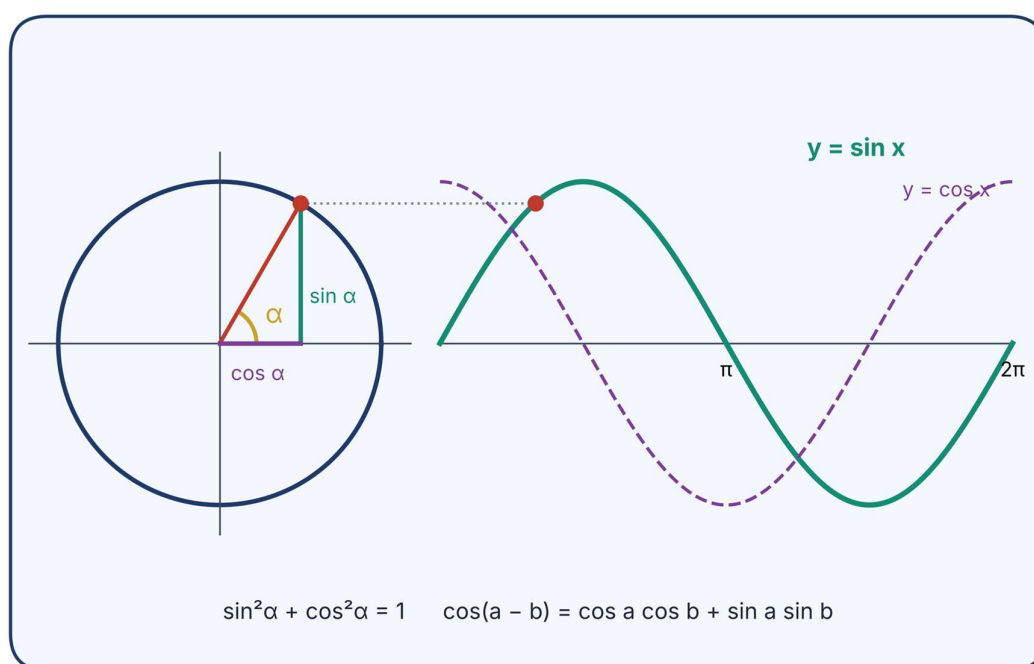




CHUYÊN ĐỀ TOÁN THPT – TOÁN 11 – ÔN THI ĐÁNH GIÁ NĂNG LỰC HSA
DÙNG GÓC ĐỂ ĐO THẾ GIỚI

LƯỢNG GIÁC
TỪ THUỐC ĐO BẦU TRỜI ĐẾN ĐỀ THI HSA



MỤC LỤC

MỞ ĐẦU – ĐO TRÁI ĐẤT BẰNG MỘT CÁI BÓNG	5
Mục tiêu của chuyên đề	6
Đối tượng và cách sử dụng	6
PHẦN I. CÂU CHUYỆN LỊCH SỬ – TỪ BẦU TRỜI XUỐNG TRANG GIẤY ..	7
1. Babylon và con số 360	7
2. Hipparchus và bảng dây cung (thế kỉ II TCN).....	7
3. Ptolemy và cuốn Almagest (khoảng năm 150)	8
4. Ấn Độ: chữ “sin” ra đời từ một lần dịch nhầm	8
5. Thế giới Hồi giáo: từ bóng nắng đến tang	9
6. Châu Âu: lượng giác thành môn học độc lập.....	9
7. Euler: sin và cos trở thành hàm số (1748)	9
8. Fourier: mọi dao động đều là tổng các hình sin (1807)	9
9. Radian và lượng giác ngày nay	10
PHẦN II. TỪ TÌNH HUỐNG ĐẾN KHÁI NIỆM	11
Tình huống 1. Bánh xe và quãng đường	11
Tình huống 2. Vòng quay khổng lồ	11
Tình huống 3. Khi nào cabin ở độ cao 85 m?	11
1. Góc lượng giác và số đo radian.....	11
2. Đường tròn lượng giác và giá trị lượng giác.....	12
3. Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt	14
4. Hệ thống công thức lượng giác	14
5. Hàm số lượng giác	15
6. Phương trình lượng giác cơ bản	17
7. Quy trình giải phương trình lượng giác	17
PHẦN III. CÁC DẠNG TOÁN VÀ VÍ DỤ PHÂN TÍCH.....	18
Dạng 1. Góc lượng giác, số đo radian, độ dài cung	18
Dạng 2. Giá trị lượng giác, dấu và cung liên kết	19
Dạng 3. Công thức cộng, nhân đôi, hạ bậc	20
Dạng 4. Biến đổi tổng – tích, đẳng thức và nhận dạng tam giác	21
Dạng 5. Hàm số lượng giác: tập xác định, tính chẵn lẻ, chu kì	22
Dạng 6. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất và tập giá trị	23
Dạng 7. Đọc và biến đổi đồ thị hàm số lượng giác.....	24
Dạng 8. Phương trình cơ bản và bài toán đếm nghiệm.....	25
Dạng 9. Phương trình bậc hai theo một hàm, phương trình $a\sin x + b\cos x = c$, phương trình đẳng cấp	27
Dạng 10. Phương trình đưa về dạng tích	28
Dạng 11. Phương trình lượng giác chứa tham số.....	29
Dạng 12. Bài toán thực tế: vòng quay, thủy triều, ngày đêm, dòng điện, đo đạc ...	30

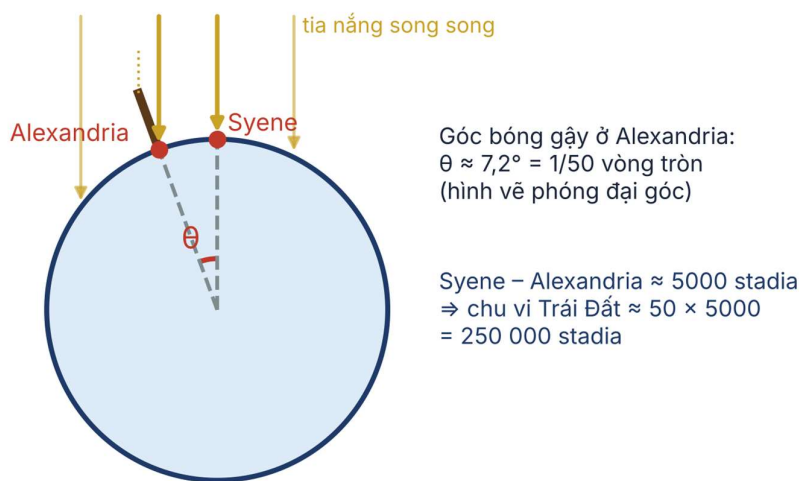
Dạng 13. Nâng cao – những ý tưởng Olympic	35
Dạng 14. Phương trình lượng giác trong đề thi tuyển sinh các trường Đại học (1997 – 2002)	37
Dạng 15. Phương trình lượng giác trong đề thi tuyển sinh Đại học chung (2002 – 2014)	41
Dạng 16. Phương trình không mẫu mực – phương pháp đánh giá	45
Dạng 17. Lượng giác trong đề thi học sinh giỏi và Olympic.....	46
PHẦN IV. LƯỢNG GIÁC QUANH TA.....	50
1. Thales và cái bóng của kim tự tháp.....	50
2. Đo bề rộng dòng sông mà không cần qua sông	50
3. Mặt Trời trên bầu trời Hà Nội	51
4. Mái đình, mái nhà và độ dốc.....	52
5. Định vị: GPS và điện thoại	53
6. Mọi thứ quay vòng: vòng quay, bánh xe, động cơ	53
7. Thể thao: góc ném bao nhiêu thì xa nhất?	53
8. Ánh sáng gãy khúc và cầu vồng.....	54
9. Thủy triều và ngày đêm	54
10. Dòng điện xoay chiều và lưới điện ba pha.....	54
11. Âm thanh và âm nhạc.....	55
12. Y học và công nghệ.....	56
PHẦN V. HỆ THỐNG BÀI TẬP	57
Mức 1 – Nhận biết.....	57
Mức 2 – Thông hiểu.....	57
Mức 3 – Vận dụng.....	58
Mức 4 – Vận dụng cao	59
Mức 5 – Thử thách (Olympic)	59
Mức 6 – Bài toán thực tế bổ sung	59
Mức 7 – Đề thi tuyển sinh và học sinh giỏi	60
PHẦN VI. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN	62
Mức 1 – Nhận biết.....	62
Mức 2 – Thông hiểu.....	62
Mức 3 – Vận dụng.....	62
Mức 4 – Vận dụng cao	63
Mức 5 – Thử thách.....	63
Mức 6 – Bài toán thực tế bổ sung	64
Mức 7 – Đề thi tuyển sinh và học sinh giỏi	64
PHẦN VII. THIẾT KẾ BUỔI DẠY VÀ ĐỀ LUYỆN TẬP THEO ĐỊNH DẠNG HSA	67
1. Kế hoạch buổi dạy (120 phút).....	67
2. Phiếu học tập	68

3. Đề luyện tập số 1 – Nền tảng (20 câu, 30 phút).....	68
4. Đề luyện tập số 2 – Công thức và hàm số (20 câu, 30 phút)	70
5. Đề luyện tập số 3 – Phương trình qua các kì thi tuyển sinh (20 câu, 30 phút) ...	71
6. Đề luyện tập số 4 – Tham số, giá trị lớn nhất và đếm nghiệm (20 câu, 30 phút)	74
7. Đề luyện tập số 5 – Nâng cao, liên môn và thực tế (20 câu, 30 phút)	75
8. Đáp án và hướng dẫn giải	77
LỜI KẾT.....	82
TÀI LIỆU THAM KHẢO.....	83

MỞ ĐẦU – ĐO TRÁI ĐẤT BẰNG MỘT CÁI BÓNG

Khoảng năm 240 trước Công nguyên, Eratosthenes, người quản lý thư viện Alexandria, nghe kể rằng ở thành Syene (nay là Aswan, Ai Cập), vào trưa ngày hạ chí, ánh nắng chiếu thẳng xuống đáy giếng: Mặt Trời ở đúng đỉnh đầu. Cùng thời điểm ấy ở Alexandria, cách Syene khoảng 5000 stadia về phía bắc, một cây gậy cắm thẳng đứng vẫn có bóng. Eratosthenes đo được góc giữa tia nắng và cây gậy: khoảng $\frac{1}{50}$ vòng tròn, tức $7,2^\circ$.

Vì tia nắng gần như song song, góc ấy cũng chính là góc ở tâm Trái Đất chắn cung Syene – Alexandria. Nếu $7,2^\circ$ ứng với 5000 stadia thì cả vòng 360° ứng với $50 \times 5000 = 250\,000$ stadia. Chỉ với một cái bóng, một phép chia và một ý tưởng về góc, con người lần đầu tiên ước lượng được kích thước hành tinh mình đang sống, với sai số mà nhiều nhà sử học cho là chỉ vài phần trăm.



Phép đo của Eratosthenes: góc của bóng gậy bằng góc ở tâm Trái Đất.

Đó là tinh thần của **lượng giác** (*trigonometry*, từ tiếng Hi Lạp *trigonon*: tam giác và *metron*: đo): dùng góc để đo những gì tay không với tới, từ chiều cao một ngọn tháp, khoảng cách tới một vì sao, đến nhịp điệu của sóng biển, dòng điện và âm thanh.

Lượng giác là nghệ thuật đo những thứ không thể đo trực tiếp.

Trước khi đọc tiếp, hãy thử sức với ba câu hỏi:

- Một người đứng cách chân cột cờ 20 m nhìn đỉnh cột dưới góc 40° ; lùi thêm 20 m thì góc nhìn chỉ còn 30° . Cột cờ cao bao nhiêu mét?
- Không dùng máy tính, tính tích $\tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \cdots \tan 89^\circ$.
- Trong một giây, điện áp của ổ cắm điện nhà bạn ($u = 220\sqrt{2}\sin 100\pi t$ vôn) đạt giá trị đúng 220 V bao nhiêu lần?

Câu trả lời (khoảng 37 m; đúng bằng 1; 100 lần) sẽ lần lượt xuất hiện trong chuyên đề.

Mục tiêu của chuyên đề

- **Về kiến thức:** nắm vững góc lượng giác, số đo radian, đường tròn lượng giác; giá trị lượng giác và các cung liên kết; hệ thống công thức lượng giác (cộng, nhân đôi, hạ bậc, biến đổi tổng – tích); hàm số lượng giác (tập xác định, tính chẵn lẻ, tuần hoàn, đồ thị); phương trình lượng giác cơ bản và thường gặp.
- **Về kĩ năng:** giải nhanh, chính xác các câu hỏi lượng giác theo định dạng bài thi đánh giá năng lực HSA của ĐHQG Hà Nội (trắc nghiệm 4 lựa chọn và điền đáp án), đặc biệt các dạng đếm nghiệm, tìm giá trị lớn nhất – nhỏ nhất, đọc đồ thị và bài toán thực tế.
- **Về tư duy:** nhìn mọi hiện tượng tuần hoàn (vòng quay, thủy triều, ngày đêm, dòng điện, âm thanh) bằng “con mắt hình sin”.

Đối tượng và cách sử dụng

Chuyên đề dành cho học sinh lớp 11, 12 ôn thi HSA và tốt nghiệp THPT, giáo viên dạy chương *Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác* (Toán 11, Chương trình GDPT 2018) và những ai yêu toán.

Cấu trúc chuyên đề

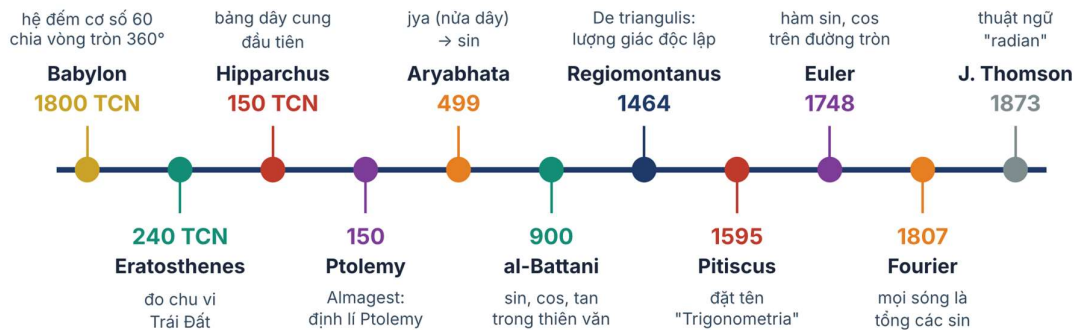
Phần	Nội dung	Mức độ
I	Câu chuyện lịch sử: từ Babylon, Hipparchus, Aryabhata đến Euler và Fourier	Đọc hiểu
II	Từ tình huống đến khái niệm; hệ thống công thức; hàm số lượng giác; phương trình cơ bản	Cơ bản
III	17 dạng toán, hơn 80 ví dụ phân tích chi tiết: Câu hỏi kiểu HSA, đề thi tuyển sinh các trường (1997 – 2002), đề thi chung (2002 – 2014), đề học sinh giỏi và Olympic	Cơ bản → Olympic
IV	Lượng giác quanh ta: đo đạc, vòng quay, thủy triều, ngày đêm, dòng điện, âm nhạc	Mở rộng
V	74 bài tập chia 7 mức độ, có đáp số và hướng dẫn	Luyện tập
VI	Đáp số và hướng dẫn giải	Tự kiểm tra
VII	Kế hoạch buổi dạy, phiếu học tập, 5 đề luyện tập mô phỏng HSA (100 câu) có đáp án	Dạy học

★ Về bài thi HSA.

Theo thông tin công bố cho kì thi đánh giá năng lực của ĐHQG Hà Nội, phần *Toán học và xử lí số liệu* gồm **50 câu trong 75 phút**: 35 câu trắc nghiệm 4 lựa chọn và 15 câu điền đáp án. Trung bình mỗi câu chỉ có khoảng 1,5 phút, nên chuyên đề đặc biệt chú trọng các **mẹo giải nhanh**, cách **loại trừ phương án** và cách **kiểm tra bằng máy tính cầm tay**.

PHẦN I. CÂU CHUYỆN LỊCH SỬ TỪ BẦU TRỜI XUỐNG TRANG GIẤY

Lượng giác không sinh ra trong lớp học mà trên những đài quan sát thiên văn. Suốt gần hai nghìn năm, nó là “người hầu” của thiên văn học: muốn biết vị trí các vì sao, phải tính toán với góc và cung tròn. Chỉ từ thế kỉ XV, lượng giác mới trở thành một môn học độc lập, và phải đến Euler (thế kỉ XVIII), sin, cos mới trở thành *hàm số* như ta học ngày nay.



Dòng thời gian gần bốn nghìn năm của lượng giác.

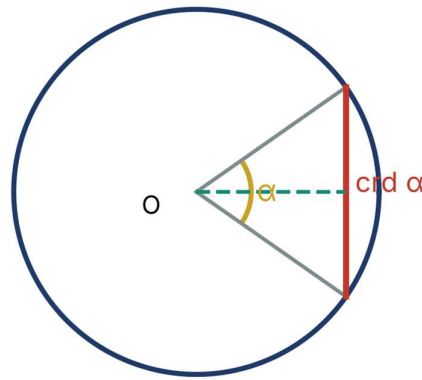
1. Babylon và con số 360

Người Babylon (khoảng 1800 năm TCN) dùng hệ đếm cơ số 60. Nhiều nhà sử học cho rằng việc chia vòng tròn thành 360 phần, mỗi phần chia 60 phút, mỗi phút 60 giây, bắt nguồn từ hệ đếm này, kết hợp với việc một năm có xấp xỉ 360 ngày. Tấm đất sét Plimpton 322 (khoảng 1800 năm TCN) còn chứa một bảng các bộ ba số Pythagore mà một số nhà nghiên cứu xem như một dạng “bảng lượng giác” sơ khai, dù cách hiểu này vẫn còn tranh luận.

2. Hipparchus và bảng dây cung (thế kỉ II TCN)

Hipparchus xứ Nicaea (khoảng 190 – 120 TCN) thường được gọi là “cha đẻ của lượng giác”. Ông lập bảng **dây cung**: với mỗi góc ở tâm α của một đường tròn bán kính cố định, ghi độ dài dây cung chắn góc đó. Ngày nay ta biết dây cung liên hệ với sin qua công thức

$$\text{crd } \alpha = 2R \sin \frac{\alpha}{2}.$$



$$\text{crd } \alpha = 2R \cdot \sin(\alpha/2)$$

Dây cung của Hipparchus chính là “hai lần sin của nửa góc”.

3. Ptolemy và cuốn Almagest (khoảng năm 150)

Claudius Ptolemy ở Alexandria viết bộ sách thiên văn *Almagest*, trong đó có bảng dây cung chi tiết đến từng nửa độ. Để lập bảng, ông dùng một định lý mang tên mình: *trong tứ giác nội tiếp, tích hai đường chéo bằng tổng các tích hai cặp cạnh đối*. Từ định lý Ptolemy suy ra được các công thức mà ngày nay ta viết là công thức cộng

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b.$$

Như vậy, công thức cộng mà học sinh lớp 11 học thuộc đã có “phiên bản hình học” từ gần hai nghìn năm trước.

4. Ấn Độ: chữ “sin” ra đời từ một lần dịch nhầm

Các nhà toán học Ấn Độ nhận ra rằng làm việc với **nửa dây cung** tiện hơn dây cung. Trong *Aryabhatiya* (năm 499), Aryabhata gọi nửa dây là *ardha-jya*, rồi gọi tắt là *jya* hay *jiva* (dây cung của cây cung). Người Ả Rập phiên âm thành *jiba*, nhưng chữ Ả Rập thường không ghi nguyên âm nên về sau bị đọc thành *jaib*, nghĩa là “vành, chỗ lõm, nếp gấp”. Khi dịch sang tiếng Latin ở thế kỷ XII, *jaib* được dịch nghĩa thành *sinus*: chữ **sin** ra đời từ đó.

❖ Góc lịch sử.

Chữ **cosin** xuất hiện muộn hơn nhiều: năm 1620, Edmund Gunter viết *co-sinus*, nghĩa là “sin của góc phụ” (*complementi sinus*). Chữ **tangent** (tiếp tuyến) và **secant** (cát tuyến) do Thomas Fincke đặt năm 1583.

Chính vì thế, “cos” của một góc bằng “sin” của góc phụ với nó: $\cos \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$.

5. Thế giới Hồi giáo: từ bóng nắng đến tang

Các nhà thiên văn Hồi giáo như al-Battani (khoảng 858 – 929) và Abu al-Wafa (940 – 998) hoàn thiện bảng sin và dùng **bóng của một cây gậy** để tính thời gian cầu nguyện. Độ dài bóng của gậy cao 1 đơn vị khi Mặt Trời ở độ cao α chính là $\cot\alpha$: đó là nguồn gốc của các hàm tang, cotang. Nasir al-Din al-Tusi (1201 – 1274) là một trong những người đầu tiên trình bày lượng giác như một môn học riêng, tách khỏi thiên văn.

6. Châu Âu: lượng giác thành môn học độc lập

Năm 1464, Regiomontanus hoàn thành cuốn *De triangulis omnimodis* (Về các loại tam giác), in năm 1533, trình bày hệ thống cách giải tam giác phẳng và cầu. Năm 1595, Bartholomaeus Pitiscus đặt tên cuốn sách của mình là *Trigonometria*, và từ đó môn học có tên gọi chính thức. François Viète (cuối thế kỉ XVI) tìm ra nhiều công thức góc bội và dùng lượng giác để giải phương trình bậc ba.

7. Euler: sin và cos trở thành hàm số (1748)

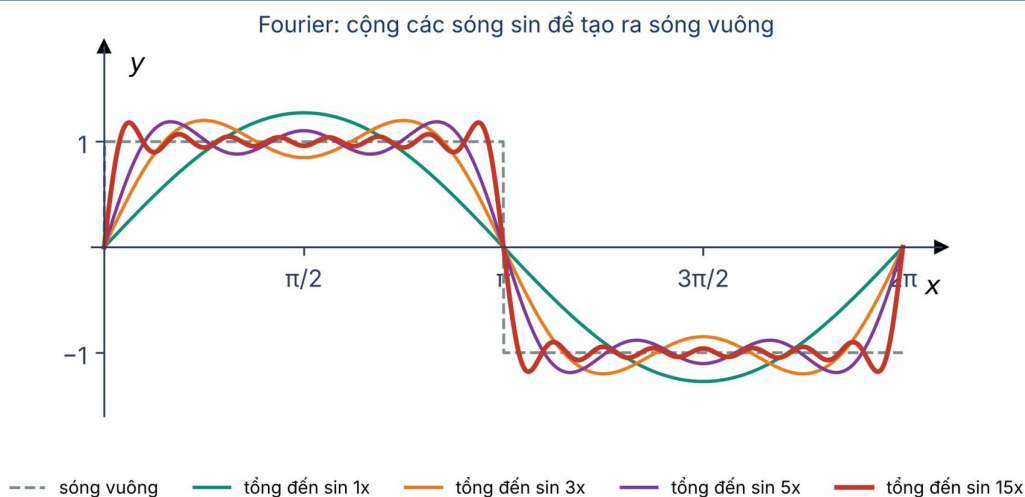
Trong *Introductio in analysin infinitorum* (1748), Leonhard Euler định nghĩa sin và cos bằng **tọa độ của một điểm trên đường tròn đơn vị**, tức là *đường tròn lượng giác* trong sách giáo khoa hiện nay, và coi chúng là hàm số của một biến số thực. Ông cũng tìm ra công thức nổi tiếng

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

nối liền lượng giác với hàm mũ. Thay $x = \pi$ ta được $e^{i\pi} + 1 = 0$, thường được gọi là “đẳng thức đẹp nhất của toán học”.

8. Fourier: mọi dao động đều là tổng các hình sin (1807)

Năm 1807, khi nghiên cứu sự truyền nhiệt, Joseph Fourier đưa ra một ý tưởng táo bạo: *mọi hàm tuần hoàn (đủ “tốt”) đều có thể viết thành tổng của các hàm sin và cos*. Ý tưởng này ban đầu bị nhiều nhà toán học hoài nghi, nhưng ngày nay nó là nền tảng của xử lí âm thanh, hình ảnh, nén dữ liệu (MP3, JPEG), điện thoại di động và chụp cộng hưởng từ (MRI).



Cộng càng nhiều sóng sin, ta càng tiến gần tới một sóng vuông.

9. Radian và lượng giác ngày nay

Đơn vị **radian** (góc ở tâm chắn cung có độ dài bằng bán kính) được dùng từ thời Roger Cotes và Euler, nhưng chữ *radian* chỉ xuất hiện năm 1873 trong đề thi do James Thomson soạn tại Belfast. Radian làm cho các công thức giải tích trở nên đơn giản, chẳng hạn $(\sin x)' = \cos x$ và $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ chỉ đúng khi x đo bằng radian.

Ở Việt Nam, theo Chương trình GDPT 2018, chủ đề *Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác* là chương đầu tiên của Toán 11.

Lượng giác xuất hiện thường xuyên trong đề thi tốt nghiệp THPT và các kì thi đánh giá năng lực như HSA, với các câu hỏi đếm nghiệm, tìm giá trị lớn nhất – nhỏ nhất, đọc đồ thị và mô hình hóa thực tế.

Mọi thứ quay vòng đều có một hàm sin ẩn bên trong.

PHẦN II. TỪ TÌNH HUỐNG ĐẾN KHÁI NIỆM

Tình huống 1. Bánh xe và quãng đường

Bánh xe đạp có đường kính 680 mm. Khi bánh xe quay được 10 vòng, xe đi được bao xa? Mỗi vòng, một điểm trên vành bánh vạch ra cung dài πd , nên quãng đường là $10 \cdot \pi \cdot 0,68 \approx 21,4$ m. Nếu bánh xe chỉ quay một góc α thì sao?

Ta cần một cách đo góc gắn trực tiếp với độ dài cung: đó là **radian**.

Tình huống 2. Vòng quay không lồ

Một cabin trên vòng quay đường kính 110 m, tâm cao 60 m so với mặt đất. Khi vòng quay đã quay một góc α kể từ lúc cabin ở điểm thấp nhất, cabin cao bao nhiêu? Câu trả lời $h = 60 - 55\cos\alpha$ cho thấy: độ cao là một **hàm số** của góc quay, và vì vòng quay cứ lặp lại, hàm số ấy **tuần hoàn**.

Tình huống 3. Khi nào cabin ở độ cao 85 m?

Giải $60 - 55\cos\alpha = 85$, tức $\cos\alpha = -\frac{5}{11}$. Có vô số góc thỏa mãn (mỗi vòng quay hai lần), và ta cần biết **tất cả** chúng: đó là **phương trình lượng giác**.

★ Nhận xét.

Ba tình huống dẫn tới ba khái niệm trụ cột của chương: *số đo radian*, *hàm số lượng giác* và *phương trình lượng giác*.

Tất cả được xây dựng trên một hình vẽ duy nhất: **đường tròn lượng giác**.

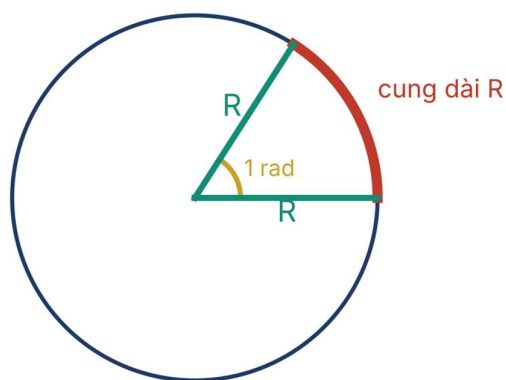
1. Góc lượng giác và số đo radian

■ Radian.

Trên đường tròn bán kính R , cung có độ dài bằng R được gọi là cung có số đo **1 radian**.

Cung có số đo α rad có độ dài $\ell = R\alpha$. Ta có π rad = 180° , nên 1 rad = $\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57,3^\circ$

và $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ rad.



$$1 \text{ rad} \approx 57,3^\circ; \pi \text{ rad} = 180^\circ; \ell = R \cdot \alpha$$

Một radian: góc ở tâm chắn cung có độ dài bằng bán kính.

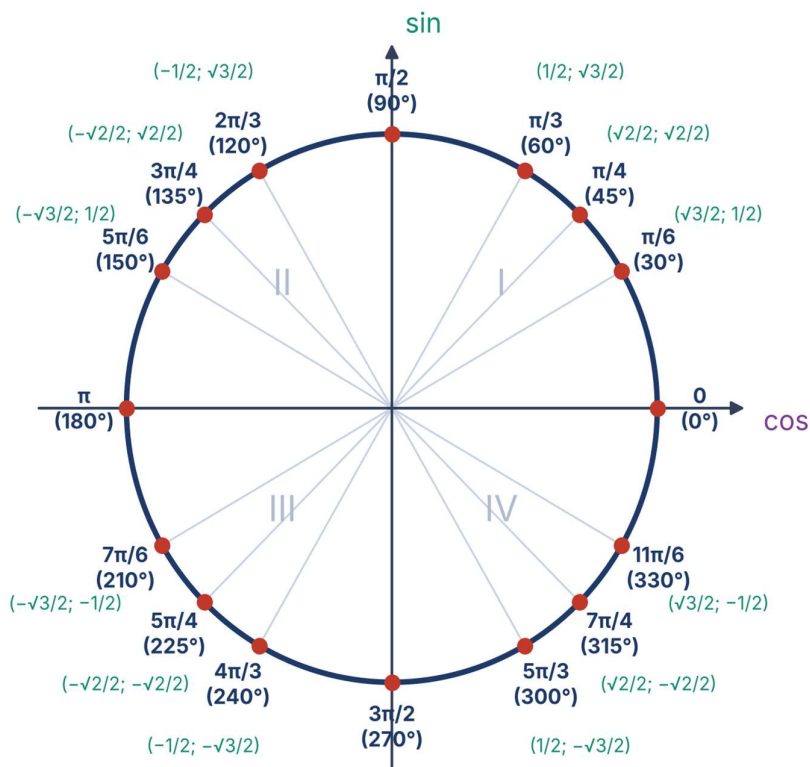
Góc lượng giác (Ou, Ov) là góc tạo bởi tia Om quay từ Ou đến Ov ; chiều dương là chiều ngược kim đồng hồ. Các góc lượng giác cùng tia đầu, tia cuối có số đo sai khác nhau một bội của 2π : $\alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2. Đường tròn lượng giác và giá trị lượng giác

■ Giá trị lượng giác.

Trên đường tròn đơn vị (tâm O , bán kính 1, chiều dương ngược kim đồng hồ, gốc $A(1; 0)$), gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn góc α . Khi đó

$$\cos \alpha = x, \quad \sin \alpha = y, \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (\cos \alpha \neq 0), \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\sin \alpha \neq 0).$$



Đường tròn lượng giác với các góc đặc biệt và tọa độ $(\cos; \sin)$ tương ứng.

Bảng. Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	không xác định
$\cot \alpha$	không xác định	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

★ Mẹo nhớ “căn chia hai”.

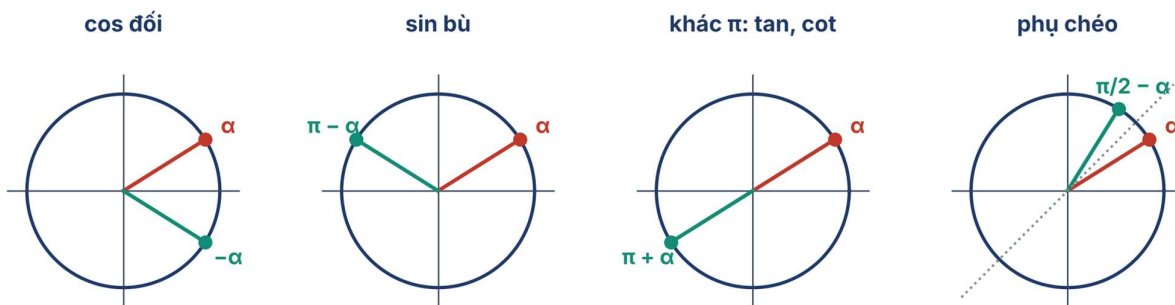
Viết $\sin$ của $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ lần lượt là $\frac{\sqrt{0}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{2}$; $\cos$ là dãy đó viết ngược lại. **Dấu theo góc phần tư:** “Nhất cả, nhị sin, tam tan, tứ cos”: góc phần tư I mọi giá trị dương; II chỉ sin dương; III chỉ tan, cot dương; IV chỉ cos dương.

Các hệ thức cơ bản:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1.$$

3. Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt**■ Cung liên kết – khẩu quyết “cos đối, sin bù, phụ chéo, khác π tan”.**

- *Cos đối:* $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$, $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$, $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$.
- *Sin bù:* $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$, $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$, $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$.
- *Phụ chéo:* $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$, $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$.
- *Khác π tan:*
 $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$, $\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$, $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$, $\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$.



Bốn cặp góc liên kết nhìn trên đường tròn lượng giác: các điểm đối xứng qua trục hoành, trục tung, gốc tọa độ và đường phân giác.

4. Hệ thống công thức lượng giác**Bảng. Các công thức lượng giác cần thuộc**

Nhóm	Công thức
Công thức cộng	$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$; $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$; $\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$
Nhân đôi	$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$; $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$; $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$.
Nhân ba	$\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$; $\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$.
Hạ bậc	$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$; $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$.
Tích thành tổng	$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$;

Nhóm	Công thức
	$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)];$ $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a - b) + \sin(a + b)]$
Tổng thành tích	$\cos u + \cos v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}; \cos u - \cos v = -2 \sin \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2};$ $\sin u + \sin v = 2 \sin \frac{u+v}{2} \cos \frac{u-v}{2}; \sin u - \sin v = 2 \cos \frac{u+v}{2} \sin \frac{u-v}{2}.$
Gộp $a \sin x + b \cos x$	$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)$ với $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$

⚠ Bẫy thường gặp.

$\sin(a + b) \neq \sin a + \sin b; \sin 2a \neq 2 \sin a; \cos^2 a$ là $(\cos a)^2$, không phải $\cos(a^2)$.

Khi dùng công thức hạ bậc, đừng quên hệ số $\frac{1}{2}$: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, không phải $1 - \cos 2x$.

■ Chứng minh công thức cộng chỉ bằng khoảng cách.

Lấy $M(\cos a; \sin a), N(\cos b; \sin b)$ trên đường tròn đơn vị.

Theo định lí côsin trong tam giác OMN (góc $MON = a - b$): $MN^2 = 2 - 2\cos(a - b)$.

Theo công thức tọa độ:

$$MN^2 = (\cos a - \cos b)^2 + (\sin a - \sin b)^2 = 2 - 2(\cos a \cos b + \sin a \sin b).$$

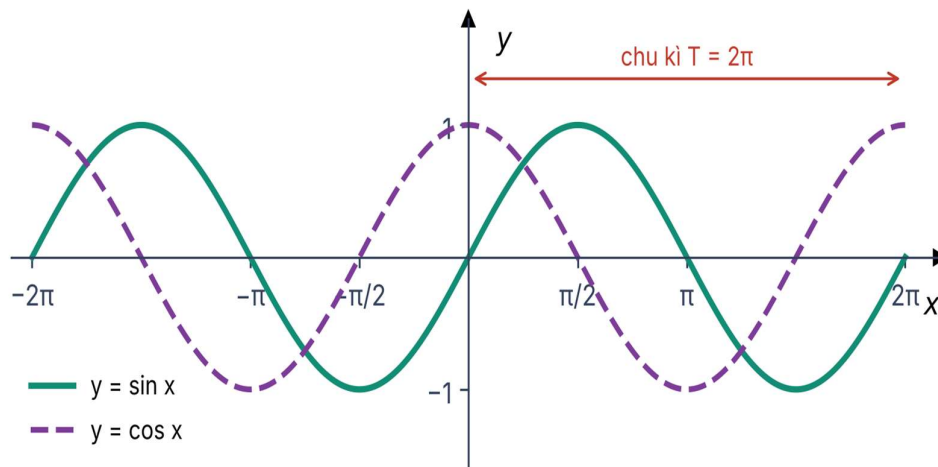
So sánh hai kết quả: $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

Mọi công thức khác đều suy ra từ công thức này!

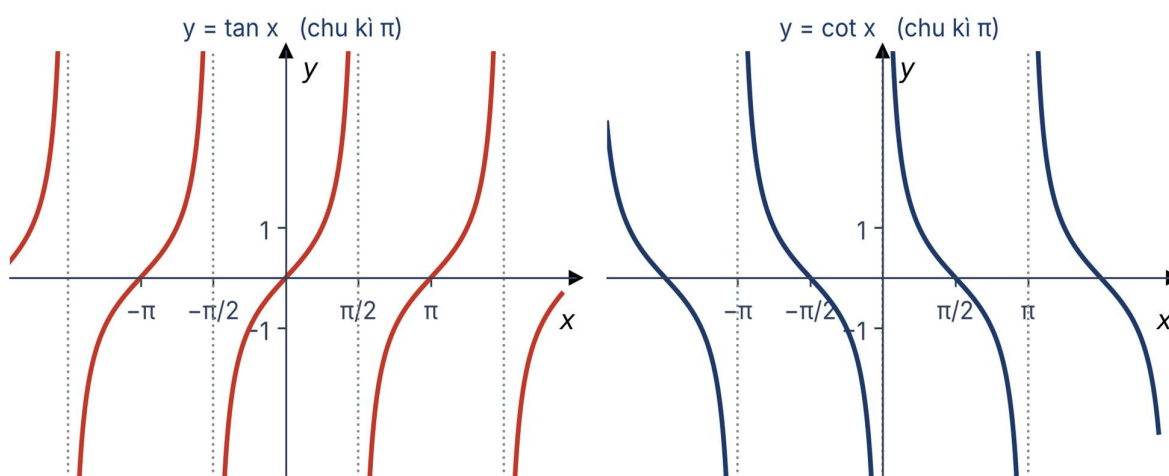
5. Hàm số lượng giác**Bảng. Tính chất bốn hàm số lượng giác**

	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$	$y = \cot x$
Tập xác định	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$x \neq k\pi$
Tập giá trị	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Chẵn – lẻ	lẻ	chẵn	lẻ	lẻ
Chu kì	2π	2π	π	π
Đồng biến trên	$(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi)$	$(-\pi + k2\pi; k2\pi)$	mỗi khoảng xác định	không có

	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$	$y = \cot x$
Nghịch biến trên	$(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi)$	$(k2\pi; \pi + k2\pi)$	không có	mỗi khoảng xác định



Đồ thị hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$: hai “sóng” lệch nhau $\pi/2$.



Đồ thị hàm số $y = \tan x$ và $y = \cot x$: có tiệm cận đứng, chu kì π .

★ Chu kì của hàm “biến dạng”.

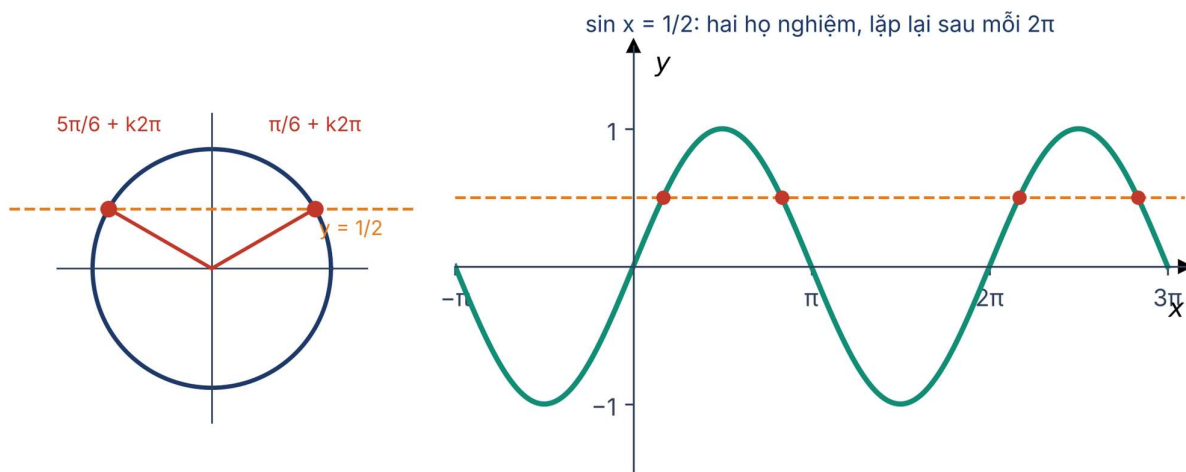
Hàm $y = A\sin(\omega x + \varphi) + B$ hoặc $y = A\cos(\omega x + \varphi) + B$ ($A \neq 0, \omega \neq 0$) có chu kì $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$, giá trị lớn nhất $B + |A|$, nhỏ nhất $B - |A|$. Hàm $y = \tan(\omega x + \varphi)$ có chu kì $\frac{\pi}{|\omega|}$. Chu kì của tổng hai hàm tuần hoàn là *bội chung nhỏ nhất* của hai chu kì (nếu có).

6. Phương trình lượng giác cơ bản

■ Công thức nghiệm (

$k \in \mathbb{Z}$).

- $\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k2\pi$ hoặc $x = \pi - \alpha + k2\pi$. (Có nghiệm khi $|m| \leq 1$ với $\sin x = m$.)
- $\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k2\pi$ hoặc $x = -\alpha + k2\pi$.
- $\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$; $\cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$.
- Đặc biệt: $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$; $\sin x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{2} + k2\pi$; $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$; $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$.



Nghiệm của $\sin x = 1/2$: hai điểm trên đường tròn, lặp lại mỗi vòng 2π .

7. Quy trình giải phương trình lượng giác

1. **Đặt điều kiện** (nếu có tan, cot, mẫu số, căn).
2. **Đưa về một hàm, một cung** bằng công thức: cung liên kết, nhân đôi, hạ bậc, tổng – tích.
3. **Nhận dạng**: phương trình cơ bản; bậc hai theo một hàm; $a\sin x + b\cos x = c$; đẳng cấp; phương trình tích.
4. **Đối chiếu điều kiện** và (với câu hỏi HSA) **đếm hoặc chọn nghiệm** trên khoảng đề cho, nên vẽ đường tròn lượng giác hoặc đồ thị để đếm.

★ Bảng tra nhanh cho phòng thi.

$a\sin x + b\cos x = c$ có nghiệm $\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq c^2$. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $a\sin x + b\cos x$ là $\pm\sqrt{a^2 + b^2}$. Phương trình $\sin x = m$ (hay $\cos x = m$) với $|m| < 1$ có đúng **2 nghiệm** trên mỗi nửa khoảng có độ dài 2π .

PHẦN III. CÁC DẠNG TOÁN VÀ VÍ DỤ PHÂN TÍCH

Phần này gồm 17 dạng toán, sắp xếp theo đúng mạch kiến thức của chương và theo mức độ tăng dần. Dạng 1 – 13 viết theo định dạng câu hỏi HSA (trắc nghiệm 4 lựa chọn hoặc điền đáp án);

Dạng 14 – 17 tuyển chọn các bài trong đề thi tuyển sinh Đại học từ năm 1997 và đề thi học sinh giỏi, Olympic. Mỗi ví dụ, có *phân tích* (vì sao nghĩ như vậy), *lời giải* (trình bày thế nào) và *nhận xét* (mẹo làm nhanh trong phòng thi).

Dạng 1. Góc lượng giác, số đo radian, độ dài cung

★ Phương pháp.

Đơn vị: $\alpha^\circ = \frac{\alpha\pi}{180}$ rad. Độ dài cung $\ell = R\alpha$ (α tính bằng radian).

Các góc $\alpha + k2\pi$ (hay $\alpha^\circ + k360^\circ$) có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác.

◆ Ví dụ 1.

Góc có số đo 135° đổi sang radian là

A. $\frac{3\pi}{4}$.

B. $\frac{2\pi}{3}$.

C. $\frac{5\pi}{6}$.

D. $\frac{3\pi}{5}$.

Lời giải. $135^\circ = \frac{135\pi}{180} = \frac{3\pi}{4}$. Chọn A.

◆ Ví dụ 2.

Kim phút của một chiếc đồng hồ treo tường dài 10 cm. Trong 20 phút, đầu kim phút vạch ra một cung dài bao nhiêu centimét (làm tròn đến hàng phần mười)?

Phân tích. Kim phút quay một vòng (2π) trong 60 phút, nên 20 phút ứng với $\frac{1}{3}$ vòng, tức $\frac{2\pi}{3}$ rad.

Lời giải. $\ell = R\alpha = 10 \cdot \frac{2\pi}{3} \approx 20,9$ cm. **Đáp số: 20,9**

◆ Ví dụ 3.

Trên đường tròn lượng giác, điểm biểu diễn góc -1000° trùng với điểm biểu diễn góc nào dưới đây?

A. 80° .

B. -80° .

C. 280° .

D. 100° .

Lời giải. $-1000^\circ + 3 \cdot 360^\circ = 80^\circ$. Chọn A.

⚠ Bẫy thường gặp.

Phương án B là bẫy cho ai lấy $-1000^\circ + 1080^\circ$ rồi đổi dấu nhầm; phương án C là bẫy cho ai cộng 1080° nhưng lại trừ thêm 360° ngược chiều. Luôn kiểm tra: số đo mới phải hơn kém số đo cũ đúng một bội của 360° .

Dạng 2. Giá trị lượng giác, dấu và cung liên kết

★ Phương pháp.

Biết một giá trị lượng giác và góc phần tư, dùng $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ để tìm các giá trị còn lại, rồi chọn dấu theo góc phần tư. Biểu thức thuần nhất theo $\sin, \cos$ (cùng bậc ở tử và mẫu): chia cả tử và mẫu cho $\cos^n \alpha$ để đưa về $\tan \alpha$.

◆ Ví dụ 4.

Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Giá trị của $\tan \alpha$ là

A. $-\frac{3}{4}$.

B. $\frac{3}{4}$.

C. $-\frac{4}{3}$.

D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải. Vì α thuộc góc phần tư II nên $\cos \alpha < 0$: $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$.

Do đó $\tan \alpha = \frac{3/5}{-4/5} = -\frac{3}{4}$. Chọn A.

◆ Ví dụ 5.

Cho $\tan \alpha = 2$. Tính giá trị của $P = \frac{2\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - 3\cos \alpha}$.

Lời giải. Chia tử và mẫu cho $\cos \alpha \neq 0$: $P = \frac{2\tan \alpha + 1}{\tan \alpha - 3} = \frac{5}{-1} = -5$. **Đáp số: -5**

◆ Ví dụ 6.

Rút gọn biểu thức $A = \cos(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \tan(\pi + x) \cdot \cot x$ (với x làm biểu thức có nghĩa).

A. 1.

B. $2\cos x + 1$.

C. 0.

D. -1.

Lời giải. $\cos(\pi - x) = -\cos x$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$; $\tan(\pi + x) = \tan x$.

Vậy $A = -\cos x + \cos x + \tan x \cot x = 1$. Chọn A.

◆ Ví dụ 7.

Tính $P = \tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdots \tan 89^\circ$ và $S = \sin^{21^\circ} + \sin^{22^\circ} + \cdots + \sin^{289^\circ}$.

Phân tích. Hai góc phụ nhau: $\tan(90^\circ - x) = \cot x$ và $\sin(90^\circ - x) = \cos x$. Ghép số hạng đầu với số hạng cuối.

Lời giải. Ghép $\tan k^\circ \cdot \tan(90 - k)^\circ = \tan k^\circ \cot k^\circ = 1$ với $k = 1, \dots, 44$, còn lại $\tan 45^\circ = 1$: $P = 1$. Tương tự $\sin^2 k^\circ + \sin^2(90 - k)^\circ = \sin^2 k^\circ + \cos^2 k^\circ = 1$ cho 44 cặp, thêm $\sin^{245^\circ} = \frac{1}{2}$: $S = 44,5$.

Dạng 3. Công thức cộng, nhân đôi, hạ bậc

◆ Ví dụ 8.

Giá trị của $\cos 15^\circ$ là

A. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

B. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

C. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải.

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Chọn A.

★ Nhận xét.

Mẹo loại trừ: $\cos 15^\circ$ rất gần 1 (khoảng 0,966).

Phương án B $\approx 0,259$, D $\approx 0,354$, C $\approx 1,366 > 1$ đều bị loại ngay bằng ước lượng.

◆ Ví dụ 9.

Cho $\sin a = \frac{1}{3}$. Giá trị của $\cos 2a$ là

A. $\frac{7}{9}$.

B. $\frac{1}{9}$.

C. $-\frac{7}{9}$.

D. $\frac{8}{9}$.

Lời giải. $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$. Chọn A. (Không cần biết dấu của $\cos a$!)

◆ Ví dụ 10.

Cho $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$. Tính $\sin 2x$.

Lời giải. Bình phương: $1 + 2\sin x \cos x = \frac{1}{4}$, nên $\sin 2x = -\frac{3}{4} = -0,75$. **Đáp số: -0,75**

◆ Ví dụ 11.

Tính $A = \cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5}$.

Phân tích. Tích các cos có góc gấp đôi nhau: nhân và chia cho sin của góc nhỏ nhất rồi dùng liên tiếp công thức nhân đôi.

Lời giải. $\sin \frac{\pi}{5} \cdot A = \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4} \sin \frac{4\pi}{5} = \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{5}$. Vì $\sin \frac{\pi}{5} \neq 0$ nên $A = \frac{1}{4}$.

Dạng 4. Biến đổi tổng – tích, đẳng thức và nhận dạng tam giác

◆ Ví dụ 12.

Tính $B = \cos 20^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ$.

Lời giải. $\cos 100^\circ + \cos 140^\circ = 2\cos 120^\circ \cos 20^\circ = -\cos 20^\circ$. Vậy $B = 0$. **Đáp số: 0**

★ Nhận xét.

Ba góc $20^\circ, 140^\circ, 260^\circ$ (với $\cos 260^\circ = \cos 100^\circ$) chia đều vòng tròn: tổng ba vector đơn vị lệch nhau 120° bằng vector không, nên tổng các hoành độ bằng 0. Đây là “nguyên lý ba pha” của điện lưới!

◆ Ví dụ 13.

Với x làm biểu thức có nghĩa, $\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x}$ bằng

A. $\tan 3x$.

B. $\tan x$.

C. $\cot 3x$.

D. $\tan 9x$.

Lời giải. $\sin x + \sin 5x = 2\sin 3x \cos 2x$, $\cos x + \cos 5x = 2\cos 3x \cos 2x$.

Tử = $\sin 3x(2\cos 2x + 1)$, mẫu = $\cos 3x(2\cos 2x + 1)$. Biểu thức bằng $\tan 3x$. Chọn A.

◆ Ví dụ 14.

Tam giác ABC có $\sin A = 2\sin B \cos C$. Tam giác ABC là tam giác

- A. cân tại A. B. vuông tại A. C. đều. D. cân tại B.

Phân tích. Trong tam giác, $A = \pi - (B + C)$ nên $\sin A = \sin(B + C)$: đưa về một hệ thức chỉ chứa B, C .

Lời giải. $\sin(B + C) = 2\sin B \cos C \Leftrightarrow \sin B \cos C + \cos B \sin C = 2\sin B \cos C$
 $\Leftrightarrow \sin(C - B) = 0$. Vì $|C - B| < \pi$ nên $B = C$: tam giác cân tại A. Chọn A.

Dạng 5. Hàm số lượng giác: tập xác định, tính chẵn lẻ, chu kỳ

◆ Ví dụ 15.

Tập xác định của hàm số $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ là

- A. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\right\}$. B. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{12} + k\pi\right\}$.
 C. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}\right\}$. D. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5\pi}{6} + k\pi\right\}$.

Lời giải. Cần $2x - \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$. Chọn A.

◆ Ví dụ 16.

Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

- A. $y = x \sin x$. B. $y = \sin x \cos x$. C. $y = \tan x + \sin x$. D. $y = x \cos x$.

Lời giải. Với $f(x) = x \sin x$: $f(-x) = (-x) \sin(-x) = x \sin x = f(x)$, tập xác định $\mathbb{R}$ đối xứng: hàm chẵn. Ba hàm còn lại đều là hàm lẻ. Chọn A.

★ Nhận xét.

Quy tắc nhanh: lẻ $\times$ lẻ = chẵn, chẵn $\times$ lẻ = lẻ (giống quy tắc nhân dấu). Hàm x , $\sin x$, $\tan x$ lẻ; hàm $\cos x$, x^2 , $|x|$ chẵn.

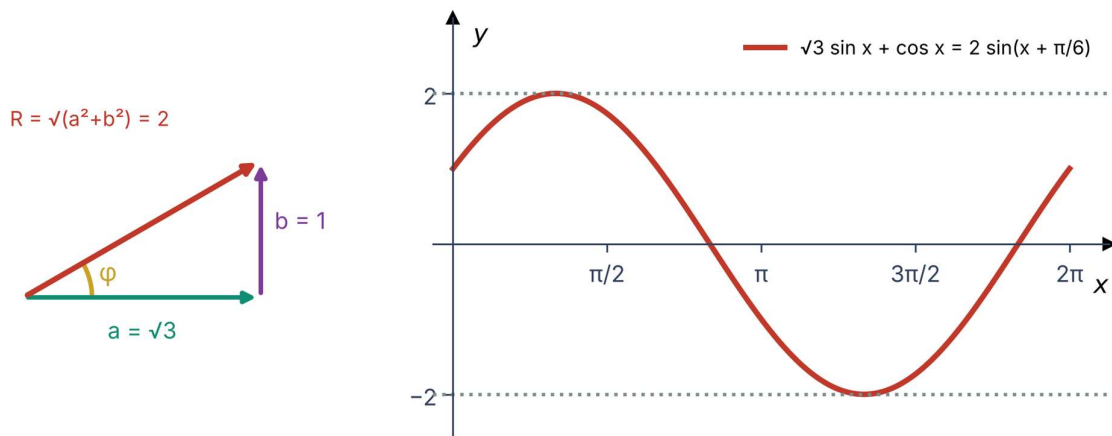
◆ Ví dụ 17.

Chu kì tuần hoàn của hàm số $y = \sin 2x + \cos 3x$ làA. π .B. 2π .C. $\frac{2\pi}{3}$.D. 6π .**Lời giải.** $\sin 2x$ có chu kì π , $\cos 3x$ có chu kì $\frac{2\pi}{3}$. Bội chung nhỏ nhất của π và $\frac{2\pi}{3}$ là 2π .

Chọn B.

Dạng 6. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất và tập giá trị

★ Ba công cụ.

(1) $-1 \leq \sin u, \cos u \leq 1$. (2) $-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \sin x + b \cos x \leq \sqrt{a^2 + b^2}$. (3) Đặt $t = \sin x$ (hoặc $\cos x$), $t \in [-1; 1]$, rồi khảo sát hàm bậc hai/bậc ba trên đoạn.Gộp $\sqrt{3} \sin x + \cos x$ thành $2 \sin(x + \pi/6)$: biên độ bằng độ dài vector $(a; b)$.

◆ Ví dụ 18.

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = 3 \sin x + 4 \cos x + 1$. Tính $M - m$.**Lời giải.** $-5 \leq 3 \sin x + 4 \cos x \leq 5$ nên $M = 6, m = -4, M - m = 10$. **Đáp số: 10**

◆ Ví dụ 19.

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \cos 2x + 2 \sin x$ làA. $\frac{3}{2}$.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải. $y = 1 - 2\sin^2 x + 2\sin x$. Đặt $t = \sin x \in [-1; 1]$: $y = -2t^2 + 2t + 1$, đạt giá trị lớn nhất tại $t = \frac{1}{2}$: $y = \frac{3}{2}$. Chọn A.

⚠ Bẫy thường gặp.

Phương án B (= 3) là bẫy cho ai lấy riêng $\max \cos 2x + \max 2\sin x = 1 + 2$: hai giá trị lớn nhất không đạt cùng lúc (khi $\sin x = 1$ thì $\cos 2x = -1$).

♦ Ví dụ 20.

Giá trị nhỏ nhất của $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ là

A. $\frac{1}{2}$.

B. 0.

C. $\frac{1}{4}$.

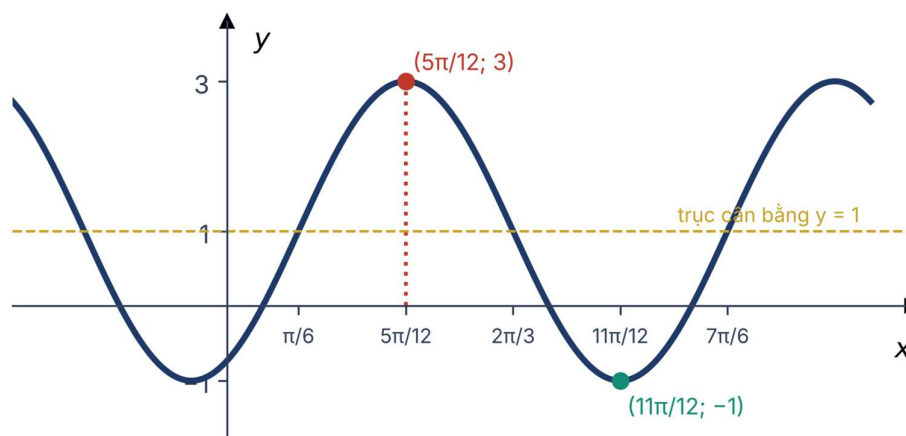
D. 1.

Lời giải. $y = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \geq \frac{1}{2}$, dấu bằng khi $\sin^2 2x = 1$. Chọn A.

Dạng 7. Đọc và biến đổi đồ thị hàm số lượng giác

♦ Ví dụ 21.

Hình bên là đồ thị của hàm số $y = A\sin(\omega x + \varphi) + B$ với $A > 0$, $\omega > 0$, $-\pi < \varphi < 0$. Đồ thị có điểm cao nhất $\left(\frac{5\pi}{12}; 3\right)$ và điểm thấp nhất liên tiếp là $\left(\frac{11\pi}{12}; -1\right)$. Tính $A + B + \omega$.



Đọc biên độ, trục cân bằng và chu kỳ từ đồ thị.

Phân tích. Bốn tham số, bốn “thông tin” trên đồ thị: biên độ A = nửa khoảng cách giữa đỉnh và đáy; B = trục cân bằng; nửa chu kì = khoảng cách hoành độ giữa đỉnh và đáy liền kề; φ tìm từ tọa độ đỉnh.

Lời giải. $A = \frac{3-(-1)}{2} = 2$, $B = \frac{3+(-1)}{2} = 1$.

Nửa chu kì = $\frac{11\pi}{12} - \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$, nên $T = \pi$ và $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$. Tại đỉnh: $2 \cdot \frac{5\pi}{12} + \varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{3}$ (thỏa mãn). Vậy $A + B + \omega = 5$. **Đáp số: 5**

◆ Ví dụ 22.

Trên đoạn $[0; 2\pi]$, đồ thị hai hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ cắt nhau tại bao nhiêu điểm?

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

Lời giải. $\sin x = \cos x \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. Trên $[0; 2\pi]$: $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{4}$. Chọn A.
(Xem hình đồ thị sin, cos ở Phần II.)

◆ Ví dụ 23.

Tịnh tiến đồ thị hàm số $y = \sin x$ sang trái $\frac{\pi}{2}$ đơn vị ta được đồ thị của hàm số

- A. $y = \cos x$. B. $y = -\cos x$. C. $y = -\sin x$. D. $y = \sin x + \frac{\pi}{2}$.

Lời giải. Tịnh tiến sang trái $\frac{\pi}{2}$: $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$. Chọn A.

Dạng 8. Phương trình cơ bản và bài toán đếm nghiệm

★ Ba cách đếm nghiệm trên một khoảng.

(1) Viết họ nghiệm $x = \alpha + k \frac{2\pi}{n}$ rồi giải bất phương trình theo $k \in \mathbb{Z}$. (2) Vẽ đường tròn lượng giác, đếm số điểm và số vòng. (3) Vẽ đồ thị, đếm giao điểm với đường thẳng nằm ngang. Với HSA, cách (3) thường nhanh nhất.

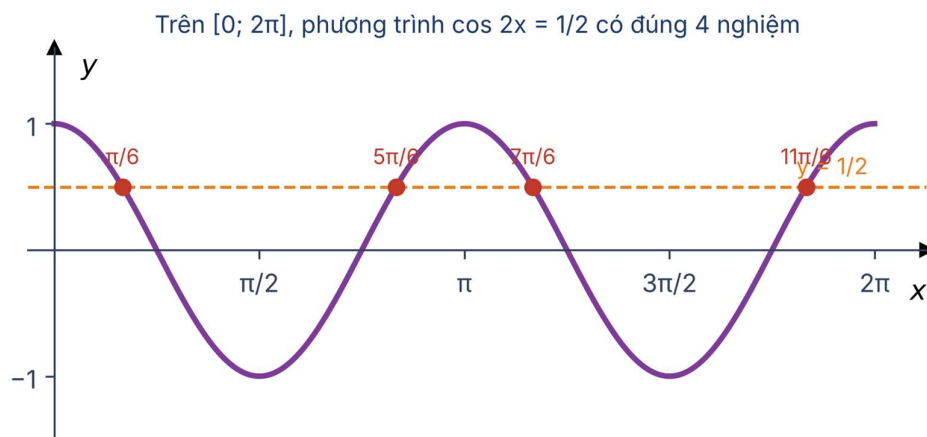
◆ Ví dụ 24.

Phương trình $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$?

Lời giải. $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ hoặc $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$, tức $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Trên $[0; 2\pi]$: $\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. **Đáp số: 4**

◆ Ví dụ 25.

Gọi S là tổng các nghiệm của phương trình $\cos 2x = \frac{1}{2}$ trên đoạn $[0; 2\pi]$. Tính $\frac{S}{\pi}$.



Bốn giao điểm của $y = \cos 2x$ với đường thẳng $y = 1/2$ trên $[0; 2\pi]$.

Lời giải. $2x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$. Trên $[0; 2\pi]$: $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$. $S = \frac{24\pi}{6} = 4\pi$.

Đáp số: 4

★ Nhận xét.

Mẹo đối xứng: đồ thị $y = \cos 2x$ đối xứng qua các đường thẳng $x = \frac{\pi}{2}$ và $x = \frac{3\pi}{2}$, nên các nghiệm ghép thành từng cặp đối xứng: $\frac{\pi}{6}$ với $\frac{5\pi}{6}$ (tổng π), $\frac{7\pi}{6}$ với $\frac{11\pi}{6}$ (tổng 3π).

Vậy $S = \pi + 3\pi = 4\pi$ mà không cần liệt kê từng nghiệm.

◆ Ví dụ 26.

Số nghiệm của phương trình $\tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$ thuộc khoảng $(-\pi; \pi)$ là

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải. $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi$.

Thuộc $(-\pi; \pi)$: $k = 0$ ($x = \frac{\pi}{6}$) và $k = -1$ ($x = -\frac{5\pi}{6}$). Chọn A.

Dạng 9. Phương trình bậc hai theo một hàm, phương trình $a\sin x + b\cos x = c$, phương trình đẳng cấp

◆ Ví dụ 27. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A, A1 năm 2012)

Giải phương trình $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = 2\cos x - 1$.

Phân tích. Vế phải có “-1”, vế trái có $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$: hai số -1 triệt tiêu, xuất hiện nhân tử chung $\cos x$.

Lời giải.

Phương trình $\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 2\cos^2 x - 2\cos x = 0 \Leftrightarrow 2\cos x(\sqrt{3}\sin x + \cos x - 1) = 0$.

- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
- $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = k2\pi$ hoặc $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$.

Vậy nghiệm: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = k2\pi, x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

◆ Ví dụ 28.

Phương trình $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$?

Lời giải. Đặt $t = \cos x \in [-1; 1]$: $2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = \frac{1}{2}$. $\cos x = 1$

cho $x = 0, x = 2\pi$; $\cos x = \frac{1}{2}$ cho $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}$. **Đáp số: 4**

⚠ Bẫy thường gặp.

Rất nhiều bạn đếm $\cos x = 1$ chỉ có 1 nghiệm trên $[0; 2\pi]$ và trả lời 3. Đoạn **đóng** $[0; 2\pi]$ chứa cả hai đầu mút 0 và 2π !

◆ Ví dụ 29.

Phương trình $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{2}$ có nghiệm là

- A. $x = \frac{\pi}{12} + k2\pi$ hoặc $x = -\frac{5\pi}{12} + k2\pi$. B. $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$.
C. $x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi$ hoặc $x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi$. D. $x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi$.

Lời giải. Chia hai vế cho $\sqrt{3+1} = 2$: $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi$. Vậy $x = \frac{\pi}{12} + k2\pi$ hoặc $x = -\frac{5\pi}{12} + k2\pi$. Chọn A.

◆ Ví dụ 30.

Giải phương trình $\sin^2 x - 3\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0$.

Lời giải. $\cos x = 0$ không thỏa mãn (khi đó $\sin^2 x = 1 \neq 0$).

Chia hai vế cho $\cos^2 x$: $\tan^2 x - 3\tan x + 2 = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1$ hoặc $\tan x = 2$.

Vậy $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ hoặc $x = \arctan 2 + k\pi$.

◆ Ví dụ 31.

Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $m\sin x + (m+1)\cos x = 2m+1$ có nghiệm?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. Vô số.

Lời giải. Điều kiện $a^2 + b^2 \geq c^2$: $m^2 + (m+1)^2 \geq (2m+1)^2 \Leftrightarrow 2m^2 + 2m \leq 0$

$\Leftrightarrow -1 \leq m \leq 0$. Có 2 số nguyên. Chọn A.

Dạng 10. Phương trình đưa về dạng tích

★ Dấu hiệu nhóm nhân tử.

Thấy $\sin 2x$ đi cùng $\sin x$ và $\cos x$; thấy $\cos 2x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$; thấy $1 + \tan x = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x}$; thấy tổng hai sin hoặc hai cos có góc cách đều. Mục tiêu luôn là: **phương trình tích của các phương trình cơ bản**.

◆ Ví dụ 32. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A, A1 năm 2014)

Giải phương trình $\sin x + 4\cos x = 2 + \sin 2x$.

Lời giải. Phương trình $\Leftrightarrow \sin x - 2\sin x \cos x + 4\cos x - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow \sin x(1 - 2\cos x) - 2(1 - 2\cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - 2)(1 - 2\cos x) = 0. \text{ Vì } \sin x - 2 < 0 \text{ nên } \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$$

◆ Ví dụ 33. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A, A1 năm 2013)

Giải phương trình $1 + \tan x = 2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải. Điều kiện $\cos x \neq 0$. Vì $2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2(\sin x + \cos x)$,

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x + \cos x}{\cos x} = 2(\sin x + \cos x) \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - 2\cos x) = 0$$

- $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.
- $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$. Cả hai họ đều thỏa mãn điều kiện.

◆ Ví dụ 34. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B năm 2013)

Giải phương trình $\sin 5x + 2\cos^2 x = 1$.

Lời giải. $2\cos^2 x - 1 = \cos 2x$, nên $\sin 5x = -\cos 2x = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$.

- $5x = 2x - \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}$.
- $5x = \pi - 2x + \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7}$.

◆ Ví dụ 35. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D năm 2013)

Giải phương trình $\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0$.

Lời giải. $\sin 3x - \sin x = 2\cos 2x \sin x$. Phương trình $\Leftrightarrow \cos 2x(2\sin x + 1) = 0$.

- $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$.
- $\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$.

Dạng 11. Phương trình lượng giác chứa tham số

◆ Ví dụ 36.

Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $\cos 2x - (2m + 1)\cos x + m + 1 = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

- A. $-1 \leq m < 0$. B. $-1 < m < 0$. C. $m < 0$. D. $-1 \leq m \leq \frac{1}{2}$.

Phân tích. Thay $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ được phương trình bậc hai theo $t = \cos x$ có nghiệm “đẹp” $t = \frac{1}{2}$. Trên khoảng đã cho, $\cos x \in [-1; 0)$.

Lời giải. Phương trình $\Leftrightarrow 2\cos^2 x - (2m + 1)\cos x + m = 0$

$$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\cos x - m) = 0.$$

Với $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ thì $\cos x \in [-1; 0)$, nên $\cos x = \frac{1}{2}$ không có nghiệm trong khoảng; cần $\cos x = m$ có nghiệm, tức $-1 \leq m < 0$. Chọn **A**.

◆ Ví dụ 37.

Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\sin^2 x - 2\sin x + m = 0$ có nghiệm?

Lời giải. Đặt $t = \sin x \in [-1; 1]$: $m = -t^2 + 2t = g(t)$. Trên $[-1; 1]$ hàm g đồng biến, $g(-1) = -3$, $g(1) = 1$. Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow m \in [-3; 1]$: có 5 số nguyên.

Đáp số: 5

◆ Ví dụ 38.

Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $2\sin x + m = 0$ có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $[0; \pi]$?

Lời giải. $\sin x = -\frac{m}{2}$. Trên $[0; \pi]$, đường thẳng $y = s$ cắt đồ thị $y = \sin x$ tại đúng hai điểm khi $0 \leq s < 1$ (khi $s = 0$ có hai nghiệm 0 và π ; khi $s = 1$ chỉ có một nghiệm).

Vậy $0 \leq -\frac{m}{2} < 1 \Leftrightarrow -2 < m \leq 0$: $m \in \{-1; 0\}$. **Đáp số: 2**

Dạng 12. Bài toán thực tế: vòng quay, thủy triều, ngày đêm, dòng điện, đo đạc

★ Quy trình 3 bước.

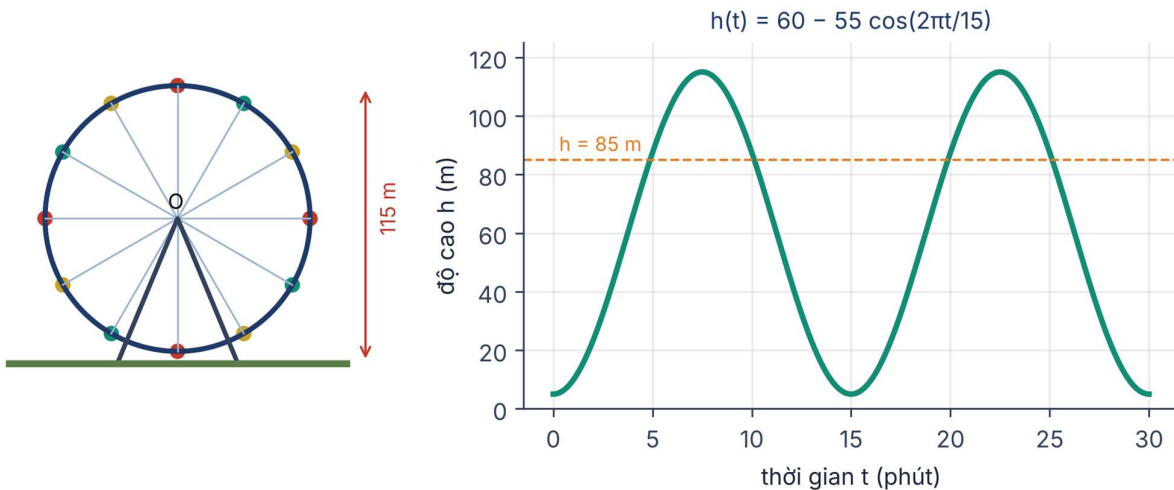
(1) Nhận ra mô hình $y = A\sin(\omega t + \varphi) + B$ hoặc tam giác vuông; (2) xác định tham số: B là mức trung bình, $|A|$ là biên độ, $\omega = \frac{2\pi}{T}$; (3) giải phương trình/bất phương trình lượng giác và trả lời theo đơn vị, cách làm tròn đề yêu cầu.

◆ Ví dụ 39.

Một vòng quay có đường kính 110 m, điểm thấp nhất cách mặt đất 5 m, quay đều một vòng hết 15 phút. Độ cao của một cabin sau t phút (tính từ lúc cabin ở điểm thấp nhất) là

$$h(t) = 60 - 55\cos\frac{2\pi t}{15} \text{ (mét)}$$

Trong một vòng quay, cabin ở độ cao không dưới 85 m trong bao nhiêu phút (làm tròn đến hàng phần mười)?



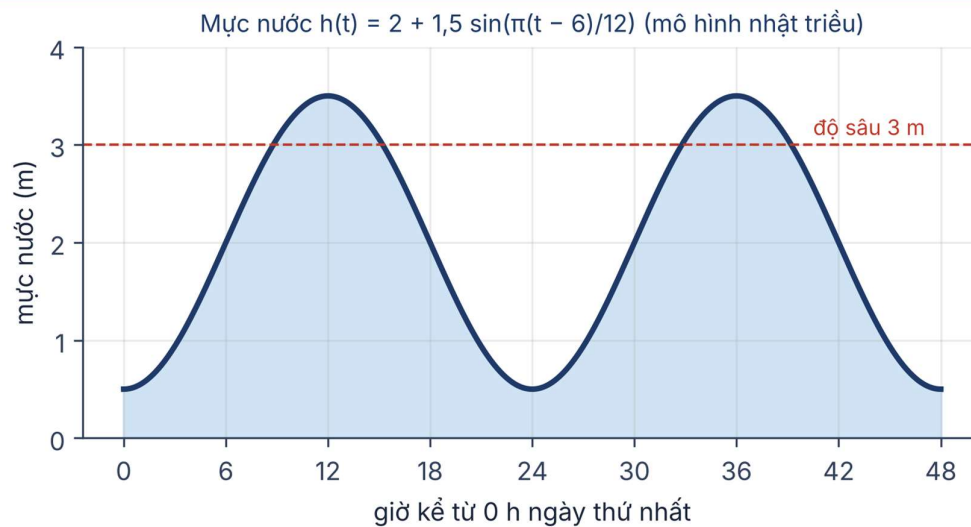
Vòng quay không lỏ và đồ thị độ cao của cabin theo thời gian.

Lời giải. $h \geq 85 \Leftrightarrow \cos\frac{2\pi t}{15} \leq -\frac{5}{11}$. Đặt $\beta = \arccos\left(-\frac{5}{11}\right) \approx 2,0428$.

Trong một vòng, $\frac{2\pi}{15} \in [\beta; 2\pi - \beta]$, khoảng thời gian $= \frac{15(2\pi - 2\beta)}{2\pi} \approx 5,2$ phút. **Đáp số: 5,2**

◆ Ví dụ 40.

Ở một cảng biển có chế độ nhật triều, mực nước t giờ sau 0 giờ được mô hình hóa bởi $h(t) = 2 + 1,5\sin\frac{\pi(t-6)}{12}$ (mét), $0 \leq t < 24$. Một tàu chỉ ra vào cảng an toàn khi mực nước từ 3 m trở lên. Trong một ngày, thời gian tàu có thể ra vào cảng là bao nhiêu giờ (làm tròn đến hàng phần mười)?



Mức nước biển theo mô hình nhật triều: một lần nước lớn, một lần nước ròng mỗi ngày.

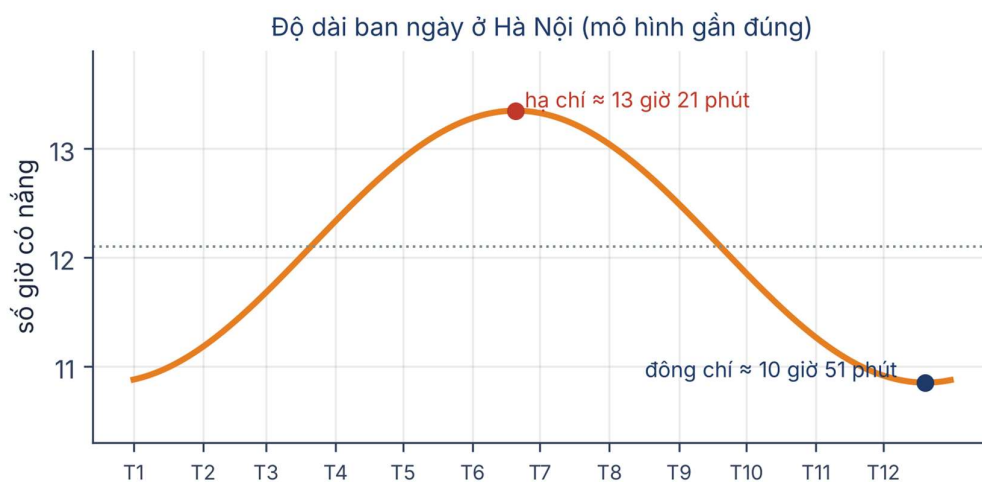
Lời giải. $h \geq 3 \Leftrightarrow \sin \frac{\pi(t-6)}{12} \geq \frac{2}{3}$.

Với $\gamma = \arcsin \frac{2}{3} \approx 0,7297$: $\frac{\pi(t-6)}{12} \in [\gamma; \pi - \gamma] \Leftrightarrow t \in [8,79; 15,21]$. Thời gian $\approx 6,4$ giờ.

Đáp số: 6,4

◆ Ví dụ 41.

Số giờ có ánh sáng Mặt Trời trong ngày thứ d của năm (không nhuận) ở Hà Nội được mô hình hóa bởi $L(d) = 12,1 + 1,25 \sin \frac{2\pi(d-80)}{365}$. Hỏi có khoảng bao nhiêu ngày trong năm có hơn 13 giờ ánh sáng (làm tròn đến hàng đơn vị)?



Độ dài ban ngày ở Hà Nội theo mô hình hình sin.

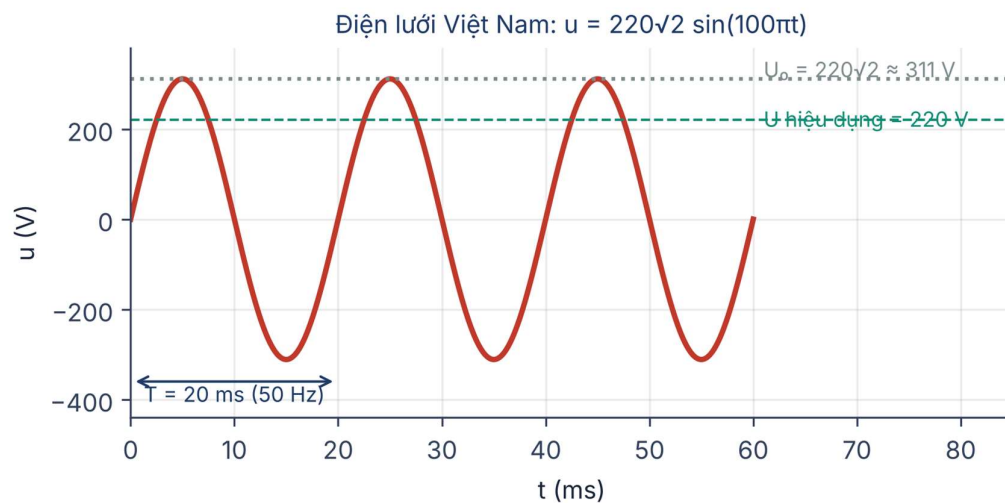
Lời giải. $L > 13 \Leftrightarrow \sin \frac{2\pi(d-80)}{365} > 0,72$.

Với $\delta = \arcsin 0,72 \approx 0,8037$, số ngày $\approx \frac{365}{2\pi}(\pi - 2\delta) \approx 89$ ngày (từ khoảng giữa tháng 5 đến giữa tháng 8).

Ngày dài nhất ứng với $\frac{2\pi(d-80)}{365} = \frac{\pi}{2}$, tức $d \approx 171$, khoảng ngày 20 tháng 6 (hạ chí). **Đáp số: 89**

◆ Ví dụ 42.

Điện áp ổ cắm điện là $u = 220\sqrt{2}\sin(100\pi t)$ (V), t tính bằng giây. Trong khoảng thời gian $0 \leq t < 1$, điện áp bằng đúng 220 V bao nhiêu lần?

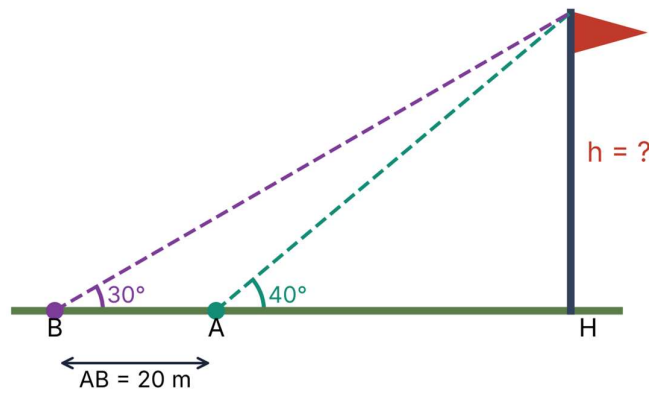


Điện áp xoay chiều 220 V – 50 Hz: mỗi chu kì 20 ms.

Lời giải. $u = 220 \Leftrightarrow \sin(100\pi t) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Chu kì $T = \frac{2\pi}{100\pi} = 0,02$ s; mỗi chu kì có đúng 2 thời điểm thỏa mãn. Trong 1 giây có 50 chu kì, nên có 100 lần. Lần đầu tiên: $100\pi t = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow t = 0,0025$ s = 2,5 ms. **Đáp số: 100**

◆ Ví dụ 43.

Từ điểm A trên mặt đất nhìn đỉnh cột cờ dưới góc 40° ; từ điểm B cách A 20 m (thẳng hàng với chân cột, xa hơn) nhìn đỉnh cột dưới góc 30° . Chiều cao cột cờ khoảng bao nhiêu mét (làm tròn đến hàng đơn vị)?



Đo chiều cao cột cờ bằng hai góc nhìn.

Lời giải. Gọi chiều cao là h .

Ta có $HA = h \cot 40^\circ$, $HB = h \cot 30^\circ$, nên $AB = h(\cot 30^\circ - \cot 40^\circ) = 20$.

Suy ra $h = \frac{20}{\cot 30^\circ - \cot 40^\circ} \approx \frac{20}{1,7321 - 1,1918} \approx 37$ m. **Đáp số: 37**

◆ Ví dụ 44.

Một vật dao động điều hòa theo phương trình $x = 5 \cos \left(4\pi t + \frac{\pi}{3} \right)$ (cm), t tính bằng giây. Thời điểm đầu tiên ($t > 0$) vật đi qua vị trí cân bằng là

A. $\frac{1}{24}$ s.

B. $\frac{1}{12}$ s.

C. $\frac{1}{8}$ s.

D. $\frac{1}{6}$ s.

Lời giải. $x = 0 \Leftrightarrow 4\pi t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow t = \frac{1}{24} + \frac{k}{4}$. Giá trị dương nhỏ nhất là $t = \frac{1}{24}$ s.

Chọn A.

◆ Ví dụ 45.

Nhiệt độ ngoài trời trong một ngày hè được mô hình hóa bởi $T(t) = 28 + 4 \sin \frac{\pi(t-9)}{12}$ ($^\circ\text{C}$), t là giờ trong ngày, $0 \leq t < 24$. Trong ngày, nhiệt độ từ 30°C trở lên kéo dài bao nhiêu giờ?

Lời giải. $T \geq 30 \Leftrightarrow \sin \frac{\pi(t-9)}{12} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi(t-9)}{12} \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right] \Leftrightarrow t \in [11; 19]$. Kéo dài 8 giờ, nóng nhất lúc 15 giờ (32°C). **Đáp số: 8**

◆ Ví dụ 46.

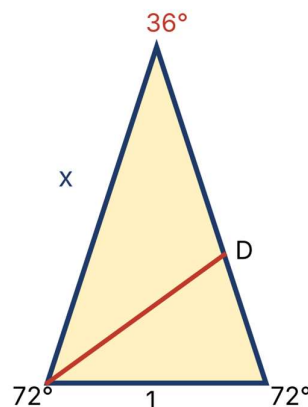
Biển báo giao thông cho biết một đoạn đường có độ dốc 8% (cứ đi ngang 100 m thì lên cao 8 m). Góc nghiêng của mặt đường so với phương ngang khoảng bao nhiêu độ (làm tròn đến hàng phần mười)?

Lời giải. $\tan \alpha = 0,08 \Rightarrow \alpha = \arctan 0,08 \approx 4,6^\circ$. Con số “8%” nghe lớn nhưng góc thật sự chưa tới 5° ! **Đáp số: 4,6**

Dạng 13. Nâng cao – những ý tưởng Olympic

◆ Ví dụ 47.

Chứng minh $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.



Tam giác vàng:
 $x/1 = 1/(x-1)$
 $\Rightarrow x = (1+\sqrt{5})/2$
 $\Rightarrow \sin 18^\circ = 1/(2x)$
 $= (\sqrt{5}-1)/4$

Tam giác cân có góc ở đỉnh 36° : đường phân giác chia tam giác thành hai tam giác cân.

Lời giải. Cách đại số: đặt $x = 18^\circ$ thì $2x = 90^\circ - 3x$,

nên $\sin 2x = \cos 3x$: $2\sin x \cos x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

Chia cho $\cos x \neq 0$: $2\sin x = 4(1 - \sin^2 x) - 3 \Leftrightarrow 4\sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0$.

Vì $\sin x > 0$: $\sin 18^\circ = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Cách hình học: trong tam giác ABC cân tại C có góc đỉnh 36° , cạnh đáy bằng 1, phân giác AD tạo ra các tam giác cân, dẫn tới cạnh bên x thỏa $x^2 = x + 1$, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (tỉ số vàng); hạ đường cao từ C được $\sin 18^\circ = \frac{1}{2x}$.

◆ Ví dụ 48. (IMO 1963, Bài 5)

Chứng minh rằng $\cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

Phân tích. Vì $\cos \frac{2\pi}{7} = -\cos \frac{5\pi}{7}$, về trái là $S = \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7}$: tổng các cos có góc lập cấp số cộng. Nhân với $2\sin \frac{\pi}{7}$ để tổng “co lại”.

Lời giải. $2\sin \frac{\pi}{7} \cdot S = \sin \frac{2\pi}{7} + \left(\sin \frac{4\pi}{7} - \sin \frac{2\pi}{7} \right) + \left(\sin \frac{6\pi}{7} - \sin \frac{4\pi}{7} \right) = \sin \frac{6\pi}{7} = \sin \frac{\pi}{7}$.

Vậy $S = \frac{1}{2}$.

◆ Ví dụ 49. (AIME 1999, Bài 11)

Biết $\sum_{k=1}^{35} \sin 5k^\circ = \tan \frac{m}{n}$, trong đó góc tính bằng độ, m, n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau và $\frac{m}{n} < 90$. Tìm $m + n$.

Lời giải. Nhân tổng S với $2\sin 2,5^\circ$ và dùng $2\sin a \sin b = \cos(a - b) - \cos(a + b)$, tổng co lại:

$$2\sin 2,5^\circ \cdot S = \cos 2,5^\circ - \cos 177,5^\circ = 2\cos 2,5^\circ.$$

Suy ra $S = \cot 2,5^\circ = \tan 87,5^\circ = \tan \frac{175}{2}$. Vậy $m + n = 177$.

◆ Ví dụ 50.

Tính $P = \sin 10^\circ \sin 30^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$.

Phân tích. Dùng đẳng thức $\sin x \sin(60^\circ - x) \sin(60^\circ + x) = \frac{1}{4} \sin 3x$ (chứng minh bằng công thức tích thành tổng).

Lời giải. Với $x = 10^\circ$: $\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \frac{1}{4} \sin 30^\circ = \frac{1}{8}$. Vậy $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{16}$.

◆ Ví dụ 51.

Chứng minh $\cos 20^\circ$ là số vô tỉ.

Lời giải. Từ $\cos 60^\circ = 4\cos^3 20^\circ - 3\cos 20^\circ$, số $x = \cos 20^\circ$ là nghiệm của $8x^3 - 6x - 1 = 0$. Nếu phương trình có nghiệm hữu tỉ $\frac{p}{q}$ (tối giản) thì $p \mid 1$, $q \mid 8$, nên nghiệm thuộc

$\left\{\pm 1; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{1}{4}; \pm \frac{1}{8}\right\}$. Thử trực tiếp, không số nào là nghiệm. Vậy $\cos 20^\circ$ vô tỉ. (Đây cũng là lí do không thể chia ba góc 60° bằng thước và compa.)

Dạng 14. Phương trình lượng giác trong đề thi tuyển sinh các trường Đại học (1997 – 2002)

Trước năm 2002, mỗi trường Đại học tự ra đề thi tuyển sinh riêng. Câu phương trình lượng giác gần như có mặt trong mọi đề, và nhiều câu đến nay vẫn là những bài tập mẫu mực về **nhóm nhân tử, hạ bậc, biến tích thành tổng**. Dạng này tuyển chọn những câu tiêu biểu nhất.

★ Ba câu hỏi trước khi biến đổi.

- (1) Các góc có liên hệ gì (gấp đôi, gấp ba, cách đều)?
- (2) Có lũy thừa bậc chẵn cần hạ bậc không?
- (3) Có nhân tử chung ẩn trong $\sin 2x$, $\cos 2x$, $1 \pm \sin x$, $\sin x \pm \cos x$ không?

Trả lời xong ba câu này, phần lớn bài toán đã “lộ” hướng giải.

◆ Ví dụ 52. (Đề thi tuyển sinh ĐH Ngoại thương năm học 1997 – 1998)

Giải phương trình $9\sin x + 6\cos x - 3\sin 2x + \cos 2x = 8$.

Phân tích. Có $\sin 2x$ và $\cos 2x$ đi cùng $\sin x$, $\cos x$. Thay $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ thì phần chỉ chứa $\sin x$ là một tam thức bậc hai, có nghiệm $\sin x = 1$, gợi ý nhân tử $1 - \sin x$.

Lời giải. Phương trình $\Leftrightarrow -2\sin^2 x + 9\sin x - 7 + 6\cos x(1 - \sin x) = 0$. Vì $-2\sin^2 x + 9\sin x - 7 = (1 - \sin x)(2\sin x - 7)$ nên

$$(1 - \sin x)(2\sin x + 6\cos x - 7) = 0.$$

- $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.
- $2\sin x + 6\cos x = 7$ vô nghiệm vì $2^2 + 6^2 = 40 < 49$.

Vậy $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

◆ Ví dụ 53. (Đề thi tuyển sinh ĐH Đà Nẵng năm học 1997 – 1998)

Giải phương trình $\sin 3x - \sin x + \sin 2x = 0$.

Lời giải. $\sin 3x - \sin x = 2\cos 2x \sin x$ và $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, nên phương trình $\Leftrightarrow 2\sin x(\cos 2x + \cos x) = 0$.

- $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$.

- $\cos 2x = -\cos x = \cos(\pi - x) \Leftrightarrow 2x = \pm(\pi - x) + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}$ hoặc $x = -\pi + k2\pi$ (họ sau đã nằm trong họ $x = k\pi$).

Vậy $x = k\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

◆ **Ví dụ 54.** (Đề thi tuyển sinh ĐH Cần Thơ năm học 1998 – 1999)

Giải phương trình $3 - 4\cos^2 x = \sin x(2\sin x + 1)$.

Lời giải. Vế trái $= 3 - 4(1 - \sin^2 x) = 4\sin^2 x - 1$. Phương trình $\Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1$ hoặc $\sin x = -\frac{1}{2}$.

- $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.
- $\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$.

◆ **Ví dụ 55.** (Đề thi tuyển sinh ĐH Huế năm học 1998 – 1999)

Giải phương trình $\sin^2 x + \sin^{22} x + \sin^{23} x = \frac{3}{2}$.

Phân tích. Ba bình phương: hạ bậc để đưa về tổng ba cos với góc $2x, 4x, 6x$ cách đều, rồi ghép cặp ngoài cùng.

Lời giải. Hạ bậc: $\frac{3 - (\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x)}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 0$.

Ghép $\cos 6x + \cos 2x = 2\cos 4x \cos 2x$:

$$\cos 4x(2\cos 2x + 1) = 0.$$

- $\cos 4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$.
- $\cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$.

◆ **Ví dụ 56.** (Đề thi tuyển sinh ĐH Kinh tế Quốc dân năm học 1998 – 1999)

Giải phương trình $\cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{16}$.

Phân tích. Tích các cos có góc gấp đôi liên tiếp: nhân thêm $\sin x$ để dùng liên tiếp công thức nhân đôi, nhớ xét riêng trường hợp $\sin x = 0$.

Lời giải. Nếu $\sin x = 0$ thì $\cos 2x = \cos 4x = \cos 8x = 1, \cos x = \pm 1$: vế trái bằng $\pm 1 \neq \frac{1}{16}$.

Vậy $\sin x \neq 0$; nhân hai vế với $16\sin x$:

$$\sin 16x = \sin x \Leftrightarrow x = \frac{k2\pi}{15} \text{ hoặc } x = \frac{\pi}{17} + \frac{k2\pi}{17}.$$

Loại các giá trị làm $\sin x = 0$: nghiệm là $x = \frac{k2\pi}{15}$ với k không chia hết cho 15, và $x = \frac{(2k+1)\pi}{17}$ với $2k + 1$ không chia hết cho 17.

⚠ Bẫy “nhân thêm”.

Nhân hai vế với $\sin x$ có thể sinh nghiệm ngoại lai $\sin x = 0$. Ở bài trên, họ $x = \frac{k2\pi}{15}$ chứa $x = 2\pi$ (khi $k = 15$), phải loại.

◆ Ví dụ 57. (Đề thi tuyển sinh ĐH Ngoại ngữ Hà Nội năm học 1998 – 1999)

Giải phương trình $1 + \sin x + \cos x + \tan x = 0$.

Lời giải. Điều kiện $\cos x \neq 0$. Ta có $1 + \tan x = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x}$, nên phương trình $\Leftrightarrow (\sin x + \cos x) \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) = 0 \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 + \cos x) = 0$.

- $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.
- $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$. Cả hai họ thỏa mãn điều kiện.

◆ Ví dụ 58. (Đề thi tuyển sinh ĐH Quốc gia Hà Nội năm học 1998 – 1999)

Giải phương trình $\sin^3 x + \cos^3 x = 2(\sin^5 x + \cos^5 x)$.

Phân tích. Chuyển vế và nhóm theo từng hàm: $\sin^3 x(1 - 2\sin^2 x)$ và $\cos^3 x(1 - 2\cos^2 x)$, cả hai đều chứa $\cos 2x$.

Lời giải. Phương trình $\Leftrightarrow \sin^3 x(1 - 2\sin^2 x) + \cos^3 x(1 - 2\cos^2 x) = 0$
 $\Leftrightarrow \sin^3 x \cos 2x - \cos^3 x \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x(\sin^3 x - \cos^3 x) = 0$.

- $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$.
- $\sin^3 x = \cos^3 x \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ (nằm trong họ trên).

Vậy $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

◆ Ví dụ 59. (Đề thi tuyển sinh ĐH Ngoại thương năm học 1998 – 1999)

Giải phương trình $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x$.

Phân tích. Ghép góc ngoài cùng với nhau (x với $4x$) và hai góc giữa ($2x$ với $3x$): mọi tổng đều có chung “trung bình cộng” $\frac{5x}{2}$.

Lời giải. Vế trái $= 2\sin\frac{5x}{2}\left(\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)$, vế phải $= 2\cos\frac{5x}{2}\left(\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)$.

Mà $\cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{x}{2} = 2\cos x \cos\frac{x}{2}$, nên

$$\cos x \cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{5x}{2} - \cos\frac{5x}{2}\right) = 0.$$

- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$
- $\cos\frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi.$
- $\tan\frac{5x}{2} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5}.$

◆ Ví dụ 60. (Đề thi tuyển sinh ĐH Y Hà Nội năm học 1998 – 1999)

Giải phương trình $\sin^{23}x - \sin^{22}x - \sin^2x = 0$.

Phân tích. Dùng hằng đẳng thức đẹp $\sin^2a - \sin^2b = \sin(a+b)\sin(a-b)$ cho cặp $3x$ và x .

Lời giải. $\sin^{23}x - \sin^{22}x = \sin 4x \sin 2x$, nên phương trình $\Leftrightarrow \sin 2x(\sin 4x - \sin 2x) = 0$.

- $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}.$
- $\sin 4x = \sin 2x \Leftrightarrow x = k\pi$ (đã có) hoặc $4x = \pi - 2x + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}.$

Vậy $x = \frac{k\pi}{2}$ hoặc $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$

◆ Ví dụ 61. (Đề thi tuyển sinh ĐH Nông nghiệp I năm học 1997 – 1998)

Cho phương trình $2\sin^2x - \sin x \cos x - \cos^2x = m$.

- Tìm m để phương trình có nghiệm.
- Giải phương trình khi $m = 1$.

Lời giải. a) Hạ bậc: $(1 - \cos 2x) - \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1 + \cos 2x}{2} = m \Leftrightarrow \sin 2x + 3\cos 2x = 1 - 2m.$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow (1 - 2m)^2 \leq 1^2 + 3^2 = 10 \Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{10}}{2} \leq m \leq \frac{1 + \sqrt{10}}{2}.$

- Với $m = 1$, thay $1 = \sin^2x + \cos^2x$: $\sin^2x - \sin x \cos x - 2\cos^2x = 0$. Vì $\cos x = 0$ không thỏa mãn, chia cho $\cos^2x$: $\tan^2x - \tan x - 2 = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1$ hoặc $\tan x = 2$.
 Vậy $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ hoặc $x = \arctan 2 + k\pi.$

Dạng 15. Phương trình lượng giác trong đề thi tuyển sinh Đại học chung (2002 – 2014)

Từ năm 2002, Bộ Giáo dục và Đào tạo tổ chức thi “ba chung”. Câu phương trình lượng giác (thường 1 điểm) trở thành “câu lấy điểm” quen thuộc, nhưng nhiều năm vẫn có những câu rất tinh tế với điều kiện xác định, phép loại nghiệm.

◆ Ví dụ 62. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A năm 2002)

Tìm nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình

$$5\left(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x}\right) = \cos 2x + 3.$$

Phân tích. Phân thức phức tạp thường “rút gọn được”. Thử tính $\sin x(1 + 2\sin 2x) + \cos 3x + \sin 3x$ xem có chứa nhân tử $1 + 2\sin 2x$ không.

Lời giải. Điều kiện $\sin 2x \neq -\frac{1}{2}$. Ta có $2\sin x \sin 2x = \cos x - \cos 3x$, nên

$$\begin{aligned}\sin x + 2\sin x \sin 2x + \cos 3x + \sin 3x &= \sin x + \sin 3x + \cos x = 2\sin 2x \cos x + \cos x \\ &= \cos x(1 + 2\sin 2x).\end{aligned}$$

Do đó biểu thức trong ngoặc bằng $\cos x$ và phương trình trở thành $5\cos x = 2\cos^2 x + 2$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \text{ (loại } \cos x = 2).$$

Trên $(0; 2\pi)$: $x = \frac{\pi}{3}$ hoặc $x = \frac{5\pi}{3}$; cả hai đều có $\sin 2x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \neq -\frac{1}{2}$.

◆ Ví dụ 63. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B năm 2002)

Giải phương trình $\sin^{23} x - \cos^{24} x = \sin^{25} x - \cos^{26} x$.

Lời giải. Hạ bậc cả bốn số hạng: $\cos 6x + \cos 8x = \cos 10x + \cos 12x$

$$\Leftrightarrow 2\cos 7x \cos x = 2\cos 11x \cos x \Leftrightarrow \cos x(\cos 7x - \cos 11x) = 0 \Leftrightarrow \cos x \sin 9x \sin 2x = 0.$$

Vì $\cos x = 0$ kéo theo $\sin 2x = 0$, phương trình $\Leftrightarrow \sin 9x \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{9}$ hoặc $x = \frac{k\pi}{2}$.

◆ Ví dụ 64. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D năm 2002)

Tìm x thuộc đoạn $[0; 14]$ nghiệm đúng phương trình $\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0$.

Lời giải. Thay $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$:

$$\text{phương trình } \Leftrightarrow 4\cos^3 x - 8\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 4\cos^2 x(\cos x - 2) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Điều kiện $0 \leq \frac{\pi}{2} + k\pi \leq 14 \Leftrightarrow -0,5 \leq k \leq 3,96$, nên $k \in \{0; 1; 2; 3\}$:

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2} \right\}.$$

⚠ Đoạn cho bằng số thực.

Đoạn $[0; 14]$ không phải $[0; 4\pi]$. Đề cho đoạn bằng số thực để kiểm tra kỹ năng ước lượng: $\frac{9\pi}{2} \approx 14,14 > 14$ nên bị loại. Đây là kiểu câu rất hợp với định dạng điền đáp án của HSA.

◆ Ví dụ 65. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B năm 2003)

Giải phương trình $\cot x - \tan x + 4\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$.

Lời giải. Điều kiện $\sin 2x \neq 0$. Ta có

$$\cot x - \tan x = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{2\cos 2x}{\sin 2x}$$

Nhân hai vế với $\frac{\sin 2x}{2}$: $\cos 2x + 2\sin^2 x = 1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 1$ hoặc $\cos 2x = -\frac{1}{2}$.

Trường hợp $\cos 2x = 1$ cho $\sin 2x = 0$, bị loại. Vậy $\cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$.

◆ Ví dụ 66. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B năm 2004)

Giải phương trình $5\sin x - 2 = 3(1 - \sin x)\tan^2 x$.

Lời giải. Điều kiện $\cos x \neq 0$, tức $\sin x \neq \pm 1$. Vì $\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}$,

phương trình $\Leftrightarrow (5\sin x - 2)(1 + \sin x) = 3\sin^2 x \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$ (loại $\sin x = -2$). Vậy $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$.

◆ Ví dụ 67. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A năm 2006)

Giải phương trình

$$\frac{2(\cos^6 x + \sin^6 x) - \sin x \cos x}{\sqrt{2} - 2\sin x} = 0$$

Lời giải. Điều kiện $\sin x \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Tử số bằng 0: $2\left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x\right) - \frac{1}{2}\sin 2x = 0$

$$\Leftrightarrow 3\sin^2 2x + \sin 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \text{ (loại } -\frac{4}{3}\text{)} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Họ này gồm $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ (có $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, loại) và $x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi$ (nhận). Vậy $x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi$.

⚠ Loại nghiệm trên đường tròn.

Họ $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ứng với **hai** điểm đối xứng trên đường tròn lượng giác; điều kiện chỉ loại một điểm. Rất nhiều thí sinh năm 2006 đã loại cả họ, hoặc quên loại.

◆ Ví dụ 68. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D năm 2006)

Giải phương trình $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$.

Lời giải. $\cos 3x - \cos x = -2\sin 2x \sin x$, $\cos 2x - 1 = -2\sin^2 x$.

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow -2\sin x(\sin 2x + \sin x) = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x(2\cos x + 1) = 0.$$

$$\text{Vậy } x = k\pi \text{ hoặc } x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi.$$

◆ Ví dụ 69. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A năm 2008)

Giải phương trình

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} = 4\sin\left(\frac{7\pi}{4} - x\right)$$

Lời giải. Dùng cung liên kết: $\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) = \cos x$, $\sin\left(\frac{7\pi}{4} - x\right) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}}$. Với điều kiện $\sin 2x \neq 0$, phương trình $\Leftrightarrow \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x} = -2\sqrt{2}(\sin x + \cos x)$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 + \sqrt{2}\sin 2x) = 0.$$

- $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$
- $\sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + k\pi \text{ hoặc } x = \frac{5\pi}{8} + k\pi.$

◆ Ví dụ 70. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A năm 2009)

Giải phương trình

$$\frac{(1 - 2\sin x)\cos x}{(1 + 2\sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3}$$

Phân tích. Khai triển cả hai vế, nhận ra $\cos x - \sin 2x$ ở vế trái và $\sin x + \cos 2x$ ở vế phải; chuyển về dạng “hai biểu thức $a\sin + b\cos$ bằng nhau”.

Lời giải. Điều kiện $\sin x \neq 1, \sin x \neq -\frac{1}{2}$.

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow \cos x - \sin 2x = \sqrt{3}(1 + \sin x - 2\sin^2 x) = \sqrt{3}(\sin x + \cos 2x)$$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sqrt{3}\sin x = \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right).$$

- $2x - \frac{\pi}{6} = x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$: có $\sin x = 1$, loại.
- $2x - \frac{\pi}{6} = -x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}$: thỏa mãn điều kiện.

$$\text{Vậy } x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

◆ Ví dụ 71. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B năm 2009)

Giải phương trình $\sin x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2(\cos 4x + \sin^3 x)$.

Lời giải. Gom $\sin x - 2\sin^3 x = \sin x \cos 2x$. Phương trình $\Leftrightarrow \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x \Leftrightarrow \sin 3x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x \Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 4x$.

- $4x = 3x - \frac{\pi}{6} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$.
- $4x = -3x + \frac{\pi}{6} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{42} + \frac{k2\pi}{7}$.

◆ Ví dụ 72. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A năm 2011)

Giải phương trình

$$\frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \cot^2 x} = \sqrt{2}\sin x \sin 2x$$

Lời giải. Điều kiện $\sin x \neq 0$.

$$\text{Vi } \frac{1}{1 + \cot^2 x} = \sin^2 x, \text{ phương trình} \Leftrightarrow \sin^2 x(1 + \sin 2x + \cos 2x) = 2\sqrt{2}\sin^2 x \cos x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x + 2\sin x \cos x = 2\sqrt{2}\cos x \Leftrightarrow \cos x(\sin x + \cos x - \sqrt{2}) = 0.$$

- $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$
- $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi.$

◆ **Ví dụ 73.** (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B năm 2012)

Giải phương trình $2(\cos x + \sqrt{3}\sin x)\cos x = \cos x - \sqrt{3}\sin x + 1.$

Lời giải. Vế trái $= 2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x = 1 + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x.$ Phương trình $\Leftrightarrow \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = \cos x - \sqrt{3}\sin x \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$

- $2x - \frac{\pi}{3} = x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi.$
- $2x - \frac{\pi}{3} = -x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{k2\pi}{3}.$

★ **Kĩ thuật “hai vế cùng dạng”.**

Các đề A2009, B2009, B2012 có chung một “chữ kí”: sau khi biến đổi, hai vế là $a\sin u + b\cos u$ và $a'\sin v + b'\cos v$ với $a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2$. Chia cho $\sqrt{a^2 + b^2}$ để được $\cos(\dots) = \cos(\dots)$ hoặc $\sin(\dots) = \sin(\dots)$. Thấy hệ số $\sqrt{3}$ là nghĩ ngay đến kĩ thuật này!

Dạng 16. Phương trình không mẫu mực – phương pháp đánh giá

Có những phương trình không thể đưa về phương trình cơ bản bằng biến đổi thông thường. Khi đó ta **đánh giá**: chỉ ra vế trái luôn $\leq M$, vế phải luôn $\geq M$, nên phương trình tương đương với hệ “dấu bằng xảy ra ở cả hai vế”. Công cụ chính: $|\sin u| \leq 1, |\cos u| \leq 1$, bất đẳng thức $\sin^n x \leq \sin^2 x$ ($n \geq 2$).

◆ **Ví dụ 74.** (Đề thi tuyển sinh Học viện An ninh năm học 1997 – 1998)

Giải phương trình $(\cos 2x - \cos 4x)^2 = 6 + 2\sin 3x.$

Phân tích. Vế phải $\geq 6 - 2 = 4$; vế trái là bình phương của hiệu hai $\cos$, có vế không vượt quá 4. Thử chứng minh điều đó.

Lời giải. $\cos 2x - \cos 4x = 2\sin 3x \sin x$, nên vế trái $= 4\sin^{23} x \sin^2 x \leq 4$. Vế phải $= 6 + 2\sin 3x \geq 4$. Phương trình tương đương với

$$\begin{cases} \sin 3x = -1 \\ \sin^{23} x \sin^2 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = -1 \\ \sin^2 x = 1. \end{cases}$$

Nếu $\sin x = 1$ thì $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ và $\sin 3x = \sin \frac{3\pi}{2} = -1$: thỏa mãn. Nếu $\sin x = -1$ thì $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x = 1$: loại. Vậy $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

◆ **Ví dụ 75.** (Đề thi tuyển sinh ĐH Kiến trúc Hà Nội năm học 1997 – 1998)

Giải phương trình $\sin 3x(\cos x - 2\sin 3x) + \cos 3x(1 + \sin x - 2\cos 3x) = 0$.

Lời giải. Khai triển và gom: $(\sin 3x \cos x + \cos 3x \sin x) + \cos 3x - 2(\sin^{23} x + \cos^{23} x) = 0 \Leftrightarrow \sin 4x + \cos 3x = 2$.

Vì $\sin 4x \leq 1$, $\cos 3x \leq 1$, phương trình $\Leftrightarrow \sin 4x = 1$ và $\cos 3x = 1$.

Từ $\cos 3x = 1$: $x = \frac{k2\pi}{3}$, khi đó $4x = \frac{8k\pi}{3}$ và $\sin \frac{8k\pi}{3} \in \left\{0; \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$, không bao giờ bằng 1. Vậy phương trình **vô nghiệm**.

◆ **Ví dụ 76.**

Giải phương trình $\sin^{2026} x + \cos^{2026} x = 1$.

Lời giải. Vì $0 \leq \sin^2 x \leq 1$ nên $\sin^{2026} x = (\sin^2 x)^{1013} \leq \sin^2 x$, dấu bằng khi $\sin^2 x \in \{0; 1\}$. Tương tự $\cos^{2026} x \leq \cos^2 x$. Cộng lại: vế trái $\leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \sin^2 x \in \{0; 1\} \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}$.

★ **Khi nào nghĩ đến đánh giá?.**

(1) Số mũ lớn hoặc lẻ loi, không hạ bậc được. (2) Hằng số ở một vế “vừa khít” với giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của vế kia (như $6 + 2\sin 3x \geq 4$). (3) Phương trình trộn lẫn lượng giác với đa thức, chẳng hạn $\cos x = 1 + x^2$ (vế trái $\leq 1 \leq$ vế phải, nghiệm duy nhất $x = 0$).

Dạng 17. Lượng giác trong đề thi học sinh giỏi và Olympic

Kì thi học sinh giỏi Toán quốc gia (VMO) của Việt Nam bắt đầu từ năm 1962, và ngay đề thi đầu tiên đã có một phương trình lượng giác. Dạng này giới thiệu các bài từ VMO, IMO, USAMO, AIME, nơi lượng giác thể hiện vẻ đẹp của sự **co rút (telescoping)**, **đối xứng** và **ghép cặp**.

◆ Ví dụ 77. (VMO 1962)

Giải phương trình

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}$$

Lời giải. $\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$.

Phương trình $\Leftrightarrow \sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$.

★ Nhận xét.

Vì $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x \in \left[\frac{1}{4}; 1\right]$, số $\frac{1}{4}$ chính là giá trị nhỏ nhất. Đề VMO đầu tiên vì thế cũng là một bài toán “dấu bằng của đánh giá”.

◆ Ví dụ 78. (VMO 1963)

Giải phương trình $\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x = \frac{3}{8}$.

Lời giải. Thay $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$:

$$\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x = 3\sin x \cos^3 x - 3\sin^3 x \cos x = 3\sin x \cos x \cos 2x = \frac{3}{4} \sin 4x.$$

Phương trình $\Leftrightarrow \sin 4x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$ hoặc $x = \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$.

◆ Ví dụ 79. (VMO 1981)

Chứng minh rằng tam giác ABC vuông khi và chỉ khi

$$\sin A + \sin B + \sin C = \cos A + \cos B + \cos C + 1.$$

Phân tích. Đưa mọi thứ về nửa góc: $\sin A + \sin B = 2\cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2}$,

$\cos A + \cos B = 2\sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2}$, còn $1 + \cos C - \sin C$ cũng viết được theo $\frac{C}{2}$.

Lời giải. Đẳng thức $\Leftrightarrow 2\cos \frac{A-B}{2} \left(\cos \frac{C}{2} - \sin \frac{C}{2} \right) = 1 + \cos C - \sin C = 2\cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{C}{2} - \sin \frac{C}{2} \right)$

$$\Leftrightarrow \left(\cos \frac{C}{2} - \sin \frac{C}{2} \right) \left(\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{C}{2} \right) = 0.$$

- $\cos \frac{C}{2} = \sin \frac{C}{2} \Leftrightarrow \frac{C}{2} = 45^\circ \Leftrightarrow C = 90^\circ.$

- $\cos \frac{A-B}{2} = \cos \frac{C}{2} \Leftrightarrow A - B = \pm C \Leftrightarrow A = 90^\circ \text{ hoặc } B = 90^\circ$ (vì $A + B + C = 180^\circ$).

Vậy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác vuông.

◆ Ví dụ 80. (IMO 1966, Bài 4)

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 1$ và mọi số thực x thỏa mãn $\sin 2^k x \neq 0$ ($k = 0, 1, \dots, n$):

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \dots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \cot x - \cot 2^n x$$

Phân tích. Vế phải là hiệu của “số hạng đầu” và “số hạng cuối”: dấu hiệu của tổng co rút.

Chỉ cần tìm được

$$\frac{1}{\sin 2a} = f(a) - f(2a)$$

Lời giải. Với $\sin 2a \neq 0$:

$$\cot a - \cot 2a = \frac{\cos a}{\sin a} - \frac{\cos 2a}{\sin 2a} = \frac{2\cos^2 a - \cos 2a}{\sin 2a} = \frac{1}{\sin 2a}$$

Áp dụng với $a = x, 2x, \dots, 2^{n-1}x$ rồi cộng lại, các số hạng giữa triệt tiêu:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sin 2^k x} = \sum_{k=0}^{n-1} (\cot 2^k x - \cot 2^{k+1} x) = \cot x - \cot 2^n x.$$

◆ Ví dụ 81. (USAMO 1996, Bài 1)

Chứng minh rằng trung bình cộng của các số $n \sin n^\circ$ với $n = 2, 4, 6, \dots, 180$ bằng $\cot 1^\circ$.

Phân tích. Ghép cặp n với $180 - n$: vì $\sin(180^\circ - n^\circ) = \sin n^\circ$, hệ số n “biến mất” và chỉ còn tổng các $\sin$.

Lời giải. Gọi S là tổng 90 số đã cho.

Với n chẵn, $n \sin n^\circ + (180 - n) \sin(180 - n)^\circ = 180 \sin n^\circ$; số hạng $n = 180$ bằng 0, số hạng $n = 90$ bằng $90 = \frac{1}{2} \cdot 180 \sin 90^\circ$. Do đó

$$S = 90 \sum_{k=1}^{89} \sin 2k^\circ.$$

Nhân tổng với $2\sin 1^\circ$ và dùng $2\sin 2k^\circ \sin 1^\circ = \cos(2k-1)^\circ - \cos(2k+1)^\circ$, tổng co rút: $2\sin 1^\circ \sum_{k=1}^{89} \sin 2k^\circ = \cos 1^\circ - \cos 179^\circ = 2\cos 1^\circ$. Vậy $\sum \sin 2k^\circ = \cot 1^\circ$, $S = 90\cot 1^\circ$, và trung bình cộng bằng $\frac{S}{90} = \cot 1^\circ$.

◆ Ví dụ 82. (AIME 1995, Bài 7)

Cho $(1 + \sin t)(1 + \cos t) = \frac{5}{4}$ và $(1 - \sin t)(1 - \cos t) = \frac{m}{n} - \sqrt{k}$, trong đó k, m, n nguyên dương, m, n nguyên tố cùng nhau. Tìm $k + m + n$.

Lời giải. Đặt $u = \sin t + \cos t \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$, khi đó $\sin t \cos t = \frac{u^2 - 1}{2}$. Giả thiết $\Leftrightarrow 1 + u + \frac{u^2 - 1}{2} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow (u + 1)^2 = \frac{5}{2}$. Vì $-1 - \sqrt{\frac{5}{2}} < -\sqrt{2}$ nên $u = -1 + \frac{\sqrt{10}}{2}$. Khi đó

$$(1 - \sin t)(1 - \cos t) = 1 - u + \frac{u^2 - 1}{2} = \frac{5}{4} - 2u = \frac{13}{4} - \sqrt{10}.$$

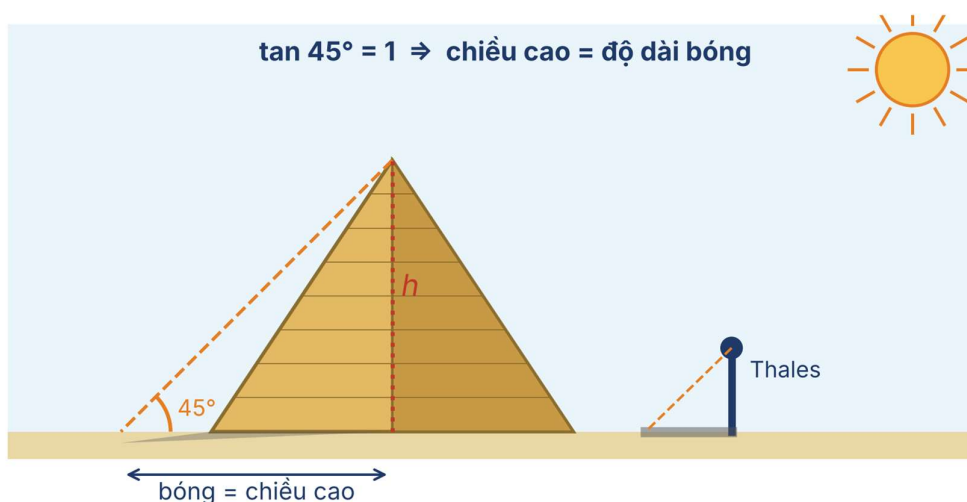
Vậy $m = 13, n = 4, k = 10$ và $k + m + n = 27$. **Đáp số: 27**

PHẦN IV. LƯỢNG GIÁC QUANH TA

Lượng giác có hai “gương mặt”. Gương mặt thứ nhất là **tam giác**: đo những khoảng cách không với tới được. Gương mặt thứ hai là **sóng**: mô tả mọi hiện tượng lặp đi lặp lại. Cả hai đều có mặt quanh ta mỗi ngày, từ cái bóng của chiếc cốc giữa sân trường đến tiếng đàn ghi-ta trong phòng.

1. Thales và cái bóng của kim tự tháp

Tương truyền, Thales (thế kỉ VI TCN) đo chiều cao kim tự tháp Kheops mà không cần trèo lên. Ông chờ đến lúc bóng của chính mình dài đúng bằng chiều cao của mình: khi đó tia nắng nghiêng 45° , và bóng của kim tự tháp (tính từ tâm đáy) cũng dài đúng bằng chiều cao của nó. Ngôn ngữ ngày nay gọi đó là $\tan 45^\circ = 1$.



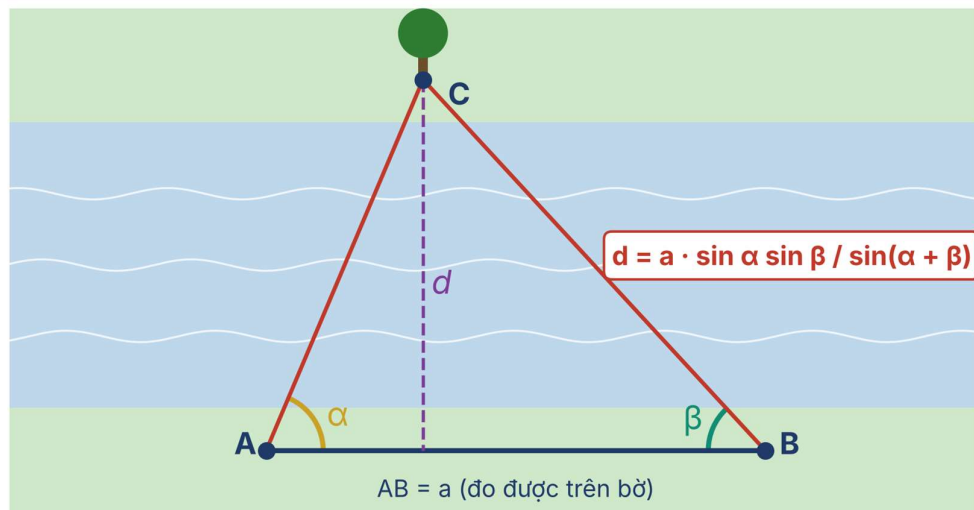
Thales đo kim tự tháp: khi tia nắng nghiêng 45° , mọi vật có bóng dài đúng bằng chiều cao.

Ở thời điểm bất kì, nếu tia nắng hợp với mặt đất góc α thì chiều cao vật bằng (độ dài bóng) $\times \tan \alpha$. Học sinh có thể làm lại thí nghiệm của Thales với cột cờ của trường: đo bóng của một chiếc cốc 1 m và bóng của cột cờ cùng một lúc, rồi dùng tỉ lệ.

2. Đo bề rộng dòng sông mà không cần qua sông

Muốn biết khoảng cách từ bờ bên này tới một cái cây C ở bờ bên kia, người đo chọn hai điểm A, B trên bờ, đo $AB = a$ và hai góc $\alpha = \widehat{CAB}$, $\beta = \widehat{CBA}$. Theo định lí sin, $AC = \frac{a \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$, nên bề rộng sông là

$$d = AC \sin \alpha = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$



Tam giác đặc: đo một cạnh và hai góc trên bờ để tính bề rộng dòng sông.

Đó chính là phương pháp **tam giác đặc**. Hơn hai nghìn năm sau Thales, người ta nối hàng nghìn tam giác như vậy để vẽ bản đồ cả một quốc gia; dự án Đại Tam giác đặc Ấn Độ (thế kỉ XIX) đã dùng nó để đo độ cao đỉnh Everest. Máy toàn đạc điện tử ở các công trường xây dựng ngày nay vẫn làm đúng việc đó, chỉ nhanh và chính xác hơn.

◆ Ví dụ 83.

Hai người đứng ở A và B trên cùng một bờ sông, cách nhau 50 m, nhìn một cây ở bờ bên kia dưới các góc $\widehat{CAB} = 60^\circ$ và $\widehat{CBA} = 70^\circ$. Bề rộng dòng sông là bao nhiêu mét (làm tròn đến hàng phần mười)?

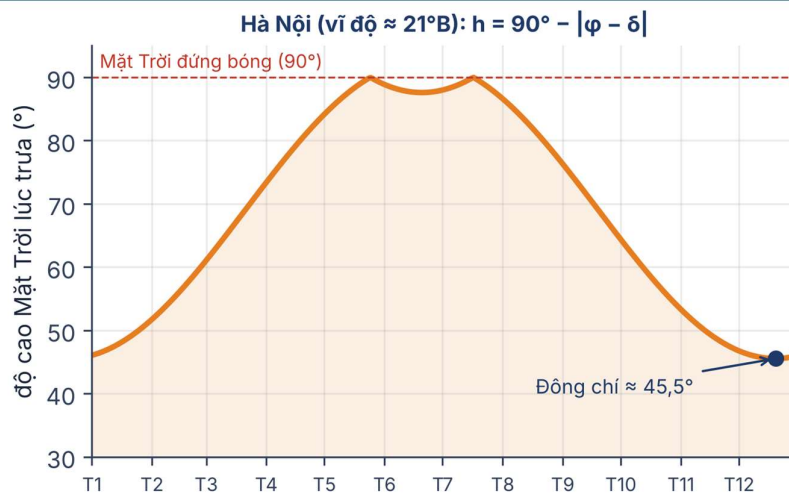
Lời giải.

$$d = \frac{50 \sin 60^\circ \sin 70^\circ}{\sin 130^\circ} \approx \frac{50 \cdot 0,8660 \cdot 0,9397}{0,7660} \approx 53,1 \text{ m}$$

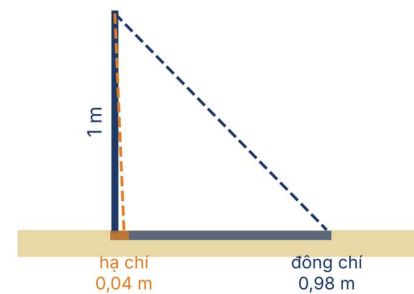
Đáp số: 53,1

3. Mặt Trời trên bầu trời Hà Nội

Lúc giữa trưa, độ cao của Mặt Trời so với đường chân trời là $h = 90^\circ - |\varphi - \delta|$, trong đó φ là vĩ độ nơi quan sát và δ là **xích vĩ** của Mặt Trời, thay đổi gần đúng theo quy luật $\sin \delta \approx 23,44^\circ \sin \frac{2\pi(d-80)}{365}$ (d là thứ tự ngày trong năm). Hà Nội có $\varphi \approx 21^\circ$, nằm trong vùng nhiệt đới, nên mỗi năm có hai lần Mặt Trời đứng bóng (khoảng cuối tháng 5 và giữa tháng 7), còn ngày Đông chí Mặt Trời chỉ lên cao khoảng $45,5^\circ$.



Bóng cọc 1 m lúc trưa

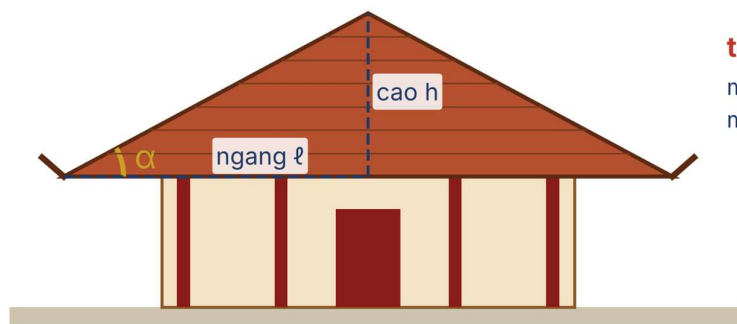


Độ cao Mặt Trời lúc giữa trưa ở Hà Nội trong một năm và độ dài bóng của chiếc cọc 1 m.

Từ đây suy ra nhiều điều thú vị: bóng của chiếc cọc 1 m lúc trưa ngày Đông chí dài $\frac{1}{\tan 45,5^\circ} \approx 0,98$ m, gần bằng chính chiếc cọc; còn ngày Hạ chí bóng chỉ dài vài centimet. Đó cũng là lí do kiến trúc sư thiết kế ô văng, mái hắt theo hướng nhà: một mái hắt sâu vừa đủ sẽ che nắng gắt mùa hè nhưng vẫn đón nắng mùa đông.

4. Mái đình, mái nhà và độ dốc

Mái đình, mái chùa Việt Nam có độ dốc lớn để thoát nước mưa nhanh, hai đầu đao cong vút. Người thợ xưa dùng “thước tầm” và tỉ lệ chiều cao – chiều ngang của mái, tức là dùng tan của góc dốc, dù không gọi tên như vậy. Trong xây dựng hiện đại, độ dốc thường được ghi bằng phần trăm: dốc $i\%$ nghĩa là $\tan \alpha = \frac{i}{100}$.



$$\tan \alpha = h / l$$

mái đình: $\alpha \approx 28^\circ - 45^\circ$

mái bằng: độ dốc $\geq 2\%$

Độ dốc của mái nhà được đo bằng tan của góc nghiêng.

★ Hoạt động trải nghiệm.

Đo chiều cao h và nửa chiều ngang l của mái nhà mình (hoặc mái hội trường),

tính $\alpha = \arctan \frac{h}{l}$. So sánh: mái tôn thường dốc $10^\circ - 15^\circ$, mái ngói $30^\circ - 45^\circ$. Vì sao mái ngói phải dốc hơn?

5. Định vị: GPS và điện thoại

Hệ thống định vị toàn cầu xác định vị trí bằng khoảng cách tới nhiều vệ tinh, kết hợp với các phép biến đổi tọa độ trên mặt cầu, mà nền tảng là lượng giác cầu. Chẳng hạn, khoảng cách theo đường tròn lớn giữa hai điểm có vĩ độ φ_1, φ_2 và chênh lệch kinh độ $\Delta\lambda$ trên Trái Đất bán kính R là

$$d = R \arccos(\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cos\Delta\lambda)$$

Mỗi lần bạn mở bản đồ trên điện thoại, hàng nghìn phép tính sin, cos như vậy được thực hiện trong tích tắc.

6. Mọi thứ quay vòng: vòng quay, bánh xe, động cơ

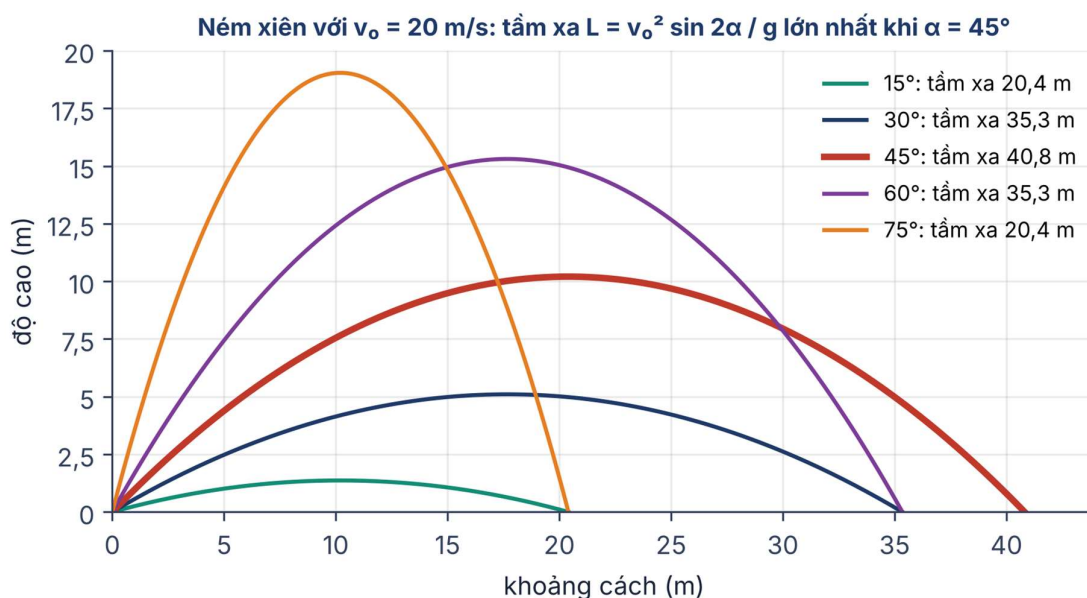
Một điểm trên vật quay đều có tọa độ $(R\cos\omega t; R\sin\omega t)$. Vì thế độ cao của cabin vòng quay, vị trí của pít-tông trong động cơ, chuyển động của van tim nhân tạo đều được mô tả bằng hàm sin, cos (xem Dạng 12).

7. Thể thao: góc ném bao nhiêu thì xa nhất?

Bỏ qua sức cản không khí, một quả bóng ném với vận tốc v_0 hợp với mặt đất góc α sẽ bay xa

$$L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

Vì $\sin 2\alpha \leq 1$, tầm xa lớn nhất khi $2\alpha = 90^\circ$, tức $\alpha = 45^\circ$; hai góc phụ nhau như 30° và 60° cho cùng một tầm xa (vì $\sin 60^\circ = \sin 120^\circ$). Đây là ứng dụng đẹp của công thức nhân đôi và tính chất $\sin(\pi - x) = \sin x$.

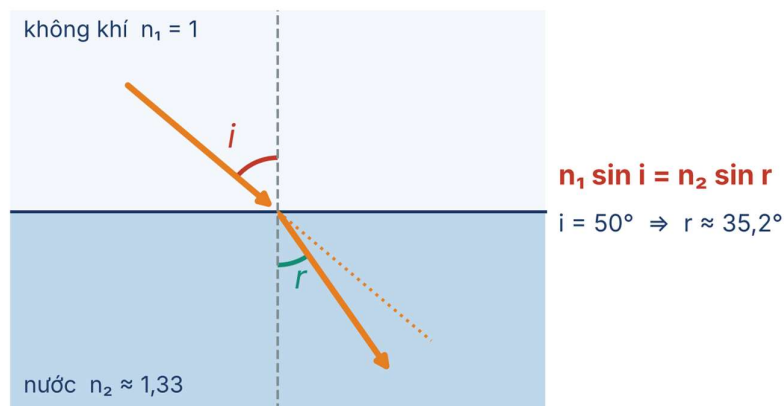


Quỹ đạo ném xiên với các góc khác nhau: 45° cho tầm xa lớn nhất, các góc phụ nhau cho cùng tầm xa.

Thực tế, vận động viên ném tạ, ném lao thường ném ở góc nhỏ hơn 45° một chút, vì điểm ra tay cao hơn mặt đất và vì sức cản không khí, nhưng con số 45° vẫn là điểm khởi đầu của mọi phân tích.

8. Ánh sáng gãy khúc và cầu vồng

Chiếc thìa cắm trong cốc nước trông như bị gãy. Lí do là ánh sáng đổi hướng khi đi từ không khí vào nước theo **định luật khúc xạ Snell**: $n_1 \sin i = n_2 \sin r$. Với nước ($n \approx 1,33$) và góc tới 50° , góc khúc xạ chỉ khoảng 35° . Chiết suất thay đổi chút ít theo màu ánh sáng, nên mỗi giọt mưa tách ánh sáng trắng thành dải màu: đó là cầu vồng, luôn hiện ra ở góc khoảng 42° so với hướng ngược Mặt Trời.



Định luật khúc xạ ánh sáng: một hệ thức giữa hai giá trị sin.

9. Thủy triều và ngày đêm

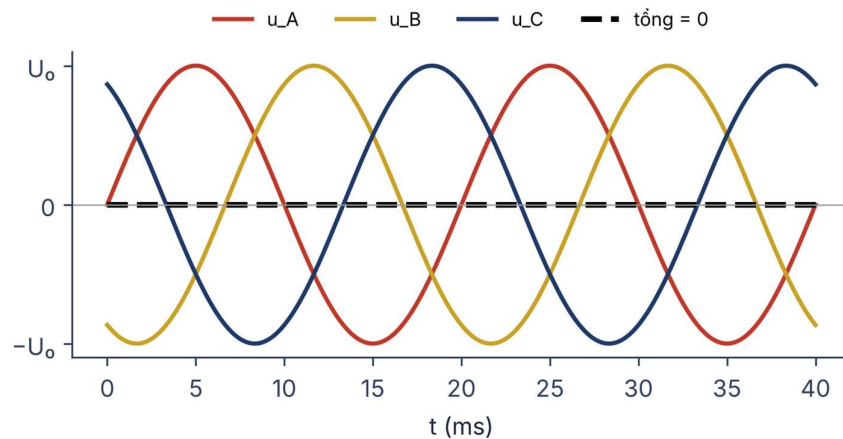
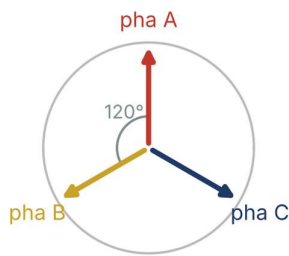
Mực nước biển dâng lên hạ xuống theo chu kì gắn với chuyển động của Mặt Trăng; số giờ ban ngày thay đổi theo chu kì một năm do trục Trái Đất nghiêng khoảng $23,4^\circ$. Ở Việt Nam, vùng biển vịnh Bắc Bộ nổi tiếng với chế độ **nhật triều** (mỗi ngày một lần nước lớn, một lần nước ròng). Các mô hình hình sin trong Dạng 12 chỉ là gần đúng, nhưng đủ để hiểu vì sao các cảng biển phải công bố bảng thủy triều hằng năm.

10. Dòng điện xoay chiều và lưới điện ba pha

Điện lưới Việt Nam có điện áp hiệu dụng 220 V và tần số 50 Hz, tức là $u = 220\sqrt{2}\sin(100\pi t)$. Lưới điện truyền tải dùng **ba pha** lệch nhau 120° : tổng ba điện áp luôn bằng 0, đúng như đẳng thức

$$\cos \alpha + \cos(\alpha + 120^\circ) + \cos(\alpha + 240^\circ) = 0.$$

Nhờ vậy, ba dây pha có thể dùng chung một dây trung tính rất nhỏ, tiết kiệm hàng nghìn tấn đồng trên các đường dây truyền tải.

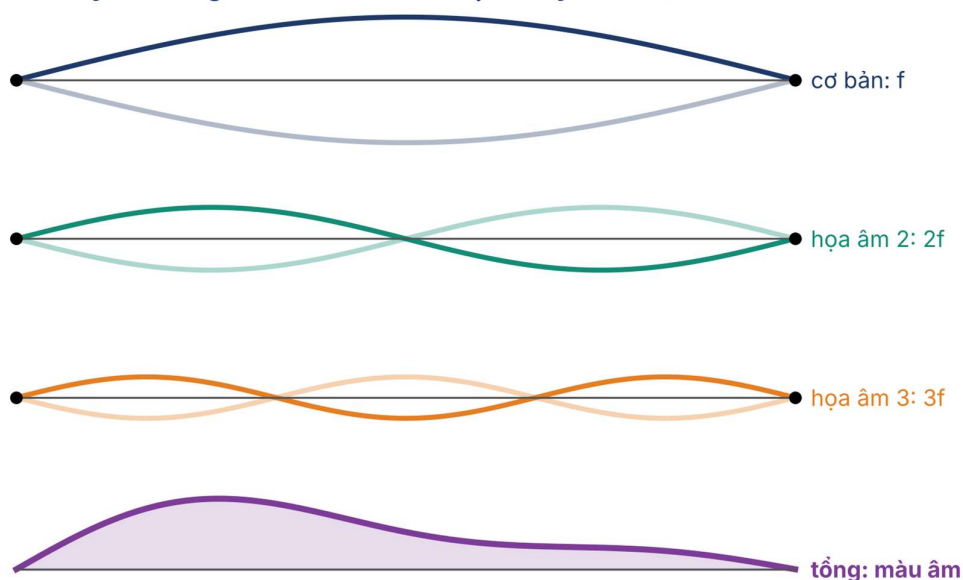
Ba vectơ lệch nhau 120° 

Ba điện áp lệch pha 120° : tổng của chúng luôn bằng 0 tại mọi thời điểm.

11. Âm thanh và âm nhạc

Mỗi nốt nhạc thuần là một sóng hình sin; nốt La chuẩn có tần số 440 Hz. Dây đàn dài L rung theo các dạng $y = A \sin \frac{n\pi x}{L}$: dạng $n = 1$ cho âm cơ bản, các dạng $n = 2, 3, \dots$ cho **họa âm** có tần số gấp 2, 3, ... lần. Tiếng đàn, giọng hát là tổng của nhiều sóng sin như vậy, và chính tỉ lệ các họa âm tạo nên “màu âm” giúp ta phân biệt đàn piano với đàn ghi-ta, hay tiếng đàn bầu ngân nga với tiếng sáo trúc.

Dây đàn rung: âm cơ bản và các họa âm $y = A \sin(n\pi x/L)$



Dây đàn rung: âm cơ bản, các họa âm và tổng của chúng.

Theo ý tưởng của Fourier, các phần mềm nén âm thanh (MP3) phân tích âm thanh thành các sóng sin và chỉ giữ lại những thành phần tai người nghe rõ.

12. Y học và công nghệ

Điện tâm đồ, sóng não, máy chụp cộng hưởng từ (MRI), máy siêu âm đều phân tích tín hiệu thành tổng các sóng sin. Ảnh JPEG trên điện thoại được nén bằng một “họ hàng” của phép biến đổi Fourier dùng hàm cos (biến đổi cosin rời rạc). Màn hình cảm ứng, tai nghe chống ồn (phát ra sóng ngược pha $y = -A\sin(\omega t + \varphi)$ để triệt tiêu tiếng ồn) đều là lượng giác “ẩn mình” trong công nghệ.

❖ Tai nghe chống ồn và cung hơn kém π .

Micro trong tai nghe thu tiếng ồn $A\sin(\omega t + \varphi)$, bộ xử lý phát ra sóng lệch pha π , tức $A\sin(\omega t + \varphi + \pi) = -A\sin(\omega t + \varphi)$. Hai sóng cộng lại bằng 0, và tai người chỉ còn nghe thấy tiếng nhạc. Một công thức cung liên kết của lớp 11 đang chạy trong chiếc tai nghe hàng chục triệu đồng!

PHẦN V. HỆ THỐNG BÀI TẬP

Bài tập chia làm 7 mức độ; Mức 7 gồm các bài trong đề thi tuyển sinh Đại học và đề thi học sinh giỏi. Các bài đánh dấu [TN] là câu trắc nghiệm 4 lựa chọn, [ĐA] là câu điền đáp án theo định dạng HSA. Học sinh nên tự bấm giờ: trung bình **1,5 phút mỗi câu** ở các mức 1 – 3.

Mức 1 – Nhận biết

Bài 1. [ĐA] Đổi góc $\frac{5\pi}{6}$ sang độ.

Bài 2. [TN] Góc 72° đổi sang radian là

- A. $\frac{2\pi}{5}$. B. $\frac{\pi}{5}$. C. $\frac{3\pi}{5}$. D. $\frac{2\pi}{3}$.

Bài 3. [TN] Giá trị của $\sin \frac{7\pi}{6}$ là

- A. $-\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Bài 4. [ĐA] Tính $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin \frac{\pi}{6}$.

Bài 5. [TN] Hàm số nào sau đây có chu kì π ?

- A. $y = \sin x$. B. $y = \cos x$. C. $y = \tan x$. D. $y = \sin \frac{x}{2}$.

Bài 6. [TN] Tập xác định của hàm số $y = \cot x$ là

- A. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$. B. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$. C. $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi\}$. D. $\mathbb{R}$.

Bài 7. [TN] Nghiệm của phương trình $\cos x = 0$ là

- A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. B. $x = k\pi$. C. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$. D. $x = k2\pi$.

Bài 8. [TN] Tập giá trị của hàm số $y = 2\sin x - 1$ là

- A. $[-3; 1]$. B. $[-1; 1]$. C. $[-2; 2]$. D. $[-1; 3]$.

Mức 2 – Thông hiểu

Bài 9. [TN] Cho $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ với $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Giá trị của $\sin \alpha$ là

- A. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. C. $-\frac{\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{8}{9}$.

Bài 10. [ĐA] Cho $\tan \alpha = 3$. Tính $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$.

Bài 11. [ĐA] Tính $\sin 75^\circ \cos 75^\circ$ (viết dưới dạng số thập phân).

Bài 12. [TN] Giá trị của $\cos^{215^\circ} - \sin^{215^\circ}$ là

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. 1. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài 13. [TN] Rút gọn $\sin(x+y)\cos y - \cos(x+y)\sin y$.

- A. $\sin x$. B. $\cos x$. C. $\sin(x+2y)$. D. $\sin y$.

Bài 14. [TN] Chu kì của hàm số $y = 3\cos\left(4x - \frac{\pi}{5}\right) + 1$ là

- A. $\frac{\pi}{2}$. B. π . C. 2π . D. $\frac{\pi}{4}$.

Bài 15. [ĐA] Gọi M, m là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của $y = 5 - 3\sin^2 x$. Tính $M + m$.

Bài 16. [ĐA] Phương trình $\sin x = \frac{1}{3}$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[0; 3\pi]$?

Bài 17. [TN] Nghiệm của phương trình $\tan 2x = 1$ là

- A. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$. B. $x = \frac{\pi}{8} + k\pi$. C. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. D. $x = \frac{\pi}{8} + k2\pi$.

Bài 18. [ĐA] Gọi S là tổng các nghiệm của phương trình $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ trên $[0; 2\pi]$. Tính $\frac{S}{\pi}$.

Mức 3 – Vận dụng

Bài 19. [ĐA] Phương trình $\cos 2x + 3\sin x - 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc $[0; 2\pi]$?

Bài 20. [ĐA] Phương trình $\sin 2x = \cos x$ có bao nhiêu nghiệm thuộc $[0; 2\pi]$?

Bài 21. [TN] Nghiệm của phương trình $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 2$ là

- A. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$. B. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$. C. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$. D. $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$.

Bài 22. [ĐA] Giá trị nhỏ nhất của $y = \sin x + \cos x - \sin x \cos x$ là bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?

Bài 23. [ĐA] Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $3\sin x - 4\cos x = m$ có nghiệm?

Bài 24. [ĐA] Tam giác ABC có $\hat{A} = 60^\circ$, $\hat{B} = 45^\circ$, $BC = 6$. Tính độ dài AC (làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài 25. [ĐA] Phương trình $\cos x + \cos 3x = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[0; \pi]$?

Bài 26. [TN] Nghiệm của phương trình $\sin^4 x - \cos^4 x = \cos 2x$ là

- A. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$. B. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. C. $x = k\pi$. D. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Bài 27. [TN] Cho a, b là các góc nhọn với $\tan a = \frac{1}{2}$, $\tan b = \frac{1}{3}$. Giá trị của $a + b$ là

- A. $\frac{\pi}{4}$. B. $\frac{\pi}{3}$. C. $\frac{\pi}{6}$. D. $\frac{\pi}{2}$.

Bài 28. [ĐA] Độ cao (mét) của một cabin vòng quay sau t phút là $h(t) = 50 - 45\cos\frac{\pi t}{10}$. Sau bao nhiêu phút (làm tròn đến hàng phần mười) cabin lần đầu đạt độ cao 72,5 m?

Mức 4 – Vận dụng cao

Bài 29. [ĐA] Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\cos^2 x - 4\cos x + m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$?

Bài 30. [ĐA] Phương trình $\sin x = \frac{x}{10}$ có bao nhiêu nghiệm thực?

Bài 31. [TN] Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{\sin x + 2\cos x + 1}{\sin x + \cos x + 1}$ là

- A. 1. B. 2. C. -2. D. $\frac{3}{2}$.

Bài 32. [ĐA] Gọi S là tổng các nghiệm của phương trình $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$ trên đoạn $[0; 10\pi]$. Tính $\frac{S}{\pi}$.

Bài 33. [TN] Tìm m để phương trình $\sin x + \cos x = m$ có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $[0; \pi]$.

- A. $1 \leq m < \sqrt{2}$. B. $-1 \leq m \leq \sqrt{2}$. C. $1 < m < \sqrt{2}$. D. $-1 < m < 1$.

Bài 34. [ĐA] Phương trình $\sin 3x = \sin x$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[0; \pi]$?

Bài 35. [TN] Tam giác ABC thỏa mãn $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$ là tam giác

- A. vuông tại C . B. vuông tại A . C. cân tại C . D. đều.

Bài 36. [ĐA] Ở một thành phố có vĩ độ cao, số giờ có ánh sáng trong ngày thứ d của năm là $L(d) = 12 + 2,5\sin \frac{2\pi(d-80)}{365}$. Ngày đầu tiên trong năm có ít nhất 13,25 giờ ánh sáng là ngày thứ mấy?

Mức 5 – Thử thách (Olympic)

Bài 37. Chứng minh rằng $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$.

Bài 38. Tính $\tan 20^\circ \tan 40^\circ \tan 80^\circ$.

Bài 39. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC : $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$.

Bài 40. Tính $S = \cos^{21^\circ} + \cos^{22^\circ} + \dots + \cos^{290^\circ}$.

Bài 41. Giải phương trình $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.

Bài 42. Chứng minh rằng $\sin \frac{\pi}{14}$ là một nghiệm của phương trình $8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$.

Mức 6 – Bài toán thực tế bổ sung

Bài 43. [ĐA] Bánh xe đạp đường kính 70 cm quay đều 120 vòng mỗi phút. Vận tốc của xe là bao nhiêu km/h (làm tròn đến hàng phần mười)?

Bài 44. [ĐA] Cánh quạt dài 50 cm quay 1200 vòng/phút. Tốc độ của đầu cánh quạt là bao nhiêu m/s (làm tròn đến hàng phần mười)?

Bài 45. [ĐA] Góc lệch của một con lắc là $\theta(t) = 0,1\cos 2t$ (rad), t tính bằng giây. Thời điểm đầu tiên ($t > 0$) góc lệch bằng 0,05 rad là bao nhiêu giây (làm tròn đến hàng phần trăm)?

Bài 46. [ĐA] Ngọn hải đăng cao 40 m so với mặt nước. Từ một con thuyền, người lái nhìn đỉnh hải đăng dưới góc nâng 5° . Thuyền cách chân hải đăng bao nhiêu mét (làm tròn đến hàng đơn vị)?

Bài 47. [ĐA] Khi Mặt Trời ở độ cao 60° so với đường chân trời, bóng của một cây trên mặt đất phẳng dài 8 m. Cây cao bao nhiêu mét (làm tròn đến hàng phần mười)?

Bài 48. [ĐA] Một thửa ruộng hình tam giác có hai cạnh dài 30 m và 40 m, góc xen giữa bằng 120° . Tính diện tích thửa ruộng (m^2 , làm tròn đến hàng phần mười).

Bài 49. [ĐA] Kéo một thùng hàng trên mặt sàn bằng sợi dây hợp với phương ngang góc 30° , lực kéo 100 N. Công của lực kéo khi thùng dịch chuyển 10 m là bao nhiêu jun (làm tròn đến hàng đơn vị)? (Công $A = F \cdot s \cdot \cos\alpha$.)

Bài 50. [ĐA] Huyết áp của một người được mô hình hóa bởi $P(t) = 100 + 20\sin\frac{8\pi t}{3}$ (mmHg), t tính bằng giây. Tim người đó đập bao nhiêu lần mỗi phút (mỗi chu kì là một nhịp)?

Mức 7 – Đề thi tuyển sinh và học sinh giỏi

Bài 51. (Đề thi tuyển sinh ĐH Thái Nguyên năm học 1997 – 1998) Giải phương trình

$$4\cos^2 x - \cos 3x = 6\cos x - 2(1 + \cos 2x)$$

Bài 52. (Đề thi tuyển sinh ĐH Lâm nghiệp năm học 1997 – 1998) Giải phương trình

$$\sin^{32} x \cos 6x + \sin 6x \cos^{32} x = \frac{3}{8}$$

Bài 53. (Đề thi tuyển sinh Học viện Quân y năm học 1997 – 1998) Giải phương trình

$$\sin^{82} x + \cos^{82} x = \frac{1}{8}$$

Bài 54. (Đề thi tuyển sinh CĐSP Hà Nội năm học 1997 – 1998) Giải phương trình

$$\cos 2x + \sin 2x + 2\cos x + 1 = 0$$

Bài 55. (Đề thi tuyển sinh ĐH Đà Nẵng năm học 1998 – 1999) Giải phương trình

$$3\cos 4x - 2\cos^{23} x = 1$$

Bài 56. (Đề thi tuyển sinh ĐH Đà Nẵng năm học 1998 – 1999) Giải phương trình

$$1 + 3\cos x + \cos 2x = \cos 3x + 2\sin x \sin 2x$$

Bài 57. (Đề thi tuyển sinh ĐH Mỹ thuật Công nghiệp năm học 1998 – 1999) Giải phương trình

$$\cos 2x - 7\sin x + 8 = 0$$

Bài 58. (Đề thi tuyển sinh ĐH Ngoại ngữ Hà Nội năm học 1998 – 1999) Giải phương trình

$$\sin 3x + \cos 2x = 1 + 2\sin x \cos 2x$$

Bài 59. (Đề thi tuyển sinh ĐH Văn hóa Hà Nội năm học 1998 – 1999) Giải phương trình

$$\sin^3 x \cos x = \frac{1}{4} + \cos^3 x \sin x$$

Bài 60. (Đề thi tuyển sinh Học viện Ngân hàng năm học 1998 – 1999) Giải phương trình

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \cos 4x$$

Bài 61. (Đề thi tuyển sinh CDSP TP. Hồ Chí Minh năm học 1998 – 1999) Giải phương trình

$$\cos x - \cos 2x + \cos 3x = 0$$

Bài 62. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D năm 2004) Giải phương trình

$$(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$$

Bài 63. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B năm 2005) Giải phương trình

$$1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$$

Bài 64. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A năm 2007) Giải phương trình

$$(1 + \sin^2 x)\cos x + (1 + \cos^2 x)\sin x = 1 + \sin 2x$$

Bài 65. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D năm 2008) Giải phương trình

$$2\sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2\cos x$$

Bài 66. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D năm 2009) Giải phương trình

$$\sqrt{3}\cos 5x - 2\sin 3x\cos 2x - \sin x = 0$$

Bài 67. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B năm 2010) Giải phương trình

$$(\sin 2x + \cos 2x)\cos x + 2\cos 2x - \sin x = 0$$

Bài 68. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D năm 2010) Giải phương trình

$$\sin 2x - \cos 2x + 3\sin x - \cos x - 1 = 0$$

Bài 69. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B năm 2011) Giải phương trình

$$\sin 2x\cos x + \sin x\cos x = \cos 2x + \sin x + \cos x$$

Bài 70. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D năm 2012) Giải phương trình

$$\sin 3x + \cos 3x - \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos 2x$$

Bài 71. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B năm 2014) Giải phương trình

$$\sqrt{2}(\sin x - 2\cos x) = 2 - \sin 2x$$

Bài 72. (VMO 1964) Chứng minh rằng với mọi x :

$$\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0 \text{ và } \sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0.$$

Bài 73. (Học viện Quân y năm học 1997 – 1998) Giải phương trình

$$(\cos 4x - \cos 2x)^2 = 5 + \sin 3x$$

Bài 74. Chứng minh rằng $\tan x \tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \tan\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \tan 3x$ (khi các biểu thức có nghĩa), rồi tính $\tan 10^\circ \tan 50^\circ \tan 70^\circ$.

PHẦN VI. ĐÁP SỐ VÀ HƯỚNG DẪN

Mức 1 – Nhận biết

Bài 1. $\frac{5 \cdot 180^\circ}{6} = 150.$

Bài 2. A. $\frac{72\pi}{180} = \frac{2\pi}{5}.$

Bài 3. A. $\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6}.$

Bài 4. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$

Bài 5. C.

Bài 6. A.

Bài 7. A.

Bài 8. A. $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq y \leq 1.$

Mức 2 – Thông hiểu

Bài 9. A. Góc phần tư III nên $\sin \alpha < 0$: $\sin \alpha = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$

Bài 10. Chia tử, mẫu cho $\cos \alpha$: $\frac{3+1}{3-1} = 2.$

Bài 11. $\frac{1}{2} \sin 150^\circ = \frac{1}{4} = 0,25.$

Bài 12. A. Bằng $\cos 30^\circ.$

Bài 13. A. Công thức $\sin(a - b)$ với $a = x + y, b = y.$

Bài 14. A. $T = \frac{2\pi}{4}.$

Bài 15. $M = 5$ (khi $\sin x = 0$), $m = 2$ (khi $\sin^2 x = 1$): $M + m = 7.$

Bài 16. Đường thẳng $y = \frac{1}{3}$ cắt đồ thị $y = \sin x$ trên $[0; 3\pi]$ tại 4 điểm ($\approx 0,34; 2,80; 6,62; 9,08$): 4.

Bài 17. A. $2x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$

Bài 18. Nghiệm $\frac{4\pi}{3}$ và $\frac{5\pi}{3}$: $\frac{S}{\pi} = 3.$

Mức 3 – Vận dụng

Bài 19. $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x \in \left\{1; \frac{1}{2}\right\}$: $x \in \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}$: 3.

Bài 20. $\cos x(2\sin x - 1) = 0$: $x \in \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}$: 4.

Bài 21. A. $2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 2 \Rightarrow x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k2\pi.$

Bài 22. Đặt $t = \sin x + \cos x \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$: $y = -\frac{t^2}{2} + t + \frac{1}{2}$; nhỏ nhất tại $t = -\sqrt{2}$: $y = -\frac{1}{2} - \sqrt{2} \approx -1,91.$

Bài 23. $m \in [-5; 5]$: 11 số.

Bài 24. Định lí sin: $AC = \frac{BC \sin}{\sin A} = \frac{6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{6} \approx 4,90.$

Bài 25. $2\cos 2x \cos x = 0$: $x \in \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right\}$: 3.

Bài 26. A. Vế trái $= (\sin^2 x - \cos^2 x) \cdot 1 = -\cos 2x$, nên $\cos 2x = 0.$

Bài 27. A. $\tan(a + b) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{6}} = 1$ và $0 < a + b < \pi.$

Bài 28. $\cos \frac{\pi t}{10} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi t}{10} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{20}{3} \approx 6,7.$

Mức 4 – Vận dụng cao

Bài 29. Với $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ thì $t = \cos x \in (0; 1]$; $m = -t^2 + 4t$ đồng biến trên $(0; 1]$, nhận giá trị trong $(0; 3]$: $m \in \{1; 2; 3\}$: 3.

Bài 30. Nghiệm nằm trong $[-10; 10]$; trên $(0; 10]$ có 3 nghiệm (một nghiệm trong $(0; \pi)$, hai nghiệm trong $(2\pi; 3\pi)$), đối xứng qua gốc và thêm $x = 0$: 7.

Bài 31. A. Đưa về $(y - 1)\sin x + (y - 2)\cos x = 1 - 2y$, điều kiện có nghiệm $(y - 1)^2 + (y - 2)^2 \geq (1 - 2y)^2 \Leftrightarrow -2 \leq y \leq 1.$

Bài 32. $\sin x = \frac{1}{2}$; mỗi chu kì $[2k\pi; 2k\pi + 2\pi)$ có hai nghiệm tổng $\pi + 4k\pi, k = 0, \dots, 4$: $S = 5\pi + 40\pi, \frac{S}{\pi} = 45.$

Bài 33. A. $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = m$ với $x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right].$

Bài 34. $x = k\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$: $\left\{0; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \pi\right\}$: 4.

Bài 35. A. Theo định lí sin, $a^2 + b^2 = c^2.$

Bài 36. $\sin \frac{2\pi(d-80)}{365} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow d \geq 80 + \frac{365}{12} \approx 110,4$: ngày thứ 111.

Mức 5 – Thử thách

Bài 37. Nhân tổng với $2\sin \frac{\pi}{7}$ và dùng công thức tích thành tổng (như Ví dụ IMO 1963): $2\sin \frac{\pi}{7} \cdot S = \sin \frac{7\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} = -\sin \frac{\pi}{7}.$

Bài 38. Dùng $\tan x \tan(60^\circ - x) \tan(60^\circ + x) = \tan 3x$ với $x = 20^\circ$: kết quả $\tan 60^\circ = \sqrt{3}.$

Bài 39. $\cos A + \cos B = 2\sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} \leq 2\sin \frac{C}{2}$; đặt $t = \sin \frac{C}{2}$: $\cos A + \cos B + \cos C \leq 2t + 1 - 2t^2 \leq \frac{3}{2}$. Dấu bằng khi tam giác đều.

Bài 40. Ghép $\cos^2 k^\circ + \cos^2 (90 - k)^\circ = 1$ ($k = 1, \dots, 44$), thêm $\cos^{245^\circ} = \frac{1}{2}$ và $\cos^{290^\circ} = 0$: $S = 44,5$.

Bài 41. $\sin x + \sin 3x = 2\sin 2x \cos x$; phương trình $\Leftrightarrow \sin 2x(2\cos x + 1) = 0$: $x = \frac{k\pi}{2}$ hoặc $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$.

Bài 42. Đặt $\theta = \frac{\pi}{14}$ thì $7\theta = \frac{\pi}{2}$, nên $\sin 4\theta = \cos 3\theta$. Khai triển và chia cho $\cos \theta \neq 0$ dẫn tới $8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$ với $x = \sin \theta$ (kiểm tra bằng máy tính: giá trị bằng 0).

Mức 6 – Bài toán thực tế bổ sung

Bài 43. Quãng đường mỗi phút $120 \cdot \pi \cdot 0,7 \approx 263,9$ m, tức $\approx 15,8$ km/h.

Bài 44. 20 vòng/giây $\times 2\pi \cdot 0,5$ m $\approx 62,8$ m/s.

Bài 45. $\cos 2t = \frac{1}{2} \Rightarrow 2t = \frac{\pi}{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6} \approx 0,52$ s.

Bài 46. $d = \frac{40}{\tan 5^\circ} \approx 457$ m.

Bài 47. $h = 8 \tan 60^\circ \approx 13,9$ m.

Bài 48. $S = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 40 \cdot \sin 120^\circ \approx 519,6$ m².

Bài 49. $A = 100 \cdot 10 \cdot \cos 30^\circ \approx 866$ J.

Bài 50. Chu kì $T = \frac{2\pi}{8\pi/3} = 0,75$ s: $\frac{60}{0,75} = 80$ nhịp/phút.

Mức 7 – Đề thi tuyển sinh và học sinh giỏi

Bài 51. Thay $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, $2(1 + \cos 2x) = 4\cos^2 x$: $-4\cos^3 x + 8\cos^2 x - 3\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(2\cos x - 1)(2\cos x - 3) = 0$. Nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$.

Bài 52. Dùng $\cos 6x = 4\cos^3 2x - 3\cos 2x$, $\sin 6x = 3\sin 2x - 4\sin^3 2x$: vế trái = $3\sin 2x \cos 2x (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = \frac{3}{4} \sin 8x$. Phương trình $\Leftrightarrow \sin 8x = \frac{1}{2}$: $x = \frac{\pi}{48} + \frac{k\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{48} + \frac{k\pi}{4}$.

Bài 53. Đặt $t = \sin^{22} x \cos^{22} x = \frac{1}{4} \sin^{24} x \in [0; \frac{1}{4}]$: $\sin^{82} x + \cos^{82} x = (1 - 2t)^2 - 2t^2 = 2t^2 - 4t + 1$. Phương trình $\Leftrightarrow 16t^2 - 32t + 7 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}$ (loại $t = \frac{7}{4}$) $\Leftrightarrow \sin^{24} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$.

Bài 54. $2\cos^2 x + 2\sin x \cos x + 2\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(\sin x + \cos x + 1) = 0$. Nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x = \pi + k2\pi$.

Bài 55. Hạ bậc: $3\cos 4x - \cos 6x - 2 = 0$. Đặt $t = \cos 2x$: $3(2t^2 - 1) - (4t^3 - 3t) - 2 = 0 \Leftrightarrow 4t^3 - 6t^2 - 3t + 5 = 0 \Leftrightarrow (t - 1)(4t^2 - 2t - 5) = 0$.

Nghiệm $\cos 2x = 1$ hoặc $\cos 2x = \frac{1-\sqrt{21}}{4}$ (loại $\frac{1+\sqrt{21}}{4} > 1$): $x = k\pi, x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1-\sqrt{21}}{4} + k\pi$.

Bài 56. $2\sin x \sin 2x = \cos x - \cos 3x$, nên phương trình $\Leftrightarrow 1 + 2\cos x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2\cos x(\cos x + 1) = 0$. Nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \pi + k2\pi$.

Bài 57. $2\sin^2 x + 7\sin x - 9 = 0 \Leftrightarrow \sin x = 1: x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Bài 58. $\sin 3x - 2\sin x \cos 2x = \sin 3x - (\sin 3x - \sin x) = \sin x$; phương trình $\Leftrightarrow \sin x + \cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x(1 - 2\sin x) = 0$.

Nghiệm $x = k\pi, x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$.

Bài 59. $\sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x) = -\frac{1}{4} \sin 4x$, nên $\sin 4x = -1: x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$.

Bài 60. $1 - \frac{3}{4} \sin^{22} x = 1 - 2\sin^{22} x \Leftrightarrow \sin^{22} x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}$.

Bài 61. $\cos x + \cos 3x = 2\cos 2x \cos x$; phương trình $\Leftrightarrow \cos 2x(2\cos x - 1) = 0$.

Nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$.

Bài 62. Vế phải $= \sin x(2\cos x - 1)$; phương trình $\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\sin x + \cos x) = 0$.

Nghiệm $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

Bài 63. $1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2, \cos 2x = (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)$; phương trình $\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(2\cos x + 1) = 0$. Nghiệm $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi$.

Bài 64. Phương trình $\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 + \sin x \cos x) = (\sin x + \cos x)^2$
 $\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 - \sin x)(1 - \cos x) = 0$. Nghiệm $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, x = k2\pi$.

Bài 65. $4\sin x \cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1 + 2\cos x$

$\Leftrightarrow (1 + 2\cos x)(2\sin x \cos x - 1) = 0$, tức $\cos x = -\frac{1}{2}$ hoặc $\sin 2x = 1$.

Nghiệm $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Bài 66. $2\sin 3x \cos 2x = \sin 5x + \sin x$; phương trình

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 5x - \sin 5x = 2\sin x \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3} - 5x\right) = \sin x$. Nghiệm $x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}, x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$.

Bài 67. $\sin 2x \cos x - \sin x = \sin x \cos 2x$; phương trình $\Leftrightarrow \cos 2x(\sin x + \cos x + 2) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0$. Nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$.

Bài 68. Phương trình $\Leftrightarrow 2\sin x \cos x - \cos x + 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\cos x + \sin x + 2) = 0$. Nghiệm $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$.

Bài 69. Phương trình $\Leftrightarrow \sin x(2\cos^2 x + \cos x - 1) - (2\cos^2 x + \cos x - 1) = 0$
 $\Leftrightarrow (\sin x - 1)(2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$.

Nghiệm $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$; $\cos x = \frac{1}{2}$ hoặc $\cos x = -1$ gộp lại thành $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}$.

Bài 70. $\sin 3x - \sin x = 2\cos 2x \sin x$, $\cos 3x + \cos x = 2\cos 2x \cos x$;

phương trình $\Leftrightarrow \cos 2x(2\sin x + 2\cos x - \sqrt{2}) = 0$, tức $\cos 2x = 0$ hoặc $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

Nghiệm $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi$, $x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi$.

Bài 71. Phương trình $\Leftrightarrow \sin x(\sqrt{2} + 2\cos x) - (2\sqrt{2}\cos x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{2}\cos x + 1)(\sqrt{2}\sin x - 2) = 0$, tức $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$: $x = \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi$.

Bài 72. Dùng công thức tổng thành tích:

$\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 2\cos(x + \pi)\cos\frac{\pi}{3} = -\cos x$. Tương tự với $\sin$.

Ý nghĩa vật lí: tổng điện áp ba pha bằng 0 (Phần IV).

Bài 73. Vế trái $= 4\sin^3 x \sin^2 x \leq 4 \leq 5 + \sin 3x$. Dấu bằng $\Leftrightarrow \sin 3x = -1$ và $\sin^2 x = 1$, cho $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ (giống Ví dụ đề Học viện An ninh cùng năm!).

Bài 74. $\tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\tan\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{3 - \tan^2 x}{1 - 3\tan^2 x}$, nhân với $\tan x$ được công thức $\tan 3x = \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$.

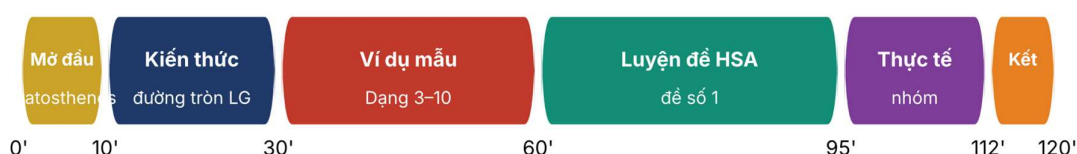
Với $x = 10^\circ$: $\tan 10^\circ \tan 50^\circ \tan 70^\circ = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0,577$.

PHẦN VII. THIẾT KẾ BUỔI DẠY VÀ ĐỀ LUYỆN TẬP THEO ĐỊNH DẠNG HSA

Phần này giúp giáo viên tổ chức **một buổi dạy ôn thi HSA 120 phút** về chủ đề lượng giác, kèm phiếu học tập và **năm đề luyện tập** mô phỏng định dạng phần *Toán học và xử lý số liệu* của bài thi HSA (trắc nghiệm 4 lựa chọn và điền đáp án, tỉ lệ xấp xỉ 7 : 3, trung bình 1,5 phút một câu). Mỗi đề gồm 20 câu (14 câu trắc nghiệm, 6 câu điền đáp án), làm trong 30 phút; năm đề tăng dần độ khó.

1. Kế hoạch buổi dạy (120 phút)

Tiến trình một buổi dạy ôn thi HSA 120 phút



Tiến trình buổi dạy ôn thi HSA 120 phút.

Mục tiêu. Sau buổi học, học sinh: (1) thuộc và vận dụng được hệ thống công thức lượng giác; (2) đếm nghiệm, tìm giá trị lớn nhất – nhỏ nhất và đọc đồ thị nhanh, chính xác; (3) làm Đề luyện số 1 (20 câu) trong 30 phút với độ chính xác từ 80% trở lên; (4) mô hình hóa được các hiện tượng tuần hoàn bằng hàm số lượng giác.

Chuẩn bị. Giáo viên: máy chiếu (dùng các hình trong chuyên đề), phiếu học tập, Đề luyện số 1 in sẵn. Học sinh: máy tính cầm tay, giấy nháp kẻ sẵn đường tròn lượng giác.

Thời gian	Hoạt động của giáo viên	Hoạt động của học sinh	Tư liệu trong chuyên đề
0' – 10'	Kể chuyện Eratosthenes đo Trái Đất; nêu ba câu đố (cột cờ, tích tan, điện 220 V)	Dự đoán, thảo luận nhanh	Mở đầu, hình Eratosthenes
10' – 30'	Hệ thống kiến thức trên đường tròn lượng giác; khẩu quyết cung liên kết; bảng công thức	Hoàn thành phiếu học tập	Phần II, các bảng công thức
30' – 60'	Chữa ví dụ mẫu: Dạng 3, 6, 7, 8, 9, 10 (mỗi dạng một ví dụ)	Làm theo cặp, trình bày trên bảng	Ví dụ ở Phần III
60' – 95'	Phát Đề luyện số 1, bấm giờ 30 phút; chữa nhanh 5 phút	Làm bài cá nhân, chấm chéo	Đề luyện số 1
95' – 112'	Chia 4 nhóm bài thực tế: vòng quay, thủy triều, ngày đêm, cột cờ	Mô hình hóa, trình bày 2 phút/nhóm	Dạng 12

Thời gian	Hoạt động của giáo viên	Hoạt động của học sinh	Tư liệu trong chuyên đề
112' – 120'	Tổng kết buổi thường gặp, giao bài về nhà	Ghi chép, nhận nhiệm vụ	Đề luyện số 2 – 5; Bài 51 – 74

★ Mẹo làm bài HSA phần lượng giác.

- (1) *Đếm nghiệm*: vẽ nhanh đồ thị hoặc đường tròn, đừng liệt kê họ nghiệm dài dòng.
- (2) *Câu chọn công thức nghiệm*: thay một giá trị đặc biệt của k vào từng phương án để loại trừ.
- (3) *Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất*: nhớ $|a\sin x + b\cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$.
- (4) *Câu điền đáp án*: đọc kỹ yêu cầu làm tròn và đơn vị; với đáp án là bội của π , đề thường hỏi $\frac{S}{\pi}$

2. Phiếu học tập

STT	Nội dung cần điền	Học sinh điền
1	$180^\circ = \dots\dots$ rad; độ dài cung $\ell = \dots\dots$	
2	Dấu của $\sin, \cos, \tan$ trong 4 góc phần tư: $\dots\dots$	
3	Khẩu quyết cung liên kết: “ $\cos \dots\dots, \sin \dots\dots, \text{phụ } \dots\dots, \text{khác } \pi \dots\dots$ ”	
4	$\cos(a - b) = \dots\dots; \sin(a + b) = \dots\dots$	
5	$\sin 2a = \dots\dots; \cos 2a = \dots\dots = \dots\dots = \dots\dots$	
6	$\cos u + \cos v = \dots\dots; \sin u - \sin v = \dots\dots$	
7	Chu kì của $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ là $\dots\dots$; của $y = \tan(\omega x)$ là $\dots\dots$	
8	$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \dots\dots; \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \dots\dots$	
9	$a\sin x + b\cos x = c$ có nghiệm $\Leftrightarrow \dots\dots$	
10	Giá trị lớn nhất của $a\sin x + b\cos x$ là $\dots\dots$	

3. Đề luyện tập số 1 – Nền tảng (20 câu, 30 phút)

Phần trắc nghiệm (14 câu)

Câu 1. Góc có số đo 225° đổi sang radian là

- A. $\frac{5\pi}{4}$. B. $\frac{3\pi}{4}$. C. $\frac{7\pi}{4}$. D. $\frac{5\pi}{6}$.

Câu 2. Một bánh xe bán kính 30 cm quay được $\frac{2}{3}$ vòng. Một điểm trên vành bánh xe đi được quãng đường

- A. 20π cm. B. 40π cm. C. 60π cm. D. 30π cm.

Câu 3. Giá trị của $\cos(-750^\circ)$ là

- A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $-\frac{1}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 4. Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\sin \alpha < 0$. B. $\cos \alpha > 0$. C. $\tan \alpha < 0$. D. $\cot \alpha > 0$.

Câu 5. Biểu thức $\sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ bằng

- A. $2\sin x$. B. 0. C. $2\cos x$. D. $\sin x + \cos x$.

Câu 6. Biểu thức $\sin(a + b)\sin(a - b)$ bằng

- A. $\sin^2 a + \sin^2 b$. B. $\cos^2 a - \sin^2 b$. C. $\cos^2 a - \cos^2 b$. D. $\sin^2 a - \sin^2 b$.

Câu 7. Giá trị của $2\sin 15^\circ \cos 15^\circ$ là

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 8. Hàm số $y = \cos 2x$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. B. $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. C. $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. D. $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$.

Câu 9. Tập giá trị của hàm số $y = 3 - 4\sin^2 x \cos^2 x$ là

- A. $[2; 3]$. B. $[-1; 3]$. C. $[3; 4]$. D. $[0; 3]$.

Câu 10. Hàm số nào sau đây tuần hoàn với chu kì 4π ?

- A. $y = \sin 2x$. B. $y = \cos \frac{x}{4}$. C. $y = \tan \frac{x}{2}$. D. $y = \sin \frac{x}{2}$.

Câu 11. Nghiệm của phương trình $2\sin x + 1 = 0$ là

- A. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi$. B. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$.
C. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$. D. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$.

Câu 12. Nghiệm của phương trình $\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ là

- A. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$. B. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$. C. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$. D. $x = k\pi$.

Câu 13. Phương trình nào sau đây vô nghiệm?

- A. $\sin x = \frac{\pi}{4}$. B. $\cos x = \sqrt{3} - 1$. C. $\tan x = 2026$. D. $\sin x + \cos x = \frac{3}{2}$.

Câu 14. Trên khoảng $(0; 4\pi)$, đồ thị hàm số $y = \sin x$ cắt đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ tại bao nhiêu điểm?

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Phần điền đáp án (6 câu)

Câu 15. Một cung tròn có bán kính 12 cm và số đo 75° . Độ dài cung là bao nhiêu centimét (làm tròn đến hàng phần mười)?

Câu 16. Cho $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ với $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\tan\alpha + \cot\alpha$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 17. Tính $\cos^{415^\circ} - \sin^{415^\circ}$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 18. Phương trình $\cos x = -\frac{1}{3}$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[-2\pi; 3\pi]$?

Câu 19. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2\sin x - 3\cos x + 1$ là bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?

Câu 20. Gọi S là tổng các nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$ của phương trình $2\cos 2x + 1 = 0$. Tính $\frac{S}{\pi}$.

4. Đề luyện tập số 2 – Công thức và hàm số (20 câu, 30 phút)

Phần trắc nghiệm (14 câu)

Câu 1. Cho $\tan\alpha = -2$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Giá trị của $\cos\alpha$ là

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. B. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$. C. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Câu 2. Cho $\cos 2a = \frac{1}{3}$. Giá trị của $\sin^4 a + \cos^4 a$ là

- A. $\frac{7}{9}$. B. $\frac{5}{9}$. C. $\frac{4}{9}$. D. $\frac{2}{3}$.

Câu 3. Giá trị của $\tan 75^\circ$ là

- A. $2 - \sqrt{3}$. B. $\sqrt{3}$. C. $1 + \sqrt{3}$. D. $2 + \sqrt{3}$.

Câu 4. Với x làm biểu thức có nghĩa, $\frac{\sin 2x}{1 + \cos x}$ bằng

- A. $\tan x$. B. $\cot x$. C. $\sin x$. D. $2\tan x$.

Câu 5. Biểu thức $\cos(a + b)\cos(a - b)$ bằng

- A. $\sin^2 a - \cos^2 b$. B. $\cos^2 a - \sin^2 b$. C. $\cos^2 a + \sin^2 b$. D. $\cos^2 a - \cos^2 b$.

Câu 6. Cho A, B, C là ba góc của một tam giác. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\cos(A + B) = \cos C$. B. $\sin \frac{A+B}{2} = \sin \frac{C}{2}$. C. $\tan(A + B) = \tan C$.
D. $\sin(A + B) = \sin C$.

Câu 7. Hàm số $y = \sin x + \tan x$ là

- A. hàm số chẵn. B. hàm số lẻ.
C. không chẵn, không lẻ. D. vừa chẵn vừa lẻ.

Câu 8. Chu kì tuần hoàn của hàm số $y = 2\cos^{23} x$ là

- A. $\frac{2\pi}{3}$. B. π . C. $\frac{\pi}{3}$. D. $\frac{\pi}{6}$.

Câu 9. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \cos 2x - 4\cos x$ là

- A. -3 . B. -5 . C. -1 . D. -6 .

Câu 10. Đồ thị hàm số $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ nhận được từ đồ thị hàm số $y = 2\sin x$ bằng cách tịnh tiến

A. sang trái $\frac{\pi}{3}$ đơn vị.

B. sang phải $\frac{\pi}{3}$ đơn vị.

C. lên trên $\frac{\pi}{3}$ đơn vị.

D. xuống dưới $\frac{\pi}{3}$ đơn vị.

Câu 11. Hàm số $y = A\sin\omega x$ có chu kì π và đạt giá trị lớn nhất bằng 3 tại $x = \frac{\pi}{4}$. Hàm số đó là

A. $y = 3\sin 4x$.

B. $y = -3\sin 2x$.

C. $y = 3\sin 2x$.

D. $y = 3\sin \frac{x}{2}$.

Câu 12. Số nghiệm thuộc đoạn $[0; \pi]$ của phương trình $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ là

A. 2.

B. 4.

C. 1.

D. 3.

Câu 13. Nghiệm của phương trình $\sin x = \cos 2x$ là

A. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}$.

B. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$.

C. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$.

D. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Câu 14. Nghiệm của phương trình $\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 2$ là

A. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$.

B. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$.

C. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

D. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$.

Phần điền đáp án (6 câu)

Câu 15. Tính $\tan 15^\circ + \cot 15^\circ$.

Câu 16. Cho $\tan x = \frac{1}{2}$. Tính $\sin 2x + \cos 2x$.

Câu 17. Giá trị lớn nhất của $y = \sin^4 x - \cos^4 x + 2\sin x \cos x$ là bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần trăm)?

Câu 18. Phương trình $\cos 2x + 3\cos x + 2 = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$?

Câu 19. Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-10; 10]$ để phương trình $2\sin x - m\cos x = 3$ có nghiệm?

Câu 20. Một vật dao động điều hòa theo phương trình $x = 6\cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$ (cm), t tính bằng giây. Thời điểm đầu tiên ($t > 0$) vật đi qua vị trí cân bằng là bao nhiêu giây (làm tròn đến hàng phần trăm)?

5. Đề luyện tập số 3 – Phương trình qua các kì thi tuyển sinh (20 câu, 30 phút)

Phần trắc nghiệm (14 câu)

Câu 1. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D năm 2007) Nghiệm của phương trình $\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3}\cos x = 2$ là

A. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi$.

B. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ hoặc $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$.

C. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ hoặc $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$.

D. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$.

Câu 2. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B năm 2007)

Nghiệm của phương trình $2\sin^{22}x + \sin 7x - 1 = \sin x$ là

- A. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$ hoặc $x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}$.
 B. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$ hoặc $x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}$.
 C. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ hoặc $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}$.
 D. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}$ hoặc $x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}$.

Câu 3. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A năm 2005) Nghiệm của phương trình

$$\cos^{23}x \cos 2x - \cos^2 x = 0 \text{ là}$$

- A. $x = \frac{k\pi}{2}$. B. $x = k\pi$. C. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$. D. $x = k2\pi$.

Câu 4. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B năm 2008) Nghiệm của phương trình

$$\sin^3 x - \sqrt{3} \cos^3 x = \sin x \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x \cos x \text{ là}$$

- A. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$. B. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ hoặc $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.
 C. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ hoặc $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$. D. $x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ hoặc $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$.

Câu 5. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D năm 2003) Nghiệm của phương trình

$$\sin^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \tan^2 x - \cos^2 \frac{x}{2} = 0 \text{ là}$$

- A. $x = \pi + k2\pi$. B. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.
 C. $x = \pi + k2\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. D. $x = \pi + k2\pi$ hoặc $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

Câu 6. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D năm 2005) Nghiệm của phương trình

$$\cos^4 x + \sin^4 x + \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{3}{2} = 0 \text{ là}$$

- A. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. B. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$. C. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$. D. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$.

Câu 7. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A năm 2003) Nghiệm của phương trình

$$\cot x - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \tan} + \sin^2 x - \frac{1}{2} \sin 2x \text{ là}$$

- A. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$. B. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. C. $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$. D. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Câu 8. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B năm 2006) Nghiệm của phương trình

$$\cot x + \sin x \left(1 + \tan x \tan \frac{x}{2} \right) = 4 \text{ là}$$

- A. $x = \frac{\pi}{12} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi$. B. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ hoặc $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$.
 C. $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ hoặc $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$. D. $x = \pm \frac{\pi}{12} + k\pi$.

Câu 9. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A năm 2010) Nghiệm của phương trình

$$\frac{(1 + \sin x + \cos 2x) \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x$$

- A. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$.
 B. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$, $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
 C. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$.
 D. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$ hoặc $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$.

Câu 10. (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D năm 2011) Nghiệm của phương trình

$$\frac{\sin 2x + 2\cos x - \sin x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0$$

- A. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$. B. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$. C. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$. D. $x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$.

Câu 11. Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\sin 2x + \sqrt{2} \sin x = 0$ là

- A. $\frac{\pi}{4}$. B. $\frac{3\pi}{4}$. C. π . D. $\frac{5\pi}{4}$.

Câu 12. Nghiệm của phương trình $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \tan x + \cot x$ là

- A. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. B. $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$. C. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$. D. $x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$.

Câu 13. Nghiệm của phương trình $1 + \sin x \cos 2x = \sin x + \cos 2x$ là

- A. $x = k\pi$. B. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
 C. $x = k2\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$. D. $x = k\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Câu 14. Nghiệm của phương trình $\sin x + \cos x = 1 + \sin x \cos x$ là

- A. $x = k2\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$. B. $x = k\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.
 C. $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$. D. $x = k2\pi$.

Phần điền đáp án (6 câu)

Câu 15. (Đề thi tuyển sinh ĐH Thủy lợi năm học 1997 – 1998) Phương trình $\sin^6 x + \cos^6 x = 1$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$?

Câu 16. Phương trình $\tan x + \tan 2x = \tan 3x$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$?

Câu 17. Phương trình $\cos 5x \cos x = \cos 4x$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[0; \pi]$?

Câu 18. Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $2\tan^2 x + 3 = \frac{3}{\cos x}$ có dạng $a\pi$. Tìm a .

Câu 19. Gọi S là tổng các nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$ của phương trình $\sin 3x = \cos x$. Tính $\frac{S}{\pi}$.

Câu 20. Phương trình $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin 5x$ có bao nhiêu nghiệm thuộc nửa khoảng $[0; 2\pi)$?

6. Đề luyện tập số 4 – Tham số, giá trị lớn nhất và đếm nghiệm (20 câu, 30 phút)**Phần trắc nghiệm (14 câu)**

Câu 1. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $3\sin x + m\cos x = 5$ vô nghiệm?

- A. 9. B. 8. C. 7. D. 6.

Câu 2. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{2+\cos}{\sin x + \cos x -}$ là

- A. $\frac{-5-\sqrt{19}}{2}$. B. $\frac{-5+\sqrt{19}}{2}$. C. $\frac{5-\sqrt{19}}{2}$. D. 0.

Câu 3. Phương trình $\cos 2x - \sin x + m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0; \frac{\pi}{2})$ khi và chỉ khi

- A. $-1 < m < 2$. B. $-1 \leq m \leq 2$. C. $-\frac{9}{8} \leq m < 2$. D. $-\frac{9}{8} < m \leq 2$.

Câu 4. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\sin^2 x + 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x = m$ có nghiệm?

- A. 4. B. 6. C. 3. D. 5.

Câu 5. Số nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$ của phương trình $\sin(\pi \cos x) = 0$ là

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Câu 6. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin^4 x + \cos^4 x + \sin x \cos x$ là

- A. $\frac{9}{8}$. B. 1. C. $\frac{3}{2}$. D. $\frac{5}{4}$.

Câu 7. Phương trình $\tan x + \cot x = m$ có nghiệm khi và chỉ khi

- A. $m \geq 2$. B. $|m| \geq 2$. C. $|m| > 2$. D. $m \in \mathbb{R}$.

Câu 8. Số nghiệm thực của phương trình $\sin x = \log x$ là

- A. 2. B. 4. C. 1. D. 3.

Câu 9. Phương trình $(2\sin x - 1)(\cos x - m) = 0$ có đúng 4 nghiệm phân biệt thuộc nửa khoảng $[0; 2\pi)$ khi và chỉ khi

- A. $m \in (-1; 1)$. B. $m \in [-1; 1] \setminus \left\{ \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$.
C. $m \in (-1; 1) \setminus \left\{ \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$. D. $m \in (-1; 1) \setminus \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$.

Câu 10. Tam giác ABC thỏa mãn $\sin C = \frac{\sin A + \sin B}{\cos A + \cos B}$ là tam giác

- A. vuông tại C . B. vuông tại A . C. cân tại C . D. đều.

Câu 11. Giá trị lớn nhất của $\sin A + \sin B + \sin C$, với A, B, C là ba góc của một tam giác, là

- A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. 3.

Câu 12. Số nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình $|\sin x| = \cos x$ là

- A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 13. Trên khoảng $(-\pi; \pi)$, đồ thị hai hàm số $y = \tan x$ và $y = \sin x$ có bao nhiêu điểm chung?

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

Câu 14. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\cos 2x + 4\sin x + m = 0$ có nghiệm?

- A. 8. B. 9. C. 7. D. 10.

Phần điền đáp án (6 câu)

Câu 15. Phương trình $\cos 3x = \sin 2x$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[-\pi; \pi]$?

Câu 16. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = 4\sin x - 3\cos x$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Câu 17. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-10; 10)$ để phương trình

$2\sin^2 x - (2m + 1)\sin x + m = 0$ có đúng hai nghiệm thuộc đoạn $[0; \pi]$?

Câu 18. Tam giác ABC có $BC = 7$, $CA = 8$, $AB = 5$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác (làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 19. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sin x \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ (viết dưới dạng số thập phân).

Câu 20. Phương trình $2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} = 3$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[0; 2\pi]$?

7. Đề luyện tập số 5 – Nâng cao, liên môn và thực tế (20 câu, 30 phút)

Phần trắc nghiệm (14 câu)

Câu 1. Giá trị của $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5}$ là

- A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. $-\frac{1}{4}$. D. 0.

Câu 2. Giá trị của $\tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ$ là

- A. 2. B. 0. C. 4. D. 1.

Câu 3. Giá trị của $\cos 36^\circ - \cos 72^\circ$ là

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{4}$. D. $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Câu 4. Tam giác ABC có $\tan A = 1$, $\tan B = 2$. Giá trị của $\tan C$ là

- A. $\frac{1}{3}$. B. -3 . C. 1. D. 3.

Câu 5. Một guồng nước có bán kính 3 m, tâm cao hơn mặt nước 2 m, quay đều 4 vòng mỗi phút. Trong mỗi vòng quay, một gàu nước nằm dưới mặt nước khoảng

- A. 3,0 giây. B. 7,5 giây. C. 4,0 giây. D. 5,0 giây.

Câu 6. Một vật tham gia đồng thời hai dao động $x_1 = 3\cos \omega t$ và $x_2 = 4\sin \omega t$ (cm). Dao động tổng hợp $x = x_1 + x_2$ có biên độ

- A. 7 cm. B. 5 cm. C. 1 cm. D. 3,5 cm.

Câu 7. Ném một quả bóng từ mặt đất với vận tốc 15 m/s. Bỏ qua sức cản không khí, lấy $g = 10 \text{ m/s}^2$. Tầm xa lớn nhất có thể đạt được là

- A. 22,5 m. B. 11,25 m. C. 15 m. D. 45 m.

Câu 8. Chiếu một tia sáng từ không khí vào nước (chiết suất $\frac{4}{3}$) với góc tới 60° . Góc khúc xạ xấp xỉ bằng

- A. 45° . B. $35,3^\circ$. C. 30° . D. $40,5^\circ$.

Câu 9. TP. Hồ Chí Minh có vĩ độ khoảng $10,8^\circ$ Bắc. Ngày Đông chí, xích vĩ Mặt Trời là $-23,44^\circ$. Độ cao Mặt Trời lúc giữa trưa ($h = 90^\circ - |\varphi - \delta|$) xấp xỉ bằng

- A. $66,2^\circ$. B. $79,2^\circ$. C. $55,8^\circ$. D. $45,6^\circ$.

Câu 10. Từ hai điểm A, B trên bờ biển cách nhau 100 m, người ta nhìn một hòn đảo nhỏ C với $\widehat{CAB} = 70^\circ$, $\widehat{CBA} = 80^\circ$. Khoảng cách từ đảo đến đường thẳng AB xấp xỉ bằng

- A. 171 m. B. 197 m. C. 92 m. D. 185 m.

Câu 11. Lúc 2 giờ 30 phút, góc giữa kim giờ và kim phút của đồng hồ là

- A. 105° . B. 120° . C. 90° . D. $97,5^\circ$.

Câu 12. Giá trị của $\cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9}$ là

- A. $-\frac{1}{8}$. B. $\frac{1}{8}$. C. $\frac{1}{16}$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 13. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$ là

- A. 2. B. 8. C. 4. D. 1.

Câu 14. Tam giác ABC thỏa mãn $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1$ là tam giác

- A. đều. B. cân. C. có một góc tù. D. vuông.

Phần điền đáp án (6 câu)

Câu 15. Kim giờ dài 6 cm, kim phút dài 8 cm. Lúc 2 giờ 30 phút, khoảng cách giữa hai đầu kim là bao nhiêu centimet (làm tròn đến hàng phần mười)?

Câu 16. Biết $(1 + \tan 1^\circ)(1 + \tan 2^\circ) \cdots (1 + \tan 45^\circ) = 2^n$. Tìm n .

Câu 17. Từ điểm A trên mặt đất, nhìn đỉnh một tòa tháp dưới góc nâng 30° ; tiến thêm 50 m về phía chân tháp, góc nâng là 45° . Tòa tháp cao bao nhiêu mét (bỏ qua chiều cao người đo, làm tròn đến hàng phần mười)?

Câu 18. Một vật dao động theo phương trình $x = 10\cos(4\pi t)$ (cm). Trong giây đầu tiên, tổng thời gian vật cách vị trí cân bằng ít nhất 5 cm là bao nhiêu giây (làm tròn đến hàng phần trăm)?

Câu 19. Cho $\tan \alpha + \cot \alpha = 3$. Tính $\tan^3 \alpha + \cot^3 \alpha$.

Câu 20. Ném một quả bóng từ mặt đất với vận tốc 20 m/s (lấy $g = 10 \text{ m/s}^2$, bỏ qua sức cản). Muốn bóng rơi cách điểm ném đúng 30 m thì góc ném nhỏ hơn trong hai góc có thể là bao nhiêu độ (làm tròn đến hàng phần mười)?

8. Đáp án và hướng dẫn giải**Đề số 1**

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Đáp án	A	B	D	C	A	D	B	C	A	D	C	B	D	C

Hướng dẫn phần trắc nghiệm.

Câu 2. $\ell = \frac{2}{3} \cdot 2\pi \cdot 30 = 40\pi$.

Câu 3. $-750^\circ = -2 \cdot 360^\circ - 30^\circ$, $\cos(-30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 6. $\sin(a+b)\sin(a-b) = \frac{1}{2}(\cos 2b - \cos 2a) = \sin^2 a - \sin^2 b$.

Câu 8. $\cos 2x$ nghịch biến khi $2x \in (0; \pi)$.

Câu 9. $y = 3 - \sin^2 x \in [2; 3]$.

Câu 13. $|\sin x + \cos x| \leq \sqrt{2} < \frac{3}{2}$.

Câu 14. hai nghiệm trong mỗi chu kì $[0; 2\pi)$, hai chu kì: 4 điểm.

Phần điền đáp án.

Câu 15. $\ell = 12 \cdot \frac{75\pi}{180} = 5\pi \approx 15,7$.

Câu 16. $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$, $\tan \alpha = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} + \frac{3}{4} = \frac{25}{12} \approx 2,08$.

Câu 17. $= \cos^{215^\circ} - \sin^{215^\circ} = \cos 30^\circ \approx 0,87$.

Câu 18. mỗi đoạn dài 2π có 2 nghiệm; trên $[-2\pi; 2\pi]$ có 4 nghiệm, trên $(2\pi; 3\pi]$ thêm nghiệm $2\pi + \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$: 5.

Câu 19. $1 + \sqrt{2^2 + 3^2} = 1 + \sqrt{13} \approx 4,61$.

Câu 20. $\cos 2x = -\frac{1}{2}$: $x \in \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}\right\}$, $S = 4\pi$: 4.

Đề số 2

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Đáp án	C	B	D	A	B	D	B	C	A	B	C	D	A	C

Hướng dẫn phần trắc nghiệm.

Câu 1. $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1+\tan^2 \alpha} = \frac{1}{5}$, $\cos \alpha < 0$.

Câu 2. $\sin^4 a + \cos^4 a = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2a = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{9} = \frac{5}{9}$.

Câu 3. $\tan(45^\circ + 30^\circ) = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 + \sqrt{3}$.

Câu 8. $y = 1 + \cos 6x$, chu kì $\frac{2\pi}{6}$.

Câu 9. $y = 2t^2 - 4t - 1$ với $t = \cos x \in [-1; 1]$, nhỏ nhất tại $t = 1$.

Câu 11. chu kì π nên $|\omega| = 2$; $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$ loại $-3\sin 2x$.

Câu 12. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{3}; \frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{12}; \frac{11}{12}$.

Câu 13. $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$; họ $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ đã nằm trong họ $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}$.

Câu 14. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$.

Phần điền đáp án.

Câu 15. $\tan a + \cot a = \frac{2}{\sin 2a} = \frac{2}{\sin 30^\circ} = 4$.

Câu 16. $\sin 2x = \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = 0,8$, $\cos 2x = \frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} = 0,6$: **1,4**.

Câu 17. $y = \sin 2x - \cos 2x \leq \sqrt{2} \approx 1,41$.

Câu 18. $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$: $\cos x = -1$ hoặc $\cos x = -\frac{1}{2}$: $x \in \left\{\pi; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right\}$: **3**.

Câu 19. $4 + m^2 \geq 9 \Leftrightarrow |m| \geq \sqrt{5}$: $m \in \{-10; \dots; -3\} \cup \{3; \dots; 10\}$: **16**.

Câu 20. $2\pi t - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{5}{12} \approx 0,42$.

Đề số 3

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Đáp án	B	D	A	C	D	A	B	C	D	A	B	C	D	A

Hướng dẫn phần trắc nghiệm.

Câu 1. $1 + \sin x + \sqrt{3}\cos x = 2 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

Câu 2. $\sin 7x - \sin x = 1 - 2\sin^2 x = \cos 4x$, nên $\cos 4x(2\sin 3x - 1) = 0$.

Câu 3. hạ bậc rồi đặt $t = \cos 2x$: $(1 + \cos 6x)\cos 2x = 1 + \cos 2x$ dẫn tới $\cos^2 2x = 1$.

Câu 4. $\sin x(\sin^2 x - \cos^2 x) + \sqrt{3}\cos x(\sin^2 x - \cos^2 x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x(\sin x + \sqrt{3}\cos x) = 0$.

Câu 5. điều kiện $\cos x \neq 0$; phương trình $\Leftrightarrow (1 - \sin x)\sin^2 x = (1 + \cos x)\cos^2 x \Leftrightarrow (1 + \cos x)(1 - \sin x)(\sin x + \cos x) = 0$, loại $\sin x = 1$.

Câu 6. đưa về $\sin^2 2x + \sin 2x - 2 = 0$, $\sin 2x = 1$.

Câu 7. điều kiện $\sin 2x \neq 0$, $\tan x \neq -1$; đưa về $(\cos x - \sin x)(1 - \sin x \cos x + \sin^2 x) = 0$, $\tan x = 1$.

Câu 8. $1 + \tan x \tan \frac{x}{2} = \frac{1}{\cos x}$, phương trình $\Leftrightarrow \frac{2}{\sin 2x} = 4$.

Câu 9. rút gọn được $\sin x + \cos 2x = 0$, loại $\cos x = 0$.

Câu 10. từ số $= (2\cos x - 1)(\sin x + 1)$, loại $\tan x = -\sqrt{3}$ và $\cos x = 0$.

Câu 11. $\sin x(2\cos x + \sqrt{2}) = 0$.

Câu 12. đặt $t = \sin x + \cos x$: $\sqrt{2}t(t^2 - 1) = 2 \Leftrightarrow (t - \sqrt{2})(\sqrt{2}t^2 + 2t + \sqrt{2}) = 0, t = \sqrt{2}$.

Câu 13. $(1 - \sin x)(1 - \cos 2x) = 0$.

Câu 14. $t = \sin x + \cos x$ thỏa $t = 1 + \frac{t^2 - 1}{2} \Leftrightarrow t = 1$.

Phần điền đáp án.

Câu 15. $1 - \frac{3}{4}\sin^{22}x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}$: 5.

Câu 16. biến đổi được $\tan x \tan 2x \tan 3x = 0$; với điều kiện, nghiệm $x = \frac{k\pi}{3}$: 7.

Câu 17. $\cos 6x = \cos 4x \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{5}$: 6.

Câu 18. $\frac{2}{\cos^2 x} - \frac{3}{\cos x} + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1$, nghiệm âm lớn nhất -2π : -2.

Câu 19. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$ (4 nghiệm) và $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ (2 nghiệm), $S = 5\pi$: 5.

Câu 20. $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 5x$: $x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}$ (4 nghiệm) và $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{3}$ (6 nghiệm), không trùng nhau: 10.

Đề số 4

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Đáp án	C	B	A	D	C	A	B	D	C	A	B	C	D	B

Hướng dẫn phần trắc nghiệm.

Câu 1. vô nghiệm $\Leftrightarrow 9 + m^2 < 25 \Leftrightarrow |m| < 4$.

Câu 2. mẫu luôn âm; đưa về $y \sin x + (y - 1) \cos x = 2 + 2y$, điều kiện $y^2 + (y - 1)^2 \geq (2 + 2y)^2 \Leftrightarrow 2y^2 + 10y + 3 \leq 0$.

Câu 3. $t = \sin x \in (0; 1)$, $m = 2t^2 + t - 1$ đồng biến trên $(0; 1)$.

Câu 4. hạ bậc: $\sin 2x - 2\cos 2x = m + 1$, có nghiệm $\Leftrightarrow |m + 1| \leq \sqrt{5}$: $m \in \{-3; \dots; 1\}$.

Câu 5. $\cos x \in \{-1; 0; 1\}$.

Câu 6. $t = \sin 2x$: $y = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2}$, lớn nhất tại $t = \frac{1}{2}$.

Câu 7. $\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$.

Câu 8. nghiệm chỉ có thể thuộc $(0; 10]$ (vì $\log x \leq 1$); vẽ đồ thị thấy 3 giao điểm ($x \approx 2,70; 7,33; 8,26$).

Câu 9. $\sin x = \frac{1}{2}$ cho 2 nghiệm $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$; cần $\cos x = m$ có 2 nghiệm khác hai nghiệm này.

Câu 10. biến đổi về $2\sin^2 \frac{C}{2} = 1$.

Câu 11. đạt khi tam giác đều.

Câu 12. $\cos x \geq 0$ và $|\tan x| = 1$: $\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.

Câu 13. $\sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right) = 0$, chỉ có $x = 0$.

Câu 14. $m = 2t^2 - 4t - 1$, $t \in [-1; 1]$, nhận giá trị trong $[-3; 5]$.

Phần điền đáp án.

Câu 15. $\cos 3x = \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right)$: $x = \frac{\pi}{10} + \frac{k2\pi}{5}$ (5 nghiệm) và $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ (1 nghiệm): **6**.

Câu 16. $y = 5\sin(x - \varphi)$ với $\tan \varphi = \frac{3}{4}$; trên đoạn đã cho y đồng biến, lớn nhất tại $x = \frac{\pi}{2}$: **4**.

Câu 17. $(2\sin x - 1)(\sin x - m) = 0$; $\sin x = \frac{1}{2}$ đã cho 2 nghiệm, cần $\sin x = m$ vô nghiệm trên $[0; \pi]$, tức $m < 0$ hoặc $m > 1$: $9 + 8 =$ **17**.

Câu 18. $\cos A = \frac{64+25-49}{80} = \frac{1}{2}$, $R = \frac{7}{2\sin 6^\circ} \approx$ **4,04**.

Câu 19. $P = \frac{1}{2} \left[\cos \frac{\pi}{3} - \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) \right] \leq \frac{3}{4} =$ **0,75**.

Câu 20. $t = 2^{\sin^2 x} \in [1; 2]$, $t + \frac{2}{t} = 3 \Leftrightarrow t \in \{1; 2\}$, tức $\sin 2x = 0$: **5**.

Đề số 5

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Đáp án	B	C	A	D	C	B	A	D	C	D	A	B	C	D

Hướng dẫn phần trắc nghiệm.

Câu 1. nhân với $2\sin \frac{\pi}{5}$ hoặc dùng $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, $\cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4}$.

Câu 2. $(\tan 9^\circ + \cot 9^\circ) - (\tan 27^\circ + \cot 27^\circ) = \frac{2}{\sin 18^\circ} - \frac{2}{\sin 54^\circ} = 4$.

Câu 3. $\cos 36^\circ - \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4} - \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Câu 4. $\tan C = -\tan(A+B) = -\frac{3}{1-2}$.

Câu 5. gàu ở dưới nước khi $\sin \theta < -\frac{2}{3}$, chiếm cung $\pi - 2\arcsin \frac{2}{3} \approx 1,68$ rad, tức $\approx 26,8\%$ của 15 giây.

Câu 6. $\sqrt{3^2 + 4^2}$.

Câu 7. $L = \frac{v_0^2}{g}$ khi $\alpha = 45^\circ$.

Câu 8. $\sin r = \frac{3\sin 6^\circ}{4} \approx 0,650$.

Câu 9. $90^\circ - (10,8^\circ + 23,44^\circ)$.

Câu 10. $d = \frac{100\sin 70^\circ \sin 80^\circ}{\sin 150^\circ} \approx 185$.

Câu 11. kim giờ ở 75° , kim phút ở 180° .

Câu 12. nhân với $\sin \frac{\pi}{9}$, dùng ba lần công thức nhân đôi: $\frac{\sin \frac{8\pi}{9}}{8\sin \frac{\pi}{9}} = \frac{1}{8}$.

Câu 13. $= \frac{4}{\sin^{22} x} \geq 4$.

Câu 14. đẳng thức tương đương $\cos A \cos B \cos C = 0$.

Phần điền đáp án.

Câu 15. định lí côsin: $\sqrt{36 + 64 - 96\cos 105^\circ} \approx 11,2$.

Câu 16. $(1 + \tan k^\circ)(1 + \tan(45 - k)^\circ) = 2$, 22 cặp và $1 + \tan 45^\circ = 2$: **23**.

Câu 17. $h = \frac{50}{\cot 30^\circ - \cot 45^\circ} = \frac{50}{\sqrt{3} - 1} \approx 68,3$.

Câu 18. $|\cos 4\pi t| \geq \frac{1}{2}$ trong $\frac{2}{3}$ mỗi chu kì: **0,67**.

Câu 19. $(\tan \alpha + \cot \alpha)^3 - 3(\tan \alpha + \cot \alpha) = 27 - 9 = 18$.

Câu 20. $\sin 2\alpha = \frac{30 \cdot 10}{400} = 0,75$, $\alpha = \frac{1}{2} \arcsin 0,75 \approx 24,3$.

LỜI KẾT

Từ cái bóng của cây gậy ở Alexandria, bảng dây cung của Hipparchus, chữ *jiva* bị dịch nhầm thành *sinus*, đến đường tròn đơn vị của Euler và những chuỗi sóng của Fourier, lượng giác đã đi một hành trình hơn hai nghìn năm để trở thành chương đầu tiên của Toán 11. Đằng sau những công thức tưởng như khô khan là hai ý tưởng giản dị: *dùng góc để đo những gì tay không với tới*, và *mọi thứ quay vòng đều mang trong mình một hàm sin*.

Khi gặp một câu hỏi lượng giác trong phòng thi HSA, hãy nhớ bốn bước: *vẽ đường tròn lượng giác; đưa về một hàm, một cung; nhận dạng phương trình; đếm nghiệm bằng hình vẽ*. Và khi nhìn một vòng quay, một con sóng hay đọc số giờ mặt trời mọc, hãy thử hỏi: *biên độ, chu kì và pha ban đầu của nó là bao nhiêu?*

Chúc các em học sinh đạt kết quả cao trong kì thi HSA, và chúc quý thầy cô có thêm tư liệu để kể cho học trò nghe câu chuyện đẹp này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Lịch sử và tài liệu nước ngoài

- [1] E. Maor (1998), *Trigonometric Delights*, Princeton University Press.
- [2] G. Van Brummelen (2009), *The Mathematics of the Heavens and the Earth: The Early History of Trigonometry*, Princeton University Press.
- [3] V. J. Katz (2009), *A History of Mathematics: An Introduction*, 3rd ed., Addison-Wesley.
- [4] C. B. Boyer, U. C. Merzbach (2011), *A History of Mathematics*, 3rd ed., Wiley.
- [5] L. Euler (1748), *Introductio in analysin infinitorum*, Lausanne.
- [6] J. Fourier (1822), *Théorie analytique de la chaleur*, Paris.
- [10] Art of Problem Solving, *1999 AIME Problems*, Problem 11, artofproblemsolving.com/wiki.
- [11] Art of Problem Solving, *1963 IMO Problems*, Problem 5, artofproblemsolving.com/wiki.
- [12] T. Andreescu, Z. Feng (2005), *103 Trigonometry Problems: From the Training of the USA IMO Team*, Birkhäuser.

Chương trình, đề thi và tài liệu trong nước

- [13] Bộ Giáo dục và Đào tạo (2018), *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán*; Sách giáo khoa Toán 11 (các bộ sách hiện hành), chương *Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác*.
- [14] *Đề minh họa HSA 2027 và ma trận đề thi*; Trung tâm Khảo thí ĐHQG Hà Nội, cet.vnu.edu.vn.
- [15] Bộ Giáo dục và Đào tạo, *Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng môn Toán các khối A, A1, B, D các năm*. Đề thi các trường thi riêng.
- [16] *Đề thi chọn học sinh giỏi Toán quốc gia (VMO) các năm*.