

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề thi gồm 03 câu, 01 trang

Môn: TOÁN

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi thứ nhất: 18/9/2025

Câu 1 (7,0 điểm).

- a) Cho đa thức $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x - 2026$, trong đó $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực dương. Chứng minh rằng $P(x)$ có duy nhất một nghiệm dương.
- b) Chứng minh rằng không tồn tại dãy số nguyên dương $(a_n)_{n \geq 1}$ sao cho với mỗi k nguyên dương thì đa thức $P_k(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + 1$ có k nghiệm thực phân biệt.

Câu 2 (7,0 điểm).

- a) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên tố p , luôn tồn tại số nguyên dương n sao cho C_{2n}^n chia hết cho p .
- b) Với mỗi số nguyên dương n , kí hiệu $f(n)$ là số nguyên dương lớn nhất sao cho $3^{f(n)} \leq C_{6n}^{3n}$. Gọi D là tập các số nguyên tố p sao cho tồn tại số nguyên dương n mà $f(n)$ chia hết cho p . Chứng minh rằng $f(n) < f(n+1)$, $\forall n \geq 1$ và D là tập vô hạn.

Câu 3 (6,0 điểm). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với góc ABC tù. Các đường phân giác trong AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại I . Gọi M, N, P lần lượt là điểm chính giữa cung BC chứa A , cung CA chứa B và cung AB chứa C của (O) . Đường thẳng MI cắt EF tại A_1 và cắt (O) tại S , đường thẳng BA_1 cắt (O) tại điểm K ($S \neq M; K \neq B$).

- a) Chứng minh rằng ba điểm K, E, S thẳng hàng.
- b) Đường thẳng IN cắt DF tại B_1 , đường thẳng IP cắt DE tại C_1 . Chứng minh rằng ba đường thẳng DA_1, EB_1, FC_1 đồng quy.

-----HẾT-----

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Đề thi gồm 03 câu, 01 trang

Môn: TOÁN

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi thứ hai: 19/9/2025

Câu 4 (7,0 điểm). Cho đường tròn (O) và hai điểm B, C cố định trên (O) sao cho BC không là đường kính. Điểm A di chuyển trên (O) sao cho tam giác ABC nhọn và $AB < AC$. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC đồng quy tại H . Đường thẳng AD cắt (O) tại điểm A' khác A . Đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF cắt đoạn AH tại I .

a) Gọi M là giao của IE và $A'B$, N là giao của IF và $A'C$. Chứng minh rằng MN vuông góc với OH .

b) Gọi K là điểm đối xứng với O qua BC và T là giao điểm của KH và EF . Chứng minh rằng đường thẳng qua A song song với DT luôn đi qua một điểm cố định khi A thay đổi.

Câu 5 (7,0 điểm). Cho một bảng ô vuông 25×26 gồm 25 hàng và 26 cột. Bạn An xếp 105 viên bi vào các ô vuông đơn vị của bảng thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau: mỗi ô vuông đơn vị có tối đa một viên bi và trên mỗi hàng, mỗi cột đều có ít nhất một viên bi.

Một viên bi được gọi là **thứ vị** nếu số bi trong cùng hàng với nó nhiều hơn số bi trong cùng cột với nó.

a) Chứng minh rằng với mọi cách xếp bi của bạn An thì luôn tồn tại ít nhất một viên bi **thứ vị**.

b) Tìm số viên bi **thứ vị** lớn nhất có thể.

Câu 6 (6,0 điểm). Cho trước số nguyên $n > 1$. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ khác hằng với hệ số nguyên thỏa mãn tồn tại đa thức $Q(x)$ hệ số nguyên sao cho tất cả các hệ số của đa thức $P(x)Q(x) - 1$ đều chia hết cho n .

-----HẾT-----