lời giải**

$$A=\frac{1}{\log_{2^{2018}} x}+\frac{1}{\log_{3^{2018}} x}+...+\frac{1}{\log_{2017^{2018}} x}+\frac{1}{\log_{2018^{2018}} x}$$

$$=\log_x 2^{2018}+\log_x 3^{2018}+...+\log_x 2017^{2018}+\log_x 2018^{2018}$$

$$=2018.\log_x 2+2018.\log_x 3+...+2018.\log_x 2017+2018.\log_x 2018$$

$$=2018.\left(\log_x 2+\log_x 3+...+\log_x 2017+\log_x 2018\right)=2018.\log_x\left(2.3.....2017.2018\right)$$

**Câu 16.** **( Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2018)** Tìm bộ ba số nguyên dương $(a;b;c)$ thỏa mãn $\log 1+\log(1+3)+\log(1+3+5)+...+\log(1+3+5+...+19)-2\log 5040=a+b\log 2+c\log 3$

**A.** $(2;6;4)$. **B.** $(1;3;2)$. **C.** $(2;4;4)$. **D.** $(2;4;3)$.

**Lời giải**

**Ta có**

$\log 1+\log(1+3)+\log(1+3+5)+...+\log(1+3+5+...+19)-2\log 5040=a+b\log 2+c\log 3$

$\Leftrightarrow \log 1+\log 2^2+\log 3^2+...+\log 10^2-2\log 5040=a+b\log 2+c\log 3$

$\Leftrightarrow \log\left(1.2^2.3^2.10^2\right)-2\log 5040=a+b\log 2+c\log 3$

$\Leftrightarrow \log\left(1.2.3.10\right)^2-2\log 5040=a+b\log 2+c\log 3$

$\Leftrightarrow 2\log\left(1.2.3.10\right)-2\log 5040=a+b\log 2+c\log 3$

$\Leftrightarrow 2\left(\log 10!-\log 7!\right)=a+b\log 2+c\log 3\Leftrightarrow 2\log\left(8.9.10\right)=a+b\log 2+c\log 3$

$\Leftrightarrow 2+6\log 2+4\log 3=a+b\log 2+c\log 3$.

Vậy $a=2$, $b=6$, $c=4$.

**Câu 17.** **(Phan Đình Phùng - Hà Tĩnh - 2018)** Tổng $S=1+2^2\log_{\sqrt{2}}2+3^2\log_{\sqrt[3]{2}}2+....+2018^2\log_{\sqrt[2018]{2}}2$ dưới đây.

**A.** $1008^2.2018^2$. **B.** $1009^2.2019^2$. **C.** $1009^2.2018^2$. **D.** $2019^2$.

**Lời giải**

Ta có $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\frac{\left(n\left(n+1\right)\right)^2}{4}$.

Mặt khác

$$S=1+2^2\log_{\sqrt{2}}2+3^2\log_{\sqrt[3]{2}}2+....+2018^2\log_{\sqrt[2018]{2}}2=1+2^2\log_{\frac{1}{2^2}}2+3^2\log_{\frac{1}{2^3}}2+....+2018^2\log_{\frac{1}{2^{2018}}}2$$

$$=1+2^3\log_2 2+3^3\log_2 2+....+2018^3\log_2 2=1+2^3+3^3+...+2018^3=\left[\frac{2018\left(2018+1\right)}{2}\right]^2$$

$$=1009^2.2019^2.$$

**Câu 18.** **(ChuyêN KHTN - 2018)** Số $20172018^{20162017}$ có bao nhiêu chữ số?

**A.** 147278481. **B.** 147278480. **C.** 147347190. **D.** 147347191.

**Lời giải**

Số chữ số của một số tự nhiên $x$ là: $\left[\log x\right]+1$ ($\left[\log x\right]$ là phần nguyên của $\log x$).

Vậy số chữ số của số $20172018^{20162017}$ là

$\left[\log 20172018^{20162017}\right]+1=20162017\log\left(20172018\right)+1=147278481.$

Chuyên đề 18 HÀM SỐ MŨ - HÀM SỐ LOGARIT

## TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH MỨC 5-6 ĐIỂM

### Dạng 1. Tìm tập xác định

**Hàm số mũ**

- **Dạng:** $\begin{cases} y=a^x \\ y=a^u \end{cases}$ với $\begin{cases} a>0 \\ a\neq 1 \end{cases}$.
- **Tập xác định:** $D=\mathbb{R}$.

**Hàm số logarit**

- **Dạng:** $\begin{cases} y=\log_a x \\ y=\log_a u \end{cases}$ với $\begin{cases} a>0 \\ a\neq 1 \end{cases}$.
- **Đặc biệt:** $a=e \longrightarrow y=\ln x$ ; $a=10 \longrightarrow y=\log x=\lg x$.
- **Điều kiện xác định:** $u>0$.

**Câu 1.** **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Tập xác định của hàm số $y=\log_2 x$ là

**A.** $[0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $[2;+\infty)$.

**Câu 2.** **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Tập xác định của hàm số $y=\log_5 x$ là

**A.** $[0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

**Câu 3.** **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Tập xác định của hàm số $y=\log_6 x$ là

**A.** $[0;+\infty)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

**Câu 4.** **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Tập xác định của hàm số $y=\log_3 x$ là

**A.** $(-\infty;0)$ **B.** $(0;+\infty)$ **C.** $(-\infty;+\infty)$ **D.** $[0;+\infty)$

**Câu 5.** **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Tập xác định của hàm số $y=\log_4 x$ là

**A.** $(-\infty;0)$. **B.** $[0;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

**Câu 6.** **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Tập xác định của hàm số $y=5^x$ là

**A.** $\mathbb{R}$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **D.** $[0;+\infty)$.

**Câu 7.** **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Tập xác định của hàm số $y=2^x$ là

**A.** $\mathbb{R}$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $[0;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

**Câu 8.** **(Mã 123 2017)** Tìm tập xác định $D$ của hàm số $y=\log_5\dfrac{x-3}{x+2}$.

**A.** $D=(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$ **B.** $D=(-2;3)$

**C.** $D=(-\infty;-2)\cup[3;+\infty)$ **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

**Câu 9.** **(Đề Minh Họa 2017)** Tìm tập xác định $D$ của hàm số $y=\log_2\left(x^2-2x-3\right)$

**A.** $D=(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$ **B.** $D=[-1;3]$

**C.** $D=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$ **D.** $D=(-1;3)$

**Câu 10.** **(Mã 104 2017)** Tìm tập xác định $D$ của hàm số $y=\log_3\left(x^2-4x+3\right)$.

**A.** $D=(1;3)$ **B.** $D=(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$

**C.** $D=\left(-\infty;2-\sqrt{2}\right)\cup\left(2+\sqrt{2};+\infty\right)$. **D.** $D=\left(2-\sqrt{2};1\right)\cup\left(3;2+\sqrt{2}\right)$

**Câu 11.** **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Tìm tập xác định của hàm số $y=\log_{2018}\left(3x-x^2\right)$.

**A.** $D=\mathbb{R}$ **B.** $D=(0;+\infty)$ **C.** $D=(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$ **D.** $D=(0;3)$

**Câu 12.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Tập xác định của $y=\ln\left(-x^2+5x-6\right)$ là

**A.** $[2;3]$ **B.** $(2;3)$ **C.** $(-\infty;2]\cup[3;+\infty)$ **D.** $(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$

**Câu 13.** **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Tìm tập xác định của hàm số $y=\log_{\sqrt{5}}\dfrac{1}{6-x}$.

**A.** $(-\infty;6)$ **B.** $\mathbb{R}$ **C.** $(0;+\infty)$ **D.** $(6;+\infty)$

**Câu 14.** **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Tập xác định của hàm số $y=\log_2\left(3-2x-x^2\right)$ là

**A.** $D=(-1;1)$. **B.** $D=(-1;3)$. **C.** $D=(-3;1)$. **D.** $D=(0;1)$.

**Câu 15.** **(Sở Vĩnh Phúc 2019)** Tập xác định của hàm số $y=\log_2\left(x^2-2x-3\right)$ là

**A.** $(-1;3)$. **B.** $[-1;3]$.

**C.** $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$.

**Câu 16.** **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Tìm tập xác định của hàm số: $y=2^{\sqrt{x}}+\log(3-x)$

**A.** $[0;+\infty)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $[0;3)$.

**Câu 17.** **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Tập xác định của hàm số $y=\left[\ln(x-2)\right]^{\pi}$ là

**A.** $\mathbb{R}$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(2;+\infty)$.

**Câu 18.** **(THPT Ba Đình 2019)** Tìm tập xác định D của hàm số $y=\log_{2019}\left(4-x^2\right)+(2x-3)^{-2019}$.

**A.** $D=\left[-2;\dfrac{3}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3}{2};2\right]$. **B.** $D=\left(-2;\dfrac{3}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3}{2};2\right)$.

**C.** $D=\left(\dfrac{3}{2};2\right)$. **D.** $D=(-2;2)$.

**Câu 19.** Tìm tập xác định của hàm số $y=\sqrt{(x-2)^0}+\log_2\left(9-x^2\right)$ là

**A.** $D=(2;3)$. **B.** $D=(-3;3)\setminus\{2\}$. **C.** $D=(3;+\infty)$.. **D.** $D=(-3;3)$..

## Dạng 2. Tìm đạo hàm

### ▪ Đạo hàm hàm số mũ

$$\begin{cases} y=a^x \longrightarrow y'=a^x\ln a \\ y=a^u \longrightarrow y'=a^u\ln a.\boxed{u'} \end{cases}.$$

**Đặc biệt:** $\begin{cases}(e^x)'=e^x\\(e^u)'=e^u.\boxed{u'}\end{cases}$ với $e\approx 2{,}71828...$

### ▪ Đạo hàm hàm số logarit

$$\begin{cases} y=\log_a x \longrightarrow y'=\dfrac{1}{x\ln a} \\ y=\log_a u \longrightarrow y'=\dfrac{\boxed{u'}}{u\ln a} \end{cases}.$$

**Đặc biệt:** $\begin{cases} (\ln x)'=\dfrac{1}{x} \\ (\ln u)'=\dfrac{\boxed{u'}}{u} \end{cases}$.

**Câu 1.** **(Đề Tham Khảo 2017)** Tìm đạo hàm của hàm số $y=\log x$.

**A.** $y'=\dfrac{\ln 10}{x}$ **B.** $y'=\dfrac{1}{x\ln 10}$ **C.** $y'=\dfrac{1}{10\ln x}$ **D.** $y'=\dfrac{1}{x}$

**Câu 2.** **(Mã 103 - 2019)** Hàm số $y=2^{x^2-x}$ có đạo hàm là

**A.** $2^{x^2-x}.\ln 2$. **B.** $(2x-1).2^{x^2-x}.\ln 2$.

**C.** $(x^2-x).2^{x^2-x-1}$. **D.** $(2x-1).2^{x^2-x}$.

**Câu 3.** **(Mã 104 - 2019)** Hàm số $y=3^{x^2-x}$ có đạo hàm là

**A.** $(2x-1).3^{x^2-x}$. **B.** $\left(x^2-x\right).3^{x^2-x-1}$. **C.** $(2x-1).3^{x^2-x}.\ln 3$. **D.** $3^{x^2-x}.\ln 3$.

**Câu 4.** **(Đề Minh Họa 2017)** Tính đạo hàm của hàm số $y=13^x$

**A.** $y'=\dfrac{13^x}{\ln 13}$ **B.** $y'=x.13^{x-1}$ **C.** $y'=13^x\ln 13$ **D.** $y'=13^x$

**Câu 5.** **(Mã 110 2017)** Tính đạo hàm của hàm số $y=\log_2(2x+1)$.

**A.** $y'=\dfrac{2}{(2x+1)\ln 2}$ **B.** $y'=\dfrac{1}{(2x+1)\ln 2}$ **C.** $y'=\dfrac{2}{2x+1}$ **D.** $y'=\dfrac{1}{2x+1}$

**Câu 6.** **(Đề Minh Họa 2017)** Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x+1}{4^x}$

**A.** $y'=\dfrac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$ **B.** $y'=\dfrac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$

**C.** $y'=\dfrac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$ **D.** $y'=\dfrac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$

**Câu 7.** **(Đề Tham Khảo 2019)** Hàm số $f(x)=\log_2\left(x^2-2x\right)$ có đạo hàm

**A.** $f'(x)=\dfrac{\ln 2}{x^2-2x}$ **B.** $f'(x)=\dfrac{1}{(x^2-2x)\ln 2}$

**C.** $f'(x)=\dfrac{(2x-2)\ln 2}{x^2-2x}$ **D.** $f'(x)=\dfrac{2x-2}{(x^2-2x)\ln 2}$

**Câu 8.** **(Mã 101 - 2019)** Hàm số $y=2^{x^2-3x}$ có đạo hàm là

**A.** $(2x-3)2^{x^2-3x}\ln 2$. **B.** $2^{x^2-3x}\ln 2$.

**C.** $(2x-3)2^{x^2-3x}$. **D.** $\left(x^2-3x\right)2^{x^2-3x+1}$.

**Câu 9.** **(Mã 102 - 2019)** Hàm số $y=3^{x^2-3x}$ có đạo hàm là

**A.** $(2x-3).3^{x^2-3x}$. **B.** $3^{x^2-3x}.\ln 3$.

**C.** $\left(x^2-3x\right).3^{x^2-3x-1}$. **D.** $\left(2x-3\right).3^{x^2-3x}.\ln 3$.

**Câu 10.** Tính đạo hàm của hàm số $y=\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)$.

**A.** $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$ **B.** $y'=\dfrac{2}{\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$

**C.** $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$ **D.** $y'=\dfrac{1}{1+\sqrt{x+1}}$

**Câu 11.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Đạo hàm của hàm số $y=e^{1-2x}$ là

**A.** $y'=2e^{1-2x}$ **B.** $y'=-2e^{1-2x}$ **C.** $y'=-\dfrac{e^{1-2x}}{2}$ **D.** $y'=e^{1-2x}$

**Câu 12.** **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Đạo hàm của hàm số $y=\log_3\left(x^2+x+1\right)$ là:

**A.** $y'=\dfrac{(2x+1)\ln 3}{x^2+x+1}$ **B.** $y'=\dfrac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)\ln 3}$ **C.** $y'=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ **D.** $y'=\dfrac{1}{\left(x^2+x+1\right)\ln 3}$

**Câu 13.** **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Tính đạo hàm của hàm số $y=e^{x^2+x}$.

**A.** $(2x+1)e^x$ **B.** $(2x+1)e^{x^2+x}$ **C.** $(2x+1)e^{2x+1}$ **D.** $\left(x^2+x\right)e^{2x+1}$

**Câu 14.** **(THPT Hùng Vương Bình Phước 2019)** Cho hàm số $f(x)=\log_2\left(x^2+1\right)$, tính $f'(1)$

**A** $f'(1)=1$. **B.** $f'(1)=\dfrac{1}{2\ln 2}$. **C.** $f'(1)=\dfrac{1}{2}$. **D.** $f'(1)=\dfrac{1}{\ln 2}$.

**Câu 15.** **(THPT-Thang-Long-Ha-Noi- 2019)** Tìm đạo hàm của hàm số $y=\ln\left(1+e^{2x}\right)$.

**A.** $y'=\dfrac{-2e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$. **B.** $y'=\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$. **C.** $y'=\dfrac{1}{e^{2x}+1}$. **D.** $y'=\dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}$.

**Câu 16.** **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{1-x}{2^x}$

**A.** $y'=\dfrac{2-x}{2^x}$. **B.** $y'=\dfrac{\ln 2.(x-1)-1}{\left(2^x\right)^2}$.

**C.** $y'=\dfrac{x-2}{2^x}$. **D.** $y'=\dfrac{\ln 2.(x-1)-1}{2^x}$.

**Câu 17.** **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Tính đạo hàm của hàm số $y=\log_9\left(x^2+1\right)$.

**A.** $y'=\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)\ln 9}$. **B.** $y'=\dfrac{x}{\left(x^2+1\right)\ln 3}$. **C.** $y'=\dfrac{2x\ln 9}{x^2+1}$. **D.** $y'=\dfrac{2\ln 3}{x^2+1}$.

**Câu 18.** **(KTNL GV THPT Lý Thái Tổ 2019)** Tính đạo hàm hàm số $y=e^x.\sin 2x$

**A.** $e^x\left(\sin 2x-\cos 2x\right)$. **B.** $e^x.\cos 2x$.

**C.** $e^x\left(\sin 2x+\cos 2x\right)$. **D.** $e^x\left(\sin 2x+2\cos 2x\right)$.

**Câu 19.** **(VTED 2019)** Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x+1}{4^x}$ là

**A.** $\dfrac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$ **B.** $\dfrac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$ **C.** $\dfrac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$ **D.** $\dfrac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$

**Câu 20.** **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{1}{x+1+\ln x}$ với $x>0$. Khi đó $-\dfrac{y'}{y^2}$ bằng

**A.** $\frac{x}{x+1}$. **B.** $1+\frac{1}{x}$. **C.** $\frac{x}{1+x+\ln x}$. **D.** $\frac{x+1}{1+x+\ln x}$.

**Câu 21.** **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Tính đạo hàm của hàm số $y=2^x\ln x-\frac{1}{e^x}$.

**A.** $y'=2^x\left(\frac{1}{x}+(\ln 2)(\ln x)\right)+\frac{1}{e^x}$. **B.** $y'=2^x\ln 2+\frac{1}{x}+e^{-x}$.

**C.** $y'=2^x\frac{1}{x}\ln 2+\frac{1}{e^x}$. **D.** $y'=2^x\ln 2+\frac{1}{x}-e^x$.

**Câu 22.** **(VTED 2019)** Đạo hàm của hàm số $f(x)=\log_2\left|x^2-2x\right|$ là

**A.** $\frac{2x-2}{(x^2-2x)\ln 2}$ **B.** $\frac{1}{(x^2-2x)\ln 2}$ **C.** $\frac{(2x-2)\ln 2}{x^2-2x}$ **D.** $\frac{2x-2}{\left|x^2-2x\right|\ln 2}$

**Câu 23.** **(Chuyên KHTN 2019)** Đạo hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{\ln(\ln x)}$ là:

**A.** $f'(x)=\frac{1}{x\ln x\sqrt{\ln(\ln x)}}$. **B.** $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\ln(\ln x)}}$

**C.** $f'(x)=\frac{1}{2x\ln x\sqrt{\ln(\ln x)}}$. **D.** $f'(x)=\frac{1}{\ln x\sqrt{\ln(\ln x)}}$.

## Dạng 3. Khảo sát hàm số mũ, logarit

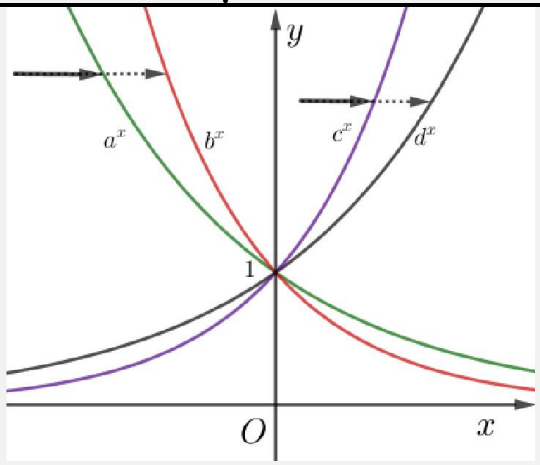
- **Sự biến thiên hàm số mũ**: $y=a^x$.

Nếu $\boxed{a>1}$ thì hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$. Nếu $\boxed{0<a<1}$ thì hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- **Sự biến thiên hàm số logarit:** $y=\log_a x$. Nếu $\boxed{a>1}$: hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$. Nếu $\boxed{0<a<1}$: hàm nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

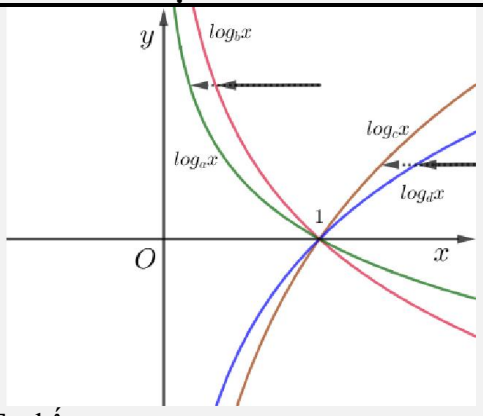
**Đồ thị hàm số mũ và logarit**

**ĐỒ THỊ HÀM SỐ MŨ**



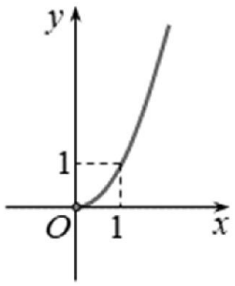

- Ta thấy: $a^x\downarrow\Rightarrow 0<a<1$; $b^x\downarrow\Rightarrow 0<b<1$.
- Ta thấy: $c^x\uparrow\Rightarrow c>1$; $d^x\uparrow\Rightarrow d>1$.
- **So sánh *a* với *b*:** Đứng trên cao, bắn mũi tên từ **trái sang phải**, trúng $a^x$ trước nên $a>b$.
- **So sánh *c* với *d*:** Đứng trên cao, bắn mũi tên từ **trái sang phải**, trúng $c^x$ trước nên $c>d$.
- Vậy $0<b<a<1<d<c$.

**ĐỒ THỊ HÀM SỐ LOGARIT**

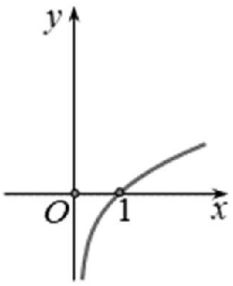



- Ta thấy: $\log_a x\downarrow\Rightarrow 0<a<1$; $\log_b x\downarrow\Rightarrow 0<b<1$.
- Ta thấy: $\log_c x\uparrow\Rightarrow c>1$; $\log_d x\uparrow\Rightarrow d>1$.
- **So sánh *a* với *b*:** Đứng trên cao, bắn mũi tên từ **phải sang trái**, trúng $\log_b x$ trước: $b>a$.
- **So sánh *c* với *d*:** Đứng trên cao, bắn mũi tên từ **phải sang trái**, trúng $\log_d x$ trước: $d>c$.
- Vậy $0<a<b<1<c<d$.

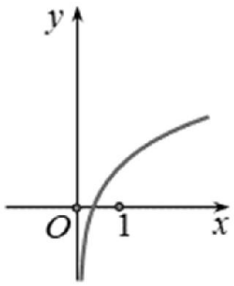
**Câu 1.** **(Đề Tham Khảo 2017)** Cho hàm số $f(x)=x\ln x$. Một trong bốn đồ thị cho trong bốn phương án A, B, C, D dưới đây là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$. Tìm đồ thị đó?



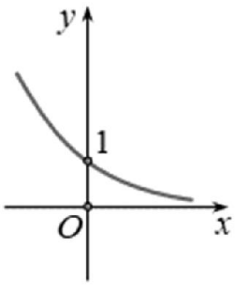
Hình 1



Hình 2



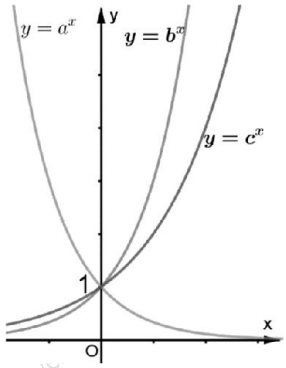
Hình 3



Hình 4

**A.** Hình 2 **B.** Hình 3 **C.** Hình 4 **D.** Hình 1

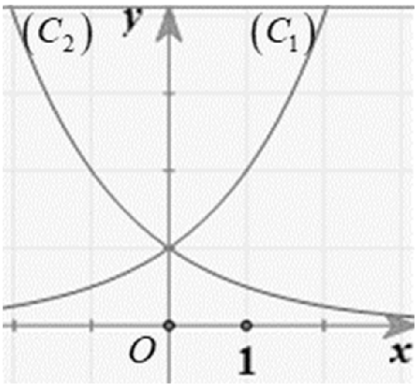
**Câu 2.** Cho ba số thực dương $a,b,c$ khác 1. Đồ thị các hàm số $y=a^x, y=b^x, y=c^x$ được cho trong hình vẽ bên




Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $b<c<a$ **B.** $c<a<b$ **C.** $a<b<c$ **D.** $a<c<b$

**Câu 3.** **(Mã 105 2017)** Cho hàm số $y=a^x$, $y=b^x$ với $a$, $b$ là hai số thực dương khác 1, lần lượt có đồ thị là $(C_1)$ và $(C_2)$ như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?




**A.** $0<b<1<a$ **B.** $0<a<b<1$ **C.** $0<b<a<1$ **D.** $0<a<1<b$

**Câu 4.** **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Trong các hàm số sau hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

**A.** $\log_3 x^2$ **B.** $y=\log(x^3)$ **C.** $y=\left(\frac{e}{4}\right)^x$ **D.** $y=\left(\frac{2}{5}\right)^{-x}$

**Câu 5.** Mệnh đề nào trong các mệnh đề dưới đây sai?

**A.** Hàm số $y=\left(\frac{2018}{\pi}\right)^{x^2+1}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**B.** Hàm số $y=\log x$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

**C.** Hàm số $y=\ln(-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

**D.** Hàm số $y=2^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**Câu 6.** **(THPT An Lão Hải Phòng 2019) Hàm số nào dưới đây đồng biến trên tập xác định của nó?**

**A.** $y=\left(\frac{1}{\pi}\right)^x$ **B.** $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ **C.** $y=\left(\sqrt{3}\right)^x$ **D.** $y=(0,5)^x$

**Câu 7.** **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Cho hàm số $y=\log_2 x$. Mệnh đề nào dưới đây **sai?**

**A.** Đạo hàm của hàm số là $y'=\frac{1}{x\ln 2}$

**B.** Đồ thị hàm số nhận trục $Oy$ làm tiệm cận đứng

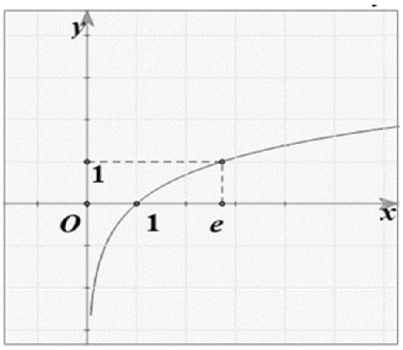
**C.** Tập xác định của hàm số là $(-\infty;+\infty)$

**D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

**Câu 8.** **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Trong các hàm số sau, hàm số nào luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

**A.** $y=\left(\frac{2015}{2016}\right)^x$ **B.** $y=\left(\frac{3}{\sqrt{2016}-\sqrt{2}}\right)^x$ **C.** $y=(0,1)^{2x}$ **D.** $y=(2016)^{2x}$

**Câu 9.** Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?




**A.** $y=-e^x$. **B.** $y=|\ln x|$. **C.** $y=\ln x$. **D.** $y=e^x$.

**Câu 10.** **(Chuyên Lê Thánh Tông 2019)** Tìm hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**A.** $f(x)=3^x$. **B.** $f(x)=3^{-x}$. **C.** $f(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$. **D.** $f(x)=\frac{3}{3^x}$.

**Câu 11.** **(Chuyên Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y=\log_{\sqrt{5}} x$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề **sai**?

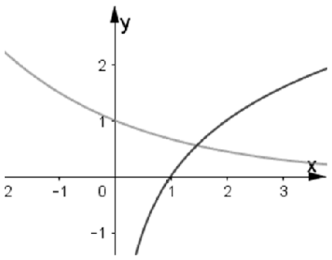
**A.** Hàm số đã cho đồng biến trên tập xác định.

**B.** Hàm số đã cho có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

**C.** Đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận đứng là trục tung.

**D.** Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

**Câu 12.** Cho đồ thị hàm số $y=a^x$ và $y=\log_b x$ như hình vẽ.



Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $0<a<\frac{1}{2}<b$. **B.** $0<a<1<b$. **C.** $0<b<1<a$. **D.** $0<a<1,\ 0<b<\frac{1}{2}$.

**Câu 13.** **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến?

**A.** $y=\ln x$. **B.** $y=\log_{1-\sqrt{\frac{2018}{2019}}}x$ **C.** $y=\log_{\pi}x$. **D.** $y=\log_{4-\sqrt{3}}x$.

**Câu 14.** **(Sở Hà Nội 2019)** Đồ thị hàm số $y=\ln x$ đi qua điểm

**A.** $(1;0)$. **B.** $(2;e^2)$. **C.** $(2e;2)$. **D.** $(0;1)$.

**Câu 15.** **(Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Trong các hàm số sau,hàm số nào luôn nghịch biến trên tập xác định của nó?

**A.** $y=\left(\frac{1}{2}\right)^2$. **B.** $y=\log x$. **C.** $y=2^x$. **D.** $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$.

**Câu 16.** **(Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

**A.** Hàm số $y=\log_2 x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**B.** Hàm số $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ nghịch biến trên tập xác định của nó.

**C.** Hàm số $y=2^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**D.** Hàm số $y=x^{\sqrt{2}}$ có tập xác định là $(0;+\infty)$.

**Câu 17.** **(KTNL GV Bắc Giang 2019)** Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

**A.** $y=\log_{\sqrt{3}}x$. **B.** $y=\log_{\frac{\pi}{6}}x$. **C.** $y=\log_{\frac{e}{3}}x$. **D.** $y=\log_{\frac{1}{4}}x$.

**Câu 18.** **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

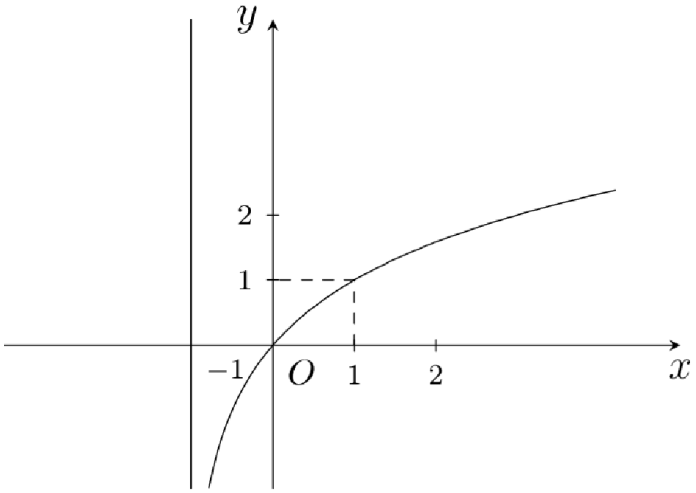
**A.** Đồ thị của hàm số $y=2^x$ và $y=\log_2 x$ đối xứng với nhau qua đường thẳng $y=-x$.

**B.** Đồ thị của hai hàm số $y=e^x$ và $y=\ln x$ đối xứng với nhau qua đường thẳng $y=x$.

**C.** Đồ thị của hai hàm số $y=2^x$ và hàm số $y=\frac{1}{2^x}$ đối xứng với nhau qua trục hoành.

**D.** Đồ thị của hai hàm số $y=\log_2 x$ và $y=\log_2\frac{1}{x}$ đối xứng với nhau qua trục tung.

**Câu 19.** **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên?




**A.** $y=\log_3 x$. **B.** $y=\log_2 x+1$. **C.** $y=\log_2(x+1)$. **D.** $y=\log_3(x+1)$

**Câu 20.** **(Chuyên Quốc Học Huế 2019)** Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào nghịch biến trên tập số thực $R$.

**A.** $y=\left(\frac{\pi}{3}\right)^x$ **B.** $y=\log_{\frac{\pi}{4}}\left(2x^2+1\right)$ **C.** $y=\left(\frac{2}{e}\right)^x$ **D.** $y=\log_{\frac{2}{3}}x$

**Câu 21.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên tập xác định của nó?

**A.** $y=\log_{\sqrt{3}}x$ **B.** $y=\log_2\left(\sqrt{x}+1\right)$ **C.** $y=\log_{\frac{\pi}{4}}x$ **D.** $y=\left(\frac{\pi}{3}\right)^x$

**Câu 22.** **(Chuyên Bắc Giang -2019** Cho hàm số $y=\frac{3^x}{\ln 3}-9x+17$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

**A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

**C.** Hàm số đạt cực trị tại $x=2$ **D.** Hàm số có giá trị cực tiểu là $y=\frac{9}{\ln 3}-1$

**Câu 23.** **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên -2019)** Đồ thị $(L)$ của hàm số $f(x)=\ln x$ cắt trục hoành tại điểm $A$, tiếp tuyến của $(L)$ tại $A$ có phương trình là:

**A.** $y=2x+1$ **B.** $y=x-1$ **C.** $y=3x$ **D.** $y=4x-3$

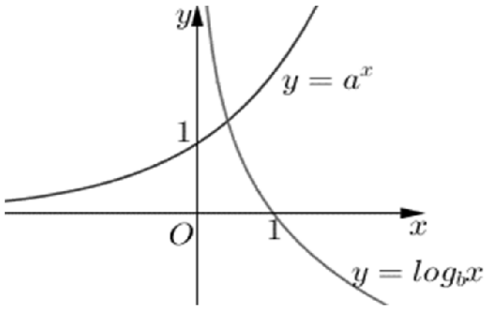
**Câu 24.** **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Hàm số $y=xe^{-3x}$ đạt cực đại tại

**A.** $x=\frac{1}{3e}$. **B.** $x=\frac{1}{3}$. **C.** $x=\frac{1}{e}$. **D.** $x=0$.

**Câu 25.** **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Hàm số $y=\log_3\left(x^2-2x\right)$ nghịch biến trên khoảng nào?

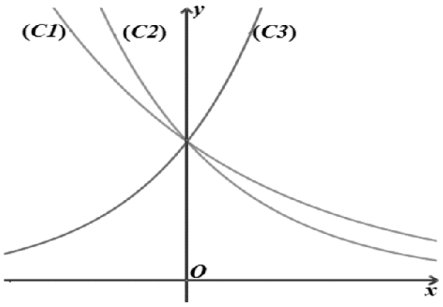
**A.** $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(0;1)$.

**Câu 26.** Cho đồ thị hàm số $y=a^x$ và $y=\log_b x$ như hình vẽ. Trong các khẳng định sau, đâu là khẳng định đúng




**A.** $0<a<1,0<b<1$. **B.** $a>1,b>1$. **C.** $0<b<1<a$. **D.** $0<a<1<b$.

**Câu 27.** Hình vẽ bên thể hiện đồ thị của ba trong bốn hàm số $y=6^x$, $y=8^x$, $y=\frac{1}{5^x}$ và $y=\frac{1}{\sqrt{7}^x}$.




Hỏi $(C_2)$ là đồ thị hàm số nào?

**A.** $y=6^x$. **B.** $y=\dfrac{1}{\sqrt{7}^x}$. **C.** $y=\dfrac{1}{5^x}$. **D.** $y=8^x$

**Câu 28.** **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{\ln x}{x}$ trên đoạn $[2;3]$ bằng

**A.** $\dfrac{\ln 2}{2}$. **B.** $\dfrac{\ln 3}{3}$. **C.** $\dfrac{3}{e^2}$. **D.** $\dfrac{1}{e}$.

**Câu 29.** **(Sở Ninh Bình 2019)** Cho hàm số $f(x)=\ln x-x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

**A.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

**B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

**C.** Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$.

**D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

**Câu 30.** **(HSG Bắc Ninh 2019)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=(x^2-2)e^{2x}$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng:

**A.** $2e^4$ **B.** $-e^2$ **C.** $2e^2$ **D.** $-2e^2$

**Câu 31.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2^{x+1}-\dfrac{4}{3}\cdot 8^x$ trên $[-1;0]$ bằng

**A.** $\dfrac{4}{9}$. **B.** $\dfrac{5}{6}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 18 HÀM SỐ MŨ - HÀM SỐ LOGARIT

## TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ – MỨC 7-8 ĐIỂM

### Dạng 1. Tìm tập xác định hàm số mũ - logarit

**Hàm số mũ**

**Dạng:** $\begin{cases} y=a^x \\ y=a^u \end{cases}$ với $\begin{cases} a>0 \\ a\neq 1 \end{cases}$.

**Tập xác định:** $D=\mathbb{R}$.

**Hàm số logarit**

**Dạng:** $\begin{cases} y=\log_a x \\ y=\log_a u \end{cases}$ với $\begin{cases} a>0 \\ a\neq 1 \end{cases}$.

**Đặc biệt:** $a=e\longrightarrow y=\ln x$ ; $a=10\longrightarrow y=\log x=\lg x$.

**Điều kiện xác định:** $u>0$.

**Câu 1.** **(Mã 105 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=\log\left(x^2-2x-m+1\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

**A.** $m\le 2$ **B.** $m>2$ **C.** $m\ge 0$ **D.** $m<0$

**Câu 2.** **(Mã 104 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=\ln\left(x^2-2x+m+1\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

**A.** $0<m<3$ **B.** $m<-1$ hoặc $m>0$

**C.** $m>0$ **D.** $m=0$

**Câu 3.** Hàm số $y=\ln\left(x^2+mx+1\right)$ xác định với mọi giá trị của $x$ khi.

**A.** $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right.$. **B.** $m>2$. **C.** $-2<m<2$. **D.** $m<2$.

**Câu 4.** **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{1}{m\log_3^2 x-4\log_3 x+m+3}$ xác định trên khoảng $(0;+\infty)$

**A.** $m\in(-\infty;-4)\cup(1;+\infty)$. **B.** $m\in(1;+\infty)$.

**C.** $m\in(-4;1)$. **D.** $m\in(1;+\infty)$.

**Câu 5.** Tìm tất cả các giá trị của $m$ để hàm số $y=\ln\left(-x^2+mx+2m+1\right)$ xác định với mọi $x\in(1;2)$.

**A.** $m\ge-\dfrac{1}{3}$. **B.** $m\ge\dfrac{3}{4}$. **C.** $m>\dfrac{3}{4}$. **D.** $m<-\dfrac{1}{3}$.

**Câu 6.** **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên -2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=\log(x^2-4x-m+1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

**A.** $m>-4$. **B.** $m<0$. **C.** $m<-4$. **D.** $m<-3$.

**Câu 7.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ trên $[-2018;\ 2018]$ để hàm số $y=\ln\left(x^2-2x-m+1\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$?

**A.** 2019 **B.** 2017 **C.** 2018 **D.** 1009

**Câu 8.** **(THPT Nghĩa Hưng Nđ- 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=\log\left(x^2-2mx+4\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

**A.** $-2 \le m \le 2$. **B.** $m = 2$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array}\right.$. **D.** $-2 < m < 2$.

**Câu 9.** Số các giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y = \log\left(mx - m + 2\right)$ xác định trên $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ là

**A.** 4 **B.** 5 **C.** Vô số **D.** 3

**Câu 10.** **(Gia Bình 2019)** Tìm tất cả các giá trị của $m$ để hàm số $y = \log_{2018}\left(2018^x - x - \frac{x^2}{2} - m\right)$ xác định với mọi giá trị $x$ thuộc $\left[0; +\infty\right)$

**A.** $m > 9$ **B.** $m < 1$ **C.** $0 < m < 1$ **D.** $m < 2$

**Câu 11.** Hàm số $y = \log_2\left(4^x - 2^x + m\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ thì

**A.** $m \ge \frac{1}{4}$. **B.** $m > 0$. **C.** $m < \frac{1}{4}$. **D.** $m > \frac{1}{4}$.

**Câu 12.** **(Chuyên Bắc Ninh 2019)** Tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y = \frac{3x + 5}{\log_{2018}\left(x^2 - 2x + m^2 - 4m + 5\right)}$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$ là

**A.** $\left(-\infty; 1\right) \cup \left(3; +\infty\right)$. **B.** $(1;3) \setminus \{2\}$. **C.** $\left(-\infty; 1\right]$. **D.** $\left[1; 3\right] \setminus \{2\}$.

**Câu 13.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y = \log_{2018}\left(2017^x - x - \frac{x^2}{2} - m + 1\right)$ xác định với mọi $x$ thuộc $\left[0; +\infty\right)$?

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 2018. **D.** Vô số.

**Câu 14.** **(Sở Vĩnh Phúc 2019)** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m$ để hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{2m + 1 - x}} + \log_3 \sqrt{x - m}$ xác định trên khoảng $\left(2; 3\right)$?

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

**Câu 15.** **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2020)** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y = \log_{2020}\left(mx - m + 2\right)$ xác định trên $\left[1; +\infty\right)$.

**A.** $m \le 0$. **B.** $m \ge 0$. **C.** $m \ge -1$. **D.** $m \le -1$.

**Câu 16.** **(Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Tập xác định của hàm số $y = \log_{2020}\left(\log_{2019}\left(\log_{2018}\left(\log_{2017} x\right)\right)\right)$ là $D = \left(a; +\infty\right)$. Giá trị của $a$ bằng

**A.** $2018^{2019}$. **B.** $2019^{2020}$. **C.** $2017^{2018}$. **D.** 0.

## Dạng 2. Tính đạo hàm mũ – logarit

**Đạo hàm hàm số mũ**

$\left\{\begin{array}{l} y = a^x \longrightarrow y' = a^x \ln a \\ y = a^u \longrightarrow y' = a^u \ln a . \boxed{u'} \end{array}\right.$.

**Đặc biệt:** $\left\{\begin{array}{l} (e^x)' = e^x \\ (e^u)' = e^u . \boxed{u'} \end{array}\right.$ với $e \approx 2{,}71828...$

**Đạo hàm hàm số logarit**

$$\begin{cases} y=\log_a x \longrightarrow y'=\dfrac{1}{x\ln a} \\ y=\log_a u \longrightarrow y'=\dfrac{\boxed{u'}}{u\ln a} \end{cases}.$$

**Đặc biệt:** $\begin{cases} (\ln x)'=\dfrac{1}{x} \\ (\ln u)'=\dfrac{\boxed{u'}}{u} \end{cases}$.

**Câu 1.** **(Đề Tham Khảo 2017)** Cho hàm số $y=\dfrac{\ln x}{x}$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $2y'+xy''=-\dfrac{1}{x^2}$. **B.** $y'+xy''=\dfrac{1}{x^2}$. **C.** $y'+xy''=-\dfrac{1}{x^2}$. **D.** $2y'+xy''=\dfrac{1}{x^2}$.

**Câu 2.** **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho hàm số $f(x)=\ln 2018+\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$. Tính $S=f'(1)+f'(2)+f'(3)+\cdots+f'(2017)$.

**A.** $S=\dfrac{4035}{2018}$ **B.** $S=\dfrac{2017}{2018}$ **C.** $S=\dfrac{2016}{2017}$ **D.** $S=2017$

**Câu 3.** **(Sở Vĩnh Phúc 2019)** Cho hàm số $f(x)=\ln\dfrac{2018x}{x+1}$. Tính tổng $S=f'(1)+f'(2)+...+f'(2018)$.

**A.** $\ln 2018$. **B.** $1$. **C.** $2018$. **D.** $\dfrac{2018}{2019}$.

**Câu 4.** Cho hàm $y=x\left[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)\right]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $x^2y''+xy'-2y+4=0$. **B.** $x^2y''-xy'-2xy=0$.

**C.** $2x^2y'+xy''+2y-5=0$. **D.** $x^2y''-xy'+2y=0$.

**Câu 5.** **(THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019)** Tính đạo hàm của hàm số $y=\log_{2019}|x|, \forall x\neq 0$.

**A.** $y'=\dfrac{1}{|x|\ln 2019}$. **B.** $y'=\dfrac{1}{|x|}$. **C.** $y'=\dfrac{1}{x\ln 2019}$. **D.** $y'=x\ln 2019$.

**Câu 6.** **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Cho hàm số $f(x)=e^{x-x^2}$. Biết phương trình $f''(x)=0$ có hai nghiệm $x_1$, $x_2$. Tính $x_1.x_2$.

**A.** $x_1.x_2=-\dfrac{1}{4}$ **B.** $x_1.x_2=1$ **C.** $x_1.x_2=\dfrac{3}{4}$ **D.** $x_1.x_2=0$

**Câu 7.** **(Sở Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $f(x)=\ln\left(\dfrac{x}{x+2}\right)$. Tổng $f'(1)+f'(3)+f'(5)+...+f'(2021)$ bằng

**A.** $\dfrac{4035}{2021}$.. **B.** $\dfrac{2021}{2022}$. **C.** $2021$.. **D.** $\dfrac{2022}{2023}$.

**Câu 8.** **(Kiểm tra năng lực - ĐH - Quốc Tế - 2019)** Phương trình $f'(x)=0$ với $f(x)=\ln\left(x^4-4x^3+4x^2-\dfrac{1}{2}\right)$ có bao nhiêu nghiệm?

**A.** $0$ nghiệm. **B.** $1$ nghiệm. **C.** $2$ nghiệm. **D.** $3$ nghiệm.

**Câu 9.** Cho hàm số $f(x)=\ln\dfrac{x+1}{x+4}$. Tính giá trị của biểu thức $P=f'(0)+f'(3)+f'(6)+...+f'(2019)$.

**A.** $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{2024}{2023}$. **C.** $\dfrac{2022}{2023}$. **D.** $\dfrac{2020}{2023}$.

**Câu 10.** **(THPT Minh Khai - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)=(2m-1)e^x+3$. Giá trị của $m$ để $f'(-\ln 3)=\dfrac{5}{3}$ là

**A.** $m=\dfrac{7}{9}$. **B.** $m=\dfrac{2}{9}$. **C.** $m=3$. **D.** $m=-\dfrac{3}{2}$.

## Dạng 3. Khảo sát hàm số mũ, logarit

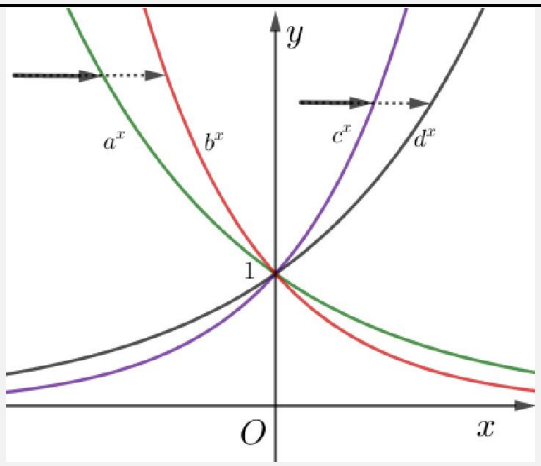
**Sự biến thiên hàm số mũ**: $y=a^x$.

Nếu $\boxed{a>1}$ thì hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$. Nếu $\boxed{0<a<1}$ thì hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

**Sự biến thiên hàm số logarit:** $y=\log_a x$. Nếu $\boxed{a>1}$: hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$. Nếu $\boxed{0<a<1}$: hàm nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

**Đồ thị hàm số mũ và logarit**

**ĐỒ THỊ HÀM SỐ MŨ**




Ta thấy: $a^x\downarrow\Rightarrow 0<a<1$; $b^x\downarrow\Rightarrow 0<b<1$.

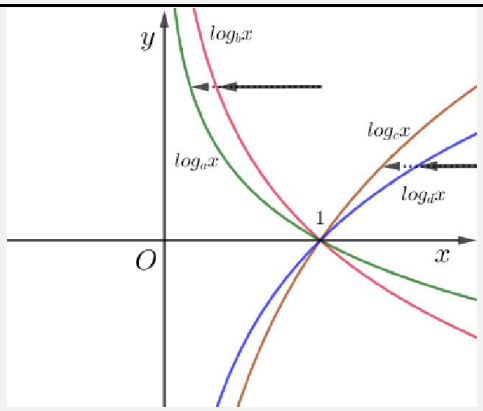
Ta thấy: $c^x\uparrow\Rightarrow c>1$; $d^x\uparrow\Rightarrow d>1$.

**So sánh *a* với *b*:** Đứng trên cao, bắn mũi tên từ **trái sang phải**, trúng $a^x$ trước nên $a>b$.

**So sánh *c* với *d*:** Đứng trên cao, bắn mũi tên từ **trái sang phải**, trúng $c^x$ trước nên $c>d$.

Vậy $0<b<a<1<d<c$.

**ĐỒ THỊ HÀM SỐ LOGARIT**




Ta thấy: $\log_a x\downarrow\Rightarrow 0<a<1$; $\log_b x\downarrow\Rightarrow 0<b<1$.

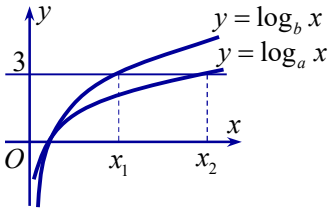
Ta thấy: $\log_c x\uparrow\Rightarrow c>1$; $\log_d x\uparrow\Rightarrow d>1$.

**So sánh *a* với *b*:** Đứng trên cao, bắn mũi tên từ **phải sang trái**, trúng $\log_b x$ trước: $b>a$.

**So sánh *c* với *d*:** Đứng trên cao, bắn mũi tên từ **phải sang trái**, trúng $\log_d x$ trước: $d>c$.

Vậy $0<a<b<1<c<d$.

**Câu 1.** **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ có đồ thị như hình bên.



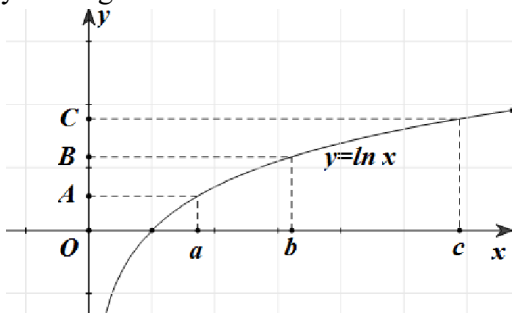
Đường thẳng $y=3$ cắt hai đồ thị tại các điểm có hoành độ là $x_1;x_2$. Biết rằng $x_1=2x_2$. Giá trị của $\frac{a}{b}$ bằng

**A.** $\frac{1}{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $2$. **D.** $\sqrt[3]{2}$.

**Câu 2.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=\ln\left(x^2+1\right)-mx+1$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;+\infty\right)$

**A.** $\left[1;+\infty\right)$ **B.** $\left(-\infty;-1\right)$ **C.** $\left[-1;1\right]$ **D.** $\left(-\infty;-1\right]$

**Câu 3.** **(Chuyên ĐHSP Hà Nội 2019)** Trong hình dưới đây, điểm $B$ là trung điểm của đoạn thẳng $AC$. Khẳng định nào sau đây là đúng?




**A.** $a+c=2b$. **B.** $ac=b^2$. **C.** $ac=2b^2$. **D.** $ac=b$.

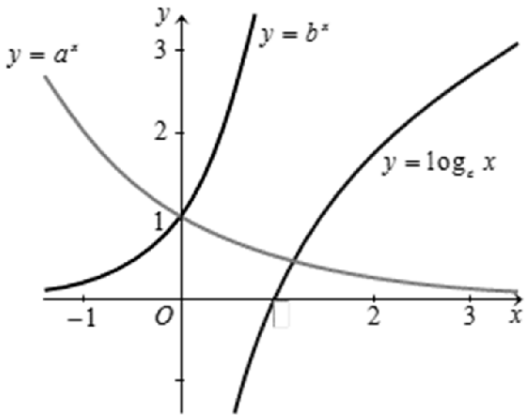
**Câu 4.** Cho các số thực $a,b$ sao cho $0<a,b\neq 1$, biết rằng đồ thị các hàm số $y=a^x$ và $y=\log_b x$ cắt nhau tại điểm $M\left(\sqrt{2018};\sqrt[5]{2019^{-1}}\right)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $a>1,b>1$ **B.** $a>1,0<b<1$ **C.** $0<a<1,b>1$ **D.** $0<a<1,0<b<1$

**Câu 5.** **(Sở Hà Nội 2019)** Tập tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y=\ln\left(x^2+1\right)-mx+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

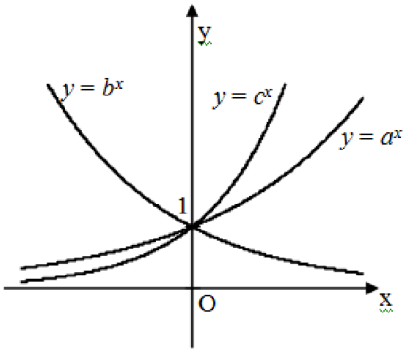
**A.** $\left[-1;1\right]$. **B.** $\left(-\infty;-1\right)$. **C.** $\left(-1;1\right)$. **D.** $\left(-\infty;-1\right]$.

**Câu 6.** **(THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019)** Trong hình vẽ bên có đồ thị các hàm số $y=a^x$, $y=b^x$, $y=\log_c x$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây?



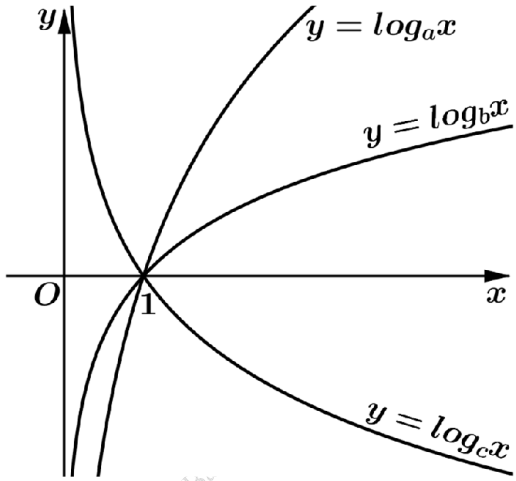

**A.** $a<c<b$. **B.** $c<a<b$. **C.** $a<b=c$. **D.** $b<c<a$.

**Câu 7.** **(Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho đồ thị của ba hàm số $y=a^x, y=b^x, y=c^x$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?




**A.** $b > a > c$. **B.** $a > c > b$. **C.** $c > a > b$. **D.** $c > b > a$.

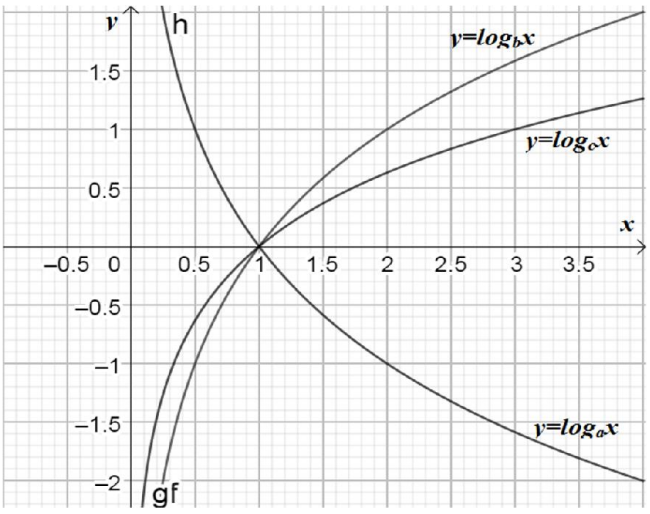
**Câu 8.** **(KTNL GV Thpt Lý Thái Tổ 2019)** Cho $a, b, c$ là các số thực dương khác 1. Hình vẽ bên là đồ thị của ba hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$.




Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** $a < c < b$. **B.** $a < b < c$. **C.** $c < b < a$. **D.** $c < a < b$.

**Câu 9.** **(Chuyên Thái Bình 2019)** Cho $a, b, c$ là các số thực dương khác 1. Hình vẽ bên là đồ thị hàm số $y = \log_a x, y = y = \log_b x, y = \log_c x$. Khẳng định nào sau đây là đúng?




**A.** $a < b < c$. **B.** $a < c < b$. **C.** $b < a < c$. **D.** $b > a > c$.

**Câu 10.** **(THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Cho hàm số $y = \dfrac{\ln x - 6}{\ln x - 2m}$ với $m$ là tham số. Gọi $S$ là tập hợp các giá trị nguyên dương của $m$ để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; e)$. Tìm số phần tử của $S$.

**A.** 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4

**Câu 11.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{m\log_2 x-2}{\log_2 x-m-1}$ nghịch biến trên $(4;+\infty)$

**A.** $m<-2$ hoặc $m>1$. **B.** $m\le -2$ hoặc $m=1$.
**C.** $m<-2$ hoặc $m=1$. **D.** $m<-2$.

**Câu 12.** **(HSG Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y=\log_{2018}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ có đồ thị $(C_1)$ và hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $(C_2)$. Biết $(C_1)$ và $(C_2)$ đối xứng nhanh qua gốc tọa độ. Hỏi hàm số $y=|f(x)|$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.** $(0;1)$ **B.** $(-1;0)$ **C.** $(-\infty;-1)$ **D.** $(1;+\infty)$

**Câu 13.** **(THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2019;2019]$ để hàm số $y=\dfrac{\ln x-6}{\ln x-3m}$ đồng biến trên khoảng $(1;e^6)$?

**A.** 2020. **B.** 2021. **C.** 2018. **D.** 2019.

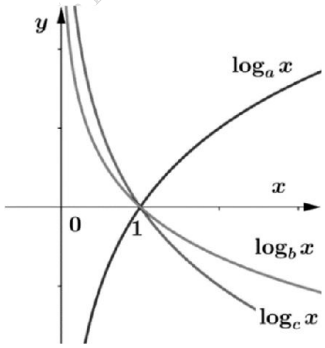
**Câu 14.** **(Chuyên Hưng Yên 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực $m$ thuộc đoạn $[-2018;2018]$ để hàm số $y=f(x)=(x+1)\ln x+(2-m)x$ đồng biến trên khoảng $(0;e^2)$.

**A.** 2016. **B.** 2022. **C.** 2014. **D.** 2023.

**Câu 15.** **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Cho $f(x)=a\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+b\sin x+6$ với $a,b\in\mathbb{R}$. Biết rằng $f(\log(\log e))=2$. Tính giá trị của $f(\log(\ln 10))$.

**A.** 10. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 8.

**Câu 16.** **(Sở Bắc Ninh 2019)** Cho $a,b,c$ dương và khác 1. Các hàm số $y=\log_a x$, $y=\log_b x$, $y=\log_c x$ có đồ thị như hình vẽ



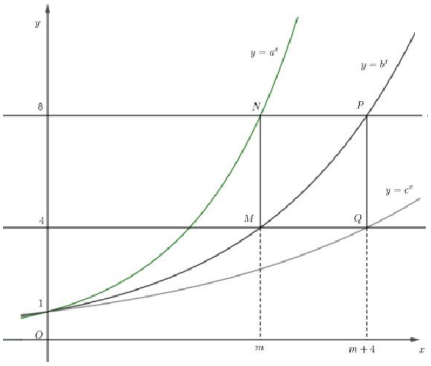

Khẳng định nào dưới đây đúng?

**A.** $a>c>b$. **B.** $a>b>c$. **C.** $c>b>a$. **D.** $b>c>a$.

**Câu 17.** Đồ thị hàm số $y=f(x)$ đối xứng với đồ thị hàm số $y=a^x\,(a>0,a\ne 1)$ qua điểm $I(1;1)$. Giá trị của biểu thức $f\left(2+\log_a\dfrac{1}{2018}\right)$ bằng

**A.** 2016. **B.** −2016. **C.** 2020. **D.** −2020.

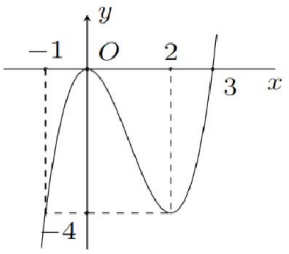
**Câu 18.** **(Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2020)** Trong hình vẽ bên các đường cong $(C_1)$: $y=a^x$, $(C_2)$: $y=b^x$, $(C_3)$: $y=c^x$ và đường thẳng $y=4$; $y=8$ tạo thành hình vuông $MNPQ$ có cạnh bằng 4.



Biết rằng $abc=2^{\frac{x}{y}}$ với $x;y\in\mathbb{Z}^+$ và $\frac{x}{y}$ tối giản, giá trị của $x+y$ bằng

**A.** $34$. **B.** $5$. **C.** $43$. **D.** $19$.

**Câu 19.** **( Bạc Liêu – Ninh Bình 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y=f\left(2+\mathrm{e}^x\right)$ nghịch biến trên khoảng

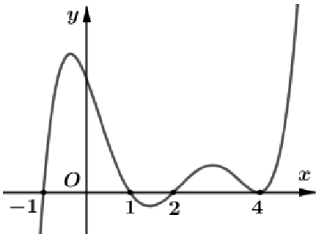



**A.** $(-1;\ 3)$. **B.** $(-2;\ 1)$. **C.** $(-\infty;\ 0)$. **D.** $(0;\ +\infty)$.

**Câu 20.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2019;2019]$ để hàm số $y=\dfrac{\ln x-6}{\ln x-3m}$ đồng biến trên khoảng $\left(1;\mathrm{e}^6\right)$?

**A.** $2020$. **B.** $2021$. **C.** $2018$. **D.** $2019$.

**Câu 21.** **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới




Hàm số $g(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{f(1-2x)}$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

**A.** $(-\infty;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(1;+\infty)$.

**Câu 22.** **(Kiểm tra năng lực - ĐH - Quốc Tế - 2019)** Xét hàm số $f(x)=(\cos x)^{\sin x}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

**A.** Hàm số $f$ tăng trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. **B.** Hàm số $f$ tăng trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};0\right)$.

**C.** Hàm số $f$ giảm trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$. **D.** $3$ lựa chọn kia đều sai.

**Câu 23.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ trong đoạn $[-2019;2019]$ để hàm số $y=\ln\left(x^2+2\right)-mx+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**A.** $2019$. **B.** $2020$. **C.** $4038$. **D.** $1009$.

**Câu 24.** Gọi $(C)$ là đồ thị của hàm số $y=\log_{2018}x$ và $(C')$ là đồ thị hàm số $y=f(x)$, $(C')$ là đối xứng với $(C)$ qua trục tung. Hàm số $y=\left|f(x)\right|$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

**A.** $(0;1)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(1;+\infty)$.

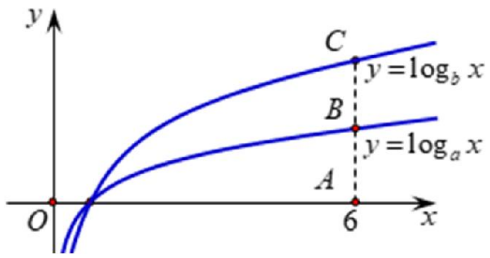
**Câu 25.** Có bao nhiêu giá trị thực $m$ để hàm số $g(x)=\dfrac{2019^x}{\ln 2019}+\dfrac{6^x}{\ln 6}+\dfrac{m}{2}x^2-2x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**A.** Duy nhất. **B.** Không tồn tại. **C.** $2019$. **D.** Vô số.

**Câu 26.** Tập các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y=\ln(3x-1)-\dfrac{m}{x}+2$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ là

**A.** $\left[\dfrac{2}{9};+\infty\right)$. **B.** $\left[-\dfrac{4}{3};+\infty\right)$. **C.** $\left[-\dfrac{7}{3};+\infty\right)$. **D.** $\left[-\dfrac{1}{3};+\infty\right)$.

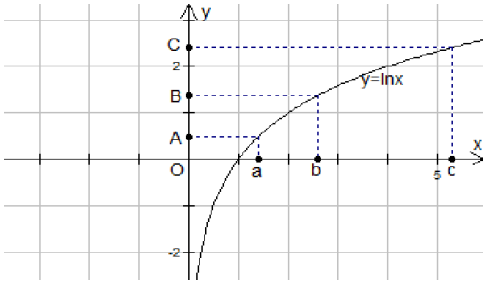
**Câu 27.** **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Cho các hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ có đồ thị như hình vẽ bên.




Đường thẳng $x=6$ cắt trục hoành, đồ thị hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ lần lượt tại $A,B$ và $C$. Nếu $AC=AB\log_2 3$ thì

**A.** $b^3=a^2$. **B.** $b^2=a^3$. **C.** $\log_3 b=\log_2 a$. **D.** $\log_2 b=\log_3 a$.

**Câu 28.** Trong hình dưới đây, điểm $B$ là trung điểm của đoạn thẳng $AC$.



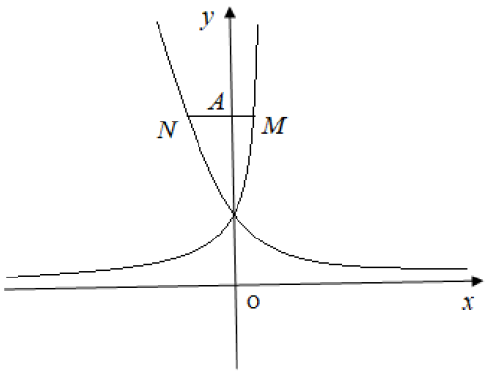

Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** $a+c=2b$. **B.** $ac=b^2$. **C.** $ac=2b^2$. **D.** $ac=b$

**Câu 29.** Đồ thị hàm số $y=f(x)$ đối xứng với đồ thị của hàm số $y=a^x\left(a>0,a\neq 1\right)$ qua điểm $I(1;1)$. Giá trị của biểu thức $f\left(2+\log_a\dfrac{1}{2018}\right)$ bằng

**A.** $-2016$. **B.** $-2020$. **C.** $2016$. **D.** $2020$.

**Câu 30.** **(Hội 8 trường chuyên ĐBSH - 2019)** Cho số thực dương $a$ khác 1. Biết rằng bất kỳ đường thẳng nào song song với trục $Ox$ mà cắt các đường $y=4^x, y=a^x$, trục tung lần lượt tại $M, N$ và $A$ thì $AN=2AM$ ( hình vẽ bên). Giá trị của $a$ bằng

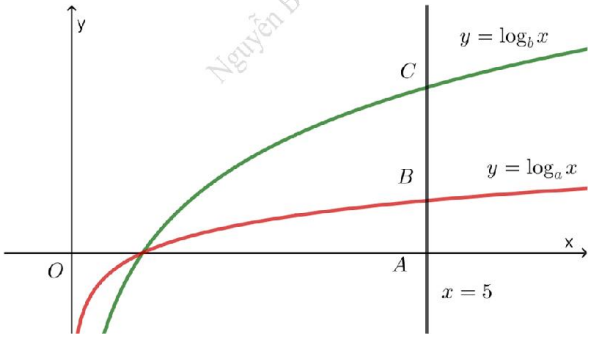



**A.** $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

**Câu 31.** **(THPT Ngô Quyền - Ba Vì - Hải Phòng 2019)** Đồ thị hàm số $y=f(x)$ đối xứng với đồ thị hàm số $y=\log_a x$, $(0<a\neq 1)$ qua điểm $I(2;1)$. Giá trị của biểu thức $f\left(4-a^{2019}\right)$ bằng

**A.** 2023. **B.** –2023. **C.** 2017. **D.** –2017.

**Câu 32.** Cho các hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đường thẳng $x=5$ cắt trục hoành, đồ thị hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ lần lượt tại $A, B$ và $C$. Biết rằng $CB=2AB$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?




**A.** $a=5b$. **B.** $a=b^2$. **C.** $a=b^3$. **D.** $a^3=b$.

**Câu 33.** **(THPT Đông Sơn 1 - Thanh Hóa - 2019)** Cho hàm số $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}$. Tính giá trị biểu thức $A=f\left(\frac{1}{100}\right)+f\left(\frac{2}{100}\right)+...+f\left(\frac{100}{100}\right)$?

**A.** 50. **B.** 49. **C.** $\frac{149}{3}$. **D.** $\frac{301}{6}$.

**Câu 34.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực $m$ để hàm số $y=\ln\left(x^2+1\right)-mx+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**A.** $[-1;1]$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(-\infty;-1]$. **D.** $(-\infty;-1)$.

**Câu 35.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ thuộc khoảng $(-2019;2019)$ để hàm số sau có tập xác định là $D=\mathbb{R}$?

$$y = x + m + \sqrt{x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 2m + 4} + \log_2\left(x - m + \sqrt{2x^2 + 1}\right)$$

**A.** $2020$. **B.** $2021$. **C.** $2018$. **D.** $2019$.

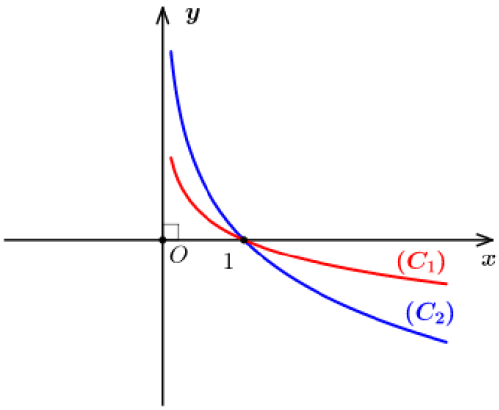
**Câu 36.** **(THPT Yên Dũng 2-Bắc Giang 2019)** Tập tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y = \dfrac{m\ln x - 2}{\ln x - m - 1}$ nghịch biến trên $\left(e^2; +\infty\right)$ là:

**A.** $\left[\begin{array}{l} m \le -2 \\ m = 1 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 1 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m = 1 \end{array}\right.$. **D.** $m < -2$.

**Câu 37.** **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ thuộc khoảng $(-2019; 2019)$ để hàm số $y = 2019^{x^3 - x^2 - mx + 1}$ nghịch biến trên $[-1; 2]$

**A.** $2020$. **B.** $2019$. **C.** $2010$. **D.** $2011$.

**Câu 38.** **(Hậu Lộc 2-Thanh Hóa -2019)** Cho $a$, $b$ là các số thực dương khác 1, đồ thị hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ lần lượt là $(C_1)$, $(C_2)$ như hình vẽ.




Khẳng định nào sau đây là đúng

**A.** $b.e^a < a.e^b$. **B.** $b.e^a > a.e^b$. **C.** $b.e^a = a.e^b$. **D.** $a.e^a < b.e^b$.

## Dạng 4. Bài toán thực tế

| BÀI TOÁN NGÂN HÀNG | |
|---|---|
| **1. Công thức tính lãi đơn** | Nếu ta gởi tiền vào ngân hàng theo hình thức **tiền lãi chỉ được tính dựa vào tiền gốc ban đầu** (tức là tiền lãi của kỳ hạn trước **không gộp vào vốn để tính lãi cho kỳ hạn kế tiếp**), đây gọi là hình thức **lãi đơn**. Ta có: $\boxed{T = A(1+nr)}$ *với A: tiền gởi ban đầu; r: lãi suất; n: kỳ hạn gởi; T: tổng số tiền nhận sau kỳ hạn n.* **Lưu ý:** *r và n phải khớp đơn vị; T bao gồm cả A, muốn* ***tính số tiền lời*** *ta lấy T –* ***A.*** |
| **2. Công thức lãi kép** | Nếu ta gởi tiền vào ngân hàng theo hình thức: **hàng tháng tiền lãi phát sinh sẽ được cộng vào tiền gốc cũ để tạo ra tiền gốc mới** và cứ tính tiếp như thế, đây gọi là hình thức **lãi kép**.<br>Ta có: $\boxed{T = A(1+r)^n}$ *với A: tiền gởi ban đầu; r: lãi suất; n: kỳ hạn gởi; T: tổng số tiền nhận sau kỳ hạn n.* **Lưu ý:** *r và n phải khớp đơn vị; T bao gồm cả A, muốn* ***tính số tiền lời*** *ta lấy T –* ***A.*** |
| **3. Mỗi tháng gởi đúng số tiền giống nhau theo hình thức lãi kép** | Nếu đầu mỗi tháng khách hàng luôn gởi vào ngân hàng số tiền $A$ đồng với lãi kép $r\%$/tháng thì số tiền họ nhận được cả vốn lẫn lãi sau $n$ tháng là:<br>$\boxed{T = \dfrac{A}{r}\left[(1+r)^n - 1\right](1+r)}$. |

| | |
|---|---|
| **4. Gởi tiền vào ngân hàng rồi rút ra hàng tháng số tiền cố định** | Nếu khách hàng gởi vào ngân hàng số tiền $A$ đồng với lãi suất $r\%$/tháng. Vào ngày ngân hàng tính lãi mỗi tháng thì rút ra $X$ đồng. Số tiền thu được sau $n$ tháng là: $\boxed{T = A(1+r)^n - X\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}}$ |
| **5. Vay vốn và trả góp (tương tự bài toán 4)** | Nếu khách hàng vay ngân hàng số tiền $A$ đồng với lãi suất $r\%$/tháng. Sau đúng một tháng kể từ ngày vay bắt đầu hoàn nợ, hai lần hoàn nợ cách nhau đúng một tháng, mỗi lần hoàn nợ đúng số tiền $X$ đồng. Số tiền khách hàng còn nợ sau $n$ tháng là: $\boxed{T = A(1+r)^n - X\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}}$ |

**Câu 1.** **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Trong năm 2019, diện tích rừng trồng mới của tỉnh $A$ là 600 ha . Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh $A$ mỗi năm tiếp theo đều tăng 6% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Kể từ sau năm 2019, năm nào dưới đây là năm đầu tiên tỉnh $A$ có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1000 ha ?

**A.** Năm 2028. **B.** Năm 2047. **C.** Năm 2027. **D.** Năm 2046.

**Câu 2.** **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Trong năm 2019, diện tích rừng trồng mới của tỉnh $A$ là 1000 ha. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng 6% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Kể từ sau năm 2019, năm nào dưới đây là năm đầu tiên tỉnh $A$ có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1400 ha.

**A.** 2043 . **B.** 2025 . **C.** 2024 . **D.** 2042 .

**Câu 3.** **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Trong năm 2019 , diện tích rừng trồng mới của tỉnh $A$ là 900 ha. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh $A$ mỗi năm tiếp theo đều tăng 6% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Kể từ sau năm 2019, năm nào dưới đây là năm đầu tiên của tỉnh $A$ có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1700 ha?

**A.** Năm 2029. **B.** Năm 2051. **C.** Năm 2030. **D.** Năm 2050.

**Câu 4.** **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Trong năm 2019 , diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là $800ha$ . Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng 6% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Kể từ sau năm 2019 , năm nào dưới đây là năm đầu tiên tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên $1400ha$ ?

**A.** Năm 2029 . **B.** Năm 2028 . **C.** Năm 2048 . **D.** Năm 2049 .

**Câu 5.** **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Năm 2020 một hãng xe niêm yết giá bán loại xe X là 750.000.000 đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán so với giá bán của năm liền trước. Theo dự định đó năm 2025 hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là bao nhiêu ( kết quả làm tròn đến hàng nghìn )?

**A.** 677.941.000 đồng. **B.** 675.000.000 đồng.
**C.** 664.382.000 đồng. **D.** 691.776.000 đồng.

**Câu 6.** **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Năm 2020, một hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là 800.000.000 đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán so với giá bán của năm liền trước. Theo dự định đó, năm 2025 hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng nghìn)?

**A.** 708.674.000 đồng. **B.** 737.895.000 đồng. **C.** 723.137.000 đồng. **D.** 720.000.000 đồng.

**Câu 7.** **(Đề Tham Khảo 2018)** Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất $0,4\%/$ tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ta khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được lập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền ( cả vốn ban đầu và lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi xuất không thay đổi?

**A.** 102.16.000 đồng **B.** 102.017.000 đồng **C.** 102.424.000 đồng **D.** 102.423.000 đồng

**Câu 8.** **(Mã 104 2018)** Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất 6,1%/ năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

**A.** 11 năm **B.** 12 năm **C.** 13 năm **D.** 10 năm

**Câu 9.** Anh An gửi số tiền 58 triệu đồng vào một ngân hàng theo hình thức lãi kép và ổn định trong 9 tháng thì lĩnh về được 61758000đ. Hỏi lãi suất ngân hàng hàng tháng là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất không thay đổi trong thời gian gửi.

**A.** 0,8 % **B.** 0,6 % **C.** 0,7 % **D.** 0,5 %

**Câu 10.** **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 0,6% /tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập làm vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó được lĩnh số tiền không ít hơn 110 triệu đồng (cả vốn ban đầu và lãi), biết rằng trong suốt thời gian gửi tiền người đó không rút tiền và lãi suất không thay đổi?

**A.** 18 tháng **B.** 16 tháng **C.** 17 tháng **D.** 15 tháng

**Cu 11.** **Một người lần □ầu gửi ồo nận ằng** 100 **triệu □ồng theo thể thức ỉi ếp (tức ỉ tiền ỉi của kỳ trước □ược cộng ồo vốn của kỳ kế tiếp) với kì hạn** 3 **tếng, ỉi suất** 2% **một quî. Sau □ng** 6 **tếng, người □ĩ gửi thm** 100 **triệu □ồng với kỳ hạn ề ỉi suất như trước □ĩ. Tổng số tiền người □ĩ nhận □ược sau** 1 **năm gửi tiền ồo nận ằng gần bằng với kết quả ồo sau □y? Biết rằng trong suốt thời gian gửi tiền ỉi suất nận ằng khong thay □ổi ề người □ĩ khong ỉt tiền ra.**

A. 212 **triệu □ồng** B. 216 **triệu □ồng** C. 210 **triệu □ồng** D. 220 **triệu □ồng**

**Câu 12.** **(KTNL Gia Bình 2019)** Ông An gửi tiết kiệm 50 triệu đồng vào ngân hàng với kỳ hạn 3 tháng, lãi suất 8,4% một năm theo hình thức lãi kép. Ông gửi được đúng 3 kỳ hạn thì ngân hàng thay đổi lãi suất, ông gửi tiếp 12 tháng nữa với kỳ hạn như cũ và lãi suất trong thời gian này là 12% một năm thì ông rút tiền về. Số tiền ông An nhận được cả gốc lẫn lãi là: (*làm tròn đến chữ số hàng đơn vị*)

**A.** 62255910 đồng. **B.** 59895767 đồng. **C.** 59993756 đồng. **C.** 63545193 đồng.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đợt I, ông An gửi số tiền $P_0 = 50$ triệu, lãi suất 8,4% một năm tức là 2,1% mỗi kỳ hạn. Số tiền cả gốc và lãi ông thu được sau 3 kỳ hạn là: $P_3 = 50000000.(1.021)^3$.

Đợt II, do ông không rút ra nên số tiền $P_3$ được xem là số tiền gửi ban đầu của đợt II, lãi suất đợt II là 3% mỗi kỳ hạn. Ông gửi tiếp 12 tháng bằng 4 kỳ hạn nên số tiền thu được cuối cùng là:

$P = P_3(1.03)^4 = 50000000.(1.021)^3.(1.03)^4 \approx 59895767$ đồng.

**Câu 13.** **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Ngày 01 tháng 01năm 2017, ông An đem 800 triệu đồng gửi vào một ngân hàng với lãi suất 0,5% một tháng. Từ đó, cứ tròn mỗi tháng, ông đến ngân hàng rút 6 triệu để chi tiêu cho gia đình. Hỏi đến ngày 01tháng 01 năm 2018, sau khi rút tiền, số tiền tiết kiệm của ông An còn lại là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất trong suốt thời gian ông An gửi không thay đổi

**A.** $800.(1,005)^{11} - 72$ (triệu đồng) **B.** $1200 - 400.(1,005)^{12}$ (triệu đồng)

**C.** $800.(1,005)^{12} - 72$ (triệu đồng) **D.** $1200 - 400.(1,005)^{11}$ (triệu đồng)

**Câu 14.** **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Ông An gửi 100 triệu vào tiết kiệm ngân hàng theo thể thức lãi kép trong một thời gian khá lâu mà không rút ra với lãi suất ổn định trong mấy chục năm qua là 10%/1 năm. Tết năm nay do ông kẹt tiền nên rút hết ra để gia đình đón Tết. Sau khi rút cả vốn lẫn lãi, ông trích ra gần 10 triệu để sắm sửa đồ Tết trong nhà thì ông còn 250 triệu. Hỏi ông đã gửi tiết kiệm bao nhiêu lâu?

**A.** 10 năm **B.** 17 năm **C.** 15 năm **D.** 20 năm

**Câu 15.** Một học sinh $A$ khi 15 tuổi được hưởng tài sản thừa kế 200 000 000 VNĐ. Số tiền này được bảo quản trong ngân hàng $B$ với kì hạn thanh toán 1 năm và học sinh $A$ chỉ nhận được số tiền này khi 18 tuổi. Biết rằng khi 18 tuổi, số tiền mà học sinh $A$ được nhận sẽ là 231 525 000 VNĐ. Vậy lãi suất kì hạn một năm của ngân hàng $B$ là bao nhiêu?

**A.** 8%/năm. **B.** 7%/năm. **C.** 6%/ năm. **D.** 5%/năm.

**Câu 16.** **(THPT Minh Khai Hà Tĩnh 2019)** Ông Anh gửi vào ngân hàng 60 triệu đồng theo hình thức lãi kép. Lãi suất ngân hàng là 8% trên năm. Sau 5 năm ông An tiếp tục gửi thêm 60 triệu đồng nữa. Hỏi sau 10 năm kể từ lần gửi đầu tiên ông An đến rút toàn bộ tiền gốc và tiền lãi được là bao nhiêu? (Biết lãi suất không thay dổi qua các năm ông gửi tiền).

**A.** $231,815$ (triệu đồng). **B.** $197,201$ (triệu đồng).

**C.** $217,695$ (triệu đồng). **D.** $190,271$ (triệu đồng).

**Câu 17.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Một người mỗi tháng đều đặn gửi vào ngân hàng một khoản tiền $T$ theo hình thức lãi kép với lãi suất $0,6\%$ mỗi tháng. Biết sau 15 tháng người đó có số tiền là 10 triệu đồng. Hỏi số tiền $T$ gần với số tiền nào nhất trong các số sau.

**A.** 613.000 đồng **B.** 645.000 đồng **C.** 635.000 đồng **D.** 535.000 đồng

**Câu 18.** **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Anh Nam gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn là một quý với lãi suất 3% một quý. Sau đúng 6 tháng anh Nam gửi thêm 100 triệu đồng với kì hạn và lãi suất như trước đó.Hỏi sau 1 năm số tiền (cả vốn lẫn lãi) anh Nam nhận được là bao nhiêu? ( Giả sử lãi suất không thay đổi).

**A.** $218,64$ triệu đồng. **B.** $208,25$ triệu đồng.

**C.** $210,45$ triệu đồng. **D.** $209,25$ triệu đồng.

**Câu 19.** **(Chuyên Sơn La 2019)** Ông A gửi vào ngân hàng 50 triệu đồng với lãi suất $0,5\%$/ tháng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng thì ông A có được số tiền cả gốc lẫn lãi nhiều hơn 60 triệu đồng? Biết rằng trong suốt thời gian gửi, lãi suất ngân hàng không đổi và ông A không rút tiền ra.

**A.** 36 tháng. **B.** 38 tháng. **C.** 37 tháng. **D.** 40 tháng.

**Câu 20.** **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Một người gửi 300 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm, người đó nhận được số tiền nhiều hơn 600 triệu đồng bao gồm cả gốc và lãi? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.

**A.** 9 năm. **B.** 10 năm. **C.** 11 năm. **D.** 12 năm.

**Câu 21.** **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Anh Bảo gửi 27 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép, kỳ hạn là một quý, với lãi suất $1,85\%$ một quý. Hỏi thời gian tối thiểu bao nhiêu để anh Bảo có được ít nhất 36 triệu đồng tính cả vỗn lẫn lãi?

**A.** 16 quý. **B.** 20 quý. **C.** 19 quý. **D.** 15 quý.

**Câu 22.** **(Sở Bắc Giang 2019)** Ông An gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 0,8%/ tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho tháng tiếp theo và từ tháng thứ hai trở đi, mỗi tháng ông gửi them vào tài khoản với số tiền 2 triệu đồng. Hỏi sau đúng 2 năm số tiền ông An nhận được cả gốc lẫn lãi là bao

nhiêu? Biết rằng trong suốt thời gian gửi lãi suất không thay đổi và ông An không rút tiền ra (kết quả được làm tròn đến hàng nghìn).

**A.** 169.871.000 đồng. **B.** 171.761.000 đồng. **C.** 173.807.000 đồng. **D.** 169.675.000 đồng.

**Câu 23.** Năm 2020, một hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là 900.000.000 đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán so với giá bán năm trước. Theo dự định đó, năm 2025 hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là bảo nhiêu ( kết quả làm tròn đến hàng nghìn)?

**A.** 810.000.000. **B.** 813.529.000. **C.** 797.258.000. **D.** 830.131.000.

**Câu 24.** **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Năm 2020, một hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe $X$ là 850.000.000 đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán của năm liền trước. Theo dự định đó, năm 2025 hãng xe ô tô niêm yết giá bán xe $X$ là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng nghìn)?

**A.** 768.333.000 đồng. **B.** 765.000.000 đồng. **C.** 752.966.000 đồng. **D.** 784.013.000 đồng.

**Câu 25.** **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020)** Một ngân hàng $X$, quy định về số tiền nhận được của khách hàng sau $n$ năm gửi tiền vào ngân hàng tuân theo công thức $P(n)=A(1+8\%)$, trong đó $A$ là số tiền gửi ban đầu của khách hàng. Hỏi số tiền ít nhất mà khách hàng B phải gửi vào ngân hàng $X$ là bao nhiêu để sau ba năm khách hàng đó rút ra được lớn hơn 850 triệu đồng (Kết quả làm tròn đến hàng triệu)?.

**A.** 675 triệu đồng. **B.** 676 triệu đồng.

**C.** 677 triệu đồng. **D.** 674 triệu đồng.

**Câu 26.** **(Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm - Quảng Nam - 2020)** Ông tuấn gửi 100 triệu vào ngân hàng với hình thức lãi kép, kỳ hạn 1 năm với lãi suất 8%. Sau 5 năm ông rút toàn bộ tiền và dùng một nữa để sửa nhà, số tiền còn lại ông tiếp tục gửi ngân hàng với lãi suất như lần trước. Số tiền lãi ông tuấn nhận được sau 10 năm gửi gần nhất với giá trị nào dưới đây?

**A.** 46,933 triệu. **B.** 34,480 triệu. **C.** 81,413 triệu. **D.** 107,946 triệu.

**Câu 27.** **(Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020)** Dân số thế giới được ước tính theo công thức $S=A.e^{ni}$, trong đó $A$ là dân số của năm lấy mốc, $S$ là dân số sau $n$ năm, $i$ là tỷ lệ tăng dân số hàng năm. Biết năm 2005 dân số của thành phố Tuy Hòa là khoảng 202.300 người và tỉ lệ tăng dân số là 1,47%. Hỏi với mức tăng dân số không đổi thì đến năm bao nhiêu dân số thành phố Tuy Hòa đạt được 255.000 người?

**A.** 2020. **B.** 2021. **C.** 2023. **D.** 2022.

**Câu 28.** **(Tiên Du - Bắc Ninh - 2020)** Số ca nhiễm Covid – 19 trong cộng đồng ở một tỉnh vào ngày thứ $x$ trong một giai đoạn được ước tính theo công thức $f(x)=A.\mathrm{e}^{rx}$ trong đó $A$ là số ca nhiễm ở ngày đầu của giai đoạn, $r$ là tỷ lệ gia tăng số ca nhiễm hàng ngày của giai đoạn đó và trong cùng một giai đoạn thì $r$ không đổi. Giai đoạn thứ nhất tính từ ngày tỉnh đó có 9 ca bệnh đầu tiên và không dùng biện pháp phòng chống lây nhiễm nào thì đến ngày thứ 6 số ca bệnh của tỉnh là 180 ca. Giai đoạn thứ hai (kể từ ngày thứ 7 trở đi) tỉnh đó áp dụng các biện pháp phòng chống lây nhiễm nên tỷ lệ gia tăng số ca nhiễm hàng ngày giảm đi 10 lần so với giai đoạn trước. Đến ngày thứ 6 của giai đoạn hai thì số ca mắc bệnh của tỉnh đó gần nhất với số nào sau đây?

**A.** 242. **B.** 16. **C.** 90. **D.** 422.

**Câu 29.** **(Kìm Thành - Hải Dương - 2020)** Anh Việt vay tiền ngân hàng 500 triệu đồng mua nhà và trả góp hàng tháng. Cuối mỗi tháng bắt đầu từ tháng thứ nhất anh trả 10 triệu đồng và chịu lãi suất là 0,9%/ tháng cho số tiền chưa trả. Với hình thức hoàn nợ như vậy thì sau bao lâu anh Việt sẽ trả hết số nợ ngân hàng?

**A.** 65 tháng. **B.** 66 tháng. **C.** 67 tháng. **D.** 68 tháng.

**Câu 30.** **(Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020)** Dân số thế giới được ước tính theo công thức $S=A.e^{ni}$, trong đó $A$ là dân số của năm lấy làm mốc, $S$ là dân số sau $n$ năm, $i$ là tỉ lệ tăng dân số hằng

năm. Dân số Việt Nam năm 2019 là $95,5$ triệu người, tỉ lệ tăng dân số hằng năm từ 2009 đến nay là $1,14\%$. Hỏi dân số Việt Nam năm 2009 gần với số nào nhất trong các số sau?

**A.** $94,4$ triệu người. **B.** $85,2$ triệu người. **C.** $86,2$ triệu người. **D.** $83,9$ triệu người.

**Câu 31.** **(Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020)** Ông An dự định gửi vào ngân hàng một số tiền với lãi suất không đổi là 7% một năm. Biết rằng cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho năm kế tiếp. Tính số tiền tối thiểu $x$ (triệu đồng, $x\in\mathbb{N}$) ông An gửi vào ngân hàng để sau 3 năm số tiền lãi đủ mua một chiếc xe gắn máy giá trị 45 triệu đồng.

**A.** 200. **B.** 190. **C.** 250. **D.** 150.

**Câu 32.** **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Để dự báo dân số của một quốc gia, người ta sử dụng công thức $S=Ae^{nr}$; trong đó $A$ là dân số của năm lấy làm mốc tính, $S$ là dân số sau $n$ năm, $r$ là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Năm 2017, dân số Việt nam là $93.671.600$ người (Tổng cục Thống kê, Niên giám thống kê 2017, Nhà xuất bản Thống kê, Tr 79). Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi là $0,81\%$, dự báo dân số Việt nam năm 2035 là bao nhiêu người (kết quả làm tròn đến chữ số hàng trăm)?

**A.** $109.256.100$. **B.** $108.374.700$. **C.** $107.500.500$. **D.** $108.311.100$.

**Câu 33.** **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Để quảng bá cho sản phẩm A, một công ty dự định tổ chức quảng cáo theo hình thức quảng cáo trên truyền hình. Nghiên cứu của công ty cho thấy: nếu sau $n$ lần quảng cáo được phát thì tỉ lệ người xem quảng cáo đó mua sản phẩm A tuân theo công thức $P(n)=\dfrac{1}{1+49e^{-0,015n}}$. Hỏi cần phát ít nhất bao nhiêu lần quảng cáo để tỉ lệ người xem mua sản phẩm đạt trên $30\%$?

**A.** $202$. **B.** $203$. **C.** $206$. **D.** $207$.

**Câu 34.** **(Sở Hà Nội 2019)** Cường độ ánh sáng đi qua môi trường nước biển giảm dần theo công thức $I=I_0e^{-\mu x}$, với $I_0$ là cường độ ánh sáng lúc ánh sáng bắt đầu đi vào môi trường nước biển và $x$ là độ dày của môi trường đó ( $x$ tính theo đơn vị mét). Biết rằng môi trường nước biển có hằng số hấp thụ là $\mu=1,4$. Hỏi ở độ sâu 30 mét thì cường độ ánh sáng giảm đi bao nhiêu lần so với cường độ ánh sáng lúc ánh sáng bắt đầu đi vào nước biển?

**A.** $e^{-21}$ lần. **B.** $e^{42}$ lần. **C.** $e^{21}$ lần. **D.** $e^{-42}$ lần

**Câu 35.** **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Một người thả một lá bèo vào một chậu nước. Sau 12 giờ, bèo sinh sôi phủ kín mặt nước trong chậu. Biết rằng sau mỗi giờ lượng bèo tăng gấp 10 lần lượng bèo trước đó và tốc độ tăng không đổi. Hỏi sau mấy giờ thì bèo phủ kín $\dfrac{1}{5}$ mặt nước trong chậu (kết quả làm tròn đến 1 chữ số phần thập phân).

**A.** $9,1$ giờ. **B.** $9,7$ giờ. **C.** $10,9$ giờ. **D.** $11,3$ giờ.

Chuyên đề 18 HÀM SỐ MŨ - HÀM SỐ LOGARIT

## TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM

### Dạng 1. Tính toán liên quan đến logarit dùng đẳng thức

◆ Định nghĩa logarit:

Cho hai số thực dương $a,b$ với $a\neq 1$, $\alpha=\log_a b\Leftrightarrow a^\alpha=b$:

◆ Các tính chất logarit: Cho ba số thực dương $a,b,c$ với $0<a,b,c\neq 1$

$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_a a}$; $\log_a b+\log_a c=\log_a bc$; $\log_a b-\log_a c=\dfrac{\log_a b}{\log_a c}$;

$\log_a b.\log_b c=\log_a c$.

◆ Phương trình mũ cơ bản nhất $a^x=b\Leftrightarrow x=\log_a b\quad (0<a\neq 1;b>0)$.

◆ Cách giải phương trình mũ có dạng $\alpha_1 a^{2x}+\alpha_2(ab)^x+\alpha_3 b^{2x}=0$ trong đó $\alpha_i\ (i=1,2,3)$ là hệ số, cơ số $0<a,b\neq 1$

B1: Biến đổi phương trình về dạng: $2\alpha_1\left(\dfrac{a}{b}\right)^{2x}+\alpha_2\left(\dfrac{a}{b}\right)^x+\alpha_3=0\quad (*)$.

B2: Đặt ẩn phụ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=t,t>0$, phương trình $(*)$ trở thành $\alpha_1 t^2+\alpha_2 t+\alpha_3=0$.

B3: Giải tìm $t$ thỏa mãn $t>0$.

B4: Giải phương trình mũ cơ bản $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=t$. Tìm được $x$.

**Câu 1.** **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho $x$, $y$ là các số thực dương thỏa mãn $\log_9 x=\log_6 y=\log_4(2x+y)$. Giá trị của $\dfrac{x}{y}$ bằng

**A.** $2$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\log_2\left(\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $\log_{\frac{3}{2}}2$.

**Câu 2.** **(Chuyên Lào Cai - 2020)** các số thực $a$, $b$, $c$ thỏa mãn $(a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2=8$ và $2^a=3^b=6^{-c}$. Khi đó $a+b+c$ bằng

**A.** $2$. **B.** $4$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $8$.

**Câu 3.** **(Chuyên Thái Nguyên - 2020)** Cho $4^x+4^{-x}=7$. Khi đó biểu thức $P=\dfrac{5-2^x-2^{-x}}{8+4.2^x+4.2^{-x}}=\dfrac{a}{b}$ với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a,b\in\mathbb{Z}$. Tích $a.b$ có giá trị bằng

**A.** $10$. **B.** $-8$. **C.** $8$. **D.** $-10$.

**Câu 4.** **(Sở Ninh Bình 2019)** Cho $a$, $b$, $c$ là các số thực khác $0$ thỏa mãn $4^a=9^b=6^c$. Khi đó $\dfrac{c}{a}+\dfrac{c}{b}$ bằng

**A.** $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{6}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** $2$.

**Câu 5.** Biết $a=\log_{30}10$, $b=\log_{30}150$ và $\log_{2000}15000=\dfrac{x_1a+y_1b+z_1}{x_2a+y_2b+z_2}$ với $x_1;y_1;z_1;x_2;y_2;z_2$ là các số nguyên, tính $S=\dfrac{x_1}{x_2}$.

**A.** $S=\dfrac{1}{2}$. **B.** $S=2$. **C.** $S=\dfrac{2}{3}$. **D.** $S=1$.

**Câu 6.** Cho các số thực dương $x,y$ khác 1 và thỏa mãn $\begin{cases}\log_x y=\log_y x\\ \log_x(x-y)=\log_y(x+y)\end{cases}$.

Giá trị của $x^2+xy-y^2$ bằng

**A.** 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

**Câu 7.** Cho các số thực dương $a$, $b$ thỏa mãn $\sqrt{\log a}+\sqrt{\log b}+\log\sqrt{a}+\log\sqrt{b}=100$ và $\sqrt{\log a}$, $\sqrt{\log b}$, $\log\sqrt{a}$, $\log\sqrt{b}$ đều là các số nguyên dương. Tính $P=ab$.

**A.** $10^{164}$. **B.** $10^{100}$. **C.** $10^{200}$. **D.** $10^{144}$.

**Câu 8.** Cho $\log_9 5=a;\ \log_4 7=b;\ \log_2 3=c$. Biết $\log_{24}175=\dfrac{mb+nac}{pc+q}$. Tính $A=m+2n+3p+4q$

**A.** 27 **B.** 25 **C.** 23 **D.** 29

**Câu 9.** Cho $x$, $y$ là các số thực lớn hơn 1 thoả mãn $x^2-6y^2=xy$. Tính $M=\dfrac{1+\log_{12}x+\log_{12}y}{2\log_{12}(x+3y)}$.

**A.** $M=\dfrac{1}{4}$. **B.** $M=1$. **C.** $M=\dfrac{1}{2}$. **D.** $M=\dfrac{1}{3}$.

**Câu 10.** Cho $f(x)=a\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+b\sin x+6$ với $a$, $b\in\mathbb{R}$. Biết $f\left(\log(\log e)\right)=2$. Tính $f\left(\log(\ln 10)\right)$.

**A.** 4. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 2.

**Câu 11.** Cho $9^{x}+9^{-x}=14$ và $\dfrac{6+3(3^{x}+3^{-x})}{2-3^{x+1}-3^{1-x}}=\dfrac{a}{b}$ với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $P=a.b$.

**A.** $P=10$. **B.** $P=-45$. **C.** $P=-10$. **D.** $P=45$.

**Câu 12.** Cho hai số thực dương $a,b$ thỏa $\log_4 a=\log_6 b=\log_9(a+b)$. Tính $\dfrac{a}{b}$.

**A.** $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

**Câu 13.** Cho các số thực dương $x,y$ thỏa mãn $\log_6 x=\log_9 y=\log_4(2x+2y)$. Tính tỉ số $\dfrac{x}{y}$?

**A.** $\dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$. **C.** $\dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$. **D.** $\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{2}$.

**Câu 14.** Cho $x$, $y$ là các số thực dương thỏa mãn $\log_{25}\dfrac{x}{2}=\log_{15}y=\log_9\dfrac{x+y}{4}$ và $\dfrac{x}{y}=\dfrac{-a+\sqrt{b}}{2}$, với $a$, $b$ là các số nguyên dương, tính $a+b$.

**A.** $a+b=14$. **B.** $a+b=3$. **C.** $a+b=21$. **D.** $a+b=34$.

**Câu 15.** Cho dãy số $(u_n)$ thỏa mãn $\log_3(2u_5-63)=2\log_4(u_n-8n+8)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Đặt $S_n=u_1+u_2+...+u_n$. Tìm số nguyên dương lớn nhất $n$ thỏa mãn $\dfrac{u_n.S_{2n}}{u_{2n}.S_n}<\dfrac{148}{75}$.

**A.** 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 19.

## Dạng 2. Bài toán tìm giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất mũ – loagrit (sử dụng phương pháp bất đẳng thức – biến đổi)

**① Bất đẳng thức Cauchy (AM – GM)**

- $\forall a,b \ge 0$, thì $\boxed{a+b \ge 2\sqrt{ab}}$. Dấu "=" xảy ra khi: $a=b$.
- $\forall a,b,c \ge 0$, thì $\boxed{a+b+c \ge 3.\sqrt[3]{abc}}$. Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$.

Nhiều trường hợp đánh giá dạng: $a.b \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ và $a.b.c \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$.

**② Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz (Bunhiaxcôpki)**

- $\forall a,b,x,y$, thì: $\boxed{(a.x+b.y)^2 \le (a^2+b^2)(x^2+y^2)}$. Dấu "=" khi $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$.
- $\forall a,\mathrm{b},\mathrm{c},\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}$ thì: $\boxed{(a.x+b.y+c.z)^2 \le (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$.

Nhiều trường hợp đánh giá dạng: $|a.x+b.y| \le \sqrt{(a^2+b^2)(\mathrm{x}^2+y^2)}$.

**Hệ quả**. Nếu $a,b,c$ là các số thực và $x,y,z$ là các số dương thì:

$\boxed{\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y} \ge \frac{(a+b)^2}{x+y}}$ và $\boxed{\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z} \ge \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}}$: bất đẳng thức cộng mẫu số.

Nguyễn Bảo Vương

**Câu 1.** **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Xét các số thực dương $a,b,x,y$ thoả mãn $a>1, b>1$ và $a^x=b^y=\sqrt{ab}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+2y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

**A.** $(1;2)$. **B.** $\left[2;\frac{5}{2}\right)$. **C.** $[3;4)$. **D.** $\left[\frac{5}{2};3\right)$.

**Câu 2.** **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Có bao nhiêu số nguyên $x$ sao cho tồn tại số thực $y$ thỏa mãn $\log_3(x+y)=\log_4\left(x^2+y^2\right)$?

**A.** 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

**Câu 3.** **(Mã 103 2018)** Cho $a>0,b>0$ thỏa mãn $\log_{4a+5b+1}\left(16a^2+b^2+1\right)+\log_{8ab+1}\left(4a+5b+1\right)=2$. Giá trị của $\mathrm{a}+2b$ bằng

**A.** 6 **B.** $\frac{27}{4}$ **C.** $\frac{20}{3}$ **D.** 9

**Câu 4.** **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Xét các số thực không âm $x$ và $y$ thỏa mãn $2x+y.4^{x+y-1} \ge 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+4x+6y$ bằng

**A.** $\frac{33}{4}$. **B.** $\frac{65}{8}$. **C.** $\frac{49}{8}$. **D.** $\frac{57}{8}$.

**Câu 5.** Xét các số thực $x,y$ thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1} \le \left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{4y}{2x+y+1}$ **gần nhất** với số nào dưới đây?

**A.** $-2$. **B.** $-3$. **C.** $-5$. **D.** $-4$.

**Câu 6.** Cho các số thực $x, y$ thỏa mãn bất đẳng thức $\log_{4x^2+9y^2}(2x+3y)\geq 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x+3y$ là

**A.** $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{2+\sqrt{10}}{4}$. **C.** $\frac{5+\sqrt{10}}{4}$. **D.** $\frac{3+\sqrt{10}}{4}$.

**Câu 7.** **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Cho các số thực $a,b$ thay đổi, thỏa mãn $a>\frac{1}{3}, b>1$. Khi biểu thức $P=\log_{3a} b+\log_b\left(a^4-9a^2+81\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất thì tổng $a+b$ bằng

**A.** $3+9^{\sqrt{2}}$ **B.** $9+2^{\sqrt{3}}$ **C.** $2+9\sqrt{2}$ **D.** $3+3\sqrt{2}$

**Câu 8.** **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Cho các số thực $a,b,c$ thỏa mãn $0<a<1;\ \frac{1}{8}<b<1;\ \frac{3}{8}<c<1$. Gọi $M$ là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{3}{16}\log_a\left(\frac{b}{2}-\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{4}\log_b\left(\frac{c}{2}-\frac{3}{16}\right)+\frac{1}{3}\log_c a$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $\sqrt{3}\leq M<2$. **B.** $M\geq 2$. **C.** $\sqrt{2}\leq M<\sqrt{3}$. **D.** $M<\sqrt{2}$.

**Câu 9.** Cho các số thực $a,b,m,n$ sao cho $2m+n<0$ và thoả mãn điều kiện:

$$\begin{cases}\log_2\left(a^2+b^2+9\right)=1+\log_2(3a+2b)\\ 9^{-m}.3^{-n}.3^{\frac{-4}{2m+n}}+\ln\left[(2m+n+2)^2+1\right]=81\end{cases}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{(a-m)^2+(b-n)^2}$

**A.** $2\sqrt{5}-2$. **B.** $2$. **C.** $\sqrt{5}-2$. **D.** $2\sqrt{5}$

**Câu 10.** Cho các số thực $a,b,c$ thỏa mãn $0<a<1;\ \frac{1}{8}<b<1;\ \frac{3}{8}<c<1$. Gọi $M$ là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{3}{16}\log_a\left(\frac{b}{2}-\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{4}\log_b\left(\frac{c}{2}-\frac{3}{16}\right)+\frac{1}{3}\log_c a$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $\sqrt{3}\leq M<2$. **B.** $M\geq 2$. **C.** $\sqrt{2}\leq M<\sqrt{3}$. **D.** $M<\sqrt{2}$.

**Câu 11.** **(Chuyên Lam Sơn - 2020)** Xét các số thực dương $a,b,c$ lớn hơn 1 ( với $a>b$) thỏa mãn $4\left(\log_a c+\log_b c\right)=25\log_{ab} c$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\log_b a+\log_a c+\log_c b$ bằng

**A.** $5$. **B.** $8$. **C.** $\frac{17}{4}$. **D.** $3$.

**Câu 12.** **(Chuyên Lương Văn Tụy - Ninh Bình - 2020)** Xét các số thực dương a , b , x , y thỏa mãn $a>1,\ b>1$ và $a^{2x}=b^{3y}=a^6b^6$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4xy+2x-y$ có dạng $m+n\sqrt{165}$ (với $m,n$ là các số tự nhiên), tính $S=m+n$.

**A.** $58$. **B.** $54$. **C.** $56$. **D.** $60$

**Câu 13.** **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)** Xét các số thực $x, y$ thỏa mãn $\log_2(x-1)+\log_2(y-1)=1$. Khi biểu thức $P=2x+3y$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $3x-2y=a+b\sqrt{3}$ với $a, b\in\mathbb{Q}$. Tính $T=ab$?

**A.** $T=9$. **B.** $T=\frac{7}{3}$. **C.** $T=\frac{5}{3}$. **D.** $T=7$.

**Câu 14.** **(Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020)** Cho $a>0,b>0$ thỏa mãn $\log_{4a+5b+1}\left(16a^2+b^2+1\right)+\log_{8ab+1}\left(4a+5b+1\right)=2$. Giá trị của $a+2b$ bằng

**A.** $\frac{27}{4}$. **B.** $6$. **C.** $\frac{20}{3}$. **D.** $9$.

**Câu 15.** **(Chuyên Sơn La - 2020)** Cho $a,b,c$ là các số thực lớn hơn 1. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{4040}{\log_{\sqrt{bc}}a}+\frac{1010}{\log_{ac}\sqrt{b}}+\frac{8080}{3\log_{ab}\sqrt[3]{c}}$ bằng

**A.** $2020$. **B.** $16160$. **C.** $20200$. **D.** $13130$.

**Câu 16.** **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2020)** Cho $a,b,c$ là các số thực dương khác 1 thỏa mãn $\log_a^2 b+\log_b^2 c=\log_a\frac{c}{b}-2\log_b\frac{c}{b}-3$. Gọi $M,m$ lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P=\log_a b-\log_b c$. Giá trị của biểu thức $S=3m-M$ bằng

**A.** $-16$. **B.** $4$. **C.** $-6$. **D.** $6$.

**Câu 17.** **(Sở Hưng Yên - 2020)** Cho các số thực $x,y\ge 1$ và thỏa mãn điều kiện $xy\le 4$. Biểu thức $P=\log_{4x}8x-\log_{2y^2}\frac{y^2}{2}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=x_0,y=y_0$. Đặt $T=x_0^4+y_0^4$ mệnh đề nào sau đây đúng

**A.** $T=131$. **B.** $T=132$. **C.** $T=129$. **D.** $T=130$.

**Câu 18.** **(Sở Hà Tĩnh - 2020)** Cho các số thực dương $a,b,c$ thỏa mãn $abc=10$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $F=5\log a.\log b+2\log b.\log c+\log c.\log a$ bằng $\frac{m}{n}$ với $m,n$ nguyên dương và $\frac{m}{n}$ tối giản. Tổng $m+n$ bằng

**A.** 13. **B.** 16. **C.** 7. **D.** 10.

**Câu 19.** **(Lê Lai - Thanh Hóa - 2020)** Cho $a>0,b>0$ thỏa mãn $\log_{10a+3b+1}\left(25a^2+b^2+1\right)+\log_{10ab+1}\left(10a+3b+1\right)=2$. Giá trị biểu thức $a+2b$ bằng?

**A.** 6. **B.** $\frac{11}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** 22.

**Câu 20.** **(Liên trường Nghệ An - 2020)** Cho các số thực dương $a;b;c$ khác 1 thỏa mãn $\log_a^2 b+\log_b^2 c+2\log_b\frac{c}{b}=\log_a\frac{c}{a^3b}$. Gọi $M,m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=\log_a ab-\log_b bc$. Tính giá trị biểu thức $S=2m^2+9M^2$.

**A.** $S=28$. **B.** $S=25$. **C.** $S=26$. **D.** $S=27$.

**Câu 21.** **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Cho $a>0,b>0$ thỏa mãn $\log_{4a+5b+1}(16a^2+b^2+1)+\log_{8ab+1}(4a+5b+1)=2$. Giá trị của $a+2b$ bằng

**A.** $9$. **B.** $6$. **C.** $\frac{27}{4}$. **D.** $\frac{20}{3}$.

**Câu 22.** **(Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020)** Xét các số thực $a,b,x,y$ thỏa mãn $a>1,b>1$ và $a^x=b^y=\sqrt{\frac{a}{b}}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x-2y$ thuộc tập nào dưới đây?

**A.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$. **C.** $\left[1;\frac{3}{2}\right)$. **D.** $\left[\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$.

**Câu 23.** **(Tiên Du - Bắc Ninh - 2020)** Cho biểu thức $P=3^{y-2x+3}(1+4^{2x-y-1})-2^{2x-y-1}$ và biểu thức $Q=\log_{y-3-2x}3y$. Giá trị nhỏ nhất của $y$ để tồn tại $x$ đồng thời thỏa mãn $P\ge 1$ và $Q\ge 1$ là số $y_0$. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

**A.** $4y_0+1$ là số hữu tỷ. **B.** $y_0$ là số vô tỷ.

**C.** $y_0$ là số nguyên dương. **D.** $3y_0+1$ là số tự nhiên chẵn.

**Câu 24.** **(Trường VINSCHOOL - 2020)** Cho dãy số $(u_n)$ có số hạng đầu $u_1\ne 1$ thỏa mãn $\log_2^2(5u_1)+\log_2^2(7u_1)=\log_2^2 5+\log_2^2 7$ và $u_{n+1}=7u_n$ với mọi $n\ge 1$. Giá trị nhỏ nhất của $n$ để $u_n>1111111$ bằng:

**A.** 11. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

**Câu 25.** **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)** Xét các số thực $x,y$ thỏa mãn $\log_2(x-1)+\log_2(y-1)=1$. Khi biểu thức $P=2x+3y$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $3x-2y=a+b\sqrt{3}$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính $T=ab$.

**A.** $T=9$. **B.** $T=\frac{7}{3}$. **C.** $T=\frac{5}{3}$. **D.** $T=7$.

**Câu 26.** Xét các số thực $a$, $b$, $c\ne 0$ thỏa mãn $3^a=5^b=15^{-c}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2-4(a+b+c)$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

**A.** $(-1;2)$. **B.** $[-5;-1)$. **C.** $[2;4)$. **D.** $[4;6)$.

**Câu 27.** Xét các số thực dương $a$, $b$, $c$, $x$, $y$, $z$ thỏa mãn $a>1$, $b>1$, $c>1$ và $a^x=b^y=c^z=\sqrt{abc}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y+z+\frac{1}{2}$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

**A.** $[10;13)$. **B.** $[7;10)$. **C.** $[3;5)$. **D.** $[5;7)$.

**Câu 28.** Xét các số thực dương $a,b,x,y$ thỏa mãn $a>1,b>1$ và $a^{x^2}=b^{y^2}=\sqrt{a.b}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x.y$ là

**A.** $P=\frac{9}{4}$. **B.** $P=\frac{\sqrt{6}}{2}$. **C.** $P=\frac{3}{2}$. **D.** $P=\frac{4}{9}$.

**Câu 29.** Xét các số thực dương $a,b,x,y$ thỏa mãn $a>1,b>1$ và $a^{\frac{x^2}{y}}=b^{\frac{y^2}{x}}=ab$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x.y$ là

**A.** $P=2$. **B.** $P=4$. **C.** $P=3$. **D.** $P=1$.

**Câu 30.** Xét các số thực dương $a,b,c,x,y,z$ thỏa mãn $a>1,b>1,c>1,y>2$ và $a^{x+1}=b^{y-2}=c^{z+1}=abc$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y+z$ là

**A.** $P=13$. **B.** $P=3$. **C.** $P=9$. **D.** $P=1$.

## Dạng 3. Sử dụng phương pháp hàm số (hàm đặc trưng) giải các bài toán logarit

**1. Định lý:** Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) và liên tục trên $(a;b)$ thì

* $\forall u;v\in(a;b): f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v$.

* Phương trình $f(x)=k\ (k=const)$ có nhiều nhất 1 nghiệm trên khoảng $(a;b)$.

**2. Định lý:** Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) và liên tục trên $(a;b)$, đồng thời $\lim\limits_{x\to a^+} f(x).\lim\limits_{x\to b^-} f(x)<0$ thì phương trình $f(x)=k(k=const)$ có duy nhất nghiệm trên $(a;b)$.

**3. Tính chất của logarit:**

| | |
|---|---|
| **1.1. So sánh hai logarit cũng cơ số:**<br>Cho số dương $a\neq 1$ và các số dương $b,c$.<br>◦ Khi $a>1$ thì $\log_a b>\log_a c\Leftrightarrow b>c$.<br>◦ Khi $0<a<1$ thì $\log_a b>\log_a c\Leftrightarrow b<c$. | **1.2. Hệ quả:**<br>Cho số dương $a\neq 1$ và các số dương $b,c$.<br>◦ Khi $a>1$ thì $\log_a b>0\Leftrightarrow b>1$.<br>◦ Khi $0<a<1$ thì $\log_a b>0\Leftrightarrow b<1$.<br>◦ $\log_a b=\log_a c\Leftrightarrow b=c$. |
| **2. Logarit của một tích**:<br>Cho 3 số dương $a, b_1, b_2$ với $a\neq 1$, ta có $\log_a(b_1.b_2)=\log_a b_1+\log_a b_2$ | **3. Logarit của một thương**:<br>Cho 3 số dương $a, b_1, b_2$ với $a\neq 1$, ta có $\log_a\dfrac{b_1}{b_2}=\log_a b_1-\log_a b_2$<br>Đặc biệt: với $a, b>0, a\neq 1$ $\log_a\dfrac{1}{b}=-\log_a b$. |
| **4. Logarit của lũy thừa**:<br>Cho $a, b>0, a\neq 1$, với mọi $\alpha$, ta có $\log_a b^\alpha=\alpha\log_a b$.<br>Đặc biệt: $\log_a\sqrt[n]{b}=\dfrac{1}{n}\log_a b$ ($n$ nguyên dương). | **5. Công thức đổi cơ số**:<br>Cho 3 số dương $a, b, c$ với $a\neq 1, c\neq 1$, ta có $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.<br>Đặc biệt: $\log_a c=\dfrac{1}{\log_c a}$ và $\log_{a^\alpha} b=\dfrac{1}{\alpha}\log_a b$ với $\alpha\neq 0$. |

**Câu 1.** **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Có bao nhiêu số nguyên $x$ sao cho ứng với mỗi $x$ có không quá 242 số nguyên $y$ thỏa mãn $\log_4(x^2+y)\geq\log_3(x+y)$?

**A.** 55. **B.** 28. **C.** 29. **D.** 56.

**Câu 2.** **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Có bao nhiêu số nguyên $x$ sao cho ứng với mỗi $x$ có không quá 728 số nguyên $y$ thỏa mãn $\log_4(x^2+y)\geq\log_3(x+y)$?

**A.** 59. **B.** 58. **C.** 116. **D.** 115.

**Câu 3.** **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Có bao nhiêu số nguyên $x$ sao cho ứng với mỗi $x$ có không quá 127 số nguyên $y$ thỏa mãn $\log_3(x^2+y)\geq\log_2(x+y)$?

**A.** 89. **B.** 46. **C.** 45. **D.** 90.

**Câu 4.** **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Xét các số thực không âm $x$ và $y$ thỏa mãn $2x+y.4^{x+y-1}\geq 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+6x+4y$ bằng

**A.** $\dfrac{65}{8}$. **B.** $\dfrac{33}{4}$. **C.** $\dfrac{49}{8}$. **D.** $\dfrac{57}{8}$.

**Câu 5.** **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0\leq x\leq 2020$ và $\log_3(3x+3)+x=2y+9^y$?

**A.** $2019$. **B.** $6$. **C.** $2020$. **D.** $4$.

**Câu 6.** **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Xét các số thực không âm $x$ và $y$ thỏa mãn $2x+y.4^{x+y-1}\geq 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+2x+4y$ bằng

**A.** $\frac{33}{8}$. **B.** $\frac{9}{8}$. **C.** $\frac{21}{4}$. **D.** $\frac{41}{8}$.

**Câu 7.** **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Có bao nhiêu số nguyên $x$ sao cho ứng với mỗi $x$ có không quá $255$ số nguyên $y$ thỏa mãn $\log_3\left(x^2+y\right)\geq \log_2\left(x+y\right)$?

**A.** $80$. **B.** $79$. **C.** $157$. **D.** $158$

**Câu 8.** **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Xét các số thực không âm $x$ và $y$ thỏa mãn $2x+y.4^{x+y-1}\geq 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+4x+2y$ bằng

**A.** $\frac{33}{8}$. **B.** $\frac{9}{8}$. **C.** $\frac{21}{4}$. **D.** $\frac{41}{8}$.

**Câu 9.** **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $\left(m,n\right)$ sao cho $m+n\leq 16$ và ứng với mỗi cặp $\left(m,n\right)$ tồn tại đúng $3$ số thực $a\in\left(-1;1\right)$ thỏa mãn $2a^m-n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$?

**A.** $16$. **B.** $14$. **C.** $15$. **D.** $13$.

**Câu 10.** **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Xét các số thực thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1}\leq\left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{8x+4}{2x-y+1}$ gần với giá trị nào sau đây nhất?

**A.** $9$ **B.** $6$. **C.** $7$. **D.** $8$.

**Câu 11.** **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $\left(m;n\right)$ sao cho $m+n\leq 10$ và ứng với mỗi cặp $\left(m;n\right)$ tồn tại đúng $3$ số thực $a\in\left(-1;1\right)$ thỏa mãn $2a^m=n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$?

**A.** $7$. **B.** $8$. **C.** $10$. **D.** $9$.

**Câu 12.** **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Xét các số thực $x,y$ thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1}\leq\left(x^2+y^2-2x+2\right).4^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{8x+4}{2x-y+1}$ **gần nhất** với số nào dưới đây

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $3$. **D.** $4$.

**Câu 13.** Có bao nhiêu cấp số nguyên dương $\left(m,n\right)$ sao cho $m+n\leq 14$ và ứng với mỗi cặp $\left(m,n\right)$ tồn tại đúng ba số thực $a\in\left(-1;1\right)$ thỏa mãn $2a^m=n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$?

**A.** $14$. **B.** $12$. **C.** $11$. **D.** $13$.

**Câu 14.** **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(m,n)$ sao cho $m+n\leq 12$ và ứng với mỗi cặp $(m,n)$ tồn tại đúng 3 số thực $a\in(-1,1)$ thỏa mãn $2a^m=n\ln(a+\sqrt{a^2+1})$?

**A.** $12$. **B.** $10$. **C.** $11$. **D.** $9$.

**Câu 15.** **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Xét các số thực $x$ và $y$ thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1}\leq\left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{4y}{2x+y+1}$ **gần nhất** với số nào dưới đây?

**A.** $1$. **B.** $0$. **C.** $3$. **D.** $2$.

**Câu 16.** **(Mã 123 2017)** Xét các số thực dương $x, y$ thỏa mãn $\log_3 \frac{1-xy}{x+2y} = 3xy + x + 2y - 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = x + y$

**A.** $P_{\min} = \frac{2\sqrt{11}-3}{3}$ **B.** $P_{\min} = \frac{9\sqrt{11}-19}{9}$

**C.** $P_{\min} = \frac{18\sqrt{11}-29}{21}$ **D.** $P_{\min} = \frac{9\sqrt{11}+19}{9}$

**Câu 17.** **(Mã 110 2017)** Xét các số thực dương $a$, $b$ thỏa mãn $\log_2 \frac{1-ab}{a+b} = 2ab + a + b - 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = a + 2b$.

**A.** $P_{\min} = \frac{3\sqrt{10}-7}{2}$ **B.** $P_{\min} = \frac{2\sqrt{10}-1}{2}$ **C.** $P_{\min} = \frac{2\sqrt{10}-3}{2}$ **D.** $P_{\min} = \frac{2\sqrt{10}-5}{2}$

**Câu 18.** **(Chuyên Lê Thánh Tông 2019)** Cho hai số thực dương $x$, $y$ thỏa mãn $2^{\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)}.5^{\ln(x+y)} = 2^{\ln 5}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (x+1)\ln x + (y+1)\ln y$.

**A.** $P_{\max} = 10$. **B.** $P_{\max} = 0$. **C.** $P_{\max} = 1$. **D.** $P_{\max} = \ln 2$.

**Câu 19.** **(THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019)** Cho các số thực $x, y$ thỏa mãn $0 \le x, y \le 1$ và $\log_3 \frac{x+y}{1-xy} + (x+1)(y+1) - 2 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = 2x + y$.

**A.** $2$. **B.** $1$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $0$.

Nguyễn Bảo Vương

**Câu 20.** **(Chuyên Hạ Long 2019)** Cho các số thực $a, b$ thỏa mãn $a \ge b > 1$. Biết rằng biểu thức $P = \frac{1}{\log_{ab} a} + \sqrt{\log_a \frac{a}{b}}$ đạt giá trị lớn nhất khi $b = a^k$. Khẳng định nào sau đây là sai

**A.** $k \in [2;3]$. **B.** $k \in (0;1)$. **C.** $k \in [0;1]$. **D.** $k \in \left(0;\frac{3}{2}\right)$.

**Câu 21.** Cho hai số thực $a$, $b$ thỏa mãn $\log_{a^2+4b^2+1}(2a-8b) = 1$. Tính $P = \frac{a}{b}$ khi biểu thức $S = 4a + 6b - 5$ đạt giá trị lớn nhất.

**A.** $\frac{8}{5}$ **B.** $\frac{-13}{2}$ **C.** $\frac{-13}{4}$ **D.** $\frac{17}{44}$

**Câu 22.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho $a, b$ là các số dương thỏa mãn $b > 1$ và $\sqrt{a} \le b < a$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \log_{\frac{a}{b}} a + 2\log_{\sqrt{b}}\left(\frac{a}{b}\right)$.

**A.** $6$. **B.** $7$. **C.** $5$. **D.** $4$.

**Câu 23.** **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương 2019)** Cho $a$, $b$ là hai số thực dương thỏa mãn $\log_5\left(\frac{4a+2b+5}{a+b}\right) = a + 3b - 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = a^2 + b^2$

**A.** $\frac{1}{2}$. **B.** $1$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

**Câu 24.** **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Với hai số thực $a,b$ bất kì, ta kí hiệu $f_{(a,b)}(x)=|x-a|+|x-b|+|x-2|+|x-3|$.Biết rằng luôn tồn tại duy nhất số thực $x_0$ để $\min\limits_{x\in R} f_{(a,b)}(x)=f_{(a,b)}(x_0)$ với mọi số thực $a,b$ thỏa mãn $a^b=b^a$ và $0<a<b$. Số $x_0$ bằng

**A.** $2e-1$ **B.** $2,5$ **C.** $e$ **D.** $2e$

**Câu 25.** **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho hai số thực $a>1,b>1$. Biết phương trình $a^x b^{x^2-1}=1$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\left(\dfrac{x_1x_2}{x_1+x_2}\right)^2-4(x_1+x_2)$.

**A.** $3\sqrt[3]{4}$. **B.** $4$ **C.** $3\sqrt[3]{2}$. **D.** $\sqrt[3]{4}$.

**Câu 26.** **(Chuyên Quốc Học Huế 2019)** Cho $x,y$ là các số thực lớn hơn 1 sao cho $y^x\left(e^x\right)^{e^y}\geq x^y\left(e^y\right)^{e^x}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\log_x\sqrt{xy}+\log_y x$.

**A.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** $2\sqrt{2}$ **C.** $\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

**Câu 27.** Xét các số thực dương $x,y$ thỏa mãn $\log_3\dfrac{1-y}{x+3xy}=3xy+x+3y-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P=x+y$.

**A.** $P_{\min}=\dfrac{4\sqrt{3}-4}{3}$. **B.** $P_{\min}=\dfrac{4\sqrt{3}+4}{3}$. **C.** $P_{\min}=\dfrac{4\sqrt{3}+4}{9}$. **D.** $P_{\min}=\dfrac{4\sqrt{3}-4}{9}$.

**Câu 28.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Xét các số thực dương $x$, $y$ thỏa mãn $\log_{\frac{1}{2}}x+\log_{\frac{1}{2}}y\leq\log_{\frac{1}{2}}\left(x+y^2\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=x+3y$.

**A.** $P_{\min}=9$ **B.** $P_{\min}=8$ **C.** $P_{\min}=\dfrac{25\sqrt{2}}{4}$ **D.** $P_{\min}=\dfrac{17}{2}$

**Câu 29.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho $x,y$ là các số thực dương thỏa mãn $\log_{2019}x+\log_{2019}y\geq\log_{2019}\left(x^2+y\right)$. Gọi $T_{\min}$ là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=2x+y$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $T_{\min}\in(7;8)$ **B.** $T_{\min}\in(6;7)$ **C.** $T_{\min}\in(5;6)$ **D.** $T_{\min}\in(8;9)$

**Câu 30.** **(Mã 105 2017)** Xét hàm số $f(t)=\dfrac{9^t}{9^t+m^2}$ với $m$ là tham số thực. Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị của $m$ sao cho $f(x)+f(y)=1$ với mọi số thực $x,y$ thỏa mãn $e^{x+y}\leq e(x+y)$.Tìm số phần tử của $S$.

**A.** $0$ **B.** Vô số **C.** $1$ **D.** $2$

**Câu 31.** **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình vẽ và có đạo hàm cấp hai $f''(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

| $x$ | $-\infty$ | $m$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | - | 0 | + |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $n^2$ | ↗ $+\infty$ |

Gọi $a,b,c,n$ là các số thực và biểu thức: $P=-\left(e^{f(a)}+e^{f(b)}+e^{f(c)}\right)+\frac{3}{2}\left[f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)+1\right]^2$. Khẳng định đúng với mọi $a,b,c,n\in\mathbb{R}$ là

**A.** $0<P<3$. **B.** $7-3e\le P\le 0$. **C.** $P\ge 3$. **D.** $P<7-3e$.

**Câu 32.** **(Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Cho hàm số $f(x)=2^x-2^{-x}$. Gọi $m_0$ là số lớn nhất trong các số nguyên $m$ thỏa mãn $f(m)+f(2m-2^{12})<0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $m_0\in[1513;2019)$ **B.** $m_0\in[1009;1513)$ **C.** $m_0\in[505;1009)$ **D.** $m_0\in[1;505)$

**Câu 33.** **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để đồ thị hàm số $y=m\log_2^2 x-2\log_2 x+2m+1$ cắt trục hoành tại một điểm duy nhất có hoành độ thuộc khoảng $[1;+\infty)$.

**A.** $m\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}$. **B.** $m\in\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

**C.** $m\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}$. **D.** $m\in\left[-\frac{1}{2};0\right]\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Nguyễn Bảo Vương

**Câu 34.** **(Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020)** Cho $x;y$ là hai số thực dương thỏa mãn $x\ne y$ và $\left(2^x+\frac{1}{2^x}\right)^y<\left(2^y+\frac{1}{2^y}\right)^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x^2+3y^2}{xy-y^2}$ bằng

**A.** $\frac{13}{2}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $-2$. **D.** $6$.

**Câu 35.** **(Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020)** Xét các số thực dương $x,y$ thỏa mãn $2\left(x^2+y^2+4\right)+\log_2\left(\frac{2}{x}+\frac{2}{y}\right)=\frac{1}{2}(xy-4)^2$. Khi $x+4y$ đạt giá trị nhỏ nhất, $\frac{x}{y}$ bằng

**A.** $2$. **B.** $4$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

**Câu 36.** **(Chuyên Hưng Yên - 2020)** Biết phương trình $x^4+ax^3+bx^2+cx+1=0$ có nghiệm. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=a^2+b^2+c^2$

**A.** $T_{\min}=\frac{4}{3}$. **B.** $T_{\min}=4$. **C.** $T_{\min}=2$. **D.** $T_{\min}=\frac{8}{3}$.

**Câu 37.** **(Chuyên KHTN - 2020)** Cho $x, y$ là các số thực dương thỏa mãn $\log_2 \dfrac{3x+3y+4}{x^2+y^2} = (x+y-1)(2x+2y-1) - 4(xy+1)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{5x+3y-2}{2x+y+1}$.

**A.** $3$. **B.** $1$. **C.** $2$. **D.** $4$.

**Câu 38.** **(Chuyên Bến Tre - 2020)** Cho các số thực $x, y$ thỏa mãn $0 \le x, y \le 1$ và $\log_3\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right) + (x+1)(y+1) - 2 = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P$ với $P = 2x + y$

**A.** $2$. **B.** $1$. **C.** $0$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

**Câu 39.** **(Chuyên Chu Văn An - 2020)** Cho $x, y$ là các số thực dương thỏa mãn $\log_3 \dfrac{x+4y}{x+y} = 2x - y + 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{3x^4 y + 2xy + 2y^2}{x(x+y)^2}$.

**A.** $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $2$.

**Câu 40.** **(Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020)** Xét các số thực dương $a, b, x, y$ thỏa mãn $a > 1, b > 1$ và $a^{x^2} = b^{y^2} = (ab)^2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2\sqrt{2}x + y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

**A.** $[10;15)$. **B.** $[6;10)$. **C.** $(1;4)$. **D.** $[4;6)$.

**Câu 41.** **(Chuyên Lào Cai - 2020)** Xét các số thực dương $x$, $y$ thỏa mãn $\log_\pi x + \log_\pi y \ge \log_\pi (x + y^2)$. Biểu thức $P = x + 8y$ đạt giá trị nhỏ nhất của bằng:

**A.** $P_{\min} = 16$. **B.** $P_{\min} = \dfrac{33}{2}$. **C.** $P_{\min} = 11\sqrt{2}$. **D.** $P_{\min} = \dfrac{31}{2}$.

**Câu 42.** **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)** Xét các số thực $x, y$ thỏa mãn $\log_2(x-1) + \log_2(y-1) = 1$. Khi biểu thức $P = 2x + 3y$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $3x - 2y = a + b\sqrt{3}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Tính $T = ab$?

**A.** $T = 9$. **B.** $T = \dfrac{7}{3}$. **C.** $T = \dfrac{5}{3}$. **D.** $T = 7$.

**Câu 43.** (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020) Cho các số thực $a, b, c, d$ thỏa mãn $\log_{a^2+b^2+2}(4a + 6b - 7) = 1$ và $27^c \cdot 81^d = 6c + 8d + 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (a-c)^2 + (b-d)^2$.

**A.** $\dfrac{49}{25}$. **B.** $\dfrac{64}{25}$. **C.** $\dfrac{7}{5}$. **D.** $\dfrac{8}{5}$.

**Câu 44.** **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho hai số thực dương $x, y$ thỏa mãn $\log_2 x + x(x+y) = \log_2(6-y) + 6x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x^3 + 3y$ là

**A.** $16$. **B.** $18$. **C.** $12$. **D.** $20$.

**Câu 45.** **(Chuyên Thái Nguyên - 2020)** Xét các số thực dương $a,b$ thoả mãn $\log_2\dfrac{1-ab}{a+b}=2ab+a+b-3$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P=a+b$.

**A.** $P_{\min}=-1+2\sqrt{5}$. **B.** $P_{\min}=2+\sqrt{5}$. **C.** $P_{\min}=-1+\sqrt{5}$. **D.** $P_{\min}=1+2\sqrt{5}$.

**Câu 46.** **(ĐHQG Hà Nội - 2020)** Cho các số thực x, y thỏa mãn $\log_2\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right)-\log_2 y=2x+2y+xy-5$. Hỏi giá trị nhỏ nhất của $P=x^2+y^2+xy$ là bao nhiêu?

**A.** $30-20\sqrt{2}$. **B.** $33-22\sqrt{2}$. **C.** $24-16\sqrt{2}$. **D.** $36-24\sqrt{2}$.

**Câu 47.** **(Sở Bình Phước - 2020)** Cho $x,y$ là các số thực dương thỏa mãn $\log_2 x+\log_2 y+1\ge\log_2\left(x^2+2y\right)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x+2y$ bằng

**A.** $2\sqrt{2}+3$. **B.** $2+3\sqrt{2}$. **C.** $3+\sqrt{3}$. **D.** 9.

**Câu 48.** **(Sở Yên Bái - 2020)** Cho các số thực $x,y$ thuộc đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $2020^{1-x-y}=\dfrac{x^2+2021}{y^2-2y+2022}$. Gọi $M,m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $2x^3+6y^3+3x^2-9xy$. Tính $M.m$.

**A.** $-\dfrac{5}{2}$. **B.** $-5$. **C.** 5. **D.** $-3$.

**Câu 49.** **(Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020)** Xét các số thực dương $x.y$ thỏa mãn $\log_{\frac{1}{2}}x+\log_{\frac{1}{2}}y\le\log_{\frac{1}{2}}\left(x+y^2\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=x+3y$.

**A.** $P_{\min}=\dfrac{17}{2}$. **B.** $P_{\min}=8$. **C.** $P_{\min}=9$. **D.** $P_{\min}=\dfrac{25\sqrt{2}}{4}$.

**Câu 50.** **(Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020)** Cho các số thực $x$, $y$ thay đổi thỏa mãn $x^2+y^2-xy=1$ và hàm số $f(t)=2t^3-3t^2-1$. Gọi $M$ và $m$ tương ứng là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $Q=f\left(\dfrac{5x-y+2}{x+y+4}\right)$. Tổng $M+m$ bằng

**A.** $-4-3\sqrt{2}$. **B.** $-4-5\sqrt{2}$. **C.** $-4-2\sqrt{2}$. **D.** $-4-4\sqrt{2}$.

**Câu 51.** **(Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020)** Cho hai số thực $a$, $b$ lớn hơn $1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\log_a\left(\dfrac{a^2+4b^2}{4}\right)+\dfrac{1}{4\log_{ab}b}$.

**A.** $\dfrac{5}{4}$. **B.** $\dfrac{11}{4}$. **C.** $\dfrac{9}{4}$. **D.** $\dfrac{7}{4}$.

**Câu 52.** **(Hải Hậu - Nam Định - 2020)** Với các số thực dương $x,y,z$ thay đổi sao cho $\log_2\left(\dfrac{x+2y+2z}{x^2+y^2+z^2}\right)=x(x-4)+y(y-8)+z(z-8)-2$, gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\dfrac{x^2+y^2+z^2-4x-7y-11z+8}{6x+5y-86}$ thứ tự là $M$ và $m$. Khi đó $M+m$ bằng:

**A.** $-\dfrac{3}{2}$. **B.** 1. **C.** $-\dfrac{5}{2}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

**Câu 53.** **(Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020)** Cho các số thực $x, y$ thỏa mãn $\ln y \geq \ln(x^3+2) - \ln 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $H = e^{4y-x^3-x-2} - \dfrac{x^2+y^2}{2} + x(y+1) - y$.

**A.** $1$. **B.** $0$. **C.** $e$. **D.** $\dfrac{1}{e}$.

**Câu 54.** **(Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020)** Cho $x, y$ là các số thực dương thỏa mãn $2^{2xy+x+y} = \dfrac{8-8xy}{x+y}$. Khi $P = 2xy^2 + xy$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị của biểu thức $3x+2y$ bằng

**A.** $4$. **B.** $2$. **C.** $3$. **D.** $5$.

**Câu 55.** **(Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020)** Cho $x, y$ là các số dương thỏa mãn $\log(x+2y) = \log(x) + \log(y)$. Khi đó, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{x^2}{1+2y} + \dfrac{4y^2}{1+x}$ là:

**A.** $\dfrac{31}{5}$. **B.** $6$. **C.** $\dfrac{29}{5}$. **D.** $\dfrac{32}{5}$.

**Câu 56.** **(Chuyên Sư Phạm Hà Nội - 2020)** Cho các số thực $x, y$ thay đổi, thỏa mãn $x > y > 0$ và $\ln(x-y) + \dfrac{1}{2}\ln(xy) = \ln(x+y)$. Giá trị nhỏ nhất của $M = x+y$ là

**A.** $2\sqrt{2}$. **B.** $2$. **C.** $4$. **D.** $16$.

**Câu 57.** **(Sở Hà Nội - Lần 2 - 2020)** Xét $x$, $y$, $z$ là các số thực lớn hơn 1 thỏa mãn điều kiện $xyz = 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \log_2^3 x + \log_2^3 y + \dfrac{1}{4}\log_2^3 z$ bằng

**A.** $\dfrac{1}{32}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{16}$. **D.** $\dfrac{1}{8}$.

**Câu 58.** Có bao nhiêu số nguyên $x$ sao cho tồn tại số thực $y$ thỏa mãn $\log_3(x+y) = \log_4\left(x^2+2y^2\right)$?

**A.** 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** Vô số

**Câu 59.** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: $1 \leq x \leq 10^6$ và $\log\left(10x^2 - 20x + 20\right) = 10^{y^2} + y^2 - x^2 + 2x - 1$?

**A.** $4$. **B.** $2$. **C.** $3$. **D.** $1$.

**Câu 60.** Có bao nhiêu số nguyên $y < 10$ sao cho tồn tại số nguyên $x$ thỏa mãn $5^{\sqrt{2^y}+x-2} + \sqrt{2}^y = 5^{x^2-x-1} + (x-1)^2$?

**A.** 10 **B.** 1 **C.** 5 **D.** Vô số

**Câu 61.** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thoả mãn $1 \leq x \leq 2020$ và $2^y + y = 2x + \log_2\left(x + 2^{y-1}\right)$

**A.** $2021$. **B.** $10$. **C.** $2020$. **D.** $11$.

**Câu 62.** Có bao nhiêu số nguyên $x$ sao cho tồn tại số thực $y$ thỏa mãn $2\log_2(x+y) - \log_2\left(1+\sqrt{3}\right) = \log_{\sqrt{3}}\left(x^2+y^2-1\right)$

**A.** 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 5

**Câu 63.** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0 \le y \le 2020$ và $\log_3\left(\frac{2^x-1}{y}\right) = y+1-2^x$?

**A.** $2019$. **B.** $11$. **C.** $2020$. **D.** $4$.

**Câu 64.** **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020)** Xét các số thực $a,b,x$ thoả mãn $a>1, b>1, 0<x\neq 1$ và $a^{\log_b x} = b^{\log_a(x^2)}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \ln^2 a + \ln^2 b - \ln(ab)$.

**A.** $\frac{1-3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{e}{2}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $-\frac{3+2\sqrt{2}}{12}$.

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 18 HÀM SỐ MŨ - HÀM SỐ LOGARIT

## TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH MỨC 5-6 ĐIỂM

### Dạng 1. Tìm tập xác định

**Hàm số mũ**

- **Dạng:** $\begin{cases} y=a^x \\ y=a^u \end{cases}$ với $\begin{cases} a>0 \\ a\neq 1 \end{cases}$.
- **Tập xác định:** $D=\mathbb{R}$.

**Hàm số logarit**

- **Dạng:** $\begin{cases} y=\log_a x \\ y=\log_a u \end{cases}$ với $\begin{cases} a>0 \\ a\neq 1 \end{cases}$.
- **Đặc biệt:** $a=e \longrightarrow y=\ln x$ ; $a=10 \longrightarrow y=\log x=\lg x$.
- **Điều kiện xác định:** $u>0$.

**Câu 1.** **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Tập xác định của hàm số $y=\log_2 x$ là

**A.** $[0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $[2;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện xác định của hàm số $y=\log_2 x$ là $x>0$.

Vậy tập xác định của hàm số $y=\log_2 x$ là $D=(0;+\infty)$.

**Câu 2.** **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Tập xác định của hàm số $y=\log_5 x$ là

**A.** $[0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện: $x>0$.

Tập xác định: $D=(0;+\infty)$.

**Câu 3.** **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Tập xác định của hàm số $y=\log_6 x$ là

**A.** $[0;+\infty)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện: $x>0$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $D=(0;+\infty)$.

**Câu 4.** **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Tập xác định của hàm số $y=\log_3 x$ là

**A.** $(-\infty;0)$ **B.** $(0;+\infty)$ **C.** $(-\infty;+\infty)$ **D.** $[0;+\infty)$

**Lời giải**

**Chọn B.**

Điều kiện xác định: $x>0$.

**Câu 5.** **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Tập xác định của hàm số $y=\log_4 x$ là

**A.** $(-\infty;0)$. **B.** $[0;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện $x>0$.

**Câu 6.** **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Tập xác định của hàm số $y=5^x$ là

**A.** $\mathbb{R}$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **D.** $[0;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Tập xác định của hàm số $y=5^x$ là $\mathbb{R}$

**Câu 7.** **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Tập xác định của hàm số $y=2^x$ là

**A.** $\mathbb{R}$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $[0;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Hàm số mũ $y=2^x$ xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$ nên tập xác định là $D=\mathbb{R}$.

**Câu 8.** **(Mã 123 2017)** Tìm tập xác định $D$ của hàm số $y=\log_5\dfrac{x-3}{x+2}$.

**A.** $D=(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$ **B.** $D=(-2;3)$

**C.** $D=(-\infty;-2)\cup[3;+\infty)$ **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

Nguyễn Bảo Vương

**Lời giải**

**Chọn A**

Tập xác định của là tập các số $x$ để $\dfrac{x-3}{x+2}>0\Leftrightarrow(x-3)(x+2)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3\\x<-2\end{array}\right.$

Suy ra $D=(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$.

**Câu 9.** **(Đề Minh Họa 2017)** Tìm tập xác định $D$ của hàm số $y=\log_2\left(x^2-2x-3\right)$

**A.** $D=(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$ **B.** $D=[-1;3]$

**C.** $D=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$ **D.** $D=(-1;3)$

**Lời giải**

**Chọn C**

$y=\log_2\left(x^2-2x-3\right)$. Hàm số xác định khi $x^2-2x-3>0\Leftrightarrow x<-1$ hoặc $x>3$

Vậy tập xác định: $D=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$

**Câu 10.** **(Mã 104 2017)** Tìm tập xác định $D$ của hàm số $y=\log_3\left(x^2-4x+3\right)$.

**A.** $D=(1;3)$ **B.** $D=(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$

**C.** $D=\left(-\infty;2-\sqrt{2}\right)\cup\left(2+\sqrt{2};+\infty\right)$. **D.** $D=\left(2-\sqrt{2};1\right)\cup\left(3;2+\sqrt{2}\right)$

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện $x^2-4x+3>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<1 \\ x>3 \end{array}\right.$.

**Câu 11.** **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Tìm tập xác định của hàm số $y=\log_{2018}\left(3x-x^2\right)$.

**A.** $D=\mathbb{R}$ **B.** $D=(0;+\infty)$ **C.** $D=(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$ **D.** $D=(0;3)$

**Lời giải**

**Chọn D**

Hàm số xác định khi: $3x-x^2>0 \Leftrightarrow x\in(0;3)$

Vậy $D=(0;3)$

**Câu 12.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Tập xác định của $y=\ln\left(-x^2+5x-6\right)$ là

**A.** $[2;3]$ **B.** $(2;3)$ **C.** $(-\infty;2]\cup[3;+\infty)$ **D.** $(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$

**Lời giải**

**Chọn B**

Hàm số xác định khi và chỉ khi $-x^2+5x-6>0 \Leftrightarrow 2<x<3$. Vậy tập xác định của hàm số là $D=(2;3)$.

**Câu 13.** **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Tìm tập xác định của hàm số $y=\log_{\sqrt{5}}\dfrac{1}{6-x}$.

**A.** $(-\infty;6)$ **B.** $\mathbb{R}$ **C.** $(0;+\infty)$ **D.** $(6;+\infty)$

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện: $\dfrac{1}{6-x}>0 \Leftrightarrow 6-x>0 \Leftrightarrow x<6$. Do đó tập xác định của hàm số là $(-\infty;6)$.

**Câu 14.** **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Tập xác định của hàm số $y=\log_2\left(3-2x-x^2\right)$ là

**A.** $D=(-1;1)$. **B.** $D=(-1;3)$. **C.** $D=(-3;1)$. **D.** $D=(0;1)$.

**Lời giải**

Hàm số $y=\log_2\left(3-2x-x^2\right)$ xác định khi: $3-2x-x^2>0 \Leftrightarrow -3<x<1$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là: $D=(-3;1)$.

**Câu 15.** **(Sở Vĩnh Phúc 2019)** Tập xác định của hàm số $y=\log_2\left(x^2-2x-3\right)$ là

**A.** $(-1;3)$. **B.** $[-1;3]$.

**C.** $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$.

**Lời giải**

Hàm số xác định khi $x^2-2x-3>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x>3 \end{array}\right.$.

Vậy $D=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

**Câu 16.** **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Tìm tập xác định của hàm số: $y=2^{\sqrt{x}}+\log(3-x)$

**A.** $[0;+\infty)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $[0;3)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện xác định:

$$\begin{cases} x \ge 0 \\ 3-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x<3 \end{cases} \Rightarrow D=[0;3)$$

**Câu 17.** **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Tập xác định của hàm số $y=\left[\ln(x-2)\right]^{\pi}$ là

**A.** $\mathbb{R}$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $(2;+\infty)$.

**Lời giải**

ĐKXĐ: $\begin{cases} \ln(x-2)>0 \\ x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2>1 \\ x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow x-2>1 \Leftrightarrow x>3$.

TXĐ: $D=(3;+\infty)$.

**Câu 18.** **(THPT Ba Đình 2019)** Tìm tập xác định D của hàm số $y=\log_{2019}(4-x^2)+(2x-3)^{-2019}$.

**A.** $D=\left[-2;\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};2\right]$. **B.** $D=\left(-2;\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};2\right)$.

**C.** $D=\left(\frac{3}{2};2\right)$. **D.** $D=(-2;2)$.

**Lời giải**

Điều kiện có nghĩa của hàm số là $\begin{cases} 4-x^2>0 \\ 2x-3\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<x<2 \\ x\ne\frac{3}{2} \end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\left(-2;\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};2\right)$

**Câu 19.** Tìm tập xác định của hàm số $y=\sqrt{(x-2)^0}+\log_2(9-x^2)$ là

**A.** $D=(2;3)$. **B.** $D=(-3;3)\setminus\{2\}$. **C.** $D=(3;+\infty)$.. **D.** $D=(-3;3)$..

**Lời giải**

+ Điều kiện xác định: $\begin{cases} x-2\ne 0 \\ 9-x^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ne 2 \\ -3<x<3 \end{cases}$

+ Vậy tập xác định của hàm số là: $D=(-3;3)\setminus\{2\}$.

## Dạng 2. Tìm đạo hàm

### ▪ Đạo hàm hàm số mũ

$$\begin{cases} y=a^x \longrightarrow y'=a^x\ln a \\ y=a^u \longrightarrow y'=a^u\ln a.\boxed{u'} \end{cases}.$$

**Đặc biệt:** $\begin{cases} (e^x)'=e^x \\ (e^u)'=e^u.\boxed{u'} \end{cases}$ với $e\approx 2{,}71828...$

### ▪ Đạo hàm hàm số logarit

$$\begin{cases} y=\log_a x \longrightarrow y'=\dfrac{1}{x\ln a} \\ y=\log_a u \longrightarrow y'=\dfrac{\boxed{u'}}{u\ln a} \end{cases}.$$

**Đặc biệt:** $\begin{cases} (\ln x)'=\dfrac{1}{x} \\ (\ln u)'=\dfrac{\boxed{u'}}{u} \end{cases}$.

**Câu 1.** **(Đề Tham Khảo 2017)** Tìm đạo hàm của hàm số $y=\log x$.

**A.** $y'=\dfrac{\ln 10}{x}$ **B.** $y'=\dfrac{1}{x\ln 10}$ **C.** $y'=\dfrac{1}{10\ln x}$ **D.** $y'=\dfrac{1}{x}$

**Lời giải**

**Chọn B**

Áp dụng công thức $\left(\log_a x\right)'=\dfrac{1}{x\ln a}$, ta được $y'=\dfrac{1}{x\ln 10}$.

**Câu 2.** **(Mã 103 - 2019)** Hàm số $y=2^{x^2-x}$ có đạo hàm là

**A.** $2^{x^2-x}.\ln 2$. **B.** $(2x-1).2^{x^2-x}.\ln 2$.

**C.** $(x^2-x).2^{x^2-x-1}$. **D.** $(2x-1).2^{x^2-x}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $y'=(x^2-x)'.2^{x^2-x}.\ln 2=(2x-1).2^{x^2-x}.\ln 2$.

**Câu 3.** **(Mã 104 - 2019)** Hàm số $y=3^{x^2-x}$ có đạo hàm là

**A.** $(2x-1).3^{x^2-x}$. **B.** $\left(x^2-x\right).3^{x^2-x-1}$. **C.** $(2x-1).3^{x^2-x}.\ln 3$. **D.** $3^{x^2-x}.\ln 3$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $\left(a^u\right)'=u'.a^u.\ln a$ nên $\left(3^{x^2-x}\right)'=(2x-1).3^{x^2-x}.\ln 3$.

**Câu 4.** **(Đề Minh Họa 2017)** Tính đạo hàm của hàm số $y=13^x$

**A.** $y'=\dfrac{13^x}{\ln 13}$ **B.** $y'=x.13^{x-1}$ **C.** $y'=13^x\ln 13$ **D.** $y'=13^x$

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $y'=13^x\ln 13$.

**Câu 5.** **(Mã 110 2017)** Tính đạo hàm của hàm số $y=\log_2(2x+1)$.

**A.** $y'=\dfrac{2}{(2x+1)\ln 2}$ **B.** $y'=\dfrac{1}{(2x+1)\ln 2}$ **C.** $y'=\dfrac{2}{2x+1}$ **D.** $y'=\dfrac{1}{2x+1}$

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $y'=\left(\log_2(2x+1)\right)'=\dfrac{(2x+1)'}{(2x+1)\ln 2}=\dfrac{2}{(2x+1)\ln 2}$.

**Câu 6.** **(Đề Minh Họa 2017)** Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x+1}{4^x}$

**A.** $y'=\dfrac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$ **B.** $y'=\dfrac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$

**C.** $y'=\dfrac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$ **D.** $y'=\dfrac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $y'=\dfrac{(x+1)'.4^x-(x+1).(4^x)'}{(4^x)^2}=\dfrac{4^x-(x+1).4^x.\ln 4}{(4^x)^2}$

$=\dfrac{4^x.(1-x.\ln 4-\ln 4)}{(4^x)^2}=\dfrac{1-x.2\ln 2-2\ln 2}{4^x}=\dfrac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$.

**Câu 7.** **(Đề Tham Khảo 2019)** Hàm số $f(x)=\log_2(x^2-2x)$ có đạo hàm

**A.** $f'(x)=\dfrac{\ln 2}{x^2-2x}$ **B.** $f'(x)=\dfrac{1}{(x^2-2x)\ln 2}$

**C.** $f'(x)=\dfrac{(2x-2)\ln 2}{x^2-2x}$ **D.** $f'(x)=\dfrac{2x-2}{(x^2-2x)\ln 2}$

**Lời giải**

**Chọn D**

$f'(x)=\dfrac{(x^2-2x)'}{(x^2-2x)\ln 2}=\dfrac{2x-2}{(x^2-2x)\ln 2}$

Nguyễn Bảo Vương

**Câu 8.** **(Mã 101 - 2019)** Hàm số $y=2^{x^2-3x}$ có đạo hàm là

**A.** $(2x-3)2^{x^2-3x}\ln 2$. **B.** $2^{x^2-3x}\ln 2$.

**C.** $(2x-3)2^{x^2-3x}$. **D.** $(x^2-3x)2^{x^2-3x+1}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$y'=\left(2^{x^2-3x}\right)'=(2x-3)2^{x^2-3x}\ln 2$.

**Câu 9.** **(Mã 102 - 2019)** Hàm số $y=3^{x^2-3x}$ có đạo hàm là

**A.** $(2x-3).3^{x^2-3x}$. **B.** $3^{x^2-3x}.\ln 3$.

**C.** $(x^2-3x).3^{x^2-3x-1}$. **D.** $(2x-3).3^{x^2-3x}.\ln 3$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $y'=\left(3^{x^2-3x}\right)'=(2x-3).3^{x^2-3x}.\ln 3$.

**Câu 10.** Tính đạo hàm của hàm số $y=\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)$.

**A.** $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$ **B.** $y'=\dfrac{2}{\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$

**C.** $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$ **D.** $y'=\dfrac{1}{1+\sqrt{x+1}}$

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có:

$$y'=\left(\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)\right)'=\frac{\left(1+\sqrt{x+1}\right)'}{1+\sqrt{x+1}}=\frac{1}{2\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}.$$

**Câu 11.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Đạo hàm của hàm số $y=e^{1-2x}$ là

**A.** $y'=2e^{1-2x}$ **B.** $y'=-2e^{1-2x}$ **C.** $y'=-\dfrac{e^{1-2x}}{2}$ **D.** $y'=e^{1-2x}$

**Lời giải**

**Chọn B**

$y'=e^{1-2x}.(1-2x)'=-2.e^{1-2x}$

**Câu 12.** **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Đạo hàm của hàm số $y=\log_3\left(x^2+x+1\right)$ là:

**A.** $y'=\dfrac{(2x+1)\ln 3}{x^2+x+1}$ **B.** $y'=\dfrac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)\ln 3}$ **C.** $y'=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ **D.** $y'=\dfrac{1}{\left(x^2+x+1\right)\ln 3}$

**Lời giải**

**Chọn B**

$$y'=\frac{\left(x^2+x+1\right)'}{\left(x^2+x+1\right)\ln 3}=\frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)\ln 3}$$

**Câu 13.** **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Tính đạo hàm của hàm số $y=e^{x^2+x}$.

**A.** $(2x+1)e^x$ **B.** $(2x+1)e^{x^2+x}$ **C.** $(2x+1)e^{2x+1}$ **D.** $\left(x^2+x\right)e^{2x+1}$

**Lời giải**

**Chọn B**

$\left(e^{x^2+x}\right)'=e^{x^2+x}.\left(x^2+x\right)'=(2x+1)e^{x^2+x}$

**Câu 14.** **(THPT Hùng Vương Bình Phước 2019)** Cho hàm số $f(x)=\log_2\left(x^2+1\right)$, tính $f'(1)$

**A** $f'(1)=1$. **B.** $f'(1)=\dfrac{1}{2\ln 2}$. **C.** $f'(1)=\dfrac{1}{2}$. **D.** $f'(1)=\dfrac{1}{\ln 2}$.

**Lời giải**

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

$$f'(x)=\frac{2x}{\left(x^2+1\right).\ln 2}\Rightarrow f'(1)=\frac{1}{\ln 2}.$$

**Câu 15.** **(THPT-Thang-Long-Ha-Noi- 2019)** Tìm đạo hàm của hàm số $y=\ln\left(1+e^{2x}\right)$.

**A.** $y'=\dfrac{-2e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$. **B.** $y'=\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$. **C.** $y'=\dfrac{1}{e^{2x}+1}$. **D.** $y'=\dfrac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}$.

**Lời giải**

Ta có: $y'=\left[\ln\left(1+e^{2x}\right)\right]'=\dfrac{\left(1+e^{2x}\right)'}{1+e^{2x}}=\dfrac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}$.

**Câu 16.** **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{1-x}{2^x}$

**A.** $y'=\dfrac{2-x}{2^x}$. **B.** $y'=\dfrac{\ln 2.(x-1)-1}{\left(2^x\right)^2}$.

**C.** $y'=\dfrac{x-2}{2^x}$. **D.** $y'=\dfrac{\ln 2.(x-1)-1}{2^x}$.

**Lời giải**

Ta có $y'=\dfrac{(1-x)'.2^x-\left(2^x\right)'.(1-x)}{\left(2^x\right)^2}=\dfrac{-1.2^x-2^x.\ln 2.(1-x)}{\left(2^x\right)^2}=\dfrac{\ln 2.(x-1)-1}{2^x}$

**Câu 17.** **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Tính đạo hàm của hàm số $y=\log_9\left(x^2+1\right)$.

**A.** $y'=\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)\ln 9}$. **B.** $y'=\dfrac{x}{\left(x^2+1\right)\ln 3}$. **C.** $y'=\dfrac{2x\ln 9}{x^2+1}$. **D.** $y'=\dfrac{2\ln 3}{x^2+1}$.

**Lời giải**

Ta có $y'=\dfrac{\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)\ln 9}=\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)\ln 3^2}=\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)2\ln 3}=\dfrac{x}{\left(x^2+1\right)\ln 3}$.

Nguyễn Bảo Vương

**Câu 18.** **(KTNL GV THPT Lý Thái Tổ 2019)** Tính đạo hàm hàm số $y=e^x.\sin 2x$

**A.** $e^x\left(\sin 2x-\cos 2x\right)$. **B.** $e^x.\cos 2x$.

**C.** $e^x\left(\sin 2x+\cos 2x\right)$. **D.** $e^x\left(\sin 2x+2\cos 2x\right)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$y'=\left(e^x.\sin 2x\right)'=\left(e^x\right)'.\sin 2x+e^x.\left(\sin 2x\right)'=e^x.\sin 2x+2e^x.\cos 2x=e^x\left(\sin 2x+2\cos 2x\right)$

**Câu 19.** **(VTED 2019)** Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x+1}{4^x}$ là

**A.** $\dfrac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$ **B.** $\dfrac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$ **C.** $\dfrac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$ **D.** $\dfrac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$

**Lời giải**

**Chọn A**

$y'=\dfrac{(x+1)'4^x-(x+1)\left(4^x\right)'}{\left(4^x\right)^2}=\dfrac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$

**Câu 20.** **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{1}{x+1+\ln x}$ với $x>0$. Khi đó $-\dfrac{y'}{y^2}$ bằng

**A.** $\frac{x}{x+1}$. **B.** $1+\frac{1}{x}$. **C.** $\frac{x}{1+x+\ln x}$. **D.** $\frac{x+1}{1+x+\ln x}$.

**Lời giải**

$$y=\frac{1}{x+1+\ln x}\Rightarrow\frac{1}{y}=x+1+\ln x\Rightarrow\left(\frac{1}{y}\right)'=\left(x+1+\ln x\right)'\Leftrightarrow-\frac{y'}{y^2}=1+\frac{1}{x}.$$

**Câu 21.** **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Tính đạo hàm của hàm số $y=2^x\ln x-\frac{1}{e^x}$.

**A.** $y'=2^x\left(\frac{1}{x}+(\ln 2)(\ln x)\right)+\frac{1}{e^x}$. **B.** $y'=2^x\ln 2+\frac{1}{x}+e^{-x}$.

**C.** $y'=2^x\frac{1}{x}\ln 2+\frac{1}{e^x}$. **D.** $y'=2^x\ln 2+\frac{1}{x}-e^x$.

**Lời giải**

Ta có $y'=2^x(\ln 2)(\ln x)+\frac{2^x}{x}+\frac{1}{e^x}=\left(\frac{1}{x}+(\ln 2)(\ln x)\right)+\frac{1}{e^x}$.

**Câu 22.** **(VTED 2019)** Đạo hàm của hàm số $f(x)=\log_2\left|x^2-2x\right|$ là

**A.** $\frac{2x-2}{(x^2-2x)\ln 2}$ **B.** $\frac{1}{(x^2-2x)\ln 2}$ **C.** $\frac{(2x-2)\ln 2}{x^2-2x}$ **D.** $\frac{2x-2}{\left|x^2-2x\right|\ln 2}$

**Lời giải**

Ta có $f'(x)=\frac{\left(x^2-2x\right)'}{(x^2-2x)\ln 2}=\frac{2x-2}{(x^2-2x)\ln 2}$

Nguyễn Bảo Vương

**Câu 23.** **(Chuyên KHTN 2019)** Đạo hàm của hàm số $f(x)=\sqrt{\ln(\ln x)}$ là:

**A.** $f'(x)=\frac{1}{x\ln x\sqrt{\ln(\ln x)}}$. **B.** $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\ln(\ln x)}}$

**C.** $f'(x)=\frac{1}{2x\ln x\sqrt{\ln(\ln x)}}$. **D.** $f'(x)=\frac{1}{\ln x\sqrt{\ln(\ln x)}}$.

**Lời giải**

Áp dụng các công thức $(\ln u)'=\frac{u'}{\ln u}$ và $\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ ta có $f'(x)=\frac{1}{2x\ln x\sqrt{\ln(\ln x)}}$.

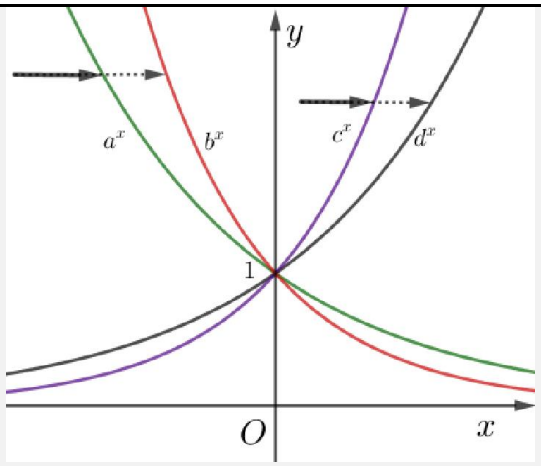
## Dạng 3. Khảo sát hàm số mũ, logarit

- **Sự biến thiên hàm số mũ**: $y=a^x$.

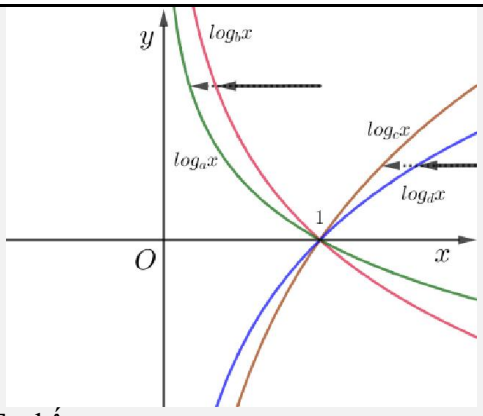
Nếu $\boxed{a>1}$ thì hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$. Nếu $\boxed{0<a<1}$ thì hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

- **Sự biến thiên hàm số logarit:** $y=\log_a x$. Nếu $\boxed{a>1}$: hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$. Nếu $\boxed{0<a<1}$: hàm nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

| Đồ thị hàm số mũ và logarit | |
|---|---|
| **ĐỒ THỊ HÀM SỐ MŨ** | **ĐỒ THỊ HÀM SỐ LOGARIT** |

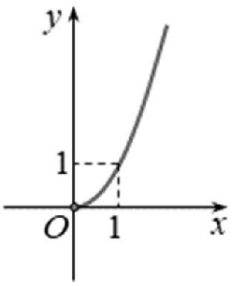



- Ta thấy: $a^x \downarrow \Rightarrow 0<a<1;\ b^x \downarrow \Rightarrow 0<b<1$.
- Ta thấy: $c^x \uparrow \Rightarrow c>1;\ d^x \uparrow \Rightarrow d>1$.
- **So sánh *a* với *b*:** Đứng trên cao, bắn mũi tên từ **trái sang phải**, trúng $a^x$ trước nên $a>b$.
- **So sánh *c* với *d*:** Đứng trên cao, bắn mũi tên từ **trái sang phải**, trúng $c^x$ trước nên $c>d$.
- Vậy $0<b<a<1<d<c$.

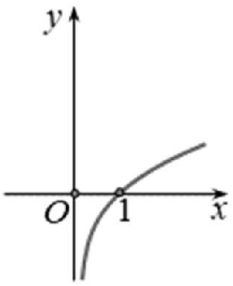



- Ta thấy: $\log_a x \downarrow \Rightarrow 0<a<1;\ \log_b x \downarrow \Rightarrow 0<b<1$.
- Ta thấy: $\log_c x \uparrow \Rightarrow c>1;\ \log_d x \uparrow \Rightarrow d>1$.
- **So sánh *a* với *b*:** Đứng trên cao, bắn mũi tên từ **phải sang trái**, trúng $\log_b x$ trước: $b>a$.
- **So sánh *c* với *d*:** Đứng trên cao, bắn mũi tên từ **phải sang trái**, trúng $\log_d x$ trước: $d>c$.
- Vậy $0<a<b<1<c<d$.

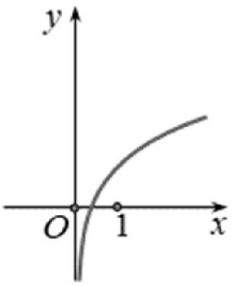
**Câu 1.** **(Đề Tham Khảo 2017)** Cho hàm số $f(x)=x\ln x$. Một trong bốn đồ thị cho trong bốn phương án A, B, C, D dưới đây là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$. Tìm đồ thị đó?



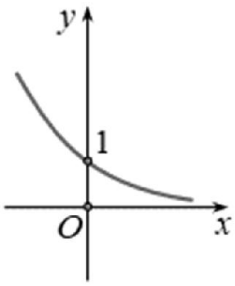
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

**A.** Hình 2 **B.** Hình 3 **C.** Hình 4 **D.** Hình 1

**Lời giải**

**Chọn B**

Tập xác định $D=(0;+\infty)$

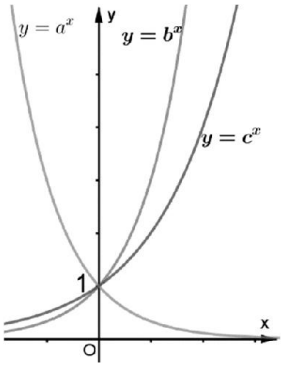
Ta có $f(x)=x\ln x \Rightarrow f'(x)=g(x)=\ln x+1$.

Ta có $g(1)=1$ nên đồ thị hàm số đi qua điểm $(1;1)$. Loại hai đáp án B và D

Và $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(g(x)\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\ln(x)+1\right]$. Đặt $t=\dfrac{1}{x}$. Khi $x\to 0^+$ thì $t\to+\infty$.

Do đó $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(g(x)\right)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left[\ln\left(\dfrac{1}{t}\right)+1\right]=-\lim\limits_{t\to+\infty}\left[\ln(t)-1\right]=-\infty$ nên loại đáp án A

**Câu 2.** Cho ba số thực dương $a,b,c$ khác 1. Đồ thị các hàm số $y=a^x, y=b^x, y=c^x$ được cho trong hình vẽ bên



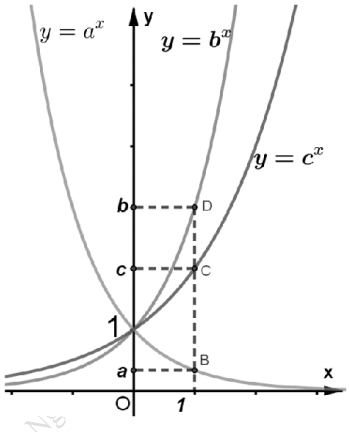

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $b<c<a$ **B.** $c<a<b$ **C.** $a<b<c$ **D.** $a<c<b$

**Lời giải**

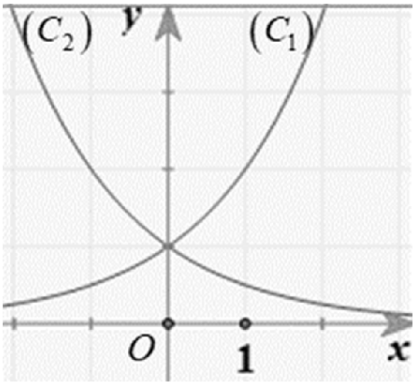
**Chọn D**

Đường thẳng $x=1$ đồ thị các hàm số $y=a^x, y=b^x, y=c^x$ tại các điểm có tung độ lần lượt là $y=a, y=b, y=c$ như hình vẽ:




Từ đồ thị kết luận $a<c<b$

**Câu 3.** **(Mã 105 2017)** Cho hàm số $y=a^x$, $y=b^x$ với $a$, $b$ là hai số thực dương khác 1, lần lượt có đồ thị là $(C_1)$ và $(C_2)$ như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?




**A.** $0<b<1<a$ **B.** $0<a<b<1$ **C.** $0<b<a<1$ **D.** $0<a<1<b$

**Lời giải**

**Chọn A**

Theo hình ta thấy hàm $y=a^x$ là hàm đồng biến nên $a>1$, còn hàm $y=b^x$ là hàm nghịch biến nên $0<b<1$. Suy ra $0<b<1<a$.

**Câu 4.** **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Trong các hàm số sau hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

**A.** $\log_3 x^2$ **B.** $y=\log\left(x^3\right)$ **C.** $y=\left(\dfrac{\mathrm{e}}{4}\right)^x$ **D.** $y=\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-x}$

**Lời giải**

**Chọn C**

Hàm số mũ $y=a^x$ với $0<a<1$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có $0<\dfrac{\mathrm{e}}{4}<1$ nên hàm số $y=\left(\dfrac{\mathrm{e}}{4}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

**Câu 5.** Mệnh đề nào trong các mệnh đề dưới đây sai?

**A.** Hàm số $y=\left(\dfrac{2018}{\pi}\right)^{x^2+1}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**B.** Hàm số $y=\log x$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

**C.** Hàm số $y=\ln(-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

**D.** Hàm số $y=2^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Hàm số $y=\ln(-x)$ TXĐ $D=(-\infty;0)$

Cơ số $a=e>1$ do đó hàm số đồng biết trên $(-\infty;0)$

**Câu 6.** **(THPT An Lão Hải Phòng 2019) Hàm số nào dưới đây đồng biến trên tập xác định của nó?**

**A.** $y=\left(\dfrac{1}{\pi}\right)^x$ **B.** $y=\left(\dfrac{2}{3}\right)^x$ **C.** $y=\left(\sqrt{3}\right)^x$ **D.** $y=(0,5)^x$

Nguyễn Bảo Vương

**Lời giải**

**Chọn C**

Hàm số $y=a^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a>1$.

Thấy các số $\dfrac{1}{\pi}$; $\dfrac{2}{3}$; $0,5$ nhỏ hơn 1, còn $\sqrt{3}$ lớn hơn 1 nên chọn **C**.

**Câu 7.** **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Cho hàm số $y=\log_2 x$. Mệnh đề nào dưới đây **sai?**

**A.** Đạo hàm của hàm số là $y'=\dfrac{1}{x\ln 2}$

**B.** Đồ thị hàm số nhận trục $Oy$ làm tiệm cận đứng

**C.** Tập xác định của hàm số là $(-\infty;+\infty)$

**D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

**Lời giải**

**Chọn C**

Hàm số $y=\log_2 x$ có tập xác định là $\mathfrak{D}=(0;+\infty)$.

**Câu 8.** **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Trong các hàm số sau, hàm số nào luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

**A.** $\mathrm{y}=\left(\dfrac{2015}{2016}\right)^x$ **B.** $\mathrm{y}=\left(\dfrac{3}{\sqrt{2016}-\sqrt{2}}\right)^x$ **C.** $\mathrm{y}=(0,1)^{2x}$ **D.** $y=(2016)^{2x}$

**Lời giải**

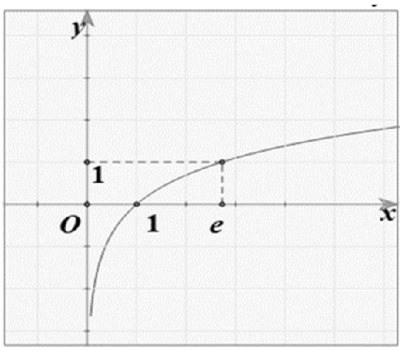
**Chọn D**

$y=(0,1)^{2x}=(0,01)^{x}$, $y=(2016)^{2x}=4064256^{x}$

Ta có các cơ số $\frac{2015}{2016}$; $\frac{3}{\sqrt{2016}-\sqrt{2}}$; $0,01$ đều nhỏ hơn $1$ nên các hàm số ở A, B, C nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Cơ số $4064256>1$ nên hàm số $y=(2016)^{2x}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**Câu 9.** Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?




**A.** $y=-e^{x}$. **B.** $y=|\ln x|$. **C.** $y=\ln x$. **D.** $y=e^{x}$.

**Lời giải**

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(e\,;1)$ và nằm cả trên và dưới trục hoành nên chỉ có hàm số $y=\ln x$ thoả mãn.

**Câu 10.** **(Chuyên Lê Thánh Tông 2019)** Tìm hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**A.** $f(x)=3^{x}$. **B.** $f(x)=3^{-x}$. **C.** $f(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{x}$. **D.** $f(x)=\frac{3}{3^{x}}$.

Nguyễn Bảo Vương

**Lời giải**

Hàm số $f(x)=a^{x}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nếu $a>1$ và nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nếu $0<a<1$.

Vậy hàm số $f(x)=3^{x}$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**Câu 11.** **(Chuyên Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y=\log_{\sqrt{5}}x$. Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề **sai**?

**A.** Hàm số đã cho đồng biến trên tập xác định.

**B.** Hàm số đã cho có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

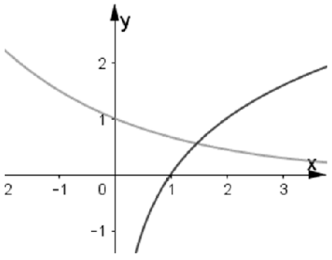
**C.** Đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận đứng là trục tung.

**D.** Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận ngang.

**Lời giải**

Ta có tập xác định của hàm số $y=\log_{\sqrt{5}}x$ là $D=(0;+\infty)$. Do đó đáp án B sai.

**Câu 12.** Cho đồ thị hàm số $y=a^{x}$ và $y=\log_{b}x$ như hình vẽ.




Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $0<a<\frac{1}{2}<b$. **B.** $0<a<1<b$. **C.** $0<b<1<a$. **D.** $0<a<1,\ 0<b<\frac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Xét hàm số $y=a^x$ đi qua $(0;1)$ suy ra đồ thị hàm số $(1)$ là đồ thị của hàm nghịch biến nên $0<a<1$.

Xét đồ thị hàm số $y=\log_b x$ đi qua $(1;0)$ suy ra đồ thị của hàm số $(2)$ là đồ thị của hàm đồng biến suy ra $b>1$.

Vậy $0<a<1<b$.

**Câu 13.** **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến?

**A.** $y=\ln x$. **B.** $y=\log_{1-\sqrt{\frac{2018}{2019}}} x$ **C.** $y=\log_{\pi} x$. **D.** $y=\log_{4-\sqrt{3}} x$.

**Lời giải**

+) $y=\ln x$; TXĐ: $D=(0;+\infty)$

$e>1$ suy ra hàm số $y=\ln x$ đồng biến trên $D$.

+) $y=\log_{1-\sqrt{\frac{2018}{2019}}} x$; TXĐ: $D=(0;+\infty)$

$0<\sqrt{\frac{2018}{2019}}<1\Rightarrow 0<1-\sqrt{\frac{2018}{2019}}<1$ suy ra hàm số $y=\log_{1-\sqrt{\frac{2018}{2019}}} x$ là hàm nghịch biến $D$.

+) $y=\log_{\pi} x$; TXĐ: $D=(0;+\infty)$

$\pi>1$ suy ra hàm số $y=\log_{\pi} x$ đồng biến trên $D$.

+) $y=\log_{4-\sqrt{3}} x$; TXĐ: $D=(0;+\infty)$

$4-\sqrt{3}>1$ suy ra hàm số $y=\log_{4-\sqrt{3}} x$ đồng biến trên $D$.

**Câu 14.** **(Sở Hà Nội 2019)** Đồ thị hàm số $y=\ln x$ đi qua điểm

**A.** $(1;0)$. **B.** $(2;e^2)$. **C.** $(2e;2)$. **D.** $(0;1)$.

**Lời giải**

Với $x=1\Rightarrow y=\ln x=\ln 1=0$.

Với $x=2\Rightarrow y=\ln x=\ln 2$.

Với $x=2e\Rightarrow y=\ln x=\ln 2\mathrm{e}=\ln 2+1$.

Với $x=0$, hàm số không xác định.

**Câu 15.** **(Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Trong các hàm số sau,hàm số nào luôn nghịch biến trên tập xác định của nó?

**A.** $y=\left(\frac{1}{2}\right)^2$. **B.** $y=\log x$. **C.** $y=2^x$. **D.** $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$.

**Lời giải**

Ta thấy hàm số $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ là hàm số mũ có có tập xác định là $\mathbb{R}$ cơ số $a=\frac{2}{3}<1$ nên nghịch biến trên tập xác định của nó.

Ngoài ra ta có thể loại các đáp án khác bằng cách giải thích cụ thể đặc điểm các hàm đó như sau:

Đáp án A loại vì: Hàm số $y=\left(\frac{1}{2}\right)^2$ là hàm hằng nên không nghịch biến cũng không đồng biến.

Đáp án B loại vì: Hàm số $y=\log x$ là hàm số logarit có tập xác định là $D=(0;+\infty)$ có cơ số $a=10>1$ nên luôn đồng biến trên tập xác định của nó.

Đáp án C loại vì: hàm số $y=2^x$ là hàm số mũ có tập xác định là $\mathbb{R}$ có cơ số $a=2>1$

**Câu 16.** **(Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

**A.** Hàm số $y=\log_2 x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**B.** Hàm số $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ nghịch biến trên tập xác định của nó.

**C.** Hàm số $y=2^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**D.** Hàm số $y=x^{\sqrt{2}}$ có tập xác định là $(0;+\infty)$.

**Lời giải**

Hàm số $y=\log_2 x$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

**Câu 17.** **(KTNL GV Bắc Giang 2019)** Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

**A.** $y=\log_{\sqrt{3}} x$. **B.** $y=\log_{\frac{\pi}{6}} x$. **C.** $y=\log_{\frac{e}{3}} x$. **D.** $y=\log_{\frac{1}{4}} x$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Hàm số $y=\log_a x$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty) \Leftrightarrow a>1 \Rightarrow$ Chọn A

**Câu 18.** **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

**A.** Đồ thị của hàm số $y=2^x$ và $y=\log_2 x$ đối xứng với nhau qua đường thẳng $y=-x$.

**B.** Đồ thị của hai hàm số $y=e^x$ và $y=\ln x$ đối xứng với nhau qua đường thẳng $y=x$.

**C.** Đồ thị của hai hàm số $y=2^x$ và hàm số $y=\frac{1}{2^x}$ đối xứng với nhau qua trục hoành.

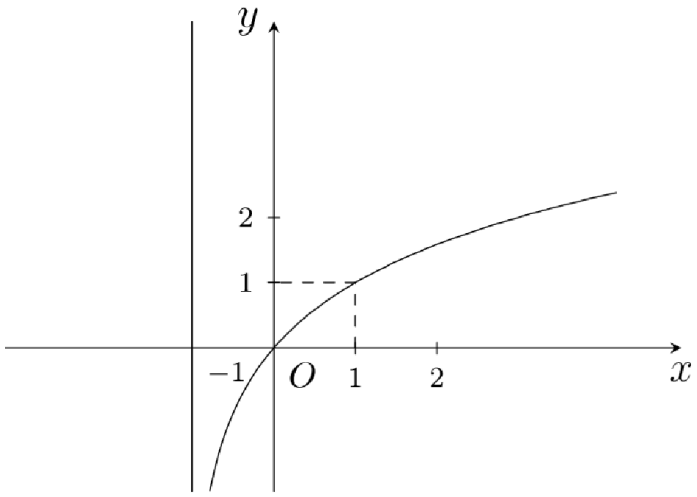
**D.** Đồ thị của hai hàm số $y=\log_2 x$ và $y=\log_2 \frac{1}{x}$ đối xứng với nhau qua trục tung.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đồ thị hàm số $y=a^x$ và đồ thị hàm số $y=\log_a x$ đối xứng với nhau qua đường phân giác góc phần tư thứ nhất ($y=x$), suy ra chọn **B.**

**Câu 19.** **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên?




**A.** $y=\log_3 x$. **B.** $y=\log_2 x+1$. **C.** $y=\log_2(x+1)$. **D.** $y=\log_3(x+1)$

**Lời giải**

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(0;0)$ nên loại đáp án ***A*** và ***B***.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(1;1)$ nên loại ***D***.

Vậy đáp án C thỏa mãn.

**Câu 20.** **(Chuyên Quốc Học Huế 2019)** Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào nghịch biến trên tập số thực $R$.

**A.** $y=\left(\frac{\pi}{3}\right)^x$ **B.** $y=\log_{\frac{\pi}{4}}(2x^2+1)$ **C.** $y=\left(\frac{2}{e}\right)^x$ **D.** $y=\log_{\frac{2}{3}} x$

**Lời giải**

Vì $\frac{2}{e}<1$ nên $y=\left(\frac{2}{e}\right)^x$ nghịch biến trên $R$.

**Câu 21.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên tập xác định của nó?

**A.** $y=\log_{\sqrt{3}} x$ **B.** $y=\log_2(\sqrt{x}+1)$ **C.** $y=\log_{\frac{\pi}{4}} x$ **D.** $y=\left(\frac{\pi}{3}\right)^x$

**Lời giải**

Xét hàm số $y=\log_{\frac{\pi}{4}} x$ có tập xác định: $D=(0;+\infty)$.

Nhận thấy cơ số $\frac{\pi}{4}<1$ nên $y=\log_{\frac{\pi}{4}} x$ nghịch biến trên tập xác định.

**Câu 22.** **(Chuyên Bắc Giang -2019** Cho hàm số $y=\frac{3^x}{\ln 3}-9x+17$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

**A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

**C.** Hàm số đạt cực trị tại $x=2$ **D.** Hàm số có giá trị cực tiểu là $y=\frac{9}{\ln 3}-1$

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $y'=\frac{3^x\ln 3}{\ln 3}-9=3^x-9$

$y'=0\Leftrightarrow 3^x=9\Leftrightarrow x=2$

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | | ↘ | $\frac{9}{\ln 3}-1$ | ↗ | |

**Câu 23.** **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên -2019)** Đồ thị $(L)$ của hàm số $f(x)=\ln x$ cắt trục hoành tại điểm $A$, tiếp tuyến của $(L)$ tại $A$ có phương trình là:

**A.** $y=2x+1$ **B.** $y=x-1$ **C.** $y=3x$ **D.** $y=4x-3$

**Lời giải**

**Chọn B**

TXĐ $D=(0;+\infty)$. $f'(x)=\frac{1}{x}$

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $\ln x=0\Leftrightarrow x=1\Rightarrow A(1;0)$

Vậy phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(L)$ tại điểm $A$ là:

$y=f'(1)(x-1)+0=x-1$, chọn **B.**

**Câu 24.** **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Hàm số $y=xe^{-3x}$ đạt cực đại tại

**A.** $x=\frac{1}{3e}$. **B.** $x=\frac{1}{3}$. **C.** $x=\frac{1}{e}$. **D.** $x=0$.

**Lời giải**

Tập xác định là $\mathbb{R}$.

$y'=e^{-3x}(1-3x)$.

Vì $e^{-3x}>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên dấu của $y'$ là dấu của nhị thức $1-3x$, suy ra $y'$ đổi dấu từ dương sang âm khi $x$ đi qua $\frac{1}{3}$.

Do đó, $x=\frac{1}{3}$ là điểm cực đại của hàm số.

**Câu 25.** **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Hàm số $y=\log_3(x^2-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào?

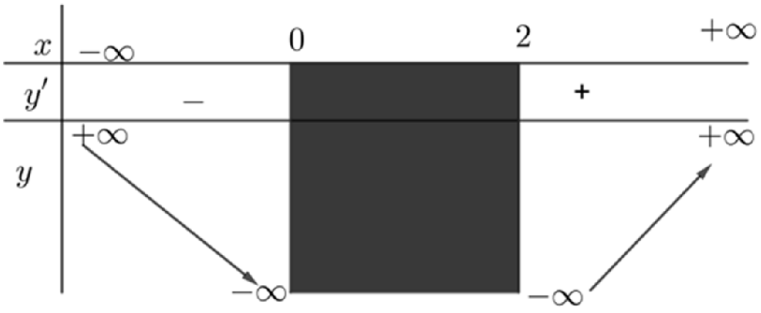
**A.** $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(0;1)$.

**Lời giải**

Hàm số $y=\log_3(x^2-2x)$ có tập xác định $D=(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$.

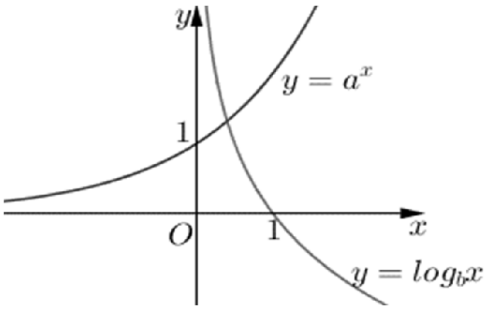
Ta có $y'=\frac{2x-2}{(x^2-2x)\ln 3}$. Khi đó $y'=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên:




Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số $y$ nghịch biến trên $(-\infty;0)$.

**Câu 26.** Cho đồ thị hàm số $y=a^x$ và $y=\log_b x$ như hình vẽ. Trong các khẳng định sau, đâu là khẳng định đúng




**A.** $0<a<1, 0<b<1$. **B.** $a>1, b>1$.

**C.** $0<b<1<a$. **D.** $0<a<1<b$.

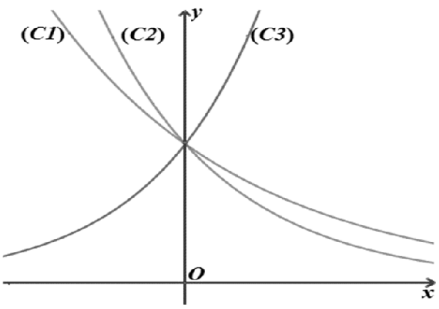
Nguyễn Bảo Vương

**Lời giải**

Dựa vào đồ thị ta thấy khi $x\to-\infty\Rightarrow y\to 0$ do đó đồ thị hàm số $y=a^x$ có $a>1$. Nên ta loại đáp án A và. **D.**

Ở đồ thị hàm số $y=\log_b x\Leftrightarrow x=b^y$ ta thấy khi $x\to+\infty\Rightarrow y\to-\infty$ do đó ta có $0<b<1$.

**Câu 27.** Hình vẽ bên thể hiện đồ thị của ba trong bốn hàm số $y=6^x$, $y=8^x$, $y=\dfrac{1}{5^x}$ và $y=\dfrac{1}{\sqrt{7}^x}$.




Hỏi $(C_2)$ là đồ thị hàm số nào?

**A.** $y=6^x$. **B.** $y=\dfrac{1}{\sqrt{7}^x}$. **C.** $y=\dfrac{1}{5^x}$. **D.** $y=8^x$

**Lời giải**

Hàm số có đồ thị $(C_2)$ là hàm số nghịch biến, do đó loại đáp án A,**D.** Cho $x=1$ suy ra $\dfrac{1}{\sqrt{7}}>\dfrac{1}{5}$

Do đó đồ thị hàm số $(C_2)$ là $y=\frac{1}{5^x}$.

**Câu 28.** **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{\ln x}{x}$ trên đoạn $[2;3]$ bằng

**A.** $\frac{\ln 2}{2}$. **B.** $\frac{\ln 3}{3}$. **C.** $\frac{3}{e^2}$. **D.** $\frac{1}{e}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Xét $y=f(x)=\frac{\ln x}{x}$. Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[2;3]$

$y'=\frac{1-\ln x}{x^2}$; $y'=0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}=0 \Leftrightarrow x=e\in[2;3]$

Có $f(2)=\frac{\ln 2}{2}\approx 0{,}3466$; $f(e)=\frac{1}{e}\approx 0{,}3679$; $f(3)=\frac{\ln 3}{3}\approx 0{,}366$,

Suy ra $\underset{x\in[2;3]}{Min} f(x)=\frac{\ln 2}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{\ln x}{x}$ trên đoạn $[2;3]$ bằng $\frac{\ln 2}{2}$.

**Câu 29.** **(Sở Ninh Bình 2019)** Cho hàm số $f(x)=\ln x-x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

**A.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

**B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

**C.** Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$.

**D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

**Lời giải**

Tập xác định của hàm số $f(x)$: $D=(0;+\infty)$

Ta có $f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$

$f'(x)=0\Rightarrow x=1$

Bảng xét dấu $f'(x)$:

| x | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f′(x) | | + | 0 | − | |

**Câu 30.** **(HSG Bắc Ninh 2019)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=(x^2-2)e^{2x}$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng:

**A.** $2e^4$ **B.** $-e^2$ **C.** $2e^2$ **D.** $-2e^2$

**Lời giải**

Ta có: $f'(x)=2(x^2-2)e^{2x}+2xe^{2x}=2(x^2+x-2)e^{2x}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in[-1;2]\\x=-2\notin[-1;2]\end{array}\right.$.

Và $f(-1)=-e^{-2}$; $f(2)=2e^{4}$; $f(1)=-e^{2}$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=(x^2-2)e^{2x}$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng $-e^2$ tại $x=1$.

**Câu 31.** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2^{x+1}-\frac{4}{3}\cdot 8^x$ trên $[-1;0]$ bằng

**A.** $\frac{4}{9}$. **B.** $\frac{5}{6}$. **C.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$$y'=2^{x+1}\ln 2-\frac{4}{3}\cdot 8^x\ln 8=0\Leftrightarrow 2^x-2\cdot\left(2^x\right)^3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x=0\\2^x=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1/2\end{array}\right.$$

Xét y(-1)=5/6 ; y(-1/2)=0,9428 ; y(0)=2/3. Ta có: $y_{\min}=\frac{2}{3}$.

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 18 HÀM SỐ MŨ - HÀM SỐ LOGARIT

## TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ – MỨC 7-8 ĐIỂM

### Dạng 1. Tìm tập xác định hàm số mũ - logarit

**Hàm số mũ**

**Dạng:** $\begin{cases} y=a^x \\ y=a^u \end{cases}$ với $\begin{cases} a>0 \\ a\neq 1 \end{cases}$.

**Tập xác định:** $D=\mathbb{R}$.

**Hàm số logarit**

**Dạng:** $\begin{cases} y=\log_a x \\ y=\log_a u \end{cases}$ với $\begin{cases} a>0 \\ a\neq 1 \end{cases}$.

**Đặc biệt:** $a=e \longrightarrow y=\ln x$ ; $a=10 \longrightarrow y=\log x=\lg x$.

**Điều kiện xác định:** $u>0$.

**Câu 1.** **(Mã 105 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=\log\left(x^2-2x-m+1\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

**A.** $m\le 2$ **B.** $m>2$ **C.** $m\ge 0$ **D.** $m<0$

**Lời giải**

**Chọn D**

Để hàm số có tập xác định $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $x^2-2x-m+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \Delta'<0 \Leftrightarrow (-1)^2-1.(-m+1)<0 \Leftrightarrow m<0$.

**Câu 2.** **(Mã 104 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=\ln\left(x^2-2x+m+1\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

**A.** $0<m<3$ **B.** $m<-1$ hoặc $m>0$

**C.** $m>0$ **D.** $m=0$

**Lời giải**

**Chọn C**

Hàm số có tập xác định $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $x^2-2x+m+1>0,\forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1>0(ld) \\ \Delta'=1-(1+m)<0 \Leftrightarrow m>0 \end{cases}$.

**Câu 3.** Hàm số $y=\ln\left(x^2+mx+1\right)$ xác định với mọi giá trị của $x$ khi.

**A.** $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right.$. **B.** $m>2$. **C.** $-2<m<2$. **D.** $m<2$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow x^2+mx+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow m^2-4<0 \Leftrightarrow -2<m<2$.

**Câu 4.** **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{1}{m\log_3^2 x-4\log_3 x+m+3}$ xác định trên khoảng $(0;+\infty)$

**A.** $m \in (-\infty;-4) \cup (1;+\infty)$. **B.** $m \in (1;+\infty)$.

**C.** $m \in (-4;1)$. **D.** $m \in (1;+\infty)$.

**Lời giải**

**Cách 1**

Điều kiện: $x > 0$.

Hàm số xác định khi:

$$m\log_3^2 x - 4\log_3 x + m + 3 \neq 0 \Leftrightarrow m\left(\log_3^2 x + 1\right) \neq 4\log_3 x - 3 \Leftrightarrow m \neq \frac{4\log_3 x - 3}{\log_3^2 x + 1},\ \forall x \in (0;+\infty).$$

Để hàm số xác định trên $(0;+\infty)$ thì phương trình $m = \frac{4\log_3 x - 3}{\log_3^2 x + 1}$ vô nghiệm $\forall x \in (0;+\infty)$

Xét hàm số $y = \frac{4\log_3 x - 3}{\log_3^2 x + 1}$.

Đặt $\log_3 x = t$ khi đó ta có $y = \frac{4t-3}{t^2+1}$, $y' = \frac{-4t^2+6t+4}{\left(t^2+1\right)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{-1}{2} \\ t = 2 \end{array}\right.$.

Ta có BBT:

| $t$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | | $0$ | $+$ | $0$ | | |
| $y$ | $0$ | ↘ | $-4$ | ↗ | $1$ | ↘ | $0$ |

Để hàm số xác định trên $(0;+\infty)$ thì $m \in (-\infty;-4) \cup (1;+\infty)$.

**Cách 2:**

Đề hàm số xác định trên khoảng $(0;+\infty)$ thi phương trình $m.\log_3^2 x - 4\log_3 x + m + 3 = 0$ vô nghiệm.

***TH1:*** $m = 0$ thì PT trở thành $-4\log_3 x + 3 = 0 \Leftrightarrow \log_3 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = 3^{\frac{3}{4}}$.

Vậy $m = 0$ không thỏa mãn.

***TH2:*** $m \neq 0$ thì để PT vô nghiệm $\Delta = (-4)^2 - 4m(m+3) < 0$

$\Leftrightarrow -4m^2 - 12m + 16 < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -4 \\ m > 1 \end{array}\right.$.

Để hàm số xác định trên $(0;+\infty)$ thì $m \in (-\infty;-4) \cup (1;+\infty)$.

**Câu 5.** Tìm tất cả các giá trị của $m$ để hàm số $y = \ln\left(-x^2 + mx + 2m + 1\right)$ xác định với mọi $x \in (1;2)$.

**A.** $m \geq -\frac{1}{3}$. **B.** $m \geq \frac{3}{4}$. **C.** $m > \frac{3}{4}$. **D.** $m < -\frac{1}{3}$.

**Lời giải**

Hàm số xác định với mọi $x \in (1;2)$ khi $-x^2 + mx + 2m + 1 > 0, \forall x \in (1;2)$.

$\Leftrightarrow f(x) = x^2 - mx - 2m - 1 < 0, \forall x \in (1;2)$.

$\Rightarrow f(x) = 0$ có 2 nghiệm thỏa mãn $x_1 \leq 1 < 2 \leq x_2$.

$$\Rightarrow \begin{cases} f(1) \le 0 \\ f(2) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3m \le 0 \\ -4m+3 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge \frac{3}{4}.$$

**Câu 6.** **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên -2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y = \log(x^2 - 4x - m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

**A.** $m > -4$. **B.** $m < 0$. **C.** $m < -4$. **D.** $m < -3$.

**Lời giải**

Hàm số $y = \log(x^2 - 4x - m + 1)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $x^2 - 4x - m + 1 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

**Câu 7.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ trên $[-2018; 2018]$ để hàm số $y = \ln\left(x^2 - 2x - m + 1\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$?

**A.** 2019 **B.** 2017 **C.** 2018 **D.** 1009

**Lời giải**

Hàm số $y = \ln\left(x^2 - 2x - m + 1\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi:

$x^2 - 2x - m + 1 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' < 0 \Leftrightarrow 1 + m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Kết hợp với điều kiện $m$ nguyên thuộc $[-2018; 2018]$ ta có 2018 giá trị của $m$.

**Câu 8.** **(THPT Nghĩa Hưng Nđ- 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y = \log\left(x^2 - 2mx + 4\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

**A.** $-2 \le m \le 2$. **B.** $m = 2$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array}\right.$. **D.** $-2 < m < 2$.

**Lời giải**

Nguyễn Bảo Vương

$y = \log\left(x^2 - 2mx + 4\right)$

Điều kiện xác định của hàm số trên: $x^2 - 2mx + 4 > 0$.

Để tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$ thì $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0, \forall m \\ m^2 - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m < 2$.

Vậy đáp án đúng là đáp án **D.**

**Câu 9.** Số các giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y = \log\left(mx - m + 2\right)$ xác định trên $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ là

**A.** 4 **B.** 5 **C.** Vô số **D.** 3

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện xác định

$$mx - m + 2 > 0 \Leftrightarrow mx > m - 2 \quad (1)$$

**Trường hợp 1.** $m = 0$.

$(1) \Leftrightarrow 2 > 0$ (luôn đúng với $\forall x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$).

**Trường hợp 2.** $m > 0$.

$$(1) \Leftrightarrow x > \frac{m-2}{m}$$

Để hàm số $y = \log\left(mx - m + 2\right)$ xác định trên $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ thì

$$\frac{m-2}{m}<\frac{1}{2}\Leftrightarrow 0<m<4.$$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{1;2;3\}$.

**Trường hợp 3.** $m<0$.

$$(1)\Leftrightarrow x<\frac{m-2}{m}.$$

Suy ra tập xác định của hàm số $y=\log(mx-m+2)$ là $D=\left(-\infty;\frac{m-2}{m}\right)$.

Do đó $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)\not\subset D$ suy ra không có giá trị $m<0$ nào thỏa yêu cầu bài toán.

Từ 3 trường hợp trên ta được $m\in\{0;1;2;3\}$.

**Câu 10.** **(Gia Bình 2019)** Tìm tất cả các giá trị của $m$ để hàm số $y=\log_{2018}\left(2018^x-x-\frac{x^2}{2}-m\right)$ xác định với mọi giá trị $x$ thuộc $[0;+\infty)$

**A.** $m>9$ **B.** $m<1$ **C.** $0<m<1$ **D.** $m<2$

**Lời giải**

**Chọn B**

Hàm số đã cho xác định $\forall x\in[0;+\infty)$

$\Leftrightarrow 2018^x-x-\frac{x^2}{2}-m>0,\ \forall x\in[0;+\infty)$

$\Leftrightarrow 2018^x-x-\frac{x^2}{2}>m,\ \forall x\in[0;+\infty)$.

YCBT $\Leftrightarrow m<\min\limits_{x\in[0;+\infty)} f(x)$.

Đặt $f(x)=2018^x-x-\frac{x^2}{2}, x\in[0;+\infty)$

$\Rightarrow f'(x)=2018^x\ln(2018)-1-x$

$\Rightarrow f''(x)=2018^x(\ln 2018)^2-1>0,\ \forall x\in[0;+\infty)$

Khi đó $f'(x)$ đồng biến trên $x\in[0;+\infty)$ và $f'(0)=\ln(2018)-1>0$

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $x\in[0;+\infty)$ và $f(0)=1$

Vậy $m<1$ thì thỏa YCBT.

**Câu 11.** Hàm số $y=\log_2\left(4^x-2^x+m\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ thì

**A.** $m\ge\frac{1}{4}$. **B.** $m>0$. **C.** $m<\frac{1}{4}$. **D.** $m>\frac{1}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện xác định: $4^x-2^x+m>0$

Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R}\Leftrightarrow 4^x-2^x+m>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m>-4^x+2^x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ (*)

Đặt $t=2^x,(t>0)$

Khi đó (*) trở thành $m>-t^2+t,\ \forall t>0\ \Leftrightarrow m>\max\limits_{(0;+\infty)} f(t)$ với $f(t)=-t^2+t,\ t>0$

Ta có: $f'(t)=-2t+1$, $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{2}$

Bảng biến thiên của hàm số $f(t)=-t^2+t,\ t>0$:

| $t$ | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(t)$ | ‖ | $0$ | $\frac{1}{4}$ | | $-\infty$ |

Từ BBT ta thấy $\max\limits_{(0;+\infty)} f(t)=\frac{1}{4}$ đạt được khi $t=\frac{1}{2}$

Vậy $m>\max\limits_{(0;+\infty)} f(t) \Leftrightarrow m>\frac{1}{4}$

**Câu 12.** **(Chuyên Bắc Ninh 2019)** Tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y=\frac{3x+5}{\log_{2018}\left(x^2-2x+m^2-4m+5\right)}$ xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$ là

**A.** $(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$. **B.** $(1;3)\setminus\{2\}$. **C.** $(-\infty;1]$. **D.** $[1;3]\setminus\{2\}$.

**Lời giải**

Xét hàm số $y=\frac{3x+5}{\log_{2018}\left(x^2-2x+m^2-4m+5\right)}$

ĐKXĐ: $\begin{cases}x^2-2x+m^2-4m+5>0\\ \log_{2018}\left(x^2-2x+m^2-4m+5\right)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-2x+m^2-4m+5>0\\ x^2-2x+m^2-4m+5\neq 1\end{cases}$.

Nên điều kiện để hàm số xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$ là $\begin{cases}x^2-2x+m^2-4m+5>0\\ x^2-2x+m^2-4m+4\neq 0\end{cases}$ với $\forall x\in\mathbb{R}$.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi :

$\begin{cases}\Delta_1'=1-\left(m^2-4m+5\right)<0\\ \Delta_2'=1-\left(m^2-4m+4\right)<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-m^2+4m-4<0\\ -m^2+4m-3<0\end{cases} \Leftrightarrow -m^2+4m-3<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m<1\\ m>3\end{array}\right.$.

Vậy $m\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$.

**Câu 13.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để hàm số $y=\log_{2018}\left(2017^x-x-\frac{x^2}{2}-m+1\right)$ xác định với mọi $x$ thuộc $[0;+\infty)$?

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $2018$. **D.** Vô số.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện $2017^x-x-\frac{x^2}{2}-m+1>0, \forall x\in[0;+\infty) \Leftrightarrow 2017^x-x-\frac{x^2}{2}>m-1, \forall x\in[0;+\infty)$.

Xét hàm số $f(x)=2017^x-x-\frac{x^2}{2}, \forall x\in[0;+\infty)$ liên tục có

$f'(x)=2017^x\ln 2017-1-x, \forall x\in[0;+\infty)$

$f''(x)=2017^x \ln^2 2017-1>0, \forall x\in[0;+\infty)$

Vậy hàm số $f'(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$ suy ra $f'(x)\ge f'(0)=\ln 2017-1>0, \forall x\in[0;+\infty)$

Vậy hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$ suy ra $\min\limits_{[0;+\infty)} f(x)=f(0)=1$.

Mặt khác $m-1<\min\limits_{[0;+\infty)} f(x)=f(0)=1\Leftrightarrow m<2$.

Vậy có vô số giá trị nguyên $m$ thỏa mãn.

**Câu 14.** **(Sở Vĩnh Phúc 2019)** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{2m+1-x}}+\log_3\sqrt{x-m}$ xác định trên khoảng $(2;3)$?

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

**Lời giải**

Hàm số xác định $\Leftrightarrow\begin{cases}2m+1-x>0\\x-m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<2m+1\\x>m\end{cases}\Rightarrow D=(m;2m+1)$.

Hàm số đã cho xác định trên khoảng $(2;3)$ nên $(2;3)\subset D=(m;2m+1)\Leftrightarrow m\le 2<3\le 2m+1$

$\Leftrightarrow\begin{cases}m\le 2\\2m+1\ge 3\end{cases}\Leftrightarrow 1\le m\le 2$.

Vì $m$ nguyên dương nên $m\in\{1;2\}$.

**Câu 15.** **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2020)** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y=\log_{2020}(mx-m+2)$ xác định trên $[1;+\infty)$.

**A.** $m\le 0$. **B.** $m\ge 0$. **C.** $m\ge -1$. **D.** $m\le -1$.

**Lời giải**

Nguyễn Bảo Vương

**Chọn B**

**Cách 1:**

Điều kiện: $mx-m+2>0\Leftrightarrow mx>m-2\ (1)$

• Trường hợp 1: $m=0\Rightarrow(1)$ trở thành $0>-1$ (luôn thỏa mãn).

• Trường hợp 2: $m>0\Rightarrow(1)\Leftrightarrow x>\dfrac{m-2}{m}\Rightarrow$ Tập xác định của hàm số là $D=\left(\dfrac{m-2}{m};+\infty\right)$.

Khi đó, yêu cầu bài toán trở thành $\dfrac{m-2}{m}<1\Leftrightarrow m-2<m\Leftrightarrow -2<0$ (luôn thỏa mãn).

• Trường hợp 3: $m<0\Rightarrow(1)\Leftrightarrow x<\dfrac{m-2}{m}\Rightarrow$ Tập xác định của hàm số là $D=\left(-\infty;\dfrac{m-2}{m}\right)$. Do đó không tồn tại $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy tất cả các giá trị cần tìm là $m\ge 0$.

**Cách 2:**

Điều kiện: $mx-m+2>0,\ \forall x\in[1;+\infty)\Leftrightarrow m(x-1)>-2,\ \forall x\in[1;+\infty)\ (1)$.

• Với $x=1$, ta được $0m>-2$, đúng với mọi $m$.

• Với $x>1$, ta được $(1)\Leftrightarrow m>\dfrac{-2}{x-1},\ \forall x\in(1;+\infty)\ (2)$.

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{-2}{x-1}$ với $x>1$, ta có: $g'(x)=\dfrac{2}{(x-1)^2}>0,\ \forall x>1$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ ↗ | $0$ |

Từ bảng biến thiên, ta được $(2) \Leftrightarrow m \ge 0$.

Vậy, tất cả các giá trị cần tìm của $m$ là $m \ge 0$.

**Câu 16.** **(Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Tập xác định của hàm số $y = \log_{2020}\left(\log_{2019}\left(\log_{2018}\left(\log_{2017} x\right)\right)\right)$ là $D = (a;+\infty)$. Giá trị của $a$ bằng

**A.** $2018^{2019}$. **B.** $2019^{2020}$. **C.** $2017^{2018}$. **D.** $0$.

**Lời giải**

Điều kiện xác định của hàm số đã cho là:

$$\begin{cases} x>0 \\ \log_{2017} x>0 \\ \log_{2018}\left(\log_{2017} x\right)>0 \\ \log_{2019}\left(\log_{2018}\left(\log_{2017} x\right)\right)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \log_{2017} x>0 \\ \log_{2018}\left(\log_{2017} x\right)>0 \\ \log_{2018}\left(\log_{2017} x\right)>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \log_{2017} x>0 \\ \log_{2018}\left(\log_{2017} x\right)>1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \log_{2017} x>0 \\ \log_{2017} x>2018 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \log_{2017} x>2018 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x>2017^{2018} \end{cases} \Leftrightarrow x>2017^{2018}.$$

Bảo Vương

## Dạng 2. Tính đạo hàm mũ – logarit

**Đạo hàm hàm số mũ**

$$\begin{cases} y=a^x \longrightarrow y'=a^x \ln a \\ y=a^u \longrightarrow y'=a^u \ln a.\boxed{u'} \end{cases}.$$

**Đặc biệt:** $\begin{cases} (e^x)'=e^x \\ (e^u)'=e^u.\boxed{u'} \end{cases}$ với $e \approx 2{,}71828...$

**Đạo hàm hàm số logarit**

$$\begin{cases} y=\log_a x \longrightarrow y'=\dfrac{1}{x\ln a} \\ y=\log_a u \longrightarrow y'=\dfrac{\boxed{u'}}{u\ln a} \end{cases}.$$

**Đặc biệt:** $\begin{cases} (\ln x)'=\dfrac{1}{x} \\ (\ln u)'=\dfrac{\boxed{u'}}{u} \end{cases}$.

**Câu 1.** **(Đề Tham Khảo 2017)** Cho hàm số $y=\dfrac{\ln x}{x}$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $2y'+xy''=-\dfrac{1}{x^2}$. **B.** $y'+xy''=\dfrac{1}{x^2}$. **C.** $y'+xy''=-\dfrac{1}{x^2}$. **D.** $2y'+xy''=\dfrac{1}{x^2}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

**Cách 1.** $y'=\dfrac{(\ln x)'.x-x'.\ln x}{x^2}=\dfrac{\frac{1}{x}.x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$y''=\dfrac{(1-\ln x)'.x^2-(x^2)'(1-\ln x)}{x^4}=\dfrac{-\frac{1}{x}.x^2-2x(1-\ln x)}{x^4}$

$=\dfrac{-x-2x(1-\ln x)}{x^4}=-\dfrac{1+2(1-\ln x)}{x^3}=-\dfrac{3-2\ln x}{x^3}$

Suy ra: $2y'+xy''=2.\dfrac{1-\ln x}{x^2}-x\dfrac{3-2\ln x}{x^3}=\dfrac{2-2\ln x-3+2\ln x}{x^2}=-\dfrac{1}{x^2}$.

**Cách 2.** Ta có $xy=\ln x$, lấy đạo hàm hai vế, ta được $y+xy'=\dfrac{1}{x}$.

Tiếp tục lấy đạo hàm hai vế của biểu thức trên, ta được $y'+y'+xy''=-\dfrac{1}{x^2}$, hay $2y'+xy''=-\dfrac{1}{x^2}$.

**Câu 2.** **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Cho hàm số $f(x)=\ln 2018+\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$. Tính $S=f'(1)+f'(2)+f'(3)+\cdots+f'(2017)$.

**A.** $S=\dfrac{4035}{2018}$ **B.** $S=\dfrac{2017}{2018}$ **C.** $S=\dfrac{2016}{2017}$ **D.** $S=2017$

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $f(x)=\ln 2018+\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$

Do đó $S=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{2017}-\dfrac{1}{2018}=1-\dfrac{1}{2018}=\dfrac{2017}{2018}$.

**Câu 3.** **(Sở Vĩnh Phúc 2019)** Cho hàm số $f(x)=\ln\dfrac{2018x}{x+1}$. Tính tổng $S=f'(1)+f'(2)+\ldots+f'(2018)$.

**A.** $\ln 2018$. **B.** $1$. **C.** $2018$. **D.** $\dfrac{2018}{2019}$.

**Lời giải**

Ta có: $f'(x)=\left(\ln\dfrac{2018x}{x+1}\right)'=\dfrac{1}{\frac{2018x}{x+1}}.\left(\dfrac{2018x}{x+1}.\right)'=\dfrac{x+1}{2018x}.\dfrac{2018}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{x.(x+1)}$

Vậy $S=f'(1)+f'(2)+\ldots+f'(2018)$

$=\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\ldots+\dfrac{1}{2018.2019}=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{2018}-\dfrac{1}{2019}$

$=1-\dfrac{1}{2019}=\dfrac{2018}{2019}$.

**Câu 4.** Cho hàm $y=x\left[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)\right]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $x^2y''+xy'-2y+4=0$. **B.** $x^2y''-xy'-2xy=0$.

**C.** $2x^2y'+xy''+2y-5=0$. **D.** $x^2y''-xy'+2y=0$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $y = x\left[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)\right]$

$y' = \cos(\ln x) + \sin(\ln x) - \sin(\ln x) + \cos(\ln x) = 2\cos(\ln x)$

$y'' = -\frac{2}{x}\sin(\ln x)$

Từ đó kiểm tra thấy đáp án $D$ đúng vì :

$x^2y'' - xy' + 2y = y'' = -2x\sin(\ln x) - 2x\cos(\ln x) + 2x\left[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)\right] = 0$.

**Câu 5.** **(THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019)** Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_{2019}|x|, \forall x \neq 0$.

**A.** $y' = \frac{1}{|x|\ln 2019}$. **B.** $y' = \frac{1}{|x|}$. **C.** $y' = \frac{1}{x\ln 2019}$. **D.** $y' = x\ln 2019$.

**Lời giải**

$$y = \log_{2019}|x| = \begin{cases} \log_{2019} x & ,khi\ x > 0 \\ \log_{2019}(-x) & ,khi\ x < 0 \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} \frac{1}{x\ln 2019} & ,khi\ x > 0 \\ \frac{-1}{(-x)\ln 2019} & ,khi\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow y' = \frac{1}{x\ln 2019}.$$

**Câu 6.** **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Cho hàm số $f(x) = e^{x-x^2}$. Biết phương trình $f''(x) = 0$ có hai nghiệm $x_1$, $x_2$. Tính $x_1.x_2$.

**A.** $x_1.x_2 = -\frac{1}{4}$ **B.** $x_1.x_2 = 1$ **C.** $x_1.x_2 = \frac{3}{4}$ **D.** $x_1.x_2 = 0$

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $f'(x) = (1-2x)e^{x-x^2}$.

$f''(x) = -2e^{x-x^2} + (1-2x)(1-2x)e^{x-x^2} = (-1-4x+4x^2)e^{x-x^2}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (-1-4x+4x^2)e^{x-x^2} = 0 \Leftrightarrow -1-4x+4x^2 = 0$ khi đó $x_1x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{4}$.

**Câu 7.** **(Sở Bắc Ninh - 2020)** Cho hàm số $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+2}\right)$. Tổng $f'(1) + f'(3) + f'(5) + ... + f'(2021)$ bằng

**A.** $\frac{4035}{2021}$.. **B.** $\frac{2021}{2022}$. **C.** 2021.. **D.** $\frac{2022}{2023}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+2}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{x(x+2)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$

Vậy

$$f'(1)+f'(3)+f'(5)+...+f'(2021)=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+.....+\frac{1}{2021}-\frac{1}{2023}$$

$$=1-\frac{1}{2023}=\frac{2022}{2023}.$$

**Câu 8.** **(Kiểm tra năng lực - ĐH - Quốc Tế - 2019)** Phương trình $f'(x)=0$ với $f(x)=\ln\left(x^4-4x^3+4x^2-\frac{1}{2}\right)$ có bao nhiêu nghiệm?

**A.** 0 nghiệm. **B.** 1 nghiệm. **C.** 2 nghiệm. **D.** 3 nghiệm.

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện: $x^4-4x^3+4x^2-\frac{1}{2}>0$.

Ta có: $f'(x)=\frac{4x^3-12x^2+8x}{x^4-4x^3+4x^2-\frac{1}{2}}\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow 4x^3-12x^2+8x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Đối chiếu điều kiện ta được $x=1$.

Vậy phương trình $f'(x)=0$ có 1 nghiệm.

**Câu 9.** Cho hàm số $f(x)=\ln\frac{x+1}{x+4}$. Tính giá trị của biểu thức $P=f'(0)+f'(3)+f'(6)+...+f'(2019)$.

**A.** $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{2024}{2023}$. **C.** $\frac{2022}{2023}$. **D.** $\frac{2020}{2023}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Với $x\in[0;+\infty)$ ta có $x+1>0$ và $x+4>0$ nên $f(x)=\ln\frac{x+1}{x+4}=\ln(x+1)-\ln(x+4)$.

Từ đó $f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+4}$.

Do đó $P=f'(0)+f'(3)+f'(6)+...+f'(2019)$

$$=\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+...+\left(\frac{1}{2020}-\frac{1}{2023}\right)=1-\frac{1}{2023}=\frac{2022}{2023}.$$

**Câu 10.** **(THPT Minh Khai - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)=(2m-1)e^x+3$. Giá trị của $m$ để $f'(-\ln 3)=\frac{5}{3}$ là

**A.** $m=\frac{7}{9}$. **B.** $m=\frac{2}{9}$. **C.** $m=3$. **D.** $m=-\frac{3}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$f'(x)=(2m-1)e^x$.

$\Rightarrow f'(-\ln 3)=(2m-1)e^{-\ln 3}=\dfrac{2m-1}{e^{\ln 3}}=\dfrac{2m-1}{3}$.

$f'(-\ln 3)=\dfrac{5}{3}\Leftrightarrow\dfrac{2m-1}{3}=\dfrac{5}{3}\Leftrightarrow m=3$.

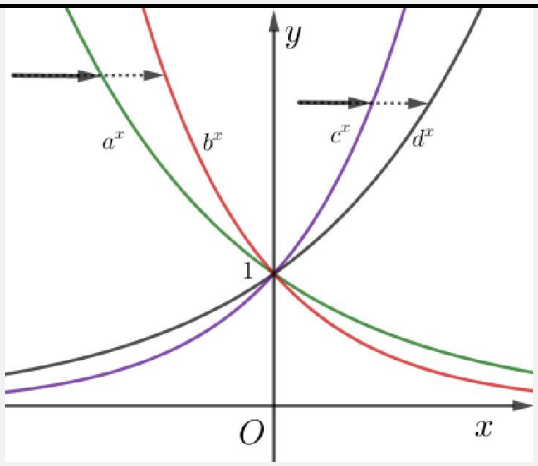
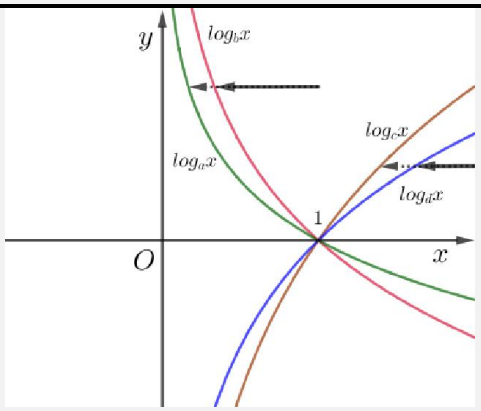
## Dạng 3. Khảo sát hàm số mũ, logarit

**Sự biến thiên hàm số mũ**: $y=a^x$.

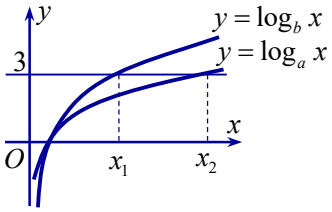
Nếu $\boxed{a>1}$ thì hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$. Nếu $\boxed{0<a<1}$ thì hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

**Sự biến thiên hàm số logarit:** $y=\log_a x$. Nếu $\boxed{a>1}$: hàm đồng biến trên $(0;+\infty)$. Nếu $\boxed{0<a<1}$: hàm nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

**Đồ thị hàm số mũ và logarit**

| ĐỒ THỊ HÀM SỐ MŨ | ĐỒ THỊ HÀM SỐ LOGARIT |
|---|---|
|  |  |
| Ta thấy: $a^x\downarrow\Rightarrow 0<a<1$; $b^x\downarrow\Rightarrow 0<b<1$.<br>Ta thấy: $c^x\uparrow\Rightarrow c>1$; $d^x\uparrow\Rightarrow d>1$.<br>**So sánh *a* với *b*:** Đứng trên cao, bắn mũi tên từ **trái sang phải**, trúng $a^x$ trước nên $a>b$.<br>**So sánh *c* với *d*:** Đứng trên cao, bắn mũi tên từ **trái sang phải**, trúng $c^x$ trước nên $c>d$.<br>Vậy $0<b<a<1<d<c$. | Ta thấy: $\log_a x\downarrow\Rightarrow 0<a<1$; $\log_b x\downarrow\Rightarrow 0<b<1$.<br>Ta thấy: $\log_c x\uparrow\Rightarrow c>1$; $\log_d x\uparrow\Rightarrow d>1$.<br>**So sánh *a* với *b*:** Đứng trên cao, bắn mũi tên từ **phải sang trái**, trúng $\log_b x$ trước: $b>a$.<br>**So sánh *c* với *d*:** Đứng trên cao, bắn mũi tên từ **phải sang trái**, trúng $\log_d x$ trước: $d>c$.<br>Vậy $0<a<b<1<c<d$. |

**Câu 1.** **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ có đồ thị như hình bên.




Đường thẳng $y=3$ cắt hai đồ thị tại các điểm có hoành độ là $x_1;x_2$. Biết rằng $x_1=2x_2$. Giá trị của $\dfrac{a}{b}$ bằng

**A.** $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $2$. **D.** $\sqrt[3]{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\log_a x = 3 \Leftrightarrow x_1 = a^3$, và $\log_b x = 3 \Leftrightarrow x_2 = b^3$.

Ta có $x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow a^3 = 2b^3 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^3 = 2 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \sqrt[3]{2}$.

**Câu 2.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y = \ln\left(x^2+1\right) - mx + 1$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;+\infty\right)$

**A.** $\left[1;+\infty\right)$ **B.** $\left(-\infty;-1\right)$ **C.** $\left[-1;1\right]$ **D.** $\left(-\infty;-1\right]$

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $y' = \frac{2x}{x^2+1} - m$.

Hàm số $y = \ln\left(x^2+1\right) - mx + 1$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;+\infty\right) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \left(-\infty;+\infty\right)$.

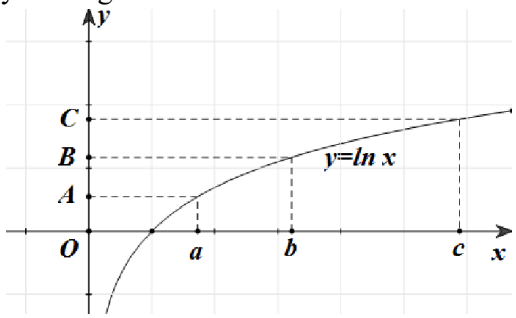
$\Leftrightarrow g(x) = \frac{2x}{x^2+1} \geq m, \forall x \in \left(-\infty;+\infty\right)$. Ta có $g'(x) = \frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $0$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $1$ | ↘ | $0$ |

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $g(x) = \frac{2x}{x^2+1} \geq m, \forall x \in \left(-\infty;+\infty\right) \Leftrightarrow m \leq -1$

**Câu 3.** **(Chuyên ĐHSP Hà Nội 2019)** Trong hình dưới đây, điểm $B$ là trung điểm của đoạn thẳng $AC$. Khẳng định nào sau đây là đúng?




**A.** $a + c = 2b$. **B.** $ac = b^2$. **C.** $ac = 2b^2$. **D.** $ac = b$.

**Lời giải**

Ta có $A\left(0;\ln a\right)$, $B\left(0;\ln b\right)$, $C\left(0;\ln c\right)$ và $B$ là trung điểm của $AC$ nên

$\ln a + \ln c = 2\ln b \Leftrightarrow \ln\left(ac\right) = \ln b^2 \Leftrightarrow ac = b^2$.

Vậy $ac = b^2$.

**Câu 4.** Cho các số thực $a, b$ sao cho $0 < a, b \neq 1$, biết rằng đồ thị các hàm số $y = a^x$ và $y = \log_b x$ cắt nhau tại điểm $M\left(\sqrt{2018};\sqrt[5]{2019^{-1}}\right)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $a > 1, b > 1$ **B.** $a > 1, 0 < b < 1$ **C.** $0 < a < 1, b > 1$ **D.** $0 < a < 1, 0 < b < 1$

**Lời giải**

**Chọn C**

$M\left(\sqrt{2018};\sqrt[5]{2019^{-1}}\right)$ thuộc đồ thị hàm số $y=a^x$ nên ta có:

$a^{\sqrt{2018}}=\sqrt[5]{2019^{-1}}=\dfrac{1}{\sqrt[5]{2019}}<1=a^0\Rightarrow 0<a<1$

$M\left(\sqrt{2018};\sqrt[5]{2019^{-1}}\right)$ thuộc đồ thị hàm số $y=\log_b x$ nên ta có:

$\log_b\sqrt{2018}=\sqrt[5]{2019^{-1}}\Rightarrow b^{\frac{1}{\sqrt[5]{2019}}}=\sqrt{2018}>1=b^0\Rightarrow b>1$

Vậy $0<a<1, b>1$.

**Câu 5.** **(Sở Hà Nội 2019)** Tập tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y=\ln\left(x^2+1\right)-mx+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

**A.** $[-1;1]$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(-\infty;-1]$.

**Lời giải**

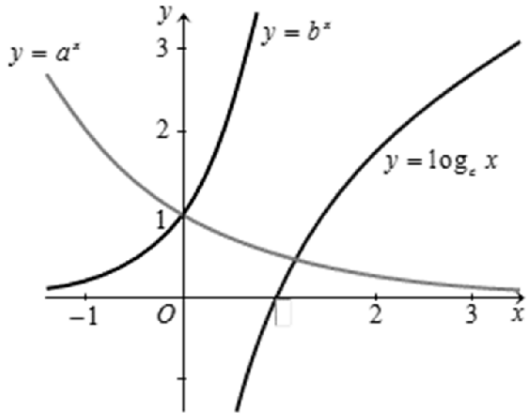
Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=\dfrac{2x}{x^2+1}-m=\dfrac{-mx^2+2x-m}{x^2+1}$

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ điều kiện là

$y'\geq 0;\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow -mx^2+2x-m\geq 0;\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}-m>0\\ \Delta'=1-m^2\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow m\in(-\infty;-1]$.

**Câu 6.** **(THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019)** Trong hình vẽ bên có đồ thị các hàm số $y=a^x$, $y=b^x$, $y=\log_c x$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây?




**A.** $a<c<b$. **B.** $c<a<b$. **C.** $a<b=c$. **D.** $b<c<a$.

**Lời giải**

Dựa vào đồ thị các hàm số $y=a^x$, $y=b^x$, $y=\log_c x$,ta có:

Hàm số $y=a^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên ta có: $0<a<1$. (1)

Các hàm số $y=b^x$, $y=\log_c x$ đồng biến trên tập xác định của nó nên ta có: $\begin{cases}b>1\\ c>1\end{cases}$.(2)

Từ (1),(2)$\Rightarrow\begin{cases}a<b\\ a<c\end{cases}$. Do đó loại hai phương án **B,D.**

Nếu $b=c$ thì ta có đồ thị hai hàm số $y=b^x, y=\log_b x$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$.

Tuy nhiên nhìn hình dáng hai đồ thị hàm số $y=b^x$, $y=\log_b x$ không có tính chất đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$. Do đó phương án đúng là **A.**

**Cách khác:**

Hàm số $y=a^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên ta có: $0<a<1$.

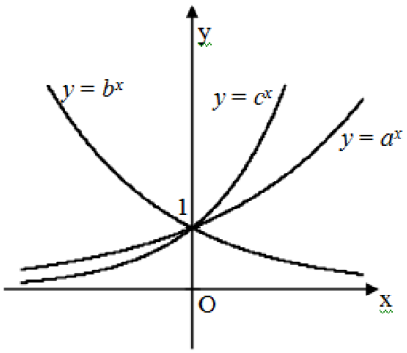
Các hàm số $y=b^x, y=\log_c x$ đồng biến biến trên tập xác định của nó nên ta có: $\begin{cases} b>1 \\ c>1 \end{cases}$.

Xét đồ thị hàm số $y=\log_c x$, ta có: $\log_c 2>1 \Leftrightarrow c<2$.

Xét đồ thị hàm số $y=b^x$, ta có: $b^1>2 \Leftrightarrow b>2$.

Do đó: $0<a<c<b$.

**Câu 7.** **(Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho đồ thị của ba hàm số $y=a^x, y=b^x, y=c^x$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?




**A.** $b>a>c$. **B.** $a>c>b$. **C.** $c>a>b$. **D.** $c>b>a$.

**Lời giải**

**Chọn C**

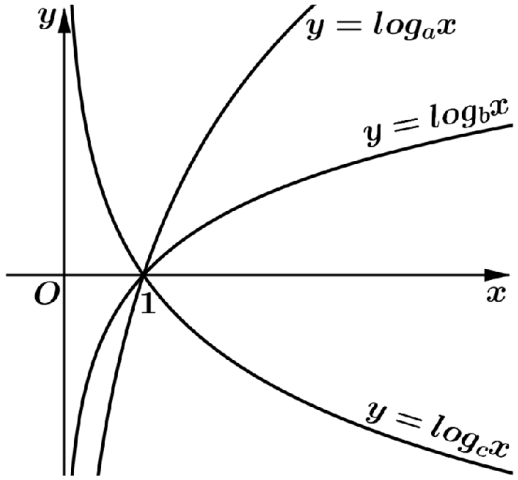
Xét hàm số $y=b^x$: Dựa vào hình dáng đồ thị ta thấy $\lim\limits_{x\to+\infty} b^x=0$, do đó $0<b<1$.

Xét hàm số $y=a^x$: Dựa vào hình dáng đồ thị ta thấy $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty$, do đó $a>1$.

Từ đó suy ra: $a>b$. Loại đáp án A, **D.**

Xét tại $x=1$ đồ thị hàm số $y=c^x$ có tung độ lớn hơn tung độ của đồ thị hàm số $y=a^x$ nên $c>a$. Vậy $c>a>1>b$.

**Câu 8.** **(KTNL GV Thpt Lý Thái Tổ 2019)** Cho $a,b,c$ là các số thực dương khác 1. Hình vẽ bên là đồ thị của ba hàm số $y=\log_a x, y=\log_b x, y=\log_c x$.

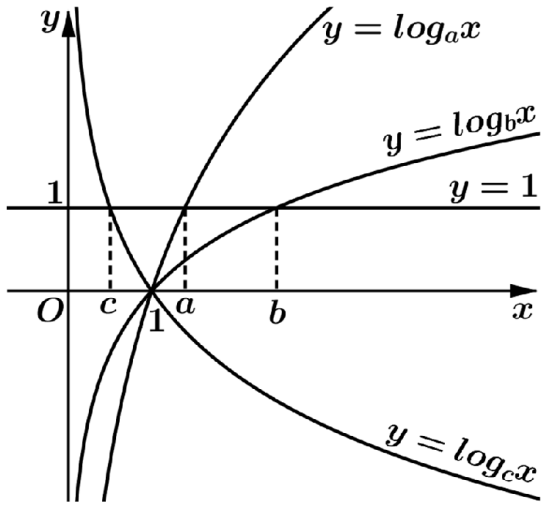


Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** $a<c<b$. **B.** $a<b<c$. **C.** $c<b<a$. **D.** $c<a<b$.

**Lời giải**

**Chọn D**

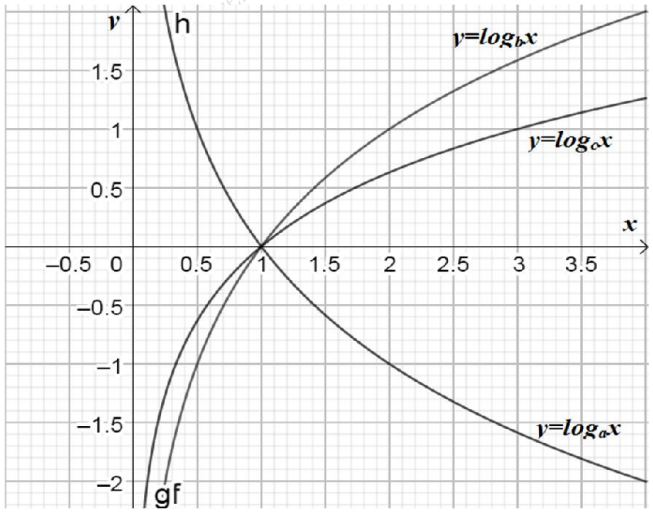



Theo hình dạng của đồ thị ta có $\begin{cases} a,b>1 \\ 0<c<1 \end{cases}$.

Vẽ đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị hai hàm số $y=\log_a x$, $y=\log_b x$ lần lượt tại 2 điểm $M(a;1)$, $N(b;1)$. Ta thấy điểm $N$ bên phải điểm $M$ nên $b>a$.

Vậy $c<a<b$.

**Câu 9.** **(Chuyên Thái Bình 2019)** Cho $a,b,c$ là các số thực dương khác 1. Hình vẽ bên là đồ thị hàm số $y=\log_a x, y=y=\log_b x, y=\log_c x$. Khẳng định nào sau đây là đúng?




**A.** $a<b<c$. **B.** $a<c<b$. **C.** $b<a<c$. **D.** $b>a>c$.

**Lời giải**

Do $y=\log_b x$ và $y=\log_c x$ là hai hàm đồng biến nên $b,c>1$.

Do $y=\log_a x$ nghịch biến nên $0<a<1$. Vậy $a$ bé nhất.

Mặt khác: Lấy $y=m$, khi đó tồn tại $x_1$, $x_2>0$ để $\begin{cases} \log_b x_1=m \\ \log_c x_2=m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^m=x_1 \\ c^m=x_2 \end{cases}$.

Dễ thấy $x_1<x_2 \Rightarrow b^m<c^m \Rightarrow b<c$. Vậy $a<b<c$.

**Câu 10.** **(THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{\ln x-6}{\ln x-2m}$ với $m$ là tham số. Gọi $S$ là tập hợp các giá trị nguyên dương của $m$ để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;\mathrm{e})$. Tìm số phần tử của $S$.

**A.** 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện: $\ln x\neq 2m\Leftrightarrow x\neq \mathrm{e}^{2m}$. Có $y'=\dfrac{6-2m}{x(\ln x-2m)^2}$

Hàm số đồng biến trên $(1;\mathrm{e})\Leftrightarrow y'>0\ \forall x\in(1;\mathrm{e})\Leftrightarrow \dfrac{6-2m}{x(\ln x-2m)^2}>0\ \forall x\in(1;\mathrm{e})$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}6-2m>0\\ \mathrm{e}^{2m}\notin(1;\mathrm{e})\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}6-2m>0\\ \left[\begin{array}{l}\mathrm{e}^{2m}\le 1\\ \mathrm{e}^{2m}\ge \mathrm{e}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<3\\ \left[\begin{array}{l}m\le 0\\ m\ge\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m\le 0\\ \dfrac{1}{2}\le m<3\end{array}\right.$$

Do $m$ nguyên dương nên $m\in\{1;2\}$. Vậy tập $S$ có 2 phần tử.

**Câu 11.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{m\log_2 x-2}{\log_2 x-m-1}$ nghịch biến trên $(4;+\infty)$

**A.** $m<-2$ hoặc $m>1$. **B.** $m\le -2$ hoặc $m=1$.
**C.** $m<-2$ hoặc $m=1$. **D.** $m<-2$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt $t=\log_2 x$.

Ta có $x\in(4;+\infty)\Leftrightarrow t\in(2;+\infty)$.

Hàm số được viết lại $y=\dfrac{mt-2}{t-m-1}$ (1).

Vì $t=\log_2 x$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (1) nghịch biến trên $(2;+\infty)$

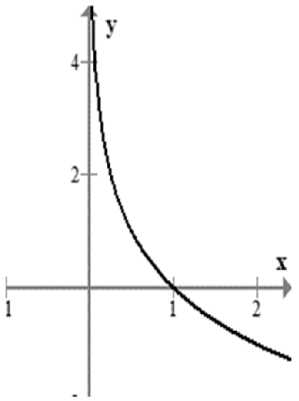
$$\Leftrightarrow\begin{cases}-m(m+1)+2<0\\ m+1\le 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<-2\\ m>1\end{array}\right.\\ m\le 1\end{cases}\Leftrightarrow m<-2.$$

**Câu 12.** **(HSG Bắc Ninh 2019)** Cho hàm số $y=\log_{2018}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ có đồ thị $(C_1)$ và hàm số $y=f(x)$ có đồ thị $(C_2)$. Biết $(C_1)$ và $(C_2)$đối xứng nhanh qua gốc tọa độ. Hỏi hàm số $y=|f(x)|$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

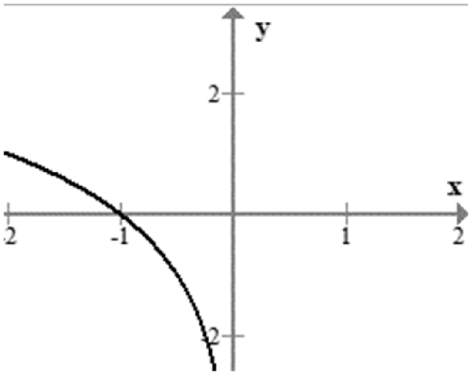
**A.** $(0;1)$ **B.** $(-1;0)$ **C.** $(-\infty;-1)$ **D.** $(1;+\infty)$

**Lời giải**

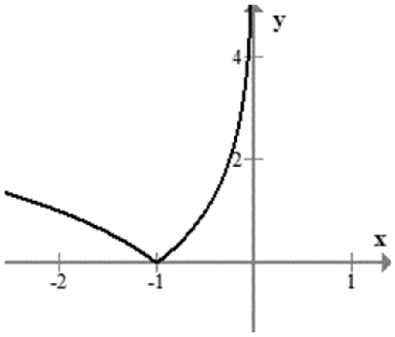
Ta có $y=\log_{2018}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ thì $y'=-\dfrac{1}{x^2}\dfrac{1}{x\ln 2018}<0$ hàm số nghịch biến ta vẽ được đồ thị hàm số $(C_1)$ như hình




Do $(C_2)$ đối xứng với $(C_1)$ qua $O$ nên có dạng như hình dưới




Từ đó đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ là




Dựa vào đồ thị trên ta có hàm số $y=|f(x)|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$

**Câu 13. (THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2019;2019]$ để hàm số $y=\dfrac{\ln x-6}{\ln x-3m}$ đồng biến trên khoảng $(1;e^6)$?

**A.** 2020. **B.** 2021. **C.** 2018. **D.** 2019.

**Lời giải**

Đặt $t=\ln x$.

Khi đó hàm số $y=\dfrac{\ln x-6}{\ln x-3m}$ đồng biến trên khoảng $(1;e^6)$ thì hàm số $y(t)=\dfrac{t-6}{t-3m}$ đồng biến trên khoảng $(0;6)$.

Ta có $y'(t)=\dfrac{-3m+6}{(t-3m)^2}$

Để hàm số $y(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;6)$ thì

$$\begin{cases} -3m+6>0 \\ 3m \notin (0;6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m<2 \\ \left[\begin{array}{l} m \le 0 \Rightarrow m \le 0 \xrightarrow[m\in[-2019;2019]]{m\in\mathbb{Z}} m \in \{-2019;-2018;\ldots -1;0\} \\ m \ge 2 \end{array}\right. \end{cases}.$$

Vậy có tất cả: $2020$ số nguyên $m$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 14.** **(Chuyên Hưng Yên 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực $m$ thuộc đoạn $[-2018;2018]$ để hàm số $y=f(x)=(x+1)\ln x+(2-m)x$ đồng biến trên khoảng $(0;e^2)$.

**A.** $2016$. **B.** $2022$. **C.** $2014$. **D.** $2023$.

**Lời giải**

Ta có: $y'=f'(x)=\ln x+\dfrac{x+1}{x}+2-m$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f'(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}+3-m\ge 0 \Leftrightarrow \ln x+\dfrac{1}{x}+3\ge m\,;\forall x\in(0;e^2)$.

Xét hàm số: $g(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}+3$ với $x\in(0;e^2)$.

Ta có: $g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $e^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ | $\searrow$ | $4$ | $\nearrow$ | $5+\dfrac{1}{e^2}$ |

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $g(x)\ge 4$ với mọi $x\in(0;e^2)$.

Từ đó suy ra $-2018\le m\le 4$.

Vậy có $2023$ giá trị của $m$ thỏa mãn.

**Câu 15.** **(THPT Quang Trung Đống Đa Hà Nội 2019)** Cho $f(x)=a\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+b\sin x+6$ với $a,b\in\mathbb{R}$. Biết rằng $f(\log(\log e))=2$. Tính giá trị của $f(\log(\ln 10))$.

**A.** $10$. **B.** $2$. **C.** $4$. **D.** $8$.

**Lời giải**

Ta có $\log(\log e)+\log(\ln 10)=\log 1=0$.

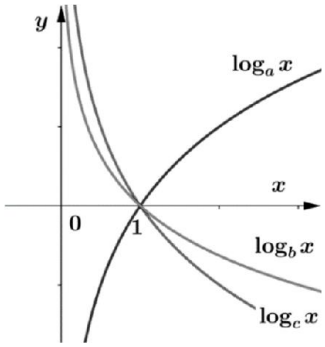
Mặt khác $f(x)+f(-x)=a\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+b\sin x+6+a\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)+b\sin(-x)+6$

$=a\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)+b\sin x-b\sin x+12$

$=a\ln 1+12=12\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Khi đó suy ra $f(\log(\log e))+f(\log(\ln 10))=12\ \Rightarrow\ f(\log(\ln 10))=10$.

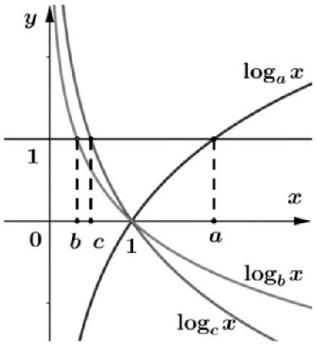
**Câu 16.** **(Sở Bắc Ninh 2019)** Cho $a,b,c$ dương và khác 1. Các hàm số $y=\log_a x$, $y=\log_b x$, $y=\log_c x$ có đồ thị như hình vẽ




Khẳng định nào dưới đây đúng?

**A.** $a>c>b$. **B.** $a>b>c$. **C.** $c>b>a$. **D.** $b>c>a$.

**Lời giải**




Kẻ đường thẳng $(d): y=1$. Hoành độ giao điểm của $(d)$ với các đồ thị hàm số $y=\log_a x, y=\log_b x, y=\log_c x$ lần lượt là $a,b,c$. Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy $a>c>b$.

**Câu 17.** Đồ thị hàm số $y=f(x)$ đối xứng với đồ thị hàm số $y=a^x\,(a>0,a\neq 1)$ qua điểm $I(1;1)$. Giá trị của biểu thức $f\left(2+\log_a\dfrac{1}{2018}\right)$ bằng

**A.** 2016. **B.** –2016. **C.** 2020. **D.** –2020.

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi $(C)$ là đồ thị hàm số $y=a^x$; $(C_1)$ là đồ thị hàm số $y=f(x)$.

$M\left(2+\log_a\dfrac{1}{2018};y_M\right)\in(C_1)\Leftrightarrow y_M=f\left(2+\log_a\dfrac{1}{2018}\right)$.

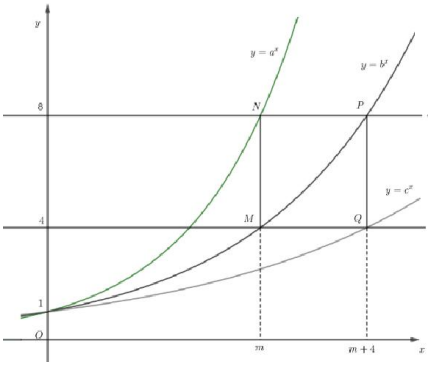
Gọi $N$ đối xứng với $M$ qua $I(1;1)\Rightarrow N\left(-\log_a\dfrac{1}{2018};2-y_M\right)$.

Do đồ thị $(C_1)$ đối xứng $(C)$ qua $I(1;1)$ nên $N\left(-\log_a\dfrac{1}{2018};2-y_M\right)\in(C)$.

$N\in(C)\Leftrightarrow 2-y_M=a^{-\log_a\frac{1}{2018}}\Leftrightarrow 2-y_M=a^{\log_a 2018}\Leftrightarrow 2-y_M=2018\Leftrightarrow y_M=-2016$.

Vậy $f\left(2+\log_a\dfrac{1}{2018}\right)=-2016$.

**Câu 18.** **(Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2020)** Trong hình vẽ bên các đường cong $(C_1): y=a^x, (C_2): y=b^x, (C_3): y=c^x$ và đường thẳng $y=4; y=8$ tạo thành hình vuông $MNPQ$ có cạnh bằng 4.



Biết rằng $abc = 2^{\frac{x}{y}}$ với $x; y \in \mathbb{Z}^+$ và $\frac{x}{y}$ tối giản, giá trị của $x + y$ bằng

**A.** $34$. **B.** $5$. **C.** $43$. **D.** $19$.

**Lời giải**

**Chọn C**

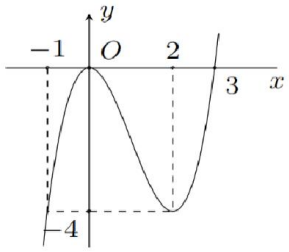
Giả sử hoành độ điểm $M$ là $m$, ta suy ra $M(m;4); N(m;8); P(m+4;8); Q(m+4;4)$.

Từ giả thiết ta có $M, P$ thuộc đường cong $y = b^x$ nên $\begin{cases} b^m = 4 \\ b^{m+4} = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^m = 4 \\ b^4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 8 \\ b = 2^{\frac{1}{4}} \end{cases}$.

$N, Q$ lần lượt thuộc đường cong $y = a^x$; $y = c^x$ nên $\begin{cases} a^8 = 8 \\ c^{12} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^8 = 2^3 \\ c^{12} = 2^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2^{\frac{3}{8}} \\ c = 2^{\frac{1}{6}} \end{cases}$.

Khi đó $abc = 2^{\frac{3}{8}}.2^{\frac{1}{4}}.2^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}} = 2^{\frac{19}{24}}$. Vậy $x = 19$; $y = 24 \Rightarrow x + y = 43$.

**Câu 19.** **( Bạc Liêu – Ninh Bình 2019)** Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(2 + e^x)$ nghịch biến trên khoảng




**A.** $(-1; 3)$. **B.** $(-2; 1)$. **C.** $(-\infty; 0)$. **D.** $(0; +\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $y' = e^x f'(2 + e^x)$. Hàm số $y = f(2 + e^x)$ nghịch biến khi và chỉ khi

$y' \le 0 \Leftrightarrow e^x f'(2 + e^x) \le 0 \Leftrightarrow f'(2 + e^x) \le 0 \Leftrightarrow 2 + e^x \le 3 \Leftrightarrow e^x \le 1 \Leftrightarrow x \le 0.$

**Câu 20.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2019; 2019]$ để hàm số $y = \frac{\ln x - 6}{\ln x - 3m}$ đồng biến trên khoảng $(1; e^6)$?

**A.** $2020$. **B.** $2021$. **C.** $2018$. **D.** $2019$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $t=\ln x$.

Khi đó hàm số $y=\dfrac{\ln x-6}{\ln x-3m}$ đồng biến trên khoảng $\left(1;\mathrm{e}^6\right)$ thì hàm số $y(t)=\dfrac{t-6}{t-3m}$ đồng biến trên khoảng $(0;6)$.

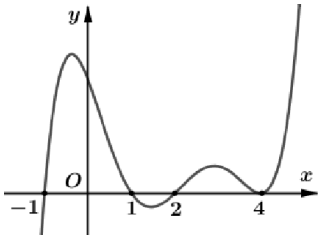
Ta có $y'(t)=\dfrac{-3m+6}{(t-3m)^2}$

Để hàm số $y(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;6)$ thì

$$\begin{cases}-3m+6>0\\3m\notin(0;6)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m<2\\\left[\begin{array}{l}m\le 0\Rightarrow m\le 0\xrightarrow[m\in[-2019;2019]]{m\in\mathbb{Z}}m\in\{-2019;-2018;\ldots-1;0\}\\m\ge 2\end{array}\right.\end{cases}.$$

Vậy có tất cả: $2020$ số nguyên $m$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 21.** **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới




Hàm số $g(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{f(1-2x)}$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

**A.** $(-\infty;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Nguyễn Bảo Vương

**Lời giải**

**Chọn D**

Dựa vào đồ thị, suy ra $f'(x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1\\1<x<2\end{array}\right.$.

Ta có $g'(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{f(1-2x)}f'(1-2x).(-2).\ln\dfrac{1}{2}$.

Xét $g'(x)<0\Leftrightarrow f'(1-2x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-2x<-1\\1<1-2x<2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>1\\-\dfrac{1}{2}<x<0\end{array}\right.$.

Vậy $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$ và $(1;+\infty)$.

**Câu 22.** **(Kiểm tra năng lực - ĐH - Quốc Tế - 2019)** Xét hàm số $f(x)=(\cos x)^{\sin x}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

**A.** Hàm số $f$ tăng trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. **B.** Hàm số $f$ tăng trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};0\right)$.

**C.** Hàm số $f$ giảm trên khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$. **D.** 3 lựa chọn kia đều sai.

**Lời giải**

**Chọn C**

Nhận xét: $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \cos x > 0 \\ f(x) > 0 \end{cases}$.

Ta có: $f(x) = (\cos x)^{\sin x} \Rightarrow \ln f(x) = \ln(\cos x)^{\sin x} = \sin x.\ln(\cos x)$.

$\Rightarrow \left[\ln f(x)\right]' = \left[\sin x.\ln(\cos x)\right]'$.

$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\cos^2 x.\ln\cos x - \sin^2 x}{\cos x} \Rightarrow f'(x) = \left(\frac{\cos^2 x.\ln\cos x - \sin^2 x}{\cos x}\right).f(x)$.

Do $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos x \in (0;1]$. Mặt khác $e > 1 \Rightarrow \ln\cos x \le 0$.

$\Rightarrow \cos^2 x.\ln\cos x - \sin^2 x \le 0, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

$\Rightarrow f'(x) = \left(\frac{\cos^2 x.\ln\cos x - \sin^2 x}{\cos x}\right).f(x) \le 0, \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ (Dấu "=" xảy ra tại $x = 0$).

$\Rightarrow y = f(x)$ giảm trên $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

**Câu 23.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ trong đoạn $[-2019;2019]$ để hàm số $y = \ln(x^2+2) - mx + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**A.** 2019. **B.** 2020. **C.** 4038. **D.** 1009.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $y' = \frac{2x}{x^2+2} - m$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+2} - m \ge 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow m \le \frac{2x}{x^2+2}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Xét $h(x) = \frac{2x}{x^2+2}$ với $x \in \mathbb{R}$. Có $h'(x) = \frac{4-2x^2}{(x^2+2)^2}$

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{2}$ | | $\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $h(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\nearrow$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\searrow$ | $0$ |

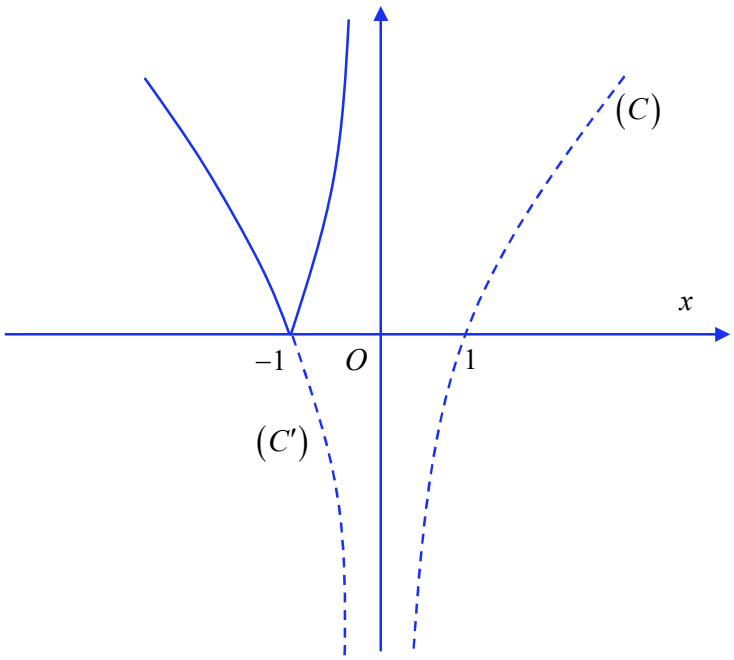
Suy ra $m \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $m$ là số nguyên trong đoạn $[-2019;2019]$ nên có 2019 số.

**Câu 24.** Gọi $(C)$ là đồ thị của hàm số $y = \log_{2018} x$ và $(C')$ là đồ thị hàm số $y = f(x)$, $(C')$ là đối xứng với $(C)$ qua trục tung. Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

**A.** $(0;1)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(1;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn C**




Ta có hàm số $y=\log_{2018}x$ có tập xác định $D=(0;+\infty)$ là hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$. Vì $(C')$ đối xứng với $(C)$ qua trục tung nên hàm số $y=f(x)$ là hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$.

Ta có $|f(x)|=\begin{cases}f(x) & khi\ \ f(x)\ge 0\\ -f(x) & khi\ \ f(x)<0\end{cases}$ nên suy ra đồ thị hàm số $y=|f(x)|$:

Nguyễn Bảo Vương

Dựa vào đồ thị $y=|f(x)|$ ta suy ra hàm số $y=|f(x)|$ đồng biến trên $(-1;0)$.

**Câu 25.** Có bao nhiêu giá trị thực $m$ để hàm số $g(x)=\dfrac{2019^x}{\ln 2019}+\dfrac{6^x}{\ln 6}+\dfrac{m}{2}x^2-2x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**A.** Duy nhất. **B.** Không tồn tại. **C.** $2019$. **D.** Vô số.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $g'(x)=2019^x+6^x+mx-2$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $g'(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có $g'(0)=0,\forall m$.

Nếu $m\ge 0\Rightarrow\begin{cases}g'(x)=(2019^x+6^x-2)+mx\ge 0,\forall x\ge 0\\ g'(x)=(2019^x+6^x-2)+mx<0,\forall x<0\end{cases}$.

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

$\Rightarrow m\ge 0$ (loại).

Nếu $m<0$

Xét $g''(x)=2019^x\ln 2019+6^x\ln 6+m$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2019^x\ln 2019+6^x\ln 6\right)=0\Rightarrow$ phương trình $g''(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x=x_0$

khi $m<0$ và $g'(x)$ đạt GTNN tại điểm cực tiểu duy nhất tại $x=x_0$.

Do đó, để $g'(x)\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ thì $g'(x_0)\ge 0$.

Mà $g'(0)=0\Rightarrow x_0=0\Rightarrow m=-2019^0\ln 2019-6^0\ln 6$ hay $m=-\ln 2019-\ln 6$.

Do đó có duy nhất một giá trị thực của $m$ thỏa mãn.

**Câu 26.** Tập các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y=\ln(3x-1)-\dfrac{m}{x}+2$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ là

**A.** $\left[\dfrac{2}{9};+\infty\right)$. **B.** $\left[-\dfrac{4}{3};+\infty\right)$. **C.** $\left[-\dfrac{7}{3};+\infty\right)$. **D.** $\left[-\dfrac{1}{3};+\infty\right)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$y=\ln(3x-1)-\dfrac{m}{x}+2\Rightarrow y'=\dfrac{3}{3x-1}+\dfrac{m}{x^2}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

$\Leftrightarrow y'\ge 0,\forall x\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)\Leftrightarrow\dfrac{3}{3x-1}+\dfrac{m}{x^2}\ge 0,\forall x\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

$\Leftrightarrow m\ge\dfrac{3x^2}{1-3x}=g(x),\forall x\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$

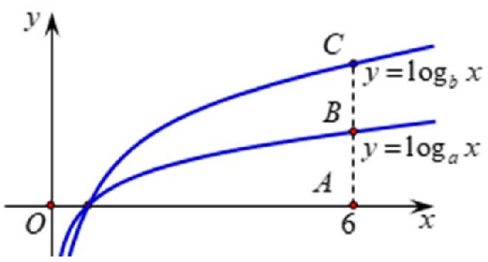
Xét $g(x)=\dfrac{3x^2}{1-3x},\forall x\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)\Rightarrow g'(x)=\dfrac{6x-9x^2}{(1-3x)^2}\Rightarrow g'(x)=0\Leftrightarrow x=0\vee x=\dfrac{2}{3}$.

Bảng biến thiên.

| $x$ | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{2}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | | ↗ | $-\frac{4}{3}$ | ↘ | |

Vậy $m\ge-\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow m\in\left[-\dfrac{4}{3};+\infty\right)$.

**Câu 27.** **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Cho các hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Đường thẳng $x=6$ cắt trục hoành, đồ thị hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ lần lượt tại $A, B$ và $C$. Nếu $AC=AB\log_2 3$ thì

**A.** $b^3=a^2$. **B.** $b^2=a^3$. **C.** $\log_3 b=\log_2 a$. **D.** $\log_2 b=\log_3 a$.

**Lời giải**

**Chọn D**

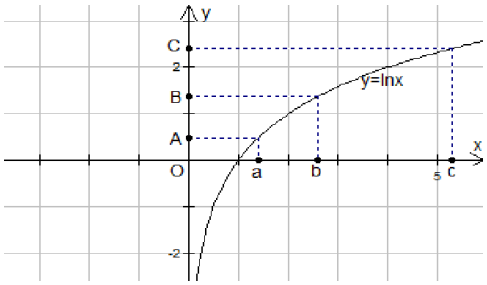
Từ các đồ thị hàm số đã cho trên hình ta có $A(6;0)$, $B(6;\log_a 6)$, $C(6;\log_b 6)$,

$AC=y_C-y_A=\log_b 6$, $AB=y_B-y_A=\log_a 6$.

Vậy $AC=AB\log_2 3 \Leftrightarrow \log_b 6=\log_a 6.\log_2 3$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_6 b}=\dfrac{1}{\log_6 a}.\dfrac{\log_6 3}{\log_6 2} \Leftrightarrow \dfrac{\log_6 2}{\log_6 b}=\dfrac{\log_6 3}{\log_6 a} \Leftrightarrow \log_2 b=\log_3 a$.

**Câu 28.** Trong hình dưới đây, điểm $B$ là trung điểm của đoạn thẳng $AC$.




Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** $a+c=2b$. **B.** $ac=b^2$. **C.** $ac=2b^2$. **D.** $ac=b$

Nguyễn Bảo Vương

**Lời giải**

**Chọn B**

Từ đồ thị ta thấy tọa độ điểm $A(0;\ln a), B(0;\ln b), C(0;\ln c)$

Theo bài ra $B$ là trung điểm của đoạn thẳng $AC$ nên ta có:

$$\begin{cases} x_B=\dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_B=\dfrac{y_A+y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B=\dfrac{0+0}{2}=0 \\ y_B=\dfrac{\ln a+\ln c}{2}=\ln b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B=0 & (1) \\ 2y_B=\ln ac=\ln b^2 & (2) \end{cases}$$

Từ $(2) \Rightarrow ac=b^2$.

Vậy chọn. **B.**

**Câu 29.** Đồ thị hàm số $y=f(x)$ đối xứng với đồ thị của hàm số $y=a^x (a>0, a\neq 1)$ qua điểm $I(1;1)$. Giá trị của biểu thức $f\left(2+\log_a \dfrac{1}{2018}\right)$ bằng

**A.** $-2016$. **B.** $-2020$. **C.** $2016$. **D.** $2020$.

**Lời giải**

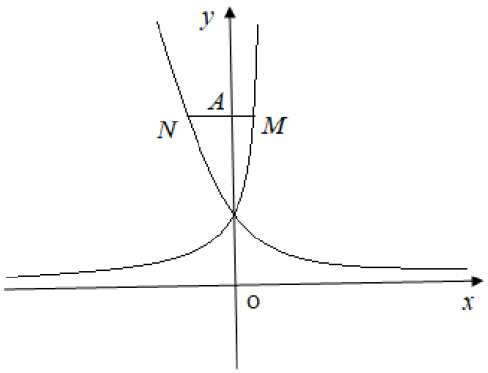
**Chọn A**

Xét $M\left(2+\log_a \dfrac{1}{2018}; f\left(2+\log_a \dfrac{1}{2018}\right)\right)$ thuộc đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Điểm $N\left(-\log_a \frac{1}{2018}; 2-f\left(2+\log_a \frac{1}{2018}\right)\right)$ đối xứng với $M$ qua $I(1;1)$ thuộc đồ thị hàm số $y=a^x$ nên ta có:

$$2-f\left(2+\log_a \frac{1}{2018}\right)=a^{-\log_a \frac{1}{2018}} \Rightarrow f\left(2+\log_a \frac{1}{2018}\right)=2-a^{\log_a 2018}=2-2018=-2016.$$

**Câu 30.** **(Hội 8 trường chuyên ĐBSH - 2019)** Cho số thực dương $a$ khác 1. Biết rằng bất kỳ đường thẳng nào song song với trục $Ox$ mà cắt các đường $y=4^x, y=a^x$, trục tung lần lượt tại $M, N$ và $A$ thì $AN=2AM$ ( hình vẽ bên). Giá trị của $a$ bằng




**A.** $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Dựa vào ĐTHS ta thấy hàm số $y=a^x$ nghịch biến nên $0<a<\frac{1}{2}$.

Mọi đường thẳng $y=m$ $(m>0)$ đều cắt các đường $y=4^x, y=a^x$, trục tung lần lượt tại $M(\log_4 m; m), N(\log_a m; m)$ và $A=(0;m)$, theo bài ra

$$AN=2AM \Leftrightarrow |\log_a m|=2|\log_4 m| \Leftrightarrow |\log_a m|=|\log_2 m|$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}\log_a m=\log_2 m\\ \log_a m=-\log_2 m\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\log_m a=\log_m 2\\ \log_m a=\log_m \frac{1}{2}\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}a=2\\ a=\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

Vậy $a=\frac{1}{2}$.

**Câu 31.** **(THPT Ngô Quyền - Ba Vì - Hải Phòng 2019)** Đồ thị hàm số $y=f(x)$ đối xứng với đồ thị hàm số $y=\log_a x$, $(0<a\neq 1)$ qua điểm $I(2;1)$. Giá trị của biểu thức $f\left(4-a^{2019}\right)$ bằng

**A.** 2023. **B.** –2023. **C.** 2017. **D.** –2017.

**Lời giải**

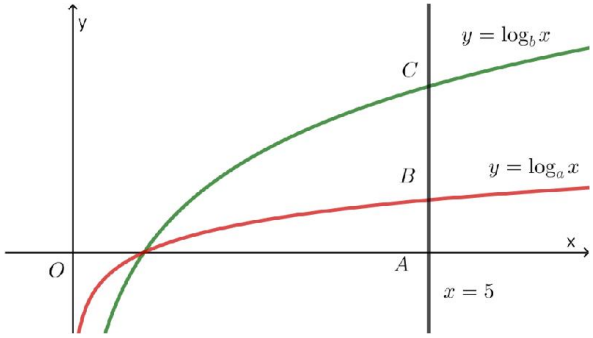
**Chọn D**

Lấy điểm $A\left(4-a^{2019}; f\left(4-a^{2019}\right)\right)$ thuộc đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và điểm $B(x;\log_a x)$ thuộc đồ thị của hàm số $y=\log_a x$.

Hai điểm $A$ và $B$ đối xứng nhau qua điểm $I$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases}4-a^{2019}+x=2.2\\ f\left(4-a^{2019}\right)+\log_a x=2.1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=a^{2019}\\ f\left(4-a^{2019}\right)+\log_a a^{2019}=2\end{cases}\Rightarrow f\left(4-a^{2019}\right)=-2017.$$

**Câu 32.** Cho các hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đường thẳng $x=5$ cắt trục hoành, đồ thị hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ lần lượt tại $A,B$ và $C$. Biết rằng $CB=2AB$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?




**A.** $a=5b$. **B.** $a=b^2$. **C.** $a=b^3$. **D.** $a^3=b$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Dễ thấy $A(5;0)$, $B(5;\log_a 5)$, $C(5;\log_b 5)$ và $\log_b 5>\log_a 5>0$.

Do $CB=2AB$ nên ta có $\log_b 5-\log_a 5=2(\log_a 5-0)$.

$\Leftrightarrow \log_b 5=3\log_a 5$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_5 b}=\dfrac{3}{\log_5 a}$

$\Leftrightarrow \log_5 a=3\log_5 b$

$\Leftrightarrow \log_5 a=\log_5 b^3$

$\Leftrightarrow a=b^3.$

Nguyễn Bảo Vương

**Câu 33.** **(THPT Đông Sơn 1 - Thanh Hóa - 2019)** Cho hàm số $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$. Tính giá trị biểu thức $A=f\left(\dfrac{1}{100}\right)+f\left(\dfrac{2}{100}\right)+...+f\left(\dfrac{100}{100}\right)$?

**A.** $50$. **B.** $49$. **C.** $\dfrac{149}{3}$. **D.** $\dfrac{301}{6}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Xét hai số dương $a$ và $b$ sao cho $a+b=1$, ta có

$$f(a)+f(b)=\frac{4^a}{4^a+2}+\frac{4^b}{4^b+2}=\frac{4^a\left(4^b+2\right)+4^b\left(4^a+2\right)}{\left(4^a+2\right)\left(4^b+2\right)}$$

$$=\frac{2\left(4^{a+b}+4^a+4^b\right)}{4^{a+b}+2\left(4^a+4^b\right)+4}=\frac{2\left(4+4^a+4^b\right)}{2\left(4+4^a+4^b\right)}=1.$$

Do đó

$$A=\left[f\left(\frac{1}{100}\right)+f\left(\frac{99}{100}\right)\right]+\left[f\left(\frac{2}{100}\right)+f\left(\frac{98}{100}\right)\right]+...+\left[f\left(\frac{49}{100}\right)+f\left(\frac{51}{100}\right)\right]+f\left(\frac{50}{100}\right)+f\left(\frac{100}{100}\right)$$

$$=49+f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)=49+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{301}{6}.$$ Vậy $A=\frac{301}{6}$..

**Câu 34.** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực $m$ để hàm số $y=\ln\left(x^2+1\right)-mx+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

**A.** $[-1;1]$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(-\infty;-1]$. **D.** $(-\infty;-1)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

TXĐ: $D=R$. Ta có $y'=\frac{2x}{x^2+1}-m.$

Hàm số $y=\ln\left(x^2+1\right)-mx+1$ đồng biến trên **R**

khi $y'\geq 0\ \forall x\in R \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+1}-m\geq 0\ \forall x\in R \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+1}\geq m\ \forall x\in R.$

Xét hàm $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$. Ta có $f'(x)=\frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}.$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}=0 \Leftrightarrow x=\pm 1.$$

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $1$ | ↘ | $0$ |

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $-1\leq f(x)\leq 1\ \forall x\in R.$

Từ đó suy ra $m\leq -1.$

**Câu 35.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ thuộc khoảng $(-2019;2019)$ để hàm số sau có tập xác định là $D=\mathbb{R}$ ?

$$y=x+m+\sqrt{x^2+2(m+1)x+m^2+2m+4}+\log_2\left(x-m+\sqrt{2x^2+1}\right)$$

**A.** 2020. **B.** 2021. **C.** 2018. **D.** 2019.

**Lời giải**

**Chọn D**

Hàm số xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$ thì $\begin{cases}x^2+2(m+1)x+m^2+2m+4\geq 0\\ x-m+\sqrt{2x^2+1}>0\end{cases}$ luôn đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$

+) Ta có: $x^2+2(m+1)x+m^2+2m+4=\left[x+(m+1)\right]^2+3>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

+) $x-m+\sqrt{2x^2+1}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x+\sqrt{2x^2+1}>m, \forall x\in\mathbb{R}.$

Xét hàm số $f(x)=x+\sqrt{2x^2+1}$ với $x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=1+\dfrac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên ta thấy để $x+\sqrt{2x^2+1}>m, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2}>m$.

Kết hợp điều kiện $\begin{cases} m\in\mathbb{Z} \\ m\in(-2019;2019) \end{cases} \Rightarrow m\in\{-2018,-2017,-2016,...,-1,0\}$.

Kết luận: có 2019 giá trị của $m$ thỏa mãn bài toán.

**Câu 36.** **(THPT Yên Dũng 2-Bắc Giang 2019)** Tập tất cả các giá trị của tham số $m$ để hàm số $y=\dfrac{m\ln x-2}{\ln x-m-1}$ nghịch biến trên $\left(e^2;+\infty\right)$ là:

**A.** $\begin{bmatrix} m\le -2 \\ m=1 \end{bmatrix}$. **B.** $\begin{bmatrix} m<-2 \\ m>1 \end{bmatrix}$. **C.** $\begin{bmatrix} m<-2 \\ m=1 \end{bmatrix}$. **D.** $m<-2$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x>0 \\ x\ne e^{m+1} \end{cases}$

Ta có: $y'=\dfrac{\dfrac{m}{x}(\ln x-m-1)-\dfrac{1}{x}(m\ln x-2)}{(\ln x-m-1)^2}=\dfrac{-m^2-m+2}{x(\ln x-m-1)^2}$

Hàm số nghịch biến trên $\left(e^2;+\infty\right)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} -m^2-m+2<0 \\ e^{m+1}\le e^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} m<-2 \\ m>1 \end{bmatrix} \\ m+1\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow m<-2$.

**Câu 37.** **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ thuộc khoảng $(-2019;2019)$ để hàm số $y=2019^{x^3-x^2-mx+1}$ nghịch biến trên $[-1;2]$

**A.** 2020. **B.** 2019. **C.** 2010. **D.** 2011.

**Lời giải**

**Chọn D**

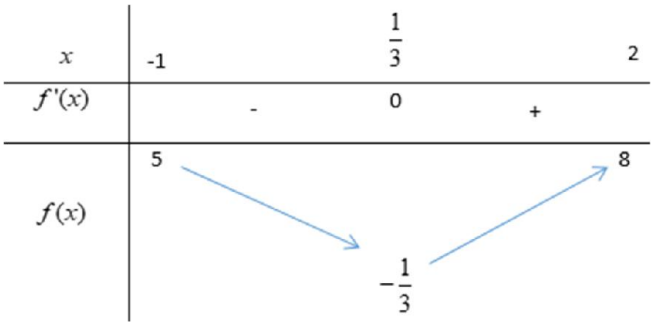
$y'=\left(3x^2-2x-m\right).2019^{x^3-x^2-mx+1}.\ln 2019$

Hàm số nghịch biến trên $[-1;2] \Leftrightarrow y'\le 0\ \forall x\in[-1;2] \Leftrightarrow 3x^2-2x-m\le 0\ \forall x\in[-1;2]$

$\Leftrightarrow 3x^2-2x\le m\ \forall x\in[-1;2]$

Đặt $f(x)=3x^2-2x;\ f'(x)=6x-2$.

Bảng biến thiên:

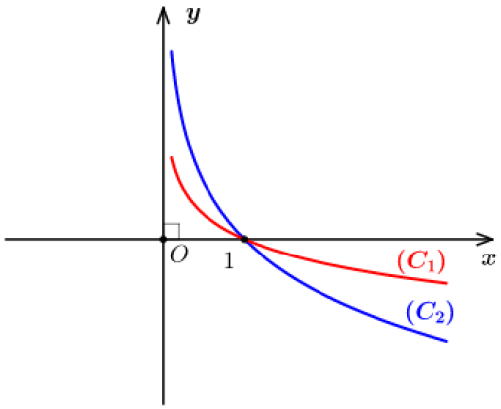



Từ bảng biến thiên suy ra $f(x)\le 8\ \forall x\in[-1;2]$.

Do đó ycbt $\Leftrightarrow\ m\ge 8$.

Vì $m$ nguyên thuộc khoảng $(-2019;2019)$ nên có 2011 giá trị $m$ thỏa mãn.

**Câu 38.** **(Hậu Lộc 2-Thanh Hóa -2019)** Cho $a$, $b$ là các số thực dương khác 1, đồ thị hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ lần lượt là $(C_1)$, $(C_2)$ như hình vẽ.




Khẳng định nào sau đây là đúng

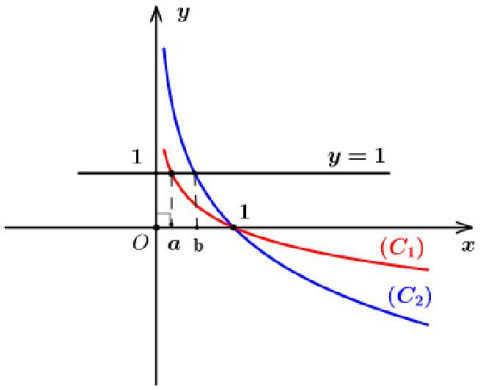
**A.** $b.e^a<a.e^b$. **B.** $b.e^a>a.e^b$. **C.** $b.e^a=a.e^b$. **D.** $a.e^a<b.e^b$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $\log_a x=1\Leftrightarrow x=a$ và $\log_b x=1\Leftrightarrow x=b$.

Nên kẻ đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị $(C_1)$, $(C_2)$ lần lượt tại các điểm có tọa độ $(a;1)$ và $(b;1)$.




Nhìn vào đồ thị ta suy ra $a<b$.

Do $a$ , $b$, $e^a$, $e^b$ là các số dương và $e>1$ nên từ $a<b$ ta suy ra

$$\begin{cases} e^a < e^b \\ a.e^b < b.e^b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a.e^a < a.e^b \\ a.e^b < b.e^b \end{cases} \Rightarrow a.e^a < b.e^b$$

**Dạng 4. Bài toán thực tế**

| **BÀI TOÁN NGÂN HÀNG** | |
|---|---|
| **1. Công thức tính lãi đơn** | Nếu ta gởi tiền vào ngân hàng theo hình thức **tiền lãi chỉ được tính dựa vào tiền gốc ban đầu** (tức là tiền lãi của kỳ hạn trước **không gộp vào vốn để tính lãi cho kỳ hạn kế tiếp**), đây gọi là hình thức **lãi đơn**. Ta có: $\boxed{T=A(1+nr)}$ *với A: tiền gởi ban đầu; r: lãi suất; n: kỳ hạn gởi; T: tổng số tiền nhận sau kỳ hạn n.* **Lưu ý:** *r và n phải khớp đơn vị; T bao gồm cả A, muốn* ***tính số tiền lời*** *ta lấy* $T-A$. |
| **2. Công thức lãi kép** | Nếu ta gởi tiền vào ngân hàng theo hình thức: **hàng tháng tiền lãi phát sinh sẽ được cộng vào tiền gốc cũ để tạo ra tiền gốc mới** và cứ tính tiếp như thế, đây gọi là hình thức **lãi kép**.<br>Ta có: $\boxed{T=A(1+r)^n}$ *với A: tiền gởi ban đầu; r: lãi suất; n: kỳ hạn gởi; T: tổng số tiền nhận sau kỳ hạn n.* **Lưu ý:** *r và n phải khớp đơn vị; T bao gồm cả A, muốn* ***tính số tiền lời*** *ta lấy* $T-$ ***A.*** |
| **3. Mỗi tháng gởi đúng số tiền giống nhau theo hình thức lãi kép** | Nếu đầu mỗi tháng khách hàng luôn gởi vào ngân hàng số tiền $A$ đồng với lãi kép $r\%$/tháng thì số tiền họ nhận được cả vốn lẫn lãi sau $n$ tháng là:<br>$\boxed{T=\frac{A}{r}\left[(1+r)^n-1\right](1+r)}$. |
| **4. Gởi tiền vào ngân hàng rồi rút ra hàng tháng số tiền cố định** | Nếu khách hàng gởi vào ngân hàng số tiền $A$ đồng với lãi suất $r\%$/tháng. Vào ngày ngân hàng tính lãi mỗi tháng thì rút ra $X$ đồng. Số tiền thu được sau $n$ tháng là:<br>$\boxed{T=A(1+r)^n-X\frac{(1+r)^n-1}{r}}$ |
| **5. Vay vốn và trả góp (tương tự bài toán 4)** | Nếu khách hàng vay ngân hàng số tiền $A$ đồng với lãi suất $r\%$/tháng. Sau đúng một tháng kể từ ngày vay bắt đầu hoàn nợ, hai lần hoàn nợ cách nhau đúng một tháng, mỗi lần hoàn nợ đúng số tiền $X$ đồng. Số tiền khách hàng còn nợ sau $n$ tháng là:<br>$\boxed{T=A(1+r)^n-X\frac{(1+r)^n-1}{r}}$ |

**Câu 1.** **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Trong năm 2019, diện tích rừng trồng mới của tỉnh $A$ là 600 ha . Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh $A$ mỗi năm tiếp theo đều tăng 6% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Kể từ sau năm 2019, năm nào dưới đây là năm đầu tiên tỉnh $A$ có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1000 ha ?

**A.** Năm 2028. **B.** Năm 2047. **C.** Năm 2027. **D.** Năm 2046.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Diện tích rừng trồng mới của năm $2019+1$ là $600(1+6\%)^1$.

Diện tích rừng trồng mới của năm $2019+2$ là $600(1+6\%)^2$.

Diện tích rừng trồng mới của năm $2019+n$ là $600(1+6\%)^n$.

Ta có $600(1+6\%)^n > 1000 \Leftrightarrow (1+6\%)^n > \frac{5}{3} \Leftrightarrow n > \log_{(1+6\%)} \frac{5}{3} \approx 8,76$

Như vậy kể từ năm 2019 thì năm 2028 là năm đầu tiên diện tích rừng trồng mới đạt trên 1000 ha .

**Câu 2.** **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Trong năm 2019, diện tích rừng trồng mới của tỉnh $A$ là 1000 ha. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng 6% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Kể từ sau năm 2019, năm nào dưới đây là năm đầu tiên tỉnh $A$ có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1400 ha.

**A.** 2043 . **B.** 2025 . **C.** 2024 . **D.** 2042 .

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có sau $n$ năm thì diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là: $1000.(1+0.06)^n$

Khi đó, $1000.(1+0.06)^n > 1400 \Rightarrow 1.06^n > 1.4 \Rightarrow n > 5.774$ .

Vậy vào năm 2025 thì diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1400 ha.

**Câu 3.** **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Trong năm 2019 , diện tích rừng trồng mới của tỉnh $A$ là 900 ha. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh $A$ mỗi năm tiếp theo đều tăng 6% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Kể từ sau năm 2019, năm nào dưới đây là năm đầu tiên của tỉnh $A$ có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1700 ha?

**A.** Năm 2029. **B.** Năm 2051. **C.** Năm 2030. **D.** Năm 2050.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Trong năm 2019, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là $A = 900$ ha.

Trong năm 2020, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là $A_1 = A + 6\%A = A(1+6\%)$ ha.

Trong năm 2021, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là

$$A_2 = A_1 + 6\%A_1 = A_1(1+6\%) = A(1+6\%)(1+6\%) = A(1+6\%)^2 \text{ ha.}$$

Trong năm 2022, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là

$$A_3 = A_2 + 6\%A_2 = A_2(1+6\%) = A(1+6\%)^2(1+6\%) = A(1+6\%)^3 \text{ ha.}$$

…

Trong năm $2019+n$, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là $A_n = A(1+6\%)^n$ ha.

Khi đó, diện tích rừng trồng mới đạt trên 1700 ha khi

$A_n > 1700 \Leftrightarrow A(1+6\%)^n > 1700 \Leftrightarrow 900.1,06^n > 1700 \Leftrightarrow 1,06^n > \frac{17}{9}$

$\Leftrightarrow n > \log_{1,06}\frac{17}{9} \approx 10,9 \Rightarrow n_{\min} = 11.$

Vậy năm $2030$ là năm đầu tiên của tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên $1700$ ha.

**Câu 4.** **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Trong năm $2019$, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là $800ha$. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng $6\%$ so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Kể từ sau năm $2019$, năm nào dưới đây là năm đầu tiên tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên $1400ha$?

**A.** Năm $2029$. **B.** Năm $2028$. **C.** Năm $2048$. **D.** Năm $2049$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Trong năm $2019$, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là $800ha$. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng $6\%$ so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước nên sau $n$ (năm) diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là $800.(1+6\%)^n$ với $n \in \mathbb{N}$.

Ta có $800.(1+6\%)^n \geq 1400 \Leftrightarrow 1,06^n \geq \frac{7}{4} \Leftrightarrow n \geq \log_{1,06}\frac{7}{4} \approx 9,60402$.

Vì $n \in \mathbb{N}$ nên giá trị nhỏ nhất thỏa mãn là $n = 10$.

Vậy: kể từ sau năm $2019$, năm đầu tiên tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên $1400ha$ là năm $2029$.

**Câu 5.** **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Năm $2020$ một hãng xe niêm yết giá bán loại xe X là $750.000.000$ đồng và dự định trong $10$ năm tiếp theo, mỗi năm giảm $2\%$ giá bán so với giá bán của năm liền trước. Theo dự định đó năm $2025$ hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là bao nhiêu ( kết quả làm tròn đến hàng nghìn )?

**A.** $677.941.000$ đồng. **B.** $675.000.000$ đồng.

**C.** $664.382.000$ đồng. **D.** $691.776.000$ đồng.

**Lời giải**

**Chọn A**

Giá xe năm $2020$ là $A$

Giá xe năm $2021$ là $A_1 = A - A.r = A(1-r)$.

Giá xe năm $2022$ là $A_2 = A_1 - A_1.r = A(1-r)^2$.

Giá xe năm $2023$ là $A_3 = A_2 - A_2.r = A(1-r)^3$.

Giá xe năm $2024$ là $A_4 = A_3 - A_3.r = A(1-r)^4$.

Giá xe năm $2025$ là $A_5 = A_4 - A_4.r = A(1-r)^5 = 750.000.000\left(1-\frac{2}{100}\right)^5 \approx 677.941.000$ đồng.

**Câu 6.** **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Năm 2020, một hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là 800.000.000 đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán so với giá bán của năm liền trước. Theo dự định đó, năm 2025 hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng nghìn)?

**A.** 708.674.000 đồng. **B.** 737.895.000 đồng. **C.** 723.137.000 đồng. **D.** 720.000.000 đồng.

**Lời giải**

**Chọn C**

Giá bán loại xe X năm 2021 là: $800.000.000-800.000.000\times 2\%=800.000.000\times(1-2\%)$

Giá bán loại xe X năm 2022 là: $800.000.000\times(1-2\%)-800.000.000\times(1-2\%)\times 2\%=800.000.000\times(1-2\%)^2$.

Tương tự ta có: giá bán loại xe X năm 2025 sẽ là: $800.000.000\times(1-2\%)^5\approx 723.137.000$ đồng.

**Câu 7.** **(Đề Tham Khảo 2018)** Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất $0,4\%/$ tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ta khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được lập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền ( cả vốn ban đầu và lãi) gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi xuất không thay đổi?

**A.** 102.16.000 đồng **B.** 102.017.000 đồng **C.** 102.424.000 đồng **D.** 102.423.000 đồng

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $A_n=A_0(1+r)^n=100.000.000\left(1+\dfrac{0,4}{100}\right)^6=102.424.128$

**Câu 8.** **(Mã 104 2018)** Một người gửi tiết kiệm vào một ngân hàng với lãi suất $6,1\%/$ năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

**A.** 11 năm **B.** 12 năm **C.** 13 năm **D.** 10 năm

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi $x$ số tiền gửi ban đầu.

Theo giả thiết $2x=x\left(1+\dfrac{6,1}{100}\right)^N\Leftrightarrow 2=\left(1+\dfrac{6,1}{100}\right)^N$

$\Leftrightarrow 2=\left(1+\dfrac{6,1}{100}\right)^N\Leftrightarrow N=\log_{(1,061)}2\approx 11,7$

Vậy sau ít nhất 12 năm người đó thu được số tiền thỏa yêu cầu.

**Câu 9.** Anh An gửi số tiền 58 triệu đồng vào một ngân hàng theo hình thức lãi kép và ổn định trong 9 tháng thì lĩnh về được 61758000đ. Hỏi lãi suất ngân hàng hàng tháng là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất không thay đổi trong thời gian gửi.

**A.** $0,8\%$ **B.** $0,6\%$ **C.** $0,7\%$ **D.** $0,5\%$

**Lời giải**

**Chọn C**

Áp dụng công thức $A_n=A_0(1+r)^n$ với $n$ là số kỳ hạn, $A_0$ là số tiền ban đầu, $A_n$ là số tiền có được sau $n$ kỳ hạn, $r$ là lãi suất.

Suy ra $A_9=A_0(1+r)^9\Rightarrow r=\sqrt[9]{\dfrac{A_9}{A_0}}-1=0,7\%$.

**Câu 10.** **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất $0,6\%$/tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập làm vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng, người

đó được lĩnh số tiền không ít hơn 110 triệu đồng (cả vốn ban đầu và lãi), biết rằng trong suốt thời gian gửi tiền người đó không rút tiền và lãi suất không thay đổi?

**A.** 18 tháng **B.** 16 tháng **C.** 17 tháng **D.** 15 tháng

**Lời giải**

**Chọn B**

Sau $n$ tháng, người đó lĩnh được số tiền là: $100.(1+0,6\%)^n$ (triệu đồng).

Sau $n$ tháng, người đó được lĩnh số tiền không ít hơn 110 triệu đồng (cả vốn ban đầu và lãi)

$\Rightarrow 100.(1+0,6\%)^n \geq 110 \Leftrightarrow n \geq \log_{1+0,6\%}\frac{11}{10} \approx 15,9$.

**Cu 11. Một người lần □ầu gửi ồo nận ñng 100 triệu □ồng theo thể thức ñi ấp (tức ì tiền ñi của kỳ trước □ược cộng ồo vốn của kỳ kế tiếp) với kì hạn 3 tấng, ñi suất 2% một quî. Sau □ủng 6 tấng, người □ĩ gửi thm 100 triệu □ồng với kỳ hạn ồ ñi suất như trước □ĩ. Tổng số tiền người □ĩ nhận □ược sau 1 năm gửi tiền ồo nận ñng gần bằng với kết quả ồo sau □ây? Biết rằng trong suốt thời gian gửi tiền ñi suất nận ñng khơng thay □ổi ồ người □ĩ khơng ỉt tiền ra.**

A. 212 **triệu □ồng** B. 216 **triệu □ồng** C. 210 **triệu □ồng** D. 220 **triệu □ồng**

**Lời giải**

**Chọn A**

**Ta cĩ:** $r = 2\% = 0,02$

**• Số tiền** 100 **triệu □ồng gửi lần □ầu thì sau 1 năm (4 quî) nhận □ược cả vốn lẫn ñi ì:**

$T_1 = 100(1+0,02)^4 = 108,24$ **triệu □ồng**

**• Số tiền** 100 **triệu □ồng gửi lần thứ hai thì sau 6 tấng (2 quî) nhận □ược cả vốn lẫn ñi ì:**

$T_2 = 100(1+0,02)^2 = 104,04$ **triệu □ồng**

Vậy tổng số tiền nhận được là: $T = T_1 + T_2 = 212,28$ **triệu □ồng.**

**Câu 12. (KTNL Gia Bình 2019)** Ông An gửi tiết kiệm 50 triệu đồng vào ngân hàng với kỳ hạn 3 tháng, lãi suất 8,4% một năm theo hình thức lãi kép. Ông gửi được đúng 3 kỳ hạn thì ngân hàng thay đổi lãi suất, ông gửi tiếp 12 tháng nữa với kỳ hạn như cũ và lãi suất trong thời gian này là 12% một năm thì ông rút tiền về. Số tiền ông An nhận được cả gốc lẫn lãi là: (*làm tròn đến chữ số hàng đơn vị*)

**A.** 62255910 đồng. **B.** 59895767 đồng. **C.** 59993756 đồng. **C.** 63545193 đồng.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đợt I, ông An gửi số tiền $P_0 = 50$ triệu, lãi suất 8,4% một năm tức là 2,1% mỗi kỳ hạn. Số tiền cả gốc và lãi ông thu được sau 3 kỳ hạn là: $P_3 = 50000000.(1.021)^3$.

Đợt II, do ông không rút ra nên số tiền $P_3$ được xem là số tiền gửi ban đầu của đợt II, lãi suất đợt II là 3% mỗi kỳ hạn. Ông gửi tiếp 12 tháng bằng 4 kỳ hạn nên số tiền thu được cuối cùng là:

$P = P_3(1.03)^4 = 50000000.(1.021)^3.(1.03)^4 \approx 59895767$ đồng.

**Câu 13. (THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Ngày 01 tháng 01năm 2017, ông An đem 800 triệu đồng gửi vào một ngân hàng với lãi suất 0,5% một tháng. Từ đó, cứ tròn mỗi tháng, ông đến ngân hàng rút 6 triệu để chi tiêu cho gia đình. Hỏi đến ngày 01tháng 01 năm 2018, sau khi rút tiền, số tiền tiết

kiệm của ông An còn lại là bao nhiêu? Biết rằng lãi suất trong suốt thời gian ông An gửi không thay đổi

**A.** $800.(1,005)^{11}-72$ (triệu đồng) **B.** $1200-400.(1,005)^{12}$ (triệu đồng)

**C.** $800.(1,005)^{12}-72$ (triệu đồng) **D.** $1200-400.(1,005)^{11}$ (triệu đồng)

**Lời giải**

**Chọn B**

Gửi ngân hàng số tiền là A đồng với lãi suất $r\%$ ./tháng. Mỗi tháng vào ngày ngân hàng tính lãi, rút ra số tiền là X đồng. Sô tiền còn lại sau n tháng đươc tính theo công thức:

$$S_n = A(1+r)^n - X\frac{(1+r)^n-1}{r} = 800(1,005)^{12} - 6.\frac{(1,005)^{12}-1}{0,5\%} = 775.3288753 = 1200-400.(1,005)^{12}$$

**Câu 14.** **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Ông An gửi 100 triệu vào tiết kiệm ngân hàng theo thể thức lãi kép trong một thời gian khá lâu mà không rút ra với lãi suất ổn định trong mấy chục năm qua là $10\%/1$ năm. Tết năm nay do ông kẹt tiền nên rút hết ra để gia đình đón Tết. Sau khi rút cả vốn lẫn lãi, ông trích ra gần 10 triệu để sắm sửa đồ Tết trong nhà thì ông còn 250 triệu. Hỏi ông đã gửi tiết kiệm bao nhiêu lâu?

**A.** 10 năm **B.** 17 năm **C.** 15 năm **D.** 20 năm

**Lời giải**

**Chọn A**

Số tiền ông An tích lũy được gồm cả vốn và lãi là 260 triệu

Công thức tính lãi kép $A_n = A(1+r)^n$

$\Leftrightarrow 260.10^6 = 100.10^6(1+10\%)^n$

$\Leftrightarrow n = 10$

Nguyễn Bảo Vương

**Câu 15.** Một học sinh $A$ khi 15 tuổi được hưởng tài sản thừa kế 200 000 000 VNĐ. Số tiền này được bảo quản trong ngân hàng $B$ với kì hạn thanh toán 1 năm và học sinh $A$ chỉ nhận được số tiền này khi 18 tuổi. Biết rằng khi 18 tuổi, số tiền mà học sinh $A$ được nhận sẽ là 231 525 000 VNĐ. Vậy lãi suất kì hạn một năm của ngân hàng $B$ là bao nhiêu?

**A.** $8\%$ / năm. **B.** $7\%$ / năm. **C.** $6\%$ / năm. **D.** $5\%$ / năm.

**Lời giải**

Ta có: số tiền nhận được của gốc và lãi là: $200\ 000\ 000(1+r)^3 = 231\ 525\ 000$

$\Leftrightarrow r = 5\%/\text{năm}$

**Câu 16.** **(THPT Minh Khai Hà Tĩnh 2019)** Ông Anh gửi vào ngân hàng 60 triệu đồng theo hình thức lãi kép. Lãi suất ngân hàng là $8\%$ trên năm. Sau 5 năm ông An tiếp tục gửi thêm 60 triệu đồng nữa. Hỏi sau 10 năm kể từ lần gửi đầu tiên ông An đến rút toàn bộ tiền gốc và tiền lãi được là bao nhiêu? (Biết lãi suất không thay dổi qua các năm ông gửi tiền).

**A.** $231,815$ (triệu đồng). **B.** $197,201$ (triệu đồng).

**C.** $217,695$ (triệu đồng). **D.** $190,271$ (triệu đồng).

**Lời giải**

Số tiền ông An nhận được sau 5 năm đầu là: $60(1+8\%)^5 = 88,160$ (triệu đồng)

Số tiền ông An nhận được (toàn bộ tiền gốc và tiền lãi) sau 10 năm là:

$(88,16+60)(1+8\%)^5 = 217,695$ (triệu đồng).

**Câu 17.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Một người mỗi tháng đều đặn gửi vào ngân hàng một khoản tiền $T$ theo hình thức lãi kép với lãi suất $0,6\%$ mỗi tháng. Biết sau $15$ tháng người đó có số tiền là $10$ triệu đồng. Hỏi số tiền $T$ gần với số tiền nào nhất trong các số sau.

**A.** 613.000 đồng **B.** 645.000 đồng **C.** 635.000 đồng **D.** 535.000 đồng

**Lời giải**

Ta có: Số tiền cả lãi lẫn gốc sau 15 tháng gửi: $S_{15} = \frac{T}{r}(1+r)\left[(1+r)^{15}-1\right]$

Vậy: $10.000.000 = \frac{T}{0,006}(1+0,006)\left[(1+0,006)^{15}-1\right] \Leftrightarrow T \approx 635.301$

**Câu 18.** **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Anh Nam gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn là một quý với lãi suất 3% một quý. Sau đúng 6 tháng anh Nam gửi thêm 100 triệu đồng với kì hạn và lãi suất như trước đó.Hỏi sau 1 năm số tiền (cả vốn lẫn lãi) anh Nam nhận được là bao nhiêu? ( Giả sử lãi suất không thay đổi).

**A.** $218,64$ triệu đồng. **B.** $208,25$ triệu đồng.

**C.** $210,45$ triệu đồng. **D.** $209,25$ triệu đồng.

**Lời giải**

• Số tiền anh Nam nhận được sau 6 tháng (tức 2 quý) là:

$T_1 = 100\left(1+3^0/_0\right)^2 = 106,09$ triệu đồng.

• Số tiền anh Nam nhận được sau một năm (tức 2 quý còn lại của năm) là:

$T_2 = (106,09+100)\left(1+3^0/_0\right)^2 \approx 218,64$ triệu đồng.

**Câu 19.** **(Chuyên Sơn La 2019)** Ông A gửi vào ngân hàng $50$ triệu đồng với lãi suất $0,5\%$ / tháng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng thì ông A có được số tiền cả gốc lẫn lãi nhiều hơn 60 triệu đồng? Biết rằng trong suốt thời gian gửi, lãi suất ngân hàng không đổi và ông A không rút tiền ra.

**A.** 36 tháng. **B.** 38 tháng. **C.** 37 tháng. **D.** 40 tháng.

**Lời giải**

Gọi $A$ là số tiền gửi vào ngân hàng, $r$ là lãi suất, $T$ là số tiền cả gốc lẫn lãi thu được sau $n$ tháng. Ta có $T = A(1+r)^n$.

Theo đề $T = 50.(1,005)^n > 60 \Leftrightarrow n > \log_{1,005}\frac{6}{5} \approx 36,6$.

Vậy sau ít nhất $37$ tháng thì ông A thu được số tiền cả gốc lẫn lãi hơn 60 triệu.

**Câu 20.** **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Một người gửi $300$ triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất $7\%$ / năm. Biết rằng nếu không rút tiền khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm, người đó nhận được số tiền nhiều hơn $600$ triệu đồng bao gồm cả gốc và lãi? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi và người đó không rút tiền ra.

**A.** 9 năm. **B.** 10 năm. **C.** 11 năm. **D.** 12 năm.

**Lời giải**

Kí hiệu số tiền gửi ban đầu là $A$, lãi suất một kì hạn là $m$ thì số tiền cả gốc và lãi có được sau $n$ kì hạn là $A.(1+m)^n$.

Do đó, số tiền cả gốc và lãi người đó nhận được sau $n$ năm là $300.1,07^n$ triệu đồng.

Số tiền cả gốc và lãi nhận được nhiều hơn 600 triệu đồng

$\Leftrightarrow 300.1,07^n > 600 \Leftrightarrow n > \log_{1,07} 2 \approx 10,245$.

Vậy sau ít nhất 11 năm thì người đó nhận được số tiền nhiều hơn 600 triệu đồng bao gồm cả gốc và lãi.

**Câu 21.** **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Anh Bảo gửi 27 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép, kỳ hạn là một quý, với lãi suất $1,85\%$ một quý. Hỏi thời gian tối thiểu bao nhiêu để anh Bảo có được ít nhất 36 triệu đồng tính cả vốn lẫn lãi?

**A.** 16 quý. **B.** 20 quý. **C.** 19 quý. **D.** 15 quý.

**Lời giải**

Bài toán lãi kép:

Kí hiệu số tiền gửi ban đầu là $A$, lãi suất một kì hạn là $r\%$ thì số tiền cả gốc và lãi có được sau $n$ kì hạn là $S_n = A.(1+r\%)^n$.

Anh Bảo nhận được số tiền ít nhất 36 triệu đồng tính cả vốn và lãi nên ta có:

$27(1+1,85\%)^n \geq 36 \Leftrightarrow n \geq 15.693$.

Vậy thời gian tối thiểu để anh Bảo nhận được ít nhất 36 triệu đồng tính cả vốn lẫn lãi là 16 quý.

**Câu 22.** **(Sở Bắc Giang 2019)** Ông An gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 0,8%/ tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho tháng tiếp theo và từ tháng thứ hai trở đi, mỗi tháng ông gửi them vào tài khoản với số tiền 2 triệu đồng. Hỏi sau đúng 2 năm số tiền ông An nhận được cả gốc lẫn lãi là bao nhiêu? Biết rằng trong suốt thời gian gửi lãi suất không thay đổi và ông An không rút tiền ra (kết quả được làm tròn đến hàng nghìn).

**A.** 169.871.000 đồng. **B.** 171.761.000 đồng. **C.** 173.807.000 đồng. **D.** 169.675.000 đồng.

**Lời giải**

Với 100 triệu ban đầu số tiền cả lãi và gốc thu được sau hai năm là

$T_1 = 100.(1+0,8\%)^{24}.10^6 = 121074524$

Mỗi tháng tiếp theo gửi 2 triệu thì tổng số tiền cả lãi và gốc là

$T_2 = \frac{2}{0,008}.\left[(1+0,008)^{23}-1\right].(1+0,008)10^6 = 50686310$

Vậy tổng số tiền là $T = T_1 + T_2 = 171.761.000$

**Câu 23.** Năm 2020, một hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là 900.000.000 đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán so với giá bán năm trước. Theo dự định đó, năm 2025 hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là bảo nhiêu ( kết quả làm tròn đến hàng nghìn)?

**A.** 810.000.000. **B.** 813.529.000. **C.** 797.258.000. **D.** 830.131.000.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $A = 900.000.000, r = \frac{2}{100}$

Năm 2021 giá xe niêm yết là: $T_1 = A - Ar$

Năm 2022 giá xe niêm yết là $T_2 = A - Ar - (A - Ar)r = A(1-r)^2$

.

Năm 2025 giá xe niêm yết là: $T_5 = T_4 - T_4 r = A(1-r)^5$

$T_5 = 900.000.000\left(1-\frac{2}{100}\right)^5 \approx 813.529.000$

**Câu 24.** **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Năm $2020$, một hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe $X$ là $850.000.000$ đồng và dự định trong $10$ năm tiếp theo, mỗi năm giảm $2\%$ giá bán của năm liền trước. Theo dự định đó, năm $2025$ hãng xe ô tô niêm yết giá bán xe $X$ là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng nghìn)?

**A.** $768.333.000$ đồng. **B.** $765.000.000$ đồng. **C.** $752.966.000$ đồng. **D.** $784.013.000$ đồng.

**Lời giải**

**Chọn A**

Giá bán xe năm đầu tiên: $A_1 = 850.000.000$ đồng.

Giá bán xe năm thứ hai: $A_2 = A_1 - A_1.r = A_1(1-r)$ đồng, với $r = 2\%$.

Giá bán xe năm thứ ba: $A_3 = A_2 - A_2 r = A_2(1-r) = A_1(1-r)^2$ đồng.

…

Giá bán xe năm thứ $n$: $A_n = A_1(1-r)^{n-1}$ đồng.

Vậy giá bán xe năm thứ 6 là $A_6 = A_1(1-r)^5 = 850.000.000.(1-2\%)^5 \approx 768.333.000$ đồng.

**Câu 25.** **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020)** Một ngân hàng $X$, quy định về số tiền nhận được của khách hàng sau $n$ năm gửi tiền vào ngân hàng tuân theo công thức $P(n) = A(1+8\%)$, trong đó $A$ là số tiền gửi ban đầu của khách hàng. Hỏi số tiền ít nhất mà khách hàng B phải gửi vào ngân hàng $X$ là bao nhiêu để sau ba năm khách hàng đó rút ra được lớn hơn $850$ triệu đồng (Kết quả làm tròn đến hàng triệu)?.

**A.** $675$ triệu đồng. **B.** $676$ triệu đồng.

**C.** $677$ triệu đồng. **D.** $674$ triệu đồng.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $P(n) = A(1+8\%)^n$.

Sau 3 năm số tiền khách hàng rút về lớn hơn $850$ triệu đồng là:

$850 < A(1+8\%)^3 \Leftrightarrow A > \dfrac{850}{(1+8\%)^3} \approx 674,8$.

Vậy số tiền ít nhất mà khách hàng B phải gửi vào ngân hàng $X$ là $675$ triệu đồng.

**Câu 26.** **(Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm - Quảng Nam - 2020)** Ông tuấn gửi 100 triệu vào ngân hàng với hình thức lãi kép, kỳ hạn 1 năm với lãi suất $8\%$. Sau 5 năm ông rút toàn bộ tiền và dùng một nữa để sửa nhà, số tiền còn lại ông tiếp tục gửi ngân hàng với lãi suất như lần trước. Số tiền lãi ông tuấn nhận được sau 10 năm gửi gần nhất với giá trị nào dưới đây?

**A.** $46,933$ triệu. **B.** $34,480$ triệu. **C.** $81,413$ triệu. **D.** $107,946$ triệu.

**Lời giải**

**Chọn C**

Năm năm đầu ông Tuấn có số tiền cả gốc và lãi là $T_1 = 100.(1+0.08)^5 = 146,933$

Sau khi sửa nhà số tiền còn lại gửi vào ngân hàng trong 5 năm thì số tiền cả gốc và lãi là

$T_2 = \dfrac{146,932}{2}(1+0.08)^5 = 107,946.$

Số tiền lãi trong 10 năm là $L = (146,933-100)+(107,946-73,466) = 81,413.$

**Câu 27.** **(Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020)** Dân số thế giới được ước tính theo công thức $S = A.e^{ni}$, trong đó $A$ là dân số của năm lấy mốc, $S$ là dân số sau $n$ năm, $i$ là tỷ lệ tăng dân số hàng năm. Biết năm $2005$ dân số của thành phố Tuy Hòa là khoảng $202.300$ người và tỉ lệ tăng dân số là $1,47\%$.

Hỏi với mức tăng dân số không đổi thì đến năm bao nhiêu dân số thành phố Tuy Hòa đạt được $255.000$ người?

**A.** $2020$. **B.** $2021$. **C.** $2023$. **D.** $2022$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Lấy năm $2005$ làm mốc, khi đó $A = 202.300$.

Giả sử sau $n$ năm thì dân số thành phố Tuy Hòa đạt được $255.000$ người, tức là ta có

$$255.000 = 202.300 \cdot e^{\frac{1,47n}{100}} \Leftrightarrow n = 100 \cdot \ln \frac{255000}{202300} \approx 15,75 \text{ năm.}$$

Vậy đến năm $2021$ thì dân số thành phố Tuy Hòa đạt được $255.000$ người.

**Câu 28.** **(Tiên Du - Bắc Ninh - 2020)** Số ca nhiễm Covid – 19 trong cộng đồng ở một tỉnh vào ngày thứ $x$ trong một giai đoạn được ước tính theo công thức $f(x) = A.\mathrm{e}^{rx}$ trong đó $A$ là số ca nhiễm ở ngày đầu của giai đoạn, $r$ là tỷ lệ gia tăng số ca nhiễm hàng ngày của giai đoạn đó và trong cùng một giai đoạn thì $r$ không đổi. Giai đoạn thứ nhất tính từ ngày tỉnh đó có 9 ca bệnh đầu tiên và không dùng biện pháp phòng chống lây nhiễm nào thì đến ngày thứ 6 số ca bệnh của tỉnh là 180 ca. Giai đoạn thứ hai (kể từ ngày thứ 7 trở đi) tỉnh đó áp dụng các biện pháp phòng chống lây nhiễm nên tỷ lệ gia tăng số ca nhiễm hàng ngày giảm đi 10 lần so với giai đoạn trước. Đến ngày thứ 6 của giai đoạn hai thì số ca mắc bệnh của tỉnh đó gần nhất với số nào sau đây?

**A.** $242$. **B.** $16$. **C.** $90$. **D.** $422$.

**Lời giải**

**Chọn A**

* Giai đoạn 1:

Ta có: $180 = 9.\mathrm{e}^{r6} \Rightarrow r = \frac{1}{6}\ln 20$

Nguyễn Bảo Vương

* Giai đoạn 2:

Đến ngày thứ 6 số ca mắc bệnh của tỉnh là $f(x) = 180.\mathrm{e}^{\frac{r}{10}.6} = 242$

**Câu 29.** **(Kìm Thành - Hải Dương - 2020)** Anh Việt vay tiền ngân hàng $500$ triệu đồng mua nhà và trả góp hàng tháng. Cuối mỗi tháng bắt đầu từ tháng thứ nhất anh trả $10$ triệu đồng và chịu lãi suất là $0,9\%$ / tháng cho số tiền chưa trả. Với hình thức hoàn nợ như vậy thì sau bao lâu anh Việt sẽ trả hết số nợ ngân hàng?

**A.** $65$ tháng. **B.** $66$ tháng. **C.** $67$ tháng. **D.** $68$ tháng.

**Lời giải**

**Chọn C**

Gọi A là số tiền vay ngân hàng; $r$ là lãi suất hàng tháng cho số tiền còn nợ; $m$ là số tiền trả nợ hàng tháng; $n$ là thời gian trả hết nợ.

Để trả hết nợ thì $A(1+r)^n - \frac{m}{r}\left[(1+r)^n - 1\right] = 0$

$$\Leftrightarrow 500(1+0,9\%)^n - \frac{10}{0,9\%}\left[(1+0,9\%)^n - 1\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+0,9\%)^n = \frac{20}{11}$$

$$\Leftrightarrow n = \log_{(1+0,9\%)} \frac{20}{11} \approx 66,72$$

Vậy sau 67 tháng anh Việt trả hết nợ.

**Câu 30.** **(Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020)** Dân số thế giới được ước tính theo công thức $S = A.e^{ni}$, trong đó $A$ là dân số của năm lấy làm mốc, $S$ là dân số sau $n$ năm, $i$ là tỉ lệ tăng dân số hằng năm. Dân số Việt Nam năm 2019 là $95,5$ triệu người, tỉ lệ tăng dân số hằng năm từ 2009 đến nay là $1,14\%$. Hỏi dân số Việt Nam năm 2009 gần với số nào nhất trong các số sau?

**A.** $94,4$ triệu người. **B.** $85,2$ triệu người. **C.** $86,2$ triệu người. **D.** $83,9$ triệu người.

**Lời giải**

**Chọn B**

Áp dụng công thức $S = A.e^{ni}$ trong đó: $S = 95,5$ triệu người, $n = 10$ năm, $i = 1,14\%$

Ta có số dân Việt Nam năm 2009 là: $A = \dfrac{S}{e^{ni}} = \dfrac{95,5}{e^{10.1,14\%}} \approx 85,2$ triệu người

**Câu 31.** **(Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020)** Ông An dự định gửi vào ngân hàng một số tiền với lãi suất không đổi là 7% một năm. Biết rằng cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho năm kế tiếp. Tính số tiền tối thiểu $x$ (triệu đồng, $x \in \mathbb{N}$) ông An gửi vào ngân hàng để sau 3 năm số tiền lãi đủ mua một chiếc xe gắn máy giá trị 45 triệu đồng.

**A.** 200. **B.** 190. **C.** 250. **D.** 150.

**Lời giải**

**Chọn A**

Áp dụng công thức $P = P_o(1+r)^n$.

Số tiền ông An có được sau 3 năm là: $P = x(1+0,07)^3$.

Tiền lãi ông An có được sau 3 năm là: $P - x = x(1+0,07)^3 - x = x\left((1+0,07)^3 - 1\right)$.

Số tiền lãi trên là 45 triệu đồng nên: $x\left((1+0,07)^3 - 1\right) = 45 \Leftrightarrow x \simeq 199,96$

**Câu 32.** **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Để dự báo dân số của một quốc gia, người ta sử dụng công thức $S = Ae^{nr}$; trong đó $A$ là dân số của năm lấy làm mốc tính, $S$ là dân số sau $n$ năm, $r$ là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Năm 2017, dân số Việt nam là 93.671.600 người (Tổng cục Thống kê, Niên giám thống kê 2017, Nhà xuất bản Thống kê, Tr 79). Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi là $0,81\%$, dự báo dân số Việt nam năm 2035 là bao nhiêu người (kết quả làm tròn đến chữ số hàng trăm)?

**A.** 109.256.100. **B.** 108.374.700. **C.** 107.500.500. **D.** 108.311.100.

**Lời giải**

**Chọn B**

Lấy năm 2017 làm mốc, ta có $A = 93.671.600; n = 2035 - 2017 = 18$

$\Rightarrow$ Dân số Việt Nam vào năm 2035 là $S = 93.671.600.e^{18.\frac{0,81}{100}} \approx 108.374.700$

**Câu 33.** **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Để quảng bá cho sản phẩm A, một công ty dự định tổ chức quảng cáo theo hình thức quảng cáo trên truyền hình. Nghiên cứu của công ty cho thấy: nếu sau $n$ lần quảng cáo được phát thì tỉ lệ người xem quảng cáo đó mua sản phẩm A tuân theo công thức $P(n) = \dfrac{1}{1+49e^{-0,015n}}$. Hỏi cần phát ít nhất bao nhiêu lần quảng cáo để tỉ lệ người xem mua sản phẩm đạt trên $30\%$?

**A.** 202. **B.** 203. **C.** 206. **D.** 207.

**Lời giải**

**Chọn B**

Theo bài ra ta có $\frac{1}{1+49\mathrm{e}^{-0,015n}}>0,3$

$\Leftrightarrow 1+49\mathrm{e}^{-0,015n}<\frac{10}{3}$

$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0,015n}<\frac{7}{147}$

$\Leftrightarrow -0,015n<\ln\frac{7}{147}$

$\Leftrightarrow n>-\frac{1}{0,015}\ln\frac{7}{147}\approx 202,97$.

Vậy ít nhất 203 lần quảng cáo.

**Câu 34.** **(Sở Hà Nội 2019)** Cường độ ánh sáng đi qua môi trường nước biển giảm dần theo công thức $I=I_0\mathrm{e}^{-\mu x}$, với $I_0$ là cường độ ánh sáng lúc ánh sáng bắt đầu đi vào môi trường nước biển và $x$ là độ dày của môi trường đó ( $x$ tính theo đơn vị mét). Biết rằng môi trường nước biển có hằng số hấp thụ là $\mu=1,4$. Hỏi ở độ sâu 30 mét thì cường độ ánh sáng giảm đi bao nhiêu lần so với cường độ ánh sáng lúc ánh sáng bắt đầu đi vào nước biển?

**A.** $\mathrm{e}^{-21}$ lần. **B.** $\mathrm{e}^{42}$ lần. **C.** $\mathrm{e}^{21}$ lần. **D.** $\mathrm{e}^{-42}$ lần

**Lời giải:**

Khi mới bắt đầu đi vào môi trường nước biển thì $x=0\Rightarrow I_1=I_o.\mathrm{e}^{o}$

Ở độ sâu 30 mét thì $I_2=I_o.\mathrm{e}^{-\mu.30}$

Vậy ta có: $\frac{I_2}{I_1}=\frac{I_o.\mathrm{e}^{-\mu.30}}{I_o.\mathrm{e}^{o}}\Rightarrow I_2=\mathrm{e}^{-42}.I_1$, vậy $I_2$ tăng $\mathrm{e}^{-42}$ lần so với $I_1$, nói cách khác, $I_2$ giảm $\mathrm{e}^{42}$ lần so với $I_1$

**Câu 35.** **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Một người thả một lá bèo vào một chậu nước. Sau 12 giờ, bèo sinh sôi phủ kín mặt nước trong chậu. Biết rằng sau mỗi giờ lượng bèo tăng gấp 10 lần lượng bèo trước đó và tốc độ tăng không đổi. Hỏi sau mấy giờ thì bèo phủ kín $\frac{1}{5}$ mặt nước trong chậu (kết quả làm tròn đến 1 chữ số phần thập phân).

**A.** 9,1 giờ. **B.** 9,7 giờ. **C.** 10,9 giờ. **D.** 11,3 giờ.

**Lời giải**

Gọi $S$ là diện tích lá bèo thả ban đầu.

Vì sau mỗi giờ, lượng bèo tăng gấp 10 lần lượng bèo trước đó nên sau 12 giờ, tổng diện tích các lá bèo trong chậu là $10^{12}S$.

Theo đề bài: Sau 12 giờ, bèo phủ kín mặt nước trong chậu nên diện tích mặt nước trong chậu là $10^{12}S$. Giả sử sau $x$ giờ thì bèo phủ kín $\frac{1}{5}$ mặt nước trong chậu.

Ta có: $10^{x}S=\frac{1}{5}.10^{12}S\Leftrightarrow 10^{12-x}=5\Leftrightarrow x=12-\log 5\simeq 11,3$.

Vậy sau 11,3 giờ thì bèo phủ kín $\frac{1}{5}$ mặt nước trong chậu.

**Câu 36.** **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = A.e^{Nr}$ (trong đó $A$ là dân số của năm lấy làm mốc tính, $S$ là dân số sau $N$ năm, $r$ là tỉ lệ tăng dân số hằng năm). Đầu năm 2010 dân số tỉnh Bắc Ninh là 1.038.229 người tính đến đầu năm 2015 dân số của tỉnh là 1.153.600 người. Hỏi nếu tỉ lệ tăng dân số hằng năm giữ nguyên thì đầu năm 2020 dân số của tỉnh nằm trong khoảng nào?

**A.** $(1.281.600;1.281.700)$. **B.** $(1.281.700;1.281.800)$.

**C.** $(1.281.800;1.281.900)$. **D.** $(1.281.900;1.282.000)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Áp dụng công thức $S = A.e^{Nr}$ từ đầu năm 2010 đến đầu năm 2015 ta có:

$1153600 = 1038229.e^{5r} \Leftrightarrow r = \frac{1}{5}\ln\frac{1153600}{1038229}$.

Đầu năm 2020 dân số của tỉnh Bắc Ninh là $S = 1038229.e^{10.\frac{1}{5}\ln\frac{1153600}{1038229}} \approx 1281792$ người.

Vậy Chọn **B.**

**Câu 37.** **(Chuyên Bắc Ninh - 2020)** Anh Dũng đem gửi tiết kiệm số tiền là 400 triệu đồng ở hai loại kỳ hạn khác nhau. Anh gửi 250 triệu đồng theo kỳ hạn 3 tháng với lãi suất $x\%$ một quý. Số tiền còn lại anh gửi theo kỳ hạn 1 tháng với lãi suất $0,25\%$ một tháng. Biết rằng nếu không rút lãi thì số lãi sẽ được nhập vào số gốc để tính lãi cho kỳ hạn tiếp theo. Sau một năm số tiền cả gốc và lãi của anh là 416.780.000 đồng. Tính $x$.

**A.** $1,2$. **B.** $0,8$. **C.** $0,9$. **D.** $1,5$.

**Lời giải**

**Chọn A**

+ Xét bài toán ông B gửi tiết kiệm số tiền $A$ đồng với lãi suất $r$ cho 1 kỳ hạn. Biết rằng nếu không rút lãi thì số lãi sẽ được nhập vào số gốc để tính lãi cho kỳ hạn tiếp theo. Hỏi sau $n$ kỳ hạn số tiền cả gốc và lãi của ông B là bao nhiêu nếu trong thời gian gửi lãi suất không thay đổi?

- Sau 1 kì hạn số tiền cả gốc và lãi mà ông B có được là $T_1 = A + A.r = A(1+r)$.

- Sau 2 kì hạn số tiền cả gốc và lãi mà ông B có được là $T_2 = T_1 + T_1.r = T_1(1+r) = A(1+r)^2$.

- Tổng quát ông B có số tiền cả gốc và lãi sau $n$ kì hạn là $T_n = A(1+r)^n \ (1)$.

+ Áp dụng công thức $(1)$ cho bài toán đề cho, gọi $S$ là số tiền cả gốc và lãi anh Dũng có sau một năm gửi, ta có : $S = 250(1+x\%)^4 + 150(1+0,25\%)^{12}$ (triệu đồng).

$S = 416,78$ (triệu đồng) $\Leftrightarrow 250(1+x\%)^4 + 150(1+0,25\%)^{12} = 416,78 \Leftrightarrow x \approx 1,2$.

Vậy $x \approx 1,2$.

**Câu 38.** **(Chuyên Lê Quý Đôn – Điện Biên 2019)** Một người thả một lá bèo vào một chậu nước. Sau 12 giờ bèo sinh sôi phủ kín mặt nước trong chậu. Biết rằng sau mỗi giờ lượng bèo tăng gấp 10 lần lượng bèo trước đó và tốc độ tăng không đổi. Hỏi sau mấy giờ thì bèo phủ kín $\frac{1}{5}$ mặt nước trong chậu (kết quả làm tròn đến một chữ số phần thập phân)?

**A.** 9,1 giờ. **B.** 9,7 giờ. **C.** 10,9 giờ. **D.** 11,3 giờ.

**Lời giải**

**Chọn D**

Sau mỗi giờ, lượng lá bèo phủ trên mặt nước là: $10^n \ (1 \le n \le 12)$.

$\Rightarrow$ Lượng lá bèo phủ kín mặt nước trong chậu (sau 12 giờ) là:

$$S=1+10+10^2+...+10^{12}=\frac{10^{13}-1}{9}$$

Do đó, lượng lá bèo cần để phủ $\frac{1}{5}$ mặt nước trong chậu là $\frac{10^{13}-1}{45}$.

Giả sử sau $t$ giờ, lá bèo phủ kín được $\frac{1}{5}$ mặt nước trong chậu, ta có

$$1+10+10^2+...+10^t=\frac{10^{t+1}-1}{9}=\frac{10^{13}-1}{45}$$

$$10^{t+1}=\frac{10^{13}+4}{5}\Leftrightarrow t\approx 11,3.$$

**Câu 39.** **(Bình Giang-Hải Dương 2019)** Một công ty vừa tung ra thị trường sản phẩm mới và họ tổ chức quảng cáo trên truyền hình mỗi ngày. Một nghiên cứu thị trường cho thấy, nếu sau $x$ lần quảng cáo được phát thì số % người xem mua sản phẩm là $P(x)=\frac{100}{1+49e^{-0.015x}}$, $x\ge 0$. Hãy tính số lần quảng cáo được phát tối thiểu để số % người xem mua sản phẩm đạt hơn $75\%$.

**A.** $323$. **B.** $343$. **C.** $330$. **D.** $333$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Theo yêu cầu bài toán ta có:

$$P(x)=\frac{100}{1+49e^{-0.015x}}>75\Leftrightarrow 1+49e^{-0.015x}<\frac{4}{3}\Leftrightarrow e^{-0.015x}<\frac{1}{147}$$

$$\Leftrightarrow -0.015x<\ln\left(\frac{1}{147}\right)\Leftrightarrow x>\frac{\ln\left(\frac{1}{147}\right)}{-0.015}\approx 332.7$$

Vậy số lần quảng cáo tối tiểu là $333$ lần.

**Câu 40.** Áp suất không khí $P$ (đo bằng milimet thủy ngân, kí hiệu là mmHg) suy giảm mũ so với độ cao $x$ (so với mặt nước biển)(đo bằng mét) theo công thức $P=P_0.e^{xi}$, trong đó $P_0=760\,\text{mmHg}$ là áp suất ở mực nước biển $(x=0)$, $i$ là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao $1000\,\text{m}$ thì áp suất của không khí là $672,71\,\text{mmHg}$. Hỏi áp suất không khí ở độ cao $3343\,\text{m}$ là bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?

**A.** $505,45\,\text{mmHg}$. **B.** $530,23\,\text{mmHg}$. **C.** $485,36\,\text{mmHg}$. **D.** $495,34\,\text{mmHg}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ở độ cao $x_1=1000\,\text{m}$ thì áp suất không khí $P_1=672,71\,\text{mmHg}$. Suy ra

$$P_1=P_0.e^{x_1 i}\Leftrightarrow x_1 i=\ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right)\Leftrightarrow i=\frac{\ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right)}{x_1}=-1,22.10^{-4}.$$

Áp suất không khí $P_2$ ở độ cao $x_2=3343\,\text{m}$ là: $P_2=P_0.e^{x_2 i}=760.e^{3343.(-1.22.10^{-4})}=505,46\,\text{mmHg}$.

**Câu 41.** Số lượng loại vi khuẩn $A$ trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t)=s(0).2^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn $A$ lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn $A$ có sau $t$ phút. Biết sau 3 phút thì số vi khuẩn $A$ là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu kể từ lúc ban đầu, số lượng loại vi khuẩn $A$ là 20 triệu con.

**A.** 7 phút. **B.** 12 phút. **C.** 48 phút. **D.** 8 phút.

**Lời giải**

**Chọn D**

Theo giả thiết ta có: $s(3)=625000 \Leftrightarrow s(0).2^3=625000 \Leftrightarrow s(0)=78125$.

Số lượng loại vi khuẩn $A$ là 20 triệu con khi

$$s(t)=20000000 \Leftrightarrow s(0).2^t=20000000 \Leftrightarrow 2^t=\frac{20000000}{s(0)}=\frac{20000000}{78125}=256 \Leftrightarrow t=8.$$

Vậy, sau 8 phút thì số lượng vi khuẩn $A$ là 20 triệu con.

## NHỮNG CÂU HỎI KHÓ HƠN VỀ BÀI TOÁN THỰC TẾ

**Câu 1.** **(Đề Minh Họa 2017)** Ông A vay ngắn hạn ngân hàng 100 triệu đồng, với lãi suất 12%/năm. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau và trả hết tiền nợ sau đúng 3 tháng kể từ ngày vay. Hỏi, theo cách đó, số tiền $m$ mà ông A sẽ phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu? Biết rằng, lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ.

**A.** $m=\frac{120.(1,12)^3}{(1,12)^3-1}$ (triệu đồng) **B.** $m=\frac{100.(1,01)^3}{3}$ (triệu đồng)

**C.** $m=\frac{(1,01)^3}{(1,01)^3-1}$ (triệu đồng) **D.** $m=\frac{100.1,03}{3}$ (triệu đồng)

Nguyễn Bảo Vương

**Lời giải**

**Chọn C**

Theo đề ta có: ông A trả hết tiền sau 3 tháng vậy ông A hoàn nợ 3 lần

Với lãi suất 12%/năm suy ra lãi suất một tháng là 1%

Hoàn nợ lần 1:

-Tổng tiền cần trả (gốc và lãi) là : $100.0,01+100=100.1,01$ (triệu đồng)

- Số tiền dư : $100.1,01-m$ (triệu đồng)

Hoàn nợ lần 2:

- Tổng tiền cần trả (gốc và lãi)

là : $(100.1,01-m).0,01+(100.1,01-m)=(100.1,01-m).1,01=100.(1,01)^2-1,01.m$ (triệu đồng)

- Số tiền dư: $100.(1,01)^2-1,01.m-m$ (triệu đồng)

Hoàn nợ lần 3:

- Tổng tiền cần trả (gốc và lãi) là :

$\left[100.(1,01)^2-1,01.m-m\right].1,01=100.(1,01)^3-(1,01)^2 m-1,01m$ (triệu đồng)

- Số tiền dư: $100.(1,01)^3-(1,01)^2 m-1,01m-m$ (triệu đồng)

$$\Rightarrow 100.(1,01)^3-(1,01)^2 m-1,01m-m=0 \Leftrightarrow m=\frac{100.(1,01)^3}{(1,01)^2+1,01+1}$$

$$\Leftrightarrow m=\frac{100.(1,01)^3.(1,01-1)}{\left[(1,01)^2+1,01+1\right].(1,01-1)}=\frac{(1,01)^3}{(1,01)^3-1} \text{ (triệu đồng).}$$

**Câu 2.** **(Đề Tham Khảo 2019)** Ông A vay ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất 1%/tháng. Ông ta muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi tháng là như nhau và ông A trả hết nợ sau đúng năm năm kể từ ngày vay. Biết rằng mỗi tháng ngâng hàng chỉ tính lãi trên số dư nợ thực tế của tháng đó. Hỏi số tiền mỗi tháng ông ta cần trả cho ngâng hàng gần nhất với số tiền nào dưới đây?

**A.** $2,20$ triệu đồng **B.** $2,22$ triệu đồng **C.** $3,03$ triệu đồng **D.** $2,25$ triệu đồng

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta xây dựng bài toán tổng quát như sau

*Gọi số tiền người đó vay ngâng hàng là* $V_0$ *triệu đồng*

*Số tiền hàng tháng người đó phải trả là* $a$ *triệu đồng*

*Lãi suất là* $r$ *%/ tháng*

Vậy số tiền nợ ngân hàng sau tháng thứ nhất là $V_0\left(1+0,0r\right)$

Số tiền người đó còn nợ ngân hàng sau khi trả tiền tháng 1 là

$T_1=V_0\left(1+0,0r\right)-a$

Số tiền người đó còn nợ ngân hàng sau khi trả tiền tháng 2 là

$T_2=T_1\left(1+0,0r\right)-a$

$=\left[V_o\left(1+0,0r\right)-a\right]\left(1+0,0r\right)-a$

$=V_o\left(1+0,0r\right)^2-a\left(1+0,0r\right)-a$

Số tiền người đó còn nợ ngâng hàng sau tháng thứ n là

$T_n=V_o\left(1+0,0r\right)^n-a\left(1+0,0r\right)^{n-1}-...-a\left(1+0,0r\right)-a$

Vì sau n tháng thì trả hết tiền nên ta có

$T_n=0\Leftrightarrow V_o\left(1+0,0r\right)^n-a\left(1+0,0r\right)^{n-1}-...-a\left(1+0,0r\right)-a=0$

$\Leftrightarrow V_o\left(1+0,0r\right)^n=a\left[\left(1+0,0r\right)^{n-1}+...+\left(1+0,0r\right)+1\right]$

$\Leftrightarrow V_o\left(1+0,0r\right)^n=a\dfrac{\left(1+0,0r\right)^n-1}{\left(1+0,0r\right)-1}$

$\Leftrightarrow a=\dfrac{V_o.0,0r.\left(1+0,0r\right)^n}{\left(1+0,0r\right)^n-1}$

Áp dụng

$a=\dfrac{100.0,01\left(1,01^{60}\right)}{1,01^{60}-1}\approx 2,224444768$

**Câu 3.** **(Đại Học Hà Tĩnh - 2020)** Đầu mỗi tháng anh A gửi vào ngân hàng 3 triệu đồng với lãi suất kép là $0,6\%$ mỗi tháng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng (khi ngân hàng đã tính lãi) thì anh A có được số tiền cả lãi và gốc nhiều hơn 100 triệu, biết lãi suất không đổi trong qua trình gửi.

**A.** 31 tháng. **B.** 40 tháng. **C.** 35 tháng. **D.** 30 tháng.

**Lời giải**

**Chọn A**

+ Đặt $a=1+r$ và $M$. Trong đó $M$ là số tiền góp vào hàng tháng, r là lãi suất hàng tháng.

Tiền gốc và lãi anh A nhận trong tháng thứ nhất là: $T_1=M+M.r=M.a$.

Tiền gốc và lãi anh A nhận trong tháng thứ hai là: $T_2=M.a+M+\left(M.a+M\right)r=Ma^2+Ma$

…

Tương tự tiền gốc và lãi anh A nhận trong tháng thứ n là:

$$T_n = Ma^n + Ma^{n-1} + ... + Ma = Ma\left(a^{n-1} + a^{n-2} + ... + 1\right) = Ma.\frac{a^n - 1}{a - 1} = \frac{M}{r}(1+r)\left[(1+r)^n - 1\right]$$

+ Sau tháng thứ n anh A gửi vào ngân hàng 3 triệu đồng với lãi suất kép là $0,6\%$ mỗi tháng và nhận được số tiền nhiều hơn 100 triệu, khi đó ta có:

$$\frac{3}{0,6\%}\left[(1+0,6\%)^n - 1\right](1+0,6\%) > 100 \Leftrightarrow n > 30,3$$

Vậy sau ít nhất 31 tháng thì anh A mới có được số tiền nhiều hơn 100 triệu.

**Câu 4.** **(Sở Hà Tĩnh - 2020)** Một người vay tiền ở một ngân hàng theo hình thức lãi kép với lãi suất $0,7\%$ / tháng với tổng số tiền vay là 1 tỉ đồng. Mỗi tháng người đó đều trả cho ngân hàng một số tiền như nhau để trừ vào tiền gốc và lãi. Biết rằng đúng 25 tháng thì người đó trả hết gốc và lãi cho ngân hàng. Hỏi số tiền của người đó trả cho ngân hàng ở mỗi tháng gần nhất với số nào sau đây?

**A.** 43.730.000 đồng. **B.** 43.720.000 đồng.

**C.** 43.750.000 đồng. **D.** 43.740.000 đồng.

**Lời giải**

**Chọn D**

Gọi $M$ là số tiền vay ban đầu.

Gọi $A$ là số tiền mà hàng tháng người đó trả cho ngân hàng.

Sau tháng 1 dư nợ còn lại là: $M.1,007 - A$

Sau tháng 2 dư nợ còn lại là: $(M.1,007 - A).1,007 - A = M.1,007^2 - A.1,007 - A$

Sau tháng 3 dư nợ còn lại là:

$$\left(M.1,007^2 - A.1,007 - A\right).1,007 - A = M.1,007^3 - A.\left[(1,007)^2 + 1,007 + 1\right].$$

Sau tháng thứ $n$ dư nợ còn lại là: $M.1,007^n - A.\left[(1,007)^{n-1} + 1,007^{n-2} + ... + 1,007 + 1\right]$.

Vì đúng 25 tháng thì trả hết nợ nên:

$$1.1,007^{25} - A.\left[(1,007)^{24} + 1,007^{23} + ... + 1,007 + 1\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 1,007^{25} = A.\left[(1,007)^{24} + 1,007^{23} + ... + 1,007 + 1\right] \Leftrightarrow 1,007^{25} = A.\frac{1,007^{25} - 1}{0,007}.$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{1,007^{25}.0,007}{1,007^{25} - 1} \approx 0,04374151341 \text{ tỉ đồng} \approx 43.741.513 \text{ đồng} \approx 43.740.000 \text{ đồng}.$$

**Câu 5.** **(Sở Bình Phước - 2020)** Một sinh viên ra trường đi làm ngày 1/1/2020 với mức lương khởi điểm là $a$ đồng mỗi tháng và cứ sau 2 năm lại được tăng thêm 10% và chi tiêu hàng tháng của anh ta là 40% lương. Anh ta dự định mua một căn hộ chung cư giá rẻ có giá trị tại thời điểm 1/1/2020 là 1 tỷ đồng và cũng sau 2 năm thì giá trị căn hộ tăng thêm 5%. Với a bằng bao nhiêu thì sau đúng 10 năm anh ta mua được căn hộ đó, biết rằng mức lương và mức tăng giá trị ngôi nhà là không đổi ( kết quả quy tròn đến hàng nghìn đồng).

**A.** 11.487.000 đồng. **B.** 14.517.000 đồng. **C.** 55.033.000 đồng. **D.** 21.776.000 đồng.

**Lời giải**

**Chọn B**

Áp dụng công thức $P = P_o(1+r)^n$.

Ta được giá trị ngôi nhà sau 10 năm là: $P = 10^9(1+0,05)^5 = 10^9.(1,05)^5$.

Sau khi chi tiêu hàng tháng thì số tiền Người sinh viên còn lại của mỗi tháng là 60% lương. Trong hai năm 2020 - 2021, Người sinh viên có được số tiền là: $24\times 0,6a$.

Trong hai năm 2022 - 2023, anh sinh viên có được số tiền là: $24\times 0,6a\left(1+0,1\right)$.

Trong hai năm 2024 - 2025, anh sinh viên có được số tiền là: $24\times 0,6a\left(1+0,1\right)^2$.

Trong hai năm 2026 - 2027, anh sinh viên có được số tiền là: $24\times 0,6a\left(1+0,1\right)^3$.

Trong hai năm 2028 - 2029, anh sinh viên có được số tiền là: $24\times 0,6a\left(1+0,1\right)^4$.

Tổng số tiền anh sinh viên có được sau 10 năm là:

$24\times 0,6a+24\times 0,6a\left(1+0,1\right)+24\times 0,6a\left(1+0,1\right)^2+24\times 0,6a\left(1+0,1\right)^3+24\times 0,6a\left(1+0,1\right)^4$

$=24\times 0,6a\left[1+\left(1+0,1\right)+\left(1+0,1\right)^2+\left(1+0,1\right)^3+\left(1+0,1\right)^4\right]$

$=24\times 0,6a\times\dfrac{1-\left(1+0,1\right)^5}{1-\left(1+0,1\right)}=24\times 0,6a\dfrac{0,61051}{0,1}=87,91344\times a$

Số tiền trên bằng giá trị của ngôi nhà sau 10 năm:

$10^9.\left(1,05\right)^5=87,91344\times a\Leftrightarrow a\simeq 14.517.000$

**Câu 6.** **(Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020)** Một người vay ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất là $0,7\%/$ tháng theo thỏa thuận cứ mỗi tháng người đó sẽ trả cho ngân hàng 5 triệu đồng và cứ trả hàng tháng như thế cho đến khi hết nợ (tháng cuối cùng có thể trả dưới 5 triệu). Hỏi sau bao nhiêu tháng thì người đó trả được hết nợ ngân hàng?

**A.** 21. **B.** 22. **C.** 23. **D.** 24.

**Lời giải**

**Chọn B**

Gọi số tháng là $n$ ($n\in\mathbb{N}^*$). Đặt $a=5$, $q=1,007$. Đến lần nộp tiền thứ $n$:

Khoản tiền $a$ đầu tiên trở thành $a.q^{n-1}$. Khoản tiền $a$ thứ hai trở thành $a.q^{n-2}$. … Giả sử khoản tiền cuối cùng vẫn là $a$ thì tổng số tiền đã trả cả vốn lẫn lãi là $a.\dfrac{q^n-1}{q-1}=5.\dfrac{1,007^n-1}{0,007}$.

Số tiền 100 triệu đồng với lãi suất là $0,7\%/$ tháng, sau $n$ tháng, sẽ trở thành $100.1,007^n$.

Ta có phương trình $5.\dfrac{1,007^n-1}{0,007}=100.1,007^n\Leftrightarrow n\approx 21,6$.

Theo đề bài, tháng cuối cùng có thể trả dưới 5 triệu đồng nên số tháng phải làm tròn là 22 tháng.

**Câu 7.** **(Lê Lai - Thanh Hóa - 2020) COVID19** là một loại bệnh viêm đường hô hấp cấp do chủng mới của virus corona (nCoV) bắt nguồn từ Trung Quốc (đầu tháng 12/2019) gây ra với tốc độ truyền bệnh rất nhanh (tính đến 7/4/2020 đã có 1 360 039 người nhiễm bệnh). Giả sử ban đầu có 1 người bị nhiễm bệnh và cứ sau 1 ngày sẽ lây sang 4 người khác. Tất cả những người nhiễm bệnh lại tiếp tục lây sang những người khác với tốc độ như trên (1 người lây 4 người). Hỏi sau 7 ngày sẽ có tổng cộng bao nhiêu người nhiễm bệnh? (Biết rằng những người nhiễm bệnh không phát hiện bản thân bị bệnh và không phòng tránh cách li, do trong thời gian ủ bệnh vẫn lây bệnh sang người khác).

**A.** 77760 người. **B.** 16384 người. **C.** 62500 người. **D.** 78125 người.

**Lời giải**

**Chọn D**

Sau 1 ngày, tổng số người nhiễm bệnh là $1+4=5$ người.

Sau 2 ngày, tổng số người nhiễm bệnh là $\left(1+4\right)+\left(1+4\right).4=\left(1+4\right)^2$ người.

Sau 3 ngày, tổng số người nhiễm bệnh là $(1+4)^2+(1+4)^2.4=(1+4)^3$ người.

$\Rightarrow$ Sau 7 ngày, tổng số người nhiễm bệnh là $(1+4)^7=78125$ người.

Ngoài ra chúng ta có thể áp dụng công thức lãi kép để tính nhanh:

$S_n=A(1+r)^n=1.(1+4)^7=78125$, với $A=1$, $r=4$, $n=7$.

**Câu 8.** **(Liên trường Nghệ An - 2020)** Ông A có số tiền 100000000 đồng gửi tiết kiệm theo thể thức lãi kép, có hai loại kì hạn: loại kì hạn 12 tháng với lãi suất 12%/năm và loại kì hạn 1 tháng với lãi suất 1%/tháng. Ông A muốn gửi 10 năm. Theo anh chị, kết luận nào sau đây đúng (làm tròn đến hàng nghìn)?

**A.** Gửi theo kì hạn 1 tháng có kết quả nhiều hơn kì hạn 1 năm là 16186000 đồng sau 10 năm.

**B.** Cả hai loại kì hạn đều có cùng số tiền như nhau sau 10 năm.

**C.** Gửi theo kì hạn 1 tháng có kết quả nhiều hơn kì hạn 1 năm là 19454000 đồng sau 10 năm.

**D.** Gửi theo kì hạn 1 tháng có kết quả nhiều hơn kì hạn 1 năm là 15584000 đồng sau 10 năm.

**Lời giải**

**Chọn C**

Tổng số tiền ông A nhận được sau 10 năm khi gửi theo kì hạn 12 tháng là:

$$T_1=T_0.(1+r_1)^{n_1}=10^8.1,12^{10}\approx 310585000 \text{ (đồng).}$$

Tổng số tiền ông A nhận được sau 10 năm khi gửi theo kì hạn 1 tháng là

$$T_2=T_0.(1+r_2)^{n_2}=10^8.1,01^{120}\approx 330039000 \text{ (đồng).}$$

Như vậy, sau 10 năm, gửi theo kì hạn 1 tháng có kết quả nhiều hơn kì hạn 1 năm là:

$$T=T_2-T_1=330039000-310585000=19454000 \text{ (đồng).}$$

**Câu 9.** **(Trần Phú - Quảng Ninh - 2020)** Một người vay vốn ở ngân hàng với số tiền 50 triệu đồng, thời hạn 50 tháng với lãi suất 1,15% trên tháng, tính theo dư nợ trả đúng ngày quy định. Hỏi hàng tháng người đó phải trả đều đặn vào ngân hàng một khoản tiền là bao nhiêu để đến cuối tháng thứ 50 thì người đó trả hết cả gốc lẫn lãi cho ngân hàng (làm tròn đến trăm đồng) ?

**A.** 1.018.500 đồng. **B.** 1.320.800 đồng. **C.** 1.320.500 đồng. **D.** 1.771.300 đồng.

**Lời giải**

**Chọn C**

Gọi $N$ là số tiền vay ban đầu, $r$ là lãi suất theo tháng, $A$ là số tiền phải trả hàng tháng, ta có:

+ Số dư nợ sau 1 tháng là: $N+Nr-A=N(1+r)-A$.

+ Số dư nợ sau 2 tháng là: $N(1+r)-A+\left[N(1+r)-A\right]r-A=N(1+r)^2-\frac{A}{r}\left[(1+r)^2-1\right]$.

+ Số dư nợ sau 3 tháng là: $N(1+r)^3-\frac{A}{r}\left[(1+r)^3-1\right]$.

…

+ Số dư nợ sau n tháng là: $N(1+r)^n-\frac{A}{r}\left[(1+r)^n-1\right]$.

Giả sử sau $n$ tháng thì dư nợ bằng 0, ta có $N(1+r)^n-\frac{A}{r}\left[(1+r)^n-1\right]=0\Leftrightarrow A=\frac{N(1+r)^n.r}{(1+r)^n-1}$.

Áp dụng với $N=50.000.000$ đồng, r = 1,15% và $n=50$ tháng ta có: $A\approx 1.320.500$ đồng.

**Câu 10.** **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Để đủ tiền mua nhà, anh An vay ngân hàng 500 triệu theo phương thức trả góp với lãi suất 0,85%/tháng. Nếu sau mỗi tháng, kể từ thời điểm vay, anh An trả nợ cho ngân hàng số tiền cố định là 10 triệu đồng bao gồm cả tiền lãi vay và tiền gốc. Biết

rằng phương thức trả lãi và gốc không thay đổi trong suốt quá trình anh An trả nợ. Hỏi sau bao nhiêu tháng thì anh trả hết nợ ngân hàng? (Tháng cuối có thể trả dưới 10 triệu đồng).

**A.** 68 **B.** 66 **C.** 65 **D.** 67

**Lời giải**

**Chọn B**

Giả sử anh An vay số tiền là $A$ với lãi suất $r$ trên tháng và trả nợ cho ngân hàng số tiền cố định là x. Anh An sau các tháng còn nợ ngân hàng với số tiền là:

Tháng thứ 1: $A(1+r)-x$

Tháng thứ 2: $\left[A(1+r)-x\right](1+r)-x=A(1+r)^2-\left[1+(1+r)\right]x=A(1+r)^2-x.\dfrac{(1+r)^2-1}{r}$

Tháng thứ 3 : $A(1+r)^3-x.\dfrac{(1+r)^3-1}{r}$

…

Tháng thứ $n$ : $A(1+r)^n-x.\dfrac{(1+r)^n-1}{r}$

Áp dụng công thức ta có: $A=500; r=0,0085; x=10$ và sau $n$ tháng trả hết nợ ta có:

$$500.(1+0,0085)^n-10.\frac{(1+0,0085)^n-1}{0,0085}=0$$

$$\Leftrightarrow 50.(1,0085)^n=\frac{(1,0085)^n-1}{0,0085}\Leftrightarrow (1,0085)^n=\frac{40}{23}\Leftrightarrow n=\log_{1,0085}\frac{40}{23}\approx 65,4$$

**Câu 11.** **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương 2019)** Ông Chính gửi 200 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7% năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo và từ năm thứ 2 trở đi, mỗi năm ông gửi thêm vào tài khoản với số tiền 20 triệu đồng. Hỏi sau 18 năm số tiền ông Chính nhận được cả gốc lẫn lãi là bao nhiêu? Giả định trong suốt thời gian gửi lãi suất không thay đổi và ông Chính không rút tiền ra (kết quả được làm tròn đến hàng nghìn).

**A.** 1.686.898.000 VNĐ. **B.** 743.585.000 VNĐ.

**C.** 739.163.000 VNĐ. **D.** 1.335.967.000 VNĐ.

**Lời giải**

Gọi $a=200$ triệu; $b=20$ triệu; $\alpha=7\%$.

Số tiền sau 1 năm: $a(1+\alpha)$.

Số tiền sau 2 năm: $a(1+\alpha)^2+b(1+\alpha)$.

Số tiền sau 3 năm: $a(1+\alpha)^3+b(1+\alpha)^2+b(1+\alpha)$.

……

Số tiền sau 18 năm: $a(1+\alpha)^{18}+b\left[(1+\alpha)^{17}+(1+\alpha)^{16}+...+(1+\alpha)\right]$

$$=a(1+\alpha)^{18}+b\left[(1+\alpha).\frac{(1+\alpha)^{17}-1}{\alpha}\right]$$

Vậy số tiền ông Chính nhận sau 18 năm là: 1.335.967.000 VNĐ.

**Câu 12.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Một người gửi tiết kiệm số tiền 80000000 đồng với lãi suất 6,9%/ năm. Biết rằng tiền lãi hàng năm được nhập vào tiền gốc, hỏi sau đúng 5 năm người đó rút được cả tiền gốc lẫn tiền lãi gần với con số nào sau đây?

**A.** 105370000 đồng **B.** 111680000 đồng **C.** 107667000 đồng **D.** 116570000 đồng

**Lời giải**

Gọi $P_0$ là số tiền gửi ban đầu, $r$ là lãi suất / năm.

Số tiền gốc và lãi sau năm thứ nhất: $P_1 = P_0 + P_0.r = P_0(1+r)$.

Số tiền gốc và lãi sau năm thứ hai: $P_2 = P_1 + P_1.r = P_0(1+r)^2$.

….

Số tiền gốc và lãi người đó rút ra được sau 5 năm là

$P_5 = P_0.(1+r)^5 = 80000000.(1+6,9\%)^5 \approx 111680799$ (đồng).

**Câu 13.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Một người mỗi tháng đều đặn gửi vào ngân hàng một khoản tiền $T$ theo hình thức lãi kép với lãi suất 0,6% mỗi tháng. Biết sau 15 tháng, người đó có số tiền là 10 triệu đồng. Hỏi số tiền $T$ gần với số tiền nào nhất trong các số sau.

**A.** 613.000 đồng **B.** 645.000 đồng **C.** 635.000 đồng **D.** 535.000 đồng

**Lời giải**

**Chọn C**

Số tiền nhận được khi gửi khoản tiền $T$ ở tháng đầu tiên là $T(1+0,006)^{15} = T.1,006^{15}$.

Số tiền nhận được khi gửi khoản tiền $T$ ở tháng thứ 2 là $T(1+0,006)^{14} = T.1,006^{14}$.

Cứ như vậy, số tiền nhận được khi gửi khoản tiền $T$ ở tháng thứ 14 là $T(1+0,006) = T.1,006$.

Vậy tổng số tiền nhận được sau 15 tháng là:

$$T(1,006^{15} + 1,006^{14} + ... + 1,006^2 + 1,006) = T.1,006.\frac{1,006^{15}-1}{0,006}.$$

Theo giả thiết có: $10000000 = T.1,006.\frac{1,006^{15}-1}{0,006} \Rightarrow T \simeq 635301,46$.

**Câu 14.** Một người muốn có 1 tỉ tiền tiết kiệm sau 6 năm gửi ngân hàng bằng cách bắt đầu từ ngày 01/01/2019 đến 31/12/2024, vào ngày 01/01 hàng năm người đó gửi vào ngân hàng một số tiền bằng nhau với lãi suất ngân hàng là 7%/1 năm (tính từ ngày 01/01 đến ngày 31/12) và lãi suất hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi số tiền mà người đó phải gửi vào ngân hàng hàng năm là bao nhiêu (với giả thiết lãi suất không thay đổi và số tiền được làm tròn đến đơn vị đồng)?

**A.** 130 650 280 (đồng). **B.** 130 650 000 (đồng).

**C.** 139 795 799 (đồng). **D.** 139 795 800 (đồng).

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi $T_0$ là số tiền người đó gửi vào ngân hàng vào ngày 01/01 hàng năm, $T_n$ là tổng số tiền cả vốn lẫn lãi người đó có được ở cuối năm thứ $n$, với $n \in \mathbb{N}^*$, $r$ là lãi suất ngân hàng mỗi năm.

Ta có: $T_1 = T_0 + rT_0 = T_0(1+r)$.

Đầu năm thứ 2, người đó có tổng số tiền là:

$$T_0(1+r) + T_0 = T_0\left[(1+r)+1\right] = \frac{T_0}{\left[(1+r)-1\right]}\left[(1+r)^2-1\right] = \frac{T_0}{r}\left[(1+r)^2-1\right].$$

Do đó: $T_2=\frac{T_0}{r}.\left[\left(1+r\right)^2-1\right]+\frac{T_0}{r}.\left[\left(1+r\right)^2-1\right].r=\frac{T_0}{r}.\left[\left(1+r^2\right)-1\right]\left(1+r\right).$

……

Ta có: $T_n=\frac{T_0}{r}.\left[\left(1+r\right)^n-1\right]\left(1+r\right).$

Áp dụng vào bài toán, ta có: $10^9=\frac{T_0}{0,07}.\left[\left(1+0,07\right)^6-1\right]\left(1+0,07\right)\Rightarrow T_0\approx 130\ 650\ 280$ đồng.

**Câu 15.** **(THPT Ba Đình 2019)** Một người vay ngân hàng $100$ triệu đồng với lãi suất là $0,7\%$/tháng theo thỏa thuận cứ mỗi tháng người đó sẽ trả cho ngân hàng $5$ triệu đồng và cứ trả hàng tháng như thế cho đến khi hết nợ (tháng cuối cùng có thể trả dưới $5$ triệu). Hỏi sau bao nhiêu tháng thì người đó trả được hết nợ ngân hàng.

**A.** $22$. **B.** $23$. **C.** $24$. **D.** $21$.

**Lời giải**

Gọi số tiền vay ban đầu là $M$, số tiền hoàn nợ mỗi tháng là $m$, lãi suất một tháng là $r$.

Hết tháng thứ nhất, số tiền cả vốn lẫn nợ ngân hàng là $M+Mr=M\left(1+r\right)$ (triệu đồng).

Sau khi hoàn nợ lần thứ nhất, số tiền còn nợ là $M\left(1+r\right)-m$ (triệu đồng).

Sau khi hoàn nợ lần thứ hai, số tiền còn nợ là

$M\left(1+r\right)-m+\left[M\left(1+r\right)-m\right]r-m=M\left(1+r\right)^2-m\left(1+r\right)-m$ (triệu đồng).

Sau khi hoàn nợ lần thứ ba, số tiền còn nợ là

$M\left(1+r\right)^2-m\left(1+r\right)-m+\left[M\left(1+r\right)^2-m\left(1+r\right)-m\right]r-m$

$=M\left(1+r\right)^3-m\left(1+r\right)^2-m\left(1+r\right)-m$ (triệu đồng).

Lập luận tương tự, sau khi hoàn nợ lần thứ $n$, số tiền còn nợ là

$$M\left(1+r\right)^n-m\left(1+r\right)^{n-1}-m\left(1+r\right)^{n-2}-...-m\left(1+r\right)-m=M\left(1+r\right)^n-\frac{m\left[\left(1+r\right)^{n-1}-1\right]}{r}.$$

Sau tháng thứ $n$ trả hết nợ thì ta có

$$M\left(1+r\right)^n-\frac{m\left[\left(1+r\right)^{n-1}-1\right]}{r}=0\Leftrightarrow m=\frac{Mr\left(1+r\right)^n}{\left(1+r\right)^n-1}$$

$$\Leftrightarrow m=\left(m-Mr\right)\left(1+r\right)^n\Leftrightarrow\left(1+r\right)^n=\frac{m}{m-Mr}\Leftrightarrow n=\log_{(1+r)}\left(\frac{m}{m-Mr}\right)$$

Thay số với $M=100.000.000$, $r=0,7\%$, $m=5.000.000$ ta tính được $n\approx 21,62$ (tháng).

Vậy sau $22$ tháng người đó trả hết nợ ngân hàng.

**Câu 16.** **(HSG Bắc Ninh 2019)** Vào ngày $15$ hàng tháng ông An đều đến gửi tiết kiệm tại ngân hàng *SHB* số tiền $5$ triệu đồng theo hình thức lãi kép với kì hạn một tháng, lãi suất tiết kiệm không đổi trong suốt quá trình gửi là $7,2\%$/năm. Hỏi sau đúng $3$ năm kể từ ngày bắt đầu gửi ông An thu được số tiền cả gốc và lãi là bao nhiêu (làm tròn đến nghìn đồng)?.

**A.** $195251000$ (đồng) **B.** $201453000$ (đồng) **C.** $195252000$ (đồng) **D.** $201452000$ (đồng)

**Lời giải**

Gọi $T_n$ là số tiền cả gốc lẫn lãi sau $n$ tháng, $a$ là số tiền gốc, $r$ là lãi xuất, ta có:

Cuối tháng thứ $1$ ông An có số tiền là: $T_1=a\left(1+r\right)$

Đầu tháng thứ $2$ ông An có số tiền là: $T_2=a\left(1+r\right)+a$

Cuối tháng thứ 2 ông An có số tiền là: $T_2 = a(1+r)+a+\left(a(1+r)+a\right)r = a(1+r)+a(1+r)^2$

……

Cuối tháng thứ $n$ ông An có số tiền là:: $T_n = a(1+r)+a(1+r)^2+...+a(1+r)^n$

$= a\left((1+r)+(1+r)^2+...+(1+r)^n\right) = a.\dfrac{(1+r)\left((1+r)^n-1\right)}{1+r-1} = \dfrac{a(1+r)\left((1+r)^n-1\right)}{r}(1)$.

Với kì hạn một tháng, suy ra 3 năm có 36 kỳ. Lãi xuất của một năm là $7,2\%$, suy ra lãi xuất của 1 tháng là: $\dfrac{7,2}{12}\% = 0.6\%$. Áp dụng $(1)$ ta có: $a = 5000000; r = 0.6\% = 0.072; n = 36$

$\Rightarrow T_{36} = \dfrac{5000000(1+0.6\%)\left((1+0.6\%)^{36}-1\right)}{0.6\%} \approx 201453000$

**Câu 17.** **(THPT-Thang-Long-Ha-Noi- 2019)** Anh Bình gửi 200 triệu vào ngân hàng VB với kì hạn cố định 12 tháng và hưởng lãi suất $0,65\%/$ tháng. Tuy nhiên sau khi gửi được tròn 8 tháng anh phải dùng đến 200 triệu trên. Anh đến ngân hàng định rút tiền thì được nhân viên ngân hàng tư vấn: "Nếu rút tiền trước kì hạn, toàn bộ số tiền anh gửi chỉ có lãi suất không kỳ hạn là $0,02\%/$ thángAnh nên thế chấp sổ tiết kiệm đó tại ngân hàng để vay ngân hàng 200 triệu với lãi suất $0,7\%/$ tháng. Khi sổ của anh đến kì hạn, anh có thể rút tiền để trả nợ ngân hàng". Nếu làm theo tư vấn của nhân viên ngân hàng anh Bình sẽ đỡ thiệt một số tiền gần nhất với con số nào dưới đây (biết ngân hàng tính lãi theo thể thức lãi kép).

**A.** 10,85 triệu đồng. **B.** 10,51 triệu đồng. **C.** 10,03 triệu đồng. **D.** 10,19 triệu đồng.

**Lời giải**

Số tiền trả cho ngân hàng nếu vay 200 triệu trong 4 tháng

$N = 200.(1+0,7\%)^4 - 200 \approx 5,65907$

Tổng số tiền lãi nếu anh Bình gửi đúng kì hạn là

$L_1 = 200.(1+0,65\%)^{12} - 200 \approx 16,16996$

Số tiền lãi nếu anh Bình làm theo tư vấn của nhân viên ngân hàng

$L = 16,16996 - 5,65907 = 10,51089.$

Số tiền lãi nếu gửi 8 tháng theo hình thức lãi suất không kì hạn

$L_2 = 200.(1+0,02\%)^8 - 200 \approx 0,32022.$

Số tiền anh Bình đỡ thiệt nếu làm theo tư vấn của nhân viên ngân hàng

$16,16996 - 5,65907 - 0,32022 \approx 10,19067.$

**Câu 18.** **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Một thầy giáo cứ đầu mỗi tháng lại gửi ngân hàng 8 000 000 VNĐ với lãi suất $0,5\%/$ tháng. Hỏi sau bao nhiêu tháng thầy giáo có thể tiết kiệm tiền để mua được một chiếc xe ô tô trị giá

400 000 000 VNĐ?

**A.** 60. **B.** 50. **C.** 55. **D.** 45.

**Lời giải**

Đặt $T = 8\ 000\ 000$

Số tiền thầy giáo thu được sau tháng thứ nhất, thứ 2, thứ 3,., thứ $n$ lần lượt là $T_1$, $T_2$, $T_3$,..., $T_n$

Ta có:

$T_1 = T(1+r)$

$T_2 = [T_1 + T](1+r) = T(1+r)^2 + T(1+r)$

$T_3 = [T_2 + T](1+r) = T(1+r)^3 + T(1+r)^2 + T(1+r)$

.

$T_n = T(1+r)^n + T(1+r)^{n-1} + ... + T(1+r) = T(1+r) \times \dfrac{(1+r)^n - 1}{r}$

Theo bài ra ta có $T_n = 400\ 000\ 000 \Leftrightarrow T(1+r) \times \dfrac{(1+r)^n - 1}{r} = 400\ 000\ 000$

$\Leftrightarrow (1+r)^n = \dfrac{251}{201} \Leftrightarrow n = \log_{1.005} \dfrac{251}{201} \approx 44,54$

Vậy sau 45 tháng thầy giáo sẽ mua được một chiếc xe ô tô trị giá 400 000 000 VNĐ.

**Câu 19.** **(Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Một người vay ngân hàng số tiền 400 triệu đồng, mỗi tháng trả góp 10 triệu đồng và lãi suất cho số tiền chưa trả là 1% mỗi tháng. Kỳ trả đầu tiên là cuối tháng thứ nhất. Biết lãi suất không đổi trong suốt quá trình gửi, hỏi số tiền còn phải trả ở kỳ cuối là bao nhiêu để người này hết nợ ngân hàng? (làm tròn đến hàng nghìn).

**A.** 2.921.000. **B.** 3.387.000. **C.** 2.944.000. **D.** 7.084.000.

**Lời giải**

Cuối tháng thứ nhất, tiền gốc và lãi là $400 \cdot 1,01$ triệu đồng. Sau khi trả 10 triệu thì số tiền người đó còn nợ ngân hàng là $(400 \cdot 1,01 - 10)$ triệu đồng.

Cuối tháng thứ hai, tiền gốc và lãi là: $(400 \cdot 1,01^2 - 10 \cdot 1,01)$ triệu đồng. Sau khi trả 10 triệu thì số tiền người đó còn nợ ngân hàng là $(400 \cdot 1,01^2 - 10 \cdot 1,01 - 10)$ triệu đồng.

Như vậy ở cuối tháng thứ $n\,(n \geq 1)$ người đó nếu còn nợ thì số tiền nợ là:

$(400 \cdot 1,01^n - 10 \cdot 1,01^{n-1} - 10 \cdot 1,01^{n-2} - ... - 10)$ triệu đồng.

Xét $400 \cdot 1,01^n - 10 \cdot 1,01^{n-1} - 10 \cdot 1,01^{n-2} - ... - 10 = 0$

$\Leftrightarrow 400 \cdot 1,01^n - 10 \cdot \dfrac{1,01^n - 1}{0,01} = 0 \Leftrightarrow 600 \cdot 1,01^n = 1000 \Leftrightarrow n = \log_{1,01} \dfrac{5}{3} \simeq 51,33$

Do vậy kỳ cuối cùng người đó phải trả tiền là tháng thứ 52. Cuối tháng thứ 51, số tiền còn nợ lại là $400 \cdot 1,01^{51} - 10 \cdot \dfrac{1,01^{51} - 1}{0,01} \simeq 3,3531596$ triệu đồng.

Vậy kỳ cuối người đó phải trả số tiền là $3,3531596 \cdot 1,01 = 3,386647$ triệu đồng $\simeq 3387000$ đồng.

**Câu 20.** **(Chuyên Lê Quý Đôn Quảng Trị 2019)** Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất $0,5\%$/ tháng và ông ta rút đều đặn mỗi tháng một triệu đồng kể từ sau ngày gửi một tháng cho đến khi hết tiền ( tháng cuối cùng có thể không còn đủ một triệu đồng). Hỏi ông ta rút hết tiền sau bao nhiêu tháng?

**A.** 139. **B.** 140. **C.** 100. **D.** 138.

**Lời giải**

Gọi số tiền lúc đầu người đó gửi là $A$ (triệu đồng), lãi suất gửi ngân hàng một tháng là $r$, $S_n$ là số tiền còn lại sau $n$ tháng.

Sau 1 tháng kể từ ngày gửi tiền, số tiền còn lại của người đó là:

$S_1 = A(1+r)-1$.

Sau 2 tháng kể từ ngày gửi tiền, số tiền còn lại của người đó là:

$S_2 = \left[A(1+r)-1\right](1+r)-1 = A(1+r)^2-(1+r)-1$.

…

Sau $n$ tháng kể từ ngày gửi tiền, số tiền còn lại của người đó là:

$$S_n = A(1+r)^n-(1+r)^{n-1}-(1+r)^{n-2}-\cdots-(1+r)-1 = A(1+r)^n-\frac{(1+r)^n-1}{r}.$$

Giả sử sau $n$ tháng người đó rút hết tiền. Khi đó ta có

$$S_n = 0 \Leftrightarrow A(1+r)^n-\frac{(1+r)^n-1}{r}=0 \Leftrightarrow (1+r)^n(Ar-1)+1=0$$

$$\Leftrightarrow n = \log_{(1+r)}\frac{1}{1-Ar} \Leftrightarrow n = -\log_{(1+r)}(1-Ar).$$

***Câu 21.*** **(THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Một bà mẹ Việt Nam anh hùng được hưởng số tiền là 4 triệu đồng trên 1 tháng (chuyển vào tài khoản ngân hàng của mẹ ở ngân hàng vào đầu tháng). Từ tháng 1 năm 2019 mẹ không đi rút tiền mà để lại ngân hàng và được tính lãi 1% trên 1 tháng. Đến đầu tháng 12 năm 2019 mẹ đi rút toàn số tiền ( gồm số tiền của tháng 12 và số tiền gửi từ tháng1). Hỏi khi đó mẹ lĩnh về bao nhiêu tiền? (*kết quả làm tròn theo đơn vị nghìn đồng).*

**A.** 50970000 đồng. **B.** 50560000 đồng. **C.** 50670000 đồng. **D.** 50730000 đồng.

**Lời giải**

Gọi sô tiền mẹ gửi vào ngân hàng vào đầu tháng hàng tháng là $A$ đồng.

Số tiền mẹ lĩnh vào đầu tháng 12 là $T$ đồng.

Lãi suất hàng tháng mẹ gửi tại ngân hàng là $r$ %.

Vì mẹ rút tiền vào đầu tháng 12 năm 2019 nên thời gian được tính lãi suất là 11 tháng.

Ta có:

+) Đầu tháng 1 mẹ gửi vào $A$ đồng.

$\Rightarrow$ cuối tháng 1 số tiền của mẹ là: $A+Ar = A(1+r)$ đồng.

+) Đầu tháng 2 số tiền của mẹ gửi vào là: $A+A(1+r)$ đồng.

$\Rightarrow$ cuối tháng 2 số tiền của mẹ là: $\left[A+A(1+r)\right](1+r) = A(1+r)+A(1+r)^2$ đồng.

+) Đầu tháng 3 số tiền mẹ gửi vào là: $A+A(1+r)+A(1+r)^2$.

$\Rightarrow$ cuối tháng 3 số tiền của mẹ

là: $\left[A+A(1+r)+A(1+r)^2\right](1+r) = A(1+r)+A(1+r)^2+A(1+r)^3$.

Cứ như vậy đến cuối tháng thứ 11 số tiền của mẹ là:

$$A(1+r)+A(1+r)^2+\ldots+A(1+r)^{11} = A\left[(1+r)+(1+r)^2+\ldots+(1+r)^{11}\right] = T_1.$$

Ta thấy $\left[(1+r)+(1+r)^2+\ldots+(1+r)^{11}\right]$ là tổng của 1 cấp số nhân với $u_1 = 1+r, \text{n} = 11, \text{q} = 1+r$.

$\Rightarrow T_1 = A\dfrac{u_1(1-q^{11})}{1-q}$. Ta có:

$A = 4000000$

$r = 1\% = 0.01$

$\Rightarrow T_1 \approx 46730000$ đồng.

Vì mẹ rút tiền vào đầu tháng 12 năm 2019 $\Rightarrow T = T_1 + 4000000 = 50730000$ đồng.

**Câu 22.** **(Sở Thanh Hóa 2019)** Bạn **H** trúng tuyển vào trường Đại học Ngoại Thương nhưng vì do không đủ tiền nộp học phí nên **H** quyết định vay ngân hàng trong bốn năm mỗi năm 4 triệu đồng để nộp học phí với lãi suất ưu đãi 3%/năm (theo thể thức lãi suất kép) biết rằng tiền vay mỗi năm **H** nhận được từ ngày đầu tiên của năm học và trong suốt bốn năm học **H** không trả tiền cho ngân hàng. Ngay sau khi tốt nghiệp Đại học (tròn 4 năm kể từ khi bạn **H** bắt đầu vay ngân hàng) bạn **H** thực hiện trả góp hàng tháng cho ngân hàng số tiền (không đổi và tiền trả vào ngày cuối của tháng) với lãi suất theo cách tính mới là 0,25%/tháng và lãi suất được tính theo dư nợ thực tế, bạn **H** trả đúng 5 năm thì hết nợ. Tính số tiền hàng tháng mà bạn **H** phải trả cho ngân hàng (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

**A.** 323.582 (đồng). **B.** 398.402 (đồng). **C.** 309.718 (đồng. **D.** 312.518 (đồng).

**Lời giải**

**Xét bài toán 1:** Vay nhận vốn định kì lãi suất kép.

Gọi $A$ là số tiền mỗi năm bạn **H** vay ngân hàng, $r_1$ là lãi suất theo năm.

Cuối năm thứ nhất, **H** nợ ngân hàng với số tiền là $A.(1+r_1)$.

Đầu năm thứ hai, **H** nợ ngân hàng với số tiền là $A + A.(1+r_1)$.

Cuối năm thứ hai, **H** nợ ngân hàng với số tiền là

$$A + A.(1+r_1) + \left[A + A(1+r_1)\right] r_1 = A(1+r_1) + A(1+r_1)^2.$$

Tiếp tục như vậy, cuối năm thứ *n* số tiền mà **H** nợ ngân hàng là:

$$B = A(1+r_1) + A(1+r_1)^2 + ... + A(1+r_1)^n = \frac{A(1+r_1)\left[(1+r_1)^n - 1\right]}{r_1}.$$

**Xét bài toán 2:** Vay trả góp, lãi suất dư nợ thực tế.

Gọi $a$ là số tiền mà bạn **H** phải trả hàng tháng sau khi ra trường, $r_2$ là lãi suất mỗi tháng, số tiền **H** nợ ngân hàng là ***B.***

Cuối tháng thứ nhất bạn **H** còn nợ ngân hàng số tiền là:

$$B + B.r_2 - a = B.(1+r_2) - a.$$

Cuối tháng thứ hai bạn **H** còn nợ ngân hàng số tiền là:

$$B.(1+r_2) - a + \left[B.(1+r_2) - a\right] r_2 - a = B.(1+r_2)^2 - \left[a + a(1+r_2)\right].$$

Cứ tiếp tục như vậy ta có công thức tổng quát.

Cuối tháng thứ *m* bạn **H** còn nợ ngân hàng số tiền là

$$B.(1+r_2)^m - \left[a + (1+r_2)a + (1+r_2)^2 a + ... + (1+r_2)^{m-1} a\right]$$

$$= B.(1+r_2)^m - a\frac{(1+r_2)^m - 1}{r_2}.$$

Áp dụng 2 bài toán trên vào câu 42, ta có phương trình.

$\frac{4.1,03\left[1,03^4-1\right]}{0,03}1,0025^{60}-a.\frac{1,0025^{60}-1}{0,0025}=0\Leftrightarrow a\approx 0,309718$ (triệu đồng).

Vậy số tiền mà **H** cần phải trả hàng tháng là 309.718 triệu đồng.

**Câu 23.** **(Sở Phú Thọ 2019)** Ông A muốn mua một chiếc ôtô trị giá 1 tỉ đồng nhưng vì chưa đủ tiền nên chọn mua bằng hình thức trả góp hàng tháng (số tiền trả góp mỗi tháng như nhau) với lãi suất 12% /năm và trả trước 500 triệu đồng. Hỏi mỗi tháng ông phải trả số tiền gần nhất với số tiền nào dưới đây để sau đúng 2 năm, kể từ ngày mua xe, ông trả hết nợ, biết kì trả nợ đầu tiên sau ngày mua ôtô đúng một tháng và chỉ tính lãi hàng tháng trên số dư nợ thực tế của tháng đó?

**A.** 23 537 000 đồng **B.** 24 443 000 đồng **C.** 22 703 000 đồng **D.** 23 573 000 đồng

**Lời giải**

**Chọn A**

Gọi $a$ là số tiền trả hàng tháng.

Sau tháng thứ 1, số tiền còn lại: $P_1=500(1+r)-a$.

Sau tháng thứ 2, số tiền còn lại: $P_2=P_1(1+r)-a=500(1+r)^2-a(1+r)-a$.

.

Sau tháng thứ $n$, số tiền còn lại: $P_n=500(1+r)^n-a(1+r)^{n-1}-...-a(1+r)-a$.

Vậy sau 24 tháng: $500(1+r)^{24}-a\frac{(1+r)^{24}-1}{r}=0\Leftrightarrow a=\frac{500(1+r)^{24}.r}{(1+r)^{24}-1}$

$\Leftrightarrow a=\frac{500(1+1\%)^{24}.1\%}{(1+1\%)^{24}-1}\approx 23,537$ triệu đồng.

**Câu 24.** **(Chuyên Thái Nguyên 2019)** Một người vay ngân hàng 50 triệu đồng, mỗi tháng trả ngân hàng 4 triệu đồng và phải trả lãi suất cho số tiền còn nợ là 1,1% một tháng theo hình thức lãi kép. Giả sử sau $n$ tháng người đó trả hết nợ. Khi đó $n$ gần nhất với số nào sau?

**A.** 14. **B.** 13. **C.** 16. **D.** 15.

**Lời giải**

Phương pháp:Sử dụng công thức trả góp $P(1+r)^n=\frac{M}{r}\left[(1+r)^n-1\right]$, trong đó:

$P$ : là số tiền phải trả sau $n$ tháng

$r$ : Lãi suất/ tháng

$M$ : số tiền phải trả mỗi tháng

Áp dụng công thức ta có:

$P(1+r)^n=\frac{M}{r}\left[(1+r)^n-1\right]$

$\Leftrightarrow 50(1+1,1\%)^n=\frac{4}{1,1\%}\left[(1+1,1\%)^n-1\right]$

$\Leftrightarrow 50(1+1,1\%)^n=\frac{4}{1,1\%}(1+1,1\%)^n-\frac{4}{1,1\%}$

$\Leftrightarrow \frac{4}{1,1\%}=\frac{3450}{11}(1+1,1\%)^n$

$\Leftrightarrow (1+1,1\%)^n=\frac{80}{69}\Rightarrow n=\log_{1+1,8}\frac{80}{69}\approx 13,52$

**Câu 25.** Ông A vay ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất 1%/tháng. Ông ta muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi tháng là như nhau và sau đúng một năm kể từ ngày vay ông A còn nợ ngân hàng tổng số tiền 50 triệu đồng. Biết rằng mỗi tháng ngân hàng chỉ tính lãi trên số dư nợ thực tế của tháng đó. Hỏi số tiền mỗi tháng ông ta cần trả cho ngân hàng gần nhất với số tiền nào dưới đây?

**A.** 4,95 triệu đồng **B.** 4,42 triệu đồng **C.** 4,5 triệu đồng **D.** 4,94 triệu đồng

**Lời giải**

Gọi $X$ là số tiền mỗi tháng ông A trả cho ngân hàng.

Số tiền còn nợ sau $n$ kì hạn là $T_n = T.(1+r)^n - X.\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}$ (triệu đồng), trong đó $T = 100$ (triệu đồng) là số tiền mà ông A vay.

Sau đúng một năm, số tiền ông còn nợ là 50 triệu đồng nên ta có

$$50 = 100.(1+0,01)^{12} - X.\frac{(1+0,01)^{12}-1}{0,01} \Leftrightarrow X = \frac{(100.1,01^{12} - 50).0,01}{1,01^{12}-1} \approx 4,94 \text{ (triệu đồng).}$$

Vậy mỗi tháng ông ta cần trả cho ngân hàng gần nhất với số tiền 4,94 triệu đồng.

**Câu 26.** **(Chuyên ĐHSP Hà Nội 2019)** Một người nhận hợp đồng dài hạn làm việc cho một công ty với mức lương khởi điểm của mỗi tháng trong ba năm đầu tiên là 6 triệu đồng/ tháng. Tính từ ngày đầu làm việc, cứ sau đúng ba năm liên tiếp thì tăng lương 10% so với mức lương một tháng người đó đang hưởng. Nếu tính theo hợp đồng thì tháng đầu tiên của năm thứ 16 người đó nhận được mức lương là bao nhiêu?

**A.** $6.1,1^4$ (triệu đồng). **B.** $6.1,1^6$ (triệu đồng).

**C.** $6.1,1^5$ (triệu đồng). **D.** $6.1,1^{16}$ (triệu đồng).

**Lời giải**

Sau 3 năm, bắt đầu từ tháng đầu tiên của năm thứ 4 số tiền lương người đó nhận được sau mỗi tháng là $6+6.10\% = 6.1,1$ (triệu đồng).

Sau 6 năm (2.3 năm), bắt đầu từ tháng đầu tiên của năm thứ 7 số tiền lương người đó nhận được sau mỗi tháng là $6.1,1+6.1,1.10\% = 6.1,1.(1+10\%) = 6.1,1^2$ (triệu đồng).

Tương tự như vậy sau 15 năm (5.3 năm), bắt đầu từ tháng đầu tiên của năm thứ 16 số tiền người đó nhận được sau mỗi tháng là $6.1,1^5$ (triệu đồng).

Vậy tháng đầu tiên của năm thứ 16, người đó nhận được mức lương là $6.1,1^5$ (triệu đồng).

**Câu 27.** **(Đề Thi Công Bằng KHTN 2019)** Một người gửi 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 6%/năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 100 triệu đồng bao gồm gốc và lãi?

**A.** 11 năm. **B.** 12 năm. **C.** 13 năm. **D.** 14 năm.

**Lời giải**

Dạng toán lãi kép:

Bài toán tổng quát: gửi $a$ đồng vào ngân hàng với lãi suất $r\%$ (sau mỗi kì hạn không rút tiền lãi ra).

Gọi $A_n$ là số tiền có được sau $n$ năm.

Sau 1 năm: $A_1 = a + r\%.a = a(1+r\%)$.

Sau 2 năm: $A_2 = a(1+r\%) + a(1+r\%).r\% = a(1+r\%)^2$.

Sau 3 năm: $A_3 = a(1+r\%)^2 + a(1+r\%)^2.r\% = a(1+r\%)^3$.

Sau $n$ năm: $A_n = a(1+r\%)^n$.

Người đó nhận được số tiền hơn 100 triệu. Suy ra:

$50(1+6\%)^n > 100$

$\Leftrightarrow 50.1,06^n > 100$

$\Leftrightarrow 1,06^n > 2$

$\Leftrightarrow n > \log_{1,06} 2 = 11,9$

Vậy $n = 12$.

**Câu 28.** **(THPT Nghĩa Hưng NĐ 2019)** Anh $C$ đi làm với mức lương khởi điểm là $x$ (triệu đồng)/ tháng, và số tiền lương này được nhận vào ngày đầu tháng. Vì làm việc chăm chỉ và có trách nhiệm nên sau 36 tháng kể từ ngày đi làm, anh $C$ được tăng lương thêm 10%. Mỗi tháng, anh ta giữ lại 20% số tiền lương để gửi tiết kiệm ngân hàng với kì hạn 1 tháng và lãi suất là $0,5\%$/tháng, theo hình thức lãi kép (tức tiền lãi của tháng này được nhập vào vốn để tính lãi cho tháng tiếp theo). Sau 48 tháng kể từ ngày đi làm, anh $C$ nhận được số tiền cả gốc và lãi là 100 triệu đồng. Hỏi mức lương khởi điểm của người đó là bao nhiêu?

**A.** 8.991.504 đồng. **B.** 9.991.504 đồng. **C.** 8.981.504 đồng. **D.** 9.881.505 đồng.

**Lời giải**

Gọi số tiền mỗi tháng anh gửi tiết kiệm ngân hàng trong 36 tháng đầu là $A$; số tiền mỗi tháng anh gửi tiết kiệm sau tháng thứ 36 là $B$.

Đặt $q = 1+0,5\% = 1,005$

Gọi $S_n$ là số tiền sau tháng thứ $n$ ta có

$S_1 = A + A.0,5\% = A.q$

$S_2 = (S_1 + A) + (S_1 + A).0,5\% = (S_1 + A).q = Aq^2 + Aq$.

....

$S_{36} = (S_{35} + A) + (S_{35} + A).0,5\% = (S_{35} + A).q = Aq^{36} + Aq^{35} + \ldots + Aq = Aq.\dfrac{q^{36}-1}{q-1}$.

$S_{37} = (S_{36} + B) + (S_{36} + B).0,5\% = (S_{36} + B).q = S_{36}.q + B.q$.

$S_{38} = (S_{37} + B) + (S_{37} + B).0,5\% = (S_{37} + B).q = S_{36}q^2 + Bq^2 + Bq$.

....

$S_{48} = S_{36}.q^{12} + Bq^{12} + Bq^{11} + \ldots + Bq = Aq^{13}.\dfrac{q^{36}-1}{q-1} + Bq.\dfrac{q^{12}-1}{q-1}$.

Theo giả thiết ta có $A = 20\%x = 0,2x$; $B = 20\%(x+10\%x) = 0,22x$; $S_{48} = 10^8$.

Vậy

$0,2xq^{13}.\dfrac{q^{36}-1}{q-1} + 0,22x.q.\dfrac{q^{12}-1}{q-1} = 10^8 \Leftrightarrow x = 10^8 : \left(0,2q^{13}.\dfrac{q^{36}-1}{q-1} + 0,22.q.\dfrac{q^{12}-1}{q-1}\right) \Leftrightarrow x \approx 8991504$

đồng.

**Câu 29.** **(Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ An 2019)** Bạn Nam vừa trúng tuyển đại học, vì hoàn cảnh gia đình khó khăn nên được ngân hàng cho vay vốn trong 4 năm học đại học, mỗi năm 10 triệu đồng vào đầu năm học để nạp học phí với lãi suất 7,8%/năm (mỗi lần vay cách nhau đúng 1 năm). Sau khi tốt nghiệp đại học đúng 1 tháng, hàng tháng Nam phải trả góp cho ngân hàng số

tiền là $m$ đồng/tháng với lãi suất $0,7\%$/tháng trong vòng $4$ năm. Số tiền $m$ mỗi tháng Nam cần trả cho ngân hàng gần nhất với số nào sau đây (ngân hàng tính lãi trên số dư nợ thực tế).

**A.** 1.468.000 (đồng). **B.** 1.398.000 (đồng). **C.** 1.191.000 (đồng). **D.** 1.027.000 (đồng).

**Lời giải**

Bài toán được chia làm hai giai đoạn

*** Giai đoạn 1:** vay vốn để học đại học trong 4 năm. Đặt $r=\dfrac{7,8}{100}=0,078$

Ở năm thứ nhất: $M_1=10(1+r)^4$ (triệu đồng)

Ở năm thứ hai: $M_2=10(1+r)^3$ (triệu đồng)

Ở năm thứ ba: $M_3=10(1+r)^2$ (triệu đồng)

Ở năm thứ tư: $M_4=10(1+r)^1$ (triệu đồng)

Như vậy tổng số tiền mà Nam đã vay trong 4 năm là $M_0=\sum_{i=1}^{4}M_i\approx 48,4324$ (triệu đồng)

*** Giai đoạn 2:** trả góp cho ngân hàng số tiền đã vay hàng tháng

Sau tháng thứ nhất, người đó còn số nợ là: $P_1=M_o\left(1+\dfrac{0,7}{100}\right)-m$. Đặt $y=1+\dfrac{0,7}{100}$

Sau tháng thứ hai người đó còn nợ:

$$P_2=P_1y-m=\left(M_oy-m\right)y-m=M_oy^2-m(y+1)=M_ay^2-m\frac{y^2-1}{y-1}$$

Sau tháng thứ ba người đó còn nợ:

$$P_3=P_2y-m=M_oy^3-m\left(y^2+y+1\right)=M_oy^3-m\frac{y^3-1}{y-1}$$

Bằng phương pháp quy nạp, sau $n$ tháng số tiền trả hết sẽ là

$$M_oy^{''}-m\frac{y^n-1}{y-1}=0\Rightarrow m=\frac{M_oy^n(y-1)}{y^n-1}$$

Đồng thời ta có: $n=48$ tháng và $y=1+\dfrac{0,7}{100}=1,007$ suy ra $m\approx 1,914$ (triệu đồng).

**Câu 30.** **(Chuyên Phan Bội Châu -2019)** Một anh sinh viên nhập học đại học vào tháng $8$ năm $2014$. Bắt đầu từ tháng $9$ năm $2014$, cứ vào ngày mồng một hàng tháng anh vay ngân hàng $3$ triệu đồng với lãi suất cố định $0,8\%$/tháng. Lãi tháng trước được cộng vào số nợ để tiếp tục tính lãi cho tháng tiếp theo (lãi kép). Vào ngày mồng một hàng tháng kể từ tháng $9/2016$ về sau anh không vay ngân hàng nữa và anh còn trả được cho ngân hàng $2$ triệu đồng do việc làm thêm. Hỏi ngay sau khi kết thúc ngày anh ra trường $(30/6/2018)$ anh còn nợ ngân hàng bao nhiêu tiền (làm tròn đến hàng nghìn đồng)?

**A.** 49.024.000 đồng **B.** 47.401.000 đồng **C.** 47.024.000 đồng **D.** 45.401.000 đồng

**Lời giải**

**Chọn**

Anh sinh viên vay hàng tháng $a=3$ triệu đồng từ $9/2014$ đến $8/2016$, tổng cộng $24$ tháng.

Cuối tháng thứ 1: $T_1=a+\text{ar}=a(1+r)$

Cuối tháng thứ 2: $T_2=T_1+a+(T_1+a).r=a.(1+r)^2+a.(1+r)$

….

Cuối tháng n: $T_n = a.(1+r)^n + a.(1+r)^{n-1} + ... + a.(1+r)$

Suy ra $T_n = a.(1+r).\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}$

Vậy tổng số tiền vay đến cuối tháng 8/2016 là $T_{24} = 3.(1+0,8\%).\dfrac{(1+0,8\%)^{24} - 1}{0,8\%} = 79,662$ triệu

Tính từ cuối tháng 8/2016 Anh sinh viên thiếu ngân hàng $A = 79,662$ và bắt đầu trả đầu hàng tháng $m = 2$ triệu từ $9/2016$ đến $6/2018$, tổng cộng được $22$ tháng

Đầu tháng $9/2016$: còn nợ $A - m = 79,662 - 2 = 77,662$ triệu

Cuối tháng $9/2016$: tiền nợ có lãi đến cuối tháng: $T_1 = 77,662(r+1)$

Đầu tháng $10/2016$ sau khi trả nợ $m$ thì còn nợ $77,662(r+1) - m$

Cuối tháng $10/2016$: còn nợ $T_2 = \left[(77,662)(r+1) - m\right](1+r) = 77,662(1+r)^2 - m(1+r)$

Cuối tháng $11/2016$: còn nợ $T_3 = 77,662(1+r)^3 - m(1+r)^2 - m(1+r)$

....

Cuối tháng $6/2018$ còn nợ

$T_{22} = 77,662(1+r)^{22} - m(1+r)^{21} - m(1+r)^{20} - ... - m(1+r)$

$= 77,662(1+r)^{22} - m.(1+r)\dfrac{(1+r)^{21} - 1}{r}$

$= 77,662.(1+0,8\%)^{22} - 2.(1+0,8\%).\dfrac{(1+0,8\%)^{21} - 1}{0,8\%} = 46,64$ triệu đồng.

Nguyễn Bảo Vương

## TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI MỨC 9-10 ĐIỂM

### Dạng 1. Tính toán liên quan đến logarit dùng đẳng thức

◆ Định nghĩa logarit:

Cho hai số thực dương $a,b$ với $a\neq 1$, $\alpha=\log_a b\Leftrightarrow a^\alpha=b$:

◆ Các tính chất logarit: Cho ba số thực dương $a,b,c$ với $0<a,b,c\neq 1$

$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_a a}$; $\log_a b+\log_a c=\log_a bc$; $\log_a b-\log_a c=\dfrac{\log_a b}{\log_a c}$;

$\log_a b.\log_b c=\log_a c$.

◆ Phương trình mũ cơ bản nhất $a^x=b\Leftrightarrow x=\log_a b\quad (0<a\neq 1;b>0)$.

◆ Cách giải phương trình mũ có dạng $\alpha_1 a^{2x}+\alpha_2(ab)^x+\alpha_3 b^{2x}=0$ trong đó $\alpha_i\ (i=1,2,3)$ là hệ số, cơ số $0<a,b\neq 1$

B1: Biến đổi phương trình về dạng: $2\alpha_1\left(\dfrac{a}{b}\right)^{2x}+\alpha_2\left(\dfrac{a}{b}\right)^x+\alpha_3=0\quad (*)$.

B2: Đặt ẩn phụ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=t,t>0$, phương trình $(*)$ trở thành $\alpha_1 t^2+\alpha_2 t+\alpha_3=0$.

B3: Giải tìm $t$ thỏa mãn $t>0$.

B4: Giải phương trình mũ cơ bản $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=t$. Tìm được $x$.

**Câu 1.** **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho $x$, $y$ là các số thực dương thỏa mãn $\log_9 x=\log_6 y=\log_4(2x+y)$. Giá trị của $\dfrac{x}{y}$ bằng

**A.** $2$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\log_2\left(\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $\log_{\frac{3}{2}}2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đặt $t=\log_9 x=\log_6 y=\log_4(2x+y)$. Khi đó $\begin{cases}x=9^t\\ y=6^t\\ 2x+y=4^t\end{cases}\Rightarrow 2.9^t+6^t=4^t$

$\Leftrightarrow 2.\left(\dfrac{9}{4}\right)^t+\left(\dfrac{3}{2}\right)^t-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{3}{2}\right)^t=-1\\ \left(\dfrac{3}{2}\right)^t=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left(\dfrac{3}{2}\right)^t=\dfrac{1}{2}$.

Do đó: $\dfrac{x}{y}=\left(\dfrac{9}{6}\right)^t=\left(\dfrac{3}{2}\right)^t=\dfrac{1}{2}$.

**Câu 2.** **(Chuyên Lào Cai - 2020)** các số thực $a$, $b$, $c$ thỏa mãn $(a-2)^2+(b-2)^2+(c-2)^2=8$ và $2^a=3^b=6^{-c}$. Khi đó $a+b+c$ bằng

**A.** $2$. **B.** $4$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $8$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $a=-c\log_2 6$ và $b=-c\log_3 6$. Suy ra $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=-\frac{1}{c}$. Hay $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$.

Hay $ab+bc+ca=0$.Suy ra $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2$ nên $(a+b+c)^2-4(a+b+c)+4=0$.Vậy $a+b+c=2$.

**Câu 3.** **(Chuyên Thái Nguyên - 2020)** Cho $4^x+4^{-x}=7$. Khi đó biểu thức $P=\frac{5-2^x-2^{-x}}{8+4.2^x+4.2^{-x}}=\frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a,b\in\mathbb{Z}$. Tích $a.b$ có giá trị bằng

**A.** $10$. **B.** $-8$. **C.** $8$. **D.** $-10$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $4^x+4^{-x}=7\Leftrightarrow\left(2^x\right)^2+2.2^x.2^{-x}+\left(2^{-x}\right)^2-2=7\Leftrightarrow\left(2^x+2^{-x}\right)^2=9\Leftrightarrow 2^x+2^{-x}=3$.

Do đó $P=\frac{5-2^x-2^{-x}}{8+4.2^x+4.2^{-x}}=\frac{5-\left(2^x+2^{-x}\right)}{8+4.\left(2^x+2^{-x}\right)}=\frac{5-3}{8+4.3}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$.

Suy ra $a=1,b=10$.

Vậy $a.b=10$.

**Câu 4.** **(Sở Ninh Bình 2019)** Cho $a$, $b$, $c$ là các số thực khác $0$ thỏa mãn $4^a=9^b=6^c$. Khi đó $\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$ bằng

**A.** $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt $t=4^a=9^b=6^c\Rightarrow\begin{cases}a=\log_4 t\\ b=\log_9 t\\ c=\log_6 t\end{cases}$.

Khi đó $\frac{c}{a}+\frac{c}{b}=\frac{\log_6 t}{\log_4 t}+\frac{\log_6 t}{\log_9 t}=\log_6 t.\log_t 4+\log_6 t.\log_t 9=\log_6 t\left(\log_t 4+\log_t 9\right)$

$=\log_6 t.\log_t 36=\log_6 36=\log_6 6^2=2$.

**Câu 5.** Biết $a=\log_{30}10$, $b=\log_{30}150$ và $\log_{2000}15000=\frac{x_1a+y_1b+z_1}{x_2a+y_2b+z_2}$ với $x_1;y_1;z_1;x_2;y_2;z_2$ là các số nguyên, tính $S=\frac{x_1}{x_2}$.

**A.** $S=\frac{1}{2}$. **B.** $S=2$. **C.** $S=\frac{2}{3}$. **D.** $S=1$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $\log_{2000}15000=\dfrac{\log_{30}15000}{\log_{30}2000}=\dfrac{\log_{30}150+2\log_{30}10}{\log_{30}2+3\log_{30}10}$ $(1)$

Ta có $a=\log_{30}10=\log_{30}5+\log_{30}2\Rightarrow\log_{30}2=a-\log_{30}5$ $(2)$

$b=\log_{30}150=1+\log_{30}5\Rightarrow\log_{30}5=b-1$ thay vào $(2)$ ta được $\log_{30}2=a-b+1$

Ta có $\log_{2000}1500=\dfrac{b+2a}{a-b+1+3a}=\dfrac{2a+b}{4a-b+1}$

Suy ra $S=\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

**Câu 6.** Cho các số thực dương $x,y$ khác 1 và thỏa mãn $\begin{cases}\log_x y=\log_y x\\ \log_x(x-y)=\log_y(x+y)\end{cases}$.

Giá trị của $x^2+xy-y^2$ bằng

**A.** 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

**Lời giải**

**Chọn D**

ĐK: $x>y$.

Ta có $\begin{cases}\log_x y=\log_y x\\ \log_x(x-y)=\log_y(x+y)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_x y=\dfrac{1}{\log_x y}\\ \log_x(x-y)=\log_y(x+y)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=\dfrac{1}{x}\\ x=y\end{array}\right.\\ \log_x(x-y)=\log_{x^{-1}}(x+y)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{1}{x}\\ \log_x(x-y)+\log_x(x+y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{1}{x}\\ \log_x\left(x^2-y^2\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=1\\ x^2-y^2=1\end{cases}\Rightarrow x^2+xy-y^2=2$.

**Câu 7.** Cho các số thực dương $a$, $b$ thỏa mãn $\sqrt{\log a}+\sqrt{\log b}+\log\sqrt{a}+\log\sqrt{b}=100$ và $\sqrt{\log a}$, $\sqrt{\log b}$, $\log\sqrt{a}$, $\log\sqrt{b}$ đều là các số nguyên dương. Tính $P=ab$.

**A.** $10^{164}$. **B.** $10^{100}$. **C.** $10^{200}$. **D.** $10^{144}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $\sqrt{\log a}+\sqrt{\log b}+\log\sqrt{a}+\log\sqrt{b}=100$

$\Leftrightarrow\log a+\log b+2\sqrt{\log a}+2\sqrt{\log b}=200\Leftrightarrow\left(\sqrt{\log a}+1\right)^2+\left(\sqrt{\log b}+1\right)^2=202=81+121$ $(*)$

Mà $\sqrt{\log a}$, $\sqrt{\log b}$, $\log\sqrt{a}$, $\log\sqrt{b}$ đều là các số nguyên dương nên

$(*)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{\log a}+1=9\\ \sqrt{\log b}+1=11\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{\log a}+1=11\\ \sqrt{\log b}+1=9\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log a=64\\ \log b=100\end{cases}\\ \begin{cases}\log a=100\\ \log b=64\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=10^{64}\\ b=10^{100}\end{cases}\\ \begin{cases}a=10^{100}\\ b=10^{64}\end{cases}\end{array}\right.$

Vậy: $P = ab = 10^{64}.10^{100} = 10^{164}$.

**Câu 8.** Cho $\log_9 5 = a;\ \log_4 7 = b;\ \log_2 3 = c$ .Biết $\log_{24} 175 = \dfrac{mb+nac}{pc+q}$.Tính $A = m+2n+3p+4q$

**A.** 27 **B.** 25 **C.** 23 **D.** 29

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\log_{24} 175 = \log_{24} 7.5^2 = \log_{24} 7 + 2\log_{24} 5 = \dfrac{1}{\log_7 24} + \dfrac{2}{\log_5 24} =$

$\dfrac{1}{\log_7 3 + \log_7 2^3} + \dfrac{2}{\log_5 3 + \log_5 2^3} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{\log_3 7} + \dfrac{3}{\log_2 7}} + \dfrac{2}{\dfrac{1}{\log_3 5} + \dfrac{3}{\log_2 5}} =$

$\dfrac{1}{\dfrac{1}{\log_2 7.\log_3 2} + \dfrac{3}{\log_2 7}} + \dfrac{2}{\dfrac{1}{\log_3 5} + \dfrac{3}{\log_2 3.\log_3 5}} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{2b.\dfrac{1}{c}} + \dfrac{3}{2b}} + \dfrac{2}{\dfrac{1}{2a} + \dfrac{3}{c.2a}} =$

$\dfrac{1}{\dfrac{c}{2b} + \dfrac{3}{2b}} + \dfrac{2}{\dfrac{c}{2ac} + \dfrac{3}{2ac}} = \dfrac{2b}{c+3} + \dfrac{4ac}{c+3} = \dfrac{2b+4ac}{c+3}$.

$A = m+2n+3p+4q = 2+8+3+12 = 25$.

**Câu 9.** Cho $x$, $y$ là các số thực lớn hơn 1 thoả mãn $x^2 - 6y^2 = xy$. Tính $M = \dfrac{1+\log_{12} x + \log_{12} y}{2\log_{12}(x+3y)}$.

**A.** $M = \dfrac{1}{4}$. **B.** $M = 1$. **C.** $M = \dfrac{1}{2}$. **D.** $M = \dfrac{1}{3}$.

Nguyễn Bảo Vương

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $x^2 - 6y^2 = xy \Leftrightarrow x^2 - xy - 6y^2 = 0 (*)$.

Do $x$, $y$ là các số thực dương lớn hơn 1 nên ta chia cả 2 vế của $(*)$ cho $y^2$ ta

được $\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 - \dfrac{x}{y} - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{y} = 3 \\ \dfrac{x}{y} = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3y\,(n) \\ x = -2y\,(l) \end{array}\right.$

Vậy $x = 3y$ (1).

Mặt khác $M = \dfrac{1+\log_{12} x + \log_{12} y}{2\log_{12}(x+3y)} = \dfrac{\log_{12} 12xy}{\log_{12}(x+3y)^2}$ (2).

Thay (1) vào (2) ta có $M = \dfrac{\log_{12} 36y^2}{\log_{12} 36y^2} = 1$.

**Câu 10.** Cho $f(x) = a\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + b\sin x + 6$ với $a$, $b \in \mathbb{R}$. Biết $f\left(\log\left(\log e\right)\right) = 2$. Tính $f\left(\log\left(\ln 10\right)\right)$.

**A.** 4. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 2.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đặt $x_0 = \log(\log e)$

Có: $f(x_0) = a\ln\left(x_0 + \sqrt{x_0^2+1}\right) + b\sin x_0 + 6 = 2$

Ta có $f\left(\log(\ln 10)\right) = f\left(\log\left(\frac{1}{\log e}\right)\right) = f\left(-\log(\log e)\right) = f(-x_0)$

$f(-x_0) = a\ln\left(\sqrt{x_0^2+1} - x_0\right) + b\sin(-x_0) + 6 = -a\ln\left(x_0 + \sqrt{x_0^2+1}\right) - b\sin x_0 + 6$

$= -\left[a\ln\left(x_0 + \sqrt{x_0^2+1}\right) + b\sin x_0 + 6\right] + 12 = -f(x_0) + 12 = 10.$

**Câu 11.** Cho $9^x + 9^{-x} = 14$ và $\frac{6+3(3^x+3^{-x})}{2-3^{x+1}-3^{1-x}} = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $P = a.b.$

**A.** $P = 10.$ **B.** $P = -45.$ **C.** $P = -10.$ **D.** $P = 45.$

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có

$9^x + 9^{-x} = 14 \Leftrightarrow 3^{2x} + 2.3^{2x}.3^{-2x} + 3^{-2x} = 16$

$\Leftrightarrow \left(3^x + 3^{-x}\right)^2 = 16 \Leftrightarrow 3^x + 3^{-x} = 4.$

$\frac{6+3(3^x+3^{-x})}{2-3^{x+1}-3^{1-x}} = \frac{6+3(3^x+3^{-x})}{2-3.3^x-3.3^{-x}} = \frac{6+3(3^x+3^{-x})}{2-3.\left(3^x+3^{-x}\right)}$

$= \frac{6+3.4}{2-3.4} = -\frac{18}{10} \Rightarrow \frac{a}{b} = -\frac{9}{5} \Rightarrow ab = -45.$

**Câu 12.** Cho hai số thực dương $a, b$ thỏa $\log_4 a = \log_6 b = \log_9(a+b)$. Tính $\frac{a}{b}$.

**A.** $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

**Lờigiải**

**Chọn D**

Đặt $t = \log_4 a = \log_6 b = \log_9(a+b)$.

$\Rightarrow \begin{cases} a = 4^t \\ b = 6^t \\ a+b = 9^t \end{cases} \Rightarrow 4^t + 6^t = 9^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2t} + \left(\frac{2}{3}\right)^t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^t = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} (L) \end{array}\right.$

$\frac{a}{b} = \frac{4^t}{6^t} = \left(\frac{2}{3}\right)^t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$

**Câu 13.** Cho các số thực dương $x, y$ thỏa mãn $\log_6 x = \log_9 y = \log_4(2x+2y)$. Tính tỉ số $\frac{x}{y}$?

**A.** $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{x}{y}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}$. **C.** $\frac{x}{y}=\frac{2}{\sqrt{3}+1}$. **D.** $\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Giả sử $\log_6 x=\log_9 y=\log_4(2x+2y)=t$. Ta có: $\begin{cases}x=6^t & (1)\\ y=9^t & (2)\\ 2x+2y=4^t & (3)\end{cases}$.

Khi đó $\frac{x}{y}=\frac{6^t}{9^t}=\left(\frac{2}{3}\right)^t>0$.

Lấy (1), (2) thay vào (3) ta có

$$2.6^t+2.9^t=4^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2t}-2.\left(\frac{2}{3}\right)^t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\left(\frac{2}{3}\right)^t=1+\sqrt{3}=\frac{2}{\sqrt{3}-1} & (\text{thoả})\\ \left(\frac{2}{3}\right)^t=1-\sqrt{3} & (\text{loại})\end{array}\right.$$

**Câu 14.** Cho $x$, $y$ là các số thực dương thỏa mãn $\log_{25}\frac{x}{2}=\log_{15} y=\log_9\frac{x+y}{4}$ và $\frac{x}{y}=\frac{-a+\sqrt{b}}{2}$, với $a$, $b$ là các số nguyên dương, tính $a+b$.

**A.** $a+b=14$. **B.** $a+b=3$. **C.** $a+b=21$. **D.** $a+b=34$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $\log_{25}\frac{x}{2}=\log_{15} y=\log_9\frac{x+y}{4}\Rightarrow\begin{cases}y=15^{\log_{25}\frac{x}{2}}\\ \log_9\frac{x+15^{\log_{25}\frac{x}{2}}}{4}=\log_{25}\frac{x}{2}\end{cases}$

Đặt $t=\log_{25}\frac{x}{2}\Rightarrow x=2.25^t$, ta được $2.25^t+15^t=4.9^t\Leftrightarrow 2\left(\frac{5}{3}\right)^{2t}+\left(\frac{5}{3}\right)^t=4$

$\Rightarrow t=\log_{\frac{5}{3}}\frac{-1+\sqrt{33}}{4}\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{2.25^t}{15^t}=2.\left(\frac{5}{3}\right)^t=\frac{-1+\sqrt{33}}{2}$.

Do đó $a=1$, $b=33$ nên $a+b=34$.

**Câu 15.** Cho dãy số $(u_n)$ thỏa mãn $\log_3(2u_5-63)=2\log_4(u_n-8n+8)$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Đặt $S_n=u_1+u_2+...+u_n$. Tìm số nguyên dương lớn nhất $n$ thỏa mãn $\frac{u_n.S_{2n}}{u_{2n}.S_n}<\frac{148}{75}$.

**A.** 18. **B.** 17. **C.** 16. **D.** 19.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\log_3(2u_5-63)=2\log_4(u_n-8n+8)\Leftrightarrow\log_3(2u_5-63)=\log_2(u_n-8n+8)$.

Đặt $t=\log_3(2u_5-63)\Rightarrow\begin{cases}2u_5-63=3^t\\ u_n-8n+8=2^t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2u_5-63=3^t\\ u_5-32=2^t\end{cases}$ (với $n=5$)

$\Rightarrow 1=3^t-2.2^t\Rightarrow t=2\Rightarrow u_n=8n-4$. Khi đó $u_5=36$

Với $u_n = 8n-4$ và $u_5 = 36$, ta có:

$\log_3(2u_5 - 63) = 2\log_4(u_n - 8n + 8) \Leftrightarrow \log_3(2.36 - 63) = 2\log_4(8n - 4 - 8n + 8)$

$\Leftrightarrow \log_3 9 = 2\log_4 4 \Leftrightarrow 2 = 2$ đúng $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có: $u_{n+1} - u_n = 8(n+1) - 4 - (8n-4) = 8$. Vậy $(u_n)$ là cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 4$, công sai $d = 8$.

$\Rightarrow S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \dfrac{(u_1 + u_n).n}{2} = 4n^2$.

Do đó $\dfrac{u_n.S_{2n}}{u_{2n}.S_n} = \dfrac{(8n-4).16n^2}{(16n-4).4n^2} < \dfrac{148}{75} \Rightarrow n < 19$.

**Dạng 2. Bài toán tìm giá trị lớn nhất – giá trị nhỏ nhất mũ – loagrit (sử dụng phương pháp bất đẳng thức – biến đổi)**

**① Bất đẳng thức Cauchy (AM – GM)**

- $\forall a, b \geq 0$, thì $\boxed{a + b \geq 2\sqrt{ab}}$. Dấu "=" xảy ra khi: $a = b$.
- $\forall a, b, c \geq 0$, thì $\boxed{a + b + c \geq 3.\sqrt[3]{abc}}$. Dấu "=" xảy ra khi $a = b = c$.

Nhiều trường hợp đánh giá dạng: $a.b \leq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ và $a.b.c \leq \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3$.

**② Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz (Bunhiaxcôpki)**

- $\forall a, b, x, y$, thì: $\boxed{(a.x + b.y)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$. Dấu "=" khi $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y}$.
- $\forall a, b, c, x, y, z$ thì: $\boxed{(a.x + b.y + c.z)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi: $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y} = \dfrac{c}{z}$.

Nhiều trường hợp đánh giá dạng: $|a.x + b.y| \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$.

**Hệ quả**. Nếu $a, b, c$ là các số thực và $x, y, z$ là các số dương thì:

$\boxed{\dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{y} \geq \dfrac{(a+b)^2}{x+y}}$ và $\boxed{\dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{y} + \dfrac{c^2}{z} \geq \dfrac{(a+b+c)^2}{x+y+z}}$: bất đẳng thức cộng mẫu số.

**Câu 1.** **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Xét các số thực dương $a, b, x, y$ thoả mãn $a > 1, b > 1$ và $a^x = b^y = \sqrt{ab}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 2y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

**A.** $(1;2)$. **B.** $\left[2;\dfrac{5}{2}\right)$. **C.** $[3;4)$. **D.** $\left[\dfrac{5}{2};3\right)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt $t = \log_a b$. Vì $a, b > 1$ nên $t > 0$.

Ta có: $a^x = \sqrt{ab} \Rightarrow x = \log_a \sqrt{ab} = \dfrac{1}{2}(1 + \log_a b) = \dfrac{1}{2}(1 + t)$.

$b^y = \sqrt{ab} \Rightarrow y = \log_b \sqrt{ab} = \dfrac{1}{2}(1 + \log_b a) = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{t}\right)$.

Vậy $P = x + 2y = \dfrac{1}{2}(1 + t) + 1 + \dfrac{1}{t} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{t} \geq \dfrac{3}{2} + \sqrt{2}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{t}{2}=\frac{1}{t}\Leftrightarrow b=a^{\sqrt{2}}$.

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+2y$ bằng $\frac{3}{2}+\sqrt{2}$ thuộc nửa khoảng $\left[\frac{5}{2};3\right)$.

**Câu 2.** **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Có bao nhiêu số nguyên $x$ sao cho tồn tại số thực $y$ thỏa mãn $\log_3(x+y)=\log_4\left(x^2+y^2\right)$?

**A.** 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

**Lời giải**

**Chọn B**

**Cách 1:**

Đặt $t=\log_3(x+y)=\log_4\left(x^2+y^2\right)\Rightarrow\begin{cases}x+y=3^t\\x^2+y^2=4^t\end{cases}(1)$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$9^t=(x+y)^2\le 2\left(x^2+y^2\right)=4^t\Rightarrow\frac{9^t}{4^t}\le 2\Rightarrow t\le\log_{\frac{9}{2}}2$

Như vậy,

$x^2+y^2=4^t\Rightarrow x^2\le 4^t\le 4^{\log_{\frac{9}{4}}2}\approx 1,89\Rightarrow x\in\{-1;0;1\}$

➢ Trường hợp 1: $x=0\Rightarrow\begin{cases}y=3^t\\y^2=4^t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=0\\y=1\end{cases}$.

➢ Trường hợp 2: $x=1\Rightarrow\begin{cases}y=3^t-1\\y^2=4^t-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=0\\y=0\end{cases}$.

➢ Trường hợp 3: $x=-1\Rightarrow\begin{cases}y=3^t+1\\y^2+1=4^t\ge 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t\ge 0\\y=3^t+1\ge 2\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2\ge 5$ mâu thuẫn với $x^2+y^2\le 4^{\log_{\frac{3}{2}}\sqrt{2}}$ suy ra loại $x=-1$.

Vậy có hai giá trị $x\in\{0;1\}$

**Cách 2:**

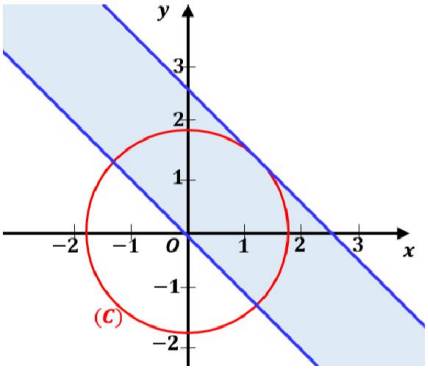
Đặt $t=\log_3(x+y)=\log_4\left(x^2+y^2\right)\Rightarrow\begin{cases}x+y=3^t\\x^2+y^2=4^t\end{cases}(1)$.

Suy ra $x,y$ là tọa độ của điểm $M$ với $M$ thuộc đường thẳng $d:x+y=3^t$ và đường tròn $(C):x^2+y^2=4^t$.

Để tồn tại $y$ tức tồn tại $M$ nên $d,(C)$ có điểm chung, suy ra $d(O,d)\le R$ trong đó $O(0;0)$, $R=2^t$ nên $\frac{\left|-3^t\right|}{\sqrt{2}}\le 2^t\Leftrightarrow t\le\log_{\frac{3}{2}}\sqrt{2}$.

Khi đó $(1)\Rightarrow\begin{cases}0<x+y\le 3^{\log_{\frac{3}{2}}\sqrt{2}}\\x^2+y^2\le 4^{\log_{\frac{3}{2}}\sqrt{2}}\end{cases}$.

Minh họa quỹ tích điểm $M$ như hình vẽ sau




Ta thấy có 3 giá trị $x\in\mathbb{Z}$ có thể thỏa mãn là $x=-1;x=0;x=1$.

Thử lại:

➢ Trường hợp 1: $x=0\Rightarrow\begin{cases}y=3^t\\y^2=4^t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=0\\y=1\end{cases}$.

➢ Trường hợp 2: $x=1\Rightarrow\begin{cases}y=3^t-1\\y^2=4^t-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=0\\y=0\end{cases}$.

➢ Trường hợp 3: $x=-1\Rightarrow\begin{cases}y=3^t+1\\y^2+1=4^t\ge1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t\ge0\\y=3^t+1\ge2\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2\ge5$ mâu thuẫn với $x^2+y^2\le4^{\log_{\frac{3}{2}}\sqrt{2}}$ suy ra loại $x=-1$.

**Câu 3.** **(Mã 103 2018)** Cho $a>0,b>0$ thỏa mãn $\log_{4a+5b+1}\left(16a^2+b^2+1\right)+\log_{8ab+1}\left(4a+5b+1\right)=2$. Giá trị của $a+2b$ bằng

**A.** 6 **B.** $\frac{27}{4}$ **C.** $\frac{20}{3}$ **D.** 9

**Lời giải**

**Chọn B**

Từ giả thiết suy ra $\log_{4a+5b+1}\left(16a^2+b^2+1\right)>0$ và $\log_{8ab+1}\left(4a+5b+1\right)>0$.

Áp dụng BĐT Côsi ta có

$\log_{4a+5b+1}\left(16a^2+b^2+1\right)+\log_{8ab+1}\left(4a+5b+1\right)\ge2\log_{4a+5b+1}\left(16a^2+b^2+1\right).\log_{8ab+1}\left(4a+5b+1\right)$

$=2\log_{8ab+1}\left(16a^2+b^2+1\right)$.

Mặt khác $16a^2+b^2+1=\left(4a-b\right)^2+8ab+1\ge8ab+1\left(\forall a,b>0\right)$,

suy ra $2\log_{8ab+1}\left(16a^2+b^2+1\right)\ge2$.

Khi đó $\log_{4a+5b+1}\left(16a^2+b^2+1\right)+\log_{8ab+1}\left(4a+5b+1\right)=2$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\log_{4a+5b+1}\left(8ab+1\right)=\log_{8ab+1}\left(4a+5b+1\right)\\b=4a\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\log_{24a+1}\left(32a^2+1\right)=1\\b=4a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}32a^2=24a\\b=4a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{3}{4}\\b=3\end{cases}$.

Vậy $a+2b=\frac{3}{4}+6=\frac{27}{4}$.

**Câu 4.** **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Xét các số thực không âm $x$ và $y$ thỏa mãn $2x+y.4^{x+y-1}\ge 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+4x+6y$ bằng

**A.** $\frac{33}{4}$. **B.** $\frac{65}{8}$. **C.** $\frac{49}{8}$. **D.** $\frac{57}{8}$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

**Cách 1:**

**Nhận xét:** Giá trị của $x,y$ thỏa mãn phương trình $2x+y\cdot 4^{x+y-1}=3(1)$ sẽ làm cho biểu thức $P$ nhỏ nhất. Đặt $a=x+y$, từ $(1)$ ta được phương trình

$$4^{a-1}+\frac{2}{y}.a-2-\frac{3}{y}=0.$$

Nhận thấy $y=4^{a-1}+\frac{2}{y}.a-2-\frac{3}{y}$ là hàm số đồng biến theo biến $a$, nên phương trình trên có nghiệm duy nhất $a=\frac{3}{2}\Rightarrow x+y=\frac{3}{2}$.

Ta viết lại biểu thức $P=(x+y)^2+4(x+y)+2\left(y-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{8}=\frac{65}{8}$. Vậy $P_{\min}=\frac{65}{8}$.

**Cách 2:**

Với mọi $x,y$ không âm ta có

$$2x+y.4^{x+y-1}\ge 3\Leftrightarrow x+y.4^{x+y-\frac{3}{2}}\ge\frac{3}{2}\Leftrightarrow\left(x+y-\frac{3}{2}\right)+y.\left(4^{x+y-\frac{3}{2}}-1\right)\ge 0\ (1)$$

Nếu $x+y-\frac{3}{2}<0$ thì $\left(x+y-\frac{3}{2}\right)+y.\left(4^{x+y-\frac{3}{2}}-1\right)<0+y.(4^0-1)=0$ (vô lí)

Vậy $x+y\ge\frac{3}{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhyakovski ta được

$$P=x^2+y^2+4x+6y=(x+3)^2+(y+2)^2-13$$

$$\ge\frac{1}{2}(x+y+5)^2-13\ge\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+5\right)^2-13=\frac{65}{8}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}x+y=\frac{3}{2}\\x+3=y+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{5}{4}\\x=\frac{1}{4}\end{cases}$.

Vậy $\min P=\frac{65}{8}$.

**Câu 5.** Xét các số thực $x,y$ thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1}\le(x^2+y^2-2x+2)4^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{4y}{2x+y+1}$ **gần nhất** với số nào dưới đây?

**A.** $-2$. **B.** $-3$. **C.** $-5$. **D.** $-4$.

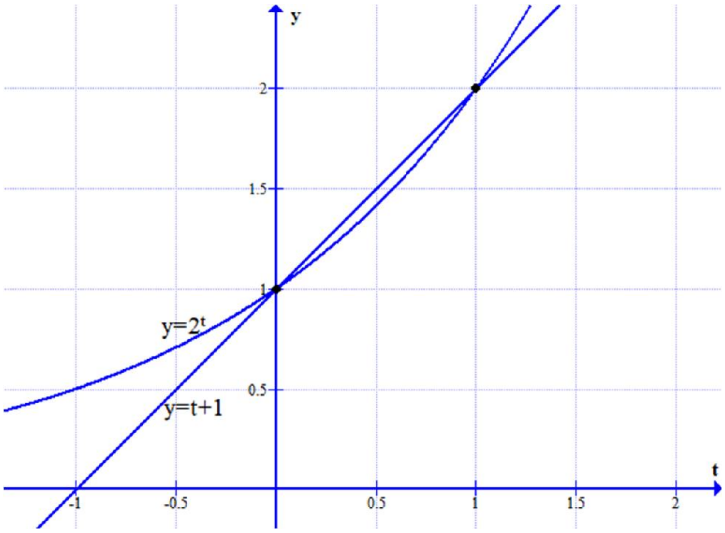
**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $2^{x^2+y^2+1} \le \left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x \Leftrightarrow 2^{x^2+y^2+1-2x} \le x^2+y^2-2x+2$

$\Leftrightarrow 2^{(x-1)^2+y^2} \le (x-1)^2+y^2+1$. Đặt $t=(x-1)^2+y^2\,(t\ge 0)$, ta được BPT: $2^t \le t+1$.

Đồ thị hàm số $y=2^t$ và đồ thị hàm số $y=t+1$ như sau:




Từ đồ thị suy ra $2^t \le t+1 \Leftrightarrow 0 \le t \le 1 \Rightarrow (x-1)^2+y^2 \le 1$. Do đó tập hợp các cặp số $(x;y)$ thỏa mãn thuộc hình tròn $(C)$ tâm $I(1;0), R=1$.

Ta có $P=\dfrac{4y}{2x+y+1} \Leftrightarrow 2Px+(P-4)y+P=0$ là phương trình của đường thẳng $d$.

Do $d$ và $(C)$ có điểm chung $\Leftrightarrow d\left(I,(d)\right) \le R \Leftrightarrow \dfrac{|3P|}{\sqrt{4P^2+(P-4)^2}} \le 1 \Leftrightarrow 4P^2+8P-16 \le 0$

$\Leftrightarrow -1-\sqrt{5} \le P \le -1+\sqrt{5}$, suy ra giá trị nhỏ nhất của $P$ **gần nhất** với $-3$.

**Câu 6.** Cho các số thực $x, y$ thỏa mãn bất đẳng thức $\log_{4x^2+9y^2}(2x+3y) \ge 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x+3y$ là

**A.** $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{2+\sqrt{10}}{4}$. **C.** $\dfrac{5+\sqrt{10}}{4}$. **D.** $\dfrac{3+\sqrt{10}}{4}$.

**Lời giải**

Điều kiện $4x^2+9y^2 \ne 1$.

Trường hợp 1: $4x^2+9y^2<1$.

Ta có $(2x)^2+(3y)^2<1 \Rightarrow \begin{cases} 2x<1 \\ 3y<1 \end{cases} \Rightarrow x+3y<\dfrac{1}{2}+1 \Rightarrow P<\dfrac{3}{2}$. (1)

Trường hợp 2: $4x^2+9y^2>1$.

Khi đó $\log_{4x^2+9y^2}(2x+3y) \ge 1 \Leftrightarrow 2x+3y \ge 4x^2+9y^2 \Leftrightarrow \left(2x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(3y-\dfrac{1}{2}\right)^2 \le \dfrac{1}{2}$.

$P=x+3y=\dfrac{1}{2}\left(2x-\dfrac{1}{2}\right)+\left(3y-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{3}{4}$.

Áp dụng BĐT Bunhiacopski ta được:

$$\left[\frac{1}{2}\left(2x-\frac{1}{2}\right)+\left(3y-\frac{1}{2}\right)\right]^2 \le \left(\frac{1}{4}+1\right)\left[\left(2x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(3y-\frac{1}{2}\right)^2\right] \le \frac{5}{8}.$$

Suy ra $P=\frac{1}{2}\left(2x-\frac{1}{2}\right)+\left(3y-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{4} \le \frac{3+\sqrt{10}}{4}$. $(2)$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} 2\left(2x-\frac{1}{2}\right)=3y-\frac{1}{2} \\ x+3y=\frac{3+\sqrt{10}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x-6y=1 \\ 4x+12y=3+\sqrt{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5+\sqrt{10}}{20} \\ y=\frac{5+2\sqrt{10}}{30} \end{cases}$. Từ $(1)$ và $(2)$ suy ra giá trị lớn nhất của $P$ là $\frac{3+\sqrt{10}}{4}$.

**Câu 7.** **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Cho các số thực $a,b$ thay đổi, thỏa mãn $a>\frac{1}{3}, b>1$. Khi biểu thức $P=\log_{3a} b+\log_b\left(a^4-9a^2+81\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất thì tổng $a+b$ bằng

**A.** $3+9^{\sqrt{2}}$ **B.** $9+2^{\sqrt{3}}$ **C.** $2+9\sqrt{2}$ **D.** $3+3\sqrt{2}$

**Lời giải**

**Chọn A**

Do $a^4-9a^2+81 \ge 9a^2 \Leftrightarrow \left(a^2-9\right)^2 \ge 0$ đúng $\forall a>\frac{1}{3}$; Dấu bằng xảy ra khi $a=3$

Suy ra $P \ge \log_{3a} b+\log_b(3a)^2=\log_{3a} b+2\log_b 3a \ge 2\sqrt{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a=3 \\ \log_{3a} b=2\log_b 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=9^{\sqrt{2}} \end{cases}$

Vậy, khi $P$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $a+b=3+9^{\sqrt{2}}$.

**Câu 8.** **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Cho các số thực $a,b,c$ thỏa mãn $0<a<1; \frac{1}{8}<b<1; \frac{3}{8}<c<1$. Gọi $M$ là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{3}{16}\log_a\left(\frac{b}{2}-\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{4}\log_b\left(\frac{c}{2}-\frac{3}{16}\right)+\frac{1}{3}\log_c a$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $\sqrt{3} \le M<2$. **B.** $M \ge 2$. **C.** $\sqrt{2} \le M<\sqrt{3}$. **D.** $M<\sqrt{2}$.

**Lời giải**

Ta có: $\frac{b}{2}-\frac{1}{16}=\frac{8b-1}{16}=\frac{1}{4}.\frac{8b-1}{4} \le \left(\frac{2b}{2}\right)^2=b^2$.

$\frac{c}{2}-\frac{3}{16}=\frac{8c-3}{16}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{8c-3}{2} \le \left(\frac{4c}{4}\right)^4=c^4$.

Suy ra $P=\frac{3}{16}\log_a\left(\frac{b}{2}-\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{4}\log_b\left(\frac{c}{2}-\frac{3}{16}\right)+\frac{1}{3}\log_c a$

$\ge \frac{3}{16}\log_a b^2+\frac{1}{4}\log_b c^4+\frac{1}{3}\log_a c \ge 3.\sqrt[3]{\frac{2}{16}}=\frac{3}{2}$.

Vậy $P_{\min}=\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 8b-1=1 \\ 8c-3=1 \\ \dfrac{3}{8}\log_a b=\log_b c=\dfrac{1}{3}\log_c a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{1}{4} \\ c=\dfrac{1}{2} \\ a=\dfrac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$.

**Câu 9.** Cho các số thực $a,b,m,n$ sao cho $2m+n<0$ và thoả mãn điều kiện:

$$\begin{cases} \log_2\left(a^2+b^2+9\right)=1+\log_2\left(3a+2b\right) \\ 9^{-m}.3^{-n}.3^{\frac{-4}{2m+n}}+\ln\left[\left(2m+n+2\right)^2+1\right]=81 \end{cases}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\sqrt{\left(a-m\right)^2+\left(b-n\right)^2}$

**A.** $2\sqrt{5}-2$. **B.** $2$. **C.** $\sqrt{5}-2$. **D.** $2\sqrt{5}$

**Lời giải**

- $\log_2\left(a^2+b^2+9\right)=1+\log_2\left(3a+2b\right) \Leftrightarrow a^2+b^2+9=6a+4b \Leftrightarrow a^2+b^2-6a-4b+9=0\ (1)$

Gọi $A(a;b)$. Từ $(1)$ ta suy ra điểm $A$ thuộc điểm đường tròn $(C)$ có tâm $I(3;2)$, bán kính $R=2$.

- $9^{-m}.3^{-n}.3^{\frac{-4}{2m+n}}+\ln\left[\left(2m+n+2\right)^2+1\right]=81 \Leftrightarrow \ln\left[\left(2m+n+2\right)^2+1\right]=81-3^{-(2m+n)+\frac{-4}{2m+n}}\ (*)$

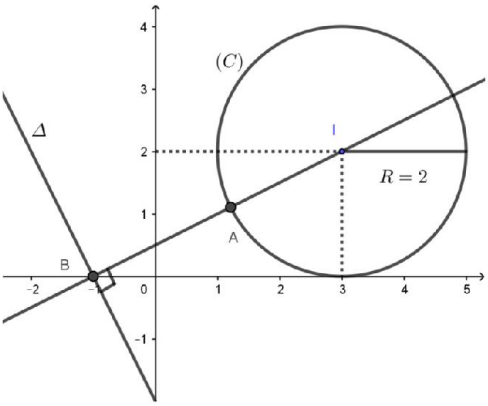
Theo bất đẳng thức Cô-si: $-(2m+n)+\dfrac{-4}{2m+n} \ge 2\sqrt{-(2m+n).\dfrac{-4}{2m+n}}=4 \Rightarrow 3^{-(2m+n)+\frac{-4}{2m+n}} \ge 81$.

(Đẳng thức xảy ra khi: $-(2m+n)=\dfrac{-4}{2m+n} \Rightarrow 2m+n=-2$)

Từ $(*) \Rightarrow \ln\left[\left(2m+n+2\right)^2+1\right] \le 0 \Leftrightarrow \left(2m+n+2\right)^2+1 \le 1 \Leftrightarrow \left(2m+n+2\right)^2 \le 0$

$\Rightarrow 2m+n+2=0\ (2)$.

Gọi $B(m;n)$. Từ $(2)$ ta suy ra điểm $B$ thuộc đường thẳng $\Delta:\ 2x+y+2=0$




Ta có: $P=\sqrt{\left(a-m\right)^2+\left(b-n\right)^2}=AB$

$\Rightarrow \min P=\min AB=d\left(I;\Delta\right)-R=\dfrac{\left|3.2+2+2\right|}{\sqrt{2^2+1^2}}-2=2\sqrt{5}-2.$

**Câu 10.** Cho các số thực $a,b,c$ thỏa mãn $0<a<1;\ \frac{1}{8}<b<1;\ \frac{3}{8}<c<1$. Gọi $M$ là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{3}{16}\log_a\left(\frac{b}{2}-\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{4}\log_b\left(\frac{c}{2}-\frac{3}{16}\right)+\frac{1}{3}\log_c a$. Khẳng định nào sau đây đúng?

**A.** $\sqrt{3}\le M<2$. **B.** $M\ge 2$. **C.** $\sqrt{2}\le M<\sqrt{3}$. **D.** $M<\sqrt{2}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $\frac{b}{2}-\frac{1}{16}=\frac{8b-1}{16}=\frac{1}{4}.\frac{8b-1}{4}\le\left(\frac{2b}{2}\right)^2=b^2$.

$\frac{c}{2}-\frac{3}{16}=\frac{8c-3}{16}=\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{8c-3}{2}\le\left(\frac{4c}{4}\right)^4=c^4$.

Suy ra $P=\frac{3}{16}\log_a\left(\frac{b}{2}-\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{4}\log_b\left(\frac{c}{2}-\frac{3}{16}\right)+\frac{1}{3}\log_c a$

$\ge\frac{3}{16}\log_a b^2+\frac{1}{4}\log_b c^4+\frac{1}{3}\log_a c\ \ge 3.\sqrt[3]{\frac{2}{16}}=\frac{3}{2}$.

Vậy $P_{\min}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}8b-1=1\\8c-3=1\\\frac{3}{8}\log_a b=\log_b c=\frac{1}{3}\log_c a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\frac{1}{4}\\c=\frac{1}{2}\\a=\frac{\sqrt{2}}{4}\end{cases}$.

**Câu 11.** **(Chuyên Lam Sơn - 2020)** Xét các số thực dương $a,b,c$ lớn hơn 1 ( với $a>b$) thỏa mãn $4\left(\log_a c+\log_b c\right)=25\log_{ab} c$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\log_b a+\log_a c+\log_c b$ bằng

**A.** 5. **B.** 8. **C.** $\frac{17}{4}$. **D.** 3.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $\log_c a=x,\log_c b=y$.

Vì $a,b,c>1$ và $a>b$ nên suy ra $\log_c a>\log_c b$ hay $x>y>0$.

Từ giả thiết suy ra: $4\left(\frac{1}{\log_c a}+\frac{1}{\log_c b}\right)=25.\frac{1}{\log_c ab}\Leftrightarrow\frac{4}{x}+\frac{4}{y}=\frac{25}{x+y}$

$\Leftrightarrow\frac{(x+y)^2}{xy}=\frac{25}{4}\Leftrightarrow\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{17}{4}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{x}{y}=4\\\frac{x}{y}=\frac{1}{4}\end{array}\right.\Rightarrow x=4y$ ( vì $x>y$ ).

Ta có: $\log_b a+\log_a c+\log_c b=\frac{\log_c a}{\log_c b}+\frac{1}{\log_c a}+\log_c b=\frac{x}{y}+\frac{1}{x}+y$

$=\frac{x}{y}+\frac{1}{4y}+y\ge 4+2\sqrt{\frac{1}{4y}.y}=5$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $y=\frac{1}{2}$ và $x=2$, tức là $a=c^2;c=b^2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức đã cho bằng 5.

**Cách khác**

Từ giả thiết suy ra: $4\left(\log_a b.\log_b c+\log_b c\right)=25.\log_{ab} b.\log_b c$

$$\Leftrightarrow\ 4\log_b c\left(\log_a b+1\right)=25\frac{\log_b c}{\log_b ab}\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}\log_b c=0\\4\left(\log_a b+1\right)=\dfrac{25}{\log_b a+1}\end{array}\right.$$

Do $a,b,c>1$ nên $\log_b c>0$; suy ra $4\left(1+\log_a b\right)\left(1+\log_b a\right)=25\ \Rightarrow\ \log_a b=\frac{1}{4}$.

Khi đó: $\log_b a+\log_a c+\log_c b\ge 4+2\sqrt{\log_a c.\log_c b}=4+2\sqrt{\log_a b}=5$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức bằng $5$ đạt được khi và chỉ khi $a=b^4,a=c^2,c=b^2$.

**Câu 12.** **(Chuyên Lương Văn Tụy - Ninh Bình - 2020)** Xét các số thực dương $a$, $b$, $x,y$ thỏa mãn $a>1$, $b>1$ và $a^{2x}=b^{3y}=a^6b^6$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4xy+2x-y$ có dạng $m+n\sqrt{165}$ (với $m,n$ là các số tự nhiên), tính $S=m+n$.

**A.** $58$. **B.** $54$. **C.** $56$. **D.** $60$

**Lời giải**

**Chọn C**

Theo bài ra ta có: $a^{2x}=b^{3y}=a^6b^6\Leftrightarrow\begin{cases}a^{2x}=a^6b^6\\b^{3y}=a^6b^6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=\log_a\left(a^6b^6\right)\\3y=\log_b\left(a^6b^6\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=6+6\log_a b\\3y=6+6\log_b a\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\left(1+\log_a b\right)\\y=2\left(1+\log_b a\right)\end{cases}$$

Vì $a$, $b>1$ nên $\log_a b>\log_a 1=0$.

Do đó:

$$P=4xy+2x-y=24(1+\log_a b)(1+\log_b a)+6+6\log_a b-2-2\log_b a$$
$$=52+30\log_a b+22\log_b a\ge 52+2\sqrt{30\log_a b.22\log_b a}=52+4\sqrt{165}$$

Vậy $P$ đạt giá trị nhỏ nhất là $m+n\sqrt{165}$ khi $30\log_a b=22\log_b a\Leftrightarrow\log_a b=\sqrt{\frac{11}{15}}\Leftrightarrow b=a^{\sqrt{\frac{11}{15}}}$

Ta có: $\begin{cases}m=52\\n=4\end{cases}\Rightarrow m+n=56$.

**Câu 13.** **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)** Xét các số thực $x,y$ thỏa mãn $\log_2\left(x-1\right)+\log_2\left(y-1\right)=1$. Khi biểu thức $P=2x+3y$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $3x-2y=a+b\sqrt{3}$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính $T=ab$?

**A.** $T=9$. **B.** $T=\frac{7}{3}$. **C.** $T=\frac{5}{3}$. **D.** $T=7$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện: $\begin{cases}x-1>0\\y-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\y>1\end{cases}$

Khi đó: $\log_2\left(x-1\right)+\log_2\left(y-1\right)=1\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(y-1\right)=2\Leftrightarrow y-1=\frac{2}{x-1}\Leftrightarrow y=\frac{2}{x-1}+1$

Suy ra: $P=2x+3y=2x+\dfrac{6}{x-1}+3=2(x-1)+\dfrac{6}{x-1}+5$

***Cách 1:*** Dùng bất đẳng thức

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có: $2(x-1)+\dfrac{6}{x-1}\ge 2\sqrt{2(x-1).\dfrac{6}{x-1}}$

$\Rightarrow 2(x-1)+\dfrac{6}{x-1}\ge 4\sqrt{3}\Rightarrow P\ge 4\sqrt{3}+5$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2(x-1)=\dfrac{6}{x-1}\Leftrightarrow (x-1)^2=3\Leftrightarrow |x-1|=\sqrt{3}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1+\sqrt{3}\ (N)\\ x=1-\sqrt{3}\ (L)\end{array}\right.$

$\Rightarrow y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}+1=\dfrac{2\sqrt{3}+3}{3}$.

Do đó: $3x-2y=3\left(1+\sqrt{3}\right)-2\left(\dfrac{2\sqrt{3}+3}{3}\right)=1+\dfrac{5}{3}\sqrt{3}\Rightarrow a=1;\ b=\dfrac{5}{3}\Rightarrow T=ab=\dfrac{5}{3}$.

***Cách 2:*** Dùng bảng biến thiên

Ta có: $P=2x+\dfrac{6}{x-1}+3\ \Rightarrow P'=2-\dfrac{6}{(x-1)^2}$

$P'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1+\sqrt{3}\ (N)\\ x=1-\sqrt{3}\ (L)\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

| $x$ | $1$ | | $1+\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $P$ | $+\infty$ | ↘ | $4\sqrt{3}+5$ | ↗ | $+\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $P_{\min}=4\sqrt{3}+5\Leftrightarrow x=1+\sqrt{3}\Rightarrow y=\dfrac{2\sqrt{3}+3}{3}$.

Do đó: $3x-2y=3\left(1+\sqrt{3}\right)-2\left(\dfrac{2\sqrt{3}+3}{3}\right)=1+\dfrac{5}{3}\sqrt{3}\Rightarrow a=1;\ b=\dfrac{5}{3}\Rightarrow T=ab=\dfrac{5}{3}$.

**Câu 14.** **(Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020)** Cho $a>0,b>0$ thỏa mãn $\log_{4a+5b+1}\left(16a^2+b^2+1\right)+\log_{8ab+1}\left(4a+5b+1\right)=2$. Giá trị của $a+2b$ bằng

**A.** $\dfrac{27}{4}$. **B.** $6$. **C.** $\dfrac{20}{3}$. **D.** $9$.

**Lời giải**

**Chọn A.**

Ta có: $a>0,b>0$

Nên $\begin{cases}4a+5b+1>1\\8ab+1>1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\log_{4a+5b+1}\left(16a^2+b^2+1\right)>0\\\log_{8ab+1}\left(4a+5b+1\right)>0\end{cases}$

$P=\log_{4a+5b+1}\left(16a^2+b^2+1\right)+\log_{8ab+1}\left(4a+5b+1\right)\ge 2\sqrt{\log_{4a+5b+1}\left(16a^2+b^2+1\right).\log_{8ab+1}\left(4a+5b+1\right)}$

$\Leftrightarrow P\ge 2\sqrt{\log_{8ab+1}\left(16a^2+b^2+1\right)}$

Mặt khác:

$16a^2+b^2+1\ge 2\sqrt{16a^2b^2}+1=8ab+1\Leftrightarrow P\ge 2\sqrt{\log_{8ab+1}\left(8ab+1\right)}=2$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases}16a^2=b^2\\8ab+1=4a+5b+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a=b\\2b^2+1=6b+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{3}{4}\\b=3\end{cases}$

Do đó $a+2b=\dfrac{27}{4}$.

**Câu 15.** **(Chuyên Sơn La - 2020)** Cho $a,b,c$ là các số thực lớn hơn 1. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{4040}{\log_{\sqrt{bc}}a}+\dfrac{1010}{\log_{ac}\sqrt{b}}+\dfrac{8080}{3\log_{ab}\sqrt[3]{c}}$ bằng

**A.** 2020. **B.** 16160. **C.** 20200. **D.** 13130.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $P=\dfrac{4040}{\log_{\sqrt{bc}}a}+\dfrac{1010}{\log_{ac}\sqrt{b}}+\dfrac{8080}{3\log_{ab}\sqrt[3]{c}}=\dfrac{4040}{2\log_{bc}a}+\dfrac{1010}{\frac{1}{2}\log_{ac}b}+\dfrac{8080}{3.\frac{1}{3}\log_{ab}c}$

$=2020\log_a bc+2020\log_b ac+8080\log_c ab$

$=2020\left(\log_a b+\log_a c\right)+2020\left(\log_b a+\log_b c\right)+8080\left(\log_c a+\log_c b\right)$

$=2020\log_a b+2020\log_b a+2020\log_a c+8080\log_c a+2020\log_b c+8080\log_c b$

Vì $a,b,c>1$ nên các số $\log_a b,\log_b a,\log_a c,\log_c a,\log_b c,\log_c b>0$

Khi đó ta có

$2020\log_a b+2020\log_b a\ge 2\sqrt{2020^2\log_a b\log_b a}=4040$

$2020\log_a c+8080\log_c a\ge 2\sqrt{4040^2\log_a c\log_c a}=8080$

$2020\log_b c+8080\log_c b\ge 2\sqrt{4040^2\log_b c\log_c b}=8080$

Suy ra $P\ge 4040+8080+8080=20200$

**Câu 16.** **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2020)** Cho $a,b,c$ là các số thực dương khác 1 thỏa mãn $\log_a^2 b+\log_b^2 c=\log_a\dfrac{c}{b}-2\log_b\dfrac{c}{b}-3$. Gọi $M,m$ lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P=\log_a b-\log_b c$. Giá trị của biểu thức $S=3m-M$ bằng

**A.** $-16$. **B.** 4. **C.** $-6$. **D.** 6.

**Lời giải**

**Chọn C**

Biến đổi đẳng thức đề bài ta được

$\log_a^2 b+\log_b^2 c=\log_a\dfrac{c}{b}-2\log_b\dfrac{c}{b}-3\Leftrightarrow\log_a^2 b+\log_b^2 c=\log_a c-\log_a b-2\log_b c-1$

$\Leftrightarrow\log_a^2 b+\log_b^2 c=\log_a b.\log_b c-\log_a b-2\log_b c-1$

Đặt $u=\log_a b; v=\log_b c$ ta có phương trình

$u^2+v^2=uv-u-2v-1$

$\Leftrightarrow u^2-2uv+v^2+u^2+2u+1+v^2+4v+4=3$

$\Leftrightarrow (u-v)^2+(u+1)^2+(v+2)^2=3 \quad (*)$

Ta có bất đẳng thức quen thuộc $x^2+y^2\ge\frac{1}{2}(x-y)^2$ dấu bằng xảy ra khi $x=-y$, áp dụng bất đẳng thức này ta có

$$(u+1)^2+(v+2)^2\ge\frac{1}{2}(u+1-v-2)^2\Leftrightarrow(u+1)^2+(v+2)^2\ge\frac{1}{2}(u-v-1)^2 \quad (**)$$

Từ (*) và (**) ta có $3-(u-v)^2\ge\frac{1}{2}(u-v-1)^2$ hay

$$3-P^2\ge\frac{1}{2}(P-1)^2\Leftrightarrow 3P^2-2P-5\le 0\Leftrightarrow -1\le P\le\frac{5}{3}$$

Vậy $m=-1, M=\frac{5}{3}$ suy ra $S=m-3M=-6$.

**Câu 17.** **(Sở Hưng Yên - 2020)** Cho các số thực $x,y\ge 1$ và thỏa mãn điều kiện $xy\le 4$. Biểu thức $P=\log_{4x}8x-\log_{2y^2}\frac{y^2}{2}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=x_0, y=y_0$. Đặt $T=x_0^4+y_0^4$ mệnh đề nào sau đây đúng

**A.** $T=131$. **B.** $T=132$. **C.** $T=129$. **D.** $T=130$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $P=\log_{4x}8x-\log_{2y^2}\frac{y^2}{2}=\frac{\log_2 8x}{\log_2 4x}-\frac{\log_2\frac{y^2}{2}}{\log_2 2y^2}=\frac{3+\log_2 x}{2+\log_2 x}-\frac{2\log_2 y-1}{2\log_2 y+1}$.

Đặt $\log_2 x=a$, $\log_2 y=b$ $(a,b\ge 0)$, ta được $P=\frac{3+a}{2+a}-\frac{2b-1}{2b+1}=\frac{1}{2+a}+\frac{2}{2b+1}$.

Vì $xy\le 4$ suy ra $\log_2 x+\log_2 y\le 2\Leftrightarrow a+b\le 2\Leftrightarrow 0\le a\le 2-b$

Suy ra $P=\frac{1}{2+a}+\frac{2}{2b+1}\ge\frac{1}{4-b}+\frac{2}{2b+1}$.

Xét hàm $f(b)=\frac{1}{4-b}+\frac{2}{2b+1}$ trên $[0;2]$,ta có:

$$f'(b)=\frac{1}{(4-b)^2}-\frac{4}{(2b+1)^2}$$

$$f'(b)=0\Leftrightarrow(2b+1)^2-4(4-b)^2=0\Leftrightarrow b=\frac{7}{4}.$$

Ta có: $f(0)=\frac{9}{4}, f(2)=\frac{9}{10}, f\left(\frac{7}{4}\right)=\frac{8}{9}$.

Suy ra trên đoạn $[0;2]$ ta có: $\min P=\frac{8}{9}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_2 x=\frac{1}{4}\\ \log_2 y=\frac{7}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2^{\frac{1}{4}}\\ y=2^{\frac{7}{4}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0=2^{\frac{1}{4}}\\ y_0=2^{\frac{7}{4}}\end{cases}$

Vậy $T = x_0^4 + y_0^4 = \left(2^{\frac{1}{4}}\right)^4 + \left(2^{\frac{7}{4}}\right)^4 = 130$.

**Câu 18.** **(Sở Hà Tĩnh - 2020)** Cho các số thực dương $a, b, c$ thỏa mãn $abc = 10$. Biết giá trị lớn nhất của biểu thức $F = 5\log a.\log b + 2\log b.\log c + \log c.\log a$ bằng $\frac{m}{n}$ với $m, n$ nguyên dương và $\frac{m}{n}$ tối giản. Tổng $m+n$ bằng

**A.** 13. **B.** 16. **C.** 7. **D.** 10.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đặt $\begin{cases} \log a = x \\ \log b = y \\ \log c = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 10^x \\ b = 10^y \\ c = 10^z \end{cases}$, mà $abc = 10 \Leftrightarrow 10^x.10^y.10^z = 10 \Leftrightarrow x + y + z = 1\ (*)$.

Ta có $F = 5\log a.\log b + 2\log b.\log c + \log c.\log a = 5xy + 2yz + zx$.

Từ $(*) \Rightarrow y = 1 - x - z$, thay vào biểu thức $F$, ta được:

$F = 5x(1-x-z) + 2(1-x-z)z + xz = -2z^2 - 5x^2 - 6xz + 2z + 5x$

$= -2z^2 - \frac{9}{2}x^2 - \frac{1}{2} - 6xz + 2z + 3x - \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 + \frac{5}{2}$

$= -2\left(z^2 + \frac{9}{4}x^2 + \frac{1}{4} + 3xz - z - \frac{3}{2}x\right) - \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 4) + \frac{5}{2}$

$= -2\left(z + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{5}{2} \le \frac{5}{2}$.

Vậy $\max F = \frac{5}{2}$ khi và chỉ khi $\begin{cases} x+y+z=1 \\ z + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2} \\ x = 2 \\ z = -\frac{5}{2} \end{cases}$.

Vậy $m = 5, n = 2 \Rightarrow m + n = 5 + 2 = 7$.

**Câu 19.** **(Lê Lai - Thanh Hóa - 2020)** Cho $a > 0, b > 0$ thỏa mãn $\log_{10a+3b+1}(25a^2 + b^2 + 1) + \log_{10ab+1}(10a + 3b + 1) = 2$. Giá trị biểu thức $a + 2b$ bằng?

**A.** 6. **B.** $\frac{11}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** 22.

**Lời giải**

**Chọn B**

Với $a > 0, b > 0$ ta có $25a^2 + b^2 + 1 \ge 10ab + 1$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $b = 5a$.

Suy ra $\log_{10a+3b+1}(25a^2 + b^2 + 1) \ge \log_{10a+3b+1}(10ab + 1)$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $b = 5a$.

Mặt khác, ta lại có với $a > 0, b > 0$ thì $\log_{10a+3b+1}(10ab+1) > 0, \log_{10ab+1}(10a + 3b + 1) > 0$.

Do đó:

$\log_{10a+3b+1}(25a^2 + b^2 + 1) + \log_{10ab+1}(10a + 3b + 1) \ge \log_{10a+3b+1}(10ab + 1) + \log_{10ab+1}(10a + 3b + 1)$

$\ge 2\sqrt{\log_{10a+3b+1}(10ab+1).\log_{10ab+1}(10a+3b+1)} = 2$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} b=5a \\ \log_{10a+3b+1}(10ab+1)=\log_{10ab+1}(10a+3b+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=5a \\ 10a+3b+1=10ab+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{5}{2} \\ a=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a+2b=\frac{11}{2}$$

**Câu 20. (Liên trường Nghệ An - 2020)** Cho các số thực dương $a;b;c$ khác 1 thỏa mãn $\log_a^2 b+\log_b^2 c+2\log_b \frac{c}{b}=\log_a \frac{c}{a^3 b}$. Gọi $M,m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P=\log_a ab-\log_b bc$. Tính giá trị biểu thức $S=2m^2+9M^2$.

**A.** $S=28$. **B.** $S=25$. **C.** $S=26$. **D.** $S=27$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt $x=\log_a b; y=\log_b c,(x;y>0)\Rightarrow \log_a c=xy\Rightarrow P=\log_a ab-\log_b bc=x-y\Rightarrow x=P+y$

$$\log_a^2 b+\log_b^2 c+2\log_b \frac{c}{b}=\log_a \frac{c}{a^3 b}\Leftrightarrow x^2+y^2+2y-2=xy-3-x$$

Khi đó ta có $(P+y)^2+y^2+2y-2=(P+y)y-3-(P+y)$ .

$\Leftrightarrow y^2+(P+3)y+P^2+P+1=0$

Phương trình có nghiệm khi $\Delta\geq 0\Leftrightarrow -3P^2+2P+5\geq 0\Leftrightarrow -1\leq P\leq \frac{5}{3}\Rightarrow m=-1; M=\frac{5}{3}\Rightarrow S=27$

Nên giá trị nhỏ nhất của $P$ là $\frac{8}{9}\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x=\frac{1}{4} \\ \log_2 y=\frac{7}{4} \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=2^{\frac{1}{4}} \\ y=2^{\frac{7}{4}} \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} x_0=2^{\frac{1}{4}} \\ y_0=2^{\frac{7}{4}} \end{cases}\Rightarrow T={x_0}^4+{y_0}^4=130$

**Câu 21. (Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Cho $a>0,b>0$ thỏa mãn $\log_{4a+5b+1}(16a^2+b^2+1)+\log_{8ab+1}(4a+5b+1)=2$. Giá trị của $a+2b$ bằng

**A.** 9. **B.** 6. **C.** $\frac{27}{4}$. **D.** $\frac{20}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Theo bất đẳng thức Côsi với $a>0,b>0$ ta có:

$$16a^2+b^2+1\geq 2\sqrt{16a^2b^2}+1=8ab+1\Rightarrow 16a^2+b^2+1\geq 8ab+1 \ (*)$$

Do $4a+5b+1>1$ nên từ (*) có:

$$\log_{4a+5b+1}(16a^2+b^2+1)+\log_{8ab+1}(4a+5b+1)\geq \log_{4a+5b+1}(8ab+1)+\log_{8ab+1}(4a+5b+1)$$

$$\Rightarrow \log_{4a+5b+1}(16a^2+b^2+1)+\log_{8ab+1}(4a+5b+1)\geq \log_{4a+5b+1}(8ab+1)+\frac{1}{\log_{4a+5b+1}(8ab+1)}$$

Mặt khác $4a+5b+1>1$ và $8ab+1>1$ nên: $\log_{4a+5b+1}(8ab+1)+\frac{1}{\log_{4a+5b+1}(8ab+1)}\geq 2$.

Suy ra $\log_{4a+5b+1}(16a^2+b^2+1)+\log_{8ab+1}(4a+5b+1)\geq 2$.

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}16a^2=b^2\\4a+5b+1=8ab+1\\a,b>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=4a\\2b^2-6b=0\\a,b>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{3}{4}\\b=3\end{cases}$.

Vậy $a+2b=\dfrac{27}{4}$.

**Câu 22.** **(Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020)** Xét các số thực $a,b,x,y$ thỏa mãn $a>1,b>1$ và $a^x=b^y=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x-2y$ thuộc tập nào dưới đây?

**A.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $\left[1;\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $\left[\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases}a^x=\sqrt{\dfrac{a}{b}}\\b^y=\sqrt{\dfrac{a}{b}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\log_a\sqrt{\dfrac{a}{b}}\\y=\log_b\sqrt{\dfrac{a}{b}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}(1-\log_a b)\\y=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\log_a b}-1\right)\end{cases}$

Đặt $t=\log_a b$. Vì $a>1,b>1$, nên $t>0$.

Khi đó: $P=\dfrac{1}{2}(1-t)-\left(\dfrac{1}{t}-1\right)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{t}{2}-\dfrac{1}{t}=\dfrac{3}{2}-\left(\dfrac{t}{2}+\dfrac{1}{t}\right)\le\dfrac{3}{2}-2.\sqrt{\dfrac{t}{2}.\dfrac{1}{t}}=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{t}{2}=\dfrac{1}{t}\Leftrightarrow t=\sqrt{2}\ (t>0)$. $P_{\max}=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}\approx 0,086\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

**Câu 23.** **(Tiên Du - Bắc Ninh - 2020)** Cho biểu thức $P=3^{y-2x+3}(1+4^{2x-y-1})-2^{2x-y-1}$ và biểu thức $Q=\log_{y-3-2x}3y$. Giá trị nhỏ nhất của $y$ để tồn tại $x$ đồng thời thỏa mãn $P\ge 1$ và $Q\ge 1$ là số $y_0$. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

**A.** $4y_0+1$ là số hữu tỷ. **B.** $y_0$ là số vô tỷ.

**C.** $y_0$ là số nguyên dương. **D.** $3y_0+1$ là số tự nhiên chẵn.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện $\begin{cases}y-2x+3>0\\y>0\end{cases}$.

$P=3^{y-2x+1}.(1+4^{2x-y-1})-2^{2x-y-1}=3^{y-2x+1}.(1+\dfrac{1}{4^{2x-y-1}})-\dfrac{1}{2^{y-2x+1}}$.

Đặt $t=y-2x+1$ ta có $P=3^t(1+\dfrac{1}{4^t})-\dfrac{1}{2^t}$.

Cho $P\ge 1\Leftrightarrow 3^t(1+\dfrac{1}{4^t})-\dfrac{1}{2^t}\ge 1\Leftrightarrow 12^t+3^t\ge 4^t+2^t(1)$.

* Với $t=0$ thỏa mãn (1).

* Với $t>0$ ta có $\left.\begin{matrix}12^t>4^t\\3^t>2^t\end{matrix}\right\}\Rightarrow 12^t+3^t>4^t+2^t\Rightarrow(1)$ thỏa mãn.

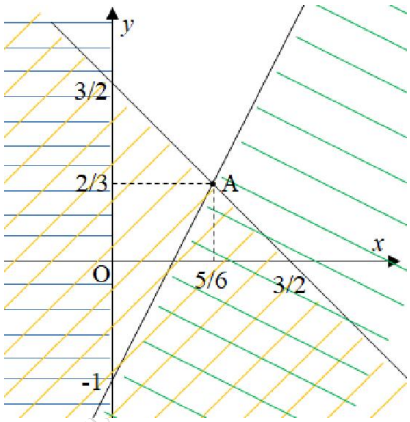
* Với $t<0$ ta có $\left.\begin{array}{l}12^t<4^t\\3^t<2^t\end{array}\right\}\Rightarrow 12^t+3^t<4^t+2^t\Rightarrow$ (1) không thỏa mãn.

Vậy $(1)\Leftrightarrow t\ge 0$ hay $y-2x+1\ge 0$ (a).

Vì $y-2x+1>0\Rightarrow$ $y-2x+3>2>1$ nên $Q=\log_{y-2x+1}3y\ge 1\Leftrightarrow 3y\ge y-2x+3\Leftrightarrow 2x+2y\ge 3$ (b).

Từ (a), (b) và điều kiện ta có $\begin{cases}y-2x+1\ge 0\\2x+2y\ge 3\\y>0\end{cases}$.

Cặp số $(x;y)$ thỏa mãn hệ được biểu diễn ở miền không bị gạch ở hình bên. Điểm A thuộc miền không bị gạch và có $y_{\min}=\dfrac{2}{3}$.




Vậy $y_0=\dfrac{2}{3}$. Do đó $4y_0+1=\dfrac{11}{3}\in\mathbb{Q}$.

**Câu 24.** **(Trường VINSCHOOL - 2020)** Cho dãy số $(u_n)$ có số hạng đầu $u_1\ne 1$ thỏa mãn $\log_2^2(5u_1)+\log_2^2(7u_1)=\log_2^2 5+\log_2^2 7$ và $u_{n+1}=7u_n$ với mọi $n\ge 1$. Giá trị nhỏ nhất của $n$ để $u_n>1111111$ bằng:

**A.** 11. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $u_{n+1}=7u_n,\forall n\ge 1\Rightarrow(u_n)$ là một cấp số nhân với số hạng đầu là $u_1$, công bội $q=7$.

$\log_2^2(5u_1)+\log_2^2(7u_1)=\left[\log_2 5+\log_2 u_1\right]^2+\left[\log_2 7+\log_2 u_1\right]^2$

$=\log_2^2 5+2.\log_2 5.\log_2 u_1+\log_2^2 u_1+\log_2^2 7+2.\log_2 7.\log_2 u_1+\log_2^2 u_1$

$=2\log_2^2 u_1+2.(\log_2 5+\log_2 7).\log_2 u_1+\log_2^2 5+\log_2^2 7$

$=2\log_2^2 u_1+2.\log_2 35.\log_2 u_1+\log_2^2 5+\log_2^2 7=\log_2^2 5+\log_2^2 7$

$\Leftrightarrow 2\log_2^2 u_1+2.\log_2 35.\log_2 u_1=0\Leftrightarrow 2\log_2 u_1.(\log_2 u_1+\log_2 35)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 u_1=0\\\log_2 u_1+\log_2 35=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u_1=1\ (\text{loai})\\\log_2 u_1=-\log_2 35\end{array}\right.\Leftrightarrow u_1=\dfrac{1}{35}\ (\text{nhan})$.

Số hạng tổng quát của dãy số là $u_n=u_1.q^{n-1}=\dfrac{1}{35}.7^{n-1}=\dfrac{1}{5.7}.7^{n-1}=\dfrac{1}{5}.7^{n-2}$.

$u_n > 1111111 \Leftrightarrow \frac{1}{5}.7^{n-2} > 1111111 \Leftrightarrow 7^{n-2} > 5555555 \Leftrightarrow n-2 > \log_7 5555555$

$\Leftrightarrow n > \log_7 5555555 + 2$. Vì $n \in \mathbb{N}^*$ nên giá trị nhỏ nhất của $n$ bằng $10$.

**Câu 25.** **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)** Xét các số thực $x, y$ thỏa mãn $\log_2(x-1)+\log_2(y-1)=1$. Khi biểu thức $P=2x+3y$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $3x-2y=a+b\sqrt{3}$ với $a,b \in \mathbb{Q}$. Tính $T=ab$.

**A.** $T=9$. **B.** $T=\frac{7}{3}$. **C.** $T=\frac{5}{3}$. **D.** $T=7$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $\log_2(x-1)+\log_2(y-1)=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x,y>1 \\ y-1=\frac{2}{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ y=1+\frac{2}{x-1} \end{cases}$.

Khi đó $P=2x+3y=2x+3\left(\frac{2}{x-1}+1\right)=2(x-1)+\frac{6}{x-1}+5 \geq 2\sqrt{12}+5$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x>1 \\ 2(x-1)=\frac{6}{x-1} \\ y=1+\frac{2}{x-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=\sqrt{3} \\ y=1+\frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow 3x-2y=3\left(1+\sqrt{3}\right)-2\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=1+\frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $a=1, b=\frac{5}{3}$ nên $T=\frac{5}{3}$.

Nguyễn Bảo Vương

**Câu 26.** Xét các số thực $a$, $b$, $c \neq 0$ thỏa mãn $3^a=5^b=15^{-c}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2-4(a+b+c)$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

**A.** $(-1;2)$. **B.** $[-5;-1)$. **C.** $[2;4)$. **D.** $[4;6)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đặt $3^a=5^b=15^{-c}=t>0 \Rightarrow \begin{cases} a=\log_3 t \\ b=\log_5 t \\ c=-\log_{15} t \end{cases}$. Khi đó

$P=\log_3^2 t+\log_5^2 t+\log_{15}^2 t-4(\log_3 t+\log_5 t-\log_{15} t)$

$=\log_3^2 t\left(1+\log_5^2 3+\log_{15}^2 3\right)-4\log_3 t\left(1+\log_5 3-\log_{15} 3\right)$

$=X^2\left(1+\log_5^2 3+\log_{15}^2 3\right)-4X\left(1+\log_5 3-\log_{15} 3\right)$, (với $X=\log_3 t$)

$P_{\min}=P\left(\frac{2\left(1+\log_5 3-\log_{15} 3\right)}{1+\log_5^2 3+\log_{15}^2 3}\right)=-4$,

khi $\log_3 t=\frac{2\left(1+\log_5 3-\log_{15} 3\right)}{1+\log_5^2 3+\log_{15}^2 3} \Rightarrow t=3^{\frac{2\left(1+\log_5 3-\log_{15} 3\right)}{1+\log_5^2 3+\log_{15}^2 3}}$

Suy ra

$a=\dfrac{2\left(1+\log_5 3-\log_{15} 3\right)}{1+\log_5^2 3+\log_{15}^2 3}$

$b=\log_5 3^{\frac{2\left(1+\log_5 3-\log_{15} 3\right)}{1+\log_5^2 3+\log_{15}^2 3}}$

$c=-\log_{15} 3^{\frac{2\left(1+\log_5 3-\log_{15} 3\right)}{1+\log_5^2 3+\log_{15}^2 3}}$.

**Câu 27.** Xét các số thực dương $a$, $b$, $c$, $x$, $y$, $z$ thỏa mãn $a>1$, $b>1$, $c>1$ và $a^x=b^y=c^z=\sqrt{abc}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y+z+\dfrac{1}{2}$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

**A.** $[10;13)$. **B.** $[7;10)$. **C.** $[3;5)$. **D.** $[5;7)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Từ giả thiết ta có

$x=\dfrac{1}{2}\left(1+\log_a b+\log_a c\right)$, $y=\dfrac{1}{2}\left(1+\log_b a+\log_b c\right)$, $z=\dfrac{1}{2}\left(1+\log_c b+\log_c a\right)$. Khi đó ta có

$2P=4+\log_a b+\log_b a+\log_a c+\log_c a+\log_b c+\log_c b$.

Vì $a>1$, $b>1$, $c>1$ nên $\log_a b>0$, $\log_b c>0$, $\log_c a>0$, $\log_b a>0$, $\log_c b>0$, $\log_a c>0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô Si ta được

$\log_a b+\log_b a\ge 2\sqrt{\log_a b.\log_b a}$ hay $\log_a b+\log_b a\ge 2$.

Tương tự $\log_a c+\log_c a\ge 2$ và $\log_b c+\log_c b\ge 2$.

Do đó $2P\ge 10$ hay $P\ge 5$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Vậy giá trị nhỏ nhất $P_{\min}=5$.

**Câu 28.** Xét các số thực dương $a,b,x,y$ thỏa mãn $a>1,b>1$ và $a^{x^2}=b^{y^2}=\sqrt{a.b}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x.y$ là

**A.** $P=\dfrac{9}{4}$. **B.** $P=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **C.** $P=\dfrac{3}{2}$. **D.** $P=\dfrac{4}{9}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$a^{x^2}=b^{y^2}=\sqrt{a.b}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=\dfrac{1}{2}\log_a b+\dfrac{1}{2}\\ y^2=\dfrac{1}{2}\log_b a+\dfrac{1}{2}\end{cases}$

$+)\left(xy\right)^2=\left(\dfrac{1}{2}\log_a b+\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}\log_b a+\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\left(\log_a b+\log_b a\right)+\dfrac{1}{4}\right)$

$\ge\dfrac{3}{2}$ $(a,b>1\Rightarrow\log_a b>0,\log_b a>0)$.

Vì $x>0,y>0\Rightarrow xy\ge\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

**Câu 29.** Xét các số thực dương $a,b,x,y$ thỏa mãn $a>1,b>1$ và $a^{\frac{x^2}{y}}=b^{\frac{y^2}{x}}=ab$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x.y$ là

**A.** $P=2$. **B.** $P=4$. **C.** $P=3$. **D.** $P=1$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$$a^{\frac{x^2}{y}}=b^{\frac{y^2}{x}}=ab\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x^2}{y}=1+\log_a b\\ \frac{y^2}{x}=1+\log_b a\end{cases}.$$

Ta có $xy=\frac{x^2}{y}.\frac{y^2}{x}=\left(1+\log_a b\right)\left(1+\log_a b\right)$

$=1+1+\log_a b+\log_b a$

$\geq 4\,(a,b>1\Rightarrow \log_a b>0,\log_b a>0)$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

**Câu 30.** Xét các số thực dương $a,b,c,x,y,z$ thỏa mãn $a>1,b>1,c>1,y>2$ và $a^{x+1}=b^{y-2}=c^{z+1}=abc$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y+z$ là

**A.** $P=13$. **B.** $P=3$. **C.** $P=9$. **D.** $P=1$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$$a^{x+1}=b^{y-2}=c^{z+1}=abc\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=1+\log_a b+\log_a c\\ y-2=1+\log_b a+\log_b c\\ z+1=1+\log_c b+\log_c a\end{cases}.$$

Ta có: $x+1+y-2+z-1=3+\log_a b+\log_a c+\log_b c+\log_b a+\log_c b+\log_c a$

$\Leftrightarrow x+y+z\geq 3+6$

$\Leftrightarrow P\geq 9\,(a,b,c>1\Rightarrow \log_a b>0,\log_a c>0,\log_b a>0,\log_b c>0,\log_c a>0,\log_c b>0)$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

## Dạng 3. Sử dụng phương pháp hàm số (hàm đặc trưng) giải các bài toán logarit

**1. Định lý:** Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) và liên tục trên $(a;b)$ thì

* $\forall u;v\in(a;b): f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v$.

* Phương trình $f(x)=k\ (k=const)$ có nhiều nhất 1 nghiệm trên khoảng $(a;b)$.

**2. Định lý:** Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến (hoặc nghịch biến) và liên tục trên $(a;b)$, đồng thời

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x).\lim\limits_{x\to b^-} f(x)<0$ thì phương trình $f(x)=k\,(k=const)$ có duy nhất nghiệm trên $(a;b)$.

**3. Tính chất của logarit:**

**1.1. So sánh hai logarit cũng cơ số:**

Cho số dương $a\neq 1$ và các số dương $b,c$.

◦ Khi $a>1$ thì $\log_a b>\log_a c\Leftrightarrow b>c$.

◦ Khi $0<a<1$ thì $\log_a b>\log_a c\Leftrightarrow b<c$.

**1.2. Hệ quả:**

Cho số dương $a\neq 1$ và các số dương $b,c$.

◦ Khi $a>1$ thì $\log_a b>0\Leftrightarrow b>1$.

◦ Khi $0<a<1$ thì $\log_a b>0\Leftrightarrow b<1$.

◦ $\log_a b=\log_a c\Leftrightarrow b=c$.

| | |
|---|---|
| **2. Logarit của một tích**:<br>Cho 3 số dương $a, b_1, b_2$ với $a \neq 1$, ta có $\log_a(b_1.b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$ | **3. Logarit của một thương**:<br>Cho 3 số dương $a, b_1, b_2$ với $a \neq 1$, ta có $\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$<br>Đặc biệt: với $a, b > 0, a \neq 1$ $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$. |
| **4. Logarit của lũy thừa**:<br>Cho $a, b > 0, a \neq 1$, với mọi $\alpha$, ta có $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$.<br>Đặc biệt: $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n}\log_a b$ ($n$ nguyên dương). | **5. Công thức đổi cơ số**:<br>Cho 3 số dương $a, b, c$ với $a \neq 1, c \neq 1$, ta có $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$.<br>Đặc biệt: $\log_a c = \frac{1}{\log_c a}$ và $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha}\log_a b$ với $\alpha \neq 0$. |

**Câu 1.** **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Có bao nhiêu số nguyên $x$ sao cho ứng với mỗi $x$ có không quá 242 số nguyên $y$ thỏa mãn $\log_4(x^2+y) \geq \log_3(x+y)$?

**A.** 55. **B.** 28. **C.** 29. **D.** 56.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện: $\begin{cases} x^2+y>0 \\ x+y>0 \end{cases}$.

Đặt $\log_3(x+y)=t$, ta có $\begin{cases} x^2+y \geq 4^t \\ x+y=3^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x^2-x \geq 4^t-3^t} \ (*) \\ y=3^t-x \end{cases}$.

Nhận xét rằng hàm số $f(t)=4^t-3^t$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ và $f(t)>0$ với mọi $t>0$

Gọi $n \in \mathbb{Z}$ thỏa $4^n-3^n=x^2-x$, khi đó $(*) \Leftrightarrow \boxed{t \leq n}$

Từ đó, ta có $-x < y = 3^t - x \leq 3^n - x$.

Mặt khác, vì có không quá 242 số nguyên $y$ thỏa mãn đề bài nên $3^n \leq 242 \Leftrightarrow n \leq \log_3 242$.

Từ đó, suy ra $\boxed{x^2-x \leq 4^{\log_3 242}-242} \Leftrightarrow \boxed{-27,4 \leq x \leq 28,4}$.

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-27, -26, ..., 27, 28\}$.

Vậy có 56 giá trị nguyên của $x$ thỏa yêu cầu đề bài.

**Câu 2.** **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Có bao nhiêu số nguyên $x$ sao cho ứng với mỗi $x$ có không quá 728 số nguyên $y$ thỏa mãn $\log_4(x^2+y) \geq \log_3(x+y)$?

**A.** 59. **B.** 58. **C.** 116. **D.** 115.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Với mọi $x \in \mathbb{Z}$ ta có $x^2 \geq x$.

Xét hàm số $f(y)=\log_3(x+y)-\log_4\left(x^2+y\right)$.

Tập xác định $\mathrm{D}=(-x;+\infty)$ (do $y>-x\Rightarrow y>-x^2$).

$f'(y)=\dfrac{1}{(x+y)\ln 3}-\dfrac{1}{\left(x^2+y\right)\ln 4}\geq 0,\ \forall x\in D$ (do $x^2+y\geq x+y>0$, $\ln 4>\ln 3$)

$\Rightarrow f$ tăng trên $\mathrm{D}$.

Ta có $f(-x+1)=\log_3(x-x+1)-\log_4\left(x^2-x+1\right)\leq 0$.

Có không quá 728 số nguyên $y$ thỏa mãn $f\left(y\right)\leq 0$

$\Leftrightarrow f(-x+729)>0\Leftrightarrow \log_3 729-\log_4\left(x^2-x+729\right)>0$

$\Leftrightarrow x^2-x+729-4^6<0\Leftrightarrow x^2-x-3367<0$

$\Leftrightarrow -57,5\leq x\leq 58,5$

Mà $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{-57,-56,...,58\}$.

Vậy có $58-(-57)+1=116$ số nguyên $x$ thỏa.

**Câu 3.** **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Có bao nhiêu số nguyên $x$ sao cho ứng với mỗi $x$ có không quá 127 số nguyên $y$ thỏa mãn $\log_3\left(x^2+y\right)\geq\log_2\left(x+y\right)$?

**A.** 89. **B.** 46. **C.** 45. **D.** 90.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $\log_3\left(x^2+y\right)\geq\log_2\left(x+y\right)(1)$

Đặt $t=x+y\in\mathbb{N}^*$ (do $x,y\in\mathbb{Z},x+y>0$)

$(1)\Leftrightarrow\log_3\left(x^2-x+t\right)\geq\log_2 t\Leftrightarrow g(t)=\log_2 t-\log_3\left(x^2-x+t\right)\leq 0(2)$

Đạo hàm $g'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}-\dfrac{1}{\left(x^2-x+t\right)\ln 3}>0$ với mọi $y$. Do đó $g\left(t\right)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$

Vì mỗi $x$ nguyên có không quá 127 giá trị $t\in\mathbb{N}^*$ nên ta có

$g(128)>0\Leftrightarrow\log_2 128-\log_3\left(x^2-x+128\right)>0$

$\Leftrightarrow\ x^2-x+128<3^7\Leftrightarrow -44,8\leq x\leq 45,8$

Như vậy có 90 giá trị thỏa yêu cầu bài toán

**Câu 4.** **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Xét các số thực không âm $x$ và $y$ thỏa mãn $2x+y.4^{x+y-1}\geq 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+6x+4y$ bằng

**A.** $\dfrac{65}{8}$. **B.** $\dfrac{33}{4}$. **C.** $\dfrac{49}{8}$. **D.** $\dfrac{57}{8}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $2x+y.4^{x+y-1}\geq 3\Leftrightarrow y.2^{2x+2y-2}\geq 3-2x\Leftrightarrow \boxed{2y.2^{2y}\geq(3-2x).2^{3-2x}}$ $(*)$

Hàm số $f\left(t\right)=t.2^t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên từ $(*)$ ta suy ra $2y\geq 3-2x\Leftrightarrow\boxed{2x+2y-3\geq 0}$ $(1)$

Ta thấy $(1)$ bất phương trình bậc nhất có miền nghiệm là nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng $d:2x+2y-3=0$ (phần không chứa gốc tọa độ $O$), kể cả các điểm thuộc đường thẳng $d$.

Xét biểu thức $P=x^2+y^2+6x+4y \Leftrightarrow \boxed{(x+3)^2+(y+2)^2=P+13}\ (2)$

Để $P$ tồn tại thì ta phải có $P+13\ge 0 \Leftrightarrow P\ge -13$.

Trường hợp 1: Nếu $P=-13$ thì $x=-3;\ y=-2$ không thỏa $(1)$. Do đó, trường hợp này không thể xảy ra.

Trường hợp 2: Với $P>-13$, ta thấy $(2)$ là đường tròn $(C)$ có tâm $I(-3;-2)$ và bán kính $R=\sqrt{P+13}$.

Để $d$ và $(C)$ có điểm chung thì $d(I;d)\le R \Leftrightarrow \dfrac{13}{2\sqrt{2}}\le \sqrt{P+13} \Leftrightarrow \boxed{P\ge \dfrac{65}{8}}$.

Vậy $\boxed{\min P=\dfrac{65}{8}}$

**Câu 5.** **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0\le x\le 2020$ và $\log_3(3x+3)+x=2y+9^y$ ?

**A.** $2019$. **B.** $6$. **C.** $2020$. **D.** $4$.

**Lời giải**

**Chọn D**

***Cách 1:***

Ta có: $\log_3(3x+3)+x=2y+9^y \Leftrightarrow \log_3(x+1)+x+1=2y+3^{2y}$. $(1)$

Đặt $\log_3(x+1)=t \Rightarrow x+1=3^t$.

Phương trình $(1)$ trở thành: $t+3^t=2y+3^{2y}\ (2)$

Xét hàm số $f(u)=u+3^u$ trên $\mathbb{R}$.

$f'(u)=1+3^u\ln 3>0, \forall u\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(2)\Leftrightarrow f(t)=f(2y)\Leftrightarrow t=2y \Rightarrow \log_3(x+1)=2y \Leftrightarrow x+1=9^y \Leftrightarrow x=9^y-1$

Vì $0\le x\le 2020 \Rightarrow 0\le 9^y-1\le 2020 \Leftrightarrow 1\le 9^y\le 2021 \Leftrightarrow 0\le y\le \log_9 2021$

$(\log_3 2021\approx 3,464)$

Do $y\in\mathbb{Z} \Rightarrow y\in\{0;1;2;3\}$, có 4 giá trị của y nên cũng có 4 giá trị của $x$

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x;y)$.

***Cách 2:***

Ta có: $\log_3(3x+3)+x=2y+9^y \Leftrightarrow \log_3(x+1)+x+1=2y+3^{2y}$

Nguyễn Bảo Vương

Xét hàm số $f(x)=\log_3(x+1)+x+1$ với $x\in[0;2020]$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{(x+1)\ln 3}+1>0,\forall x\in x\in[0;2020]\Rightarrow$ Hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[0;2020]$.

Suy ra $f(0)\le f(x)=\log_3(x+1)+x+1\le f(2020)\Leftrightarrow 1\le f(x)\le \log_2 2021+2021$

$\Rightarrow 1\le 2y+9^y\le \log_3 2021+2021<2028$

Nếu $y<0\Rightarrow 2y+9^y<9^y<9^0=1\Rightarrow y\ge 0$

Khi đó $y\in\mathbb{N}\Rightarrow(2y+9^y)\in\mathbb{N}\Rightarrow 2y+9^y\le 2027\Rightarrow 9^y\le 2027-2y\le 2027$

$\Rightarrow y\le \log_9 2027\approx 3,465\Rightarrow y\le 3\Rightarrow 0\le y\le 3$

$\Rightarrow y\in\{0;1;2;3\}$. Do $f(x)$ là hàm số luôn đồng biến nên với mỗi giá trị của $y$ chỉ cho 1 giá trị của $x$.

+) $y=0\Rightarrow \log_3(x+1)+x+1=1\Leftrightarrow x=0$

+) $y=1\Rightarrow \log_3(x+1)+x+1=11\Leftrightarrow \log_3(x+1)+x=10\Leftrightarrow x=8$

+) $y=2\Rightarrow \log_3(x+1)+x+1=85\Leftrightarrow \log_3(x+1)+x=84\Leftrightarrow x=80$

+) $y=3\Rightarrow \log_3(x+1)+x+1=735\Leftrightarrow \log_3(x+1)+x=734\Leftrightarrow x=729$

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x;y)$.

**Câu 6.** **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Xét các số thực không âm $x$ và $y$ thỏa mãn $2x+y.4^{x+y-1}\ge 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+2x+4y$ bằng

**A.** $\dfrac{33}{8}$. **B.** $\dfrac{9}{8}$. **C.** $\dfrac{21}{4}$. **D.** $\dfrac{41}{8}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $2x+y.4^{x+y-1}\ge 3\Leftrightarrow(2x-3).4^{-x}+y.4^{y-1}\ge 0\Leftrightarrow 2y.2^{2y}\ge(3-2x)2^{3-2x}$ (1)

Xét TH: $3-2x\le 0\Leftrightarrow x\ge\dfrac{3}{2}$. (1) đúng với mọi giá trị $\begin{cases}x\ge\dfrac{3}{2}\\ y\ge 0\end{cases}\Rightarrow P=x^2+y^2+2x+4y\ge\dfrac{21}{4}$ (2)

Xét TH: $3-2x>0\Leftrightarrow 0\le x<\dfrac{3}{2}$.

Xét hàm số $f(t)=t.2^t$ với $t\ge 0$

$\Rightarrow f'(t)=2^t+t.2^t.\ln 2>0$ với mọi $t\ge 0$

(1) $\Leftrightarrow f(2y)\ge f(3-2x)\Leftrightarrow 2y\ge 3-2x\Leftrightarrow y\ge\dfrac{3}{2}-x$. Khi đó:

$$P=x^2+y^2+2x+4y\ge x^2+\left(\frac{3}{2}-x\right)^2+2x+2(3-2x)=2x^2-5x+\frac{33}{4}=2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{41}{8}\ge\frac{41}{8}\ (3)$$

So sánh (2) và (3) ta thấy GTNN của $P$ là $\frac{41}{8}$ khi $x=\frac{5}{4}, y=\frac{1}{4}$.

**Câu 7.** **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Có bao nhiêu số nguyên $x$ sao cho ứng với mỗi $x$ có không quá 255 số nguyên $y$ thỏa mãn $\log_3\left(x^2+y\right)\ge\log_2\left(x+y\right)$?

**A.** 80. **B.** 79. **C.** 157. **D.** 158

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $\log_3\left(x^2+y\right)\ge\log_2\left(x+y\right)\Leftrightarrow x^2+y\ge 3^{\log_2(x+y)}\Leftrightarrow x^2+y\ge\left(x+y\right)^{\log_2 3}\ (1)$

Đk: $x+y\ge 1$ ( do $x,y\in\mathbb{Z}$, $x+y>0$)

Đặt $t=x+y\ge 1$, nên từ $(1)\Rightarrow x^2-x\ge t^{\log_2 3}-t\ (2)$

Để $(1)$ không có quá 255 nghiệm nguyên $y$ khi và chỉ khi bất phương trình $(2)$ có không quá 255 nghiệm nguyên dương $t$.

Đặt $M=f(255)$ với $f(t)=t^{\log_2 3}-t$.

Vì $f$ là hàm đồng biến trên $[1,+\infty)$ nên $(2)\Leftrightarrow 1\le t\le f^{-1}\left(x^2-x\right)$ khi $x^2-x\ge 0$.

Vậy $(2)$ có không quá 255 nghiệm nguyên $\Leftrightarrow f^{-1}\left(x^2-x\right)\le 255\Leftrightarrow x^2-x\le 255\Leftrightarrow -78\le x\le 79$ $(x\in\mathbb{Z})$.

Vậy có 158 số nguyên $x$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 8.** **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Xét các số thực không âm $x$ và $y$ thỏa mãn $2x+y.4^{x+y-1}\ge 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+4x+2y$ bằng

**A.** $\frac{33}{8}$. **B.** $\frac{9}{8}$. **C.** $\frac{21}{4}$. **D.** $\frac{41}{8}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $2x+y.4^{x+y-1}\ge 3\Leftrightarrow(2x-3).4^{-x}+y.4^{y-1}\ge 0\Leftrightarrow 2y.2^{2y}\ge(3-2x)2^{3-2x}\ (1)$

Xét TH $3-2x\le 0\Leftrightarrow x\ge\frac{3}{2}$. (1) đúng với mọi giá trị $\begin{cases}x\ge\frac{3}{2}\Rightarrow P=x^2+y^2+4x+2y\ge\frac{33}{4}\ (2)\\ y\ge 0\end{cases}$

Xét TH $3-2x>0\Leftrightarrow 0\le x<\frac{3}{2}$.

Xét hàm số $f(t)=t.2^t$ với $t\ge 0$

$\Rightarrow f'(t)=2^t+t.2^t.\ln 2>0$ với mọi $t\ge 0$

$(1)\Leftrightarrow f(2y)\ge f(3-2x)$

$\Leftrightarrow 2y\ge 3-2x$

$\Leftrightarrow y\ge\frac{3}{2}-x$

$$\Rightarrow P=x^2+y^2+4x+2y\ge x^2+\left(\frac{3}{2}-x\right)^2+4x+(3-2x)=2x^2-x+\frac{21}{4}$$

$\Rightarrow P=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{41}{8}\geq\frac{41}{8}$ (3)

So sánh (2) và (3) ta thấy GTNN của $P$ là $\frac{41}{8}$ khi $x=\frac{1}{4},y=\frac{5}{4}$

**Câu 9.** **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(m,n)$ sao cho $m+n\leq 16$ và ứng với mỗi cặp $(m,n)$ tồn tại đúng 3 số thực $a\in(-1;1)$ thỏa mãn $2a^m-n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$?

**A.** 16. **B.** 14. **C.** 15. **D.** 13.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt $f(a)=2a^m-n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$, ta có $f'(a)=2ma^{m-1}-\frac{n}{\sqrt{a^2+1}}$.

$f'(a)=0\Leftrightarrow 2ma^{m-1}-\frac{n}{\sqrt{a^2+1}}=0\Leftrightarrow a^{m-1}\sqrt{a^2+1}=\frac{n}{2m}$ phải có một nghiệm $a_0<1$.

Suy ra $\frac{n}{2m}<2\Rightarrow\frac{n}{m}<4$ suy ra $a_0$ là nghiệm duy nhất.

Ta có bảng biến thiên

| $a$ | $0$ | | $a_0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(a)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(a)$ | $0$ | $\searrow$ | $f(a_0)$ | $\nearrow$ | $f(1)$ |

Ta thấy $0$ là một nghiệm của phương trình $f(a)=0$.

Nếu $m=1$ suy ra để có nghiệm duy nhất thì $\frac{n}{2m}>1\Rightarrow n>2$ (loại)

Nếu $m$ lẻ và $m\neq 1$ thì ta có $a$ là một nghiệm thì $-a$ cũng là một nghiệm, do đó có đủ 3 nghiệm.

Nếu $m$ chẵn thì phương trình chỉ có tối da 2 nghiệm (vì không có nghiệm âm).

Suy ra $m$ lẻ.

Để có 1 nghiệm dương thì theo BBT ta có

$f(1)>0\Rightarrow 2>n\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow n<\frac{2}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}\approx 2,2$.

Suy ra $n\in\{1;2\}$ suy ra $m\in\{3;5;\cdots;15\}$.

Suy ra có 13 cặp $(m,n)$ (do $15+2=17>16$).

**Câu 10.** **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Xét các số thực thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1}\leq\left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{8x+4}{2x-y+1}$ gần với giá trị nào sau đây nhất?

**A.** 9 **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

**Lời giải**

**Chọn C**

$2^{x^2+y^2+1} \le \left(x^2+y^2-2x+2\right).4^x$

$2^{x^2+y^2-2x+1} \le x^2+y^2-2x+2$

$2^{(x-1)^2+y^2} - \left[(x-1)^2+y^2\right] - 1 \le 0 (1)$

Đặt $t = (x-1)^2 + y^2$

$(1) \Leftrightarrow 2^t - t - 1 \le 0 \Leftrightarrow 0 \le t \le 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 \le 1$

$P = \dfrac{8x+4}{2x-y+1} \Rightarrow (2P-8).x - P.y + (P-4) = 0$

Yêu cầu bài toán tương đương:

$\dfrac{|2P-8+P-4|}{\sqrt{(2P-8)^2+P^2}} \le 1 \Leftrightarrow |3P-12| \le \sqrt{(2P-8)^2+P^2} \Leftrightarrow 5-\sqrt{5} \le P \le 5+\sqrt{5}$

**Câu 11.** **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(m;n)$ sao cho $m+n \le 10$ và ứng với mỗi cặp $(m;n)$ tồn tại đúng 3 số thực $a \in (-1;1)$ thỏa mãn $2a^m = n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$?

**A.** 7 . **B.** 8 . **C.** 10 . **D.** 9 .

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $2a^m = n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right) \Leftrightarrow \dfrac{2a^m}{n} = \ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$.

Xét hai hàm số $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ và $g(x) = \dfrac{2}{n}x^m$ trên $(-1;1)$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0$ nên $f(x)$ luôn đồng biến và

$f(-x) = \ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) = -\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = -f(x)$ nên $f(x)$ là hàm số lẻ.

+ Nếu $m$ chẵn thì $g(x)$ là hàm số chẵn và có bảng biến thiên dạng

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $g(-1)$ | ↗ | $0$ | ↘ | $g(1)$ |

Suy ra phương trình có nhiều nhất 2 nghiệm, do đó $m$ lẻ.

+ Nếu $m$ lẻ thì hàm số $g(x)$ là hàm số lẻ và luôn đồng biến.

Ta thấy phương trình luôn có nghiệm $x = 0$. Dựa vào tính chất đối xứng của đồ thị hàm số lẻ, suy ra phương trình đã cho có đúng 3 nghiệm trên $(-1;1)$ khi có 1 nghiệm trên $(0;1)$, hay

$f(1) > g(1) \Leftrightarrow \ln\left(1+\sqrt{2}\right) < \dfrac{2}{n} \Leftrightarrow n < \dfrac{2}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)} \approx 2{,}26 \Rightarrow n \in \{1;2\}$.

Đối chiếu điều kiện, với $n = 1$ suy ra $m \in \{1;3;5;7;9\}$, có 5 cặp số thỏa mãn

Với $n=2$ thì $m\in\{1;3;5;7\}$ có 4 cặp số thỏa mãn.

Vậy có 9 cặp số thỏa mãn bài toán.

**Câu 12.** **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Xét các số thực $x, y$ thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right).4^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{8x+4}{2x-y+1}$ **gần nhất** với số nào dưới đây

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn C**

Nhận xét $x^2+y^2-2x+2>0\forall x;y$

Bất phương trình $2^{x^2+y^2+1}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right).4^x\Leftrightarrow\dfrac{2^{x^2+y^2+1}}{2^{2x}}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right)\Leftrightarrow 2^{x^2+y^2-2x+1}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right).$

Đặt $t=x^2+y^2-2x+1$

Bất phương trình $\Leftrightarrow 2^t\le t+1\Leftrightarrow 2^t-t-1\le 0$

Đặt $f(t)=2^t-t-1$. Ta thấy $f(0)=f(1)=0$.

Ta có $f'(t)=2^t\ln 2-1$

$f'(t)=0\Leftrightarrow 2^t\ln 2=1\Leftrightarrow t=\log_2\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right)\approx 0,52$

| $t$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\log_2\left(\frac{1}{\ln 2}\right)$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | | $-$ | | $0$ | | $+$ | | |
| $f(t)$ | | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |

Quan sats BBT ta thấy $f(t)\le 0\Leftrightarrow 0\le t\le 1$

$0\le x^2+y^2-2x+1\le 1\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2\le 1\ (1)$

Xét $P=\dfrac{8x+4}{2x-y+1}\Leftrightarrow 2Px-Py+P=8x+4$

$\Leftrightarrow P-4=(8-2P)x+Py$

$\Leftrightarrow P-4+2P-8=(8-2P)x+2P-8+Py$

$\Leftrightarrow 3P-12=(8-2P)(x-1)+Py$

$\Leftrightarrow (3P-12)^2=\left[(8-2P)(x-1)+Py\right]^2\le\left[(8-2P)^2+P^2\right]\left[(x-1)^2+y^2\right]$

Thế $(1)$ vào ta có $(3P-12)^2\le\left[(8-2P)^2+P^2\right]\Leftrightarrow 4P^2-40P+80\le 0\Leftrightarrow 5-\sqrt{5}\le P\le 5+\sqrt{5}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}\dfrac{8-2P}{P}=\dfrac{x-1}{y}=\dfrac{-2}{\sqrt{5}}\\ (x-1)^2+y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=\dfrac{-2}{\sqrt{5}}y\\ \left(\dfrac{-2}{\sqrt{5}}y\right)^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=\dfrac{-2}{\sqrt{5}}y\\ y=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}\\ y=\dfrac{\sqrt{5}}{3}\end{cases}\right.$
$\left.\begin{cases}x=\dfrac{5}{3}\\ y=\dfrac{-\sqrt{5}}{3}\end{cases}\right.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P$ là $5-\sqrt{5}\approx 2,76$ gần giá trị $3$ nhất.

**Câu 13.** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(m,n)$ sao cho $m+n\le 14$ và ứng với mỗi cặp $(m,n)$ tồn tại đúng ba số thực $a\in(-1;1)$ thỏa mãn $2a^m=n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$?

**A.** $14$. **B.** $12$. **C.** $11$. **D.** $13$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Xét $f(x)=\dfrac{2}{n}.x^m-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ trên $(-1;1)$

Đạo hàm $f'(x)=\dfrac{2m}{n}x^{m-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}=0$

Theo đề bài $f(x)=0$ có ba nghiệm nên $\dfrac{2m}{n}x^{m-1}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ có ít nhất hai nghiệm

Xét đồ thị của hàm $y=x^{m-1};y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, suy ra $m-1$ chẵn và $m-1>0$

Suy ra $m\in\{3;5;7;9;11;13\}$. Khi đó $f'(x)=0$ có nghiệm $\begin{cases}x_1<0\\ x_2>0\end{cases}$

Phương trình có 3 nghiệm $\Leftrightarrow\begin{cases}f(1)>0\\ f(-1)<0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2}{n}>\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\\ -\dfrac{2}{n}<\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\end{cases}\Leftrightarrow n\le 2\Rightarrow n=\{1;2\}$

$n\in\{1;2\}$ và $m\in\{3;5;7;9;11;13\}$, do $m+n\le 14$ nên ta có 11 cặp $(m;n)$ thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 14.** **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(m,n)$ sao cho $m+n\le 12$ và ứng với mỗi cặp $(m,n)$ tồn tại đúng 3 số thực $a\in(-1,1)$ thỏa mãn $2a^m=n\ln(a+\sqrt{a^2+1})$?

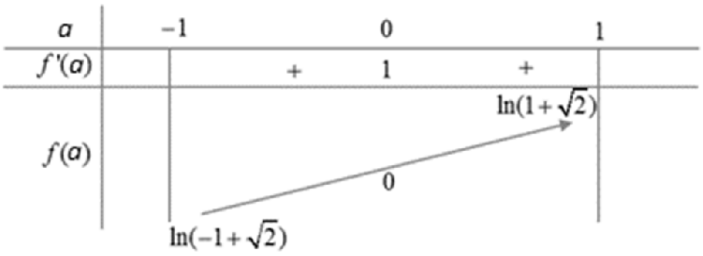
**A.** $12$. **B.** $10$. **C.** $11$. **D.** $9$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $2a^m=n\ln(a+\sqrt{a^2+1})\Leftrightarrow\dfrac{2}{n}a^m=\ln(a+\sqrt{a^2+1})$ (*).

Xét hàm $f(a)=\ln(a+\sqrt{a^2+1})$ trên $(-1,1)$ (dễ thấy hàm $f$ lẻ, đồng biến trên $R$), có BBT:




Xét hàm $g(a)=\frac{2}{n}.a^m$ trên $(-1,1)$.

Với $m$ chẵn, $g(a)$ là hàm chẵn và $g(a)\geq 0,\forall a\in R$, do đó (*) không thể có 3 nghiệm.

Với $m$ lẻ, $g(a)$ là hàm lẻ, đồng biến trên $R$ và tiếp tuyến của đồ thị tại điểm $a=0$ là đường thẳng $y=0$.

Dễ thấy (*) có nghiệm $a=0\in(-1;1)$. Để (*) có đúng 3 nghiệm tức là còn có 2 nghiệm nữa là $\pm a_0$ với $0<a_0<1$.

Muốn vậy, thì $g(1)=\frac{2}{n}.1^m=\frac{2}{n}>f(1)=\ln(1+\sqrt{2})\Leftrightarrow n<\frac{2}{\ln(1+\sqrt{2})}\approx 2,26\Rightarrow n=1;n=2$

Cụ thể:

+ $m\in\{3;5;7;9\}$ thì $n\in\{1;2\}$: Có 8 cặp $(m,n)$

+ $m=11$ thì $n\in\{1\}$: Có 1 cặp $(m,n)$

+ $m=1$: Đồ thị hàm số $g(a)$ là đường thẳng ($g(a)=a;g(a)=2a$) không thể cắt đồ thị hàm số $f(a)$ tại giao điểm $a_0\neq 0$ được vì tiếp tuyến của hàm số $f(a)$ tại điểm có hoành độ $a=0$ là đường thẳng $y=a$.

Vậy có cả thảy 9 cặp $(m,n)$.

**Câu 15.** **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Xét các số thực $x$ và $y$ thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1}\leq\left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{4y}{2x+y+1}$ **gần nhất** với số nào dưới đây?

**A.** 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $2^{x^2+y^2+1}\leq\left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x\Leftrightarrow 2^{x^2-2x+1+y^2}\leq\left(x^2-2x+1\right)+y^2+1$.

Đặt $t=x^2-2x+1+y^2\Rightarrow t\geq 0$. Khi đó ta có $2^t\leq t+1,\ \forall t\geq 0$.

Đặt $f(t)=2^t-t-1,\ \forall t\geq 0$, ta có: $f'(t)=2^t\ln 2-1$, cho $f'(t)=0$.

Ta nhận thấy phương trình $f'(t)=0$ có một nghiệm nên phương trình $f(t)=0$ có tối đa hai nghiệm.

Mặt khác ta có $f(0)=f(1)=0$. Suy ra phương trình $f(t)=0$ có hai nghiệm $t=1$ và $t=0$.

Khi đó ta có bảng xét dấu của hàm số $f(t)$ như sau:

| t | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f(t) | 0 | − | 0 | + | |

Khi đó $f(t)\le 0\Leftrightarrow t\in[0;1]$. Suy ra $x^2-2x+1+y^2\le 1\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2\le 1$.

Khi đó tập hợp các điểm $M(x;y)$ là một hình tròn $(S)$ tâm $I(1;0)$, bán kính $R=1$.

Ta có: $P=\dfrac{4y}{2x+y+1}\Leftrightarrow 2Px+(P-4)y+P=0$.

Khi đó ta cũng có tập hợp các điểm $M(x;y)$ là một đường thẳng $\Delta: 2Px+(P-4)y+P=0$.

Để $\Delta$ và $(S)$ có điểm chung, ta suy ra $d(I,\Delta)\le 1$.

$$\Leftrightarrow \frac{|2P+P|}{\sqrt{(2P)^2+(P-4)^2}}\le 1\Leftrightarrow 3|P|\le\sqrt{5P^2-8P+16}$$

$$\Leftrightarrow 4P^2+8P-16\le 0\Leftrightarrow -1-\sqrt{5}\le P\le -1+\sqrt{5}.$$

Ta suy ra $P_{\max}=-1+\sqrt{5}$. Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}\\ y=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\end{cases}$

**Câu 16.** **(Mã 123 2017)** Xét các số thực dương $x,y$ thỏa mãn $\log_3\dfrac{1-xy}{x+2y}=3xy+x+2y-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P=x+y$

**A.** $P_{\min}=\dfrac{2\sqrt{11}-3}{3}$ **B.** $P_{\min}=\dfrac{9\sqrt{11}-19}{9}$

**C.** $P_{\min}=\dfrac{18\sqrt{11}-29}{21}$ **D.** $P_{\min}=\dfrac{9\sqrt{11}+19}{9}$

Nguyễn Bảo Vương

**Lời giải**

**Chọn A**

Với $x,y$ dương và kết hợp với điều kiện của biểu thức $\log_3\dfrac{1-xy}{x+2y}=3xy+x+2y-4$ ta được $1-xy>0$

Biến đổi $\log_3\dfrac{1-xy}{x+2y}=3xy+x+2y-4$

$$\Leftrightarrow \log_3(1-xy)-\log_3(x+2y)=-3(1-xy)+(x+2y)-\log_3 3$$

$$\Leftrightarrow \left[\log_3(1-xy)+\log_3 3\right]+3(1-xy)=\log_3(x+2y)+(x+2y)$$

$$\Leftrightarrow \log_3\left[3(1-xy)\right]+3(1-xy)=\log_3(x+2y)+(x+2y)\ (1)$$

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t$ trên $D=(0;+\infty)$

$f'(t)=\dfrac{1}{t.\ln 3}+1>0$ với mọi $x\in D$ nên hàm số $f(t)=\log_3 t+t$ đồng biến trên $D=(0;+\infty)$

Từ đó suy ra $(1)\Leftrightarrow 3(1-xy)=x+2y\Leftrightarrow 3-2y=x(1+3y)\Leftrightarrow x=\dfrac{3-2y}{1+3y}$ (do $y>0$)

Theo giả thiết ta có $x>0,y>0$ nên từ $x=\dfrac{3-2y}{1+3y}$ ta được $0<y<\dfrac{3}{2}$.

$$P=x+y=\frac{3-2y}{1+3y}+y=\frac{3y^2-y+3}{3y+1}$$

Xét hàm số $g(y)=\dfrac{3y^2-y+3}{3y+1}$ với $0<y<\dfrac{3}{2}$

$g'(y)=\dfrac{9y^2+6y-10}{(3y+1)^2}=0$ ta được $y=\dfrac{-1+\sqrt{11}}{3}$.

Từ đó suy ra $\min P=g\left(\dfrac{-1+\sqrt{11}}{3}\right)=\dfrac{2\sqrt{11}-3}{3}$.

**Câu 17.** **(Mã 110 2017)** Xét các số thực dương $a$, $b$ thỏa mãn $\log_2\dfrac{1-ab}{a+b}=2ab+a+b-3$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P=a+2b$.

**A.** $P_{\min}=\dfrac{3\sqrt{10}-7}{2}$ **B.** $P_{\min}=\dfrac{2\sqrt{10}-1}{2}$ **C.** $P_{\min}=\dfrac{2\sqrt{10}-3}{2}$ **D.** $P_{\min}=\dfrac{2\sqrt{10}-5}{2}$

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện: $ab<1$.

Ta có $\log_2\dfrac{1-ab}{a+b}=2ab+a+b-3\Leftrightarrow\log_2\left[2(1-ab)\right]+2(1-ab)=\log_2(a+b)+(a+b)$ $(*)$.

Xét hàm số $y=f(t)=\log_2 t+t$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{t.\ln 2}+1>0,\forall t>0$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow f\left[2(1-ab)\right]=f(a+b)\Leftrightarrow 2(1-ab)=a+b\Leftrightarrow a(2b+1)=2-b\Leftrightarrow a=\dfrac{-b+2}{2b+1}$.

Do $a>0,\ b>0$ nên $\dfrac{-b+2}{2b+1}>0\Rightarrow 0<b<2$.

Khi đó: $P=a+2b=\dfrac{-b+2}{2b+1}+2b$. Xét hàm số $g(b)=\dfrac{-b+2}{2b+1}+2b$ trên khoảng $(0;2)$.

$$g'(b)=\frac{-5}{(2b+1)^2}+2=0\Leftrightarrow(2b+1)^2=\frac{5}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=\dfrac{-2-\sqrt{10}}{4}\notin(0;2)\\ b=\dfrac{-2+\sqrt{10}}{4}\in(0;2)\end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên

| $x$ | $0$ | | $\dfrac{-2+\sqrt{10}}{4}$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(b)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(b)$ | | $\searrow$ | $\dfrac{-3+2\sqrt{10}}{2}$ | $\nearrow$ | |

Vậy $P_{\min}=g\left(\dfrac{\sqrt{10}-2}{4}\right)=\dfrac{2\sqrt{10}-3}{2}$.

**Câu 18.** **(Chuyên Lê Thánh Tông 2019)** Cho hai số thực dương $x$, $y$ thỏa mãn $2^{\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)}.5^{\ln(x+y)}=2^{\ln 5}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=(x+1)\ln x+(y+1)\ln y$.

**A.** $P_{\max}=10$. **B.** $P_{\max}=0$. **C.** $P_{\max}=1$. **D.** $P_{\max}=\ln 2$.

**Lời giải**

$2^{\ln\left(\frac{x+y}{2}\right)}.5^{\ln(x+y)}=2^{\ln 5}\Leftrightarrow 2^{\ln(x+y)-\ln 2}.5^{\ln(x+y)}=2^{\ln 5}\Leftrightarrow 2^{\ln(x+y)}.5^{\ln(x+y)}=2^{\ln 5}.2^{\ln 2}\Leftrightarrow 10^{\ln(x+y)}=2^{\ln 10}$

$\Leftrightarrow \ln(x+y)=\log\left(2^{\ln 10}\right)\Leftrightarrow \ln(x+y)=\ln 10.\log 2\Leftrightarrow e^{\ln(x+y)}=e^{\ln 10.\log 2}\Leftrightarrow x+y=10^{\log 2}\Leftrightarrow x+y=2$

.

Do đó $P=(x+1)\ln x+(3-x)\ln(2-x)$.

Xét hàm số $f(x)=(x+1)\ln x+(3-x)\ln(2-x)$

$f'(x)=\ln x+\frac{x+1}{x}-\ln(2-x)-\frac{3-x}{2-x}=\ln\frac{x}{2-x}+\frac{2-2x}{x(2-x)}$.

$f''(x)=-\frac{1}{(2-x)^2}.\frac{2-x}{x}-\frac{2x^2-4x+4}{\left(2x-x^2\right)^2}<0,\forall x\in(0;2)$

Do đó $f'(x)=0$ có nhiều nhất một nghiệm trên $(0;2)$

Mà $x=1$ là một nghiệm của pt $f'(x)=0$ nên phương trình $f'(x)=0$ có nghiệm duy nhất là $x=1$.

Lập bảng biến thiên ta được $\max f(x)=f(1)=0$.

**Câu 19.** **(THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019)** Cho các số thực $x,y$ thỏa mãn $0\le x,y\le 1$ và $\log_3\frac{x+y}{1-xy}+(x+1)(y+1)-2=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P=2x+y$.

**A.** 2. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 0.

**Lời giải**

Với điều kiện biểu thức đề bài có nghĩa, ta có

$\log_3\frac{x+y}{1-xy}+(x+1)(y+1)-2=0\Leftrightarrow \log_3(x+y)-\log_3(1-xy)+xy+x+y-1=0$

$\Leftrightarrow \log_3(x+y)+(x+y)=\log_3(1-xy)+(1-xy)(*)$

Xét hàm số $f(x)=\log_3 t+t$ trên $(0;2)$

$f'(t)=\frac{1}{t}\ln 3+1>0,\forall t\in(0;2)$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;2)$.

Do đó từ $(*)$ ta có $x+y=1-xy\Leftrightarrow y(1+x)=1-x\Leftrightarrow y=\frac{1-x}{1+x}$

$P=2x+y=2x+\frac{1-x}{1+x}$

$P'(x)=2-\frac{2}{(1+x)^2}\ge 0,\forall x\in[0;1]$

Suy ra $\min P=P(0)=1$ đạt được khi $x=0,y=1$.

**Câu 20.** **(Chuyên Hạ Long 2019)** Cho các số thực $a,b$ thỏa mãn $a\ge b>1$. Biết rằng biểu thức $P=\frac{1}{\log_{ab}a}+\sqrt{\log_a\frac{a}{b}}$ đạt giá trị lớn nhất khi $b=a^k$. Khẳng định nào sau đây là sai

**A.** $k \in [2;3]$. **B.** $k \in (0;1)$. **C.** $k \in [0;1]$. **D.** $k \in \left(0;\frac{3}{2}\right)$.

**Lời giải**

Ta có $a \ge b > 1 \Rightarrow \log_a b > 0$.

$$P = \frac{1}{\log_{ab} a} + \sqrt{\log_a \frac{a}{b}} = \log_a ab + \sqrt{\log_a a - \log_a b} = 1 + \log_a b + \sqrt{1 - \log_a b}.$$

Đặt $t = \sqrt{1 - \log_a b}$ $(t \ge 0) \Rightarrow \log_a b = 1 - t^2$. Ta có: $P = -t^2 + t + 2$ trên $[0;+\infty)$

Bảng biến thiên

| $t$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | |
| $P$ | | ↗ | $\frac{9}{2}$ | ↘ | |

Hàm số đạt giá trị lớn nhất tại $t = \frac{1}{2}$.

Với $t = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \sqrt{1 - \log_a b} \Leftrightarrow \log_a b = \frac{3}{4} \Leftrightarrow b = a^{\frac{3}{4}} \Rightarrow k = \frac{3}{4}$.

**Câu 21.** Cho hai số thực $a$, $b$ thỏa mãn $\log_{a^2+4b^2+1}(2a-8b) = 1$. Tính $P = \frac{a}{b}$ khi biểu thức $S = 4a + 6b - 5$ đạt giá trị lớn nhất.

Nguyễn Bảo Vương

**A.** $\frac{8}{5}$ **B.** $\frac{-13}{2}$ **C.** $\frac{-13}{4}$ **D.** $\frac{17}{44}$

**Lời giải**

**Chọn B**

$\log_{a^2+4b^2+1}(2a-8b) = 1 \Leftrightarrow 2a - 8b = a^2 + 4b^2 + 1$

Ta có:

$$\begin{cases} 2a-8b=a^2+4b^2+1 \\ S=4a+6b-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-8b=a^2+4b^2+1 \\ a=\dfrac{S-6b+5}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(\dfrac{S-6b+5}{4}\right)-8b=\left(\dfrac{S-6b+5}{4}\right)^2+4b^2+1 \\ a=\dfrac{S-6b+5}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8S-48b+40-128b=S^2+36b^2+25-12Sb+10S-60b+64b^2+16 \\ a=\dfrac{S-6b+5}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 100b^2+2(58-6S)b+2S+1+S^2=0 \\ a=\dfrac{S-6b+5}{4} \end{cases}$$

$\Delta=(58-6S)^2-100.(1+S)^2\geq 0 \Leftrightarrow -64S^2-896S+3264\geq 0$

$\Leftrightarrow -17\leq S\leq 3$

Giá trị lớn nhất của S là: $3 \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{13}{5} \\ b=\dfrac{-2}{5} \end{cases}$

Suy ra $\dfrac{a}{b}=\dfrac{13}{2}$

**Câu 22.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho $a,b$ là các số dương thỏa mãn $b>1$ và $\sqrt{a}\leq b<a$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_{\frac{a}{b}} a+2\log_{\sqrt{b}}\left(\dfrac{a}{b}\right)$.

**A.** 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $P=\dfrac{1}{1-\log_a b}+4.(\log_b a-1)=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\log_b a}}+4.(\log_b a-1)$

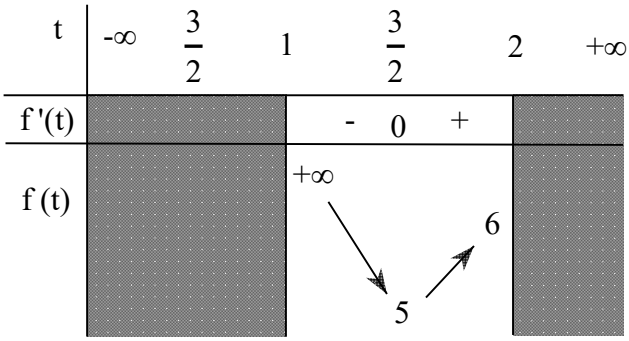
Đặt $t=\log_b a$. Vì $\sqrt{a}\leq b<a \Rightarrow \log_b\left(\sqrt{a}\right)\leq 1\leq \log_b a \Leftrightarrow \dfrac{t}{2}<1<t \Leftrightarrow 1<t<2$.

$\Rightarrow P=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{t}}+4(t-1)=\dfrac{t}{t-1}+4(t-1)$ với $t\in(1;2)$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t}{t-1}+4(t-1)$ với $t\in(1;2)$.

$f'(t)=\dfrac{-1}{(t-1)^2}+4,\ f'(t)=0\Leftrightarrow (t-1)^2=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{3}{2}(tm) \\ t=\dfrac{1}{2}(l) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên




Từ bảng biến thiên suy ra: $\min\limits_{(1;2)} f(t) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 5.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P$ bằng $5$.

**Câu 23.** **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương 2019)** Cho $a$, $b$ là hai số thực dương thỏa mãn $\log_5\left(\frac{4a+2b+5}{a+b}\right) = a+3b-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = a^2+b^2$

**A.** $\frac{1}{2}$. **B.** $1$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{5}{2}$.

**Lời giải**

$\log_5\left(\frac{4a+2b+5}{a+b}\right) = a+3b-4 \Leftrightarrow \log_5(4a+2b+5) = \log_5(a+b)+a+3b-4$

$\Leftrightarrow \log_5(4a+2b+5)+(4a+2b+5) = \log_5\left[5(a+b)\right]+5(a+b)$ (*).

Xét hàm $f(x) = \log_5 x + x, x>0$.

Đạo hàm $f'(x) = \frac{1}{x.\ln 5}+1>0, \forall x>0$. Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Phương trình (*) viết lại:

$$f(4a+2b+5) = f\left(5(a+b)\right) \Leftrightarrow 4a+2b+5 = 5(a+b) \Leftrightarrow a+3b=5.$$

Mặt khác: $5^2 = (a+3b)^2 \le (1^2+3^2).(a^2+b^2) \Rightarrow T = a^2+b^2 \ge \frac{5}{2}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{1} = \frac{b}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{2}; b = \frac{3}{2}$.

**Câu 24.** **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Với hai số thực $a,b$ bất kì, ta kí hiệu $f_{(a,b)}(x) = |x-a|+|x-b|+|x-2|+|x-3|$.Biết rằng luôn tồn tại duy nhất số thực $x_0$ để $\min\limits_{x\in R} f_{(a,b)}(x) = f_{(a,b)}(x_0)$ với mọi số thực $a,b$ thỏa mãn $a^b = b^a$ và $0<a<b$. Số $x_0$ bằng

**A.** $2e-1$ **B.** $2,5$ **C.** $e$ **D.** $2e$

**Lời giải**

Ta có $a^b = b^a \Leftrightarrow b\ln a = a\ln b \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b}$ (*).

Xét hàm số $y = \frac{lnx}{x}$, trên tập xác định $D = (0;+\infty)$

$y' = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = e$

Bảng biến thiên

| $x$ | $0$ | $a$ | e | $b$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $-\infty$ | ↗ | $\dfrac{1}{e}$ | ↘ | $0$ |

Có $\begin{cases} 0 < a < b \\ f(a) = f(b) \end{cases}$

Kết hợp với bảng biến thiên suy ra $a < e < b$ $(1)$.

Ta lại có $f_{(a,b)}(x) = |x-a| + |b-x| + |x-2| + |3-x| \geq |x-a+b-x| + |x-2+3-x| = b-a+1$.

Suy ra $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f_{(a,b)}(x) = b-a+1 \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq x \leq b \\ 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$ $(2)$

Từ $(1)$ và $(2)$ suy ra số thực duy nhất thỏa mãn yêu cầu bài toán là $x = e$

*Thử lại*: khi $x = e$ thì $f(e) = b-a+1$.

Vậy $\min\limits_{x\in R} f_{(a,b)}(x) = f_{(a,b)}(x_0) = f_{(a,b)}(e)$

**Câu 25.** **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho hai số thực $a > 1, b > 1$. Biết phương trình $a^x b^{x^2-1} = 1$ có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \left(\dfrac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}\right)^2 - 4(x_1 + x_2)$.

**A.** $3\sqrt[3]{4}$. **B.** $4$ **C.** $3\sqrt[3]{2}$. **D.** $\sqrt[3]{4}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $a^x b^{x^2-1} = 1 \Leftrightarrow x + (x^2-1)\log_a b = 0 \Leftrightarrow (\log_a b)x^2 + x - \log_a b = 0$

Do phương trình có hai nghiệm $x_1, x_2$ nên theo định lý Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-1}{\log_a b} = -\log_b a \\ x_1 x_2 = -1 \end{cases}$

Khi đó $S = \dfrac{1}{\log_b^2 a} + 4\log_b a$

Đặt $t = \log_b a$, do $a > 1, b > 1 \Rightarrow t > 0$. Khi đó $S = \dfrac{1}{t^2} + 4t = \dfrac{1}{t^2} + 2t + 2t \geq 3\sqrt[3]{4}$.

Đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{1}{t^2} = 2t \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Vậy $\min S = 3\sqrt[3]{4}$

**Câu 26.** **(Chuyên Quốc Học Huế 2019)** Cho $x, y$ là các số thực lớn hơn 1 sao cho $y^x \left(e^x\right)^{e^y} \geq x^y \left(e^y\right)^{e^x}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \log_x \sqrt{xy} + \log_y x$.

**A.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** $2\sqrt{2}$ **C.** $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$

**Lời giải**

**Cách 1.**

Ta có:

$y^x\left(e^x\right)^{e^y} \geq x^y\left(e^y\right)^{e^x} \Leftrightarrow \ln\left(y^x\left(e^x\right)^{e^y}\right) \geq \ln\left(x^y\left(e^y\right)^{e^x}\right)$

$\Leftrightarrow x\ln y + xe^y \geq y\ln x + ye^x \Leftrightarrow \frac{x}{\ln x + e^x} \geq \frac{y}{\ln y + e^y}$ (*) (vì $y = e^x + \ln x$ có

$y' = e^x + \frac{1}{x} > 0; \forall x > 1$ nên $y \geq y(1) = e > 0$)

Xét hàm số: $f(t) = \frac{t}{\ln t + e^t}$ trên $(1;+\infty)$ ta có $f'(t) = \frac{\ln t + e^t - 1 - te^t}{\left(\ln t + e^t\right)^2}$. Với hàm số

$g(t) = \ln t + e^t - 1 - te^t$ có $g'(t) = \left(\ln t + e^t - 1 - te^t\right)' = \frac{1}{t} - te^t < 0, \forall t > 1$

Nên $g(t) < g(1) = -1 \Rightarrow f'(t) < 0; \forall t > 1$

$\Rightarrow y = f(t)$ là hàm nghịch biến trên $(1;+\infty)$ nên với (*) $f(x) \geq f(y) \Rightarrow y \geq x > 1$

Khi đó $P = \log_x \sqrt{xy} + \log_y x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_x y + \frac{1}{\log_x y} \geq \frac{1}{2} + 2\sqrt{\frac{1}{2}\log_x y . \frac{1}{\log_x y}} = \frac{1+2\sqrt{2}}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi: $\frac{1}{2}\log_x y = \frac{1}{\log_x y} \Leftrightarrow \left(\log_x y\right)^2 = 2 \Leftrightarrow y = x^{\sqrt{2}}$

Vậy: $P_{\min} = \frac{1+2\sqrt{2}}{2}$.

**Cách 2:**

Với $x, y > 1$ thì $\log_x y; \log_y x$ là các số dương, ta có:

$P = \log_x \sqrt{xy} + \log_y x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_x y + \frac{1}{\log_x y} \geq \frac{1}{2} + 2\sqrt{\frac{1}{2}\log_x y . \frac{1}{\log_x y}} = \frac{1+2\sqrt{2}}{2}$

Dấu "=" xảy ra khi: $\frac{1}{2}\log_x y = \frac{1}{\log_x y} \Leftrightarrow \left(\log_x y\right)^2 = 2 \Leftrightarrow y = x^{\sqrt{2}}$,

Thay $\begin{cases} y = x^{\sqrt{2}} \\ x > 1 \end{cases}$ vào điều kiện thấy thỏa mãn điều kiện ban đầu.

Vậy $P_{\min} = \frac{1+2\sqrt{2}}{2}$.

**Câu 27.** Xét các số thực dương $x, y$ thỏa mãn $\log_3 \frac{1-y}{x+3xy} = 3xy + x + 3y - 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P = x + y$.

**A.** $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}-4}{3}$. **B.** $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}+4}{3}$. **C.** $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}+4}{9}$. **D.** $P_{\min} = \frac{4\sqrt{3}-4}{9}$.

**Lời giải**

Để $\frac{1-y}{x+3xy} > 0$ mà từ giả thiết $x, y > 0$ suy ra $1 - y > 0 \Leftrightarrow y < 1$. Vậy ĐKXĐ: $x > 0; 0 < y < 1$.

Ta có: $\log_3 \dfrac{1-y}{x+3xy} = 3xy+x+3y-4 \Leftrightarrow \dfrac{1-y}{x+3xy} = 3^{3xy+x+3y-4} \Leftrightarrow \dfrac{3(1-y)}{x+3xy} = 3^{3xy+x+3y-3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3(1-y)}{x+3xy} = \dfrac{3^{3xy+x}}{3^{3-3y}} \Leftrightarrow (3-3y).3^{3-3y} = (3xy+x).3^{3xy+x}$ (*)

Xét $f(t) = t.3^t$ với $t>0$. Ta có $f'(t) = 3^t + t.3^t.\ln 3 > 0$ với $\forall t>0$, suy ra $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Từ (*) ta có $f(3-3y) = f(3xy+x)$ với $3-3y>0, 3xy+x>0$ nên $3-3y = 3xy+x \Leftrightarrow y = \dfrac{3-x}{3(x+1)}$.

Ta có $P = x+y = x+\dfrac{3-x}{3(x+1)} = (x+1)+\left(\dfrac{3-x}{3(x+1)}+\dfrac{1}{3}\right)-\dfrac{4}{3}$

$P = (x+1)+\dfrac{4}{3(x+1)}-\dfrac{4}{3} \ge 2\sqrt{(x+1).\dfrac{4}{3(x+1)}}-\dfrac{4}{3} = \dfrac{4\sqrt{3}-4}{3}$.

Vậy $P_{\min} = \dfrac{4\sqrt{3}-4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = \dfrac{4}{3(x+1)} \\ y = \dfrac{3-x}{3(x+1)} \\ x>0; 0<y<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2\sqrt{3}-3}{3} \\ y = \dfrac{2\sqrt{3}-1}{3} \end{cases}$.

**Câu 28.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Xét các số thực dương $x$, $y$ thỏa mãn $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y \le \log_{\frac{1}{2}} (x+y^2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = x+3y$.

**A.** $P_{\min} = 9$ **B.** $P_{\min} = 8$ **C.** $P_{\min} = \dfrac{25\sqrt{2}}{4}$ **D.** $P_{\min} = \dfrac{17}{2}$

**Lời giải.**

Ta có:

$\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y \le \log_{\frac{1}{2}} (x+y^2) \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}} (xy) \le \log_{\frac{1}{2}} (x+y^2) \Leftrightarrow xy \ge x+y^2$

$\Leftrightarrow x(y-1) \ge y^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{y^2}{y-1} \\ y>1 \end{cases}$ ( Vì $x; y>0$ ).

Ta có: $P = x+3y \ge \dfrac{y^2}{y-1}+3y = 4y+1+\dfrac{1}{y-1}$.

Xét hàm số: $f(y) = 4y+1+\dfrac{1}{y-1}; y>1$.

Đạo hàm: $f'(y) = 4-\dfrac{1}{(y-1)^2}$.

$f'(y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{3}{2}(n) \\ y = \dfrac{1}{2}(l) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên.

| $y$ | $1$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(y)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(y)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $9$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**Câu 29.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho $x,y$ là các số thực dương thỏa mãn $\log_{2019} x+\log_{2019} y\ge \log_{2019}\left(x^2+y\right)$. Gọi $T_{\min}$ là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=2x+y$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $T_{\min}\in(7;8)$ **B.** $T_{\min}\in(6;7)$ **C.** $T_{\min}\in(5;6)$ **D.** $T_{\min}\in(8;9)$

**Lời giải.**

Ta có:

$\log_{2019} x+\log_{2019} y\ge \log_{2019}\left(x^2+y\right)\Leftrightarrow \log_{2019} xy\ge \log_{2019}\left(x^2+y\right)\Leftrightarrow xy\ge x^2+y$

$\Leftrightarrow y(x-1)\ge x^2\Leftrightarrow \begin{cases} y\ge \dfrac{x^2}{x-1} \\ x>1 \end{cases}$

Ta có: $T=2x+y\ge 2x+\dfrac{x^2}{x-1}=3x+1+\dfrac{1}{x-1}$.

Xét hàm số: $f(x)=3x+1+\dfrac{1}{x-1};x>1$.

Đạo hàm: $f'(x)=3-\dfrac{1}{(x-1)^2}$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}(do\ x>1)$.

Bảng biến thiên.

| $x$ | $1$ | | $1+\frac{\sqrt{3}}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $4+2\sqrt{3}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Do đó: $T_{\min}=4+2\sqrt{3}$.

**Câu 30.** **(Mã 105 2017)** Xét hàm số $f(t)=\dfrac{9^t}{9^t+m^2}$ với $m$ là tham số thực. Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị của $m$ sao cho $f(x)+f(y)=1$ với mọi số thực $x,y$ thỏa mãn $e^{x+y}\le e(x+y)$.Tìm số phần tử của $S$.

**A.** 0 **B.** Vô số **C.** 1 **D.** 2

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $f(x)+f(y)=1\Leftrightarrow 9^{x+y}=m^4\Rightarrow x+y=\log_9 m^4=\log_3 m^2$

Đặt $x+y=t,t>0$. Vì $e^{x+y}\le e(x+y)\Rightarrow e^t\le et\Leftrightarrow t\le 1+\ln t\Leftrightarrow 1+\ln t-t\ge 0,\forall t>0$ (1)

Nguyễn Bảo Vương

Xét hàm $f(t)=\ln t+1-t$ với $t>0$. $f'(t)=\frac{1}{t}-1=\frac{1-t}{t}=0\Rightarrow t=0$

Bảng biến thiên

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $-\infty$ | ↗ | $0$ | ↘ | $-\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $f(t)\le f(1),\forall t>0\Leftrightarrow 1+\ln t-t\le 0,\forall t>0$ (2)

Từ $(1)$ và $(2)$ ta có $t=1\Rightarrow \log_3 m^2=1\Rightarrow m^2=3\Rightarrow m=\pm\sqrt{3}$

**Câu 31.** **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có bảng biến thiên như hình vẽ và có đạo hàm cấp hai $f''(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

| $x$ | $-\infty$ | | $m$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | $0$ | + | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $n^2$ | ↗ | $+\infty$ |

Gọi $a,b,c,n$ là các số thực và biểu thức: $P=-\left(e^{f(a)}+e^{f(b)}+e^{f(c)}\right)+\frac{3}{2}\left[f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)+1\right]^2$. Khẳng định đúng với mọi $a,b,c,n\in\mathbb{R}$ là

**A.** $0<P<3$. **B.** $7-3e\le P\le 0$. **C.** $P\ge 3$. **D.** $P<7-3e$.

**Lời giải**

Ta có $e^{f(a)}+e^{f(b)}+e^{f(c)}\ge 3\sqrt[3]{e^{f(a)+f(b)+f(c)}}$.

Mặt khác do $f''(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)$ là hàm lồi, áp dụng bất đẳng thức lồi ta có

$$f(a)+f(b)+f(c)\ge 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

Do đó $e^{f(a)}+e^{f(b)}+e^{f(c)}\ge 3\sqrt[3]{e^{3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)}}=3e^{f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)}$

Suy ra $P\le -3e^{f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)}+\frac{3}{2}\left[f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)+1\right]^2$. Đặt $t=f\left(\frac{a+b+c}{3}\right),t\ge n^2\ge 0$

Ta có $P\le g(t)$ với $g(t)=-3e^t+\frac{3}{2}(t+1)^2$

$g'(t)=-3e^t+3(t+1);g''(t)=-3e^t+3=-3\left(e^t-1\right)\le 0,\forall t\ge 0$. Nên $g'(t)$ là hàm nghịch biến trên $[0;+\infty)$. $\Rightarrow g'(t)\le g(0)=0,\forall t\in[0;+\infty)\Rightarrow g(t)\le g(0)$

Do đó $P\le g(0)=\frac{-3}{2}<7-3e$.

**Câu 32.** **(Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Cho hàm số $f(x)=2^x-2^{-x}$. Gọi $m_0$ là số lớn nhất trong các số nguyên $m$ thỏa mãn $f(m)+f(2m-2^{12})<0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** $m_0\in[1513;2019)$ **B.** $m_0\in[1009;1513)$ **C.** $m_0\in[505;1009)$ **D.** $m_0\in[1;505)$

**Lời giải**

**Chọn B**

Hàm số $f(x)=2^x-2^{-x}$ xác định $\forall x\in\mathbb{R}$.

Khi đó $-x\in\mathbb{R}$, ta có $f(-x)=2^{-x}-2^x=-(2^x-2^{-x})=-f(x)$.

Suy ra $f(x)$ là hàm số lẻ. $(1)$

Mặt khác $f'(x)=(2^x+2^{-x})\ln 2>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. $(2)$

Ta có $f(m)+f(2m-2^{12})<0\Leftrightarrow f(2m-2^{12})<-f(m)$.

Theo $(1)$ suy ra $f(2m-2^{12})<f(-m)$.

Theo $(2)$ ta được $2m-2^{12}<-m\Leftrightarrow 3m<2^{12}\Leftrightarrow m<\dfrac{2^{12}}{3}$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\le 1365\Rightarrow m_0=1365$. Vậy $m_0\in[1009;1513)$.

**Câu 33.** **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để đồ thị hàm số $y=m\log_2^2 x-2\log_2 x+2m+1$ cắt trục hoành tại một điểm duy nhất có hoành độ thuộc khoảng $[1;+\infty)$.

Nguyễn Bảo Vương

**A.** $m\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$. **B.** $m\in\left(-\dfrac{1}{2};0\right)\cup\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

**C.** $m\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$. **D.** $m\in\left[-\dfrac{1}{2};0\right]\cup\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

**Lời giải**

Xét phương trình hoành độ giao điểm $m\log_2^2 x-2\log_2 x+2m+1=0$.

Ycbt $\Leftrightarrow$ Phương trình có duy nhất một nghiệm thuộc khoảng $[1;+\infty)$.

Đặt $t=\log_2 x\ge 0\ \ \forall x\in[1;+\infty)$.

Phương trình $\Leftrightarrow mt^2-2t+2m+1=0\Leftrightarrow m=\dfrac{2t-1}{t^2+2}$.

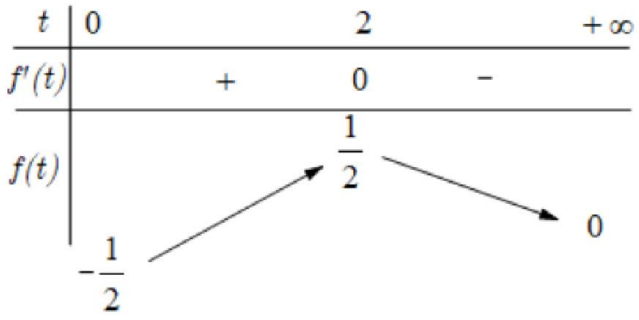
Ycbt $\Leftrightarrow$ Phương trình có duy nhất một nghiệm $t\in[0;+\infty)$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{2t-1}{t^2+2}$ trên $[0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{2(t^2+2)-2t(2t-1)}{(t^2+1)^2}=\dfrac{-2t^2+2t+4}{(t^2+1)^2}$

$f'(t)=0\Leftrightarrow -2t^2+2t+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\notin[0;+\infty)\\ t=2\in[0;+\infty)\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên




Từ bảng biến thiên ta suy ra: ycbt $\Leftrightarrow m\in\left[-\frac{1}{2};0\right]\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

**Câu 34.** **(Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020)** Cho $x;y$ là hai số thực dương thỏa mãn $x\neq y$ và $\left(2^x+\frac{1}{2^x}\right)^y<\left(2^y+\frac{1}{2^y}\right)^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x^2+3y^2}{xy-y^2}$ bằng

**A.** $\frac{13}{2}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $-2$. **D.** $6$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $\left(2^x+\frac{1}{2^x}\right)^y<\left(2^y+\frac{1}{2^y}\right)^x\Leftrightarrow\left(4^x+1\right)^y<\left(4^y+1\right)^x$

$\Leftrightarrow y\ln\left(4^x+1\right)<x\ln\left(4^y+1\right)\Leftrightarrow\frac{\ln\left(4^x+1\right)}{x}<\frac{\ln\left(4^y+1\right)}{y}$ (vì $x,y>0$).

Xét hàm số $f(t)=\frac{\ln\left(4^t+1\right)}{t}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\frac{\frac{4^t.\ln 4}{4^t+1}.t-\ln\left(4^t+1\right)}{t^2}=\frac{4^t\ln 4^t-\left(4^t+1\right)\ln\left(4^t+1\right)}{\left(4^t+1\right)t^2}<0,\forall t>0$

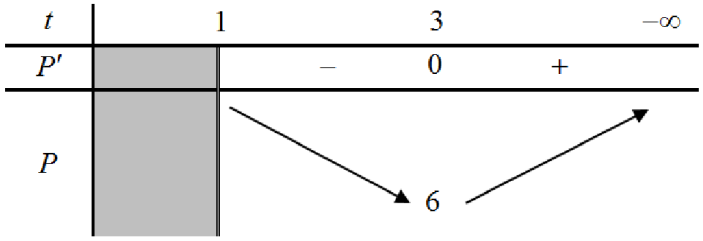
$\Rightarrow f(t)$ luôn nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Lại có $f(x)<f(y)\Rightarrow x>y$.

Đặt $t=\frac{x}{y}$, khi đó $t\in(1;+\infty)\Rightarrow P=\frac{t^2+3}{t-1}$.

**Cách 1:** Xét $P=\frac{t^2+3}{t-1}$ với $t\in(1;+\infty)$, ta có $P'=\frac{t^2-2t-3}{(t-1)^2};P'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=3\end{array}\right.$

Bảng biến thiên




Từ bảng biến thiên, suy ra giá trị nhỏ nhất của $P$ bằng $6$ khi $t=3$ hay $x=3y$.

**Cách 2:** Ta có $P=\frac{t^2+3}{t-1}=t-1+\frac{4}{t-1}+2\geq 2\sqrt{4}+2=6$ $(AM-GM)$.

Suy ra, giá trị nhỏ nhất của $P$ bằng 6 khi $t=3$ hay $x=3y$.

**Câu 35.** **(Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020)** Xét các số thực dương $x,y$ thỏa mãn $2\left(x^2+y^2+4\right)+\log_2\left(\frac{2}{x}+\frac{2}{y}\right)=\frac{1}{2}(xy-4)^2$. Khi $x+4y$ đạt giá trị nhỏ nhất, $\frac{x}{y}$ bằng

**A.** $2$. **B.** $4$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $2\left(x^2+y^2+4\right)+\log_2\left(\frac{2}{x}+\frac{2}{y}\right)=\frac{1}{2}(xy-4)^2$

$\Leftrightarrow 2(x+y)^2-4xy+8+1+\log_2(x+y)-\log_2(xy)=\frac{1}{2}(xy)^2-4xy+8$

$\Leftrightarrow 2(x+y)^2+\log_2(x+y)=2\left(\frac{xy}{2}\right)^2+\log_2\left(\frac{xy}{2}\right)\quad(1)$.

Xét hàm số $f(t)=2t^2+\log_2 t$, với $t\in(0;+\infty)$

$f'(t)=4t+\frac{1}{t.\ln 2}>0,\forall t>0$, suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$. Từ

$(1)\Rightarrow f(x+y)=f\left(\frac{xy}{2}\right)\Leftrightarrow 2(x+y)=xy$.

Ta có: $2(x+y)=xy\Leftrightarrow x(y-2)=2y\Rightarrow x=\frac{2y}{y-2};y>2$.

$P=x+4y=\frac{2y}{y-2}+4y=10+4(y-2)+\frac{4}{y-2}\geq 10+2\sqrt{4(y-2).\frac{4}{y-2}}=18$

$\Rightarrow P_{\min}=18$ khi $4(y-2)=\frac{4}{y-2}\Leftrightarrow y-2=1\Leftrightarrow y=3$.

$y=3\Rightarrow x=\frac{2y}{y-2}=6\Rightarrow\frac{x}{y}=2$.

**Câu 36.** **(Chuyên Hưng Yên - 2020)** Biết phương trình $x^4+ax^3+bx^2+cx+1=0$ có nghiệm. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=a^2+b^2+c^2$

**A.** $T_{\min}=\frac{4}{3}$. **B.** $T_{\min}=4$. **C.** $T_{\min}=2$. **D.** $T_{\min}=\frac{8}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $x^4+ax^3+bx^2+cx+1=0$.

Vì $x=0$ không là nghiệm của phương trình nên chia hai vế phương trình cho $x^2$ ta được

$x^2+ax+b+\frac{c}{x}+\frac{1}{x^2}=0\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=-ax-b-\frac{c}{x}\Rightarrow\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2=\left(-ax-b-\frac{c}{x}\right)^2$.

Ta có $\left(-ax-b-\frac{c}{x}\right)^2\leq\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+1+\frac{1}{x^2}\right)$.(theo BĐT Cauchy - Schwarz)

Khi đó $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2 \le \left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}+1\right) \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \ge \frac{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2}{\left(x^2+\frac{1}{x^2}+1\right)}$.(1)

Đặt $t=x^2+\frac{1}{x^2} \ge 2$ (theo BĐT Cô Si).

Khảo sát hàm số $f(t)=\frac{t^2}{t+1}, t\in[2;+\infty)$ có $f'(t)=\frac{t^2+2t}{(t+1)^2}>0, \forall t\in[2;+\infty)$.

Do đó $\min\limits_{[2;+\infty)} f(t)=f(2)=\frac{4}{3} \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \ge \frac{4}{3}$.

Dấu " = " $\Leftrightarrow a=-b=c=\frac{2}{3}$.

Phương trình có nghiệm thi $T \ge \min\limits_{[2;+\infty)} f(t)$.

$\Rightarrow x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{3}x+1=0$ có nghiệm $x=-1 \Rightarrow t=2$ thỏa mãn.

Vậy $T_{\min}=\frac{4}{3}$.

**Câu 37. (Chuyên KHTN - 2020)** Cho $x, y$ là các số thực dương thỏa mãn $\log_2\frac{3x+3y+4}{x^2+y^2}=(x+y-1)(2x+2y-1)-4(xy+1)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{5x+3y-2}{2x+y+1}$.

**A.** 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn C**

• Ta có: $\log_2\frac{3x+3y+4}{x^2+y^2}=(x+y-1)(2x+2y-1)-4(xy+1)$

$\Leftrightarrow \log_2\frac{3x+3y+4}{x^2+y^2}=2x^2+2y^2-3x-3y-3$

$\Leftrightarrow \frac{3x+3y+4}{x^2+y^2}=\frac{2^{2x^2+2y^2}}{2^{3x+3y+3}} \Leftrightarrow (3x+3y+4).2^{3x+3y+3}=\left(x^2+y^2\right).2^{2x^2+2y^2}$

$\Leftrightarrow 2.(3x+3y+4).2^{3x+3y+3}=2.\left(x^2+y^2\right).2^{2x^2+2y^2}$

$\Leftrightarrow (3x+3y+4).2^{3x+3y+4}=\left(2x^2+2y^2\right).2^{2x^2+2y^2}$ (1)

• Đặt $f(t)=t.2^t\ (t>0)$.

Ta xét: $f'(t)=2^t+t.2^t.\ln 2>0,\ \forall t>0$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Lúc đó; (1) có dạng: $f(3x+3y+4)=f\left(2x^2+2y^2\right)$

$\Leftrightarrow 3x+3y+4=2x^2+2y^2 \Leftrightarrow x^2+2xy+y^2-3(x+y)-4=-x^2+2xy-y^2$

$\Leftrightarrow (x+y)^2-3(x+y)-4=-(x-y)^2$

$\Rightarrow (x+y)^2-3(x+y)-4\le 0\Rightarrow -1\le x+y\le 4\Rightarrow x+y-4\le 0$.

• Khi đó: $P=\dfrac{5x+3y-2}{2x+y+1}=2+\dfrac{x+y-4}{2x+y+1}\le 2+0=2$.

• Vậy $P$ đạt giá trị lớn nhất là $2$, đạt được khi $\begin{cases}x+y=4\\3x+3y+4=2x^2+2y^2\\x-y=0\end{cases}\Leftrightarrow x=y=2$.

**Câu 38.** **(Chuyên Bến Tre - 2020)** Cho các số thực $x,y$ thỏa mãn $0\le x,y\le 1$ và $\log_3\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)+(x+1)(y+1)-2=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P$ với $P=2x+y$

**A.** $2$. **B.** $1$. **C.** $0$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\log_3\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)+(x+1)(y+1)-2=0\Leftrightarrow \log_3\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)+xy+x+y-1=0$

$\Leftrightarrow \log_3(x+y)+x+y=\log_3(1-xy)+1-xy$

Xét hàm số đặc trưng $f(t)=\log_3 t+t$ với $t>0$

Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 3}+1>0,\ \forall t>0$

Hàm số $f(t)$ đồng biến với $t>0$

Có $f(x+y)=f(1-xy)\Leftrightarrow x+y=1-xy\Leftrightarrow x(y+1)=1-y\Leftrightarrow x=\dfrac{1-y}{y+1}$

Ta có $P=2x+y=\dfrac{2-2y}{y+1}+y=-3+\dfrac{4}{y+1}+y+1\ge -3+2\sqrt{\dfrac{4}{y+1}(y+1)}=1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P$ bằng $1$.

**Câu 39.** **(Chuyên Chu Văn An - 2020)** Cho $x,y$ là các số thực dương thỏa mãn $\log_3\dfrac{x+4y}{x+y}=2x-y+1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{3x^4y+2xy+2y^2}{x(x+y)^2}$.

**A.** $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $\log_3\dfrac{x+4y}{x+y}=2x-y+1\Leftrightarrow \log_3(x+4y)+(x+4y)=\log_3 3(x+y)+3(x+y)\ (1)$.

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 3}+1>0,\forall t>0$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Từ (1) suy ra $f(x+4y)=f(3(x+y))$ và $(x+4y)>0;3(x+y)>0$.

Do đó, $(1)\Leftrightarrow x+4y=3(x+y)\Leftrightarrow y=2x$.

$$P=\frac{3x^4y+2xy+2y^2}{x(x+y)^2}=\frac{6x^5+12x^2}{9x^3}=\frac{1}{9}\left(6x^2+\frac{12}{x}\right)=\frac{1}{9}\left(6x^2+\frac{6}{x}+\frac{6}{x}\right)\geq 2.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=1$. Vậy $P_{Min}=2$.

**Câu 40.** **(Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - 2020)** Xét các số thực dương $a,b,x,y$ thỏa mãn $a>1,b>1$ và $a^{x^2}=b^{y^2}=(ab)^2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2\sqrt{2}x+y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

**A.** $[10;15)$. **B.** $[6;10)$. **C.** $(1;4)$. **D.** $[4;6)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $a^{x^2}=(ab)^2\Rightarrow x^2=\log_a(ab)^2=2(1+\log_a b)\Rightarrow x=\sqrt{2+2\log_a b}$

$b^{y^2}=(ab)^2\Rightarrow y^2=\log_b(ab)^2=2(1+\log_b a)\Rightarrow y=\sqrt{2+2\log_b a}$

$P=2\sqrt{2}x+y=4\sqrt{1+\log_a b}+\sqrt{2+2\log_b a}$.

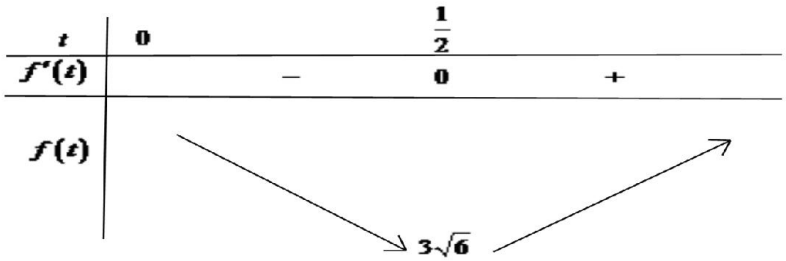
Đặt $t=\log_a b\ (t>0)$ ta được: $P=4\sqrt{1+t}+\sqrt{2+\frac{2}{t}}$.

Xét hàm số $f(t)=4\sqrt{1+t}+\sqrt{2+\frac{2}{t}}$, với $t\in(0;+\infty)$.

$$f'(t)=\frac{2}{\sqrt{1+t}}-\frac{1}{t^2\sqrt{2+\frac{2}{t}}};\ f'(t)=0\Leftrightarrow\frac{2}{\sqrt{1+t}}-\frac{1}{t^2\sqrt{2+\frac{2}{t}}}=0\Leftrightarrow 2t^2\sqrt{2+\frac{2}{t}}=\sqrt{1+t}$$

$$\Leftrightarrow 4t^4\left(2+\frac{2}{t}\right)=1+t\Leftrightarrow 8t^4+8t^3-t-1=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(t)$.




Từ bảng biến thiên suy ra $\text{Min}P=\min\limits_{(0;+\infty)}f(t)=3\sqrt{6}\in[6;10)$ khi $\begin{cases}\log_a b=\frac{1}{2}\\ x=\sqrt{3}\\ y=\sqrt{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b^2\\ x=\sqrt{3}\\ y=\sqrt{6}\end{cases}$.

**Câu 41.** **(Chuyên Lào Cai - 2020)** Xét các số thực dương $x$, $y$ thỏa mãn $\log_\pi x+\log_\pi y\geq\log_\pi(x+y^2)$. Biểu thức $P=x+8y$ đạt giá trị nhỏ nhất của bằng:

**A.** $P_{\min}=16$. **B.** $P_{\min}=\frac{33}{2}$. **C.** $P_{\min}=11\sqrt{2}$. **D.** $P_{\min}=\frac{31}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Từ đề bài $xy\geq x+y^2$

$\Leftrightarrow x(y-1)\ge y^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge \dfrac{y^2}{y-1} \\ y>1 \end{cases}$ ( Vì $x;y>0$ ).

Ta có: $P=x+8y\ge \dfrac{y^2}{y-1}+8y=9y+1+\dfrac{1}{y-1}$.

Xét hàm số: $f(y)=9y+1+\dfrac{1}{y-1};y>1$.

Đạo hàm: $f'(y)=9-\dfrac{1}{(y-1)^2}$.

$f'(y)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{4}{3} \\ y=\dfrac{2}{3}(l) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên, ta thấy giá trị nhỏ nhất của $f(y)$ là $f\left(\dfrac{4}{3}\right)=16$.

Vậy $P_{\min}=16$ khi $x=\dfrac{16}{3}$.

**Câu 42.** **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)** Xét các số thực $x, y$ thỏa mãn $\log_2(x-1)+\log_2(y-1)=1$. Khi biểu thức $P=2x+3y$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $3x-2y=a+b\sqrt{3}$ với $a, b\in\mathbb{Q}$. Tính $T=ab$?

**A.** $T=9$. **B.** $T=\dfrac{7}{3}$. **C.** $T=\dfrac{5}{3}$. **D.** $T=7$.

Nguyễn Bảo Vương

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện: $\begin{cases} x-1>0 \\ y-1>0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ y>1 \end{cases}$

Khi đó: $\log_2(x-1)+\log_2(y-1)=1\Leftrightarrow (x-1)(y-1)=2\Leftrightarrow y-1=\dfrac{2}{x-1}\Leftrightarrow y=\dfrac{2}{x-1}+1$

Suy ra: $P=2x+3y=2x+\dfrac{6}{x-1}+3=2(x-1)+\dfrac{6}{x-1}+5$

***Cách 1:*** Dùng bất đẳng thức

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có: $2(x-1)+\dfrac{6}{x-1}\ge 2\sqrt{2(x-1).\dfrac{6}{x-1}}$

$\Rightarrow 2(x-1)+\dfrac{6}{x-1}\ge 4\sqrt{3}\Rightarrow P\ge 4\sqrt{3}+5$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2(x-1)=\dfrac{6}{x-1}\Leftrightarrow (x-1)^2=3\Leftrightarrow |x-1|=\sqrt{3}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1+\sqrt{3}\ (N) \\ x=1-\sqrt{3}\ (L) \end{array}\right.$

$\Rightarrow y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}+1=\dfrac{2\sqrt{3}+3}{3}$.

Do đó: $3x-2y=3\left(1+\sqrt{3}\right)-2\left(\dfrac{2\sqrt{3}+3}{3}\right)=1+\dfrac{5}{3}\sqrt{3}\Rightarrow a=1;\ b=\dfrac{5}{3}\Rightarrow T=ab=\dfrac{5}{3}$.

***Cách 2:*** Dùng bảng biến thiên

Ta có: $P=2x+\dfrac{6}{x-1}+3 \Rightarrow P'=2-\dfrac{6}{(x-1)^2}$

$P'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1+\sqrt{3}\ (N) \\ x=1-\sqrt{3}\ (L) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

| $x$ | $1$ | | $1+\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $P$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $4\sqrt{3}+5$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $P_{\min}=4\sqrt{3}+5 \Leftrightarrow x=1+\sqrt{3} \Rightarrow y=\dfrac{2\sqrt{3}+3}{3}$.

Do đó: $3x-2y=3\left(1+\sqrt{3}\right)-2\left(\dfrac{2\sqrt{3}+3}{3}\right)=1+\dfrac{5}{3}\sqrt{3} \Rightarrow a=1;\ b=\dfrac{5}{3} \Rightarrow T=ab=\dfrac{5}{3}$.

**Câu 43.** (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020) Cho các số thực $a$, $b$, $c$, $d$ thỏa mãn $\log_{a^2+b^2+2}\left(4a+6b-7\right)=1$ và $27^c.81^d=6c+8d+1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(a-c)^2+(b-d)^2$.

**A.** $\dfrac{49}{25}$. **B.** $\dfrac{64}{25}$. **C.** $\dfrac{7}{5}$. **D.** $\dfrac{8}{5}$.

Lời giải

**Chọn A**

Ta có $\log_{a^2+b^2+2}\left(4a+6b-7\right)=1 \Leftrightarrow a^2+b^2+2=4a+6b-7 \Leftrightarrow (a-2)^2+(b-3)^2=4 \quad (1)$.

Lại có $27^c.81^d=6c+8d+1 \Leftrightarrow 3^{3c+4d}=2(3c+4d)+1 \quad (2)$.

Xét hàm số $f(t)=3^t-2t-1$ trên $\mathbb{R}$.

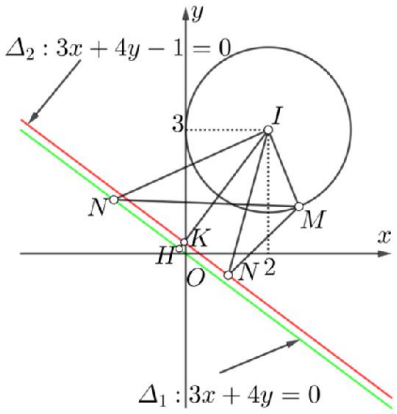
Khi đó $f(t)$ là hàm số có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(t)=3^t.\ln 3-2$.

Vì phương trình $f'(t)=0$ có đúng một nghiệm $\left(t_0=\log_3\left(\dfrac{2}{\ln 3}\right)\right)$ nên phương trình $f(t)=0$ có tối đa 2 nghiệm. Mặt khác, $f(0)=f(1)=0$ nên $S=\{0;1\}$ là tập nghiệm của phương trình $f(t)=0$.

Do đó, $(2)$ tương đương với $3c+4d=0$ hoặc $3c+4d=1 \quad (3)$.

Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ $Oxy$, gọi điểm $M$ có tọa độ $(a,b)$ và điểm $N$ có tọa độ $(c,d)$. Khi đó, từ $(1)$ suy ra $M$ thuộc đường tròn tâm $I(2;3)$, bán kính $r=2$ và từ $(3)$ suy ra $N$ thuộc đường thẳng $\Delta_1: 3x+4y=0$ hoặc $\Delta_2: 3x+4y-1=0$.

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(a-c)^2+(b-d)^2=MN^2$.




Gọi $H$, $K$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $I$ lên các đường thẳng $\Delta_1$ và $\Delta_2$.

Nếu $N$ di chuyển trên đường thẳng $\Delta_1$ thì $MN \ge IN-IM \ge IH-r$ nên $MN \ge \frac{8}{5}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $N \equiv H$ và $M$ là giao điểm của đoạn thẳng $IH$ với đường tròn.

Nếu $N$ di chuyển trên đường thẳng $\Delta_2$ thì $MN \ge IN-IM \ge IK-r$ nên $MN \ge \frac{7}{5}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $N \equiv K$ và $M$ là giao điểm của đoạn thẳng $IK$ với đường tròn.

Từ hai trường hợp trên, ta có giá trị nhỏ nhất của $MN$ bằng $\frac{7}{5}$. Từ đó, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P$ bằng $\frac{49}{25}$.

**Câu 44.** **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho hai số thực dương $x, y$ thỏa mãn $\log_2 x + x(x+y) = \log_2(6-y) + 6x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = x^3 + 3y$ là

**A.** 16. **B.** 18. **C.** 12. **D.** 20.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện: $x>0$, $0<y<6$.

Ta có $\log_2 x + x(x+y) = \log_2(6-y) + 6x \Leftrightarrow \log_2 x + x^2 = \log_2(6-y) + 6x - xy$

$\Leftrightarrow \log_2 x + \log_2 x + x^2 = \log_2(6-y) + \log_2 x + 6x - xy$

$\Leftrightarrow \log_2(x^2) + x^2 = \log_2[x(6-y)] + x(6-y)$ $(*)$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(t) = \frac{1}{t.\ln 2} + 1 > 0, \forall t \in (0;+\infty)$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow f(x^2) = f(x(6-y)) \Leftrightarrow x^2 = x(6-y) \Leftrightarrow x = 6-y \Leftrightarrow y = 6-x$.

$\Rightarrow T = x^3 + 3(6-x) = x^3 - 3x + 18 = g(x)$.

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x + 18$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có $g'(x) = 3x^2 - 3$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \notin (0;+\infty) \\ x = 1 \in (0;+\infty) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $18$ | $\searrow$ | $16$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên suy ra $T=g(x)\ge g(1)=16$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x=1\\ y=6-x=5\end{cases}$.

**Câu 45. (Chuyên Thái Nguyên - 2020)** Xét các số thực dương $a,b$ thoả mãn $\log_2\dfrac{1-ab}{a+b}=2ab+a+b-3$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P=a+b$.

**A.** $P_{\min}=-1+2\sqrt{5}$. **B.** $P_{\min}=2+\sqrt{5}$. **C.** $P_{\min}=-1+\sqrt{5}$. **D.** $P_{\min}=1+2\sqrt{5}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện $1-ab>0\Leftrightarrow ab<1$.

Ta có $\log_2\dfrac{1-ab}{a+b}=2ab+a+b-3\Leftrightarrow\log_2(1-ab)-\log_2(a+b)=(a+b)-2(1-ab)-1$

$\Leftrightarrow\log_2(1-ab)+1+2(1-ab)=\log_2(a+b)+(a+b)$

$\Leftrightarrow\log_2 2(1-ab)+2(1-ab)=\log_2(a+b)+(a+b).\qquad(1)$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t$ với $t>0$ có $f'(t)=\dfrac{1}{t.\ln 2}+1>0,\forall t>0$ nên hàm số $f(t)=\log_2 t+t$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có $(1)\Leftrightarrow f(2(1-ab))=f(a+b)\Leftrightarrow 2(1-ab)=a+b\Leftrightarrow 2-a=b(2a+1)\Leftrightarrow b=\dfrac{2-a}{2a+1}$.

Do $a,b>0\Rightarrow\dfrac{2-a}{2a+1}>0\Leftrightarrow 0<a<2$.

Khi đó $P=a+b=a+\dfrac{2-a}{2a+1}=\dfrac{2a^2+2}{2a+1}$

Xét hàm $g(a)=\dfrac{2a^2+2}{2a+1}\Rightarrow g'(a)=\dfrac{4a^2+4a-4}{(2a+1)^2}\Rightarrow g'(a)=0\Leftrightarrow a=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Bảng biến thiên

| $a$ | $0$ | | $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(a)$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(a)$ | $2$ | $\searrow$ | $-1+\sqrt{5}$ | $\nearrow$ | $2$ |

Vậy $P_{\min}=-1+\sqrt{5}$.

**Câu 46.** **(ĐHQG Hà Nội - 2020)** Cho các số thực x, y thỏa mãn $\log_2\left(\frac{2-x}{2+x}\right)-\log_2 y=2x+2y+xy-5$.

Hỏi giá trị nhỏ nhất của $P=x^2+y^2+xy$ là bao nhiêu?

**A.** $30-20\sqrt{2}$. **B.** $33-22\sqrt{2}$. **C.** $24-16\sqrt{2}$. **D.** $36-24\sqrt{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện xác định: $\begin{cases}\frac{2-x}{2+x}>0\\ y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{x-2}{x+2}<0\\ y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2<x<2\\ y>0\end{cases}$

Theo bài ra ta có:

$\log_2\left(\frac{2-x}{2+x}\right)-\log_2 y=2x+2y+xy-5$

$\Leftrightarrow\log_2(2-x)-\log_2(x+2)-\log_2 y=2(x-2)+y(x+2)-1$

$\Leftrightarrow\log_2(2-x)+1-(2x-4)=\log_2\left[(x+2)y\right]+y(x+2)$

$\Leftrightarrow\log_2(4-2x)+(4-2x)=\log_2\left[y(x+2)\right]+y(x+2)$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t(t>0)$:

$f'(t)=\frac{1}{t.\ln 2}+1>0\forall t>0$

Suy ra: $f(t)$ là hàm đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

Mà $f(4-2x)=f\left[y(x+2)\right]$ nên $4-2x=y(x+2)\Leftrightarrow y=\frac{4-2x}{x+2}$

Vì $P=x^2+y^2+xy\ge\frac{3}{4}(x+y)^2$

Thay vào P ta có:

$P\ge\frac{3}{4}\left(x+\frac{4-2x}{x+2}\right)^2=\frac{3}{4}\left(\frac{x^2+4}{x+2}\right)^2$

Xét hàm số $y=\frac{x^2+4}{x+2}$ trên khoảng $(-2;2)$:

$y'=\frac{2x(x+2)-(x^2+4)}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x-4}{(x+2)^2}$

$y'=0\Leftrightarrow x^2+4x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2+2\sqrt{2}\\ x=-2-2\sqrt{2}(l)\end{array}\right.$

(Vì $x\in(-2;2)$)

Lập bảng biến thiên:

| x | $-2$ | | $-2+2\sqrt{2}$ | | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| y' | \| | - | 0 | + | |
| y | \| $+\infty$ | ↘ | $-4+4\sqrt{2}$ | ↗ | 2 |

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $y_{\min}=-4+4\sqrt{2}$

Vậy $P_{\min}=\frac{3}{4}\left(-4+4\sqrt{2}\right)^2=36-24\sqrt{2}$

Nguyễn Bảo Vương

**Câu 47.** **(Sở Bình Phước - 2020)** Cho $x, y$ là các số thực dương thỏa mãn $\log_2 x + \log_2 y + 1 \ge \log_2\left(x^2 + 2y\right)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x + 2y$ bằng

**A.** $2\sqrt{2}+3$. **B.** $2+3\sqrt{2}$. **C.** $3+\sqrt{3}$. **D.** $9$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Với $x > 0; y > 0$. Ta có:

$\log_2 x + \log_2 y + 1 \ge \log_2\left(x^2 + 2y\right) \quad (1)$

$\Leftrightarrow 2xy \ge x^2 + 2y \quad (2)$

$\Leftrightarrow 2y\left(x-1\right) \ge x^2$

$\Leftrightarrow x - 1 \ge \dfrac{x^2}{2y} > 0$

$\Rightarrow x > 1.$

Đặt $m = x + 2y$ ta có:

$(2) \Leftrightarrow x\left(m-x\right) \ge x^2 - x + m$

$\Leftrightarrow m\left(x-1\right) \ge 2x^2 - x$

$\Leftrightarrow m \ge \dfrac{2x^2 - x}{x-1}.$

Xét hàm số $g\left(x\right) = \dfrac{2x^2 - x}{x-1}$ với $x > 1$.

Ta tìm thấy $\min\limits_{(1;+\infty)} g\left(x\right) = 3 + 2\sqrt{2}$ khi $x = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $m \ge 3 + 2\sqrt{2}$, dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2} \\ y = \dfrac{4+3\sqrt{2}}{4} \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện bài toán).

Vậy GTNN của $x + 2y$ là $3 + 2\sqrt{2}$.

**Câu 48.** **(Sở Yên Bái - 2020)** Cho các số thực $x, y$ thuộc đoạn $[0;1]$ thỏa mãn $2020^{1-x-y} = \dfrac{x^2 + 2021}{y^2 - 2y + 2022}$.

Gọi $M, m$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $2x^3 + 6y^3 + 3x^2 - 9xy$. Tính $M.m$.

**A.** $-\dfrac{5}{2}$. **B.** $-5$. **C.** $5$. **D.** $-3$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có

$2020^{1-x-y} = \dfrac{x^2 + 2021}{y^2 - 2y + 2022} \Leftrightarrow 2020^{1-x-y}\left(y^2 - 2y + 2022\right) = x^2 + 2021$

$\Leftrightarrow 2020^{1-y}\left[\left(1-y\right)^2 + 2021\right] = 2020^{x}\left(x^2 + 2021\right).$

Ta có

$f\left(t\right) = 2020^{t}\left(t^2 + 2021\right)$ với $t \in [0;1]$ có $f'\left(t\right) = 2020^{t}.\ln 2020.\left(t^2 + 2021\right) + 2.2020^{t}.t > 0$.

Do vậy $f\left(t\right) = 2020^{t}\left(t^2 + 2021\right)$ đồng biến trên khoảng $t \in [0;1]$.

Suy ra $f(1-y)=f(x)\Leftrightarrow x=1-y\Leftrightarrow y=1-x$.

Do vậy

$2x^3+6y^3+3x^2-9xy=2x^3+6(1-x)^3+3x^2-9x(1-x)$

$=2x^3+6-18x+18x^2-6x^3+3x^2-9x+9x^2=-4x^3+30x^2-27x+6$.

Xét $f(x)=-4x^3+30x^2-27x+6$ với $x\in(0;1)$.

Mà $f(x)=-4x^3+30x^2-27x+6$ nên $f'(x)=-12x^2+60x-27=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\x=\frac{9}{2}\text{(loai)}\end{array}\right.$.

Mặt khác $f(0)=6, f(1)=5, f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$. Do vậy $M=6$ và $m=-\frac{1}{2}$.

Vậy nên $M.m=-3$.

**Câu 49. (Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020)** Xét các số thực dương $x.y$ thỏa mãn $\log_{\frac{1}{2}}x+\log_{\frac{1}{2}}y\le\log_{\frac{1}{2}}\left(x+y^2\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=x+3y$.

**A.** $P_{\min}=\frac{17}{2}$. **B.** $P_{\min}=8$. **C.** $P_{\min}=9$. **D.** $P_{\min}=\frac{25\sqrt{2}}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $\log_{\frac{1}{2}}x+\log_{\frac{1}{2}}y\le\log_{\frac{1}{2}}\left(x+y^2\right)\Leftrightarrow\log_{\frac{1}{2}}(xy)\le\log_{\frac{1}{2}}\left(x+y^2\right)\Leftrightarrow xy\ge x+y^2$

$\Leftrightarrow(y-1)x\ge y^2$.

Do $y>0\Rightarrow y^2>0\Rightarrow(y-1)x\ge y^2>0$. Mà $x>0$ nên $y-1>0$, hay $y>1$.

Khi đó ta có $x\ge\frac{y^2}{y-1}$. Suy ra $P=x+3y\ge\frac{y^2}{y-1}+3y$

Xét hàm số $f(y)=\frac{y^2}{y-1}+3y$ trên $(1;+\infty)$.

Ta có $f'(y)=\frac{y^2-2y}{(y-1)^2}+3=\frac{4y^2-8y+3}{(y-1)^2}$; $f'(y)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=\frac{1}{2}\notin(1;+\infty)\\y=\frac{3}{2}\in(1;+\infty)\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

| $y$ | $1$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(y)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(y)$ | ‖ $+\infty$ | $\searrow$ | $9$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên suy ra $f(y)\ge f\left(\frac{3}{2}\right)=9$. Vậy $P\ge f(y)\ge 9$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} y=\dfrac{3}{2} \\ x=\dfrac{y^2}{y-1}=\dfrac{9}{2} \end{cases}$.

**Câu 50.** **(Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020)** Cho các số thực $x$, $y$ thay đổi thỏa mãn $x^2+y^2-xy=1$ và hàm số $f(t)=2t^3-3t^2-1$. Gọi $M$ và $m$ tương ứng là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $Q=f\left(\dfrac{5x-y+2}{x+y+4}\right)$. Tổng $M+m$ bằng

**A.** $-4-3\sqrt{2}$. **B.** $-4-5\sqrt{2}$. **C.** $-4-2\sqrt{2}$. **D.** $-4-4\sqrt{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $x^2+y^2-xy=1\Leftrightarrow\left(x-\dfrac{y}{2}\right)^2+\dfrac{3y^2}{4}=1$.

Đặt $t=\dfrac{5x-y+2}{x+y+4}\Rightarrow t(x+y+4)=5x-y+2\Leftrightarrow(t-5)x+(t+1)y+4t-2=0$

$\Leftrightarrow(t-5)\left(x-\dfrac{y}{2}\right)+\left(\sqrt{3}t-\sqrt{3}\right)\dfrac{\sqrt{3}y}{2}=2-4t$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpxki ta có

$$(2-4t)^2=\left[(t-5)\left(x-\frac{y}{2}\right)+\left(\sqrt{3}t-\sqrt{3}\right)\frac{\sqrt{3}y}{2}\right]^2\le\left[(t-5)^2+\left(\sqrt{3}t-\sqrt{3}\right)^2\right]\left[\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}\right]$$

$$\Rightarrow(2-4t)^2\le\left[(t-5)^2+\left(\sqrt{3}t-\sqrt{3}\right)^2\right].1\Leftrightarrow 12t^2-24t\le 0\Leftrightarrow-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}.$$

Xét hàm số $f(t)=2t^3-3t^2-1$ với $-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}$.

Ta có $f'(t)=6t^2-6t=6t(t-1)$.

Khi đó $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=1 \end{array}\right.$.

Ta có $f\left(-\sqrt{2}\right)=-5-4\sqrt{2}$, $f(0)=-1$, $f(1)=0$, $f\left(-\sqrt{2}\right)=-5+4\sqrt{2}$.

Do đó $M=f(0)=1$, $m=f\left(-\sqrt{2}\right)=-5-4\sqrt{2}$.

Vậy $M+m=-4-4\sqrt{2}$.

**Câu 51.** **(Yên Lạc 2 - Vĩnh Phúc - 2020)** Cho hai số thực $a$, $b$ lớn hơn $1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\log_a\left(\dfrac{a^2+4b^2}{4}\right)+\dfrac{1}{4\log_{ab}b}$.

**A.** $\dfrac{5}{4}$. **B.** $\dfrac{11}{4}$. **C.** $\dfrac{9}{4}$. **D.** $\dfrac{7}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Theo bất đẳng thức Côsi ta có $\frac{a^2+4b^2}{4}=\frac{a^2+(2b)^2}{4}\ge\frac{4ab}{4}=ab\Rightarrow\log_a\left(\frac{a^2+4b^2}{4}\right)\ge\log_a ab$.

Do $a,\ b>1\Rightarrow\log_a b>\log_a 1=0$.

Ta có

$S=\log_a\left(\frac{a^2+4b^2}{4}\right)+\frac{1}{4}\log_b ab\ge\log_a ab+\frac{1}{4}\log_b ab$

$=1+\log_a b+\frac{1}{4}(\log_b a+1)=\log_a b+\frac{1}{4\log_a b}+\frac{5}{4}$.

Đặt $t=\log_a b$, ta có $S\ge t+\frac{1}{4t}+\frac{5}{4}$.

Xét hàm số $f(t)=t+\frac{1}{4t}+\frac{5}{4}$ với $t>0$.

Ta có $f'(t)=1-\frac{1}{4t^2}=\frac{4t^2-1}{4t^2}$.

Khi đó $f'(t)=0\Leftrightarrow\frac{4t^2-1}{4t^2}=0\Leftrightarrow 4t^2-1=0\Leftrightarrow t^2=\frac{1}{4}\Rightarrow t=\frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

| $t$ | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(t)$ | | ↘ | $\frac{9}{4}$ | ↗ | |

Suy ra $\min\limits_{t\in(0;+\infty)}f(t)=\frac{9}{4}$ khi $t=\frac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $S=\frac{9}{4}$ khi $t=\log_a b=\frac{1}{2}\Leftrightarrow b=\sqrt{a}$.

**Câu 52.** **(Hải Hậu - Nam Định - 2020)** Với các số thực dương $x,y,z$ thay đổi sao cho $\log_2\left(\frac{x+2y+2z}{x^2+y^2+z^2}\right)=x(x-4)+y(y-8)+z(z-8)-2$, gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\frac{x^2+y^2+z^2-4x-7y-11z+8}{6x+5y-86}$ thứ tự là $M$ và $m$. Khi đó $M+m$ bằng:

**A.** $-\frac{3}{2}$. **B.** $1$. **C.** $-\frac{5}{2}$. **D.** $-\frac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

+) Ta có $\log_2\left(\frac{x+2y+2z}{x^2+y^2+z^2}\right)=x(x-4)+y(y-8)+z(z-8)-2$

$\Leftrightarrow\log_2 4(x+2y+2z)-\log_2(x^2+y^2+z^2)=x^2+y^2+z^2-4(x+2y+2z)$

$\Leftrightarrow\log_2 4(x+2y+2z)+4(x+2y+2z)=\log_2(x^2+y^2+z^2)+x^2+y^2+z^2$ (1).

+) Xét hàm đặc trưng $f(t)=\log_2 t+t, \forall t>0$ có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+t>0, \forall t>0$.

+) Ta có $(1)\Leftrightarrow f\left(4(x+2y+2z)\right)=f\left(x^2+y^2+z^2\right)\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2=4x+8y+8z$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=36$.

+) Thay vào biểu thức $T$, ta được $T=\dfrac{(4x+8y+8z)-4x-7y-11z+8}{6x+5y-86}=\dfrac{y-3z+8}{6x+5y-86}$

$\Rightarrow T(6x+5y-86)=y-3z+8\Leftrightarrow 6Tx+(5T-1)y+3z=8+86T$.

$\Leftrightarrow 6T(x-2)+(5T-1)(y-4)+3(z-4)=8+86T-12T-4(5T-1)-12$

$\Leftrightarrow 6T(x-2)+(5T-1)(y-4)+3(z-4)=54T$

+) Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$\left|6T(x-2)+(5T-1)(y-4)+3(z-4)\right|\le\sqrt{(6T)^2+(5T-1)^2+3^2}.\sqrt{36}$

$\Leftrightarrow (54T)^2\le 36\left((6T)^2+(5T-1)^2+3^2\right)\Leftrightarrow 720T^2+360T-360\le 0\Leftrightarrow -1\le T\le\dfrac{1}{2}$.

Suy ra $M+m=-\dfrac{1}{2}$.

**Câu 53.** **(Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020)** Cho các số thực $x,y$ thỏa mãn $\ln y\ge\ln(x^3+2)-\ln 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $H=e^{4y-x^3-x-2}-\dfrac{x^2+y^2}{2}+x(y+1)-y$.

**A.** $1$. **B.** $0$. **C.** $e$. **D.** $\dfrac{1}{e}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Do $\ln y\ge\ln\left(x^3+2\right)-\ln 3\Leftrightarrow x^3+2\le 3y\Leftrightarrow 4y-x^3-x-2\ge y-x$

$\Rightarrow H\ge e^{y-x}-(y-x)-\dfrac{(y-x)^2}{2}$.

Đặt $t=y-x\Rightarrow t\ge\dfrac{x^3+2}{3}-x=\dfrac{x^3-3x+2}{3}=g(x)$ với $x\ge\sqrt[3]{-2}$.

$g'(x)=\dfrac{3x^2-3}{3}$, $g'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm 1\Rightarrow g(x)\ge g(1)=0$, suy ra $t\ge 0$.

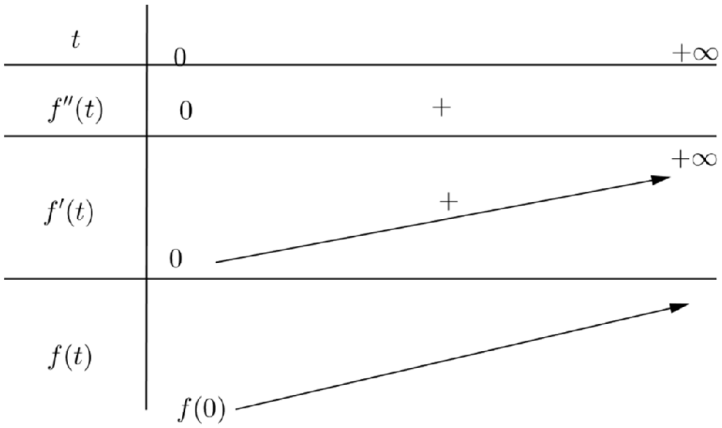
Xét hàm số $f(t)=e^t-t-\dfrac{t^2}{2}$ với $t\ge 0$.

$f'(t)=e^t-1-t$

$f''(t)=e^t-1$.

$f''(t)=0\Leftrightarrow e=0$.

Ta có bảng biến thiên như sau




Suy ra $H \ge f(0)$.

Vậy $\min H = 1$.

**Câu 54.** **(Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020)** Cho $x, y$ là các số thực dương thỏa mãn $2^{2xy+x+y} = \dfrac{8-8xy}{x+y}$.

Khi $P = 2xy^2 + xy$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị của biểu thức $3x + 2y$ bằng

**A.** $4$. **B.** $2$. **C.** $3$. **D.** $5$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $2^{2xy+x+y} = \dfrac{8-8xy}{x+y} \Leftrightarrow 2xy + x + y = \log_2(8-8xy) - \log_2(x+y)$

$\Leftrightarrow \log_2 2(1-xy) + 2(1-xy) = \log_2(x+y) + (x+y)$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ là hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$

Do đó từ $(*)$ ta có $2(1-xy) = x + y \Leftrightarrow x = \dfrac{2-y}{2y+1}$

Suy ra $P = 2xy^2 + xy = -y^2 + 2y \Rightarrow P_{\min} = 1$ khi $y = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}$.

Do đó $3x + 2y = 3$

**Câu 55.** **(Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020)** Cho $x, y$ là các số dương thỏa mãn $\log(x+2y) = \log(x) + \log(y)$. Khi đó, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{x^2}{1+2y} + \dfrac{4y^2}{1+x}$ là:

**A.** $\dfrac{31}{5}$. **B.** $6$. **C.** $\dfrac{29}{5}$. **D.** $\dfrac{32}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $\log(x+2y) = \log(x) + \log(y) \Leftrightarrow \log(x+2y) = \log(xy) \Leftrightarrow x + 2y = xy$

Mặt khác: $xy = x + 2y \ge 2\sqrt{2xy} \Leftrightarrow (xy)^2 - 8(xy) \ge 0 \Rightarrow xy \ge 8$

Áp dụng bất đẳng thức cauchy- Swat ta có: $P = \dfrac{x^2}{1+2y} + \dfrac{4y^2}{1+x} \ge \dfrac{(x+2y)^2}{2+x+2y} = \dfrac{(xy)^2}{xy+2}$

Đặt $xy = t$ suy ra $P \ge \dfrac{(xy)^2}{xy+2} = \dfrac{t^2}{t+2}$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2}{t+2}$, với $t \in [8;+\infty)$.

$f'(t)=\dfrac{t^2+4t}{(t+2)^2}>0,\forall t\ge 8$, suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(8;+\infty)$.

$\Rightarrow f(t)\ge f(8)=\dfrac{32}{5}\Rightarrow P\ge f(t)\ge\dfrac{32}{5}$.

$\Rightarrow \text{Min}P=\dfrac{32}{5}$ khi $\begin{cases}x=2y\\xy=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$.

**Câu 56.** **(Chuyên Sư Phạm Hà Nội - 2020)** Cho các số thực $x,y$ thay đổi, thỏa mãn $x>y>0$ và $\ln(x-y)+\dfrac{1}{2}\ln(xy)=\ln(x+y)$. Giá trị nhỏ nhất của $M=x+y$ là

**A.** $2\sqrt{2}$. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 16.

**Lời giải**

**Chọn C**

Với $x>y>0$, ta có

$\ln(x-y)+\dfrac{1}{2}\ln(xy)=\ln(x+y)\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\ln(xy)=\ln(x+y)-\ln(x-y)\Leftrightarrow\ln(xy)=2\ln\dfrac{x+y}{x-y}$

$\Leftrightarrow\ln(xy)=\ln\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2\Leftrightarrow xy=\left(\dfrac{x+y}{x-y}\right)^2\Leftrightarrow(x-y)^2xy=(x+y)^2$ (*)

Đặt $\begin{cases}u=x+y>0\\v=xy>0\end{cases}$

Ta có (*) $\Leftrightarrow(u^2-4v)v=u^2\Leftrightarrow(v-1)u^2=4v^2\Leftrightarrow u^2=\dfrac{4v^2}{v-1}=f(v),\ (v>1)$

$f'(v)=\dfrac{8v(v-1)-4v^2}{(v-1)^2}=\dfrac{4v(v-2)}{(v-1)^2}$, $f'(v)=0\Leftrightarrow v=2$ do $v>1$

Bảng biến thiên :

| $v$ | 1 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(v)$ | | - | 0 | + | |
| $f(v)$ | $+\infty$ | ↘ | 16 | ↗ | $+\infty$ |

Vậy $\min(x+y)=\min u=4\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=4\\xy=2\\x>y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2+\sqrt{2}\\y=2-\sqrt{2}\end{cases}$

**Câu 57.** **(Sở Hà Nội - Lần 2 - 2020)** Xét $x$, $y$, $z$ là các số thực lớn hơn 1 thỏa mãn điều kiện $xyz=2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$S=\log_2^3 x+\log_2^3 y+\dfrac{1}{4}\log_2^3 z$ bằng

**A.** $\dfrac{1}{32}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{1}{16}$. **D.** $\dfrac{1}{8}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $\log_2(xyz)=1\Leftrightarrow \log_2 x+\log_2 y+\log_2 z=1$. Đặt $a=\log_2 x$, $b=\log_2 y$, $c=\log_2 z$. Khi đó ta có $a, b, c>0$ và $a+b+c=1$.

$$S=\log_2^3 x+\log_2^3 y+\frac{1}{4}\log_2^3 z=a^3+b^3+\frac{1}{4}c^3=(a+b)^3-3ab(a+b)+\frac{1}{4}c^3$$

$$\geq (a+b)^3-3\frac{(a+b)^2}{4}(a+b)+\frac{1}{4}c^3=\frac{1}{4}\left(3c^2-3c+1\right) \text{ với } 0<c<1.$$

Đặt $f(c)=3c^2-3c+1$, $f'(c)=0\Leftrightarrow 6c-3=0\Leftrightarrow c=\frac{1}{2}$.

Ta có bảng biến thiên

| $c$ | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(c)$ | $1$ | $\searrow$ | $\frac{1}{4}$ | $\nearrow$ | $1$ |

Từ đây ta suy ra $S\geq\frac{1}{16}$, dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}a+b+c=1\\c=\frac{1}{2}\\a=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b=\frac{1}{4}\\c=\frac{1}{2}\end{cases}$.

Khi đó $x=y=\sqrt[4]{2}$, $z=\sqrt{2}$.

**Câu 58.** Có bao nhiêu số nguyên $x$ sao cho tồn tại số thực $y$ thỏa mãn $\log_3(x+y)=\log_4\left(x^2+2y^2\right)$?

**A.** 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** Vô số

Nguyễn Bảo Vương

**Phân tích**

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện: $x+y>0$.

Đặt $\log_3(x+y)=\log_4\left(x^2+2y^2\right)=t$, suy ra $\begin{cases}x+y=3^t\\x^2+2y^2=4^t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3^t-y\\\left(3^t-y\right)^2+2y^2=4^t\end{cases}\quad(1)$

Phương trình $(1)\Leftrightarrow 3y^2-2.3^t y+9^t-4^t=0$. Phương trình phải có nghiệm nên:

$$\Delta'=9^t-3\left(9^t-4^t\right)\geq 0\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^{2t}\leq\frac{3}{2}\Leftrightarrow t\leq\frac{1}{2}.$$

Do đó: $\begin{cases}0<x+y\leq\sqrt{3}\\x^2+2y^2\leq 2\end{cases}\Rightarrow x^2\leq 2\Rightarrow x\in\{0;\pm 1\}$ ( vì $x\in\mathbb{Z}$ )

Thử lại:

Với $x=0\Rightarrow\begin{cases}y=3^t\\2y^2=4^t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=\log_{\frac{4}{9}}2\\y=3^{\log_{\frac{4}{9}}2}\end{cases}$

Với $x=1\Rightarrow\begin{cases}1+y=3^t\\1+2y^2=4^t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=0\\y=0\end{cases}$

Với $x=-1\Rightarrow\begin{cases}y=3^t+1\\2y^2+1=4^t\end{cases}\Rightarrow 2.9^t+4.3^t+3-4^t=0\quad(2)$

Khi $t\ge 0\Rightarrow 9^t\ge 4^t$ nên $(2)$ vô nghiệm, khi $t<0\Rightarrow 4^t<1\Rightarrow 1-4^t>0$ nên $(2)$ cũng vô nghiệm.

Vậy $x\in\{0;1\}$.

**Câu 59.** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện: $1\le x\le 10^6$ và $\log\left(10x^2-20x+20\right)=10^{y^2}+y^2-x^2+2x-1$?

**A.** 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện: $10x^2-20x+20>0$, đúng $\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có

$\log\left(10x^2-20x+20\right)=10^{y^2}+y^2-x^2+2x-1\Leftrightarrow\left(x^2-2x+1\right)+\log\left[10\left(x^2-2x+2\right)\right]=10^{y^2}+y^2$

$\Leftrightarrow\left(x^2-2x+1\right)+\log 10+\log\left(x^2-2x+2\right)=10^{y^2}+y^2$

$\Leftrightarrow\left(x^2-2x+2\right)+\log\left(x^2-2x+2\right)=10^{y^2}+y^2$

$\Leftrightarrow 10^{\log\left(x^2-2x+2\right)}+\log\left(x^2-2x+2\right)=10^{y^2}+y^2$ (*).

Xét hàm $f(t)=10^t+t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=10^t.\ln 10+1>0$, $\forall t\in\mathbb{R}$. Do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó

$(*)\Leftrightarrow f\left[\log\left(x^2-2x+2\right)\right]=f\left(y^2\right)\Leftrightarrow\log\left(x^2-2x+2\right)=y^2\Leftrightarrow x^2-2x+2=10^{y^2}$

$\Leftrightarrow(x-1)^2+1=10^{y^2}$.

Vì $1\le x\le 10^6$ nên $1\le(x-1)^2+1=10^{y^2}\le\left(10^6-1\right)^2+1\Rightarrow 0\le y^2\le\log\left[\left(10^6-1\right)^2+1\right]$.

Vì $y\in\mathbb{Z}^+$ nên $y\in\{1;2;3\}$.

+ Với $y=1\Rightarrow x^2-2x+2=10\Leftrightarrow x^2-2x-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\text{ (ktm)}\\x=4\text{ (tm)}\end{array}\right.$.

+ Với $y=2\Rightarrow x^2-2x+2=10^4\Leftrightarrow x^2-2x-9998=0$ (không có giá trị $x$ nguyên nào thỏa mãn).

+ Với $y=3\Rightarrow x^2-2x+2=10^9\Rightarrow x^2-2x-999999998=0$ (không có giá trị $x$ nguyên nào thỏa mãn).

Vậy có một cặp nguyên dương $(x;y)=(4;1)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 60.** Có bao nhiêu số nguyên $y<10$ sao cho tồn tại số nguyên $x$ thỏa mãn $5^{\sqrt{2^y}+x-2}+\sqrt{2^y}=5^{x^2-x-1}+(x-1)^2$?

**A.** 10 **B.** 1 **C.** 5 **D.** Vô số

**Phân tích**

Phương trình dạng $f(u)=f(v)$.

Phương pháp: Chứng minh $y=f(t)$ đơn điệu trên $(a;b)$. Từ phương trình suy ra $u=v$. Từ đó tìm sự liên hệ giữa 2 biến $x,y$ và chọn $x,y$ thích hợp.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $5^{\sqrt{2}^y+x-2}+\sqrt{2}^y=5^{x^2-x-1}+(x-1)^2 \Leftrightarrow 5^{\sqrt{2}^y+x-2}+\sqrt{2}^y+x-1=5^{x^2-x-1}+x^2-x$

Xét: $f(t)=5^{t-1}+t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó từ phương trình trên suy ra:

$\sqrt{2}^y+x-1=x^2-x \Leftrightarrow (x-1)^2=\sqrt{2}^y=2^{\frac{y}{2}} \Leftrightarrow x=1\pm 2^{\frac{y}{2}}$.

Do $x$ nguyên nên ta có $2^{\frac{y}{2}}\in\mathbb{Z}$ và $y<10$ nên $y\in\{0;2;4;6;8\}$.

**Câu 61.** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thoả mãn $1\le x\le 2020$ và $2^y+y=2x+\log_2\left(x+2^{y-1}\right)$

**A.** 2021. **B.** 10. **C.** 2020. **D.** 11.

**Lời giải**

**Chọn D**

Theo đề bài, $2^y+y=2x+\log_2\left(x+2^{y-1}\right)$

$\Leftrightarrow 2^y+\log_2\left(2^y\right)=2x+\log_2\left(x+\frac{2^y}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 2^y+2^y+\log_2\left(2^y\right)=2x+2^y+\log_2\left(\frac{2x+2^y}{2}\right)$

$\Leftrightarrow 2.\left(2^y\right)+\log_2\left(2^y\right)=2\cdot\left(\frac{2x+2^y}{2}\right)+\log_2\left(\frac{2x+2^y}{2}\right)(1)$.

Xét hàm số $f(t)=2t+\log_2 t$, $t>0$.

Vì $f'(t)=2+\frac{1}{t\ln 2}>0\ \forall t>0 \Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

nên $(1)\Leftrightarrow f\left(2^y\right)=f\left(\frac{2x+2^y}{2}\right)\Leftrightarrow 2^y=\frac{2x+2^y}{2}\Leftrightarrow 2.2^y=2x+2^y\Leftrightarrow 2x=2^y\Leftrightarrow x=2^{y-1}$.

Do $1\le x\le 2020$ nên $0\le y-1\le\log_2 2020\Leftrightarrow 1\le y\le 11,98$.

Do $y\in\mathbb{N}^*$ nên $y\in\{1;2;3;...;11\}$, với mỗi giá trị $y$ cho ta 1 giá trị $x$ thoả đề.

Vậy có 11 cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn đề bài.

**Câu 62.** Có bao nhiêu số nguyên $x$ sao cho tồn tại số thực $y$ thỏa mãn $2\log_2(x+y)-\log_2\left(1+\sqrt{3}\right)=\log_{\sqrt{3}}\left(x^2+y^2-1\right)$

**A.** 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 5

**Lời giải**

**Chọn C**

Đặt: $t=2\log_2(x+y)-\log_2\left(1+\sqrt{3}\right)=\log_{\sqrt{3}}\left(x^2+y^2-1\right)$.

Suy ra: $\begin{cases}(x+y)^2=2^{t+\log_2\left(1+\sqrt{3}\right)}\\ x^2+y^2-1=\sqrt{3}^t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)^2=\left(1+\sqrt{3}\right).2^t\\ x^2+y^2=1+\sqrt{3}^t\end{cases}$

Ta có:

$(x+y)^2 \le 2(x^2+y^2)$

$\Leftrightarrow (1+\sqrt{3}).2^t \le 2\left(1+\sqrt{3}^t\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{(1+\sqrt{3})2^t}{2} \le 1+\sqrt{3}^t$ .

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^t + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^t \ge \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

Xét $f(t)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^t + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^t$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^t + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^t \ge \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow f(t) \ge f(1) \Leftrightarrow t \le 1$.

Do đó $\begin{cases} 0 < x+y = 2^{\frac{t+\log_2(1+\sqrt{3})}{2}} \le \sqrt{2\log_2(1+\sqrt{3})} \\ x^2+y^2 = 1+\sqrt{3}^t \le 1+\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow x \in \{0;\pm 1\}$ ( vì $x \in \mathbb{Z}$ )

Thử lại:

Với $x=1$:

$\begin{cases} y = \sqrt{(1+\sqrt{3})2^t} - 1 \\ y^2 = \sqrt{3}^t \end{cases}$

$\Rightarrow \left(\sqrt{(1+\sqrt{3})2^t} - 1\right)^2 - \sqrt{3}^t = 0$

$\Rightarrow (1+\sqrt{3})2^t - 2\sqrt{(1+\sqrt{3}).2^t} - \sqrt{3}^t + 1 = 0$

Ta có: $g(x) = (1+\sqrt{3})2^t - 2\sqrt{(1+\sqrt{3}).2^t} - \sqrt{3}^t + 1$ liên tục trên $[0;1]$ thỏa mãn $g(0)g(1) < 0$ nên phương trình có nghiệm $t \in (0;1)$.

Do đó với $x=1$ thì tồn tại số thực $y$ thỏa mãn $2\log_2(x+y) - \log_2(1+\sqrt{3}) = \log_{\sqrt{3}}(x^2+y^2-1)$

Với $x=-1$:

$\begin{cases} y = \sqrt{(1+\sqrt{3})2^t} + 1 \\ y^2 = \sqrt{3}^t \end{cases}$

$\Rightarrow \left(\sqrt{(1+\sqrt{3})2^t} + 1\right)^2 - \sqrt{3}^t = 0$

$\Rightarrow (1+\sqrt{3})2^t + 2\sqrt{(1+\sqrt{3}).2^t} - \sqrt{3}^t + 1 = 0$

Ta có: $(1+\sqrt{3})2^t + 2\sqrt{(1+\sqrt{3}).2^t} - \sqrt{3}^t + 1 > 0, \forall t \le 1$ nên phương trình vô nghiệm.

Do đó với $x=-1$ thì không tồn tại số thực $y$ thỏa mãn

$2\log_2(x+y) - \log_2(1+\sqrt{3}) = \log_{\sqrt{3}}(x^2+y^2-1)$

Với $x=0$:

Nguyễn Bảo Vương

$\begin{cases} y^2 = \left(1+\sqrt{3}\right)2^t \\ y^2 = 1+\sqrt{3}^t \end{cases}$

$\Rightarrow \left(1+\sqrt{3}\right)2^t = \sqrt{3}^t + 1$

$\Rightarrow \left(1+\sqrt{3}\right)2^t - \sqrt{3}^t - 1 = 0$

Ta có: $h(x) = \left(1+\sqrt{3}\right)2^t - \sqrt{3}^t - 1$ liên tục trên $[-1;0]$ thỏa mãn $h(-1)h(0) < 0$ nên phương trình có nghiệm $t \in (-1;0)$.

Do đó với $x = 0$ thì tồn tại số thực $y$ thỏa mãn $2\log_2(x+y) - \log_2\left(1+\sqrt{3}\right) = \log_{\sqrt{3}}\left(x^2+y^2-1\right)$.

Vậy $x \in \{0;1\}$.

**Câu 63.** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0 \le y \le 2020$ và $\log_3\left(\dfrac{2^x-1}{y}\right) = y+1-2^x$?

**A.** 2019. **B.** 11. **C.** 2020. **D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn B**

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases} y \ne 0 \\ \dfrac{2^x-1}{y} > 0 \Leftrightarrow 2^x > 1 \Leftrightarrow x > 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

Ta có: PT $\Leftrightarrow \log_3\left(2^x-1\right) + 2^x - 1 = \log_3 y + y$ (*)

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ trên $(0;+\infty)$

Khi đó $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 3} + 1 > 0$ do đó hàm số $f(t) = \log_3 t + t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

(*) có dạng $f\left(2^x-1\right) = f(y) \Leftrightarrow y = 2^x - 1$

Vì $0 \le y \le 2020 \Leftrightarrow 0 \le 2^x - 1 \le 2020 \Leftrightarrow 1 \le 2^x \le 2021 \Leftrightarrow 0 \le x \le \log_2(2021)$

$\begin{cases} 0 \le x \le \log_2(2021) \\ x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$. Vậy có 11 cặp $(x;y)$ thỏa mãn.

**Câu 64.** **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020)** Xét các số thực $a,b,x$ thoả mãn $a>1, b>1, 0<x\ne 1$ và $a^{\log_b x} = b^{\log_a(x^2)}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \ln^2 a + \ln^2 b - \ln(ab)$.

**A.** $\dfrac{1-3\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\dfrac{e}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** $-\dfrac{3+2\sqrt{2}}{12}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $a^{\log_b x} = b^{\log_a(x^2)} \Leftrightarrow \ln\left(a^{\log_b x}\right) = \ln\left(b^{\log_a(x^2)}\right) \Leftrightarrow \log_b x.\ln a = 2.\log_a x.\ln b$

$\Leftrightarrow \log_b a.\ln a = 2\ln b \Leftrightarrow \dfrac{\ln a}{\ln b}.\ln a = 2\ln b \Leftrightarrow \ln^2 a = 2\ln^2 b \Rightarrow \ln a = \sqrt{2}\ln b$ (vì $a>1, b>1$).

Thay $\ln a = \sqrt{2}\ln b$ vào biểu thức $P$ ta được

$P = \ln^2 a + \ln^2 b - \ln(ab) = 3\ln^2 b - \left(\sqrt{2}+1\right)\ln b = 3t^2 - \left(\sqrt{2}+1\right)t$ (với $t = \ln b > 0$).

Đặt $f(t) = 3t^2 - \left(\sqrt{2}+1\right)t$. Ta có $f'(t) = 6t - \left(\sqrt{2}+1\right) = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{\sqrt{2}+1}{6} \in (0;+\infty)$.

BBT:

| $t$ | $0$ | | $\dfrac{\sqrt{2}+1}{6}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(t)$ | $0$ | $\searrow$ | $-\dfrac{3+2\sqrt{2}}{12}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Dựa vào BBT, suy ra $\min\limits_{(0;+\infty)} f(t) = -\dfrac{3+2\sqrt{2}}{12}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P$ bằng $-\dfrac{3+2\sqrt{2}}{12}$.

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 19 PHƯƠNG TRÌNH MŨ - LOGARIT

**TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH MỨC 5-6 ĐIỂM**

## Dạng 1. Phương trình logarit

**Phương trình logarit**

+ Nếu $a>0, a\neq 1: \log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$

+ Nếu $a>0, a\neq 1: \log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

+ Nếu $a>0, a\neq 1: \log_a f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = a^{g(x)}$ **(mũ hóa)**

### Dạng 1.1 Phương trình cơ bản

**Câu 1.** **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Nghiệm của phương trình $\log_3(2x-1)=2$ là:

**A.** $x=3$. **B.** $x=5$. **C.** $x=\frac{9}{2}$. **D.** $x=\frac{7}{2}$.

**Câu 2.** **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Nghiệm của phương trình $\log_3(x-1)=2$ là

**A.** $x=8$. **B.** $x=9$. **C.** $x=7$. **D.** $x=10$.

**Câu 3.** **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Nghiệm của phương trình $\log_2(x-1)=3$ là

**A.** $x=10$. **B.** $x=8$. **C.** $x=9$. **D.** $x=7$.

**Câu 4.** **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Nghiệm của phương trình $\log_2(x-2)=3$ là:

**A.** $x=6$. **B.** $x=8$. **C.** $x=11$. **D.** $x=10$.

**Câu 5.** **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Nghiệm của phương trình $\log_3(x-2)=2$ là

**A.** $x=11$. **B.** $x=10$. **C.** $x=7$. **D.** $8$.

**Câu 6.** **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Nghiệm của phương trình $\log_2(x+9)=5$ là

**A.** $x=41$. **B.** $x=23$. **C.** $x=1$. **D.** $x=16$.

**Câu 7.** **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Nghiệm của phương trình $\log_2(x+6)=5$ là:

**A.** $x=4$. **B.** $x=19$. **C.** $x=38$. **D.** $x=26$.

**Câu 8.** **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Nghiệm của phương trình $\log_2(x+7)=5$ là

**A.** $x=18$. **B.** $x=25$. **C.** $x=39$. **D.** $x=3$.

**Câu 9.** **(Mã 101 - 2020 Lần 2)** Nghiệm của phương trình $\log_2(x+8)=5$ bằng

**A.** $x=17$. **B.** $x=24$. **C.** $x=2$. **D.** $x=40$.

**Câu 10.** **(Đề Tham Khảo 2019)** Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x^2-x+2)=1$ là :

**A.** $\{0\}$ **B.** $\{0;1\}$ **C.** $\{-1;0\}$ **D.** $\{1\}$

**Câu 11.** **(Đề Minh Họa 2017)** Giải phương trình $\log_4(x-1)=3$.

**A.** $x=65$ **B.** $x=80$ **C.** $x=82$ **D.** $x=63$

**Câu 12.** **(Mã 110 2017)** Tìm nghiệm của phương trình $\log_2(1-x)=2$.

**A.** $x=5$. **B.** $x=-3$. **C.** $x=-4$. **D.** $x=3$.

**Câu 13.** **(Mã 102 2018)** Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x^2-1)=3$ là

**A.** $\{-\sqrt{10};\sqrt{10}\}$ **B.** $\{-3;3\}$ **C.** $\{-3\}$ **D.** $\{3\}$

**Câu 14.** **(Mã 104 2017)** Tìm nghiệm của phương trình $\log_2(x-5)=4$.

**A.** $x=11$ **B.** $x=13$ **C.** $x=21$ **D.** $x=3$

**Câu 15.** **(Mã 103 2018)** Tập nghiệm của phương trình $\log_3(x^2-7)=2$ là

**A.** $\{4\}$ **B.** $\{-4\}$ **C.** $\{-\sqrt{15};\sqrt{15}\}$ **D.** $\{-4;4\}$

**Câu 16.** **(Mã 105 2017)** Tìm nghiệm của phương trình $\log_{25}(x+1)=\frac{1}{2}$.

**A.** $x=6$ **B.** $x=4$ **C.** $x=\frac{23}{2}$ **D.** $x=-6$

**Câu 17.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Phương trình $\log_3(3x-2)=3$ có nghiệm là

**A.** $x=\frac{25}{3}$. **B.** $x=87$. **C.** $x=\frac{29}{3}$. **D.** $x=\frac{11}{3}$.

**Câu 18.** **(THPT Ba Đình 2019)** Tập nghiệm của phương trình $\log_3(x^2-x+3)=1$ là

**A.** $\{1\}$. **B.** $\{0;1\}$. **C.** $\{-1;0\}$. **D.** $\{0\}$.

**Câu 19.** **(THPT Cù Huy Cận 2019)** Tập nghiệm của phương trình $\log_3(x^2+x+3)=1$ là:

**A.** $\{-1;0\}$. **B.** $\{0;1\}$. **C.** $\{0\}$ **D.** $\{-1\}$.

**Câu 20.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Phương trình $\log_3(3x-2)=3$ có nghiệm là:

**A.** $x=\frac{25}{3}$ **B.** 87 **C.** $x=\frac{29}{3}$ **D.** $x=\frac{11}{3}$

**Câu 21.** **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Tập nghiệm của phương trình $\log(x^2-2x+2)=1$ là

**A.** $\varnothing$. **B.** $\{-2;4\}$. **C.** $\{4\}$. **D.** $\{-2\}$.

**Câu 22.** **(Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Cho phương trình $\log_2(2x-1)^2=2\log_2(x-2)$. Số nghiệm thực của phương trình là:

**A.** 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

**Câu 23.** **(Chuyên Sơn La 2019)** Tập nghiệm của phương trình $\log_3(x^2+2x)=1$ là

**A.** $\{1;-3\}$. **B.** $\{1;3\}$. **C.** $\{0\}$. **D.** $\{-3\}$.

**Câu 24.** **(THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Tập hợp các số thực $m$ để phương trình $\log_2 x=m$ có nghiệm thực là

**A.** $[0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $(0;+\infty)$

**Câu 25.** **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+7)=0$ bằng

**A.** 6 **B.** 5 **C.** 13 **D.** 7

**Câu 26.** **(THPT-Thang-Long-Ha-Noi- 2019)** Tổng các nghiệm của phương trình $\log_4 x^2-\log_2 3=1$ là

**A.** 6 **B.** 5 **C.** 4 **D.** 0

**Câu 27.** **(THPT-Thang-Long-Ha-Noi 2019)** Tập nghiệm của phương trình $\log_{0,25}(x^2-3x)=-1$ là:

**A.** $\{4\}$. **B.** $\{1;-4\}$. **C.** $\left\{\frac{3-2\sqrt{2}}{2};\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\right\}$. **D.** $\{-1;4\}$.

**Câu 28.** **(THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019)** Nghiệm nhỏ nhất của phương trình $\log_5(x^2-3x+5)=1$ là

**A.** $-3$. **B.** $a$. **C.** 3. **D.** 0.

**Câu 29.** **(Sở Hà Nội 2019)** Số nghiệm dương của phương trình $\ln|x^2-5|=0$ là

**A.** 2. **B.** 4. **C.** 0. **D.** 1.

**Câu 30.** **(Chuyên Hạ Long 2019)** Số nghiệm của phương trình $(x+3)\log_2(5-x^2)=0$.

**A.** 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

**Câu 31.** **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019)** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\left(2x^2-5x+2\right)\left[\log_x(7x-6)-2\right]=0$ bằng

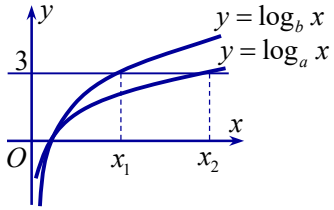
**A.** $\frac{17}{2}$. **B.** 9. **C.** 8. **D.** $\frac{19}{2}$.

**Câu 32.** **(Chuyên ĐHSP Hà Nội 2019)** Tập hợp các số thực $m$ để phương trình $\log_2 x=m$ có nghiệm thực là

**A.** $(0;+\infty)$. **B.** $[0;+\infty)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $\mathbb{R}$.

## Dạng 1.2 Biến đổi đưa về phương trình cơ bản

**Câu 1.** **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Hàm số $y=\log_a x$ và $y=\log_b x$ có đồ thị như hình bên.




Đường thẳng $y=3$ cắt hai đồ thị tại các điểm có hoành độ là $x_1;x_2$. Biết rằng $x_1=2x_2$. Giá trị của $\frac{a}{b}$ bằng

**A.** $\frac{1}{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** 2. **D.** $\sqrt[3]{2}$.

Nguyễn Bảo Vương

**Câu 2.** **(Đề Tham Khảo 2017)** Tìm tập nghiệm $S$ của phương trình $\log_2(x-1)+\log_2(x+1)=3$.

**A.** $S=\{3\}$ **B.** $S=\left\{-\sqrt{10};\sqrt{10}\right\}$ **C.** $S=\{-3;3\}$ **D.** $S=\{4\}$

**Câu 3.** **(Mã 103 - 2019)** Nghiệm của phương trình $\log_2(x+1)+1=\log_2(3x-1)$ là

**A.** $x=1$. **B.** $x=2$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=3$.

**Câu 4.** **(Mã 105 2017)** Tìm tập nghiệm $S$ của phương trình $\log_3(2x+1)-\log_3(x-1)=1$.

**A.** $S=\{3\}$ **B.** $S=\{4\}$ **C.** $S=\{1\}$ **D.** $S=\{-2\}$

**Câu 5.** **(Mã 101 - 2019)** Nghiệm của phương trình $\log_3(x+1)+1=\log_3(4x+1)$

**A.** $x=4$. **B.** $x=2$. **C.** $x=3$. **D.** $x=-3$.

**Câu 6.** **(Mã 104 - 2019)** Nghiệm của phương trình $\log_3(2x+1)=1+\log_3(x-1)$ là

**A.** $x=4$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=2$.

**Câu 7.** **(Mã 102 -2019)** Nghiệm của phương trình $\log_2(x+1)=1+\log_2(x-1)$ là

**A.** $x=3$. **B.** $x=2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-2$.

**Câu 8.** **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Số nghiệm của phương trình $\ln(x+1)+\ln(x+3)=\ln(x+7)$ là

**A.** 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

**Câu 9.** Tìm số nghiệm của phương trình $\log_2 x+\log_2(x-1)=2$

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

**Câu 10.** **(HSG Bắc Ninh 2019)** Số nghiệm của phương trình $\log_3(6+x)+\log_3 9x-5=0$.

**A.** 0 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 3

**Câu 11.** **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương - 2019)** Tìm tập nghiệm $S$ của phương trình: $\log_3(2x+1)-\log_3(x-1)=1$.

**A.** $S=\{3\}$. **B.** $S=\{1\}$. **C.** $S=\{2\}$. **D.** $S=\{4\}$.

**Câu 12.** **(Sở Bắc Giang 2019)** Phương trình $\log_2 x+\log_2(x-1)=1$ có tập nghiệm là

**A.** $S=\{-1;3\}$. **B.** $S=\{1;3\}$. **C.** $S=\{2\}$. **D.** $S=\{1\}$.

**Câu 13.** **(THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Tổng các nghiệm của phương trình $\log_2(x-1)+\log_2(x-2)=\log_5 125$ là

**A.** $\dfrac{3+\sqrt{33}}{2}$. **B.** $\dfrac{3-\sqrt{33}}{2}$. **C.** 3. **D.** $\sqrt{33}$.

**Câu 14.** **(THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019)** Tập nghiệm của phương trình $\log_2 x+\log_2(x-3)=2$ là

**A.** $S=\{4\}$ **B.** $S=\{-1,4\}$ **C.** $S=\{-1\}$ **D.** $S=\{4,5\}$

**Câu 15.** **(Chuyên Thái Nguyên 2019)** Số nghiệm của phương trình $\log_3 x+\log_3(x-6)=\log_3 7$ là

**A.** 0 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 3

**Câu 16.** **(Chuyên Sơn La 2019)** Cho $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, biết rằng $\log_2(\sin x)+\log_2(\cos x)=-2$ và $\log_2(\sin x+\cos x)=\dfrac{1}{2}(\log_2 n+1)$. Giá trị của $n$ bằng

**A.** $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

Nguyễn Bảo Vương

**Câu 17.** **(Mã 110 2017)** Tìm tập nghiệm $S$ của phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(x+1)=1$.

**A.** $S=\{3\}$ **B.** $S=\{2-\sqrt{5};2+\sqrt{5}\}$

**C.** $S=\{2+\sqrt{5}\}$ **D.** $S=\left\{\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right\}$

**Câu 18.** **(THPT Hàm Rồng Thanh Hóa 2019)** Số nghiệm của phương trình $\log_3(x^2+4x)+\log_{\frac{1}{3}}(2x+3)=0$ là

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

**Câu 19.** **(Đề Tham Khảo 2018)** Tổng giá trị tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3 x.\log_9 x.\log_{27} x.\log_{81} x=\dfrac{2}{3}$ bằng

**A.** 0. **B.** $\dfrac{80}{9}$. **C.** 9. **D.** $\dfrac{82}{9}$.

**Câu 20.** **(VTED 2019)** Nghiệm của phương trình $\log_2 x+\log_4 x=\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{3}$ là

**A.** $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$. **B.** $x=\sqrt[3]{3}$. **C.** $x=\dfrac{1}{3}$. **D.** $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

**Câu 21.** **(THPT Lê Quý Đôn Dà Nẵng -2019)** Gọi $S$ là tập nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x+1)=\log_2(x^2+2)-1$. Số phần tử của tập $S$ là

**A.** 2 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 0

**Câu 22.** **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Số nghiệm thục của phương trình $3\log_3(x-1)-\log_{\frac{1}{3}}(x-5)^3=3$ là

**A.** 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 0

**Câu 23.** **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Tổng các nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{3}}(x-2)+\log_3(x-4)^2=0$ là $S=a+b\sqrt{2}$ (với $a,b$ là các số nguyên). Giá trị của biểu thức $Q=a.b$ bằng

**A.** 0. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 6.

## Dạng 2. Phương trình mũ

**Phương pháp đưa về cùng cơ số.**

□ Phương trình mũ

+ Nếu $a>0,a\neq 1$ thì $a^{f(x)}=a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)=g(x)$

+ Nếu a chứa ẩn thì $a^{f(x)}=a^{g(x)}\Leftrightarrow (a-1)\left[f(x)-g(x)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\f(x)=g(x)\end{array}\right.$

+ $a^{f(x)}=b^{g(x)}\Leftrightarrow\log_a a^{f(x)}=\log_a b^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)=\log_a b.g(x)$ (**logarit hóa**).

### Dạng 2.1 Phương trình cơ bản

**Câu 1.** **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Nghiệm của phương trình $3^{x-1}=27$ là

**A.** $x=4$. **B.** $x=3$. **C.** $x=2$. **D.** $x=1$.

**Câu 2.** **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Nghiệm của phương trình $3^{x-1}=9$ là:

**A.** $x=-2$. **B.** $x=3$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-3$.

**Câu 3.** **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Nghiệm của phương trình $3^{x-2}=9$ là

**A.** $x=-3$. **B.** $x=3$. **C.** $x=4$. **D.** $x=-4$.

**Câu 4.** **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Nghiệm của phương trình $3^{x+1}=9$ là

**A.** $x=1$. **B.** $x=2$. **C.** $x=-2$. **D.** $x=-1$.

**Câu 5.** **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Nghiệm của phương trình $3^{x+2}=27$ là

**A.** $x=-2$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=1$.

**Câu 6.** **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Nghiệm của phương trình $2^{2x-4}=2^x$ là

**A.** $x=16$. **B.** $x=-16$. **C.** $x=-4$. **D.** $x=4$.

**Câu 7.** **(Mã 101 - 2020 Lần 2)** Nghiệm của phương trình $2^{2x-3}=2^x$ là

**A.** $x=8$. **B.** $x=-8$. **C.** $x=3$. **D.** $x=-3$.

**Câu 8.** **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Nghiệm của phương trình $2^{2x-2}=2^x$ là

**A.** $x=-2$. **B.** $x=2$. **C.** $x=-4$. **D.** $x=4$.

**Câu 9.** **(Mã 101 - 2019)** Nghiệm của phương trình: $3^{2x-1}=27$ là

**A.** $x=1$. **B.** $x=2$. **C.** $x=4$. **D.** $x=5$.

**Câu 10.** **(Mã 102 - 2019)** Nghiệm của phương trình $3^{2x+1}=27$ là

**A.** 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

**Câu 11.** Tìm nghiệm của phương trình $3^{x-1}=27$

**A.** $x=10$ **B.** $x=9$ **C.** $x=3$ **D.** $x=4$

**Câu 12.** **(Mã 104 2018)** Phương trình $5^{2x+1}=125$ có nghiệm là

**A.** $x=\frac{5}{2}$ **B.** $x=1$ **C.** $x=3$ **D.** $x=\frac{3}{2}$

**Câu 13.** **(Mã 101 2018)** Phương trình $2^{2x+1}=32$ có nghiệm là

**A.** $x=3$ **B.** $x=\frac{5}{2}$ **C.** $x=2$ **D.** $x=\frac{3}{2}$

**Câu 14.** **(Mã 104 - 2019)** Nghiệm của phương trình $2^{2x-1}=32$ là

**A.** $x=2$. **B.** $x=\frac{17}{2}$. **C.** $x=\frac{5}{2}$. **D.** $x=3$.

**Câu 15.** **(Mã 103 - 2019)** Nghiệm của phương trình $2^{2x-1}=8$ là

**A.** $x=2$. **B.** $x=\frac{5}{2}$. **C.** $x=1$. **D.** $x=\frac{3}{2}$.

**Câu 16.** **(Mã 104 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của $m$ để phương trình $3^x=m$ có nghiệm thực.

**A.** $m\ge 1$ **B.** $m\ge 0$ **C.** $m>0$ **D.** $m\ne 0$

**Câu 17.** **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Tìm tập nghiệm $S$ của phương trình $5^{2x^2-x}=5$.

**A.** $S=\varnothing$ **B.** $S=\left\{0;\frac{1}{2}\right\}$ **C.** $S=\{0;2\}$ **D.** $S=\left\{1;-\frac{1}{2}\right\}$

**Câu 18.** **(Chuyên Bắc Ninh 2019)** Tìm tập nghiệm $S$ của phương trình $2^{x+1}=8$.

**A.** $S=\{4\}$. **B.** $S=\{1\}$. **C.** $S=\{3\}$. **D.** $S=\{2\}$.

**Câu 19.** **(Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ An 2019)** Phương trình $\left(\sqrt{5}\right)^{x^2+4x+6}=\log_2 128$ có bao nhiêu nghiệm?

**A.** 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 0

**Câu 20.** **(THPT - Yên Định Thanh Hóa 2019)** Tập nghiệm $S$ của phương trình $3^{x^2-2x}=27$.

**A.** $S=\{1;3\}$. **B.** $S=\{-3;1\}$. **C.** $S=\{-3;-1\}$. **D.** $S=\{-1;3\}$.

**Câu 21.** **(THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $e^{x^2}=\sqrt{3}$ là:

**A.** 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

**Câu 22.** **(Sở Ninh Bình 2019)** Phương trình $5^{x+2}-1=0$ có tập nghiệm là

**A.** $S=\{3\}$. **B.** $S=\{2\}$. **C.** $S=\{0\}$. **D.** $S=\{-2\}$.

**Câu 23.** **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Họ nghiệm của phương trình $4^{\cos^2 x}-1=0$ là

**A.** $\{k\pi;k\in\mathbb{Z}\}$. **B.** $\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$. **C.** $\{k2\pi;k\in\mathbb{Z}\}$. **D.** $\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$.

**Câu 24.** **(Chuyên Lê Thánh Tông 2019)** Cho biết $9^x-12^2=0$, tính giá trị của biểu thức $P=\frac{1}{3^{-x-1}}-8.9^{\frac{x-1}{2}}+19$.

**A.** 31. **B.** 23. **C.** 22. **D.** 15.

**Câu 25.** **(Chuyên Bắc Ninh 2019)** Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $2^{2x^2+5x+4}=4$

**A.** $-\frac{5}{2}$. **B.** $-1$. **C.** 1. **D.** $\frac{5}{2}$.

**Câu 26.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $3^{2x-1}+2m^2-m-3=0$ có nghiệm.

**A.** $m\in\left(-1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $m\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $m\in(0;+\infty)$. **D.** $m\in\left[-1;\frac{3}{2}\right]$.

**Câu 27.** Cho a, b là hai số thực khác 0, biết: $\left(\frac{1}{125}\right)^{a^2+4ab}=\left(\sqrt[3]{625}\right)^{3a^2-8ab}$. Tỉ số $\frac{a}{b}$ là:

**A.** $\frac{-8}{7}$ **B.** $\frac{1}{7}$ **C.** $\frac{4}{7}$ **D.** $\frac{-4}{21}$

**Câu 28.** Tổng các nghiệm của phương trình $2^{x^2-2x+1}=8$ bằng

**A.** $0$. **B.** $-2$. **C.** $2$. **D.** $1$.

**Câu 29.** **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Phương trình $2^{2x^2+5x+4}=4$ có tổng tất cả các nghiệm bằng

**A.** $1$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $-1$. **D.** $-\frac{5}{2}$.

**Câu 30.** **(THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019)** Phương trình $5^{2x^2+5x+4}=25$ có tổng tất cả các nghiệm bằng

**A.** $1$ **B.** $\frac{5}{2}$ **C.** $-1$ **D.** $-\frac{5}{2}$

**Câu 31.** **(Sở Bắc Ninh 2019)** Phương trình $7^{2x^2+5x+4}=49$ có tổng tất cả các nghiệm bằng

**A.** $-\frac{5}{2}$. **B.** $1$. **C.** $-1$. **D.** $\frac{5}{2}$.

**Dạng 2.2 Biến đổi đưa về phương trình cơ bản**

**Câu 1.** Tập nghiệm của phương trình: $4^{x+1}+4^{x-1}=272$ là

**A.** $\{3;2\}$. **B.** $\{2\}$. **C.** $\{3\}$. **D.** $\{3;5\}$.

**Câu 2.** **(HKI-NK HCM-2019)** Phương trình $27^{2x-3}=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2}$ có tập nghiệm là

**A.** $\{-1;7\}$. **B.** $\{-1;-7\}$. **C.** $\{1;7\}$. **D.** $\{1;-7\}$.

**Câu 3.** **(THPT Quỳnh Lưu- Nghệ An- 2019)** Phương trình $3^x.2^{x+1}=72$ có nghiệm là

**A.** $x=\frac{5}{2}$. **B.** $x=2$. **C.** $x=\frac{3}{2}$. **D.** $x=3$.

**Câu 4.** **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-2x-3}=5^{x+1}$ là

**A.** $x=-1;\ x=2$. **B.** $x=1;\ x=-2$. **C.** $x=1;\ x=2$. **D.** Vô nghiệm.

**Câu 5.** Tập nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3}=7^{x+1}$ là

**A.** $\{-1\}$. **B.** $\{-1;2\}$. **C.** $\{-1;4\}$. **D.** $\{2\}$.

**Câu 6.** Tổng các nghiệm của phương trình $2^{x^2+2x}=8^{2-x}$ bằng

**A.** $-6$. **B.** $-5$. **C.** $5$. **D.** $6$.

**Câu 7.** **(SGD Điện Biên - 2019)** Gọi $x_1, x_2$ là hai nghiệm của phương trình $7^{x+1}=\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3}$. Khi đó $x_1^2+x_2^2$ bằng:

**A.** $17$. **B.** $1$. **C.** $5$. **D.** $3$.

**Câu 8.** Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $5^{3x-2}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2}$ bằng

**A.** $2$. **B.** $5$. **C.** $0$. **D.** $3$.

**Câu 9.** Nghiệm của phương trình $2^{7x-1}=8^{2x-1}$ là

**A.** $x=2$. **B.** $x=-3$. **C.** $x=-2$. **D.** $x=1$.

Nguyễn Bảo Vương

**Câu 10.** **(THPT Lương Văn Tụy - Ninh Bình - 2018)** Giải phương trình $(2,5)^{5x-7}=\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1}$.

**A.** $x\ge 1$. **B.** $x=1$. **C.** $x<1$. **D.** $x=2$.

**Câu 11.** **(THPT Nguyễn Thị Minh Khai - Hà Tĩnh - 2018)** Phương trình $3^{x^2-4}=\left(\frac{1}{9}\right)^{3x-1}$ có hai nghiệm $x_1$, $x_2$. Tính $x_1x_2$.

**A.** $-6$. **B.** $-5$. **C.** $6$. **D.** $-2$.

**Câu 12.** **(Sở Quảng Nam - 2018)** Tổng các nghiệm của phương trình $2^{x^2+2x}=8^{2-x}$ bằng

**A.** $5$. **B.** $-5$. **C.** $6$. **D.** $-6$.

**Câu 13.** **(THPT Thăng Long - Hà Nội - 2018)** Tập nghiệm của phương trình $4^{x-x^2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ là

**A.** $\left\{0;\frac{2}{3}\right\}$. **B.** $\left\{0;\frac{1}{2}\right\}$. **C.** $\{0;2\}$. **D.** $\left\{0;\frac{3}{2}\right\}$.

**Câu 14.** **(THPT Hải An - Hải Phòng - 2018)** Tìm nghiệm của phương trình $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2x+1}=2-\sqrt{3}$.

**A.** $x=\frac{1}{4}$. **B.** $x=-1+\log_{7+4\sqrt{3}}\left(2-\sqrt{3}\right)$.

**C.** $x=-\frac{3}{4}$. **D.** $x=\frac{25-15\sqrt{3}}{2}$.

**Câu 15.** **(THPT Kim Liên - Hà Nội - 2018)** Tính tổng $S=x_1+x_2$ biết $x_1$, $x_2$ là các giá trị thực thỏa mãn đẳng thức $2^{x^2-6x+1}=\left(\frac{1}{4}\right)^{x-3}$.

Nguyễn Bảo Vương

**A.** $S=-5$. **B.** $S=8$. **C.** $S=4$. **D.** $S=2$.

**Câu 16.** **(Chuyên Hùng Vương - Bình Dương - 2018)** Tập nghiệm $S$ của phương trình $\left(\frac{4}{7}\right)^{x}\left(\frac{7}{4}\right)^{3x-1}-\frac{16}{49}=0$ là

**A.** $S=\left\{\frac{-1}{2}\right\}$ **B.** $S=\{2\}$ **C.** $S=\left\{\frac{1}{2};\frac{-1}{2}\right\}$ **D.** $S=\left\{\frac{-1}{2};2\right\}$

**Câu 17.** **(THPT Nguyễn Thị Minh Khai - Hà Nội - 2018)** Tích các nghiệm của phương trình $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1}=\left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$ là

**A.** $-2$. **B.** $-4$. **C.** $4$. **D.** $2$.

**Câu 18.** **(THCS&THPT Nguyễn Khuyến - Bình Dương - 2018)** Giải phương trình $4^{2x+3}=8^{4-x}$.

**A.** $x=\frac{6}{7}$. **B.** $x=\frac{2}{3}$. **C.** $x=2$. **D.** $x=\frac{4}{5}$.

Chuyên đề 19 PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH MŨ - LOGARIT

**TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ + GIỎI MỨC 7-8-9-10 ĐIỂM**

## DẠNG 1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

### Dạng 1.1 Phương pháp đưa về cùng cơ số

+ Nếu $a>0,\ a\neq 1$: $\boxed{\log_a x=b\Leftrightarrow x=a^b}$ $(1)$

+ Nếu $a>0,\ a\neq 1$: $\boxed{\log_a f(x)=\log_a g(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)}$ $(2)$

+ Nếu $a>0,\ a\neq 1$: $\boxed{\log_a f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)=a^{g(x)}}$ **(mũ hóa)** $(3)$

**Các bước giải phương trình & bất phương trình mũ – logarit**

**Bước 1**. Đặt điều kiện (điều kiện đại số + điều kiện loga), ta cần chú ý:

$$\log_a b \xrightarrow{ĐK}\begin{cases}0<a\neq 1\\ b>0\end{cases} \text{ và } \begin{cases}\log_a\left[f(x)\right] & \xrightarrow[\text{mũ lẻ}]{ĐK} f(x)>0\\ \log_a\left[f(x)\right] & \xrightarrow[\text{mũ chẵn}]{ĐK} f(x)\neq 0\end{cases}.$$

**Bước 2**. Dùng các công thức và biến đổi đưa về các cơ bản trên, rồi giải.

**Bước 3**. So với điều kiện và kết luận nghiệm.

**Câu 1.** **(Mã 110 2017)** Tìm tập nghiệm $S$ của phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(x+1)=1$.

**A.** $S=\{3\}$ **B.** $S=\{2-\sqrt{5};2+\sqrt{5}\}$

**C.** $S=\{2+\sqrt{5}\}$ **D.** $S=\left\{\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right\}$

Nguyễn Bảo Vương

**Câu 2.** **(THPT Hàm Rồng Thanh Hóa 2019)** Số nghiệm của phương trình $\log_3\left(x^2+4x\right)+\log_{\frac{1}{3}}(2x+3)=0$ là

**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** $0$. **D.** $1$.

**Câu 3.** **(Đề Tham Khảo 2018)** Tổng giá trị tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3 x.\log_9 x.\log_{27} x.\log_{81} x=\dfrac{2}{3}$ bằng

**A.** $0$. **B.** $\dfrac{80}{9}$. **C.** $9$. **D.** $\dfrac{82}{9}$.

**Câu 4.** Nghiệm của phương trình $\log_2 x+\log_4 x=\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{3}$ là

**A.** $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$. **B.** $x=\sqrt[3]{3}$. **C.** $x=\dfrac{1}{3}$. **D.** $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

**Câu 5.** **(THPT Lê Quý Đôn Dà Nẵng 2019)** Gọi $S$ là tập nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x+1)=\log_2\left(x^2+2\right)-1$. Số phần tử của tập $S$ là

**A.** 2 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 0

**Câu 6.** **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Số nghiệm thục của phương trình $3\log_3(x-1)-\log_{\frac{1}{3}}(x-5)^3=3$ là

**A.** 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 0

**Câu 7.** **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Tổng các nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{3}}(x-2)+\log_3(x-4)^2=0$ là $S=a+b\sqrt{2}$ (với $a,b$ là các số nguyên). Giá trị của biểu thức $Q=a.b$ bằng

**A.** 0. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 6.

**Câu 8.** **(Chuyên Nguyễn Du-ĐăkLăk 2019)** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2(x+1)+\log_2 x=1$ là

**A.** $1$. **B.** $-1$. **C.** $2$. **D.** $-2$.

**Câu 9.** Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $\frac{1}{2}\log\left(x^2-4x-1\right)=\log 8x-\log 4x$ bằng

**A.** $4$. **B.** $3$. **C.** $5$. **D.** $1$.

**Câu 10.** Gọi $S$ là tập nghiệm của phương trình $2\log_2(2x-2)+\log_2(x-3)^2=2$ trên $\mathbb{R}$. Tổng các phần tử của $S$ bằng

**A.** $6+\sqrt{2}$. **B.** $8+\sqrt{2}$. **C.** $8$. **D.** $4+\sqrt{2}$.

**Câu 11.** **(SGD Nam Định 2019)** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3\sqrt{x^2-5x+6}+\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x-2}=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{81}}(x+3)^4$ bằng

**A.** $\sqrt{10}$. **B.** $3\sqrt{10}$. **C.** $0$. **D.** $3$.

**Câu 12.** **(SGD Gia Lai 2019)** Cho hai số thực dương $x$, $y$ thỏa mãn $\log_2\left(x^2+y^2\right)=1+\log_2 xy$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $x=y$. **B.** $x>y$. **C.** $x<y$. **D.** $x=y^2$.

**Câu 13.** Biết phương trình $\log_2\left(x^2-5x+1\right)=\log_4 9$ có hai nghiệm thực $x_1$, $x_2$. Tích $x_1.x_2$ bằng:

**A.** $-8$. **B.** $-2$. **C.** $1$. **D.** $5$.

**Câu 14.** **(Chuyên Long An-2019)** Tìm nghiệm phương trình $2\log_4 x+\log_2(x-3)=2$.

**A.** $x=4$. **B.** $x=1$. **C.** $x=3$. **D.** $x=16$.

**Câu 15.** **(Chuyên - KHTN - Hà Nội - 2019)** Số nghiệm của phương trình $\log_3(x-1)^2+\log_{\sqrt{3}}(2x-1)=2$ là

**A.** $2$. **B.** $1$. **C.** $4$. **D.** $3$.

**Câu 16.** **(Sở Quảng Trị 2019)** Số nghiệm của phương trình $\log_3\left(x^2+4x\right)+\log_{\frac{1}{3}}(2x+3)=0$ là

**A.** $2$. **B.** $0$. **C.** $3$. **D.** $1$.

**Câu 17.** Biết nghiệm lớn nhất của phương trình $\log_{\sqrt{2}}x+\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)=1$ là $x=a+b\sqrt{2}$ ($a,b$ là hai số nguyên ). Giá trị của $a+2b$ bằng

**A.** $4$. **B.** $6$. **C.** $0$. **D.** $1$.

**Câu 18.** Tính tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_{\sqrt{3}}(x-2)+\log_3(x-4)^2=0$.

**A.** $6+\sqrt{2}$. **B.** $6$. **C.** $3+\sqrt{2}$. **D.** $9$.

**Câu 19.** Gọi $S$ là tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\frac{1}{2}\log x^2+\log(x+10)=2-\log 4$. Tính $S$?

**A.** $S=-10$. **B.** $S=-15$. **C.** $S=-10+5\sqrt{2}$. **D.** $S=8-5\sqrt{2}$.

**Câu 20.** Cho phương trình $\log_4(x+1)^2+2=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{4-x}+\log_8(4+x)^3$. Tổng các nghiệm của phương trình trên là

**A.** $4+2\sqrt{6}$. **B.** $-4$. **C.** $4-2\sqrt{6}$. **D.** $2-2\sqrt{3}$.

**Câu 21.** Cho $\log_8|x|+\log_4 y^2=5$ và $\log_8|y|+\log_4 x^2=7$. Tìm giá trị của biểu thức $P=|x|-|y|$.

**A.** $P=56$. **B.** $P=16$. **C.** $P=8$. **D.** $P=64$.

**Câu 22.** Cho $a,b,x>0$; $a>b$ và $b,x\neq 1$ thỏa mãn $\log_x\dfrac{a+2b}{3}=\log_x\sqrt{a}+\dfrac{1}{\log_b x^2}$.

Khi đó biểu thức $P=\dfrac{2a^2+3ab+b^2}{(a+2b)^2}$ có giá trị bằng:

**A.** $P=\dfrac{5}{4}$. **B.** $P=\dfrac{2}{3}$. **C.** $P=\dfrac{16}{15}$. **D.** $P=\dfrac{4}{5}$.

**Câu 23.** Cho $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, biết rằng $\log_2(\sin x)+\log_2(\cos x)=-2$ và $\log_2(\sin x+\cos x)=\dfrac{1}{2}(\log_2 n+1)$. Giá trị của $n$ bằng

**A.** $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

**Câu 24.** **(Kim Liên - Hà Nội - 2018)** Biết rằng phương trình $2\ln(x+2)+\ln 4=\ln x+4\ln 3$ có hai nghiệm phân biệt $x_1$, $x_2$ $(x_1<x_2)$. Tính $P=\dfrac{x_1}{x_2}$.

**A.** $\dfrac{1}{4}$. **B.** $64$. **C.** $\dfrac{1}{64}$. **D.** $4$.

**Câu 25.** **(THPT Lê Xoay - 2018)** Phương trình $\log_{49}x^2+\dfrac{1}{2}\log_7(x-1)^2=\log_7\left(\log_{\sqrt{3}}3\right)$ có bao nhiêu nghiệm?

**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** $1$. **D.** $4$.

**Câu 26.** **(THPT Lương Văn Tụy - Ninh Bình - 2018)** Phương trình $\log_4(x+1)^2+2=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{4-x}+\log_8(4+x)^3$ có bao nhiêu nghiệm?

**A.** Vô nghiệm. **B.** Một nghiệm. **C.** Hai nghiệm. **D.** Ba nghiệm.

**Câu 27.** **(SGD&ĐT BRVT - 2018)** Tổng giá trị tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2(x+2)+\log_4(x-5)^2+\log_{\frac{1}{2}}8=0$ bằng

**A.** $6$. **B.** $3$. **C.** $9$. **D.** $12$.

**Câu 28.** **(Xuân Trường - Nam Định - 2018)** Cho phương trình $\log_2\left(x-\sqrt{x^2-1}\right).\log_3\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\log_6\left|x-\sqrt{x^2-1}\right|$. Biết phương trình có một nghiệm là 1 và một nghiệm còn lại có dạng $x=\dfrac{1}{2}\left(a^{\log_b c}+a^{-\log_b c}\right)$ (với $a$, $c$ là các số nguyên tố và $a>c$). Khi đó giá trị của $a^2-2b+3c$ bằng:

**A.** $0$. **B.** $3$. **C.** $6$. **D.** $4$.

**Dạng 1.2 Phương pháp đặt ẩn phụ**

① Loại 1. $P\left(\log_a f(x)\right)=0\xrightarrow{PP}$ đặt $t=\log_a f(x)$.

② Loại 2. Sử dụng công thức $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$ để đặt $t=a^{\log_b x}\Rightarrow t=x^{\log_b a}$.

**Câu 29.** Phương trình $\log_x 2+\log_2 x=\dfrac{5}{2}$ có hai nghiệm $x_1,x_2\,(x_1<x_2)$. Khi đó tổng $x^2_1+x_2$ bằng

**A.** $\frac{9}{2}$. **B.** $3$. **C.** $6$. **D.** $\frac{9}{4}$.

**Câu 30.** **(SGD Gia Lai 2019)** Số nghiệm của phương trình $\log_2^2 x^2+8\log_2 x+4=0$ là:

**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** $0$. **D.** $1$.

**Câu 31.** Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3^2 x-2\log_3 x-7=0$ là

**A.** $9$. **B.** $-7$. **C.** $1$. **D.** $2$.

**Câu 32.** **(Yên Dũng 2-Bắc Giang 2019)** Tổng các nghiệm của phương trình $\log_2^2 x-\log_2 9.\log_3 x=3$ là

**A.** $2$. **B.** $\frac{17}{2}$. **C.** $8$. **D.** $-2$.

**Câu 33.** **(THPT Hai Bà Trưng - Huế - 2019)** Biết phương trình $\log_2^2(2x)-5\log_2 x=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1$ và $x_2$. Tính $x_1.x_2$.

**A.** $8$. **B.** $5$. **C.** $3$. **D.** $1$.

**Câu 34.** **(Chuyên Đại học Vinh - 2019)** Biết rằng phương trình $\log_2^2 x-7\log_2 x+9=0$ có 2 nghiệm $x_1,x_2$. Giá trị của $x_1x_2$ bằng

**A.** $128$. **B.** $64$. **C.** $9$. **D.** $512$.

**Câu 35.** **(Hội 8 trường chuyên ĐBSH - 2019)** Cho phương trình $\log_2^2(4x)-\log_{\sqrt{2}}(2x)=5$. Nghiệm nhỏ nhất của phương trình thuộc khoảng

**A.** $(0;1)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(5;9)$. **D.** $(1;3)$.

**Câu 36.** Gọi $T$ là tổng các nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{3}}^2 x-5\log_3 x+4=0$. Tính $T$.

**A.** $L=4$. **B.** $T=-5$. **C.** $T=84$. **D.** $T=5$.

**Câu 37.** **(Ngô Quyền - Hải Phòng 2019)** Phương trình $\log_2^2 x-5\log_2 x+4=0$ có hai nghiệm $x_1,x_2$. Tính tích $x_1.x_2$.

**A.** $32$. **B.** $36$. **C.** $8$. **D.** $16$.

**Câu 38.** **(Chuyên ĐH Vinh 2019)** Cho các số thực a, b thỏa mã $1<a<b$ và $\log_a b+\log_b a^2=3$. Tính giá trị của biểu thức $T=\log_{ab}\frac{a^2+b}{2}$.

**A.** $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $6$. **D.** $\frac{2}{3}$.

**Câu 39.** Biết rằng phương trình $\log_2^2 x-\log_2(2018x)-2019=0$ có hai nghiệm thực $x_1,x_2$. Tích $x_1.x_2$ bằng

**A.** $\log_2 2018$. **B.** $0,5$. **C.** $1$. **D.** $2$.

**Câu 40.** Cho phương trình $\log_3^2(3x)-\log_3^2 x^2-1=0$. Biết phương trình có 2 nghiệm, tính tích $P$ của hai nghiệm đó.

**A.** $P=9$. **B.** $P=\frac{2}{3}$. **C.** $P=\sqrt[3]{9}$. **D.** $P=1$.

**Câu 41.** **(THPT Ba Đình 2019)** Biết rằng phương trình $\log_3^2 \mathrm{x}=\log_3\frac{\mathrm{x}^4}{3}$ có hai nghiệm $a$ và $b$. Khi đó $ab$ bằng

**A.** $8$. **B.** $81$. **C.** $9$. **D.** $64$.

**Câu 42.** **(Chuyên Quốc Học Huế -2019)** Gọi $T$ là tổng các nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{3}}^2 x-5\log_3 x+4=0$. Tính $T$.

**A.** $T=4$ **B.** $T=-4$ **C.** $T=84$ **D.** $T=5$

**Câu 43.** **(Cụm 8 Trường Chuyên 2019)** Cho phương trình $\log_2^2(4x)-\log_{\sqrt{2}}(2x)=5$. Nghiệm nhỏ nhất của phương trình thuộc khoảng nào sau đây?

**A.** $(1;3)$. **B.** $(5;9)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(3;5)$.

**Câu 44.** **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3^2 x-2\log_3 x-7=0$ là

**A.** 9. **B.** –7. **C.** 1. **D.** 2.

**Câu 45.** **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Cho 2 số thực dương $a$ và $b$ thỏa mãn $\log_9 a^4+\log_3 b=8$ và $\log_3 a+\log_{\sqrt[3]{3}} b=9$. Giá trị biểu thức $P=ab+1$ bằng

**A.** 82. **B.** 27. **C.** 243. **D.** 244.

**Câu 46.** **(Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Biết phương trình $\log_2^2 x-7\log_2 x+9=0$ có hai nghiệm $x_1,x_2$. Giá trị $x_1.x_2$ bằng

**A.** 128 **B.** 64 **C.** 9 **D.** 512

**Câu 47.** **(Mã 104 2017)** Xét các số nguyên dương $a$, $b$ sao cho phương trình $a\ln^2 x+b\ln x+5=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1$, $x_2$ và phương trình $5\log^2 x+b\log x+a=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_3$, $x_4$ thỏa mãn $x_1x_2>x_3x_4$. Tính giá trị nhỏ nhất $S_{\min}$ của $S=2a+3b$.

**A.** $S_{\min}=17$ **B.** $S_{\min}=30$ **C.** $S_{\min}=25$ **D.** $S_{\min}=33$

**Câu 48.** **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Tích các nghiệm của phương trình $\log_x(125x).\log_{25}^2 x=1$.

**A.** 630. **B.** $\frac{1}{125}$. **C.** $\frac{630}{625}$. **D.** $\frac{7}{125}$

**Câu 49.** **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Tích các nghiệm của phương trình $\log_x(125x).\log_{25}^2 x=1$.

**A.** 630. **B.** $\frac{1}{125}$. **C.** $\frac{630}{625}$. **D.** $\frac{7}{125}$

**Câu 50.** **(Kiểm tra năng lực - ĐH - Quốc Tế - 2019)** Xét phương trình $(\log_2 x-1)(\log_3 x+2)=3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** Phương trình trên vô nghiệm.

**B.** Phương trình trên có nghiệm bé hơn 1.

**C.** Phương trình trên có nghiệm lớn hơn 1 và một nghiệm bé hơn 1.

**D.** Phương trình trên chỉ có nghiệm hơn 1.

**Câu 51.** **(Tham khảo 2018)** Cho dãy số $(u_n)$ thỏa mãn $\log u_1+\sqrt{2+\log u_1-2\log u_{10}}=2\log u_{10}$ và $u_{n+1}=2u_n$ với mọi $n\ge 1$. Giá trị nhỏ nhất của $n$ để $u_n>5^{100}$ bằng

**A.** 247. **B.** 248. **C.** 229. **D.** 290.

**Câu 52.** Cho $a$, $b$ là các số dương thỏa mãn $\log_9 a=\log_{16} b=\log_{12}\frac{5b-a}{2}$. Tính giá trị $\frac{a}{b}$.

**A.** $\frac{a}{b}=\frac{3+\sqrt{6}}{4}$. **B.** $\frac{a}{b}=7-2\sqrt{6}$. **C.** $\frac{a}{b}=7+2\sqrt{6}$. **D.** $\frac{a}{b}=\frac{3-\sqrt{6}}{4}$.

**Câu 53.** **(THPT Hai Bà Trưng - Huế - 2019)** Cho hai số thực dương $m,n$ thỏa mãn $\log_4\left(\frac{m}{2}\right)=\log_6 n=\log_9(m+n)$. Tính giá trị của biểu thức $P=\frac{m}{n}$.

Nguyễn Bảo Vương

**A.** $P=2$. **B.** $P=1$. **C.** $P=4$. **D.** $P=\frac{1}{2}$.

**Câu 54.** **(Hội 8 trường chuyên ĐBSH - 2019)** Giả sử $p,q$ là các số thực dương thỏa mãn $\log_{16} p=\log_{20} q=\log_{25}(p+q)$. Tính giá trị của $\frac{p}{q}$.

**A.** $\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)$. **B.** $\frac{8}{5}$. **C.** $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$. **D.** $\frac{4}{5}$.

**Câu 55.** **(TT Diệu Hiền - Cần Thơ - 2018)** Tích các nghiệm của phương trình $\log_x(125x)\log_{25}^2 x=1$ bằng

**A.** $\frac{7}{25}$. **B.** $\frac{630}{625}$. **C.** $\frac{1}{125}$. **D.** $630$.

**Câu 56.** **(Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2018)** Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2^2 x+\sqrt{\log_2 x+1}=1$

**A.** $2^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$. **B.** $1$. **C.** $2^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

**Câu 57.** **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Gọi $x$, $y$ các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\log_9 x=\log_6 y=\log_4(x+y)$ và $\frac{x}{y}=\frac{-a+\sqrt{b}}{2}$, với $a,b$ là hai số nguyên dương. Tính $T=a^2+b^2$.

**A.** $T=26$. **B.** $T=29$. **C.** $T=20$. **D.** $T=25$.

**Câu 58.** **(THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020)** Cho các số thực dương $a,b$ thỏa mãn $\log_4 a=\log_6 b=\log_9(4a-5b)-1$. Đặt $T=\frac{b}{a}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

**A.** $1<T<2$. **B.** $\frac{1}{2}<T<\frac{2}{3}$. **C.** $-2<T<0$. **D.** $0<T<\frac{1}{2}$.

**Dạng 1.3 Phương pháp mũ hóa**

+ Nếu $a>0,\ a\neq 1$: $\boxed{\log_a f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)=a^{g(x)}}$ **(mũ hóa)**

**Câu 59.** **(Cần Thơ 2019)** Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2\left(12-2^x\right)=5-x$ bằng

**A.** $2$. **B.** $32$. **C.** $6$. **D.** $3$.

**Câu 60.** Phương trình $\log_4\left(3.2^x\right)=x-1$ có nghiệm là $x_0$ thì nghiệm $x_0$ thuộc khoảng nào sau đây

**A.** $(1;2)$. **B.** $(2;4)$. **C.** $(-2;1)$. **D.** $(4;+\infty)$.

**Câu 61.** Phương trình $\log_4\left(3.2^x-1\right)=x-1$ có hai nghiệm $x_1;x_2$. Tính giá trị của $P=x_1+x_2$.

**A.** $6+4\sqrt{2}$. **B.** $12$. **C.** $\log_2\left(6-4\sqrt{2}\right)$. **D.** $2$.

**Câu 62.** **(Sở Bạc Liêu - 2018)** Gọi $x_1,x_2$ (với $x_1<x_2$) là nghiệm của phương trình $\log_3\left(3^{2x-1}-3^{x-1}+1\right)=x$ khi đó giá trị của biểu thức $\sqrt{3^{x_1}}-\sqrt{3^{x_2}}$ là:

**A.** $1-\sqrt{3}$. **B.** $1+\sqrt{3}$. **C.** $2-\sqrt{3}$. **D.** $2-\sqrt{3}$.

**Câu 63.** **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Số nghiệm của phương trình $2^{\log_5(x+3)}=x$ là:

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $3$. **D.** $2$.

**Câu 64.** **(Hồng Bàng - Hải Phòng - 2018)** Phương trình $\log_2\left(5-2^x\right)=2-x$ có hai ngiệm $x_1$, $x_2$. Tính $P=x_1+x_2+x_1x_2$.

**A.** $11$. **B.** $9$. **C.** $3$. **D.** $2$.

**Câu 65.** **(THPT Cao Bá Quát - 2018)** Cho phương trình $\log_4\left(3.2^x-1\right)=x-1$ có hai nghiệm $x_1,x_2$. Tổng $x_1+x_2$ là:

**A.** $\log_2\left(6-4\sqrt{2}\right)$. **B.** $2$. **C.** $4$. **D.** $6+4\sqrt{2}$.

**Dạng 1.4 Phương pháp hàm số, đánh giá**

Thông thường ta sẽ vận dụng nội dung các định lý (và các kết quả) sau:

① Nếu hàm số $y=f(x)$ đơn điệu một chiều trên D thì phương trình $f(x)=0$ không quá một nghiệm trên **D.**

$\longrightarrow$ Để vận dụng định lý này, ta cần nhẩm được 1 nghiệm $x=x_o$ của phương trình, rồi chỉ rõ hàm đơn điệu một chiều trên D (luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến trên D) và kết luận $x=x_o$ là nghiệm duy nhất.

② Hàm số $f(t)$ đơn điệu một chiều trên khoảng $(a;b)$ và tồn tại $u;\ v\in(a;b)$ thì $f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v$".

$\longrightarrow$ Để áp dụng định lý này, ta cần xây dựng hàm đặc trưng $f(t)$.

**Câu 66.** **(Đề tham khảo 2017)** Hỏi phương trình $3x^2-6x+\ln(x+1)^3+1=0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

**A.** $2$. **B.** $1$. **C.** $3$. **D.** $4$

**Câu 67.** **(Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - 2018)** Số nghiệm của phương trình $\ln(x-1)=\dfrac{1}{x-2}$ là:

**A.** $1$. **B.** $0$. **C.** $3$. **D.** $2$.

**Câu 68.** **(THPT Nguyễn Trãi - Đà Nẵng - 2018)** Giải phương trình $\log_2 x.\log_3 x+x.\log_3 x+3=\log_2 x+3\log_3 x+x$. Ta có tổng tất cả các nghiệm bằng

**A.** $35$. **B.** $5$. **C.** $10$. **D.** $9$.

**Câu 69.** Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\dfrac{1}{2}\log_2(x+3)=\log_2(x+1)+x^2-x-4+2\sqrt{x+3}$.

**A.** $S=2$. **B.** $S=1$. **C.** $S=-1$. **D.** $S=1-\sqrt{2}$.

**Câu 70.** Biết phương trình $\log_5\dfrac{2\sqrt{x}+1}{x}=2\log_3\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ có một nghiệm dạng $x=a+b\sqrt{2}$ trong đó $a,b$ là các số nguyên. Tính $2a+b$.

**A.** $3$. **B.** $8$. **C.** $4$. **D.** $5$.

**Câu 71.** Số nghiệm thực của phương trình $2^{\sqrt{x^2+1}}\log_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=4^x\log_2(3x)$.

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $2$. **D.** $3$.

**Câu 72.** **(Bắc Ninh - 2018)** Cho phương trình $\dfrac{1}{2}\log_2(x+2)+x+3=\log_2\dfrac{2x+1}{x}+\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2+2\sqrt{x+2}$, gọi $S$ là tổng tất cả các nghiệm của nó. Khi đó, giá trị của $S$ là

**A.** $S=-2$. **B.** $S=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$. **C.** $S=2$. **D.** $S=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

**Câu 73.** **(Toán Học Và Tuổi Trẻ - 2018)** Biết $x_1$, $x_2$ là hai nghiệm của phương trình $\log_7\left(\frac{4x^2-4x+1}{2x}\right)+4x^2+1=6x$ và $x_1+2x_2=\frac{1}{4}\left(a+\sqrt{b}\right)$ với $a$, $b$ là hai số nguyên dương. Tính $a+b$.

**A.** $a+b=16$. **B.** $a+b=11$. **C.** $a+b=14$. **D.** $a+b=13$.

**Câu 74.** **(Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình - 2018)** Số nghiệm của phương trình $\frac{x^2}{2}+x-\ln\left(x^2-2\right)=2018$ là

**A.** 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

**Câu 75.** **(THPT Lê Xoay - 2018)** Số nghiệm của phương trình $\sin 2x-\cos x=1+\log_2(\sin x)$ trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ là:

**A.** 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

**Câu 76.** **(THPT Nguyễn Thị Minh Khai - Hà Tĩnh - 2018)** Phương trình $\log_3\left(x^2+2x-3\right)+x^2-x-7=\log_3(x+1)$ có số nghiệm là $T$ và tổng các nghiệm là $S$. Khi đó $T+S$ bằng

**A.** 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

**Câu 77.** **(THPT Nguyễn Tất Thành - Yên Bái - 2018)** Biết $x_1, x_2\left(x_1<x_2\right)$ là hai nghiệm của phương trình $\log_7\left(\frac{4x^2-4x+1}{2x}\right)+4x^2+1=6x$ và $x_1+3x_2=\frac{1}{4}\left(a+2\sqrt{b}\right)$ với $a,b$ là các số nguyên dương. Tính $a+b$

**A.** $a+b=14$. **B.** $a+b=16$. **C.** $a+b=17$. **D.** $a+b=15$.

**Câu 78.** **(THPT Lương Văn Can - 2018)** Cho biết phương trình $\log_5\frac{2\sqrt{x}+1}{x}=2\log_3\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ có nghiệm duy nhất $x=a+b\sqrt{2}$. Hỏi $m$ thuộc khoảng nào dưới đây để hàm số $y=\frac{mx+a-2}{x-m}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[1;\ 2]$ bằng $-2$.

**A.** $m\in(7;\ 9)$. **B.** $m\in(6;\ 7)$. **C.** $m\in(2;\ 4)$. **D.** $m\in(4;\ 6)$.

## DẠNG 2. PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH MŨ

### Dạng 2.1 Phương pháp đưa về cùng cơ số

+ Nếu $a>0,\ a\neq 1$ thì $a^{f(x)}=a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)=g(x)$

+ Nếu a chứa ẩn thì $a^{f(x)}=a^{g(x)}\Leftrightarrow(a-1)\left[f(x)-g(x)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\f(x)=g(x)\end{array}\right.$.

+ $a^{f(x)}=b^{g(x)}\Leftrightarrow\log_a a^{f(x)}=\log_a b^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)=\log_a b.g(x)$ **(logarit hóa)**.

**Câu 1.** **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-2x-3}=5^{x+1}$ là

**A.** $x=-1;\ x=2$. **B.** $x=1;\ x=-2$. **C.** $x=1;\ x=2$. **D.** Vô nghiệm.

**Câu 2.** Tập nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3}=7^{x+1}$ là

**A.** $\{-1\}$. **B.** $\{-1;2\}$. **C.** $\{-1;4\}$. **D.** $\{2\}$.

**Câu 3.** Tổng các nghiệm của phương trình $2^{x^2+2x}=8^{2-x}$ bằng

**A.** $-6$. **B.** $-5$. **C.** $5$. **D.** $6$.

**Câu 4.** **(SGD Điện Biên - 2019)** Gọi $x_1$, $x_2$ là hai nghiệm của phương trình $7^{x+1}=\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3}$. Khi đó $x_1^2+x_2^2$ bằng:

**A.** $17$. **B.** $1$. **C.** $5$. **D.** $3$.

**Câu 5.** Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $5^{3x-2}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2}$ bằng

**A.** $2$. **B.** $5$. **C.** $0$. **D.** $3$.

**Câu 6.** Nghiệm của phương trình $2^{7x-1}=8^{2x-1}$ là

**A.** $x=2$. **B.** $x=-3$. **C.** $x=-2$. **D.** $x=1$.

**Câu 7.** **(THPT Lương Văn Tụy - Ninh Bình - 2018)** Giải phương trình $(2,5)^{5x-7}=\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1}$.

**A.** $x\ge 1$. **B.** $x=1$. **C.** $x<1$. **D.** $x=2$.

**Câu 8.** **(THPT Nguyễn Thị Minh Khai - Hà Tĩnh - 2018)** Phương trình $3^{x^2-4}=\left(\frac{1}{9}\right)^{3x-1}$ có hai nghiệm $x_1$, $x_2$. Tính $x_1x_2$.

**A.** $-6$. **B.** $-5$. **C.** $6$. **D.** $-2$.

**Câu 9.** **(Sở Quảng Nam - 2018)** Tổng các nghiệm của phương trình $2^{x^2+2x}=8^{2-x}$ bằng

**A.** $5$. **B.** $-5$. **C.** $6$. **D.** $-6$.

**Câu 10.** **(THPT Thăng Long - Hà Nội - 2018)** Tập nghiệm của phương trình $4^{x-x^2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ là

**A.** $\left\{0;\frac{2}{3}\right\}$. **B.** $\left\{0;\frac{1}{2}\right\}$. **C.** $\{0;2\}$. **D.** $\left\{0;\frac{3}{2}\right\}$.

**Câu 11.** **(THPT Kim Liên - Hà Nội - 2018)** Tính tổng $S=x_1+x_2$ biết $x_1$, $x_2$ là các giá trị thực thỏa mãn đẳng thức $2^{x^2-6x+1}=\left(\frac{1}{4}\right)^{x-3}$.

**A.** $S=-5$. **B.** $S=8$. **C.** $S=4$. **D.** $S=2$.

**Câu 12.** **(THPT Nguyễn Thị Minh Khai - Hà Nội - 2018)** Tích các nghiệm của phương trình $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1}=\left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$ là

**A.** $-2$. **B.** $-4$. **C.** $4$. **D.** $2$.

**Câu 13.** **(THCS&THPT Nguyễn Khuyến - Bình Dương - 2018)** Giải phương trình $4^{2x+3}=8^{4-x}$.

**A.** $x=\frac{6}{7}$. **B.** $x=\frac{2}{3}$. **C.** $x=2$. **D.** $x=\frac{4}{5}$.

**Câu 14.** **(THPT Cao Bá Quát - 2018)** Cho phương trình $2^{\left|\frac{28}{3}x+4\right|}=16^{x^2-1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng:

**A.** Nghiệm của phương trình là các số vô tỷ.

**B.** Tổng các nghiệm của một phương trình là một số nguyên.

**C.** Tích các nghiệm của phương trình là một số âm.

**D.** Phương trình vô nghiệm.

**Dạng 2.2 Phương pháp đặt ẩn phụ**

① Loại 1. $P\left(a^{f(x)}\right)=0 \xrightarrow{PP}$ đặt $t=a^{f(x)},\ t>0$.

② Loại 2. $\alpha.a^{2.f(x)}+\beta.(a.b)^{f(x)}+\lambda.b^{2.f(x)}=0 \xrightarrow{PP}$ Chia hai vế cho $b^{2.f(x)}$, rồi đặt $t=\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}>0$ (chia cho cơ số lớn nhất hoặc nhỏ nhất).

③ Loại 3. $a^{f(x)}+b^{f(x)}=c$ với $a.b=1 \xrightarrow{PP}$ đặt $t=a^{f(x)} \Rightarrow b^{f(x)}=\frac{1}{t}$.

④ Loại 4. $\alpha.a^{f(x)}+\left[\begin{array}{l} a^{f(x)}.a^{g(x)} \\ \frac{a^{f(x)}}{a^{g(x)}} \end{array}\right.+\beta.a^{g(x)}+b=0 \xrightarrow{PP}$ đặt $\begin{cases} u=a^{f(x)} \\ v=a^{g(x)} \end{cases}$.

**Câu 15.** **(Mã 123 2017)** Cho phương trình $4^x+2^{x+1}-3=0$. Khi đặt $t=2^x$ ta được phương trình nào sau đây

**A.** $2t^2-3t=0$ **B.** $4t-3=0$ **C.** $t^2+t-3=0$ **D.** $t^2+2t-3=0$

**Câu 16.** **(THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019)** Tập nghiệm của phương trình $5^{x^2-4x+3}+5^{x^2+7x+6}=5^{2x^2+3x+9}+1$ là

**A.** $\{1;-1;3\}$. **B.** $\{-1;1;3;6\}$. **C.** $\{-6;-1;1;3\}$. **D.** $\{1;3\}$.

**Câu 17.** **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Phương trình $9^x-6^x=2^{2x+1}$ có bao nhiêu nghiệm âm?

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

**Câu 18.** **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Tổng các nghiệm của phương trình $4^x-6.2^x+2=0$ bằng

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 6. **D.** 2.

**Câu 19.** **(Cụm 8 Trường Chuyên 2019)** Tổng các nghiệm của phương trình $3^{x+1}+3^{1-x}=10$ là

**A.** 1. **B.** 0. **C.** $-1$. **D.** 3.

**Câu 20.** Gọi $x_1, x_2$ là nghiệm của phương trình $\left(2-\sqrt{3}\right)^x+\left(2+\sqrt{3}\right)^x=4$. Khi đó $x_1^2+2x_2^2$ bằng

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

**Câu 21.** **(Đề Thi Công Bằng KHTN 2019)** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $2.4^x-9.2^x+4=0$ bằng.

**A.** 2. **B.** $-1$. **C.** 0. **D.** 1.

**Câu 22.** **(THPT Nghĩa Hưng NĐ 2019)** Phương trình $6^{2x-1}-5.6^{x-1}+1=0$ có hai nghiệm $x_1, x_2$. Khi đó tổng hai nghiệm $x_1+x_2$ là.

**A.** 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

**Câu 23.** Cho phương trình $25^x-20.5^{x-1}+3=0$. Khi đặt $t=5^x$, ta được phương trình nào sau đây.

**A.** $t^2-3=0$. **B.** $t^2-4t+3=0$. **C.** $t^2-20t+3=0$. **D.** $t-\frac{20}{t}+3=0$.

**Câu 24.** **(Sở Bình Phước -2019)** Tập nghiệm của phương trình $9^x-4.3^x+3=0$ là

**A.** $\{0;1\}$ **B.** $\{1\}$ **C.** $\{0\}$ **D.** $\{1;3\}$

**Câu 25.** **(Chuyên Thái Nguyên 2019)** Số nghiệm thực của phương trình $4^{x-1}+2^{x+3}-4=0$ là:

**A.** 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

**Câu 26.** **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Tập nghiệm của phương trình $3^{2+x}+3^{2-x}=30$ là

**A.** $S=\left\{3;\frac{1}{3}\right\}$ **B.** $S=\{-1\}$ **C.** $S=\{1;-1\}$ **D.** $S=\{3;1\}$.

**Câu 27.** **(THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Cho hàm số $f(x)=x.5^x$. Tổng các nghiệm của phương trình $25^x+f'(x)-x.5^x.\ln 5-2=0$ là

**A.** $-2$ **B.** $0$ **C.** $-1$ **D.** $1$

**Câu 28.** **(Chuyên KHTN 2019)** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $3^{2x}-2.3^{x+2}+27=0$ bằng

**A.** $9$. **B.** $18$. **C.** $3$. **D.** $27$.

**Câu 29.** **(THPT-Thang-Long-Ha-Noi- 2019)** Phương trình $9^x-6^x=2^{2x+1}$ có bao nhiêu nghiệm âm?

**A.** 3 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 2

**Câu 30.** **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Phương trình $\left(\sqrt{2}-1\right)^x+\left(\sqrt{2}+1\right)^x-2\sqrt{2}=0$ có tích các nghiệm là?

**A.** 0. **B.** 2. **C.** $-1$. **D.** 1.

**Câu 31.** **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Gọi $x_1;x_2$ là 2 nghiệm của phương trình $4^{x^2-x}+2^{x^2-x+1}=3$. Tính $|x_1-x_2|$

**A.** 3 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 1

**Câu 32.** **(HSG Bắc Ninh 2019)** Giải phương trình: $4^{1+x}+4^{1-x}=2\left(2^{2+x}-2^{2-x}\right)+8$

**Câu 33.** Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $3^{2x+8}-4.3^{x+5}+27=0$?

**A.** $5$. **B.** $-5$. **C.** $\frac{4}{27}$. **D.** $-\frac{4}{27}$.

Nguyễn Bảo Vương

**Câu 34.** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $3^{2x}-2.3^{x+2}+27=0$ bằng

**A.** $0$. **B.** $18$. **C.** $3$. **D.** $27$.

**Câu 35.** **(Hội 8 trường chuyên ĐBSH 2019)** Tổng các nghiệm của phương trình $3^{x+1}+3^{1-x}=10$ là

**A.** 1. **B.** 3. **C.** $-1$. **D.** 0.

**Câu 36.** **(SGD Điện Biên - 2019)** Tích tất cả các nghiệm của phương trình $3^x+3^{4-x}=30$ bằng

**A.** $3$. **B.** $1$. **C.** $9$. **D.** $27$.

**Câu 37.** **(Thi thử hội 8 trường chuyên 2019)** Kí hiệu $x_1$, $x_2$ là hai nghiệm thực của phương trình $4^{x^2-x}+2^{x^2-x+1}=3$. Giá trị của $|x_1-x_2|$ bằng

**A.** $3$. **B.** $4$. **C.** $2$. **D.** $1$.

**Câu 38.** **(Đại học Hồng Đức 2019)** Cho phương trình $\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^{\sin x}+\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^{\sin x}=4$. Tổng các nghiệm của phương trình trong $[-2\pi;2\pi]$ bằng

**A.** $\frac{3\pi}{2}$. **B.** $\frac{\pi}{2}$. **C.** $0$. **D.** $\pi$.

**Câu 39.** **(Xuân Trường - Nam Định - 2018)** Gọi $a$ là một nghiệm của phương trình $4.2^{2\log x}-6^{\log x}-18.3^{2\log x}=0$. Khẳng định nào sau đây đúng khi đánh giá về $a$?

**A.** $(a-10)^2=1$.

**B.** $a$ cũng là nghiệm của phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log x}=\frac{9}{4}$.

**C.** $a^2+a+1=2$.

**D.** $a=10^2$.

**Câu 40.** **(THPT Lục Ngạn - 2018)** Nghiệm của phương trình $25^x-2(3-x)5^x+2x-7=0$ nằm trong khoảng nào sau đây?

**A.** $(5;10)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(0;1)$

**Câu 41.** **(THPT Chu Văn An -Thái Nguyên - 2018)** Số nghiệm nguyên không âm của bất phương trình $\sqrt{15.2^{x+1}+1}\ge|2^x-1|+2^{x+1}$ bằng bao nhiêu?

**A.** 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

**Câu 42.** **(Toán Học Tuổi Trẻ Số 6)** Cho phương trình $8^{x+1}+8.(0,5)^{3x}+3.2^{x+3}=125-24.(0,5)^x$. Khi đặt $t=2^x+\dfrac{1}{2^x}$, phương trình đã cho trở thành phương trình nào dưới đây?

**A.** $8t^3-3t-12=0$. **B.** $8t^3+3t^2-t-10=0$. **C.** $8t^3-125=0$. **D.** $8t^3+t-36=0$.

**Câu 43.** **(THPT Bình Giang - Hải Dương - 2018)** Gọi $S$ là tập nghiệm của của phương trình: $4^{x^2-3x+2}+4^{x^2+6x+5}=4^{2x^2+3x+7}+1$. Khi đó $S$ là

**A.** $\{1;2\}$. **B.** $\{1;2;-1\}$. **C.** $\{1;2;-1;-5\}$. **D.** $\varnothing$.

**Dạng 2.3 Phương pháp logarit hóa**

***Dạng 1***: Phương trình: $a^{f(x)}=b\Leftrightarrow\begin{cases}0<a\ne1,b>0\\f(x)=\log_a b\end{cases}$

***Dạng 2***: Phương trình:

$a^{f(x)}=b^{g(x)}\Leftrightarrow\log_a a^{f(x)}=\log_a b^{f(x)}\Leftrightarrow f(x)=g(x).\log_a b$

hoặc $\log_b a^{f(x)}=\log_b b^{g(x)}\Leftrightarrow f(x).\log_b a=g(x)$.

**Câu 44.** **(THPT Thuận Thành 3 - Bắc Ninh 2019)** Số giao điểm của các đồ thị hàm số $y=3^{x^2+1}$ và $y=5$ là

**A.** 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

**Câu 45.** **(Sở GD Nam Định - 2019)** Tính tích các nghiệm thực của phương trình $2^{x^2-1}=3^{2x+3}$

**A.** $-3\log_2 3$. **B.** $-\log_2 54$. **C.** $-1$. **D.** $1-\log_2 3$.

**Câu 46.** Cho hai số thực $a>1,b>1$. Gọi $x_1,x_2$ là hai nghiệm của phương trình $a^x.b^{x^2-1}=1$. Trong trường hợp biểu thức $S=\left(\dfrac{x_1.x_2}{x_1+x_2}\right)^2-4x_1-4x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất, mệnh đề nào sau đây là đúng?

**A.** $a\ge b$. **B.** $a.b=4$. **C.** $a.b=2$. **D.** $a<b$.

**Câu 47.** **(TT Diệu Hiền - Cần Thơ - 2018)** Cho $x$, $y$, $z$ là các số thực thỏa mãn $2^x=3^y=6^{-z}$. Giá trị của biểu thức $M=xy+yz+xz$ là:

**A.** 0. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 1.

**Câu 48.** **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Gọi $x$, $y$ các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\log_9 x=\log_6 y=\log_4(x+y)$ và $\dfrac{x}{y}=\dfrac{-a+\sqrt{b}}{2}$, với $a,b$ là hai số nguyên dương. Tính $T=a^2+b^2$.

**A.** $T=26$. **B.** $T=29$. **C.** $T=20$. **D.** $T=25$.

**Câu 49. (THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020)** Cho các số thực dương $a,b$ thỏa mãn $\log_4 a=\log_6 b=\log_9(4a-5b)-1$. Đặt $T=\dfrac{b}{a}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

**A.** $1<T<2$. **B.** $\dfrac{1}{2}<T<\dfrac{2}{3}$. **C.** $-2<T<0$. **D.** $0<T<\dfrac{1}{2}$.

**Câu 50. (THPT Cao Bá Quát - 2018)** Phương trình $3^{x^2}.4^{x+1}-\dfrac{1}{3^x}=0$ có hai nghiệm $x_1,x_2$. Tính $T=x_1.x_2+x_1+x_2$.

**A.** $T=-\log_3 4$. **B.** $T=\log_3 4$. **C.** $T=-1$. **D.** $T=1$.

**Dạng 2.4 Phương pháp hàm số, đánh giá**

Thông thường ta sẽ vận dụng nội dung các định lý (và các kết quả) sau:

① Nếu hàm số $y=f(x)$ đơn điệu một chiều trên D thì phương trình $f(x)=0$ không quá một nghiệm trên **D.**

⟶ Để vận dụng định lý này, ta cần nhẩm được 1 nghiệm $x=x_o$ của phương trình, rồi chỉ rõ hàm đơn điệu một chiều trên D (luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến trên D) và kết luận $x=x_o$ là nghiệm duy nhất.

② Hàm số $f(t)$ đơn điệu một chiều trên khoảng $(a;b)$ và tồn tại $u;v\in(a;b)$ thì $f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v$".

⟶ Để áp dụng định lý này, ta cần xây dựng hàm đặc trưng $f(t)$.

Nguyễn Bảo Vương

**Câu 51. (SGD Nam Định 2019)** Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $15x.5^x=5^{x+1}+27x+23$ bằng.

**A.** $-1$. **B.** $2$. **C.** $1$. **D.** $0$.

**Câu 52.** Cho số thực $\alpha$ sao cho phương trình $2^x-2^{-x}=2\cos(\alpha x)$ có đúng 2019 nghiệm thực. Số nghiệm của phương trình $2^x+2^{-x}=4+2\cos(\alpha x)$ là

**A.** $2019$. **B.** $2018$. **C.** $4037$. **D.** $4038$.

**Câu 53.** Biết $x_1,x_2$ là hai nghiệm của phương trình $\log_7\left(\dfrac{4x^2-4x+1}{2x}\right)+4x^2+1=6x$ và $x_1+2x_2=\dfrac{1}{4}\left(a+\sqrt{b}\right)$ với $a,b$ là hai số nguyên dương. Tính $a+b$.

**A.** $a+b=13$. **B.** $a+b=11$. **C.** $a+b=16$. **D.** $a+b=14$.

**Câu 54.** Phương trình $x\left(2^{x-1}+4\right)=2^{x+1}+x^2$ có tổng các nghiệm bằng

**A. 7** **B.** 3 **C.** 5 **D.** 6

**Câu 55. (Chuyên Ngữ Hà Nội 2019)** Tìm số nghiệm của phương trình $\left(|x|-1\right)^2 e^{|x|-1}-\log 2=0$.

**A.** $4$. **B.** $3$. **C.** $2$. **D.** $0$.

**Câu 56.** Tính số nghiệm của phương trình $\cot x=2^x$ trong khoảng $\left(\dfrac{11\pi}{12};2019\pi\right)$.

**A.** $2019$. **B.** $2018$. **C.** $1$. **D.** $2020$.

**Câu 57.** Hỏi phương trình $3.2^x+4.3^x+5.4^x=6.5^x$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực ?

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $3$. **D.** $2$.

**Câu 58.** **(SP Đồng Nai - 2019)** Phương trình $2019^{\sin x}=\sin x+\sqrt{2-\cos^2 x}$ có bao nhiêu nghiệm thực trên $[-5\pi;2019\pi]$?

**A.** $2025$. **B.** $2017$. **C.** $2022$. **D.** Vô nghiệm.

**Câu 59.** **(Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2019)** Số nghiệm của phương trình $3^{\log_7(x+4)}=x$ là

**A.** $1$. **B.** $0$. **C.** $2$. **D.** $3$.

**Câu 60.** Cho các số thực $x$, $y$ với $x\ge 0$ thỏa mãn $\mathrm{e}^{x+3y}+\mathrm{e}^{xy+1}+x(y+1)+1=\mathrm{e}^{-xy-1}+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x+3y}}-3y$. Gọi $m$ là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x+2y+1$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

**A.** $m\in(2;3)$. **B.** $m\in(-1;0)$. **C.** $m\in(0;1)$. **D.** $m\in(1;2)$.

**Câu 61.** **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2018)** Số nghiệm của phương trình $x^2-5x-2=(x^2-8x+3).8^{3x-5}+(3x-5).8^{x^2-8x+3}$ là

**A.** $4$. **B.** $3$. **C.** $1$. **D.** $2$.

**Câu 62.** **(THPT Chu Văn An - Hà Nội - 2018)** Tích tất cả các giá trị của $x$ thỏa mãn phương trình $(3^x-3)^2-(4^x-4)^2=(3^x+4^x-7)^2$ bằng

**A.** $2$. **B.** $1$. **C.** $4$. **D.** $3$.

**Câu 63.** **(THPT Chu Văn An - Hà Nội - 2018)** Phương trình $e^x-e^{\sqrt{2x+1}}=1-x^2+2\sqrt{2x+1}$ có nghiệm trong khoảng nào?

**A.** $\left(2;\dfrac{5}{2}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{3}{2};2\right)$. **C.** $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

## DẠNG 3. PHƯƠNG TRÌNH TỔ HỢP CỦA MŨ VÀ LOGARIT

**Câu 1.** **(Tham khảo 2019)** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3(7-3^x)=2-x$ bằng

**A.** $2$. **B.** $1$. **C.** $7$. **D.** $3$.

**Câu 2.** Tích các nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1}-36^x)=-2$ bằng

**A.** $0$. **B.** $\log_6 5$. **C.** $5$. **D.** $1$.

**Câu 3.** Tổng các nghiệm của phương trình $\log_2(5-2^x)=2-x$ bằng

**A.** $3$. **B.** $1$. **C.** $2$. **D.** $0$.

**Câu 4.** **(Thi thử cụm Vũng Tàu - 2019)** Số nghiệm của phương trình $\log_2(4^x+4)=x-\log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1}-3)$

**A.** $3$. **B.** $1$. **C.** $0$. **D.** $2$

**Câu 5.** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình $\log(2-10^{2x})=x$. Số tập con của $S$ bằng

**A.** $4$. **B.** $1$. **C.** $2$. **D.** $0$.

**Câu 6.** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2(6-2^x)=1-x$ bằng

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $0$. **D.** $3$.

**Câu 7.** **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Tính tích tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_2\left(\dfrac{2x^2+1}{2x}\right)+2^{\left(x+\frac{1}{2x}\right)}=5$.

**A.** $0$. **B.** $2$. **C.** $1$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

**Câu 8.** **(Thi thử hội 8 trường chuyên 2019)** Phương trình $\log_2\left(5.2^x-4\right)=2x$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

**A.** $2$. **B.** $0$. **C.** $3$. **D.** $1$.

**Câu 9.** **(SP Đồng Nai - 2019)** Phương trình $\log_2\left(5-2^x\right)=2-x$ có hai nghiệm thực $x_1,x_2$. Tính $P=x_1+x_2+x_1x_2$

**A.** $2$. **B.** $9$. **C.** $3$. **D.** $11$.

**Câu 10.** Phương trình $\left(2^x-5\right)\left(\log_2 x-3\right)=0$ có hai nghiệm $x_1$, $x_2$ (với $x_1<x_2$). Tính giá trị của biểu thức $K=x_1+3x_2$.

**A.** $K=32+\log_3 2$. **B.** $K=18+\log_2 5$. **C.** $K=24+\log_2 5$. **D.** $K=32+\log_2 3$.

**Câu 11.** Cho biết phương trình $\log_3(3^{x+1}-1)=2x+\log_{\frac{1}{3}}2$ có hai nghiệm $x_1,x_2$. Hãy tính tổng $S=27^{x_1}+27^{x_2}$.

**A.** $S=252$. **B.** $S=45$. **C.** $S=9$. **D.** $S=180$.

**Câu 12.** **(THPT Yên Dũng 2-Bắc Giang 2019)** Tính tích tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_2\left(\frac{2x^2+1}{2x}\right)+2^{x+\frac{1}{2x}}=5$.

**A.** $2$. **B.** $0$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $1$.

**Câu 13.** Số nghiệm của phương trình $\log_2\frac{2^x+4}{2^x+12}=x-3$

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $2$. **D.** $3$.

Nguyễn Bảo Vương

**Câu 14.** Tính tích tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_2\left(\frac{2x^2+1}{2x}\right)+2^{\left(x+\frac{1}{2x}\right)}=5$.

**A.** $0$. **B.** $2$. **C.** $1$. **D.** $\frac{1}{2}$.

**Câu 15.** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2\left(10\left(\sqrt{2019}\right)^x-2019^x\right)=4$ bằng

**A.** $\log_{2019}16$. **B.** $2\log_{2019}16$. **C.** $\log_{2019}10$. **D.** $2\log_{2019}10$.

**Câu 16.** **(THPT Hòa Vang - Đà Nẵng - 2018)** Biết rằng $2^{x+\frac{1}{x}}=\log_2\left[14-(y-2)\sqrt{y+1}\right]$ với $x>0$. Tính giá trị của biểu thức $P=x^2+y^2-xy+1$.

**A.** $3$. **B.** $1$. **C.** $2$. **D.** $4$.

**Câu 17.** **(Toán Học Tuổi Trẻ - 2018)** Phương trình $(4x)^{\log_8 x}+x^{\log_8(4x)}=4$ có tập nghiệm là

**A.** $\{2;8\}$. **B.** $\left\{\frac{1}{2};8\right\}$. **C.** $\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{8}\right\}$. **D.** $\left\{2;\frac{1}{8}\right\}$.

**Câu 18.** **(THPT Yên Lạc- 2018)** Tính tổng $S$ tất cả các nghiệm của phương trình: $\ln\left(\frac{5^x+3^x}{6x+2}\right)+5^{x+1}+5.3^x-30x-10=0$.

**A.** $S=1$. **B.** $S=2$. **C.** $S=-1$. **D.** $S=3$

Chuyên đề 19 PHƯƠNG TRÌNH MŨ - LOGARIT

## TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI – XUẤT SẮC MỨC 9-10 ĐIỂM

### PHƯƠNG PHÁP CHUNG

**Tìm m để $f(x,m)=0$ có nghiệm (hoặc có k nghiệm) trên D ?**

— Bước 1. Tách m ra khỏi biến số và đưa về dạng $f(x)=A(m)$.

— Bước 2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(x)$ trên D.

— Bước 3. Dựa vào bảng biến thiên để xác định giá trị của tham số $A(m)$ để đường thẳng $y=A(m)$ nằm ngang cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$.

— Bước 4. Kết luận các giá trị cần tìm của $A(m)$ để phương trình $f(x)=A(m)$ có nghiệm (hoặc có k nghiệm) trên D.

**Lưu ý**

— Nếu hàm số $y=f(x)$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên D thì giá trị $A(m)$ cần tìm là những m thỏa mãn: $\min\limits_{x\in D} f(x)\le A(m)\le \max\limits_{x\in D} f(x)$.

— Nếu bài toán yêu cầu tìm tham số để phương trình có k nghiệm phân biệt, ta chỉ cần dựa vào bảng biến thiên để xác định sao cho đường thẳng $y=A(m)$ nằm ngang cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại k điểm phân biệt.

### Dạng 1. Phương trình logarit chứa tham số

**Câu 1.** **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho phương trình $\log_2^2(2x)-(m+2)\log_2 x+m-2=0$ ( $m$ là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của $m$ để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1;2]$ là

**A.** $(1;2)$. **B.** $[1;2]$. **C.** $[1;2)$. **D.** $[2;+\infty)$.

**Câu 2.** **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Cho hàm số $3\log_{27}\left[2x^2-(m+3)x+1-m\right]+\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-x+1-3m\right)=0$. Số các giá trị nguyên của $m$ để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2$ thỏa mãn $|x_1-x_2|<15$ là:

**A.** 14 **B.** 11 **C.** 12 **D.** 13

**Câu 3.** **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Gọi $S$ là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ với $m<64$ để phương trình $\log_{\frac{1}{5}}(x+m)+\log_5(2-x)=0$ có nghiệm. Tính tổng tất cả các phần tử của $S$.

**A.** 2018. **B.** 2016. **C.** 2015. **D.** 2013.

**Câu 4.** **(Mã 102 2019)** Cho phương trình $\log_9 x^2-\log_3(6x-1)=-\log_3 m$ ($m$ là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ để phương trình đã cho có nghiệm?

**A.** 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** Vô số.

**Câu 5.** **(Mã 103 2019)** Cho phương trình $\log_9 x^2-\log_3(5x-1)=-\log_3 m$ ($m$ là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ để phương trình đã cho có nghiệm?

**A.** 4. **B.** 6. **C.** Vô số. **D.** 5.

**Câu 6.** **(Mã 101 - 2019)** Cho phương trình $\log_9 x^2-\log_3(3x-1)=-\log_3 m$ ($m$ là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình đã cho có nghiệm?

**A.** 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** Vô số.

**Câu 7.** **(Mã 104 2019)** Cho phương trình $\log_9 x^2-4\log_3(4x-1)=-\log_3 m$ ($m$ là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ để phương trình đã cho có nghiệm?

**A.** $5$. **B.** $3$. **C.** Vô số. **D.** $4$.

**Câu 8.** **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho phương trình $\log_{mx-5}\left(x^2-6x+12\right)=\log_{\sqrt{mx-5}}\sqrt{x+2}$, gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m\in\mathbb{Z}$ để phương trình đã cho có nghiệm duy nhất. Tìm số phần tử của $S$.

**A.** $2$. **B.** $0$. **C.** $3$. **D.** $1$.

**Câu 9.** Cho phương trình $\log_{2+\sqrt{5}}\left(2x^2-x-4m^2+2m\right)+\log_{\sqrt{5}-2}\sqrt{x^2+mx-2m^2}=0$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1^2+x_2^2=3$?

**A.** $1$ **B.** $0$ **C.** $3$ **D.** $4$

**Câu 10.** **(HSG Bắc Ninh 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $4\left(\log_2\sqrt{x}\right)^2-\log_{\frac{1}{2}}x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0;1)$.

**A.** $0<m<\frac{1}{4}$ **B.** $0\le m<\frac{1}{4}$ **C.** $m\le\frac{1}{4}$ **D.** $-\frac{1}{4}<m<0$

**Câu 11.** **(THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019)** Tìm $m$ để phương trình: $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}^2(x-2)^2+4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x-2}+4m-4=0$ có nghiệm trên $\left[\frac{5}{2},4\right]$.

**A.** $m\in\mathbb{R}$. **B.** $-3\le m\le\frac{7}{3}$. **C.** $m\in\varnothing$. **D.** $-3<m\le\frac{7}{3}$.

**Câu 12.** (Chuyên Bắc Giang 2019) **Tìm $m$ để phương trình $\log_2{}^2x-\log_2x^2+3=m$ có nghiệm $x\in[1;8]$.**

**A.** $6\le m\le 9$ **B.** $2\le m\le 3$ **C.** $2\le m\le 6$ **D.** $3\le m\le 6$

**Câu 13.** **(HSG Bắc Ninh-2019)** Cho phương trình $\log_2{}^2x-2\log_2x-\sqrt{m+\log_2x}=m(*)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2019;2019]$ để phương trình (*) có nghiệm?

**A.** $2021$. **B.** $2019$. **C.** $4038$. **D.** $2020$.

**Câu 14.** **(Đề Tham Khảo 2017)** Hỏi có bao nhiêu giá trị $m$ nguyên trong $[-2017;2017]$ để phương trình $\log(mx)=2\log(x+1)$ có nghiệm duy nhất?

**A.** $4014$. **B.** $2018$. **C.** $4015$. **D.** $2017$.

**Câu 15.** **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $mx-\ln x=0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(2;3)$

**A.** $\left(\frac{\ln 2}{2};\frac{\ln 3}{3}\right)$ **B.** $\left(-\infty;\frac{\ln 2}{2}\right)\cup\left(\frac{\ln 3}{3};+\infty\right)$

**C.** $\left(\frac{\ln 2}{2};\frac{1}{e}\right)$ **D.** $\left(\frac{\ln 3}{3};\frac{1}{e}\right)$

**Câu 16.** **(THPT Dông Sơn Thanh Hóa 2019)** Tổng tất cả các giá trị của tham số $m$ sao cho phương trình: $2^{(x-1)^2}.\log_2\left(x^2-2x+3\right)=4^{|x-m|}.\log_2\left(2|x-m|+2\right)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là:

**A.** $2$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $0$. **D.** $3$.

**Câu 17.** Tìm tất cả các giá trị của $m$ để phương trình $\ln\left(m+\ln\left(m+\sin x\right)\right)=\sin x$ có nghiệm.

**A.** $\frac{1}{e}+1\le m\le e-1$. **B.** $1\le m\le e-1$. **C.** $1\le m\le\frac{1}{e}+1$. **D.** $1\le m<e-1$.

**Câu 18.** **(THPT Yên Dũng 2-Bắc Giang 2019)** Số các giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1)=\log_2(mx-8)$ có hai nghiệm phân biệt là

**A.** $5$. **B.** Vô số. **C.** $4$. **D.** $3$.

**Câu 19.** **(THPT Trần Phú - 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m$ để phương trình $m^2\ln\left(\frac{x}{e}\right)=(2-m)\ln x-4$ có nghiệm thuộc vào đoạn $\left[\frac{1}{e};1\right]$?

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

**Câu 20.** **(THPT Trần Phú - 2019)** Có bao nhiêu giá trị của tham số $m$ để phương trình $4\log_{36}^2 x - m\log_6 \frac{x}{6} + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ thỏa mãn $x_1.x_2 - 72\sqrt{x_1.x_2} + 1296 \le 0$

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

**Câu 21.** **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Tập hợp các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_{2019}\left(4-x^2\right) + \log_{\frac{1}{2019}}\left(2x+m-1\right) = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt là $T = (a;b)$. Tính $S = 2a + b$.

**A.** 18. **B.** 8. **C.** 20. **D.** 16.

**Câu 22.** **(THPT Cẩm Bình 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ để phương trình $\log_3(x+3) + m\log_{\sqrt{x+3}} 9 = 16$ có hai nghiệm thỏa mãn $-2 < x_1 < x_2$.

**A.** 17. **B.** 16. **C.** 14. **D.** 15.

**Câu 23.** **(Chuyên Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình 2019)** Tập hợp các số thực $m$ để phương trình $\ln(3x - mx + 1) = \ln\left(-x^2 + 4x - 3\right)$ có nghiệm là nửa khoảng $[a;b)$. Tổng $a+b$ bằng

**A.** $\frac{10}{3}$. **B.** 4. **C.** $\frac{22}{3}$. **D.** 7.

**Câu 24.** **(Cần Thơ 2019)** Cho phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x - 4\sqrt{1-\log_2 x} = m$, với $m$ là tham số thực. Số các giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2019;2019]$ của $m$ để phương trình đã cho có nghiệm là

**A.** 2021. **B.** 2024. **C.** 2023. **D.** 2020.

**Câu 25.** **(Nam Định - 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $x\log_3(x+1) = \log_9\left[9(x+1)^{2m}\right]$ có hai nghiệm phân biệt.

**A.** $m \in (-1;0)$. **B.** $m \in (-2;0)$. **C.** $m \in (-1;+\infty)$. **D.** $m \in [-1;0)$.

**Câu 26.** **(THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên 2019)** Cho $a, b$ là các số thực dương lớn hơn 1, thay đổi thỏa mãn $a+b=2019$ để phương trình $5\log_a x.\log_b x - 4\log_a x - 3\log_b x - 2019 = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$. Biết giá trị lớn nhất của $\ln(x_1.x_2)$ bằng $\frac{3}{5}\ln\left(\frac{m}{7}\right) + \frac{4}{5}\ln\left(\frac{n}{7}\right)$; với $m, n$ là các số nguyên dương. Tính $S = m + 2n$

**A.** 22209. **B.** 20190. **C.** 2019. **D.** 14133.

**Câu 27.** **(Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2019)** Xét các số nguyên dương $a, b$ sao cho phương trình $a\ln^2 x + b\ln x + 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1$, $x_2$ và phương trình $5\log^2 x + b\log x + a = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_3$, $x_4$ thỏa mãn $x_1x_2 > x_3x_4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = 2a + 3b$

**A.** $S_{\min} = 33$. **B.** $S_{\min} = 30$. **C.** $S_{\min} = 17$. **D.** $S_{\min} = 25$.

**Câu 28.** **(THPT Thuận Thành 3 - Bắc Ninh 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m$ để phương trình $\log_2\left(\frac{\sqrt{2x^2+mx+1}}{x+2}\right) + \sqrt{2x^2+mx+1} = x+2$ có hai nghiệm phân biệt?

**A.** 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

**Câu 29.** **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Số các giá trị nguyên nhỏ hơn 2018 của tham số $m$ để phương trình $\log_6(2018x + m) = \log_4(1009x)$ có nghiệm là

**A.** 2018. **B.** 2017. **C.** 2020. **D.** 2019.

**Câu 30.** **(Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020)** Có bao nhiêu số nguyên $m$ để phương trình $\log_3\left(3^x + 2m\right) = \log_5\left(3^x - m^2\right)$ có nghiệm?

**A.** 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 5.

**Câu 31.** **(Chuyên Hưng Yên - 2020)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $\log_3 x + \sqrt{\log_3 x + 1} - 2m - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thực trong đoạn $[1;27]$.

**A.** $m \in (0;2)$. **B.** $m \in [0;2]$. **C.** $m \in [2;4]$. **D.** $m \in (0;4)$.

**Câu 32.** **(Chuyên KHTN - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $\log_3^2 x - m\log_9 x^2 + 2 - m = 0$ có nghiệm $x \in [1;9]$.

**A.** 1. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

**Câu 33.** **(Chuyên KHTN - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ để phương trình $\log_2(mx) = \log_{\sqrt{2}}(x+1)$ vô nghiệm?

**A.** 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 5.

**Câu 34.** **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020)** Số các giá trị nguyên nhỏ hơn 2020 của tham số $m$ để phương trình $\log_6(2020x+m) = \log_4(1010x)$ có nghiệm là

**A.** 2020. **B.** 2021. **C.** 2019. **D.** 2022.

**Câu 35.** **(Chuyên Quang Trung - 2020)** Xét các số nguyên dương $a, b$ sao cho phương trình $a\ln^2 x + b\ln x + 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1$, $x_2$ và phương trình $5\log^2 x + b\log x + a = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_3$, $x_4$ sao cho $x_1x_2 > x_3x_4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = 2a + 3b$.

**A.** 30. **B.** 25. **C.** 33. **D.** 17.

**Câu 36.** **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho phương trình $\log_2^2 x - (5m+1)\log_2 x + 4m^2 + m = 0$. Biết phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ thỏa $x_1 + x_2 = 165$. Giá trị của $|x_1 - x_2|$ bằng

**A.** 16. **B.** 119. **C.** 120. **D.** 159.

**Câu 37.** **(Chuyên Thái Nguyên - 2020)** Gọi $m_0$ là giá trị thực nhỏ nhất của tham số $m$ sao cho phương trình $(m-1)\log_{\frac{1}{3}}^2(x-3) - (m-5)\log_{\frac{1}{3}}(x-3) + m - 1 = 0$ có nghiệm thuộc $(3;6)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** Không tồn tại $m_0$. **B.** $m_0 \in \left(-1;\frac{4}{3}\right)$. **C.** $m_0 \in \left(2;\frac{10}{3}\right)$. **D.** $m_0 \in \left(-5;\frac{-5}{2}\right)$.

**Câu 38.** **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2020)** Cho phương trình $m\ln(x+1) - x - 2 = 0$. Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1$, $x_2$ thỏa mãn $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$ là khoảng $(a;+\infty)$. Khi đó $a$ thuộc khoảng nào dưới đây?

**A.** $(3,7;3,8)$. **B.** $(3,6;3,7)$. **C.** $(3,8;3,9)$. **D.** $(3,5;3,6)$.

**Câu 39.** **(Đại Học Hà Tĩnh - 2020)** Tìm tất cả các giá trị của tham số $a$ để phương trình $\log_3 x^2 + a\sqrt{\log_3 x^3} + a + 1 = 0$ có nghiệm duy nhất.

**A.** Không tồn tại $a$. **B.** $a < -1$ hoặc $a = 4 - 2\sqrt{10}$.
**C.** $a < 1$. **D.** $a = 1$.

**Câu 40.** **(Sở Ninh Bình 2020)** Gọi $m_0$ là giá trị nhỏ nhất của tham số thực $m$ sao cho phương trình $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}^2(x-2) - (m-5)\log_{\frac{1}{2}}(x-2) + m - 1 = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(2;4)$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

**A.** $m_0 \in \left(-1;\frac{4}{3}\right)$. **B.** $m_0 \in \left(2;\frac{10}{3}\right)$. **C.** $m_0 \in \left(4;\frac{16}{3}\right)$. **D.** $m_0 \in \left(-5;\frac{-5}{2}\right)$.

**Câu 41.** **(Sở Yên Bái - 2020)** Giả sử phương trình $\log_2^2 x - (m+2)\log_2 x + 2m = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt $x_1, x_2$ thỏa mãn $x_1 + x_2 = 6$. Giá trị biểu thức $|x_1 - x_2|$ là

**A.** 4. **B.** 3. **C.** 8. **D.** 2.

**Câu 42.** **(Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020)** Tìm tất cả các giá trị của $m$ để phương trình $\log_2^2 x - \log_2 x^2 + 3 = m$ có nghiệm $x \in [1;8]$.

**A.** $2 \le m \le 6$ **B.** $3 \le m \le 6$ **C.** $6 \le m \le 9$ **D.** $2 \le m \le 3$.

**Câu 43.** **(Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020)** Tìm các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $\log_3^2 x-3\log_3 x+2m-7=0$ có hai nghiệm thực $x_1$, $x_2$ thỏa mãn $(x_1+3)(x_2+3)=72$.

**A.** $m=\dfrac{9}{2}$. **B.** $m=3$. **C.** Không tồn tại. **D.** $m=\dfrac{61}{2}$.

**Câu 44.** **(Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020)** Số các giá trị nguyên nhỏ hơn 2020 của tham số $m$ để phương trình $\log_6(2020x+m)=\log_4(1010x)$ có nghiệm là

**A.** 2022. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 2021.

**Câu 45.** **(Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020)** Cho phương trình $\left(me^x-10x-m\right)\left[\log(mx)-2\log(x+1)\right]=0$. ($m$ là tham số ). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ để phương trình đã cho có ba nghiệm thực phân biệt?

**A.** Vô số. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 5.

**Câu 46.** **(Liên trường Nghệ An - 2020)** Cho phương trình $4^{-|x-m|}.\log_{\sqrt{2}}\left(x^2-2x+3\right)+2^{2x-x^2}.\log_{\frac{1}{2}}\left(2|x-m|+2\right)=0$ với $m$ là tham số. Tổng tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt là

**A.** 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

**Câu 47.** **(THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020)** Cho phương trình $\log_3^2(9x)-(m+5)\log_3 x+3m-10=0$ (với $m$ là tham số thực). Số giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc $[1;81]$ là

**A.** 3 **B.** 5 **C.** 4. **D.** 2.

**Câu 48.** **(THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020)** Cho $x,y$ là hai số thực dương thỏa mãn $5x+y=4$. Tổng tất cả giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $\log_3\dfrac{x^2+2y+m}{x+y}+x^2-3x-y+m-1=0$ có nghiệm là

**A.** 10. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 2.

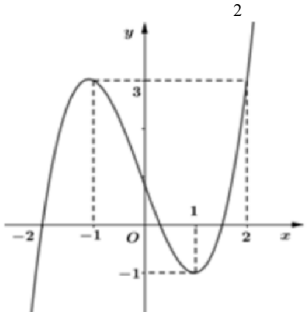
**Câu 49.** **(Hải Hậu - Nam Định - 2020)** Biết rằng điều kiện cần và đủ của tham số $m$ để phương trình $\log_2\left(m+\sqrt{m+2^x}\right)=2x$ có nghiệm là $m\ge-\dfrac{a}{b}$ với $a,b$ là hai số nguyên dương và $b<7$. Hỏi $a+b+b^2$ bằng bao nhiêu?

**A.** 31. **B.** 32. **C.** 21. **D.** 23.

**Câu 50.** **(Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $\log_2^2(4x)-m\log_{\sqrt{2}}x-2m-4=0$ có nghiệm thuộc đoạn $[1;8]$?

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

**Câu 51.** **(Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-5;5]$ sao cho phương trình $\log_2^3\left(f(x)+1\right)-\log_{\sqrt{2}}^2\left(f(x)+1\right)+(2m-8)\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{f(x)+1}+2m=0$ có nghiệm $x\in(-1;1)$?




**A.** 7. **B.** 5. **C.** 6. **D.** vô số.

## Dạng 2. Phương trình mũ chứa tham số

**Câu 1.** **(Mã 101 2018)** Gọi $S$ là tập hợp tất cả giá trị nguyên của tham số $m$ sao cho phương trình $16^x - m.4^{x+1} + 5m^2 - 45 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi $S$ có bao nhiêu phần tử?

**A.** 6 **B.** 4 **C.** 13 **D.** 3

**Câu 2.** **(Mã 104 2017)** Tìm giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $9^x - 2.3^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực $x_1$, $x_2$ thỏa mãn $x_1 + x_2 = 1$.

**A.** $m = 3$ **B.** $m = 1$ **C.** $m = 6$ **D.** $m = -3$

**Câu 3.** **(Mã 102 2018)** Gọi $S$ là tập hợp các giá trị nguyên của tham số $m$ sao cho phương trình $25^x - m.5^{x+1} + 7m^2 - 7 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi $S$ có bao nhiêu phần tử.

**A.** 7 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

**Câu 4.** **(Mã 103 2018)** Gọi $S$ là tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ sao cho phương trình $4^x - m.2^{x+1} + 2m^2 - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi $S$ có bao nhiêu phần tử.

**A.** 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 5

**Câu 5.** **(Mã 110 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $4^x - 2^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt

**A.** $m \in (0;+\infty)$ **B.** $m \in (-\infty;1)$ **C.** $m \in (0;1]$ **D.** $m \in (0;1)$

**Câu 6.** **(Mã 104 2018)** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ sao cho phương trình $9^x - m.3^{x+1} + 3m^2 - 75 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi $S$ có bao nhiêu phần tử?

**A.** 5 **B.** 8 **C.** 4 **D.** 19

**Câu 7.** **(Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020)** Cho phương trình $9^x - (2m+3).3^x + 81 = 0$ ($m$ là tham số thực). Giá trị của $m$ để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 10$ thuộc khoảng nào sau đây

**A.** $(5;10)$. **B.** $(0;5)$. **C.** $(10;15)$. **D.** $(15;+\infty)$.

**Câu 8.** **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Cho phương trình $m.16^x - 2(m-2).4^x + m - 3 = 0 (1)$. Tập hợp tất cả các giá trị dương của $m$ để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là khoảng $(a;b)$. Tổng $T = a + 2b$ bằng:

**A.** 14 **B.** 10 **C.** 11 **D.** 7

**Câu 9.** **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Phương trình $4^x - 3.2^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực $x_1, x_2$ thỏa mãn $x_1 + x_2 = -1$. Giá trị của $m$ thuộc khoảng nào sau đây?

**A.** $(-5;0)$. **B.** $(-7;-5)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(5;7)$.

**Câu 10.** **(THPT Lê Xoay Vĩnh Phúc 2019)** Với giá trị nào của tham số $m$ để phương trình $4^x - m.2^{x+1} + 2m + 3 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 + x_2 = 4$

**A.** $m = \frac{5}{2}$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = 8$. **D.** $m = \frac{13}{2}$.

**Câu 11.** **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương 2019)** Phương trình $4^x - m.2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm $x_1$ , $x_2$ thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$ khi

**A.** $m = 4$. **B.** $m = 3$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = 1$.

**Câu 12.** **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình $4.4^{x^2+2x} + (2m-2)6^{x^2+2x+1} - (6m+3)3^{2x^2+4x+2} = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

**A.** $4 - 3\sqrt{2} < m < 4 + 3\sqrt{2}$ **B.** $m > 4 + 3\sqrt{2}$ **hoặc** $m < 4 - 3\sqrt{2}$

**C.** $m > -1$ **hoặc** $m < \frac{-1}{2}$ **D.** $-1 < m < \frac{-1}{2}$

**Câu 13.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Biết rằng tập các giá trị của tham số $m$ để phương trình $(m-3)9^x + 2(m+1)3^x - m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt là một khoảng $(a;b)$. Tính tích $a.b$.

**A.** 4 **B.** –3 **C.** 2 **D.** 3

**Câu 14.** Có tất cả bao nhiêu số nguyên $m$ để phương trình $4^x - m.2^x + 2m - 2019 = 0$ có hai nghiệm trái dấu?

**A.** $1008$. **B.** $1007$. **C.** $2018$. **D.** $2017$.

**Câu 15.** Cho phương trình $\left(4+\sqrt{15}\right)^x + (2m+1)\left(4-\sqrt{15}\right)^x - 6 = 0$. Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ thỏa mãn $x_1 - 2x_2 = 0$. Ta có $m$ thuộc khoảng nào?

**A.** $(3;5)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

**Câu 16.** **(Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ An 2019)** Phương trình $\left(2+\sqrt{3}\right)^x + (1-2a)\left(2-\sqrt{3}\right)^x - 4 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1$, $x_2$ thỏa mãn $x_1 - x_2 = \log_{2+\sqrt{3}} 3$. Khi đó $a$ thuộc khoảng

**A.** $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\frac{3}{2};+\infty\right)$.

**Câu 17.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Biết rằng tập các giá trị của tham số $m$ để phương trình $(m-3)9^x + 2(m+1)3^x - m - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt là một khoảng $(a;b)$. Tính tích $a.b$.

**A.** $4$ **B.** $-3$ **C.** $2$ **D.** $3$

**Câu 18.** **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Tìm tất cả các giá trị của $mm$ để phương trình $9^x - 2m.3^x + m + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt

**A.** $-2 < m < 2$ **B.** $m > 2$ **C.** $m > -2$ **D.** $m < 2$

**Câu 19.** Xác định các giá trị của tham số $m$ để phương trình $9^x - 2(m+2)6^x + \left(m^2+4m+3\right)4^x = 0$ có hai nghiệm phân biệt?

**A.** $m < -2$. **B.** $m > -3$. **C.** $m > -1$. **D.** $m > -2$.

**Câu 20.** **(KTNL GV THPT Lý Thái Tổ 2019)** Biết rằng $m = m_0$ là giá trị của tham số $m$ sao cho phương trình $9^x - 2(2m+1)3^x + 3(4m-1) = 0$ có hai nghiệm thực $x_1, x_2$ thỏa mãn $(x_1+2)(x_2+2) = 12$. Khi đó $m_0$ thuộc khoảng nào sau đây

**A.** $(3;9)$. **B.** $(9;+\infty)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(-2;0)$.

**Câu 21.** **(Sở Phú Thọ 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $16^x - 2(m+1)4^x + 3m - 8 = 0$ có hai nghiệm trái dấu?

**A.** $6$ **B.** $7$ **C.** $0$ **D.** $3$

**Câu 22.** **(Chuyên Thái Nguyên 2019)** Gọi $S$ là tập hợp các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $4^x - m.2^x + 2m + 1 = 0$ có nghiệm. Tập $\mathbb{R} \setminus S$ có bao nhiêu giá trị nguyên?

**A.** $1$ **B.** $4$ **C.** $9$ **D.** $7$

**Câu 23.** **(THPT Nghĩa Hưng NĐ- 2019)** Cho phương trình $9^x - 2(2m+1)3^x + 3(4m-1) = 0$ có hai nghiệm thực $x_1$, $x_2$ thỏa mãn $(x_1+2)(x_2+2) = 12$. Giá trị của $m$ thuộc khoảng

**A.** $(9;+\infty)$. **B.** $(3;9)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(1;3)$.

**Câu 24.** **(Đề Tham Khảo 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m$ để phương trình $16^x - 2.12^x + (m-2).9^x = 0$ có nghiệm dương?

**A.** $2$ **B.** $4$ **C.** $3$ **D.** $1$

**Câu 25.** **(THPT Ba Đình -2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $9^{\sqrt{4x-x^2}} - 4.3^{\sqrt{4x-x^2}} + 2m - 1 = 0$ có nghiệm?

**A.** $27$. **B.** $25$. **C.** $23$. **D.** $24$.

**Câu 26.** **(THPT-Thang-Long-Ha-Noi- 2019)** Gọi $(a;b)$ là tập các giá trị của tham số $m$ để phương trình $2e^{2x} - 8e^x - m = 0$ có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $(0;\ln 5)$. Tổng $a+b$ là

**A.** $2$. **B.** $4$. **C.** $-6$. **D.** $-14$.

**Câu 27.** **(Sở Bắc Giang 2019)** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $\left(\sqrt{2}+1\right)^x - m\left(\sqrt{2}-1\right)^x = 8$ có hai nghiệm dương phân biệt. Số phần tử của $S$ bằng

**A.** 8. **B.** 7. **C.** 10. **D.** 9.

**Câu 28.** **(Chuyên Thái Bình 2019)** Tìm số giá trị nguyên của tham số $m \in (-10;10)$ để phương trình $\left(\sqrt{10}+1\right)^{x^2} + m\left(\sqrt{10}-1\right)^{x^2} = 2.3^{x^2+1}$ có đúng hai nghiệm phân biệt?

**A.** $14$. **B.** $15$. **C.** $13$. **D.** $16$.

**Câu 29.** **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Phương trình $\left(\frac{1}{9}\right)^x - m.\left(\frac{1}{3}\right)^x + 2m + 1 = 0$ có nghiệm khi $m$ nhận giá trị:

**A.** $m < -\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2} < m < 4 - 2\sqrt{5}$. **C.** $m \ge 4 + 2\sqrt{5}$. **D.** $m < -\frac{1}{2} \vee m \ge 4 + 2\sqrt{5}$.

**Câu 30.** **(THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Số các giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình: $(m+1).16^x - 2(2m-3).4^x + 6m + 5 = 0$ có hai nghiệm trái dấu là

**A.** $4$. **B.** $8$. **C.** $1$. **D.** $2$.

**Câu 31.** Phương trình $4^x + 1 = 2^x.m.\cos(\pi x)$ có nghiệm duy nhất. Số giá trị của tham số $m$ thỏa mãn là

**A.** Vô số **B.** 1 **C.** 2 **D.** 0

**Câu 32.** **(Sở Hà Nội 2019)** Cho phương trình $2^x = \sqrt{m.2^x.\cos(\pi x) - 4}$, với $m$ là tham số. Gọi $m_0$ là giá trị của $m$ sao cho phương trình trên có đúng một nghiệm thực. Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** $m_0 \in [-5;-1)$. **B.** $m_0 < -5$. **C.** $m_0 \in [-1;0)$. **D.** $m_0 > 0$.

**Câu 33.** **(HSG Bắc Ninh 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $8^x + 3x.4^x + (3x^2+1).2^x = (m^3-1)x^3 + (m-1)x$ có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc $(0;10)$.

**A.** 101 **B.** 100 **C.** 102 **D.** 103

**Câu 34.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $e^{3m} + e^m = 2\left(x + \sqrt{1-x^2}\right)\left(1 + x\sqrt{1-x^2}\right)$ có nghiệm.

**A.** $\left(0;\frac{1}{2}\ln 2\right)$ **B.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\ln 2\right]$ **C.** $\left(0;\frac{1}{e}\right)$ **D.** $\left[\frac{1}{2}\ln 2;+\infty\right)$

**Câu 35.** **(SP Đồng Nai - 2019)** Gọi $A$ là tập tất cả các giá trị thực của tham số $m$ sao cho tập nghiệm của phương trình $x.2^x = x(x-m+1) + m.(2^x - 1)$ có hai phần tử. Số phần tử của $A$ bằng

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** Vô số.

**Câu 36.** **(Nguyễn Huệ- Ninh Bình- 2019)**Giá trị của $m$ để phương trình $4^{|x|} - 2^{|x|+1} - m = 0$ có nghiệm duy nhất là:

**A.** $m = 2$. **B.** $m = 0$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = -1$.

**Câu 37.** **(THPT Thăng Long 2019)** Gọi $(a;b)$ là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $2e^{2x} - 8e^x - m = 0$ có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $(0;\ln 5)$. Giá trị của tổng $a+b$ là

**A.** $2$. **B.** $4$. **C.** $-6$. **D.** $-14$.

**Câu 38.** **(Chuyên Long An-2019)** Giá trị của tham số $m$ thuộc khoảng nào sau đây để phương trình $4^x - m.2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm $x_1$, $x_2$ thoả mãn $x_1 + x_2 = 3$.

**A.** $m \in \left(\frac{9}{2};5\right)$. **B.** $m \in (-2;-1)$. **C.** $m \in (1;3)$. **D.** $m \in (3;5)$.

**Câu 39.** **(THPT Quỳnh Lưu- Nghệ An- 2019)** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ sao cho phương trình $16^x - m.4^{x-1} + 5m^2 - 44 = 0$ có hai nghiệm đối nhau. Hỏi $S$ có bao nhiêu phần tử?

**A.** $2$. **B.** $0$. **C.** $1$. **D.** $3$.

**Câu 40.** **(THPT Hai Bà Trưng - Huế - 2019)** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $4^x-2m.2^x-m+6=0$ có hai nghiệm thực $x_1,x_2$ sao cho $x_1<x_2<3$. Tập hợp $S$ có bao nhiêu phần tử?

**A.** Vô số. **B.** $3$. **C.** $2$. **D.** $1$.

**Câu 41.** **(THPT Minh Khai - 2019)** Giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $4^x-(2m+3).2^x+64=0$ có hai nghiệm thực $x_1$, $x_2$ thỏa mãn $(x_1+2)(x_2+2)=24$ thuộc khoảng nào sau đây?

**A.** $\left(0;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(-\frac{3}{2};0\right)$. **C.** $\left(\frac{21}{2};\frac{29}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{11}{2};\frac{19}{2}\right)$.

**Câu 42.** **(Chuyên - Vĩnh Phúc - 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $e^{3m}+e^m=2\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+x\sqrt{1-x^2}\right)$ có nghiệm.

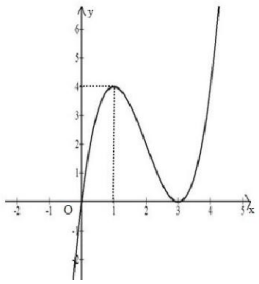
**A.** $\left(0;\frac{1}{e}\right)$. **B.** $\left(0;\frac{1}{2}\ln 2\right)$. **C.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\ln 2\right]$. **D.** $\left[\frac{1}{2}\ln 2;+\infty\right)$.

**Câu 43.** **(Chuyên Quang Trung- Bình Phước 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $4^x-(m-1).2^x+2=0$ có hai nghiệm $x_1$, $x_2$ thoả mãn $x_1+x_2=1$.

**A.** $m\in\mathrm{R}$. **B.** $m>1+2\sqrt{2};m<1-2\sqrt{2}$.

**C.** $m\geq 1+2\sqrt{2}$. **D.** $m>1+2\sqrt{2}$.

**Câu 44.** **(Chuyên Quang Trung- Bình Phước 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Tập hợp tất cả các giá trị thực của $m$ để phương trình $f\left(e^{x^2}\right)=m$ có đúng 2 nghiệm thực là

**A.** $[0;4]$. **B.** $\{0;4\}$. **C.** $\{0\}\cup(4;+\infty)$. **D.** $[4;+\infty)$.

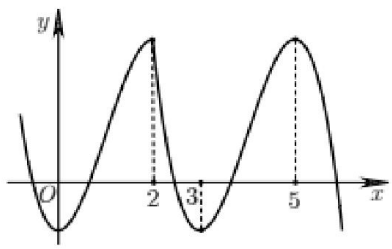
**Câu 45.** **(Chuyên Thái Bình - 2019)** Tìm số giá trị nguyên của tham số $m\in(-10;10)$ để phương trình $\left(\sqrt{10}+1\right)^{x^2}+m\left(\sqrt{10}-1\right)^{x^2}=2.3^{x^2+1}$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

**A.** $14$. **B.** $15$. **C.** $13$. **D.** $16$.

**Câu 46.** **(Thi thử cụm Vũng Tàu - 2019)** Tổng tất cả các giá trị nguyên của $m$ để phương trình $3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}}+\left(x^3-9x^2+24x+m\right).3^{x-3}=3^x+1$ có 3 nghiệm phân biệt.

**A.** $34$. **B.** $27$. **C.** $38$. **D.** $45$.

**Câu 47.** **(Chuyên ĐH Vinh- 2019)** Cho số thực $m$ và hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.




Phương trình $f\left(2^x+2^{-x}\right)=m$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$?

**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** $4$. **D.** $5$.

**Câu 48.** **(THPT Thuận Thành 3 - Bắc Ninh 2019)** Gọi $S$ là tổng các giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $4^x+7=2^{x+3}+m^2+6m$ có nghiệm $x\in(1;3)$. Chọn đáp án đúng.

**A.** $S=-35$. **B.** $S=20$. **C.** $S=25$. **D.** $S=-21$.

**Câu 49.** **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Tập các giá trị của $m$ để phương trình $4^{1+\sqrt{1-x^2}}-(m+2)2^{1+\sqrt{1-x^2}}+2m+1=0$ có nghiệm là

**A.** $\left(-\infty;\frac{9}{2}\right)$. **B.** $\left[4;\frac{9}{2}\right]$. **C.** $(-\infty;4)$. **D.** $[4;+\infty)$.

**Câu 50.** Cho hàm số $f(x)=3^{x-4}+(x+1).2^{7-x}-6x+3$, khi phương trình $f\left(7-4\sqrt{6x-9x^2}\right)+3m-1=0$ có số nghiệm nhiều nhất thì giá trị nhỏ nhất của tham số $m$ có dạng $\frac{a}{b}$ (trong đó $a$, $b\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $T=a+b$.

**A.** $T=7$. **B.** $T=11$. **C.** $T=8$. **D.** $T=13$.

**Câu 51.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $9^{1+\sqrt{1-x^2}}-(m+3).3^{1+\sqrt{1-x^2}}+2m+1=0$ có nghiệm thực?

**A.** 5. **B.** 7. **C.** Vô số. **D.** 3.

**Câu 52.** **(THPT Thăng Long 2019)** Cho hệ phương trình $\begin{cases}2^{x-y}-2^y+x=2y\\2^x+1=(m^2+2).2^y.\sqrt{1-y^2}\end{cases}(1)$, $m$ là tham số. Gọi $S$ là tập các giá trị $m$ nguyên để hệ $(1)$ có một nghiệm duy nhất. Tập $S$ có bao nhiêu phần tử?

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

**Câu 53.** Cho $a,b$ là các số thực thỏa mãn $a>0$ và $a\neq1$, biết phương trình $a^x-\frac{1}{a^x}=2\cos(bx)$ có 7 nghiệm phân biệt. Tìm số nghiệm thực phân biệt của phương trình $a^{2x}-2a^x(\cos bx+2)+1=0$.

**A.** 28. **B.** 14. **C.** 0. **D.** 7.

**Câu 54.** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $\frac{15}{13}$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Giá trị lớn nhất của $m$ để phương trình $e^{2f^3(x)-\frac{13}{2}f^2(x)+7f(x)+\frac{3}{2}}=m$ có nghiệm trên đoạn $[0;2]$ là

**A.** $e^4$. **B.** $e^3$. **C.** $e^{\frac{15}{13}}$. **D.** $e^5$.

**Câu 55.** **(Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên 2019)** Cho phương trình $\left(4+\sqrt{15}\right)^x+(2m+1)\left(4-\sqrt{15}\right)^x-6=0$ ( $m$ là tham số ). Biết phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2$ thỏa mãn $x_1-2x_2=0$. Khi đó $m$ thuộc khoảng nào sau đây?

**A.** $(3;5)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

**Câu 56.** **(THPT Minh Khai 2019)** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $5^x+10=m\sqrt{25^x+4}$ có nghiệm duy nhất. Số tập con của $S$ là

**A.** 3. **B.** 4. **C.** 16. **D.** 15.

**Câu 57.** **(Sở Quảng Trị 2019)** Tìm tập hợp tất cả các giá trị tham số $m$ để phương trình $4^{x^2-2x+1}-m.2^{x^2-2x+2}+3m-2=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

**A.** $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $[2;+\infty)$.

**Câu 58.** Cho phương trình: $2^{x^3+x^2-2x+m}-2^{x^2+x}+x^3-3x+m=0$. Tập các giá trị để bất phương trình có ba nghiệm phân biệt có dạng $(a;b)$. Tổng $a+2b$ bằng:

**A.** 1. **B.** 2. **C.** −4. **D.** 0.

**Câu 59.** **(Chuyên ĐH Vinh- 2019)** Có bao nhiêu số nguyên $m$ để phương trình $9.3^{2x}-m\left(4\sqrt[4]{x^2+2x+1}+3m+3\right)3^x+1=0$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt?

**A.** Vô số. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

**Câu 60.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2019;2019]$ để phương trình $2019^x+\dfrac{2x-1}{x+1}+\dfrac{mx-2m-1}{x-2}=0$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt?

**A.** 4038. **B.** 2019. **C.** 2017. **D.** 4039.

**Câu 61.** **(Chuyên Hưng Yên - 2020)** Gọi $S$ là tập hợp các giá trị của tham số $m$ sao cho hai phương trình $2x^2+1=3^m$ và $m=3^x-2x^2+x-1$ có nghiệm chung. Tính tổng các phần tử của $S$.

**A.** 6 **B.** 3. **C.** 1. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

**Câu 62.** **(Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm - Quảng Nam - 2020)** Giá trị của tham số $m$ để phương trình $4^x-m.2^{x+1}+2m=0$ có hai nghiệm $x_1$, $x_2$ thỏa mãn $x_1+x_2=3$ là

**A.** $m=2$. **B.** $m=3$. **C.** $m=4$. **D.** $m=1$.

**Câu 63.** **(Chuyên Chu Văn An - 2020)** Tìm $m$ để phương trình $4^x-2^{x+1}+m=0$ có hai nghiệm trái dấu.

**A.** $m<0$. **B.** $m>1$. **C.** $-1<m<1$. **D.** $0<m<1$.

**Câu 64.** **(Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m$ để phương trình $9^x-2.6^{x+1}+(m-3).4^x=0$ có hai nghiệm phân biệt?

**A.** 35. **B.** 38. **C.** 34. **D.** 33.

**Câu 65.** **(ĐHQG Hà Nội - 2020)** Gọi $S$ là tập hợp các số nguyên $m$ sao cho phương trình $4^x-m.2^{x+1}+3m^2-500=0$ có 2 nghiệm phân biệt. Hỏi tập $S$ có bao nhiêu phần tử

**A.** 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

**Câu 66.** **(ĐHQG Hà Nội - 2020)** Tìm điều kiện của tham số $a$ để phương trình sau có nghiệm: $9^{1+\sqrt{1-x^2}}-(a+2).3^{1+\sqrt{1-x^2}}+2a+1=0$. Hãy chọn đáp án đúng nhất?

**A.** $4\le a\le\dfrac{64}{7}$. **B.** $2\le a\le\dfrac{64}{9}$. **C.** $3\le a\le\dfrac{50}{3}$. **D.** $1\le a\le\dfrac{50}{3}$.

**Câu 67.** **(ĐHQG Hà Nội - 2020)** Điều kiện của $m$ để hệ bất phương trình $\begin{cases}7^{2x+\sqrt{x+1}}-7^{2+\sqrt{x+1}}+2020x\le 2020\\ x^2-(m+2)x+2m+3\ge 0\end{cases}$ có nghiệm là :

**A.** $m\ge -3$. **B.** $-2\le m\le 1$. **C.** $-1\le m\le 2$. **D.** $m\ge -2$.

**Câu 68.** **(Sở Phú Thọ - 2020)** Cho phương trình $16^{x^2}-2.4^{x^2+1}+10=m$ ($m$ là tham số). Số giá trị nguyên của tham $m\in[-10;10]$ để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm thực phân biệt là

**A.** 7. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 1.

**Câu 69.** **(Sở Hà Tĩnh - 2020)** Gọi $S$ là tập nghiệm của phương trình $(2^x-2x)\sqrt{(3)^{2^x}-m}=0$ (với $m$ là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[-2020;2020]$ để tập hợp $S$ có hai phần tử?

**A.** 2094. **B.** 2092. **C.** 2093. **D.** 2095.

**Câu 70.** **(Sở Ninh Bình 2020)** Cho hai số thực bất kỳ $a>1$, $b>1$. Gọi $x_1$, $x_2$ là hai nghiệm phương trình $a^x b^{x^2-1}=1$. Trong trường hợp biểu thức $S=\left(\dfrac{x_1x_2}{x_1+x_2}\right)^2-6x_1-6x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất, khẳng định nào dưới đây đúng?

**A.** $a=b^{\sqrt[3]{3}}$. **B.** $a=b^{\sqrt[3]{6}}$. **C.** $a=b^{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}}$. **D.** $a=b^{\sqrt[3]{\frac{1}{6}}}$.

**Câu 71.** **(Sở Bắc Ninh - 2020)** Gọi $S$ là tập tất cả các giá trị của $m$ để phương trình $16^x-6.8^x+8.4^x-m.2^{x+1}-m^2=0$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Khi đó $S$ có

**A.** 4 tập con. **B.** Vô số tập con. **C.** 8 tập con. **D.** 16 tập con.

**Câu 72.** **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Tìm tập hợp các giá trị của tham số thực $m$ để phương trình $6^x+(3-m)2^x-m=0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

**A.** $[3;4]$. **B.** $[2;4]$. **C.** $(2;4)$. **D.** $(3;4)$.

**Câu 73.** **(Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in(-2019;2020)$ sao cho hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases}4+9.3^{x^2-2y}=\left(4+9^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2}\\2x-1=\sqrt{2y-2x+m}\end{cases}?$$

**A.** 2017. **B.** 2021. **C.** 2019. **D.** 2020.

**Câu 74.** **(Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020)** Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $e^{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\tan x$ thuộc đoạn $[0;50\pi]$

**A.** $\dfrac{2671\pi}{2}$. **B.** $\dfrac{1853\pi}{2}$. **C.** $\dfrac{2475\pi}{2}$. **D.** $\dfrac{2653\pi}{2}$.

**Câu 75.** **(Trần Phú - Quảng Ninh - 2020)** Tìm tập hợp các giá trị của tham số $m$ để phương trình (ẩn $x$): $3^{\log_2 x^2}-2(m+3).3^{\log_2 x}+m^2+3=0$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn: $x_1x_2>2$.

**A.** $(-1;+\infty)\setminus\{0\}$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus[-1;1]$. **D.** $(-1;+\infty)$.

## Dạng 3. Phương trình kết hợp của mũ và logarit chứa tham số

**Câu 1.** **(Mã 103 -2019)** Cho phương trình $\left(2\log_3^2 x-\log_3 x-1\right)\sqrt{5^x-m}=0$ ($m$ là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của $m$ để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

**A.** Vô số. **B.** 124. **C.** 123. **D.** 125.

**Câu 2.** **(Mã 102 - 2019)** Cho phương trình $\left(2\log_2^2 x-3\log_2 x-2\right)\sqrt{3^x-m}=0$ ($m$ là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của $m$ để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

**A.** vô số. **B.** 81. **C.** 79. **D.** 80.

**Câu 3.** **(Mã 104 2019)** Cho phương trình $\left(2\log_3^2 x-\log_3 x-1\right)\sqrt{4^x-m}=0$ ($m$ là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của $m$ để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt?

**A.** 64. **B.** Vô số. **C.** 62. **D.** 63.

**Câu 4.** **(Mã 101 2019)** Cho phương trình $\left(4\log_2^2 x+\log_2 x-5\right)\sqrt{7^x-m}=0$ ($m$ là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của $m$ để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

**A.** 49. **B.** 47. **C.** Vô số. **D.** 48.

**Câu 5.** **(Mã 102 2018)** Cho phương trình $3^x+m=\log_3(x-m)$ với $m$ là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-15;15)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

**A.** 15 **B.** 16 **C.** 9 **D.** 14

**Câu 6.** **(Mã 101 2018)** Cho phương trình $5^x+m=\log_5(x-m)$ với $m$ là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-20;20)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

**A.** 19 **B.** 9 **C.** 21 **D.** 20

**Câu 7.** **(Mã 103 -2018)** Cho phương trình $7^x+m=\log_7(x-m)$ với $m$ là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-25;25)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

**A.** 9 **B.** 25 **C.** 24 **D.** 26

**Câu 8.** Cho phương trình $5^x+m+\log_{\frac{1}{5}}(x-m)=0$ với $m$ là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-20;20)$ để phương trình đã cho có nghiệm thực?

**A.** 20. **B.** 21. **C.** 18. **D.** 19.

**Câu 9.** **(Mã 104 2018)** Cho phương trình $2^x+m=\log_2(x-m)$ với $m$ là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-18;18)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

**A.** 9 **B.** 19 **C.** 17 **D.** 18

**Câu 10.** **(Chuyên Nguyễn Du-ĐăkLăk 2019)** Cho phương trình $5^x+m=\log_5(x-m)$. Có bao nhiêu giá trị $m$ nguyên trong khoảng $(-20;20)$ để phương trình trên có nghiệm?

**A.** 15. **B.** 19. **C.** 14. **D.** 17.

**Câu 11.** Tổng tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình $2^{x^2+4x+5-m^2}=\log_{x^2+4x+6}(m^2+1)$ có đúng 1 nghiệm là

**A.** $-2$. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 0.

**Câu 12.** Tổng tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình $3^{x^2-2x+1-2|x-m|}=\log_{x^2-2x+3}(2|x-m|+2)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là:

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

**Câu 13.** **(Chuyên Lam Sơn - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $a$ trên đoạn $[-10;10]$ để phương trình $e^{x+a}-e^x=\ln(1+x+a)-\ln(1+x)$ có nghiệm duy nhất.

**A.** 2. **B.** 10. **C.** 1. **D.** 20

**Câu 14.** **(Chuyên Sơn La - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ thuộc $(-2020;2020)$ để phương trình $e^x=\ln(x+2m)+2m$ có nghiệm?

**A.** 2019. **B.** 2020. **C.** 2021. **D.** 4039.

## Dạng 4. Phương trình mũ – logarit chứa nhiều ẩn

**Câu 1.** **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0\le x\le 2020$ và $\log_3(3x+3)+x=2y+9^y$?

**A.** 2019. **B.** 6. **C.** 2020. **D.** 4.

**Câu 2.** **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Có bao nhiêu số nguyên $x$ sao cho tồn tại số thực $y$ thỏa mãn $\log_3(x+y)=\log_4(x^2+y^2)$?

**A.** 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

**Câu 3.** **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(m;n)$ sao cho $m+n\le 10$ và ứng với mỗi cặp $(m;n)$ tồn tại đúng 3 số thực $a\in(-1;1)$ thỏa mãn $2a^m=n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$?

**A.** 7. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 9.

**Câu 4.** **(Mã 101 - 2020 Lần 2)** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(m,n)$ sao cho $m+n\le 14$ và ứng với mỗi cặp $(m,n)$ tồn tại đúng ba số thực $a\in(-1;1)$ thỏa mãn $2a^m=n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$?

**A.** 14. **B.** 12. **C.** 11. **D.** 13.

**Câu 5.** **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(m,n)$ sao cho $m+n\le 12$ và ứng với mỗi cặp $(m,n)$ tồn tại đúng 3 số thực $a\in(-1,1)$ thỏa mãn $2a^m = n\ln(a+\sqrt{a^2+1})$?

**A.** $12$. **B.** $10$. **C.** $11$. **D.** $9$.

**Câu 6.** **(Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020)** Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số $m\in[-1;1]$ sao cho phương trình $\log_{m^2+1}\left(x^2+y^2\right)=\log_2\left(2x+2y-2\right)$ có nghiệm nguyên $(x;y)$ duy nhất?

**A.** $3$. **B.** $2$. **C.** $1$. **D.** $0$.

**Câu 7.** **(Chuyên Lương Văn Tụy - Ninh Bình - 2020)** Có bao nhiêu số nguyên $y$ để tồn tại số thực $x$ thỏa mãn $\log_{11}(3x+4y)=\log_4\left(x^2+y^2\right)$?

**A.** $3$ **B.** $2$ **C.** $1$ **D.** vô số.

**Câu 8.** **(Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm - Quảng Nam - 2020)** Có bao nhiêu cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $3^{\left|x^2-2x-3\right|-\log_3 5}=5^{-(y+4)}$ và $4|y|-|y-1|+(y+3)^2\le 8$ ?

**A.** $1$. **B.** $3$. **C.** $4$. **D.** $2$.

**Câu 9.** **(Chuyên Bến Tre - 2020)** Giả sử $(x_0;y_0)$ là một nghiệm của phương trình $4^{x-1}+2^x\sin\left(2^{x-1}+y-1\right)+2=2^x+2\sin\left(2^{x-1}+y-1\right)$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

**A.** $x_0>7$. **B.** $-2<x_0<4$. **C.** $4<x_0<7$. **D.** $-5<x_0<-2$.

**Câu 10.** **(Chuyên Lào Cai - 2020)** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0\le x\le 4000$ và $5\left(25^y+2y\right)=x+\log_5(x+1)^5-4$?

**A.** $3$. **B.** $2$. **C.** $4$. **D.** $5$.

**Câu 11.** **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)** Có bao nhiêu bộ $(x;y)$ với $x,y$ nguyên và $1\le x,y\le 2020$ thỏa mãn $(xy+2x+4y+8)\log_3\left(\frac{2y}{y+2}\right)\le(2x+3y-xy-6)\log_2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)$?

**A.** $2017$. **B.** $4034$. **C.** $2$. **D.** $2017.2020$.

**Câu 12.** **(Chuyên Sơn La - 2020)** Cho $x$ là số thực dương và $y$ là số thực thỏa mãn $2^{x+\frac{1}{x}}=\log_2\left[14-(y-2)\sqrt{y+1}\right]$. Giá trị của biểu thức $P=x^2+y^2-xy+2020$ bằng

**A.** $2022$. **B.** $2020$. **C.** $2021$. **D.** $2019$.

**Câu 13.** **(Sở Hưng Yên - 2020)** Cho phương trình $\log_3\left(3x^2-6x+6\right)=3^{y^2}+y^2-x^2+2x-1$. Hỏi có bao nhiêu cặp số $(x;y)$ và $0<x<2020$ ; $y\in\mathbb{N}$ thỏa mãn phương trình đã cho?

**A.** $5$. **B.** $6$. **C.** $7$. **D.** $4$.

**Câu 14.** **(Sở Phú Thọ - 2020)** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $2\le x\le 2021$ và $2^y-\log_2\left(x+2^{y-1}\right)=2x-y$?

**A.** $2020$. **B.** $9$. **C.** $2019$. **D.** $10$.

**Câu 15.** **(Sở Bắc Ninh - 2020)** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thảo mãn $3^{x+y}-x^2\left(3^x-1\right)=(x+1)3^y-x^3$, với $x<2020$?

**A.** $13$. **B.** $15$. **C.** $6$. **D.** $7$.

**Câu 16.** **(Sở Bình Phước - 2020)** Biết $a,b$ là các số thực sao cho $x^3+y^3=a.10^{3z}+b.10^{2z}$, đồng thời $x,y,z$ là các số các số thực dương thỏa mãn $\log(x+y)=z$ và $\log\left(x^2+y^2\right)=z+1$. Giá trị của $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ thuộc khoảng

**A.** $(1;2)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(3;4)$. **D.** $(4;5)$.

**Câu 17.** **(Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020)** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0<y<2020$ và $3^x+3x-6=9y+\log_3 y^3$.

**A.** 2020 **B.** 9. **C.** 7. **D.** 8.

**Câu 18.** **(Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020)** Giả sử $a,b$ là các số thực sao cho $x^3+y^3=a.10^{3z}+b.10^{2z}$ đúng với mọi các số thực dương $x,y,z$ thỏa mãn $\log(x+y)=z$ và $\log(x^2+y^2)=z+1$. Giá trị của $a+b$ bằng

**A.** $-\frac{25}{2}$. **B.** $-\frac{31}{2}$. **C.** $\frac{31}{2}$. **D.** $\frac{29}{2}$.

**Câu 19.** **(Kim Liên - Hà Nội - 2020)** Có bao nhiêu số hữu tỉ $a$ thuộc đoạn $[-1;1]$ sao cho tồn tại số thực $b$ thỏa mãn

$$\log_2\left(1-a^2-b^2+2b\right)=\frac{2^a}{4^a+1}+\frac{4^a}{2^a+1}+\frac{1}{2^a+4^a}-\frac{1}{2}.$$

**A.** 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** Vô số.

**Câu 20.** **(Lê Lai - Thanh Hóa - 2020)** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn $x+y>0;-20\le x\le 20$ và $\log_2(x+2y)+x^2+2y^2+3xy-x-y=0$?

**A.** 19. **B.** 6 **C.** 10. **D.** 41.

**Câu 21.** **(Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020)** Cho các số thực $x$, $y$ thỏa mãn $x>1$, $y>1$ và $\log_3 x\log_3 6y+2\log_3 x\log_3 2y\left(3-\log_3 2xy\right)=\frac{9}{2}$. Giá trị của biểu thức $P=x+2y$ gần với số nào nhất trong các số sau

**A.** 7. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 9.

**Câu 22.** **(Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020)** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ với $x\le 2020$ thỏa mãn $2(3x-y)=3\left(1+9^y\right)-\log_3(2x-1)$

**A.** 1010. **B.** 2020. **C.** 3. **D.** 4.

Nguyễn Bảo Vương

## TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH MỨC 5-6 ĐIỂM

### Dạng 1. Phương trình logarit

**Phương trình logarit**

+ Nếu $a>0, a\neq 1: \log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$

+ Nếu $a>0, a\neq 1: \log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

+ Nếu $a>0, a\neq 1: \log_a f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = a^{g(x)}$ **(mũ hóa)**

### Dạng 1.1 Phương trình cơ bản

**Câu 1.** **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Nghiệm của phương trình $\log_3(2x-1)=2$ là:

**A.** $x=3$. **B.** $x=5$. **C.** $x=\frac{9}{2}$. **D.** $x=\frac{7}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện: $2x-1>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$

Ta có $\log_3(2x-1)=2 \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{2} \\ 2x-1=3^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{2} \\ x=5 \end{cases} \Leftrightarrow x=5$.

Vậy phương trình có nghiệm $x=5$.

Nguyễn Bảo Vương

**Câu 2.** **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Nghiệm của phương trình $\log_3(x-1)=2$ là

**A.** $x=8$. **B.** $x=9$. **C.** $x=7$. **D.** $x=10$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

TXĐ: $D=(1;+\infty)$

$\log_3(x-1)=2 \Leftrightarrow x-1=3^2 \Leftrightarrow x=10$

**Câu 3.** **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Nghiệm của phương trình $\log_2(x-1)=3$ là

**A.** $x=10$. **B.** $x=8$. **C.** $x=9$. **D.** $x=7$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $\log_2(x-1)=3 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ x-1=2^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ x=9 \end{cases} \Leftrightarrow x=9$.

**Câu 4.** **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Nghiệm của phương trình $\log_2(x-2)=3$ là:

**A.** $x=6$. **B.** $x=8$. **C.** $x=11$. **D.** $x=10$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện: $x-2>0 \Leftrightarrow x>2$.

$\log_2(x-2)=3 \Leftrightarrow x-2=8 \Leftrightarrow x=10$ (thỏa).

Vậy phương trình có nghiệm $x=10$.

**Câu 5.** **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Nghiệm của phương trình $\log_3(x-2)=2$ là

**A.** $x=11$. **B.** $x=10$. **C.** $x=7$. **D.** $8$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện: $x>2$

Phương trình tương đương với $x-2=3^2 \Leftrightarrow x=11$

**Câu 6.** **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Nghiệm của phương trình $\log_2(x+9)=5$ là

**A.** $x=41$. **B.** $x=23$. **C.** $x=1$. **D.** $x=16$.

**Lời giải**

**Chọn B**

ĐK: $x>-9$

Ta có: $\log_2(x+9)=5 \Leftrightarrow x+9=2^5 \Leftrightarrow x=23$.

**Câu 7.** **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Nghiệm của phương trình $\log_2(x+6)=5$ là:

**A.** $x=4$. **B.** $x=19$. **C.** $x=38$. **D.** $x=26$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện $x+6>0 \Leftrightarrow x>-6$

Ta có: $\log_2(x+6)=5 \Leftrightarrow \log_2(x+6)=\log_2 2^5 \Leftrightarrow (x+6)=32 \Leftrightarrow x=32-6 \Leftrightarrow x=26(TM)$

Vậy nghiệm của phương trình: $x=26$

**Câu 8.** **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Nghiệm của phương trình $\log_2(x+7)=5$ là

**A.** $x=18$. **B.** $x=25$. **C.** $x=39$. **D.** $x=3$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$\log_2(x+7)=5 \Leftrightarrow x+7=2^5 \Leftrightarrow x=25$.

**Câu 9.** **(Mã 101 - 2020 Lần 2)** Nghiệm của phương trình $\log_2(x+8)=5$ bằng

**A.** $x=17$. **B.** $x=24$. **C.** $x=2$. **D.** $x=40$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\log_2(x+8)=5 \Leftrightarrow x+8=2^5 \Leftrightarrow x=24$.

**Câu 10.** **(Đề Tham Khảo 2019)** Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x^2-x+2)=1$ là :

**A.** $\{0\}$ **B.** $\{0;1\}$ **C.** $\{-1;0\}$ **D.** $\{1\}$

**Lời giải**

**Chọn B**

$\log_2\left(x^2-x+2\right)=1\Leftrightarrow x^2-x+2=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$

**Câu 11.** **(Đề Minh Họa 2017)** Giải phương trình $\log_4(x-1)=3$.

**A.** $x=65$ **B.** $x=80$ **C.** $x=82$ **D.** $x=63$

**Lời giải**

**Chọn A**

**ĐK:** $\Leftrightarrow x-1>0\Leftrightarrow x>1$

Phương trình $\log_4\left(x-1\right)=3\Leftrightarrow x-1=4^3\Leftrightarrow x=65$.

**Câu 12.** **(Mã 110 2017)** Tìm nghiệm của phương trình $\log_2\left(1-x\right)=2$.

**A.** $x=5$. **B.** $x=-3$. **C.** $x=-4$. **D.** $x=3$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\log_2\left(1-x\right)=2\Leftrightarrow 1-x=4\Leftrightarrow x=-3$.

**Câu 13.** **(Mã 102 2018)** Tập nghiệm của phương trình $\log_2\left(x^2-1\right)=3$ là

**A.** $\left\{-\sqrt{10};\sqrt{10}\right\}$ **B.** $\{-3;3\}$ **C.** $\{-3\}$ **D.** $\{3\}$

**Lời giải**

**Chọn B**

$\log_2\left(x^2-1\right)=3\Leftrightarrow x^2-1=8\Leftrightarrow x^2=9\Leftrightarrow x=\pm 3$.

**Câu 14.** **(Mã 104 2017)** Tìm nghiệm của phương trình $\log_2\left(x-5\right)=4$.

**A.** $x=11$ **B.** $x=13$ **C.** $x=21$ **D.** $x=3$

**Lời giải**

**Chọn C**

ĐK: $x-5>0\Leftrightarrow x>5$

Khi đó $\log_2\left(x-5\right)=4\Leftrightarrow x-5=16\Leftrightarrow x=21$.

**Câu 15.** **(Mã 103 2018)** Tập nghiệm của phương trình $\log_3(x^2-7)=2$ là

**A.** $\{4\}$ **B.** $\{-4\}$ **C.** $\{-\sqrt{15};\sqrt{15}\}$ **D.** $\{-4;4\}$

**Lời giải**

**Chọn D**

$\log_3(x^2-7)=2\Leftrightarrow x^2-7=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=-4\end{array}\right.$

**Câu 16.** **(Mã 105 2017)** Tìm nghiệm của phương trình $\log_{25}\left(x+1\right)=\frac{1}{2}$.

**A.** $x=6$ **B.** $x=4$ **C.** $x=\frac{23}{2}$ **D.** $x=-6$

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện: $x>-1$

Xét phương trình $\log_{25}\left(x+1\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\log_5\left(x+1\right)=1\Leftrightarrow x+1=5\Leftrightarrow x=4$.

**Câu 17.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Phương trình $\log_3\left(3x-2\right)=3$ có nghiệm là

**A.** $x=\dfrac{25}{3}$. **B.** $x=87$. **C.** $x=\dfrac{29}{3}$. **D.** $x=\dfrac{11}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $\log_3(3x-2)=3\Leftrightarrow 3x-2=3^3\Leftrightarrow 3x=29\Leftrightarrow x=\dfrac{29}{3}$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x=\dfrac{29}{3}$.

**Câu 18.** **(THPT Ba Đình 2019)** Tập nghiệm của phương trình $\log_3\left(x^2-x+3\right)=1$ là

**A.** $\{1\}$. **B.** $\{0;1\}$. **C.** $\{-1;0\}$. **D.** $\{0\}$.

**Lời giải**

ĐKXĐ: $x^2-x+3>0\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$

Ta có: $\log_3\left(x^2-x+3\right)=1\Leftrightarrow x^2-x+3=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{0;1\}$.

**Câu 19.** **(THPT Cù Huy Cận 2019)** Tập nghiệm của phương trình $\log_3\left(x^2+x+3\right)=1$ là:

**A.** $\{-1;0\}$. **B.** $\{0;1\}$. **C.** $\{0\}$ **D.** $\{-1\}$.

**Lời giải**

$\log_3\left(x^2+x+3\right)=1\Leftrightarrow x^2+x+3=3\Leftrightarrow x^2+x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-1\end{array}\right.$

Nguyễn Bảo Vương

**Câu 20.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Phương trình $\log_3(3x-2)=3$ có nghiệm là:

**A.** $x=\dfrac{25}{3}$ **B.** 87 **C.** $x=\dfrac{29}{3}$ **D.** $x=\dfrac{11}{3}$

**Lời giải**

Điều kiện: $x>\dfrac{2}{3}$.

Phương trình tương đương $3x-2=3^3\Leftrightarrow x=\dfrac{29}{3}$ (nhận).

Vậy $S=\left\{\dfrac{29}{3}\right\}$.

**Câu 21.** **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Tập nghiệm của phương trình $\log\left(x^2-2x+2\right)=1$ là

**A.** $\varnothing$. **B.** $\{-2;4\}$. **C.** $\{4\}$. **D.** $\{-2\}$.

**Lời giải**

Ta có $\log\left(x^2-2x+2\right)=1\Leftrightarrow x^2-2x+2=10\Leftrightarrow x^2-2x-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=4\end{array}\right.$

**Câu 22.** **(Chuyên Lương Thế Vinh Đồng Nai 2019)** Cho phương trình $\log_2(2x-1)^2=2\log_2(x-2)$. Số nghiệm thực của phương trình là:

**A.** 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

**Lời giải**

Điều kiện: $x>2$.

Phương trình đã cho tương đương với: $2\log_2(2x-1)=2\log_2(x-2)$

$\Leftrightarrow 2x-1=x-2\Leftrightarrow x=-1$

Nghiệm này không thỏa mãn điều kiện của phương trình nên phương trình đã cho vô nghiệm.

**Câu 23.** **(Chuyên Sơn La 2019)** Tập nghiệm của phương trình $\log_3\left(x^2+2x\right)=1$ là

**A.** $\{1;-3\}$. **B.** $\{1;3\}$. **C.** $\{0\}$. **D.** $\{-3\}$.

**Lời giải**

Phương trình $\log_3\left(x^2+2x\right)=1\Leftrightarrow x^2+2x=3^1\Leftrightarrow x^2+2x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-3\end{array}\right.$.

Tập nghiệm của phương trình là $\{1;-3\}$.

**Câu 24.** **(THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Tập hợp các số thực $m$ để phương trình $\log_2 x=m$ có nghiệm thực là

**A.** $[0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $(0;+\infty)$

**Lời giải**

Tập giá trị của hàm số $y=\log_2 x$ là $\mathbb{R}$ nên để phương trình có nghiệm thực thì $m\in\mathbb{R}$

**Câu 25.** **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-5x+7\right)=0$ bằng

**A.** 6 **B.** 5 **C.** 13 **D.** 7

**Lời giải**

**Chọn C**

$\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-5x+7\right)=0\Leftrightarrow x^2-5x+7=1\Leftrightarrow x^2-5x+6=0\Leftrightarrow x_1=2\vee x_2=3\Rightarrow x_1^2+x_2^2=13$

Nguyễn Bảo Vương

**Câu 26.** **(THPT-Thang-Long-Ha-Noi- 2019)** Tổng các nghiệm của phương trình $\log_4 x^2-\log_2 3=1$ là

**A.** 6 **B.** 5 **C.** 4 **D.** 0

**Lời giải**

Điều kiện $x\neq 0$. Có $\log_4 x^2-\log_2 3=1\Leftrightarrow\frac{1}{2}\log_2 x^2=1+\log_2 3\Leftrightarrow\log_2 x^2=2.\log_2 6\Leftrightarrow x^2=6^2$

Dó đó, tổng các nghiệm sẽ bằng 0

**Câu 27.** **(THPT-Thang-Long-Ha-Noi 2019)** Tập nghiệm của phương trình $\log_{0,25}\left(x^2-3x\right)=-1$ là:

**A.** $\{4\}$. **B.** $\{1;-4\}$. **C.** $\left\{\frac{3-2\sqrt{2}}{2};\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\right\}$. **D.** $\{-1;4\}$.

**Lời giải**

Ta có: $\log_{0,25}\left(x^2-3x\right)=-1\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x^2-3x>0\\x^2-3x=(0,25)^{-1}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x<0\\x>3\end{array}\right.\\x^2-3x-4=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x<0\\x>3\end{array}\right.\\\left[\begin{array}{ll}x=4 & (n)\\x=-1 & (n)\end{array}\right.\end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{-1;4\}$.

**Câu 28.** **(THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019)** Nghiệm nhỏ nhất của phương trình $\log_5\left(x^2-3x+5\right)=1$ là

**A.** $-3$. **B.** $a$. **C.** $3$. **D.** $0$.

**Lời giải**

$\log_5\left(x^2-3x+5\right)=1\Leftrightarrow x^2-3x+5=5\Leftrightarrow x^2-3x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=0\end{array}\right.$. Vậy nghiệm nhỏ nhất của phương trình $\log_5\left(x^2-3x+5\right)=1$ là 0.

**Câu 29.** **(Sở Hà Nội 2019)** Số nghiệm dương của phương trình $\ln\left|x^2-5\right|=0$ là

**A.** $2$. **B.** $4$. **C.** $0$. **D.** $1$.

**Lời giải**

Có $\ln\left|x^2-5\right|=0\Leftrightarrow\left|x^2-5\right|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-5=1\\x^2-5=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{6}\\x=-\sqrt{6}\\x=2\\x=-2\end{array}\right.$.

Vậy phương trình có $2$ nghiệm dương là $x=\sqrt{6}$, $x=2$.

**Câu 30.** **(Chuyên Hạ Long 2019)** Số nghiệm của phương trình $(x+3)\log_2(5-x^2)=0$.

**A.** $2$. **B.** $0$. **C.** $1$. **D.** $3$.

**Lời giải**

Điều kiện: $5-x^2>0\Leftrightarrow-\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$.

Phương trình $(x+3)\log_2(5-x^2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+3=0\\\log_2(5-x^2)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\5-x^2=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=\pm2\end{array}\right.$.

Đối chiếu điều kiện ta có $x=\pm2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy phương trình có 2 nghiệm.

**Câu 31.** **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019)** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\left(2x^2-5x+2\right)\left[\log_x\left(7x-6\right)-2\right]=0$ bằng

**A.** $\frac{17}{2}$. **B.** $9$. **C.** $8$. **D.** $\frac{19}{2}$.

**Lời giải**

Điều kiện $\left\{\begin{array}{l}0<x\neq1\\x>\frac{6}{7}\end{array}\right.\Leftrightarrow\frac{6}{7}<x\neq1(*)$.

Phương trình $\left(2x^2-5x+2\right)\left[\log_x\left(7x-6\right)-2\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x^2-5x+2=0\\\log_x\left(7x-6\right)-2=0\end{array}\right.$.

+ Phương trình $2x^2-5x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=\frac{1}{2}\end{array}\right.$. Kết hợp với điều kiện $(*)\Rightarrow x=2$.

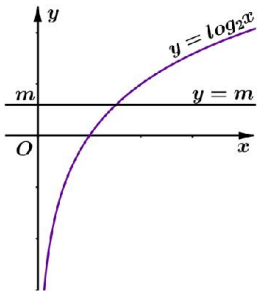
+ Phương trình $\log_x\left(7x-6\right)-2=0\Leftrightarrow7x-6=x^2\Leftrightarrow x^2-7x+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=6\end{array}\right.$. Kết hợp với điều kiện $(*)\Rightarrow x=6$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=2;x=6$ suy ra tổng các nghiệm bằng $8$.

**Câu 32.** **(Chuyên ĐHSP Hà Nội 2019)** Tập hợp các số thực $m$ để phương trình $\log_2 x = m$ có nghiệm thực là

**A.** $(0;+\infty)$. **B.** $[0;+\infty)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $\mathbb{R}$.

**Lời giải**



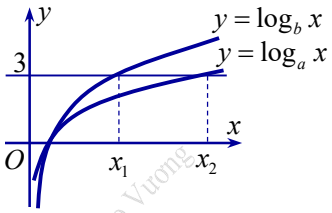

Điều kiện để phương trình đã cho có nghĩa là $x > 0$.

Dễ thấy $\forall m \in \mathbb{R}$ thì đường thẳng $y = m$ luôn cắt đồ thị hàm số $y = \log_2 x$ tại đúng một điểm.

Vậy tập hợp các số thực $m$ để phương trình $\log_2 x = m$ có nghiệm thực là $\forall m \in \mathbb{R}$.

**Dạng 1.2 Biến đổi đưa về phương trình cơ bản**

**Câu 1.** **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ có đồ thị như hình bên.




Đường thẳng $y = 3$ cắt hai đồ thị tại các điểm có hoành độ là $x_1; x_2$. Biết rằng $x_1 = 2x_2$. Giá trị của $\frac{a}{b}$ bằng

**A.** $\frac{1}{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $2$. **D.** $\sqrt[3]{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Xét phương trình hoành độ giao điểm $\log_a x = 3 \Leftrightarrow x_1 = a^3$, và $\log_b x = 3 \Leftrightarrow x_2 = b^3$.

Ta có $x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow a^3 = 2b^3 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^3 = 2 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \sqrt[3]{2}$.

**Câu 2.** **(Đề Tham Khảo 2017)** Tìm tập nghiệm $S$ của phương trình $\log_2(x-1) + \log_2(x+1) = 3$.

**A.** $S = \{3\}$ **B.** $S = \{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\}$ **C.** $S = \{-3; 3\}$ **D.** $S = \{4\}$

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện $x > 1$. Phương trình đã cho trở thành $\log_2(x^2 - 1) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 8 \Leftrightarrow x = \pm 3$

Đối chiếu điều kiện, ta được nghiệm duy nhất của phương trình là $x = 3 \Rightarrow S = \{3\}$

**Câu 3.** **(Mã 103 - 2019)** Nghiệm của phương trình $\log_2(x+1) + 1 = \log_2(3x-1)$ là

**A.** $x = 1$. **B.** $x = 2$. **C.** $x = -1$. **D.** $x = 3$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện phương trình: $x>\frac{1}{3}$.

$\log_2(x+1)+1=\log_2(3x-1)\Leftrightarrow\log_2[(x+1).2]=\log_2(3x-1)\Leftrightarrow 2(x+1)=3x-1\Leftrightarrow x=3$.

Ta có $x=3$ ( Thỏa mãn điều kiện phương trình)

Vậy nghiệm phương trình là $x=3$.

**Câu 4.** **(Mã 105 2017)** Tìm tập nghiệm $S$ của phương trình $\log_3(2x+1)-\log_3(x-1)=1$.

**A.** $S=\{3\}$ **B.** $S=\{4\}$ **C.** $S=\{1\}$ **D.** $S=\{-2\}$

**Lời giải**

**Chọn B**

ĐK: $\begin{cases}2x+1>0\\x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{-1}{2}\\x>1\end{cases}\Leftrightarrow x>1.$

Ta có $\log_3(2x+1)-\log_3(x-1)=1\Leftrightarrow\log_3\frac{2x+1}{x-1}=1\Leftrightarrow\frac{2x+1}{x-1}=3\Leftrightarrow x=4$ (thỏa)

**Câu 5.** **(Mã 101 - 2019)** Nghiệm của phương trình $\log_3(x+1)+1=\log_3(4x+1)$

**A.** $x=4$. **B.** $x=2$. **C.** $x=3$. **D.** $x=-3$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện: $x>-\frac{1}{4}$. Ta có:

$\log_3(x+1)+1=\log_3(4x+1)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{-1}{4}\\3(x+1)=4x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{-1}{4}\\x=2\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$

Nguyễn Bảo Vương

Vậy: Nghiệm của phương trình là $x=2$.

**Câu 6.** **(Mã 104 - 2019)** Nghiệm của phương trình $\log_3(2x+1)=1+\log_3(x-1)$ là

**A.** $x=4$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=2$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện: $\begin{cases}2x+1>0\\x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow x>1$.

Ta có: $\log_3(2x+1)=1+\log_3(x-1)$

$\Leftrightarrow\log_3(2x+1)=\log_3[3\cdot(x-1)]$

$\Leftrightarrow 2x+1=3x-3$

$\Leftrightarrow x=4$ (nhận).

**Câu 7.** **(Mã 102 -2019)** Nghiệm của phương trình $\log_2(x+1)=1+\log_2(x-1)$ là

**A.** $x=3$. **B.** $x=2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-2$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện: $\begin{cases} x>-1 \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow x>1$.

Phương trình đã cho tương đương với

$\log_2(x+1)=1+\log_2(x-1)$.

$\Leftrightarrow \log_2(x+1)=\log_2 2.(x-1)$

$\Leftrightarrow x+1=2x-2 \Leftrightarrow x=3$ (Thỏa mãn).

**Câu 8.** **(THPT Lê Quy Đôn Điện Biên 2019)** Số nghiệm của phương trình $\ln(x+1)+\ln(x+3)=\ln(x+7)$ là

**A.** 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện: $x>-1$

$PT \Leftrightarrow \ln\left[(x+1)(x+3)\right]=\ln(x+7)$

$\Leftrightarrow (x+1)(x+3)=x+7$

$\Leftrightarrow x^2+3x-4=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \quad (n) \\ x=-4 \quad (\ell) \end{array}\right.$

**Câu 9.** Tìm số nghiệm của phương trình $\log_2 x+\log_2(x-1)=2$

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

**Lời giải**

Nguyễn Bảo Vương

**Chọn B**

Điều kiện: $x>1$

Ta có: $\log_2 x+\log_2(x-1)=2$

$\Leftrightarrow \log_2[x(x-1)]=2 \Leftrightarrow x(x-1)=4 \Leftrightarrow x^2-x-4=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1-\sqrt{17}}{2} \\ x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$.

**Câu 10.** **(HSG Bắc Ninh 2019)** Số nghiệm của phương trình $\log_3(6+x)+\log_3 9x-5=0$.

**A.** 0 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 3

**Lời giải**

+) Điều kiện $x>0$

+) Phương trình $\Leftrightarrow \log_3(6+x)+\log_3 x=3 \Leftrightarrow \log_3 x(6+x)=3 \Leftrightarrow x^2+6x-27=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-9(L) \end{array}\right. \Leftrightarrow x=3$. Vậy phương trình có 1 nghiệm.

Vậy số nghiệm của phương trình là 1.

**Câu 11.** **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương - 2019)** Tìm tập nghiệm $S$ của phương trình: $\log_3(2x+1)-\log_3(x-1)=1$.

**A.** $S=\{3\}$. **B.** $S=\{1\}$. **C.** $S=\{2\}$. **D.** $S=\{4\}$.

**Lời giải**

Điều kiện: $\begin{cases}2x+1>0\\x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow x>1$.

Với điều kiện trên,

$\log_3(2x+1)-\log_3(x-1)=1\Leftrightarrow\log_3(2x+1)=\log_3(x-1)+\log_3 3\Leftrightarrow\log_3(2x+1)=\log_3(3x-3)$

$\Leftrightarrow 2x+1=3x-3\Leftrightarrow x=4$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy tập nghiệm $S=\{4\}$.

**Câu 12.** **(Sở Bắc Giang 2019)** Phương trình $\log_2 x+\log_2(x-1)=1$ có tập nghiệm là

**A.** $S=\{-1;3\}$. **B.** $S=\{1;3\}$. **C.** $S=\{2\}$. **D.** $S=\{1\}$.

**Lời giải**

Điều kiện: $x>1$.

Với điều kiện trên, ta có: $\log_2 x+\log_2(x-1)=1\Leftrightarrow\log_2\left[x(x-1)\right]=1\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện ta được: $x=2$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{2\}$.

**Câu 13.** **(THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Tổng các nghiệm của phương trình $\log_2(x-1)+\log_2(x-2)=\log_5 125$ là

**A.** $\dfrac{3+\sqrt{33}}{2}$. **B.** $\dfrac{3-\sqrt{33}}{2}$. **C.** 3. **D.** $\sqrt{33}$.

Nguyễn Bảo Vương

**Lời giải**

Điều kiện: $x>2$

$\log_2(x-1)+\log_2(x-2)=\log_5 125\Leftrightarrow\log_2\left(x^2-3x+2\right)=3$

$\Leftrightarrow x^2-3x-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{3+\sqrt{33}}{2}\\x=\dfrac{3-\sqrt{33}}{2}\end{array}\right.$.

Đối chiếu điều kiện ta thấy nghiệm $x=\dfrac{3+\sqrt{33}}{2}$ thỏa mãn.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là $\dfrac{3+\sqrt{33}}{2}$.

**Câu 14.** **(THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019)** Tập nghiệm của phương trình $\log_2 x+\log_2(x-3)=2$ là

**A.** $S=\{4\}$ **B.** $S=\{-1,4\}$ **C.** $S=\{-1\}$ **D.** $S=\{4,5\}$

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện: $x\ge 3$.

PT $\Leftrightarrow\log_2\left[x(x-3)\right]=2\Leftrightarrow x^2-3x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=-1\end{array}\right.$.

So sánh điều kiện ta được $x=4$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\{4\}$.

**Câu 15.** **(Chuyên Thái Nguyên 2019)** Số nghiệm của phương trình $\log_3 x+\log_3(x-6)=\log_3 7$ là

**A.** 0 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 3

**Lời giải**

Đk: $x>6$

Ta có: $\log_3 x+\log_3(x-6)=\log_3 7\Leftrightarrow \log_3\left[x(x-6)\right]=\log_3 7\Leftrightarrow x^2-6x-7=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=7\end{array}\right.$

So với điều kiên vậy phuiwng trình có một nghiệm $x=7$

**Câu 16.** **(Chuyên Sơn La 2019)** Cho $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, biết rằng $\log_2(\sin x)+\log_2(\cos x)=-2$ và $\log_2(\sin x+\cos x)=\frac{1}{2}(\log_2 n+1)$. Giá trị của $n$ bằng

**A.** $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

**Lời giải**

Vì $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ nên $\sin x>0$ và $\cos x>0$.

Ta có: $\log_2(\sin x)+\log_2(\cos x)=-2\Leftrightarrow \log_2(\sin x.\cos x)=-2\Leftrightarrow \sin x.\cos x=\frac{1}{4}$.

$\Rightarrow(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x.\cos x=\frac{3}{2}$.

Suy ra: $\log_2(\sin x+\cos x)=\frac{1}{2}(\log_2 n+1)\Leftrightarrow \log_2(\sin x+\cos x)^2=\log_2(2n)$

$\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)^2=2n\Leftrightarrow \frac{3}{2}=2n\Leftrightarrow n=\frac{3}{4}$.

**Câu 17.** **(Mã 110 2017)** Tìm tập nghiệm $S$ của phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(x+1)=1$.

**A.** $S=\{3\}$ **B.** $S=\{2-\sqrt{5};2+\sqrt{5}\}$

**C.** $S=\{2+\sqrt{5}\}$ **D.** $S=\left\{\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right\}$

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện $\begin{cases}x-1>0\\x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow x>1$ (*).

Phương trình $\Leftrightarrow 2\log_2(x-1)-\log_2(x+1)=1$

$\Leftrightarrow 2\log_2(x-1)=\log_2(x+1)+\log_2 2$

$\Leftrightarrow \log_2(x-1)^2=\log_2\left[2(x+1)\right]$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1=2x+2$

$\Leftrightarrow x^2-4x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2-\sqrt{5}\,(L)\\x=2+\sqrt{5}\end{array}\right.$. Vậy tập nghiệm phương trình $S=\left\{2+\sqrt{5}\right\}$

**Câu 18.** **(THPT Hàm Rồng Thanh Hóa 2019)** Số nghiệm của phương trình $\log_3\left(x^2+4x\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(2x+3\right)=0$ là

**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** $0$. **D.** $1$.

**Lời giải**

Viết lại phương trình ta được

$$\log_3\left(x^2+4x\right)=\log_3\left(2x+3\right)\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3>0\\x^2+4x=2x+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\dfrac{3}{2}\\\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$$

**Câu 19.** **(Đề Tham Khảo 2018)** Tổng giá trị tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3 x.\log_9 x.\log_{27} x.\log_{81} x=\dfrac{2}{3}$ bằng

**A.** $0$. **B.** $\dfrac{80}{9}$. **C.** $9$. **D.** $\dfrac{82}{9}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện $x>0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\log_3\frac{1}{2}.\log_3 x.\frac{1}{3}\log_3 x.\frac{1}{4}\log_3 x=\frac{2}{3}\Leftrightarrow(\log_3 x)^4=16\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_3 x=2\\\log_3 x=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=9\\x=\dfrac{1}{9}\end{array}\right.$$

Nguyễn Bảo Vương

**Câu 20.** **(VTED 2019)** Nghiệm của phương trình $\log_2 x+\log_4 x=\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{3}$ là

**A.** $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$. **B.** $x=\sqrt[3]{3}$. **C.** $x=\dfrac{1}{3}$. **D.** $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

**Lời giải**

Điều kiện: $x>0$

Ta có: $\log_2 x+\log_4 x=\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{3}\Leftrightarrow\log_2 x+\dfrac{1}{2}\log_2 x=-\dfrac{1}{2}\log_2 3$

$\Leftrightarrow 2\log_2 x+\log_2 x+\log_2 3=0\Leftrightarrow 3\log_2 x+\log_2 3=0$

$\Leftrightarrow\log_2 x^3+\log_2 3=0\Leftrightarrow\log_2\left(3x^3\right)=0\Leftrightarrow 3x^3=1\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

**Câu 21.** **(THPT Lê Quý Đôn Dà Nẵng -2019)** Gọi $S$ là tập nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{2}}\left(x+1\right)=\log_2\left(x^2+2\right)-1$. Số phần tử của tập $S$ là

**A.** 2 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 0

**Lời giải**

ĐK: $x>-1$

$\log_{\sqrt{2}}(x+1)=\log_2(x^2+2)-1\Rightarrow(x+1)^2=\dfrac{x^2+2}{2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0(TM)\\x=-4(L)\end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm có một phần tử

**Câu 22.** **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Số nghiệm thục của phương trình $3\log_3(x-1)-\log_{\frac{1}{3}}(x-5)^3=3$ là

**A.** 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 0

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện: $x>5$

$3\log_3(x-1)-\log_{\frac{1}{3}}(x-5)^3=3\Leftrightarrow 3\log_3(x-1)+3\log_3(x-5)=3$

$\Leftrightarrow\log_3(x-1)+\log_3(x-5)=1\Leftrightarrow\log_3\left[(x-1)(x-5)\right]=1\Leftrightarrow(x-1)(x-5)=3$

$\Leftrightarrow x^2-6x+2=0\Leftrightarrow x=3\pm\sqrt{7}$

Đối chiếu điều kiện suy ra phương trình có 1 nghiệm $x=3+\sqrt{7}$

**Câu 23.** **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Tổng các nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{3}}(x-2)+\log_3(x-4)^2=0$ là $S=a+b\sqrt{2}$ (với $a,b$ là các số nguyên). Giá trị của biểu thức $Q=a.b$ bằng

**A.** 0. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 6.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện: $2<x\neq 4$.

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương

$2\log_3(x-2)+2\log_3|x-4|=0\Leftrightarrow\log_3(x-2)|x-4|=0\Leftrightarrow(x-2)|x-4|=1$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(x-2)(x-4)=1\\(x-2)(x-4)=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-6x+7=0\\x^2-6x+9=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\pm\sqrt{2}\\x=3\end{array}\right.$

So lại điều kiện, ta nhận hai nghiệm $x_1=3+\sqrt{2};x_2=3$

Ta được: $S=x_1+x_2=6+\sqrt{2}\Rightarrow a=6;b=1$. Vậy $Q=a.b=6$.

## Dạng 2. Phương trình mũ

**Phương pháp đưa về cùng cơ số.**

□ Phương trình mũ

+ Nếu $a>0,a\neq 1$ thì $a^{f(x)}=a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)=g(x)$

+ Nếu a chứa ẩn thì $a^{f(x)}=a^{g(x)}\Leftrightarrow(a-1)\left[f(x)-g(x)\right]=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\f(x)=g(x)\end{array}\right.$

+ $a^{f(x)}=b^{g(x)}\Leftrightarrow\log_a a^{f(x)}=\log_a b^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)=\log_a b.g(x)$ (**logarit hóa**).

### Dạng 2.1 Phương trình cơ bản

**Câu 1.** **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Nghiệm của phương trình $3^{x-1}=27$ là

**A.** $x=4$. **B.** $x=3$. **C.** $x=2$. **D.** $x=1$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $3^{x-1}=27 \Leftrightarrow 3^{x-1}=3^3 \Leftrightarrow x-1=3 \Leftrightarrow x=4$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=4$.

**Câu 2.** **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Nghiệm của phương trình $3^{x-1}=9$ là:

**A.** $x=-2$. **B.** $x=3$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-3$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

$3^{x-1}=9 \Leftrightarrow x-1=\log_3 9 \Leftrightarrow x-1=2 \Leftrightarrow x=3$

**Câu 3.** **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Nghiệm của phương trình $3^{x-2}=9$ là

**A.** $x=-3$. **B.** $x=3$. **C.** $x=4$. **D.** $x=-4$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $3^{x-2}=9 \Leftrightarrow x-2=2 \Leftrightarrow x=4$.

**Câu 4.** **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Nghiệm của phương trình $3^{x+1}=9$ là

**A.** $x=1$. **B.** $x=2$. **C.** $x=-2$. **D.** $x=-1$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $3^{x+1}=9 \Leftrightarrow 3^{x+1}=3^2 \Leftrightarrow x+1=2 \Leftrightarrow x=1$.

**Câu 5.** **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Nghiệm của phương trình $3^{x+2}=27$ là

**A.** $x=-2$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=1$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $3^{x+2}=27 \Leftrightarrow 3^{x+2}=3^3 \Leftrightarrow x+2=3 \Leftrightarrow x=1$.

**Câu 6.** **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Nghiệm của phương trình $2^{2x-4}=2^x$ là

**A.** $x=16$. **B.** $x=-16$. **C.** $x=-4$. **D.** $x=4$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $2^{2x-4}=2^x \Leftrightarrow 2x-4=x \Leftrightarrow x=4.$

**Câu 7.** **(Mã 101 - 2020 Lần 2)** Nghiệm của phương trình $2^{2x-3}=2^x$ là

**A.** $x=8$. **B.** $x=-8$. **C.** $x=3$. **D.** $x=-3$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $2^{2x-3}=2^x \Leftrightarrow 2x-3=x \Leftrightarrow x=3$. Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x=3$.

**Câu 8.** **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Nghiệm của phương trình $2^{2x-2}=2^x$ là

**A.** $x=-2$. **B.** $x=2$. **C.** $x=-4$. **D.** $x=4$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$2^{2x-2}=2^x \Leftrightarrow 2x-2=x \Leftrightarrow x=2$.

**Câu 9.** **(Mã 101 - 2019)** Nghiệm của phương trình: $3^{2x-1}=27$ là

**A.** $x=1$. **B.** $x=2$. **C.** $x=4$. **D.** $x=5$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $3^{2x-1}=27 \Leftrightarrow 3^{2x-1}=3^3 \Leftrightarrow 2x-1=3 \Leftrightarrow x=2$.

**Câu 10.** **(Mã 102 - 2019)** Nghiệm của phương trình $3^{2x+1}=27$ là

**A.** $5$. **B.** $4$. **C.** $2$. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $2x+1=3 \Rightarrow x=1$.

**Câu 11.** Tìm nghiệm của phương trình $3^{x-1}=27$

**A.** $x=10$ **B.** $x=9$ **C.** $x=3$ **D.** $x=4$

**Lời giải**

**Chọn D**

$3^{x-1}=3^3 \Leftrightarrow x-1=3 \Leftrightarrow x=4$.

**Câu 12.** **(Mã 104 2018)** Phương trình $5^{2x+1}=125$ có nghiệm là

**A.** $x=\frac{5}{2}$ **B.** $x=1$ **C.** $x=3$ **D.** $x=\frac{3}{2}$

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $5^{2x+1}=125 \Leftrightarrow 5^{2x+1}=5^3 \Leftrightarrow 2x+1=3 \Leftrightarrow x=1$.

**Câu 13.** **(Mã 101 2018)** Phương trình $2^{2x+1}=32$ có nghiệm là

**A.** $x=3$ **B.** $x=\frac{5}{2}$ **C.** $x=2$ **D.** $x=\frac{3}{2}$

Nguyễn Bảo Vương

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $2^{2x+1}=32 \Leftrightarrow 2^{2x+1}=2^5 \Leftrightarrow 2x+1=5 \Leftrightarrow x=2$.

**Câu 14.** **(Mã 104 - 2019)** Nghiệm của phương trình $2^{2x-1}=32$ là

**A.** $x=2$. **B.** $x=\frac{17}{2}$. **C.** $x=\frac{5}{2}$. **D.** $x=3$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$2^{2x-1}=32 \Leftrightarrow 2^{2x-1}=2^5 \Leftrightarrow 2x-1=5 \Leftrightarrow x=3$.

**Câu 15.** **(Mã 103 - 2019)** Nghiệm của phương trình $2^{2x-1}=8$ là

**A.** $x=2$. **B.** $x=\frac{5}{2}$. **C.** $x=1$. **D.** $x=\frac{3}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $2^{2x-1}=8 \Leftrightarrow 2x-1=3 \Leftrightarrow x=2$.

**Câu 16.** **(Mã 104 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của $m$ để phương trình $3^x=m$ có nghiệm thực.

**A.** $m \geq 1$ **B.** $m \geq 0$ **C.** $m>0$ **D.** $m \neq 0$

**Lời giải**

**Chọn C**

Để phương trình $3^x=m$ có nghiệm thực thì $m>0$.

**Câu 17.** **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Tìm tập nghiệm $S$ của phương trình $5^{2x^2-x}=5$.

**A.** $S=\varnothing$ **B.** $S=\left\{0;\frac{1}{2}\right\}$ **C.** $S=\{0;2\}$ **D.** $S=\left\{1;-\frac{1}{2}\right\}$

**Lời giải**

**Chọn D**

$5^{2x^2-x}=5\Leftrightarrow 2x^2-x=1\Leftrightarrow 2x^2-x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$

**Câu 18.** **(Chuyên Bắc Ninh 2019)** Tìm tập nghiệm $S$ của phương trình $2^{x+1}=8$.

**A.** $S=\{4\}$. **B.** $S=\{1\}$. **C.** $S=\{3\}$. **D.** $S=\{2\}$.

**Lời giải**

Ta có: $2^{x+1}=8\Leftrightarrow 2^{x+1}=2^3\Leftrightarrow x+1=3\Leftrightarrow x=2$.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{2\}$.

**Câu 19.** **(Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ An 2019)** Phương trình $\left(\sqrt{5}\right)^{x^2+4x+6}=\log_2 128$ có bao nhiêu nghiệm?

**A.** 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 0

**Lời giải**

Phương trình đã cho tương đương với: $x^2+4x+6=\log_{\sqrt{5}}7\Leftrightarrow x^2+4x+6-\log_{\sqrt{5}}7=0$

Sử dụng máy tính bỏ túi ta thấy phương trình trên có hai nghiệm phân biệt.

**Câu 20.** **(THPT - Yên Định Thanh Hóa 2019)** Tập nghiệm $S$ của phương trình $3^{x^2-2x}=27$.

**A.** $S=\{1;3\}$. **B.** $S=\{-3;1\}$. **C.** $S=\{-3;-1\}$. **D.** $S=\{-1;3\}$.

**Lời giải**

Ta có: $3^{x^2-2x}=27\Leftrightarrow x^2-2x=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm $S$ của phương trình $3^{x^2-2x}=27$ là $S=\{-1;3\}$.

**Câu 21.** **(THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $e^{x^2}=\sqrt{3}$ là:

**A.** 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

**Lời giải**

Ta có $e^{x^2}=\sqrt{3}\Leftrightarrow x^2=\ln\sqrt{3}\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\ln\sqrt{3}}$.

Vậy phương trình có 2 nghiệm thực phân biệt.

**Câu 22.** **(Sở Ninh Bình 2019)** Phương trình $5^{x+2}-1=0$ có tập nghiệm là

**A.** $S=\{3\}$. **B.** $S=\{2\}$. **C.** $S=\{0\}$. **D.** $S=\{-2\}$.

**Lời giải**

Ta có $5^{x+2}-1=0\Leftrightarrow 5^{x+2}=1\Leftrightarrow x+2=0\Leftrightarrow x=-2$

Vậy $S=\{-2\}$.

**Câu 23.** **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Họ nghiệm của phương trình $4^{\cos^2 x}-1=0$ là

**A.** $\{k\pi;k\in\mathbb{Z}\}$. **B.** $\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$. **C.** $\{k2\pi;k\in\mathbb{Z}\}$. **D.** $\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$.

**Lời giải**

Ta có: $4^{\cos^2 x}-1=0\Leftrightarrow 4^{\cos^2 x}=1\Leftrightarrow \cos^2 x=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

Vậy họ nghiệm của phương trình là: $\frac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}$.

**Câu 24.** **(Chuyên Lê Thánh Tông 2019)** Cho biết $9^x-12^2=0$, tính giá trị của biểu thức $P=\frac{1}{3^{-x-1}}-8.9^{\frac{x-1}{2}}+19$.

**A.** 31. **B.** 23. **C.** 22. **D.** 15.

**Lời giải**

Ta có $9^x-12^2=0\Leftrightarrow 3^x=12$.

$P=3^{x+1}-8.3^{x-1}+19=3.3^x-8.\frac{3^x}{3}+19=3.12-8.\frac{12}{3}+19=23$.

**Câu 25.** **(Chuyên Bắc Ninh 2019)** Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $2^{2x^2+5x+4}=4$

**A.** $-\frac{5}{2}$. **B.** $-1$. **C.** 1. **D.** $\frac{5}{2}$.

**Lời giải**

$2^{2x^2+5x+4}=4\Leftrightarrow 2x^2+5x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{1}{2}\\x=-2\end{array}\right.$.

Vậy tổng hai nghiệm bằng $-\frac{5}{2}$.

Nguyễn Bảo Vương

**Câu 26.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $3^{2x-1}+2m^2-m-3=0$ có nghiệm.

**A.** $m\in\left(-1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $m\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $m\in(0;+\infty)$. **D.** $m\in\left[-1;\frac{3}{2}\right]$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$3^{2x-1}+2m^2-m-3=0\Leftrightarrow 3^{2x-1}=3+m-2m^2$

Phương trình có nghiệm khi $3+m-2m^2>0\Leftrightarrow -1<m<\frac{3}{2}$.

Vậy $m\in\left(-1;\frac{3}{2}\right)$.

**Câu 27.** Cho a, b là hai số thực khác 0, biết: $\left(\frac{1}{125}\right)^{a^2+4ab}=\left(\sqrt[3]{625}\right)^{3a^2-8ab}$. Tỉ số $\frac{a}{b}$ là:

**A.** $\frac{-8}{7}$ **B.** $\frac{1}{7}$ **C.** $\frac{4}{7}$ **D.** $\frac{-4}{21}$

**Lời giải**

Ta có : $\left(\frac{1}{125}\right)^{a^2+4ab}=\left(\sqrt[3]{625}\right)^{3a^2-8ab}\Leftrightarrow 5^{-3\left(a^2+4ab\right)}=5^{\frac{4}{3}\left(3a^2-8ab\right)}$

$\Leftrightarrow -3\left(a^2+4ab\right)=\frac{4}{3}\left(3a^2-8ab\right)\Leftrightarrow 21a^2=-4ab\Leftrightarrow\frac{a}{b}=-\frac{4}{21}$

**Câu 28.** Tổng các nghiệm của phương trình $2^{x^2-2x+1}=8$ bằng

**A.** $0$. **B.** $-2$. **C.** $2$. **D.** $1$.

**Lời giải**

Ta có: $2^{x^2-2x+1}=8 \Leftrightarrow 2^{x^2-2x+1}=2^3 \Leftrightarrow x^2-2x+1=3 \Leftrightarrow x^2-2x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1-\sqrt{3} \\ x=1+\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Như vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $1-\sqrt{3}$ ; $1+\sqrt{3}$.

Tổng hai nghiệm là: $\left(1-\sqrt{3}\right)+\left(1+\sqrt{3}\right)=2$.

**Câu 29.** **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Phương trình $2^{2x^2+5x+4}=4$ có tổng tất cả các nghiệm bằng

**A.** $1$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $-1$. **D.** $-\frac{5}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

*Cách 1*:

Ta có: $2^{2x^2+5x+4}=4 \Leftrightarrow 2^{2x^2+5x+4}=2^2 \Leftrightarrow 2x^2+5x+4=2 \Leftrightarrow 2x^2+5x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Tổng tất cả các nghiệm của phương trình đã cho là: $-2+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{2}$.

*Cách 2*:

Ta có: $2^{2x^2+5x+4}=4 \Leftrightarrow 2^{2x^2+5x+4}=2^2 \Leftrightarrow 2x^2+5x+4=2 \Leftrightarrow 2x^2+5x+2=0$ (1)

Xét phương trình (1): $\Delta=9>0 \Rightarrow$ Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$.

Theo định lý Viet ta có: $x_1+x_2=-\frac{5}{2}$.

Tổng tất cả các nghiệm của phương trình đã cho là: $-\frac{5}{2}$.

**Câu 30.** **(THPT Ngô Sĩ Liên Bắc Giang 2019)** Phương trình $5^{2x^2+5x+4}=25$ có tổng tất cả các nghiệm bằng

**A.** $1$ **B.** $\frac{5}{2}$ **C.** $-1$ **D.** $-\frac{5}{2}$

**Lời giải**

**Chọn D**

$5^{2x^2+5x+4}=5^2 \Leftrightarrow 2x^2+5x+4=2 \Leftrightarrow 2x^2+5x+2=0$

Tổng các nghiệm là $-\frac{5}{2}$.

**Câu 31.** **(Sở Bắc Ninh 2019)** Phương trình $7^{2x^2+5x+4}=49$ có tổng tất cả các nghiệm bằng

**A.** $-\frac{5}{2}$. **B.** $1$. **C.** $-1$. **D.** $\frac{5}{2}$.

**Lờigiải**

$7^{2x^2+5x+4}=49 \Leftrightarrow 7^{2x^2+5x+4}=7^2 \Leftrightarrow 2x^2+5x+4=2 \Leftrightarrow 2x^2+5x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình bằng: $-2+(-\frac{1}{2})=-\frac{5}{2}$.

**Dạng 2.2 Biến đổi đưa về phương trình cơ bản**

**Câu 1.** Tập nghiệm của phương trình: $4^{x+1}+4^{x-1}=272$ là

**A.** $\{3;2\}$. **B.** $\{2\}$. **C.** $\{3\}$. **D.** $\{3;5\}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$4^{x+1}+4^{x-1}=272 \Leftrightarrow 4.4^x+\dfrac{4^x}{4}=272 \Leftrightarrow 4^x=64 \Leftrightarrow x=3$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S=\{3\}$.

**Câu 2.** **(HKI-NK HCM-2019)** Phương trình $27^{2x-3}=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2}$ có tập nghiệm là

**A.** $\{-1;7\}$. **B.** $\{-1;-7\}$. **C.** $\{1;7\}$. **D.** $\{1;-7\}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $27^{2x-3}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2+2} \Leftrightarrow 3^{6x-9}=3^{-x^2-2}$

$\Leftrightarrow 6x-9=-x^2-2 \Leftrightarrow x^2+6x-7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-7 \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{1;-7\}$.

**Câu 3.** **(THPT Quỳnh Lưu- Nghệ An- 2019)** Phương trình $3^x.2^{x+1}=72$ có nghiệm là

**A.** $x=\frac{5}{2}$. **B.** $x=2$. **C.** $x=\frac{3}{2}$. **D.** $x=3$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$3^x.2^{x+1}=72 \Leftrightarrow 3^x.2^x.2=72 \Leftrightarrow 6^x=36 \Leftrightarrow x=2.$

**Câu 4.** **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-2x-3}=5^{x+1}$ là

**A.** $x=-1;\ x=2.$ **B.** $x=1;\ x=-2.$ **C.** $x=1;\ x=2.$ **D.** Vô nghiệm.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có:

$\left(\dfrac{1}{5}\right)^{x^2-2x-3}=5^{x+1} \Leftrightarrow 5^{-(x^2-2x-3)}=5^{x+1} \Leftrightarrow -x^2+2x+3=x+1 \Leftrightarrow -x^2+x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=-1;\ x=2.$

**Câu 5.** Tập nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3}=7^{x+1}$ là

**A.** $\{-1\}$. **B.** $\{-1;2\}$. **C.** $\{-1;4\}$. **D.** $\{2\}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3}=7^{x+1}\Leftrightarrow 7^{-x^2+2x+3}=7^{x+1}\Leftrightarrow -x^2+2x+3=x+1$.

$\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$.

**Câu 6.** Tổng các nghiệm của phương trình $2^{x^2+2x}=8^{2-x}$ bằng

**A.** $-6$. **B.** $-5$. **C.** $5$. **D.** $6$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $2^{x^2+2x}=8^{2-x}\Leftrightarrow 2^{x^2+2x}=2^{6-3x}\Leftrightarrow x^2+5x-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-6\end{array}\right.$.

Vậy tổng hai nghiệm của phương trình bằng $-5$.

**Câu 7.** **(SGD Điện Biên - 2019)** Gọi $x_1$, $x_2$ là hai nghiệm của phương trình $7^{x+1}=\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3}$. Khi đó $x_1^2+x_2^2$ bằng:

**A.** $17$. **B.** $1$. **C.** $5$. **D.** $3$.

Nguyễn Bảo Vương

**Lời giải**

**Chọn C**

$7^{x+1}=\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3}\Leftrightarrow 7^{x+1}=7^{-\left(x^2-2x-3\right)}\Leftrightarrow x+1=-x^2+2x+3\Leftrightarrow x^2-x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=-1\\x_2=2\end{array}\right.$.

Vậy $x_1^2+x_2^2=5$.

**Câu 8.** Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $5^{3x-2}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2}$ bằng

**A.** $2$. **B.** $5$. **C.** $0$. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $5^{3x-2}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2}\Leftrightarrow 5^{3x-2}=5^{x^2}\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Vậy tổng bình phương các nghiệm của phương trình $5^{3x-2}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2}$ bằng $5$.

**Câu 9.** Nghiệm của phương trình $2^{7x-1}=8^{2x-1}$ là

**A.** $x=2$. **B.** $x=-3$. **C.** $x=-2$. **D.** $x=1$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$2^{7x-1}=8^{2x-1}\Leftrightarrow 2^{7x-1}=2^{3.(2x-1)}\Leftrightarrow 2^{7x-1}=2^{6x-3}\Leftrightarrow 7x-1=6x-3\Leftrightarrow x=-2$.

**Câu 10.** **(THPT Lương Văn Tụy - Ninh Bình - 2018)** Giải phương trình $(2,5)^{5x-7}=\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1}$.

**A.** $x\geq 1$. **B.** $x=1$. **C.** $x<1$. **D.** $x=2$.

**Lời giải**

Ta có $(2,5)^{5x-7}=\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1}\Leftrightarrow\left(\frac{5}{2}\right)^{5x-7}=\left(\frac{5}{2}\right)^{-x-1}\Leftrightarrow 5x-7=-x-1\Leftrightarrow x=1$.

**Câu 11.** **(THPT Nguyễn Thị Minh Khai - Hà Tĩnh - 2018)** Phương trình $3^{x^2-4}=\left(\frac{1}{9}\right)^{3x-1}$ có hai nghiệm $x_1$, $x_2$. Tính $x_1x_2$.

**A.** $-6$. **B.** $-5$. **C.** $6$. **D.** $-2$.

**Lời giải**

Ta có $3^{x^2-4}=\left(\frac{1}{9}\right)^{3x-1}\Leftrightarrow x^2-4=2-6x\Leftrightarrow x^2+6x-6=0$.

Áp dụng Vi-ét suy ra phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1$, $x_2$ thì $x_1x_2=-6$.

**Câu 12.** **(Sở Quảng Nam - 2018)** Tổng các nghiệm của phương trình $2^{x^2+2x}=8^{2-x}$ bằng

**A.** $5$. **B.** $-5$. **C.** $6$. **D.** $-6$.

**Lời giải**

Phương trình đã cho tương đương: $2^{x^2+2x}=2^{3(2-x)}\Leftrightarrow x^2+2x=6-3x\Leftrightarrow x^2+5x-6=0$.

Do đó tổng các nghiệm của phương trình là: $S=-\frac{b}{a}=-5$.

**Câu 13.** **(THPT Thăng Long - Hà Nội - 2018)** Tập nghiệm của phương trình $4^{x-x^2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ là

**A.** $\left\{0;\frac{2}{3}\right\}$. **B.** $\left\{0;\frac{1}{2}\right\}$. **C.** $\{0;2\}$. **D.** $\left\{0;\frac{3}{2}\right\}$.

**Lời giải**

Ta có $4^{x-x^2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\Leftrightarrow 2^{2x-2x^2}=2^{-x}\Leftrightarrow -2x^2+2x=-x\Leftrightarrow -2x^2+3x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\frac{3}{2}\end{array}\right.$.

**Câu 14.** **(THPT Hải An - Hải Phòng - 2018)** Tìm nghiệm của phương trình $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2x+1}=2-\sqrt{3}$.

**A.** $x=\frac{1}{4}$. **B.** $x=-1+\log_{7+4\sqrt{3}}\left(2-\sqrt{3}\right)$.

**C.** $x=-\frac{3}{4}$. **D.** $x=\frac{25-15\sqrt{3}}{2}$.

**Lời giải**

Ta có

$\left(7+4\sqrt{3}\right)^{2x+1}=2-\sqrt{3}\Leftrightarrow\left(2+2\sqrt{3}\right)^{4x+2}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}\Leftrightarrow 4x+2=-1\Leftrightarrow 4x=-3\Leftrightarrow x=-\frac{3}{4}$.

**Câu 15.** **(THPT Kim Liên - Hà Nội - 2018)** Tính tổng $S = x_1 + x_2$ biết $x_1$, $x_2$ là các giá trị thực thỏa mãn đẳng thức $2^{x^2-6x+1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-3}$.

**A.** $S = -5$. **B.** $S = 8$. **C.** $S = 4$. **D.** $S = 2$.

**Lời giải**

Ta có $2^{x^2-6x+1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{x-3} \Leftrightarrow 2^{x^2-6x+1} = (2)^{-2(x-3)} \Leftrightarrow x^2 - 6x + 1 = -2x + 6$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = 5 \end{array}\right. \Rightarrow S = x_1 + x_2 = 4$.

**Câu 16.** **(Chuyên Hùng Vương - Bình Dương - 2018)** Tập nghiệm $S$ của phương trình $\left(\frac{4}{7}\right)^x \left(\frac{7}{4}\right)^{3x-1} - \frac{16}{49} = 0$ là

**A.** $S = \left\{\frac{-1}{2}\right\}$ **B.** $S = \{2\}$ **C.** $S = \left\{\frac{1}{2}; \frac{-1}{2}\right\}$ **D.** $S = \left\{\frac{-1}{2}; 2\right\}$

**Lời giải**

Ta có

$\left(\frac{4}{7}\right)^x \left(\frac{7}{4}\right)^{3x-1} - \frac{16}{49} = \left(\frac{4}{7}\right)^x \left(\frac{7}{4}\right)^x \left(\frac{7}{4}\right)^{2x-1} - \frac{16}{49} = \left(\frac{7}{4}\right)^{2x-1} - \frac{16}{49} = 0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{7}{4}\right)^{2x-1} = \frac{16}{49} = \left(\frac{7}{4}\right)^{-2} \Leftrightarrow 2x - 1 = -2 \Leftrightarrow x = \frac{-1}{2}$.

Nguyễn Bảo Vương

**Câu 17.** **(THPT Nguyễn Thị Minh Khai - Hà Nội - 2018)** Tích các nghiệm của phương trình $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1} = \left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$ là

**A.** $-2$. **B.** $-4$. **C.** $4$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn.** **A.**

ĐKXĐ : $x \neq -1$

Vì $\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right) = 1$ nên $\left(\sqrt{5}-2\right) = \left(\sqrt{5}+2\right)^{-1}$.

Khi đó phương trình đã cho tương đương $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1} = \left(\sqrt{5}+2\right)^{\frac{-x+1}{x+1}}$

$\Leftrightarrow x - 1 = \frac{-x+1}{x+1}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$. (thỏa điều kiện)

Suy ra tích hai nghiệm là $-2$.

**Câu 18.** **(THCS&THPT Nguyễn Khuyến - Bình Dương - 2018)** Giải phương trình $4^{2x+3} = 8^{4-x}$.

**A.** $x = \frac{6}{7}$. **B.** $x = \frac{2}{3}$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = \frac{4}{5}$.

**Lời giải**

$4^{2x+3}=8^{4-x} \Leftrightarrow 2^{4x+6}=2^{12-3x} \Leftrightarrow 4x+6=12-3x \Leftrightarrow x=\frac{6}{7}.$

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 19 PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH MŨ - LOGARIT

**TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ + GIỎI MỨC 7-8-9-10 ĐIỂM**

## DẠNG 1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

### Dạng 1.1 Phương pháp đưa về cùng cơ số

+ Nếu $a>0,\ a\neq 1$: $\boxed{\log_a x=b\Leftrightarrow x=a^b}$ $(1)$

+ Nếu $a>0,\ a\neq 1$: $\boxed{\log_a f(x)=\log_a g(x)\Leftrightarrow f(x)=g(x)}$ $(2)$

+ Nếu $a>0,\ a\neq 1$: $\boxed{\log_a f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)=a^{g(x)}}$ **(mũ hóa)** $(3)$

**Các bước giải phương trình & bất phương trình mũ – logarit**

**Bước 1**. Đặt điều kiện (điều kiện đại số + điều kiện loga), ta cần chú ý:

$$\log_a b \xrightarrow{ĐK} \begin{cases} 0<a\neq 1 \\ b>0 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} \log_a\left[f(x)\right] & \xrightarrow[\text{mũ lẻ}]{ĐK} f(x)>0 \\ \log_a\left[f(x)\right] & \xrightarrow[\text{mũ chẵn}]{ĐK} f(x)\neq 0 \end{cases}.$$

**Bước 2**. Dùng các công thức và biến đổi đưa về các cơ bản trên, rồi giải.

**Bước 3**. So với điều kiện và kết luận nghiệm.

**Câu 1.** **(Mã 110 2017)** Tìm tập nghiệm $S$ của phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(x+1)=1$.

**A.** $S=\{3\}$ **B.** $S=\{2-\sqrt{5};2+\sqrt{5}\}$

**C.** $S=\{2+\sqrt{5}\}$ **D.** $S=\left\{\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right\}$

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện $\begin{cases} x-1>0 \\ x+1>0 \end{cases}\Leftrightarrow x>1$ $(*)$.

Phương trình $\Leftrightarrow 2\log_2(x-1)-\log_2(x+1)=1$

$\Leftrightarrow 2\log_2(x-1)=\log_2(x+1)+\log_2 2$

$\Leftrightarrow \log_2(x-1)^2=\log_2\left[2(x+1)\right]$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1=2x+2$

$\Leftrightarrow x^2-4x-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2-\sqrt{5}\,(L) \\ x=2+\sqrt{5} \end{array}\right.$. Vậy tập nghiệm phương trình $S=\{2+\sqrt{5}\}$

**Câu 2.** **(THPT Hàm Rồng Thanh Hóa 2019)** Số nghiệm của phương trình $\log_3(x^2+4x)+\log_{\frac{1}{3}}(2x+3)=0$ là

**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** $0$. **D.** $1$.

**Lời giải**

Viết lại phương trình ta được

$$\log_3\left(x^2+4x\right)=\log_3\left(2x+3\right)\Leftrightarrow\begin{cases}2x+3>0\\x^2+4x=2x+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\dfrac{3}{2}\\\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$$

**Câu 3.** **(Đề Tham Khảo 2018)** Tổng giá trị tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3 x.\log_9 x.\log_{27} x.\log_{81} x=\dfrac{2}{3}$ bằng

**A.** $0$. **B.** $\dfrac{80}{9}$. **C.** $9$. **D.** $\dfrac{82}{9}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện $x>0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\log_3\frac{1}{2}.\log_3 x.\frac{1}{3}\log_3 x.\frac{1}{4}\log_3 x=\frac{2}{3}\Leftrightarrow(\log_3 x)^4=16\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_3 x=2\\\log_3 x=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=9\\x=\dfrac{1}{9}\end{array}\right.$$

**Câu 4.** Nghiệm của phương trình $\log_2 x+\log_4 x=\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{3}$ là

**A.** $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$. **B.** $x=\sqrt[3]{3}$. **C.** $x=\dfrac{1}{3}$. **D.** $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

**Lời giải**

Điều kiện: $x>0$

Ta có: $\log_2 x+\log_4 x=\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{3}\Leftrightarrow\log_2 x+\dfrac{1}{2}\log_2 x=-\dfrac{1}{2}\log_2 3$

$\Leftrightarrow 2\log_2 x+\log_2 x+\log_2 3=0\Leftrightarrow 3\log_2 x+\log_2 3=0$

$\Leftrightarrow\log_2 x^3+\log_2 3=0\Leftrightarrow\log_2\left(3x^3\right)=0\Leftrightarrow 3x^3=1\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

So với điều kiện, nghiệm phương trình là $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$.

**Câu 5.** **(THPT Lê Quý Đôn Dà Nẵng 2019)** Gọi $S$ là tập nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{2}}\left(x+1\right)=\log_2\left(x^2+2\right)-1$. Số phần tử của tập $S$ là

**A.** 2 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 0

**Lời giải**

ĐK: $x>-1$

$$\log_{\sqrt{2}}\left(x+1\right)=\log_2\left(x^2+2\right)-1\Rightarrow\left(x+1\right)^2=\frac{x^2+2}{2}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0(TM)\\x=-4(L)\end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm có một phần tử

**Câu 6.** **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Số nghiệm thục của phương trình $3\log_3\left(x-1\right)-\log_{\frac{1}{3}}\left(x-5\right)^3=3$ là

**A.** 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 0

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện: $x>5$

$3\log_3(x-1)-\log_{\frac{1}{3}}(x-5)^3=3\Leftrightarrow 3\log_3(x-1)+3\log_3(x-5)=3$

$\Leftrightarrow \log_3(x-1)+\log_3(x-5)=1\Leftrightarrow \log_3\left[(x-1)(x-5)\right]=1\Leftrightarrow (x-1)(x-5)=3$

$\Leftrightarrow x^2-6x+2=0\Leftrightarrow x=3\pm\sqrt{7}$

Đối chiếu điều kiện suy ra phương trình có 1 nghiệm $x=3+\sqrt{7}$

**Câu 7.** **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Tổng các nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{3}}(x-2)+\log_3(x-4)^2=0$ là $S=a+b\sqrt{2}$ (với $a,b$ là các số nguyên). Giá trị của biểu thức $Q=a.b$ bằng

**A.** 0. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 6.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện: $2<x\neq 4$.

Với điều kiện trên, phương trình đã cho tương đương

$2\log_3(x-2)+2\log_3|x-4|=0\Leftrightarrow \log_3(x-2)|x-4|=0\Leftrightarrow (x-2)|x-4|=1$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}(x-2)(x-4)=1\\(x-2)(x-4)=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-6x+7=0\\x^2-6x+9=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\pm\sqrt{2}\\x=3\end{array}\right.$

So lại điều kiện, ta nhận hai nghiệm $x_1=3+\sqrt{2};x_2=3$

Ta được: $S=x_1+x_2=6+\sqrt{2}\Rightarrow a=6;b=1$. Vậy $Q=a.b=6$.

**Câu 8.** **(Chuyên Nguyễn Du-ĐăkLăk 2019)** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2(x+1)+\log_2 x=1$ là

**A.** 1. **B.** $-1$. **C.** 2. **D.** $-2$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện: $x>0$.

Phương trình tương đương $\log_2\left[(x+1)x\right]=1\Leftrightarrow(x+1)x=2\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1(\text{N})\\x=-2(\text{L})\end{array}\right.$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình bằng 1.

**Câu 9.** Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $\frac{1}{2}\log\left(x^2-4x-1\right)=\log 8x-\log 4x$ bằng

**A.** 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 1.

**Lời giải**

**Chọn C**

Phương trình $\frac{1}{2}\log\left(x^2-4x-1\right)=\log 8x-\log 4x$ điều kiện $x>2+\sqrt{5}$

$\Rightarrow\log\left(x^2-4x-1\right)=2\log\left(\frac{8x}{4x}\right)$

$\Leftrightarrow\log\left(x^2-4x-1\right)=\log\left(2^2\right)$

$\Leftrightarrow x^2-4x-1=4$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=5 \end{array}\right.$.

Nghiệm $x=-1$ loại, $x=5$ thỏa mãn.

Suy ra tổng các nghiệm là $5$.

**Câu 10.** Gọi $S$ là tập nghiệm của phương trình $2\log_2(2x-2)+\log_2(x-3)^2=2$ trên $\mathbb{R}$. Tổng các phần tử của $S$ bằng

**A.** $6+\sqrt{2}$. **B.** $8+\sqrt{2}$. **C.** $8$. **D.** $4+\sqrt{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện: $\left\{\begin{array}{l} x>1 \\ x\neq 3 \end{array}\right.$.

$2\log_2(2x-2)+\log_2(x-3)^2=2 \Leftrightarrow \log_2(2x-2)^2+\log_2(x-3)^2=2$.

$\Leftrightarrow \log_2\left[(2x-2)(x-3)\right]^2=2 \Leftrightarrow (2x^2-8x+6)^2=2^2$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2-8x+6=2 \\ 2x^2-8x+6=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x+2=0\ (1) \\ x^2-4x+4=0\ (2) \end{array}\right.$.

+) $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2+\sqrt{2} \\ x=2-\sqrt{2}\ (l) \end{array}\right.$.

+) $(2) \Leftrightarrow x=2$.

$\Rightarrow S=\{2;2+\sqrt{2}\}$.

Vậy tổng các nghiệm của $S$ là: $2+2+\sqrt{2}=4+\sqrt{2}$.

**Câu 11.** **(SGD Nam Định 2019)** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3\sqrt{x^2-5x+6}+\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x-2}=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{81}}(x+3)^4$ bằng

**A.** $\sqrt{10}$. **B.** $3\sqrt{10}$. **C.** $0$. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện: $x>3$.

$\log_3\sqrt{x^2-5x+6}+\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x-2}=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{81}}(x+3)^4$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_3(x^2-5x+6)-\frac{1}{2}\log_3(x-2)=-\frac{1}{2}\log_3(x+3)$

$\Leftrightarrow \log_3(x^2-5x+6)-\log_3(x-2)+\log_3(x+3)=0$

$\Leftrightarrow \log_3(x^2-9)=0$

$\Leftrightarrow x^2-9=1 \Leftrightarrow x=\sqrt{10}$ (do điều kiện).

**Câu 12.** **(SGD Gia Lai 2019)** Cho hai số thực dương $x$, $y$ thỏa mãn $\log_2(x^2+y^2)=1+\log_2 xy$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A.** $x=y$. **B.** $x>y$. **C.** $x<y$. **D.** $x=y^2$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Với $x$, $y>0$ ta có:

$\log_2\left(x^2+y^2\right)=1+\log_2 xy \Leftrightarrow \log_2\left(x^2+y^2\right)=\log_2 2xy$.

$\Leftrightarrow x^2+y^2=2xy$.

$\Leftrightarrow x=y$.

**Câu 13.** Biết phương trình $\log_2\left(x^2-5x+1\right)=\log_4 9$ có hai nghiệm thực $x_1$, $x_2$. Tích $x_1.x_2$ bằng:

**A.** $-8$. **B.** $-2$. **C.** 1. **D.** 5.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $\log_2\left(x^2-5x+1\right)=\log_4 9 \Leftrightarrow \log_2\left(x^2-5x+1\right)=\log_2 3$

$\Leftrightarrow x^2-5x+1=3>0\left(\forall x\in\mathbb{R}\right)$

$\Leftrightarrow x^2-5x-2=0(*)$

Phương trình $(*)$ có $a.c=-2<0$ nên luôn có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy $x_1.x_2=-2$.

**Câu 14.** **(Chuyên Long An-2019)** Tìm nghiệm phương trình $2\log_4 x+\log_2(x-3)=2$.

**A.** $x=4$. **B.** $x=1$. **C.** $x=3$. **D.** $x=16$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện: $x>3$.

$2\log_4 x+\log_2(x-3)=2$

$\Leftrightarrow \log_2 x+\log_2(x-3)=2$

$\Leftrightarrow \log_2 x(x-3)=2$

$\Leftrightarrow x^2-3x-4=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-1 \end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện, nghiệm của phương trình là: $x=4$.

**Câu 15.** **(Chuyên - KHTN - Hà Nội - 2019)** Số nghiệm của phương trình $\log_3(x-1)^2+\log_{\sqrt{3}}(2x-1)=2$ là

**A.** 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có

$\log_3(x-1)^2+\log_{\sqrt{3}}(2x-1)=2$, điều kiện $x>\dfrac{1}{2}$, $x\neq 1$.

$\Leftrightarrow \log_3(x-1)^2+\log_3(2x-1)^2=\log_3 9$

$\Leftrightarrow \log_3\left[(x-1)(2x-1)\right]^2 = \log_3 9$

$\Leftrightarrow \left(2x^2-3x+1\right)^2 = 9$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2-3x+1=-3 \\ 2x^2-3x+1=3 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2} \\ x=2 \end{array}\right.$

Thử lại ta có một nghiệm $x=2$ thỏa mãn.

**Câu 16.** **(Sở Quảng Trị 2019)** Số nghiệm của phương trình $\log_3\left(x^2+4x\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(2x+3\right)=0$ là

**A.** $2$. **B.** $0$. **C.** $3$. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn D**

**Điều kiện:** $\begin{cases} x^2+4x>0 \\ 2x+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<-4 \\ x>0 \end{array}\right. \\ x>-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x>0$

Ta có

$\log_3\left(x^2+4x\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(2x+3\right)=0 \Leftrightarrow \log_3\left(x^2+4x\right)-\log_3\left(2x+3\right)=0$

$\Leftrightarrow \log_3\left(x^2+4x\right)=\log_3\left(2x+3\right) \Leftrightarrow x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3\,(l) \end{array}\right. \Leftrightarrow x=1.$

**Câu 17.** Biết nghiệm lớn nhất của phương trình $\log_{\sqrt{2}} x+\log_{\frac{1}{2}}\left(2x-1\right)=1$ là $x=a+b\sqrt{2}$ ($a,b$ là hai số nguyên ). Giá trị của $a+2b$ bằng

**A.** $4$. **B.** $6$. **C.** $0$. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện $x>\dfrac{1}{2}$.

$\log_{\sqrt{2}} x+\log_{\frac{1}{2}}\left(2x-1\right)=1 \Leftrightarrow 2\log_2 x-\log_2\left(2x-1\right)=1 \Leftrightarrow \log_2\dfrac{x^2}{2x-1}=1 \Leftrightarrow x^2-4x+2=0$.

Nghiệm lớn nhất của phương trình là $x=2+\sqrt{2} \Rightarrow a=2, b=1 \Rightarrow a+2b=4$.

**Câu 18.** Tính tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_{\sqrt{3}}\left(x-2\right)+\log_3\left(x-4\right)^2=0$.

**A.** $6+\sqrt{2}$. **B.** $6$. **C.** $3+\sqrt{2}$. **D.** $9$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện: $\begin{cases} x>2 \\ x\neq 4 \end{cases}$.

Ta có: $\log_{\sqrt{3}}(x-2)+\log_3(x-4)^2=0 \Rightarrow \left[(x-2)(x-4)\right]^2=1$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(x-2)(x-4)=1\\(x-2)(x-4)=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-6x+7=0\\x^2-6x+9=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3+\sqrt{2}\ (nhan)\\x=3-\sqrt{2}\ (loai)\\x=3\ (nhan)\end{array}\right. .$$

Vậy tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_{\sqrt{3}}(x-2)+\log_3(x-4)^2=0$ bằng $6+\sqrt{2}$.

**Câu 19.** Gọi $S$ là tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\frac{1}{2}\log x^2+\log(x+10)=2-\log 4$. Tính $S$?

**A.** $S=-10$. **B.** $S=-15$. **C.** $S=-10+5\sqrt{2}$. **D.** $S=8-5\sqrt{2}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện phương trình: $\begin{cases} x\neq 0 \\ x>-10 \end{cases}$.

Phương trình: $\frac{1}{2}\log x^2+\log(x+10)=2-\log 4 \Leftrightarrow \log|x|+\log(x+10)+\log 4=2$

$\Leftrightarrow \log\left[4|x|(x+10)\right]=2 \Leftrightarrow 4|x|(x+10)=100 \Leftrightarrow |x|(x+10)=25\ (*)$.

+ Khi $-10<x<0$:

Phương trình $(*) \Leftrightarrow -x(x+10)=25 \Leftrightarrow x^2+10x+25=0 \Leftrightarrow x=-5\ (\text{t/m})$.

+ Khi $x>0$:

Phương trình $(*) \Leftrightarrow x(x+10)=25 \Leftrightarrow x^2+10x-25=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-5+5\sqrt{2}\ (\text{t/m})\\x=-5-5\sqrt{2}\ (1)\end{array}\right.$.

Vậy $S=-5+\left(-5+5\sqrt{2}\right)=-10+5\sqrt{2}$.

**Câu 20.** Cho phương trình $\log_4(x+1)^2+2=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{4-x}+\log_8(4+x)^3$. Tổng các nghiệm của phương trình trên là

**A.** $4+2\sqrt{6}$. **B.** $-4$. **C.** $4-2\sqrt{6}$. **D.** $2-2\sqrt{3}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện: $\begin{cases}(x+1)^2>0\\4-x>0\\4+x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq -1\\-4<x<4\end{cases}$.

$\log_4(x+1)^2+2=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{4-x}+\log_8(4+x)^3$

$\Leftrightarrow \log_2|x+1|+\log_2 4=\log_2(4-x)+\log_2(4+x)$

$\Leftrightarrow \log_2 4|x+1| = \log_2\left(16-x^2\right) \Leftrightarrow 4|x+1| = 16-x^2$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4(x+1) = 16-x^2 \\ 4(x+1) = -\left(16-x^2\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+4x-12=0 \\ x^2-4x-20=0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-6 \\ x=2+2\sqrt{6} \\ x=2-2\sqrt{6} \end{array}\right.$.

So với điều kiện phương trình trình có 2 nghiệp $x=2; x=2-2\sqrt{6}$. Vậy tổng các nghiệm là $4-2\sqrt{2}$.

**Câu 21.** Cho $\log_8|x|+\log_4 y^2 = 5$ và $\log_8|y|+\log_4 x^2 = 7$. Tìm giá trị của biểu thức $P=|x|-|y|$.

**A.** $P=56$. **B.** $P=16$. **C.** $P=8$. **D.** $P=64$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có:

$\log_8|x|+\log_4 y^2 = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\log_2|x|+\frac{1}{2}\log_2 y^2 = 5$.

$\Leftrightarrow \log_2 \sqrt[3]{|x|}+\log_2|y| = 5 \Leftrightarrow \sqrt[3]{|x|}.|y| = 2^5 \Leftrightarrow |x|.|y|^3 = \left(2^5\right)^3 = 2^{15}\ (1)$.

Tương tự: $\log_8|y|+\log_4 x^2 = 7 \Leftrightarrow |y|.|x|^3 = 2^{21}\ (2)$.

Lấy $(1)$ nhân $(2)$ được $x^4.y^4 = 2^{36} \Leftrightarrow x^2.y^2 = 2^{18}\ (3)$.

Lấy $(1)$ chia $(2)$ được $\frac{y^2}{x^2} = \frac{1}{2^6} \Leftrightarrow x^2 = 2^6.y^2\ (4)$.

Thay $(4)$ vào $(3)$ được $2^6.y^4 = 2^{18} \Leftrightarrow y^4 = 2^{12} = \left(2^3\right)^4 \Leftrightarrow |y| = 2^3 = 8$.

Thay $|y|=8$ vào $(4)$ được $x^2 = 2^6.64 = \left(2^6\right)^2 \Leftrightarrow |x| = 2^6 = 64$. Do đó $P=|x|-|y|=56$.

**Câu 22.** Cho $a,b,x>0$; $a>b$ và $b,x\neq 1$ thỏa mãn $\log_x \frac{a+2b}{3} = \log_x \sqrt{a}+\frac{1}{\log_b x^2}$.

Khi đó biểu thức $P=\frac{2a^2+3ab+b^2}{(a+2b)^2}$ có giá trị bằng:

**A.** $P=\frac{5}{4}$. **B.** $P=\frac{2}{3}$. **C.** $P=\frac{16}{15}$. **D.** $P=\frac{4}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$\log_x \frac{a+2b}{3} = \log_x \sqrt{a}+\frac{1}{\log_b x^2} \Leftrightarrow \log_x \frac{a+2b}{3} = \log_x \sqrt{a}+\log_x \sqrt{b}$

$\Leftrightarrow a+2b=3\sqrt{ab} \Leftrightarrow a^2-5ab+4b^2=0 \Leftrightarrow (a-b)(a-4b)=0 \Leftrightarrow a=4b$ (do $a>b$).

$P=\dfrac{2a^2+3ab+b^2}{(a+2b)^2}=\dfrac{32b^2+12b^2+b^2}{36b^2}=\dfrac{5}{4}$.

**Câu 23.** Cho $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, biết rằng $\log_2(\sin x)+\log_2(\cos x)=-2$ và $\log_2(\sin x+\cos x)=\dfrac{1}{2}(\log_2 n+1)$. Giá trị của $n$ bằng

**A.** $\dfrac{1}{4}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $\sin x>0$; $\cos x>0$, $\forall x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Theo bài ra $\log_2(\sin x)+\log_2(\cos x)=-2 \Leftrightarrow \log_2(\sin x.\cos x)=-2 \Leftrightarrow \sin x.\cos x=\dfrac{1}{4}$.

Do đó $\log_2(\sin x+\cos x)=\dfrac{1}{2}(\log_2 n+1)$.

$\Leftrightarrow \log_2(\sin x+\cos x)^2=\log_2 n+1$

$\Leftrightarrow \log_2 n+1=\log_2(\sin^2 x+2\sin x.\cos x+\cos^2 x)$.

$\Leftrightarrow \log_2 n+1=\log_2\dfrac{3}{2}$.

$\Leftrightarrow \log_2 n=\log_2\dfrac{3}{4}$.

$\Leftrightarrow n=\dfrac{3}{4}$.

**Câu 24.** **(Kim Liên - Hà Nội - 2018)** Biết rằng phương trình $2\ln(x+2)+\ln 4=\ln x+4\ln 3$ có hai nghiệm phân biệt $x_1$, $x_2$ $(x_1<x_2)$. Tính $P=\dfrac{x_1}{x_2}$.

**A.** $\dfrac{1}{4}$. **B.** $64$. **C.** $\dfrac{1}{64}$. **D.** $4$.

**Lời giải**

Điều kiện $\begin{cases}x+2>0\\x>0\end{cases}\Leftrightarrow x>0$ $(*)$.

Phương trình $\Leftrightarrow \ln(x+2)^2+\ln 4=\ln x+\ln 3^4 \Leftrightarrow \ln\left[4(x+2)^2\right]=\ln(x.3^4)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x.3^4>0\\4(x+2)^2=81x\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=16\\x=\dfrac{1}{4}\end{array}\right.$ thỏa mãn $(*)\Rightarrow \begin{cases}x_1=\dfrac{1}{4}\\x_2=16\end{cases}\Rightarrow P=\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{1}{64}$.

**Câu 25.** **(THPT Lê Xoay - 2018)** Phương trình $\log_{49}x^2+\dfrac{1}{2}\log_7(x-1)^2=\log_7\left(\log_{\sqrt{3}}3\right)$ có bao nhiêu nghiệm?

**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** $1$. **D.** $4$.

**Lời giải**

Điều kiện $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

$$\log_{49} x^2 + \frac{1}{2}\log_7 (x-1)^2 = \log_7 \left(\log_{\sqrt{3}} 3\right) \Leftrightarrow \log_7 |x| + \log_7 |x-1| = \log_7 2$$

$$\Leftrightarrow \log_7 |x(x-1)| = \log_7 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x(x-1)=2 \\ x(x-1)=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x-2=0 \\ x^2-x+2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-1 \end{array}\right..$$

**Câu 26.** **(THPT Lương Văn Tụy - Ninh Bình - 2018)** Phương trình $\log_4 (x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{4-x} + \log_8 (4+x)^3$ có bao nhiêu nghiệm?

**A.** Vô nghiệm. **B.** Một nghiệm. **C.** Hai nghiệm. **D.** Ba nghiệm.

**Lời giải**

Điều kiện: $-4 < x < 4$ và $x \neq -1$.

Ta có $\log_4 (x+1)^2 + 2 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{4-x} + \log_8 (4+x)^3 \Leftrightarrow \log_2 \left(4|x+1|\right) = \log_2 \left[(4-x)(4+x)\right]$

$$\Leftrightarrow 4|x+1| = 16 - x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4(x+1) = 16 - x^2 \\ 4(x+1) = x^2 - 16 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 4x - 12 = 0 \\ x^2 - 4x - 20 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -6 \\ x = 2 + 2\sqrt{6} \\ x = 2 - 2\sqrt{6} \end{array}\right..$$

Đối chiếu điều kiện, phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 2$ và $x = 2 - 2\sqrt{6}$.

**Câu 27.** **(SGD&ĐT BRVT - 2018)** Tổng giá trị tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2 (x+2) + \log_4 (x-5)^2 + \log_{\frac{1}{2}} 8 = 0$ bằng

**A.** $6$. **B.** $3$. **C.** $9$. **D.** $12$.

**Lời giải**

Điều kiện $\begin{cases} x > -2 \\ x \neq 5 \end{cases}$ $(*)$.

Ta có $\log_2 (x+2) + \log_2 |x-5| - \log_2 8 = 0 \Leftrightarrow \log_2 \left[(x+2)|x-5|\right] = \log_2 8$

$$\Leftrightarrow (x+2)|x-5| = 8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 5 \\ (x+2)(x-5) = 8 \end{cases} \\ \begin{cases} -2 < x < 5 \\ (x+2)(5-x) = 8 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = \dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \end{array}\right. \text{ thỏa mãn } (*).$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là $6 + \dfrac{3+\sqrt{17}}{2} + \dfrac{3-\sqrt{17}}{2} = 9$.

**Câu 28.** **(Xuân Trường - Nam Định - 2018)** Cho phương trình $\log_2 \left(x - \sqrt{x^2-1}\right).\log_3 \left(x + \sqrt{x^2-1}\right) = \log_6 \left|x - \sqrt{x^2-1}\right|$. Biết phương trình có một nghiệm là 1 và một nghiệm còn lại có dạng $x = \dfrac{1}{2}\left(a^{\log_b c} + a^{-\log_b c}\right)$ (với $a$, $c$ là các số nguyên tố và $a > c$).

Khi đó giá trị của $a^2 - 2b + 3c$ bằng:

**A.** $0$. **B.** $3$. **C.** $6$. **D.** $4$.

**Lời giải**

Điều kiện $\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ x - \sqrt{x^2-1} > 0 \end{cases}$ $(*)$

$\log_2\left(x-\sqrt{x^2-1}\right).\log_3\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = \log_6\left|x-\sqrt{x^2-1}\right|$

$\Leftrightarrow \log_2\left(x-\sqrt{x^2-1}\right).\log_3 \dfrac{1}{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)} = \log_6\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$

$\Leftrightarrow -\log_2\left(x-\sqrt{x^2-1}\right).\log_3 6.\log_6\left(x-\sqrt{x^2-1}\right) = \log_6\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$

$\Leftrightarrow \log_6\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\left[\log_3 6.\log_2\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)+1\right] = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \log_6\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=0 & (1) \\ \log_3 6.\log_2\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)+1=0 & (2) \end{array}\right.$

$(1) \Leftrightarrow x-\sqrt{x^2-1}=1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}=x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x^2-1=(x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$

$(2) \Leftrightarrow \log_2\left(x-\sqrt{x^2-1}\right).\log_3 6=-1 \Leftrightarrow \log_2\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=\log_6 3$

$\Leftrightarrow x-\sqrt{x^2-1}=2^{\log_6 3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 2^{\log_6 3} \\ x^2-1=\left(2^{\log_6 3}-x\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\left(2^{\log_6 3}+2^{-\log_6 3}\right).$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\left(3^{\log_6 2}+3^{-\log_6 2}\right)$. (thỏa mãn $(*)$)

Như vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x=1$, $x=\dfrac{1}{2}\left(3^{\log_6 2}+3^{-\log_6 2}\right)$.

Khi đó $a=3$, $b=6$, $c=2$. Vậy $a^2-2b+3c=3$.

**Dạng 1.2 Phương pháp đặt ẩn phụ**

① Loại 1. $P\left(\log_a f(x)\right)=0 \xrightarrow{PP}$ đặt $t=\log_a f(x)$.

② Loại 2. Sử dụng công thức $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$ để đặt $t=a^{\log_b x} \Rightarrow t=x^{\log_b a}$.

**Câu 29.** Phương trình $\log_x 2+\log_2 x=\dfrac{5}{2}$ có hai nghiệm $x_1, x_2\ (x_1<x_2)$. Khi đó tổng $x_1^2+x_2$ bằng

**A.** $\dfrac{9}{2}$. **B.** $3$. **C.** $6$. **D.** $\dfrac{9}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện phương trình: $x>0, x\ne 1$.

$\log_x 2+\log_2 x=\dfrac{5}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_2 x}+\log_2 x=\dfrac{5}{2} \Leftrightarrow (\log_2 x)^2-\dfrac{5}{2}\log_2 x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x=2 \\ \log_2 x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=\sqrt{2} \end{array}\right.$

Suy ra $x_1=\sqrt{2}, x_2=4$.

Suy ra $x_1^2+x_2=6$.

**Câu 30.** **(SGD Gia Lai 2019)** Số nghiệm của phương trình $\log_2^2 x^2+8\log_2 x+4=0$ là:

**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** $0$. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện: $x>0$

$\log_2^2 x^2+8\log_2 x+4=0\Leftrightarrow 4\log_2^2 x+8\log_2 x+4=0\Leftrightarrow \log_2 x=-1\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\,(TM)$

**Câu 31.** Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3^2 x-2\log_3 x-7=0$ là

**A.** $9$. **B.** $-7$. **C.** $1$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện: $x>0$

Đặt $t=\log_3 x$, phương trình trở thành: $t^2-2t-7=0\ \ (1)$

Do $a.c=-7<0$ nên phương trình $(1)$ có $2$ nghiệm $t_1;t_2$ phân biệt thỏa mãn $t_1+t_2=2$.

Khi đó, các nghiệm của phương trình ban đầu là: $x_1=3^{t_1};\ x_2=3^{t_2}$.

$\Rightarrow x_1.x_2=3^{t_1}.3^{t_2}=3^{t_1+t_2}=3^2=9$.

**Câu 32.** **(Yên Dũng 2-Bắc Giang 2019)** Tổng các nghiệm của phương trình $\log_2^2 x-\log_2 9.\log_3 x=3$ là

**A.** $2$. **B.** $\frac{17}{2}$. **C.** $8$. **D.** $-2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\log_2^2 x-\log_2 9.\log_3 x=3\Leftrightarrow \log_2^2 x-2\log_2 x-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x=-1\\ \log_2 x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\ x=8\end{array}\right.$

Vậy $S=\frac{1}{2}+8=\frac{17}{2}$.

**Câu 33.** **(THPT Hai Bà Trưng - Huế - 2019)** Biết phương trình $\log_2^2(2x)-5\log_2 x=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1$ và $x_2$. Tính $x_1.x_2$.

**A.** $8$. **B.** $5$. **C.** $3$. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện $x>0$.

Biến đổi phương trình đã cho về phương trình sau: $\log^2{}_2 x-3\log_2 x+1=0$.

Do $\log_2 x_1$ và $\log_2 x_2$ là hai nghiệm của phương trình $t^2-3t+1=0$ nên

$\log_2 x_1 + \log_2 x_2 = 3$, mà $\log_2 x_1 + \log_2 x_2 = \log_2 (x_1 . x_2)$.

Suy ra $\log_2 (x_1 . x_2) = 3$ nên $x_1 . x_2 = 8$.

**Câu 34.** **(Chuyên Đại học Vinh - 2019)** Biết rằng phương trình $\log_2^2 x - 7\log_2 x + 9 = 0$ có 2 nghiệm $x_1, x_2$. Giá trị của $x_1 x_2$ bằng

**A.** 128. **B.** 64. **C.** 9. **D.** 512.

**Lời giải**

**Chọn A**

+ Điều kiện $x > 0$.

$+ \log_2^2 x - 7\log_2 x + 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = \dfrac{7+\sqrt{13}}{2} \\ \log_2 x = \dfrac{7-\sqrt{13}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2^{\frac{7+\sqrt{13}}{2}} \\ x = 2^{\frac{7-\sqrt{13}}{2}} \end{array}\right.$ (thỏa mãn điều kiện $x > 0$).

Vậy $x_1 x_2 = 2^{\frac{7+\sqrt{13}}{2}} . 2^{\frac{7-\sqrt{13}}{2}} = 128$.

**Câu 35.** **(Hội 8 trường chuyên ĐBSH - 2019)** Cho phương trình $\log_2^2 (4x) - \log_{\sqrt{2}} (2x) = 5$. Nghiệm nhỏ nhất của phương trình thuộc khoảng

**A.** $(0;1)$. **B.** $(3;5)$. **C.** $(5;9)$. **D.** $(1;3)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện: $x > 0$.

$\log_2^2 (4x) - \log_{\sqrt{2}} (2x) = 5 \Leftrightarrow (1 + \log_2 (2x))^2 - 2\log_2 (2x) - 5 = 0$

$\Leftrightarrow \log_2^2 (2x) = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 (2x) = 2 \\ \log_2 (2x) = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{1}{8}. \end{array}\right.$

Nghiệm nhỏ nhất là $x = \dfrac{1}{8} \in (0;1)$.

**Câu 36.** Gọi $T$ là tổng các nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 5\log_3 x + 4 = 0$. Tính $T$.

**A.** $L = 4$. **B.** $T = -5$. **C.** $T = 84$. **D.** $T = 5$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện: $x > 0$.

$\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 5\log_3 x + 4 = 0 \Leftrightarrow \log_3^2 x - 5\log_3 x + 4 = 0$.

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x = 1 \\ \log_3 x = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 3^4 = 81 \end{array}\right.$ ( thỏa mãn).

Vậy $T = 3 + 81 = 84$.

**Câu 37.** **(Ngô Quyền - Hải Phòng 2019)** Phương trình $\log_2^2 x-5\log_2 x+4=0$ có hai nghiệm $x_1,x_2$. Tính tích $x_1.x_2$.

**A.** $32$. **B.** $36$. **C.** $8$. **D.** $16$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$\log_2^2 x-5\log_2 x+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x=1\\ \log_2 x=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=2\\ x_2=16\end{array}\right.$. Vậy tích $x_1.x_2=32$.

**Câu 38.** **(Chuyên ĐH Vinh 2019)** Cho các số thực a, b thỏa mã $1<a<b$ và $\log_a b+\log_b a^2=3$. Tính giá trị của biểu thức $T=\log_{ab}\dfrac{a^2+b}{2}$.

**A.** $\dfrac{1}{6}$. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $6$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $\log_a b+\log_b a^2=3\Leftrightarrow\dfrac{1}{\log_b a}+2\log_b a=3\Leftrightarrow$

$2\log_b^2 a-3\log_b a+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_b a=1\\ \log_b a=1/2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}a=b & (L)\\ a=\sqrt{b} & (N)\end{array}\right.\Rightarrow b=a^2$

Vậy $T=\log_{ab}\dfrac{a^2+b}{2}=\log_{a^3}a^2=\dfrac{2}{3}$ nên đáp án D đúng.

**Câu 39.** Biết rằng phương trình $\log_2^2 x-\log_2(2018x)-2019=0$ có hai nghiệm thực $x_1,x_2$. Tích $x_1.x_2$ bằng

**A.** $\log_2 2018$. **B.** $0,5$. **C.** $1$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn D**

ĐKXĐ: $x>0$.

$\log_2^2 x-\log_2(2018x)-2019=0\Leftrightarrow\log_2^2 x-\log_2 x-\log_2 2018-2019=0$.

Đặt $t=\log_2 x\Rightarrow x=2^t$, ta có $t^2-t-\log_2 2018-2019=0$ $(*)$

Gọi $t_1,t_2$ là hai nghiệm của $(*)$, ta có $x_1.x_2=2^{t_1+t_2}=2^1=2$.

**Câu 40.** Cho phương trình $\log_3^2(3x)-\log_3^2 x^2-1=0$. Biết phương trình có 2 nghiệm, tính tích $P$ của hai nghiệm đó.

**A.** $P=9$. **B.** $P=\dfrac{2}{3}$. **C.** $P=\sqrt[3]{9}$. **D.** $P=1$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $\log_3^2(3x)-\log_3^2 x^2-1=0$ ( điều kiện $x>0$ ).

$\Leftrightarrow(1+\log_3 x)^2-(2\log_3 x)^2-1=0$.

Đặt $\log_3 x = t$ ta có phương trình $(1+t)^2 - (2t)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow -3t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\dfrac{2}{3} \\ t = 0 \end{array}\right.$.

Với $t = 0 \Leftrightarrow \log_3 x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Với $t = -\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \log_3 x = -\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow x = 3^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$.

Vậy $P = 1.\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{9}$.

**Câu 41.** **(THPT Ba Đình 2019)** Biết rằng phương trình $\log_3^2 x = \log_3 \dfrac{x^4}{3}$ có hai nghiệm $a$ và $b$. Khi đó $ab$ bằng

**A.** $8$. **B.** $81$. **C.** $9$. **D.** $64$.

**Lời giải**

**Đ/K:** $x > 0$.

Phương trình $\log_3^2 x = \log_3 \dfrac{x^4}{3} \Leftrightarrow \log_3^2 x - 4.\log_3 x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x = 2 - \sqrt{3} \\ \log_3 x = 2 + \sqrt{3} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3^{2-\sqrt{3}} \\ x = 3^{2+\sqrt{3}} \end{array}\right.$. Khi đó $a.b = 3^{2-\sqrt{3}}.3^{2+\sqrt{3}} = 81$.

**Câu 42.** **(Chuyên Quốc Học Huế -2019)** Gọi $T$ là tổng các nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 5\log_3 x + 4 = 0$. Tính $T$.

**A.** $T = 4$ **B.** $T = -4$ **C.** $T = 84$ **D.** $T = 5$

**Lời giải**

ĐKXĐ: $x > 0$

Ta có: $\log_{\frac{1}{3}}^2 x - 5\log_3 x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow (-\log_3 x)^2 - 5\log_3 x + 4 = 0$

$\Leftrightarrow \log_3{}^2 x - 5\log_3 x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x = 1 \\ \log_3 x = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 3^4 \end{array}\right.$

Vậy $T = 3 + 3^4 = 84$

**Câu 43.** **(Cụm 8 Trường Chuyên 2019)** Cho phương trình $\log_2^2(4x) - \log_{\sqrt{2}}(2x) = 5$. Nghiệm nhỏ nhất của phương trình thuộc khoảng nào sau đây?

**A.** $(1;3)$. **B.** $(5;9)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(3;5)$.

**Lời giải**

$\log_2^2(4x) - \log_{\sqrt{2}}(2x) = 5 \Leftrightarrow [1 + \log_2(2x)]^2 - 2\log_2(2x) = 5 \Leftrightarrow \log_2^2(2x) = 4$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2(2x) = 2 \\ \log_2(2x) = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 4 \\ 2x = \dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{1}{8} \end{array}\right.$.

Vậy nghiệm nhỏ nhất của phương trình thuộc khoảng $(0;1)$.

**Câu 44.** **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3^2 x-2\log_3 x-7=0$ là

**A.** $9$. **B.** $-7$. **C.** $1$. **D.** $2$.

**Lời giải**

Dễ thấy phương trình bậc hai: $\log_3^2 x-2\log_3 x-7=0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt

Khi đó theo Vi-et, $\log_3 x_1+\log_3 x_2=-\dfrac{-2}{1}\Leftrightarrow \log_3(x_1.x_2)=2\Leftrightarrow x_1.x_2=9$.

**Câu 45.** **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Cho 2 số thực dương $a$ và $b$ thỏa mãn $\log_9 a^4+\log_3 b=8$ và $\log_3 a+\log_{\sqrt[3]{3}} b=9$. Giá trị biểu thức $P=ab+1$ bằng

**A.** $82$. **B.** $27$. **C.** $243$. **D.** $244$.

**Lời giải**

Ta có: $\begin{cases}\log_9 a^4+\log_3 b=8\\ \log_3 a+\log_{\sqrt[3]{3}} b=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\log_3 a+\log_3 b=8\\ \log_3 a+3\log_3 b=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_3 a=3\\ \log_3 b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=27\\ b=9\end{cases}$

Nên $P=ab+1=244$

**Câu 46.** **(Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Biết phương trình $\log_2^2 x-7\log_2 x+9=0$ có hai nghiệm $x_1,x_2$. Giá trị $x_1.x_2$ bằng

**A.** $128$ **B.** $64$ **C.** $9$ **D.** $512$

**Lời giải**

**Chọn A**

Đk: $x>0$; $\log_2^2 x-7\log_2 x+9=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x=\dfrac{7-\sqrt{13}}{2}\\ \log_2 x=\dfrac{7+\sqrt{13}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2^{\frac{7-\sqrt{13}}{2}}\\ x=2^{\frac{7+\sqrt{13}}{2}}\end{array}\right.$

Vậy $x_1.x_2=2^{\frac{7-\sqrt{13}}{2}}.2^{\frac{7+\sqrt{13}}{2}}=2^7=128$

**Câu 47.** **(Mã 104 2017)** Xét các số nguyên dương $a$, $b$ sao cho phương trình $a\ln^2 x+b\ln x+5=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1$, $x_2$ và phương trình $5\log^2 x+b\log x+a=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_3$, $x_4$ thỏa mãn $x_1x_2>x_3x_4$. Tính giá trị nhỏ nhất $S_{\min}$ của $S=2a+3b$.

**A.** $S_{\min}=17$ **B.** $S_{\min}=30$ **C.** $S_{\min}=25$ **D.** $S_{\min}=33$

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện $x>0$, điều kiện mỗi phương trình có 2 nghiệm phân biệt là $b^2>20a$.

Đặt $t=\ln x, u=\log x$ khi đó ta được $at^2+bt+5=0(1)$, $5t^2+bt+a=0(2)$.

Ta thấy với mỗi một nghiệm $t$ thì có một nghiệm $x$, một $u$ thì có một $x$.

Ta có $x_1.x_2=e^{t_1}.e^{t_2}=e^{t_1+t_2}=e^{-\frac{b}{a}}$, $x_3.x_4=10^{u_1+u_2}=10^{-\frac{b}{5}}$, lại có $x_1x_2>x_3x_4\Leftrightarrow e^{-\frac{b}{a}}>10^{-\frac{b}{5}}$

$\Rightarrow -\dfrac{b}{a}>-\dfrac{b}{5}\ln 10\Leftrightarrow a>\dfrac{5}{\ln 10}\Leftrightarrow a\geq 3$ ( do $a,b$ nguyên dương), suy ra $b^2>60\Rightarrow b\geq 8$.

Vậy $S=2a+3b\geq 2.3+3.8=30$, suy ra $S_{\min}=30$ đạt được $a=3,b=8$.

**Câu 48.** **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Tích các nghiệm của phương trình $\log_x(125x).\log_{25}^2 x=1$.

**A.** $630$. **B.** $\frac{1}{125}$. **C.** $\frac{630}{625}$. **D.** $\frac{7}{125}$

**Lời giải**

Điều kiện $x>0;x\neq 1$.

Ta có $\log_x(125x).\log_{25}^2 x=1\Leftrightarrow(\log_x 125+\log_x x)\left(\frac{1}{2}\log_5 x\right)^2=1\Leftrightarrow(3.\log_x 5+1)\log_5^2 x=4$

Đặt $\log_5 x=t$ phương trình tương đương:

$$\left(\frac{3}{t}+1\right)t^2=4\Leftrightarrow t^2+3t-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_5 x=1\\\log_5 x=-4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5\\x=\frac{1}{625}\end{array}\right.$$

Vậy tích các nghiệm của phương trình là $\frac{1}{125}$.

**Câu 49.** **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Tích các nghiệm của phương trình $\log_x(125x).\log_{25}^2 x=1$.

**A.** $630$. **B.** $\frac{1}{125}$. **C.** $\frac{630}{625}$. **D.** $\frac{7}{125}$

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện $x>0;x\neq 1$.

Ta có $\log_x(125x).\log_{25}^2 x=1\Leftrightarrow(\log_x 125+\log_x x)\left(\frac{1}{2}\log_5 x\right)^2=1\Leftrightarrow(3.\log_x 5+1)\log_5^2 x=4$

Đặt $\log_5 x=t$ phương trình tương đương:

$$\left(\frac{3}{t}+1\right)t^2=4\Leftrightarrow t^2+3t-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_5 x=1\\\log_5 x=-4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5\\x=\frac{1}{625}\end{array}\right.$$

Vậy tích các nghiệm của phương trình là $\frac{1}{125}$.

**Câu 50.** **(Kiểm tra năng lực - ĐH - Quốc Tế - 2019)** Xét phương trình $(\log_2 x-1)(\log_3 x+2)=3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

**A.** Phương trình trên vô nghiệm.

**B.** Phương trình trên có nghiệm bé hơn 1.

**C.** Phương trình trên có nghiệm lớn hơn 1 và một nghiệm bé hơn 1.

**D.** Phương trình trên chỉ có nghiệm hơn 1.

**Lời giải**

**Chọn C**

$(\log_2 x-1)(\log_3 x+2)=3$, điều kiện $x>0$.

$\Leftrightarrow(\log_2 x-1)(\log_3 2.\log_2 x+2)-3=0 \Leftrightarrow \log_3 2.(\log_2 x)^2+(2-\log_3 2)\log_2 x-5=0\ (1)$.

Đặt $t=\log_2 x$.

Phương trình $(1)$ trở thành: $(\log_3 2).t^2+(2-\log_3 2)t-5=0\ (2)$.

Phương trình $(2)$ có $ac<0$ nên luôn có hai nghiệm $t_1<0<t_2$.

Suy ra $x_1=2^{t1}<2^0=1$ và $x_2=2^{t2}>2^0=1$.

Vậy phương trình $(1)$ có nghiệm lớn hơn 1 và một nghiệm bé hơn 1.

**Câu 51.** **(Tham khảo 2018)** Cho dãy số $(u_n)$ thỏa mãn $\log u_1+\sqrt{2+\log u_1-2\log u_{10}}=2\log u_{10}$ và $u_{n+1}=2u_n$ với mọi $n\geq 1$. Giá trị nhỏ nhất của $n$ để $u_n>5^{100}$ bằng

**A.** 247. **B.** 248. **C.** 229. **D.** 290.

**Lời giải**

**Chọn B**

Có $u_{n+1}=2u_n=2^n u_1$. Xét $\log u_1+\sqrt{2+\log u_1-2\log u_{10}}=2\log u_{10}$ (*)

Đặt $t=\log u_1-2\log u_{10}$, điều kiện $t\geq -2$

Pt (*) trở thành $\sqrt{2+t}=-t \Leftrightarrow \begin{cases} t\leq 0 \\ t^2-t-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow t=-1$

Với $t=-1 \Leftrightarrow \log u_1-2\log u_{10}=-1$ (với $\log u_{10}=\log\left(2^9.u_1\right)=9\log 2+\log u_1$)

$\Leftrightarrow \log u_1=1-18\log 2 \Leftrightarrow u_1=10^{1-18\log 2}$

Mặt khác $u_n=2^{n-1}u_1=2^{n-1}.10^{1-18\log 2}=2^n.5.10^{-18\log 2}>5^{100} \Rightarrow n>\log_2\left(5^{99}.10^{18\log 2}\right)\approx 247{,}87$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $n$ là 248.

**Câu 52.** Cho $a$, $b$ là các số dương thỏa mãn $\log_9 a=\log_{16} b=\log_{12}\dfrac{5b-a}{2}$. Tính giá trị $\dfrac{a}{b}$.

**A.** $\dfrac{a}{b}=\dfrac{3+\sqrt{6}}{4}$. **B.** $\dfrac{a}{b}=7-2\sqrt{6}$. **C.** $\dfrac{a}{b}=7+2\sqrt{6}$. **D.** $\dfrac{a}{b}=\dfrac{3-\sqrt{6}}{4}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

+ Đặt $\log_9 a=\log_{16} b=\log_{12}\dfrac{5b-a}{2}=t$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=9^t \\ b=16^t \\ \dfrac{5b-a}{2}=12^t \end{cases} \Rightarrow \frac{5.16^t-9^t}{2}=12^t \Leftrightarrow 9^t+2.12^t-5.16^t=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{2t}+2.\left(\frac{3}{4}\right)^{t}-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\frac{3}{4}\right)^{t}=-1+\sqrt{6}\\ \left(\frac{3}{4}\right)^{t}=-1-\sqrt{6}\,(l)\end{array}\right.$$

$$+\ \frac{a}{b}=\frac{9^t}{16^t}=\left(\frac{3}{4}\right)^{2t}=\left(-1+\sqrt{6}\right)^2=7-2\sqrt{6}\,.$$

**Câu 53.** **(THPT Hai Bà Trưng - Huế - 2019)** Cho hai số thực dương $m,n$ thỏa mãn $\log_4\left(\frac{m}{2}\right)=\log_6 n=\log_9\left(m+n\right)$. Tính giá trị của biểu thức $P=\frac{m}{n}$.

**A.** $P=2$. **B.** $P=1$. **C.** $P=4$. **D.** $P=\frac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\text{Đặt } t=\log_4\left(\frac{m}{2}\right)=\log_6 n=\log_9\left(m+n\right)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\frac{m}{2}=4^t\\ n=6^t\\ m+n=9^t\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}m=4^{t+\frac{1}{2}}\\ n=6^t\\ m+n=9^t\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow 2.4^t+6^t=9^t\Leftrightarrow 2.\left(\frac{2}{3}\right)^{2t}+\left(\frac{2}{3}\right)^{t}-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\frac{2}{3}\right)^{t}=-1(VN)\\ \left(\frac{2}{3}\right)^{t}=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^{t}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow t=\log_{\frac{2}{3}}\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}m=2.4^t\\ n=6^t\end{array}\right.\Rightarrow P=\frac{m}{n}=2.\left(\frac{4}{6}\right)^{t}=2.\left(\frac{2}{3}\right)^{t}=2.\left(\frac{2}{3}\right)^{\log_{\frac{2}{3}}\frac{1}{2}}=2.\frac{1}{2}=1.$$

Chọn **B.**

**Câu 54.** **(Hội 8 trường chuyên ĐBSH - 2019)** Giả sử $p,q$ là các số thực dương thỏa mãn $\log_{16} p=\log_{20} q=\log_{25}\left(p+q\right)$. Tính giá trị của $\frac{p}{q}$.

**A.** $\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)$. **B.** $\frac{8}{5}$. **C.** $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$. **D.** $\frac{4}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\log_{16} p=\log_{20} q=\log_{25}\left(p+q\right)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\log_{16} p=t\\ \log_{20} q=t\\ \log_{25}\left(p+q\right)=t\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}p=16^t\\ q=20^t\\ p+q=25^t\end{array}\right.\Rightarrow 16^t+20^t=25^t$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{16}{25}\right)^{t}+\left(\frac{4}{5}\right)^{t}-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\frac{4}{5}\right)^{t}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\,(vn)\\ \left(\frac{4}{5}\right)^{t}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$$

Suy ra $\frac{p}{q}=\left(\frac{4}{5}\right)^t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

**Câu 55.** **(TT Diệu Hiền - Cần Thơ - 2018)** Tích các nghiệm của phương trình $\log_x(125x)\log_{25}^2 x=1$ bằng

**A.** $\frac{7}{25}$. **B.** $\frac{630}{625}$. **C.** $\frac{1}{125}$. **D.** $630$.

**Lời giải**

Điều kiện: $0<x\neq 1$, ta có:

$\log_x(125x)\log_{25}^2 x=1\Leftrightarrow \log_{25}^2 x+\log_{25}^2 x.\log_x 125=1\Leftrightarrow \log_{25}^2 x+\frac{3}{2}\log_{25} x-1=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_{25} x=\frac{1}{2}\\ \log_{25} x=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5\\ x=\frac{1}{25^2}\end{array}\right.$.

Vậy tích các nghiệm của phương trình là: $\frac{1}{125}$.

**Câu 56.** **(Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2018)** Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2^2 x+\sqrt{\log_2 x+1}=1$

**A.** $2^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$. **B.** $1$. **C.** $2^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

**Lời giải**

Điều kiện $\left\{\begin{array}{l}x>0\\ \log_2 x+1\geq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x>0\\ x\geq\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow x\geq\frac{1}{2}$.

Đặt $\sqrt{\log_2 x+1}=t$, $(t\geq 0)\Rightarrow \log_2 x=t^2-1$ ta có phương trình

$\left(t^2-1\right)^2+t=1\Leftrightarrow t^4-2t^2+t=0\Leftrightarrow t\left(t^3-2t+1\right)=0\Leftrightarrow t(t-1)\left(t^2-2t+1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\ (t/m)\\ t=1\ (t/m)\\ t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\ (t/m)\\ t=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\ (loai)\end{array}\right.$.

Với $t=0$ thì $\log_2 x=-1\Leftrightarrow x=2^{-1}$.

Với $t=1$ thì $\log_2 x=0\Leftrightarrow x=2^0$.

Với $t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ thì $\log_2 x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow x=2^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$.

Vậy tích các nghiệm của phương trình là $2^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$.

**Câu 57.** **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Gọi $x$, $y$ các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\log_9 x = \log_6 y = \log_4 (x+y)$ và $\frac{x}{y} = \frac{-a+\sqrt{b}}{2}$, với $a, b$ là hai số nguyên dương. Tính $T = a^2 + b^2$.

**A.** $T = 26$. **B.** $T = 29$. **C.** $T = 20$. **D.** $T = 25$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $t = \log_9 x = \log_6 y = \log_4 (x+y)$, ta có $\begin{cases} x = 9^t \\ y = 6^t \\ x+y = 4^t \end{cases} \Rightarrow 9^t + 6^t = 4^t$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2t} + \left(\frac{3}{2}\right)^t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} (loai) \\ \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Suy ra $\frac{x}{y} = \left(\frac{9}{6}\right)^t = \left(\frac{3}{2}\right)^t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Mà $\frac{x}{y} = \frac{-a+\sqrt{b}}{2} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow a = 1; b = 5$.

Vậy $T = a^2 + b^2 = 1^2 + 5^2 = 26$.

**Câu 58.** **(THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020)** Cho các số thực dương $a, b$ thỏa mãn $\log_4 a = \log_6 b = \log_9 (4a - 5b) - 1$. Đặt $T = \frac{b}{a}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

**A.** $1 < T < 2$. **B.** $\frac{1}{2} < T < \frac{2}{3}$. **C.** $-2 < T < 0$. **D.** $0 < T < \frac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Giả sử: $\log_4 a = \log_6 b = \log_9 (4a - 5b) - 1 = t \Rightarrow \begin{cases} a = 4^t \\ b = 6^t \\ 4a - 5b = 9^{t+1} \end{cases}$

Khi đó $4.4^t - 5.6^t = 9.9^t \Leftrightarrow 4.\left(\frac{4}{9}\right)^t - 5.\left(\frac{6}{9}\right)^t = 9 \Leftrightarrow 4.\left(\frac{2}{3}\right)^{2t} - 5.\left(\frac{2}{3}\right)^t - 9 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^t = \frac{9}{4} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^t = -1 \quad (VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow t = \log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{9}{4}\right) \Leftrightarrow t = -2$$

Vậy $T = \frac{b}{a} = \left(\frac{6}{4}\right)^t = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \frac{4}{9} \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

**Dạng 1.3 Phương pháp mũ hóa**

+ Nếu $a>0,\ a\neq 1$: $\boxed{\log_a f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)=a^{g(x)}}$ **(mũ hóa)**

**Câu 59.** **(Cần Thơ 2019)** Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2\left(12-2^x\right)=5-x$ bằng

**A.** $2$. **B.** $32$. **C.** $6$. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện $12-2^x>0$ (*)

Khi đó $\log_2\left(12-2^x\right)=5-x\Leftrightarrow 12-2^x=2^{5-x}\Leftrightarrow 2^{2x}-12.2^x+32=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x=4\\2^x=8\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=3\end{array}\right.$

Ta thấy cả hai nghiệm đều thoả mãn điều kiện (*), và tích bằng $2.3=6$.

**Câu 60.** Phương trình $\log_4\left(3.2^x\right)=x-1$ có nghiệm là $x_0$ thì nghiệm $x_0$ thuộc khoảng nào sau đây

**A.** $(1;2)$. **B.** $(2;4)$. **C.** $(-2;1)$. **D.** $(4;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\log_4\left(3.2^x\right)=x-1\Leftrightarrow 3.2^x=4^{x-1}\Leftrightarrow 4^x-12.2^x=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x=0,(vn)\\2^x=12\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\log_2 12\in(2;4)$.

**Câu 61.** Phương trình $\log_4\left(3.2^x-1\right)=x-1$ có hai nghiệm $x_1;x_2$. Tính giá trị của $P=x_1+x_2$.

**A.** $6+4\sqrt{2}$. **B.** $12$. **C.** $\log_2\left(6-4\sqrt{2}\right)$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện: $3.2^x-1>0\Leftrightarrow 2^x>\dfrac{1}{3}$ (*).

$\log_4\left(3.2^x-1\right)=x-1\Leftrightarrow 3.2^x-1=4^{x-1}\Leftrightarrow\dfrac{1}{4}\left(2^x\right)^2-3.2^x+1=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x=6+4\sqrt{2}\ \ (\text{t/m}(*))\\2^x=6-4\sqrt{2}\ \ (\text{t/m}(*))\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\log_2\left(6+4\sqrt{2}\right)\\x=\log_2\left(6-4\sqrt{2}\right)\end{array}\right.$

Khi đó $P=\log_2\left(6+4\sqrt{2}\right)+\log_2\left(6-4\sqrt{2}\right)=\log_2\left(6+4\sqrt{2}\right)\left(6-4\sqrt{2}\right)=\log_2 4=2$.

**Câu 62.** **(Sở Bạc Liêu - 2018)** Gọi $x_1,x_2$ (với $x_1<x_2$) là nghiệm của phương trình $\log_3\left(3^{2x-1}-3^{x-1}+1\right)=x$ khi đó giá trị của biểu thức $\sqrt{3^{x_1}}-\sqrt{3^{x_2}}$ là:

**A.** $1-\sqrt{3}$. **B.** $1+\sqrt{3}$. **C.** $2-\sqrt{3}$. **D.** $2-\sqrt{3}$.

**Lời giải**

$\log_3\left(3^{2x-1}-3^{x-1}+1\right)=x$

$\Leftrightarrow 3^{2x-1}-3^{x-1}+1=3^x$

$\Leftrightarrow 3^{2x}-4.3^x+3=0$

$\Leftrightarrow 3^x = 3 \vee 3^x = 1$

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 0$.

Do $x_1 < x_2$ nên $x_1 = 0, x_2 = 1$. Ta được đáp án A là đúng.

**Câu 63.** **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Số nghiệm của phương trình $2^{\log_5(x+3)} = x$ là:

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

**Lời giải**

Đk: $x > -3$

Đặt $t = \log_5(x+3) \Rightarrow x = 5^t - 3$, phương trình đã cho trở thành

$2^t = 5^t - 3 \Leftrightarrow 2^t + 3 = 5^t \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^t + 3.\left(\frac{1}{5}\right)^t = 1$ (1)

Dễ thấy hàm số $f(t) = \left(\frac{2}{5}\right)^t + 3.\left(\frac{1}{5}\right)^t$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và $f(1) = 1$ nên phương trình (1) có nghiệm duy nhất $t = 1$.

Với $t = 1$, ta có $\log_5(x+3) = 1 \Leftrightarrow x = 2$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

**Câu 64.** **(Hồng Bàng - Hải Phòng - 2018)** Phương trình $\log_2(5 - 2^x) = 2 - x$ có hai ngiệm $x_1$, $x_2$. Tính $P = x_1 + x_2 + x_1 x_2$.

**A.** 11. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 2.

**Lời giải**

Điều kiện: $2^x < 5$

$$\log_2(5 - 2^x) = 2 - x \Leftrightarrow 5 - 2^x = 2^{2-x} \Leftrightarrow 5 - 2^x = \frac{4}{2^x} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 1 \\ 2^x = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow P = x_1 + x_2 + x_1 x_2 = 2$.

**Câu 65.** **(THPT Cao Bá Quát - 2018)** Cho phương trình $\log_4(3.2^x - 1) = x - 1$ có hai nghiệm $x_1, x_2$. Tổng $x_1 + x_2$ là:

**A.** $\log_2(6 - 4\sqrt{2})$. **B.** 2. **C.** 4. **D.** $6 + 4\sqrt{2}$.

**Lời giải.**

**Chọn B**

$$\log_4(3.2^x - 1) = x - 1 \Leftrightarrow 3.2^x - 1 = 4^{x-1} \Leftrightarrow \frac{4^x}{4} - 3.2^x + 1 = 0 \ (1).$$

Đặt $t = 2^x \ (t > 0)$. PT $(2) \Rightarrow \frac{1}{4}t^2 - 3t + 1 = 0 \ (2)$.

Giả sử 2 nghiệm của PT $(2)$ là $t_1, t_2 \Rightarrow t_1.t_2 = 4 \Rightarrow 2^{x_1}.2^{x_2} = 4 \Rightarrow 2^{x_1+x_2} = 4 \Rightarrow x_1 + x_2 = 2.$

**Dạng 1.4 Phương pháp hàm số, đánh giá**

Thông thường ta sẽ vận dụng nội dung các định lý (và các kết quả) sau:

① Nếu hàm số $y = f(x)$ đơn điệu một chiều trên D thì phương trình $f(x) = 0$ không quá một nghiệm trên **D.**

$\longrightarrow$ Để vận dụng định lý này, ta cần nhẩm được 1 nghiệm $x=x_o$ của phương trình, rồi chỉ rõ hàm đơn điệu một chiều trên D (luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến trên D) và kết luận $x=x_o$ là nghiệm duy nhất.

② Hàm số $f(t)$ đơn điệu một chiều trên khoảng $(a;b)$ và tồn tại $u;v\in(a;b)$ thì $f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v$".

$\longrightarrow$ Để áp dụng định lý này, ta cần xây dựng hàm đặc trưng $f(t)$.

**Câu 66.** **(Đề tham khảo 2017)** Hỏi phương trình $3x^2-6x+\ln(x+1)^3+1=0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

**A.** 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện: $x>-1$.

Phương trình đã cho tương đương với $3x^2-6x+3\ln(x+1)+1=0$.

Xét hàm số $y=3x^2-6x+3\ln(x+1)+1$ liên tục trên khoảng $(-1;+\infty)$.

$y'=6(x-1)+\dfrac{3}{x+1}=\dfrac{6x^2-3}{x+1}$.

$y'=0\Leftrightarrow 2x^2-1=0\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (thỏa điều kiện).

| $x$ | $-1$ | | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $y$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $f(-\frac{\sqrt{2}}{2})$ | $\searrow$ | $f(\frac{\sqrt{2}}{2})$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Vì $f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)>0$, $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)<0$ và $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=\pm\infty$ nên đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

**Câu 67.** **(Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - 2018)** Số nghiệm của phương trình $\ln(x-1)=\dfrac{1}{x-2}$ là:

**A.** 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

**Lời giải**

Hàm số $f(x)=\ln(x-1)$ luôn đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Hàm số $g(x)=\dfrac{1}{x-2}$ có $g'(x)=-\dfrac{1}{(x-2)^2}<0,\ \forall x\neq 2$ nên $g(x)$ luôn nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ và $(2;+\infty)$.

Vậy phương trình đã cho luôn có hai nghiệm.

**Câu 68.** **(THPT Nguyễn Trãi - Đà Nẵng - 2018)** Giải phương trình $\log_2 x.\log_3 x+x.\log_3 x+3=\log_2 x+3\log_3 x+x$. Ta có tổng tất cả các nghiệm bằng

**A.** $35$. **B.** $5$. **C.** $10$. **D.** $9$.

**Lời giải**

Điều kiện $x>0$.

$\log_2 x.\log_3 x+x.\log_3 x+3=\log_2 x+3\log_3 x+x\Leftrightarrow(\log_2 x+x-3)(\log_3 x-1)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ \log_2 x+x-3=0\end{array}\right.$.

Ta có hàm số $f(x)=\log_2 x+x$ liên tục và đồng biến trên $(0;+\infty)$ và $f(2)=3$ nên phương trình $\log_2 x+x-3=0$ có một nghiệm $x=2$.

Vậy tổng tất cả các nghiệm bằng $5$.

**Câu 69.** Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\dfrac{1}{2}\log_2(x+3)=\log_2(x+1)+x^2-x-4+2\sqrt{x+3}$.

**A.** $S=2$. **B.** $S=1$. **C.** $S=-1$. **D.** $S=1-\sqrt{2}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện: $x>-1$.

Ta có:

$\dfrac{1}{2}\log_2(x+3)=\log_2(x+1)+x^2-x-4+2\sqrt{x+3}\Leftrightarrow\log_2\sqrt{x+3}+\left(\sqrt{x+3}-1\right)^2=\log_2(x+1)+x^2\quad(*)$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+(t-1)^2$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

$f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+2(t-1)=\dfrac{1+2\ln 2\left(t^2-t\right)}{t\ln 2}=\dfrac{2\ln 2.\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(1-\ln\sqrt{2}\right)}{t\ln 2}>0\ \ \forall t>0$.

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Suy ra

$(*)\Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+3}\right)=f(x+1)\Leftrightarrow\sqrt{x+3}=x+1$

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x>-1\\ x^2+x-2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x>-1\\ \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-2\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow x=1$.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình bằng $1$.

**Câu 70.** Biết phương trình $\log_5 \dfrac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2\log_3\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ có một nghiệm dạng $x = a + b\sqrt{2}$ trong đó $a, b$ là các số nguyên. Tính $2a + b$.

**A.** 3. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 5.

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \dfrac{\sqrt{x}}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{x} > \dfrac{1}{\sqrt{x}} \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$$

Ta có:

$$\log_5 \frac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2\log_3\left(\frac{x-1}{2\sqrt{x}}\right) \Leftrightarrow \log_5\left(2\sqrt{x}+1\right) - \log_5 x = 2\log_3(x-1) - 2\log_3\left(2\sqrt{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_5\left(2\sqrt{x}+1\right) + 2\log_3\left(2\sqrt{x}\right) = \log_5 x + 2\log_3(x-1) \qquad (*)$$

Xét hàm số: $f(t) = \log_5(t+1) + 2\log_3(t)$ trên $(2;+\infty)$

Ta có: $f'(t) = \dfrac{1}{(t+1)\ln 5} + \dfrac{2}{t.\ln 3} > 0$ với mọi $t \in (2;+\infty)$.

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$

Từ đó ta có $(*) \Leftrightarrow f\left(2\sqrt{x}\right) = f(x-1) \Rightarrow 2\sqrt{x} = x-1 \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x} = 1-\sqrt{2} \\ \sqrt{x} = 1+\sqrt{2} \end{array}\right.$

Vậy $\sqrt{x} = 1+\sqrt{2} \Rightarrow x = 3+2\sqrt{2} \Rightarrow a = 3, b = 2$

**Câu 71.** Số nghiệm thực của phương trình $2^{\sqrt{x^2+1}}\log_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = 4^x\log_2(3x)$.

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đk: $x > 0$.

Ta có $x + \sqrt{x^2+1} > 1, \forall x > 0$ do đó $2^{\sqrt{x^2+1}}\log_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) > 0, \forall x > 0$.

Với $0 < x \le \dfrac{1}{3}$ thì $\begin{cases} 2^{\sqrt{x^2+1}}\log_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) > 0 \\ 4^x\log_2(3x) \le 0 \end{cases}$, do đó phương trình đã cho vô nghiệm.

Với $x > \dfrac{1}{3}$.

$$2^{\sqrt{x^2+1}}\log_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = 4^x\log_2(3x) \Leftrightarrow 2^{x+\sqrt{x^2+1}}\log_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = 2^{3x}\log_2(3x). (*)$$

Xét hàm số $f(t) = 2^t\log_2 t$, với $t > 1$.

Có $f'(t) = 2^t\left(\dfrac{1}{t\ln 2} + \ln 2\log_2 t\right) \Rightarrow f'(t) > 0, \forall t \in (1;+\infty)$.

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow f\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=f(3x) \Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+1}=3x \Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{3}} \in \left(\frac{1}{3};+\infty\right)$.

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm thực.

**Câu 72.** **(Bắc Ninh - 2018)** Cho phương trình $\frac{1}{2}\log_2(x+2)+x+3=\log_2\frac{2x+1}{x}+\left(1+\frac{1}{x}\right)^2+2\sqrt{x+2}$, gọi $S$ là tổng tất cả các nghiệm của nó. Khi đó, giá trị của $S$ là

**A.** $S=-2$. **B.** $S=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$. **C.** $S=2$. **D.** $S=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

**Lời giải**

Điều kiện $\left[\begin{array}{l} -2<x<-\frac{1}{2} \\ x>0 \end{array}\right.$.

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+(t-1)^2$, $t>0$.

Ta có $f'(t)=\frac{1}{t\ln 2}+2(t-1)=\frac{2\ln 2.t^2-2\ln 2.t+1}{t.\ln 2}>0$, $\forall t>0$, do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Mặt khác ta có:

$\frac{1}{2}\log_2(x+2)+x+3=\log_2\frac{2x+1}{x}+\left(1+\frac{1}{x}\right)^2+2\sqrt{x+2}$

$\Leftrightarrow \log_2\sqrt{x+2}+\left(\sqrt{x+2}-1\right)^2=\log_2\left(2+\frac{1}{x}\right)+\left[\left(2+\frac{1}{x}\right)-1\right]^2$

$\Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+2}\right)=f\left(2+\frac{1}{x}\right)$

$\Rightarrow \sqrt{x+2}=2+\frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow x^3-2x^2-4x-1=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\frac{3-\sqrt{13}}{2} \\ x=\frac{3+\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện ta được $\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\frac{3+\sqrt{13}}{2} \end{array}\right.$. Vậy $S=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

**Câu 73.** **(Toán Học Và Tuổi Trẻ - 2018)** Biết $x_1$, $x_2$ là hai nghiệm của phương trình $\log_7\left(\frac{4x^2-4x+1}{2x}\right)+4x^2+1=6x$ và $x_1+2x_2=\frac{1}{4}\left(a+\sqrt{b}\right)$ với $a$, $b$ là hai số nguyên dương. Tính $a+b$.

**A.** $a+b=16$. **B.** $a+b=11$. **C.** $a+b=14$. **D.** $a+b=13$.

**Lời giải**

Điều kiện $\begin{cases} x>0 \\ x\neq \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Ta có $\log_7\left(\dfrac{4x^2-4x+1}{2x}\right)+4x^2+1=6x \Leftrightarrow \log_7\left(\dfrac{(2x-1)^2}{2x}\right)+4x^2-4x+1=2x$

$\Leftrightarrow \log_7(2x-1)^2+(2x-1)^2=\log_7 2x+2x \quad (1)$

Xét hàm số $f(t)=\log_7 t+t \Leftrightarrow f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 7}+1>0$ với $t>0$

Vậy hàm số đồng biến

Phương trình $(1)$ trở thành $f\left((2x-1)^2\right)=f(2x)\Leftrightarrow (2x-1)^2=2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{4} \\ x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{4} \end{array}\right.$

Vậy $x_1+2x_2=\left[\begin{array}{ll} \dfrac{9-\sqrt{5}}{4} & (l) \\ \dfrac{9+\sqrt{5}}{4} & (tm) \end{array}\right. \Rightarrow a=9;b=5\Rightarrow a+b=9+5=14.$

**Câu 74.** **(Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình - 2018)** Số nghiệm của phương trình $\dfrac{x^2}{2}+x-\ln\left(x^2-2\right)=2018$ là

**A.** 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

**Lời giải**

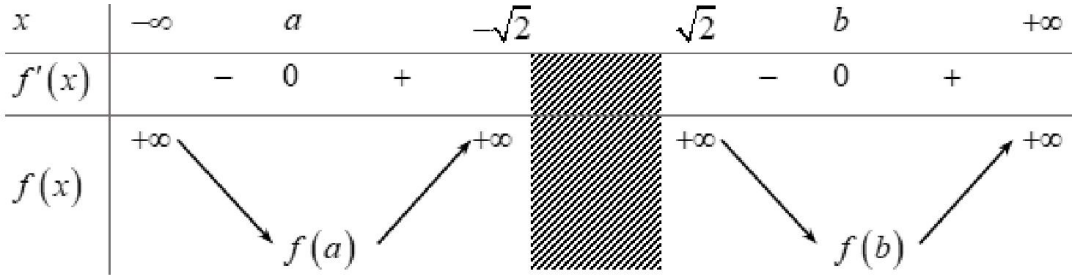
Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+x-\ln\left(x^2-2\right)$ với $x\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

Ta có $f'(x)=x+1-\dfrac{2x}{x^2-2}$; $f''(x)=1+\dfrac{2x^2+4}{\left(x^2-2\right)^2}>0, \forall x\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

Nên suy ra hàm số $f'(x)=x+1-\dfrac{2x}{x^2-2}$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)$ và $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

Mặt khác $f'(2).f'\left(\sqrt{3}\right)=1.\left(1-\sqrt{3}\right)<0$ và $f'(-3).f'(-2)=-\dfrac{8}{7}.1<0$ nên $f'(x)$ có đúng một nghiệm $a\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)$ và đúng một nghiệm $b\in\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

Ta có bảng biến thiên




Dựa vào bảng biến thiên suy ra phương trình $f(x)=2018$ có bốn nghiệm phân biệt.

**Câu 75.** **(THPT Lê Xoay - 2018)** Số nghiệm của phương trình $\sin 2x-\cos x=1+\log_2(\sin x)$ trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ là:

**A.** 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

**Lời giải**

Vì $\sin x>0$ và $\cos x>0$, $\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ nên phương trình đã cho tương đương

$\sin 2x-\cos x+\log_2(\cos x)=1+\log_2(\sin x)+\log_2(\cos x)$

$\Leftrightarrow \log_2(\cos x)-\cos x=\log_2(\sin 2x)-\sin 2x \quad (*)$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t-t$, với $t\in(0;1)$ ta có $f'(t)=\frac{1}{t\ln 2}-1>0,\ \forall t\in(0;1)$.

Do đó, hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Từ phương trình $(*)$, ta có $f(\cos x)=f(\sin 2x)\Leftrightarrow \cos x=\sin 2x\Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2}$ hay $x=\frac{\pi}{6}$.

**Câu 76.** **(THPT Nguyễn Thị Minh Khai - Hà Tĩnh - 2018)** Phương trình $\log_3\left(x^2+2x-3\right)+x^2-x-7=\log_3(x+1)$ có số nghiệm là $T$ và tổng các nghiệm là $S$. Khi đó $T+S$ bằng

**A.** 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

**Lời giải**

* Điều kiện $\begin{cases}x^2+2x-3>0\\ x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow x>1$.

* Ta có $x=3$ là một nghiệm của phương trình.

* Khi $x>1$, phương trình đã cho được viết lại $\log_3\left(\frac{x^2+2x-3}{x+1}\right)=-x^2+x+7\ (*)$.

* Phương trình $(*)$ có vế trái là hàm đồng biến và vế phải là hàm nghịch biến khi $x>1$ suy ra $x=3$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

* Vậy $T+S=4$.

**Câu 77.** **(THPT Nguyễn Tất Thành - Yên Bái - 2018)** Biết $x_1,x_2\ (x_1<x_2)$ là hai nghiệm của phương trình $\log_7\left(\frac{4x^2-4x+1}{2x}\right)+4x^2+1=6x$ và $x_1+3x_2=\frac{1}{4}\left(a+2\sqrt{b}\right)$ với $a,b$ là các số nguyên dương. Tính $a+b$

**A.** $a+b=14$. **B.** $a+b=16$. **C.** $a+b=17$. **D.** $a+b=15$.

**Lời giải**

$\frac{4x^2-4x+1}{2x}>0\Leftrightarrow\frac{(2x-1)^2}{2x}>0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\frac{1}{2}\\ x>0\end{cases}$.

$\log_7\left(\frac{4x^2-4x+1}{2x}\right)+4x^2+1=6x \Leftrightarrow \log_7\left(2x-1\right)^2+\left(2x-1\right)^2=\log_7 2x+2x$

Xét hàm $f\left(t\right)=\log_7 t+t\left(t>0\right)$.

Ta có $f'\left(t\right)=\frac{1}{t\ln 7}+1>0\forall t>0$, vậy $f\left(t\right)=\log_7 t+t\left(t>0\right)$ là hàm đồng biến suy ra

$\log_7\left(2x-1\right)^2+\left(2x-1\right)^2=\log_7 2x+2x \Leftrightarrow \left(2x-1\right)^2=2x \Leftrightarrow 4x^2-6x+1=0 \Leftrightarrow 4x^2-6x+1=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{4} \\ x_1=\frac{3-\sqrt{5}}{4} \end{array}\right.$.

$x_1+3x_2=\frac{1}{4}\left(12+2\sqrt{5}\right)$.

**Câu 78.** **(THPT Lương Văn Can - 2018)** Cho biết phương trình $\log_5\frac{2\sqrt{x}+1}{x}=2\log_3\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ có nghiệm duy nhất $x=a+b\sqrt{2}$. Hỏi $m$ thuộc khoảng nào dưới đây để hàm số $y=\frac{mx+a-2}{x-m}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $\left[1;\ 2\right]$ bằng $-2$.

**A.** $m\in\left(7;\ 9\right)$. **B.** $m\in\left(6;\ 7\right)$. **C.** $m\in\left(2;\ 4\right)$. **D.** $m\in\left(4;\ 6\right)$.

**Lời giải**

+ Điều kiện: $x>1$.

Ta có: $\log_5\frac{2\sqrt{x}+1}{x}=2\log_3\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \Leftrightarrow \log_5\frac{2\sqrt{x}+1}{x}=2\log_3\frac{x-1}{2\sqrt{x}}$

$\Leftrightarrow \log_5\left(2\sqrt{x}+1\right)-\log_5 x=\log_3\left(x-1\right)^2-\log_3\left(2\sqrt{x}\right)^2$

$\Leftrightarrow \log_5\left(2\sqrt{x}+1\right)+\log_3\left(2\sqrt{x}\right)^2=\log_5\left(x\right)+\log_3\left(x-1\right)^2$ (*).

Xét hàm số $f\left(t\right)=\log_5 t+\log_3\left(t-1\right)^2$, với $t>1$

có $f'\left(t\right)=\frac{1}{t.\ln 5}+\frac{2}{\left(t-1\right).\ln 3}>0,\ \forall t>1$

nên $f\left(t\right)$ đồng biến do đó (*) $\Leftrightarrow x=2\sqrt{x}+1 \Leftrightarrow \sqrt{x}=1+\sqrt{2}$ (vì $x>1$)

$\Leftrightarrow x=3+2\sqrt{2}$. Vậy $a=3$.

+ Với $a=3$, ta xét hàm số $y=\frac{mx+1}{x-m}$

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{m\right\}$

$y'=\frac{-m^2-1}{\left(x-m\right)^2}<0$ do đó hàm số luôn nghịch biến.

Khi đó hàm số có giá trị lớn nhất trên đoạn $\left[1;\ 2\right]$ bằng $-2 \Leftrightarrow \begin{cases} m\notin\left[1;\ 2\right] \\ y\left(1\right)=-2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \notin [1;\ 2] \\ \dfrac{m+1}{1-m} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$$

## DẠNG 2. PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH MŨ

### Dạng 2.1 Phương pháp đưa về cùng cơ số

+ Nếu $a > 0,\ a \neq 1$ thì $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

+ Nếu a chứa ẩn thì $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow (a-1)\left[f(x) - g(x)\right] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ f(x) = g(x) \end{array}\right.$.

+ $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = \log_a b.g(x)$ (**logarit hóa**).

**Câu 1.** **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-2x-3} = 5^{x+1}$ là

**A.** $x = -1;\ x = 2.$ **B.** $x = 1;\ x = -2.$ **C.** $x = 1;\ x = 2.$ **D.** Vô nghiệm.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có:

$\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-2x-3} = 5^{x+1} \Leftrightarrow 5^{-(x^2-2x-3)} = 5^{x+1} \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 = x + 1 \Leftrightarrow -x^2 + x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x = -1;\ x = 2.$

**Câu 2.** Tập nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3} = 7^{x+1}$ là

**A.** $\{-1\}$. **B.** $\{-1; 2\}$. **C.** $\{-1; 4\}$. **D.** $\{2\}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3} = 7^{x+1} \Leftrightarrow 7^{-x^2+2x+3} = 7^{x+1} \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 = x + 1.$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

**Câu 3.** Tổng các nghiệm của phương trình $2^{x^2+2x} = 8^{2-x}$ bằng

**A.** $-6$. **B.** $-5$. **C.** $5$. **D.** $6$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $2^{x^2+2x} = 8^{2-x} \Leftrightarrow 2^{x^2+2x} = 2^{6-3x} \Leftrightarrow x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -6 \end{array}\right.$.

Vậy tổng hai nghiệm của phương trình bằng $-5$.

**Câu 4.** **(SGD Điện Biên - 2019)** Gọi $x_1,\ x_2$ là hai nghiệm của phương trình $7^{x+1} = \left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3}$. Khi đó $x_1^2 + x_2^2$ bằng:

**A.** $17$. **B.** $1$. **C.** $5$. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$7^{x+1}=\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3} \Leftrightarrow 7^{x+1}=7^{-\left(x^2-2x-3\right)} \Leftrightarrow x+1=-x^2+2x+3 \Leftrightarrow x^2-x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-1 \\ x_2=2 \end{array}\right.$.

Vậy $x_1^2+x_2^2=5$.

**Câu 5.** Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $5^{3x-2}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2}$ bằng

**A.** $2$. **B.** $5$. **C.** $0$. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $5^{3x-2}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2} \Leftrightarrow 5^{3x-2}=5^{x^2} \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Vậy tổng bình phương các nghiệm của phương trình $5^{3x-2}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2}$ bằng $5$.

**Câu 6.** Nghiệm của phương trình $2^{7x-1}=8^{2x-1}$ là

**A.** $x=2$. **B.** $x=-3$. **C.** $x=-2$. **D.** $x=1$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$2^{7x-1}=8^{2x-1} \Leftrightarrow 2^{7x-1}=2^{3.(2x-1)} \Leftrightarrow 2^{7x-1}=2^{6x-3} \Leftrightarrow 7x-1=6x-3 \Leftrightarrow x=-2$.

**Câu 7.** **(THPT Lương Văn Tụy - Ninh Bình - 2018)** Giải phương trình $(2,5)^{5x-7}=\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1}$.

**A.** $x \geq 1$. **B.** $x=1$. **C.** $x<1$. **D.** $x=2$.

**Lời giải**

Ta có $(2,5)^{5x-7}=\left(\frac{2}{5}\right)^{x+1} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{5x-7}=\left(\frac{5}{2}\right)^{-x-1} \Leftrightarrow 5x-7=-x-1 \Leftrightarrow x=1$.

**Câu 8.** **(THPT Nguyễn Thị Minh Khai - Hà Tĩnh - 2018)** Phương trình $3^{x^2-4}=\left(\frac{1}{9}\right)^{3x-1}$ có hai nghiệm $x_1$, $x_2$. Tính $x_1x_2$.

**A.** $-6$. **B.** $-5$. **C.** $6$. **D.** $-2$.

**Lời giải**

Ta có $3^{x^2-4}=\left(\frac{1}{9}\right)^{3x-1} \Leftrightarrow x^2-4=2-6x \Leftrightarrow x^2+6x-6=0$.

Áp dụng Vi-ét suy ra phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1$, $x_2$ thì $x_1x_2=-6$.

**Câu 9.** **(Sở Quảng Nam - 2018)** Tổng các nghiệm của phương trình $2^{x^2+2x}=8^{2-x}$ bằng

**A.** $5$. **B.** $-5$. **C.** $6$. **D.** $-6$.

**Lời giải**

Phương trình đã cho tương đương: $2^{x^2+2x}=2^{3(2-x)} \Leftrightarrow x^2+2x=6-3x \Leftrightarrow x^2+5x-6=0$.

Do đó tổng các nghiệm của phương trình là: $S=-\frac{b}{a}=-5$.

**Câu 10.** **(THPT Thăng Long - Hà Nội - 2018)** Tập nghiệm của phương trình $4^{x-x^2}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ là

**A.** $\left\{0;\frac{2}{3}\right\}$. **B.** $\left\{0;\frac{1}{2}\right\}$. **C.** $\{0;2\}$. **D.** $\left\{0;\frac{3}{2}\right\}$.

**Lời giải**

Ta có $4^{x-x^2}=\left(\frac{1}{2}\right)^x \Leftrightarrow 2^{2x-2x^2}=2^{-x} \Leftrightarrow -2x^2+2x=-x \Leftrightarrow -2x^2+3x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{3}{2} \end{array}\right.$.

**Câu 11.** **(THPT Kim Liên - Hà Nội - 2018)** Tính tổng $S=x_1+x_2$ biết $x_1$, $x_2$ là các giá trị thực thỏa mãn đẳng thức $2^{x^2-6x+1}=\left(\frac{1}{4}\right)^{x-3}$.

**A.** $S=-5$. **B.** $S=8$. **C.** $S=4$. **D.** $S=2$.

**Lời giải**

Ta có $2^{x^2-6x+1}=\left(\frac{1}{4}\right)^{x-3} \Leftrightarrow 2^{x^2-6x+1}=(2)^{-2(x-3)} \Leftrightarrow x^2-6x+1=-2x+6$

$\Leftrightarrow x^2-4x-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=-1 \\ x_2=5 \end{array}\right. \Rightarrow S=x_1+x_2=4$.

**Câu 12.** **(THPT Nguyễn Thị Minh Khai - Hà Nội - 2018)** Tích các nghiệm của phương trình $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1}=\left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$ là

**A.** $-2$. **B.** $-4$. **C.** $4$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn.** **A.**

ĐKXĐ : $x \neq -1$

Vì $\left(\sqrt{5}-2\right)\left(\sqrt{5}+2\right)=1$ nên $\left(\sqrt{5}-2\right)=\left(\sqrt{5}+2\right)^{-1}$.

Khi đó phương trình đã cho tương đương $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1}=\left(\sqrt{5}+2\right)^{\frac{-x+1}{x+1}}$

$\Leftrightarrow x-1=\frac{-x+1}{x+1}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$. (thỏa điều kiện)

Suy ra tích hai nghiệm là $-2$.

**Câu 13.** **(THCS&THPT Nguyễn Khuyến - Bình Dương - 2018)** Giải phương trình $4^{2x+3}=8^{4-x}$.

**A.** $x=\frac{6}{7}$. **B.** $x=\frac{2}{3}$. **C.** $x=2$. **D.** $x=\frac{4}{5}$.

**Lời giải**

$4^{2x+3}=8^{4-x} \Leftrightarrow 2^{4x+6}=2^{12-3x} \Leftrightarrow 4x+6=12-3x \Leftrightarrow x=\frac{6}{7}$.

**Câu 14.** **(THPT Cao Bá Quát - 2018)** Cho phương trình $2^{\left|\frac{28}{3}x+4\right|}=16^{x^2-1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng:

**A.** Nghiệm của phương trình là các số vô tỷ.

**B.** Tổng các nghiệm của một phương trình là một số nguyên.

**C.** Tích các nghiệm của phương trình là một số âm.

**D.** Phương trình vô nghiệm.

**Lời giải.**

**Chọn C**

$2^{\left|\frac{28}{3}x+4\right|}=16^{x^2-1} \Leftrightarrow 2^{\left|\frac{28}{3}x+4\right|}=2^{4x^2-4} \Leftrightarrow \left|\frac{28}{3}x+4\right|=4x^2-4\ (1)$.

TH1: Nếu $x>-\frac{3}{7}$. PT $(1)$: $\frac{28}{3}x+4=4x^2-4 \Leftrightarrow 4x^2-\frac{28}{3}x-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3\ (TM) \\ x=-\frac{2}{3}\ (L) \end{array}\right.$

TH1: Nếu $x\le-\frac{3}{7}$. PT $(1)$: $-\frac{28}{3}x-4=4x^2-4 \Leftrightarrow 4x^2+\frac{28}{3}x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\ (L) \\ x=-\frac{7}{3}\ (TM) \end{array}\right.$

Phương trình có tập nghiệm $S=\left\{-\frac{7}{3};3\right\}$.

**Dạng 2.2 Phương pháp đặt ẩn phụ**

① Loại 1. $P\left(a^{f(x)}\right)=0 \xrightarrow{PP}$ đặt $t=a^{f(x)}$, $t>0$.

② Loại 2. $\alpha.a^{2.f(x)}+\beta.(a.b)^{f(x)}+\lambda.b^{2.f(x)}=0 \xrightarrow{PP}$ Chia hai vế cho $b^{2.f(x)}$, rồi đặt $t=\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}>0$ (chia cho cơ số lớn nhất hoặc nhỏ nhất).

③ Loại 3. $a^{f(x)}+b^{f(x)}=c$ với $a.b=1 \xrightarrow{PP}$ đặt $t=a^{f(x)} \Rightarrow b^{f(x)}=\frac{1}{t}$.

④ Loại 4. $\alpha.a^{f(x)}+\left[\begin{array}{l} a^{f(x)}.a^{g(x)} \\ \frac{a^{f(x)}}{a^{g(x)}} \end{array}\right.+\beta.a^{g(x)}+b=0 \xrightarrow{PP}$ đặt $\left\{\begin{array}{l} u=a^{f(x)} \\ v=a^{g(x)} \end{array}\right.$.

**Câu 15.** **(Mã 123 2017)** Cho phương trình $4^x+2^{x+1}-3=0$. Khi đặt $t=2^x$ ta được phương trình nào sau đây

**A.** $2t^2-3t=0$ **B.** $4t-3=0$ **C.** $t^2+t-3=0$ **D.** $t^2+2t-3=0$

**Lời giải**

**Chọn D**

Phương trình $\Leftrightarrow 4^x+2.2^x-3=0$

**Câu 16.** **(THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019)** Tập nghiệm của phương trình $5^{x^2-4x+3}+5^{x^2+7x+6}=5^{2x^2+3x+9}+1$ là

**A.** $\{1;-1;3\}$. **B.** $\{-1;1;3;6\}$. **C.** $\{-6;-1;1;3\}$. **D.** $\{1;3\}$.

**Lời giải**

$5^{x^2-4x+3}+5^{x^2+7x+6}=5^{2x^2+3x+9}+1\Leftrightarrow 5^{x^2-4x+3}+5^{x^2+7x+6}=5^{\left(x^2-4x+3\right)+\left(x^2+7x+6\right)}+1.$

Đặt $\begin{cases}a=x^2-4x+3\\ b=x^2+7x+6\end{cases}$, ta được phương trình:

$5^a+5^b=5^{a+b}+1\Leftrightarrow 5^a+5^b=5^a.5^b+1\Leftrightarrow\left(1-5^a\right)\left(1-5^b\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5^a=1\\ 5^b=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\ b=0\end{array}\right.$

Khi đó $\left[\begin{array}{l}x^2-4x+3=0\\ x^2+7x+6=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=3\\ x=-1\\ x=-6\end{array}\right.$.

Tập nghiệm của phương trình là $\{-6;-1;1;3\}$.

**Câu 17.** **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Phương trình $9^x-6^x=2^{2x+1}$ có bao nhiêu nghiệm âm?

**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** $0$. **D.** $1$.

**Lời giải**

Phương trình $9^x-6^x=2^{2x+1}\Leftrightarrow 9^x-6^x=2.4^x\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-\left(\frac{3}{2}\right)^x=2\ (*)$.

Đặt $\left(\frac{3}{2}\right)^x=t$ với $t>0$, phương trình $(*)$ trở thành $t^2-t-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\ \ (\text{L})\\ t=2\end{array}\right.$.

Với $t=2\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^x=2\Leftrightarrow x=\log_{\frac{3}{2}}2>0$.

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm âm.

**Câu 18.** **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Tổng các nghiệm của phương trình $4^x-6.2^x+2=0$ bằng

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $6$. **D.** $2$.

**Lời giải**

$4^x-6.2^x+2=0\Leftrightarrow\left(2^x\right)^2-6.2^x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x=3+\sqrt{7}\\ 2^x=3-\sqrt{7}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\log_2\left(3+\sqrt{7}\right)\\ x=\log_2\left(3-\sqrt{7}\right)\end{array}\right.$.

Vậy tổng hai nghiệm của phương trình

là $\log_2\left(3+\sqrt{7}\right)+\log_2\left(3-\sqrt{7}\right)=\log_2\left[\left(3+\sqrt{7}\right)\left(3-\sqrt{7}\right)\right]=\log_2 2=1$.

**Câu 19.** **(Cụm 8 Trường Chuyên 2019)** Tổng các nghiệm của phương trình $3^{x+1}+3^{1-x}=10$ là

**A.** $1$. **B.** $0$. **C.** $-1$. **D.** $3$.

**Lời giải**

Ta có: $3^{x+1}+3^{1-x}=10\Leftrightarrow 3.3^x+\frac{3}{3^x}=10$

Đặt $t=3^x\ (t>0)$, phương trình trở thành: $3t+\frac{3}{t}=10\Leftrightarrow 3t^2-10t+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\ t=\frac{1}{3}\end{array}\right.$.

Với $t=3$ ta có $3^x=3\Leftrightarrow x=1$.

Với $t=\frac{1}{3}$ ta có $3^x=\frac{1}{3}\Leftrightarrow 3^x=3^{-1}\Leftrightarrow x=-1$.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là: $1-1=0$.

**Câu 20.** Gọi $x_1,x_2$ là nghiệm của phương trình $\left(2-\sqrt{3}\right)^x+\left(2+\sqrt{3}\right)^x=4$. Khi đó $x_1^2+2x_2^2$ bằng

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

**Lời giải**

Ta có: $\left(2-\sqrt{3}\right)^x.\left(2+\sqrt{3}\right)^x=1$. Đặt $t=\left(2-\sqrt{3}\right)^x, t>0\Rightarrow\left(2+\sqrt{3}\right)^x=\frac{1}{t}$.

Phương trình trở thành: $t+\frac{1}{t}=4\Rightarrow t^2-4t+1=0\Leftrightarrow t=2\pm\sqrt{3}$.

Với $t=2-\sqrt{3}\Rightarrow\left(2-\sqrt{3}\right)^x=2-\sqrt{3}\Leftrightarrow x=1$.

Với $t=2+\sqrt{3}\Rightarrow\left(2-\sqrt{3}\right)^x=2+\sqrt{3}\Leftrightarrow\left(2-\sqrt{3}\right)^x=\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}\Leftrightarrow x=-1$.

Vậy $x_1^2+2x_2^2=3$.

**Câu 21.** **(Đề Thi Công Bằng KHTN 2019)** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $2.4^x-9.2^x+4=0$ bằng.

**A.** 2. **B.** $-1$. **C.** 0. **D.** 1.

**Lời giải**

Phương trình: $2.4^x-9.2^x+4=0$ (1) có TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Đặt $t=2^x$ ( $t>0$) Khi đó pt( 1) trở thành:

$$2t^2-9t+4=0\Leftrightarrow(t-4)(2t-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=4(tm)\\t=\frac{1}{2}(tm)\end{array}\right.$$

Với $t=4\Rightarrow 2^x=4\Leftrightarrow 2^x=2^2\Leftrightarrow x=2$

Với $t=\frac{1}{2}\Rightarrow 2^x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2^x=2^{-1}\Leftrightarrow x=-1$

Phương trình có tập nghiệm là: $S=\{2;-1\}$. Vậy tổng tất cả các nghiệm của pt (1) là 1.

**Câu 22.** **(THPT Nghĩa Hưng NĐ 2019)** Phương trình $6^{2x-1}-5.6^{x-1}+1=0$ có hai nghiệm $x_1,x_2$. Khi đó tổng hai nghiệm $x_1+x_2$ là.

**A.** 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

**Lời giải**

$$6^{2x-1}-5.6^{x-1}+1=0\Leftrightarrow\frac{6^{2x}}{6}-\frac{5.6^x}{6}+1=0\Leftrightarrow 6^{2x}-5.6^x+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}6^{x_1}=2\\6^{x_2}=3\end{array}\right.$$

$\Rightarrow 6^{x_1}.6^{x_2}=3.2\Leftrightarrow 6^{x_1+x_2}=6\Leftrightarrow x_1+x_2=1$.

**Câu 23.** Cho phương trình $25^x-20.5^{x-1}+3=0$. Khi đặt $t=5^x$, ta được phương trình nào sau đây.

**A.** $t^2-3=0$. **B.** $t^2-4t+3=0$. **C.** $t^2-20t+3=0$. **D.** $t-\frac{20}{t}+3=0$.

**Lời giải**

Ta có: $25^x - 20.5^{x-1} + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(5^x\right)^2 - 20.\frac{5^x}{5} + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(5^x\right)^2 - 4.5^x + 3 = 0$

Đặt $t = 5^x$, $t > 0$

Khi đó phương trình trở thành: $t^2 - 4t + 3 = 0$.

**Câu 24.** **(Sở Bình Phước -2019)** Tập nghiệm của phương trình $9^x - 4.3^x + 3 = 0$ là

**A.** $\{0;1\}$ **B.** $\{1\}$ **C.** $\{0\}$ **D.** $\{1;3\}$

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $9^x - 4.3^x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 1 \\ 3^x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 3^0 \\ 3^x = 3^1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

**Câu 25.** **(Chuyên Thái Nguyên 2019)** Số nghiệm thực của phương trình $4^{x-1} + 2^{x+3} - 4 = 0$ là:

**A.** 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

**Lời giải**

$\text{pt} \Leftrightarrow 4^{x-1} + 16.2^{x-1} - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{x-1} = -8 + 2\sqrt{17} \\ 2^{x-1} = -8 - 2\sqrt{17} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1 + \log_2\left(-8 + 2\sqrt{7}\right)$

**Câu 26.** **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Tập nghiệm của phương trình $3^{2+x} + 3^{2-x} = 30$ là

**A.** $S = \left\{3; \frac{1}{3}\right\}$ **B.** $S = \{-1\}$ **C.** $S = \{1; -1\}$ **D.** $S = \{3; 1\}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$3^{2+x} + 3^{2-x} = 30 \Leftrightarrow 3.3^{2x} - 10.3^x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x = 3 \\ 3^x = \frac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm 1$

**Câu 27.** **(THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Cho hàm số $f(x) = x.5^x$. Tổng các nghiệm của phương trình $25^x + f'(x) - x.5^x.\ln 5 - 2 = 0$ là

**A.** $-2$ **B.** 0 **C.** $-1$ **D.** 1

**lời giải:**

**Chọn B**

Ta có $f(x) = x.5^x \Rightarrow f'(x) = 5^x + x.5^x.\ln 5$

Nên $25^x + f'(x) - x.5^x.\ln 5 - 2 = 0 \Rightarrow 25^x + 5^x - 2 = 0$

Đặt $t = 5^x \left(t > 0\right)$

Ta được phương trình $t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 (l) \end{array}\right. \Rightarrow 5^x = 1 \Rightarrow x = 0$

**Câu 28.** **(Chuyên KHTN 2019)** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $3^{2x} - 2.3^{x+2} + 27 = 0$ bằng

**A.** 9. **B.** 18. **C.** 3. **D.** 27.

**Lời giải**

$$3^{2x}-2.3^{x+2}+27=0\Leftrightarrow\left(3^x\right)^2-18.3^x+27=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^x=9+3\sqrt{6}\\3^x=9-3\sqrt{6}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=\log_3\left(9+3\sqrt{6}\right)\\x_2=\log_3\left(9-3\sqrt{6}\right)\end{array}\right.$$

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình đã cho là:

$x_1+x_2=\log_3\left(9+3\sqrt{6}\right)+\log_3\left(9-3\sqrt{6}\right)=\log_3\left[\left(9+3\sqrt{6}\right)\left(9-3\sqrt{6}\right)\right]=\log_3 27=3$.

**Câu 29.** **(THPT-Thang-Long-Ha-Noi- 2019)** Phương trình $9^x-6^x=2^{2x+1}$ có bao nhiêu nghiệm âm?

**A.** 3 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 2

**Lời giải**

Ta có: $9^x-6^x=2^{2x+1}\Leftrightarrow 9^x-6^x=2.4^x\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-\left(\frac{3}{2}\right)^x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\frac{3}{2}\right)^x=-1(L)\\\left(\frac{3}{2}\right)^x=2\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x=\log_{\frac{3}{2}}2$.

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm âm.

**Câu 30.** **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Phương trình $\left(\sqrt{2}-1\right)^x+\left(\sqrt{2}+1\right)^x-2\sqrt{2}=0$ có tích các nghiệm là?

**A.** 0. **B.** 2. **C.** $-1$. **D.** 1.

**Lời giải**

Đặt $t=\left(\sqrt{2}-1\right)^x\ (\mathrm{t}>0)\Rightarrow\left(\sqrt{2}+1\right)^x=\frac{1}{t}$

Phương trình đã cho trở thành

$t+\frac{1}{t}-2\sqrt{2}=0$

$\Leftrightarrow t^2-2\sqrt{2}\ t+1=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1+\sqrt{2}\\t=-1+\sqrt{2}\end{array}\right.$

Với $t=1+\sqrt{2}\Rightarrow\left(\sqrt{2}-1\right)^x=1+\sqrt{2}\Leftrightarrow x=-1$

Với $t=-1+\sqrt{2}\Rightarrow\left(\sqrt{2}-1\right)^x=-1+\sqrt{2}\Leftrightarrow x=1$

Vậy tích 2 nghiệm của phương trình đã cho là $-1$

**Câu 31.** **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Gọi $x_1;x_2$ là 2 nghiệm của phương trình $4^{x^2-x}+2^{x^2-x+1}=3$.Tính $\left|x_1-x_2\right|$

**A.** 3 **B.** 0 **C.** 2 **D.** 1

Lờigiải

**Chọn D**

Đặt $2^{x^2-x}=t(t>0)$. Phương trình tương đương với

$t^2+2t-3=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-3\end{array}\right.$

Vì $t>0\Rightarrow t=1\Rightarrow x^2-x=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right. \Rightarrow |x_1-x_2|=1$

**Câu 32.** **(HSG Bắc Ninh 2019)** Giải phương trình: $4^{1+x}+4^{1-x}=2\left(2^{2+x}-2^{2-x}\right)+8$

**Lời giải**

$4^{1+x}+4^{1-x}=2\left(2^{2+x}-2^{2-x}\right)+8 \Leftrightarrow 4^{1+x}+4^{1-x}=4\left(2^{1+x}-2^{1-x}\right)+8$

Đặt $t=2^{1+x}-2^{1-x}\Rightarrow t^2=4^{1+x}+4^{1-x}-8$

Phương trình trở thành:

$$t^2=4t\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{1+x}-2^{1-x}=0 \\ 2^{1+x}-2^{1-x}=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^{1+x}=2^{1-x} \\ 2^{2x}-2.2^x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1+x=1-x \\ 2^x=1-\sqrt{2}\ (VN) \\ 2^x=1+\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\log_2\left(1+\sqrt{2}\right) \end{array}\right.$$

**Câu 33.** Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $3^{2x+8}-4.3^{x+5}+27=0$ ?

**A.** $5$. **B.** $-5$. **C.** $\frac{4}{27}$. **D.** $-\frac{4}{27}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $3^{2x+8}-4.3^{x+5}+27=0\Leftrightarrow 3^{2(x+4)}-12.3^{x+4}+27=0$.

Đặt $t=3^{x+4}\left(t\geq 0\right)$ ta được phương trình $t^2-12t+27=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=9 \end{array}\right.$

từ đó ta có $\left[\begin{array}{l} 3^{x+4}=3 \\ 3^{x+4}=9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Vậy tổng các nghiệm phương trình đã cho là -5.

**Câu 34.** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $3^{2x}-2.3^{x+2}+27=0$ bằng

**A.** $0$. **B.** $18$. **C.** $3$. **D.** $27$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có:

$$3^{2x}-2.3^{x+2}+27=0\Leftrightarrow \left(3^x\right)^2-18.3^x+27=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x=9+3\sqrt{6} \\ 3^x=9-3\sqrt{6} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\log_3\left(9+3\sqrt{6}\right) \\ x=\log_3\left(9-3\sqrt{6}\right) \end{array}\right.$$

Vậy tổng các nghiệm là

$\log_3\left(9+3\sqrt{6}\right)+\log_3\left(9-3\sqrt{6}\right)=\log_3\left(9+3\sqrt{6}\right)\left(9-3\sqrt{6}\right)=\log_3 27=3$.

**Câu 35.** **(Hội 8 trường chuyên ĐBSH 2019)** Tổng các nghiệm của phương trình $3^{x+1}+3^{1-x}=10$ là

**A.** $1$. **B.** $3$. **C.** $-1$. **D.** $0$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Cách 1: Ta có $3^{x+1}+3^{1-x}=10\Leftrightarrow 3.3^x+\frac{3}{3^x}=10$.

Đặt $t=3^x, t>0$ phương trình trở thành $3t^2-10t+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$.

Với $t=3$ ta có $3^x=3 \Leftrightarrow x=1$

Với $t=\dfrac{1}{3}$ ta có $3^x=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow x=-1$

**Câu 36.** **(SGD Điện Biên - 2019)** Tích tất cả các nghiệm của phương trình $3^x+3^{4-x}=30$ bằng

**A.** $3$. **B.** $1$. **C.** $9$. **D.** $27$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$3^x+3^{4-x}=30 \Leftrightarrow 3^x+\dfrac{81}{3^x}=30$.

Đặt $t=3^x\left(t>0\right)$, phương trình đã cho trở thành:

$t+\dfrac{81}{t}=30 \Leftrightarrow t^2-30t+81=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=27 \Rightarrow 3^x=27 \Leftrightarrow x=3 \\ t=3 \Rightarrow 3^x=3 \Leftrightarrow x=1 \end{array}\right.$

Vậy tích tất cả các nghiệm của phương trình là $1.3=3$.

**Câu 37.** **(Thi thử hội 8 trường chuyên 2019)** Kí hiệu $x_1$, $x_2$ là hai nghiệm thực của phương trình $4^{x^2-x}+2^{x^2-x+1}=3$. Giá trị của $\left|x_1-x_2\right|$ bằng

**A.** $3$. **B.** $4$. **C.** $2$. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $4^{x^2-x}+2^{x^2-x+1}=3 \Leftrightarrow \left(2^{x^2-x}\right)^2+2.2^{x^2-x}-3=0$.

Đặt $2^{x^2-x}=t>0$ ta được: $t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-3 \\ t=1 \end{array}\right.$.

Vì $t>0$ nên nhận $t=1$. Suy ra $2^{x^2-x}=1 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

Như thế $\left\{\begin{array}{l} x_1=0 \\ x_2=1 \end{array}\right.$ hoặc $\left\{\begin{array}{l} x_1=1 \\ x_2=0 \end{array}\right.$.

Vậy $\left|x_1-x_2\right|=1$.

**Câu 38.** **(Đại học Hồng Đức 2019)** Cho phương trình $\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^{\sin x}+\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^{\sin x}=4$. Tổng các nghiệm của phương trình trong $\left[-2\pi;2\pi\right]$ bằng

**A.** $\dfrac{3\pi}{2}$. **B.** $\dfrac{\pi}{2}$. **C.** $0$. **D.** $\pi$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^{\sin x}+\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^{\sin x}=4 \Leftrightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)^{\sin x}+\left(2-\sqrt{3}\right)^{\sin x}=4.$

Đặt $t=\left(2+\sqrt{3}\right)^{\sin x}$, $t>0$. Khi đó phương trình đã cho trở thành

$t+\frac{1}{t}=4 \Leftrightarrow t^2-4t+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2+\sqrt{3} \\ t=2-\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Với $t=2+\sqrt{3} \Rightarrow \sin x=1 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \xrightarrow[x\in[-2\pi;2\pi]]{k\in\mathbb{Z}} x\in\left\{-\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right\}$.

Với $t=2-\sqrt{3} \Rightarrow \sin x=-1 \Rightarrow x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi \xrightarrow[x\in[-2\pi;2\pi]]{k\in\mathbb{Z}} x\in\left\{-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right\}$.

Vậy tổng các nghiệm bằng $0$.

**Câu 39.** **(Xuân Trường - Nam Định - 2018)** Gọi $a$ là một nghiệm của phương trình $4.2^{2\log x}-6^{\log x}-18.3^{2\log x}=0$. Khẳng định nào sau đây đúng khi đánh giá về $a$?

**A.** $(a-10)^2=1$.

**B.** $a$ cũng là nghiệm của phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log x}=\frac{9}{4}$.

**C.** $a^2+a+1=2$.

**D.** $a=10^2$.

**Lời giải**

Điều kiện $x>0$.

Chia cả hai vế của phương trình cho $3^{2\log x}$ ta được $4\left(\frac{3}{2}\right)^{2\log x}-\left(\frac{3}{2}\right)^{\log x}-18=0$.

Đặt $t=\left(\frac{3}{2}\right)^{\log x}$, $t>0$.

Ta có $4t^2-t-18=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{9}{4} \\ t=-2(L) \end{array}\right.$.

Với $t=\frac{9}{4} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{\log x}=\frac{9}{4} \Leftrightarrow \log x=2 \Leftrightarrow x=100$.

Vậy $a=100=10^2$.

**Câu 40.** **(THPT Lục Ngạn - 2018)** Nghiệm của phương trình $25^x-2(3-x)5^x+2x-7=0$ nằm trong khoảng nào sau đây?

**A.** $(5;10)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(0;1)$

**Lời giải**

Đặt $t=5^x$, $t>0$.

Phương trình trở thành: $t^2-2(3-x)t+2x-7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1(L) \\ t=-2x+7 \end{array}\right.$.

Với $t=-2x+7$ ta có : $5^x=-2x+7\Leftrightarrow 5^x+2x-7=0$.

Phương trình có một nghiệm $x=1$.

Với $x>1$ : $5^x+2x-7>5+2-7\Leftrightarrow 5^x+2x-7>0\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Với $x<1$ : $5^x+2x-7<5+2-7\Leftrightarrow 5^x+2x-7<0\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất $x=1\in(0;2)$.

**Câu 41.** **(THPT Chu Văn An -Thái Nguyên - 2018)** Số nghiệm nguyên không âm của bất phương trình $\sqrt{15.2^{x+1}+1}\ge\left|2^x-1\right|+2^{x+1}$ bằng bao nhiêu?

**A.** 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

**Lời giải**

Với $x\ge 0$ thì $\sqrt{15.2^{x+1}+1}\ge\left|2^x-1\right|+2^{x+1}\Leftrightarrow\sqrt{30.2^x+1}\ge 3.2^x-1$. (1)

Đặt $t=2^x\ge 1$ thì $(1)\Leftrightarrow\sqrt{30t+1}\ge 3t-1\Leftrightarrow 30t+1\ge(3t-1)^2$

$\Leftrightarrow 9t^2-36t\le 0\Leftrightarrow 0\le t\le 4$

$\Rightarrow 1\le 2^x\le 4\Rightarrow x\in\{0;1;2\}$.

**Câu 42.** **(Toán Học Tuổi Trẻ Số 6)** Cho phương trình $8^{x+1}+8.(0,5)^{3x}+3.2^{x+3}=125-24.(0,5)^x$. Khi đặt $t=2^x+\dfrac{1}{2^x}$, phương trình đã cho trở thành phương trình nào dưới đây?

**A.** $8t^3-3t-12=0$. **B.** $8t^3+3t^2-t-10=0$. **C.** $8t^3-125=0$. **D.** $8t^3+t-36=0$.

**Lời giải**

Ta có $8^{x+1}+8.(0,5)^{3x}+3.2^{x+3}=125-24.(0,5)^x\Leftrightarrow 8.2^{3x}+8.\dfrac{1}{2^{3x}}+24.2^x+24.\dfrac{1}{2^x}-125=0$

$\Leftrightarrow 8\left(2^{3x}+\dfrac{1}{2^{3x}}\right)+24\left(2^x+\dfrac{1}{2^x}\right)-125=0$.

Đặt $t=2^x+\dfrac{1}{2^x}$ $(t\ge 2)$. Khi đó ta có $2^{3x}+\dfrac{1}{2^{3x}}=t^3-3t$

Phương trình trở thành $8\left(t^3-3t\right)+24t-125=0\Leftrightarrow 8t^3-125=0$.

**Câu 43.** **(THPT Bình Giang - Hải Dương - 2018)** Gọi $S$ là tập nghiệm của của phương trình: $4^{x^2-3x+2}+4^{x^2+6x+5}=4^{2x^2+3x+7}+1$. Khi đó $S$ là

**A.** $\{1;2\}$. **B.** $\{1;2;-1\}$. **C.** $\{1;2;-1;-5\}$. **D.** $\varnothing$.

**Lời giải**

Nhận xét:

Ta có $(x^2-3x+2)+(x^2+6x+5)=2x^2+3x+7$ do đó $4^{2x^2+3x+7}=4^{x^2-3x+2}.4^{x^2+6x+5}$

Phương trình đã cho tương đương với phương trình sau:

$(4^{x^2-3x+2}-4^{2x^2+3x+7})-(1-4^{x^2+6x+5})=0\Leftrightarrow 4^{x^2-3x+2}(1-4^{x^2+6x+5})-(1-4^{x^2+6x+5})$

$\Leftrightarrow\quad (1-4^{x^2+6x+5})(4^{x^2-3x+2}-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4^{x^2+6x+5}=1\\4^{x^2-3x+2}=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+6x+5=0\\x^2-3x+2=0\end{array}\right.$

Vậy $S=\{1;2;-1;-5\}$.

Dạng 2.3 Phương pháp logarit hóa

***Dạng 1***: Phương trình: $a^{f(x)}=b \Leftrightarrow \begin{cases} 0<a\neq 1, b>0 \\ f(x)=\log_a b \end{cases}$

***Dạng 2***: Phương trình:

$a^{f(x)}=b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)}=\log_a b^{f(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x).\log_a b$

hoặc $\log_b a^{f(x)}=\log_b b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x).\log_b a=g(x).$

**Câu 44.** **(THPT Thuận Thành 3 - Bắc Ninh 2019)** Số giao điểm của các đồ thị hàm số $y=3^{x^2+1}$ và $y=5$ là

**A.** $0$. **B.** $3$. **C.** $2$. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Số giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=3^{x^2+1}$ và $y=5$ bằng số nghiệm của phương trình

$3^{x^2+1}=5$

+) $3^{x^2+1}=5 \Leftrightarrow x^2+1=\log_3 5 \Leftrightarrow x^2=\log_3 5-1 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\log_3 5-1}$

+) Vậy số giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=3^{x^2+1}$ và $y=5$ bằng $2$

**Câu 45.** **(Sở GD Nam Định - 2019)** Tính tích các nghiệm thực của phương trình $2^{x^2-1}=3^{2x+3}$

**A.** $-3\log_2 3$. **B.** $-\log_2 54$. **C.** $-1$. **D.** $1-\log_2 3$.

**Lời giải**

**Chọn B**

PT $\Leftrightarrow \log_2 2^{x^2-1}=\log_2 3^{2x+3}$

$\Leftrightarrow x^2-1=(2x+3)\log_2 3$

$\Leftrightarrow x^2-2x.\log_2 3-1-3\log_2 3=0$

Do $1.(-1-3\log_2 3)<0$ nên phương trình luôn có 2 nghiệm thực phân biệt $x_1, x_2$.

Theo Vi-ét ta có $x_1x_2=-1-3\log_2 3=-\log_2 2-\log_2 27=-\log_2 54$.

**Câu 46.** Cho hai số thực $a>1, b>1$. Gọi $x_1, x_2$ là hai nghiệm của phương trình $a^x.b^{x^2-1}=1$. Trong trường hợp biểu thức $S=\left(\dfrac{x_1.x_2}{x_1+x_2}\right)^2-4x_1-4x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất, mệnh đề nào sau đây là đúng?

**A.** $a\geq b$. **B.** $a.b=4$. **C.** $a.b=2$. **D.** $a<b$.

**Lời giải**

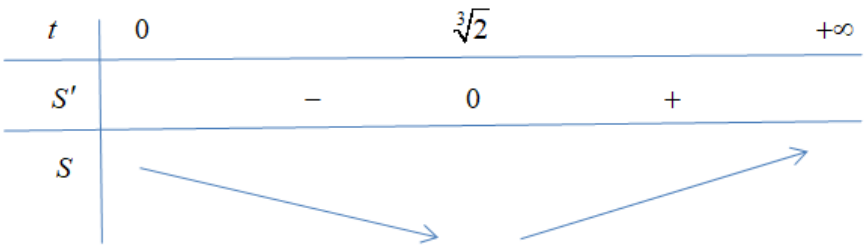
**Chọn D**

Ta có: $a^x.b^{x^2-1}=1 \Leftrightarrow x^2+x\log_b a-1=0$. Nhận thấy phương trình luôn có hai nghiệm trái dấu.

Theo Vi-et: $x_1+x_2=-\log_b a$; $x_1.x_2=-1$.

Khi đó: $S=\left(\dfrac{x_1.x_2}{x_1+x_2}\right)^2-4x_1-4x_2=\log_a^2 b+\dfrac{4}{\log_a b}$.

Đặt $\log_a b=t, t>0$ ( Vì $a>1, b>1$), $S=t^2+\dfrac{4}{t}; S'=2t-\dfrac{4}{t^2}=\dfrac{2t^3-4}{t^2}; S'=0 \Leftrightarrow t=\sqrt[3]{2}$




Suy ra biểu thức $S$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $t=\sqrt[3]{2}$ hay $\log_a b=\sqrt[3]{2}>1\Rightarrow a<b$.

**Câu 47.** **(TT Diệu Hiền - Cần Thơ - 2018)** Cho $x$, $y$, $z$ là các số thực thỏa mãn $2^x=3^y=6^{-z}$. Giá trị của biểu thức $M=xy+yz+xz$ là:

**A.** 0. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 1.

**Lời giải**

Đặt $2^x=3^y=6^{-z}=t$ với $t>0$.

$$\Rightarrow\begin{cases}2^x=t\\3^y=t\\6^{-z}=t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\log_2 t\\y=\log_3 t\\z=-\log_6 t\end{cases}.$$

Mặt khác: $\log_6 t=\dfrac{1}{\log_t 6}=\dfrac{1}{\log_t 3+\log_t 2}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{\log_3 t}+\dfrac{1}{\log_2 t}}=\dfrac{\log_3 t.\log_2 t}{\log_3 t+\log_2 t}$.

$M=xy+yz+xz=\log_3 t.\log_2 t-\log_3 t.\log_6 t-\log_6 t.\log_2 t=\log_3 t.\log_2 t-\left(\log_3 t+\log_2 t\right).\log_6 t$

$=\log_3 t.\log_2 t-\left(\log_3 t+\log_2 t\right).\dfrac{\log_3 t.\log_2 t}{\log_3 t+\log_2 t}=0.$

**Câu 48.** **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Gọi $x$, $y$ các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\log_9 x=\log_6 y=\log_4\left(x+y\right)$ và $\dfrac{x}{y}=\dfrac{-a+\sqrt{b}}{2}$, với $a,b$ là hai số nguyên dương. Tính $T=a^2+b^2$.

**A.** $T=26$. **B.** $T=29$. **C.** $T=20$. **D.** $T=25$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $t=\log_9 x=\log_6 y=\log_4\left(x+y\right)$, ta có $\begin{cases}x=9^t\\y=6^t\\x+y=4^t\end{cases}\Rightarrow 9^t+6^t=4^t$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^{2t}+\left(\frac{3}{2}\right)^{t}-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{3}{2}\right)^t=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}(loai)\\\left(\dfrac{3}{2}\right)^t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.\Rightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Suy ra $\dfrac{x}{y}=\left(\dfrac{9}{6}\right)^t=\left(\dfrac{3}{2}\right)^t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Mà $\dfrac{x}{y}=\dfrac{-a+\sqrt{b}}{2}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\Rightarrow a=1;b=5.$

Vậy $T = a^2 + b^2 = 1^2 + 5^2 = 26.$

**Câu 49.** **(THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020)** Cho các số thực dương $a, b$ thỏa mãn $\log_4 a = \log_6 b = \log_9 (4a - 5b) - 1$. Đặt $T = \frac{b}{a}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

**A.** $1 < T < 2$. **B.** $\frac{1}{2} < T < \frac{2}{3}$. **C.** $-2 < T < 0$. **D.** $0 < T < \frac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Giả sử: $\log_4 a = \log_6 b = \log_9 (4a - 5b) - 1 = t \Rightarrow \begin{cases} a = 4^t \\ b = 6^t \\ 4a - 5b = 9^{t+1} \end{cases}$

Khi đó $4.4^t - 5.6^t = 9.9^t \Leftrightarrow 4.\left(\frac{4}{9}\right)^t - 5.\left(\frac{6}{9}\right)^t = 9 \Leftrightarrow 4.\left(\frac{2}{3}\right)^{2t} - 5.\left(\frac{2}{3}\right)^t - 9 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^t = \frac{9}{4} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^t = -1 \quad (VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow t = \log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{9}{4}\right) \Leftrightarrow t = -2$

Vậy $T = \frac{b}{a} = \left(\frac{6}{4}\right)^t = \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \frac{4}{9} \in \left(0; \frac{1}{2}\right).$

**Câu 50.** **(THPT Cao Bá Quát - 2018)** Phương trình $3^{x^2}.4^{x+1} - \frac{1}{3^x} = 0$ có hai nghiệm $x_1, x_2$. Tính $T = x_1.x_2 + x_1 + x_2$.

**A.** $T = -\log_3 4$. **B.** $T = \log_3 4$. **C.** $T = -1$. **D.** $T = 1$.

**Lời giải**

Ta có $3^{x^2}.4^{x+1} - \frac{1}{3^x} = 0$

$\Leftrightarrow 3^{x(x+1)}.4^{x+1} = 1$

$\Leftrightarrow \log\left(3^{x(x+1)}.4^{x+1}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \log 3^{x(x+1)} + \log 4^{x+1} = 0$

$\Leftrightarrow x(x+1)\log 3 + (x+1)\log 4 = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x\log 3 + \log 4) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -\log_3 4 \end{array}\right.$

Do đó $T = x_1.x_2 + x_1 + x_2 = \log_3 4 - (1 + \log_3 4) = -1$

**Dạng 2.4 Phương pháp hàm số, đánh giá**

Thông thường ta sẽ vận dụng nội dung các định lý (và các kết quả) sau:

① Nếu hàm số $y = f(x)$ đơn điệu một chiều trên D thì phương trình $f(x) = 0$ không quá một nghiệm trên **D.**

$\longrightarrow$ Để vận dụng định lý này, ta cần nhẩm được 1 nghiệm $x=x_o$ của phương trình, rồi chỉ rõ hàm đơn điệu một chiều trên D (luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến trên D) và kết luận $x=x_o$ là nghiệm duy nhất.

② Hàm số $f(t)$ đơn điệu một chiều trên khoảng $(a;b)$ và tồn tại $u;v\in(a;b)$ thì $f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v$".

$\longrightarrow$ Để áp dụng định lý này, ta cần xây dựng hàm đặc trưng $f(t)$.

**Câu 51.** **(SGD Nam Định 2019)** Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $15x.5^x=5^{x+1}+27x+23$ bằng.

**A.** $-1$. **B.** $2$. **C.** $1$. **D.** $0$.

**Lời giải**

**Chọn D.**

Ta có $15x.5^x=5^{x+1}+27x+23\Leftrightarrow 5^{x+1}(3x-1)=27x+23$ (1)

Dễ thấy $x=\frac{1}{3}$ không thỏa mãn phương trình trên nên ta có

$5^{x+1}(3x-1)=27x+23\Leftrightarrow 5^{x+1}=\frac{27x+23}{3x-1}$. (2)

Hàm số $y=f(x)=5^{x+1}=5.5^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y=g(x)=\frac{27x+23}{3x-1}$, có đạo hàm $g'(x)=-\frac{96}{(3x-1)^2}<0$, nên nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$ và $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$.

Do đó trên mỗi khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$ và $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$, phương trình (2) có nhiều nhất một nghiệm.

Ta thấy $x=-1$ và $x=1$ là các nghiệm lần lượt thuộc các khoảng $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$ và $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$.

Do đó (2) và (1) có hai nghiệm $x=-1$ và $x=1$.

Tổng hai nghiệm này bằng $0$.

**Câu 52.** Cho số thực $\alpha$ sao cho phương trình $2^x-2^{-x}=2\cos(\alpha x)$ có đúng 2019 nghiệm thực. Số nghiệm của phương trình $2^x+2^{-x}=4+2\cos(\alpha x)$ là

**A.** $2019$. **B.** $2018$. **C.** $4037$. **D.** $4038$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $2^x+2^{-x}=4+2\cos(\alpha x)\Leftrightarrow\left(2^{\frac{x}{2}}-2^{-\frac{x}{2}}\right)^2=2.2\cos^2\left(\alpha\frac{x}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^{\frac{x}{2}}-2^{-\frac{x}{2}}=2\cos\left(\alpha.\frac{x}{2}\right)\quad(1)\\2^{\frac{x}{2}}-2^{-\frac{x}{2}}=-2\cos\left(\alpha.\frac{x}{2}\right)\quad(2)\end{array}\right.$$

Ta thấy, nếu phương trình $2^x-2^{-x}=2\cos(\alpha x)$ có 2019 nghiệm thực thì phương trình (1) cũng có 2019 nghiệm thực.

Nhận xét:

+ $x_0$ là nghiệm của phương trình (1) $\Leftrightarrow -x_0$ là nghiệm của phương trình (2).

+ $x_0 = 0$ không là nghiệm của hai phương trình $(1),(2)$.

Do đó, tổng số nghiệm của cả hai phương trình $(1),(2)$ là $4038$.

Vậy phương trình $2^x + 2^{-x} = 4 + 2\cos(\alpha x)$ có $4038$ nghiệm thực.

**Câu 53.** Biết $x_1, x_2$ là hai nghiệm của phương trình $\log_7\left(\frac{4x^2-4x+1}{2x}\right)+4x^2+1=6x$ và $x_1+2x_2=\frac{1}{4}\left(a+\sqrt{b}\right)$ với $a,b$ là hai số nguyên dương. Tính $a+b$.

**A.** $a+b=13$. **B.** $a+b=11$. **C.** $a+b=16$. **D.** $a+b=14$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện: $x>0, x\neq\frac{1}{2}$.

Ta có: $\log_7\left(\frac{4x^2-4x+1}{2x}\right)+4x^2+1=6x \Leftrightarrow \log_7\left(4x^2-4x+1\right)+4x^2-4x+1=\log_7(2x)+2x$.

Xét hàm số $f(t)=\log_7 t+t$ có $f'(t)=\frac{1}{t\ln 7}+1>0\ \forall t>0$ nên là hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Do đó ta có $4x^2-4x+1=2x \Leftrightarrow 4x^2-6x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{4}$.

Khi đó

$x_1+2x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{4}+2\frac{3+\sqrt{5}}{4}=\frac{1}{4}\left(9+\sqrt{5}\right)$ hoặc $x_1+2x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{4}+2\frac{3-\sqrt{5}}{4}=\frac{1}{4}\left(9-\sqrt{5}\right)$.

Vậy $x_1=\frac{3-\sqrt{5}}{4}; x_2=\frac{3+\sqrt{5}}{4}$. Do đó $a=9; b=5$ và $a+b=9+5=14$.

**Câu 54.** Phương trình $x\left(2^{x-1}+4\right)=2^{x+1}+x^2$ có tổng các nghiệm bằng

**A.** 7 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 6

**Lời giải:**

**Chọn A.**

$$x\left(2^{x-1}+4\right)=2^{x+1}+x^2 \Leftrightarrow x.2^{x-1}-4.2^{x-1}+4x-x^2=0$$

Ta có $\Leftrightarrow 2^{x-1}(x-4)-x(x-4)=0 \Leftrightarrow (x-4)(2^{x-1}-x)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ 2^x=2x\ (*) \end{array}\right.$$

Giải phương trình (*):

Xét hàm số $f(x)=2^x-2x$ có $f'(x)=2^x\ln 2-2; f''(x)=2^x\ln^2 2>0$. Suy ra phương trình $f'(x)=0$ có duy nhất một nghiệm, suy ra phương trình $f(x)=0$ có nhiều nhất là hai nghiệm.

Mà ta thấy $f(1)=f(2)=0$ nên phương trình (*) có 2 nghiệm $x=1; x=2$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là 7.

**Câu 55.** **(Chuyên Ngữ Hà Nội 2019)** Tìm số nghiệm của phương trình $\left(|x|-1\right)^2 \mathrm{e}^{|x|-1}-\log 2=0$.

**A.** 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

**Lời giải**

**Chọn A**

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

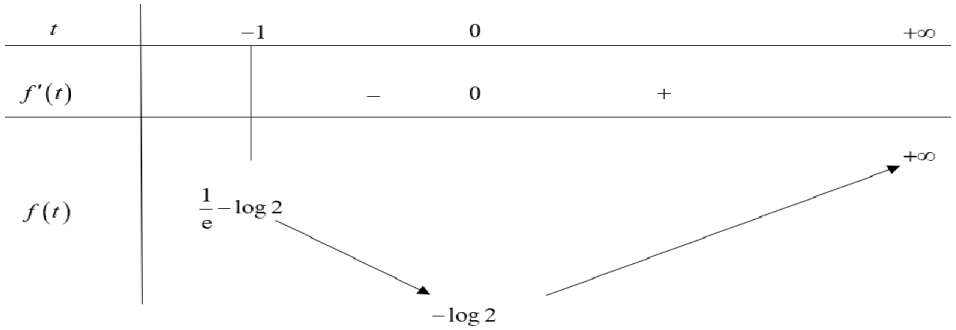
Đặt $t=|x|-1\geq -1$. Với $t\geq -1\Rightarrow |x|=t+1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=t+1 \\ x=-t-1 \end{array}\right.$.

Khi đó phương trình trở thành $t^2\mathrm{e}^t-\log 2=0 \quad (1)$.

Số nghiệm của phương trình $(1)$ là số điểm chung của đồ thị hàm số $y=f(t)=t^2\mathrm{e}^t-\log 2$ và đường thẳng $y=0$

Ta có: $f'(t)=\mathrm{e}^t\left(t^2+2t\right)\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=0 & (TM) \\ t=-2 & (L) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên




Ta có $-\log 2<0<\frac{1}{\mathrm{e}}-\log 2$, dựa vào bảng biên thiên ta được phương trình $(1)$ có 2 nghiệm phân biệt $t_1,t_2$ thỏa mãn $-1<t_1<t_2$ hay phương trình đã cho có 4 nghiệm $x$ phân biệt.

**Câu 56.** Tính số nghiệm của phương trình $\cot x=2^x$ trong khoảng $\left(\frac{11\pi}{12};2019\pi\right)$.

**A.** 2019. **B.** 2018. **C.** 1. **D.** 2020.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Xét phương trình $\cot x=2^x \quad (1)$.

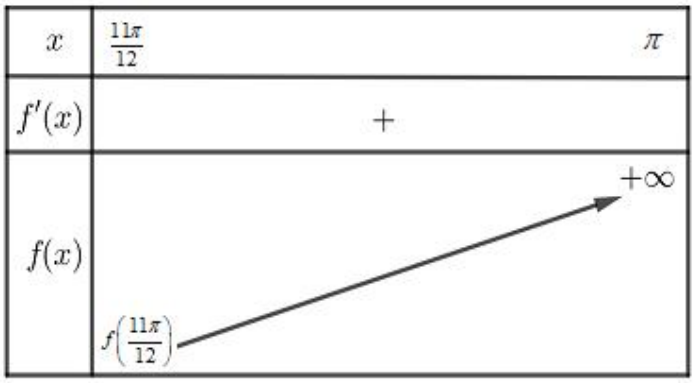
Điều kiện: $\sin x\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$.

Xét hàm số $f(x)=2^x-\cot x, x\in\left(\frac{11\pi}{12};2019\pi\right)\backslash\{k\pi\}$, với $k\in\mathbb{Z}$.

$\Rightarrow f'(x)=2^x.\ln 2+1+\cot^2 x>0\ \forall x\in\left(\frac{11\pi}{12};2019\pi\right)\backslash\{k\pi\}$, với $k\in\mathbb{Z}$.

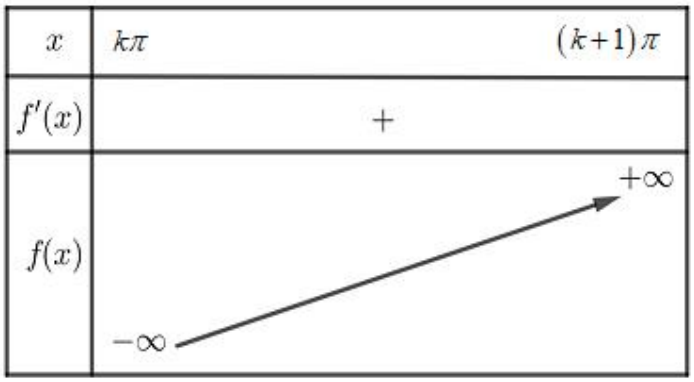
Suy ra hàm số $f(x)$ liên tục và đồng biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{11\pi}{12};\pi\right);(\pi;2\pi);...;(2018\pi;2019\pi)$.

+) Trên khoảng $\left(\frac{11\pi}{12};\pi\right)$ ta có bảng biến thiên




Ta có $f\left(\frac{11\pi}{12}\right)=2^{\frac{11\pi}{12}}-\cot\left(\frac{11\pi}{12}\right)\approx 11,0925>0$. Do đó phương trình $f(x)=0$ vô nghiệm trên khoảng $\left(\frac{11\pi}{12};\pi\right)$.

+) Trên mỗi khoảng $(k\pi;(k+1)\pi), k\in\{1;2;....;2018\}$ ta có bảng biến thiên




Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy mỗi khoảng $(k\pi;(k+1)\pi), k\in\{1;2;....;2018\}$ phương trình $f(x)=0$ có đúng 1 nghiệm. Mà có 2018 khoảng nên phương trình $f(x)=0$ có đúng 2018 nghiệm.

Vậy phương trình $f(x)=0$ có 2018 nghiệm.

**Câu 57.** Hỏi phương trình $3.2^x+4.3^x+5.4^x=6.5^x$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực ?

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có : $3.2^x+4.3^x+5.4^x=6.5^x \Leftrightarrow 3\left(\frac{2}{5}\right)^x+4\left(\frac{3}{5}\right)^x+5\left(\frac{4}{5}\right)^x-6=0$.

Xét hàm số $f(x)=3\left(\frac{2}{5}\right)^x+4\left(\frac{3}{5}\right)^x+5\left(\frac{4}{5}\right)^x-6$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Có $f'(x)=3\left(\frac{2}{5}\right)^x\ln\frac{2}{5}+4\left(\frac{3}{5}\right)^x\ln\frac{3}{5}+5\left(\frac{4}{5}\right)^x\ln\frac{4}{5}<0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ suy ra phương trình $f(x)=0$ có nhiều nhất một nghiệm $(1)$.

Mặt khác $f(1).f(2)=\frac{8}{5}.\left(-\frac{22}{25}\right)=-\frac{176}{125}<0$ nên phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1;2).(2)$.

Từ $(1)$ và $(2)$ suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

**Câu 58.** **(SP Đồng Nai - 2019)** Phương trình $2019^{\sin x}=\sin x+\sqrt{2-\cos^2 x}$ có bao nhiêu nghiệm thực trên $[-5\pi;2019\pi]$?

**A.** 2025. **B.** 2017. **C.** 2022. **D.** Vô nghiệm.

**Lời giải**

**Chọn A**

Xét: $2019^{\sin x}=\sin x+\sqrt{2-\cos^2 x}\Leftrightarrow 2019^{\sin x}=\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}\quad(1).$

Đặt: $t=\sin x, t\in[-1;1].$

Khi đó $(1)$ trở thành $2019^t=t+\sqrt{1+t^2}\Leftrightarrow 2019^t\left(t-\sqrt{1+t^2}\right)=-1\quad(2).$

Xét hàm số:

$$f(t)=2019^t\left(t-\sqrt{1+t^2}\right),\forall t\in[-1;1]\Rightarrow f'(t)=\frac{2019^t\left(t-\sqrt{1+t^2}\right)(\sqrt{1+t^2}\ln 2019-1)}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Cho $f'(t)=0\Leftrightarrow\begin{bmatrix}t-\sqrt{1+t^2}=0\\ \sqrt{1+t^2}\ln 2019-1=0\end{bmatrix}$ vô nghiệm $\Rightarrow f'(t)<0,\forall t\in[-1;1].$

$\Rightarrow(2)$ có nghiệm duy nhất $t=0\Rightarrow \sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi,k\in Z.$

mà $x\in[-5\pi;2019\pi]\Rightarrow -5\pi\le k\pi\le 2019\pi\Leftrightarrow -5\le k\le 2019\Rightarrow k\in[-5;2019].$

Kết luận: Có 2025 nghiệm thực trên $[-5\pi;2019\pi]$.

**Câu 59.** **(Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2019)** Số nghiệm của phương trình $3^{\log_7(x+4)}=x$ là

**A.** 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện của phương trình: $x>-4$.

Với $x>0$ phương trình đã cho tương đương với phương trình $\log_7(x+4)=\log_3 x.$

Đặt $\log_7(x+4)=\log_3 x=t.$

Ta có $\begin{cases}x+4=7^t\\ x=3^t\end{cases}$ suy ra $7^t-3^t=4\Leftrightarrow 7^t=3^t+4\Leftrightarrow\left(\frac{3}{7}\right)^t+4\left(\frac{1}{7}\right)^t-1=0\quad(1).$

Xét hàm số $f(t)=\left(\frac{3}{7}\right)^t+4\left(\frac{1}{7}\right)^t-1,t\in\mathbb{R}.$

Ta có $f'(t)=\left(\frac{3}{7}\right)^t\ln\left(\frac{3}{7}\right)+4\left(\frac{1}{7}\right)^t\ln\left(\frac{1}{7}\right)<0,\ \forall t\in\mathbb{R}.$

Nên $f(t)$ nghịch biến trên tập $\mathbb{R}$.

Mà $f(1)=0$ nên phương trình có nghiệm duy nhất $t=1\Leftrightarrow x=3$.

**Câu 60.** Cho các số thực $x$, $y$ với $x\ge 0$ thỏa mãn $e^{x+3y}+e^{xy+1}+x(y+1)+1=e^{-xy-1}+\frac{1}{e^{x+3y}}-3y$. Gọi $m$ là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x+2y+1$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

**A.** $m\in(2;3)$. **B.** $m\in(-1;0)$. **C.** $m\in(0;1)$. **D.** $m\in(1;2)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Từ giả thiết $e^{x+3y}+e^{xy+1}+x(y+1)+1=e^{-xy-1}+\frac{1}{e^{x+3y}}-3y$

$\Leftrightarrow e^{x+3y}-\frac{1}{e^{x+3y}}+(x+3y)=e^{-xy-1}-\frac{1}{e^{-xy-1}}+(-xy-1)$ (1).

Xét hàm số $f(t)=e^t-\frac{1}{e^t}+t$ với $t\in\mathbb{R}$ ta có $f'(t)=e^t+\frac{1}{e^t}+1>0,\forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Phương trình (1) có dạng $f(x+3y)=f(-xy-1)\Rightarrow x+3y=-xy-1\Rightarrow y=\frac{-x-1}{x+3}(x\ge 0)$.

Khi đó $T=x+2y+1=x-\frac{2x+2}{x+3}+1\Rightarrow T'=1-\frac{4}{(x+3)^2}=\frac{x^2+6x+5}{(x+3)^2}>0,\forall x\ge 0$

$\Rightarrow T_{\min}=0-\frac{2.0+2}{0+3}+1=\frac{1}{3}=m$.

**Câu 61.** **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2018)** Số nghiệm của phương trình $x^2-5x-2=(x^2-8x+3).8^{3x-5}+(3x-5).8^{x^2-8x+3}$ là

**A.** 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

**Lời giải**

Đặt $u=x^2-8x+3$, $v=3x-5$, phương trình đã cho viết lại là

$$u+v=u.8^v+v.8^u\Leftrightarrow u(1-8^v)=v(8^u-1)\ (*)$$

Ta thấy $u=0$ hoặc $v=0$ thỏa mãn phương trình $(*)$.

Với $u\ne 0$ và $v\ne 0$ ta có $(*)\Leftrightarrow\frac{1-8^v}{v}=\frac{8^u-1}{u}\ (**)$

Ta thấy:

- Nếu $u>0$ thì $\frac{8^u-1}{u}>0$ và nếu $u<0$ thì $\frac{8^u-1}{u}>0$. Do đó $VP(**)>0,\forall u\ne 0$.
- Nếu $v>0$ thì $\frac{1-8^v}{v}<0$ và nếu $v<0$ thì $\frac{1-8^v}{v}<0$. Do đó $VT(**)<0,\forall v\ne 0$.

Từ đó suy ra $(**)$ vô nghiệm.

Như vậy, phương trình đã cho tương đương với

$$\left[\begin{array}{l} u=0 \\ v=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-8x+3=0 \\ 3x-5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4+\sqrt{13} \\ x=4-\sqrt{13} \\ x=\dfrac{5}{3} \end{array}\right. .$$

Vậy, phương trình đã cho có $3$ nghiệm.

**Câu 62.** **(THPT Chu Văn An - Hà Nội - 2018)** Tích tất cả các giá trị của $x$ thỏa mãn phương trình $\left(3^x-3\right)^2-\left(4^x-4\right)^2=\left(3^x+4^x-7\right)^2$ bằng

**A.** 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

**Lời giải**

Phương trình $\Leftrightarrow \left(3^x+4^x-7\right)\left(3^x-4^x+1\right)=\left(3^x+4^x-7\right)^2$

$\Leftrightarrow \left(3^x+4^x-7\right)\left(2.4^x-8\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2.4^x=8 & (1) \\ 3^x+4^x-7=0 & (2) \end{array}\right.$

Xét phương trình $(1)$: $(1) \Leftrightarrow 4^x=4 \Leftrightarrow x=1$.

Xét phương trình $(2)$: Xét hàm $f(x)=3^x+4^x-7$ trên $\mathbb{R}$.

Hàm $f(x)$ liên tục và $f'(x)=3^x.\ln 3+4^x.\ln 4>0\ \forall x\in\mathbb{R}$ nên $f(x)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$

Khi đó, $(2) \Leftrightarrow f(x)=f(1) \Leftrightarrow x=1$. Vậy tích các nghiệm của phương trình bằng $1$.

**Câu 63.** **(THPT Chu Văn An - Hà Nội - 2018)** Phương trình $e^x-e^{\sqrt{2x+1}}=1-x^2+2\sqrt{2x+1}$ có nghiệm trong khoảng nào?

**A.** $\left(2;\dfrac{5}{2}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{3}{2};2\right)$. **C.** $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

ĐK: $x\ge -\dfrac{1}{2}$

$e^x-e^{\sqrt{2x+1}}=1-x^2+2\sqrt{2x+1}$

$\Leftrightarrow e^x-e^{\sqrt{2x+1}}=-(x+1)^2+\left(\sqrt{2x+1}+1\right)^2$

$\Leftrightarrow e^x+(x+1)^2=e^{\sqrt{2x+1}}+\left(\sqrt{2x+1}+1\right)^2\ (*)$

Xét hàm số $f(t)=e^t+(t+1)^2$ với $t\ge -\dfrac{1}{2}$

$f'(t)=e^t+2(t+1)>0$ với mọi $t\ge -\dfrac{1}{2}$

Suy ra hàm số đồng biến trên $\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

$(*) \Leftrightarrow f(x) = f\left(\sqrt{2x+1}\right) \Leftrightarrow x = \sqrt{2x+1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 = 2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1-\sqrt{2} \\ x = 1+\sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 1+\sqrt{2}.$$

## DẠNG 3. PHƯƠNG TRÌNH TỔ HỢP CỦA MŨ VÀ LOGARIT

**Câu 1.** **(Tham khảo 2019)** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3\left(7-3^x\right) = 2-x$ bằng

**A.** $2$. **B.** $1$. **C.** $7$. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện xác định của phương trình là $7-3^x > 0 \Leftrightarrow 3^x < 7 \Leftrightarrow x < \log_3 7$.

$\log_3\left(7-3^x\right) = 2-x \Leftrightarrow 7-3^x = 3^{2-x} \Leftrightarrow 7-3^x = \dfrac{9}{3^x}$.

Đặt $t = 3^x$, với $0 < t < 7$, suy ra $x = \log_3 t$.

Ta có phương trình $t^2 - 7t - 9 = 0$ có hai nghiệm $t_1 = \dfrac{7-\sqrt{13}}{2}$ và $t_2 = \dfrac{7+\sqrt{13}}{2}$.

Vậy có hai nghiệm $x_1, x_2$ tương ứng.

Ta có $x_1 + x_2 = \log_3 t_1 + \log_3 t_2 = \log_3 t_1.t_2$

Theo định lý Vi-ét ta có $t_1.t_2 = 9$, nên $x_1 + x_2 = \log_3 9 = 2$.

**Câu 2.** Tích các nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}\left(6^{x+1} - 36^x\right) = -2$ bằng

**A.** $0$. **B.** $\log_6 5$. **C.** $5$. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}\left(6^{x+1} - 36^x\right) = -2 \Leftrightarrow -2\log_5\left(6^{x+1} - 36^x\right) = -2 \Leftrightarrow \log_5\left(6^{x+1} - 36^x\right) = 1$.

$$\Leftrightarrow 6^{x+1} - 36^x = 5 \Leftrightarrow 6^{2x} - 6.6^x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6^x = 1 \\ 6^x = 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \log_6 5 \end{array}\right.$$

Vậy tích các nghiệm của phương trình bằng: $0.\log_6 5 = 0$.

**Câu 3.** Tổng các nghiệm của phương trình $\log_2\left(5-2^x\right) = 2-x$ bằng

**A.** $3$. **B.** $1$. **C.** $2$. **D.** $0$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Điều kiện: $5-2^x > 0$.

$\log_2\left(5-2^x\right)=2-x\Leftrightarrow 5-2^x=2^{2-x}\Leftrightarrow 5-2^x=\dfrac{4}{2^x}\Leftrightarrow 2^{2x}-5.2^x+4=0.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x=1\\2^x=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.(tmdk).$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình đã cho là bằng $2$.

**Câu 4.** **(Thi thử cụm Vũng Tàu - 2019)** Số nghiệm của phương trình $\log_2(4^x+4)=x-\log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1}-3)$

**A.** $3$. **B.** $1$. **C.** $0$. **D.** $2$

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện: $2^{x+1}-3>0\Leftrightarrow 2^x>\dfrac{3}{2}$.

Ta có: $\log_2(4^x+4)=x-\log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1}-3)\Leftrightarrow\log_2(4^x+4)=\log_2 2^x-\log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1}-3)$

$\Leftrightarrow\log_2(4^x+4)=\log_2 2^x(2^{x+1}-3)$

$\Leftrightarrow 4^x+4=2^x(2^{x+1}-3)$

$\Leftrightarrow(2^x)^2-3.2^x-4=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x=-1(\text{k t/m}))\\2^x=4(\text{t/m})\end{array}\right.\Leftrightarrow x=2$.

Đối chiếu điều kiện ta thấy $x=2$ thõa mãn. Vậy phương trình đã cho có một nghiệm.

**Câu 5.** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình $\log\left(2-10^{2x}\right)=x$. Số tập con của $S$ bằng

**A.** $4$. **B.** $1$. **C.** $2$. **D.** $0$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Xét phương trình $\log\left(2-10^{2x}\right)=x$, điều kiện $2-10^{2x}>0\Leftrightarrow 2x<\log 2\Leftrightarrow x<\log\sqrt{2}$.

Ta có $\log\left(2-10^{2x}\right)=x\Leftrightarrow 2-10^{2x}=10^x\Leftrightarrow 10^{2x}+10^x-2=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}10^x=-2\\10^x=1\end{array}\right.\Rightarrow x=\log 1=0$.

(Vì $10^x=-2<0$ vô nghiệm)

Vậy phương trình có một nghiệm $x=0$ thỏa mãn điều kiện. loại

$\Rightarrow$ Số tập con của $S$ là $2^1=2$.

**Câu 6.** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2\left(6-2^x\right)=1-x$ bằng

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $0$. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện xác định $6-2^x>0\Leftrightarrow 2^x<6\Leftrightarrow x<\log_2 6$

Ta có:

$\log_2\left(6-2^x\right)=1-x \Leftrightarrow 6-2^x=2^{1-x} \Leftrightarrow 6-2^x=\dfrac{2}{2^x} \Leftrightarrow -2^{2x}+6.2^x-2=0$

Hơn nữa $2^{x_1+x_2}=2^{x_1}.2^{x_2}=\dfrac{c}{a}=2 \Leftrightarrow x_1+x_2=1$

**Câu 7.** **(Chuyên Thái Bình - 2018)** Tính tích tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_2\left(\dfrac{2x^2+1}{2x}\right)+2^{\left(x+\frac{1}{2x}\right)}=5$.

**A.** $0$. **B.** $2$. **C.** $1$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

**Lời giải**

Điều kiện: $x>0$.

PT: $\Leftrightarrow \log_2\left(\dfrac{2x^2+1}{2x}\right)+2^{\left(\frac{2x^2+1}{2x}\right)}=5 \quad (1)$.

Đặt $t=\dfrac{2x^2+1}{2x}=x+\dfrac{1}{2x}\geq 2\sqrt{x.\dfrac{1}{2x}}=\sqrt{2}$

PT trở thành $\log_2 t+2^t=5 \qquad (2)$.

Xét hàm $f(t)=\log_2 t+2^t \ \left(t\geq\sqrt{2}\right)$ là hàm đồng biến nên:

$(2)\Leftrightarrow f(t)=f(2)\Leftrightarrow t=2$ (t/m).

Với $t=2$ thì $\dfrac{2x^2+1}{2x}=2\Leftrightarrow 2x^2-4x+1=0$ (t/m). Vậy $x_1x_2=\dfrac{1}{2}$ (theo Viet ).

**Câu 8.** **(Thi thử hội 8 trường chuyên 2019)** Phương trình $\log_2\left(5.2^x-4\right)=2x$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương?

**A.** $2$. **B.** $0$. **C.** $3$. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Phương trình $\log_2\left(5.2^x-4\right)=2x\Leftrightarrow 2^{2x}-5.2^x+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x=1\\2^x=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Vậy phương trình có một nghiệm nguyên dương.

**Câu 9.** **(SP Đồng Nai - 2019)** Phương trình $\log_2\left(5-2^x\right)=2-x$ có hai nghiệm thực $x_1,x_2$. Tính $P=x_1+x_2+x_1x_2$

**A.** $2$. **B.** $9$. **C.** $3$. **D.** $11$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện: $5-2^x>0\Leftrightarrow 0<2^x<5\Leftrightarrow x<\log_2 5$.

Phương trình $\log_2\left(5-2^x\right)=2-x\Leftrightarrow 5-2^x=2^{2-x}\Leftrightarrow 2^{2x}-5.2^x+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x=1\Rightarrow x=0\ (n)\\2^x=4\Rightarrow x=2\ (n)\end{array}\right.$.

Khi đó $P=x_1+x_2+x_1x_2=2$.

**Câu 10.** Phương trình $\left(2^x-5\right)\left(\log_2 x-3\right)=0$ có hai nghiệm $x_1$, $x_2$ (với $x_1<x_2$). Tính giá trị của biểu thức $K=x_1+3x_2$.

**A.** $K=32+\log_3 2$. **B.** $K=18+\log_2 5$. **C.** $K=24+\log_2 5$. **D.** $K=32+\log_2 3$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện: $x>0$.

$$\left(2^x-5\right)\left(\log_2 x-3\right)=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}2^x-5=0\\ \log_2 x-3=0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}2^x=5\\ \log_2 x=3\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}x=\log_2 5\\ x=8\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x_1=\log_2 5\\ x_2=8\end{cases}.$$

Vậy $K=x_1+3x_2=\log_2 5+3.8=24+\log_2 5$.

**Câu 11.** Cho biết phương trình $\log_3(3^{x+1}-1)=2x+\log_{\frac{1}{3}} 2$ có hai nghiệm $x_1, x_2$. Hãy tính tổng $S=27^{x_1}+27^{x_2}$.

**A.** $S=252$. **B.** $S=45$. **C.** $S=9$. **D.** $S=180$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $\log_3(3^{x+1}-1)=2x+\log_{\frac{1}{3}} 2 \Leftrightarrow \log_3 2(3^{x+1}-1)=2x \Leftrightarrow 2.3^{x+1}-2=3^{2x}$

$\Leftrightarrow 3^{2x}-6.3^x+2=0$.

Đặt $3^x=t$, $(t>0)$, phương trình trở thành $t^2-6.t+2=0$. Phương trình luôn có hai nghiệm dương phân biệt.

Đặt $3^{x_1}=t_1$, $3^{x_2}=t_2$, $t_1+t_2=6$, $t_1.t_2=2$.

Ta có $S=(t_1^3+t_2^3)=(t_1+t_2)^3-3t_1.t_2(t_1+t_2)=216-3.2.6=180$

**Câu 12.** **(THPT Yên Dũng 2-Bắc Giang 2019)** Tính tích tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_2\left(\frac{2x^2+1}{2x}\right)+2^{x+\frac{1}{2x}}=5$.

**A.** $2$. **B.** $0$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện: $\begin{cases}2x\neq 0\\ \frac{2x^2+1}{2x}>0\end{cases} \Leftrightarrow x>0$.

Khi đó, $\log_2\left(\frac{2x^2+1}{2x}\right)+2^{x+\frac{1}{2x}}=5 \Leftrightarrow \log_2\left(x+\frac{1}{2x}\right)+2^{x+\frac{1}{2x}}=5 \Leftrightarrow \log_2\left(x+\frac{1}{2x}\right)=5-2^{x+\frac{1}{2x}}$.

Đặt $t=x+\frac{1}{2x}\geq 2\sqrt{x.\frac{1}{2x}}=\sqrt{2}$, phương trình trở thành: $\log_2 t=5-2^t$, $t\geq\sqrt{2}$.

Xét $f(t)=\log_2 t$, $t\geq\sqrt{2}$. Ta có: $f'(t)=\frac{1}{t.\ln 2}>0$, $\forall t\geq\sqrt{2}$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\left[\sqrt{2};+\infty\right)$.

Xét $g(t)=5-2^t$, $t\ge\sqrt{2}$. Ta có: $g'(t)=-2^t.\ln 2<0$, $\forall t\ge\sqrt{2}$ nên $g(t)$ nghịch biến trên $\left[\sqrt{2};+\infty\right)$.

Từ đó phương trình $f(t)=g(t)$ có nhiều nhất một nghiệm $t\ge\sqrt{2}$. Ta nhận thấy $t=2$ là nghiệm, và đây là nghiệm duy nhất của phương trình $\log_2 t=5-2^t$ trên $\left[\sqrt{2};+\infty\right)$.

Suy ra $x+\dfrac{1}{2x}=2\Rightarrow 2x^2-4x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\\x=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$. Cả hai giá trị này đều thỏa mãn điều kiện $x>0$, nên đều là nghiệm của phương trình đã cho.

Tích hai nghiệm là: $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}.\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{2}$.

**Câu 13.** Số nghiệm của phương trình $\log_2\dfrac{2^x+4}{2^x+12}=x-3$

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $2$. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Phương trình $\log_2\dfrac{2^x+4}{2^x+12}=x-3\Leftrightarrow\dfrac{2^x+4}{2^x+12}=2^{x-3}\Leftrightarrow 2^x+4=\dfrac{2^x}{2^3}\left(2^x+12\right)$

$\Leftrightarrow\left(2^x\right)^2+4.(2)^x-32=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x=4\\2^x=-8\end{array}\right.$.

+ Với $2^x=4\Leftrightarrow x=2$.

+ Với $2^x=-8$ phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có $1$ nghiệm.

**Câu 14.** Tính tích tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_2\left(\dfrac{2x^2+1}{2x}\right)+2^{\left(x+\frac{1}{2x}\right)}=5$.

**A.** $0$. **B.** $2$. **C.** $1$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$\log_2\left(\dfrac{2x^2+1}{2x}\right)+2^{\left(x+\frac{1}{2x}\right)}=5$. Điều kiện $\dfrac{2x^2+1}{2x}>0\Leftrightarrow x>0$.

Ta có $\dfrac{2x^2+1}{2x}\ge\dfrac{2\sqrt{2x^2.1}}{2x}=\sqrt{2}$.

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+2^t\Rightarrow f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+2^t\ln 2>0,\forall t\ge\sqrt{2}$.

Phương trình $f(t)=\log_2 t+2^t=5\Leftrightarrow f(t)=f(2)\Rightarrow t=2$.

Vậy $\log_2\left(\frac{2x^2+1}{2x}\right)+2^{\left(x+\frac{1}{2x}\right)}=5\Leftrightarrow\frac{2x^2+1}{2x}=2\Leftrightarrow 2x^2-4x+1=0$

Ta có phương trình $2x^2-4x+1=0$ có hai nghiệm dương phân biệt có tích bằng $\frac{1}{2}$.

**Câu 15.** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2\left(10\left(\sqrt{2019}\right)^x-2019^x\right)=4$ bằng

**A.** $\log_{2019}16$. **B.** $2\log_{2019}16$. **C.** $\log_{2019}10$. **D.** $2\log_{2019}10$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\log_2\left(10\left(\sqrt{2019}\right)^x-2019^x\right)=4\Leftrightarrow 10\left(\sqrt{2019}\right)^x-2019^x=16$ (1)

Đặt $t=2019^{\frac{x}{2}}\left(t>0\right)$ ta có PT (1) trở thành $10t-t^2=16\Leftrightarrow t^2-10t+16=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=8\end{array}\right.$

Với $t=2$ ta có $2019^{\frac{x}{2}}=2\Leftrightarrow\frac{x}{2}=\log_{2019}2\Leftrightarrow x=2\log_{2019}2$

Với $t=8$ ta có $2019^{\frac{x}{2}}=8\Leftrightarrow\frac{x}{2}=\log_{2019}8\Leftrightarrow x=2\log_{2019}8$. Do đó tổng tất cả các nghiệm bằng

$2\log_{2019}2+2\log_{2019}8=2\left(\log_{2019}2+\log_{2019}8\right)=2\left(\log_{2019}2.8\right)=2\log_{2019}16$.

**Câu 16.** **(THPT Hòa Vang - Đà Nẵng - 2018)** Biết rằng $2^{x+\frac{1}{x}}=\log_2\left[14-\left(y-2\right)\sqrt{y+1}\right]$ với $x>0$.

Tính giá trị của biểu thức $P=x^2+y^2-xy+1$.

**A.** 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Do $x>0$ nên $x+\frac{1}{x}\ge 2\sqrt{x.\frac{1}{x}}=2\Rightarrow 2^{x+\frac{1}{x}}\ge 2^2=4$, dấu bằng xảy ra khi $x=1$.

Xét hàm $f\left(y\right)=4-\left(y-2\right)\sqrt{y+1}, y\ge -1$, ta có $f'\left(y\right)=-\left[\sqrt{y+1}+\frac{y-2}{2\sqrt{y+1}}\right]$

$=-\left(\frac{2y+2+y-2}{2\sqrt{y+1}}\right)=0\Leftrightarrow y=0$. Lập bảng biến thiên, suy ra $\max\limits_{[-1;+\infty)}f\left(y\right)=16$ khi $y=0$.

Suy ra $\log_2\left[14-\left(y-2\right)\sqrt{y+1}\right]\le\log_2 16=4$.

Do đó $2^{x+\frac{1}{x}}=\log_2\left[14-\left(y-2\right)\sqrt{y+1}\right]\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=1\\y=0\end{array}\right.$. Vậy $P=x^2+y^2-xy+1=2$.

**Câu 17.** **(Toán Học Tuổi Trẻ - 2018)** Phương trình $\left(4x\right)^{\log_8 x}+x^{\log_8(4x)}=4$ có tập nghiệm là

**A.** $\left\{2;8\right\}$. **B.** $\left\{\frac{1}{2};8\right\}$. **C.** $\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{8}\right\}$. **D.** $\left\{2;\frac{1}{8}\right\}$.

**Lời giải**

Điều kiện: $x>0$.

$(4x)^{\log_8 x}+x^{\log_8(4x)}=4$

$\Leftrightarrow (4x)^{\log_8 x}+(4x)^{\log_8 x}=4$

$\Leftrightarrow (4x)^{\log_8 x}=2$

$\Leftrightarrow \log_8 x\log_8(4x)=\log_8 2$

$\Leftrightarrow \log_8 x\left(\frac{2}{3}+\log_8 x\right)=\frac{1}{3}$.

Đặt $t=\log_8 x$.

Phương trình trở thành: $t\left(\frac{2}{3}+t\right)=\frac{1}{3}\Leftrightarrow t^2+\frac{2}{3}t-\frac{1}{3}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{1}{3}\\t=-1\end{array}\right.$.

$t=\frac{1}{3}\Leftrightarrow \log_8 x=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=2$ (nhận).

$t=-1\Leftrightarrow \log_8 x=-1\Leftrightarrow x=\frac{1}{8}$ (nhận).

Vậy tập nghiệm là $\left\{2;\frac{1}{8}\right\}$.

**Câu 18.** **(THPT Yên Lạc- 2018)** Tính tổng $S$ tất cả các nghiệm của phương trình: $\ln\left(\frac{5^x+3^x}{6x+2}\right)+5^{x+1}+5.3^x-30x-10=0$.

**A.** $S=1$. **B.** $S=2$. **C.** $S=-1$. **D.** $S=3$

**Lời giải**

Điều kiện $x>-\frac{1}{3}$.

Phương trình tương đương

$\ln\left(5^x+3^x\right)-\ln(6x+2)+5\left(5^x+3^x\right)-5(6x+2)=0$

$\Leftrightarrow \ln\left(5^x+3^x\right)+5\left(5^x+3^x\right)=\ln(6x+2)+5(6x+2)$ (1).

Xét hàm số $f(t)=\ln t+5t, t>0$. Có $f'(t)=\frac{1}{t}+5>0$, $\forall t>0$ nên $f(t)$ đồng biến. Từ (1) suy ra $f\left(5^x+3^x\right)=f(6x+2)\Leftrightarrow 5^x+3^x=6x+2\Leftrightarrow 5^x+3^x-6x-2=0$

Xét $g(x)=5^x+3^x-6x-2$, $g'(x)=5^x\ln 5+3^x\ln 3-6$

$g''(x)=5^x(\ln 5)^2+3^x(\ln 3)^2>0\ \forall x>-\frac{1}{3}$.

Nên $g'(x)=0$ có không quá 1 nghiệm suy ra $g(x)=0$ có không quá 2 nghiệm trên $\left(-\frac{1}{3};+\infty\right)$.

Mà $g(0)=g(1)=0$. Vậy phương trình có nghiệm 0,1. Do đó $S=1$.

Chuyên đề 19 PHƯƠNG TRÌNH MŨ - LOGARIT

**TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI – XUẤT SẮC MỨC 9-10 ĐIỂM**

## PHƯƠNG PHÁP CHUNG

**Tìm m để $f(x,m)=0$ có nghiệm (hoặc có k nghiệm) trên D ?**

— Bước 1. Tách m ra khỏi biến số và đưa về dạng $f(x)=A(m)$.

— Bước 2. Khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(x)$ trên D.

— Bước 3. Dựa vào bảng biến thiên để xác định giá trị của tham số $A(m)$ để đường thẳng $y=A(m)$ nằm ngang cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$.

— Bước 4. Kết luận các giá trị cần tìm của $A(m)$ để phương trình $f(x)=A(m)$ có nghiệm (hoặc có k nghiệm) trên D.

**Lưu ý**

— Nếu hàm số $y=f(x)$ có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên D thì giá trị $A(m)$ cần tìm là những m thỏa mãn: $\min\limits_{x\in D} f(x)\le A(m)\le \max\limits_{x\in D} f(x)$.

— Nếu bài toán yêu cầu tìm tham số để phương trình có k nghiệm phân biệt, ta chỉ cần dựa vào bảng biến thiên để xác định sao cho đường thẳng $y=A(m)$ nằm ngang cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại k điểm phân biệt.

## Dạng 1. Phương trình logarit chứa tham số

**Câu 1.** **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Cho phương trình $\log_2^2(2x)-(m+2)\log_2 x+m-2=0$ ( $m$ là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của $m$ để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[1;2]$ là

**A.** $(1;2)$. **B.** $[1;2]$. **C.** $[1;2)$. **D.** $[2;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$\log_2^2(2x)-(m+2)\log_2 x+m-2=0 \Leftrightarrow \left[1+\log(x)\right]^2-(m+2)\log_2 x+m-2=0\ (*)$

Đặt $t=\log_2 x=g(x) \Rightarrow 0\le t\le 1$ và mỗi giá trị của $x$ sẽ cho một giá trị của $t$

$(*)$ trở thành $(1+t)^2-(m+2)t+m-2=0$

$\Leftrightarrow t^2+2t+1-mt-2t+m-2=0$

$\Leftrightarrow t^2-1=m(t-1)$

$\Leftrightarrow (t-1)(t+1-m)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=m-1\ (1) \\ t=1\quad (2)\end{array}\right.$

Với $t=1$ thì phương trình có một nghiệm $x=2$

Vậy để phương trình ban đầu có hai nghiệm phân biệt thì phương trình $(1)$ phải có một nghiệm $t\ne 1$

$0\le m-1<1 \Leftrightarrow 1\le m<2$

Vậy $m\in[1;2)$ để thoả mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 2.** **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Cho hàm số $3\log_{27}\left[2x^2-(m+3)x+1-m\right]+\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-x+1-3m\right)=0$. Số các giá trị nguyên của $m$ để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2$ thỏa mãn $|x_1-x_2|<15$ là:

**A.** 14 **B.** 11 **C.** 12 **D.** 13

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $3\log_{27}\left[2x^2-(m+3)x+1-m\right]+\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-x+1-3m\right)=0$

$\Leftrightarrow \log_3\left[2x^2-(m+3)x+1-m\right]=\log_3\left(x^2-x+1-3m\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x+1-3m>0 \\ 2x^2-(m+3)x+1-m=x^2-x+1-3m \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x+1-3m>0(*) \\ x^2-(m+2)x+2m=0(1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x+1-3m>0(*) \\ \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=2 \end{array}\right. \end{cases}$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-m+1-3m>0 \\ 2^2-1+1-3m>0 \\ m\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4m+1>0 \\ 4-3m>0 \end{cases} \Leftrightarrow m<2-\sqrt{3}$.

Theo giả thiết $|x_1-x_2|<15 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2<225 \Leftrightarrow m^2-4m-221<0 \Leftrightarrow -13<m<17$ Do đó $-13<m<2-\sqrt{3}$. Vậy số các giá trị nguyên của $m$ thỏa mãn là 13.

**Câu 3.** **(THPT Yên Phong Số 1 Bắc Ninh 2019)** Gọi $S$ là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ với $m<64$ để phương trình $\log_{\frac{1}{5}}(x+m)+\log_5(2-x)=0$ có nghiệm. Tính tổng tất cả các phần tử của $S$.

**A.** 2018. **B.** 2016. **C.** 2015. **D.** 2013.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $\log_{\frac{1}{5}}(x+m)+\log_5(2-x)=0 \Leftrightarrow \log_5(x+m)=\log_5(2-x) \Leftrightarrow \begin{cases} x<2 \\ x=\dfrac{2-m}{2} \end{cases}$.

Vì $x<2$ nên $\dfrac{2-m}{2}<2 \Leftrightarrow m>-2$.

Kết hợp với $m<64$. Khi đó $-2<m<64$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m=\{-1;0;1...63\}$ có 65 giá trị.

Vậy tổng $S$ các giá trị của $m$ để phương trình có nghiệm là: $S=\dfrac{(-1+63).65}{2}=2015$.

**Câu 4.** **(Mã 102 2019)** Cho phương trình $\log_9 x^2-\log_3(6x-1)=-\log_3 m$ ($m$ là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ để phương trình đã cho có nghiệm?

**A.** 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** Vô số.

**Lời giải**

**Chọn C**

Xét phương trình $\log_9 x^2-\log_3(6x-1)=-\log_3 m$.

Điều kiện: $\begin{cases} x > \dfrac{1}{6} \\ m > 0 \end{cases}$.

Khi đó

$\log_9 x^2 - \log_3 (6x-1) = -\log_3 m \Leftrightarrow \log_3 x + \log_3 m = \log_3 (6x-1)$

$\Leftrightarrow mx = 6x - 1 \Leftrightarrow x(6-m) = 1 \ (1)$

+) Với $m = 6$, phương trình (1) trở thành $0 = 1$ (vô lý).

+) Với $m \neq 6$, phương trình (1) có nghiệm $x = \dfrac{1}{6-m}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{6-m} > \dfrac{1}{6} \Leftrightarrow \dfrac{1}{6-m} - \dfrac{1}{6} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{m}{6-m} > 0 \Leftrightarrow 0 < m < 6$.

Vậy $0 < m < 6$. Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1;2;3;4;5\}$. Vậy có 5 giá trị nguyên của $m$ thỏa mãn.

**Câu 5.** **(Mã 103 2019)** Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3 (5x-1) = -\log_3 m$ ($m$ là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ để phương trình đã cho có nghiệm?

**A.** 4. **B.** 6. **C.** Vô số. **D.** 5.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện: $\begin{cases} x > \dfrac{1}{5} \\ m > 0 \end{cases}$.

Xét phương trình: $\log_9 x^2 - \log_3 (5x-1) = -\log_3 m \ (1)$.

**Cách 1.**

$(1) \Leftrightarrow \log_3 x - \log_3 (5x-1) = -\log_3 m \Leftrightarrow \log_3 \dfrac{5x-1}{x} = \log_3 m \Leftrightarrow \dfrac{5x-1}{x} = m \Leftrightarrow 5 - \dfrac{1}{x} = m \quad (2)$.

Xét $f(x) = 5 - \dfrac{1}{x}$ trên khoảng $\left(\dfrac{1}{5}; +\infty\right)$.

Có $f'(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0, \forall x \in \left(\dfrac{1}{5}; +\infty\right)$ và $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(5 - \dfrac{1}{x}\right) = 5$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$:

| $x$ | $\frac{1}{5}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | \|\| | $+$ | |
| $f(x)$ | \|\| $0$ | ↗ | $5$ |

Phương trình $(1)$ có nghiệm khi và chỉ phương trình $(2)$ có nghiệm $x > \dfrac{1}{5}$.

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $(1)$ có nghiệm khi và chỉ khi $0 < m < 5$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ và $m > 0$ nên $m \in \{1;2;3;4\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của $m$ để phương trình đã cho có nghiệm.

**Cách 2.**

Với $\begin{cases} x > \dfrac{1}{5} \\ m > 0 \end{cases}$, ta có:

$(1) \Leftrightarrow \log_3 x - \log_3 (5x-1) = -\log_3 m \Leftrightarrow \log_3 \dfrac{5x-1}{x} = \log_3 m \Leftrightarrow \dfrac{5x-1}{x} = m \Leftrightarrow (5-m)x = 1 \quad (2)$

Với $m = 5$, phương trình $(2)$ thành $0.x = 1$ (vô nghiệm).

Với $m \neq 5$, $(2) \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{5-m}$.

Xét $x > \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow \dfrac{1}{5-m} > \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow \dfrac{m}{5.(5-m)} > 0 \Leftrightarrow 0 < m < 5$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ và $m > 0$ nên $m \in \{1;2;3;4\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của $m$ để phương trình đã cho có nghiệm.

**Câu 6.** **(Mã 101 - 2019)** Cho phương trình $\log_9 x^2 - \log_3 (3x-1) = -\log_3 m$ ($m$ là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình đã cho có nghiệm?

**A.** 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** Vô số.

**Lời giải**

**Chọn A**

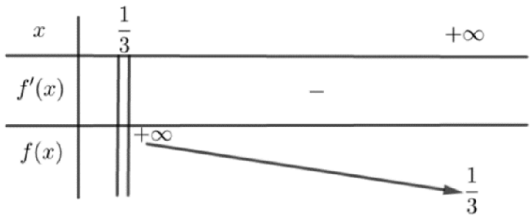
Điều kiện: $x > \dfrac{1}{3}$ và $m > 0$.

Phương trình đã cho tương đương: $\log_3 x - \log_3 (3x-1) = \log_3 \dfrac{1}{m} \Leftrightarrow \dfrac{x}{3x-1} = \dfrac{1}{m}$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x}{3x-1}$ với $x > \dfrac{1}{3}$

Có $f'(x) = -\dfrac{1}{(3x-1)^2} < 0, \ \forall x > \dfrac{1}{3}$

Nguyễn Bảo Vương




Dựa vào BBT, phương trình có nghiệm khi $\dfrac{1}{m} > \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 0 < m < 3$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1,2\}$.

**Câu 7.** **(Mã 104 2019)** Cho phương trình $\log_9 x^2 - 4\log_3 (4x-1) = -\log_3 m$ ($m$ là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ để phương trình đã cho có nghiệm?

**A.** 5. **B.** 3. **C.** Vô số. **D.** 4.

**Lời giải**

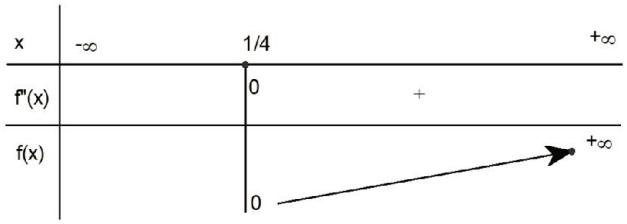
**Chọn C**

Điều kiện: $x > \dfrac{1}{4}$. Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_3 x - 4\log_3 (4x-1) = -\log_3 m$

$\Leftrightarrow \log_3 x - \log_3 (4x-1)^4 = \log_3 \dfrac{1}{m} \Leftrightarrow \log_3 \dfrac{x}{(4x-1)^4} = \log_3 \dfrac{1}{m} \Leftrightarrow m = \dfrac{(4x-1)^4}{x} = f(x)$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{(4x-1)^4}{x}$ có $f'(x)=\dfrac{16x(4x-1)^3-(4x-1)^4}{x^2}=\dfrac{(4x-1)^3(12x+1)}{x^2}>0,\forall x>\dfrac{1}{4}$.

Suy ra bảng biến thiên:




Do đó phương trình có nghiệm khi $m>0$. Vậy có vô số giá trị nguyên của $m$.

**Câu 8.** **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Cho phương trình $\log_{mx-5}\left(x^2-6x+12\right)=\log_{\sqrt{mx-5}}\sqrt{x+2}$, gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m\in\mathbb{Z}$ để phương trình đã cho có nghiệm duy nhất. Tìm số phần tử của $S$.

**A.** 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

**Lời giải**

+ Điều kiện $\begin{cases}x+2>0\\0<mx-5\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-2\\5<mx\neq 6\end{cases}$

Với điều kiện trên, phương trình $\log_{mx-5}\left(x^2-6x+12\right)=\log_{\sqrt{mx-5}}\sqrt{x+2}\quad(*)$

$\Leftrightarrow\log_{mx-5}\left(x^2-6x+12\right)=\log_{mx-5}(x+2)$

$\Leftrightarrow x^2-6x+12=x+2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=5\end{array}\right.$.

$x=2$ là nghiệm phương trình $(*)$ khi $5<2m\neq 6\Leftrightarrow\dfrac{5}{2}<m\neq 3$, vì $m\in Z\Rightarrow\begin{cases}m\geq 4\\m\in Z\end{cases}$.

$x=5$ là nghiệm phương trình $(*)$ khi $5<5m\neq 6\Leftrightarrow 1<m\neq\dfrac{6}{5}$, vì $m\in Z\Rightarrow\begin{cases}m\geq 2\\m\in Z\end{cases}$.

+ Phương trình $\log_{mx-5}\left(x^2-6x+12\right)=\log_{\sqrt{mx-5}}\sqrt{x+2}$ có nghiệm duy nhất khi $m=2$ hoặc $m=3$

*Thử lại*

$m=2:\ \log_{2x-5}\left(x^2-6x+12\right)=\log_{\sqrt{2x-5}}\sqrt{x+2}\Leftrightarrow\log_{2x-5}\left(x^2-6x+12\right)=\log_{2x-5}(x+2)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-6x+12=x+2\\x+2>0\\0<2x-5\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow x=5$.

$m=3:\ \log_{3x-5}\left(x^2-6x+12\right)=\log_{\sqrt{3x-5}}\sqrt{x+2}\Leftrightarrow\log_{3x-5}\left(x^2-6x+12\right)=\log_{3x-5}(x+2)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-6x+12=x+2\\x+2>0\\0<4x-5\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow x=5$.

Vậy có hai giá trị $m\in Z$ thỏa mãn ycbt.

**Câu 9.** Cho phương trình $\log_{2+\sqrt{5}}\left(2x^2-x-4m^2+2m\right)+\log_{\sqrt{5}-2}\sqrt{x^2+mx-2m^2}=0$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1^2+x_2^2=3$?

**A.** 1 **B.** 0 **C.** 3 **D.** 4

**Lời giải**

**Chọn B**

Phương trình đã cho tương đương với phương trình:

$\log_{2+\sqrt{5}}\left(2x^2-x-4m^2+2m\right)+\log_{\sqrt{5}-2}\left(x^2+mx-2m^2\right)=0$

$\Leftrightarrow \log_{\sqrt{5}+2}\left(2x^2-x-4m^2+2m\right)-\log_{\sqrt{5}+2}\left(x^2+mx-2m^2\right)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2mx-2m^2>0 \\ 2x^2-x+2m-4m^2=x^2+mx-2m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2mx-2m^2>0 \\ x^2-(m+1)x+2m-2m^2=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+mx-2m^2>0 \\ \left[\begin{array}{l} x_1=2m \\ x_2=1-m \end{array}\right. \end{cases}$

Phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1, x_2$ thỏa $x_1^2+x_2^2=3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (2m)^2+m(2m)-2m^2>0 \\ (1-m)^2+m(1-m)-2m^2>0 \\ (2m)^2+(1-m)^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2>0 \\ 2m^2+m-1>0 \\ 5m^2-2m-2=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ -1<m<\dfrac{1}{2} \\ m=\dfrac{1-\sqrt{11}}{5}; m=\dfrac{1+\sqrt{11}}{5} \end{cases} \Leftrightarrow m=\dfrac{1-\sqrt{11}}{5}$

Vậy không có giá trị nguyên nào của $m$ thỏa yêu cầu đề bài

**Câu 10.** **(HSG Bắc Ninh 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $4\left(\log_2\sqrt{x}\right)^2-\log_{\frac{1}{2}}x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0;1)$.

**A.** $0<m<\dfrac{1}{4}$ **B.** $0\le m<\dfrac{1}{4}$ **C.** $m\le\dfrac{1}{4}$ **D.** $-\dfrac{1}{4}<m<0$

**Lời giải**

Ta có:

$4\left(\log_2\sqrt{x}\right)^2-\log_{\frac{1}{2}}x+m=0\Leftrightarrow\left(2\log_2\sqrt{x}\right)^2+\log_2 x+m=0\Leftrightarrow(\log_2 x)^2+\log_2 x=-m\ (1)$

Đặt $t=\log_2 x$ với $t\in(-\infty;0)$.

$(1)\Leftrightarrow t^2+t=-m$.

Xét $f(t)=t^2+t$.

$f'(t)=2t+1$

$f'(t)=0\Leftrightarrow t=-\dfrac{1}{2}$

Bảng biến thiên

| $t$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(t)$ | $-\infty$ | ↘ | $-\frac{1}{4}$ | ↗ | $0$ |

Dựa vào bảng biến thiên $-\frac{1}{4}<-m<0 \Leftrightarrow 0<m<\frac{1}{4}$

**Câu 11. (THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019)** Tìm $m$ để phương trình: $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}^2(x-2)^2+4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{x-2}+4m-4=0$ có nghiệm trên $\left[\frac{5}{2},4\right]$.

**A.** $m\in\mathbb{R}$. **B.** $-3\le m\le\frac{7}{3}$. **C.** $m\in\varnothing$. **D.** $-3<m\le\frac{7}{3}$.

**Lời giải**

Điều kiện: $x>2$. Phương trình đã cho

$\Leftrightarrow (m-1)\left[\log_{\frac{1}{2}}(x-2)^2\right]^2+4(m-5)\log_2(x-2)+4m-4=0$

$\Leftrightarrow (m-1)\left[-2\log_2(x-2)\right]^2+4(m-5)\log_2(x-2)+4m-4=0$

$\Leftrightarrow 4(m-1)\log_2^2(x-2)+4(m-5)\log_2(x-2)+4m-4=0$

$\Leftrightarrow (m-1)\log_2^2(x-2)+(m-5)\log_2(x-2)+m-1=0$. (1)

Đặt $t=\log_2(x-2)$. Vì $x\in\left[\frac{5}{2};4\right]\Rightarrow t\in[-1;1]$.

Phương trình (1) trở thành $(m-1)t^2+(m-5)t+m-1=0$, $t\in[-1;1]$. (2)

$\Leftrightarrow m=\frac{t^2+5t+1}{t^2+t+1}=f(t), t\in[-1;1]$.

Ta có $f'(t)=\frac{-4t^2+4}{(t^2+t+1)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\t=-2\end{array}\right.$.

Nguyễn Bảo Vương

Bảng biến thiên

| $t$ | $-1$ | | | | | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | | | $+$ | | | |
| $f(t)$ | | | | | | | $\frac{7}{3}$ |
| | $-3$ | | | | | | |

Phương trình đã cho có nghiệm $x\in\left[\frac{5}{2};4\right]$ khi phương trình (2) có nghiệm $t\in[-1;1]$.

Từ bảng biến thiên suy ra $-3\le m\le\frac{7}{3}$.

**Câu 12.** (Chuyên Bắc Giang 2019) **Tìm $m$ để phương trình $\log_2^2 x-\log_2 x^2+3=m$ có nghiệm $x\in[1;8]$.**

**A.** $6\le m\le 9$ **B.** $2\le m\le 3$ **C.** $2\le m\le 6$ **D.** $3\le m\le 6$

**Lời giải**

**Chọn C**

$\log_2^2 x-\log_2 x^2+3=m$ (1)

• Điều kiện: $x>0$ (*)

pt (1) $\Leftrightarrow$ $(\log_2 x)^2-2\log_2 x+3=m$

**Cách 1: (Tự luận)**

• Đặt $t=\log_2 x$, với $x\in[1;8]$ thì $t\in[0;3]$.

Phương trình trở thành: $t^2-2t+3=m$ (2)

• Để phương trình (1) có nghiệm $x\in[1;8]$

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm $t \in [0;3]$

$\Leftrightarrow \min\limits_{[0;3]} f(t) \le m \le \max\limits_{[0;3]} f(t)$, trong đó $f(t) = t^2 - 2t + 3$

$\Leftrightarrow 2 \le m \le 6$. (bấm máy tính)

**Câu 13.** **(HSG Bắc Ninh-2019)** Cho phương trình $\log_2^2 x - 2\log_2 x - \sqrt{m + \log_2 x} = m (*)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2019; 2019]$ để phương trình (*) có nghiệm?

**A.** 2021. **B.** 2019. **C.** 4038. **D.** 2020.

**Lời giải**

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ m + \log_2 x \ge 0 \end{cases}$.

$\log_2^2 x - 2\log_2 x - \sqrt{m + \log_2 x} = m \Leftrightarrow 4\log_2^2 x - 8\log_2 x - 4\sqrt{m + \log_2 x} = 4m$

$\Leftrightarrow 4\log_2^2 x - 4\log_2 x + 1 = 4\sqrt{m + \log_2 x} + 4(m + \log_2 x) + 1$

$\Leftrightarrow (2\log_2 x - 1)^2 = \left(2\sqrt{m + \log_2 x} + 1\right)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sqrt{m + \log_2 x} + 1 = 2\log_2 x - 1 \\ 2\sqrt{m + \log_2 x} + 1 = -2\log_2 x + 1 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{m + \log_2 x} = \log_2 x - 1 \\ \sqrt{m + \log_2 x} = -\log_2 x \end{array}\right.$

* **TH1:** $\sqrt{m + \log_2 x} = -\log_2 x \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \le 0 \\ m + \log_2 x = \log_2^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \le 1 \\ \log_2^2 x - \log_2 x - m = 0 (1) \end{cases}$

Đặt: $t = \log_2 x (t \le 0)$, phương trình (1) trở thành: $t^2 - t - m = 0 \Leftrightarrow t^2 - t = m (2)$

Đặt: $g(t) = t^2 - t (t \in (-\infty; 0]$. Bài toán trở thành: Tìm giá trị của tham số $m$ để phương trình $(2)$ có ít nhất 1 nghiệm $t \le 0$

Ta có: $g(t) = t^2 - t \Rightarrow g'(t) = 2t - 1 < 0 \forall t \le 0$

Ta có BBT:

| $t$ | $-\infty$ | | $0$ |
|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | | $-$ | |
| $g(t)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ |

Dựa vào BBT, suy ra: để phương trình $(2)$ có ít nhất 1 nghiệm $t \le 0$ thì $m \ge 0$ (*)

* **TH2:** $\sqrt{m + \log_2 x} = \log_2 x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \ge 1 \\ m + \log_2 x = \log_2^2 x - 2\log_2 x + 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x \ge 1 \\ \log_2^2 x - 3\log_2 x + 1 - m = 0 (3) \end{cases}$

Đặt: $t = \log_2 x (t \ge 1)$, phương trình (1) trở thành: $t^2 - 3t + 1 - m = 0 \Leftrightarrow m = t^2 - 3t + 1 (4)$

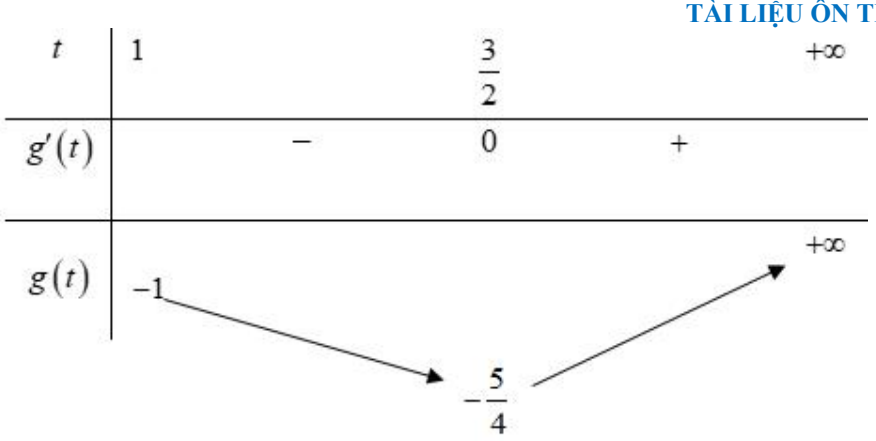
Đặt: $g(t) = t^2 - t + 1, t \in [1; +\infty)$

Ta có: $g(t) = t^2 - 3t + 1 \Rightarrow g'(t) = 2t - 3$

$g'(t) = 0 \Leftrightarrow 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{3}{2} \in [1; +\infty)$

Bài toán trở thành: Tìm giá trị của tham số $m$ để phương trình $(4)$ có ít nhất 1 nghiệm $t \ge 1$

Ta có BBT:




Dựa vào BBT, suy ra: để phương trình $(4)$ có ít nhất 1 nghiệm $t \ge 1$ thì $m \ge -\frac{5}{4}$ (**)

Kết hợp (*) và (**), $m \in [-2019;2019] \Rightarrow m \in \{-1;0;1;2;...;2019\}$

Vậy có tất cả 2021 giá trị của $m$ thỏa mãn ycbt

**Câu 14.** **(Đề Tham Khảo 2017)** Hỏi có bao nhiêu giá trị $m$ nguyên trong $[-2017;2017]$ để phương trình $\log(mx) = 2\log(x+1)$ có nghiệm duy nhất?

**A.** 4014. **B.** 2018. **C.** 4015. **D.** 2017 .

**Lời giải**

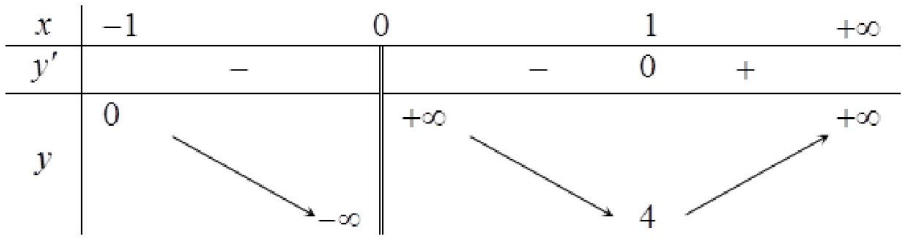
**Chọn B**

Điều kiện $x > -1, mx > 0$ .

$$\log(mx) = 2\log(x+1) \Leftrightarrow mx = (x+1)^2 \Leftrightarrow m = \frac{(x+1)^2}{x}$$

Xét hàm $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x}$ $(x > -1, x \ne 0)$; $f'(x) = \frac{x^2-1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \ (l) \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên




Dựa vào BBT, phương trình có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m < 0. \end{array}\right.$

Vì $m \in [-2017;2017]$ và $m \in \mathbb{Z}$ nên chỉ có 2018 giá trị $m$ nguyên thỏa yêu cầu là $m \in \{-2017;-2016;...;-1;4\}$ .

**Chú ý:** Trong lời giải, ta đã có thể bỏ qua điều kiện $mx > 0$ vì với phương trình $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ với $0 < a \ne 1$ ta chỉ cần điều kiện $f(x) > 0$ .

**Câu 15.** **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $mx - \ln x = 0$ có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(2;3)$

**A.** $\left(\frac{\ln 2}{2};\frac{\ln 3}{3}\right)$ **B.** $\left(-\infty;\frac{\ln 2}{2}\right) \cup \left(\frac{\ln 3}{3};+\infty\right)$

**C.** $\left(\frac{\ln 2}{2};\frac{1}{e}\right)$ **D.** $\left(\frac{\ln 3}{3};\frac{1}{e}\right)$

**Lời giải**

**Chọn D**

$mx-\ln x=0\Leftrightarrow m=\dfrac{\ln x}{x},\forall x\in(2;3)$

Đặt $f(x)=\dfrac{\ln x}{x},\forall x\in(2;3)$

$f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=e$

BBT

| $x$ | $2$ | | $e$ | | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $\dfrac{\ln 2}{2}$ | ↗ | $\dfrac{1}{e}$ | ↘ | $\dfrac{\ln 3}{3}$ |

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $m\in\left(\dfrac{\ln 3}{3};\dfrac{1}{e}\right)$.

**Câu 16.** **(THPT Dông Sơn Thanh Hóa 2019)** Tổng tất cả các giá trị của tham số $m$ sao cho phương trình: $2^{(x-1)^2}.\log_2\left(x^2-2x+3\right)=4^{|x-m|}.\log_2\left(2|x-m|+2\right)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là:

**A.** 2. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** 0. **D.** 3.

**Lời giải**

Tập xác định $D=\mathbb{R}$

$2^{(x-1)^2}.log_2\left(x^2-2x+3\right)=4^{|x-m|}.log_2\left(2|x-m|+2\right)$

$\Leftrightarrow 2^{(x-1)^2}.log_2\left((x-1)^2+2\right)=2^{2|x-m|}.log_2\left(2|x-m|+2\right)(*)$

Đặt $f(t)=2^t\log_2(t+2),\ t\ge 0$; $f'(t)=2^t\ln 2.\log_2(t+2)+2^t\dfrac{1}{(t+2)\ln 2}>0,\forall t\ge 0$.

Vậy hàm số $f(t)=2^t\log_2(t+2)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Từ (*) ta có $f\left[(x-1)^2\right]=f\left[2|x-m|\right]\Leftrightarrow(x-1)^2=2|x-m|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2(x-m)=(x-1)^2\\2(x-m)=-(x-1)^2\end{array}\right.$.

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}g(x)=x^2-4x+1+2m=0\ (a)\\x^2=2m-1\ (b)\end{array}\right.$

Do các phương trình $(a)$ và $(b)$ là phương trình bậc hai nên để phương trình ban đầu có 3 nghiệm phân biệt ta có các trường hợp sau:

TH1: $m=\dfrac{1}{2}$, (b) chỉ có nghiệm kép bằng 0 và (a) có 2 nghiệm phân biệt khác 0 (thỏa mãn).

TH2: $m>\dfrac{1}{2}$, (b) có 2 nghiệm phân biệt $x=\pm\sqrt{2m-1}$ và (a) có 2 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm bằng $\pm\sqrt{2m-1}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\g(\pm\sqrt{2m-1})=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\g(\pm\sqrt{2m-1})=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<\dfrac{3}{2}\\m=1\end{array}\right.\Leftrightarrow m=1$ (thỏa mãn).

+ TH3: $m>\dfrac{1}{2}$, (b) có 2 nghiệm phân biệt $x=\pm\sqrt{2m-1}$ và (a) có nghiệm kép khác $\pm\sqrt{2m-1}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 0 \\ g(\pm\sqrt{2m-1}) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{3}{2} \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = \dfrac{3}{2}$ (thỏa mãn).

Vậy tổng các giá trị của $m$ là $\dfrac{1}{2}+1+\dfrac{3}{2}=3$.

**Câu 17.** Tìm tất cả các giá trị của $m$ để phương trình $\ln\left(m+\ln\left(m+\sin x\right)\right)=\sin x$ có nghiệm.

**A.** $\dfrac{1}{e}+1\le m\le e-1$. **B.** $1\le m\le e-1$. **C.** $1\le m\le \dfrac{1}{e}+1$. **D.** $1\le m<e-1$.

**Lời giải**

Đặt $u=\ln\left(m+\sin x\right)$ ta được hệ phương trình: $\begin{cases} u=\ln\left(m+\sin x\right) \\ \ln\left(m+u\right)=\sin x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^u = m+\sin x \\ e^{\sin x} = m+u \end{cases}$

Từ hệ phương trình ta suy ra: $e^u+u=e^{\sin x}+\sin x\ (*)$

Xét hàm số $f(t)=e^t+t$ có $f'(t)=e^t+1>0, \forall t\in\mathbb{R}$. Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$(*)\Leftrightarrow f(u)=f(\sin x)\Leftrightarrow u=\sin x$

Khi đó ta được: $\ln\left(m+\sin x\right)=\sin x\Leftrightarrow e^{\sin x}-\sin x=m\ (**)$

Đặt $z=\sin x, z\in[-1;1]$. Phương trình $(**)$ trở thành: $e^z-z=m\ (**)$

Xét hàm số: $g(z)=e^z-z$ trên $[-1;1]$.

Hàm số $g(z)=e^z-z$ liên tục trên $[-1;1]$ và có $\max\limits_{[-1;1]} g(z)=g(1)=e-1, \min\limits_{[-1;1]} g(z)=g(0)=1$

Hệ phương trình ban đầu có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình $(**)$ có nghiệm $\Leftrightarrow\ 1\le m\le e-1$.

**Câu 18.** **(THPT Yên Dũng 2-Bắc Giang 2019)** Số các giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1)=\log_2(mx-8)$ có hai nghiệm phân biệt là

**A.** 5. **B.** Vô số. **C.** 4. **D.** 3.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện: $x>1$

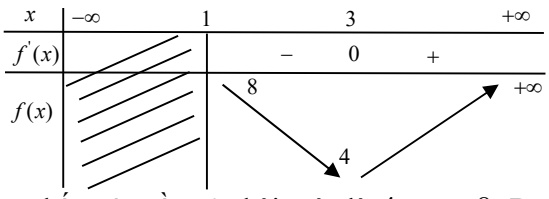
Ta có: $\log_{\sqrt{2}}(x-1)=\log_2(mx-8)\Leftrightarrow \log_2(x-1)^2=\log_2(mx-8)\Leftrightarrow (x-1)^2=mx-8$

$\Leftrightarrow x^2-2x+9=mx$. Do $x>1$ nên suy ra $\dfrac{x^2-2x+9}{x}=m$.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-2x+9}{x}$ trên khoảng $(1;+\infty)$.

$f'(x)=\dfrac{x^2-9}{x^2}$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm 3$.

Bảng biến thiên




Nhìn vào BBT ta thấy yêu cầu của bài toán là $4<m<8$. Do $m$ nguyên nên $m\in\{5;6;7\}$.

Vậy có 3 giá trị của $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 19.** **(THPT Trần Phú - 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m$ để phương trình $m^2\ln\left(\dfrac{x}{e}\right)=(2-m)\ln x-4$ có nghiệm thuộc vào đoạn $\left[\dfrac{1}{e};1\right]$?

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn A**

Có $m^2\ln\left(\frac{x}{e}\right)=(2-m)\ln x-4\Leftrightarrow m^2(\ln x-1)=(2-m)\ln x-4\Leftrightarrow(m^2+m-2)\ln x=m^2-4\,(1)$.

• Với $m^2+m-2=0\Rightarrow m=1\,(m>0)$, $(1)\Leftrightarrow 0\ln x=-3$ (Vô nghiệm) $\Rightarrow$ Loại $m=1$.

• Với $m\neq 1$, $(1)\Leftrightarrow \ln x=\frac{m-2}{m-1}\,(2)$.

+ Hàm số $y=\ln x$ đồng biến trên $\left[\frac{1}{e};1\right]\Rightarrow \ln x\in[-1;0]$.

+ Phương trình $(2)$ có nghiệm thuộc đoạn $\left[\frac{1}{e};1\right]$ khi

$$-1\le\frac{m-2}{m-1}\le 0\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{m-2}{m-1}\ge -1\\ \frac{m-2}{m-1}\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m\ge\frac{3}{2}\\ m<1\end{array}\right.\\ 1<m\le 2\end{cases}\Leftrightarrow\frac{3}{2}\le m\le 2\Rightarrow m=2.$$

Vậy có 1 giá trị nguyên dương của tham số $m$ thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 20.** **(THPT Trần Phú - 2019)** Có bao nhiêu giá trị của tham số $m$ để phương trình $4\log_{36}^2 x-m\log_6\frac{x}{6}+2=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2$ thỏa mãn $x_1.x_2-72\sqrt{x_1.x_2}+1296\le 0$

**A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

**Lời giải**

**Chọn A**

$4\log_{36}^2 x-m\log_6\frac{x}{6}+2=0$ (Điều kiện $x>0$)

$\Leftrightarrow \log_6^2 x-m\log_6 x+m+2=0$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta=m^2-4(m+2)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<2-2\sqrt{3}\\ m>2+2\sqrt{3}\end{array}\right.$

$x_1.x_2-72\sqrt{x_1.x_2}+1296\le 0\Leftrightarrow\sqrt{x_1.x_2}=36\Leftrightarrow x_1.x_2=1296$

$\Rightarrow\log_6(x_1.x_2)=4\Leftrightarrow\log_6 x_1+\log_6 x_2=4\Rightarrow m=4$ (không thỏa điều kiện của $m$)

**Câu 21.** **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Tập hợp các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_{2019}(4-x^2)+\log_{\frac{1}{2019}}(2x+m-1)=0$ có hai nghiệm thực phân biệt là $T=(a;b)$. Tính $S=2a+b$.

**A.** 18. **B.** 8. **C.** 20. **D.** 16.

**Lời giải**

**Chọn D**

Tập xác định $D=(-2;2)\cap\left(\frac{1-m}{2};+\infty\right)$.

Khi đó, phương trình đã cho trở thành

$\log_{2019}\frac{4-x^2}{2x+m-1}=0\Leftrightarrow 4-x^2=2x+m-1\Leftrightarrow x^2+2x+m-5=0$ (*)

Phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt

$\Rightarrow\Delta=1^2-1.(m-5)=6-m>0\Leftrightarrow m<6$ (1)

Khi đó phương trình (1) có 2 nghiệm lần lượt là $x_1=-1+\sqrt{6-m};x_2=-1-\sqrt{6-m}$.

TH1: $\frac{1-m}{2} \le -2 \Leftrightarrow m \ge 5$ (2) $\Rightarrow D = (-2;2)$.

Phương trình (1) có 2 nghiệm $x_1, x_2 \in D \Leftrightarrow \begin{cases} -1+\sqrt{6-m} < 2 \\ -1-\sqrt{6-m} > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{6-m} < 3 \\ \sqrt{6-m} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 5$ (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra $5 < m < 6$.

TH2: $-2 < \frac{1-m}{2} < 2 \Leftrightarrow -3 < m < 5$ (4).

$\Rightarrow D = \left(\frac{1-m}{2};2\right)$.

Phương trình (1) có 2 nghiệm

$x_1, x_2 \in D \Leftrightarrow \begin{cases} -1+\sqrt{6-m} < 2 \\ -1-\sqrt{6-m} > \frac{1-m}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{6-m} < 3 \\ \sqrt{6-m} < \frac{m-3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ \left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m > 5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m > 5$ (5).

Từ (4) và (5) suy ra $m \in \varnothing$. Vậy $5 < m < 6$. Suy ra $a = 5, b = 6 \Rightarrow 2a + b = 16$.

**Câu 22.** **(THPT Cẩm Bình 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ để phương trình $\log_3(x+3) + m\log_{\sqrt{x+3}} 9 = 16$ có hai nghiệm thỏa mãn $-2 < x_1 < x_2$.

**A.** 17. **B.** 16. **C.** 14. **D.** 15.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện xác định: $x > -3$ và $x \ne -2$.

Biến đổi phương trình đã cho về phương trình sau: $\log_3(x+3) + 4m\log_{(x+3)} 3 - 16 = 0$.

$\Leftrightarrow \log_3^2(x+3) - 16\log_3(x+3) + 4m = 0$ (1).

Đặt $\log_3(x+3) = t$ phương trình (1) trở thành: $t^2 - 16t + 4m = 0$ (2).

Ta có: $\log_3(x+3) = t \Leftrightarrow x = 3^t - 3$.

Theo điều kiện đề bài thì $x > -2$ nên $3^t - 3 > -2 \Leftrightarrow t > 0$.

Vậy để phương trình $\log_3(x+3) + m\log_{\sqrt{x+3}} 9 = 16$ có hai nghiệm thỏa mãn $-2 < x_1 < x_2$

thì phương trình (2) phải có hai nghiệm $t$ dương phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ t_1 + t_2 = 16 > 0 \\ t_1 . t_2 = 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 64 - 4m > 0 \\ 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 16$. Vậy có 15 giá trị nguyên $m$ thỏa mãn.

**Câu 23.** **(Chuyên Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình 2019)** Tập hợp các số thực $m$ để phương trình $\ln(3x - mx + 1) = \ln(-x^2 + 4x - 3)$ có nghiệm là nửa khoảng $[a;b)$. Tổng $a+b$ bằng

**A.** $\frac{10}{3}$. **B.** 4. **C.** $\frac{22}{3}$. **D.** 7.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có:

$\ln\left(3x-mx+1\right)=\ln\left(-x^2+4x-3\right)$ (1)

$\Leftrightarrow\begin{cases}-x^2+4x-3>0\\3x-mx+1=-x^2+4x-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1<x<3\\x^2-x+4=mx\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}1<x<3\\\dfrac{x^2-x+4}{x}=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1<x<3\\\dfrac{x^2-x+4}{x}=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1<x<3\\x+\dfrac{4}{x}-1=m\end{cases}$ (2)

Xét hàm số: $f(x)=x+\dfrac{4}{x}-1;\quad x\in\left(1;3\right)$ có $f'(x)=1-\dfrac{4}{x^2}$

$f'(x)=1-\dfrac{4}{x^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\in\left(1;3\right)\Rightarrow f(2)=3\\x=-2\notin\left(1;3\right)\end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

| $x$ | 1 | | 2 | | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | 4 | ↘ | 3 | ↗ | $\dfrac{10}{3}$ |

Dựa vào bảng biến thiên ta có:
Phương trình (1) có nghiệm.
$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có nghiệm thuộc khoảng $\left(1;3\right)$.
$\Leftrightarrow 3\le m<4\Leftrightarrow m\in\left[3;4\right)$.
Suy ra $\begin{cases}a=3\\b=4\end{cases}\Rightarrow a+b=3+4=7$.

Nguyễn Bảo Vương

**Câu 24.** **(Cần Thơ 2019)** Cho phương trình $\log_2^2 x-2\log_2 x-4\sqrt{1-\log_2 x}=m$, với $m$ là tham số thực. Số các giá trị nguyên thuộc đoạn $\left[-2019;2019\right]$ của $m$ để phương trình đã cho có nghiệm là

**A.** 2021. **B.** 2024. **C.** 2023. **D.** 2020.

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện xác định: $1-\log_2 x\ge 0\Leftrightarrow\log_2 x\le 1\Leftrightarrow 0<x\le 2$.

Với điều kiện trên thì phương trình tương đương với $\left(1-\log_2 x\right)^2-4\sqrt{1-\log_2 x}-1=m\ \ (1)$.

Đặt $t=\sqrt{1-\log_2 x}$, vì $x\in\left(0;2\right]$ nên $t\ge 0$. Khi đó, $(1)$ trở thành $t^4-4t-1=m\ \ (2)$.

Để $(1)$ có nghiệm $x\in\left(0;2\right]$ thì $(2)$ có nghiệm $t\ge 0$.

Xét hàm số $f(t)=t^4-4t-1,\ t\in\left[0;+\infty\right)$.

Ta có $f'(t)=4t^3-4$. Cho $f'(t)=0\Leftrightarrow t=1\in\left[0;+\infty\right)$.

Ta được bảng biến thiên của $f(t)$ như sau:

| $t$ | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(t)$ | $-1$ | ↘ | $-4$ | ↗ | $+\infty$ |

Theo BBT, để $(2)$ có nghiệm $t \ge 0$ thì $m \ge -4$, mà $m \in [-2019;2019] \cap \mathbb{Z}$ nên tập hợp các giá trị của $m$ cần tìm là $\{-4;-3;-2;-1;0;1;\ldots;2019\}$.

Vậy có tất cả 2024 giá trị nguyên của $m$ thuộc đoạn $[-2019;2019]$ để phương trình đã cho có nghiệm.

**Câu 25.** **(Nam Định - 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $x\log_3(x+1) = \log_9\left[9(x+1)^{2m}\right]$ có hai nghiệm phân biệt.

**A.** $m \in (-1;0)$. **B.** $m \in (-2;0)$. **C.** $m \in (-1;+\infty)$. **D.** $m \in [-1;0)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

**Cách 1.**

Điều kiện: $x > -1$.

Ta có pt: $x\log_3(x+1) = \log_9\left[9(x+1)^{2m}\right] \Leftrightarrow x\log_3(x+1) = 1 + m\log_3(x+1)$

$\Leftrightarrow (x-m)\log_3(x+1) = 1$ (1).

Đặt: $\log_3(x+1) = t \Rightarrow x = 3^t - 1$

Ta có, Pt (1) $\Rightarrow (3^t - m - 1).t = 1 \Rightarrow f(t) = 3^t - \frac{1}{t} - 1 = m$, với $t \ne 0$.

Đặt: $f(t) = 3^t - \frac{1}{t} - 1$, với $t \ne 0$.

$\Rightarrow f'(t) = 3^t.\ln 3 + \frac{1}{t^2} > 0, t \in (-\infty;0),(0;+\infty)$.

Suy ra, $f(t) = 3^t - \frac{1}{t} - 1$ là hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

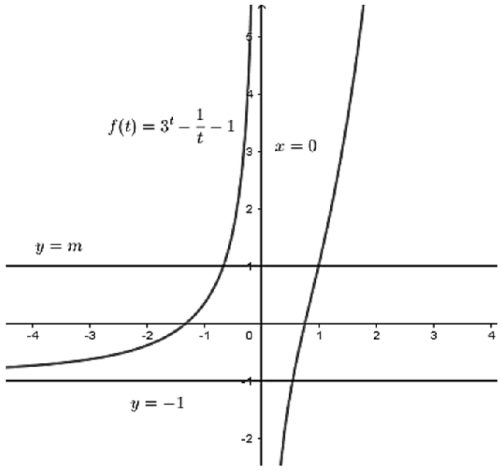
Ta xét các giới sau:

$\lim\limits_{t\to-\infty}\left(3^t - \frac{1}{t} - 1\right) = -1$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(3^t - \frac{1}{t} - 1\right) = +\infty$.

$\lim\limits_{t\to0^+}\left(3^t - \frac{1}{t} - 1\right) = -\infty$, $\lim\limits_{t\to0^-}\left(3^t - \frac{1}{t} - 1\right) = +\infty$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(t) = 3^t - \frac{1}{t} - 1$, với $t \in (-\infty;0),(0;+\infty)$.

| $t$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $+$ | | $+$ | |
| $f(t)$ | $-1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ / $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |




Ta có, số nghiệm của Pt (1) cũng chính là số nghiệm của đồ thị hàm số (C) $f\left(t\right)=3^t-\frac{1}{t}-1$ và đồ thị hàm số $y=m$ (song song hoặc trùng với trục hoành).

Dựa, vào đồ thị ở hình vẽ trên, để phương trình $x\log_3\left(x+1\right)=\log_9\left[9\left(x+1\right)^{2m}\right]$ có ba nghiệm khi $m\in\left(-1;+\infty\right)$.

**Cách 2.**

Điều kiện: $x>-1$.

Ta có: $x\log_3\left(x+1\right)=\log_9\left[9\left(x+1\right)^{2m}\right](1)$

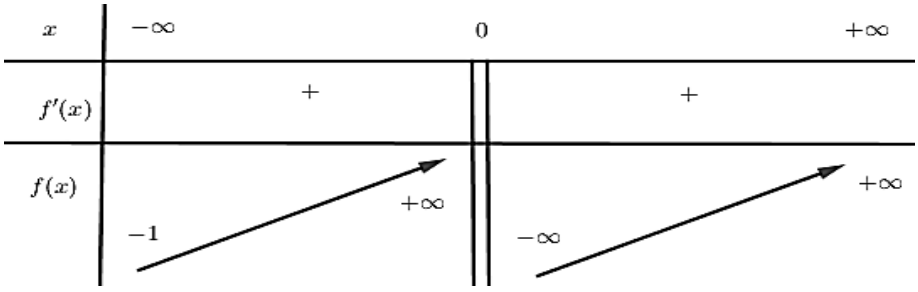
Nhận thấy $x=0$ không là nghiệm phương trình trên.

Pt (1) $\Leftrightarrow\left(x-m\right)\log_3\left(x+1\right)=1\Leftrightarrow x-\frac{1}{\log_3\left(x+1\right)}=m$.

Đặt: $f\left(x\right)=x-\frac{1}{\log_3\left(x+1\right)}\Rightarrow f'\left(x\right)=1+\frac{1}{\left(x+1\right)\ln 3.\left(\log_3\left(x+1\right)\right)^2}>0,\forall x\in\left(-1;+\infty\right)$.

Suy ra $f\left(x\right)=x-\frac{1}{\log_3\left(x+1\right)}$ là hàm số đồng biến $\forall x\in\left(-1;+\infty\right)$.

Ta có BBT của hàm số $f\left(x\right)=x-\frac{1}{\log_3\left(x+1\right)}$.




Dựa, vào BBT ở hình vẽ trên, để phương trình $x\log_3\left(x+1\right)=\log_9\left[9\left(x+1\right)^{2m}\right]$ có ba nghiệm khi $m\in\left(-1;+\infty\right)$.

**Câu 26.** **(THPT Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên 2019)** Cho $a,b$ là các số thực dương lớn hơn 1, thay đổi thỏa mãn $a+b=2019$ để phương trình $5\log_a x.\log_b x-4\log_a x-3\log_b x-2019=0$ luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$. Biết giá trị lớn nhất của $\ln\left(x_1.x_2\right)$ bằng $\frac{3}{5}\ln\left(\frac{m}{7}\right)+\frac{4}{5}\ln\left(\frac{n}{7}\right)$; với $m,n$ là các số nguyên dương. Tính $S=m+2n$

**A.** 22209. **B.** 20190. **C.** 2019. **D.** 14133.

**Lời giải**

**Chọn A**

Theo bài ra ta có

$5\log_a x.\log_b x-4\log_a x-3\log_b x-2019=0$

$\Leftrightarrow 5\log_a x.(\log_b a.\log_a x)-4\log_a x-3(\log_b a.\log_a x)-2019=0$

$\Leftrightarrow 5\log_b a.(\log_a x)^2-(4+3\log_b a)\log_a x-2019=0(*)$

Vì $a,b>1\Rightarrow \log_b a.(-2019)<0\Rightarrow (*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2$

Theo Viet ta có:

$$\log_a x_1+\log_a x_2=\frac{4+3\log_b a}{5\log_b a}\Leftrightarrow \log_a(x_1.x_2)=\frac{4+3.\dfrac{\ln a}{\ln b}}{5\dfrac{\ln a}{\ln b}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(x_1.x_2)}{\ln a}=\frac{4\ln b+3\ln a}{5\ln a}\Leftrightarrow \ln(x_1.x_2)=\frac{1}{5}(4\ln(2019-a)+3\ln a)$$

Xét $f(a)=\frac{1}{5}(4\ln(2019-a)+3\ln a)$ với $a\in(1;2019)$

Ta có $f'(a)=\frac{1}{5}\left(\frac{-4}{2019-a}+\frac{3}{a}\right)$; $f'(a)=0\Leftrightarrow a=\frac{6057}{7}$

Bảng biến thiên

| $a$ | 1 | | $\frac{6057}{7}$ | | 2019 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(a)$ | | + | 0 | − | |
| $f(a)$ | | ↗ | $f(\frac{6057}{7})$ | ↘ | |

Từ bảng biến thiên ta được giá trị lớn nhất của $\ln(x_1.x_2)=\frac{4}{5}.\ln\frac{8076}{7}+\frac{3}{5}.\ln\frac{6057}{7}$ khi $a=\frac{6057}{7}$.

Từ đó suy ra $m=6057$; $n=8076\Rightarrow S=m+2n=6057+2.8076=22209$

**Câu 27.** **(Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2019)** Xét các số nguyên dương $a$, $b$ sao cho phương trình $a\ln^2 x+b\ln x+5=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1$, $x_2$ và phương trình $5\log^2 x+b\log x+a=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_3$, $x_4$ thỏa mãn $x_1x_2>x_3x_4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S=2a+3b$

**A.** $S_{\min}=33$. **B.** $S_{\min}=30$. **C.** $S_{\min}=17$. **D.** $S_{\min}=25$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Điều kiện để hai phương trình $a\ln^2 x+b\ln x+5=0$ và $5\log^2 x+b\log x+a=0$ có hai nghiệm phân biệt là: $b^2-20a>0$.

Theo giả thiết ta có $\begin{cases}\ln x_1+\ln x_2=-\dfrac{b}{a}\\ \log x_3+\log x_4=-\dfrac{b}{5}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\ln(x_1x_2)=-\dfrac{b}{a}\\ \log(x_3x_4)=-\dfrac{b}{5}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1x_2=e^{-\frac{b}{a}}\\ x_3x_4=10^{-\frac{b}{5}}\end{cases}$.

Mà $x_1x_2>x_3x_4\Rightarrow e^{-\frac{b}{a}}>10^{-\frac{b}{5}}$

$\Rightarrow -\frac{b}{a}>-\frac{b}{5}\ln 10$

$\Rightarrow a > \dfrac{5}{\ln 10} \Rightarrow a \ge 3$.

Theo điều kiện có $b^2 - 20a > 0 \Rightarrow b^2 > 20a \ge 60 \Rightarrow b \ge 8$.

Từ và suy ra $S = 2a + 3b \ge 30 \Rightarrow S_{\min} = 30 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 8 \end{cases}$.

**Câu 28.** **(THPT Thuận Thành 3 - Bắc Ninh 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m$ để phương trình $\log_2\left(\dfrac{\sqrt{2x^2+mx+1}}{x+2}\right) + \sqrt{2x^2+mx+1} = x+2$ có hai nghiệm phân biệt?

**A.** 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện: $\begin{cases} 2x^2+mx+1>0 \\ x+2>0 \end{cases}$

$\log_2\left(\dfrac{\sqrt{2x^2+mx+1}}{x+2}\right) + \sqrt{2x^2+mx+1} = x+2$

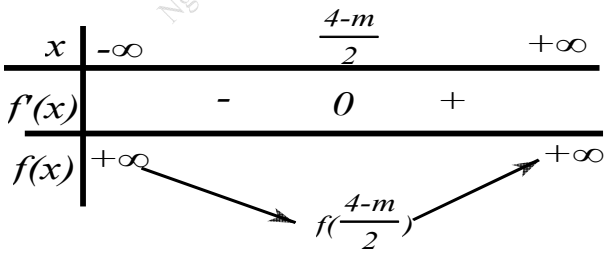
$\Leftrightarrow \log_2 \sqrt{2x^2+mx+1} + \sqrt{2x^2+mx+1} = x+2+\log_2(x+2)$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ trên khoảng $(0;+\infty)$,

có $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 2} + 1 > 0, \forall t \in (0;+\infty) \Rightarrow$ hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

Mà $f\left(\sqrt{2x^2+mx+1}\right) = f(x+2) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+mx+1} = x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x^2+(m-4)x-3=0 \end{cases}$

Do $f(x) = x^2+(m-4)x-3$ là tam thức bậc hai nên có bảng biến thiên




Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $f(x) = x^2+(m-4)x-3=0$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn $-2$.

suy ra: $\begin{cases} -2 < \dfrac{4-m}{2} \\ f\left(\dfrac{4-m}{2}\right) < 0 < 9-2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<8 \\ m<\dfrac{9}{2} \\ \left(\dfrac{4-m}{2}\right)^2 - 3 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < \dfrac{9}{2}$.

Do $m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m \in \{1;2;3;4\}$. Vậy có 4 giá trị của $m$.

**Câu 29.** **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Số các giá trị nguyên nhỏ hơn 2018 của tham số $m$ để phương trình $\log_6(2018x+m) = \log_4(1009x)$ có nghiệm là

**A.** 2018. **B.** 2017. **C.** 2020. **D.** 2019.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đặt $\log_4(1009x)=t\Rightarrow 1009x=4^t$

Phương trình đã cho có dạng $\log_6\left(2.4^t+m\right)=t\Leftrightarrow 2.4^t+m=6^t\Leftrightarrow m=6^t-2.4^t$

Số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $f(t)=6^t-2.4^t$ với đường thẳng $y=m$.

Xét hàm số: $f(t)=6^t-2.4^t$ $f'(t)=6^t\ln 6-2.4^t\ln 4=2^t\left(3^t\ln 6-2.2^t\ln 4\right)$.

$$f'(t)=0\Leftrightarrow 6^t\ln 6=2.4^t\ln 4\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^t=4\log_6 2\Leftrightarrow t=\log_{\frac{3}{2}}\left(4\log_6 2\right)$$

+) $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(6^t-2.4^t\right)=\lim\limits_{t\to+\infty}6^t\left(1-2.\left(\frac{2}{3}\right)^t\right)=+\infty$

+) $\lim\limits_{t\to-\infty}f(t)=\lim\limits_{t\to-\infty}\left(6^t-2.4^t\right)=0$

Ta có bảng biến thiên:

| $t$ | $-\infty$ | | $\log_{\frac{3}{2}}(4\log_6 2)$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(t)$ | $0$ | ↘ | $f\left(\log_{\frac{3}{2}}(4\log_6 2)\right)$ | ↗ | $+\infty$ |

Với $f\left(\log_{\frac{3}{2}}(4\log_6 2)\right)\approx -2,0136$

Từ bảng biến thiên, để phương trình có nghiệm thì $m\ge f\left(\log_{\frac{3}{2}}(4\log_6 2)\right)\approx -2,0136$.

Vậy $-2\le m<2018$. Có $2020$ số nguyên $m$.

**Câu 30.** **(Chuyên ĐH Vinh - Nghệ An -2020)** Có bao nhiêu số nguyên $m$ để phương trình $\log_3\left(3^x+2m\right)=\log_5\left(3^x-m^2\right)$ có nghiệm?

**A.** 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 5.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $\log_3\left(3^x+2m\right)=\log_5\left(3^x-m^2\right)=t\Rightarrow\begin{cases}3^x+2m=3^t\\3^x-m^2=5^t\end{cases}$

$\Rightarrow 2m+m^2=3^t-5^t\Leftrightarrow m^2+2m+1=3^t-5^t+1$ (*).

Xét hàm số $f(t)=3^t-5^t+1$ với $t\in\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t)=3^t.\ln 3-5^t.\ln 5$.

Khi đó $f'(t)=0\Leftrightarrow 3^t.\ln 3-5^t.\ln 5=0\Leftrightarrow\left(\frac{3}{5}\right)^t=\frac{\ln 5}{\ln 3}\Leftrightarrow t=\log_{\frac{3}{5}}\left(\log_3 5\right)=t_0$.

Bảng biến thiên

| $t$ | $-\infty$ | $\log_{\frac{3}{5}}(\log_3 5)$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(t)$ | $-\infty$ ↗ | $f(\log_{\frac{3}{5}}(\log_3 5))$ | ↘ $-\infty$ |

Phương trình (*) có nghiệm

$$\Leftrightarrow (m+1)^2 \le f(t_0) \Leftrightarrow -\sqrt{f(t_0)}-1 \le m \le \sqrt{f(t_0)}-1 \Rightarrow -2{,}068 \le m \le 0{,}068.$$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2;-1;0\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của $m$ thỏa mãn.

**Câu 31.** **(Chuyên Hưng Yên - 2020)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $\log_3 x + \sqrt{\log_3 x + 1} - 2m - 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm thực trong đoạn $[1;27]$.

**A.** $m \in (0;2)$. **B.** $m \in [0;2]$. **C.** $m \in [2;4]$. **D.** $m \in (0;4)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đặt $t = \sqrt{\log_3 x + 1}$. Với $x \in [1;27]$ thì $t \in [1;2]$.

Phương trình đã cho trở thành $t^2 + t - 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow 2m + 2 = t^2 + t$ $(*)$

Xét hàm số $f(t) = t^2 + t$ trên đoạn $[1;2]$.

Ta có $f'(t) = 2t + 1 > 0, \forall t \in [1;2]$ nên hàm số $f(t) = t^2 + t$ đồng biến trên $[1;2]$.

Bảng biến thiên:

| $t$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|
| $f'(t)$ | $+$ | |
| $f(t)$ | $2$ ↗ | $6$ |

Để phương trình đã cho có ít nhất một nghiệm thực trong đoạn $[1;27]$ thì phương trình $(*)$ phải có ít nhất một nghiệm thực trong đoạn $[1;2]$.

Từ bảng biến thiên, suy ra $2 \le 2m + 2 \le 6 \Leftrightarrow 0 \le m \le 2$.

**Câu 32.** **(Chuyên KHTN - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $\log_3^2 x - m \log_9 x^2 + 2 - m = 0$ có nghiệm $x \in [1;9]$.

**A.** 1. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện: $x > 0$.

Ta có: $\log_3^2 x - m \log_9 x^2 + 2 - m = 0 \Leftrightarrow \log_3^2 x - m \log_3 x + 2 - m = 0$.

Đặt $t = \log_3 x$, với $x \in [1;9] \Rightarrow t \in [0;2]$.

Phương trình đã cho trở thành: $t^2 - mt + 2 - m = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{t^2+2}{t+1}$ $(1)$ (Do $t \ne -1, \forall t \in [0;2]$).

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2+2}{t+1}$ với $t \in [0;2]$ ta có:

$$f'(t) = \frac{t^2+2t-2}{(t+1)^2},\ f'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1+\sqrt{3} \in [0;2] \\ t = -1-\sqrt{3} \notin [0;2] \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

| $t$ | $0$ | | $-1+\sqrt{3}$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(t)$ | $2$ | ↘ | $-2+2\sqrt{3}$ | ↗ | $2$ |

Khi đó: phương trình đã cho có nghiệm $x\in[1;9]$ $\Leftrightarrow$ Phương trình $(1)$ có nghiệm $t\in[0;2]$.

$\Leftrightarrow -2+2\sqrt{3}\le m\le 2$.

Mặt khác, do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m=2$.

Vậy có một giá trị nguyên của tham số $m$ thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 33.** **(Chuyên KHTN - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ để phương trình $\log_2(mx)=\log_{\sqrt{2}}(x+1)$ vô nghiệm?

**A.** $4$. **B.** $6$. **C.** $3$. **D.** $5$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện $\begin{cases}mx>0\\x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}mx>0\\x>-1\end{cases}$.

Ta có $\log_2(mx)=\log_{\sqrt{2}}(x+1)\Leftrightarrow\log_2(mx)=2\log_2(x+1)$

$\Leftrightarrow\log_2(mx)=\log_2(x+1)^2\Leftrightarrow\begin{cases}x+1>0\\mx=(x+1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\mx=(x+1)^2\end{cases}(1)$.

Nhận xét với $x=0$ không là nghiệm của phương trình (1).

Với $x\ne 0$ thì $(1)\Leftrightarrow m=\dfrac{(x+1)^2}{x}$.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x}$ với $x\in(-1;+\infty)\setminus\{0\}$

có $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm 1$.

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | | $0$ | $-$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | | $+\infty$ | ↘ | ‖ | ↘ | $4$ | ↗ | $+\infty$ |
| | | | | | $0$ | | | | |
| | | | | | $-\infty$ | | | | |

y = m

Phương trình đã cho vô nghiệm khi và chỉ khi $0\le m<4$. Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{0;1;2;3\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $\log_2(mx)=\log_{\sqrt{2}}(x+1)$ vô nghiệm.

**Câu 34.** **(Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên - 2020)** Số các giá trị nguyên nhỏ hơn 2020 của tham số $m$ để phương trình $\log_6(2020x+m)=\log_4(1010x)$ có nghiệm là

**A.** 2020. **B.** 2021. **C.** 2019. **D.** 2022.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện xác định: $\begin{cases}2020x+m>0\\1010x>0\end{cases}$ (*)

Đặt $\log_6(2020x+m)=\log_4(1010x)=t$.

Suy ra $\begin{cases}2020x+m=6^t\\1010x=4^t\end{cases}$ $(1)$.

Từ đó $m=6^t-2.4^t$ $(2)$.

Với mỗi nghiệm $t_0$ của phương trình $(2)$ thì $x_0=\dfrac{4^{t_0}}{2010}$ là nghiệm của hệ phương trình $(1)$ đồng thời $x_0$ thỏa mãn điều kiện $(*)$. Do đó $x_0$ là nghiệm của phương trình đã cho. Từ đó, điều kiện cần và đủ để phương trình đã cho có nghiệm là phương trình $(2)$ có nghiệm.

Xét hàm số $f(t)=6^t-2.4^t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=6^t.\ln 6-2.4^t.\ln 4$ và $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\log_{\frac{3}{2}}(\log_6 16):=\alpha$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ như sau:

| $t$ | $-\infty$ | | $\alpha$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(t)$ | $0$ | ↘ | $-2,014$ | ↗ | $+\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên, ta có phương trình $(2)$ có nghiệm khi và chỉ khi $m\ge -2$ $(\text{do } m\in\mathbb{Z})$.

Vậy tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ thỏa yêu cầu bài toán là các số nguyên thuộc tập hợp $\{-2.-1,0,1,2,....,2019\}$, có tất cả 2022 giá trị.

**Câu 35.** **(Chuyên Quang Trung - 2020)** Xét các số nguyên dương $a,b$ sao cho phương trình $a\ln^2 x+b\ln x+5=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1$, $x_2$ và phương trình $5\log^2 x+b\log x+a=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_3$, $x_4$ sao cho $x_1x_2>x_3x_4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S=2a+3b$.

**A.** 30. **B.** 25. **C.** 33. **D.** 17.

**Lời giải**

**Chọn A**

$a\ln^2 x+b\ln x+5=0$ $(1)$

$5\log^2 x+b\log x+a=0$ $(2)$

Điều kiện để $(1)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1$, $x_2$ và $(2)$ có hai nghiệm phân biệt $x_3$, $x_4$ là: $b^2-20a>0\Leftrightarrow b^2>20a$.

Nhận xét: $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4>0$

Do đó: $x_1x_2>x_3x_4\Leftrightarrow \ln(x_1x_2)>\ln(x_3x_4)\Leftrightarrow \ln(x_1x_2)>\dfrac{\log(x_3x_4)}{\log e}$

$\Leftrightarrow(\ln x_1+\ln x_2)\log e>\log x_3+\log x_4$

Mà $\ln x_1+\ln x_2=-\dfrac{b}{a};\ \log x_3+\log x_4=-\dfrac{b}{5}$ và $a,\ b$ nguyên dương

Nên $-\dfrac{b}{a}\log e>-\dfrac{b}{5}\Leftrightarrow a>5\log e$

Vì $a$ là số nguyên dương và $5\log e\approx 2,17$ nên $a\ge 3$

$\Rightarrow 20a\ge 60\Rightarrow b^2>60\Rightarrow b>\sqrt{60}\ (b>0)$

Vì $b$ là số nguyên dương và $\sqrt{60}\approx 7,75$ nên $b\ge 8$

Do đó: $S=2a+3b\ge 30\Rightarrow$ Giá trị nhỏ nhất của $S$ là 30 khi $a=3;\ b=8$.

**Câu 36.** **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho phương trình $\log_2^2 x-(5m+1)\log_2 x+4m^2+m=0$. Biết phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1,x_2$ thỏa $x_1+x_2=165$. Giá trị của $|x_1-x_2|$ bằng

**A.** 16. **B.** 119. **C.** 120. **D.** 159.

**Lời giải**

**Chọn D**

$\log_2^2 x-(5m+1)\log_2 x+4m^2+m=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x=m\\ \log_2 x=4m+1\end{array}\right.$

Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi $m\ne 4m+1\Leftrightarrow m\ne\dfrac{-1}{3}$

Khi đó phương trình có 2 nghiệm $x_1=2^m>0, x_2=2^{4m+1}=2.(2^m)^4>0$

Vì $x_1+x_2=165\Leftrightarrow 2^m+2.(2^m)^4=165\ (*)$

Xét hàm số $f(t)=2.t^4+t\Rightarrow f'(t)=8t^3+1>0\ \forall t>0$

Mà $2^m=3$ là nghiệm của $(*)$ nên là nghiệm duy nhất. Suy ra $x_1=3, x_2=2.3^4=162$

Suy ra $|x_1-x_2|=159$.

**Câu 37.** **(Chuyên Thái Nguyên - 2020)** Gọi $m_0$ là giá trị thực nhỏ nhất của tham số $m$ sao cho phương trình $(m-1)\log_{\frac{1}{3}}^2(x-3)-(m-5)\log_{\frac{1}{3}}(x-3)+m-1=0$ có nghiệm thuộc $(3;6)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** Không tồn tại $m_0$. **B.** $m_0\in\left(-1;\dfrac{4}{3}\right)$. **C.** $m_0\in\left(2;\dfrac{10}{3}\right)$. **D.** $m_0\in\left(-5;\dfrac{-5}{2}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt $t=\log_{\frac{1}{3}}(x-3)$.

Vì $x\in(3;6)\Rightarrow t>-1$.

Phương trình trở thành: $(m-1)t^2-(m-5)t+m-1=0\ (*)$

$\Leftrightarrow mt^2-mt+m=t^2-5t+1$

$\Leftrightarrow m=\dfrac{t^2-5t+1}{t^2-t+1}$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2-5t+1}{t^2-t+1}$

$$f'(t)=\frac{(2t-5)(t^2-t+1)-(2t-1)(t^2-5t+1)}{(t^2-t+1)^2}=\frac{4t^2-4}{(t^2-t+1)^2}$$

$f'(t)=0\Leftrightarrow t=\pm 1$.

Bảng biến thiên:

| $t$ | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(t)$ | $\frac{7}{3}$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Để phương trình đã cho có nghiệm $x\in(3;6)$ thì phương trình $(*)$ có nghiệm $t>-1$.

$\Leftrightarrow m\geq -3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m_0=-3\in\left(-5;\frac{-5}{2}\right)$.

**Câu 38.** **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2020)** Cho phương trình $m\ln(x+1)-x-2=0$. Biết rằng tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1$, $x_2$ thỏa mãn $0<x_1<2<4<x_2$ là khoảng $(a;+\infty)$. Khi đó $a$ thuộc khoảng nào dưới đây?

**A.** $(3,7;3,8)$. **B.** $(3,6;3,7)$. **C.** $(3,8;3,9)$. **D.** $(3,5;3,6)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Xét trên khoảng $(0;+\infty)$ phương trình: $m\ln(x+1)-x-2=0\Leftrightarrow m=\frac{x+2}{\ln(x+1)}$

Đặt $f(x)=\frac{x+2}{\ln(x+1)}, x\in(-1;+\infty)\setminus\{0\}$

Với yêu cầu của đề bài ta xét $f(x)$ trên 2 khoảng $(0;2)$ và $(4;+\infty)$

$$f'(x)=\frac{\ln(x+1)-(x+2)\frac{1}{x+1}}{\ln^2(x+1)}$$

Đặt $g(x)=\ln(x+1)-(x+2)\frac{1}{x+1}, x\in(0;2)\cup(4;+\infty)$

$g'(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}>0,\forall x\in(0;2)\cup(4;+\infty)$

Suy ra $\begin{cases} g(x)<g(2)=\ln 3-\frac{4}{3}<0,\forall x\in(0;2)\Rightarrow f'(x)<0,\forall x\in(0;2) \\ g(x)>g(5)=\ln 5-\frac{6}{5}>0,\forall x\in(4;+\infty)\Rightarrow f'(x)>0,\forall x\in(4;+\infty) \end{cases}$

Từ đó ta có bảng biến thiên

| $x$ | $0$ | | $2$ | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | | | | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\frac{4}{\ln 3}$ | $\frac{6}{\ln 5}$ | $\nearrow$ | $-3$ |

Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình đề bài có 2 nghiệm phân biệt thỏa $0 < x_1 < 2 < 4 < x_2$

$\Leftrightarrow m > \dfrac{6}{\ln 5} (\approx 3,728)$

**Câu 39.** **(Đại Học Hà Tĩnh - 2020)** Tìm tất cả các giá trị của tham số $a$ để phương trình $\log_3 x^2 + a\sqrt{\log_3 x^3} + a + 1 = 0$ có nghiệm duy nhất.

**A.** Không tồn tại $a$. **B.** $a < -1$ hoặc $a = 4 - 2\sqrt{10}$.
**C.** $a < 1$. **D.** $a = 1$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ \log_3 x^3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 1.$

Khi đó phương trình $\log_3 x^2 + a\sqrt{\log_3 x^3} + a + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\log_3 x + a\sqrt{3\log_3 x} + a + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2.(3\log_3 x) + 3a\sqrt{3\log_3 x} + 3a + 3 = 0 \ (1).$

Đặt $\sqrt{3\log_3 x} = t, t \ge 0$ thì $(1)$ trở thành: $2t^2 + 3at + 3a + 3 = 0$.

Do đó, yêu cầu bài toán trở thành: Tìm tất cả các giá trị của tham số $a$ để phương trình $2t^2 + 3at + 3a + 3 = 0$ có nghiệm duy nhất thuộc nửa khoảng $[0; +\infty)$.

Ta có: $2t^2 + 3at + 3a + 3 = 0 \Leftrightarrow 3a = \dfrac{-2t^2 - 3}{t + 1}, t \ge 0$.

Xét hàm số: $f(t) = \dfrac{-2t^2 - 3}{t + 1}$ trên nửa khoảng $[0; +\infty)$. Ta có:

+) $f'(t) = \dfrac{-2t^2 - 4t + 3}{(t+1)^2}$. $f'(t) = 0 \Leftrightarrow -2t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{-2 + \sqrt{10}}{2} \\ t = \dfrac{-2 - \sqrt{10}}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow t = \dfrac{-2 + \sqrt{10}}{2}.$

Nguyễn Bảo Vương

+) $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = -\infty$.

+) Bảng biến thiên:

| $t$ | $0$ | | $\dfrac{-2+\sqrt{10}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(t)$ | $-3$ | ↗ | $4-2\sqrt{10}$ | ↘ | $-\infty$ |

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình có một nghiệm duy nhất khi

$\left[\begin{array}{l} 3a < -3 \\ a = -4 + 2\sqrt{10} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < -1 \\ a = -4 + 2\sqrt{10} \end{array}\right.$.

Đáp số: $a < -1$ hoặc $a = -4 + 2\sqrt{10}$.

**Câu 40.** **(Sở Ninh Bình 2020)** Gọi $m_0$ là giá trị nhỏ nhất của tham số thực $m$ sao cho phương trình $(m-1)\log^2_{\frac{1}{2}}(x-2) - (m-5)\log_{\frac{1}{2}}(x-2) + m - 1 = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(2;4)$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

**A.** $m_0 \in \left(-1; \dfrac{4}{3}\right)$. **B.** $m_0 \in \left(2; \dfrac{10}{3}\right)$. **C.** $m_0 \in \left(4; \dfrac{16}{3}\right)$. **D.** $m_0 \in \left(-5; \dfrac{-5}{2}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện: $x>2$.

Đặt $t=\log_{\frac{1}{2}}(x-2)$, với $x\in(2;4)\Rightarrow t\in(-1;+\infty)$.

Phương trình đã cho trở thành: $(m-1)t^2-(m-5)t+m-1=0$

$t^2-5t+1=mt^2-mt+m\Leftrightarrow t^2-5t+1=m(t^2-t+1)$

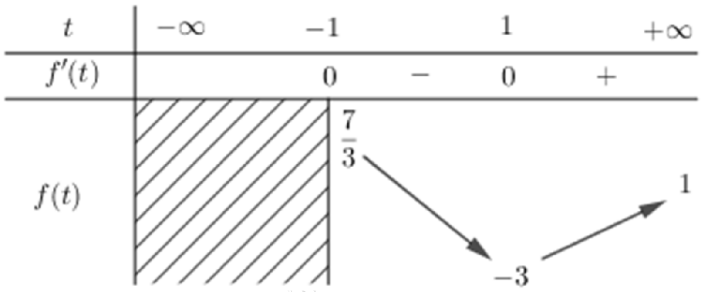
$\Leftrightarrow\dfrac{t^2-5t+1}{t^2-t+1}=m\ \ (1),\ (t^2-t+1\neq 0,\forall t)$

Phương trình đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow(1)$ có nghiệm $t>-1$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2-5t+1}{t^2-t+1},\ (t>-1)$

Ta có: $f'(t)=\dfrac{4t^2-4}{(t^2-t+1)^2}\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow 4t^2-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow f(1)=-3\\ x=-1\Rightarrow f(-1)=-\dfrac{7}{3}\end{array}\right.$

Bảng biên thiên hàm số $f(t)$:




Dựa vào bảng biến thiên, phương trình $f(t)=m$ có nghiệm $t>-1$ khi và chỉ khi $-3\le m<\dfrac{7}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của tham số thực $m$ để phương trình đã cho có nghiệm là $m_0=-3\in\left(-5;\dfrac{-5}{2}\right)$.

**Câu 41.** **(Sở Yên Bái - 2020)** Giả sử phương trình $\log_2^2 x-(m+2)\log_2 x+2m=0$ có hai nghiệm thực phân biệt $x_1,x_2$ thỏa mãn $x_1+x_2=6$. Giá trị biểu thức $|x_1-x_2|$ là

**A.** 4. **B.** 3. **C.** 8. **D.** 2.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện $x>0$. Phương trình đã cho tương đương

$\log_2^2 x-m\log_2 x-2\log_2 x+2m=0$

$\Leftrightarrow(\log_2 x-m)(\log_2 x-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x=m\\ \log_2 x=2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=2^m\\ x=4\end{array}\right.$

Theo giả thiết $x_1+x_2=6\Rightarrow 2^m+4=6\Rightarrow m=1\Rightarrow x=2\Rightarrow|x_1-x_2|=2$.

**Câu 42.** **(Bỉm Sơn - Thanh Hóa - 2020)** Tìm tất cả các giá trị của $m$ để phương trình $\log_2^2 x-\log_2 x^2+3=m$ có nghiệm $x\in[1;8]$.

**A.** $2\le m\le 6$ **B.** $3\le m\le 6$ **C.** $6\le m\le 9$ **D.** $2\le m\le 3$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $t=\log_2 x$. Khi $x\in[1;8]$ thì $t\in[0;3]$. Bài toán trở thành: Tìm $m$ để phương trình $t^2-2t+3=m$ có nghiệm $t\in[0;3]$. Xét hàm số $f(t)=t^2-2t+3$ với $t\in[0;3]$, ta có:

$f'(t)=2t-2=0 \Leftrightarrow t=1;\ \min\limits_{t\in[0;3]} f(t)=f(1)=2;\ \max\limits_{t\in[0;3]} f(t)=f(3)=6.$

Đồ thị hàm số $y=f(t)=t^2-2t+3$ và đường thẳng $y=m$ sẽ cắt nhau tại điểm có hoành độ $t\in[0;3]$ nếu như $\min\limits_{t\in[0;3]} f(t)\le m\le \max\limits_{t\in[0;3]} f(t) \Leftrightarrow 2\le m\le 6$.

**Câu 43.** **(Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020)** Tìm các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $\log_3^2 x-3\log_3 x+2m-7=0$ có hai nghiệm thực $x_1$, $x_2$ thỏa mãn $(x_1+3)(x_2+3)=72$.

**A.** $m=\dfrac{9}{2}$. **B.** $m=3$. **C.** Không tồn tại. **D.** $m=\dfrac{61}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $t=\log_3 x$.

Phương trình đã cho trở thành $t^2-3t+2m-7=0\ (*)$.

Ứng với mỗi nghiệm $t$ của phương trình $(*)$ có một nghiệm $x$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow (-3)^2-4(2m-7)>0 \Leftrightarrow 9-8m+28>0 \Leftrightarrow m<\dfrac{37}{8}$.

Gọi $t_1$, $t_2$ là hai nghiệm phương trình $(*)$.

Theo định lý Viét ta có: $t_1+t_2=3 \Rightarrow \log_3 x_1+\log_3 x_2=3 \Leftrightarrow \log_3(x_1.x_2)=3 \Leftrightarrow x_1.x_2=27$.

Theo đề bài $(x_1+3)(x_2+3)=72 \Leftrightarrow x_1.x_2+3(x_1+x_2)+9=72 \Leftrightarrow x_1+x_2=12$.

Vậy ta có $\begin{cases}x_1+x_2=12\\ x_1.x_2=27\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=9\\ x_2=3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}t_1=2\\ t_2=1\end{cases} \Rightarrow t_1.t_2=2$.

Theo định lý Viét ta có $t_1.t_2=2 \Leftrightarrow 2=2m-7 \Leftrightarrow m=\dfrac{9}{2}$ (thỏa mãn).

Kết luận: $m=\dfrac{9}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 44.** **(Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020)** Số các giá trị nguyên nhỏ hơn 2020 của tham số $m$ để phương trình $\log_6(2020x+m)=\log_4(1010x)$ có nghiệm là

**A.** 2022. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 2021.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta đặt $\log_6(2020x+m)=\log_4(1010x)=t$. Khi đó

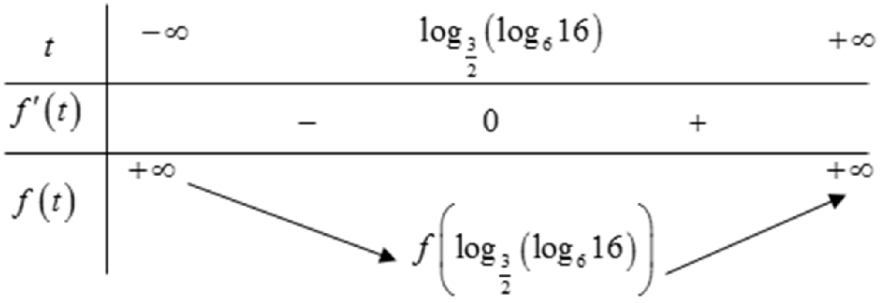
$2020x+m=6^t$ và $1010x=4^t$. Ta suy ra $2\cdot 4^t+m=6^t \Leftrightarrow m=6^t-2\cdot 4^t$

Đặt $f(t)=-2.4^t+6^t$

$f'(t)=6^t\ln 6-2.4^t.\ln 4$

$f'(t)=0 \Rightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^t=\dfrac{2\ln 4}{\ln 6}=\log_6 16 \Leftrightarrow t=\log_{\frac{3}{2}}(\log_6 16)$.

Bảng biến thiên




Phương trình $f(t)=m$ có nghiệm khi và chỉ khi $m \ge f\left(\log_{\frac{3}{2}}(\log_6 16)\right) \approx -2,01$.

Hơn nữa, $\begin{cases} m<2020 \\ m\in\mathbb{Z} \end{cases}$ nên suy ra $\begin{cases} -2\le m\le 2019 \\ m\in\mathbb{Z} \end{cases}$.

Vậy ta có $2022$ giá trị $m$ thỏa mãn.

**Câu 45.** **(Hậu Lộc 2 - Thanh Hóa - 2020)** Cho phương trình $\left(me^x-10x-m\right)\left[\log(mx)-2\log(x+1)\right]=0$. ($m$ là tham số ). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ để phương trình đã cho có ba nghiệm thực phân biệt?

**A.** Vô số. **B.** $10$. **C.** $11$. **D.** $5$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$\left(me^x-10x-m\right)\left[\log(mx)-2\log(x+1)\right]=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} mx>0 & (1) \\ x+1>0 & (2) \\ \left[\begin{array}{ll} me^x-10x-m=0 & (3) \\ mx=(x+1)^2 & (4) \end{array}\right. \end{cases} (*).$$

Nguyễn Bảo Vương

*) $m=0$ thì pt vô nghiệm.

*) $m>0$ thì hệ $(*)\Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{10x}{e^x-1} \\ m=\dfrac{(x+1)^2}{x} \end{array}\right. \end{cases}$. (Vì $e^x-1>e^0-1\Leftrightarrow e^x-1>0$)

+Xét $f(x)=\dfrac{10x}{e^x-1}$ và $g(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x}=x+\dfrac{1}{x}+2$.

$+f'(x)=\dfrac{10\left(e^x-1\right)-e^x.10x}{\left(e^x-1\right)^2}=\dfrac{10e^x(1-x)-10}{\left(e^x-1\right)^2}$.

Xét $u(x)=10e^x(1-x)-10\Rightarrow u'(x)=-10e^x+10e^x(1-x)=-10xe^x<0\,\forall x\in(0;+\infty)$

Suy ra: Hàm số $u(x)$ nghịch biến trong khoảng $(0;+\infty)\Rightarrow u(x)<u(0)=0$.

$\Rightarrow f'(x)<0\,\forall x\in(0;+\infty)\Rightarrow f(x)$ nghịch biến trong khoảng $(0;+\infty)$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=10$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | $10$ | $\searrow$ | |
| | | $4$ | |

+ $g'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$.

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $4$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Suy ra phương trình có ba nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow 4<m<10$. Vì $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=\{5;6;7;8;9\}$

*) $m<0$ thì hệ $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<0\\\left[\begin{array}{l}m=f(x)\\m=g(x)\end{array}\right.\end{cases}$.

Tương tự ta có $f'(x)>0\,\forall x\in(-1;0)$, $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\dfrac{-10}{e^{-1}-1}=\dfrac{-10e}{1-e}=\dfrac{10e}{e-1}$, $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=10$

| $x$ | $-1$ | | $0$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | $10$ | $\nearrow$ | $\dfrac{10e}{e-1}$ |

$g'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$.

| $x$ | $-1$ | | $0$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | |
| $g(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Suy ra phương trình có nhiều nhất 1 nghiệm thực phân biệt, không thỏa mãn yêu cầu bài toán.
Vậy có 5 giá trị $m$.

**Câu 46.** **(Liên trường Nghệ An - 2020)** Cho phương trình $4^{-|x-m|}.\log_{\sqrt{2}}\left(x^2-2x+3\right)+2^{2x-x^2}.\log_{\frac{1}{2}}\left(2|x-m|+2\right)=0$ với $m$ là tham số. Tổng tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt là

**A.** $4$. **B.** $1$. **C.** $2$. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Có $4^{-|x-m|}.\log_{\sqrt{2}}\left(x^2-2x+3\right)+2^{-x^2+2x}.\log_{\frac{1}{2}}\left(2|x-m|+2\right)=0$

$\Leftrightarrow 2^{1-2|x-m|}.\log_2\left[(x-1)^2+2\right]-2^{1-(x-1)^2}.\log_2\left(2|x-m|+2\right)=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2^{1-2|x-m|}}{\log_2\left(2|x-m|+2\right)}=\dfrac{2^{1-(x-1)^2}}{\log_2\left[(x-1)^2+2\right]}$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{2^{1-t}}{\log_2(t+2)}$ có $f'(t)=\dfrac{-2^{1-t}.\ln(t+2)-\dfrac{2^{1-t}}{(t+2)\ln 2}}{\left[\log_2(t+2)\right]^2}<0,\forall t>-2.$

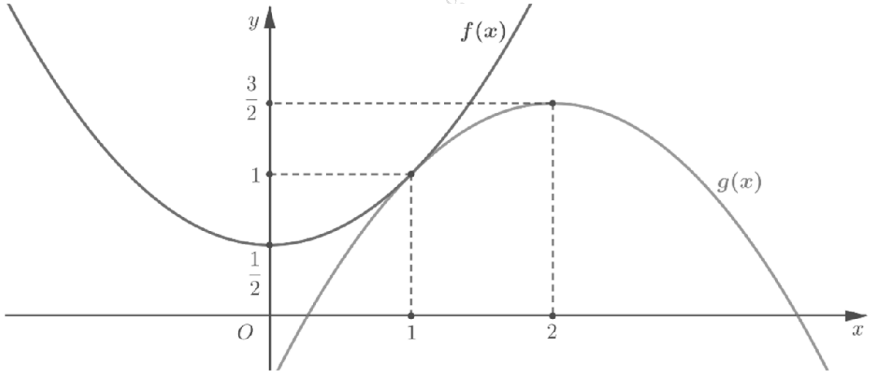
Phương trình đã cho $\Leftrightarrow f\left[(x-1)^2\right]=f\left(2|x-m|\right)\Leftrightarrow (x-1)^2=2|x-m|$

$\Leftrightarrow \left(x^2-4x+1+2m\right)\left(x^2+1-2m\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x+2m+1=0 \\ x^2+1-2m=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \dfrac{1}{2}x^2+1=m & (1) \\ -\dfrac{1}{2}x^2+2x-\dfrac{1}{2}=m & (2) \end{array}\right.$.

Khi đó $ycbt \Leftrightarrow$ phương trình $(1)$ và $(2)$ có tổng cộng $3$ nghiệm thực phân biệt.

Vẽ đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$ và $g(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+2x-\dfrac{1}{2}$ trên cùng một hệ trục tọa độ (tham khảo hình vẽ).




Đồ thị hàm số $f(x)$ và $g(x)$ tiếp xúc với nhau tại điểm có hoành độ $x=1$.

Dựa vào đồ thị ta có $m=\dfrac{1}{2}, m=1, m=\dfrac{3}{2}$ thì phương trình đã cho có $3$ nghiệm thực phân biệt.

Vậy tổng các giá trị thực của $m$ thỏa ycbt là $\dfrac{1}{2}+1+\dfrac{3}{2}=3$.

**Câu 47.** **(THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020)** Cho phương trình $\log_3^2(9x)-(m+5)\log_3 x+3m-10=0$ (với $m$ là tham số thực). Số giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc $[1;81]$ là

**A.** 3 **B.** 5 **C.** 4. **D.** 2.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $\log_3^2(9x)-(m+5)\log_3 x+3m-10=0\Leftrightarrow \log_3^2(x)-(m+1)\log_3 x+3m-6=0,(1)$

Đặt $t=\log_3 x$, khi $x\in[1;81]$ thì $t\in[0;4]$.

Khi đó ta có phương trình $t^2-(m+1)t+3m-6=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=m-2 \end{array}\right.$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc $[1;81]$ $\Leftrightarrow$ phương trình $(1)$ có hai nghiệm phân biệt $t\in[0;4]\Leftrightarrow\begin{cases}m-2\neq 3\\0\le m-2\le 4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 5\\2\le m\le 6\end{cases}$.

Suy ra có $4$ giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc $[1;81]$.

Chọn đáp án **C.**

**Câu 48.** **(THPT Nguyễn Viết Xuân - 2020)** Cho $x,y$ là hai số thực dương thỏa mãn $5x+y=4$. Tổng tất cả giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $\log_3\dfrac{x^2+2y+m}{x+y}+x^2-3x-y+m-1=0$ có nghiệm là

**A.** 10. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 2.

**Lời giải**

**Chọn B**

$\log_3\dfrac{x^2+2y+m}{x+y}+x^2-3x-y+m-1=0$

$\Leftrightarrow\log_3\left(x^2+2y+m\right)+x^2+2y+m=\log_3 3(x+y)+3(x+y)\qquad(1)$

Vì $x,y>0$ nên $x+y>0$. Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t$ là hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Khi đó $(1)\Leftrightarrow x^2+2y+m=3x+3y\Leftrightarrow x^2-3x-y+m=0\qquad(*)$

Kết hợp với điều kiện $5x+y=4\Rightarrow y=4-5x$. Vì $x,y>0\Rightarrow 0<x<\dfrac{4}{5}$.

Ta có $(*)\Leftrightarrow x^2+2x+m-4=0\Leftrightarrow m=-x^2-2x+4,\forall x\in\left(0;\dfrac{4}{5}\right)$.

Hàm số $y=-x^2-2x+4$ nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{4}{5}\right)$ (do $-1<0$) nên $\dfrac{44}{25}<-x^2-2x+4<4$.

Do vậy $m\in\{2;3\}$ là các giá trị cần tìm.

Vậy tổng tất cả các giá trị $m$ thỏa ycbt là 5.

**Câu 49.** **(Hải Hậu - Nam Định - 2020)** Biết rằng điều kiện cần và đủ của tham số $m$ để phương trình $\log_2\left(m+\sqrt{m+2^x}\right)=2x$ có nghiệm là $m\ge-\dfrac{a}{b}$ với $a,b$ là hai số nguyên dương và $b<7$. Hỏi $a+b+b^2$ bằng bao nhiêu?

**A.** 31. **B.** 32. **C.** 21. **D.** 23.

**Lời giải**

**Chọn C**

$\log_2\left(m+\sqrt{m+2^x}\right)=2x\Leftrightarrow\begin{cases}m+2^x\ge 0\\m+\sqrt{m+2^x}=2^{2x}\end{cases}(*)$.

$(*)\Leftrightarrow\left(m+2^x\right)+\sqrt{m+2^x}=\left(2^x\right)^2+2^x$.

Xét hàm số $f(t)=t^2+t\ (t\ge 0)$. Ta có $f'(t)=2t+1>0$ với mọi $t\ge 0$, suy ra hàm số luôn đồng biến với mọi $t\ge 0$.

$(*)\Leftrightarrow f\left(\sqrt{m+2^x}\right)=f\left(2^x\right)\Leftrightarrow\sqrt{m+2^x}=2^x\Leftrightarrow\left(2^x\right)^2=2^x+m\ (**)$.

Đặt $t=2^x\ (t>0)$, khi đó phương trình $(**)$ trở thành $t^2-t=m\ (***)$.

Xét hàm $g(t)=t^2-t\ (t>0)$, ta có $g'(t)=2t-1\Rightarrow g'(t)=0\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

| $t$ | $0$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g$ | $+\infty$ | ↘ | $-\frac{1}{4}$ | ↗ | $+\infty$ |

Vậy để $(***)$ có nghiệm $t>0$ thì $m\ge -\frac{1}{4}\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow a+b+b^2=21$.

**Câu 50.** **(Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $\log_2^2(4x)-m\log_{\sqrt{2}}x-2m-4=0$ có nghiệm thuộc đoạn $[1;8]$?

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $5$. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn D**

ĐK: $x>0$

$\log_2^2(4x)-m\log_{\sqrt{2}}x-2m-4=0$

$\Leftrightarrow (2+\log_2 x)^2-2m\log_2 x-2m-4=0$

$\Leftrightarrow \log_2^2 x+4\log_2 x=2m(\log_2 x+1)(1)$

$\log_2 x=t; x\in[1;8]\Rightarrow t\in[0;3]$

$\Rightarrow (1)\Leftrightarrow \frac{t^2+4t}{t+1}=2m$

$f(t)=\frac{t^2+4t}{t+1}; t\in[0;3]$

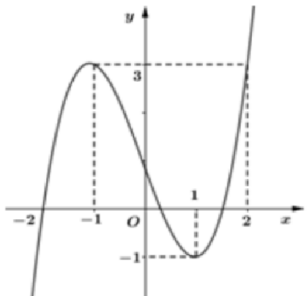
$f'(t)=\frac{t^2+2t+4}{(t+1)^2}>0, \forall t\in[0;3]$

$\Rightarrow f(0)\le 2m\le f(3)$

$\Leftrightarrow 0\le m\le \frac{21}{8}, m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\{0,1,2\}$

Nguyễn Bảo Vương

**Câu 51.** **(Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020)** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-5;5]$ sao cho phương trình $\log_2^3(f(x)+1)-\log_{\sqrt{2}}^2(f(x)+1)+(2m-8)\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{f(x)+1}+2m=0$ có nghiệm $x\in(-1;1)$?




**A.** $7$. **B.** $5$. **C.** $6$. **D.** vô số.

**Lời giải**

**Chọn A**

Với $x\in(-1;1)\Rightarrow -1<f(x)<3\Leftrightarrow 0<f(x)+1<4$.

Đặt $t=\log_2\left(f\left(x\right)+1\right)\Rightarrow t\in\left(-\infty;2\right),\forall x\in\left(-1;1\right)$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành: $t^3-4t^2-\left(m-4\right)t+2m=0$

$\Leftrightarrow\left(t-2\right)\left(t^2-2t-m\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\notin\left(-\infty;2\right)\\t^2-2t-m=0\end{array}\right.\Leftrightarrow t^2-2t-m=0\Leftrightarrow t^2-2t=m\ \left(*\right)$

Để phương trình đã cho có $x\in\left(-1;1\right)\Leftrightarrow$ phương trình $\left(*\right)$ có nghiệm $t\in\left(-\infty;2\right)$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=t^2-2t$ trên $\left(-\infty;2\right)$ có $f'\left(t\right)=2t-2=0\Leftrightarrow t=1\in\left(-\infty;2\right)$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f\left(t\right)=t^2-2t$

| $t$ | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(t)$ | $+\infty$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $0$ |

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình $\left(*\right)$ có nghiệm $t\in\left(-\infty;2\right)$ khi và chỉ khi $m\ge-1$.

Mà $\left\{\begin{array}{l}m\in\left[-5;5\right]\\m\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\Rightarrow m\in\left\{-1;0;1;2;3;4;5\right\}$. Vậy có $7$ giá trị của $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

## Dạng 2. Phương trình mũ chứa tham số

**Câu 1.** **(Mã 101 2018)** Gọi $S$ là tập hợp tất cả giá trị nguyên của tham số $m$ sao cho phương trình $16^x-m.4^{x+1}+5m^2-45=0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi $S$ có bao nhiêu phần tử?

**A.** $6$ **B.** $4$ **C.** $13$ **D.** $3$

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt $t=4^x,\left(t>0\right)$. Phương trình trở thành:

$t^2-4mt+5m^2-45=0$ (1).

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $t>0$.

$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\Delta'>0\\P>0\\S>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-m^2+45>0\\5m^2-45>0\\4m>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}-3\sqrt{5}<m<3\sqrt{5}\\m<-3\vee m>3\\m>0\end{array}\right.\Leftrightarrow3<m<3\sqrt{5}$.

Vì $m$ nguyên nên $m\in\left\{4;5;6\right\}$. Vậy $S$ có $3$ phần tử.

**Câu 2.** **(Mã 104 2017)** Tìm giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $9^x-2.3^{x+1}+m=0$ có hai nghiệm thực $x_1$, $x_2$ thỏa mãn $x_1+x_2=1$.

**A.** $m=3$ **B.** $m=1$ **C.** $m=6$ **D.** $m=-3$

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $9^x-2.3^{x+1}+m=0\Leftrightarrow3^{2x}-6.3^x+m=0$.

Phương trình có hai nghiệm thực $x_1$, $x_2$ thỏa mãn $x_1+x_2=1\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\Delta'=9-m>0\\3^{x_1}+3^{x_2}=6>0\\3^{x_1+x_2}=3=m\end{array}\right.\Leftrightarrow m=3$.

**Câu 3.** **(Mã 102 2018)** Gọi $S$ là tập hợp các giá trị nguyên của tham số $m$ sao cho phương trình $25^x-m.5^{x+1}+7m^2-7=0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi $S$ có bao nhiêu phần tử.

**A.** $7$ **B.** $1$ **C.** $2$ **D.** $3$

**Lời giải**

**Chọn C**

Xét phương trình $25^x - m.5^{x+1} + 7m^2 - 7 = 0\ (1)$.

Đặt $t = 5^x\ (t > 0)$. Phương trình trở thành $t^2 - 5mt + 7m^2 - 7 = 0\ (2)$.

YCBT $\Leftrightarrow$ Phương trình $(1)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình $(2)$ có hai nghiệm phân biệt $t_1, t_2 > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25m^2 - 4(7m^2 - 7) > 0 \\ 5m > 0 \\ 7m^2 - 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < \frac{2\sqrt{21}}{3}.$$

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{2;3\}$. Vậy có $2$ giá trị nguyên của tham số $m$.

**Câu 4.** **(Mã 103 2018)** Gọi $S$ là tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ sao cho phương trình $4^x - m.2^{x+1} + 2m^2 - 5 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi $S$ có bao nhiêu phần tử.

**A.** 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 5

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $4^x - m.2^{x+1} + 2m^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow 4^x - 2m.2^x + 2m^2 - 5 = 0\ (1)$

Đặt $t = 2^x, t > 0$. Phương trình (1) thành: $t^2 - 2m.t + 2m^2 - 5 = 0\ (2)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm dương phânbiệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m^2 + 5 > 0 \\ 2m > 0 \\ 2m^2 - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{5} < m < \sqrt{5} \\ m > 0 \\ m < -\sqrt{\frac{5}{2}} \ hoac \ m > \sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{10}}{2} < m < \sqrt{5}.$$

Do $m$ nguyên nên $m = 2$. Vậy S chỉ có một phần tử

**Câu 5.** **(Mã 110 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $4^x - 2^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt

**A.** $m \in (0;+\infty)$ **B.** $m \in (-\infty;1)$ **C.** $m \in (0;1]$ **D.** $m \in (0;1)$

**Lời giải**

**Chọn D**

Phương trình $4^x - 2^{x+1} + m = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 - 2.2^x + m = 0,\ (1)$.

Đặt $t = 2^x > 0$. Phương trình $(1)$ trở thành: $t^2 - 2t + m = 0,\ (2)$.

Phương trình $(1)$ có hai nghiệm thực phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình $(2)$ có hai nghiệm thực phân biệt và lớn hơn

$$0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m > 0 \\ -\frac{-2}{1} > 0 \\ \frac{m}{1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

**Câu 6.** **(Mã 104 2018)** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ sao cho phương trình $9^x - m.3^{x+1} + 3m^2 - 75 = 0$ có hai nghiệm phân biệt. Hỏi $S$ có bao nhiêu phần tử?

**A.** 5 **B.** 8 **C.** 4 **D.** 19

**Lời giải**

**Chọn C**

$9^x - m.3^{x+1} + 3m^2 - 75 = 0(1) \Leftrightarrow \left(3^x\right)^2 - 3m.3^x + 3m^2 - 75 = 0$

Đặt $t = 3^x, (t > 0)$

Phương trình trở thành: $t^2 - 3mt + 3m^2 - 75 = 0(2)$

$(1)$ có hai ngiệm phân biệt khi và chỉ khi $(2)$ có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 300 - 3m^2 > 0 \\ 3m > 0 \\ 3m^2 - 75 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10 < m < 10 \\ m > 0 \\ \left[\begin{array}{l} m < -5 \\ m > 5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 5 < m < 10$$

Do $m$ nguyên nên $m = \{6;7;8;9\}$

**Câu 7.** **(Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020)** Cho phương trình $9^x - (2m+3).3^x + 81 = 0$ ($m$ là tham số thực). Giá trị của $m$ để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 10$ thuộc khoảng nào sau đây

**A.** $(5;10)$. **B.** $(0;5)$. **C.** $(10;15)$. **D.** $(15;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$9^x - (2m+3).3^x + 81 = 0 \quad (1)$

$\Leftrightarrow \left(3^x\right)^2 - (2m+3).3^x + 81 = 0$. Đặt $t = 3^x (t > 0)$

Phương trình trở thành: $t^2 - (2m+3)t + 81 = 0 \quad (2)$

$\Delta = (2m+3)^2 - 4.81 = (2m+3)^2 - 324$

Để phương trình $(1)$ có hai nghiệm phân biệt thì phương trình $(2)$ có hai nghiệm phân biệt dương:

Điều kiện:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m+3)^2 - 324 > 0 \\ 2m+3 > 0 \\ 81 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2m+3 > 18 \\ 2m+3 < -18 \end{array}\right. \\ m > -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2m+3 > 18 \\ m > -\frac{3}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} 2m+3 < -18 \\ m > -\frac{3}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m > \frac{15}{2} \\ m > -\frac{3}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} m < -\frac{21}{2} \\ m > -\frac{3}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m > \frac{15}{2}$$

Áp dụng hệ thức Vi-ét: $\begin{cases} t_1 + t_2 = 2m+3 \\ t_1.t_2 = 81 \end{cases}$

Vì $t_1.t_2 = 81 \Leftrightarrow 3^{x_1}.3^{x_2} = 3^4 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 4$

Do đó: $x_1^2 + x_2^2 = 10 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1.x_2 = 10 \Leftrightarrow 4^2 - 2x_1.x_2 = 10 \Leftrightarrow x_1.x_2 = 3$

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x_1.x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = 27 \end{cases} \Rightarrow t_1 + t_2 = 30$

Nên $2m+3 = 30 \Leftrightarrow m = \frac{27}{2}(TM)$

Vậy chọn **C.**

**Câu 8.** **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Cho phương trình $m.16^x-2(m-2).4^x+m-3=0(1)$. Tập hợp tất cả các giá trị dương của $m$ để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt là khoảng $(a;b)$. Tổng $T=a+2b$ bằng:

**A.** 14 **B.** 10 **C.** 11 **D.** 7

**Lời giải**

**Chọn C**

+) Đặt: $4^x=t(t>0)\Rightarrow(1)\Leftrightarrow m.t^2-2(m-2)t+m-3=0(2)$

+) Để $(1)$ có 2 nghiệm phân biệt thì $(2)$ phải có hai nghiệm dương phân biệt

$\Rightarrow$ Điều kiện: $\begin{cases}m\neq 0\\ \Delta'>0\\ S>0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ (m-2)^2-m(m-3)>0\\ \dfrac{m-2}{m}>0\\ (m-3)m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ -m+4>0\\ \left[\begin{array}{l}m>2\\ m<0\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}m>3\\ m<0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3<m<4\\ m<0(l)\end{array}\right.$

+) Vậy $3<m<4\Rightarrow\begin{cases}a=3\\ b=4\end{cases}\Rightarrow a+2b=11$

**Câu 9.** **(THCS - THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Phương trình $4^x-3.2^{x+1}+m=0$ có hai nghiệm thực $x_1,x_2$ thỏa mãn $x_1+x_2=-1$. Giá trị của $m$ thuộc khoảng nào sau đây?

**A.** $(-5;0)$. **B.** $(-7;-5)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(5;7)$.

**Lời giải**

Đặt $t=2^x$. Ta có phương trình $t^2-6t+m=0$

Phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1,x_2$ thỏa mãn $x_1+x_2=-1\Leftrightarrow$ pt có hai nghiệm dương $t_1,t_2$

thỏa mãn $t_1.t_2=2^{x_1+x_2}=2^{-1}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'\geq 0\\ s>0\\ p=\dfrac{1}{2}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}9-m\geq 0\\ 6>0\\ m=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}.$

**Câu 10.** **(THPT Lê Xoay Vĩnh Phúc 2019)** Với giá trị nào của tham số $m$ để phương trình $4^x-m.2^{x+1}+2m+3=0$ có hai nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn $x_1+x_2=4$

**A.** $m=\dfrac{5}{2}$. **B.** $m=2$. **C.** $m=8$. **D.** $m=\dfrac{13}{2}$.

**Lời giải**

Phương trình đã cho tương đương $2^{2x}-2m.2^x+2m+3=0$ (1).

Đặt $t=2^x$ $(t>0)$, khi đó phương trình (1) trở thành: $t^2-2m.t+2m+3=0$ (2).Phương trình (1) có hai nghiệm $x_1;x_2$ khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm $t_1;t_2$ dương

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'\geq 0\\ S>0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-2m-3\geq 0\\ 2m>0\\ 2m+3>0\end{cases}\Leftrightarrow m\geq 3$. Theo định lý Viet ta có $\begin{cases}t_1+t_2=2m\\ t_1.t_2=2m+3\end{cases}$

Với $t=2^x$ ta có: $\begin{cases}t_1=2^{x_1}\\ t_2=2^{x_2}\end{cases}\Rightarrow t_1.t_2=2^{x_1}.2^{x_2}\Leftrightarrow 2m+3=2^{x_1+x_2}\Leftrightarrow 16=2m+3\Leftrightarrow m=\dfrac{13}{2}$ (thỏa mãn).

**Câu 11.** **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương 2019)** Phương trình $4^x-m.2^{x+1}+2m=0$ có hai nghiệm $x_1$ , $x_2$ thỏa mãn $x_1+x_2=3$ khi

**A.** $m=4$. **B.** $m=3$. **C.** $m=2$. **D.** $m=1$.

**Lời giải**

Đặt $t=2^x$, $t>0$. Phương trình viết thành $t^2-2mt+2m=0\,(1)$.

Ta có $x_1+x_2=3\Leftrightarrow 2^{x_1+x_2}=2^3\Leftrightarrow 2^{x_1}.2^{x_2}=8$.

Ycbt tương đương phương trình $(1)$ có hai nghiệm dương $t_1,t_2$ thỏa mãn $t_1.t_2=8$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=m^2-2m>0\\ t_1+t_2=2m>0\\ t_1.t_2=2m=8\end{cases}\Leftrightarrow m=4.$$

**Câu 12.** **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình $4.4^{x^2+2x}+(2m-2)6^{x^2+2x+1}-(6m+3)3^{2x^2+4x+2}=0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

**A.** $4-3\sqrt{2}<m<4+3\sqrt{2}$ **B.** $m>4+3\sqrt{2}$ **hoặc** $m<4-3\sqrt{2}$

**C.** $m>-1$ **hoặc** $m<\dfrac{-1}{2}$ **D.** $-1<m<\dfrac{-1}{2}$

**Lời giải**

**Chọn D**

$$4.4^{x^2+2x}+(2m-2)6^{x^2+2x+1}-(6m+3)3^{2x^2+4x+2}=0\quad(1)$$

$$\Leftrightarrow 4^{x^2+2x+1}+(2m-2)6^{x^2+2x+1}-(6m+3)9^{x^2+2x+1}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{4}{9}\right)^{x^2+2x+1}+(2m-2)\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+2x+1}-(6m+3)=0\quad(2)$$

• **Đặt** $t=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x^2+2x+1}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{(x+1)^2}\le\left(\dfrac{2}{3}\right)^0=1$**. Suy ra** $0<t\le 1$

**Pt (2) trở thành:** $t^2+(2m-2)t-6m-3=0\quad(3)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t=3\quad(loai)\\ t=-2m-1\end{cases}$$

Nguyễn Bảo Vương

• **Để phương trình (1) có 2 nghiệm** $x$ **phân biệt**

$\Leftrightarrow$ **Phương trình** $t^2+(2m-2)t-6m-3=0$ **có đúng một nghiệm** $t$ **thuộc khoảng** $(0;1)$

$\Leftrightarrow 0<-2m-1<1$

$\Leftrightarrow -1<m<\dfrac{-1}{2}$.

***Chú ý*: Nếu** $t=1$ **thì phương trình** $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{(x+1)^2}=1$ chỉ có nghiệm duy nhất là $x=-1$.

**Câu 13.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Biết rằng tập các giá trị của tham số $m$ để phương trình $(m-3)9^x+2(m+1)3^x-m-1=0$ có hai nghiệm phân biệt là một khoảng $(a;b)$. Tính tích $a.b$.

**A.** 4 **B.** –3 **C.** 2 **D.** 3

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt: $3^x=t,(t>0)$. Khi đó phương trình trở thành $(m-3)t^2+2(m+1)t-m-1=0(*)$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\ S>0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m+1)(2m-2)>0\\ -\dfrac{m+1}{m-3}>0\\ \dfrac{-m-1}{m-3}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<-1\vee m>1\\ -1<m<3\end{cases}\Leftrightarrow 1<m<3\Rightarrow a.b=3$$

**Câu 14.** Có tất cả bao nhiêu số nguyên $m$ để phương trình $4^x - m.2^x + 2m - 2019 = 0$ có hai nghiệm trái dấu?

**A.** $1008$. **B.** $1007$. **C.** $2018$. **D.** $2017$.

**Lời giải**

$4^x - m.2^x + 2m - 2019 = 0 (1)$

Đặt $t = 2^x (t > 0)$. Phương trình (1) trở thành $t^2 - mt + 2m - 2019 = 0$ (2)

Phương trình (1) có hai nghiệm $x_1; x_2$ thỏa $x_1 < 0 < x_2$ khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm $t_1; t_2$ thỏa $0 < t_1 < 1 < t_2$

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S = t_1 + t_2 > 0 \\ P = t_1 t_2 > 0 \\ (t_1 - 1)(t_2 - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ m > 0 \\ 2m - 2019 > 0 \\ t_1 t_2 - (t_1 + t_2) + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4(2m - 2019) < 0 \\ m > 0 \\ m > \dfrac{2019}{2} \\ 2m - 2019 - m + 1 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8m + 8076 > 0 (\forall m) \\ m > 0 \\ m > \dfrac{2019}{2} \\ m < 2018 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2019}{2} < m < 2018$$. Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $1010 \le m \le 2017$

Số giá trị nguyên $m$ thỏa đề là $1008$.

**Câu 15.** Cho phương trình $\left(4 + \sqrt{15}\right)^x + (2m+1)\left(4 - \sqrt{15}\right)^x - 6 = 0$. Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ thỏa mãn $x_1 - 2x_2 = 0$. Ta có $m$ thuộc khoảng nào?

**A.** $(3;5)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

**Lời giải**

Đặt $t = \left(4 + \sqrt{15}\right)^x$, $t > 0$. Khi đó phương trình ban đầu trở thành:

$t + \dfrac{(2m+1)}{t} - 6 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 2m + 1 = 0, t > 0$ (*)

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ thỏa mãn $x_1 - 2x_2 = 0$ khi và chỉ khi phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt $t_1, t_2$ thỏa mãn $t_1 = (t_2)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{(*)} > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m < 4$

Theo Viet, ta có: $\begin{cases} t_1 + t_2 = 6 \\ t_1.t_2 = 2m + 1 \\ t_1 = (t_2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 + t_2 = 6 \\ t_2 = \sqrt[3]{2m+1} \\ t_1 = \left(\sqrt[3]{2m+1}\right)^2 \end{cases}$

$\Rightarrow \left(\sqrt[3]{2m+1}\right)^2 + \sqrt[3]{2m+1} = 6 \Leftrightarrow \sqrt[3]{2m+1} = 2 \Leftrightarrow m = \frac{7}{2} \in (3;5)$.

**Câu 16.** **(Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ An 2019)** Phương trình $\left(2 + \sqrt{3}\right)^x + (1 - 2a)\left(2 - \sqrt{3}\right)^x - 4 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1$, $x_2$ thỏa mãn $x_1 - x_2 = \log_{2+\sqrt{3}} 3$. Khi đó $a$ thuộc khoảng

**A.** $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$. **B.** $(0; +\infty)$. **C.** $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. **D.** $\left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

**Lời giải**

Đặt $t=\left(2+\sqrt{3}\right)^x$, $t>0$

Phương trình trở thành $t+\frac{1-2a}{t}-4=0\Leftrightarrow t^2-4t+1-2a=0$ (1)

GT: Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1$, $x_2$ thỏa mãn $x_1-x_2=\log_{2+\sqrt{3}}3\Leftrightarrow\left(2+\sqrt{3}\right)^{x_1-x_2}=3$

Khi đó $t_1=3t_2$

YCBT$\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm dương phân biệt thỏa mãn $t_1=3t_2$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\ t_1>0;\ t_2>0\\ t_1+t_2=4\\ t_1.t_2=1-2a\\ t_1=3t_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3+2a>0\\ t_1=3\\ t_2=1\\ t_1t_2=1-2a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a>-\frac{3}{2}\\ a=-1\end{cases}\Leftrightarrow a=-1$$

**Câu 17.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Biết rằng tập các giá trị của tham số $m$ để phương trình $(m-3)9^x+2(m+1)3^x-m-1=0$ có hai nghiệm phân biệt là một khoảng $(a;b)$. Tính tích $a.b$.

**A.** 4 **B.** $-3$ **C.** 2 **D.** 3

**Lời giải**

Đặt $3^x=t$, $(t>0)$, phương trình đã cho trở thành $(m-3)t^2+2(m+1)t-m-1=0$ (*)

Để phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt thì phương trình (*) có hai nghiệm dương phân biệt.

$$\begin{cases}\Delta'>0\\ S>0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m+1)(2m-2)>0\\ -\frac{m+1}{m-3}>0\\ \frac{-m-1}{m-3}>0\end{cases}\Leftrightarrow 1<m<3$$

Nguyễn Bảo Vương

Khi đó $(a;b)=(1;3)$

Tích $a.b=3$

**Câu 18.** **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Tìm tất cả các giá trị của $mm$ để phương trình $9^x-2m.3^x+m+2=0$ có hai nghiệm phân biệt

**A.** $-2<m<2$ **B.** $m>2$ **C.** $m>-2$ **D.** $m<2$

**Lời giải**

Đặt $t=3^x\Rightarrow\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow t\in(0;+\infty)$ và mỗi $x$ cho ta một giá trị $t$ tương ứng.

Khi đó phương trình trở thành $t^2-2mt+m+2=0$ $(*)$

Để pt đã cho có 2 nghiệm phân biệt, tương đương phương trình $(*)$ có hai nghiệm dương phân biệt$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\ S>0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-m-2>0\\ 2m>0\\ m+2>0\end{cases}\Leftrightarrow m>2$

**Câu 19.** Xác định các giá trị của tham số $m$ để phương trình $9^x-2(m+2)6^x+(m^2+4m+3)4^x=0$ có hai nghiệm phân biệt?

**A.** $m<-2$. **B.** $m>-3$. **C.** $m>-1$. **D.** $m>-2$.

**Lời giải**

Xét phương trình: $9^x-2(m+2)6^x+(m^2+4m+3)4^x=0$

Chia cả hai vế của phương trình cho $4^x$ ta được $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-2(m+2)\left(\frac{3}{2}\right)^x+m^2+4m+3=0$

Đặt $t=\left(\frac{3}{2}\right)^x,(t>0)$ khi đó phương trình trở thành: $t^2-2(m+2)t+m^2+4m+3=0$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình có 2 nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\ t_1+t_2>0\\ t_1.t_2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m+2)^2-m^2-4m-3>0\\ 2(m+2)>0\\ m^2+4m+3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1>0\\ m>-2\\ m\in(-\infty;-3)\cup(-1;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow m>-1.$

**Câu 20.** **(KTNL GV THPT Lý Thái Tổ 2019)** Biết rằng $m=m_0$ là giá trị của tham số $m$ sao cho phương trình $9^x-2(2m+1)3^x+3(4m-1)=0$ có hai nghiệm thực $x_1,x_2$ thỏa mãn $(x_1+2)(x_2+2)=12$. Khi đó $m_0$ thuộc khoảng nào sau đây

**A.** $(3;9)$. **B.** $(9;+\infty)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(-2;0)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$9^x-2(2m+1)3^x+3(4m-1)=0$ (1)

Đặt $t=3^x$, $t>0$. Pt(1) trở thành: $t^2-2(2m+1)t+3(4m-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\\ t=4m-1\end{array}\right.$.

Để pt(1) có 2 nghiệm thì điều kiện cần và đủ là $4m-1>0\Leftrightarrow m>\frac{1}{4}$.

Khi đó pt (1) có hai nghiệm $x_1=1$ và $x_2=\log_3(4m-1)$.

Từ giả thiết $(x_1+2)(x_2+2)=12\Leftrightarrow 3(\log_3(4m-1)+2)=12\Leftrightarrow\log_3(4m-1)=2$

$\Leftrightarrow m=\frac{1}{4}.(3^2+1)=\frac{5}{2}$. Vậy $m\in(1;3)$.

**Câu 21.** **(Sở Phú Thọ 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $16^x-2(m+1)4^x+3m-8=0$ có hai nghiệm trái dấu?

**A.** 6 **B.** 7 **C.** 0 **D.** 3

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $t=4^x,t>0$

Phương trình đã cho trở thành $t^2-2(m+1)t+3m-8=0$ $(*)$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ pt $(*)$ có hai nghiệm $t_1,t_2$ thỏa $0<t_1<1<t_2$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\ t_1+t_2>0\\ t_1t_2>0\\ (t_1-1)(t_2-1)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-m+9>0\\ m+1>0\\ 3m-8>0\\ m-9<0\end{cases}\Leftrightarrow\frac{8}{3}<m<9$

Vậy $m$ có 6 giá trị nguyên.

**Câu 22.** **(Chuyên Thái Nguyên 2019)** Gọi $S$ là tập hợp các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $4^x-m.2^x+2m+1=0$ có nghiệm. Tập $\mathbb{R}\setminus S$ có bao nhiêu giá trị nguyên?

**A.** 1 **B.** 4 **C.** 9 **D.** 7

**Lời giải**

Đặt $t=2^x(t>0)$, khi đó phương tình có dạng

$$t^2-mt+2m+1=0(2)$$

Để phương trình ban đầu có nghiệm thì phương trình (2) có nghiệm dương

TH 1: Pt(2) có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow 2m+1<0 \Leftrightarrow m<-\frac{1}{2}$

TH 2: pt(2) có 2 nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta = m^2-8m-4\ge 0\\ m>0\\ 2m+1>0\end{cases} \Leftrightarrow m\ge 4+\sqrt{20}$

Nên $S=\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left[4+\sqrt{20};+\infty\right) \Rightarrow \mathbb{R}\setminus S=\left[-\frac{1}{2};4+\sqrt{20}\right)$. Vậy các số nguyên thỏa mãn là $0,1,2,3,4,5,6,7,8$ hay đáp án C

**Câu 23.** **(THPT Nghĩa Hưng NĐ- 2019)** Cho phương trình $9^x-2(2m+1)3^x+3(4m-1)=0$ có hai nghiệm thực $x_1$, $x_2$ thỏa mãn $(x_1+2)(x_2+2)=12$. Giá trị của $m$ thuộc khoảng

**A.** $(9;+\infty)$. **B.** $(3;9)$. **C.** $(-2;0)$. **D.** $(1;3)$.

**Lời giải**

Đặt $t=3^x$, $t>0$. Phương trình đã cho trở thành: $t^2-2(2m+1)t+3(4m-1)=0$ (1)

Phương trình đã cho có hai nghiệm thực $x_1$, $x_2$ khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ S>0\\ P>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4m^2-8m+4>0\\ 2(2m+1)>0\\ 3(4m-1)>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\ne 1\\ m>-\frac{1}{2}\\ m>\frac{1}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m\ne 1\\ m>\frac{1}{4}\end{cases}.$$

Khi đó phương trình (1) có hai nghiệm là $t=4m-1$ và $t=3$.

Với $t=4m-1$ thì $3^{x_1}=4m-1 \Leftrightarrow x_1=\log_3(4m-1)$.

Với $t=3$ thì $3^{x_2}=3 \Leftrightarrow x_2=1$.

Ta có $(x_1+2)(x_2+2)=12 \Leftrightarrow x_1=2 \Leftrightarrow \log_3(4m-1)=2 \Leftrightarrow m=\frac{5}{2}$ (thỏa điều kiện).

Vậy giá trị $m$ cần tìm là $m=\frac{5}{2}$ nên $m$ thuộc khoảng $(1;3)$.

**Câu 24.** **(Đề Tham Khảo 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m$ để phương trình $16^x-2.12^x+(m-2).9^x=0$ có nghiệm dương?

**A.** 2 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 1

**Lời giải**

**Chọn A**

Phương trình $16^x-2.12^x+(m-2).9^x=0$ có nghiệm $\forall x\in(0;+\infty)$

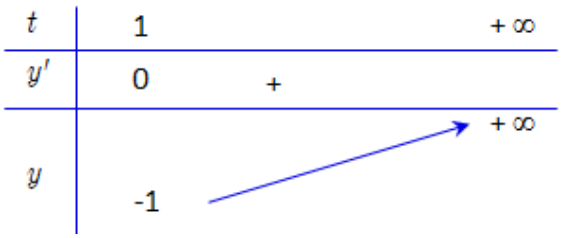
Phương trình tương đương $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x}-2.\left(\frac{4}{3}\right)^x+(m-2)=0$ có nghiệm $\forall x\in(0;+\infty)$

Đặt $t=\left(\frac{4}{3}\right)^x, t\in(1;+\infty)$

$\Rightarrow t^2-2.t+(m-2)=0, \forall t\in(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow t^2-2.t=2-m, \forall t\in(1;+\infty)$

Xét $y=t^2-2.t$




Phương trình có nghiệm $\forall t \in (1;+\infty)$ khi $2-m>-1 \Leftrightarrow m<3$

**Câu 25.** **(THPT Ba Đình -2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $9^{\sqrt{4x-x^2}}-4.3^{\sqrt{4x-x^2}}+2m-1=0$ có nghiệm?

**A.** $27$. **B.** $25$. **C.** $23$. **D.** $24$.

**Lời giải**

ĐKXĐ: $x \in [0;4]$.

Đặt $t=\sqrt{4x-x^2}$ với $x \in [0;4]$ thì $t \in [0;2]$

Đặt $u=3^t$ với $t \in [0;2]$ thì $u \in [1;9]$

Khi đó, tìm $m$ đề phương trình $u^2-4u+2m-1=0$ có nghiệm thuộc đoạn $[1;9]$.

$\Leftrightarrow 2m=-u^2+4u+1$, với $u \in [1;9]$

Xét hàm số $f(u)=-u^2+4u+1$.

$f'(u)=-2u+4=0 \Leftrightarrow u=2$.

Ta có, $f(1)=4$, $f(2)=5$, $f(9)=-44$.

Do đó, phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-44 \le 2m \le 5 \Leftrightarrow -22 \le m \le \frac{5}{2}$.

Vậy có $25$ số nguyên của tham số $m$.

**Câu 26.** **(THPT-Thang-Long-Ha-Noi- 2019)** Gọi $(a;b)$ là tập các giá trị của tham số $m$ để phương trình $2e^{2x}-8e^x-m=0$ có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $(0;\ln 5)$. Tổng $a+b$ là

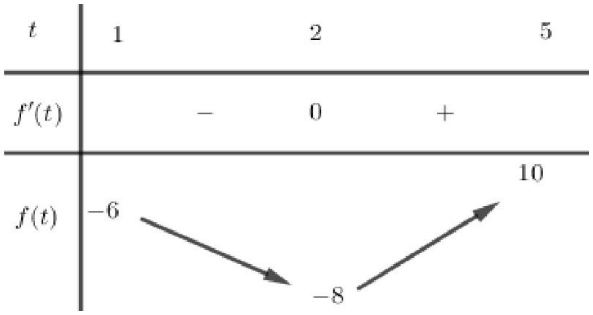
**A.** 2. **B.** 4. **C.** $-6$. **D.** $-14$.

**Lời giải**

Đặt $t=e^x$; $x \in (0;\ln 5)$ tương ứng $t \in (1;5)$.

Phương trình thành $2t^2-8t=m$.

Xét hàm số $f(t)=2t^2-8t$ với $t \in (1;5)$ có $f'(t)=4t-8$




Khi đó, phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0;\ln 5)$ khi phương trình $f(t)=m$ có hai nghiệm $t \in (1;5) \Leftrightarrow -8<m<-6$.

**Câu 27.** **(Sở Bắc Giang 2019)** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $\left(\sqrt{2}+1\right)^x-m\left(\sqrt{2}-1\right)^x=8$ có hai nghiệm dương phân biệt. Số phần tử của $S$ bằng

**A.** 8. **B.** 7. **C.** 10. **D.** 9.

**Lời giải**

Đặt $\left(\sqrt{2}+1\right)^x = t, t>0$. Vì $\left(\sqrt{2}+1\right)^x.\left(\sqrt{2}-1\right)^x = 1$ nên $\left(\sqrt{2}-1\right)^x = \frac{1}{t}$.

Phương trình đã cho trở thành

$$t - \frac{m}{t} = 8 \Leftrightarrow t^2 - 8t = m \ (*).$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi (*) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1.

Xét $f(t) = t^2 - 8t$, trên $(1;+\infty)$.

Ta có $f'(t) = 2t - 8$.

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4$

Bảng biến thiên của hàm $f(t)$

| $t$ | 1 | | 4 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(t)$ | $-7$ | ↘ | $-16$ | ↗ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên ta có (*) có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 1 khi và chỉ khi $-16 < m < -7$.

Vậy số phần tử của $S$ là 8.

**Câu 28.** **(Chuyên Thái Bình 2019)** Tìm số giá trị nguyên của tham số $m \in (-10;10)$ để phương trình $\left(\sqrt{10}+1\right)^{x^2} + m\left(\sqrt{10}-1\right)^{x^2} = 2.3^{x^2+1}$ có đúng hai nghiệm phân biệt?

**A.** 14. **B.** 15. **C.** 13. **D.** 16.

**Lời giải**

$$\left(\sqrt{10}+1\right)^{x^2} + m\left(\sqrt{10}-1\right)^{x^2} = 2.3^{x^2+1} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{x^2} + m\left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right)^{x^2} = 6 \quad (1)$$

Đặt $t = \left(\frac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{x^2}$, $t>0 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right)^{x^2} = \frac{1}{t}$

$(1) \Leftrightarrow t + m.\frac{1}{t} = 6 \Leftrightarrow t^2 - 6t + m = 0 \quad (2)$

Để (1) có đúng hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (2) có một nghiệm lớn hơn 1.

$(2) \Leftrightarrow m = -t^2 + 6t$. Xét hàm số $f(t) = -t^2 + 6t$ trên khoảng $(1;+\infty)$, ta có:

$f'(t) = -2t + 6$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3$.

Bảng biến thiên:

| $t$ | 1 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(t)$ | 5 | ↗ | 9 | ↘ | $-\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $m < 5$ hoặc $m = 9$ là giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Do $m \in (-10;10)$ nên $m = \{-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4;9\}$.

Suy ra có 15 giá trị $m$ cần tìm.

**Câu 29.** **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Phương trình $\left(\frac{1}{9}\right)^x - m.\left(\frac{1}{3}\right)^x + 2m + 1 = 0$ có nghiệm khi $m$ nhận giá trị:

**A.** $m<-\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}<m<4-2\sqrt{5}$. **C.** $m\ge 4+2\sqrt{5}$. **D.** $m<-\frac{1}{2}\vee m\ge 4+2\sqrt{5}$.

**Lời giải**

Ta có phương trình: $\left(\frac{1}{9}\right)^x-m.\left(\frac{1}{3}\right)^x+2m+1=0$

Đặt $t=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $(t>0)$ phương trình trở thành: $t^2-m.t+2m+1=0$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình có nghiệm dương.

$t=2$ không là nghiệm của phương trình nên $\Leftrightarrow m=\frac{t^2+1}{t-2}=f(t)$

$f'(t)=\frac{t^2-4t-1}{(t-2)^2}$, $f'(t)=0\Leftrightarrow\frac{t^2-4t-1}{(t-2)^2}=0\Rightarrow t^2-4t-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2-\sqrt{5}\ (L)\\t=2+\sqrt{5}\ (N)\end{array}\right.$

Bảng biến thiên.

| $t$ | $0$ | | $2$ | | $2+\sqrt{5}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | - | ‖ | - | $0$ | + | |
| $f(t)$ | $\frac{-1}{2}$ | ↘ | $-\infty$ ‖ $+\infty$ | ↘ | $4+2\sqrt{5}$ | ↗ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên ta thấy, phương trình có nghiệm khi $m<-\frac{1}{2}\vee m\ge 4+2\sqrt{5}$

**Câu 30.** **(THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Số các giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình: $(m+1).16^x-2(2m-3).4^x+6m+5=0$ có hai nghiệm trái dấu là

**A.** 4. **B.** 8. **C.** 1. **D.** 2.

**Lời giải**

**Cách 1.**

Đặt $t=4^x, t>0$, phương trình đã cho trở thành:

$(m+1)t^2-2(2m-3)t+6m+5=0\Leftrightarrow m=-\frac{t^2+6t+5}{t^2-4t+6}$ (*).

Phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1,x_2$ trái dấu khi phương trình (*) có hai nghiệm $t_1,t_2$ thỏa mãn:

$0<t_1<1<t_2$.

Đặt $f(t)=-\frac{t^2+6t+5}{t^2-4t+6}\Rightarrow f'(t)=\frac{10t^2-2t-56}{(t^2-4t+6)^2}$. Suy ra $f'(t)=0\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{561}}{10}$

Ta có bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1-\sqrt{561}}{10}$ | | $0$ | | $1$ | | $\frac{1+\sqrt{561}}{10}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | $0$ | | ‖ | − | | − | $0$ | + | |
| $f(x)$ | | | | | $\frac{-5}{6}$ | ↘ | $-4$ | ↘ | | ↗ | $-1$ |
| | | | | | | | $\approx -11,67$ | | | | |

Từ bảng biến thiên, ta có phương trình (*) có hai nghiệm $t_1,t_2$ thỏa mãn: $0<t_1<1<t_2$ khi $-4<m<-1$.

Vậy có hai giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn bài toán là $m=-3$ và $m=-2$.

**Cách 2:**

Đặt $t=4^x, t>0$, phương trình đã cho trở thành: $(m+1)t^2-2(2m-3)t+6m+5=0$ (*).

Đặt $f(x)=(m+1)t^2-2(2m-3)t+6m+5$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1, x_2$ trái dấu khi phương trình (*) có hai nghiệm $t_1, t_2$ thỏa mãn: $0<t_1<1<t_2$.

Điều đó xảy ra khi: $\begin{cases}(m+1)f(1)<0\\(m+1)f(0)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m+1)(3m+12)<0\\(m+1)(6m+5)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4<m<-1\\\left[\begin{array}{l}m<-1\\m>-\frac{5}{6}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow -4<m<-1.$

Vậy có hai giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn bài toán là $m=-3$ và $m=-2$.

**Câu 31.** Phương trình $4^x+1=2^x.m.\cos(\pi x)$ có nghiệm duy nhất. Số giá trị của tham số $m$ thỏa mãn là

**A.** Vô số **B.** 1 **C.** 2 **D.** 0

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $4^x+1=2^x m\cos(\pi x)\Leftrightarrow 2^x+2^{-x}=m\cos(\pi x)$

Ta thấy nếu $x=x_0$ là một nghiệm của phương trình thì $x=-x_0$ cũng là nghiệm của phương trình nên để phương trình có nghiệm duy nhất thì $x_0=0$.

Với $x_0=0$ là nghiệm của phương trình thì $m=2$.

Thử lại: Với $m=2$ ta được phương trình $2^x+2^{-2}=2\cos(\pi x)$ (*)

$VT\ge 2; VP\le 2$ nên $(*)\begin{cases}2^x+2^{-2}=2\\2\cos(\pi x)=2\end{cases}\Leftrightarrow x=0$ thỏa mãn. Vậy $m=2$.

**Câu 32.** **(Sở Hà Nội 2019)** Cho phương trình $2^x=\sqrt{m.2^x.\cos(\pi x)-4}$, với $m$ là tham số. Gọi $m_0$ là giá trị của $m$ sao cho phương trình trên có đúng một nghiệm thực. Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** $m_0\in[-5;-1)$. **B.** $m_0<-5$. **C.** $m_0\in[-1;0)$. **D.** $m_0>0$.

**Lời giải**

Phương trình $4^x=m.2^x.\cos(\pi x)-4\Leftrightarrow 2^x+2^{2-x}=m.\cos(\pi x)$

Điều kiện cần: nếu $x_0$ là một nghiệm của phương trình thì $2-x_0$ cũng là nghiệm. Vì phương trình có nghiệm duy nhất nên $x_0=1$

Thay vào phương trình ta có: $m=-4$.

Điều kiện đủ:

Với $m=-4$ ta có $4^x+4.2^x\cos(\pi x)+4=0\Leftrightarrow\left[2^x+2\cos(\pi x)\right]^2+4\sin^2(\pi x)=0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2^x=-2\cos(\pi x)\\\sin(\pi x)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2^x=-2\cos(\pi x)\\\left[\begin{array}{l}\cos(\pi x)=1\\\cos(\pi x)=-1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2^x=2\\\cos(\pi x)=-1\end{cases}\Leftrightarrow x=1.$

Vậy $m=-4$ thỏa mãn

**Câu 33.** **(HSG Bắc Ninh 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $8^x+3x.4^x+(3x^2+1).2^x=(m^3-1)x^3+(m-1)x$ có đúng hai nghiệm phân biệt thuộc $(0;10)$.

**A.** 101 **B.** 100 **C.** 102 **D.** 103

**Lời giải**

$8^x+3x.4^x+\left(3x^2+1\right).2^x=\left(m^3-1\right)x^3+\left(m-1\right)x$ (1)

$\Leftrightarrow\left(2^x+x\right)^3+\left(2^x+x\right)=\left(mx\right)^3+mx$

Xét hàm số $f\left(t\right)=t^3+t$

Ta có $t=2^x+x$ mà $0<x<10\Rightarrow\begin{cases}1<2^x<1024\\0<x<10\end{cases}\Rightarrow 1<2^x+x<1034\Rightarrow 1<t<1034$

Xét hàm số $f\left(t\right)=t^3+t,t\in\left(1;1034\right).$

$f'\left(t\right)=3t^2+1>0,\forall t\in\left(1;1034\right)$ hay $f\left(t\right)=t^3+t$ đồng biến trên $\left(1;1034\right)$

Suy ra $\left(2\right)\Leftrightarrow 2^x+x=mx\Leftrightarrow\dfrac{2^x+x}{x}=m$

Xét hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{2^x}{x}+1,t\in\left(0;10\right).$

$\Rightarrow g'\left(x\right)=\dfrac{x.2^x\ln 2-2^x}{x^2}=\dfrac{2^x\left(x.\ln 2-1\right)}{x^2}$

$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\ln 2}=\log_2 e$

BBT

| $x$ | $0$ | | $\log_2 e$ | | $10$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | ‖ |
| $g(x)$ | ‖ $+\infty$ | $\searrow$ | $e.\ln 2+1$ | $\nearrow$ | $104,4$ |

$ycbt\Leftrightarrow e.\ln 2+1<m<104,4$

mà $m\in Z$ nên $m=\overline{3,104}.$

Có tất cả 102 số nguyên $m$ thoả mãn.

**Câu 34.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $e^{3m}+e^m=2\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+x\sqrt{1-x^2}\right)$ có nghiệm.

**A.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\ln 2\right)$ **B.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\ln 2\right]$ **C.** $\left(0;\dfrac{1}{e}\right)$ **D.** $\left[\dfrac{1}{2}\ln 2;+\infty\right)$

**Lời giải**

Đặt $t=x+\sqrt{1-x^2}\Rightarrow t^2=1+2x\sqrt{1-x^2}\Rightarrow x\sqrt{1-x^2}=\dfrac{t^2-1}{2}.$

Ta có $t'=\dfrac{\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}},t'=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

| $x$ | $-1$ | | $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $t'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $t$ | $1$ | $\nearrow$ | $\sqrt{2}$ | $\searrow$ | $1$ |

Vậy $t\in\left[-1;\sqrt{2}\right].$

Phương trình trở thành $e^{3m}+e^m=2t\left(1+\dfrac{t^2-1}{2}\right)\Leftrightarrow e^{3m}+e^m=t^3+t\Leftrightarrow e^m=t$. (sử dụng hàm đặc trưng).

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-1\le e^m\le\sqrt{2}\Leftrightarrow m\le\ln\sqrt{2}\Leftrightarrow m\in(-\infty;\dfrac{1}{2}\ln 2]$.

**Câu 35.** **(SP Đồng Nai - 2019)** Gọi $A$ là tập tất cả các giá trị thực của tham số $m$ sao cho tập nghiệm của phương trình $x.2^x=x\left(x-m+1\right)+m.\left(2^x-1\right)$ có hai phần tử. Số phần tử của $A$ bằng

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** Vô số.

**Lời giải**

**Chọn A**

Phương trình: $x.2^x=x\left(x-m+1\right)+m.\left(2^x-1\right)$ (1)

$\Leftrightarrow 2^x.\left(x-m\right)=\left(x-m\right)\left(x-1\right)$

$\Leftrightarrow\left(x-m\right)\left(2^x-x-1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\2^x-x-1=0\ (2)\end{array}\right.$

Xét phương trình $(2):2^x-x-1=0$

Đặt $f(x)=2^x-x-1\ \Rightarrow f'(x)=2^x\ln 2-1$

$\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=\log_2\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right)$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$:

Vương

| $x$ | $-\infty$ | | $\log_2\left(\frac{1}{\ln 2}\right)$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | | ↘ | | ↗ | |

Dựa vào bảng biến thiên ta có phương trình $f(x)=0$ (2) có nhiều nhất 2 nghiệm.

Mà $f(0)=f(1)=0$

$\Rightarrow$ phương trình (2) có đúng 2 nghiệm $x=0;x=1$.

$\Rightarrow$ phương trình (1) có các nghiệm là $x=0;x=1;x=m$.

Để tập nghiệm của phương trình (1) có hai phần tử $\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=1\end{array}\right.\Rightarrow$ Số phần tử của $A$ bằng 2.

**Câu 36.** **(Nguyễn Huệ- Ninh Bình- 2019)**Giá trị của $m$ để phương trình $4^{|x|}-2^{|x|+1}-m=0$ có nghiệm duy nhất là:

**A.** $m=2$. **B.** $m=0$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-1$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$4^{|x|}-2^{|x|+1}-m=0\ (1)$.

Đặt $t=2^{|x|}$, $t\ge 1$.

Phương trình $(1)$ trở thành: $t^2-2t-m=0\Leftrightarrow m=t^2-2t\ (2)$.

Nhận xét: với $t=1$ ta có duy nhất 1 nghiệm $x$ tương ứng; với mỗi $t>1$ ta có 2 nghiệm $x$ tương ứng.

Phương trình $(1)$ có duy nhất nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình $(2)$ có một nghiệm $t_1=1$ và nghiệm còn lại $t_2\le 1$.

$t_1=1$ là nghiệm của phương trình $(2)\Leftrightarrow -1-m=0\Leftrightarrow m=-1$.

Khi đó phương trình $(2)$ trở thành: $t^2-2t+1=0\Leftrightarrow t=1$ (thỏa điều kiện trên).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m=-1$.

**Câu 37.** **(THPT Thăng Long 2019)** Gọi $(a;b)$ là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $2e^{2x}-8e^{x}-m=0$ có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $(0;\ln 5)$. Giá trị của tổng $a+b$ là

**A.** $2$. **B.** $4$. **C.** $-6$. **D.** $-14$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt $t=e^{x}$. Khi đó $x\in(0;\ln 5)\Leftrightarrow t\in\left(e^{0};e^{\ln 5}\right)$ hay là $t\in(1;5)$.

Phương trình đã cho trở thành $2t^2-8t=m$, với $t\in(1;5)$.

Vì với mỗi giá trị của $t\in(1;5)$ ta có một và chỉ một giá trị tương ứng của $x\in(0;\ln 5)$. Do đó, yêu cầu bài toán xảy ra khi và chỉ khi phương trình $2t^2-8t=m$ có hai nghiệm $t$ phân biệt thuộc khoảng $(1;5)$.

Xét bảng biến thiên của hàm số $f(t)=2t^2-8t$ có $f'(t)=4t-8$ trên đoạn $[1;5]$:

| $t$ | $1$ | | $2$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(t)$ | $-6$ | $\searrow$ | $-8$ | $\nearrow$ | $10$ |

Dựa vào bảng trên ta thấy, phương trình $2t^2-8t=m$ có hai nghiệm $t$ phân biệt thuộc khoảng $(1;5)$ khi và chỉ khi $-8<m<-6$.

Vậy phương trình $2e^{2x}-8e^{x}-m=0$ có đúng hai nghiệm thuộc khoảng $(0;\ln 5)$ khi và chỉ khi $m\in(-8;-6)$.

Suy ra $a=-8$ và $b=-6$, do đó $a+b=-14$.

**Câu 38.** **(Chuyên Long An-2019)** Giá trị của tham số $m$ thuộc khoảng nào sau đây để phương trình $4^{x}-m.2^{x+1}+2m=0$ có hai nghiệm $x_1$, $x_2$ thoả mãn $x_1+x_2=3$.

**A.** $m\in\left(\dfrac{9}{2};5\right)$. **B.** $m\in(-2;-1)$. **C.** $m\in(1;3)$. **D.** $m\in(3;5)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$4^{x}-m.2^{x+1}+2m=0\,(*)$

Đặt $t=2^{x}>0$

$(*)\Leftrightarrow t^2-2mt+2m=0\,(**)$

Giả sử phương trình $(*)$ có hai nghiệm $x_1;x_2$ thỏa mãn đều kiện đề bài thì phương trình $(**)$ có hai nghiệm $t_1;t_2$ thỏa:

$$t_1.t_2=8\Leftrightarrow 2^{x_1}.2^{x_2}=8\Leftrightarrow 2^{x_1+x_2}=8\Leftrightarrow 2m=8\Leftrightarrow m=4$$

Thử lại phương trình $(*)$ ta có $m=4$ thỏa mãn điều kiện.

**Câu 39.** **(THPT Quỳnh Lưu- Nghệ An- 2019)** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ sao cho phương trình $16^{x}-m.4^{x-1}+5m^2-44=0$ có hai nghiệm đối nhau. Hỏi $S$ có bao nhiêu phần tử?

**A.** 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $16^x - m.4^{x-1} + 5m^2 - 44 = 0 \Leftrightarrow \left(4^x\right)^2 - \frac{m}{4}.4^x + 5m^2 - 44 = 0\ (1)$.

Đặt $t = 4^x\ (t > 0)$, phương trình có hai nghiệm $x_1$, $x_2$ đối nhau $\Rightarrow t_1 t_2 = 4^{x_1}.4^{x_2} = 4^{x_1+x_2} = 4^0 = 1$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow t^2 - \frac{m}{4}t + 5m^2 - 44 = 0$ phải có hai nghiệm dương phân biệt $t_1$, $t_2$ thỏa $t_1 t_2 = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m^2}{16} - 4\left(5m^2 - 44\right) > 0 \\ \frac{m}{4} > 0 \\ 5m^2 - 44 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{16\sqrt{29}}{29} < m < \frac{16\sqrt{29}}{29} \\ m > 0 \\ m = \pm 3 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \varnothing.$$

Vậy tập $S$ không có phần tử.

**Câu 40.** **(THPT Hai Bà Trưng - Huế - 2019)** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $4^x - 2m.2^x - m + 6 = 0$ có hai nghiệm thực $x_1, x_2$ sao cho $x_1 < x_2 < 3$. Tập hợp $S$ có bao nhiêu phần tử?

**A.** Vô số. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đặt $t = 2^x$, $t > 0$ ta được phương trình $t^2 - 2mt - m + 6 = 0 \Leftrightarrow \frac{t^2+6}{2t+1} = m\ (1)$.

Ta có $x_1 < x_2 < 3 \Leftrightarrow 2^{x_1} < 2^{x_2} < 2^3 = 8$.

Phương trình $(1)$ có hai nghiệm thỏa mãn $0 < t_1 < t_2 < 8$.

Đặt $f(t) = \frac{t^2+6}{2t+1} \Rightarrow f'(t) = \frac{2\left(t^2+t-6\right)}{(2t+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên của $f(t)$ trên $(0;8)$:

| t | 0 | | 2 | | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| y' | | - | 0 | + | |
| y | 6 | ↘ | 2 | ↗ | $\frac{70}{17}$ |

Từ bảng biến thiên ta thấy $(1)$ có hai nghiệm $0 < t_1 < t_2 < 8$ khi $2 < m < \frac{70}{17}$.

Suy ra có hai giá trị nguyên của $m$ là $m = 3$ và $m = 4$.

**Câu 41.** **(THPT Minh Khai - 2019)** Giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $4^x - (2m+3).2^x + 64 = 0$ có hai nghiệm thực $x_1$, $x_2$ thỏa mãn $(x_1+2)(x_2+2) = 24$ thuộc khoảng nào sau đây?

**A.** $\left(0;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(-\frac{3}{2};0\right)$. **C.** $\left(\frac{21}{2};\frac{29}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{11}{2};\frac{19}{2}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt $t=2^x$, điều kiện $t>0$. Phương trình ban đầu trở thành $t^2-(2m+3).t+64=0\ (*)$.

Để phương trình ban đầu có hai nghiệm thực $x_1$ và $x_2$ thì phương trình $(*)$ phải có hai nghiệm $t_1$, $t_2$ dương $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ S>0\\ P>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4m^2+12m-247>0\\ 2m+3>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}m<-\dfrac{19}{2}\\ m>\dfrac{13}{2}\end{array}\right.\\ m>-\dfrac{3}{2}\end{cases} \Rightarrow m>\dfrac{13}{2}$.

Theo định lý Vi-ét, ta có $t_1.t_2=64\Leftrightarrow 2^{x_1}.2^{x_2}=64\Leftrightarrow 2^{x_1+x_2}=64\Rightarrow x_1+x_2=6$.

Ta có $(x_1+2)(x_2+2)=24\Leftrightarrow x_1.x_2+2(x_1+x_2)+4=24\Leftrightarrow x_1.x_2=8$.

Từ $\begin{cases}x_1+x_2=6\\ x_1.x_2=8\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_1=2\\ x_2=4\end{cases}\\ \begin{cases}x_1=4\\ x_2=2\end{cases}\end{array}\right.$.

Khi đó, ta có $t_1+t_2=2^{x_1}+2^{x_2}=20=2m+3\Rightarrow m=\dfrac{17}{2}$.

**Câu 42.** **(Chuyên - Vĩnh Phúc - 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $e^{3m}+e^m=2\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+x\sqrt{1-x^2}\right)$ có nghiệm.

**A.** $\left(0;\dfrac{1}{e}\right)$. **B.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\ln 2\right)$. **C.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\ln 2\right]$. **D.** $\left[\dfrac{1}{2}\ln 2;+\infty\right)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện: $x\in[-1;1]$

Đặt $x+\sqrt{1-x^2}=t$. Vì $x\in[-1;1]\Rightarrow t\in\left[-1;\sqrt{2}\right]$

Ta có: $t^2=\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2=1+2x\sqrt{1-x^2}\Rightarrow x\sqrt{1-x^2}=\dfrac{t^2-1}{2}$.

Phương trình đã cho trở thành: $e^{3m}+e^m=t^3+t$.

Xét hàm số $f(u)=u^3+u$, $f'(u)=3u^2+1>0\ \forall u$ do đó hàm số $f$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Phương trình $e^{3m}+e^m=t^3+t\Leftrightarrow f\left(e^m\right)=f(t)\Leftrightarrow e^m=t$.

Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $-1\le e^m\le\sqrt{2}\Rightarrow 0<e^m\le\sqrt{2}$ ( do $e^m>0$ )

$\Leftrightarrow m\le\ln\sqrt{2}\Rightarrow m\in\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\ln 2\right]$.

**Câu 43.** **(Chuyên Quang Trung- Bình Phước 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để phương trình $4^x-(m-1).2^x+2=0$ có hai nghiệm $x_1$, $x_2$ thoả mãn $x_1+x_2=1$.

**A.** $m\in\mathrm{R}$. **B.** $m>1+2\sqrt{2};m<1-2\sqrt{2}$.

**C.** $m\ge 1+2\sqrt{2}$. **D.** $m>1+2\sqrt{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt $t=2^x$, $t>0$. Ta có phương trình $t^2-(m-1)t+2=0$ (1).

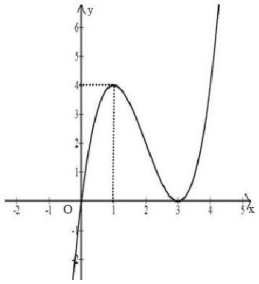
Phương trình đã cho có hai nghiệm $x_1$, $x_2$ khi phương trình (1) có hai nghiệm $t_1$, $t_2>0$.

Khi đó $x_1+x_2=\log_2 t_1+\log_2 t_2=\log_2(t_1.t_2)$.

Bài toán trở thành tìm $m$ để phương trình (1) có hai nghiệm dương phân biệt $t_1, t_2$ thoả mãn

$$\log_2(t_1.t_2)=1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=(m-1)^2-8>0 \\ m-1>0 \\ \log_2(t_1t_2)=1 \end{cases} \Leftrightarrow m>1+2\sqrt{2}.$$

**Câu 44.** **(Chuyên Quang Trung- Bình Phước 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Tập hợp tất cả các giá trị thực của $m$ để phương trình $f\left(e^{x^2}\right)=m$ có đúng 2 nghiệm thực là

**A.** $[0;4]$. **B.** $\{0;4\}$. **C.** $\{0\}\cup(4;+\infty)$. **D.** $[4;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đặt $t=e^{x^2}$. Ta có $x^2\geq 0\Rightarrow t\geq 1$, nếu $t=1$ thì $x=0$ và nếu $t>1$ thì $x=\pm\sqrt{\ln t}$.

Phương trình $f\left(e^{x^2}\right)=m$ $(1)$ trở thành phương trình $f(t)=m$ $(2)$.

Sử dụng các nhận xét ở trên và đồ thị của hàm số $y=f(x)$ ta có

$(1)$ có đúng 2 nghiệm $\Leftrightarrow$ $(2)$ có đúng 1 nghiệm thuộc $[1;+\infty)$ và nghiệm này lớn hơn 1.

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} m=0 \\ m>4 \end{bmatrix}$$

Vậy tập hợp các giá trị nguyên của $m$ thỏa yêu cầu bài toán là $\{0\}\cup(4;+\infty)$.

**Câu 45.** **(Chuyên Thái Bình - 2019)** Tìm số giá trị nguyên của tham số $m\in(-10;10)$ để phương trình $\left(\sqrt{10}+1\right)^{x^2}+m\left(\sqrt{10}-1\right)^{x^2}=2.3^{x^2+1}$ có đúng hai nghiệm phân biệt.

**A.** 14. **B.** 15. **C.** 13. **D.** 16.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $\left(\sqrt{10}+1\right)^{x^2}+m\left(\sqrt{10}-1\right)^{x^2}=2.3^{x^2+1}\Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{x^2}+m\left(\frac{\sqrt{10}-1}{3}\right)^{x^2}=6$. (1)

Đặt $t=\left(\frac{\sqrt{10}+1}{3}\right)^{x^2}$, $t>0$. Phương trình (1) trở thành: $t+\frac{m}{t}=6\Leftrightarrow -t^2+6t=m$ (2).

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có đúng 1 nghiệm lớn hơn 1.

Xét hàm số: $g(t)=-t^2+6t$ trên khoảng $(1;+\infty)$.

Ta có: $g'(t)=-2t+6\Rightarrow g'(t)=0\Leftrightarrow t=3$.

Bảng biến thiên:

| $t$ | 1 | | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ |
| $g(t)$ | $5$ | ↗ | $9$ | ↘ $-\infty$ |

$y=m$

Nhìn vào bảng biến thiên ta có: phương trình (2) có đúng 1 nghiệm lớn hơn $1 \Leftrightarrow m \le 5$.

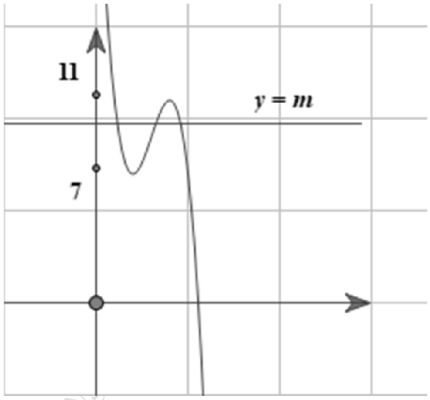
Kết hợp điều kiện m nguyên và $m \in (-10;10) \Rightarrow m \in (-10;5] \cap \mathbb{Z} \Rightarrow$ Có 15 giá trị m thỏa yêu cầu đề.

**Câu 46.** **(Thi thử cụm Vũng Tàu - 2019)** Tổng tất cả các giá trị nguyên của $m$ để phương trình $3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}} + \left(x^3 - 9x^2 + 24x + m\right).3^{x-3} = 3^x + 1$ có 3 nghiệm phân biệt.

**A.** 34. **B.** 27. **C.** 38. **D.** 45.

**Lời giải**

**Chọn B**




$3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}} + \left(x^3 - 9x^2 + 24x + m\right).3^{x-3} = 3^x + 1$

$\Leftrightarrow 3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}} + \left[(x-3)^3 + 27 + m - 3x\right].3^{x-3} = 3^x + 1$

$\Leftrightarrow 3^{\sqrt[3]{m-3x}} + (x-3)^3 + m - 3x + 27 = 3^3 + 3^{3-x} \quad (1)$

$a = 3 - x;\ b = \sqrt[3]{m-3x}$

$(1) \Leftrightarrow 3^b + 27 + b^3 - a^3 = 27. + 3^a \Leftrightarrow 3^b + b^3 = 3^a + a^3$

Xét $f(t) = 3^t + t^3 \Rightarrow f'(t) = 3^t.\ln 3 + 3t^2 \ge 0 \forall t \in R$

$\Rightarrow f(a) = f(b) \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow 3 - x = \sqrt[3]{m-3x}$

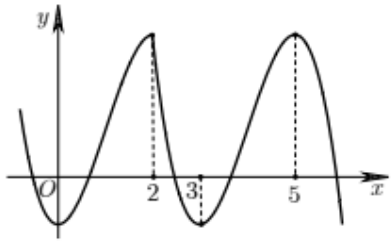
$\Leftrightarrow m = (3-x)^3 + 3x = -x^3 + 9x^2 - 24x + 27$

$f(x) = -x^3 + 9x^2 - 24x + 27 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 18x - 24$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \vee x = 4$

Dựa vào đồ thị: $7 < m < 11 \Rightarrow m = 8,9,10.$

**Câu 47.** **(Chuyên ĐH Vinh- 2019)** Cho số thực $m$ và hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.




Phương trình $f\left(2^x+2^{-x}\right)=m$ có nhiều nhất bao nhiêu nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$?

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đặt $t=t(x)=2^x+2^{-x}$, với $x\in[-1;2]$.

Hàm số $t=t(x)$ liên tục trên $[-1;2]$ và $t'(x)=2^x.\ln 2-2^{-x}.\ln 2$, $t'(x)=0\Leftrightarrow x=0$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $t'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $t(x)$ | $\frac{5}{2}$ | ↘ | $2$ | ↗ | $\frac{17}{4}$ |

Vậy với $x\in[-1;2]\Rightarrow t\in\left[2;\frac{17}{4}\right]$.

Với mỗi $t\in\left(2;\frac{5}{2}\right]$ có 2 giá trị $x$ thỏa mãn $t=2^x+2^{-x}$.

Với mỗi $t\in\{2\}\cup\left(\frac{5}{2};\frac{17}{4}\right]$ có duy nhất 1 giá trị $x$ thỏa mãn $t=2^x+2^{-x}$.

Xét phương trình $f(t)=m$ với $t\in\left[2;\frac{17}{4}\right]$.

Từ đồ thị trên ta thấy phương trình $f\left(2^x+2^{-x}\right)=m$ có số nghiệm nhiều nhất khi và chỉ khi phương trình $f(t)=m$ có 2 nghiệm $t_1$, $t_2$, trong đó có $t_1\in\left(2;\frac{5}{2}\right]$, $t_2\in\left(\frac{5}{2};\frac{17}{4}\right]$. Do đó phương trình $f\left(2^x+2^{-x}\right)=m$ có nhiều nhất 3 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-1;2]$.

**Câu 48.** **(THPT Thuận Thành 3 - Bắc Ninh 2019)** Gọi $S$ là tổng các giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $4^x+7=2^{x+3}+m^2+6m$ có nghiệm $x\in(1;3)$. Chọn đáp án đúng.

**A.** $S=-35$. **B.** $S=20$. **C.** $S=25$. **D.** $S=-21$.

**Lời giải**

**Chọn D**

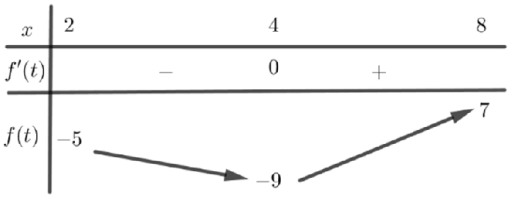
Đặt $t=2^x$ thì phương trình đã cho trở thành $t^2-8t+7=m^2+6m$ với $2<t<8$ (vì $1<x<3$).

Khi đó phương trình $4^x+7=2^{x+3}+m^2+6m$ có nghiệm $x\in(1;3)$

$\Leftrightarrow f(t)=m^2+6m$ có nghiệm $t\in(2;8)$, với $f(t)=t^2-8t+7$.

Ta có $f'(t)=2t-8$; $f'(t)=0\Leftrightarrow t=4\in(2;8)$.

Bảng biến thiên:




Dựa vào bảng biến thiên ta có: $-9 \le m^2+6m < 7$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2+6m+9 \ge 0 \\ m^2+6m-7<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{R} \\ -7<m<1 \end{cases} \Leftrightarrow -7<m<1.$

Vì $m$ nguyên nên $m \in \{-6;-5;-4;-3;-2;-1;0\}$.

Suy ra $S=-(6+5+4+3+2+1+0)=-21$.

**Câu 49.** **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Tập các giá trị của $m$ để phương trình $4^{1+\sqrt{1-x^2}}-(m+2)2^{1+\sqrt{1-x^2}}+2m+1=0$ có nghiệm là

**A.** $\left(-\infty;\frac{9}{2}\right)$. **B.** $\left[4;\frac{9}{2}\right]$. **C.** $(-\infty;4)$. **D.** $[4;+\infty)$.

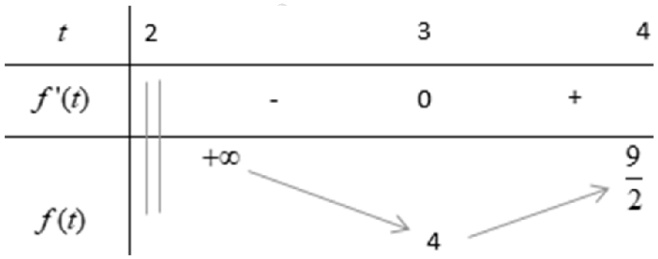
**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện: $-1 \le x \le 1$. Đặt $t=2^{1+\sqrt{1-x^2}}$; $-1 \le x \le 1 \Rightarrow 2 \le t \le 4$.

Phương trình trở thành: $t^2-(m+2)t+2m+1=0 \Leftrightarrow \frac{t^2-2t+1}{t-2}=m$ (*)

Đặt $f(t)=\frac{t^2-2t+1}{t-2} \Rightarrow f'(t)=\frac{t^2-4t+3}{(t-2)^2}$




Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow$ (*) có nghiệm $t \in [2;4] \Leftrightarrow m \ge 4$.

**Câu 50.** Cho hàm số $f(x)=3^{x-4}+(x+1).2^{7-x}-6x+3$, khi phương trình $f\left(7-4\sqrt{6x-9x^2}\right)+3m-1=0$ có số nghiệm nhiều nhất thì giá trị nhỏ nhất của tham số $m$ có dạng $\frac{a}{b}$ (trong đó $a$, $b \in \mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Tính $T=a+b$.

**A.** $T=7$. **B.** $T=11$. **C.** $T=8$. **D.** $T=13$.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Đặt $t=7-4\sqrt{6x-9x^2}=7-4\sqrt{1-(3x-1)^2} \in [3;7]$. Khi đó $f(t)=1-3m$.

Xét hàm số $f(t)=3^{t-4}+(t+1)2^{7-t}-6t+3$ trên đoạn $[3;7]$.

Ta có $f'(t)=3^{t-4}\ln 3+2^{7-t}-(t+1)2^{7-t}\ln 2-6$;

$f''(t)=3^{t-4}(\ln 3)^2-2^{7-t}\ln 2-2^{7-t}\ln 2+(t+1)2^{7-t}(\ln 2)^2$

$=3^{t-4}(\ln 3)^2+\underbrace{[-2+(t+1)\ln 2]}_{>0,\forall t\in[3;7]}2^{7-t}\ln 2>0.$

Suy ra hàm số $f'(t)$ đồng biến trên $(3;7)$.

Lại có $\begin{cases} f'(3)<0 \\ f'(7)>0 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=0$ có nghiệm duy nhất $t_0$ thuộc $(3;7)$.

| $t$ | $3$ | | $t_0$ | | $7$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $\frac{148}{3}$ | $\searrow$ | $f(t_0)$ | $\nearrow$ | $-4$ |

Dựa vào BBT, ta thấy phương trình $f(t)=1-3m$ có số nghiệm nhiều nhất

$\Leftrightarrow f(t_0)<1-3m\le -4 \Leftrightarrow \frac{5}{3}\le m<\frac{1-f(t_0)}{3}$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của $m$ là $\frac{5}{3}\longrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=3 \end{cases}$ nên $a+b=8$.

**Câu 51.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $9^{1+\sqrt{1-x^2}}-(m+3).3^{1+\sqrt{1-x^2}}+2m+1=0$ có nghiệm thực?

**A.** $5$. **B.** $7$. **C.** Vô số. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $0\le 1-x^2\le 1\Leftrightarrow 1\le 1+\sqrt{1-x^2}\le 2\Leftrightarrow 3\le 3^{1+\sqrt{1-x^2}}\le 9$

Đặt $t=3^{1+\sqrt{1-x^2}}$ phương trình trở thành $t^2-(m+3).t+2m+1=0 \quad (1)$

Phương trình $9^{1+\sqrt{1-x^2}}-(m+3).3^{1+\sqrt{1-x^2}}+2m+1=0$ có nghiệm thực $\Leftrightarrow$ phương trình $(1)$ có nghiệm $t\in[3;9]$

$(1)\Leftrightarrow m=\frac{t^2-3t+1}{t-2}\Leftrightarrow m=t-1-\frac{1}{t-2}$ vì $t-2>0$

Xét $f(t)=t-1-\frac{1}{t-2}$ liên tục trên đoạn $[3;9]$ có $f'(t)=1+\frac{1}{(t-2)^2}>0 \quad \forall t\in[3;9]\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên đoạn $[3;9]$. Có $f(3)=1; f(9)=\frac{55}{7}$

Vậy phương trình $9^{1+\sqrt{1-x^2}}-(m+3).3^{1+\sqrt{1-x^2}}+2m+1=0$ có nghiệm thực $\Leftrightarrow m\in\left[1;\frac{55}{7}\right]$

$m\in\mathbb{Z}\Rightarrow$ Có 7 giá trị nguyên.

**Câu 52.** **(THPT Thăng Long 2019)** Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2^{x-y}-2^y+x=2y \\ 2^x+1=(m^2+2).2^y.\sqrt{1-y^2} \end{cases}(1)$, $m$ là tham số. Gọi $S$ là tập các giá trị $m$ nguyên để hệ $(1)$ có một nghiệm duy nhất. Tập $S$ có bao nhiêu phần tử?

**A.** $0$. **B.** $1$. **C.** $3$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện $|y|\le 1\Leftrightarrow y\in[-1;1]$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ $(1)$ ta có $2^{x-y}+(x-y)=2^y+y\,(2)$.

Xét hàm số $y=f(t)=2^t+t$ với $t\in\mathbb{R}$.

Dễ thấy $y'=2^t.\ln 2+1>0$ với mọi $t\in\mathbb{R}$ nên hàm số $y=f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình $(2)$ tương đương với $x-y=y\Leftrightarrow x=2y$.

Thay $x=2y$ vào phương trình thứ hai của hệ $(1)$ ta được $4^y+1=\left(m^2+2\right).2^y.\sqrt{1-y^2}$ $(3)$.

Để hệ đã cho có nghiệm duy nhất thì phương trình $(3)$ phải có nghiệm duy nhất $y\in[-1;1]$.

Giả sử $y_0\in[-1;1]$ là một nghiệm của $(3)$ thì $4^{y_0}+1=\left(m^2+2\right).2^{y_0}.\sqrt{1-y_0^2}$.

Khi đó $4^{-y_0}+1=\left(m^2+2\right).2^{-y_0}.\sqrt{1-\left(-y_0\right)^2}\Leftrightarrow 4^{y_0}+1=\left(m^2+2\right).2^{y_0}.\sqrt{1-y_0^2}$ nên $-y_0$ cũng là nghiệm của $(3)$. Suy ra $y_0=-y_0\Leftrightarrow y_0=0$. Thay $y=0$ vào $(3)$ ta được $m=0$.

Thử lại: với $m=0$ thì $(3)$ viết thành $4^y+1=2.2^y.\sqrt{1-y^2}\Leftrightarrow 2^y+\dfrac{1}{2^y}=2\sqrt{1-y^2}$ $(4)$.

Ta có $VT(4)\ge 2$, dấu bằng khi $2^y=\dfrac{1}{2^y}\Leftrightarrow y=0$; $VP(4)\le 2$, dấu bằng khi $y=0$.

Suy ra phương trình $(4)$ có nghiệm duy nhất là $y=0$. Vậy $m=0$ thỏa mãn.

**Câu 53.** Cho $a,b$ là các số thực thỏa mãn $a>0$ và $a\ne 1$, biết phương trình $a^x-\dfrac{1}{a^x}=2\cos(bx)$ có 7 nghiệm phân biệt. Tìm số nghiệm thực phân biệt của phương trình $a^{2x}-2a^x\left(\cos bx+2\right)+1=0$.

**A.** 28. **B.** 14. **C.** 0. **D.** 7.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có

$a^{2x}-2a^x\left(\cos bx+2\right)+1=0\Leftrightarrow a^x-2+\dfrac{1}{a^x}=2\left(\cos bx+1\right)$

$\Leftrightarrow\left(a^{\frac{x}{2}}-\dfrac{1}{a^{\frac{x}{2}}}\right)^2=4\cos^2\dfrac{bx}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a^{\frac{x}{2}}-\dfrac{1}{a^{\frac{x}{2}}}=2\cos\dfrac{bx}{2}\\ a^{\frac{x}{2}}-\dfrac{1}{a^{\frac{x}{2}}}=-2\cos\dfrac{bx}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a^{\frac{x}{2}}-\dfrac{1}{a^{\frac{x}{2}}}=2\cos b\left(\dfrac{x}{2}\right)\quad(1)\\ a^{\frac{-x}{2}}-\dfrac{1}{a^{\frac{-x}{2}}}=2\cos b\left(\dfrac{-x}{2}\right)\quad(2)\end{array}\right.$.

Nếu phương trình $(1)$ và phương trình $(2)$ có nghiệm chung là $x_0$ thì $2\cos\dfrac{bx_0}{2}=-2\cos\dfrac{bx_0}{2}$

$\Rightarrow\cos\dfrac{bx_0}{2}=0\Rightarrow a^{\frac{x_0}{2}}-\dfrac{1}{a^{\frac{x_0}{2}}}=0\Rightarrow x_0=0\Rightarrow\cos\dfrac{bx_0}{2}=1$ (Vô lí).

Do đó phương trình $(1)$ và phương trình $(2)$ không có nghiệm chung.

Mặt khác theo giả thiết phương trình $(1)$ và phương trình $(2)$ đều có 7 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có 14 nghiệm phân biệt.

**Câu 54.** Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $\dfrac{15}{13}$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Giá trị lớn nhất của $m$ để phương trình $e^{2f^3(x)-\frac{13}{2}f^2(x)+7f(x)+\frac{3}{2}}=m$ có nghiệm trên đoạn $[0;2]$ là

**A.** $e^4$. **B.** $e^3$. **C.** $e^{\frac{15}{13}}$. **D.** $e^5$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Giả sử $f'(x)=a(x-1)(x-3)=a(x^2-4x+3)(a\ne 0)$

$f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\int a(x^2-4x+3)\mathrm{d}x=a(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x)+C$

Do $f(1)=1, f(3)=\frac{15}{13}$ nên ta có hệ $\begin{cases}\frac{4}{3}a+C=1\\ C=\frac{15}{13}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{3}{26}\\ C=\frac{15}{13}\end{cases}$

Khi đó hàm số $f(x)=-\frac{1}{26}x^3+\frac{3}{13}x^2-\frac{9}{26}x+\frac{15}{13}$

Xét hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;2]$

$f'(x)=\frac{-3}{26}(x^2-4x+3), f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=3\notin[0;2]\end{array}\right.$

Ta có: $f(0)=\frac{15}{13}, f(1)=1, f(2)=\frac{14}{13}$ nên $1\le f(x)\le\frac{15}{13}$

Đặt $f(x)=t$

Xét hàm số $g(t)=2t^3-\frac{13}{2}t^2+7t+\frac{3}{2}$ trên đoạn $\left[1;\frac{15}{13}\right]$

$g'(t)=6t^2-13t+7,\ g'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\ t=\frac{7}{6}\notin\left[1;\frac{15}{13}\right]\end{array}\right.$

Ta có: $g(1)=4,\ g(\frac{15}{13})=\frac{8778}{2197}$

Suy ra GTLN của $g(x)$ trên đoạn $\left[1;\frac{15}{13}\right]$ bằng 4. Theo yêu cầu bài toán thì $m=\mathrm{e}^4$.

**Câu 55.** **(Hoàng Hoa Thám - Hưng Yên 2019)** Cho phương trình $\left(4+\sqrt{15}\right)^x+(2m+1)\left(4-\sqrt{15}\right)^x-6=0$ ( $m$ là tham số ). Biết phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2$ thỏa mãn $x_1-2x_2=0$. Khi đó $m$ thuộc khoảng nào sau đây?

**A.** $(3;5)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $\left(4+\sqrt{15}\right)^x=t\,(t>0)\ \Rightarrow\left(4-\sqrt{15}\right)^x=\frac{1}{t}$

Phương trình trở thành: $t+\frac{2m+1}{t}-6=0\Leftrightarrow t^2-6t+2m+1=0\quad(*)$

$x_1-2x_2=0\Leftrightarrow\left(4+\sqrt{15}\right)^{x_1-2x_2}=1\Leftrightarrow\frac{\left(4+\sqrt{15}\right)^{x_1}}{\left(4+\sqrt{15}\right)^{2x_2}}=1\Leftrightarrow\frac{t_1}{t_2^2}=1.$

Do đó, phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2$ thỏa mãn $x_1-2x_2=0$ khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt dương $t_1,t_2$ thỏa mãn $t_1=t_2^2$

Tức là: $\begin{cases}\Delta'>0\\ S>0\\ P>0\\ t_1=t_2^2\quad(1)\end{cases}$

+) $\Delta'>0\Leftrightarrow 8-2m>0\Leftrightarrow m<4.$

+) $S=6>0$ luôn đúng.

+) $P=2m+1>0\Leftrightarrow m>-\frac{1}{2}$.

+) Theo Vi-ét: $\begin{cases}t_1+t_2=6 & (2)\\ t_1.t_2=2m+1 & (3)\end{cases}$

Từ $(1)$ và $(3)$ suy ra: $t_2^3=2m+1\Leftrightarrow t_2=\sqrt[3]{2m+1}\Rightarrow t_1=\left(\sqrt[3]{2m+1}\right)^2$.

Thay vào $(2)$ ta được $\left(\sqrt[3]{2m+1}\right)^2+\sqrt[3]{2m+1}-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{2m+1}=2\\ \sqrt[3]{2m+1}=-3\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=\frac{7}{2}\ (tm)\\ m=-14\ (ktm)\end{array}\right.$

Vậy $m=\frac{7}{2}\in(3;5)$.

**Câu 56.** **(THPT Minh Khai 2019)** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ để phương trình $5^x+10=m\sqrt{25^x+4}$ có nghiệm duy nhất. Số tập con của $S$ là

**A.** 3. **B.** 4. **C.** 16. **D.** 15.

**Lời giải**

**Chọn C**

$5^x+10=m\sqrt{25^x+4}\Leftrightarrow\frac{5^x+10}{\sqrt{25^x+4}}=m\quad(1)$.

TH 1: $m\le 0$. Phương trình $(1)$ vô nghiệm.

TH 2: $m>0$. $(1)\Leftrightarrow\frac{\left(5^x+10\right)^2}{25^x+4}=m^2$

Đặt $t=5^x$, $t>0$. Ta có: $\frac{(t+10)^2}{t^2+4}=m^2\quad(2)$

Xét hàm số $f(t)=\frac{(t+10)^2}{t^2+4}$ trên khoảng $(0;+\infty)$

$f'(t)=\frac{-20t^2-192t+80}{\left(t^2+4\right)^2}$. $f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-10(l)\\ t=\frac{2}{5}(tm)\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

| $t$ | $0$ | | $\frac{2}{5}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(t$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(t$ | $25$ | ↗ | $26$ | ↘ | $1$ |

Đề phương trình $(1)$ có đúng một nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình $(2)$ có đúng một nghiệm $t>0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m^2=26\\ 1<m^2\le 25\end{array}\right.$. Do điều kiện $\begin{cases}m>0\\ m\in\mathbb{Z}\end{cases}\Rightarrow m\in\{2,3,4,5\}$.

Vậy $S=\{2,3,4,5\}$, do đó số tập con của $S$ là $2^4=16$.

**Câu 57.** **(Sở Quảng Trị 2019)** Tìm tập hợp tất cả các giá trị tham số $m$ để phương trình $4^{x^2-2x+1}-m.2^{x^2-2x+2}+3m-2=0$ có 4 nghiệm phân biệt.

**A.** $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $[2;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Xét phương trình: $4^{x^2-2x+1}-m.2^{x^2-2x+2}+3m-2=0$ (1)

Đặt $t=2^{x^2-2x+1}=2^{(x-1)^2}$. Do đó, ta có $(x-1)^2=\log_2 t$. Điều kiện $(t\geq 1)$

Ta có phương trình: (1) trở thành: $t^2-2mt+3m-2=0$ (2)

Ta nhận thấy mỗi giá trị $t>1$ cho hai giá trị $x$ tương ứng. Như vậy phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (2) có 2 nghiệm thỏa: $1<t_1<t_2$.

$(2)\Leftrightarrow(2t-3)m=t^2-2$.

Nhận xét: $t=\dfrac{3}{2}$, không là nghiệm phương trình.

Xét $t\neq\dfrac{3}{2}$, $(2)\Leftrightarrow m=\dfrac{t^2-2}{2t-3}$. Xét hàm $g(t)=\dfrac{t^2-2}{2t-3}$ trên $(1;+\infty)\setminus\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

$g'(t)=\dfrac{2t^2-6t+4}{(2t-3)^2}$; $g'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=2\end{array}\right.$

| $t$ | $1$ | | $\frac{3}{2}$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $+\infty$ | | | | |
| $g'(t)$ | $0$ | $-$ | $\|\|$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $g(t)$ | $1$ | $\searrow$ | $+\infty$ $\|\|$ $-\infty$ | $\searrow$ | $2$ | $\nearrow$ $+\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên, ta cần $m>2$.

**Câu 58.** Cho phương trình: $2^{x^3+x^2-2x+m}-2^{x^2+x}+x^3-3x+m=0$. Tập các giá trị để bất phương trình có ba nghiệm phân biệt có dạng $(a;b)$. Tổng $a+2b$ bằng:

**A.** 1. **B.** 2. **C.** –4. **D.** 0.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $2^{x^3+x^2-2x+m}-2^{x^2+x}+x^3-3x+m=0\Leftrightarrow 2^{x^3+x^2-2x+m}+x^3+x^2-2x+m=2^{x^2+x}+x^2+x(*)$.

Xét hàm số $f(t)=2^t+t$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(t)=2^t\ln 2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow$ Hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $(*)\Leftrightarrow f(x^3+x^2-2x+m)=f(x^2+x)\Leftrightarrow x^3+x^2-2x+m=x^2+x$

$\Leftrightarrow x^3-3x+m=0\Leftrightarrow m=-x^3+3x(**)$.

Xét hàm số $g(x)=-x^3+3x$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $g'(x)=-3x^2+3$.

$g'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm 1$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Phương trình $2^{x^3+x^2-2x+m}-2^{x^2+x}+x^3-3x+m=0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (**) có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -2<m<2 \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow a+2b=2$.

**Câu 59.** **(Chuyên ĐH Vinh- 2019)** Có bao nhiêu số nguyên $m$ để phương trình $9.3^{2x}-m\left(4\sqrt[4]{x^2+2x+1}+3m+3\right)3^x+1=0$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt?

**A.** Vô số. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $9.3^{2x}-m\left(4\sqrt[4]{x^2+2x+1}+3m+3\right).3^x+1=0 \Leftrightarrow 3^{2(x+1)}-m\left(4\sqrt{|x+1|}+3m+3\right).3^x+1=0$

$\Leftrightarrow 3^{x+1}+\frac{1}{3^{x+1}}=\frac{1}{3}m\left(4\sqrt{|x+1|}+3m+3\right)$.

Đặt $x+1=t$ thì PT trở thành $3^t+\frac{1}{3^t}=\frac{1}{3}m\left(4\sqrt{|t|}+3m+3\right)$ $(*)$

Vậy bài toán trở thành tìm $m$ để phương trình $(*)$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt.

Nhận thấy, nếu $t_o$ là một nghiệm của $(*)$ thì $-t_o$ cũng là nghiệm của $(*)$.

Suy ra, điều kiện cần để phương trình $(*)$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt là $(*)$ có nghiệm $t=0$.

$\Rightarrow 1+1=\frac{1}{3}m.(3m+3) \Leftrightarrow m^2+m-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-2 \\ m=1 \end{array}\right.$.

Thử lại:

• Với $m=-2$ thì $(*)$ trở thành $3^t+\frac{1}{3^t}=\frac{-2}{3}\left(4\sqrt{|t|}-3\right)$.

Nhận thấy, $VT=3^t+\frac{1}{3^t} \overset{Cauchy}{\geq} 2$, $VP \leq \frac{-2}{3}.(-3)=2 \Rightarrow$ PT có nghiệm duy nhất $t=0$ nên $m=-2$ không thỏa mãn.

• Với $m=1$ thì $(*)$ trở thành $3^t+\frac{1}{3^t}=\frac{1}{3}\left(4\sqrt{|t|}+6\right) \Leftrightarrow 3^t+\frac{1}{3^t}-\frac{2}{3}\left(2\sqrt{|t|}+3\right)=0$ $(**)$

Xét hàm số $f(t)=3^t+\frac{1}{3^t}-\frac{2}{3}\left(2\sqrt{|t|}+3\right)$ với $t>0$.

Ta có, $f'(t)=3^t.\ln 3-\frac{\ln 3}{3^t}-\frac{2}{3\sqrt{t}}$; $f''(t)=3^t\ln^2 3+\frac{\ln^2 3}{3^t}+\frac{1}{3\sqrt{t^3}}>0$ với mọi $t>0$.

$\Rightarrow f'(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty) \Rightarrow f'(t)=0$ có nhiều nhất 1 nghiệm $t>0$.

$\Rightarrow f(t)=0$ có nhiều nhất 2 nghiệm $t>0$.

Lại có, $f(1)=0$ và $f(0)=0 \Rightarrow$ Phương trình $(**)$ có 3 nghiệm là $t=0$, $t=\pm 1$.

Vậy $m=1$ thỏa mãn.

**Câu 60.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2019;2019]$ để phương trình $2019^x+\frac{2x-1}{x+1}+\frac{mx-2m-1}{x-2}=0$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt?

**A.** 4038. **B.** 2019. **C.** 2017. **D.** 4039.

**Lời giải**

**Chọn C**

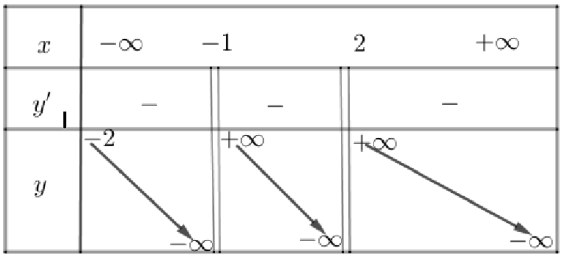
Ta có phương trình $2019^x+\frac{2x-1}{x+1}+\frac{mx-2m-1}{x-2}=0 \Leftrightarrow 2019^x+\frac{2x-1}{x+1}+\frac{m(x-2)-1}{x-2}=0$

$\Leftrightarrow 2019^x+\frac{2x-1}{x+1}+m-\frac{1}{x-2}=0 \Leftrightarrow m=\frac{1}{x-2}-2019^x-\frac{2x-1}{x+1}$.

Xét hàm số

$y=\dfrac{1}{x-2}-2019^x-\dfrac{2x-1}{x+1}\Rightarrow y'=-\dfrac{1}{(x-2)^2}-2019^x\ln(2019)-\dfrac{3}{(x+1)^2}<0;\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;2\}$.

Ta có bảng biến thiên




Vậy để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thì $m\in(-\infty;-2)$ mà $m\in[-2019;2019];m\in\mathbb{Z}$. Vậy ta có 2017 số nguyên $m$ cần tìm.

**Câu 61.** **(Chuyên Hưng Yên - 2020)** Gọi $S$ là tập hợp các giá trị của tham số $m$ sao cho hai phương trình $2x^2+1=3^m$ và $m=3^x-2x^2+x-1$ có nghiệm chung. Tính tổng các phần tử của $S$.

**A.** 6 **B.** 3. **C.** 1. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Vì hai phương trình đã cho có nghiệm chung nên hệ sau có nghiệm

$\begin{cases}2x^2+1=3^m\\ m=3^x-2x^2+x-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\log_3\left(2x^2+1\right)\\ m=3^x-2x^2+x-1\end{cases}\Rightarrow\log_3\left(2x^2+1\right)=3^x-2x^2+x-1$

$\Leftrightarrow\log_3\left(2x^2+1\right)+2x^2+1=3^x+x\Leftrightarrow 3^{\log_3\left(2x^2+1\right)}+\log_3\left(2x^2+1\right)=3^x+x$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=3^t+t$ xác định trên $\mathbb{R}\Rightarrow f'\left(t\right)=3^t.\ln 3+1>0$ suy ra hàm $f\left(t\right)=3^t+t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ suy ra $\log_3\left(2x^2+1\right)=x\Leftrightarrow 2x^2+1=3^x$.

Xét hàm số $g\left(x\right)=2x^2+1-3^x$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có $g'\left(x\right)=4x-3^x\ln 3\Rightarrow g''\left(x\right)=4-3^x\ln^2 3\Rightarrow g'''\left(x\right)=-3^x\ln^3 3<0$. Suy ra hàm số $g''\left(x\right)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó $g\left(x\right)=0$ có nhiều nhất là 3 nghiệm.

Ta lại có $g\left(0\right)=g\left(1\right)=g\left(2\right)=0$. Suy ra phương trình $2x^2+1=3^x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=1\\ x=2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\ m=1\\ m=2\end{array}\right.$.

Vậy $S=3$.

**Câu 62.** **(Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm - Quảng Nam - 2020)** Giá trị của tham số $m$ để phương trình $4^x-m.2^{x+1}+2m=0$ có hai nghiệm $x_1$, $x_2$ thỏa mãn $x_1+x_2=3$ là

**A.** $m=2$. **B.** $m=3$. **C.** $m=4$. **D.** $m=1$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đặt $t=2^x$, $t>0$.

Phương trình trở thành $t^2-2mt+2m=0$ (*).

Để phương trình ban đầu có 2 nghiệm thì phương trình (*) phải có 2 nghiệm dương

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'\geq 0\\ S>0\\ P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-2m\geq 0\\ 2m>0\\ 2m>0\end{cases}\Leftrightarrow m\geq 2.$

Ta có $x_1+x_2=3 \Leftrightarrow 2^{x_1+x_2}=2^3 \Leftrightarrow 2^{x_1}.2^{x_2}=8 \Leftrightarrow t_1.t_2=8 \Leftrightarrow 2m=8 \Leftrightarrow m=4.$

Kết luận $m=4.$

**Câu 63.** **(Chuyên Chu Văn An - 2020)** Tìm $m$ để phương trình $4^x-2^{x+1}+m=0$ có hai nghiệm trái dấu.

**A.** $m<0.$ **B.** $m>1.$ **C.** $-1<m<1.$ **D.** $0<m<1.$

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt $t=2^x$, điều kiện: $t>0.$

Phương trình trở thành: $t^2-2t+m=0$ (*)

Phương trình $4^x-2^{x+1}+m=0$ có 2 nghiệm phân biệt trái dấu

$\Leftrightarrow t^2-2t+m=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt $t_1,t_2$ thỏa mãn: $t_1<1<t_2.$

Phương trình (*) có 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=1-m>0\\ t_1.t_2=m>0\end{cases} \Leftrightarrow 0<m<1.$

Phương trình có một nghiệm lớn hơn 1 và một nghiệm nhỏ hơn 1 khi và chỉ khi

$(t_1-1)(t_2-1)<0$

$\Leftrightarrow t_1t_2-(t_1+t_2)+1<0$

$\Leftrightarrow m-2+1<0$

$\Leftrightarrow m<1.$

Kết hợp các điều kiện thì ta được $0<m<1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 64.** **(Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m$ để phương trình $9^x-2.6^{x+1}+(m-3).4^x=0$ có hai nghiệm phân biệt?

**A.** 35. **B.** 38. **C.** 34. **D.** 33.

**Lời giải**

**Chọn A**

Phương trình tương đương $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-12.\left(\frac{3}{2}\right)^x+(m-3)=0.$

Đặt $t=\left(\frac{3}{2}\right)^x$, $t>0.$

Phương trình trở thành $t^2-12.t+(m-3)=0$, $t>0$ (*)

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt dương.

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ P>0\\ S>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}39-m>0\\ m-3>0\\ 12>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m<39\\ m>3\end{cases} \Leftrightarrow 3<m<39.$

Vậy có 35 giá trị nguyên dương của tham số $m.$

**Câu 65.** **(ĐHQG Hà Nội - 2020)** Gọi $S$ là tập hợp các số nguyên $m$ sao cho phương trình $4^x-m.2^{x+1}+3m^2-500=0$ có 2 nghiệm phân biệt. Hỏi tập $S$ có bao nhiêu phần tử

**A.** 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đặt $t=2^x\,(t>0)$ khi đó phương trình $4^x-m.2^{x+1}+3m^2-500=0\,(1)$ trở thành:

$t^2-2m.t+3m^2-500=0\,(2)$. Để $(1)$ có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $(2)$

có 2 nghiệm dương phân biệt hay $\begin{cases}\Delta>0\\ P>0\\ S>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2-3m^2+500>0\\ 3m^2-500>0\\ 2m>0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5\sqrt{10} < m < 5\sqrt{10} \\ m < \dfrac{-10\sqrt{15}}{3} \vee m > \dfrac{10\sqrt{15}}{3} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{10\sqrt{15}}{3} < m < 5\sqrt{10}.$$

Vậy tập hợp các số nguyên $m$ là $S = \{13;14;15\}$.

**Câu 66.** **(ĐHQG Hà Nội - 2020)** Tìm điều kiện của tham số $a$ để phương trình sau có nghiệm: $9^{1+\sqrt{1-x^2}} - (a+2).3^{1+\sqrt{1-x^2}} + 2a + 1 = 0$. Hãy chọn đáp án đúng nhất?

**A.** $4 \le a \le \frac{64}{7}$. **B.** $2 \le a \le \frac{64}{9}$. **C.** $3 \le a \le \frac{50}{3}$. **D.** $1 \le a \le \frac{50}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $t = 3^{1+\sqrt{1-x^2}}$ vì $0 \le \sqrt{1-x^2} \le 1 \Rightarrow 3 \le t \le 9$. Khi đó bài toán trở thành tìm điều kiện của tham số $a$ để phương trình $t^2 - (a+2).t + 2a + 1 = 0 (*)$ có nghiệm trên đoạn $[3;9]$.

Ta có $(*) \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = a(t-2)$.

Vì $t = 2$ không phải nghiệm của phương trình nên $(*) \Leftrightarrow \dfrac{t^2 - 2t + 1}{t-2} = a$

Xét $f(t) = \dfrac{t^2 - 2t + 1}{t-2} \Rightarrow f'(t) = \dfrac{t^2 - 4t + 3}{t-2}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \notin [3;9] \\ t = 3 \in [3;9] \end{array}\right.$

Ta có $f(3) = 4; f(9) = \dfrac{64}{7} \Rightarrow 4 \le a \le \dfrac{64}{7}$ thì phương trình bài ra có nghiệm.

**Câu 67.** **(ĐHQG Hà Nội - 2020)** Điều kiện của $m$ để hệ bất phương trình $\begin{cases} 7^{2x+\sqrt{x+1}} - 7^{2+\sqrt{x+1}} + 2020x \le 2020 \\ x^2 - (m+2)x + 2m + 3 \ge 0 \end{cases}$ có nghiệm là :

**A.** $m \ge -3$. **B.** $-2 \le m \le 1$. **C.** $-1 \le m \le 2$. **D.** $m \ge -2$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$7^{2x+\sqrt{x+1}} - 7^{2+\sqrt{x+1}} + 2020x \le 2020 \Leftrightarrow 7^{2x+\sqrt{x+1}} + 1010.\left(2x+\sqrt{x+1}\right) \le 7^{2+\sqrt{x+1}} + 1010.\left(2+\sqrt{x+1}\right)$ $(*)$

Hàm số $f(t) = 7^t + 1010.t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$(*) \Leftrightarrow f\left(2x+\sqrt{x+1}\right) \le f\left(2+\sqrt{x+1}\right)$

Suy ra : $2x + \sqrt{x+1} \le 2 + \sqrt{x+1} \Rightarrow -1 \le x \le 1$.

$x \in [-1;1]$: $x^2 - (m+2)x + 2m + 3 \ge 0 \Leftrightarrow m \ge \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x-2}$.

Ycbt $\Leftrightarrow \exists x \in [-1;1]$: $m \ge \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x-2}$ $(**)$

| $x$ | $-1$ | | $2-\sqrt{3}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $\frac{x^2-2x+3}{x-2}$ | $-2$ | ↗ | $2-2\sqrt{3}$ | ↘ | $-2$ |

Từ bảng biến thiên ta có, $(**) \Leftrightarrow m \ge -2$.

**Câu 68.** **(Sở Phú Thọ - 2020)** Cho phương trình $16^{x^2}-2.4^{x^2+1}+10=m$ ($m$ là tham số). Số giá trị nguyên của tham $m\in[-10;10]$ để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm thực phân biệt là

**A.** $7$. **B.** $9$. **C.** $8$. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đặt $t=4^{x^2}$, $t\geq 1$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành $t^2-8t+10=m$ (1)

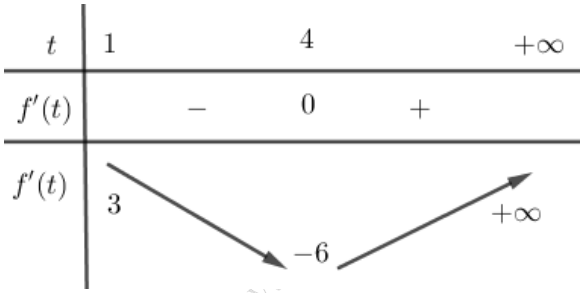
Nghiệm $t=1$ cho một nghiệm $x=0$.

Mỗi nghiệm $t>1$ cho hai nghiệm $x$ đối nhau.

Do vậy phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có đúng một nghiệm $t>1$, nghiệm còn lại (nếu có) phải nhỏ hơn 1.

Xét hàm số $f(t)=t^2-8t+10$.

Bảng biến thiên




Từ bảng biến thiên ta có phương trình (1) có một nghiệm lớn hơn 1 khi $\left[\begin{array}{l} m>3 \\ m=-6 \end{array}\right.$.

Suy ra số giá trị nguyên $m\in[-10;10]$ là 8.

**Câu 69.** **(Sở Hà Tĩnh - 2020)** Gọi $S$ là tập nghiệm của phương trình $\left(2^x-2x\right)\sqrt{(3)^{2^x}-m}=0$ (với $m$ là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[-2020;2020]$ để tập hợp $S$ có hai phần tử?

**A.** 2094. **B.** 2092. **C.** 2093. **D.** 2095.

**Lời giải.**

**Chọn A**

Gọi $D$ là tập xác định của phương trình đã cho.

Nếu $m\leq 1$ thì $3^{2^x}-m>0\forall x\in\mathbb{R}$ nên $D=\mathbb{R}$.

Nếu $m>1$ thì $D=\left[\log_2\left(\log_3 m\right);+\infty\right)$.

$$\left(2^x-2x\right)\sqrt{(3)^{2^x}-m}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 2^x-2x=0(1) \\ (3)^{2^x}-m=0(2) \end{array}\right.$$

Xét hàm số $f(x)=2^x-2x$ có $f'(x)=2^x\ln 2-2; f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{2}{\ln 2}$ do đó phương trình $f(x)=0$ có không quá 2 nghiệm.

Mặt khác $f(1)=0; f(2)=0$ nên $(1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Lại có với $m>1, (2)\Leftrightarrow x=\log_2\left(\log_3 m\right)$.

Nếu $m \le 1$ thì $S = \{1;2\}$ (thỏa mãn yêu cầu bài toán).

Nếu $m > 1$ thì $S$ có hai phần tử khi và chỉ khi $1 \le \log_2(\log_3 m) < 2 \Leftrightarrow 9 \le m < 81$.

Vậy $S$ có hai phần tử khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} m \le 1 \\ 9 \le m < 81 \end{array}\right. (*)$. Số các giá trị nguyên của $m \in [-2020;2020]$ thỏa mãn $(*)$ là $1 + 2020 + 1 + 81 - 9 = 2094$.

**Câu 70.** **(Sở Ninh Bình 2020)** Cho hai số thực bất kỳ $a > 1$, $b > 1$. Gọi $x_1$, $x_2$ là hai nghiệm phương trình $a^x b^{x^2-1} = 1$. Trong trường hợp biểu thức $S = \left(\dfrac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}\right)^2 - 6x_1 - 6x_2$ đạt giá trị nhỏ nhất, khẳng định nào dưới đây đúng?

**A.** $a = b^{\sqrt[3]{3}}$. **B.** $a = b^{\sqrt[3]{6}}$. **C.** $a = b^{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}}$. **D.** $a = b^{\sqrt[3]{\frac{1}{6}}}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $a^x b^{x^2-1} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{a^x b^{x^2}}{b} = 1 \Leftrightarrow a^x b^{x^2} = b \Leftrightarrow \ln\left(a^x b^{x^2}\right) = \ln b$

$\Leftrightarrow \ln a^x + \ln b^{x^2} = \ln b \Leftrightarrow x^2 \ln b + x \ln a - \ln b = 0$.

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $\begin{cases} \ln b \ne 0 \; \forall b > 1 \\ \Delta = \ln^2 a + 4\ln^2 b \ge 0 \;\; \forall a > 1, b > 1 \end{cases}$.

Vậy phương trình đã cho luôn có hai nghiệm $x_1$, $x_2$.

Theo định lý Viét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{\ln a}{\ln b} = -\log_b a \\ x_1 . x_2 = -\dfrac{\ln b}{\ln b} = -1 \end{cases}$.

Khi đó ta có $S = \left(\dfrac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}\right)^2 - 6x_1 - 6x_2 = \left(\dfrac{-1}{-\log_b a}\right)^2 + 6\log_b a = \dfrac{1}{\log_b^2 a} + 6\log_b a$.

Do $a > 1$, $b > 1 \Rightarrow \log_b a > \log_b 1 = 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$S = \dfrac{1}{\log_b^2 a} + 6\log_b a = \dfrac{1}{\log_b^2 a} + 3\log_b a + 3\log_b a \ge 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{\log_b^2 a} . 3\log_b a . 3\log_b a} = 3\sqrt[3]{9}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{1}{\log_b^2 a} = 3\log_b a \Leftrightarrow \log_b^3 a = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow \log_b a = \sqrt[3]{\dfrac{1}{3}} \Leftrightarrow a = b^{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}}$.

Vậy khẳng định đúng là $a = b^{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}}$.

**Câu 71.** **(Sở Bắc Ninh - 2020)** Gọi $S$ là tập tất cả các giá trị của $m$ để phương trình $16^x - 6.8^x + 8.4^x - m.2^{x+1} - m^2 = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt. Khi đó $S$ có

**A.** 4 tập con. **B.** Vô số tập con. **C.** 8 tập con. **D.** 16 tập con.

**Lời giải**

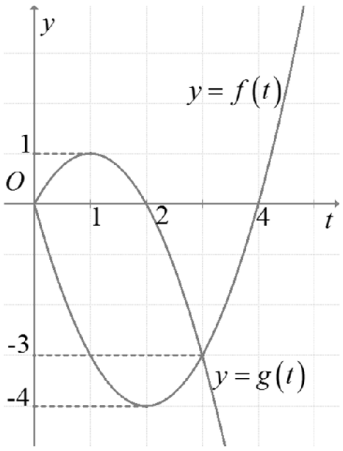
**Chọn D**

Đặt $t = 2^x, (t > 0)$, phương trình đã cho trở thành $t^4 - 6t^3 + 8t^2 - 2mt - m^2 = 0 (*), t > 0$.

Phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có đúng hai nghiệm dương phân biệt.

$(*) \Leftrightarrow \left(t^4 - 6t^3 + 9t^2\right) - \left(t^2 + 2mt + m^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = t^2 - 4t \, (1) \\ m = -t^2 + 2t \, (2) \end{array}\right.$.

Xét hai hàm số $f(t)=t^2-4t; g(t)=-t^2+2t$ trên khoảng $(0;+\infty)$ có đồ thị như sau




Dựa vào đồ thị hai hàm số này ta suy ra phương trình $(*)$ có đúng hai nghiệm dương phân biệt khi và chỉ khi $m\in\{0;1;-3;-4\}$ hay $S$ có 4 phần tử.

Vậy $S$ có $2^4=16$ tập con.

**Câu 72.** **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - 2020)** Tìm tập hợp các giá trị của tham số thực $m$ để phương trình $6^x+(3-m)2^x-m=0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

**A.** $[3;4]$. **B.** $[2;4]$. **C.** $(2;4)$. **D.** $(3;4)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Phương trình $6^x+(3-m)2^x-m=0\Leftrightarrow m=\dfrac{6^x+3.2^x}{1+2^x}$.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{6^x+3.2^x}{1+2^x}$ liên tục trên $(0;1)$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{12^x\ln 3+6^x\ln 6+3.2^x\ln 2}{(1+2^x)^2}>0,\forall x\in(0;1)$. Suy ra hàm số $f(x)=\dfrac{6^x+3.2^x}{1+2^x}$ đồng biến trên $(0;1)$.

Do đó phương trình $6^x+(3-m)2^x-m=0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$ khi và chỉ khi $f(0)<m<f(1)$, tức là $2<m<4$.

**Câu 73.** **(Nguyễn Huệ - Phú Yên - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in(-2019;2020)$ sao cho hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases}4+9.3^{x^2-2y}=\left(4+9^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2}\\ 2x-1=\sqrt{2y-2x+m}\end{cases}?$$

**A.** 2017. **B.** 2021. **C.** 2019. **D.** 2020.

**Lời giải**

**Chọn A**

Xét phương trình: $4+9.3^{x^2-2y}=\left(4+9^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2}$.

Đặt $t=x^2-2y$, phương trình trở thành: $4+9.3^t=\left(4+9^t\right).7^{2-t}\Leftrightarrow 4.7^t+9.3^t.7^t=4.49+49.3^{2t}$

$\Leftrightarrow 4\left(7^t-7^2\right)=3^t\left(3^t.7^2-7^t.3^2\right)\quad(*)$.

Giả sử $3^t.7^2-7^t.3^2<0\Leftrightarrow\left(\dfrac{3}{7}\right)^t<\left(\dfrac{3}{7}\right)^2\Leftrightarrow t>2$.

Nếu $t>2\Rightarrow\begin{cases}VT(*)>0\\VP(*)<0\end{cases}\Rightarrow(*)$ vô nghiệm.

Nếu $t<2\Rightarrow\begin{cases}VT(*)<0\\VP(*)>0\end{cases}\Rightarrow(*)$ vô nghiệm.

Nếu $t=2\Rightarrow VT(*)=VP(*)\Rightarrow(*)$ có nghiệm duy nhất $t=2\Rightarrow x^2-2y=2\Rightarrow 2y=x^2-2$

Ta được: $2x-1=\sqrt{x^2-2x-2+m}\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2-2x+3=m\quad(1)\\x\ge\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

Xét hàm số $f(x)=3x^2-2x+3$, với $x\in\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)\Rightarrow f'(x)=6x-2>0,\forall x\ge\dfrac{1}{2}$, suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)\Rightarrow f(x)\ge f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{11}{4}\Rightarrow(1)$ có nghiệm $x\in\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ khi $m\ge\dfrac{11}{4}\Rightarrow m\in\left[\dfrac{11}{4};2020\right)$. Vì $m$ nguyên nên $m\in\{3;4;5;...;2019\}$.

Vậy có 2017 giá trị của $m$.

**Câu 74.** **(Nguyễn Trãi - Thái Bình - 2020)** Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $e^{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\tan x$ thuộc đoạn $[0;50\pi]$

**A.** $\dfrac{2671\pi}{2}$. **B.** $\dfrac{1853\pi}{2}$. **C.** $\dfrac{2475\pi}{2}$. **D.** $\dfrac{2653\pi}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện: $\cos x\ne 0$. Nhận thấy $e^{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}>0\ \forall x\in R\Rightarrow\tan x>0$.

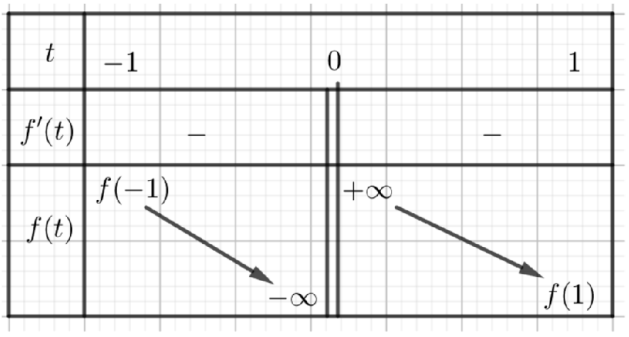
Ta có: $e^{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\tan x\Leftrightarrow e^{\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x-\cos x)}=\dfrac{\sin x}{\cos x}\Leftrightarrow\dfrac{e^{\frac{\sin x}{\sqrt{2}}}}{e^{\frac{\cos x}{\sqrt{2}}}}=\dfrac{\sin x}{\cos x}\Leftrightarrow\dfrac{e^{\frac{\sin x}{\sqrt{2}}}}{\sin x}=\dfrac{e^{\frac{\cos x}{\sqrt{2}}}}{\cos x}\ (*)$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}}{t}$, $t\in(-1;0)\cup(0;1)$ có:

$$f'(t)=\frac{e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}(\sqrt{2}t-2)}{2t^2}<0,\forall t\in(-1;0)\cup(0;1)$$

$\Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$ và $(0;1)$.

Bảng biến thiên:




Từ bảng biến thiên ta thấy: $f(-1)=-e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}<0,\ f(1)=e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}>0$.

Do đó từ (*) ta có: $f(\sin x)=f(\cos x)\Leftrightarrow \sin x=\cos x\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in Z$.

Theo giả thiết $x\in[0;50\pi]\Rightarrow 0\le\frac{\pi}{4}+k\pi\le 50\pi\Leftrightarrow -\frac{1}{4}\le k\le\frac{199}{4}$ (**)

Do $k\in Z$ nên từ (**) suy ra $k\in\{0;1;...;49\}$, có 50 giá trị $k$ thỏa mãn.

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình trên đoạn $[0;50\pi]$ là:

$$S=\sum_{k=0}^{49}(\frac{\pi}{4}+k\pi)=\frac{2475\pi}{2}.$$

**Câu 75.** **(Trần Phú - Quảng Ninh - 2020)** Tìm tập hợp các giá trị của tham số $m$ để phương trình (ẩn $x$): $3^{\log_2 x^2}-2(m+3).3^{\log_2 x}+m^2+3=0$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn: $x_1x_2>2$.

**A.** $(-1;+\infty)\setminus\{0\}$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus[-1;1]$. **D.** $(-1;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện xác định: $x>0$.

Ta có: $3^{\log_2 x^2}-2(m+3).3^{\log_2 x}+m^2+3=0\ (1)$

$\Leftrightarrow\left(3^{\log_2 x}\right)^2-2(m+3).3^{\log_2 x}+m^2+3=0$

Đặt: $t=3^{\log_2 x}\ (t>0)$

$\Rightarrow \log_2 x=\log_3 t$

$\Leftrightarrow x=2^{\log_3 t}$

Khi đó: $t^2-2(m+3)t+m^2+3=0\ (2)$

Phương trình $(1)$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình $(2)$ có hai nghiệm phân biệt dương $t_1;t_2$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\S>0\\P>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m+3)^2-(m^2+3)>0\\2(m+3)>0\\m^2+3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-1\\m>-3\end{cases}\Leftrightarrow m>-1.$$

Theo hệ thức Vi-et, ta có: $\begin{cases}t_1+t_2=2(m+3)\\t_1.t_2=m^2+3\end{cases}$

Ta có: $x_1.x_2>2$

$\Leftrightarrow 2^{\log_3 t_1}.2^{\log_3 t_2}>2$

$\Leftrightarrow 2^{\log_3(t_1.t_2)}>2$

$\Leftrightarrow 2^{\log_3(m^2+3)}>2$

$\Leftrightarrow \log_3(m^2+3)>1$

$\Leftrightarrow m^2+3>3$

$\Leftrightarrow m^2>0$

$\Leftrightarrow m\ne 0$

Vậy $\begin{cases}m>-1\\m\ne 0\end{cases}$.

## Dạng 3. Phương trình kết hợp của mũ và logarit chứa tham số

**Câu 1.** **(Mã 103 -2019)** Cho phương trình $(2\log_3^2 x-\log_3 x-1)\sqrt{5^x-m}=0$ ($m$ là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của $m$ để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

**A.** Vô số. **B.** 124. **C.** 123. **D.** 125.

**Lời giải**

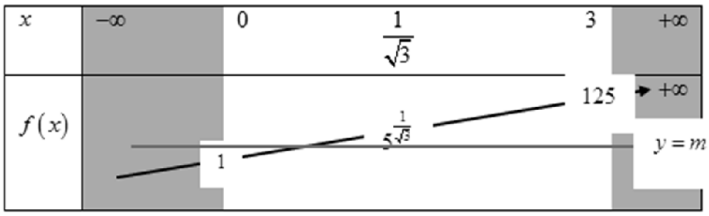
**Chọn C**

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ 5^x - m \ge 0 \ (m>0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x \ge \log_5 m \end{cases}$.

$\left(2\log_3^2 x - \log_3 x - 1\right)\sqrt{5^x - m} = 0$ (1)

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\log_3^2 x - \log_3 x - 1 = 0 \\ 5^x - m = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3, x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ f(x) = 5^x = m \end{array}\right.$.

Xét $f(x) = 5^x$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.




Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì

$\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ 5^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \le m < 125 \end{array}\right., \ m \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < m \le 1 \\ 3 \le m \le 124 \end{array}\right.$

Nên có 123 giá trị m thoả mãn.

**Câu 2.** **(Mã 102 - 2019)** Cho phương trình $\left(2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 2\right)\sqrt{3^x - m} = 0$ ($m$ là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của $m$ để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

**A.** vô số. **B.** 81. **C.** 79. **D.** 80.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện $\begin{cases} x>0 \\ 3^x - m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ m \le 3^x \end{cases}$ (*)

Ta có $\left(2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 2\right)\sqrt{3^x - m} = 0$ (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2\log_2^2 x - 3\log_2 x - 2 = 0 & (2) \\ \sqrt{3^x - m} = 0 & (3) \end{array}\right.$.

Trong đó $(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 2 \\ \log_2 x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right.$ .(4)

Với $m>0$ thì $3^x = m \Leftrightarrow \log_3 m = x$.

Do đó, phương trình (1) có đúng hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi xảy ra các trường hợp sau:

TH1: (3) có nghiệm $x = \log_3 m \le 0 \Leftrightarrow 0 < m \le 1$. Kết hợp điều kiện (*) và (4) ta được $m = 1$ thì (1) có hai nghiệm phân biệt $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ và $x = 4$.

TH2: $m > 1$, khi đó (*) $\Leftrightarrow x \ge \log_3 m > 0$.

Và do $4 > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ nên (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \le \log_3 m < 4 \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \le m < 3^4$.

Mà $m$ nguyên dương nên ta có $m \in \{3, 4, ..., 80\}$, có 78 giá trị của $m$.

Vậy có 79 giá trị nguyên dương của $m$ để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt

**Câu 3.** **(Mã 104 2019)** Cho phương trình $\left(2\log_3^2 x-\log_3 x-1\right)\sqrt{4^x-m}=0$ ($m$ là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của $m$ để phương trình có đúng hai nghiệm phân biệt?

**A.** $64$. **B.** Vô số. **C.** $62$. **D.** $63$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có điều kiện $\begin{cases}x>0\\ x\ge\log_4 m\end{cases}$ (*) (với $m$ nguyên dương).

Phương trình $\left(2\log_3^2 x-\log_3 x-1\right)\sqrt{4^x-m}=0$ $(1)$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\log_3^2 x-\log_3 x-1=0\ (2)\\ 4^x=m\ (3)\end{array}\right.$.

Phương trình $(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_3 x=1\\ \log_3 x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{array}\right.$.

Phương trình $(3)\Leftrightarrow x=\log_4 m$.

Do $m$ nguyên dương nên ta có các trường hợp sau:

**TH 1:** $m=1$ thì $\log_4 m=0$. Do đó (*) là $x>0$.

Khi đó nghiệm của phương trình $(3)$ bị loại và nhận nghiệm của phương trình $(2)$.

Do đó nhận giá trị $m=1$.

**TH 2:** $m\ge 2$ thì (*) là $x\ge\log_4 m$ (vì $\log_4 m\ge\dfrac{1}{2}$)

Để phương trình $(1)$ có đúng hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{3}}{3}\le\log_4 m<3$

$\Leftrightarrow 4^{\frac{\sqrt{3}}{3}}\le m<4^3$

Suy ra $m\in\{3;4;5;\ldots;63\}$.

Vậy từ cả 2 trường hợp ta có: $63-3+1+1=62$ giá trị nguyên dương $m$.

**Câu 4.** **(Mã 101 2019)** Cho phương trình $\left(4\log_2^2 x+\log_2 x-5\right)\sqrt{7^x-m}=0$ ($m$ là tham số thực). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của $m$ để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm phân biệt?

**A.** $49$. **B.** $47$. **C.** Vô số. **D.** $48$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện: $\begin{cases}x>0\\ 7^x-m\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ 7^x\ge m\end{cases}$.

* Trường hợp $m\le 0$ thì $\left(4\log_2^2 x+\log_2 x-5\right)\sqrt{7^x-m}=0\Leftrightarrow 4\log_2^2 x+\log_2 x-5=0$

$\Leftrightarrow\left(\log_2 x-1\right)\left(4\log_2 x+5\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x=1\\ \log_2 x=-\dfrac{5}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\ x=2^{-\frac{5}{4}}\end{array}\right.$.

Trường hợp này không thỏa điều kiện $m$ nguyên dương.

* Trường hợp $m>0$, ta có $\begin{cases}x>0\\ 7^x\ge m\end{cases}\Leftrightarrow x\ge\log_7 m$ nếu $m>1$ và $x>0$ nếu $0<m\le 1$.

Khi đó $\left(4\log_2^2 x+\log_2 x-5\right)\sqrt{7^x-m}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4\log_2^2 x+\log_2 x-5=0\\ \sqrt{7^x-m}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=2^{-\frac{5}{4}}\\ x=\log_7 m\end{array}\right.$.

+ Xét $0<m\le 1$ thì nghiệm $x=\log_7 m\le 0$ nên trường hợp này phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm $x=2;x=2^{-\frac{5}{4}}$ thỏa mãn điều kiện.

+ Xét $m>1$, khi đó điều kiện của phương trình là $x\ge \log_7 m$.

Vì $2>2^{-\frac{5}{4}}$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $2>\log_7 m\ge 2^{-\frac{5}{4}}$

$\Leftrightarrow 7^{2^{-\frac{5}{4}}}\le m<7^2$.

Trường hợp này $m\in\{3;4;5;...;48\}$, có 46 giá trị nguyên dương của $m$.

Tóm lại có 47 giá trị nguyên dương của $m$ thỏa mãn.

Chọn phương án

**B.**

**Câu 5.** **(Mã 102 2018)** Cho phương trình $3^x+m=\log_3(x-m)$ với $m$ là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-15;15)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

**A.** 15 **B.** 16 **C.** 9 **D.** 14

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $3^x+m=\log_3(x-m)\Leftrightarrow 3^x+x=\log_3(x-m)+x-m \quad (*)$.

Xét hàm số $f(t)=3^t+t$, với $t\in\mathbb{R}$. Có $f'(t)=3^t\ln 3+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên tập xác định. Mặt khác phương trình (*) có dạng: $f(x)=f\left(\log_3(x-m)\right)$. Do đó ta có $f(x)=f\left(\log_3(x-m)\right)\Leftrightarrow x=\log_3(x-m)\Leftrightarrow 3^x=x-m\Leftrightarrow 3^x-x=-m$

Xét hàm số $g(x)=3^x-x$, với $x\in\mathbb{R}$. Có $g'(x)=3^x\ln 3-1$, $g'(x)=0\Leftrightarrow x=\log_3\left(\frac{1}{\ln 3}\right)$

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $\log_3\left(\frac{1}{\ln 3}\right)$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $g\left(\log_3\left(\frac{1}{\ln 3}\right)\right)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên ta thấy các giá trị của tham số để phương trình có nghiệm là:

$m\in\left(-\infty;-g\left(\log_3\left(\frac{1}{\ln 3}\right)\right)\right]$. Vậy số giá trị nguyên của $m\in(-15;15)$ để phương trình đã cho có nghiệm là: 14.

**Câu 6.** **(Mã 101 2018)** Cho phương trình $5^x+m=\log_5(x-m)$ với $m$ là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-20;20)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

**A.** 19 **B.** 9 **C.** 21 **D.** 20

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện: $x>m$

Đặt: $t=\log_5(x-m)\Rightarrow\begin{cases}x-m=5^t\\5^x+m=t\end{cases}\Rightarrow 5^x+x=5^t+t\ \ (1)$.

Xét hàm số $f(u)=5^u+u\Rightarrow f'(u)=5^u\ln 5+1>0,\forall u\in\mathbb{R}$.

Do đó: $(1)\Leftrightarrow x=t\Leftrightarrow x=5^x+m\Leftrightarrow m=x-5^x$.

Xét hàm số $f(x)=x-5^x$, $x>m$

Do: $5^x>0\Rightarrow m<x$, suy ra phương trình có nghiệm luôn thỏa điều kiện.

$f'(x)=1-5^x\ln 5$, $f'(x)=0\Leftrightarrow 1-5^x\ln 5=0\Leftrightarrow x=\log_5\left(\dfrac{1}{\ln 5}\right)$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $\approx -0{,}295$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $-\infty$ | ↗ | $\approx -0{,}917$ | ↘ | $-\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên $\Rightarrow m\le\approx -0{,}917\xrightarrow{m\in(-20;20)}m=\{-19;-18;...;-1\}$.

Vậy có 19 giá trị nguyên của $m$ thỏa ycbt.

**Câu 7.** **(Mã 103 -2018)** Cho phương trình $7^x+m=\log_7(x-m)$ với $m$ là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-25;25)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

**A.** 9 **B.** 25 **C.** 24 **D.** 26

**Lời giải**

**Chọn C**

ĐK: $x>m$

Đặt $t=\log_7(x-m)$ ta có $\begin{cases}7^x+m=t\\7^t+m=x\end{cases}\Rightarrow 7^x+x=7^t+t\ \ (1)$

Do hàm số $f(u)=7^u+u$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên ta có $(1)\Leftrightarrow t=x$. Khi đó:

$7^x+m=x\Leftrightarrow m=x-7^x$.

Xét hàm số $g(x)=x-7^x\Rightarrow g'(x)=1-7^x\ln 7=0\Leftrightarrow x=-\log_7(\ln 7)$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $-\log_7(\ln 7)$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $g(-\log_7(\ln 7))$ | ↘ | $-\infty$ |

Từ đó phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m\le g(-\log_7(\ln 7))\approx -0{,}856$ (cácnghiệm này đều thỏa mãn điều kiện vì $x-m=7^x>0$)

Do $m$ nguyên thuộc khoảng $(-25;25)$, nên $m\in\{-24;-16;...;-1\}$.

**Câu 8.** Cho phương trình $5^x+m+\log_{\frac{1}{5}}(x-m)=0$ với $m$ là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-20;20)$ để phương trình đã cho có nghiệm thực?

**A.** 20. **B.** 21. **C.** 18. **D.** 19.

**Lời giải**

Ta có: $5^x+m+\log_{\frac{1}{5}}(x-m)=0\Leftrightarrow 5^x=\log_5(x-m)-m=0\ (1)$.

ĐKXĐ: $x>m$.

Đặt $t=\log_5(x-m)$, ta có $x-m=5^t$.

Khi đó ta có hệ phương trình $\begin{cases}x-m=5^t\\ t-m=5^x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-m=5^t\ (*)\\ 5^x+x=5^t+t\ (2)\end{cases}$.

Xét hàm số $f(u)=5^u+u$ ,u $\in\mathbb{R}$.

+ $f'(u)=5^u\ln 5+1>0,\forall u$ suy ra hàm số $f(u)=5^u+u$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(2)\Leftrightarrow f(x)=f(t)\Leftrightarrow x=t$.

Thay vào phương trình $(*)$ ta có $m=x-5^x\ (3)$.

Ta có $x-m=5^x>0$, do đó phương trình $(1)$ có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình $(3)$ có nghiệm $x\in\mathbb{R}$.

Xét hàm số $g(x)=x-5^x$ ,$x\in\mathbb{R}$, có $g'(x)=1-5^x\ln 5, g'(x)=0\Leftrightarrow x=\log_5\left(\frac{1}{\ln 5}\right)$.

+ $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-5^x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-5^x)=-\infty$.

BBT

| $x$ | $-\infty$ | | $\log_5\left(\frac{1}{\ln 5}\right)$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $\log_5\left(\frac{1}{e\ln 5}\right)$ | ↘ | $-\infty$ |

Nguyễn Bảo Vương

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m\le\log_5\left(\frac{1}{e\ln 5}\right)\simeq -0,91$.

Vì $m\in(-20;20)$ và là số nguyên, suy ra $m\in\{-20;-19;...;-1\}$

Vậy có 19 giá trị của $m$.

**Câu 9.** **(Mã 104 2018)** Cho phương trình $2^x+m=\log_2(x-m)$ với $m$ là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in(-18;18)$ để phương trình đã cho có nghiệm?

**A.** 9 **B.** 19 **C.** 17 **D.** 18

**Lời giải**

**Chọn C**

ĐK: $x>m$

Đặt $t=\log_2(x-m)$ ta có $\begin{cases}2^x+m=t\\ 2^t+m=x\end{cases}\Rightarrow 2^x+x=2^t+t\ (1)$

Do hàm số $f(u)=2^u+u$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên ta có $(1)\Leftrightarrow t=x$. Khi đó:

$2^x+m=x\Leftrightarrow m=x-2^x$.

Xét hàm số $g(x)=x-2^x\Rightarrow g'(x)=1-2^x\ln 2=0\Leftrightarrow x=-\log_2(\ln 2)$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | $-\log_2(\ln 2)$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $g(x)$ | $-\infty$ | $g(-\log_2(\ln 2))$ | $-\infty$ |

Từ đó phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m \le g\left(-\log_2(\ln 2)\right) \approx -0,914$ (các nghiệm này đều thỏa mãn điều kiện vì $x-m=2^x>0$)

Do $m$ nguyên thuộc khoảng $(-18;18)$, nên $m \in \{-17;-16;...;-1\}$.

**Câu 10.** **(Chuyên Nguyễn Du-ĐăkLăk 2019)** Cho phương trình $5^x+m=\log_5(x-m)$. Có bao nhiêu giá trị $m$ nguyên trong khoảng $(-20;20)$ để phương trình trên có nghiệm?

**A.** 15. **B.** 19. **C.** 14. **D.** 17.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có phương trình $5^x+m=\log_5(x-m)$ (1) với điều kiện $x-m>0$.

Đặt $\log_5(x-m)=t \Leftrightarrow x-m=5^t$ (*) thay vào phương trình (1) ta có $5^x+m=t \Leftrightarrow t-m=5^x$(**). Từ (*) và (**) ta có hệ phương trình $\begin{cases} x-m=5^t \\ t-m=5^x \end{cases}$. Từ hệ phương trình ta suy ra $x-t=5^t-5^x$

$\Leftrightarrow x+5^x=t+5^t$.

Xét hàm số $f(x)=x+5^x$ trên $\mathbb{R}$, ta có $f'(x)=1+5^x.\ln 5>0 \ \forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)=x+5^x$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó ta có $x+5^x=t+5^t \Leftrightarrow f(x)=f(t) \Leftrightarrow x=t$ thay vào phương trình (**) ta có $x-m=5^x \Leftrightarrow x-5^x=m$. Đặt $g(x)=x-5^x$ ta có $g'(x)=1-5^x.\ln 5$. Ta có

$g'(x)=0 \Leftrightarrow 1-5^x.\ln 5=0 \Leftrightarrow 5^x=\dfrac{1}{\ln 5} \Leftrightarrow x=\log_5\left(\dfrac{1}{\ln 5}\right)$.

Ta có BBT với $g\left(\log_5\left(\dfrac{1}{\ln 5}\right)\right)=\log_5\left(\dfrac{1}{\ln 5}\right)-\dfrac{1}{\ln 5}=\alpha$.

| $x$ | $-\infty$ | $\log_5\left(\dfrac{1}{\ln 5}\right)$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $g(x)$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $-\infty$ |

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình $x-5^x=m$ có nghiệm khi $m\le\alpha$ hay $m\le\log_5\left(\dfrac{1}{\ln 5}\right)-\dfrac{1}{\ln 5}$. Ta suy ra có 19 giá trị nguyên của $m$ thỏa mãn.

**Câu 11.** Tổng tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình $2^{x^2+4x+5-m^2}=\log_{x^2+4x+6}(m^2+1)$ có đúng 1 nghiệm là

**A.** $-2$. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 0.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt $t = x^2 + 4x + 5$, khi đó $t \ge 1$.

Thế vào phương trình đã cho ta được phương trình sau

$$2^t \ln(t+1) = 2^{m^2} \ln(m^2+1) \Leftrightarrow t = m^2 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 5 = m^2$$

(Do hàm đặc trưng $f(u) = 2^u \ln(u+1)$ có

$f'(u) = \dfrac{2^u}{u+1} + 2^u \ln(u+1).\ln 2 \ge 0, \forall u \ge 0 \Rightarrow f(u)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$)

Vậy $2^{x^2+4x+5-m^2} = \log_{x^2+4x+6}(m^2+1)$ có đúng 1 nghiệm

$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 5 - m^2 = 0$ có đúng 1 nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow m = \pm 1 \Rightarrow$ Tổng tất cả các giá trị m bằng $0$.

**Câu 12.** Tổng tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình $3^{x^2-2x+1-2|x-m|} = \log_{x^2-2x+3}(2|x-m|+2)$ có đúng ba nghiệm phân biệt là:

**A.** $2$. **B.** $3$. **C.** $1$. **D.** $0$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Phương trình tương đương $3^{x^2-2x+3-(2|x-m|+2)} = \dfrac{\ln(2|x-m|+2)}{\ln(x^2-2x+3)}$

$$\Leftrightarrow 3^{x^2-2x+3}.\ln(x^2-2x+3) = 3^{2|x-m|+2}.\ln(2|x-m|+2) \ (*).$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = 3^t.\ln t, t \ge 2$ là hàm số đồng biến nên từ phương trình (*) suy ra

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = 2|x-m| + 2 \Leftrightarrow g(x) = x^2 - 2x - 2|x-m| + 1 = 0$.

Có $g(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 2m + 1 \ khi \ x \ge m \\ x^2 - 2m + 1 \quad khi \ x \le m \end{cases} \Rightarrow g'(x) = \begin{cases} 2x - 4 \ khi \ x \ge m \\ 2x \quad khi \ x \le m \end{cases}$

và $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \ khi \ x \ge m \\ x = 0 \ khi \ x \le m \end{array}\right.$.

Xét các trường hợp sau:

TH1: $m \le 0$ ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $m$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | ↘ | | ↘ | | ↘ | | ↗ | $+\infty$ |

Phương trình chỉ có tối đa 2 nghiệm nên không có $m$ thoả mãn.

TH2: $m \ge 2$ tương tự.

TH3: $0 < m < 2$, bảng biến thiên $g(x)$ như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $m$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $-2m+1$ | ↗ | $(m+1)^2$ | ↘ | $2m-3$ | ↗ | $+\infty$ |

Phương trình có 3 nghiệm khi $\left[\begin{array}{l}(m-1)^2=0\\-2m+1=0>2m-3\\-2m+1<0=2m-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=\dfrac{1}{2}\\m=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$.

Cả 3 giá trị trên đều thoả mãn, nên tổng của chúng bằng 3.

**Câu 13.** **(Chuyên Lam Sơn - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $a$ trên đoạn $[-10;10]$ để phương trình $e^{x+a}-e^x=\ln(1+x+a)-\ln(1+x)$ có nghiệm duy nhất.

**A.** 2. **B.** 10. **C.** 1. **D.** 20

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện xác định $\begin{cases}x+1+a>0\\x+1>0\end{cases}$ (*)

Phương trình tương đương với $e^{x+a}-e^x-\left(\ln(1+x+a)-\ln(1+x)\right)=0$.

Đặt $f(x)=e^{x+a}-e^x$, $g(x)=\ln(1+x+a)-\ln(1+x)$, $Q(x)=f(x)-g(x)$

Phương trình đã cho viết lại thành $Q(x)=0$

+) Với $a=0$ thì $Q(x)=0$ (luôn đúng với mọi $x$ thoả mãn (*)).

+) Với $a>0$ có (*) tương đương với $x>-1$, $f(x)$ đồng biến và $g(x)$ nghịch biến với $x>-1$

Khi đó, $Q(x)$ đồng biến với $x>-1$. (1)

Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-1)^+}Q(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left(e^{x+a}-e^x-\ln\dfrac{1+x+a}{1+x}\right)=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\left[e^{x+a}-e^x-\ln\left(1+\dfrac{a}{1+x}\right)\right]=-\infty\\\lim\limits_{x\to+\infty}Q(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x\left(e^a-1\right)-\ln\left(1+\dfrac{a}{1+x}\right)\right]=+\infty\end{cases}$ (2)

Kết hợp (1), (2) thì phương trình $Q(x)=0$ có nghiệm duy nhất.

+) Với $a<0$ có (*) tương đương với $x>-1-a$, $g(x)$ đồng biến và $f(x)$ nghịch biến với $x>-1-a$.

Khi đó, $Q(x)$ nghịch biến với $x>-1-a$. (3)

Ta có:

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to(-1-a)^+}Q(x)=\lim\limits_{x\to(-1-a)^+}\left(e^{x+a}-e^x-\ln\dfrac{1+x+a}{1+x}\right)=\lim\limits_{x\to(-1-a)^+}\left[e^{x+a}-e^x-\ln\left(1+\dfrac{a}{1+x}\right)\right]=+\infty\\\lim\limits_{x\to+\infty}Q(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x\left(e^a-1\right)-\ln\left(1+\dfrac{a}{1+x}\right)\right]=-\infty\end{cases}$ (4)

Kết hợp (3), (4) suy ra $Q(x)=0$ có nghiệm duy nhất.

Do $a$ là số nguyên trên đoạn $[-10;10]$ nên kết hợp 3 trường hợp trên thấy có 20 giá trị của $a$ thoả mãn điều kiện của bài.

**Câu 14.** **(Chuyên Sơn La - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ thuộc $(-2020;2020)$ để phương trình $e^x=\ln(x+2m)+2m$ có nghiệm?

**A.** 2019. **B.** 2020. **C.** 2021. **D.** 4039.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $e^x=\ln(x+2m)+2m \Leftrightarrow e^x+x=\ln(x+2m)+x+2m \Leftrightarrow e^x+x=e^{\ln(x+2m)}+\ln(x+2m)$ (*).

Xét hàm số $f(t)=e^t+t$ với $t\in\mathbb{R} \Rightarrow f'(t)=e^t+1>0,\forall t$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow f(x)=f(\ln(x+2m)) \Leftrightarrow x=\ln(x+2m) \Leftrightarrow x+2m=e^x \Leftrightarrow 2m=e^x-x$.

Xét hàm số $g(x)=e^x-x \Rightarrow g'(x)=e^x-1 \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

Bảng biên thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Từ bảng biên thiên suy ra phương trình có nghiệm khi và chỉ khi $2m\ge 1 \Leftrightarrow m\ge \frac{1}{2}$.

Mà $m\in\mathbb{Z}, m\in(-2020;2020)$ nên $m\in\{1;2;3;...;2019\}$.

Vậy có 2019 giá trị nguyên của tham số $m$ thuộc $(-2020;2020)$ để phương trình $e^x=\ln(x+2m)+2m$ có nghiệm.

## Dạng 4. Phương trình mũ – logarit chứa nhiều ẩn

**Câu 1.** **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0\le x\le 2020$ và $\log_3(3x+3)+x=2y+9^y$ ?

**A.** 2019. **B.** 6. **C.** 2020. **D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn D**

***Cách 1:***

Ta có: $\log_3(3x+3)+x=2y+9^y \Leftrightarrow \log_3(x+1)+x+1=2y+3^{2y}$. (1)

Đặt $\log_3(x+1)=t \Rightarrow x+1=3^t$.

Phương trình (1) trở thành: $t+3^t=2y+3^{2y}$ (2)

Xét hàm số $f(u)=u+3^u$ trên $\mathbb{R}$.

$f'(u)=1+3^u\ln 3>0,\forall u\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(2)\Leftrightarrow f(t)=f(2y)\Leftrightarrow t=2y \Rightarrow \log_3(x+1)=2y \Leftrightarrow x+1=9^y \Leftrightarrow x=9^y-1$

Vì $0\le x\le 2020 \Rightarrow 0\le 9^y-1\le 2020 \Leftrightarrow 1\le 9^y\le 2021 \Leftrightarrow 0\le y\le \log_9 2021$

$(\log_3 2021\approx 3,464)$

Do $y\in\mathbb{Z}\Rightarrow y\in\{0;1;2;3\}$, có 4 giá trị của y nên cũng có 4 giá trị của $x$

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x;y)$.

***Cách 2:***

Ta có: $\log_3(3x+3)+x=2y+9^y \Leftrightarrow \log_3(x+1)+x+1=2y+3^{2y}$

Xét hàm số $f(x)=\log_3(x+1)+x+1$ với $x\in[0;2020]$.

Ta có $f'(x)=\frac{1}{(x+1)\ln 3}+1>0,\forall x\in x\in[0;2020] \Rightarrow$ Hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[0;2020]$.

Suy ra $f(0)\le f(x)=\log_3(x+1)+x+1\le f(2020)\Leftrightarrow 1\le f(x)\le \log_2 2021+2021$

$\Rightarrow 1\le 2y+9^y\le \log_3 2021+2021<2028$

Nếu $y<0\Rightarrow 2y+9^y<9^y<9^0=1\Rightarrow y\ge 0$

Khi đó $y\in\mathbb{N}\Rightarrow\left(2y+9^y\right)\in\mathbb{N}\Rightarrow 2y+9^y\le 2027\Rightarrow 9^y\le 2027-2y\le 2027$

$\Rightarrow y\le\log_9 2027\approx 3,465\Rightarrow y\le 3\Rightarrow 0\le y\le 3$

$\Rightarrow y\in\{0;1;2;3\}$. Do $f(x)$ là hàm số luôn đồng biến nên với mỗi giá trị của $y$ chỉ cho 1 giá trị của $x$.

+) $y=0\Rightarrow\log_3(x+1)+x+1=1\Leftrightarrow x=0$

+) $y=1\Rightarrow\log_3(x+1)+x+1=11\Leftrightarrow\log_3(x+1)+x=10\Leftrightarrow x=8$

+) $y=2\Rightarrow\log_3(x+1)+x+1=85\Leftrightarrow\log_3(x+1)+x=84\Leftrightarrow x=80$

+) $y=3\Rightarrow\log_3(x+1)+x+1=735\Leftrightarrow\log_3(x+1)+x=734\Leftrightarrow x=729$

Vậy có 4 cặp số nguyên $(x;y)$.

**Câu 2.** **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Có bao nhiêu số nguyên $x$ sao cho tồn tại số thực $y$ thỏa mãn $\log_3(x+y)=\log_4\left(x^2+y^2\right)$?

**A.** 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

**Lời giải**

**Chọn B**

**Cách 1:**

Đặt $t=\log_3(x+y)=\log_4\left(x^2+y^2\right)\Rightarrow\begin{cases}x+y=3^t\\x^2+y^2=4^t\end{cases}(1)$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$9^t=(x+y)^2\le 2\left(x^2+y^2\right)=4^t\Rightarrow\dfrac{9^t}{4^t}\le 2\Rightarrow t\le\log_{\frac{9}{2}}2$

Như vậy,

$x^2+y^2=4^t\Rightarrow x^2\le 4^t\le 4^{\log_{\frac{9}{4}}2}\approx 1,89\Rightarrow x\in\{-1;0;1\}$

➢ Trường hợp 1: $x=0\Rightarrow\begin{cases}y=3^t\\y^2=4^t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=0\\y=1\end{cases}$.

➢ Trường hợp 2: $x=1\Rightarrow\begin{cases}y=3^t-1\\y^2=4^t-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=0\\y=0\end{cases}$.

➢ Trường hợp 3: $x=-1\Rightarrow\begin{cases}y=3^t+1\\y^2+1=4^t\ge 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t\ge 0\\y=3^t+1\ge 2\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2\ge 5$ mâu thuẫn với $x^2+y^2\le 4^{\log_{\frac{3}{2}}\sqrt{2}}$ suy ra loại $x=-1$.

Vậy có hai giá trị $x\in\{0;1\}$

**Cách 2:**

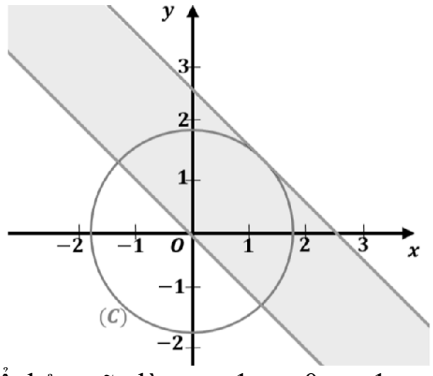
Đặt $t=\log_3(x+y)=\log_4\left(x^2+y^2\right)\Rightarrow\begin{cases}x+y=3^t\\x^2+y^2=4^t\end{cases}(1)$.

Suy ra $x,y$ là tọa độ của điểm $M$ với $M$ thuộc đường thẳng $d:x+y=3^t$ và đường tròn $(C):x^2+y^2=4^t$.

Để tồn tại $y$ tức tồn tại $M$ nên $d,(C)$ có điểm chung, suy ra $d(O,d)\le R$ trong đó $O(0;0)$, $R=2^t$ nên $\dfrac{\left|-3^t\right|}{\sqrt{2}}\le 2^t\Leftrightarrow t\le\log_{\frac{3}{2}}\sqrt{2}$.

Khi đó $(1)\Rightarrow\begin{cases}0<x+y\le 3^{\log_{\frac{3}{2}}\sqrt{2}}\\ x^2+y^2\le 4^{\log_{\frac{3}{2}}\sqrt{2}}\end{cases}$.

Minh họa quỹ tích điểm $M$ như hình vẽ sau




Ta thấy có 3 giá trị $x\in\mathbb{Z}$ có thể thỏa mãn là $x=-1;x=0;x=1$.

Thử lại:

➢ Trường hợp 1: $x=0\Rightarrow\begin{cases}y=3^t\\ y^2=4^t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=0\\ y=1\end{cases}$.

➢ Trường hợp 2: $x=1\Rightarrow\begin{cases}y=3^t-1\\ y^2=4^t-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=0\\ y=0\end{cases}$.

➢ Trường hợp 3: $x=-1\Rightarrow\begin{cases}y=3^t+1\\ y^2+1=4^t\ge 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t\ge 0\\ y=3^t+1\ge 2\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2\ge 5$ mâu thuẫn với $x^2+y^2\le 4^{\log_{\frac{3}{2}}\sqrt{2}}$ suy ra loại $x=-1$.

**Câu 3.** **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(m;n)$ sao cho $m+n\le 10$ và ứng với mỗi cặp $(m;n)$ tồn tại đúng 3 số thực $a\in(-1;1)$ thỏa mãn $2a^m=n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$?

**A.** 7. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 9.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $2a^m=n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)\Leftrightarrow\dfrac{2a^m}{n}=\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$.

Xét hai hàm số $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ và $g(x)=\dfrac{2}{n}x^m$ trên $(-1;1)$.

Ta có $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0$ nên $f(x)$ luôn đồng biến và

$f(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)=\ln\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)=-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=-f(x)$ nên $f(x)$ là hàm số lẻ.

+ Nếu $m$ chẵn thì $g(x)$ là hàm số chẵn và có bảng biến thiên dạng

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | $g(-1)$ | ↗ | $0$ | ↘ | $g(1)$ |

Suy ra phương trình có nhiều nhất 2 nghiệm, do đó $m$ lẻ.

+ Nếu $m$ lẻ thì hàm số $g(x)$ là hàm số lẻ và luôn đồng biến.

Ta thấy phương trình luôn có nghiệm $x=0$. Dựa vào tính chất đối xứng của đồ thị hàm số lẻ, suy ra phương trình đã cho có đúng 3 nghiệm trên $(-1;1)$ khi có 1 nghiệm trên $(0;1)$, hay

$f(1)>g(1)\Leftrightarrow \ln\left(1+\sqrt{2}\right)<\dfrac{2}{n}\Leftrightarrow n<\dfrac{2}{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}\approx 2,26\Rightarrow n\in\{1;2\}$.

Đối chiếu điều kiện, với $n=1$ suy ra $m\in\{1;3;5;7;9\}$, có 5 cặp số thỏa mãn

Với $n=2$ thì $m\in\{1;3;5;7\}$ có 4 cặp số thỏa mãn.

Vậy có 9 cặp số thỏa mãn bài toán.

**Câu 4.** **(Mã 101 - 2020 Lần 2)** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(m,n)$ sao cho $m+n\le 14$ và ứng với mỗi cặp $(m,n)$ tồn tại đúng ba số thực $a\in(-1;1)$ thỏa mãn $2a^m=n\ln\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$?

**A.** 14. **B.** 12. **C.** 11. **D.** 13.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Xét $f(x)=\dfrac{2}{n}.x^m-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ trên $(-1;1)$

Đạo hàm $f'(x)=\dfrac{2m}{n}x^{m-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}=0$

Theo đề bài $f(x)=0$ có ba nghiệm nên $\dfrac{2m}{n}x^{m-1}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ có ít nhất hai nghiệm

Xét đồ thị của hàm $y=x^{m-1};y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, suy ra $m-1$ chẵn và $m-1>0$

Suy ra $m\in\{3;5;7;9;11;13\}$. Khi đó $f'(x)=0$ có nghiệm $\begin{cases}x_1<0\\x_2>0\end{cases}$

Phương trình có 3 nghiệm $\Leftrightarrow\begin{cases}f(1)>0\\f(-1)<0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2}{n}>\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\\-\dfrac{2}{n}<\ln\left(\sqrt{2}-1\right)\end{cases}\Leftrightarrow n\le 2\Rightarrow n=\{1;2\}$

$n\in\{1;2\}$ và $m\in\{3;5;7;9;11;13\}$, do $m+n\le 14$ nên ta có 11 cặp $(m;n)$ thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 5.** **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(m,n)$ sao cho $m+n\le 12$ và ứng với mỗi cặp $(m,n)$ tồn tại đúng 3 số thực $a\in(-1,1)$ thỏa mãn $2a^m=n\ln(a+\sqrt{a^2+1})$?

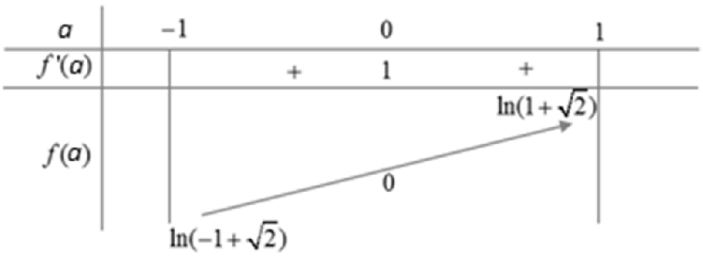
**A.** 12. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 9.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $2a^m=n\ln(a+\sqrt{a^2+1})\Leftrightarrow\dfrac{2}{n}a^m=\ln(a+\sqrt{a^2+1})$ (*).

Xét hàm $f(a)=\ln(a+\sqrt{a^2+1})$ trên $(-1,1)$ (dễ thấy hàm $f$ lẻ, đồng biến trên $R$), có BBT:




Xét hàm $g(a)=\frac{2}{n}.a^m$ trên $(-1,1)$.

Với $m$ chẵn, $g(a)$ là hàm chẵn và $g(a)\ge 0,\forall a\in R$, do đó (*) không thể có 3 nghiệm.

Với $m$ lẻ, $g(a)$ là hàm lẻ, đồng biến trên $R$ và tiếp tuyến của đồ thị tại điểm $a=0$ là đường thẳng $y=0$.

Dễ thấy (*) có nghiệm $a=0\in(-1;1)$. Để (*) có đúng 3 nghiệm tức là còn có 2 nghiệm nữa là $\pm a_0$ với $0<a_0<1$.

Muốn vậy, thì $g(1)=\frac{2}{n}.1^m=\frac{2}{n}>f(1)=\ln(1+\sqrt{2})\Leftrightarrow n<\frac{2}{\ln(1+\sqrt{2})}\approx 2,26\Rightarrow n=1;n=2$

Cụ thể:

+ $m\in\{3;5;7;9\}$ thì $n\in\{1;2\}$: Có 8 cặp $(m,n)$

+ $m=11$ thì $n\in\{1\}$: Có 1 cặp $(m,n)$

+ $m=1$: Đồ thị hàm số $g(a)$ là đường thẳng ($g(a)=a;g(a)=2a$) không thể cắt đồ thị hàm số $f(a)$ tại giao điểm $a_0\neq 0$ được vì tiếp tuyến của hàm số $f(a)$ tại điểm có hoành độ $a=0$ là đường thẳng $y=a$.

Vậy có cả thảy 9 cặp $(m,n)$.

**Câu 6.** **(Chuyên Biên Hòa - Hà Nam - 2020)** Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số $m\in[-1;1]$ sao cho phương trình $\log_{m^2+1}\left(x^2+y^2\right)=\log_2\left(2x+2y-2\right)$ có nghiệm nguyên $(x;y)$ duy nhất?

**A.** 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện: $\begin{cases}x^2+y^2>0\\x+y-1>0\end{cases}$.

*Nhận* xét: Vì $x,y$ có vai trò như nhau nên nếu phương trình có nghiệm $(x_0;y_0)$ thì $(y_0;x_0)$ cũng là một nghiệm của phương trình.

***) Điều kiện cần:** Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow x_0=y_0$.

Thay vào phương trình ta được $\log_{m^2+1}\left(2x_0^2\right)=\log_2\left(4x_0-2\right)$

Vì $x_0\in\mathbb{Z}\Rightarrow 4x_0-2>1$. Lại có $2x_0^2\ge 4x_0-2\Rightarrow\log_2\left(4x_0-2\right)=\log_{m^2+1}\left(2x_0^2\right)\ge\log_{m^2+1}\left(4x_0-2\right)$

$\Rightarrow\frac{1}{\log_{4x_0-2}2}\ge\frac{1}{\log_{4x_0-2}\left(m^2+1\right)}\Rightarrow\log_{4x_0-2}\left(m^2+1\right)\ge\log_{4x_0-2}2$

$\Rightarrow m^2+1\ge 2\Rightarrow m^2\ge 1$ mà $m\in[-1;1]\Rightarrow m=\pm 1$.

***) Điều kiện đủ:** Với $m=\pm 1$ thì phương trình đã cho trở thành

$\log_2\left(x^2+y^2\right)=\log_2\left(2x+2y-2\right)\Leftrightarrow x^2+y^2=2x+2y-2\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-1)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$

Suy ra phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(1;1)$.

Vậy có hai giá trị $m$ cần tìm là $m=\pm 1$.

**Câu 7.** **(Chuyên Lương Văn Tụy - Ninh Bình - 2020)** Có bao nhiêu số nguyên $y$ để tồn tại số thực $x$ thỏa mãn $\log_{11}(3x+4y)=\log_4(x^2+y^2)$?

**A.** 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** vô số.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đặt $\log_{11}(3x+4y)=\log_4(x^2+y^2)=t \Leftrightarrow \begin{cases}3x+4y=11^t\\ x^2+y^2=4^t\end{cases}$ (*).

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ đường thẳng $\Delta: 3x+4y=11^t$ và đường tròn $(C): x^2+y^2=4^t$ có điểm chung

$\Leftrightarrow d(O,\Delta)\le R \Leftrightarrow \dfrac{11^t}{5}\le 2^t \Leftrightarrow \left(\dfrac{11}{2}\right)^t \le 5 \Leftrightarrow t\le \log_{\frac{11}{2}} 5$.

Do $x^2+y^2=4^t$ nên $|y|\le 2^t \le 2^{\log_{\frac{11}{2}}5}\approx 1.9239767$.

Vì $y\in\mathbb{Z}$ nên $y\in\{-1;0;1\}$.

Thử lại:

- Với $y=-1$, hệ (*) trở thành $\begin{cases}3x-4=11^t\\ x^2+1=4^t\end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{11^t+4}{3}\right)^2+1=4^t \Leftrightarrow 121^t+8.11^t+25=9.4^t$ (**)

Nếu $t<0$ thì $4^t<1 \Rightarrow 4^t<\left(\dfrac{11^t+4}{3}\right)^2+1$.

Nếu $t\ge 0 \Rightarrow \begin{cases}121^t\ge 4^t\\ 8.11^t\ge 8.4^t\end{cases} \Rightarrow 121^t-4^t+8\left(11^t-4^t\right)+25>0$.

Vậy (**) vô nghiệm.

- Với $y=0$ thì hệ (*) trở thành $\begin{cases}3x=11^t\\ x^2=4^t\end{cases} \Rightarrow \dfrac{121^t}{9}=4^t \Leftrightarrow t=\log_{\frac{11}{2}}3 \Rightarrow x=\dfrac{11^{\log_{\frac{11}{2}}3}}{3}$.

- Với $y=1$ thì hệ (*) trở thành $\begin{cases}3x+4=11^t\\ x^2+1=4^t\end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{11^t-4}{3}\right)^2+1=4^t \Leftrightarrow 121^t-8.11^t+25=9.4^t$.

Xét hàm số $f(t)=121^t-8.11^t+25-9.4^t$, liên tục trên $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$ có $f\left(\dfrac{1}{2}\right)f(1)<0$ nên phương trình $f(t)=0$ luôn có nghiệm thuộc đoạn $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$. Khi đó hiển nhiên sẽ tồn tại x thỏa mãn.

Vậy có 2 giá trị nguyên của $y$ thỏa mãn là $y=0,\ y=1$.

**Câu 8.** **(Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm - Quảng Nam - 2020)** Có bao nhiêu cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $3^{|x^2-2x-3|-\log_3 5}=5^{-(y+4)}$ và $4|y|-|y-1|+(y+3)^2\le 8$ ?

**A.** 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $3^{|x^2-2x-3|-\log_3 5}=5^{-(y+4)} \Leftrightarrow 5^{-(y+3)}=3^{|x^2-2x-3|}$. (*)

Vì $3^{|x^2-2x-3|}\ge 3^0 \Rightarrow 5^{-(y+3)}\ge 1 \Rightarrow y+3\le 0 \Rightarrow y\le -3$.

Với $y\le -3$ ta có: $4|y|-|y-1|+(y+3)^2\le 8 \Leftrightarrow -4y+(y-1)+(y+3)^2\le 8 \Leftrightarrow y^2+3y\le 0$

$\Leftrightarrow -3\le y\le 0$. Kết hợp với $y\le -3$ suy ra $y=-3$.

Thế $y=-3$ vào (*) ta được: $3^{\left|x^2-2x-3\right|}=1\Leftrightarrow x^2-2x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$.

Vậy các cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn là $(-1;-3);(3;-3)$.

**Câu 9.** **(Chuyên Bến Tre - 2020)** Giả sử $(x_0;y_0)$ là một nghiệm của phương trình $4^{x-1}+2^x\sin\left(2^{x-1}+y-1\right)+2=2^x+2\sin\left(2^{x-1}+y-1\right)$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

**A.** $x_0>7$. **B.** $-2<x_0<4$. **C.** $4<x_0<7$. **D.** $-5<x_0<-2$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $4^{x-1}+2^x\sin\left(2^{x-1}+y-1\right)+2=2^x+2\sin\left(2^{x-1}+y-1\right)$

$\Leftrightarrow 4^x-4.2^x+4.\left(2^x-2\right).\sin\left(2^{x-1}+y-1\right)+4+4=0$

$\Leftrightarrow\left(2^x-2\right)^2+4\left(2^x-2\right)\sin\left(2^{x-1}+y-1\right)+4\left[\sin^2\left(2^{x-1}+y-1\right)+\cos^2\left(2^{x-1}+y-1\right)\right]=0$

$\Leftrightarrow\left(2^x-2\right)^2+2.\left(2^x-2\right).2\sin\left(2^{x-1}+y-1\right)+\left[2\sin^2\left(2^{x-1}+y-1\right)\right]^2+4\cos^2\left(2^{x-1}+y-1\right)=0$.

$\Leftrightarrow\left[\left(2^x-2\right)+2\sin\left(2^{x-1}+y-1\right)\right]^2+4\cos^2\left(2^{x-1}+y-1\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x-2+2\sin\left(2^{x-1}+y-1\right)=0\\\cos^2\left(2^{x-1}+y-1\right)=0\end{array}\right.$

Vì $\cos^2\left(2^{x-1}+y-1\right)=0\Rightarrow\sin^2\left(2^{x-1}+y-1\right)=\pm1$.

- $\sin^2\left(2^{x-1}+y-1\right)=1\Rightarrow 2^x=0$ (vô nghiệm)
- $\sin^2\left(2^{x-1}+y-1\right)=-1\Rightarrow 2^x=4\Rightarrow x=x_0=2\in(-2;4)$.

Nguyễn Bảo Vương

**Câu 10.** **(Chuyên Lào Cai - 2020)** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0\le x\le 4000$ và $5\left(25^y+2y\right)=x+\log_5\left(x+1\right)^5-4$?

**A.** 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

**Lời giải**

**Chọn A**

Đặt $\log_5\left(x+1\right)=t\Rightarrow x=5^t-1$.

Phương trình trở thành:

$5\left(5^{2y}+2y\right)=5^t-1+5t-4\Leftrightarrow 5^{2y}+2y=5^{t-1}+\left(t-1\right)$.

Xét hàm số $f\left(u\right)=5^u+u\Rightarrow f'\left(u\right)=5^u.\ln 5+1>0$ nên hàm số luôn đồng biến.

Vậy để $f\left(2y\right)=f\left(t-1\right)\Leftrightarrow 2y=t-1\Leftrightarrow 2y+1=t=\log_5\left(x+1\right)$

$\Rightarrow 0\le 2y+1\le\log_5 4001\Rightarrow 0\le 2y+1\le 5\Rightarrow y=\{0;1;2\}$

Với mỗi nghiệm $y$ ta tìm được một nghiệm $x$ tương ứng.

**Câu 11.** **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)** Có bao nhiêu bộ $(x;y)$ với $x,y$ nguyên và $1\le x,y\le 2020$ thỏa mãn $\left(xy+2x+4y+8\right)\log_3\left(\frac{2y}{y+2}\right)\le\left(2x+3y-xy-6\right)\log_2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)$?

**A.** 2017. **B.** 4034. **C.** 2. **D.** 2017.2020.

**Lời giải**

**Chọn B**

Từ giả thiết kết hợp ĐKXĐ của bất phương trình ta có: $1\le y\le 2020;4\le x\le 2020;x,y\in Z$ ,(1).

Ta có: $(xy+2x+4y+8)\log_3\left(\frac{2y}{y+2}\right)\le(2x+3y-xy-6)\log_2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)$

$\Leftrightarrow(x+4)(y+2)\log_3\left(\frac{2y}{y+2}\right)+(x-3)(y-2)\log_2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)\le 0$ (*).

Xét $f(x)=\log_2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)=\log_2\left(2+\frac{7}{x-3}\right)>0,\forall x\in[4;2020]$ (2).

+ Với $y=1$ thay vào (*) ta được:

$3(x+4)\log_3\left(\frac{2}{3}\right)-(x-3)\log_2\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)\le 0$ ( luôn đúng $\forall x\in[4;2020]$ do (1) và (2) ).

Suy ra có 2017 bộ $(x;y)$.

+ Với $y=2$ thay vào (*) ta thấy luôn đúng $\forall x\in[4;2020]$.

Suy ra có 2017 bộ $(x;y)$.

+ Với $3\le y\le 2020\Rightarrow y-2>0$.

Xét $g(y)=\log_3\left(\frac{2y}{y+2}\right)=\log_3\left(\frac{y+y}{y+2}\right)>\log_3\left(\frac{y+2}{y+2}\right)=0,\forall y\ge 3$ (3).

Suy ra (*) vô nghiệm ( Do (2) và (3) ).

Vậy có 4034 bộ $(x;y)$.

**Câu 12.** **(Chuyên Sơn La - 2020)** Cho $x$ là số thực dương và $y$ là số thực thỏa mãn $2^{x+\frac{1}{x}}=\log_2\left[14-(y-2)\sqrt{y+1}\right]$. Giá trị của biểu thức $P=x^2+y^2-xy+2020$ bằng

**A.** 2022. **B.** 2020. **C.** 2021. **D.** 2019.

**Lời giải**

**Chọn C**

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $x+\frac{1}{x}\ge 2\sqrt{x.\frac{1}{x}}=2,\forall x>0\Rightarrow 2^{x+\frac{1}{x}}\ge 4$.

Đặt $\sqrt{y+1}=t,t\ge 0$ thu được

$14-(y-2)\sqrt{y+1}=14-(t^2-3)t=-t^3+3t+14=16-(t-1)^2(t+2)\le 16,\forall t\ge 0$.

Dẫn đến $\log_2\left[14-(y-2)\sqrt{y+1}\right]\le\log_2 16=4$.

Như vậy hai vế bằng nhau khi dấu đẳng thức xảy ra tức là

$$\begin{cases}t=1\\x=\frac{1}{x}\Rightarrow x=1;y=0\Rightarrow P=x^2+y^2-xy+2020=2021.\\x>0\end{cases}$$

**Câu 13.** **(Sở Hưng Yên - 2020)** Cho phương trình $\log_3\left(3x^2-6x+6\right)=3^{y^2}+y^2-x^2+2x-1$. Hỏi có bao nhiêu cặp số $(x;y)$ và $0<x<2020$ ; $y\in\mathbb{N}$ thỏa mãn phương trình đã cho?

**A.** 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn D**

$\log_3\left(3x^2-6x+6\right)=3^{y^2}+y^2-x^2+2x-1\Leftrightarrow\log_3 3\left(x^2-2x+2\right)=3^{y^2}+y^2-x^2+2x-1$.

$\Leftrightarrow 1+\log_3\left(x^2-2x+2\right)=3^{y^2}+y^2-x^2+2x-1$.

$\Leftrightarrow\log_3\left(x^2-2x+2\right)+\left(x^2-2x+2\right)=3^{y^2}+y^2$ (1).

Đặt $\log_3\left(x^2-2x+2\right)=z\Rightarrow x^2-2x+2=3^z$ thì (1) trở thành:

$\Leftrightarrow 3^z + z = 3^{y^2} + y^2$ (2).

Xét hàm số $f(t) = 3^t + t \Rightarrow f'(t) = 3^t \ln 3 + 1 > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

(2) $\Leftrightarrow f(z) = f(y^2) \Leftrightarrow z = y^2$.

Thay trở lại cách đặt ta có: $\log_3(x^2 - 2x + 2) = y^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 = 3^{y^2}$.

Xét hàm số: $g(x) = x^2 - 2x + 2,\ x \in (0;2020) \Rightarrow g'(x) = 2x - 2$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | 0 | | 1 | | 2020 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $g(x)$ | 2 | ↘ | 1 | ↗ | 4076362 |

Suy ra:

$\Leftrightarrow 1 \le g(x) < 4076362 \Leftrightarrow 1 \le 3^{y^2} < 4076362 \Leftrightarrow 0 \le y^2 < \log_3 4076362$.

Do $y \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \le y < \sqrt{\log_3 4076362} \approx 3,7 \Rightarrow y \in \{0;1;2;3\}$.

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} g(x) = 1 \\ g(x) = 3 \\ g(x) = 3^4 \\ g(x) = 3^9 \end{array}\right.$$

Nguyễn Bảo Vương

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ ta thấy mỗi phương trình trên có một nghiệm $0 < x < 2020$.

Vậy có 4 cặp số $(x;y)$ thỏa mãn đề bài.

**Câu 14.** **(Sở Phú Thọ - 2020)** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $2 \le x \le 2021$ và $2^y - \log_2(x + 2^{y-1}) = 2x - y$?

**A.** 2020. **B.** 9. **C.** 2019. **D.** 10.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt $\log_2(x + 2^{y-1}) = t$. Suy ra $x + 2^{y-1} = 2^t$, $x = 2^t - 2^{y-1}$.

Phương trình đã cho trở thành: $2^y - t = 2(2^t - 2^{y-1}) - y \Leftrightarrow 2.2^y + y = 2.2^t + t$.

Xét hàm số $g(x) = 2.2^x + x$ có $g'(x) = 2.2^x \ln 2 + 1 > 0, \forall x$ nên hàm số $y = g(x)$ luôn đồng biến.

Khi đó $2.2^y + y = 2.2^t + t \Leftrightarrow y = t$ hay $y = \log_2(x + 2^{y-1})$.

Suy ra $x + 2^{y-1} = 2^y \Leftrightarrow x = 2^y - 2^{y-1} = 2^{y-1}$.

Mà $2 \le x \le 2021$ nên $2 \le 2^{y-1} \le 2021 \Leftrightarrow 1 \le y - 1 \le \log_2 2021$ hay $2 \le y \le (\log_2 2021) + 1$.

Lại có $y$ là số nguyên nên $y \in \{2,3,...,11\}$ tức 10 giá trị thỏa mãn.

Xét biểu thức $x = 2^{y-1}$, mỗi giá trị nguyên của $y$ cho tương ứng 1 giá trị nguyên của $x$ nên có 10 cặp số nguyên $(x,y)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

**Câu 15.** **(Sở Bắc Ninh - 2020)** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thảo mãn $3^{x+y}-x^2\left(3^x-1\right)=(x+1)3^y-x^3$, với $x<2020$?

**A.** 13. **B.** 15. **C.** 6. **D.** 7.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có

$$3^{x+y}-x^2\left(3^x-1\right)=(x+1)3^y-x^3\Leftrightarrow 3^y\left(3^x-x-1\right)=x^2\left(3^x-x-1\right)\Leftrightarrow\left(3^x-x-1\right)\left(3^y-x^2\right)=0$$

Ta thấy $3^x-x-1>0,\forall x>0\Rightarrow\left(3^x-x-1\right)\left(3^y-x^2\right)=0\Leftrightarrow 3^y=x^2\Leftrightarrow y=2\log_3 x\Rightarrow x=3^k$.

Vì $x<2020\Rightarrow 3^k<2020\Rightarrow 3^k\le 3^6\Rightarrow k=\{0;1;2;3;4;5;6\}$.

**Câu 16.** **(Sở Bình Phước - 2020)** Biết $a,b$ là các số thực sao cho $x^3+y^3=a.10^{3z}+b.10^{2z}$, đồng thời $x,y,z$ là các số các số thực dương thỏa mãn $\log(x+y)=z$ và $\log\left(x^2+y^2\right)=z+1$. Giá trị của $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ thuộc khoảng

**A.** $(1;2)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(3;4)$. **D.** $(4;5)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $\begin{cases}\log(x+y)=z\\ \log\left(x^2+y^2\right)=z+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=10^z\\ x^2+y^2=10^{z+1}=10.10^z\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2=10(x+y)$

Khi đó $x^3+y^3=a.10^{3z}+b.10^{2z}\Leftrightarrow(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)=a.\left(10^z\right)^3+b.\left(10^z\right)^2$

$\Leftrightarrow(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)=a.(x+y)^3+b.(x+y)^2\Leftrightarrow x^2-xy+y^2=a.(x+y)^2+b.(x+y)$

$\Leftrightarrow x^2-xy+y^2=a.\left(x^2+2xy+y^2\right)+\frac{b}{10}\left(x^2+y^2\right)\Leftrightarrow x^2+y^2-xy=\left(a+\frac{b}{10}\right)\left(x^2+y^2\right)+2a.xy$

Đồng nhất hệ số ta được $\begin{cases}a+\frac{b}{10}=1\\ 2a=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\frac{1}{2}\\ b=15\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=4+\frac{1}{225}=4,008\in(4;5).$

**Câu 17.** **(Đặng Thúc Hứa - Nghệ An - 2020)** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0<y<2020$ và $3^x+3x-6=9y+\log_3 y^3$.

**A.** 2020 **B.** 9. **C.** 7. **D.** 8.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có:

$3^x+3x-6=9y+\log_3 y^3\Leftrightarrow 3^x+3(x-2)=9y+3\log_3 y\Leftrightarrow 3^x+3(x-2)=3^{2+\log_3 y}+3\log_3 y\ (*)$.

Xét hàm số: $f(t)=3^t+3(t-2)$.

Ta có: $f'(t)=3^t.\ln 3+3>0,\forall t\in\mathbb{R}$. Suy ra hàm số $y=f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó: $(*)\Leftrightarrow f(x)=f(2+\log_3 y)\Leftrightarrow x=2+\log_3 y\Leftrightarrow y=3^{x-2}$.

Do $0<y<2020$ và $x,y$ nguyên nên: $1\le 3^{x-2}<2020\Leftrightarrow 2\le x<2+\log_3 2020\Rightarrow x\in\{2;3;4;5;6;7;8\}$.

Ứng với mỗi giá trị $x$ có một giá trị của $y$ nên có 7 cặp số $(x;y)$ nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 18.** **(Đô Lương 4 - Nghệ An - 2020)** Giả sử $a,b$ là các số thực sao cho $x^3+y^3=a.10^{3z}+b.10^{2z}$ đúng với mọi các số thực dương

$x,y,z$ thỏa mãn $\log(x+y)=z$ và $\log(x^2+y^2)=z+1$. Giá trị của $a+b$ bằng

**A.** $-\frac{25}{2}$. **B.** $-\frac{31}{2}$. **C.** $\frac{31}{2}$. **D.** $\frac{29}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$$\begin{cases}\log(x+y)=z\\ \log(x^2+y^2)=z+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=10^z\\ x^2+y^2=10^{z+1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=10^z\\ (x+y)^2-2xy=10.10^z\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=10^z\\ 10^{2z}-2xy=10.10^z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=10^z\\ xy=\dfrac{10^{2z}-10.10^z}{2}\end{cases}.$$

Khi đó $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=10^{3z}-3.\left(\frac{10^{2z}-10.10^z}{2}\right).10^z$

$=\frac{1}{2}\left(2.10^{3z}-3.10^{3z}+30.10^{2z}\right)=\frac{1}{2}\left(-10^{3z}+30.10^{2z}\right)=-\frac{1}{2}.10^{3z}+15.10^{2z}$.

Lại có $x^3+y^3=a.10^{3z}+b.10^{2z}$.

Suy ra $\begin{cases}a=-\frac{1}{2}\Rightarrow a+b=\frac{29}{2}.\\ b=15\end{cases}$

**Câu 19.** **(Kim Liên - Hà Nội - 2020)** Có bao nhiêu số hữu tỉ $a$ thuộc đoạn $[-1;1]$ sao cho tồn tại số thực $b$ thỏa mãn

$$\log_2\left(1-a^2-b^2+2b\right)=\frac{2^a}{4^a+1}+\frac{4^a}{2^a+1}+\frac{1}{2^a+4^a}-\frac{1}{2}.$$

**A.** 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** Vô số.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $\frac{2^x}{4^x+1}+\frac{8^x+1}{2^x\left(1+2^x\right)}-\frac{1}{2}=\frac{2^x}{4^x+1}+\frac{4^x-2^x+1}{2^x}-\frac{1}{2}$

$=\frac{2^x}{4^x+1}+\frac{4^x+1}{2^x}-\frac{3}{2}=\frac{2^x}{4^x+1}+\frac{4^x+1}{4.2^x}+\frac{3}{4}\left(2^x+\frac{1}{2^x}\right)-\frac{3}{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô si: $\frac{2^x}{4^x+1}+\frac{4^x+1}{4.2^x}\ge 1\quad(1)$.

Lại có $\frac{3}{4}\left(2^x+\frac{1}{2^x}\right)-\frac{3}{2}=\frac{3}{4}\left(2^x+\frac{1}{2^x}-2\right)=\frac{3}{4}\left(\sqrt{2^x}-\frac{1}{\sqrt{2^x}}\right)^2\ge 0\quad(2)$.

Từ $(1);(2)$ suy ra $\frac{2^x}{4^x+1}+\frac{4^x}{2^x+1}+\frac{1}{2^x+4^x}-\frac{1}{2}\ge 1$

$\Rightarrow\log_2\left(1-a^2-b^2+2b\right)\ge 1\Leftrightarrow 1-a^2-b^2+2b\ge 2\Leftrightarrow a^2+b^2-2b+1\le 0\Leftrightarrow a^2+(b-1)^2\le 0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\ b=1\end{cases}$.

$a=0\in[-1;1]$ nên chọn phương án **C.**

**Câu 20.** **(Lê Lai - Thanh Hóa - 2020)** Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn $x+y>0;-20\le x\le 20$ và

$\log_2(x+2y)+x^2+2y^2+3xy-x-y=0$?

**A.** 19. **B.** 6 **C.** 10. **D.** 41.

**Lời giải**

**Chọn C**

+ Điều kiện: $x+2y>0$

+ Ta có: $x+y>0$ nên

$\log_2(x+2y)+x^2+2y^2+3xy-x-y=0$

$\Leftrightarrow \log_2\dfrac{(x+y)(x+2y)}{x+y}+x^2+2y^2+3xy-x-y=0$

$\Leftrightarrow \log_2(x^2+2y^2+3xy)-\log_2(x+y)+x^2+2y^2+3xy-x-y=0$

$\Leftrightarrow \log_2(x^2+2y^2+3xy)+x^2+2y^2+3xy=\log_2(x+y)+x+y \quad (1)$

Xét hàm số: $f(t)=\log_2 t+t$, ta có: $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0\ \ t\in(0;+\infty)$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Do đó: $(1)\Leftrightarrow f(x^2+2y^2+3xy)=f(x+y)\Leftrightarrow x^2+2y^2+3xy=x+y$

$\Leftrightarrow (x+y)(x+2y-1)=0\Leftrightarrow x=1-2y$ vì $x+y>0$ nên $x+y=1-y>0$

+ Do $-20\le x\le 20$ suy ra $-\dfrac{19}{2}\le y<1$

+ Do $y\in\mathbb{Z}$ nên $y\in\{-9;-8;...;-1;0\}$, với mỗi giá trị $y$ cho ta 1 giá trị $x$ thoả mãn YCBT.

Vậy có 10 cặp số nguyên $(x;y)$ thoả mãn YCBT.

**Câu 21.** **(Thanh Chương 1 - Nghệ An - 2020)** Cho các số thực $x$, $y$ thỏa mãn $x>1$, $y>1$ và $\log_3 x\log_3 6y+2\log_3 x\log_3 2y(3-\log_3 2xy)=\dfrac{9}{2}$. Giá trị của biểu thức $P=x+2y$ gần với số nào nhất trong các số sau

**A.** 7. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 9.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đặt $a=\log_3 x$, $b=\log_3 2y$. Do $x>1$, $y>1$ nên $a>0$, $b>\log_3 2$.

Theo giả thiết ta có: $a(b+1)+2ab(3-a-b)=\dfrac{9}{2}\Leftrightarrow 2a^2b+a(2b^2-7b-1)+\dfrac{9}{2}=0 \quad (1)$

Coi $(1)$ là phương trình bậc hai ẩn $a$, $b$ là tham số. Để phương trình $(1)$ có nghiệm $a>0$ thì:

$$\begin{cases}\Delta\ge 0\\ -\dfrac{2b^2-7b-1}{2b}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2b^2-7b-1)^2-36b\ge 0\\ 2b^2-7b-1<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4b^4-28b^3+45b^2-22b+1\ge 0\\ 2b^2-7b-1<0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(b-1)^2(4b^2-20b+1)\ge 0\\ 2b^2-7b-1<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=1\\ \begin{cases}4b^2-20b+1\ge 0\\ 2b^2-7b-1<0\end{cases}\end{cases}.$$

Với $b=1\Rightarrow 2a^2-6a+\dfrac{9}{2}=0\Leftrightarrow a=\dfrac{3}{2}$. Khi đó $P=x+2y=3^{\frac{3}{2}}+3\approx 8{,}1$.

Với $\begin{cases}4b^2-20b+1\ge 0\\ 2b^2-7b-1<0\end{cases}$: hệ vô nghiệm do $b>\log_3 2$.

Vậy giá trị biểu thức $P=x+2y$ gần nhất với 8.

**Câu 22.** **(Tiên Lãng - Hải Phòng - 2020)** Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ với $x\le 2020$ thỏa mãn

$$2(3x-y)=3(1+9^y)-\log_3(2x-1)$$

**A.** $1010$. **B.** $2020$. **C.** $3$. **D.** $4$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đặt $\log_3(2x-1)=t\Rightarrow 2x=3^t+1$, ta được $3(3^t+1)-2y=3(1+3^{2y})-t\Leftrightarrow 3.3^t+t=3.3^{2y}+2y$ (*).

Xét hàm số $f(u)=3.3^u+u\Rightarrow f'(u)=3.3^u\ln 3+1>0,\forall u\in\mathbb{R}\Rightarrow f(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow t=2y$, vậy nên $2x=3^{2y}+1\Leftrightarrow 9^y=2x-1$.

Vì $x\le 2020\Rightarrow 9^y\le 4039\Leftrightarrow y\le\log_9 4039$. Vì $y$ nguyên dương nên $y\in\{1;2;3\}$. Ta thấy với mỗi giá trị nguyên của $y$ thì tìm được 1 giá trị nguyên của $x$. Vậy có 3 cặp $(x;y)$ thỏa mãn.

Chuyên đề 20 BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ - LOGARIT

## TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH MỨC 5-6 ĐIỂM

### Dạng 1. Bất phương trình logarit

+ Nếu $a>1$ thì $\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow f(x)>g(x)$ (cùng chiều)
+ Nếu $0<a<1$ thì $\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow f(x)<g(x)$ (ngược chiều)
+ Nếu a chứa ẩn thì $\left[\begin{array}{l}\log_a B>0\Leftrightarrow (a-1)(B-1)>0\\ \dfrac{\log_a A}{\log_a B}>0\Leftrightarrow (A-1)(B-1)>0\end{array}\right.$.

**Câu 1.** **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log x\ge 1$ là

**A.** $(10;+\infty)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $[10;+\infty)$. **D.** $(-\infty;10)$.

**Câu 2.** **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(13-x^2)\ge 2$ là

**A.** $(-\infty;-2]\cup[2:+\infty)$. **B.** $(-\infty;2]$. **C.** $(0;2]$. **D.** $[-2;2]$.

**Câu 3.** **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(36-x^2)\ge 3$ là

**A.** $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;3]$. **C.** $[-3;3]$. **D.** $(0;3]$.

**Câu 4.** **(Mã 101 - 2020 Lần 2)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(18-x^2)\ge 2$ là

**A.** $(-\infty;3]$. **B.** $(0;3]$. **C.** $[-3;3]$. **D.** $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$.

**Câu 5.** **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(31-x^2)\ge 3$ là

**A.** $(-\infty;2]$. **B.** $[-2;2]$. **C.** $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. **D.** $(0;2]$.

**Câu 6.** **(Đề Minh Họa 2017)** Giải bất phương trình $\log_2(3x-1)>3$.

**A.** $x>3$ **B.** $\dfrac{1}{3}<x<3$ **C.** $x<3$ **D.** $x>\dfrac{10}{3}$

**Câu 7.** **(THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019)** Tìm tập nghiệm $S$ của bất phương trình $\ln x^2<0$.

**A.** $S=(-1;1)$. **B.** $S=(-1;0)$. **C.** $S=(-1;1)\setminus\{0\}$. **D.** $S=(0;1)$.

**Câu 8.** **(THPT Minh Khai Hà Tĩnh 2019)** Tìm tập nghiệm $S$ của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)<\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$.

**A.** $S=(2;+\infty)$. **B.** $S=(-1;2)$. **C.** $S=(-\infty;2)$. **D.** $S=\left(\dfrac{1}{2};2\right)$.

**Câu 9.** **(THPT - Yên Định Thanh Hóa 2019)** Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(2x+3)\ge 0$ là

**A.** $S=(-\infty;-1]$. **B.** $S=[-1;+\infty)$. **C.** $S=(-\infty;-1)$. **D.** $S=(-\infty;0]$.

**Câu 10.** **(THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0.3}(5-2x)>\log_{\frac{3}{10}}9$ là

**A.** $\left(0;\dfrac{5}{2}\right)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $\left(-2;\dfrac{5}{2}\right)$. **D.** $(-2;+\infty)$.

**Câu 11.** **(Chuyên ĐHSP Hà Nội 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,5}(x-1)>1$ là

**A.** $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left[1;\frac{3}{2}\right)$.

**Câu 12.** **(HSG Bắc Ninh 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{\pi}{4}}(x+1)>\log_{\frac{\pi}{4}}(2x-5)$ là

**A.** $(-1;6)$ **B.** $\left(\frac{5}{2};6\right)$ **C.** $(6;+\infty)$ **D.** $(-\infty;6)$

**Câu 13.** **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Tìm tập nghiệm $S$ của bất phương trình $\log_3(2x+3)<\log_3(1-x)$

**A.** $\left(-\frac{2}{3};+\infty\right)$ **B.** $\left(-\frac{3}{2};-\frac{2}{3}\right)$ **C.** $\left(-\frac{3}{2};1\right)$ **D.** $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)$

**Câu 14.** **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)<1$ là

**A.** $(0;1)$. **B.** $\left(\frac{1}{8};3\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{8};1\right)$. **D.** $\left(\frac{1}{8};+\infty\right)$.

**Câu 15.** **(Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ An 2019)** Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{0,8}(15x+2)>\log_{0,8}(13x+8)$ là

**A.** Vô số. **B.** $4$. **C.** $2$. **D.** $3$.

**Câu 16.** **(Sở Vĩnh Phúc 2019)** Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\log_2(4-x)-1}$ là

**A.** $(-\infty;4)$. **B.** $[2;4)$. **C.** $(-\infty;2]$. **D.** $(-\infty;2)$.

**Câu 17.** **(Sở Bình Phước 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(3x+1)<2$ là

**A.** $\left[-\frac{1}{3};1\right)$ **B.** $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ **C.** $\left(-\frac{1}{3};1\right)$ **D.** $(-\infty;1)$

**Câu 18.** **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2\left(x^2-1\right)\geq 3$ là?

**A.** $[-2;2]$. **B.** $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. **D.** $[-3;3]$.

**Câu 19.** **(Sở Bắc Giang 2019)** Tập nghiệm $S$ của bất phương trình $\log_{0,8}(2x-1)<0$ là

**A.** $S=\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $S=(1;+\infty)$. **C.** $S=\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $S=(-\infty;1)$.

**Câu 20.** **(Sở Bắc Giang 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,5}(5x+14)\leq\log_{0,5}\left(x^2+6x+8\right)$ là

**A.** $(-2;2]$. **B.** $(-\infty;2]$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\left[-\frac{3}{2};0\right]$. **D.** $[-3;2]$.

**Câu 21.** **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Bất phương trình $\log_2(3x-2)>\log_2(6-5x)$ có tập nghiệm là

**A.** $(0;+\infty)$ **B.** $\left(\frac{1}{2};3\right)$. **C.** $(-3;1)$ **D.** $\left(1;\frac{6}{5}\right)$

**Câu 22.** **(KTNL GV THPT Lý Thái Tổ 2019)** Tập hợp nghiệm của bất phương trình $\log_2(x+1)<3$ là:

**A.** $S=(-1;8)$. **B.** $S=(-\infty;7)$. **C.** $S=(-\infty;8)$. **D.** $S=(-1;7)$.

**Câu 23.** **(Sở Thanh Hóa 2019)** Tìm tập nghiệm $S$ của bất phương trình $\ln x^2>\ln(4x-4)$.

**A.** $S=(2;+\infty)$. **B.** $S=(1;+\infty)$. **C.** $S=R\setminus\{2\}$. **D.** $S=(1;+\infty)\setminus\{2\}$.

**Câu 24.** **(Chuyên Phan Bội Châu 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2\left[x^2-1\right]\geq 3$ là:

**A.** $[-2;2]$. **B.** $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$.

**C.** $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. **D.** $[-3;3]$.

**Câu 25.** **(Chuyên KHTN 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{\log\left(x^2-9\right)}{\log\left(3-x\right)}\le 1$ là:

**A.** $(-4;-3)$. **B.** $[-4;-3)$. **C.** $(3;4]$. **D.** $\phi$.

**Câu 26.** **(Chuyên Thái Bình 2019)** Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số $m$ để bất phương trình $\log_2\left(x^2+mx+m+2\right)\ge\log_2\left(x^2+2\right)$ nghiệm đúng $\forall x\in\mathbb{R}$?

**A.** 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

**Câu 27.** **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Giải bất phương trình $\log_2\left(3x-2\right)>\log_2\left(6-5x\right)$ được tập nghiệm là $(a;b)$. Hãy tính tổng $S=a+b$.

**A.** $S=\dfrac{26}{5}$. **B.** $S=\dfrac{11}{5}$. **C.** $S=\dfrac{28}{15}$. **D.** $S=\dfrac{8}{3}$.

**Câu 28.** **(Sở Ninh Bình 2019)** Bất phương trình $\log_3\left(x^2-2x\right)>1$ có tập nghiệm là

**A.** $S=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$. **B.** $S=(-1;3)$.

**C.** $S=(3;+\infty)$. **D.** $S=(-\infty;-1)$.

**Câu 29.** **(Hậu Lộc 2-Thanh Hóa 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\ln 3x<\ln\left(2x+6\right)$ là:

**A.** $[0;6)$. **B.** $(0;6)$. **C.** $(6;+\infty)$. **D.** $(-\infty;6)$.

**Câu 30.** **(Hội 8 trường chuyên ĐBSH - 2019)** Tập nghiệm $S$ của bất phương trình $\log_2\left(x-1\right)<3$ là

**A.** $S=(1;9)$. **B.** $S=(1;10)$. **C.** $S=(-\infty;9)$. **D.** $S=(-\infty;10)$.

**Câu 31.** **(THPT Phan Bội Châu - Nghệ An -2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2\left(x^2-1\right)\ge 3$ là?

**A.** $[-2;2]$. **B.** $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. **D.** $[-3;3]$.

**Câu 32.** **(Bắc Ninh 2019)** Bất phương trình $\log_2(3x-2)>\log_2(6-5x)$ có tập nghiệm là $(a;b)$. Tổng $a+b$ bằng

**A.** $\dfrac{8}{3}$. **B.** $\dfrac{28}{15}$. **C.** $\dfrac{26}{5}$. **D.** $\dfrac{11}{5}$.

**Câu 33.** **(THPT Hai Bà Trưng - Huế - 2019)** Có tất cả bao nhiêu số nguyên $x$ thỏa mãn bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left[\log_2\left(2-x^2\right)\right]>0$?

**A.** Vô số. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

**Câu 34.** **(THPT Cẩm Bình 2019)** Nghiệm của bất phương trình $\log_{2-\sqrt{3}}\left(2x-5\right)\ge\log_{2-\sqrt{3}}\left(x-1\right)$ là

**A.** $\dfrac{5}{2}<x\le 4$. **B.** $1<x\le 4$. **C.** $\dfrac{5}{2}\le x\le 4\,1$. **D.** $x\ge 4$.

**Câu 35.** **(THPT Hàm Rồng 2019)** Bất phương trình $\log_4\left(x+7\right)>\log_2\left(x+1\right)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên

**A.** 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

**Câu 36.** **(Thi thử cụm Vũng Tàu - 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{3}{5}}\left(2x^2-x+1\right)<0$ là

**A.** $\left(-1;\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $(-\infty;1)\cup\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$. **C.** $(-\infty;0)\cup\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

**Câu 37.** **(Bình Phước - 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(3x+1)<2$ là

**A.** $\left[-\frac{1}{3};1\right)$. **B.** $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$. **C.** $\left(-\frac{1}{3};1\right)$. **D.** $(-\infty;1)$.

**Câu 38.** **(Ngô Quyền - Hải Phòng -2019)** Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2x-8)\geq -4$ là

**A.** 6. **B.** Vô số. **C.** 4. **D.** 5.

**Câu 39.** **(THPT Thuận Thành 3 - Bắc Ninh 2019)** Tập nghiệm $S$ của bất phương trình $\log_6 x^2<\log_6(x+6)$ là

**A.** $S=(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$. **B.** $S=(-2;3)$.

**C.** $S=(-3;2)\setminus\{0\}$. **D.** $S=(-2;3)\setminus\{0\}$.

**Câu 40.** **(Nho Quan A - Ninh Bình - 2019)** Bất phương trình $\log_2(x-2)<2$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

**A.** 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

**Câu 41.** **(Cần Thơ 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,2}(x-4)+1>0$ là

**A.** $(4;+\infty)$. **B.** $(4;9)$. **C.** $(-\infty;9)$. **D.** $(9;+\infty)$.

**Câu 42.** **(THPT Cẩm Bình Hà Tỉnh 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(7-x)+\log_{\frac{1}{2}}(x-1)\leq 0$ là

**A.** $S=(1;4]$. **B.** $S=(-\infty;4]$. **C.** $S=[4;+\infty)$. **D.** $S=[4;7)$.

**Câu 43.** **(NK HCM-2019)** Bất phương trình $1+\log_2(x-2)>\log_2(x^2-3x+2)$ có các nghiệm là

**A.** $S=(3;+\infty)$. **B.** $S=(1;3)$. **C.** $S=(2;+\infty)$. **D.** $S=(2;3)$.

Nguyễn Bảo Vương

## Dạng 2. Bất phương trình mũ

+ Nếu $a>1$ thì $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)>g(x)$. (cùng chiều)
+ Nếu $0<a<1$ thì $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)<g(x)$. (ngược chiều)
+ Nếu a chứa ẩn thì $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow (a-1)\left[f(x)-g(x)\right]>0$.

**Câu 1.** **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Tập nghiệm của bất phương trình $5^{x-1}\geq 5^{x^2-x-9}$ là

**A.** $[-2;4]$. **B.** $[-4;2]$. **C.** $(-\infty;-2]\cup[4;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-4]\cup[2;+\infty)$.

**Câu 2.** **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Tập nghiệm của bất phương trình $9^x+2.3^x-3>0$ là

**A.** $[0;+\infty)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $[1;+\infty)$.

**Câu 3.** **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-13}<27$ là

**A.** $(4;+\infty)$. **B.** $(-4;4)$. **C.** $(-\infty;4)$. **D.** $(0;4)$.

**Câu 4.** **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-23}<9$ là

**A.** $(-5;5)$. **B.** $(-\infty;5)$. **C.** $(5;+\infty)$. **D.** $(0;5)$.

**Câu 5.** **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2-7}<4$ là

**A.** $(-3;3)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

**Câu 6.** **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2-1}<8$ là

**A.** $(0;2)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(-2;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

**Câu 7.** **(Đề Tham Khảo 2018)** Tập nghiệm của bất phương trình $2^{2x}<2^{x+6}$ là:

**A.** $(-\infty;6)$ **B.** $(0;64)$ **C.** $(6;+\infty)$ **D.** $(0;6)$

**Câu 8.** **(Đề Tham Khảo 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-2x}<27$ là

**A.** $(3;+\infty)$ **B.** $(-1;3)$

**C.** $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$ **D.** $(-\infty;-1)$

**Câu 9.** **(Dề Minh Họa 2017)** Cho hàm số $f(x)=2^x.7^{x^2}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

**A.** $f(x)<1\Leftrightarrow x+x^2\log_2 7<0$ **B.** $f(x)<1\Leftrightarrow x\ln 2+x^2\ln 7<0$

**C.** $f(x)<1\Leftrightarrow x\log_7 2+x^2<0$ **D.** $f(x)<1\Leftrightarrow 1+x\log_2 7<0$

**Câu 10.** **(Đề Tham Khảo 2017)** Tìm tập nghiệm $S$ của bất phương trình $5^{x+1}-\frac{1}{5}>0$.

**A.** $S=(-\infty;-2)$. **B.** $S=(1;+\infty)$. **C.** $S=(-1;+\infty)$. **D.** $S=(-2;+\infty)$.

**Câu 11.** **(THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019)** Cho hàm số $y=\mathrm{e}^{x^2+2x-3}-1$. Tập nghiệm của bất phương trình $y'\geq 0$ là:

**A.** $(-\infty;-1]$. **B.** $(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$. **C.** $[-3;1]$. **D.** $[-1;+\infty)$.

**Câu 12.** **(Thpt Hùng Vương Bình Phước 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^x>9$ trên tập số thực là

**A.** $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $(-2;+\infty)$.

**Câu 13.** **(THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $4^{x+1}\leq 8^{x-2}$ là

**A.** $[8;+\infty)$. **B.** $\varnothing$. **C.** $(0;8)$. **D.** $(-\infty;8]$.

**Câu 14.** **(THPT Cù Huy Cận 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2+2x}\leq 8$ là

**A.** $(-\infty;-3]$. **B.** $[-3;1]$. **C.** $(-3;1)$. **D.** $(-3;1]$.

**Câu 15.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Tập nghiệm $S$ của bất phương trình $5^{x+2}<\left(\frac{1}{25}\right)^{-x}$ là

**A.** $S=(-\infty;2)$ **B.** $S=(-\infty;1)$ **C.** $S=(1;+\infty)$ **D.** $S=(2;+\infty)$

**Câu 16.** **(THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Tập nghiệm bất phương trình $2^{x^2-3x}<16$ là

**A.** $(-\infty;-1)$. **B.** $(4;+\infty)$. **C.** $(-1;4)$. **D.** $(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)$.

**Câu 17.** **(THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Tập nghiệm bất phương trình: $2^x>8$ là

**A.** $(-\infty;3)$. **B.** $[3;+\infty)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;3]$.

**Câu 18.** **(Chuyên Quốc Học Huế 2019)** Tìm tập nghiệm $S$ của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+3x}<\frac{1}{4}$.

**A.** $S=[1;2]$ **B.** $S=(-\infty;1)$ **C.** $S=(1;2)$ **D.** $S=(2;+\infty)$

**Câu 19.** **(Đề Tham Khảo 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-2x}<27$ là

**A.** $(-\infty;-1)$ **B.** $(3;+\infty)$ **C.** $(-1;3)$ **D.** $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$

**Câu 20.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho $f(x)=x.\mathrm{e}^{-3x}$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x)>0$ là

**A.** $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$ **B.** $\left(0;\frac{1}{3}\right)$ **C.** $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$ **D.** $(0;1)$

**Câu 21.** **(THPT Ba Đình 2019)** Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-3x-7} > 3^{2x-21}$ là

**A.** 7. **B.** 6. **C.** vô số. **D.** 8.

**Câu 22.** **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $2^{3x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2x-6}$ là

**A.** $(0;6)$. **B.** $(-\infty;6)$. **C.** $(0;64)$. **D.** $(6;+\infty)$.

**Câu 23.** **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} \geq \frac{1}{8}$ có tập nghiệm là

**A.** $[3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1]$. **C.** $[-1;3]$. **D.** $(-1;3)$.

**Câu 24.** **(THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019** Nghiệm nguyên lớn nhất của bất phương trình $4^{x^2-2x} < 64$ là

**A.** 2. **B.** $-1$. **C.** 3. **D.** 0.

**Câu 25.** **(Sở Hà Nội 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{3}{4}\right)^{-x^2} > \frac{81}{256}$ là

**A.** $(-\infty;-2)$. **B.** $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $(-2;2)$.

**Câu 26.** **(Chuyên Sơn La 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2-2x} > 8$ là

**A.** $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;3)$.

**C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

Nguyễn Bảo Vương

**Câu 27.** **(Chuyên ĐHSP Hà Nội 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{e}{\pi}\right)^x > 1$ là

**A.** $\mathbb{R}$ **B.** $(-\infty;0)$ **C.** $(0;+\infty)$ **D.** $[0;+\infty)$

**Câu 28.** **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Số nghiệm nguyên của bất phương trình $2^{x^2+3x} \leq 16$ là số nào sau đây ?

**A.** 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

**Câu 29.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{1+a^2}\right)^{2x+1} > 1$ (với $a$ là tham số, $a \neq 0$) là:

**A.** $(-\infty;0)$ **B.** $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ **C.** $(0;+\infty)$ **D.** $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$

**Câu 30.** **(Cụm 8 Trường Chuyên 2019)** Tập nghiệm $S$ của bất phương trình $3^x < e^x$ là:

**A.** $S=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **B.** $S=(0;+\infty)$. **C.** $S=\mathbb{R}$. **D.** $S=(-\infty;0)$.

**Câu 31.** **(Nguyễn Huệ- Ninh Bình- 2019)**Bất phương trình $2^{x+1} \leq 4$ có tập nghiệm là:

**A.** $[1:+\infty)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(1:+\infty)$. **D.** $(-\infty;1]$.

**Câu 32.** **(THPT Minh Khai - 2019)** Tìm tập nghiệm $S$ của bất phương trình $3^x < 9$

**A.** $S=(-\infty;2]$. **B.** $S=(2;+\infty)$. **C.** $S=(-\infty;2)$. **D.** $S=\{2\}$.

**Câu 33.** **(Lômônôxốp - Hà Nội 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{x}} \le \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2}$ là:

**A.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $\left(0;\frac{1}{2}\right]$. **D.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$.

**Câu 34.** **( Đồng Nai - 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x+2} \ge \frac{1}{9}$ là

**A.** $[-4;+\infty)$. **B.** $(-\infty;4)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $[0;+\infty)$.

**Câu 35.** **(Chuyên Long An-2019)** Tìm nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \ge \frac{1}{4}$.

**A.** $x \le 3$. **B.** $x > 3$. **C.** $x \ge 3$. **D.** $1 < x \le 3$.

**Câu 36.** **(Chuyên - Vĩnh Phúc - 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{1+a^2}\right)^{2x+1} > 1$ (với $a$ là tham số, $a \ne 0$ ) là

**A.** $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

**Câu 37.** **(Chuyên Lam Sơn-2019)** Số nghiệm nguyên của bất phương trình $2^{x^2+3x} \le 16$ là

**A.** 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

**Câu 38.** **(chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} \ge \frac{1}{8}$ có tập nghiệm là

**A.** $[3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1]$. **C.** $[-1;3]$. **D.** $(-1;3)$.

**Câu 39.** **(Chuyên Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình 2019)**Cho bất phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-x+1} > \left(\frac{2}{3}\right)^{2x+1}$ có tập nghiệm $S=(a;b)$. Giá trị của $b-a$ bằng

**A.** 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

**Câu 40.** **(SGD Hưng Yên 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x+1} > 1$ là

**A.** $(-\infty;0)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

**Câu 41.** **(SGD Điện Biên - 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $2^{\sqrt{x}} < 2$ là

**A.** $[0;1)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $(1;+\infty)$.

**Câu 42.** **(Ngô Quyền - Ba Vì - Hải Phòng 2019)** Tập nghiệm $S$ của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x} < 8$ là

**A.** $S=(-\infty;3)$. **B.** $S=(1;+\infty)$. **C.** $S=(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$. **D.** $S=(1;3)$.

**Câu 43.** **(Cần Thơ - 2019)** Nghiệm của bất phương trình $2^{x^2-x} \le 4$ là

**A.** $-1 \le x \le 2$. **B.** $x \le 1$. **C.** $x \le 2$. **D.** $-2 \le x \le 1$.

**Câu 44.** **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Tìm tập nghiệm của bất phương trình $2^x + 2^{x+1} \le 3^x + 3^{x-1}$.

**A.** $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(-\infty;2]$. **D.** $[2;+\infty)$.

Nguyễn Bảo Vương

**Câu 45.** **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho bất phương trình $4^x - 5.2^{x+1} + 16 \le 0$ có tập nghiệm là đoạn $[a;b]$. Tính $\log\left(a^2 + b^2\right)$

**A.** $2$. **B.** $1$. **C.** $0$. **D.** $10$.

**Câu 46.** **(Thi thử cụm Vũng Tàu - 2019)** Cho bất phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-x+1} > \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1}$ có tập nghiệm $S = (a;b)$. Giá trị của $b-a$ bằng

**A.** $-2$. **B.** $-1$. **C.** $1$. **D.** $2$.

**Câu 47.** **(Chuyên Quốc Học Huế 2019)** Xác định tập nghiệm $S$ của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3} \ge 3$.

**A.** $S = (-\infty;1]$. **B.** $S = (1;+\infty)$. **C.** $S = [1;+\infty)$. **D.** $S = (-\infty;1)$.

**Câu 48.** **(Sở Hà Nam - 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $(5)^{4+x^2} < \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-6x}$ là

**A.** $(-\infty;1) \cup (2;+\infty)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(1;2)$.

**Câu 49.** **(Chu Văn An - Hà Nội - 2019)** Bất phương trình $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{x-1} \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2x+3}$ có nghiệm là

**A.** $x \le -4$. **B.** $x > -4$. **C.** $x < -4$. **D.** $x \ge -4$.

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 20 BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ - LOGARIT

## TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ-GIỎI MỨC 7-8-9-10 ĐIỂM

### DẠNG 1. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

*Sử dụng các phương pháp giải phương trình logarit đã đưa ra tại Chuyên đề 19. Phương trình mũ – logarit để giải*

**Câu 1.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $2\log_2(x-1)\le\log_2(5-x)+1$ là

**A.** $[3;5]$ **B.** $(1;3]$ **C.** $[1;3]$ **D.** $(1;5)$

**Câu 2.** **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Tìm tập nghiệm $S$ của bất phương trình $2\log_3(4x-3)\le\log_3(18x+27)$.

**A.** $S=\left[-\frac{3}{8};3\right]$. **B.** $S=\left(\frac{3}{4};3\right]$. **C.** $S=\left(\frac{3}{4};+\infty\right)$. **D.** $S=[3;+\infty)$.

**Câu 3.** **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình -2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2^2(2x)+\log_2\frac{x}{4}<9$ chứa tập hợp nào sau đây?

**A.** $\left(\frac{3}{2};6\right)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(1;5)$. **D.** $\left(\frac{1}{2};2\right)$.

**Câu 4.** **(Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(11-2x)\ge 0$ là:

**A.** $(-\infty;4]$. **B.** $(1;4]$. **C.** $(1;4)$. **D.** $\left[4;\frac{11}{2}\right)$.

Nguyễn Bảo Vương

**Câu 5.** **(Sở Phú Thọ 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(11-2x)\ge 0$ là

**A.** $(-\infty;4]$ **B.** $(1;4]$ **C.** $(1;4)$ **D.** $\left[4;\frac{11}{2}\right)$

**Câu 6.** **(Sở Bắc Ninh 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(11-2x)\ge 0$ là:

**A.** $S=(-\infty;4]$. **B.** $S=(1;4)$. **C.** $S=(1;4]$. **D.** $S=\left(3;\frac{11}{2}\right)$.

**Câu 7.** **(THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $2\log_2\sqrt{x+1}\le 2-\log_2(x-2)$ bằng

**A.** 12 **B.** 9 **C.** 5 **D.** 3

**Câu 8.** **(Chuyên Bắc Ninh 2019)** Tìm tất cả giá trị của tham số $m$ để bất phương trình $\log\left(2x^2+3\right)>\log\left(x^2+mx+1\right)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

**A.** $-2<m<2$. **B.** $m<2\sqrt{2}$. **C.** $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$. **D.** $m<2$.

**Câu 9.** **(Mã 123 2017)** Tìm tập nghiệm $S$ của bất phương trình $\log_2^2 x-5\log_2 x+4\ge 0$.

**A.** $S=(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$ **B.** $S=[2;16]$

**C.** $S=(0;2]\cup[16;+\infty)$ **D.** $(-\infty;2]\cup[16;+\infty)$

**Câu 10.** **(Mã 105 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để bất phương trình $\log_2^2 x-2\log_2 x+3m-2<0$ có nghiệm thực.

**A.** $m<1$ **B.** $m\le 1$ **C.** $m<0$ **D.** $m<\frac{2}{3}$

**Câu 11. (THPT Đoàn Thượng - Hải Dương 2019)** Biết rằng bất phương trình $\log_2\left(5^x+2\right)+2.\log_{\left(5^x+2\right)}2>3$ có tập nghiệm là $S=\left(\log_a b;+\infty\right)$, với $a$, $b$ là các số nguyên dương nhỏ hơn 6 và $a\ne 1$. Tính $P=2a+3b$.

**A.** $P=7$. **B.** $P=11$. **C.** $P=18$. **D.** $P=16$.

**Câu 12.** Tập nghiệm $S$ của bất phương trình $\log_2^2 x-5\log_2 x-6\le 0$ là

**A.** $S=\left[\frac{1}{2};64\right]$. **B.** $S=\left(0;\frac{1}{2}\right]$.

**C.** $S=\left[64;+\infty\right)$. **D.** $S=\left(0;\frac{1}{2}\right]\cup\left[64;+\infty\right)$.

**Câu 13. (Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Kí hiệu $\max\left\{a;b\right\}$ là số lớn nhất trong hai số $a,b$. Tìm tập nghiệm $S$ của bất phương trình $\max\left\{\log_2 x;\ \log_{\frac{1}{3}}x\right\}<1$.

**A.** $S=\left(\frac{1}{3};2\right)$. **B.** $S=\left(0;2\right)$. **C.** $S=\left(0;\frac{1}{3}\right)$. **D.** $S=\left(2;+\infty\right)$.

**Câu 14. (Sở Bắc Ninh 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2\left(x\sqrt{x^2+2}+4-x^2\right)+2x+\sqrt{x^2+2}\le 1$ là $\left(-\sqrt{a};-\sqrt{b}\right]$.

Khi đó $a.b$ bằng

**A.** $\frac{15}{16}$. **B.** $\frac{12}{5}$. **C.** $\frac{16}{15}$. **D.** $\frac{5}{12}$.

Nguyễn Bảo Vương

**Câu 15. (Chuyên Đại học Vinh - 2019)** Bất phương trình $\left(x^3-9x\right)\ln\left(x+5\right)\le 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

**A.** 4. **B.** 7. **C.** 6. **D.** Vô số.

**Câu 16. (THPT Đoàn Thượng – Hải Dương 2019)** Biết rằng bất phương trình $\log_2\left(5^x+2\right)+2.\log_{\left(5^x+2\right)}2>3$ có tập nghiệm là $S=\left(\log_a b;+\infty\right)$, với $a$, $b$ là các số nguyên dương nhỏ hơn 6 và $a\ne 1$. Tính $P=2a+3b$.

**A.** $P=7$. **B.** $P=11$. **C.** $P=18$. **D.** $P=16$.

**Câu 17. (Chuyên Đại học Vinh - 2019)** Tính tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2\left(x^2+3\right)-\log_2 x+x^2-4x+1\le 0$.

**A.** 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 3.

**Câu 18. (HKI-NK HCM-2019)** Biết bất phương trình $\log_2\left(\frac{x^2+x+1}{16x+3}\right)+\left(\sqrt{x}-2\right)^2+x\le 1$ có tập nghiệm là $S=\left(a;b\right)$. Hãy tính tổng $T=20a+10b$.

**A.** $T=45-10\sqrt{2}$. **B.** $T=46-10\sqrt{2}$. **C.** $T=46-11\sqrt{2}$. **D.** $T=47-11\sqrt{2}$.

**Câu 19. (THPT Cẩm Bình Hà Tỉnh 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\left(10-3^{x+1}\right)\ge 1-x$ chứa mấy số nguyên.

**A.** 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** Vô số.

**Câu 20.** **(Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2018)** Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2 x+\log_3 x\ge 1+\log_2 x.\log_3 x$ là

**A.** $1$. **B.** $2$. **C.** $3$. **D.** Vô số.

**Câu 21.** **(THPT Lý Thái Tổ - Bắc Ninh - 2018)** Bất phương trình $\log_2\left(\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{3x-7}{x+3}\right)\ge 0$ có tập nghiệm là $(a;b]$. Tính giá trị $P=3a-b$.

**A.** $P=5$. **B.** $P=4$. **C.** $P=10$. **D.** $P=7$.

**Câu 22.** **(THPT Ngô Quyền - Hải Phòng - 2018)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(-\log_2 x)<0$ là

**A.** $(0;5)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{4};4\right)$. **D.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

**Câu 23.** **(THPT Nam Trực - Nam Định - 2018)** Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình $\log^2_{\sqrt{5}} x^5-25\log_{\sqrt{5}} x^2-75\le 0$ là

**A.** $70$. **B.** $64$. **C.** $62$. **D.** $66$.

**Câu 24.** **(THPT Lương Văn Can - 2018)** Cho bất phương trình $(\log x+1)(4-\log x)>0$. Có bao nhiêu số nguyên $x$ thoả mãn bất phương trình trên.

**A.** $10000$. **B.** $10001$. **C.** $9998$. **D.** $9999$.

## DẠNG 2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

*Sử dụng các phương pháp giải phương trình mũ đã đưa ra tại Chuyên đề 19. Phương trình mũ – logarit để giải*

**Câu 1.** **(THPT Trần Phú - 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình: $(3^x+2)(4^{x+1}-8^{2x+1})\le 0$

**A.** $\left[-\dfrac{1}{4};+\infty\right)$ **B.** $\left(-\infty;-\dfrac{1}{4}\right]$. **C.** $(-\infty;4]$ **D.** $[4;+\infty)$.

**Câu 2.** **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh 2019)** Bất phương trình $3^{2x+1}-7.3^x+2>0$ có tập nghiệm là

**A.** $(-\infty;-1)\cup(\log_2 3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)\cup(\log_2 3;+\infty)$.

**C.** $(-\infty;-1)\cup(\log_3 2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-2)\cup(\log_3 2;+\infty)$.

**Câu 3.** **(Chuyên ĐH Vinh -2019)** Biết tập nghiệm của bất phương trình $2^x<3-\dfrac{2}{2^x}$ là $(a;b)$. Giá trị $a+b$ bằng

**A.** $3$. **B.** $2$. **C.** $0$. **D.** $1$.

**Câu 4.** **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $3^{3x+1}-9+3^{x+1}-9.3^{2x}>0$ là

**A.** $(-\infty;1)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;3)$.

**Câu 5.** **(THPT Đông Sơn 1 - Thanh Hóa - 2019)** Bất phương trình $6.4^x-13.6^x+6.9^x>0$ có tập nghiệm là?

**A.** $S=(-\infty;-1)\cup[1;+\infty)$. **B.** $S=(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$.

**C.** $S=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. **D.** $S=(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$.

**Câu 6.** **(Kinh Môn - Hải Dương 2019)** Cho bất phương trình: $2.5^{x+2}+5.2^{x+2}-133.\sqrt{10^x}\le 0$ có tập nghiệm là: $S=[a;b]$. Biểu thức $A=1000b-5a$ có giá trị bằng

**A.** 2021 **B.** 2020 **C.** 2019 **D.** 2018

**Câu 7.** **(Toán Học Tuổi Trẻ Năm 2019)** Số nghiệm nguyên của bất phương trình: $\left(17-12\sqrt{2}\right)^{x}\geq\left(3+\sqrt{8}\right)^{x^2}$ là:

**A.** $3$. **B.** $1$. **C.** $2$. **D.** $4$.

**Câu 8.** **(Chuyên Lê Quý Dôn Diện Biên 2019)** Tìm tập nghiệm của bất phương trình $2^{x}+2^{x+1}\leq 3^{x}+3^{x-1}$.

**A.** $\left(2;+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;2\right)$. **C.** $\left(-\infty;2\right]$. **D.** $\left[2;+\infty\right)$.

**Câu 9.** **(Chuyên Hưng Yên 2019)** Cho bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}}+3\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}+1}>12$ có tập nghiệm $S=\left(a;b\right)$. Giá trị của biểu thức $P=3a+10b$ là

**A.** $5$. **B.** $-3$. **C.** $-4$. **D.** $2$.

**Câu 10.** **(Chuyên Hạ Long 2019)** Bất phương trình sau có bao nhiêu nghiệm nguyên dương $9^{x}-4.3^{x}+3<0$.

**A.** 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

**Câu 11.** **(THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019)** Bất phương trình $6.4^{x}-13.6^{x}+6.9^{x}>0$ có tập nghiệm là?

**A.** $S=\left(-\infty;-1\right)\cup\left[1;+\infty\right)$. **B.** $S=\left(-\infty;-2\right)\cup\left(1;+\infty\right)$.

**C.** $S=\left(-\infty;-1\right)\cup\left(1;+\infty\right)$. **D.** $S=\left(-\infty;-2\right]\cup\left[2;+\infty\right)$.

**Câu 12.** **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2+4x-14}\geq 7+4\sqrt{3}$ là:

**A.** $\left[-6;2\right]$. **B.** $\left(-\infty-6\right]\cup\left[2;+\infty\right)$. **C.** $\left(-6;2\right)$. **D.** $\left(-\infty;-6\right)\cup\left(2;+\infty\right)$.

**Câu 13.** **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $6^{x}+4\leq 2^{x+1}+2.3^{x}$

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0

**Câu 14.** **(Chuyên Thái Bình 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-9}+\left(x^2-9\right).5^{x+1}<1$ là khoảng $\left(a;b\right)$. Tính $b-a$

**A.** $6$. **B.** $3$. **C.** $8$. **D.** $4$.

**Câu 15.** **( Hsg Bắc Ninh 2019)** Bất phương trình $\frac{\sqrt{2+3^{2x}}}{\sqrt{2+3^{2x}}-\sqrt{2-3^{2x}}}+\frac{3^{4x}+\sqrt{4-3^{4x}}-7}{3^{2x}}\geq\frac{3^{2x}-2}{\sqrt{4-3^{4x}}-2+3^{2x}}$ có bao nhiêu nghiệm?

**A.** Vô số. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3

**Câu 16.** **(KTNL GV Thpt Lý Thái Tổ 2019)** Số nghiệm nguyên thuộc đoạn $\left[-20;\,20\right]$ của bất phương trình: $2^{2x+1}-9.2^{x}+4\sqrt{x^2+2x-3}\geq 0$ là

**A.** $38$. **B.** $36$. **C.** $37$. **D.** $19$.

**Câu 17.** **(Chuyên Thái Nguyên 2019)** Tập hợp tất cả các số thực $x$ không thỏa mãn bất phương trình $9^{x^2-4}+\left(x^2-4\right).2019^{x-2}\geq 1$ là khoảng $\left(a;b\right)$. Tính $b-a$.

**A.** $5$. **B.** $4$. **C.** $-5$. **D.** $-1$.

**Câu 18.** **(THPT Chuyên Thái Bình - 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-9}+\left(x^2-9\right).5^{x+1}<1$ là khoảng $\left(a;b\right)$. Tính $b-a$.

**A.** $6$. **B.** $3$. **C.** $8$. **D.** $4$.

**Câu 19.** **(Chuyên Bắc Ninh - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của $x$ trong đoạn $\left[0;2020\right]$ thỏa mãn bất phương trình sau

$16^x+25^x+36^x\le 20^x+24^x+30^x$.

**A.** 3. **B.** 2000. **C.** 1. **D.** 1000.

**Câu 20.** **(Hải Hậu - Nam Định - 2020)** Tập nghiệm của bất phương trình $(3^{2x}-9)(3^x-\frac{1}{27})\sqrt{3^{x+1}-1}\le 0$ chứa bao nhiêu số nguyên ?

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

**Câu 21.** **(THPT Lương Văn Tụy - Ninh Bình - 2018)** Tập nghiệm của bất phương trình $9^x-2(x+5).3^x+9(2x+1)\ge 0$ là

**A.** $[0;1]\cup[2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$. **C.** $[1;2]$. **D.** $(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$.

**Câu 22.** **(Toán Học Tuổi Trẻ Số 6)** Tập nghiệm của bất phương trình $2.7^{x+2}+7.2^{x+2}\le 351.\sqrt{14^x}$ có dạng là đoạn $S=[a;b]$. Giá trị $b-2a$ thuộc khoảng nào dưới đây?

**A.** $(3;\sqrt{10})$. **B.** $(-4;2)$. **C.** $(\sqrt{7};4\sqrt{10})$. **D.** $\left(\frac{2}{9};\frac{49}{5}\right)$.

**Câu 23.** **(Chuyên ĐHSPHN - 2018)** Cho $f(x)=\frac{1}{2}.5^{2x+1}$; $g(x)=5^x+4x.\ln 5$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x)>g'(x)$ là

**A.** $x<0$. **B.** $x>1$. **C.** $0<x<1$. **D.** $x>0$.

**Câu 24.** **(THPT Kinh Môn - Hải Dương - 2018)** Bất phương trình $2.5^{x+2}+5.2^{x+2}\le 133.\sqrt{10^x}$ có tập nghiệm là $S=[a;b]$ thì biểu thức $A=1000b-4a+1$ có giá trị bằng

**A.** 3992. **B.** 4008. **C.** 1004. **D.** 2017.

**Câu 25.** Số nghiệm nguyên thuộc khoảng $(0;12)$ của bất phương trình $3^{x+\frac{1}{x}-1}-3^{2+\frac{11}{x}}\le \log_2\sqrt{\frac{2x+11}{x^2+x+1}}$ là:

**A.** 7. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 11.

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 20 BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ - LOGARIT

## TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI – MỨC 9-10 ĐIỂM

### DẠNG 1. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT CHỨA THAM SỐ

**Câu 1.** **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Cho $a$ là số thực dương, $a\neq 1$. Biết bất phương trình $2\log_a x\le x-1$ nghiệm đúng với mọi $x>0$. Số $a$ thuộc tập hợp nào sau đây?

**A.** $(7;8)$ **B.** $(3;5]$ **C.** $(2;3)$ **D.** $(8;+\infty)$

**Câu 2.** **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Cho $a$ là số nguyên dương lớn nhất thỏa mãn $3\log_3\left(1+\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}\right)>2\log_2\sqrt{a}$. Giá trị của $\log_2(2017a)$ xấp xỉ bằng:

**A.** $19$. **B.** $26$. **C.** $25$. **D.** $23$.

**Câu 3.** **(Chuyên Hưng Yên 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để bất phương trình $\log_{0,02}\left(\log_2\left(3^x+1\right)\right)>\log_{0,02} m$ có nghiệm với mọi $x\in(-\infty;0)$

**A.** $m\ge 1$. **B.** $0<m<1$. **C.** $m>1$. **D.** $m<2$.

**Câu 4.** **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Gọi $S$ là tổng tất cả các giá trị nguyên của $m$ để bất phương trình $\ln\left(7x^2+7\right)\ge\ln\left(mx^2+4x+m\right)$ nghiệm đúng với mọi $x$ thuộc $\mathbb{R}$. Tính $S$.

**A.** $S=14$. **B.** $S=0$. **C.** $S=12$. **D.** $S=35$.

**Câu 5.** **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của $m$ để bất phương trình $\log_2\left(7x^2+7\right)\ge\log_2\left(mx^2+4x+m\right)$ nghiệm đúng với mọi $x$.

**A.** 5 **B.** 4 **C.** 0 **D.** 3

**Câu 6.** **(Chuyên Quang Trung Bình Phước 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>\log_{\frac{1}{2}}\left(x^3+x-m\right)$ có nghiệm.

**A.** $m\le 2$. **B.** $m\in\mathbb{R}$.

**C.** $m<2$. **D.** Không tồn tại $m$.

**Câu 7.** **(THPT Chuyên Thái Bình - 2019)** Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số $m$ để bất phương trình $\log_2\left(x^2+mx+m+2\right)\ge\log_2\left(x^2+2\right)$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

**A.** $2$. **B.** $4$. **C.** $3$. **D.** $1$.

**Câu 8.** **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2019)** Tìm tập $S$ tất cả các giá trị thực của số $m$ để tồn tại duy nhất cặp số $(x;y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}\left(4x+4y-6+m^2\right)\ge 1$ và $x^2+y^2+2x-4y+1=0$.

**A.** $S=\{-5;-1;1;5\}$. **B.** $S=\{-1;1\}$.

**C.** $S=\{-5;5\}$. **D.** $S=\{-7-5;-1;1;5;7\}$.

**Câu 9.** **(Bình Giang-Hải Dương 2019)** Xét bất phương trình $\log_2^2(2x)-2(m+1)\log_2 x-2<0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để bất phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

**A.** $m\in\left(-\frac{3}{4};0\right)$. **B.** $m\in(0;+\infty)$. **C.** $m\in(-\infty;0)$. **D.** $m=\in\left(-\frac{3}{4};+\infty\right)$.

**Câu 10.** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để bất phương trình $m^2\left(x^5-x^4\right)-m\left(x^4-x^3\right)+x-\ln x-1\ge 0$ thỏa mãn với mọi $x>0$. Tính tổng các giá trị trong tập hợp $S$.

**A.** $2$. **B.** $0$. **C.** $1$. **D.** $-2$.

**Câu 11.** **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho bất phương trình $\log_7\left(x^2+2x+2\right)+1>\log_7\left(x^2+6x+5+m\right)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ để bất phương trình có tập nghiệm chứa khoảng $(1;3)$?

**A.** $36$. **B.** $34$. **C.** $35$. **D.** Vô số.

**Câu 12.** **(Chuyên Bắc Ninh - 2020)** Gọi $m_0$ là giá trị nhỏ nhất để bất phương trình $1+\log_2(2-x)-2\log_2\left(m-\frac{x}{2}+4\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2x+2}\right)\right)\le-\log_2(x+1)$ có nghiệm. Chọn đáp án đúng trong các khẳng định sau

**A.** $m_0\in(9;10)$. **B.** $m_0\in(8;9)$. **C.** $m_0\in(-10;-9)$. **D.** $m_0\in(-9;-8)$.

**Câu 13.** **(Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020)** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các điểm $M(x;y)$ trong đó $x,y$ là các số nguyên thoả mãn điều kiện $\log_{x^2+y^2+1}(2x+2y+m)\ge1$, với $m$ là tham số. Có bao nhiêu số nguyên $m$ thuộc đoạn $[-2020;2019]$ để tập $S$ có không quá $5$ phần tử?

**A.** $1$. **B.** $2020$. **C.** $2021$. **D.** $2019$.

**Câu 14.** **(Chuyên Thái Bình - Lần 3 - 2020)** Cho bất phương trình $\log_7\left(x^2+2x+2\right)+1>\log_7\left(x^2+6x+5+m\right)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để bất phương trình trên có tập nghiệm chứa khoảng $(1;3)$?

**A.** $36$. **B.** $35$. **C.** $34$. **D.** Vô số.

**Câu 15.** **(Chuyên Lê Hồng Phong - 2018)** Xét bất phương trình $\log_2^2 2x-2(m+1)\log_2 x-2<0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để bất phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

**A.** $m\in(0;+\infty)$. **B.** $m\in\left(-\frac{3}{4};0\right)$. **C.** $m\in\left(-\frac{3}{4};+\infty\right)$. **D.** $m\in(-\infty;0)$.

**Câu 16.** **(Chuyên Vinh - 2018)** Gọi $a$ là số thực lớn nhất để bất phương trình $x^2-x+2+a\ln\left(x^2-x+1\right)\ge0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

**A.** $a\in(2;3]$. **B.** $a\in(8;+\infty)$. **C.** $a\in(6;7]$. **D.** $a\in(-6;-5]$.

**Câu 17.** **(THPT Lê Xoay - 2018)** Giả sử $S=(a,b]$ là tập nghiệm của bất phương trình $5x+\sqrt{6x^2+x^3-x^4}\log_2 x>\left(x^2-x\right)\log_2 x+5+5\sqrt{6+x-x^2}$. Khi đó $b-a$ bằng

**A.** $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $2$.

**Câu 18.** **(Chuyên Hà Tĩnh - 2018)** Cho bất phương trình $\log_7\left(x^2+2x+2\right)+1>\log_7\left(x^2+6x+5+m\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để bất phương trình trên có tập ngiệm chứa khoảng $(1;3)$?

**A.** $35$. **B.** $36$. **C.** $34$. **D.** $33$.

**Câu 19.** **(Sở Quảng Nam 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(-9;9)$ của tham số $m$ để bất phương trình $3\log x\le2\log\left(m\sqrt{x-x^2}-(1-x)\sqrt{1-x}\right)$ có nghiệm thực?

**A.** $6$. **B.** $7$. **C.** $10$. **D.** $11$.

**Câu 20.** **(Yên Phong 1 - 2018)** Có bao nhiêu số nguyên $m$ sao cho bất phương trình $\ln5+\ln\left(x^2+1\right)\ge\ln\left(mx^2+4x+m\right)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

**A.** 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

## DẠNG 2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ CHỨA THAM SỐ

**Câu 1.** **(VTED 2019)** Cho $a>1$. Biết khi $a=a_0$ thì bất phương trình $x^a \le a^x$ đúng với mọi $x\in(1;+\infty)$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

**A.** $1<a_0<2$ **B.** $e<a_0<e^2$ **C.** $2<a_0<3$ **D.** $e^2<a_0<e^3$

**Câu 2.** **(Chuyên Hạ Long 2019)** Tìm $m$ để hàm số sau xác định trên $\mathbb{R}$: $y=\sqrt{4^x-(m+1).2^x-m}$

**A.** Đáp án khác. **B.** $m>-1$.

**C.** $m<0$. **D.** $-3-2\sqrt{2}\le m\le -3+2\sqrt{2}$.

**Câu 3.** Bất phương trình $4^x-(m+1)2^{x+1}+m\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x\ge 0$. Tập tất cả các giá trị của $m$ là

**A.** $(-\infty;12)$. **B.** $(-\infty;-1]$. **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $(-1;16]$.

**Câu 4.** **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để bất phương trình $4^{x-1}-m(2^x+1)>0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

**A.** $m\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$. **B.** $m\in(-\infty;0]$.

**C.** $m\in(0;+\infty)$. **D.** $m\in(0;1)$.

**Câu 5.** **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Bất phương trình $4^x-(m+1)2^{x+1}+m\ge 0$ nghiệm đúng với mọi $x\ge 0$. Tập tất cả các giá trị của $m$ là

**A.** $(-\infty;12)$. **B.** $(-\infty;-1]$. **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $(-1;16]$.

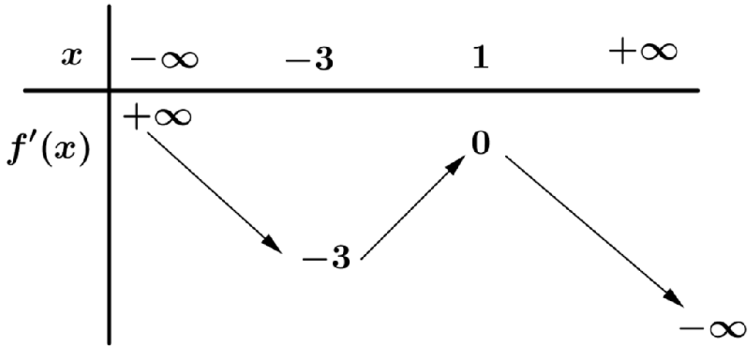
**Câu 6.** **(THPT Hàm Rồng Thanh Hóa 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ để bất phương trình sau nghiệm đúng với $\forall x\in\mathbb{R}$: $(6+2\sqrt{7})^x+(2-m)(3-\sqrt{7})^x-(m+1)2^x\ge 0$

**A.** 10. **B.** 9. **C.** 12. **D.** 11.

**Câu 7.** **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Tìm $m$ để bất phương trình $2^x+3^x+4^x+5^x\ge 4+mx$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

**A.** $\ln 120$. **B.** $\ln 10$. **C.** $\ln 30$. **D.** $\ln 14$.

**Câu 8.** **(Đề Tham Khảo 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:




Bất phương trình $f(x)<e^x+m$ đúng với mọi $x\in(-1;1)$ khi và chỉ khi.

**A.** $m>f(-1)-\frac{1}{e}$ **B.** $m\ge f(-1)-\frac{1}{e}$ **C.** $m>f(1)-e$ **D.** $m\ge f(1)-e$

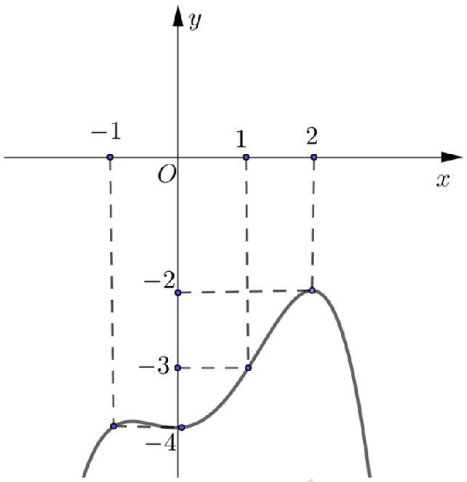
**Câu 9.** **(Chuyên Sơn La 2019)** Cho hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Bất phương trình $f(x)<e^{x^2}+m$ đúng với mọi $x\in(-1;1)$ khi và chỉ khi

**A.** $m\geq f(0)-1$. **B.** $m>f(-1)-e$. **C.** $m>f(0)-1$. **D.** $m\geq f(-1)-e$.

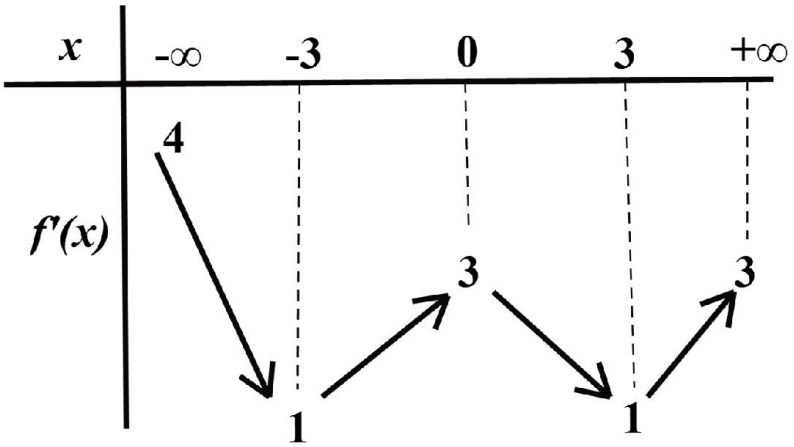
**Câu 10.** **(Phú Thọ 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ




Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ để bất phương trình $9.6^{f(x)}+\left(4-f^2(x)\right).9^{f(x)}\leq\left(-m^2+5m\right).4^{f(x)}$ đúng $\forall x\in\mathbb{R}$ là

**A.** 10 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 9

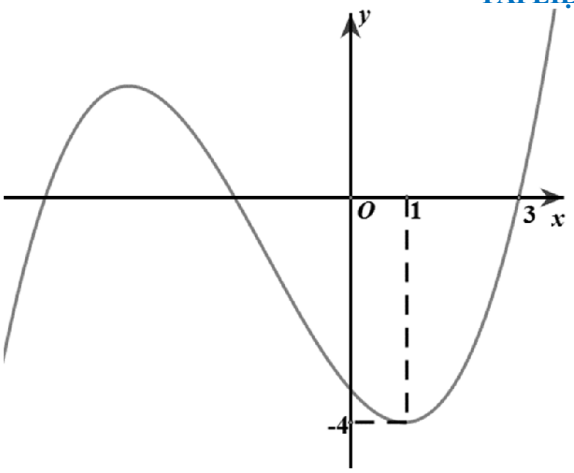
**Câu 11.** **(VTED 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:




Bất phương trình $f(x)<3.e^{x+2}+m$ có nghiệm $x\in(-2;2)$ khi và chỉ khi:

**A.** $m\geq f(-2)-3$ **B.** $m>f(-2)-3e^4$ **C.** $m\geq f(2)-3e^4$ **D.** $m>f(-2)-3$

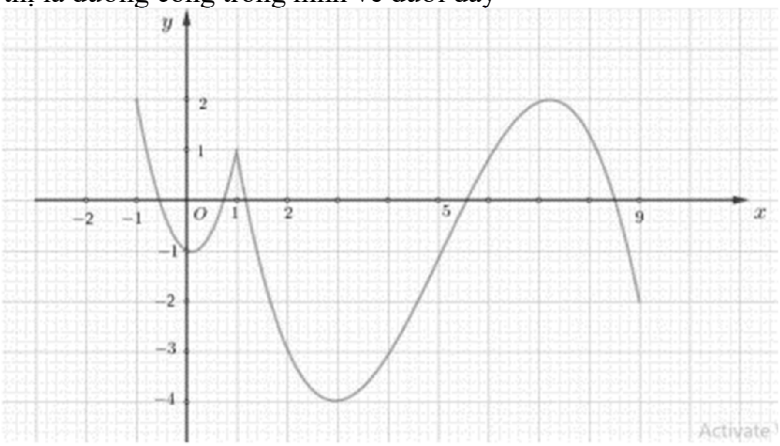
**Câu 12.** **(THPT-Thang-Long-Ha-Noi- 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.




Bất phương trình $f\left(e^x\right)<m\left(3e^x+2019\right)$ có nghiệm $x\in(0;1)$ khi và chỉ khi

**A.** $m>-\dfrac{4}{1011}$. **B.** $m\geq-\dfrac{4}{3e+2019}$. **C.** $m>-\dfrac{2}{1011}$. **D.** $m>\dfrac{f(e)}{3e+2019}$.

**Câu 13.** **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;9]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây




Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để bất phương trình $16.3^{f(x)}-\left[f^2(x)+2f(x)-8\right].4^{f(x)}\geq\left(m^2-3m\right).6^{f(x)}$ nghiệm đúng với mọi giá trị thuộc $[-1;9]$?

**A.** 32. **B.** 31. **C.** 5. **D.** 6.

**Câu 14.** **(Sở Cần Thơ - 2019)** Tất cả giá trị của tham số thực $m$ sao cho bất phương trình $9^x-2(m+1).3^x-3-2m>0$ có nghiệm đúng với mọi số thực $x$ là

**A.** $m\leq-\dfrac{3}{2}$. **B.** $m\neq2$. **C.** $m<-\dfrac{3}{2}$. **D.** $m\in\varnothing$.

**Câu 15.** **(Sở Nam Định - 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m$ để tập nghiệm của bất phương trình $\left(3^{x+2}-\sqrt{3}\right)\left(3^x-2m\right)<0$ chứa không quá 9 số nguyên?

**A.** 3281. **B.** 3283. **C.** 3280. **D.** 3279.

**Câu 16.** **(THPT Cẩm Bình Hà Tỉnh 2019)** Có mấy giá trị nguyên dương của $m$ để bất phương trình $9^{m^2x}+4^{m^2x}\geq m.5^{m^2x}$ có nghiệm?

**A.** 10. **B.** Vô số. **C.** 9. **D.** 1.

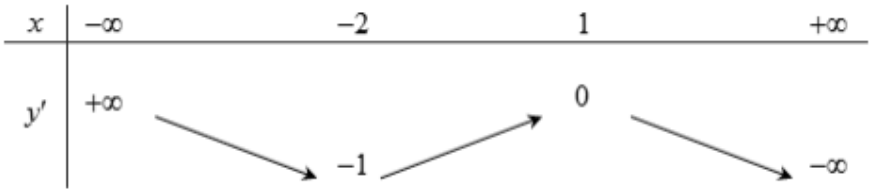
**Câu 17.** **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Bất phương trình $4^x-(m+1)2^{x+1}+m\geq0$ nghiệm đúng với mọi $x\geq0$. Tập tất cả cá giá trị của $m$ là

**A.** $(-\infty;12)$. **B.** $(-\infty;-1]$. **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $(-1;16]$.

**Câu 18.** **(THPT Phan Bội Châu - Nghệ An 2019)** Cho hàm số $f(x)=\cos 2x$. Bất phương trình $f^{(2019)}(x)>m$ đúng với mọi $x\in\left(\frac{\pi}{12};\frac{3\pi}{8}\right)$ khi và chỉ khi

**A.** $m<2^{2018}$. **B.** $m\le 2^{2018}$. **C.** $m\le 2^{2019}$. **D.** $m<2^{2019}$.

**Câu 19.** **(Chuyên Lê Quý Đôn – Điện Biên 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:




Bất phương trình $f(x)>2^x+m$ đúng với mọi $x\in(-1;1)$ khi và chỉ khi:

**A.** $m>f(1)-2$. **B.** $m\le f(1)-2$. **C.** $m\le f(-1)-\frac{1}{2}$. **D.** $m>f(-1)-\frac{1}{2}$.

**Câu 20.** **(Bình Giang-Hải Dương 2019)** Số giá trị nguyên dương của tham số $m$ để bất phương trình $9^{\sqrt{x^2-3x+m}}+2.3^{\sqrt{x^2-3x+m}-2+x}<3^{2x-3}$ có nghiệm là

**A.** 4. **B.** 8. **C.** 1. **D.** 6.

**Câu 21.** **(Hậu Lộc 2-Thanh Hóa- 2019)** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để bất phương trình $m^2(x^4-x^3)-m(x^3-x^2)-x+e^{x-1}\ge 0$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$. Số tập con của $S$ là

**A.** 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

**Câu 22.** **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh 2019)** Cho bất phương trình $m.3^{x+1}+(3m+2)\left(4-\sqrt{7}\right)^x+\left(4+\sqrt{7}\right)^x>0$, với $m$ là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x\in(-\infty;0]$.

**A.** $m\ge-\frac{2-2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $m\ge\frac{2-2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $m>\frac{2-2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $m>\frac{2+2\sqrt{3}}{3}$.

**Câu 23.** **(Chuyên Hưng Yên - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m$ để tập nghiệm của bất phương trình $\left(3^{x+2}-\sqrt{3}\right)\left(3^x-2m\right)<0$ chứa không quá 9 số nguyên?

**A.** 1094. **B.** 3281. **C.** 1093. **D.** 3280.

**Câu 24.** **(Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2020)** Có bao nhiêu $m$ nguyên dương để bất phương trình $3^{2x+2}-3^x\left(3^{m+2}+1\right)+3^m<0$ có không quá 30 nghiệm nguyên?

**A.** 28. **B.** 29. **C.** 30. **D.** 31.

**Câu 25.** **(ĐHQG Hà Nội - 2020)** Điều kiện của $m$ để hệ bất phương trình $\begin{cases}7^{2x+\sqrt{x+1}}-7^{2+\sqrt{x+1}}+2020x\le 2020\\ x^2-(m+2)x+2m+3\ge 0\end{cases}$ có nghiệm là :

**A.** $m\ge-3$. **B.** $-2\le m\le 1$. **C.** $-1\le m\le 2$. **D.** $m\ge-2$.

**Câu 26.** **(Sở Hà Nội - Lần 2 - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để bất phương trình $\left(3^{x^2-x}-9\right)\left(2^{x^2}-m\right)\le 0$ có 5 nghiệm nguyên?

**A.** 65021. **B.** 65024 **C.** 65022. **D.** 65023.

**Câu 27.** **(Cụm 5 Trường Chuyên - ĐBSH - 2018)** Cho bất phương trình $m.3^{x+1}+(3m+2)(4-\sqrt{7})^x+(4+\sqrt{7})^x>0$, với $m$ là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x\in(-\infty;0)$.

**A.** $m>\dfrac{2+2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $m>\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $m\ge\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $m\ge-\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$.

**Câu 28.** **(THPT Thái Phiên - Hải Phòng - 2018)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để bất phương trình $\sqrt{2^x+3}+\sqrt{5-2^x}\le m$ nghiệm đúng với mọi $x\in(-\infty;\log_2 5)$.

**A.** $m\ge 4$. **B.** $m\ge 2\sqrt{2}$. **C.** $m<4$. **D.** $m<2\sqrt{2}$.

**Câu 29.** **(THPT Ngô Quyền - Hải Phòng - 2018)** Tìm tất cả các giá trị của $m$ để bất phương trình $m.4^{x^2-2x-1}-(1-2m).10^{x^2-2x-1}+m.25^{x^2-2x-1}\le 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left[\dfrac{1}{2};2\right]$.

**A.** $m<0$. **B.** $m\ge\dfrac{100}{841}$. **C.** $m\le\dfrac{1}{4}$. **D.** $m\le\dfrac{100}{841}$.

## DẠNG 3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH NHIỀU ẨN

**Câu 1.** **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Có bao nhiêu số nguyên $x$ sao cho ứng với mỗi $x$ có không quá 728 số nguyên $y$ thỏa mãn $\log_4\left(x^2+y\right)\ge\log_3(x+y)$?

**A.** 59. **B.** 58. **C.** 116. **D.** 115.

**Câu 2.** **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Có bao nhiêu số nguyên $x$ sao cho ứng với mỗi $x$ có không quá 242 số nguyên $y$ thỏa mãn $\log_4\left(x^2+y\right)\ge\log_3\left(x+y\right)$?

**A.** 55. **B.** 28. **C.** 29. **D.** 56.

**Câu 3.** **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Có bao nhiêu số nguyên $x$ sao cho ứng với mỗi $x$ có không quá 127 số nguyên $y$ thỏa mãn $\log_3\left(x^2+y\right)\ge\log_2\left(x+y\right)$?

**A.** 89. **B.** 46. **C.** 45. **D.** 90.

**Câu 4.** **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Có bao nhiêu số nguyên $x$ sao cho ứng với mỗi $x$ có không quá 255 số nguyên $y$ thỏa mãn $\log_3\left(x^2+y\right)\ge\log_2\left(x+y\right)$?

**A.** 80. **B.** 79. **C.** 157. **D.** 158

**Câu 5.** **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Xét các số thực thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{8x+4}{2x-y+1}$ gần với giá trị nào sau đây nhất?

**A.** 9 **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

**Câu 6.** **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Xét các số thực $x,y$ thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right).4^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{8x+4}{2x-y+1}$ **gần nhất** với số nào dưới đây

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

**Câu 7.** **(Mã 101 - 2020 Lần 2)** Xét các số thực $x,y$ thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1}\le\left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{4y}{2x+y+1}$ **gần nhất** với số nào dưới đây?

**A.** $-2$. **B.** $-3$. **C.** $-5$. **D.** $-4$.

**Câu 8.** **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Xét các số thực $x$ và $y$ thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1} \le \left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{4y}{2x+y+1}$ **gần nhất** với số nào dưới đây?

**A.** $1$. **B.** $0$. **C.** $3$. **D.** $2$.

**Câu 9.** **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Xét các số thực không âm $x$ và $y$ thỏa mãn $2x+y.4^{x+y-1} \ge 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+4x+6y$ bằng

**A.** $\dfrac{33}{4}$. **B.** $\dfrac{65}{8}$. **C.** $\dfrac{49}{8}$. **D.** $\dfrac{57}{8}$.

**Câu 10.** **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Xét các số thực không âm $x$ và $y$ thỏa mãn $2x+y.4^{x+y-1} \ge 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+6x+4y$ bằng

**A.** $\dfrac{65}{8}$. **B.** $\dfrac{33}{4}$. **C.** $\dfrac{49}{8}$. **D.** $\dfrac{57}{8}$.

**Câu 11.** **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Xét các số thực không âm $x$ và $y$ thỏa mãn $2x+y.4^{x+y-1} \ge 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+2x+4y$ bằng

**A.** $\dfrac{33}{8}$. **B.** $\dfrac{9}{8}$. **C.** $\dfrac{21}{4}$. **D.** $\dfrac{41}{8}$.

**Câu 12.** **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Xét các số thực không âm $x$ và $y$ thỏa mãn $2x+y.4^{x+y-1} \ge 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+4x+2y$ bằng

**A.** $\dfrac{33}{8}$. **B.** $\dfrac{9}{8}$. **C.** $\dfrac{21}{4}$. **D.** $\dfrac{41}{8}$.

**Câu 13.** **(Diệu Hiền - Cần Thơ - 2018)** Trong các nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn bất phương trình $\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \ge 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T=2x+y$ bằng:

**A.** $\dfrac{9}{4}$. **B.** $\dfrac{9}{2}$. **C.** $\dfrac{9}{8}$. **D.** $9$.

**Câu 14.** **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)** Có bao nhiêu bộ $(x;y)$ với $x,y$ nguyên và $1 \le x,y \le 2020$ thỏa mãn $(xy+2x+4y+8)\log_3\left(\dfrac{2y}{y+2}\right) \le (2x+3y-xy-6)\log_2\left(\dfrac{2x+1}{x-3}\right)$?

**A.** $2017$. **B.** $4034$. **C.** $2$. **D.** $2017\times 2020$.

**Câu 15.** **(THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Cho hai số thực $a,b>0$ thỏa mãn $\log_2(a+1)+\log_2(b+1) \ge 6$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $a+b$ là.

**A.** $12$. **B.** $14$. **C.** $16$. **D.** $8$.

**Câu 16.** **(Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ An 2019)** Trong các nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn bất phương trình $\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \ge 1$. Khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức $T=2x+y$ là

**A.** $\dfrac{9}{4}$ **B.** $9$ **C.** $\dfrac{9}{2}$ **D.** $\dfrac{9}{8}$

**Câu 17.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Tìm tập $S$ tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để tồn tại duy nhất cặp số $(x;y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}\left(4x+4y-6+m^2\right) \ge 1$ và $x^2+y^2+2x-4y+1=0$.

**A.** $S=\{-1;1\}$ **B.** $S=\{-5;-1;1;5\}$

**C.** $S=\{-5;5\}$ **D.** $S=\{-7;-5;-1;1;5;7\}$

**Câu 18.** Tìm tham số $m$ để tồn tại **duy nhất** cặp số $(x;y)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau $\log_{2019}(x+y)\le 0$ và $x+y+\sqrt{2xy+m}\ge 1$

**A.** $m=-\dfrac{1}{2}$. **B.** $m=0$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-\dfrac{1}{3}$.

**Câu 19.** Trong tất cả các cặp $(x;y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4)\ge 1$. Tìm $m$ để tồn tại duy nhất cặp $(x;y)$ sao cho $x^2+y^2+2x-2y+2-m=0$.

**A.** $m=\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)^2$. **B.** $m=\sqrt{10}\pm\sqrt{2}$. **C.** $m=\sqrt{10}-\sqrt{2}$. **D.** $m=\left(\sqrt{10}\pm\sqrt{2}\right)^2$.

Nguyễn Bảo Vương

Chuyên đề 20 BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ - LOGARIT

## TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH TRUNG BÌNH MỨC 5-6 ĐIỂM

### Dạng 1. Bất phương trình logarit

+ Nếu $a>1$ thì $\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow f(x)>g(x)$ (cùng chiều)
+ Nếu $0<a<1$ thì $\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow f(x)<g(x)$ (ngược chiều)
+ Nếu a chứa ẩn thì $\left[\begin{array}{l}\log_a B>0\Leftrightarrow (a-1)(B-1)>0\\ \dfrac{\log_a A}{\log_a B}>0\Leftrightarrow (A-1)(B-1)>0\end{array}\right.$.

**Câu 1.** **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log x\ge 1$ là

**A.** $(10;+\infty)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $[10;+\infty)$. **D.** $(-\infty;10)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$\log x\ge 1\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x\ge 10\end{cases}\Leftrightarrow x\ge 10.$

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $[10;+\infty)$.

**Câu 2.** **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(13-x^2)\ge 2$ là

**A.** $(-\infty;-2]\cup[2:+\infty)$. **B.** $(-\infty;2]$.

**C.** $(0;2]$. **D.** $[-2;2]$.

Nguyễn Bảo Vương

**Lời giải**

**Chọn D**

◆ Bất phương trình $\log_3(13-x^2)\ge 2\Leftrightarrow\begin{cases}13-x^2>0\\ 13-x^2\ge 9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2<13\\ x^2\le 4\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-\sqrt{13}<x<\sqrt{13}\\ -2\le x\le 2\end{cases}\Leftrightarrow -2\le x\le 2$.

◆Vậy, tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(13-x^2)\ge 2$ là $[-2;2]$.

**Câu 3.** **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(36-x^2)\ge 3$ là

**A.** $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;3]$. **C.** $[-3;3]$. **D.** $(0;3]$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $\log_3(36-x^2)\ge 3\Leftrightarrow 36-x^2\ge 27\Leftrightarrow 9-x^2\ge 0\Leftrightarrow -3\le x\le 3$.

**Câu 4.** **(Mã 101 - 2020 Lần 2)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3(18-x^2)\ge 2$ là

**A.** $(-\infty;3]$. **B.** $(0;3]$.

**C.** $[-3;3]$. **D.** $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện: $18-x^2>0 \Leftrightarrow x\in\left(-3\sqrt{2};3\sqrt{2}\right)$ (*).

Khi đó ta có: $\log_3\left(18-x^2\right)\ge 2 \Leftrightarrow 18-x^2\ge 9 \Leftrightarrow -3\le x\le 3$.

Kết hợp với điều kiện (*) ta được tập ngiệm của bất phương trình đã cho là $[-3;3]$.

**Câu 5.** **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\left(31-x^2\right)\ge 3$ là

**A.** $(-\infty;2]$. **B.** $[-2;2]$. **C.** $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. **D.** $(0;2]$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$\log_3\left(31-x^2\right)\ge 3 \Leftrightarrow 31-x^2\ge 27 \Leftrightarrow x^2-4\le 0 \Leftrightarrow x\in[-2;2]$.

**Câu 6.** **(Đề Minh Họa 2017)** Giải bất phương trình $\log_2(3x-1)>3$.

**A.** $x>3$ **B.** $\frac{1}{3}<x<3$ **C.** $x<3$ **D.** $x>\frac{10}{3}$

**Lời giải**

**Chọn A**

Đkxđ: $3x-1>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{3}$

Bất phương trình $\Leftrightarrow 3x-1>2^3 \Leftrightarrow 3x>9 \Leftrightarrow x>3$ (t/m đk).

Vậy bpt có nghiệm $x>3$.

**Câu 7.** **(THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019)** Tìm tập nghiệm $S$ của bất phương trình $\ln x^2<0$.

**A.** $S=(-1;1)$. **B.** $S=(-1;0)$. **C.** $S=(-1;1)\setminus\{0\}$. **D.** $S=(0;1)$.

**Lời giải**

Ta có: $\ln x^2<0 \Leftrightarrow 0<x^2<1 \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq 0\\ -1<x<1\end{cases}$. Vậy $S=(-1;1)\setminus\{0\}$.

**Câu 8.** **(THPT Minh Khai Hà Tĩnh 2019)** Tìm tập nghiệm $S$ của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)<\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)$.

**A.** $S=(2;+\infty)$. **B.** $S=(-1;2)$. **C.** $S=(-\infty;2)$. **D.** $S=\left(\frac{1}{2};2\right)$.

**Lời giải**

Ta có $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)<\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) \Leftrightarrow \begin{cases}x+1>2x-1\\ 2x-1>0\end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2}<x<2$.

**Câu 9.** **(THPT - Yên Định Thanh Hóa 2019)** Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(2x+3)\ge 0$ là

**A.** $S=(-\infty;-1]$. **B.** $S=[-1;+\infty)$. **C.** $S=(-\infty;-1)$. **D.** $S=(-\infty;0]$.

**Lời giải**

Ta có $\log_2(2x+3)\ge 0 \Leftrightarrow 2x+3\ge 1 \Leftrightarrow x\ge -1$

Vậy tập nghiệm bất phương trình $S=[-1;+\infty)$

**Câu 10.** **(THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0.3}(5-2x)>\log_{\frac{3}{10}}9$ là

**A.** $\left(0;\frac{5}{2}\right)$. **B.** $\left(-\infty;-2\right)$. **C.** $\left(-2;\frac{5}{2}\right)$. **D.** $\left(-2;+\infty\right)$.

**Lời giải**

$\log_{0.3}\left(5-2x\right)>\log_{\frac{3}{10}}9\Leftrightarrow\begin{cases}5-2x>0\\5-2x<9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<\frac{5}{2}\\x>-2\end{cases}\Leftrightarrow-2<x<\frac{5}{2}$.

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $S=\left(-2;\frac{5}{2}\right)$.

**Câu 11.** **(Chuyên ĐHSP Hà Nội 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,5}\left(x-1\right)>1$ là

**A.** $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left[1;\frac{3}{2}\right)$.

**Lời giải**

Bất phương trình $\Leftrightarrow0<x-1<0,5\Leftrightarrow1<x<\frac{3}{2}$.

Vậy tập nghiệm bất phương trình đã cho là: $S=\left(1;\frac{3}{2}\right)$.

**Câu 12.** **(HSG Bắc Ninh 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{\pi}{4}}(x+1)>\log_{\frac{\pi}{4}}(2x-5)$ là

**A.** $\left(-1;6\right)$ **B.** $\left(\frac{5}{2};6\right)$ **C.** $\left(6;+\infty\right)$ **D.** $\left(-\infty;6\right)$

**Lời giải**

Do $\frac{\pi}{4}<1$ nên $\log_{\frac{\pi}{4}}(x+1)>\log_{\frac{\pi}{4}}(2x-5)\Leftrightarrow\begin{cases}x+1>0\\x+1<2x-5\end{cases}\Leftrightarrow x>6$.

**Câu 13.** **(THPT An Lão Hải Phòng 2019)** Tìm tập nghiệm $S$ của bất phương trình $\log_3\left(2x+3\right)<\log_3\left(1-x\right)$

**A.** $\left(-\frac{2}{3};+\infty\right)$ **B.** $\left(-\frac{3}{2};-\frac{2}{3}\right)$ **C.** $\left(-\frac{3}{2};1\right)$ **D.** $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right)$

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện : $\begin{cases}2x+3>0\\1-x>0\end{cases}\Leftrightarrow-\frac{3}{2}<x<1$.

$\log_3\left(2x+3\right)<\log_3\left(1-x\right)\Leftrightarrow2x+3<1-x\Leftrightarrow x<-\frac{2}{3}$.

So với điều kiện, ta được tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-\frac{3}{2};-\frac{2}{3}\right)$.

**Câu 14.** **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)<1$ là

**A.** $\left(0;1\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{8};3\right)$. **C.** $\left(\frac{1}{8};1\right)$. **D.** $\left(\frac{1}{8};+\infty\right)$.

**Lời giải**

Ta có $\log_3\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)<1 \Leftrightarrow 0<\log_{\frac{1}{2}}x<3^1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^0>x>\left(\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow 1>x>\frac{1}{8}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(\frac{1}{8};1\right)$.

**Câu 15.** **(Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ An 2019)** Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{0,8}(15x+2)>\log_{0,8}(13x+8)$ là

**A.** Vô số. **B.** $4$. **C.** $2$. **D.** $3$.

**Lời giải**

Điều kiện $x>-\frac{2}{15}$.

Khi đó, $\log_{0,8}(15x+2)>\log_{0,8}(13x+8) \Leftrightarrow 15x+2<13x+8 \Leftrightarrow 2x<6 \Leftrightarrow x<3$.

Tập nghiệm bất phương trình là: $T=\left(-\frac{2}{15};3\right) \Rightarrow x\in\{0;1;2\}$.

**Câu 16.** **(Sở Vĩnh Phúc 2019)** Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\log_2(4-x)-1}$ là

**A.** $(-\infty;4)$. **B.** $[2;4)$. **C.** $(-\infty;2]$. **D.** $(-\infty;2)$.

**Lời giải**

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \log_2(4-x)-1\ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\log_2(4-x)\ge 1\\ 4-x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4-x\ge 2\\ 4-x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 2\\ x<4\end{cases} \Leftrightarrow x\le 2.$

Vậy tập xác định của hàm số là: $D=(-\infty;2]$.

**Câu 17.** **(Sở Bình Phước 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(3x+1)<2$ là

**A.** $\left[-\frac{1}{3};1\right)$ **B.** $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ **C.** $\left(-\frac{1}{3};1\right)$ **D.** $(-\infty;1)$

**Lời giải**

**Chọn C**

ĐK: $x>-\frac{1}{3}$

$\log_2(3x+1)<2 \Leftrightarrow 3x+1<4 \Leftrightarrow x<1$

Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của bất phương trình là $-\frac{1}{3}<x<1$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $\left(-\frac{1}{3};1\right)$.

**Câu 18.** **(Chuyen Phan Bội Châu Nghệ An 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x^2-1)\ge 3$ là?

**A.** $[-2;2]$. **B.** $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$.

**C.** $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. **D.** $[-3;3]$.

**Lời giải**

$\log_2(x^2-1)\ge 3 \Leftrightarrow x^2-1\ge 8 \Leftrightarrow x^2\ge 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge 3\\ x\le -3\end{array}\right.$

**Câu 19.** **(Sở Bắc Giang 2019)** Tập nghiệm $S$ của bất phương trình $\log_{0,8}(2x-1)<0$ là

**A.** $S=\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $S=(1;+\infty)$. **C.** $S=\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $S=(-\infty;1)$.

**Lời giải**

Bất phương trình $\log_{0,8}(2x-1)<0 \Leftrightarrow 2x-1>(0,8)^0 \Leftrightarrow 2x>2 \Leftrightarrow x>1$.

Tập nghiệm $S$ của bất phương trình $\log_{0,8}(2x-1)<0$ là $S=(1;+\infty)$.

**Câu 20.** **(Sở Bắc Giang 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,5}(5x+14)\le\log_{0,5}(x^2+6x+8)$ là

**A.** $(-2;2]$. **B.** $(-\infty;2]$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\left[-\frac{3}{2};0\right]$. **D.** $[-3;2]$.

**Lời giải**

Điều kiện: $\begin{cases}5x+14>0\\x^2+6x+8>0\end{cases}\Leftrightarrow x>-2 \quad (*)$

Ta có: $\log_{0,5}(5x+14)\le\log_{0,5}(x^2+6x+8)\Leftrightarrow 5x+14\ge x^2+6x+8\Leftrightarrow -3\le x\le 2$

Kết hợp với điều kiện $(*)$ ta được $-2<x\le 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-2;2]$.

**Câu 21.** **(Chuyên Trần Phú Hải Phòng 2019)** Bất phương trình $\log_2(3x-2)>\log_2(6-5x)$ có tập nghiệm là

**A.** $(0;+\infty)$ **B.** $\left(\frac{1}{2};3\right)$. **C.** $(-3;1)$ **D.** $\left(1;\frac{6}{5}\right)$

Nguyễn Bảo Vương

**Lời giải**

Vì $2>1$ nên

$\log_2(3x-2)>\log_2(6-5x)\ \begin{cases}3x-2>6-5x\\6-5x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\x<\frac{6}{5}\end{cases}\Leftrightarrow 1<x<\frac{6}{5}.$

**Câu 22.** **(KTNL GV THPT Lý Thái Tổ 2019)** Tập hợp nghiệm của bất phương trình $\log_2(x+1)<3$ là:

**A.** $S=(-1;8)$. **B.** $S=(-\infty;7)$. **C.** $S=(-\infty;8)$. **D.** $S=(-1;7)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $\log_2(x+1)<3\Leftrightarrow\begin{cases}x+1>0\\x+1<2^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\x<7\end{cases}\Leftrightarrow -1<x<7$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-1;7)$.

**Câu 23.** **(Sở Thanh Hóa 2019)** Tìm tập nghiệm $S$ của bất phương trình $\ln x^2>\ln(4x-4)$.

**A.** $S=(2;+\infty)$. **B.** $S=(1;+\infty)$. **C.** $S=R\setminus\{2\}$. **D.** $S=(1;+\infty)\setminus\{2\}$.

**Lời giải**

$\ln x^2>\ln(4x-4)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2>4x-4\\4x-4>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-4x+4>0\\x>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne 2\\x>1\end{cases}.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(1;+\infty)\setminus\{2\}$.

**Câu 24.** **(Chuyên Phan Bội Châu 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2\left[x^2-1\right]\ge 3$ là:

**A.** $[-2;2]$. **B.** $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$.

**C.** $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. **D.** $[-3;3]$.

**Lời giải**

Ta có $\log_2\left[x^2-1\right]\ge 3\Leftrightarrow x^2-9\ge 0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$

**Câu 25.** **(Chuyên KHTN 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{\log\left(x^2-9\right)}{\log(3-x)}\le 1$ là:

**A.** $(-4;-3)$. **B.** $[-4;-3)$. **C.** $(3;4]$. **D.** $\phi$.

**Lời giải**

ĐK: $\begin{cases}x^2-9>0\\3-x>0\\3-x\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>3\vee x<-3\\x<3\\x\ne 2\end{cases}\Leftrightarrow x<-3.$

Với $x<-3$ suy ra $\log(3-x)>0$ nên bất phương trình đã cho tương đương với

$\log\left(x^2-9\right)\le\log(3-x)\Leftrightarrow x^2+x-12\le 0\Leftrightarrow x\in[-4;3]$

Kết hợp điều kiện suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $[-4;-3)$

**Câu 26.** **(Chuyên Thái Bình 2019)** Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số $m$ để bất phương trình $\log_2\left(x^2+mx+m+2\right)\ge\log_2\left(x^2+2\right)$ nghiệm đúng $\forall x\in\mathbb{R}$?

**A.** 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

**Lời giải**

Ta có : $\log_2(x^2+mx+m+2)\ge\log_2(x^2+2)$ nghiệm đúng $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^2+mx+m+2\ge x^2+2,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow mx+m\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m=0$.

Suy ra có 1 giá trị m thỏa mãn.

**Câu 27.** **(Việt Đức Hà Nội 2019)** Giải bất phương trình $\log_2(3x-2)>\log_2(6-5x)$ được tập nghiệm là $(a;b)$. Hãy tính tổng $S=a+b$.

**A.** $S=\dfrac{26}{5}$. **B.** $S=\dfrac{11}{5}$. **C.** $S=\dfrac{28}{15}$. **D.** $S=\dfrac{8}{3}$.

**Lời giải**

Điều kiện $\begin{cases}3x-2>0\\6-5x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\dfrac{2}{3}\\x<\dfrac{6}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{2}{3}<x<\dfrac{6}{5}.$

Ta có

$$\log_2(3x-2)>\log_2(6-5x)\Leftrightarrow 3x-2>6-5x\Leftrightarrow 8x>8\Leftrightarrow x>1.$$

Kết hợp với điều kiện, ta được $1<x<\dfrac{6}{5}$.

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình là $\left(1;\frac{6}{5}\right)$.

Từ đó, $S=a+b=1+\frac{6}{5}=\frac{11}{5}$.

*Lời giải ngắn gọn như sau*:

$$\log_2(3x-2)>\log_2(6-5x)\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2>6-5x\\6-5x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\x<\frac{6}{5}\end{cases}\Leftrightarrow 1<x<\frac{6}{5}.$$

**Câu 28.** **(Sở Ninh Bình 2019)** Bất phương trình $\log_3\left(x^2-2x\right)>1$ có tập nghiệm là

**A.** $S=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$. **B.** $S=(-1;3)$.

**C.** $S=(3;+\infty)$. **D.** $S=(-\infty;-1)$.

**Lời giải**

$$\log_3\left(x^2-2x\right)>1\Leftrightarrow x^2-2x>3\Leftrightarrow x^2-2x-3>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3\\x<-1\end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $S=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

**Câu 29.** **(Hậu Lộc 2-Thanh Hóa 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\ln 3x<\ln(2x+6)$ là:

**A.** $[0;6)$. **B.** $(0;6)$. **C.** $(6;+\infty)$. **D.** $(-\infty;6)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Bất phương trình $\ln 3x<\ln(2x+6)\Leftrightarrow\begin{cases}3x>0\\3x<2x+6\end{cases}\Leftrightarrow 0<x<6$.

**Câu 30.** **(Hội 8 trường chuyên ĐBSH - 2019)** Tập nghiệm $S$ của bất phương trình $\log_2(x-1)<3$ là

**A.** $S=(1;9)$. **B.** $S=(1;10)$. **C.** $S=(-\infty;9)$. **D.** $S=(-\infty;10)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$$\log_2(x-1)<3\Leftrightarrow 0<x-1<2^3\Leftrightarrow 1<x<9.$$

**Câu 31.** **(THPT Phan Bội Châu - Nghệ An -2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2\left(x^2-1\right)\geq 3$ là?

**A.** $[-2;2]$. **B.** $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$.

**C.** $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. **D.** $[-3;3]$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$$\log_2\left(x^2-1\right)\geq 3\Leftrightarrow x^2-1\geq 8\Leftrightarrow x^2\geq 9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\geq 3\\x\leq -3\end{array}\right.$$

**Câu 32.** **(Bắc Ninh 2019)** Bất phương trình $\log_2(3x-2)>\log_2(6-5x)$ có tập nghiệm là $(a;b)$. Tổng $a+b$ bằng

**A.** $\frac{8}{3}$. **B.** $\frac{28}{15}$. **C.** $\frac{26}{5}$. **D.** $\frac{11}{5}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $\log_2(3x-2)>\log_2(6-5x)\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2>6-5x\\6-5x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\x<\frac{6}{5}\end{cases}\Leftrightarrow 1<x<\frac{6}{5}$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $(1;\frac{6}{5})$.

Vậy $a+b=1+\frac{6}{5}=\frac{11}{5}$.

**Câu 33.** **(THPT Hai Bà Trưng - Huế - 2019)** Có tất cả bao nhiêu số nguyên $x$ thỏa mãn bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left[\log_2\left(2-x^2\right)\right]>0$?

**A.** Vô số. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

**Lời giải**

**Chọn C**

$\log_{\frac{1}{2}}\left[\log_2\left(2-x^2\right)\right]>0$

$\Leftrightarrow 0<\log_2\left(2-x^2\right)<1$

$\Leftrightarrow 1<2-x^2<2$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2-x^2<2\\2-x^2>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2>0\\x^2<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 0\\-1<x<1\end{cases}$

Kết hợp với giả thiết $x$ là số nguyên ta thấy không có số nguyên $x$ nào thỏa mãn bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left[\log_2\left(2-x^2\right)\right]>0$.

Nguyễn Bảo Vương

**Câu 34.** **(THPT Cẩm Bình 2019)** Nghiệm của bất phương trình $\log_{2-\sqrt{3}}(2x-5)\geq\log_{2-\sqrt{3}}(x-1)$ là

**A.** $\frac{5}{2}<x\leq 4$. **B.** $1<x\leq 4$. **C.** $\frac{5}{2}\leq x\leq 41$. **D.** $x\geq 4$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$\log_{2-\sqrt{3}}(2x-5)\geq\log_{2-\sqrt{3}}(x-1)\Leftrightarrow\begin{cases}2x-5\leq x-1\\2x-5>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 4\\x>\frac{5}{2}\end{cases}$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $\frac{5}{2}<x\leq 4$.

**Câu 35.** **(THPT Hàm Rồng 2019)** Bất phương trình $\log_4(x+7)>\log_2(x+1)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên

**A.** 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện xác định của bất phương trình là $\begin{cases}x+7>0\\x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-7\\x>-1\end{cases}\Leftrightarrow x>-1$

Ta có $\log_4(x+7)>\log_2(x+1)\Leftrightarrow\frac{1}{2}\log_2(x+7)>\log_2(x+1)\Leftrightarrow\log_2(x+7)>\log_2(x+1)^2$

$\Leftrightarrow x^2+x-6<0 \Leftrightarrow -3<x<2$

Kết hợp điều kiện ta được $-1<x<2$

Vì $x\in\mathbb{Z}$ nên tìm được $x=0, x=1$.

**Câu 36.** **(Thi thử cụm Vũng Tàu - 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{3}{5}}\left(2x^2-x+1\right)<0$ là

**A.** $\left(-1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $(-\infty;1)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$.

**C.** $(-\infty;0)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có: $2x^2-x+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Do đó $\log_{\frac{3}{5}}\left(2x^2-x+1\right)<0 \Leftrightarrow 2x^2-x+1>1 \Leftrightarrow 2x^2-x>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0 \\ x>\frac{1}{2}\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;0)\cup\left(\frac{1}{2}:+\infty\right)$.

**Câu 37.** **(Bình Phước - 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(3x+1)<2$ là

**A.** $\left[-\frac{1}{3};1\right)$. **B.** $\left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$. **C.** $\left(-\frac{1}{3};1\right)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Nguyễn Bảo Vương

**Lời giải**

**Chọn C**

ĐK: $x>-\frac{1}{3}$

$\log_2(3x+1)<2 \Leftrightarrow 3x+1<4 \Leftrightarrow x<1$

Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của bất phương trình là $-\frac{1}{3}<x<1$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $\left(-\frac{1}{3};1\right)$..

**Câu 38.** **(Ngô Quyền - Hải Phòng -2019)** Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+2x-8\right)\geq -4$ là

**A.** 6. **B.** Vô số. **C.** 4. **D.** 5.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2+2x-8\right)\geq -4 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-8>0 \\ x^2+2x-8\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<-4\end{array}\right. \\ x^2+2x-24\leq 0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<-4 \end{array}\right. \\ -6 \le x \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -6 \le x < -4 \\ 2 < x \le 4 \end{array}\right.$.

Do đó các nghiệm nguyên của bất phương trình đã cho là $-6;-5;3;4$.

**Câu 39.** **(THPT Thuận Thành 3 - Bắc Ninh 2019)** Tập nghiệm $S$ của bất phương trình $\log_6 x^2 < \log_6 (x+6)$ là

**A.** $S=(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$. **B.** $S=(-2;3)$.

**C.** $S=(-3;2)\setminus\{0\}$. **D.** $S=(-2;3)\setminus\{0\}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện: $\begin{cases} x \ne 0 \\ x > -6 \end{cases}$.

$\log_6 x^2 < \log_6 (x+6) \Leftrightarrow x^2 < x+6 \Leftrightarrow x^2 - x - 6 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 3.$

Kết hợp với điều kiện, suy ra tập nghiệm $S=(-2;3)\setminus\{0\}$.

**Câu 40.** **(Nho Quan A - Ninh Bình - 2019)** Bất phương trình $\log_2 (x-2) < 2$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

**A.** 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

**Lời giải**

**Chọn D**

$\log_2 (x-2) < 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2>0 \\ x-2<4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>2 \\ x<6 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 6.$

Vậy bất phương trình đã cho có 3 nghiệm nguyên.

**Câu 41.** **(Cần Thơ 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,2}(x-4)+1>0$ là

**A.** $(4;+\infty)$. **B.** $(4;9)$. **C.** $(-\infty;9)$. **D.** $(9;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $\log_{0,2}(x-4)+1>0 \Leftrightarrow \log_{0,2}(x-4) > -1 \Leftrightarrow \log_{0,2}(x-4) > \log_{0,2}\left[(0,2)^{-1}\right]$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-4>0 \\ x-4<5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>4 \\ x<9 \end{cases}$.

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $(4;9)$.

**Câu 42.** **(THPT Cẩm Bình Hà Tĩnh 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 (7-x) + \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \le 0$ là

**A.** $S=(1;4]$. **B.** $S=(-\infty;4]$. **C.** $S=[4;+\infty)$. **D.** $S=[4;7)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện: $1 < x < 7$.

Ta có:

$\log_2(7-x)+\log_{\frac{1}{2}}(x-1)\le 0 \Leftrightarrow \log_2(7-x)-\log_2(x-1)\le 0$

$\Leftrightarrow \log_2\dfrac{7-x}{x-1}\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{7-x}{x-1}\le 1 \Leftrightarrow \dfrac{-2x+8}{x-1}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<1 \\ x\ge 4 \end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm là $[4;7)$.

**Câu 43.** **(NK HCM-2019)** Bất phương trình $1+\log_2(x-2)>\log_2(x^2-3x+2)$ có các nghiệm là

**A.** $S=(3;+\infty)$. **B.** $S=(1;3)$. **C.** $S=(2;+\infty)$. **D.** $S=(2;3)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện: $x>2$.

$1+\log_2(x-2)>\log_2(x^2-3x+2) \Leftrightarrow \log_2(x^2-3x+2)-\log_2(x-2)<1$

$\Leftrightarrow \log_2(x-1)<1 \Leftrightarrow x<3$.

Đối chiếu điều kiện, ta có tập nghiệm là $S=(2;3)$.

**Dạng 2. Bất phương trình mũ**

+ Nếu $a>1$ thì $a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)>g(x)$. (cùng chiều)
+ Nếu $0<a<1$ thì $a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)<g(x)$. (ngược chiều)
+ Nếu a chứa ẩn thì $a^{f(x)}>a^{g(x)} \Leftrightarrow (a-1)\left[f(x)-g(x)\right]>0$.

**Câu 1.** **(Đề Minh Họa 2020 Lần 1)** Tập nghiệm của bất phương trình $5^{x-1}\ge 5^{x^2-x-9}$ là

**A.** $[-2;4]$. **B.** $[-4;2]$.

**C.** $(-\infty;-2]\cup[4;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-4]\cup[2;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$5^{x-1}\ge 5^{x^2-x-9} \Leftrightarrow x-1\ge x^2-x-9 \Leftrightarrow x^2-2x-8\le 0 \Leftrightarrow -2\le x\le 4$.

Vậy Tập nghiệm của bất phương trình là $[-2;4]$.

**Câu 2.** **(Đề Tham Khảo 2020 Lần 2)** Tập nghiệm của bất phương trình $9^x+2.3^x-3>0$ là

**A.** $[0;+\infty)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $[1;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$9^x+2.3^x-3>0 \Leftrightarrow (3^x-1)(3^x+3)>0 \Leftrightarrow 3^x>1$ (vì $3^x>0,\forall x\in\mathbb{R}$) $\Leftrightarrow x>0$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $(0;+\infty)$.

**Câu 3.** **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-13}<27$ là

**A.** $(4;+\infty)$. **B.** $(-4;4)$. **C.** $(-\infty;4)$. **D.** $(0;4)$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $3^{x^2-13}<27 \Leftrightarrow 3^{x^2-13}<3^3 \Leftrightarrow x^2-13<3 \Leftrightarrow x^2<16 \Leftrightarrow |x|<4 \Leftrightarrow -4<x<4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=(-4;4)$.

**Câu 4.** **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-23}<9$ là

**A.** $(-5;5)$. **B.** $(-\infty;5)$. **C.** $(5;+\infty)$. **D.** $(0;5)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $3^{x^2-23}<9\Leftrightarrow x^2-23<2\Leftrightarrow x^2<25\Leftrightarrow -5<x<5$.

Vậy nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-23}<9$ là $(-5;5)$.

**Câu 5.** **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2-7}<4$ là

**A.** $(-3;3)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-\infty;3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có : $2^{x^2-7}<4\Leftrightarrow 2^{x^2-7}<2^2\Rightarrow x^2-7<2\Leftrightarrow x^2<9\Rightarrow x\in(-3;3)$.

**Câu 6.** **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2-1}<8$ là

**A.** $(0;2)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(-2;2)$. **D.** $(2;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Từ phương trình ta có $x^2-1<3\Leftrightarrow -2<x<2$.

Nguyễn Bảo Vương

**Câu 7.** **(Đề Tham Khảo 2018)** Tập nghiệm của bất phương trình $2^{2x}<2^{x+6}$ là:

**A.** $(-\infty;6)$ **B.** $(0;64)$ **C.** $(6;+\infty)$ **D.** $(0;6)$

**Lời giải:**

**Chọn A**

**Cách 1:** $2^{2x}<2^{x+6}\Leftrightarrow 2x<x+6\Leftrightarrow x<6$

**Cách 2:**

Đặt $t=2^x$, $t>0$

Bất phương trình trở thành: $t^2-64t<0\Leftrightarrow 0<t<64\Leftrightarrow 0<2^x<64\Leftrightarrow x<6$.

**Câu 8.** **(Đề Tham Khảo 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-2x}<27$ là

**A.** $(3;+\infty)$ **B.** $(-1;3)$

**C.** $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$ **D.** $(-\infty;-1)$

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $3^{x^2-2x}<27\Leftrightarrow x^2-2x<3\Leftrightarrow x^2-2x-3<0\Leftrightarrow -1<x<3$.

**Câu 9.** **(Đề Minh Họa 2017)** Cho hàm số $f(x)=2^x.7^{x^2}$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

**A.** $f(x)<1\Leftrightarrow x+x^2\log_2 7<0$ **B.** $f(x)<1\Leftrightarrow x\ln 2+x^2\ln 7<0$

**C.** $f(x)<1\Leftrightarrow x\log_7 2+x^2<0$ **D.** $f(x)<1\Leftrightarrow 1+x\log_2 7<0$

**Lời giải**

**Chọn D**

Đáp án A đúng vì $f(x)<1\Leftrightarrow \log_2 f(x)<\log_2 1\Leftrightarrow \log_2\left(2^x.7^{x^2}\right)<0\Leftrightarrow \log_2 2^x+\log_2 7^{x^2}<0$

$\Leftrightarrow x+x^2.\log_2 7<0$

Đáp án B đúng vì $f(x)<1\Leftrightarrow \ln f(x)<\ln 1\Leftrightarrow \ln\left(2^x.7^{x^2}\right)<0\Leftrightarrow \ln 2^x+\ln 7^{x^2}<0$

$\Leftrightarrow x.\ln 2+x^2.\ln 7<0$

Đáp án C đúng vì $f(x)<1\Leftrightarrow \log_7 f(x)<\log_7 1\Leftrightarrow \log_7\left(2^x.7^{x^2}\right)<0\Leftrightarrow \log_7 2^x+\log_7 7^{x^2}<0$

$\Leftrightarrow x.\log_7 2+x^2<0$

Vậy D sai vì $f(x)<1\Leftrightarrow \log_2 f(x)<\log_2 1\Leftrightarrow \log_2\left(2^x.7^{x^2}\right)<0\Leftrightarrow \log_2 2^x+\log_2 7^{x^2}<0$

$\Leftrightarrow x+x^2\log_2 7<0$.

**Câu 10.** **(Đề Tham Khảo 2017)** Tìm tập nghiệm $S$ của bất phương trình $5^{x+1}-\frac{1}{5}>0$.

**A.** $S=(-\infty;-2)$. **B.** $S=(1;+\infty)$. **C.** $S=(-1;+\infty)$. **D.** $S=(-2;+\infty)$.

**Lời giải**

Bất phương trình tương đương $5^{x+1}>5^{-1}\Leftrightarrow x+1>-1\Leftrightarrow x>-2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-2;+\infty)$.

**Câu 11.** **(THPT Hoàng Hoa Thám Hưng Yên 2019)** Cho hàm số $y=e^{x^2+2x-3}-1$. Tập nghiệm của bất phương trình $y'\ge 0$ là:

**A.** $(-\infty;-1]$. **B.** $(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$.

**C.** $[-3;1]$. **D.** $[-1;+\infty)$.

Nguyễn Bảo Vương

**Lời giải**

Ta có $y'=(2x+2)e^{x^2+2x-3}$.

$y'\ge 0\Leftrightarrow (2x+2)e^{x^2+2x-3}\ge 0\Leftrightarrow 2x+2\ge 0\Leftrightarrow x\ge -1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $y'\ge 0$ là $[-1;+\infty)$.

**Câu 12.** **(Thpt Hùng Vương Bình Phước 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^x>9$ trên tập số thực là

**A.** $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $(-2;+\infty)$.

**Lời giải**

$\left(\frac{1}{3}\right)^x>9\Leftrightarrow 3^{-x}>3^2\Leftrightarrow -x>2\Leftrightarrow x<-2$.

Vậy tập nghiệm là: $S=(-\infty;-2)$.

**Câu 13.** **(THPT Bạch Đằng Quảng Ninh 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $4^{x+1}\le 8^{x-2}$ là

**A.** $[8;+\infty)$. **B.** $\varnothing$. **C.** $(0;8)$. **D.** $(-\infty;8]$.

**Lời giải**

Ta có: $4^{x+1}\le 8^{x-2}\Leftrightarrow 2^{2x+2}\le 2^{3x-6}\Leftrightarrow 2x+2\le 3x-6\Leftrightarrow x\ge 8$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=[8;+\infty)$.

**Câu 14.** **(THPT Cù Huy Cận 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2+2x}\le 8$ là

**A.** $(-\infty;-3]$. **B.** $[-3;1]$. **C.** $(-3;1)$. **D.** $(-3;1]$.

**Lời giải**

Ta có : $2^{x^2+2x} \le 8 \Leftrightarrow 2^{x^2+2x} \le 2^3 \Leftrightarrow x^2+2x-3 \le 0 \Leftrightarrow -3 \le x \le 1$.

**Câu 15.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Tập nghiệm $S$ của bất phương trình $5^{x+2} < \left(\frac{1}{25}\right)^{-x}$ là

**A.** $S=(-\infty;2)$ **B.** $S=(-\infty;1)$ **C.** $S=(1;+\infty)$ **D.** $S=(2;+\infty)$

**Lời giải**

$5^{x+2} < \left(\frac{1}{25}\right)^{-x} \Leftrightarrow 5^{x+2} < 5^{2x} \Leftrightarrow x+2 < 2x \Leftrightarrow x > 2$

**Câu 16.** **(THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Tập nghiệm bất phương trình $2^{x^2-3x} < 16$ là

**A.** $(-\infty;-1)$. **B.** $(4;+\infty)$. **C.** $(-1;4)$. **D.** $(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)$.

**Lời giải**

$2^{x^2-3x} < 16 \Leftrightarrow 2^{x^2-3x} < 2^4 \Leftrightarrow x^2-3x < 4 \Leftrightarrow -1 < x < 4$.

**Câu 17.** **(THPT Gang Thép Thái Nguyên 2019)** Tập nghiệm bất phương trình: $2^x > 8$ là

**A.** $(-\infty;3)$. **B.** $[3;+\infty)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;3]$.

**Lời giải**

Ta có: $2^x > 8 \Leftrightarrow 2^x > 2^3 \Leftrightarrow x > 3$

Vậy tập nghiệm bất phương trình là $(3;+\infty)$.

**Câu 18.** **(Chuyên Quốc Học Huế 2019)** Tìm tập nghiệm $S$ của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+3x} < \frac{1}{4}$.

**A.** $S=[1;2]$ **B.** $S=(-\infty;1)$ **C.** $S=(1;2)$ **D.** $S=(2;+\infty)$

**Lời giải**

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+3x} < \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+3x} < \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow -x^2+3x > 2 \Leftrightarrow x^2-3x+2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trìnhđã cho là $S=(1;2)$.

**Câu 19.** **(Đề Tham Khảo 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-2x} < 27$ là

**A.** $(-\infty;-1)$ **B.** $(3;+\infty)$ **C.** $(-1;3)$ **D.** $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $3^{x^2-2x} < 27 \Leftrightarrow x^2-2x < 3 \Leftrightarrow x^2-2x-3 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$.

**Câu 20.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Cho $f(x)=x.\mathrm{e}^{-3x}$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x)>0$ là

**A.** $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$ **B.** $\left(0;\frac{1}{3}\right)$ **C.** $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$ **D.** $(0;1)$

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $f'(x)=e^{-3x}-3x.e^{-3x}=e^{-3x}(1-3x)$.

$f'(x)>0 \Leftrightarrow e^{-3x}(1-3x)>0 \Leftrightarrow 1-3x>0 \Leftrightarrow x<\frac{1}{3}$.

**Câu 21.** **(THPT Ba Đình 2019)** Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-3x-7} > 3^{2x-21}$ là

**A.** 7. **B.** 6. **C.** vô số. **D.** 8.

**Lời giải**

Ta có $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-3x-7} > 3^{2x-21} \Leftrightarrow 3^{-\left(2x^2-3x-7\right)} > 3^{2x-21}$

$\Leftrightarrow -\left(2x^2-3x-7\right) > 2x-21 \Leftrightarrow -2x^2+3x+7 > 2x-21$

$\Leftrightarrow -2x^2+x+28 > 0 \Leftrightarrow -\frac{7}{2} < x < 4$.

Do $x \in \mathbb{Z}$ nên $x \in \{-3;-2;-1;0;1;2;3\}$.

Vậy bất phương trình đã cho có 7 nghiệm nguyên.

**Câu 22.** **(THPT Lương Thế Vinh Hà Nội 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $2^{3x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2x-6}$ là

**A.** $(0;6)$. **B.** $(-\infty;6)$. **C.** $(0;64)$. **D.** $(6;+\infty)$.

**Lời giải**

Ta có $2^{3x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2x-6} \Leftrightarrow 2^{3x} < 2^{2x+6} \Leftrightarrow 3x < 2x+6 \Leftrightarrow x < 6$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty;6)$.

**Câu 23.** **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} \geq \frac{1}{8}$ có tập nghiệm là

**A.** $[3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1]$. **C.** $[-1;3]$. **D.** $(-1;3)$.

Nguyễn Bảo Vương

**Lời giải**

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow x^2-2x \leq 3 \Leftrightarrow x^2-2x-3 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S = [-1;3]$.

**Câu 24.** **(THPT Yên Phong 1 Bắc Ninh 2019** Nghiệm nguyên lớn nhất của bất phương trình $4^{x^2-2x} < 64$ là

**A.** 2. **B.** $-1$. **C.** 3. **D.** 0.

**Lời giải**

Ta có $4^{x^2-2x} < 64 \Leftrightarrow 4^{x^2-2x} < 4^3 \Leftrightarrow x^2-2x-3 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$. Vậy nghiệm nguyên lớn nhất là $x = 2$.

**Câu 25.** **(Sở Hà Nội 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{3}{4}\right)^{-x^2} > \frac{81}{256}$ là

**A.** $(-\infty;-2)$. **B.** $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $(-2;2)$.

**Lời giải**

Ta có: $\left(\frac{3}{4}\right)^{-x^2} > \frac{81}{256} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{-x^2} > \left(\frac{3}{4}\right)^4 \Leftrightarrow -x^2 < 4 \Leftrightarrow -x^2-4 < 0 \Leftrightarrow x \in R$

**Câu 26.** **(Chuyên Sơn La 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2-2x}>8$ là

**A.** $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;3)$.

**C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

**Lời giải**

Bất phương trình $2^{x^2-2x}>8\Leftrightarrow 2^{x^2-2x}>2^3\Leftrightarrow x^2-2x>3\Leftrightarrow x^2-2x-3>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3\\x<-1\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

**Câu 27.** **(Chuyên ĐHSP Hà Nội 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{\mathrm{e}}{\pi}\right)^x>1$ là

**A.** $\mathbb{R}$ **B.** $(-\infty;0)$ **C.** $(0;+\infty)$ **D.** $[0;+\infty)$

**Lời giải**

Vì $\frac{\mathrm{e}}{\pi}<1$ nên $\left(\frac{\mathrm{e}}{\pi}\right)^x>1\Leftrightarrow\log_{\frac{\mathrm{e}}{\pi}}\left(\frac{\mathrm{e}}{\pi}\right)^x<\log_{\frac{\mathrm{e}}{\pi}}1\Leftrightarrow x<0$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;0)$.

**Câu 28.** **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Số nghiệm nguyên của bất phương trình $2^{x^2+3x}\le 16$ là số nào sau đây ?

**A.** 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

**Lời giải**

$2^{x^2+3x}\le 16\Leftrightarrow 2^{x^2+3x}\le 2^4\Leftrightarrow x^2+3x\le 4\Leftrightarrow x\in[-4;1]$.

Các nghiệm nguyên của bất phương trình là : $-4;-3;-2;-1;0;1$.

**Câu 29.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{1+a^2}\right)^{2x+1}>1$ (với $a$ là tham số, $a\neq 0$) là:

**A.** $(-\infty;0)$ **B.** $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ **C.** $(0;+\infty)$ **D.** $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$

**Lời giải**

Ta có: $\left(\frac{1}{1+a^2}\right)^{2x+1}>1\Leftrightarrow\left(\frac{1}{1+a^2}\right)^{2x+1}>\left(\frac{1}{1+a^2}\right)^0\ (1)$.

Nhận thấy $1+a^2>1,\forall a\neq 0$ nên: $\frac{1}{1+a^2}<1$.

Khi đó bất phương trình $(1)$ tương đương $2x+1<0\Leftrightarrow x<-\frac{1}{2}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho : $S=\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$.

**Câu 30.** **(Cụm 8 Trường Chuyên 2019)** Tập nghiệm $S$ của bất phương trình $3^x<\mathrm{e}^x$ là:

**A.** $S=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **B.** $S=(0;+\infty)$. **C.** $S=\mathbb{R}$. **D.** $S=(-\infty;0)$.

**Lời giải**

$3^x < e^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{e}\right)^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$. Tập nghiệm của bất phương trình là $S = (-\infty; 0)$.

**Câu 31.** **(Nguyễn Huệ- Ninh Bình- 2019)**Bất phương trình $2^{x+1} \le 4$ có tập nghiệm là:

**A.** $[1:+\infty)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(1:+\infty)$. **D.** $(-\infty;1]$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $2^{x+1} \le 4 \Leftrightarrow x+1 \le 2 \Leftrightarrow x \le 1$. Tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty;1]$.

**Câu 32.** **(THPT Minh Khai - 2019)** Tìm tập nghiệm $S$ của bất phương trình $3^x < 9$

**A.** $S = (-\infty;2]$. **B.** $S = (2;+\infty)$. **C.** $S = (-\infty;2)$. **D.** $S = \{2\}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$3^x < 9 \Leftrightarrow 3^x < 3^2 \Leftrightarrow x < 2$.

Tập nghiệm của bất phương trình là: $S = (-\infty;2)$.

**Câu 33.** **(Lômônôxốp - Hà Nội 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{x}} \le \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$ là:

**A.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $\left(0;\frac{1}{2}\right]$. **D.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Cơ số $a = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$ nên bất phương trình: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{x}} \le \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \ge 2 \Leftrightarrow \frac{1-2x}{x} \ge 0 \Leftrightarrow 0 < x \le \frac{1}{2}$.

**Câu 34.** **( Đồng Nai - 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x+2} \ge \frac{1}{9}$ là

**A.** $[-4;+\infty)$. **B.** $(-\infty;4)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $[0;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Bất phương trình $3^{x+2} \ge \frac{1}{9} \Leftrightarrow 3^{x+2} \ge 3^{-2} \Leftrightarrow x+2 \ge -2 \Leftrightarrow x \ge -4$.

**Câu 35.** **(Chuyên Long An-2019)** Tìm nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \ge \frac{1}{4}$.

**A.** $x \le 3$. **B.** $x > 3$. **C.** $x \ge 3$. **D.** $1 < x \le 3$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \ge \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \ge \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x-1 \le 2 \Leftrightarrow x \le 3$

**Câu 36.** **(Chuyên - Vĩnh Phúc - 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{1+a^2}\right)^{2x+1}>1$ (với $a$ là tham số, $a\neq 0$) là

**A.** $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $0<\frac{1}{1+a^2}<1,\ \forall a\neq 0$, nếu $\left(\frac{1}{1+a^2}\right)^{2x+1}>1 \Leftrightarrow 2x+1<0\Leftrightarrow x<-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$.

**Câu 37.** **(Chuyên Lam Sơn-2019)** Số nghiệm nguyên của bất phương trình $2^{x^2+3x}\leq 16$ là

**A.** $5$. **B.** $6$. **C.** $4$. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $2^{x^2+3x}\leq 16\Leftrightarrow 2^{x^2+3x}\leq 2^4\Leftrightarrow x^2+3x\leq 4\Leftrightarrow x^2+3x-4\leq 0\Leftrightarrow -4\leq x\leq 1$.

Do đó số nghiệm nguyên của bất phương trình đã cho là 6.

**Câu 38.** **(chuyên Hùng Vương Gia Lai 2019)** Bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}\geq\frac{1}{8}$ có tập nghiệm là

**A.** $[3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1]$. **C.** $[-1;3]$. **D.** $(-1;3)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}\geq\left(\frac{1}{2}\right)^3\Leftrightarrow x^2-2x\leq 3\Leftrightarrow x^2-2x-3\leq 0\Leftrightarrow -1\leq x\leq 3$$

Vậy, tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S=[-1;3]$.

**Câu 39.** **(Chuyên Hoàng Văn Thụ-Hòa Bình 2019)**Cho bất phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-x+1}>\left(\frac{2}{3}\right)^{2x+1}$ có tập nghiệm $S=(a;b)$. Giá trị của $b-a$ bằng

**A.** $3$. **B.** $4$. **C.** $2$. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-x+1}>\left(\frac{2}{3}\right)^{2x+1}\Leftrightarrow x^2-x+1<2x+1\Leftrightarrow x^2-3x<0\Leftrightarrow 0<x<3$.

Vậy tập nghiệm $S=(0;3)$, suy ra $b-a=3-0=3$.

**Câu 40.** **(SGD Hưng Yên 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x+1}>1$ là

**A.** $(-\infty;0)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x+1}>1\Leftrightarrow 2x+1<0\Leftrightarrow x<-\frac{1}{2}$.

Vậy: Tập nghiệm của bất phương trình là $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$.

**Câu 41.** **(SGD Điện Biên - 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $2^{\sqrt{x}}<2$ là

**A.** $[0;1)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $(1;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$$2^{\sqrt{x}}<2\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ \sqrt{x}<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x<1\end{cases}\Leftrightarrow x\in[0;1)$$

**Câu 42.** **(Ngô Quyền - Ba Vì - Hải Phòng 2019)** Tập nghiệm $S$ của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x}<8$ là

**A.** $S=(-\infty;3)$. **B.** $S=(1;+\infty)$. **C.** $S=(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$. **D.** $S=(1;3)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x}<8\Leftrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x}<\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\Leftrightarrow x^2-4x>-3\Leftrightarrow x^2-4x+3>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3\\ x<1\end{array}\right.$.

Nên tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x}<8$ là $S=(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$.

Nguyễn Bảo Vương

**Câu 43.** **(Cần Thơ - 2019)** Nghiệm của bất phương trình $2^{x^2-x}\le 4$ là

**A.** $-1\le x\le 2$. **B.** $x\le 1$. **C.** $x\le 2$. **D.** $-2\le x\le 1$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$$2^{x^2-x}\le 4\Leftrightarrow 2^{x^2-x}\le 2^2\Leftrightarrow x^2-x-2\le 0\Leftrightarrow -1\le x\le 2.$$

**Câu 44.** **(Chuyên Lê Quý Đôn Điện Biên 2019)** Tìm tập nghiệm của bất phương trình $2^x+2^{x+1}\le 3^x+3^{x-1}$.

**A.** $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(-\infty;2]$. **D.** $[2;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $2^x+2^{x+1}\le 3^x+3^{x-1}\Leftrightarrow 3.2^x\le 4.3^{x-1}\Leftrightarrow 2^{x-2}\le 3^{x-2}$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2}\le 1\Leftrightarrow x-2\ge 0\Leftrightarrow x\ge 2.$$

**Câu 45.** **(Chuyên Lê Hồng Phong Nam Định 2019)** Cho bất phương trình $4^x-5.2^{x+1}+16\le 0$ có tập nghiệm là đoạn $[a;b]$. Tính $\log\left(a^2+b^2\right)$

**A.** 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 10.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đặt $t=2^x, t>0 (*)$

Khi đó bất phương trình đã cho trở thành: $t^2-10t+16\le 0 \Leftrightarrow 2\le t\le 8$ (thỏa mãn (*))

$\Rightarrow 2\le 2^x\le 2^3 \Leftrightarrow 1\le x\le 3 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow \log\left(a^2+b^2\right)=1.$

**Câu 46.** **(Thi thử cụm Vũng Tàu - 2019)** Cho bất phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-x+1} > \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1}$ có tập nghiệm $S=(a;b)$. Giá trị của $b-a$ bằng

**A.** $-2$. **B.** $-1$. **C.** $1$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-x+1} > \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1} \Leftrightarrow x^2-x+1<2x-1 \Leftrightarrow x^2-3x+2<0 \Leftrightarrow 1<x<2 \Rightarrow S=(1;2).$

Vậy $a=1; b=2 \Rightarrow b-a=1.$

**Câu 47.** **(Chuyên Quốc Học Huế 2019)** Xác định tập nghiệm $S$ của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3} \ge 3$.

**A.** $S=(-\infty;1]$. **B.** $S=(1;+\infty)$. **C.** $S=[1;+\infty)$. **D.** $S=(-\infty;1)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3} \ge 3 \Leftrightarrow 3^{3-2x} \ge 3^1 \Leftrightarrow 3-2x\ge 1 \Leftrightarrow x\le 1.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;1]$.

**Câu 48.** **(Sở Hà Nam - 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $(5)^{4+x^2} < \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-6x}$ là

**A.** $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(1;2)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $(5)^{4+x^2} < \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-6x} \Leftrightarrow 5^{4+x^2} < 5^{-x^2+6x} \Leftrightarrow -x^2+6x>4+x^2 \Leftrightarrow 2x^2-6x+4<0$

$\Leftrightarrow 1<x<2.$

**Câu 49.** **(Chu Văn An - Hà Nội - 2019)** Bất phương trình $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{x-1} \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2x+3}$ có nghiệm là

**A.** $x\le -4$. **B.** $x>-4$. **C.** $x<-4$. **D.** $x\ge -4$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có:

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{x-1} \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2x+3}$$

$$\Leftrightarrow x-1 \le 2x+3 \quad (\text{vì } \frac{\pi}{2} > 1)$$

$$\Leftrightarrow x \ge -4$$

Nguyễn Bảo Vương

## TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH KHÁ-GIỎI MỨC 7-8-9-10 ĐIỂM

### BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

*Sử dụng các phương pháp giải phương trình logarit đã đưa ra tại Chuyên đề 19. Phương trình mũ – logarit để giải*

**Câu 1.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $2\log_2(x-1)\le\log_2(5-x)+1$ là

**A.** $[3;5]$ **B.** $(1;3]$ **C.** $[1;3]$ **D.** $(1;5)$

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện: $1<x<5$.

Ta có $2\log_2(x-1)\le\log_2(5-x)+1\Leftrightarrow\log_2(x-1)^2\le\log_2[2(5-x)]\Leftrightarrow(x-1)^2\le10-2x$

$\Leftrightarrow x^2-9\le0\Leftrightarrow-3\le x\le3$. Vậy tập nghiệm của bpt là $S=(1;3]$.

**Câu 2.** **(THPT Gia Lộc Hải Dương 2019)** Tìm tập nghiệm $S$ của bất phương trình $2\log_3(4x-3)\le\log_3(18x+27)$.

**A.** $S=\left[-\frac{3}{8};3\right]$. **B.** $S=\left(\frac{3}{4};3\right]$. **C.** $S=\left(\frac{3}{4};+\infty\right)$. **D.** $S=[3;+\infty)$.

**Lời giải**

$2\log_3(4x-3)\le\log_3(18x+27)(*)$.

Điều kiện: $\begin{cases}4x-3>0\\18x+27>0\end{cases}\Leftrightarrow x>\frac{3}{4}$.

Với điều kiện trên, $(*)\Leftrightarrow\log_3(4x-3)^2\le\log_3(18x+27)$

$\Leftrightarrow(4x-3)^2\le18x+27$

$\Leftrightarrow-\frac{3}{8}\le x\le3$.

Kết hợp điều kiện ta được $S=\left(\frac{3}{4};3\right]$.

**Câu 3.** **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình -2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2^2(2x)+\log_2\frac{x}{4}<9$ chứa tập hợp nào sau đây?

**A.** $\left(\frac{3}{2};6\right)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(1;5)$. **D.** $\left(\frac{1}{2};2\right)$.

**Lời giải**

+ Điều kiện: $x>0$.

+ Ta có:

$\log_2^2(2x)+\log_2\frac{x}{4}<9\Leftrightarrow(1+\log_2 x)^2+\log_2 x-2<9\Leftrightarrow\log_2^2 x+3\log_2 x-10<0$

$\Leftrightarrow -5<\log_2 x<2\Leftrightarrow\frac{1}{2^5}<x<4$

.

Vậy $x\in\left(\frac{1}{2^5};4\right)$ chứa tập $\left(\frac{1}{2};2\right)$.

**Câu 4.** **(Chuyên Đại Học Vinh 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(11-2x)\ge 0$ là:

**A.** $(-\infty;4]$. **B.** $(1;4]$. **C.** $(1;4)$. **D.** $\left[4;\frac{11}{2}\right)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

ĐK: $\begin{cases}x-1>0\\11-2x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\x<\frac{11}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(1;\frac{11}{2}\right)$

Ta có $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(11-2x)\ge 0\Leftrightarrow\log_3\frac{11-2x}{x-1}\ge 0\Leftrightarrow\frac{11-2x}{x-1}\ge 0\Leftrightarrow x\in\left[1;\frac{11}{2}\right]$

Kết luận: $x\in\left(1;\frac{11}{2}\right)$. Vì $x\in\left[4;\frac{11}{2}\right)\subset\left(1;\frac{11}{2}\right)$. Ta chọn đáp án D

**Câu 5.** **(Sở Phú Thọ 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(11-2x)\ge 0$ là

**A.** $(-\infty;4]$ **B.** $(1;4]$ **C.** $(1;4)$ **D.** $\left[4;\frac{11}{2}\right)$

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện xác định: $1<x<\frac{11}{2}$.

Khi đó ta có: $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(11-2x)\ge 0\Leftrightarrow\log_3(11-2x)\ge\log_3(x-1)\Leftrightarrow 11-2x\ge x-1>0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\x\le 4\end{cases}\Leftrightarrow x\in(1;4]$.

**Câu 6.** **(Sở Bắc Ninh 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(11-2x)\ge 0$ là:

**A.** $S=(-\infty;4]$. **B.** $S=(1;4)$. **C.** $S=(1;4]$. **D.** $S=\left(3;\frac{11}{2}\right)$.

**Lời giải**

$\log_{\frac{1}{3}}(x-1)+\log_3(11-2x)\ge 0\Leftrightarrow\log_3(11-2x)-\log_3(x-1)\ge 0$

$\Leftrightarrow\log_3(11-2x)\ge\log_3(x-1)\Leftrightarrow\begin{cases}11-2x\ge x-1\\x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow 1<x\le 4$.

Suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S=(1;4]$.

**Câu 7.** **(THPT Nguyễn Khuyến 2019)** Tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $2\log_2\sqrt{x+1}\le 2-\log_2(x-2)$ bằng

**A.** 12 **B.** 9 **C.** 5 **D.** 3

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện $\begin{cases}x+1>0\\x-2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\x>2\end{cases}\Leftrightarrow x>2$

$2\log_2\sqrt{x+1}\le 2-\log_2(x-2)\Leftrightarrow\log_2(x+1)\le\log_2\dfrac{4}{(x-2)}\Leftrightarrow x+1\le\dfrac{4}{(x-2)}$

$\Leftrightarrow\dfrac{x^2-x-2-4}{x-2}\le 0\Leftrightarrow\dfrac{x^2-x-6}{x-2}\le 0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-2]\cup[2;3]$

Suy ra nghiệm của bất phương trình là: $x\in(2;3]$.

Nghiệm nguyên là: $x=3$. Vậy tổng tất cả các nghiệm nguyên là 3

**Câu 8.** **(Chuyên Bắc Ninh 2019)** Tìm tất cả giá trị của tham số $m$ để bất phương trình $\log(2x^2+3)>\log(x^2+mx+1)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

**A.** $-2<m<2$. **B.** $m<2\sqrt{2}$. **C.** $-2\sqrt{2}<m<2\sqrt{2}$. **D.** $m<2$.

**Lời giải**

Ta có $\log(2x^2+3)>\log(x^2+mx+1)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+mx+1>0\\2x^2+3>x^2+mx+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+mx+1>0\\x^2-mx+2>0\end{cases}(*)$

Để bất phương trình $\log(2x^2+3)>\log(x^2+mx+1)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ thì hệ $(*)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta_1=m^2-4<0\\\Delta_2=m^2-8<0\end{cases}\Leftrightarrow -2<m<2$.

**Câu 9.** **(Mã 123 2017)** Tìm tập nghiệm $S$ của bất phương trình $\log_2^2 x-5\log_2 x+4\ge 0$.

**A.** $S=(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$ **B.** $S=[2;16]$

**C.** $S=(0;2]\cup[16;+\infty)$ **D.** $(-\infty;2]\cup[16;+\infty)$

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện $x>0$

Bpt $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x\ge 4\\\log_2 x\le 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 16\\x\le 2\end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện ta có $S=(0;2]\cup[16;+\infty)$.

**Câu 10.** **(Mã 105 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để bất phương trình $\log_2^2 x-2\log_2 x+3m-2<0$ có nghiệm thực.

**A.** $m<1$ **B.** $m\le 1$ **C.** $m<0$ **D.** $m<\frac{2}{3}$

**Lời giải**

**Chọn.A**

Đặt $t=\log_2 x\ (x>0)$, ta có bất phương trình : $t^2-2t+3m-2<0$.

Để BPT luôn có nghiệm thực thì $\Delta'=3-3m>0\Leftrightarrow m<1$.

**Câu 11.** **(THPT Đoàn Thượng - Hải Dương 2019)** Biết rằng bất phương trình $\log_2\left(5^x+2\right)+2.\log_{\left(5^x+2\right)}2>3$ có tập nghiệm là $S=\left(\log_a b;+\infty\right)$, với $a$, $b$ là các số nguyên dương nhỏ hơn 6 và $a\neq 1$. Tính $P=2a+3b$.

**A.** $P=7$. **B.** $P=11$. **C.** $P=18$. **D.** $P=16$.

**Lời giải**

Đặt $\log_2(5^x+2)=t$. Do $5^x+2>2$ với mọi $x$ nên $\log_2(5^x+2)>\log_2 2=1$ hay $t>1$.

Bất phương trình đã cho trở thành: $t+\frac{2}{t}>3\Leftrightarrow t^2-3t+2>0$ (do $t>1$) $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t<1\\t>2\end{array}\right.$.

Đối chiếu với $t>1$ ta lấy $t>2$.

Khi đó $\log_2(5^x+2)>2\Leftrightarrow 5^x>2\Leftrightarrow x>\log_5 2$.

Vậy bất phương trình có nghiệm là $\mathrm{S}=(\log_5 2;+\infty)$, ta có $a=5,\ b=2\Rightarrow 2a+3b=16$.

**Câu 12.** Tập nghiệm $S$ của bất phương trình $\log_2^2 x-5\log_2 x-6\le 0$ là

**A.** $S=\left[\frac{1}{2};64\right]$. **B.** $S=\left(0;\frac{1}{2}\right]$.

**C.** $S=[64;+\infty)$. **D.** $S=\left(0;\frac{1}{2}\right]\cup[64;+\infty)$.

**Lời giải**

$\log_2^2 x-5\log_2 x-6\le 0\ (1)$

ĐK: $x>0\ (*)$

Đặt $t=\log_2 x\ (2)$

$(1)$ thành $t^2-5t-6\le 0\Leftrightarrow -1\le t\le 6\overset{(2)}{\Leftrightarrow}-1\le\log_2 x\le 6\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le x\le 64$

So với $(*)$: $(1)\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le x\le 64$

Vậy $S=\left[\frac{1}{2};64\right]$.

**Câu 13.** **(Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Kí hiệu $\max\{a;b\}$ là số lớn nhất trong hai số $a,b$. Tìm tập nghiệm $S$ của bất phương trình $\max\left\{\log_2 x;\ \log_{\frac{1}{3}}x\right\}<1$.

**A.** $S=\left(\frac{1}{3};2\right)$. **B.** $S=(0;2)$. **C.** $S=\left(0;\frac{1}{3}\right)$. **D.** $S=(2;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$y=\log_2 x-\log_{\frac{1}{3}} x=\log_2 x+\log_3 x$

$y'=\dfrac{1}{x\ln 2}+\dfrac{1}{x\ln 3}>0,\forall x>0$ nên phương trình $y=0$ có nghiệm duy nhất

Mà phương trình $y=0$ có nghiệm $x=1$ do đó

**TH1**: $x<1:\log_2 x<\log_{\frac{1}{3}} x$

Ta có $\max\left\{\log_2 x;\ \log_{\frac{1}{3}} x\right\}<1.\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}} x<1\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{3}$

Do đó $\dfrac{1}{3}<x<1$

**TH2:** $x\ge 1:\log_2 x\ge\log_{\frac{1}{3}} x$

Ta có $\max\left\{\log_2 x;\ \log_{\frac{1}{3}} x\right\}<1.\Leftrightarrow \log_2 x<1\Leftrightarrow x<2$

Do đó $1\le x<2$

Vậy $S=\left(\dfrac{1}{3};2\right).$

$S=\left(\dfrac{1}{3};2\right).$

Nguyễn Bảo Vương

**Câu 14.** **(Sở Bắc Ninh 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2\left(x\sqrt{x^2+2}+4-x^2\right)+2x+\sqrt{x^2+2}\le 1$ là $\left(-\sqrt{a};-\sqrt{b}\right].$

Khi đó $a.b$ bằng

**A.** $\dfrac{15}{16}.$ **B.** $\dfrac{12}{5}.$ **C.** $\dfrac{16}{15}.$ **D.** $\dfrac{5}{12}.$

**Lời giải**

Ta có: $x\sqrt{x^2+2}-x^2=x\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+2}+x}.$

Ta có: $\log_2\left(x\sqrt{x^2+2}+4-x^2\right)+2x+\sqrt{x^2+2}\le 1\Leftrightarrow\log_2\left(x\left(\sqrt{x^2+2}-x\right)+4\right)+2x+\sqrt{x^2+2}\le 1$

$\Leftrightarrow\log_2\left(\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+2}+x}+4\right)+2x+\sqrt{x^2+2}\le 1\Leftrightarrow\log_2\dfrac{2\left(3x+2\sqrt{x^2+2}\right)}{\sqrt{x^2+2}+x}+2x+\sqrt{x^2+2}\le 1,(1)$

Ta có $\sqrt{x^2+2}+x>0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

Điều kiện: $3x+2\sqrt{x^2+2}>0\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2+2}>-3x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 0\\ \begin{cases}x<0\\ 4x^2+8>9x^2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow x>-\sqrt{\dfrac{8}{5}},(*)$

Với điều kiện $(*)$, ta có

$(1)\Leftrightarrow\log_2\left(3x+2\sqrt{x^2+2}\right)+3x+2\sqrt{x^2+2}\le\log_2\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)+\sqrt{x^2+2}+x,\ (2)$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t$ với $t>0$. Có $f'(t)=\dfrac{1}{t.\ln 2}+1>0$, $\forall t\in(0;+\infty)$.

Hàm số $f(t)=\log_2 t+t$ đồng biến trên $(0;+\infty)$, $\left(3x+2\sqrt{x^2+2}\right)\in(0;+\infty)$ và

$\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)\in(0;+\infty)$

Nên $(2)\Leftrightarrow f\left(3x+2\sqrt{x^2+2}\right)\le f\left(\sqrt{x^2+2}+x\right)$

$\Leftrightarrow 3x+2\sqrt{x^2+2}\le\sqrt{x^2+2}+x\Leftrightarrow\sqrt{x^2+2}\le -2x\Leftrightarrow\begin{cases}-2x\ge 0\\ x^2+2\le 4x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\ 3x^2\ge 2\end{cases}\Leftrightarrow x\le-\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Kết hợp với ĐK ta có tập nghiệm bất phương trình là $\left(-\sqrt{\dfrac{8}{5}};-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right]$ hay $a.b=\dfrac{16}{15}$.

Chọn đáp án **C.**

**Câu 15.** **(Chuyên Đại học Vinh - 2019)** Bất phương trình $\left(x^3-9x\right)\ln(x+5)\le 0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

**A.** 4. **B.** 7. **C.** 6. **D.** Vô số.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện: $x>-5$.

Cho $\left(x^3-9x\right)\ln(x+5)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^3-9x=0\\ \ln(x+5)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\ x=0\\ x=3\\ x=-4\end{array}\right.$.

Nguyễn Bảo Vương

Bảng xét dấu:

| $x$ | $-5$ | | $-4$ | | $-3$ | | $0$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy $f(x)\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-4\le x\le -3\\ 0\le x\le 3\end{array}\right.$.

Vì $x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{-4;-3;0;1;2;3\}$.

Vậy có 6 giá trị nguyên của $x$ thỏa bài toán.

**Câu 16.** **(THPT Đoàn Thượng – Hải Dương 2019)** Biết rằng bất phương trình $\log_2\left(5^x+2\right)+2.\log_{\left(5^x+2\right)}2>3$ có tập nghiệm là $S=\left(\log_a b;+\infty\right)$, với $a$, $b$ là các số nguyên dương nhỏ hơn 6 và $a\ne 1$. Tính $P=2a+3b$.

**A.** $P=7$. **B.** $P=11$. **C.** $P=18$. **D.** $P=16$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Đặt $\log_2(5^x+2)=t$. Do $5^x+2>2$ với mọi $x$ nên $\log_2(5^x+2)>\log_2 2=1$ hay $t>1$.

Bất phương trình đã cho trở thành: $t+\dfrac{2}{t}>3\Leftrightarrow t^2-3t+2>0$ (do $t>1$) $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t<1\\ t>2\end{array}\right.$.

Đối chiếu với $t>1$ ta lấy $t>2$.

Khi đó $\log_2(5^x+2)>2\Leftrightarrow 5^x>2\Leftrightarrow x>\log_5 2$.

Vậy bất phương trình có nghiệm là $S=(\log_5 2;+\infty)$, ta có $a=5,\ b=2\Rightarrow 2a+3b=16$.

**Câu 17.** **(Chuyên Đại học Vinh - 2019)** Tính tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2\left(x^2+3\right)-\log_2 x+x^2-4x+1\le 0$.

**A.** $4$. **B.** $6$. **C.** $5$. **D.** $3$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện: $x>0$.

Ta có

$\log_2\left(x^2+3\right)-\log_2 x+x^2-4x+1\le 0\Leftrightarrow \log_2\left(x^2+3\right)+x^2+3\le \log_2 4x+4x\ (*)$.

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t$ trên $D=(0;+\infty)$. Ta có

$f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0\ \forall t\in D\Rightarrow$ hàm số $f$ đồng biến trên $D$.

Suy ra

$(*)\Leftrightarrow f\left(x^2+3\right)\le f(4x)\Leftrightarrow x^2+3\le 4x\Leftrightarrow 1\le x\le 3$.

Vậy tập hợp các nghiệm nguyên của bất phương trình là $\{1;2;3\}$.

Nhận xét: Với cách hỏi và đáp án của câu này ta chỉ cần mở MODE 7 của máy tính cầm tay, nhập vế trái của bất phương trình và cho biến chạy từ 1 đến 6 là tìm được đáp án ngay.

**Câu 18.** **(HKI-NK HCM-2019)** Biết bất phương trình $\log_2\left(\dfrac{x^2+x+1}{16x+3}\right)+\left(\sqrt{x}-2\right)^2+x\le 1$ có tập nghiệm là $S=(a;b)$. Hãy tính tổng $T=20a+10b$.

**A.** $T=45-10\sqrt{2}$. **B.** $T=46-10\sqrt{2}$. **C.** $T=46-11\sqrt{2}$. **D.** $T=47-11\sqrt{2}$.

**Lời giải:**

**Chọn A**

Điều kiện: $x\ge 0$.

$\log_2\left(\dfrac{x^2+x+1}{16x+3}\right)+\left(\sqrt{x}-2\right)^2+x\le 1\Leftrightarrow \log_2\left(x^2+x+1\right)-\log_2(16x+3)+2x-4\sqrt{x}+3\le 0$

$\Leftrightarrow \log_2\left(\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\right)+2\left(\left(x+\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{3}{4}\right)\le \log_2\left(\left(2\sqrt{x}\right)^2+\dfrac{3}{4}\right)+2\left(2\sqrt{x}+\dfrac{3}{4}\right)$

Xét hàm số $f(t)=\log_2\left(t^2+\dfrac{3}{4}\right)+2\left(t+\dfrac{3}{4}\right)$ với $t\ge 0$ có $f'(t)=\dfrac{2t}{\left(t^2+\dfrac{3}{4}\right)\ln 2}+2>0,\ \forall t\ge 0$

nên $f(t)$ đồng biến trên khoảng $[0;+\infty)$.

Suy ra $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{3}{4}\le 2\sqrt{x}+\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow 2\sqrt{x}\ge x+\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x^2-3x+\dfrac{1}{4}\le 0\end{cases}\Leftrightarrow \dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}\le x\le \dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow a=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2};b=\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}\Rightarrow T=20a+10b=45-10\sqrt{2}$

**Câu 19.** **(THPT Cẩm Bình Hà Tĩnh 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\left(10-3^{x+1}\right)\ge 1-x$ chứa mấy số nguyên.

**A.** 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** Vô số.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $\log_3\left(10-3^{x+1}\right)\ge 1-x\Leftrightarrow 10-3^{x+1}\ge 3^{1-x}\Leftrightarrow 3.3^x+\frac{3}{3^x}-10\le 0$ (*).

Giải (*) ta có $\frac{1}{3}\le 3^x\le 3\Leftrightarrow -1\le x\le 1$. Vậy có 3 số nguyên thuộc tập nghiệm của bất phương trình.

**Câu 20.** **(Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An - 2018)** Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2 x+\log_3 x\ge 1+\log_2 x.\log_3 x$ là

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

**Lời giải**

Điều kiện xác định: $x>0$.

Ta có: $\log_2 x+\log_3 x\ge 1+\log_2 x.\log_3 x\Leftrightarrow\left(\log_2 x-1\right)\left(\log_3 x-1\right)\le 0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_2 x-1\le 0\\ \log_3 x-1\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}\log_2 x-1\ge 0\\ \log_3 x-1\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<x\le 2\\ x\ge 3\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 2\\ 0<x\le 3\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow 2\le x\le 3.$$

Do đó có 2 nghiệm nguyên thỏa mãn.

**Câu 21.** **(THPT Lý Thái Tổ - Bắc Ninh - 2018)** Bất phương trình $\log_2\left(\log_{\frac{1}{3}}\frac{3x-7}{x+3}\right)\ge 0$ có tập nghiệm là $(a;b]$. Tính giá trị $P=3a-b$.

**A.** $P=5$. **B.** $P=4$. **C.** $P=10$. **D.** $P=7$.

**Lời giải**

$$\log_2\left(\log_{\frac{1}{3}}\frac{3x-7}{x+3}\right)\ge 0\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{3x-7}{x+3}>0\\ \log_{\frac{1}{3}}\frac{3x-7}{x+3}>0\\ \log_{\frac{1}{3}}\frac{3x-7}{x+3}\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{3x-7}{x+3}>0\\ \frac{3x-7}{x+3}<1\\ \frac{3x-7}{x+3}\le\frac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{3x-7}{x+3}>0\\ \frac{3x-7}{x+3}\le\frac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{3x-7}{x+3}>0\\ \frac{8(x-3)}{3(x+3)}\le 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(-\infty;-3)\cup\left(\frac{7}{3};+\infty\right)\\ \frac{8(x-3)}{3(x+3)}<0 x\in[-3;3]\end{cases}\Leftrightarrow x\in\left(\frac{7}{3};3\right].$$

Suy ra $a=\frac{7}{3}$; $b=3$. Vậy $P=3a-b=3.\frac{7}{3}-3=4$.

**Câu 22.** **(THPT Ngô Quyền - Hải Phòng - 2018)** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}\left(-\log_2 x\right)<0$ là

**A.** $(0;5)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $\left(\frac{1}{4};4\right)$. **D.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

**Lời giải**

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x>0 \\ -\log_2 x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x<1 \end{cases} \Rightarrow 0<x<1$

$\log_{\frac{1}{3}}(-\log_2 x)<0 \Leftrightarrow -\log_2 x>1 \Leftrightarrow \log_2 x<-1 \Leftrightarrow x<\frac{1}{2}$

So sánh điều kiện, suy ra $S=\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

**Câu 23.** **(THPT Nam Trực - Nam Định - 2018)** Tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình $\log^2_{\sqrt{5}} x^5-25\log_{\sqrt{5}} x^2-75\le 0$ là

**A.** $70$. **B.** $64$. **C.** $62$. **D.** $66$.

**Lời giải**

Điều kiện $x>0$.

$\log^2_{\sqrt{5}} x^5-25\log_{\sqrt{5}} x^2-75\le 0 \Leftrightarrow 4\log_5^2 x-4\log_5 x-3\le 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le \log_5 x\le \frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$\frac{1}{\sqrt{5}}\le x\le \sqrt{125}$. Nghiệm nguyên của bất phương trình là: $0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11$.

$S=1+2+...+11=\frac{11.(11+1)}{2}=66$.

**Câu 24.** **(THPT Lương Văn Can - 2018)** Cho bất phương trình $(\log x+1)(4-\log x)>0$. Có bao nhiêu số nguyên $x$ thoả mãn bất phương trình trên.

**A.** $10000$. **B.** $10001$. **C.** $9998$. **D.** $9999$.

**Lời giải**

$(\log x+1)(4-\log x)>0\ (1)$

Điều kiện: $x>0$.

Khi ấy $(1) \Leftrightarrow -1<\log x<4 \Leftrightarrow \frac{1}{10}<x<10000$. Vì $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{1;2;3;...;9999\}$

Vậy có tất cả $9999$ số nguyên $x$ thoả mãn bất phương trình trên.

**BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ**

*Sử dụng các phương pháp giải phương trình mũ đã đưa ra tại Chuyên đề 19. Phương trình mũ – logarit để giải*

**Câu 1.** **(THPT Trần Phú - 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình: $(3^x+2)(4^{x+1}-8^{2x+1})\le 0$

**A.** $\left[-\frac{1}{4};+\infty\right)$ **B.** $\left(-\infty;-\frac{1}{4}\right]$. **C.** $(-\infty;4]$ **D.** $[4;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn A**

$(3^x+2)(4^{x+1}-8^{2x+1})\le 0 \Leftrightarrow 4^{x+1}-8^{2x+1}\le 0$

$\Leftrightarrow 4.2^{2x}-8.(2^{2x})^3\le 0 \Leftrightarrow -2.(2^{2x})^3+2^{2x}\le 0(*)$

Đặt $2^{2x}=t,\ t>0$, suy ra bpt (*) trở thành: $-2.t^3+t\le 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\le t\le 0 \\ t\ge \dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$

Giao với Đk $t>0$ ta được: $t\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow 2^{2x}\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow 2^{2x}\ge 2^{-\frac{1}{2}}\Leftrightarrow 2x\ge-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x\ge-\dfrac{1}{4}$

Vậy tập nghiệm của BPT đã cho là $T=\left[-\dfrac{1}{4};+\infty\right)$.

**Câu 2.** **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh 2019)** Bất phương trình $3^{2x+1}-7.3^x+2>0$ có tập nghiệm là

**A.** $(-\infty;-1)\cup(\log_2 3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-2)\cup(\log_2 3;+\infty)$.

**C.** $(-\infty;-1)\cup(\log_3 2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-2)\cup(\log_3 2;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $3^{2x+1}-7.3^x+2>0\Leftrightarrow 3.\left(3^x\right)^2-7.3^x+2>0$.

Đặt $3^x=t>0$ ta được $\begin{cases} t>0 \\ 3t^2-7t+2>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 0<t<\dfrac{1}{3} \\ t>2\end{array}\right.$.

Suy ra $\left[\begin{array}{l} 0<3^x<\dfrac{1}{3} \\ 3^x>2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 0<3^x<3^{-1} \\ 3^x>3^{\log_3 2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x>\log_3 2\end{array}\right.$.

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là $(-\infty;-1)\cup(\log_3 2;+\infty)$.

**Câu 3.** **(Chuyên ĐH Vinh -2019)** Biết tập nghiệm của bất phương trình $2^x<3-\dfrac{2}{2^x}$ là $(a;b)$. Giá trị $a+b$ bằng

**A.** 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $2^x<3-\dfrac{2}{2^x}\Leftrightarrow\left(2^x\right)^2-3.\left(2^x\right)+2<0\Leftrightarrow 1<2^x<2\Leftrightarrow 0<x<1$.

Tập nghiệm của bất phương trình là: $S=(0;1)$.

Suy ra $a=0$ và $b=1$ nên $a+b=1$.

**Câu 4.** **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $3^{3x+1}-9+3^{x+1}-9.3^{2x}>0$ là

**A.** $(-\infty;1)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;3)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $3^{3x+1}-9+3^{x+1}-9.3^{2x}>0\Leftrightarrow 3.3^{3x}-9+3.3^x-9.3^{2x}>0$

Đặt $3^x=t(t>0)$.

Ta có bất phương trình $3t^3-9+3t-9t^2>0$

$\Leftrightarrow 3t^3-9t^2+3t-9>0$

$\Leftrightarrow 3t^2(t-3)+3(t-3)>0$

$\Leftrightarrow (3t^2+3)(t-3)>0$

$\Leftrightarrow t-3>0$

$\Leftrightarrow t>3$

Khi đó ta có $3^x>3\Leftrightarrow x>1$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(1;+\infty)$.

**Câu 5.** **(THPT Đông Sơn 1 - Thanh Hóa - 2019)** Bất phương trình $6.4^x-13.6^x+6.9^x>0$ có tập nghiệm là?

**A.** $S=(-\infty;-1)\cup[1;+\infty)$. **B.** $S=(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$.

**C.** $S=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. **D.** $S=(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $6.4^x-13.6^x+6.9^x>0\Leftrightarrow 6.\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-13.\left(\frac{2}{3}\right)^x+6>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\frac{2}{3}\right)^x>\frac{3}{2}\\ \left(\frac{2}{3}\right)^x<\frac{2}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1\\ x>1\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

**Câu 6.** **(Kinh Môn - Hải Dương 2019)** Cho bất phương trình: $2.5^{x+2}+5.2^{x+2}-133.\sqrt{10^x}\le 0$ có tập nghiệm là: $S=[a;b]$. Biểu thức $A=1000b-5a$ có giá trị bằng

**A.** 2021 **B.** 2020 **C.** 2019 **D.** 2018

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có: $2.5^{x+2}+5.2^{x+2}-133.\sqrt{10^x}\le 0\Leftrightarrow 50.\left(5^{\frac{x}{2}}\right)^2-133.5^{\frac{x}{2}}.2^{\frac{x}{2}}+20.\left(2^{\frac{x}{2}}\right)^2\le 0$

$\Leftrightarrow\left(2.5^{\frac{x}{2}}-5.2^{\frac{x}{2}}\right)\left(25.5^{\frac{x}{2}}-4.2^{\frac{x}{2}}\right)\le 0\Leftrightarrow\left(2.5^{\frac{x}{2}}-5.2^{\frac{x}{2}}\right)\left(5^{\frac{x}{2}+2}-2^{\frac{x}{2}+2}\right)\le 0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2.5^{\frac{x}{2}}-5.2^{\frac{x}{2}}\le 0\\ 25.5^{\frac{x}{2}}-4.2^{\frac{x}{2}}\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}2.5^{\frac{x}{2}}-5.2^{\frac{x}{2}}\ge 0\\ 25.5^{\frac{x}{2}}-4.2^{\frac{x}{2}}\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}5^{\frac{x}{2}-1}\le 2^{\frac{x}{2}-1}\\ 5^{\frac{x}{2}+2}\ge 2^{\frac{x}{2}+2}\end{cases}\\ \begin{cases}5^{\frac{x}{2}-1}\ge 2^{\frac{x}{2}-1}\\ 5^{\frac{x}{2}+2}\le 2^{\frac{x}{2}+2}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{x}{2}-1}\le 1\\ \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{x}{2}+2}\ge 1\end{cases}\\ \begin{cases}\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{x}{2}-1}\ge 1\\ \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{x}{2}+2}\le 1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\frac{x}{2}-1\le 0\\ \frac{x}{2}+2\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}\frac{x}{2}-1\ge 0\\ \frac{x}{2}+2\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 2\\ x\ge -4\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 2\\ x\le -4\end{cases}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow -4\le x\le 2$. Suy ra $S=[-4;2]$. Vậy $A=1000b-5a=1000.2-5.(-4)=2020$.

**Câu 7.** **(Toán Học Tuổi Trẻ Năm 2019)** Số nghiệm nguyên của bất phương trình: $\left(17-12\sqrt{2}\right)^{x}\geq\left(3+\sqrt{8}\right)^{x^2}$ là:

**A.** 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

**Lời giải**

Ta có: $\left(17-12\sqrt{2}\right)^{x}\geq\left(3+\sqrt{8}\right)^{x^2}\Leftrightarrow\left(3-\sqrt{8}\right)^{2x}\geq\left(3+\sqrt{8}\right)^{x^2}$

$\Leftrightarrow\left(3+\sqrt{8}\right)^{x^2+2x}\leq 1\Leftrightarrow x^2+2x\leq 0\Leftrightarrow x\in[-2;0]$.

Vậy bất phương trình đã cho có 3 nghiệm nguyên.

**Câu 8.** **(Chuyên Lê Quý Dôn Diện Biên 2019)** Tìm tập nghiệm của bất phương trình $2^{x}+2^{x+1}\leq 3^{x}+3^{x-1}$.

**A.** $(2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(-\infty;2]$. **D.** $[2;+\infty)$.

**Lời giải**

Ta có $2^{x}+2^{x+1}\leq 3^{x}+3^{x-1}\Leftrightarrow 3.2^{x}\leq 4.3^{x-1}\Leftrightarrow 2^{x-2}\leq 3^{x-2}$

$\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2}\leq 1\Leftrightarrow x-2\geq 0\Leftrightarrow x\geq 2$.

**Câu 9.** **(Chuyên Hưng Yên 2019)** Cho bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{x}}+3\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}+1}>12$ có tập nghiệm $S=(a;b)$.

Giá trị của biểu thức $P=3a+10b$ là

**A.** 5. **B.** −3. **C.** −4. **D.** 2.

**Lời giải**

Nguyễn Bảo Vương

Đặt $t=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}(t>0)$. Khi đó bất phương trình đã cho trở thành

$t^2+t>12\Leftrightarrow(t-3)(t+4)>0\Leftrightarrow t>3$ (vì $t>0$).

Từ đó suy ra: $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x}}>3\Leftrightarrow\frac{1}{x}<-1\Leftrightarrow -1<x<0$. Tập nghiệm của bất phương trình là $(-1;0)$.

Vậy $a=-1$ và $b=0$. Suy ra $P=3a+10b=-3$.

**Câu 10.** **(Chuyên Hạ Long 2019)** Bất phương trình sau có bao nhiêu nghiệm nguyên dương $9^{x}-4.3^{x}+3<0$.

**A.** 3. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 2.

**Lời giải**

Đặt $t=3^{x}>0$.

Bất phương trình đã cho trở thành $t^2-4.t+3<0\Leftrightarrow 1<t<3\Leftrightarrow 1<3^{x}<3\Leftrightarrow 0<x<1$.

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=(0,1)$ nên nó không có nghiệm nguyên dương.

**Câu 11.** **(THPT Đông Sơn Thanh Hóa 2019)** Bất phương trình $6.4^{x}-13.6^{x}+6.9^{x}>0$ có tập nghiệm là?

**A.** $S=(-\infty;-1)\cup[1;+\infty)$. **B.** $S=(-\infty;-2)\cup(1;+\infty)$.

**C.** $S=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. **D.** $S=(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$.

**Lời giải**

Ta có $6.4^x-13.6^x+6.9^x>0\Leftrightarrow 6.\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-13.\left(\frac{2}{3}\right)^x+6>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\frac{2}{3}\right)^x>\frac{3}{2}\\\left(\frac{2}{3}\right)^x<\frac{2}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1\\x>1\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

**Câu 12.** **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $\left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2+4x-14}\geq 7+4\sqrt{3}$ là:

**A.** $[-6;2]$. **B.** $(-\infty-6]\cup[2;+\infty)$. **C.** $(-6;2)$. **D.** $(-\infty;-6)\cup(2;+\infty)$.

**Lời giải**

Ta có $7+4\sqrt{3}=\left(2+\sqrt{3}\right)^2$, $\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)=1$ và $2+\sqrt{3}=\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}\Rightarrow 7+4\sqrt{3}=\left(2-\sqrt{3}\right)^{-2}$.

$\left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2+4x-14}\geq 7+4\sqrt{3}\Leftrightarrow\left(2-\sqrt{3}\right)^{x^2+4x-14}\geq\left(2-\sqrt{3}\right)^{-2}$

$\Leftrightarrow x^2+4x-14\leq -2\Leftrightarrow x^2+4x-12\leq 0\Leftrightarrow -6\leq x\leq 2$.

Vậy bất phương trình đã cho có tập nghiệm $[-6;2]$.

**Câu 13.** **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $6^x+4\leq 2^{x+1}+2.3^x$

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0

**Lời giải**

**Chọn C**

$6^x+4\leq 2^{x+1}+2.3^x\Leftrightarrow 6^x+4-2.2^x-2.3^x\leq 0$

$\Leftrightarrow 2^x\left(3^x-2\right)+2\left(2-3^x\right)\leq 0$

$\Leftrightarrow\left(3^x-2\right)\left(2^x-2\right)\leq 0$

$\Rightarrow x\in[\log_3 2;1]$

**Câu 14.** **(Chuyên Thái Bình 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-9}+\left(x^2-9\right).5^{x+1}<1$ là khoảng $(a;b)$. Tính $b-a$

**A.** 6. **B.** 3. **C.** 8. **D.** 4.

**Lời giải**

$3^{x^2-9}+\left(x^2-9\right).5^{x+1}<1$ $(1)$.

Có $5^{x+1}>0\ \forall x$.

Xét $x^2-9=0$, VT $(1)=3^0+0=1$ (loại).

Xét $x^2-9>0\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3^{x^2-9}>3^0=1\\\left(x^2-9\right).5^{x+1}>0\end{array}\right\}\Rightarrow$ VT $(1)>1$ (loại).

Xét $x^2-9<0\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3^{x^2-9}<3^0=1\\\left(x^2-9\right).5^{x+1}<0\end{array}\right\}\Rightarrow$ VT $(1)<1$ luôn đúng.

Có $x^2-9<0\Leftrightarrow x\in(-3;3)$.

$\Rightarrow$ Tập nghiệm của bất phương trình là: $(-3;3) \Rightarrow b-a=6$.

**Câu 15.** **( Hsg Bắc Ninh 2019)** Bất phương trình $\dfrac{\sqrt{2+3^{2x}}}{\sqrt{2+3^{2x}}-\sqrt{2-3^{2x}}}+\dfrac{3^{4x}+\sqrt{4-3^{4x}}-7}{3^{2x}} \geq \dfrac{3^{2x}-2}{\sqrt{4-3^{4x}}-2+3^{2x}}$ có bao nhiêu nghiệm?

**A.** Vô số. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3

**Lời giải**

Đặt $t=3^{2x}>0$, bất phương trình đã cho trở thành

$$\frac{\sqrt{2+t}}{\sqrt{2+t}-\sqrt{2-t}}+\frac{t^2+\sqrt{4-t^2}-7}{t} \geq \frac{t-2}{\sqrt{4-t^2}-2+t} \quad (1)$$

Điều kiện: $0<t<2$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2+t}\left(\sqrt{2+t}+\sqrt{2-t}\right)}{2t}+\frac{t^2+\sqrt{4-t^2}-7}{t} \geq \frac{t-2}{\sqrt{4-t^2}-2+t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{t+3\sqrt{4-t^2}+2t^2-12}{2t} \geq \frac{t-2}{\sqrt{4-t^2}-2+t} \Leftrightarrow \frac{t+3\sqrt{4-t^2}+2t^2-12}{2t} \geq \frac{(t-2)\left(\sqrt{4-t^2}+2-t\right)}{-2t^2+4t}$$

$$\Leftrightarrow t+3\sqrt{4-t^2}+2t^2-12 \geq -\sqrt{4-t^2}-2+t \Leftrightarrow 4\sqrt{4-t^2}+2t^2-10 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{4-t^2}-1\right)^2 \leq 0 \Leftrightarrow t=\sqrt{3}. \text{ Với } t=\sqrt{3} \Rightarrow 3^{2x}=\sqrt{3} \Leftrightarrow x=\frac{1}{4}.$$

Vậy bất phương trình có 1 nghiệm duy nhất.

**Câu 16.** **(KTNL GV Thpt Lý Thái Tổ 2019)** Số nghiệm nguyên thuộc đoạn $[-20;\ 20]$ của bất phương trình: $2^{2x+1}-9.2^x+4\sqrt{x^2+2x-3} \geq 0$ là

**A.** 38. **B.** 36. **C.** 37. **D.** 19.

**Lời giải**

**Chọn B.**

Điều kiện: $x^2+2x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3$ hoặc $x \geq 1$ $(*)$.

Vì $x$ là số nguyên thuộc đoạn $[-20;\ 20]$ nên ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1. $3 \leq x \leq 20$, khi đó dễ thấy $2^{2x+1}-9.2^x=2^x\left(2^{x+1}-9\right)>0$ nên

$2^{2x+1}-9.2^x+4\sqrt{x^2+2x-3} \geq 0$, do đó trên $[3;\ 20]$ bất phương trình có 18 nghiệm nguyên.

Trường hợp 2. $x=2$ thay trực tiếp vào bất phương trình ta có: $4\sqrt{5}-4 \geq 0$ (đúng).

Do đó $x=2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 3. $x=1$ thay trực tiếp vào bất phương trình ta có: $-10 \geq 0$ (sai).

Do đó $x=1$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 4. $-20 \leq x \leq -4$. Khi đó, xét hàm số: $f(x)=x^2+2x-3$, dễ thấy

$\min\limits_{[-20;-4]} f(x)=f(-4)=5$ nên $4\sqrt{x^2+2x-3} \geq 4\sqrt{5},\ \forall x \in [-20;-4]$ $(a)$.

Mặt khác, đặt $t=2^x$, khi đó $2^{2x+1}-9.2^x=2t^2-9t$, $-20 \leq x \leq -4 \Rightarrow 2^{-20} \leq t \leq 2^{-4}$.

Khi đó xét hàm số $g(t)=2t^2-9t$ với $2^{-20} \leq t \leq 2^{-4}$, dễ thấy

$$\min_{\left[2^{-20};\ 2^{-4}\right]} g(t)=g\left(2^{-4}\right)=-\frac{71}{128} \quad (b)$$

Từ $(a),(b)$ suy ra $\min\limits_{[-20;-4]}\left\{h(x)=2^{2x+1}-9.2^x+4\sqrt{x^2+2x-3}\right\}=h(-4)=4\sqrt{5}-\dfrac{71}{128}>0$. Do đó bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $-20\le x\le -4$, nên trên đoạn $[-20;-4]$ bất phương trình có 17 nghiệm nguyên.

Trường hợp $x=-3$ thay trực tiếp vào bất phương trình ta thấy không thỏa mãn.

Vậy số nghiệm nguyên của bất phương trình là: 36.

**Câu 17.** **(Chuyên Thái Nguyên 2019)** Tập hợp tất cả các số thực $x$ không thỏa mãn bất phương trình $9^{x^2-4}+\left(x^2-4\right).2019^{x-2}\ge 1$ là khoảng $(a;b)$. Tính $b-a$.

**A.** $5$. **B.** $4$. **C.** $-5$. **D.** $-1$.

**Lời giải**

Xét hai trường hợp: $x^2-4\ge 0$ và $x^2-4<0$

TH1: $x^2-4\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 2\\x\le -2\end{array}\right.$ khi đó ta có:

$$\begin{cases}9^{x^2-4}\ge 9^0=1\\x-2\ge 0\Leftrightarrow 2019^{x-2}\ge 2019^0=1\end{cases}\Rightarrow 9^{x^2-4}+\left(x^2-4\right)2019^{x-2}\ge 1$$

Dấu "$=$" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-4=0\\x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow x=2$

TH2: $x^2-4<0\Leftrightarrow -2<x<2$, khi đó ta có:

$$\begin{cases}9^{x^2-4}<9^0=1\\x-2<0\Leftrightarrow 2019^{x-2}<2019^0=1\end{cases}\Rightarrow 9^{x^2-4}+\left(x^2-4\right)2019^{x-2}<1$$

$\Rightarrow$ bất phương trình vô nghiệm

Nguyễn Bảo Vương

Vậy tập hợp tất cả các số thực **X** không thỏa mãn bất phương trình là

$(-2;2)\Rightarrow a=-2;b=2\Rightarrow b-a=4$

**Câu 18.** **(THPT Chuyên Thái Bình - 2019)** Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-9}+\left(x^2-9\right).5^{x+1}<1$ là khoảng $(a;b)$. Tính $b-a$.

**A.** $6$. **B.** $3$. **C.** $8$. **D.** $4$.

**Lời giải**

**Chọn A**

□Với $x^2-9\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le -3\\x\ge 3\end{array}\right.$, ta có $\begin{cases}3^{x^2-9}\ge 3^0=1\\\left(x^2-9\right).5^{x+1}\ge 0\end{cases}$ nên $3^{x^2-9}+\left(x^2-9\right).5^{x+1}\ge 1$

$\Rightarrow$ không thỏa mãn bất phương trình đã cho, do đó bất phương trình vô nghiệm.

□Với $x^2-9<0\Leftrightarrow -3<x<3$, ta có $\begin{cases}3^{x^2-9}<3^0=1\\\left(x^2-9\right).5^{x+1}<0\end{cases}$ nên $3^{x^2-9}+\left(x^2-9\right).5^{x+1}<1$

$\Rightarrow$ Bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=(-3;3)$.

Khi đó, $a=-3;b=3$ nên $b-a=6$.

**Câu 19.** **(Chuyên Bắc Ninh - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của $x$ trong đoạn $[0;2020]$ thỏa mãn bất phương trình sau

$16^x+25^x+36^x\le 20^x+24^x+30^x$.

**A.** 3. **B.** 2000. **C.** 1. **D.** 1000.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có

$16^x+25^x+36^x\le 20^x+24^x+30^x \Leftrightarrow 4^{2x}+5^{2x}+6^{2x}\le 4^x.5^x+4^x.6^x+5^x.6^x$

$\Leftrightarrow 2\left[\left(4^x\right)^2+\left(5^x\right)^2+\left(6^x\right)^2\right]-\left(2.4^x.5^x+2.4^x.6^x+2.5^x.6^x\right)\le 0$

$\Leftrightarrow \left(4^x-5^x\right)^2+\left(4^x-6^x\right)^2+\left(5^x-6^x\right)^2\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases}4^x-5^x=0\\4^x-6^x=0\\5^x-6^x=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(\frac{4}{5}\right)^x=1\\\left(\frac{4}{6}\right)^x=1\\\left(\frac{5}{6}\right)^x=1\end{cases} \Leftrightarrow x=0\in[0;2020]$.

Vậy có 1 giá trị nguyên của $x$ trong đoạn $[0;2020]$ thỏa mãn bất phương trình.

**Câu 20.** **(Hải Hậu - Nam Định - 2020)** Tập nghiệm của bất phương trình $(3^{2x}-9)(3^x-\frac{1}{27})\sqrt{3^{x+1}-1}\le 0$ chứa bao nhiêu số nguyên ?

**A.** 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

**Lời giải**

**Chọn B**

Điều kiện $3^{x+1}-1\ge 0\Leftrightarrow 3^{x+1}\ge 1\Leftrightarrow x\ge -1$.

Ta có $x=-1$ là một nghiệm của bất phương trình.

Với $x>-1$, bất phương trình tương đương với $(3^{2x}-9)(3^x-\frac{1}{27})\le 0$.

Đặt $t=3^x>0$, ta có $(t^2-9)(t-\frac{1}{27})\le 0\Leftrightarrow (t-3)(t+3)(t-\frac{1}{27})\le 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t\le -3\\\frac{1}{27}\le t\le 3\end{array}\right.$. Kết hợp điều kiện $t=3^x>0$ ta được nghiệm $\frac{1}{27}\le t\le 3\Leftrightarrow \frac{1}{27}\le 3^x\le 3\Leftrightarrow -3\le x\le 1$. Kết hợp điều kiện $x>-1$ ta được $-1<x\le 1$ suy ra trường hợp này bất phương trình có 2 nghiệm nguyên.

Vậy bất phương trình đã cho có tất cả 3 nghiệm nguyên.

**Câu 21.** **(THPT Lương Văn Tụy - Ninh Bình - 2018)** Tập nghiệm của bất phương trình $9^x-2(x+5).3^x+9(2x+1)\ge 0$ là

**A.** $[0;1]\cup[2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$. **C.** $[1;2]$. **D.** $(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$.

**Lời giải**

Đặt $3^x=t$, $t>0$.

Xét phương trình: $t^2-2(x+5)t+9(2x+1)=0$ $(1)$.

Ta có $\Delta'=(x+5)^2-9(2x+1)=x^2-8x+16=(x-4)^2$ nên phương trình $(1)$ luôn có nghiệm.

Nếu $x=4\Rightarrow\Delta'=0$ thì phương trình $(1)$ có nghiệm kép $t=x+5$.

Do đó bất phương trình đã cho trở thành $3^x\ge x+5$ (luôn đúng khi $x=4$).

Nếu $x \neq 4 \Rightarrow \Delta' > 0$ thì phương trình $(1)$ có hai nghiệm phân biệt $\left[\begin{array}{l} t = 2x+1 \\ t = 9 \end{array}\right.$.

Xét các phương trình $3^x = 9 \Leftrightarrow x = 2$ $(1)$ và $3^x = 2x+1 \Leftrightarrow 3^x - 2x - 1 = 0$ $(2)$.

Đặt $f(x) = 3^x - 2x - 1$; ta có $f'(x) = 3^x \ln 3 - 2$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lại có $f(0) = f(1) = 0$ và $f'(0) < 0$, $f'(1) > 0$ nên $f'(x)$ đổi dấu một lần duy nhất trong khoảng $[0;1]$.

Vậy phương trình $(2)$ có đúng hai nghiệm $x = 0$, $x = 1$.

Lập bảng xét dấu cho $(1)$ và $(2)$ ta được tập nghiệm của bất phương trình là: $S = [0;1] \cup [2;+\infty)$.

**Câu 22.** **(Toán Học Tuổi Trẻ Số 6)** Tập nghiệm của bất phương trình $2.7^{x+2} + 7.2^{x+2} \leq 351.\sqrt{14^x}$ có dạng là đoạn $S = [a;b]$. Giá trị $b - 2a$ thuộc khoảng nào dưới đây?

**A.** $\left(3;\sqrt{10}\right)$. **B.** $(-4;2)$. **C.** $\left(\sqrt{7};4\sqrt{10}\right)$. **D.** $\left(\frac{2}{9};\frac{49}{5}\right)$.

**Lời giải**

$2.7^{x+2} + 7.2^{x+2} \leq 351.\sqrt{14^x} \Leftrightarrow 49.7^x + 28.2^x \leq 351.\sqrt{14^x} \Leftrightarrow 49.\sqrt{\frac{7^{2x}}{14^x}} + 28.\sqrt{\frac{2^{2x}}{14^x}} \leq 351$

$\Leftrightarrow 49.\sqrt{\frac{7^x}{2^x}} + 28.\sqrt{\frac{2^x}{7^x}} \leq 351$. Đặt $t = \sqrt{\frac{7^x}{2^x}}, t > 0$ thì bpt trở thành $49t + \frac{28}{t} \leq 351$

$\Leftrightarrow \frac{4}{49} \leq t \leq \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{4}{49} \leq \sqrt{\frac{7^x}{2^x}} \leq \frac{7}{2} \Leftrightarrow -4 \leq x \leq 2$, khi đó $S = [-4;2]$.

Giá trị $b - 2a = 10 \in \left(\sqrt{7};4\sqrt{10}\right)$.

Nguyễn Bảo Vương

**Câu 23.** **(Chuyên ĐHSPHN - 2018)** Cho $f(x) = \frac{1}{2}.5^{2x+1}$; $g(x) = 5^x + 4x.\ln 5$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) > g'(x)$ là

**A.** $x < 0$. **B.** $x > 1$. **C.** $0 < x < 1$. **D.** $x > 0$.

**Lời giải**

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{2}.5^{2x+1}.(2x+1)'.\ln 5 = 5^{2x+1}.\ln 5$.

Và: $g'(x) = 5^x.\ln 5 + 4\ln 5 = \left(5^x + 4\right)\ln 5$.

Do đó: $f'(x) > g'(x) \Leftrightarrow 5^{2x+1}.\ln 5 > \left(5^x + 4\right)\ln 5 \Leftrightarrow 5^{2x+1} > 5^x + 4 \Leftrightarrow 5.5^{2x} - 5^x - 4 > 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^x < -\frac{4}{5} (VN) \\ 5^x > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow 5^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x > 0$.

**Câu 24.** **(THPT Kinh Môn - Hải Dương - 2018)** Bất phương trình $2.5^{x+2} + 5.2^{x+2} \leq 133.\sqrt{10^x}$ có tập nghiệm là $S = [a;b]$ thì biểu thức $A = 1000b - 4a + 1$ có giá trị bằng

**A.** 3992. **B.** 4008. **C.** 1004. **D.** 2017.

**Lời giải**

Ta có:

$$2.5^{x+2}+5.2^{x+2}\le 133.\sqrt{10^x} \Leftrightarrow 50.5^x+20.2^x\le 133.\sqrt{10^x} \Leftrightarrow 50.\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^x+20.\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^x-133\le 0.$$

Đặt $t=\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^x$, $t>0$, ta được bất phương trình: $50t^2-133t+20\le 0 \Leftrightarrow \frac{4}{25}\le t\le \frac{5}{2}$.

- Với $\frac{4}{25}\le t\le \frac{5}{2}$, ta có: $\frac{4}{25}\le\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^x\le\frac{5}{2}\Leftrightarrow -2\le\frac{x}{2}\le 1\Leftrightarrow -4\le x\le 2$.

Tập nghiệm của bất phương trình là $S=[-4;2]\Rightarrow a=-4$, $b=2$.

$\Rightarrow A=1000b-4a+1=1000.2-4(-4)+1=2017$.

**Câu 25.** Số nghiệm nguyên thuộc khoảng $(0;12)$ của bất phương trình $3^{x+\frac{1}{x}-1}-3^{2+\frac{11}{x}}\le\log_2\sqrt{\frac{2x+11}{x^2+x+1}}$ là:

**A.** 7. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 11.

**Lời giải**

**Chọn C**

Điều kiện $x>-\frac{11}{2}$ và $x\ne 0$.

Khi đó $3^{x+\frac{1}{x}-1}-3^{2+\frac{11}{x}}\le\log_2\sqrt{\frac{2x+11}{x^2-x+1}}\Leftrightarrow 3^{x+\frac{1}{x}-1}-3^{2+\frac{11}{x}}\le\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{2x+11}{x^2-x+1}\right)$

$$\Leftrightarrow 3^{x+\frac{1}{x}-1}-3^{2+\frac{11}{x}}\le\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{2+\frac{11}{x}}{x-1+\frac{1}{x}}\right)\Leftrightarrow 3^{x+\frac{1}{x}-1}+\frac{1}{2}\log_2\left(x-1+\frac{1}{x}\right)\le 3^{2+\frac{11}{x}}+\frac{1}{2}\log_2\left(2+\frac{11}{x}\right).$$

Xét hàm số $f(t)=3^t+\frac{1}{2}\log_2 t$ với $t>0$. Khi đó $f'(t)=3^t\ln 3+\frac{1}{2t\ln 2}>0,\forall t>0$ nên hàm số đã cho đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Do đó

$$f\left(x-1+\frac{1}{x}\right)\le f\left(2+\frac{11}{x}\right)\Leftrightarrow x-1+\frac{1}{x}\le 2+\frac{11}{x}\Leftrightarrow\frac{x^2-3x-10}{x}\le 0\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{11}{2};-2\right]\cup(0;5].$$

Vậy trên khoảng $(0;12)$ có 5 nghiệm nguyên thỏa yêu cầu bài toán.

Chuyên đề 20 BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ - LOGARIT

## TÀI LIỆU DÀNH CHO ĐỐI TƯỢNG HỌC SINH GIỎI – MỨC 9-10 ĐIỂM

## DẠNG 1. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT CHỨA THAM SỐ

**Câu 1.** **(Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2019)** Cho $a$ là số thực dương, $a\neq 1$. Biết bất phương trình $2\log_a x\le x-1$ nghiệm đúng với mọi $x>0$. Số $a$ thuộc tập hợp nào sau đây?

**A.** $(7;8)$ **B.** $(3;5]$ **C.** $(2;3)$ **D.** $(8;+\infty)$

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: với $x=1$ thì $2\log_a 1=0=1-1$

Ta sẽ tìm $a$ để đường thẳng $y=x-1$ nhận làm tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=2\log_a x$ tại điểm $x=1$

Có $y'=\dfrac{2}{x\ln a}\Rightarrow y'(1)=\dfrac{2}{\ln a}$

Phương trình tiếp tuyến $y=\dfrac{2}{\ln a}(x-1)$

Vậy để đường thẳng $y=x-1$ nhận làm tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=2\log_a x$ thì $\dfrac{2}{\ln a}=1\Leftrightarrow \ln a=2\Leftrightarrow a=e^2$

Thử lại $a=e^2$ ta sẽ chứng minh $2\log_{e^2} x\le x-1\Leftrightarrow \ln x\le x-1$
$\Leftrightarrow f(x)=\ln x-x+1\le 0\ \forall x>0$

Có $f'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$

Bảng biến thiên

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | $0$ | ↘ | |

Từ bảng biến thiên suy ra $f(x)\le 0\Leftrightarrow \ln x\le x-1\ \ \forall x>0$

**Câu 2.** **(THPT Cẩm Giàng 2 2019)** Cho $a$ là số nguyên dương lớn nhất thỏa mãn $3\log_3\left(1+\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}\right)>2\log_2\sqrt{a}$. Giá trị của $\log_2(2017a)$ xấp xỉ bằng:

**A.** $19$. **B.** $26$. **C.** $25$. **D.** $23$.

**Lời giải**

Từ giả thiết $3\log_3\left(1+\sqrt{a}+\sqrt[3]{a}\right)>2\log_2\sqrt{a}$.

Đặt $\log_2\sqrt{a}=3x\Leftrightarrow a=64^x$.

Ta được bất phương trình: $3\log_3\left(1+8^x+4^x\right)>6x\Leftrightarrow 1+8^x+4^x>9^x$.

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^x+\left(\frac{8}{9}\right)^x+\left(\frac{4}{9}\right)^x>1.$

Đặt $f(x)=\left(\frac{1}{9}\right)^x+\left(\frac{8}{9}\right)^x+\left(\frac{4}{9}\right)^x.$

$\Rightarrow f'(x)=\left(\frac{1}{9}\right)^x\ln\left(\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{8}{9}\right)^x\ln\left(\frac{8}{9}\right)+\left(\frac{4}{9}\right)^x\ln\left(\frac{4}{9}\right)<0,\ \forall x\in\mathbb{R}.$

Vậy $f(x)$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Và ta lại có $f(2)=1$.

Từ $\left(\frac{1}{9}\right)^x+\left(\frac{8}{9}\right)^x+\left(\frac{4}{9}\right)^x>1\Leftrightarrow f(x)>f(2)\Leftrightarrow x<2.$

Suy ra $a<64^2=4096$ mà $a$ là số nguyên dương lớn nhất thỏa mãn suy ra $a=4095$.

Vậy $\log_2(2017a)=\log_2(2017\cdot 4095)\approx 22.97764311\approx 23.$

**Câu 3.** **(Chuyên Hưng Yên 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để bất phương trình $\log_{0,02}\left(\log_2\left(3^x+1\right)\right)>\log_{0,02}m$ có nghiệm với mọi $x\in(-\infty;0)$

**A.** $m\ge 1.$ **B.** $0<m<1.$ **C.** $m>1.$ **D.** $m<2.$

**Lời giải**

Đk: $x\in\mathbb{R};m>0.$

Ta có: $\log_{0,02}\left(\log_2\left(3^x+1\right)\right)>\log_{0,02}m,\forall x\in(-\infty;0).$

$\Leftrightarrow \log_2\left(3^x+1\right)<m,\forall x\in(-\infty;0).$

$\Leftrightarrow 3^x+1<2^m,\forall x\in(-\infty;0).$

Xét hàm $f(x)=3^x+1$ trên $(-\infty;0)$. Ta có $f'(x)=3^x.\ln 3>0,\forall x\in(-\infty;0).$

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ |
|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | |
| $y$ | | $\nearrow$ | $2$ |
| | $1$ | | |

Để phương trình có nghiệm với mọi $x\in(-\infty;0)$ ta phải có $2^m\ge 2\Leftrightarrow m\ge 1.$

**Câu 4.** **(KTNL GV Thuận Thành 2 Bắc Ninh 2019)** Gọi $S$ là tổng tất cả các giá trị nguyên của $m$ để bất phương trình $\ln\left(7x^2+7\right)\ge\ln\left(mx^2+4x+m\right)$ nghiệm đúng với mọi $x$ thuộc $\mathbb{R}$. Tính $S$.

**A.** $S=14.$ **B.** $S=0.$ **C.** $S=12.$ **D.** $S=35.$

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có:

$$\ln\left(7x^2+7\right)\ge\ln\left(mx^2+4x+m\right)\Leftrightarrow\begin{cases}7x^2+7\ge mx^2+4x+m\\ mx^2+4x+m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(7-m)x^2-4x+7-m\ge 0\ (1)\\ mx^2+4x+m>0\ (2)\end{cases}$$

Bất phương trình đã cho đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ khi và chỉ khi các bất phương trình $(1),(2)$ đúng với mọi
$x\in\mathbb{R}.$

Xét $(7-m)x^2-4x+7-m\ge 0\ (1)$.

+ Khi $m=7$ ta có $(1)$ trở thành $-4x\ge 0\Leftrightarrow x\le 0$. Do đó $m=7$ không thỏa mãn.

+ Khi $m\ne 7$ ta có $(1)$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}7-m>0\\ \Delta'\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<7\\ 4-(7-m)^2\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<7\\ m\le 5\vee m\ge 9\end{cases}\Leftrightarrow m\le 5\ (*).$$

Xét $mx^2-4x+m>0\ (2)$.

+ Khi $m=0$ ta có $(2)$ trở thành $-4x>0\Leftrightarrow x<0$. Do đó $m=0$ không thỏa mãn.

+ Khi $m\ne 0$ ta có $(2)$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ \Delta'<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ 4-m^2<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>0\\ m<-2\vee m>2\end{cases}\Leftrightarrow m>2\ (**).$$

Từ $(*)$ và $(**)$ ta có $2<m\le 5$. Do $m\in Z$ nên $m\in\{3;4;5\}$. Từ đó $S=3+4+5=12$.

**Câu 5.** **(Chuyên Bắc Giang 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của $m$ để bất phương trình $\log_2(7x^2+7)\ge\log_2(mx^2+4x+m)$ nghiệm đúng với mọi $x$.

**A.** 5 **B.** 4 **C.** 0 **D.** 3

**Lời giải**

**Chọn D**

**Cách 1:**

Bpt: $\log_2(7x^2+7)\ge\log_2(mx^2+4x+m)\Leftrightarrow\begin{cases}7x^2+7\ge mx^2+4x+m\\ mx^2+4x+m>0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=(m-7)x^2+4x+m-7\le 0\\ g(x)=mx^2+4x+m>0\end{cases}$$

Bpt đã cho nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\\ g(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$

• Trường hợp 1: $m=7$

$$\begin{cases}f(x)\le 0\\ g(x)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4x\le 0\\ 7x^2+4x+7>0\end{cases}$$

Vậy $m=7$ không thỏa yêu cầu bài toán.

• Trường hợp 2: $m=0$

$$\begin{cases}f(x)\le 0\\ g(x)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-7x^2+4x-7\le 0\\ 4x>0\end{cases}$$

Vậy $m=0$ không thỏa yêu cầu bài toán.

• Trường hợp 3: $m\ne 0;\ m\ne 7$

Khi đó: $\begin{cases}f(x)\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\\ g(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a_f<0\\ \Delta'_f\le 0\\ a_g>0\\ \Delta'_g<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m-7<0\\ 4-(m-7)^2\le 0\\ m>0\\ 4-m^2<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<7\\ m\le 5\vee m\ge 9\\ m>0\\ m<-2\vee m>2\end{cases}\Leftrightarrow 2<m\le 5$

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{3;4;5\}$.

**Cách 2:**

$$\log_2\left(7x^2+7\right)\ge\log_2\left(mx^2+4x+m\right)\Leftrightarrow\begin{cases}7x^2+7\ge mx^2+4x+m\\ mx^2+4x+m>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(m-7)x^2+4x+m-7\le 0\\ mx^2+4x+m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7x^2-4x+7\ge m\left(x^2+1\right)\\ m\left(x^2+1\right)>-4x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{7x^2-4x+7}{x^2+1}\ge m\\ m>\dfrac{-4x}{x^2+1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7+\dfrac{-4x}{x^2+1}\ge m\\ m>\dfrac{-4x}{x^2+1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m-7\le\dfrac{-4x}{x^2+1}\\ m>\dfrac{-4x}{x^2+1}\end{cases}\quad(*)$$

Xét hàm số $g(x)=\dfrac{-4x}{x^2+1}$ trên $\mathbb{R}$.

$$g'(x)=\frac{-4(x^2+1)+4x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{4x^2-4}{(x^2+1)^2}$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=1\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g$ | $0$ | ↗ | $2$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $0$ |

Vậy đk (*) $\Leftrightarrow\begin{cases}m-7\le-2\\ m>2\end{cases}\Leftrightarrow 2<m\le 5$

Do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{3;4;5\}$.

**Câu 6.** **(Chuyên Quang Trung Bình Phước 2019)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>\log_{\frac{1}{2}}\left(x^3+x-m\right)$ có nghiệm.

**A.** $m\le 2$. **B.** $m\in\mathbb{R}$.

**C.** $m<2$. **D.** Không tồn tại $m$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện $\begin{cases}x>1\\ x^3+x-m>0\end{cases}$.

Phương trình tương đương

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>\log_{\frac{1}{2}}\left(x^3+x-m\right)\Leftrightarrow x-1<x^3+x-m\Leftrightarrow x^3+1>m$$

Khi đó ta có

$$f(x)=x^3+1>m,(x>1)\Leftrightarrow m<\min_{(1;+\infty)}f(x)$$

Ta có

$$f'(x)=3x^2=0\Rightarrow x=0\notin(1;+\infty)$$

Bảng biến thiên

| $x$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $2$ | $\nearrow +\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên và đề bài hỏi "có nghiệm" nên ta chọn $m \in \mathbb{R}$.

**Câu 7.** **(THPT Chuyên Thái Bình - 2019)** Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số $m$ để bất phương trình $\log_2\left(x^2+mx+m+2\right) \geq \log_2\left(x^2+2\right)$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

**A.** $2$. **B.** $4$. **C.** $3$. **D.** $1$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta thấy $x^2+2>0\ \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó bất phương trình

$\log_2\left(x^2+mx+m+2\right) \geq \log_2\left(x^2+2\right) \Leftrightarrow x^2+mx+m+2 \geq x^2+2 \Leftrightarrow mx+m \geq 0$.

Bất phương trình $\log_2\left(x^2+mx+m+2\right) \geq \log_2\left(x^2+2\right)$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$mx+m \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m=0$

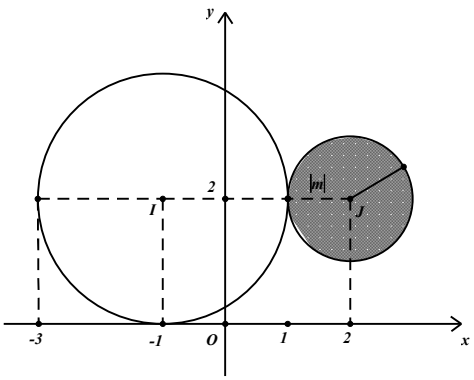
**Câu 8.** **(Chuyên Vĩnh Phúc - 2019)** Tìm tập $S$ tất cả các giá trị thực của số $m$ để tồn tại duy nhất cặp số $(x;y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}\left(4x+4y-6+m^2\right) \geq 1$ và $x^2+y^2+2x-4y+1=0$.

**A.** $S=\{-5;-1;1;5\}$. **B.** $S=\{-1;1\}$.

**C.** $S=\{-5;5\}$. **D.** $S=\{-7-5;-1;1;5;7\}$.

**Lời giải**

**Chọn A**




Nhận thấy $x^2+y^2+2>1$ với mọi $x,y \in \mathbb{R}$ nên:

$\log_{x^2+y^2+2}\left(4x+4y-6+m^2\right) \geq 1 \Leftrightarrow 4x+4y-6+m^2 \geq x^2+y^2+2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-4x-4y+8-m^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2 \leq m^2$ (*).

Khi $m=0$ thì $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$. Cặp $(2;2)$ không là nghiệm của phương trình

$x^2+y^2+2x-4y+1=0$.

Khi $m \neq 0$, tập hợp các điểm $(x;y)$ thỏa mãn (*) là hình tròn tâm $J(2;2)$, bán kính là $|m|$.

Trường hợp này, yêu cầu bài toán trở thành tìm $m$ để đường tròn tâm $I(-1;2)$, bán kính $2$ và hình tròn tâm $J(2;2)$, bán kính $|m|$ có đúng một điểm chung (hình vẽ)

Điều này xảy ra khi $\left[\begin{array}{l}|m|=1\\|m|=5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=\pm 1\\m=\pm 5\end{array}\right.$ (thỏa mãn $m \neq 0$).

Vậy $S=\{-5;-1;1;5\}$.

**Câu 9.** **(Bình Giang-Hải Dương 2019)** Xét bất phương trình $\log_2^2(2x)-2(m+1)\log_2 x-2<0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để bất phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

**A.** $m\in\left(-\frac{3}{4};0\right)$. **B.** $m\in(0;+\infty)$. **C.** $m\in(-\infty;0)$. **D.** $m=\in\left(-\frac{3}{4};+\infty\right)$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Bất phương trình $\log_2^2(2x)-2(m+1)\log_2 x-2<0 \Leftrightarrow \log_2^2 x-2m\log_2 x-1<0$ $(1)$.

Đặt $t=\log_2 x$, vì $x\in\left(\sqrt{2};+\infty\right)\Rightarrow t\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Bất phương trình trở thành $t^2-2mt-1<0 \Leftrightarrow 2mt>t^2-1 \Leftrightarrow 2m>\frac{t^2-1}{t}$ $(2)$.

Đặt $f(t)=\frac{t^2-1}{t}$ với $t\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Bất phương trình $(1)$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$ khi và chỉ khi bất phương trình $(2)$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Ta có $f'(t)=1+\frac{1}{t^2}>0\ \forall t\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Bảng biến thiên

| $x$ | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | | | $+\infty$ |
| | $-\frac{3}{2}$ | | |

Từ bảng biến thiên suy ra bất phương trình đã cho có nghiệm thuộc khoảng $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$ khi và chỉ khi $2m>-\frac{3}{2}\Leftrightarrow m>-\frac{3}{4}$.

**Câu 10.** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để bất phương trình $m^2(x^5-x^4)-m(x^4-x^3)+x-\ln x-1\geq 0$ thỏa mãn với mọi $x>0$. Tính tổng các giá trị trong tập hợp $S$.

**A.** $2$. **B.** $0$. **C.** $1$. **D.** $-2$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đặt $f(x)=m^2\left(x^5-x^4\right)-m\left(x^4-x^3\right)+x-\ln x-1$. Ta có $f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $(0;+\infty)$ và $f'(x)=m^2\left(5x^4-4x^3\right)-m\left(4x^3-3x^2\right)+1-\dfrac{1}{x}$.

Bất phương trình đã cho viết thành $f(x)\ge 0$. Giả sử $y=f(x)$ có đồ thị là (C).

$f(x)\ge 0$ với mọi $x>0$ khi và chỉ khi đồ thị (C) không nằm phía dưới trục $Ox$.

Mặt khác (C) và $Ox$ có điểm chung là $A(1;0)$. Nên điều kiện cần để đồ thị (C) không nằm phía dưới trục $Ox$ là $Ox$ tiếp xúc với (C) tại $A(1;0)$.

Suy ra, $f'(1)=0\Leftrightarrow m^2-m\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=1\end{array}\right.$.

Với $m=0$ ta có bất phương trình đã cho trở thành $f(x)=x-\ln x-1\ge 0$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ ↘ | | $0$ | ↗ | |

Dựa vào bảng biến thiên ta có $f(x)\ge 0,\forall x>0$. Suy ra $m=0$ thỏa mãn điều kiện.

Với $m=1$ ta có bất phương trình đã cho trở thành $f(x)=x^5-2x^4+x^3-\ln x+x-1\ge 0$.

$$f'(x)=5x^4-8x^3+3x^2-\frac{1}{x}+1=\frac{5x^5-8x^4+3x^3+x-1}{x}=\frac{(x-1)\left(5x^4-3x^3+1\right)}{x}$$

Ta có $5x^4-3x^3+1=\left(2x^2-\dfrac{3}{4}x\right)^2+\left(x^2-\dfrac{9}{32}\right)^2+1-\left(\dfrac{9}{32}\right)^2>0$.

Suy ra $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$. Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | ‖ ↘ | | $0$ | ↗ | |

Dựa vào bảng biến thiên ta có $f(x)\ge 0,\forall x>0$. Suy ra $m=1$ thỏa mãn điều kiện.

Vậy $S=\{0;1\}$.

**Câu 11.** **(Chuyên Thái Bình - 2020)** Cho bất phương trình $\log_7\left(x^2+2x+2\right)+1>\log_7\left(x^2+6x+5+m\right)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của $m$ để bất phương trình có tập nghiệm chứa khoảng $(1;3)$?

**A.** $36$. **B.** $34$. **C.** $35$. **D.** Vô số.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có:

$\log_7\left(x^2+2x+2\right)+1>\log_7\left(x^2+6x+5+m\right),\ \forall x\in(1;3)$

$\Leftrightarrow \log_7\left(7x^2+14x+14\right)>\log_7\left(x^2+6x+5+m\right),\ \forall x\in(1;3)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+6x+5+m>0,\forall x\in(1;3) \\ 6x^2+8x+9>m,\forall x\in(1;3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-\left(x^2+6x+5\right),\forall x\in(1;3)\ (1) \\ 6x^2+8x+9>m,\forall x\in(1;3) \quad (2) \end{cases}$

Xét $g(x)=-\left(x^2+6x+5\right), x\in(1;3)$, có $g(x)=-(x+3)^2+4<-(1+3)^2+4=-12,\forall x\in(1;3)$

Do đó $(1)\Leftrightarrow m\ge -12$.

Xét $h(x)=6x^2+8x+9, x\in(1;3)$, có $h(x)>6.1^2+8.1+9=23,\forall x\in(1;3)$.

Do đó $(2)\Leftrightarrow m\le 23$.

Do $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in[-12;23]$ nên ta được tập các giá trị của $m$ là $\{-12;-11;-10;...;23\}$.

Vậy có tổng cộng 36 giá trị của $m$ thỏa yêu cầu bài toán.

**Câu 12.** **(Chuyên Bắc Ninh - 2020)** Gọi $m_0$ là giá trị nhỏ nhất để bất phương trình $1+\log_2(2-x)-2\log_2\left(m-\frac{x}{2}+4\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2x+2}\right)\right)\le -\log_2(x+1)$ có nghiệm. Chọn đáp án đúng trong các khẳng định sau

**A.** $m_0\in(9;10)$. **B.** $m_0\in(8;9)$. **C.** $m_0\in(-10;-9)$. **D.** $m_0\in(-9;-8)$.

**Lời giải**

**Chọn C**

+ Điều kiện xác định: $\begin{cases} -1<x<2 \\ m-\frac{x}{2}+4\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2x+2}\right)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1<x<2 \\ m>\frac{x}{2}-4\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2x+2}\right) \end{cases} (*)$.

+ Với điều kiện trên bất phương trình:

$1+\log_2(2-x)-2\log_2\left(m-\frac{x}{2}+4\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2x+2}\right)\right)\le -\log_2(x+1)$

$\Leftrightarrow \log_2\left[2(2-x)(x+1)\right]\le \log_2\left[m-\frac{x}{2}+4\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2x+2}\right)\right]^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(2-x)(2x+2)}\le m-\frac{x}{2}+4\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2x+2}\right)$

$\Leftrightarrow m\ge \frac{x}{2}+\sqrt{(2-x)(2x+2)}-4\left(\sqrt{2-x}+\sqrt{2x+2}\right)\ (1)$.

+ Ta thấy các nghiệm của $(1)$ trong khoảng $(-1;2)$ luôn thỏa mãn $(*)$.

+ Đặt $t=\sqrt{2-x}+\sqrt{2x+2}, (t>0)$ với $x\in(-1;2)$.

Xét $f(x)=\sqrt{2-x}+\sqrt{2x+2}$ với $x\in(-1;2)$.

$f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{2-x}}+\frac{1}{\sqrt{2x+2}}=\frac{2\sqrt{2-x}-\sqrt{2x+2}}{2\sqrt{(2-x)(2x+2)}}$.

$f'(x)=0\Leftrightarrow 2\sqrt{2-x}=\sqrt{2x+2}\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên:

| $x$ | $-1$ | | $1$ | | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ |
| $f(x)$ | $\sqrt{3}$ | ↗ | $3$ | ↘ | $\sqrt{6}$ |

Suy ra khi $x\in(-1;2)$ thì $t\in\left(\sqrt{3};3\right]$.

+ Ta có $t^2=4+x+2\sqrt{(2-x)(2x+2)}\Leftrightarrow\frac{x}{2}+\sqrt{(2-x)(2x+2)}=\frac{t^2-4}{2}$.

+ $(1)$ trở thành $m\geq\frac{t^2-4}{2}-4t\Leftrightarrow 2m\geq t^2-8t-4\ \ (2)$.

+ $(1)$ có nghiệm $x\in(-1;2)\Leftrightarrow(2)$ có nghiệm $t\in\left(\sqrt{3};3\right]$.

+ Xét hàm số $y=g(t)=t^2-8t-4$ trên $\left(\sqrt{3};3\right]$.

Bảng biến thiên:

| $t$ | $-\infty$ | | $\sqrt{3}$ | | $3$ | | $4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(t)=t^2-8t-4$ | ‖ | | $-1-8\sqrt{3}$ | ↘ | $-19$ | ↗ | | | |

+ Do đó bất phương trình $(2)$ có nghiệm $t\in\left(\sqrt{3};3\right]$ khi và chỉ khi $2m\geq-19\Leftrightarrow m\geq-\frac{19}{2}$.

Suy ra $m_0=-\frac{19}{2}\in(-10;-9)$.

**Câu 13.** **(Lương Thế Vinh - Hà Nội - 2020)** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các điểm $M(x;y)$ trong đó $x,y$ là các số nguyên thoả mãn điều kiện $\log_{x^2+y^2+1}(2x+2y+m)\geq 1$, với $m$ là tham số. Có bao nhiêu số nguyên $m$ thuộc đoạn $[-2020;2019]$ để tập $S$ có không quá $5$ phần tử?

**A.** $1$. **B.** $2020$. **C.** $2021$. **D.** $2019$.

**Lời giải**

**Chọn C**

$\log_{x^2+y^2+1}(2x+2y+m)\geq 1\Leftrightarrow 2x+2y+m\geq x^2+y^2+1$

$\Leftrightarrow(x-1)^2+(y-1)^2\leq m+1$ Để bất phương trình có 5 phần tử thì $\sqrt{m+1}<\sqrt{2}\Leftrightarrow m<1$

Vậy có 2021 số nguyên $m$ thuộc đoạn $[-2020;2019]$ để tập $S$ có không quá $5$ phần tử.

**Câu 14.** **(Chuyên Thái Bình - Lần 3 - 2020)** Cho bất phương trình $\log_7(x^2+2x+2)+1>\log_7(x^2+6x+5+m)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để bất phương trình trên có tập nghiệm chứa khoảng $(1;3)$?

**A.** $36$. **B.** $35$. **C.** $34$. **D.** Vô số.

**Lời giải**

**Chọn A**

Điều kiện xác định $x^2+6x+5+m>0$.

Khi đó

$\log_7\left(x^2+2x+2\right)+1>\log_7\left(x^2+6x+5+m\right)\Leftrightarrow\log_7\left(7x^2+14x+14\right)>\log_7\left(x^2+6x+5+m\right)$

$\Leftrightarrow 7x^2+14x+14>x^2+6x+m+5$

$\Leftrightarrow 6x^2+8x+9-m>0$.

Khi đó $ycbt\Leftrightarrow\begin{cases}6x^2+8x+9-m>0\\x^2+6x+5+m>0\end{cases},\forall x\in(1;3)\Leftrightarrow\begin{cases}6.1^2+8+9-m\geq 0\\1^2+6+5+m\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow -12\leq m\leq 23$.

Vậy có $36$ giá trị nguyên của $m$ thỏa $ycbt$.

**Câu 15.** **(Chuyên Lê Hồng Phong - 2018)** Xét bất phương trình $\log_2^2 2x-2(m+1)\log_2 x-2<0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để bất phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

**A.** $m\in(0;+\infty)$. **B.** $m\in\left(-\frac{3}{4};0\right)$. **C.** $m\in\left(-\frac{3}{4};+\infty\right)$. **D.** $m\in(-\infty;0)$.

**Lời giải**

Điều kiện: $x>0$

$\log_2^2 2x-2(m+1)\log_2 x-2<0$

$\Leftrightarrow(1+\log_2 x)^2-2(m+1)\log_2 x-2<0\quad(1)$.

Đặt $t=\log_2 x$. Vì $x>\sqrt{2}$ nên $\log_2 x>\log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}$. Do đó $t\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$

$(1)$ thành $(1+t)^2-2(m+1)t-2<0\Leftrightarrow t^2-2mt-1<0\quad(2)$

**Cách 1:** Yêu cầu bài toán tương đương tìm $m$ để bpt (2) có nghiệm thuộc $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Xét bất phương trình (2) có: $\Delta'=m^2+1>0,\ \forall m\in\mathbb{R}$.

$f(t)=t^2-2mt-1=0$ có $ac<0$ nên (2) luôn có 2 nghiệm phân biệt $t_1<0<t_2$.

Khi đó cần $\frac{1}{2}<t_2\Leftrightarrow m+\sqrt{m^2+1}>\frac{1}{2}\Leftrightarrow m>-\frac{3}{4}$.

**Cách 2:** $t^2-2mt-1<0\ \Leftrightarrow f(t)=\frac{t^2-1}{2t}<\mathrm{m}\ \left(t>\frac{1}{2}\right)$

Khảo sát hàm số $f(t)$ trong $(0;+\infty)$ ta được $m\in\left(-\frac{3}{4};+\infty\right)$.

**Câu 16.** **(Chuyên Vinh - 2018)** Gọi $a$ là số thực lớn nhất để bất phương trình $x^2-x+2+a\ln\left(x^2-x+1\right)\geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

**A.** $a\in(2;3]$. **B.** $a\in(8;+\infty)$. **C.** $a\in(6;7]$. **D.** $a\in(-6;-5]$.

**Lời giải**

Đặt $t=x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ suy ra $t\geq\frac{3}{4}$

Bất phương trình $x^2-x+2+a\ln\left(x^2-x+1\right)\geq 0\Leftrightarrow t+a\ln t+1\geq 0\Leftrightarrow a\ln t\geq -t-1$

Trường hợp 1: $t=1$ khi đó $a\ln t\geq -t-1$ luôn đúng với mọi $a$.

Trường hợp 2: $\frac{3}{4}\leq t<1$

Ta có $a\ln t \ge -t-1,\ \forall t \in \left[\frac{3}{4};1\right) \Leftrightarrow a \le \frac{-t-1}{\ln t}, \forall t \in \left[\frac{3}{4};1\right)$

Xét hàm số $f(t)=\frac{-t-1}{\ln t} \Rightarrow f'(t)=-\frac{\ln t-1-\frac{1}{t}}{\ln^2 t} \ge 0, \forall t \in \left[\frac{3}{4};1\right)$ do đó

$a \le \frac{-t-1}{\ln t}, \forall t \in \left[\frac{3}{4};1\right) \Leftrightarrow a \le \frac{-7}{4\ln\frac{3}{4}}$

Trường hợp 3: $t>1$

Ta có $a\ln t \ge -t-1,\ \forall t \in (1;+\infty) \Leftrightarrow a \ge \frac{-t-1}{\ln t}, \forall t \in (1;+\infty)$

Xét hàm số $f(t)=\frac{-t-1}{\ln t} \Rightarrow f'(t)=-\frac{\ln t-1-\frac{1}{t}}{\ln^2 t},\ \forall t \in (1;+\infty)$.

Xét hàm số $g(t)=\ln t-1-\frac{1}{t} \Leftrightarrow g'(t)=\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}>0$

Vậy $g(t)=0$ có tối đa một nghiệm.

Vì $g(1)=-2; \lim\limits_{t\to+\infty} g(t)=+\infty$ vậy $g(t)=0$ có duy nhất một nghiệm trên $(1;+\infty)$

Do đó $f'(t)=0$ có duy nhất một nghiệm là $t_0$. Khi đó $\ln t_0=\frac{t_0+1}{t_0}$ suy ra $f(t_0)=-t_0$

Bảng biến thiên

| $t$ | $1$ | | $t_0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $\|\|$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $\|\|$ | $-\infty$ ↗ | $-t_0$ | ↘ | $-\infty$ |

Vậy $a \ge \frac{-t-1}{\ln t}, \forall t \in (1;+\infty) \Leftrightarrow a \ge -t_0$.

Vậy $-t_0 \le a \le \frac{-7}{4\ln\frac{3}{4}}$.

Vậy số thực $a$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $a \in (6;7]$.

**Câu 17.** **(THPT Lê Xoay - 2018)** Giả sử $S=(a,b]$ là tập nghiệm của bất phương trình $5x+\sqrt{6x^2+x^3-x^4}\log_2 x > (x^2-x)\log_2 x+5+5\sqrt{6+x-x^2}$. Khi đó $b-a$ bằng

**A.** $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $2$.

**Lời giải**

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ 6+x-x^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ -2 \le x \le 3 \end{cases}$

$D=(0;3]$.

$5x+\sqrt{6x^2+x^3-x^4}\log_2 x > (x^2-x)\log_2 x+5+5\sqrt{6+x-x^2}$

$\Leftrightarrow 5x+x\sqrt{6+x-x^2}\log_2 x > x(x-1)\log_2 x+5+5\sqrt{6+x-x^2}$

$\Leftrightarrow (x-1)(5-x\log_2 x)+\sqrt{6+x-x^2}(x\log_2 x-5)>0$

$\Leftrightarrow (5-x\log_2 x)\left(x-1-\sqrt{6+x-x^2}\right)>0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{cases}5-x\log_2 x>0\\ x-1-\sqrt{6+x-x^2}>0\end{cases}(I)\right.$
$\left.\begin{cases}5-x\log_2 x<0\\ x-1-\sqrt{6+x-x^2}<0\end{cases}(II)\right.$.

□ Giải hệ (I).

$\begin{cases}5-x\log_2 x>0(1)\\ x-1-\sqrt{6+x-x^2}>0(2)\end{cases}$

Giải $(1)$ $5-x\log_2 x>0$.

Xét hàm số $f(x)=x\left(\frac{5}{x}-\log_2 x\right)=xg(x)$ với $x\in(0;3]$

Ta có $g'(x)=-\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x\ln 2}<0\forall x\in(0;3]$.

Lập bảng biến thiên

| $x$ | 0 | | 3 |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | |
| $g(x)$ | | ↘ | $\frac{5}{3}-\log_2 3\approx 0,08$ |

Vậy $f(x)=x\left(\frac{5}{x}-\log_2 x\right)>0\forall x\in(0;3]$.

Xét bất phương trình (2): $\sqrt{6+x-x^2}<x-1\Leftrightarrow\begin{cases}6+x-x^2<(x-1)^2\\ x>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-3x-5>0\\ x>1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<-1\\ x>\frac{5}{2}\end{array}\right.\\ x>1\end{cases}\Leftrightarrow x>\frac{5}{2}$.

Vậy nghiệm của hệ $(I)$ là $D=\left(\frac{5}{2};3\right]$.

□ Hệ $(II)$ vô nghiệm.

Vậy $S=\left(\frac{5}{2},3\right]$.

$b-a=3-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$.

**Câu 18.** **(Chuyên Hà Tĩnh - 2018)** Cho bất phương trình $\log_7\left(x^2+2x+2\right)+1>\log_7\left(x^2+6x+5+m\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để bất phương trình trên có tập ngiệm chứa khoảng $(1;3)$?

**A.** 35. **B.** 36. **C.** 34. **D.** 33.

**Lời giải**

$$bpt \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+6x+5+m>0 \\ \log_7\left[7\left(x^2+2x+2\right)\right]>\log_7\left(x^2+6x+5+m\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-x^2-6x-5 \\ 6x^2+8x+9>m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m>\max\limits_{(1;3)} f(x) \\ m<\min\limits_{(1;3)} g(x) \end{cases}, \text{ với } f(x)=-x^2-6x-5;\ g(x)=6x^2+8x+9$$

Xét sự biến thiên của hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$

❍ $f'(x)=-2x-6<0, \forall x\in(1;3) \Rightarrow f(x)$ luôn nghịch biến trên khoảng $(1;3)$

$\Rightarrow \max\limits_{(1;3)} f(x)=f(1)=-12$

❍ $g'(x)=12x+8>0, \forall x\in(1;3) \Rightarrow g(x)$ luôn đồng biến trên khoảng $(1;3)$

$\Rightarrow \min\limits_{(1;3)} g(x)=g(1)=23$

Khi đó $-12<m<23$

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-11;-10;...;22\}$

Vậy có tất cả 34 giá trị nguyên của $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 19.** **(Sở Quảng Nam 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(-9;9)$ của tham số $m$ để bất phương trình $3\log x\le 2\log\left(m\sqrt{x-x^2}-(1-x)\sqrt{1-x}\right)$ có nghiệm thực?

**A.** 6. **B.** 7. **C.** 10. **D.** 11.

**Lời giải**

Điều kiện $\begin{cases} 0<x<1 \\ m\sqrt{x-x^2}-(1-x)\sqrt{1-x}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<1 \\ m\sqrt{x}-(1-x)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<1 \\ m>\dfrac{(1-x)}{\sqrt{x}}>0 \end{cases}$.

Bất phương trình đã cho tương đương

$\log x^3\le\log\left(m\sqrt{x-x^2}-(1-x)\sqrt{1-x}\right)^2$

$\Leftrightarrow x^3\le\left(m\sqrt{x-x^2}-(1-x)\sqrt{1-x}\right)^2$

$\Leftrightarrow x\sqrt{x}\le\left(m\sqrt{x-x^2}-(1-x)\sqrt{1-x}\right)$

$\Leftrightarrow m\ge\dfrac{x\sqrt{x}+(1-x)\sqrt{1-x}}{\sqrt{x-x^2}}=\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}+\dfrac{1-x}{\sqrt{x}}$.

Áp dụng bất đẳng thức cô si ta có

$\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}+\sqrt{1-x}\right)+\left(\dfrac{1-x}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)\ge 2\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}$.

Vì vậy $m\ge\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$.

Khảo sát hàm số $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$ trên $(0;1)$ ta được $f(x)\le\sqrt{2}\approx 1,414$.

Vậy $m$ có thể nhận được các giá trị $2,3,4,5,6,7,8$.

**Câu 20.** **(Yên Phong 1 - 2018)** Có bao nhiêu số nguyên $m$ sao cho bất phương trình $\ln 5+\ln\left(x^2+1\right)\geq \ln\left(mx^2+4x+m\right)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

**A.** 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

**Lời giải**

Ta có bất phương trình $\ln 5+\ln\left(x^2+1\right)\geq \ln\left(mx^2+4x+m\right)\Leftrightarrow \ln\left(5x^2+5\right)\geq \ln\left(mx^2+4x+m\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2+5\geq mx^2+4x+m \\ mx^2+4x+m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2+5-4x\geq m\left(x^2+1\right) \\ m\left(x^2+1\right)>-4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\leq \dfrac{5x^2+5-4x}{x^2+1}=f\left(x\right) \\ m>\dfrac{-4x}{x^2+1}=g\left(x\right) \end{cases}.$$

Hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $5$ | $\nearrow$ | $7$ | $\searrow$ | $3$ | $\nearrow$ | $5$ |

Hàm số $g\left(x\right)$ có bảng biến thiên:

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $0$ |

Từ bảng biến thiên suy ra để bất phương trình có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi $2<m\leq 3$.

Vậy có 1 giá trị nguyên của $m$.

## DẠNG 2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ CHỨA THAM SỐ

**Câu 1.** **(VTED 2019)** Cho $a>1$. Biết khi $a=a_0$ thì bất phương trình $x^a\leq a^x$ đúng với mọi $x\in\left(1;+\infty\right)$.

Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

**A.** $1<a_0<2$ **B.** $e<a_0<e^2$ **C.** $2<a_0<3$ **D.** $e^2<a_0<e^3$

**Lời giải**

**Chọn C**

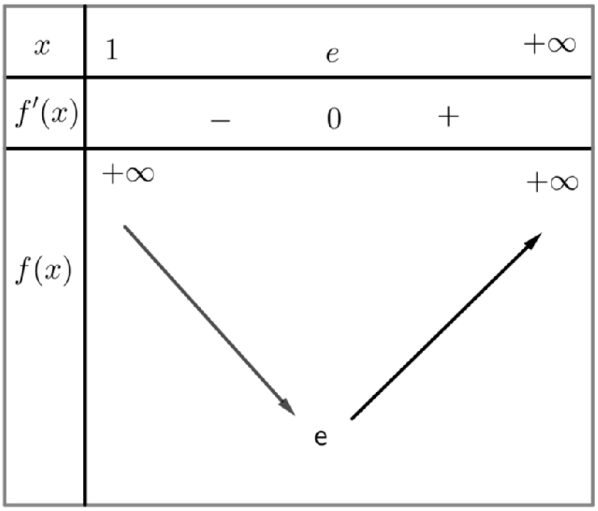
$x^a\leq a^x\Leftrightarrow a.\ln x\leq x.\ln a\Leftrightarrow \dfrac{a}{\ln a}\leq \dfrac{x}{\ln x}$

Đặt $f\left(x\right)=\dfrac{x}{\ln x}, x\in\left(1;+\infty\right)$

$f'\left(x\right)=\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}$

$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=e.$

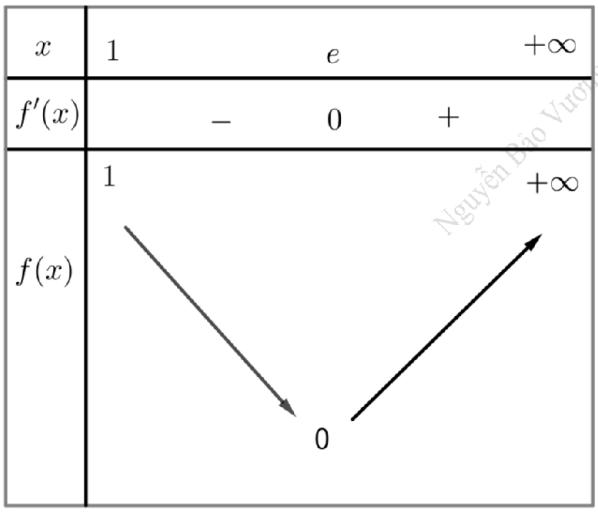
Bảng biến thiên:




Bất phương trình nghiệm đúng $\forall x \in (1;+\infty) \Leftrightarrow \frac{a}{\ln a} \le e \Leftrightarrow a \le e.\ln a \Leftrightarrow a - e.\ln a \le 0$

* Xét hàm số

$g(x) = x - e.\ln x; g'(x) = 1 - \frac{e}{x} \Leftrightarrow \frac{x-e}{x}$




Vậy $a - e.\ln a \ge 0$

Theo bảng biến thiên, ta có: $a - e.\ln a \le 0 \Leftrightarrow a = e$

Vậy $a = a_0 = e \in (2;3)$

**Câu 2.** **(Chuyên Hạ Long 2019)** Tìm $m$ để hàm số sau xác định trên $\mathbb{R}$ : $y = \sqrt{4^x - (m+1).2^x - m}$

**A.** Đáp án khác. **B.** $m > -1$.

**C.** $m < 0$. **D.** $-3 - 2\sqrt{2} \le m \le -3 + 2\sqrt{2}$.

**Lời giải**

Hàm số $y = \sqrt{4^x - (m+1).2^x - m}$ xác định trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $4^x - (m+1).2^x - m \ge 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Đặt $t = 2^x \ \ (t > 0)$. Khi đó: $t^2 - (m+1).t - m \ge 0 \ \ \forall t > 0 \Leftrightarrow \frac{t^2 - t}{t+1} \ge m \ \ \forall t > 0$.

Xét hàm số: $f(t) = \frac{t^2 - t}{t+1}$ với $t > 0$.

Ta có: $f'(t)=\dfrac{t^2+2t-1}{(t+1)^2}$ khi đó: $f'(t)=0 \Leftrightarrow t^2+2t-1=0 \Rightarrow t=-1+\sqrt{2}$ do $t>0$.

Lập bảng biến thiên ta tìm được $\min\limits_{(0;+\infty)} f(t)=f\left(-1+\sqrt{2}\right)=-3+2\sqrt{2}$.

Để bất phương trình $\dfrac{t^2-t}{t+1}\geq m \ \ \forall t>0$ thì $m\leq -3+2\sqrt{2}$.

**Câu 3.** Bất phương trình $4^x-(m+1)2^{x+1}+m\geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x\geq 0$. Tập tất cả các giá trị của $m$ là

**A.** $(-\infty;12)$. **B.** $(-\infty;-1]$. **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $(-1;16]$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Đặt $t=2^x$. ĐK: $t\geq 1$

BPT $\Leftrightarrow t^2-2(m+1)t+m\geq 0 \Leftrightarrow (2t-1)m\leq t^2-2t \Leftrightarrow m\leq \dfrac{t^2-2t}{2t-1}=g(t) \Leftrightarrow m\leq \min g(t)$

Ta có $g'(t)=\dfrac{2t^2-2t+2}{(2t-1)^2}>0, \forall t\geq 1 \Rightarrow Min\, g(t)=g(1)=-1 \Rightarrow m\in(-\infty;-1]$

**Câu 4.** **(Chuyên Nguyễn Tất Thành Yên Bái 2019)** Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để bất phương trình $4^{x-1}-m(2^x+1)>0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$.

**A.** $m\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$. **B.** $m\in(-\infty;0]$.

**C.** $m\in(0;+\infty)$. **D.** $m\in(0;1)$.

Nguyễn Bảo Vương

**Lời giải**

Bất phương trình $4^{x-1}-m(2^x+1)>0 \ \ (1)$.

Đặt $t=2^x$, $t>0$.

Bất phương trình (1) trở thành: $\dfrac{1}{4}t^2-m(t+1)>0 \Leftrightarrow t^2-4mt-4m>0 \ \ (2)$.

Đặt $f(t)=t^2-4mt-4m$.

Đồ thị hàm số $y=f(t)$ có đồ thị là một Parabol với hệ số $a$ dương, đỉnh $I(2m;-4m^2-4m)$.

Bất phương trình $(1)$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow$ Bất phương trình $(2)$ nghiệm đúng với mọi $t>0$ hay $f(t)>0, \ \forall t>0$.

TH1: $m\leq 0 \Rightarrow f(0)=-4m\geq 0 \Rightarrow m\leq 0$ thỏa mãn.

TH2: $m>0 \Rightarrow -4m^2-4m<0$ nên $m>0$ không thỏa mãn.

Vậy $m\leq 0$.

**Câu 5.** **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Bất phương trình $4^x-(m+1)2^{x+1}+m\geq 0$ nghiệm đúng với mọi $x\geq 0$. Tập tất cả các giá trị của $m$ là

**A.** $(-\infty;12)$. **B.** $(-\infty;-1]$. **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $(-1;16]$.

**Lời giải**

$4^x-(m+1)2^{x+1}+m\geq 0, \ \forall x\geq 0$.

$\Leftrightarrow (2^x)^2-2(m+1)2^x+m\geq 0, \forall x\geq 0 \ \ (1)$.

Đặt $t=2^x, (t>0)$.

(1) trở thành $t^2-2(m+1)t+m\ge 0,\ \forall t\ge 1$ (2).

**Cách 1:**

$(2)\Leftrightarrow m\le \dfrac{t^2-2t}{2t-1},\ \forall t\ge 1$ (3).

Xét hàm số $y=f(t)=\dfrac{t^2-2t}{2t-1}$. Ta có hàm số $y=f(t)$ liên tục trên $[1;+\infty)$.

$f'(t)=\dfrac{(2t-2)(2t-1)-2(t^2-2t)}{(2t-1)^2}=\dfrac{2t^2-2t+2}{(2t-1)^2}>0, \forall t\ge 1$.

Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[1;+\infty)\Rightarrow f(t)\ge f(1)=-1,\ \ \forall t\ge 1$.

Do đó (3) $\Leftrightarrow m\le \min\limits_{[1;+\infty)} f(t)\Leftrightarrow m\le -1$.

**Cách 2:**

$t^2-2(m+1)t+m\ge 0$ là một bất phương trình bậc hai.

Tam thức bậc hai ở vế trái luôn có $\Delta'=m^2+m+1>0,\ \forall m$ nên tam thức luôn có hai nghiệm là $t=m+1-\sqrt{m^2+m+1}$ và $t=m+1+\sqrt{m^2+m+1}$.

Suy ra bất phương trình $t^2-2(m+1)t+m\ge 0$ có tập nghiệm là

$\left(-\infty;m+1-\sqrt{m^2+m+1}\right]\cup\left[m+1+\sqrt{m^2+m+1};+\infty\right)$.

$(2)\Leftrightarrow m+1+\sqrt{m^2+m+1}\le 1\Leftrightarrow \sqrt{m^2+m+1}\le -m\Leftrightarrow \begin{cases} m\le 0\\ m^2+m+1\le m^2\end{cases}\Leftrightarrow m\le -1$.

**Câu 6.** **(THPT Hàm Rồng Thanh Hóa 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ để bất phương trình sau nghiệm đúng với $\forall x\in\mathbb{R}$: $\left(6+2\sqrt{7}\right)^x+(2-m)\left(3-\sqrt{7}\right)^x-(m+1)2^x\ge 0$

**A.** 10. **B.** 9. **C.** 12. **D.** 11.

**Lời giải**

Ta có:

$\left(6+2\sqrt{7}\right)^x+(2-m)\left(3-\sqrt{7}\right)^x-(m+1)2^x\ge 0\Leftrightarrow 2^x\left(3+\sqrt{7}\right)^x+(2-m)\left(3-\sqrt{7}\right)^x>(m+1)2^x$

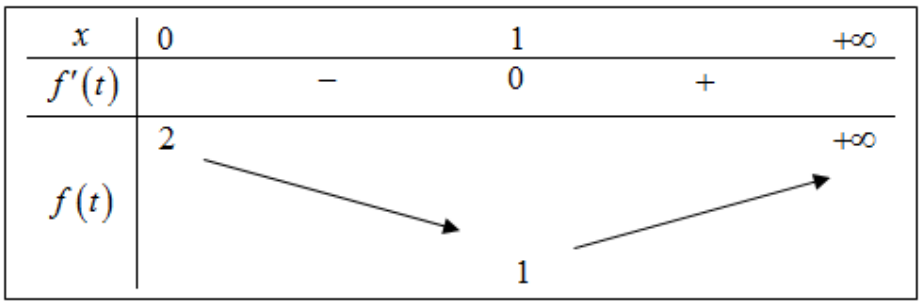
$\Leftrightarrow\left(3+\sqrt{7}\right)^x+(2-m)\left(\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}\right)^x>m+1$

Đặt $t=\left(3+\sqrt{7}\right)^x,\ t>0\Rightarrow\left(\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}\right)^x=\dfrac{1}{t}$. Bất phương trình đã cho trở thành:

$t+(2-m).\dfrac{1}{t}>m+1\ \Leftrightarrow\dfrac{t^2-t+2}{t+1}>m$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2-t+2}{t+1}$ trên khoảng $(0;+\infty)$, ta có $f'(t)=\dfrac{t^2+2t-3}{(t+1)^2}$

$f'(t)=0\ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=-3\\ t=0\end{array}\right.$. Khi đó, ta có bảng biến thiên sau:




Từ bảng biến thiên trên ta suy ra để bất phương trình đã cho nghiệm đúng thì $m<1$. Suy ra trong đoạn $[-10;10]$ có tất cả 11 giá trị nguyên của $m$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 7.** **(THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng 2019)** Tìm $m$ để bất phương trình $2^x+3^x+4^x+5^x\geq 4+mx$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

**A.** $\ln 120$. **B.** $\ln 10$. **C.** $\ln 30$. **D.** $\ln 14$.

**Lời giải**

+ Với $a>1$ ta có $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}\right).\ln a=\ln a$.

+ Với $a>1$ xét hàm số $f(x)=\dfrac{a^x-1}{x}(x\neq 0)$, ta có $f'(x)=\dfrac{xa^x\ln a-a^x+1}{x^2}$.

Xét hàm số $g(x)=xa^x\ln a-a^x+1\Rightarrow g'(x)=a^x\ln a+xa^x\ln^2 a-a^x\ln a=xa^x\ln^2 a$.

Với $x>0$ ta có $g'(x)>0$ suy ra $g(x)>g(0)\Leftrightarrow g(x)>0\Rightarrow f'(x)>0,\forall x>0$.

Với $x<0$ ta có $g'(x)<0$ suy ra $g(x)>g(0)\Leftrightarrow g(x)>0\Rightarrow f'(x)>0,\forall x>0$.

Do đó hàm số $f(x)=\dfrac{a^x-1}{x}(a>1)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

Trở lại bài toán:

+ Xét $x=0$ bất phương trình thỏa mãn.

+ Xét $x>0$ ta có: $2^x+3^x+4^x+5^x\geq 4+mx\Leftrightarrow m\leq\dfrac{2^x-1}{x}+\dfrac{3^x-1}{x}+\dfrac{4^x-1}{x}+\dfrac{5^x-1}{x}=h(x)$.

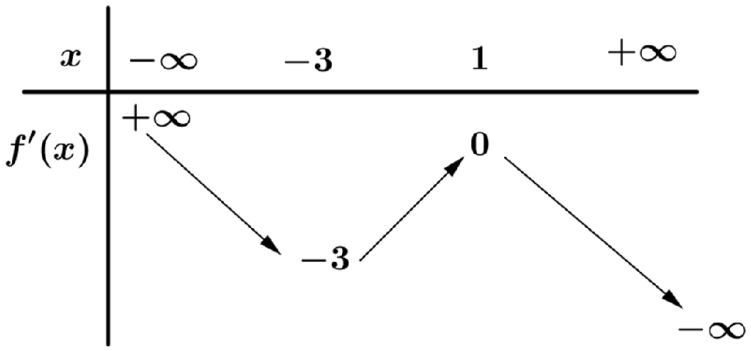
Từ nhận xét trên ta có $h(x)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Do đó yêu cầu của bài toán tương đương với $m\leq\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=\ln 2+\ln 3+\ln 4+\ln 5=\ln 120$.

+ Xét $x<0$ ta có: $2^x+3^x+4^x+5^x\geq 4+mx\Leftrightarrow m\geq\dfrac{2^x-1}{x}+\dfrac{3^x-1}{x}+\dfrac{4^x-1}{x}+\dfrac{5^x-1}{x}=h(x)$.

Từ nhận xét trên ta có $h(x)$ đồng biến trên $(-\infty;0)$. Do đó yêu cầu của bài toán tương đương với $m\geq\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=\ln 2+\ln 3+\ln 4+\ln 5=\ln 120$.

Kết hợp lại ta có $m=\ln 120$.

**Câu 8.** **(Đề Tham Khảo 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:




Bất phương trình $f(x)<e^x+m$ đúng với mọi $x\in(-1;1)$ khi và chỉ khi.

**A.** $m>f(-1)-\dfrac{1}{e}$ **B.** $m\geq f(-1)-\dfrac{1}{e}$ **C.** $m>f(1)-e$ **D.** $m\geq f(1)-e$

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $f(x)<e^x+m\Leftrightarrow m>f(x)-e^x$.

Xét hàm số $g(x)=f(x)-e^x; g'(x)=f'(x)-e^x<0\forall x\in(-1;1)$.

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1;1)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m\geq \max g(x)=g(-1)=f(-1)-\dfrac{1}{e}$, chọn **C.**

**Câu 9.** **(Chuyên Sơn La 2019)** Cho hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Bất phương trình $f(x)<e^{x^2}+m$ đúng với mọi $x\in(-1;1)$ khi và chỉ khi

**A.** $m\geq f(0)-1$. **B.** $m>f(-1)-e$. **C.** $m>f(0)-1$. **D.** $m\geq f(-1)-e$.

**Lời giải**

$f(x)<e^{x^2}+m\Leftrightarrow f(x)-e^{x^2}<m$

Xét hàm số: $g(x)=f(x)-e^{x^2}$; $g'(x)=f'(x)-2xe^{x^2}$.

Trên khoảng $(-1;0)$ ta có $\begin{cases}f'(x)>0\\-2x>0\end{cases}\Rightarrow g'(x)>0,\ \forall x\in(-1;0)$.

Trên khoảng $(0;1)$ ta có $\begin{cases}f'(x)<0\\-2x<0\end{cases}\Rightarrow g'(x)<0,\ \forall x\in(0;1)$.

Tại điểm $x=0$ ta có $\begin{cases}f'(x)=0\\-2xe^{x^2}=0\end{cases}\Rightarrow g'(x)=0$.

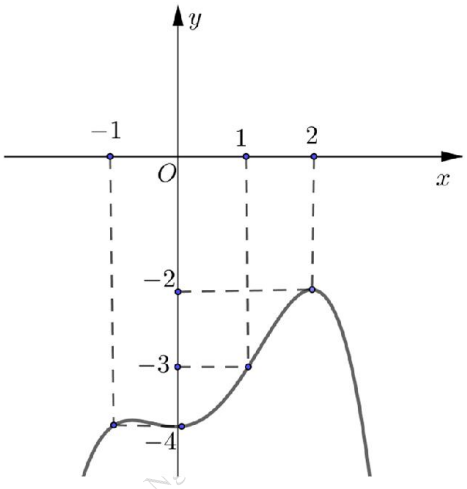
Suy ra bảng biến thiên của $g'(x)$:

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | | ↗ | $f(0)-1$ | ↘ | |

Từ bảng biến thiên ta có: $\max\limits_{(-1;1)} g(x) = f(0)-1$.

Do đó bất phương trình $m > g(x)$ đúng với mọi $x \in (-1;1)$ khi và chỉ khi $m > \max\limits_{(-1;1)} g(x) = f(0)-1$.

**Câu 10.** **(Phú Thọ 2019)** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ




Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số $m$ để bất phương trình $9.6^{f(x)} + \left(4 - f^2(x)\right).9^{f(x)} \le \left(-m^2 + 5m\right).4^{f(x)}$ đúng $\forall x \in \mathbb{R}$ là

**A.** 10 **B.** 4 **C.** 5 **D.** 9

**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có

$$9.6^{f(x)} + \left(4 - f^2(x)\right).9^{f(x)} \le \left(-m^2 + 5m\right).4^{f(x)}$$

$$\Leftrightarrow \left(4 - f^2(x)\right).\left(\frac{3}{2}\right)^{2f(x)} + 9;\left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)} \le -m^2 + 5m \quad (1)$$

Từ đồ thị hàm số suy ra $f(x) \le -2, \forall x \in \mathbb{R}$

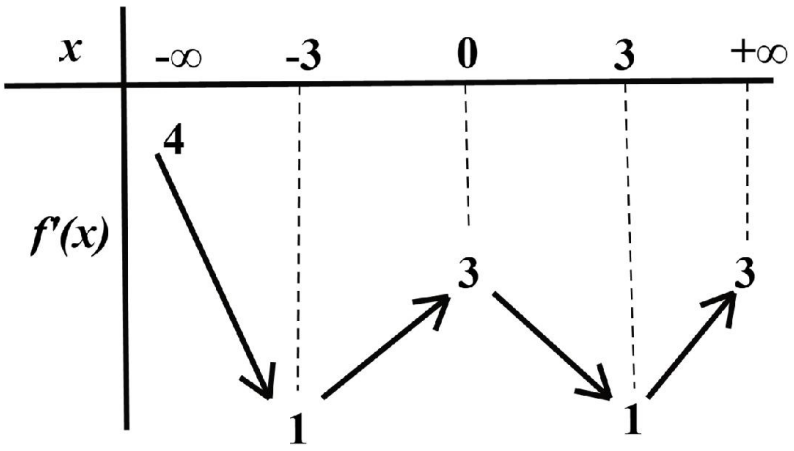
Do đó $\left(4 - f^2(x)\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{2f(x)} \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $9.\left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)} \le 9.\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = 4, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $\left(4 - f^2(x)\right).\left(\frac{3}{2}\right)^{2f(x)} + 9.\left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)} \le 4, \forall x \in \mathbb{R}$.

Để $(1)$ có nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$ thì $4 \le -m^2 + 5m \Leftrightarrow 1 \le m \le 4$.

Do $m$ là số nguyên nên $m \in \{1, 2, 3, 4\}$.

**Câu 11.** **(VTED 2019)** Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:




Bất phương trình $f(x)<3.e^{x+2}+m$ có nghiệm $x\in(-2;2)$ khi và chỉ khi:

**A.** $m\ge f(-2)-3$ **B.** $m>f(-2)-3e^4$ **C.** $m\ge f(2)-3e^4$ **D.** $m>f(-2)-3$

**Lời giải**

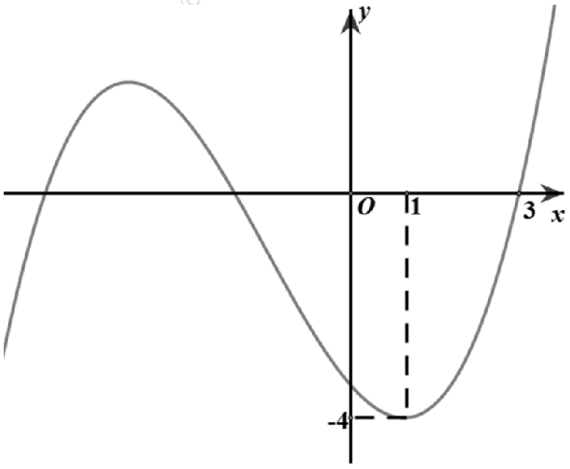
Bất phương trình tương đương với $m>g(x)=f(x)-3.e^{x+2}$.

Ta có $g'(x)=f'(x)-3.e^{x+2}<3-3.e^{-2+2}=0,\forall x\in(-2;2)$.

Do đó $g(x)>g(2)=f(2)-3.e^4,\forall x\in(-2;2)$.

Vậy $m>f(2)-3.e^4$ thì phương trình có nghiệm trên khoảng $(-2;2)$.

**Câu 12.** **(THPT-Thang-Long-Ha-Noi- 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.




Bất phương trình $f(e^x)<m(3e^x+2019)$ có nghiệm $x\in(0;1)$ khi và chỉ khi

**A.** $m>-\dfrac{4}{1011}$. **B.** $m\ge-\dfrac{4}{3e+2019}$. **C.** $m>-\dfrac{2}{1011}$. **D.** $m>\dfrac{f(e)}{3e+2019}$.

**Lời giải**

Đặt $t=e^x$ $(t>0)$. Bất phương trình có dạng: $f(t)<m(3t+2019)\Leftrightarrow\dfrac{f(t)}{3t+2019}<m$.

Ta có: $x\in(0;1)\Leftrightarrow t=e^x\in(1;e)$.

Xét hàm $g(t)=\dfrac{f(t)}{3t+2019}$ có $g'(t)=\dfrac{f'(t)(3t+2019)-3f(t)}{(3t+2019)^2}$.

Dựa vào đồ thị hàm số $f(x)$, ta thấy: $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;e)$ và $f(x)<0$

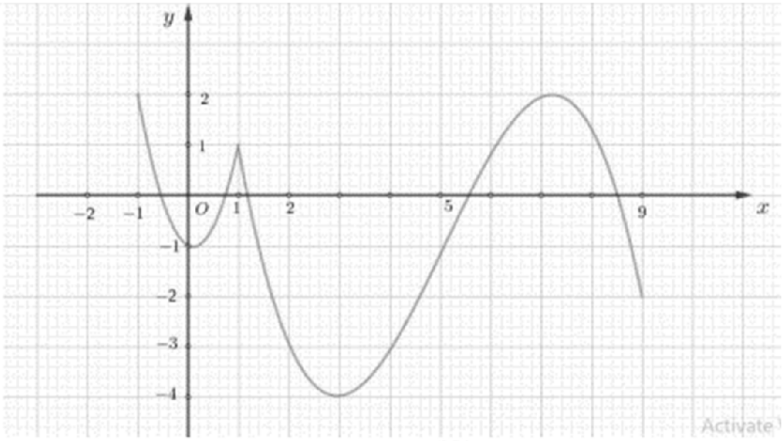
$\forall x\in(1;e)\Rightarrow\begin{cases}f(x)<0\\f'(x)>0\end{cases}\ \forall x\in(1;e)$.

$\Rightarrow g'(t)>0\ \ \forall t\in(1;e)\ \Rightarrow g(t)$ đồng biến trên khoảng $(1;e)\Rightarrow g(1)<g(t)<g(e)\ \ \forall t\in(1;e)$.

Vậy bất phương trình $f\left(e^x\right)<m\left(3e^x+2019\right)$ có nghiệm $x\in(0;1)$

$\Leftrightarrow$ Bất phương trình $\Leftrightarrow\dfrac{f(t)}{3t+2019}<m$ có nghiệm $t\in(1;e)\Leftrightarrow m>g(1)=-\dfrac{4}{2022}=-\dfrac{2}{1011}$.

**Câu 13.** **(THPT Yên Khánh - Ninh Bình - 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;9]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây




Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để bất phương trình $16.3^{f(x)}-\left[f^2(x)+2f(x)-8\right].4^{f(x)}\ge\left(m^2-3m\right).6^{f(x)}$ nghiệm đúng với mọi giá trị thuộc $[-1;9]$?

**A.** 32. **B.** 31. **C.** 5. **D.** 6.

**Lời giải**

Dễ thấy $-4\le f(x)\le 2,\ \forall x\in[-1;9]$ (1) nên $-\left[f(x)+4\right].\left[f(x)-2\right]\ge 0,\ \forall x\in[-1;9]$.

Do đó $-\left[f^2(x)+2f(x)-8\right]\ge 0,\ \forall x\in[-1;9]$ (2).

Ta có $16.3^{f(x)}-\left[f^2(x)+2f(x)-8\right].4^{f(x)}\ge\left(m^2-3m\right).6^{f(x)}$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-1;9]$

$\Leftrightarrow 16.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{f(x)}-\left[f^2(x)+2f(x)-8\right].\left(\dfrac{2}{3}\right)^{f(x)}\ge m^2-3m$ nghiệm đúng với mọi $x\in[-1;9]$

$\Leftrightarrow\alpha=\min\limits_{x\in[-1;9]}\left\{16.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{f(x)}-\left[f^2(x)+2f(x)-8\right].\left(\dfrac{2}{3}\right)^{f(x)}\right\}\ge m^2-3m$ (3).

Từ (1) và (2) ta có $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{f(x)}\ge\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ và $-\left[f^2(x)+2f(x)-8\right].\left(\dfrac{2}{3}\right)^{f(x)}\ge 0,\ \forall x\in[-1;9]$.

Suy ra $16.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{f(x)}-\left[f^2(x)+2f(x)-8\right].\left(\dfrac{2}{3}\right)^{f(x)}\ge 4,\ \forall x\in[-1;9]$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $f(x)=2\Leftrightarrow x=-1\vee x=a\ (7<a<8)$.

Do đó $\alpha=4$ và (3) $\Leftrightarrow 4\ge m^2-3m\Leftrightarrow -1\le m\le 4$. Vì $m$ nguyên nên $m\in\{-1;0;1;2;3;4\}$.

**Câu 14.** **(Sở Cần Thơ - 2019)** Tất cả giá trị của tham số thực $m$ sao cho bất phương trình $9^x-2(m+1).3^x-3-2m>0$ có nghiệm đúng với mọi số thực $x$ là

**A.** $m\le -\frac{3}{2}$. **B.** $m\ne 2$. **C.** $m<-\frac{3}{2}$. **D.** $m\in\varnothing$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $9^x-2(m+1).3^x-3-2m>0$

$\Leftrightarrow (3^x)^2-2.3^x-3>(3^x+1).2m$

$\Leftrightarrow (3^x+1)(3^x-3)>(3^x+1).2m$

$\Leftrightarrow 3^x-3>2m\Leftrightarrow 3^x>3+2m$

Vậy, để $9^x-2(m+1).3^x-3-2m>0,\forall x\in\mathbb{R}$ khi $3+2m\le 0\Leftrightarrow m\le -\frac{3}{2}$.

**Câu 15.** **(Sở Nam Định - 2019)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m$ để tập nghiệm của bất phương trình $\left(3^{x+2}-\sqrt{3}\right)\left(3^x-2m\right)<0$ chứa không quá 9 số nguyên?

**A.** 3281. **B.** 3283. **C.** 3280. **D.** 3279.

**Lời giải**

**Chọn C**

Do $m$ là số nguyên dương nên 2m >1 => $\log_3 2m>0$.

$3^{x+2}-\sqrt{3}=0\Leftrightarrow 3^{x+2}=3^{\frac{1}{2}}\Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$

$3^x-2m=0\Leftrightarrow x=\log_3 2m$.

Lập bảng biến thiên, ta kết luận: tập nghiệm bất phương trình này là $\left(-\frac{3}{2};\log_3 2m\right)$

Suy ra, $\log_3 2m\le 8\Leftrightarrow 2m\le 3^8\Leftrightarrow m\le\frac{6561}{2}=3280.5$ =>

**Câu 16.** **(THPT Cẩm Bình Hà Tĩnh 2019)** Có mấy giá trị nguyên dương của $m$ để bất phương trình $9^{m^2x}+4^{m^2x}\ge m.5^{m^2x}$ có nghiệm?

**A.** 10. **B.** Vô số. **C.** 9. **D.** 1.

**Lời giải**

**Chọn B**

Từ giả thiết, ta chỉ xét $m\in\mathbb{Z}^+$

Ta có: $9^{m^2x}+4^{m^2x}\ge m.5^{m^2x}\Leftrightarrow\left(\frac{9}{5}\right)^{m^2x}+\left(\frac{4}{5}\right)^{m^2x}\ge m\ (1)$

Có $\left(\frac{9}{5}\right)^{m^2x}+\left(\frac{4}{5}\right)^{m^2x}\ge 2\sqrt{\left(\frac{9}{5}\right)^{m^2x}.\left(\frac{4}{5}\right)^{m^2x}}=2\left(\frac{6}{5}\right)^{m^2x}$.

Do đó nếu có $x_0$ là nghiệm của bất phương trình $2\left(\frac{6}{5}\right)^{m^2x}\ge m$

thì $x_0$ cũng là nghiệm của $\left(\frac{9}{5}\right)^{m^2x}+\left(\frac{4}{5}\right)^{m^2x}\ge m$.

Ta xét các giá trị $m\in\mathbb{Z}^+$ làm cho bất phương trình $2\left(\frac{6}{5}\right)^{m^2x}\ge m$ $(2)$ có nghiệm.

Vì $2\left(\frac{6}{5}\right)^{m^2x}\ge m\Leftrightarrow\left(\frac{6}{5}\right)^{m^2x}\ge\frac{m}{2}$, $m\in\mathbb{Z}^+$

$\Leftrightarrow m^2x\ge\log_{\frac{6}{5}}\left(\frac{m}{2}\right)\Leftrightarrow x\ge\frac{1}{m^2}\log_{\frac{6}{5}}\left(\frac{m}{2}\right)$, với $m\in\mathbb{Z}^+$.

Vậy với $m\in\mathbb{Z}^+$ thì bất phương trình $(2)$ có nghiệm tương ứng là $x\ge\frac{1}{m^2}\log_{\frac{6}{5}}\left(\frac{m}{2}\right)$.

Suy ra có vô số giá trị $m\in\mathbb{Z}^+$ làm cho bất phương trình $(1)$ có nghiệm.

**Câu 17.** **(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2019)** Bất phương trình $4^x-(m+1)2^{x+1}+m\ge0$ nghiệm đúng với mọi $x\ge0$. Tập tất cả cá giá trị của $m$ là

**A.** $(-\infty;12)$. **B.** $(-\infty;-1]$. **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $(-1;16]$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Bất phương trình $4^x-(m+1)2^{x+1}+m\ge0$ $(1)\Leftrightarrow4^x-2(m+1)2^x+m\ge0$.

Đặt $2^x=t$ bất phương trình trở thành $t^2-2(m+1)t+m\ge0$ $(2)$.

Bất phương trình $(1)$ nghiệm đúng với mọi $x\ge0$ khi và chỉ khi bất phương trình $(2)$ nghiệm đúng với mọi $t\ge1$.

$(2)\Leftrightarrow(2t-1)m\le t^2-2t\Leftrightarrow m\le\frac{t^2-2t}{2t-1}$ (do $t\ge1$).

Đặt $f(t)=\frac{t^2-2t}{2t-1}$ với $t\ge1$.

$\Rightarrow f'(t)=\frac{2t^2-2t+2}{(2t-1)^2}>0\ \forall t\ge1$.

Bảng biến thiên

| $t$ | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $+$ | |
| $f(t)$ | $-1$ | ↗ | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên ta có $f(t)\ge m\ \ \forall t\in[1;+\infty)\Leftrightarrow m\le-1$. Vậy chọn **B**

**Câu 18.** **(THPT Phan Bội Châu - Nghệ An 2019)** Cho hàm số $f(x)=\cos2x$. Bất phương trình $f^{(2019)}(x)>m$ đúng với mọi $x\in\left(\frac{\pi}{12};\frac{3\pi}{8}\right)$ khi và chỉ khi

**A.** $m<2^{2018}$. **B.** $m\le2^{2018}$. **C.** $m\le2^{2019}$. **D.** $m<2^{2019}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

Xét hàm số $f(x)=\cos2x$, TXĐ: $R$.

Ta có $f'(x)=-2\sin 2x$, $f''(x)=-2^2\cos 2x$, $f'''(x)=2^3\sin 2x$, $f^{(4)}(x)=2^4\cos 2x$.

Suy ra $f^{(2016)}(x)=2^{2016}\cos 2x \Rightarrow f^{(2017)}(x)=-2^{2017}\sin 2x$

$\Rightarrow f^{(2018)}(x)=-2^{2018}\cos 2x$

$\Rightarrow f^{(2019)}(x)=2^{2019}\sin 2x$.

Vì $x\in\left(\frac{\pi}{12};\frac{3\pi}{8}\right)$ nên $\frac{1}{2}<\sin 2x<\frac{\sqrt{2}}{2}$ hay $f^{(2019)}(x)>2^{2018}$, $\forall x\in\left(\frac{\pi}{12};\frac{3\pi}{8}\right)$.

Vậy $f^{(2019)}(x)>m$ đúng với mọi $x\in\left(\frac{\pi}{12};\frac{3\pi}{8}\right)$ khi và chỉ khi $m\le 2^{2018}$.

**Câu 19.** **(Chuyên Lê Quý Đôn – Điện Biên 2019)** Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Bất phương trình $f(x)>2^x+m$ đúng với mọi $x\in(-1;1)$ khi và chỉ khi:

**A.** $m>f(1)-2$. **B.** $m\le f(1)-2$. **C.** $m\le f(-1)-\frac{1}{2}$. **D.** $m>f(-1)-\frac{1}{2}$.

**Lời giải**

**Chọn B**

$f(x)>2^x+m,\ \forall x\in(-1;1)\Leftrightarrow f(x)-2^x>m\Leftrightarrow f(x)-2^x>m$.

Xét hàm số $g(x)=f(x)-2^x$ trên $(-1;1)$.

Ta có: $g'(x)=f'(x)-2^x.\ln 2$.

Ta thấy: $\forall x\in(-1;1)$ thì $f'(x)\le 0$ và $2^x.\ln 2>0$.

Do đó $g'(x)=f'(x)-2^x.\ln 2<0,\ \forall x\in(-1;1)$.

Bảng biến thiên

| $x$ | $-1$ | | $1$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | |
| $g(x)$ | $g(-1)$ | $\searrow$ | $g(1)$ |

Từ bảng biến thiên ta có: $m\le g(1)\Leftrightarrow m\le f(1)-2$.

**Câu 20.** **(Bình Giang-Hải Dương 2019)** Số giá trị nguyên dương của tham số $m$ để bất phương trình $9^{\sqrt{x^2-3x+m}}+2.3^{\sqrt{x^2-3x+m}-2+x}<3^{2x-3}$ có nghiệm là

**A.** 4. **B.** 8. **C.** 1. **D.** 6.

**Lời giải**

**Chọn C**

Đặt $t=3^{\sqrt{x^2-3x+m}-x}$ với $t>0$, bất phương trình đã cho trở thành $t^2+\frac{2}{9}t-\frac{1}{27}<0\Leftrightarrow -3<t<\frac{1}{9}$.

Do đó $0<t<\frac{1}{9}\Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+m}-x<-2\Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+m}<x-2$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x>2\\x^2-3x+m\ge 0\\x^2-3x+m<x^2-4x+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>2\\x^2-3x+m\ge 0\ \text{(I)}\\x<4-m\end{cases}$$

Để bất phương trình đề bài cho có nghiệm thì hệ bất phương trình (I) có nghiệm ta đặt

$$\begin{cases}x>2 & (1)\\ x^2-3x+m\ge 0 & (2)\\ x<4-m & (3)\end{cases}.$$

**Điều kiện cần:** Từ (1) và (3) ta có $4-m>2\Leftrightarrow m<2$.

Do $m$ là số nguyên dương nên $m=1$.

**Điều kiện đủ:** Với $m=1$, hệ bất phương trình (I) trở thành $\begin{cases}x>2\\x^2-3x+1\ge 0\\x<3\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}2<x<3\\x<\frac{3-\sqrt{5}}{2}\vee x>\frac{3+\sqrt{5}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{3+\sqrt{5}}{2}<x<3$. Vậy hệ bất phương trình (I) có nghiệm.

Vậy $m=1$.

**Câu 21.** **(Hậu Lộc 2-Thanh Hóa- 2019)** Gọi $S$ là tập hợp tất cả các giá trị của tham số $m$ để bất phương trình $m^2\left(x^4-x^3\right)-m\left(x^3-x^2\right)-x+e^{x-1}\ge 0$ đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$. Số tập con của $S$ là

**A.** 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

**Lời giải**

**Chọn B**

Xét hàm số $f(x)=m^2\left(x^4-x^3\right)-m\left(x^3-x^2\right)-x+e^{x-1}$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=m^2\left(4x^3-3x^2\right)-m\left(3x^2-2x\right)-1+e^{x-1}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do $f(1)=0$ nên từ giả thiết ta có $f(x)\ge f(1),\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow \min\limits_{\mathbb{R}} f(x)=f(1)$.

$$\Rightarrow f'(1)=0\Rightarrow m^2-m=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=0.\end{array}\right.$$

□ Với $m=0$ ta có $f(x)=e^{x-1}-x\Rightarrow f'(x)=e^{x-1}-1$. Cho $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên của $f(x)$:

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | - | $0$ | + | |
| $f(x)$ | ↘ | | $0$ | ↗ | |

Trường hợp $m=0$, yêu cầu bài toán được thỏa mãn.

□ Với $m=1$ ta có $f(x)=x^4-x^3-x^3+x^2+e^{x-1}=(x-1)^2x^2+e^{x-1}-x\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Trường hợp $m=1$ yêu cầu bài toán cũng được thỏa mãn.

**Câu 22.** **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh 2019)** Cho bất phương trình $m.3^{x+1}+(3m+2)\left(4-\sqrt{7}\right)^x+\left(4+\sqrt{7}\right)^x>0$, với $m$ là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x\in(-\infty;0]$.

**A.** $m\geq-\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $m\geq\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $m>\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $m>\dfrac{2+2\sqrt{3}}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có $m.3^{x+1}+(3m+2).\left(4-\sqrt{7}\right)^x+\left(4+\sqrt{7}\right)^x>0\Leftrightarrow\left(\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x+(3m+2)\left(\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}\right)^x+3m>0$.

Đặt $t=\left(\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x$. Ta có $x\in(-\infty;0]\ \Leftrightarrow 0<t\leq 1$.

Ta tìm tham số $m$ sao cho $t^2+3mt+3m+2>0$ đúng với mọi $0<t\leq 1$

$\Leftrightarrow m>\dfrac{-t^2-2}{3t+3},\forall t\in(0;1]$.

Xét hàm số $f(t)=-\dfrac{t^2+2}{3t+3}$ trên $(0;1]$.

Ta có $f'(t)=0\Leftrightarrow-\dfrac{1}{3}.\dfrac{t^2+2t-2}{(t+1)^2}=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1-\sqrt{3}\\t=-1+\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Lập bảng biến thiên:

| $t$ | $0$ | | $-1+\sqrt{3}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | + | $0$ | − | |
| $f(t)$ | $-\dfrac{2}{3}$ | ↗ | $\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$ | ↘ | $-\dfrac{1}{2}$ |

Vậy $m>f(t),\forall t\in(0;1]\Leftrightarrow m>\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$.

**Câu 23.** **(Chuyên Hưng Yên - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số $m$ để tập nghiệm của bất phương trình $\left(3^{x+2}-\sqrt{3}\right)\left(3^x-2m\right)<0$ chứa không quá 9 số nguyên?

**A.** 1094. **B.** 3281. **C.** 1093. **D.** 3280.

**Lời giải.**

**Chọn D**

Đặt $t=3^x,(t>0)$ bất phương trình $\left(3^{x+2}-\sqrt{3}\right)\left(3^x-2m\right)<0(1)$ trở thành $\left(9t-\sqrt{3}\right)(t-2m)<0(2)$.

Nếu $2m\le\dfrac{\sqrt{3}}{9}\Leftrightarrow m\le\dfrac{\sqrt{3}}{18}<1$ thì không có số nguyên dương $m$ nào thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nếu $2m>\dfrac{\sqrt{3}}{9}\Leftrightarrow m>\dfrac{\sqrt{3}}{18}$ thì bất phương trình $(2)\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{3}}{9}<t<2m$.

Khi đó tập nghiệm của bất phương trình $(1)$ là $S=\left(-\dfrac{3}{2};\log_3(2m)\right)$.

Để $S$ chứa không quá 9 số nguyên thì $\log_3(2m)\le 8\Leftrightarrow 0<m\le\dfrac{3^8}{2}$

Vậy có 3280 số nguyên dương $m$ thỏa mãn.

**Câu 24.** **(Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - 2020)** Có bao nhiêu $m$ nguyên dương để bất phương trình $3^{2x+2}-3^x\left(3^{m+2}+1\right)+3^m<0$ có không quá 30 nghiệm nguyên?

**A.** 28. **B.** 29. **C.** 30. **D.** 31.

**Lời giải**

**Chọn B**

$$3^{2x+2}-3^x\left(3^{m+2}+1\right)+3^m<0\Leftrightarrow 9.3^{2x}-9.3^x.3^m-3^x+3^m<0$$
$$\Leftrightarrow 9.3^x\left(3^x-3^m\right)-\left(3^x-3^m\right)<0$$
$$\Leftrightarrow\left(3^x-3^m\right)\left(9.3^x-1\right)<0$$

Ta có $3^x-3^m=0\Leftrightarrow x=m.$

$9.3^x-1=0\Leftrightarrow x=-2.$

Bảng xét dấu

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $m$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| VT | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

Ta có tập nghiệm $S=(-2\,;\,m)$.

Tập hợp các nghiệm nguyên là $\{-1;\,0;\,1;\,...;\,m-1\}$.

Để có không quá 30 nghiệm nguyên thì $m-1\le 28\Leftrightarrow m\le 29$.

**Câu 25.** **(ĐHQG Hà Nội - 2020)** Điều kiện của $m$ để hệ bất phương trình $\begin{cases}7^{2x+\sqrt{x+1}}-7^{2+\sqrt{x+1}}+2020x\le 2020\\ x^2-(m+2)x+2m+3\ge 0\end{cases}$ có nghiệm là :

**A.** $m\ge -3$. **B.** $-2\le m\le 1$. **C.** $-1\le m\le 2$. **D.** $m\ge -2$.

**Lời giải**

**Chọn D**

$$7^{2x+\sqrt{x+1}}-7^{2+\sqrt{x+1}}+2020x\le 2020\Leftrightarrow 7^{2x+\sqrt{x+1}}+1010.\left(2x+\sqrt{x+1}\right)\le 7^{2+\sqrt{x+1}}+1010.\left(2+\sqrt{x+1}\right)\quad(*)$$

Hàm số $f(t)=7^t+1010.t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$(*)\Leftrightarrow f\left(2x+\sqrt{x+1}\right)\le f\left(2+\sqrt{x+1}\right)$

Suy ra : $2x+\sqrt{x+1}\le 2+\sqrt{x+1}\Rightarrow -1\le x\le 1.$

$x\in[-1;1]$: $x^2-(m+2)x+2m+3\ge 0\Leftrightarrow m\ge\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}.$

Ycbt $\Leftrightarrow\exists x\in[-1;1]$: $m\ge\dfrac{x^2-2x+3}{x-2}\qquad(**)$

| $x$ | $-1$ | | $2-\sqrt{3}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $\frac{x^2-2x+3}{x-2}$ | $-2$ | ↗ | $2-2\sqrt{3}$ | ↘ | $-2$ |

Từ bảng biến thiên ta có, $(**) \Leftrightarrow m \geq -2$.

**Câu 26.** **(Sở Hà Nội - Lần 2 - 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m$ để bất phương trình $\left(3^{x^2-x}-9\right)\left(2^{x^2}-m\right)\leq 0$ có 5 nghiệm nguyên?

**A.** 65021. **B.** 65024 **C.** 65022. **D.** 65023.

**Lời giải**

**Chọn B**

$\left(3^{x^2-x}-9\right)\left(2^{x^2}-m\right)\leq 0$ (1)

Th1: Xét $3^{x^2-x}-9=0 \Leftrightarrow x^2-x=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$ là nghiệm của bất phương trình (1).

Th2: Xét $3^{x^2-x}-9>0 \Leftrightarrow x^2-x>2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x>2 \end{array}\right.$.

Khi đó, (1) $\Leftrightarrow 2^{x^2} \leq m \Leftrightarrow x^2 \leq \log_2 m$ (2)

Nếu $m<1$ thì (2) vô nghiệm.

Nếu $m \geq 1$ thì (2) $\Leftrightarrow -\sqrt{\log_2 m} \leq x \leq \sqrt{\log_2 m}$.

Do đó, (1) có 5 nghiệm nguyên $\Leftrightarrow \left((-\infty;-1)\cup(2;+\infty)\right)\cap\left[-\sqrt{\log_2 m};\sqrt{\log_2 m}\right]$ có 3 giá trị nguyên $\sqrt{\log_2 m}\in[3;4) \Leftrightarrow 512 \leq m < 65536$ (thỏa đk $m \geq 1$). Suy ra có 65024 giá trị $m$ nguyên thỏa mãn.

Th3: Xét $3^{x^2-x}-9<0 \Leftrightarrow x^2-x<2 \Leftrightarrow -1<x<2$. Vì $(-1;2)$ chỉ có hai số nguyên nên không có giá trị $m$ nào để bất phương trình (1) có 5 nghiệm nguyên.

Vậy có tất cả 65024 giá trị $m$ nguyên thỏa ycbt.

**Câu 27.** **(Cụm 5 Trường Chuyên - ĐBSH - 2018)** Cho bất phương trình $m.3^{x+1}+(3m+2)(4-\sqrt{7})^x+(4+\sqrt{7})^x>0$, với $m$ là tham số. Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi $x\in(-\infty;0)$.

**A.** $m>\frac{2+2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $m>\frac{2-2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $m\geq\frac{2-2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $m\geq-\frac{2-2\sqrt{3}}{3}$.

**Lời giải**

$m.3^{x+1}+(3m+2).(4-\sqrt{7})^x+(4+\sqrt{7})^x>0$

$\Leftrightarrow 3m+(3m+2).\left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}\right)^x+\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x>0$

Đặt $t=\left(\frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)^x$

Khi $x<0$ thì $0<t<1$

BPT trở thành $3m+\dfrac{3m+2}{t}+t>0,\ \forall t\in(0;1)$.

$\Leftrightarrow 3m>\dfrac{-t^2-2}{t+1},\ \forall t\in(0;1)$

Xét $f(t)=\dfrac{-t^2-2}{t+1},\ \forall t\in(0;1)$

$f'(t)=\dfrac{-t^2-2t+2}{t+1}=0\Leftrightarrow t=\sqrt{3}-1$

| $x$ | $0$ | | $\sqrt{3}-1$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $y$ | $-2$ | ↗ | $\dfrac{2\sqrt{3}-6}{\sqrt{3}}$ | ↘ | $\dfrac{-3}{2}$ |

Vậy ycbt $\Leftrightarrow 3m>\dfrac{2\sqrt{3}-6}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow m>\dfrac{2-2\sqrt{3}}{3}$.

**Câu 28.** **(THPT Thái Phiên - Hải Phòng - 2018)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để bất phương trình $\sqrt{2^x+3}+\sqrt{5-2^x}\le m$ nghiệm đúng với mọi $x\in(-\infty;\log_2 5)$.

**A.** $m\ge 4$. **B.** $m\ge 2\sqrt{2}$. **C.** $m<4$. **D.** $m<2\sqrt{2}$.

**Lời giải**

Đặt $2^x=t$. Vì $x<\log_2 5\Rightarrow 0<2^x<2^{\log_2 5}\Rightarrow 0<t<5$.

Yêu cầu bài toán trở thành $\sqrt{t+3}+\sqrt{5-t}\le m,\ \forall t\in(0;5)$.

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t+3}+\sqrt{5-t}$ với $t\in(0;5)$.

Có $f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t+2}}-\dfrac{1}{2\sqrt{5-t}}$.

$f'(t)=0\Rightarrow\dfrac{1}{2\sqrt{t+3}}-\dfrac{1}{2\sqrt{5-t}}=0\Rightarrow\sqrt{t+3}=\sqrt{5-t}\Rightarrow t+3=5-t\Rightarrow t=1$.

Bảng biến thiên

| $t$ | $0$ | | $\dfrac{3}{2}$ | | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(t)$ | $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ | ↗ | $4$ | ↘ | $2\sqrt{2}$ |

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $m\ge 4$.

**Câu 29.** **(THPT Ngô Quyền - Hải Phòng - 2018)** Tìm tất cả các giá trị của $m$ để bất phương trình $m.4^{x^2-2x-1}-(1-2m).10^{x^2-2x-1}+m.25^{x^2-2x-1}\le 0$ nghiệm đúng với mọi $x\in\left[\dfrac{1}{2};2\right]$.

**A.** $m<0$. **B.** $m\ge\dfrac{100}{841}$. **C.** $m\le\dfrac{1}{4}$. **D.** $m\le\dfrac{100}{841}$.

**Lời giải**

$m.4^{x^2-2x-1}-(1-2m).10^{x^2-2x-1}+m.25^{x^2-2x-1}\le 0$

$\Leftrightarrow m-(1-2m).\left(\frac{5}{2}\right)^{x^2-2x-1}+m.\left(\frac{5}{2}\right)^{2.(x^2-2x-1)}\le 0\ \ (1)$

Đặt $t=\left(\frac{5}{2}\right)^{x^2-2x-1}$, Xét $u(x)=x^2-2x-1,\ \forall x\left[\frac{1}{2};2\right]$.

$u'(x)=2x-2;\ u'(x)=0\Leftrightarrow x=1$

$u\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{7}{4};\ u(1)=-2;u(2)=-1\Rightarrow \min\limits_{\left[\frac{1}{2};2\right]}u(x)=-2,\ \max\limits_{\left[\frac{1}{2};2\right]}u(x)=-1.$

$\Rightarrow \frac{4}{25}\le t\le \frac{2}{5}$

$(1)\Leftrightarrow m-(1-2m).t+m.t^2\le 0$

$\Leftrightarrow mt^2-(1-2m)t+m\le 0$

$\Leftrightarrow m\left(t^2+2t+1\right)\le t$

$\Leftrightarrow m\le \frac{t}{t^2+2t+1}$

Xét hàm số $f(t)=\frac{t}{t^2+2t+1},t\in\left[\frac{4}{25};\frac{2}{5}\right]$

$f'(t)=\frac{-t^2+1}{\left(t^2+2t+1\right)};f'(t)=0\Leftrightarrow -t^2+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1(l)\\ t=1\ \ (l)\end{array}\right.$

Nguyễn Bảo Vương

$f\left(\frac{4}{25}\right)=\frac{100}{841};\ f\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{10}{49}.$

$\Rightarrow \min\limits_{\left[\frac{4}{25};\frac{2}{5}\right]}f(t)=\frac{100}{841}.$

Vậy $m\le\frac{100}{841}$ thì bất phương trình nghiệm đúng với mọi $x\in\left[\frac{1}{2};2\right]$.

## DẠNG 3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH NHIỀU ẨN

**Câu 1.** **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Có bao nhiêu số nguyên $x$ sao cho ứng với mỗi $x$ có không quá 728 số nguyên $y$ thỏa mãn $\log_4\left(x^2+y\right)\ge\log_3(x+y)$?

**A.** 59. **B.** 58. **C.** 116. **D.** 115.

**Lời giải**

**Chọn C.**

Với mọi $x\in\mathbb{Z}$ ta có $x^2\ge x$.

Xét hàm số $f(y)=\log_3(x+y)-\log_4\left(x^2+y\right)$.

Tập xác định $D=(-x;+\infty)$ (do $y>-x\Rightarrow y>-x^2$).

$f'(y)=\frac{1}{(x+y)\ln 3}-\frac{1}{\left(x^2+y\right)\ln 4}\ge 0,\ \forall x\in D$ (do $x^2+y\ge x+y>0$, $\ln 4>\ln 3$)

$\Rightarrow f$ tăng trên D.

Ta có $f(-x+1)=\log_3(x-x+1)-\log_4\left(x^2-x+1\right)\le 0$.

Có không quá 728 số nguyên $y$ thỏa mãn $f(y)\le 0$

$\Leftrightarrow f(-x+729)>0\Leftrightarrow \log_3 729-\log_4\left(x^2-x+729\right)>0$

$\Leftrightarrow x^2-x+729-4^6<0\Leftrightarrow x^2-x-3367<0$

$\Leftrightarrow -57,5\le x\le 58,5$

Mà $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{-57,-56,...,58\}$.

Vậy có $58-(-57)+1=116$ số nguyên $x$ thỏa.

**Câu 2.** **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Có bao nhiêu số nguyên $x$ sao cho ứng với mỗi $x$ có không quá 242 số nguyên $y$ thỏa mãn $\log_4\left(x^2+y\right)\ge\log_3(x+y)$?

**A.** 55. **B.** 28. **C.** 29. **D.** 56.

**Lời giải**

**Chọn D**

Điều kiện: $\begin{cases}x^2+y>0\\x+y>0\end{cases}$.

Đặt $\log_3(x+y)=t$, ta có $\begin{cases}x^2+y\ge 4^t\\x+y=3^t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\boxed{x^2-x\ge 4^t-3^t}\ (*)\\y=3^t-x\end{cases}$.

Nhận xét rằng hàm số $f(t)=4^t-3^t$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ và $f(t)>0$ với mọi $t>0$

Gọi $n\in\mathbb{Z}$ thỏa $4^n-3^n=x^2-x$, khi đó $(*)\Leftrightarrow\boxed{t\le n}$

Từ đó, ta có $-x<y=3^t-x\le 3^n-x$.

Mặt khác, vì có không quá 242 số nguyên $y$ thỏa mãn đề bài nên $3^n\le 242\Leftrightarrow n\le\log_3 242$.

Từ đó, suy ra $\boxed{x^2-x\le 4^{\log_3 242}-242}\Leftrightarrow\boxed{-27,4\le x\le 28,4}$.

Mà $x\in\mathbb{Z}$ nên $x\in\{-27,-26,...,27,28\}$.

Vậy có 56 giá trị nguyên của $x$ thỏa yêu cầu đề bài.

**Câu 3.** **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Có bao nhiêu số nguyên $x$ sao cho ứng với mỗi $x$ có không quá 127 số nguyên $y$ thỏa mãn $\log_3\left(x^2+y\right)\ge\log_2(x+y)$?

**A.** 89. **B.** 46. **C.** 45. **D.** 90.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $\log_3\left(x^2+y\right)\ge\log_2(x+y)(1)$

Đặt $t=x+y\in\mathbb{N}^*$ (do $x,y\in\mathbb{Z},x+y>0$)

$(1)\Leftrightarrow\log_3\left(x^2-x+t\right)\ge\log_2 t\Leftrightarrow g(t)=\log_2 t-\log_3\left(x^2-x+t\right)\le 0(2)$

Đạo hàm $g'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}-\dfrac{1}{\left(x^2-x+t\right)\ln 3}>0$ với mọi $y$. Do đó $g(t)$ đồng biến trên $[1;+\infty)$

Vì mỗi $x$ nguyên có không quá 127 giá trị $t \in \mathbb{N}^*$ nên ta có

$g(128) > 0 \Leftrightarrow \log_2 128 - \log_3\left(x^2 - x + 128\right) > 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - x + 128 < 3^7 \Leftrightarrow -44{,}8 \le x \le 45{,}8$

Như vậy có 90 giá trị thỏa yêu cầu bài toán

**Câu 4.** **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Có bao nhiêu số nguyên $x$ sao cho ứng với mỗi $x$ có không quá 255 số nguyên $y$ thỏa mãn $\log_3\left(x^2 + y\right) \ge \log_2\left(x + y\right)$?

**A.** 80. **B.** 79. **C.** 157. **D.** 158

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có: $\log_3\left(x^2 + y\right) \ge \log_2\left(x + y\right) \Leftrightarrow x^2 + y \ge 3^{\log_2(x+y)} \Leftrightarrow x^2 + y \ge \left(x + y\right)^{\log_2 3}$ $(1)$

Đk: $x + y \ge 1$ ( do $x, y \in \mathbb{Z}$, $x + y > 0$)

Đặt $t = x + y \ge 1$, nên từ $(1) \Rightarrow x^2 - x \ge t^{\log_2 3} - t$ $(2)$

Để $(1)$ không có quá 255 nghiệm nguyên $y$ khi và chỉ khi bất phương trình $(2)$ có không quá 255 nghiệm nguyên dương $t$.

Đặt $M = f(255)$ với $f(t) = t^{\log_2 3} - t$.

Vì $f$ là hàm đồng biến trên $[1, +\infty)$ nên $(2) \Leftrightarrow 1 \le t \le f^{-1}\left(x^2 - x\right)$ khi $x^2 - x \ge 0$.

Vậy $(2)$ có không quá 255 nghiệm nguyên $\Leftrightarrow f^{-1}\left(x^2 - x\right) \le 255 \Leftrightarrow x^2 - x \le 255 \Leftrightarrow -78 \le x \le 79$ $\left(x \in \mathbb{Z}\right)$.

Vậy có 158 số nguyên $x$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 5.** **(Mã 102 - 2020 Lần 2)** Xét các số thực thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1} \le \left(x^2 + y^2 - 2x + 2\right)4^x$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{8x + 4}{2x - y + 1}$ gần với giá trị nào sau đây nhất?

**A.** 9 **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

**Lời giải**

**Chọn C**

$2^{x^2+y^2+1} \le \left(x^2 + y^2 - 2x + 2\right).4^x$

$2^{x^2+y^2-2x+1} \le x^2 + y^2 - 2x + 2$

$2^{(x-1)^2+y^2} - \left[\left(x-1\right)^2 + y^2\right] - 1 \le 0 (1)$

Đặt $t = \left(x-1\right)^2 + y^2$

$(1) \Leftrightarrow 2^t - t - 1 \le 0 \Leftrightarrow 0 \le t \le 1 \Leftrightarrow \left(x-1\right)^2 + y^2 \le 1$

$P = \dfrac{8x + 4}{2x - y + 1} \Rightarrow \left(2P - 8\right).x - P.y + \left(P - 4\right) = 0$

Yêu cầu bài toán tương đương:

$\dfrac{\left|2P - 8 + P - 4\right|}{\sqrt{\left(2P - 8\right)^2 + P^2}} \le 1 \Leftrightarrow \left|3P - 12\right| \le \sqrt{\left(2P - 8\right)^2 + P^2} \Leftrightarrow 5 - \sqrt{5} \le P \le 5 + \sqrt{5}$

Nguyễn Bảo Vương

**Câu 6.** **(Mã 103 - 2020 Lần 2)** Xét các số thực $x, y$ thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1} \le \left(x^2+y^2-2x+2\right).4^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{8x+4}{2x-y+1}$ **gần nhất** với số nào dưới đây

**A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

**Lời giải**

**Chọn C**

Nhận xét $x^2+y^2-2x+2>0 \forall x; y$

Bất phương trình $2^{x^2+y^2+1} \le \left(x^2+y^2-2x+2\right).4^x \Leftrightarrow \dfrac{2^{x^2+y^2+1}}{2^{2x}} \le \left(x^2+y^2-2x+2\right) \Leftrightarrow 2^{x^2+y^2-2x+1} \le \left(x^2+y^2-2x+2\right).$

Đặt $t=x^2+y^2-2x+1$

Bất phương trình $\Leftrightarrow 2^t \le t+1 \Leftrightarrow 2^t-t-1 \le 0$

Đặt $f(t)=2^t-t-1$. Ta thấy $f(0)=f(1)=0$.

Ta có $f'(t)=2^t \ln 2-1$

$f'(t)=0 \Leftrightarrow 2^t \ln 2=1 \Leftrightarrow t=\log_2\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right) \approx 0,52$

| $t$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\log_2\left(\frac{1}{\ln 2}\right)$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | | $-$ | | $0$ | | $+$ | | |
| $f(t)$ | | $\searrow$ | $0$ | | | $\nearrow$ | $0$ | | |

Quan sats BBT ta thấy $f(t) \le 0 \Leftrightarrow 0 \le t \le 1$

$0 \le x^2+y^2-2x+1 \le 1 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2 \le 1 \quad (1)$

Xét $P=\dfrac{8x+4}{2x-y+1} \Leftrightarrow 2Px-Py+P=8x+4$

$\Leftrightarrow P-4=(8-2P)x+Py$

$\Leftrightarrow P-4+2P-8=(8-2P)x+2P-8+Py$

$\Leftrightarrow 3P-12=(8-2P)(x-1)+Py$

$\Leftrightarrow (3P-12)^2=\left[(8-2P)(x-1)+Py\right]^2 \le \left[(8-2P)^2+P^2\right]\left[(x-1)^2+y^2\right]$

Thế $(1)$ vào ta có $(3P-12)^2 \le \left[(8-2P)^2+P^2\right] \Leftrightarrow 4P^2-40P+80 \le 0 \Leftrightarrow 5-\sqrt{5} \le P \le 5+\sqrt{5}$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases} \dfrac{8-2P}{P}=\dfrac{x-1}{y}=\dfrac{-2}{\sqrt{5}} \\ (x-1)^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=\dfrac{-2}{\sqrt{5}}y \\ \left(\dfrac{-2}{\sqrt{5}}y\right)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=\dfrac{-2}{\sqrt{5}}y \\ y=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{\sqrt{5}}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{5}{3} \\ y=\dfrac{-\sqrt{5}}{3} \end{cases} \end{array}\right.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P$ là $5-\sqrt{5}\approx 2,76$ gần giá trị $3$ nhất.

**Câu 7.** **(Mã 101 - 2020 Lần 2)** Xét các số thực $x, y$ thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1} \le \left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{4y}{2x+y+1}$ **gần nhất** với số nào dưới đây?

**A.** $-2$. **B.** $-3$. **C.** $-5$. **D.** $-4$.

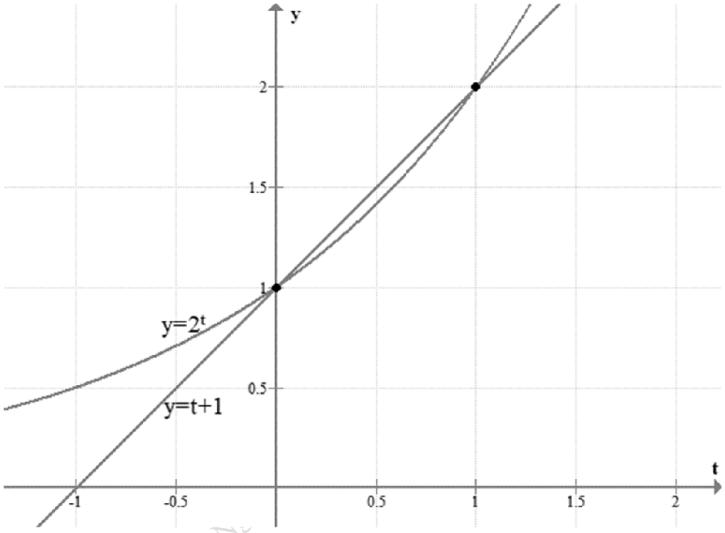
**Lời giải**

**Chọn B**

Ta có $2^{x^2+y^2+1} \le \left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x \Leftrightarrow 2^{x^2+y^2+1-2x} \le x^2+y^2-2x+2$

$\Leftrightarrow 2^{(x-1)^2+y^2} \le (x-1)^2+y^2+1$. Đặt $t=(x-1)^2+y^2\,(t\ge 0)$, ta được BPT: $2^t \le t+1$.

Đồ thị hàm số $y=2^t$ và đồ thị hàm số $y=t+1$ như sau:




Từ đồ thị suy ra $2^t \le t+1 \Leftrightarrow 0\le t\le 1 \Rightarrow (x-1)^2+y^2 \le 1$. Do đó tập hợp các cặp số $(x;y)$ thỏa mãn thuộc hình tròn $(C)$ tâm $I(1;0), R=1$.

Ta có $P=\dfrac{4y}{2x+y+1} \Leftrightarrow 2Px+(P-4)y+P=0$ là phương trình của đường thẳng $d$.

Do $d$ và $(C)$ có điểm chung $\Leftrightarrow d\left(I,(d)\right) \le R \Leftrightarrow \dfrac{|3P|}{\sqrt{4P^2+(P-4)^2}} \le 1 \Leftrightarrow 4P^2+8P-16\le 0$

$\Leftrightarrow -1-\sqrt{5} \le P \le -1+\sqrt{5}$, suy ra giá trị nhỏ nhất của $P$ **gần nhất** với $-3$.

**Câu 8.** **(Mã 104 - 2020 Lần 2)** Xét các số thực $x$ và $y$ thỏa mãn $2^{x^2+y^2+1} \le \left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{4y}{2x+y+1}$ **gần nhất** với số nào dưới đây?

**A.** $1$. **B.** $0$. **C.** $3$. **D.** $2$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có: $2^{x^2+y^2+1} \le \left(x^2+y^2-2x+2\right)4^x \Leftrightarrow 2^{x^2-2x+1+y^2} \le \left(x^2-2x+1\right)+y^2+1$.

Đặt $t=x^2-2x+1+y^2 \Rightarrow t\ge 0$. Khi đó ta có $2^t \le t+1,\ \forall t\ge 0$.

Đặt $f(t)=2^t-t-1,\ \forall t\ge 0$, ta có: $f'(t)=2^t\ln 2-1$, cho $f'(t)=0$.

Ta nhận thấy phương trình $f'(t)=0$ có một nghiệm nên phương trình $f(t)=0$ có tối đa hai nghiệm.

Mặt khác ta có $f(0)=f(1)=0$. Suy ra phương trình $f(t)=0$ có hai nghiệm $t=1$ và $t=0$.

Khi đó ta có bảng xét dấu của hàm số $f(t)$ như sau:

| t | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f(t) | 0 | − | 0 | + | |

Khi đó $f(t)\le 0\Leftrightarrow t\in[0;1]$. Suy ra $x^2-2x+1+y^2\le 1\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2\le 1$.

Khi đó tập hợp các điểm $M(x;y)$ là một hình tròn $(S)$ tâm $I(1;0)$, bán kính $R=1$.

Ta có: $P=\dfrac{4y}{2x+y+1}\Leftrightarrow 2Px+(P-4)y+P=0$.

Khi đó ta cũng có tập hợp các điểm $M(x;y)$ là một đường thẳng $\Delta: 2Px+(P-4)y+P=0$.

Để $\Delta$ và $(S)$ có điểm chung, ta suy ra $d(I,\Delta)\le 1$.

$$\Leftrightarrow \frac{|2P+P|}{\sqrt{(2P)^2+(P-4)^2}}\le 1\Leftrightarrow 3|P|\le\sqrt{5P^2-8P+16}$$

$$\Leftrightarrow 4P^2+8P-16\le 0\Leftrightarrow -1-\sqrt{5}\le P\le -1+\sqrt{5}.$$

Ta suy ra $P_{\max}=-1+\sqrt{5}$. Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}\\ y=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\end{cases}$

Nguyễn Bảo Vương

**Câu 9.** **(Mã 101 - 2020 Lần 1)** Xét các số thực không âm $x$ và $y$ thỏa mãn $2x+y.4^{x+y-1}\ge 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+4x+6y$ bằng

**A.** $\dfrac{33}{4}$. **B.** $\dfrac{65}{8}$. **C.** $\dfrac{49}{8}$. **D.** $\dfrac{57}{8}$.

**Lời giải**

**Chọn B.**

**Cách 1:**

**Nhận xét:** Giá trị của $x,y$ thỏa mãn phương trình $2x+y\cdot 4^{x+y-1}=3(1)$ sẽ làm cho biểu thức $P$ nhỏ nhất. Đặt $a=x+y$, từ $(1)$ ta được phương trình

$$4^{a-1}+\frac{2}{y}.a-2-\frac{3}{y}=0.$$

Nhận thấy $y=4^{a-1}+\dfrac{2}{y}.a-2-\dfrac{3}{y}$ là hàm số đồng biến theo biến $a$, nên phương trình trên có nghiệm duy nhất $a=\dfrac{3}{2}\Rightarrow x+y=\dfrac{3}{2}$.

Ta viết lại biểu thức $P=(x+y)^2+4(x+y)+2\left(y-\dfrac{1}{4}\right)-\dfrac{1}{8}=\dfrac{65}{8}$. Vậy $P_{\min}=\dfrac{65}{8}$.

**Cách 2:**

Với mọi $x,y$ không âm ta có

$2x+y.4^{x+y-1}\ge 3\Leftrightarrow x+y.4^{x+y-\frac{3}{2}}\ge \frac{3}{2}\Leftrightarrow \left(x+y-\frac{3}{2}\right)+y.\left(4^{x+y-\frac{3}{2}}-1\right)\ge 0$ (1)

Nếu $x+y-\frac{3}{2}<0$ thì $\left(x+y-\frac{3}{2}\right)+y.\left(4^{x+y-\frac{3}{2}}-1\right)<0+y.\left(4^0-1\right)=0$ (vô lí)

Vậy $x+y\ge \frac{3}{2}$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhyakovski ta được

$P=x^2+y^2+4x+6y=(x+3)^2+(y+2)^2-13$

$\ge \frac{1}{2}(x+y+5)^2-13\ge \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+5\right)^2-13=\frac{65}{8}$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}x+y=\frac{3}{2}\\ x+3=y+2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}y=\frac{5}{4}\\ x=\frac{1}{4}\end{cases}$.

Vậy $\min P=\frac{65}{8}$.

**Câu 10.** **(Mã 102 - 2020 Lần 1)** Xét các số thực không âm $x$ và $y$ thỏa mãn $2x+y.4^{x+y-1}\ge 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+6x+4y$ bằng

**A.** $\frac{65}{8}$. **B.** $\frac{33}{4}$. **C.** $\frac{49}{8}$. **D.** $\frac{57}{8}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Ta có $2x+y.4^{x+y-1}\ge 3\Leftrightarrow y.2^{2x+2y-2}\ge 3-2x\Leftrightarrow \boxed{2y.2^{2y}\ge (3-2x).2^{3-2x}}$ (*)

Hàm số $f(t)=t.2^t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, nên từ (*) ta suy ra $2y\ge 3-2x\Leftrightarrow \boxed{2x+2y-3\ge 0}$ (1)

Ta thấy (1) bất phương trình bậc nhất có miền nghiệm là nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng $d:2x+2y-3=0$ (phần không chứa gốc tọa độ $O$), kể cả các điểm thuộc đường thẳng $d$.

Xét biểu thức $P=x^2+y^2+6x+4y\Leftrightarrow \boxed{(x+3)^2+(y+2)^2=P+13}$ (2)

Để $P$ tồn tại thì ta phải có $P+13\ge 0\Leftrightarrow P\ge -13$.

Trường hợp 1: Nếu $P=-13$ thì $x=-3;\ y=-2$ không thỏa (1). Do đó, trường hợp này không thể xảy ra.

Trường hợp 2: Với $P>-13$, ta thấy (2) là đường tròn $(C)$ có tâm $I(-3;-2)$ và bán kính $R=\sqrt{P+13}$.

Để $d$ và $(C)$ có điểm chung thì $d(I;d)\le R\Leftrightarrow \frac{13}{2\sqrt{2}}\le \sqrt{P+13}\Leftrightarrow \boxed{P\ge \frac{65}{8}}$.

Vậy $\boxed{\min P = \frac{65}{8}}$

**Câu 11.** **(Mã 103 - 2020 Lần 1)** Xét các số thực không âm $x$ và $y$ thỏa mãn $2x+y.4^{x+y-1} \ge 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 2x + 4y$ bằng

**A.** $\frac{33}{8}$. **B.** $\frac{9}{8}$. **C.** $\frac{21}{4}$. **D.** $\frac{41}{8}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $2x+y.4^{x+y-1} \ge 3 \Leftrightarrow (2x-3).4^{-x} + y.4^{y-1} \ge 0 \Leftrightarrow 2y.2^{2y} \ge (3-2x)2^{3-2x}$ (1)

Xét TH: $3-2x \le 0 \Leftrightarrow x \ge \frac{3}{2}$. (1) đúng với mọi giá trị $\begin{cases} x \ge \frac{3}{2} \Rightarrow P = x^2 + y^2 + 2x + 4y \ge \frac{21}{4} \ (2) \\ y \ge 0 \end{cases}$

Xét TH: $3-2x > 0 \Leftrightarrow 0 \le x < \frac{3}{2}$.

Xét hàm số $f(t) = t.2^t$ với $t \ge 0$

$\Rightarrow f'(t) = 2^t + t.2^t.\ln 2 > 0$ với mọi $t \ge 0$

(1) $\Leftrightarrow f(2y) \ge f(3-2x) \Leftrightarrow 2y \ge 3-2x \Leftrightarrow y \ge \frac{3}{2} - x$. Khi đó:

$$P = x^2 + y^2 + 2x + 4y \ge x^2 + \left(\frac{3}{2} - x\right)^2 + 2x + 2(3-2x) = 2x^2 - 5x + \frac{33}{4} = 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{41}{8} \ge \frac{41}{8} \ (3)$$

So sánh (2) và (3) ta thấy GTNN của $P$ là $\frac{41}{8}$ khi $x = \frac{5}{4}, y = \frac{1}{4}$.

**Câu 12.** **(Mã 104 - 2020 Lần 1)** Xét các số thực không âm $x$ và $y$ thỏa mãn $2x+y.4^{x+y-1} \ge 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + 4x + 2y$ bằng

**A.** $\frac{33}{8}$. **B.** $\frac{9}{8}$. **C.** $\frac{21}{4}$. **D.** $\frac{41}{8}$.

**Lời giải**

**Chọn D**

Ta có $2x+y.4^{x+y-1} \ge 3 \Leftrightarrow (2x-3).4^{-x} + y.4^{y-1} \ge 0 \Leftrightarrow 2y.2^{2y} \ge (3-2x)2^{3-2x}$ (1)

Xét TH $3-2x \le 0 \Leftrightarrow x \ge \frac{3}{2}$. (1) đúng với mọi giá trị $\begin{cases} x \ge \frac{3}{2} \Rightarrow P = x^2 + y^2 + 4x + 2y \ge \frac{33}{4} \ (2) \\ y \ge 0 \end{cases}$

Xét TH $3-2x > 0 \Leftrightarrow 0 \le x < \frac{3}{2}$.

Xét hàm số $f(t) = t.2^t$ với $t \ge 0$

$\Rightarrow f'(t) = 2^t + t.2^t.\ln 2 > 0$ với mọi $t \ge 0$

(1) $\Leftrightarrow f(2y) \ge f(3-2x)$

$\Leftrightarrow 2y \ge 3-2x$

$\Leftrightarrow y \ge \dfrac{3}{2}-x$

$\Rightarrow P = x^2+y^2+4x+2y \ge x^2+\left(\dfrac{3}{2}-x\right)^2+4x+(3-2x) = 2x^2-x+\dfrac{21}{4}$

$\Rightarrow P = 2\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{41}{8} \ge \dfrac{41}{8}$ (3)

So sánh (2) và (3) ta thấy GTNN của $P$ là $\dfrac{41}{8}$ khi $x=\dfrac{1}{4}, y=\dfrac{5}{4}$

**Câu 13.** **(Diệu Hiền - Cần Thơ - 2018)** Trong các nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn bất phương trình $\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \ge 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T = 2x+y$ bằng:

**A.** $\dfrac{9}{4}$. **B.** $\dfrac{9}{2}$. **C.** $\dfrac{9}{8}$. **D.** $9$.

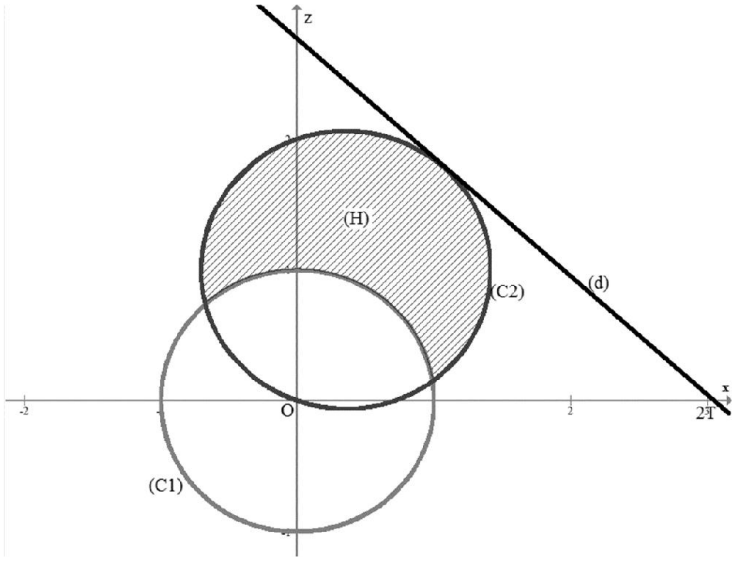
**Lời giải**

Trường hợp 1: $x^2+2y^2 > 1$. Đặt $\sqrt{2}y = z$. Suy ra $\Leftrightarrow x^2+z^2 > 1$ (1)

$\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \ge 1 \Leftrightarrow 2x+y \ge x^2+2y^2 \Leftrightarrow 2x+\dfrac{z}{\sqrt{2}} \ge x^2+z^2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+\left(z-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 \le \dfrac{9}{8}$ (2)

Tập hợp các điểm $M(x;z)$ là miền $(H)$ bao gồm miền ngoài của hình tròn $(C_1): x^2+z^2=1$ và miền trong của hình tròn $(C_2): (x-1)^2+\left(z-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \dfrac{9}{8}$.



Hệ $\begin{cases} T=2x+\dfrac{z}{\sqrt{2}} \\ (x-1)^2+\left(z-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 \le \dfrac{9}{8} \\ x^2+z^2>1 \end{cases}$ có nghiệm khi đường thẳng $d:2x+\dfrac{z}{\sqrt{2}}-T=0$ có điểm chung với miền $(H)$.

Để T đạt giá trị lớn nhất thì đường thẳng $d:2x+\dfrac{z}{\sqrt{2}}-T=0$ tiếp xúc với đường tròn $(C_2)$

$\Leftrightarrow d(I;d)=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$ với $I\left(1;\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ là tâm của đường tròn $(C_2)$.

$$\Leftrightarrow \frac{\left|2+\frac{1}{4}-T\right|}{\sqrt{4+\frac{1}{2}}}=\frac{3}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left|T-\frac{9}{4}\right|=\frac{9}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} T=0 \ (l) \\ T=\dfrac{9}{2} \end{array}\right.$$

Trường hợp 2: $0<x^2+2y^2<1$.

$$\log_{x^2+2y^2}(2x+y)\ge 1 \Leftrightarrow 2x+y\le x^2+2y^2 \Leftrightarrow T=2x+y<1 \text{ (loại).}$$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $T=2x+y$ là $\max T=\dfrac{9}{2}$.

**Câu 14.** **(Chuyên Lê Hồng Phong - Nam Định - 2020)** Có bao nhiêu bộ $(x;y)$ với $x,y$ nguyên và $1\le x,y\le 2020$ thỏa mãn $(xy+2x+4y+8)\log_3\left(\dfrac{2y}{y+2}\right)\le(2x+3y-xy-6)\log_2\left(\dfrac{2x+1}{x-3}\right)$?

**A.** 2017. **B.** 4034. **C.** 2. **D.** $2017\times 2020$.

**Lời giải**

**Chọn B**

+ Điều kiện $\begin{cases} x,y\in\mathbb{N}^*: x,y\le 2020 \\ \dfrac{2x+1}{x-3}>0, \dfrac{2y}{y+2}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x,y\in\mathbb{N}^*: x,y\le 2020 \\ x>3, y>0 \end{cases}$.

BPT cho có dạng $(x-3)(y-2)\log_2\left(\dfrac{x+4}{x-3}+1\right)+(x+4)(y+2)\log_3\left(\dfrac{y-2}{y+2}+1\right)\le 0$ (*).

+ Xét $y=1$ thì (*) thành $-(x-3)\log_2\left(\dfrac{x+4}{x-3}+1\right)+3(x+4)\log_3\dfrac{2}{3}\le 0$, rõ ràng BPT này nghiệm đúng với mọi $x>3$ vì $-(x-3)<0$, $\log_2\left(\dfrac{x+4}{x-3}+1\right)>\log_2(0+1)=0$, $3(x+4)>0$, $\log_3\dfrac{2}{3}<0$.

Như vậy trường hợp này cho ta đúng 2017 bộ $(x;y)=(x;1)$ với $4\le x\le 2020, x\in\mathbb{N}$.

+ Xét $y=2$ thì (*) thành $4(x+4)\log_3 1\le 0$, BPT này cũng luôn đúng với mọi $x$ mà $4\le x\le 2020, x\in\mathbb{N}$.

Trường hợp này cho ta 2017 cặp $(x;y)$ nữa.

+ Với $y>2, x>3$ thì $VT(*)>0$ nên (*) không xảy ra.

Vậy có đúng 4034 bộ số $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 15. (THPT Quỳnh Lưu 3 Nghệ An 2019)** Cho hai số thực $a,b>0$ thỏa mãn $\log_2(a+1)+\log_2(b+1)\ge 6$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $a+b$ là.

**A.** $12$. **B.** $14$. **C.** $16$. **D.** $8$.

**Lời giải**

Ta có $\log_2(a+1)+\log_2(b+1)\ge 6 \Leftrightarrow \log_2\left[(a+1)(b+1)\right]\ge 6 \Leftrightarrow (a+1)(b+1)\ge 64$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $a+1$ và $b+1$, ta được

$(a+1)+(b+1)\ge 2\sqrt{(a+1)(b+1)}\ge 2\sqrt{64}=16 \Leftrightarrow a+b+2\ge 16 \Leftrightarrow a+b\ge 14$

Dấu "=" xảy ra khi $a+1=b+1\Leftrightarrow a=b$.

Vậy $\min(a+b)=14$ khi $a=b=7$.

**Câu 16. (Liên Trường Thpt Tp Vinh Nghệ An 2019)** Trong các nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn bất phương trình $\log_{x^2+2y^2}(2x+y)\ge 1$. Khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức $T=2x+y$ là

**A.** $\frac{9}{4}$ **B.** $9$ **C.** $\frac{9}{2}$ **D.** $\frac{9}{8}$

**Lời giải**

- TH1: $x^2+2y^2>1$

Bất phương trình $\log_{x^2+2y^2}(2x+y)\ge 1 \Leftrightarrow 2x+y\ge x^2+2y^2$

$\Rightarrow 2x+y\ge x^2+2y^2>1$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhia-CopSky ta có

$$\left(2^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)\left(x^2+2y^2\right)\ge (2x+y)^2$$

$$\Rightarrow x^2+2y^2\ge\frac{2(2x+y)^2}{9}\Rightarrow 2x+y\ge\frac{2(2x+y)^2}{9}\Leftrightarrow (2x+y)\left(2x+y-\frac{9}{2}\right)\le 0\Rightarrow 2x+y\in\left(1;\frac{9}{2}\right]$$

Giá trị lớn nhất của $T=2x+y=\frac{9}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $x=2;y=\frac{1}{2}$

- TH2: $0<x^2+2y^2<1$

Bất phương trình $\log_{x^2+2y^2}(2x+y)\ge 1 \Leftrightarrow 2x+y\le x^2+2y^2<1<\frac{9}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của $T=2x+y=\frac{9}{2}$.

**Câu 17. (Chuyên Vĩnh Phúc 2019)** Tìm tập $S$ tất cả các giá trị thực của tham số $m$ để tồn tại duy nhất cặp số $(x;y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-6+m^2)\ge 1$ và $x^2+y^2+2x-4y+1=0$.

**A.** $S=\{-1;1\}$ **B.** $S=\{-5;-1;1;5\}$

**C.** $S=\{-5;5\}$ **D.** $S=\{-7;-5;-1;1;5;7\}$

**Lời giải.**

Ta có

$\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-6+m^2)\ge 1 \Leftrightarrow 4x+4y-6+m^2\ge x^2+y^2+2 \Leftrightarrow x^2+y^2-4x-4y+8-m^2\le 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2\le m^2$ là một hình tròn $(C_1)$ tâm $I(2;2)$, bán kính $R_1=|m|$ với $m\ne 0$ hoặc

là điểm $I(2;2)$ với $m=0$ và $x^2+y^2+2x-4y+1=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-2)^2=4$ là một đường tròn $(C_2)$ tâm $J(-1;2)$, bán kính $R_2=2$.

TH1: Với $m=0$ ta có: $I(2;2)\notin(C_2)$ suy ra $m=0$ không thỏa mãn điều kiện bài toán.

TH2: Với $m\neq 0$.

Để hệ $\begin{cases}\log_{x^2+y^2+2}\left(4x+4y-6+m^2\right)\geq 1\\ x^2+y^2+2x-4y+1=0\end{cases}$ tồn tại duy nhất cặp số $(x;y)$ thì hình tròn $(C_1)$ và đường tròn $(C_2)$ tiếp xúc ngoài với nhau $\Leftrightarrow IJ=R_1+R_2 \Leftrightarrow \sqrt{3^2+0^2}=|m|+2 \Leftrightarrow |m|=1 \Leftrightarrow m=\pm 1$.

**Câu 18.** Tìm tham số $m$ để tồn tại **duy nhất** cặp số $(x;y)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau $\log_{2019}(x+y)\leq 0$ và $x+y+\sqrt{2xy+m}\geq 1$

**A.** $m=-\frac{1}{2}$. **B.** $m=0$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-\frac{1}{3}$.

**Lời giải**

**Chọn A**

Xét hệ bất phương trình: $\begin{cases}\log_{2019}(x+y)\leq 0 \quad (1)\\ x+y+\sqrt{2xy+m}\geq 1 \quad (2)\end{cases}$

$(x;y)$ là nghiệm hệ bất phương trình thì $(y;x)$ cũng là nghiệm của hệ bất phương trình. Do đó hệ có nghiệm duy nhất $\Rightarrow x=y$.

Khi đó: $(1)\Leftrightarrow 0<2x\leq 1 \Leftrightarrow 0<x\leq\frac{1}{2}$.

Với $0<x\leq\frac{1}{2}$; $(2)\Leftrightarrow 2x+\sqrt{2x^2+m}\geq 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2+m}\geq 1-2x$

$\Leftrightarrow 2x^2+m\geq 1-4x+4x^2$

$\Leftrightarrow 2x^2-4x+1\leq m$

Đặt $f(x)=2x^2-4x+1$

$f(x)$ nghịch biến trên $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ nên $f(x)\geq f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\ \forall x\in\left(0;\frac{1}{2}\right]$.

Do đó hệ có nghiệm **duy nhất** $\Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}$.

**Câu 19.** Trong tất cả các cặp $(x;y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4)\geq 1$. Tìm $m$ để tồn tại duy nhất cặp $(x;y)$ sao cho $x^2+y^2+2x-2y+2-m=0$.

**A.** $m=\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)^2$. **B.** $m=\sqrt{10}\pm\sqrt{2}$. **C.** $m=\sqrt{10}-\sqrt{2}$. **D.** $m=\left(\sqrt{10}\pm\sqrt{2}\right)^2$.

**Lời giải**

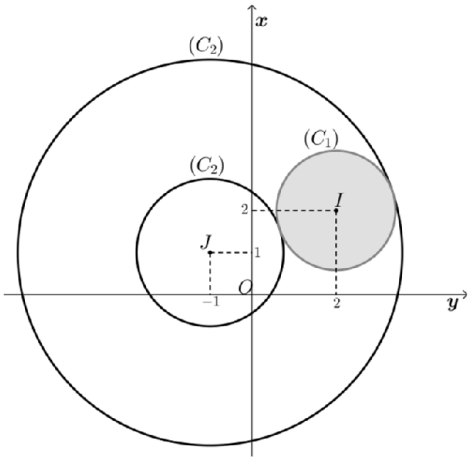
**Chọn D**

Với mọi $x,\ y\in\mathbb{R}$, ta luôn có $x^2+y^2+2\geq 2>1$ nên BPT

$\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4)\geq 1 \Leftrightarrow 4x+4y-4\geq x^2+y^2+2 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2\leq 2 \ (1)$.

BPT $(1)$ mô tả hình tròn tâm $I(2;2)$ và bán kính $R_1=\sqrt{2}$.

Mặt khác, phương trình $x^2+y^2+2x-2y+2-m=0\Leftrightarrow(x+1)^2+(y-1)^2=m$ $(2)$ nên để $(2)$ có nghiệm thì $m\geq 0$.




- TH1: $m=0$. Khi đó, $(2)\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=1\end{cases}$ không thỏa $(1)$ nên loại $m=0$.
- TH2: $m>0$. Khi đó, $(2)$ là phương trình đường tròn $(C_2)$ tâm $J(-1;1)$ và bán kính $R_2=\sqrt{m}$. Do đó, yêu cầu đề bài $\Leftrightarrow$ Hệ BPT $\begin{cases}(x-2)^2+(y-2)^2\leq 2\\(x+1)^2+(y-1)^2=m\end{cases}$ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow(C_2)$ tiếp xúc với đường tròn $(C_1):(x-2)^2+(y-2)^2=2$ cũng có tâm $I(2;2)$ và bán kính $R_1=\sqrt{2}$. Vì $IJ=\sqrt{10}>\sqrt{2}=R_1$ nên $(C_1)$ hoặc tiếp xúc ngoài, hoặc tiếp xúc trong với $(C_2)$.

➢ TH2a: $(C_1)$ tiếp xúc ngoài với $(C_2)\Leftrightarrow IJ=R_1+R_2\Leftrightarrow\sqrt{10}=\sqrt{2}+\sqrt{m}$

$\Leftrightarrow\sqrt{m}=\sqrt{10}-\sqrt{2}\Leftrightarrow m=\left(\sqrt{10}-\sqrt{2}\right)^2$.

➢ TH2b: $(C_1)$ tiếp xúc trong với $(C_2)\Leftrightarrow IJ=R_2-R_1\Leftrightarrow\sqrt{10}=\sqrt{m}-\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow\sqrt{m}=\sqrt{2}+\sqrt{10}\Leftrightarrow m=\left(\sqrt{10}+\sqrt{2}\right)^2$.

Vậy $m=\left(\sqrt{10}\pm\sqrt{2}\right)^2$.