

Bài 1. Tính đơn điệu và cực trị của hàm số

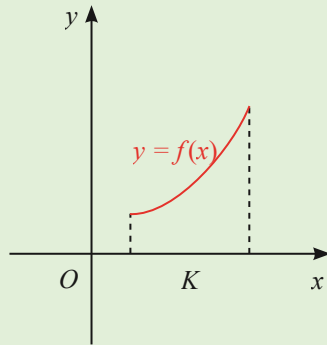
A. Kiến thức cần nhớ

1. Tính đơn điệu

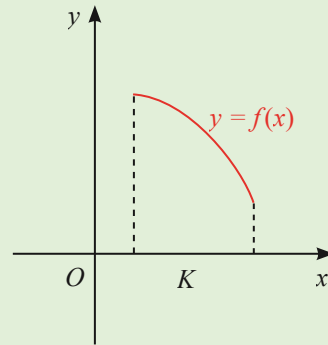
a) Nhắc lại về tính đồng biến, nghịch biến của hàm số

Kí hiệu K là khoảng hoặc đoạn hoặc nửa khoảng. Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trên K .

- Hàm số $y = f(x)$ *đồng biến (tăng)* trên K nếu với mọi x_1, x_2 thuộc K mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$.
- Hàm số $y = f(x)$ *nghịch biến (giảm)* trên K nếu với mọi x_1, x_2 thuộc K mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$.
 - Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K thì đồ thị của nó *đi lên* từ trái sang phải (Hình 1a).
 - Nếu hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K thì đồ thị của nó *đi xuống* từ trái sang phải (Hình 1b).



1a)



1b)

➤ Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K được gọi chung là *đơn điệu* trên K .

b) Xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số dựa vào xét dấu đạo hàm

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K .

- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K .
- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K .

Chú ý:

- Khi xét tính đơn điệu của hàm số mà chưa cho khoảng K , ta hiểu xét tính đơn điệu của hàm số đó trên tập xác định của nó.
- Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K , $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến trên K .
- Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K , $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số nghịch biến trên K .

c) Các bước xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$:

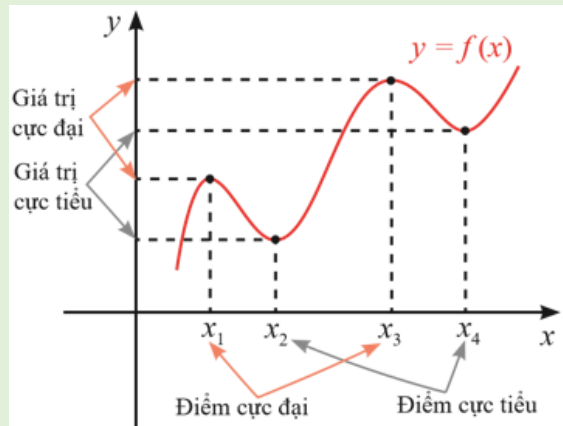
- *Bước 1.* Tìm tập xác định D của hàm số.
- *Bước 2.* Tính đạo hàm $f'(x)$ của hàm số. Tìm các điểm $x_1; x_2; \dots; x_n$ thuộc D mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc không tồn tại.
- *Bước 3.* Sắp xếp các điểm $x_1; x_2; \dots; x_n$ theo thứ tự tăng dần, xét dấu $f'(x)$ và lập bảng biến thiên.
- *Bước 4.* Nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

2. Cực trị của hàm số

a) Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp D và $x_0 \in D$.

- Nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và $(a;b) \subset D$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$ thì x_0 được gọi là một **điểm cực đại**, $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số $y = f(x)$, kí hiệu y_{CD} .
- Nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và $(a;b) \subset D$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$ thì x_0 được gọi là một **điểm cực tiểu**, $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực tiểu** của hàm số $y = f(x)$, kí hiệu y_{CT} .



a) Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị** của hàm số. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là **giá trị cực trị** (còn gọi là **cực trị**) của hàm số.

b) Nếu x_0 là một điểm cực trị (điểm cực đại, điểm cực tiểu) của hàm số $y = f(x)$ thì ta cũng nói hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị (cực đại, cực tiểu) tại x_0 .

c) Hàm số có thể đạt cực đại và cực tiểu tại nhiều điểm trên D .

d) Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ thì điểm $M(x_0; f(x_0))$ là một điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

b) Tìm cực trị của hàm số bằng cách xét dấu đạo hàm

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$. Khi đó:

- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 ;
- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0 .

c) Các bước tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$:

- Bước 1. Tìm tập xác định D của hàm số.
- Bước 2. Tính đạo hàm $f'(x)$ của hàm số. Tìm các điểm $x_1; x_2; \dots; x_n$ thuộc D mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.
- Bước 3. Xét dấu $f'(x)$. Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x qua điểm x_i ($i = 1, 2, \dots$) thì hàm số đạt cực tiểu tại x_i . Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x qua điểm x_i ($i = 1, 2, \dots$) thì hàm số đạt cực đại tại x_i .

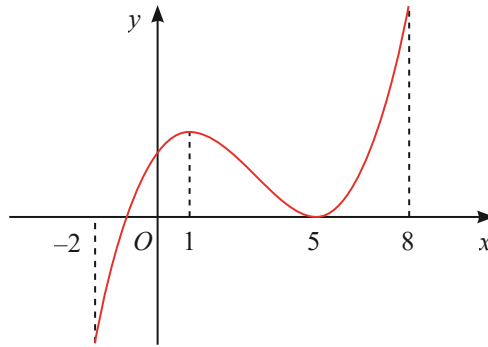
Chú ý:

- Nếu $f'(x) = 0$ nhưng không đổi dấu khi x qua điểm x_i ($i = 1, 2, \dots$) thì hàm số không có cực trị tại x_i .
- Nếu $f'(x)$ không đổi dấu trên khoảng K thì $f(x)$ không có cực trị trên khoảng đó.

B. Các dạng bài tập & phương pháp giải

Dạng 1. Đọc đồ thị cho trước để tìm khoảng đơn điệu, cực trị

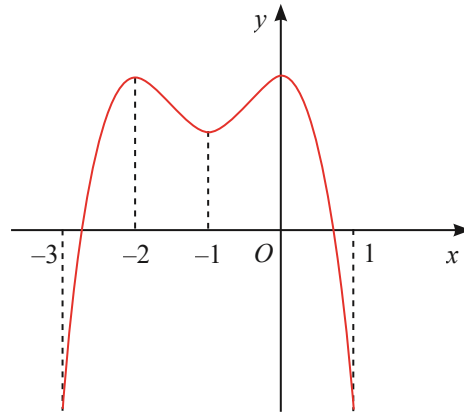
Ví dụ 1. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị cho ở Hình vẽ bên dưới.



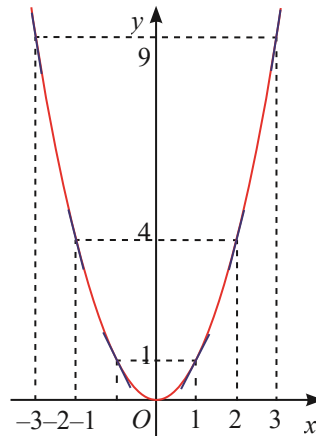
Giải

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2; 1)$ và $(5; 8)$, nghịch biến trên khoảng $(1; 5)$.

Ví dụ 2. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị cho ở Hình vẽ bên dưới.



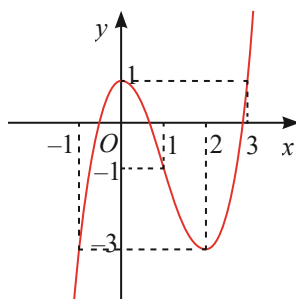
Ví dụ 3. Cho hàm số $y = f(x) = x^2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



- Từ đồ thị của hàm số $y = f(x)$, hãy chỉ ra các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số đã cho.
- Tính đạo hàm $f'(x)$ và xét dấu $f'(x)$.
- Từ đó, nhận xét về mối liên hệ giữa các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số với dấu của $f'(x)$.

Gợi ý: Trong VD3, ta thấy hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng mà $f'(x)$ dương, nghịch biến trên khoảng mà $f'(x)$ âm.

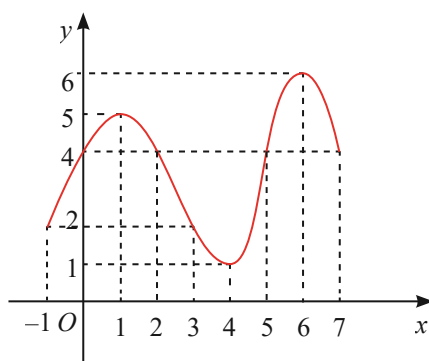
Ví dụ 4. Quan sát đồ thị của hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ trong Hình vẽ.



a) Tìm các khoảng đơn điệu của đồ thị ở hình vẽ trên.

b) Tìm cực trị của hàm số có đồ thị như hình vẽ trên.

Ví dụ 5. Tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị được cho ở Hình vẽ.



Giải

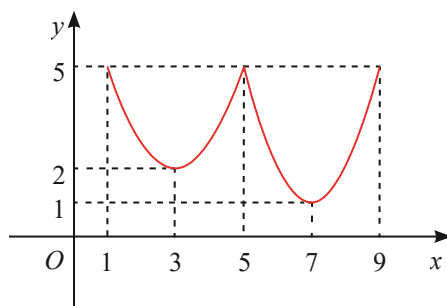
Hàm số $y = f(x)$ có:

$x = 1$ là điểm cực đại vì $f(x) < f(1)$ với mọi $x \in (0; 2) \setminus \{1\}$, $y_{cd} = f(1) = 5$;

$x = 6$ là điểm cực đại vì $f(x) < f(6)$ với mọi $x \in (5; 7) \setminus \{6\}$, $y_{cd} = f(6) = 6$;

$x = 4$ là điểm cực tiểu vì $f(x) > f(4)$ với mọi $x \in (3; 5) \setminus \{4\}$, $y_{ct} = f(4) = 1$.

Ví dụ 6. Tìm các điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị cho ở Hình vẽ.



Dạng 2. Tìm khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số được cho bởi công thức

Ví dụ 7. Chứng minh rằng hàm số $g(x) = \frac{x}{x-1}$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Giải

Hàm số xác định trên $(1; +\infty)$.

Ta có $g'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} < 0$ với mọi $x \in (1; +\infty)$.

Vậy $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Ví dụ 8. Tìm khoảng đơn điệu của hàm số $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 1$.

Giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có $f'(x) = 6x^2 - 18x - 24$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 4$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$				$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ và $(4; +\infty)$, hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 4)$

Ví dụ 9. Xét tính đơn điệu của các hàm số sau:

a) $f(x) = -x^3 + 3x^2$

b) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

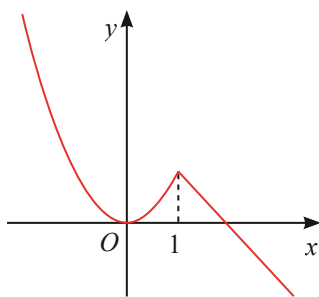
c) $f(x) = x^3$

d) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 9x$

e) $f(x) = \frac{1}{x}$

f) $f(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x + 1}$

Ví dụ 10. Đồ thị của hàm số $y = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \leq 1 \\ 2 - x & \text{khi } x > 1 \end{cases}$ được cho ở hình bên.



a) Tìm điểm cực đại và điểm cực tiểu của hàm số.

b) Tại $x = 1$, hàm số có đạo hàm không?

c) Thay mỗi dấu ? bằng kí hiệu $(+)$, $(-)$ thích hợp để hoàn thành bảng biến thiên dưới đây. Nhận xét về dấu của y' khi x đi qua điểm cực đại và điểm cực tiểu.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$		
y'	$?$	0	$?$	$ $	$?$	
y	$+\infty$			1		$-\infty$

Ví dụ 11. Tìm cực trị của hàm số $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 1$.

Giải

Tập xác định: $D = R$. Ta có $f'(x) = 6x^2 - 18x - 24$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 4$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		14		$+\infty$	
	$-\infty$		-111		

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = -1$, $y_{cd} = f(-1) = 14$; hàm số đạt cực tiểu tại $x = 4$, $y_{ct} = f(4) = -111$.

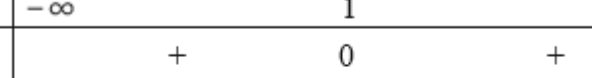
Ví dụ 12. Tìm cực trị của hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$.

Giải

Tập xác định: $D = R$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$			

Vậy hàm số không có cực trị.

Ví dụ 13. Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y = x^4 - 2x^2 + 1$

b) $y = x^2 - 4x + 4$

c) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 4$

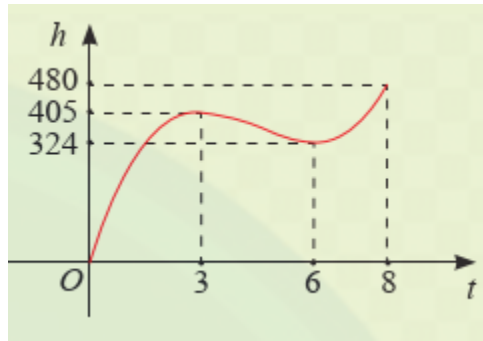
d) $y = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x - 4$

e) $y = \frac{x^2 + x + 4}{x + 1}$

f) $y = \sqrt{2x - x^2}$

Dạng 3. Một số bài toán thực tế liên quan

Ví dụ 14. Trong 8 phút đầu kể từ khi xuất phát, h độ cao h (tính bằng mét) của khinh khí cầu vào thời điểm t phút được cho bởi công thức $h(t) = 6t^3 - 81t^2 + 324t$. Đồ thị của hàm số $h(t)$ được biểu diễn trong hình bên.

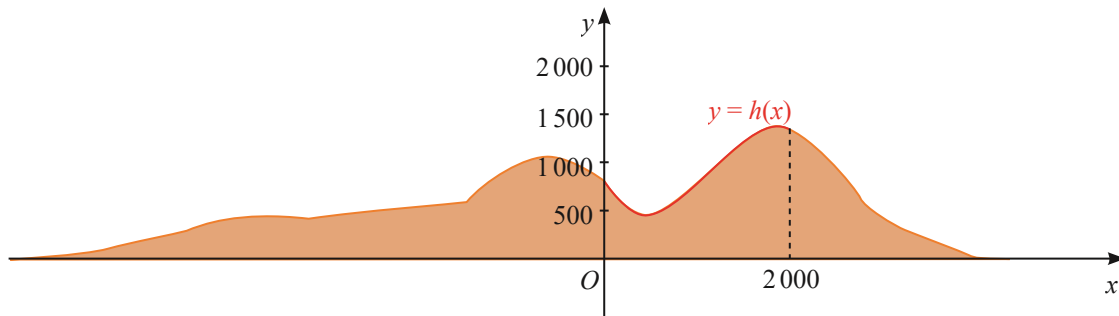


- Dựa vào đồ thị, hãy cho biết trong các khoảng thời gian nào khinh khí cầu tăng dần độ cao, giảm dần độ cao?
- Hãy kiểm tra lại kết quả ở câu a bằng cách đạo hàm và lập bảng xét dấu?
- Độ cao của khinh khí cầu vào các thời điểm 3 phút và 6 phút sau khi xuất phát có gì đặc biệt?

Ví dụ 15. Một phần lát cắt của dãy núi có độ cao tính bằng mét được mô tả bởi hàm số

$$y = h(x) = -\frac{1}{1320000}x^3 + \frac{9}{3520}x^2 - \frac{81}{44}x + 840 \text{ với } 0 \leq x \leq 2\,000.$$

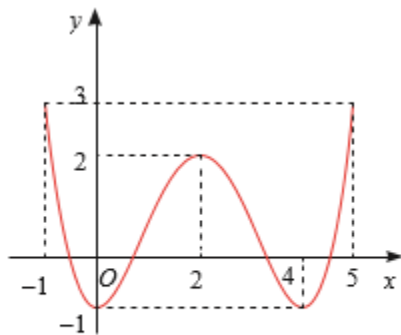
Tìm tọa độ các đỉnh của lát cắt dãy núi trên đoạn $[0; 2\,000]$.



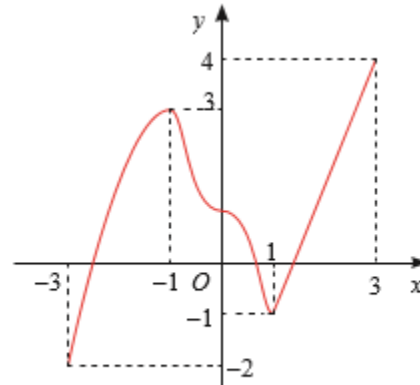
C. Bài tập tự luận rèn luyện

Dạng 1. Đọc đồ thị cho trước để tìm khoảng đơn điệu, cực trị

Bài 1. Tìm các khoảng đơn điệu và cực trị của các hàm số có đồ thị cho ở hình vẽ dưới đây:

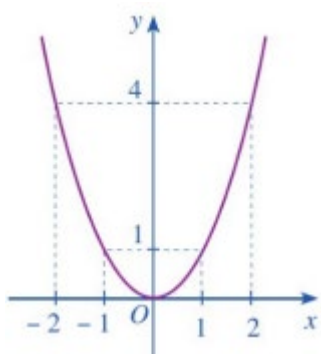


a)

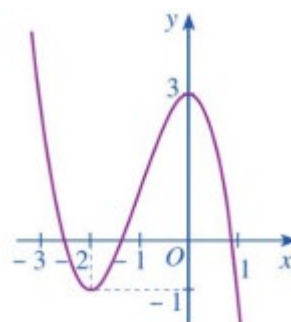


b)

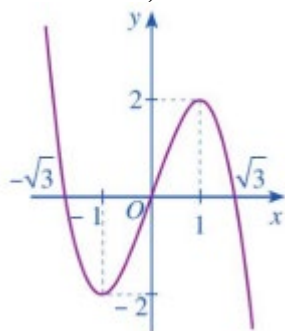
Bài 2. Tìm các khoảng đơn điệu và cực trị của các hàm số có đồ thị (hoặc bảng biến thiên) được cho ở hình vẽ dưới đây:



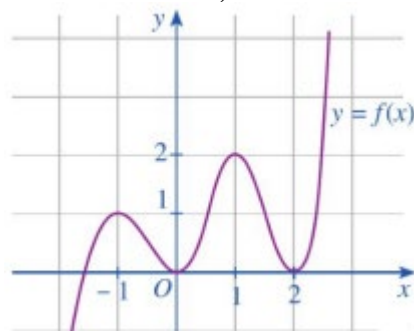
a)



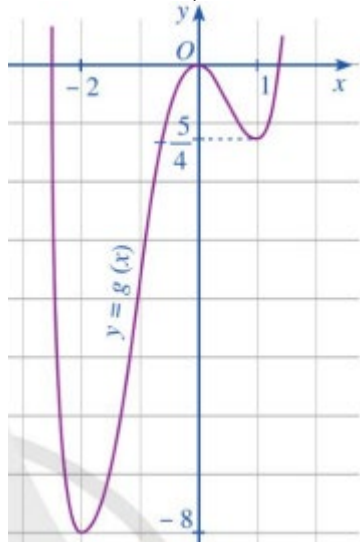
b)



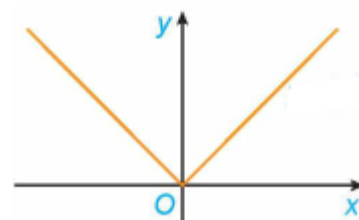
c)



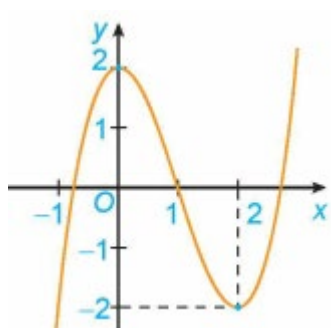
d)



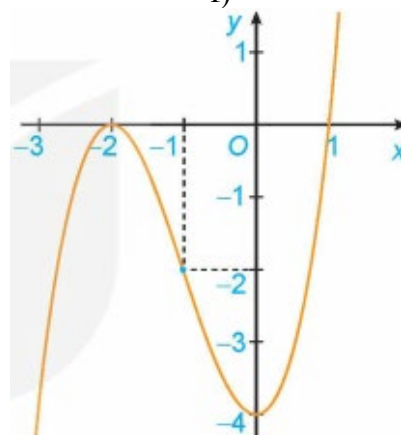
e)



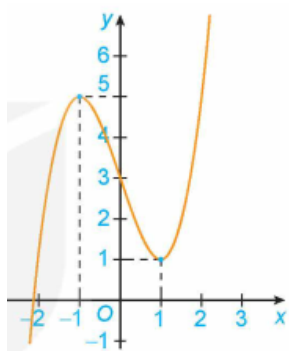
f)



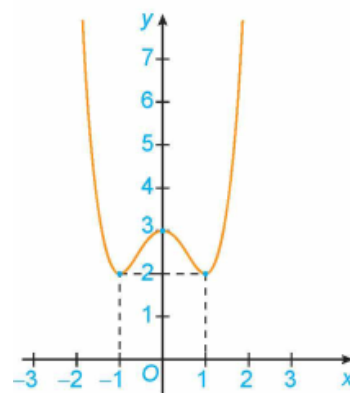
g)



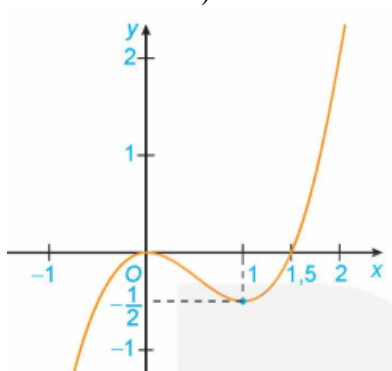
h)



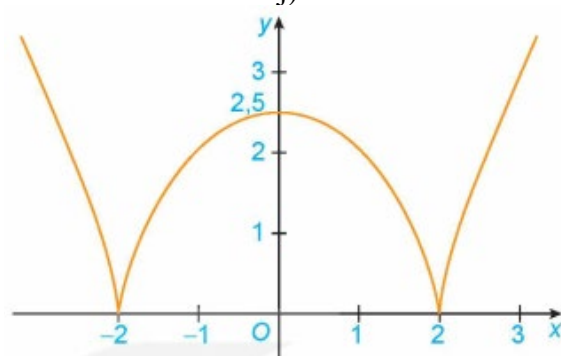
i)



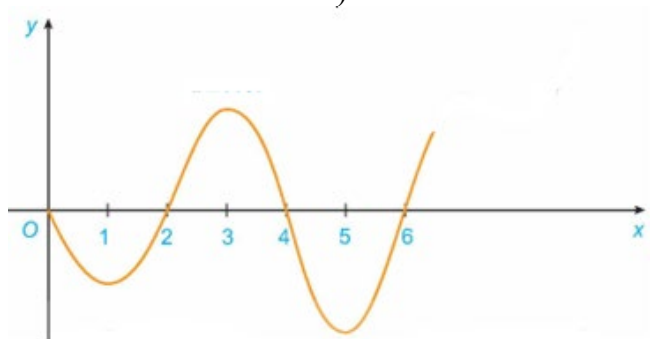
j)



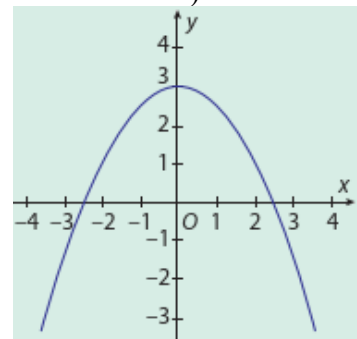
k)



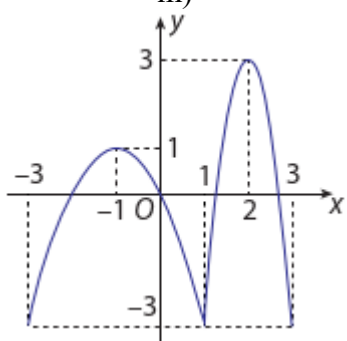
l)



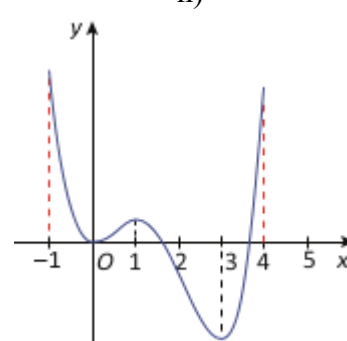
m)



n)



o)



p)

x	a	x_0	b
$f'(x)$	+		-
$f(x)$			

q)

x	a	x_1	b
$h'(x)$	-		+
$h(x)$			

r)

Bài 3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty; 1)$, $(1; +\infty)$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	2	3	4	5	$+\infty$
y'	+		-	0	+	0	+
y	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	-2	1	-1	$+\infty$

Xác định các khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số đã cho.

Bài 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên các khoảng xác định của nó và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới. Em hãy xác định các khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số $y = f(x)$ đã cho.

a)

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
y'	-	0	+	0	-
y	$+\infty$	-2	2	-2	$+\infty$

b)

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	2	$+\infty$	4	$+\infty$

c)

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	-		-
y	-2	$+\infty$	-2

d)

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	+	0	0	+
y	$-\infty$	2	-1	$+\infty$

e)

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	+	0	-	0	-
y	$-\infty$	2	1	4	$-\infty$

f)

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	+		+	0	-
y	1	$+\infty$	$-\infty$	2	1

g)

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'		$-$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$			2	
		-1			$-\infty$

h)

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			2		-3		$+\infty$
	$-\infty$						

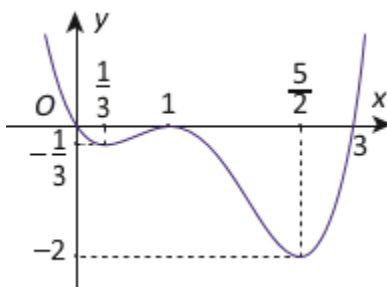
i)

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	7	1	$+\infty$	

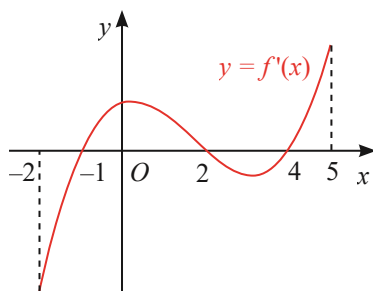
j)

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	4	-2	$+\infty$	

Bài 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0; 3]$ thỏa mãn $f'\left(\frac{1}{3}\right) = f'(1) = f'\left(\frac{5}{2}\right) = 0$ và có đồ thị là đường cong như *Hình vẽ*. Tìm các khoảng đơn điệu và tìm cực trị của hàm số đã cho trên khoảng $(0; 3)$.

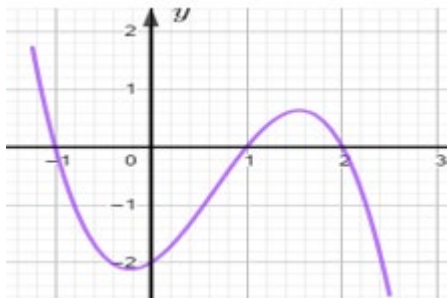


Bài 6. Đạo hàm $f'(x)$ của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Xét tính đơn điệu và tìm điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

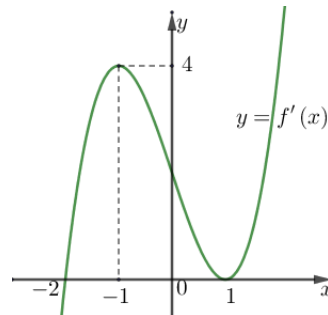


Bài 7. Đạo hàm $f'(x)$ của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Xét tính đơn điệu và tìm điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

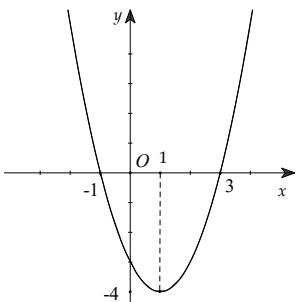
a)



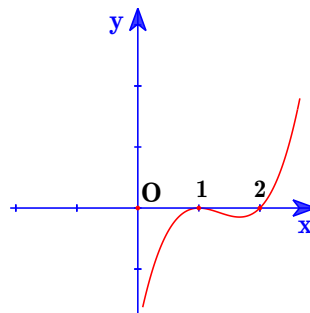
b)



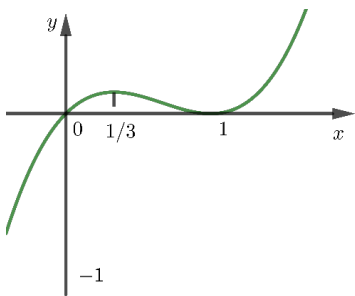
c)



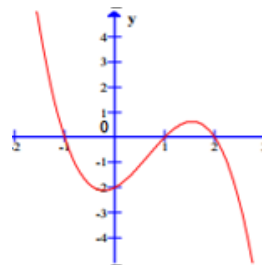
d)



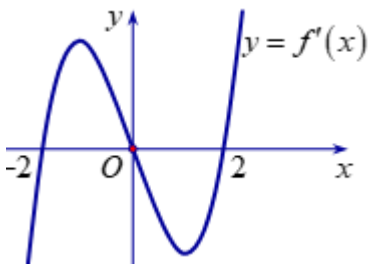
e)



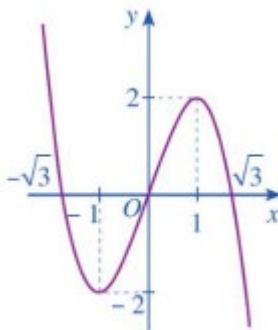
f)



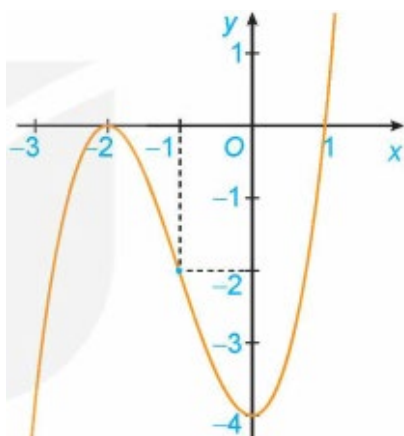
g)



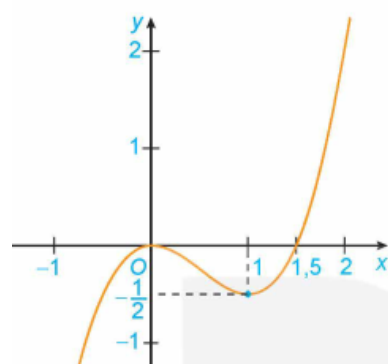
h)



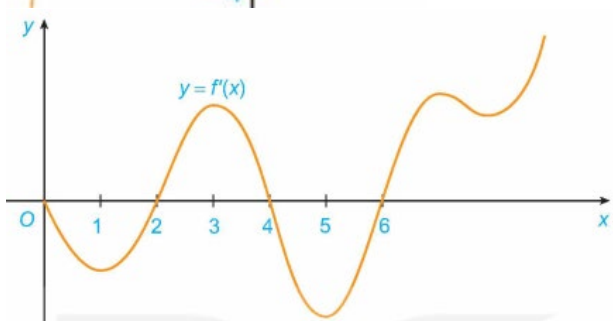
i)



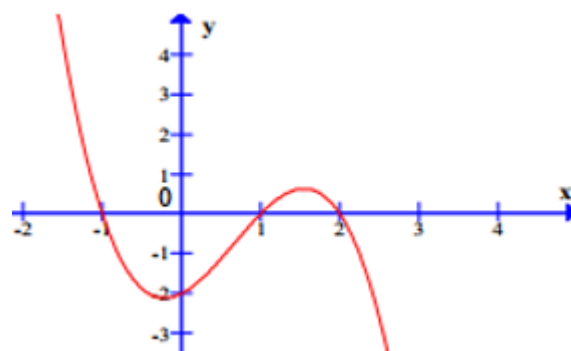
j)



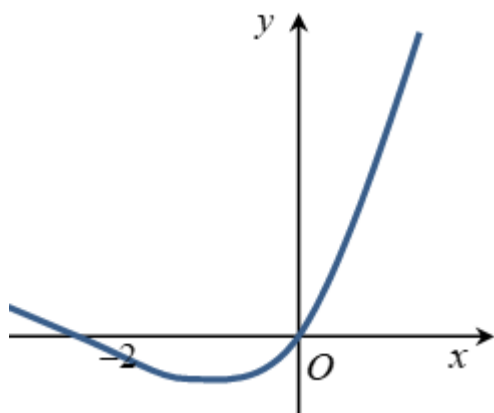
k)



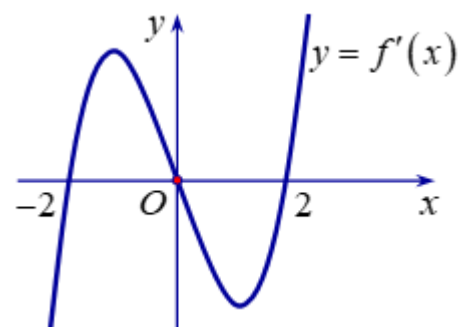
l)



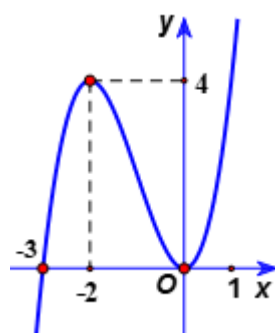
m)



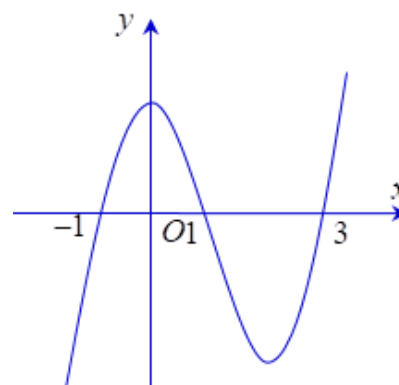
n)



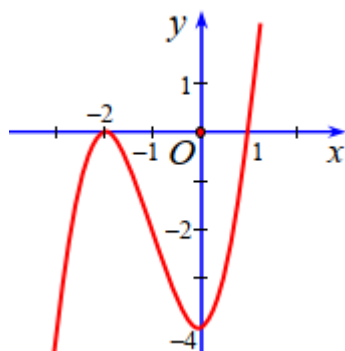
o)



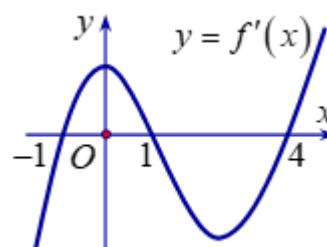
p)



q)



r)



Dạng 2. Tìm khoảng đơn điệu và cực trị của hàm số được cho bởi công thức

Bài 8. Xét tính đơn điệu và tìm cực trị của các hàm số sau:

1) $y = -2x^2 + 4x + 3$

2) $y = x^2 - 4x + 4$

3) $y = x^2 - 2x + 1$

4) $y = 2x - x^2$

5) $y = x^2 - 4x + 3$

6) $y = 8 + 2x - x^2$

7) $y = 4x^3 + 3x^2 - 36x + 6$

8) $y = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x - 1$

9) $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

10) $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x + 5$

11) $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 1$

12) $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$

13) $y = x^4 + 2x^2 - 3$

14) $y = x^4 - 2x^2 + 1$

15) $y = -x^4 + 18x^2 - 1$

16) $y = -x^4 + 2x^2 + 2$

17) $y = x^2(x^2 - 4)$

18) $y = x^4 - 6x^2 + 8x + 1$

19) $y = x^5 - 5x^3 - 20x + 2$

20) $y = \frac{2x-1}{x+2}$

21) $y = \frac{x+1}{2-x}$

22) $y = \frac{x+3}{x-3}$

23) $y = \frac{2x+1}{-x+1}$

24) $y = \frac{x-4}{2x+2}$

25) $y = \frac{-2x-4}{x+1}$

26) $y = \frac{-2x+3}{x+1}$

27) $y = \frac{x^2-2x-7}{x-4}$

28) $y = \frac{x^2+4}{x}$

29) $y = \frac{x^2-8x+10}{x-2}$

30) $y = \frac{x^2-3x+6}{x-2}$

31) $y = \frac{x^2-3x+6}{x-1}$

32) $y = \frac{x^2+3}{x-1}$

33) $y = x + \frac{9}{x}$

34) $y = 1 + x + \frac{4}{x}$

35) $y = x + \frac{3}{x-2}$

36) $y = x + 2 - \frac{4}{x+2}$

$$37) y = \frac{8}{1+2x} + x$$

$$39) y = \sqrt{2x-x^2}$$

$$41) y = \sqrt{8+2x-x^2}$$

$$43) y = \sqrt{-x^2+3x}$$

$$45) y = \cos x \text{ trên khoảng } (0; 2\pi)$$

$$47) y = 2\cos x + 1 \text{ trên khoảng } (0; \pi)$$

$$49) y = \cos 2x \text{ trên khoảng } (0; 2\pi)$$

$$51) y = e^{x^2}$$

$$53) y = e^{2x^2+8x}$$

$$55) y = e^{x^2-4x+4}$$

$$57) y = 3^{x-2x^2}$$

$$59) y = 2^{x^2-5x+4}$$

$$61) y = 2^{2x^2+x}$$

$$63) y = \ln(x^2 + e)$$

$$65) y = \ln(x^2 - x)$$

$$67) y = \ln(x^2 - 4x - 4)$$

$$69) y = \log_{0,5}(-x^2 + 2x)$$

$$71) y = \log_2(x^2 - 4x + 3)$$

$$73) y = \log(x^2 - 6x + 7)$$

$$38) y = x + \frac{9}{x-1}$$

$$40) y = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$$

$$42) y = \sqrt{-x^2 + 4}$$

$$44) y = \sqrt{-x^2 + 6x - 5}$$

$$46) y = \sin x \text{ trên khoảng } (0; 2\pi)$$

$$48) y = -\sin x + 1 \text{ trên khoảng } (0; 3\pi)$$

$$50) y = \sin 2x \text{ trên khoảng } (0; 2\pi)$$

$$52) y = e^{x^2-3x+2}$$

$$54) y = e^{x^2-6x}$$

$$56) y = e^{x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x - 1}$$

$$58) y = 5^{-x^2+2x+3}$$

$$60) y = 3^{x^2-5x+2}$$

$$62) y = 5^{x^2-3x}$$

$$64) y = \ln(x^2 + 5)$$

$$66) y = \ln(-x^2 + 9)$$

$$68) y = \ln(x^2 + 3x - \pi)$$

$$70) y = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 1).$$

$$72) y = \log_8(x^2 - 3x - 4)$$

$$74) y = \log(x^2 + 2x - 2)$$

Bài 9. Chứng minh rằng hàm số $y = \frac{2x+1}{x-3}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

Bài 10. Chứng minh rằng hàm số $f(x) = 3x - \sin x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bài 11. Chứng minh rằng hàm số $y = \frac{2^x - 2^{-x}}{3}$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Bài 12. Chứng minh rằng hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x - \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ nghịch biến trên tập các số thực dương.

Bài 13. Chứng minh rằng hàm số $y = \sqrt{x^2+1}$ nghịch biến trên nửa khoảng $(-\infty; 0]$ và đồng biến trên nửa khoảng $[0; +\infty)$.

Bài 14. Xác định các khoảng đồng biến, nghịch biến và điểm cực trị của hàm số $f(x)$, biết hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là:

- | | |
|---|---|
| a) $y' = x^2, \forall x \in \mathbb{R}.$ | b) $f'(x) = x^2 - 2x + 1, \forall x \in \mathbb{R}.$ |
| c) $y' = f'(x) = x(x-1)^2(x+3), \forall x \in \mathbb{R}.$ | d) $f'(x) = x(x-1)^2(x-2), \forall x \in \mathbb{R}.$ |
| e) $f'(x) = (x+1)^2(x-1)^3(2-x), \forall x \in \mathbb{R}.$ | f) $f'(x) = x^2(x^2-4), x \in \mathbb{R}.$ |
| g) $f'(x) = (2x-1)x^2(1-x)^2, \forall x \in \mathbb{R}.$ | h) $f'(x) = x(x+1)^2(x-2)^4, \forall x \in \mathbb{R}.$ |
| i) $f'(x) = (x^2 - \sqrt{2})x^2(x+2)^3, \forall x \in \mathbb{R}.$ | j) $f'(x) = (x-1)(3-x), \forall x \in \mathbb{R}.$ |
| k) $f'(x) = (x-1)(x^2-2)(x^4-4), \forall x \in \mathbb{R}.$ | l) $f'(x) = x^2(x-1)(x+2)^5, \forall x \in \mathbb{R}.$ |
| m) $f'(x) = x^2(x+1)(x-2)^3, \forall x \in \mathbb{R}.$ | n) $f'(x) = (x^2-1)(x-\sqrt{3})^2, \forall x \in \mathbb{R}.$ |
| o) $f'(x) = x(x^2+2x)^3(x^2-\sqrt{2}) \forall x \in \mathbb{R}$ | p) $f'(x) = x^2(x-2)(x^2-x-2)(x+1)^4, \forall x \in \mathbb{R}.$ |
| q) $f'(x) = (x+1)^2(x-2)^3(2x+3), \forall x \in \mathbb{R}.$ | r) $f'(x) = (x+2)(x-1)^{2024}(x-2)^{2025}, \forall x \in \mathbb{R}.$ |
| s) $f'(x) = x^{2024} \cdot (x-1)^{2025} \cdot (x+1), \forall x \in \mathbb{R}.$ | t) $f'(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^{2023}, \forall x \in \mathbb{R}.$ |
| u) $f'(x) = x(x^2-1)(x+2)^{2026}, \forall x \in \mathbb{R}.$ | v) $f'(x) = x^{2017} \cdot (x-1)^{2018} \cdot (x+1), \forall x \in \mathbb{R}.$ |
| w) $f'(x) = x(x+3)^2(x-2)^3, \forall x \in \mathbb{R}$ | x) $f'(x) = x(x^2-1)(x+2)^{2018}, \forall x \in \mathbb{R}.$ |
| y) $f'(x) = (x-2)^4(x-1)(x+3)\sqrt{x^2+3}, \forall x \in \mathbb{R}.$ | z) $f'(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4, \forall x \in \mathbb{R}.$ |

Dạng 3. Một số bài toán thực tế liên quan

Bài 15. Kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam trong các năm từ 2010 đến 2017 có thể được tính xấp xỉ bằng công thức $f(x) = 0,01x^3 - 0,04x^2 + 0,25x + 0,44$ (tỉ USD) với x là số năm tính từ 2010 đến 2017 ($0 \leq x \leq 7$). (Theo: <https://infographics.vn/interactive-xuat-khau-rau-qua-du-bao-bung-no-dat-4-ty-usd-trong-nam-2023/116220.vna>)

- Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$.
- Chứng minh rằng kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam tăng liên tục trong các năm từ 2010 đến 2017.

Bài 16. Một doanh nghiệp dự kiến lợi nhuận khi sản xuất x sản phẩm ($0 \leq x \leq 300$) được cho bởi hàm số $y = -x^3 + 300x^2$ (đơn vị: đồng). Em hãy cho biết sự thay đổi lợi nhuận theo số sản phẩm sản xuất ra như thế nào?

Bài 17. Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox. Toạ độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ với $t \geq 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $v(t)$; $v'(t)$ là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm t , kí hiệu $a(t)$.

a) Tìm các hàm $v(t)$ và $a(t)$.

b) Trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm tăng, trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm giảm?

Bài 18. Kính viễn vọng không gian Hubble được đưa vào vũ trụ ngày

24/4/1990 bằng tàu con thoi Discovery. Vận tốc của tàu con thoi trong sứ mệnh này, từ lúc cất cánh tại thời điểm $t = 0$ (s) cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi tại thời điểm $t = 126$ (s), cho bởi hàm số sau: $v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23$, (v được tính bằng ft/s, $1 \text{ feet} = 0,3048 \text{ m}$) (Nguồn: J. Stewart, Calculus, Seventh Edition, Brooks/Cole, CENGAGE Learning 2012).



(Nguồn: https://en.wikipedia.org/wiki/Hubble_Space_Telescope)

Hỏi gia tốc của tàu con thoi sẽ tăng trong khoảng thời gian nào tính từ thời điểm cất cánh cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi?

Bài 19. Một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ độ cao 2 m với vận tốc ban đầu là 24,5 m/s. Trong Vật lí, ta biết rằng khi bỏ qua sức cản của không khí thì độ cao h (mét) của vật sau t (giây) được cho bởi công thức $h(t) = 2 + 24,5t - 4,9t^2$. Hỏi tại thời điểm nào thì vật đạt độ cao lớn nhất?

Bài 20. Giả sử số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 2000 được mô tả bởi hàm số

$$N(t) = \frac{25t + 10}{t + 5}, t \geq 0, \text{ trong đó } N(t) \text{ được tính bằng nghìn người.}$$

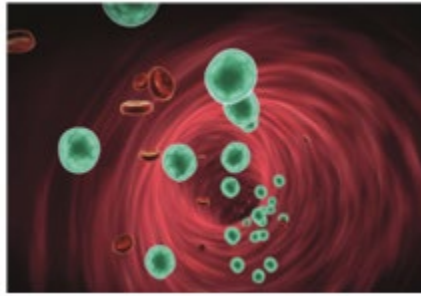
a) Tính số dân của thị trấn đó vào các năm 2000 và 2015.

b) Tính đạo hàm $N'(t)$ và $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$. Từ đó, giải thích tại sao số dân của thị trấn đó luôn tăng nhưng sẽ không vượt quá một ngưỡng nào đó.

Bài 21. Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định)

tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số $f(t) = \frac{5000}{1 + 5e^{-t}}, t \geq 0$, trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất?

Bài 22. Khi loại thuốc A được tiêm vào bệnh nhân, nồng độ (mg/l) của thuốc trong máu sau x phút (kể từ khi bắt đầu tiêm) được xác định bởi công thức: $C(x) = \frac{30x}{x^2 + 2}$.



(Nguồn: James Stewart, J. (2015). *Calculus*. Cengage Learning)

Để đưa ra những lời khuyên và cách xử lý phù hợp cho bệnh nhân, ta cần tìm khoảng thời gian mà nồng độ của thuốc trong máu đang tăng.

Em hãy lập bảng biến thiên của hàm số $y = C(x) = \frac{30x}{x^2 + 2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$. Khi đó hãy cho biết hàm nồng độ thuốc trong máu $C(x)$:

- Tăng trong khoảng thời gian nào?
- Đạt giá trị cực đại là bao nhiêu trong khoảng thời gian 6 phút sau khi tiêm.

Bài 23. Thể tích V của 1 kg nước (tính bằng cm^3) ở nhiệt độ T (đơn vị: $^{\circ}\text{C}$) khi T thay đổi từ 0°C đến 30°C được cho xấp xỉ bởi công thức:

$$V = 999,87 - 0,06426T + 0,0085043T^2 - 0,0000769T^3.$$

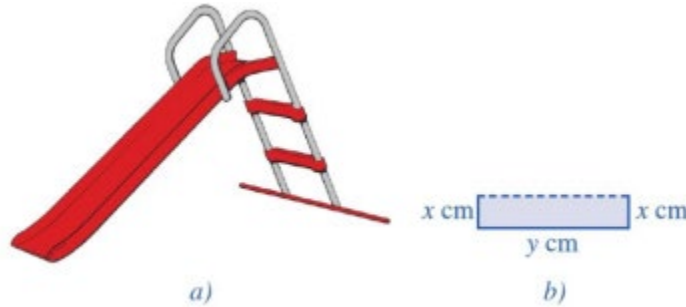
(Nguồn: James Stewart, J. (2015). *Calculus*. Cengage Learning 8th edition, p.284)

- Tìm nhiệt độ $T_0 \in (0; 30)$ để kể từ nhiệt độ T_0 trở lên thì thể tích V tăng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).
- Hỏi thể tích V giảm trong khoảng nhiệt độ nào. (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Bài 24. Một công ty tiến hành khai thác 17 giếng dầu trong khu vực được chỉ định. Trung bình mỗi giếng dầu chiết xuất được 245 thùng dầu mỗi ngày. Công ty có thể khai thác nhiều hơn 17 giếng dầu nhưng cứ khai thác thêm một giếng thì lượng dầu mỗi giếng chiết xuất được hằng ngày sẽ giảm 9 thùng. Để giám đốc công ty có thể quyết định số giếng cần thêm cho phù hợp với tài chính, hãy chỉ ra số giếng công ty có thể khai thác thêm để sản lượng dầu chiết xuất tăng lên.



Bài 25. Máng trượt của một cầu trượt cho trẻ em (Hình 5a) được uốn từ một tấm kim loại có bề rộng 80 cm, mặt cắt được mô tả ở Hình vẽ. Nhà thiết kế khuyến cáo, diện tích của mặt cắt càng lớn thì càng đảm bảo an toàn cho trẻ em.



a) Gọi S là diện tích mặt cắt. Tìm điều kiện của x và viết công thức tính S theo x .

b) Với x đạt giá trị bằng bao nhiêu thì cầu trượt đảm bảo an toàn nhất cho trẻ em?

Giải

a) Do tấm kim loại có bề rộng 80 cm nên ta có: $2x + y = 80 \Leftrightarrow y = 80 - 2x$.

Để có thể thiết kế được máng trượt thì $y > 0 \Leftrightarrow 80 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 40$. Suy ra $0 < x < 40$. Diện tích của mặt cắt máng trượt là: $S = xy = x(80 - 2x) = -2x^2 + 80x$.

b) Ta có: $S(x) = -2x^2 + 80x$ với $x \in (0; 40)$;

$$S'(x) = -4x + 80;$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 80 = 0 \Leftrightarrow x = 20.$$

Bảng biến thiên của hàm số $S(x)$ như sau:

x	0	20	40
$S'(x)$	+	0	-
$S(x)$	0	800	0

Do đó, hàm số $S(x)$ đạt cực đại tại $x = 20$ và $S_{CD} = 80$.

Vậy để cầu trượt đảm bảo an toàn nhất cho trẻ em thì $x = 20$ cm.

D. Câu hỏi trắc nghiệm

1. Tính đơn điệu

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ đồng biến trên tập số thực $\mathbb{R}$, mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

B. Với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

C. Với mọi $x_1 < x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

D. Với mọi $x_1 > x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$.

B. $\frac{f(x_1)}{f(x_2)} < 1, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$.

C. $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$.

D. $f(x_1) < f(x_2), \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$.

Câu 3: Cho K là một khoảng, nửa khoảng hoặc một đoạn. Hàm số $y = f(x)$ liên tục và xác định trên K . Mệnh đề nào **không đúng**?

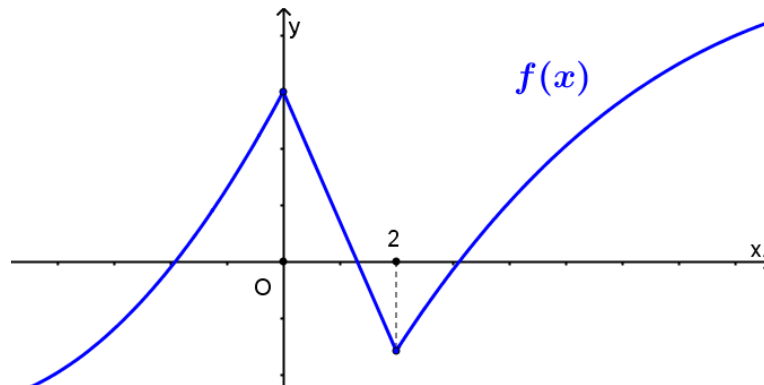
A. Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$.

B. Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K .

C. Nếu hàm số $y = f(x)$ là hàm số hằng trên K thì $f'(x) = 0, \forall x \in K$.

D. Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ không đổi trên K .

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-\infty; 0)$.

B. $(1; 3)$.

C. $(0; 2)$.

D. $(2; +\infty)$.

Câu 5: Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f(2) > f(-1)$.

B. $f(1) > f(3)$.

C. $f(3) > f(\pi)$.

D. $f\left(\frac{2}{3}\right) < f\left(\frac{3}{4}\right)$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$. Mệnh đề nào sau đây đúng.

- A.** Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in (a;b)$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(a;b)$.
B. Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in (a;b)$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(a;b)$.
C. Nếu $f(x) < 0, \forall x \in (a;b)$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(a;b)$.
D. Nếu $f(x) > 0, \forall x \in (a;b)$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(a;b)$.

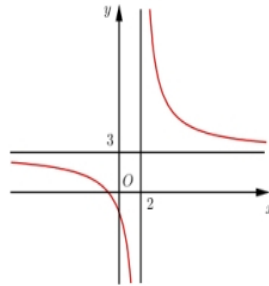
Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $y = f'(x) < 0, \forall x \in (-3;5)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $f(-2) = f(2)$. **B.** $f(-3) > f(5)$.
C. $f(-3) < f(5)$. **D.** $f(0) < f(5)$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ nghịch biến trên R . Hàm số nào sau đây có thể không nghịch biến trên R ?

- A.** $f(x) + 2020$. **B.** $f(x) - 2019$. **C.** $f(x) - x^2$. **D.** $f(x) - x$.

Câu 9: Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** $y' > 0, \forall x \neq 2$. **B.** $y' > 0, \forall x \neq 3$. **C.** $y' < 0, \forall x \neq 2$. **D.** $y' < 0, \forall x \neq 3$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x) = \frac{x-1}{x-3}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.** Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.
B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
C. Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.
D. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 11: Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x - 1$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;3)$. **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;3)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

Câu 12: Khoảng đồng biến của hàm số $y = x^4 + 4x - 6$ là

- A.** $(-1; +\infty)$. **B.** $(-\infty; -9)$. **C.** $(-9; +\infty)$. **D.** $(-\infty; -1)$.

Câu 13: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 5$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
- D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

Câu 14: Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. $y = \frac{x+1}{x+3}$.
- B. $y = x^3 + x$.
- C. $y = \frac{x-1}{x-2}$.
- D. $y = -x^3 - 3x$.

Câu 15: Trong các hàm số sau hàm nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = x^4 + x^2 - 1$.
- B. $y = \frac{x+1}{x+3}$.
- C. $y = x^2 + 1$.
- D. $y = x^3 + x$.

Câu 16: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và khoảng $(1; +\infty)$.
- C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- D. Hàm số đã cho nghịch biến trên tập $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Câu 17: Cho hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 2019$. Mệnh đề nào sau đây **sai**:

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
- D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Câu 18: Các khoảng đồng biến của hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 3$ là

- A. $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.
- B. $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.
- C. $(0; +\infty)$.
- D. $(-\infty; 0)$.

Câu 19: Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = x^3 - x$.
- B. $y = x^2 + 1$.
- C. $y = x^4 + 2x^2$.
- D. $y = x^3 + x$.

Câu 20: Hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; 0)$.
- B. $(0; +\infty)$.
- C. $(1; +\infty)$.
- D. $(-\infty; -1)$.

Câu 21: Kết luận nào sau đây về tính đơn điệu của hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ là **đúng**?

- A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- C. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
- D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 22: Tìm khoảng đồng biến của hàm số $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$.

A. $(2; +\infty)$.

B. $(1; 3)$.

C. $(0; 3)$.

D. $(-\infty; 0)$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x) = \frac{3x+1}{-x+1}$. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

C. $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

D. $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 24: Hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(1; +\infty)$.

B. $(-5; -2)$.

C. $(-\infty; 1)$.

D. $(-1; 3)$.

Câu 25: Khoảng nghịch biến của hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 4$ là

A. $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$.

B. $(-\infty; 0)$.

C. $(2; +\infty)$.

D. $(-2; 0)$.

Câu 26: Cho hàm số $y = \frac{x+3}{x+2}$. Khẳng định nào sau đây là đúng.

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

D. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

Câu 27: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$, $(3; +\infty)$; nghịch biến trên $(-1; 3)$.

B. Hàm số đồng biến trên $(-1; 3)$, nghịch biến trên $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -3)$, $(1; +\infty)$; nghịch biến trên $(-3; 1)$.

D. Hàm số đồng biến trên $(-1; 3)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$, $(3; +\infty)$.

Câu 28: Cho hàm số $y = \frac{-x+2}{x-1}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

D. Hàm số đồng biến với mọi $x \neq 1$.

Câu 29: Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = x^2 + 1$.

B. $y = \frac{x}{x+1}$.

C. $y = x + 1$.

D. $y = x^4 + 1$.

Câu 30: Tìm khoảng đồng biến của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

A. $(0; 2)$.

B. $(0; 3)$.

C. $(-1; 3)$.

D. $(-2; 0)$.

Câu 31: Cho hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 2019$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$. **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$. **D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Câu 32: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A.** Hàm số đã cho chỉ đồng biến trên $(0; +\infty)$.
B. Hàm số đã cho chỉ đồng biến trên $(-\infty; 0)$.
C. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
D. Hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

Câu 33: Hàm số $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 1$ đồng biến trong khoảng nào sau đây?

- A.** $(3; +\infty)$ **B.** $(-1; +\infty)$ **C.** $(-1; 3)$. **D.** $(-\infty; 3)$.

Câu 34: Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+3}$. Tìm khẳng định đúng:

- A.** Hàm số xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.
B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.
C. Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.
D. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

Câu 35: Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A.** $y = x^4 - x^3 + 2x$. **B.** $y = \sin x$. **C.** $y = \frac{x-1}{x+1}$. **D.** $y = x\sqrt{x^2 + 1}$.

Câu 36: Cho hàm số $y = x^3 + 3x + 2$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 37: Cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 12x + 1$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A.** Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$ và đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Câu 38: Hàm số $y = x^4 + 2x^2 - 1$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-1; 1)$.

B. $(0; +\infty)$.

C. $\mathbb{R}$.

D. $(-\infty; 0)$.

Câu 39: Trong các hàm số sau, hàm số nào luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = x^3 - x^2 + x + 4$.

B. $y = \frac{2x-5}{x+2}$.

C. $y = x^4 + 3x^2 - 4$.

D. $y = x^2 - 2x - 2$.

Câu 40: Tìm khoảng đồng biến của hàm số: $y = x^4 - 6x^2 + 8x + 1$.

A. $(-\infty; 1)$.

B. $(-2; +\infty)$.

C. $(-\infty; +\infty)$.

D. $(-\infty; 2)$.

Câu 41: Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+3}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định.

C. Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Câu 42: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$. Mệnh đề đúng là

A. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên tập $\mathbb{R}$.

D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$.

Câu 43: Hàm số $y = -x^3 + 3x - 4$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; -1)$.

B. $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.

C. $(1; +\infty)$.

D. $(-1; 1)$.

Câu 44: Trong các hàm số sau, hàm số nào luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = -x + 4$.

B. $y = -x^3 + 3x^2$.

C. $y = \frac{2x+3}{x+1}$.

D. $y = x^4 - 3x^2 - 1$.

Câu 45: Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên tập xác định của nó?

A. $y = \frac{2x-1}{x+2}$.

B. $y = x^3 + 4x + 1$.

C. $y = x^2 + 1$.

D. $y = x^4 + 2x^2 + 1$.

Câu 46: Hàm số $y = x^4 - 2$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$.

B. $(-\infty; 0)$.

C. $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

D. $(0; +\infty)$.

Câu 47: Cho hàm số $y = x^3 + 3x + 2$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$
- B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$
- C.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$
- D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

Câu 48: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{1-x}$. Phát biểu nào sau đây đúng?

- A.** Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 1)$ và $(-1; +\infty)$.
- B.** Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.
- C.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Câu 49: Cho hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 4$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

- A.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
- B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.
- C.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.

Câu 50: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 15$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A.** Hàm số đồng biến trên $(-9; -5)$
- B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 1)$.
- C.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(5; +\infty)$.
- D.** Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 51: Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 10$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A.** $(0; +\infty)$.
- B.** $(-\infty; 2)$.
- C.** $(-\infty; 0); (2; +\infty)$.
- D.** $(0; 2)$.

Câu 52: Tìm khoảng đồng biến của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

- A.** $(0; 2)$.
- B.** $(0; 3)$.
- C.** $(-1; 3)$.
- D.** $(-2; 0)$.

Câu 53: Hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ đồng biến trong khoảng nào dưới đây?

- A.** $(-1; +\infty)$.
- B.** $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.
- C.** $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.
- D.** $(-\infty; 1)$.

Câu 54: Hàm số $y = x^3 - 3x$ nghịch biến trên khoảng nào?

- A.** $(-\infty; -1)$.
- B.** $(-\infty; +\infty)$.
- C.** $(-1; 1)$.
- D.** $(1; +\infty)$.

Câu 55: Trong các hàm số sau, hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A.** $y = \frac{2x-1}{x+3}$.
- B.** $y = x^2 + 2x - 1$.
- C.** $y = 3x + 2$.
- D.** $y = x^4 - 2x^2$.

Câu 56: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$. Kết luận nào sau đây đúng?

- A.** Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- B.** Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1); (-1; +\infty)$.
- C.** Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- D.** Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1); (-1; +\infty)$.

Câu 57: Hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(1; 4)$.
- B.** $(-2; +\infty)$.
- C.** $(-\infty; 0)$.
- D.** $(-\infty; +\infty)$.

Câu 58: Hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 1$ đồng biến trên miền nào dưới đây?

- A.** $(0; 4)$.
- B.** $(1; +\infty)$.
- C.** $(-\infty; 0)$.
- D.** $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

Câu 59: Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- C.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- D.** Hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

Câu 60: Cho các hàm số $y = \frac{x+1}{x+2}$, $y = \tan x$, $y = x^3 + x^2 + 4x - 2017$. Số hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

- A.** 0.
- B.** 3.
- C.** 1.
- D.** 2.

Câu 61: Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên tập xác định của nó?

- A.** $y = \frac{2x-1}{x+2}$.
- B.** $y = x^3 + 4x + 1$.
- C.** $y = x^2 + 1$.
- D.** $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{x-1}$.

Câu 62: Hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A.** $y = \frac{x-1}{x+3}$.
- B.** $y = -x^3 - 3x$.
- C.** $y = \frac{x^2 - x - 1}{x-2}$.
- D.** $y = x^3 + x$.

Câu 63: Hàm số $y = \frac{x}{x^2+1}$ đồng biến trên khoảng

- A.** $(-1; 1)$.
- B.** $(0; +\infty)$.
- C.** $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.
- D.** $(-\infty; +\infty)$.

Câu 64: Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A.** $y = \sqrt{x+1}$.
- B.** $y = x^3 + x - 2$.
- C.** $y = \frac{-x^2 + 2x + 3}{x+4}$.
- D.** $y = \frac{x-1}{x+1}$.

Câu 65: Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A.** $y = \frac{2x-1}{x+2021}$.
- B.** $y = x^4 - 2x^2 - 2021$.
- C.** $y = -x^3 + x^2 - x$.
- D.** $y = x^3 + 2x + 2021$.

Câu 66: Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = 2x - \cos 2x - 5$.

B. $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

C. $y = x^2 - 2x$.

D. $y = \sqrt{x}$.

Câu 67: Hàm số $f(x) = (x^2 + 3x + 2)^2$ nghịch biến trong khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-\frac{3}{2}; -1\right)$.

B. $(-2; -1)$.

C. $\left(-2; -\frac{3}{2}\right)$.

D. $(-1; 1)$.

Câu 68: Hàm số $y = \sqrt{x - x^2}$ nghịch biến trên khoảng

A. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

B. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

C. $(-\infty; 0)$.

D. $(1; +\infty)$.

Câu 69: Hàm số $f(x)$ có $f'(x) = (x-1)(x-2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2; -1)$.

B. $(1; 2)$.

C. $(2; +\infty)$.

D. $(-\infty; -1)$.

Câu 70: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$

Câu 71: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x-1)^3(2-x)$. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1; 2)$.

B. $(-\infty; -1)$.

C. $(-1; 1)$.

D. $(2; +\infty)$.

Câu 72: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 1$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

B. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên $(-1; 1)$.

Câu 73: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-2)^3$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1; 3)$.

B. $(-1; 0)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(-2; 0)$.

Câu 74: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Câu 75: Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) = (x+2)(x+1)(x^2-1)$. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-1; 1)$.

B. $(0; +\infty)$.

C. $(-\infty; -2)$.

D. $(-2; -1)$.

Câu 76: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x-1)^3(2-x)$. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(1; 2)$. **B.** $(-\infty; -1)$. **C.** $(-1; 1)$. **D.** $(2; +\infty)$.

Câu 77: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(2-x)(x+3)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 2)$.
B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-3; -1)$ và $(2; +\infty)$.
C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -3)$ và $(2; +\infty)$.
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 2)$.

Câu 78: Cho hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) = x^2 - 4x$ với mọi x là số thực. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(2; +\infty)$. **B.** $(-1; 0)$. **C.** $(0; 4)$. **D.** $(-2; 1)$.

Câu 79: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x-1)^3(2-x)$. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(-\infty; -1)$. **B.** $(-1; 1)$. **C.** $(2; +\infty)$. **D.** $(1; 2)$.

Câu 80: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x+1)^2(x-3)$. Tìm các khoảng đồng biến của hàm số $f(x)$.

- A.** $(-\infty; 1)$ và $(3; +\infty)$. **B.** $(-1; 1)$ và $(3; +\infty)$. **C.** $(1; 3)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Câu 81: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x(x+1)^2$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(-1; +\infty)$. **B.** $(-1; 0)$. **C.** $(-\infty; -1)$. **D.** $(0; +\infty)$.

Câu 82: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x) = x(x-2), \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(2; +\infty)$. **B.** $(0; +\infty)$. **C.** $(-\infty; 0)$. **D.** $(0; 2)$.

Câu 83: Cho $f'(x) = x(1-x)^2(x-2)^3$. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A.** $(1; 2)$. **B.** $(1; +\infty)$. **C.** $(-\infty; 0)$. **D.** $(-1; 1)$.

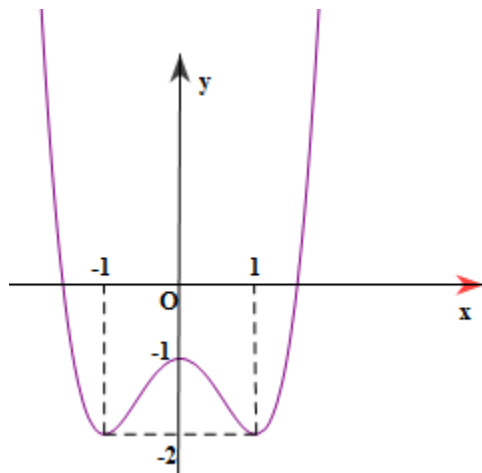
Câu 84: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x-1)^3(2-x)$. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(-1; 1)$. **B.** $(2; +\infty)$. **C.** $(1; 2)$. **D.** $(-\infty; -1)$.

Câu 85: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(2-x)(x+3)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 2)$.
B. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-3; -1)$ và $(2; +\infty)$.
C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -3)$ và $(2; +\infty)$.
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 2)$.

Câu 86: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

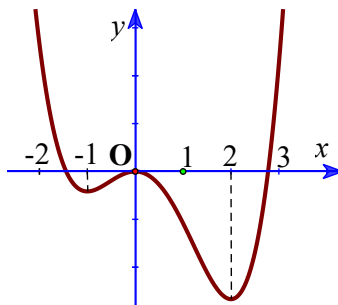
A. $(0;1)$.

B. $(-\infty; -1)$.

C. $(-1;1)$.

D. $(-1;0)$.

Câu 87: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

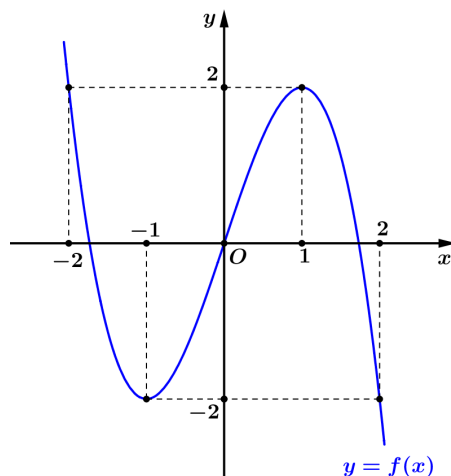
A. $(-2; -1)$.

B. $(0;1)$.

C. $(1;2)$.

D. $(-1;0)$.

Câu 88: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trong khoảng nào trong các khoảng sau đây?

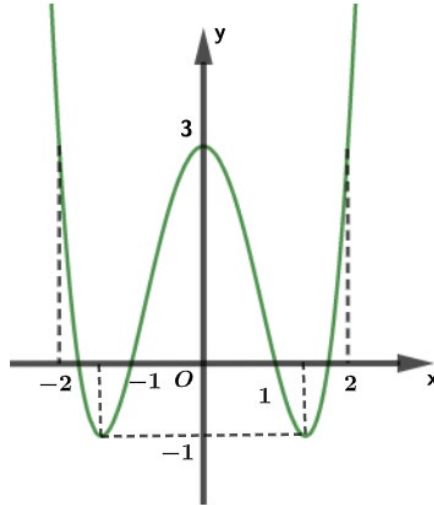
A. $(-\infty; 2)$.

B. $(-1;1)$.

C. $(0;2)$.

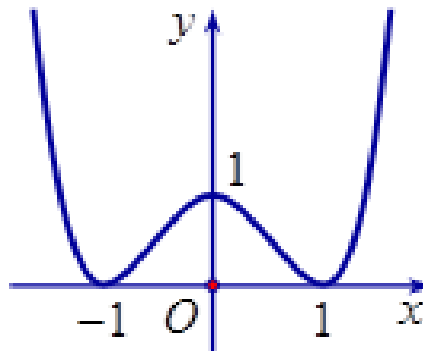
D. $(1; +\infty)$.

Câu 89: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?



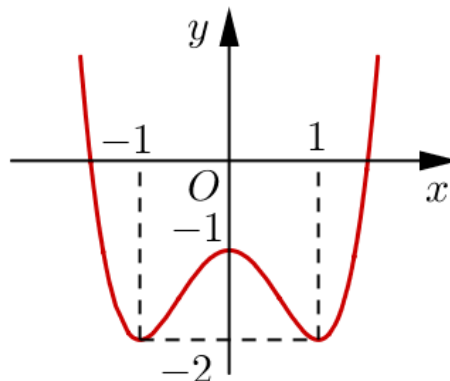
- A. $(0;1)$. B. $(-2;-1)$. C. $(-1;0)$. D. $(-1;3)$.

Câu 90: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây, hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào?



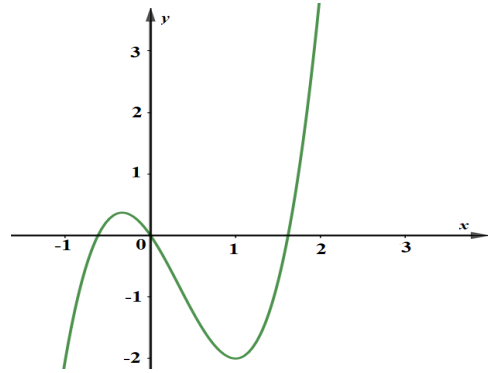
- A. $(-\infty;0)$. B. $(-\infty;-1)$. C. $(1;+\infty)$. D. $(-1;1)$.

Câu 91: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



- A. $(0;1)$. B. $(1;+\infty)$. C. $(-1;1)$. D. $(-1;0)$.

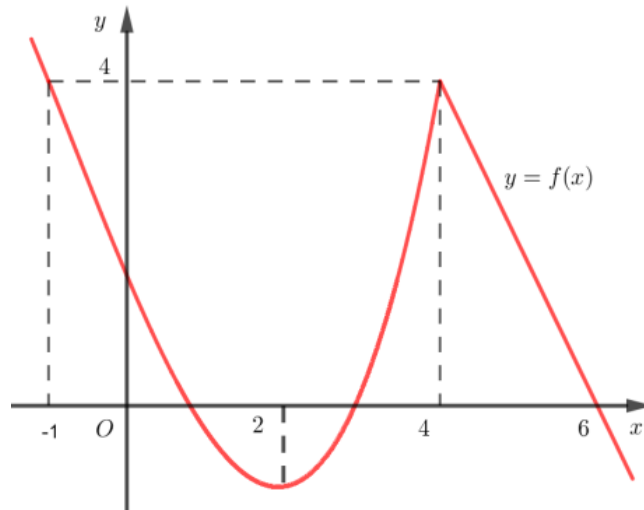
Câu 92: Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số có dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$).



Hàm số nghịch biến trong khoảng nào dưới đây?

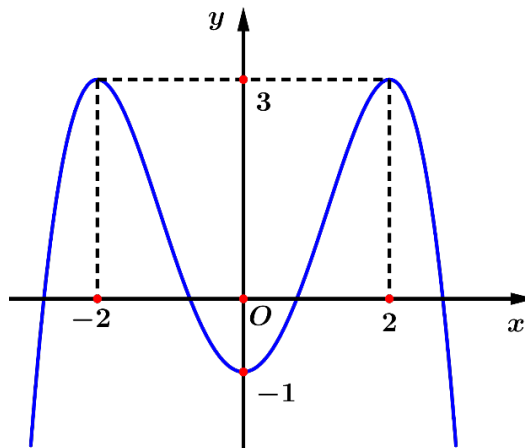
- A. $(-\infty; -2)$. B. $(1; 2)$. **C. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.** D. $(0; 3)$.

Câu 93: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



- A. $(2; 6)$. B. $(0; 4)$. **C. $(3; 4)$.** D. $(-1; 4)$.

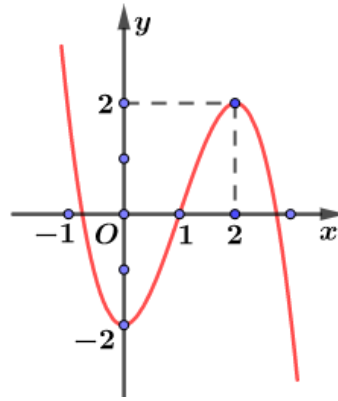
Câu 94: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như sau



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

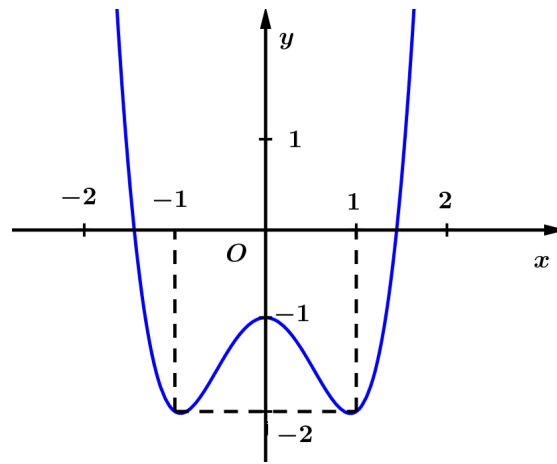
- A. $(0; +\infty)$. **B. $(-\infty; -2)$.** C. $(-2; 0)$. D. $(-2; 2)$.

Câu 95: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?



- A. $(2; +\infty)$. B. $(0; 2)$. C. $(-2; 2)$. D. $(-\infty; 0)$.

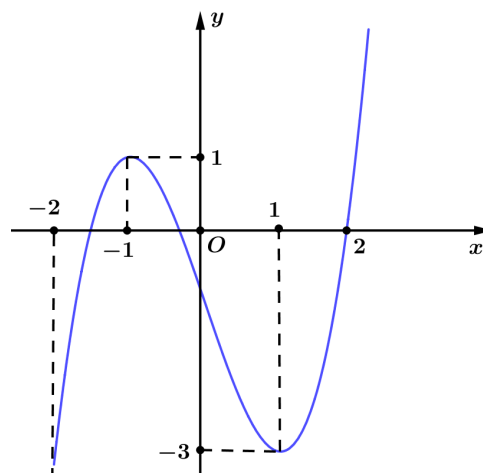
Câu 96: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị trong hình bên:



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1; 1)$. B. $(0; 1)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(-1; +\infty)$.

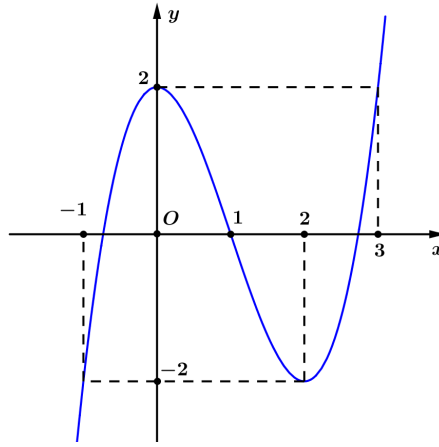
Câu 97: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

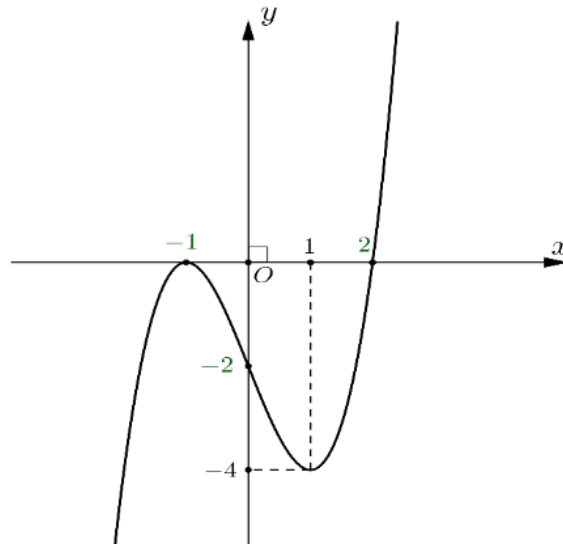
- A. $(-1; 1)$. B. $(0; 2)$. C. $(-2; -1)$. D. $(-2; 1)$.

Câu 98: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào?



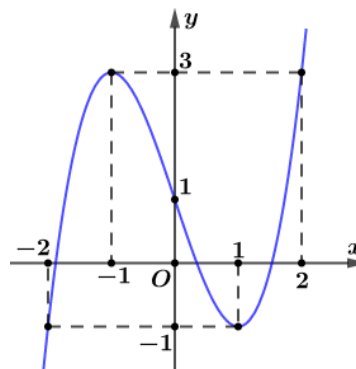
- A. $(0;1)$. B. $(-\infty;1)$. C. $(-1;1)$. **D. $(-1;0)$.**

Câu 99: Cho hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào sau đây đúng?



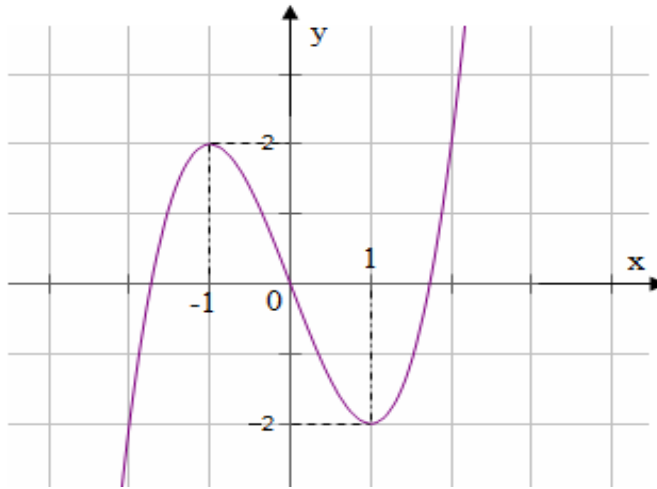
- A. Hàm số nghịch biến trên $(1; +\infty)$. **B. Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$.**
C. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$. D. Hàm số đồng biến trên $(-1; 1)$.

Câu 100: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



- A. $(-1; +\infty)$. B. $(-1; 1)$. C. $(-\infty; 1)$. **D. $(-\infty; -1)$.**

Câu 101: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên, hàm số đồng biến trên khoảng nào trong các phương án dưới đây?



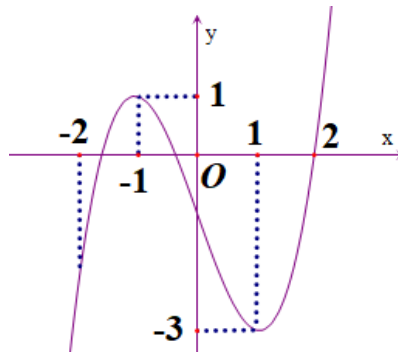
A. $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.

B. $(-1; 1)$.

C. $(-\infty; 2)$.

D. $(-2; 2)$.

Câu 102: Hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

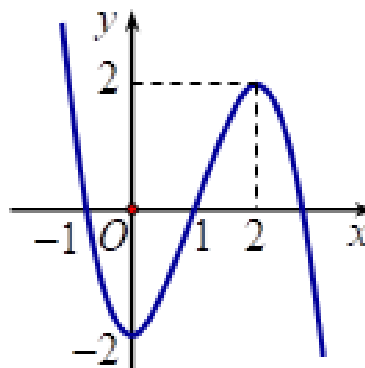
A. $(-1; 1)$.

B. $(0; 2)$.

C. $(-2; -1)$.

D. $(-2; 1)$.

Câu 103: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



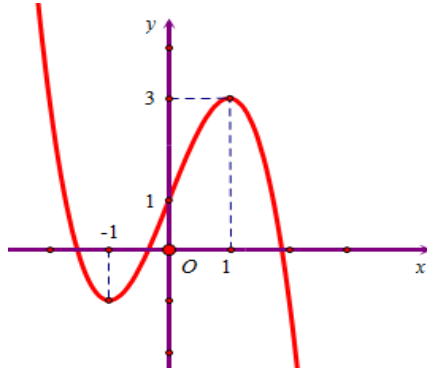
A. $(2; +\infty)$.

B. $(-2; 2)$.

C. $(-\infty; 0)$.

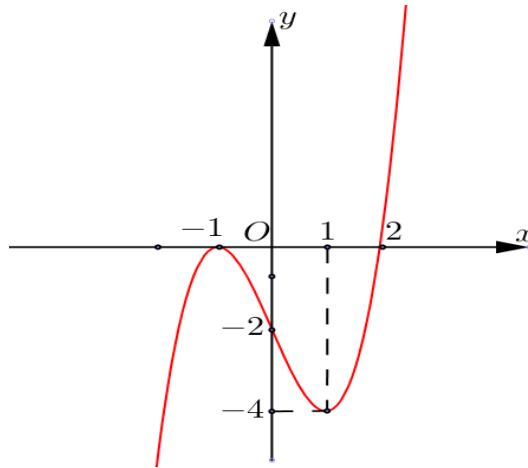
D. $(0; 2)$.

Câu 104: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên, mệnh đề nào sau đây đúng?



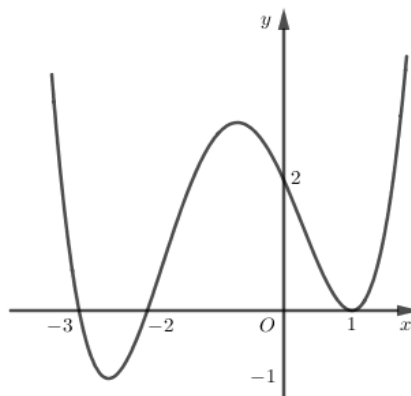
- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$. **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.
 C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 3)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 105: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?



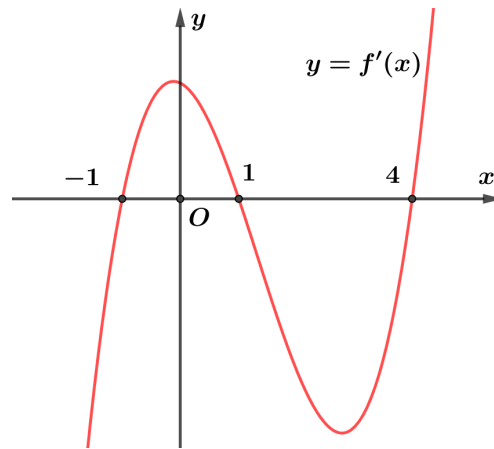
- A. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-1; 0)$. **B.** Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$.
 C. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; 2)$. D. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.

Câu 106: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là hàm số $f'(x)$. Biết đồ thị hàm số $f'(x)$ được cho như hình vẽ. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng



- A. $(0; 1)$. B. $(-\infty; -3)$. C. $(-\infty; -1)$. **D.** $(-3; -2)$.

Câu 107: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng



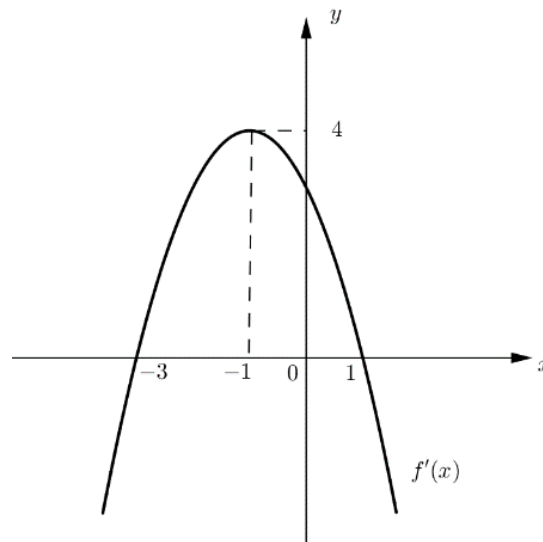
A. $(-1; 1)$.

B. $(1; 4)$.

C. $(-\infty; -1)$.

D. $(2; +\infty)$.

Câu 108: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ là đường cong như hình vẽ bên. Tìm khẳng định **đúng**.



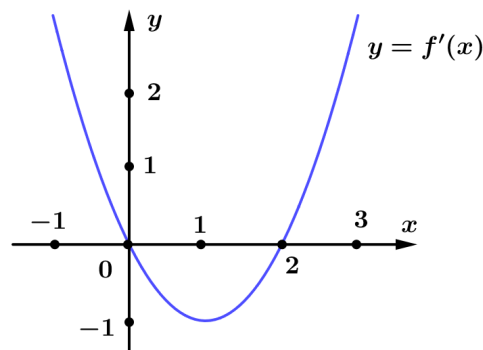
A. $f(x)$ đồng biến trên $(-2; 0)$.

B. $f(x)$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

C. $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty; 3)$.

D. $f(x)$ nghịch biến trên $(-3; -2)$.

Câu 109: Cho hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ như hình bên dưới. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng



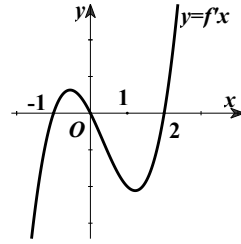
A. $(1; 2)$.

B. $(-1; 0)$.

C. $(3; 4)$.

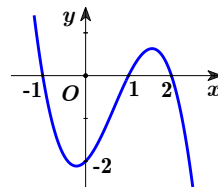
D. $(2; 3)$.

Câu 110: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng về hàm số $y = f(x)$?



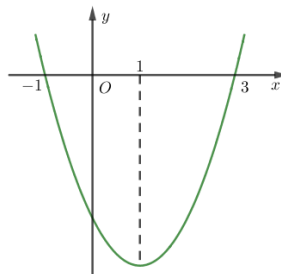
- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$. **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.
 C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 2)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 111: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây.



- A. $(0; 1)$. B. $(2; +\infty)$. **C.** $(1; 2)$. **D.** $(-1; 2)$.

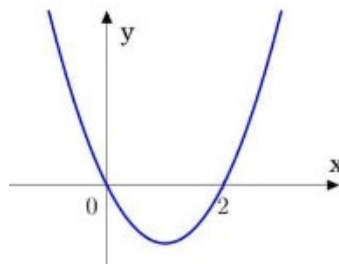
Câu 112: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ là parabol như hình vẽ.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$. **B.** Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$. **D.** Hàm số đồng biến trên $(-1; 3)$.

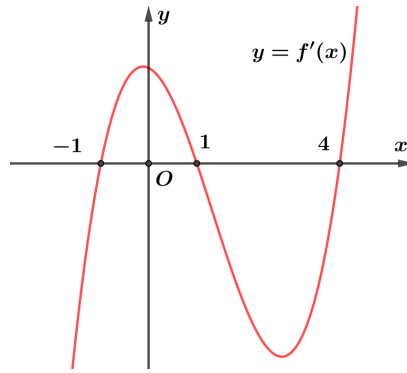
Câu 113: Cho hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm $y = f'(x)$ như hình sau:



Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng

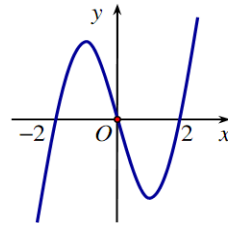
- A. $(-1; 0)$. B. $(2; 3)$. C. $(3; 4)$. **D.** $(1; 2)$.

Câu 114: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng



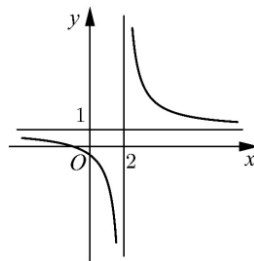
- A.** $(-1; 1)$. **B.** $(1; 4)$. **C.** $(-\infty; -1)$. **D.** $(2; +\infty)$.

Câu 115: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $f'(x)$ là đường cong trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



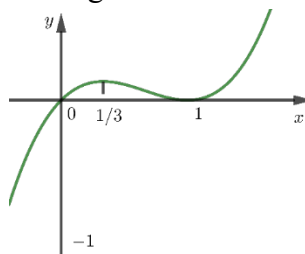
- A.** Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$. **B.** Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.
C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 1)$. **D.** Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Câu 116: Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



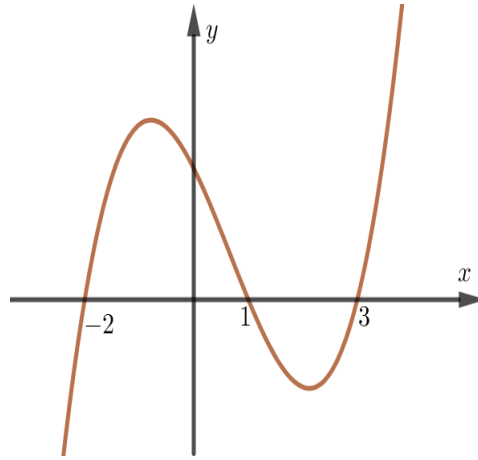
- A.** $y' < 0, \forall x \neq 1$ **B.** $y' < 0, \forall x \neq 2$ **C.** $y' > 0, \forall x \neq 2$ **D.** $y' > 0, \forall x \neq 1$

Câu 117: Hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là hàm số $f'(x)$. Biết đồ thị hàm số $f'(x)$ được cho như hình vẽ. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng



- A.** $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$. **B.** $(0; +\infty)$. **C.** $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$. **D.** $(-\infty; 0)$.

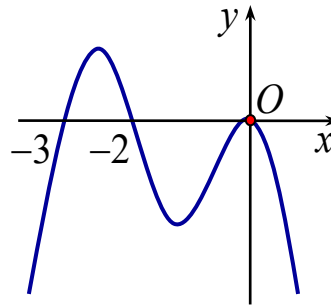
Câu 118: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Hãy Chọn khẳng định đúng?

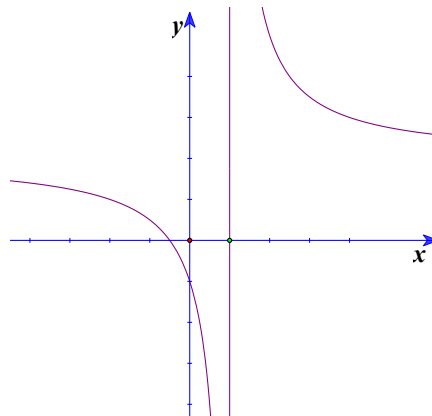
- A.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; -2)$. **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 2)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Câu 119: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$. Biết rằng $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



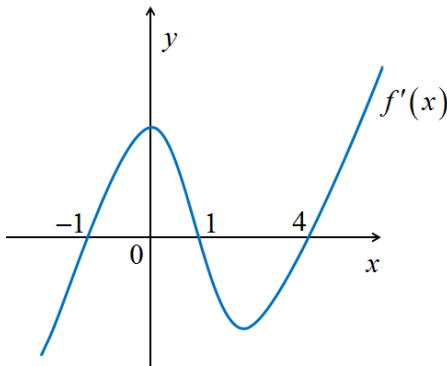
- A.** Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$. **B.** Hàm số $y = f(x)$ NB trên khoảng $(0; +\infty)$.
C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$. **D.** Hàm số $y = f(x)$ NB trên khoảng $(-3; -2)$.

Câu 120: Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với a, b, c, d là các số thực. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A.** $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. **B.** $y' > 0, \forall x \neq 1$. **C.** $y' < 0, \forall x \neq 1$. **D.** $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 121: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Hàm số $y = f(1-x^2)$ nghịch biến trên khoảng

- A.** $(0;1)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-\infty;0)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Câu 122: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$		3		1	$-\infty$

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(-2;2)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Câu 123: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	$+$	0	$-$	$-$
y	1	$+\infty$	0	$+\infty$	1

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(-1;1)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Câu 124: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y			3		-2	$+\infty$

Phase line diagram showing the behavior of the system. The horizontal axis represents y and the vertical axis represents y' . The critical points are at $y = 3$ and $y = -2$. The arrows indicate that the system converges to $y = 3$ from below and diverges from $y = -2$ from above.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(-1;1)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(-2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;3)$.

Câu 125: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(-\infty; +\infty)$, có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$			2		-1	

Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$. **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$. **D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Câu 126: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau. Tìm mệnh đề đúng.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$			-2		2	

A. Hàm số $y = f(x)$ NB trên khoảng $(-\infty; 1)$. **B.** Hàm số $y = f(x)$ ĐB trên khoảng $(-1; 1)$.

C. Hàm số $y = f(x)$ ĐB trên khoảng $(-2; 2)$. **D.** Hàm số $y = f(x)$ NB trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Câu 127: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(-\infty; +\infty)$, có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$			3		-2	

Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$. **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$. **D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Câu 128: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$			3		-1	

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-2; 0)$. **B.** $(-\infty; 3)$. **C.** $(-1; +\infty)$. **D.** $(-\infty; -2)$.

Câu 129: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Mệnh đề nào sau đây đúng?

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'		$-$	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	$+\infty$	2	$+\infty$	

- A.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1) \cup (-1; 1)$.
D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; 1)$.

Câu 130: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$		
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	3	-1	3	$-\infty$		

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(-2; 0)$ **B.** $(-\infty; -2)$ **C.** $(0; 2)$ **D.** $(0; +\infty)$

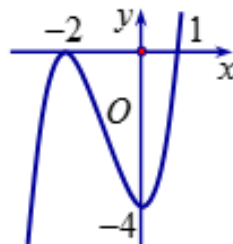
Câu 131: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$								
	$-\infty$		3		0		2	
								$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(-\infty; -1)$. **B.** $(1; +\infty)$. **C.** $(-\infty; 3)$. **D.** $(0; 2)$.

Câu 132: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



- A.** $(-1; 0)$. **B.** $(1; +\infty)$. **C.** $(-\infty; -2)$. **D.** $(-2; 1)$.

Câu 133: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		+		+	
$f(x)$			$+\infty$		1
	1				$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(1; +\infty)$. **B.** $(0; 3)$. **C.** $(-\infty; +\infty)$. **D.** $(2; +\infty)$.

Câu 134: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+	0	-	-	+
y			$+\infty$		$+\infty$
	$-\infty$		$-\infty$		

- A.** $(-1; 0)$. **B.** $(-1; 1)$. **C.** $(-\infty; -1)$. **D.** $(0; +\infty)$.

Câu 135: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

x	$-\infty$	-2	1	3	5	$+\infty$
y'	+	-	+	-	+	

- A.** $(-2; 1)$. **B.** $(1; 3)$. **C.** $(-\infty; -2)$. **D.** $(3; +\infty)$.

Câu 136: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$				
$f'(x)$		-	0	-	0	+	0	-	0	+

Hàm số $y = -f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(2; 3)$. **B.** $(4; +\infty)$. **C.** $(-2; -1)$. **D.** $(-1; 3)$.

Câu 137: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, liên tục trên từng khoảng xác định và có bảng biến thiên như hình vẽ:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+		-	-	+
y		$-\infty$		$+\infty$	
	$-\infty$		$-\infty$		$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.** Hàm số nghịch biến trên $(0; 1)$. **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$. **D.** Hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$.

Câu 138: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	3	-2	-1	$-\infty$

Hàm số $g(x) = f(2x+7)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-5; -4)$. **B.** $(-3; 0)$. C. $(-4; -3)$. **D.** $(-\infty; -5)$.

Câu 139: Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $y = f(1-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(1; 3)$. **B.** $(3; +\infty)$. **C.** $(-2; 0)$. **D.** $(0; 1)$.

Câu 140: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$-\infty$	2	-2	$+\infty$

Hàm số $y = f(3x-4)$ nghịch biến trong khoảng nào?

- A. $(0; 2)$. **B.** $\left(\frac{4}{3}; 2\right)$. C. $(-4; 2)$. **D.** $(-\infty; 0)$.

Câu 141: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0

Hàm số $y = f(-3x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(1; 3)$. **B.** $\left(-\frac{1}{3}; 0\right)$. **C.** $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$. **D.** $\left(-\frac{4}{3}; -1\right)$.

Câu 142: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0

Hàm số $y = f(1-2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $\left(-\frac{3}{2}; -1\right)$. **B.** $(-\infty; -1)$. C. $(-1; 0)$. **D.** $(-\infty; -2)$.

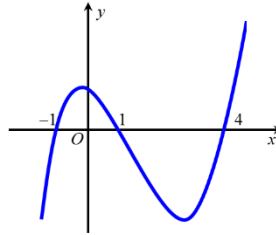
Câu 143: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, dấu của đạo hàm được cho bởi bảng:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = f(2x - 2)$ nghịch biến trong khoảng nào?

- A.** $(-\infty; 1)$. **B.** $(1; 2)$. **C.** $(-1; 1)$. **D.** $(2; +\infty)$.

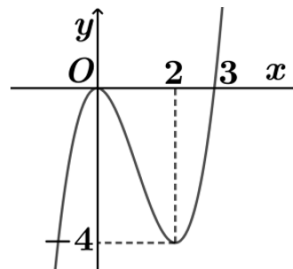
Câu 144: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = f(2 - e^x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A.** $(-\infty; 1)$. **B.** $(1; 4)$. **C.** $(0; \ln 3)$. **D.** $(2; +\infty)$.

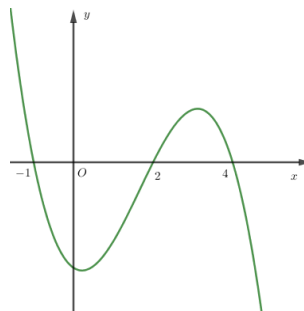
Câu 145: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $g(x) = f(e^x - 2) - 2020$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$. **B.** $(-1; 2)$. **C.** $(0; +\infty)$. **D.** $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$.

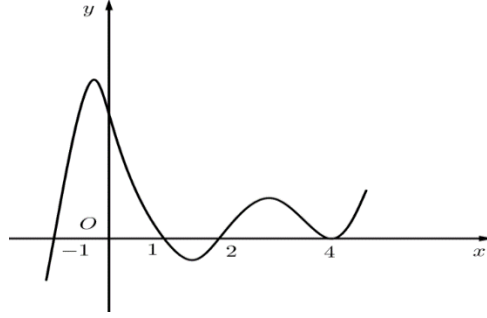
Câu 146: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = f(10 - 2^x)$ đồng biến trên khoảng

- A.** $(-\infty; 2)$. **B.** $(2; 4)$. **C.** $(\log_2 6; 4)$. **D.** $(\log_2 11; +\infty)$.

Câu 147: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên. Hàm số $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(1-2x)}$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?



- A.** $(0;1)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Câu 148: Hàm số nào dưới đây đồng biến trên tập xác định của nó?

- A.** $y = (\sqrt{2})^x$. **B.** $y = (0,5)^x$. **C.** $y = \left(\frac{e}{\pi}\right)^x$. **D.** $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$.

Câu 149: Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$?

- A.** $y = \left(\frac{3}{\pi}\right)^x$. **B.** $y = (1,5)^x$. **C.** $y = \left(\frac{2}{e}\right)^x$. **D.** $y = (\sqrt{3}+1)^x$.

Câu 150: Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên tập xác định của nó?

- A.** $y = \left(\frac{e}{2}\right)^x$. **B.** $y = \left(\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}\right)^x$. **C.** $y = \left(\frac{4}{\sqrt{3}+2}\right)^x$. **D.** $y = \left(\frac{\pi+3}{2\pi}\right)^x$.

Câu 151: Trong các hàm số sau. Hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A.** $y = (0,9)^x$. **B.** $y = \pi^x$. **C.** $y = \left(\frac{2}{\pi}\right)^x$. **D.** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Câu 152: Trong các hàm số sau hàm số nào đồng biến trên tập xác định của nó?

- A.** $y = \log_{\frac{2}{5}} x$. **B.** $y = \left(\frac{\pi}{4}\right)^x$. **C.** $y = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{x}\right)$. **D.** $y = e^{-x}$.

Câu 153: Hàm số nào dưới đây đồng biến trên tập xác định của nó?

- A.** $y = (0,5)^x$. **B.** $y = (\sqrt{2})^x$. **C.** $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$. **D.** $y = \left(\frac{e}{\pi}\right)^x$.

Câu 154: Hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A.** $y = \left(\frac{e}{4}\right)^x$. **B.** $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$. **C.** $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$. **D.** $y = \left(\frac{3}{4}\right)^x$.

Câu 155: Hàm số $y = \log_{\frac{e}{3}}(x-1)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(1;+\infty)$. **B.** $[1;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Câu 156: Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên $(0; +\infty)$?

A. $y = \log_{\frac{2}{3}} x$.

B. $y = \log_{2020} x$.

C. $y = \log_{\pi} x$.

D. $y = \ln x$.

Câu 157: Hàm số nào sau đây luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = -x^4 + 4x^2 - 4$.

B. $y = -x^3 - 2x + 3$.

C. $y = \frac{x+2}{x-1}$.

D. $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

Câu 158: Hàm số nào sau đây đồng biến trên tập xác định của nó?

A. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

B. $y = e^{-x}$.

C. $y = \log_{\frac{1}{5}} x$.

D. $y = \ln x$.

Câu 159: Hàm số nào sau đây nghịch biến trên khoảng xác định của nó?

A. $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

B. $y = \log_{\sqrt{3}} x$.

C. $y = \log_{\sqrt{2}} x$.

D. $y = \log_2 x$.

Câu 160: Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên tập xác định của nó?

A. $y = \log_2 x$.

B. $y = \log_{\sqrt{3}} x$.

C. $y = \log_{\frac{e}{\pi}} x$.

D. $y = \log_{\pi} x$.

Câu 161: Trong các hàm số sau hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $y = \log_3 x$.

B. $y = \log_{\frac{1}{5}} x$.

C. $y = \left(\frac{e}{3}\right)^x$.

D. $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$.

Câu 162: Cho hàm số $y = \log_2(2x^2 - x - 1)$. Hãy chọn phát biểu đúng.

A. Hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$, đồng biến trên $(1; +\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ và $(1; +\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ và $(1; +\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$, nghịch biến trên $(1; +\infty)$.

Câu 163: Cho hàm số $y = (x^2 - 3)e^x$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 1)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 3)$.

Câu 164: Hàm số $y = \log_2(x^2 - 2x)$ đồng biến trên

A. $(1; +\infty)$.

B. $(2; +\infty)$.

C. $(-1; 1)$.

D. $(0; +\infty)$.

Câu 165: Hàm số $y = x^2 e^{2x}$ nghịch biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty; 0)$.

B. $(-2; 0)$.

C. $(1; +\infty)$.

D. $(-1; 0)$.

Câu 166: Hàm số $y = \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 2x - 3)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

- A.** $(-\infty; 1)$. **B.** $(-\infty; -1)$. **C.** $(1; +\infty)$. **D.** $(3; +\infty)$.

Câu 167: Cho hàm số $y = e^{2x} - x$. Chọn khẳng định đúng.

- A.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\ln \sqrt{2}; +\infty)$. **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -\ln 2)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -\ln \sqrt{2})$. **D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\ln 2; +\infty)$.

Câu 168: Hàm số $y = \log_{0,5}(-x^2 + 4x)$ đồng biến trên khoảng

- A.** $(2; 4)$. **B.** $(0; 4)$. **C.** $(2; +\infty)$. **D.** $(0; 2)$.

Câu 169: Hàm số $y = x \ln x$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

- A.** $\left(\frac{1}{e}; +\infty\right)$. **B.** $\left(0; \frac{1}{e}\right)$. **C.** $(0; +\infty)$. **D.** $\left(-\frac{1}{e}; +\infty\right)$.

Câu 170: Hàm số $y = x^2 e^x$ nghịch biến trên khoảng nào?

- A.** $(-2; 0)$. **B.** $(-\infty; -2)$. **C.** $(-\infty; 1)$. **D.** $(1; +\infty)$.

Câu 171: Cho hàm số $y = (0,5)^{x^2 - 8x}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng

- A.** $(0; 4)$. **B.** $(0; 8)$. **C.** $(9; 10)$. **D.** $(-\infty; 0)$.

Câu 172: Hàm số $y = 2^{x^2 - 4x}$ đồng biến trên khoảng

- A.** $(-\infty; 2)$. **B.** $(3; 5)$. **C.** $(0; +\infty)$. **D.** $(-\infty; 3)$.

Câu 173: Hàm số $y = \ln(x^2 - 2x - 3)$ đồng biến trên khoảng nào?

- A.** $(-\infty; -1)$. **B.** $(-1; 3)$. **C.** $(1; +\infty)$. **D.** $(3; +\infty)$.

Câu 174: Cho hàm số $y = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{x^2 + 2x + 3}$. Tìm khẳng định đúng.

- A.** Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.
B. Hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
C. Hàm số luôn nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
D. Hàm số luôn đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Câu 175: Hàm số $y = x^2 e^x$ nghịch biến trên khoảng nào?

- A.** $(-2; 0)$. **B.** $(-\infty; -2)$. **C.** $(-\infty; 1)$. **D.** $(1; +\infty)$.

2. Cực trị

- Câu 176:** Hàm số $y = \frac{2x+5}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?
A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.
- Câu 177:** Hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?
A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.
- Câu 178:** Tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 2x^2 - x + 1$ là
A. $\left(\frac{1}{3}; \frac{23}{27}\right)$. **B.** $\left(\frac{23}{27}; \frac{1}{3}\right)$. **C.** $(1; 1)$. **D.** $(3; 1)$.
- Câu 179:** Hàm số $y = 2x^3 - x^2 + 5$ có điểm cực đại là
A. $x = \frac{1}{3}$. **B.** $x = 0$. **C.** $M(0; 5)$. **D.** $y = 5$.
- Câu 180:** Hàm số $y = 2x^4 + 4x^2 - 8$ có bao nhiêu điểm cực trị?
A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.
- Câu 181:** Hàm số $f(x) = x^2(x+1)$ có bao nhiêu cực trị?
A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.
- Câu 182:** Tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$ là
A. $(-1; 0)$. **B.** $(1; 0)$.
C. $(-1; 0)$ và $(1; 0)$. **D.** $(0; 1)$.
- Câu 183:** Số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = -x^4 - 1$ là
A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.
- Câu 184:** Giá trị cực đại của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ bằng
A. 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** -1.
- Câu 185:** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$. Độ dài đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho là
A. $2\sqrt{5}$. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 6.
- Câu 186:** Tìm số điểm cực đại của đồ thị hàm số sau $y = 10x^4 + 5x^2 + 19$
A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.
- Câu 187:** Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 2019$ có bao nhiêu điểm cực trị
A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.
- Câu 188:** Giá trị cực tiểu của hàm số $y = f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x - 1$ là
A. $-\frac{1}{3}$. **B.** -1. **C.** $-\frac{5}{3}$. **D.** 1.

Câu 189: Hàm số $y = 2x^3 - x^2 + 5$ có điểm cực đại là

- A. $x = 5$. B. $x = 3$. C. $x = 0$. D. $x = \frac{1}{3}$.

Câu 190: Hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ đạt cực đại tại điểm

- A. $x = 1$. B. $x = -1$. C. $x = 0$. D. $x = 2$.

Câu 191: Hàm số $y = \frac{2x+3}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 192: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}$. Giá trị cực tiểu của hàm số bằng

- A. -1. B. 2. C. $\frac{1}{3}$. D. 0.

Câu 193: Số điểm cực trị của hàm số $y = -\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 - x - 3$ là

- A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 194: Gọi x_1 là điểm cực đại, x_2 là điểm cực tiểu của hàm số $y = -x^3 + 3x + 2$. Tính $x_1 + 2x_2$.

- A. 2. B. 1. C. -1. D. 0.

Câu 195: Hàm số $y = -x^3 + 1$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1. B. 0. C. 3.. D. 2.

Câu 196: Hàm số $y = x^3 - 12x + 3$ đạt cực đại tại điểm

- A. $x = 19$. B. $x = -2$. C. $x = 2$. D. $x = -13$.

Câu 197: Hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 3$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Câu 198: Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ đạt cực tiểu tại

- A. $x = -2$. B. $x = 2$. C. $x = 0$. D. $x = 1$.

Câu 199: Cho hàm số $f(x) = x^4 - 8x^3 + 1$. Chọn mệnh đề đúng.

- A. Nhận điểm $x = 6$ làm điểm cực đại. B. Nhận điểm $x = 6$ làm điểm cực tiểu.
C. Nhận điểm $x = 0$ làm điểm cực đại. D. Nhận điểm $x = 0$ làm điểm cực tiểu.

Câu 200: Số điểm cực trị của hàm số $y = \frac{5x-1}{x+2}$ là

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 3.

Câu 201: Có bao nhiêu điểm cực trị của hàm số $y = \frac{1}{x}$?

- A. 3. B. 2. C. 0. D. 1.

Câu 202: Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$ là:

- A. $(1; 0)$. B. $(3; 4)$. C. $(-1; 0)$. D. $(2; 2)$.

Câu 203: Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^3 - 12x + 20$ là

- A.** $(-2; 0)$. **B.** $(2; -4)$. **C.** $(2; 36)$. **D.** $(-2; 36)$.

Câu 204: Hàm số nào sau đây **không** có cực trị:

- A.** $y = x^2 - 3x$. **B.** $y = \frac{3x+1}{2x-1}$. **C.** $y = x^3 - 3x + 1$. **D.** $y = x^4 + 2x$.

Câu 205: Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ đạt cực tiểu tại:

- A.** $x = -2$. **B.** $x = 2$. **C.** $x = 0$. **D.** $x = 1$.

Câu 206: Hàm số nào trong 4 hàm số được liệt kê dưới đây **không** có cực trị?

- A.** $y = x^4 + 2x^2 - 1$. **B.** $y = x^2 - 1$. **C.** $y = x^3 + 3x^2 - 21$. **D.** $y = x^3 + x + 1$.

Câu 207: Hàm số nào sau đây có cực trị?

- A.** $y = \sqrt{x-1}$. **B.** $y = x^2 - 2x + 3$.
C. $y = x^3 + 8x + 9$. **D.** $y = \frac{2x-1}{3x+1}$.

Câu 208: Hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ đạt cực đại tại điểm.

- A.** $x = -1$. **B.** $x = 0$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = -2$.

Câu 209: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có đồ thị (C) . Gọi $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ lần lượt là điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số (C) . Tính tổng $S = x_1 + x_2$

- A.** $S = -3$. **B.** $S = -2$. **C.** $S = 2$. **D.** $S = 3$.

Câu 210: Biết đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$ có hai điểm cực trị. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị (C) cắt trục hoành tại điểm M có hoành độ x_M bằng:

- A.** $x_M = 1 - \sqrt{2}$. **B.** $x_M = -2$. **C.** $x_M = 1$. **D.** $x_M = 1 + \sqrt{2}$.

Câu 211: Giá trị cực đại của hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ là

- A.** -2 . **B.** -3 . **C.** 1 . **D.** 0 .

Câu 212: Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + x - \frac{2}{3}$. Tọa độ trung điểm của AB là

- A.** $\left(0; \frac{-2}{3}\right)$. **B.** $(1; 0)$. **C.** $(0; 1)$. **D.** $\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Câu 213: Đồ thị hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 1$ có điểm cực đại là

- A.** $x = 0$. **B.** $(-2; -19)$. **C.** $(0; 1)$. **D.** $x = -2$.

Câu 214: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 5$ có đồ thị (C) . Điểm cực tiểu của đồ thị (C) là

- A.** $M(1; 2)$. **B.** $M(5; 0)$. **C.** $M(2; 1)$. **D.** $M(0; 5)$.

Câu 215: Biết đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 1}$ có hai điểm cực trị. Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị (C) cắt trục hoành tại điểm M có hoành độ x_M bằng

- A.** $x_M = 2$. **B.** $x_M = 1 - \sqrt{2}$. **C.** $x_M = 1$. **D.** $x_M = 1 + \sqrt{2}$.

Câu 216: Tính số điểm cực trị của hàm số $y = x^4 - 2x^3 + 2x$

- A.** 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 217: Cho hàm số $f(x) = (x^2 - 1)^3$. Số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ là

- A.** 5. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 218: Giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $y = x + \frac{4}{x} - 3$ là

- A.** $y_{CT} = -3$. **B.** $y_{CT} = 1$. **C.** $y_{CT} = -1$. **D.** $y_{CT} = 3$.

Câu 219: Điểm cực tiểu của hàm số $y = x\sqrt{4 - x^2}$ là

- A.** $-2\sqrt{3}$. **B.** 2. **C.** $-\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

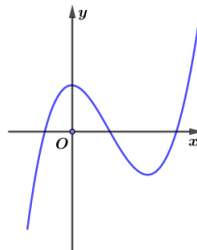
Câu 220: Biết đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có hai điểm cực trị là A và B . Phương trình đường thẳng AB là

- A.** $y = -2x + 1$. **B.** $y = 2x - 1$. **C.** $y = x - 2$. **D.** $y = -x + 2$.

Câu 221: Hàm số $y = (x^3 - 3x)^e$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A.** 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

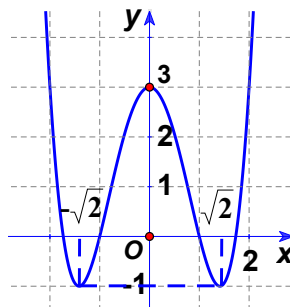
Câu 222: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ dưới



Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

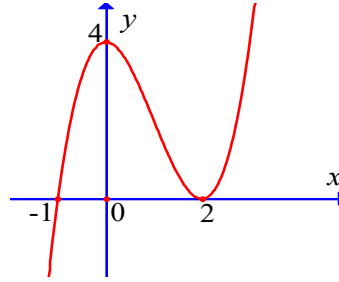
- A.** 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 223: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đạt cực tiểu tại các điểm



- A.** $x = \pm\sqrt{2}$. **B.** $x = \pm 2$. **C.** $x = -1$. **D.** $x = 3$.

Câu 224: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Mệnh đề nào sau đây **sai**?

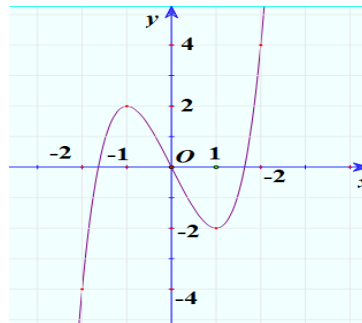
A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 4$.

C. Hàm số có hai điểm cực trị.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

Câu 225: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm nào dưới đây?



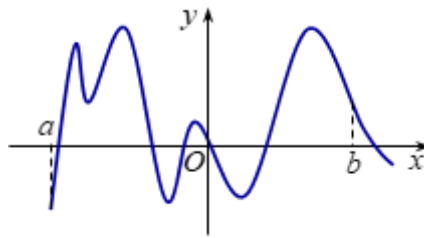
A. $x = -1$.

B. $x = 2$.

C. $x = 1$.

D. $x = -2$.

Câu 226: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số có bao nhiêu điểm cực tiểu trên khoảng $(a; b)$.



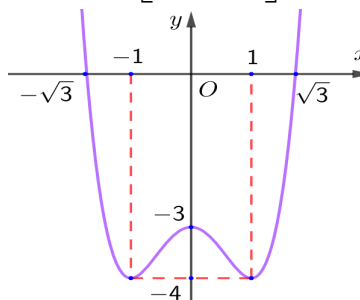
A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 7.

Câu 227: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$ và có đồ thị hàm số như hình vẽ sau



Điểm cực đại của đồ thị hàm số đã cho là

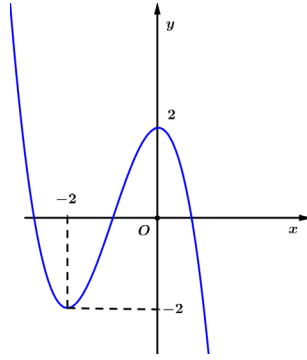
A. $M(-1; -4)$.

B. $N(0; -3)$.

C. $x = -1$.

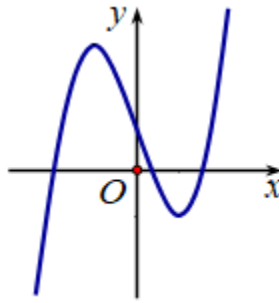
D. $x = 0$.

Câu 228: Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên tập số thực $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm nào dưới đây?



- A.** $x = 1$. **B.** $x = 0$. **C.** $x = -2$ và $x = 0$. **D.** $x = -2$.

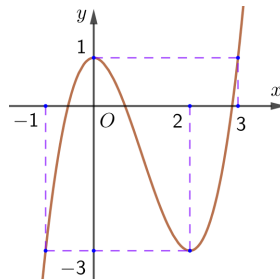
Câu 229: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên.



Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A.** 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

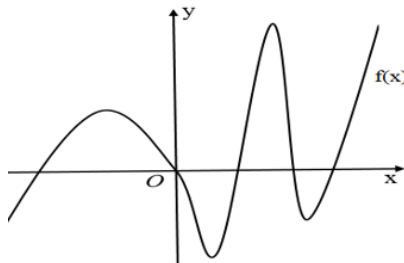
Câu 230: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị hàm số như hình vẽ bên:



Hàm số đạt cực tiểu tại điểm

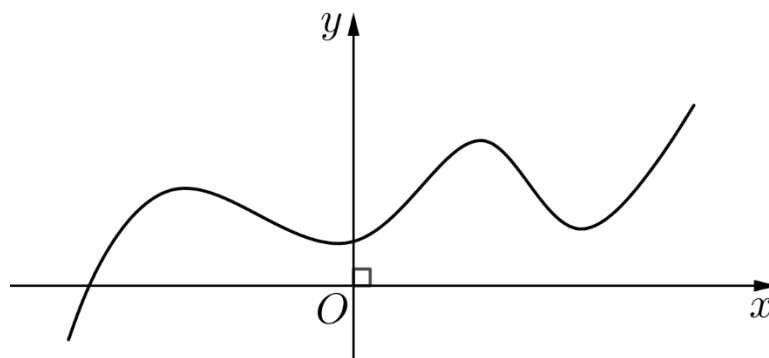
- A.** $x = 2$. **B.** $x = 0$. **C.** $x = -1$. **D.** $x = 3$.

Câu 231: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $f(x)$ có số điểm cực trị là



- A.** 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

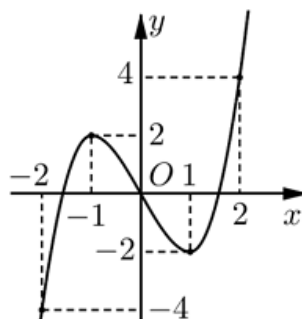
Câu 232: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm và liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị như hình vẽ:



Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

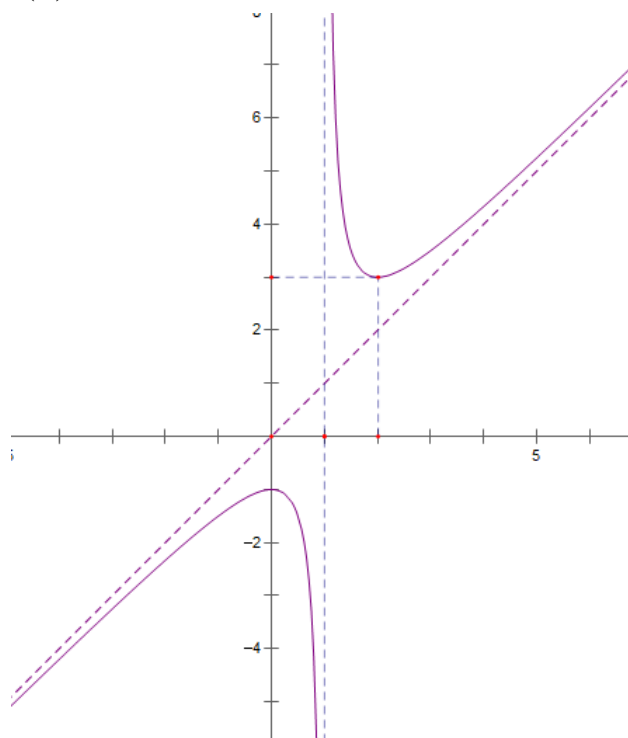
- A.** 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 0.

Câu 233: Cho hàm số $f(x)$ xác định, liên tục trên $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây ?



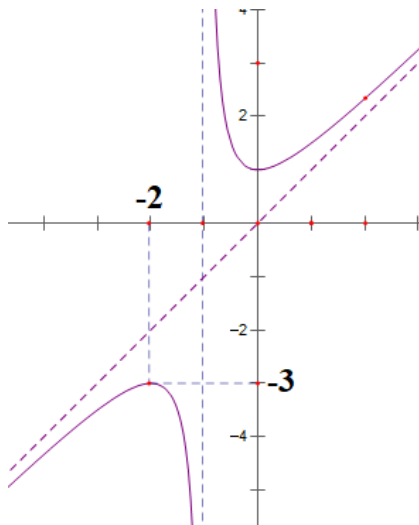
- A.** $x = -2$. **B.** $x = -1$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = 2$.

Câu 234: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực tiểu của hàm số là:



- A.** 1. **B.** -2. **C.** 4. **D.** 0.

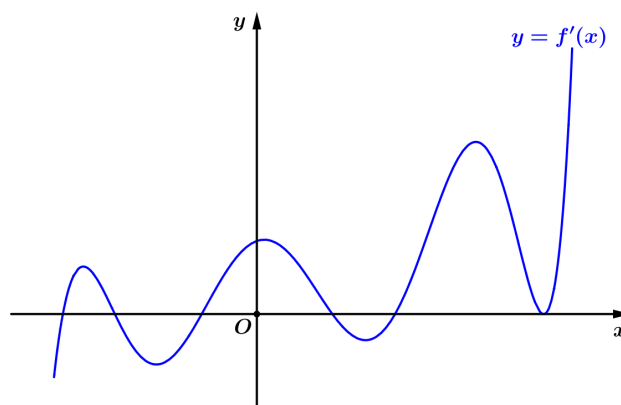
Câu 235: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Giá trị cực tiểu của hàm số bằng

- A. 0. **B.** -3. C. -1. **D.** 1.

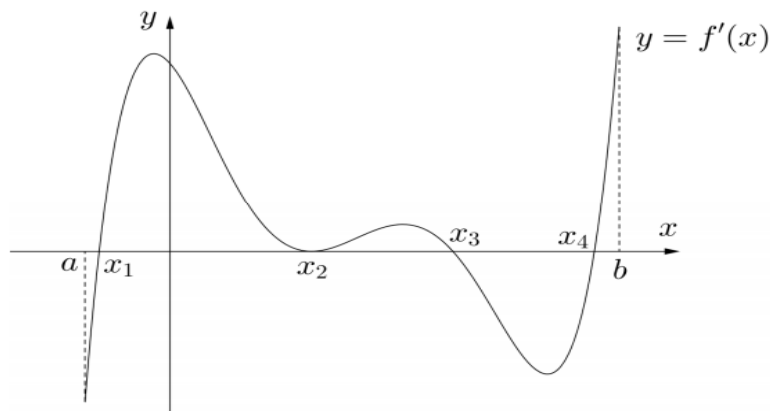
Câu 236: Cho hàm số $y = f(x)$. Biết đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình bên.



Tìm số cực tiểu của hàm số $y = f(x)$

- A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

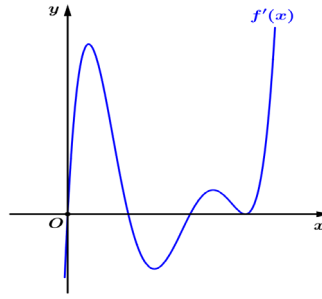
Câu 237: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $[a; b]$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$ là

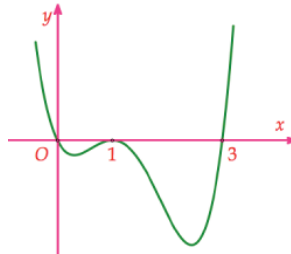
- A. 4. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 238: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $f(x)$ có mấy điểm cực trị?



- A. 4. B. 1. C. 2. **D. 3.**

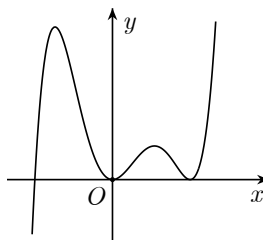
Câu 239: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



Đồ thị hàm số $y = (f(x))^2$ có bao nhiêu điểm cực đại, cực tiểu?

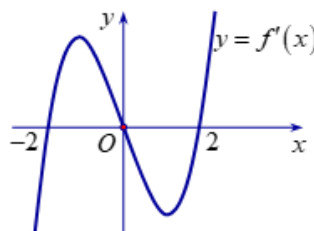
- A.** 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu. **B.** 2 điểm cực tiểu, 3 điểm cực đại.
C. 2 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu. **D.** 1 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

Câu 240: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là



- A.** 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

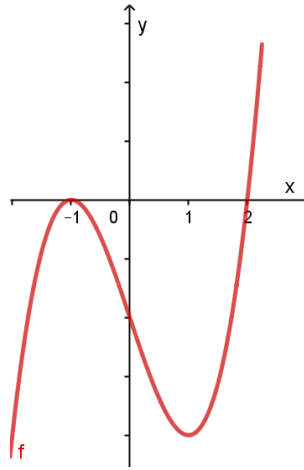
Câu 241: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây



Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.** $f(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$. **B.** $f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$.
C. $f(x)$ đạt cực đại tại $x = -1$. **D.** $f(x)$ đạt cực đại tại $x = \pm 2$.

Câu 242: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $y' = f'(x) = (x-1)(x-4)^2(5-x)^3 \cdot g(x)$, hàm số $y = g(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



- A. 5. B. 4. C. 3. D. 2.

Câu 243: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0		3	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$						
	$-\infty$	2		-4	$+\infty$	

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

- A. 2. B. 3. C. 0. D. -4.

Câu 244: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	1	-3	$+\infty$		

Hàm số đạt cực đại tại điểm

- A. $x = -3$. B. $x = -1$. C. $x = 1$. D. $x = -2$.

Câu 245: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$		1		5		$-\infty$

Hàm số đạt cực đại tại điểm

- A. $x = 1$ B. $x = 0$ C. $x = 5$ D. $x = 2$

Câu 246: Hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$				
y'		$+$	0	$-$	0	$+$			
y	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$+\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$+\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

- A. -2 . B. 1 . C. 0 . D. -3 .

Câu 247: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
y'	$-$	0	$+$	0	$-$		
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

- A. -1 . B. 0 . C. 1 . D. 4 .

Câu 248: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 3 . B. 2 . C. 1 . D. 4 .

Câu 249: Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$

Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

- A. 0 . B. 2 . C. 1 . D. 3 .

Câu 250: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$			
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

- A. Hàm số không có giá trị cực tiểu. B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.
C. Giá trị cực đại của hàm số bằng 1 . D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$.

Câu 251: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$					
			$+\infty$		5
	2			3	

Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.

Câu 252: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+			+	0	-
y	$+\infty$				2		2		$-\infty$

- A. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x = 2$. B. Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.
 C. Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -2$. D. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x = -2$.

Câu 253: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		+			-	0	+
$f(x)$			2		$+\infty$		$+\infty$
	$-\infty$				0		

Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A. Giá trị cực đại của hàm số $y = f(x)$ bằng 2.
 B. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 1$.
 C. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = -1$.
 D. Giá trị cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ bằng 1.

Câu 254: Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

Câu 255: Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$

Số điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$ là

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 256: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A.** 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 257: Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ và bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$-\infty$			
y'		$+$	0	$-$	$ $	$+$	0	$-$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A.** 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 258: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	-1	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$

Tổng hoành độ các điểm cực đại của hàm số bằng

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** -2.

Câu 259: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	1	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số có bao nhiêu điểm cực tiểu

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 260: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$				$-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

- A. 1. **B.** -2 . C. -3 . D. -1 .

Câu 261: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

x	$-\infty$	-1	0	2	4	$+\infty$		
y'	$+$	0	$-$	$+$	0	$-$	0	$+$

- A. 1. B. 3. **C.** 2. D. 4.

Câu 262: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$			1		-1		$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $f(-2x)$ là

- A. 5. **B.** 3. C. 6. D. 4.

Câu 263: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	1	5	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	$-$	0	$-$	0	$+$

Tìm số cực trị của hàm số $y = f(x)$.

- A. 3. B. 0. **C.** 2. D. 1.

Câu 264: Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	2	3	5	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị

- A. 3. **B.** 2. C. 1. D. 4.

Câu 265: Hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau. Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\parallel$	$+$	0	$-$	

- A. 1. B. 4 C. 3. D. 2.

Câu 266: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-3	0	$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:

- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Câu 267: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$					$+\infty$
		-3	0	-3		

Hàm số $g(x) = f(2x-1)$ đạt cực đại tại

- A. $x = 0$. B. $x = \frac{1}{2}$. C. $x = 1$. D. $x = -1$.

Câu 268: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2. B. 0. C. 3. D. 1.

Câu 269: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x+2)^3(2x-3)$. Tìm số cực trị của hàm số $f(x)$.

- A. 3. B. 2. C. 1. D. 0.

Câu 270: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x^2-4)$, $x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đã cho có 2 điểm cực trị. B. Hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = 2$.
C. Hàm số đã cho có 3 điểm cực trị. D. Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = -2$.

Câu 271: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x-2)^2(x+3)^3(x-5)^4$. Hỏi hàm số $y = f(x)$ có mấy điểm cực trị?

- A. 5. B. 2. C. 4. D. 3.

- Câu 272:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-2)^3(x-3)^{2020}$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là
- A. 3. B. 1. C. 4. **D. 2.**
- Câu 273:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^{2021}(x-1)^2(x+2)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là
- A. 3. **B. 2.** C. 6. D. 1.
- Câu 274:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x+2)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là
- A. 3.** B. 2. C. 5. D. 1.
- Câu 275:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2(x+1)^2$. Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?
- A. Có đúng 3 điểm cực trị. B. Không có điểm cực trị.
- C. Có đúng 1 điểm cực trị.** D. Có đúng 2 điểm cực trị.
- Câu 276:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm $f'(x) = (2x-1)^4(x+2)(3-3x)$, số điểm cực trị của hàm số là
- A. 1. **B. 2.** C. 3. D. 0.
- Câu 277:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x^2-3x+2), \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ là
- A. 1.** B. 2. C. 0. D. 3.
- Câu 278:** Cho hàm số $f(x)$ có $f'(x) = x^{2017}(x-1)^{2018}(x+1)^{2019}$, hỏi hàm số đã cho có bao nhiêu cực trị?
- A. 0. B. 1. **C. 2.** D. 3.
- Câu 279:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x^2+x-2)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:
- A. 3. **B. 2.** C. 5. D. 1.
- Câu 280:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm là $f'(x) = x^2(x^2-4)(x^2-3x+2)(x-3)$. Hàm số có bao nhiêu điểm cực đại?
- A. 3. B. 0. C. 2. **D. 1.**
- Câu 281:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+2)^2(2^x-4), \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là
- A. 3. B. 1. **C. 2.** D. 0.
- Câu 282:** Tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = 2^{\frac{x}{4x^2+1}}$ là
- A. $\left(-\frac{1}{2}; \sqrt[4]{2}\right)$. B. $\left(-\frac{1}{2}; -\sqrt[4]{2}\right)$. **C. $\left(\frac{1}{2}; \sqrt[4]{2}\right)$.** D. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$.

Câu 283: Nếu hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = (x-1)^3(2^x - 2)\log_2 x$, $\forall x > 0$ thì

A. Trên khoảng $(0; +\infty)$ hàm số $y = f(x)$ không có điểm cực trị nào.

B. Trên khoảng $(0; +\infty)$ hàm số $y = f(x)$ có điểm cực tiểu là $x = 1$.

C. Trên khoảng $(0; +\infty)$ hàm số $y = f(x)$ có điểm cực đại là $x = 1$.

D. Trên khoảng $(0; +\infty)$ hàm số $y = f(x)$ có nhiều hơn một điểm cực trị.

Câu 284: Cho hàm số $y = \ln(2x^2 - x^4)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.

C. Hàm số có hai cực trị.

D. Hàm số có ba cực trị.

Câu 285: Cho hàm số $y = x^2 \cdot e^{-x}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số không có điểm cực trị.

B. Hàm số chỉ có điểm cực tiểu, không có điểm cực đại.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$.

D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ và đạt cực đại tại $x = 2$.

Câu 286: Điểm cực đại của hàm số $y = (2x+1)e^{1-x}$ là

A. $x = -1$.

B. $x = \frac{1}{2}$.

C. $x = 1$.

D. $x = \frac{3}{2}$.

Câu 287: Cho hàm số $y = x - \ln(1+x)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Câu 288: Cho hàm số $y = \ln(2x - x^2)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.

C. Hàm số có hai cực trị.

D. Hàm số không có cực trị.

Câu 289: Hàm số $f(x) = xe^{-x}$ đạt cực trị tại điểm

A. $x = e$.

B. $x = e^2$.

C. $x = 1$.

D. $x = 2$.

Câu 290: Hàm số $y = x^2 \ln x$ đạt cực trị tại điểm

A. $x = \sqrt{e}$.

B. $x = 0$; $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

C. $x = 0$.

D. $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Câu 291: Giá trị cực tiểu của hàm số $y = e^x(x^2 - 3)$ là:

A. $\frac{6}{e}$.

B. $\frac{6}{e^3}$.

C. $-3e$.

D. $-2e$.

Câu 292: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (\ln x + 1)(e^x - 2019)(x + 1)$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

Câu 293: Hàm số $y = \ln(x^3 - 3x^2 + 1)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2.

B. 3.

C. 0.

D. 1.

Câu 294: Số điểm cực trị của hàm $y = xe^x - e^x - \frac{x^2}{2} + 2$ là

A. 1.

B. 3.

C. 0.

D. 2.

Câu 295: Cho hàm số $y = x^2 \ln x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

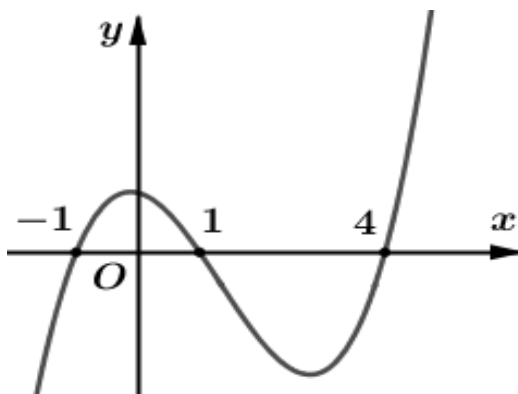
A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \sqrt{e}$.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x = \sqrt{e}$.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Câu 296: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = e^{2f(x)+1} + 5^{f(x)}$ là

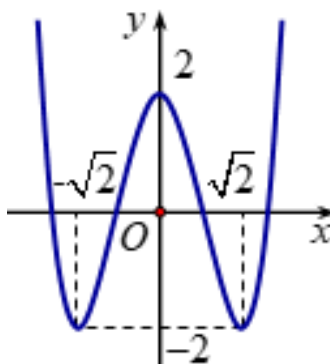
A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 297: Cho hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = 3^{f(x)} + 2^{f(x)}$.

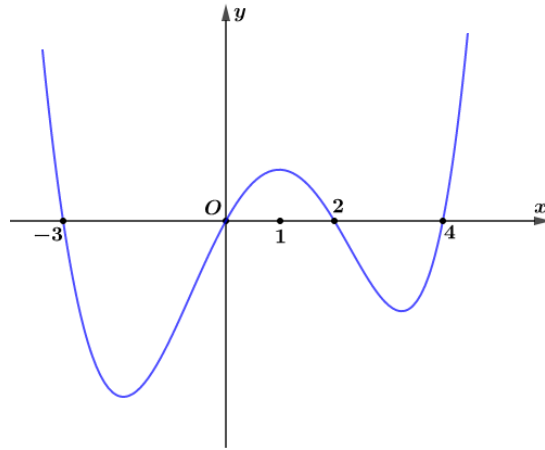
A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 4.

Câu 298: Cho hàm số bậc năm $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như trong hình vẽ bên.



Tìm số điểm cực đại của hàm số $y = e^{f(x)} \cdot \pi^{f^3(x)}$.

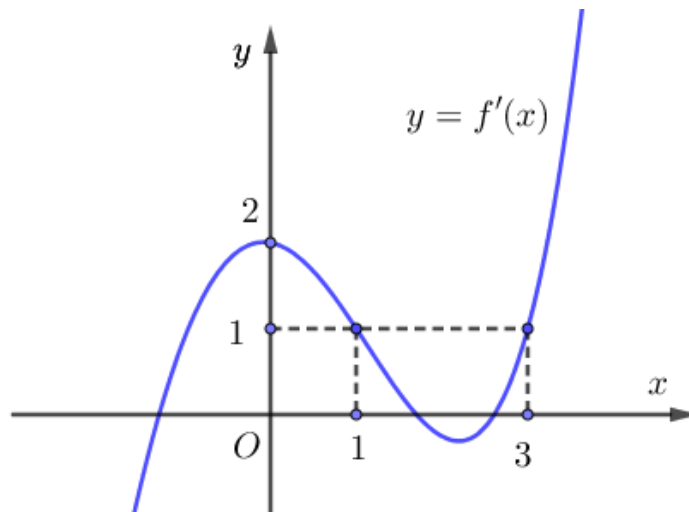
- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Câu 299: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây

Hàm số $g(x) = \ln(f(x))$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 300: Cho hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số $y = 2021^{f(x)} + 2020^{f(x)}$ là



- A. 2. B. 5. C. 3. D. 4.

Bài 2. Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

A. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp D .

- Số M được gọi là **giá trị lớn nhất của hàm số** $y = f(x)$ trên D nếu $f(x) \leq M$ với mọi x thuộc D và tồn tại x_0 thuộc D sao cho $f(x_0) = M$. Kí hiệu $M = \max_D f(x)$.
- Số m được gọi là **giá trị nhỏ nhất của hàm số** $y = f(x)$ trên D nếu $f(x) \geq m$ với mọi x thuộc D và tồn tại x_0 thuộc D sao cho $f(x_0) = m$. Kí hiệu $m = \min_D f(x)$.

Chú ý:

- Ta quy ước khi chỉ nói GTLN hay GTNN của hàm số $y = f(x)$ (mà không cho rõ tập hợp D) thì ta hiểu đó là GTLN hay GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên tập xác định của nó.
- GTLN và GTNN của hàm số thường được tìm bằng cách sử dụng đạo hàm và bảng biến thiên.

2. Các bước tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn $[a; b]$.

- Bước 1: Tìm các điểm $x_1; x_2; \dots; x_n$ thuộc khoảng $(a; b)$ mà tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc không tồn tại.
- Bước 2: Tính $f(a); f(x_1); f(x_2); \dots; f(x_n); f(b)$.
- Bước 3: Gọi M là số lớn nhất và m là số nhỏ nhất trong các giá trị tìm được ở Bước 2.

Khi đó: $M = \max_{[a;b]} f(x)$, $m = \min_{[a;b]} f(x)$

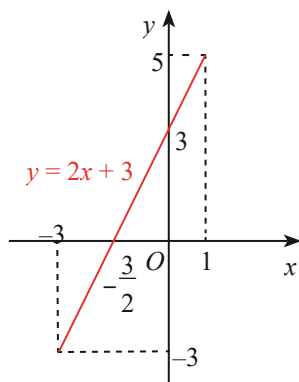
B. Các dạng bài tập & phương pháp giải

Dạng 1. Tìm GTLN – GTNN bằng hình ảnh đồ thị cho trước

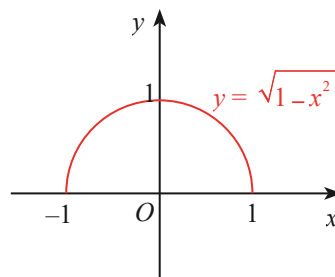
Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = f(x) = 2x + 3$ trên đoạn $[-3; 1]$;

b) $y = g(x) = \sqrt{1 - x^2}$



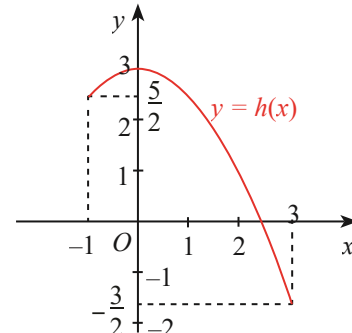
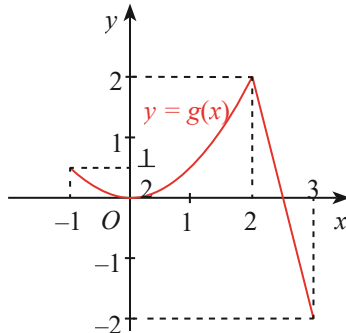
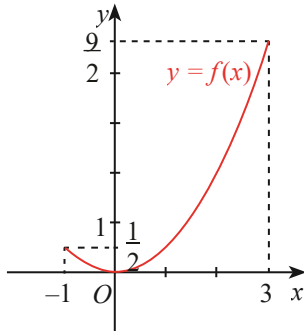
a)



b)

Ví dụ 2. Hình vẽ dưới đây cho ta đồ thị của ba hàm số

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2; g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & , x \leq 2 \\ -4x+10 & , x \geq 2 \end{cases} \text{ và } h(x) = 3 - \frac{1}{2}x^2 \text{ trên đoạn } [-1; 3].$$



- a) Hàm số nào đạt giá trị lớn nhất tại một điểm cực đại của nó?
b) Các hàm số còn lại đạt giá trị lớn nhất tại điểm nào?

Giải

Các hàm số đạt giá trị lớn nhất hoặc giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1; 3]$ tại điểm đầu mút của đoạn hoặc tại điểm cực trị trong khoảng $(-1; 3)$.

Dạng 2. Tìm GTLN – GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng, nửa khoảng

Ví dụ 3. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ trên nửa khoảng $[-1; +\infty)$.

Giải

Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 3$.

Bảng biến thiên của hàm số trên nửa khoảng $[-1; +\infty)$:

x	-1	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	-17	3	-1	$+\infty$	

Từ bảng biến thiên, ta thấy $\min_{[-1; +\infty)} f(x) = f(-1) = -17$ và hàm số không có giá trị lớn nhất trên $[-1; +\infty)$.

Ví dụ 4. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

- a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$ trên đoạn $[0; 3]$; b) $g(x) = x + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; 5)$;

Dạng 3. Tìm GTLN – GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn

Ví dụ 5. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 8x^2 + 9$ trên đoạn $[-1; 3]$.

Giải

Ta có: $f'(x) = 4x^3 - 16x$;

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$ hoặc $x = -2$ (loại vì không thuộc $[-1; 3]$);

$f(-1) = 2; f(0) = 9; f(2) = -7; f(3) = 18$.

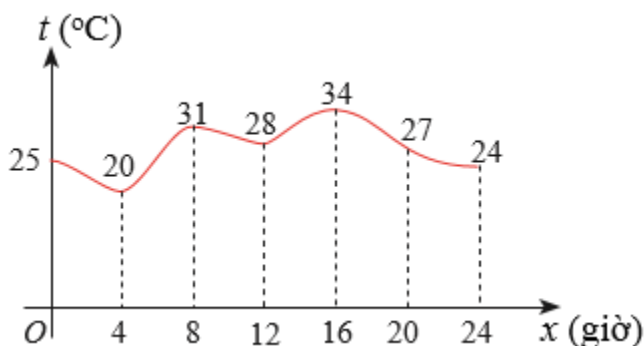
Vậy $\max_{[-1; 3]} f(x) = f(3) = 18$ và $\min_{[-1; 3]} f(x) = f(2) = -7$.

Ví dụ 6. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số:

- a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$ trên đoạn $[0; 3]$; b) $g(x) = x\sqrt{2-x^2}$

Dạng 4. Một số bài toán thực tế liên quan

Ví dụ 7. Hình vẽ bên dưới cho biết sự thay đổi của nhiệt độ ở một thành phố trong một ngày.

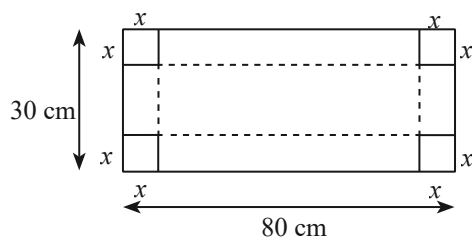


Khẳng định nào sau đây đúng? Vì sao?

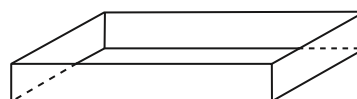
- i) Nhiệt độ cao nhất trong ngày là 28°C.
- ii) Nhiệt độ cao nhất trong ngày là 40°C.
- iii) Nhiệt độ cao nhất trong ngày là 34°C.
- a) Hãy xác định thời điểm có nhiệt độ cao nhất trong ngày.
- b) Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là bao nhiêu?

Ví dụ 8. Sự phân huỷ của rác thải hữu cơ y có trong nước sẽ làm tiêu hao oxygen hoà tan trong nước. Nồng độ oxygen (mg/l) trong một hồ nước sau t giờ ($t \geq 0$) khi một lượng rác thải hữu cơ bị xả vào hồ được xấp xỉ bởi hàm số: $y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}$. Vào các thời điểm nào nồng độ oxygen trong nước cao nhất và thấp nhất?

Ví dụ 9. Từ một tấm bìa hình chữ nhật có chiều rộng 30 cm và chiều dài 80 cm (Hình 4a), người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông có cạnh x (cm) với $5 \leq x \leq 10$ và gấp lại để tạo thành chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không nắp như Hình 4b. Tìm x để thể tích chiếc hộp là lớn nhất (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



a)



b)

Giải

Thể tích chiếc hộp là: $V(x) = x(30 - 2x)(80 - 2x) = 2\,400x - 220x^2 + 4x^3$ với $5 \leq x \leq 10$.

Ta có: $V'(x) = 12x^2 - 440x + 2\,400$;

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{20}{3} \text{ hoặc } x = 30 \text{ (loại vì không thuộc } [5; 10]);$$

$$V(5) = 7\,000; \quad V\left(\frac{20}{3}\right) = \frac{200\,000}{27}; \quad V(10) = 6\,000.$$

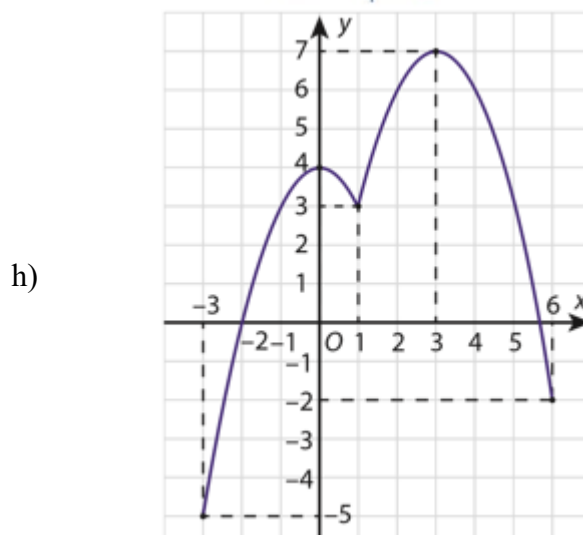
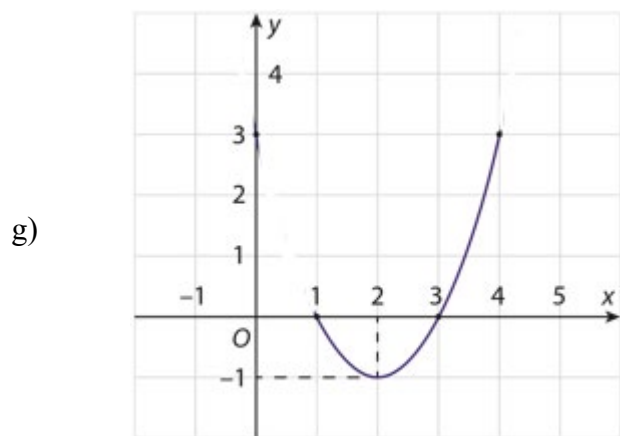
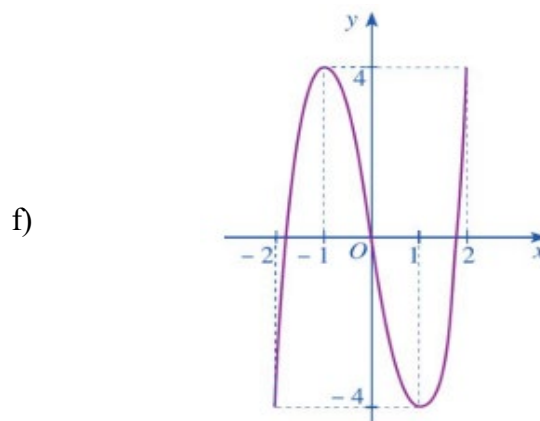
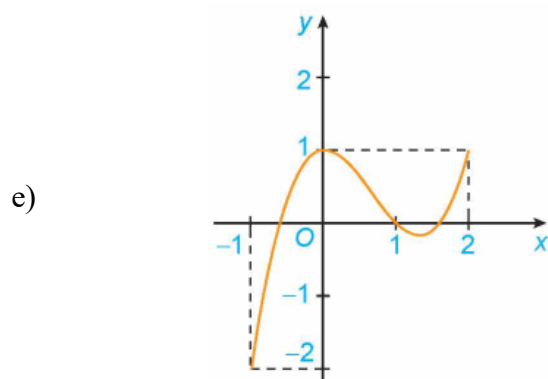
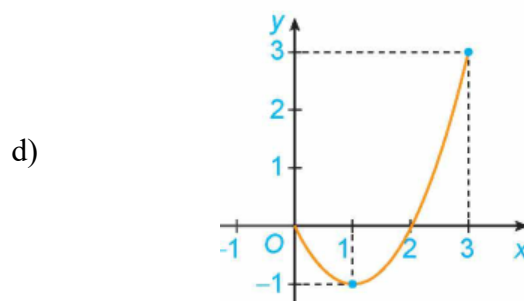
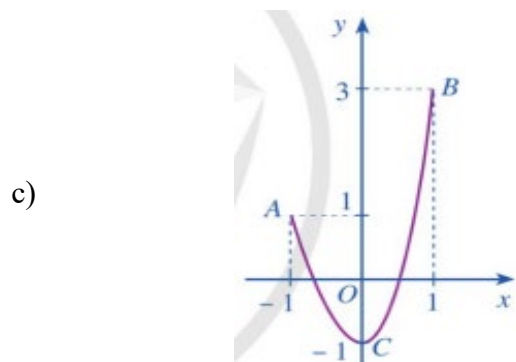
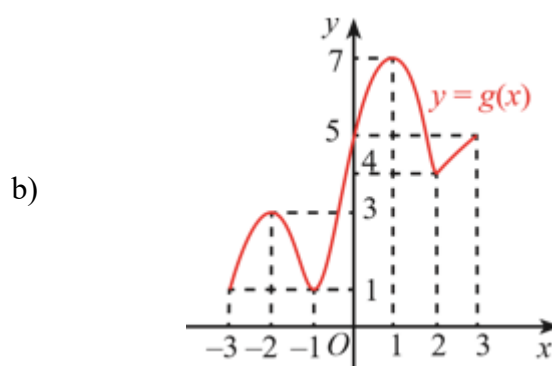
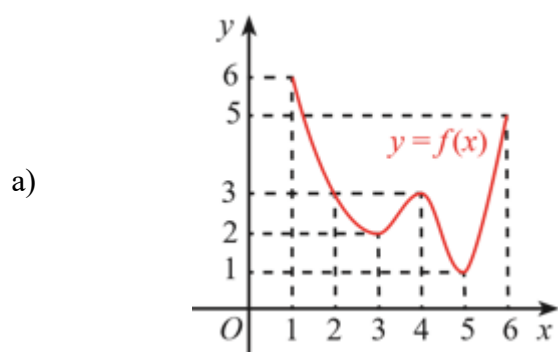
$$\text{Do đó } \max_{[5;10]} V(x) = \frac{200\,000}{27} \text{ khi } x = \frac{20}{3}$$

Vậy để thể tích chiếc hộp là lớn nhất thì $x = \frac{20}{3}$ cm.

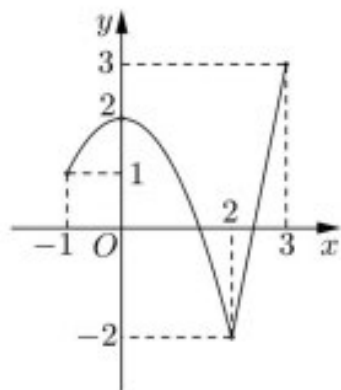
C. Bài tập tự luận rèn luyện

Dạng 1. Tìm GTLN – GTNN bằng hình ảnh đồ thị cho trước

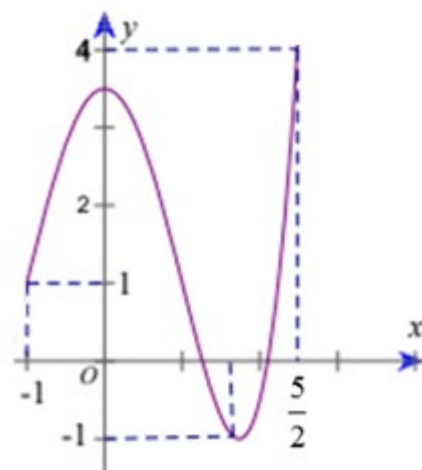
Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số có đồ thị như hình vẽ sau (hoặc BBT):



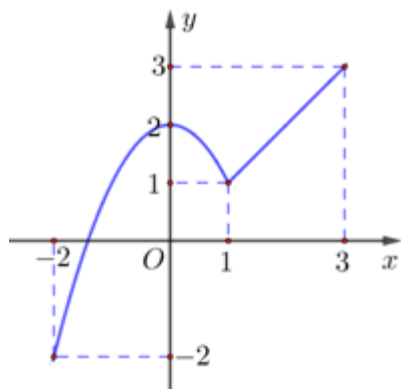
i)



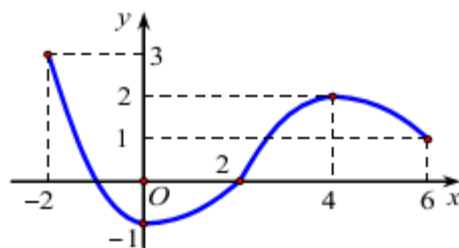
j)



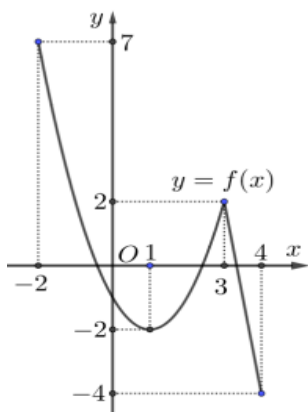
k)



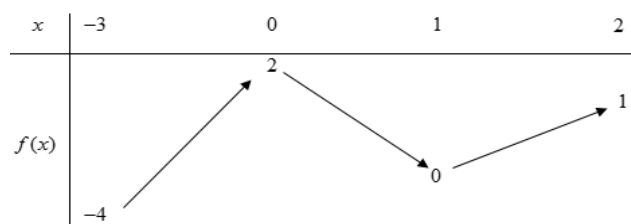
l)



m)



n)



o)

x	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	6	$+\infty$

p)

x	0	1	3
$V'(x)$	+	0	-
$V(x)$	0	16	0

q)

x	0	1	$+\infty$
y'	-	0	+
y	$+\infty$	0	$+\infty$

r)

x	-1	0	2	3
y'	+	0	-	+
y	0	5	1	4

Dạng 2. Tìm GTLN – GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng, nửa khoảng

Bài 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

- a) $y = x^3 - 3x - 4$ trên nửa khoảng $[-3; 2)$;
- b) $y = -x^3 + 3x + 1$ trên khoảng $(0; +\infty)$
- c) $y = \frac{3x^2 - 4x}{x^2 - 1}$ trên khoảng $(-1; +\infty)$.
- d) $y = x - 1 + \frac{4}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$
- e) $y = x + \frac{4}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$
- f) $y = x^2 + \frac{2}{x}$ với $x > 0$
- g) $y = x - 5 + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$
- h) $y = x^2 + \frac{2}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$
- i) $y = \frac{x^2 - x + 1}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$;
- j) $y = x^3 + \frac{3}{x}$ trên $(0; +\infty)$.
- k) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ trên nửa khoảng $[2; +\infty)$
- l) $y = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x}$ khi $x > 0$.
- m) $f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x} - 4$ trên khoảng $(0; +\infty)$.
- n) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x-1}$ trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Dạng 3. Tìm GTLN – GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên $[a; b]$

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

- 1) $y = x^3 - 12x + 1$ trên đoạn $[-1; 3]$;
- 2) $f(x) = -x^3 + 2x^2 - 1$ trên đoạn $[-1; 2]$
- 3) $y = -x^3 + 24x^2 - 180x + 400$ trên đoạn $[3; 11]$;
- 4) $y = x^3 + 5x + 7$ trên đoạn $[-5; 0]$
- 5) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x - \frac{2}{3}$ trên đoạn $[0; 5]$
- 6) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$ trên đoạn $[-1; 2]$
- 7) $y = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x - 4$ trên đoạn $[-4; 0]$
- 8) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$ trên đoạn $[-1; 2]$
- 9) $y = -x^3 + 3x^2 + 2$ trên đoạn $[0; 3]$
- 10) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 5$ trên đoạn $[-2; 3]$
- 11) $y = -x^4 + 2x^2 + 2$ trên $[0; 3]$
- 12) $y = x^4 - 2x^3 + x^2 + 1$ trên đoạn $[-1; 1]$
- 13) $y = f(x) = x^5 - 5x^3 - 20x + 2$ trên đoạn $[-1; 3]$
- 14) $y = \frac{2x+1}{x-2}$ trên đoạn $[3; 7]$;
- 15) $y = \frac{3x-1}{x-3}$ trên $[0; 2]$
- 16) $y = \frac{x-1}{2x+1}$ trên đoạn $[1; 2]$
- 17) $y = \frac{x}{x+1}$ trên đoạn $[2; 3]$
- 18) $y = x^2 + \frac{2}{x}$ trên đoạn $[\frac{1}{2}; 2]$
- 19) $y = x + \frac{4}{x^2}$ trên đoạn $[1; 4]$.
- 20) $y = x + \frac{9}{x}$ trên đoạn $[2; 4]$
- 21) $y = 1 + x + \frac{4}{x}$ trên đoạn $[-3; -1]$
- 22) $y = x + \frac{4}{x}$ trên đoạn $[1; 3]$
- 23) $y = x - \frac{1}{x}$ trên đoạn $[1; 3]$
- 24) $f(x) = x + \frac{3}{x-2}$ trên đoạn $[3; 6]$
- 25) $y = x + 2 - \frac{4}{x+2}$ trên đoạn $[-1; 2]$
- 26) $f(x) = \frac{8}{1+2x} + x$ trên đoạn $[1; 2]$

$$27) y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 2} \text{ trên đoạn } [0; 1]$$

$$29) y = \frac{x^2 + 3}{x - 1} \text{ trên đoạn } [-2; 0]$$

$$31) y = \sqrt{-x^2 + 6x - 5}.$$

$$33) y = \sqrt{-x^2 + 4}$$

$$35) y = \sqrt{-x^2 + 3x}$$

$$37) y = \sqrt{9 - x^2}$$

$$39) f(x) = e^{2-3x} \text{ trên đoạn } [0; 2]$$

$$41) y = (x+1)e^{-x} \text{ trên đoạn } [-1; 1]$$

$$43) y = x \cdot e^x \text{ trên đoạn } [1; 2].$$

$$45) y = e^x - x \text{ trên đoạn } [-1; 2]$$

$$47) y = \frac{\ln x}{x} \text{ trên đoạn } [1; 4].$$

$$49) y = x^2 \ln x \text{ trên đoạn } [1; 2].$$

$$51) y = x + 2 \ln x \text{ trên } [1; e]$$

$$53) y = x^2 - 4 \ln(1 - x) \text{ trên đoạn } [-2; 0]$$

$$55) y = \sin x \text{ trên đoạn } [0; 2\pi].$$

$$57) y = \sin 2x + 3x + 3 \text{ trên đoạn } \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right].$$

$$59) y = \cos 2x + 2x + 1 \text{ trên đoạn } \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right].$$

$$61) y = x + \sqrt{2} \cos x \text{ trên đoạn } \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$28) f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1} \text{ trên đoạn } [2; 4]$$

$$30) y = x + \frac{9}{x - 1} \text{ trên đoạn } [-4; -1]$$

$$32) y = \sqrt{8 + 2x - x^2}$$

$$34) y = \sqrt{-x^2 + 2x}.$$

$$36) y = \sqrt{x - 1} + \sqrt{3 - x}.$$

$$38) y = 2\sqrt{1 - x^2} + x^2$$

$$40) y = e^x(x^2 - 5x + 7) \text{ trên đoạn } [0; 3]$$

$$42) y = xe^{-2x^2} \text{ trên đoạn } [1; 2].$$

$$44) y = (x^2 - 2)e^{2x} \text{ trên đoạn } [-1; 2].$$

$$46) y = x + e^{2x} \text{ trên đoạn } [0; 1].$$

$$48) y = x \ln x \text{ trên đoạn } [e^{-2}; e]$$

$$50) y = x(2 - \ln x) \text{ trên đoạn } [2; 3].$$

$$52) y = x^2 - \ln(1 - 2x) \text{ trên đoạn } [-1; 0]$$

$$54) y = \cos x \text{ trên đoạn } [0; 2\pi].$$

$$56) y = \sin 2x \text{ trên đoạn } \left[0; \frac{7\pi}{12}\right].$$

$$58) y = 2 \sin x + 5x - 1 \text{ trên đoạn } [0; \pi].$$

$$60) y = \sin x + \cos x \text{ trên đoạn } [0; 2\pi].$$

$$62) f(x) = 2 \sin x + \sin 2x \text{ trên đoạn } \left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$$

Bài 4. Sử dụng *máy tính cầm tay*, tìm giá trị gần đúng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$a) y = x^3 - 3x \text{ trên đoạn } [-1; 5].$$

$$b) y = x^3 + x^2 - 5x \text{ trên đoạn } [0; 10].$$

$$c) y = \frac{x-1}{x+1} \text{ trên đoạn } [0; 5]$$

$$d) y = \frac{2x+3}{x+1} \text{ trên đoạn } [2; 8]$$

$$e) y = \frac{x^2 - x - 1}{x + 1} \text{ trên đoạn } \left[-\frac{1}{2}; 4\right].$$

$$f) y = \frac{2x^2 + x + 7}{x + 1} \text{ trên đoạn } [0; 10].$$

$$g) y = \sqrt{-x^2 + 6x - 5}.$$

$$h) y = \sqrt{8 + 2x - x^2}$$

$$i) y = x \cdot e^x \text{ trên đoạn } [1; 2].$$

$$j) y = (x^2 - 2)e^{2x} \text{ trên đoạn } [-1; 2].$$

$$k) y = x^2 - \ln(1 - 2x) \text{ trên đoạn } [-1; 0]$$

$$l) y = x^2 - 4 \ln(1 - x) \text{ trên đoạn } [-2; 0]$$

$$m) y = \sin 2x \text{ trên đoạn } \left[0; \frac{7\pi}{12}\right].$$

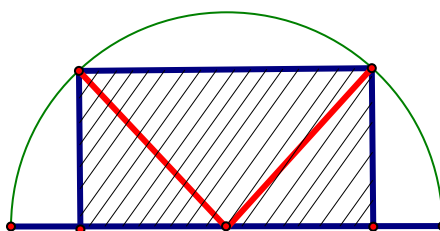
$$n) y = \sin 2x + 3x + 3 \text{ trên đoạn } \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right].$$

$$o) y = 2 \sin x + 5x - 1 \text{ trên đoạn } [0; \pi].$$

$$p) y = e^x(x^2 - 5x + 7) \text{ trên đoạn } [0; 3]$$

Dạng 4. Một số bài toán thực tế liên quan

- Bài 5.** Tam giác vuông có cạnh huyền bằng 5 cm có thể có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu?
- Bài 6.** Trong tất cả các hình chữ nhật có diện tích 48m^2 . Hãy xác định hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất.
- Bài 7.** Trong các hình chữ nhật có chu vi là 24 cm, hãy tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.
- Bài 8.** Trong các hình chữ nhật có cùng chu vi bằng 18 cm, hãy tìm hình chữ nhật có diện tích lớn nhất.
- Bài 9.** Tìm hai số không âm a và b có tổng bằng 10 sao cho:
- Biểu thức ab đạt giá trị lớn nhất;
 - Tổng bình phương của chúng đạt giá trị nhỏ nhất;
 - Biểu thức ab^2 đạt giá trị lớn nhất.
- Bài 10.** Chứng minh rằng trong các hình chữ nhật nội tiếp hình tròn có bán kính R thì hình vuông là hình có chu vi lớn nhất.
- Bài 11.** Tìm kích thước hình trụ có thể tích V cho trước và có diện tích toàn phần nhỏ nhất.
- Bài 12.** Tính diện tích lớn nhất $S_{\max}$ của một hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính $R = 6\text{ cm}$ nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của hình tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp.



ĐS. $S_{\max} = 36\text{ cm}^2$.

- Bài 13.** Khi làm nhà kho, bác An muốn cửa sổ có dạng hình chữ nhật với chu vi bằng 4 m (Hình vẽ). Tìm kích thước khung cửa sổ sao cho diện tích cửa sổ lớn nhất (để hứng được nhiều ánh sáng nhất)?



- Bài 14.** Khối lượng q (kg) của một mặt hàng mà cửa tiệm bán được trong một ngày phụ thuộc vào giá bán p (nghìn đồng/kg) theo công thức $p = 15 - \frac{1}{2}q$. Doanh thu từ việc bán mặt hàng trên của cửa tiệm được tính theo công thức $R = pq$.
- Viết công thức biểu diễn R theo p .
 - Tìm giá bán mỗi kilôgam sản phẩm để đạt được doanh thu cao nhất và xác định doanh thu cao nhất đó.

Bài 15. Hộp sữa 1 l được thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với đáy là hình vuông cạnh x cm. Tìm x để diện tích toàn phần của hộp nhỏ nhất.

Bài 16. Trong 5 giây đầu tiên, một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = -t^3 + 6t^2 + t + 5$ trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Chất điểm có vận tốc tức thời lớn nhất bằng bao nhiêu trong 5 giây đầu tiên đó?

Bài 17. Một vật chuyển động theo quy luật $s = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 9t$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

ĐS. 89 (m/s).

Bài 18. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = -t^3 + 6t^2$ với t là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $s(t)$ là quãng đường đi được trong khoảng thời gian t . Tính thời điểm t tại đó vận tốc đạt giá trị lớn nhất.

ĐS. $t = 2$.

Bài 19. Một vật chuyển động theo quy luật $S = 10t^2 - \frac{1}{3}t^3$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và $S(m)$ là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 15 giây từ lúc vật bắt đầu chuyển động vận tốc $v(m/s)$ của vật đạt giá trị lớn nhất tại thời điểm $t(s)$ bằng:

ĐS. 10(s).

Bài 20. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S(t) = 1 + 3t^2 - t^3$. Vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất khi t bằng bao nhiêu:

ĐS. $t = 1$

Bài 21. Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là $s = -t^3 + 6t^2 + 17t$, với $t(s)$ là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và $s(m)$ là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Trong khoảng thời gian 8 giây đầu tiên, vận tốc $v(m/s)$ của chất điểm đạt giá trị lớn nhất bằng

ĐS. 29m/s.

Bài 22. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S = -t^3 + 3t^2 - 2$, trong đó t tính bằng giây và S tính theo mét. Chuyển động có vận tốc lớn nhất là

ĐS. 3 m/s.

Bài 23. Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được tính theo công thức $c(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$ (mg/L). Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

ĐS. 1 giờ.

Bài 24. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,035x^2(15 - x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm (đơn vị miligam) cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất.

ĐS. $x = 10$.

Bài 25. Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô. Biết rằng thể tích V (lít) của lượng xăng trong bình xăng tính theo thời gian bơm xăng 1 (phút) được cho bởi công thức $V(t) = 300(t^2 - t^3) + 4$ với $0 \leq t \leq 0,5$. (Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson)

- Ban đầu trong bình xăng có bao nhiêu lít xăng?
- Sau khi bơm 30 giây thì bình xăng đầy. Hỏi dung tích của bình xăng trong xe là bao nhiêu lít?
- Khi xăng chảy vào bình xăng, gọi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t với $0 \leq t \leq 0,5$. Xăng chảy vào bình xăng ở thời điểm nào có tốc độ tăng thể tích là lớn nhất?

Bài 26. Ho ép khí quản co lại, ảnh hưởng đến tốc độ của không khí đi vào khí quản. Tốc độ của không khí đi vào khí quản khi họ được cho bởi công thức: $V = k(R-r)r^2$ với $0 \leq r < R$, trong đó k là hằng số, R là bán kính bình thường của khí quản, r là bán kính khí quản khi ho (Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014). Hỏi bán kính của khí quản khi ho bằng bao nhiêu thì tốc độ của không khí đi vào khí quản là lớn nhất?

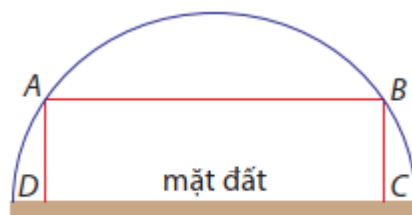
Bài 27. Trong Vật lý, khi một điện trở ngoài có giá trị R (Ω) được nối qua một nguồn điện E (V) với một điện trở trong r (Ω) thì công suất (tính bằng W) của điện trở ngoài là:
$$p = \frac{E^2 R}{(R+r)^2}$$

(Nguồn: [https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Electricity_and_Magnetism/Electricity_and_Magnetism_\(Tatum\)/04%3ABatteries_Resistors_and_Ohm's_Law/4.08%3APower_Delivered_to_an_External_Resistance](https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Electricity_and_Magnetism/Electricity_and_Magnetism_(Tatum)/04%3ABatteries_Resistors_and_Ohm's_Law/4.08%3APower_Delivered_to_an_External_Resistance)). Khi R thay đổi, E và r cố định, ta xem P là hàm số theo R . Tìm công suất lớn nhất của điện trở ngoài.

Bài 28. Trong Hoá học, xét một số phản ứng đơn giản một chiều có dạng: $aA + bB \rightarrow cC + dD$, trong đó A, B, C, D là các chất hoá học và a, b, c, d là các hệ số cân bằng. Theo định luật tác dụng khối lượng (M. Guldberg & P. Waage, 1864), tốc độ phản ứng hoá học được xác định bởi công thức: $v = k[A]^a[B]^b$, trong đó k là hằng số tốc độ phản ứng chỉ phụ thuộc vào bản chất của chất phản ứng và nhiệt độ; $[A], [B]$ lần lượt là nồng độ mol của các chất A, B tại thời điểm đang xét (đơn vị mol/l)

(nguồn: [https://chem.libretexts.org/Bookshelves/Physical_and_Theoretical_Chemistry_Textbook_Maps/Supplemental_Modules_\(Physical_and_Theoretical_Chemistry\)/Kinetics/02%3AReaction_Rates/2.05%3AReaction_Rate](https://chem.libretexts.org/Bookshelves/Physical_and_Theoretical_Chemistry_Textbook_Maps/Supplemental_Modules_(Physical_and_Theoretical_Chemistry)/Kinetics/02%3AReaction_Rates/2.05%3AReaction_Rate)). Biết phương trình tạo ra khí nitrogen dioxide (NO_2) từ nitrogen monoxide (NO) và oxygen (O_2) như sau: $2\text{NO} + \text{O}_2 \rightarrow 2\text{NO}_2$. Xác định nồng độ khí oxygen tham gia phản ứng để phản ứng xảy ra nhanh nhất, biết rằng tổng nồng độ mol của O_2 và NO là 1 (mol/l).

Bài 29. Một cổng vòm có dạng nửa hình tròn trên mặt đất với bán kính $R = 5$ m. Người ta muốn đặt một khung hình chữ nhật $ABCD$ để thiết kế trang trí, với hai điểm A, B đỉnh trên vòm và CD đặt trên mặt đất (Hình 1.68). Tìm khoảng cách A, B so với mặt đất để diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là lớn nhất.



Hình 1.68

Bài 30. Kính viễn vọng Hubble được tàu không gian Discovery đưa vào sử dụng ngày 24/4/1990. Mô hình vận tốc của tàu trong sứ mệnh này, từ lúc rời bệ phóng ($t = 0$ giây) cho đến khi được tên lửa đẩy nhanh khỏi bệ tại thời điểm $t = 126$ giây, được xác định bởi công thức:

$$v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23,61t - 3,083 \text{ (feet/giây)}$$

(nguồn: James Stewart, J. (2015). *Calculus. Cengage Learning 8th edition*, p. 282). Tính gia tốc lớn nhất và gia tốc nhỏ nhất của tàu trong khoảng thời gian này (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Hình 1.69

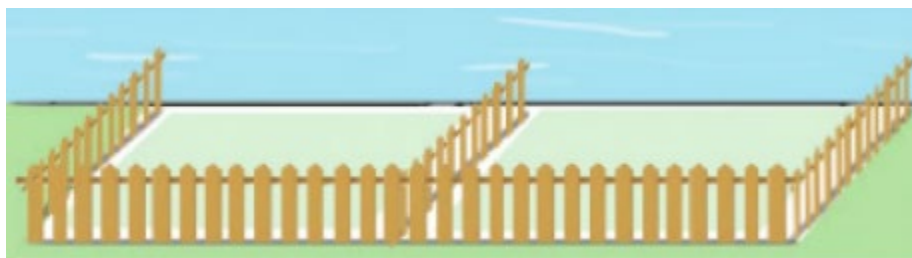
Bài 31. Một trang trại mỗi ngày thu hoạch được một tấn rau. Mỗi ngày, nếu bán rau với giá 30 000 đồng/kg thì hết rau, nếu giá bán cứ tăng thêm 1.000 đồng/kg thì số rau thừa lại tăng thêm 20 kg. Số rau thừa này được bán để làm thức ăn cho gia súc với giá 2 000 đồng/kg. Hỏi số tiền bán rau nhiều nhất mà trang trại có thể thu được mỗi ngày là bao nhiêu?

Bài 32. Mỗi đợt xuất khẩu gạo của tỉnh A thường kéo dài trong 60 ngày. Người ta nhận thấy lượng gạo xuất khẩu tính theo ngày thứ t được xác định bởi công thức: $S(t) = \frac{2}{5}t^3 - 63t^2 + 3240t - 3100$ (tấn) ($1 \leq t \leq 60$).

Hỏi trong 60 ngày đó, ngày thứ mấy có lượng gạo xuất khẩu cao nhất?

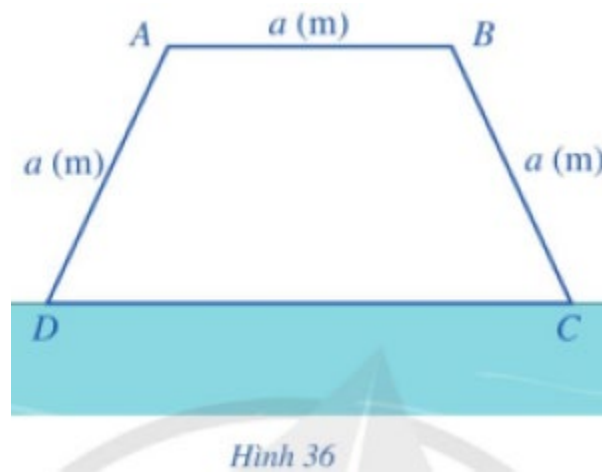
Bài 33. Một trang sách có dạng hình chữ nhật với diện tích là 384 cm^2 . Sau khi để lề trên và lề dưới đều là 3 cm, để lề trái và lề phải đều là 2 cm. Phần còn lại của trang sách được in chữ. Kích thước tối ưu của trang sách là bao nhiêu để phần in chữ trên trang sách có diện tích lớn nhất?

Bài 34. Một người nông dân có 15 000 000 đồng để làm một hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông bao quanh hai khu đất trồng rau có dạng hai hình chữ nhật bằng nhau (Hình 35). Đối với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60 000 đồng/mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50 000 đồng/mét, mặt giáp với bờ sông không phải rào. Tìm diện tích lớn nhất của hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào.

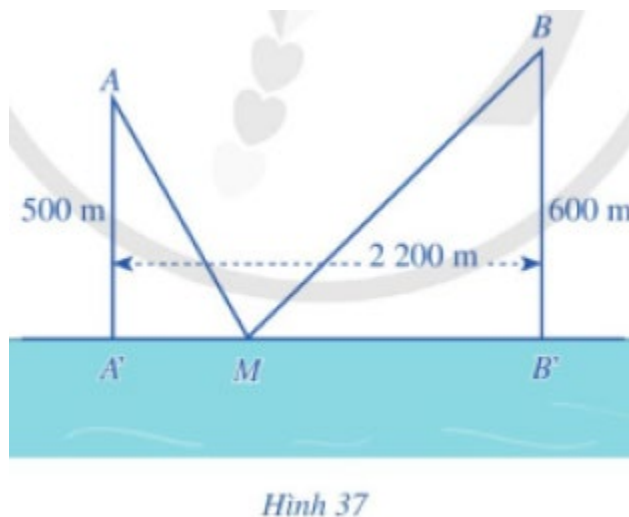


Hình 35

Bài 35. Một bác nông dân có ba tấm lưới thép B40, mỗi tấm dài a (m) và muốn rào một mảnh vườn dọc bờ sông có dạng hình thang cân ABCD như Hình 36 (bờ sông là đường thẳng CD không phải rào). Hỏi bác đó có thể rào được mảnh vườn có diện tích lớn nhất là bao nhiêu mét vuông?



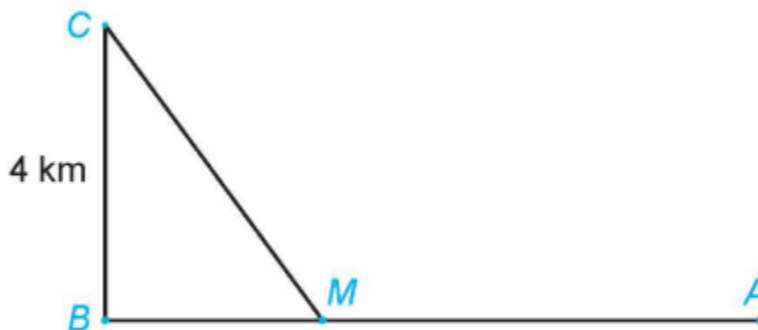
Bài 36. Có hai xã A, B cùng ở một bên bờ sông Lam, khoảng cách từ hai xã đó đến bờ sông lần lượt là $AA' = 500$ m, $BB' = 600$ m và người ta đo được $A'B' = 2\,200$ m (Hình 37). Các kĩ sư muốn xây một trạm cung cấp nước sạch nằm bên bờ sông Lam cho người dân hai xã. Để tiết kiệm chi phí, các kĩ sư cần phải chọn vị trí M của trạm cung cấp nước sạch đó trên đoạn $A'B'$ sao cho tổng khoảng cách từ hai xã đến vị trí M là nhỏ nhất. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của tổng khoảng cách đó.



Bài 37. Một công ty kinh doanh bất động sản có 20 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng/1 tháng thì tất cả các căn hộ đều có người thuê. Nhưng cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 200 nghìn đồng/1 tháng thì có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Hỏi công ty nên cho thuê mỗi căn hộ bao nhiêu tiền một tháng để tổng số tiền thu được là lớn nhất?

Bài 38. Một đường dây điện được nối từ một nhà máy điện ở A đến một hòn đảo ở C như Hình 1.40.

Khoảng cách từ C đến B là 4 km. Bờ biển chạy thẳng từ A đến B với khoảng cách là 10 km. Tổng chi phí lắp đặt cho 1 km dây điện trên biển là 50 triệu đồng, còn trên đất liền là 30 triệu đồng. Xác định vị trí điểm M trên đoạn AB (điểm nối dây từ đất liền ra đảo) để tổng chi phí lắp đặt là nhỏ nhất.



Hình 1.40

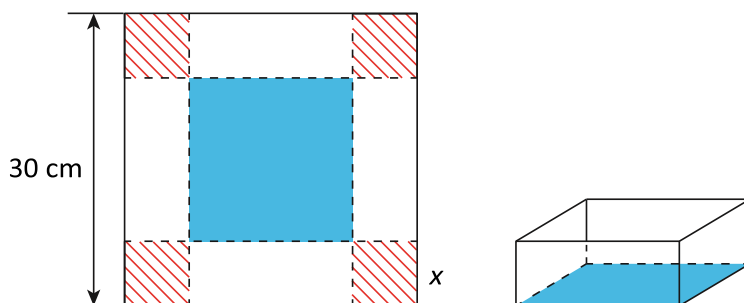
Bài 39. Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hóa bằng hàm số $N(t) = -t^3 + 12t^2$, $0 \leq t \leq 12$, trong đó N là số người bị nhiễm bệnh (tính bằng trăm người) và t là thời gian (tuần).

a) Hãy ước tính số người tối đa bị nhiễm bệnh ở địa phương đó.

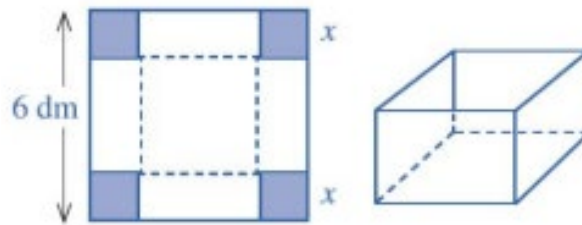
b) Đạo hàm $N'(t)$ biểu thị tốc độ lây lan của virus (còn gọi là tốc độ truyền bệnh). Hỏi virus sẽ lây lan nhanh nhất khi nào?

Bài 40. Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung vào chiến lược kinh doanh xe X với chi phí mua vào một chiếc là 27 triệu đồng và bán ra với giá 31 triệu đồng. Với giá bán này, số lượng xe mà khách hàng đã mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang bán chạy này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán. Bộ phận nghiên cứu thị trường ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Hỏi theo đó, giá bán mới là bao nhiêu thì lợi nhuận thu được cao nhất?

Bài 41. Trong một trò chơi, mỗi đội được phát một tấm bìa hình vuông có cạnh bằng 30 cm. Nhiệm vụ của mỗi đội chơi là cắt ở bốn góc của tấm bìa này bốn hình vuông bằng nhau, rồi gấp tấm bìa lại (Hình vẽ) và dán keo để được một cái hộp không nắp có dạng hình hộp chữ nhật. Đội nào thiết kế được hộp có thể tích lớn nhất sẽ giành chiến thắng. Hãy xác định cạnh của các hình vuông bị cắt để thu được hộp có thể tích lớn nhất.



Bài 42. Cho một tấm nhôm có dạng hình vuông cạnh 6 dm. Bác Ánh cắt ở bốn góc bốn hình vuông cùng có độ dài c (dm), rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ bên dưới để được một cái hộp có dạng khối hộp chữ nhật không có nắp. Gọi V là thể tích của khối hộp đó tính theo x . Tìm x (dm) để khối hộp tạo thành có thể tích lớn nhất.



Giải

Ta thấy độ dài x (dm) của cạnh hình vuông bị cắt phải thỏa mãn điều kiện $0 < x < 3$.

Thể tích của khối hộp là $V(x) = x(6 - 2x)^2$ với $0 < x < 3$.

Ta phải tìm $x_0 \in (0; 3)$ sao cho $V(x_0)$ có giá trị lớn nhất.

Ta có: $V'(x) = (6 - 2x)^2 - 4x(6 - 2x) = (6 - 2x)(6 - 6x) = 12(3 - x)(1 - x)$.

Trên khoảng $(0; 3)$, $V'(x) = 0$ khi $x = 1$.

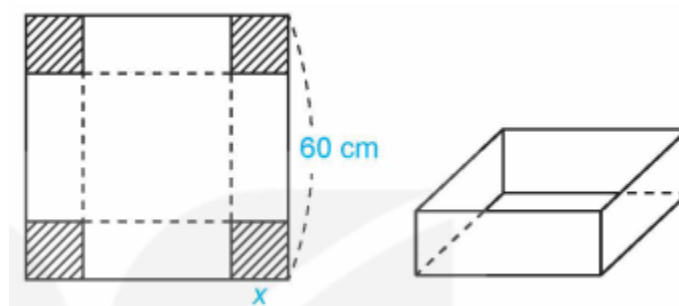
Bảng biến thiên của hàm số $V(x)$ như sau:

x	0	1	3
$V'(x)$	+	0	-
$V(x)$	0	16	0

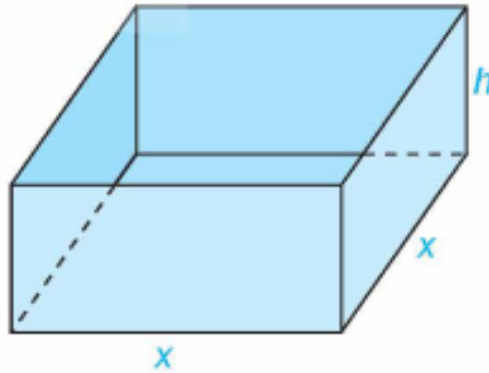
Căn cứ bảng biến thiên, ta thấy: Trên khoảng $(0; 3)$, hàm số $V(x)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 16 tại $x = 1$.

Vậy để khối hộp tạo thành có thể tích lớn nhất thì $x = 1$ (dm).

Bài 43. Từ một tấm bìa carton hình vuông có độ dài cạnh bằng 60 cm, người ta cắt bốn hình vuông bằng nhau ở bốn góc rồi gấp thành một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp (Hình vẽ). Tính cạnh của các hình vuông bị cắt sao cho thể tích của chiếc hộp là lớn nhất.

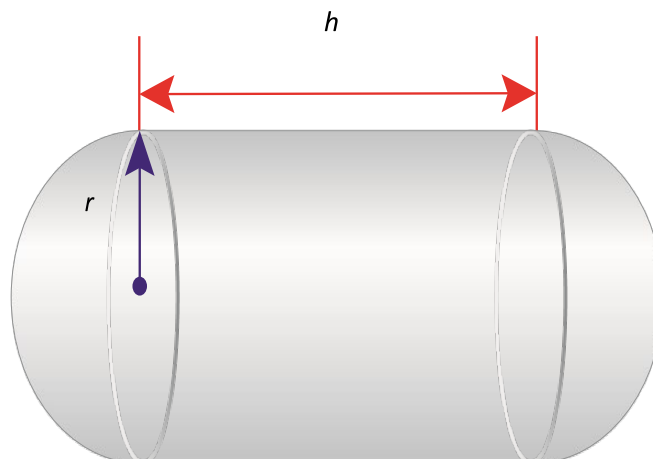


Bài 44. Một nhà sản xuất muốn thiết kế một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông và diện tích bề mặt bằng 108 cm^2 như Hình vẽ. Tìm các kích thước của chiếc hộp sao cho thể tích của hộp là lớn nhất.

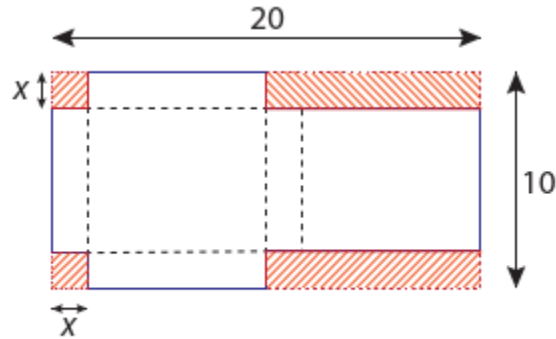


Bài 45. Một nhà sản xuất cần làm ra những chiếc bình có dạng hình trụ với dung tích 1000 cm^3 . Mặt trên và mặt dưới của bình được làm bằng vật liệu có giá $1,2$ nghìn đồng/ cm^2 , trong khi mặt bên của bình được làm bằng vật liệu có giá $0,75$ nghìn đồng/ cm^2 . Tìm các kích thước của bình để chi phí vật liệu sản xuất mỗi chiếc bình là nhỏ nhất.

Bài 46. Một thùng chứa nhiên liệu gồm phần ở giữa là một hình trụ có chiều dài h mét ($h > 0$) và hai đầu là các nửa hình cầu bán kính r ($r > 0$) (Hình vẽ). Biết rằng thể tích của thùng chứa là $144\,000\pi \text{ m}^3$. Để sơn mặt ngoài của phần hình cầu cần $20\,000$ đồng cho 1 m^2 , còn sơn mặt ngoài cho phần hình trụ cần $10\,000$ đồng cho 1 m^2 . Xác định r để chi phí cho việc sơn diện tích mặt ngoài thùng chứa (bao gồm diện tích xung quanh hình trụ và diện tích hai nửa hình cầu) là nhỏ nhất, biết rằng bán kính r không được vượt quá 50 m .

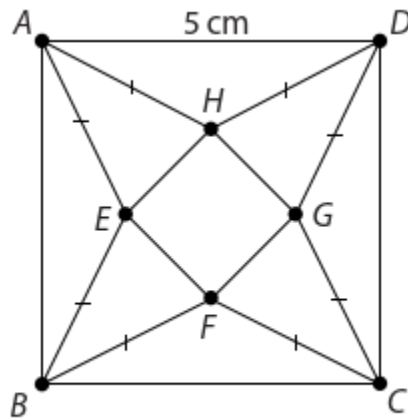


Bài 47. Từ một miếng bìa hình chữ nhật với kích thước 20 cm x 10 cm, bạn Lan cắt bỏ hai hình vuông có cạnh là x (cm) và hai hình chữ nhật (phần gạch sọc Hình 1.65) rồi gấp theo đường nét đứt và dán các mép để được một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật. Tìm x để thể tích hộp là lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó.



Hình 1.65

Bài 48. Trong một cuộc thi làm đồ dùng học tập do trường phát động, bạn Nam làm một hình chóp tứ giác đều S.EFGH bằng cách sử dụng một tấm bìa hình vuông ABCD có cạnh bằng 5 cm và cắt tấm bìa theo các tam giác cân AEB, BFC, CGD, DHA. Sau đó bạn gấp các tam giác AEH, BEF, CFG, DGH sao cho bốn đỉnh A, B, C, D trùng nhau tạo thành đỉnh S của khối chóp tứ giác đều như Hình 1.66. Thể tích lớn nhất của khối chóp tứ giác đều tạo thành bằng bao nhiêu?



Hình 1.66

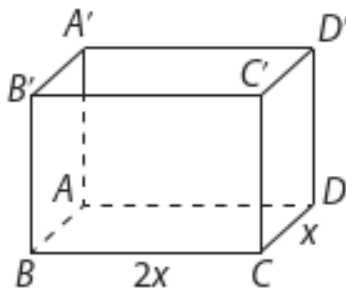
Bài 49. Chuyên viên phân tích thị trường của một công ty X sản xuất máy xay sinh tố nhận thấy rằng, nếu công ty sản xuất x máy xay hằng năm thì tổng lợi nhuận thu được sẽ tính theo công thức:

$$y = f(x) = 8x + 0,3x^2 - 0,0013x^3 - 372 \text{ (triệu đồng)}.$$

a) Công ty X cần sản xuất ít nhất bao nhiêu máy xay để không bị lỗ, biết rằng công ty sản xuất 20 máy xay vẫn chưa có lãi?

b) Lợi nhuận lớn nhất công ty có thể thu được là bao nhiêu? Khi đó cần sản xuất bao nhiêu máy xay?

Bài 50. Ông Nam cần xây dựng một bể chứa nước có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp đáy để phục vụ cho việc tưới cây trong vườn. Do các điều kiện về diện tích vườn, ông Nam cần bể có thể tích là 36 m^3 , đáy bể có chiều dài gấp hai lần chiều rộng và chiều rộng không quá 4 m , biết rằng chi phí vật liệu xây dựng mỗi mét vuông diện tích bề mặt là như nhau. Hỏi chiều cao bể nước bằng bao nhiêu để tổng chi phí vật liệu là nhỏ nhất?



Giải

Xem bể chứa có dạng hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ như hình vẽ trên

Gọi $x \text{ (m)}$ là chiều rộng của bể, ta có $0 < x \leq 4$.

Chiều dài của bể là $2x \text{ (m)}$.

Gọi $h \text{ (m)}$ là chiều cao bể nước, ta có thể tích của bể là $V = x.(2x).h$.

$$\text{Suy ra: } h = \frac{V}{2x^2} = \frac{36}{2x^2} = \frac{18}{x^2} \text{ (m)}$$

Tổng diện tích các mặt cần xây là:

$$S = S_{ABCD} + 2S_{ABB'A'} + 2S_{BCC'B'} = 2x^2 + 2.x.\frac{18}{x^2} + 2.2x.\frac{18}{x^2} = 2x^2 + \frac{108}{x}$$

$$\text{Xét hàm số } S(x) = 2x^2 + \frac{108}{x} \text{ (} 0 < x \leq 4 \text{)}, \text{ ta có: } S'(x) = 4x - \frac{108}{x^2} = \frac{4x^3 - 108}{x^2} = \frac{4(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{x^2}$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3$$

Bảng biến thiên:

x	0	3	4
$S'(x)$	–	0	+
$S(x)$			

Chi phí vật liệu xây dựng thấp nhất khi tổng diện tích các mặt cần xây $S(x)$ là nhỏ nhất.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $S(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = 3$, suy ra $h = 2$.

Vậy cần xây bể có chiều cao là 2 (m) .

Bài 51. Trong một thí nghiệm y học, người ta cấy 1000 vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng. Bằng thực nghiệm, người ta xác định được số lượng vi khuẩn thay đổi theo thời gian bởi công thức:

$$N(t) = 1000 + \frac{100t}{100 + t^2} \text{ (con)}, \text{ trong đó } t \text{ là thời gian tính bằng giây (Nguồn: R. Larson and B. Edwards,}$$

Calculus 10e, Cengage 2014). Tính số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng.

Giải

Xét hàm số $N(t) = 1000 + \frac{100t}{100 + t^2}$ ($t > 0$).

Ta có:
$$N'(t) = \frac{100 \cdot (100 + t^2) - 100t \cdot 2t}{(100 + t^2)^2} = \frac{100 \cdot (100 - t^2)}{(100 + t^2)^2}$$

Khi đó, với $t > 0$, $N'(t) = 0 \Leftrightarrow 100 - t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 10$.

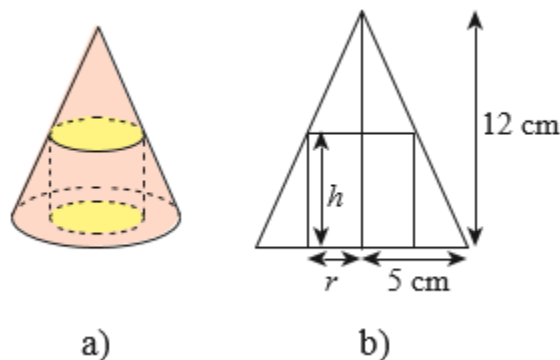
Bảng biến thiên của hàm số $N(t)$ như sau:

t	0	10	$+\infty$	
$N'(t)$		+	0	-
$N(t)$	1 000	1 005	1 000	

Căn cứ bảng biến thiên, ta thấy: Trên khoảng $(0; +\infty)$, hàm số $N(t)$ đạt giá trị lớn nhất bằng 1 005 tại $t = 10$. Vậy số lượng vi khuẩn lớn nhất kể từ khi thực hiện cấy vi khuẩn vào môi trường dinh dưỡng là 1 005 con.

Bài 52. Cho một hình trụ nội tiếp trong hình nón có chiều cao bằng 12 cm và bán kính đáy bằng 5 cm (Hình

4a). Người ta cắt hình nón, trụ này theo mặt phẳng chứa đường thẳng nối đỉnh và tâm hình tròn đáy của hình nón thì thu được một hình phẳng như Hình 4b).



a) Chứng minh rằng công thức tính bán kính r của đáy hình trụ theo chiều cao h của nó là: $r = \frac{5(12-h)}{12}$

b) Chứng minh biểu thức sau biểu thị thể tích khối trụ theo h : $V(h) = \frac{25\pi h(12-h)^2}{144}$

c) Tìm h để khối trụ có thể tích lớn nhất.

Bài 53. Một doanh nghiệp sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Giả sử khi sản xuất và bán hết x sản phẩm đó ($0 < x \leq 2000$), tổng số tiền doanh nghiệp thu được (đơn vị: chục nghìn đồng) là $f(x) = 2000x - x^2$ và tổng chi phí (đơn vị: chục nghìn đồng) doanh nghiệp chi ra là $g(x) = x^2 + 1440x + 50$. Giả sử mức thuế phụ thu trên một đơn vị sản phẩm bán được là t (chục nghìn đồng) ($0 < t < 300$). Tìm mức thuế phụ thu t (trên một đơn vị sản phẩm) sao cho nhà nước nhận được số tiền thuế phụ thu lớn nhất và doanh nghiệp cũng thu được lợi nhuận lớn nhất theo mức thuế phụ thu đó (Nguồn: Nguyễn Huy Hoàng (Chủ biên), Hướng dẫn giải bài tập Toán Cao cấp cho các nhà kinh tế, phần 2: Giải tích toán học, Nhà xuất bản Thống kê 2007).

Giải

Khi sản xuất và bán hết x sản phẩm đó ($0 < x \leq 2000$), lợi nhuận doanh nghiệp thu được là:

$$h(x) = (2000x - x^2) - (x^2 + 1440x + 50) - tx = -2x^2 + (560 - t)x - 50, \text{ với } 0 < x \leq 2000.$$

Xét hàm $h(x) = -2x^2 + (560 - t)x - 50$, với $0 < x \leq 2000$.

Ta có: $h'(x) = -4x + (560 - t)$, $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{560 - t}{4} \in (0; 2000)$

Bảng biến thiên của hàm số:

x	0	$\frac{560-t}{4}$	2 000
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$		$h\left(\frac{560-t}{4}\right)$	

Căn cứ bảng biến thiên, ta có: $\max_{[1; 2000]} h(x) = h\left(\frac{560 - t}{4}\right)$ tại $x = \frac{560 - t}{4}$. Khi đó, số tiền thuế thu được từ

doanh nghiệp là: $k(t) = \left(\frac{560 - t}{4}\right) \cdot t$

Ta có: $k(t) = \left(\frac{560 - t}{4}\right) \cdot t = -\frac{1}{4}(t - 280)^2 + 19600, \forall t \in (0; 300)$

Vì vậy, ta có: $\max_{(1; 300)} k(t) = 19600$ tại $t = 280$. Khi đó, $x = 70$ (sản phẩm).

Vậy mức thuế phụ thu trên một đơn vị sản phẩm sao cho nhà nước nhận được số tiền thuế phụ thu lớn nhất là $t = 280$. Khi đó, mức thuế phụ thu là 2 800 000 đồng/ sản phẩm, doanh nghiệp sản xuất và bán hết 70 sản phẩm.

D. Câu hỏi trắc nghiệm

1. GTLN – GTNN trên đoạn

Câu 1: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 12$ trên đoạn $[-3; 1]$.

- A. 66 B. 72 C. 10 D. 12

Câu 2: Biết giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x - 4$ trên $[-4; 0]$ lần lượt là M và m . Giá trị của $M + m$ bằng

- A. $-\frac{4}{3}$. B. $\frac{4}{3}$. C. -4 . D. $-\frac{28}{3}$.

Câu 3: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 2x^2 - 4x + 5$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng?

- A. 0. B. 2. C. -3 . D. 3

Câu 4: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ trên đoạn $[3; 5]$. Khi đó $M - m$ bằng

- A. $\frac{7}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. 2. D. $\frac{3}{8}$.

Câu 5: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng

- A. 4. B. 0. C. 20. D. -16 .

Câu 6: Giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^3 - 7x^2 + 11x - 2$ trên đoạn $[0; 2]$ là

- A. $m = -2$ B. $m = 0$ C. $m = -3$ D. $m = 11$

Câu 7: Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{3x+1}{x-2}$ trên đoạn $[-1; 1]$. Khi đó giá trị của m là

- A. $m = 4$. B. $m = -4$. C. $m = \frac{2}{3}$. D. $m = -\frac{2}{3}$.

Câu 8: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ trên đoạn $[-2; 2]$.

- A. 3. B. -22 . C. -1 . D. -17 .

Câu 9: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ trên đoạn $[-2; 0]$ bằng

- A. 1. B. -2 . C. -1 . D. 3.

Câu 10: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ trên đoạn $[-4; 4]$ là

- A. -4 . B. 4. C. 1. D. -1 .

Câu 11: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2x+3}{x+2}$ trên đoạn $[-1; 1]$. Tính $M + 2m$?

- A. $\frac{2}{3}$. B. $\frac{8}{3}$. C. $\frac{11}{3}$. D. $\frac{17}{3}$.

Câu 12: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{3x-1}{x-3}$ trên đoạn $[0; 2]$.

- A. $-\frac{1}{3}$. B. -5 . C. 5. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 13: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + x + 4}{x + 1}$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng

- A. 4. B. -5. C. 3. D. $\frac{10}{3}$.

Câu 14: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \frac{9}{x-1}$ trên đoạn $[-4; -1]$ bằng

- A. -5. B. $-\frac{11}{2}$. C. $-\frac{29}{5}$. D. -9.

Câu 15: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x+4}{x-2}$ trên đoạn $[3; 4]$ là:

- A. 7. B. -6. C. 3. D. 4.

Câu 16: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$ trên đoạn $[-4; -2]$ là

- A. $\min_{[-4; -2]} y = -7$. B. $\min_{[-4; -2]} y = -\frac{19}{3}$. C. $\min_{[-4; -2]} y = -8$. D. $\min_{[-4; -2]} y = -6$.

Câu 17: Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$ trên $[0; 2]$ bằng

- A. 12. B. 11. C. 3. D. 20.

Câu 18: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^3 + 2x + 1$ trên đoạn $[-1; 1]$

- A. 4. B. 1. C. 0. D. 5.

Câu 19: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ trên đoạn $[0; 3]$ là:

- A. $\min_{x \in [0; 3]} y = -3$. B. $\min_{x \in [0; 3]} y = \frac{1}{2}$. C. $\min_{x \in [0; 3]} y = -1$. D. $\min_{x \in [0; 3]} y = 1$.

Câu 20: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$. GTLN là M và GTNN là m của hàm số trên đoạn $[0; 4]$ là

- A. $M = 28; m = -4$. B. $M = 77; m = 1$.
C. $M = 77; m = -4$. D. $M = 28; m = 1$.

Câu 21: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - \frac{1}{x}$ trên $[1; 3]$

- A. 9. B. 2. C. $\sqrt{28}$. D. 0.

Câu 22: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^3 - 7x^2 + 11x - 2$ trên đoạn $[0; 2]$.

- A. $m = 11$ B. $m = 3$ C. $m = 0$ D. $m = -2$

Câu 23: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ trên đoạn $\left[0; \frac{3}{2}\right]$ là

- A. 0. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. 2. D. 1.

Câu 24: Hàm số $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x - 1$ có GTLN trên đoạn $[0; 2]$ là

- A. 0. B. $-\frac{1}{3}$. C. -1. D. $-\frac{13}{6}$.

Câu 25: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^2 + 4}{x}$ trên đoạn $[1; 3]$.

- A.** $\max_{[1;3]} y = 4$. **B.** $\max_{[1;3]} y = 5$. **C.** $\max_{[1;3]} y = \frac{13}{3}$. **D.** $\max_{[1;3]} y = \frac{16}{3}$.

Câu 26: Hàm số $y = (4 - x^2)^2 + 1$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1; 1]$ là

- A.** 17. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 14.

Câu 27: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \frac{9}{x}$ trên $[1; 9]$.

- A.** $\max_{[1;9]} y = 10$. **B.** $\max_{[1;9]} y = 6$. **C.** $\max_{[1;9]} y = 12$. **D.** $\max_{[1;9]} y = -6$.

Câu 28: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2x+1}{x-2}$ trên đoạn $[3; 7]$.

Tính $M - 2m$?

- A.** 1. **B.** -11. **C.** -4. **D.** 4.

Câu 29: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

- A.** $m = 3$. **B.** $m = 5$. **C.** $m = \frac{17}{4}$. **D.** $m = 4$.

Câu 30: Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{8}{1+2x} + x$ trên đoạn $[1; 2]$ lần lượt là

- A.** $\frac{11}{3}; \frac{7}{2}$. **B.** $\frac{11}{3}; \frac{18}{5}$. **C.** $\frac{13}{3}; \frac{7}{2}$. **D.** $\frac{18}{5}; \frac{3}{2}$.

Câu 31: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = -x^2 + 4x$ trên đoạn $[-2; 5]$ là

- A.** -12. **B.** 4. **C.** -4. **D.** 12.

Câu 32: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 1 + x + \frac{4}{x}$ trên đoạn $[-3; -1]$ bằng

- A.** 5. **B.** -4. **C.** -6. **D.** -5.

Câu 33: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ trên đoạn $[2; 4]$.

- A.** $\min_{[2;4]} y = -3$. **B.** $\min_{[2;4]} y = \frac{19}{3}$. **C.** $\min_{[2;4]} y = 6$. **D.** $\min_{[2;4]} y = -2$.

Câu 34: Cho $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a < b$, hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a; b)$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[a; b]$ bằng

- A.** $f(b)$. **B.** $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$. **C.** $f(a)$. **D.** $f(\sqrt{ab})$.

Câu 35: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{-x^2 - 4}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{3}{2}; 4\right]$ là

- A.** -2. **B.** -4. **C.** $-\frac{25}{6}$. **D.** -5.

Câu 36: Tìm giá trị lớn nhất (max) và giá trị nhỏ nhất (min) của hàm số $y = x + \frac{1}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{3}{2}; 3\right]$.

A. $\max y = \frac{10}{3}, \min y = \frac{13}{6}$.

B. $\max y = \frac{10}{3}, \min y = 2$.

C. $\max y = \frac{16}{3}, \min y = 2$.

D. $\max y = \frac{10}{3}, \min y = \frac{5}{2}$.

Câu 37: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}$ trên đoạn $[1; 4]$ bằng

A. $2\sqrt{2}$.

B. 5.

C. $\frac{13}{3}$.

D. 4.

Câu 38: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

A. $m = \frac{17}{4}$

B. $m = 10$

C. $m = 5$

D. $m = 3$

Câu 39: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$. Tính tích $M \cdot m$.

A. -3.

B. $\frac{21}{2}$.

C. $-\frac{1}{2}$.

D. 0.

Câu 40: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2x - 4\sqrt{6 - x}$ trên đoạn $[-3; 6]$. Tổng $M + m$ có giá trị là

A. -6.

B. -12.

C. -4.

D. 18.

Câu 41: Gọi M , m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 + 5}{x - 2}$ trên $[-2; 1]$. Tính $T = M + 2m$.

A. $T = -\frac{13}{2}$.

B. $T = -10$.

C. $T = -\frac{21}{2}$.

D. $T = -14$.

Câu 42: Tìm tập giá trị của hàm số $y = \sqrt{x - 1} + \sqrt{9 - x}$

A. $T = [1; 9]$.

B. $T = [2\sqrt{2}; 4]$.

C. $T = (1; 9)$.

D. $T = [0; 2\sqrt{2}]$.

Câu 43: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - 5x + 1}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$ là

A. -3.

B. $-\frac{5}{3}$.

C. $-\frac{5}{2}$.

D. 1.

Câu 44: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 3}{x - 1}$ trên đoạn $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$ là

A. $-\frac{7}{2}$.

B. $-\frac{13}{3}$.

C. 1.

D. -3.

Câu 45: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{9}{x}$ trên đoạn $[2; 4]$ là

- A.** $\min_{[2;4]} y = 6$. **B.** $\min_{[2;4]} y = \frac{25}{4}$. **C.** $\min_{[2;4]} y = -6$. **D.** $\min_{[2;4]} y = \frac{13}{2}$.

Câu 46: Tích của giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x + \frac{4}{x}$ trên đoạn $[1; 3]$ bằng:

- A.** $\frac{52}{3}$. **B.** 20. **C.** 6. **D.** $\frac{65}{3}$.

Câu 47: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x + 5$ trên đoạn $[2; 4]$ là

- A.** $\min_{[2;4]} y = 3$. **B.** $\min_{[2;4]} y = 7$. **C.** $\min_{[2;4]} y = 5$. **D.** $\min_{[2;4]} y = 0$.

Câu 48: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x+1}{x-3}$ trên đoạn $[-1; 2]$.

- A.** $\min_{x \in [-1;2]} y = 3$. **B.** $\min_{x \in [-1;2]} y = -3$. **C.** $\min_{x \in [-1;2]} y = 0$. **D.** $\min_{x \in [-1;2]} y = -4$.

Câu 49: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^3 - 3x^2$ trên $[-1; 1]$.

- A.** $m = -4$. **B.** $m = 0$. **C.** $m = -2$. **D.** $m = -5$.

Câu 50: Tính tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

- A.** 8. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 51: Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{1-x^2}$ lần lượt là

- A.** $\sqrt{2}; 1$. **B.** $\sqrt{2}; 1$. **C.** $\sqrt{2}; -1$. **D.** $\sqrt{2}; 1$.

Câu 52: Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = x - \sqrt{4-x^2}$. Khi đó $M - m$ bằng

- A.** 4. **B.** $2 - \sqrt{2}$. **C.** $2(\sqrt{2} - 1)$. **D.** $2(\sqrt{2} + 1)$.

Câu 53: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2^x$ trên đoạn $[-1; 2]$ là

- A.** $\frac{1}{2}$. **B.** 4. **C.** 2. **D.** -1.

Câu 54: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x.e^x$ trên đoạn $[-2; -1]$ bằng

- A.** $\frac{1}{e}$. **B.** $-\frac{1}{e}$. **C.** $\frac{2}{e^2}$. **D.** $-\frac{2}{e^2}$.

Câu 55: Tìm giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \log_2(x+1)$ trên đoạn $[1; 7]$.

- A.** $m = 1; M = 7$. **B.** $m = 1; M = 8$. **C.** $m = 1; M = 3$. **D.** $m = 3; M = 8$.

Câu 56: **Câu 43.** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = (x-2)^2 \cdot e^x$ trên đoạn $[1; 3]$ là

- A.** e^3 . **B.** e . **C.** 0. **D.** e^4 .

Câu 57: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \log_2^2 x - 4\log_2 x + 1$ trên $[1; 8]$ là

- A.** -2. **B.** 1. **C.** -3. **D.** 2.

Câu 58: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 3 \ln x$ trên đoạn $[1; e]$ bằng

- A.** 1. **B.** $3 - 3 \ln 3$. **C.** e . **D.** $e - 3$.

Câu 59: Giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của hàm số $y = x - \ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; e\right]$ theo thứ tự là

- A.** 1 và $e - 1$. **B.** $\frac{1}{2} + \ln 2$ và $e - 1$.
C. 1 và e . **D.** 1 và $\frac{1}{2} + \ln 2$.

Câu 60: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \ln x - \ln(x^2 + 1)$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ khi:

- A.** $x = 1$. **B.** $x = \frac{1}{2}$. **C.** $x = \frac{3}{2}$. **D.** $x = \frac{3}{4}$.

Câu 61: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = e^{x+1} - 2$ trên đoạn $[0; 3]$.

- A.** $e^4 - 2$. **B.** $e^2 - 2$. **C.** $e - 2$. **D.** $e^3 - 2$.

Câu 62: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = (x^2 + 1) \ln x$ trên đoạn $[1; e]$.

- A.** $\max_{[1; e]} y = e^2 + 1$. **B.** $\max_{[1; e]} y = 0$. **C.** Không tồn tại. **D.** $\max_{[1; e]} y = 4e^2 - 1$.

Câu 63: Gọi M , N lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 \cdot e^{-x}$ trên đoạn $[-1; 1]$.
Tính tổng $M + N$.

- A.** $M + N = 3e$. **B.** $M + N = e$.
C. $M + N = 2e - 1$. **D.** $M + N = 2e + 1$.

Câu 64: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x \cdot e^x$ trên đoạn $[-2; -1]$ bằng

- A.** $\frac{1}{e}$. **B.** $-\frac{1}{e}$. **C.** $\frac{2}{e^2}$. **D.** $-\frac{2}{e^2}$.

Câu 65: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = e^{x+1} - 2$ trên $[0; 3]$.

- A.** $e^4 - 2$. **B.** $e^2 - 2$. **C.** $e - 2$. **D.** $e^3 - 2$.

Câu 66: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = (2x - 3)e^x$ trên $[0; 3]$ là

- A.** $\max_{[0; 3]} f(x) = e^3$. **B.** $\max_{[0; 3]} f(x) = 5e^3$. **C.** $\max_{[0; 3]} f(x) = 4e^3$. **D.** $\max_{[0; 3]} f(x) = 3e^3$.

Câu 67: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = (2x - 1) + \ln(2x + 1)$ trên đoạn $\left[-\frac{1}{4}; 0\right]$ bằng

- A.** $-\frac{3}{2} - \ln 2$. **B.** -1 . **C.** $\ln 2$. **D.** $1 + \ln 3$.

Câu 68: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x(2 - \ln x)$ trên đoạn $[2; 3]$ là

- A.** $\max_{x \in [2; 3]} y = e$. **B.** $\max_{x \in [2; 3]} y = 6 - 3 \ln 3$.
C. $\max_{x \in [2; 3]} y = 4 - 2 \ln 2$. **D.** $\max_{x \in [2; 3]} y = 1$.

Câu 69: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x \ln x$ trên khoảng $(0; +\infty)$ bằng

- A.** e^{-1} . **B.** e . **C.** -1 . **D.** $-e^{-1}$.

Câu 70: Cho hàm số $f(x) = \frac{2x^3}{3} + \ln x$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = \frac{1}{x} f'(x)$ là

A. 3. B. 2. C. 1. **D.** Giá trị khác.

Câu 71: Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\ln x}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{e}; e^2\right]$ là

A. $T = -e + \frac{2}{e^2}$. B. $T = e - \frac{1}{e}$. C. $T = \frac{-1}{e} + \frac{2}{e^2}$. **D.** $T = \frac{1}{e} - e$.

Câu 72: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = (x^2 + 1) \ln x$ trên đoạn $[1; e]$.

A. $\max_{[1; e]} y = e^2 + 1$. B. $\max_{[1; e]} y = 0$. C. Không tồn tại. **D.** $\max_{[1; e]} y = 4e^2 - 1$.

Câu 73: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = (x - 2)^2 e^x$ trên $[1; 3]$ là

A. e. B. 0. **C.** e^3 . **D.** e^4 .

Câu 74: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \ln(x^2 - 2x + 1) - x$ trên đoạn $[2; 4]$ là

A. -2. B. $2 \ln 3 - 4$. C. -3. **D.** $2 \ln 2 - 3$.

Câu 75: Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^2 - 2 \ln x$ trên $[e^{-1}; e]$ là

A. $M = e^2 - 2, m = e^{-2} + 2$. B. $M = e^{-2} + 2, m = 1$.
C. $M = e^{-2} + 1, m = 1$. **D.** $M = e^2 - 2, m = 1$.

Câu 76: Cho hàm số $f(x) = x^2 - x - \ln x$. Biết trên đoạn $[1; e]$ hàm số có GTNN là m , và có GTLN là M .
Hỏi $M + m$ bằng

A. $e^2 - e + 1$. **B.** $e^2 - e - 1$. C. $e^2 - e$. **D.** $2e^2 - e + 1$.

Câu 77: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x \cdot e^x$ trên đoạn $[1; 2]$.

A. e. B. $2e^2$. C. $-\frac{1}{e}$. **D.** $\frac{e}{2}$.

Câu 78: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x \ln x$ trên đoạn $[2; 3]$ bằng

A. $f(2)$. **B.** $f(3)$. C. $f\left(\frac{1}{e^2}\right)$. **D.** $f(e)$.

Câu 79: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (2x - 1)e^x$ trên đoạn $[-1; 0]$ bằng

A. $-\frac{3}{e}$. **B.** $-\frac{2}{\sqrt{e}}$. C. -1. **D.** e.

Câu 80: Gọi m và M lần lượt là các giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = e^{2-3x}$ trên đoạn $[0; 2]$. Mối liên hệ giữa M và m là

A. $M - m = e$. B. $m + M = 1$. **C.** $m \cdot M = \frac{1}{e^2}$. **D.** $\frac{M}{m} = e^2$.

Câu 81: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x(2 - \ln x)$ trên đoạn $[2; 3]$ bằng

A. 3. B. $6 - 3 \ln 3$. C. $4 - 2 \ln 2$. **D.** e.

Câu 82: Gọi a, b lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + \log_2(2 - x)$ trên đoạn $[-2; 0]$. Tổng $a + b$ bằng

- A. 5. B. 0. C. 6. D. 7.

Câu 83: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + e^{2x}$ trên đoạn $[0; 1]$.

- A. $\max_{x \in [0; 1]} y = e^2$. B. $\max_{x \in [0; 1]} y = 2e$. C. $\max_{x \in [0; 1]} y = 1$. D. $\max_{x \in [0; 1]} y = e^2 + 1$.

Câu 84: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = xe^x$ trên $[-2; 0]$ bằng

- A. 0. B. $-\frac{2}{e^2}$. C. $-e$. D. $-\frac{1}{e}$.

Câu 85: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = e^{2x} + 2e^x$ trên đoạn $[0; 2]$.

- A. $\min_{[0; 2]} y = 2e^4 + 2e^2$. B. $\min_{[0; 2]} y = e^4 + 2e^2$.
C. $\min_{[0; 2]} y = 3$. D. $\min_{[0; 2]} y = \frac{1}{e^2} + \frac{2}{e}$.

2. GTLN – GTNN trên khoảng

Câu 86: Cho hàm số $y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $\left(-25; \frac{11}{10}\right)$. Tìm M

- A. $M = 1$. B. $M = \frac{1}{2}$. C. $M = 0$. D. $M = \frac{129}{250}$.

Câu 87: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = 4x^2 + \frac{1}{x} - 4$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

- A. $\min_{(0; +\infty)} f(x) = -1$. B. $\min_{(0; +\infty)} f(x) = -4$. C. $\min_{(0; +\infty)} f(x) = 7$. D. $\min_{(0; +\infty)} f(x) = -3$.

Câu 88: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 5 + \frac{1}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

- A. $\min_{(0; +\infty)} y = 2$. B. $\min_{(0; +\infty)} y = -4$. C. $\min_{(0; +\infty)} y = -3$. D. $\min_{(0; +\infty)} y = -5$.

Câu 89: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2}$, $\forall x \neq 0$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(0; +\infty)$ là

- A. $f(1)$. B. $f(3)$. C. $f(0)$. D. $f(-2)$.

Câu 90: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ với $x > 0$ bằng

- A. 4. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 91: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x(1 - x^2)$ trên khoảng $(0; 1)$ là

- A. $\frac{1}{9}$. B. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. C. 0. D. $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

Câu 92: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{-x^2 + 4x}$ trên khoảng $(0; 3)$ là

- A. 4. B. 2. C. 0. D. -2.

Câu 93: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \frac{4}{x-1}$ trên khoảng $(-\infty; 1)$ bằng

- A. 5. B. -1. C. 3. **D. -3.**

Câu 94: Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 1 + \frac{4}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$. Tìm m .

- A. $m = 2$. B. $m = 5$. C. $m = 3$. **D. $m = 4$.**

Câu 95: Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1}$ là

- A. 2.** B. 1. C. -1. D. -2.

Câu 96: Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

- A. $\min_{(0; +\infty)} y = 5$. B. $\min_{(0; +\infty)} y = 4$. **C. $\min_{(0; +\infty)} y = 3$.** D. $\min_{(0; +\infty)} y = 8$.

Câu 97: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^3 + \frac{3}{x}$ trên $(0; +\infty)$.

- A. $m = 4\sqrt[4]{3}$. B. $m = 2\sqrt{3}$. **C. $m = 4$** D. $m = 2$

Câu 98: Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 1 + \frac{4}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$. Tìm m ?

- A. $m = 5$. **B. $m = 4$.** C. $m = 2$. D. $m = 3$.

Câu 99: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ là

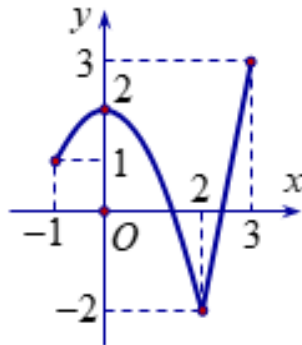
- A. $-\frac{7}{3}$. B. 5. C. -1. **D. 3.**

Câu 100: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $S = -t^3 + 3t^2 - 2$, trong đó t tính bằng giây và S tính theo mét. Vận tốc lớn nhất của chuyển động chất điểm đó là

- A. 1 m/s . **B. 3 m/s .** C. 2 m/s . D. 4 m/s .

3. GTLN – GTNN khi biết đồ thị - BBT

Câu 101: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1; 3]$ và có đồ thị như hình bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 3]$. Giá trị của $M - m$ bằng



- A. 0. B. 1. C. 4. **D. 5.**

Câu 102: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trong đoạn $[-1;3]$ như hình bên dưới. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1;3]$. Tìm mệnh đề đúng?

x	-1	0	2	3	
y'	+	0	-	0	+
y	0	5	1	4	

- A. $m = f(0)$. B. $m = f(2)$. C. $m = f(-1)$. D. $m = f(3)$.

Câu 103: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-3;2]$ và có bảng biến thiên như hình dưới. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[-3;2]$. Tính $M - m$.

x	-3	0	1	2
y	-4	2	0	1

- A. 5. B. 7. C. 6. D. 4.

Câu 104: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên trên đoạn $[-4;1]$ như sau

x	-4	-2	0	1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	3		1		-2

Diagram illustrating the function $f(x)$ and its derivative $f'(x)$ over the interval $x \in [-4, 1]$.

The function $f(x)$ is plotted with points at $x = -4, -2, 0, 1$. The values are $f(-4) = 3$, $f(-2) = 0$, $f(0) = 1$, and $f(1) = -2$. The derivative $f'(x)$ is indicated by signs: $-$ for $x < -2$, 0 at $x = -2$, $+$ for $-2 < x < 0$, 0 at $x = 0$, and $-$ for $x > 0$.

Khi đó, mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\max_{[-2;1]} f(x) = 3$. B. $\min_{[-4;1]} f(x) = -2$.
C. $\max_{[-4;1]} f(x) = 1$. D. $\min_{[-2;1]} f(x) = 0$.

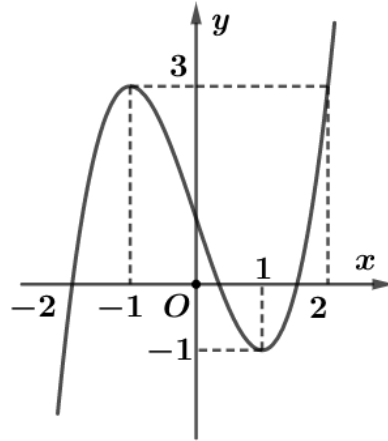
Câu 105: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+	0	-	0	-
y	$-\infty$	4	3	4	$-\infty$

Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. $\min_{\mathbb{R}} y = 0$. B. $\max_{\mathbb{R}} y = 1$. C. $\min_{\mathbb{R}} y = 3$. D. $\max_{\mathbb{R}} y = 4$.

Câu 106: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M, N lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 2]$. Tính giá trị biểu thức $P = 3M - 2N$.



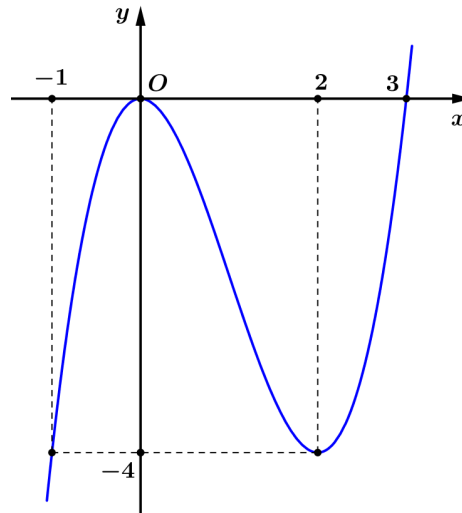
A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 11.

Câu 107: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau



Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1; 2]$ bằng

A. -1.

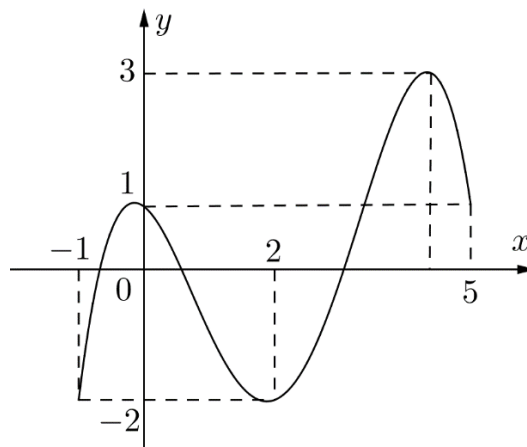
B. 2.

C. 0.

D. 4.

Câu 108: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1; 5]$ và có đồ thị trên đoạn $[-1; 5]$ như hình vẽ bên dưới.

Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1; 5]$ bằng



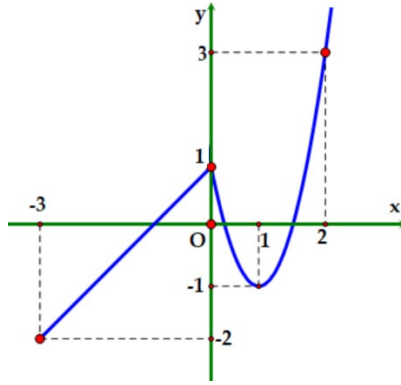
A. -1.

B. 4.

C. 1.

D. 2

Câu 109: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-3; 2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-3; 2]$. Giá trị của $M - m$ bằng:



- A. 4. B. 3. C. 5. D. 0.

Câu 110: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

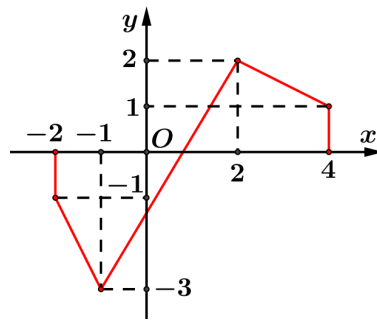
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$		
y'		-	0	+	0	-
y	$+\infty$			5		$-\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
4 5 $-\infty$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho bằng

- A. 5. B. 1.
C. 4. D. Không tồn tại.

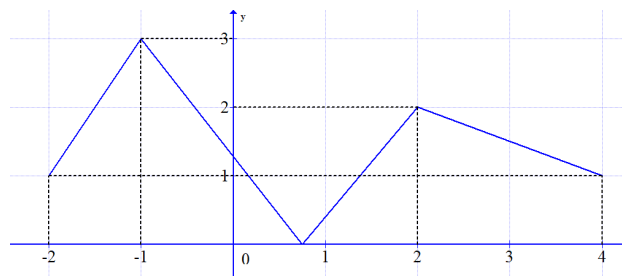
Câu 111: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-2; 4]$ như hình vẽ.



Tìm $\min_{[-2; 4]} f(x)$

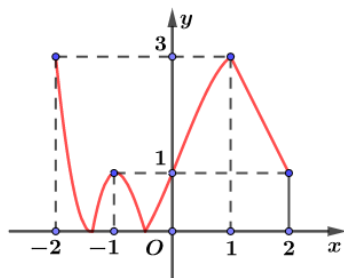
- A. -1. B. -4. C. 2. D. -3.

Câu 112: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên $[-2; 4]$ như hình vẽ, giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên $[-2; 4]$ là



- A. 4. B. -1. C. 2. D. 3.

Câu 113: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2; 2]$. Giá trị của $M + m$ bằng

- A.** 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 114: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$	-2	0	3	6	$+\infty$	
y'			$-$	0	$+$	0	$-$
y							

$\swarrow$ 2 $\searrow$ -2 $\nearrow$ 5 $\searrow$ -3

Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 6]$. Tính $P = 2M + m$.

- A.** $P = 6$. **B.** $P = 7$. **C.** $P = 9$. **D.** $P = 8$.

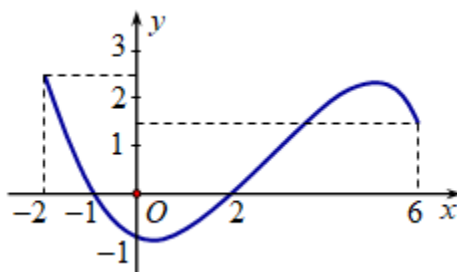
Câu 115: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	$ $	$-$	0	$+$

Mệnh đề nào sau đây đúng

- A.** $\min_{(-1; +\infty)} f(x) = f(0)$. **B.** $\max_{(0; +\infty)} f(x) = f(1)$. **C.** $\max_{(-1; 1]} f(x) = f(0)$. **D.** $\min_{(-\infty; -1)} f(x) = f(-1)$.

Câu 116: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2; 6]$ như hình vẽ bên.



Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

- A.** $\max_{[-2; 6]} f(x) = f(-2)$. **B.** $\max_{[-2; 6]} f(x) = f(6)$.
C. $\max_{[-2; 6]} f(x) = \max\{f(-1), f(6)\}$. **D.** $\max_{[-2; 6]} f(x) = f(-1)$.

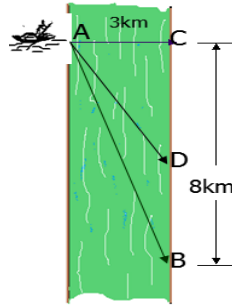
4. Toán thực tế ứng dụng GTLN – GTNN

- Câu 117:** Một chất điểm chuyển động theo quy luật $S(t) = 1 + 3t^2 - t^3$. Vận tốc của chuyển động đạt giá trị lớn nhất khi t bằng bao nhiêu
- A. $t = 2$. B. $t = 1$. C. $t = 3$. D. $t = 4$.
- Câu 118:** Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được là
- A. 243(m/s). B. 27(m/s). C. 36(m/s). D. 144(m/s).
- Câu 119:** Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $f(x) = 0,025x^2(30 - x)$, trong đó x (miligam) là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân. Khi đó, liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất là
- A. 20 miligam. B. 10 miligam. C. 15 miligam. D. 30 miligam.
- Câu 120:** Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30.000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhuận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30.000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1.000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiếc. Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18.000 đồng. Hỏi cơ sở sản xuất phải bán là mức giá bao nhiêu để đạt lợi nhuận lớn nhất.
- A. 43.000 đồng. B. 36.000 đồng. C. 39.000 đồng. D. 42.000 đồng.
- Câu 121:** Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với t là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?
- A. 243. B. 144. C. 27. D. 36.
- Câu 122:** Một con cá hồi bơi ngược dòng nước để vượt một khoảng cách 300 km, vận tốc của dòng nước là 6 (km/h). Giả sử vận tốc bơi của cá khi nước yên lặng là v (km/h). Năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được tính theo công thức $E = cv^3t$, c là hằng số cho trước, đơn vị của E là Jun. Vận tốc v của cá khi nước đứng yên để năng lượng của cá tiêu hao ít nhất là
- A. 8 (km/h). B. 12 (km/h). C. 10 (km/h). D. 9 (km/h).
- Câu 123:** Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà sinh vật học thấy rằng: nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $Q(n) = 480 - 20n$ (gam). Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?
- A. 12. B. 14. C. 10. D. 18.
- Câu 124:** Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?
- A. 144 (m/s). B. 36 (m/s). C. 243 (m/s). D. 27 (m/s).

- Câu 125:** Các chuyên gia Y-tế ước tính số người nhiễm virus Zika kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 45t^2 - t^3, (t = 0, 1, 2, \dots, 25)$. Nếu coi $f(t)$ là một hàm xác định trên đoạn $[0; 25]$ thì $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t . Tốc độ truyền bệnh sẽ lớn nhất vào ngày thứ mấy?
- A. 20. B. 10. C. 15. D. 5.
- Câu 126:** Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất vật đạt được bằng bao nhiêu?
- A. 24(m/s). B. 108(m/s). C. 64(m/s). D. 18(m/s).
- Câu 127:** Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 7 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?
- A. 180(m/s). B. 36(m/s). C. 144(m/s). D. 24(m/s).
- Câu 128:** Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10s, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?
- A. 30m/s. B. 400m/s. C. 216m/s. D. 54m/s.
- Câu 129:** Các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm virus corona kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 45t^2 - t^3$ với $(0 \leq t \leq 25)$. Nếu coi $f(t)$ là một hàm xác định trên đoạn $[0; 25]$ thì hàm $f'(t)$ được xem là tốc độ truyền bệnh tại thời điểm t . Xác định ngày mà tốc độ truyền bệnh là lớn nhất.
- A. 15. B. 20. C. 10. D. 5.
- Câu 130:** Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,025x^2(30 - x)$. Trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (đơn vị miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất.
- A. 15 mg. B. 30 mg. C. 25 mg. D. 20 mg.
- Câu 131:** Diện tích lớn nhất của hình chữ nhật nội tiếp đường tròn bán kính 10cm là:
- A. 160cm². B. 100cm². C. 200cm². D. 80cm².
- Câu 132:** Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{3}t^3 + 6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 9 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?
- A. 144 (m/s) B. 36 (m/s) C. 243 (m/s) D. 27 (m/s)

- Câu 133:** Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là $s = -t^3 + 6t^2 + 17t$, với $t(s)$ là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và $s(m)$ là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Trong khoảng thời gian 8 giây đầu tiên, vận tốc $v(m/s)$ của chất điểm đạt giá trị lớn nhất bằng
- A.** $29m/s$. **B.** $26m/s$. **C.** $17m/s$. **D.** $36m/s$.
- Câu 134:** Một chất điểm chuyển động có vận tốc tức thời $v(t)$ phụ thuộc vào thời gian t theo hàm số $v(t) = -t^4 + 8t^2 + 500(m/s)$. Trong khoảng thời gian $t = 0(s)$ đến $t = 5(s)$ chất điểm đạt vận tốc lớn nhất tại thời điểm nào?
- A.** $t = 4$. **B.** $t = 2$. **C.** $t = 0$. **D.** $t = 1$.
- Câu 135:** Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s = -t^3 + 6t^2 + 17t$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Khi đó vận tốc $v(m/s)$ của chuyển động đạt giá trị lớn nhất trong khoảng 8 giây đầu tiên bằng
- A.** $26m/s$. **B.** $36m/s$. **C.** $29m/s$. **D.** $17m/s$.
- Câu 136:** Một vật chuyển động theo quy luật $s = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 9t$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?
- A.** $89(m/s)$. **B.** $109(m/s)$. **C.** $71(m/s)$. **D.** $\frac{25}{3}(m/s)$.
- Câu 137:** Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s = -t^3 + 6t^2 + 17t$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Khi đó vận tốc $v(m/s)$ của chuyển động đạt giá trị lớn nhất trong khoảng 8 giây đầu tiên bằng
- A.** $26m/s$. **B.** $36m/s$. **C.** $29m/s$. **D.** $17m/s$.
- Câu 138:** Hằng ngày, mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu $h(m)$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian $t(h)$ được cho bởi công thức $h = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 12$.
- Khi nào mực nước của kênh là cao nhất với thời gian ngắn nhất?
- A.** $t = 22(h)$. **B.** $t = 15(h)$. **C.** $t = 14(h)$. **D.** $t = 10(h)$.
- Câu 139:** Một trang trại rau sạch mỗi ngày thu hoạch được một tấn rau. Mỗi ngày, nếu bán rau với giá 30000 đồng/kg thì hết rau sạch, nếu giá bán rau tăng 1000 đồng/kg thì số rau thừa tăng thêm 20 kg. Số rau thừa này được thu mua làm thức ăn chăn nuôi với giá 2000 đồng/kg. Hỏi tiền bán rau nhiều nhất trang trại có thể thu được mỗi ngày là bao nhiêu?
- A.** 32400000 đồng. **B.** 34400000 đồng. **C.** 32420000 đồng. **D.** 34240000 đồng.
- Câu 140:** Một người bán buôn Thanh Long Đồ ở Lập Thạch – Vĩnh Phúc nhận thấy rằng: Nếu bán với giá 20000 nghìn/kg thì mỗi tuần có 90 khách đến mua và mỗi khách mua trung bình 60 kg. Cứ tăng giá 2000 nghìn/kg thì khách mua hàng tuần giảm đi 1 và khi đó khách lại mua ít hơn mức trung bình 5 kg, và như vậy cứ giảm giá 2000 nghìn/kg thì số khách mua hàng tuần tăng thêm 1 và khi đó khách lại mua nhiều hơn mức trung bình 5 kg. Hỏi người đó phải bán với giá mỗi kg là bao nhiêu để lợi nhuận thu được hàng tuần là lớn nhất, biết rằng người đó phải nộp tổng các loại thuế là 2200 nghìn /kg. (Kết quả làm tròn đến hàng nghìn)
- A.** 16000 nghìn/kg. **B.** 24000 nghìn/kg. **C.** 22000 nghìn/kg. **D.** 12000 nghìn/kg.

Câu 141: Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí A tới điểm B về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng 3 km (như hình vẽ). Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B , hay có thể chèo trực tiếp đến B , hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D giữa C và B và sau đó chạy đến B . Biết anh ấy có thể chèo thuyền 6 km/h, chạy 8 km/h và quãng đường $BC = 8$ km. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Tính khoảng thời gian ngắn nhất (đơn vị: giờ) để người đàn ông đến B .



- A. $\frac{3}{2}$. B. $\frac{9}{\sqrt{7}}$. C. $\frac{\sqrt{73}}{6}$. D. $1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$.

Câu 142: Ông An muốn xây một cái bể chứa nước lớn dạng khối hộp chữ nhật không nắp với thể tích 288 m³. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng/m². Nếu ông An biết xác định các kích thước của bể hợp lý thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi ông An trả chi phí thấp nhất để xây dựng bể đó là bao nhiêu?

- A. 108 triệu đồng. B. 90 triệu đồng. C. 168 triệu đồng. D. 54 triệu đồng.

Câu 143: Ông A dự định sử dụng hết 5 m² kính để làm bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

- A. 1,01 m³. B. 1,51 m³. C. 1,33 m³. D. 0,96 m³.

Câu 144: Chi phí nhiên liệu của một chiếc tàu chạy trên sông được chia làm hai phần. Phần thứ nhất không phụ thuộc vào vận tốc và bằng 480 nghìn đồng trên 1 giờ. Phần thứ hai tỉ lệ thuận với lập phương của vận tốc, biết khi $v = 10$ (km/giờ) thì phần thứ hai bằng 30 (nghìn đồng/giờ). Hãy xác định vận tốc của tàu để tổng chi phí nhiên liệu trên 1 km đường sông là nhỏ nhất

- A. 10 (km/giờ). B. 25 (km/giờ). C. 15 (km/giờ). D. 20 (km/giờ).

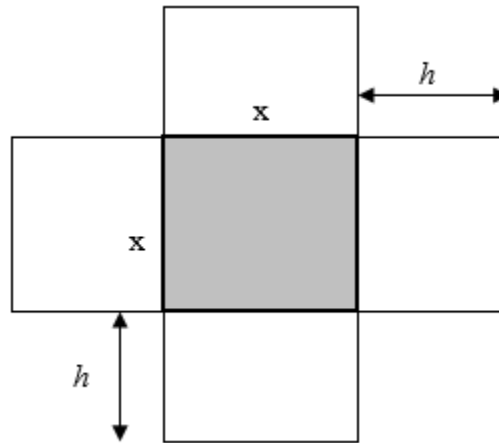
Câu 145: Một bác nông dân cần xây dựng một hồ ga không có nắp dạng hình hộp chữ nhật có dung tích là 3200 cm³, tỉ số giữa chiều cao của hồ và chiều rộng của đáy bằng 2. Hãy xác định diện tích của đáy hồ ga để khi xây tiết kiệm nguyên vật liệu nhất?

- A. 1200 cm². B. 120 cm². C. 160 cm². D. 1600 cm².

Câu 146: Một cửa hàng bán bưởi Đoan Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50.000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 40 quả bưởi. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 5000 đồng thì số bưởi bán được tăng thêm là 50 quả. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi quả là 30.000 đồng.

- A. 44.000 đ. B. 43.000 đ. C. 42.000 đ. D. 41.000 đ.

Câu 147: Một hộp không nắp được làm từ một mảnh các tông theo mẫu. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh x (cm), chiều cao h (cm) và có thể tích là $500(\text{cm}^3)$.



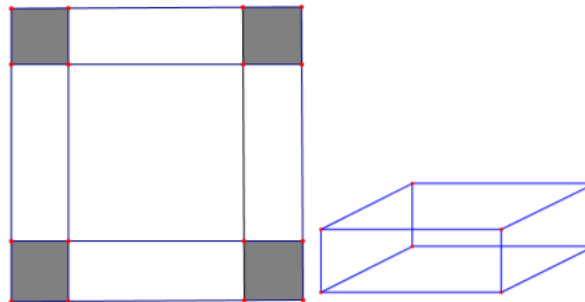
Tìm x sao cho diện tích mảnh các tông đó nhỏ nhất?

- A.** 5 cm . **B.** 100 cm . **C.** 10 cm . **D.** 20 cm .

Câu 148: Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê, mỗi căn hộ thêm 50.000 đồng một tháng thì có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Công ty đã tìm ra phương án cho thuê đạt lợi nhuận lớn nhất. Hỏi thu nhập cao nhất công ty có thể đạt được trong một tháng là bao nhiêu?

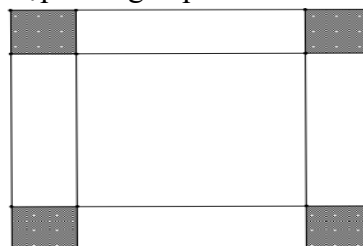
- A.** 115.250.000 . **B.** 101.250.000 . **C.** 100.000.000 . **D.** 100.250.000 .

Câu 149: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh $12(\text{cm})$. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x(\text{cm})$, rồi gấp tấm nhôm lại để được cái hộp không nắp (tham khảo hình vẽ bên). Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất (giả thiết bề dày tấm tôn không đáng kể).



- A.** $x = 2$. **B.** $x = 3$. **C.** $x = 4$. **D.** $x = 6$.

Câu 150: Từ một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước 40 cm và 60 cm người ta cắt bỏ bốn hình vuông ở bốn góc để gấp lại được một cái hộp không nắp.



Để thể tích hộp đó lớn nhất thì cạnh của hình vuông cắt bỏ có giá trị gần với

- A.** 7,85 cm. **B.** 15 cm. **C.** 3,92 cm. **D.** 18 cm.

Câu 151: Một người muốn xây một bể chứa có thể tích $150m^3$ hình trụ. Vật liệu làm đáy, thành và nắp bể lần lượt có giá 100000 đồng/ m^2 , 90000 đồng/ m^2 và 120000 đồng/ m^2 . Tính chi phí thấp nhất để làm bể

- A. 15040000 đồng. B. 15038000 đồng. C. 15048000 đồng. D. 15037000 đồng.

Câu 152: Cho mạch điện xoay chiều RLC mắc nối tiếp có R thay đổi. Biết điện trở cuộn cảm $Z_L = 100(\Omega)$, điện trở của tụ điện là $Z_C = 40(\Omega)$ và hiệu điện thế hai đầu mạch là $u = 120\sqrt{2} \cos 100\pi t (V)$. Điện trở R phải có giá trị là bao nhiêu để công suất tiêu thụ của mạch đạt cực đại và giá trị cực đại của công suất là bao nhiêu?

- A. $R = 60(\Omega)$, $P_{\max} = 120(W)$. B. $R = 120(\Omega)$, $P_{\max} = 60(W)$.
C. $R = 40(\Omega)$, $P_{\max} = 180(W)$. D. $R = 120(\Omega)$, $P_{\max} = 180(W)$.

Câu 153: Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được tính theo công thức $c(t) = \frac{t}{t^2 + 1} (mg/L)$. Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

- A. 4 giờ. B. 1 giờ. C. 3 giờ. D. 2 giờ.

Câu 154: Thể tích V của 1kg nước ở nhiệt độ t (t nằm giữa $0^\circ C$ đến $30^\circ C$) được cho bởi công thức $V = 999,87 - 0,06426t + 0,0085043t^2 - 0,0000679t^3 (cm^3)$. Nhiệt độ t của nước gần nhất với giá trị nào dưới đây thì khối lượng riêng của nước là lớn nhất?

- A. 0° . B. -4° . C. 30° . D. 4° .

Câu 155: Để quảng bá cho sản phẩm A, một công ty dự định tổ chức quảng cáo theo hình thức quảng cáo trên truyền hình. Nghiên cứu của công ty cho thấy: nếu sau n lần quảng cáo được phát thì tỉ lệ người xem quảng cáo đó mua sản phẩm A tuân theo công thức $P(n) = \frac{1}{1 + 49e^{-0,015n}}$. Hỏi cần phát ít nhất bao nhiêu lần quảng cáo để tỉ lệ người xem mua sản phẩm đạt trên 30% ?

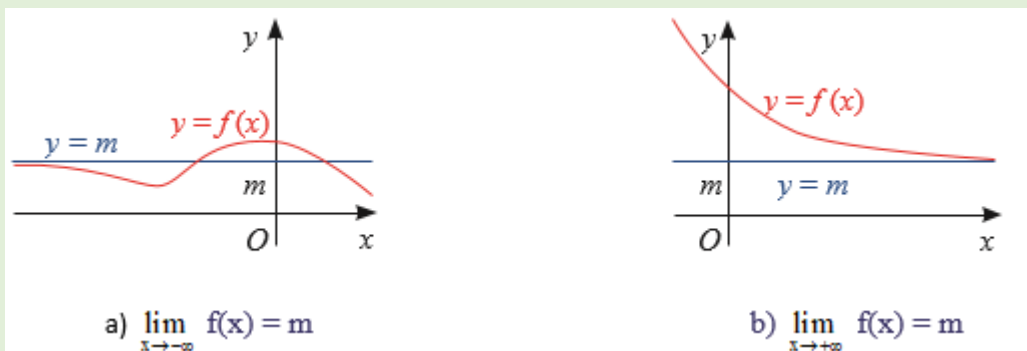
- A. 202. B. 203. C. 206. D. 207.

Bài 3. Đường tiệm cận của đồ thị hàm số

A. Kiến thức cần nhớ

1. Tiệm cận ngang

- Đường thẳng $y = m$ được gọi là một đường tiệm cận ngang (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = m$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m$
- Đường thẳng $y = m$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh họa như hình vẽ bên dưới.

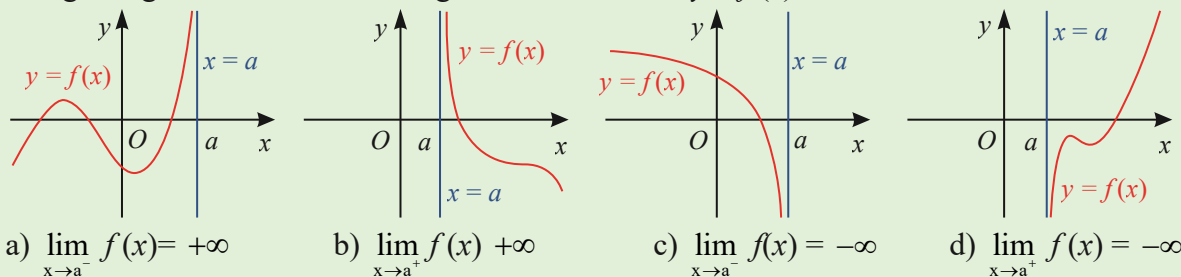


2. Tiệm cận đứng

- Đường thẳng $x = a$ được gọi là một **đường tiệm cận đứng** (hay **tiệm cận đứng**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thỏa mãn:

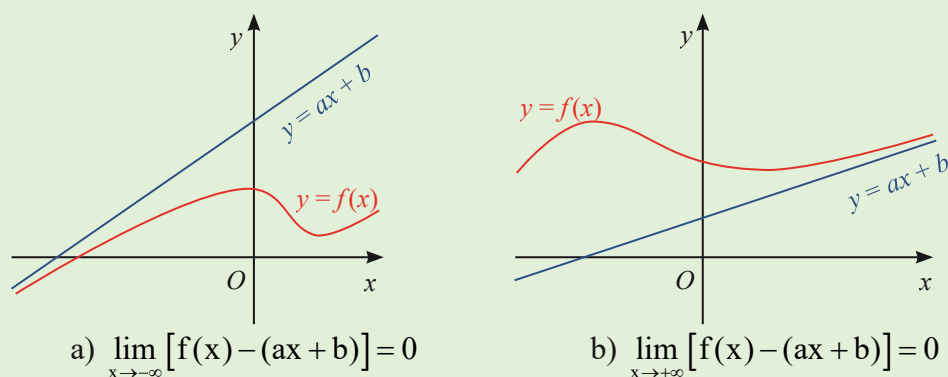
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty.$$

- Đường thẳng $x = a$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh họa như Hình 2.



3. Tiệm cận xiên

- Đường thẳng $y = ax + b$, $a \neq 0$ được gọi là **đường tiệm cận xiên** (hay **tiệm cận xiên**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.
- Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh họa như Hình vẽ bên dưới.



Nhận xét:

a) Trong trường hợp tổng quát, có thể tìm các hệ số a, b trong phương trình của đường tiệm cận xiên $y = ax + b$ theo công thức như sau:

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] \text{ hoặc } a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$$

b) Khi $a = 0$ thì đồ thị của hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = b$.

4. Hai hàm số thường gặp

a) **Hàm số** $y = \frac{ax + b}{cx + d}, (c \neq 0; ad - bc \neq 0)$

- TCD: $x = -\frac{d}{c}$ (nghiệm của mẫu)
- TCN: $y = \frac{a}{c}$

b) **Hàm số** $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$.

➤ Thực hiện phép chia đa thức để biến đổi hàm số về dạng: $y = Ax + B + \frac{C}{dx + e}$ ($A.C \neq 0$)

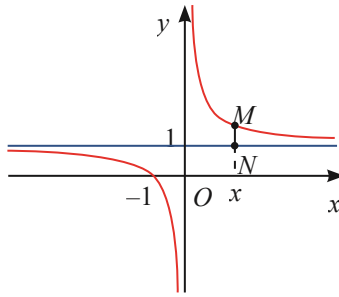
- TCD: $x = -\frac{e}{d}$ (nghiệm của mẫu)
- TCX: $y = Ax + B$

➤ Công thức nhanh tìm TCX: $y = \frac{a}{d}x + \left(\frac{bd - ae}{d^2} \right)$

B. Các dạng bài tập & phương pháp giải

Dạng 1. Tiệm cận ngang

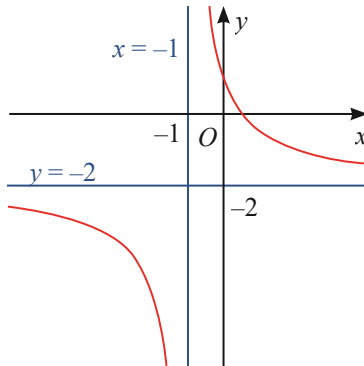
Ví dụ 1. Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x}$ có đồ thị như Hình bên dưới.



a) Quan sát đồ thị, hãy cho biết tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho và giải thích?

b) Đường thẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x cắt đồ thị hàm số tại điểm M và cắt đường thẳng $y = 1$ tại điểm N (Hình vẽ). Tính MN theo x và nhận xét về MN khi $x \rightarrow +\infty$ hoặc $x \rightarrow -\infty$.

Ví dụ 2. Đồ thị của hàm số $y = \frac{-2x+1}{x+1}$ như Hình vẽ bên. Quan sát đồ thị, em hãy cho biết TCN của đồ thị hàm số đã cho? Giải thích?



Ví dụ 3. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số sau: $y = \frac{-2x+1}{x+1}$

Giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$\text{Ta có: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = -2; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = -2$$

Vậy đường thẳng $y = -2$ là TCN của đồ thị hàm số đã cho.

Ví dụ 4. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị các hàm số sau:

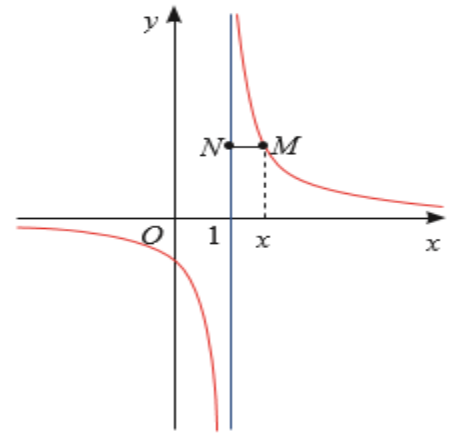
a) $f(x) = \frac{x-1}{4x+1};$

b) $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}.$

c) $h(x) = \frac{-3x-1}{x+1}$

Dạng 2. Tiệm cận đứng

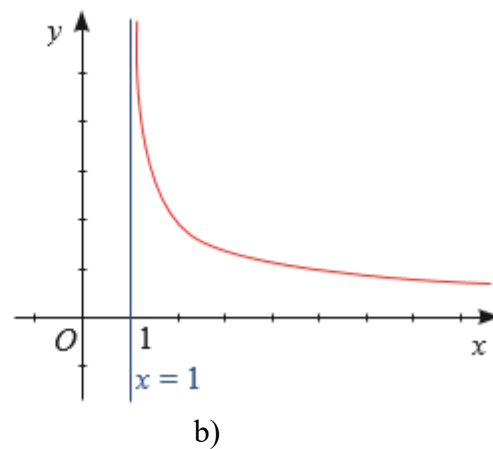
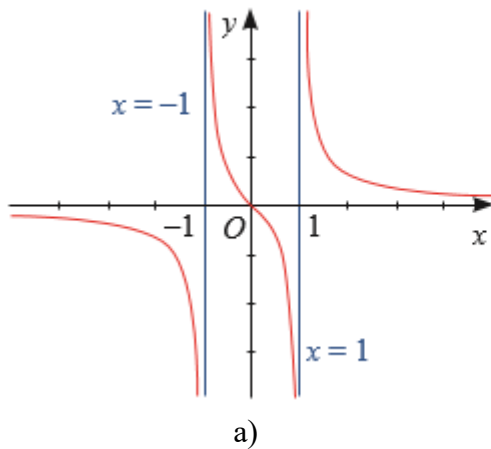
Ví dụ 5. Cho hàm số $y = \frac{1}{x-1}$ có đồ thị như hình bên.



a) Quan sát đồ thị, hãy cho biết tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho và giải thích?

b) Gọi M là điểm trên đồ thị có hoành độ x. Đường thẳng đi qua M và vuông góc với trục Oy cắt đường thẳng $x = 1$ tại điểm N. Tính MN theo x và nhận xét về MN khi $x \rightarrow 1^+$ và $x \rightarrow 1^-$.

Ví dụ 6. Quan sát đồ thị dưới đây, em hãy cho biết TCD của đồ thị hàm số đã cho? Giải thích?



Ví dụ 7. Tìm tiệm cận đứng của đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$; b) $y = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$

Giải

a) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{x^2 - 1} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x^2 - 1} = +\infty$; . Suy ra đường thẳng $x = -1$ là một TCD của đồ thị hàm số.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x^2 - 1} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x^2 - 1} = +\infty$. Suy ra đường thẳng $x = 1$ là một TCD của đồ thị hàm số.

b) Tập xác định: $D = (1; +\infty)$. Vì $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{\sqrt{x-1}} = +\infty$ nên đường thẳng $x = 1$ là một TCD của đồ thị hàm số.

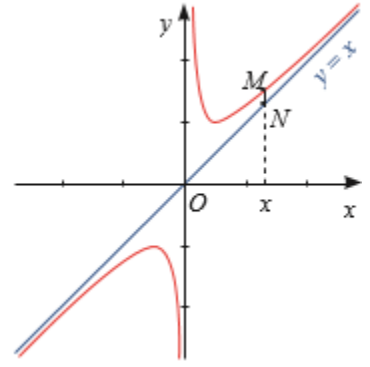
Ví dụ 8. Tìm tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \frac{x-1}{-x+5}$; b) $y = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$ c) $y = \frac{x+2}{x^2-1}$; d) $y = \frac{2}{\sqrt{x}-2}$

Dạng 3. Tiệm cận xiên

Ví dụ 9. Cho đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2+1}{x}$ và đường thẳng $y = x$.

Đường thẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x cắt đồ thị hàm số tại điểm M và cắt đường thẳng $y = x$ tại điểm N (Hình vẽ bên).

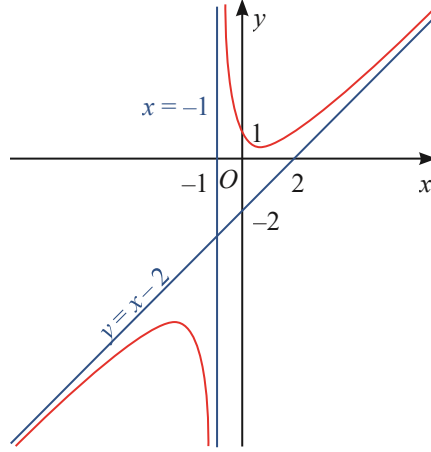


a) Tính $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - x \right)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - x \right)$ và có kết luận gì về đường thẳng

$y = x$?

b) Tính MN theo x và nhận xét về MN khi $x \rightarrow +\infty$ hoặc $x \rightarrow -\infty$.

Ví dụ 10. Quan sát đồ thị dưới đây, em hãy cho biết TCD và TCX của đồ thị hàm số đã cho? Giải thích?



Ví dụ 11. Chứng minh rằng đường thẳng $y = x - 2$ là một TCX của đồ thị hàm số $f(x) = x - 2 + \frac{3}{x+1}$.

Giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x-2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x+1} = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x-2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x+1} = 0$;

Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x - 2$.

Ví dụ 12. Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}$.

Giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Ta có: $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - 2x} = 1$.

$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 1}{x - 2} = -1$.

Ta cũng có $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax] = -1$.

Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x - 1$.

Ví dụ 13. Tìm TCD và TCX của đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x}{x + 5}$.

Ví dụ 14. Tìm TCX của mỗi đồ thị hàm số sau:

a) $y = \frac{2x^3 - x^2}{x^2 + 1}$

b) $y = \sqrt{x^2 + 3}$

Ví dụ 15. Trong Hình 11, đường viền bóng của đèn ngủ lên tường là đồ thị của hàm số $y = 55 - \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 144}$ với x và y tính bằng đơn vị centimét. Chứng minh rằng $y = 55 - \frac{1}{2}x$ là một tiệm cận xiên của đồ thị hàm số này.



Hình 11

Giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [55 - \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 144} - (55 - \frac{1}{2}x)] = 0$

Tương tự ta cũng có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [55 - \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 144} - (55 - \frac{1}{2}x)] = 0$

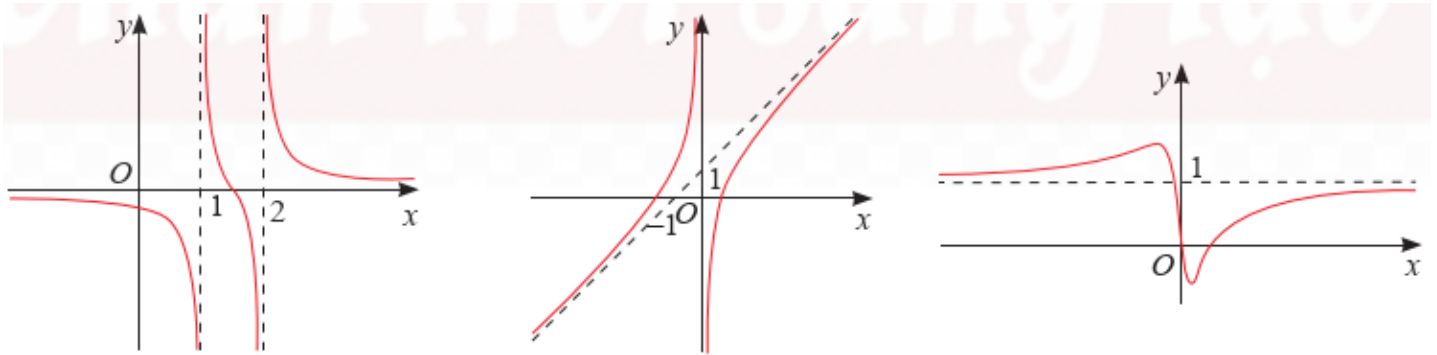
Do đó $y = 55 - \frac{1}{2}x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = 55 - \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 144}$.

Ví dụ 16. Nếu trong một ngày, một xưởng sản xuất được x kilôgam sản phẩm thì chi phí trung bình (tính bằng nghìn đồng) cho một sản phẩm được cho bởi công thức: $C(x) = \frac{50x + 2000}{x}$. Tìm các đường tiệm cận của hàm số $C(x)$.

C. Bài tập tự luận rèn luyện

Dạng 1. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số khi cho hình ảnh đồ thị

Bài 1. Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số như hình vẽ dưới đây và giải thích?

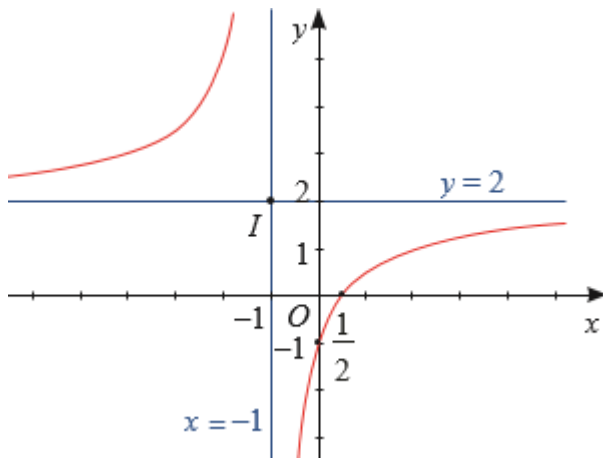


a) $y = \frac{2x-3}{5x^2-15x+10}$

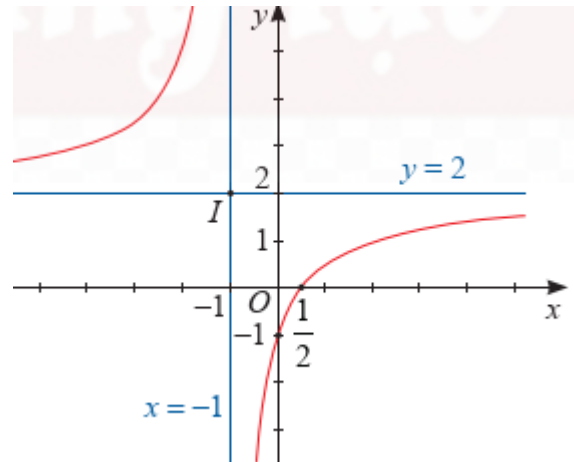
b) $y = \frac{x^2+x-1}{x}$

c) $y = \frac{16x^2-8x}{16x^2+1}$

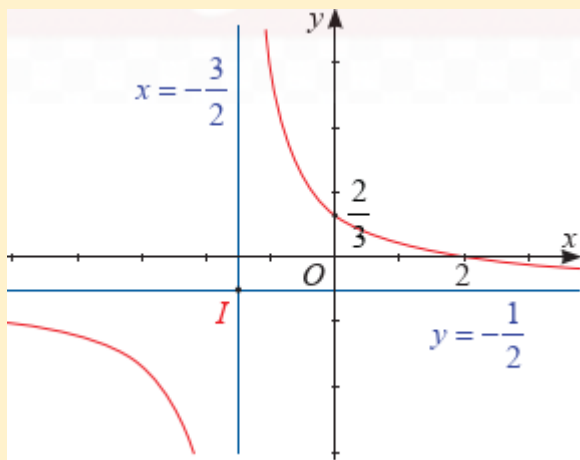
Bài 2. Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số như hình vẽ dưới đây và giải thích?



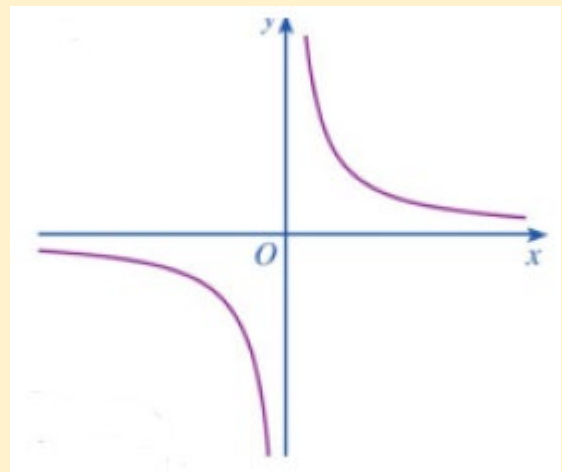
a) $y = \frac{-2x+1}{x+1}$



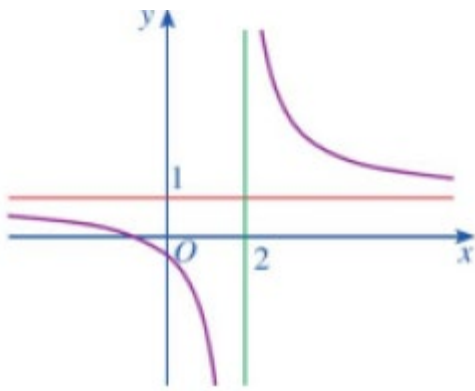
b) $y = \frac{2x-1}{x+1}$



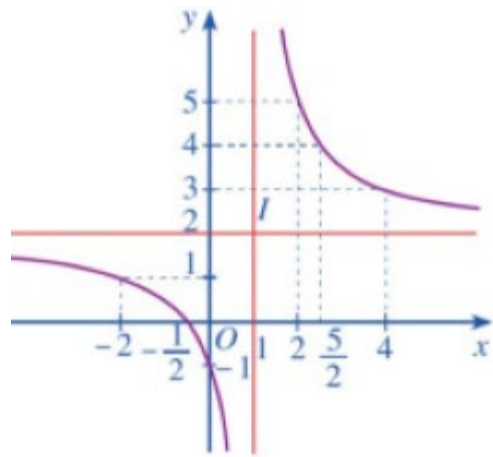
c) $y = \frac{-x+2}{2x+3}$



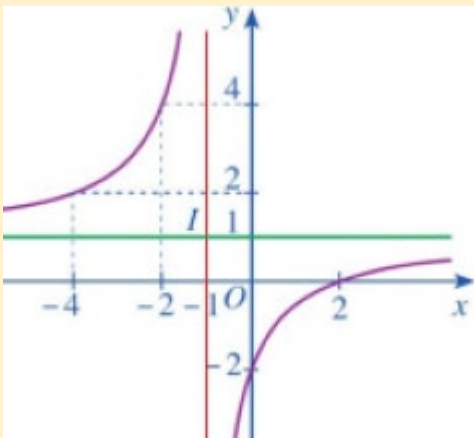
d) $y = \frac{1}{x}$



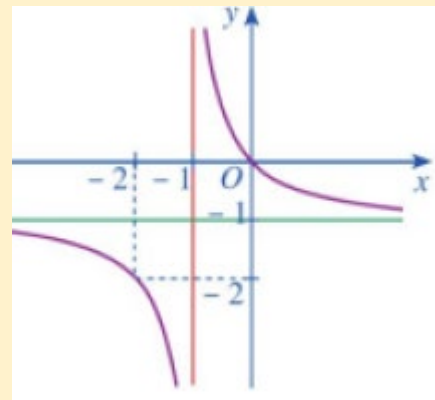
e) $y = \frac{x+1}{x-2}$



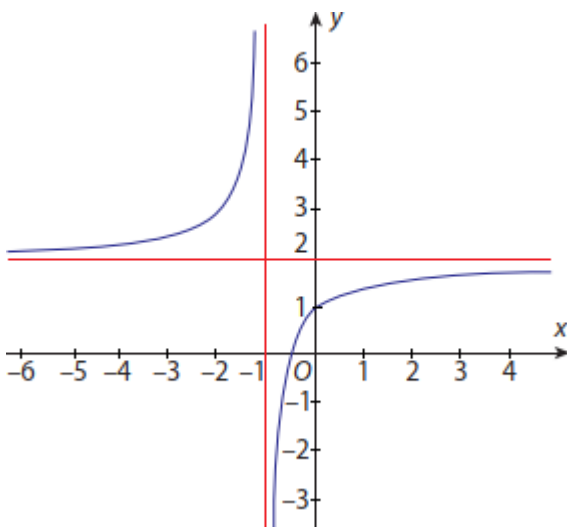
f) $y = \frac{2x+1}{x-1}$



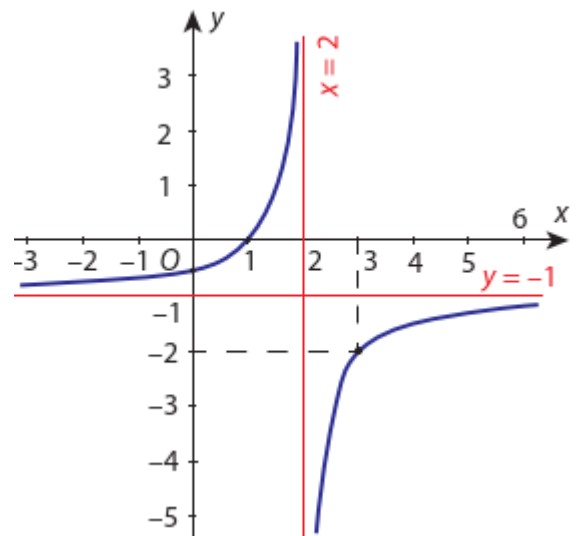
g) $y = \frac{x-2}{x+1}$



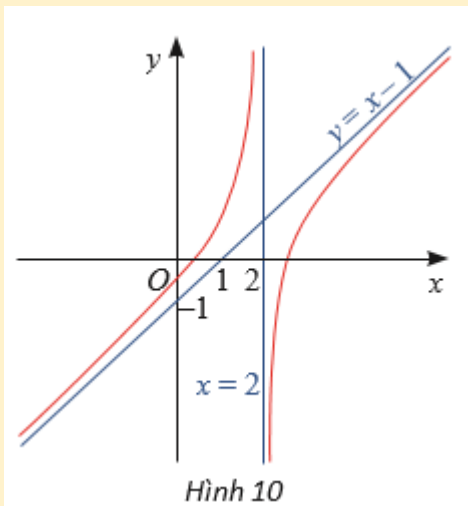
h) $y = \frac{-x}{x+1}$



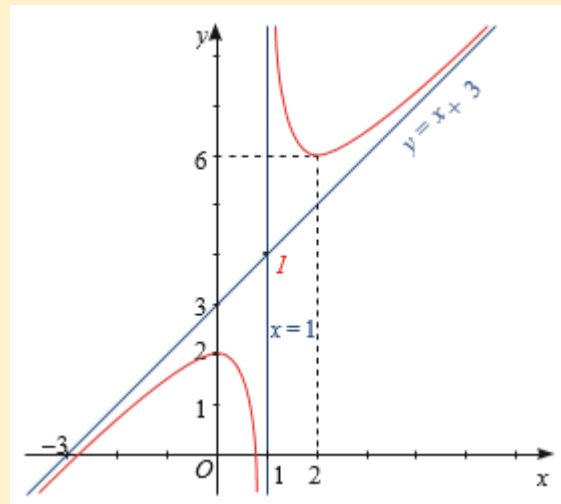
i) $y = \frac{2x+1}{x+1}$



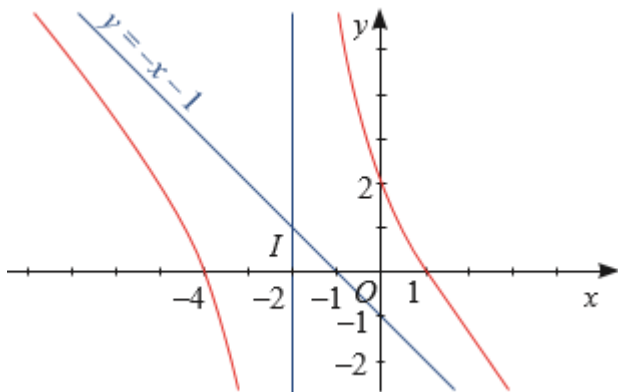
j) $y = \frac{-x+1}{x-2}$



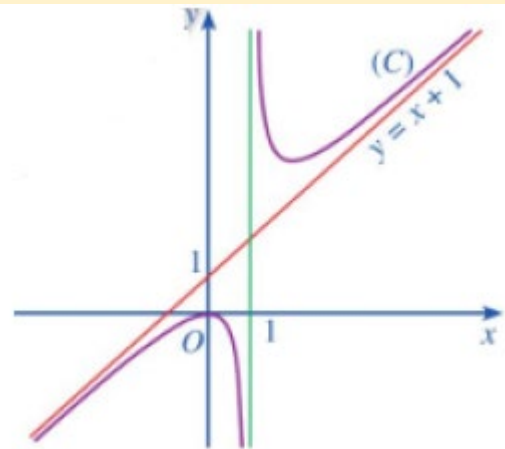
k) $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}$



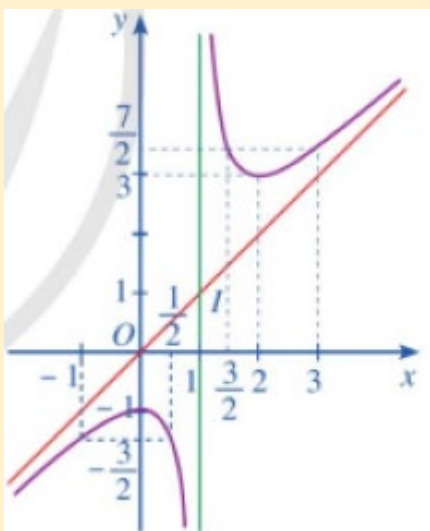
l) $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$



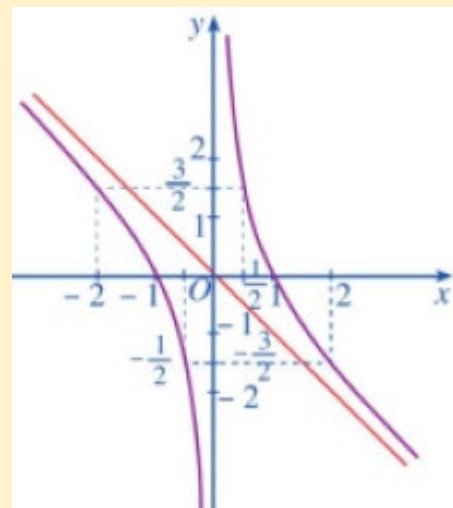
m) $y = \frac{-x^2 - 3x + 4}{x + 2}$



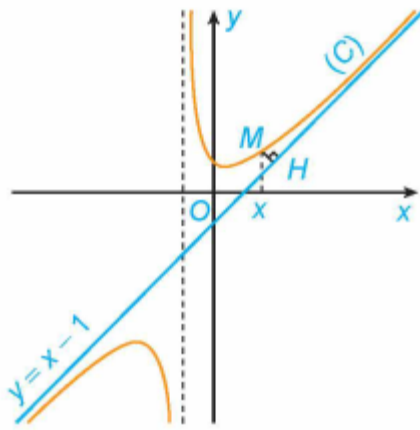
n) $y = x + 1 + \frac{1}{x - 1}$



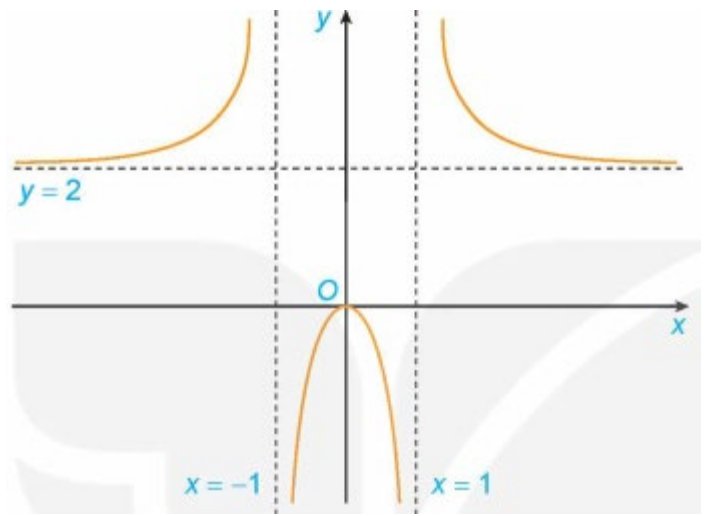
o) $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$



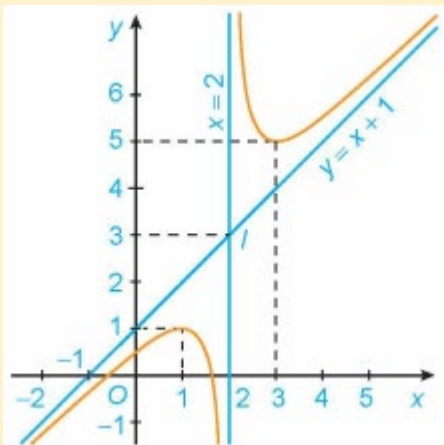
p) $y = \frac{-x^2 + 1}{x}$



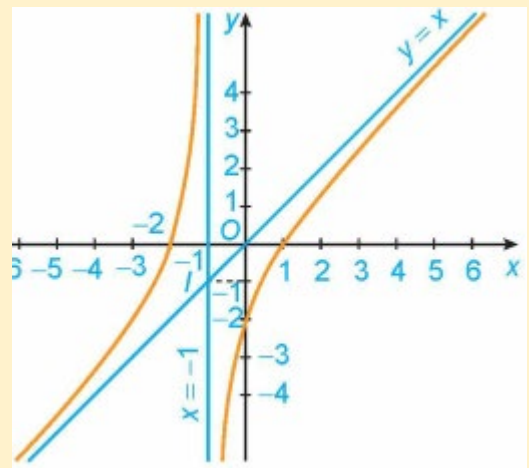
q) $y = x - 1 + \frac{2}{x+1}$



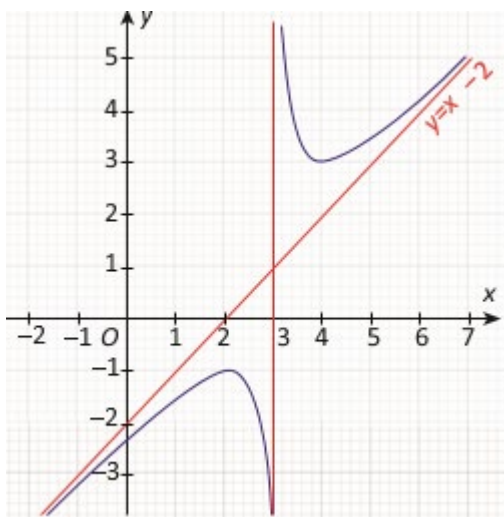
r) $y = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$



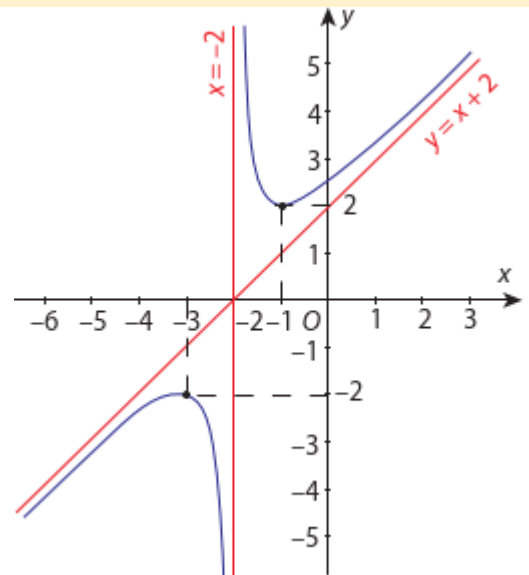
s) $y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$



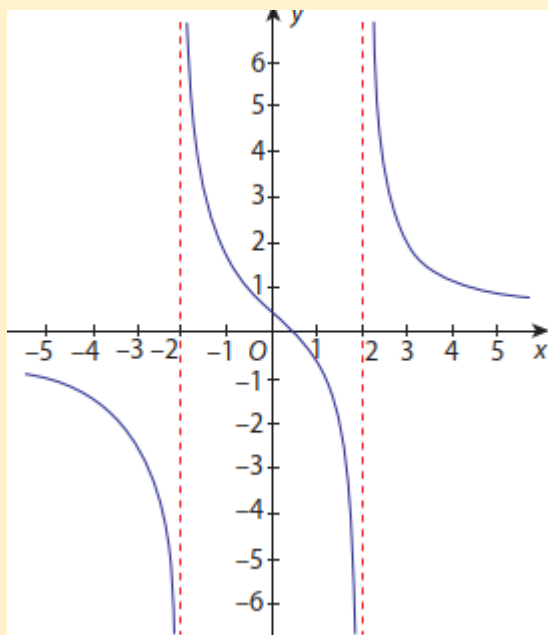
t) $y = \frac{x^2 + x - 2}{x + 1}$



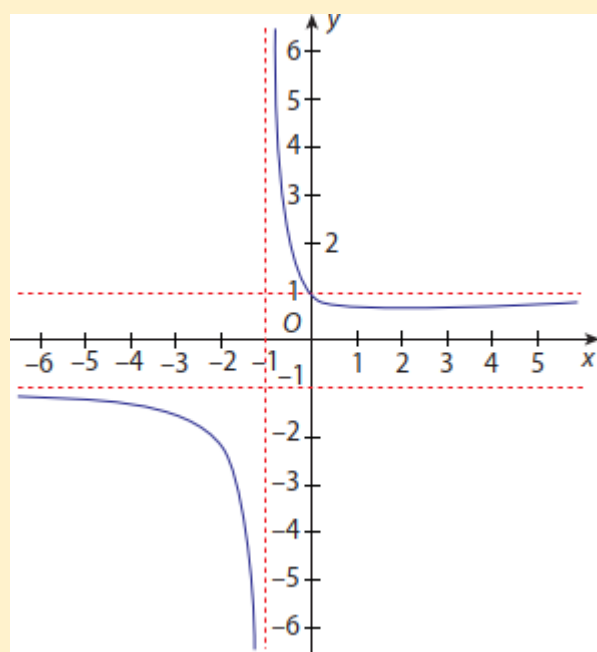
u) $y = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 3}$



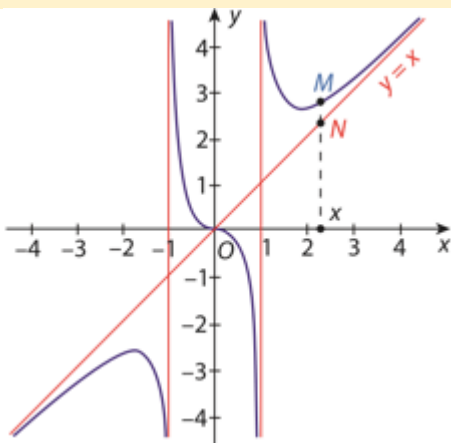
v) $y = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2}$



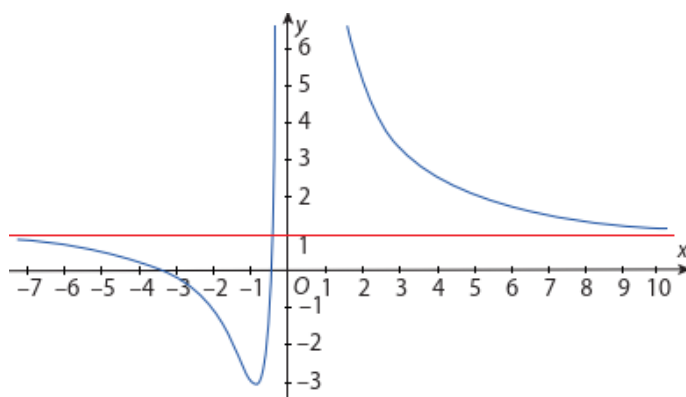
w) $y = \frac{2-4x}{4-x^2}$



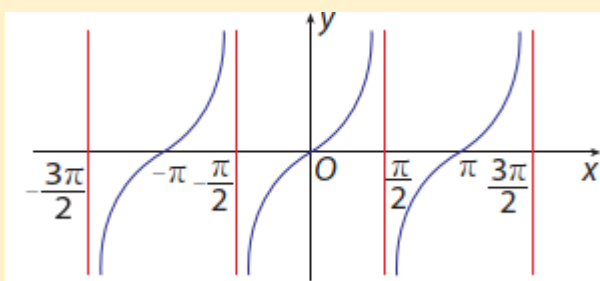
x) $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$



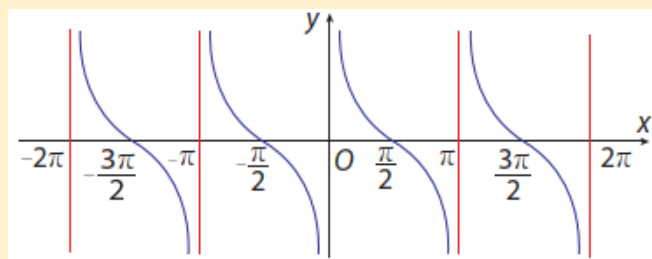
y) $y = x + \frac{x}{x^2-1}$



z) $y = \frac{x^2+7x+3}{x^2}$



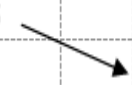
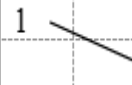
aa) $y = \tan x$



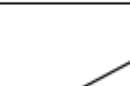
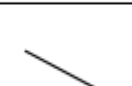
bb) $y = \cot x$

Bài 3. Tìm các tiệm cận đứng và tiệm cận ngang (nếu có) của đồ thị hàm số được cho trong bảng biến thiên dưới đây và giải thích?

1)

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	-5		$-\infty$	1	 -5

2)

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
y'	+		+	0	-	
y	1		$+\infty$	$-\infty$	 2 	1

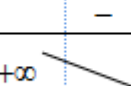
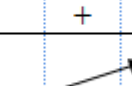
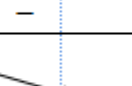
3)

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	-		0	-
y	$+\infty$	-1	2	$-\infty$

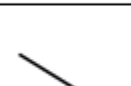
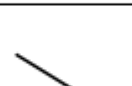
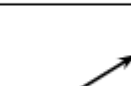
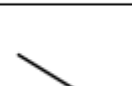
4)

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	-		-
y	2		$+\infty$ 
		$-\infty$	2

5)

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		-	+	0	-			
$f(x)$	$+\infty$		-1	$-\infty$		2		$-\infty$

6)

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
y'	-		-	+	-
y	-1	2		3	
					
	$-\infty$		-4		0

7)

x	$-\infty$	-1		1		2		$+\infty$
y'		+	0	+	0	-	0	+
y								

-1

2

0

$+\infty$

8)

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'		$-$	$-$	0	$+$	$+$
y	$+\infty$		$+\infty$	1	$-\infty$	0

9)

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	$-$	$-$	0	$+$	$+$
y	$+\infty$  $-\infty$	$+\infty$  0  $+\infty$	$+\infty$  -1		

10)

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	-2	-1		0

11)

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'		$+$	$+$	0	$-$
y	1	3	2	$-\infty$	-1

12)

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
y'		$-$	$-$	0	$+$
y	3		$+\infty$	-2	5

13)

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'	$-$	$+$	$-$	
y	$+\infty$		$+\infty$	1

14)

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+		-	0	+
y	$-\infty$	1	$+\infty$	$-\infty$	3

15)

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+	+	-	+	
y	$-\infty$	$+\infty$	2	$-\infty$	-1

16)

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+	-	0	+	+
y	$-\infty$	2	$+\infty$	$-\infty$	4

17)

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	-	+	-	
y	$+\infty$	-1	2	-2

18)

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
y'	-		+	-
y	$-\infty$	$+\infty$	1	0

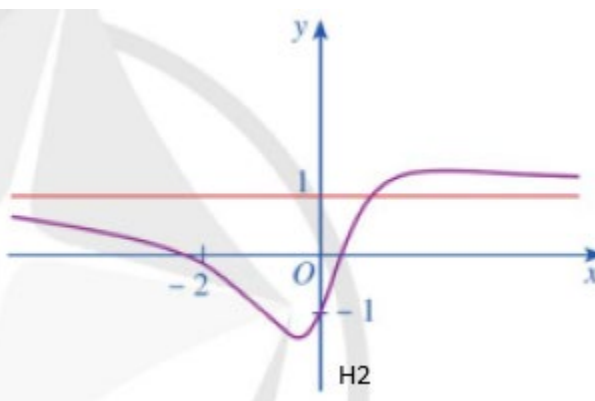
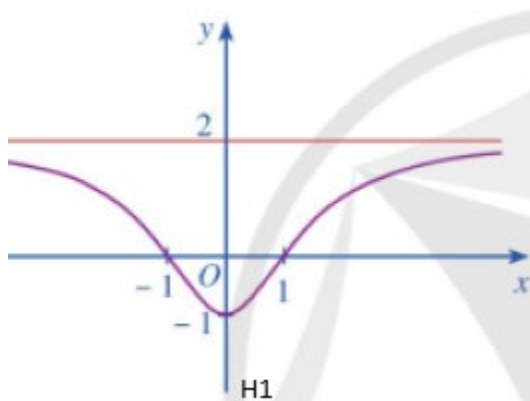
19)

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	0	-
$f(x)$	3	$-\infty$	4	2

20)

x	$-\infty$	-1	2	4	$+\infty$	
y'	-			+	0	-
y	$+\infty$				2	$-\infty$

Bài 4. Đồ thị hàm số dưới đây ở hình 1 và hình 2 đều có đường TCN là đường thẳng song song với Ox. Hỏi đó là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau?

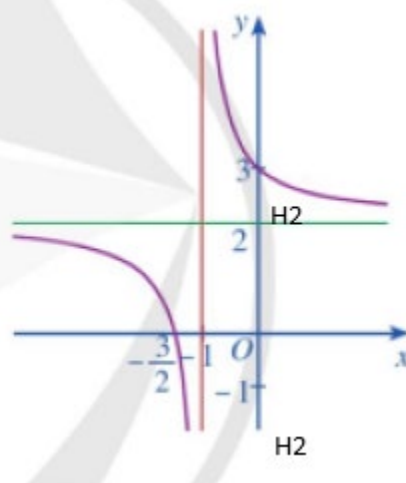
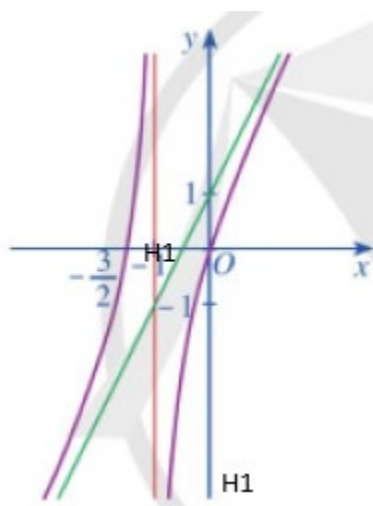


a) $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1}$

b) $y = \frac{2x^2 + x + 1}{x - 1}$

c) $y = \frac{2x^2 - 2x}{x^2 + 2}$

Bài 5. Các đồ thị hàm số dưới đây ở H1 và H2 đều có đường TCD và đường TCN (hoặc TCX). Hỏi đó là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau?

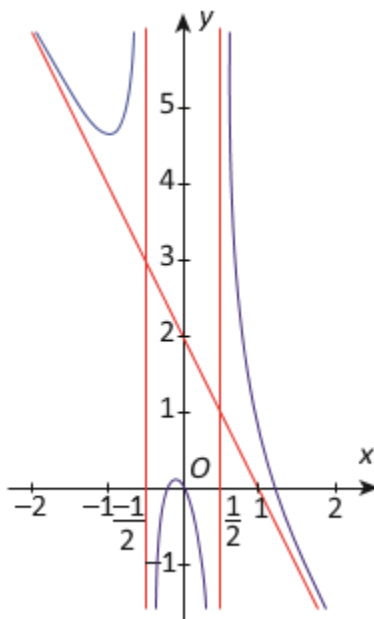


a) $y = \frac{2x+3}{x+1}$

b) $y = \frac{2x-5}{x-1}$

c) $y = \frac{2x^2 + 3x}{x + 1}$

Bài 6. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$ và có đồ thị là các phần đường cong như *Hình vẽ bên dưới*. Xác định phương trình đường tiệm cận đứng, tiệm cận ngang và tiệm cận xiên (nếu có) của đồ thị hàm số đã cho.



Dạng 2. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số được cho bởi công thức

Bài 7. Chứng minh rằng đường thẳng $y = x - 2$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 3}$.

Bài 8. Chứng minh rằng đường thẳng $y = 2x - 1$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = 2x - 1 - \frac{1}{x^2 + 1}$.

Bài 9. Chứng minh rằng đường thẳng $y = -x$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{-x^2 - 2x + 3}{x + 2}$.

Bài 10. Tìm các tiệm cận đứng và tiệm cận ngang (nếu có) của đồ thị hàm số sau:

1) $y = \frac{4x - 5}{2x - 3}$

2) $y = \frac{-2x + 7}{4x - 3}$

3) $y = \frac{5x}{3x - 7}$

4) $y = \frac{-2x + 1}{x + 1}$

5) $y = \frac{2x - 1}{x + 1}$

6) $y = \frac{-x + 2}{2x + 3}$

7) $y = \frac{1}{x}$

8) $y = \frac{x + 1}{x - 2}$

9) $y = \frac{2x + 1}{x - 1}$

10) $y = \frac{x - 2}{x + 1}$

11) $y = \frac{-x}{x + 1}$

12) $y = \frac{2x + 1}{x + 1}$

13) $y = \frac{-x + 1}{x - 2}$

14) $y = \frac{2x + 3}{x + 1}$

15) $y = \frac{2x - 5}{x - 1}$

16) $y = \frac{2x}{1 - 3x}$

17) $y = 1 + \frac{2}{x - 1}$

18) $y = \frac{2x^3 - 3x}{x^3 + 1}$

19) $y = \frac{16x^2 - 8x}{16x^2 + 1}$

20) $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 1}$

21) $y = \frac{2x^2 - 2x}{x^2 + 2}$

$$22) y = \frac{x^2 + 7x + 3}{x^2}$$

$$25) y = \frac{2 - 4x}{4 - x^2}$$

$$28) y = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$$

$$31) y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

$$34) y = \frac{2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$37) y = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x(x - 16)}$$

$$40) y = \frac{\sqrt{x + 2}}{|x| - 2}$$

$$23) y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 3x - 4}$$

$$26) y = \frac{2x - 3}{5x^2 - 15x + 10}$$

$$29) y = \frac{1}{x^2}$$

$$32) y = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

$$35) y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$$

$$38) y = \frac{x + \sqrt{4x^2 - 3}}{2x + 3}$$

$$24) y = 1 + \frac{3}{x^2 - 1}$$

$$27) y = \frac{2x - 1}{x^3 + 1}$$

$$30) y = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$$

$$33) y = \frac{\sqrt{4x^2 + 1}}{x + 1}$$

$$36) y = \frac{5x + 3}{\sqrt{4x^2 - 1}}$$

$$39) y = \frac{-2x + 2019}{|x| - 2018}$$

Bài 11. Tìm các tiệm cận đứng và tiệm cận xiên (nếu có) của đồ thị hàm số sau:

$$1) y = x + 1 + \frac{1}{x - 1}$$

$$2) y = x + 3 + \frac{1}{x - 2}$$

$$3) y = x - 1 + \frac{2}{x + 1}$$

$$4) y = x + \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$5) y = x - 3 + \frac{1}{x^2}$$

$$6) y = 2x - 1 - \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$7) y = \frac{x^2 + 2}{2x - 4}$$

$$8) y = \frac{2x^2 - 3x - 6}{x + 2}$$

$$9) y = \frac{2x^2 + 9x + 11}{2x + 5}$$

$$10) y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}$$

$$11) y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$$

$$12) y = \frac{x^2 + x - 1}{x}$$

$$13) y = \frac{-x^2 - 3x + 4}{x + 2}$$

$$14) y = \frac{2x^2 + x + 1}{x - 1}$$

$$15) y = \frac{2x^2 + 3x}{x + 1}$$

$$16) y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$

$$17) y = \frac{-x^2 + 1}{x}$$

$$18) y = \frac{2x^2}{x^2 - 1}$$

$$19) y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$$

$$20) y = \frac{x^2 + x - 2}{x + 1}$$

$$21) y = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 3}$$

$$22) y = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2}$$

$$23) y = \frac{x^3 + x - 1}{x^2 - 1}$$

$$24) y = \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 + 3x + 2}$$

Bài 12. Tìm các tiệm cận (nếu có) của đồ thị hàm số sau:

$$a) y = \frac{\sqrt{x^2 + x}}{x - 1}$$

$$b) y = \frac{\sqrt{x + 3}}{x + 1}$$

$$c) y = \sqrt{x^2 - x + 1}$$

$$d) y = \sqrt{x^2 - 1}$$

$$e) y = 2x + \sqrt{x^2 - 1}$$

$$f) y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

$$g) y = x + \sqrt{x^2 + 2x}$$

$$h) y = x + \frac{2}{\sqrt{x}}$$

Dạng 3. Một số bài toán thực tế liên quan

Bài 13. Nồng độ oxygen trong hồ theo thời gian t cho bởi công thức $y(t) = 5 - \frac{15t}{9t^2 + 1}$, với y được tính theo mg/l và t được tính theo giờ, $t \geq 0$. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y(t)$. Từ đó, có nhận xét gì về nồng độ oxygen trong hồ khi thời gian t trở nên rất lớn?

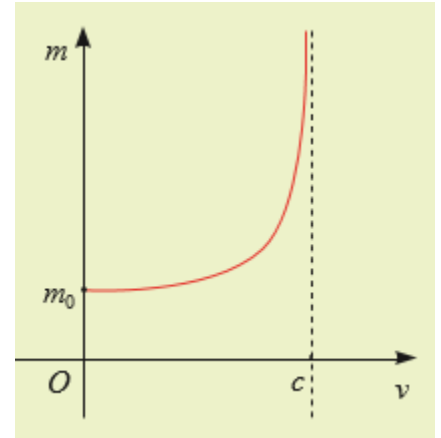
Bài 14. Theo thuyết tương đối hẹp, khối lượng m (kg) của một hạt phụ thuộc vào tốc độ di chuyển v (km/s)

của nó trong hệ quy chiếu quán tính theo công thức $m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$,

trong đó m_0 là khối lượng nghỉ của hạt, $c = 300000$ km/s là tốc độ ánh

sáng. Tìm tiệm cận của đồ thị hàm số khối lượng hạt $m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

Từ đó, có nhận xét gì khi hạt di chuyển với tốc độ càng gần tốc độ ánh sáng thì khối lượng của hạt thay đổi như thế nào?



Bài 15. Số dân của thị trấn x năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công

thức $y = f(x) = \frac{26x + 10}{x + 5}$ ($f(x)$ được tính bằng nghìn người). Xem $f(x)$ là một hàm số xác định trên nửa

khoảng $[0; +\infty)$, hãy tìm TCN của đồ thị hàm số đó.

Bài 16. Một bể chứa 5 000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 30 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 25 lít/phút.

a) Chứng tỏ nồng độ muối trong bể sau t phút (tính bằng tỉ số của khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể, đơn vị: gam/lít) là $f(t) = \frac{30t}{200 + t}$.

b) Xem $y = f(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

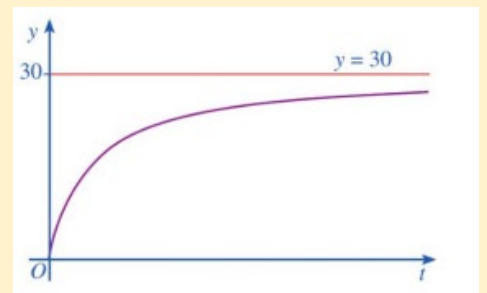
c) Nêu nhận xét về nồng độ muối trong bể sau thời gian t ngày càng lớn.

Giải

a) Sau 1 phút, ta có: khối lượng muối trong bể là $25 \cdot 30 \cdot t = 750t$ (gam); thể tích của lượng nước trong bể là $5\,000 + 25t$ (lít). Vậy nồng độ muối sau 1 phút là

$$f(t) = \frac{750t}{5000 + 25t} = \frac{30t}{200 + t} \text{ (gam/lít)}.$$

b) Ta có: $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{200 + t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(30 - \frac{6000}{200 + t} \right) = 30$



Vậy đường thẳng $y = 30$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$.

c) Ta có đồ thị hàm số $y = f(t)$ nhận đường thẳng $y = 30$ làm tiệm cận ngang, tức là khi t càng lớn thì nồng độ muối trong bể sẽ tiến gần đến mức 30 (gam/lít). Lúc đó, nồng độ muối trong bể sẽ gần như bằng nồng độ muối trong nước muối được bơm vào bể.

Bài 17. Số lượng sản phẩm bán được của một công ty trong x (tháng) được tính theo công thức:

$$S(x) = 200 \left(5 - \frac{9}{2+x} \right), \text{ trong đó } x \geq 1.$$

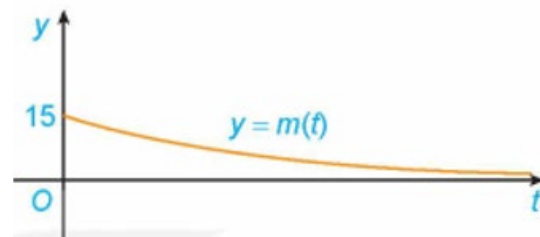
a) Xem $y = S(x)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[1; +\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.

b) Nêu nhận xét về số lượng sản phẩm bán được của công ty đó trong x (tháng) khi x đủ lớn.

Bài 18. Giả sử khối lượng còn lại của một chất phóng xạ (gam)

sau 1 ngày phân rã được cho bởi hàm số $m(t) = 15e^{-0,0012t}$.

Khối lượng $m(t)$ thay đổi ra sao khi $t \rightarrow +\infty$? Điều này thể hiện trên Hình vẽ bên như thế nào?



Bài 19. Để loại bỏ $p\%$ một loài tảo độc khỏi một hồ nước, người

ta ước tính chi phí bỏ ra là $C(p) = \frac{45p}{100-p}$ (triệu đồng), với $0 \leq p < 100$. Tìm tiệm cận đứng của đồ thị

hàm số $C(p)$ và nêu ý nghĩa thực tiễn của đường tiệm cận này.

Bài 20. Một công ty sản xuất đồ gia dụng ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là $C(x) = 2x + 50$ (triệu đồng). Khi đó $f(x) = \frac{C(x)}{x}$ là chi phí sản xuất trung bình cho mỗi sản phẩm. Chứng tỏ rằng hàm số $f(x)$ giảm và $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Tính chất này nói lên điều gì?

Bài 21. Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích bằng 144 m^2 . Biết độ dài một cạnh của mảnh vườn là x (m).

a) Viết biểu thức tính chu vi $P(x)$ (mét) của mảnh vườn.

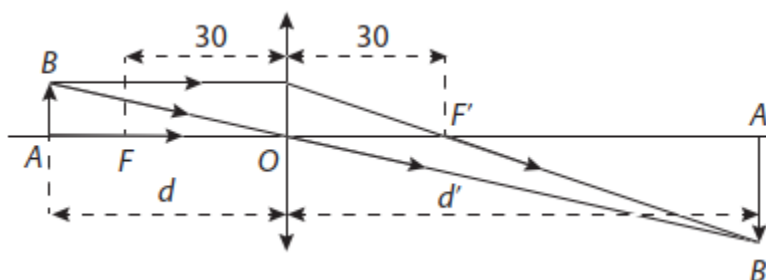
b) Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số $P(x)$.

Bài 22. Một thấu kính hội tụ có tiêu cự $f = 30 \text{ cm}$ như Hình 1.28. Trong Vật lí, ta biết rằng nếu đặt vật thật AB cách quang tâm O của thấu kính một khoảng d (cm) lớn hơn 30 cm thì được ảnh thật $A'B'$ cách quang tâm của thấu kính một khoảng d' (cm). Ngược lại, nếu $0 < d < 30$ thì ta có ảnh ảo. Công thức của thấu kính là

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f}.$$

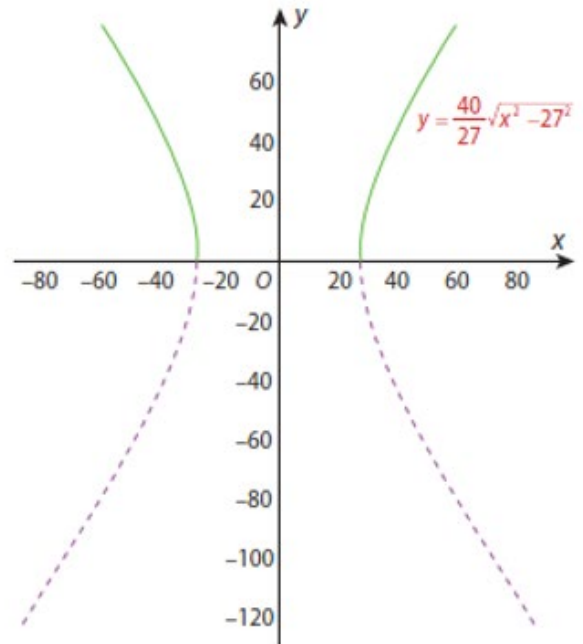
a) Từ công thức thấu kính, tìm biểu thức xác định d' theo d .

b) Xem biểu thức của d' ở câu a là một hàm số theo d , kí hiệu là $h(d)$. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $h(d)$.



Bài 23. Một ống khói của nhà máy điện hạt nhân có mặt cắt là một hypebol (H) có phương trình chính tắc là

$$\frac{x^2}{27^2} - \frac{y^2}{40^2} = 1 \text{ (Hình vẽ).}$$



Xét hai nhánh bên trên Ox của (H) là đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{40}{27}\sqrt{x^2 - 27^2}$ (phần nét liền đậm). Chứng

minh rằng đường thẳng $y = \frac{40}{27}x$ là một đường tiệm cận xiên của (C). Hãy chỉ ra thêm một đường tiệm cận xiên khác của (C).

Bài 24. Tại một công ty sản xuất đồ chơi A, công ty phải chi 50 000 USD để thiết lập dây chuyền sản xuất ban đầu. Sau đó, cứ sản xuất được một sản phẩm đồ chơi A, công ty phải trả 5 USD cho nguyên liệu thô và nhân công. Gọi x ($x \geq 1$) là số đồ chơi A mà công ty đã sản xuất và $T(x)$ (đơn vị USD) là tổng số tiền bao gồm cả chi phí ban đầu mà công ty phải chi trả khi sản xuất x đồ chơi A. Người ta xác định chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm

$$\text{đồ chơi A là } M(x) = \frac{T(x)}{x}.$$

a) Xem $M(x)$ là hàm số theo x xác định trên nửa khoảng $[1; +\infty)$, tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số này.

b) Nêu nhận xét về chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi A khi x đủ lớn.

D. Câu hỏi trắc nghiệm

- Câu 1:** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.
- A. Đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$
 - B. Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$
 - C. Đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$
 - D.** Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$
- Câu 2:** Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$. Kết luận nào sau đây đúng?
- A.** Đồ thị hàm số $f(x)$ có một tiệm cận đứng là $x = 1$.
 - B. Đồ thị hàm số $f(x)$ có hai tiệm cận đứng là $x = 1$ và $x = 2$.
 - C. Đồ thị hàm số $f(x)$ có một tiệm cận đứng là $x = 2$.
 - D. Đồ thị hàm số $f(x)$ không có tiệm cận đứng.
- Câu 3:** Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?
- A. Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = 1$ và $x = -1$.
 - B.** Đồ thị hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.
 - C. Hàm số đã cho có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 1$ và $y = -1$.
 - D. Đồ thị hàm số đã cho không có hai tiệm cận ngang.
- Câu 4:** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. Hãy chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:
- A. Đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.
 - B. Đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.
 - C.** Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$.
 - D. Đường thẳng $y = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.
- Câu 5:** Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$, liên tục trên các khoảng xác định và có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = +\infty$. Phát biểu nào sau đây **sai**?
- A. $x = 1$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.
 - B.** Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đường tiệm cận ngang là $y = 1$.
 - C. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đường tiệm cận ngang là $y = -3$.
 - D. $x = -2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$.
- Câu 6:** Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -4$. Phát biểu nào sau đây là đúng?
- A. Đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang và 1 tiệm cận đứng.
 - B.** Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 4$ và $y = -4$.
 - C. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.
 - D. Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng là các đường thẳng $x = 4$ và $x = -4$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(-2; -1)$ và có $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$. Hỏi

khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

- A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đúng hai tiệm cận đứng là các đường thẳng $x = -2$ và $x = -1$.
- B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đúng một tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.
- C.** Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đúng một tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$.
- D. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đúng hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 2$ và $y = -1$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn điều kiện $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận ngang $x = -2$.
- B. Đồ thị hàm số có đúng một đường tiệm cận ngang $y = 2$.
- C. Đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận ngang $x = -2, x = 2$.
- D.** Đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận ngang $y = 2, y = -2$.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.
- B.** Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$.
- C. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận.
- D. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = 2$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận ngang.
- B. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = -3$; $y = 3$.
- C. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.
- D. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $x = -3$; $x = 3$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $D = (0; +\infty)$ và $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có tiệm cận đứng và có tiệm cận ngang.
- B. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng và có tiệm cận ngang.
- C.** Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tiệm cận đứng và không có tiệm cận ngang.
- D. Đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có tiệm cận đứng và không có tiệm cận ngang.

Câu 12: Đồ thị của hàm số nào dưới đây nhận đường thẳng $y = -1$ là đường tiệm cận ngang?

- A.** $y = \frac{x-2}{1-x}$.
- B. $y = \frac{x+1}{2+x}$.
- C. $y = x^4 - x^2 + 2$.
- D. $y = -x^3 + 3x - 1$.

Câu 13: Đường tiệm cận ngang của đồ thị $y = \frac{3x-2}{x+4}$ là:

- A. $x = \frac{3}{4}$.
- B. $x = -4$.
- C. $y = \frac{3}{4}$.
- D.** $y = 3$.

Câu 14: Tìm đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{3-x}$.

- A.** $y = -2$. **B.** $y = \frac{2}{3}$. **C.** $y = -1$. **D.** $y = 3$.

Câu 15: Đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{1-2x}{-x+2}$ là:

- A.** $x = -2$; $y = -2$. **B.** $x = 2$; $y = -2$.
C. $x = -2$; $y = 2$. **D.** $x = 2$; $y = 2$.

Câu 16: Đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ có tiệm cận đứng là

- A.** $x = 1$. **B.** $y = -1$. **C.** $x = -1$. **D.** $y = 2$.

Câu 17: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{3x+2}$ có đồ thị (C) . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** (C) có tiệm cận đứng $x = \frac{2}{3}$. **B.** (C) có tiệm cận đứng $x = -\frac{2}{3}$.
C. (C) có tiệm cận ngang $y = -\frac{2}{3}$. **D.** (C) có tiệm cận ngang $y = -\frac{1}{2}$.

Câu 18: Đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x}{x-2}$ có tiệm cận đứng là đường thẳng

- A.** $y = 1$. **B.** $x = 2$. **C.** $x = -2$. **D.** $y = 2$.

Câu 19: Cho hàm số $y = \frac{2017}{x-2}$ có đồ thị (H) . Số đường tiệm cận của (H) là?

- A.** 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 20: Đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2+1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận (nếu chỉ tính TCD và TCN)?

- A.** 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 21: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+1}{x-1}$ là đường thẳng :

- A.** $y = \frac{1}{3}$. **B.** $y = 3$. **C.** $y = -1$. **D.** $y = 1$.

Câu 22: Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+3}$ là

- A.** $y = -\frac{1}{3}$. **B.** $y = 2$. **C.** $y = -3$. **D.** $x = 2$.

Câu 23: Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$

- A.** $x = -1$. **B.** $y = 1$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = 1$.

Câu 24: Tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+1}{x-2}$.

- A.** $x = 3$. **B.** $x = -\frac{3}{2}$. **C.** $x = -\frac{1}{2}$. **D.** $x = 2$.

Câu 25: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{-2x+2020}{x-2019}$ là.

- A. $x = -2$. B. $x = 2019$. C. $y = -2$. D. $y = 2019$.

Câu 26: Các tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ là

- A. $x = 2; y = 1$. B. $x = -\frac{1}{2}; y = 1$. C. $x = 1; y = -1$. D. $x = 1; y = 2$.

Câu 27: Đồ thị hàm số $y = \frac{x}{x^2+2}$ có các đường tiệm cận là

- A. $x = 0; y = 1$. B. $x = 0$. C. $y = 0$. D. $x = 1; y = 2$.

Câu 28: Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x+1}$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. $\frac{3}{2}$.

Câu 29: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{5}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình

- A. $x = 1$. B. $y = 5$. C. $x = 0$. D. $y = 0$.

Câu 30: Tìm phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{4x+1}{2x-2}$.

- A. $y = 2$. B. $x = 2$. C. $x = 1$. D. $y = \frac{-1}{2}$.

Câu 31: Phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = 2 + \frac{3}{1-x}$ là

- A. $x = 1$. B. $y = 2$. C. $y = 3$. D. $y = -1$.

Câu 32: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ là

- A. $y = -1$. B. $x = 1$. C. $y = 2$. D. $x = -\frac{1}{2}$.

Câu 33: Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$?

- A. $x = 1$. B. $y = -1$. C. $y = 2$. D. $x = -1$.

Câu 34: Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{1-4x}{2x-1}$.

- A. $y = 2$. B. $y = 4$. C. $y = \frac{1}{2}$. D. $y = -2$.

Câu 35: Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{3x}{x+4}$ có phương trình là

- A. $y = 3$. B. $y = -4$. C. $x = 3$. D. $x = -4$.

Câu 36: Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-1}{x+4}$ có phương trình là

- A. $x = 3$. B. $y = 3$. C. $y = -4$. D. $x = -4$.

Câu 37: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận ngang?

A. $y = \frac{3x+1}{x-1}$.

B. $y = x^3 - 2x^2 + 3x + 2$.

C. $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

D. $y = \frac{x^2+x+1}{x-2}$.

Câu 38: Đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{4x-5}$ có đường tiệm cận đứng là

A. $x = \frac{3}{2}$.

B. $x = \frac{5}{4}$.

C. $y = \frac{1}{2}$.

D. $y = \frac{3}{5}$.

Câu 39: Đồ thị hàm số $f(x) = \frac{1}{x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Câu 40: Đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ có tiệm cận đứng là

A. $y = 2$.

B. $x = 1$.

C. $x = -1$.

D. $y = -1$.

Câu 41: Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2+2}{(x-2)(x^2+1)}$ là

A. $x = -2$.

B. $x = 0$.

C. $x = 2$.

D. $x = -1$.

Câu 42: Đồ thị của hàm số nào sau đây không có tiệm cận?

A. $y = \frac{3x+1}{x-1}$.

B. $y = \frac{x^2-x+1}{x^2+2}$.

C. $y = -x^4 + 2x^2 + 2$.

D. $y = \frac{x}{x+2020}$.

Câu 43: Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{-x+1}$ có phương trình là

A. $x = 1$.

B. $x = -2$.

C. $y = 2$.

D. $y = -2$.

Câu 44: Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$?

A. $x = 1$

B. $y = -1$

C. $y = 2$

D. $x = -1$

Câu 45: Cho hàm số $y = \frac{2x-3}{x+1}$ có đồ thị là (C). Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. (C) có tiệm cận ngang là $y = 2$.

B. (C) chỉ có một tiệm cận.

C. (C) có tiệm cận ngang là $x = 2$.

D. (C) có tiệm cận đứng là $x = 1$.

Câu 46: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+5}$. Khi đó tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là đường thẳng nào trong các đường thẳng sau đây?

A. $y = 2$.

B. $x = 2$.

C. $y = -5$.

D. $x = -5$.

Câu 47: Cho hàm số $y = \frac{1-2x}{x+1}$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A.** (C) có tiệm cận ngang là $y = -1$. **B.** (C) có tiệm cận ngang là $y = -2$.
C. (C) có hai tiệm cận. **D.** (C) có tiệm cận đứng.

Câu 48: Đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-9}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ?

- A.** 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 49: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{-3x+2}$ là

- A.** $x = \frac{2}{3}$. **B.** $y = \frac{2}{3}$. **C.** $x = -\frac{1}{3}$. **D.** $y = -\frac{1}{3}$.

Câu 50: Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1-3x}{x+2}$ là

- A.** $x = 2$. **B.** $x = -3$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = -2$.

Câu 51: Cho hàm số $y = \frac{2}{x-2}$. Tìm đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

- A.** $y = -1$. **B.** $x = 2$. **C.** $y = 2$. **D.** $y = 0$.

Câu 52: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{5x-4}{x^2+2x-3}$ là?

- A.** $y = 0$. **B.** $y = 5$. **C.** $x = -3$. **D.** $x = 1$.

Câu 53: Phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x-1}$ là:

- A.** $y = 2$. **B.** $y = 1$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = 2$.

Câu 54: Đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{4x-1}$ có đường tiệm cận ngang là

- A.** $y = \frac{1}{4}$. **B.** $y = -1$. **C.** $x = \frac{1}{4}$. **D.** $x = -1$.

Câu 55: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ là:

- A.** 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 56: Phương trình các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{3-x}$ là

- A.** $y = 2; x = 3$. **B.** $y = 2; x = -3$. **C.** $y = 3; x = -2$. **D.** $y = -2; x = 3$.

Câu 57: Các đường tiệm cận đứng và ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ là

- A.** $x = 2; y = 1$. **B.** $x = -1; y = -2$. **C.** $x = 1; y = -2$. **D.** $x = 1; y = 2$.

Câu 58: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+2}$ là đường thẳng:

- A.** $x = -2$. **B.** $x = -1$. **C.** $y = 2$. **D.** $y = 1$.

Câu 59: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+3}$ là:

- A.** $x = -3$. **B.** $y = 1$. **C.** $x = 1$. **D.** $y = -3$.

Câu 60: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{5}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình

- A.** $y = 5$. **B.** $x = 1$. **C.** $y = 0$. **D.** $x = 0$.

Câu 61: Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{4x-3}{x+1}$ là đường thẳng

- A.** $y = 4$. **B.** $x = -1$. **C.** $y = -3$. **D.** $x = 4$.

Câu 62: Tìm phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{3x+2}{x+1}$.

- A.** $x = -1$. **B.** $y = 3$. **C.** $y = 2$. **D.** $x = 3$.

Câu 63: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{1-x}$ là

- A.** $y = -1$. **B.** $x = 1$. **C.** $y = 0$. **D.** $x = -1$.

Câu 64: Đồ thị của hàm số $y = \frac{2x+1}{2x-2}$ có đường tiệm cận ngang là:

- A.** $x = -1$. **B.** $y = -1$. **C.** $y = 1$. **D.** $x = 1$.

Câu 65: Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{2x-1}$?

- A.** $x = 2$. **B.** $x = \frac{1}{2}$. **C.** $y = \frac{1}{2}$. **D.** $y = 2$.

Câu 66: Đường thẳng nào dưới đây là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{3-2x}{x-1}$?

- A.** $y = -2$. **B.** $x = -2$. **C.** $x = 1$. **D.** $y = 3$.

Câu 67: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$. Chọn phát biểu **đúng**?

- A.** Đường tiệm cận đứng $x = 2$. **B.** Đường tiệm cận đứng $y = 1$.
C. Đường tiệm cận đứng $x = 1$. **D.** Đường tiệm cận đứng $y = 2$.

Câu 68: Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ là

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 69: Tìm phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{3x-2}$.

- A.** $x = \frac{1}{3}$. **B.** $x = \frac{2}{3}$. **C.** $y = \frac{2}{3}$. **D.** $y = \frac{1}{3}$.

Câu 70: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-\sqrt{2}}$. Các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho có

phương trình lần lượt là:

- A.** $x = \sqrt{2}, y = 1$. **B.** $x = 4, y = 1$.
C. $x = 1, y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. **D.** $x = 2, y = 1$.

Câu 71: Đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.

Câu 72: Các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x+2}$ có phương trình là

- A. $x = 1$; $y = -2$. B. $x = -2$; $y = 1$. C. $x = 2$; $y = 1$. D. $x = 1$; $y = 1$.

Câu 73: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2-x}{2x+1}$ là đường thẳng

- A. $y = 1$. B. $x = 2$. C. $y = -\frac{1}{2}$. D. $x = -\frac{1}{2}$.

Câu 74: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+3}$ có phương trình là

- A. $y = 3$. B. $y = 2$. C. $y = -2$. D. $y = -3$.

Câu 75: Phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-2}$ là

- A. $x = 2$. B. $y = \frac{1}{2}$. C. $y = 2$. D. $x = \frac{1}{2}$.

Câu 76: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$. Chọn phát biểu **đúng**?

- A. Đường tiệm cận đứng $x = 2$. B. Đường tiệm cận đứng $y = 1$.
C. Đường tiệm cận đứng $x = 1$. D. Đường tiệm cận đứng $y = 2$.

Câu 77: Đồ thị hàm số nào dưới đây không có tiệm cận ngang?

- A. $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x - 2}$. B. $y = \frac{\sqrt{16x^2 + 1}}{x - 2}$.
C. $y = \frac{2017x - 2018}{2018x - 2019}$. D. $y = \frac{2}{x}$.

Câu 78: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{3-x}$ là đường thẳng

- A. $y = \frac{2}{3}$. B. $y = -1$. C. $y = -2$. D. $y = 3$.

Câu 79: Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$?

- A. $x = 2$. B. $y = 1$. C. $x = 1$. D. $y = 2$.

Câu 80: Đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ có tiệm cận đứng là

- A. $x = 1$. B. $y = -1$. C. $x = -1$. D. $y = 2$.

Câu 81: Phương trình đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-2}$ là

- A. $x = 2$. B. $y = \frac{1}{2}$. C. $y = 2$. D. $x = \frac{1}{2}$.

Câu 82: Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + x - 2}{x - 2}$ là.

A. $x = 2$.

B. $y = -2$.

C. $y = 2$.

D. $x = -2$.

Câu 83: Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{8x + 2}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Câu 84: Đường thẳng $y = \frac{1}{3}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

A. $y = \frac{2x + 1}{3x - 1}$.

B. $y = \frac{3x + 1}{x - 3}$.

C. $y = \frac{x + 1}{3x - 3}$.

D. $y = \frac{-x + 1}{3x - 1}$.

Câu 85: Đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau đây có tiệm cận ngang?

A. $y = x^4 - x^2 - 2$.

B. $y = \frac{3x^2 - 1}{x + 1}$.

C. $y = \frac{2 - x}{x}$.

D. $y = x^3 - x^2 + x - 3$.

Câu 86: Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x}{x + 2}$

A. $x = 0$.

B. $x = 2$.

C. $x = 1$.

D. $x = -2$.

Câu 87: Đồ thị hàm số $y = \frac{x + 1}{4x - 1}$ có đường tiệm cận ngang là đường thẳng nào dưới đây?

A. $x = -1$.

B. $y = -1$.

C. $y = \frac{1}{4}$.

D. $x = \frac{1}{4}$.

Câu 88: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{x + 1}{x - 2}$ là đường thẳng

A. $x = -2$.

B. $x = 2$.

C. $y = 1$.

D. $y = -1$.

Câu 89: Cho hàm số $y = \frac{x - 2}{x - 1}$. Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là

A. $y = 1$.

B. $x = 2$.

C. $y = 2$.

D. $x = 1$.

Câu 90: Phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{3 - 4x}{2x + 1}$ là.

A. $x = -\frac{1}{2}$.

B. $y = \frac{3}{2}$.

C. $y = -2$.

D. $y = -\frac{1}{2}$.

Câu 91: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = 1 + \frac{1}{x - 1}$ là đường thẳng

A. $x = 1$.

B. $y = -1$.

C. $y = 1$.

D. $y = 0$.

Câu 92: Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x - 3}{x + 1}$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. $\frac{3}{2}$.

Câu 93: Đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+3}$ có tiệm cận ngang là

- A. $y = -\frac{1}{3}$. B. $y = \frac{1}{2}$. C. $y = 2$. D. $y = -3$.

Câu 94: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{1-2x}{x-2}$ là

- A. $x = 2$. B. $y = 1$. C. $x = -2$. D. $y = -2$.

Câu 95: Xác định tọa độ điểm I là giao điểm của 2 đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-3}{x+4}$.

- A. $I(2;4)$. B. $I(2;-4)$. C. $I(4;2)$. D. $I(-4;2)$.

Câu 96: Ta có $\log_{\sqrt{a}} x = 2 \log_a x$ nên D sai. Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

$$y = \frac{x-3}{2x+1}?$$

- A. $x = -\frac{1}{2}$. B. $y = \frac{1}{2}$. C. $y = -\frac{1}{2}$. D. $x = \frac{1}{2}$.

Câu 97: Cho hàm số $y = \frac{2017}{x-2}$ có đồ thị (H) . Số đường tiệm cận của (H) là?

- A. 3. B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 98: Đồ thị hàm số $f(x) = \frac{2x+3}{x^2-1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

- A. 3. B. 1. C. 0. D. 2.

Câu 99: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$

- A. $x = 1$. B. $y = 2$. C. $y = -1$. D. $x = -\frac{1}{2}$.

Câu 100: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x-5}$ là đường thẳng

- A. $x = 1$. B. $x = 5$. C. $x = -5$ D. $y = 5$.

Câu 101: Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{-3x+2}{x+1}$ là

- A. $x = -1$. B. $x = -3$. C. $x = 2$. D. $x = 1$.

Câu 102: Đường tiệm ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-6}{x-2}$ là

- A. $x-3=0$. B. $y-2=0$. C. $y-3=0$. D. $x-2=0$.

Câu 103: Đồ thị của hàm số nào sau đây có tiệm cận ngang.

- A. $y = \frac{1+2x^2}{x}$. B. $y = \frac{1+2x}{x}$. C. $y = \frac{1+2x^2}{\sqrt{x}}$. D. $y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

Câu 104: Cho hàm số $y = \frac{2018}{x-2}$ có đồ thị (H) . Số đường tiệm cận của (H) là

- A. 2. B. 0. C. 3. D. 1.

Câu 105: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{2x-3}$ là

- A.** $y = 1$. **B.** $y = -\frac{2}{3}$. **C.** $x = \frac{3}{2}$. **D.** $y = \frac{1}{2}$.

Câu 106: Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$. Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là

- A.** Đường thẳng $y = 1$. **B.** Đường thẳng $x = 1$.
C. Đường thẳng $y = 2$. **D.** Đường thẳng $x = 2$.

Câu 107: Giao điểm đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-2}$ là

- A.** $I(2; -2)$. **B.** $N(2; -1)$. **C.** $M(-2; 2)$. **D.** $J(2; 2)$.

Câu 108: Đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-3}$ có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang theo thứ tự là

- A.** $y = 1, x = 3$. **B.** $x = 3, y = 1$. **C.** $x = -3, y = 1$. **D.** $x = 1, y = 3$.

Câu 109: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2020}{x+2019}$ là

- A.** $y = -2019$. **B.** $y = 1$. **C.** $x = -2019$. **D.** $x = 2020$.

Câu 110: Đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{1-x}{-x+2}$ có phương trình lần lượt là

- A.** $x = 1; y = 2$. **B.** $x = 2; y = 1$. **C.** $x = 2; y = \frac{1}{2}$. **D.** $x = 2; y = -1$.

Câu 111: Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2-x+1}{x^2-x-2}$ là

- A.** 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 112: Đồ thị hàm số $y = \frac{2x}{x^2+2x-3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ?

- A.** 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 113: Đồ thị hàm số $y = \frac{2x-4}{x+1}$ có tiệm cận ngang là

- A.** $x = -1$. **B.** $y = -4$. **C.** $x = 2$. **D.** $y = 2$.

Câu 114: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2-3x+2}$.

- A.** 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 115: Tổng số các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{4x^2-4x-8}{(x-2)(x+1)^2}$ bằng?

- A.** 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 116: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = \frac{2x-4}{x-3}$. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **sai**.

- A.** (C) có đúng 1 tiệm cận đứng. **B.** (C) có đúng 1 tâm đối xứng.
C. (C) có đúng 1 tiệm cận ngang. **D.** (C) có đi qua điểm $A(2; 1)$.

Câu 117: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+5}{-3x-1}$ là

- A. $y = -5$. B. $y = \frac{-2}{3}$. C. $y = \frac{-1}{3}$. D. $y = -1$.

Câu 118: Tổng số các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{4x^2 - 4x - 8}{(x-2)(x+1)^2}$ là

- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 119: Đồ thị hàm số $y = \frac{2x}{x^2 + 2x - 3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Câu 120: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x^2 + 2x + 3}$ là

- A. $y = -1$. B. $y = 1$. C. $y = -\frac{1}{3}$. D. $y = 0$.

Câu 121: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x-1}{x^3 + x - 2}$. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số trên là

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

Câu 122: Đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x^2 - 9}$ có bao nhiêu tiệm cận?

- A. 4. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 123: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1}$ là

- A. 1. B. 3. C. 0. D. 2.

Câu 124: Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 - 1}$ là

- A. 3. B. 2. C. 4. D. 1.

Câu 125: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ là:

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 126: Đồ thị hàm số $y = \frac{x+3}{x^3 - 3x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

- A. 3. B. 4. C. 1. D. 2.

Câu 127: Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = 1 - \frac{x+2}{x^2 - x - 2}$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 128: Cho hàm số $y = \frac{x^3 - 2x^2 + 1010x - 2020}{x^3 - 8}$. Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị của hàm số là

- A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.

Câu 129: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận xiên?

- A. $y = \frac{x}{x+1}$. B. $y = \frac{x^2}{x^2+1}$. C. $y = x^2 - 1$. **D.** $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$.

Câu 130: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{3}{x^2 - 4}$ là

- A. 1. **B.** 3. C. 0. **D.** 2.

Câu 131: Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$ là

- A. $y = -x + 4$ B. $y = -x$. **C.** $y = x - 1$. **D.** $y = x$.

Câu 132: Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + x - 2}{x + 1}$ là

- A. $y = -x$. **B.** $y = x$. C. $y = x - 2$. **D.** $y = -x - 2$.

Câu 133: Gọi n là số đường tiệm cận đứng và đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x^2 - 4x + 3}$. Tìm n ?

- A.** $n = 3$. B. $n = 2$. C. $n = 0$. **D.** $n = 1$.

Câu 134: Hệ số góc của đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{5x^2 - 4x - 1}{x + 2}$ là:

- A. 2. B. 1. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 135: Đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = x + 1 + \frac{2}{x + 2}$ có phương trình là

- A. $x = -2$. **B.** $y = x + 1$. C. $y = x - 1$. **D.** $y = 0$.

Câu 136: Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$ có dạng $y = ax + b$. Giá trị của $a + b$ là:

- A. 0. **B.** - 3. C. - 2. **D.** 3.

Câu 137: Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 2}$ là :

- A. $y = x + 1$. **B.** $y = x - 1$. C. $y = x + 2$. **D.** $y = x$.

Câu 138: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{|x - 2| - 1}{2x + 3}$ là

- A. 1. B. 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 139: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 3x + 1}$. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số là

- A. 3. **B.** 2. C. 4. **D.** 1.

Câu 140: Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + x - 2}{x + 2}$ là

- A. $y = x + 1$. **B.** $y = x - 1$. C. $y = x + 2$. **D.** $y = x$.

Câu 141: Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 1}$. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ có dạng $y = ax + b$. Giá trị

của $a^2 + b^2$ là:

- A. 1. **B.** 2. C. 4. **D.** 8.

Câu 142: Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2(x-4)}{x^2+1}$ có đường tiệm cận xiên là?

- A.** $y = x - 4$. **B.** $y = x + 4$. C. $y = x - 1$. **D.** $y = x + 1$.

Câu 143: Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^2 - 1}$ là

- A. $y = 2x - 1$. **B.** $y = 2x - 4$. C. $y = x + 1$. **D.** $y = 2x - 3$.

Câu 144: Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - x + 1}$ là

- A. $y = x - 1$. **B.** $y = 2x - 2$. C. $y = x - 1$. **D.** $y = x - 2$.

Câu 145: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(x) = \frac{x}{|x| - 1}$ là

- A. 1. **B.** 2. C. 3. **D.** 4.

Câu 146: Cho hàm số $y = \frac{2x + 2019}{|x| + 1}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang và có đúng một đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x = -1$.
B. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 2$, $y = -2$ và không có tiệm cận đứng.
C. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang và có hai tiệm cận đứng.
D. Đồ thị hàm số có đúng một tiệm cận ngang là các đường thẳng $y = 2$ và không có tiệm cận đứng.

Câu 147: Tìm tất các tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 - 1}}$

- A. $y = \pm 1$. **B.** Không tồn tại tiệm cận ngang.
C. $y = 1$. **D.** $y = -1$.

Câu 148: Đồ thị hàm số $y = \frac{-4x + 1}{2|x| + 1}$ có tất cả bao nhiêu tiệm cận?

- A. Một. **B.** Hai. C. Ba. **D.** Bốn.

Câu 149: Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{4x^2 - x + 1}}{2x + 1}$. Các tiệm cận ngang của đồ thị hàm số có phương trình là

- A.** $y = 1$, $y = -1$. **B.** $y = -\frac{1}{2}$ C. $y = 1$. **D.** $y = 2$.

Câu 150: Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ là

- A.** 2. **B.** 4. C. 3. **D.** 1.

Câu 151: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1} - 2x}{3x - 2}$ bằng

- A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 152: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+x}-1}{x+2}$ là

- A. 2. B. 1. C. 4. **D. 3.**

Câu 153: Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$ là

- A. $T=2$. B. $T=1$. **C. $T=0$.** D. $T=3$.

Câu 154: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^2+2x+3}-x$ là

- A. $y=-1$. **B. $y=1$.** C. Không có. D. $y=0$.

Câu 155: Tổng số các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x-4}}{x-1}$ là

- A. 0. **B. 1.** C. 2. D. 3.

Câu 156: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{2x^2-2}}$ có đồ thị (C) . Tìm số đường tiệm cận đứng của đồ thị (C) .

- A. 2 **B. 1.** C. 0. D. 3.

Câu 157: Đồ thị của hàm số $y = \frac{3\sqrt{x}-5}{2x^2-5x-7}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

- A. 2. **B. 1.** C. 3. D. 4.

Câu 158: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	+		+	0
y	$2 \nearrow 4$		$-\infty \nearrow 3$	-1

Hỏi đồ thị hàm số có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

- A. 1. B. 0. C. 2. **D. 3.**

Câu 159: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$	-		-	-
$f(x)$	$0 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow -\infty$	$+\infty \searrow -\infty$	$-\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 1. B. 2. **C. 3.** D. 0.

Câu 160: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$ có bảng biến thiên như hình bên.

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	2	$+\infty$	2	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $f(-3) > f(-2)$.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
C. Đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
D. Hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 2 .

Câu 161: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$-\infty$	4	-1	$+\infty$

Mệnh đề nào sau đây **đúng** ?

- A.** Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang.
B. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang $y = 4$.
C. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.
D. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = 0$.

Câu 162: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	-1	0

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là

- A.** 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 163: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
y'	$+$	$+$	0	$-$
y	-1	$+\infty$	2	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ có tổng số bao nhiêu tiệm cận (gồm các tiệm cận đứng và tiệm cận ngang)?

- A.** 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 164: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên được cho như hình vẽ

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'		$-$	$-$
y	3	$-\infty$	3

Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

- A. 3. B. 4. C. 1. **D. 2.**

Câu 165: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
y'	$-$	$-$	0	$+$
y	0	$+\infty$	-3	3

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 2. B. 4. **C. 3.** D. 1.

Câu 166: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'		$-$	$-$
y	2	$-\infty$	2

Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là đường thẳng có phương trình

- A. $x = 2$. B. $y = 2$. **C. $x = 1$.** D. $y = 1$.

Câu 167: Cho hàm $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$-$		$-$	0	$+$
y	1		$+\infty$	-2	$+\infty$

Chọn khẳng định đúng.

- A. Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng và một đường tiệm cận ngang.
 B. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang.
C. Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng và một đường tiệm cận ngang.
 D. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng.

Câu 168: Cho hàm số $y = f(x)$ có xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ liên tục trên các khoảng xác định của nó và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	+		+	0	-
y	$-\infty$	$+\infty$	-7	3	-1

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 3. **B. 2.** C. 1. D. 0.

Câu 169: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Hỏi đồ thị hàm số $y = f(x)$ có mấy đường tiệm cận?

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	$-$	0	$+$	$+$
y	$-\infty$	1	$+\infty$	-2	$+\infty$
					3

- A. 1. **B. 4.** **C. 3.** D. 2.

Câu 170: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	0	1	$+\infty$	$+\infty$

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 3. **B. 4.** **C. 2.** D. 1.

Câu 171: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình sau:

x	$-\infty$	1		$+\infty$
y	2	$+\infty$	3	5

Số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là

- A. 2.** **B. 3.** C. 1. D. 4.

Câu 175: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	$+\infty$
y'	+	
y	-3	5

Số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là

- A. 3. **B. 2.** C. 1. D. 0.

Câu 176: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ?

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
y'	+		+	+
y	0	$+\infty$	$+\infty$	0

Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là:

- A. 1. **B. 3.** C. 4. D. 2.

Câu 177: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	+		-	0	+
y	$-\infty$	1	$+\infty$	$+\infty$	3

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là

- A. 4. **B. 3.** C. 1. D. 2.

Câu 178: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$			+	-
$f(x)$		$-\infty$	$+\infty$	0

- A. 2. **B. 4.** C. 1. **D. 3.**

Bài 4. Khảo sát và vẽ đồ thị một số hàm số cơ bản

A. Kiến thức cần nhớ

1. Sơ đồ khảo sát hàm số

Hàm số $y = f(x)$ thường cho biết sự thay đổi của một đại lượng y theo đại lượng x nào đó. Để hiểu rõ hơn về sự thay đổi này, bằng công cụ đạo hàm, người ta thường khảo sát về sự đồng biến, nghịch biến, các điểm cực trị, ... của hàm số $y = f(x)$. Ngoài ra, người ta vẽ đồ thị của hàm số như một cách biểu diễn trực quan sự thay đổi của y theo x .

Để khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta thực hiện theo các bước sau đây:

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số

Bước 2: Xét sự biến thiên của đồ thị hàm số

- Tìm đạo hàm y' , xét dấu y' , xác định khoảng đơn điệu, cực trị (nếu có) của hàm số.
- Tìm giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực của hàm số và các đường tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).
- Lập bảng biến thiên của hàm số.

Bước 3: Vẽ đồ thị của hàm số

- Xác định các điểm cực trị (nếu có), giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (nếu có và dễ tìm), ...
- Vẽ các đường tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có)
- Vẽ đồ thị hàm số.

Chú ý chung:

- Chỉ ra tâm đối xứng và trục đối xứng của đồ thị hàm số (nếu có).

Chú ý 1:

- Đồ thị của hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) luôn nhận điểm $I(x_0; y_0)$ làm tâm đối xứng, trong đó x_0 là nghiệm của phương trình $y'' = 0$ và $y_0 = y(x_0)$.

Chú ý 2: Đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, ($c \neq 0; ad - bc \neq 0$)

- Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm tâm đối xứng;
- Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm trục đối xứng.

Chú ý 3: Đồ thị của hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ($a \neq 0, m \neq 0$)

- Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng;
- Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm trục đối xứng.

2. Vận dụng đạo hàm và khảo sát hàm số để giải quyết một số vấn đề liên quan đến thực tiễn

- Ta có thể vận dụng đạo hàm và khảo sát hàm số để giải quyết nhiều bài toán liên quan đến thực tiễn trong những lĩnh vực khác nhau như kinh tế, khoa học, kỹ thuật, ...

Một số lưu ý quan trọng:

- Đạo hàm $f'(a)$ là tốc độ thay đổi tức thời của đại lượng $y = f(x)$ đối với x tại điểm $x = a$. Dưới đây, chúng ta xem xét một số ứng dụng của ý tưởng này đối với vật lý, hoá học, sinh học và kinh tế:
 - Nếu $s = s(t)$ là hàm vị trí của một vật chuyển động trên một đường thẳng thì $v = s'(t)$ biểu thị vận tốc tức thời của vật (tốc độ thay đổi của độ dịch chuyển theo thời gian). Tốc độ thay đổi tức thời của vận tốc theo thời gian là gia tốc tức thời của vật: $a(t) = v'(t) = s''(t)$.
 - Nếu $C = C(t)$ là nồng độ của một chất tham gia phản ứng hoá học tại thời điểm t , thì $C'(t)$ là tốc độ phản ứng tức thời (tức là độ thay đổi nồng độ) của chất đó tại thời điểm t .
 - Nếu $P = P(t)$ là số lượng cá thể trong một quần thể động vật hoặc thực vật tại thời điểm t , thì $P'(t)$ biểu thị tốc độ tăng trưởng tức thời của quần thể tại thời điểm t .
 - Nếu $C = C(x)$ là hàm chi phí, tức là tổng chi phí khi sản xuất x đơn vị hàng hoá, thì tốc độ thay đổi tức thời $C'(x)$ của chi phí đối với số lượng đơn vị hàng được sản xuất được gọi là chi phí biên.
 - Về ý nghĩa kinh tế, chi phí biên $C'(x)$ xấp xỉ với chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo, tức là đơn vị hàng hoá thứ $x + 1$.

B. Các dạng bài tập & phương pháp giải

Dạng 1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a \neq 0$)

Ví dụ 1. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Giải

1. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

2. Sự biến thiên:

Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

Trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng đó.

Trên khoảng $(0; 2)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng đó.

Cực trị:

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{cd} = 2$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ và $y_{ct} = -2$.

Các giới hạn tại vô cực: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	↗		2	↘		$+\infty$
				-2			

3. Đồ thị:

Khi $x = 0$ thì $y = 2$ nên $(0; 2)$ là giao điểm của đồ thị với trục Oy .

Ta có $y = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 2 = 0$

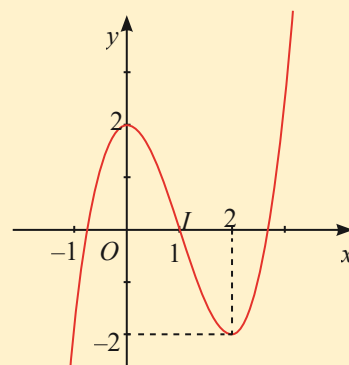
$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = 1 - \sqrt{3} \text{ hoặc } x = 1 + \sqrt{3}$$

Vậy đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại ba điểm $(1; 0)$, $(1 - \sqrt{3}; 0)$,

$(1 + \sqrt{3}; 0)$.

Điểm $(0; 2)$ là điểm cực đại và điểm $(2; -2)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

Đồ thị của hàm số đã cho được biểu diễn trên Hình 1. Đồ thị của hàm số có tâm đối xứng là điểm $I(1; 0)$.



Ví dụ 2. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = -x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$.

Giải

1. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

2. Sự biến thiên:

Chiều biến thiên:

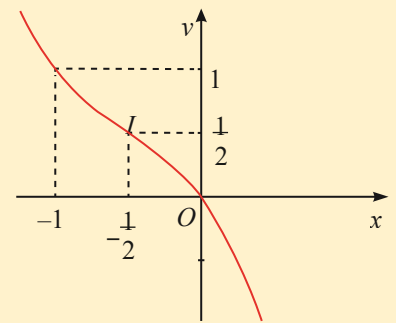
Đạo hàm $y' = -3x^2 - 3x - \frac{3}{2}$. Do $y' < 0$ trên $\mathbb{R}$ nên hàm số NB trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Hàm số đã cho không có cực trị.

Các giới hạn tại vô cực: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$+\infty$
y'		$-$
y	$+\infty$	$-\infty$



3. Đồ thị:

Đồ thị của hàm số đi qua gốc tọa độ $O(0; 0)$ và điểm $(-1; 1)$.

Đồ thị của hàm số có tâm đối xứng là điểm $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Ví dụ 3. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số sau:

a) $y = -2x^3 - 3x^2 + 1$;

b) $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$.

c) $y = -x^2 + 4x - 3$.

Dạng 2. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}, (c \neq 0; ad - bc \neq 0).$

Ví dụ 4. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}.$

Giải

1. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$

2. Sự biến thiên:

Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = \frac{3}{(x+1)^2}$. Vì $y' > 0$ với mọi $x \neq -1$ nên hàm số ĐB trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty).$

Tiệm cận:

Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 2; \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 2$. Suy ra đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -1^+} y = -\infty; \lim_{x \rightarrow -1^-} y = +\infty$; Suy ra đường thẳng $x = -1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'			
		+	+
y	2	$+\infty$	$-\infty$

3. Đồ thị

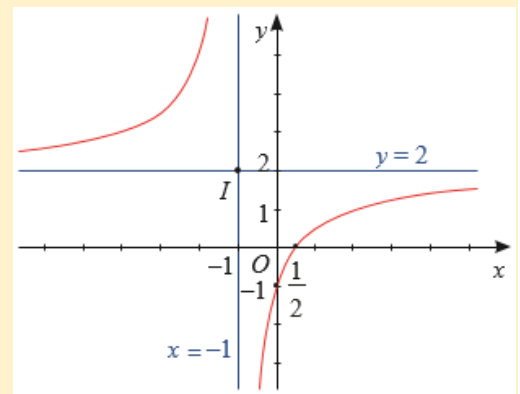
Đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại điểm $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ và giao với

trục Oy tại điểm $(0; -1)$.

Đồ thị của hàm số được biểu diễn như hình bên.

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(-1; 2)$

Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x = -1$ và $y = 2$.



Ví dụ 5. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số.

a) $y = \frac{x+1}{x-1}$

b) $y = \frac{2x}{3x-1}$

c) $y = \frac{5+x}{2-x}$

d) $y = \frac{-x+2}{2x+3}$

Dạng 3. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ ($a \neq 0, m \neq 0$, đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu)

Ví dụ 6. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$.

Giải

1. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. Sự biến thiên:

• Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$. Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

Trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng đó.

Trên các khoảng $(0; 1)$ và $(1; 2)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng đó.

Cực trị:

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ và $y_{CT} = 6$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CD} = 2$.

Các giới hạn tại vô cực và tiệm cận:

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

Ta có: $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - 2}{x^2 - x} = 1$ và $b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1} - x \right) = 3$. Suy ra đường thẳng $y = x + 3$ là tiệm cận

xiên của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} y = -\infty$. Suy ra đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		+	0	-		-	0	+	
y	$-\infty$		2		$+\infty$		6		$+\infty$

3. Đồ thị:

Ta có $y = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 + \sqrt{3}$ hoặc

$x = -1 - \sqrt{3}$.

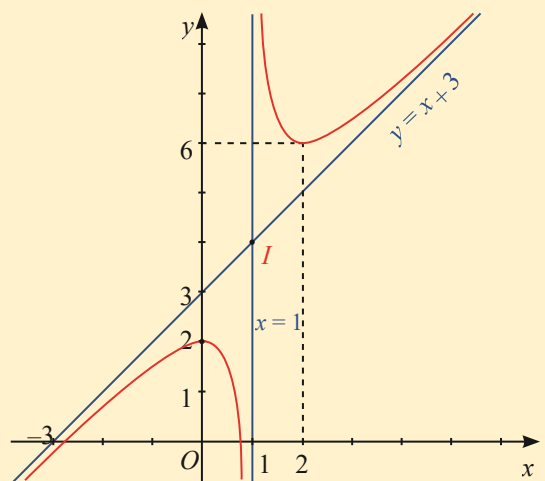
Vậy đồ thị hàm số giao với trục Ox tại điểm $(-1 + \sqrt{3}; 0)$ và điểm $(-1 - \sqrt{3}; 0)$.

Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại điểm $(0; 2)$.

Đồ thị hàm số được biểu diễn trên Hình vẽ.

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(1; 4)$.

Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x = 1$ và $y = x + 3$.



Ví dụ 7. Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = x - \frac{1}{x}$

b) $y = -x + 2 - \frac{1}{x+1}$

c) $y = \frac{-x^2 - x + 2}{x+1}$

d) $y = \frac{-x^2 - 3x + 4}{x+2}$

Dạng 4. Vận dụng đạo hàm và khảo sát hàm số để giải quyết một số vấn đề liên quan đến thực tiễn

Ví dụ 8. Xét tình huống: Giả sử chi phí tiền xăng C (đồng) phụ thuộc tốc độ trung bình v (km/h) theo công thức: $C(v) = \frac{16000}{v} + \frac{5}{2}v, (0 < v < 120)$

- a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $C(v)$ trên $(0; 120]$.
- b) Tài xế xe tải lái xe với tốc độ trung bình là bao nhiêu để tiết kiệm tiền xăng nhất?

Giải

a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $C(v)$:

Tập xác định: $D = (0; 120]$.

Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

- Đạo hàm $C'(v) = 0 \Leftrightarrow v = -80$ (loại) hoặc $v = 80$.
- Trên khoảng $(0; 80)$, $C'(v) < 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng này.
- Trên khoảng $(80; 120)$, $C'(v) > 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng này.

+ Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại $v = 80$, $C_{CT} = C(80) = 400$.

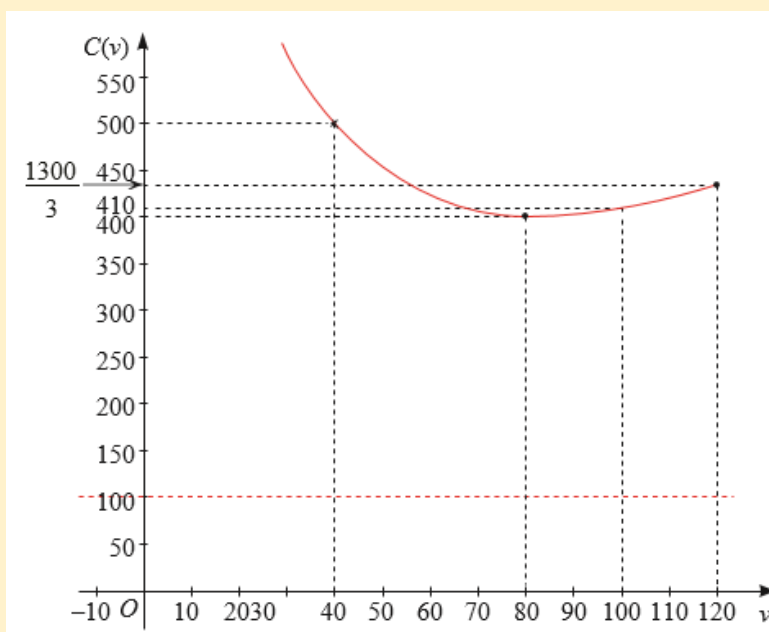
+ Giới hạn vô cực và tiệm cận: $\lim_{v \rightarrow 0^+} C(v) = +\infty$ nên đường thẳng $v = 0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

+ Bảng biến thiên:

v	0	80	120	
$C'(v)$		-	0	+
$C(v)$	$+\infty$	400	$\frac{1300}{3}$	

– Đồ thị:

Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $(80; 400)$ và đi qua các điểm $(40; 500)$, $(100; 410)$, $(120; \frac{1300}{3})$ như Hình vẽ bên dưới.



b) Quan sát đồ thị hàm số, ta nhận thấy hàm số đạt GTNN khi $v = 80$ và GTNN là 400. Như vậy, để tiết kiệm tiền xăng nhất, tài xế nên chạy xe với tốc độ trung bình là 80 km/h.

Ví dụ 9. Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa ($1 \leq x \leq 18$). Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí: $C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500$. Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Gọi $B(x)$ là số tiền bán được và $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa.

a) Hãy viết biểu thức tính $B(x)$ và $L(x)$ theo x .

b) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $L(x)$ trên $[1; 18]$.

c) Hộ làm nghề dệt này cần sản xuất và bán ra mỗi ngày bao nhiêu mét vải lụa để thu được lợi nhuận tối đa? Tính lợi nhuận tối đa đó.

Giải

a) Khi bán x mét vải lụa:

Số tiền thu được là: $B(x) = 220x$ (nghìn đồng).

Lợi nhuận thu được là: $L(x) = B(x) - C(x) = -x^3 + 3x^2 + 240x - 500$ (nghìn đồng).

b) Hàm số $L(x)$ xác định trên $[1; 18]$.

– Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

Đạo hàm $L'(x) = -3x^2 + 6x + 240$; $L'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$ hoặc $x = -8$ (loại).

Trên khoảng $(1; 10)$, $L'(x) > 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng này.

Trên khoảng $(10; 18)$, $L'(x) < 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng này.

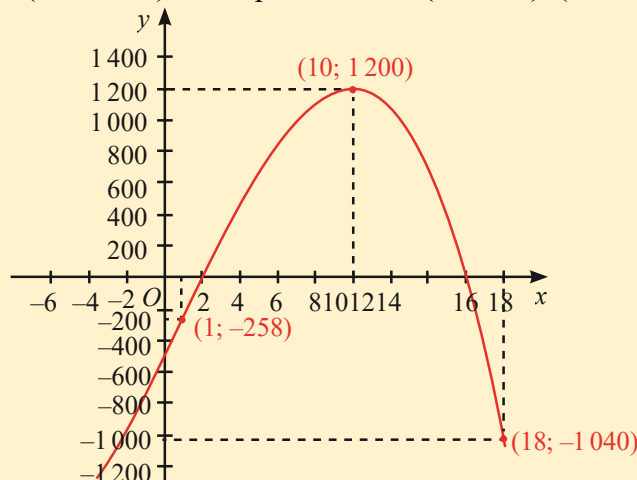
+ Cực trị: Hàm số $L(x)$ đạt cực đại tại $x = 10$ và $L_{CD} = L(10) = 1\,200$.

+ Bảng biến thiên:

x	1	10	18
$L'(x)$	+	0	–
$L(x)$	–258	1 200	–1 040

– Đồ thị:

Đồ thị hàm số có điểm cực đại $(10; 1\,200)$ và đi qua các điểm $(1; -258)$, $(18; -1\,040)$ như Hình 8.

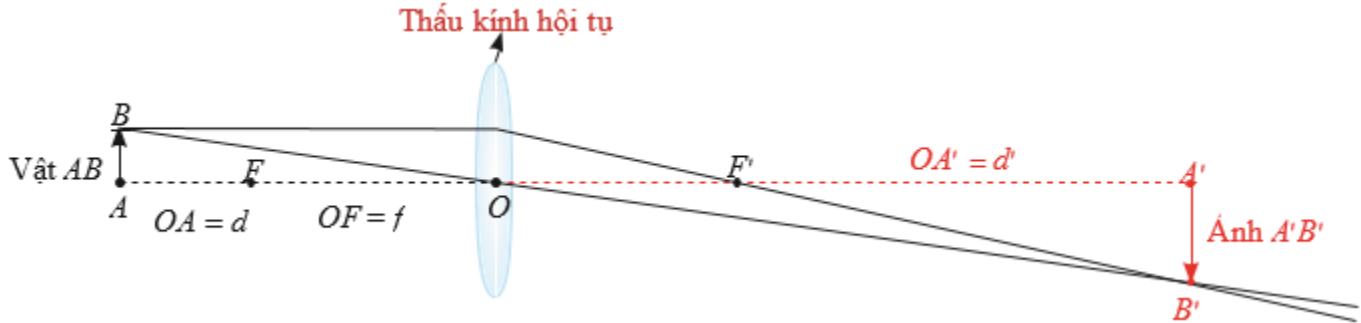


c) Quan sát đồ thị hàm số, ta nhận thấy khi $x = 10$ thì hàm số đạt giá trị lớn nhất là 1 200.

Như vậy, hộ làm nghề dệt cần sản xuất và bán ra mỗi ngày 10 mét vải lụa để thu được lợi nhuận tối đa. Lợi nhuận tối đa này là 1 200 nghìn đồng.

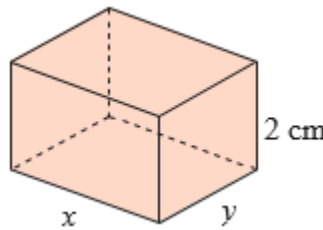
Ví dụ 10. Xét một vật thật đặt trước thấu kính hội tụ có tiêu cự $f > 0$. Gọi d là khoảng cách từ vật đến thấu kính ($d > 0$), d' là khoảng cách từ thấu kính đến ảnh (ảnh thật thì $d' > 0$, ảnh ảo thì $d' < 0$). Ta có công thức: $\frac{1}{f} = \frac{1}{d} + \frac{1}{d'}$ hay $d' = \frac{df}{d-f}$. (Vật lí 11, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2012, trang 182, 187).

Xét trường hợp $f = 3$, đặt $x = d, y = d'$. Ta có hàm số $y = \frac{3x}{x-3}$ và $x \neq 3$.



- Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số trên.
- Dựa vào đồ thị hàm số trên, hãy cho biết vị trí của vật để ảnh của vật là: ảnh thật, ảnh ảo.
- Khi vật tiến gần đến tiêu điểm thì ảnh thay đổi như thế nào?

Ví dụ 11. Người ta muốn chế tạo một chiếc hộp hình hộp chữ nhật có thể tích 500 cm^3 với yêu cầu dùng ít vật liệu nhất. Chiều cao của hộp phải là 2 cm , các kích thước khác là x, y với $x > 0$ và $y > 0$.



- Hãy biểu thị y theo x .
- Chứng tỏ rằng diện tích toàn phần của chiếc hộp là: $S(x) = 500 + 4x + \frac{1000}{x}$
- Lập bảng biến thiên của hàm số $S(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$.
- Kích thước của hộp là bao nhiêu thì dùng ít vật liệu nhất? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.)

C. Bài tập tự luận rèn luyện

Dạng 1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số của một số hàm số cơ bản

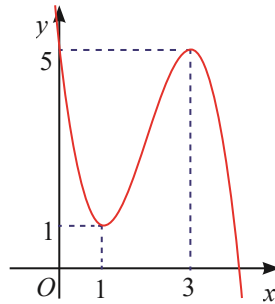
Bài 1. Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

- | | | |
|---------------------------|--|------------------------|
| 1) $y = x^3 + x - 2$; | 2) $y = 2x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x - 3$. | 3) $y = x^3$ |
| 4) $y = x^3 - 3x$ | 5) $y = -x^3 + 3x$ | 6) $y = x^3 - 3x + 2$ |
| 7) $y = (x - 2)^3 + 4$ | 8) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 2$ | 9) $y = x^3 - 12x + 1$ |
| 10) $y = -x^3 + 3x^2 + 2$ | 11) $y = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 1$. | 12) $y = x^2 - 4x + 4$ |
| 13) $y = -2x^2 + 4x + 3$ | 14) $y = x^2 - 2x + 1$ | 15) $y = 8 + 2x - x^2$ |

Bài 2. Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

- a) Tìm điểm I thuộc đồ thị hàm số biết hoành độ của I là nghiệm của phương trình $y'' = 0$.
- b) Chứng minh rằng I là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Bài 3. Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như Hình vẽ. Viết công thức của hàm số.



Bài 4. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4$.

- a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số.
- b) Tính khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Bài 5. Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

- | | | |
|-----------------------------|----------------------------|-----------------------------|
| 1) $y = 3 + \frac{1}{x}$ | 2) $y = \frac{x-3}{1-x}$ | 3) $y = \frac{x+1}{x-1}$ |
| 4) $y = \frac{-x-1}{x-1}$ | 5) $y = \frac{4x-5}{2x-3}$ | 6) $y = \frac{-2x+7}{4x-3}$ |
| 7) $y = \frac{5x}{3x-7}$ | 8) $y = \frac{-2x+1}{x+1}$ | 9) $y = \frac{2x-1}{x+1}$ |
| 10) $y = \frac{-x+2}{2x+3}$ | 11) $y = \frac{1}{x}$ | 12) $y = \frac{x+1}{x-2}$ |
| 13) $y = \frac{2x+1}{x-1}$ | 14) $y = \frac{x-2}{x+1}$ | 15) $y = \frac{-x}{x+1}$ |

Bài 6. Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$

- a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số.
- b) Gọi A là giao điểm của đồ thị hàm số với trục Oy , I là giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số. Tìm điểm B đối xứng với A qua I . Chứng minh rằng điểm B cũng thuộc đồ thị hàm số này.

Bài 7. Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

1) $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

2) $y = 2x - \frac{1}{1 - 2x}$

3) $y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$

4) $y = \frac{-x^2 + x - 1}{x - 1}$

5) $y = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1}$

6) $y = \frac{x^2 + 2}{2x - 4}$

7) $y = \frac{2x^2 - 3x - 6}{x + 2}$

8) $y = \frac{2x^2 + 9x + 11}{2x + 5}$

9) $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}$

10) $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$

11) $y = \frac{x^2 + x - 1}{x}$

12) $y = \frac{-x^2 - 3x + 4}{x + 2}$

13) $y = \frac{2x^2 + x + 1}{x - 1}$

14) $y = \frac{2x^2 + 3x}{x + 1}$

15) $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

16) $y = \frac{-x^2 + 1}{x}$

17) $y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$

18) $y = \frac{x^2 + x - 2}{x + 1}$

19) $y = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 3}$

20) $y = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2}$

21) $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 2}$

Bài 8. Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 3x + 1}{x + 2}$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số đã cho.

b) Tìm tọa độ trung điểm đoạn nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số. Có nhận xét gì về điểm này?

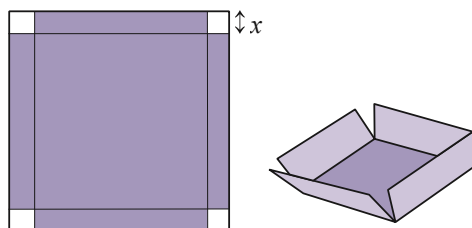
Bài 9. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 4x - 1}{x - 1}$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số.

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[2; 4]$.

Dạng 2. Vận dụng đạo hàm và khảo sát hàm số để giải quyết một số vấn đề liên quan đến thực tiễn

Bài 10. Bạn Việt muốn dùng tấm bìa hình vuông cạnh 6 dm làm một chiếc hộp không nắp, có đáy là hình vuông bằng cách cắt bỏ đi 4 hình vuông nhỏ ở bốn góc của tấm bìa (Hình vẽ bên dưới).



Bạn Việt muốn tìm độ dài cạnh hình vuông cần cắt bỏ để chiếc hộp đạt thể tích lớn nhất.

- Hãy thiết lập hàm số biểu thị thể tích hộp theo x với x là độ dài cạnh hình vuông cần cắt đi.
- Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số tìm được. Từ đó, hãy tư vấn cho bạn Việt cách giải quyết vấn đề và giải thích vì sao cần chọn giá trị này. (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.)

Bài 11. Trong 20 phút theo dõi, lưu lượng nước của một con sông được tính theo công thức:

$$Q(t) = -\frac{1}{5}t^3 + 5t^2 + 100, \text{ trong đó } Q \text{ tính theo m}^3/\text{phút, } t \text{ tính theo phút, } 0 \leq t \leq 20 \text{ (Nguồn: A. Bigalke et al.,}$$

Mathematik, Grundkurs ma-1, Cornelsen 2016). Khi lưu lượng nước của con sông lên đến 550 m³/phút thì cảnh báo lũ được đưa ra.



Trong thời gian theo dõi, lưu lượng nước của con sông lớn nhất là bao nhiêu? Cảnh báo lũ được đưa ra vào thời điểm nào?

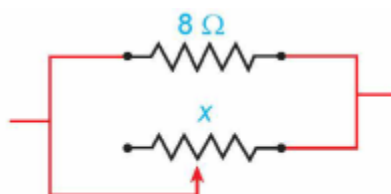
Bài 12. Một bể chứa ban đầu có 200 lít nước. Sau đó, cứ mỗi phút người ta bơm thêm 40 lít nước, đồng thời cho vào bể 20 gam chất khử trùng (hoà tan).

- Tính thể tích nước và khối lượng chất khử trùng có trong bể sau t phút. Từ đó tính nồng độ chất khử trùng (gam/lít) trong bể sau t phút.
- Coi nồng độ chất khử trùng là hàm số $f(t)$ với $t \geq 0$. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số này.
- Hãy giải thích tại sao nồng độ chất khử trùng tăng theo t nhưng không vượt ngưỡng 0,5 gam/lít.

Bài 13. Một cốc chứa 30 ml dung dịch KOH (potassium hydroxide) với nồng độ 100 mg/ml. Một bình chứa dung dịch KOH khác với nồng độ 8 mg/ml được trộn vào cốc.

- Tính nồng độ KOH trong cốc sau khi trộn x (ml) từ bình chứa, kí hiệu là $C(x)$.
- Coi $C(x)$ là hàm số xác định với $x \geq 0$. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số này.
- Giải thích tại sao nồng độ KOH trong cốc giảm theo x nhưng luôn lớn hơn 8 mg/ml.

Bài 14. Trong Vật lí, ta biết rằng khi mắc song song hai điện trở R_1 và R_2 thì điện trở tương đương R của mạch điện được tính theo công thức: $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ (theo *Vật lí đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016*).



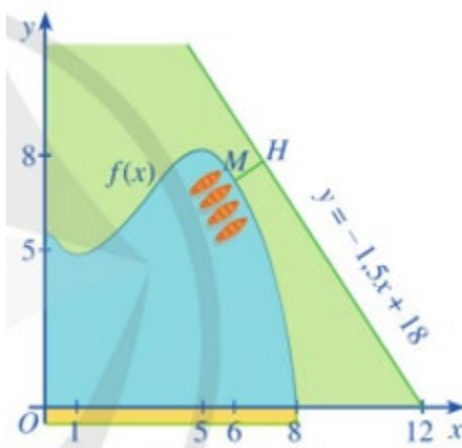
Hình 1.33

Giả sử một điện trở 8 Ω được mắc song song với một biến trở như Hình 1.33. Nếu điện trở đó được kí hiệu là x (Ω) thì điện trở tương đương R là hàm số của x. Vẽ đồ thị của hàm số $y = R(x)$, $x > 0$ và dựa vào đồ thị đã vẽ, hãy cho biết:

- Điện trở tương đương của mạch thay đổi thế nào khi x tăng.
- Tại sao điện trở tương đương của mạch không bao giờ vượt quá 8 Ω .

Bài 15. Một hồ nước nhân tạo được xây dựng trong một công viên giải trí. Trong mô hình minh họa (Hình vẽ bên dưới), nó được giới hạn bởi các trục toạ độ và đồ thị của hàm số:

$$y = f(x) = \frac{1}{10}(-x^3 + 9x^2 - 15x + 56). \text{ Đơn vị đo độ dài trên mỗi trục toạ độ là } 100 \text{ m.}$$



- Đường dạo ven hồ chạy dọc theo trục Ox dài bao nhiêu mét?
- Tại những điểm nào trên đường đi dạo ven hồ (chạy dọc theo trục Ox) thì khoảng cách theo phương thẳng đứng đến bờ hồ đối diện là lớn nhất? Tìm khoảng cách lớn nhất đó.
- Trong công viên có một con đường chạy dọc theo đồ thị hàm số $y = -1,5x + 18$. Người ta dự định xây dựng bên bờ hồ một bến thuyền đập nước sao cho khoảng cách từ bến thuyền đến con đường này là ngắn nhất. Tìm toạ độ của điểm để xây bến thuyền này.

Giải

a) Trong Hình 25, đồ thị của hàm số $y = f(x) = \frac{1}{10}(-x^3 + 9x^2 - 15x + 56)$ cắt tia Ox tại điểm có hoành độ $x = 8$. Vậy đường dạo ven hồ chạy dọc theo trục Ox dài 800 m.

b) Ta khảo sát hàm số: $y = f(x) = \frac{1}{10}(-x^3 + 9x^2 - 15x + 56)$ với $0 \leq x \leq 8$.

$$f'(x) = \frac{1}{10}(-3x^2 + 18x - 15); f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 6x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = 5.$$

Bảng biến thiên:

x	0	1	5	8			
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	5,6		4,9		8,1		0

Căn cứ bảng biến thiên, ta có: $\max_{[0;8]} f(x) = f(5) = 8,1$ tại $x = 5$.

Vậy khoảng cách lớn nhất theo phương thẳng đứng từ một điểm trên đường đi dạo ven hồ (chạy dọc theo trục Ox) đến bờ hồ đối diện là:

$$100 \cdot (\max_{[0;8]} f(x)) = 100 \cdot f(5) = 100 \cdot 8,1 = 810 \text{ (m)} \text{ và đạt được tại điểm trên đường đi dạo ven hồ cách gốc O}$$

một khoảng cách là 500 m.

c) Xét điểm $M(x; f(x))$ thuộc đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{1}{10}(-x^3 + 9x^2 - 15x + 56)$ với $0 \leq x \leq 8$.

Khoảng cách từ điểm $M(x; f(x))$ đến đường thẳng $y = -1,5x + 18 \Leftrightarrow -1,5x - y + 18 = 0$ là:

$$MH = \frac{\left| -1,5x - \frac{1}{10}(-x^3 + 9x^2 - 15x + 56) + 18 \right|}{\sqrt{(-1,5)^2 + 1}} = \frac{|x^3 - 9x^2 + 124|}{10\sqrt{3,25}}$$

Ta khảo sát hàm số: $h(x) = x^3 - 9x^2 + 124$ với $0 \leq x \leq 8$.

$$h'(x) = 3x^2 - 18x;$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 6.$$

Bảng biến thiên:

x	0	6	8		
$h'(x)$	0	-	0	+	
$h(x)$	124		16		60

Căn cứ bảng biến thiên, ta có: $h(x) > 0$ với $0 \leq x \leq 8$;

$$\min_{[0;8]} h(x) = h(6) = 16 \text{ tại } x = 6.$$

$$\text{Do đó, } \min MH = \min_{[0;8]} \frac{|x^3 - 9x^2 + 124|}{10\sqrt{3,25}} = \frac{1}{10\sqrt{3,25}} \cdot \min_{[0;8]} h(x) = \frac{16}{10\sqrt{3,25}} \approx 0,8875 \text{ và đạt được tại } x = 6. \text{ Khi}$$

đó, $f(6) = 7,4$.

Vậy trong mặt phẳng tọa độ Oxy ở Hình vẽ ban đầu, điểm để xây bến thuyền có tọa độ là $M(6; 7,4)$.

Bài 16. Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức: $f(t) = \frac{26t+10}{t+5}$

($f(t)$ được tính bằng nghìn người) (Nguồn: Giải tích 12 Nâng cao, NXBGD Việt Nam)

a) Tính số dân của thị trấn vào năm 2022 (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

b) Xem $y = f(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $f(t)$.

c) Đạo hàm của hàm số $y=f(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm).

c1) Tính tốc độ tăng dân số vào năm 2022 của thị trấn đó.

c2) Vào năm nào thì tốc độ tăng dân số là 0,192 nghìn người/năm?

Giải

a) Ta có: $f(52) = \frac{26 \cdot 52 + 10}{52 + 5} = \frac{1362}{57} \approx 23,895$ (nghìn người).

Vậy số dân của thị trấn vào năm 2022 khoảng 23 895 người.

b) 1) Sự biến thiên

• Giới hạn tại vô cực và đường tiệm cận ngang:

$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 26$. Do đó, đường thẳng $y = 26$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$$f'(t) = \frac{120}{(t+5)^2} > 0 \text{ với mọi } t \geq 0.$$

Bảng biến thiên

t	0	$+\infty$
$f'(t)$		+
$f(t)$	2	26

Hàm số ĐB trên nửa khoảng $[0; +\infty)$. Hàm số không có cực trị.

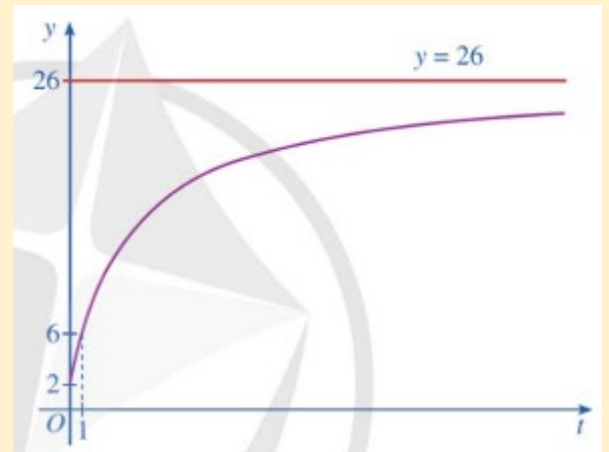
2) Đồ thị

• Giao điểm của đồ thị với trục tung: (0;2).

• Đồ thị hàm số đi qua điểm (1 ; 6).

Vậy đồ thị hàm số $y = f(t) = \frac{26t+10}{t+5}, t \geq 0$ thể hiện như

hình vẽ dưới đây:



c)

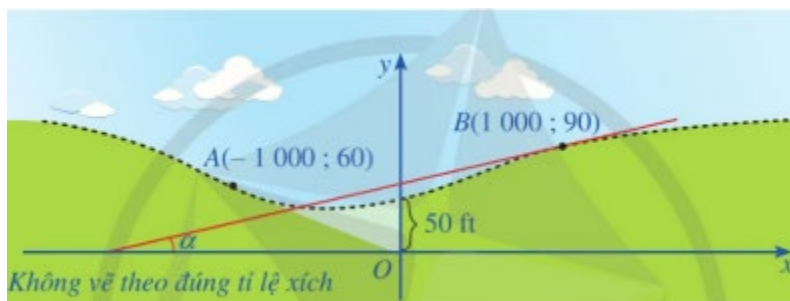
c1) Tốc độ tăng dân số vào năm 2022 của thị trấn là: $f'(52) = \frac{120}{(52+5)^2} = \frac{40}{1083}$

c2) Ta có: $f'(t) = 0,192 \Leftrightarrow \frac{120}{(t+5)^2} = 0,192 \Leftrightarrow t = 20$ (do $t \geq 0$)

Vậy vào năm 1990, thì tốc độ tăng dân số là 0,192 nghìn người/năm.

Bài 17. (Bài toán thiết kế mô hình đường giao thông) Để thiết kế mô hình của một đoạn đường cao tốc nối hai sườn đồi với sự khác biệt về độ cao ở vị trí hai sườn đồi giao nhau là 50 feet (Hình vẽ), người ta có thể làm như sau:

- Chọn hệ trục tọa độ Oxy với gốc O là vị trí hai sườn đồi giao nhau, phương nằm ngang là trục Ox, đơn vị trên mỗi trục tọa độ là feet ($1 \text{ foot} = 0,3048 \text{ m}$).
- Chọn hai vị trí A, B lần lượt trên hai sườn đồi. Bằng cách đo đạc tại thực địa, ta xác định được tọa độ của hai điểm A, B và góc dốc α (đơn vị: độ) tại điểm B của sườn đồi. Giả sử ta có $A(-1\,000; 60)$, $B(1\,000; 90)$ và $\tan \alpha = 0,04$ (Hình 27) (Nguồn: R. Larson and B. Edwards, *Calculus 10e*, Cengage 2014).
- Trong hệ trục tọa độ Oxy, quan sát đường cong (vẽ bằng nét đứt) mô phỏng đoạn đường cao tốc nối hai sườn đồi, đường cong đó gọi nên hình ảnh đồ thị của hàm số bậc ba. Vì thế ta có thể chọn hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) sao cho trong hệ trục tọa độ Oxy, đồ thị của hàm số đó trên đoạn $[-1\,000; 1\,000]$ mô phỏng đoạn đường cao tốc cần thiết kế. Ta chọn theo nguyên tắc: Hệ số góc của tiếp tuyến tại B của đồ thị hàm số đó bằng 0,04.



- Hãy xác định hàm số bậc ba đó.
- Góc dốc của con đường trên đoạn $[-1000; 1000]$ lớn nhất tại điểm nào?

Giải

a) Do đồ thị hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) đi qua điểm $(0; 50)$ nên $d = 50$, suy ra: $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 50$.

Do đồ thị đi qua các điểm $A(-1\,000; 60)$, $B(1\,000; 90)$ nên ta có:

$$\begin{cases} -1\,000\,000\,000a + 1\,000\,000\,000b - 1\,000\,000c = 10 \\ 1\,000\,000\,000a + 1\,000\,000\,000b + 1\,000\,000c = 40 \end{cases}$$

$$\text{Hay } \begin{cases} -1\,00\,000\,000a + 100\,000b - 100c = 1 \\ 1\,00\,000\,000a + 100\,000b + 100c = 4 \end{cases}, \text{ suy ra } \begin{cases} b = \frac{1}{40\,000} \\ 100\,000\,000a + 100c = 1,5 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 3ax^2 + \frac{1}{20\,000}x + c$$

Do hệ số góc của tiếp tuyến tại B của đồ thị hàm số đó bằng 0,04 nên

$$f'(1000) = 3000\,000a + \frac{1}{20} + c = 0,04 \text{ tức là } 3000\,000a + c = -0,01.$$

Ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 100\,000\,000a + 100c = 1,5 \\ 3\,000\,000a + c = -0,01 \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} a = -\frac{1}{80\,000\,000} \\ c = \frac{11}{400} \end{cases}$$

Vậy hàm số bậc ba cần tìm là: $f(x) = -\frac{1}{80\,000\,000}x^3 + \frac{1}{40\,000}x^2 + \frac{11}{400}x + 50$

Bài 18. (Bài toán thiết kế mô hình đánh giá kỹ năng) Một trung tâm dạy nghề cần thiết kế mô hình đánh giá kỹ năng của một học viên theo học nghề đánh máy. Người ta có thể làm như sau:

• Để xây dựng mô hình toán học cho bài toán trên, ta sử dụng thống kê. Bằng cách khảo sát tốc độ đánh máy trung bình S (tính bằng từ trên phút) của học viên đó sau 1 tuần học ($5 \leq t \leq 30$), ta thu thập các số liệu thống kê được cho trong Bảng 1 (Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014).

t	5	10	15	20	25	30
S	38	56	79	90	93	94

Bảng 1

• Ta cần chọn hàm số $y = f(t)$ để biểu diễn các số liệu ở Bảng 1, tức là ở hệ trục tọa độ Oxy, đồ thị của hàm số đó trên khoảng $(0; +\infty)$ “gần” với các điểm A(5; 38), B(10; 56), C(15; 79), D(20; 90), E(25; 93), G(30; 94). Ngoài ra, do tốc độ đánh máy trung bình của học viên tăng theo thời gian t và chỉ đến một giới hạn M nào đó cho dù thời gian t có kéo dài đến vô cùng nên hàm số $y = f(t)$ phải thỏa mãn thêm hai điều kiện: Hàm số đó ĐB trên khoảng $(0; +\infty)$ và $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = M \in \mathbb{R}, M > 94$. Vì các hàm đa thức (với bậc lớn hơn hoặc bằng 1)

không thỏa mãn hai điều kiện đó nên ta chọn một hàm phân thức hữu tỉ để biểu diễn các số liệu ở Bảng 1.

Ta có thể chọn hàm số có dạng $f(t) = \frac{at+b}{ct+d}$ ($ac \neq 0$) cho mục đích đó. Dựa vào Bảng 1, ta chọn hàm số:

$$f(t) = \frac{110t - 280}{t + 2}, (t > 0)$$

- Dựa theo mô hình đó, dự đoán tốc độ đánh máy trung bình của học viên đó sau 40 tuần (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của từ/phút)
- Xem $y = f(t)$ là một hàm số xác định trên khoảng $(0; +\infty)$, hãy tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đó.
- Nêu nhận xét về tốc độ đánh máy trung bình của học viên đó sau thời gian t ngày càng lớn.

Giải

a) Ta có: $f(40) = \frac{110 \cdot 40 - 280}{40 + 2} \approx 98$. Vậy tốc độ đánh máy trung bình của học viên đó sau 40 tuần là khoảng 98 từ/phút.

b) Ta có: $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{110t - 280}{t + 2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(110 - \frac{500}{t + 2} \right) = 110$

Vậy đường thẳng $y = 110$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(t)$.

c) Do đường thẳng $y = 110$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(t)$ nên khi t càng lớn thì tốc độ đánh máy trung bình của học viên đó sẽ tiến gần đến mức 110 từ/phút.

Bài 19. Khi máu di chuyển từ tim qua các động mạch chính rồi đến các mao mạch và quay trở lại qua các tĩnh mạch, huyết áp tâm thu (tức là áp lực của máu lên động mạch khi tim co bóp) liên tục giảm xuống. Giả sử một người có huyết áp tâm thu P (tính bằng mmHg) được cho bởi hàm số $P(t) = \frac{25t^2 + 125}{t^2 + 1}, 0 \leq t \leq 10$, trong đó thời gian t được tính bằng giây. Tính tốc độ thay đổi của huyết áp sau 5 giây kể từ khi máu rời tim.

Bài 20. Một tàu đổ bộ tiếp cận Mặt Trăng theo cách tiếp cận thẳng đứng và đốt cháy các tên lửa hãm ở độ cao 250 km so với bề mặt của Mặt Trăng. Trong khoảng 50 giây đầu tiên kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm, độ cao h của con tàu so với bề mặt của Mặt Trăng được tính (gần đúng) bởi hàm:

$$h(t) = -0,01t^3 + 1,1t^2 - 30t + 250,$$

trong đó t là thời gian tính bằng giây và h là độ cao tính bằng kilômét (Nguồn: A. Bigalke et al., Mathematik, Grundkurs ma-1, Cornelsen 2016).

- Vẽ đồ thị của hàm số $y = h(t)$ với $0 \leq t \leq 50$ (đơn vị trên trục hoành là 10 giây, đơn vị trên trục tung là 10 km).
- Gọi $v(t)$ là vận tốc tức thời của con tàu ở thời điểm t (giây) kể từ khi đốt cháy các tên lửa hãm với $0 \leq t \leq 50$. Xác định hàm số $v(t)$.
- Vận tốc tức thời của con tàu lúc bắt đầu hãm phanh là bao nhiêu? Tại thời điểm $t = 25$ (giây) là bao nhiêu?
- Tại thời điểm $t = 25$ (giây), vận tốc tức thời của con tàu vẫn giảm hay đang tăng trở lại?
- Tìm thời điểm t ($0 \leq t \leq 50$) sao cho con tàu đạt khoảng cách nhỏ nhất so với bề mặt của Mặt Trăng. Khoảng cách nhỏ nhất này là bao nhiêu?

Bài 21. Xét phản ứng hoá học tạo ra chất C từ hai chất A và B : $A + B \rightarrow C$.

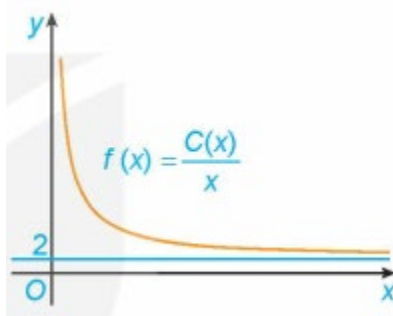
Giả sử nồng độ của hai chất A và B bằng nhau $[A] = [B] = a$ (mol/l). Khi đó, nồng độ của chất C theo thời gian

t ($t > 0$) được cho bởi công thức: $[C] = \frac{a^2 K t}{a K t + 1}$ (mol/l), trong đó K là hằng số dương (Nguồn: Đỗ Đức Thái

(Chủ biên) và các đồng tác giả, Giáo trình Phép tính vi tích phân hàm một biến, NXB Đại học Sư phạm, 2023).

- Tìm tốc độ phản ứng ở thời điểm $t > 0$.
- Chứng minh nếu $x = [C]$ thì $x'(t) = K(a - x)^2$.
- Nêu hiện tượng xảy ra với nồng độ các chất khi $t \rightarrow +\infty$.
- Nêu hiện tượng xảy ra với tốc độ phản ứng khi $t \rightarrow +\infty$.

Bài 22. Một đơn vị sản xuất hàng tiêu dùng ước tính chi phí để sản xuất x đơn vị sản phẩm là $C(x) = 2x + 45$ (triệu đồng). Khi đó, chi phí trung bình cho mỗi đơn vị sản phẩm là $f(x) = \frac{C(x)}{x}$ (coi $f(x)$ là hàm số xác định với $x \geq 1$).



Hãy giải thích tại sao chi phí trung bình giảm theo x nhưng luôn lớn hơn 2 triệu đồng/sản phẩm. Điều này thể hiện trên đồ thị của hàm số $f(x)$ trong Hình 1.27 như thế nào?

Bài 23. Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao (mét) của một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ điểm cách mặt đất 2 m với vận tốc ban đầu 24,5 m/s là $h(t) = 2 + 24,5t - 4,9t^2$ (theo *Vật lí đại cương, NXB Giáo dục Việt Nam, 2016*).

- Tìm vận tốc của vật sau 2 giây.
- Khi nào vật đạt độ cao lớn nhất và độ cao lớn nhất đó là bao nhiêu?
- Khi nào thì vật chạm đất và vận tốc của vật lúc chạm đất là bao nhiêu?

Giải

a) Theo ý nghĩa cơ học của đạo hàm, vận tốc của vật là $v = h'(t) = 24,5 - 9,8t$ (m/s).

Do đó, vận tốc của vật sau 2 giây là $v(2) = 24,5 - 9,8 \cdot 2 = 4,9$ (m/s).

b) Vì $h(t)$ là hàm số bậc hai có hệ số $a = -4,9 < 0$ nên $h(t)$ đạt giá trị lớn nhất tại $t = -\frac{b}{2a} = \frac{24,5}{2 \cdot 4,9} = 2,5$ (giây). Khi đó, độ cao lớn nhất của vật là $h(2,5) = 32,625$ (m).

c) Vật chạm đất khi độ cao bằng 0, tức là $h = 2 + 24,5t - 4,9t^2 = 0$, hay $t \approx 5,08$ (giây).

Vận tốc của vật lúc chạm đất là $v(5,08) = 24,5 - 9,8 \cdot 5,08 = -25,284$ (m/s).

Vận tốc âm chứng tỏ chiều chuyển động của vật là ngược chiều dương (hướng lên trên) của trục đã chọn (khi lập phương trình chuyển động của vật).

Bài 24. Giả sử số lượng của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hoá bằng hàm số $P(t) = \frac{a}{b + e^{-0,75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tại thời điểm ban đầu $t = 0$, quần thể có 20 tế bào và tăng với tốc độ 12 tế bào/giờ. Tìm các giá trị của a và b . Theo mô hình này, điều gì xảy ra với quần thể nấm men về lâu dài?

Giải

Ta có:
$$P'(t) = \frac{0,75ae^{-0,75t}}{(b + e^{-0,75t})^2}, t \geq 0$$

Theo đề bài, ta có: $P(0) = 20$ và $P'(0) = 12$. Do đó, ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{a}{b+1} = 20 \\ \frac{0,75a}{(b+1)^2} = 12 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này, ta được $a = 25$ và $b = \frac{1}{4}$

Khi đó, $P'(t) = \frac{18,75e^{-0,75t}}{\left(\frac{1}{4} + e^{-0,75t}\right)^2} > 0, \forall t \geq 0$, tức là số lượng quần thể nấm men luôn tăng.

Tuy nhiên, do $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{25}{\frac{1}{4} + e^{-0,75t}} = 100$ nên số lượng quần thể nấm men tăng nhưng không vượt quá 100 tế bào.

Bài 25. Giả sử chi phí $C(x)$ (nghìn đồng) để sản xuất x đơn vị của một loại hàng hoá nào đó được cho bởi hàm số $C(x) = 30\,000 + 300x - 2,5x^2 + 0,125x^3$.

- a) Tìm hàm chi phí biên.
- b) Tìm $C'(200)$ và giải thích ý nghĩa.
- c) So sánh $C'(200)$ với chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 201.

Giải

a) Hàm chi phí biên là $C'(x) = 300 - 5x + 0,375x^2$.

b) Ta có: $C'(200) = 300 - 5 \cdot 200 + 0,375 \cdot 200^2 = 14\,300$.

Chi phí biên tại $x = 200$ là 14 300 nghìn đồng, nghĩa là chi phí để sản xuất thêm một đơn vị hàng hoá tiếp theo (đơn vị hàng hoá thứ 201) là khoảng 14 300 nghìn đồng.

c) Chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 201 là

$$C(201) - C(200) = 1\,004\,372,625 - 990\,000 = 14\,372,625 \text{ (nghìn đồng)}.$$

Giá trị này xấp xỉ với chi phí biên $C'(200)$ đã tính ở câu b.

Bài 26. Một nhà sản xuất trung bình bán được 1000 ti vi màn hình phẳng mỗi tuần với giá 14 triệu đồng một chiếc. Một cuộc khảo sát thị trường chỉ ra rằng nếu cứ giảm giá bán 500 nghìn đồng, số lượng ti vi bán ra sẽ tăng thêm khoảng 100 ti vi mỗi tuần.

- a) Tìm hàm cầu.
- b) Công ty nên giảm giá bao nhiêu cho người mua để doanh thu là lớn nhất?
- c) Nếu hàm chi phí hằng tuần là $C(x) = 12\,000 - 3x$ (triệu đồng), trong đó x là số ti vi bán ra trong tuần, nhà sản xuất nên đặt giá bán như thế nào để lợi nhuận là lớn nhất?

Bài 27. Giả sử một hạt chuyển động trên một trục thẳng đứng chiều dương hướng lên trên sao cho toạ độ của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm t (giây) là $y = t^3 - 12t + 3$, $t \geq 0$.

- a) Tìm các hàm vận tốc và gia tốc.
- b) Khi nào thì hạt chuyển động lên trên và khi nào thì hạt chuyển động xuống dưới?
- c) Tìm quãng đường hạt đi được trong khoảng thời gian $0 \leq t \leq 3$.
- d) Khi nào hạt tăng tốc? Khi nào hạt giảm tốc?

Bài 28. Giả sử chi phí (tính bằng trăm nghìn đồng) để sản xuất x đơn vị hàng hoá nào đó là: $C(x) = 23\,000 + 50x - 0,5x^2 + 0,00175x^3$.

- a) Tìm hàm chi phí biên.
- b) Tìm $C'(100)$ và giải thích ý nghĩa của nó.
- c) So sánh $C(100)$ với chi phí sản xuất đơn vị hàng hoá thứ 101.

Bài 29. Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước tính chi phí cần bỏ ra là $C(x) = \frac{300x}{100-x}$ (triệu đồng), $0 \leq x < 100$.

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = C(x)$. Từ đó, hãy cho biết:

a) Chi phí cần bỏ ra sẽ thay đổi như thế nào khi x tăng?

b) Có thể loại bỏ được 100% chất gây ô nhiễm không khí không? Vì sao?

Giải

Xét hàm số $y = C(x) = \frac{300x}{100-x}$, $0 \leq x < 100$.

Ta có: $y' = \frac{30\,000}{(100-x)^2} > 0$, với mọi $x \in [0; 100)$.

Do đó hàm số luôn đồng biến trên nửa khoảng $[0; 100)$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 100^-} C(x) = \lim_{x \rightarrow 100^-} \frac{300x}{100-x} = +\infty$, nên đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x = 100$.

Bảng biến thiên:

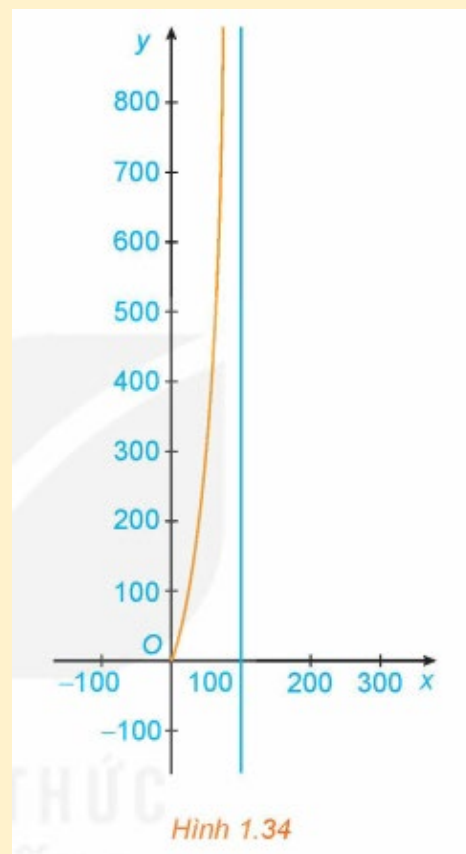
x	0		100
$C'(x)$		+	
$C(x)$	0		$+\infty$

Đồ thị hàm số như Hình 1.34.

a) Chi phí cần bỏ ra $C(x)$ sẽ luôn tăng khi x tăng.

b) Vì $\lim_{x \rightarrow 100^-} C(x) = +\infty$ (hàm số $C(x)$ không xác định khi $x = 100$) nên

nhà máy không thể loại bỏ 100% chất gây ô nhiễm không khí (dù bỏ ra chi phí là bao nhiêu đi chăng nữa).



Bài 30. Một nhà sản xuất cần làm những hộp hình trụ có thể tích 1 lít. Tìm các kích thước của hộp đựng để chi phí vật liệu dùng để sản xuất là nhỏ nhất (kết quả được tính theo centimét và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Giải

Đổi 1 lít = 1 000 cm³.

Gọi r (cm) là bán kính đáy của hình trụ, h (cm) là chiều cao của hình trụ.

Diện tích toàn phần của hình trụ là: $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.

Do thể tích của hình trụ là 1 000 cm³ nên ta có: $1000 = V = \pi r^2 h$, hay $h = \frac{1000}{\pi r^2}$

Do đó, diện tích toàn phần của hình trụ là: $S = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}, r > 0$

Ta cần tìm r sao cho S đạt giá trị nhỏ nhất. Ta có: $S' = 4\pi r - \frac{2000}{r^2} = \frac{4\pi r^3 - 2000}{r^2}$; $S' = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$

Bảng biến thiên:

r	0	$\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$	$+\infty$
$S'(r)$		0	
$S(r)$	$+\infty$		$+\infty$

$\swarrow$ $S\left(\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}\right)$ $\searrow$

$$\text{Khi đó: } h = \frac{1000}{\pi r^2} = \frac{1000}{\pi \sqrt[3]{\frac{250000}{\pi^2}}} = \frac{100}{\sqrt[3]{250\pi}}$$

Vậy cần sản xuất các hộp đựng hình trụ có bán kính đáy $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} \approx 5,42$ (cm) và chiều cao

$$h = \frac{100}{\sqrt[3]{250\pi}} \approx 10,84 \text{ (cm)}.$$

Bài 31. Người quản lý của một khu chung cư có 100 căn hộ cho thuê nhận thấy rằng tất cả các căn hộ sẽ có người thuê nếu giá thuê một căn hộ là 8 triệu đồng một tháng. Một cuộc khảo sát thị trường cho thấy rằng, trung bình cứ mỗi lần tăng giá thuê căn hộ thêm 100 nghìn đồng thì sẽ có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Người quản lý nên đặt giá thuê mỗi căn hộ là bao nhiêu để doanh thu là lớn nhất?

Bài 32. Giả sử hàm cầu đối với một loại hàng hoá được cho bởi công thức: $p(x) = \frac{354}{1+0,01x}, x \geq 0$, trong đó

p là giá bán (nghìn đồng) của mỗi đơn vị sản phẩm và x là số lượng đơn vị sản phẩm đã bán.

a) Tìm công thức tính x như là hàm số của p . Tìm tập xác định của hàm số này. Tính số đơn vị sản phẩm đã bán khi giá bán của mỗi đơn vị sản phẩm là 240 nghìn đồng.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $x = x(p)$. Từ đồ thị đã vẽ, hãy cho biết:

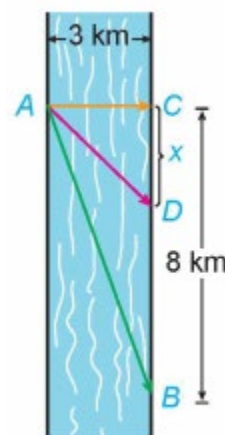
– Số lượng đơn vị sản phẩm bán được sẽ thay đổi thế nào khi giá bán p tăng;

– Ý nghĩa thực tiễn của giới hạn $\lim_{p \rightarrow 0^+} x(p)$.

Bài 33. Một cửa hàng kinh doanh điện thoại di động đã kí hợp đồng với nơi sản xuất để nhập về 2 500 điện thoại trong một năm. Cửa hàng có thể nhập về tất cả số điện thoại này và bán dần, tuy nhiên như vậy sẽ tốn nhiều chi phí cho lưu kho, bảo quản và mặt bằng. Vì vậy họ được phép nhập về theo từng đợt, mỗi đợt đều nhập x chiếc điện thoại, sau đó sẽ lưu trữ ở kho hàng một nửa số điện thoại đó. Biết rằng kinh phí cho việc lưu trữ ở kho trong một năm là 100 000 đồng trên một chiếc điện thoại (chỉ tính trong đợt nhập đầu tiên), chi phí cho mỗi đợt nhập hàng (vận chuyển, giấy tờ, nhân công sắp xếp,...) cố định là 200 000 đồng và thêm 90 000 đồng trên mỗi điện thoại. Bằng cách xác định hàm số biểu thị sự phụ thuộc của tổng chi phí vào số điện thoại nhập trong mỗi đợt và khảo sát sự biến thiên của hàm số này, người ta có thể tìm được phương án nhập điện thoại để tổng chi phí là nhỏ nhất.

- Lập công thức hàm số tổng chi phí lưu kho và nhập hàng, khảo sát sự biến thiên của hàm số này.
- Tìm số đợt nhập và số điện thoại nhập trong mỗi đợt để tổng chi phí của câu a) là nhỏ nhất?

Bài 34. Anh An chèo thuyền từ điểm A trên bờ một con sông thẳng rộng 3 km và muốn đến điểm B ở bờ đối diện cách 8 km về phía hạ lưu càng nhanh càng tốt (H.1.35). Anh An có thể chèo thuyền trực tiếp qua sông đến điểm C rồi chạy bộ đến B, hoặc anh có thể chèo thuyền thẳng đến B, hoặc anh cũng có thể chèo thuyền đến một điểm D nào đó giữa C và B rồi chạy bộ đến B. Nếu vận tốc chèo thuyền là 6 km/h và vận tốc chạy bộ là 8 km/h thì anh An phải chèo thuyền sang bờ ở điểm nào để đến được B càng sớm càng tốt? (Giả sử rằng vận tốc của nước là không đáng kể so với vận tốc chèo thuyền của anh An).



Hình 1.35

Nhắc lại rằng nếu $C(x)$ là hàm chi phí, tức là chi phí sản xuất x đơn vị của một sản phẩm nào đó, thì chi phí biên là tốc độ thay đổi của C đối với x , tức là đạo hàm $C'(x)$.

Gọi $p(x)$ là giá bán mỗi đơn vị mà công ty có thể tính nếu bán x đơn vị. Khi đó, p được gọi là hàm cầu (hay hàm giá) và chúng ta mong đợi đó là một hàm giảm của x . Nếu x đơn vị được bán và giá mỗi đơn vị là $p(x)$ thì tổng doanh thu là: $R(x) = x \cdot p(x)$ và $R(x)$ được gọi là hàm doanh thu. Đạo hàm $R'(x)$ của hàm doanh thu được gọi là hàm doanh thu biên và là tốc độ thay đổi của doanh thu đối với số lượng đơn vị sản phẩm bán ra.

Nếu x đơn vị được bán, thì tổng lợi nhuận là $P(x) = R(x) - C(x)$ và $P(x)$ được gọi là hàm lợi nhuận. Hàm lợi nhuận biên là đạo hàm $P'(x)$ của hàm lợi nhuận.

Giải

Gọi p (nghìn đồng) là giá của mỗi vé; x là số khán giả mua vé. Ta cần xác định hàm cầu $p = p(x)$. Theo giả thiết, tốc độ thay đổi của x tỉ lệ với tốc độ thay đổi của p nên hàm số $p = p(x)$ là hàm số bậc nhất.

Giá vé $p_1 = 100$ ứng với $x_1 = 27\,000$ và giá vé $p_2 = 90$ ứng với $x_2 = 27\,000 + 3\,000 = 30\,000$.

Do đó, phương trình đường thẳng $p = ax + b$ đi qua hai điểm $(27\,000; 100)$ và $(30\,000; 90)$

là $p - 100 = \frac{100 - 90}{27\,000 - 30\,000}(x - 27\,000)$ hay $p - 100 = -\frac{1}{300}(x - 27\,000)$ tức là $x = -300p + 57\,000$.

Hàm doanh thu từ tiền bán vé là: $R(p) = px = p(-300p + 57\,000) = -300p^2 + 57\,000p$.

Ta cần tìm p sao cho R đạt giá trị lớn nhất. Ta có: $R'(p) = -600p + 57\,000$; $R'(p) = 0 \Leftrightarrow p = 95$.

Bảng biến thiên:

p	0	95	$+\infty$
$R'(p)$		+	0
$R(p)$		0	2 707 500
			$-\infty$

Vậy với giá vé là 95 nghìn đồng một vé thì doanh thu bán vé là lớn nhất.

Bài 35. Một nhà phân tích thị trường làm việc cho một công ty sản xuất thiết bị gia dụng nhận thấy rằng nếu công ty sản xuất và bán x chiếc máy xay sinh tố hàng tháng thì lợi nhuận thu được (nghìn đồng) là

$$P(x) = -0,3x^3 + 36x^2 + 1800x - 48\,000.$$

Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = P(x)$, $x \geq 0$. Sử dụng đồ thị đã vẽ để trả lời các câu hỏi sau:

- Khi chỉ sản xuất một vài máy xay sinh tố, công ty sẽ bị lỗ (vì lúc này lợi nhuận âm). Hỏi hàng tháng công ty phải sản xuất ít nhất bao nhiêu chiếc máy xay sinh tố để hoà vốn?
- Lợi nhuận lớn nhất mà công ty có thể đạt được là bao nhiêu? Công ty có nên sản xuất 200 chiếc máy xay sinh tố hàng tháng hay không?

Giải

Xét hàm số $y = P(x) = -0,3x^3 + 36x^2 + 1800x - 48\,000$, $x \geq 0$.

Ta có:

$$y' = P'(x) = -0,9x^2 + 72x + 1800; y' = 0 \Leftrightarrow x = 100 \text{ (vì } x \geq 0).$$

$$P'(x) > 0 \text{ với mọi } x \in [0; 100), P'(x) < 0 \text{ với mọi } x \in (100; +\infty).$$

Do đó hàm số đồng biến trên nửa khoảng $[0; 100)$ và nghịch biến trên khoảng $(100; +\infty)$.

Tại $x = 100$, hàm số đạt cực đại và $Y_{CD} = y(100) = 192\,000$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = -\infty$$

Bảng biến thiên:

x	0	100	$+\infty$
$P'(x)$		+	0
$P(x)$	-48 000	192 000	$-\infty$

Đồ thị hàm số như Hình 1.36 (ở đây ta lấy một đơn vị trên trục hoành bằng 1.000 đơn vị trên trục tung).

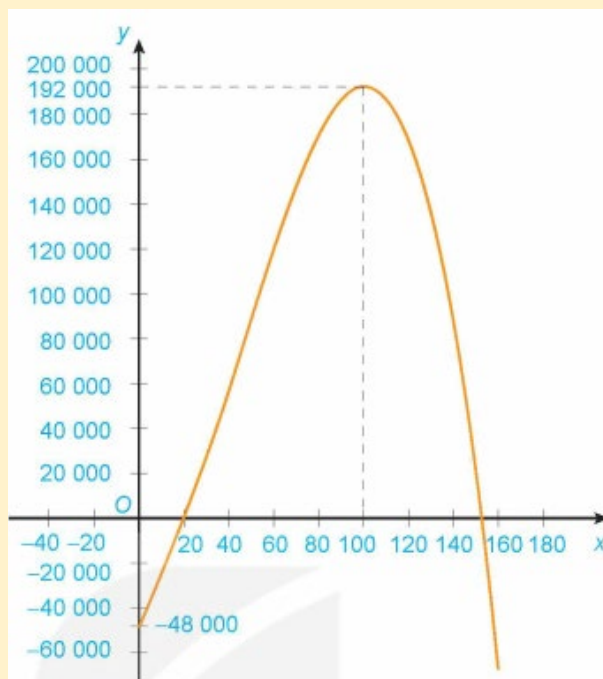
Từ đồ thị đã vẽ suy ra:

a) Đồ thị xuất phát từ điểm $(0; -48\,000)$,

ở phía dưới trục hoành (tức là công ty đang bị lỗ), và giao với trục hoành tại điểm đầu tiên có hoành độ $x = 20$. Do đó, hàng tháng công ty cần sản xuất ít nhất 20 chiếc máy xay sinh tố để hoà vốn.

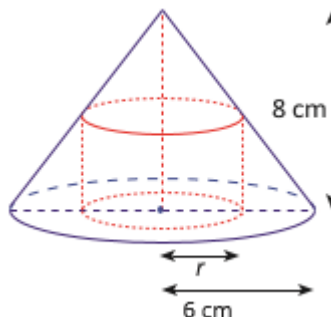
b) Từ đồ thị ta thấy khi sản xuất hơn 100 chiếc máy xay sinh tố mỗi tháng thì càng sản xuất nhiều lợi nhuận càng giảm. Do đó, công ty không nên sản xuất 200 chiếc máy xay sinh tố hàng tháng.

Lợi nhuận lớn nhất mà công ty có thể thu được là $Y_{ca} = y(100) = 192\,000$ (nghìn đồng), tức là 192 triệu đồng, đạt được khi sản xuất đúng 100 chiếc máy xay sinh tố mỗi tháng.



Hình 1.36

Bài 36. Một chi tiết máy có dạng khối nón với bán kính đáy là 6 cm và chiều cao là 8 cm. Người ta cần khoan từ đáy khối nón lên phía trên một khối trụ có bán kính đáy là r ($r > 0$) và có tâm của đáy trùng tâm của đáy khối nón như *Hình vẽ*. Xác định r sao cho phần thể tích khối trụ có được là lớn nhất.



Bài 37. Ở một bể chứa nước có chứa 1 000 lít nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối là 30 gam/lít vào bể nước với tốc độ là 25 lít/phút.

a) Chứng minh rằng nồng độ muối của nước trong bể sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm là $C(t) = \frac{30t}{40+t}$ (gam/lít).

b) Khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = C(t)$ sau 10 tiếng kể từ lúc bắt đầu bơm, từ đó nhận xét về nồng độ muối trong bể khi thời gian t càng lớn.

Bài 38. Khi một vật lạ mắc kẹt trong khí quản khiến ta phải ho, cơ hoành đẩy lên trên gây ra tăng áp lực trong phổi, theo đó cuống họng co thắt làm hẹp khí quản khiến không khí đi qua mạnh hơn. Đối với một lượng không khí bị đẩy ra trong một khoảng thời gian cố định, khí quản càng nhỏ thì luồng không khí càng đẩy ra nhanh hơn. Vận tốc luồng khí thoát ra càng cao, lực tác động lên vật lạ càng lớn. Qua nghiên cứu một số trường hợp, người ta nhận thấy vận tốc v của luồng khí liên hệ với bán kính x của khí quản theo công thức: $v(x) = k(x_0 - x) \cdot x^2$ với $\frac{1}{2}x_0 \leq x \leq x_0$, trong đó k là hằng số ($k > 0$) và x_0 là bán kính khí quản ở trạng thái bình thường. Tìm x theo x_0 để vận tốc của luồng khí một cơn ho trong trường hợp này là lớn nhất. (Nguồn: James Stewart, J. (2015). *Calculus*. Cengage Learning 8th edition, p.285)

Giải

Xét hàm số $f(x) = (x_0 - x)x^2$ với x_0 cố định và $\frac{1}{2}x_0 \leq x \leq x_0$.

Do k là hằng số nên vận tốc của luồng khí một cơn ho lớn nhất khi $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta có $f(x) = -x^3 + x_0x^2$; $f'(x) = -3x^2 + 2x_0x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = \frac{2}{3}x_0$.

Bảng biến thiên:

x	$\frac{1}{2}x_0$	$\frac{2}{3}x_0$	x_0
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$f(\frac{1}{2}x_0)$	$f(\frac{2}{3}x_0)$	$f(x_0)$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $\max_{\frac{1}{2}x_0 \leq x \leq x_0} f(x) = f(\frac{2}{3}x_0)$.

Vậy vận tốc của luồng khí một cơn ho lớn nhất khi $x = \frac{2}{3}x_0$.

Bài 39. Giả sử chi phí cho xuất bản x cuốn tạp chí (gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in,...) được cho bởi công thức:

$$C(x) = 0,0001x^2 - 0,2x + 10\,000,$$

trong đó $C(x)$ được tính theo đơn vị là vạn đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng.

a) Tính tổng chi phí $T(x)$ (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí.

b) Tỉ số $M(x) = \frac{T(x)}{x}$ được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn. Tính $M(x)$ theo x và tìm số lượng tạp chí cần xuất bản sao cho chi phí trung bình là thấp nhất, biết rằng nhu cầu hiện tại xuất bản không quá 30 000 cuốn. Khi đó chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí là bao nhiêu?

Giải

a) Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng, tức là 0,4 vạn đồng. Suy ra chi phí phát hành cho x cuốn là $0,4x$ (vạn đồng).

Theo đề bài, ta có tổng chi phí xuất bản và phát hành cho x cuốn tạp chí là:

$$T(x) = C(x) + 0,4x = 0,0001x^2 + 0,2x + 10\,000, \text{ với } x > 0.$$

$$\text{b) Ta có: } M(x) = \frac{T(x)}{x} = 0,0001x + 0,2 + \frac{10000}{x}$$

Xét hàm số $f(x) = 0,0001x + 0,2 + \frac{10000}{x}$ với $0 < x \leq 30\,000$.

$$f'(x) = 0,0001 - \frac{10000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 10\,000 \text{ (do } x > 0).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

Bảng biến thiên:

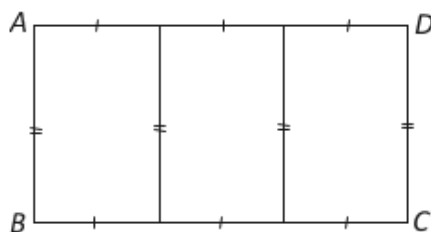
x	0	10 000	30 000
$f'(x)$		-	0
$f(x)$	$+\infty$	$f(10\,000)$	$f(30\,000)$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy giá trị của $M(x)$ nhỏ nhất khi $x = 10\,000$.

Vậy số lượng tạp chí cần xuất bản sao cho chi phí trung bình thấp nhất là $x = 10\,000$ (cuốn).

Chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản 10 000 cuốn là: $M(10\,000) = 2,2$ (vạn đồng) = 22 000 (đồng).

Bài 40. Người ta cần rào một mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích là 600 m^2 . Trên mảnh đất này, người ta chia làm ba miếng đất hình chữ nhật có diện tích bằng nhau (Hình 1.40). Giá tiền để xây dựng hàng rào bên trong và bao bên ngoài là 60 000 đồng mỗi mét, biết rằng chiều dài hình chữ nhật $ABCD$ không vượt quá 60 m. Tìm chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật $ABCD$ sao cho chi phí xây dựng hàng rào là thấp nhất (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Hình 1.40

Bài 41. Anh Nam có một mảnh đất rộng và muốn dành ra một khu đất hình chữ nhật có diện tích 200 m^2 để trồng vài loại cây mới. Anh dự kiến rào quanh ba cạnh của khu đất hình chữ nhật này bằng lưới thép, cạnh còn lại (chiều dài) sẽ tận dụng bức tường có sẵn (*Hình vẽ*). Do điều kiện địa lí, chiều rộng khu đất không vượt quá 15 m , hỏi chiều rộng của khu đất này bằng bao nhiêu để tổng chiều dài lưới thép cần dùng là ngắn nhất (nghĩa là chi phí rào lưới thép thấp nhất)?



Giải

Gọi $x \text{ (m)}$ là chiều rộng của khu đất hình chữ nhật cần rào.

Theo đề bài, ta có $0 < x \leq 15$.

Diện tích khu đất này là $200 \text{ (m}^2\text{)}$ nên chiều dài của khu đất là $\frac{200}{x} \text{ (m)}$.

Tổng chiều dài lưới thép rào quanh khu đất là $L(x) = 2x + \frac{200}{x} \text{ (m)}$.

Xét hàm số: $L(x) = 2x + \frac{200}{x}, x \in (0; 15]$

Ta có: $L'(x) = 2 - \frac{200}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 10 \text{ (do } x > 0\text{)}$

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0^+} L(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2x + \frac{200}{x} \right) = +\infty$

$$L(10) = 40;$$

$$L(15) = \frac{130}{3}.$$

Bảng biến thiên:

x	0	10	15
$L'(x)$	-	0	+
$L(x)$	$+\infty$	40	$\frac{130}{3}$

Dựa vào bảng biến thiên, chiều dài lưới thép ngắn nhất là 40 m khi chiều rộng khu đất này là $x = 10 \text{ (m)}$ và

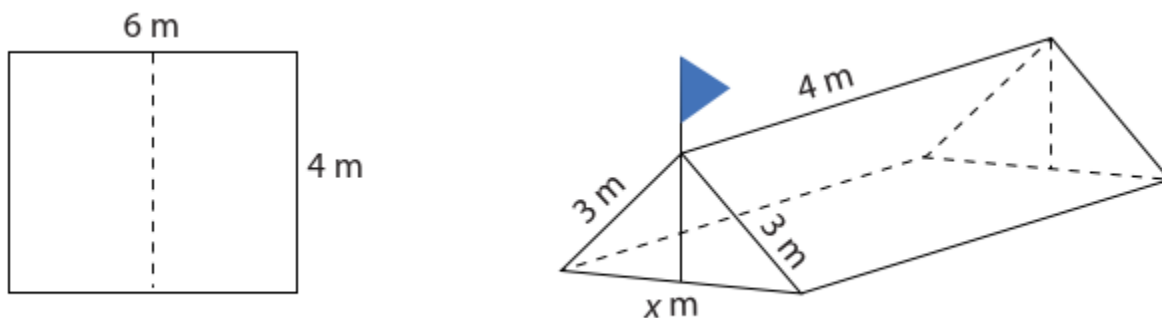
chiều dài là $\frac{200}{10} = 20 \text{ (m)}$.

Bài 42. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = -t^3 + 2t^2 - t$, với t (đơn vị: giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (đơn vị: mét) là quãng đường chất điểm di chuyển được trong khoảng thời gian đó.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $s = s(t)$ trên hệ trục tọa độ tOs .

b) Trong khoảng thời gian 2 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động, chất điểm đạt được vận tốc lớn nhất là bao nhiêu?

Bài 43. Trong đợt chào mừng kỉ niệm ngày 26 tháng 3, trường X có tổ chức cho các lớp bày các gian hàng tại sân trường. Để có thể che nắng, chứa đồ đạc trong quá trình tham gia hoạt động, một lớp đã nghĩ ra ý tưởng như sau: Dựng trên mặt đất bằng phẳng một chiếc lều từ một tấm bạt hình chữ nhật có chiều rộng là 4 m và chiều dài là 6 m, bằng cách gấp đôi tấm bạt lại theo đoạn nối trung điểm hai cạnh là chiều dài của tấm bạt, hai mép chiều rộng còn lại của tấm bạt sát đất và cách nhau x (m) (Hình 1.37). Tìm x để khoảng không gian phía trong lều là lớn nhất.



Hình 1.37

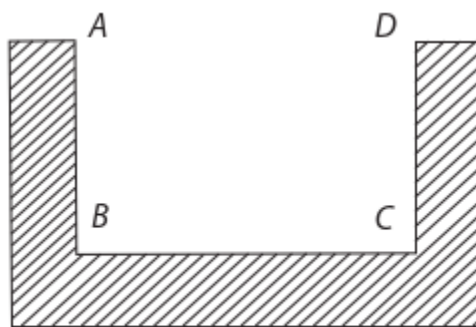
Bài 44. Hình 1.38a là một mương dẫn nước thủy lợi tại một địa phương. Phần không gian trong mương để nước chảy có mặt cắt ngang là một hình chữ nhật $ABCD$ (Hình 1.36b). Với điều kiện lưu lượng nước qua mương cho phép ở đây thì diện tích mặt cắt $ABCD$ là $1,2 \text{ m}^2$. Để đảm bảo yêu cầu kĩ thuật tốt nhất cho mương, người ta cần thiết kế sao cho tổng độ dài $AB + BC + CD$ là ngắn nhất.

a) Đặt $BC = x$, tính $y = AB + BC + CD$ theo x .

b) Khảo sát hàm số $y = f(x)$ tìm được ở câu a, từ đó tính x để y nhỏ nhất, biết rằng theo quy định thì đoạn BC (chiều rộng đáy mương) phải dưới 10 m.



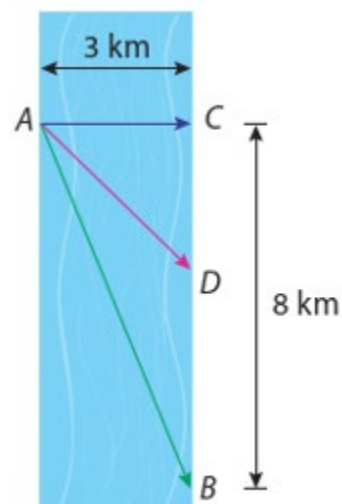
a)



b)

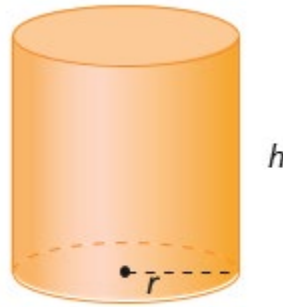
Hình 1.38

Bài 45. Một người chèo thuyền từ điểm A trên bờ một con sông thẳng, rộng 3 km và muốn đến điểm B , cách bờ đối diện 8 km về phía hạ lưu, càng nhanh càng tốt như Hình 1.39. Người ấy có thể chèo thuyền qua sông đến điểm C rồi chạy bộ đến B , hoặc anh ta có thể chèo thẳng đến B , hoặc có thể chèo thuyền đến điểm D nào đó giữa C và B rồi chạy bộ đến B . Biết rằng tốc độ chèo thuyền của người này là 6 km/h và tốc độ chạy bộ là 8 km/h. Tìm thời gian ngắn nhất mà người này có thể đi từ A đến B (bỏ qua vận tốc của nước và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Hình 1.39

Bài 46. Người ta cần thiết kế một cái lon có dạng hình trụ có thể tích là 1 lít (Hình 1.41). Tính tỉ lệ chiều cao và bán kính đáy hình trụ này để tổng chi phí làm vỏ lon (bao gồm cả hai đáy) là nhỏ nhất.



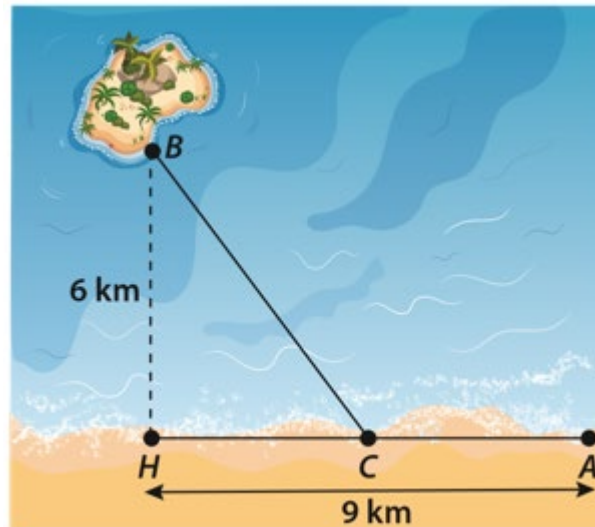
Hình 1.41

Bài 47. Trong Vật lý, điện trở tương đương R_{td} của hai điện trở R_1, R_2 mắc song song được xác định bởi công thức $\frac{1}{R_{td}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, biết rằng $R_2 = 3 (\Omega)$. Đặt $R_1 = x (\Omega), x > 0$.

a) Tính R_{td} theo x , xem biểu thức tính được này là một hàm số $y = f(x)$. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $f(x)$ với $x > 0$.

b) Khi x tăng, điện trở R_{td} thay đổi như thế nào? R_{td} không thể vượt qua giá trị bao nhiêu?

Bài 48. Một công ty muốn làm một đường ống dẫn từ vị trí A trên bờ biển đến vị trí B trên hòn đảo. Khoảng cách từ điểm B đến bờ biển là $BH = 6$ km (Hình 1.42). Giá tiền để xây dựng đường ống trên bờ là 50 000 USD mỗi kilômét và giá tiền xây dựng đường ống trên biển là 130 000 USD mỗi kilômét, biết rằng $AH = 9$ km. Xác định vị trí điểm C trên đoạn AH để khi lắp ống dẫn theo đường gấp khúc ACB thì chi phí công ty bỏ ra là thấp nhất.



Hình 1.42

Bài 49. Trong một nhà hàng, mỗi tuần để chế biến x phần ăn (x lấy giá trị trong khoảng từ 30 đến 120) thì chi phí trung bình (đơn vị: nghìn đồng) của một phần ăn được cho bởi công thức:

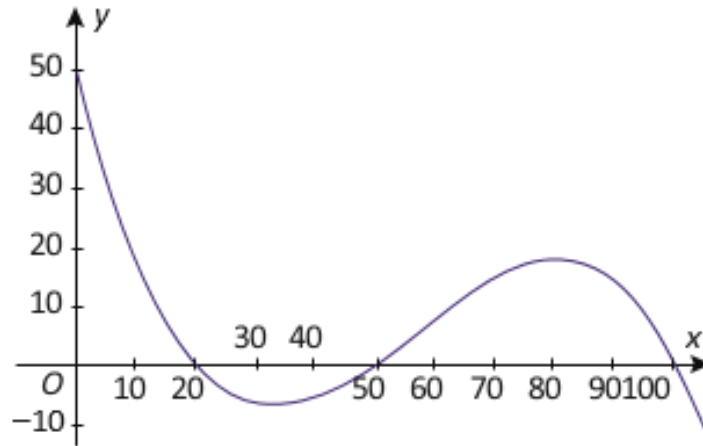
$$\bar{C}(x) = 2x - 230 + \frac{7200}{x}$$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $\bar{C}(x)$ trên $[30; 120]$.

b) Từ kết quả trên, tìm số phần ăn sao cho chi phí trung bình của một phần ăn là thấp nhất.

Bài 50. Một phần đường ray tàu lượn siêu tốc có dạng đồ thị hàm số bậc ba: $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a \neq 0$). Trục Ox mô tả quãng đường tàu di chuyển theo chiều ngang (tính bằng centimét), trục Oy mô tả chiều cao của đường ray (tính bằng centimét) tại mỗi vị trí x . Chiều cao xuất phát là 50 cm. Tàu xuống dưới mặt đất lần thứ nhất từ vị trí $x = 20$ cm, tàu lên khỏi mặt đất ở vị trí $x = 50$ cm và sau đó xuống dưới mặt đất lần thứ hai ở vị trí $x = 100$ cm.

Xét đồ thị của hàm số đã cho khi $x \in [0; 100]$ như hình vẽ:



Hình 1.46

- Tìm công thức hàm số $f(x)$.
- Tìm điểm cao nhất của đường ray khi tàu lên khỏi mặt đất và tọa độ điểm thấp nhất của đường ray khi tàu xuống dưới mặt đất.

Giải

a) Do đồ thị hàm số giao với trục hoành tại các điểm $x = 20$; $x = 50$, $x = 100$ nên phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm 20, 50, 100, từ đó ta có: $y = a(x - 20)(x - 50)(x - 100)$.

Mặt khác, tại điểm $x = 0$ ta có $y = 50$, suy ra: $50 = a(0 - 20)(0 - 50)(0 - 100)$ hay $a = -\frac{1}{2000}$.

Suy ra: $y = -\frac{1}{2000}(x - 20)(x - 50)(x - 100) = -\frac{1}{2000}x^3 + \frac{17}{200}x^2 - 4x + 50$.

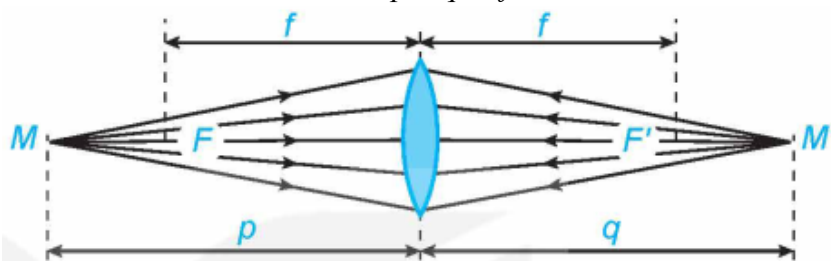
b) Các điểm cần tìm chính là các điểm cực trị của hàm số: $y = f(x) = -\frac{1}{2000}x^3 + \frac{17}{200}x^2 - 4x + 50$

$$y' = -\frac{3}{2000}x^2 + 1\frac{17}{200}x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{100}{3}; x = 80$$

Ta có các điểm cực trị của hàm số $f(x)$ là $A\left(\frac{100}{3}; -\frac{200}{27}\right); B(80; 18)$

Bài 51. Xét một thấu kính hội tụ có tiêu cự f (H.1.39). Khoảng cách p từ vật đến thấu kính liên hệ với

khoảng cách q từ ảnh đến thấu kính bởi hệ thức: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$



Hình 1.39

- Viết công thức tính $q = g(p)$ như một hàm số của biến $p \in (f; +\infty)$
- Tính các giới hạn $\lim_{p \rightarrow +\infty} g(p)$; $\lim_{p \rightarrow f^+} g(p)$ và giải thích ý nghĩa các kết quả này.
- Lập bảng biến thiên của hàm số $q = g(p)$ trên khoảng $(f; +\infty)$

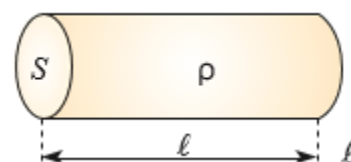
Bài 52. Dân số của một quốc gia sau t (năm) kể từ năm 2023 được ước tính bởi công thức: $N(t) = 100e^{0,012t}$ ($N(t)$ được tính bằng triệu người, $0 \leq t \leq 50$).

- Ước tính dân số của quốc gia này vào các năm 2030 và 2035 (kết quả tính bằng triệu người, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ ba).
- Xem $N(t)$ là hàm số của biến số t xác định trên đoạn $[0; 50]$. Xét chiều biến thiên của hàm số $N(t)$ trên đoạn $[0; 50]$
- Đạo hàm của hàm số $N(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của quốc gia đó (tính bằng triệu người/năm). Vào năm nào tốc độ tăng dân số của quốc gia đó là 1,6 triệu người/năm?

Bài 53. Điện trở R (Ω) của một đoạn dây dẫn hình trụ được làm từ vật liệu có điện trở suất ρ (Ωm), chiều dài ℓ (m) và tiết diện S (m^2) được cho bởi công

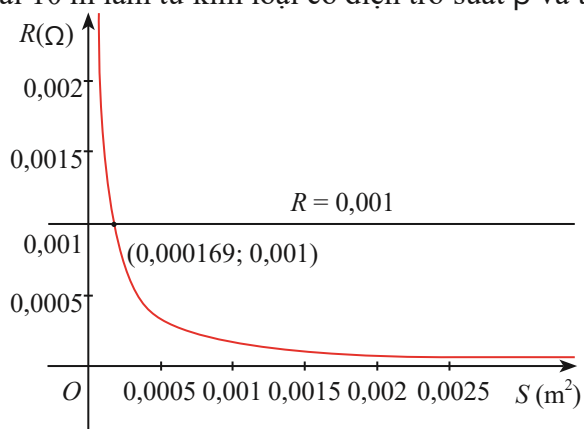
$$R = \rho \cdot \frac{\ell}{S}$$

(Vật lí 11 – Chân trời sáng tạo, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2023,



trang 104)

Giả sử người ta khảo sát sự biến thiên của điện trở R theo tiết diện S (ở nhiệt độ $20^\circ C$) của một sợi dây điện dài 10 m làm từ kim loại có điện trở suất ρ và thu được đồ thị hàm số như Hình vẽ bên dưới.



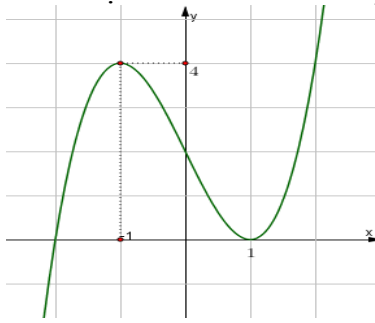
- Có nhận xét gì về sự biến thiên của điện trở R theo tiết diện S ?
- Từ đồ thị, hãy giải thích ý nghĩa của tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số với đường thẳng $R = 0,001$.
- Tính điện trở suất ρ của dây điện. Từ đó, hãy cho biết dây điện được làm bằng kim loại nào trong số các kim loại được cho ở bảng sau:

Kim loại	Điện trở suất ở $20^\circ C$ (Ωm)
Bạc	$1,62 \cdot 10^{-8}$
Đồng	$1,69 \cdot 10^{-8}$
Vàng	$2,44 \cdot 10^{-8}$
Nhôm	$2,75 \cdot 10^{-8}$
Sắt	$9,68 \cdot 10^{-8}$

D. Câu hỏi trắc nghiệm

Dạng 1: Nhận dạng 3 hàm số thường gặp (biết đồ thị, BBT)

Câu 1. Đồ thị hàm số ở hình bên dưới là của đồ thị hàm số nào dưới đây.



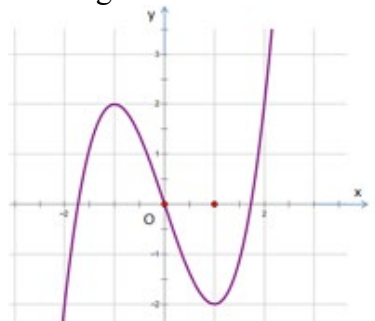
A. $y = x^3 - 3x$.

B. $y = x^4$.

C. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

D. $y = x^3 - 3x + 2$.

Câu 2. Đồ thị như hình vẽ là của hàm số nào trong các hàm số đã cho dưới đây.



A. $f(x) = -x^3 + 3x$.

B. $f(x) = x^3 - 3x$.

C. $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

D. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

Câu 3. Hàm số nào sau đây có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

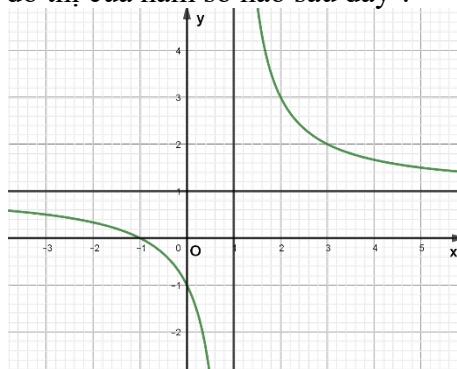
A. $y = x^3 + 3x^2 - 1$.

B. $y = x^3 - 3x^2 - 2$.

C. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

D. $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Câu 4. Đường cong trong hình dưới là đồ thị của hàm số nào sau đây ?



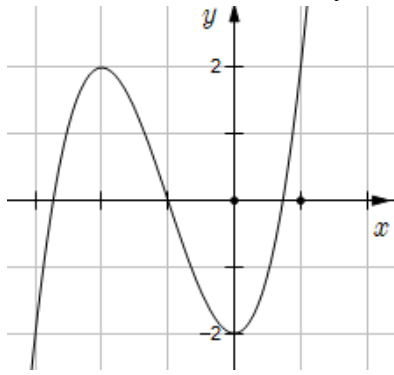
A. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

B. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

C. $y = -x^4 + 2x^2 - 1$.

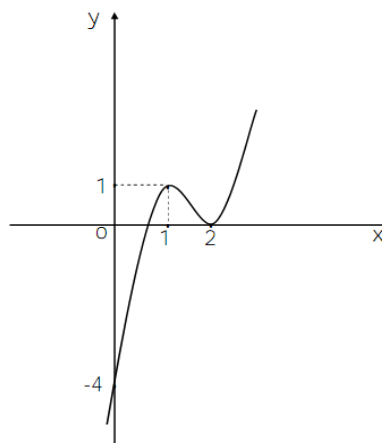
D. $y = x^3 - 3x + 2$.

Câu 5. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



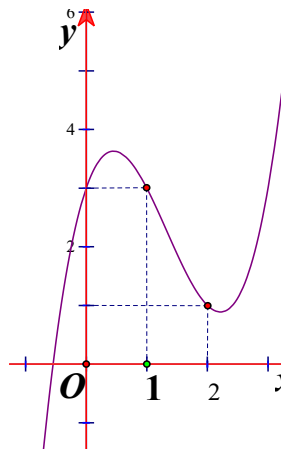
- A.** $y = 2x^3 + 6x^2 - 2$ **B.** $y = x^3 + 3x^2 - 2$ **C.** $y = -x^3 - 3x^2 - 2$ **D.** $y = x^3 - 3x^2 - 2$

Câu 6. Đường cong ở hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số đã cho được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



- A.** $y = -2x^3 + 9x^2 - 12x - 4$ **B.** $y = x^3 - 3x - 4$
C. $y = x^4 - 3x^2 - 4$ **D.** $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$

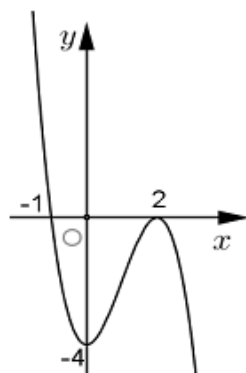
Câu 7. Biết rằng đồ thị cho ở hình vẽ dưới đây là đồ thị của một trong 4 hàm số cho trong 4 phương án A, B, C, D.



Đó là hàm số nào?

- A.** $y = 2x^3 + 9x^2 - 11x + 3$ **B.** $y = x^3 - 4x^2 + 3x + 3$
C. $y = 2x^3 - 6x^2 + 4x + 3$ **D.** $y = x^3 - 5x^2 + 4x + 3$

Câu 8. Đường cong ở hình dưới đây của một đồ thị hàm số.



Hỏi hàm số đó là hàm số nào trong các hàm số sau đây:

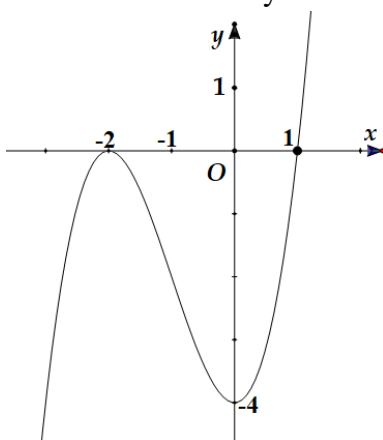
A. $y = -x^3 - 4$

B. $y = x^3 - 3x^2 - 4$

C. $y = -x^3 + 3x - 2$

D. $y = -x^3 + 3x^2 - 4$

Câu 9. Đường cong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



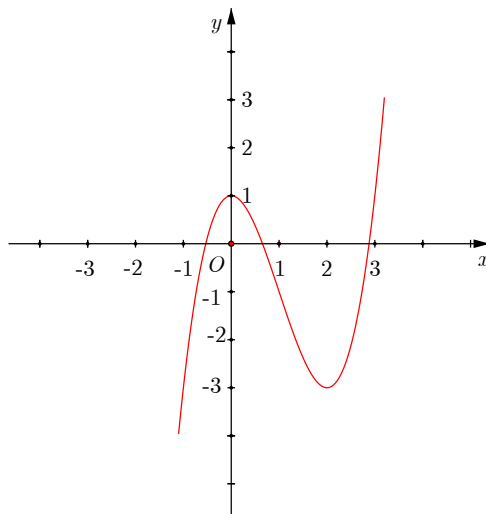
A. $y = -x^3 + 3x^2 - 4$.

B. $y = x^3 - 3x^2 + 4$.

C. $y = -x^3 - 3x^2 - 4$.

D. $y = x^3 + 3x^2 - 4$.

Câu 10. Đồ thị như hình vẽ là của hàm số



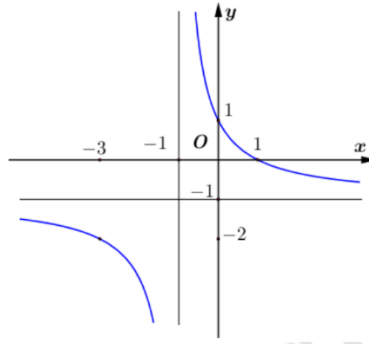
A. $y = x^4 + 3x^2 + 1$.

B. $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

C. $y = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 1$.

D. $y = 3x^2 + 2x + 1$.

Câu 11. Đồ thị hình dưới đây là của hàm số nào?



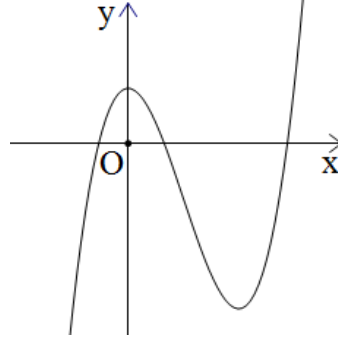
A. $y = \frac{-x}{x+1}$.

B. $y = \frac{-x+1}{x+1}$.

C. $y = \frac{-2x+1}{2x+1}$.

D. $y = \frac{-x+2}{x+1}$.

Câu 12. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?



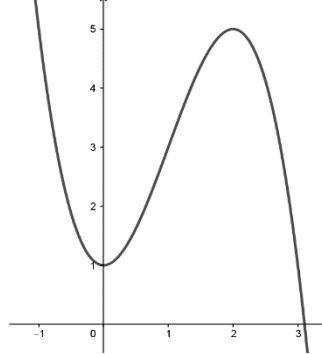
A. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.

B. $y = -x^3 - 3x^2 + 1$.

C. $y = x^3 + 3x^2 + 1$.

D. $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

Câu 13. Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số dưới đây?



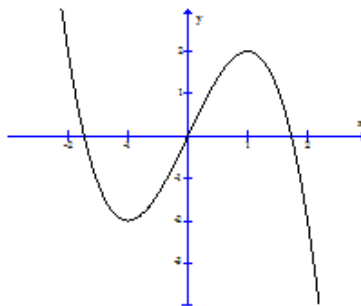
A. $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$.

B. $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

C. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$.

D. $y = -x^3 - 3x^2 + 1$.

Câu 14. Đường cong trong hình bên dưới là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



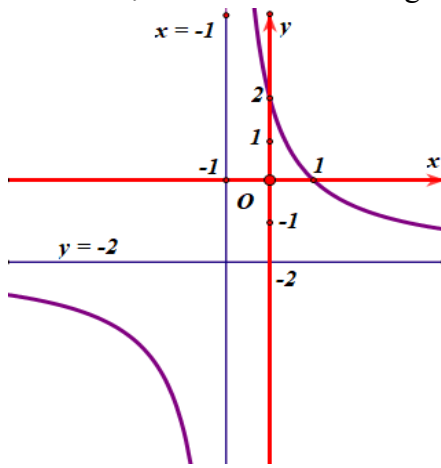
A. $y = -x^3 + 3x + 2$.

B. $y = x^3 - 3x$.

C. $y = -x^3 + 3x$.

D. $y = -x^3 + 3x + 1$.

Câu 15. Đường cong trong hình vẽ là đồ thị của hàm số nào trong bốn hàm số sau



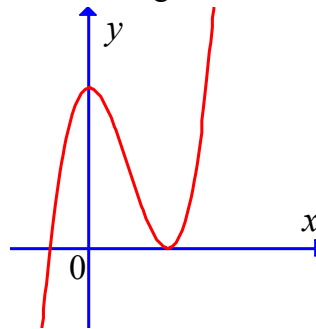
A. $y = \frac{-2x+2}{x+1}$.

B. $y = \frac{-x+2}{x+2}$.

C. $y = \frac{2x-2}{x+1}$.

D. $y = \frac{x-2}{x+1}$.

Câu 16. Đường cong như hình vẽ bên dưới là dạng đồ thị của hàm số nào dưới đây?



A. $y = x^4 - 2x^2 + 1$

B. $y = -(x+1)(x-2)^2$

C. $y = x^3 - 3x^2 + 4$

D. $y = (x-3)^3$

Câu 17. Bảng biến thiên ở hình dưới là của một trong bốn hàm số được liệt kê dưới đây. Hãy tìm hàm số đó.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'		+	+
y	2	$+\infty$	2

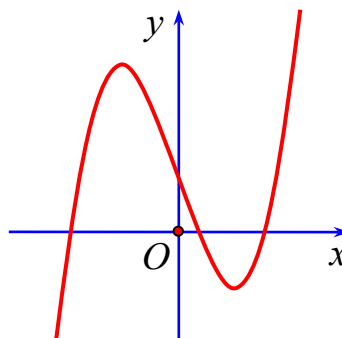
A. $y = \frac{2x-3}{x+1}$.

B. $y = \frac{2x+3}{x-1}$.

C. $y = \frac{-2x-3}{x-1}$.

D. $y = \frac{-x+1}{x-2}$.

Câu 18. Đường cong trong hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số nào ?



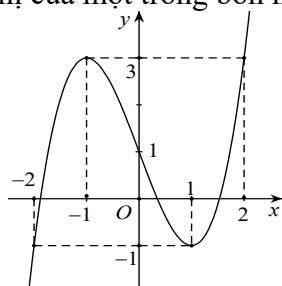
A. $y = x^3 + 3x + 1$.

B. $y = -x^3 + 3x - 1$.

C. $y = x^3 - 3x + 1$.

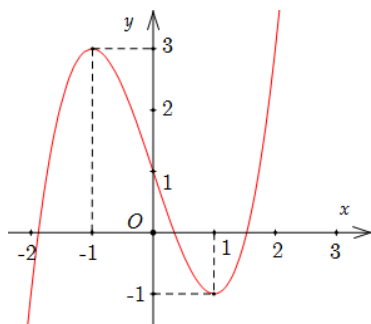
D. $y = x^3 - 3x$.

Câu 19. Đường cong ở hình bên là đồ thị của một trong bốn hàm số dưới đây. Hàm số đó là hàm số nào?



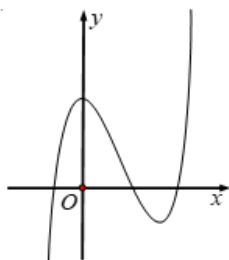
- A.** $y = x^4 - 2x^2 + 1$. **B.** $y = x^3 - 3x + 1$. **C.** $y = -x^3 + 3x + 1$. **D.** $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

Câu 20. Hình bên là đồ thị của một hàm số được liệt kê ở bốn phương án **A, B, C, D** dưới đây. Hàm số đó là



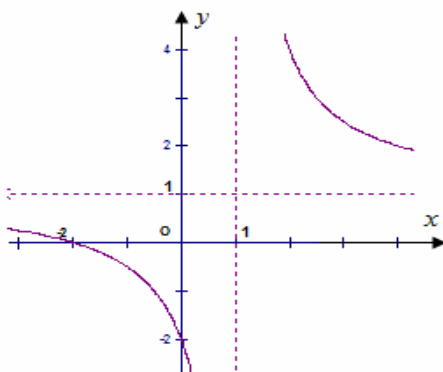
- A.** $y = x^3 - 3x + 1$ **B.** $y = -x^3 - 3x + 1$ **C.** $y = -x^3 + 3x - 1$ **D.** $y = x^3 + 3x + 1$

Câu 21. Đường cong như hình bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?



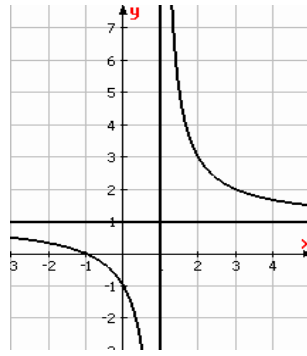
- A.** $y = x^3 - 3x^2 + 3$ **B.** $y = 2x^3 + 3x + 2$ **C.** $y = -3x^3 + 2x^2 + 2$ **D.** $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2$

Câu 22. Đồ thị trong hình bên dưới là một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



- A.** $y = \frac{x+2}{x-1}$. **B.** $y = \frac{x+1}{x-1}$. **C.** $y = \frac{x+2}{1-x}$. **D.** $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

Câu 23. Đồ thị sau đây là của hàm số nào?



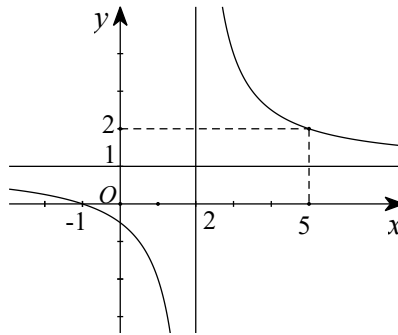
A. $y = \frac{2x+1}{x-1}$.

B. $y = \frac{2x-1}{x-1}$.

C. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

D. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

Câu 24. Đường cong trong hình bên là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào ?



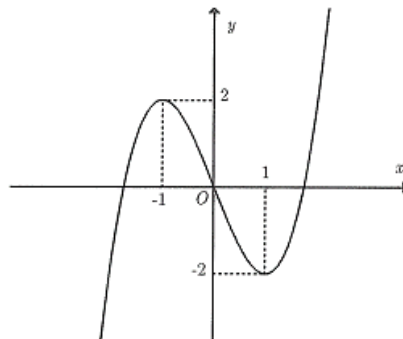
A. $y = \frac{x-1}{x-2}$.

B. $y = \frac{2x+1}{2x-2}$.

C. $y = \frac{-x+1}{-x-2}$.

D. $y = \frac{x+1}{x-2}$.

Câu 25. Đồ thị trong hình là của hàm số nào:



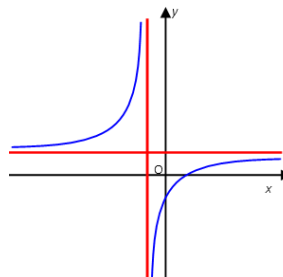
A. $y = -x^3 + 3x$.

B. $y = x^4 - 2x^2$.

C. $y = -x^4 + 2x^2$.

D. $y = x^3 - 3x$.

Câu 26. Hình bên là đồ thị của hàm số nào?



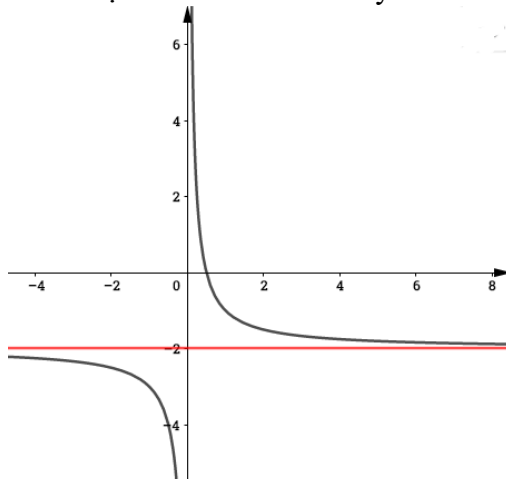
A. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

B. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$.

C. $y = \frac{x+2}{x+1}$.

D. $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

Câu 27. Đường cong hình bên là đồ thị hàm số nào dưới đây



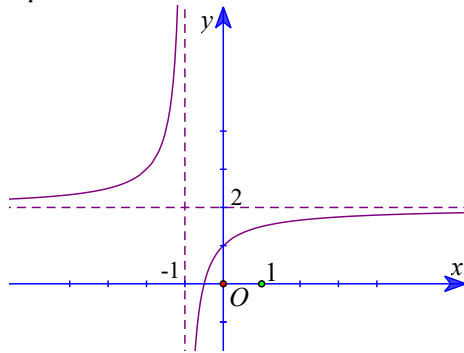
A. $y = \frac{-x+1}{2x}$.

B. $y = \frac{2x}{x+1}$.

C. $y = \frac{2x+1}{x}$.

D. $y = \frac{-2x+1}{x}$.

Câu 28. Đồ thị (hình bên) là đồ thị của hàm số nào?



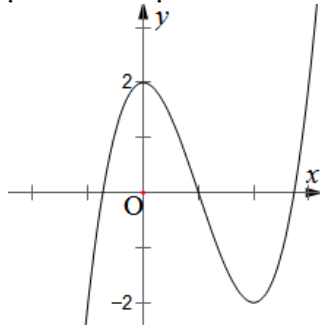
A. $y = \frac{x+2}{x+1}$.

B. $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

C. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

D. $y = \frac{x+3}{1-x}$.

Câu 29. Đường cong trong hình bên cạnh là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau?



A. $y = x^3 + 3x^2 + 2$.

B. $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

C. $y = x^3 - 3x + 2$.

D. $y = x^3 - 3x^2 - 2$.

Câu 30. Bảng biến thiên sau đây là của hàm số nào?

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	-		-
y	1	$+\infty$	1

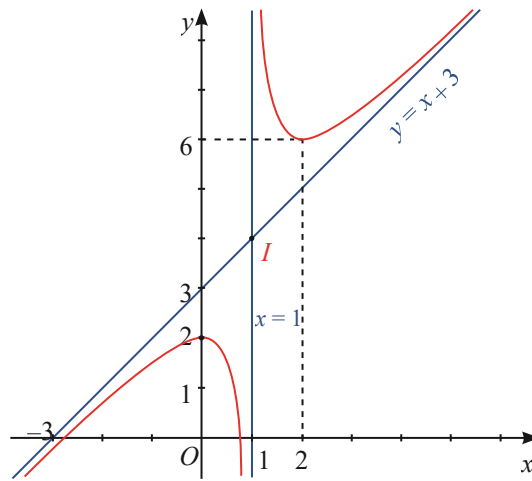
A. $y = \frac{x-3}{x-2}$.

B. $y = \frac{2x-1}{x-2}$.

C. $y = \frac{x+3}{2x+1}$.

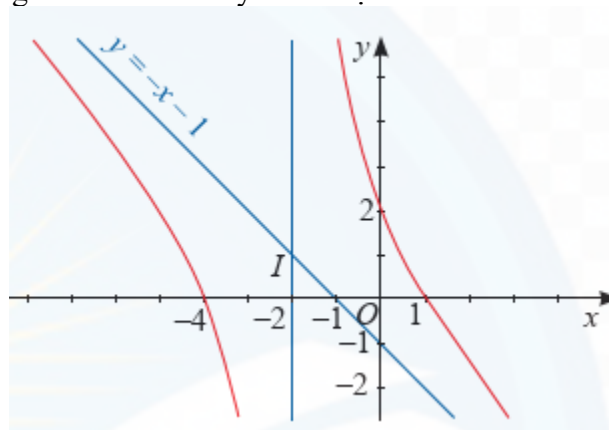
D. $y = \frac{x+3}{x-2}$.

Câu 31. Đường cong trong hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số nào?



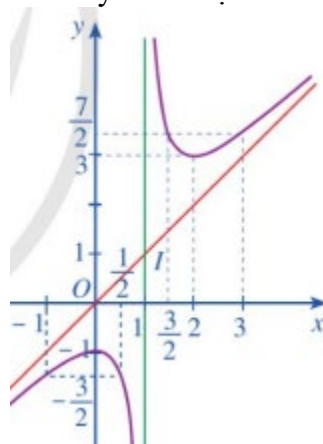
- A.** $y = \frac{x+3}{x-2}$.
B. $y = x^3 - 3x^2 - 2$.
C. $y = \frac{x^2 + 2x - 4}{x - 2}$.
D. $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$.

Câu 32. Đường cong trong hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số nào?



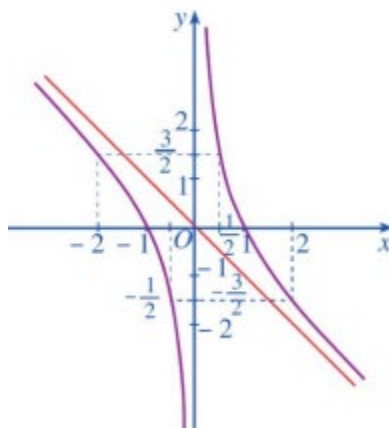
- A.** $y = x^3 + 3x^2 - 1$.
B. $y = \frac{-x^2 - 3x + 4}{x + 2}$.
C. $y = \frac{x+3}{x+2}$.
D. $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{x - 2}$.

Câu 33. Đường cong trong hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số nào?



- A.** $y = \frac{x+1}{x-1}$.
B. $y = \frac{x^2 - x + 1}{x + 1}$.
C. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.
D. $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.

Câu 34. Đường cong trong hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số nào?



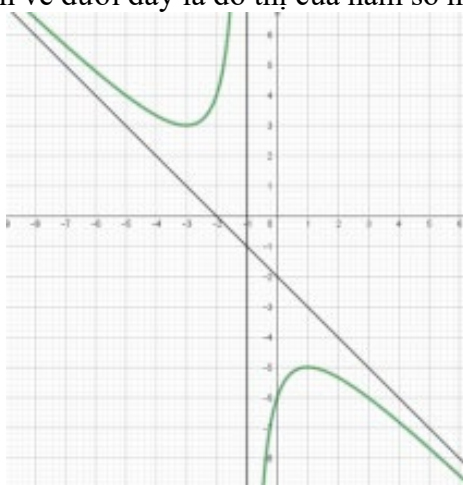
A. $y = \frac{1}{x}$.

B. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

C. $y = \frac{-x^2+1}{x-2}$.

D. $y = \frac{-x^2+1}{x}$.

Câu 35. Đường cong trong hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số nào?



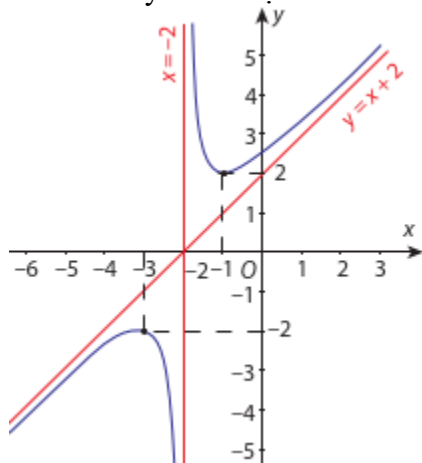
A. $y = x^3 + 3x^2 - 1$.

B. $y = x^3 - 3x^2 - 2$.

C. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

D. $y = \frac{-x^2 - 3x - 6}{x+1}$.

Câu 36. Đường cong trong hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số nào?



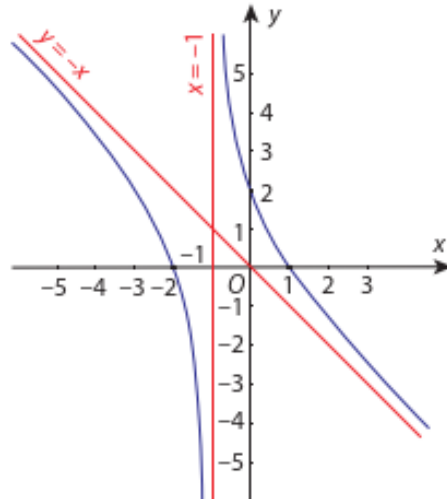
A. $y = \frac{x^2+4x+5}{x+2}$.

B. $y = \frac{4x+5}{x+2}$.

C. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

D. $y = \frac{x^2+4x+4}{x+1}$.

Câu 37. Đường cong trong hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số nào?



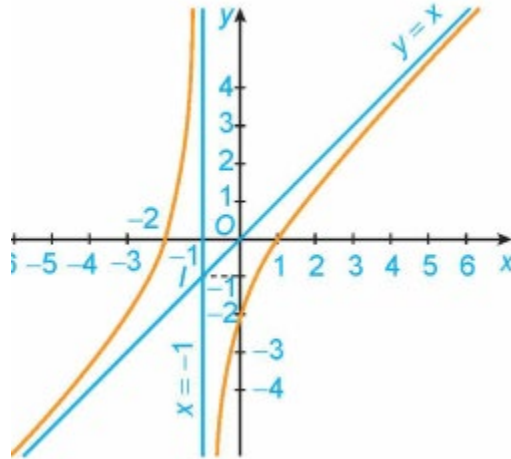
A. $y = \frac{-x+2}{x+1}$.

B. $y = \frac{-x^2-x+2}{x+1}$.

C. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$.

D. $y = \frac{x^2-x+2}{x+1}$.

Câu 38. Đường cong trong hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số nào?



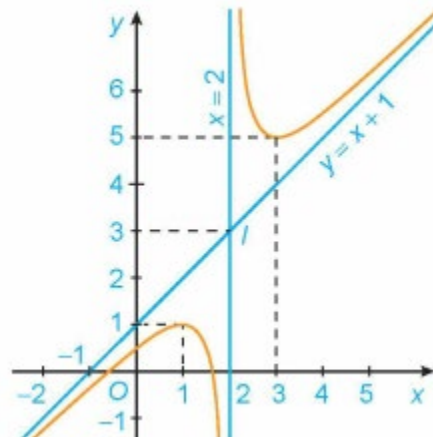
A. $y = x^3 + 3x^2 - 1$.

B. $y = \frac{-x^2+x-2}{x+1}$.

C. $y = \frac{x-2}{x+1}$.

D. $y = \frac{x^2+x-2}{x+1}$.

Câu 39. Đường cong trong hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số nào?



A. $y = \frac{x^2-x-1}{x-2}$.

B. $y = \frac{x^2+x+1}{x-2}$.

C. $y = \frac{-x+1}{x-2}$.

D. $y = \frac{-x-1}{x-2}$.

Câu 40. Bảng biến thiên trong hình vẽ dưới đây là của hàm số nào trong các đáp án sau?

x	$-\infty$	-1		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y			-4			$+\infty$		$+\infty$
	$-\infty$			$-\infty$			4	

A. $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.
B. $y = \frac{x^2 - 2x + 5}{x + 1}$.
C. $y = \frac{-x^2 + 2x - 5}{x - 1}$.
D. $y = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 1}$.

Câu 41. Bảng biến thiên trong hình vẽ dưới đây là của hàm số nào trong các đáp án sau?

x	$-\infty$	-1	2	5	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-4	$-\infty$	$+\infty$	8	$+\infty$

A. $y = \frac{-x^2 + 2x - 5}{x - 2}$.
B. $y = \frac{x^2 - 2x + 9}{x - 2}$.
C. $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 1}$.
D. $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$.

Câu 42. Bảng biến thiên trong hình vẽ dưới đây là của hàm số nào trong các đáp án sau?

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$		
y'		+	0	-	-	0	+
y							

A. $y = \frac{-x^2 + 2x - 5}{x - 2}$.
B. $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$.
C. $y = \frac{x^2 - 2x + 9}{x - 2}$.
D. $y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$.

Câu 43. Bảng biến thiên trong hình vẽ dưới đây là của hàm số nào trong các đáp án sau?

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'		$+$	$+$
y	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$

A. $y = \frac{x^2 - x - 1}{x + 2}$.
B. $y = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2}$.
C. $y = \frac{x^2 + x - 2}{x + 1}$.
D. $y = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$.

Câu 44. Bảng biến thiên trong hình vẽ dưới đây là của hàm số nào trong các đáp án sau?

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-2	$-\infty$	$+\infty$	2	$+\infty$

A. $y = x + 1 + \frac{1}{x}$.
B. $y = \frac{4x + 5}{x}$.
C. $y = \frac{x^2 + 4x + 5}{x}$.
D. $y = x + \frac{1}{x}$.

Câu 45. Bảng biến thiên trong hình vẽ dưới đây là của hàm số nào trong các đáp án sau?

x	$-\infty$	-3		-2		-1	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y	$-\infty$		-2		$+\infty$		2	$+\infty$

A. $y = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2}$.
B. $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$.
C. $y = \frac{-x^2 - x + 2}{x + 1}$.
D. $y = \frac{x^2 + 4x + 5}{x - 2}$.

Câu 46. Bảng biến thiên trong hình vẽ dưới đây là của hàm số nào trong các đáp án sau?

x	$-\infty$		-1	$+\infty$
y'		$-$		$-$
y	$+\infty$		$-\infty$	$-\infty$

A. $y = \frac{-x^2 - x + 2}{x - 1}$.
B. $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$.
C. $y = \frac{x^2 - x - 1}{x + 2}$.
D. $y = \frac{-x^2 - x + 2}{x + 1}$.

Câu 47. Bảng biến thiên trong hình vẽ dưới đây là của hàm số nào trong các đáp án sau?

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-4	0	4	$+\infty$	

A. $y = \frac{x^2 - x + 4}{x}$.
B. $y = \frac{x^2 + 1}{x}$.
C. $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$.
D. $y = \frac{x^2 + 4}{x}$.

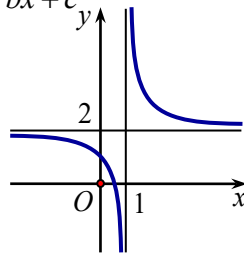
Câu 48. Bảng biến thiên trong hình vẽ dưới đây là của hàm số nào trong các đáp án sau?

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y			-3		

A. $y = \frac{x^2 - x + 4}{x + 1}$.
B. $y = \frac{x^2 + 4}{x}$.
C. $y = \frac{x^2 + 4}{x + 1}$.
D. $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$.

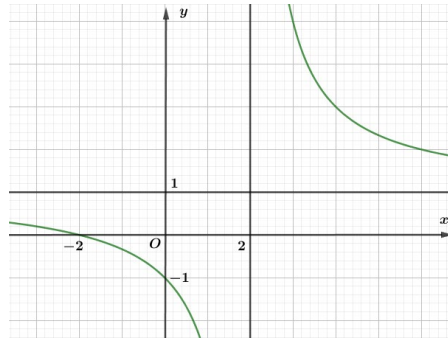
Dạng 2: Các câu hỏi liên quan đến hệ số của hàm số (biết đồ thị, BBT)

Câu 49. Xác định a, b, c để hàm số $y = \frac{ax-1}{bx+c}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn đáp án đúng?



- A.** $a=2, b=1, c=-1$. **B.** $a=2, b=1, c=1$. **C.** $a=2, b=2, c=-1$. **D.** $a=2, b=-1, c=1$.

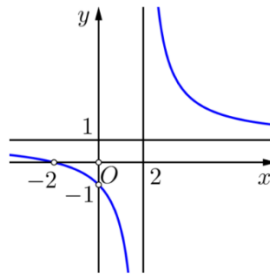
Câu 50. Đường cong ở hình bên là đồ thị hàm số $y = \frac{ax+2}{cx+b}$ với a, b, c là các số thực.



Mệnh đề nào sau đây đúng?

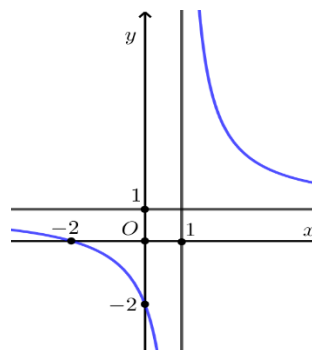
- A.** $a=2; b=2; c=-1$. **B.** $a=1; b=-2; c=1$. **C.** $a=1; b=2; c=1$. **D.** $a=1; b=1; c=-1$.

Câu 51. Cho hàm số $y = \frac{x-a}{bx+c}$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Tính giá trị của biểu thức $P = a+b+c$.



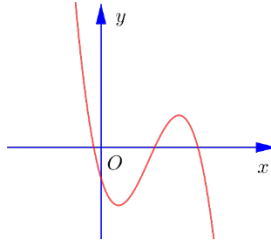
- A.** $P=-3$. **B.** $P=1$. **C.** $P=5$. **D.** $P=2$.

Câu 52. Tìm giá trị của a, b để hàm số $y = \frac{ax+2}{x-b}$ có đồ thị như hình vẽ sau:



- A.** $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$ **D.** $\begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$

Câu 53. Cho hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ.



Dấu của a, b, c, d là

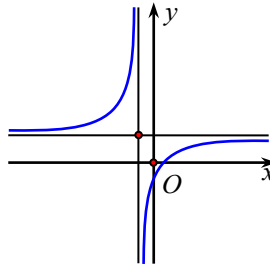
A. $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$.

B. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.

C. $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$.

D. $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

Câu 54. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.



Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

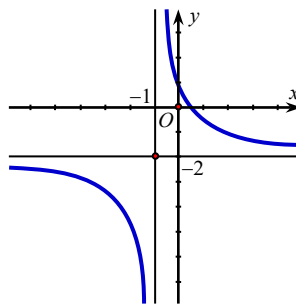
A. $ab < 0, ad < 0$.

B. $bd > 0, ad > 0$.

C. $ad > 0, ab < 0$.

D. $bd < 0, ab > 0$.

Câu 55. Tìm a, b để hàm số $y = \frac{ax+b}{x+1}$ có đồ thị như hình vẽ bên.



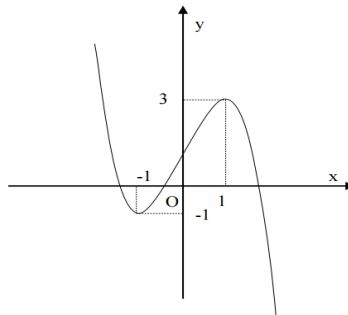
A. $a = -2, b = 1$.

B. $a = -1, b = -2$.

C. $a = 2, b = 1$.

D. $a = 1, b = -2$.

Câu 56. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Khẳng định nào sau đây đúng?



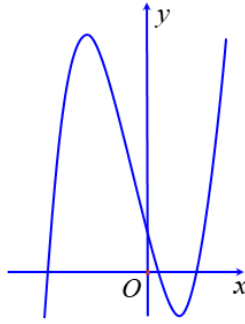
A. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.

B. $a < 0, b < 0, c > 0, d > 0$.

C. $a < 0, b = 0, c > 0, d > 0$.

D. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

Câu 57. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Mệnh đề nào sau đây đúng?



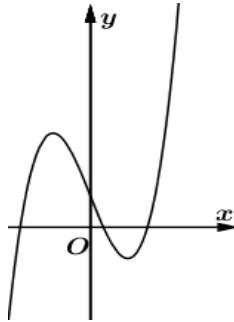
A. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.

B. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

C. $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

D. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

Câu 58. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Khẳng định nào sau đây về dấu của a, b, c, d là đúng nhất ?

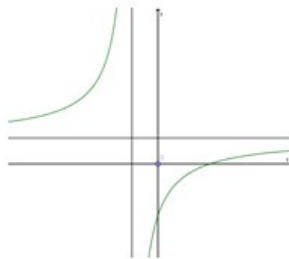
A. $a, b, c, d > 0$.

B. $a, d > 0, c < 0$.

C. $a, d > 0$.

D. $a > 0, c > 0 > b$.

Câu 59. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ. Mệnh đề nào trong các mệnh đề dưới đây là đúng?



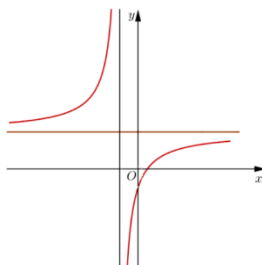
A. $ad > 0, bc < 0$.

B. $ad < 0, bc > 0$.

C. $cd < 0, bd > 0$.

D. $ac > 0, ab > 0$.

Câu 60. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



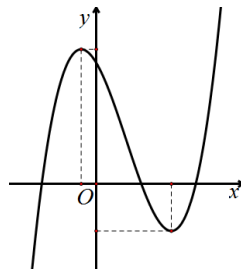
A. $ad > 0, ab < 0$.

B. $ab < 0, ad < 0$.

C. $bd > 0, ad > 0$.

D. $bd < 0, ab > 0$.

Câu 61. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây đúng?



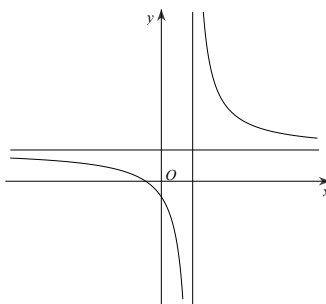
A. $a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

B. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

C. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.

D. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

Câu 62. Cho hàm số $y = \frac{bx - c}{x - a}$ ($a \neq 0$ và $a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào dưới đây đúng?



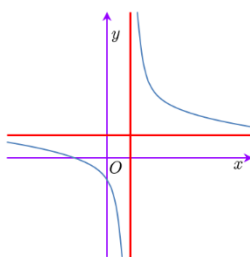
A. $a > 0, b < 0, c - ab < 0$.

B. $a > 0, b > 0, c - ab < 0$.

C. $a < 0, b > 0, c - ab < 0$.

D. $a < 0, b < 0, c - ab > 0$.

Câu 63. Cho hàm số $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ có đồ thị như hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



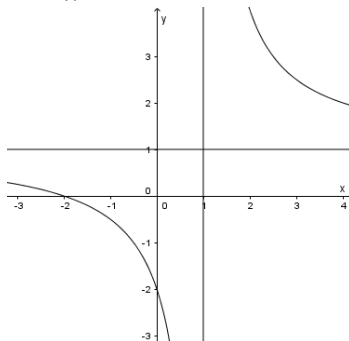
A. $ab < 0, cd < 0$.

B. $bc > 0, ad < 0$.

C. $ac > 0, bd > 0$.

D. $bd < 0, ad > 0$.

Câu 64. Giá trị của a, b để hàm số $y = \frac{ax + b}{x - 1}$ có đồ thị như hình vẽ là



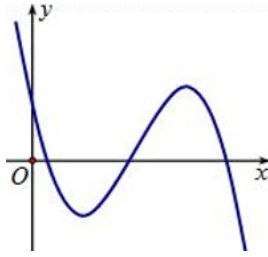
A. $a = 1, b = -2$.

B. $a = 1, b = 2$.

C. $a = -1, b = -2$.

D. $a = -1, b = 2$.

Câu 65. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ



Mệnh đề nào sau đây đúng?

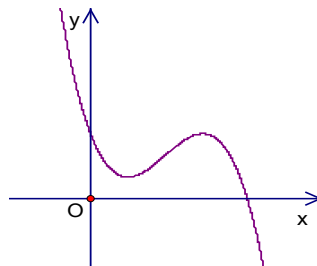
A. $a < 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

B. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

C. $a < 0, b < 0, c < 0, d > 0$.

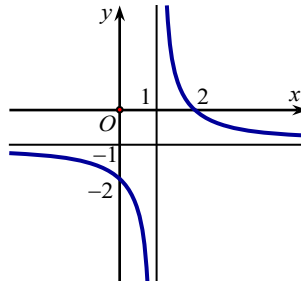
D. $a < 0, b > 0, c > 0, d > 0$.

Câu 66. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong trong hình dưới đây. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $a > 0, c > 0, d > 0$. **B.** $a < 0, c > 0, d > 0$. **C.** $a < 0, c < 0, d < 0$. **D.** $a < 0, c < 0, d > 0$.

Câu 67. Cho hàm số $y = \frac{ax-b}{x-1}$ có đồ thị như hình dưới.



Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $b < 0 < a$.

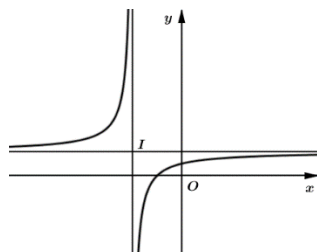
B. $0 < b < a$.

C. $b < a < 0$.

D. $0 < a < b$.

Câu 68. Cho hàm số $y = \frac{ax+1}{x-b}$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Mệnh đề nào sau đây đúng?



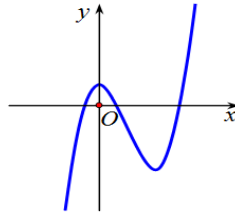
A. $a > 0 > b$.

B. $a > b > 0$.

C. $a < b < 0$.

D. $a < 0 < b$.

Câu 69. Hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a \neq 0$) có đồ thị sau



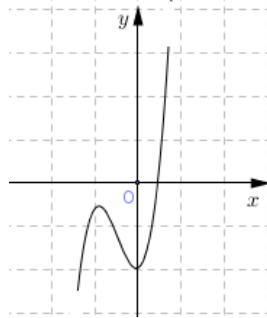
A. $a > 0; b > 0; c > 0; d > 0$.

B. $a > 0; b < 0; c = 0; d > 0$.

C. $a > 0; b > 0; c = 0; d > 0$.

D. $a > 0; b < 0; c > 0; d > 0$.

Câu 70. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



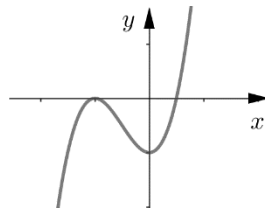
A. $a > 0, b < 0, c = 0, d < 0$.

B. $a > 0, b = 0, c < 0, d < 0$.

C. $a > 0, b = 0, c > 0, d < 0$.

D. $a > 0, b > 0, c = 0, d < 0$.

Câu 71. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



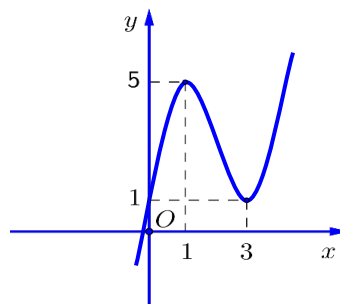
A. $a > 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

B. $a < 0, b < 0, c = 0, d < 0$.

C. $a > 0, b > 0, c = 0, d < 0$.

D. $a > 0, b < 0, c = 0, d < 0$.

Câu 72. Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ ở bên. Mệnh đề nào sau đây đúng?



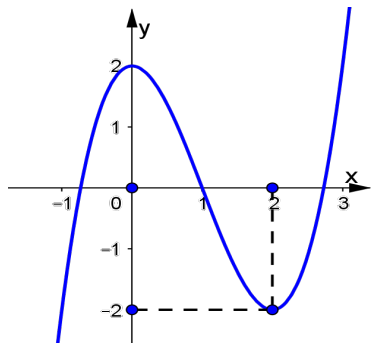
A. $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

B. $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$.

C. $a > 0, b < 0, c > 0, d > 0$.

D. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.

Câu 73. Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị là đường cong như hình vẽ.



Tính tổng $S = a + b + c + d$.

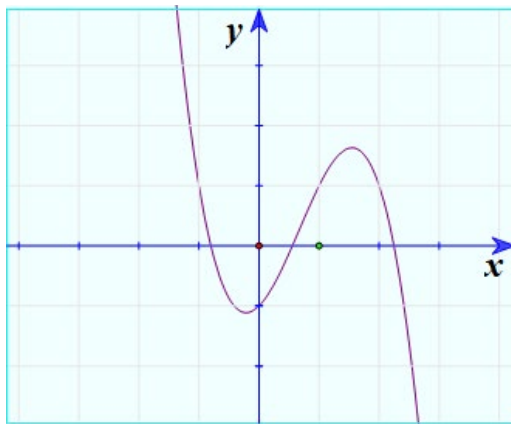
A. $S = 0$.

B. $S = 6$.

C. $S = -4$.

D. $S = 2$.

Câu 74. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a < 0, b < 0, c > 0, d < 0$.

B. $a < 0, b > 0, c > 0, d < 0$.

C. $a < 0, b < 0, c < 0, d < 0$.

D. $a < 0, b > 0, c < 0, d < 0$.