

TẬP GIÁ TRỊ VÀ MAX - MIN CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

PHƯƠNG PHÁP

1. Các kiến thức về giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}$.

a. Số thực M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu $\begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = M \end{cases}$

b. Số thực N được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu $\begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = m \end{cases}$

2. Một số kiến thức ta sử dụng trong các bài toán này

a) Dựa vào tập giá trị của hàm số lượng giác, chẳng hạn: $\begin{cases} -1 \leq \sin x \leq 1 \\ -1 \leq \cos x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \\ 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \end{cases}$

b) Bảng biến thiên của hàm số lượng giác.

c) Kỹ thuật sử dụng máy tính cầm tay.

MỨC ĐỘ 1

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của đồ thị hàm số $y = 3 - \sin x$

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 1 \geq -\sin x \geq -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 3+1 \geq 3-\sin x \geq 3+(-1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 4 \geq y \geq 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ta có: $y = 4$ khi $\sin x = -1$ và $y = 2$ khi $\sin x = 1$

Vậy $\min y = 2$ và $\max y = 4$.

Bài 2. Tìm tập giá trị T của hàm số $y = 3 \cos 2x - 5$

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $-1 \leq \cos 2x \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq 3 \cos 2x \leq 3 \Leftrightarrow -3 - 5 \leq 3 \cos 2x - 5 \leq 3 - 5 \Leftrightarrow -8 \leq y \leq -2$

Vậy tập giá trị của hàm số $y = 3 \cos 2x - 5$ là $T = [-8; -2]$

Bài 3. Tìm tập giá trị T của hàm số $y = \sin^2 x + 2 \cos^2 x + 1$ trên khoảng $\mathbb{R}$

Lời giải

Ta có: $y = \sin^2 x + 2 \cos^2 x + 1 = \sin^2 x + 2(1 - \sin^2 x) + 1 = 3 - \sin^2 x$

Với $x \in \mathbb{R}$ thì $0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow 0 \geq -\sin^2 x \geq -1 \Rightarrow 3 \geq 3 - \sin^2 x \geq 3 - 1 = 2$

Vậy tập giá trị của hàm số $y = \sin^2 x + 2 \cos^2 x + 1$ trên $\mathbb{R}$ là $T = [2; 3]$

Bài 4. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \frac{1}{\cos x + 1}$

Lời giải

ĐKXĐ: $\cos x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq \pi + k2\pi$. TXĐ: $D = \mathbb{R} / \{\pi + k2\pi\}$

Ta có: $\forall x \in D: -1 < \cos x \leq 1 \Leftrightarrow 0 < 1 + \cos x \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{1 + \cos x} \geq \frac{1}{2}$

Ta có: $y = \frac{1}{2}$ khi $\cos x = 1$.

Vậy, $\min y = \frac{1}{2}$.

Bài 5. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$

Lời giải

Ta có: $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \geq -1 \Leftrightarrow 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \geq -2 \Leftrightarrow 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1 \geq -1$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là -1 .

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = 2017 \cos 8\left(x + \frac{10\pi}{2017}\right) + 2016$

A. $\min y = 1$; $\max y = 4033$

B. $\min y = -1$; $\max y = 4033$

C. $\min y = 1$; $\max y = 4022$

D. $\min y = -1$; $\max y = 4022$

Lời giải

Chọn B

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$

Ta có $-1 \leq \cos 8\left(x + \frac{10\pi}{2017}\right) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow -2017 + 2016 \leq 2017 \cos 8\left(x + \frac{10\pi}{2017}\right) + 2016 \leq 2017 + 2016, \forall x \in \mathbb{R}.$

$\Leftrightarrow -1 \leq 2017 \cos 8\left(x + \frac{10\pi}{2017}\right) + 2016 \leq 4033, \forall x \in \mathbb{R}$

Ta có $y = -1$ khi $\cos 8\left(x + \frac{10\pi}{2017}\right) = -1$; $y = 4033$ khi $\cos 8\left(x + \frac{10\pi}{2017}\right) = 1$.

Vậy $\min y = -1$; $\max y = 4033$.

Câu 2. Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y = 4 \cos \sqrt{x}$ là:

A. 0 và 4.

B. -4 và 4.

C. 0 và 1.

D. -1 và 1.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D = [0; +\infty)$.

Ta có: $-1 \leq \cos \sqrt{x} \leq 1, \forall x \in [0; +\infty)$

$\Leftrightarrow -4 \leq 4 \cos \sqrt{x} \leq 4, \forall x \in [0; +\infty)$

Ta có $y = -4$ khi $\cos \sqrt{x} = -1$ và $y = 4$ khi $\cos \sqrt{x} = 1$.

Vậy $\min y = -4$; $\max y = 4$

Câu 3. Cho hàm số $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Giá trị lớn nhất của hàm số là:

A. -1.

B. 0.

C. 1.

D. $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$. Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ là 1.

Câu 4. Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{1 - \cos^2 x} - 2$ là:

A. 0 và $\sqrt{2} - 1$.

B. -1 và $\sqrt{2} - 1$.

C. -2 và -1

D. -1 và 1

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y = \sqrt{1 - \cos^2 x} - 2 = \sqrt{\sin^2 x} - 2 = |\sin x| - 2$$

$$\text{Mặt khác } 0 \leq |\sin x| \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq |\sin x| - 2 \leq -1 \Leftrightarrow -2 \leq y \leq -1$$

$$\text{Ta có: } y = -2 \text{ khi } |\sin x| = 0 \text{ và } y = -1 \text{ khi } |\sin x| = 1$$

Vậy giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số là -2 và -1 .

Câu 5. Cho hàm số $y = -2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A.** $y \geq -4, \forall x \in \mathbb{R}$ **B.** $y \geq 4, \forall x \in \mathbb{R}$ **C.** $y \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ **D.** $y \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}$

Lời giải**Chọn C**

$$\text{Ta có } -1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 2 \geq -2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \geq -2, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 4 \geq -2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Ta có: } y = 4 \text{ khi } \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1 \text{ và } y = 0 \text{ khi } \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

Suy ra chọn đáp án C.

MỨC ĐỘ 2**BÀI TẬP TỰ LUẬN**

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = 2017 \cos\left(8x + \frac{10\pi}{2017}\right) + 2016$.

Lời giải

Cách 1: Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } -1 \leq \cos\left(8x + \frac{10\pi}{2017}\right) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -2017 \leq 2017 \cos\left(8x + \frac{10\pi}{2017}\right) \leq 2017, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq 2017 \cos\left(8x + \frac{10\pi}{2017}\right) + 2016 \leq 4033, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Ta có } y = -1 \text{ khi } \cos\left(8x + \frac{10\pi}{2017}\right) = -1; y = 4033 \text{ khi } \cos\left(8x + \frac{10\pi}{2017}\right) = 1.$$

Vậy $\min y = -1; \max y = 4033$.

Bài 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = 2 \cos^2 x - \sin 2x + 5$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y = 2 \cos^2 x - \sin 2x + 5 = \cos 2x - \sin 2x + 6 = \sqrt{2} \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) + 6.$$

$$\text{Do } -\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \leq \sqrt{2} \text{ nên } -\sqrt{2} + 6 \leq \sqrt{2} \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) + 6 \leq \sqrt{2} + 6.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2 \cos^2 x - \sin 2x + 5$ là $6 - \sqrt{2}$.

Bài 3. Gọi M , m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin x + \cos x$. Tính $P = M - m$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right).$$

$$\text{Mà } -1 \leq \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \leq \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} M = \sqrt{2} \\ m = -\sqrt{2} \end{cases} \rightarrow P = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } P = 2\sqrt{2}.$$

Bài 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{\sin x + 1}{\cos x + 2}$.

Lời giải

$$\text{Cách 1: } \cos x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Vậy } y = \frac{\sin x + 1}{\cos x + 2} \Leftrightarrow \sin x + 1 = y(\cos x + 2)$$

$$\Leftrightarrow \sin x - y \cos x + 1 - 2y = 0.$$

$$\text{Ta có } 1^2 + (-y)^2 \geq (1 - 2y)^2 \Leftrightarrow y^2 + 1 \geq 4y^2 - 4y + 1 \Leftrightarrow 3y^2 - 4y \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq \frac{4}{3}.$$

Vậy $\min y = 0$.

$$\text{Cách 2: Ta có } \begin{cases} \sin x + 1 \geq 0 \\ \cos x + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow y \geq 0 \Rightarrow \min y = 0 \Leftrightarrow \sin x = -1.$$

Bài 5. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = 2 \cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 1$.

Lời giải

Cách 1:

$$\begin{aligned} y &= 2 \cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 1 = 2 \cos^2 x - 1 - \sqrt{3} \sin 2x + 2 = \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x + 2 \\ &= 2 \left(\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x \right) + 2 = 2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) + 2. \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác } 0 \leq 2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) + 2 \leq 4, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 4, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Cách 2:

$$y = 2 \cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cos x + 1 = 2 \cos^2 x - 1 - \sqrt{3} \sin 2x + 2 = \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x + 2 \quad (*)$$

$$\text{Ta có } -\sqrt{1+3} + 2 \leq y \leq \sqrt{1+3} + 2 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 4.$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \sin^2 x + 2 \cos^2 x$.

- A. $M = 2, m = 0$. B. $M = 2, m = 1$. C. $M = 3, m = 1$. D. $M = 3, m = 0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y = \sin^2 x + 2 \cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x = 1 + \cos^2 x$.

Do $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq \cos^2 x + 1 \leq 2$. Suy ra $\begin{cases} M = 2 \\ m = 1 \end{cases}$.

Câu 2. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 8 \sin^2 x + 3 \cos 2x$. Tính $P = 2M - m^2$.

- A. $P = 1$. B. $P = 2$. C. 112 . D. $P = 130$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y = 8 \sin^2 x + 3 \cos 2x = 8 \sin^2 x + 3(1 - 2 \sin^2 x) = 2 \sin^2 x + 3$.

Mà $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Leftrightarrow 3 \leq 2 \sin^2 x + 3 \leq 5 \Rightarrow 3 \leq y \leq 5$. Suy ra: $\begin{cases} M = 5 \\ m = 3 \end{cases}$.

Do đó: $P = 2M - m^2 = 1$.

Câu 3. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3 \sin x + 4 \cos x - 1$.

- A. $\max y = 8, \min y = -6$. B. $\max y = 4, \min y = -6$.
C. $\max y = 6, \min y = -8$. D. $\max y = 6, \min y = -4$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y = 3 \sin x + 4 \cos x - 1 \Leftrightarrow 3 \sin x + 4 \cos x = y + 1$ (*)

Ta coi (*) như là phương trình cô điển với $a = 3, b = 4, c = y + 1$.

Phương trình (*) có nghiệm khi và chỉ khi $a^2 + b^2 \geq c^2 \Leftrightarrow 9 + 16 \geq (y + 1)^2 \Leftrightarrow -6 \leq y \leq 4$.

Vậy $\max y = 4, \min y = -6$.

Chú ý:

Ta có thể áp dụng bất đẳng thức BCS như sau:

$$|y + 1| = |3 \sin x + 4 \cos x| \leq \sqrt{(3^2 + 4^2)(\sin^2 x + \cos^2 x)} = 5.$$

Câu 4. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin^2 x - \sin x + 2$.

- A. $\min y = \frac{7}{4}; \max y = 4$. B. $\min y = \frac{7}{4}; \max y = 2$.

C. $\min y = -1; \max y = 1.$

D. $\min y = \frac{1}{2}; \max y = 2.$

Lời giải

Chọn A

Đặt $\sin x = u; u \in [-1; 1].$

Xét hàm số: $y = u^2 - u + 2$ trên $[-1; 1].$

Ta có: $\frac{-b}{2a} = \frac{1}{2} \in [-1; 1].$ Từ đây có bảng biến thiên

u	-1	$\frac{1}{2}$	1
y	4	$\frac{7}{4}$	2

Ta kết luận: $\min_{[-1;1]} f(u) = \frac{7}{4}$ và $\max_{[-1;1]} y = 4 \Leftrightarrow u = -1.$

Hay $\min y = \frac{7}{4} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$ và $\max y = 4 \Leftrightarrow \sin x = -1.$

Câu 5.

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{\sin x + 2 \cos x + 3}{2 + \cos x}$

A. $\min y = -\frac{2}{3}; \max y = 2$

B. $\min y = \frac{2}{3}; \max y = 2.$

B. $\min y = \frac{1}{2}; \max y = \frac{3}{2}.$

D. $\min y = -\frac{1}{2}; \max y = \frac{3}{2}.$

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Ta có $\cos x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

$$y = \frac{\sin x + 2 \cos x + 3}{2 + \cos x} \Leftrightarrow \sin x + 2 \cos x + 3 = 2y + y \cos x \Leftrightarrow \sin x + (2 - y) \cos x + 3 - 2y = 0.$$

$$\text{Ta có: } 1^2 + (2 - y)^2 \geq (3 - 2y)^2 \Leftrightarrow 4y^2 - 12y + 9 - y^2 + 4y - 4 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 8y + 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq y \leq 2.$$

Cách 2 : sử dụng máy tính cầm tay

Tương tự như ở ví dụ 1 thì ta có thể sử dụng SHIFT SOLVE: $\frac{\sin x + 2 \cos x + 3}{2 + \cos x} = 2$ thì phương trình

có nghiệm. Do 2 là số lớn nhất trong các phương án A; B; C; D nên ta không cần thử trường hợp

$$\max = \frac{3}{2}.$$

Lúc này chỉ còn A và B. Thử với $\min y = -\frac{2}{3}$ thì không có nghiệm.

MỨC ĐỘ 1**BÀI TẬP TỰ LUẬN**

Bài 1. Tìm tập giá trị của các hàm số sau: $y = 3 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 2$

Lời giải

Vì $-1 \leq \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$ nên $-3 \leq 3 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 3 \Rightarrow -3 + 2 \leq y \leq 3 + 2 \Rightarrow -1 \leq y \leq 5$.

Vậy tập giá trị của hàm số là $[-1; 5]$.

Bài 2. Tìm tập giá trị của các hàm số sau: $y = \sqrt{3 + 2 \sin 2x}$.

Lời giải

Ta có: $-1 \leq \sin 2x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2 \sin 2x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq 3 + 2 \sin 2x \leq 5 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{3 + 2 \sin 2x} \leq \sqrt{5}$.

Vậy tập giá trị của hàm số là $[1; \sqrt{5}]$.

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau: $y = 4 \sin x \cos x + 1$.

Lời giải

Ta có $y = 2 \sin 2x + 1$.

Do $-1 \leq \sin 2x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2 \sin 2x \leq 2 \Rightarrow -1 \leq 2 \sin 2x + 1 \leq 3$

$\Rightarrow -1 \leq y \leq 3$.

$$* y = -1 \Leftrightarrow \sin 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$$

$$* y = 3 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 3, đạt được khi $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

giá trị nhỏ nhất bằng -1, đạt được khi $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

Bài 4. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau: $y = 4 - 3 \sin^2 2x$.

Lời giải

Ta có: $0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 4 - 3 \sin^2 x \leq 4$.

$$* y = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

$$* y = 4 \Leftrightarrow \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 4, đạt được khi $x = k\pi$.

giá trị nhỏ nhất bằng 1, đạt được khi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Bài 5. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = \sqrt{2 \sin x + 3}$.

Lời giải

Ta có $1 \leq 2 \sin x + 3 \leq 5 \Rightarrow 1 \leq y \leq \sqrt{5}$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\max y = \sqrt{5}$, đạt được khi $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Giá trị nhỏ nhất bằng $\min y = 1$, đạt được khi $x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tìm tập giá trị hàm số sau $y = 1 + 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $[-2; 4]$.

B. $[-2; 2]$.

C. $[-1; 4]$.

D. $[-2; 3]$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $-1 \leq \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 3 \Rightarrow -2 \leq 1 + 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 4$.

$\Rightarrow -2 \leq y \leq 4$.

Vậy tập giá trị của hàm số là $[-2; 4]$.

Câu 2. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 2 \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) + 3$

A. $\min y = 2, \max y = 5$.

B. $\min y = 1, \max y = 4$.

C. $\min y = 1, \max y = 5$.

D. $\min y = 1, \max y = 3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $-1 \leq \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2 \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 2 \Rightarrow 1 \leq 2 \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) + 3 \leq 5 \Rightarrow 1 \leq y \leq 5$.

$\min y = 1$ đạt được khi $x = \frac{4\pi}{9} + k \frac{2\pi}{3}$.

$\max y = 5$ đạt được khi $x = \frac{\pi}{9} + k \frac{2\pi}{3}$.

Câu 3. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 1 - \sqrt{2 \cos^2 x + 1}$

A. $\max y = 1, \min y = 1 - \sqrt{3}$.

B. $\max y = 3, \min y = 1 - \sqrt{3}$.

C. $\max y = 2, \min y = 1 - \sqrt{3}$.

D. $\max y = 0, \min y = 1 - \sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $1 \leq \sqrt{2 \cos^2 x + 1} \leq \sqrt{3} \Rightarrow 1 - \sqrt{3} \leq y \leq 0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $\min y = 0$, đạt được khi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $\min y = 1 - \sqrt{3}$, đạt được khi $x = k\pi$.

Câu 4. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 1 + 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $\min y = -2$, $\max y = 4$.

B. $\min y = 2$, $\max y = 4$.

C. $\min y = -2$, $\max y = 3$.

D. $\min y = -1$, $\max y = 4$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $-1 \leq \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Rightarrow -2 \leq y \leq 4$

$$\bullet y = -2 \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + k\pi \Rightarrow \min y = -2$$

$$\bullet y = 4 \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{8} + k\pi \Rightarrow \max y = 4$$

Câu 5. Tìm tập giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 3 - 2 \cos^2 3x$

A. $\min y = 1$, $\max y = 2$.

B. $\min y = 1$, $\max y = 3$.

C. $\min y = 2$, $\max y = 3$.

D. $\min y = -1$, $\max y = 3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $0 \leq \cos^2 3x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq y \leq 3$.

$$\bullet y = 1 \Leftrightarrow \cos^2 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3} \Rightarrow \min y = 1.$$

$$\bullet y = 3 \Leftrightarrow \cos^2 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \Rightarrow \max y = 3.$$

MỨC ĐỘ 2**BÀI TẬP TỰ LUẬN**

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = 3 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{12} \right) + 4$

Lời giải

$$\text{Ta có } \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{12} \right) \leq 1 \Rightarrow 3 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{12} \right) \leq 3 \Rightarrow 3 \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{12} \right) + 4 \leq 7.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 7.

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = 2 \sin^2 x - \sin 2x + 10$.

Lời giải

$$\text{Ta có } f(x) = 2 \sin^2 x - \sin 2x + 10 = 11 - \sin 2x - \cos 2x = 11 - \sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right).$$

$$\text{Do } -1 \leq \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \leq \sqrt{2} \text{ nên } 11 - \sqrt{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \leq 11 + \sqrt{2}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{8} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}). \text{ Vậy } \max f(x) = 11 + \sqrt{2}.$$

Bài 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2 \cos^2 x - \sin 2x + 5$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y = 2 \cos^2 x - \sin 2x + 5 = \cos 2x - \sin 2x + 6 = \sqrt{2} \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) + 6.$$

$$\text{Do } -\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \leq \sqrt{2} \text{ nên } -\sqrt{2} + 6 \leq \sqrt{2} \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) + 6 \leq \sqrt{2} + 6.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2 \cos^2 x - \sin 2x + 5$ là $6 - \sqrt{2}$.

Bài 4. Giả sử M là giá trị lớn nhất và m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = (2 + \sqrt{3}) \sin x - \cos x$. Tính $M + m$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } -\sqrt{(2 + \sqrt{3})^2 + 1} \leq (2 + \sqrt{3}) \sin x - \cos x \leq \sqrt{(2 + \sqrt{3})^2 + 1}.$$

Vậy $M + m = 0$.

Bài 5. Cho hàm số $y = \frac{12}{7 - 4 \sin x}$ có giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \right]$. Tìm M, m .

Lời giải

Ta có:

$$-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\sin x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -4 \leq -4 \sin x \leq 2 \Rightarrow 3 \leq 7 - 4 \sin x \leq 9$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} \leq \frac{12}{7 - 4 \sin x} \leq 4. \text{ Hay } \frac{4}{3} \leq y \leq 4.$$

Vậy $M = 4, m = \frac{4}{3}$.

Bài 6. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2 \sin x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$.

Lời giải

$$y' = 2 \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Với $x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$ suy ra: $x = \frac{\pi}{2}$.

$$y\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -1, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2, y\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 1.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 2 và giá trị nhỏ nhất của hàm số là -1.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

MỨC ĐỘ 2

Câu 1. Tìm tập giá trị của hàm số $y = \sqrt{3} \sin x - \cos x - 2$.

A. $[-2; \sqrt{3}]$. **B.** $[-\sqrt{3}-3; \sqrt{3}-1]$. **C.** $[-4; 0]$. **D.** $[-2; 0]$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Xét } y = \sqrt{3} \sin x - \cos x - 2 = 2 \left(\sin x \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{6} \right) - 2 = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) - 2.$$

$$\text{Ta có } -1 \leq \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \leq 1 \Rightarrow -4 \leq 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) - 2 \leq 0 \Rightarrow -4 \leq y \leq 0 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Vậy tập giá trị của hàm số là $[-4; 0]$.

Câu 2. Giá trị nhỏ nhất m và giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \frac{\sin x + 2 \cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2}$ là

A. $m = -\frac{1}{2}; M = 1$. **B.** $m = 1; M = 2$. **C.** $m = -2; M = 1$. **D.** $m = -1; M = 2$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y = \frac{\sin x + 2 \cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2} \Leftrightarrow (y-1) \sin x + (y-2) \cos x = 1-2y \quad (*).$$

$$\text{Phương trình } (*) \text{ có nghiệm } \Leftrightarrow (y-1)^2 + (y-2)^2 \geq (1-2y)^2 \Leftrightarrow y^2 + y - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq y \leq 1.$$

Vậy $m = -2; M = 1$.

Câu 3. Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \frac{12}{7-4 \sin x}$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$ là

A. $M = \frac{12}{5}; m = \frac{4}{3}$. **B.** $M = 4; m = \frac{4}{3}$. **C.** $M = \frac{12}{5}; m = \frac{12}{7}$. **D.** $M = 4; m = \frac{12}{11}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Do } x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right] \Rightarrow \sin x \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right] \Rightarrow y = \frac{12}{7-4\sin x} > 0;$$

$$y = \frac{12}{7-4\sin x} \Leftrightarrow 7y - 4y\sin x = 12 \Leftrightarrow \sin x = \frac{7y-12}{4y} \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right] \Rightarrow y \in \left[\frac{4}{3}; 4\right].$$

$$\text{Do đó } M = \max_{\left[-\frac{1}{2}; 1\right]} f(t) = f(1) = 4 \text{ và } m = \min_{\left[-\frac{1}{2}; 1\right]} f(t) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}.$$

Câu 4. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right]$ lần lượt là

A. $-\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}; -1$. **C.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}; -2$. **D.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq -\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \leq \sin x \leq \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow -1 \leq \sin x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } \max_{\left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right]} y = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \min_{\left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right]} y = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Câu 5. Gọi M, m tương ứng là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2\cos x + 1}{\cos x - 2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $M + 9m = 0$. **B.** $9M - m = 0$. **C.** $9M + m = 0$. **D.** $M + m = 0$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y = \frac{2\cos x + 1}{\cos x - 2} = 2 + \frac{5}{\cos x - 2}.$$

$$\text{Mà } -1 \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq \cos x - 2 \leq -1 \Leftrightarrow -\frac{5}{3} \geq \frac{5}{\cos x - 2} \geq -5 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \geq 2 + \frac{5}{\cos x - 2} \geq -3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \geq y \geq -3.$$

$$\text{Vậy } M = \frac{1}{3} \text{ và } -1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 9M + m = 0.$$

MỨC ĐỘ 3**BÀI TẬP TỰ LUẬN**

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = 2020 \cos\left(8x + \frac{10\pi}{2019}\right) + 2021$.

Lời giải

Ta có $-1 \leq \cos\left(8x + \frac{10\pi}{2019}\right) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Nên $-2020 \leq 2020 \cos\left(8x + \frac{10\pi}{2019}\right) \leq 2020 \Leftrightarrow 1 \leq 2020 \cos\left(8x + \frac{10\pi}{2019}\right) + 2021 \leq 4041$.

Vậy $\min y = 1$ đạt được khi $\cos\left(8x + \frac{10\pi}{2019}\right) = -1$,

$\max y = 4041$ đạt được khi $\cos\left(8x + \frac{10\pi}{2019}\right) = 1$.

Bài 2. Tìm GTNN của hàm số $y = \cos x + \sqrt{2 - \cos^2 x}$.

Lời giải

Ta có $\cos x \geq -1$, dấu “=” xảy ra khi $\cos x = -1$. (1)

Mặt khác $0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\cos^2 x \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq 2 - \cos^2 x \leq 2$.

$\Rightarrow \sqrt{2 - \cos^2 x} \geq 1$, dấu “=” xảy ra khi $\cos x = \pm 1$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $\cos x + \sqrt{2 - \cos^2 x} \geq 0$.

Suy ra $\min y = 0$, đạt được khi $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Bài 3. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x + 2$.

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned} y &= \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x + 2 = 2 \left(\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x \right) + 2 \\ &= 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} \cos 2x - \sin \frac{\pi}{3} \sin 2x \right) + 2 = 2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) + 2. \end{aligned}$$

Mặt khác $-1 \leq \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 2 \leq 4$.

Vậy $\min y = 0$ đạt được khi $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$, $\max y = 4$ đạt được khi $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 1$.

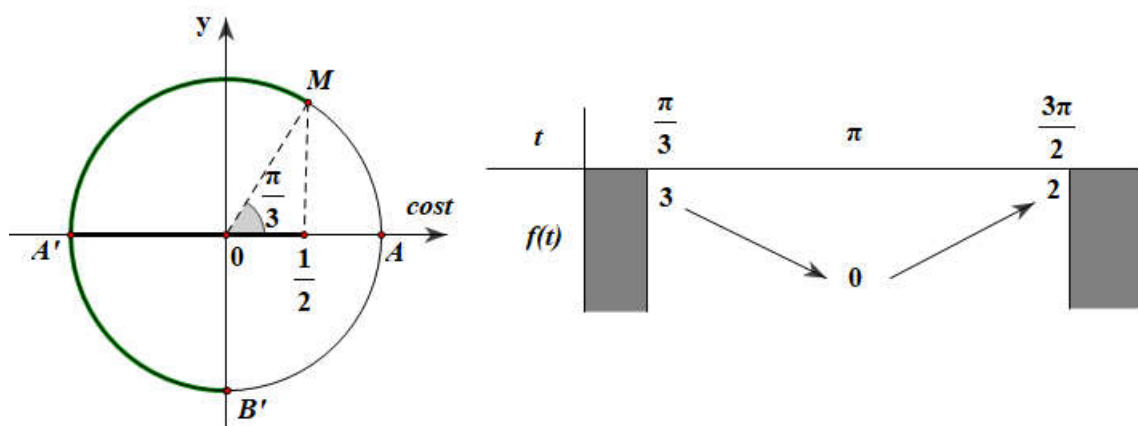
Bài 4. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2 \cos^2 x - 2\sqrt{3} \sin x \cdot \cos x + 1$ trên đoạn $\left[0; \frac{7\pi}{12}\right]$.

Lời giải

Ta có $y = \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x + 2 = 2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) + 2$.

Đặt $t = 2x + \frac{\pi}{3}$. Theo giả thiết $x \in \left[0; \frac{7\pi}{12} \right] \Rightarrow t \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{2} \right]$.

Ta lập BBT của hàm số $f(t) = 2 \cos t + 2$ trên $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{2} \right]$.



Từ bảng biến thiên ta có $\min_{\left[\frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{2} \right]} y = \min_{\left[\frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{2} \right]} f(t) = 0$, đạt được khi $t = \pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ $\max_{\left[\frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{2} \right]} y = \max_{\left[\frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{2} \right]} f(t) = 3$,

đạt được khi $t = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = 0$

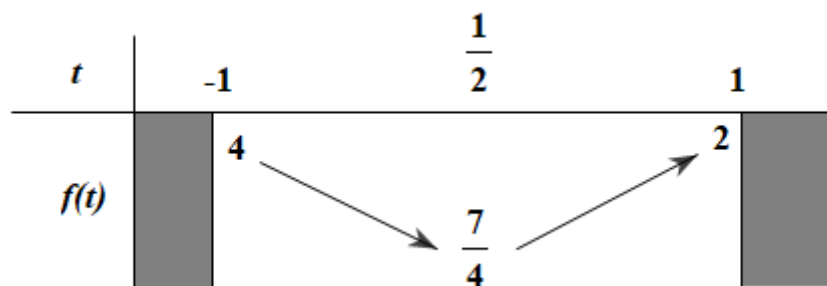
Bài 5. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = \cos^2 x - \cos x + 2$.

Lời giải

Đặt $\cos x = t$; $t \in [-1; 1]$

Xét hàm số bậc hai: $f(t) = t^2 - t + 2$ trên $[-1; 1]$.

Ta có: $\frac{-b}{2a} = \frac{1}{2} \in [-1; 1]$. Từ đây có bảng biến thiên



Ta kết luận: $\min_{[-1; 1]} y = \min_{[-1; 1]} f(t) = \frac{7}{4}$, đạt được khi $\cos x = \frac{1}{2}$;

$\max_{[-1; 1]} y = \max_{[-1; 1]} f(t) = 4$, đạt được khi $\cos x = -1$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 2\sin^2 x + \cos^2 2x$.

A. $\max y = 4$, $\min y = \frac{3}{4}$.

B. $\max y = 3$, $\min y = 2$.

C. $\max y = 4$, $\min y = 2$.

D. $\max y = 3$, $\min y = \frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = \sin^2 x$, $0 \leq t \leq 1 \Rightarrow \cos 2x = 1 - 2t$.

$$\Rightarrow y = 2t + (1 - 2t)^2 = 4t^2 - 2t + 1 = \left(2t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Cách 1: Do $0 \leq t \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq 2t - \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow 0 \leq \left(2t - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{3}{4} \leq y \leq 3$.

Cách 2: Có $y' = 8t - 2 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4} \in [0; 1]$.

Ta có: $y(0) = 1$; $y\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$; $y(1) = 3$.

Vậy $\max y = 3$ đạt được khi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

$\min y = \frac{3}{4}$ đạt được khi $\sin^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{4}$.

$\Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi$.

Câu 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = \tan^2 x + \cot^2 x + 3(\tan x + \cot x) - 1$.

A. $\min y = -2$.

B. $\min y = -4$.

C. $\min y = -5$.

D. $\min y = -1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y = (\tan x + \cot x)^2 + 3(\tan x + \cot x) - 3$.

Đặt $t = \tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x} \Rightarrow |t| \geq 2$.

Suy ra $y = t^2 + 3t - 3 = f(t)$.

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f(t)$				

Vậy $\min y = -5$ đạt được khi $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

- Câu 3.** Gọi giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = \sin x + \sqrt{2 - \sin^2 x}$ là M, m . Tính $M - m$.
A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y \geq 1 + \sin x \geq 0, \forall x$ và $y^2 = 2 + 2\sin x \sqrt{2 - \sin^2 x}$.

Mà $2|\sin x \sqrt{2 - \sin^2 x}| \leq \sin^2 x + 2 - \sin^2 x = 2$.

Suy ra $0 \leq y^2 \leq 4 \Rightarrow 0 \leq y \leq 2$.

Vậy $\min y = 0$ đạt được khi $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$.

$\max y = 2$ đạt được khi $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Vậy $M = 2, m = 0$ hay $M - m = 2$.

- Câu 4.** Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{\sin x + 2 \cos x + 3}{2 + \cos x}$.

A. $\min y = -\frac{2}{3}; \max y = 2$.

B. $\min y = \frac{2}{3}; \max y = 2$.

C. $\min y = \frac{1}{2}; \max y = \frac{3}{2}$.

D. $\min y = -\frac{1}{2}; \max y = \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: Ta có $\cos x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$y = \frac{\sin x + 2 \cos x + 3}{2 + \cos x} \Leftrightarrow \sin x + 2 \cos x + 3 = 2y + y \cos x \Leftrightarrow \sin x + (2 - y) \cos x = 2y - 3$$

Ta có

$$(2y - 3)^2 = (\sin x + (2 - y) \cos x)^2 \leq (1 + (2 - y)^2)(\sin^2 x + \cos^2 x) = 5 - 4y + y^2$$

$$\Leftrightarrow 4y^2 - 12y + 9 - y^2 + 4y - 5 \leq 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 8y + 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq y \leq 2$$

Cách 2: (dùng sau khi học xong bài phương trình bậc nhất theo sin và cos).

Ta có $\cos x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$y = \frac{\sin x + 2 \cos x + 3}{2 + \cos x} \Leftrightarrow \sin x + 2 \cos x + 3 = 2y + y \cos x \Leftrightarrow \sin x + (2 - y) \cos x + 3 - 2y = 0$$

$$\text{Ta có } 1^2 + (2 - y)^2 \geq (3 - 2y)^2 \Leftrightarrow 4y^2 - 12y + 9 - y^2 + 4y - 4 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 8y + 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq y \leq 2$$

.

Cách 3: sử dụng máy tính cầm tay.

Tương tự như ở ví dụ 1 thì ta có thể sử dụng SHIFT SOLVE: $\frac{\sin x + 2 \cos x + 3}{2 + \cos x} = 2$ thì phương trình có nghiệm. Do 2 là số lớn nhất trong các phương án A; B; C; D nên ta không cần thử trường hợp $\max = \frac{3}{2}$.

Lúc này chỉ còn A và B Thử với $\min y = -\frac{2}{3}$ thì không có nghiệm.

Từ đây chọn B.

Câu 5. Cho hàm số $h(x) = \sqrt{\sin^4 x + \cos^4 x - 2m \sin x \cdot \cos x}$. Tất cả các giá trị của tham số m để hàm số xác định với mọi số thực x (trên toàn trục số) là

A. $-\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}$.

B. $0 \leq m \leq \frac{1}{2}$.

C. $-\frac{1}{2} \leq m \leq 0$.

D. $m \leq \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

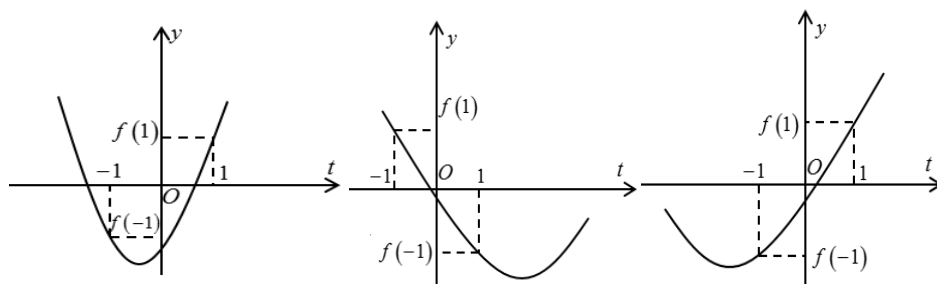
$$\begin{aligned} \text{Xét hàm số } g(x) &= (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2 - m \sin 2x \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x - m \sin 2x \\ &= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x - m \sin 2x. \end{aligned}$$

Đặt $t = \sin 2x \Rightarrow t \in [-1; 1]$.

Hàm số $h(x)$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}t^2 - mt + 1 \geq 0, \forall t \in [-1; 1]$

$\Leftrightarrow t^2 + 2mt - 2 \leq 0, \forall t \in [-1; 1]$.

Đặt $f(t) = t^2 + 2mt - 2$ trên $[-1; 1]$.



Đồ thị hàm số có thể là một trong ba đồ thị trên.

Ta thấy $\max_{[-1;1]} f(t) = f(1)$ hoặc $\max_{[-1;1]} f(t) = f(-1)$.

Ycbt $f(t) = t^2 + 2mt - 2 \leq 0, \forall t \in [-1; 1] \Leftrightarrow \max_{[-1;1]} f(t) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) \leq 0 \\ f(-1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 + 2m \leq 0 \\ -1 - 2m \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}$.

MỨC ĐỘ 4

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin x \sqrt{\cos x} + \cos x \sqrt{\sin x}$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $\begin{cases} \sin x \geq 0 \\ \cos x \geq 0 \end{cases}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2 số không âm $\sin x \sqrt{\cos x}$ và $\cos x \sqrt{\sin x}$ ta có :

$$\sin x \sqrt{\cos x} + \cos x \sqrt{\sin x} \geq 2\sqrt{\sin x \cos x \sqrt{\sin x \cos x}} \Leftrightarrow y \geq 2\sqrt{\frac{1}{2} \sin 2x \sqrt{\frac{1}{2} \sin 2x}} \geq 0.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Bài 2. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{\sin x + 2 \cos x + 3}{2 + \cos x}$.

Lời giải

Ta có: $\cos x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Khi đó: } y = \frac{\sin x + 2 \cos x + 3}{2 + \cos x} \Leftrightarrow \sin x + 2 \cos x + 3 = 2y + y \cos x \Leftrightarrow \sin x + (2 - y) \cos x + 3 - 2y = 0 \quad (*)$$

Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow 1^2 + (2 - y)^2 \geq (3 - 2y)^2$

$$\Leftrightarrow 4y^2 - 12y + 9 - y^2 + 4y - 4 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 8y + 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq y \leq 2.$$

Vậy $\min y = \frac{2}{3}; \max y = 2$.

Bài 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \cot^4 a + \cot^4 b + 2 \tan^2 a \cdot \tan^2 b + 2$.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} P &= (\cot^2 a - \cot^2 b)^2 + 2 \cot^2 a \cdot \cot^2 b + 2 \tan^2 a \cdot \tan^2 b + 2 \\ &= (\cot^2 a - \cot^2 b)^2 + 2(\cot^2 a \cdot \cot^2 b + \tan^2 a \cdot \tan^2 b - 2) + 6 \\ &= (\cot^2 a - \cot^2 b)^2 + 2(\cot^2 a \cdot \cot^2 b + \tan^2 a \cdot \tan^2 b - 2 \cot a \cdot \cot b \cdot \tan a \cdot \tan b) + 6 \\ &= (\cot^2 a - \cot^2 b)^2 + 2(\cot a \cdot \cot b - \tan a \cdot \tan b)^2 + 6 \geq 6 \end{aligned}$$

Vậy $\min y = 6$, đạt được khi $\begin{cases} \cot^2 a = \cot^2 b \\ \cot a \cdot \cot b = \tan a \cdot \tan b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cot^2 a = 1 \\ \cot^2 b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$.

Bài 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{1 + \frac{1}{2} \cos^2 x} + \frac{1}{2} \sqrt{5 + 2 \sin^2 x}$.

Lời giải

Ta có $y = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\cos^2 x} + \frac{1}{2}\sqrt{5 + 2\sin^2 x} \Leftrightarrow y = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\cos^2 x} + \sqrt{\frac{5}{4} + \frac{1}{2}\sin^2 x}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky cho 4 số: 1; 1; $\sqrt{1 + \frac{1}{2}\cos^2 x}$; $\sqrt{\frac{5}{4} + \frac{1}{2}\sin^2 x}$ ta có:

$$1 \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{2}\cos^2 x} + 1 \cdot \sqrt{\frac{5}{4} + \frac{1}{2}\sin^2 x} \leq \sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{5}{4} + \frac{1}{2}\sin^2 x} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{22}}{2}.$$

Vậy $\min y = \frac{\sqrt{22}}{2}$, xảy ra khi $1 + \frac{1}{2}\cos^2 x = \frac{5}{4} + \frac{1}{2}\sin^2 x \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Bài 5. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin^4 x + \cos^4 x + \sin x \cos x$.

Lời giải

Ta có $y = \sin^4 x + \cos^4 x + \sin x \cos x \Leftrightarrow y = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x + \sin x \cos x \Leftrightarrow y = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{1}{2}\sin 2x$

$$\Leftrightarrow y = 1 - \frac{1}{2} \left[\left(\sin 2x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right] \Leftrightarrow y = \frac{9}{8} - \frac{1}{2} \left(\sin 2x - \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{9}{8}.$$

Vậy $\max y = \frac{9}{8}$, đạt được khi $\sin 2x = \frac{1}{2}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho $x, y, z > 0$ và $x + y + z = \frac{\pi}{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của

$$y = \sqrt{1 + \tan x \cdot \tan y} + \sqrt{1 + \tan y \cdot \tan z} + \sqrt{1 + \tan z \cdot \tan x}$$

- A.** $y_{\max} = 1 + 2\sqrt{2}$. **B.** $y_{\max} = 3\sqrt{3}$. **C.** $y_{\max} = \sqrt{4}$. **D.** $y_{\max} = 2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $x + y + z = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x + y = \frac{\pi}{2} - z \Rightarrow \tan(x + y) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - z\right) \Leftrightarrow \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y} = \frac{1}{\tan z}$

$$\Leftrightarrow \tan x \cdot \tan z + \tan y \cdot \tan z = 1 - \tan x \cdot \tan y \Leftrightarrow \tan x \cdot \tan z + \tan y \cdot \tan z + \tan x \cdot \tan y = 1$$

Ta thấy $\tan x \cdot \tan z$; $\tan y \cdot \tan z$; $\tan x \cdot \tan y$ lần lượt xuất hiện trong hàm số đề bài cho.

Khi đó, áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky cho 6 số ta có:

$$\begin{aligned} & 1 \cdot \sqrt{1 + \tan x \cdot \tan y} + 1 \cdot \sqrt{1 + \tan y \cdot \tan z} + 1 \cdot \sqrt{1 + \tan z \cdot \tan x} \leq \\ & \leq \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(1 + \tan x \cdot \tan z) + (1 + \tan y \cdot \tan z) + (1 + \tan x \cdot \tan y)} \\ & = \sqrt{3} \sqrt{3 + (\tan x \cdot \tan z + \tan y \cdot \tan z + \tan x \cdot \tan y)} = 2\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Vậy $y_{\max} = 2\sqrt{3}$.

Câu 2: Hàm số $y = 3\cot^2 2x - \frac{\sqrt{3}(1 - \tan^2 x)}{\tan x}$ đạt giá trị nhỏ nhất là

- A.** -1. **B.** $3 - 2\sqrt{3}$. **C.** $2 - 2\sqrt{2}$. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\cot 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{2 \tan x}$.

Từ đó suy ra $y = 3\cot^2 2x - \frac{2\sqrt{3}(1 - \tan^2 x)}{2 \tan x} = 3\cot^2 2x - 2\sqrt{3} \cot 2x$

$$= (\sqrt{3} \cot 2x - 1)^2 - 1 \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Vậy } \min y = -1 \Leftrightarrow \cot 2x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Câu 3: Hàm số $y = 2 \cos x + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ đạt giá trị lớn nhất là

- A. $5 - 2\sqrt{2}$. B. $5 + 2\sqrt{2}$. C. $\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$. D. $\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$\begin{aligned} y &= 2 \cos x + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow 2 \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow 2 \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin x + \cos x) \\ &\Leftrightarrow \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x. \end{aligned}$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có: } y^2 \leq \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \Leftrightarrow y^2 \leq 5 + 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Do đó } -\sqrt{5 + 2\sqrt{2}} \leq y \leq \sqrt{5 + 2\sqrt{2}}.$$

$$\text{Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là } \sqrt{5 + 2\sqrt{2}}.$$

Câu 4: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{m \sin x + 1}{\cos x + 2}$ nhỏ hơn 2.

- A. 3. B. 5. C. 4. D. 6.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } y = \frac{m \sin x + 1}{\cos x + 2} \Leftrightarrow y \cos x + 2y = m \sin x + 1 \Leftrightarrow m \sin x - y \cos x = 2y - 1 \quad (*)$$

$$(*) \text{ có nghiệm khi } m^2 + y^2 \geq (2y - 1)^2 \Leftrightarrow 3y^2 - 4y + 1 - m^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 - \sqrt{1 + 3m^2}}{3} \leq y \leq \frac{2 + \sqrt{1 + 3m^2}}{3}$$

$$\Rightarrow y_{\max} = \frac{2 + \sqrt{1 + 3m^2}}{3} < 2 \Leftrightarrow \sqrt{1 + 3m^2} < 4 \Leftrightarrow m^2 < 5.$$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$. Vậy có 5 giá trị của m thỏa ycbt.

Câu 5: Số giờ có ánh sáng của một thành phố A trong ngày thứ t của năm 2020 được cho bởi một hàm số $y = 4 \sin\left|\frac{\pi}{178}(t - 60)\right| + 10$, với $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 366$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất?

- A. 28 tháng 5. B. 29 tháng 5. C. 30 tháng 5. D. 31 tháng 5.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Vì } \sin\left|\frac{\pi}{178}(t - 60)\right| \leq 1 \Rightarrow y = 4 \sin\left|\frac{\pi}{178}(t - 60)\right| + 10 \leq 14.$$

Khi đó, ngày có ánh nắng mặt trời chiếu nhiều nhất là

$$y = 14 \Leftrightarrow \sin \left| \frac{\pi}{178}(t - 60) \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{178}(t - 60) = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = 149 + 356k.$$

$$\text{Mà } 0 < t \leq 366 \Leftrightarrow 0 < 149 + 356k \leq 366 \Leftrightarrow -\frac{149}{356} < k \leq \frac{217}{356}.$$

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = 0$.

Với $k = 0 \Rightarrow t = 149$ tức rơi vào ngày 28 tháng 5 (vì ta đã biết tháng 1 và 3 có 31 ngày, tháng 4 có 30 ngày, riêng đối với năm 2020 là năm nhuận nên tháng 2 có 29 ngày hoặc dựa vào dữ kiện $0 < t \leq 366$ thì ta biết năm này tháng 2 có 29 ngày).

