

**ĐỀ CHÍNH THỨC**

Môn thi: **TOÁN 11**

Ngày thi: 15 tháng 3 năm 2025

Thời gian làm bài: 150 phút

(Đề thi gồm 02 trang)

**PHẦN I. TRẢ LỜI NGẮN (10,0 điểm).**

Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 10. Với mỗi câu hỏi, thí sinh viết kết quả vào giấy thi.

**Câu 1 (1,0 điểm)** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \cos 2x + \sin x + 1$  trên đoạn  $\left[-\frac{\pi}{4}; \pi\right]$  bằng bao nhiêu?

**Câu 2 (1,0 điểm)** Mẫu số liệu ghép nhóm về tốc độ bóng trong 200 lần giao bóng của một vận động viên quần vợt được cho trong bảng sau:

| Tốc độ (km/h) | [150;155) | [155;160) | [160;165) | [165;170) | [170;175) | [175;180) |
|---------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Số lần        | 28        | 28        | 35        | 43        | 41        | 35        |

Trung vị của mẫu số liệu trên bằng bao nhiêu?

**Câu 3 (1,0 điểm)** Giá trị của  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x+3} - \sqrt[3]{2x+1}}{x^2 - 4}$  bằng bao nhiêu?

**Câu 4 (1,0 điểm)** Một cấp số cộng có chẵn số hạng. Tổng các số hạng thứ lẻ là 24, tổng các số hạng thứ chẵn là 30. Biết rằng số hạng cuối lớn hơn số hạng đầu là  $\frac{21}{2}$ , cấp số cộng đó có bao nhiêu số hạng?

**Câu 5 (1,0 điểm)** Cho hàm số  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+3}+ax+b}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 2 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ . Biết hàm số  $f(x)$  liên tục

tại điểm  $x=1$ , giá trị của  $ab$  bằng bao nhiêu?

**Câu 6 (1,0 điểm)** Phương trình  $\cot\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) - \frac{\cos x}{1 + \sin x} = 2$  có bao nhiêu nghiệm trên đoạn  $[0; 2025\pi]$ ?

**Câu 7 (1,0 điểm)** Cho cấp số nhân  $(u_n)$  có mọi số hạng đều dương và công bội  $q \neq 1$ . Biết  $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = \frac{45}{4}$  và  $\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} + \frac{1}{u_4} = \frac{5}{2}$ , giá trị của  $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot u_4$  bằng bao nhiêu?

**Câu 8 (1,0 điểm)** Cho tứ diện  $ABCD$  và  $O$  là điểm bất kì nằm bên trong tam giác  $BCD$ . Qua điểm  $O$  kẻ các đường thẳng song song với  $AB, AC, AD$  theo thứ tự cắt các

mặt phẳng  $(ACD), (ABD), (ABC)$  lần lượt tại các điểm  $M, N, P$ . Giá trị của biểu thức  $T = \frac{OM}{AB} + \frac{ON}{AC} + \frac{OP}{AD}$  bằng bao nhiêu?

**Câu 9 (1,0 điểm)** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh  $a$ , cạnh  $SA = 2a$  và nằm trên đường thẳng vuông góc với đáy. Gọi  $\alpha$  là góc tạo bởi hai đường thẳng  $AC$  và  $SD$ . Khi đó giá trị của  $\cos \alpha$  bằng bao nhiêu?

**Câu 10 (1,0 điểm)** Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang vuông tại  $A$  và  $B$ ,  $AB = BC = a, AD = 2a$ . Cạnh  $SA = 2a$  và nằm trên đường thẳng vuông góc với đáy. Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $SB, CD$  và  $\alpha$  là góc tạo bởi đường thẳng  $MN$  và mặt phẳng  $(SAC)$ . Khi đó giá trị của  $\sin \alpha$  bằng bao nhiêu?

## PHẦN II. TỰ LUẬN (10,0 điểm).

Thí sinh trả lời từ câu 11 đến câu 13. Với mỗi câu hỏi, thí sinh trình bày lời giải vào giấy thi.

**Câu 11 (3,0 điểm)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để phương trình  $\sin 2x - 2m \sin x - \cos x + m = 0$  có đúng 5 nghiệm thuộc đoạn  $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ .

**Câu 12 (4,0 điểm)** Cho tứ diện  $OABC$  có ba đường thẳng  $OA; OB; OC$  đôi một vuông góc với nhau. Gọi  $H$  là trực tâm của tam giác  $ABC$ .

- Chứng minh rằng đường thẳng  $OH$  vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$ .
- Gọi  $\alpha, \beta, \gamma$  lần lượt là góc tạo bởi đường thẳng  $OH$  với các đường thẳng  $OA, OB$  và  $OC$ . Tính giá trị của biểu thức  $T = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma$ .
- Chứng minh  $\frac{S_{\Delta HBC}}{S_{\Delta OBC}} + \frac{S_{\Delta HAC}}{S_{\Delta OAC}} + \frac{S_{\Delta HAB}}{S_{\Delta OAB}} \leq \sqrt{3}$ .

**Câu 13 (3,0 điểm)** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi 
$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2(n+2)u_n}{n+1} + n + 2, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

- Chứng minh dãy số  $(u_n)$  là dãy số tăng.
- Chứng minh  $\frac{u_1}{2} + \frac{u_2}{3} + \frac{u_3}{4} + \dots + \frac{u_{2024}}{2025} < \frac{u_{2025}}{2026}$ .

-----HẾT-----

*Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.*

Họ tên thí sinh: ..... Số báo danh: .....  
Họ tên và chữ ký của cán bộ coi thi số 1: ..... Họ tên và chữ ký của cán bộ coi thi số 2: .....

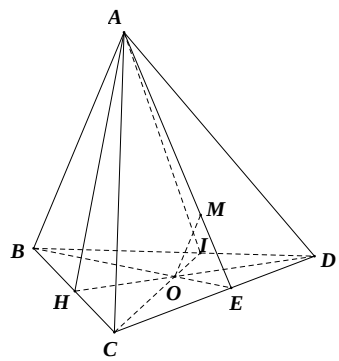
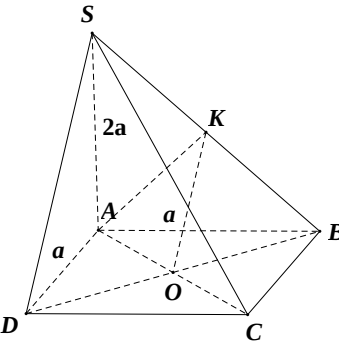
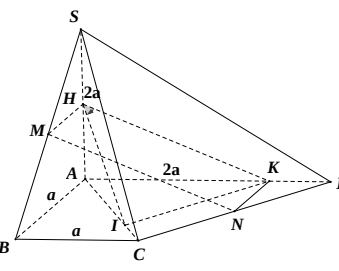
Môn thi: **TOÁN 11**

Ngày thi: 15/3/2025

**HƯỚNG DẪN CHẤM**  
(Hướng dẫn chấm gồm 4 trang)

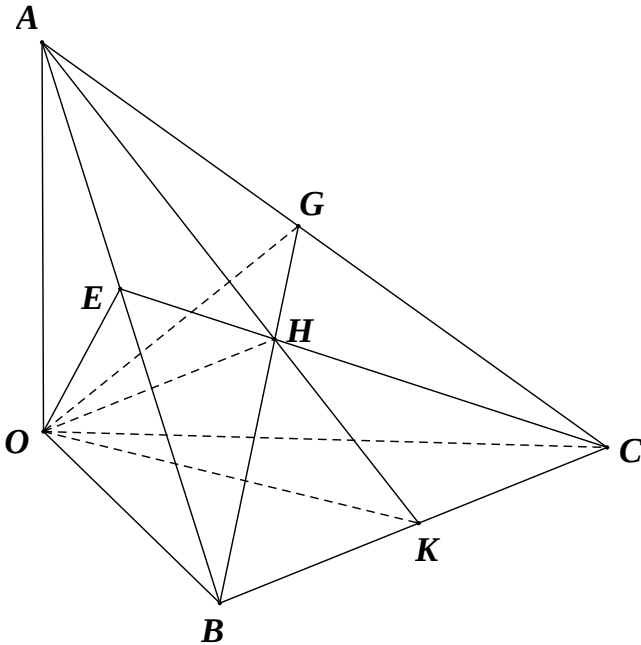
**PHẦN I - Trả lời ngắn (10,0 điểm).**

| CÂU | ĐÁP SỐ                    | ĐIỂM | GHI CHÚ                                                                                                                                                                                                               |                                                    |
|-----|---------------------------|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| 1   | $\frac{17}{8}$            | 1,0  | $* y = -2\sin^2 x + \sin x + 2$<br>$* \text{Đặt } \sin x = t$<br>$* y = -2t^2 + t + 2, t \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$                                                                                     | $\max y = \frac{17}{8}$                            |
| 2   | $\frac{7140}{43}$         | 1,0  | $* Q_2 = 165 + \frac{5}{43} \cdot (100 - 91)$                                                                                                                                                                         | $Q_2 = \frac{7140}{43}$                            |
| 3   | $-\frac{\sqrt[3]{5}}{60}$ | 1,0  | $\frac{\sqrt[3]{x+3} - \sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt[3]{(x+3)^2} + \sqrt[3]{(x+3)(2x+1)} + \sqrt[3]{(2x+1)^2}}$ $= \frac{-x+2}{\sqrt[3]{(x+3)^2} + \sqrt[3]{(x+3)(2x+1)} + \sqrt[3]{(2x+1)^2}}$                               | $-\frac{1}{12\sqrt[3]{25}}$                        |
| 4   | 8                         | 1,0  | $* u_1 + u_3 + \dots + u_{2n-1} = 24$<br>$* u_2 + u_4 + \dots + u_{2n} = 30$<br>$* \text{Trừ vế } nd = 6$<br>$* u_{2n} - u_1 = (2n-1)d = \frac{21}{2}$                                                                | $n = 4$<br>Có 8 số hạng                            |
| 5   | $-\frac{21}{4}$           | 1,0  | $* b = -a - 2$<br>$* \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3} + ax - a - 2}{x-1} = 2$<br>$* \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2} + a = 2$                                                               | $a = \frac{3}{2}; b = -\frac{7}{2}$                |
| 6   | 2025                      | 1,0  | $* -\tan x - \frac{\cos x}{1+\sin x} = 2$<br>$* \cos x \neq 0, (\sin x \neq \pm 1)$<br>$* -1 - \sin x = 2 \cos x (1 + \sin x)$<br>$* \cos x = -\frac{1}{2}$                                                           | 2025 nghiệm                                        |
| 7   | $\frac{81}{4}$            | 1,0  | $* u_1 \cdot \frac{1-q^4}{1-q} = \frac{45}{4}$<br>$* \frac{1}{u_1} \cdot \frac{1-\frac{1}{q^4}}{1-\frac{1}{q}} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{u_1} \cdot \frac{1-q^4}{1-q} \cdot \frac{1}{q^3} = \frac{5}{2}$ | $u_1 u_2 u_3 u_4 = u_1^4 \cdot q^6 = \frac{81}{4}$ |

|             |                         |                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                       |
|-------------|-------------------------|------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
|             |                         |                  | * Chia vế $u_1^2 q^3 = \frac{9}{2}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                                                                       |
| 8           | 1                       | 1,0              | * $\frac{OM}{AB} = \frac{EO}{EB} = \frac{S_{\triangle OCD}}{S_{\triangle BCD}}$<br>* $\frac{ON}{AC} = \frac{IO}{IB} = \frac{S_{\triangle OBD}}{S_{\triangle BCD}}$<br>* $\frac{OP}{AD} = \frac{HO}{HB} = \frac{S_{\triangle OBC}}{S_{\triangle BCD}}$<br>* $S_{\triangle OCD} + S_{\triangle OBD} + S_{\triangle OBC} = S_{\triangle BCD}$ |    |
| 9           | $\frac{\sqrt{10}}{10}$  | 1,0              | * $(AC; SD) = (AC; OK)$<br>* $OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}; OK = \frac{a\sqrt{5}}{2}; AK = \frac{a\sqrt{5}}{2}$<br>* $\cos \alpha = \frac{\frac{1}{2} + \frac{5}{4} - \frac{5}{4}}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$                                                                                |    |
| 10          | $\frac{3\sqrt{26}}{26}$ | 0,6              | * $(MN; (SAC)) = (HK; (SAC)) = KHI$<br>* $KI = \frac{3}{4}CD = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$<br>* $HK = \sqrt{a^2 + \frac{9a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{13}}{2}$<br>* $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{26}}{26}$                                                                                                                                             |  |
| <b>TỔNG</b> |                         | <b>10,0 điểm</b> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                       |

**PHẦN II - Tự luận (10,0 điểm).**

| Câu                         | Hướng dẫn chấm                                                                                                                                                                              | Điểm       |
|-----------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Câu 11</b><br>(3,0 điểm) | Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m$ ...                                                                                                                                             | <b>3,0</b> |
|                             | Ta có                                                                                                                                                                                       |            |
|                             | $\sin 2x - 2m \sin x - \cos x + m = 0 \Leftrightarrow (2 \sin x - 1)(\cos x - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos x = m \end{cases}$                          | 1,0        |
|                             | Giải được phương trình $\sin x = \frac{1}{2}$ có 3 nghiệm trên đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ .                                                                                      | 1,0        |
|                             | Để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì phương trình $\cos x = m$ có đúng hai nghiệm phân biệt trên đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ và khác nghiệm của phương trình $\sin x = \frac{1}{2}$ . | 0,5        |
|                             | Học sinh vẽ được đồ thị, hoặc vẽ được đường tròn lượng giác để biện luận.                                                                                                                   |            |

|                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                            |            |
|-----------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
|                             | Tìm được $m=1$ và $\begin{cases} -1 < m < 0 \\ m \neq -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ .                                                                                                                                                                                                   | 0,5        |
| <b>Câu 12</b><br>(4,0 điểm) | <b>a) Chứng minh <math>OH \perp (ABC)</math>.</b>                                                                                                                                                                                                                                          | <b>1,5</b> |
|                             |                                                                                                                                                                                                         |            |
|                             | Chứng minh được $BC \perp (OAK) \Rightarrow OH \perp BC$ .                                                                                                                                                                                                                                 | 0,5        |
|                             | Chứng minh được $AB \perp (OEC) \Rightarrow OH \perp AB$ .                                                                                                                                                                                                                                 | 0,5        |
|                             | Ta có $OH \perp BC$ và $OH \perp AB$ theo chứng minh trên<br>$AB$ và $BC$ cắt nhau trong mặt phẳng $(ABC)$ nên suy ra $OH \perp (ABC)$                                                                                                                                                     | 0,5        |
|                             | <b>b) Tính <math>T = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma</math>.</b>                                                                                                                                                                                                              | <b>1,5</b> |
|                             | Chỉ ra được $(OH; OA) = \angle AOH$ suy ra $\angle AOH = \alpha$ và $\cos^2 \alpha = \frac{OH^2}{OA^2}$ .                                                                                                                                                                                  | 0,5        |
|                             | Chứng minh tương tự $\cos^2 \beta = \frac{OH^2}{OB^2}; \cos^2 \gamma = \frac{OH^2}{OC^2}$ .<br>Suy ra<br>$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{OH^2}{OA^2} + \frac{OH^2}{OB^2} + \frac{OH^2}{OC^2} = OH^2 \left( \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \right)$ | 0,5        |
|                             | Chứng minh được $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{OH^2}$ để suy ra<br>$T = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$                                                                                                                                    | 0,5        |
|                             | <b>c) Chứng minh <math>\frac{S_{\Delta HBC}}{S_{\Delta OBC}} + \frac{S_{\Delta HAC}}{S_{\Delta OAC}} + \frac{S_{\Delta HAB}}{S_{\Delta OAB}} \leq \sqrt{3}</math>.</b>                                                                                                                     | <b>1,0</b> |
|                             | Ta có $\frac{S_{\Delta HBC}}{S_{\Delta OBC}} = \frac{HK}{OK} = \cos \angle HKO$ .                                                                                                                                                                                                          | 0,5        |

|                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |            |
|-----------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
|                             | <p>Lại có <math>\angle HKO = \angle AOH = \alpha</math> nên suy ra <math>\frac{S_{\triangle HBC}}{S_{\triangle OBC}} = \cos \alpha</math>.</p> <p>Chứng minh tương tự suy ra <math>P = \frac{S_{\triangle HBC}}{S_{\triangle OBC}} + \frac{S_{\triangle HAC}}{S_{\triangle OAC}} + \frac{S_{\triangle HAB}}{S_{\triangle OAB}} = \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma</math>.</p> |            |
|                             | <p>Áp dụng bất đẳng thức <math>(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)</math> ta có:</p> <p>Do đó <math>P^2 = (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)^2 \leq 3(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = 3</math>.</p> <p>Vậy <math>P \leq \sqrt{3}</math>. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi <math>OA = OB = OC</math>.</p>                                                     | 0,5        |
| <b>Câu 13</b><br>(3,0 điểm) | <b>a) Chứng minh dãy số <math>(u_n)</math> là dãy số tăng.</b>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | <b>1,5</b> |
|                             | <p>Ta có</p> $u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+2)u_n}{n+1} + n + 2 - u_n = \frac{(n+3)u_n}{n+1} + n + 2.$                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 0,5        |
|                             | <p>Dễ thấy <math>u_n &gt; 0, \forall n \in \mathbb{N}^*</math> suy ra <math>u_{n+1} - u_n &gt; 0</math>.</p> <p>Vậy <math>(u_n)</math> là dãy số tăng</p>                                                                                                                                                                                                                           | 1,0        |
|                             | <b>b) Chứng minh <math>\frac{u_1}{2} + \frac{u_2}{3} + \frac{u_3}{4} + \dots + \frac{u_{2024}}{2025} &lt; \frac{u_{2025}}{2026}</math>.</b>                                                                                                                                                                                                                                         | <b>1,5</b> |
|                             | <p>Ta có <math>\frac{u_{n+1}}{n+2} = 2 \frac{u_n}{n+1} + 1 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{n+2} + 1 = 2 \left( \frac{u_n}{n+1} + 1 \right)</math>.</p> <p>Đặt <math>\frac{u_n}{n+1} + 1 = v_n</math> ta có <math>\begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = 2v_n \end{cases}</math>, suy ra <math>v_n = 2^n</math>.</p>                                                                          | 1,0        |
|                             | <p>Ta có <math>\frac{u_n}{n+1} = 2^n - 1</math>. Do đó</p> $\frac{u_1}{2} + \frac{u_2}{3} + \frac{u_3}{4} + \dots + \frac{u_{2024}}{2025} = (2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2024}) - 2024 = 2^{2025} - 2026 < \frac{u_{2025}}{2026}.$                                                                                                                                                       | 0,5        |

**Chú ý:** Học sinh làm theo cách khác nhưng đúng vẫn cho điểm tối đa.