CHUYÊN ĐỀ HỌC TẬP MÔN TOÁN

LỚP 10 2026 - 2027

2026

Chương trình mới thống nhất SGK

Các dạng toán đa dạng giúp học sinh có kĩ năng tư duy và tăng kỹ năng phản xạ đề.

1. Trắc nghiệm nhiều phương án
2. Trắc nghiệm đúng sai
3. Trả lời ngắn
4. Tự luận

MK LÊ MINH KHA - 0399653362

Mục lục

Chương I. MỆNH ĐỀ TẬP HỢP 4

§1. MỆNH ĐỀ 4
§2. TẬP HỢP CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP 15
§3. ÔN TẬP CHƯƠNG 1 26

Chương II. BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN 122

§1. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN 122
§2. HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN 129
§3. ÔN TẬP CHƯƠNG 2 139

Chương III. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC 188

§1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ 0^0 ĐẾN 180^0 188
§2. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC 208
§3. ÔN TẬP CHƯƠNG III 248
§4. LỜI GIẢI CHI TIẾT 271

Chương IV. VECTƠ 323

§1. CÁC KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU 323
§2. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ 348
§3. TÍCH CỦA MỘT VECTƠ VỚI MỘT SỐ 375
§4. VECTƠ TRONG MẶT PHẲNG TỌA ĐỘ 394
§5. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ 421
§6. ÔN TẬP CHƯƠNG IV 456
§7. LỜI GIẢI CHI TIẾT 474

Chương V. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA MẪU SỐ LIỆU KHÔNG GHÉP NHÓM 520

§1. SỐ GẦN ĐÚNG VÀ SAI SỐ 520
§2. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM 531
§3. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN 540
§4. ÔN TẬP CHƯƠNG V 546
§5. LỜI GIẢI CHI TIẾT 556

Chương I

MỆNH ĐỀ TẬP HỢP

§1 MỆNH ĐỀ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1) Mệnh đề

Mệnh đề logic (gọi tắt là *mệnh đề*) là một khẳng định hoặc đúng hoặc sai.

- ✔ Một mệnh đề không thể vừa đúng vừa sai.
- ✔ Một khẳng định đúng được gọi là *mệnh đề đúng*.
- ✔ Một khẳng định sai được gọi là *mệnh đề sai*.
- ✔ Mệnh đề thường được kí hiệu bằng các chữ cái in hoa. Ví dụ: Q: "6 chia hết cho 3".

- ✔ Người ta thường sử dụng các chữ cái $P, Q, R, \ldots$ để biểu thị các mệnh đề.
- ✔ Các câu hỏi, câu cảm thán, câu mệnh lệnh không phải là mệnh đề.
- ✔ Một câu chưa xác định được đúng hay sai nhưng chắc chắn nó chỉ đúng hoặc sai (không thể vừa đúng vừa sai) cũng là một mệnh đề. Ví dụ: "Có sự sống ngoài Trái Đất" là một mệnh đề.
- ✔ Trong thực tế, có những mệnh đề mà tính đúng sai của nó luôn gắn với một thời gian và địa điểm cụ thể: đúng ở thời gian hoặc địa điểm này nhưng sai ở thời gian hoặc địa điểm khác. Nhưng ở bất kì thời gian, địa điểm nào cũng luôn có giá trị chân lí hoặc đúng hoặc sai. Ví dụ: Sáng nay bạn An đi học.

Ví dụ 1

Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề?

a) π là số hữu tỉ.

b) $2^{10} > 1000$.

c) Môn Toán rất khó.

d) Hãy đóng cửa sổ lại!

» Sưu tầm và biên soạn: Lê Minh Kha - 0399653362

Lời giải.

a) "π là số hữu tỉ" là một mệnh đề (mệnh đề sai, vì π là số vô tỉ).

b) "$2^{10} > 1000$" là một mệnh đề (mệnh đề đúng, vì $2^{10} = 1024 > 1000$).

c) Câu "Môn Toán rất khó" không có tính đúng hoặc sai rõ ràng (do tiêu chí "khó" tùy thuộc vào cảm nhận của mỗi người). Do đó nó không là mệnh đề.

d) "Hãy đóng cửa sổ lại!" là một câu mệnh lệnh, không phải mệnh đề.

bài tập tương tự

Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề? Câu nào không phải là mệnh đề?

a) Phương trình $3x^2 - 5x + 2 = 0$ có nghiệm nguyên;

b) $5 < 7 - 3$;

c) Có bao nhiêu dấu hiệu nhận biết hai tam giác đồng dạng?

d) Đấy là cách xử lí khôn ngoan!

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2) Mệnh đề chứa biến

Những khẳng định mà tính đúng, sai của chúng phụ thuộc vào giá trị của biến gọi là *mệnh đề chứa biến*.

Ví dụ 2

Cho mệnh đề chứa biến $P(n)$: "n là bội của 3" với n là số tự nhiên. Phát biểu các mệnh đề $P(6), P(11)$ và xét tính đúng sai của chúng.

Lời giải. $P(6)$: "6 là bội của 3" là mệnh đề đúng.

$P(11)$: "11 là bội của 3" là mệnh đề sai.

bài tập tương tự

Với mỗi mệnh đề chứa biến sau, tìm những giá trị của biến để nhận được một mệnh đề đúng và một mệnh đề sai.

a) $P(x)$: "$x^2 = 2$".

b) $Q(x)$: "$x^2 + 1 > 0$".

c) $R(n)$: "$n + 2$ chia hết cho 3" (n là số tự nhiên).

3) Mệnh đề phủ định

- Mỗi mệnh đề P có mệnh đề phủ định, kí hiệu $\overline{P}$.
- Mệnh đề P và mệnh đề phủ định $\overline{P}$ của nó có tính đúng sai trái ngược nhau. Nghĩa là khi P đúng thì $\overline{P}$ sai, khi P sai thì $\overline{P}$ đúng.

Để phủ định mệnh đề P, người ta thường thêm (hoặc bớt) từ "không" hoặc "không phải" vào trước vị ngữ của mệnh đề P.

Ví dụ 3

Phát biểu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau:
P: "17 là số chính phương";
Q: "Hình hộp không phải là hình lăng trụ".

Lời giải. Mệnh đề phủ định của P là $\overline{P}$: "17 không phải là số chính phương".
Mệnh đề phủ định của Q là $\overline{Q}$: "Hình hộp là hình lăng trụ".

bài tập tương tự

Phát biểu mệnh đề phủ định của mỗi mệnh đề sau và xác định tính đúng sai của mệnh đề phủ định đó.
P: "2 022 chia hết cho 5";
Q: "Bất phương trình $2x + 1 > 0$ có nghiệm".

....
....
....
....
....

bài tập tương tự

Cho mệnh đề Q: "Châu Á là châu lục có diện tích lớn nhất trên thế giới". Phát biểu mệnh đề phủ định $\overline{Q}$ và xác định tính đúng sai của hai mệnh đề Q và $\overline{Q}$.

....
....
....
....
....

4) Mệnh đề kéo theo, Mệnh đề đảo

- ◇ Cho hai mệnh đề P và Q. Mệnh đề "Nếu P thì Q" được gọi là **mệnh đề kéo theo**, kí hiệu là $P \Rightarrow Q$.
- ◇ Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng và Q sai.

Ví dụ 4

Cho tứ giác $ABCD$, xét hai câu sau:
P: "Tứ giác $ABCD$ có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180°";
Q: "$ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn".
Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và cho biết tính đúng sai của mệnh đề đó.

Lời giải. $P \Rightarrow Q$: "Nếu tứ giác $ABCD$ có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180° thì $ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn".
Mệnh đề kéo theo này là mệnh đề đúng.
Trong toán học, **định lí** là mệnh đề đúng. Các định lí trong toán học thường có dạng $P \Rightarrow Q$.

Khi mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là định lí, ta nói:
- ◇ P là **giả thiết**, Q là **kết luận** của định lý;
- ◇ P là **điều kiện đủ** để có Q;
- ◇ Q là **điều kiện cần** để có P

Ví dụ 5

Xét hai mệnh đề:
P: "Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ bằng nhau";
Q: "Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có diện tích bằng nhau".
a) Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$.
b) Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ có phải là một định lí không? Nếu có, sử dụng thuật ngữ "điều kiện cần", "điều kiện đủ" để phát biểu định lí này theo hai cách khác nhau.

Lời giải.

a) Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ được phát biểu như sau: "Nếu hai tam giác ABC và $A'B'C'$ bằng nhau thì hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có diện tích bằng nhau".

b) Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là mệnh đề đúng. Do đó, mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là một định lí.
Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ bằng nhau là **điều kiện đủ** để hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có diện tích bằng nhau.
Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có diện tích bằng nhau là **điều kiện cần** để hai tam giác ABC và $A'B'C'$ bằng nhau.

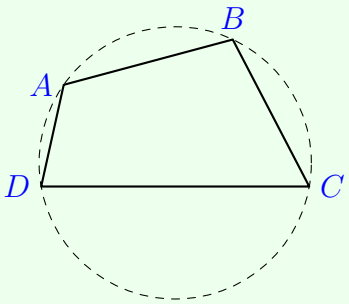
bài tập tương tự

Ví dụ 3. Cho tứ giác $ABCD$, xét hai câu sau:

P: "Tứ giác $ABCD$ có tổng số đo hai góc đối diện bằng $180°$";

Q: "$ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn".

Phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và cho biết tính đúng sai của mệnh đề đó.



. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

NHẬN XÉT. Mệnh đề đảo của một mệnh đề đúng không nhất thiết là đúng.

Ví dụ 6

Hãy phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề: "Nếu tam giác ABC là tam giác đều thì tam giác ABC là tam giác cân" và xác định tính đúng sai của mệnh đề đảo này.

Lời giải. Mệnh đề đảo là: "Nếu tam giác ABC là tam giác cân thì tam giác ABC là tam giác đều".

Mệnh đề đảo này là sai.

bài tập tương tự

Cho các mệnh đề P: "a và b chia hết cho c";

Q: "$a + b$ chia hết cho c".

a) Hãy phát biểu định lí $P \Rightarrow Q$. Nêu giả thiết, kết luận của định lí và phát biểu định lí này dưới dạng điều kiện cần, điều kiện đủ.

b) Hãy phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề $P \Rightarrow Q$ rồi xác định tính đúng sai của mệnh đề đảo này.

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

....

5) hai mệnh đề tương đương

Mệnh đề "P nếu và chỉ nếu Q" được gọi là một mệnh đề tương đương và kí hiệu là $P \Leftrightarrow Q$.

Nhận xét. Nếu cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng thì mệnh đề tương đương $P \Leftrightarrow Q$ đúng. Khi đó ta nói "P tương đương với Q" hoặc "P là điều kiện cần và đủ để có Q" hoặc "P khi và chỉ khi Q".

Ví dụ 7

Cho hai mệnh đề:

P: "Tứ giác $ABCD$ là hình vuông";

Q: "Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau".

Hãy phát biểu mệnh đề tương đương $P \Leftrightarrow Q$ và xác định tính đúng sai của mệnh đề tương đương này.

Lời giải. Mệnh đề tương đương $P \Leftrightarrow Q$: "Tứ giác $ABCD$ là hình vuông khi và chỉ khi tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau". Mệnh đề tương đương này đúng vì cả hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng.

bài tập tương tự

Phát biểu điều kiện cần và đủ để số tự nhiên n chia hết cho 2.

....

....

....

....

....

6) Mệnh đề chứa kí hiệu ∀∃

(1) Với mọi số tự nhiên x, $\sqrt{x}$ là số vô tỉ;

(2) Bình phương của mọi số thực đều không âm;

(3) Có số nguyên cộng với chính nó bằng 0;

(4) Có số tự nhiên n sao cho $2n - 1 = 0$.

Trong toán học để ngắn gọn, người ta dùng các kí hiệu ∀ (đọc là **với mọi**) và ∃ (đọc là **tồn tại**) để phát biểu những mệnh đề như trên. Chẳng hạn:

(1) $\forall x \in \mathbb{N}, \sqrt{x}$ là số vô tỉ;

(2) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$;

(3) $\exists x \in \mathbb{Z}, x + x = 0$;

(4) $\exists n \in \mathbb{N}, 2n - 1 = 0$.

Ta nói (1), (2) là **mệnh đề chứa kí hiệu** $\forall$; (3), (4) là **mệnh đề chứa kí hiệu** $\exists$.

Tổng quát hơn, có thể phát biểu hai mệnh đề này như sau:

$$\text{“}\forall x \in M, P(x)\text{”} \text{ và } \text{“}\exists x \in M, P(x)\text{”}$$

với M là một tập hợp, $P(x)$ là một mệnh đề chứa biến nào đó.

- Mệnh đề “$\forall x \in M, P(x)$” đúng nếu với mọi $x_0 \in M, P(x_0)$ là mệnh đề đúng.
- Mệnh đề “$\exists x \in M, P(x)$” đúng nếu có $x_0 \in M$ sao cho $P(x_0)$ là mệnh đề đúng.

Ví dụ 8

Sử dụng kí hiệu $\forall, \exists$ để viết các mệnh đề sau:

a) Mọi số thực cộng với số đối của nó đều bằng 0;

b) Có một số tự nhiên mà bình phương bằng 9.

Lời giải. Bằng cách sử dụng kí hiệu, các mệnh đề được viết:

a) “$\forall x \in \mathbb{R}, x + (-x) = 0$”;

b) “$\exists x \in \mathbb{N}, x^2 = 9$”.

Ví dụ 9

Xét tính đúng sai và viết mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau:

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$;

b) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 5x - 4$;

c) $\exists x \in \mathbb{Z}, 2x + 1 = 0$.

Lời giải.

a) Gọi P: “$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$”.

Chọn $x = 0 \in \mathbb{R}$, ta có $x^2 = 0^2 = 0 > 0$ (vô lí).

Do đó mệnh đề P sai.

Mệnh đề phủ định của P là: $\overline{P}$: “$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0$”.

b) Gọi Q: “$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 5x - 4$”.

Xét phương trình $x^2 = 5x - 4$. Ta có $x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array}\right.$

Ta thấy $x = 1$ và $x = 4$ đều là các số thực.

Do đó mệnh đề Q đúng.

Mệnh đề phủ định của Q là: $\overline{Q}$: “$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 5x - 4$”.

c) Gọi H: “$\exists x \in \mathbb{Z}, 2x + 1 = 0$”.

Xét phương trình $2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

Do đó không tồn tại giá trị nguyên nào của x để $2x + 1 = 0$.

Vậy mệnh đề H là mệnh đề sai.

Mệnh đề phủ định của H là: $\overline{H}$: "$\forall x \in \mathbb{Z}, 2x+1 \neq 0$".

bài tập tương tự

Trong tiết học môn Toán, Nam phát biểu: "Mọi số thực đều có bình phương khác 1". Mai phát biểu: "Có một số thực mà bình phương của nó bằng 1".

a) Hãy cho biết phát biểu của bạn nào đúng.

b) Dùng kí hiệu $\forall, \exists$ để viết lại các phát biểu của Nam và Mai dưới dạng mệnh đề.

bài tập tương tự

Lập mệnh đề phủ định các mệnh đề sau và xét tính đúng sai của chúng.

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 2x-2$;

b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 2x-1$;

c) $\exists x \in \mathbb{R}, x + \dfrac{1}{x} \geq 2$;

d) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 < 0$.

II. BÀI TẬP ÔN LUYỆN

1) Bài tập tự luận

Bài 1. Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề?

a) Trung Quốc là nước đông dân nhất thế giới;

b) Bạn học trường nào?

c) Không được làm việc riêng trong giờ học;

d) Tôi sẽ sút bóng trúng xà ngang.

Bài 2. Xác định tính đúng sai của mỗi mệnh đề sau:

a) $\pi < \dfrac{10}{3}$;

b) Phương trình $3x + 7 = 0$ có nghiệm;

c) Có ít nhất một số cộng với chính nó bằng 0;

d) 2 022 là hợp số.

Bài 3. Cho hai câu sau:

P: "Tam giác ABC là tam giác vuông";

Q: "Tam giác ABC có một góc bằng tổng hai góc còn lại".

Hãy phát biểu mệnh đề tương đương $P \Leftrightarrow Q$ và xác định tính đúng sai của mệnh đề này.

Bài 4. Phát biểu mệnh đề đảo của mỗi mệnh đề sau và xác định tính đúng sai của chúng.

P: "Nếu số tự nhiên n có chữ số tận cùng là 5 thì n chia hết cho 5";

Q: "Nếu tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật thì tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo bằng nhau".

Bài 5. Với hai số thực a và b, xét các mệnh đề P: "$a^2 < b^2$" và Q: "$0 < a < b$".

a) Hãy phát biểu mệnh đề $P \Rightarrow Q$.

b) Hãy phát biểu mệnh đề đảo của mệnh đề ở câu a.

c) Xác định tính đúng sai của mỗi mệnh đề ở câu a và câu b.

Bài 6. Xác định tính đúng sai của mệnh đề sau và tìm mệnh đề phủ định của nó.

Q: "$\exists n \in \mathbb{N}, n$ chia hết cho $n + 1$".

Bài 7. Dùng kí hiệu $\forall, \exists$ để viết các mệnh đề sau:

P: "Mọi số tự nhiên đều có bình phương lớn hơn hoặc bằng chính nó";

Q: "Có một số thực cộng với chính nó bằng 0".

Bài 8. Xét tính đúng, sai và viết mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau đây:

a) $\exists x \in \mathbb{N}, x + 3 = 0$;

b) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \geq 2x$;

c) $\forall a \in \mathbb{R}, \sqrt{a^2} = a$;

d) $\forall n \in \mathbb{N}, n(n + 1)$ chia hết cho 2;

e) $\exists n \in \mathbb{N}, n^2$ có chữ số tận cùng là 4;

f) $\forall x \in \mathbb{N}, x^2 + 2x + 2 > 0$;

g) $\exists x \in \mathbb{Q}, x^2 - x - 1 = 0$;

h) $\forall x \in \mathbb{R}, x^4 < x^2$.

Bài 9. Phát biểu mệnh đề phủ định của mệnh đề: "Mọi số tự nhiên có chữ số tận cùng bằng 0 đều chia hết cho 10".

Bài 10. Mệnh đề "$\exists n \in \mathbb{N}, n(n+1) = 2^{100} + 1$" đúng hay sai? Vì sao.

2) Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Câu nào dưới đây **không** là mệnh đề?

(A) Hà Nội là thủ đô của Việt Nam.
(B) Số 15 là số nguyên tố.
(C) π là một số hữu tỉ.
(D) Trời hôm nay đẹp quá!.

Câu 2. Phát biểu nào sau đây là một mệnh đề toán học?

(A) Bạn có thích học môn Toán không?.
(B) Học sinh lớp 10A thật thông minh.
(C) $x^2 + 1 > 0$ với mọi số thực x.
(D) Cố gắng học tập thật tốt nhé!.

Câu 3. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào là mệnh đề chứa biến?

(A) $3 + 2 = 7$.
(B) $x + 5 = 10$.
(C) Số 2 là số chẵn.
(D) Hình vuông có bốn cạnh bằng nhau.

Câu 4. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề **sai**?

(A) Tổng hai cạnh của một tam giác luôn lớn hơn cạnh thứ ba.
(B) Số 1 là số nguyên tố.
(C) Số 0 không là số nguyên dương cũng không là số nguyên âm.
(D) Phương trình $x^2 - 4 = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

Câu 5. Câu nào dưới đây là mệnh đề?

(A) $x - 1 = 0$.
(B) Mấy giờ rồi?.
(C) Dơi là một loài chim.
(D) Cố lên sắp có tiền rồi!.

Câu 6. Cho mệnh đề "Nếu tam giác ABC đều thì tam giác ABC có ba góc bằng 60°". Mệnh đề đảo của mệnh đề đó là:

(A) "Nếu tam giác ABC không đều thì tam giác ABC không có ba góc bằng 60°".
(B) "Nếu tam giác ABC có ba góc bằng 60° thì tam giác ABC đều".
(C) "Nếu tam giác ABC có ba góc bằng 60° thì tam giác ABC không đều".
(D) "Nếu tam giác ABC không có ba góc bằng 60° thì tam giác ABC không đều".

Câu 7. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) $\sqrt{5}$ là số hữu tỉ.
(B) Phương trình $x^2 + x + 1 = 0$ có nghiệm thực.
(C) Các số nguyên tố đều là số lẻ.
(D) Số 21 chia hết cho 3.

Câu 8. Với giá trị nào của $n \in \mathbb{N}$ thì mệnh đề chứa biến $P(n)$: "$n^2 - 1 = 0$" là đúng?

Ⓐ $n = 0$. Ⓑ $n = 2$. Ⓒ $n = 1$. Ⓓ $n = 3$.

Câu 9. Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$: "$x^2 + 1 > 2x$" với x là số thực. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

Ⓐ $P(0)$. Ⓑ $P(1)$. Ⓒ $P(2)$. Ⓓ $P(-1)$.

Câu 10. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề **sai**?

Ⓐ Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng đồng dạng và có một góc bằng nhau.
Ⓑ Một tứ giác là hình chữ nhật khi và chỉ khi chúng có 3 góc vuông.
Ⓒ Một tam giác là vuông khi và chỉ khi nó có một góc bằng tổng hai góc còn lại.
Ⓓ Một tam giác là đều khi và chỉ khi chúng có hai đường trung tuyến bằng nhau và có một góc bằng $60°$.

Câu 11. Phủ định của mệnh đề "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 < 0$" là mệnh đề:

Ⓐ "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 \geq 0$". Ⓑ "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 < 0$".
Ⓒ "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 > 0$". Ⓓ "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 1 \geq 0$".

Câu 12. Phủ định của mệnh đề "$\exists x \in \mathbb{Q}, x = \dfrac{1}{x}$" là mệnh đề:

Ⓐ "$\exists x \in \mathbb{Q}, x \neq \dfrac{1}{x}$". Ⓑ "$\forall x \in \mathbb{Q}, x = \dfrac{1}{x}$".
Ⓒ "$\forall x \notin \mathbb{Q}, x \neq \dfrac{1}{x}$". Ⓓ "$\forall x \in \mathbb{Q}, x \neq \dfrac{1}{x}$".

Câu 13. Phủ định của mệnh đề "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$" là mệnh đề:

Ⓐ "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$". Ⓑ "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 > 0$".
Ⓒ "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0$". Ⓓ "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < 0$".

Câu 14. Phủ định của mệnh đề "$\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq x$" là mệnh đề:

Ⓐ "$\forall x \in \mathbb{R}, |x| < x$". Ⓑ "$\exists x \in \mathbb{R}, |x| \leq x$".
Ⓒ "$\exists x \in \mathbb{R}, |x| < x$". Ⓓ "$\exists x \in \mathbb{R}, |x| > x$".

Câu 15. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề **đúng**?

Ⓐ Tổng của hai số tự nhiên là một số chẵn khi và chỉ khi cả hai số đều là số chẵn.
Ⓑ Tích của hai số tự nhiên là một số chẵn khi và chỉ khi cả hai số đều là số chẵn.
Ⓒ Tổng của hai số tự nhiên là một số lẻ khi và chỉ khi cả hai số đều là số lẻ.
Ⓓ Tích của hai số tự nhiên là một số lẻ khi và chỉ khi cả hai số đều là số lẻ.

BẢNG ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á
1	D	2	C	3	B	4	B	5	C
6	B	7	D	8	C	9	B	10	A
11	A	12	D	13	D	14	C	15	D

§2 TẬP HỢP CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

I. TẬP HỢP VÀ CÁCH XÁC ĐỊNH TẬP HỢP

Trong toán học, người ta dùng từ **tập hợp** để chỉ một nhóm đối tượng nào đó hoàn toàn xác định. Mỗi đối tượng trong nhóm được gọi là một **phần tử** của tập hợp đó.

Ví dụ 1

a) Các bạn học sinh lớp 10A tạo thành một tập hợp. Các bạn học sinh nữ của lớp này cũng tạo thành một tập hợp.

b) Các nghiệm của phương trình $x^2 - 4 = 0$ tạo thành một tập hợp (gọi là tập nghiệm của phương trình $x^2 - 4 = 0$). Tập này có hai phần tử là -2 và 2.

Người ta thường kí hiệu tập hợp bằng các chữ cái in hoa như $A, B, C \dots$ và kí hiệu phần tử của tập hợp bằng các chữ cái in thường như $a, b, c \dots$.

Đôi khi, để ngắn gọn người ta dùng từ "tập" thay cho "tập hợp".

- Để chỉ a là một phần tử của tập hợp A, ta viết $a \in A$ (đọc là "a **thuộc** A"). Để chỉ a không là phần tử của tập hợp A, ta viết $a \notin A$ (đọc là "a **không thuộc** A")
- Một tập hợp có thể không chứa phần tử nào. Tập hợp như vậy gọi là **tập rỗng**, kí hiệu $\varnothing$.

Ví dụ 2

a) Cho A là tập hợp các số tự nhiên chẵn nhỏ hơn 10, khi đó $0 \in A, 1 \notin A, 10 \notin A$.

b) Nếu gọi B là tập hợp nghiệm của phương trình $x^2 + 1 = 0$, khi đó B là tập rỗng.

Ghi nhớ

- $\mathbb{N}$ là tập các số tự nhiên,
- $\mathbb{Z}$ là tập hợp các số nguyên,
- $\mathbb{Q}$ là tập hợp các số hữu tỉ,
- $\mathbb{R}$ là tập hợp các số thực.

Có thể mô tả một tập hợp bằng một trong hai cách sau:
Cách 1. Liệt kê các phần tử của tập hợp;
Cách 2. Chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp.

hi liệt kê các phần tử của tập hợp, ta có một số chú ý sau đây:

a) Các phần tử có thể được viết theo thứ tự tùy ý.
Chẳng hạn, để viết tập hợp A các nghiệm của phương trình $x(x-1)=0$, ta có thể viết $A=\{0;1\}$ hoặc $A=\{1;0\}$.

b) Mỗi phần tử chỉ được liệt kê một lần.
Chẳng hạn, nếu kí hiệu B là tập hợp các chữ cái tiếng Anh trong từ "mathematics" thì $B=\{m;a;t;h;e;i;c;s\}$.

c) Nếu quy tắc xác định các phần tử đủ rõ thì người ta dùng "..." mà không nhất thiết viết ra tất cả các phần tử của tập hợp.
Chẳng hạn, tập hợp các số tự nhiên không quá 100 có thể viết là $\{0;1;2;\ldots;100\}$.

Ví dụ 3

Cho $D=\{n\in\mathbb{N}\mid n \text{ là số nguyên tố}, 5<n<20\}$.

a) Dùng kí hiệu $\in, \notin$ để viết câu trả lời cho câu hỏi sau: Trong các số $5;12;17;18$, số nào thuộc tập D, số nào không thuộc tập D?

b) Viết tập hợp D bằng cách liệt kê các phần tử. Tập hợp D có bao nhiêu phần tử?

Lời giải.

a) $5\notin D; 12\notin D; 17\in D; 18\notin D$.

b) $D=\{7;11;13;17;19\}$. Tập hợp D có 5 phần tử.

bài tập tương tự

Viết mỗi tập hợp sau dưới dạng thích hợp:

a) Tập hợp A các ước dương của 18;

b) Tập hợp B các nghiệm của phương trình $x^2+3x-4=0$;

c) Tập hợp C các số tự nhiên lẻ;

d) Tập hợp D các nghiệm của phương trình $x+3y=1$.

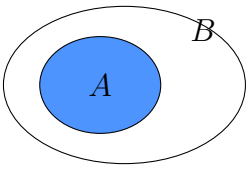
II. TẬP CON VÀ HAI TẬP HỢP BẰNG NHAU

Cho hai tập hợp A và B. Nếu mọi phần tử của A đều là phần tử của B thì ta nói tập hợp A là **tập con** của tập hợp B và kí hiệu $A \subset B$ (đọc là "A chứa trong B"), hoặc $B \supset A$ (đọc là "B chứa A").

Nhận xét.

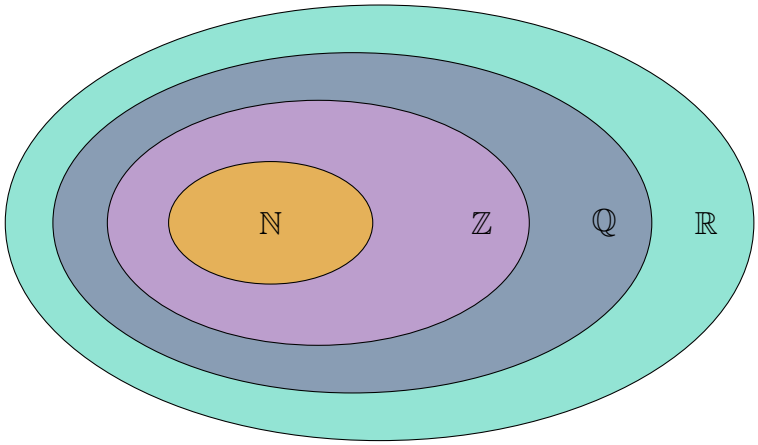
- $A \subset A$ và $\varnothing \subset A$ với mọi tập hợp A.
- Nếu A không phải là tập con của B thì ta kí hiệu $A \not\subset B$ (đọc là "A không chứa trong B" hoặc "B không chứa A").
- Nếu $A \subset B$ hoặc $B \subset A$ thì ta nói A và B có quan hệ bao hàm.

Trong toán học, người ta thường minh họa một tập hợp bằng một hình phẳng được bao quanh bởi một đường cong kín, gọi là **biểu đồ Ven**. Ta có thể minh họa A là tập con của B bằng biểu đồ Ven như hình bên.



Giữa các tập hợp số quen thuộc (tập số tự nhiên, tập số nguyên, tập số hữu tỉ, tập số thực), ta có quan hệ bao hàm:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$



Ví dụ 4

Xét tập hợp $A = \{a, b\}$. Tìm tất cả các tập con của A.

Lời giải. Tập A có các tập con là $\emptyset, \{a\}, \{b\}, A$.

Hai tập hợp A và B gọi là **bằng nhau**, kí hiệu $A = B$ nếu $A \subset B$ và $B \subset A$.

Ví dụ 5

Trong mỗi cặp tập hợp sau đây, tập hợp nào là tập con của tập hợp còn lại? Chúng có bằng nhau không?

a) $A = \{\sqrt{3}; -\sqrt{3}\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3 = 0\}$;

b) C là tập hợp các tam giác đều và D là tập hợp các tam giác cân;

c) $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là ước của } 12\}$ và $F = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ là ước của } 24\}$.

Lời giải.

a) Xét phương trình $x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$ hoặc $x = -\sqrt{3}$.
Khi đó $B = \{\sqrt{3}; -\sqrt{3}\}$.
Ta thấy các phần tử của tập A đều thuộc tập B nên $A \subset B$.
Ngược lại, các phần tử của tập B đều thuộc tập A nên $B \subset A$. Suy ra $A = B$.

b) Ta có tam giác đều là tam giác cân.
Suy ra các phần tử của tập C đều thuộc tập D nên $C \subset D$.
Nhưng không phải tất cả tam giác cân đều là tam giác đều. Suy ra không phải tất cả các phần tử của tập D đều thuộc tập C nên $D \not\subset C$. Do đó $C \neq D$.

c) Ta có tập các ước của 12 là

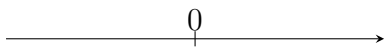
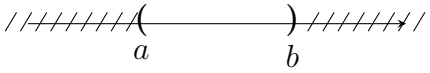
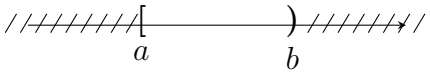
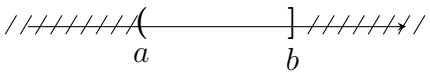
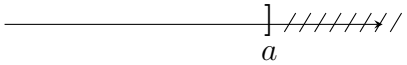
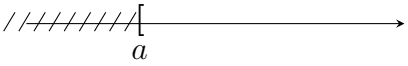
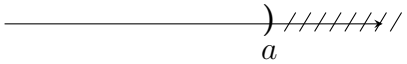
$$Ư(12) = \{-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

Khi đó $E = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.
Ta lại có tập các ước của 24 là

$$Ư(24) = \{-24, -12, -8, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}.$$

Khi đó $F = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$.
Ta thấy các phần tử của tập E đều thuộc tập F nên $E \subset F$.
Nhưng các phần tử 8, 24 của tập F không thuộc tập E nên $F \not\subset E$. Do đó $E \neq F$.

III. MỘT SỐ TẬP HỢP TRÊN TẬP HỢP SỐ THỰC

Tên gọi và kí hiệu	Tập hợp	Biểu diễn trên trục số
Tập số thực $(-\infty;+\infty)$	$\mathbb{R}$	
Đoạn $[a;b]$	$\{x\in\mathbb{R}\mid a\leqslant x\leqslant b\}$	
Khoảng $(a;b)$	$\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$	
Nửa khoảng $[a;b)$	$\{x\in\mathbb{R}\mid a\leqslant x<b\}$	
Nửa khoảng $(a;b]$	$\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\leqslant b\}$	
Nửa khoảng $(-\infty;a]$	$\{x\in\mathbb{R}\mid x\leqslant a\}$	
Nửa khoảng $[a;+\infty)$	$\{x\in\mathbb{R}\mid x\geqslant a\}$	
Khoảng $(-\infty;a)$	$\{x\in\mathbb{R}\mid x<a\}$	
Khoảng $(a;+\infty)$	$\{x\in\mathbb{R}\mid x>a\}$	

Trong các kí hiệu trên, kí hiệu $-\infty$ đọc là âm vô cực (âm vô cùng), kí hiệu $+\infty$ đọc là dương vô cực (dương vô cùng).

bài tập tương tự

Biểu diễn các tập dưới đây bằng kí hiệu đoạn, khoảng, nửa khoảng như sau:

a) $\{x\in\mathbb{R}\mid -2<x<3\}=(-2;3)$;

b) $\{x\in\mathbb{R}\mid \pi\leqslant x<4\}=[\pi;4)$;

c) $\{x\in\mathbb{R}\mid 1\leqslant x\leqslant 10\}=[1;10]$;

d) $\left\{x\in\mathbb{R}\mid x<\dfrac{1}{4}\right\}=\left(-\infty;\dfrac{1}{4}\right)$;

e) $\{x\in\mathbb{R}\mid -5<x\leqslant\sqrt{3}\}=(-5;\sqrt{3}]$;

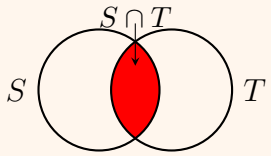
f) $\left\{x\in\mathbb{R}\mid x\geqslant\dfrac{\pi}{2}\right\}=\left[\dfrac{\pi}{2};+\infty\right)$.

IV. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

1) Giao của hai tập hợp

Tập hợp gồm các phần tử thuộc cả hai tập hợp S và T gọi là **giao của hai tập hợp** S và T, kí hiệu là $S \cap T$.

$$S \cap T = \{x \mid x \in S \text{ và } x \in T\}.$$



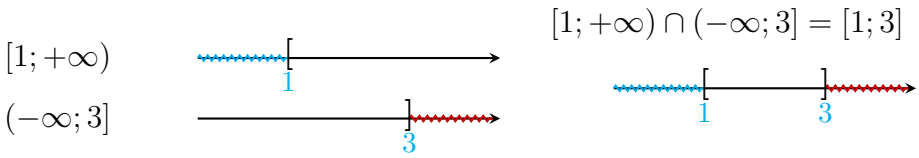
Hình 1.6

Ví dụ 6

a) Cho hai tập hợp $C = \{4; 7; 27\}$ và $D = \{2; 4; 9; 27; 36\}$. Hãy xác định tập hợp $C \cap D$.

b) Cho hai tập hợp $E = [1; +\infty)$ và $F = (-\infty; 3]$. Hãy xác định tập hợp $E \cap F$.

Lời giải.



a) Giao của hai tập hợp C và D là $C \cap D = \{4; 27\}$.

b) Giao của hai tập hợp E và F là $E \cap F = [1; 3]$.

bài tập tương tự

Cho các tập hợp $C = [1; 5]$, $D = [-2; 3]$. Hãy xác định tập hợp $C \cap D$.

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

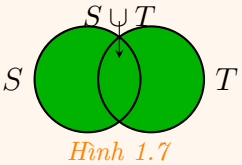
. . . . . .

. . . . . .

2) Hợp của hai tập hợp

Tập hợp gồm các phần tử thuộc tập hợp S hoặc thuộc tập hợp T gọi là hợp của hai tập hợp S và T, kí hiệu là $S \cup T$.

$$S \cup T = \{x \mid x \in S \text{ hoặc } x \in T\}.$$

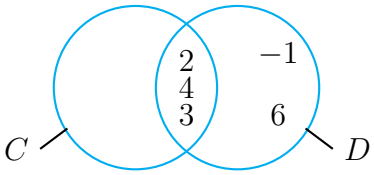


Hình 1.7

Ví dụ 7

Cho hai tập hợp: $C = \{2; 3; 4; 7\}$; $D = \{-1; 2; 3; 4; 6\}$.

Lời giải. Hợp của hai tập hợp C và D là $C \cup D = \{-1; 2; 3; 4; 6; 7\}$.



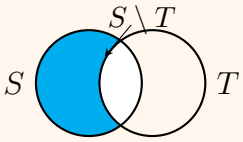
Hình 1.8

3) Hiệu của hai tập hợp

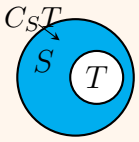
- Hiệu của hai tập hợp S và T là tập hợp gồm các phần tử thuộc S nhưng không thuộc T, kí hiệu là $S \setminus T$.

$$S \setminus T = \{x \mid x \in S \text{ và } x \notin T\}.$$

- Nếu $T \subset S$ thì $S \setminus T$ được gọi là phần bù của T trong S, kí hiệu là $C_S T$.



Hình 1.9



Hình 1.10

Chú ý. $C_S S = \emptyset$.

Ví dụ 8

Cho các tập hợp: $D = \{-2; 3; 5; 6\}$; $E = \{x \mid x \text{ là số nguyên tố nhỏ hơn } 10\}$;
$X = \{x \mid x \text{ là số nguyên dương nhỏ hơn } 10\}$.

a) Tìm $D \setminus E$ và $E \setminus D$.

b) E có là tập con của X không? Hãy tìm phần bù của E trong X (nếu có).

Lời giải.

a) Ta có: $E = \{2; 3; 5; 7\}$.
Do đó, $D \setminus E = \{-2; 6\}$; $E \setminus D = \{2; 7\}$.

b) Ta có: $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Vậy E là tập con của X.
Phần bù của E trong X là $X \setminus E = C_X E = \{1; 4; 6; 8; 9\}$.

bài tập tương tự

Tìm phần bù của các tập hợp sau trong $\mathbb{R}$:

a) $(-\infty; -2)$;

b) $[-5; +\infty)$.

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

bài tập tương tự

Lớp 10A có 24 bạn tham gia thi đấu bóng đá và cầu lông, trong đó có 16 bạn thi đấu bóng đá và 11 bạn thi đấu cầu lông. Giả sử các trận bóng đá và cầu lông không tổ chức đồng thời. Hỏi có bao nhiêu bạn lớp 10A tham gia thi đấu cả bóng đá và cầu lông?
Gợi ý. Gọi x là số bạn tham gia thi đấu cả bóng đá và cầu lông.

V. BÀI TẬP ÔN LUYỆN

1) Bài tập tự luận

Bài 1. Kí hiệu E là tập hợp các quốc gia tại khu vực Đông Nam Á.

a) Nêu ít nhất hai phần tử thuộc tập hợp E.

b) Nêu ít nhất hai phần tử không thuộc tập hợp E.

c) Liệt kê các phần tử thuộc tập hợp E. Tập hợp E có bao nhiêu phần tử?

Bài 2. Hãy viết tập hợp sau bằng cách nêu tính chất đặc trưng cho các phần tử của tập hợp:

$$A = \{0; 4; 8; 12; 16\}.$$

Bài 3. Trong các tập hợp sau, tập nào là tập rỗng?

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 6 = 0\}; \quad B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 6 = 0\}.$$

Bài 4. Cho $X = \{a; b\}$. Các cách viết sau đúng hay sai? Giải thích kết luận đưa ra.

a) a) $a \subset X$; b) b) $\{a\} \subset X$; c) c) $\emptyset \in X$.

Bài 5. Cho $A = \{2; 5\}$, $B = \{5; x\}$, $C = \{2; y\}$. Tìm x và y để $A = B = C$.

Bài 6. Cho $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 4\}$; $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid (5x - 3x^2)(x^2 + 2x - 3) = 0\}$.

a) Liệt kê các phần tử của hai tập hợp A và B.

b) Hãy xác định các tập hợp $A \cap B$, $A \cup B$ và $A \setminus B$.

Bài 7. Xác định các tập hợp sau và biểu diễn chúng trên trục số.

a) a) $(-4;1] \cap [0;3]$;

b) b) $(0;2] \cup (-3;1]$;

c) c) $(-2;1) \cap (-\infty;1]$;

d) d) $\mathbb{R} \setminus (-\infty;3]$.

Bài 8. Để phục vụ cho một hội nghị quốc tế, ban tổ chức huy động 35 người phiên dịch tiếng Anh, 30 người phiên dịch tiếng Pháp, trong đó có 16 người phiên dịch được cả hai thứ tiếng Anh và Pháp. Hãy trả lời các câu hỏi sau:

a) Ban tổ chức đã huy động bao nhiêu người phiên dịch cho hội nghị đó?

b) Có bao nhiêu người chỉ phiên dịch được tiếng Anh?

c) Có bao nhiêu người chỉ phiên dịch được tiếng Pháp?

Bài 9. Trong số 35 học sinh của lớp 10H, có 20 học sinh thích học môn Toán, 16 học sinh thích môn Tiếng Anh và 12 học sinh thích cả hai môn này. Hỏi lớp 10H:

a) có bao nhiêu học sinh thích ít nhất một trong hai môn Toán và Tiếng Anh?

b) có bao nhiêu học sinh không thích cả hai môn này?

Bài 10. Một nhóm có 12 học sinh chuẩn bị cho hội diễn văn nghệ. Trong danh sách đăng kí tham gia tiết mục múa và tiết mục hát của nhóm đó, có 5 học sinh tham gia tiết mục múa, 3 học sinh tham gia cả hai tiết mục. Có bao nhiêu học sinh trong nhóm tham gia tiết mục hát? Biết 4 học sinh của nhóm không tham gia tiết mục nào?

Bài 11. Để phục vụ cho một hội nghị quốc tế, ban tổ chức huy động 35 người phiên dịch tiếng Anh, 30 người phiên dịch tiếng Pháp, trong đó có 16 người phiên dịch được cả tiếng Anh và tiếng Pháp. Hãy trả lời các câu hỏi sau:

a) Ban tổ chức đã huy động bao nhiêu người phiên dịch cho hội nghị đó?

b) Có bao nhiêu người chỉ phiên dịch được tiếng Anh?

c) Có bao nhiêu người chỉ phiên dịch được tiếng Pháp?

Bài 12. Lớp 10B có 28 học sinh tham gia câu lạc bộ thể thao và 19 học sinh tham gia câu lạc bộ âm nhạc. Biết rằng có 10 học sinh tham gia cả hai câu lạc bộ trên.

a) Có bao nhiêu học sinh ở lớp 10B tham gia câu lạc bộ thể thao và không tham gia câu lạc bộ âm nhạc?

b) Có bao nhiêu học sinh ở lớp 10B tham gia ít nhất một trong hai câu lạc bộ trên?

c) Biết lớp 10B có 40 học sinh. Có bao nhiêu học sinh không tham gia câu lạc bộ thể thao? Có bao nhiêu học sinh không tham gia cả hai câu lạc bộ?

Bài 13. Lớp 10A có 27 học sinh tham gia ít nhất một trong hai câu lạc bộ bóng đá và cờ vua, trong đó có 19 học sinh tham gia câu lạc bộ bóng đá, 15 học sinh tham gia câu lạc bộ cờ vua.

a) Có bao nhiêu học sinh tham gia câu lạc bộ bóng đá mà không tham gia câu lạc bộ cờ vua?

b) Có bao nhiêu học sinh tham gia cả hai câu lạc bộ?

c) Biết trong lớp có 8 học sinh không tham gia câu lạc bộ nào trong hai câu lạc bộ trên. Lớp 10A có bao nhiêu học sinh?

2) Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leqslant 4\}$. A là tập hợp nào sau đây?

Ⓐ $\{0;1;2;3;4\}$.
Ⓑ $\{0;4\}$.
Ⓒ $\{0;4\}$.
Ⓓ $\{1;2;3;4\}$.

Câu 2. Ký hiệu nào sau đây dùng để viết đúng mệnh đề: "3 là một số tự nhiên"?

Ⓐ $3 \subset \mathbb{N}$.
Ⓑ $3 \in \mathbb{N}$.
Ⓒ $3 < \mathbb{N}$.
Ⓓ $3 \leq \mathbb{N}$.

Câu 3. Cho $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 10, x \text{ chia hết cho } 3\}$. Chọn khẳng định đúng.

Ⓐ A có 4 phần tử.
Ⓑ A có 3 phần tử.
Ⓒ A có 5 phần tử.
Ⓓ A có 2 phần tử.

Câu 4. Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp $X = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x^2 - 3x + 1 = 0\}$.

Ⓐ $X = \{0\}$.
Ⓑ $X = \{1\}$.
Ⓒ $X = \left\{\frac{1}{2}; 1\right\}$.
Ⓓ $X = \left\{\frac{3}{2}; 1\right\}$.

Câu 5. Trong các tập sau, tập nào là tập rỗng?

Ⓐ $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 1\}$.
Ⓑ $\{x \in \mathbb{Z} \mid 6x^2 - 7x + 1 = 0\}$.
Ⓒ $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 4x + 2 = 0\}$.
Ⓓ $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x - 3 = 0\}$.

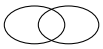
Câu 6. Cho tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$. Tìm số tập con của tập A.

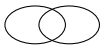
Ⓐ 16.
Ⓑ 15.
Ⓒ 12.
Ⓓ 10.

Câu 7. Cho hai tập hợp A và B. Hình nào sau đây minh họa A là tập con của B?

Ⓐ 

Ⓑ 

Ⓒ 

Ⓓ 

Câu 8. Cho ba tập hợp E, F, G thỏa mãn: $E \subset F \subset G$ và $G \subset K$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $G \subset F$.
Ⓑ $K \subset G$.
Ⓒ $E = F = G$.
Ⓓ $E \subset K$.

Câu 9. Cho tập hợp $A = \{0;3;4;6\}$. Số tập hợp con gồm hai phần tử của A là:

Ⓐ 12.
Ⓑ 8.
Ⓒ 10.
Ⓓ 6.

Câu 10. Cho tập hợp P. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau?

Ⓐ $P \subset P$.
Ⓑ $\emptyset \subset P$.
Ⓒ $\{P\} \in P$.
Ⓓ $P \in P$.

Câu 11. Cho các tập hợp $A = \{1;3\}$, $B = \{3;x\}$, $C = \{x;y;3\}$. Để $A = B = C$ thì tất cả các cặp $(x;y)$ là:

Ⓐ $(1;1)$.
Ⓑ $(1;1)$ và $(1;3)$.
Ⓒ $(1;3)$.
Ⓓ $(3;1)$ và $(3;3)$.

Câu 12. Cho hai tập hợp $A = \{0;1;2;3;4\}$, $B = \{3;4;5;6\}$. Tập hợp $A \cup B$ bằng

Ⓐ $\{0;1;2;3;4;5;6\}$.
Ⓑ $\{3;4\}$.
Ⓒ $\{0;1;2\}$.
Ⓓ $\{5;6\}$.

Câu 13. Cho hai tập hợp $A = \{0;1;2;3;4\}$, $B = \{3;4;5;6\}$. Tập hợp $A \setminus B$ bằng

Ⓐ $\{0;1;2;3;4;5;6\}$.
Ⓑ $\{3;4\}$.
Ⓒ $\{0;1;2\}$.
Ⓓ $\{5;6\}$.

Câu 14. Cho hai tập hợp $A=(-3;3]$, $B=(-2;+\infty)$. Tập hợp $A\cap B$ bằng

Ⓐ $\{-1;0;1;2;3\}$.
Ⓑ $[-2;3]$.
Ⓒ $(-2;3]$.
Ⓓ $(-3;+\infty)$.

Câu 15. Cho tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x\geqslant 2, x\neq 5\}$. A là tập hợp nào sau đây

Ⓐ $(2;+\infty)\setminus\{5\}$.
Ⓑ $[2;5)$.
Ⓒ $(2;5)$.
Ⓓ $[2;+\infty)\setminus\{5\}$.

Câu 16. Cho tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$, $B=\{x\in\mathbb{Z}\mid x^2-x-6=0\}$. Tìm $A\setminus B$.

Ⓐ $(-2;3)$.
Ⓑ $(-2;3)\cup(3;5]$.
Ⓒ $(3;5]$.
Ⓓ $[2;5]\setminus\{3\}$.

Câu 17. Cho tập hợp $A=[-1;+\infty)$. Tập hợp $C_{\mathbb{R}}A$ bằng

Ⓐ $(-1;+\infty)$.
Ⓑ $[-1;0]$.
Ⓒ $(-\infty;-1)$.
Ⓓ $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Câu 18. Cho hai tập hợp A và B khác rỗng thỏa mãn $A\subset B$. Mệnh đề nào **sai**?

Ⓐ $A\setminus B=\emptyset$.
Ⓑ $A\cap B=A$.
Ⓒ $B\setminus A=B$.
Ⓓ $A\cup B=B$.

Câu 19. Gọi A là tập nghiệm của đa thức $P(x)$, B là tập nghiệm của đa thức $Q(x)$, C là tập nghiệm của đa thức $P(x)\cdot Q(x)$. C là tập hợp nào sau đây

Ⓐ $A\cup B$.
Ⓑ $A\cap B$.
Ⓒ $A\setminus B$.
Ⓓ $B\setminus A$.

Câu 20. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

Ⓐ $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}=\mathbb{N}$.
Ⓑ $\mathbb{N}\cup\mathbb{N}^*=\mathbb{Z}$.
Ⓒ $\mathbb{N}^*\cap\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$.
Ⓓ $\mathbb{N}^*\cap\mathbb{Q}=\mathbb{N}^*$.

BẢNG ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á
1	A	2	B	3	A	4	B	5	C
6	A	7	B	8	D	9	D	10	D
11	B	12	A	13	C	14	C	15	D
16	B	17	C	18	C	19	A	20	D

§3 ÔN TẬP CHƯƠNG 1

I. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Câu nào sau đây **không** là mệnh đề?

Ⓐ Tam giác đều là tam giác có ba cạnh bằng nhau..
Ⓑ $3 < 1$.
Ⓒ $4 - 5 = 1$.
Ⓓ Bạn học giỏi quá!.

Câu 2. Câu nào trong các câu sau **không phải** là mệnh đề?

Ⓐ π có phải là một số vô tỷ không?.
Ⓑ $2 + 2 = 5$.
Ⓒ $\sqrt{2}$ là một số hữu tỷ.
Ⓓ $\frac{4}{2} = 2$.

Câu 3. Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề?

Ⓐ 12 là số tự nhiên lẻ.
Ⓑ An học lớp mấy?.
Ⓒ Các bạn có chăm học không?.
Ⓓ Các bạn hãy làm bài đi!.

Câu 4. Trong các câu sau, có bao nhiêu câu là mệnh đề?

a) Cố lên, sắp đói rồi!

b) Số 15 là số nguyên tố.

c) Tổng các góc của một tam giác là $180°$.

d) x là số nguyên dương.

Ⓐ 3.
Ⓑ 2.
Ⓒ 4.
Ⓓ 1.

Câu 5. Câu nào sau đây **không** là mệnh đề?

Ⓐ Tam giác đều là tam giác có ba cạnh bằng nhau.
Ⓑ $3 < 1$.
Ⓒ $4 - 5 = 1$.
Ⓓ Bạn học giỏi quá!.

Câu 6. Trong các mệnh đề dưới đây, các mệnh đề nào **sai**?

M: "$\exists r \in \mathbb{Q}, 4r^2 - 1 = 0$".
N: "$\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ chia hết cho 8".
X: "$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ không chia hết cho 11".
Q: "$\exists n \in \mathbb{Z}, n^2 + n + 1$ là một số chẵn".
E: "$\forall x \in \mathbb{Z}, \frac{2x^3 - 6x^2 + x - 3}{2x^2 + 1} \in \mathbb{Z}$".

Ⓐ N, X, Q.
Ⓑ M, X, Q.
Ⓒ N, Q, E.
Ⓓ M, Q, E.

Câu 7. Có bao nhiêu mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

a) $\exists n \in \mathbb{Z} : \sqrt{2^n + 1}$ là số nguyên.

b) $\forall n \in \mathbb{N} : 2^n + 1$ là số nguyên tố.

c) $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists m \in \mathbb{N} : m + n \in \mathbb{N}$.

d) $\exists x \in \mathbb{N} : 1 - x^2 \geq 0$.

e) $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \vdots 9 \Rightarrow n \vdots 9$.

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

Câu 8. Cho các mệnh đề sau: (1) $a \vdots 2$ và $a \vdots 3 \Leftrightarrow a \vdots 6$. (2) $a \vdots 3 \Leftrightarrow a \vdots 9$. (3) $a \vdots 2 \Leftrightarrow a \vdots 4$. (4) $a \vdots 3$ và $a \vdots 6$ thì $a \vdots 18$. (5) $a + b < 0 \Leftrightarrow a < 0$ và $b < 0$. (6) $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ hoặc $b = 0$. (7) Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi hai tam giác đó đồng dạng. (8) Một tam giác là tam giác vuông khi và chỉ khi đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng một nửa cạnh huyền. Có bao nhiêu mệnh đề **sai** trong các mệnh đề trên?

Ⓐ 4. Ⓑ 6. Ⓒ 5. Ⓓ 7.

Câu 9. Cho ba mệnh đề sau, với n là số tự nhiên: (1) $n + 8$ là số chính phương. (2) Chữ số tận cùng của n là 4. (3) $n - 1$ là số chính phương. Biết rằng có hai mệnh đề đúng và một mệnh đề sai. Hãy xác định mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai?

Ⓐ Mệnh đề (2) và (3) là đúng, còn mệnh đề (1) là sai.
Ⓑ Mệnh đề (1) và (2) là đúng, còn mệnh đề (3) là sai.
Ⓒ Mệnh đề (1) là đúng, còn mệnh đề (2) và (3) là sai.
Ⓓ Mệnh đề (1) và (3) là đúng, còn mệnh đề (2) là sai.

Câu 10. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $\pi < 3$. Ⓑ $\pi^2 > 16$. Ⓒ $\sqrt{35} > 6$. Ⓓ $\sqrt{36} \geq 6$.

Câu 11. Mệnh đề nào sau đây sai?

Ⓐ 30 chia hết cho 5.
Ⓑ 30 là bội số của 5.
Ⓒ 30 là ước số của 5.
Ⓓ 5 là ước số của 30.

Câu 12. Mệnh đề nào là sau đây sai?

Ⓐ Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng đồng dạng và có một góc bằng nhau.
Ⓑ Một tứ giác là hình chữ nhật khi và chỉ khi chúng có 3 góc vuông.
Ⓒ Một tam giác là vuông khi và chỉ khi nó có một góc bằng tổng hai góc còn lại.
Ⓓ Một tam giác là đều khi và chỉ khi nó là tam giác cân và có một góc bằng $60°$.

Câu 13. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ Nếu tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
Ⓑ Nếu tứ giác $ABCD$ một cặp cạnh đối song song thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
Ⓒ Nếu tứ giác $ABCD$ có một cặp cạnh đối bằng nhau thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
Ⓓ Nếu tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Câu 14. Mệnh đề nào sau đây sai?

Ⓐ 2 là số nguyên tố.
Ⓑ 1 là số nguyên tố.
Ⓒ 5 là số nguyên tố.
Ⓓ 6 không phải là số nguyên tố.

Câu 15. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề sai?

Ⓐ $-\pi < -2 \Leftrightarrow \pi^2 < 4$.
Ⓑ $\pi < 4 \Leftrightarrow \pi^2 < 16$.
Ⓒ $\sqrt{23} < 5 \Rightarrow 2\sqrt{23} < 2,5$.
Ⓓ $\sqrt{23} < 5 \Rightarrow -2\sqrt{23} > -2,5$.

Câu 16. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề sai?

(A) Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng đồng dạng và có một góc bằng nhau.
(B) Một tứ giác là hình chữ nhật khi và chỉ khi chúng có 3 góc vuông.
(C) Một tam giác là vuông khi và chỉ khi nó có một góc bằng tổng hai góc còn lại.
(D) Một tam giác là đều khi và chỉ khi chúng có hai đường trung tuyến bằng nhau và có một góc bằng 60°.

Câu 17. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào có mệnh đề đảo đúng?

(A) Nếu số nguyên n có chữ số tận cùng là 5 thì số nguyên n chia hết cho 5.
(B) Nếu tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
(C) Nếu tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật thì tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo bằng nhau.
(D) Nếu tứ giác $ABCD$ là hình thoi thì tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau.

Câu 18. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề sai?

(A) "ABC là tam giác đều $\Leftrightarrow$ Tam giác ABC cân".
(B) "ABC là tam giác đều $\Leftrightarrow$ Tam giác ABC cân và có một góc 60°".
(C) "ABC là tam giác đều $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác có ba cạnh bằng nhau".
(D) "ABC là tam giác đều $\Leftrightarrow$ Tam giác ABC có hai góc bằng 60°".

Câu 19. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\forall n \in \mathbb{N} : n(n+1)$ là số chính phương.
(B) $\forall n \in \mathbb{N} : n(n+1)$ là số lẻ.
(C) $\forall n \in \mathbb{N} : n(n+1)(n+2)$ là số lẻ.
(D) $\forall n \in \mathbb{N} : n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 6.

Câu 20. Tìm mệnh đề đúng

(A) $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 - 3$ là bội số của 7.
(B) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 7x + 15 > 0$..
(C) $\exists x \in \mathbb{N} : x^3 + 2x^2 + 8x + 16 = 0$.
(D) $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 + 1$ chia hết cho 4.

Câu 21. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) $\exists n \in \mathbb{N}, n^3 - n$ không chia hết cho 3.
(B) $\forall x \in \mathbb{R}, x < 3 \Rightarrow x^2 < 9$.
(C) $\exists k \in \mathbb{Z}, k^2 + k + 1$ là một số chẵn.
(D) $\forall x \in \mathbb{Z}, \dfrac{2x^3 - 6x^2 + x - 3}{2x^2 + 1} \in \mathbb{Z}$.

Câu 22. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

(A) $\exists x \in \mathbb{R}, x > x^2$.
(B) $\forall x \in \mathbb{R}, |x| < 6 \Rightarrow x < 6$.
(C) $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ không chia hết cho 3.
(D) $\exists a \in \mathbb{Q}, a^2 = 7$.

Câu 23. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 5 = 0$.
(B) $\exists x \in \mathbb{R}, x^4 + 5x^2 + 4 = 0$.
(C) $\forall n \in \mathbb{N}, n^3 - n$ chia hết cho 3.
(D) $\forall x \in \mathbb{Z}, x^3 > x^2$.

Câu 24. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

Ⓐ Phương trình $x^3+3x^2-x-3=0$ có 2 nghiệm nguyên dương.
Ⓑ $\exists x\in\mathbb{R}:-x^2+6x-10>0$.
Ⓒ "$\forall x\in\mathbb{R}:x^2-x\geq-\dfrac{1}{4}$".
Ⓓ Bất phương trình $\dfrac{x^2-1}{x}<x$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Câu 25. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai?

Ⓐ $4+4^2+4^3+\cdots+4^{99}+4^{100}$ chia hết cho 5.
Ⓑ $\forall n\in\mathbb{N}:n^2+1$ không chia hết cho 4.
Ⓒ $\exists n\in\mathbb{N}:2^n-1$ chia hết cho 7.
Ⓓ $1^3+2^3+3^3+\cdots+100^3$ không chia hết cho 5050.

Câu 26. Có bao nhiêu số nguyên n để mệnh đề "$2n^3+n^2+7n+1$ chia hết cho $2n-1$" là đúng?

Ⓐ 3. Ⓑ 2. Ⓒ 4. Ⓓ 5.

Câu 27. Cho các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề sai

Ⓐ $\exists x\in\mathbb{Q}:4x^2-1=0$.
Ⓑ $\exists x\in\mathbb{R}:x>x^2$.
Ⓒ $\forall n\in\mathbb{N}:n^2+1$ không chia hết cho 3.
Ⓓ $\forall n\in\mathbb{N}:n^2>n$.

Câu 28. Cho các mệnh đề sau, mệnh đề nào có mệnh đề đảo đúng?

Ⓐ Nếu tứ giác $ABCD$ là hình thang cân thì 2 góc đối bù nhau.
Ⓑ Nếu $a=b$ thì $a\cdot c=b\cdot c$.
Ⓒ Nếu $a>b$ thì $a^2>b^2$.
Ⓓ Nếu số nguyên chia hết cho 10 thì chia hết cho 5 và 2.

Câu 29. Dùng kí hiệu $\exists,\forall$ để phát biểu mệnh đề "Có một số hữu tỉ mà nghịch đảo của nó lớn hơn chính nó".

Ⓐ $\exists n\in\mathbb{R}:\dfrac{1}{n}>n$. Ⓑ $\forall n\in\mathbb{Q}:\dfrac{1}{n}>n$.
Ⓒ $\exists n\in\mathbb{Q}:n>\dfrac{1}{n}$. Ⓓ $\exists n\in\mathbb{Q}:\dfrac{1}{n}>n$.

Câu 30. Hãy chọn mệnh đề đúng:

Ⓐ Phương trình: $\dfrac{x^2-9}{x-3}=0$ có một nghiệm là .
Ⓑ $\exists x\in\mathbb{R}:x^2+x>0$.
Ⓒ $\exists x\in\mathbb{R}:x^2-x+2<0$.
Ⓓ $\forall x\in\mathbb{R}:2x^2+6\sqrt{2}x+10>1$.

Câu 31. Cho mệnh đề $A=$"$\forall x\in\mathbb{R}:x^2+x\geq-\dfrac{1}{4}$". Lập mệnh đề phủ định của mệnh đề A và xét tính đúng sai của nó.

Ⓐ $\bar{A}=$"$\exists x\in\mathbb{R}:x^2+x\geq-\dfrac{1}{4}$". Đây là mệnh đề đúng.
Ⓑ $\bar{A}=$"$\exists x\in\mathbb{R}:x^2+x\leq-\dfrac{1}{4}$". Đây là mệnh đề đúng.

Ⓒ $\bar{A} =$ "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + x < -\dfrac{1}{4}$". Đây là mệnh đề đúng.

Ⓓ $\bar{A} =$ "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + x < -\dfrac{1}{4}$". Đây là mệnh đề sai.

Câu 32. Phủ định của mệnh đề: "Hình thoi có hai đường chéo vuông góc với nhau" là:

Ⓐ "Hai đường chéo của hình thoi vuông góc với nhau".
Ⓑ "Hình thoi có hai đường chéo không vuông góc với nhau".
Ⓒ "Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau".
Ⓓ "Hình thoi là hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau".

Câu 33. Phủ định của mệnh đề: "$\forall n \in \mathbb{N} : n^2 + 1$ không chia hết cho 3" là:

Ⓐ "$\forall n \in \mathbb{N} : n^2 + 1$ chia hết cho 3".
Ⓑ "$\exists n \in \mathbb{N} : n^2 + 1$ không chia hết cho 3".
Ⓒ "$\exists n \in \mathbb{N} : n^2 + 1$ chia hết cho 3".
Ⓓ "$\nexists n \in \mathbb{N} : n^2 + 1$ không chia hết cho 3".

Câu 34. Phủ định của mệnh đề: "$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 > 0$" là:

Ⓐ "$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 < 0$".
Ⓑ "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \leq 0$".
Ⓒ "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 > 0$".
Ⓓ "$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0$".

Câu 35. Phủ định của mệnh đề P : "$\exists x \in \mathbb{N} : x^2 - 3x + 2 = 0$" là:

Ⓐ $\bar{P}$: "$\exists x \in \mathbb{N} : x^2 - 3x + 2 \neq 0$".
Ⓑ $\bar{P}$: "$\forall x \in \mathbb{N} : x^2 - 3x + 2 = 0$".
Ⓒ $\bar{P}$: "$\forall x \in \mathbb{N} : x^2 - 3x + 2 > 0$".
Ⓓ $\bar{P}$: "$\forall x \in \mathbb{N} : x^2 - 3x + 2 \neq 0$".

Câu 36. Phủ định của mệnh đề: "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1$ là số dương" là:

Ⓐ "$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1$ là số không dương".
Ⓑ "$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1$ là số âm".
Ⓒ "$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1$ là số dương".
Ⓓ "$\nexists x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1$ là số dương".

Câu 37. Mệnh đề nào sau đây là phủ định của mệnh đề: "Mọi động vật đều di chuyển".

Ⓐ Mọi động vật đều không di chuyển.
Ⓑ Mọi động vật đều đứng yên.
Ⓒ Có ít nhất một động vật không di chuyển.
Ⓓ Có ít nhất một động vật di chuyển.

Câu 38. Phủ định của mệnh đề "$\exists x \in \mathbb{R}, 5x - 3x^2 = 1$" là

Ⓐ "$\exists x \in \mathbb{R}, 5x - 3x^2$".
Ⓑ "$\forall x \in \mathbb{R}, 5x - 3x^2 = 1$".
Ⓒ "$\forall x \in \mathbb{R}, 5x - 3x^2 \neq 1$".
Ⓓ "$\exists x \in \mathbb{R}, 5x - 3x^2 \geq 1$".

Câu 39. Cho mệnh đề $P(x)$: "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 > 0$". Mệnh đề phủ định của mệnh đề $P(x)$ là:

Ⓐ "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 < 0$".
Ⓑ "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \leq 0$".
Ⓒ "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \leq 0$".
Ⓓ "$\nexists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 > 0$".

Câu 40. Cho mệnh đề $A =$ "$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 < x$". Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là phủ định của mệnh đề A?

Ⓐ "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 < x$".
Ⓑ "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \geq x$".
Ⓒ "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 < x$".
Ⓓ "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \leq x$".

Câu 41. Cho mệnh đề "phương trình $x^2-4x+4=0$ có nghiệm". Mệnh đề phủ định của mệnh đề đã cho và tính đúng, sai của mệnh đề phủ định là:

(A) Phương trình $x^2-4x+4=0$ có nghiệm. Đây là mệnh đề đúng.
(B) Phương trình $x^2-4x+4=0$ có nghiệm. Đây là mệnh đề sai.
(C) Phương trình $x^2-4x+4=0$ vô nghiệm. Đây là mệnh đề đúng.
(D) Phương trình $x^2-4x+4=0$ vô nghiệm. Đây là mệnh đề sai.

Câu 42. Cho mệnh đề A : "$\forall x\in\mathbb{R}, x^2-x+7<0$". Mệnh đề phủ định của A là:

(A) $\forall x\in\mathbb{R}, x^2-x+7>0$.
(B) $\forall x\in\mathbb{R}, x^2-x+7\geq 0$.
(C) Không tồn tại $x : x^2-x+7<0$.
(D) $\exists x\in\mathbb{R}, x^2-x+7\geq 0$.

Câu 43. Cho n là số tự nhiên mệnh đề phủ định của mệnh đề nào sau đây **đúng**?

(A) P : "$\forall n\in\mathbb{N}, n(n+1)$ là số chính phương".
(B) Q : "$\exists n\in\mathbb{N}, n(n+1)$ là số chẵn".
(C) R : "$\forall n\in\mathbb{N}, n(n+1)(n+2)$ là số chẵn".
(D) M : "$\exists n\in\mathbb{N}, n(n+1)(n+2)$ không chia hết cho 6".

Câu 44. Cho mệnh đề: "Nếu $a+b<2$ thì một trong hai số a và b nhỏ hơn 1". Phát biểu mệnh đề trên bằng cách sử dụng khái niệm "điều kiện đủ".

(A) $a+b<2$ là điều kiện đủ để một trong hai số a và b nhỏ hơn 1.
(B) Một trong hai số a và b nhỏ hơn 1 là điều kiện đủ để $a+b<2$.
(C) Từ $a+b<2$ suy ra một trong hai số a và b nhỏ hơn 1.
(D) Tất cả các câu trên đều đúng.

Câu 45. Liệt kê các phần tử của tập hợp $X=\{x\in\mathbb{Z}\mid 2x^2-3x+1=0\}$.

(A) $X=\{0\}$. (B) $X=\{1\}$. (C) $X=\{1;\frac{1}{2}\}$. (D) $X=\{1;\frac{3}{2}\}$.

Câu 46. Cho tập hợp $A=\{a,b,c,d\}$. Tìm số tập con của tập A.

(A) 16. (B) 15. (C) 12. (D) 10.

Câu 47. Tìm x,y để ba tập hợp $A=\{1;4\}$, $B=\{4;x\}$ và $C=\{x;y;4\}$ bằng nhau.

(A) $x=y=1$.
(B) $x=y=1$ hoặc $x=1,y=4$.
(C) $x=1,y=4$.
(D) $x=4,y=1$ hoặc $x=y=4$.

Câu 48. Cho $S=\{7;2;8;4;9;12\}; T=\{1;3;7;4\}$. Tìm tập $S\cap T$.

(A) $\{1;2;3;4;8;9;7;12\}$.
(B) $\{2;8;9;12\}$.
(C) $\{4;7\}$.
(D) $\{1;3\}$.

Câu 49. Cho hai tập hợp $A=[-5;3), B=(1;+\infty)$. Khi đó $A\cap B$ là tập nào sau đây?

(A) $(1;3)$. (B) $(1;3]$. (C) $[-5;+\infty)$. (D) $[-5;1]$.

Câu 50. Cho 2 tập hợp: $S=\{1;3;5;8\}; T=\{3;5;7;9\}$. Tập hợp $S\cup T$ bằng tập hợp nào sau đây?

(A) $\{3;5\}$.
(B) $\{1;3;5;7;8;9\}$.
(C) $\{1;7;9\}$.
(D) $\{1;3;5\}$.

Câu 51. Cho hai tập hợp $A=[-2;7), B=(1;9]$. Tìm tập hợp $A\cup B$.

Ⓐ $(1;7)$. Ⓑ $[-2;9]$. Ⓒ $[-2;1)$. Ⓓ $(7;9]$.

Câu 52. Cho hai tập hợp $A=\{2,4,6,9\}$ và $B=\{1,2,3,4\}$. Tập hợp $A\setminus B$ bằng tập nào sau đây?

Ⓐ $A=\{1,2,3,5\}$. Ⓑ $\{1;3;6;9\}$.
Ⓒ $\{6;9\}$. Ⓓ $\emptyset$.

Câu 53. Cho hai tập hợp $A=(1;5]; B=(2;7]$. Tập hợp $A\setminus B$ là

Ⓐ $(1;2]$. Ⓑ $(2;5)$. Ⓒ $(-1;7]$. Ⓓ $(-1;2)$.

Câu 54. Cho tập hợp $A=(2;+\infty)$. Tìm tập hợp $C_{\mathbb{R}}A$.

Ⓐ $[2;+\infty)$. Ⓑ $(2;+\infty)$. Ⓒ $(-\infty;2]$. Ⓓ $(-\infty;-2]$.

Câu 55. Cho hai tập hợp $A=(m;m+1)$ và $B=[-1;3]$. Tìm tất cả các giá trị của m để $A\cap B=\emptyset$.

Ⓐ $\hoac{m\le -2\\ m\ge 3}$. Ⓑ $-2\le m\le 3$.
Ⓒ $\hoac{m\ge 2\\ m\le -1}$. Ⓓ $\hoac{m<-2\\ m>3}$.

Câu 56. Lớp $10A$ có 7 học sinh giỏi Toán, 5 học sinh giỏi Vật lý, 6 học sinh giỏi Hóa học, 3 học sinh giỏi cả Toán và Hóa học, 4 học sinh giỏi cả Toán và Vật lý, 2 học sinh giỏi cả Vật lý và Hóa học, 1 học sinh giỏi cả ba môn Toán, Vật lý, Hóa học. Tính số học sinh giỏi ít nhất một môn (Toán, Vật lý, Hóa học) của lớp $10A$.

Ⓐ 10. Ⓑ 20. Ⓒ 17. Ⓓ 9.

Câu 57. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

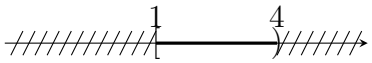
Ⓐ $2\in(3;+\infty)$. Ⓑ $3\in(3;+\infty)$.
Ⓒ $4\notin(3;+\infty)$. Ⓓ $5\in(3;+\infty)$.

Câu 58. Dùng các kí hiệu khoảng, đoạn, nửa khoảng viết lại tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}\mid -5\le x<3\}$ là

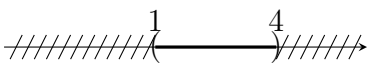
Ⓐ $(-5;3)$. Ⓑ $(-5;3]$. Ⓒ $[-5;3]$. Ⓓ $[-5;3)$.

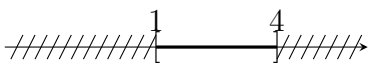
Câu 59. Hình vẽ nào sau đây (phần không bị gạch) minh họa cho tập hợp $(1;4]$?

Ⓐ 

. Ⓑ 

.

Ⓒ 

. Ⓓ 

.

Câu 60. Sử dụng các kí hiệu đoạn, khoảng, nửa khoảng để viết tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}\mid |x|\le 3\}$.

Ⓐ $A=[3;+\infty)$. Ⓑ $A=(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$.
Ⓒ $A=[-3;3]$. Ⓓ $A=(-3;3)$.

Câu 61. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $(-\infty;4)\cap\mathbb{N}=(-\infty;4)$. Ⓑ $(-\infty;4)\cap\mathbb{N}=[0;4)$.
Ⓒ $(-\infty;4)\cap\mathbb{N}=\{0;3\}$. Ⓓ $(-\infty;4)\cap\mathbb{N}=\{0;1;2;3\}$.

Câu 62. Cho tập hợp $X = (-\infty; 2] \cap (-6; +\infty)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $X = (-6; 2]$.
Ⓑ $X = (-\infty; +\infty)$.
Ⓒ $X = (-\infty; 2]$.
Ⓓ $X = (-6; +\infty)$.

Câu 63. Cho hai tập hợp $A = (-1; +\infty)$, $B = (-\infty; 3]$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $A \setminus B = (3; +\infty)$.
Ⓑ $A \setminus B = (-1; 3)$.
Ⓒ $A \setminus B = [3; +\infty)$.
Ⓓ $A \setminus B = (-\infty; 1]$.

Câu 64. Cho hai tập $A = [-1; 2]$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 0\}$. Tìm $A \cup B$.

Ⓐ $A \cup B = (-3; 2]$.
Ⓑ $A \cup B = [-1; 0)$.
Ⓒ $A \cup B = (0; 2]$.
Ⓓ $A \cup B = (-3; 2)$.

Câu 65. Cho hai tập hợp $A = [-2; 5)$ và $B = (-3; +\infty)$. Tìm tập hợp $C_B A$.

Ⓐ $C_B A = [-2; 5)$.
Ⓑ $C_B A = (-3; -2] \cup [5; +\infty)$.
Ⓒ $C_B A = [-2; 5)$.
Ⓓ $C_B A = (-3; -2) \cup [5; +\infty)$.

Câu 66. Tập hợp $(-\infty; 2) \cup [0; 5]$ bằng tập hợp nào sau đây?

Ⓐ $(-\infty; 5]$.
Ⓑ $[2; 5]$.
Ⓒ $[0; 2)$.
Ⓓ $(-\infty; 0)$.

Câu 67. Cho tập hợp $C_{\mathbb{R}} A = (1; 5)$ và tập hợp $B = (0; +\infty)$. Khi đó, $A \setminus B$ bằng

Ⓐ $(-\infty; 0]$.
Ⓑ $\emptyset$.
Ⓒ $(-\infty; 0)$.
Ⓓ $(0; 1)$.

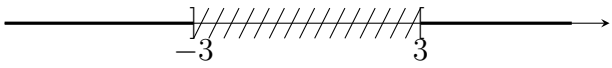
Câu 68. Biết rằng $C_{\mathbb{R}} A = [-3; 11)$ và $C_{\mathbb{R}} B = (-8; 1]$. Khi đó, $C_{\mathbb{R}}(A \cap B)$ bằng

Ⓐ $(-8; 11)$.
Ⓑ $[3; 1]$.
Ⓒ $(-\infty; -8] \cup [11; +\infty)$.
Ⓓ $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

Câu 69. Kí hiệu nào sau đây dùng để viết đúng mệnh đề "$\sqrt{3}$ không phải là số hữu tỉ"?

Ⓐ $\sqrt{3} \neq \mathbb{Q}$.
Ⓑ $\sqrt{3} \not\subset \mathbb{Q}$.
Ⓒ $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.
Ⓓ $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$.

Câu 70. Hình vẽ sau đây phần **không** bị gạch minh họa cho một tập con của tập số thực. Hỏi tập đó là tập nào?



Ⓐ $\mathbb{R} \setminus [-3; +\infty)$.
Ⓑ $\mathbb{R} \setminus (-\infty; 3)$.
Ⓒ $\mathbb{R} \setminus (-3; 3)$.
Ⓓ $\mathbb{R} \setminus [-3; 3)$.

Câu 71. Mệnh đề phủ định của mệnh đề "14 là số nguyên tố" là mệnh đề:

Ⓐ 14 là số nguyên tố.
Ⓑ 14 chia hết cho 2.
Ⓒ 14 không phải là số nguyên tố.
Ⓓ 14 chia hết cho 7.

Câu 72. Cho hai tập hợp $A = (-1; +\infty)$, $B = (-\infty; 3]$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $A \setminus B = (3; +\infty)$.
Ⓑ $A \setminus B = (-1; 3)$.
Ⓒ $A \setminus B = [3; +\infty)$.
Ⓓ $A \setminus B = (-\infty; 1]$.

Câu 73. Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp $D = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}, |k| \leq 2\}$.

Ⓐ $A = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.
Ⓑ $A = \{0; 1; 2\}$.
Ⓒ $A = \{1; 3; 5\}$.
Ⓓ $A = \{-3; -1; 1; 3; 5\}$.

Câu 74. Cho tập hợp $X = \{1; 3; 9\}$. Hỏi tập hợp X có bao nhiêu tập hợp con?

Ⓐ 3. Ⓑ 6. Ⓒ 8. Ⓓ 9.

Câu 75. Cho hai tập hợp $A = \{1; 2; 5; 7\}$ và $B = \{1; 2; 3\}$. Có tất cả bao nhiêu tập X thỏa $X \subset A$ và $X \subset B$?

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

Câu 76. Sử dụng các kí hiệu đoạn, khoảng, nửa khoảng để viết tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 3\}$.

Ⓐ $A = [3; +\infty)$. Ⓑ $A = (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.
Ⓒ $A = [-3; 3]$. Ⓓ $A = (-3; 3)$.

Câu 77. Biết A là mệnh đề sai và B là mệnh đề đúng. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $B \Rightarrow \bar{A}$. Ⓑ $B \Leftrightarrow A$. Ⓒ $\bar{A} \Leftrightarrow \bar{B}$. Ⓓ $B \Rightarrow A$.

Câu 78. Cho hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$. Xét các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} \mid f^2(x) + g^2(x) = 0\}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $C = A \cup B$. Ⓑ $C = A \cap B$. Ⓒ $C = A \setminus B$. Ⓓ $C = B \setminus A$.

Câu 79. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào có mệnh đề đảo đúng?

Ⓐ Nếu $a + b > 2$ thì có ít nhất một trong hai số a, b lớn hơn 1.
Ⓑ Nếu một số tự nhiên chia hết cho 6 thì số đó chia hết cho 3.
Ⓒ Nếu tứ giác là hình vuông thì hai đường chéo vuông góc với nhau.
Ⓓ Trong một tam giác cân hai đường cao bằng nhau.

Câu 80. Một lớp học có 25 học sinh học khá các môn tự nhiên, 24 học sinh học khá các môn xã hội, 10 học sinh học khá cả môn tự nhiên lẫn môn xã hội, đặc biệt vẫn còn 3 học sinh chưa học khá cả hai nhóm môn ấy. Hỏi lớp có bao nhiêu học sinh chỉ khá đúng một nhóm môn (tự nhiên hoặc xã hội).

Ⓐ 39. Ⓑ 26. Ⓒ 29. Ⓓ 36.

Câu 81. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

Ⓐ Tam giác cân là tam giác có ba cạnh bằng nhau.
Ⓑ Hai tam giác có diện tích bằng nhau thì hai tam giác ấy bằng nhau.
Ⓒ Hai tam giác bằng nhau nếu chúng có hai cạnh bằng nhau.
Ⓓ Hai tam giác bằng nhau thì có diện tích bằng nhau.

Câu 82. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $0 = \{0\}$. Ⓑ $0 \in \{0\}$. Ⓒ $0 \subset \{0\}$. Ⓓ $0 = \emptyset$.

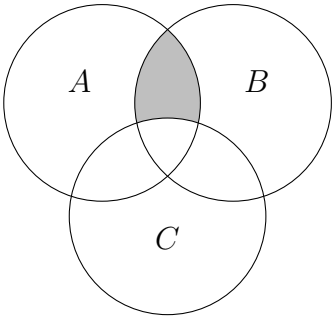
Câu 83. Cho mệnh đề $P \Rightarrow Q$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ Q là điều kiện cần và đủ để có P.
Ⓑ P là điều kiện cần để có Q.
Ⓒ Q là điều kiện đủ để có P.
Ⓓ P là điều kiện đủ để có Q.

Câu 84. Cho hai tập hợp $A = (-\infty; 5]$ và $B = (3; 8)$. Tập hợp $A \cap B$ bằng

Ⓐ $(-\infty; 8)$. Ⓑ $(3; 5]$. Ⓒ $(5; 8)$. Ⓓ $[3; 8)$.

Câu 85. Cho các tập hợp A, B, C được minh họa bằng biểu đồ Ven như hình vẽ bên dưới:



Phần tô màu xám trong hình là biểu diễn của tập hợp nào sau đây?

Ⓐ $(A \cap B) \setminus C$.
Ⓑ $(A \setminus C) \cup (A \setminus B)$.
Ⓒ $(A \cup B) \setminus C$.
Ⓓ $A \cap B \cap C$.

Câu 86. Cho mệnh đề "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 < 0$". Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề phủ định của mệnh đề đã cho?

Ⓐ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 < 0$.
Ⓑ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 > 0$.
Ⓒ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 < 0$.
Ⓓ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 \geq 0$.

Câu 87. Cho tập hợp $B = (-3; +\infty)$. Khi đó, tập hợp $C_{\mathbb{R}}B$ bằng

Ⓐ $(-\infty; 3)$.
Ⓑ $(-\infty; -3]$.
Ⓒ $\emptyset$.
Ⓓ $[-3; +\infty)$.

Câu 88. Dùng kí hiệu $\forall x \in X, P(x)$ hoặc $\exists x \in X, P(x)$ để viết lại mệnh đề sau: "Mọi số tự nhiên đều không âm."

Ⓐ $\forall x \in \mathbb{N}, x \geq 0$.
Ⓑ $\forall x \in \mathbb{N}^*, x > 0$.
Ⓒ $\exists x \in \mathbb{N}^*, x > 0$.
Ⓓ $\exists x \in \mathbb{N}, x \geq 0$.

Câu 89. Xét các phát biểu sau:
(1): Số 3 là một số chẵn.
(2): $2x + 1 = 3$.
(3): Các em hãy cố gắng làm bài thi cho tốt nhé!
(4): $1 < 5 \Rightarrow 8 < 6$.
Trong các phát biểu trên, có bao nhiêu phát biểu là mệnh đề?

Ⓐ 1.
Ⓑ 2.
Ⓒ 4.
Ⓓ 3.

Câu 90. Thống kê tại một trung tâm mua sắm có 30 cửa hàng bán quần áo, 12 cửa hàng có bán giày và 34 cửa hàng bán ít nhất một trong hai mặt hàng này. Có bao nhiêu cửa hàng chỉ bán một trong hai loại quần áo hoặc giày?

Ⓐ 42.
Ⓑ 26.
Ⓒ 14.
Ⓓ 30.

Câu 91. Cho hai tập hợp $A = \{-1; 2; 3; 5; 7\}$, $B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Khi đó, tập hợp $A \cap B$ là

Ⓐ $\{-1; 1; 2; 3; 4; 5; 7\}$.
Ⓑ $\{2; 3; 5\}$.
Ⓒ $\{7\}$.
Ⓓ $\{-1\}$.

Câu 92. Cho tập hợp $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 7\}$. Khi đó:

Ⓐ $S = [2; 7]$.
Ⓑ $S = [2; 7)$.
Ⓒ $S = (2; 7)$.
Ⓓ $S = (2; 7]$.

Câu 93. Phát biểu nào sau đây là mệnh đề?

Ⓐ Hà Nội là thủ đô của Việt Nam.

Ⓑ Ước gì hôm nay trời không mưa!.
Ⓒ $x+5=8$.
Ⓓ Con mèo này thật đáng yêu!.

Câu 94. Phủ định của mệnh đề "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2+1>0$" là:

Ⓐ "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2+1>0$".
Ⓑ "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2+1=0$".
Ⓒ "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2+1 \leq 0$".
Ⓓ "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2+1 \leq 0$".

Câu 95. Cho tập hợp $A=\{a;b;c\}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $a \subset A$.
Ⓑ $\{a\} \in A$.
Ⓒ $\emptyset \not\subset A$.
Ⓓ $A \subset A$.

Câu 96. Mệnh đề "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2=13$" được phát biểu là

Ⓐ Bình phương của mỗi số thực bằng 13.
Ⓑ Có ít nhất một số thực mà bình phương của nó bằng 13.
Ⓒ Chỉ có một số thực mà bình phương của nó bằng 13.
Ⓓ Bình phương của mỗi số thực đều không bằng 13.

Câu 97. Cho hai tập hợp $A=\{1,3,5,7\}$ và $B=\{1,2,3,4\}$. Tập hợp $A \setminus B$ là tập nào sau đây?

Ⓐ $\{5;7\}$.
Ⓑ $\{1;2;3;4;5;7\}$.
Ⓒ $\{1;3\}$.
Ⓓ $A=\{1;2;4\}$.

Câu 98. Xét các khẳng định sau:

a) Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng có diện tích bằng nhau.

b) Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng đồng dạng và có một cạnh bằng nhau.

c) Một tam giác là tam giác vuông khi và chỉ khi nó có một góc bằng tổng của hai góc còn lại.

d) Một tam giác là tam giác đều khi và chỉ khi nó có hai phân giác bằng nhau và một góc bằng 60°.

Số khẳng định đúng trong các khẳng định trên là

Ⓐ 1.
Ⓑ 3.
Ⓒ 2.
Ⓓ 4.

Câu 99. Cho hai tập hợp $A=\{0;1;2;3;4\}$, $B=\{3;4;5;6\}$. Tập hợp $A \cup B$ là

Ⓐ $\{0;1;2;3;4;5;6\}$.
Ⓑ $\{3;4\}$.
Ⓒ $\{0;1;2\}$.
Ⓓ $\{5;6\}$.

Câu 100. Cho tập hợp $A=[-2;5)$ và $B=[0;+\infty)$. Tìm $A \cup B$.

Ⓐ $A \cup B=[-2;0)$.
Ⓑ $A \cup B=[0;5)$.
Ⓒ $A \cup B=[-2;+\infty)$.
Ⓓ $A \cup B=[5;+\infty)$.

Câu 101. Trong các tập hợp sau, tập nào là tập rỗng?

Ⓐ $Q=\{x \in \mathbb{R} \mid x^2-7=0\}$.
Ⓑ $M=\{x \in \mathbb{N} \mid x^2-3=0\}$.
Ⓒ $P=\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2-4x+3=0\}$.
Ⓓ $N=\{x \in \mathbb{Q} \mid 3x-4=0\}$.

Câu 102. Cho các tập hợp $A=\{x \in \mathbb{R} \mid x^2-7x+6=0\}$, $B=\{x \in \mathbb{N} \mid |x|<4\}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $A \cup B=A$.
Ⓑ $A \cap B=A \cup B$.
Ⓒ $A \setminus B \neq \emptyset$.
Ⓓ $B \setminus A=\emptyset$.

Câu 103. Cho hai tập hợp $A=[-3;3)$, $B=[0;5]$. Tập hợp $A\setminus B$ bằng

Ⓐ $[0;3)$. Ⓑ $[-3;5]$. Ⓒ $[3;5]$. Ⓓ $[-3;0)$.

Câu 104. Cho tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}\mid -2\le x<5\}$. Phần bù của A trong $\mathbb{R}$ là

Ⓐ $(-\infty;-2)\cup[5;+\infty)$. Ⓑ $(-\infty;-2]\cup(5;+\infty)$.
Ⓒ $(-\infty;-2]$. Ⓓ $[-2;5)$.

Câu 105. Cho mệnh đề: "$\forall x\in\mathbb{R}, x^2+3x+5>0$". Mệnh đề phủ định của mệnh đề trên là

Ⓐ $\forall x\in\mathbb{R}, x^2+3x+5\le 0$. Ⓑ $\exists x\in\mathbb{R}, x^2+3x+5\le 0$.
Ⓒ $\forall x\in\mathbb{R}, x^2+3x+5<0$. Ⓓ $\exists x\in\mathbb{R}, x^2+3x+5>0$.

Câu 106. Phủ định của mệnh đề: "$\forall n\in\mathbb{N}: n^2+1$ không chia hết cho 3" là:

Ⓐ "$\forall n\in\mathbb{N}: n^2+1$ chia hết cho 3".
Ⓑ "$\exists n\in\mathbb{N}: n^2+1$ không chia hết cho 3".
Ⓒ "$\exists n\in\mathbb{N}: n^2+1$ chia hết cho 3".
Ⓓ "$\nexists n\in\mathbb{N}: n^2+1$ không chia hết cho 3".

Câu 107. Phủ định của mệnh đề: "$\exists x\in\mathbb{R}: x^2+x+1$ là số dương" là:

Ⓐ "$\forall x\in\mathbb{R}: x^2+x+1$ là số không dương".
Ⓑ "$\forall x\in\mathbb{R}: x^2+x+1$ là số âm".
Ⓒ "$\forall x\in\mathbb{R}: x^2+x+1$ là số dương".
Ⓓ "$\nexists x\in\mathbb{R}: x^2+x+1$ là số dương".

Câu 108. Cho mệnh đề "Có một học sinh trong lớp C4 không chấp hành luật giao thông". Mệnh đề phủ định của mệnh đề này là

Ⓐ Không có học sinh nào trong lớp C4 chấp hành luật giao thông.
Ⓑ Mọi học sinh trong lớp C4 đều chấp hành luật giao thông.
Ⓒ Có một học sinh trong lớp C4 chấp hành luật giao thông.
Ⓓ Mọi học sinh trong lớp C4 không chấp hành luật giao thông.

Câu 109. Cho mệnh đề: "Có một học sinh trong lớp 10A không thích học môn Toán". Mệnh đề phủ định của mệnh đề này là:

Ⓐ "Mọi học sinh trong lớp 10A đều thích học môn Toán".
Ⓑ "Mọi học sinh trong lớp 10A đều không thích học môn Toán".
Ⓒ "Mọi học sinh trong lớp 10A đều thích học môn Văn".
Ⓓ "Có một học sinh trong lớp 10A thích học môn Toán".

Câu 110. Mệnh đề "Mọi động vật đều di chuyển" có mệnh đề phủ định là

Ⓐ Có ít nhất một động vật di chuyển.
Ⓑ Mọi động vật đều đứng yên.
Ⓒ Có ít nhất một động vật không di chuyển.
Ⓓ Mọi động vật đều không di chuyển.

Câu 111. Cho mệnh đề "$\forall x\in\mathbb{R}, x^2-x+7<0$". Hỏi mệnh đề nào là mệnh đề phủ định của mệnh đề trên?

Ⓐ $\exists x\in\mathbb{R}, x^2-x+7\ge 0$. Ⓑ $\forall x\in\mathbb{R}, x^2-x+7>0$.
Ⓒ $\forall x\in\mathbb{R}, x^2-x+7<0$. Ⓓ $\exists x\in\mathbb{R}, x^2-x+7<0$.

Câu 112. Cho mệnh đề: "$\exists x\in\mathbb{R}\mid 2x^2-3x-5<0$". Mệnh đề phủ định sẽ là

Ⓐ "$\forall x \in \mathbb{R}, 2x^2+3x-5 \geq 0$".
Ⓑ "$\forall x \in \mathbb{R}, 2x^2+3x-5 > 0$".
Ⓒ "$\exists x \in \mathbb{R}, 2x^2+3x-5 > 0$".
Ⓓ "$\exists x \in \mathbb{R}, 2x^2+3x-5 \geq 0$".

Câu 113. Mệnh đề phủ định của mệnh đề: $a < -\dfrac{2}{3}$ là

Ⓐ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2+x+5 \leq 0$.
Ⓑ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2+x+5 \leq 0$.
Ⓒ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2+x+5 < 0$.
Ⓓ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2+x+5 < 0$.

Câu 114. Mệnh đề phủ định của mệnh đề "Phương trình $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ vô nghiệm" là mệnh đề nào sau đây?

Ⓐ Phương trình $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ có nghiệm.
Ⓑ Phương trình $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ có 2 nghiệm phân biệt.
Ⓒ Phương trình $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ có nghiệm kép.
Ⓓ Phương trình $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ không có nghiệm.

Câu 115. Ký hiệu nào sau đây dùng để viết đúng mệnh đề: "3 là một số tự nhiên"?

Ⓐ $3 \subset \mathbb{N}$. Ⓑ $3 \in \mathbb{N}$. Ⓒ $3 < \mathbb{N}$. Ⓓ $3 \leq \mathbb{N}$.

Câu 116. Ký hiệu nào sau đây để chỉ $\sqrt{5}$ không phải là một số hữu tỉ?

Ⓐ $\sqrt{5} \neq \mathbb{Q}$. Ⓑ $\sqrt{5} \not\subset \mathbb{Q}$. Ⓒ $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$. Ⓓ $\sqrt{5} \subset \mathbb{Q}$.

Câu 117. Cho tập hợp $A = \{x+1 \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 5\}$. Tập hợp A là:

Ⓐ $A = \{1;2;3;4;5\}$.
Ⓑ $A = \{0;1;2;3;4;5;6\}$.
Ⓒ $A = \{0;1;2;3;4;5\}$.
Ⓓ $A = \{1;2;3;4;5;6\}$.

Câu 118. Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp $X = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x^2-3x+1=0\}$.

Ⓐ $X = \{0\}$.
Ⓑ $X = \{1\}$.
Ⓒ $X = \left\{1; \dfrac{1}{2}\right\}$.
Ⓓ $X = \left\{1; \dfrac{3}{2}\right\}$.

Câu 119. Liệt kê các phần tử của tập hợp $X = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2-5x+3=0\}$.

Ⓐ $X = \{0\}$.
Ⓑ $X = \{1\}$.
Ⓒ $X = \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.
Ⓓ $X = \left\{1; \dfrac{3}{2}\right\}$.

Câu 120. Trong các tập sau, tập nào là tập rỗng?

Ⓐ $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 1\}$.
Ⓑ $\{x \in \mathbb{Z} \mid 6x^2-7x+1=0\}$.
Ⓒ $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2-4x+2=0\}$.
Ⓓ $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2-4x+3=0\}$.

Câu 121. Cho tập hợp $M = \{(x;y) \mid x,y \in \mathbb{N}, x+y=1\}$. Hỏi tập M có bao nhiêu phần tử?

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Câu 122. Cho tập hợp $A = \{x^2+1 \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 5\}$. Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp A.

Ⓐ $A = \{0;1;2;3;4;5\}$.
Ⓑ $A = \{1;2;5;10;17;26\}$.
Ⓒ $A = \{2;5;10;17;26\}$.
Ⓓ $A = \{0;1;4;9;16;25\}$.

Câu 123. Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp: $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x^4-6x^2+8=0\}$.

Ⓐ $X = \{2;4\}$.
Ⓑ $X = \{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$.
Ⓒ $X = \{\sqrt{2};2\}$.
Ⓓ $X = \{-\sqrt{2};\sqrt{2};-2;2\}$.

Câu 124. Cho tập hợp $M = \{(x;y) \mid x,y \in \mathbb{R}, x^2+y^2 \leq 0\}$. Khi đó tập hợp M có bao nhiêu

phần tử?

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ Vô số.

Câu 125. Số phần tử của tập hợp: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2+x)^2 = x^2 - 2x + 1\}$ là:

Ⓐ 0. Ⓑ 3. Ⓒ 1. Ⓓ 2.

Câu 126. Số tập con của tập hợp: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3(x^2+x)^2 - 2x^2 - 2x = 0\}$ là:

Ⓐ 16. Ⓑ 8. Ⓒ 12. Ⓓ 10.

Câu 127. Số phần tử của tập hợp: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (2x^2+x-4)^2 = 4x^2 - 4x + 1\}$ là:

Ⓐ 0. Ⓑ 2. Ⓒ 4. Ⓓ 3.

Câu 128. Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 = 0\}$:

Ⓐ $X = 0$. Ⓑ $X = \{0\}$. Ⓒ $X = \emptyset$. Ⓓ $X = \{\emptyset\}$.

Câu 129. Số phần tử của tập hợp $A = \{k^2 + 1 \mid k \in \mathbb{Z}, |k| \le 2\}$ là:

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 5.

Câu 130. Trong các tập hợp sau, tập hợp nào là tập hợp rỗng:

Ⓐ $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 1\}$. Ⓑ $\{x \in \mathbb{Z} \mid 6x^2 - 7x + 1 = 0\}$.
Ⓒ $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 4x + 2 = 0\}$. Ⓓ $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 3 = 0\}$.

Câu 131. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2-1)(x^2+2) = 0\}$. Các phần tử của tập A là:

Ⓐ $A = \{-1; 1\}$. Ⓑ $A = \{-\sqrt{2}; -1; 1; \sqrt{2}\}$.
Ⓒ $A = \{-1\}$. Ⓓ $A = \{1\}$.

Câu 132. Cho ba tập hợp E, F, G thỏa mãn: $E \subset F, F \subset G$ và $G \subset K$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $G \subset F$. Ⓑ $K \subset G$. Ⓒ $E = F = G$. Ⓓ $E \subset K$.

Câu 133. Cho tập hợp $A = \{0; 3; 4; 6\}$. Số tập hợp con gồm hai phần tử của A là:

Ⓐ 12. Ⓑ 8. Ⓒ 10. Ⓓ 6.

Câu 134. Cho tập hợp $X = \{a; b; c\}$. Số tập con của X là

Ⓐ 4. Ⓑ 6. Ⓒ 8. Ⓓ 12.

Câu 135. Cho tập hợp $A = \{1; 2; 5; 7\}$ và $B = \{1; 2; 3\}$. Có tất cả bao nhiêu tập X thỏa mãn: $X \subset A$ và $X \subset B$?

Ⓐ 2. Ⓑ 4. Ⓒ 6. Ⓓ 8.

Câu 136. Cho tập hợp $A = \{1; 3\}, B = \{3; x\}, C = \{x; y; 3\}$. Để $A = B = C$ thì tất cả các cặp $(x; y)$ là:

Ⓐ $(1; 1)$. Ⓑ $(1; 1)$ và $(1; 3)$.
Ⓒ $(1; 3)$. Ⓓ $(3; 1)$ và $(3; 3)$.

Câu 137. Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4\}, B = \{0; 2; 4\}, C = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Quan hệ nào sau đây là đúng?

Ⓐ $B \subset A \subset C$. Ⓑ $B \subset A = C$. Ⓒ $\begin{cases} A \subset C \\ B \subset C \end{cases}$. Ⓓ $A \cup B = C$.

Câu 138. Cho hai tập hợp A và B khác rỗng thỏa mãn: $A \subset B$. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai?

Ⓐ $A \setminus B = \emptyset$. Ⓑ $A \cap B = A$. Ⓒ $B \setminus A = B$. Ⓓ $A \cup B = B$.

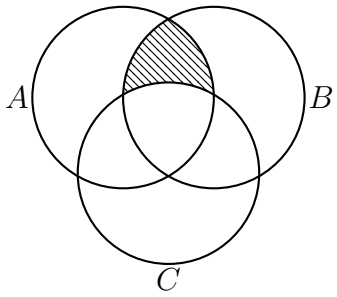
Câu 139. Cho ba tập hợp: $F = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}, G = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}, H = \{x \in \mathbb{R} \mid |f(x)| + |g(x)| = 0\}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

Ⓐ $H = F \cap G$. Ⓑ $H = F \cup G$. Ⓒ $H = F \setminus G$. Ⓓ $H = G \setminus F$.

Câu 140. Cho tập hợp $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{2x}{x^2+1} \geq 1\right\}$; B là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của b để phương trình $x^2 - 2bx + 4 = 0$ vô nghiệm. Số phần tử chung của hai tập hợp trên là:

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ Vô số.

Câu 141. Cho A, B, C là ba tập hợp được minh họa bằng biểu đồ Ven như hình vẽ. Phần gạch sọc trong hình vẽ là tập hợp nào sau đây?



Ⓐ $(A \cup B) \setminus C$. Ⓑ $(A \cap B) \setminus C$.
Ⓒ $(A \setminus C) \cup (A \setminus B)$. Ⓓ $(A \cap B) \cup C$.

Câu 142. Cho hai tập hợp $A = \{0; 2\}$ và $B = \{0; 1; 2; 3; 4\}$. Số tập hợp X thỏa mãn $A \cup X = B$ là:

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 4. Ⓓ 5.

Câu 143. Cho hai tập hợp $A = \{0; 1\}$ và $B = \{0; 1; 2; 3; 4\}$. Số tập hợp X thỏa mãn $X \subset C_B A$ là:

Ⓐ 3. Ⓑ 5. Ⓒ 6. Ⓓ 8.

BẢNG ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á
1	D	2	A	3	A	4	B	5	D
6	A	7	C	8	C	9	D	10	D
11	C	12	A	13	A	14	B	15	A
16	A	17	B	18	A	19	D	20	B
21	D	22	D	23	C	24	C	25	D
26	C	27	D	28	D	29	D	30	B
31	D	32	B	33	C	34	B	35	D
36	A	37	C	38	C	39	C	40	B
41	D	42	D	43	A	44	A	45	B
46	A	47	C	48	C	49	A	50	B
51	B	52	C	53	A	54	C	55	A
56	A	57	D	58	D	59	A	60	C
61	D	62	A	63	A	64	A	65	D
66	A	67	A	68	A	69	C	70	C
71	C	72	A	73	D	74	C	75	D
76	C	77	A	78	B	79	D	80	C
81	D	82	B	83	D	84	B	85	A
86	D	87	B	88	A	89	B	90	B
91	B	92	D	93	A	94	C	95	D
96	B	97	A	98	C	99	A	100	C
101	B	102	C	103	D	104	A	105	B
106	C	107	A	108	B	109	A	110	C
111	A	112	A	113	A	114	A	115	B
116	C	117	D	118	B	119	D	120	A
121	C	122	B	123	D	124	B	125	D
126	A	127	C	128	C	129	C	130	C
131	A	132	D	133	D	134	C	135	B
136	B	137	C	138	C	139	A	140	A
141	B	142	C	143	D				

II. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Bài 1. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Nếu $IA = IB$ thì I là trung điểm của AB.

b) Nếu a chia hết cho 9 thì a chia hết cho 3.

c) Nếu $|x| > 2$ thì $x > 2$.

d) Nếu m, n là 2 số nguyên dương và $m^2 + n^2$ chia hết cho 3 thì m, n cùng chia hết cho 3.

Bài 2. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\exists r \in \mathbb{Q}, 4r^2 - 1 = 0$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ không chia hết cho 11.

c) $\exists n \in \mathbb{Z}, n^2 + n + 1$ là một số chẵn.

d) $\forall x \in \mathbb{Z}, \dfrac{2x^3 - 6x^2 + x - 3}{2x^2 + 1} \in \mathbb{Z}$.

Bài 3. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\pi < \dfrac{10}{3}$.

b) Phương trình $3x + 7 = 0$ có nghiệm thực.

c) Không có số nào cộng với chính nó bằng 0.

d) 2022 là hợp số.

Bài 4. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\sqrt{3} + \sqrt{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$.

b) $(\sqrt{2} - \sqrt{18})^2 > 8$.

c) $(\sqrt{3} + \sqrt{12})^2$ là một số hữu tỷ.

d) $x = 2$ là một nghiệm của phương trình $\dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = 0$.

Bài 5. Cho hai tập hợp $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$, $B = \{3; 4; 5; 6\}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $A \cup B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

b) $A \cap B = \{5; 6\}$.

c) $B \setminus A = \{0; 1; 2\}$.

d) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Bài 6. Cho các tập hợp $A = [-3; 1)$, $B = [0; 5)$, $C = [a; a + 3]$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $A \cup B = [0; 1)$.

b) $A \cap B = [-3; 5)$.

c) $B \setminus A = [1; 5)$.

d) $A \cap C = \emptyset \Leftrightarrow -6 \leq a < 1$.

Bài 7. Cho ba tập hợp $A = \left(1; \dfrac{11}{2}\right)$; $B = [-2; 3]$ và $C = \left(\dfrac{m-1}{3}; +\infty\right)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Giao của hai tập hợp A và B là $(1; 3]$.

b) Tập hợp $B \cap \mathbb{N}$ gồm 6 phần tử.

c) Tập hợp $\mathbb{R} \setminus A = (-\infty; 1] \cup \left[\dfrac{11}{2}; +\infty\right)$.

d) Tổng các giá trị nguyên của m để $B \cap C$ có đúng 3 phần tử là số nguyên bằng 6.

Bài 8. Lớp $10A$ có 26 học sinh biết chơi đá bóng, 22 học sinh biết chơi cầu lông, 5 học sinh biết chơi cả hai môn đá bóng và cầu lông, 8 học sinh không biết chơi môn nào. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Số học sinh chỉ biết chơi cầu lông mà không biết chơi đá bóng là 17.

b) Số học sinh chỉ biết chơi đá bóng mà không biết chơi cầu lông là 20.

c) Số học sinh biết chơi ít nhất một trong hai môn đá bóng hoặc cầu lông là 43.

d) Sĩ số lớp $10A$ là 61.

Bài 9. Cho hai tập hợp $A = [1; 4]$ và $B = (2; +\infty)$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

a) $A \cap B = (2; 4]$.

b) $A \cup B = [1; +\infty)$.

c) $A \setminus B = [1; 2]$.

d) $B \setminus A = (4; +\infty)$.

Bài 10. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 3\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$.

Bài 11. Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$: "$x^2 > 0$".

a) $P(1)$ là mệnh đề đúng.

b) $P(0)$ là mệnh đề sai.

c) Mệnh đề: "$\forall x \in \mathbb{R} : P(x)$" là mệnh đề đúng.

d) Mệnh đề: "$\exists x \in \mathbb{R} : P(x)$" là mệnh đề đúng.

Bài 12. Gọi A là tập hợp các hình vuông, B là tập hợp các hình thoi, C là tập hợp các hình chữ nhật, D là tập hợp các hình bình hành.

a) $A \subset C$.

b) $A \subset D$.

c) $D \subset C$.

d) $B \cap C = A$.

Bài 13. Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$: "$\dfrac{x^2-1}{x-1} = x + 1$".

a) $P(1)$ là mệnh đề sai.

b) $\overline{P(x)}$: "$\dfrac{x^2-1}{x-1} \neq x + 1$".

c) Mệnh đề: "$\forall x \in \mathbb{R} : P(x)$" là mệnh đề đúng.

d) Mệnh đề: "$\exists x \in \mathbb{R} : P(x)$" là mệnh đề đúng.

Bài 14. Cho tập hợp $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^3 - 4x = 0\}$.

a) $1 \in M$.

b) $0 \in M$.

c) Tập hợp M có 3 phần tử.

d) Tập hợp M có 8 tập con.

Bài 15. Cho hai tập hợp $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x^4 - 5x^2 + 4 = 0\}$ và $N = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 1\}$.

a) $M = \{-1; 1; 2; -2\}$.

b) $N = \{0; 1\}$.

c) $M \cap N = \{1\}$.

d) $N \setminus M = \{-1; 0\}$.

Bài 16. Một số nguyên dương n được gọi là **"số hoàn hảo"** nếu số đó bằng tổng các ước nguyên dương thực sự của nó. Ví dụ số 6 là một số hoàn hảo vì các ước nguyên dương thực sự của 6 là $1; 2; 3$ và $6 = 1 + 2 + 3$.

a) Không có số hoàn hảo nào nhỏ hơn 10.

b) Số 10 là một số không hoàn hảo.

c) Tất cả các số nguyên tố đều là các số không hoàn hảo.

d) Số 2020 không phải là một số hoàn hảo.

Bài 17. Cho các mệnh đề: P : "$\exists x \in \mathbb{R} : x > x^2$" và Q : "$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$". Khi đó:

a) P là mệnh đề đúng.

b) $\overline{Q}$ là mệnh đề sai.

c) $P \Rightarrow Q$ là mệnh đề đúng.

d) $(\overline{P} \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow \overline{Q})$ là mệnh đề đúng.

Bài 18. Cho các phát biểu sau: $x \in \mathbb{Z}, 2x < 3\,(1)$; $x \in \mathbb{Z}, x^4 - x^2 < 0\,(2)$. Khi đó:

a) (1) là 1 mệnh đề chứa biến.

b) Khi $x = 1$ thì (1) trở thành mệnh đề đúng.

c) Khi $x = -2$ thì (2) trở thành mệnh đề đúng.

d) Không có số nguyên x nào để cả (1) và (2) trở thành các mệnh đề đúng.

Bài 19. Cho $P(n) = n^2 - 6n + 10$ với n là số tự nhiên. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $P(1)$ chia hết cho 3.

b) $P(2)$ là số lẻ.

c) $P(2n) > P(n) - 1$ với $n = 1$.

d) Tồn tại số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện $\frac{2P(n)-1}{n-3}$ là số nguyên.

Bài 20. Cho hai tập hợp $A = \{n \in \mathbb{N}/(n^2-2n-3)(n^2-1) = 0\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R}/2x^2-x+3 = 0\}$.

a) Tập hợp A có 3 phần tử.

b) Số tập hợp con của tập hợp A là 4 tập hợp.

c) Tập hợp B là tập hợp rỗng.

d) Tổng các phần tử của tập hợp A và tập hợp B là 3.

Bài 21. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 4\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x - 1 < 5\}$.

a) $B \setminus A = [-4; 4]$.

b) $A \cap B = (4; 6)$.

c) $\mathbb{R} \setminus (A \cap B) = (-\infty; 4) \cup [6; +\infty)$.

d) $\mathbb{R} \setminus (A \cup B) = \varnothing$.

Bài 22. Cho ba tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N} \mid (2x + 1)(x^2 - 7x + 10) = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 5\}$ và $C = \{2; m; 5\}$

a) Tập hợp A có hai tập hợp con khác rỗng.

b) $A \subset B$.

c) $\{3; 4; 5\} \subset B$.

d) Không có giá trị nào của m để $A = C$.

Bài 23. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{N}, 2x^2 - 3x + 1 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}^*, x < 3\}$, $X = \{x \in \mathbb{Z}, |x| < 3\}$ và $Y = \{y \in \mathbb{R}, (y^2 - 1)(y^2 - 4) = 0\}$. Ta có

a) $A \subset B$.

b) $B \subset X$.

c) Tập B có tất cả 8 tập con.

d) $X = Y$.

Bài 24. Cho $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \vdots 2\}, B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \vdots 4\}, C = \{n \in \mathbb{N} \mid n \vdots 5\}$.

a) $A \cap B = A$.

b) $C \setminus A = \{10k + 5 \mid k \in \mathbb{N}\}$.

c) $B \cap C = \{n \in \mathbb{N} \mid n \vdots 20\}$.

d) Tập hợp $A \cup C$ có 60 phần tử nhỏ hơn 100.

Bài 25. Lớp $10B$ có 7 học sinh giỏi Toán, 5 học sinh giỏi Lý, 6 học sinh giỏi Hóa, 3 học sinh giỏi cả Toán và Lý, 4 học sinh giỏi cả Toán và Hóa, 2 học sinh giỏi cả Lý và Hóa, 1 học sinh giỏi cả ba môn Toán, Lý, Hóa và không có học sinh nào không giỏi một trong ba môn Toán, Lý, Hóa.

a) Lớp $10B$ không có học sinh giỏi Toán.

b) Lớp $10B$ không có học sinh giỏi cả ba môn Toán, Lý, Hóa.

c) Số học sinh giỏi Toán và Lý hoặc giỏi Toán và Hóa của lớp $10B$ không bằng 7.

d) Số học sinh giỏi ít nhất một môn trong ba môn Toán, Lý, Hóa của lớp $10B$ không lớn hơn 10.

Bài 26. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) A : "$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y = 1$".

b) B : "$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 2$".

c) C : "$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y = xy$".

d) D : "$\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} : a = 3b$".

Bài 27. Xét tính đúng, sai của các câu sau:

a) P : "3 là số chính phương" có mệnh đề phủ định là $\overline{P}$: "3 không là số chính phương".

b) Q : "Tam giác ABC là tam giác cân" có mệnh đề phủ định là $\overline{Q}$: "Tam giác ABC không là tam giác vuông".

c) R : "$2^{2003} - 1$ là số nguyên tố" có mệnh đề phủ định là $\overline{R}$: "$2^{2003} - 1$ không là số nguyên tố".

d) H : "$\sqrt{2}$ là số vô tỉ" có mệnh đề phủ định là $\overline{H}$: "$\sqrt{2}$ là số hữu tỉ".

Bài 28. Cho các tập hợp sau $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - x - 6 = 0\}$; $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^4 - 11x^2 + 18 = 0\}$; $C = \{x \in \mathbb{N} \mid (x^2 - 3x - 10)(5x^3 - 6x^2 + x) = 0\}$; $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < 3x + 7 \leq 10\}$. Khi đó:

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Tập hợp A có 2 phần tử		
(b)	Tập hợp B có 3 phần tử		
(c)	Tập hợp C có 2 phần tử		
(d)	Tập hợp D có 4 phần tử		

Bài 29. Lớp 10C6 có 18 học sinh tham gia câu lạc bộ bóng đá và 15 học sinh tham gia câu lạc bộ bóng rổ. Biết rằng có 10 học sinh tham gia cả hai câu lạc bộ trên. Khi đó:

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Có 8 học sinh tham gia câu lạc bộ bóng đá và không tham gia câu lạc bộ bóng rổ?		
(b)	Có 23 học sinh tham gia ít nhất một trong hai câu lạc bộ trên?		
(c)	Biết lớp 10C6 có 45 học sinh. Có 25 học sinh không tham gia câu lạc bộ bóng đá?		
(d)	Biết lớp 10C6 có 45 học sinh. Có 24 học sinh không tham gia cả hai câu lạc bộ?		

Bài 30. Cho hai mệnh đề P: "ABC là tam giác đều" và mệnh đề Q: "ABC là tam giác cân". Xét mệnh đề kéo theo "Nếu P thì Q". Các câu sau là đúng hay sai?

a) P là điều kiện đủ để có Q.

b) Q là điều kiện cần để có P.

c) Mệnh đề "Nếu P thì Q" là mệnh đề đúng.

d) Mệnh đề "Nếu Q thì P" là mệnh đề đúng.

Bài 31. Cho hai mệnh đề P: "Tứ giác $ABCD$ là hình vuông" và Q: "Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau". Các câu sau là đúng hay sai?

a) Mệnh đề đảo của mệnh đề "$P \Rightarrow Q$" là mệnh đề "Nếu $ABCD$ là hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau thì tứ giác $ABCD$ là hình vuông".

b) Hai mệnh đề P và Q không tương đương với nhau.

c) Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ là mệnh đề sai.

d) P là điều kiện cần và đủ để có Q.

Bài 32. Cho hai mệnh đề sau:

P: "Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật".

Q: "Số 7 là hợp số".

a) Mệnh đề P là mệnh đề đúng.

b) Mệnh đề Q là mệnh đề đúng.

c) Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là mệnh đề đúng.

d) Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ là mệnh đề sai.

Bài 33. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

a) $\forall n \in \mathbb{N}, n^2$ chia hết cho $7 \Rightarrow n$ chia hết cho 7.

b) $\forall n \in \mathbb{N}, n^2$ chia hết cho $5 \Rightarrow n$ chia hết cho 5.

c) Nếu tam giác ABC không phải là tam giác đều thì tam giác đó có ít nhất một góc nhỏ hơn $60°$.

d) Tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn $\Rightarrow$ Tổng của $\hat{A}$ và $\hat{C}$ bằng $180°$.

Bài 34. Xét tính đúng, sai của mỗi mệnh đề sau.

a) $\exists x \in \mathbb{Q}, 4x^2 - 1 = 0$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}, n$ và $n + 2$ là các số nguyên tố.

c) $\forall x \in \mathbb{R}, (x - 1)^2 \neq x - 1$.

d) $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 > n$.

Bài 35. Xét tính đúng (sai) của các mệnh đề sau

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 - x^2 + 1 > 0$.

b) $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + 3$ chia hết cho 4.

c) P: "$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y = 1$".

d) Q: "$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 2$".

Bài 36. Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$: "$x > \dfrac{1}{x}$", xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $P(1)$.

b) $P\left(-\dfrac{1}{3}\right)$.

c) $\forall x \in \mathbb{N}, P(x)$.

d) $\exists x \in \mathbb{N}, P(x)$.

Bài 37. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) A : "$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y = 1$".

b) B : "$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 2$".

c) C : "$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y = xy$".

d) D : "$\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} : a = 3b$".

Bài 38. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 5\}$, $C = [3; +\infty)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $A \cap B = (-3; 3]$.

b) $A \cup B = (-\infty; 5]$.

c) $A \cap C = \varnothing$.

d) $B \cup C = (-3; +\infty)$.

Bài 39. Cho A là tập hợp các học sinh lớp 10 đang học ở trường em và B là tập hợp các học sinh đang học môn Tiếng Anh của trường em. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $A \cap B$ là tập hợp các học sinh lớp 10 học môn Tiếng Anh ở trường em.

b) $A \setminus B$ là tập hợp những học sinh lớp 10 nhưng không học Tiếng Anh ở trường em.

c) $A \cup B$ là tập hợp các học sinh lớp 10 hoặc học sinh học môn Tiếng Anh ở trường em.

d) $B \setminus A$ là tập hợp các học sinh học môn Tiếng Anh nhưng không học lớp 10 ở trường em.

Bài 40. Lớp 10A có tất cả 40 học sinh trong đó có 13 học sinh chỉ thích đá bóng, 18 học sinh chỉ thích chơi cầu lông và số học sinh còn lại thích chơi cả hai môn thể thao nói trên. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Có 9 học sinh thích chơi cả hai môn cầu lông và bóng đá.

b) Có 22 học sinh thích bóng đá?

c) Có 26 học sinh thích cầu lông?

d) Có 27 học sinh thích chơi cả hai môn cầu lông và bóng đá

Bài 41. Cho các tập hợp sau $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (2x - x^2)(2x^2 - 3x - 2) = 0\}$ và $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 3 < n^2 < 30\}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập hợp A có 3 phần tử.

b) Tập hợp B có 4 phần tử.

c) Tập hợp $A \cap B$ có 1 phần tử.

d) Tập hợp $A \cup B$ có 5 phần tử.

Bài 42. Cho các tập hợp sau: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 + 7x + 6)(x^2 - 4) = 0\}; B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x \leq 8\}; C = \{2x + 1 \mid x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x \leq 4\}$.

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập hợp A có 3 phần tử.

b) $A \cup B = \{-6; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$

c) $A \cap B = \{2\}$

d) $A \cup C = \{-6; -3; -2; 2; 3; 5; 7; 9\}$

Bài 43. Cho hai tập hợp $A = (-1; +\infty)$, $B = (-\infty; -1]$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $A \setminus B = (-1; +\infty)$.

b) $B \setminus A = (-\infty; -1]$.

c) $C_{\mathbb{R}}A = (-\infty; -1)$.

d) $C_{\mathbb{R}}B = (-1; +\infty)$.

Bài 44. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 3\}$, $B = [-2; 2]$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $A \setminus B = \varnothing$.

b) $B \setminus A = \varnothing$.

c) $C_{\mathbb{R}}A = (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.

d) $(C_{\mathbb{R}}B) \cap A = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Bài 45. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 5\}$, $C = [3; +\infty)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $A \cap B = (-3; 3]$.

b) $A \cup B = (-\infty; 5]$.

c) $A \cap C = \varnothing$.

d) $B \cup C = (-3; +\infty)$.

Bài 46. Cho hai tập hợp $A = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$, $B = \{-2; 0; 2; 4\}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $A \cap B = \{-2; 0; 2\}$.

b) $A \cup B = \{-2; -1; 1; 2; 4\}$.

c) $A \setminus B = \{-1; 1\}$.

d) $B \setminus A = \{4\}$.

Bài 47. Cho hai tập hợp $A = (-3; 5]$ và $B = (2; +\infty)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $A \cap B = (1; 5]$.

b) $A \cup B = (-3; +\infty)$.

c) $A \setminus B = (-2; 2]$.

d) $C_{\mathbb{R}}A = (-\infty; -3] \cup (5; +\infty)$.

Bài 48. Cho đoạn $A = [-5; 1]$ và $B = (-3; 2)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $A \cup B = [-3; 2)$.

b) $A \cap B = (-3; 2]$.

c) $A \setminus B = [-5; -3]$.

d) $C_{\mathbb{R}}(A \cup B) = (-\infty; -5) \cup [1; +\infty)$.

Bài 49. Lớp $10A$ có 35 học sinh thi học sinh giỏi. Mỗi học sinh thi ít nhất một môn trong ba môn Toán, Lý và Hóa. Biết có 12 học sinh chỉ thi môn Toán, có 14 học sinh thi môn Lý, có 15 học sinh thi môn Hóa và có 3 thí sinh chỉ thi môn Lý và môn Hóa. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Có 9 học sinh chỉ thi môn Lý mà không thi môn Hóa

b) Có 23 học sinh chỉ thi môn Hóa mà không thi môn Lý

c) Số học sinh chỉ thi môn Lý hoặc thi môn Hóa là 8 học sinh

d) Có 3 học sinh đi thi cả ba môn Toán, Lý và Hóa

Bài 50. Các em học sinh lớp $10A$ làm bài thi khảo sát học sinh giỏi môn Toán. Đề thi có 3 câu. Sau khi chấm bài giáo viên tổng kết được như sau: Có 6 học sinh làm được câu 1, có 5 học sinh làm được câu 2, có 4 học sinh làm được câu 3. Có 2 học sinh làm được câu 1 và câu 2, có 2 học sinh làm được câu 1 và câu 3, có 1 học sinh làm được câu 2 và câu 3 và chỉ có 1 học sinh làm được cả 3 câu. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Có duy nhất một học sinh chỉ làm được câu 1

b) Không có học sinh nào chỉ làm được câu 2 và câu 3

c) Có 2 học sinh chỉ làm được câu 3

d) Có tất cả 8 học sinh chỉ làm được đúng một câu

Bài 51. Trong đợt quyên góp ủng hộ đồng bào bị lũ lụt năm 2020, có 25 học sinh lớp $12A$ đã tham gia ủng hộ, mỗi học sinh ủng hộ nhiều nhất 2 tờ tiền khác nhau trong ba loại tờ tiền mệnh giá 5.000 đồng, 10.000 đồng và 20.000 đồng. Biết rằng số học sinh đã tham gia ủng hộ thỏa đồng thời ba kết quả sau:

- Số học sinh chỉ ủng hộ một tờ 5.000 đồng bằng tổng số học sinh chỉ ủng hộ một tờ 10.000 đồng và số học sinh chỉ ủng hộ một tờ 20.000 đồng.
- Trong số học sinh **không** ủng hộ tờ 5.000 đồng thì số học sinh có ủng hộ tờ 10.000 đồng nhiều gấp hai lần số học sinh có ủng hộ tờ 20.000 đồng.
- Số học sinh chỉ ủng hộ một tờ 5.000 đồng nhiều hơn số học sinh ủng hộ tờ 5.000 đồng và một tờ khác là 1 học sinh.

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Có 2 học sinh ủng hộ một tờ 10.000 đồng và một tờ 20.000 đồng

b) Có 8 học sinh chỉ ủng hộ một tờ 5000 đồng

c) Nếu gọi số học sinh ủng hộ một tờ 5.000 đồng và một tờ 10.000 đồng là: a và số học sinh ủng hộ một tờ 20.000 đồng và một tờ 5.000 đồng là c thì $a + c = 9$.

d) Có 6 học sinh lớp $12A$ chỉ ủng hộ một tờ 10.000 đồng

BẢNG ĐÁP ÁN ĐÚNG - SAI

Câu	a	b	c	d	Câu	a	b	c	d	Câu	a	b	c	d
1	S	Đ	S	Đ	18	Đ	Đ	S	Đ	35	S	Đ	S	Đ
2	Đ	S	S	Đ	19	S	S	Đ	Đ	36	S	S	S	Đ
3	Đ	Đ	S	Đ	20	Đ	S	Đ	S	37	S	Đ	Đ	Đ
4	Đ	S	Đ	S	21	Đ	Đ	Đ	Đ	38	Đ	Đ	S	Đ
5	Đ	S	S	Đ	22	S	S	Đ	Đ	39	Đ	Đ	Đ	Đ
6	S	S	Đ	S	23	Đ	Đ	Đ	S	40	Đ	S	S	S
7	Đ	Đ	Đ	S	24	S	Đ	Đ	S	41	S	Đ	Đ	Đ
8	Đ	S	Đ	S	25	S	S	Đ	S	42	S	Đ	Đ	Đ
9	Đ	Đ	S	Đ	26	S	Đ	Đ	Đ	43	Đ	Đ	S	Đ
11	Đ	Đ	S	Đ	27	Đ	S	Đ	Đ	44	S	Đ	Đ	S
12	Đ	Đ	S	Đ	28	Đ	S	Đ	Đ	45	Đ	Đ	S	Đ
13	Đ	Đ	S	Đ	29	Đ	Đ	Đ	S	46	Đ	S	Đ	Đ
14	S	Đ	Đ	Đ	30	Đ	Đ	Đ	S	47	S	Đ	S	Đ
15	S	S	S	Đ	31	Đ	S	S	Đ	48	S	S	Đ	Đ
16	S	Đ	Đ	Đ	32	Đ	S	S	Đ	49	S	S	S	Đ
17	Đ	S	Đ	Đ	33	Đ	Đ	Đ	S	50	S	Đ	Đ	Đ
10	-	-	-	-	34	Đ	S	S	S	51	Đ	Đ	S	Đ

III. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Bài 1. Cho các tập hợp $A=(-\infty;-2]$, $B=[3;+\infty)$, $C=(0;4)$. Có bao nhiêu số nguyên thuộc tập hợp $(A\cup B)\cap C$?

Bài 2. Cho tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}:(2x-11)(x^2+3)\leq 0\}$. Số phần tử của $A\cap\mathbb{N}$ bằng bao nhiêu?

Bài 3. Trong kì thi học sinh giỏi cấp trường, lớp 10C có 17 bạn được công nhận học sinh giỏi Văn, 25 bạn học sinh giỏi Toán. Tìm số học sinh giỏi cả Văn và Toán biết lớp đó có 45 học sinh và có 13 học sinh không đạt học sinh giỏi.

Bài 4. Trong một hội nghị có 100 đại biểu tham dự. Mỗi đại biểu có thể sử dụng ít nhất một trong ba thứ tiếng: Nga, Trung Quốc và Anh. Biết rằng có 30 đại biểu chỉ nói được tiếng Anh, 40 đại biểu nói được tiếng Nga, 45 đại biểu nói được tiếng Trung Quốc và 10 đại biểu chỉ nói được hai thứ tiếng Nga và Trung Quốc. Hỏi có bao nhiêu đại biểu nói được cả ba thứ tiếng?

Bài 5. Biết tập hợp các giá trị của tham số thực m để trong tập hợp $A=(m-1;m]\cap(3;5)$ có đúng một số tự nhiên là $[a;b)$. Tính $a+b$.

Bài 6. Trong một khoảng thời gian nhất định, tại một địa phương, Đài khí tượng thủy văn đã thống kê được: Số ngày mưa: 10 ngày; số ngày có gió: 8 ngày; số ngày lạnh: 6 ngày; số ngày mưa và gió: 5 ngày; số ngày mưa và lạnh: 4 ngày; số ngày lạnh và có gió: 3 ngày; số ngày mưa, lạnh và có gió: 1 ngày. Vậy có bao nhiêu ngày thời tiết xấu (có gió, mưa hay lạnh)?

Bài 7. Cho hai tập hợp $A=(0;5]$ và $B=\{-2;1;3;6\}$. Số phần tử của $(A\cup B)\cap\mathbb{Z}$ bằng bao nhiêu?

Bài 8. Cho tập $A=\{x\in\mathbb{N}|(x^2-3x+2)(x+3)=0\}$ và $B=\{0;1;2;3;4;5\}$. Có bao nhiêu tập X thỏa mãn $A\cup X=B$?

Bài 9. Trong đợt hội diễn văn nghệ chào mừng 20/11, lớp 10A đăng kí 3 tiết mục là hát tố ca, múa và diễn kịch. Trong danh sách đăng kí, có 7 học sinh đăng kí tiết mục hát tố ca, 6 học sinh đăng kí tiết mục múa, 8 học sinh đăng kí diễn kịch, trong đó có 3 học sinh đăng kí cả tiết mục hát tố ca và tiết mục múa, 4 học sinh đăng kí cả tiết mục hát tố ca và diễn kịch, 2 học sinh đăng kí cả tiết mục múa và diễn kịch, 1 học sinh đăng kí cả 3 tiết mục. Hỏi lớp 10A có tất cả bao nhiêu học sinh đăng kí tham gia hội diễn văn nghệ?

Bài 10. Ngày 18/12/2021, một số trung tâm y tế được phân phát vacxin tiêm phòng Covid-19. Có 3 loại vacxin: Vero cell, AstraZeneca, và Pfizer. Trong 140 trung tâm y tế, có 7 trung tâm được phân phát cả 3 loại, 34 trung tâm được phát Vero Cell và AstraZeneca, 22 trung tâm được phát Vero Cell và Pfizer, 19 trung tâm được phát AstraZeneca và Pfizer, 76 trung tâm được phát Vero Cell, 62 trung tâm được phát AstraZeneca và 46 trung tâm được phát Pfizer. Có bao nhiêu trung tâm y tế không được nhận bất kỳ loại vacxin nào?

Bài 11. Cho tập hợp $A=\{x;y;z\}$ và $B=\{x;y;z;t;u\}$. Có bao nhiêu tập X thỏa mãn $A\subset X\subset B$?

Bài 12. Có tất cả bao nhiêu tập X thỏa mãn $\{1;2\}\subset X\subset\{1;2;3;4;5\}$?

Bài 13. Câu 5: Cho tập hợp $A=\{x;y;z\}$ và $B=\{x;y;z;t;u\}$. Có bao nhiêu tập X thỏa mãn $A\subset X\subset B$?

Bài 14. Lớp 10A có 10 học sinh giỏi Toán, 10 học sinh giỏi Lý, 11 học sinh giỏi hóa, 6 học sinh

giỏi cả Toán và Lý, 5 học sinh giỏi cả Hóa và Lý, 4 học sinh giỏi cả Toán và Hóa, 3 học sinh giỏi cả ba môn Toán, Lý, Hóa. Tính học sinh giỏi ít nhất một trong ba môn (Toán, Lý, Hóa) của lớp 10A?

Bài 15. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x^2 - 6x + 5).(x - m) = 0\}$. Tìm m để tổng tất cả các phần tử của tập A bằng 6.

Bài 16. Lớp 10E có 30 học sinh giỏi ít nhất một môn Toán, Văn, Anh, trong đó có 6 học sinh giỏi cả Toán và Văn, 5 học sinh giỏi cả Văn và Anh, 4 học sinh giỏi cả Toán và Anh, 3 học sinh giỏi cả ba môn Toán, Văn, Anh. Tính số học sinh chỉ giỏi đúng một môn Toán hoặc Văn hoặc Anh của lớp 10E.

Bài 17. Cho hai tập hợp $A = [-4; 1], B = (-3; m] \neq \varnothing$. Tìm m để $A \cup B = A$.

Bài 18. Trong số 40 học sinh của lớp 10A, có 20 học sinh thích môn Toán, 16 học sinh thích môn Tiếng Anh và 13 học sinh thích cả hai môn này. Tính tổng số học sinh thích cả hai môn và số học sinh không thích cả hai môn Toán, Anh?

Bài 19. Trong 100 học sinh khối lớp 10 có 70 học sinh biết đá bóng, 45 học sinh biết đánh bóng chuyền và 23 học sinh chơi được cả hai môn. Hỏi có bao nhiêu học sinh không biết chơi môn nào trong hai môn trên?

Bài 20. Có 7 vận động viên TDTT đều được đăng kí ít nhất một môn bóng bàn, cầu lông. Kết quả có 4 vận động viên đăng kí bóng bàn, 5 vận động viên đăng kí cầu lông. Hỏi có bao nhiêu vận động viên chỉ đăng kí môn cầu lông?

Bài 21. Bạn A Súa thống kê số ngày có mưa, có sương mù ở bản mình trong tháng 3 vào một thời điểm nhất định và được kết quả như sau: 14 ngày có mưa, 15 ngày có sương mù, trong đó 10 ngày có cả mưa và sương mù. Hỏi trong tháng 3 đó có bao nhiêu ngày không có mưa và không có sương mù?

Bài 22. Lớp 10A1 có 40 học sinh, trong đó có 20 học sinh thích môn Ngữ Văn, 18 học sinh thích môn Toán, 4 học sinh thích cả hai môn Ngữ Văn và Toán. Hỏi có bao nhiêu học sinh không thích môn nào trong hai môn Ngữ Văn và Toán?

Bài 23. Trong 35 học sinh của lớp 10A có 20 học sinh biết chơi bóng đá, 25 học sinh biết chơi bóng chuyền và 4 học sinh không biết chơi cả hai môn. Hỏi có bao nhiêu học sinh của lớp 10A vừa biết chơi bóng đá vừa biết chơi bóng chuyền?

Bài 24. Một lớp Ngoại ngữ có 25 sinh viên nói được tiếng Anh, 30 sinh viên nói được tiếng Hàn, 26 sinh viên nói được tiếng Trung. Trong đó có 8 sinh viên nói được cả tiếng Anh và tiếng Hàn, 12 sinh viên nói được tiếng Hàn và tiếng Trung, 5 sinh viên nói được tiếng Anh và tiếng Trung, 3 sinh viên nói được cả ba thứ tiếng. Biết mọi sinh viên trong lớp đều nói được ít nhất một trong ba ngoại ngữ trên. Hỏi có bao nhiêu sinh viên chỉ nói được một ngoại ngữ trong ba ngoại ngữ trên?

Bài 25. Một lớp học có 25 học sinh giỏi môn Toán, 23 học sinh giỏi môn Lý, 14 học sinh giỏi cả môn Toán và Lý và có 6 học sinh không giỏi môn nào cả. Hỏi lớp đó có bao nhiêu học sinh?

Bài 26. Lớp 10A có 45 học sinh chuẩn bị cho hội diễn văn nghệ chào mừng ngày nhà giáo Việt Nam 20/11. Trong danh sách đăng kí tham gia tiết mục nhảy Flashmob và tiết mục hát, có 35 học sinh tham gia tiết mục nhảy Flashmob, 10 học sinh tham gia cả hai tiết mục. Hỏi có bao nhiêu học sinh trong lớp tham gia tiết mục hát? Biết rằng lớp 10A có 4 bạn không tham gia tiết mục nào.

Bài 27. Bạn A.Súa thống kê số ngày có mưa, có sương mù ở bản mình trong tháng 3 vào một thời điểm nhất định và được kết quả như sau: 14 ngày có mưa, 15 ngày có sương mù, trong đó 10

ngày có cả mưa và sương mù. Hỏi trong tháng 3 đó có bao nhiêu ngày không có mưa và không có sương mù?

Bài 28. Một nhóm có 12 học sinh chuẩn bị cho hội diễn văn nghệ. Trong danh sách đăng kí tham gia tiết mục múa và tiết mục hát của nhóm đó, có 5 học sinh tham gia tiết mục múa, 3 học sinh tham gia cả hai tiết mục. Hỏi có bao nhiêu học sinh trong nhóm tham gia tiết mục hát? Biết có 4 học sinh của nhóm không tham gia tiết mục nào.

Bài 29. Trong một đợt phát động quyên góp sách, vở để giúp đỡ học sinh có hoàn cảnh khó khăn của trường THPT Triệu Sơn 2, lớp 10B2 có 30 học sinh tham gia quyên góp vở, 29 học sinh quyên góp sách. Biết rằng, tất cả học sinh trong lớp 10B2 đều tham gia quyên góp, trong đó có 14 học sinh quyên góp cả sách và vở. Hỏi lớp 10B2 có tất cả bao nhiêu học sinh?

Bài 30. Một cuộc khảo sát về khách du lịch thăm vịnh Hạ Long cho thấy trong 1410 khách du lịch được phỏng vấn có 789 khách du lịch đến thăm động Thiên Cung, 690 khách du lịch đến thăm đảo Titop. Toàn bộ khách được phỏng vấn đã đến ít nhất một trong hai địa điểm trên. Hỏi có bao nhiêu khách du lịch vừa đến thăm động Thiên Cung vừa đến thăm đảo Titop ở vịnh Hạ Long?

Bài 31. Một lớp học có 25 học sinh chơi bóng đá, 23 học sinh chơi bóng bàn, 14 học sinh chơi cả bóng đá và bóng bàn, 6 học sinh không chơi môn nào. Tìm số học sinh chỉ chơi một môn thể thao?

Bài 32. Trong số 40 học sinh của lớp 10A có 20 học sinh biết đánh cầu lông, 30 học sinh biết đá bóng. Biết rằng có 6 học sinh không biết chơi môn nào trong cả hai môn cầu lông và đá bóng. Hỏi lớp 10A có bao nhiêu học sinh biết đánh cầu lông và biết đá bóng.

Bài 33. Một nhóm có 15 học sinh chuẩn bị cho hội thi thể thao. Trong danh sách đăng ký tham gia thi cầu lông và bóng bàn của nhóm đó, có 8 học sinh tham gia thi cầu lông, 5 học sinh tham gia cả hai môn cầu lông và bóng bàn. Hỏi có bao nhiêu học sinh trong nhóm tham gia thi bóng bàn? Biết rằng có 4 học sinh của nhóm không tham gia bất kỳ môn thể thao nào.

Bài 34. Để phục vụ cho một hội nghị quốc tế, ban tổ chức huy động 40 người phiên dịch tiếng Anh, 45 người phiên dịch tiếng Pháp, trong đó có 26 người phiên dịch được cả hai thứ tiếng Anh và Pháp. Hỏi ban tổ chức đã huy động tất cả bao nhiêu người phiên dịch trong hội nghị?

Bài 35. Lớp 10A có 45 em học sinh, trong đó có 25 em thích môn Văn, 20 em thích môn Toán, 18 em thích môn Anh, 6 em không thích môn nào, 5 em thích cả ba môn. Hỏi số học sinh chỉ thích hai trong ba môn trên là bao nhiêu?

Bài 36. Lớp 10A có 50 học sinh, trong đó có 20 học sinh tham gia cuộc thi khoa học kỹ thuật, 25 học sinh tham gia cuộc thi toán học cấp trường và 10 học sinh không tham gia cả hai cuộc thi này. Hỏi có bao nhiêu học sinh của lớp 11A tham gia đồng thời cả hai cuộc thi?

Bài 37. Một cửa hàng sách có ba loại sách khác nhau: sách văn học, sách khoa học và sách thiếu nhi. Hôm nay, cửa hàng đã bán được 20 cuốn sách văn học, 15 cuốn sách khoa học và 10 cuốn sách thiếu nhi. Biết trong đó có 5 cuốn sách vừa thuộc loại văn học vừa thuộc loại khoa học, có 3 cuốn sách vừa thuộc loại văn học vừa thuộc loại thiếu nhi, có 2 cuốn sách vừa thuộc loại khoa học vừa thuộc loại thiếu nhi. Không có cuốn sách nào thuộc cả ba loại sách. Hãy tính tổng số cuốn sách khác nhau mà cửa hàng đã bán hôm nay.

Bài 38. Trong đợt khảo sát nghề, giáo viên chủ nhiệm lớp 10D đưa ra ba nhóm ngành cho học sinh lựa chọn, đó là: Giáo dục, Y tế, Công nghệ thông tin. Học sinh có thể chọn từ một đến ba nhóm ngành nêu trên hoặc không chọn nhóm ngành nào trong ba nhóm ngành trên. Giáo viên

chủ nhiệm thống kê theo từng nhóm ngành và được kết quả: có 6 học sinh chọn nhóm ngành Giáo dục, 9 học sinh chọn nhóm ngành Y tế, 10 học sinh chọn nhóm ngành Công nghệ thông tin, 22 học sinh không chọn nhóm ngành nào trong ba nhóm ngành trên. Nếu thống kê số lượng học sinh chọn theo từng hai nhóm ngành được kết quả: có 3 học sinh chọn hai nhóm ngành Giáo dục và Y tế, 2 học sinh chọn hai nhóm ngành Y tế và Công nghệ thông tin, 3 học sinh chọn hai nhóm ngành Giáo dục và Công nghệ thông tin. Hỏi có bao nhiêu học sinh chọn cả ba nhóm ngành nêu trên biết lớp 10D có 40 học sinh?

IV. LỜI GIẢI CHI TIẾT

1) Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Câu nào sau đây **không** là mệnh đề?

(A) Tam giác đều là tam giác có ba cạnh bằng nhau..
(B) $3 < 1$.
(C) $4 - 5 = 1$.
(D) Bạn học giỏi quá!.

Hướng dẫn giải.

- Đáp án A: Là một khẳng định đúng về định nghĩa tam giác đều, nên là mệnh đề.
- Đáp án B: Là một khẳng định sai về so sánh số, nên là mệnh đề.
- Đáp án C: Là một khẳng định sai về phép toán $(4 - 5 = -1)$, nên là mệnh đề.
- Đáp án D: Là một câu cảm thán, không mang tính khẳng định đúng hay sai, nên không phải là mệnh đề.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 2. Câu nào trong các câu sau **không phải** là mệnh đề?

(A) π có phải là một số vô tỷ không?.
(B) $2 + 2 = 5$.
(C) $\sqrt{2}$ là một số hữu tỷ.
(D) $\frac{4}{2} = 2$.

Hướng dẫn giải.

- Đáp án A: Là một câu hỏi, không phải là câu khẳng định có tính đúng sai nên không phải là mệnh đề.
- Đáp án B: Là mệnh đề sai.
- Đáp án C: Là mệnh đề sai (vì $\sqrt{2}$ là số vô tỷ).
- Đáp án D: Là mệnh đề đúng.

Vậy chọn đáp án A.

Câu 3. Trong các câu sau, câu nào là mệnh đề?

(A) 12 là số tự nhiên lẻ.
(B) An học lớp mấy?.
(C) Các bạn có chăm học không?.
(D) Các bạn hãy làm bài đi!.

Hướng dẫn giải.

- Đáp án A: Là một khẳng định (mặc dù khẳng định này sai), nên nó là một mệnh đề.
- Đáp án B, C: Là các câu hỏi, không phải mệnh đề.

◈ Đáp án D: Là một câu cầu khiến, không phải mệnh đề.

Vậy chọn đáp án A.

Câu 4. Trong các câu sau, có bao nhiêu câu là mệnh đề?

a) Cố lên, sắp đói rồi!

b) Số 15 là số nguyên tố.

c) Tổng các góc của một tam giác là $180°$.

d) x là số nguyên dương.

Ⓐ 3. Ⓑ 2. Ⓒ 4. Ⓓ 1.

Hướng dẫn giải.

◈ a) Là câu cảm thán ⇒ không phải mệnh đề.

◈ b) Là khẳng định sai (vì 15 chia hết cho 3 và 5) ⇒ là mệnh đề.

◈ c) Là khẳng định đúng ⇒ là mệnh đề.

◈ d) Là mệnh đề chứa biến, theo chương trình phổ thông thì chưa được coi là một mệnh đề cho đến khi xác định giá trị của x.

Như vậy có 2 câu là mệnh đề (b và c). Chọn đáp án B.

Câu 5. Câu nào sau đây **không** là mệnh đề?

Ⓐ Tam giác đều là tam giác có ba cạnh bằng nhau.
Ⓑ $3 < 1$.
Ⓒ $4 - 5 = 1$.
Ⓓ Bạn học giỏi quá!.

Hướng dẫn giải.

◈ Các câu A, B, C đều là những khẳng định có tính đúng hoặc sai rõ ràng nên chúng là các mệnh đề.

◈ Câu D là câu cảm thán nên không phải mệnh đề.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 6. Trong các mệnh đề dưới đây, các mệnh đề nào **sai**?

M: "$\exists r \in \mathbb{Q}, 4r^2 - 1 = 0$".

N: "$\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ chia hết cho 8".

X: "$\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ không chia hết cho 11".

Q: "$\exists n \in \mathbb{Z}, n^2 + n + 1$ là một số chẵn".

E: "$\forall x \in \mathbb{Z}, \frac{2x^3 - 6x^2 + x - 3}{2x^2 + 1} \in \mathbb{Z}$".

Ⓐ N, X, Q. Ⓑ M, X, Q. Ⓒ N, Q, E. Ⓓ M, Q, E.

Hướng dẫn giải.

◈ M: $4r^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow r = \pm\frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow M$ đúng.

◈ N: Số chính phương chia cho 8 dư $0, 1, 4$. Vậy $n^2 + 1$ chia 8 dư $1, 2, 5$, không bao giờ chia hết cho $8 \Rightarrow N$ sai.

◈ X: Với $n = 10$, tổng $S_{10} = \frac{10 \times 11}{2} = 55 \vdots 11 \Rightarrow X$ sai.

◈ Q: $n^2 + n + 1 = n(n + 1) + 1$. Vì $n(n + 1)$ chẵn nên $n(n + 1) + 1$ luôn lẻ $\Rightarrow Q$ sai.

◈ E: $\frac{2x^2(x-3)+(x-3)}{2x^2+1} = x-3 \in \mathbb{Z}$ với mọi $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow E$ đúng.

Các mệnh đề sai là N, X, Q. Chọn đáp án A.

Câu 7. Có bao nhiêu mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau?

a) $\exists n \in \mathbb{Z} : \sqrt{2^n+1}$ là số nguyên.

b) $\forall n \in \mathbb{N} : 2^n + 1$ là số nguyên tố.

c) $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists m \in \mathbb{N} : m + n \in \mathbb{N}$.

d) $\exists x \in \mathbb{N} : 1 - x^2 \geq 0$.

e) $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \vdots 9 \Rightarrow n \vdots 9$.

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

Hướng dẫn giải.

◈ a) Đúng vì với $n = 3$, $\sqrt{2^3+1} = 3 \in \mathbb{Z}$.

◈ b) Sai vì với $n = 3$, $2^3 + 1 = 9$ không phải số nguyên tố.

◈ c) Đúng vì với mọi $n \in \mathbb{Z}$, ta chọn $m = |n| \in \mathbb{N}$ thì $m + n \geq 0$.

◈ d) Đúng vì với $x = 0$, $1 - 0^2 = 1 \geq 0$.

◈ e) Sai vì với $n = 3$, $n^2 = 9 \vdots 9$ nhưng $n = 3$ không chia hết cho 9.

Có 3 mệnh đề đúng (a, c, d). Chọn đáp án C.

Câu 8. Cho các mệnh đề sau: (1) $a \vdots 2$ và $a \vdots 3 \Leftrightarrow a \vdots 6$. (2) $a \vdots 3 \Leftrightarrow a \vdots 9$. (3) $a \vdots 2 \Leftrightarrow a \vdots 4$. (4) $a \vdots 3$ và $a \vdots 6$ thì $a \vdots 18$. (5) $a + b < 0 \Leftrightarrow a < 0$ và $b < 0$. (6) $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ hoặc $b = 0$. (7) Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi hai tam giác đó đồng dạng. (8) Một tam giác là tam giác vuông khi và chỉ khi đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng một nửa cạnh huyền. Có bao nhiêu mệnh đề **sai** trong các mệnh đề trên?

Ⓐ 4. Ⓑ 6. Ⓒ 5. Ⓓ 7.

Hướng dẫn giải.

◈ (1), (6), (8) là các mệnh đề đúng.

◈ (2) Sai chiều thuận: $3 \vdots 3$ nhưng 3 không chia hết cho 9.

◈ (3) Sai chiều thuận: $2 \vdots 2$ nhưng 2 không chia hết cho 4.

◈ (4) Sai: $6 \vdots 3$ và $6 \vdots 6$ nhưng 6 không chia hết cho 18.

◈ (5) Sai chiều thuận: $1 + (-2) = -1 < 0$ nhưng không có $1 < 0$.

◈ (7) Sai vì đồng dạng chỉ là điều kiện cần, chưa đủ để bằng nhau.

Vậy có 5 mệnh đề sai. Chọn đáp án C.

Câu 9. Cho ba mệnh đề sau, với n là số tự nhiên: (1) $n+8$ là số chính phương. (2) Chữ số tận cùng của n là 4. (3) $n-1$ là số chính phương. Biết rằng có hai mệnh đề đúng và một mệnh đề sai. Hãy xác định mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai?

Ⓐ Mệnh đề (2) và (3) là đúng, còn mệnh đề (1) là sai.
Ⓑ Mệnh đề (1) và (2) là đúng, còn mệnh đề (3) là sai.
Ⓒ Mệnh đề (1) là đúng, còn mệnh đề (2) và (3) là sai.
Ⓓ Mệnh đề (1) và (3) là đúng, còn mệnh đề (2) là sai.

Hướng dẫn giải. Nếu (2) đúng thì n tận cùng là 4. - Khi đó $n+8$ tận cùng là $2 \Rightarrow$ không thể là số chính phương $\Rightarrow$ (1) sai. - $n-1$ tận cùng là $3 \Rightarrow$ không thể là số chính phương $\Rightarrow$ (3) sai. Điều này mâu thuẫn với giả thiết có 2 mệnh đề đúng. Vậy (2) phải sai. Suy ra (1) và (3) đúng. Chọn đáp án D.

Câu 10. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $\pi < 3$. Ⓑ $\pi^2 > 16$. Ⓒ $\sqrt{35} > 6$. Ⓓ $\sqrt{36} \geq 6$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\pi \approx 3,14 \Rightarrow A$ sai, B sai. $\sqrt{35} < \sqrt{36} = 6 \Rightarrow C$ sai. $\sqrt{36} = 6 \geq 6 \Rightarrow D$ đúng. Chọn đáp án D.

Câu 11. Mệnh đề nào sau đây sai?

Ⓐ 30 chia hết cho 5. Ⓑ 30 là bội số của 5.
Ⓒ 30 là ước số của 5. Ⓓ 5 là ước số của 30.

Hướng dẫn giải. Ước của 5 chỉ có $1, 5$ nên 30 không thể là ước của 5. Các khẳng định còn lại đều đúng. Chọn đáp án C.

Câu 12. Mệnh đề nào là sau đây sai?

Ⓐ Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng đồng dạng và có một góc bằng nhau.
Ⓑ Một tứ giác là hình chữ nhật khi và chỉ khi chúng có 3 góc vuông.
Ⓒ Một tam giác là vuông khi và chỉ khi nó có một góc bằng tổng hai góc còn lại.
Ⓓ Một tam giác là đều khi và chỉ khi nó là tam giác cân và có một góc bằng $60°$.

Hướng dẫn giải. Đáp án A sai vì hai tam giác đồng dạng đã có các góc tương ứng bằng nhau rồi, điều kiện đó không đủ để khẳng định chúng bằng nhau. Các đáp án khác là các dấu hiệu nhận biết đúng. Chọn đáp án A.

Câu 13. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ Nếu tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
Ⓑ Nếu tứ giác $ABCD$ một cặp cạnh đối song song thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
Ⓒ Nếu tứ giác $ABCD$ có một cặp cạnh đối bằng nhau thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
Ⓓ Nếu tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Hướng dẫn giải. Đáp án A là dấu hiệu nhận biết chính xác của hình bình hành. B và C chỉ đúng cho hình thang, D không phải dấu hiệu của hình bình hành. Chọn đáp án A.

Câu 14. Mệnh đề nào sau đây sai?

Ⓐ 2 là số nguyên tố. Ⓑ 1 là số nguyên tố.
Ⓒ 5 là số nguyên tố. Ⓓ 6 không phải là số nguyên tố.

Hướng dẫn giải. Theo định nghĩa, số nguyên tố là số tự nhiên lớn hơn 1. Số 1 không được tính là số nguyên tố. Chọn đáp án B.

Câu 15. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề sai?

Ⓐ $-\pi < -2 \Leftrightarrow \pi^2 < 4$. Ⓑ $\pi < 4 \Leftrightarrow \pi^2 < 16$.
Ⓒ $\sqrt{23} < 5 \Rightarrow 2\sqrt{23} < 2,5$. Ⓓ $\sqrt{23} < 5 \Rightarrow -2\sqrt{23} > -2,5$.

Hướng dẫn giải. Xét đáp án A: $-\pi < -2$ là mệnh đề đúng ($\approx -3,14 < -2$). Nhưng

$\pi^2 \approx 9,87 < 4$ là sai. Mệnh đề tương đương (Đúng $\Leftrightarrow$ Sai) là mệnh đề SAI. Chọn đáp án A.

Câu 16. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề sai?

(A) Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng đồng dạng và có một góc bằng nhau.
(B) Một tứ giác là hình chữ nhật khi và chỉ khi chúng có 3 góc vuông.
(C) Một tam giác là vuông khi và chỉ khi nó có một góc bằng tổng hai góc còn lại.
(D) Một tam giác là đều khi và chỉ khi chúng có hai đường trung tuyến bằng nhau và có một góc bằng $60°$.

Hướng dẫn giải. Câu A sai vì đồng dạng kết hợp góc bằng nhau không suy ra bằng nhau. Câu D: Hai trung tuyến bằng nhau là tam giác cân, có thêm 1 góc $60°$ là tam giác đều nên D đúng. Chọn đáp án A.

Câu 17. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào có mệnh đề đảo đúng?

(A) Nếu số nguyên n có chữ số tận cùng là 5 thì số nguyên n chia hết cho 5.
(B) Nếu tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường thì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
(C) Nếu tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật thì tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo bằng nhau.
(D) Nếu tứ giác $ABCD$ là hình thoi thì tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau.

Hướng dẫn giải. Xét đảo của B: "Nếu tứ giác là hình bình hành thì hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường". Đây là tính chất cơ bản của hình bình hành nên đảo đúng.

Đảo của A sai vì có thể tận cùng là 0. Đảo của C, D sai vì chưa đủ điều kiện xác định hình cụ thể. Chọn đáp án B.

Câu 18. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề sai?

(A) "ABC là tam giác đều $\Leftrightarrow$ Tam giác ABC cân".
(B) "ABC là tam giác đều $\Leftrightarrow$ Tam giác ABC cân và có một góc $60°$".
(C) "ABC là tam giác đều $\Leftrightarrow$ ABC là tam giác có ba cạnh bằng nhau".
(D) "ABC là tam giác đều $\Leftrightarrow$ Tam giác ABC có hai góc bằng $60°$".

Hướng dẫn giải.

- Đáp án A: Sai vì tam giác cân chưa chắc đã đều (cần thêm điều kiện như một góc bằng $60°$). Chiều ngược lại không đúng.
- Đáp án B: Đúng, đây là dấu hiệu nhận biết tam giác đều từ tam giác cân.
- Đáp án C: Đúng, đây là định nghĩa của tam giác đều.
- Đáp án D: Đúng, vì nếu có hai góc $60°$ thì góc còn lại cũng là $180° - 60° - 60° = 60°$, suy ra tam giác đều.

Vậy chọn đáp án A.

Câu 19. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $\forall n \in \mathbb{N} : n(n+1)$ là số chính phương.
(B) $\forall n \in \mathbb{N} : n(n+1)$ là số lẻ.
(C) $\forall n \in \mathbb{N} : n(n+1)(n+2)$ là số lẻ.
(D) $\forall n \in \mathbb{N} : n(n+1)(n+2)$ chia hết cho 6.

Hướng dẫn giải.

- Đáp án A: Sai, ví dụ với $n = 1$ thì $1(2) = 2$ không là số chính phương.
- Đáp án B: Sai, $n(n+1)$ là tích hai số tự nhiên liên tiếp nên luôn là số chẵn.

- Đáp án C: Sai, tích của ba số liên tiếp luôn có ít nhất một số chẵn nên tích phải là số chẵn.
- Đáp án D: Đúng, trong ba số tự nhiên liên tiếp luôn có ít nhất một số chia hết cho 2 và một số chia hết cho 3, do đó tích của chúng chia hết cho $2 \cdot 3 = 6$.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 20. Tìm mệnh đề đúng

(A) $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 - 3$ là bội số của 7.
(B) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 7x + 15 > 0$..
(C) $\exists x \in \mathbb{N} : x^3 + 2x^2 + 8x + 16 = 0$.
(D) $\exists n \in \mathbb{N} : n^2 + 1$ chia hết cho 4.

Hướng dẫn giải.

- Đáp án A: Sai, ví dụ $n = 1 \Rightarrow n^2 - 3 = -2$ không chia hết cho 7.
- Đáp án B: Đúng. Xét tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - 7x + 15$ có $\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 15 = 49 - 60 = -11 < 0$ và hệ số $a = 1 > 0$. Do đó $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.
- Đáp án C: Sai, vì với $x \in \mathbb{N}$ thì $x \geq 0$, do đó $x^3 + 2x^2 + 8x + 16 \geq 16 > 0$.
- Đáp án D: Sai, một số chính phương n^2 khi chia cho 4 chỉ có thể dư 0 hoặc 1, nên $n^2 + 1$ chia cho 4 chỉ có thể dư 1 hoặc 2.

Vậy chọn đáp án B.

Câu 21. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) $\exists n \in \mathbb{N}, n^3 - n$ không chia hết cho 3.
(B) $\forall x \in \mathbb{R}, x < 3 \Rightarrow x^2 < 9$.
(C) $\exists k \in \mathbb{Z}, k^2 + k + 1$ là một số chẵn.
(D) $\forall x \in \mathbb{Z}, \dfrac{2x^3 - 6x^2 + x - 3}{2x^2 + 1} \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải.

- Đáp án A: Sai vì $n^3 - n = n(n-1)(n+1)$ là tích 3 số nguyên liên tiếp nên luôn chia hết cho 3.
- Đáp án B: Sai, ví dụ $x = -4 < 3$ nhưng $x^2 = 16 > 9$.
- Đáp án C: Sai vì $k^2 + k + 1 = k(k+1) + 1$, tích $k(k+1)$ luôn chẵn nên $k(k+1) + 1$ luôn lẻ.
- Đáp án D: Đúng vì $\dfrac{2x^3 - 6x^2 + x - 3}{2x^2 + 1} = \dfrac{(x-3)(2x^2+1)}{2x^2+1} = x - 3$. Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x - 3 \in \mathbb{Z}$.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 22. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

(A) $\exists x \in \mathbb{R}, x > x^2$.
(B) $\forall x \in \mathbb{R}, |x| < 6 \Rightarrow x < 6$.
(C) $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 1$ không chia hết cho 3.
(D) $\exists a \in \mathbb{Q}, a^2 = 7$.

Hướng dẫn giải.

- Đáp án A: Đúng, ví dụ chọn $x = 0,5 \in (0;1)$ thì $0,5 > 0,25$.
- Đáp án B: Đúng vì $|x| < 6 \Leftrightarrow -6 < x < 6$, do đó hiển nhiên $x < 6$.
- Đáp án C: Đúng vì số chính phương chia cho 3 chỉ dư 0 hoặc 1, nên $n^2 + 1$ chia cho 3 chỉ có thể dư 1 hoặc 2.

◈ Đáp án D: Sai vì $\sqrt{7}$ là một số vô tỷ, không tồn tại số hữu tỷ nào có bình phương bằng 7.
Vậy chọn đáp án D.

Câu 23. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

Ⓐ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2+5=0$.
Ⓑ $\exists x \in \mathbb{R}, x^4+5x^2+4=0$.
Ⓒ $\forall n \in \mathbb{N}, n^3-n$ chia hết cho 3.
Ⓓ $\forall x \in \mathbb{Z}, x^3>x^2$.

Hướng dẫn giải.

◈ Đáp án A: Sai vì $x^2+5 \geq 5 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

◈ Đáp án B: Sai vì $x^4+5x^2+4 \geq 4 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

◈ Đáp án C: Đúng vì $n^3-n=(n-1)n(n+1)$ là tích 3 số nguyên liên tiếp nên luôn chia hết cho 3.

◈ Đáp án D: Sai, ví dụ $x=0 \in \mathbb{Z}$ thì $0^3=0^2$.
Vậy chọn đáp án C.

Câu 24. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

Ⓐ Phương trình $x^3+3x^2-x-3=0$ có 2 nghiệm nguyên dương.
Ⓑ $\exists x \in \mathbb{R} : -x^2+6x-10>0$.
Ⓒ "$\forall x \in \mathbb{R} : x^2-x \geq -\dfrac{1}{4}$".
Ⓓ Bất phương trình $\dfrac{x^2-1}{x} < x$ có tập nghiệm là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Hướng dẫn giải.

◈ Đáp án A: $x^2(x+3)-(x+3)=0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x+3)=0 \Leftrightarrow x \in \{1;-1;-3\}$. Chỉ có 1 nghiệm nguyên dương là $x=1$. $\Rightarrow$ Sai.

◈ Đáp án B: Tam thức $-x^2+6x-10$ có $\Delta'=9-10=-1<0$ và $a=-1<0$ nên luôn âm với mọi x. $\Rightarrow$ Sai.

◈ Đáp án C: $x^2-x+\dfrac{1}{4}=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2-x \geq -\dfrac{1}{4}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow$ Đúng.

◈ Đáp án D: $\dfrac{x^2-1}{x}-x<0 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{x}<0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x}>0 \Leftrightarrow x>0$. Tập nghiệm là $(0;+\infty)$. $\Rightarrow$ Sai.
Vậy chọn đáp án C.

Câu 25. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai?

Ⓐ $4+4^2+4^3+\cdots+4^{99}+4^{100}$ chia hết cho 5.
Ⓑ $\forall n \in \mathbb{N} : n^2+1$ không chia hết cho 4.
Ⓒ $\exists n \in \mathbb{N} : 2^n-1$ chia hết cho 7.
Ⓓ $1^3+2^3+3^3+\cdots+100^3$ không chia hết cho 5050.

Hướng dẫn giải.

◈ Đáp án A: Nhóm các số hạng theo cặp $(4+4^2)=20 \vdots 5$, $(4^3+4^4)=4^2(4+4^2) \vdots 5 \ldots$. Có 50 cặp như vậy nên tổng chia hết cho 5. $\Rightarrow$ Đúng.

◈ Đáp án B: Số chính phương chia cho 4 dư 0 hoặc 1, nên n^2+1 chia 4 dư 1 hoặc 2. $\Rightarrow$ Đúng.

◈ Đáp án C: Chọn $n=3$ ta có $2^3-1=7 \vdots 7$. $\Rightarrow$ Đúng.

◈ Đáp án D: Tổng $1^3+2^3+\cdots+100^3=\left[\dfrac{100(101)}{2}\right]^2=(5050)^2$, hiển nhiên chia hết cho 5050. $\Rightarrow$ Sai.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 26. Có bao nhiêu số nguyên n để mệnh đề "$2n^3+n^2+7n+1$ chia hết cho $2n-1$" là đúng?

Ⓐ 3. Ⓑ 2. Ⓒ 4. Ⓓ 5.

Hướng dẫn giải. Thực hiện phép chia đa thức: $\dfrac{2n^3+n^2+7n+1}{2n-1}=n^2+n+4+\dfrac{5}{2n-1}$.
Để biểu thức chia hết thì $2n-1$ phải là ước của 5.
Các ước của 5 là $\pm1,\pm5$.
- $2n-1=1\Rightarrow n=1$.
- $2n-1=-1\Rightarrow n=0$.
- $2n-1=5\Rightarrow n=3$.
- $2n-1=-5\Rightarrow n=-2$.

Có tất cả 4 giá trị nguyên của n. Vậy chọn đáp án C.

Câu 27. Cho các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề sai

Ⓐ $\exists x\in\mathbb{Q}:4x^2-1=0$.
Ⓑ $\exists x\in\mathbb{R}:x>x^2$.
Ⓒ $\forall n\in\mathbb{N}:n^2+1$ không chia hết cho 3.
Ⓓ $\forall n\in\mathbb{N}:n^2>n$.

Hướng dẫn giải.
- Đáp án A: Phương trình có nghiệm $x=\pm0,5\in\mathbb{Q}$. $\Rightarrow$ Đúng.
- Đáp án B: Với $x=0,5$ thì $0,5>0,25$. $\Rightarrow$ Đúng.
- Đáp án C: Đã được chứng minh là đúng.
- Đáp án D: Với $n=0$ thì $0^2>0$ là sai; với $n=1$ thì $1^2>1$ là sai. $\Rightarrow$ Sai.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 28. Cho các mệnh đề sau, mệnh đề nào có mệnh đề đảo đúng?

Ⓐ Nếu tứ giác $ABCD$ là hình thang cân thì 2 góc đối bù nhau.
Ⓑ Nếu $a=b$ thì $a\cdot c=b\cdot c$.
Ⓒ Nếu $a>b$ thì $a^2>b^2$.
Ⓓ Nếu số nguyên chia hết cho 10 thì chia hết cho 5 và 2.

Hướng dẫn giải.
- Đảo A: Tứ giác có 2 góc đối bù nhau là hình thang cân. Sai (có thể là tứ giác nội tiếp bất kỳ).
- Đảo B: Nếu $a\cdot c=b\cdot c$ thì $a=b$. Sai khi $c=0$.
- Đảo C: Nếu $a^2>b^2$ thì $a>b$. Sai, ví dụ $(-3)^2>2^2$ nhưng $-3<2$.
- Đảo D: Nếu số nguyên chia hết cho 5 và 2 thì chia hết cho 10. Đây là tính chất đúng (vì 2 và 5 là các số nguyên tố cùng nhau).

Vậy chọn đáp án D.

Câu 29. Dùng kí hiệu $\exists,\forall$ để phát biểu mệnh đề "Có một số hữu tỉ mà nghịch đảo của nó lớn hơn chính nó".

Ⓐ $\exists n\in\mathbb{R}:\dfrac{1}{n}>n$. Ⓑ $\forall n\in\mathbb{Q}:\dfrac{1}{n}>n$.

Ⓒ $\exists n \in \mathbb{Q} : n > \dfrac{1}{n}$. Ⓓ $\exists n \in \mathbb{Q} : \dfrac{1}{n} > n$.

Hướng dẫn giải. "Có một" tương ứng với kí hiệu $\exists$. "Số hữu tỉ" tương ứng tập $\mathbb{Q}$. "Nghịch đảo của nó lớn hơn chính nó" là $\dfrac{1}{n} > n$.

Vậy mệnh đề là $\exists n \in \mathbb{Q} : \dfrac{1}{n} > n$. Chọn đáp án D.

Câu 30. Hãy chọn mệnh đề đúng:

Ⓐ Phương trình: $\dfrac{x^2-9}{x-3} = 0$ có một nghiệm là .
Ⓑ $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + x > 0$.
Ⓒ $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - x + 2 < 0$.
Ⓓ $\forall x \in \mathbb{R} : 2x^2 + 6\sqrt{2}x + 10 > 1$.

Hướng dẫn giải.

- Đáp án A: Phương trình có nghiệm duy nhất $x = -3$ (loại $x = 3$ do mẫu). Câu này trong ảnh bị thiếu giá trị cụ thể.
- Đáp án B: Đúng, ví dụ chọn $x = 1$ thì $1^2 + 1 = 2 > 0$.
- Đáp án C: Sai vì $\Delta = -7 < 0$ nên $x^2 - x + 2$ luôn dương.
- Đáp án D: $2x^2 + 6\sqrt{2}x + 9 > 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2}x + 3)^2 > 0$ sai tại $x = -\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

Vậy chọn đáp án B.

Câu 31. Cho mệnh đề $A =$ "$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + x \geq -\dfrac{1}{4}$". Lập mệnh đề phủ định của mệnh đề A và xét tính đúng sai của nó.

Ⓐ $\bar{A} =$ "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + x \geq -\dfrac{1}{4}$". Đây là mệnh đề đúng.
Ⓑ $\bar{A} =$ "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + x \leq -\dfrac{1}{4}$". Đây là mệnh đề đúng.
Ⓒ $\bar{A} =$ "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + x < -\dfrac{1}{4}$". Đây là mệnh đề đúng.
Ⓓ $\bar{A} =$ "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + x < -\dfrac{1}{4}$". Đây là mệnh đề sai.

Hướng dẫn giải. Phủ định của $\forall$ là $\exists$, của $\geq$ là $<$. Vậy $\bar{A} =$ "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + x < -\dfrac{1}{4}$".

Vì $x^2 + x + \dfrac{1}{4} = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ luôn đúng nên mệnh đề A đúng, suy ra phủ định $\bar{A}$ là sai.

Chọn đáp án D.

Câu 32. Phủ định của mệnh đề: "Hình thoi có hai đường chéo vuông góc với nhau" là:

Ⓐ "Hai đường chéo của hình thoi vuông góc với nhau".
Ⓑ "Hình thoi có hai đường chéo không vuông góc với nhau".
Ⓒ "Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau".
Ⓓ "Hình thoi là hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau".

Hướng dẫn giải. Mệnh đề gốc có thể hiểu là "Mọi hình thoi đều có hai đường chéo vuông góc". Phủ định của nó là "Có (ít nhất một) hình thoi có hai đường chéo không vuông góc với nhau".

Chọn đáp án B.

Câu 33. Phủ định của mệnh đề: "$\forall n \in \mathbb{N} : n^2 + 1$ không chia hết cho 3" là:

Ⓐ "$\forall n \in \mathbb{N} : n^2 + 1$ chia hết cho 3".
Ⓑ "$\exists n \in \mathbb{N} : n^2 + 1$ không chia hết cho 3".
Ⓒ "$\exists n \in \mathbb{N} : n^2 + 1$ chia hết cho 3".
Ⓓ "$\nexists n \in \mathbb{N} : n^2 + 1$ không chia hết cho 3".

✍ *Hướng dẫn giải.* Phủ định của $\forall$ là $\exists$, phủ định của "không chia hết" là "chia hết".

Vậy phủ định là: "$\exists n \in \mathbb{N} : n^2 + 1$ chia hết cho 3". Chọn đáp án C.

Câu 34. Phủ định của mệnh đề: "$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 > 0$" là:

Ⓐ "$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 < 0$".
Ⓑ "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \leq 0$".
Ⓒ "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 > 0$".
Ⓓ "$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0$".

✍ *Hướng dẫn giải.* Phủ định của $\forall$ là $\exists$, phủ định của $>$ là $\leq$.

Vậy phủ định là: "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \leq 0$". Chọn đáp án B.

Câu 35. Phủ định của mệnh đề P : "$\exists x \in \mathbb{N} : x^2 - 3x + 2 = 0$" là:

Ⓐ $\bar{P}$: "$\exists x \in \mathbb{N} : x^2 - 3x + 2 \neq 0$".
Ⓑ $\bar{P}$: "$\forall x \in \mathbb{N} : x^2 - 3x + 2 = 0$".
Ⓒ $\bar{P}$: "$\forall x \in \mathbb{N} : x^2 - 3x + 2 > 0$".
Ⓓ $\bar{P}$: "$\forall x \in \mathbb{N} : x^2 - 3x + 2 \neq 0$".

✍ *Hướng dẫn giải.* Phủ định của $\exists$ là $\forall$, phủ định của $=$ là $\neq$.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 36. Phủ định của mệnh đề: "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1$ là số dương" là:

Ⓐ "$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1$ là số không dương".
Ⓑ "$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1$ là số âm".
Ⓒ "$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1$ là số dương".
Ⓓ "$\nexists x \in \mathbb{R} : x^2 + x + 1$ là số dương".

✍ *Hướng dẫn giải.* Phủ định của "số dương" (> 0) là "số không dương" (≤ 0).

Phủ định của $\exists$ là $\forall$. Vậy chọn đáp án A.

Câu 37. Mệnh đề nào sau đây là phủ định của mệnh đề: "Mọi động vật đều di chuyển".

Ⓐ Mọi động vật đều không di chuyển.
Ⓑ Mọi động vật đều đứng yên.
Ⓒ Có ít nhất một động vật không di chuyển.
Ⓓ Có ít nhất một động vật di chuyển.

✍ *Hướng dẫn giải.* Phủ định của "Mọi" là "Có ít nhất một", của "di chuyển" là "không di chuyển".

Vậy chọn đáp án C.

Câu 38. Phủ định của mệnh đề "$\exists x \in \mathbb{R}, 5x - 3x^2 = 1$" là

Ⓐ "$\exists x \in \mathbb{R}, 5x - 3x^2$".
Ⓑ "$\forall x \in \mathbb{R}, 5x - 3x^2 = 1$".
Ⓒ "$\forall x \in \mathbb{R}, 5x - 3x^2 \neq 1$".
Ⓓ "$\exists x \in \mathbb{R}, 5x - 3x^2 \geq 1$".

✍ *Hướng dẫn giải.* Phủ định của $\exists$ là $\forall$, của $=$ là $\neq$. Vậy chọn đáp án C.

Câu 39. Cho mệnh đề $P(x)$: "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 > 0$". Mệnh đề phủ định của mệnh đề $P(x)$ là:

Ⓐ "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 < 0$".
Ⓑ "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \leq 0$".
Ⓒ "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \leq 0$".
Ⓓ "$\nexists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 > 0$".

✍ *Hướng dẫn giải.* Phủ định của $\forall$ là $\exists$, của $>$ là $\leq$. Chọn đáp án C.

Câu 40. Cho mệnh đề $A =$ "$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 < x$". Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là phủ định của mệnh đề A?

(A) "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 < x$". (B) "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \geq x$".
(C) "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 < x$". (D) "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 \leq x$".

Hướng dẫn giải. Phủ định của $\forall$ là $\exists$, của $<$ là $\geq$. Chọn đáp án B.

Câu 41. Cho mệnh đề "phương trình $x^2 - 4x + 4 = 0$ có nghiệm". Mệnh đề phủ định của mệnh đề đã cho và tính đúng, sai của mệnh đề phủ định là:

(A) Phương trình $x^2 - 4x + 4 = 0$ có nghiệm. Đây là mệnh đề đúng.
(B) Phương trình $x^2 - 4x + 4 = 0$ có nghiệm. Đây là mệnh đề sai.
(C) Phương trình $x^2 - 4x + 4 = 0$ vô nghiệm. Đây là mệnh đề đúng.
(D) Phương trình $x^2 - 4x + 4 = 0$ vô nghiệm. Đây là mệnh đề sai.

Hướng dẫn giải. Mệnh đề gốc có nghiệm duy nhất $x = 2$ nên nó là mệnh đề đúng.

Phủ định của "có nghiệm" là "vô nghiệm". Vì mệnh đề gốc đúng nên mệnh đề phủ định phải sai.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 42. Cho mệnh đề A : "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 < 0$". Mệnh đề phủ định của A là:

(A) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 > 0$.
(B) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 \geq 0$.
(C) Không tồn tại $x : x^2 - x + 7 < 0$.
(D) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 \geq 0$.

Hướng dẫn giải. Phủ định của $\forall$ là $\exists$, của $<$ là $\geq$. Chọn đáp án D.

Câu 43. Cho n là số tự nhiên mệnh đề phủ định của mệnh đề nào sau đây **đúng**?

(A) P : "$\forall n \in \mathbb{N}, n(n+1)$ là số chính phương".
(B) Q : "$\exists n \in \mathbb{N}, n(n+1)$ là số chẵn".
(C) R : "$\forall n \in \mathbb{N}, n(n+1)(n+2)$ là số chẵn".
(D) M : "$\exists n \in \mathbb{N}, n(n+1)(n+2)$ không chia hết cho 6".

Hướng dẫn giải. Một mệnh đề phủ định đúng khi mệnh đề gốc tương ứng sai.

- P là mệnh đề sai (ví dụ $n = 1$), nên phủ định của nó là đúng.
- Q là mệnh đề đúng (luôn đúng), nên phủ định là sai.
- R là mệnh đề đúng (tích 3 số liên tiếp luôn chẵn), nên phủ định là sai.
- M là mệnh đề sai (tích 3 số liên tiếp luôn chia hết cho 6). Chọn A.

Câu 44. Cho mệnh đề: "Nếu $a + b < 2$ thì một trong hai số a và b nhỏ hơn 1". Phát biểu mệnh đề trên bằng cách sử dụng khái niệm "điều kiện đủ".

(A) $a + b < 2$ là điều kiện đủ để một trong hai số a và b nhỏ hơn 1.
(B) Một trong hai số a và b nhỏ hơn 1 là điều kiện đủ để $a + b < 2$.
(C) Từ $a + b < 2$ suy ra một trong hai số a và b nhỏ hơn 1.
(D) Tất cả các câu trên đều đúng.

Hướng dẫn giải. Mệnh đề "Nếu P thì Q" tương đương với phát biểu "P là điều kiện đủ để có Q".
Ở đây P là "$a + b < 2$" và Q là "một trong hai số a và b nhỏ hơn 1".
Vậy chọn đáp án A.

Câu 45. Liệt kê các phần tử của tập hợp $X = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x^2 - 3x + 1 = 0\}$.

Ⓐ $X = \{0\}$. Ⓑ $X = \{1\}$. Ⓒ $X = \{1; \frac{1}{2}\}$. Ⓓ $X = \{1; \frac{3}{2}\}$.

Hướng dẫn giải. Giải phương trình $2x^2 - 3x + 1 = 0$ ta được các nghiệm $x = 1$ và $x = \frac{1}{2}$.

Vì X chứa các phần tử thuộc tập số nguyên $\mathbb{Z}$, nên chỉ chọn $x = 1$.

Vậy $X = \{1\}$. Chọn đáp án B.

Câu 46. Cho tập hợp $A = \{a, b, c, d\}$. Tìm số tập con của tập A.

Ⓐ 16. Ⓑ 15. Ⓒ 12. Ⓓ 10.

Hướng dẫn giải. Số tập hợp con của một tập hợp có n phần tử là 2^n.

Ở đây tập A có 4 phần tử, nên số tập con là $2^4 = 16$. Vậy chọn đáp án A.

Câu 47. Tìm x, y để ba tập hợp $A = \{1; 4\}$, $B = \{4; x\}$ và $C = \{x; y; 4\}$ bằng nhau.

Ⓐ $x = y = 1$. Ⓑ $x = y = 1$ hoặc $x = 1, y = 4$.
Ⓒ $x = 1, y = 4$. Ⓓ $x = 4, y = 1$ hoặc $x = y = 4$.

Hướng dẫn giải. Để $A = B$ thì phần tử còn thiếu của B phải là 1, tức là $x = 1$.

Khi $x = 1$, tập C trở thành $\{1; y; 4\}$.

Để $A = C$ thì tập C không được có phần tử nào khác ngoài 1 và 4. Do đó y phải bằng 1 hoặc y phải bằng 4.

Vậy $x = 1$ và $y \in \{1; 4\}$. Chọn đáp án B.

Câu 48. Cho $S = \{7; 2; 8; 4; 9; 12\}; T = \{1; 3; 7; 4\}$. Tìm tập $S \cap T$.

Ⓐ $\{1; 2; 3; 4; 8; 9; 7; 12\}$. Ⓑ $\{2; 8; 9; 12\}$.
Ⓒ $\{4; 7\}$. Ⓓ $\{1; 3\}$.

Hướng dẫn giải. Giao của hai tập hợp S và T là tập chứa các phần tử chung của cả hai tập.

Ta thấy các phần tử chung là 4 và 7.

Vậy $S \cap T = \{4; 7\}$. Chọn đáp án C.

Câu 49. Cho hai tập hợp $A = [-5; 3), B = (1; +\infty)$. Khi đó $A \cap B$ là tập nào sau đây?

Ⓐ $(1; 3)$. Ⓑ $(1; 3]$. Ⓒ $[-5; +\infty)$. Ⓓ $[-5; 1]$.

Hướng dẫn giải. $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \le x < 3 \text{ và } x > 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$.

Kết quả là khoảng $(1; 3)$.

Vậy chọn đáp án A.

Câu 50. Cho 2 tập hợp: $S = \{1; 3; 5; 8\}; T = \{3; 5; 7; 9\}$. Tập hợp $S \cup T$ bằng tập hợp nào sau đây?

Ⓐ $\{3; 5\}$. Ⓑ $\{1; 3; 5; 7; 8; 9\}$.
Ⓒ $\{1; 7; 9\}$. Ⓓ $\{1; 3; 5\}$.

Hướng dẫn giải. Hợp của hai tập hợp là tập chứa tất cả các phần tử thuộc ít nhất một trong hai tập đó.

$S \cup T = \{1; 3; 5; 7; 8; 9\}$.

Vậy chọn đáp án B.

Câu 51. Cho hai tập hợp $A=[-2;7), B=(1;9]$. Tìm tập hợp $A\cup B$.

Ⓐ $(1;7)$. Ⓑ $[-2;9]$. Ⓒ $[-2;1)$. Ⓓ $(7;9]$.

Hướng dẫn giải. $A\cup B=\{x\in\mathbb{R}\mid -2\le x<7 \text{ hoặc } 1<x\le 9\}=\{x\in\mathbb{R}\mid -2\le x\le 9\}$.

Kết quả là đoạn $[-2;9]$.

Vậy chọn đáp án B.

Câu 52. Cho hai tập hợp $A=\{2,4,6,9\}$ và $B=\{1,2,3,4\}$. Tập hợp $A\setminus B$ bằng tập nào sau đây?

Ⓐ $A=\{1,2,3,5\}$. Ⓑ $\{1;3;6;9\}$.
Ⓒ $\{6;9\}$. Ⓓ $\emptyset$.

Hướng dẫn giải. Hiệu $A\setminus B$ là tập chứa các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B.

Các phần tử 2 và 4 thuộc cả A và B nên bị loại bỏ khỏi A.

Các phần tử còn lại của A là 6 và 9.

Vậy $A\setminus B=\{6;9\}$. Chọn đáp án C.

Câu 53. Cho hai tập hợp $A=(1;5]; B=(2;7]$. Tập hợp $A\setminus B$ là

Ⓐ $(1;2]$. Ⓑ $(2;5)$. Ⓒ $(-1;7]$. Ⓓ $(-1;2)$.

Hướng dẫn giải. $A\setminus B=\{x\in\mathbb{R}\mid 1<x\le 5 \text{ và } x\notin(2;7]\}=\{x\in\mathbb{R}\mid 1<x\le 2\}$. Kết quả là nửa khoảng $(1;2]$. Vậy chọn đáp án A.

Câu 54. Cho tập hợp $A=(2;+\infty)$. Tìm tập hợp $C_{\mathbb{R}}A$.

Ⓐ $[2;+\infty)$. Ⓑ $(2;+\infty)$. Ⓒ $(-\infty;2]$. Ⓓ $(-\infty;-2]$.

Hướng dẫn giải. Phần bù của A trong $\mathbb{R}$ là tập các số thực không thuộc A. Vì A là khoảng các số thực lớn hơn 2, nên phần bù là các số thực nhỏ hơn hoặc bằng 2. Vậy $C_{\mathbb{R}}A=(-\infty;2]$. Chọn đáp án C.

Câu 55. Cho hai tập hợp $A=(m;m+1)$ và $B=[-1;3]$. Tìm tất cả các giá trị của m để $A\cap B=\emptyset$.

Ⓐ $\left[\begin{array}{l} m\le -2\\ m\ge 3\end{array}\right.$. Ⓑ $-2\le m\le 3$.
Ⓒ $\left[\begin{array}{l} m\ge 2\\ m\le -1\end{array}\right.$. Ⓓ $\left[\begin{array}{l} m<-2\\ m>3\end{array}\right.$.

Hướng dẫn giải. Để $A\cap B=\emptyset$ thì khoảng $(m;m+1)$ phải nằm hoàn toàn bên trái hoặc bên phải đoạn $[-1;3]$.

- Trường hợp 1 (bên trái): $m+1\le -1\Leftrightarrow m\le -2$.
- Trường hợp 2 (bên phải): $m\ge 3$.

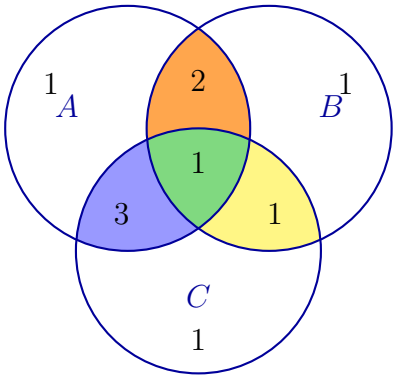
Vậy chọn đáp án A.

Câu 56. Lớp $10A$ có 7 học sinh giỏi Toán, 5 học sinh giỏi Vật lý, 6 học sinh giỏi Hóa học, 3 học sinh giỏi cả Toán và Hóa học, 4 học sinh giỏi cả Toán và Vật lý, 2 học sinh giỏi cả Vật lý và Hóa học, 1 học sinh giỏi cả ba môn Toán, Vật lý, Hóa học. Tính số học sinh giỏi ít nhất một môn (Toán, Vật lý, Hóa học) của lớp $10A$.

Ⓐ 10. Ⓑ 20. Ⓒ 17. Ⓓ 9.

Hướng dẫn giải. Gọi A, B, C lần lượt là tập hợp các bạn học sinh giỏi Toán, Vật lí, Hóa học.

Ta dùng biểu đồ Ven để giải toán: Dựa vào dữ kiện bài toán, ta biểu diễn các bạn học sinh học giỏi các môn như hình vẽ dưới.



Nhìn vào biểu đồ, số học sinh giỏi ít nhất 1 trong 3 môn là:
$n(A \cup B \cup C) = 1 + 2 + 1 + 3 + 1 + 1 + 1 = 10$ (học sinh).

Câu 57. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $2 \in (3; +\infty)$. Ⓑ $3 \in (3; +\infty)$.
Ⓒ $4 \notin (3; +\infty)$. Ⓓ $5 \in (3; +\infty)$.

Hướng dẫn giải. Khoảng $(3; +\infty)$ bao gồm các số thực lớn hơn 3.

- $2 < 3$ nên $2 \notin (3; +\infty)$.
- Số 3 không thuộc khoảng $(3; +\infty)$ (ngoặc tròn).
- $4 > 3$ nên $4 \in (3; +\infty)$.
- $5 > 3$ nên $5 \in (3; +\infty)$.

Vậy mệnh đề đúng là $5 \in (3; +\infty)$. Chọn đáp án D.

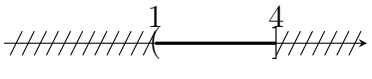
Câu 58. Dùng các kí hiệu khoảng, đoạn, nửa khoảng viết lại tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x < 3\}$ là

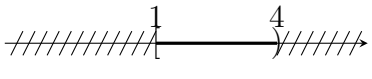
Ⓐ $(-5; 3)$. Ⓑ $(-5; 3]$. Ⓒ $[-5; 3]$. Ⓓ $[-5; 3)$.

Hướng dẫn giải. Lời giải:

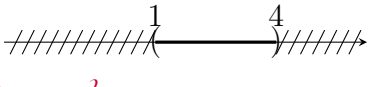
Áp dụng quy tắc viết các tập con của tập số thực $A = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} = [a; b)$.
Từ đó, ta có: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x < 3\} = [-5; 3)$.
Chọn đáp án D.

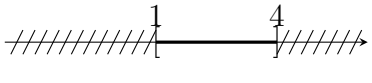
Câu 59. Hình vẽ nào sau đây (phần không bị gạch) minh họa cho tập hợp $(1; 4]$?

Ⓐ 

. Ⓑ 

.

Ⓒ 

. Ⓓ 

.

Hướng dẫn giải. Tập hợp $(1; 4]$ là nửa khoảng bao gồm các số thực x sao cho $1 < x \leq 4$. Kí hiệu trên trục số sẽ là ngoặc tròn tại 1 và ngoặc vuông tại 4.
Chọn đáp án A.

Câu 60. Sử dụng các kí hiệu đoạn, khoảng, nửa khoảng để viết tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 3\}$.

Ⓐ $A = [3; +\infty)$. Ⓑ $A = (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.

Ⓒ $A = [-3; 3]$. Ⓓ $A = (-3; 3)$.

Hướng dẫn giải. Lời giải:

Theo tính chất của bất đẳng thức chứa giá trị tuyệt đối ta có $|x| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$.
Vậy $A = [-3; 3]$.
Chọn đáp án C.

Câu 61. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $(-\infty; 4) \cap \mathbb{N} = (-\infty; 4)$. Ⓑ $(-\infty; 4) \cap \mathbb{N} = [0; 4)$.
Ⓒ $(-\infty; 4) \cap \mathbb{N} = \{0; 3\}$. Ⓓ $(-\infty; 4) \cap \mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3\}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$.
Giao của tập $(-\infty; 4)$ và $\mathbb{N}$ là tập các số tự nhiên nhỏ hơn 4.
Vậy $(-\infty; 4) \cap \mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3\}$.
Chọn đáp án D.

Câu 62. Cho tập hợp $X = (-\infty; 2] \cap (-6; +\infty)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $X = (-6; 2]$. Ⓑ $X = (-\infty; +\infty)$.
Ⓒ $X = (-\infty; 2]$. Ⓓ $X = (-6; +\infty)$.

Hướng dẫn giải. Tập hợp X là phần chung của nửa khoảng $(-\infty; 2]$ và khoảng $(-6; +\infty)$.
Ta có: $(-\infty; 2] \cap (-6; +\infty) = (-6; 2]$.
Chọn đáp án A.

Câu 63. Cho hai tập hợp $A = (-1; +\infty)$, $B = (-\infty; 3]$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $A \setminus B = (3; +\infty)$. Ⓑ $A \setminus B = (-1; 3)$.
Ⓒ $A \setminus B = [3; +\infty)$. Ⓓ $A \setminus B = (-\infty; 1]$.

Hướng dẫn giải.

Bằng việc biểu diễn trên trục số ta có $A \setminus B = (3; +\infty)$.
Chọn đáp án A.

Câu 64. Cho hai tập $A = [-1; 2]$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 0\}$. Tìm $A \cup B$.

Ⓐ $A \cup B = (-3; 2]$. Ⓑ $A \cup B = [-1; 0)$.
Ⓒ $A \cup B = (0; 2]$. Ⓓ $A \cup B = (-3; 2)$.

Hướng dẫn giải.

Ta có $A = [-1; 2]$; $B = (-3; 0)$. Suy ra $A \cup B = (-3; 2]$.
Chọn đáp án A.

Câu 65. Cho hai tập hợp $A = [-2; 5)$ và $B = (-3; +\infty)$. Tìm tập hợp $C_B A$.

Ⓐ $C_B A = [-2; 5)$. Ⓑ $C_B A = (-3; -2] \cup [5; +\infty)$.
Ⓒ $C_B A = [-2; 5)$. Ⓓ $C_B A = (-3; -2) \cup [5; +\infty)$.

Hướng dẫn giải.

Ta có $A \subset B$ nên $C_B A = B \setminus A = (-3; -2) \cup [5; +\infty)$.
Chọn đáp án D.

Câu 66. Tập hợp $(-\infty; 2) \cup [0; 5]$ bằng tập hợp nào sau đây?

Ⓐ $(-\infty; 5]$. Ⓑ $[2; 5]$. Ⓒ $[0; 2)$. Ⓓ $(-\infty; 0)$.

Hướng dẫn giải.

Ta có: $(-\infty;2)\cup[0;5]=(-\infty;5]$.
Chọn đáp án A.

Câu 67. Cho tập hợp $C_{\mathbb{R}}A=(1;5)$ và tập hợp $B=(0;+\infty)$. Khi đó, $A\setminus B$ bằng

Ⓐ $(-\infty;0]$. Ⓑ $\emptyset$. Ⓒ $(-\infty;0)$. Ⓓ $(0;1)$.

Hướng dẫn giải.

Ta có $C_{\mathbb{R}}A=(1;5)\Rightarrow A=(-\infty;1]\cup[5;+\infty)$.
$\Rightarrow A\setminus B=(-\infty;0]$.
Chọn đáp án A.

Câu 68. Biết rằng $C_{\mathbb{R}}A=[-3;11)$ và $C_{\mathbb{R}}B=(-8;1]$. Khi đó, $C_{\mathbb{R}}(A\cap B)$ bằng

Ⓐ $(-8;11)$. Ⓑ $[3;1]$.
Ⓒ $(-\infty;-8]\cup[11;+\infty)$. Ⓓ $(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$.

Hướng dẫn giải.

Cách 1:
Ta có: $\begin{cases}C_{\mathbb{R}}A=[-3;11)\longrightarrow A=(-\infty;-3)\cup[11;+\infty)\\ C_{\mathbb{R}}B=(-8;1]\longrightarrow B=(-\infty;-8]\cup(1;+\infty)\end{cases}$
Suy ra: $A\cap B=(-\infty;-8]\cup[11;+\infty)$.
Vậy $C_{\mathbb{R}}(A\cap B)=(-8;11)$.
Cách 2:
Ta có: $C_{\mathbb{R}}(A\cap B)=C_{\mathbb{R}}A\cup C_{\mathbb{R}}B=[-3;11)\cup(-8;1]=(-8;11)$.
Chọn đáp án A.

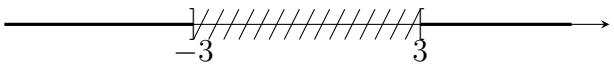
Câu 69. Kí hiệu nào sau đây dùng để viết đúng mệnh đề "$\sqrt{3}$ không phải là số hữu tỉ"?

Ⓐ $\sqrt{3}\neq\mathbb{Q}$. Ⓑ $\sqrt{3}\not\subset\mathbb{Q}$. Ⓒ $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$. Ⓓ $\sqrt{3}\in\mathbb{Q}$.

Hướng dẫn giải. Số $\sqrt{3}$ là một phần tử, $\mathbb{Q}$ là một tập hợp.

Để biểu diễn một phần tử không thuộc tập hợp, ta dùng kí hiệu $\notin$. Vậy chọn đáp án C.

Câu 70. Hình vẽ sau đây phần **không** bị gạch minh họa cho một tập con của tập số thực. Hỏi tập đó là tập nào?



Ⓐ $\mathbb{R}\setminus[-3;+\infty)$. Ⓑ $\mathbb{R}\setminus(-\infty;3)$.
Ⓒ $\mathbb{R}\setminus(-3;3)$. Ⓓ $\mathbb{R}\setminus[-3;3)$.

Hướng dẫn giải. Phần bị gạch bỏ trên trục số là nửa khoảng $[-3;3)$.

Do đó phần không bị gạch minh họa cho tập hợp $\mathbb{R}\setminus[-3;3)$. Vậy chọn đáp án C.

Câu 71. Mệnh đề phủ định của mệnh đề "14 là số nguyên tố" là mệnh đề:

Ⓐ 14 là số nguyên tố. Ⓑ 14 chia hết cho 2.
Ⓒ 14 không phải là số nguyên tố. Ⓓ 14 chia hết cho 7.

Hướng dẫn giải. Phủ định của khẳng định "là" là "không phải là".

Vậy mệnh đề phủ định là: "14 không phải là số nguyên tố". Chọn đáp án C.

Câu 72. Cho hai tập hợp $A=(-1;+\infty)$, $B=(-\infty;3]$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

Ⓐ $A \setminus B = (3; +\infty)$. Ⓑ $A \setminus B = (-1; 3)$.
Ⓒ $A \setminus B = [3; +\infty)$. Ⓓ $A \setminus B = (-\infty; 1]$.

Hướng dẫn giải. Bằng việc biểu diễn trên trục số ta có $A \setminus B = (3; +\infty)$. Chọn đáp án A.

Câu 73. Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp $D = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}, |k| \leq 2\}$.

Ⓐ $A = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$. Ⓑ $A = \{0; 1; 2\}$.
Ⓒ $A = \{1; 3; 5\}$. Ⓓ $A = \{-3; -1; 1; 3; 5\}$.

Hướng dẫn giải. Vì $k \in \mathbb{Z}$ và $|k| \leq 2$ nên $k \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Tính biểu thức $2k + 1$:

- Với $k = -2 \Rightarrow 2(-2) + 1 = -3$.
- Với $k = -1 \Rightarrow 2(-1) + 1 = -1$.
- Với $k = 0 \Rightarrow 2(0) + 1 = 1$.
- Với $k = 1 \Rightarrow 2(1) + 1 = 3$.
- Với $k = 2 \Rightarrow 2(2) + 1 = 5$.

Ta được $A = \{-3; -1; 1; 3; 5\}$. Chọn đáp án D.

Câu 74. Cho tập hợp $X = \{1; 3; 9\}$. Hỏi tập hợp X có bao nhiêu tập hợp con?

Ⓐ 3. Ⓑ 6. Ⓒ 8. Ⓓ 9.

Hướng dẫn giải. Tập hợp X có 3 phần tử. Số tập hợp con của nó là $2^3 = 8$.

Các tập hợp con của tập hợp X là: $\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{9\}, \{1; 3\}, \{3; 9\}, \{1; 9\}, \{1; 3; 9\}$. Vậy chọn đáp án C.

Câu 75. Cho hai tập hợp $A = \{1; 2; 5; 7\}$ và $B = \{1; 2; 3\}$. Có tất cả bao nhiêu tập X thỏa $X \subset A$ và $X \subset B$?

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

Hướng dẫn giải. Vì $X \subset A$ và $X \subset B$ nên $X \subset A \cap B = \{1; 2\}$.

Các tập X là tập con của $\{1; 2\}$ gồm: $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1; 2\}$.

Có tất cả 4 tập hợp thỏa mãn. Chọn đáp án D.

Câu 76. Sử dụng các kí hiệu đoạn, khoảng, nửa khoảng để viết tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 3\}$.

Ⓐ $A = [3; +\infty)$. Ⓑ $A = (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.
Ⓒ $A = [-3; 3]$. Ⓓ $A = (-3; 3)$.

Hướng dẫn giải. Theo tính chất của bất đẳng thức chứa giá trị tuyệt đối ta có $|x| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x \leq 3$.

Dưới dạng đoạn, tập hợp này được viết là $A = [-3; 3]$. Chọn đáp án C.

Câu 77. Biết A là mệnh đề sai và B là mệnh đề đúng. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $B \Rightarrow \bar{A}$. Ⓑ $B \Leftrightarrow A$. Ⓒ $\bar{A} \Leftrightarrow \bar{B}$. Ⓓ $B \Rightarrow A$.

Hướng dẫn giải. Ta có A sai nên $\bar{A}$ là mệnh đề đúng.

Vì B và $\bar{A}$ đều là các mệnh đề đúng nên mệnh đề kéo theo $B \Rightarrow \bar{A}$ là mệnh đề đúng.

Chọn đáp án A.

Câu 78. Cho hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$. Xét các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}$, $C = \{x \in \mathbb{R} \mid f^2(x) + g^2(x) = 0\}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $C = A \cup B$. Ⓑ $C = A \cap B$. Ⓒ $C = A \setminus B$. Ⓓ $C = B \setminus A$.

Hướng dẫn giải. Ta có $f^2(x) + g^2(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$.

Điều này tương ứng với việc x phải thuộc cả tập A và tập B.

Nên $C = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0, g(x) = 0\} = A \cap B$. Chọn đáp án B.

Câu 79. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào có mệnh đề đảo đúng?

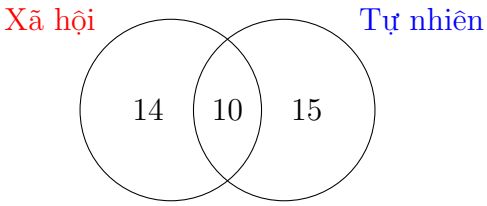
Ⓐ Nếu $a + b > 2$ thì có ít nhất một trong hai số a, b lớn hơn 1.
Ⓑ Nếu một số tự nhiên chia hết cho 6 thì số đó chia hết cho 3.
Ⓒ Nếu tứ giác là hình vuông thì hai đường chéo vuông góc với nhau.
Ⓓ Trong một tam giác cân hai đường cao bằng nhau.

Hướng dẫn giải. Xét đáp án D: "Nếu tam giác có hai đường cao bằng nhau thì tam giác đó là tam giác cân". Đây là một tính chất đúng trong hình học. Các đáp án khác có mệnh đề đảo sai hoặc không đủ điều kiện. Chọn đáp án D.

Câu 80. Một lớp học có 25 học sinh học khá các môn tự nhiên, 24 học sinh học khá các môn xã hội, 10 học sinh học khá cả môn tự nhiên lẫn môn xã hội, đặc biệt vẫn còn 3 học sinh chưa học khá cả hai nhóm môn ấy. Hỏi lớp có bao nhiêu học sinh chỉ khá đúng một nhóm môn (tự nhiên hoặc xã hội).

Ⓐ 39. Ⓑ 26. Ⓒ 29. Ⓓ 36.

Hướng dẫn giải. Từ biểu đồ Ven, ta có:



- Số học sinh chỉ khá môn tự nhiên: $25 - 10 = 15$.

- Số học sinh chỉ khá môn xã hội: $24 - 10 = 14$.

Vậy số học sinh chỉ khá đúng 1 nhóm môn là: $15 + 14 = 29$. Chọn đáp án C.

Câu 81. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề đúng?

Ⓐ Tam giác cân là tam giác có ba cạnh bằng nhau.
Ⓑ Hai tam giác có diện tích bằng nhau thì hai tam giác ấy bằng nhau.
Ⓒ Hai tam giác bằng nhau nếu chúng có hai cạnh bằng nhau.
Ⓓ Hai tam giác bằng nhau thì có diện tích bằng nhau.

Hướng dẫn giải.

- Đáp án A sai vì đây là định nghĩa của tam giác đều.
- Đáp án B sai vì hai tam giác có cùng diện tích chưa chắc đã có các cạnh và góc tương ứng bằng nhau.
- Đáp án C sai vì cần thêm điều kiện về góc xen giữa hoặc cạnh thứ ba.
- Đáp án D đúng vì hai tam giác bằng nhau sẽ có các kích thước tương ứng bằng nhau, dẫn đến diện tích bằng nhau.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 82. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $0 = \{0\}$. Ⓑ $0 \in \{0\}$. Ⓒ $0 \subset \{0\}$. Ⓓ $0 = \emptyset$.

Hướng dẫn giải.

- Đáp án A sai vì vế trái là một số, vế phải là một tập hợp.
- Đáp án B đúng vì số 0 là một phần tử thuộc tập hợp $\{0\}$.
- Đáp án C sai vì kí hiệu $\subset$ dùng để chỉ quan hệ giữa tập hợp và tập hợp.
- Đáp án D sai vì số 0 khác với tập hợp rỗng.

Vậy chọn đáp án B.

Câu 83. Cho mệnh đề $P \Rightarrow Q$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ Q là điều kiện cần và đủ để có P.
Ⓑ P là điều kiện cần để có Q.
Ⓒ Q là điều kiện đủ để có P.
Ⓓ P là điều kiện đủ để có Q.

Hướng dẫn giải. Trong mệnh đề kéo theo $P \Rightarrow Q$:

- P được gọi là giả thiết, hay là **điều kiện đủ** để có Q.
- Q được gọi là kết luận, hay là **điều kiện cần** để có P.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 84. Cho hai tập hợp $A = (-\infty; 5]$ và $B = (3; 8)$. Tập hợp $A \cap B$ bằng

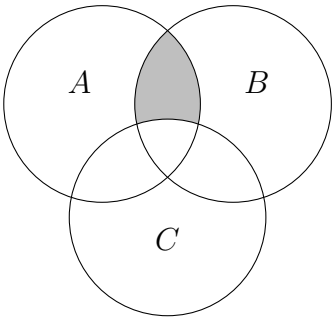
Ⓐ $(-\infty; 8)$. Ⓑ $(3; 5]$. Ⓒ $(5; 8)$. Ⓓ $[3; 8)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5 \text{ và } 3 < x < 8\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leq 5\}$.

Dưới dạng khoảng, tập hợp này là $(3; 5]$.

Vậy chọn đáp án B.

Câu 85. Cho các tập hợp A, B, C được minh họa bằng biểu đồ Ven như hình vẽ bên dưới:



Phần tô màu xám trong hình là biểu diễn của tập hợp nào sau đây?

Ⓐ $(A \cap B) \setminus C$. Ⓑ $(A \setminus C) \cup (A \setminus B)$.
Ⓒ $(A \cup B) \setminus C$. Ⓓ $A \cap B \cap C$.

Hướng dẫn giải. Phần được tô màu xám nằm trong vùng chung của hai tập hợp A và B (vùng $A \cap B$) nhưng không nằm trong tập hợp C.

Do đó, phần tô màu xám biểu diễn tập hợp $(A \cap B) \setminus C$.

Vậy chọn đáp án A.

Câu 86. Cho mệnh đề "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 < 0$". Mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề phủ định của mệnh đề đã cho?

(A) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 < 0$.
(B) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 > 0$.
(C) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 < 0$.
(D) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 \geq 0$.

Hướng dẫn giải. Phủ định của kí hiệu $\forall$ là $\exists$, và phủ định của bất đẳng thức $<$ là $\geq$.

Do đó, phủ định của mệnh đề trên là "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 \geq 0$".

Vậy chọn đáp án D.

Câu 87. Cho tập hợp $B = (-3; +\infty)$. Khi đó, tập hợp $C_{\mathbb{R}}B$ bằng

(A) $(-\infty; 3)$.
(B) $(-\infty; -3]$.
(C) $\emptyset$.
(D) $[-3; +\infty)$.

Hướng dẫn giải. Phần bù của tập hợp B trong $\mathbb{R}$ là tập các giá trị không thuộc B.

Vì B là các số thực lớn hơn -3 nên $C_{\mathbb{R}}B$ là các số thực nhỏ hơn hoặc bằng -3.

$C_{\mathbb{R}}B = (-\infty; -3]$. Vậy chọn đáp án B.

Câu 88. Dùng kí hiệu $\forall x \in X, P(x)$ hoặc $\exists x \in X, P(x)$ để viết lại mệnh đề sau: "Mọi số tự nhiên đều không âm."

(A) $\forall x \in \mathbb{N}, x \geq 0$.
(B) $\forall x \in \mathbb{N}^*, x > 0$.
(C) $\exists x \in \mathbb{N}^*, x > 0$.
(D) $\exists x \in \mathbb{N}, x \geq 0$.

Hướng dẫn giải. - "Mọi" tương ứng với kí hiệu $\forall$.

- "Số tự nhiên" là tập hợp $\mathbb{N}$.
- "Không âm" nghĩa là lớn hơn hoặc bằng 0 ($x \geq 0$).

Vậy mệnh đề được viết là $\forall x \in \mathbb{N}, x \geq 0$. Chọn đáp án A.

Câu 89. Xét các phát biểu sau:
(1): Số 3 là một số chẵn.
(2): $2x + 1 = 3$.
(3): Các em hãy cố gắng làm bài thi cho tốt nhé!
(4): $1 < 5 \Rightarrow 8 < 6$.
Trong các phát biểu trên, có bao nhiêu phát biểu là mệnh đề?

(A) 1.
(B) 2.
(C) 4.
(D) 3.

Hướng dẫn giải.

- (1) là mệnh đề sai.
- (2) là mệnh đề chứa biến, không phải mệnh đề (theo chương trình phổ thông).
- (3) là câu cảm thán/khích lệ, không phải mệnh đề.
- (4) là mệnh đề sai (giả thiết đúng, kết luận sai).

Có 2 phát biểu là mệnh đề gồm (1) và (4). Vậy chọn đáp án B.

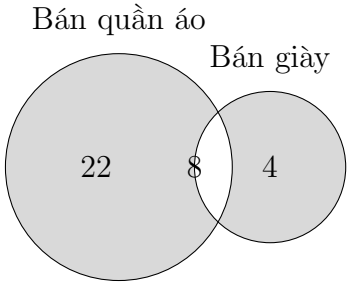
Câu 90. Thống kê tại một trung tâm mua sắm có 30 cửa hàng bán quần áo, 12 cửa hàng có bán giày và 34 cửa hàng bán ít nhất một trong hai mặt hàng này. Có bao nhiêu cửa hàng chỉ bán một trong hai loại quần áo hoặc giày?

(A) 42.
(B) 26.
(C) 14.
(D) 30.

Hướng dẫn giải. Gọi x là số cửa hàng bán cả hai mặt hàng quần áo và giày.

Theo công thức bao hàm - loại trừ, ta có: $30 + 12 - x = 34 \Rightarrow x = 8$.

Biểu diễn qua biểu đồ Ven:



- Số cửa hàng chỉ bán quần áo: $30 - 8 = 22$.

- Số cửa hàng chỉ bán giày: $12 - 8 = 4$.

Số cửa hàng chỉ bán một trong hai mặt hàng là: $22 + 4 = 26$. Vậy chọn đáp án B.

Câu 91. Cho hai tập hợp $A = \{-1; 2; 3; 5; 7\}$, $B = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Khi đó, tập hợp $A \cap B$ là

(A) $\{-1; 1; 2; 3; 4; 5; 7\}$. (B) $\{2; 3; 5\}$.
(C) $\{7\}$. (D) $\{-1\}$.

Hướng dẫn giải. Giao của hai tập hợp A và B là tập các phần tử thuộc cả A và B.

Các phần tử chung là $\{2; 3; 5\}$. Vậy chọn đáp án B.

Câu 92. Cho tập hợp $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 7\}$. Khi đó:

(A) $S = [2; 7]$. (B) $S = [2; 7)$. (C) $S = (2; 7)$. (D) $S = (2; 7]$.

Hướng dẫn giải. Biểu thức $2 < x \leq 7$ tương ứng với khoảng từ 2 (không lấy giá trị 2 - ngoặc tròn) đến 7 (lấy giá trị 7 - ngoặc vuông).

Kí hiệu là $(2; 7]$. Vậy chọn đáp án D.

Câu 93. Phát biểu nào sau đây là mệnh đề?

(A) Hà Nội là thủ đô của Việt Nam.
(B) Ước gì hôm nay trời không mưa!.
(C) $x + 5 = 8$.
(D) Con mèo này thật đáng yêu!.

Hướng dẫn giải. Mệnh đề là một câu khẳng định có tính đúng hoặc sai rõ ràng.

- Đáp án A: "Hà Nội là thủ đô của Việt Nam" là một khẳng định đúng, nên là một mệnh đề.
- Đáp án B: Là câu cảm thán, không phải mệnh đề.
- Đáp án C: Là mệnh đề chứa biến, giá trị đúng sai phụ thuộc vào x.
- Đáp án D: Là câu biểu cảm mang tính chủ quan, không phải mệnh đề.

Vậy chọn đáp án A.

Câu 94. Phủ định của mệnh đề "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$" là:

(A) "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$". (B) "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0$".
(C) "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \leq 0$". (D) "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \leq 0$".

Hướng dẫn giải. Theo quy tắc phủ định: Phủ định của $\forall$ là $\exists$, phủ định của $>$ là $\leq$.

Vậy phủ định của mệnh đề "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$" là "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \leq 0$".

Chọn đáp án C.

Câu 95. Cho tập hợp $A = \{a; b; c\}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $a \subset A$. Ⓑ $\{a\} \in A$. Ⓒ $\emptyset \not\subset A$. Ⓓ $A \subset A$.

Hướng dẫn giải.

- Đáp án A: Sai vì a là phần tử, phải dùng kí hiệu $a \in A$.
- Đáp án B: Sai vì $\{a\}$ là tập hợp con, phải dùng kí hiệu $\{a\} \subset A$.
- Đáp án C: Sai vì tập hợp rỗng là tập con của mọi tập hợp ($\emptyset \subset A$).
- Đáp án D: Đúng vì mọi tập hợp đều là tập hợp con của chính nó.

Vậy chọn đáp án D.

Câu 96. Mệnh đề "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 13$" được phát biểu là

Ⓐ Bình phương của mỗi số thực bằng 13.
Ⓑ Có ít nhất một số thực mà bình phương của nó bằng 13.
Ⓒ Chỉ có một số thực mà bình phương của nó bằng 13.
Ⓓ Bình phương của mỗi số thực đều không bằng 13.

Hướng dẫn giải. Kí hiệu $\exists$ có nghĩa là "tồn tại" hoặc "có ít nhất một".

Do đó, mệnh đề "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 13$" được phát biểu là: "Có ít nhất một số thực mà bình phương của nó bằng 13".

Chọn đáp án B.

Câu 97. Cho hai tập hợp $A = \{1, 3, 5, 7\}$ và $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Tập hợp $A \setminus B$ là tập nào sau đây?

Ⓐ $\{5; 7\}$. Ⓑ $\{1; 2; 3; 4; 5; 7\}$.
Ⓒ $\{1; 3\}$. Ⓓ $A = \{1; 2; 4\}$.

Hướng dẫn giải. Tập hợp $A \setminus B$ gồm các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B.

Các phần tử thuộc cả A và B là $\{1; 3\}$. Loại bỏ chúng khỏi A, ta còn $\{5; 7\}$.

Chọn đáp án A.

Câu 98. Xét các khẳng định sau:

a) Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng có diện tích bằng nhau.

b) Hai tam giác bằng nhau khi và chỉ khi chúng đồng dạng và có một cạnh bằng nhau.

c) Một tam giác là tam giác vuông khi và chỉ khi nó có một góc bằng tổng của hai góc còn lại.

d) Một tam giác là tam giác đều khi và chỉ khi nó có hai phân giác bằng nhau và một góc bằng $60°$.

Số khẳng định đúng trong các khẳng định trên là

Ⓐ 1. Ⓑ 3. Ⓒ 2. Ⓓ 4.

Hướng dẫn giải.

- a) Sai: Hai tam giác có diện tích bằng nhau chưa chắc đã bằng nhau.
- b) Sai: Cần phải là các cạnh tương ứng bằng nhau.
- c) Đúng: Nếu $A = B + C$, mà $A + B + C = 180° \Rightarrow 2A = 180° \Rightarrow A = 90°$ (tam giác vuông).
- d) Đúng: Hai phân giác bằng nhau là tam giác cân, có thêm một góc $60°$ nên là tam giác đều.

Vậy có 2 khẳng định đúng. Chọn đáp án C.

Câu 99. Cho hai tập hợp $A=\{0;1;2;3;4\}$, $B=\{3;4;5;6\}$. Tập hợp $A\cup B$ là

Ⓐ $\{0;1;2;3;4;5;6\}$. Ⓑ $\{3;4\}$.
Ⓒ $\{0;1;2\}$. Ⓓ $\{5;6\}$.

Hướng dẫn giải. Tập hợp $A\cup B$ là tập hợp chứa tất cả các phần tử thuộc A hoặc thuộc B.
$A\cup B=\{0;1;2;3;4;5;6\}$. Chọn đáp án A.

Câu 100. Cho tập hợp $A=[-2;5)$ và $B=[0;+\infty)$. Tìm $A\cup B$.

Ⓐ $A\cup B=[-2;0)$. Ⓑ $A\cup B=[0;5)$.
Ⓒ $A\cup B=[-2;+\infty)$. Ⓓ $A\cup B=[5;+\infty)$.

Hướng dẫn giải. Hợp của hai tập hợp trên trục số: $[-2;5)\cup[0;+\infty)=[-2;+\infty)$.
Chọn đáp án C.

Câu 101. Trong các tập hợp sau, tập nào là tập rỗng?

Ⓐ $Q=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2-7=0\}$. Ⓑ $M=\{x\in\mathbb{N}\mid x^2-3=0\}$.
Ⓒ $P=\{x\in\mathbb{Z}\mid x^2-4x+3=0\}$. Ⓓ $N=\{x\in\mathbb{Q}\mid 3x-4=0\}$.

Hướng dẫn giải.

- A: $x^2=7\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{7}\in\mathbb{R}\Rightarrow Q\neq\emptyset$.
- B: $x^2=3\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$. Vì $\pm\sqrt{3}\notin\mathbb{N}$ nên $M=\emptyset$.
- C: $x^2-4x+3=0\Leftrightarrow x=1, x=3$. Vì $1,3\in\mathbb{Z}$ nên $P=\{1;3\}\neq\emptyset$.
- D: $3x=4\Leftrightarrow x=\dfrac{4}{3}\in\mathbb{Q}\Rightarrow N\neq\emptyset$.

Chọn đáp án B.

Câu 102. Cho các tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2-7x+6=0\}$, $B=\{x\in\mathbb{N}\mid |x|<4\}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $A\cup B=A$. Ⓑ $A\cap B=A\cup B$.
Ⓒ $A\setminus B\neq\emptyset$. Ⓓ $B\setminus A=\emptyset$.

Hướng dẫn giải.

- Giải $x^2-7x+6=0\Rightarrow A=\{1;6\}$.
- Giải $|x|<4$ với $x\in\mathbb{N}\Rightarrow B=\{0;1;2;3\}$.
- Ta có $A\setminus B=\{6\}$, do đó $A\setminus B\neq\emptyset$ là khẳng định đúng.

Chọn đáp án C.

Câu 103. Cho hai tập hợp $A=[-3;3)$, $B=[0;5]$. Tập hợp $A\setminus B$ bằng

Ⓐ $[0;3)$. Ⓑ $[-3;5]$. Ⓒ $[3;5]$. Ⓓ $[-3;0)$.

Hướng dẫn giải. $A\setminus B$ là phần thuộc A nhưng không thuộc B.

Trên trục số, hiệu của $[-3;3)$ và $[0;5]$ là $[-3;0)$.

Chọn đáp án D.

Câu 104. Cho tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}\mid -2\le x<5\}$. Phần bù của A trong $\mathbb{R}$ là

Ⓐ $(-\infty;-2)\cup[5;+\infty)$. Ⓑ $(-\infty;-2]\cup(5;+\infty)$.
Ⓒ $(-\infty;-2]$. Ⓓ $[-2;5)$.

Hướng dẫn giải. Tập hợp A là nửa khoảng $[-2;5)$.

Phần bù $C_{\mathbb{R}}A = \mathbb{R} \setminus [-2;5) = (-\infty;-2) \cup [5;+\infty)$.

Chọn đáp án A.

Câu 105. Cho mệnh đề: "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2+3x+5>0$". Mệnh đề phủ định của mệnh đề trên là

(A) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2+3x+5 \le 0$.
(B) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2+3x+5 \le 0$.
(C) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2+3x+5 < 0$.
(D) $\exists x \in \mathbb{R}, x^2+3x+5 > 0$.

Hướng dẫn giải. Chú ý: Phủ định của mệnh đề "$\forall x \in X, P(x)$" là "$\exists x \in X, \overline{P(x)}$".

Phủ định của kí hiệu $\forall$ là $\exists$, phủ định của dấu $>$ là dấu $\le$. Vậy chọn đáp án B.

Câu 106. Phủ định của mệnh đề: "$\forall n \in \mathbb{N} : n^2+1$ không chia hết cho 3" là:

(A) "$\forall n \in \mathbb{N} : n^2+1$ chia hết cho 3".
(B) "$\exists n \in \mathbb{N} : n^2+1$ không chia hết cho 3".
(C) "$\exists n \in \mathbb{N} : n^2+1$ chia hết cho 3".
(D) "$\nexists n \in \mathbb{N} : n^2+1$ không chia hết cho 3".

Hướng dẫn giải. Phủ định của $\forall$ là $\exists$.

Phủ định của "không chia hết" là "chia hết". Vậy chọn đáp án C.

Câu 107. Phủ định của mệnh đề: "$\exists x \in \mathbb{R} : x^2+x+1$ là số dương" là:

(A) "$\forall x \in \mathbb{R} : x^2+x+1$ là số không dương".
(B) "$\forall x \in \mathbb{R} : x^2+x+1$ là số âm".
(C) "$\forall x \in \mathbb{R} : x^2+x+1$ là số dương".
(D) "$\nexists x \in \mathbb{R} : x^2+x+1$ là số dương".

Hướng dẫn giải. Phủ định của $\exists$ là $\forall$.

Phủ định của "số dương" (>0) là "số không dương" (≤ 0). Vậy chọn đáp án A.

Câu 108. Cho mệnh đề "Có một học sinh trong lớp C4 không chấp hành luật giao thông". Mệnh đề phủ định của mệnh đề này là

(A) Không có học sinh nào trong lớp C4 chấp hành luật giao thông.
(B) Mọi học sinh trong lớp C4 đều chấp hành luật giao thông.
(C) Có một học sinh trong lớp C4 chấp hành luật giao thông.
(D) Mọi học sinh trong lớp C4 không chấp hành luật giao thông.

Hướng dẫn giải. Mệnh đề phủ định là "Mọi học sinh trong lớp C4 đều chấp hành luật giao thông". Vậy chọn đáp án B.

Câu 109. Cho mệnh đề: "Có một học sinh trong lớp 10A không thích học môn Toán". Mệnh đề phủ định của mệnh đề này là:

(A) "Mọi học sinh trong lớp 10A đều thích học môn Toán".
(B) "Mọi học sinh trong lớp 10A đều không thích học môn Toán".
(C) "Mọi học sinh trong lớp 10A đều thích học môn Văn".
(D) "Có một học sinh trong lớp 10A thích học môn Toán".

Hướng dẫn giải. Mệnh đề phủ định là "Mọi học sinh trong lớp 10A đều thích học môn Toán".

Vậy chọn đáp án A.

Câu 110. Mệnh đề "Mọi động vật đều di chuyển" có mệnh đề phủ định là

(A) Có ít nhất một động vật di chuyển.

Ⓑ Mọi động vật đều đứng yên.
Ⓒ Có ít nhất một động vật không di chuyển.
Ⓓ Mọi động vật đều không di chuyển.

Hướng dẫn giải. Mệnh đề phủ định là "Có ít nhất một động vật không di chuyển". Vậy chọn đáp án C.

Câu 111. Cho mệnh đề "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 < 0$". Hỏi mệnh đề nào là mệnh đề phủ định của mệnh đề trên?

Ⓐ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 \geq 0$.
Ⓑ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 > 0$.
Ⓒ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 < 0$.
Ⓓ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - x + 7 < 0$.

Hướng dẫn giải. Đáp án A đúng. Các phương án khác sai vì:
- B: không dùng đúng kí hiệu của phủ định ($\forall$ phải thành $\exists$).
- C: không phủ định dấu $<$.
- D: chưa phủ định vế sau của mệnh đề ($<$ phải thành $\geq$). Vậy chọn đáp án A.

Câu 112. Cho mệnh đề: "$\exists x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 3x - 5 < 0$". Mệnh đề phủ định sẽ là

Ⓐ "$\forall x \in \mathbb{R}, 2x^2 + 3x - 5 \geq 0$".
Ⓑ "$\forall x \in \mathbb{R}, 2x^2 + 3x - 5 > 0$".
Ⓒ "$\exists x \in \mathbb{R}, 2x^2 + 3x - 5 > 0$".
Ⓓ "$\exists x \in \mathbb{R}, 2x^2 + 3x - 5 \geq 0$".

Hướng dẫn giải. - Đáp án A đúng vì phủ định của "$\exists$" là "$\forall$" và phủ định của dấu "$<$" là dấu "$\geq$".
- Đáp án B sai vì nhầm phủ định của dấu "$<$" là dấu "$>$".
- Đáp án C sai vì không đổi lượng từ và dấu.
- Đáp án D sai vì không đổi lượng từ "$\exists$". Vậy chọn đáp án A.

Câu 113. Mệnh đề phủ định của mệnh đề: $a < -\dfrac{2}{3}$ là

Ⓐ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 \leq 0$.
Ⓑ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 \leq 0$.
Ⓒ $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 < 0$.
Ⓓ $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 5 < 0$.

Hướng dẫn giải. chọn đáp án A.

Câu 114. Mệnh đề phủ định của mệnh đề "Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ vô nghiệm" là mệnh đề nào sau đây?

Ⓐ Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có nghiệm.
Ⓑ Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có 2 nghiệm phân biệt.
Ⓒ Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có nghiệm kép.
Ⓓ Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ không có nghiệm.

Hướng dẫn giải. - Đáp án A đúng vì phủ định của "vô nghiệm" là "có nghiệm".
- B sai vì có nghiệm có thể là nghiệm kép.
- C sai vì có nghiệm có thể là 2 nghiệm phân biệt.
- D sai vì đây là mệnh đề tương đương, không phải phủ định. Vậy chọn đáp án A.

Câu 115. Ký hiệu nào sau đây dùng để viết đúng mệnh đề: "3 là một số tự nhiên"?

Ⓐ $3 \subset \mathbb{N}$.
Ⓑ $3 \in \mathbb{N}$.
Ⓒ $3 < \mathbb{N}$.
Ⓓ $3 \leq \mathbb{N}$.

Hướng dẫn giải.

◈ Đáp án A sai vì kí hiệu "$\subset$" chỉ dùng cho quan hệ giữa hai tập hợp, mà ở đây "3" là một số (phần tử).

- Hai đáp án C và D đều sai vì ta không thể so sánh thứ tự giữa một số và một tập hợp.
- Kí hiệu đúng để chỉ một phần tử thuộc một tập hợp là "$\in$".

Vậy chọn đáp án B.

Câu 116. Ký hiệu nào sau đây để chỉ $\sqrt{5}$ không phải là một số hữu tỉ?

Ⓐ $\sqrt{5} \neq \mathbb{Q}$. Ⓑ $\sqrt{5} \not\subset \mathbb{Q}$. Ⓒ $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$. Ⓓ $\sqrt{5} \subset \mathbb{Q}$.

Hướng dẫn giải. Vì $\sqrt{5}$ là một phần tử còn $\mathbb{Q}$ là một tập hợp, để chỉ một phần tử không thuộc tập hợp ta dùng kí hiệu "$\notin$". Các đáp án A, B, D đều sử dụng sai kí hiệu quan hệ. Vậy chọn đáp án C.

Câu 117. Cho tập hợp $A = \{x + 1 \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 5\}$. Tập hợp A là:

Ⓐ $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Ⓑ $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
Ⓒ $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Ⓓ $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Hướng dẫn giải. Vì $x \in \mathbb{N}$ và $x \leq 5$ nên $x \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.
Khi đó các giá trị của $x + 1$ sẽ là:
$0 + 1 = 1; 1 + 1 = 2; 2 + 1 = 3; 3 + 1 = 4; 4 + 1 = 5; 5 + 1 = 6$.
Vậy $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Chọn đáp án D.

Câu 118. Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp $X = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2x^2 - 3x + 1 = 0\}$.

Ⓐ $X = \{0\}$. Ⓑ $X = \{1\}$.
Ⓒ $X = \left\{1; \dfrac{1}{2}\right\}$. Ⓓ $X = \left\{1; \dfrac{3}{2}\right\}$.

Hướng dẫn giải. Giải phương trình $2x^2 - 3x + 1 = 0$, ta được các nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Vì điều kiện $x \in \mathbb{Z}$ (số nguyên) nên ta chỉ nhận $x = 1$, loại $x = \dfrac{1}{2}$ vì $\dfrac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.
Vậy $X = \{1\}$. Chọn đáp án B.

Câu 119. Liệt kê các phần tử của tập hợp $X = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 5x + 3 = 0\}$.

Ⓐ $X = \{0\}$. Ⓑ $X = \{1\}$.
Ⓒ $X = \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$. Ⓓ $X = \left\{1; \dfrac{3}{2}\right\}$.

Hướng dẫn giải. Giải phương trình $2x^2 - 5x + 3 = 0$, ta có $a + b + c = 2 - 5 + 3 = 0$ nên phương trình có nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$$

Vì $1 \in \mathbb{R}$ và $\dfrac{3}{2} \in \mathbb{R}$ nên cả hai giá trị đều thỏa mãn.
Vậy $X = \left\{1; \dfrac{3}{2}\right\}$. Chọn đáp án D.

Câu 120. Trong các tập sau, tập nào là tập rỗng?

Ⓐ $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 1\}$. Ⓑ $\{x \in \mathbb{Z} \mid 6x^2 - 7x + 1 = 0\}$.
Ⓒ $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 4x + 2 = 0\}$. Ⓓ $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 3 = 0\}$.

Hướng dẫn giải. Xét các đáp án:

- Đáp án A: $x \in \mathbb{Z}, |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \Rightarrow x = 0 \neq \emptyset$.
- Đáp án B: $6x^2 - 7x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = \dfrac{1}{6}$. Vì $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 1 \neq \emptyset$.
- Đáp án C: $x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$. Vì $\sqrt{2}$ là số vô tỷ nên $x \notin \mathbb{Q}$. Đây là tập rỗng.
- Đáp án D: $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 3$. Đây là tập hợp khác rỗng.

Vậy chọn đáp án C.

Câu 121. Cho tập hợp $M = \{(x; y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x + y = 1\}$. Hỏi tập M có bao nhiêu phần tử?

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 3.

Hướng dẫn giải. Vì $x, y \in \mathbb{N}$ nên $x, y \in \{0; 1; 2; \dots\}$.

Để $x + y = 1$, các cặp $(x; y)$ thỏa mãn là $(1; 0)$ và $(0; 1)$.

Vậy tập M có 2 phần tử. Chọn đáp án C.

Câu 122. Cho tập hợp $A = \{x^2 + 1 \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 5\}$. Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp A.

Ⓐ $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Ⓑ $A = \{1; 2; 5; 10; 17; 26\}$.
Ⓒ $A = \{2; 5; 10; 17; 26\}$. Ⓓ $A = \{0; 1; 4; 9; 16; 25\}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $x \in \mathbb{N}, x \leq 5 \Rightarrow x \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

Các phần tử của A là các giá trị $x^2 + 1$ tương ứng:

$0^2 + 1 = 1; 1^2 + 1 = 2; 2^2 + 1 = 5; 3^2 + 1 = 10; 4^2 + 1 = 17; 5^2 + 1 = 26$.

Vậy $A = \{1; 2; 5; 10; 17; 26\}$. Chọn đáp án B.

Câu 123. Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp: $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x^4 - 6x^2 + 8 = 0\}$.

Ⓐ $X = \{2; 4\}$. Ⓑ $X = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$.
Ⓒ $X = \{\sqrt{2}; 2\}$. Ⓓ $X = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}; -2; 2\}$.

Hướng dẫn giải. Giải phương trình $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$.

Đặt $t = x^2 \geq 0$, ta có $t^2 - 6t + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 4 \end{array}\right.$

- Với $t = 2 \Rightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.
- Với $t = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$.

Tất cả các nghiệm đều thuộc $\mathbb{R}$. Vậy $X = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}; -2; 2\}$. Chọn đáp án D.

Câu 124. Cho tập hợp $M = \{(x; y) \mid x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 \leq 0\}$. Khi đó tập hợp M có bao nhiêu phần tử?

Ⓐ 0. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ Vô số.

Hướng dẫn giải. Vì $x^2 \geq 0$ và $y^2 \geq 0$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$ nên $x^2 + y^2 \geq 0$.

Do đó, $x^2 + y^2 \leq 0$ chỉ xảy ra khi và chỉ khi $x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.

Khi đó tập hợp M có 1 phần tử duy nhất là cặp $(0; 0)$.

Vậy chọn đáp án B.

Câu 125. Số phần tử của tập hợp: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 + x)^2 = x^2 - 2x + 1\}$ là:

Ⓐ 0. Ⓑ 3. Ⓒ 1. Ⓓ 2.

Hướng dẫn giải. Giải phương trình $(x^2 + x)^2 = x^2 - 2x + 1$ trên $\mathbb{R}$:

$(x^2 + x)^2 - (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + x - x + 1)(x^2 + x + x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2+1)(x^2+2x-1)=0$
Vì $x^2+1>0$ với mọi x, ta có $x^2+2x-1=0 \Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{2}$.
Phương trình có 2 nghiệm thực phân biệt. Vậy chọn đáp án D.

Câu 126. Số tập con của tập hợp: $A=\{x\in\mathbb{R} \mid 3(x^2+x)^2-2x^2-2x=0\}$ là:

Ⓐ 16. Ⓑ 8. Ⓒ 12. Ⓓ 10.

Hướng dẫn giải. Giải phương trình $3(x^2+x)^2-2(x^2+x)=0$.

Đặt $t=x^2+x$, ta có phương trình $3t^2-2t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$

- Với $t=0 \Rightarrow x^2+x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right.$

- Với $t=\dfrac{2}{3} \Rightarrow x^2+x=\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow 3x^2+3x-2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-3\pm\sqrt{33}}{6}$.

Vậy A có 4 phần tử thực phân biệt. Suy ra số tập con của A là $2^4=16$.
Chọn đáp án A.

Câu 127. Số phần tử của tập hợp: $A=\{x\in\mathbb{R} \mid (2x^2+x-4)^2=4x^2-4x+1\}$ là:

Ⓐ 0. Ⓑ 2. Ⓒ 4. Ⓓ 3.

Hướng dẫn giải. Giải phương trình $(2x^2+x-4)^2=(2x-1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2+x-4=2x-1 \\ 2x^2+x-4=-2x+1 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2-x-3=0 \Leftrightarrow x=-1; x=\dfrac{3}{2} \\ 2x^2+3x-5=0 \Leftrightarrow x=1; x=-\dfrac{5}{2} \end{array}\right.$

Vậy A có 4 phần tử phân biệt. Chọn đáp án C.

Câu 128. Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp $X=\{x\in\mathbb{R} \mid x^2+x+1=0\}$:

Ⓐ $X=0$. Ⓑ $X=\{0\}$. Ⓒ $X=\emptyset$. Ⓓ $X=\{\emptyset\}$.

Hướng dẫn giải. Xét phương trình $x^2+x+1=0$ có $\Delta=1^2-4=-3<0$.

Phương trình vô nghiệm trên $\mathbb{R}$, do đó tập hợp X không chứa phần tử nào.

Vậy $X=\emptyset$. Chọn đáp án C.

Câu 129. Số phần tử của tập hợp $A=\{k^2+1 \mid k\in\mathbb{Z}, |k|\le 2\}$ là:

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 5.

Hướng dẫn giải. Ta có $k\in\mathbb{Z}$ và $|k|\le 2 \Leftrightarrow -2\le k\le 2 \Rightarrow k\in\{-2;-1;0;1;2\}$.

Tính các giá trị k^2+1 ứng với mỗi k:

$(-2)^2+1=5; (-1)^2+1=2; 0^2+1=1; 1^2+1=2; 2^2+1=5$.

Các phần tử phân biệt của tập hợp A là $\{1;2;5\}$.

Vậy A có 3 phần tử. Chọn đáp án C.

Câu 130. Trong các tập hợp sau, tập hợp nào là tập hợp rỗng:

Ⓐ $\{x\in\mathbb{Z} \mid |x|<1\}$. Ⓑ $\{x\in\mathbb{Z} \mid 6x^2-7x+1=0\}$.
Ⓒ $\{x\in\mathbb{Q} \mid x^2-4x+2=0\}$. Ⓓ $\{x\in\mathbb{R} \mid x^2-4x+3=0\}$.

Hướng dẫn giải.

- $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 1\} \Rightarrow A = \{0\}$.
- $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 6x^2 - 7x + 1 = 0\}$. Nghiệm là 1 và $\dfrac{1}{6}$. Vì $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow B = \{1\}$.
- $C = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 4x + 2 = 0\}$. Nghiệm là $2 \pm \sqrt{2}$. Vì $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow C = \emptyset$.
- $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 3 = 0\}$. Nghiệm là 1 và $3 \Rightarrow D = \{1; 3\}$.

Chọn đáp án C.

Câu 131. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 1)(x^2 + 2) = 0\}$. Các phần tử của tập A là:

Ⓐ $A = \{-1; 1\}$. Ⓑ $A = \{-\sqrt{2}; -1; 1; \sqrt{2}\}$.
Ⓒ $A = \{-1\}$. Ⓓ $A = \{1\}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $(x^2 - 1)(x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \\ x^2 + 2 = 0 \text{ (vô nghiệm trên } \mathbb{R}) \end{array}\right.$

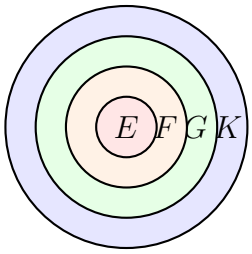
Vậy $A = \{-1; 1\}$. Chọn đáp án A.

Câu 132. Cho ba tập hợp E, F, G thỏa mãn: $E \subset F, F \subset G$ và $G \subset K$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $G \subset F$. Ⓑ $K \subset G$. Ⓒ $E = F = G$. Ⓓ $E \subset K$.

Hướng dẫn giải.

Dùng biểu đồ minh họa ta thấy $E \subset K$.



Vậy chọn đáp án D.

Câu 133. Cho tập hợp $A = \{0; 3; 4; 6\}$. Số tập hợp con gồm hai phần tử của A là:

Ⓐ 12. Ⓑ 8. Ⓒ 10. Ⓓ 6.

Hướng dẫn giải.

Mỗi tập con gồm hai phần tử của A là:

$$\{0; 3\}, \{0; 4\}, \{0; 6\}, \{3; 4\}, \{3; 6\}, \{4; 6\}.$$

Vậy có tất cả 6 tập con như vậy. Chọn đáp án D.

Câu 134. Cho tập hợp $X = \{a; b; c\}$. Số tập con của X là

Ⓐ 4. Ⓑ 6. Ⓒ 8. Ⓓ 12.

Hướng dẫn giải.

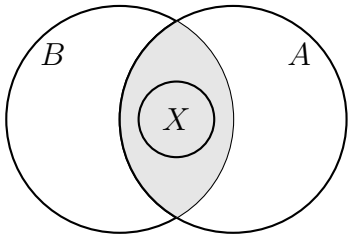
- Số tập con không có phần tử nào là 1 (tập $\emptyset$).
- Số tập con có 1 phần tử là 3: $\{a\}, \{b\}, \{c\}$.
- Số tập con có 2 phần tử là 3: $\{a; b\}, \{a; c\}, \{b; c\}$.
- Số tập con có 3 phần tử là 1: $\{a; b; c\}$.

$\Rightarrow$ Vậy có $1+3+3+1=8$ tập con. Chọn đáp án C.

Câu 135. Cho tập hợp $A=\{1;2;5;7\}$ và $B=\{1;2;3\}$. Có tất cả bao nhiêu tập X thỏa mãn: $X\subset A$ và $X\subset B$?

Ⓐ 2. Ⓑ 4. Ⓒ 6. Ⓓ 8.

Hướng dẫn giải.



Cách 1: Vì $\begin{cases}X\subset A\\X\subset B\end{cases}$ nên $X\subset(A\cap B)$.

Mà $A\cap B=\{1;2\}\Rightarrow$ Có $2^2=4$ tập X.

Cách 2: X là một trong các tập sau: $\emptyset;\{1\};\{2\};\{1;2\}$.

Vậy chọn đáp án B.

Câu 136. Cho tập hợp $A=\{1;3\}, B=\{3;x\}, C=\{x;y;3\}$. Để $A=B=C$ thì tất cả các cặp $(x;y)$ là:

Ⓐ $(1;1)$. Ⓑ $(1;1)$ và $(1;3)$.
Ⓒ $(1;3)$. Ⓓ $(3;1)$ và $(3;3)$.

Hướng dẫn giải.

Ta có: $A=B=C\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\\left[\begin{array}{l}y=1\\y=3\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow$ Cặp $(x;y)$ là $(1;1);(1;3)$.

Vậy chọn đáp án B.

Câu 137. Cho tập hợp $A=\{1;2;3;4\}, B=\{0;2;4\}, C=\{0;1;2;3;4;5\}$. Quan hệ nào sau đây là đúng?

Ⓐ $B\subset A\subset C$. Ⓑ $B\subset A=C$. Ⓒ $\begin{cases}A\subset C\\B\subset C\end{cases}$. Ⓓ $A\cup B=C$.

Hướng dẫn giải.

- $B\not\subset A$ vì $0\in B$ nhưng $0\notin A$.
- $A\subset C$ vì mọi phần tử của A đều nằm trong C.
- $B\subset C$ vì mọi phần tử của B đều nằm trong C.

Vậy chọn đáp án C.

Câu 138. Cho hai tập hợp A và B khác rỗng thỏa mãn: $A\subset B$. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai?

Ⓐ $A\setminus B=\emptyset$. Ⓑ $A\cap B=A$. Ⓒ $B\setminus A=B$. Ⓓ $A\cup B=B$.

✍ *Hướng dẫn giải.*

Vì $B \setminus A$ gồm các phần tử thuộc B và không thuộc A nên khẳng định $B \setminus A = B$ chỉ đúng khi $A = \emptyset$. Theo đề bài $A \neq \emptyset$ nên đây là mệnh đề sai. Vậy chọn đáp án C.

Câu 139. Cho ba tập hợp: $F = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}, G = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) = 0\}, H = \{x \in \mathbb{R} \mid |f(x)| + |g(x)| = 0\}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

Ⓐ $H = F \cap G$. Ⓑ $H = F \cup G$. Ⓒ $H = F \setminus G$. Ⓓ $H = G \setminus F$.

✍ *Hướng dẫn giải.*

Vì $|f(x)| + |g(x)| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \end{cases}$ mà $F \cap G = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0 \text{ và } g(x) = 0\}$.

Vậy $H = F \cap G$. Chọn đáp án A.

Câu 140. Cho tập hợp $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{2x}{x^2+1} \geq 1\right\}$; B là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của b để phương trình $x^2 - 2bx + 4 = 0$ vô nghiệm. Số phần tử chung của hai tập hợp trên là:

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ Vô số.

✍ *Hướng dẫn giải.*

Ta có: $\dfrac{2x}{x^2+1} \geq 1 \Leftrightarrow 2x \geq x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = 1$. Vậy $A = \{1\}$.

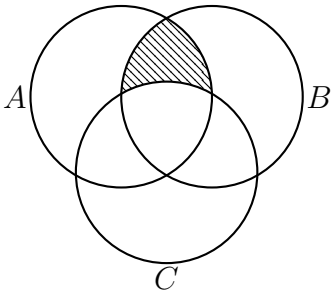
Phương trình $x^2 - 2bx + 4 = 0$ có $\Delta' = b^2 - 4$.

Phương trình vô nghiệm $\Leftrightarrow b^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow b^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < b < 2$.

Vì $b \in \mathbb{Z}$ nên $b \in \{-1; 0; 1\}$. Vậy $B = \{-1; 0; 1\}$.

Phần tử chung duy nhất của hai tập hợp là $\{1\}$. Vậy chọn đáp án A.

Câu 141. Cho A, B, C là ba tập hợp được minh họa bằng biểu đồ Ven như hình vẽ. Phần gạch sọc trong hình vẽ là tập hợp nào sau đây?



Ⓐ $(A \cup B) \setminus C$. Ⓑ $(A \cap B) \setminus C$.
Ⓒ $(A \setminus C) \cup (A \setminus B)$. Ⓓ $(A \cap B) \cup C$.

✍ *Hướng dẫn giải.*

Vì với mỗi phần tử x thuộc phần gạch sọc thì ta thấy: $\begin{cases} x \in A \\ x \in B \Rightarrow x \in (A \cap B) \setminus C. \\ x \notin C \end{cases}$

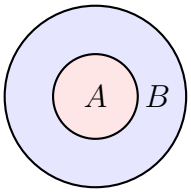
Vậy chọn đáp án B.

Câu 142. Cho hai tập hợp $A=\{0;2\}$ và $B=\{0;1;2;3;4\}$. Số tập hợp X thỏa mãn $A\cup X=B$ là:

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 4. Ⓓ 5.

Hướng dẫn giải.

Vì $A\cup X=B$ nên bắt buộc X phải chứa các phần tử $\{1;3;4\}$.



Ngoài ra X có thể chứa thêm các phần tử của $A\cap B=\{0;2\}$.

Các tập hợp X thỏa mãn là: $\{1;3;4\}, \{0;1;3;4\}, \{2;1;3;4\}, \{0;2;1;3;4\}$.

Vậy có 4 tập hợp X. Chọn đáp án C.

Câu 143. Cho hai tập hợp $A=\{0;1\}$ và $B=\{0;1;2;3;4\}$. Số tập hợp X thỏa mãn $X\subset C_BA$ là:

Ⓐ 3. Ⓑ 5. Ⓒ 6. Ⓓ 8.

Hướng dẫn giải.

Ta có $C_BA=B\setminus A=\{2;3;4\}$. Tập hợp này có 3 phần tử.

Số tập hợp con X của $\{2;3;4\}$ là $2^3=8$ (tập).

Vậy chọn đáp án D.

2) Trắc nghiệm đúng sai

Bài 1. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Nếu $IA=IB$ thì I là trung điểm của AB.

b) Nếu a chia hết cho 9 thì a chia hết cho 3.

c) Nếu $|x|>2$ thì $x>2$.

d) Nếu m,n là 2 số nguyên dương và m^2+n^2 chia hết cho 3 thì m,n cùng chia hết cho 3.

Hướng dẫn giải.

a) Vì $IA=IB$ thì IAB có thể là tam giác cân tại I nên mệnh đề sai.

b) Vì phát biểu a chia hết cho 9 thì a chia hết cho 3 luôn đúng với mọi a nên là một mệnh đề đúng.

c) Vì $|x|>2$ thì $x<-2$ hoặc $x>2$ nên mệnh đề sai.

d) Nhận xét: m^2 (n^2) là các số chính phương nên chia cho 3 có thể dư 0 hoặc 1 (chứng minh bằng cách xét $m=3k, m=3k+1, m=3k+2$).
Do đó:
Nếu m^2,n^2 cùng chia 3 dư 1 thì m^2+n^2 chia 3 dư 2 (trái giả thiết).
Nếu 1 trong 2 số m^2,n^2 có 1 số chia hết cho 3 và số còn lại chia cho 3 dư 1 thì m^2+n^2 chia 3 dư 1 (trái giả thiết).

Suy ra m^2, n^2 cùng chia hết cho 3. Mà 3 là số nguyên tố nên m, n cùng chia hết cho 3 nên mệnh đề đúng.

Bài 2. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\exists r \in \mathbb{Q}, 4r^2 - 1 = 0$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ không chia hết cho 11.

c) $\exists n \in \mathbb{Z}, n^2 + n + 1$ là một số chẵn.

d) $\forall x \in \mathbb{Z}, \dfrac{2x^3 - 6x^2 + x - 3}{2x^2 + 1} \in \mathbb{Z}$.

Hướng dẫn giải.

a) Vì với $r = \dfrac{1}{2} \in \mathbb{Q}, 4r^2 - 1 = 0$ nên mệnh đề đúng.

b) Ta chứng tỏ mệnh đề phủ định "$\exists n \in \mathbb{N}^*, 1 + 2 + 3 + \cdots + n$ chia hết cho 11".
Thật vậy, nếu $n = 11 \in \mathbb{N}^*$ thì $1 + 2 + 3 + \cdots + 11 = 66$ chia hết cho 11 nên mệnh đề ban đầu sai.

c) Ta chứng minh mệnh đề phủ định "$\forall n \in \mathbb{Z}, n^2 + n + 1$ là một số lẻ" là đúng.
+ Nếu n chẵn thì $n^2 + n + 1$ là một số lẻ.
+ Nếu n lẻ, $n = 2k + 1$ thì $n^2 + n + 1 = 4k^2 + 6k + 3$ là số lẻ
nên mệnh đề phủ định đúng và mệnh đề ban đầu sai.

d) Vì $\forall x \in \mathbb{Z}, \dfrac{2x^3 - 6x^2 + x - 3}{2x^2 + 1} = \dfrac{(2x^2 + 1)(x - 3)}{2x^2 + 1} = x - 3 \in \mathbb{Z}$ nên mệnh đề đúng.

Bài 3. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\pi < \dfrac{10}{3}$.

b) Phương trình $3x + 7 = 0$ có nghiệm thực.

c) Không có số nào cộng với chính nó bằng 0.

d) 2022 là hợp số.

Hướng dẫn giải.

a) Mệnh đề: "$\pi < \dfrac{10}{3}$" là mệnh đề đúng.

b) Ta có: $3x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-7}{3}$ nên mệnh đề: "Phương trình $3x + 7 = 0$ có nghiệm" là mệnh đề đúng.

c) Vì $0 + 0 = 0$ nên mệnh đề: "Không có số nào cộng với chính nó bằng 0" là mệnh đề sai.

d) 2022 có các ước số là $1; 2; 3; \ldots; 337; \ldots; 2022$ nên mệnh đề: "2022 là hợp số" là mệnh đề đúng.

Bài 4. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\sqrt{3} + \sqrt{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$.

b) $(\sqrt{2} - \sqrt{18})^2 > 8$.

c) $(\sqrt{3} + \sqrt{12})^2$ là một số hữu tỷ.

d) $x = 2$ là một nghiệm của phương trình $\dfrac{x^2 - 4}{x - 2} = 0$.

Hướng dẫn giải.

a) Ta có: $\sqrt{3}+\sqrt{2}=\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ nên mệnh đề: "$\sqrt{3}+\sqrt{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$" là mệnh đề đúng.

b) Ta có: $(\sqrt{2}-\sqrt{18})^2=(\sqrt{2}-3\sqrt{2})^2=(-2\sqrt{2})^2=8$ nên mệnh đề: "$(\sqrt{2}-\sqrt{18})^2>8$" là mệnh đề sai.

c) Vì $(\sqrt{3}+\sqrt{12})^2=(\sqrt{3}+2\sqrt{3})^2=(3\sqrt{3})^2=27$ nên mệnh đề: "$(\sqrt{3}+\sqrt{12})^2$ là một số hữu tỷ" là mệnh đề đúng.

d) Vì phương trình $\dfrac{x^2-4}{x-2}=0$ không xác định tại $x=2$ nên mệnh đề: "$x=2$ là một nghiệm của phương trình $\dfrac{x^2-4}{x-2}=0$" là mệnh đề sai.

Bài 5. Cho hai tập hợp $A=\{0;1;2;3;4\}$, $B=\{3;4;5;6\}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $A\cup B=\{0;1;2;3;4;5;6\}$.

b) $A\cap B=\{5;6\}$.

c) $B\setminus A=\{0;1;2\}$.

d) $(A\cup B)\setminus(A\cap B)=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

Hướng dẫn giải.

a) $A\cup B=\{0;1;2;3;4;5;6\}$ nên mệnh đề **đúng**.

b) Ta có $A\cap B=\{3;4\}$ nên mệnh đề **sai**.

c) Ta có $B\setminus A=\{5;6\}$ nên mệnh đề **sai**.

d) Ta có:

- $A\cup B=\{0;1;2;3;4;5;6\}$, $A\cap B=\{3;4\}\Rightarrow(A\cup B)\setminus(A\cap B)=\{0;1;2;5;6\}$.
- $A\setminus B=\{0;1;2\}$, $B\setminus A=\{5;6\}\Rightarrow(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=\{0;1;2;5;6\}$.

Do đó mệnh đề đã cho **đúng**.

Bài 6. Cho các tập hợp $A=[-3;1)$, $B=[0;5)$, $C=[a;a+3]$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $A\cup B=[0;1)$.

b) $A\cap B=[-3;5)$.

c) $B\setminus A=[1;5)$.

d) $A\cap C=\emptyset\Leftrightarrow -6\le a<1$.

Hướng dẫn giải.

a) $A\cup B=[-3;5)$ nên mệnh đề đã cho **sai**.

b) $A\cap B=[0;1)$ nên mệnh đề đã cho **sai**.

c) Ta có $B\setminus A=[1;5)$ nên mệnh đề đã cho **đúng**.

d) $A\cap C=\emptyset$ khi và chỉ khi:

- TH1: $a+3<-3\Leftrightarrow a<-6$.

◈ TH2: $a \geq 1$.

Từ đó suy ra $A \cap C = \emptyset$ khi $a < -6$ hoặc $a \geq 1$ nên mệnh đề đã cho **sai**.

Bài 7. Cho ba tập hợp $A = \left(1; \dfrac{11}{2}\right)$; $B = [-2; 3]$ và $C = \left(\dfrac{m-1}{3}; +\infty\right)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Giao của hai tập hợp A và B là $(1; 3]$.

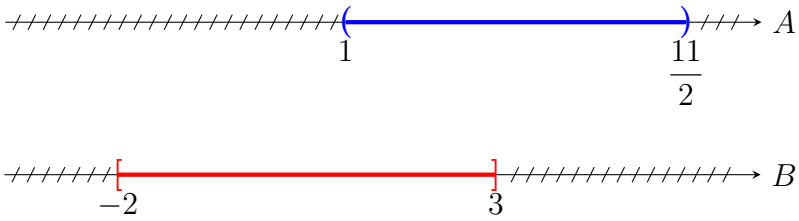
b) Tập hợp $B \cap \mathbb{N}$ gồm 6 phần tử.

c) Tập hợp $\mathbb{R} \setminus A = (-\infty; 1] \cup \left[\dfrac{11}{2}; +\infty\right)$.

d) Tổng các giá trị nguyên của m để $B \cap C$ có đúng 3 phần tử là số nguyên bằng 6.

Hướng dẫn giải.

a) Biểu diễn hai tập hợp A và B trên trục số:



Suy ra $A \cap B = (1; 3]$ nên mệnh đề **đúng**.

b) Ta có $B \cap \mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3\} \Rightarrow n(B \cap \mathbb{N}) = 4$ nên mệnh đề **sai**.

c) Biểu diễn tập hợp A trên trục số ta thấy $\mathbb{R} \setminus A = (-\infty; 1] \cup \left[\dfrac{11}{2}; +\infty\right)$ nên mệnh đề **đúng**.

d) Để $B \cap C$ có đúng 3 phần tử là số nguyên $\{1, 2, 3\} \Leftrightarrow 0 \leq \dfrac{m-1}{3} < 1 \Leftrightarrow 0 \leq m - 1 < 3 \Leftrightarrow 1 \leq m < 4$.
Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1; 2; 3\} \Rightarrow$ Tổng các giá trị nguyên của m là $1 + 2 + 3 = 6$.
Do đó mệnh đề **đúng**.

Bài 8. Lớp $10A$ có 26 học sinh biết chơi đá bóng, 22 học sinh biết chơi cầu lông, 5 học sinh biết chơi cả hai môn đá bóng và cầu lông, 8 học sinh không biết chơi môn nào. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

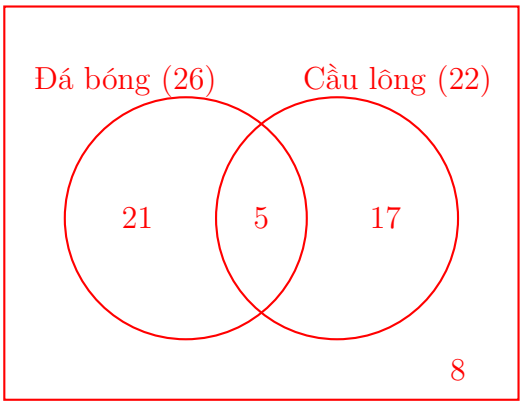
a) Số học sinh chỉ biết chơi cầu lông mà không biết chơi đá bóng là 17.

b) Số học sinh chỉ biết chơi đá bóng mà không biết chơi cầu lông là 20.

c) Số học sinh biết chơi ít nhất một trong hai môn đá bóng hoặc cầu lông là 43.

d) Sĩ số lớp $10A$ là 61.

Hướng dẫn giải. Dựa vào biểu đồ Ven:



Sĩ số: 51

a) Số học sinh chỉ biết chơi cầu lông mà không biết chơi đá bóng là $22-5=17$ nên mệnh đề **đúng**.

b) Số học sinh chỉ biết chơi đá bóng mà không biết chơi cầu lông là $26-5=21$ nên mệnh đề **sai**.

c) Số học sinh biết chơi ít nhất một môn là $(26+22)-5=43$ nên mệnh đề **đúng**.

d) Sĩ số lớp $10A$ là $21+5+17+8=51$ (hoặc $43+8=51$) nên mệnh đề **sai**.

Bài 9. Cho hai tập hợp $A=[1;4]$ và $B=(2;+\infty)$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

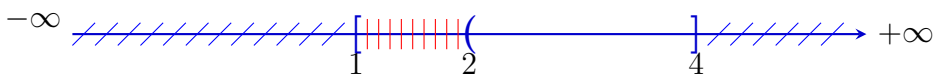
a) $A\cap B=(2;4]$.

b) $A\cup B=[1;+\infty)$.

c) $A\setminus B=[1;2]$.

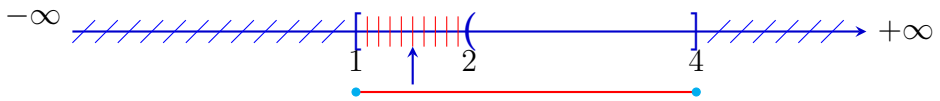
d) $B\setminus A=(4;+\infty)$.

Hướng dẫn giải. C ác khẳng định **a), b), c), d)** đều **Đúng**.

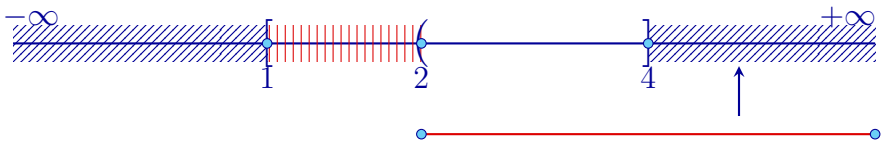


+) $A\cap B=(2;4]$.

+) $A\cup B=[1;+\infty)$.



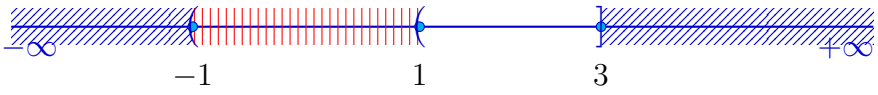
+) $A\setminus B=[1;2]$.



+) $B\setminus A=(4;+\infty)$.

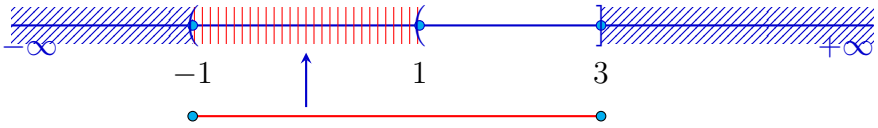
Bài 10. Cho hai tập hợp $A=\{x\in\mathbb{R}\mid -1<x\leq 3\}$ và $B=\{x\in\mathbb{R}\mid x>1\}$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 3\} = (-1; 3]$ và $B = (1; +\infty)$.

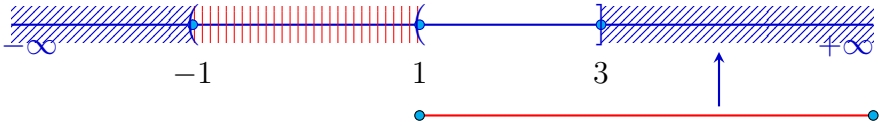


+) $A \cap B = (1; 3]$.

+) $A \cup B = (-1; +\infty)$.



+) $A \setminus B = (-1; 1]$.



+) $B \setminus A = (3; +\infty)$.

Bài 11. Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$: "$x^2 > 0$".

a) $P(1)$ là mệnh đề đúng.

b) $P(0)$ là mệnh đề sai.

c) Mệnh đề: "$\forall x \in \mathbb{R} : P(x)$" là mệnh đề đúng.

d) Mệnh đề: "$\exists x \in \mathbb{R} : P(x)$" là mệnh đề đúng.

Hướng dẫn giải. a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Đúng

c) d) Ta có: $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$.

Bài 12. Gọi A là tập hợp các hình vuông, B là tập hợp các hình thoi, C là tập hợp các hình chữ nhật, D là tập hợp các hình bình hành.

a) $A \subset C$.

b) $A \subset D$.

c) $D \subset C$.

d) $B \cap C = A$.

Hướng dẫn giải. a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Đúng

- Hình vuông là hình chữ nhật đặc biệt nên $A \subset C$.
- Hình vuông là hình bình hành đặc biệt nên $A \subset D$.
- Hình bình hành không chắc là hình chữ nhật (cần góc vuông).
- Giao của tập hình thoi và tập hình chữ nhật chính là tập hình vuông.

Bài 13. Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$: "$\dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$".

a) $P(1)$ là mệnh đề sai.

b) $\overline{P(x)}$: "$\dfrac{x^2-1}{x-1} \neq x+1$".

c) Mệnh đề: "$\forall x \in \mathbb{R} : P(x)$" là mệnh đề đúng.

d) Mệnh đề: "$\exists x \in \mathbb{R} : P(x)$" là mệnh đề đúng.

Hướng dẫn giải. a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Đúng

c) d) Ta có: $\dfrac{x^2-1}{x-1} = x+1 \Leftrightarrow x \neq 1$.

Bài 14. Cho tập hợp $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^3 - 4x = 0\}$.

a) $1 \in M$.

b) $0 \in M$.

c) Tập hợp M có 3 phần tử.

d) Tập hợp M có 8 tập con.

Hướng dẫn giải. a) Sai b) Đúng c) Đúng d) Đúng

Ta có: $x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right. \longrightarrow M = \{-2; 0; 2\}$.

Bài 15. Cho hai tập hợp $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x^4 - 5x^2 + 4 = 0\}$ và $N = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 1\}$.

a) $M = \{-1; 1; 2; -2\}$.

b) $N = \{0; 1\}$.

c) $M \cap N = \{1\}$.

d) $N \setminus M = \{-1; 0\}$.

Hướng dẫn giải. a) Sai b) Sai c) Đúng d) Đúng

Ta có: $x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in \mathbb{N} \\ x = -1 \notin \mathbb{N} \\ x = 2 \in \mathbb{N} \\ x = -2 \notin \mathbb{N} \end{array}\right. \longrightarrow M = \{1; 2\}$.

$N = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 1\} = \{-1; 0; 1\}$.

Bài 16. Một số nguyên dương n được gọi là **"số hoàn hảo"** nếu số đó bằng tổng các ước nguyên dương thực sự của nó. Ví dụ số 6 là một số hoàn hảo vì các ước nguyên dương thực sự của 6 là $1; 2; 3$ và $6 = 1 + 2 + 3$.

a) Không có số hoàn hảo nào nhỏ hơn 10.

b) Số 10 là một số không hoàn hảo.

c) Tất cả các số nguyên tố đều là các số không hoàn hảo.

d) Số 2020 không phải là một số hoàn hảo.

Hướng dẫn giải. a) Sai; b) Đúng; c) Đúng; d) Đúng.

- Ta có số 6 là một số hoàn hảo nên mệnh đề a) sai.

- Ta có ước nguyên dương thực sự của số 10 là $1; 2; 5$ và $1 + 2 + 5 = 8 < 10$ nên số 10 không phải là số hoàn hảo nên mệnh đề b) là mệnh đề đúng.

- Ta có ước nguyên dương thực sự của các số nguyên tố là số 1 và $1 < p$ với mọi số nguyên tố p. Nên số nguyên tố không phải là số hoàn hảo mệnh đề c) là mệnh đề đúng.

- Ta thấy các ước nguyên dương thực sự của số $2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$ là $1; 2; 4; 5; 10; 20; 101; 202; 404; 505; 1010$ và đồng thời $1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 20 + 101 + 202 + 404 + 505 + 1010 > 2020$ nên số 2020 không phải là số hoàn hảo. Vậy mệnh đề d) là mệnh đề đúng.

Bài 17. Cho các mệnh đề: P : "$\exists x \in \mathbb{R} : x > x^2$" và Q : "$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$". Khi đó:

a) P là mệnh đề đúng.

b) $\overline{Q}$ là mệnh đề sai.

c) $P \Rightarrow Q$ là mệnh đề đúng.

d) $(\overline{P} \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow \overline{Q})$ là mệnh đề đúng.

Hướng dẫn giải. a) Đúng; b) Sai; c) Sai; d) Đúng.

a) P : "$\exists x \in \mathbb{R} : x > x^2$" là mệnh đề đúng vì $x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4}$ mà $\dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{4}$.

Vậy a) đúng.

b) Q : "$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 > 0$" là mệnh đề sai vì $x = 0 \Rightarrow x^2 = 0$ mà $0 = 0$. Suy ra $\overline{Q}$ là mệnh đề đúng.

Vậy b) Sai.

c) P là mệnh đề đúng, Q là mệnh đề sai. Suy ra $P \Rightarrow Q$ là mệnh đề sai.

Vậy c) Sai.

d) P là mệnh đề đúng nên $\overline{P}$ là mệnh đề sai, Q là mệnh đề sai.

Suy ra $\overline{P} \Rightarrow Q$ là mệnh đề đúng. (1).

P là mệnh đề đúng, $\overline{Q}$ là mệnh đề đúng nên $P \Rightarrow \overline{Q}$ là mệnh đề đúng. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(\overline{P} \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow \overline{Q})$ là mệnh đề đúng.

Vậy d) Đúng.

Bài 18. Cho các phát biểu sau: $x \in \mathbb{Z}, 2x < 3$ (1); $x \in \mathbb{Z}, x^4 - x^2 < 0$ (2). Khi đó:

a) (1) là 1 mệnh đề chứa biến.

b) Khi $x = 1$ thì (1) trở thành mệnh đề đúng.

c) Khi $x = -2$ thì (2) trở thành mệnh đề đúng.

d) Không có số nguyên x nào để cả (1) và (2) trở thành các mệnh đề đúng.

Hướng dẫn giải. a) Đúng; b) Đúng; c) Sai; d) Đúng.

+ Xét a): Đúng

+ Xét b): Khi $x = 1$ thì (1) trở thành: $2.1 < 3$ là mệnh đề Đúng $\Rightarrow$ Đ

+ Xét c): Khi $x = -2$ thì (2) trở thành: $(-2)^4 - (-2)^2 < 0$ là mệnh đề sai $\Rightarrow$ S

+ Xét d): Ta có: $x^4 - x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2(x^2-1) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases}$

Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên không có giá trị nào của x làm cho (2) đúng $\Rightarrow$ Không có số nguyên x nào để cả (1) và (2) trở thành các mệnh đề đúng $\Rightarrow$ Đ

Bài 19. Cho $P(n) = n^2 - 6n + 10$ với n là số tự nhiên. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $P(1)$ chia hết cho 3.

b) $P(2)$ là số lẻ.

c) $P(2n) > P(n) - 1$ với $n = 1$.

d) Tồn tại số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện $\frac{2P(n)-1}{n-3}$ là số nguyên.

Hướng dẫn giải. a) Sai; b) Sai; c) Sai; d) Đúng.

a) Mệnh đề sai vì: $P(1) = 5$ không chia hết cho 3.

b) Mệnh đề sai vì: $P(2) = 2$ là số chẵn.

c) Mệnh đề sai vì:

$P(2n) > P(n) - 1 \Leftrightarrow 4n^2 - 12n + 10 > n^2 - 6n + 10 - 1 \Leftrightarrow 3n^2 - 6n + 1 > 0$

Khi $n = 1 \Rightarrow VT = 3.1^2 - 6.1 + 1 = -2 < 0$.

d) Mệnh đề đúng vì:

Ta có: $\dfrac{2P(n)-1}{n-3} = \dfrac{2(n^2-6n+10)-1}{n-3} = \dfrac{2(n-3)^2+1}{n-3} = 2(n-3) + \dfrac{1}{n-3}$

Suy ra: $\dfrac{2P(n)-1}{n-3} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (n-3)$ là ước của 1

$\Leftrightarrow n - 3 = 1 \Leftrightarrow n = 4$.

Bài 20. Cho hai tập hợp $A = \{n \in \mathbb{N} / (n^2-2n-3)(n^2-1) = 0\}$ và $B = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2 - x + 3 = 0\}$.

a) Tập hợp A có 3 phần tử.

b) Số tập hợp con của tập hợp A là 4 tập hợp.

c) Tập hợp B là tập hợp rỗng.

d) Tổng các phần tử của tập hợp A và tập hợp B là 3.

Hướng dẫn giải. a) Sai; b) Đúng; c) Đúng; d) Sai.

a) Sai. Vì $A = \{1; 3\}$.

b) Đúng vì tập A có hai phần tử nên có số tập con là $2^2 = 4$ tập con.

c) Đúng vì $B = \varnothing$.

d) Sai vì tổng các phần của tập A và tập B là $1 + 3 = 4$.

Bài 21. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 4\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x - 1 < 5\}$.

a) $B \setminus A = [-4; 4]$.

b) $A \cap B = (4; 6)$.

c) $\mathbb{R} \setminus (A \cap B) = (-\infty; 4) \cup [6; +\infty)$.

d) $\mathbb{R} \setminus (A \cup B) = \varnothing$.

✍ *Hướng dẫn giải.* $|x|>4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>4 \\ x<-4 \end{array}\right. \Rightarrow A=\{x\in\mathbb{R}\mid |x|>4\}=(-\infty;-4)\cup(4;+\infty)$.
$-5\le x-1<5 \Leftrightarrow -4\le x<6 \Rightarrow B=\{x\in\mathbb{R}\mid -5\le x-1<5\}=[-4;6)$.

a) **Đúng:** $B\setminus A=[-4;4]$

b) **Đúng:** $A\cap B=(4;6)$

c) **Sai:** $\mathbb{R}\setminus(A\cap B)=\mathbb{R}\setminus(4;6)=(-\infty;4]\cup[6;+\infty)$

d) **Đúng:** $A\cup B=\mathbb{R}\Rightarrow \mathbb{R}\setminus(A\cup B)=\mathbb{R}\setminus\mathbb{R}=\varnothing$

Bài 22. Cho ba tập hợp $A=\{x\in\mathbb{N}\mid (2x+1)(x^2-7x+10)=0\}$, $B=\{x\in\mathbb{R}\mid 2<x\le 5\}$ và $C=\{2;m;5\}$

a) Tập hợp A có hai tập hợp con khác rỗng.

b) $A\subset B$.

c) $\{3;4;5\}\subset B$.

d) Không có giá trị nào của m để $A=C$.

✍ *Hướng dẫn giải.* a) Sai; b) Sai; c) Đúng; d) Sai.

Ta có: $(2x+1)(x^2-7x+10)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+1=0 \\ x^2-7x+10=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2}\notin\mathbb{N} \\ x=2\in\mathbb{N} \\ x=5\in\mathbb{N} \end{array}\right. \Rightarrow A=\{2;5\}$

$B=(2;5]$

a) **Sai** vì A có 3 tập con khác rỗng là: $\{2\},\{5\},A$

b) **Sai** vì $2\notin B=(2;5]$

c) **Đúng**

d) **Sai** vì $A=C$ khi $m=2$ hoặc $m=5$.

Bài 23. Cho các tập hợp $A=\{x\in\mathbb{N},2x^2-3x+1=0\}$, $B=\{x\in\mathbb{N}^*,x<3\}$, $X=\{x\in\mathbb{Z},|x|<3\}$ và $Y=\{y\in\mathbb{R},(y^2-1)(y^2-4)=0\}$. Ta có

a) $A\subset B$.

b) $B\subset X$.

c) Tập B có tất cả 8 tập con.

d) $X=Y$.

✍ *Hướng dẫn giải.* a) Đúng; b) Đúng; c) Sai; d) Sai.

Ta có $2x^2-3x+1=0\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=\dfrac{1}{2}$, suy ra $A=\{1\}$; $B=\{x\in\mathbb{N}^*,x<3\}=\{1;2\}$;

$X=\{x\in\mathbb{Z},|x|<3\}=\{-2;-1;0;1;2\}$; $(y^2-1)(y^2-4)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2-1=0 \\ y^2-4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\pm 1 \\ y=\pm 2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow Y=\{-2;-1;1;2\}$.

a) **Đúng.**

b) **Đúng.**

c) **Sai** vì tập B có 2 phần tử nên có 4 tập con.

d) **Sai** vì $0 \in X$ nhưng $0 \notin Y$.

Bài 24. Cho $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \vdots 2\}, B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \vdots 4\}, C = \{n \in \mathbb{N} \mid n \vdots 5\}$.

a) $A \cap B = A$.

b) $C \setminus A = \{10k + 5 \mid k \in \mathbb{N}\}$.

c) $B \cap C = \{n \in \mathbb{N} \mid n \vdots 20\}$.

d) Tập hợp $A \cup C$ có 60 phần tử nhỏ hơn 100.

Hướng dẫn giải. a) Sai; b) Đúng; c) Đúng; d) Đúng.

a) **Sai.** Vì $B \subset A$ nên $A \cap B = B$.

b) **Đúng.**

Do $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \vdots 2\}$ là tập hợp các số tự nhiên chia hết cho 2, nên có chữ số tận cùng là $0, 2, 4, 6, 8$.

Do $C = \{n \in \mathbb{N} \mid n \vdots 5\}$ là tập hợp các số tự nhiên chia hết cho 5, nên có chữ số tận cùng là 0 hoặc 5.

Do đó, $C \setminus A$ là tập hợp các số tự nhiên có chữ số tận cùng là 5 hay $C \setminus A = \{10k + 5 \mid k \in \mathbb{N}\}$.

c) **Đúng.**

Vì $BCNN(4, 5) = 20$ nên $B \cap C = \{n \in \mathbb{N} \mid n \vdots 20\}$.

d) **Đúng.**

Vì $A \cup C$ là tập hợp các số tự nhiên có chữ số tận cùng là $0, 2, 4, 5, 6, 8$.

Từ 0 đến 9, từ 10 đến 19, ..., từ 90 đến 99, là 10 nhóm, mỗi nhóm chứa 6 số nên có tất cả 60 số thuộc $A \cup C$.

Vậy có tập hợp $A \cup C$ có 60 phần tử nhỏ hơn 100.

Bài 25. Lớp $10B$ có 7 học sinh giỏi Toán, 5 học sinh giỏi Lý, 6 học sinh giỏi Hóa, 3 học sinh giỏi cả Toán và Lý, 4 học sinh giỏi cả Toán và Hóa, 2 học sinh giỏi cả Lý và Hóa, 1 học sinh giỏi cả ba môn Toán, Lý, Hóa và không có học sinh nào không giỏi một trong ba môn Toán, Lý, Hóa.

a) Lớp $10B$ không có học sinh giỏi Toán.

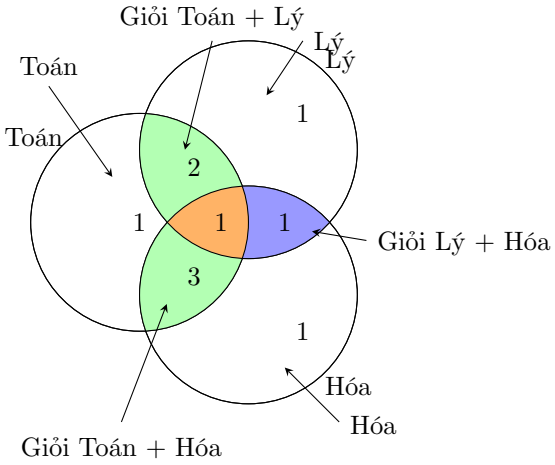
b) Lớp $10B$ không có học sinh giỏi cả ba môn Toán, Lý, Hóa.

c) Số học sinh giỏi Toán và Lý hoặc giỏi Toán và Hóa của lớp $10B$ không bằng 7.

d) Số học sinh giỏi ít nhất một môn trong ba môn Toán, Lý, Hóa của lớp $10B$ không lớn hơn 10.

Hướng dẫn giải. a) Sai; b) Sai; c) Đúng; d) Đúng.

Ta dùng biểu đồ Ven:



a) **Mệnh đề sai** vì theo đề cho thì lớp $10B$ có 7 học sinh giỏi Toán.

b) **Mệnh đề sai** vì theo đề cho thì lớp $10B$ có 1 học sinh giỏi cả ba môn Toán, Lý, Hóa.

c) **Mệnh đề đúng** vì số học sinh giỏi Toán và Lý hoặc giỏi Toán và Hóa của lớp $10B$ là $3+4-1=6$ (học sinh).

d) **Mệnh đề đúng** vì dựa vào biểu đồ Ven, ta có số học sinh giỏi ít nhất một môn trong ba môn Toán, Lý, Hóa của lớp $10B$ là $(1+1+1)+(2+3+1)+1=10$ (học sinh).

Bài 26. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) A : "$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x+y=1$".

b) B : "$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x+y=2$".

c) C : "$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y=xy$".

d) D : "$\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} : a=3b$".

Hướng dẫn giải. (a) A : "$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x+y=1$".

Với $x=2{,}5; y=1 \Rightarrow P(2{,}5;1)$: "$2{,}5 \in \mathbb{R}, 1 \in \mathbb{R} : 2{,}5+1=1$" là mệnh đề sai.

$\Rightarrow$ Chọn **SAI**.

(b) B : "$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x+y=2$".

Vì "$1{,}5 \in \mathbb{R}, 0{,}5 \in \mathbb{R} : 1{,}5+0{,}5=2$" là mệnh đề đúng.

$\Rightarrow$ Chọn **ĐÚNG**.

(c) C : "$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y=xy$".

Vì $\exists x=1 : y=1 \cdot y$ đúng $\forall y \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Chọn **ĐÚNG**.

(d) D : "$\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} : a=3b$".

$\Rightarrow$ Chọn **ĐÚNG**.

Bài 27. Xét tính đúng, sai của các câu sau:

a) P : "3 là số chính phương" có mệnh đề phủ định là $\overline{P}$: "3 không là số chính phương".

b) Q : "Tam giác ABC là tam giác cân" có mệnh đề phủ định là $\overline{Q}$: "Tam giác ABC không là

tam giác vuông".

c) R : "$2^{2003}-1$ là số nguyên tố" có mệnh đề phủ định là $\overline{R}$: "$2^{2003}-1$ không là số nguyên tố".

d) H : "$\sqrt{2}$ là số vô tỉ" có mệnh đề phủ định là $\overline{H}$: "$\sqrt{2}$ là số hữu tỉ".

✍ *Hướng dẫn giải.* (a) P : "3 là số chính phương" có mệnh đề phủ định là $\overline{P}$: "3 không là số chính phương".

$\overline{P}$: "3 không là số chính phương".

$\Rightarrow$ Chọn **ĐÚNG**.

(b) Q : "Tam giác ABC là tam giác cân" có mệnh đề phủ định là $\overline{Q}$: "Tam giác ABC không là tam giác vuông".

$\overline{Q}$: "Tam giác ABC không là tam giác cân".

$\Rightarrow$ Chọn **SAI**.

(c) R : "$2^{2003}-1$ là số nguyên tố" có mệnh đề phủ định là $\overline{R}$: "$2^{2003}-1$ không là số nguyên tố".

$\overline{R}$: "$2^{2003}-1$ không là số nguyên tố".

$\Rightarrow$ Chọn **ĐÚNG**.

(d) H : "$\sqrt{2}$ là số vô tỉ" có mệnh đề phủ định là $\overline{H}$: "$\sqrt{2}$ là số hữu tỉ".

$\overline{H}$: "$\sqrt{2}$ là số hữu tỉ".

$\Rightarrow$ Chọn **ĐÚNG**.

Bài 28. Cho các tập hợp sau $A=\{x\in\mathbb{Q}\mid x^2-x-6=0\}$; $B=\{x\in\mathbb{Z}\mid x^4-11x^2+18=0\}$; $C=\{x\in\mathbb{N}\mid (x^2-3x-10)(5x^3-6x^2+x)=0\}$; $D=\{x\in\mathbb{Z}\mid -2<3x+7\le 10\}$. Khi đó:

Mệnh đề		Đúng	Sai
(a)	Tập hợp A có 2 phần tử		
(b)	Tập hợp B có 3 phần tử		
(c)	Tập hợp C có 2 phần tử		
(d)	Tập hợp D có 4 phần tử		

✍ *Hướng dẫn giải.* Viết tập hợp dưới dạng liệt kê các phần tử

(a) Tập hợp A có 2 phần tử.

$x^2-x-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\in\mathbb{Q}\\x=3\in\mathbb{Q}\end{array}\right.$. Vậy $A=\{-2;3\}$.

$\gg$ Chọn **ĐÚNG**.

(b) Tập hợp B có 3 phần tử.

$$x^4-11x^2+18=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=2 \\ x^2=9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{2}\notin\mathbb{Z} \\ x=-\sqrt{2}\notin\mathbb{Z} \\ x=3\in\mathbb{Z} \\ x=-3\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$. Vậy $B=\{-3;3\}$.

$\gg$ Chọn **SAI**.

(c) Tập hợp C có 2 phần tử.

$$(x^2-3x-10)(5x^3-6x^2+x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x-10=0 \\ 5x^3-6x^2+x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5\in\mathbb{N} \\ x=-2\notin\mathbb{N} \\ x=0\in\mathbb{N} \\ x=1\in\mathbb{N} \\ x=\dfrac{1}{5}\notin\mathbb{N} \end{array}\right.$$.

Vậy $C=\{0;1;5\}$.

$\gg$ Chọn **SAI**.

(d) Tập hợp D có 4 phần tử.

$-2<3x+7\le 10 \Leftrightarrow -9<3x\le 3 \Leftrightarrow -3<x\le 1$.

Mà $x\in\mathbb{Z} \Rightarrow x\in D=\{-2;-1;0;1\}$.

$\gg$ Chọn **ĐÚNG**.

Bài 29. Lớp 10C6 có 18 học sinh tham gia câu lạc bộ bóng đá và 15 học sinh tham gia câu lạc bộ bóng rổ. Biết rằng có 10 học sinh tham gia cả hai câu lạc bộ trên. Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	Có 8 học sinh tham gia câu lạc bộ bóng đá và không tham gia câu lạc bộ bóng rổ?		
(b)	Có 23 học sinh tham gia ít nhất một trong hai câu lạc bộ trên?		
(c)	Biết lớp 10C6 có 45 học sinh. Có 25 học sinh không tham gia câu lạc bộ bóng đá?		
(d)	Biết lớp 10C6 có 45 học sinh. Có 24 học sinh không tham gia cả hai câu lạc bộ?		

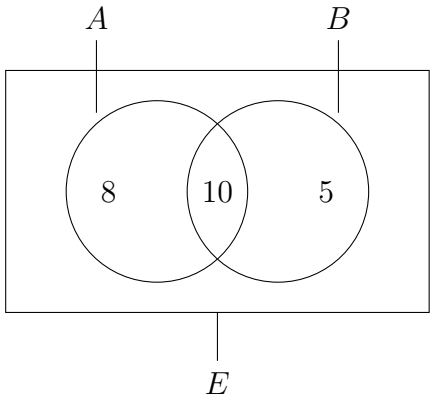
Hướng dẫn giải. Kí hiệu:

A là tập hợp học sinh tham gia câu lạc bộ bóng đá.

B là tập hợp học sinh tham gia câu lạc bộ bóng rổ.

E là tập hợp học sinh của lớp 10C6.

Ta có thể biểu diễn ba tập hợp trên bằng biểu đồ Ven như hình sau:



Khi đó, $A \cap B$ là tập hợp học sinh tham gia cả hai câu lạc bộ trên. Số phần tử của A là 18, số phần tử của B là 15, số phần tử của tập hợp $A \cap B$ là 10.

(a) Có 8 học sinh tham gia câu lạc bộ bóng đá và không tham gia câu lạc bộ bóng rổ?

Tập hợp các học sinh tham gia câu lạc bộ bóng đá và không tham gia câu lạc bộ bóng rổ là tập hợp $A \setminus B$.

Số phần tử của $A \setminus B$ chính là số phần tử của A trừ đi số phần tử của $A \cap B$.

Vậy số học sinh tham gia câu lạc bộ bóng đá và không tham gia câu lạc bộ bóng rổ là $18 - 10 = 8$ (học sinh).

$\gg$ Chọn **ĐÚNG**.

(b) Có 23 học sinh tham gia ít nhất một trong hai câu lạc bộ trên?

Tập hợp các học sinh tham gia ít nhất một trong hai câu lạc bộ trên chính là tập hợp $A \cup B$.

Do khi đếm số học sinh tham gia câu lạc bộ bóng đá là 18, số học sinh tham gia câu lạc bộ bóng rổ là 15 thì số học sinh tham gia cả hai câu lạc bộ là 10 được tính hai lần.

Vậy số học sinh tham gia ít nhất một trong hai câu lạc bộ trên là $18 + 15 - 10 = 23$ (học sinh).

$\gg$ Chọn **ĐÚNG**.

(c) Biết lớp 10C6 có 45 học sinh. Có 25 học sinh không tham gia câu lạc bộ bóng đá?

Số phần tử của E là 45.

Tập hợp các học sinh không tham gia câu lạc bộ bóng đá là phần bù của A trong E.

Vậy số học sinh không tham gia câu lạc bộ bóng đá là $45 - 18 = 27$ (học sinh).

$\gg$ Chọn **SAI**.

(d) Biết lớp 10C6 có 45 học sinh. Có 24 học sinh không tham gia cả hai câu lạc bộ?

Tập hợp các học sinh không tham gia cả hai câu lạc bộ là phần bù của $A \cup B$ trong E.

Vậy số học sinh không tham gia cả hai câu lạc bộ là $45 - 23 = 22$ (học sinh).

$\gg$ Chọn **SAI**.

Bài 30. Cho hai mệnh đề P: "ABC là tam giác đều" và mệnh đề Q: "ABC là tam giác cân". Xét mệnh đề kéo theo "Nếu P thì Q". Các câu sau là đúng hay sai?

a) P là điều kiện đủ để có Q.

b) Q là điều kiện cần để có P.

c) Mệnh đề "Nếu P thì Q" là mệnh đề đúng.

d) Mệnh đề "Nếu Q thì P" là mệnh đề đúng.

✍ *Hướng dẫn giải.* a) Đúng: P là điều kiện đủ để có Q.

b) Đúng: Q là điều kiện cần để có P.

c) Đúng: Mệnh đề "Nếu P thì Q" là mệnh đề đúng.

d) Sai: Mệnh đề "Nếu Q thì P" là mệnh đề sai.

Bài 31. Cho hai mệnh đề P: "Tứ giác $ABCD$ là hình vuông" và Q: "Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau". Các câu sau là đúng hay sai?

a) Mệnh đề đảo của mệnh đề "$P \Rightarrow Q$" là mệnh đề "Nếu $ABCD$ là hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau thì tứ giác $ABCD$ là hình vuông".

b) Hai mệnh đề P và Q không tương đương với nhau.

c) Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ là mệnh đề sai.

d) P là điều kiện cần và đủ để có Q.

✍ *Hướng dẫn giải.* a) Đúng: Mệnh đề đảo của mệnh đề "$P \Rightarrow Q$" là mệnh đề "Nếu $ABCD$ là hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau thì tứ giác $ABCD$ là hình vuông".

b) Sai: Hai mệnh đề P và Q tương đương với nhau.

c) Sai: Mệnh đề $P \Leftrightarrow Q$ là mệnh đề đúng.

d) Đúng: Vì P và Q tương đương nên P là điều kiện cần và đủ để có Q.

Bài 32. Cho hai mệnh đề sau:

P: "Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật".

Q: "Số 7 là hợp số".

a) Mệnh đề P là mệnh đề đúng.

b) Mệnh đề Q là mệnh đề đúng.

c) Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là mệnh đề đúng.

d) Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ là mệnh đề sai.

✍ *Hướng dẫn giải.* a) Đúng: Mệnh đề P là mệnh đề đúng. Suy ra mệnh đề đúng.

b) Sai: Số 7 là số nguyên tố. Suy ra mệnh đề sai.

c) Sai: Vì P đúng và Q sai nên $P \Rightarrow Q$ là mệnh đề sai. Suy ra mệnh đề sai.

d) Sai: Vì Q sai và P đúng nên $Q \Rightarrow P$ là mệnh đề đúng. Suy ra mệnh đề sai.

Bài 33. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

a) $\forall n \in \mathbb{N}, n^2$ chia hết cho $7 \Rightarrow n$ chia hết cho 7.

b) $\forall n \in \mathbb{N}, n^2$ chia hết cho $5 \Rightarrow n$ chia hết cho 5.

c) Nếu tam giác ABC không phải là tam giác đều thì tam giác đó có ít nhất một góc nhỏ hơn

$60°$.

d) Tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn $\Rightarrow$ Tổng của $\hat{A}$ và $\hat{C}$ bằng $180°$.

Hướng dẫn giải. a) Đúng: Ta có thể sử dụng phương pháp chứng minh phản chứng như sau:

Giả sử n không chia hết cho 7, suy ra $n = 7m + i$, với $m = 0, 1, 2, \ldots$ và $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Ta có $n^2 = 49m^2 + 14im + i^2$, dễ thấy rằng i^2 nhận các giá trị $1, 4, 9, 16, 25, 36$ đều không chia hết cho 7 nên n^2 không chia hết cho 7.

b) Đúng: Chứng minh tương tự câu a).

c) Đúng: Giả sử tam giác ABC không phải là tam giác đều và không có góc nào nhỏ hơn $60°$, tức là cả ba góc đều lớn hơn hoặc bằng $60°$.

Do $\hat{A} \geq 60°$, $\hat{B} \geq 60°$, $\hat{C} \geq 60°$ nên $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} \geq 180°$.

Mà trong một tam giác, tổng ba góc luôn bằng $180°$ hay ta có $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$. Vậy khi đó phải có $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 60°$ hay tam giác ABC đều. Điều này trái với giả thiết.

Vậy nếu tam giác ABC không phải là tam giác đều thì tam giác đó có ít nhất một góc nhỏ hơn $60°$.

d) Đúng: Tứ giác $ABCD$ nội tiếp được đường tròn khi đó tổng của $\hat{A}$ và $\hat{C}$ bằng $180°$.

Điều này trái với giả thiết n^2 chia hết cho 5. Vậy điều giả sử là sai, suy ra "Nếu bình phương của một số tự nhiên chia hết cho 5 thì số đó chia hết cho 5" là mệnh đề đúng.

Bài 34. Xét tính đúng, sai của mỗi mệnh đề sau.

a) $\exists x \in \mathbb{Q}, 4x^2 - 1 = 0$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}, n$ và $n + 2$ là các số nguyên tố.

c) $\forall x \in \mathbb{R}, (x - 1)^2 \neq x - 1$.

d) $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 > n$.

Hướng dẫn giải. a) Mệnh đề đúng. Ta có: $4x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{2} \in \mathbb{Q}$.

b) Mệnh đề sai. Ta cho $n = 2 \in \mathbb{N}$ thì $n + 2 = 4$ không là số nguyên tố.

c) Mệnh đề sai. Ta cho $x = 1 \in \mathbb{R}$ thì $(x - 1)^2 = x - 1 = 0$.

d) Mệnh đề sai. Ta cho $n = 0 \in \mathbb{N}$ thì $n^2 = 0$ nên $n^2 > n$ là sai.

Bài 35. Xét tính đúng (sai) của các mệnh đề sau

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 - x^2 + 1 > 0$.

b) $\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + 3$ chia hết cho 4.

c) P: "$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y = 1$".

d) Q: "$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 2$".

Hướng dẫn giải. a) "$\forall x \in \mathbb{R}, x^3 - x^2 + 10$" là mệnh đề sai.

b) "$\exists n \in \mathbb{N}, n^2 + 3$ chia hết cho 4" là mệnh đề đúng.

c) P: "$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y = 1$" là mệnh đề sai.

Vì với $x = 2,5; y = 1 \Rightarrow P(2,5;1)$: "$2,5 \in \mathbb{R}, 1 \in \mathbb{R} : 2,5 + 1 = 1$" là mệnh đề sai.

d) Q: "$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 2$" là mệnh đề đúng.

Vì $Q(1,5;0,5)$: "$1,5 \in \mathbb{R}, 0,5 \in \mathbb{R} : 1,5 + 0,5 = 2$" là mệnh đề đúng.

Bài 36. Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$: "$x > \dfrac{1}{x}$", xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $P(1)$.

b) $P\left(-\dfrac{1}{3}\right)$.

c) $\forall x \in \mathbb{N}, P(x)$.

d) $\exists x \in \mathbb{N}, P(x)$.

Hướng dẫn giải. a) Ta có $P(1)$: "$1 > 1$" đây là mệnh đề sai.

b) Ta có $P\left(-\dfrac{1}{3}\right) : -\dfrac{1}{3} > -3$ đây là mệnh đề đúng.

c) Ta có $\forall x \in \mathbb{N}, x > \dfrac{1}{x}$ là mệnh đề sai vì $P(1)$ là mệnh đề sai.

d) Ta có $\exists x \in \mathbb{N}, x > \dfrac{1}{x}$ là mệnh đề đúng vì $P(2) : 2 > \dfrac{1}{2}$ là mệnh đề đúng.

Bài 37. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) A : "$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : x + y = 1$".

b) B : "$\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 2$".

c) C : "$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y = xy$".

d) D : "$\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} : a = 3b$".

Hướng dẫn giải. a) Mệnh đề sai vì với $x = 2,5; y = 1 \Rightarrow P(2,5;1)$: "$2,5 \in \mathbb{R}, 1 \in \mathbb{R} : 2,5+1 = 1$" là mệnh đề sai.

b) Mệnh đề đúng vì "$1,5 \in \mathbb{R}, 0,5 \in \mathbb{R} : 1,5 + 0,5 = 2$" là mệnh đề đúng.

c) Mệnh đề đúng vì $\exists x = 1 : y = 1.y$ đúng $\forall y \in \mathbb{R}$.

d) Mệnh đề đúng.

Bài 38. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 5\}$, $C = [3; +\infty)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $A \cap B = (-3; 3]$.

b) $A \cup B = (-\infty; 5]$.

c) $A \cap C = \varnothing$.

d) $B \cup C = (-3; +\infty)$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $A = (-\infty; 3]$, $B = (-3; 5)$, $C = [3; +\infty)$.

a) Đúng: $A \cap B = (-3; 3]$.

b) Sai: $A \cup B = (-\infty; 5)$.

c) Sai: $A \cap C = \{3\}$.

d) Đúng: $B \cup C = (-3; +\infty)$.

Bài 39. Cho A là tập hợp các học sinh lớp 10 đang học ở trường em và B là tập hợp các học sinh đang học môn Tiếng Anh của trường em. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $A \cap B$ là tập hợp các học sinh lớp 10 học môn Tiếng Anh ở trường em.

b) $A \setminus B$ là tập hợp những học sinh lớp 10 nhưng không học Tiếng Anh ở trường em.

c) $A \cup B$ là tập hợp các học sinh lớp 10 hoặc học sinh học môn Tiếng Anh ở trường em.

d) $B \setminus A$ là tập hợp các học sinh học môn Tiếng Anh nhưng không học lớp 10 ở trường em.

Hướng dẫn giải.

a) Đúng: $A \cap B$ là tập hợp các học sinh lớp 10 học môn Tiếng Anh ở trường em.

b) Đúng: $A \setminus B$ là tập hợp những học sinh lớp 10 nhưng không học Tiếng Anh ở trường em.

c) Đúng: $A \cup B$ là tập hợp các học sinh lớp 10 hoặc học sinh học môn Tiếng Anh ở trường em.

d) Đúng: $B \setminus A$ là tập hợp các học sinh học môn Tiếng Anh nhưng không học lớp 10 ở trường em.

Bài 40. Lớp $10A$ có tất cả 40 học sinh trong đó có 13 học sinh chỉ thích đá bóng, 18 học sinh chỉ thích chơi cầu lông và số học sinh còn lại thích chơi cả hai môn thể thao nói trên. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Có 9 học sinh thích chơi cả hai môn cầu lông và bóng đá.

b) Có 22 học sinh thích bóng đá?

c) Có 26 học sinh thích cầu lông?

d) Có 27 học sinh thích chơi cả hai môn cầu lông và bóng đá

Hướng dẫn giải.

a) Đúng: Số học sinh thích chơi cả hai môn cầu lông và bóng đá: $40 - (18 + 13) = 9$ (học sinh).

b) Đúng: Số học sinh thích bóng đá: $13 + 9 = 22$ (học sinh).

c) Sai: Số học sinh thích cầu lông: $18 + 9 = 27$ (học sinh).

d) Sai: Số học sinh thích chơi cả hai môn cầu lông và bóng đá: $40 - (18 + 13) = 9$ (học sinh).

Bài 41. Cho các tập hợp sau $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (2x - x^2)(2x^2 - 3x - 2) = 0\}$ và $B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid 3 < n^2 < 30\}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập hợp A có 3 phần tử.

b) Tập hợp B có 4 phần tử.

c) Tập hợp $A \cap B$ có 1 phần tử.

d) Tập hợp $A \cup B$ có 5 phần tử.

Hướng dẫn giải.

a) Đúng: $A = \{-\frac{1}{2}; 0; 2\}$ vì $(2x - x^2)(2x^2 - 3x - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - x^2 = 0 \\ 2x^2 - 3x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

b) Đúng: $B = \{2; 3; 4; 5\}$.

c) Đúng: $A \cap B = \{2\}$.

d) Sai: $A \cup B = \{-\frac{1}{2}; 0; 2; 3; 4; 5\}$.

Bài 42. Cho các tập hợp sau: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 + 7x + 6)(x^2 - 4) = 0\}; B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x \leq 8\}; C = \{2x + 1 \mid x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x \leq 4\}$.

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập hợp A có 3 phần tử.

b) $A \cup B = \{-6; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$

c) $A \cap B = \{2\}$

d) $A \cup C = \{-6; -3; -2; 2; 3; 5; 7; 9\}$

Hướng dẫn giải.

a) Sai: Ta có $(x^2+7x+6)(x^2-4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 7x + 6 = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -6 \\ x = -2 \\ x = 2 \end{array}\right. \Rightarrow A = \{-6; -2; -1; 2\}$.

b) Đúng: Ta có $\begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ 2x \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{N} \\ x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Vậy $B = \{0; 1; 2; 3; 4\}$.

Ta có $\begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ -2 \leq x \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

Suy ra $C = \{-3; -1; 1; 3; 5; 7; 9\}$.

$A \cup B = \{-6; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

c) Đúng: $A \cap B = \{2\}$,

d) Sai: $A \cup C = \{-6; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 5; 7; 9\}$.

Bài 43. Cho hai tập hợp $A = (-1; +\infty)$, $B = (-\infty; -1]$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $A \setminus B = (-1; +\infty)$.

b) $B \setminus A = (-\infty; -1]$.

c) $C_{\mathbb{R}}A = (-\infty; -1)$.

d) $C_{\mathbb{R}}B = (-1; +\infty)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$, $B = \{-2; 1\}$, $C = \{-2; -1; 1; 4\}$.

a) Đúng: $A \setminus B = (-1; +\infty)$.

b) Đúng: $B \setminus A = (-\infty; -1]$.

c) Sai: $C_{\mathbb{R}}A = (-\infty; -1]$.

d) Đúng: $C_{\mathbb{R}}B = (-1; +\infty)$.

Bài 44. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 3\}$, $B = [-2; 2]$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $A \setminus B = \varnothing$.

b) $B \setminus A = \varnothing$.

c) $C_{\mathbb{R}}A = (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.

d) $(C_{\mathbb{R}}B) \cap A = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 3\}$ giải bất phương trình, ta suy ra $A = (-3; 3)$.

a) Sai: $A \setminus B = (-3; -2) \cup (2; 3)$.

b) Đúng: $B \setminus A = \varnothing$.

c) Đúng: $C_{\mathbb{R}}A = (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.

d) Sai: $(C_{\mathbb{R}}B) \cap A = (-3; -2) \cup (2; 3)$.

Bài 45. Cho các tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 5\}$, $C = [3; +\infty)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $A \cap B = (-3; 3]$.

b) $A \cup B = (-\infty; 5]$.

c) $A \cap C = \varnothing$.

d) $B \cup C = (-3; +\infty)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $A = (-\infty; 3]$, $B = (-3; 5)$, $C = [3; +\infty)$.

a) Đúng: $A \cap B = (-3; 3]$.

b) Sai: $A \cup B = (-\infty; 5)$.

c) Sai: $A \cap C = \{3\}$.

d) Đúng: $B \cup C = (-3; +\infty)$.

Bài 46. Cho hai tập hợp $A = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$, $B = \{-2; 0; 2; 4\}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $A \cap B = \{-2; 0; 2\}$.

b) $A \cup B = \{-2; -1; 1; 2; 4\}$.

c) $A \setminus B = \{-1; 1\}$.

d) $B \setminus A = \{4\}$.

Hướng dẫn giải. a) Đúng: $A \cap B = \{-2; 0; 2\}$.

b) Sai: $A \cup B = \{-2; -1; 0; 1; 2; 4\}$.

c) Đúng: $A \setminus B = \{-1; 1\}$.

d) Đúng: $B \setminus A = \{4\}$.

Bài 47. Cho hai tập hợp $A = (-3; 5]$ và $B = (2; +\infty)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $A \cap B = (1; 5]$.

b) $A \cup B = (-3; +\infty)$.

c) $A \setminus B = (-2; 2]$.

d) $C_{\mathbb{R}}A = (-\infty; -3] \cup (5; +\infty)$.

Hướng dẫn giải. a) Sai: $A \cap B = (2; 5]$.

b) Đúng: $A \cup B = (-3; +\infty)$.

c) Sai: $A \setminus B = (-3; 2]$.

d) Đúng: $C_{\mathbb{R}}A = (-\infty; -3] \cup (5; +\infty)$.

Bài 48. Cho đoạn $A = [-5; 1]$ và $B = (-3; 2)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $A \cup B = [-3; 2)$.

b) $A \cap B = (-3; 2]$.

c) $A \setminus B = [-5; -3]$.

d) $C_{\mathbb{R}}(A \cup B) = (-\infty; -5) \cup [1; +\infty)$.

Hướng dẫn giải. a) Sai: $A \cup B = [-5; 2)$.

b) Sai: $A \cap B = (-3; 1]$.

c) Đúng: $A \setminus B = [-5; -3]$.

d) Sai: $C_{\mathbb{R}}(A \cup B) = (-\infty; -5) \cup [2; +\infty)$.

Bài 49. Lớp $10A$ có 35 học sinh thi học sinh giỏi. Mỗi học sinh thi ít nhất một môn trong ba môn Toán, Lý và Hóa. Biết có 12 học sinh chỉ thi môn Toán, có 14 học sinh thi môn Lý, có 15 học sinh thi môn Hóa và có 3 thí sinh chỉ thi môn Lý và môn Hóa. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

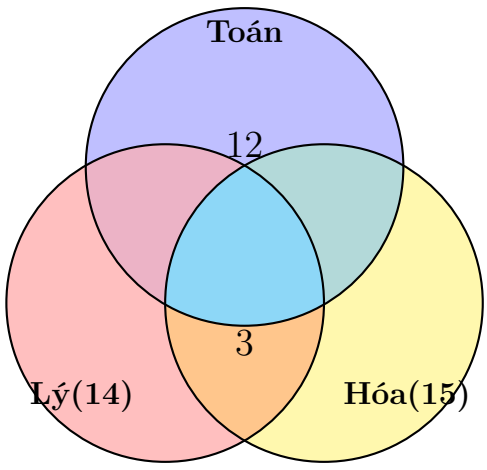
a) Có 9 học sinh chỉ thi môn Lý mà không thi môn Hóa

b) Có 23 học sinh chỉ thi môn Hóa mà không thi môn Lý

c) Số học sinh chỉ thi môn Lý hoặc thi môn Hóa là 8 học sinh

d) Có 3 học sinh đi thi cả ba môn Toán, Lý và Hóa

Hướng dẫn giải. Dùng phương pháp sơ đồ Ven:



Số học sinh chỉ thi môn Lý hoặc thi môn Hóa là: $35 - 12 = 23$ học sinh.

Số học sinh chỉ thi môn Lý mà không thi môn Hóa là: $23-15=8$ học sinh.

Số học sinh chỉ thi môn Hóa mà không thi môn Lý là: $23-14=9$ học sinh.

Số học sinh thi môn Lý và môn Hóa là: $23-(8+9)=6$ học sinh.

Số học sinh thi cả ba môn là: $6-3=3$ học sinh.

a) Sai: Có 8 học sinh chỉ thi môn Lý mà không thi môn Hóa

b) Sai: Có 9 học sinh chỉ thi môn Hóa mà không thi môn Lý

c) Sai: Số học sinh chỉ thi môn Lý hoặc thi môn Hóa là 23 học sinh

d) Đúng: Có 3 học sinh đi thi cả ba môn Toán, Lý và Hóa

Bài 50. Các em học sinh lớp $10A$ làm bài thi khảo sát học sinh giỏi môn Toán. Đề thi có 3 câu. Sau khi chấm bài giáo viên tổng kết được như sau: Có 6 học sinh làm được câu 1, có 5 học sinh làm được câu 2, có 4 học sinh làm được câu 3. Có 2 học sinh làm được câu 1 và câu 2, có 2 học sinh làm được câu 1 và câu 3, có 1 học sinh làm được câu 2 và câu 3 và chỉ có 1 học sinh làm được cả 3 câu. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

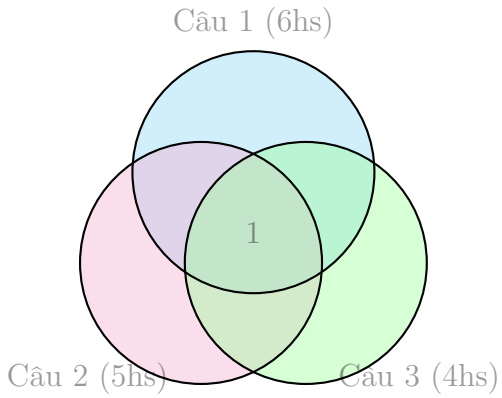
a) Có duy nhất một học sinh chỉ làm được câu 1

b) Không có học sinh nào chỉ làm được câu 2 và câu 3

c) Có 2 học sinh chỉ làm được câu 3

d) Có tất cả 8 học sinh chỉ làm được đúng một câu

Hướng dẫn giải.



Số học sinh chỉ làm được câu 1 và câu 2 là: $2-1=1$ học sinh.

Số học sinh chỉ làm được câu 1 và câu 3 là: $2-1=1$ học sinh.

Số học sinh chỉ làm được câu 2 và câu 3 là: $1-1=0$ học sinh.

Số học sinh chỉ làm được câu 1 là: $6-(1+1+1)=3$ học sinh.

Số học sinh chỉ làm được câu 2 là: $5-(1+1+0)=3$ học sinh.

Số học sinh chỉ làm được câu 3 là: $4-(1+1+0)=2$ học sinh.

Vậy số học sinh chỉ làm được 1 câu là: $3+3+2=8$ học sinh.

a) Sai: Có 3 học sinh chỉ làm được câu 1

b) Đúng: Không có học sinh nào chỉ làm được câu 2 và câu 3

c) Đúng: Có 2 học sinh chỉ làm được câu 3

d) Đúng: Có tất cả 8 học sinh chỉ làm được đúng một câu.

Bài 51. Trong đợt quyên góp ủng hộ đồng bào bị lũ lụt năm 2020, có 25 học sinh lớp 12A đã tham gia ủng hộ, mỗi học sinh ủng hộ nhiều nhất 2 tờ tiền khác nhau trong ba loại tờ tiền mệnh giá 5.000 đồng, 10.000 đồng và 20.000 đồng. Biết rằng số học sinh đã tham gia ủng hộ thỏa đồng thời ba kết quả sau:

- Số học sinh chỉ ủng hộ một tờ 5.000 đồng bằng tổng số học sinh chỉ ủng hộ một tờ 10.000 đồng và số học sinh chỉ ủng hộ một tờ 20.000 đồng.
- Trong số học sinh **không** ủng hộ tờ 5.000 đồng thì số học sinh có ủng hộ tờ 10.000 đồng nhiều gấp hai lần số học sinh có ủng hộ tờ 20.000 đồng.
- Số học sinh chỉ ủng hộ một tờ 5.000 đồng nhiều hơn số học sinh ủng hộ tờ 5.000 đồng và một tờ khác là 1 học sinh.

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Có 2 học sinh ủng hộ một tờ 10.000 đồng và một tờ 20.000 đồng

b) Có 8 học sinh chỉ ủng hộ một tờ 5000 đồng

c) Nếu gọi số học sinh ủng hộ một tờ 5.000 đồng và một tờ 10.000 đồng là: a và số học sinh ủng hộ một tờ 20.000 đồng và một tờ 5.000 đồng là c thì $a + c = 9$.

d) Có 6 học sinh lớp 12A chỉ ủng hộ một tờ 10.000 đồng

Hướng dẫn giải. Gọi số học sinh chỉ ủng hộ một tờ 5.000 đồng, một tờ 10.000 đồng, một tờ 20.000 đồng lần lượt là: x, y, z.

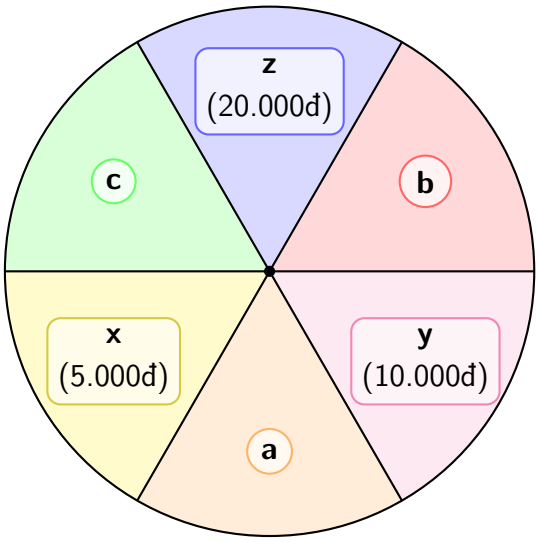
Số học sinh ủng hộ một tờ 5.000 đồng và một tờ 10.000 đồng là: a.

Số học sinh ủng hộ một tờ 10.000 đồng và một tờ 20.000 đồng là: b.

Số học sinh ủng hộ một tờ 20.000 đồng và một tờ 5.000 đồng là: c.

$(x, y, z, a, b, c \in \mathbb{N})$

Biểu diễn trên biểu đồ Ven (như hình vẽ):



Dựa vào biểu đồ Ven và dữ kiện bài toán, ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x = y + z & (1) \\ y + b = 2(z + b) & (2) \\ x = a + c + 1 & (3) \\ x + y + z + a + b + c = 25 & (4) \end{cases}$

với $x, y, z, a, b, c \in \mathbb{N}$

Từ (2) ta có: $y - 2z = b \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 2z$ $(*)$

Thế $(1), (2), (3)$ vào (4) và khử x, a, b, c, ta được: $4y + z = 26 \Leftrightarrow y = \dfrac{26 - z}{4} \leq \dfrac{26}{4}$.

Từ điều kiện $(*)$: $y = \dfrac{26 - z}{4} = \dfrac{52 - 2z}{8} \geq \dfrac{52 - y}{8} \Leftrightarrow 9y \geq 52 \Leftrightarrow y \geq \dfrac{52}{9}$.

Do đó: $\dfrac{52}{9} \leq y \leq \dfrac{26}{4}$ và $y \in \mathbb{N}$ suy ra: $y = 6$; $z = 2$; $x = 8$ thay vào tìm được $b = 2$ và $a + c = 7$.

Vậy có 6 học sinh lớp $12A$ chỉ ủng hộ một tờ 10.000 đồng.

a) Đúng: Có 2 học sinh ủng hộ một tờ 10.000 đồng và một tờ 20.000 đồng

b) Đúng: Có 8 học sinh chỉ ủng hộ một tờ 5000 đồng

c) Sai: Nếu gọi số học sinh ủng hộ một tờ 5.000 đồng và một tờ 10.000 đồng là a và số học sinh ủng hộ một tờ 20.000 đồng và một tờ 5.000 đồng là c thì $a + c = 7$.

d) Đúng: Có 6 học sinh lớp $12A$ chỉ ủng hộ một tờ 10.000 đồng

3) Trắc nghiệm trả lời ngắn

Bài 1. Cho các tập hợp $A = (-\infty; -2]$, $B = [3; +\infty)$, $C = (0; 4)$. Có bao nhiêu số nguyên thuộc tập hợp $(A \cup B) \cap C$?

Hướng dẫn giải.

$A = (-\infty; -2]$, $B = [3; +\infty)$, $C = (0; 4)$.

Suy ra: $A \cup B = (-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$; $(A \cup B) \cap C = [3; 4) \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x = 3$.

Vậy có 1 số nguyên.

Bài 2. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} : (2x - 11)(x^2 + 3) \leq 0\}$. Số phần tử của $A \cap \mathbb{N}$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải.

Xét bất phương trình $(2x - 11)(x^2 + 3) \leq 0 \Leftrightarrow 2x - 11 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{11}{2}$.

$\Rightarrow A = \left(-\infty; \dfrac{11}{2}\right] \Rightarrow A \cap \mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

Suy ra số phần tử của $A \cap \mathbb{N}$ bằng 5.

Bài 3. Trong kì thi học sinh giỏi cấp trường, lớp 10C có 17 bạn được công nhận học sinh giỏi Văn, 25 bạn học sinh giỏi Toán. Tìm số học sinh giỏi cả Văn và Toán biết lớp đó có 45 học sinh và có 13 học sinh không đạt học sinh giỏi.

Hướng dẫn giải.

Gọi A là tập các HS giỏi Văn

B là tập các HS giỏi Toán.

$A \cap B$ là tập các HS giỏi cả Văn và Toán.

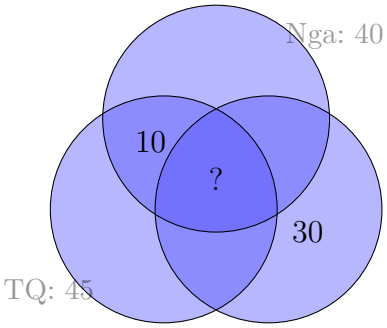
$A \cup B$ là tập các HS giỏi Văn hoặc Toán.

Ta có $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Leftrightarrow 45 - 13 = 17 + 25 - n(A \cap B)$.

$\Rightarrow n(A \cap B) = 42 - 32 = 10$.

Bài 4. Trong một hội nghị có 100 đại biểu tham dự. Mỗi đại biểu có thể sử dụng ít nhất một trong ba thứ tiếng: Nga, Trung Quốc và Anh. Biết rằng có 30 đại biểu chỉ nói được tiếng Anh, 40 đại biểu nói được tiếng Nga, 45 đại biểu nói được tiếng Trung Quốc và 10 đại biểu chỉ nói được hai thứ tiếng Nga và Trung Quốc. Hỏi có bao nhiêu đại biểu nói được cả ba thứ tiếng?

Hướng dẫn giải.



Số đại biểu nói được tiếng Nga hoặc tiếng Trung Quốc là: $100 - 30 = 70$.

Số đại biểu nói được tiếng Nga nhưng không nói được tiếng Trung Quốc là: $70 - 45 = 25$

Số đại biểu nói được tiếng Trung Quốc nhưng không nói được tiếng Nga là: $70 - 40 = 30$

Số đại biểu nói được tiếng Nga và tiếng Trung Quốc là: $70 - (25 + 30) = 15$

Số đại biểu nói được cả ba thứ tiếng là: $15 - 10 = 5$.

Bài 5. Biết tập hợp các giá trị của tham số thực m để trong tập hợp $A = (m-1; m] \cap (3; 5)$ có đúng một số tự nhiên là $[a; b)$. Tính $a + b$.

Hướng dẫn giải.

Ta có trong $(3; 5)$ có đúng một số tự nhiên là 4.

Khi đó tập hợp $A = (m-1; m] \cap (3; 5)$ có đúng một số tự nhiên khi và chỉ khi

$$4 \in (m-1; m] \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 < 4 \\ m \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 5 \\ m \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 4 \leq m < 5 \longrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 5 \end{cases}.$$

Vậy $a + b = 9$

Bài 6. Trong một khoảng thời gian nhất định, tại một địa phương, Đài khí tượng thủy văn đã thống kê được: Số ngày mưa: 10 ngày; số ngày có gió: 8 ngày; số ngày lạnh: 6 ngày; số ngày mưa và gió: 5 ngày; số ngày mưa và lạnh: 4 ngày; số ngày lạnh và có gió: 3 ngày; số ngày mưa, lạnh và có gió: 1 ngày. Vậy có bao nhiêu ngày thời tiết xấu (có gió, mưa hay lạnh)?

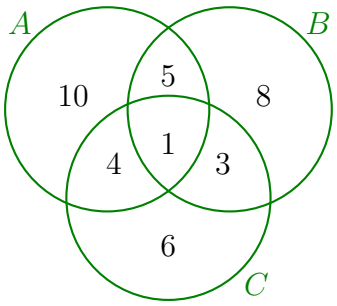
Hướng dẫn giải.

Ký hiệu A là tập hợp những ngày mưa, B là tập hợp những ngày có gió, C là tập hợp những ngày lạnh.

Theo giải thiết ta có:

$n(A)=10, n(B)=8, n(C)=6; n(A\cap B)=5, n(A\cap C)=4, n(B\cap C)=3, n(A\cap B\cap C)=1.$

lần lượt để tìm số ngày thời tiết xấu ta sử dụng biểu đồ ven (hình vẽ).



Ta cần tính $n(A\cup B\cup C)$.

Xét tổng $n(A)+n(B)+n(C)$: trong tổng này, mỗi phần tử của A giao B, B giao C, C giao A được tính làm hai lần nên trong tổng $n(A)+n(B)+n(C)$ ta phải trừ đi tổng $n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)$.

Trong tổng $n(A)+n(B)+n(C)$ được tính $n(A\cap B\cap C)$ 3 lần, trong $n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)$ cũng được tính $n(A\cap B\cap C)$ 3 lần. Vì vậy

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C).$

$=10+8+6-(5+4+3)+1=13.$

Vậy số ngày thời tiết xấu là 13 ngày.

Bài 7. Cho hai tập hợp $A=(0;5]$ và $B=\{-2;1;3;6\}$. Số phần tử của $(A\cup B)\cap\mathbb{Z}$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Ta có $A\cup B=(0;5]\cup\{6\}\Rightarrow(A\cup B)\cap\mathbb{Z}=\{1;2;3;4;5;6\}\Rightarrow$ Số phần tử của $(A\cup B)\cap\mathbb{Z}$ bằng 6.

Bài 8. Cho tập $A=\{x\in\mathbb{N}|(x^2-3x+2)(x+3)=0\}$ và $B=\{0;1;2;3;4;5\}$. Có bao nhiêu tập X thỏa mãn $A\cup X=B$?

Hướng dẫn giải. Ta có $(x^2-3x+2)(x+3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-3x+2=0\\x+3=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1, x=2\\x=-3\end{array}\right.$, suy ra $A=\{1;2\}$ vì $-3\notin\mathbb{N}$.

Để $A\cup X=B$ thì $X=B, X=B\setminus\{1\}, X=B\setminus\{2\}, X=B\setminus\{1;2\}$.

Vậy có tất cả 4 tập X thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 9. Trong đợt hội diễn văn nghệ chào mừng 20/11, lớp 10A đăng kí 3 tiết mục là hát tố ca, múa và diễn kịch. Trong danh sách đăng kí, có 7 học sinh đăng kí tiết mục hát tố ca, 6 học sinh đăng kí tiết mục múa, 8 học sinh đăng kí diễn kịch, trong đó có 3 học sinh đăng kí cả tiết mục hát tố ca và tiết mục múa, 4 học sinh đăng kí cả tiết mục hát tố ca và diễn kịch, 2 học sinh đăng kí cả tiết mục múa và diễn kịch, 1 học sinh đăng kí cả 3 tiết mục. Hỏi lớp 10A có tất cả bao nhiêu học sinh đăng kí tham gia hội diễn văn nghệ?

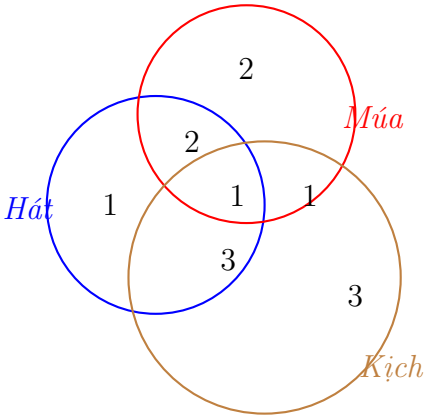
Hướng dẫn giải. Số học sinh chỉ đăng kí tiết mục hát tố ca và múa là: $3-1=2$.

Số học sinh chỉ đăng kí tiết mục tố ca và diễn kịch là: $4-1=3$.

Số học sinh chỉ đăng kí tiết mục múa và diễn kịch là: $2-1=1$.

Vậy số học sinh đăng kí tham gia hội diễn là $7+8+6-(2+3+1)-2.1=13$.

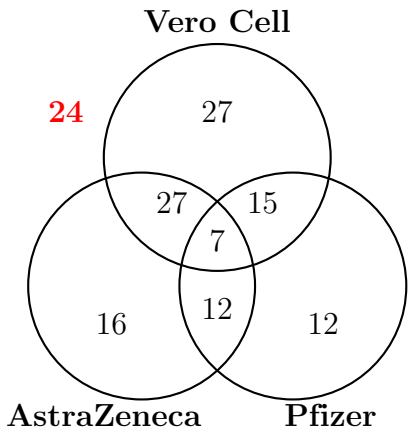
Cách 2.



Kết quả: $1+2+1+3+2+1+3=13$ học sinh.

Bài 10. Ngày 18/12/2021, một số trung tâm y tế được phân phát vacxin tiêm phòng Covid-19. Có 3 loại vacxin: Vero cell, AstraZeneca, và Pfizer. Trong 140 trung tâm y tế, có 7 trung tâm được phân phát cả 3 loại, 34 trung tâm được phát Vero Cell và AstraZeneca, 22 trung tâm được phát Vero Cell và Pfizer, 19 trung tâm được phát AstraZeneca và Pfizer, 76 trung tâm được phát Vero Cell, 62 trung tâm được phát AstraZeneca và 46 trung tâm được phát Pfizer. Có bao nhiêu trung tâm y tế không được nhận bất kỳ loại vacxin nào?

Hướng dẫn giải. Ta có biểu đồ ven như sau



Dựa vào biểu đồ ven ta có, số trung tâm y tế không nhận được bất kỳ loại vacxin nào là

$140-(27+27+7+15+16+12+12)=24$.

Vậy có 24 trung tâm y tế không nhận được bất kỳ loại vacxin nào.

Bài 11. Cho tập hợp $A=\{x;y;z\}$ và $B=\{x;y;z;t;u\}$. Có bao nhiêu tập X thỏa mãn $A\subset X\subset B$?

Hướng dẫn giải. Có 4 tập hợp X thỏa mãn $A\subset X\subset B$ là: $X_1=\{x;y;z\}$; $X_2=\{x;y;z;t\}$; $X_3=\{x;y;z;u\}$ và $X_4=\{x;y;z;t;u\}$.

Bài 12. Có tất cả bao nhiêu tập X thỏa mãn $\{1;2\}\subset X\subset\{1;2;3;4;5\}$?

Hướng dẫn giải. Các 8 tập X thỏa mãn đề bài là: $\{1;2\}$, $\{1;2;3\}$, $\{1;2;4\}$, $\{1;2;5\}$, $\{1;2;3;4\}$, $\{1;2;3;5$

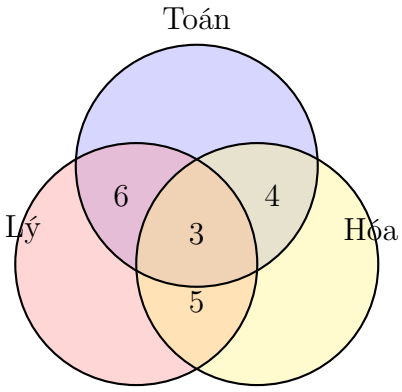
Bài 13. Câu 5: Cho tập hợp $A=\{x;y;z\}$ và $B=\{x;y;z;t;u\}$. Có bao nhiêu tập X thỏa mãn

$A \subset X \subset B$?

Hướng dẫn giải. Có 4 tập hợp X thỏa mãn $A \subset X \subset B$ là: $X_1 = \{x; y; z\}; X_2 = \{x; y; z; t\}; X_3 = \{x; y; z; u\}$ và $X_4 = \{x; y; z; t; u\}$.

Bài 14. Lớp 10A có 10 học sinh giỏi Toán, 10 học sinh giỏi Lý, 11 học sinh giỏi hóa, 6 học sinh giỏi cả Toán và Lý, 5 học sinh giỏi cả Hóa và Lý, 4 học sinh giỏi cả Toán và Hóa, 3 học sinh giỏi cả ba môn Toán, Lý, Hóa. Tính học sinh giỏi ít nhất một trong ba môn (Toán, Lý, Hóa) của lớp 10A?

Hướng dẫn giải. Theo giả thiết đề bài cho, ta có biểu đồ Ven:



Dựa vào biểu đồ Ven, ta có học sinh giỏi ít nhất một trong ba môn (Toán, Lý, Hóa) của lớp 10A là:

- Số học sinh giỏi Toán: $6 + 4 + 3 = 13$.
- Số học sinh giỏi Lý: $6 + 5 + 3 = 14$.
- Số học sinh giỏi Hóa: $4 + 5 + 3 = 12$.

Ta lại có:

- Số học sinh giỏi cả Toán và Lý: 6.
- Số học sinh giỏi cả Toán và Hóa: 4.
- Số học sinh giỏi cả Hóa và Lý: 5.
- Và số học sinh giỏi cả Toán, Lý và Hóa là 3.

Số học sinh giỏi hơn một môn là $4 + 6 + 5 + 3 = 18$.

Bài 15. Cho tập hợp $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x^2 - 6x + 5).(x - m) = 0\}$. Tìm m để tổng tất cả các phần tử của tập A bằng 6.

Hướng dẫn giải. Ta có phương trình $(x^2-6x+5).(x-m) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 6x + 5 = 0 \\ x - m = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 5 \\ x = m \end{array}\right.$

TH 1: Nếu $\left[\begin{array}{l} m = 1 \\ m = 5 \end{array}\right.$ thì $A = \{1; 5\}$. Khi đó tổng các phần tử bằng 6 (thỏa mãn).

TH 2: Nếu $\begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 5 \end{cases}$ thì $A = \{1; 5; m\}$. Khi đó $1 + 5 + m = 6 \Leftrightarrow m = 0$.

Vậy tập hợp các giá trị m cần tìm là $\{0; 1; 5\}$.

Bài 16. Lớp 10E có 30 học sinh giỏi ít nhất một môn Toán, Văn, Anh, trong đó có 6 học sinh giỏi cả Toán và Văn, 5 học sinh giỏi cả Văn và Anh, 4 học sinh giỏi cả Toán và Anh, 3 học sinh giỏi cả ba môn Toán, Văn, Anh. Tính số học sinh chỉ giỏi đúng một môn Toán hoặc Văn hoặc Anh của lớp 10E.

Hướng dẫn giải. Gọi A, B, C lần lượt là tập hợp học sinh giỏi môn Toán, Văn, Anh.

Khi đó, $A \cup B \cup C$ là tập hợp các học sinh giỏi ít nhất một trong ba môn Toán, Văn, Anh.

Do lớp 10E có 30 học sinh giỏi ít nhất một môn Toán, Văn, Anh, trong đó có 6 học sinh giỏi cả Toán và Văn, 5 học sinh giỏi cả Văn và Anh, 4 học sinh giỏi cả Toán và Anh, 3 học sinh giỏi cả ba môn Toán, Văn, Anh.

Ta có: $n(A \cup B \cup C) = 30, n(A \cap B) = 6, n(B \cap C) = 5, n(A \cap C) = 4, n(A \cap B \cap C) = 3$.

Ta có số học sinh chỉ giỏi đúng một môn Toán hoặc Văn hoặc Anh của lớp 10E bằng:

$n(A \cup B \cup C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + 2 \cdot n(A \cap B \cap C)$

$= 30 - 6 - 5 - 4 + 2 \cdot 3 = 21$.

Vậy lớp 10E có 21 học sinh chỉ giỏi đúng một môn Toán hoặc Văn hoặc Anh.

Bài 17. Cho hai tập hợp $A = [-4; 1], B = (-3; m] \neq \varnothing$. Tìm m để $A \cup B = A$.

Hướng dẫn giải. Để $B \neq \varnothing$ thì $m > -3$.

Để $A \cup B = A$ thì $B \subset A \Leftrightarrow m \leq 1$.

Kết hợp với điều kiện trên ta có $-3 < m \leq 1$.

Bài 18. Trong số 40 học sinh của lớp 10A, có 20 học sinh thích môn Toán, 16 học sinh thích môn Tiếng Anh và 13 học sinh thích cả hai môn này. Tính tổng số học sinh thích cả hai môn và số học sinh không thích cả hai môn Toán, Anh?

Hướng dẫn giải.

Gọi X là tập hợp số học sinh của lớp 10A, A là tập hợp học sinh của lớp 10A thích môn Toán, B là tập hợp học sinh của lớp 10A thích môn Tiếng Anh.

Theo giả thiết đề bài ta có:

$$n(X) = 40, n(A) = 20, n(B) = 16, n(A \cap B) = 13$$

Số học sinh lớp 10A thích một trong hai môn Toán và Anh là:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 20 + 16 - 13 = 23$$

Số học sinh lớp 10A không thích cả hai môn Toán Anh là:

$$n(X) - n(A \cup B) = 40 - 23 = 17$$

Vậy tổng số học sinh thích cả hai môn và số học sinh không thích cả hai môn Toán, Anh là: $17 + 13 = 30$ (học sinh).

Bài 19. Trong 100 học sinh khối lớp 10 có 70 học sinh biết đá bóng, 45 học sinh biết đánh bóng chuyền và 23 học sinh chơi được cả hai môn. Hỏi có bao nhiêu học sinh không biết chơi môn nào trong hai môn trên?

Hướng dẫn giải. Gọi A là tập hợp số học sinh biết đá bóng, B là tập hợp học sinh biết đánh

bóng chuyền.

Tập hợp số học sinh chơi được cả hai môn là $A \cap B$ và có 23 học sinh.

Số học sinh chỉ biết đá bóng và không biết đánh bóng chuyền là: $70 - 23 = 47$ học sinh.

Số học sinh chỉ biết đánh bóng chuyền và không biết đá bóng là: $45 - 23 = 22$ học sinh.

Vậy số học sinh không chơi được môn nào là: $100 - (47 + 22 + 23) = 8$ học sinh không chơi được môn nào trong hai môn thể thao.

Bài 20. Có 7 vận động viên TDTT đều được đăng kí ít nhất một môn bóng bàn, cầu lông. Kết quả có 4 vận động viên đăng kí bóng bàn, 5 vận động viên đăng kí cầu lông. Hỏi có bao nhiêu vận động viên chỉ đăng kí môn cầu lông?

Hướng dẫn giải. Gọi A là tập hợp các vận động viên đăng kí bóng bàn, B là tập hợp các vận động viên đăng kí cầu lông. Theo đề ta có $n(A) = 4, n(B) = 5, n(A \cup B) = 7$.

Số vận động viên chỉ đăng kí môn cầu lông là $n(B \setminus A) = n(A \cup B) - n(A) = 7 - 4 = 3$.

Bài 21. Bạn A Súa thống kê số ngày có mưa, có sương mù ở bản mình trong tháng 3 vào một thời điểm nhất định và được kết quả như sau: 14 ngày có mưa, 15 ngày có sương mù, trong đó 10 ngày có cả mưa và sương mù. Hỏi trong tháng 3 đó có bao nhiêu ngày không có mưa và không có sương mù?

Hướng dẫn giải.

Gọi A, B lần lượt là tập hợp các ngày có mưa, có sương mù. Khi đó, $A \cap B$ là tập hợp các ngày có cả mưa và sương mù, $A \cup B$ là tập hợp các ngày có mưa hoặc có sương mù.

Ta có: $n(A) = 14, n(B) = 15, n(A \cap B) = 10$.

Số ngày hoặc có mưa hoặc có sương mù là:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 14 + 15 - 10 = 19 \text{ (ngày)}.$$

Tháng 3 có 31 ngày nên số ngày không có mưa và không có sương mù trong tháng 3 đó là: $31 - 19 = 12$ (ngày).

Bài 22. Lớp 10A1 có 40 học sinh, trong đó có 20 học sinh thích môn Ngữ Văn, 18 học sinh thích môn Toán, 4 học sinh thích cả hai môn Ngữ Văn và Toán. Hỏi có bao nhiêu học sinh không thích môn nào trong hai môn Ngữ Văn và Toán?

Hướng dẫn giải.

Ta có $20 + 18 - 4 = 34$ học sinh hoặc thích môn Toán hoặc thích môn Ngữ Văn.

Do đó có $40 - 34 = 6$ học sinh không thích môn nào trong hai môn Toán và Ngữ Văn.

Bài 23. Trong 35 học sinh của lớp 10A có 20 học sinh biết chơi bóng đá, 25 học sinh biết chơi bóng chuyền và 4 học sinh không biết chơi cả hai môn. Hỏi có bao nhiêu học sinh của lớp 10A vừa biết chơi bóng đá vừa biết chơi bóng chuyền?

Hướng dẫn giải. Số học sinh biết ít nhất một môn bóng đá hoặc bóng chuyền là: $35 - 4 = 31$ học sinh.

Số học sinh vừa biết chơi bóng đá vừa biết chơi bóng chuyền là: $20 + 25 - 31 = 14$ học sinh.

Bài 24. Một lớp Ngoại ngữ có 25 sinh viên nói được tiếng Anh, 30 sinh viên nói được tiếng Hàn,

26 sinh viên nói được tiếng Trung. Trong đó có 8 sinh viên nói được cả tiếng Anh và tiếng Hàn, 12 sinh viên nói được tiếng Hàn và tiếng Trung, 5 sinh viên nói được tiếng Anh và tiếng Trung, 3 sinh viên nói được cả ba thứ tiếng. Biết mọi sinh viên trong lớp đều nói được ít nhất một trong ba ngoại ngữ trên. Hỏi có bao nhiêu sinh viên chỉ nói được một ngoại ngữ trong ba ngoại ngữ trên?

Hướng dẫn giải.

Số sinh viên chỉ nói được tiếng Anh: $25-2-3-5=15$.

Số sinh viên chỉ nói được tiếng Hàn: $30-5-3-9=13$.

Số sinh viên chỉ nói được tiếng Trung: $26-2-3-9=12$.

Vậy số sinh viên chỉ nói được một trong 3 ngoại ngữ trên là: $15+13+12=40$.

Bài 25. Một lớp học có 25 học sinh giỏi môn Toán, 23 học sinh giỏi môn Lý, 14 học sinh giỏi cả môn Toán và Lý và có 6 học sinh không giỏi môn nào cả. Hỏi lớp đó có bao nhiêu học sinh?

Hướng dẫn giải.

Gọi Ω, A, B lần lượt là tập hợp số học sinh của cả lớp, tập hợp số học sinh giỏi Toán, tập hợp số học sinh giỏi Lý.

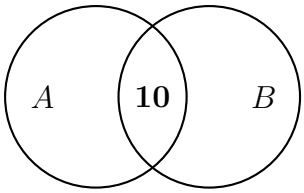
Ta có: $n(A)=25, n(B)=23, n(A\cap B)=14$.

$n(A\cup B)=25+23-14=34$.

$n(\Omega)=34+6=40$.

Bài 26. Lớp 10A có 45 học sinh chuẩn bị cho hội diễn văn nghệ chào mừng ngày nhà giáo Việt Nam 20/11. Trong danh sách đăng kí tham gia tiết mục nhảy Flashmob và tiết mục hát, có 35 học sinh tham gia tiết mục nhảy Flashmob, 10 học sinh tham gia cả hai tiết mục. Hỏi có bao nhiêu học sinh trong lớp tham gia tiết mục hát? Biết rằng lớp 10A có 4 bạn không tham gia tiết mục nào.

Hướng dẫn giải. Gọi A là tập hợp học sinh tham gia tiết mục nhảy Flashmob, B là tập hợp học sinh tham gia tiết mục hát.



Số học sinh tham gia ít nhất một trong hai tiết mục là $45-4=41 \Rightarrow n(A\cup B)=41$.

Theo giả thiết ta có $n(A)=35, n(A\cap B)=10$.

Ta có $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B) \Rightarrow 41=35+n(B)-10 \Rightarrow n(B)=16$.

Vậy lớp 10A có 16 học sinh tham gia tiết mục hát.

Bài 27. Bạn A.Súa thống kê số ngày có mưa, có sương mù ở bản mình trong tháng 3 vào một thời điểm nhất định và được kết quả như sau: 14 ngày có mưa, 15 ngày có sương mù, trong đó 10 ngày có cả mưa và sương mù. Hỏi trong tháng 3 đó có bao nhiêu ngày không có mưa và không có sương mù?

Hướng dẫn giải. Gọi A, B lần lượt là tập hợp các ngày có mưa, có sương mù.

Khi đó, $A\cap B$ là tập hợp các ngày có cả mưa và sương mù, $A\cup B$ là tập hợp các ngày hoặc có

mưa hoặc có sương mù.

Ta có: $n(A) = 14; n(B) = 15; n(A \cap B) = 10$.

Số ngày hoặc có mưa hoặc có sương mù là:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 14 + 15 - 10 = 19 \text{ (ngày)}.$$

Tháng 3 có 31 ngày nên số ngày không có mưa và không có sương mù trong tháng 3 đó là: $31 - 19 = 12$ (ngày).

Bài 28. Một nhóm có 12 học sinh chuẩn bị cho hội diễn văn nghệ. Trong danh sách đăng kí tham gia tiết mục múa và tiết mục hát của nhóm đó, có 5 học sinh tham gia tiết mục múa, 3 học sinh tham gia cả hai tiết mục. Hỏi có bao nhiêu học sinh trong nhóm tham gia tiết mục hát? Biết có 4 học sinh của nhóm không tham gia tiết mục nào.

Hướng dẫn giải. Vì nhóm có 12 học sinh, trong đó có 4 học sinh không tham gia tiết mục nào nên tổng số học sinh tham gia hai tiết mục múa và hát là: $12 - 4 = 8$ (học sinh)

Lại có: Trong 5 học sinh tham gia tiết mục múa, có 3 học sinh tham gia cả hai tiết mục.

Vậy số học sinh chỉ tham gia tiết mục múa là: $5 - 3 = 2$ (học sinh)

Do đó số học sinh tham gia tiết mục hát là: $8 - 2 = 6$ (học sinh).

Bài 29. Trong một đợt phát động quyên góp sách, vở để giúp đỡ học sinh có hoàn cảnh khó khăn của trường THPT Triệu Sơn 2, lớp 10B2 có 30 học sinh tham gia quyên góp vở, 29 học sinh quyên góp sách. Biết rằng, tất cả học sinh trong lớp 10B2 đều tham gia quyên góp, trong đó có 14 học sinh quyên góp cả sách và vở. Hỏi lớp 10B2 có tất cả bao nhiêu học sinh?

Hướng dẫn giải.

Gọi A là tập hợp các học sinh lớp 10B2 quyên góp sách, B là tập hợp các học sinh lớp 10B2 quyên góp vở.

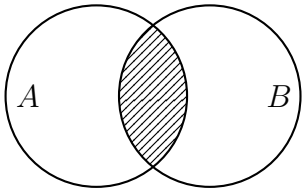
Khi đó, $A \cap B$ là tập hợp các học sinh lớp 10B2 tham gia quyên góp cả sách và vở, $A \cup B$ là tập hợp các học sinh lớp 10B2.

Số học sinh của lớp 10B2 là

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 30 + 29 - 14 = 45 \text{ (học sinh)}.$$

Bài 30. Một cuộc khảo sát về khách du lịch thăm vịnh Hạ Long cho thấy trong 1410 khách du lịch được phỏng vấn có 789 khách du lịch đến thăm động Thiên Cung, 690 khách du lịch đến thăm đảo Titop. Toàn bộ khách được phỏng vấn đã đến ít nhất một trong hai địa điểm trên. Hỏi có bao nhiêu khách du lịch vừa đến thăm động Thiên Cung vừa đến thăm đảo Titop ở vịnh Hạ Long?

Hướng dẫn giải. Gọi A là tập hợp các khách du lịch đến thăm động Thiên Cung; B là tập hợp các khách du lịch đến thăm đảo Titop $\Rightarrow n(A) = 789; n(B) = 690; n(A \cup B) = 1410$. Biểu đồ Ven:



Tổng số khách du lịch bằng số khách đến động Thiên Cung và số khách đến đảo Titop trừ đi số khách du lịch đến cả hai địa điểm.

Khi đó: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Leftrightarrow 1410 = 789 + 690 - n(A \cap B)$

$$\Rightarrow n(A \cap B) = 69$$

Vậy có 69 khách du lịch vừa đến thăm động Thiên cung vừa đến thăm đảo Titop ở vịnh Hạ Long.

Bài 31. Một lớp học có 25 học sinh chơi bóng đá, 23 học sinh chơi bóng bàn, 14 học sinh chơi cả bóng đá và bóng bàn, 6 học sinh không chơi môn nào. Tìm số học sinh chỉ chơi một môn thể thao?

Hướng dẫn giải. Gọi A là tập hợp các học sinh chơi bóng đá, B là tập hợp các học sinh chơi bóng bàn.

Ta có: $|A|$: là số học sinh chơi bóng đá; $|B|$: là số học sinh chơi bóng bàn.

Khi đó số học sinh chỉ chơi một môn thể thao là: $|A| + |B| - 2|A \cap B| = 25 + 23 - 2 \cdot 14 = 20$.

Bài 32. Trong số 40 học sinh của lớp 10A có 20 học sinh biết đánh cầu lông, 30 học sinh biết đá bóng. Biết rằng có 6 học sinh không biết chơi môn nào trong cả hai môn cầu lông và đá bóng. Hỏi lớp 10A có bao nhiêu học sinh biết đánh cầu lông và biết đá bóng.

Hướng dẫn giải.

Gọi A, B lần lượt là tập hợp các học sinh biết đánh cầu lông, biết đá bóng của lớp 10A.

Ta có: $n(A) = 20, n(B) = 30, n(A \cup B) = 40 - 6 = 34$.

Số học sinh biết chơi cầu lông và đá bóng là

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 20 + 30 - 34 = 16 \text{ (học sinh)}.$$

Bài 33. Một nhóm có 15 học sinh chuẩn bị cho hội thi thể thao. Trong danh sách đăng ký tham gia thi cầu lông và bóng bàn của nhóm đó, có 8 học sinh tham gia thi cầu lông, 5 học sinh tham gia cả hai môn cầu lông và bóng bàn. Hỏi có bao nhiêu học sinh trong nhóm tham gia thi bóng bàn? Biết rằng có 4 học sinh của nhóm không tham gia bất kỳ môn thể thao nào.

Hướng dẫn giải. Gọi A là tập hợp các học sinh tham gia thi cầu lông, B là tập hợp các học sinh thi bóng bàn.

Khi đó ta có $n(A) = 8; n(A \cap B) = 5$.

Nhóm có 15 học sinh trong đó có 4 học sinh không tham gia môn nào nên $n(A \cup B) = 15 - 4 = 11$.

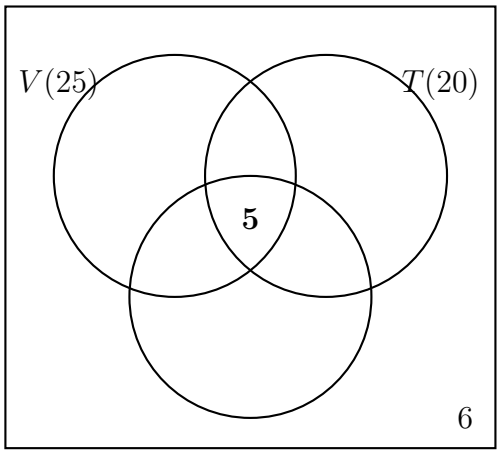
Ta có $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow 11 = 8 + n(B) - 5 \Rightarrow n(B) = 8$.

Bài 34. Để phục vụ cho một hội nghị quốc tế, ban tổ chức huy động 40 người phiên dịch tiếng Anh, 45 người phiên dịch tiếng Pháp, trong đó có 26 người phiên dịch được cả hai thứ tiếng Anh và Pháp. Hỏi ban tổ chức đã huy động tất cả bao nhiêu người phiên dịch trong hội nghị?

Hướng dẫn giải. Ban tổ chức đã huy động tất cả: $40 + 45 - 26 = 59$ (người).

Bài 35. Lớp 10A có 45 em học sinh, trong đó có 25 em thích môn Văn, 20 em thích môn Toán, 18 em thích môn Anh, 6 em không thích môn nào, 5 em thích cả ba môn. Hỏi số học sinh chỉ thích hai trong ba môn trên là bao nhiêu?

✍ *Hướng dẫn giải.*



Gọi x là số học sinh chỉ thích đúng một môn, y là số học sinh chỉ thích đúng hai môn ($x, y \in \mathbb{N}^*$).

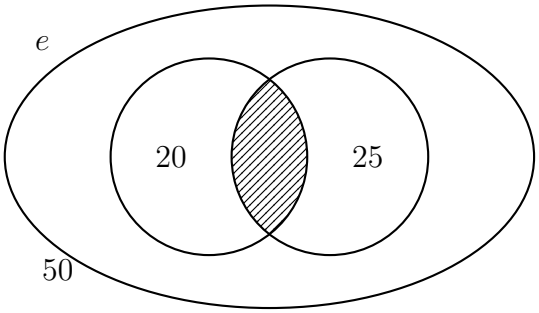
Theo bài ra ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+5+6=45 \\ x+2y+3\cdot 5=25+20+18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=34 \\ x+2y=48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=20 \\ y=14 \end{cases}$

Vậy có 14 em chỉ thích hai trong ba môn Toán, Anh, Văn.

Bài 36. Lớp 10A có 50 học sinh, trong đó có 20 học sinh tham gia cuộc thi khoa học kỹ thuật, 25 học sinh tham gia cuộc thi toán học cấp trường và 10 học sinh không tham gia cả hai cuộc thi này. Hỏi có bao nhiêu học sinh của lớp 11A tham gia đồng thời cả hai cuộc thi?

✍ *Hướng dẫn giải.*

Gọi x là học sinh của lớp 11A tham gia đồng thời cả hai cuộc thi. Ta có sơ đồ Ven:



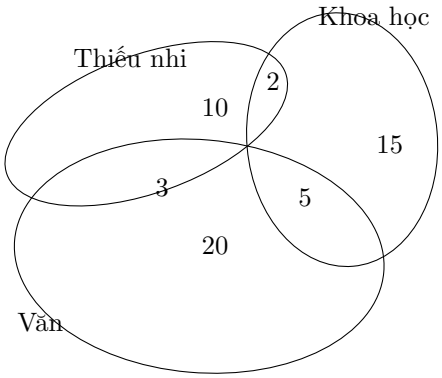
Số học sinh tham gia ít nhất một trong hai cuộc thi là: $50-10=40$ (học sinh).

Từ sơ đồ Ven ta có số học sinh lớp 11A tham gia đồng thời cả hai cuộc thi là: $x=20+25-40=5$ (học sinh).

Bài 37. Một cửa hàng sách có ba loại sách khác nhau: sách văn học, sách khoa học và sách thiếu nhi. Hôm nay, cửa hàng đã bán được 20 cuốn sách văn học, 15 cuốn sách khoa học và 10 cuốn sách thiếu nhi. Biết trong đó có 5 cuốn sách vừa thuộc loại văn học vừa thuộc loại khoa học, có 3 cuốn sách vừa thuộc loại văn học vừa thuộc loại thiếu nhi, có 2 cuốn sách vừa thuộc loại khoa học vừa thuộc loại thiếu nhi. Không có cuốn sách nào thuộc cả ba loại sách. Hãy tính tổng số cuốn sách khác nhau mà cửa hàng đã bán hôm nay.

✍ *Hướng dẫn giải.*

Ta có biểu đồ Ven như sau:



Số cuốn sách chỉ thuộc thể loại văn học: $20-3-5=12$.

Số cuốn sách chỉ thuộc thể loại khoa học: $15-5-2=8$.

Số cuốn sách chỉ thuộc thể loại thiếu nhi: $10-3-2=5$.

Vậy, tổng số cuốn sách khác nhau mà cửa hàng đã bán hôm nay là: $12+8+5+3+5+2=35$ cuốn.

Bài 38. Trong đợt khảo sát nghề, giáo viên chủ nhiệm lớp 10D đưa ra ba nhóm ngành cho học sinh lựa chọn, đó là: Giáo dục, Y tế, Công nghệ thông tin. Học sinh có thể chọn từ một đến ba nhóm ngành nêu trên hoặc không chọn nhóm ngành nào trong ba nhóm ngành trên. Giáo viên chủ nhiệm thống kê theo từng nhóm ngành và được kết quả: có 6 học sinh chọn nhóm ngành Giáo dục, 9 học sinh chọn nhóm ngành Y tế, 10 học sinh chọn nhóm ngành Công nghệ thông tin, 22 học sinh không chọn nhóm ngành nào trong ba nhóm ngành trên. Nếu thống kê số lượng học sinh chọn theo từng hai nhóm ngành được kết quả: có 3 học sinh chọn hai nhóm ngành Giáo dục và Y tế, 2 học sinh chọn hai nhóm ngành Y tế và Công nghệ thông tin, 3 học sinh chọn hai nhóm ngành Giáo dục và Công nghệ thông tin. Hỏi có bao nhiêu học sinh chọn cả ba nhóm ngành nêu trên biết lớp 10D có 40 học sinh?

✍ *Hướng dẫn giải.* Gọi A, B, C lần lượt là tập hợp học sinh chọn nhóm ngành Giáo dục, Y tế, Công nghệ thông tin. Khi đó $A\cup B\cup C$ là tập hợp các học sinh chọn ít nhất một trong ba nhóm ngành trên.

Do lớp 10D có 40 học sinh và 22 học sinh không chọn nhóm ngành nào trong ba nhóm ngành trên nên số học sinh chọn ít nhất một trong ba nhóm ngành trên là $40-22=18$.

Ta có: $n(A)=6$; $n(B)=9$; $n(C)=10$; $n(A\cup B\cup C)=18$; $n(A\cap B)=3$, $n(B\cap C)=2$; $n(A\cap C)=3$.

Áp dụng công thức tính số phần tử của tập hợp:

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(B\cap C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

Ta có số học sinh chọn cả ba nhóm ngành nêu trên là:

$$\begin{aligned}n(A\cap B\cap C)&=n(A\cup B\cup C)+n(B\cap C)+n(A\cap B)+n(A\cap C)-n(A)-n(B)-n(C)\\&=18+3+2+3-6-9-10=1\end{aligned}$$

Chương II

BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

§1 BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

I. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1) Định nghĩa

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng tổng quát là:

$$ax + by \le c \quad (ax + by \ge c,\ ax + by < c,\ ax + by > c)$$

trong đó a, b, c là những số thực đã cho, a và b không đồng thời bằng 0, x và y là các ẩn số.

Ví dụ 9

ất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

$$2x + 3y < 1; \qquad 2x^2 + 3y < 1.$$

Lời giải. Bất phương trình $2x + 3y < 1$ là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Bất phương trình $2x^2 + 3y < 1$ không phải là bất phương trình bậc nhất hai ẩn vì chứa x^2.

bài tập tương tự

Trong các bất phương trình sau, đâu là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

$$x - 4y \ge 5; \qquad x + xy < 2.$$

» Sưu tầm và biên soạn: Lê Minh Kha - 0399653362

Cặp số $(x_0; y_0)$ được gọi là một nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $ax+by \leq c$ nếu bất đẳng thức $ax_0 + by_0 \leq c$ đúng.

Ví dụ 1

Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn $x + 2y > 5$. Cặp số nào sau đây là một nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn trên?

a) $(x; y) = (3; 4)$;

b) $(x; y) = (0; -1)$.

Lời giải. a) Vì $3 + 2 \cdot 4 = 11 > 5$ nên cặp số $(3; 4)$ là một nghiệm của bất phương trình đã cho.

b) Vì $0 + 2 \cdot (-1) = -2 < 5$ nên cặp số $(0; -1)$ không phải là một nghiệm của bất phương trình đã cho.

NHẬN XÉT. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn luôn có vô số nghiệm.

bài tập tương tự

Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn $x + 2y \geq 0$.

a) Hãy chỉ ra ít nhất hai nghiệm của bất phương trình trên.

b) Với $y = 0$, có bao nhiêu giá trị của x thoả mãn bất phương trình đã cho?

....

....

....

....

....

II. BIỂU DIỄN MIỀN NGHIỆM CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN TRÊN MẶT PHẲNG TỌA ĐỘ

- Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm có tọa độ là nghiệm của bất phương trình $ax + by \leq c$ được gọi là miền nghiệm của bất phương trình đó.
- Người ta chứng minh được rằng đường thẳng d có phương trình $ax + by = c$ chia mặt phẳng tọa độ Oxy thành hai nửa mặt phẳng bờ d:
  - Một nửa mặt phẳng (không kể bờ d) gồm các điểm có tọa độ $(x; y)$ thỏa mãn $ax + by > c$;
  - Nửa mặt phẳng còn lại (không kể bờ d) gồm các điểm có tọa độ $(x; y)$ thỏa mãn $ax + by < c$.

  Bờ d gồm các điểm có tọa độ $(x; y)$ thỏa mãn $ax + by = c$.

Ví dụ 2

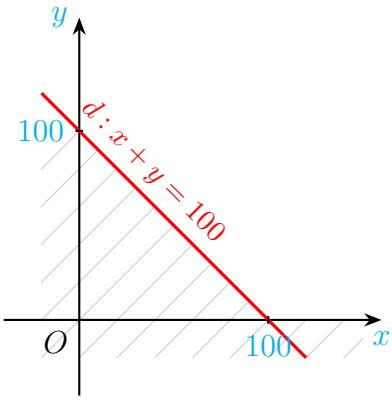
Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $x+y \geq 100$ trên mặt phẳng tọa độ.

Lời giải. Ta biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $x+y \geq 100$ như sau:

Bước 1. Vẽ đường thẳng $d: x+y=100$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

Bước 2. Lấy một điểm bất kì không thuộc d trên mặt phẳng rồi thay vào biểu thức $x+y$. Chẳng hạn, lấy $O(0;0)$, ta có: $0+0<100$.

Do đó miền nghiệm của bất phương trình đã cho là nửa mặt phẳng bờ d không chứa gốc tọa độ (miền không bị gạch).



Hình 2.2

Cách biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn $ax+by \leq c$.

- Vẽ đường thẳng $d: ax+by=c$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy.
- Lấy một điểm $M_0(x_0;y_0)$ không thuộc d.
- Tính ax_0+by_0 và so sánh với c.
- Nếu $ax_0+by_0<c$ thì nửa mặt phẳng bờ d chứa M_0 là miền nghiệm của bất phương trình. Nếu $ax_0+by_0>c$ thì nửa mặt phẳng bờ d không chứa M_0 là miền nghiệm của bất phương trình.

Miền nghiệm của bất phương trình $ax+by<c$ là miền nghiệm của bất phương trình $ax+by \leq c$ bỏ đi đường thẳng $ax+by=c$ và biểu diễn đường thẳng bằng nét đứt.

Ví dụ 3

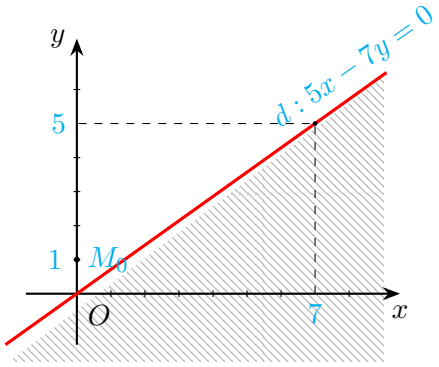
Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình $5x-7y \leq 0$ trên mặt phẳng tọa độ.

Lời giải. Bước 1. Vẽ đường thẳng $d: 5x-7y=0$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

Bước 2. Lấy điểm $M_0(0;1)$ không thuộc d và thay $x=0, y=1$ vào biểu thức $5x-7y$ ta được: $5 \cdot 0-7 \cdot 1=-7<0$.

Do đó miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ d chứa điểm M_0 (miền không bị

gạch).



Hình 2.3

bài tập tương tự

Biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình sau:

a) $2x + y < 200$ b) $x + 2y \leq 0$; c) $y \geq 2$; d) $x \leq 4$.

bài tập tương tự

Sản phẩm của một công ty có hai loại là loại đơn giản và loại cao cấp. Mỗi loại đơn giản cần 2 giờ và mỗi loại cao cấp cần 3 giờ để sơn màu. Công ty đã giao công việc cho một người thợ sơn và người này làm việc tối đa 40 giờ/tuần.

a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y thể hiện điều kiện ràng buộc để có thể sơn x mẫu đơn giản và y mẫu cao cấp trong một tuần.

b) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình tìm được ở câu a).

....

....

....

....

....

....

III. BÀI TẬP ÔN LUYỆN

1) Bài tập tự luận

Bài 1. Bất phương trình nào sau đây là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

a) $2x + 3y > 6$;

b) $2^2x + y \leq 0$;

c) $2x^2 - y \geq 1$.

Bài 2. Biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình sau trên mặt phẳng toạ độ:

a) $3x + 2y \geq 300$;

b) $7x + 20y < 0$.

Bài 3. Ông An muốn thuê một chiếc ô tô (có lái xe) trong một tuần. Giá thuê xe được cho như bảng sau:

	Phí cố định (nghìn đồng/ngày)	Phí tính theo quãng đường di chuyển (nghìn đồng/kilômét)
Từ thứ Hai đến thứ Sáu	900	8
Thứ Bảy và Chủ nhật	1 500	10

a) Gọi x và y lần lượt là số kilômét ông An đi trong các ngày từ thứ Hai đến thứ Sáu và trong hai ngày cuối tuần. Viết bất phương trình biểu thị mối liên hệ giữa x và y sao cho tổng số tiền ông An phải trả không quá 14 triệu đồng.

b) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình ở câu a trên mặt phẳng tọa độ.

Bài 4. Bạn Cúc muốn pha hai loại nước cam. Để pha một lít nước cam loại I cần 30g bột cam, còn một lít nước cam loại II cần 20g bột cam. Gọi x và y lần lượt là số lít nước cam loại I và II pha chế được. Biết rằng Cúc chỉ có thể dùng không quá 100g bột cam. Hãy lập các bất phương trình mô tả số lít nước cam loại I và II mà bạn Cúc có thể pha chế được và biểu diễn miền nghiệm của các bất phương trình đó trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy.

Bài 5. Một gian hàng trưng bày bàn và ghế rộng 60m^2. Diện tích để kê một chiếc ghế là $0,5\text{m}^2$, một chiếc bàn là $1,2\text{m}^2$. Gọi x là số chiếc ghế, y là số chiếc bàn được kê.

a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y cho phần mặt sàn để kê bàn và ghế, biết diện tích mặt sàn dành cho lưu thông tối thiểu là 12m^2.

b) Chỉ ra ba nghiệm của bất phương trình trên.

Bài 6. Bạn Nga muốn pha hai loại nước rửa xe. Để pha một lít loại I cần 600 ml dung dịch chất tẩy rửa, loại II chỉ cần 400 ml. Gọi x và y lần lượt là số lít nước rửa xe loại I và II pha chế được, và biết rằng Nga chỉ có 2400 ml chất tẩy rửa. Hãy lập các bất phương trình mô tả số lít nước rửa xe loại I và II mà bạn Nga có thể pha chế được và biểu diễn miền nghiệm của từng bất phương trình đó lên mặt phẳng tọa độ Oxy.

Bài 7. Trong 1 lạng (100g) thịt bò chứa khoảng 26g protein, 1 lạng cá rô phi chứa khoảng 20g protein. Trung bình trong một ngày, một người phụ nữ cần tối thiểu 46g protein. (Nguồn: *https://vinmec.com* và *https://thanhnien.vn*). Gọi x, y lần lượt là số lạng thịt bò và số lạng cá rô phi mà một người phụ nữ nên ăn trong một ngày.

a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y để biểu diễn lượng protein cần thiết cho một người phụ nữ trong một ngày.

b) Chỉ ra ba nghiệm của bất phương trình đó.

Bài 8. Một cửa hàng bán lẻ bán hai loại hạt cà phê. Loại thứ nhất giá 140 nghìn đồng/kg và loại thứ hai giá 180 nghìn đồng/kg. Cửa hàng trộn x kg loại thứ nhất và y kg loại thứ hai sao cho hạt cà phê đã trộn có giá không quá 170 nghìn đồng/kg.

a) Viết bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y thỏa mãn điều kiện đề bài.

b) Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình tìm được ở câu a) trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

2) Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Bất phương trình nào dưới đây là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

Ⓐ $2x^2 - 3x \geq 1$.
Ⓑ $2x + y \leq 1$.
Ⓒ $3x + y^2 + 1 \leq 0$.
Ⓓ $3x + y = 1$.

Câu 2. Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình $2x - y + 1 < 0$?

Ⓐ $(0; -1)$.
Ⓑ $(3; 5)$.
Ⓒ $(1; 4)$.
Ⓓ $(2; -1)$.

Câu 3. Cặp số nào sau đây **không** là nghiệm của bất phương trình $2x + 3y - 1 > 0$?

Ⓐ $(-2; 3)$.
Ⓑ $(-1; 4)$.
Ⓒ $(4; 0)$.
Ⓓ $(-1; 0)$.

Câu 4. Miền nghiệm của bất phương trình $3x + 2(y + 3) > 4(x + 1) - y + 3$ là phần mặt phẳng chứa điểm nào?

Ⓐ $(3; 0)$.
Ⓑ $(3; 1)$.
Ⓒ $(1; 1)$.
Ⓓ $(0; 0)$.

Câu 5. Miền nghiệm của bất phương trình $5(x + 2) - 9 < 2x - 2y + 7$ là phần mặt phẳng **không** chứa điểm nào?

Ⓐ $(-2; 1)$.
Ⓑ $(2; 3)$.
Ⓒ $(2; -1)$.
Ⓓ $(0; 0)$.

Câu 6. Cho đường thẳng $d : 7x - 9y + 2 = 0$ chia mặt phẳng tọa độ làm hai nửa mặt phẳng, trong đó miền nghiệm của bất phương trình $7x - 9y + 2 > 0$ là nửa mặt phẳng

Ⓐ có bờ là đường thẳng d và không chứa điểm $O(0; 0)$.
Ⓑ không có bờ d và chứa điểm $O(0; 0)$.
Ⓒ có bờ là đường thẳng d và chứa điểm $O(0; 0)$.

Ⓓ không chứa bờ d và không chứa điểm $O(0;0)$.

Câu 7. Cặp số $(9;8)$ là một nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

Ⓐ $2x-5y-1>0$.
Ⓑ $x-y<0$.
Ⓒ $x+3y-5<0$.
Ⓓ $2x-y+1\geq 0$.

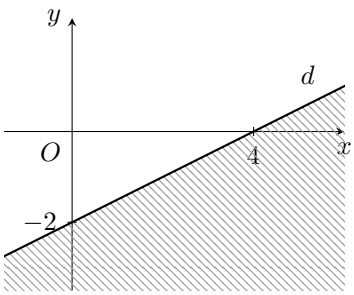
Câu 8. Tìm m để $mx-3y<2$ là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

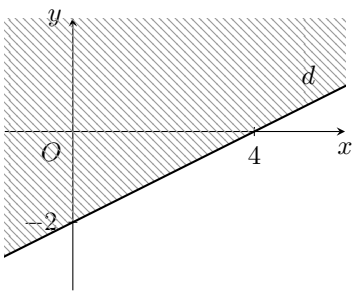
Ⓐ $m\in\mathbb{R}$.
Ⓑ $m\neq 0$.
Ⓒ $m>0$.
Ⓓ $m<0$.

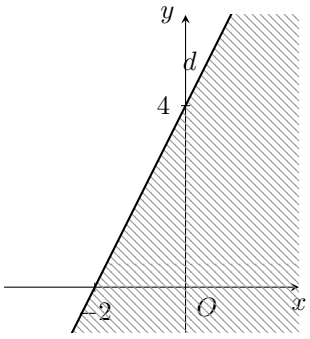
Câu 9. Với giá trị nào của tham số m thì bất phương trình $(m^2-1)x+(2-2m)y>2$ là bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

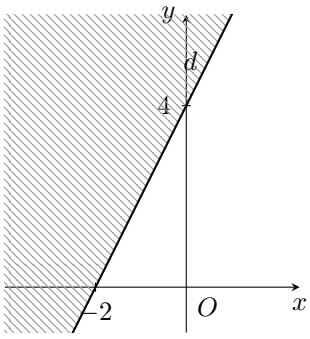
Ⓐ $m\neq 1$.
Ⓑ $m\neq \pm 1$.
Ⓒ $m=1$.
Ⓓ $m=-1$.

Câu 10. Miền nghiệm của bất phương trình $x-2y<4$ được xác định bởi miền nào (nửa mặt phẳng không bị gạch và không kể d) sau đây?

Ⓐ


Ⓑ


Ⓒ


Ⓓ


BẢNG ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á
1	B	2	C	3	D	4	C	5	B
6	B	7	D	8	A	9	A	10	B

§2 HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

I. HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

- Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là một hệ gồm hai hay nhiều bất phương trình bậc nhất hai ẩn.
- Cặp số $(x_0; y_0)$ là nghiệm của một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn khi $(x_0; y_0)$ đồng thời là nghiệm của tất cả các bất phương trình trong hệ đó.

Ví dụ 4

Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 150. \end{cases}$

a) Hệ trên có phải là một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn không?

b) Kiểm tra xem cặp số $(x; y) = (0; 0)$ có phải là một nghiệm của hệ bất phương trình trên không.

Lời giải. a) Hệ bất phương trình đã cho là một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn x và y.

b) Cặp số $(x; y) = (0; 0)$ thoả mãn cả ba bất phương trình của hệ nên nó là một nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn đã cho.

bài tập tương tự

Hãy chỉ ra 3 nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x - 3y - 10 < 0 \end{cases}$

....

....

....

....

....

II. BIỂU DIỄN MIỀN NGHIỆM CỦA HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

- Trong mặt phẳng tọa độ, tập hợp các điểm có tọa độ là nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn là **miền nghiệm** của hệ bất phương trình đó.
- Miền nghiệm của hệ là giao các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.

Ví dụ 5

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình sau trên mặt phẳng tọa độ:

$$\begin{cases} 7x + 4y \leq 2\,400 \\ x + y \leq 100 \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Lời giải. *Bước 1.* Xác định miền nghiệm D_1 của bất phương trình $7x + 4y \leq 2\,400$ và gạch bỏ miền còn lại.

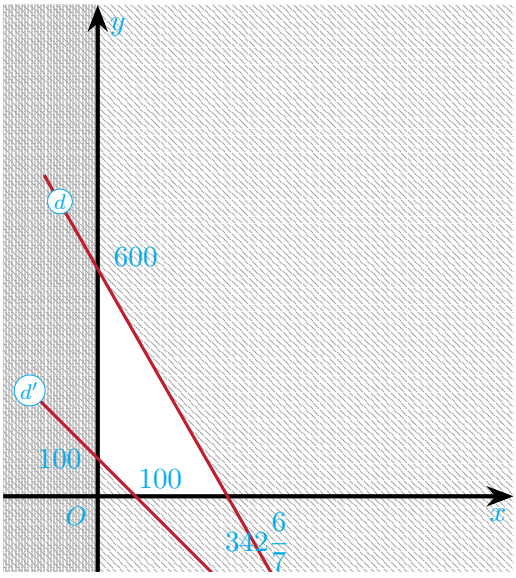
- Vẽ đường thẳng $d : 7x + 4y = 2\,400$.
- Vì $7 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0 < 2\,400$ nên tọa độ điểm $O(0; 0)$ thỏa mãn bất phương trình $7x + 4y \leq 2\,400$.

Do đó, miền nghiệm D_1 của bất phương trình $7x + 4y \leq 2\,400$ là nửa mặt phẳng bờ d chứa gốc tọa độ O.

Bước 2. Tương tự, miền nghiệm D_2 của bất phương trình $x + y \leq 100$ là nửa mặt phẳng bờ d' chứa gốc tọa độ O.

Bước 3. Tương tự, miền nghiệm D_3 của bất phương trình $x \geq 0$ là nửa mặt phẳng bờ Oy chứa điểm $(1; 0)$.

Khi đó, miền không bị gạch chính là giao các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ. Vậy miền nghiệm của hệ là miền không bị gạch trong Hình 2.6.



Cách xác định miền nghiệm của một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn:

- Trên cùng một mặt phẳng tọa độ, xác định miền nghiệm của mỗi bất phương trình bậc nhất hai ẩn trong hệ và gạch bỏ miền còn lại.
- Miền không bị gạch là miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

bài tập tương tự

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x - 2y - 6 \geq 0 \\ 4x + y - 4 \leq 0. \end{cases}$$

....

....

....

....

....

bài tập tương tự

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y > 0 \\ x + y \leq 100 \\ 2x + y < 120. \end{cases}$$

....

....

....

....

....

III. ỨNG DỤNG CỦA HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

- Hệ bất phương trình giúp ta mô tả được nhiều bài toán thực tế để tìm ra cách giải quyết tối ưu. Chúng thường được đưa về bài toán tìm giá trị lớn nhất (GTLN) hoặc giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức $F = ax + by$ trên một miền đa giác.
- Người ta chứng minh được $F = ax + by$ đạt giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất tại một trong các đỉnh của đa giác.

Ví dụ 6

Một công ty cần thuê xe vận chuyển ít nhất 140 người và 9 tấn hàng hóa. Nơi cho thuê xe có hai loại: A và B. Một chiếc xe loại A có thể chở 20 người và 0,6 tấn hàng hóa. Một chiếc xe loại B có thể chở 10 người và 1,5 tấn hàng hóa. Gọi x là số xe loại A và y là số xe loại B mà công ty này thuê.

a) Viết một hệ bất phương trình ẩn x, y thỏa mãn tất cả các điều kiện đã cho.

b) Giải bài toán bằng cách biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình đó và xác định tọa độ các đỉnh của miền nghiệm này.

c) Giả sử chi phí thuê một chiếc xe loại A là 4 triệu đồng, loại B là 3 triệu đồng. Công ty này phải thuê bao nhiêu xe mỗi loại để chi phí là thấp nhất?

Lời giải. a) Vì mỗi chỗ thuê xe chỉ có 10 xe loại A và 9 xe loại B nên ta có:

$$x, y \in \mathbb{N}, \quad 0 \le x \le 10, \quad 0 \le y \le 9.$$

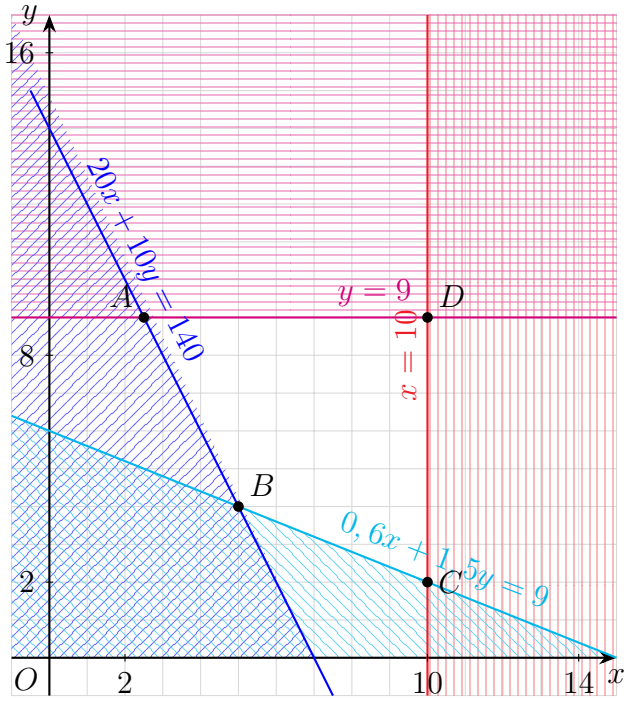
Vì công ty này cần vận chuyển **ít nhất** 140 người và 9 tấn hàng hoá nên ta có:

$$20x + 10y \ge 140, \quad 0,6x + 1,5y \ge 9.$$

Vậy hệ bất phương trình cần tìm là:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 10 \\ 0 \le y \le 9 \\ 20x + 10y \ge 140 \\ 0,6x + 1,5y \ge 9. \end{cases}$$

b) Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, miền nghiệm của hệ bất phương trình.



Các đỉnh của tứ giác là: $A\left(\frac{5}{2}; 9\right)$, $B(5; 4)$, $C(10; 2)$, $D(10; 9)$.

c) Chi phí thuê xe là:

$$F(x,y) = 4x + 3y \text{ (triệu đồng)}.$$

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $F(x,y)$ tại các đỉnh của tứ giác trên:

$$F\left(\frac{5}{2};9\right) = 37, \quad F(10;9) = 67, \quad F(5;4) = 32, \quad F(10;2) = 46.$$

Giá trị nhỏ nhất là $F(5;4) = 32$ khi công ty thuê $x = 5, y = 4$.

Vậy công ty nên thuê 5 chiếc xe loại A và 4 chiếc xe loại B để chi phí là thấp nhất.

Ví dụ 7

Một người dùng ba loại nguyên liệu A, B, C để sản xuất ra hai loại sản phẩm P và Q. Để sản xuất 1 kg mỗi loại sản phẩm P hoặc Q phải dùng một số kilôgam nguyên liệu khác nhau. Tổng số kilôgam nguyên liệu mỗi loại mà người đó có và số kilôgam từng loại nguyên liệu cần thiết để sản xuất ra 1 kg sản phẩm mỗi loại được cho trong bảng sau:

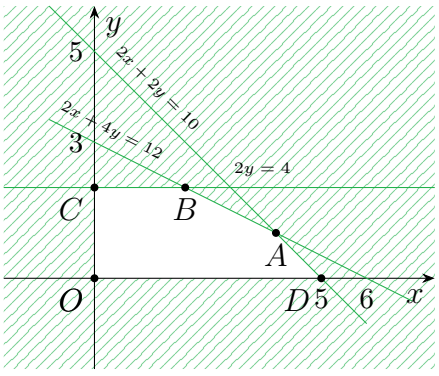
Loại nguyên liệu	Số kilôgam nguyên liệu đang có	Số kilôgam từng loại nguyên liệu cần để sản xuất 1 kg sản phẩm	
		P	Q
A	10	2	2
B	4	0	2
C	12	2	4

Biết 1 kg sản phẩm P có lợi nhuận 3 triệu đồng và 1 kg sản phẩm Q có lợi nhuận 5 triệu đồng. Lập phương án sản xuất hai loại sản phẩm trên sao cho có lãi cao nhất.

Lời giải. Gọi x là số kilôgam sản phẩm P, y là số kilôgam sản phẩm Q cần sản xuất. Ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 2x + 2y \le 10 \\ 2y \le 4 \\ 2x + 4y \le 12 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình trên hệ trục tọa độ Oxy, ta được như hình bên.



Miền nghiệm là ngũ giác $OCBAD$ với các đỉnh: $O(0;0); C(0;2); B(2;2); A(4;1); D(5;0)$.

Gọi F là số tiền lãi (đơn vị: triệu đồng) thu được, ta có: $F = 3x + 5y$.

Tính giá trị F tại các đỉnh của ngũ giác:

- Tại $O(0;0)$: $F = 3 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0$;
- Tại $C(0;2)$: $F = 3 \cdot 0 + 5 \cdot 2 = 10$;
- Tại $B(2;2)$: $F = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = 16$;
- Tại $A(4;1)$: $F = 3 \cdot 4 + 5 \cdot 1 = 17$;
- Tại $D(5;0)$: $F = 3 \cdot 5 + 5 \cdot 0 = 15$;

F đạt giá trị lớn nhất bằng 17 tại điểm $A(4;1)$.

Vậy người đó cần sản xuất 4 kg sản phẩm P và 1 kg sản phẩm Q để có lãi cao nhất là 17 triệu đồng.

bài tập tương tự

Một cửa hàng có kế hoạch nhập về hai loại máy tính A và B, giá mỗi chiếc lần lượt là 10 triệu đồng và 20 triệu đồng với số vốn ban đầu không vượt quá 4 tỉ đồng. Loại máy A mang lại lợi nhuận 2,5 triệu đồng cho mỗi máy bán được và loại máy B mang lại lợi nhuận là 4 triệu đồng mỗi máy. Cửa hàng ước tính rằng tổng nhu cầu hàng tháng sẽ không vượt quá 250 máy. Giả sử trong một tháng cửa hàng cần nhập số máy tính loại A là x và số máy tính loại B là y.

a) Viết các bất phương trình biểu thị các điều kiện của bài toán thành một hệ bất phương trình rồi xác định miền nghiệm của hệ đó.

b) Gọi F (triệu đồng) là lợi nhuận mà cửa hàng thu được trong tháng đó khi bán x máy tính loại A và y máy tính loại B. Hãy biểu diễn F theo x và y.

c) Tìm số lượng máy tính mỗi loại cửa hàng cần nhập về trong tháng đó để lợi nhuận thu được là lớn nhất.

IV. BÀI TẬP ÔN LUYỆN

1) Bài tập tự luận

Bài 1. Hệ bất phương trình nào sau đây là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn?

a) $\begin{cases} x < 0 \\ y \geq 0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y^2<0 \\ y-x>1; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y+z<0 \\ y<0; \end{cases}$

d) $\begin{cases} -2x+y<3^2 \\ 4^2x+3y<1. \end{cases}$

Bài 2. Biểu diễn miền nghiệm của mỗi hệ bất phương trình sau trên mặt phẳng toạ độ:

a) $\begin{cases} y-x<-1 \\ x>0 \\ y<0; \end{cases}$

b) $\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ 2x+y\leq 4; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x\geq 0 \\ x+y>5 \\ x-y<0. \end{cases}$

Bài 3. Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kilôgam thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit. Mỗi kilôgam thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit. Biết rằng gia đình này chỉ mua nhiều nhất là 1,6 kg thịt bò và 1,1 kg thịt lợn; giá tiền 1 kg thịt bò là 250 nghìn đồng; 1 kg thịt lợn là 160 nghìn đồng. Giả sử gia đình đó mua x kilôgam thịt bò và y kilôgam thịt lợn.

a) Viết các bất phương trình biểu thị các điều kiện của bài toán thành một hệ bất phương trình rồi xác định miền nghiệm của hệ đó.

b) Gọi F (nghìn đồng) là số tiền phải trả cho x kilôgam thịt bò và y kilôgam thịt lợn. Hãy biểu diễn F theo x và y.

c) Tìm số kilôgam thịt mỗi loại mà gia đình cần mua để chi phí là ít nhất.

Bài 4. Anh Trung có kế hoạch đầu tư 400 triệu đồng vào hai khoản X và Y. Để đạt được lợi nhuận thì khoản X phải đầu tư ít nhất 100 triệu đồng và số tiền đầu tư cho khoản Y không nhỏ hơn số tiền cho khoản X. Viết hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn để mô tả hai khoản đầu tư đó và biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình vừa tìm được.

Bài 5. Một nhà máy sản xuất hai loại thuốc trừ sâu nông nghiệp là A và B. Cứ sản xuất mỗi thùng loại A thì nhà máy thải ra 0,25 kg khí cacbon dioxide (CO_2) và 0,6 kg khí sulfur dioxide (SO_2), sản xuất mỗi thùng loại B thì thải ra 0,5 kg CO_2 và 0,2 kg SO_2. Biết rằng, quy định hạn chế sản lượng CO_2 của nhà máy tối đa là 75 kg và SO_2 tối đa là 90 kg mỗi ngày.

a) Tìm hệ bất phương trình mô tả số thùng của mỗi loại thuốc trừ sâu mà nhà máy có thể sản xuất mỗi ngày để đáp ứng các điều kiện hạn chế trên. Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình đó trên mặt phẳng tọa độ.

b) Việc nhà máy sản xuất 100 thùng loại A và 80 thùng loại B mỗi ngày có phù hợp với quy định không?

c) Việc nhà máy sản xuất 60 thùng loại A và 160 thùng loại B mỗi ngày có phù hợp với quy định không?

Bài 6. Để gây quỹ từ thiện, câu lạc bộ thiện nguyện của một trường THPT tổ chức hoạt động bán hàng với hai mặt hàng là nước chanh và khoai chiên. Câu lạc bộ thiết kế hai thực đơn. Thực đơn 1 có giá 35 nghìn đồng, bao gồm hai cốc nước chanh và một túi khoai chiên. Thực đơn 2 có giá 60 nghìn đồng, bao gồm ba cốc nước chanh và hai túi khoai chiên. Biết rằng câu lạc bộ chỉ làm được không quá 165 cốc nước chanh và 100 túi khoai chiên. Số tiền lớn nhất mà câu lạc bộ có thể nhận được sau khi bán hết hàng bằng bao nhiêu nghìn đồng?

Bài 7. Một phân xưởng sản xuất hai kiểu mũ. Thời gian để làm ra một chiếc mũ kiểu thứ nhất nhiều gấp hai lần thời gian làm ra chiếc mũ kiểu thứ hai. Nếu chỉ sản xuất toàn kiểu mũ thứ hai thì trong 1 giờ phân xưởng làm được 60 chiếc. Phân xưởng làm việc không quá 8 tiếng mỗi ngày và thị trường tiêu thụ tối đa trong một ngày là 200 chiếc mũ kiểu thứ nhất và 240 chiếc mũ kiểu thứ hai. Tiền lãi khi bán một chiếc mũ kiểu thứ nhất là 24 nghìn đồng, một chiếc mũ kiểu thứ hai là 15 nghìn đồng. Tính số lượng mũ kiểu thứ nhất và kiểu thứ hai trong một ngày mà phân xưởng cần sản xuất để tiền lãi thu được là cao nhất.

Bài 8. Bạn Lan thu xếp được không quá 10 giờ để làm hai loại đèn trung thu tặng cho các trẻ em khuyết tật. Loại đèn hình con cá cần 2 giờ để làm xong 1 cái, còn loại đèn ông sao chỉ cần 1 giờ để làm xong 1 cái. Gọi x, y lần lượt là số đèn hình con cá và đèn ông sao bạn Lan sẽ làm. Hãy lập hệ bất phương trình mô tả điều kiện của x, y và biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình đó.

Bài 9. Một học sinh dự định vẽ các tấm thiệp xuân bằng tay để bán trong một hội chợ Tết. Cần 2 giờ để vẽ một tấm thiệp loại nhỏ có giá 10 nghìn đồng và 3 giờ để vẽ một tấm thiệp lớn có giá 20 nghìn đồng. Học sinh này chỉ có 30 giờ vẽ và ban tổ chức hội chợ yêu cầu phải vẽ ít nhất 12 tấm. Hãy cho biết bạn ấy cần vẽ bao nhiêu tấm thiệp mỗi loại để có được nhiều tiền nhất.

Bài 10. Trong một tuần, bạn Mạnh có thể thu xếp được tối đa 12 giờ để tập thể dục giảm cân bằng hai môn: đạp xe và tập cử tạ tại phòng tập. Cho biết mỗi giờ đạp xe sẽ tiêu hao 350 calo và không tốn chi phí, mỗi giờ tập cử tạ sẽ tiêu hao 700 calo với chi phí 50 000 đồng/giờ. Mạnh muốn tiêu hao nhiều calo nhưng không được vượt quá 7 000 calo một tuần. Hãy giúp bạn Mạnh tính số giờ đạp xe và số giờ tập tạ một tuần trong hai trường hợp sau:

a) Mạnh muốn chi phí tập luyện là ít nhất.

b) Mạnh muốn số calo tiêu hao là lớn nhất.

Bài 11. Cho biết mỗi kilôgam thịt bò giá 250 nghìn đồng, trong đó có chứa khoảng 800 đơn vị protein và 100 đơn vị lipit, mỗi kilôgam thịt heo có giá 200 nghìn đồng, trong đó có chứa khoảng 600 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit. Một gia đình cần ít nhất 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit trong khẩu phần thức ăn mỗi ngày và họ chỉ có thể mua một ngày không quá 1 kg thịt bò và 1,5 kg thịt heo. Hỏi gia đình này phải mua bao nhiêu kilôgam thịt mỗi loại để chi phí là ít nhất?

Bài 12. Một phân xưởng may áo vest và quần âu để chuẩn bị cho dịp cuối năm. Biết may 1 áo vest hết 2m vải và cần 20 giờ; 1 quần âu hết 1,5 m vải và cần 5 giờ. Xí nghiệp được giao sử dụng không quá 900 m vải và số giờ công không vượt quá 6000 giờ. Theo khảo sát thị trường, số lượng quần bán ra không nhỏ hơn số lượng áo và không vượt quá 2 lần số lượng áo. Khi xuất ra thị trường, 1 chiếc áo lãi 350 nghìn đồng, 1 chiếc quần lãi 100 nghìn đồng. Phân xưởng cần may bao nhiêu áo vest và quần âu để thu được tiền lãi cao nhất (biết thị trường tiêu thụ luôn đón nhận sản phẩm của xí nghiệp).

2) Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cặp số nào sau đây là nghiệm của hệ bất phương trình: $\begin{cases} x-2y<0 \\ x+3y>-2 \\ -x+y<3 \end{cases}$?

Ⓐ $(1;0)$.. Ⓑ $(-1;0)$.. Ⓒ $(-2;3)$.. Ⓓ $(0;-1)$..

Câu 2. Trong các cặp số sau, cặp nào **không** là nghiệm của hệ bất phương trình: $\begin{cases} x+y-2\le 0 \\ 2x-3y+2>0 \end{cases}$

Ⓐ $(0;0)$.. Ⓑ $(1;1)$.. Ⓒ $(-1;1)$.. Ⓓ $(-1;-1)$..

Câu 3. Miền nghiệm của hệ bất phương trình: $\begin{cases} 2x-5y>1 \\ 2x+y>-5 \\ x+y<-1 \end{cases}$ là phần mặt phẳng chứa điểm có tọa độ:

Ⓐ $(0;0)$.. Ⓑ $(1;0)$.. Ⓒ $(0;2)$.. Ⓓ $(0;-2)$..

Câu 4. Miền đa giác $ABCD$ ở Hình bên là miền nghiệm của hệ bất phương trình nào sau đây?

Ⓐ $\begin{cases} x+y\le 4 \\ x+y\ge -1 \\ x-y\le 2 \\ x-y\ge -2 \end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases} x-y\le 4 \\ x-y\ge -1 \\ x+y\le 2 \\ x+y\ge -2 \end{cases}$.

Ⓒ $\begin{cases} x+y\le 1 \\ x+y\ge -4 \\ x-y\le 2 \\ x-y\ge -2 \end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases} x-y\le 1 \\ x-y\ge -4 \\ x+y\le 2 \\ x+y\ge -2 \end{cases}$.

Câu 5. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=-x+y$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} -2x+y\le 2 \\ -x+2y\ge 4 \\ x+y\le 5 \end{cases}$ là:

Ⓐ 0.. Ⓑ 1.. Ⓒ 2.. Ⓓ 3..

Câu 6. Tính chu vi P của miền nghiệm hệ bất phương trình $\begin{cases} x\ge -3 \\ x\le 6 \\ y\le 5 \\ y\ge -6 \end{cases}$.

Ⓐ $P=38$.. Ⓑ $P=36$.. Ⓒ $P=42$.. Ⓓ $P=40$..

Câu 7. Ngoài giờ học, bạn Nam làm thêm việc phụ bán cơm được 15 nghìn đồng/một giờ và phụ bán tạp hóa được 10 nghìn đồng/một giờ. Nam không thể làm thêm việc nhiều hơn 15 giờ mỗi tuần. Gọi x,y lần lượt là số giờ phụ bán cơm và phụ bán tạp hóa. Hệ bất phương trình nào sau

đây xác định giờ để làm mỗi việc nếu Nam muốn kiếm được ít nhất 100 nghìn đồng mỗi tuần?

Ⓐ $\begin{cases} x+y \le 15 \\ 15x+10y < 100 \end{cases}$.
Ⓑ $\begin{cases} x+y \le 15 \\ 15x+10y > 100 \end{cases}$.
Ⓒ $\begin{cases} x+y \le 15 \\ 15x+10y \ge 100 \end{cases}$.
Ⓓ $\begin{cases} x+y \le 15 \\ 15x+10y \le 100 \end{cases}$.

Câu 8. Để trở thành một thành viên của ban nhạc thì một sinh viên phải đạt điểm trung bình các môn học ít nhất là 7,0 và phải có ít nhất 5 lần thực hành sau giờ học. Gọi x là điểm trung bình các môn học và y là số lần thực hành sau giờ học, hãy chọn hệ bất phương trình thể hiện tốt nhất tình huống trên.

Ⓐ $\begin{cases} x \ge 7 \\ y \ge 5 \end{cases}$.
Ⓑ $\begin{cases} x < 7 \\ y \ge 5 \end{cases}$.
Ⓒ $\begin{cases} x < 7 \\ y < 5 \end{cases}$.
Ⓓ $\begin{cases} x \ge 7 \\ y < 5 \end{cases}$.

BẢNG ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á
1	B	2	C	3	D	4	A	5	B
6	D	7	C	8	A	9	–	10	–

§3 ÔN TẬP CHƯƠNG 2

I. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Bất phương trình $3x-2(y-x+1)>0$ tương đương với bất phương trình nào sau đây?

Ⓐ $x-2y-2>0$.
Ⓑ $5x-2y-2>0$.
Ⓒ $5x-2y-1>0$.
Ⓓ $4x-2y-2>0$.

Câu 2. Cho bất phương trình $3(x-1)+4(y-2)<5x-3$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

Ⓐ Điểm $O(0;0)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình đã cho..
Ⓑ Điểm $B(-2;2)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình đã cho..
Ⓒ Điểm $C(-4;2)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình đã cho..
Ⓓ Điểm $D(-5;3)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình đã cho..

Câu 3. Cho bất phương trình $x+3+2(2y+5)<2(1-x)$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định **sai**?

Ⓐ Điểm $A(-3;-4)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình đã cho..
Ⓑ Điểm $B(-2;-5)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình đã cho..
Ⓒ Điểm $C(-1;-6)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình đã cho..
Ⓓ Điểm $O(0;0)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình đã cho..

Câu 4. Cặp số $(1;-1)$ là nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

Ⓐ $x+y-3>0$.
Ⓑ $-x-y<0$.
Ⓒ $x+3y+1<0$.
Ⓓ $-x-3y-1<0$.

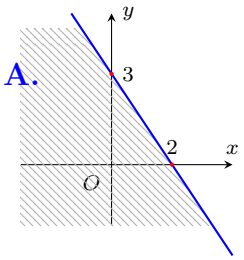
Câu 5. Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình $-2(x-y)+y>3$?

Ⓐ $(4;-4)$.
Ⓑ $(2;1)$.
Ⓒ $(-1;-2)$.
Ⓓ $(-4;4)$.

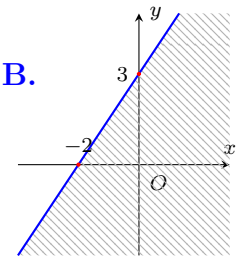
Câu 6. Cặp số nào sau đây **không** là nghiệm của bất phương trình $5x-2(y-1)\le 0$?

Ⓐ $(0;1)$.
Ⓑ $(1;3)$.
Ⓒ $(-1;1)$.
Ⓓ $(-1;0)$.

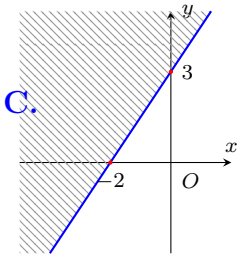
Câu 7. Miền nghiệm của bất phương trình $3x-2y>-6$ là

A.


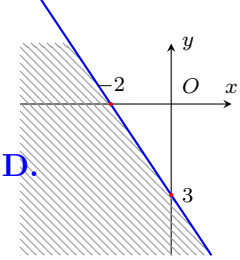
Ⓐ .

B.


Ⓑ .

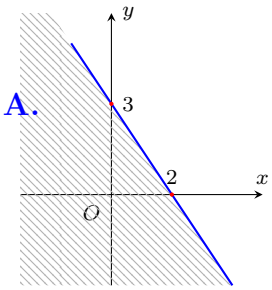
C.


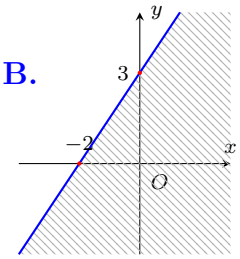
Ⓒ .

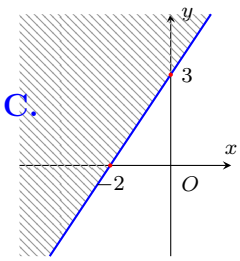
D.


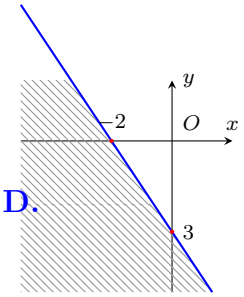
Ⓓ .

Câu 8. Miền nghiệm của bất phương trình $3x + 2y > 6$ là

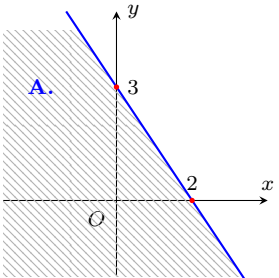
A. 

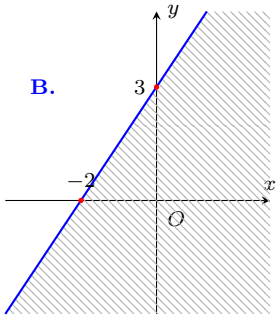
B. 

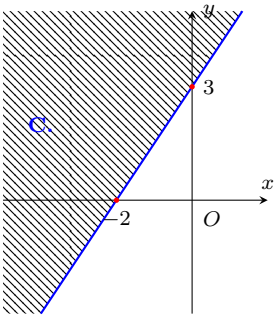
C. 

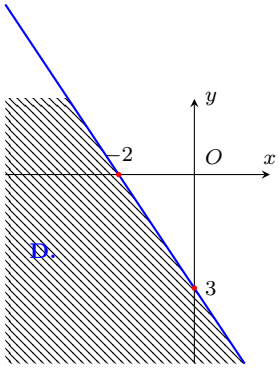
D. 

Câu 9. Miền nghiệm của bất phương trình $3x - 2y < -6$ là

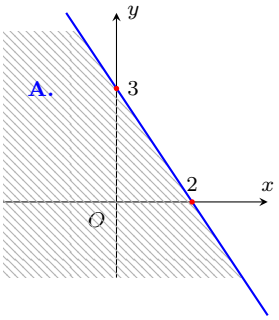
A. 

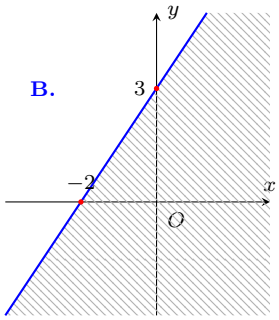
B. 

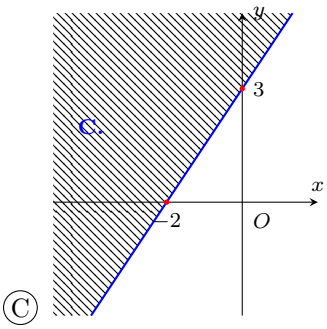
C. 

D. 

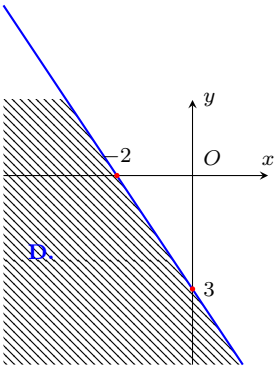
Câu 10. Miền nghiệm của bất phương trình $3x + 2y > -6$ là

A. 

B. 

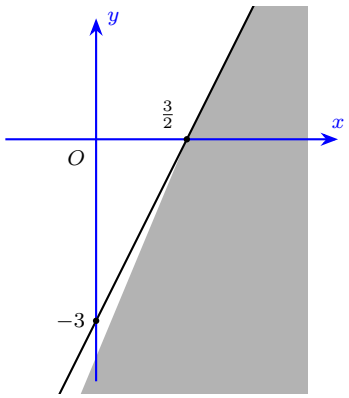
Ⓒ 

.

Ⓓ 

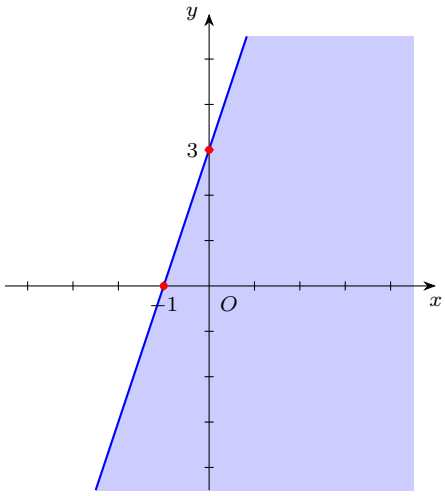
.

Câu 11. Trong mặt phẳng Oxy, phần nửa mặt phẳng không tô đậm (không kể bờ) trong hình vẽ bên là biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình nào dưới đây?



Ⓐ $2x-y>3$. Ⓑ $2x-y<3$. Ⓒ $x-2y>3$. Ⓓ $x-2y<3$.

Câu 12. Trong mặt phẳng (Oxy), phần nửa mặt phẳng không tô đậm (kể cả bờ) trong hình vẽ dưới đây là biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình nào?



Ⓐ $x-3y\geq 3$. Ⓑ $3x-y\geq 3$.
Ⓒ $3x-y\geq -3$. Ⓓ $3x-y\leq -3$.

Câu 13. Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases}\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}-1\geq 0\\ 2(x-1)+\dfrac{3y}{2}\leq 4\\ x\geq 0\end{cases}$ là phần mặt phẳng chứa điểm

Ⓐ $(2;1)$. Ⓑ $(0;0)$. Ⓒ $(1;1)$. Ⓓ $(3;4)$.

Câu 14. Trong các cặp số sau, tìm cặp số **không** là nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x+y-2\le 0 \\ 2x-3y+2>0 \end{cases}$

Ⓐ $(0;0)$. Ⓑ $(1;1)$. Ⓒ $(-1;1)$. Ⓓ $(-1;-1)$.

Câu 15. Điểm nào sau đây **không** thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x+3y-1>0 \\ 5x-y+4<0 \end{cases}$?

Ⓐ $(-1;4)$. Ⓑ $(-2;4)$. Ⓒ $(0;0)$. Ⓓ $(-3;4)$.

Câu 16. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}-1\ge 0 \\ 2(x-1)+\dfrac{3y}{2}\le 4 \\ x\ge 0 \end{cases}$. Hỏi khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

Ⓐ Điểm $A(2;1)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho..
Ⓑ Điểm $O(0;0)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho..
Ⓒ Điểm $C(1;1)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho..
Ⓓ Điểm $D(3;4)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho..

Câu 17. Cho hệ bất phương trình: $\begin{cases} 2x-5y-1>0 \\ 2x+y+5>0 \\ x+y+1<0 \end{cases}$. Hỏi khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

Ⓐ Điểm $O(0;0)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho..
Ⓑ Điểm $B(1;0)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho..
Ⓒ Điểm $C(0;-2)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho..
Ⓓ Điểm $D(0;2)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho..

Câu 18. Điểm $O(0;0)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình nào sau đây?

Ⓐ $\begin{cases} x+3y-6>0 \\ 2x+y+4>0 \end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases} x+3y-6>0 \\ 2x+y+4<0 \end{cases}$.

Ⓒ $\begin{cases} x+3y-6<0 \\ 2x+y+4>0 \end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases} x+3y-6<0 \\ 2x+y+4<0 \end{cases}$.

Câu 19. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x-\dfrac{3}{2}y\ge 1 \quad (1) \\ 4x-3y\le 2 \quad (2) \end{cases}$ có tập nghiệm S. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

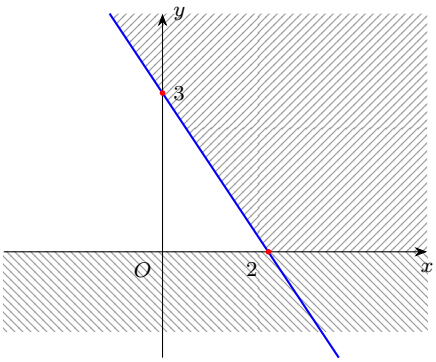
Ⓐ $\left(-\dfrac{1}{4};-1\right)\notin S$.
Ⓑ $S=\{(x,y)\mid 4x-3y=2\}$.
Ⓒ Biểu diễn hình học của S là nửa mặt phẳng chứa gốc tọa độ và kể cả bờ d, với d là đường thẳng $4x-3y=2$.

Ⓓ Biểu diễn hình học của S là nửa mặt phẳng không chứa gốc tọa độ và kể cả bờ d, với d là đường thẳng $4x-3y=2$.

Câu 20. Cho hệ $\begin{cases} 2x+3y<5 \quad (1) \\ x+\dfrac{3}{2}y<5 \quad (2) \end{cases}$. Gọi s_1 là tập nghiệm của bất phương trình (1), s_2 là tập nghiệm của bất phương trình (2) và S là tập nghiệm của hệ thì

Ⓐ $s_1 \subset s_2$. Ⓑ $s_2 \subset s_1$. Ⓒ $s_2 = S$. Ⓓ $s_1 \neq S$.

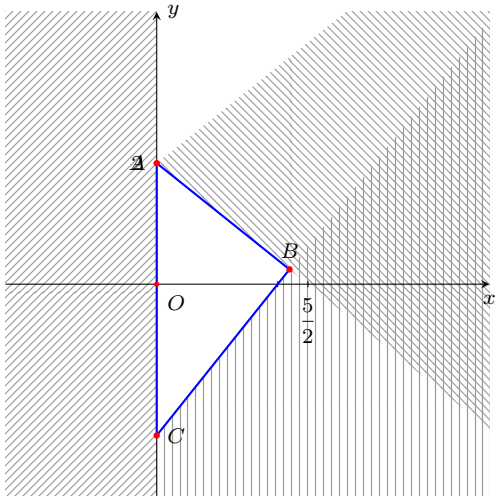
Câu 21. Phần không gạch chéo ở hình sau đây là biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình nào trong bốn hệ A, B, C, D?



Ⓐ $\begin{cases} y>0 \\ 3x+2y<6 \end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases} y>0 \\ 3x+2y<-6 \end{cases}$.

Ⓒ $\begin{cases} x>0 \\ 3x+2y<6 \end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases} x>0 \\ 3x+2y>-6 \end{cases}$.

Câu 22. Miền tam giác ABC kể cả ba cạnh sau đây là miền nghiệm của hệ bất phương trình nào trong bốn hệ A, B, C, D?



Ⓐ $\begin{cases} y\geq 0 \\ 5x-4y\geq 10 \\ 5x+4y\leq 10 \end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases} x\geq 0 \\ 4x-5y\leq 10 \\ 5x+4y\leq 10 \end{cases}$.

Ⓒ $\begin{cases} x \geq 0 \\ 5x - 4y \leq 10 \\ 4x + 5y \leq 10 \end{cases}$.

Ⓓ $\begin{cases} x > 0 \\ 5x - 4y \leq 10 \\ 4x + 5y \leq 10 \end{cases}$.

Câu 23. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = y - x$ trên miền xác định bởi hệ $\begin{cases} y - 2x \leq 2 \\ 2y - x \geq 4 \\ x + y \leq 5 \end{cases}$ là.

Ⓐ $\min F = 1$ khi $x = 2, y = 3$.

Ⓑ $\min F = 2$ khi $x = 0, y = 2$.

Ⓒ $\min F = 3$ khi $x = 1, y = 4$.

Ⓓ $\min F = 0$ khi $x = 0, y = 0$.

Câu 24. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F(x; y) = x - 2y$, với điều kiện $\begin{cases} 0 \leq y \leq 5 \\ x \geq 0 \\ x + y - 2 \geq 0 \\ x - y - 2 \leq 0 \end{cases}$ là

Ⓐ -12.

Ⓑ -10.

Ⓒ -8.

Ⓓ -6.

Câu 25. Biểu thức $L = y - x$, với x và y thỏa mãn hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x + 3y - 6 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ 2x - 3y - 1 \leq 0 \end{cases}$, đạt giá trị lớn nhất là a và đạt giá trị nhỏ nhất là b. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau:

Ⓐ $a = \dfrac{25}{8}$ và $b = -2$.

Ⓑ $a = 2$ và $b = -\dfrac{11}{12}$.

Ⓒ $a = 3$ và $b = 0$.

Ⓓ $a = 3$ và $b = -\dfrac{9}{8}$.

Câu 26. Trong một cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 24 g hương liệu, 9 lít nước và 210 g đường để pha chế nước cam và nước táo.

- Để pha chế 1 lít nước cam cần 30 g đường, 1 lít nước và 1 g hương liệu;
- Để pha chế 1 lít nước táo cần 10 g đường, 1 lít nước và 4 g hương liệu.

Mỗi lít nước cam nhận được 60 điểm thưởng, mỗi lít nước táo nhận được 80 điểm thưởng. Hỏi cần pha chế bao nhiêu lít nước trái cây mỗi loại để đạt được số điểm thưởng cao nhất?

Ⓐ 5 lít nước cam và 4 lít nước táo.
Ⓑ 6 lít nước cam và 5 lít nước táo.
Ⓒ 4 lít nước cam và 5 lít nước táo.
Ⓓ 4 lít nước cam và 6 lít nước táo.

Câu 27. Một xưởng sản xuất hai loại sản phẩm

- Mỗi kg sản phẩm loại I cần 2 kg nguyên liệu và 30 giờ, đem lại mức lời 40 nghìn;
- Mỗi kg sản phẩm loại II cần 4 kg nguyên liệu và 15 giờ, đem lại mức lời 30 nghìn.

Xưởng có 200 kg nguyên liệu và 1200 giờ làm việc. Nên sản xuất mỗi loại sản phẩm bao nhiêu để có mức lời cao nhất?

Ⓐ 30 kg loại I và 40 kg loại II.

Ⓑ 20 kg loại I và 40 kg loại II.

Ⓒ 30 kg loại I và 20 kg loại II. Ⓓ 25 kg loại I và 45 kg loại II.

Câu 28. Một nhà khoa học đã nghiên cứu về tác động phối hợp của hai loại Vitamin A và B đã thu được kết quả như sau: Trong một ngày, mỗi người cần từ 400 đến 1000 đơn vị Vitamin cả A lẫn B và có thể tiếp nhận không quá 600 đơn vị vitamin A và không quá 500 đơn vị vitamin B. Do tác động phối hợp của hai loại vitamin trên nên mỗi ngày một người sử dụng số đơn vị vitamin B không ít hơn một nửa số đơn vị vitamin A và không nhiều hơn ba lần số đơn vị vitamin A. Tính số đơn vị vitamin mỗi loại ở trên để một người dùng mỗi ngày sao cho chi phí rẻ nhất, biết rằng mỗi đơn vị vitamin A có giá 9 đồng và mỗi đơn vị vitamin B có giá $7,5$ đồng.

Ⓐ 600 đơn vị Vitamin A, 400 đơn vị Vitamin B.
Ⓑ 600 đơn vị Vitamin A, 300 đơn vị Vitamin B.
Ⓒ 500 đơn vị Vitamin A, 500 đơn vị Vitamin B.
Ⓓ 100 đơn vị Vitamin A, 300 đơn vị Vitamin B.

Câu 29. Công ty Bao bì Dược cần sản xuất 3 loại hộp giấy: đựng thuốc B_1, đựng cao Sao vàng và đựng "Quy sâm đại bổ hoàn". Để sản xuất các loại hộp này, công ty dùng các tấm bìa có kích thước giống nhau. Mỗi tấm bìa có hai cách cắt khác nhau.

- Cách thứ nhất cắt được 3 hộp B_1, một hộp cao Sao vàng và 6 hộp Quy sâm.
- Cách thứ hai cắt được 2 hộp B_1, 3 hộp cao Sao vàng và 1 hộp Quy sâm.

Theo kế hoạch, số hộp Quy sâm phải có là 900 hộp, số hộp B_1 tối thiểu là 900 hộp, số hộp cao sao vàng tối thiểu là 1000 hộp. Cần phương án sao cho tổng số tấm bìa phải dùng là ít nhất?

Ⓐ Cắt theo cách một 100 tấm, cắt theo cách hai 300 tấm.
Ⓑ Cắt theo cách một 150 tấm, cắt theo cách hai 100 tấm.
Ⓒ Cắt theo cách một 50 tấm, cắt theo cách hai 300 tấm.
Ⓓ Cắt theo cách một 100 tấm, cắt theo cách hai 200 tấm.

Câu 30. Một xưởng cơ khí có hai công nhân là Chiến và Bình. Xưởng sản xuất loại sản phẩm I và II. Mỗi sản phẩm I bán lãi 500 nghìn đồng, mỗi sản phẩm II bán lãi 400 nghìn đồng. Để sản xuất được một sản phẩm I thì Chiến phải làm việc trong 3 giờ, Bình phải làm việc trong 1 giờ. Để sản xuất được một sản phẩm II thì Chiến phải làm việc trong 2 giờ, Bình phải làm việc trong 6 giờ. Một người không thể làm được đồng thời hai sản phẩm. Biết rằng trong một tháng Chiến không thể làm việc quá 180 giờ và Bình không thể làm việc quá 220 giờ. Số tiền lãi lớn nhất trong một tháng của xưởng là.

Ⓐ 32 triệu đồng..
Ⓑ 35 triệu đồng..
Ⓒ 14 triệu đồng..
Ⓓ 30 triệu đồng..

BẢNG ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á
1	B	2	A	3	D	4	C	5	D
6	B	7	B	8	A	9	C	10	B
11	B	12	C	13	A	14	C	15	C
16	A	17	C	18	C	19	B	20	A
21	A	22	C	23	A	24	B	25	B
26	C	27	B	28	D	29	A	30	A

II. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

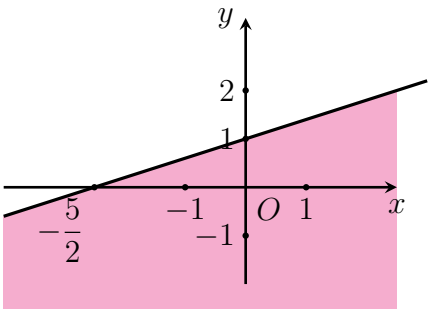
Bài 1. Cho bất phương trình $2x - 5y > 5$ (1).

a) Bất phương trình (1) là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

b) Cặp số $(x, y) = (1, 1)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình (1).

c) Bất phương trình (1) có một nghiệm duy nhất.

d) Miền không được tô đậm (không kể bờ d) trong hình sau là miền nghiệm của bất phương trình (1).



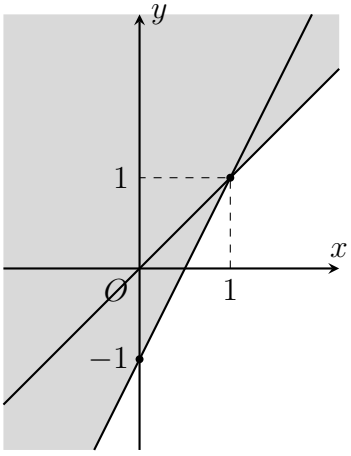
Bài 2. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} x - y > 0 \\ 2x - y > 1 \end{cases}$.

a) Hệ bất phương trình đã cho là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

b) Hệ bất phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

c) Hệ bất phương trình đã cho vô nghiệm.

d) Phần không tô đậm (không kể cả bờ) biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình.



Bài 3. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} y - 2x \leq 2 \\ 2y - x \geq 4 \\ x + y \leq 5 \end{cases}$ (I).

a) $(0; 3)$ là một nghiệm của (I).

b) Miền nghiệm của (I) chứa điểm $(1; 3)$.

c) $M(x; y)$ thuộc miền nghiệm của (I) thì $2y - x \leq 7$.

d) Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = y - x$ trên miền xác định bởi hệ là 1.

Bài 4. Một công ty TNHH trong một đợt quảng cáo và bán hàng khuyến mại hàng hóa (một sản phẩm mới của công ty) cần thuê xe để chở 140 người và 9 tấn hàng. Nơi thuê chỉ có hai loại xe A và B. Trong đó xe loại A có 10 chiếc, xe loại B có 9 chiếc. Một chiếc xe loại A cho thuê với giá 4 triệu, loại B giá 3 triệu. Biết rằng xe A chỉ chở tối đa 20 người và 0,6 tấn hàng; xe B chở tối đa 10 người và 1,5 tấn hàng. Gọi x, y lần lượt là số xe loại A và loại B mà công ty thuê.

a) Số tiền thuê xe là $4x + 3y$.

b) $2x + y < 14$.

c) $2x + 5y \geq 30$.

d) Số tiền thuê xe thấp nhất là 32 triệu.

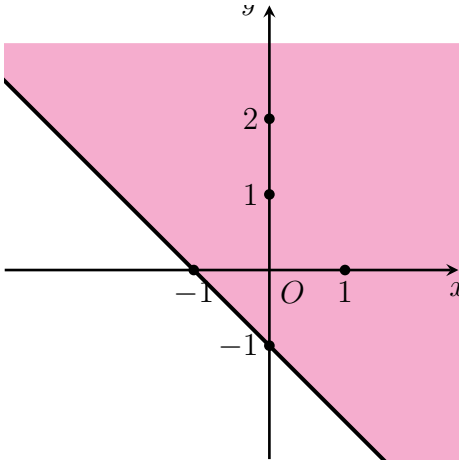
Bài 5. Cho bất phương trình: $x + y + 1 < 0$.

a) Bất phương trình đã cho là bất phương trình bậc nhất một ẩn.

b) Cặp số $(1; 1)$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

c) Miền nghiệm của bất phương trình đã cho là nửa mặt phẳng chứa gốc tọa độ có bờ là đường thẳng $x + y + 1 = 0$.

d) Miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng phần không bị tô đậm có bờ là đường thẳng $x + y + 1 = 0$ (không lấy những điểm nằm trên đường thẳng $x + y + 1 = 0$).



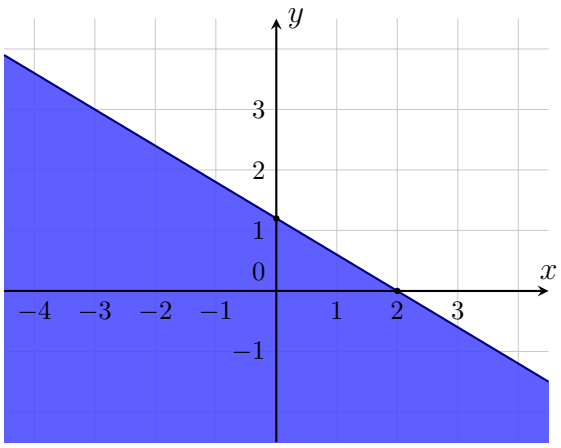
Bài 6. Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn $3x + 5y \leq 6$.

a) Cặp $(3; 3)$ là một nghiệm của bất phương trình.

b) Điểm $B(-2; 2)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình đã cho.

c) Với $x = 0$ thì chỉ có 2 giá trị của y thỏa mãn bất phương trình.

d) Miền nghiệm của bất phương trình đã cho là miền tô đậm trong hình vẽ bao gồm cả bờ là đường thẳng: $3x + 5y = 6$



Bài 7. Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kilôgam thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit. Mỗi kilôgam thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit. Biết rằng gia đình này chỉ mua nhiều nhất là 1,6 kg thịt bò và 1,1 kg thịt lợn; giá tiền 1 kg thịt bò là 250 nghìn đồng; 1 kg thịt lợn là 160 nghìn đồng. Giả sử gia đình đó mua x kilôgam thịt bò và y kilôgam thịt lợn.

a) Bất phương trình biểu thị lượng lipit tối thiểu trong thức ăn mỗi ngày của gia đình đó là $x + 2y \leq 2$.

b) Các bất phương trình biểu thị các điều kiện của bài toán thành một hệ bất phương trình là
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1{,}6 \\ 0 \leq y \leq 1{,}1 \\ 8x + 6y \geq 9 \\ x + 2y \geq 2 \end{cases}$$

c) Gọi F (nghìn đồng) là số tiền phải trả cho x kilôgam thịt bò và y kilôgam thịt lợn. Biểu thức biểu diễn F theo x và y là $F(x; y) = 250x + 160y$.

d) Để chi phí ít nhất gia đình thì cần mua 0,3 kg thịt bò và 1,1 kg thịt lợn.

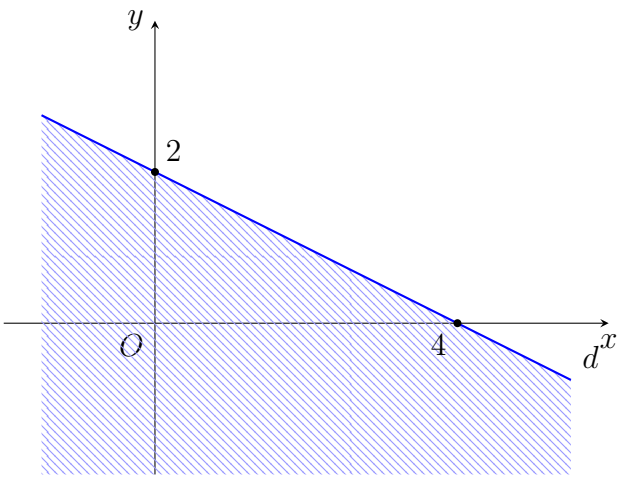
Bài 8. Cho bất phương trình $x + 2y > 4$.

a) Bất phương trình đã cho là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

b) Điểm $(1; 2)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình đã cho.

c) Miền nghiệm của bất phương trình đã cho có chứa gốc tọa độ.

d) Miền nghiệm của bất phương trình đã cho được biểu diễn trong mặt phẳng tọa độ Oxy như sau, trong đó miền nghiệm là nửa mặt phẳng không chứa gốc tọa độ (phần không bị gạch) không kể đường thẳng d.



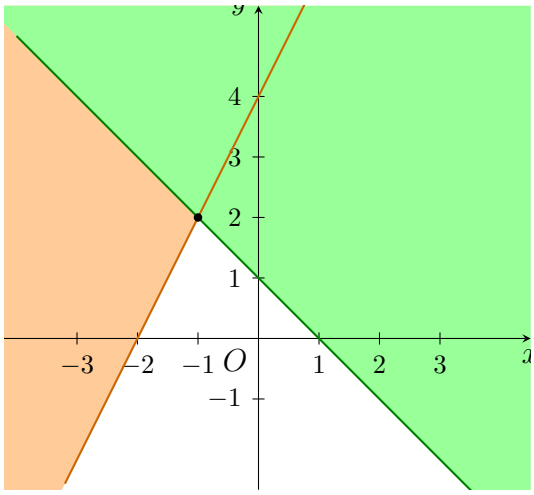
Bài 9. Cho hệ bất phương trình: $\begin{cases} x+y-1 \le 0 \quad (1) \\ 2x-y+4 \ge 0 \quad (2) \end{cases}$.

a) Hệ đã cho là hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

b) Hệ đã cho có một nghiệm duy nhất là $(1;0)$.

c) Điểm $M(2;3)$ không thuộc miền nghiệm của hệ đã cho.

d) Phần không tô đậm (kể cả bờ) trong hình vẽ dưới đây là miền nghiệm của hệ đã cho.



Bài 10. Một công ty thời trang chuẩn bị cho một đợt khuyến mãi nhằm thu hút khách hàng bằng cách tiến hành quảng cáo sản phẩm của công ty trên hai nền tảng mạng xã hội **Tik Tok** và **You Tube**. Biết chi phí cho 1.000.000 lượt xem quảng cáo trên **Tik Tok** là 20 triệu đồng, chi phí cho 1.000.000 lượt xem quảng cáo trên **You Tube** là 40 triệu đồng. **Tik Tok** chỉ nhận các hợp đồng trên 6.000.000 lượt xem. **You Tube** do các công ty có nhu cầu quảng cáo lớn nên chỉ nhận các hợp đồng dưới 3.000.000 lượt xem. Theo các phân tích, cùng một lượng lượt xem quảng cáo thì trên **You Tube** cho hiệu quả gấp 3 lần quảng cáo trên **Tik Tok**. Công ty thời trang dự tính chi tối đa 160 triệu cho quảng cáo. Gọi x (triệu lượt) là số lượt xem trên **Tik Tok**, y (triệu lượt) là số lượt xem trên **You Tube** mà công ty cần thuê để quảng cáo.

a) Số tiền công ty phải trả cho 6 triệu lượt xem trên TikTok là 120 triệu đồng.

b) Chi phí quảng cáo mà công ty phải trả là $20y + 40x$ triệu đồng.

c) Để hiệu quả quảng cáo cao nhất thì giá trị của biểu thức $x + 3y$ là nhỏ nhất.

d) Khi thời lượng quảng cáo đạt hiệu quả cao nhất thì $x = 6$ (triệu lượt), $y = 1$ (triệu lượt).

Bài 11. Bác An đầu tư 1,2 tỉ đồng vào ba loại trái phiếu: trái phiếu chính phủ với lãi suất 7% một năm, trái phiếu ngân hàng với lãi suất 8% một năm và trái phiếu doanh nghiệp rủi ro cao với lãi suất 12% một năm. Vì lí do giảm thuế, bác An muốn số tiền đầu tư lãi suất chính phủ gấp ít nhất 3 lần số tiền đầu tư trái phiếu ngân hàng. Hơn nữa, để giảm thiểu rủi ro, bác An đầu tư không quá 200 triệu đồng cho trái phiếu doanh nghiệp. Gọi số tiền bác An đầu tư cho trái phiếu chính phủ, trái phiếu ngân hàng lần lượt là x, y (triệu đồng).

a) Số tiền mà bác An đầu tư cho trái phiếu doanh nghiệp là $1200 - x - y$ (triệu đồng).

b) Lợi nhuận bác An thu được là $F(x;y) = 0{,}07x + 0{,}08y$ (triệu đồng).

c) Lợi nhuận lớn nhất mà bác An thu được sau một năm là 96,5 (triệu đồng).

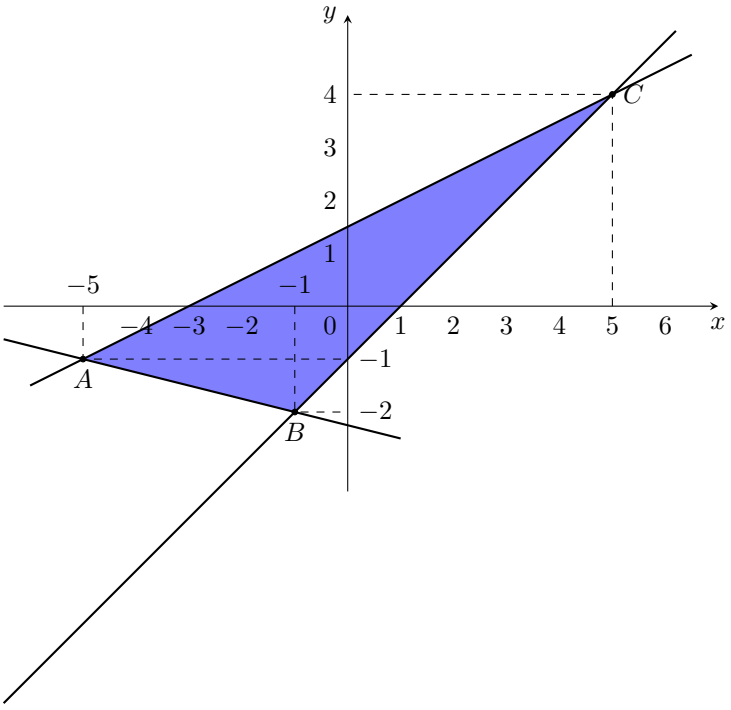
d) Để thu được lợi nhuận lớn nhất thì bác An cần đầu tư 200 triệu mua trái phiếu ngân hàng.

BẢNG ĐÁP ÁN ĐÚNG - SAI

Câu	a	b	c	d	Câu	a	b	c	d	Câu	a	b	c	d
1	Đ	S	S	Đ	6	S	Đ	S	Đ	11	Đ	S	Đ	S
2	Đ	S	S	Đ	7	S	Đ	Đ	Đ					
3	S	Đ	Đ	Đ	8	Đ	Đ	S	Đ					
4	Đ	S	Đ	Đ	9	S	S	Đ	Đ					
5	S	S	S	Đ	10	Đ	S	S	Đ					

III. TỰ LUẬN

Bài 1. Gọi (S) là tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ Oxy thỏa mãn hệ $\begin{cases} x - y - 1 \le 0 \\ x + 4y + 9 \ge 0 \\ x - 2y + 3 \ge 0 \end{cases}$ (hình vẽ).



Biết rằng tọa độ $(x;y)$ trong miền (S) sao cho biểu thức $T=3x-2y-4$ có giá trị nhỏ nhất. Tính $T=x+y$.

Bài 2. Giá trị lớn nhất của biểu thức $F(x;y)=x+2y$, với điều kiện $\begin{cases}0\le y\le 4\\ x\ge 0\\ x-y-1\le 0\\ x+2y-10\le 0\end{cases}$ là

Bài 3. Cho các giá trị x,y thỏa mãn điều kiện $\begin{cases}x-y+2\ge 0\\ 2x-y-1\le 0\\ 3x-y-2\ge 0\end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=3x+2y$.

Bài 4. Một xí nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm kí hiệu là I và II. Một tấn sản phẩm I lãi 2 triệu đồng, một tấn sản phẩm II lãi $1,6$ triệu đồng. Muốn sản xuất 1 tấn sản phẩm I phải dùng máy M_1 trong 3 giờ và máy M_2 trong 1 giờ. Muốn sản xuất 1 tấn sản phẩm II phải dùng máy M_1 trong 1 giờ và máy M_2 trong 1 giờ. Một máy không thể dùng để sản xuất đồng thời hai loại sản phẩm. Máy M_1 làm việc không quá 6 giờ trong một ngày, máy M_2 chỉ làm việc một ngày không quá 4 giờ. Gọi x là số tấn sản phẩm I sản xuất trong một ngày, y là số tấn sản phẩm II sản xuất trong một ngày. Giá trị lớn nhất của $L=2x+1,6y$ bằng

Bài 5. Một công ty TNHH trong một đợt quảng cáo và bán hàng khuyến mại hàng hóa (một sản phẩm mới của công ty) cần thuê xe để chở 140 người và 9 tấn hàng. Nơi thuê chỉ có hai loại xe A và B. Trong đó xe loại A có 10 chiếc, xe loại B có 9 chiếc. Một chiếc xe loại A cho thuê với giá 4 triệu, loại B giá 3 triệu. Biết rằng xe A chỉ chở tối đa 20 người và 0,6 tấn hàng; xe B chở tối đa 10 người và 1,5 tấn hàng. Gọi x,y lần lượt là số xe loại A và loại B cần phải thuê để chi phí nguyên liệu thấp nhất. Tính $M=2x-3y$.

Bài 6. Một nhà nông dân nọ có 8 sào đất trồng hoa màu. Biết rằng 1 sào trồng đậu cần 20 công và lãi được 3 triệu đồng, 1 sào trồng cà cần 30 công và lãi được 4 triệu đồng. Người nông dân trồng được x sào đậu và y sào cà thì thu được tiền lãi cao nhất. Tính giá trị biểu thức $F=3x+2y$ biết rằng tổng số công không quá 180.

Bài 7. Trong một cuộc thi pha chế, hai đội A, B được sử dụng tối đa 24g hương liệu, 9 lít nước và 210 g đường để pha chế nước cam và nước táo. Để pha chế 1 lít nước cam cần 30 g đường, 1 lít nước và 1g hương liệu; pha chế 1 lít nước táo cần 10g đường, 1 lít nước và 4 g hương liệu. Mỗi lít nước cam nhận được 60 điểm thưởng, mỗi lít nước táo nhận được 80 điểm thưởng. Đội A pha chế được a lít nước cam và b lít nước táo và dành được điểm thưởng cao nhất. Hiệu số $a-b$ là

Bài 8. Trong một cuộc thi gói bánh vào dịp năm mới, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 20 kg gạo nếp, 2kg thịt ba chỉ, 5kg đậu xanh để gói bánh chưng và bánh ống. Để gói một cái bánh chưng cần 0,4kg gạo nếp, 0,05 kg thịt và 0,1 kg đậu xanh; để gói một cái bánh ống cần 0,6 kg gạo nếp, 0,075 kg thịt và 0,15kg đậu xanh. Mỗi cái bánh chưng nhận được 5 điểm thưởng, mỗi cái bánh ống nhận được 7 điểm thưởng. Hỏi điểm thưởng cao nhất có thể đạt được là bao nhiêu?

Bài 9. Một công ty kinh doanh thương mại chuẩn bị cho một đợt khuyến mại nhằm thu hút khách hàng bằng cách tiến hành quảng cáo sản phẩm của công ty trên hệ thống phát thanh và truyền hình. Chi phí cho 1 phút quảng cáo trên sóng phát thanh là 800.000 đồng, trên sóng truyền hình là 4.000.000 đồng. Đài phát thanh chỉ nhận các chương trình quảng cáo dài ít nhất là 5 phút. Do nhu cầu quảng cáo trên truyền hình lớn nên đài truyền hình chỉ nhận phát các chương trình

dài tối đa là 4 phút. Theo các phân tích, cùng thời lượng một phút quảng cáo, trên truyền hình sẽ có hiệu quả gấp 6 lần trên sóng phát thanh. Công ty dự định chi tối đa 16.000.000 đồng cho quảng cáo. Công ty cần đặt thời lượng quảng cáo trên sóng truyền hình bao nhiêu phút để hiệu quả nhất?

Bài 10. Một hộ nông dân cần không quá 180 ngày công để trồng đậu và trồng cà trên diện tích 8 ha. Nếu trồng đậu thì cần 20 ngày công và thu lợi nhuận 3 triệu đồng trên diện tích mỗi ha, nếu trồng cà thì cần 30 ngày công và thu lợi nhuận 4 triệu đồng trên diện tích mỗi ha. Lợi nhuận cao nhất mà hộ nông dân thu được khi trồng đậu và trồng cà trên mảnh đất đó là

Bài 11. Bạn Lan mang 150000 đồng đi nhà sách để mua một số quyển tập và bút. Biết rằng giá một quyển tập là 8000 đồng và giá của một cây bút là 6000 đồng. Bạn Lan có thể mua được tối đa bao nhiêu quyển tập nếu bạn đã mua 10 cây bút.

Bài 12. Một hộ nông dân định trồng đậu và cà trên diện tích $800\,\text{m}^2$. Nếu trồng đậu trên diện tích $100\,\text{m}^2$ thì cần 20 công làm và thu được 3 000 000 đồng. Nếu trồng cà thì trên diện tích $100\,\text{m}^2$ cần 30 công làm và thu được 4 000 000 đồng. Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên diện tích là bao nhiêu để thu được nhiều tiền nhất khi tổng số công làm không quá 180 công.

Bài 13. Anh An là nhân viên bán hàng tại siêu thị điện máy. Anh An kiếm được một khoản hoa hồng 600 nghìn đồng cho mỗi máy giặt và $1,3$ triệu đồng cho mỗi tủ lạnh mà anh ấy bán được. Hỏi để nhận được từ 10 triệu đồng trở lên tiền hoa hồng thì anh An cần bán bao nhiêu máy giặt và tủ lạnh?

Bài 14. Trong năm nay, một cửa hàng điện lạnh dự định kinh doanh hai loại máy điều hòa: điều hòa hai chiều và điều hòa một chiều với số vốn ban đầu không vượt quá $1,2$ tỉ đồng.

	Điều hoà hai chiều	**Điều hoà một chiều**
Giá mua vào	20 triệu đồng/1 máy	10 triệu đồng/1 máy
Lợi nhuận dự kiến	$3,5$ triệu đồng/1 máy	2 triệu đồng/1 máy

Cửa hàng ước tính rằng tổng nhu cầu của thị trường sẽ không vượt quá 100 máy cả hai loại. Cần đầu tư kinh doanh x loại máy hai chiều và y loại máy một chiều thì lợi nhuận thu được là lớn nhất. Tính $x+y$?

Bài 15. Một bãi đậu xe ban đêm có diện tích đậu xe là $150\,\text{m}^2$ (không tính lối đi cho xe ra vào). Cho biết xe du lịch cần diện tích $3\,\text{m}^2$ mỗi chiếc và phải trả phí 40 nghìn đồng, xe tải cần diện tích $5\,\text{m}^2$ mỗi chiếc và phải trả phí 50 nghìn đồng. Nhân viên quản lí không thể phục vụ quá 40 xe một đêm. Hãy tính số lượng xe mỗi loại mà chủ bãi xe có thể cho đăng kí đậu xe để có doanh thu cao nhất.

IV. LỜI GIẢI CHI TIẾT

1) Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1. Bất phương trình $3x-2(y-x+1)>0$ tương đương với bất phương trình nào sau đây?

(A) $x-2y-2>0$.
(B) $5x-2y-2>0$.
(C) $5x-2y-1>0$.
(D) $4x-2y-2>0$.

» Sưu tầm và biên soạn: Lê Minh Kha - 0399653362

Hướng dẫn giải.

$3x-2(y-x+1)>0 \Leftrightarrow 3x-2y+2x-2>0 \Leftrightarrow 5x-2y-2>0$.

Câu 2. Cho bất phương trình $3(x-1)+4(y-2)<5x-3$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

Ⓐ Điểm $O(0;0)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình đã cho..
Ⓑ Điểm $B(-2;2)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình đã cho..
Ⓒ Điểm $C(-4;2)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình đã cho..
Ⓓ Điểm $D(-5;3)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình đã cho..

Hướng dẫn giải.

Lần lượt thay tọa độ điểm ở mỗi phương án vào bất phương trình đã cho, ta thấy $(x_0;y_0)=(0;0)$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Câu 3. Cho bất phương trình $x+3+2(2y+5)<2(1-x)$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định **sai**?

Ⓐ Điểm $A(-3;-4)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình đã cho..
Ⓑ Điểm $B(-2;-5)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình đã cho..
Ⓒ Điểm $C(-1;-6)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình đã cho..
Ⓓ Điểm $O(0;0)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình đã cho..

Hướng dẫn giải.

Lần lượt thay tọa độ điểm ở mỗi phương án vào bất phương trình đã cho, ta thấy $(x_0;y_0)=(0;0)$ không là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Câu 4. Cặp số $(1;-1)$ là nghiệm của bất phương trình nào sau đây?

Ⓐ $x+y-3>0$.
Ⓑ $-x-y<0$.
Ⓒ $x+3y+1<0$.
Ⓓ $-x-3y-1<0$.

Hướng dẫn giải.

$f(x,y)=x+3y+1$. Thay $f(1,-1)=1-3+1=-1<0$.

Câu 5. Cặp số nào sau đây là nghiệm của bất phương trình $-2(x-y)+y>3$?

Ⓐ $(4;-4)$.
Ⓑ $(2;1)$.
Ⓒ $(-1;-2)$.
Ⓓ $(-4;4)$.

Hướng dẫn giải.

$$-2(x-y)+y>3 \Leftrightarrow -2x+2y+y>3 \Leftrightarrow -2x+3y>3 \Leftrightarrow y>\frac{2x+3}{3}$$

Thay các đáp án vào bpt để kiểm tra.

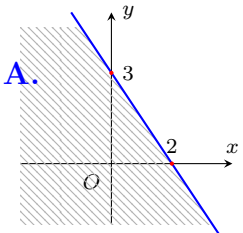
Câu 6. Cặp số nào sau đây **không** là nghiệm của bất phương trình $5x-2(y-1)\le 0$?

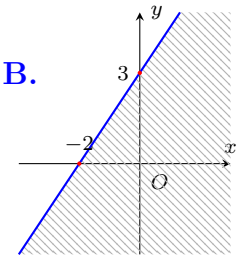
Ⓐ $(0;1)$.
Ⓑ $(1;3)$.
Ⓒ $(-1;1)$.
Ⓓ $(-1;0)$.

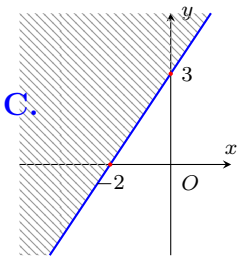
Hướng dẫn giải.

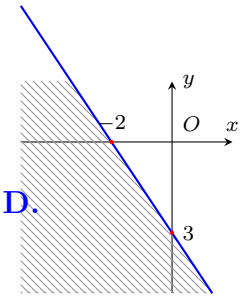
Ta có $5x-2(y-1)\le 0 \Leftrightarrow 5x-2y+2\le 0$; ta thay từng đáp án vào bất phương trình, cặp $(1;3)$ không thỏa mãn bất phương trình vì $5.1-2.3+2\le 0$ là sai. Vậy chọn B.

Câu 7. Miền nghiệm của bất phương trình $3x-2y>-6$ là

A. 

B. 

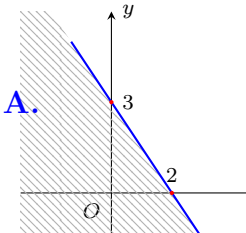
C. 

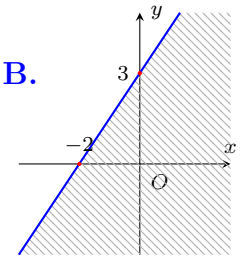
D. 

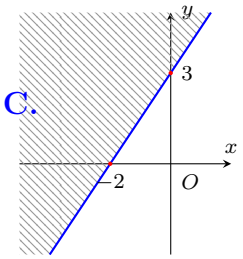
Hướng dẫn giải. Chọn C

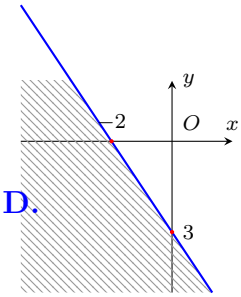
Bất phương trình $3x-2y>-6$ có đường thẳng biên $d:3x-2y=-6$ đi qua $(-2;0)$ và $(0;3)$.
Thử điểm $O(0;0)$, ta thấy $3(0)-2(0)=0>-6$ (đúng). Vậy miền nghiệm chứa điểm O.
Đối chiếu các hình vẽ, ta chọn hình C vì có đường thẳng biên đúng và phần không bị gạch chứa gốc tọa độ O.

Câu 8. Miền nghiệm của bất phương trình $3x+2y>6$ là

A. 

B. 

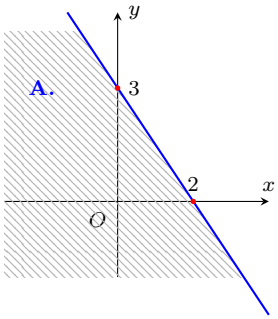
C. 

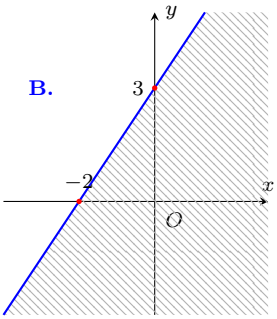
D. 

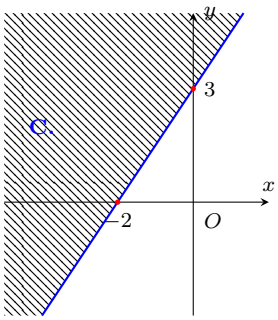
Hướng dẫn giải. Chọn A

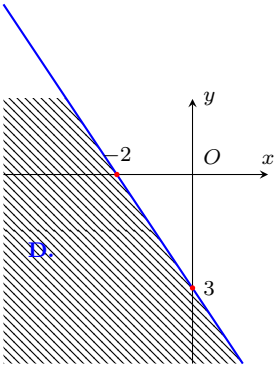
Bất phương trình $3x+2y>6$ có đường thẳng biên $d:3x+2y=6$ đi qua $(2;0)$ và $(0;3)$.
Thử điểm $O(0;0)$, ta thấy $3(0)+2(0)=0>6$ (sai). Vậy miền nghiệm không chứa gốc tọa độ O.
Hình A biểu diễn phần bị gạch sọc chứa gốc tọa độ O và miền không gạch là miền nghiệm đúng của bất phương trình.

Câu 9. Miền nghiệm của bất phương trình $3x-2y<-6$ là

Ⓐ 

Ⓑ 

Ⓒ 

Ⓓ 

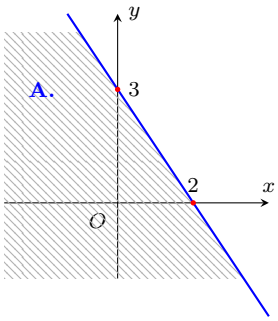
Hướng dẫn giải.

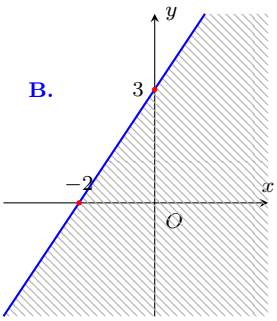
Đường thẳng biên $d: 3x-2y=-6$ đi qua hai điểm $(-2;0)$ và $(0;3)$.

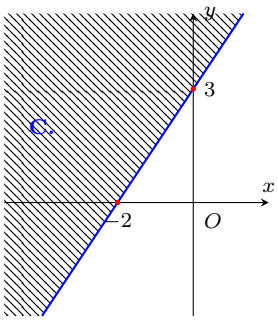
Thay tọa độ điểm $O(0;0)$ vào bất phương trình ta được $3(0)-2(0)=0<-6$ (sai), nên miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ d không chứa gốc tọa độ O.

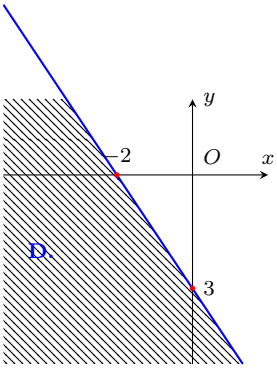
Hình B biểu diễn phần không bị gạch sọc là miền nghiệm đúng của bất phương trình.

Câu 10. Miền nghiệm của bất phương trình $3x+2y>-6$ là

Ⓐ 

Ⓑ 

Ⓒ 

Ⓓ 

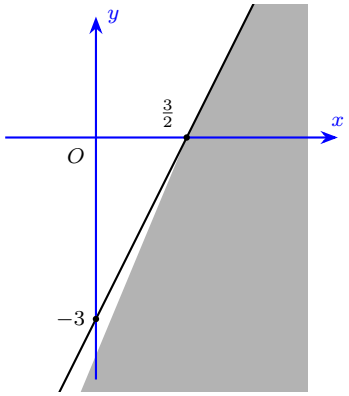
Hướng dẫn giải.

Bất phương trình $3x+2y>-6$ có đường thẳng biên là $d: 3x+2y=-6$ đi qua hai điểm $(-2;0)$ và $(0;-3)$.

Thử với điểm $O(0;0)$: $3(0)+2(0)=0>-6$ (đúng), nên miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ d có chứa gốc tọa độ O.

Hình D biểu diễn chính xác miền nghiệm (phần không bị gạch sọc chứa điểm O).

Câu 11. Trong mặt phẳng Oxy, phần nửa mặt phẳng không tô đậm (không kể bờ) trong hình vẽ bên là biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình nào dưới đây?



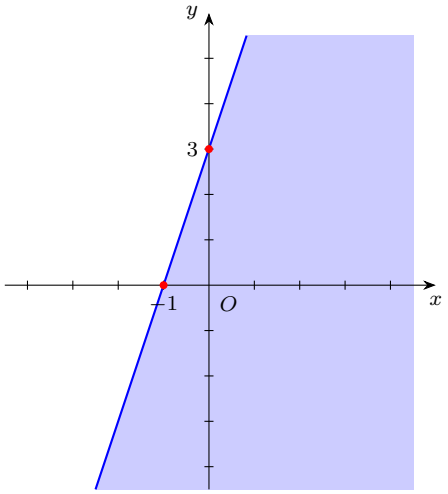
Ⓐ $2x-y>3$. Ⓑ $2x-y<3$. Ⓒ $x-2y>3$. Ⓓ $x-2y<3$.

Hướng dẫn giải. Đường thẳng đi qua hai điểm $\left(\frac{3}{2};0\right)$ và $(0;-3)$ có phương trình $2x-y=3$.

Miền không tô đậm chứa gốc tọa độ $O(0;0)$. Thay $(0;0)$ vào vế trái: $2(0)-0=0<3$.

Vì miền nghiệm không kể bờ nên ta chọn bất phương trình $2x-y<3$.

Câu 12. Trong mặt phẳng (Oxy), phần nửa mặt phẳng không tô đậm (kể cả bờ) trong hình vẽ dưới đây là biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình nào?



Ⓐ $x-3y\geq 3$. Ⓑ $3x-y\geq 3$.
Ⓒ $3x-y\geq -3$. Ⓓ $3x-y\leq -3$.

Hướng dẫn giải. Đường thẳng đi qua hai điểm $(-1;0)$ và $(0;3)$ có phương trình: $\frac{x}{-1}+\frac{y}{3}=1\Leftrightarrow 3x-y=-3$.

Phần không tô đậm nằm về phía không chứa gốc tọa độ $O(0;0)$.

Thử với điểm $O(0;0)$: $3(0)-0=0>-3$.

Vì miền nghiệm là phần không chứa điểm O và lấy cả đường biên nên bất phương trình là $3x-y\leq -3$.

Câu 13. Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}-1\geq 0 \\ 2(x-1)+\dfrac{3y}{2}\leq 4 \\ x\geq 0 \end{cases}$ là phần mặt phẳng chứa điểm

Ⓐ $(2;1)$. Ⓑ $(0;0)$. Ⓒ $(1;1)$. Ⓓ $(3;4)$.

Hướng dẫn giải.

Thay tọa độ điểm $(2;1)$ vào hệ bất phương trình: $\begin{cases} \dfrac{2}{2}+\dfrac{1}{3}-1=\dfrac{1}{3}\geq 0 \\ 2(2-1)+\dfrac{3\cdot 1}{2}=3,5\leq 4 \\ 2\geq 0 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Các điểm ở phương án B, C, D khi thay vào đều có ít nhất một bất phương trình không thỏa mãn.

Câu 14. Trong các cặp số sau, tìm cặp số **không** là nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x+y-2\leq 0 \\ 2x-3y+2>0 \end{cases}$

Ⓐ $(0;0)$. Ⓑ $(1;1)$. Ⓒ $(-1;1)$. Ⓓ $(-1;-1)$.

Hướng dẫn giải.

Thay tọa độ $(-1;1)$ vào hệ bất phương trình: $\begin{cases} -1+1-2=-2\leq 0 \text{ (đúng)} \\ 2(-1)-3(1)+2=-3>0 \text{ (sai)} \end{cases}$.

Vậy $(-1;1)$ không là nghiệm của hệ.

Câu 15. Điểm nào sau đây **không** thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x+3y-1>0 \\ 5x-y+4<0 \end{cases}$?

Ⓐ $(-1;4)$. Ⓑ $(-2;4)$. Ⓒ $(0;0)$. Ⓓ $(-3;4)$.

Hướng dẫn giải.

Thay tọa độ $(0;0)$ vào bất phương trình đầu tiên của hệ: $2(0)+3(0)-1=-1>0$ (vô lý).

Do đó điểm $(0;0)$ không thuộc miền nghiệm của hệ.

Câu 16. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}-1\geq 0 \\ 2(x-1)+\dfrac{3y}{2}\leq 4 \\ x\geq 0 \end{cases}$. Hỏi khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

Ⓐ Điểm $A(2;1)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho..
Ⓑ Điểm $O(0;0)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho..
Ⓒ Điểm $C(1;1)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho..
Ⓓ Điểm $D(3;4)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho..

Hướng dẫn giải.

Tương tự Câu 12, khi thay tọa độ điểm $A(2;1)$ vào hệ ta thấy thỏa mãn tất cả các bất phương

trình.

Câu 17. Cho hệ bất phương trình: $\begin{cases} 2x-5y-1>0 \\ 2x+y+5>0 \\ x+y+1<0 \end{cases}$. Hỏi khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

Ⓐ Điểm $O(0;0)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho..
Ⓑ Điểm $B(1;0)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho..
Ⓒ Điểm $C(0;-2)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho..
Ⓓ Điểm $D(0;2)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho..

Hướng dẫn giải.

Thay tọa độ điểm $C(0;-2)$ vào hệ: $\begin{cases} 2(0)-5(-2)-1=9>0 \text{ (đúng)} \\ 2(0)+(-2)+5=3>0 \text{ (đúng)} \\ 0+(-2)+1=-1<0 \text{ (đúng)} \end{cases}$.

Vậy khẳng định C đúng.

Câu 18. Điểm $O(0;0)$ thuộc miền nghiệm của hệ bất phương trình nào sau đây?

Ⓐ $\begin{cases} x+3y-6>0 \\ 2x+y+4>0 \end{cases}$.
Ⓑ $\begin{cases} x+3y-6>0 \\ 2x+y+4<0 \end{cases}$.
Ⓒ $\begin{cases} x+3y-6<0 \\ 2x+y+4>0 \end{cases}$.
Ⓓ $\begin{cases} x+3y-6<0 \\ 2x+y+4<0 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải.

Thay $x=0, y=0$ vào các biểu thức:
$x+3y-6=0+0-6=-6<0$.
$2x+y+4=0+0+4=4>0$.
Đối chiếu với các phương án, ta chọn hệ ở phương án C.

Câu 19. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x-\dfrac{3}{2}y\geq 1 \quad (1) \\ 4x-3y\leq 2 \quad (2) \end{cases}$ có tập nghiệm S. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

Ⓐ $\left(-\dfrac{1}{4};-1\right)\notin S$.
Ⓑ $S=\{(x,y)\mid 4x-3y=2\}$.
Ⓒ Biểu diễn hình học của S là nửa mặt phẳng chứa gốc tọa độ và kể cả bờ d, với d là đường thẳng $4x-3y=2$.
Ⓓ Biểu diễn hình học của S là nửa mặt phẳng không chứa gốc tọa độ và kể cả bờ d, với d là đường thẳng $4x-3y=2$.

Hướng dẫn giải. Ta có hệ bất phương trình: $\begin{cases} 2x-\dfrac{3}{2}y\geq 1 \\ 4x-3y\leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3y\geq 2 \\ 4x-3y\leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 4x-3y=2$.

Vậy tập nghiệm của hệ là tập hợp các điểm thuộc đường thẳng $4x-3y=2$. Chọn B.

Câu 20. Cho hệ $\begin{cases} 2x+3y<5 \quad (1) \\ x+\dfrac{3}{2}y<5 \quad (2) \end{cases}$. Gọi s_1 là tập nghiệm của bất phương trình (1), s_2 là

tập nghiệm của bất phương trình (2) và S là tập nghiệm của hệ thì

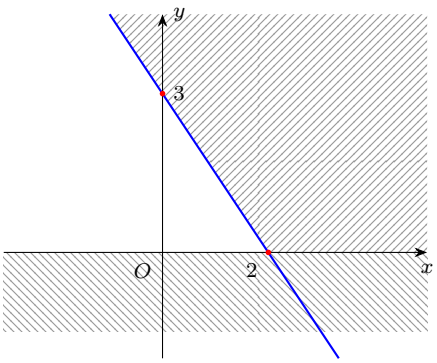
Ⓐ $s_1 \subset s_2$. Ⓑ $s_2 \subset s_1$. Ⓒ $s_2 = S$. Ⓓ $s_1 \neq S$.

Hướng dẫn giải. Ta có (2) $\Leftrightarrow 2x + 3y < 10$.

Vì mọi cặp $(x; y)$ thỏa mãn $2x + 3y < 5$ đều thỏa mãn $2x + 3y < 10$ nên $s_1 \subset s_2$.

Khi đó $S = s_1 \cap s_2 = s_1$. Chọn A.

Câu 21. Phần không gạch chéo ở hình sau đây là biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình nào trong bốn hệ A, B, C, D?



Ⓐ $\begin{cases} y > 0 \\ 3x + 2y < 6 \end{cases}$. Ⓑ $\begin{cases} y > 0 \\ 3x + 2y < -6 \end{cases}$.

Ⓒ $\begin{cases} x > 0 \\ 3x + 2y < 6 \end{cases}$. Ⓓ $\begin{cases} x > 0 \\ 3x + 2y > -6 \end{cases}$.

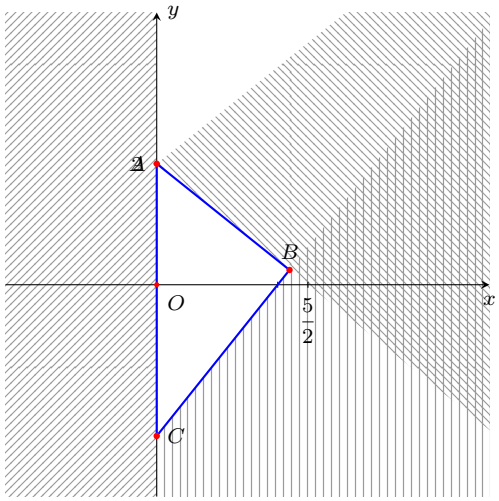
Hướng dẫn giải. - Miền nghiệm nằm phía trên trục hoành nên $y > 0$.

- Đường thẳng đi qua $(2; 0)$ và $(0; 3)$ có phương trình $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 1 \Leftrightarrow 3x + 2y = 6$.

- Miền nghiệm chứa gốc tọa độ $O(0; 0)$. Thay $(0; 0)$ vào biểu thức $3x + 2y$ ta được $0 < 6$.

Vậy hệ bất phương trình là $\begin{cases} y > 0 \\ 3x + 2y < 6 \end{cases}$. Chọn A.

Câu 22. Miền tam giác ABC kể cả ba cạnh sau đây là miền nghiệm của hệ bất phương trình nào trong bốn hệ A, B, C, D?



Ⓐ $\begin{cases} y \geq 0 \\ 5x-4y \geq 10 \\ 5x+4y \leq 10 \end{cases}$.

Ⓑ $\begin{cases} x \geq 0 \\ 4x-5y \leq 10 \\ 5x+4y \leq 10 \end{cases}$.

Ⓒ $\begin{cases} x \geq 0 \\ 5x-4y \leq 10 \\ 4x+5y \leq 10 \end{cases}$.

Ⓓ $\begin{cases} x > 0 \\ 5x-4y \leq 10 \\ 4x+5y \leq 10 \end{cases}$.

✍ *Hướng dẫn giải.* - Vì miền nghiệm là miền tam giác ABC kể cả ba cạnh nên các bất phương trình phải có dấu "$\leq$" hoặc "$\geq$". Do đó loại đáp án D.

- Tam giác ABC có một cạnh AC nằm trên trục tung nên hệ phải chứa bất phương trình $x \geq 0$. Loại đáp án A.

- Đường thẳng AB đi qua điểm $A(0;2)$ và có hoành độ giao điểm với trục hoành là $x = \dfrac{5}{2}$. Phương trình đoạn chắn của AB là: $\dfrac{x}{5/2} + \dfrac{y}{2} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{2x}{5} + \dfrac{y}{2} = 1 \Leftrightarrow 4x+5y = 10$.

- Đường thẳng BC đi qua điểm $C(0;-2,5)$ và có hoành độ giao điểm với trục hoành là $x = 2$. Phương trình đoạn chắn của BC là: $\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{-2,5} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x}{2} - \dfrac{2y}{5} = 1 \Leftrightarrow 5x-4y = 10$.

- Miền tam giác ABC chứa gốc tọa độ $O(0;0)$. Thay tọa độ $(0;0)$ vào các biểu thức $4x+5y$ và $5x-4y$ ta thấy $0 \leq 10$ ở cả hai trường hợp.

Vậy hệ bất phương trình cần tìm là: $\begin{cases} x \geq 0 \\ 5x-4y \leq 10 \\ 4x+5y \leq 10 \end{cases}$.

Chọn C.

Câu 23. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = y - x$ trên miền xác định bởi hệ $\begin{cases} y-2x \leq 2 \\ 2y-x \geq 4 \\ x+y \leq 5 \end{cases}$ là.

Ⓐ $\min F = 1$ khi $x = 2, y = 3$.

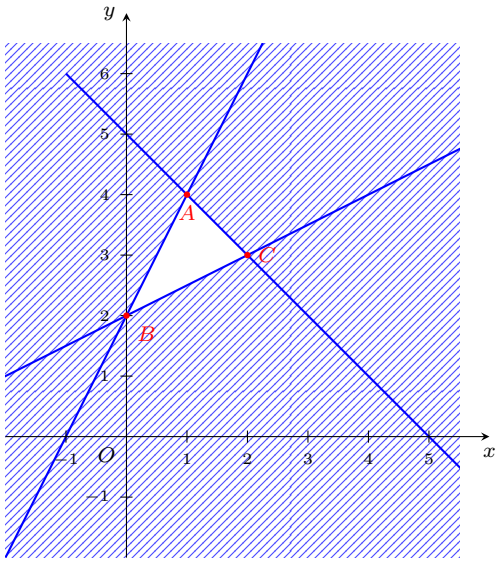
Ⓑ $\min F = 2$ khi $x = 0, y = 2$.

Ⓒ $\min F = 3$ khi $x = 1, y = 4$.

Ⓓ $\min F = 0$ khi $x = 0, y = 0$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Chọn A

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} y-2x\le 2 \\ 2y-x\ge 4 \\ x+y\le 5 \end{cases}$ trên hệ trục tọa độ như dưới đây:



Nhận thấy biểu thức $F=y-x$ chỉ đạt giá trị nhỏ nhất tại các điểm A, B hoặc C.
Ta có tọa độ các đỉnh: $A(1;4), B(0;2), C(2;3)$.
Tính giá trị của F tại các đỉnh:

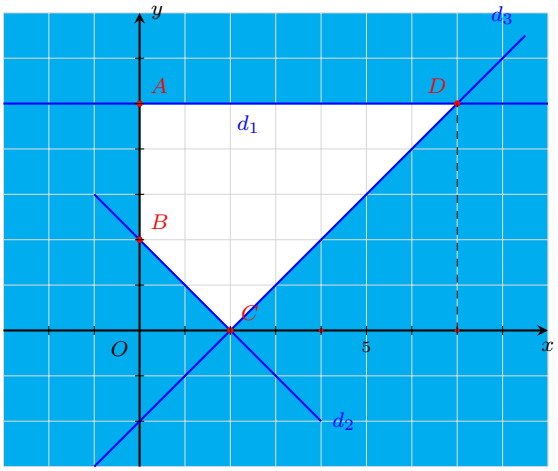
- $F(A)=4-1=3$.
- $F(B)=2-0=2$.
- $F(C)=3-2=1$.

Vậy $\min F=1$ khi $x=2, y=3$.

Câu 24. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F(x;y)=x-2y$, với điều kiện $\begin{cases} 0\le y\le 5 \\ x\ge 0 \\ x+y-2\ge 0 \\ x-y-2\le 0 \end{cases}$ là

Ⓐ -12. Ⓑ -10. Ⓒ -8. Ⓓ -6.

Hướng dẫn giải.



Vẽ các đường thẳng $d_1: y=5$; $d_2: x+y-2=0$; $d_3: x-y-2=0$; $Ox: y=0$; $Oy: x=0$.

Các đường thẳng trên đôi một cắt nhau tại $A(0;5)$, $B(0;2)$, $C(2;0)$, $D(7;5)$.

Vì điểm $M_0(2;1)$ có tọa độ thoả mãn tất cả các bất pt trong hệ nên ta tô đậm (phần màu xanh) các nửa mặt phẳng bờ d_1, d_2, d_3, Ox, Oy không chứa điểm M_0. Miền không bị tô đậm là đa giác $ABCD$ kể cả các cạnh (hình bên) là miền nghiệm của hệ pt đã cho.

Kí hiệu $F(A) = F(x_A; y_A) = x_A - 2y_A$, ta có

$F(A) = -10, F(B) = -4, F(C) = 2, F(D) = -3, -10 < -4 < -3 < 2.$

Giá trị nhỏ nhất cần tìm là -10.

Câu 25. Biểu thức $L = y - x$, với x và y thỏa mãn hệ bất phương trình $\begin{cases} 2x + 3y - 6 \le 0 \\ x \ge 0 \\ 2x - 3y - 1 \le 0 \end{cases}$, đạt giá trị lớn nhất là a và đạt giá trị nhỏ nhất là b. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau:

(A) $a = \dfrac{25}{8}$ và $b = -2$.

(B) $a = 2$ và $b = -\dfrac{11}{12}$.

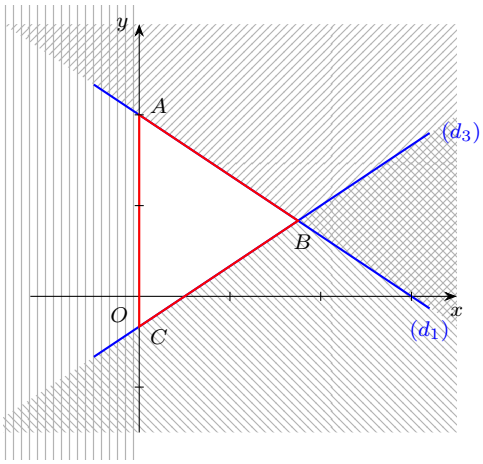
(C) $a = 3$ và $b = 0$.

(D) $a = 3$ và $b = -\dfrac{9}{8}$.

Hướng dẫn giải.

Trước hết, ta vẽ ba đường thẳng:

- $(d_1) : 2x + 3y - 6 = 0$
- $(d_2) : x = 0$
- $(d_3) : 2x - 3y - 1 = 0$



Ta thấy $(0;0)$ là nghiệm của cả ba bất phương trình. Điều đó có nghĩa gốc tọa độ thuộc cả ba miền nghiệm của cả ba bất phương trình. Sau khi gạch bỏ các miền không thích hợp, miền không bị gạch là miền nghiệm của hệ (kể cả biên).

Miền nghiệm là hình tam giác ABC (kể cả biên), với $A(0;2)$, $B\left(\dfrac{7}{4};\dfrac{5}{6}\right)$, $C\left(0;-\dfrac{1}{3}\right)$.

Thay tọa độ các đỉnh vào biểu thức $L = y - x$, ta có:

- Tại $A(0;2)$: $L = 2 - 0 = 2$.
- Tại $B\left(\dfrac{7}{4};\dfrac{5}{6}\right)$: $L = \dfrac{5}{6} - \dfrac{7}{4} = -\dfrac{11}{12}$.
- Tại $C\left(0;-\dfrac{1}{3}\right)$: $L = -\dfrac{1}{3} - 0 = -\dfrac{1}{3}$.

So sánh các giá trị trên, ta có giá trị lớn nhất $a = 2$ và giá trị nhỏ nhất $b = -\dfrac{11}{12}$.

Vậy ta có $a = 2$ và $b = -\dfrac{11}{12}$.

Câu 26. Trong một cuộc thi pha chế, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 24 g hương liệu, 9 lít nước và 210 g đường để pha chế nước cam và nước táo.

- Để pha chế 1 lít nước cam cần 30 g đường, 1 lít nước và 1 g hương liệu;
- Để pha chế 1 lít nước táo cần 10 g đường, 1 lít nước và 4 g hương liệu.

Mỗi lít nước cam nhận được 60 điểm thưởng, mỗi lít nước táo nhận được 80 điểm thưởng. Hỏi cần pha chế bao nhiêu lít nước trái cây mỗi loại để đạt được số điểm thưởng cao nhất?

(A) 5 lít nước cam và 4 lít nước táo.
(B) 6 lít nước cam và 5 lít nước táo.
(C) 4 lít nước cam và 5 lít nước táo.
(D) 4 lít nước cam và 6 lít nước táo.

Hướng dẫn giải.

Giả sử x, y lần lượt là số lít nước cam và số lít nước táo mà mỗi đội cần pha chế. $(x, y \geq 0)$.
Suy ra $30x + 10y$ là số gam đường cần dùng;
$x + y$ là số lít nước cần dùng;
$x + 4y$ là số gam hương liệu cần dùng.

Theo giả thiết ta có: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 30x + 10y \leq 210 \\ x + y \leq 9 \\ x + 4y \leq 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + y \leq 21 \\ x + y \leq 9 \\ x + 4y \leq 24 \end{cases} \quad (*)$

Số điểm thưởng nhận được sẽ là $P = 60x + 80y$.
Ta đi tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P với x, y thỏa mãn hệ $(*)$.

Câu 27. Một xưởng sản xuất hai loại sản phẩm

- Mỗi kg sản phẩm loại I cần 2 kg nguyên liệu và 30 giờ, đem lại mức lời 40 nghìn;
- Mỗi kg sản phẩm loại II cần 4 kg nguyên liệu và 15 giờ, đem lại mức lời 30 nghìn.

Xưởng có 200 kg nguyên liệu và 1200 giờ làm việc. Nên sản xuất mỗi loại sản phẩm bao nhiêu để có mức lời cao nhất?

(A) 30 kg loại I và 40 kg loại II.
(B) 20 kg loại I và 40 kg loại II.
(C) 30 kg loại I và 20 kg loại II.
(D) 25 kg loại I và 45 kg loại II.

Hướng dẫn giải.

Gọi $x \geq 0, y \geq 0$ (kg) lần lượt là số sản phẩm loại I và loại II cần sản xuất.
Khi đó, tổng số nguyên liệu sử dụng: $2x + 4y \leq 200$.
Tổng số giờ làm việc: $30x + 15y \leq 1200$.
Lợi nhuận tạo thành: $L = 40x + 30y$ (nghìn).

Thực chất của bài toán này là phải tìm $x \geq 0, y \geq 0$ thỏa mãn hệ: $\begin{cases} 2x + 4y \leq 200 \\ 30x + 15y \leq 1200 \end{cases}$ sao cho $L = 40x + 30y$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 28. Một nhà khoa học đã nghiên cứu về tác động phối hợp của hai loại Vitamin A và B

đã thu được kết quả như sau: Trong một ngày, mỗi người cần từ 400 đến 1000 đơn vị Vitamin cả A lẫn B và có thể tiếp nhận không quá 600 đơn vị vitamin A và không quá 500 đơn vị vitamin B. Do tác động phối hợp của hai loại vitamin trên nên mỗi ngày một người sử dụng số đơn vị vitamin B không ít hơn một nửa số đơn vị vitamin A và không nhiều hơn ba lần số đơn vị vitamin A. Tính số đơn vị vitamin mỗi loại ở trên để một người dùng mỗi ngày sao cho chi phí rẻ nhất, biết rằng mỗi đơn vị vitamin A có giá 9 đồng và mỗi đơn vị vitamin B có giá $7,5$ đồng.

Ⓐ 600 đơn vị Vitamin A, 400 đơn vị Vitamin B.
Ⓑ 600 đơn vị Vitamin A, 300 đơn vị Vitamin B.
Ⓒ 500 đơn vị Vitamin A, 500 đơn vị Vitamin B.
Ⓓ 100 đơn vị Vitamin A, 300 đơn vị Vitamin B.

Hướng dẫn giải. **Chọn D**

Gọi $x \geq 0, y \geq 0$ lần lượt là số đơn vị vitamin A và B để một người cần dùng trong một ngày.

Trong một ngày, mỗi người cần từ 400 đến 1000 đơn vị vitamin cả A lẫn B nên ta có: $400 \leq x + y \leq 1000$.

Hàng ngày, tiếp nhận không quá 600 đơn vị vitamin A và không quá 500 đơn vị vitamin B nên ta có: $x \leq 600, y \leq 500$.

Mỗi ngày một người sử dụng số đơn vị vitamin B không ít hơn một nửa số đơn vị vitamin A và không nhiều hơn ba lần số đơn vị vitamin A nên ta có: $0,5x \leq y \leq 3x$.

Số tiền cần dùng mỗi ngày là: $T(x, y) = 9x + 7,5y$.

Bài toán trở thành: Tìm $x \geq 0, y \geq 0$ thỏa mãn hệ $\begin{cases} 0 \leq x \leq 600, 0 \leq y \leq 500 \\ 400 \leq x + y \leq 1000 \\ 0,5x \leq y \leq 3x \end{cases}$ để $T(x, y) = 9x + 7,5y$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 29. Công ty Bao bì Dược cần sản xuất 3 loại hộp giấy: đựng thuốc B_1, đựng cao Sao vàng và đựng "Quy sâm đại bổ hoàn". Để sản xuất các loại hộp này, công ty dùng các tấm bìa có kích thước giống nhau. Mỗi tấm bìa có hai cách cắt khác nhau.

- Cách thứ nhất cắt được 3 hộp B_1, một hộp cao Sao vàng và 6 hộp Quy sâm.
- Cách thứ hai cắt được 2 hộp B_1, 3 hộp cao Sao vàng và 1 hộp Quy sâm.

Theo kế hoạch, số hộp Quy sâm phải có là 900 hộp, số hộp B_1 tối thiểu là 900 hộp, số hộp cao sao vàng tối thiểu là 1000 hộp. Cần phương án sao cho tổng số tấm bìa phải dùng là ít nhất?

Ⓐ Cắt theo cách một 100 tấm, cắt theo cách hai 300 tấm.
Ⓑ Cắt theo cách một 150 tấm, cắt theo cách hai 100 tấm.
Ⓒ Cắt theo cách một 50 tấm, cắt theo cách hai 300 tấm.
Ⓓ Cắt theo cách một 100 tấm, cắt theo cách hai 200 tấm.

Hướng dẫn giải. **Chọn A**

Gọi $x \geq 0, y \geq 0$ lần lượt là số tấm bìa cắt theo cách thứ nhất, thứ hai.

Bài toán đưa đến tìm $x \geq 0, y \geq 0$ thoả mãn hệ $\begin{cases} 3x + 2y \geq 900 \\ x + 3y \geq 1000 \\ 6x + y = 900 \end{cases}$ sao cho $L = x + y$ nhỏ nhất.

Câu 30. Một xưởng cơ khí có hai công nhân là Chiến và Bình. Xưởng sản xuất loại sản phẩm I và II. Mỗi sản phẩm I bán lãi 500 nghìn đồng, mỗi sản phẩm II bán lãi 400 nghìn đồng. Để sản

xuất được một sản phẩm I thì Chiến phải làm việc trong 3 giờ, Bình phải làm việc trong 1 giờ. Để sản xuất được một sản phẩm II thì Chiến phải làm việc trong 2 giờ, Bình phải làm việc trong 6 giờ. Một người không thể làm được đồng thời hai sản phẩm. Biết rằng trong một tháng Chiến không thể làm việc quá 180 giờ và Bình không thể làm việc quá 220 giờ. Số tiền lãi lớn nhất trong một tháng của xưởng là.

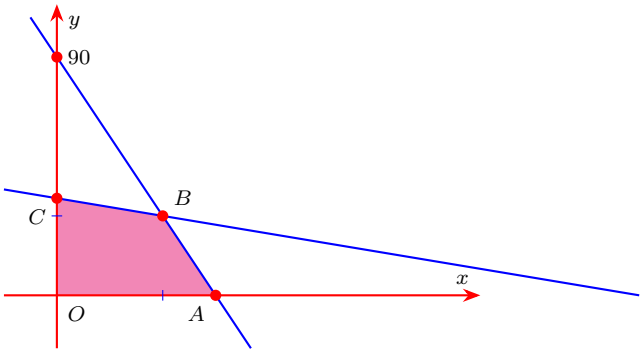
Ⓐ 32 triệu đồng..
Ⓑ 35 triệu đồng..
Ⓒ 14 triệu đồng..
Ⓓ 30 triệu đồng..

Hướng dẫn giải. Chọn **A**

Gọi x, y lần lượt là số sản phẩm loại I và loại II được sản xuất ra. Điều kiện x, y nguyên dương.

Ta có hệ bất phương trình sau: $\begin{cases} 3x+2y \le 180 \\ x+6y \le 220 \\ x>0 \\ y>0 \end{cases}$

Miền nghiệm của hệ trên là miền đa giác $OABC$ (không kể các trục tọa độ):



Tiền lãi trong một tháng của xưởng là $T = 0,5x + 0,4y$ (triệu đồng).

Ta thấy T đạt giá trị lớn nhất chỉ có thể tại các điểm A, B, C. Vì C có tọa độ không nguyên nên loại.

Tại $A(60;0)$ thì $T = 0,5 \cdot 60 + 0,4 \cdot 0 = 30$ triệu đồng.

Tại $B(40;30)$ thì $T = 0,5 \cdot 40 + 0,4 \cdot 30 = 32$ triệu đồng.

Vậy tiền lãi lớn nhất trong một tháng của xưởng là 32 triệu đồng.

2) Trắc nghiệm đúng sai

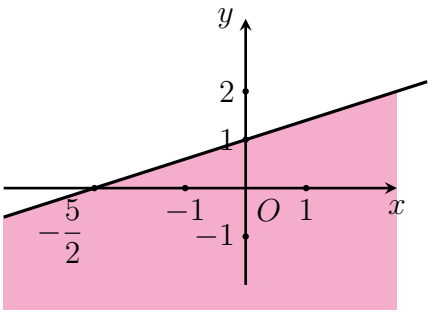
Bài 1. Cho bất phương trình $2x - 5y > 5$ (1).

a) Bất phương trình (1) là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

b) Cặp số $(x, y) = (1, 1)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình (1).

c) Bất phương trình (1) có một nghiệm duy nhất.

d) Miền không được tô đậm (không kể bờ d) trong hình sau là miền nghiệm của bất phương trình (1).



Hướng dẫn giải.

Ta có: $2x-5y>5$ là bất phương trình bậc nhất hai ẩn dạng $ax+by>c$. Nên **a)** đúng.

Thế cặp số $(x,y)=(1,1)$ vào bất phương trình $2x-5y>5$ ta thấy $2.1-5.1=-3<5$. Nên **b)** sai.

Vì bất phương trình bậc nhất hai ẩn luôn có một miền nghiệm thoả mãn bất phương trình nên **c)** sai.

Đường thẳng $d:2x-5y=5$ đi qua hai điểm $(0;-1)$ và $\left(\frac{5}{2};0\right)$. Lấy điểm $O(0;0)$.

Ta có $0>5$ sai do đó miền nghiệm của bất phương trình (1) là nửa mặt phẳng không chứa điểm $O(0;0)$ không kể đường thẳng d. Nên **d)** đúng.

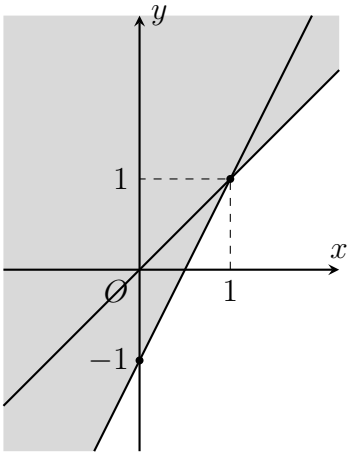
Bài 2. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases}x-y>0\\2x-y>1\end{cases}$.

a) Hệ bất phương trình đã cho là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

b) Hệ bất phương trình đã cho có nghiệm duy nhất.

c) Hệ bất phương trình đã cho vô nghiệm.

d) Phần không tô đậm (không kể cả bờ) biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình.



Hướng dẫn giải.

a) Đúng.

b) Sai vì hệ có vô số nghiệm.

c) Sai vì hệ có vô số nghiệm. d) Đúng.

Bài 3. Cho hệ bất phương trình $\begin{cases} y-2x\le 2 \\ 2y-x\ge 4 \\ x+y\le 5 \end{cases}$ (I).

a) $(0;3)$ là một nghiệm của (I).

b) Miền nghiệm của (I) chứa điểm $(1;3)$.

c) $M(x;y)$ thuộc miền nghiệm của (I) thì $2y-x\le 7$.

d) Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F=y-x$ trên miền xác định bởi hệ là 1.

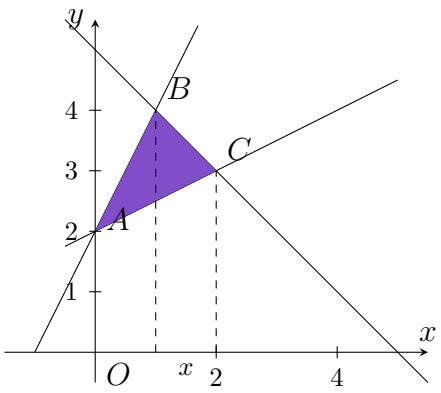
Hướng dẫn giải.

a) Thay $(0;3)$ vào bất phương trình thứ nhất được $3<2$ vô lý nên **a) sai**

b) Thay $(1;3)$ vào hệ thoả mãn nên **b) đúng**

c) Từ bất phương trình thứ nhất và bất phương trình thứ ba của (I), cộng từ vế ta được $y-2x+x+y\le 2+5\Leftrightarrow 2y-x\le 7$ nên **c) đúng**

d) Miền nghiệm của hệ $\begin{cases} y-2x\le 2 \\ 2y-x\ge 4 \\ x+y\le 5 \end{cases}$ là miền trong của tam giác ABC kể cả biên



Ta thấy $F=y-x$ đạt giá trị nhỏ nhất chỉ có thể tại các điểm A,B,C.

Tại $A(0;2)$ thì $F=2$.

Tại $B(1;4)$ thì $F=3$

Tại $A(2;3)$ thì $F=1$.

Vậy $\min F=1$ khi $x=2,y=3$ nên mệnh đề đúng.

Bài 4. Một công ty TNHH trong một đợt quảng cáo và bán hàng khuyến mại hàng hóa (một sản phẩm mới của công ty) cần thuê xe để chở 140 người và 9 tấn hàng. Nơi thuê chỉ có hai loại xe A và B. Trong đó xe loại A có 10 chiếc, xe loại B có 9 chiếc. Một chiếc xe loại A cho thuê với giá 4 triệu, loại B giá 3 triệu. Biết rằng xe A chỉ chở tối đa 20 người và 0,6 tấn hàng; xe B chở tối đa 10 người và 1,5 tấn hàng. Gọi x,y lần lượt là số xe loại A và loại B mà công ty thuê.

a) Số tiền thuê xe là $4x+3y$.

b) $2x+y<14$.

c) $2x+5y\ge 30$.

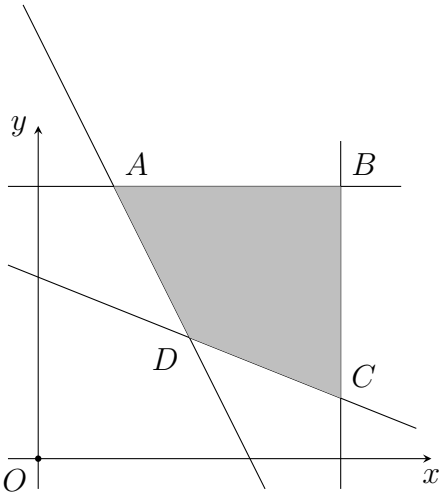
d) Số tiền thuê xe thấp nhất là 32 triệu.

Hướng dẫn giải.

Gọi x, y lần lượt là số xe loại A và loại B cần phải thuê ($x, y \in \mathbb{N}$). Khi đó số tiền thuê xe là $T = 4x + 3y$ (triệu đồng).

Theo bài ra ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 0 \le x \le 10 \\ 0 \le y \le 9 \\ 20x + 10y \ge 140 \\ 0,6x + 1,5y \ge 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x \le 10 \\ 0 \le y \le 9 \\ 2x + y \ge 14 \\ 2x + 5y \ge 30 \end{cases}$.

Miền nghiệm của hệ (1) là miền đa giác $ABCD$ (kể cả biên).



Ta có bảng

Điểm	$A\left(\frac{5}{2};9\right)$	$B(10;9)$	$C(10;2)$	$D(5;4)$
$T = 4x + 3y$	37	67	46	32

Giá trị nhỏ nhất của T là 32 đạt tại $x = 5, y = 4$.

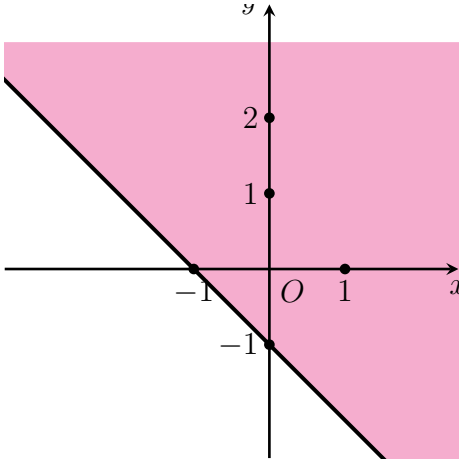
Bài 5. Cho bất phương trình: $x + y + 1 < 0$.

a) Bất phương trình đã cho là bất phương trình bậc nhất một ẩn.

b) Cặp số $(1;1)$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

c) Miền nghiệm của bất phương trình đã cho là nửa mặt phẳng chứa gốc tọa độ có bờ là đường thẳng $x + y + 1 = 0$.

d) Miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng phần không bị tô đậm có bờ là đường thẳng $x + y + 1 = 0$ (không lấy những điểm nằm trên đường thẳng $x + y + 1 = 0$).



✍ *Hướng dẫn giải.*

a) Bất phương trình trên là bất phương trình bậc nhất một ẩn: Đúng

b) Cặp số $(1;1)$ là nghiệm của bất phương trình: Sai

Thay $x=1; y=1$ vào bất phương trình: $1+1+1<0$: Sai

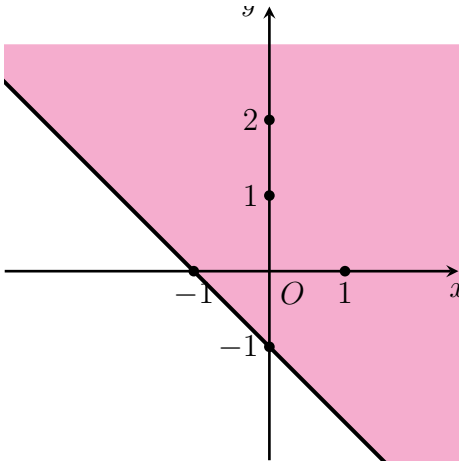
Vậy cặp số $(1;1)$ là không là nghiệm của bất phương trình.

c) Miền nghiệm của bất phương trình trên là nửa mặt phẳng chứa gốc tọa độ có bờ là đường thẳng $x+y+1=0$

Thay $x=0; y=0$ vào bất phương trình: $0+0+1<0$: Sai

Vậy miền nghiệm của bất phương trình trên là nửa mặt phẳng không chứa gốc tọa độ.

d) Miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng phần không bị tô đậm có bờ là đường thẳng $x+y+1=0$ (không lấy những điểm nằm trên đường thẳng $x+y+1=0$)



Nhìn vào hình vẽ ta thấy:

- Đường thẳng $x+y+1=0$ cắt hai trục tọa độ tại $(-1;0);(0;-1)$

- Miền nghiệm không chứa gốc tọa độ Vậy **d) đúng**

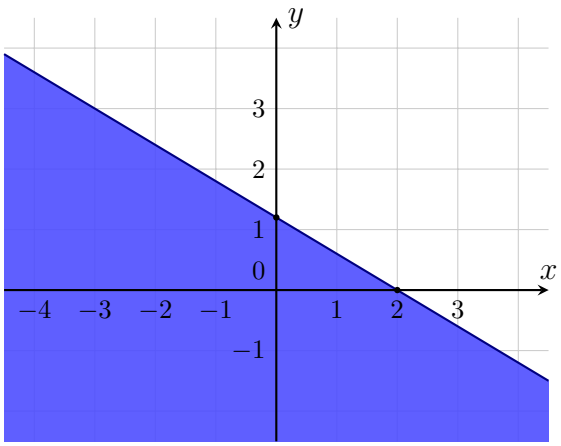
Bài 6. Cho bất phương trình bậc nhất hai ẩn $3x+5y\leq 6$.

a) Cặp $(3;3)$ là một nghiệm của bất phương trình.

b) Điểm $B(-2;2)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình đã cho.

c) Với $x=0$ thì chỉ có 2 giá trị của y thỏa mãn bất phương trình.

d) Miền nghiệm của bất phương trình đã cho là miền tô đậm trong hình vẽ bao gồm cả bờ là đường thẳng: $3x + 5y = 6$



Hướng dẫn giải.

Thay $x = 3; y = 3$ vào bất phương trình (1) ta thấy không thỏa mãn. Vậy **a) sai**.

Thay $x = -2; y = 2$ vào bất phương trình (1) ta thấy thỏa mãn. Vậy **b) đúng**.

Thay $x = 0$ vào bất phương trình ta được $5y \leq 6$, bất phương trình này có nhiều hơn 2 giá trị của y thỏa mãn. Vậy **c) sai**.

Ta thấy $(0; 0)$ là nghiệm của bất phương trình đã cho. Vậy miền nghiệm cần tìm là nửa mặt phẳng chứa điểm $(0; 0)$ nên miền nghiệm là miền tô đậm trong hình vẽ bao gồm cả bờ là đường thẳng $3x + 5y = 6$. Vậy **d) đúng**.

Bài 7. Một gia đình cần ít nhất 900 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit trong thức ăn mỗi ngày. Mỗi kilôgam thịt bò chứa 800 đơn vị protein và 200 đơn vị lipit. Mỗi kilôgam thịt lợn chứa 600 đơn vị protein và 400 đơn vị lipit. Biết rằng gia đình này chỉ mua nhiều nhất là 1,6 kg thịt bò và 1,1 kg thịt lợn; giá tiền 1 kg thịt bò là 250 nghìn đồng; 1 kg thịt lợn là 160 nghìn đồng. Giả sử gia đình đó mua x kilôgam thịt bò và y kilôgam thịt lợn.

a) Bất phương trình biểu thị lượng lipit tối thiểu trong thức ăn mỗi ngày của gia đình đó là $x + 2y \leq 2$.

b) Các bất phương trình biểu thị các điều kiện của bài toán thành một hệ bất phương trình là
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1{,}6 \\ 0 \leq y \leq 1{,}1 \\ 8x + 6y \geq 9 \\ x + 2y \geq 2 \end{cases}$$

c) Gọi F (nghìn đồng) là số tiền phải trả cho x kilôgam thịt bò và y kilôgam thịt lợn. Biểu thức biểu diễn F theo x và y là $F(x; y) = 250x + 160y$.

d) Để chi phí ít nhất gia đình thì cần mua 0,3 kg thịt bò và 1,1 kg thịt lợn.

✍ *Hướng dẫn giải.* Ta có bảng tóm tắt dữ liệu bài toán:

	Thịt bò (x kg)	**Thịt lợn (y kg)**
Protein	800/1 kg	600/1 kg
Lipit	200/1 kg	400/1 kg
Giá tiền	250.000/1 kg	160.000/1 kg

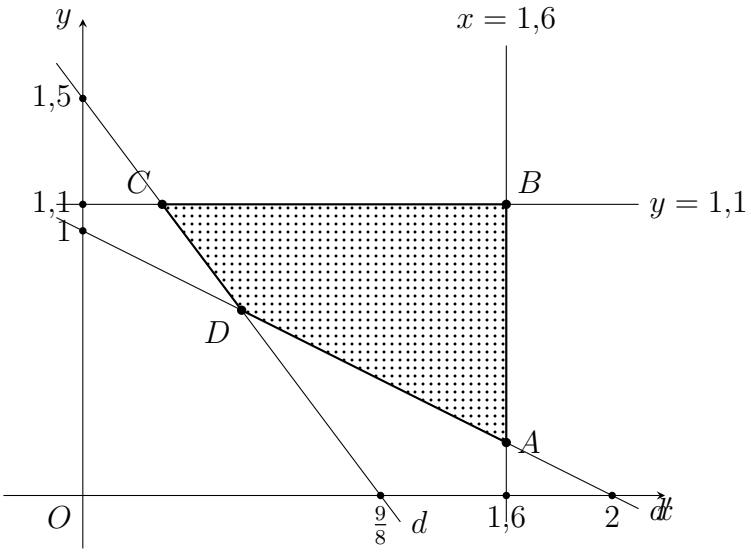
a) **Sai.** Một gia đình cần ít nhất 400 đơn vị lipit nên ta có: $200x + 400y \geq 400 \Leftrightarrow x + 2y \geq 2$.

b) **Đúng. C**ác điều kiện của bài toán được biểu thị bởi hệ bất phương trình: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1{,}6 \\ 0 \leq y \leq 1{,}1 \\ 800x + 600y \geq 900 \\ 200x + 400y \geq 400 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1{,}6 \\ 0 \leq y \leq 1{,}1 \\ 8x + 6y \geq 9 \\ x + 2y \geq 2 \end{cases}$

c) **Đúng.** Chi phí mua thịt là $F(x;y) = 250x + 160y$ (đơn vị: nghìn đồng).

d) **Đúng.** Biểu diễn miền nghiệm của hệ trên mặt phẳng tọa độ Oxy:



Miền nghiệm là tứ giác $ABCD$ với các đỉnh: $A(1{,}6;0{,}2)$, $B(1{,}6;1{,}1)$, $C(0{,}3;1{,}1)$, $D(0{,}6;0{,}7)$.

Tính giá trị của $F(x;y)$ tại các đỉnh:

- $F(A) = 250 \cdot 1{,}6 + 160 \cdot 0{,}2 = 432$.
- $F(B) = 250 \cdot 1{,}6 + 160 \cdot 1{,}1 = 576$.
- $F(C) = 250 \cdot 0{,}3 + 160 \cdot 1{,}1 = 251$.
- $F(D) = 250 \cdot 0{,}6 + 160 \cdot 0{,}7 = 262$.

Giá trị nhỏ nhất là $F(0{,}3;1{,}1) = 251$. Vậy để chi phí ít nhất gia đình cần mua 0,3 kg thịt bò và

1,1 kg thịt lợn.

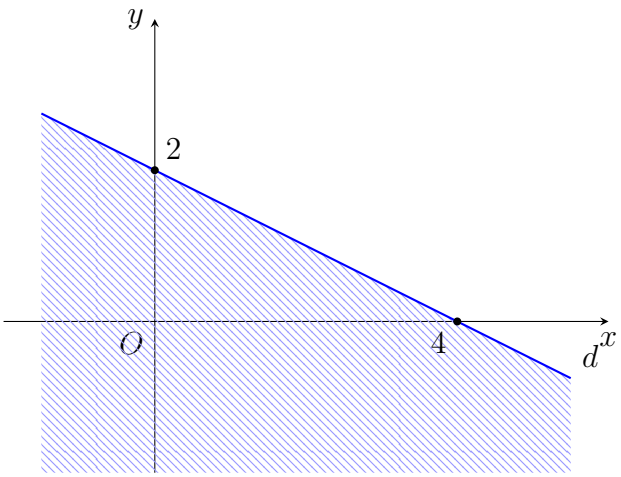
Bài 8. Cho bất phương trình $x+2y>4$.

a) Bất phương trình đã cho là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

b) Điểm $(1;2)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình đã cho.

c) Miền nghiệm của bất phương trình đã cho có chứa gốc tọa độ.

d) Miền nghiệm của bất phương trình đã cho được biểu diễn trong mặt phẳng tọa độ Oxy như sau, trong đó miền nghiệm là nửa mặt phẳng không chứa gốc tọa độ (phần không bị gạch) không kể đường thẳng d.



Hướng dẫn giải.

a) Đúng. Bất phương trình có dạng $ax+by>c$ với $a=1,b=2,c=4$ nên đây là bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

b) Đúng. Thay $x=1,y=2$ vào bất phương trình ta được $1+2\cdot 2>4\Leftrightarrow 5>4$ (Thỏa mãn). Do đó, điểm $(1;2)$ thuộc miền nghiệm của bất phương trình đã cho.

c) Sai. Thay $x=0,y=0$ vào bất phương trình ta được $0+2\cdot 0>4\Leftrightarrow 0>4$ (Vô lý). Do đó, miền nghiệm của bất phương trình không chứa gốc tọa độ $O(0;0)$.

d) Đúng.

☆ Đường thẳng $d:x+2y=4$ đi qua hai điểm $(0;2)$ và $(4;0)$.

☆ Vì điểm $O(0;0)$ không thỏa mãn bất phương trình ($0>4$ là sai), nên miền nghiệm là nửa mặt phẳng bờ d không chứa gốc tọa độ O.

☆ Vì bất phương trình là dấu ">" nên miền nghiệm không kể đường thẳng d.

Hình vẽ biểu diễn phần không bị gạch chính là miền nghiệm thỏa mãn các điều kiện trên.

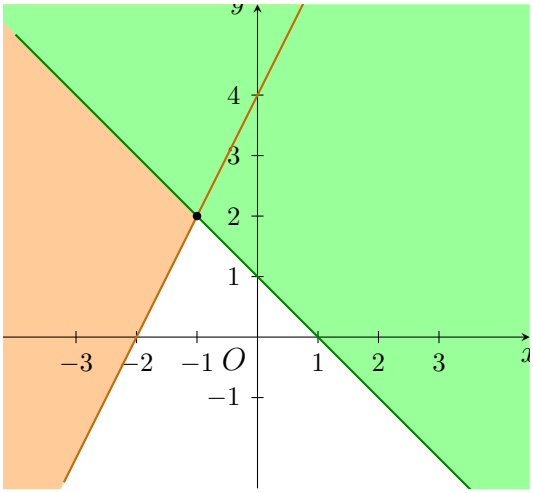
Bài 9. Cho hệ bất phương trình: $\begin{cases} x+y-1\le 0 \quad (1) \\ 2x-y+4\ge 0 \quad (2) \end{cases}$.

a) Hệ đã cho là hệ phương trình bậc nhất hai ẩn.

b) Hệ đã cho có một nghiệm duy nhất là $(1;0)$.

c) Điểm $M(2;3)$ không thuộc miền nghiệm của hệ đã cho.

d) Phần không tô đậm (kể cả bờ) trong hình vẽ dưới đây là miền nghiệm của hệ đã cho.



✍ *Hướng dẫn giải.*

a) **Sai** vì hệ đã cho là hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

b) **Sai** vì hệ đã cho có vô số nghiệm.

c) **Đúng** vì thay tọa độ điểm $M(2;3)$ vào hệ ta thấy không thỏa mãn bất phương trình (1): $2+3-1\leq 0 \Leftrightarrow 4\leq 0$ (vô lý). Do đó, M không thuộc miền nghiệm của hệ.

d) **Đúng.**

☆ Xác định miền nghiệm của BPT (1): $x+y-1\leq 0$. Vẽ đường thẳng $(d_1): x+y-1=0$ đi qua điểm $(1;0)$ và $(0;1)$. Thay tọa độ điểm $O(0;0)$ vào BPT (1) ta thấy $0+0-1\leq 0$ (đúng). Suy ra điểm $O(0;0)$ thuộc miền nghiệm của BPT (1).

☆ Xác định miền nghiệm của BPT (2): $2x-y+4\geq 0$. Vẽ đường thẳng $(d_2): 2x-y+4=0$ đi qua điểm $(-2;0)$ và $(0;4)$. Thay tọa độ điểm $O(0;0)$ vào BPT (2) ta thấy $2\cdot 0-0+4\geq 0$ (đúng). Suy ra điểm $O(0;0)$ thuộc miền nghiệm của BPT (2).

Vậy phần không tô đậm (giao của hai miền nghiệm trên, bao gồm cả hai bờ d_1, d_2) chính là miền nghiệm của hệ đã cho.

Bài 10. Một công ty thời trang chuẩn bị cho một đợt khuyến mãi nhằm thu hút khách hàng bằng cách tiến hành quảng cáo sản phẩm của công ty trên hai nền tảng mạng xã hội **Tik Tok** và **You Tube**. Biết chi phí cho 1.000.000 lượt xem quảng cáo trên **Tik Tok** là 20 triệu đồng, chi phí cho 1.000.000 lượt xem quảng cáo trên **You Tube** là 40 triệu đồng. **Tik Tok** chỉ nhận các hợp đồng trên 6.000.000 lượt xem. **You Tube** do các công ty có nhu cầu quảng cáo lớn nên chỉ nhận các hợp đồng dưới 3.000.000 lượt xem. Theo các phân tích, cùng một lượng lượt xem quảng cáo thì trên **You Tube** cho hiệu quả gấp 3 lần quảng cáo trên **Tik Tok**. Công ty thời trang dự tính chi tối đa 160 triệu cho quảng cáo. Gọi x (triệu lượt) là số lượt xem trên **Tik Tok**, y (triệu lượt) là số lượt xem trên **You Tube** mà công ty cần thuê để quảng cáo.

a) Số tiền công ty phải trả cho 6 triệu lượt xem trên TikTok là 120 triệu đồng.

b) Chi phí quảng cáo mà công ty phải trả là $20y+40x$ triệu đồng.

c) Để hiệu quả quảng cáo cao nhất thì giá trị của biểu thức $x+3y$ là nhỏ nhất.

d) Khi thời lượng quảng cáo đạt hiệu quả cao nhất thì $x=6$ (triệu lượt), $y=1$ (triệu lượt).

✍ *Hướng dẫn giải.*

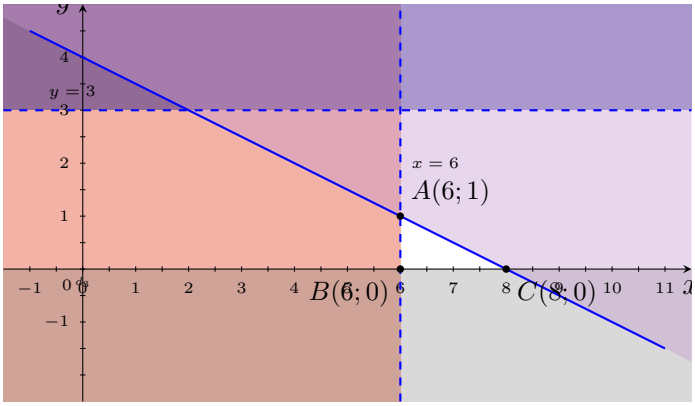
a) **Đúng.** Vì chi phí cho 1.000.000 lượt xem trên Tik Tok là 20 triệu đồng nên 6 triệu lượt xem sẽ tốn: $6\cdot 20=120$ (triệu đồng).

b) **Sai.** Chi phí trên Tik Tok là $20x$, chi phí trên You Tube là $40y$. Tổng chi phí là $20x+40y$ (triệu đồng).

c) **Sai.** Vì You Tube hiệu quả gấp 3 lần Tik Tok, nên tổng hiệu quả là $T=x+3y$. Để hiệu quả cao nhất thì T phải đạt **giá trị lớn nhất**.

d) **Đúng.** Ta có hệ bất phương trình giới hạn các biến x, y:

$$\begin{cases} x \geq 6 \\ 0 \leq y \leq 3 \\ 20x+40y \leq 160 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6 & (d_1) \\ 0 \leq y \leq 3 & (d_2, d_4) \\ x+2y \leq 8 & (d_3) \end{cases}$$



Miền nghiệm của hệ là miền trong tam giác ABC (kể cả biên). Ta xét giá trị biểu thức $T=x+3y$ tại các đỉnh:

- Tại $A(6;1): T=6+3(1)=9$.
- Tại $B(6;0): T=6+3(0)=6$.
- Tại $C(8;0): T=8+3(0)=8$.

Giá trị lớn nhất $T_{max}=9$ tại $x=6$ và $y=1$. **Vậy d) đúng.**

Bài 11. Bác An đầu tư 1,2 tỉ đồng vào ba loại trái phiếu: trái phiếu chính phủ với lãi suất 7% một năm, trái phiếu ngân hàng với lãi suất 8% một năm và trái phiếu doanh nghiệp rủi ro cao với lãi suất 12% một năm. Vì lí do giảm thuế, bác An muốn số tiền đầu tư lãi suất chính phủ gấp ít nhất 3 lần số tiền đầu tư trái phiếu ngân hàng. Hơn nữa, để giảm thiểu rủi ro, bác An đầu tư không quá 200 triệu đồng cho trái phiếu doanh nghiệp. Gọi số tiền bác An đầu tư cho trái phiếu chính phủ, trái phiếu ngân hàng lần lượt là x, y (triệu đồng).

a) Số tiền mà bác An đầu tư cho trái phiếu doanh nghiệp là $1200-x-y$ (triệu đồng).

b) Lợi nhuận bác An thu được là $F(x;y)=0{,}07x+0{,}08y$ (triệu đồng).

c) Lợi nhuận lớn nhất mà bác An thu được sau một năm là 96,5 (triệu đồng).

d) Để thu được lợi nhuận lớn nhất thì bác An cần đầu tư 200 triệu mua trái phiếu ngân hàng.

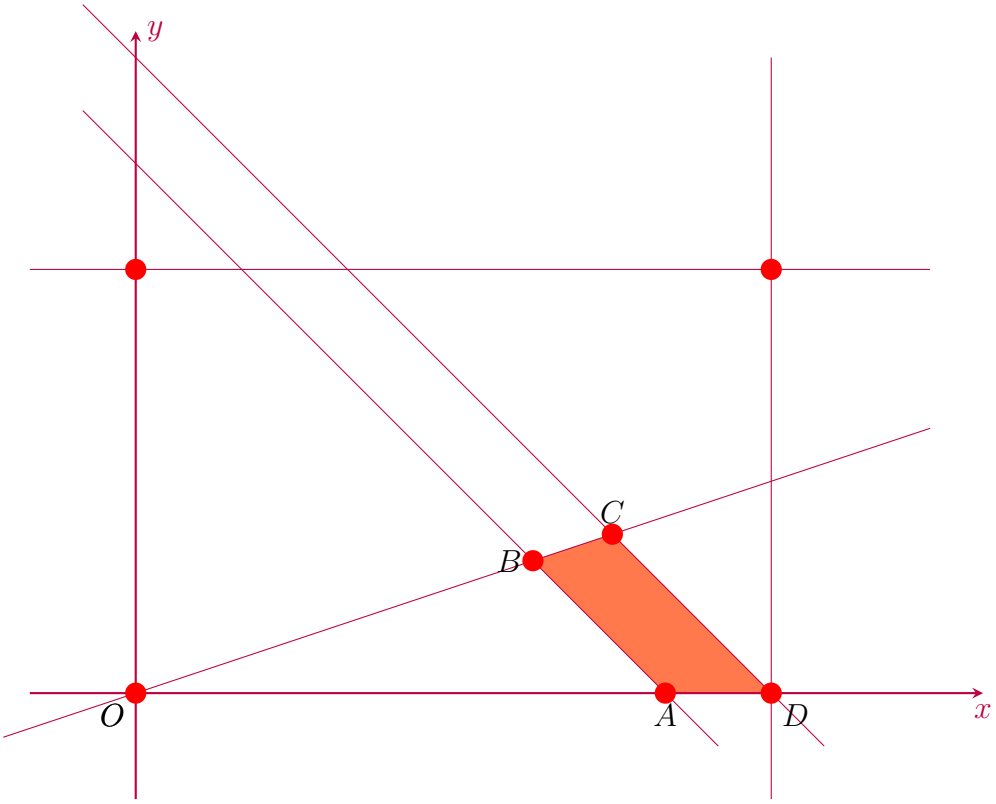
Hướng dẫn giải.

- Tổng số tiền bác An đầu tư là 1200 triệu đồng nên số tiền đầu tư cho trái phiếu doanh nghiệp là $1200-(x+y)=1200-x-y$ (triệu đồng). **Vậy a) đúng.**

- Theo bài ra ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x, y \geq 0 \\ x \geq 3y \\ 1200 - x - y \leq 200 \\ x + y \leq 1200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ x - 3y \geq 0 \\ x + y \geq 1000 \\ x + y \leq 1200 \end{cases}$$

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là miền tứ giác $ABCD$ (phần tô màu) như hình vẽ dưới đây:



- Lợi nhuận bác An thu được là:

$$F(x; y) = 7\%x + 8\%y + 12\%(1200 - x - y) = 144 - 0{,}05x - 0{,}04y \text{ (triệu đồng)}$$

Vậy b) sai.

- Tính giá trị $F(x; y)$ tại các đỉnh của miền nghiệm:

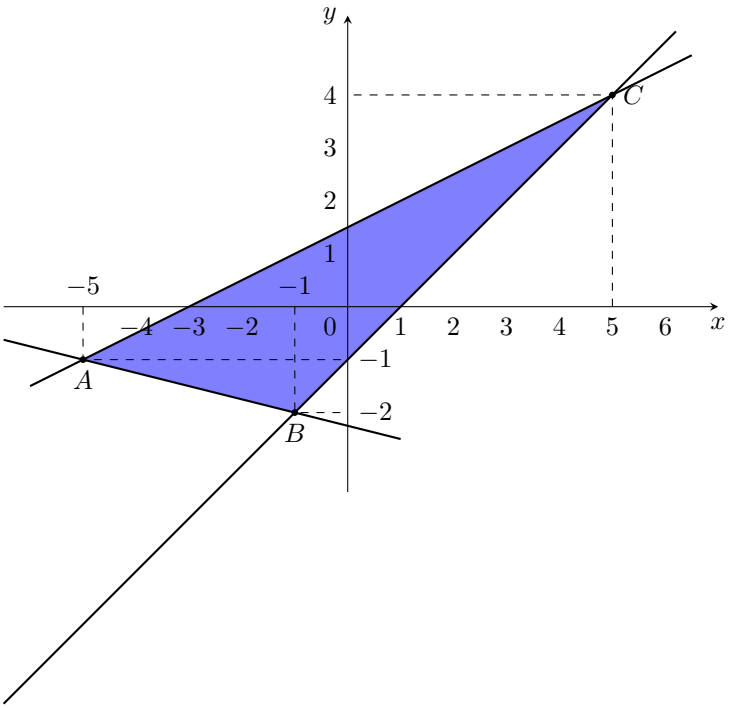
- $F(1000; 0) = 144 - 0{,}05(1000) - 0 = 94.$
- $F(750; 250) = 144 - 0{,}05(750) - 0{,}04(250) = 96{,}5.$
- $F(900; 300) = 144 - 0{,}05(900) - 0{,}04(300) = 87.$
- $F(1200; 0) = 144 - 0{,}05(1200) - 0 = 84.$

Giá trị lớn nhất là 96,5 triệu đồng khi $x = 750, y = 250$. **Vậy c) đúng và d) sai** (vì cần đầu tư 250 triệu vào trái phiếu ngân hàng).

3) Tự luận

Bài 1. Gọi (S) là tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ Oxy thỏa mãn hệ $\begin{cases} x - y - 1 \leq 0 \\ x + 4y + 9 \geq 0 \\ x - 2y + 3 \geq 0 \end{cases}$

(hình vẽ).



Biết rằng tọa độ $(x;y)$ trong miền (S) sao cho biểu thức $T=3x-2y-4$ có giá trị nhỏ nhất. Tính $T=x+y$.

Hướng dẫn giải.

Thay tọa độ điểm $A(-5;-1)$ vào biểu thức T ta được $T=3(-5)-2(-1)-4=-15+2-4=-17$.

Thay tọa độ điểm $B(-1;-2)$ vào biểu thức T ta được $T=3(-1)-2(-2)-4=-3+4-4=-3$.

Thay tọa độ điểm $C(5;4)$ vào biểu thức T ta được $T=3(5)-2(4)-4=15-8-4=3$.

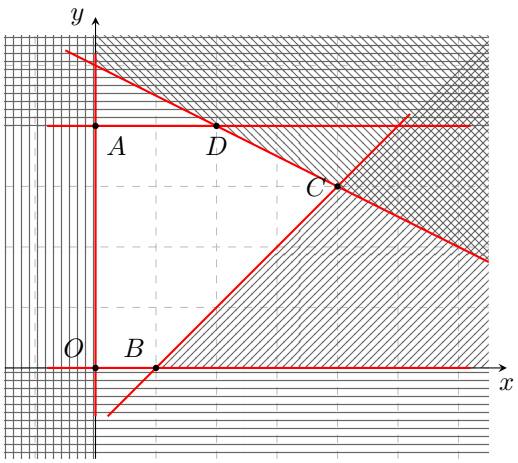
Suy ra biểu thức $T=3x-2y-4$ có giá trị nhỏ nhất tại điểm $A(-5;-1)\Rightarrow T=x+y=-5+(-1)=-6$.

Bài 2. Giá trị lớn nhất của biểu thức $F(x;y)=x+2y$, với điều kiện $\begin{cases}0\le y\le 4\\ x\ge 0\\ x-y-1\le 0\\ x+2y-10\le 0\end{cases}$ là

Hướng dẫn giải.

Trên cùng hệ trục tọa độ Oxy:

- Vẽ miền nghiệm của $0\le y\le 4$ (có biên là trục hoành Ox và đường thẳng $y=4$).
- Vẽ miền nghiệm của $x\ge 0$ (có biên là trục tung Oy).
- Vẽ miền nghiệm của đường thẳng $x-y-1\le 0$ (có biên là đường thẳng $x-y-1=0$).
- Vẽ miền nghiệm của đường thẳng $x+2y-10\le 0$ (có biên là đường thẳng $x+2y-10=0$).

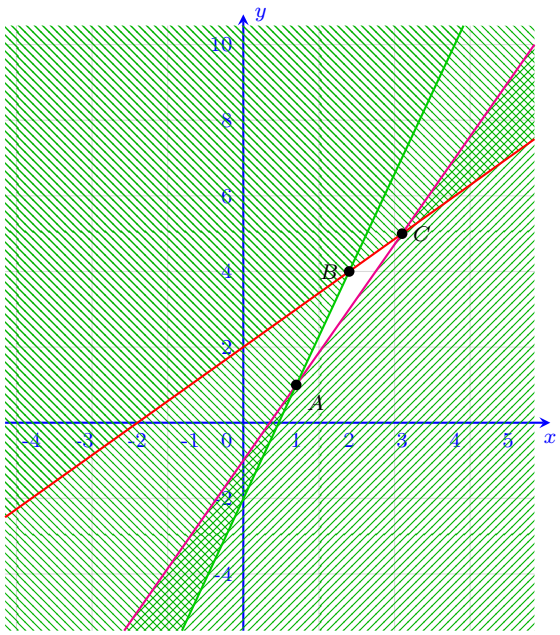


Khi đó $F(x;y)=x+2y$ sẽ đạt lớn nhất tại một trong các điểm $A(0;4), O(0;0), B(1;0), C(4;3), D(2;4)$.

Thử với từng điểm ta có $F(x;y)=x+2y$ đạt giá trị lớn nhất bằng 10 tại điểm $C(4;3)$ hoặc $D(2;4)$.

Bài 3. Cho các giá trị x, y thỏa mãn điều kiện $\begin{cases} x-y+2\geq 0 \\ 2x-y-1\leq 0 \\ 3x-y-2\geq 0 \end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=3x+2y$.

Hướng dẫn giải.



Miền nghiệm của hệ đã cho là miền trong tam giác ABC (Kể cả đường biên) trong đó $A(1;1), B(2;4), C(3;5)$.

Giá trị lớn nhất của $T=3x+2y$ đạt được tại các đỉnh của tam giác ABC.

Do $T_A=T(1;1)=3.1+2.1=5, T_B=T(2;4)=3.2+2.4=14$ và $T_C=T(3;5)=3.3+2.5=25$ nên giá trị lớn nhất của $T=3x+2y$ là 25 đạt được khi $x=3$ và $y=5$.

Bài 4. Một xí nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm kí hiệu là I và II. Một tấn sản phẩm I lãi 2 triệu đồng, một tấn sản phẩm II lãi 1,6 triệu đồng. Muốn sản xuất 1 tấn sản phẩm I phải dùng máy M_1 trong 3 giờ và máy M_2 trong 1 giờ. Muốn sản xuất 1 tấn sản phẩm II phải dùng máy M_1

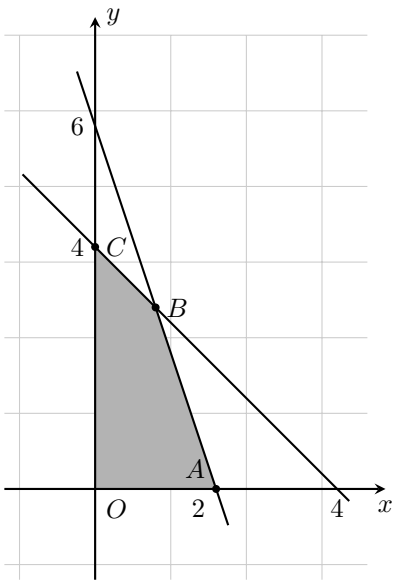
trong 1 giờ và máy M_2 trong 1 giờ. Một máy không thể dùng để sản xuất đồng thời hai loại sản phẩm. Máy M_1 làm việc không quá 6 giờ trong một ngày, máy M_2 chỉ làm việc một ngày không quá 4 giờ. Gọi x là số tấn sản phẩm I sản xuất trong một ngày, y là số tấn sản phẩm II sản xuất trong một ngày. Giá trị lớn nhất của $L = 2x + 1,6y$ bằng

Hướng dẫn giải.

Gọi x là số tấn sản phẩm I sản xuất trong một ngày, y là số tấn sản phẩm II sản xuất trong một ngày thì ta có hệ bất phương trình $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 3x + y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \end{cases}$

Tổng số tiền lãi $L = 2x + 1,6y$ (triệu đồng).

Miền nghiệm của hệ bất phương trình trên là phần được tô đậm trên hình vẽ.



Ta thấy giá trị lớn nhất của L bằng $6,8$ tại điểm $B(1;3)$.

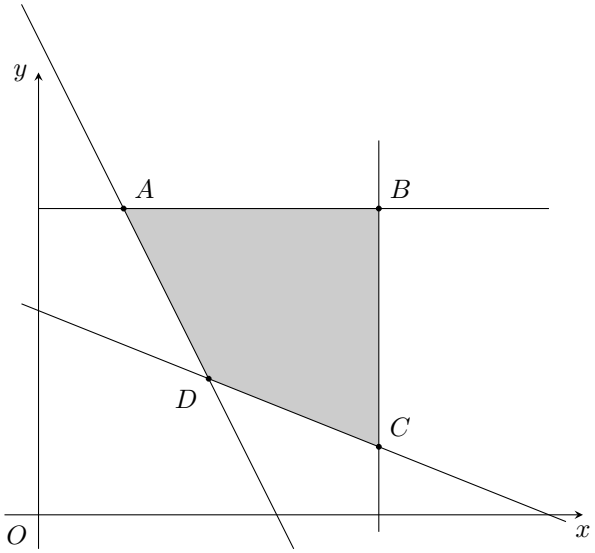
Bài 5. Một công ty TNHH trong một đợt quảng cáo và bán hàng khuyến mại hàng hóa (một sản phẩm mới của công ty) cần thuê xe để chở 140 người và 9 tấn hàng. Nơi thuê chỉ có hai loại xe A và B. Trong đó xe loại A có 10 chiếc, xe loại B có 9 chiếc. Một chiếc xe loại A cho thuê với giá 4 triệu, loại B giá 3 triệu. Biết rằng xe A chỉ chở tối đa 20 người và 0,6 tấn hàng; xe B chở tối đa 10 người và 1,5 tấn hàng. Gọi x, y lần lượt là số xe loại A và loại B cần phải thuê để chi phí nguyên liệu thấp nhất. Tính $M = 2x - 3y$.

Hướng dẫn giải.

Gọi x, y lần lượt là số xe loại A và loại B cần phải thuê ($x, y \in \mathbb{N}$). Khi đó số tiền thuê xe là $T = 4x + 3y$ (triệu đồng).

Theo bài ra ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ 20x + 10y \geq 140 \\ 0,6x + 1,5y \geq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \\ 0 \leq y \leq 9 \\ 2x + y \geq 14 \\ 2x + 5y \geq 30 \end{cases}$.

Miền nghiệm của hệ (1) là miền đa giác $ABCD$ (kể cả biên).



Ta có bảng

Điểm	$A\left(\frac{5}{2};9\right)$	$B(10;9)$	$C(10;2)$	$D(5;4)$
$T=4x+3y$	37	67	46	32

Giá trị nhỏ nhất của T là 32 đạt tại $x=5, y=4$.

Vậy $M=-2$

Bài 6. Một nhà nông dân nọ có 8 sào đất trồng hoa màu. Biết rằng 1 sào trồng đậu cần 20 công và lãi được 3 triệu đồng, 1 sào trồng cà cần 30 công và lãi được 4 triệu đồng. Người nông dân trồng được x sào đậu và y sào cà thì thu được tiền lãi cao nhất. Tính giá trị biểu thức $F=3x+2y$ biết rằng tổng số công không quá 180.

Hướng dẫn giải.

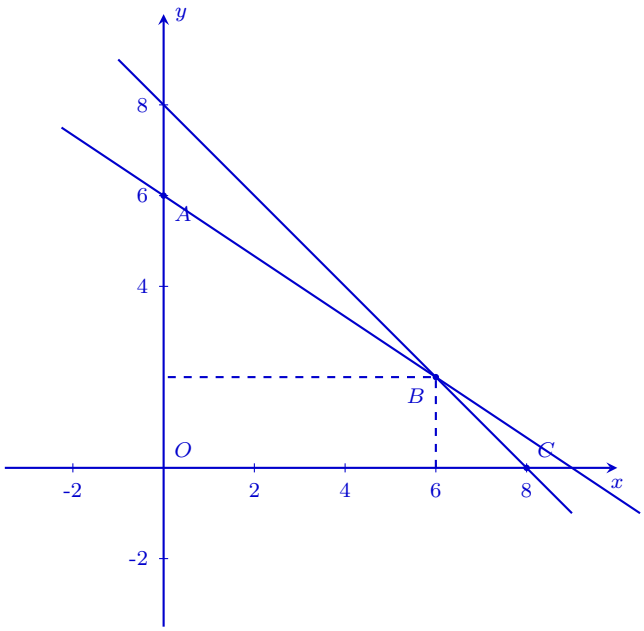
Ta có x, y lần lượt là số sào đậu và số sào cà $(0\le x\le 8, 0\le y\le 8)$.

Khi đó ta có hệ bất phương trình: $\begin{cases} x+y\le 8 \\ 20x+30y\le 180 \end{cases}$ (1)

Tiền lãi: $T(x,y)=3x+4y$ (triệu đồng)

Bài toán trở về bài toán tìm x, y thỏa mãn (1) sao cho $T(x,y)$ lớn nhất và xảy ra tại một trong các điểm O, A, B, C ở hình 1. Tại điểm B thì $T(x,y)$ đạt giá trị lớn nhất. Do đó cần trồng 6 sào

đậu và 2 sào cà. Hay ta có $x=6; y=2 \Rightarrow F=3.6+2.2=22$.



Bài 7. Trong một cuộc thi pha chế, hai đội A, B được sử dụng tối đa 24g hương liệu, 9 lít nước và 210 g đường để pha chế nước cam và nước táo. Để pha chế 1 lít nước cam cần 30 g đường, 1 lít nước và 1g hương liệu; pha chế 1 lít nước táo cần 10g đường, 1 lít nước và 4 g hương liệu. Mỗi lít nước cam nhận được 60 điểm thưởng, mỗi lít nước táo nhận được 80 điểm thưởng. Đội A pha chế được a lít nước cam và b lít nước táo và dành được điểm thưởng cao nhất. Hiệu số $a-b$ là

Hướng dẫn giải.

Gọi x, y lần lượt là số lít nước cam và nước táo mà mỗi đội cần pha chế $(x \geq 0; y \geq 0)$.

Để pha chế x lít nước cam cần $30x$ g đường, x lít nước và x g hương liệu.

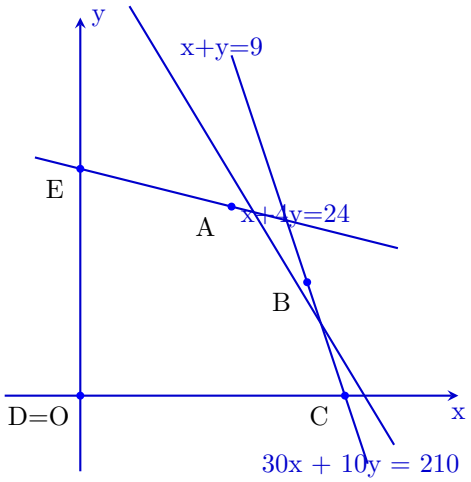
Để pha chế y lít nước táo cần $10y$ g đường, y lít nước và $4y$ g hương liệu.

Theo bài ra ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 30x+10y \leq 210 \\ x+y \leq 9 \\ x+4y \leq 24 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases} \quad (*)$$

Số điểm đạt được khi pha x lít nước cam và y lít nước táo là $M(x,y)=60x+80y$. Bài toán trở thành tìm x, y để $M(x,y)$ đạt giá trị lớn nhất.

Ta biểu diễn miền nghiệm của hệ (*) trên mặt phẳng tọa độ như sau:



Miền nghiệm là ngũ giác $ABCDE$.

Tọa độ các điểm: $A(4;5), B(6;3), C(7;0), D(0;0), E(0;6)$.

$M(x,y)$ sẽ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất tại các đỉnh của miền nghiệm nên thay tọa độ các điểm vào biểu thức $M(x,y)$ ta được:

$M(4;5)=640; M(6;3)=600, M(7;0)=420, M(0;0)=0, M(0;6)=480.$

Vậy giá trị lớn nhất của $M(x;y)$ bằng 640 khi $x=4; y=5 \Rightarrow a=4; b=5 \Rightarrow a-b=-1$.

Bài 8. Trong một cuộc thi gói bánh vào dịp năm mới, mỗi đội chơi được sử dụng tối đa 20 kg gạo nếp, 2kg thịt ba chỉ, 5kg đậu xanh để gói bánh chưng và bánh ống. Để gói một cái bánh chưng cần 0,4kg gạo nếp, 0,05 kg thịt và 0,1 kg đậu xanh; để gói một cái bánh ống cần 0,6 kg gạo nếp, 0,075 kg thịt và 0,15kg đậu xanh. Mỗi cái bánh chưng nhận được 5 điểm thưởng, mỗi cái bánh ống nhận được 7 điểm thưởng. Hỏi điểm thưởng cao nhất có thể đạt được là bao nhiêu?

Hướng dẫn giải.

Gọi số bánh chưng và bánh ống gói được lần lượt là $x, y (x \geq 0; y \geq 0)$ khi đó số điểm thưởng là: $T(x;y)=5x+7y$.

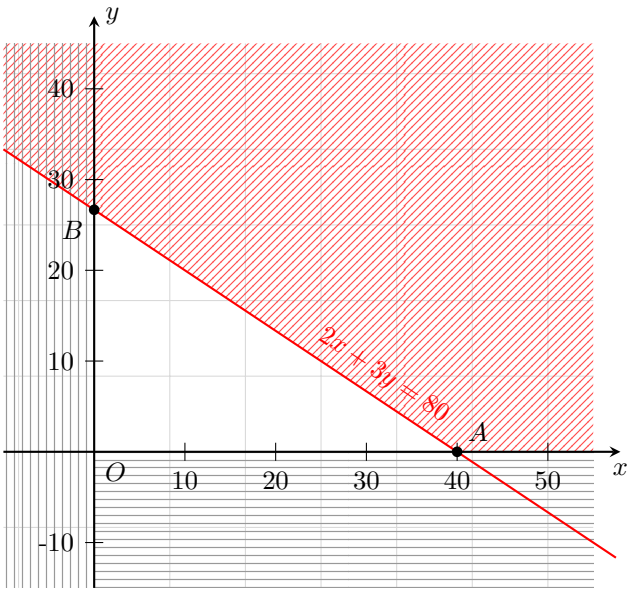
Số kg gạo nếp cần dùng là: $0,4x+0,6y$ Số kg thịt ba chỉ cần dùng là: $0,05x+0,075y$ Số kg đậu xanh cần dùng là: $0,1x+0,15y$.

Theo yêu cầu bài toán ta có miền nghiệm là hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 0,4x+0,6y \leq 20 \\ 0,05x+0,075y \leq 2 \\ 0,1x+0,15y \leq 5 \\ x,y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y \leq 100 \\ 2x+3y \leq 80 \\ 2x+3y \leq 100 \\ x,y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y \leq 80 \\ x,y \geq 0 \end{cases} \quad (*)$$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x,y)$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình $(*)$.

Miền nghiệm của hệ bất phương trình $(*)$ là tam giác OAB với $O(0;0); A(40;0); B\left(0;\dfrac{80}{3}\right)$.



Ta có: $f(0;0)=0; f(40;0)=200; f\left(0;\dfrac{80}{3}\right)=\dfrac{560}{3}$

Vậy giá trị lớn nhất của $f(x,y)$ là $f(40;0)=200$.

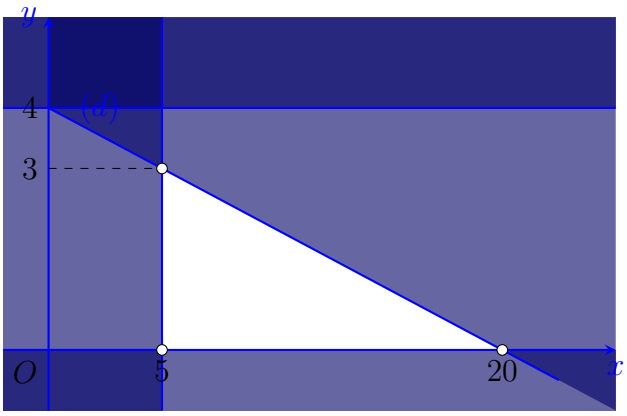
Bài 9. Một công ty kinh doanh thương mại chuẩn bị cho một đợt khuyến mại nhằm thu hút khách hàng bằng cách tiến hành quảng cáo sản phẩm của công ty trên hệ thống phát thanh và truyền hình. Chi phí cho 1 phút quảng cáo trên sóng phát thanh là 800.000 đồng, trên sóng truyền hình là 4.000.000 đồng. Đài phát thanh chỉ nhận các chương trình quảng cáo dài ít nhất là 5 phút. Do nhu cầu quảng cáo trên truyền hình lớn nên đài truyền hình chỉ nhận phát các chương trình dài tối đa là 4 phút. Theo các phân tích, cùng thời lượng một phút quảng cáo, trên truyền hình sẽ có hiệu quả gấp 6 lần trên sóng phát thanh. Công ty dự định chi tối đa 16.000.000 đồng cho quảng cáo. Công ty cần đặt thời lượng quảng cáo trên sóng truyền hình bao nhiêu phút để hiệu quả nhất?

Hướng dẫn giải. Gọi thời lượng công ty đặt quảng cáo trên sóng phát thanh là x (phút), trên truyền hình là y (phút). Điều kiện: $x,y\geq 0$. Theo giả thiết ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x\geq 5 \\ 0\leq y\leq 4 \\ 800.000x+4.000.000y\leq 16.000.000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 5 \\ 0\leq y\leq 4 \\ x+5y\leq 20 \end{cases} \quad (*).$$

Hiệu quả chung của quảng cáo là: $F(x;y)=x+6y$. Bài toán trở thành: Xác định x,y thỏa mãn hệ $(*)$ sao cho $F(x;y)=x+6y$ đạt giá trị lớn nhất. Miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần mặt

phẳng không tô màu trên hình vẽ dưới đây (tam giác giới hạn bởi các đỉnh $(5;0), (20;0), (5;3)$).



Giá trị lớn nhất của biểu thức $F(x;y) = x + 6y$ đạt được tại một trong các đỉnh của miền nghiệm: $(5;3), (5;0), (20;0)$.

- Tại $(5;3)$: $F(5;3) = 5 + 6 \cdot 3 = 23$.
- Tại $(5;0)$: $F(5;0) = 5 + 6 \cdot 0 = 5$.
- Tại $(20;0)$: $F(20;0) = 20 + 6 \cdot 0 = 20$.

Suy ra giá trị lớn nhất của $x + 6y$ bằng 23 tại điểm $(5;3)$. Vậy nếu đặt thời lượng quảng cáo trên sóng phát thanh là 5 phút và trên truyền hình là 3 phút thì sẽ đạt hiệu quả nhất. Trả lời: 3 phút trên truyền hình.

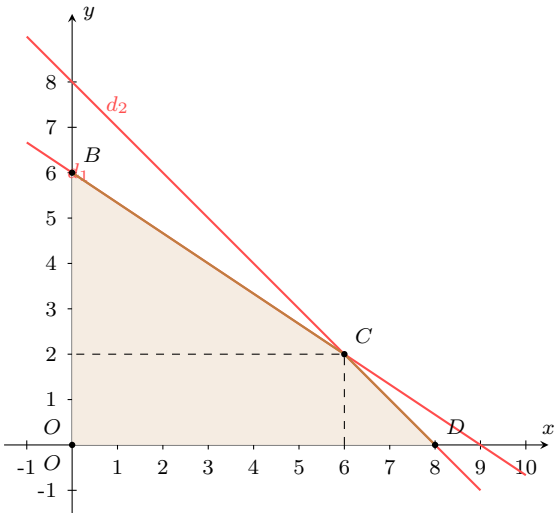
Bài 10. Một hộ nông dân cần không quá 180 ngày công để trồng đậu và trồng cà trên diện tích 8 ha. Nếu trồng đậu thì cần 20 ngày công và thu lợi nhuận 3 triệu đồng trên diện tích mỗi ha, nếu trồng cà thì cần 30 ngày công và thu lợi nhuận 4 triệu đồng trên diện tích mỗi ha. Lợi nhuận cao nhất mà hộ nông dân thu được khi trồng đậu và trồng cà trên mảnh đất đó là

Hướng dẫn giải. **Trả lời:** 26

Gọi x, y lần lượt là số ha trồng đậu và trồng cà của hộ nông dân (Điều kiện $x, y \geq 0$).
Số ngày công trồng đậu và cà của hộ nông dân là $20x + 30y$.
Vì có tổng diện tích là 8 ha trồng đậu và cà nên ta có bất phương trình $x + y \leq 8$.
Vì tổng số ngày công không vượt quá 180 nên ta có bất phương trình $20x + 30y \leq 180$ hay $2x + 3y \leq 18$.

Khi đó ta có hệ bất phương trình $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 8 \\ 2x + 3y \leq 18 \end{cases}$. Hệ bất phương trình có miền nghiệm là tứ

giác $OBCD$ với $O(0;0), B(0;6), C(6;2)$ và $D(8;0)$ (như hình vẽ bên dưới).



Lợi nhuận thu được khi trồng x ha đậu và y ha cà là $F(x;y) = 3x + 4y$.
Ta thấy $F(0;0) = 0, F(0;6) = 24, F(6;2) = 26$ và $F(8;0) = 24$ nên lợi nhuận nhiều nhất là 26 triệu đồng khi trồng 6 ha đậu và 2 ha cà.

Bài 11. Bạn Lan mang 150000 đồng đi nhà sách để mua một số quyển tập và bút. Biết rằng giá một quyển tập là 8000 đồng và giá của một cây bút là 6000 đồng. Bạn Lan có thể mua được tối đa bao nhiêu quyển tập nếu bạn đã mua 10 cây bút.

Hướng dẫn giải. Bất phương trình biểu diễn số tập và bút có thể mua được phụ thuộc vào số tiền mang theo là $8000x + 6000y \le 150000$.

Bạn Lan có thể mua được tối đa số quyển tập nếu bạn đã mua 10 cây bút là:

$$8000x + 6000 \cdot 10 \le 150000 \Leftrightarrow 8000x \le 90000 \Leftrightarrow x \le 11,25$$

Vì x nguyên dương nên số quyển tập tối đa bạn Lan mua được là 11 quyển.

Bài 12. Một hộ nông dân định trồng đậu và cà trên diện tích 800 m^2. Nếu trồng đậu trên diện tích 100 m^2 thì cần 20 công làm và thu được 3 000 000 đồng. Nếu trồng cà thì trên diện tích 100 m^2 cần 30 công làm và thu được 4 000 000 đồng. Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên diện tích là bao nhiêu để thu được nhiều tiền nhất khi tổng số công làm không quá 180 công.

Hướng dẫn giải. Giả sử diện tích trồng đậu là x (đơn vị: 100 m^2); suy ra diện tích trồng cà là $8 - x$.

Ta có thu nhập thu được là $S(x) = [3x + 4(8 - x)] \cdot 10000 = 10000(-x + 32)$ đồng.

Tổng số công là $20x + 30(8 - x) = -10x + 240$.

Theo giả thiết có $-10x + 240 \le 180 \Leftrightarrow -10x \le -60 \Leftrightarrow x \ge 6$.

Mà hàm số $S(x)$ là hàm nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 6$.

Do đó trồng 600 m^2 đậu và 200 m^2 cà.

Bài 13. Anh An là nhân viên bán hàng tại siêu thị điện máy. Anh An kiếm được một khoản hoa hồng 600 nghìn đồng cho mỗi máy giặt và 1,3 triệu đồng cho mỗi tủ lạnh mà anh ấy bán được. Hỏi để nhận được từ 10 triệu đồng trở lên tiền hoa hồng thì anh An cần bán bao nhiêu máy giặt và tủ lạnh?

Hướng dẫn giải. Gọi x và y lần lượt là số máy giặt và số tủ lạnh anh An bán được. Khi đó số

tiền hoa hồng mà anh An nhận được là $0,6x+1,3y$ (triệu đồng).

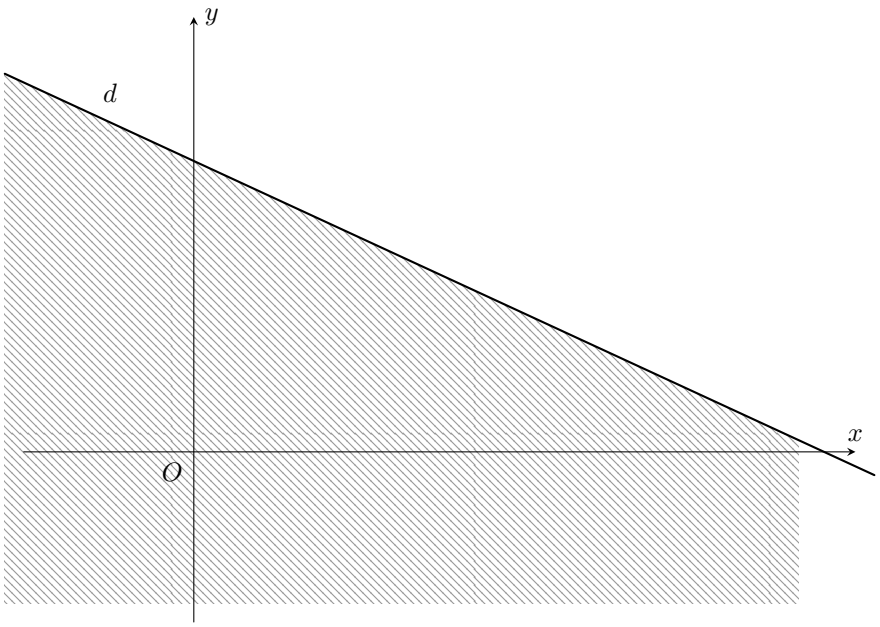
Theo đề bài, ta có: $0,6x+1,3y \geq 10$.

Tiếp theo ta xác định miền nghiệm của bất phương trình $0,6x+1,3y \geq 10$ như sau:

Bước 1: Vẽ đường thẳng d: $0,6x+1,3y=10$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

Bước 2: Lấy điểm $O(0;0)$ không thuộc d và thay vào biểu thức $0,6x+1,3y$ ta được: $0,6\cdot 0+1,3\cdot 0=0<10$.

Do đó, miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng bờ d không chứa gốc tọa độ (miền không bị tô màu).



Vậy nếu anh An bán được số máy giặt là x ($x \in \mathbb{N}$) và số tủ lạnh là y ($y \in \mathbb{N}$) sao cho điểm $(x;y)$ nằm trong nửa mặt phẳng bờ d không chứa gốc tọa độ thì anh An nhận được từ 10 triệu đồng trở lên tiền hoa hồng.

Bài 14. Trong năm nay, một cửa hàng điện lạnh dự định kinh doanh hai loại máy điều hòa: điều hòa hai chiều và điều hòa một chiều với số vốn ban đầu không vượt quá $1,2$ tỉ đồng.

	Điều hoà hai chiều	**Điều hoà một chiều**
Giá mua vào	20 triệu đồng/1 máy	10 triệu đồng/1 máy
Lợi nhuận dự kiến	$3,5$ triệu đồng/1 máy	2 triệu đồng/1 máy

Cửa hàng ước tính rằng tổng nhu cầu của thị trường sẽ không vượt quá 100 máy cả hai loại. Cần đầu tư kinh doanh x loại máy hai chiều và y loại máy một chiều thì lợi nhuận thu được là lớn nhất. Tính $x+y$?

Hướng dẫn giải. Gọi x,y lần lượt là số máy điều hòa hai chiều và số máy điều hòa một chiều mà chủ cửa hàng đầu tư ($x \geq 0; y \geq 0$).

Vì nhu cầu của thị trường không vượt quá 100 máy cả hai loại nên $x+y \leq 100$.

Số tiền đầu tư là $20x+10y$ (triệu đồng).

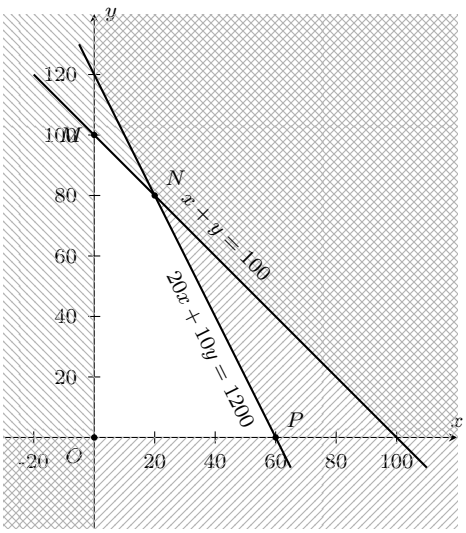
Vì số vốn ban đầu không quá $1,2$ tỉ nên $20x + 10y \leq 1200$.

Lợi nhuận thu về dự kiến: $F(x;y) = 3,5x + 2y$ (triệu đồng).

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm $F(x;y)$ trên miền hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 100 \\ 20x + 10y \leq 1200 \end{cases} \qquad (*)$$

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (*) là tứ giác $OMNP$ với $O(0;0)$; $M(0;100)$; $N(20;80)$; $P(60;0)$.



Tính giá trị của $F(x;y)$ tại các đỉnh của tứ giác ta thu được giá trị lớn nhất của $F(x;y)$ là $F(20;80) = 3,5 \cdot 20 + 2 \cdot 80 = 230$.

Vậy lợi nhuận lớn nhất khi $x = 20; y = 80$ nên $x + y = 100$.

Bài 15. Một bãi đậu xe ban đêm có diện tích đậu xe là $150\,\text{m}^2$ (không tính lối đi cho xe ra vào). Cho biết xe du lịch cần diện tích $3\,\text{m}^2$ mỗi chiếc và phải trả phí 40 nghìn đồng, xe tải cần diện tích $5\,\text{m}^2$ mỗi chiếc và phải trả phí 50 nghìn đồng. Nhân viên quản lí không thể phục vụ quá 40 xe một đêm. Hãy tính số lượng xe mỗi loại mà chủ bãi xe có thể cho đăng kí đậu xe để có doanh thu cao nhất.

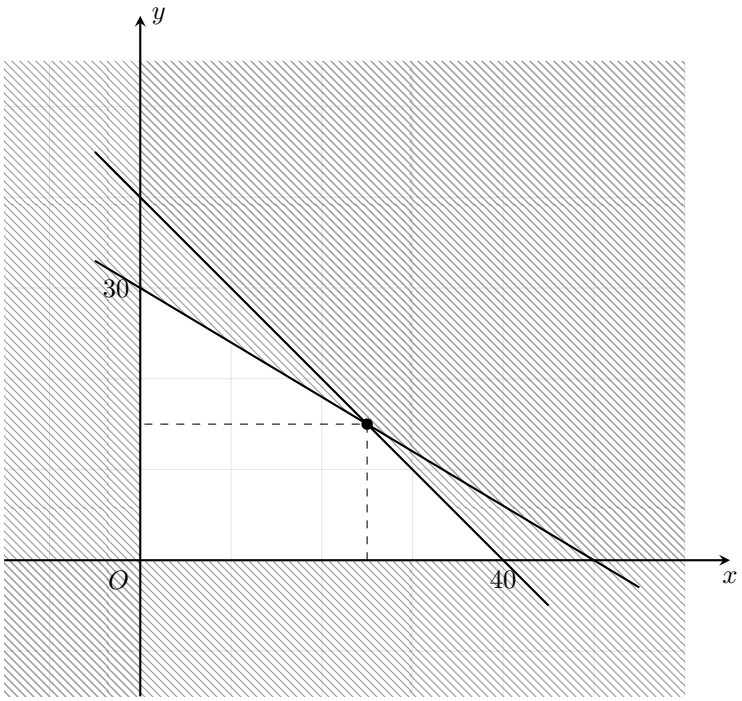
Hướng dẫn giải. Gọi x là số xe du lịch và y là số xe tải mà chủ bãi xe nên cho đậu một đêm. $(x, y \in \mathbb{N})$

Ta có hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} x + y \leq 40 \\ 3x + 5y \leq 150 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Miền không gạch chéo bao gồm cả các cạnh trong hình dưới đây là phần giao của các miền

nghiệm và cũng là phần biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình trên.



Số tiền chủ bãi xe thu được $F = 40x + 50y$ đạt giá trị lớn nhất bằng 1750 nghìn đồng tại điểm có tọa độ $(25; 15)$.

Vậy để có doanh thu cao nhất chủ bãi xe có thể cho đăng ký 25 chiếc xe du lịch và 15 chiếc xe tải.

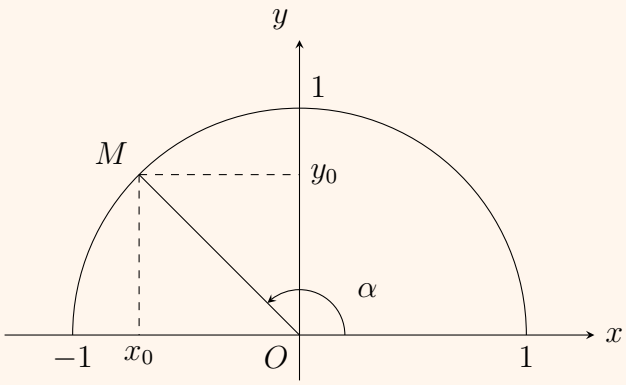
Chương III

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

§1 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ 0^0 ĐẾN 180^0

I. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC

⊞ Với mỗi góc α $(0 \leq \alpha \leq 180^\circ)$ ta xác định được một điểm M duy nhất trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$. Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ điểm M, ta có:



- Tung độ y_0 của M gọi là **sin** của góc α, kí hiệu là $\sin\alpha = y_0$;
- Hoành độ x_0 của M gọi là **cos** của góc α, kí hiệu là $\cos\alpha = x_0$;
- Tỉ số $\dfrac{y_0}{x_0}$ $(x_0 \neq 0)$ là **tang** của góc α, kí hiệu là $\tan\alpha = \dfrac{y_0}{x_0} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$;
- Tỉ số $\dfrac{x_0}{y_0}$ $(y_0 \neq 0)$ là **côtang** của góc α, kí hiệu là $\cot\alpha = \dfrac{x_0}{y_0} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

⊞ Các số $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha$ được gọi là các giá trị lượng giác của góc α.

✎ **Nhận xét.**

◈ Nếu α là góc nhọn thì các giá trị lượng giác của α đều dương. Nếu α là góc tù thì $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$, $\tan\alpha < 0$, $\cot\alpha < 0$.

◈ $\tan\alpha$ chỉ xác định khi $\alpha \neq 90^\circ$. $\cot\alpha$ chỉ xác định khi $\alpha \neq 0^\circ$ và $\alpha \neq 180^\circ$.

α / GTLG	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\vert\vert$	0
$\cot\alpha$	$\vert\vert$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\vert\vert$

Bảng giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt

Ví dụ 8

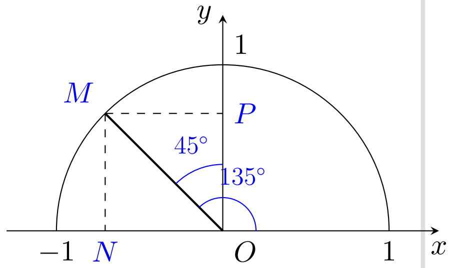
Tìm các giá trị lượng giác của góc 135°.

Giải (H.3.3)

Gọi M là điểm trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = 135^\circ$. Gọi N, P tương ứng là hình chiếu vuông góc của M lên các trục Ox, Oy.

Vì $\widehat{xOM} = 135^\circ$ nên $\widehat{MON} = 45^\circ$, $\widehat{MOP} = 45^\circ$. Vậy các tam giác MON, MOP là vuông cân với cạnh huyền $OM = 1$.

Từ đó, ta có $ON = OP = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Mặt khác, điểm M nằm bên trái trục tung nên có tọa độ là $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.



Theo định nghĩa, ta có:

$\sin 135^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos 135^\circ = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$\tan 135^\circ = -1$; $\cot 135^\circ = -1$.

bài tập tương tự

Tìm các giá trị lượng giác của góc 120°.

....

....

....

....

....

II. MỐI QUAN HỆ GIỮA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA HAI GÓC BÙ NHAU

Đối với hai góc bù nhau, α và $180^\circ - \alpha$, ta có:

- $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$;
- $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$;
- $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan\alpha$ $(\alpha \neq 90^\circ)$;
- $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot\alpha$ $(0^\circ < \alpha < 180^\circ)$.

Ví dụ 9

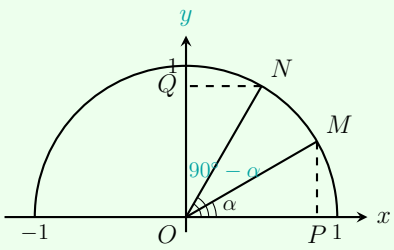
Tính các giá trị lượng giác của các góc $120^\circ, 135^\circ, 150^\circ$.

Lời giải. Do các góc $120^\circ, 135^\circ, 150^\circ$ tương ứng bù với các góc $60^\circ, 45^\circ, 30^\circ$ nên từ Bảng 3.1, ta cũng có bảng các giá trị lượng giác sau:

GTLG \ α	120°	135°	150°
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan\alpha$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\cot\alpha$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$

bài tập tương tự

Trong Hình 3.6, hai điểm M, N ứng với hai góc phụ nhau α và $90^\circ - \alpha$ $(\widehat{xOM} = \alpha, \widehat{xON} = 90^\circ - \alpha)$.
Chứng minh rằng $\Delta MOP = \Delta NOQ$. Từ đó nêu mối quan hệ giữa $\cos\alpha$ và $\sin(90^\circ - \alpha)$.



Hình 3.6

» Sưu tầm và biên soạn: Lê Minh Kha - 0399653362

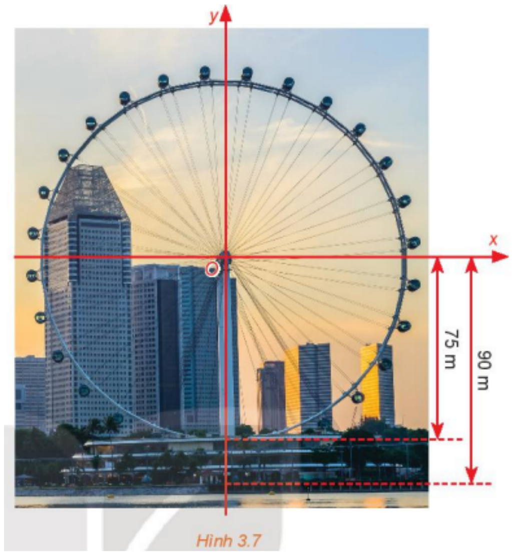
Với hai góc phụ nhau ta có

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha; \qquad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha;$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot\alpha; \qquad \cot(90^\circ - \alpha) = \tan\alpha.$$

bài tập tương tự

Một chiếc đu quay có bán kính 75 m, tâm của vòng quay ở độ cao 90 m (H.3.7), thời gian thực hiện mỗi vòng quay của đu quay là 30 phút. Nếu một người vào cabin tại vị trí thấp nhất của vòng quay, thì sau 20 phút quay, người đó ở độ cao bao nhiêu mét?



Hình 3.7

....

....

....

....

....

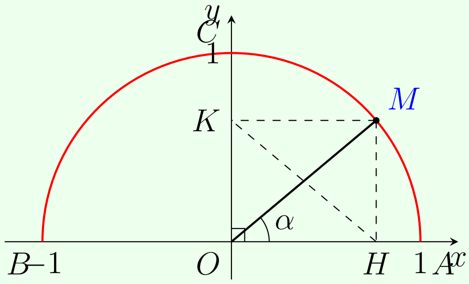
bài tập tương tự

Chứng minh các hệ thức sau

a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

b) $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $(\alpha \neq 90^\circ)$;

c) $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ $(0^\circ < \alpha < 180^\circ)$.



Hướng dẫn giải.

Lấy điểm M trên nửa đường tròn đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$. Từ M kẻ $MH \perp Ox$ và $MK \perp Oy$. Khi đó:
$OH = |\cos\alpha|$, $OK = |\sin\alpha| = \sin\alpha$.
Xét tam giác OHK vuông tại O, ta có:
$OH^2 + OK^2 = HK^2$ (định lí Pythagore)
Mà $HK = OM = 1$ (tứ giác $OHMK$ là hình chữ nhật)
Do đó, $OH^2 + OK^2 = 1$
Suy ra $|\cos\alpha|^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$ hay $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (đpcm).
b) Ta có:

$$1 + \tan^2\alpha = 1 + \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 = 1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} (\alpha \neq 90^0);$$

c) Ta có:

$$1 + \cot^2\alpha = 1 + \left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2 = 1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$$

$$= \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} (0^0 < \alpha < 180^0);$$

Từ đó ta có các công thức bổ trợ sau

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \ (\alpha \neq 90^\circ) \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \ (\alpha \neq 0^\circ; 180^\circ)$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1 \ (\alpha \neq 0^\circ; 90^\circ; 180^\circ)$$

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \ (\alpha \neq 90^\circ) \quad 1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \ (\alpha \neq 0^\circ; 180^\circ)$$

III. BÀI TẬP ÔN LUYỆN

1) Bài tập tự luận

Bài 1. Không dùng bảng số hay máy tính cầm tay, tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $(2\sin 30^\circ + \cos 135^\circ - 3\tan 150^\circ) \cdot (\cos 180^\circ - \cot 60^\circ)$;

b) $\sin^2 90^\circ + \cos^2 120^\circ + \cos^2 0^\circ - \tan^2 60^\circ + \cot^2 135^\circ$;

c) $\cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ + \cos^2 30^\circ$.

Chú ý. $\sin^2\alpha = (\sin\alpha)^2, \cos^2\alpha = (\cos\alpha)^2, \tan^2\alpha = (\tan\alpha)^2, \cot^2\alpha = (\cot\alpha)^2$.

Bài 2. Đơn giản các biểu thức sau:

a) $\sin 100^\circ + \sin 80^\circ + \cos 16^\circ + \cos 164^\circ$;

b) $2\sin(180^\circ - \alpha) \cdot \cot\alpha - \cos(180^\circ - \alpha) \cdot \tan\alpha \cdot \cot(180^\circ - \alpha)$, với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Bài 3. Cho góc α $(0^\circ < \alpha < 180^\circ)$ thoả mãn $\tan\alpha = 3$. Tính giá trị của biểu thức: $P = \dfrac{2\sin\alpha - 3\cos\alpha}{3\sin\alpha + 2\cos\alpha}$.

Bài 4. Chứng minh rằng với mọi góc x ($0° \le x \le 90°$), ta đều có:

a) $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$;

b) $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$;

c) $\tan^2 x = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$ ($x \ne 90°$);

d) $\cot^2 x = \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$ ($x \ne 0°$).

Bài 5. Chứng minh rằng

a) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$;

b) $\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = 1 - 3\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha$;

c) $\sqrt{\sin^4 \alpha + 6\cos^2 \alpha + 3} + \sqrt{\cos^4 \alpha + 4\sin^2 \alpha} = 4$.

Bài 6. Góc nghiêng của Mặt Trời tại một vị trí trên Trái Đất là góc nghiêng giữa tia nắng lúc giữa trưa với mặt đất. Trong thực tế, để đo trực tiếp góc này, vào giữa trưa (khoảng 12 giờ), em có thể dựng một thước thẳng vuông góc với mặt đất, đo độ dài của bóng thước trên mặt đất. Khi đó, tang của góc nghiêng Mặt Trời tại vị trí đặt thước bằng tỉ số giữa độ dài của thước và độ dài của bóng thước. Góc nghiêng của Mặt Trời phụ thuộc vào vĩ độ của vị trí đo và phụ thuộc vào thời gian đo trong năm (ngày thứ mấy trong năm). Tại vị trí có vĩ độ ϕ và ngày thứ N trong năm, góc nghiêng của Mặt Trời α còn được tính theo công thức sau:

$$\alpha = 90° - \phi - \left|\cos\left[\left(\frac{2(N+10)}{365} - m\right) 180°\right]\right| \cdot 23,5°$$

trong đó $m = 0$ nếu $1 \le N \le 172$, $m = 1$ nếu $173 \le N \le 355$, $m = 2$ nếu $356 \le N \le 365$.

a) Hãy áp dụng công thức trên để tính góc nghiêng của Mặt Trời vào ngày 10/10 trong năm không nhuận (năm mà tháng 2 có 28 ngày) tại vị trí có vĩ độ $\phi = 20°$.

b) Hãy xác định vĩ độ tại nơi em sinh sống và tính góc nghiêng của Mặt Trời tại đó theo hai cách đã được đề cập trong bài toán (đo trực tiếp và tính theo công thức) và so sánh hai kết quả thu được.

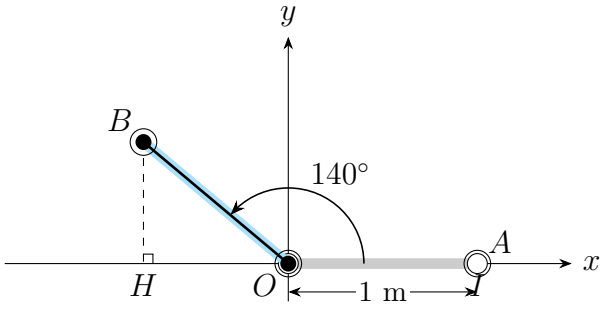
Chú ý. Công thức tính toán nói trên chính xác tới $\pm 0,5°$.

Góc nghiêng của Mặt Trời có ảnh hưởng tới sự hấp thụ nhiệt từ Mặt Trời của Trái Đất, tạo nên các mùa trong năm trên Trái Đất, chẳng hạn, vào mùa hè, góc nghiêng lớn nên nhiệt độ cao.

Bài 7. Một cánh tay robot dài 1 m gắp vật từ vị trí A, sau đó quay một góc $140°$ quanh O đến vị trí B rồi thả vật rơi tự do chạm đất (hình vẽ).

a) Hỏi khi vật rơi chạm đất, vật cách vị trí A bao nhiêu mét?

b) Nếu muốn vật rơi chạm đất cách vị trí A một khoảng $1,5$ m thì cánh tay robot cần quay một góc bao nhiêu độ?



2) Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Giá trị của $\cos 60^\circ + \sin 30^\circ$ bằng bao nhiêu?

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ⓑ $\sqrt{3}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Ⓓ 1.

Câu 2. Giá trị của $\tan 30^\circ + \cot 30^\circ$ bằng bao nhiêu?

Ⓐ $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$. Ⓑ $\dfrac{1+\sqrt{3}}{3}$. Ⓒ $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Ⓓ 2.

Câu 3. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào **sai**?

Ⓐ $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 1$. Ⓑ $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$.
Ⓒ $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$. Ⓓ $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = 1$.

Câu 4. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

Ⓐ $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ$. Ⓑ $\cos 60^\circ = \sin 120^\circ$.
Ⓒ $\cos 30^\circ = \sin 120^\circ$. Ⓓ $\sin 60^\circ = -\cos 120^\circ$.

Câu 5. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

Ⓐ $\sin 45^\circ + \sin 45^\circ = \sqrt{2}$. Ⓑ $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = 1$.
Ⓒ $\sin 60^\circ + \cos 150^\circ = 0$. Ⓓ $\sin 120^\circ + \cos 30^\circ = 0$.

Câu 6. Giá trị $\cos 45^\circ + \sin 45^\circ$ bằng bao nhiêu?

Ⓐ 1. Ⓑ $\sqrt{2}$. Ⓒ $\sqrt{3}$. Ⓓ 0.

Câu 7. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

Ⓐ $\sin(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$. Ⓑ $\sin(180^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$.
Ⓒ $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$. Ⓓ $\sin(180^\circ - \alpha) = \cos\alpha$.

Câu 8. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **sai**?

Ⓐ $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 0$. Ⓑ $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$.
Ⓒ $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$. Ⓓ $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

Câu 9. Cho α là góc tù. Điều khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ $\sin\alpha < 0$. Ⓑ $\cos\alpha > 0$. Ⓒ $\tan\alpha < 0$. Ⓓ $\cot\alpha > 0$.

Câu 10. Giá trị của $E = \sin 36^\circ \cos 6^\circ - \sin 126^\circ \cos 84^\circ$ là

Ⓐ $\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ⓒ 1. Ⓓ -1.

Câu 11. Giá trị của biểu thức $A = \sin^2 51^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 39^\circ + \sin^2 35^\circ$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ 1. Ⓓ 2.

Câu 12. Giá trị của biểu thức $A = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \ldots \tan 88^\circ \tan 89^\circ$ là

Ⓐ 0. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 1.

Câu 13. Tổng $\sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \sin^2 6^\circ + \cdots + \sin^2 84^\circ + \sin^2 86^\circ + \sin^2 88^\circ$ bằng

Ⓐ 21. Ⓑ 23. Ⓒ 22. Ⓓ 24.

Câu 14. Giá trị của $A = \tan 5^\circ \cdot \tan 10^\circ \cdot \tan 15^\circ \ldots \tan 80^\circ \cdot \tan 85^\circ$ là

Ⓐ 2. Ⓑ 1. Ⓒ 0. Ⓓ -1.

Câu 15. Giá trị của $B = \cos^2 73^\circ + \cos^2 87^\circ + \cos^2 3^\circ + \cos^2 17^\circ$ là

Ⓐ $\sqrt{2}$. Ⓑ 2. Ⓒ -2. Ⓓ 1.

Câu 16. Cho $\cos x = \dfrac{1}{2}$. Tính biểu thức $P = 3\sin^2 x + 4\cos^2 x$

Ⓐ $\dfrac{13}{4}$. Ⓑ $\dfrac{7}{4}$. Ⓒ $\dfrac{11}{4}$. Ⓓ $\dfrac{15}{4}$.

Câu 17. Biết $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$. Giá trị đúng của biểu thức $P = \sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha$ là:

Ⓐ $\dfrac{1}{3}$. Ⓑ $\dfrac{10}{9}$. Ⓒ $\dfrac{11}{9}$. Ⓓ $\dfrac{4}{3}$.

Câu 18. Cho biết $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$. Tính $\cot\alpha$.

Ⓐ $\cot\alpha = 2$. Ⓑ $\cot\alpha = \sqrt{2}$. Ⓒ $\cot\alpha = \dfrac{1}{4}$. Ⓓ $\cot\alpha = \dfrac{1}{2}$.

Câu 19. Cho α là góc tù và $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$. Giá trị của biểu thức $3\sin\alpha + 2\cos\alpha$ là

Ⓐ 3. Ⓑ $-\dfrac{9}{13}$. Ⓒ -3. Ⓓ $\dfrac{9}{13}$.

Câu 20. Cho biết $\sin\alpha + \cos\alpha = a$. Giá trị của $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ bằng bao nhiêu?

Ⓐ $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = a^2$. Ⓑ $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 2a$.
Ⓒ $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \dfrac{1-a^2}{2}$. Ⓓ $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \dfrac{a^2-1}{2}$.

Câu 21. Cho biết $\cos\alpha = -\dfrac{2}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $E = \dfrac{\cot\alpha + 3\tan\alpha}{2\cot\alpha + \tan\alpha}$?

Ⓐ $-\dfrac{19}{13}$. Ⓑ $\dfrac{19}{13}$. Ⓒ $\dfrac{25}{13}$. Ⓓ $-\dfrac{25}{13}$.

Câu 22. Cho biết $\cot\alpha = 5$. Tính giá trị của $E = 2\cos^2\alpha + 5\sin\alpha\cos\alpha + 1$?

Ⓐ $\dfrac{10}{26}$. Ⓑ $\dfrac{100}{26}$. Ⓒ $\dfrac{50}{26}$. Ⓓ $\dfrac{101}{26}$.

Câu 23. Cho $\cot\alpha = \dfrac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $A = \dfrac{3\sin\alpha + 4\cos\alpha}{2\sin\alpha - 5\cos\alpha}$ là:

Ⓐ $-\dfrac{15}{13}$. Ⓑ -13. Ⓒ $\dfrac{15}{13}$. Ⓓ 13.

Câu 24. Cho biết $\cos\alpha = -\dfrac{2}{3}$. Giá trị của biểu thức $E = \dfrac{\cot\alpha - 3\tan\alpha}{2\cot\alpha - \tan\alpha}$ bằng bao nhiêu?

Ⓐ $-\dfrac{25}{3}$. Ⓑ $-\dfrac{11}{13}$. Ⓒ $-\frac{11}{3}$. Ⓓ $-\dfrac{25}{13}$.

Câu 25. Biết $\sin a + \cos a = \sqrt{2}$. Hỏi giá trị của $\sin^4 a + \cos^4 a$ bằng bao nhiêu?

Ⓐ $\dfrac{3}{2}$. Ⓑ $\dfrac{1}{2}$. Ⓒ -1. Ⓓ 0.

Câu 26. Cho $\tan\alpha + \cot\alpha = m$. Tìm m để $\tan^2\alpha + \cot^2\alpha = 7$.

Ⓐ $m = 9$. Ⓑ $m = 3$. Ⓒ $m = -3$. Ⓓ $m = \pm 3$.

Câu 27. Cho biết $3\cos\alpha - \sin\alpha = 1, 0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Giá trị của $\tan\alpha$ bằng

Ⓐ $\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$. Ⓑ $\tan\alpha=\dfrac{3}{4}$. Ⓒ $\tan\alpha=\dfrac{4}{5}$. Ⓓ $\tan\alpha=\dfrac{5}{4}$.

Câu 28. Cho biết $2\cos\alpha+\sqrt{2}\sin\alpha=2, 0^\circ<\alpha<90^\circ$. Tính giá trị của $\cot\alpha$.

Ⓐ $\cot\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$. Ⓑ $\cot\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. Ⓒ $\cot\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. Ⓓ $\cot\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 29. Cho biết $\cos\alpha+\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$. Giá trị của $P=\sqrt{\tan^2\alpha+\cot^2\alpha}$ bằng bao nhiêu?

Ⓐ $P=\dfrac{5}{4}$. Ⓑ $P=\dfrac{7}{4}$. Ⓒ $P=\dfrac{9}{4}$. Ⓓ $P=\dfrac{11}{4}$.

Câu 30. Cho biết $\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Giá trị của $P=\sqrt{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}$ bằng bao nhiêu?

Ⓐ $P=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. Ⓑ $P=\dfrac{\sqrt{17}}{5}$. Ⓒ $P=\dfrac{\sqrt{19}}{5}$. Ⓓ $P=\dfrac{\sqrt{21}}{5}$.

Câu 31. Trong các hệ thức sau hệ thức nào **đúng**?

Ⓐ $\sin^2\alpha+\cos\alpha^2=1$. Ⓑ $\sin^2\alpha+\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=1$.
Ⓒ $\sin\alpha^2+\cos\alpha^2=1$. Ⓓ $\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha=1$.

Câu 32. Trong các hệ thức sau hệ thức nào **đúng**?

Ⓐ $\sin^2\alpha+\cos\alpha^2=1$. Ⓑ $\sin^2\alpha+\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=1$.
Ⓒ $\sin\alpha^2+\cos\alpha^2=1$. Ⓓ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

Câu 33. Trong các hệ thức sau hệ thức nào **đúng**?

Ⓐ $\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=1$. Ⓑ $\sin\alpha^2+\cos\alpha^2=1$.
Ⓒ $\sin^2\alpha+\cos\alpha^2=1$. Ⓓ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

Câu 34. Rút gọn biểu thức sau $A=(\tan x+\cot x)^2-(\tan x-\cot x)^2$

Ⓐ $A=4$. Ⓑ $A=1$. Ⓒ $A=2$. Ⓓ $A=3$.

Câu 35. Đơn giản biểu thức $G=(1-\sin^2 x)\cot^2 x+1-\cot^2 x$.

Ⓐ $\sin^2 x$. Ⓑ $\cos^2 x$. Ⓒ $\dfrac{1}{\cos x}$. Ⓓ $\cos x$.

Câu 36. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

Ⓐ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.
Ⓑ $1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ $(\sin\alpha\neq 0)$.
Ⓒ $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=-1$ $(\sin\alpha\cos\alpha\neq 0)$.
Ⓓ $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $(\cos\alpha\neq 0)$.

Câu 37. Rút gọn biểu thức $P=\dfrac{1-\sin^2 x}{2\sin x\cdot\cos x}$ ta được

Ⓐ $P=\dfrac{1}{2}\tan x$. Ⓑ $P=\dfrac{1}{2}\cot x$.
Ⓒ $P=2\cot x$. Ⓓ $P=2\tan x$.

Câu 38. Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

Ⓐ $(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2=2, \forall x$.
Ⓑ $\tan^2 x-\sin^2 x=\tan^2 x\sin^2 x, \forall x\neq 90^\circ$.

Ⓒ $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x, \forall x$.
Ⓓ $\sin^6 x - \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x, \forall x$.

Câu 39. Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

Ⓐ $\dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ $(x \neq 0°, x \neq 180°)$.
Ⓑ $\tan x + \cot x = \dfrac{1}{\sin x \cos x}$ $(x \neq 0°, 90°, 180°)$.
Ⓒ $\tan^2 x + \cot^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} - 2$ $(x \neq 0°, 90°, 180°)$.
Ⓓ $\sin^2 2x + \cos^2 2x = 2$.

Câu 40. Biểu thức $\tan^2 x \sin^2 x - \tan^2 x + \sin^2 x$ có giá trị bằng

Ⓐ -1.. Ⓑ 0.. Ⓒ 2.. Ⓓ 1..

Câu 41. Biểu thức $(\cot a + \tan a)^2$ bằng

Ⓐ $\dfrac{1}{\sin^2 \alpha} - \dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$..
Ⓑ $\cot^2 a + \tan^2 a + 2$.
Ⓒ $\dfrac{1}{\sin^2 \alpha} + \dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$.
Ⓓ $\cot^2 a \tan^2 a + 2$.

BẢNG ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á
1	D	2	A	3	D	4	B	5	D
6	B	7	C	8	A	9	C	10	A
11	D	12	D	13	C	14	B	15	B
16	A	17	C	18	A	19	B	20	D
21	B	22	D	23	D	24	C	25	B
26	D	27	A	28	C	29	B	30	B
31	D	32	D	33	D	34	A	35	A
36	C	37	B	38	D	39	D	40	B
41	C								

IV. LỜI GIẢI CHI TIẾT

1) Bài tập tự luận

Bài 1. Không dùng bảng số hay máy tính cầm tay, tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $(2\sin 30° + \cos 135° - 3\tan 150°) \cdot (\cos 180° - \cot 60°)$;

b) $\sin^2 90° + \cos^2 120° + \cos^2 0° - \tan^2 60° + \cot^2 135°$;

c) $\cos 60° \cdot \sin 30° + \cos^2 30°$.

Chú ý. $\sin^2 \alpha = (\sin \alpha)^2, \cos^2 \alpha = (\cos \alpha)^2, \tan^2 \alpha = (\tan \alpha)^2, \cot^2 \alpha = (\cot \alpha)^2$.

Hướng dẫn giải.

a) Ta có các giá trị: $\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}; \cos 135^\circ = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \tan 150^\circ = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}; \cos 180^\circ = -1; \cot 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Thay vào biểu thức:

$$\begin{aligned}&\left(2\cdot\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-3\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)\cdot\left(-1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\\&=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{3}\right)\cdot\left(-1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\\&=-1-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{6}-\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{3}\\&=-1-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{6}-\sqrt{3}-1=-2-\frac{4\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{6}.\end{aligned}$$

b) Ta có: $\sin 90^\circ = 1; \cos 120^\circ = -\dfrac{1}{2}; \cos 0^\circ = 1; \tan 60^\circ = \sqrt{3}; \cot 135^\circ = -1$.

Thay vào biểu thức:

$$1^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1^2-(\sqrt{3})^2+(-1)^2=1+\frac{1}{4}+1-3+1=\frac{1}{4}.$$

c) Ta có: $\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}; \sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}; \cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Thay vào biểu thức:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1.$$

Bài 2. Đơn giản các biểu thức sau:

a) $\sin 100^\circ + \sin 80^\circ + \cos 16^\circ + \cos 164^\circ$;

b) $2\sin(180^\circ-\alpha)\cdot\cot\alpha - \cos(180^\circ-\alpha)\cdot\tan\alpha\cdot\cot(180^\circ-\alpha)$, với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Hướng dẫn giải.

a) Ta có: $\sin 100^\circ = \sin(180^\circ - 80^\circ) = \sin 80^\circ$ và $\cos 164^\circ = \cos(180^\circ - 16^\circ) = -\cos 16^\circ$.

Biểu thức trở thành:

$$\sin 80^\circ + \sin 80^\circ + \cos 16^\circ - \cos 16^\circ = 2\sin 80^\circ.$$

b) Ta có: $\sin(180^\circ-\alpha) = \sin\alpha$; $\cos(180^\circ-\alpha) = -\cos\alpha$; $\cot(180^\circ-\alpha) = -\cot\alpha$.

Thay vào biểu thức:

$$\begin{aligned}&2\sin\alpha\cdot\cot\alpha-(-\cos\alpha)\cdot\tan\alpha\cdot(-\cot\alpha)\\&=2\sin\alpha\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\cos\alpha\cdot(\tan\alpha\cdot\cot\alpha)\\&=2\cos\alpha-\cos\alpha\cdot 1=\cos\alpha.\end{aligned}$$

Bài 3. Cho góc α $(0^\circ < \alpha < 180^\circ)$ thoả mãn $\tan\alpha = 3$. Tính giá trị của biểu thức: $P = \dfrac{2\sin\alpha - 3\cos\alpha}{3\sin\alpha + 2\cos\alpha}$.

Hướng dẫn giải. Vì $\tan\alpha = 3$ xác định nên $\cos\alpha \neq 0$. Chia cả tử và mẫu của P cho $\cos\alpha$, ta

được:

$$P=\frac{2\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-3\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}{3\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+2\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{2\tan\alpha-3}{3\tan\alpha+2}.$$

Thay $\tan\alpha=3$ vào biểu thức:

$$P=\frac{2\cdot3-3}{3\cdot3+2}=\frac{6-3}{9+2}=\frac{3}{11}.$$

Bài 4. Chứng minh rằng với mọi góc x $(0^\circ\le x\le 90^\circ)$, ta đều có:

a) $\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}$;

b) $\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}$;

c) $\tan^2 x=\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$ $(x\ne 90^\circ)$;

d) $\cot^2 x=\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$ $(x\ne 0^\circ)$.

Hướng dẫn giải.

a) Ta luôn có $\sin^2 x+\cos^2 x=1\Rightarrow \sin^2 x=1-\cos^2 x$. Với $0^\circ\le x\le 90^\circ$ thì $\sin x\ge 0$, do đó $\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}$. (đpcm)

b) Tương tự, $\cos^2 x=1-\sin^2 x$. Với $0^\circ\le x\le 90^\circ$ thì $\cos x\ge 0$, do đó $\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}$. (đpcm)

c) Theo định nghĩa $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ nên $\tan^2 x=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)^2=\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$. (đpcm)

d) Theo định nghĩa $\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ nên $\cot^2 x=\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)^2=\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$. (đpcm)

Bài 5. Chứng minh rằng:

a) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$;

b) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$;

c) $\sqrt{\sin^4\alpha+6\cos^2\alpha+3}+\sqrt{\cos^4\alpha+4\sin^2\alpha}=4$.

Hướng dẫn giải.

a) Ta có: $(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2=\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.
Vì $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ nên $1^2=\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.
$\Rightarrow \sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$. (đpcm)

b) Sử dụng hằng đẳng thức $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ với $a=\sin^2\alpha, b=\cos^2\alpha$:

$$\begin{aligned}\sin^6\alpha+\cos^6\alpha&=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)\\&=1\cdot(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha)\\&=(1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha)-\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha.\ \text{(đpcm)}\end{aligned}$$

c) Xét các biểu thức dưới dấu căn:

- $\sin^4\alpha+6\cos^2\alpha+3=\sin^4\alpha+6(1-\sin^2\alpha)+3=\sin^4\alpha-6\sin^2\alpha+9=(\sin^2\alpha-3)^2$.
  $\Rightarrow \sqrt{\sin^4\alpha+6\cos^2\alpha+3}=|\sin^2\alpha-3|=3-\sin^2\alpha$ (vì $\sin^2\alpha\le 1$).
- $\cos^4\alpha+4\sin^2\alpha=\cos^4\alpha+4(1-\cos^2\alpha)=\cos^4\alpha-4\cos^2\alpha+4=(\cos^2\alpha-2)^2$.
  $\Rightarrow \sqrt{\cos^4\alpha+4\sin^2\alpha}=|\cos^2\alpha-2|=2-\cos^2\alpha$ (vì $\cos^2\alpha\le 1$).

Cộng hai kết quả lại: $(3-\sin^2\alpha)+(2-\cos^2\alpha)=5-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=5-1=4$. (đpcm)

Bài 6. Góc nghiêng của Mặt Trời tại một vị trí trên Trái Đất là góc nghiêng giữa tia nắng lúc giữa trưa với mặt đất. Trong thực tế, để đo trực tiếp góc này, vào giữa trưa (khoảng 12 giờ), em có thể dựng một thước thẳng vuông góc với mặt đất, đo độ dài của bóng thước trên mặt đất. Khi đó, tang của góc nghiêng Mặt Trời tại vị trí đặt thước bằng tỉ số giữa độ dài của thước và độ dài của bóng thước. Góc nghiêng của Mặt Trời phụ thuộc vào vĩ độ của vị trí đo và phụ thuộc vào thời gian đo trong năm (ngày thứ mấy trong năm). Tại vị trí có vĩ độ ϕ và ngày thứ N trong năm, góc nghiêng của Mặt Trời α còn được tính theo công thức sau:

$$\alpha=90^\circ-\phi-\left|\cos\left[\left(\frac{2(N+10)}{365}-m\right)180^\circ\right]\right|\cdot 23,5^\circ$$

trong đó $m=0$ nếu $1\le N\le 172$, $m=1$ nếu $173\le N\le 355$, $m=2$ nếu $356\le N\le 365$.

a) Hãy áp dụng công thức trên để tính góc nghiêng của Mặt Trời vào ngày 10/10 trong năm không nhuận (năm mà tháng 2 có 28 ngày) tại vị trí có vĩ độ $\phi=20^\circ$.

b) Hãy xác định vĩ độ tại nơi em sinh sống và tính góc nghiêng của Mặt Trời tại đó theo hai cách đã được đề cập trong bài toán (đo trực tiếp và tính theo công thức) và so sánh hai kết quả thu được.

Chú ý. Công thức tính toán nói trên chính xác tới $\pm 0,5^\circ$.

Góc nghiêng của Mặt Trời có ảnh hưởng tới sự hấp thụ nhiệt từ Mặt Trời của Trái Đất, tạo nên các mùa trong năm trên Trái Đất, chẳng hạn, vào mùa hè, góc nghiêng lớn nên nhiệt độ cao.

Hướng dẫn giải.

a) Ngày 10/10 là ngày thứ 283 của năm không nhuận. Do đó, góc nghiêng của Mặt Trời vào ngày này tại vĩ độ $\phi=20^\circ$ bằng

$$\alpha=90^\circ-20^\circ-\left|\cos\left[\left(\frac{2(283+10)}{365}-1\right)\cdot 180^\circ\right]\right|\cdot 23,5^\circ$$

$$=70^\circ-\left|\cos\frac{221}{365}\cdot 180^\circ\right|\cdot 23,5^\circ\approx 62,35^\circ$$

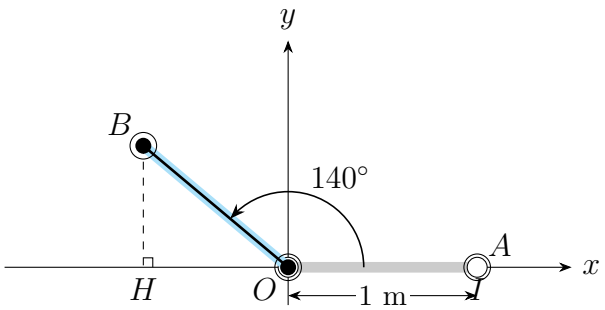
b) *Chú ý.* Vĩ độ của nơi có góc nghiêng Mặt Trời α vào ngày thứ N trong năm bằng

$$\phi=90^\circ-\alpha-\left|\cos\left[\left(\frac{2(N+10)}{365}-1\right)\cdot 180^\circ\right]\right|\cdot 23,5^\circ$$

Bài 7. Một cánh tay robot dài 1 m gắp vật từ vị trí A, sau đó quay một góc 140° quanh O đến vị trí B rồi thả vật rơi tự do chạm đất (hình vẽ).

a) Hỏi khi vật rơi chạm đất, vật cách vị trí A bao nhiêu mét?

b) Nếu muốn vật rơi chạm đất cách vị trí A một khoảng $1,5$ m thì cánh tay robot cần quay một góc bao nhiêu độ?



» Sưu tầm và biên soạn: Lê Minh Kha - 0399653362

Hướng dẫn giải.

a) Ta có $\widehat{HOB} = 40°$, suy ra $OH = |\cos 140°| \cong 0,77$ mét.
Suy ra $AH = OA + OH = 1 + 0,77 = 1,77$ mét.
Do đó vật rơi cách vị trí A khoảng $1,77$ mét.

b) Theo đề bài, $AH = OA + OH = 1,5 \Rightarrow OH = 1,5 - 1 = 0,5$.
Tức là $\cos\alpha = 0,5 = \dfrac{1}{2}$ do đó $\alpha = 60°$.
Khi đó cánh tay robot cần quay một góc là $180° - 60° = 120°$.

2) Trắc nghiệm nhiều phương án

Câu 1. Giá trị của $\cos 60° + \sin 30°$ bằng bao nhiêu?

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ⓑ $\sqrt{3}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Ⓓ 1.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\cos 60° = \dfrac{1}{2}$ và $\sin 30° = \dfrac{1}{2}$.
Vậy $\cos 60° + \sin 30° = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$.

Câu 2. Giá trị của $\tan 30° + \cot 30°$ bằng bao nhiêu?

Ⓐ $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$. Ⓑ $\dfrac{1+\sqrt{3}}{3}$. Ⓒ $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Ⓓ 2.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\tan 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ và $\cot 30° = \sqrt{3}$.
Vậy $\tan 30° + \cot 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} = \dfrac{1+3}{\sqrt{3}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

Câu 3. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào **sai**?

Ⓐ $\sin 0° + \cos 0° = 1$. Ⓑ $\sin 90° + \cos 90° = 1$.
Ⓒ $\sin 180° + \cos 180° = -1$. Ⓓ $\sin 60° + \cos 60° = 1$.

Hướng dẫn giải. Kiểm tra các phương án:
- A: $0 + 1 = 1$ (Đúng).
- B: $1 + 0 = 1$ (Đúng).
- C: $0 + (-1) = -1$ (Đúng).
- D: $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \neq 1$ (Sai).

Câu 4. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

Ⓐ $\cos 60° = \sin 30°$. Ⓑ $\cos 60° = \sin 120°$.
Ⓒ $\cos 30° = \sin 120°$. Ⓓ $\sin 60° = -\cos 120°$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\cos 60° = \dfrac{1}{2}$ và $\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Do đó $\cos 60° \neq \sin 120°$. Khẳng định B sai.

Câu 5. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

Ⓐ $\sin 45° + \sin 45° = \sqrt{2}$. Ⓑ $\sin 30° + \cos 60° = 1$.
Ⓒ $\sin 60° + \cos 150° = 0$. Ⓓ $\sin 120° + \cos 30° = 0$.

Hướng dẫn giải. Xét phương án D: $\sin 120° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $\sin 120^\circ + \cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \neq 0$. Vậy D sai.

Câu 6. Giá trị $\cos 45^\circ + \sin 45^\circ$ bằng bao nhiêu?

Ⓐ 1. Ⓑ $\sqrt{2}$. Ⓒ $\sqrt{3}$. Ⓓ 0.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ và $\sin 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\cos 45^\circ + \sin 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

Câu 7. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

Ⓐ $\sin(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$. Ⓑ $\sin(180^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$.
Ⓒ $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$. Ⓓ $\sin(180^\circ - \alpha) = \cos\alpha$.

Hướng dẫn giải. Theo tính chất hai góc bù nhau, $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$.

Câu 8. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào **sai**?

Ⓐ $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 0$. Ⓑ $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$.
Ⓒ $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$. Ⓓ $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

Hướng dẫn giải. Xét phương án A: $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 0 + 1 = 1 \neq 0$. Vậy A sai.

Câu 9. Cho α là góc tù. Điều khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ $\sin\alpha < 0$. Ⓑ $\cos\alpha > 0$. Ⓒ $\tan\alpha < 0$. Ⓓ $\cot\alpha > 0$.

Hướng dẫn giải. Với α là góc tù $(90^\circ < \alpha < 180^\circ)$ thì $\sin\alpha > 0$ và $\cos\alpha < 0$.

Suy ra $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} < 0$.

Câu 10. Giá trị của $E = \sin 36^\circ \cos 6^\circ - \sin 126^\circ \cos 84^\circ$ là

Ⓐ $\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ⓒ 1. Ⓓ -1.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\sin 126^\circ = \sin(90^\circ + 36^\circ) = \cos 36^\circ$ và $\cos 84^\circ = \cos(90^\circ - 6^\circ) = \sin 6^\circ$.

Khi đó $E = \sin 36^\circ \cos 6^\circ - \cos 36^\circ \sin 6^\circ = \sin(36^\circ - 6^\circ) = \sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$.

Câu 11. Giá trị của biểu thức $A = \sin^2 51^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 39^\circ + \sin^2 35^\circ$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ 1. Ⓓ 2.

Hướng dẫn giải. $A = (\sin^2 51^\circ + \sin^2 39^\circ) + (\sin^2 55^\circ + \sin^2 35^\circ)$

$A = (\sin^2 51^\circ + \cos^2 51^\circ) + (\sin^2 55^\circ + \cos^2 55^\circ) = 1 + 1 = 2$.

Câu 12. Giá trị của biểu thức $A = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \ldots \tan 88^\circ \tan 89^\circ$ là

Ⓐ 0. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 1.

Hướng dẫn giải. Nhận thấy $\tan\alpha \cdot \tan(90^\circ - \alpha) = \tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$.

Biểu thức A có 89 số hạng, ghép cặp:

$A = (\tan 1^\circ \cdot \tan 89^\circ)(\tan 2^\circ \cdot \tan 88^\circ) \ldots (\tan 44^\circ \cdot \tan 46^\circ) \cdot \tan 45^\circ$

$A = 1 \cdot 1 \cdot \cdots \cdot 1 \cdot 1 = 1$.

Câu 13. Tổng $\sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \sin^2 6^\circ + \cdots + \sin^2 84^\circ + \sin^2 86^\circ + \sin^2 88^\circ$ bằng

Ⓐ 21. Ⓑ 23. Ⓒ 22. Ⓓ 24.

Hướng dẫn giải. Số số hạng của tổng là $(88-2):2+1=44$.
Các cặp số hạng có tổng số đo góc bằng 90° là: $(2^\circ, 88^\circ), (4^\circ, 86^\circ), \ldots, (44^\circ, 46^\circ)$.
Tổng cộng có $44:2=22$ cặp, mỗi cặp có giá trị bằng $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.
Vậy tổng bằng $22\cdot 1=22$.

Câu 14. Giá trị của $A=\tan 5^\circ\cdot\tan 10^\circ\cdot\tan 15^\circ\ldots\tan 80^\circ\cdot\tan 85^\circ$ là

Ⓐ 2. Ⓑ 1. Ⓒ 0. Ⓓ -1.

Hướng dẫn giải. Số số hạng là $(85-5):5+1=17$.
Ghép cặp: $A=(\tan 5^\circ\cdot\tan 85^\circ)(\tan 10^\circ\cdot\tan 80^\circ)\ldots(\tan 40^\circ\cdot\tan 50^\circ)\cdot\tan 45^\circ$
$A=1\cdot 1\cdot\cdots\cdot 1\cdot 1=1$.

Câu 15. Giá trị của $B=\cos^2 73^\circ+\cos^2 87^\circ+\cos^2 3^\circ+\cos^2 17^\circ$ là

Ⓐ $\sqrt{2}$. Ⓑ 2. Ⓒ -2. Ⓓ 1.

Hướng dẫn giải. $B=(\cos^2 73^\circ+\cos^2 17^\circ)+(\cos^2 87^\circ+\cos^2 3^\circ)$
$B=(\cos^2 73^\circ+\sin^2 73^\circ)+(\cos^2 87^\circ+\sin^2 87^\circ)=1+1=2$.

Câu 16. Cho $\cos x=\dfrac{1}{2}$. Tính biểu thức $P=3\sin^2 x+4\cos^2 x$

Ⓐ $\dfrac{13}{4}$. Ⓑ $\dfrac{7}{4}$. Ⓒ $\dfrac{11}{4}$. Ⓓ $\dfrac{15}{4}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\cos^2 x=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$.
$\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$.
Biểu thức $P=3\sin^2 x+4\cos^2 x=3\cdot\dfrac{3}{4}+4\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{9}{4}+\dfrac{4}{4}=\dfrac{13}{4}$.

Câu 17. Biết $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$. Giá trị đúng của biểu thức $P=\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha$ là:

Ⓐ $\dfrac{1}{3}$. Ⓑ $\dfrac{10}{9}$. Ⓒ $\dfrac{11}{9}$. Ⓓ $\dfrac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\cos^2\alpha=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{9}$.
$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\dfrac{1}{9}=\dfrac{8}{9}$.
Biểu thức $P=\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha=\dfrac{8}{9}+3\cdot\dfrac{1}{9}=\dfrac{8}{9}+\dfrac{3}{9}=\dfrac{11}{9}$.

Câu 18. Cho biết $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$. Tính $\cot\alpha$.

Ⓐ $\cot\alpha=2$. Ⓑ $\cot\alpha=\sqrt{2}$. Ⓒ $\cot\alpha=\dfrac{1}{4}$. Ⓓ $\cot\alpha=\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\cot\alpha=\dfrac{1}{\tan\alpha}=\dfrac{1}{1/2}=2$.

Câu 19. Cho α là góc tù và $\sin\alpha=\dfrac{5}{13}$. Giá trị của biểu thức $3\sin\alpha+2\cos\alpha$ là

Ⓐ 3. Ⓑ $-\dfrac{9}{13}$. Ⓒ -3. Ⓓ $\dfrac{9}{13}$.

Hướng dẫn giải. Vì α là góc tù nên $\cos\alpha < 0$.

Ta có $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\dfrac{5}{13}\right)^2 = 1 - \dfrac{25}{169} = \dfrac{144}{169}$.

Suy ra $\cos\alpha = -\dfrac{12}{13}$.

Giá trị biểu thức: $3 \cdot \left(\dfrac{5}{13}\right) + 2 \cdot \left(-\dfrac{12}{13}\right) = \dfrac{15}{13} - \dfrac{24}{13} = -\dfrac{9}{13}$.

Câu 20. Cho biết $\sin\alpha + \cos\alpha = a$. Giá trị của $\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ bằng bao nhiêu?

Ⓐ $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = a^2$. Ⓑ $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = 2a$.

Ⓒ $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \dfrac{1-a^2}{2}$. Ⓓ $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \dfrac{a^2-1}{2}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = a^2 \Leftrightarrow \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = a^2$

$\Leftrightarrow 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = a^2 \Leftrightarrow \sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{a^2-1}{2}$.

Câu 21. Cho biết $\cos\alpha = -\dfrac{2}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $E = \dfrac{\cot\alpha + 3\tan\alpha}{2\cot\alpha + \tan\alpha}$?

Ⓐ $-\dfrac{19}{13}$. Ⓑ $\dfrac{19}{13}$. Ⓒ $\dfrac{25}{13}$. Ⓓ $-\dfrac{25}{13}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\cos^2\alpha = \dfrac{4}{9} \Rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{9}$.

Suy ra $\tan^2\alpha = \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{5/9}{4/9} = \dfrac{5}{4}$ và $\cot^2\alpha = \dfrac{4}{5}$.

Chia cả tử và mẫu của E cho $\tan\alpha$: $E = \dfrac{\cot^2\alpha + 3}{2\cot^2\alpha + 1}$.

Thay $\cot^2\alpha = \dfrac{4}{5}$ vào: $E = \dfrac{4/5 + 3}{2(4/5) + 1} = \dfrac{19/5}{13/5} = \dfrac{19}{13}$.

Câu 22. Cho biết $\cot\alpha = 5$. Tính giá trị của $E = 2\cos^2\alpha + 5\sin\alpha\cos\alpha + 1$?

Ⓐ $\dfrac{10}{26}$. Ⓑ $\dfrac{100}{26}$. Ⓒ $\dfrac{50}{26}$. Ⓓ $\dfrac{101}{26}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow 1 + 25 = \dfrac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow \sin^2\alpha = \dfrac{1}{26}$.

Suy ra $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = \dfrac{25}{26}$ và $\cos\alpha = 5\sin\alpha$ (vì $\cot\alpha = 5$).

Khi đó $\sin\alpha\cos\alpha = 5\sin^2\alpha = \dfrac{5}{26}$.

$E = 2 \cdot \dfrac{25}{26} + 5 \cdot \dfrac{5}{26} + 1 = \dfrac{50 + 25 + 26}{26} = \dfrac{101}{26}$.

Câu 23. Cho $\cot\alpha = \dfrac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $A = \dfrac{3\sin\alpha + 4\cos\alpha}{2\sin\alpha - 5\cos\alpha}$ là:

Ⓐ $-\dfrac{15}{13}$. Ⓑ -13. Ⓒ $\dfrac{15}{13}$. Ⓓ 13.

Hướng dẫn giải. Từ $\cot\alpha = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \tan\alpha = 3$.

Chia cả tử và mẫu của A cho $\cos\alpha$: $A = \dfrac{3\tan\alpha + 4}{2\tan\alpha - 5} = \dfrac{3(3) + 4}{2(3) - 5} = \dfrac{13}{1} = 13$.

Câu 24. Cho biết $\cos\alpha = -\dfrac{2}{3}$. Giá trị của biểu thức $E = \dfrac{\cot\alpha - 3\tan\alpha}{2\cot\alpha - \tan\alpha}$ bằng bao nhiêu?

Ⓐ $-\dfrac{25}{3}$. Ⓑ $-\dfrac{11}{13}$. Ⓒ $-\frac{11}{3}$. Ⓓ $-\dfrac{25}{13}$.

Hướng dẫn giải. Từ $\cos^2\alpha=\dfrac{4}{9}\Rightarrow\sin^2\alpha=\dfrac{5}{9}\Rightarrow\tan^2\alpha=\dfrac{5}{4}$.

Chia cả tử và mẫu của E cho $\tan\alpha$: $E=\dfrac{\cot^2\alpha-3}{2\cot^2\alpha-1}$.

Với $\cot^2\alpha=\dfrac{4}{5}$, ta có: $E=\dfrac{4/5-3}{2(4/5)-1}=\dfrac{-11/5}{3/5}=-\dfrac{11}{3}$.

Câu 25. Biết $\sin a+\cos a=\sqrt{2}$. Hỏi giá trị của $\sin^4 a+\cos^4 a$ bằng bao nhiêu?

Ⓐ $\dfrac{3}{2}$. Ⓑ $\dfrac{1}{2}$. Ⓒ -1. Ⓓ 0.

Hướng dẫn giải. Ta có $(\sin a+\cos a)^2=2\Rightarrow 1+2\sin a\cos a=2\Rightarrow\sin a\cos a=\dfrac{1}{2}$.

$\sin^4 a+\cos^4 a=(\sin^2 a+\cos^2 a)^2-2\sin^2 a\cos^2 a=1-2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$.

Câu 26. Cho $\tan\alpha+\cot\alpha=m$. Tìm m để $\tan^2\alpha+\cot^2\alpha=7$.

Ⓐ $m=9$. Ⓑ $m=3$. Ⓒ $m=-3$. Ⓓ $m=\pm3$.

Hướng dẫn giải. Ta có $(\tan\alpha+\cot\alpha)^2=m^2\Rightarrow\tan^2\alpha+\cot^2\alpha+2=m^2$

$\Rightarrow 7+2=m^2\Rightarrow m^2=9\Rightarrow m=\pm3$.

Câu 27. Cho biết $3\cos\alpha-\sin\alpha=1, 0^\circ<\alpha<90^\circ$. Giá trị của $\tan\alpha$ bằng

Ⓐ $\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$. Ⓑ $\tan\alpha=\dfrac{3}{4}$. Ⓒ $\tan\alpha=\dfrac{4}{5}$. Ⓓ $\tan\alpha=\dfrac{5}{4}$.

Hướng dẫn giải. $\sin\alpha=3\cos\alpha-1$. Thay vào $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ ta được:

$(3\cos\alpha-1)^2+\cos^2\alpha=1\Leftrightarrow 10\cos^2\alpha-6\cos\alpha=0$.

Vì $\alpha\in(0^\circ,90^\circ)$ nên $\cos\alpha\neq0$, suy ra $10\cos\alpha=6\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$.

Khi đó $\sin\alpha=\sqrt{1-(3/5)^2}=\dfrac{4}{5}\Rightarrow\tan\alpha=\dfrac{4}{3}$.

Câu 28. Cho biết $2\cos\alpha+\sqrt{2}\sin\alpha=2, 0^\circ<\alpha<90^\circ$. Tính giá trị của $\cot\alpha$.

Ⓐ $\cot\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$. Ⓑ $\cot\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. Ⓒ $\cot\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. Ⓓ $\cot\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải. $\sqrt{2}\sin\alpha=2(1-\cos\alpha)\Rightarrow 2\sin^2\alpha=4(1-\cos\alpha)^2\Leftrightarrow 2(1-\cos^2\alpha)=4(1-\cos\alpha)^2$

$\Leftrightarrow(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)=2(1-\cos\alpha)^2$. Vì $\alpha\in(0^\circ,90^\circ)$ nên $\cos\alpha\neq1$.

Rút gọn: $1+\cos\alpha=2(1-\cos\alpha)\Leftrightarrow 3\cos\alpha=1\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$.

$\sin\alpha=\sqrt{1-(1/3)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\Rightarrow\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 29. Cho biết $\cos\alpha+\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$. Giá trị của $P=\sqrt{\tan^2\alpha+\cot^2\alpha}$ bằng bao nhiêu?

Ⓐ $P=\dfrac{5}{4}$. Ⓑ $P=\dfrac{7}{4}$. Ⓒ $P=\dfrac{9}{4}$. Ⓓ $P=\dfrac{11}{4}$.

Hướng dẫn giải. $1+2\sin\alpha\cos\alpha=1/9\Rightarrow\sin\alpha\cos\alpha=-4/9$.

$P^2=\tan^2\alpha+\cot^2\alpha=\dfrac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=\dfrac{1-2(\sin\alpha\cos\alpha)^2}{(\sin\alpha\cos\alpha)^2}=\dfrac{1-2(-4/9)^2}{(-4/9)^2}=\dfrac{49/81}{16/81}=\dfrac{49}{16}$.

Vậy $P=\sqrt{49/16}=7/4$.

Câu 30. Cho biết $\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Giá trị của $P=\sqrt{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha}$ bằng bao nhiêu?

Ⓐ $P=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$. Ⓑ $P=\dfrac{\sqrt{17}}{5}$. Ⓒ $P=\dfrac{\sqrt{19}}{5}$. Ⓓ $P=\dfrac{\sqrt{21}}{5}$.

Hướng dẫn giải. $1-2\sin\alpha\cos\alpha=1/5\Rightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha=4/5\Rightarrow\sin\alpha\cos\alpha=2/5$.

$P=\sqrt{1-2(\sin\alpha\cos\alpha)^2}=\sqrt{1-2(4/25)}=\sqrt{17/25}=\dfrac{\sqrt{17}}{5}$.

Câu 31. Trong các hệ thức sau hệ thức nào **đúng**?

Ⓐ $\sin^2\alpha+\cos\alpha^2=1$. Ⓑ $\sin^2\alpha+\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=1$.

Ⓒ $\sin\alpha^2+\cos\alpha^2=1$. Ⓓ $\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha=1$.

Hướng dẫn giải. Ta có hệ thức lượng giác cơ bản: $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ đúng với mọi giá trị của x.

Thay $x=2\alpha$, ta có $\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha=1$. Vậy đáp án D đúng.

Câu 32. Trong các hệ thức sau hệ thức nào **đúng**?

Ⓐ $\sin^2\alpha+\cos\alpha^2=1$. Ⓑ $\sin^2\alpha+\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=1$.

Ⓒ $\sin\alpha^2+\cos\alpha^2=1$. Ⓓ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

Hướng dẫn giải. Hệ thức $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ là một trong các hệ thức lượng giác cơ bản, đúng với mọi góc α.

Câu 33. Trong các hệ thức sau hệ thức nào **đúng**?

Ⓐ $\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=1$. Ⓑ $\sin\alpha^2+\cos\alpha^2=1$.

Ⓒ $\sin^2\alpha+\cos\alpha^2=1$. Ⓓ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

Hướng dẫn giải. Hệ thức $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ là đẳng thức đúng với mọi góc α.

Câu 34. Rút gọn biểu thức sau $A=(\tan x+\cot x)^2-(\tan x-\cot x)^2$

Ⓐ $A=4$. Ⓑ $A=1$. Ⓒ $A=2$. Ⓓ $A=3$.

Hướng dẫn giải. Khai triển hằng đẳng thức: $A=(\tan^2 x+2\tan x\cot x+\cot^2 x)-(\tan^2 x-2\tan x\cot x+\cot^2 x)$

$A=4\tan x\cot x=4\cdot 1=4$.

Câu 35. Đơn giản biểu thức $G=(1-\sin^2 x)\cot^2 x+1-\cot^2 x$.

Ⓐ $\sin^2 x$. Ⓑ $\cos^2 x$. Ⓒ $\dfrac{1}{\cos x}$. Ⓓ $\cos x$.

Hướng dẫn giải. $G=(1-\sin^2 x)\cot^2 x+1-\cot^2 x=\cot^2 x-\sin^2 x\cdot\cot^2 x+1-\cot^2 x$

$G=1-\sin^2 x\cdot\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}=1-\cos^2 x=\sin^2 x$.

Câu 36. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

Ⓐ $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

Ⓑ $1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ $(\sin\alpha\neq 0)$.

Ⓒ $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=-1$ $(\sin\alpha\cos\alpha\neq 0)$.

Ⓓ $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $(\cos\alpha\neq 0)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$, do đó khẳng định $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = -1$ là sai.

Câu 37. Rút gọn biểu thức $P = \dfrac{1-\sin^2 x}{2\sin x \cdot \cos x}$ ta được

(A) $P = \dfrac{1}{2}\tan x$. (B) $P = \dfrac{1}{2}\cot x$.

(C) $P = 2\cot x$. (D) $P = 2\tan x$.

Hướng dẫn giải. Sử dụng công thức $1-\sin^2 x = \cos^2 x$:

$P = \dfrac{\cos^2 x}{2\sin x\cos x} = \dfrac{\cos x}{2\sin x} = \dfrac{1}{2}\cot x$.

Câu 38. Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

(A) $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2, \forall x$.

(B) $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x, \forall x \neq 90°$.

(C) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x, \forall x$.

(D) $\sin^6 x - \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x, \forall x$.

Hướng dẫn giải. Ta có công thức đúng là $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x$.

Do đó, đẳng thức $\sin^6 x - \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x$ là sai.

Câu 39. Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

(A) $\dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ $(x \neq 0°, x \neq 180°)$.

(B) $\tan x + \cot x = \dfrac{1}{\sin x\cos x}$ $(x \neq 0°, 90°, 180°)$.

(C) $\tan^2 x + \cot^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x\cos^2 x} - 2$ $(x \neq 0°, 90°, 180°)$.

(D) $\sin^2 2x + \cos^2 2x = 2$.

Hướng dẫn giải. Đẳng thức D sai vì $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ với mọi θ. Với $\theta = 2x$, ta phải có $\sin^2 2x + \cos^2 2x = 1$.

Câu 40. Biểu thức $\tan^2 x\sin^2 x - \tan^2 x + \sin^2 x$ có giá trị bằng

(A) -1.. (B) 0.. (C) 2.. (D) 1..

Hướng dẫn giải. $\tan^2 x\sin^2 x - \tan^2 x + \sin^2 x = \tan^2 x(\sin^2 x - 1) + \sin^2 x$

$= \tan^2 x(-\cos^2 x) + \sin^2 x = -\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\cos^2 x + \sin^2 x = -\sin^2 x + \sin^2 x = 0$.

Câu 41. Biểu thức $(\cot a + \tan a)^2$ bằng

(A) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha} - \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.. (B) $\cot^2 a + \tan^2 a + 2$.

(C) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha} + \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$. (D) $\cot^2 a\tan^2 a + 2$.

Hướng dẫn giải. Ta có $(\cot a + \tan a)^2 = \left(\dfrac{\cos a}{\sin a} + \dfrac{\sin a}{\cos a}\right)^2 = \left(\dfrac{\cos^2 a + \sin^2 a}{\sin a\cos a}\right)^2 = \dfrac{1}{\sin^2 a\cos^2 a}$

$= \dfrac{\sin^2 a + \cos^2 a}{\sin^2 a\cos^2 a} = \dfrac{1}{\cos^2 a} + \dfrac{1}{\sin^2 a}$.

Mặt khác, $(\cot a + \tan a)^2 = \cot^2 a + \tan^2 a + 2\cot a\tan a = \cot^2 a + \tan^2 a + 2$.

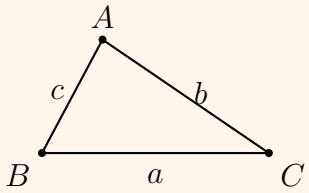
Dựa vào các phương án có trong ảnh, phương án C là cách biểu diễn đúng nhất.

§2 HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

I. ĐỊNH LÍ CÔSIN

Trong tam giác ABC với $BC = a, AC = b, AB = c$, ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A;$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B;$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$



1) Hệ quả. *Từ định lý côsin ta có:*

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \qquad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}; \qquad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Ví dụ 1

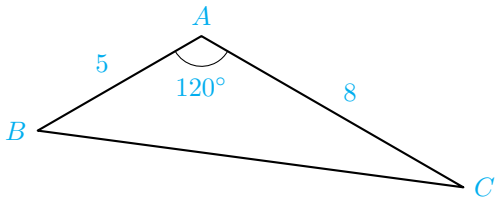
Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^\circ$ và $AB = 5, AC = 8$. Tính độ dài cạnh BC.

Lời giải.

Áp dụng Định lí côsin cho tam giác ABC, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 120^\circ$$
$$= 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 129.$$

Vậy $BC = \sqrt{129}$.



Hình 3.9

bài tập tương tự

Cho tam giác ABC có $AB = 5, AC = 8$ và $\widehat{A} = 45^\circ$. Tính độ dài các cạnh và độ lớn các góc còn lại của tam giác.

II. ĐỊNH LÍ SIN

Trong tam giác ABC với $BC = a, AC = b, AB = c$, ta có;

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

1) Hệ quả. *Từ định lý sin ta có:*

$a = 2R\sin A$; $b = 2R\sin B$; $c = 2R\sin C$.

$\sin A = \dfrac{a}{2R}$; $\sin B = \dfrac{b}{2R}$; $\sin C = \dfrac{c}{2R}$;

Ví dụ 2

Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 135°, \widehat{C} = 15°$ và $b = 12$. Tính a, c, R và số đo góc B.

Lời giải.

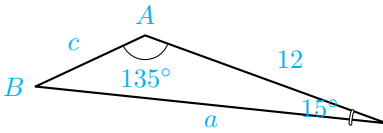
Ta có: $\widehat{B} = 180° - (\widehat{A} + \widehat{C}) = 180° - (135° + 15°) = 30°$.

Áp dụng Định lí sin, ta có: $\dfrac{a}{\sin 135°} = \dfrac{12}{\sin 30°} = \dfrac{c}{\sin 15°} = 2R$.

Suy ra $a = \dfrac{12}{\sin 30°} \cdot \sin 135° = 12\sqrt{2}$;

$c = \dfrac{12}{\sin 30°} \cdot \sin 15° = 24\sin 15°\ (\approx 6,21)$;

$R = \dfrac{12}{2\sin 30°} = 12$.



Hình 3.11

bài tập tương tự

Cho tam giác ABC có $b = 8, c = 5$ và $\widehat{B} = 80°$. Tính số đo các góc, bán kính đường tròn ngoại tiếp và độ dài cạnh còn lại của tam giác.

III. GIẢI TAM GIÁC VÀ ỨNG DỤNG THỰC TẾ

Việc tính độ dài các cạnh và số đo các góc của một tam giác khi biết một số yếu tố của tam giác đó được gọi là giải tam giác.

Chú ý. Áp dụng các Định lí côsin, sin và sử dụng máy tính cầm tay, ta có thể tính (gần đúng) các cạnh và các góc của một tam giác trong các trường hợp sau:

- Biết hai cạnh và góc xen giữa;
- Biết ba cạnh;
- Biết một cạnh và hai góc kề.

Ví dụ 3

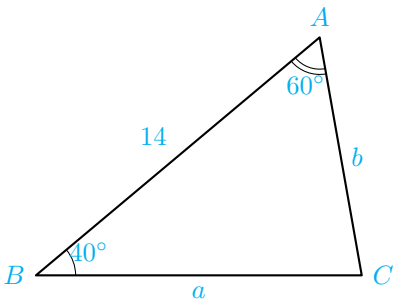
Giải tam giác ABC, biết $c = 14, \widehat{A} = 60^\circ, \widehat{B} = 40^\circ$.

Lời giải.

Ta có $\widehat{C} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 180^\circ - (60^\circ + 40^\circ) = 80^\circ$.

Áp dụng Định lí sin ta có: $\dfrac{a}{\sin 60^\circ} = \dfrac{b}{\sin 40^\circ} = \dfrac{14}{\sin 80^\circ}$

Suy ra $a = \dfrac{14 \sin 60^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 12,31; b = \dfrac{14 \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \approx 9,14$.

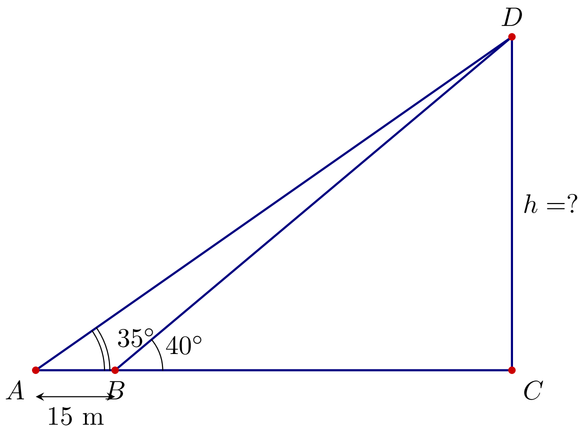


bài tập tương tự

Giải tam giác ABC, biết $b = 32, c = 45, \widehat{A} = 87^\circ$.

Ví dụ 4

Để đo chiều cao của một tòa nhà, người ta chọn hai điểm A và B thẳng hàng với chân C của tòa nhà, cách nhau 15 m. Sử dụng giác kế, từ A và B tương ứng nhìn thấy đỉnh D của tòa nhà dưới các góc 35° và 40° so với phương nằm ngang. Hỏi chiều cao của tòa nhà đo được là bao nhiêu mét?



Lời giải.

Do $\widehat{CBD} = 40^\circ, \widehat{BAD} = 35^\circ$ nên $\widehat{ADB} = 40^\circ - 35^\circ = 5^\circ$.

Áp dụng định lí sin cho tam giác ABD ta được:

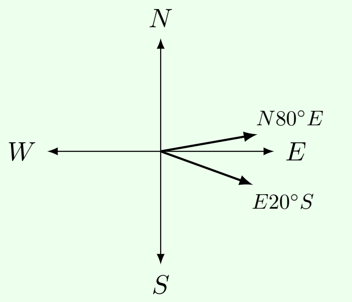
$$BD = \frac{AB}{\sin D} \cdot \sin A = \frac{15}{\sin 5^\circ} \cdot \sin 35^\circ.$$

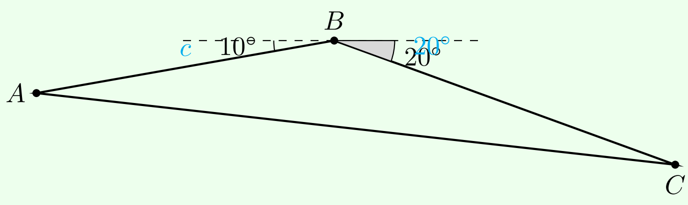
Từ đó suy ra chiều cao của tòa nhà bằng:

$$h = CD = BD \cdot \sin \widehat{CBD} = \frac{15}{\sin 5^\circ} \cdot \sin 35^\circ \cdot \sin 40^\circ \approx 63,45 \text{ (m)}.$$

bài tập tương tự

Một tàu du lịch xuất phát từ bãi biển Đồ Sơn (Hải Phòng), chạy theo hướng $N80^\circ E$ với vận tốc 20 km/h. Sau khi đi được 30 phút, tàu chuyển sang hướng $E20^\circ S$ giữ nguyên vận tốc và chạy tiếp 36 phút nữa đến đảo Cát Bà. Hỏi khi đó tàu du lịch cách vị trí xuất phát bao nhiêu kilômét?





. . . .

IV. CÔNG THỨC TÍNH DIỆN TÍCH TAM GIÁC

① $S = \dfrac{abc}{4R}$

② $S = pr = \dfrac{(a+b+c)r}{2}$

③ $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}ca\sin B = \dfrac{1}{2}ab\sin C$

④ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

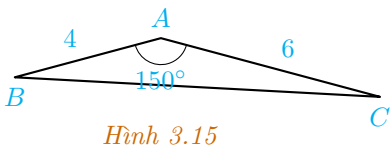
(Công thức Heron)

Ví dụ 5

Tính diện tích S của tam giác ABC có $c = 4, b = 6, \widehat{A} = 150^\circ$.

Lời giải.

Ta có: $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \sin 150^\circ = 6$.



Hình 3.15

bài tập tương tự

Tính diện tích của tam giác ABC có $b = 2, \widehat{B} = 30^\circ, \widehat{C} = 45^\circ$.

bài tập tương tự

Cho tam giác ABC có $a = 13, b = 14, c = 15$.

a) Tính $\sin A$.

b) Tính diện tích S bằng hai cách khác nhau.

....

....

....

....

....

....

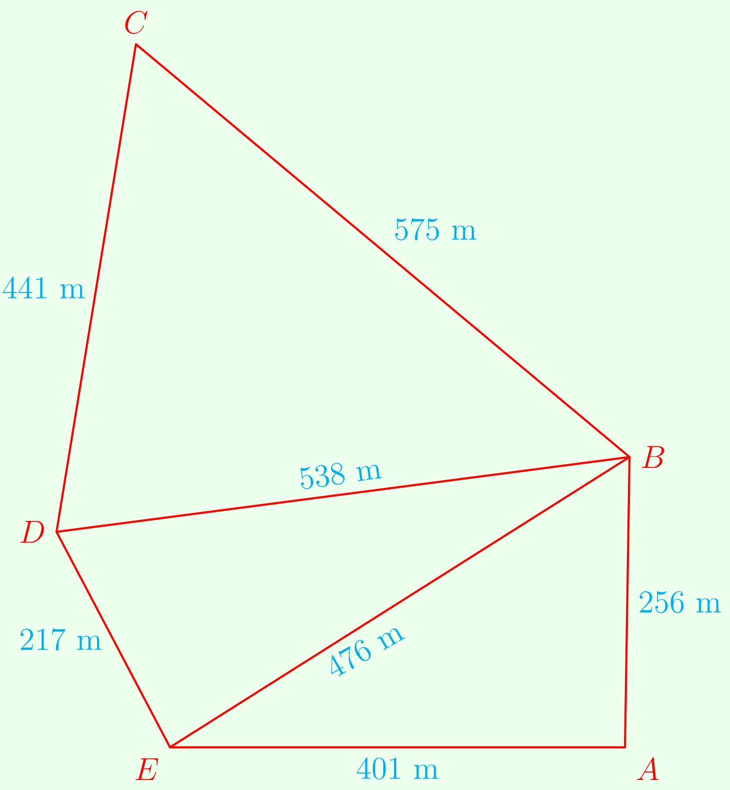
....

....

....

bài tập tương tự

Công viên Hoà Bình (Hà Nội) có dạng hình ngũ giác $ABCDE$ như Hình 3.17. Dùng chế độ tính khoảng cách giữa hai điểm của Google Maps, một người xác định được các khoảng cách như trong hình vẽ. Theo số liệu đó, em hãy tính diện tích của công viên Hoà Bình.



Hình 3.17

....
....
....
....
....
....
....
....
....

V. BÀI TẬP ÔN LUYỆN

1) Bài tập tự luận

Bài 1. Cho tam giác ABC có $a = 6, b = 5, c = 8$. Tính $\cos A, S, r$.

Bài 2. Cho tam giác ABC có $a = 10, \widehat{A} = 45^\circ, \widehat{B} = 70^\circ$. Tính R, b, c.

Bài 3. Giải tam giác ABC và tính diện tích của tam giác đó, biết $\widehat{A} = 15^\circ, \widehat{B} = 130^\circ, c = 6$.

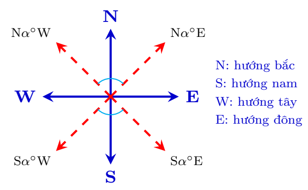
Bài 4.

Một tàu đánh cá xuất phát từ cảng A, đi theo hướng S70°E với vận tốc 70 km/h. Đi được 90 phút thì động cơ của tàu bị hỏng nên tàu trôi tự do theo hướng nam với vận tốc 8 km/h. Sau 2 giờ kể từ khi động cơ bị hỏng, tàu neo đậu được vào một hòn đảo.

a) Tính khoảng cách từ cảng A tới đảo nơi tàu neo đậu.

b) Xác định hướng từ cảng A tới đảo nơi tàu neo đậu.

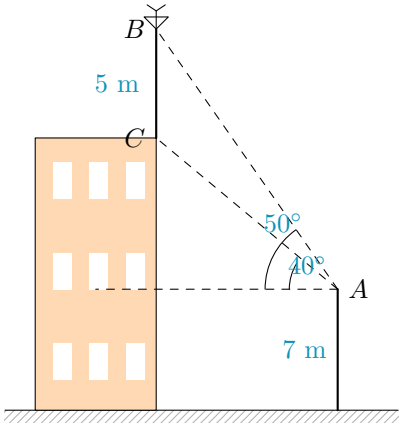
Hướng Sα°E là hướng tạo với hướng nam góc α° và tạo với hướng đông góc $90^\circ - \alpha^\circ$. Các hướng Sα°W, Nα°E, Nα°W cũng được định nghĩa tương tự.



Bài 5. Trên nóc một toà nhà có một cột ăng-ten cao 5 m. Từ một vị trí quan sát A cao 7 m so với mặt đất có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten, với các góc tương ứng là 50° và 40° so với phương nằm ngang (H.3.18).

a) Tính các góc của tam giác ABC.

b) Tính chiều cao của toà nhà.

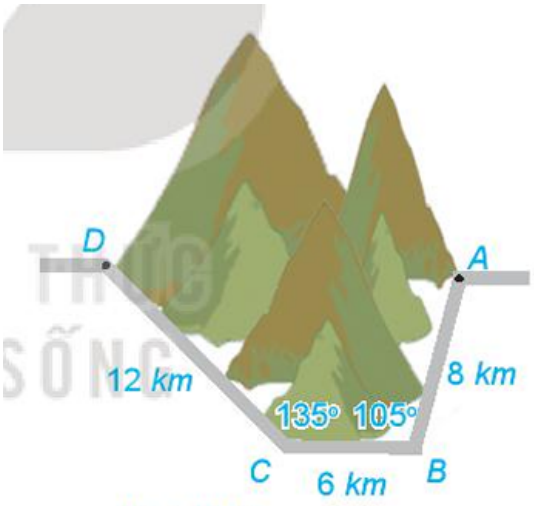


Hình 3.18

Bài 6. Từ bãi biển Vũng Chùa, Quảng Bình, ta có thể ngắm được Đảo Yến. Hãy đề xuất một cách xác định bề rộng của hòn đảo (theo chiều ta ngắm được).



Bài 7. Để tránh núi, đường giao thông hiện tại phải đi vòng như mô hình trong Hình 3.19. Để rút ngắn khoảng cách và tránh sạt lở núi, người ta dự định làm đường hầm xuyên núi, nối thẳng từ A tới D. Hỏi độ dài đường mới sẽ giảm bao nhiêu kilômét so với đường cũ?



Hình 3.19

2) Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho ΔABC có $BC = a$, $\widehat{BAC} = 120°$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC là

Ⓐ $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Ⓑ $R = \dfrac{a}{2}$. Ⓒ $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Ⓓ $R = a$.

Câu 2. Tam giác ABC có $a=8, c=3, \widehat{B}=60^\circ$. Độ dài cạnh b bằng bao nhiêu?

Ⓐ 49. Ⓑ $\sqrt{97}$. Ⓒ 7. Ⓓ $\sqrt{61}$.

Câu 3. Cho ΔABC có $a=4, c=5, \widehat{B}=150^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC.

Ⓐ $S=10$. Ⓑ $S=10\sqrt{3}$. Ⓒ $S=5$. Ⓓ $S=5\sqrt{3}$.

Câu 4. Một tam giác có ba cạnh là $52, 56, 60$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó là

Ⓐ $\dfrac{65}{4}$. Ⓑ 40. Ⓒ $32,5$. Ⓓ $65,8$.

Câu 5. Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B dưới một góc 60°. Biết $CA=200$(m), $CB=180$(m). Khoảng cách AB bằng bao nhiêu?

Ⓐ 228(m). Ⓑ $20\sqrt{91}$(m). Ⓒ 112(m). Ⓓ 168(m).

Câu 6. Tam giác ABC có góc A nhọn, $AB=5, AC=8$, diện tích bằng 12. Tính độ dài cạnh BC.

Ⓐ $2\sqrt{3}$. Ⓑ 4. Ⓒ 5. Ⓓ $3\sqrt{2}$.

Câu 7. Tam giác ABC có $AB=4, AC=6$ và trung tuyến $BM=3$. Tính độ dài cạnh BC.

Ⓐ $\sqrt{17}$. Ⓑ $2\sqrt{5}$. Ⓒ 4. Ⓓ 8.

Câu 8. Tam giác ABC có $AB=4, AC=10$ và đường trung tuyến $AM=6$. Tính độ dài cạnh BC.

Ⓐ $2\sqrt{6}$. Ⓑ 5. Ⓒ $\sqrt{22}$. Ⓓ $2\sqrt{22}$.

Câu 9. Tam giác ABC có $\widehat{A}=75^\circ, \widehat{B}=45^\circ, AC=2$. Tính cạnh AB.

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Ⓑ $\sqrt{6}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 10. Tam giác ABC có $\widehat{B}=60^\circ, \widehat{C}=45^\circ, AB=3$. Tính cạnh AC.

Ⓐ $\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$. Ⓑ $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. Ⓒ $\sqrt{6}$. Ⓓ $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Câu 11. Tam giác ABC có các góc $\widehat{A}=75^\circ, \widehat{B}=45^\circ$. Tính tỉ số $\dfrac{AB}{AC}$.

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. Ⓑ $\sqrt{6}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. Ⓓ $1,2$.

Câu 12. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết $AB=c$ và $\cos(A+B)=\dfrac{1}{3}$.

Ⓐ $\dfrac{c\sqrt{2}}{2}$. Ⓑ $\dfrac{3c\sqrt{2}}{8}$. Ⓒ $\dfrac{9c\sqrt{2}}{8}$. Ⓓ $\dfrac{3c}{2}$.

Câu 13. Tam giác ABC có các góc $\widehat{A}=105^\circ, \widehat{B}=45^\circ$. Tính tỉ số $\dfrac{AB}{AC}$.

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Ⓑ $\sqrt{2}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 14. Tam giác ABC có $AB=4, AC=5, BC=6$. Tính $\cos(B+C)$.

Ⓐ $\dfrac{1}{8}$. Ⓑ $-\dfrac{1}{4}$. Ⓒ $-0,125$. Ⓓ $0,75$.

Câu 15. Tam giác có ba cạnh lần lượt là $2, 3, 4$. Góc bé nhất của tam giác có sin bằng bao nhiêu?

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{15}}{8}$. Ⓑ $\dfrac{7}{8}$. Ⓒ $\dfrac{1}{2}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{14}}{8}$.

Câu 16. Tam giác có ba cạnh lần lượt là $3, 8, 9$. Góc lớn nhất của tam giác có cosin bằng bao nhiêu?

Ⓐ $\dfrac{1}{6}$. Ⓑ $-\dfrac{1}{6}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{17}}{4}$. Ⓓ $\dfrac{4}{25}$.

Câu 17. Hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi E là trung điểm cạnh BC, F là trung điểm cạnh AE. Tìm độ dài đoạn thẳng DF.

Ⓐ $\dfrac{a\sqrt{13}}{4}$. Ⓑ $\dfrac{a\sqrt{5}}{4}$. Ⓒ $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Ⓓ $\dfrac{3a}{4}$.

Câu 18. Tam giác ABC có $BC = 12, CA = 9, AB = 6$. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = 4$. Tính độ dài đoạn thẳng AM.

Ⓐ $2\sqrt{5}$. Ⓑ $3\sqrt{2}$. Ⓒ $\sqrt{20}$. Ⓓ $\sqrt{19}$.

Câu 19. Tam giác ABC vuông tại A có $AB = AC = a$. Điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $BM = \dfrac{BC}{3}$. Độ dài AM bằng bao nhiêu?

Ⓐ $\dfrac{a\sqrt{17}}{3}$. Ⓑ $\dfrac{a\sqrt{5}}{3}$. Ⓒ $\dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$. Ⓓ $\dfrac{2a}{3}$.

Câu 20. Tam giác ABC có $\cos(A + B) = -\dfrac{1}{8}, AC = 4, BC = 5$. Tính cạnh AB.

Ⓐ $\sqrt{46}$. Ⓑ 11. Ⓒ $5\sqrt{2}$. Ⓓ 6.

Câu 21. Tam giác ABC có $AB = 7, AC = 5$ và $\cos(B + C) = -\dfrac{1}{5}$. Tính BC.

Ⓐ $2\sqrt{15}$. Ⓑ $4\sqrt{22}$. Ⓒ $4\sqrt{15}$. Ⓓ $2\sqrt{22}$.

Câu 22. Tam giác ABC có $BC = \sqrt{5}, AC = 3$ và $\cot C = 2$. Tính cạnh AB.

Ⓐ 6. Ⓑ $\sqrt{2}$. Ⓒ $\dfrac{9}{5}$. Ⓓ $2\sqrt{10}$.

Câu 23. Tam giác ABC có $AB = 3, AC = 4$ và $\tan A = -2\sqrt{2}$. Tính cạnh BC.

Ⓐ $3\sqrt{2}$. Ⓑ $4\sqrt{3}$. Ⓒ $\sqrt{33}$. Ⓓ 7.

Câu 24. Cho tam giác ABC có cạnh $BC = a$, cạnh $CA = b$. Tam giác ABC có diện tích lớn nhất khi góc C bằng:

Ⓐ $60°$. Ⓑ $90°$. Ⓒ $150°$. Ⓓ $120°$.

Câu 25. Cho tam giác MPQ vuông tại P. Trên cạnh MQ lấy hai điểm E, F sao cho các góc $\widehat{MPE}, \widehat{EPF}, \widehat{FPQ}$ bằng nhau. Đặt $MP = q, PQ = m, PE = x, PF = y$. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào đúng?

Ⓐ $ME = EF = FQ$. Ⓑ $ME^2 = q^2 + x^2 - xq$.
Ⓒ $MF^2 = q^2 + y^2 - yq$. Ⓓ $MQ^2 = q^2 + m^2 - 2qm$.

Câu 26. Tính góc C của tam giác ABC biết $a \neq b$ và $a(a^2 - c^2) = b(b^2 - c^2)$.

Ⓐ $C = 150°$. Ⓑ $C = 120°$. Ⓒ $C = 60°$. Ⓓ $C = 30°$.

Câu 27. Cho tam giác ABC, chọn công thức đúng trong các đáp án sau:

Ⓐ $m_a^2 = \dfrac{b^2+c^2}{2} + \dfrac{a^2}{4}$.
Ⓑ $m_a^2 = \dfrac{a^2+c^2}{2} - \dfrac{b^2}{4}$.
Ⓒ $m_a^2 = \dfrac{2c^2+2b^2-a^2}{4}$.
Ⓓ $m_a^2 = \dfrac{a^2+b^2}{2} - \dfrac{c^2}{4}$.

Câu 28. Trong tam giác ABC, câu nào sau đây **đúng**?

Ⓐ $a^2 = b^2+c^2+2bc\cos A$.
Ⓑ $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A$.
Ⓒ $a^2 = b^2+c^2+bc\cos A$.
Ⓓ $a^2 = b^2+c^2-bc\cos A$.

Câu 29. Nếu tam giác ABC có $a^2 < b^2+c^2$ thì:

Ⓐ $\widehat{A}$ là góc tù..
Ⓑ $\widehat{A}$ là góc vuông..
Ⓒ $\widehat{A}$ là góc nhọn..
Ⓓ $\widehat{A}$ là góc nhỏ nhất..

Câu 30. Tam giác ABC có ba cạnh thoả mãn điều kiện $(a+b+c)(a+b-c) = 3ab$. Khi đó số đo của $\widehat{C}$ là

Ⓐ $120°$.
Ⓑ $30°$.
Ⓒ $45°$.
Ⓓ $60°$.

Câu 31. Cho tam giác ABC. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ $m_a^2+m_b^2+m_c^2 = \dfrac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)$.
Ⓑ $m_a^2+m_b^2+m_c^2 = \dfrac{4}{3}(a^2+b^2+c^2)$.
Ⓒ $m_a^2+m_b^2+m_c^2 = \dfrac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$.
Ⓓ $m_a^2+m_b^2+m_c^2 = \dfrac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$.

Câu 32. Cho tam giác ABC thỏa mãn $c = a\cos B$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

Ⓐ Tam giác ABC là tam giác cân..
Ⓑ Tam giác ABC là tam giác nhọn..
Ⓒ Tam giác ABC là tam giác vuông..
Ⓓ Tam giác ABC là tam giác tù..

Câu 33. Diện tích S của tam giác sẽ thỏa mãn hệ thức nào trong hai hệ thức sau đây?
I. $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$.
II. $16S^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$.

Ⓐ Chỉ I..
Ⓑ Chỉ II..
Ⓒ Cả I và II..
Ⓓ Không có..

Câu 34. Trong tam giác ABC, hệ thức nào sau đây sai?

Ⓐ $a = \dfrac{b\cdot\sin A}{\sin B}$.
Ⓑ $\sin C = \dfrac{c\cdot\sin A}{a}$.
Ⓒ $a = 2R\cdot\sin A$.
Ⓓ $b = R\cdot\tan B$.

Câu 35. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức $b+c = 2a$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

Ⓐ $\cos B+\cos C = 2\cos A$.
Ⓑ $\sin B+\sin C = 2\sin A$.
Ⓒ $\sin B+\sin C = \dfrac{1}{2}\sin A$.
Ⓓ $\sin B+\cos C = 2\sin A$.

Câu 36. Tam giác ABC có $A = 120°$ thì câu nào sau đây đúng?

Ⓐ $a^2 = b^2+c^2-3bc$.
Ⓑ $a^2 = b^2+c^2+bc$.

Ⓒ $a^2 = b^2 + c^2 + 3bc$.
Ⓓ $a^2 = b^2 + c^2 - bc$.

Câu 37. Trong tam giác ABC, điều kiện để hai trung tuyến vẽ từ A và B vuông góc với nhau là:

Ⓐ $2a^2 + 2b^2 = 5c^2$.
Ⓑ $3a^2 + 3b^2 = 5c^2$.
Ⓒ $2a^2 + 2b^2 = 3c^2$.
Ⓓ $a^2 + b^2 = 5c^2$.

Câu 38. Trong tam giác ABC, nếu có $a^2 = b \cdot c$ thì:

Ⓐ $\dfrac{1}{h_a^2} = \dfrac{1}{h_b} - \dfrac{1}{h_c}$.
Ⓑ $h_a^2 = h_b h_c$.
Ⓒ $\dfrac{1}{h_a^2} = \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$.
Ⓓ $\dfrac{1}{h_a^2} = \dfrac{2}{h_b} + \dfrac{2}{h_c}$.

Câu 39. Trong tam giác ABC, nếu có $2h_a = h_b + h_c$ thì:

Ⓐ $\dfrac{2}{\sin A} = \dfrac{1}{\sin B} + \dfrac{1}{\sin C}$.
Ⓑ $2\sin A = \sin B + \sin C$.
Ⓒ $\sin A = 2\sin B + 2\sin C$.
Ⓓ $\dfrac{2}{\sin A} = \dfrac{1}{\sin B} - \dfrac{1}{\sin C}$.

Câu 40. Trong tam giác ABC, câu nào sau đây **đúng**?

Ⓐ $m_a = \dfrac{b+c}{2}$.
Ⓑ $m_a > \dfrac{b+c}{2}$.
Ⓒ $m_a < \dfrac{b+c}{2}$.
Ⓓ $m_a = b + c$.

Câu 41. Tam giác ABC có các cạnh a, b, c thỏa mãn điều kiện $(a+b+c)(a+b-c) = 3ab$. Tính số đo của góc C.

Ⓐ $45°$.
Ⓑ $60°$.
Ⓒ $120°$.
Ⓓ $30°$.

Câu 42. Cho tam giác ABC, xét các bất đẳng thức sau:
I. $|a-b| < c$.
II. $a < b + c$.
III. $m_a + m_b + m_c < a + b + c$.
Hỏi khẳng định nào sau đây **đúng**?

Ⓐ Chỉ I, II..
Ⓑ Chỉ II, III..
Ⓒ Chỉ I, III..
Ⓓ Cả I, II, III..

Câu 43. Tam giác ABC có các cạnh a, b, c thỏa mãn điều kiện $b^2 + c^2 - a^2 = \sqrt{3}bc$. Tính số đo của góc A.

Ⓐ $45°$.
Ⓑ $60°$.
Ⓒ $120°$.
Ⓓ $30°$.

Câu 44. Tam giác ABC có $a\cos B = b\cos A$. Tam giác ABC là tam giác gì?

Ⓐ Tam giác vuông..
Ⓑ Tam giác đều..
Ⓒ Tam giác vuông cân..
Ⓓ Tam giác cân..

Câu 45. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AC = b$, $AB = c$. Lấy điểm M trên cạnh BC sao cho góc $\widehat{BAM} = 30°$. Tính tỉ số $\dfrac{MB}{MC}$.

Ⓐ $\dfrac{b\sqrt{3}}{3c}$.
Ⓑ $\dfrac{\sqrt{3}c}{3b}$.
Ⓒ $\dfrac{\sqrt{3}c}{b}$.
Ⓓ $\dfrac{b-c}{b+c}$.

Câu 46. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

Ⓐ Nếu $a^2 > b^2 + c^2$ thì A là góc tù..
Ⓑ Nếu tam giác ABC có một góc tù thì $a^2 > b^2 + c^2$..

Ⓒ Nếu $a^2 < b^2 + c^2$ thì A là góc nhọn..
Ⓓ Nếu $a^2 = b^2 + c^2$ thì A là góc vuông..

Câu 47. Cho tam giác ABC, mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$.
Ⓑ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.
Ⓒ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos C$.
Ⓓ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos B$.

Câu 48. Cho tam giác ABC, có độ dài ba cạnh là $BC = a, AC = b, AB = c$. Gọi m_a là độ dài đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác và S là diện tích tam giác đó. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

Ⓐ $m_a^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$.
Ⓑ $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$.
Ⓒ $S = \dfrac{abc}{4R}$.
Ⓓ $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$.

Câu 49. Cho tam giác ABC có $a = 8, b = 10$, góc C bằng $60°$. Độ dài cạnh c là?

Ⓐ $c = 3\sqrt{21}$.
Ⓑ $c = 7\sqrt{2}$.
Ⓒ $c = 2\sqrt{11}$.
Ⓓ $c = 2\sqrt{21}$.

Câu 50. Cho ΔABC có $b = 6, c = 8, \widehat{A} = 60°$. Độ dài cạnh a là:

Ⓐ $2\sqrt{13}$.
Ⓑ $3\sqrt{12}$.
Ⓒ $2\sqrt{37}$.
Ⓓ $\sqrt{20}$.

Câu 51. Cho ΔABC có $B = 60°, a = 8, c = 5$. Độ dài cạnh b bằng:

Ⓐ 7.
Ⓑ 129.
Ⓒ 49.
Ⓓ $\sqrt{129}$.

Câu 52. Cho ΔABC có $AB = 9, BC = 8, \widehat{B} = 60°$. Tính độ dài AC.

Ⓐ $\sqrt{73}$.
Ⓑ $\sqrt{217}$.
Ⓒ 8.
Ⓓ $\sqrt{113}$.

Câu 53. Cho tam giác ABC có $AB = 2, AC = 1$ và $A = 60°$. Tính độ dài cạnh BC.

Ⓐ $BC = \sqrt{2}$.
Ⓑ $BC = 1$.
Ⓒ $BC = \sqrt{3}$.
Ⓓ $BC = 2$.

Câu 54. Tam giác ABC có $a = 8, c = 3, \widehat{B} = 60°$. Độ dài cạnh b bằng bao nhiêu?

Ⓐ 49.
Ⓑ $\sqrt{97}$.
Ⓒ 7.
Ⓓ $\sqrt{61}$.

Câu 55. Tam giác ABC có $\widehat{C} = 150°, BC = \sqrt{3}, AC = 2$. Tính cạnh AB?

Ⓐ $\sqrt{13}$.
Ⓑ $\sqrt{3}$.
Ⓒ 10.
Ⓓ 1.

Câu 56. Cho $a; b; c$ là độ dài cạnh của tam giác ABC. Biết $b = 7, c = 5, \cos A = \dfrac{4}{5}$. Tính độ dài của a.

Ⓐ $3\sqrt{2}$.
Ⓑ $\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$.
Ⓒ $\dfrac{23}{8}$.
Ⓓ 6.

Câu 57. Cho $a; b; c$ là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Mệnh đề nào sau đây không đúng?

Ⓐ $a^2 < ab + ac$.
Ⓑ $a^2 + c^2 < b^2 + 2ac$.
Ⓒ $b^2 + c^2 > a^2 + 2bc$.
Ⓓ $ab + bc > b^2$.

Câu 58. Cho tam giác ABC, biết $a = 24, b = 13, c = 15$. Tính góc A?

Ⓐ $33°34'$.
Ⓑ $117°49'$.
Ⓒ $28°37'$.
Ⓓ $58°24'$.

Câu 59. Cho tam giác ABC, biết $a = 13, b = 14, c = 15$. Tính góc B?

Ⓐ $59°49'$.
Ⓑ $53°7'$.
Ⓒ $59°29'$.
Ⓓ $62°22'$.

Câu 60. Cho tam giác ABC biết độ dài ba cạnh BC, CA, AB lần lượt là a, b, c và thỏa mãn hệ thức $b(b^2-a^2)=c(c^2-a^2)$ với $b\neq c$. Khi đó, góc $\widehat{BAC}$ bằng

Ⓐ 45°. Ⓑ 60°. Ⓒ 90°. Ⓓ 120°.

Câu 61. Tam giác ABC có $AB=c, BC=a, CA=b$. Các cạnh a, b, c liên hệ với nhau bởi đẳng thức $b(b^2-a^2)=c(a^2-c^2)$. Khi đó góc $\widehat{BAC}$ bằng bao nhiêu độ.

Ⓐ 30°. Ⓑ 60°. Ⓒ 90°. Ⓓ 45°.

Câu 62. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và M là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $MA:MB:MC=1:2:3$ khi đó góc AMB bằng bao nhiêu?

Ⓐ 135°. Ⓑ 90°. Ⓒ 150°. Ⓓ 120°.

Câu 63. Cho tam giác ABC, chọn công thức đúng trong các đáp án sau:

Ⓐ $m_a^2=\dfrac{b^2+c^2}{2}+\dfrac{a^2}{4}$. Ⓑ $m_a^2=\dfrac{a^2+c^2}{2}-\dfrac{b^2}{4}$.

Ⓒ $m_a^2=\dfrac{a^2+b^2}{2}-\dfrac{c^2}{4}$. Ⓓ $m_a^2=\dfrac{2c^2+2b^2-a^2}{4}$.

Câu 64. Tam giác ABC có $AB=9$ cm, $BC=15$ cm, $AC=12$ cm. Khi đó đường trung tuyến AM của tam giác có độ dài là

Ⓐ 10 cm. Ⓑ 9 cm. Ⓒ $7,5$ cm. Ⓓ 8 cm.

Câu 65. Cho tam giác ABC có $AB=3, BC=5$ và độ dài đường trung tuyến $BM=\sqrt{13}$. Tính độ dài AC.

Ⓐ $\sqrt{11}$. Ⓑ 4. Ⓒ $\dfrac{9}{2}$. Ⓓ $\sqrt{10}$.

Câu 66. Cho ΔABC vuông ở A, biết $\widehat{C}=30^\circ, AB=3$. Tính độ dài trung tuyến AM?

Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ $\dfrac{5}{2}$. Ⓓ $\dfrac{7}{2}$.

Câu 67. Tam giác ABC có $a=6, b=4\sqrt{2}, c=2$. M là điểm trên cạnh BC sao cho $BM=3$. Độ dài đoạn AM bằng bao nhiêu?

Ⓐ $\sqrt{9}$. Ⓑ 9. Ⓒ 3. Ⓓ $\dfrac{1}{2}\sqrt{108}$.

Câu 68. Gọi $S=m_a^2+m_b^2+m_c^2$ là tổng bình phương độ dài ba trung tuyến của tam giác ABC. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

Ⓐ $S=\dfrac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$. Ⓑ $S=a^2+b^2+c^2$.

Ⓒ $S=\dfrac{3}{2}(a^2+b^2+c^2)$. Ⓓ $S=3(a^2+b^2+c^2)$.

Câu 69. Cho ΔABC có $AB=2; AC=3; \widehat{A}=60^\circ$. Tính độ dài đường phân giác trong góc A của tam giác ABC.

Ⓐ $\dfrac{12}{5}$. Ⓑ $\dfrac{6\sqrt{2}}{5}$. Ⓒ $\dfrac{6\sqrt{3}}{5}$. Ⓓ $\dfrac{6}{5}$.

Câu 70. Cho ΔABC với các cạnh $AB=c, AC=b, BC=a$. Gọi R, r, S lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và diện tích của tam giác ABC. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

Ⓐ $S=\dfrac{abc}{4R}$. Ⓑ $R=\dfrac{a}{\sin A}$.

Ⓒ $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C$. Ⓓ $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab\cos C$.

Câu 71. Cho tam giác ABC có góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$ và cạnh $BC = \sqrt{3}$. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ⓐ $R = 4$. Ⓑ $R = 1$. Ⓒ $R = 2$. Ⓓ $R = 3$.

Câu 72. Trong mặt phẳng, cho tam giác ABC có $AC = 4$ cm, góc $\widehat{A} = 60^\circ$, $\widehat{B} = 45^\circ$. Độ dài cạnh BC là

Ⓐ $2\sqrt{6}$. Ⓑ $2 + 2\sqrt{3}$. Ⓒ $2\sqrt{3} - 2$. Ⓓ $\sqrt{6}$.

Câu 73. Cho ΔABC có $AB = 5; \widehat{A} = 40^\circ; \widehat{B} = 60^\circ$. Độ dài BC gần nhất với kết quả nào?

Ⓐ $3,7$. Ⓑ $3,3$. Ⓒ $3,5$. Ⓓ $3,1$.

Câu 74. Cho tam giác ABC thoả mãn hệ thức $b + c = 2a$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

Ⓐ $\cos B + \cos C = 2\cos A$. Ⓑ $\sin B + \sin C = 2\sin A$.
Ⓒ $\sin B + \sin C = \dfrac{1}{2}\sin A$. Ⓓ $\sin B + \cos C = 2\sin A$.

Câu 75. Tam giác ABC có $a = 16,8; \widehat{B} = 56^\circ 13', \widehat{C} = 71^\circ$. Cạnh c bằng bao nhiêu?

Ⓐ $29,9$. Ⓑ $14,1$. Ⓒ $17,5$. Ⓓ $19,9$.

Câu 76. Tam giác ABC có $\widehat{A} = 68^\circ 12', \widehat{B} = 34^\circ 44', AB = 117$. Tính AC?

Ⓐ 68. Ⓑ 168. Ⓒ 118. Ⓓ 200.

Câu 77. Chọn công thức đúng trong các đáp án sau:

Ⓐ $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A$. Ⓑ $S = \dfrac{1}{2}ac\sin A$.
Ⓒ $S = \dfrac{1}{2}bc\sin B$. Ⓓ $S = \dfrac{1}{2}bc\sin B$.

Câu 78. Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng a. Góc $\widehat{BAD} = 30^\circ$. Diện tích hình thoi $ABCD$ là

Ⓐ $\dfrac{a^2}{4}$. Ⓑ $\dfrac{a^2}{2}$. Ⓒ $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Ⓓ a^2.

Câu 79. Tính diện tích tam giác ABC biết $AB = 3, BC = 5, CA = 6$.

Ⓐ $\sqrt{56}$. Ⓑ $\sqrt{48}$. Ⓒ 6. Ⓓ 8.

Câu 80. Cho ΔABC có $a = 6, b = 8, c = 10$. Diện tích S của tam giác trên là:

Ⓐ 48. Ⓑ 24. Ⓒ 12. Ⓓ 30.

Câu 81. Cho ΔABC có $a = 4, c = 5, \widehat{B} = 150^\circ$. Diện tích của tam giác là:

Ⓐ $5\sqrt{3}$. Ⓑ 5. Ⓒ 10. Ⓓ $10\sqrt{3}$.

Câu 82. Một tam giác có ba cạnh là $13, 14, 15$. Diện tích tam giác bằng bao nhiêu?

Ⓐ 84. Ⓑ $\sqrt{84}$. Ⓒ 42. Ⓓ $\sqrt{168}$.

Câu 83. Cho các điểm $A(1; -2), B(-2; 3), C(0; 4)$. Diện tích ΔABC bằng bao nhiêu?

Ⓐ $\dfrac{13}{2}$. Ⓑ 13. Ⓒ 26. Ⓓ $\dfrac{13}{4}$.

Câu 84. Cho tam giác ABC có $A(1;-1), B(3;-3), C(6;0)$. Diện tích ΔABC là

Ⓐ 12. Ⓑ 6. Ⓒ $6\sqrt{2}$. Ⓓ 9.

Câu 85. Cho tam giác ABC có $a=4, b=6, c=8$. Khi đó diện tích của tam giác là:

Ⓐ $9\sqrt{15}$. Ⓑ $3\sqrt{15}$. Ⓒ 105. Ⓓ $\dfrac{2}{3}\sqrt{15}$.

Câu 86. Cho tam giác ABC. Biết $AB=2, BC=3$ và $\widehat{ABC}=60^\circ$. Tính chu vi và diện tích tam giác ABC.

Ⓐ $5+\sqrt{7}$ và $\dfrac{3}{2}$. Ⓑ $5+\sqrt{7}$ và $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Ⓒ $5\sqrt{7}$ và $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. Ⓓ $5+\sqrt{19}$ và $\dfrac{3}{2}$.

Câu 87. Tam giác ABC có các trung tuyến $m_a=15, m_b=12, m_c=9$. Diện tích S của tam giác ABC bằng

Ⓐ 72. Ⓑ 144. Ⓒ 54. Ⓓ 108.

BẢNG ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á
1	C	2	C	3	C	4	C	5	B
6	C	7	B	8	D	9	B	10	A
11	C	12	B	13	A	14	C	15	A
16	B	17	A	18	D	19	B	20	D
21	A	22	B	23	C	24	B	25	C
26	B	27	C	28	B	29	C	30	D
31	D	32	C	33	C	34	D	35	B
36	B	37	D	38	B	39	A	40	C
41	B	42	D	43	D	44	D	45	B
46	B	47	B	48	B	49	D	50	A
51	A	52	A	53	C	54	C	55	A
56	A	57	C	58	B	59	C	60	D
61	B	62	A	63	D	64	C	65	B
66	A	67	C	68	A	69	C	70	B
71	B	72	A	73	B	74	B	75	D
76	A	77	A	78	B	79	A	80	B
81	B	82	A	83	A	84	B	85	B
86	B	87	A						

VI. LỜI GIẢI CHI TIẾT

1) Bài tập tự luận

Bài 1. Cho tam giác ABC có $a=6, b=5, c=8$. Tính $\cos A, S, r$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{5^2+8^2-6^2}{2\cdot 5\cdot 8} = \dfrac{53}{80}$.

Nửa chu vi là $p = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{6+5+8}{2} = \dfrac{19}{2}$.

Áp dụng công thức Heron ta có:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{19}{2}\left(\frac{19}{2}-6\right)\left(\frac{19}{2}-5\right)\left(\frac{19}{2}-8\right)} = \frac{3\sqrt{399}}{4}.$$

Do $S = p\cdot r \Rightarrow r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{3\sqrt{399}}{38}$.

Bài 2. Cho tam giác ABC có $a=10, \widehat{A}=45^\circ, \widehat{B}=70^\circ$. Tính R, b, c.

Hướng dẫn giải. Áp dụng định lý sin ta có $\dfrac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \dfrac{a}{2\sin A} = \dfrac{10}{2\cdot \sin 45^\circ} = 5\sqrt{2}$.

Ta có $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} \Rightarrow b = \dfrac{a\sin B}{\sin A} = \dfrac{10\cdot \sin 70^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 13,289$.

Vì $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 180^\circ - 45^\circ - 70^\circ = 65^\circ \Rightarrow c = \dfrac{a\sin C}{\sin A} = \dfrac{10\cdot \sin 65^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 12,82$.

Bài 3. Giải tam giác ABC và tính diện tích của tam giác đó, biết $\widehat{A}=15^\circ, \widehat{B}=130^\circ, c=6$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{C} = 180^\circ - 15^\circ - 130^\circ = 35^\circ$.

Áp dụng định lý sin ta có: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{c\sin A}{\sin C} = \dfrac{6\sin 15^\circ}{\sin 35^\circ} \approx 2,71 \\ b = \dfrac{c\sin B}{\sin C} = \dfrac{6\sin 130^\circ}{\sin 35^\circ} \approx 8,01 \end{cases}$

Diện tích của tam giác là: $S = \dfrac{1}{2}a\cdot c\cdot \sin B = \dfrac{1}{2}\cdot 2,71\cdot 6\cdot \sin 130^\circ \approx 6,228$.

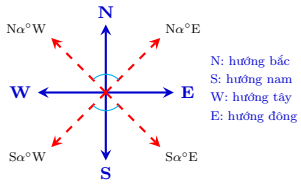
Bài 4.

Một tàu đánh cá xuất phát từ cảng A, đi theo hướng S70°E với vận tốc 70 km/h. Đi được 90 phút thì động cơ của tàu bị hỏng nên tàu trôi tự do theo hướng nam với vận tốc 8 km/h. Sau 2 giờ kể từ khi động cơ bị hỏng, tàu neo đậu được vào một hòn đảo.

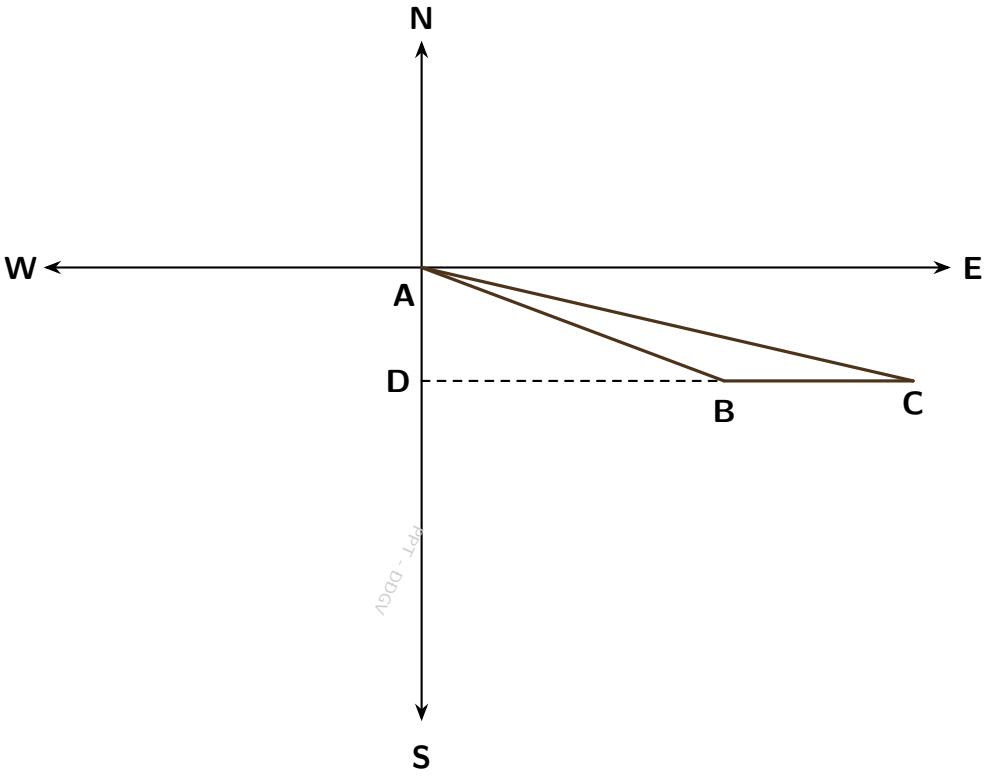
a) Tính khoảng cách từ cảng A tới đảo nơi tàu neo đậu.

b) Xác định hướng từ cảng A tới đảo nơi tàu neo đậu.

Hướng Sα°E là hướng tạo với hướng nam góc α° và tạo với hướng đông góc $90^\circ - \alpha^\circ$. Các hướng Sα°W, Nα°E, Nα°W cũng được định nghĩa tương tự.



✍ *Hướng dẫn giải.*



a) Theo giả thiết ta có: $AB = 105$ km, $BC = 16$ km.

Góc $\widehat{BAD} = 70°$, $\widehat{ABD} = 20° \Rightarrow \widehat{ABC} = 160°$.

Áp dụng định lý côsin ta có:

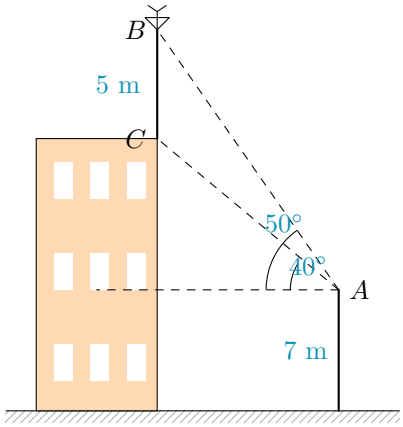
$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B} = \sqrt{105^2 + 16^2 - 2 \cdot 105 \cdot 16 \cdot \cos 160°} \approx 120,16$ km.

b) Ta có $\cos A = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} \approx 0,999 \Rightarrow \widehat{A} \approx 2°37' \Rightarrow \widehat{NAC} = 107°23'$. Vậy hướng từ cảng A tới đảo là hướng Đông.

Bài 5. Trên nóc một toà nhà có một cột ăng-ten cao 5 m. Từ một vị trí quan sát A cao 7 m so với mặt đất có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten, với các góc tương ứng là 50° và 40° so với phương nằm ngang (H.3.18).

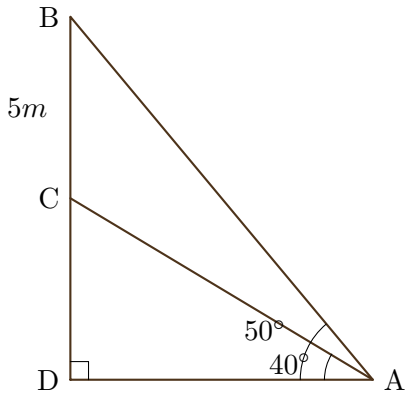
a) Tính các góc của tam giác ABC.

b) Tính chiều cao của toà nhà.



Hình 3.18

✍ *Hướng dẫn giải.*



a) Ta có $\widehat{BAC} = 50^\circ - 40^\circ = 10^\circ$.
$\widehat{ABC} = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ \Rightarrow \widehat{ACB} = 180^\circ - 40^\circ - 10^\circ = 130^\circ$.

b) Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC ta có:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow AC = \frac{5 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 10^\circ} \approx 18,51.$$

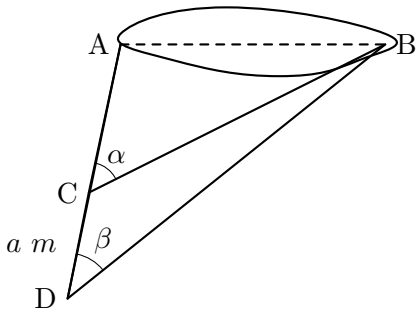
Xét tam giác ACD vuông tại D có $CD = AC \cdot \sin 40^\circ \approx 11,9$.

Vậy chiều cao của tòa nhà là: $11,9 + 7 = 18,9$ m.

Bài 6. Từ bãi biển Vũng Chùa, Quảng Bình, ta có thể ngắm được Đảo Yến. Hãy đề xuất một cách xác định bề rộng của hòn đảo (theo chiều ta ngắm được).



✍ *Hướng dẫn giải.*

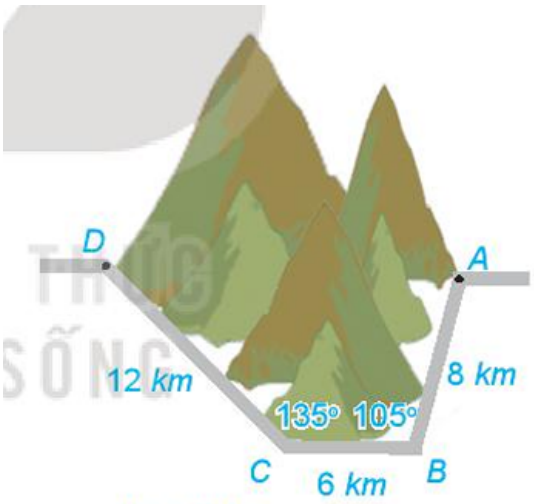


Gọi A, B là hai vị trí ngoài cùng mà ta quan sát khi nhìn từ bãi biển. Từ một điểm C trên bãi biển dùng giác kế ta xác định được góc $\widehat{ACB} = \alpha$.

Lấy điểm D trên bãi biển sao cho A, C, D thẳng hàng và có độ dài đoạn $CD = a$ mét. Ta xác định được $\widehat{ADB} = \beta$.

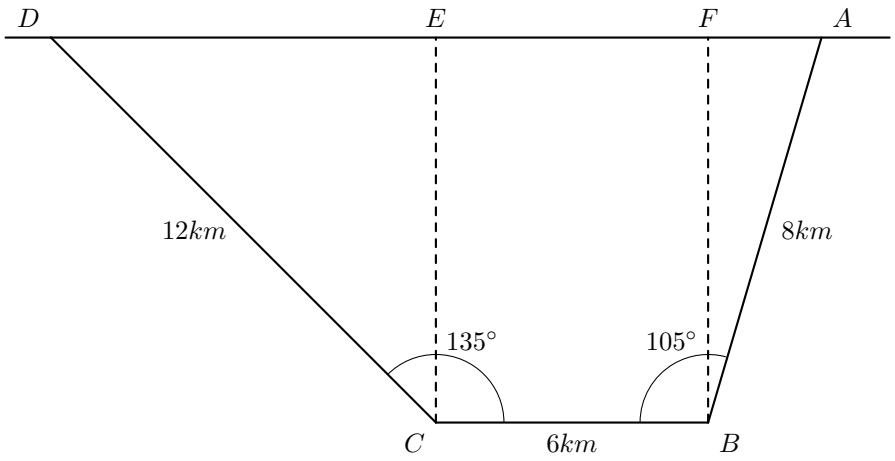
Từ đó áp dụng định lí sin cho hai tam giác BCD và ABC ta xác định được bề rộng AB của hòn đảo.

Bài 7. Để tránh núi, đường giao thông hiện tại phải đi vòng như mô hình trong Hình 3.19. Để rút ngắn khoảng cách và tránh sạt lở núi, người ta dự định làm đường hầm xuyên núi, nối thẳng từ A tới D. Hỏi độ dài đường mới sẽ giảm bao nhiêu kilômét so với đường cũ?



Hình 3.19

Hướng dẫn giải.



Dựng CE, BF vuông góc với AD.

Xét tam giác CDE vuông tại E có $\widehat{D} = \widehat{C} = 45^\circ \Rightarrow DE = CD \cdot \sin 45^\circ = 6\sqrt{2}$ km.

Xét tam giác ABF vuông tại F có $\widehat{B} = 15^\circ \Rightarrow AF = AB \cdot \sin 15^\circ = (2\sqrt{6} - 2\sqrt{2})$ km.

Mặt khác $EF = BC = 6$ km.

$\Rightarrow AD = DE + EF + FA = 6 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{6} \approx 16,56$ km.

Vậy độ dài đường mới sẽ giảm $9,44$ km so với đường cũ.

2) Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho ΔABC có $BC = a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC là

Ⓐ $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Ⓑ $R = \dfrac{a}{2}$. Ⓒ $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Ⓓ $R = a$.

Hướng dẫn giải. **Chọn C**

Theo định lý sin trong tam giác ta có $2R = \dfrac{BC}{\sin \widehat{BAC}} \Rightarrow R = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a}{\sin 120^\circ} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 2. Tam giác ABC có $a = 8, c = 3, \widehat{B} = 60^\circ$. Độ dài cạnh b bằng bao nhiêu?

Ⓐ 49. Ⓑ $\sqrt{97}$. Ⓒ 7. Ⓓ $\sqrt{61}$.

Hướng dẫn giải. **Chọn C**

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B = 8^2 + 3^2 - 2 \cdot 8 \cdot 3\cos 60^\circ = 49 \Rightarrow b = 7$.

Câu 3. Cho ΔABC có $a = 4, c = 5, \widehat{B} = 150^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC.

Ⓐ $S = 10$. Ⓑ $S = 10\sqrt{3}$. Ⓒ $S = 5$. Ⓓ $S = 5\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải. **Chọn C**

Diện tích tam giác ABC là $S = \dfrac{1}{2}ac\sin \widehat{B} = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5\sin 150^\circ = 5$.

Câu 4. Một tam giác có ba cạnh là $52, 56, 60$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó là

Ⓐ $\dfrac{65}{4}$. Ⓑ 40. Ⓒ $32,5$. Ⓓ $65,8$.

Hướng dẫn giải. **Chọn C**

Ta có: $p = \dfrac{52 + 56 + 60}{2} = 84$.

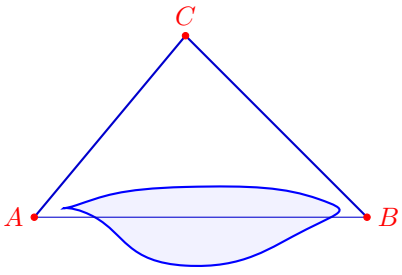
Áp dụng hệ thức Hê-rông ta có: $S = \sqrt{84(84-52)(84-56)(84-60)} = 1344$.

Mặt khác $S = \dfrac{abc}{4R} \Rightarrow R = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{52 \cdot 56 \cdot 60}{4 \cdot 1344} = 32,5$.

Câu 5. Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B dưới một góc 60°. Biết $CA = 200$(m), $CB = 180$(m). Khoảng cách AB bằng bao nhiêu?

Ⓐ 228(m). Ⓑ $20\sqrt{91}$(m). Ⓒ 112(m). Ⓓ 168(m).

Hướng dẫn giải.



Chọn B

$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA \cdot CB \cdot \cos 60^\circ = 36400 \Rightarrow AB = 20\sqrt{91}$(m).

Câu 6. Tam giác ABC có góc A nhọn, $AB = 5, AC = 8$, diện tích bằng 12. Tính độ dài cạnh BC.

Ⓐ $2\sqrt{3}$. Ⓑ 4. Ⓒ 5. Ⓓ $3\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải. **Chọn C**

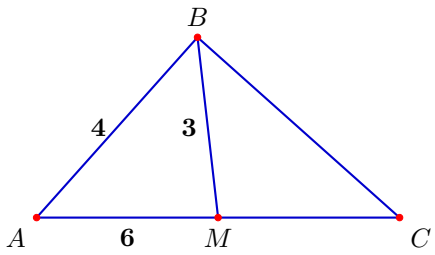
Ta có: $S=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\cdot \sin A\Rightarrow \sin A=\dfrac{2S}{AB\cdot AC}=\dfrac{2\cdot 12}{5\cdot 8}=\dfrac{3}{5}\Rightarrow \widehat{A}\approx 36^\circ 52'12''$.

$BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot \cos A=5^2+8^2-2\cdot 5\cdot 8\cdot \cos 36^\circ 52'12''\approx 25\Rightarrow BC\approx 5$.

Câu 7. Tam giác ABC có $AB=4, AC=6$ và trung tuyến $BM=3$. Tính độ dài cạnh BC.

Ⓐ $\sqrt{17}$. Ⓑ $2\sqrt{5}$. Ⓒ 4. Ⓓ 8.

Hướng dẫn giải.



Chọn B

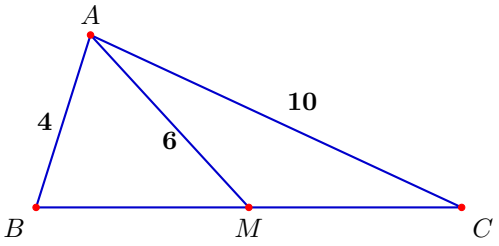
Ta có: $BM^2=\dfrac{AB^2+BC^2}{2}-\dfrac{AC^2}{4}\Rightarrow BC^2=2\left(BM^2+\dfrac{AC^2}{4}\right)-AB^2$

$=2\left(3^2+\dfrac{6^2}{4}\right)-4^2=20\Rightarrow BC=2\sqrt{5}$.

Câu 8. Tam giác ABC có $AB=4, AC=10$ và đường trung tuyến $AM=6$. Tính độ dài cạnh BC.

Ⓐ $2\sqrt{6}$. Ⓑ 5. Ⓒ $\sqrt{22}$. Ⓓ $2\sqrt{22}$.

Hướng dẫn giải.



Chọn D

Ta có: $AM^2=\dfrac{AC^2+AB^2}{2}-\dfrac{BC^2}{4}\Rightarrow BC^2=4\left(\dfrac{AC^2+AB^2}{2}-AM^2\right)=4\left(\dfrac{10^2+4^2}{2}-6^2\right)=88\Rightarrow BC=2\sqrt{22}$.

Câu 9. Tam giác ABC có $\widehat{A}=75^\circ, \widehat{B}=45^\circ, AC=2$. Tính cạnh AB.

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Ⓑ $\sqrt{6}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải. **Chọn B**

Ta có: $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}\Rightarrow AB=c=\dfrac{b\cdot \sin C}{\sin B}=\dfrac{AC\cdot \sin C}{\sin B}=\dfrac{2\cdot \sin(180^\circ-75^\circ-45^\circ)}{\sin 45^\circ}=\sqrt{6}$.

Câu 10. Tam giác ABC có $\widehat{B}=60^\circ, \widehat{C}=45^\circ, AB=3$. Tính cạnh AC.

Ⓐ $\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$. Ⓑ $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. Ⓒ $\sqrt{6}$. Ⓓ $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải. **Chọn A**

Ta có: $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}\Rightarrow AC=b=\dfrac{c\cdot\sin B}{\sin C}=\dfrac{AB\cdot\sin B}{\sin C}=\dfrac{3\cdot\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}=\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$.

Câu 11. Tam giác ABC có các góc $\widehat{A}=75^\circ,\widehat{B}=45^\circ$. Tính tỉ số $\dfrac{AB}{AC}$.

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. Ⓑ $\sqrt{6}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. Ⓓ $1,2$.

Hướng dẫn giải. **Chọn C**

Ta có: $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}\Rightarrow\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{c}{b}=\dfrac{\sin C}{\sin B}=\dfrac{\sin(180^\circ-75^\circ-45^\circ)}{\sin 45^\circ}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 12. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết $AB=c$ và $\cos(A+B)=\dfrac{1}{3}$.

Ⓐ $\dfrac{c\sqrt{2}}{2}$. Ⓑ $\dfrac{3c\sqrt{2}}{8}$. Ⓒ $\dfrac{9c\sqrt{2}}{8}$. Ⓓ $\dfrac{3c}{2}$.

Hướng dẫn giải. **Chọn B**

Ta có $\cos C=-\cos(A+B)=-\dfrac{1}{3}$.

Do đó $\sin C=\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

$\dfrac{AB}{\sin C}=2R\Rightarrow R=\dfrac{AB}{2\sin C}=\dfrac{3\sqrt{2}c}{8}$.

Câu 13. Tam giác ABC có các góc $\widehat{A}=105^\circ,\widehat{B}=45^\circ$. Tính tỉ số $\dfrac{AB}{AC}$.

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Ⓑ $\sqrt{2}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Hướng dẫn giải. **Chọn A**

Ta có: $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}\Rightarrow\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{c}{b}=\dfrac{\sin C}{\sin B}=\dfrac{\sin(180^\circ-105^\circ-45^\circ)}{\sin 45^\circ}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 14. Tam giác ABC có $AB=4,AC=5,BC=6$. Tính $\cos(B+C)$.

Ⓐ $\dfrac{1}{8}$. Ⓑ $-\dfrac{1}{4}$. Ⓒ $-0,125$. Ⓓ $0,75$.

Hướng dẫn giải. **Chọn C**

Ta có $c=AB=4,b=AC=5,a=BC=6$.

Tính $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{8}$.

Để ý $\cos(B+C)=-\cos A=-\dfrac{1}{8}=-0,125$.

Câu 15. Tam giác có ba cạnh lần lượt là $2,3,4$. Góc bé nhất của tam giác có sin bằng bao nhiêu?

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{15}}{8}$. Ⓑ $\dfrac{7}{8}$. Ⓒ $\dfrac{1}{2}$. Ⓓ $\dfrac{\sqrt{14}}{8}$.

✍ *Hướng dẫn giải.* **Chọn A**

Góc bé nhất ứng với cạnh có số đo bé nhất.

Giả sử $a=2, b=3, c=4$. Ta có $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{7}{8}$.

Do đó $\sin A=\sqrt{1-\left(\dfrac{7}{8}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$.

Câu 16. Tam giác có ba cạnh lần lượt là $3, 8, 9$. Góc lớn nhất của tam giác có cosin bằng bao nhiêu?

Ⓐ $\dfrac{1}{6}$. Ⓑ $-\dfrac{1}{6}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{17}}{4}$. Ⓓ $\dfrac{4}{25}$.

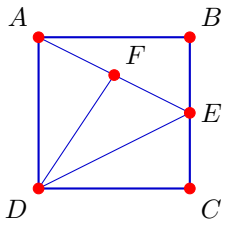
✍ *Hướng dẫn giải.* **Chọn B**

Góc lớn nhất tương ứng với cạnh lớn nhất: $\cos\alpha=\dfrac{3^2+8^2-9^2}{2\cdot 3\cdot 8}=-\dfrac{1}{6}$.

Câu 17. Hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi E là trung điểm cạnh BC, F là trung điểm cạnh AE. Tìm độ dài đoạn thẳng DF.

Ⓐ $\dfrac{a\sqrt{13}}{4}$. Ⓑ $\dfrac{a\sqrt{5}}{4}$. Ⓒ $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Ⓓ $\dfrac{3a}{4}$.

✍ *Hướng dẫn giải.*



Chọn A

Ta có: $AE=DE=\sqrt{a^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

Dùng công thức độ dài trung tuyến trong tam giác ADE:

$$DF^2=\frac{DA^2+DE^2}{2}-\frac{AE^2}{4}=\frac{a^2+\dfrac{5a^2}{4}}{2}-\frac{5a^2}{16}=\frac{13a^2}{16}\Rightarrow DF=\frac{a\sqrt{13}}{4}.$$

Câu 18. Tam giác ABC có $BC=12, CA=9, AB=6$. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM=4$. Tính độ dài đoạn thẳng AM.

Ⓐ $2\sqrt{5}$. Ⓑ $3\sqrt{2}$. Ⓒ $\sqrt{20}$. Ⓓ $\sqrt{19}$.

✍ *Hướng dẫn giải.* **Chọn D**

$\cos B=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\dfrac{6^2+12^2-9^2}{2\cdot 6\cdot 12}=\dfrac{99}{144}=\dfrac{11}{16}$.

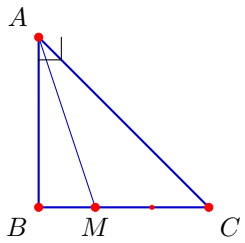
Trong tam giác ABM:

$AM = \sqrt{AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cdot \cos B} = \sqrt{6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \dfrac{11}{16}} = \sqrt{36 + 16 - 33} = \sqrt{19}$.

Câu 19. Tam giác ABC vuông tại A có $AB = AC = a$. Điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $BM = \dfrac{BC}{3}$. Độ dài AM bằng bao nhiêu?

Ⓐ $\dfrac{a\sqrt{17}}{3}$. Ⓑ $\dfrac{a\sqrt{5}}{3}$. Ⓒ $\dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$. Ⓓ $\dfrac{2a}{3}$.

Hướng dẫn giải.



Chọn B

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow BM = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Tam giác ABC vuông cân tại A nên $\widehat{B} = 45^\circ$.

$AM = \sqrt{AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cdot \cos 45^\circ} = \sqrt{a^2 + \dfrac{2a^2}{9} - 2a \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{3}$.

Câu 20. Tam giác ABC có $\cos(A + B) = -\dfrac{1}{8}, AC = 4, BC = 5$. Tính cạnh AB.

Ⓐ $\sqrt{46}$. Ⓑ 11. Ⓒ $5\sqrt{2}$. Ⓓ 6.

Hướng dẫn giải. **Chọn D**

Vì $A + B + C = 180^\circ$ nên $\cos C = -\cos(A + B) = \dfrac{1}{8}$.

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C} = \sqrt{4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \dfrac{1}{8}} = \sqrt{16 + 25 - 5} = 6$.

Câu 21. Tam giác ABC có $AB = 7, AC = 5$ và $\cos(B + C) = -\dfrac{1}{5}$. Tính BC.

Ⓐ $2\sqrt{15}$. Ⓑ $4\sqrt{22}$. Ⓒ $4\sqrt{15}$. Ⓓ $2\sqrt{22}$.

Hướng dẫn giải. **Chọn A**

Ta có $\cos A = -\cos(B + C) = \dfrac{1}{5}$.

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A} = \sqrt{7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \dfrac{1}{5}} = \sqrt{49 + 25 - 14} = \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$.

Câu 22. Tam giác ABC có $BC = \sqrt{5}, AC = 3$ và $\cot C = 2$. Tính cạnh AB.

Ⓐ 6. Ⓑ $\sqrt{2}$. Ⓒ $\dfrac{9}{5}$. Ⓓ $2\sqrt{10}$.

Hướng dẫn giải. **Chọn B**

$\cot C = 2 \Rightarrow \tan C = \dfrac{1}{2}$. Vì $\cot C > 0$ nên C nhọn.

$\cos^2 C = \dfrac{1}{1+\tan^2 C} = \dfrac{1}{1+1/4} = \dfrac{4}{5} \Rightarrow \cos C = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{5})^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{5}}} = \sqrt{9+5-12} = \sqrt{2}$.

Câu 23. Tam giác ABC có $AB = 3, AC = 4$ và $\tan A = -2\sqrt{2}$. Tính cạnh BC.

Ⓐ $3\sqrt{2}$. Ⓑ $4\sqrt{3}$. Ⓒ $\sqrt{33}$. Ⓓ 7.

Hướng dẫn giải. **Chọn C**

$\tan A = -2\sqrt{2} < 0 \Rightarrow A$ là góc tù.

$\cos^2 A = \dfrac{1}{1+\tan^2 A} = \dfrac{1}{1+8} = \dfrac{1}{9} \Rightarrow \cos A = -\dfrac{1}{3}$.

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A} = \sqrt{3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \left(-\dfrac{1}{3}\right)} = \sqrt{9+16+8} = \sqrt{33}$.

Câu 24. Cho tam giác ABC có cạnh $BC = a$, cạnh $CA = b$. Tam giác ABC có diện tích lớn nhất khi góc C bằng:

Ⓐ $60°$. Ⓑ $90°$. Ⓒ $150°$. Ⓓ $120°$.

Hướng dẫn giải. **Chọn B**

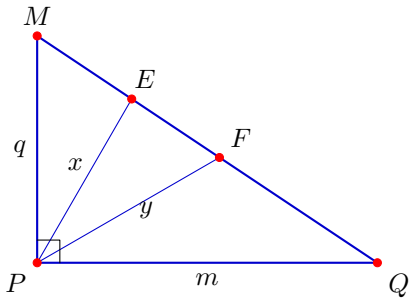
Ta có diện tích $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C$. Vì a, b không đổi nên S lớn nhất khi $\sin C$ lớn nhất.

$\sin C \le 1$, dấu bằng xảy ra khi $C = 90°$.

Câu 25. Cho tam giác MPQ vuông tại P. Trên cạnh MQ lấy hai điểm E, F sao cho các góc $\widehat{MPE}, \widehat{EPF}, \widehat{FPQ}$ bằng nhau. Đặt $MP = q, PQ = m, PE = x, PF = y$. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào đúng?

Ⓐ $ME = EF = FQ$. Ⓑ $ME^2 = q^2 + x^2 - xq$.
Ⓒ $MF^2 = q^2 + y^2 - yq$. Ⓓ $MQ^2 = q^2 + m^2 - 2qm$.

Hướng dẫn giải.



Chọn C

Các góc bằng nhau và tổng bằng 90° nên mỗi góc bằng 30°.

Suy ra $\widehat{MPF} = \widehat{MPE} + \widehat{EPF} = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$.

Trong tam giác MPF:

$MF^2 = MP^2 + PF^2 - 2 \cdot MP \cdot PF \cdot \cos 60^\circ = q^2 + y^2 - 2qy \cdot \dfrac{1}{2} = q^2 + y^2 - yq.$

Câu 26. Tính góc C của tam giác ABC biết $a \neq b$ và $a(a^2 - c^2) = b(b^2 - c^2)$.

Ⓐ $C = 150^\circ$. Ⓑ $C = 120^\circ$. Ⓒ $C = 60^\circ$. Ⓓ $C = 30^\circ$.

Hướng dẫn giải. **Chọn B**

Ta có: $a^3 - ac^2 = b^3 - bc^2 \Leftrightarrow (a^3 - b^3) - c^2(a - b) = 0$

$\Leftrightarrow (a - b)(a^2 + ab + b^2) - c^2(a - b) = 0$

Vì $a \neq b$ nên $a^2 + ab + b^2 - c^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 = -ab$.

$\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \dfrac{-ab}{2ab} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow C = 120^\circ$.

Câu 27. Cho tam giác ABC, chọn công thức đúng trong các đáp án sau:

Ⓐ $m_a^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} + \dfrac{a^2}{4}$. Ⓑ $m_a^2 = \dfrac{a^2 + c^2}{2} - \dfrac{b^2}{4}$.

Ⓒ $m_a^2 = \dfrac{2c^2 + 2b^2 - a^2}{4}$. Ⓓ $m_a^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{2} - \dfrac{c^2}{4}$.

Hướng dẫn giải. **Chọn C**

Theo công thức đường trung tuyến ta có $m_a^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$.

Câu 28. Trong tam giác ABC, câu nào sau đây **đúng**?

Ⓐ $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$. Ⓑ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

Ⓒ $a^2 = b^2 + c^2 + bc\cos A$. Ⓓ $a^2 = b^2 + c^2 - bc\cos A$.

Hướng dẫn giải. **Chọn B**

Áp dụng định lí hàm số cos tại đỉnh A ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

Câu 29. Nếu tam giác ABC có $a^2 < b^2 + c^2$ thì:

Ⓐ $\widehat{A}$ là góc tù.. Ⓑ $\widehat{A}$ là góc vuông..

Ⓒ $\widehat{A}$ là góc nhọn.. Ⓓ $\widehat{A}$ là góc nhỏ nhất..

Hướng dẫn giải. **Chọn C**

Ta có $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. Do $a^2 < b^2 + c^2$ nên $b^2 + c^2 - a^2 > 0 \Rightarrow \cos A > 0 \Rightarrow \widehat{A}$ là góc nhọn.

Câu 30. Tam giác ABC có ba cạnh thoả mãn điều kiện $(a+b+c)(a+b-c) = 3ab$. Khi đó số đo của $\widehat{C}$ là

Ⓐ 120°. Ⓑ 30°. Ⓒ 45°. Ⓓ 60°.

Hướng dẫn giải. **Chọn D**

Ta có: $(a+b+c)(a+b-c) = 3ab \Leftrightarrow (a+b)^2 - c^2 = 3ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 = ab$.

$\cos \widehat{C} = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \dfrac{ab}{2ab} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{C} = 60^\circ$.

Câu 31. Cho tam giác ABC. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\dfrac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)$.

Ⓑ $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\dfrac{4}{3}(a^2+b^2+c^2)$.

Ⓒ $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\dfrac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$.

Ⓓ $m_a^2+m_b^2+m_c^2=\dfrac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$.

Hướng dẫn giải. Sử dụng công thức trung tuyến, ta có:

$$m_a^2+m_b^2+m_c^2=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}+\frac{2c^2+2a^2-b^2}{4}+\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2).$$

Câu 32. Cho tam giác ABC thỏa mãn $c=a\cos B$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

Ⓐ Tam giác ABC là tam giác cân..

Ⓑ Tam giác ABC là tam giác nhọn..

Ⓒ Tam giác ABC là tam giác vuông..

Ⓓ Tam giác ABC là tam giác tù..

Hướng dẫn giải. **Chọn C**

Ta có: $c=a\cos B\Leftrightarrow c=a\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\Leftrightarrow 2c^2=a^2+c^2-b^2\Leftrightarrow c^2+b^2=a^2$.

Theo định lí Pi-ta-go, tam giác ABC vuông tại A.

Câu 33. Diện tích S của tam giác sẽ thỏa mãn hệ thức nào trong hai hệ thức sau đây?

I. $S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$.

II. $16S^2=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$.

Ⓐ Chỉ I.. Ⓑ Chỉ II.. Ⓒ Cả I và II.. Ⓓ Không có..

Hướng dẫn giải. **Chọn C**

Ta có: I. **đúng** là công thức Hê-rông.

$S^2=\dfrac{a+b+c}{2}\cdot\dfrac{a+b-c}{2}\cdot\dfrac{a-b+c}{2}\cdot\dfrac{-a+b+c}{2}\Leftrightarrow 16S^2=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$. Do đó II. **đúng**.

Câu 34. Trong tam giác ABC, hệ thức nào sau đây sai?

Ⓐ $a=\dfrac{b\cdot\sin A}{\sin B}$. Ⓑ $\sin C=\dfrac{c\cdot\sin A}{a}$.

Ⓒ $a=2R\cdot\sin A$. Ⓓ $b=R\cdot\tan B$.

Hướng dẫn giải. **Chọn D**

Theo định lí hàm số sin ta có: $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$.

Suy ra:

+ $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}\Rightarrow a=\dfrac{b\cdot\sin A}{\sin B}$.

+ $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}\Rightarrow\sin C=\dfrac{c\cdot\sin A}{a}$.

+ $\dfrac{a}{\sin A}=2R\Rightarrow a=2R\cdot\sin A$.

+ $\dfrac{b}{\sin B}=2R\Rightarrow\dfrac{b}{2\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}}=R\cdot\sin B\Rightarrow\dfrac{b}{2\cos B}=R\cdot\tan B$ (Sai).

Câu 35. Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức $b+c=2a$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

Ⓐ $\cos B+\cos C=2\cos A$.
Ⓑ $\sin B+\sin C=2\sin A$.
Ⓒ $\sin B+\sin C=\dfrac{1}{2}\sin A$.
Ⓓ $\sin B+\cos C=2\sin A$.

Hướng dẫn giải. **Chọn B**

Ta có $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R\Leftrightarrow\begin{cases}a=2R\sin A\\ b=2R\sin B\\ c=2R\sin C\end{cases}$.

Mà $b+c=2a\Leftrightarrow 2R\sin B+2R\sin C=4R\sin A\Leftrightarrow\sin B+\sin C=2\sin A$.

Câu 36. Tam giác ABC có $A=120^\circ$ thì câu nào sau đây đúng?

Ⓐ $a^2=b^2+c^2-3bc$.
Ⓑ $a^2=b^2+c^2+bc$.
Ⓒ $a^2=b^2+c^2+3bc$.
Ⓓ $a^2=b^2+c^2-bc$.

Hướng dẫn giải. **Chọn B**

Áp dụng định lí hàm số cos tại đỉnh A ta có: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.
$\Rightarrow a^2=b^2+c^2-2bc\cos 120^\circ\Rightarrow a^2=b^2+c^2+bc$.

Câu 37. Trong tam giác ABC, điều kiện để hai trung tuyến vẽ từ A và B vuông góc với nhau là:

Ⓐ $2a^2+2b^2=5c^2$.
Ⓑ $3a^2+3b^2=5c^2$.
Ⓒ $2a^2+2b^2=3c^2$.
Ⓓ $a^2+b^2=5c^2$.

Hướng dẫn giải. **Chọn D**

Vì hai trung tuyến vẽ từ A và B vuông góc với nhau nên ΔABG vuông tại G với G là trọng tâm tam giác ABC. Khi đó:

$$c^2=GA^2+GB^2\Leftrightarrow c^2=\frac{4}{9}\left(\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}+\frac{a^2+c^2}{2}-\frac{b^2}{4}\right)$$
$$\Leftrightarrow c^2=\frac{4}{9}\left(\frac{c^2}{2}+\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}\right)\Leftrightarrow 5c^2=a^2+b^2.$$

Câu 38. Trong tam giác ABC, nếu có $a^2=b\cdot c$ thì:

Ⓐ $\dfrac{1}{h_a^2}=\dfrac{1}{h_b}-\dfrac{1}{h_c}$.
Ⓑ $h_a^2=h_bh_c$.
Ⓒ $\dfrac{1}{h_a^2}=\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}$.
Ⓓ $\dfrac{1}{h_a^2}=\dfrac{2}{h_b}+\dfrac{2}{h_c}$.

Hướng dẫn giải. **Chọn B**

Ta có: $a^2=b\cdot c\Leftrightarrow\left(\dfrac{2S}{h_a}\right)^2=\left(\dfrac{2S}{h_b}\right)\cdot\left(\dfrac{2S}{h_c}\right)\Leftrightarrow\dfrac{1}{h_a^2}=\dfrac{1}{h_b}\cdot\dfrac{1}{h_c}\Leftrightarrow h_a^2=h_bh_c$.

Câu 39. Trong tam giác ABC, nếu có $2h_a=h_b+h_c$ thì:

Ⓐ $\dfrac{2}{\sin A}=\dfrac{1}{\sin B}+\dfrac{1}{\sin C}$.
Ⓑ $2\sin A=\sin B+\sin C$.
Ⓒ $\sin A=2\sin B+2\sin C$.
Ⓓ $\dfrac{2}{\sin A}=\dfrac{1}{\sin B}-\dfrac{1}{\sin C}$.

Hướng dẫn giải. **Chọn A**

Ta có: $2h_a=h_b+h_c\Leftrightarrow 2\cdot\dfrac{2S}{a}=\dfrac{2S}{b}+\dfrac{2S}{c}\Leftrightarrow\dfrac{2}{a}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{2R\sin A}=\dfrac{1}{2R\sin B}+\dfrac{1}{2R\sin C}\Leftrightarrow \dfrac{2}{\sin A}=\dfrac{1}{\sin B}+\dfrac{1}{\sin C}$.

Câu 40. Trong tam giác ABC, câu nào sau đây **đúng**?

Ⓐ $m_a=\dfrac{b+c}{2}$. Ⓑ $m_a>\dfrac{b+c}{2}$. Ⓒ $m_a<\dfrac{b+c}{2}$. Ⓓ $m_a=b+c$.

Hướng dẫn giải. **Chọn C**

Ta có: $m_a^2=\dfrac{b^2+c^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{(b+c)^2+(b-c)^2-a^2}{4}$.

Vì $|b-c|<a\Rightarrow (b-c)^2<a^2\Rightarrow m_a^2<\dfrac{(b+c)^2}{4}\Leftrightarrow m_a<\dfrac{b+c}{2}$.

Câu 41. Tam giác ABC có các cạnh a,b,c thỏa mãn điều kiện $(a+b+c)(a+b-c)=3ab$. Tính số đo của góc C.

Ⓐ 45°. Ⓑ 60°. Ⓒ 120°. Ⓓ 30°.

Hướng dẫn giải. **Chọn B**

Ta có: $(a+b+c)(a+b-c)=3ab\Leftrightarrow (a+b)^2-c^2=3ab\Leftrightarrow a^2+b^2-c^2=ab$.

Mà $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{ab}{2ab}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \widehat{C}=60^\circ$.

Câu 42. Cho tam giác ABC, xét các bất đẳng thức sau:

I. $|a-b|<c$.

II. $a<b+c$.

III. $m_a+m_b+m_c<a+b+c$.

Hỏi khẳng định nào sau đây **đúng**?

Ⓐ Chỉ I, II.. Ⓑ Chỉ II, III..

Ⓒ Chỉ I, III.. Ⓓ Cả I, II, III..

Hướng dẫn giải. **Chọn D**

Ta có I và II **đúng** vì đây là bất đẳng thức tam giác.

Ta có: $m_a^2=\dfrac{b^2+c^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{(b+c)^2+(b-c)^2-a^2}{4}$.

Vì $|b-c|<a\Rightarrow (b-c)^2<a^2\Rightarrow m_a^2<\dfrac{(b+c)^2}{4}\Leftrightarrow m_a<\dfrac{b+c}{2}$.

Tương tự: $m_b<\dfrac{a+c}{2}$; $m_c<\dfrac{a+b}{2}$.

Cộng vế theo vế: $m_a+m_b+m_c<a+b+c$. Vậy III **đúng**.

Câu 43. Tam giác ABC có các cạnh a,b,c thỏa mãn điều kiện $b^2+c^2-a^2=\sqrt{3}bc$. Tính số đo của góc A.

Ⓐ 45°. Ⓑ 60°. Ⓒ 120°. Ⓓ 30°.

Hướng dẫn giải. **Chọn D**

Ta có: $b^2+c^2-a^2=\sqrt{3}bc\Leftrightarrow 2bc\cos A=\sqrt{3}bc\Leftrightarrow \cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow A=30^\circ$.

Câu 44. Tam giác ABC có $a\cos B=b\cos A$. Tam giác ABC là tam giác gì?

Ⓐ Tam giác vuông.. Ⓑ Tam giác đều..

Ⓒ Tam giác vuông cân.. Ⓓ Tam giác cân..

Hướng dẫn giải. **Chọn D**

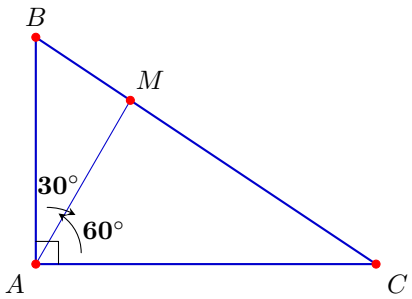
Ta có: $a\cos B = b\cos A \Leftrightarrow a\cdot\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = b\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b.$

Vậy tam giác ABC cân.

Câu 45. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AC = b$, $AB = c$. Lấy điểm M trên cạnh BC sao cho góc $\widehat{BAM} = 30^\circ$. Tính tỉ số $\dfrac{MB}{MC}$.

(A) $\dfrac{b\sqrt{3}}{3c}$. (B) $\dfrac{\sqrt{3}c}{3b}$. (C) $\dfrac{\sqrt{3}c}{b}$. (D) $\dfrac{b-c}{b+c}$.

Hướng dẫn giải.



Chọn B

Ta có $\dfrac{MB}{\sin 30^\circ} = \dfrac{AM}{\sin B} \Rightarrow MB = \dfrac{AM\cdot\sin 30^\circ}{\sin B} = \dfrac{AM}{2\sin B}.$

$\dfrac{MC}{\sin 60^\circ} = \dfrac{AM}{\sin C} \Rightarrow MC = \dfrac{AM\cdot\sin 60^\circ}{\sin C} = \dfrac{AM\sqrt{3}}{2\sin C}.$

Do đó $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{\sin C}{\sqrt{3}\sin B} = \dfrac{c}{\sqrt{3}b} = \dfrac{\sqrt{3}c}{3b}.$

Câu 46. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

(A) Nếu $a^2 > b^2 + c^2$ thì A là góc tù..
(B) Nếu tam giác ABC có một góc tù thì $a^2 > b^2 + c^2$..
(C) Nếu $a^2 < b^2 + c^2$ thì A là góc nhọn..
(D) Nếu $a^2 = b^2 + c^2$ thì A là góc vuông..

Hướng dẫn giải. **Chọn B**

Ta có: $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

Do đó:

* $a^2 > b^2 + c^2$ thì $\cos A < 0$ do đó A là góc tù (đúng).

* $a^2 < b^2 + c^2$ thì $\cos A > 0$ do đó A là góc nhọn (đúng).

* $a^2 = b^2 + c^2$ thì $\cos A = 0$ do đó A là góc vuông (đúng).

* Nếu tam giác ABC có góc B tù thì $b^2 > a^2 + c^2$; nếu góc C tù thì $c^2 > a^2 + b^2$ nên B **sai**.

Câu 47. Cho tam giác ABC, mệnh đề nào sau đây đúng?

(A) $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$. (B) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.
(C) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos C$. (D) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos B$.

Hướng dẫn giải. **Chọn B**

Theo định lý cosin trong tam giác ABC, ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

Câu 48. Cho tam giác ABC, có độ dài ba cạnh là $BC = a, AC = b, AB = c$. Gọi m_a là độ dài đường trung tuyến kẻ từ đỉnh A, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác và S là diện tích tam giác đó. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

Ⓐ $m_a^2 = \dfrac{b^2+c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$.
Ⓑ $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos A$.
Ⓒ $S = \dfrac{abc}{4R}$.
Ⓓ $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$.

Hướng dẫn giải. **Chọn B**

Theo định lý hàm số cosin trong tam giác ta có $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$. Phương án B ghi dấu cộng là sai.

Câu 49. Cho tam giác ABC có $a = 8, b = 10$, góc C bằng $60°$. Độ dài cạnh c là?

Ⓐ $c = 3\sqrt{21}$.
Ⓑ $c = 7\sqrt{2}$.
Ⓒ $c = 2\sqrt{11}$.
Ⓓ $c = 2\sqrt{21}$.

Hướng dẫn giải. **Chọn D**

Ta có: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 8^2 + 10^2 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos 60° = 84 \Rightarrow c = 2\sqrt{21}$.

Câu 50. Cho ΔABC có $b = 6, c = 8, \widehat{A} = 60°$. Độ dài cạnh a là:

Ⓐ $2\sqrt{13}$.
Ⓑ $3\sqrt{12}$.
Ⓒ $2\sqrt{37}$.
Ⓓ $\sqrt{20}$.

Hướng dẫn giải. **Chọn A**

Ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 36 + 64 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos 60° = 52 \Rightarrow a = 2\sqrt{13}$.

Câu 51. Cho ΔABC có $B = 60°, a = 8, c = 5$. Độ dài cạnh b bằng:

Ⓐ 7.
Ⓑ 129.
Ⓒ 49.
Ⓓ $\sqrt{129}$.

Hướng dẫn giải. **Chọn A**

Ta có: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos 60° = 49 \Rightarrow b = 7$.

Câu 52. Cho ΔABC có $AB = 9, BC = 8, \widehat{B} = 60°$. Tính độ dài AC.

Ⓐ $\sqrt{73}$.
Ⓑ $\sqrt{217}$.
Ⓒ 8.
Ⓓ $\sqrt{113}$.

Hướng dẫn giải. **Chọn A**

Theo định lý cosin có: $AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA \cdot BC\cos\widehat{ABC} = 73 \Rightarrow AC = \sqrt{73}$.

Câu 53. Cho tam giác ABC có $AB = 2, AC = 1$ và $A = 60°$. Tính độ dài cạnh BC.

Ⓐ $BC = \sqrt{2}$.
Ⓑ $BC = 1$.
Ⓒ $BC = \sqrt{3}$.
Ⓓ $BC = 2$.

Hướng dẫn giải. **Chọn C**

Theo định lý cosin ta có: $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 60°} = \sqrt{2^2 + 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \dfrac{1}{2}} = \sqrt{3}$.

Câu 54. Tam giác ABC có $a = 8, c = 3, \widehat{B} = 60°$. Độ dài cạnh b bằng bao nhiêu?

Ⓐ 49.
Ⓑ $\sqrt{97}$.
Ⓒ 7.
Ⓓ $\sqrt{61}$.

Hướng dẫn giải. **Chọn C**

Ta có: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B = 8^2 + 3^2 - 2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot \cos 60° = 49 \Rightarrow b = 7$.

Câu 55. Tam giác ABC có $\widehat{C} = 150^\circ, BC = \sqrt{3}, AC = 2$. Tính cạnh AB?

Ⓐ $\sqrt{13}$. Ⓑ $\sqrt{3}$. Ⓒ 10. Ⓓ 1.

Hướng dẫn giải. **Chọn A**

Theo định lý cosin trong ΔABC ta có: $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA \cdot CB \cos \widehat{C} = 13 \Rightarrow AB = \sqrt{13}$.

Câu 56. Cho $a; b; c$ là độ dài cạnh của tam giác ABC. Biết $b = 7, c = 5, \cos A = \dfrac{4}{5}$. Tính độ dài của a.

Ⓐ $3\sqrt{2}$. Ⓑ $\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$. Ⓒ $\dfrac{23}{8}$. Ⓓ 6.

Hướng dẫn giải. **Chọn A**

Áp dụng định lý cosin cho tam giác ABC ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \dfrac{4}{5} = 18$. Suy ra: $a = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Câu 57. Cho $a; b; c$ là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Mệnh đề nào sau đây không đúng?

Ⓐ $a^2 < ab + ac$. Ⓑ $a^2 + c^2 < b^2 + 2ac$.
Ⓒ $b^2 + c^2 > a^2 + 2bc$. Ⓓ $ab + bc > b^2$.

Hướng dẫn giải. **Chọn C**

Do $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos \widehat{A} \leq 2bc \Rightarrow b^2 + c^2 \leq a^2 + 2bc$ nên mệnh đề C sai.
Áp dụng bất đẳng thức tam giác ta có $a < b + c \Rightarrow a^2 < ab + ac$; đáp án A đúng.
Tương tự $a + c > b \Rightarrow ab + bc > b^2$; mệnh đề D đúng.
Ta có: $a^2 + c^2 - b^2 = 2ac \cos B < 2ac \Rightarrow a^2 + c^2 < b^2 + 2ac$; mệnh đề B đúng.

Câu 58. Cho tam giác ABC, biết $a = 24, b = 13, c = 15$. Tính góc A?

Ⓐ $33^\circ 34'$. Ⓑ $117^\circ 49'$. Ⓒ $28^\circ 37'$. Ⓓ $58^\circ 24'$.

Hướng dẫn giải. **Chọn B**

Ta có: $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{13^2 + 15^2 - 24^2}{2 \cdot 13 \cdot 15} = -\dfrac{7}{15} \Rightarrow A \approx 117^\circ 49'$.

Câu 59. Cho tam giác ABC, biết $a = 13, b = 14, c = 15$. Tính góc B?

Ⓐ $59^\circ 49'$. Ⓑ $53^\circ 7'$. Ⓒ $59^\circ 29'$. Ⓓ $62^\circ 22'$.

Hướng dẫn giải. **Chọn C**

Ta có: $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{13^2 + 15^2 - 14^2}{2 \cdot 13 \cdot 15} = \dfrac{33}{65} \Rightarrow B \approx 59^\circ 29'$.

Câu 60. Cho tam giác ABC biết độ dài ba cạnh BC, CA, AB lần lượt là a, b, c và thỏa mãn hệ thức $b(b^2 - a^2) = c(c^2 - a^2)$ với $b \neq c$. Khi đó, góc $\widehat{BAC}$ bằng

Ⓐ 45°. Ⓑ 60°. Ⓒ 90°. Ⓓ 120°.

Hướng dẫn giải. **Chọn D**

Ta có $b(b^2 - a^2) = c(c^2 - a^2) \Leftrightarrow b^3 - ba^2 = c^3 - ca^2 \Leftrightarrow b^3 - c^3 - a^2(b - c) = 0$

$\Leftrightarrow (b - c)(b^2 + bc + c^2 - a^2) = 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 = -bc$.

Mặt khác $\cos\widehat{BAC}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{-bc}{2bc}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\widehat{BAC}=120^\circ$.

Câu 61. Tam giác ABC có $AB=c, BC=a, CA=b$. Các cạnh a,b,c liên hệ với nhau bởi đẳng thức $b(b^2-a^2)=c(a^2-c^2)$. Khi đó góc $\widehat{BAC}$ bằng bao nhiêu độ.

Ⓐ 30°. Ⓑ 60°. Ⓒ 90°. Ⓓ 45°.

Hướng dẫn giải. **Chọn B**

Theo bài ra, ta có: $b(b^2-a^2)=c(a^2-c^2)\Leftrightarrow b^3-a^2b=a^2c-c^3\Leftrightarrow b^3+c^3-a^2b-a^2c=0$

$\Leftrightarrow(b+c)(b^2-bc+c^2)-a^2(b+c)=0\Leftrightarrow(b+c)(b^2-bc+c^2-a^2)=0\Leftrightarrow b^2+c^2-a^2=bc$

$\Leftrightarrow b^2+c^2-a^2=bc\Leftrightarrow\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\cos\widehat{BAC}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\widehat{BAC}=60^\circ$.

Câu 62. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và M là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $MA:MB:MC=1:2:3$ khi đó góc AMB bằng bao nhiêu?

Ⓐ 135°. Ⓑ 90°. Ⓒ 150°. Ⓓ 120°.

Hướng dẫn giải. **Chọn A**

$MB=x\Leftrightarrow MA=2x; MC=3x$ với $0<x<BC=\sqrt{2}$.

Ta có $\cos\widehat{BAM}=\dfrac{1+4x^2-x^2}{2.1.2x}=\dfrac{3x^2+1}{4x}$

$\cos\widehat{MAC}=\dfrac{1+4x^2-9x^2}{4x}=\dfrac{1-5x^2}{4x}$.

$\Rightarrow\left(\dfrac{3x^2+1}{4x}\right)^2+\left(\dfrac{1-5x^2}{4x}\right)^2=1\Rightarrow 9x^4+6x^2+1+1-10x^2+25x^4=16x^2$.

$\Rightarrow 34x^4-20x^2+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=\dfrac{5+2\sqrt{2}}{17}\\x^2=\dfrac{5-2\sqrt{2}}{17}\end{array}\right.$

$\Rightarrow\cos\widehat{AMB}=\dfrac{AM^2+BM^2-AB^2}{2AM.BM}=\dfrac{4x^2+x^2-1}{2.2x.x}=\dfrac{5x^2-1}{4x^2}=\dfrac{5\left(\dfrac{25-10\sqrt{2}}{17}\right)-1}{4x^2}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $\widehat{AMB}=135^\circ$.

Câu 63. Cho tam giác ABC, chọn công thức đúng trong các đáp án sau:

Ⓐ $m_a^2=\dfrac{b^2+c^2}{2}+\dfrac{a^2}{4}$. Ⓑ $m_a^2=\dfrac{a^2+c^2}{2}-\dfrac{b^2}{4}$.

Ⓒ $m_a^2=\dfrac{a^2+b^2}{2}-\dfrac{c^2}{4}$. Ⓓ $m_a^2=\dfrac{2c^2+2b^2-a^2}{4}$.

Hướng dẫn giải. **Chọn D**

Ta có: $m_a^2=\dfrac{b^2+c^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$.

Câu 64. Tam giác ABC có $AB=9$ cm, $BC=15$ cm, $AC=12$ cm. Khi đó đường trung tuyến AM của tam giác có độ dài là

Ⓐ 10 cm. Ⓑ 9 cm. Ⓒ 7,5 cm. Ⓓ 8 cm.

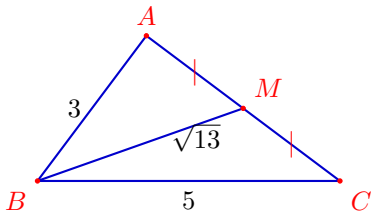
Hướng dẫn giải. **Chọn C**

Ta có $AM^2 = \dfrac{AB^2+AC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4} = \dfrac{9^2+12^2}{2} - \dfrac{15^2}{4} = \dfrac{225}{4} \Rightarrow AM = \dfrac{15}{2} = 7,5$ cm.

Câu 65. Cho tam giác ABC có $AB = 3, BC = 5$ và độ dài đường trung tuyến $BM = \sqrt{13}$. Tính độ dài AC.

Ⓐ $\sqrt{11}$. Ⓑ 4. Ⓒ $\dfrac{9}{2}$. Ⓓ $\sqrt{10}$.

Hướng dẫn giải.



Chọn B

Theo công thức tính độ dài đường trung tuyến, ta có:

$BM^2 = \dfrac{BA^2+BC^2}{2} - \dfrac{AC^2}{4} \Leftrightarrow (\sqrt{13})^2 = \dfrac{3^2+5^2}{2} - \dfrac{AC^2}{4} \Leftrightarrow AC = 4.$

Câu 66. Cho ΔABC vuông ở A, biết $\widehat{C} = 30°, AB = 3$. Tính độ dài trung tuyến AM?

Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ $\dfrac{5}{2}$. Ⓓ $\dfrac{7}{2}$.

Hướng dẫn giải. **Chọn A**

AM là trung tuyến ứng với cạnh huyền nên $AM = \dfrac{1}{2}BC = BM = MC$.

Xét ΔBAC có $\widehat{B} = 90° - 30° = 60°$.

Xét tam giác ABM có $BM = AM$ và $\widehat{B} = 60°$ suy ra ΔABM là tam giác đều. $\Rightarrow AM = AB = 3$.

Câu 67. Tam giác ABC có $a = 6, b = 4\sqrt{2}, c = 2$. M là điểm trên cạnh BC sao cho $BM = 3$. Độ dài đoạn AM bằng bao nhiêu?

Ⓐ $\sqrt{9}$. Ⓑ 9. Ⓒ 3. Ⓓ $\dfrac{1}{2}\sqrt{108}$.

Hướng dẫn giải. **Chọn C**

Ta có: Trong tam giác ABC có $a = 6 \Rightarrow BC = 6$ mà $BM = 3$ suy ra M là trung điểm BC.

Suy ra: $AM^2 = m_a^2 = \dfrac{b^2+c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4} = 9 \Rightarrow AM = 3$.

Câu 68. Gọi $S = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$ là tổng bình phương độ dài ba trung tuyến của tam giác ABC. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

Ⓐ $S = \dfrac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$. Ⓑ $S = a^2+b^2+c^2$.

Ⓒ $S = \dfrac{3}{2}(a^2+b^2+c^2)$. Ⓓ $S = 3(a^2+b^2+c^2)$.

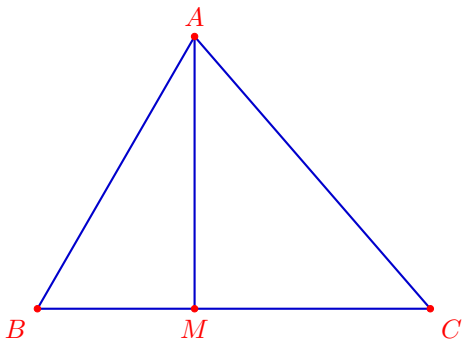
Hướng dẫn giải. **Chọn A**

Ta có: $S = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \dfrac{b^2+c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{a^2+c^2}{2} - \dfrac{b^2}{4} + \dfrac{a^2+b^2}{2} - \dfrac{c^2}{4} = \dfrac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$.

Câu 69. Cho ΔABC có $AB = 2; AC = 3; \widehat{A} = 60^\circ$. Tính độ dài đường phân giác trong góc A của tam giác ABC.

Ⓐ $\dfrac{12}{5}$. Ⓑ $\dfrac{6\sqrt{2}}{5}$. Ⓒ $\dfrac{6\sqrt{3}}{5}$. Ⓓ $\dfrac{6}{5}$.

Hướng dẫn giải.



Chọn C

CÁCH 1: Gọi M là chân đường phân giác góc A.

Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A = 7 \Rightarrow BC = \sqrt{7}$.

Lại có $\dfrac{BM}{CM} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow BM = \dfrac{2\sqrt{7}}{5}$.

Áp dụng định lý cosin trong tam giác ABM ta được:

$$AM^2 = AB^2+BM^2-2AB.BM.\cos\widehat{ABC} = AB^2+BM^2-2AB.BM.\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2.AB.BC} = \frac{108}{25}$$

$$\Rightarrow AM = \frac{6\sqrt{3}}{5}.$$

CÁCH 2: Gọi M là chân đường phân giác trong của góc A.

Vì đoạn thẳng AM chia tam giác ABC thành hai phần nên ta có:

$$S_{ABC} = S_{ABM} + S_{ACM} \Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC} = \frac{1}{2}AB.AM.\sin\widehat{BAM} + \frac{1}{2}AC.AM.\sin\widehat{MAC}$$

$$\Leftrightarrow AM = \frac{AB.AC.\sin 60^\circ}{(AB+AC).\sin 30^\circ} = \frac{6\sqrt{3}}{5}.$$

Câu 70. Cho ΔABC với các cạnh $AB = c, AC = b, BC = a$. Gọi R, r, S lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và diện tích của tam giác ABC. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

Ⓐ $S = \dfrac{abc}{4R}$. Ⓑ $R = \dfrac{a}{\sin A}$.

Ⓒ $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C$. Ⓓ $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab\cos C$.

Hướng dẫn giải. **Chọn B**

Theo định lí Sin trong tam giác, ta có $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$. Do đó $R = \dfrac{a}{2\sin A}$. Phát biểu B là sai.

Câu 71. Cho tam giác ABC có góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$ và cạnh $BC = \sqrt{3}$. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ⓐ $R = 4$. Ⓑ $R = 1$. Ⓒ $R = 2$. Ⓓ $R = 3$.

Hướng dẫn giải. **Chọn B**

Ta có: $\dfrac{BC}{\sin A} = 2R \Leftrightarrow R = \dfrac{BC}{2\sin A} = \dfrac{\sqrt{3}}{2 \cdot \sin 60^\circ} = \dfrac{\sqrt{3}}{2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}} = 1.$

Câu 72. Trong mặt phẳng, cho tam giác ABC có $AC = 4$ cm, góc $\widehat{A} = 60^\circ$, $\widehat{B} = 45^\circ$. Độ dài cạnh BC là

Ⓐ $2\sqrt{6}$. Ⓑ $2 + 2\sqrt{3}$. Ⓒ $2\sqrt{3} - 2$. Ⓓ $\sqrt{6}$.

Hướng dẫn giải. **Chọn A**

Ta có $\dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{AC}{\sin B} \Leftrightarrow BC = \dfrac{AC \cdot \sin A}{\sin B} = \dfrac{4 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{6}.$

Câu 73. Cho ΔABC có $AB = 5; \widehat{A} = 40^\circ; \widehat{B} = 60^\circ$. Độ dài BC gần nhất với kết quả nào?

Ⓐ $3,7$. Ⓑ $3,3$. Ⓒ $3,5$. Ⓓ $3,1$.

Hướng dẫn giải. **Chọn B**

$\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^\circ - 40^\circ - 60^\circ = 80^\circ$.

Áp dụng định lý sin: $\dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{AB}{\sin C} \Rightarrow BC = \dfrac{AB}{\sin C} \cdot \sin A = \dfrac{5}{\sin 80^\circ} \cdot \sin 40^\circ \approx 3,3.$

Câu 74. Cho tam giác ABC thoả mãn hệ thức $b + c = 2a$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

Ⓐ $\cos B + \cos C = 2\cos A$. Ⓑ $\sin B + \sin C = 2\sin A$.

Ⓒ $\sin B + \sin C = \dfrac{1}{2}\sin A$. Ⓓ $\sin B + \cos C = 2\sin A$.

Hướng dẫn giải. **Chọn B**

Ta có: $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow \begin{cases} a = 2R\sin A \\ b = 2R\sin B \\ c = 2R\sin C \end{cases}$

Mặt khác: $b + c = 2a \Leftrightarrow 2R\sin B + 2R\sin C = 2(2R\sin A) \Leftrightarrow \sin B + \sin C = 2\sin A$.

Câu 75. Tam giác ABC có $a = 16,8; \widehat{B} = 56^\circ 13', \widehat{C} = 71^\circ$. Cạnh c bằng bao nhiêu?

Ⓐ $29,9$. Ⓑ $14,1$. Ⓒ $17,5$. Ⓓ $19,9$.

Hướng dẫn giải. **Chọn D**

Ta có: Trong tam giác ABC: $\widehat{A} = 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C}) = 180^\circ - (56^\circ 13' + 71^\circ) = 52^\circ 47'$.

Mặt khác $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C} \Rightarrow c = \dfrac{a\sin C}{\sin A} = \dfrac{16,8\sin 71^\circ}{\sin 52^\circ 47'} \approx 19,9.$

Câu 76. Tam giác ABC có $\widehat{A} = 68^\circ 12', \widehat{B} = 34^\circ 44', AB = 117$. Tính AC?

Ⓐ 68. Ⓑ 168. Ⓒ 118. Ⓓ 200.

Hướng dẫn giải. **Chọn A**

Ta có: Trong tam giác ABC: $\widehat{C} = 180^\circ - (68^\circ 12' + 34^\circ 44') = 77^\circ 4'$.

Mặt khác $\dfrac{AC}{\sin B} = \dfrac{AB}{\sin C} \Rightarrow AC = \dfrac{AB \sin B}{\sin C} = \dfrac{117 \sin 34^\circ 44'}{\sin 77^\circ 4'} \approx 68$.

Câu 77. Chọn công thức đúng trong các đáp án sau:

Ⓐ $S = \dfrac{1}{2} bc \sin A$. Ⓑ $S = \dfrac{1}{2} ac \sin A$.

Ⓒ $S = \dfrac{1}{2} bc \sin B$. Ⓓ $S = \dfrac{1}{2} bc \sin B$.

Hướng dẫn giải. **Chọn A**

Ta có: $S = \dfrac{1}{2} bc \sin A = \dfrac{1}{2} ac \sin B = \dfrac{1}{2} ab \sin C$.

Câu 78. Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng a. Góc $\widehat{BAD} = 30^\circ$. Diện tích hình thoi $ABCD$ là

Ⓐ $\dfrac{a^2}{4}$. Ⓑ $\dfrac{a^2}{2}$. Ⓒ $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Ⓓ a^2.

Hướng dẫn giải. **Chọn B**

Ta có $S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD} = a \cdot a \cdot \sin 30^\circ = \dfrac{1}{2} a^2$.

Câu 79. Tính diện tích tam giác ABC biết $AB = 3, BC = 5, CA = 6$.

Ⓐ $\sqrt{56}$. Ⓑ $\sqrt{48}$. Ⓒ 6. Ⓓ 8.

Hướng dẫn giải. **Chọn A**

Ta có: $p = \dfrac{AB + AC + BC}{2} = \dfrac{3 + 5 + 6}{2} = 7$.

Vậy diện tích tam giác ABC là: $S = \sqrt{p(p - AB)(p - AC)(p - BC)} = \sqrt{7(7 - 3)(7 - 6)(7 - 5)} = \sqrt{56}$.

Câu 80. Cho ΔABC có $a = 6, b = 8, c = 10$. Diện tích S của tam giác trên là:

Ⓐ 48. Ⓑ 24. Ⓒ 12. Ⓓ 30.

Hướng dẫn giải. **Chọn B**

Ta có: Nửa chu vi ΔABC: $p = \dfrac{a + b + c}{2} = \dfrac{6 + 8 + 10}{2} = 12$.

Dùng công thức Heron: $S = \sqrt{12(12 - 6)(12 - 8)(12 - 10)} = 24$.

Câu 81. Cho ΔABC có $a = 4, c = 5, \widehat{B} = 150^\circ$. Diện tích của tam giác là:

Ⓐ $5\sqrt{3}$. Ⓑ 5. Ⓒ 10. Ⓓ $10\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải. **Chọn B**

Ta có $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} ac \sin B = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \sin 150^\circ = 5$.

Câu 82. Một tam giác có ba cạnh là $13, 14, 15$. Diện tích tam giác bằng bao nhiêu?

Ⓐ 84. Ⓑ $\sqrt{84}$. Ⓒ 42. Ⓓ $\sqrt{168}$.

Hướng dẫn giải. **Chọn A**

Ta có: $p = \dfrac{13+14+15}{2} = 21$.

Suy ra $S = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84$.

Câu 83. Cho các điểm $A(1;-2), B(-2;3), C(0;4)$. Diện tích ΔABC bằng bao nhiêu?

Ⓐ $\dfrac{13}{2}$. Ⓑ 13. Ⓒ 26. Ⓓ $\dfrac{13}{4}$.

Hướng dẫn giải. **Chọn A**

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3;5) \Rightarrow AB = \sqrt{34}$, $\overrightarrow{AC} = (-1;6) \Rightarrow AC = \sqrt{37}$, $\overrightarrow{BC} = (2;1) \Rightarrow BC = \sqrt{5}$.

Nửa chu vi $p = \dfrac{\sqrt{37}+\sqrt{34}+\sqrt{5}}{2}$.

Dùng công thức Heron suy ra $S = \dfrac{13}{2}$.

Câu 84. Cho tam giác ABC có $A(1;-1), B(3;-3), C(6;0)$. Diện tích ΔABC là

Ⓐ 12. Ⓑ 6. Ⓒ $6\sqrt{2}$. Ⓓ 9.

Hướng dẫn giải. **Chọn B**

Ta có $\overrightarrow{AB} = (2;-2) \Rightarrow AB = 2\sqrt{2}$, $\overrightarrow{AC} = (5;1) \Rightarrow AC = \sqrt{26}$, $\overrightarrow{BC} = (3;3) \Rightarrow BC = 3\sqrt{2}$.

Ta thấy $AB^2 + BC^2 = (2\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 = 8 + 18 = 26 = AC^2$, do đó ΔABC vuông tại B.

Suy ra $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot BC = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 6$.

Câu 85. Cho tam giác ABC có $a = 4, b = 6, c = 8$. Khi đó diện tích của tam giác là:

Ⓐ $9\sqrt{15}$. Ⓑ $3\sqrt{15}$. Ⓒ 105. Ⓓ $\dfrac{2}{3}\sqrt{15}$.

Hướng dẫn giải. **Chọn B**

Ta có: $p = \dfrac{4+6+8}{2} = 9$.

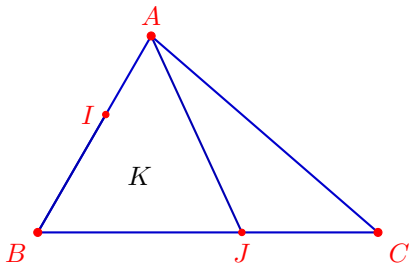
Dùng công thức Heron: $S = \sqrt{9(9-4)(9-6)(9-8)} = 3\sqrt{15}$.

Câu 86. Cho tam giác ABC. Biết $AB = 2, BC = 3$ và $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Tính chu vi và diện tích tam giác ABC.

Ⓐ $5+\sqrt{7}$ và $\dfrac{3}{2}$. Ⓑ $5+\sqrt{7}$ và $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Ⓒ $5\sqrt{7}$ và $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. Ⓓ $5+\sqrt{19}$ và $\dfrac{3}{2}$.

✍ *Hướng dẫn giải.*



Chọn B

Ta có: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\widehat{ABC} = 4 + 9 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 7 \Rightarrow AC = \sqrt{7}$.

Chu vi tam giác ABC là $AB + AC + BC = 2 + 3 + \sqrt{7} = 5 + \sqrt{7}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin\widehat{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 87. Tam giác ABC có các trung tuyến $m_a = 15, m_b = 12, m_c = 9$. Diện tích S của tam giác ABC bằng

Ⓐ 72. Ⓑ 144. Ⓒ 54. Ⓓ 108.

✍ *Hướng dẫn giải.* **Chọn A**

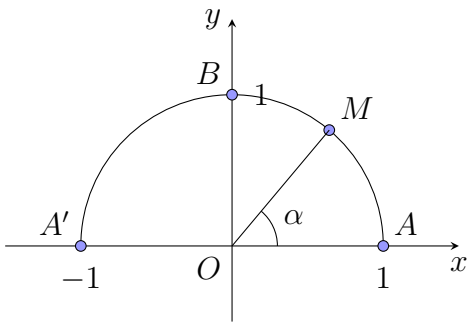
Theo công thức tính diện tích từ các đường trung tuyến: $S = \dfrac{4}{3}\sqrt{p_m(p_m - m_a)(p_m - m_b)(p_m - m_c)}$ với $p_m = \dfrac{m_a + m_b + m_c}{2} = 18$.

$S = \dfrac{4}{3}\sqrt{18(18-15)(18-12)(18-9)} = \dfrac{4}{3} \cdot 54 = 72$.

§3 ÔN TẬP CHƯƠNG III

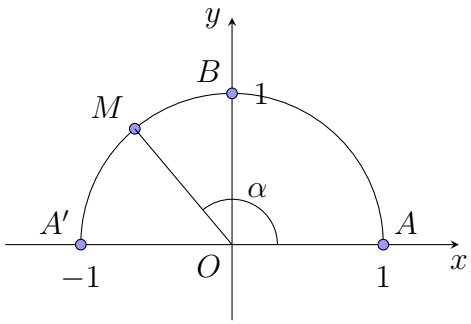
I. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trên nửa đường tròn đơn vị cho điểm M sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$ như hình bên. Tìm mệnh đề đúng.



Ⓐ $\sin\alpha > 0$. Ⓑ $\sin\alpha < 0$. Ⓒ $\sin\alpha = 0$. Ⓓ $\sin\alpha = 1$.

Câu 2. Trên nửa đường tròn đơn vị cho điểm M sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$ như hình bên. Tìm mệnh đề đúng.



Ⓐ $\cos\alpha > 0$. Ⓑ $\cos\alpha < 0$. Ⓒ $\cos\alpha = 0$. Ⓓ $\cos\alpha = -1$.

Câu 3. Cho góc $\alpha = \widehat{xOM}$ với điểm $M\left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ trên nửa đường tròn đơn vị. Giá trị lượng giác của $\tan\alpha$ là

Ⓐ $\tan\alpha = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. Ⓑ $\tan\alpha = -2\sqrt{2}$.

Ⓒ $\tan\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}-1}{3}$. Ⓓ $\tan\alpha = -\dfrac{2\sqrt{2}}{9}$.

Câu 4. Cho góc $\alpha = \widehat{xOM}$ với điểm $M\left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ trên nửa đường tròn đơn vị. Giá trị lượng giác của $\cot\alpha$ là

Ⓐ $\cot\alpha = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. Ⓑ $\cot\alpha = 2\sqrt{2}$.

Ⓒ $\cot\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}-1}{3}$. Ⓓ $\cot\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{9}$.

Câu 5. Biểu thức $E = \sin(180^\circ - x) - 2\cos(90^\circ - x) + \cos x \cdot \tan x$ $(x \neq 90^\circ)$ sau khi thu gọn

bằng với biểu thức nào trong 4 biểu thức dưới đây:

Ⓐ $A = 0$.
Ⓑ $B = -2\sin x$.
Ⓒ $C = \sin x$.
Ⓓ $D = -2\cos x$.

Câu 6. Cho tam giác ABC, tính giá trị biểu thức $P = \sin A\cos(B+C) + \cos A\sin(B+C)$

Ⓐ 0.
Ⓑ 1.
Ⓒ -1.
Ⓓ 2.

Câu 7. Rút gọn biểu thức $A = -\sin(180^\circ - x) + \cos(180^\circ - x) + \cos x$ ta được

Ⓐ $A = -\sin x$.
Ⓑ $A = \sin x$.
Ⓒ $A = 2\sin x$.
Ⓓ $A = \cos x$.

Câu 8. Cho $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$ với $0 < \alpha < 90^\circ$. Tính $\sin\alpha$.

Ⓐ $\sin\alpha = \dfrac{1}{5}$.
Ⓑ $\sin\alpha = -\dfrac{1}{5}$.
Ⓒ $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$.
Ⓓ $\sin\alpha = \pm\dfrac{3}{5}$.

Câu 9. Cho $\cot\alpha = -3\sqrt{2}$ với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Khi đó giá trị $\sin\alpha + \dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{2}}$ bằng:

Ⓐ $-\dfrac{2\sqrt{19}}{19}$.
Ⓑ $\dfrac{2\sqrt{19}}{19}$.
Ⓒ $-\dfrac{\sqrt{19}}{19}$.
Ⓓ $\dfrac{\sqrt{19}}{19}$.

Câu 10. Cho $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}, (90^\circ < \alpha < 180^\circ)$. Tính $P = \cot(180^\circ - \alpha)$

Ⓐ $P = \dfrac{3}{4}$.
Ⓑ $P = -\dfrac{3}{4}$.
Ⓒ $P = -\dfrac{4}{3}$.
Ⓓ $P = \dfrac{4}{3}$.

Câu 11. Cho góc α thỏa mãn $0^\circ < \alpha < 180^\circ, \cos\alpha = -\dfrac{1}{3}, \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

Ⓐ $\tan\alpha = -\sqrt{2}$.
Ⓑ $\cot\alpha = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Ⓒ $\sin(180^\circ - \alpha) = -\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.
Ⓓ $\cos(180^\circ - \alpha) = \dfrac{1}{3}$.

Câu 12. Kết quả rút gọn của biểu thức $\left(\dfrac{\sin a + \tan a}{\cos a + 1}\right)^2 + 1$ bằng

Ⓐ 2.
Ⓑ $1 + \tan a$.
Ⓒ $\dfrac{1}{\cos^2 a}$.
Ⓓ $\dfrac{1}{\sin^2 a}$.

Câu 13. Giá trị của $\cos 60^\circ + \sin 30^\circ$ bằng bao nhiêu?

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Ⓑ $\sqrt{3}$.
Ⓒ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
Ⓓ 1.

Câu 14. Giá trị của $\tan 30^\circ + \cot 30^\circ$ bằng bao nhiêu?

Ⓐ $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$.
Ⓑ $\dfrac{1+\sqrt{3}}{3}$.
Ⓒ $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.
Ⓓ 2.

Câu 15. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào sai?

Ⓐ $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 1$.
Ⓑ $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$.
Ⓒ $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$.
Ⓓ $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = 1$.

Câu 16. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

Ⓐ $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ$.
Ⓑ $\cos 60^\circ = \sin 120^\circ$.
Ⓒ $\cos 30^\circ = \sin 120^\circ$.
Ⓓ $\sin 60^\circ = -\cos 120^\circ$.

Câu 17. Đẳng thức nào sau đây sai?

(A) $\sin 45^\circ + \sin 45^\circ = \sqrt{2}$.
(B) $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = 1$.
(C) $\sin 60^\circ + \cos 150^\circ = 0$.
(D) $\sin 120^\circ + \cos 30^\circ = 0$.

Câu 18. Giá trị $\cos 45^\circ + \sin 45^\circ$ bằng bao nhiêu?

(A) 1.
(B) $\sqrt{2}$.
(C) $\sqrt{3}$.
(D) 0.

Câu 19. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

(A) $\sin(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$.
(B) $\sin(180^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$.
(C) $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$.
(D) $\sin(180^\circ - \alpha) = \cos\alpha$.

Câu 20. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào sai?

(A) $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 0$.
(B) $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$.
(C) $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$.
(D) $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

Câu 21. Cho α là góc tù. Điều khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $\sin\alpha < 0$.
(B) $\cos\alpha > 0$.
(C) $\tan\alpha < 0$.
(D) $\cot\alpha > 0$.

Câu 22. Giá trị của $E = \sin 36^\circ \cos 6^\circ - \sin 126^\circ \cos 84^\circ$ là

(A) $\dfrac{1}{2}$.
(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
(C) 1.
(D) -1.

Câu 23. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào đúng?

(A) $\sin(180^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$.
(B) $\cos(180^\circ - \alpha) = \cos\alpha$.
(C) $\tan(180^\circ - \alpha) = \tan\alpha$.
(D) $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot\alpha$.

Câu 24. Cho α và β là hai góc khác nhau và bù nhau, trong các đẳng thức sau đây đẳng thức nào sai?

(A) $\sin\alpha = \sin\beta$.
(B) $\cos\alpha = -\cos\beta$.
(C) $\tan\alpha = -\tan\beta$.
(D) $\cot\alpha = \cot\beta$.

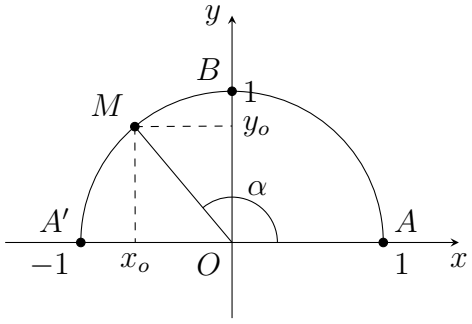
Câu 25. Cho góc α tù. Điều khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $\sin\alpha < 0$.
(B) $\cos\alpha > 0$.
(C) $\tan\alpha > 0$.
(D) $\cot\alpha < 0$.

Câu 26. Hai góc nhọn α và β phụ nhau, hệ thức nào sau đây là sai?

(A) $\sin\alpha = \cos\beta$.
(B) $\tan\alpha = \cot\beta$.
(C) $\cot\beta = \dfrac{1}{\cot\alpha}$.
(D) $\cos\alpha = -\sin\beta$.

Câu 27. Trên nửa đường tròn đơn vị cho điểm M sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$ như hình bên. Tìm mệnh đề đúng.



Ⓐ $\tan\alpha = \dfrac{x_0}{y_0}$. Ⓑ $\tan\alpha = \dfrac{y_0}{x_0}$. Ⓒ $\tan\alpha = x_0$. Ⓓ $\tan\alpha = y_0$.

Câu 28. Đơn giản biểu thức $G = (1 - \sin^2 x)\cot^2 x + 1 - \cot^2 x$.

Ⓐ $\sin^2 x$. Ⓑ $\cos^2 x$. Ⓒ $\dfrac{1}{\cos x}$. Ⓓ $\cos x$.

Câu 29. Đơn giản biểu thức $E = \cot x + \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$ ta được

Ⓐ $\sin x$. Ⓑ $\dfrac{1}{\cos x}$. Ⓒ $\dfrac{1}{\sin x}$. Ⓓ $\cos x$.

Câu 30. Khẳng định nào sau đây là sai?

Ⓐ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Ⓑ $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ $(\sin\alpha \neq 0)$.

Ⓒ $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = -1$ $(\sin\alpha\cos\alpha \neq 0)$.

Ⓓ $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $(\cos\alpha \neq 0)$.

Câu 31. Giá trị của $B = \cos^2 73^\circ + \cos^2 87^\circ + \cos^2 3^\circ + \cos^2 17^\circ$ là

Ⓐ $\sqrt{2}$. Ⓑ 2. Ⓒ -2. Ⓓ 1.

Câu 32. Giá trị của biểu thức $A = \sin^2 51^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 39^\circ + \sin^2 35^\circ$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ 1. Ⓓ 2.

Câu 33. Cho biết $\sin\dfrac{\alpha}{3} = \dfrac{3}{5}$. Giá trị của $P = 3\sin^2\dfrac{\alpha}{3} + 5\cos^2\dfrac{\alpha}{3}$ bằng bao nhiêu?

Ⓐ $P = \dfrac{105}{25}$. Ⓑ $P = \dfrac{107}{25}$. Ⓒ $P = \dfrac{109}{25}$. Ⓓ $P = \dfrac{111}{25}$.

Câu 34. Cho biết $\cos\alpha = -\dfrac{2}{3}$. Giá trị của biểu thức $E = \dfrac{\cot\alpha - 3\tan\alpha}{2\cot\alpha - \tan\alpha}$ bằng bao nhiêu?

Ⓐ $-\dfrac{25}{3}$. Ⓑ $-\dfrac{11}{13}$. Ⓒ $-\dfrac{11}{3}$. Ⓓ $-\dfrac{25}{13}$.

Câu 35. Biết $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$. Giá trị đúng của biểu thức $P = \sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha$ là:

Ⓐ $\dfrac{11}{9}$. Ⓑ $\dfrac{4}{3}$. Ⓒ $\dfrac{1}{3}$. Ⓓ $\dfrac{10}{9}$.

Câu 36. Cho $\cot\alpha = \dfrac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $A = \dfrac{3\sin\alpha + 4\cos\alpha}{2\sin\alpha - 5\cos\alpha}$ là:

Ⓐ $-\dfrac{15}{13}$. Ⓑ -13. Ⓒ $\dfrac{15}{13}$. Ⓓ 13.

Câu 37. Rút gọn biểu thức $P = \dfrac{1 - \sin^2 x}{2\sin x\cos x}$ ta được

Ⓐ $P = \dfrac{1}{2}\tan x$. Ⓑ $P = \dfrac{1}{2}\cot x$.

Ⓒ $P = 2\cot x$. Ⓓ $P = 2\tan x$.

Câu 38. Trong tam giác ABC công thức nào sau đây có thể dùng để tính $\cos A$?

Ⓐ $\cos A = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$. Ⓑ $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

Ⓒ $\cos A = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. Ⓓ $\cos A = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ac}$.

Câu 39. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^\circ$. Chọn khẳng định đúng.

Ⓐ $a^2 = b^2 + c^2 - 3bc$. Ⓑ $a^2 = b^2 + c^2 + bc$.
Ⓒ $a^2 = b^2 + c^2 + 3bc$. Ⓓ $a^2 = b^2 + c^2 - bc$.

Câu 40. Cho tam giác ABC có góc $\widehat{A} = 120^\circ$, $b = 8, c = 5$. Khi đó số đo của $\widehat{B}$ gần nhất với số nào sau đây?

Ⓐ $71^\circ 35'$. Ⓑ $30^\circ 37'$. Ⓒ $45^\circ 12'$. Ⓓ $37^\circ 35'$.

Câu 41. Cho $\triangle ABC$ có $a = 6, b = 8, c = 10$. Diện tích S của tam giác trên là:

Ⓐ 48. Ⓑ 24. Ⓒ 12. Ⓓ 30.

Câu 42. Tính diện tích tam giác ABC có $AB = 12; AC = 8; \widehat{BAC} = 30^\circ$.

Ⓐ $24\sqrt{2}$. Ⓑ 48. Ⓒ 24. Ⓓ $24\sqrt{3}$.

Câu 43. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 75^\circ, \widehat{C} = 45^\circ$ và $BC = 50$. Tính độ dài cạnh AB.

Ⓐ $24\sqrt{2}$. Ⓑ 48. Ⓒ 24. Ⓓ $40,8$.

Câu 44. Cho tam giác ABC có $AB = 6, AC = 7, BC = 8$. Giá trị $\cos A$ bằng bao nhiêu?

Ⓐ $0,5$. Ⓑ $\dfrac{1}{4}$. Ⓒ $\dfrac{1}{3}$. Ⓓ $\dfrac{3}{4}$.

Câu 45. Tính số đo góc A của tam giác ABC biết $a^2 = b^2 + c^2 + \sqrt{2}bc$.

Ⓐ 60°. Ⓑ 45°. Ⓒ 135°. Ⓓ 150°.

Câu 46. Cho tam giác ABC có $b^2 + c^2 - a^2 = \sqrt{3}bc$. Lựa chọn mệnh đề đúng

Ⓐ $100^\circ > \widehat{BAC} > 50^\circ$. Ⓑ $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 150^\circ$.
Ⓒ $\widehat{ABC} > 160^\circ$. Ⓓ $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

Câu 47. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 60^\circ, \widehat{C} = 45^\circ$ và $AB = 5$. Tính độ dài cạnh AC.

Ⓐ $AC = \dfrac{5\sqrt{6}}{2}$. Ⓑ $AC = 5\sqrt{3}$. Ⓒ $AC = 5\sqrt{2}$. Ⓓ $AC = 10$.

Câu 48. Cho tam giác ABC có $a = 2, b = \sqrt{6}, c = 1 + \sqrt{3}$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp là

Ⓐ 1. Ⓑ $\sqrt{2}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Ⓓ $\sqrt{3}$.

Câu 49. Tính bán kính ra của đường tròn nội tiếp tam giác ABC biết độ dài ba cạnh là $13, 14, 15$.

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 4. Ⓓ $\sqrt{2}$.

Câu 50. Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh thỏa mãn đẳng thức $(a+b-c)(a+b+c) = 3ab$. Số đo của góc C khi đó là

Ⓐ 60°. Ⓑ 120°. Ⓒ 45°. Ⓓ 30°.

Câu 51. Trong các công thức sau, công thức nào đúng?

Ⓐ $S = \dfrac{1}{2}bc\sin B$. Ⓑ $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A$.

Ⓒ $S=\dfrac{1}{2}ab\sin B$. Ⓓ $S=\dfrac{1}{2}ac\sin C$.

Câu 52. Cho tam giác ABC có $AB=4, AC=3, \widehat{BAC}=30^\circ$. Diện tích tam giác ABC bằng

Ⓐ $S=3$. Ⓑ $S=4\sqrt{3}$. Ⓒ $S=6\sqrt{3}$. Ⓓ $S=6$.

Câu 53. Tính diện tích tam giác ABC biết $AB=3, BC=5, CA=6$.

Ⓐ $\sqrt{56}$. Ⓑ $\sqrt{48}$. Ⓒ 6. Ⓓ 8.

Câu 54. Cho tam giác ABC có $AB=3, AC=4, BC=5$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng?

Ⓐ $\dfrac{8}{9}$. Ⓑ $\dfrac{4}{5}$. Ⓒ $\dfrac{3}{4}$. Ⓓ 1.

Câu 55. Cho tam giác ABC với $BC=a, AC=b, AB=c$. Đẳng thức nào sai?

Ⓐ $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$. Ⓑ $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.
Ⓒ $c^2=b^2+a^2+2ab\cos C$. Ⓓ $c^2=b^2+a^2-2ab\cos C$.

Câu 56. Cho ΔABC có $b=6, c=8, \widehat{A}=60^\circ$. Độ dài cạnh a là.

Ⓐ $2\sqrt{13}$. Ⓑ $3\sqrt{12}$. Ⓒ $2\sqrt{37}$. Ⓓ $\sqrt{20}$.

Câu 57. Cho tam giác ABC có $a^2+b^2-c^2>0$. Khi đó:

Ⓐ $\widehat{C}>90^\circ$.
Ⓑ $\widehat{C}<90^\circ$.
Ⓒ $\widehat{C}=90^\circ$.
Ⓓ Không thể kết luận được gì về $\widehat{C}$.

Câu 58. Cho tam giác ABC với $BC=7\,\text{cm}, AC=9\,\text{cm}, AB=4\,\text{cm}$. Tính $\cos A$.

Ⓐ $\cos A=-\dfrac{2}{3}$. Ⓑ $\cos A=\dfrac{1}{2}$. Ⓒ $\cos A=\dfrac{1}{3}$. Ⓓ $\cos A=\dfrac{2}{3}$.

Câu 59. Cho tam giác ABC với $BC=a, AC=b, AB=c$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $a=2R\cos A$. Ⓑ $a=2R\sin A$.
Ⓒ $a=2R\tan A$. Ⓓ $a=R\sin A$.

Câu 60. Cho tam giác ABC có $\widehat{B}=45^\circ$, cạnh $AC=2\sqrt{2}\,\text{cm}$. Bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng

Ⓐ $R=1\,\text{cm}$. Ⓑ $R=2\,\text{cm}$. Ⓒ $R=4\,\text{cm}$. Ⓓ $R=3\,\text{cm}$.

Câu 61. Cho tam giác ABC có góc $\widehat{B}=60^\circ, \widehat{C}=45^\circ$, cạnh $AB=4$. Tính độ dài cạnh AC.

Ⓐ $2\sqrt{6}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. Ⓒ $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$. Ⓓ $\dfrac{3\sqrt{6}}{4}$.

Câu 62. Tam giác ABC có $2(b^2+c^2)=a^2+1993$. Độ dài trung tuyến kẻ từ A của tam giác là

Ⓐ $498,25$. Ⓑ $996,5$. Ⓒ 120. Ⓓ 1993.

Câu 63. Cho tam giác ABC có $a=4, b=6, c=8$. Khi đó diện tích của tam giác là:

Ⓐ $9\sqrt{15}$. Ⓑ $3\sqrt{15}$. Ⓒ 105. Ⓓ $\dfrac{2}{3}\sqrt{15}$.

Câu 64. Tam giác với ba cạnh là $5; 12; 13$ có bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó bằng

bao nhiêu?

Ⓐ 2. Ⓑ $2\sqrt{2}$. Ⓒ $2\sqrt{3}$. Ⓓ 3.

Câu 65. Cho ΔABC có $B = 60^\circ, a = 8, c = 5$. Độ dài cạnh b bằng:

Ⓐ 7. Ⓑ 129. Ⓒ 49. Ⓓ $\sqrt{129}$.

Câu 66. Cho tam giác ABC. Tìm công thức sai:

Ⓐ $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$. Ⓑ $\sin A = \dfrac{a}{2R}$.

Ⓒ $b \sin B = 2R$. Ⓓ $\sin C = \dfrac{c \sin A}{a}$.

Câu 67. Trong tam giác ABC, nếu có $a^2 = bc$ thì:

Ⓐ $\dfrac{1}{h_a^2} = \dfrac{1}{h_b} - \dfrac{1}{h_c}$. Ⓑ $h_a^2 = h_b h_c$.

Ⓒ $\dfrac{1}{h_a^2} = \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$. Ⓓ $\dfrac{1}{h_a^2} = \dfrac{2}{h_b} + \dfrac{2}{h_c}$.

Câu 68. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết $AB = 10$ và $\tan(A+B) = \dfrac{1}{3}$.

Ⓐ $\dfrac{5\sqrt{10}}{9}$. Ⓑ $\dfrac{10}{3}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. Ⓓ $5\sqrt{10}$.

Câu 69. Trong tam giác ABC, nếu có $2h_a = h_b + h_c$ thì:

Ⓐ $\dfrac{2}{\sin A} = \dfrac{1}{\sin B} + \dfrac{1}{\sin C}$. Ⓑ $2 \sin A = \sin B + \sin C$.

Ⓒ $\sin A = 2 \sin B + 2 \sin C$. Ⓓ $\dfrac{2}{\sin A} = \dfrac{1}{\sin B} - \dfrac{1}{\sin C}$.

Câu 70. Trong tam giác ABC, câu nào sau đây đúng?

Ⓐ $m_a = \dfrac{b+c}{2}$. Ⓑ $m_a > \dfrac{b+c}{2}$. Ⓒ $m_a < \dfrac{b+c}{2}$. Ⓓ $m_a = b + c$.

Câu 71. Tam giác ABC có các cạnh thỏa mãn điều kiện $(a+b+c)(a+b-c) = 3ab$. Tính số đo của góc C.

Ⓐ 45°. Ⓑ 60°. Ⓒ 120°. Ⓓ 30°.

Câu 72. Tam giác ABC thỏa mãn $a \cos B = b \cos A$. Tam giác ABC là tam giác gì?

Ⓐ Tam giác vuông. Ⓑ Tam giác đều.

Ⓒ Tam giác vuông cân. Ⓓ Tam giác cân.

Câu 73. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB = 4, BC = 6$, M là trung điểm của BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho $ND = 3NC$. Tính diện tích tam giác AMN.

Ⓐ 6. Ⓑ 8. Ⓒ 7,5. Ⓓ 7.

Câu 74. Mệnh đề nào sau đây sai?

Ⓐ Nếu $a^2 > b^2 + c^2$ thì A là góc tù.

Ⓑ Nếu tam giác ABC có một góc tù thì $a^2 > b^2 + c^2$.

Ⓒ Nếu $a^2 < b^2 + c^2$ thì A là góc nhọn.

Ⓓ Nếu $a^2 = b^2 + c^2$ thì A là góc vuông.

Câu 75. Độ dài trung tuyến m_c ứng với cạnh c của ΔABC bằng biểu thức nào sau đây?

Ⓐ $\dfrac{b^2+a^2}{2}-\dfrac{c^2}{4}$.
Ⓑ $\sqrt{\dfrac{b^2+a^2}{2}+\dfrac{c^2}{4}}$.
Ⓒ $\dfrac{1}{2}\sqrt{2(b^2+a^2)-c^2}$.
Ⓓ $\sqrt{\dfrac{b^2+a^2-c^2}{4}}$.

Câu 76. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có $AB=3, AC=6$ và $\widehat{A}=60^\circ$.

Ⓐ $R=3$. Ⓑ $R=3\sqrt{3}$. Ⓒ $R=\sqrt{3}$. Ⓓ $R=6$.

Câu 77. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nhọn có $a=3, b=4$ và diện tích $S=3\sqrt{3}$.

Ⓐ $R=\dfrac{\sqrt{3}}{13}$. Ⓑ $R=\dfrac{\sqrt{39}}{3}$. Ⓒ $R=\dfrac{2}{3}$. Ⓓ $R=\dfrac{\sqrt{13}}{3}$.

Câu 78. Cho tam giác ABC thỏa mãn $c=b\cos A$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ Tam giác ABC là tam giác cân nhưng không vuông.
Ⓑ Tam giác ABC là tam giác nhọn.
Ⓒ Tam giác ABC là tam giác vuông.
Ⓓ Tam giác ABC là tam giác tù.

Câu 79. Cho tam giác ABC có chu vi bằng 12, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác là 5. Tính tổng $S=\sin A+\sin B+\sin C$.

Ⓐ $\dfrac{3}{5}$. Ⓑ $\dfrac{6}{5}$. Ⓒ $\dfrac{24}{5}$. Ⓓ $\dfrac{12}{5}$.

Câu 80. Cho tam giác ABC có các góc $\widehat{B}=120^\circ, \widehat{C}=40^\circ$, cạnh $BC=5\,\text{cm}$. Tính độ dài cạnh AB (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Ⓐ $7\,\text{cm}$. Ⓑ $8\,\text{cm}$. Ⓒ $9\,\text{cm}$. Ⓓ $10\,\text{cm}$.

Câu 81. Cho ΔABC có $a=4, c=5, \widehat{B}=150^\circ$. Diện tích của tam giác là:

Ⓐ $5\sqrt{3}$. Ⓑ 10. Ⓒ 5. Ⓓ $10\sqrt{3}$.

Câu 82. Tính diện tích tam giác ABC biết $AB=3, BC=5, CA=6$.

Ⓐ $\sqrt{56}$. Ⓑ $\sqrt{48}$. Ⓒ 6. Ⓓ 8.

Câu 83. Cho tam giác ABC có $AB=3, AC=4, BC=5$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng?

Ⓐ $\dfrac{8}{9}$. Ⓑ $\dfrac{4}{5}$. Ⓒ $\dfrac{3}{4}$. Ⓓ 1.

Câu 84. Cho tam giác ABC có $b=7; c=5; \cos A=\dfrac{3}{5}$. Độ dài đường cao h_a của tam giác ΔABC là?

Ⓐ 8. Ⓑ $\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$. Ⓒ $8\sqrt{3}$. Ⓓ 7.

Câu 85. Cho tam giác ABC với $BC=a, AC=b, AB=c$. Đẳng thức nào sai?

Ⓐ $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$.
Ⓑ $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.
Ⓒ $c^2=b^2+a^2+2ab\cos C$.
Ⓓ $c^2=b^2+a^2-2ab\cos C$.

Câu 86. Cho ΔABC có $b=6, c=8, \widehat{A}=60^\circ$. Độ dài cạnh a là.

Ⓐ $2\sqrt{13}$. Ⓑ $3\sqrt{12}$. Ⓒ $2\sqrt{37}$. Ⓓ $\sqrt{20}$.

Câu 87. Cho tam giác ABC có $a^2+b^2-c^2>0$. Khi đó:

Ⓐ $\widehat{C}>90^\circ$.
Ⓑ $\widehat{C}<90^\circ$.
Ⓒ $\widehat{C}=90^\circ$.
Ⓓ Không thể kết luận được gì về $\widehat{C}$.

Câu 88. Cho tam giác ABC với $BC=7\,\text{cm}, AC=9\,\text{cm}, AB=4\,\text{cm}$. Tính $\cos A$.

Ⓐ $\cos A=-\dfrac{2}{3}$. Ⓑ $\cos A=\dfrac{1}{2}$. Ⓒ $\cos A=\dfrac{1}{3}$. Ⓓ $\cos A=\dfrac{2}{3}$.

Câu 89. Cho tam giác ABC với $BC=a, AC=b, AB=c$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $a=2R\cos A$. Ⓑ $a=2R\sin A$.
Ⓒ $a=2R\tan A$. Ⓓ $a=R\sin A$.

Câu 90. Cho tam giác ABC có $\widehat{B}=45^\circ$, cạnh $AC=2\sqrt{2}\,\text{cm}$. Bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng

Ⓐ $R=1\,\text{cm}$. Ⓑ $R=2\,\text{cm}$. Ⓒ $R=4\,\text{cm}$. Ⓓ $R=3\,\text{cm}$.

BẢNG ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á
1	A	2	B	3	B	4	A	5	A
6	A	7	A	8	C	9	A	10	D
11	C	12	C	13	D	14	A	15	D
16	B	17	D	18	B	19	C	20	A
21	C	22	A	23	D	24	D	25	D
26	D	27	B	28	A	29	C	30	C
31	B	32	D	33	B	34	C	35	A
36	D	37	B	38	B	39	B	40	D
41	B	42	C	43	D	44	B	45	C
46	B	47	A	48	B	49	C	50	A
51	B	52	A	53	A	54	D	55	C
56	A	57	B	58	D	59	B	60	B
61	A	62	A	63	B	64	A	65	A
66	C	67	B	68	D	69	A	70	C
71	B	72	D	73	C	74	B	75	C
76	A	77	B	78	C	79	B	80	C
81	C	82	A	83	D	84	B	85	C
86	A	87	B	88	D	89	B	90	B

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Bài 1. Cho $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

a) $\sin\alpha > 0$.

b) $\cot(90^\circ - \alpha) > 0$.

c) $\sin(135^\circ - \alpha) < 0$.

d) $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2} + 90^\circ\right) < 0$.

Bài 2. Cho góc $\alpha = \widehat{xOM}$ với điểm $M(x_0; y_0)$ trên nửa đường tròn đơn vị.

a) $\sin\alpha = x_0; \cos\alpha = y_0$.

b) Nếu $x_0 < 0$ thì $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

c) Nếu $x_0 = \dfrac{1}{3}; y_0 = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ thì giá trị $\cot\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

d) Nếu $x_0 = -\dfrac{1}{3}; y_0 = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ thì giá trị $\dfrac{\tan\alpha - \cot\alpha}{\tan\alpha + \cot\alpha} = \dfrac{7}{9}$.

Bài 3. Cho $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$ và $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

a) $\tan\alpha > 0$.

b) $\sin(90^\circ + \alpha) = \dfrac{2}{3}$.

c) Giá trị $\tan\alpha = 2\sqrt{2}$.

d) $\dfrac{1 + \sin^2\alpha}{1 - \sin^2\alpha} = 1 + 2\tan^2\alpha$.

Bài 4. Cho $\sin x = \dfrac{5}{13}$ và $90^\circ < x < 180^\circ$.

a) $\cos x > 0$.

b) Giá trị của biểu thức $P = 2\sin^2 x - \cos^2 x = \dfrac{-94}{169}$.

c) Giá trị $\tan x = \dfrac{5}{12}$.

d) Giá trị của biểu thức $A = \dfrac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x} = \dfrac{25}{313}$.

Bài 5. Cho $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

a) Điểm M trên nửa đường tròn đơn vị phía trên trục Ox sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$ thì M có tung độ bằng $\dfrac{1}{3}$.

b) Giá trị $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

c) Giá trị $\cot\alpha = -2\sqrt{2}$.

d) Giá trị $\dfrac{\tan\alpha + 3\cot\alpha}{\tan\alpha + \cot\alpha} = \dfrac{25}{9}$.

Bài 6. Cho $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$ với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

a) $\sin(180^\circ - \alpha) < 0$.

b) Giá trị $\cos(180^\circ - \alpha) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

c) Giá trị $\cot^2 \alpha = 2$.

d) Giá trị $\dfrac{\sin\alpha + 3\cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = 7$.

Bài 7. Cho $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

a) $\cos(180^\circ - \alpha) < 0$.

b) $\cos\alpha = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

c) $\cot^2 \alpha = 8$.

d) $\dfrac{5\tan\alpha + \cot\alpha}{\tan\alpha + \cot\alpha} = 4$.

Bài 8. Cho $\tan\alpha - \cot\alpha = 3$.

a) $A = \tan^2\alpha + \cot^2\alpha = 11$.

b) $B = \tan\alpha + \cot\alpha = \sqrt{13}$.

c) $C = \tan^4\alpha - \cot^4\alpha = \pm 33\sqrt{13}$.

d) $D = \tan^6\alpha - \cot^6\alpha = 36$.

Bài 9. Cho tam giác ABC có $AB = 3, AC = 2, \widehat{A} = 60^\circ$. Trên cạnh BC lấy điểm M nằm giữa B và C.

a) $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB \cdot AC \cdot \cos A$.

b) $BC = \sqrt{7}$.

c) $\cos B = \dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

d) Độ dài AM nhỏ nhất bằng $\dfrac{189}{49}$.

Bài 10. Cho tam giác $\triangle ABC$ có $AC = b = 7; AB = c = 5; \cos A = \dfrac{3}{5}$.

a) Góc A là góc tù.

b) $a = 4\sqrt{2}$.

c) $\sin A = -\dfrac{4}{5}$.

d) Độ dài đường cao hạ từ đỉnh A bằng $\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$.

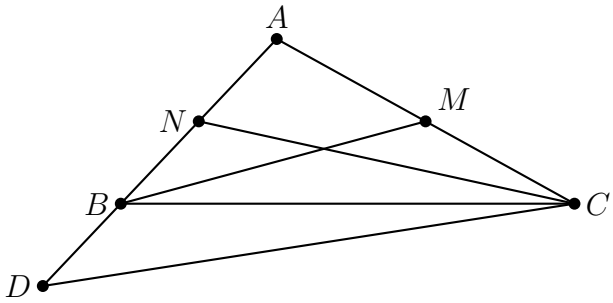
Bài 11. Cho tam giác ABC có $AB = 2; AC = 3; BC = 4$.

a) Diện tích của tam giác ABC là $S_{ABC} = \dfrac{3\sqrt{15}}{4}$.

b) Bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC là $r = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

c) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AC và AB. Khi đó $S_{ANC} < S_{AMB}$.

d) Gọi D là điểm đối xứng của N qua B. Khi đó $\cos\widehat{NCD} = \dfrac{2\sqrt{115}}{23}$.



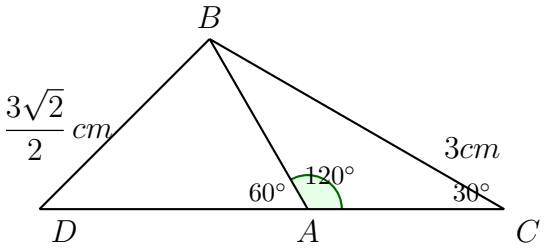
Bài 12. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{C} = 30^\circ, BC = 3$ cm.

a) Bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC là $R = \sqrt{3}$.

b) Diện tích tam giác ABC là $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ (cm^2).

c) $MB \perp NC$ ở đó M, N là trung điểm của AC và AB.

d) Trên tia đối của tia AC ta lấy D sao cho $BD = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ cm. Khi đó $\cos\widehat{ABD} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.



Bài 13. Cho $\triangle ABC$, có diện tích bằng $12\sqrt{3}$, cạnh $AB = 6, \widehat{BAC} = 120^\circ$.

a) Có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\widehat{B}$.

b) Độ dài cạnh $BC = 2\sqrt{37}$.

c) Bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là $\dfrac{3\sqrt{111}}{2}$.

d) Độ dài chân đường phân giác trong góc A của $\triangle ABC$ có độ dài là $\dfrac{25}{7}$.

Bài 14. Cho tam giác ABC có $AB = 15, AC = 20$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

a) $BC = 18$.

b) $\widehat{ABC} = 75^\circ$.

c) $S = 129$.

d) $2R - 5r < 0$ (Với R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC).

Bài 15. Cho tam giác ABC có $BC = 12$ cm, $AC = 15$ cm, $\widehat{C} = 120^\circ$.

a) $AB^2 = AC^2 + CB^2 + 2BC.AC.\cos C$.

b) $\widehat{A} = 26^\circ$.

c) Độ dài đường cao hạ từ C của tam giác là $CH = 6,65$ cm.

d) Độ dài đường phân giác trong hạ từ C là CD lớn hơn 7 cm.

Bài 16. Hai tàu đánh cá xuất phát từ cảng A lúc 8h, tàu thứ nhất đi theo hướng $S70^\circ E$ với vận tốc 50 km/h. Tàu thứ 2 đi theo hướng $N40^\circ E$ với vận tốc 55 km/h. Đi được 75 phút thì động

cơ của tàu thứ nhất bị hỏng nên tàu trôi tự do theo hướng nam với vận tốc 7 km/h. Sau 1h30 phút kể từ khi động cơ bị hỏng, tàu đó neo đậu được vào một hòn đảo. Các mệnh đề sau đúng hay sai? (các kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

a) Quãng đường mà tàu thứ nhất đi được sau 75 phút kể từ khi xuất phát là $62,5$ (km).

b) Khoảng cách giữa hai tàu tại thời điểm tàu thứ nhất bị hỏng là $107,6$ (km).

c) Lúc 10 giờ 45 phút tàu thứ nhất cách vị trí xuất phát khoảng $59,7$ (km).

d) Hướng từ cảng A tới đảo nơi tàu thứ nhất neo đậu là $S61,5°E$.

Bài 17. Cho tam giác ABC có $2\sin A = \sin B; c = 2$ và $a^2 + b^2 = 15$.

a) Độ dài cạnh AB lớn nhất.

b) Độ dài cạnh $BC = \sqrt{3}$.

c) $\cos C = \dfrac{11}{12}$.

d) Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác là $r = \dfrac{3\sqrt{69} - 2\sqrt{23}}{46}$.

Bài 18. Cho tam giác ABC với $AB = 2, BC = 3, CA = 4$.

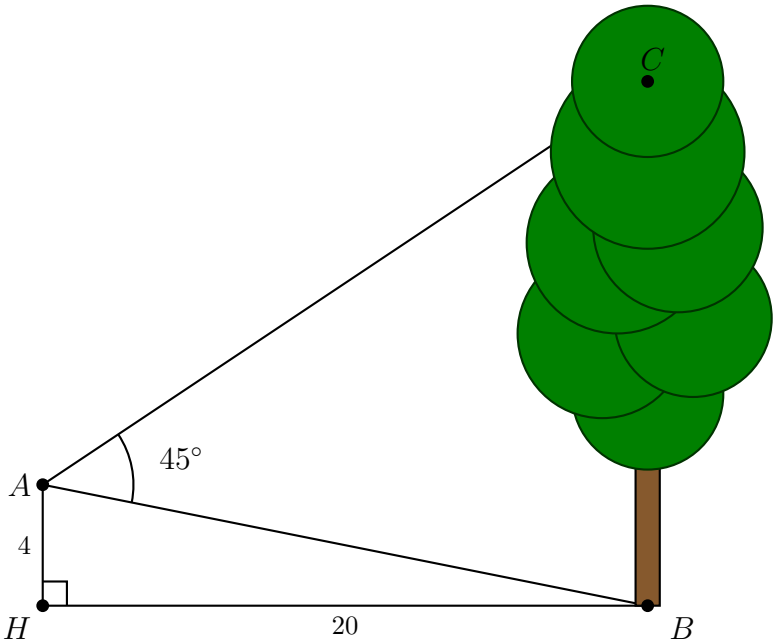
a) Tam giác ABC có diện tích $\sqrt{2}$.

b) Tam giác ABC có chiều cao $AH = 1$.

c) Tam giác ABC có góc B là góc tù.

d) Tam giác ABC có tổng độ dài bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp bằng $\dfrac{7\sqrt{15}}{10}$.

Bài 19. Từ vị trí A người ta quan sát một cây cao. Biết $AH = 4\text{m}, HB = 20\text{m}, \widehat{BAC} = 45°$.



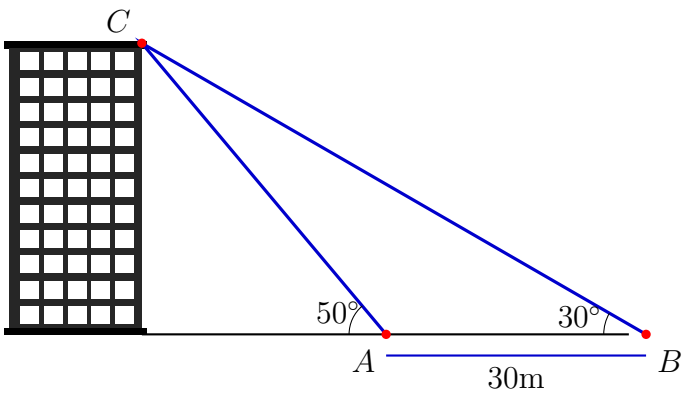
a) Độ dài đoạn $AB = 24$.

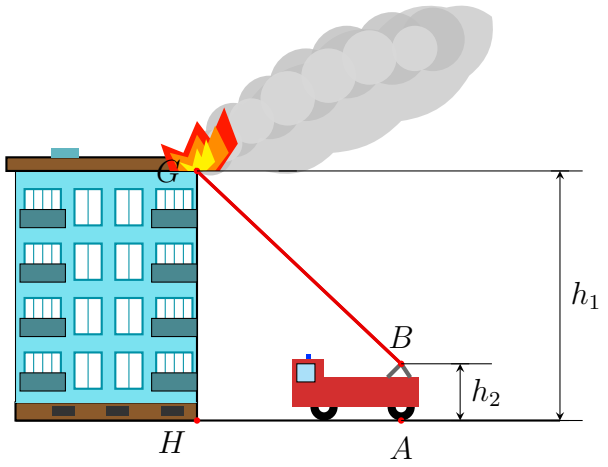
b) $\tan ABH = \dfrac{1}{5}$.

c) Số đo góc $ACB = 56°18'$.

d) Độ dài đoạn $BC = \dfrac{52}{3}$.

Bài 20. Hai người dân đứng cách nhau 30m cùng nhìn lên đỉnh của một tòa nhà theo góc nhìn lần lượt là 30° và 50°.





a) Góc nhìn từ đỉnh tòa nhà về hai phía A và B nơi hai người dân đang đứng là góc $\widehat{ACB}$ có số đo 30°.

b) Khoảng cách từ vị trí người A tới nóc của tòa nhà là $43,9$m.

c) Chiều cao của tòa nhà là khoảng 30m.

d) Vì gặp sự cố nên tầng trên cùng của tòa nhà đang bị cháy. Để cứu hộ đám cháy, một xe cứu hỏa đã tiếp cận dưới chân tòa nhà và chân thang đứng cách mặt đất $1,8$m, chiều dài tối đa của thang xếp là 40m. Để tiếp cận được đám cháy thì xe cứu hỏa phải đứng cách chân tòa một khoảng xa nhất là $21,7$m.

Bài 21. Cho A, B, C là ba góc của một tam giác. Các khẳng định sau đây đúng hay sai?

a) $\cos(A+B) = -\cos C$.

b) $\sin(A+B) = \sin C$.

c) $\sin\dfrac{A+B}{2} = \cos\dfrac{C}{2}$.

d) $\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right) = -\sin\dfrac{C}{2}$.

Bài 22. Cho tam giác ABC có $AB = 6; AC = 8; \widehat{BAC} = 90°$. Gọi D, E là các điểm thuộc cạnh BC sao cho $CD = BE = \dfrac{1}{4}BC$.

a) Tam giác ABC vuông cân.

b) Độ dài cạnh $BC = 10$.

c) Số đo góc $\widehat{ABC} = 60°$.

d) Số đo góc $\widehat{EAD} \approx 52°$.

Bài 23. Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh là $AB = 2, BC = 5, CA = 6$. Gọi M là trung điểm của BC.

a) Trong tam giác ABC, số đo của góc B là lớn nhất.

b) Giá trị của $\cos B$ là $\dfrac{7}{20}$.

c) Diện tích của tam giác ABC là $\dfrac{3\sqrt{39}}{4}$.

d) $\dfrac{\sqrt{55}}{2}$ là độ dài đường trung tuyến MA của tam giác ABC.

Bài 24. Lúc 7 giờ kém 5 sáng, bạn Mai đi xe đạp từ nhà (điểm A) đến trường (điểm B) phải đi lên dốc và xuống một con dốc (hình vẽ). Cho biết đoạn lên dốc dài 300m, $\widehat{A} = 6°, \widehat{B} = 4°$. Gọi C là đỉnh dốc.

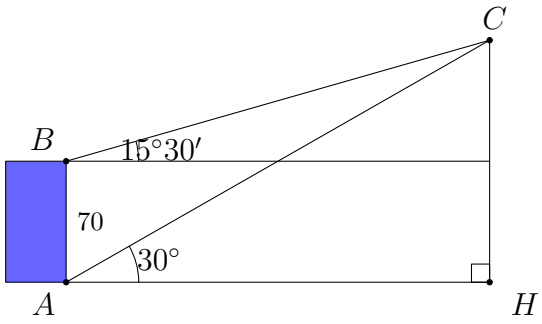
a) Độ dốc lúc lên cao hơn lúc xuống.

b) Độ cao con dốc là (làm tròn đến hàng phần mười) là $31,3$m.

c) Quãng đường chim bay đi từ nhà đến trường (làm tròn đến hàng đơn vị) là 749m.

d) Để kịp đến trường lúc 7h đúng, Mai đã lên dốc với vận tốc (làm tròn đến hàng đơn vị) là 6km/h, biết Mai khi xuống dốc bạn đi tự do không đạp xe với vận tốc không đổi là 15km/h.

Bài 25. Từ hai vị trí A, B của một tòa nhà người ta quan sát đỉnh C của ngọn núi. Biết rằng độ cao AB bằng 70 m, phương nhìn AC tạo với phương nằm ngang một góc 30°, phương nhìn BC tạo với phương nằm ngang một góc $15°30'$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:



a) $\widehat{ACB} = 14°30'$.

b) $\dfrac{AB}{\sin \widehat{ACB}} = \dfrac{AC}{\sin \widehat{ABC}}$.

c) $AC \approx 279,41$ (m).

d) Độ cao ngọn núi $CH \approx 134,71$ (m).

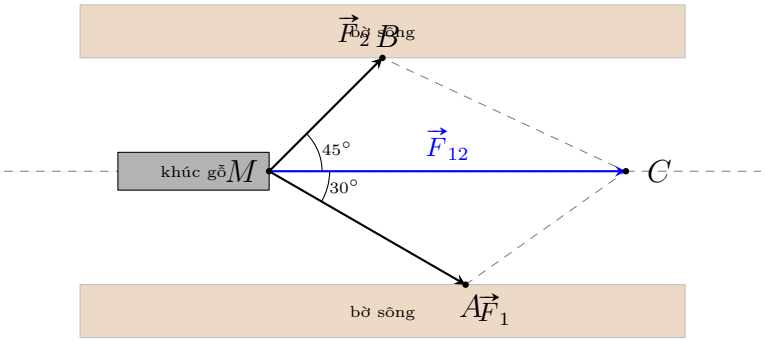
Bài 26. Hai người muốn dùng dây kéo một khối gỗ nổi trên mặt nước đi dọc theo bờ sông (như hình vẽ minh họa). Người thứ nhất dùng lực kéo 300N. Khi đó người thứ hai dùng lực x (N) để kéo được khúc gỗ đi dọc theo bờ sông? (làm tròn đến hàng đơn vị). Gọi M là điểm đầu, A, B là điểm cuối của các vectơ lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$. Dựng hình bình hành $MACB$. Gọi $\vec{F}_{12}$ là hợp lực của hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\widehat{MBC} = \widehat{MAC} = 105°$.

b) $\dfrac{MC}{\sin \widehat{MAC}} = \dfrac{MA}{\sin \widehat{MCA}}$.

c) $F_{12} > 410$N.

d) Người thứ hai cần dùng lực $150\sqrt{2} \approx 212$ (N).



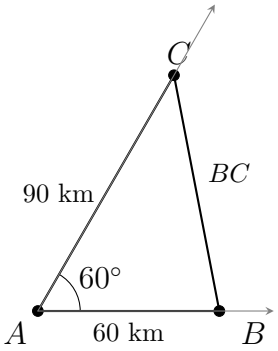
Bài 27. Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí A, đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc $60°$. Tàu thứ nhất chạy với tốc độ 20 km/h, tàu thứ hai chạy với tốc độ 30 km/h. Sau 3 giờ vị trí của 2 tàu định vị qua các điểm B, C như hình vẽ.

a) Sau 3 giờ tàu thứ nhất đi được ít hơn tàu thứ hai 30km.

b) $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}$.

c) Sau 3 giờ hai tàu cách nhau $BC = 30\sqrt{7}$ km.

d) Giả sử hai tàu bất kỳ nhận được tín hiệu rada của nhau nếu chúng cách nhau không quá $20\sqrt{5}$ km. Một tàu thứ ba (tàu cứu hộ) có vị trí ở tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC sử dụng rada truyền tín hiệu thì hai tàu tại B, C không nhận được.



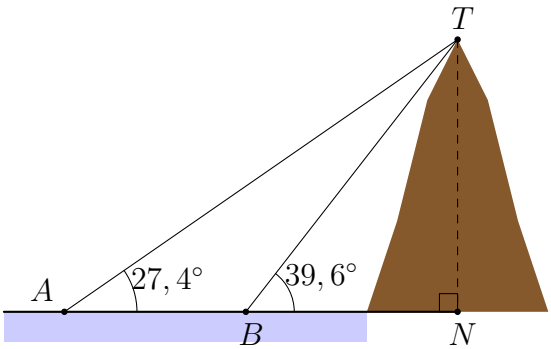
Bài 28. Các góc nhìn đến đỉnh núi so với mực nước biển được đo từ hai đèn tín hiệu A và B trên biển được thể hiện trên hình vẽ. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\widehat{ATB} = 12,2°$.

b) $\dfrac{TB}{\sin \widehat{TAB}} = \dfrac{AB}{\sin \widehat{ATB}}$.

c) Nếu các đèn tín hiệu cách nhau 1536m thì ngọn núi cao khoảng 2132,14 (m).

d) $AB^2 + 2AB \cdot BT + BN^2 > AN^2$.



Bài 29. Ông Ba có một mảnh vườn hình tam giác ABC có $\widehat{B} > 90°$. Cho biết độ dài các cạnh AB, AC lần lượt là 20 mét và 30 mét; $\widehat{BAC} = 45°$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Diện tích của mảnh vườn của ông Ba là $150\sqrt{2}$ mét vuông.

b) Ông Ba muốn dựng hàng rào bao quanh mảnh vườn theo các cạnh của tam giác ABC. Tổng độ dài của hàng rào là $21,25$ mét (làm tròn đến chữ số thứ hai sau dấu phẩy).

c) Ông Ba lấy điểm M trên cạnh AC và dựng đoạn hàng rào BM sao cho mảnh vườn được chia thành hai tam giác có diện tích bằng nhau. Khi đó đoạn hàng rào BM có độ dài là $14,17$ mét (làm tròn đến chữ số thứ hai sau dấu phẩy).

d) Ông Ba tiếp tục dựng hàng rào BH vuông góc với cạnh AC (H thuộc AC) và muốn xác định vị trí điểm N thuộc mảnh vườn tam giác AHB sao cho $NA : NH : NB = 1 : 2 : 3$. Khi đó, tổng $NA + NB + NH$ bằng $25,27$ mét (làm tròn đến chữ số thứ hai sau dấu phẩy).

Bài 30. Cho tam giác ABC có $AC = 10, BC = 12, \widehat{B} = 45^\circ$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Công thức tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là $R = \dfrac{BC}{2\sin B}$.

b) $\sin A = \dfrac{5\sqrt{2}}{12}$.

c) Bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là $5\sqrt{2}$.

d) $\dfrac{3BC - 2AC - AB}{3\sin A - 2\sin B - \sin C} = 10\sqrt{2}$.

BẢNG ĐÁP ÁN ĐÚNG - SAI

Câu	a	b	c	d	Câu	a	b	c	d	Câu	a	b	c	d
1	Đ	Đ	S	S	11	Đ	S	S	Đ	21	Đ	Đ	Đ	S
2	S	S	Đ	Đ	12	Đ	S	S	Đ	22	S	Đ	S	Đ
3	Đ	S	Đ	Đ	13	S	Đ	S	S	23	Đ	S	Đ	Đ
4	S	Đ	S	Đ	14	Đ	S	S	Đ	24	Đ	S	S	Đ
5	Đ	S	Đ	Đ	15	S	Đ	Đ	S	25	Đ	Đ	S	Đ
6	S	S	S	S	16	Đ	S	S	Đ	26	Đ	Đ	S	Đ
7	S	Đ	Đ	S	17	S	Đ	Đ	Đ	27	Đ	Đ	Đ	Đ
8	Đ	S	Đ	Đ	18	S	S	Đ	Đ	28	Đ	Đ	Đ	Đ
9	S	Đ	S	S	19	S	Đ	Đ	Đ	29	Đ	S	Đ	S
10	S	Đ	S	Đ	20	S	Đ	Đ	Đ	30	S	S	Đ	Đ

III. BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

Bài 1. Cho góc x thỏa mãn $\cot x = \dfrac{4}{3}$. Tính giá trị của biểu thức: $B = \dfrac{3}{\sin^2 x} - \dfrac{\sin x - 2\cos x}{\cos x + 4\sin x}$.

Bài 2. Biết $\cos\alpha = \dfrac{-1}{2}$. Giá trị đúng của biểu thức $P = 4\sin^2\alpha + 8\tan^2\alpha$ là:

Bài 3. Tính giá trị biểu thức $C = \dfrac{\sin a + 5\cos a}{\sin^3 a - 2\cos^3 a}$ khi $\tan a = 2$. (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Bài 4. Giả sử $\dfrac{\tan^2 x - \sin^2 x}{\cot^2 x - \cos^2 x} = \tan^n x$. Khi đó n có giá trị là:

Bài 5. Tính giá trị của biểu thức: $E = \sin^2 a \cdot \tan^2 a + 4\sin^2 a - \tan^2 a + 3\cos^2 a$.

Bài 6. Cho A, B, C là ba góc trong tam giác ABC. Tính giá trị của biểu thức sau:

$$P = \cos^2\left(180^\circ - \frac{B}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{180^\circ + A + C}{2}\right) + \tan\frac{B}{2} \cdot \tan\frac{A+C}{2}.$$

Bài 7. Cho hai góc α và β với $\alpha + \beta = 180^\circ$, tìm giá trị của biểu thức: $P = 1 - \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta$

Bài 8. Cho $\sin\alpha = -\dfrac{1}{4}$. Tính giá trị biểu thức $P = 2\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha$. (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

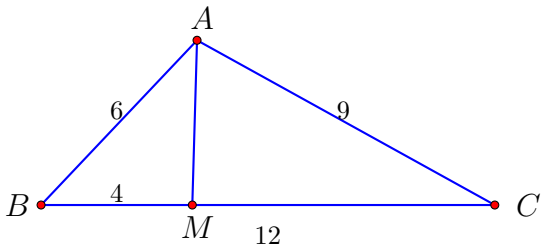
Bài 9. Cho α là góc tù và $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$. Giá trị của biểu thức $A = \sin\alpha - 2\cos\alpha$ là

Bài 10. Cho góc x thỏa mãn $0^\circ < x < 180^\circ$ và $\tan x = 3$, giá trị của biểu thức $A = \dfrac{\sin^2 x + 2\cos^2 x + 1}{3\sin^2 x + \cos^2 x - 1}$ là (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

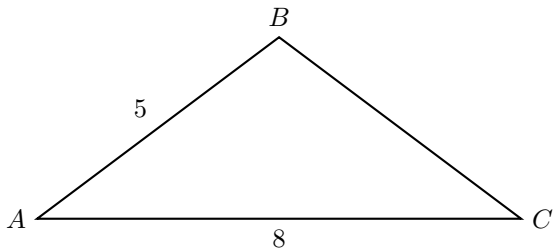
Bài 11. Tính giá trị biểu thức $C = \dfrac{\sin a + 5\cos a}{\sin^3 a - 2\cos^3 a}$ khi $\tan a = 2$. (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Bài 12. Cho tam giác ABC. Tính giá trị biểu thức $P = \sin A \cdot \cos(B+C) + \cos A \cdot \sin(B+C)$

Bài 13. Tam giác ABC có $BC = 12, CA = 9, AB = 6$. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = 4$. Tính độ dài đoạn thẳng AM. (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

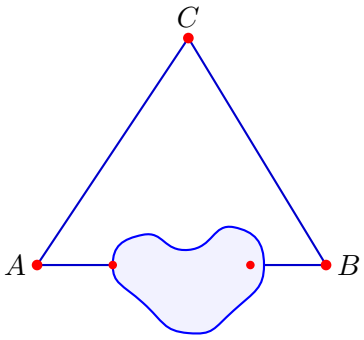


Bài 14. Tam giác ABC có góc A nhọn, $AB = 5$, $AC = 8$, diện tích bằng 12. Độ dài cạnh BC bằng

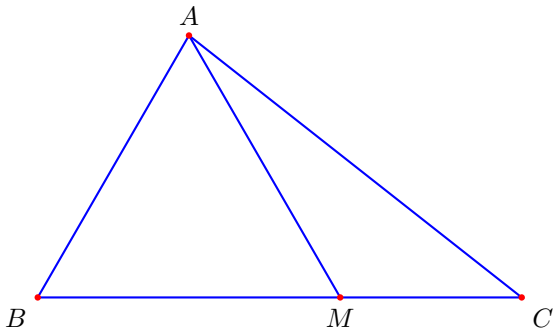


Bài 15. Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B dưới một góc 60°. Biết $CA = 200$(m),

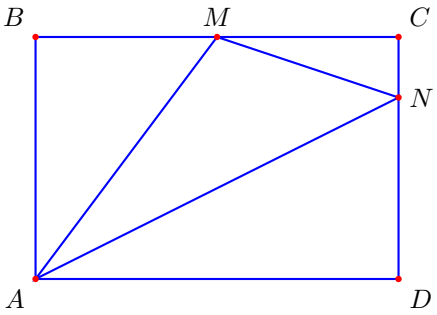
$CB = 180$(m). Khoảng cách AB bằng bao nhiêu? (*kết quả làm tròn đến hàng đơn vị*)



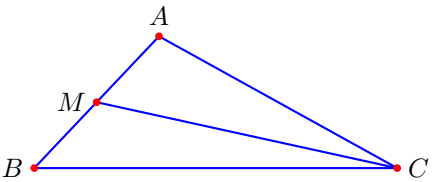
Bài 16. Cho tam giác ABC có $BC = 8$, $CA = 7$, $AB = 5$. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = 5$. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác ACM. (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*)



Bài 17. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB = 4$, $BC = 6$, M là trung điểm của BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho $ND = 3NC$. Khi đó diện tích tam giác AMN bằng



Bài 18. Cho tam giác ABC có $AB = 2$, $AC = 3$, $BC = 4$. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCM. (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*)

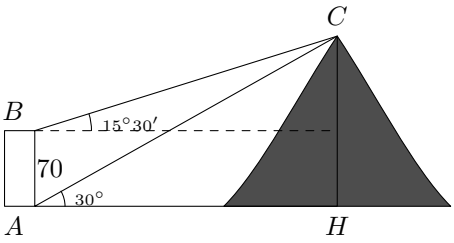


Bài 19. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 2; AC = 3; \widehat{A} = 60°$. Tính độ dài đường phân giác trong góc A của tam giác ABC. (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

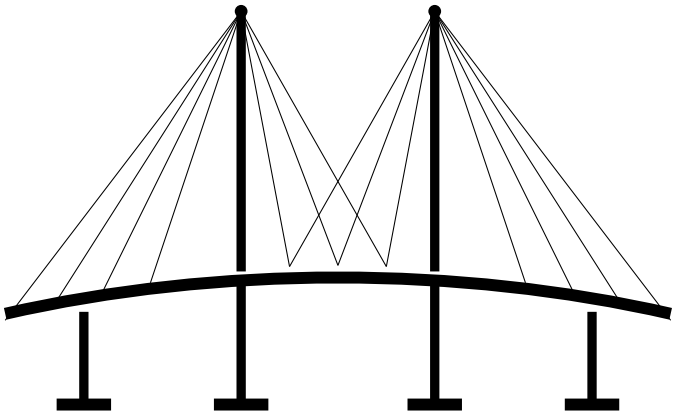
Bài 20. Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí A, đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc $60°$. Tàu thứ nhất chạy với tốc độ 30 km/h, tàu thứ hai chạy với tốc độ 40 km/h. Hỏi sau 2 giờ hai tàu cách nhau bao nhiêu km? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

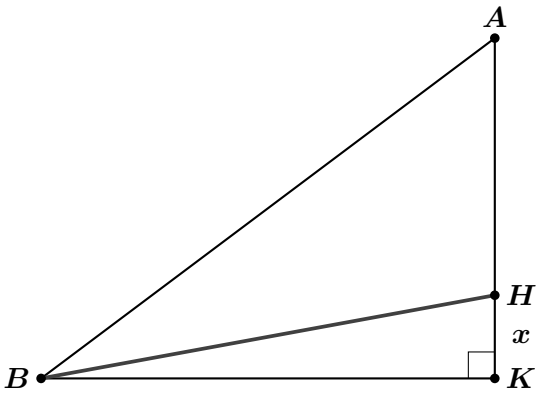
Bài 21. Từ hai vị trí A và B của một tòa nhà, người ta quan sát đỉnh C của ngọn núi. Biết

rằng độ cao $AB = 70$m, phương nhìn AC tạo với phương nằm ngang góc $30°$, phương nhìn BC tạo với phương nằm ngang góc $15°30'$. Ngọn núi đó có độ cao so với mặt đất? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



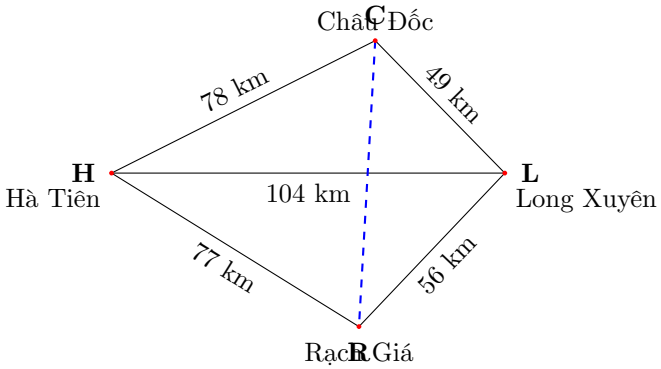
Bài 22. Quan sát cây cầu dây văng minh họa như hình dưới đây:





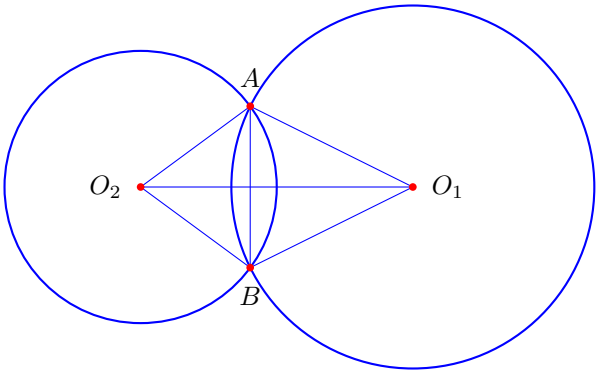
Tại trụ cao nhất, khoảng cách từ đỉnh trụ (vị trí A) tới chân trụ trên mặt cầu (vị trí H) là 150 m, độ dài dây văng dài nhất nối từ đỉnh trụ xuống mặt cầu (vị trí B) là 300 m, khoảng cách từ chân dây văng dài nhất tới chân trụ trên mặt cầu là 250 m. Tính độ dốc của cầu qua trụ nói trên (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị độ).

Bài 23. Trên bản đồ địa lý người ta thường gọi tứ giác với 4 đỉnh lần lượt là các thành phố Hà Tiên, Châu Đốc, Long Xuyên, Rạch Giá là tứ giác Long Xuyên. Dựa vào các khoảng cách đã cho trên hình vẽ, tính khoảng cách giữa Châu Đốc và Rạch Giá. (*kết quả làm tròn đến hàng phần mười*)

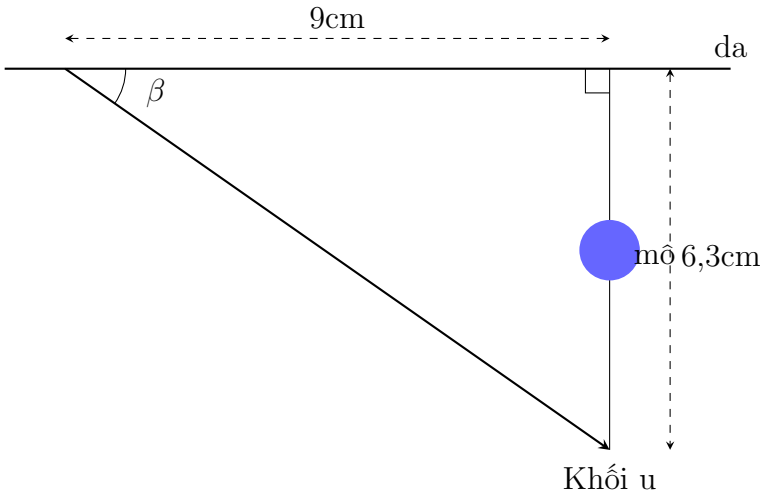


Bài 24. Người ta xây một sân khấu với sân có dạng của hai hình tròn giao nhau. Bán kính của hai hình tròn là 20 m và 15 m. Khoảng cách giữa hai tâm của hai hình tròn là 30 m. Chi phí làm

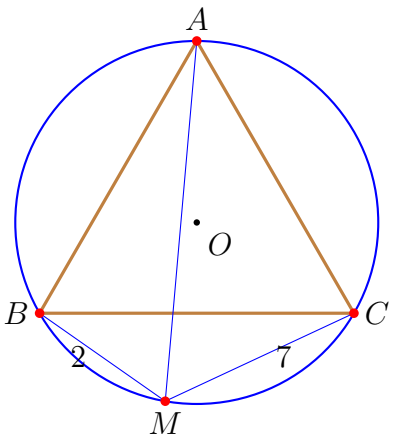
mỗi mét vuông phần giao nhau là 300 nghìn đồng và phần còn lại là 100 nghìn đồng. Hỏi số tiền làm mặt sân khấu là bao nhiêu triệu đồng?



Bài 25. Xạ phẫu gamma knife là phương pháp điều trị u não bằng cách sử dụng bức xạ gamma tập trung, hội tụ chính xác vào tổn thương, không làm hại mô lành. Nếu khối u của bệnh nhân cách mặt da 6,3 cm, bác sĩ đặt nguồn tia cách khối u 9 cm để tránh làm tổn thương mô thì góc tạo bởi chùm tia với mặt da là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị, đơn vị độ)?

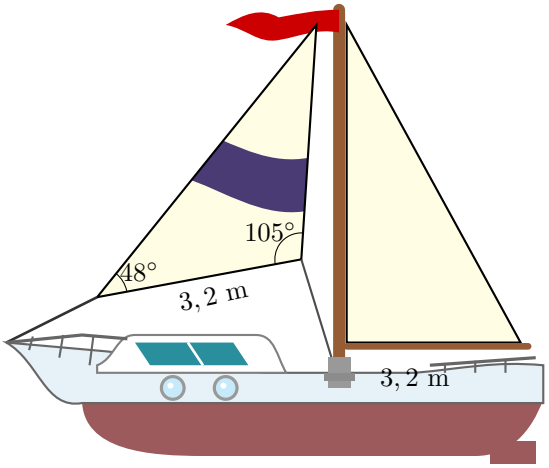


Bài 26. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi M là điểm thuộc cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$ của đường tròn tâm O. Biết $MB = 2$ và $MC = 7$, độ dài đoạn thẳng MA bằng

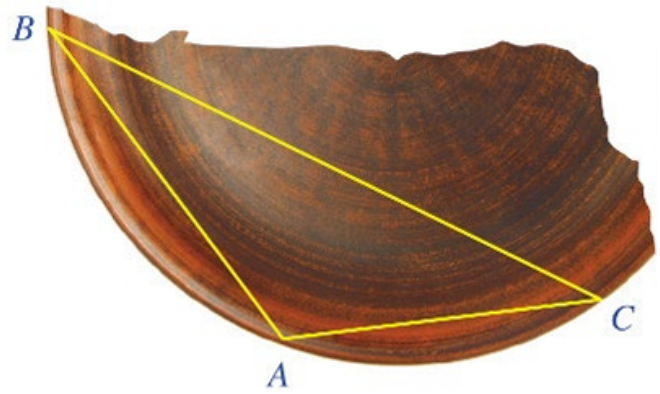


Bài 27. Gọi S là diện tích một cánh buồm hình tam giác. Biết cánh buồm đó có chiều dài một cạnh là 3,2 m và hai góc kề cạnh đó có số đo là 48° và 105°. Khi đó S bằng. (kết quả làm tròn đến

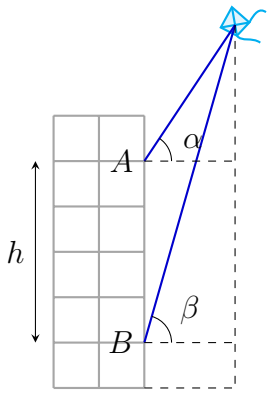
hàng phần mười)



Bài 28. Để xác định bán kính của chiếc đĩa cổ hình tròn bị vỡ một phần, các nhà khảo cổ lấy ba điểm A, B, C trên vành đĩa và tiến hành đo đạc thu được kết quả như sau: cạnh $AB \approx 9,5$ cm, $\widehat{ACB} \approx 60°$. Bán kính của chiếc đĩa là (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

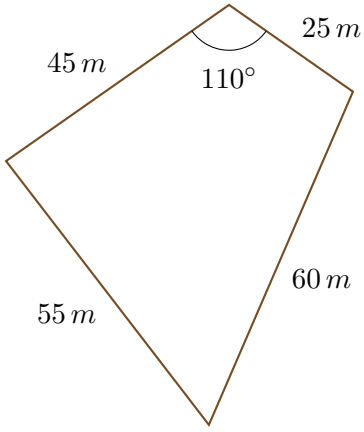


Bài 29. Bạn A đứng ở đỉnh của tòa nhà và quan sát chiếc diều, nhận thấy góc nâng (góc nghiêng giữa phương từ mắt của bạn A tới chiếc diều và phương nằm ngang) là $\alpha = 35°$; khoảng cách từ đỉnh tòa nhà tới mắt bạn A là $1,5m$. Cùng lúc đó ở dưới chân tòa nhà, bạn B cũng quan sát chiếc diều và thấy góc nâng là $\beta = 75°$; khoảng cách từ mặt đất đến mắt bạn B cũng là $1,5m$. Biết chiều cao của tòa nhà là $h = 20m$ (Hình vẽ). Chiếc diều bay cao bao nhiêu mét so mặt đất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

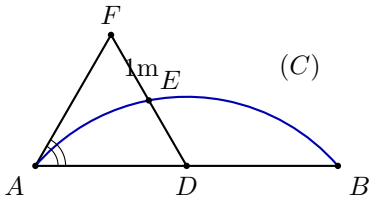


Bài 30. Ông X cần đo diện tích mảnh đất hình tứ giác, ông đi theo chu vi mảnh đất, lần lượt đo độ dài các cạnh và một góc như hình vẽ. Tính diện tích của mảnh đất đó (*làm tròn kết quả đến*

hàng đơn vị, đơn vị: m^2).



Bài 31. Mặt tiền nhà ông An có chiều ngang $AB = 4$m, ông An muốn thiết kế lan can nhô ra có dạng là một phần của đường tròn (C) (hình vẽ). Vì phía trước vướng cây tại vị trí F nên để an toàn, ông An cho xây đường cong cách 1m tính từ trung điểm D của AB. Biết $AF = 2$m, $\widehat{DAF} = 60^\circ$ và lan can cao 1m làm bằng inox với giá $2,2$ triệu/m^2. Tính số tiền ông An phải trả (làm tròn đến hàng nghìn).

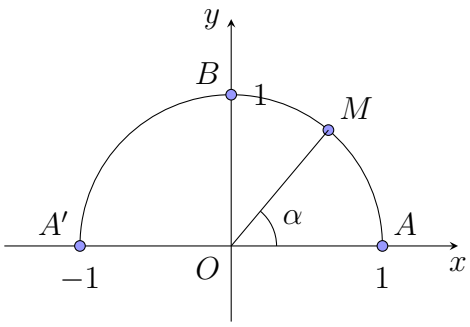


» Sưu tầm và biên soạn: Lê Minh Kha - 0399653362

§4 LỜI GIẢI CHI TIẾT

I. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

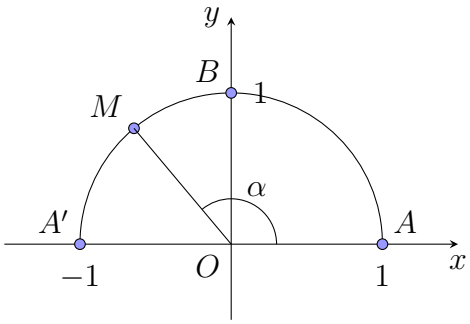
Câu 1. Trên nửa đường tròn đơn vị cho điểm M sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$ như hình bên. Tìm mệnh đề đúng.



Ⓐ $\sin\alpha > 0$. Ⓑ $\sin\alpha < 0$. Ⓒ $\sin\alpha = 0$. Ⓓ $\sin\alpha = 1$.

Hướng dẫn giải. +) Chiếu điểm M lên trục $Oy \Rightarrow \sin\alpha > 0$.

Câu 2. Trên nửa đường tròn đơn vị cho điểm M sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$ như hình bên. Tìm mệnh đề đúng.



Ⓐ $\cos\alpha > 0$. Ⓑ $\cos\alpha < 0$. Ⓒ $\cos\alpha = 0$. Ⓓ $\cos\alpha = -1$.

Hướng dẫn giải. +) Chiếu điểm M lên trục $Ox \Rightarrow \cos\alpha < 0$.

Câu 3. Cho góc $\alpha = \widehat{xOM}$ với điểm $M\left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ trên nửa đường tròn đơn vị. Giá trị lượng giác của $\tan\alpha$ là

Ⓐ $\tan\alpha = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. Ⓑ $\tan\alpha = -2\sqrt{2}$.

Ⓒ $\tan\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}-1}{3}$. Ⓓ $\tan\alpha = -\dfrac{2\sqrt{2}}{9}$.

Hướng dẫn giải. Ta thấy $M\left(-\dfrac{1}{3}; \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = -\dfrac{1}{3} \\ \sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases} \Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}{-\dfrac{1}{3}} = -2\sqrt{2}$.

Câu 4. Cho góc $\alpha = \widehat{xOM}$ với điểm $M\left(-\frac{1}{3};\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ trên nửa đường tròn đơn vị. Giá trị lượng giác của $\cot\alpha$ là

Ⓐ $\cot\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$.
Ⓑ $\cot\alpha = 2\sqrt{2}$.
Ⓒ $\cot\alpha = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}$.
Ⓓ $\cot\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{9}$.

Hướng dẫn giải. Ta thấy $M\left(-\frac{1}{3};\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases}\cos\alpha = -\frac{1}{3}\\ \sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}\end{cases} \Rightarrow \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Câu 5. Biểu thức $E = \sin(180^\circ - x) - 2\cos(90^\circ - x) + \cos x \cdot \tan x$ $(x \neq 90^\circ)$ sau khi thu gọn bằng với biểu thức nào trong 4 biểu thức dưới đây:

Ⓐ $A = 0$.
Ⓑ $B = -2\sin x$.
Ⓒ $C = \sin x$.
Ⓓ $D = -2\cos x$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\sin(180^\circ - x) = \sin x$; $\cos(90^\circ - x) = \sin x$; $\cos x \cdot \tan x = \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x$.
Vậy $E = \sin(180^\circ - x) - 2\cos(90^\circ - x) + \cos x \cdot \tan x$
$= \sin x - 2\sin x + \sin x = 0$.

Câu 6. Cho tam giác ABC, tính giá trị biểu thức $P = \sin A\cos(B+C) + \cos A\sin(B+C)$

Ⓐ 0.
Ⓑ 1.
Ⓒ -1.
Ⓓ 2.

Hướng dẫn giải. Trong tam giác ABC, có $\widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A}$.
Suy ra $\sin(B+C) = \sin A$; $\cos(B+C) = -\cos A$.
Vậy $P = \sin A\cos(B+C) + \cos A\sin(B+C) = -\sin A\cos A + \cos A\sin A = 0$.

Câu 7. Rút gọn biểu thức $A = -\sin(180^\circ - x) + \cos(180^\circ - x) + \cos x$ ta được

Ⓐ $A = -\sin x$.
Ⓑ $A = \sin x$.
Ⓒ $A = 2\sin x$.
Ⓓ $A = \cos x$.

Hướng dẫn giải. Ta có $A = -\sin(180^\circ - x) + \cos(180^\circ - x) + \cos x$
$= -\sin x - \cos x + \cos x = -\sin x$.

Câu 8. Cho $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ với $0 < \alpha < 90^\circ$. Tính $\sin\alpha$.

Ⓐ $\sin\alpha = \frac{1}{5}$.
Ⓑ $\sin\alpha = -\frac{1}{5}$.
Ⓒ $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.
Ⓓ $\sin\alpha = \pm\frac{3}{5}$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{3}{5}$.
Do $0 < \alpha < 90^\circ$ nên $\sin\alpha > 0$. Suy ra, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

Câu 9. Cho $\cot\alpha = -3\sqrt{2}$ với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Khi đó giá trị $\sin\alpha + \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}}$ bằng:

Ⓐ $-\frac{2\sqrt{19}}{19}$.
Ⓑ $\frac{2\sqrt{19}}{19}$.
Ⓒ $-\frac{\sqrt{19}}{19}$.
Ⓓ $\frac{\sqrt{19}}{19}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}=1+\cot^2\alpha=1+18=19\Rightarrow\sin^2\alpha=\dfrac{1}{19}\Rightarrow\sin\alpha=\pm\dfrac{1}{\sqrt{19}}$.

Vì $90^\circ<\alpha<180^\circ\Rightarrow\sin\alpha>0\Rightarrow\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{19}}\Rightarrow\cos\alpha=\sin\alpha\cdot\cot\alpha=-\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{19}}$.

Suy ra $\sin\alpha+\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{19}}-\dfrac{3}{\sqrt{19}}=-\dfrac{2}{\sqrt{19}}=-\dfrac{2\sqrt{19}}{19}$.

Câu 10. Cho $\sin\alpha=\dfrac{3}{5},(90^\circ<\alpha<180^\circ)$. Tính $P=\cot(180^\circ-\alpha)$

Ⓐ $P=\dfrac{3}{4}$. Ⓑ $P=-\dfrac{3}{4}$. Ⓒ $P=-\dfrac{4}{3}$. Ⓓ $P=\dfrac{4}{3}$.

Hướng dẫn giải. Do $90^\circ<\alpha<180^\circ\Rightarrow\cot\alpha<0\Rightarrow\cot\alpha=-\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\alpha}-1}=-\sqrt{\dfrac{25}{9}-1}=-\dfrac{4}{3}$.

$P=\cot(180^\circ-\alpha)=-\cot\alpha=\dfrac{4}{3}$.

Câu 11. Cho góc α thỏa mãn $0^\circ<\alpha<180^\circ,\cos\alpha=-\dfrac{1}{3},\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

Ⓐ $\tan\alpha=-\sqrt{2}$. Ⓑ $\cot\alpha=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ⓒ $\sin(180^\circ-\alpha)=-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. Ⓓ $\cos(180^\circ-\alpha)=\dfrac{1}{3}$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\sqrt{2}$; $\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$.

$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

Câu 12. Kết quả rút gọn của biểu thức $\left(\dfrac{\sin a+\tan a}{\cos a+1}\right)^2+1$ bằng

Ⓐ 2. Ⓑ $1+\tan a$. Ⓒ $\dfrac{1}{\cos^2 a}$. Ⓓ $\dfrac{1}{\sin^2 a}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\left(\dfrac{\sin a+\tan a}{\cos a+1}\right)^2+1=\left(\dfrac{\sin a(\cos a+1)}{\cos a}\cdot\dfrac{1}{\cos a+1}\right)^2+1=\left(\dfrac{\sin a}{\cos a}\right)^2+1=\tan^2 a+1=\dfrac{1}{\cos^2 a}$.

Câu 13. Giá trị của $\cos 60^\circ+\sin 30^\circ$ bằng bao nhiêu?

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ⓑ $\sqrt{3}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Ⓓ 1.

Hướng dẫn giải. Ta có $\cos 60^\circ+\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$.

Câu 14. Giá trị của $\tan 30^\circ+\cot 30^\circ$ bằng bao nhiêu?

Ⓐ $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$. Ⓑ $\dfrac{1+\sqrt{3}}{3}$. Ⓒ $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Ⓓ 2.

Hướng dẫn giải. Ta có $\tan 30^\circ + \cot 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

Câu 15. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào sai?

(A) $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 1$.
(B) $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$.
(C) $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$.
(D) $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = 1$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \neq 1$.

Do đó đẳng thức ở phương án D sai.

Câu 16. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

(A) $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ$.
(B) $\cos 60^\circ = \sin 120^\circ$.
(C) $\cos 30^\circ = \sin 120^\circ$.
(D) $\sin 60^\circ = -\cos 120^\circ$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$ và $\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Suy ra $\cos 60^\circ \neq \sin 120^\circ$.

Câu 17. Đẳng thức nào sau đây sai?

(A) $\sin 45^\circ + \sin 45^\circ = \sqrt{2}$.
(B) $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = 1$.
(C) $\sin 60^\circ + \cos 150^\circ = 0$.
(D) $\sin 120^\circ + \cos 30^\circ = 0$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\sin 120^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ và $\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ nên $\sin 120^\circ + \cos 30^\circ = \sqrt{3} \neq 0$.

Câu 18. Giá trị $\cos 45^\circ + \sin 45^\circ$ bằng bao nhiêu?

(A) 1.
(B) $\sqrt{2}$.
(C) $\sqrt{3}$.
(D) 0.

Hướng dẫn giải. Ta có $\cos 45^\circ + \sin 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

Câu 19. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

(A) $\sin(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$.
(B) $\sin(180^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$.
(C) $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$.
(D) $\sin(180^\circ - \alpha) = \cos\alpha$.

Hướng dẫn giải. Theo tính chất giá trị lượng giác của hai góc bù nhau, ta có $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$.

Câu 20. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào sai?

(A) $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 0$.
(B) $\sin 90^\circ + \cos 90^\circ = 1$.
(C) $\sin 180^\circ + \cos 180^\circ = -1$.
(D) $\sin 60^\circ + \cos 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\sin 0^\circ + \cos 0^\circ = 0 + 1 = 1 \neq 0$. Vậy phương án A sai.

Câu 21. Cho α là góc tù. Điều khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $\sin\alpha < 0$.
(B) $\cos\alpha > 0$.
(C) $\tan\alpha < 0$.
(D) $\cot\alpha > 0$.

Hướng dẫn giải. Vì α là góc tù nên $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Khi đó $\sin\alpha > 0$ và $\cos\alpha < 0$, dẫn tới $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} < 0$.

Câu 22. Giá trị của $E = \sin 36^\circ \cos 6^\circ - \sin 126^\circ \cos 84^\circ$ là

(A) $\dfrac{1}{2}$.
(B) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
(C) 1.
(D) -1.

Hướng dẫn giải. Ta có $\sin 126^\circ = \sin(180^\circ - 126^\circ) = \sin 54^\circ = \cos 36^\circ$ và $\cos 84^\circ = \sin(90^\circ - 84^\circ) = \sin 6^\circ$.

Khi đó $E = \sin 36^\circ \cos 6^\circ - \cos 36^\circ \sin 6^\circ = \sin(36^\circ - 6^\circ) = \sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$.

Câu 23. Trong các đẳng thức sau đây, đẳng thức nào đúng?

(A) $\sin(180^\circ - \alpha) = -\sin\alpha$.
(B) $\cos(180^\circ - \alpha) = \cos\alpha$.
(C) $\tan(180^\circ - \alpha) = \tan\alpha$.
(D) $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot\alpha$.

Hướng dẫn giải. Công thức lượng giác của hai góc bù nhau là $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$, $\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan\alpha$, $\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot\alpha$.

Câu 24. Cho α và β là hai góc khác nhau và bù nhau, trong các đẳng thức sau đây đẳng thức nào sai?

(A) $\sin\alpha = \sin\beta$.
(B) $\cos\alpha = -\cos\beta$.
(C) $\tan\alpha = -\tan\beta$.
(D) $\cot\alpha = \cot\beta$.

Hướng dẫn giải. Hai góc bù nhau thì $\sin\alpha = \sin\beta$, $\cos\alpha = -\cos\beta$, $\tan\alpha = -\tan\beta$ và $\cot\alpha = -\cot\beta$. Vậy đẳng thức $\cot\alpha = \cot\beta$ là sai.

Câu 25. Cho góc α tù. Điều khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) $\sin\alpha < 0$.
(B) $\cos\alpha > 0$.
(C) $\tan\alpha > 0$.
(D) $\cot\alpha < 0$.

Hướng dẫn giải. Góc tù α thỏa mãn $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Khi đó $\sin\alpha > 0$ và $\cos\alpha < 0$, suy ra $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} < 0$.

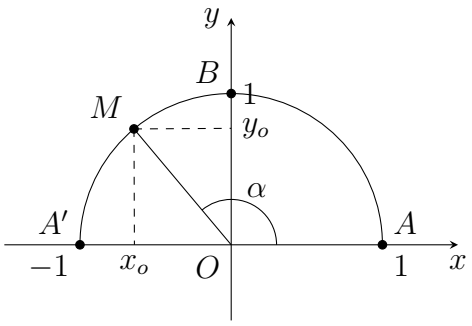
Câu 26. Hai góc nhọn α và β phụ nhau, hệ thức nào sau đây là sai?

(A) $\sin\alpha = \cos\beta$.
(B) $\tan\alpha = \cot\beta$.
(C) $\cot\beta = \dfrac{1}{\cot\alpha}$.
(D) $\cos\alpha = -\sin\beta$.

Hướng dẫn giải. Hai góc phụ nhau có $\sin\alpha = \cos\beta$ và $\cos\alpha = \sin\beta$.

Hệ thức $\cos\alpha = -\sin\beta$ là sai vì cả hai giá trị đều dương.

Câu 27. Trên nửa đường tròn đơn vị cho điểm M sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$ như hình bên. Tìm mệnh đề đúng.



(A) $\tan\alpha = \dfrac{x_0}{y_0}$.
(B) $\tan\alpha = \dfrac{y_0}{x_0}$.
(C) $\tan\alpha = x_0$.
(D) $\tan\alpha = y_0$.

Hướng dẫn giải. Điểm $M(x_0; y_0)$ nằm trên nửa đường tròn đơn vị ứng với góc α thì $\cos\alpha = x_0$ và $\sin\alpha = y_0$. Do đó $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{y_0}{x_0}$.

Câu 28. Đơn giản biểu thức $G = (1 - \sin^2 x)\cot^2 x + 1 - \cot^2 x$.

Ⓐ $\sin^2 x$. Ⓑ $\cos^2 x$. Ⓒ $\dfrac{1}{\cos x}$. Ⓓ $\cos x$.

Hướng dẫn giải. Ta có $G = \cos^2 x \cot^2 x + 1 - \cot^2 x = \cot^2 x(\cos^2 x - 1) + 1 = \cot^2 x(-\sin^2 x) + 1 = -\cos^2 x + 1 = \sin^2 x$.

Câu 29. Đơn giản biểu thức $E = \cot x + \dfrac{\sin x}{1 + \cos x}$ ta được

Ⓐ $\sin x$. Ⓑ $\dfrac{1}{\cos x}$. Ⓒ $\dfrac{1}{\sin x}$. Ⓓ $\cos x$.

Hướng dẫn giải. $E = \dfrac{\cos x}{\sin x} + \dfrac{\sin x}{1 + \cos x} = \dfrac{\cos x(1 + \cos x) + \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} = \dfrac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} = \dfrac{\cos x + 1}{\sin x(1 + \cos x)} = \dfrac{1}{\sin x}$.

Câu 30. Khẳng định nào sau đây là sai?

Ⓐ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Ⓑ $1 + \cot^2 \alpha = \dfrac{1}{\sin^2 \alpha}$ $(\sin \alpha \neq 0)$.

Ⓒ $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = -1$ $(\sin \alpha \cos \alpha \neq 0)$.

Ⓓ $1 + \tan^2 \alpha = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha}$ $(\cos \alpha \neq 0)$.

Hướng dẫn giải. Hệ thức đúng là $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$. Do đó phương án C sai.

Câu 31. Giá trị của $B = \cos^2 73^\circ + \cos^2 87^\circ + \cos^2 3^\circ + \cos^2 17^\circ$ là

Ⓐ $\sqrt{2}$. Ⓑ 2. Ⓒ -2. Ⓓ 1.

Hướng dẫn giải. $B = (\cos^2 73^\circ + \cos^2 17^\circ) + (\cos^2 87^\circ + \cos^2 3^\circ) = (\sin^2 17^\circ + \cos^2 17^\circ) + (\sin^2 3^\circ + \cos^2 3^\circ) = 1 + 1 = 2$.

Câu 32. Giá trị của biểu thức $A = \sin^2 51^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 39^\circ + \sin^2 35^\circ$ là

Ⓐ 3. Ⓑ 4. Ⓒ 1. Ⓓ 2.

Hướng dẫn giải. $A = (\sin^2 51^\circ + \sin^2 39^\circ) + (\sin^2 55^\circ + \sin^2 35^\circ) = (\cos^2 39^\circ + \sin^2 39^\circ) + (\cos^2 35^\circ + \sin^2 35^\circ) = 1 + 1 = 2$.

Câu 33. Cho biết $\sin \dfrac{\alpha}{3} = \dfrac{3}{5}$. Giá trị của $P = 3\sin^2 \dfrac{\alpha}{3} + 5\cos^2 \dfrac{\alpha}{3}$ bằng bao nhiêu?

Ⓐ $P = \dfrac{105}{25}$. Ⓑ $P = \dfrac{107}{25}$. Ⓒ $P = \dfrac{109}{25}$. Ⓓ $P = \dfrac{111}{25}$.

Hướng dẫn giải. $P = 3\sin^2 \dfrac{\alpha}{3} + 5(1 - \sin^2 \dfrac{\alpha}{3}) = 5 - 2\sin^2 \dfrac{\alpha}{3} = 5 - 2\left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = 5 - \dfrac{18}{25} = \dfrac{107}{25}$.

Câu 34. Cho biết $\cos \alpha = -\dfrac{2}{3}$. Giá trị của biểu thức $E = \dfrac{\cot \alpha - 3\tan \alpha}{2\cot \alpha - \tan \alpha}$ bằng bao nhiêu?

Ⓐ $-\dfrac{25}{3}$. Ⓑ $-\dfrac{11}{13}$. Ⓒ $-\dfrac{11}{3}$. Ⓓ $-\dfrac{25}{13}$.

Hướng dẫn giải. $\tan^2 \alpha = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \dfrac{9}{4} - 1 = \dfrac{5}{4}$.

$E = \dfrac{1/\tan \alpha - 3\tan \alpha}{2/\tan \alpha - \tan \alpha} = \dfrac{1 - 3\tan^2 \alpha}{2 - \tan^2 \alpha} = \dfrac{1 - 3(5/4)}{2 - 5/4} = \dfrac{-11/4}{3/4} = -\dfrac{11}{3}$.

Câu 35. Biết $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$. Giá trị đúng của biểu thức $P = \sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha$ là:

Ⓐ $\dfrac{11}{9}$. Ⓑ $\dfrac{4}{3}$. Ⓒ $\dfrac{1}{3}$. Ⓓ $\dfrac{10}{9}$.

Hướng dẫn giải. $P = (1-\cos^2\alpha) + 3\cos^2\alpha = 1 + 2\cos^2\alpha = 1 + 2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{11}{9}$.

Câu 36. Cho $\cot\alpha = \dfrac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $A = \dfrac{3\sin\alpha + 4\cos\alpha}{2\sin\alpha - 5\cos\alpha}$ là:

Ⓐ $-\dfrac{15}{13}$. Ⓑ -13. Ⓒ $\dfrac{15}{13}$. Ⓓ 13.

Hướng dẫn giải. Chia cả tử và mẫu cho $\sin\alpha$: $A = \dfrac{3 + 4\cot\alpha}{2 - 5\cot\alpha} = \dfrac{3 + 4(1/3)}{2 - 5(1/3)} = \dfrac{13/3}{1/3} = 13$.

Câu 37. Rút gọn biểu thức $P = \dfrac{1 - \sin^2 x}{2\sin x\cos x}$ ta được

Ⓐ $P = \dfrac{1}{2}\tan x$. Ⓑ $P = \dfrac{1}{2}\cot x$.
Ⓒ $P = 2\cot x$. Ⓓ $P = 2\tan x$.

Hướng dẫn giải. $P = \dfrac{\cos^2 x}{2\sin x\cos x} = \dfrac{\cos x}{2\sin x} = \dfrac{1}{2}\cot x$.

Câu 38. Trong tam giác ABC công thức nào sau đây có thể dùng để tính $\cos A$?

Ⓐ $\cos A = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$. Ⓑ $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.
Ⓒ $\cos A = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$. Ⓓ $\cos A = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ac}$.

Hướng dẫn giải. Hệ quả của định lý côsin: $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

Câu 39. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^\circ$. Chọn khẳng định đúng.

Ⓐ $a^2 = b^2 + c^2 - 3bc$. Ⓑ $a^2 = b^2 + c^2 + bc$.
Ⓒ $a^2 = b^2 + c^2 + 3bc$. Ⓓ $a^2 = b^2 + c^2 - bc$.

Hướng dẫn giải. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos 120^\circ = b^2 + c^2 - 2bc\left(-\dfrac{1}{2}\right) = b^2 + c^2 + bc$.

Câu 40. Cho tam giác ABC có góc $\widehat{A} = 120^\circ$, $b = 8, c = 5$. Khi đó số đo của $\widehat{B}$ gần nhất với số nào sau đây?

Ⓐ $71^\circ 35'$. Ⓑ $30^\circ 37'$. Ⓒ $45^\circ 12'$. Ⓓ $37^\circ 35'$.

Hướng dẫn giải. $a^2 = 8^2 + 5^2 - 2\cdot 8\cdot 5\cdot\cos 120^\circ = 64 + 25 + 40 = 129 \Rightarrow a = \sqrt{129}$.

$\sin B = \dfrac{b\sin A}{a} = \dfrac{8\cdot\sin 120^\circ}{\sqrt{129}} \approx 0.609 \Rightarrow B \approx 37^\circ 35'$.

Câu 41. Cho $\triangle ABC$ có $a = 6, b = 8, c = 10$. Diện tích S của tam giác trên là:

Ⓐ 48. Ⓑ 24. Ⓒ 12. Ⓓ 30.

Hướng dẫn giải. Nhận thấy $6^2 + 8^2 = 10^2$ nên tam giác vuông tại C.

$S = \dfrac{1}{2}ab = \dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 8 = 24$.

Câu 42. Tính diện tích tam giác ABC có $AB = 12; AC = 8; \widehat{BAC} = 30^\circ$.

Ⓐ $24\sqrt{2}$. Ⓑ 48. Ⓒ 24. Ⓓ $24\sqrt{3}$.

✍ *Hướng dẫn giải.* $S = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A = \dfrac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 \cdot \sin 30^\circ = 24$.

Câu 43. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 75^\circ, \widehat{C} = 45^\circ$ và $BC = 50$. Tính độ dài cạnh AB.

Ⓐ $24\sqrt{2}$. Ⓑ 48. Ⓒ 24. Ⓓ $40,8$.

✍ *Hướng dẫn giải.* $\widehat{A} = 180^\circ - (75^\circ + 45^\circ) = 60^\circ$.

Dùng định lý sin: $\dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{BC}{\sin A} \Rightarrow AB = \dfrac{50 \cdot \sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = \dfrac{50 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{50\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \approx 40,8$.

Câu 44. Cho tam giác ABC có $AB = 6, AC = 7, BC = 8$. Giá trị $\cos A$ bằng bao nhiêu?

Ⓐ $0,5$. Ⓑ $\dfrac{1}{4}$. Ⓒ $\dfrac{1}{3}$. Ⓓ $\dfrac{3}{4}$.

✍ *Hướng dẫn giải.* $\cos A = \dfrac{6^2 + 7^2 - 8^2}{2 \cdot 6 \cdot 7} = \dfrac{36 + 49 - 64}{84} = \dfrac{21}{84} = \dfrac{1}{4}$.

Câu 45. Tính số đo góc A của tam giác ABC biết $a^2 = b^2 + c^2 + \sqrt{2}bc$.

Ⓐ 60°. Ⓑ 45°. Ⓒ 135°. Ⓓ 150°.

✍ *Hướng dẫn giải.* Theo định lý côsin $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

So sánh giả thiết ta có $-2\cos A = \sqrt{2} \Rightarrow \cos A = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A = 135^\circ$.

Câu 46. Cho tam giác ABC có $b^2 + c^2 - a^2 = \sqrt{3}bc$. Lựa chọn mệnh đề đúng

Ⓐ $100^\circ > \widehat{BAC} > 50^\circ$. Ⓑ $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 150^\circ$.
Ⓒ $\widehat{ABC} > 160^\circ$. Ⓓ $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Ta có $2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2 = \sqrt{3}bc \Rightarrow \cos A = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 30^\circ$.
Khi đó $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

Câu 47. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 60^\circ, \widehat{C} = 45^\circ$ và $AB = 5$. Tính độ dài cạnh AC.

Ⓐ $AC = \dfrac{5\sqrt{6}}{2}$. Ⓑ $AC = 5\sqrt{3}$. Ⓒ $AC = 5\sqrt{2}$. Ⓓ $AC = 10$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Dùng định lý sin: $\dfrac{AC}{\sin B} = \dfrac{AB}{\sin C} \Rightarrow AC = \dfrac{5 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \dfrac{5 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{6}}{2}$.

Câu 48. Cho tam giác ABC có $a = 2, b = \sqrt{6}, c = 1 + \sqrt{3}$. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp là

Ⓐ 1. Ⓑ $\sqrt{2}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Ⓓ $\sqrt{3}$.

✍ *Hướng dẫn giải.* $\cos A = \dfrac{6 + (1 + \sqrt{3})^2 - 4}{2\sqrt{6}(1 + \sqrt{3})} = \dfrac{6 + 4 + 2\sqrt{3} - 4}{2\sqrt{6} + 2\sqrt{18}} = \dfrac{6 + 2\sqrt{3}}{2\sqrt{6} + 6\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A = 45^\circ$.

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{2}{2\sin 45^\circ}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}.$$

Câu 49. Tính bán kính ra của đường tròn nội tiếp tam giác ABC biết độ dài ba cạnh là $13, 14, 15$.

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 4. Ⓓ $\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải. $p=\dfrac{13+14+15}{2}=21$.

$S=\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}=\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6}=84$.

$r=\dfrac{S}{p}=\dfrac{84}{21}=4$.

Câu 50. Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh thỏa mãn đẳng thức $(a+b-c)(a+b+c)=3ab$. Số đo của góc C khi đó là

Ⓐ 60°. Ⓑ 120°. Ⓒ 45°. Ⓓ 30°.

Hướng dẫn giải. $(a+b-c)(a+b+c)=3ab\Leftrightarrow (a+b)^2-c^2=3ab\Leftrightarrow a^2+b^2+2ab-c^2=3ab\Leftrightarrow a^2+b^2-c^2=ab$.

Mà $a^2+b^2-c^2=2ab\cos C\Rightarrow 2ab\cos C=ab\Rightarrow \cos C=\dfrac{1}{2}\Rightarrow C=60^\circ$.

Câu 51. Trong các công thức sau, công thức nào đúng?

Ⓐ $S=\dfrac{1}{2}bc\sin B$. Ⓑ $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$.

Ⓒ $S=\dfrac{1}{2}ab\sin B$. Ⓓ $S=\dfrac{1}{2}ac\sin C$.

Hướng dẫn giải. Theo công thức tính diện tích tam giác: $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}ab\sin C$. Đối chiếu các phương án, ta thấy công thức đúng là $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$.

Câu 52. Cho tam giác ABC có $AB=4, AC=3, \widehat{BAC}=30^\circ$. Diện tích tam giác ABC bằng

Ⓐ $S=3$. Ⓑ $S=4\sqrt{3}$. Ⓒ $S=6\sqrt{3}$. Ⓓ $S=6$.

Hướng dẫn giải. Diện tích tam giác ABC là: $S=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\widehat{BAC}=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\cdot\sin 30^\circ=6\cdot\dfrac{1}{2}=3$.

Câu 53. Tính diện tích tam giác ABC biết $AB=3, BC=5, CA=6$.

Ⓐ $\sqrt{56}$. Ⓑ $\sqrt{48}$. Ⓒ 6. Ⓓ 8.

Hướng dẫn giải. Ta có độ dài các cạnh: $a=5, b=6, c=3$.

Nửa chu vi tam giác: $p=\dfrac{a+b+c}{2}=\dfrac{5+6+3}{2}=7$.

Áp dụng công thức Heron: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{7(7-5)(7-6)(7-3)}=\sqrt{7\cdot 2\cdot 1\cdot 4}=\sqrt{56}$.

Câu 54. Cho tam giác ABC có $AB=3, AC=4, BC=5$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng?

Ⓐ $\dfrac{8}{9}$. Ⓑ $\dfrac{4}{5}$. Ⓒ $\dfrac{3}{4}$. Ⓓ 1.

Hướng dẫn giải. Ta nhận thấy $3^2+4^2=5^2$ nên tam giác ABC vuông tại A.

Diện tích tam giác: $S=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 4=6$.

Nửa chu vi: $p=\dfrac{3+4+5}{2}=6$.

Bán kính đường tròn nội tiếp: $r=\dfrac{S}{p}=\dfrac{6}{6}=1$.

Câu 55. Cho tam giác ABC với $BC=a, AC=b, AB=c$. Đẳng thức nào sai?

Ⓐ $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$. Ⓑ $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.
Ⓒ $c^2=b^2+a^2+2ab\cos C$. Ⓓ $c^2=b^2+a^2-2ab\cos C$.

Hướng dẫn giải. Theo định lí côsin: $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

Vì vậy, đẳng thức ở phương án thứ ba là sai do có dấu "+" thay vì dấu "-".

Câu 56. Cho ΔABC có $b=6, c=8, \widehat{A}=60^\circ$. Độ dài cạnh a là.

Ⓐ $2\sqrt{13}$. Ⓑ $3\sqrt{12}$. Ⓒ $2\sqrt{37}$. Ⓓ $\sqrt{20}$.

Hướng dẫn giải. Áp dụng định lí côsin: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=6^2+8^2-2\cdot 6\cdot 8\cdot\cos 60^\circ=36+64-48=52$.

Vậy $a=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$.

Câu 57. Cho tam giác ABC có $a^2+b^2-c^2>0$. Khi đó:

Ⓐ $\widehat{C}>90^\circ$.
Ⓑ $\widehat{C}<90^\circ$.
Ⓒ $\widehat{C}=90^\circ$.
Ⓓ Không thể kết luận được gì về $\widehat{C}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.
Theo giả thiết $a^2+b^2-c^2>0$ và $2ab>0$ nên $\cos C>0$.
Suy ra góc C là góc nhọn, tức là $\widehat{C}<90^\circ$.

Câu 58. Cho tam giác ABC với $BC=7\,\text{cm}, AC=9\,\text{cm}, AB=4\,\text{cm}$. Tính $\cos A$.

Ⓐ $\cos A=-\dfrac{2}{3}$. Ⓑ $\cos A=\dfrac{1}{2}$. Ⓒ $\cos A=\dfrac{1}{3}$. Ⓓ $\cos A=\dfrac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $a=7, b=9, c=4$.

Áp dụng hệ quả định lí côsin:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{9^2+4^2-7^2}{2\cdot 9\cdot 4}=\frac{48}{72}=\frac{2}{3}.$$

Câu 59. Cho tam giác ABC với $BC=a, AC=b, AB=c$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $a=2R\cos A$. Ⓑ $a=2R\sin A$.
Ⓒ $a=2R\tan A$. Ⓓ $a=R\sin A$.

Hướng dẫn giải. Theo định lí sin: $\dfrac{a}{\sin A}=2R\Rightarrow a=2R\sin A$.

Câu 60. Cho tam giác ABC có $\widehat{B}=45^\circ$, cạnh $AC=2\sqrt{2}\,\text{cm}$. Bán kính R của đường tròn

ngoại tiếp tam giác ABC bằng

Ⓐ $R = 1\,\text{cm}$. Ⓑ $R = 2\,\text{cm}$. Ⓒ $R = 4\,\text{cm}$. Ⓓ $R = 3\,\text{cm}$.

Hướng dẫn giải. Theo định lí sin: $R = \dfrac{AC}{2\sin B} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2\sin 45^\circ} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = 2\,\text{cm}$.

Câu 61. Cho tam giác ABC có góc $\widehat{B} = 60^\circ, \widehat{C} = 45^\circ$, cạnh $AB = 4$. Tính độ dài cạnh AC.

Ⓐ $2\sqrt{6}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. Ⓒ $\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$. Ⓓ $\dfrac{3\sqrt{6}}{4}$.

Hướng dẫn giải. Theo định lí sin: $\dfrac{AC}{\sin B} = \dfrac{AB}{\sin C} \Rightarrow AC = \dfrac{AB\cdot\sin B}{\sin C} = \dfrac{4\cdot\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \dfrac{4\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{6}$.

Câu 62. Tam giác ABC có $2(b^2 + c^2) = a^2 + 1993$. Độ dài trung tuyến kẻ từ A của tam giác là

Ⓐ $498,25$. Ⓑ $996,5$. Ⓒ 120. Ⓓ 1993.

Hướng dẫn giải. Công thức trung tuyến: $m_a^2 = \dfrac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$.

Thay giả thiết vào: $m_a^2 = \dfrac{1993}{4} = 498,25$.

Câu 63. Cho tam giác ABC có $a = 4, b = 6, c = 8$. Khi đó diện tích của tam giác là:

Ⓐ $9\sqrt{15}$. Ⓑ $3\sqrt{15}$. Ⓒ 105. Ⓓ $\dfrac{2}{3}\sqrt{15}$.

Hướng dẫn giải. Nửa chu vi $p = \dfrac{4+6+8}{2} = 9$.

Diện tích $S = \sqrt{9(9-4)(9-6)(9-8)} = \sqrt{9\cdot 5\cdot 3\cdot 1} = \sqrt{135} = 3\sqrt{15}$.

Câu 64. Tam giác với ba cạnh là $5; 12; 13$ có bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó bằng bao nhiêu?

Ⓐ 2. Ⓑ $2\sqrt{2}$. Ⓒ $2\sqrt{3}$. Ⓓ 3.

Hướng dẫn giải. Tam giác vuông vì $5^2 + 12^2 = 13^2$.

Diện tích $S = \dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 12 = 30$. Nửa chu vi $p = \dfrac{5+12+13}{2} = 15$.

Bán kính $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{30}{15} = 2$.

Câu 65. Cho ΔABC có $B = 60^\circ, a = 8, c = 5$. Độ dài cạnh b bằng:

Ⓐ 7. Ⓑ 129. Ⓒ 49. Ⓓ $\sqrt{129}$.

Hướng dẫn giải. Áp dụng định lí côsin: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B = 64 + 25 - 2\cdot 8\cdot 5\cdot\dfrac{1}{2} = 89 - 40 = 49 \Rightarrow b = 7$.

Câu 66. Cho tam giác ABC. Tìm công thức sai:

Ⓐ $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$. Ⓑ $\sin A = \dfrac{a}{2R}$.

Ⓒ $b\sin B = 2R$. Ⓓ $\sin C = \dfrac{c\sin A}{a}$.

Hướng dẫn giải. Theo định lí sin, $\dfrac{b}{\sin B} = 2R \Rightarrow b = 2R\sin B$. Vậy công thức $b\sin B = 2R$ là sai.

Câu 67. Trong tam giác ABC, nếu có $a^2 = bc$ thì:

Ⓐ $\dfrac{1}{h_a^2} = \dfrac{1}{h_b} - \dfrac{1}{h_c}$. Ⓑ $h_a^2 = h_b h_c$.

Ⓒ $\dfrac{1}{h_a^2} = \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$. Ⓓ $\dfrac{1}{h_a^2} = \dfrac{2}{h_b} + \dfrac{2}{h_c}$.

Hướng dẫn giải. Ta có công thức diện tích tam giác: $S = \dfrac{1}{2}ah_a = \dfrac{1}{2}bh_b = \dfrac{1}{2}ch_c$.

Từ đó suy ra: $a = \dfrac{2S}{h_a}$, $b = \dfrac{2S}{h_b}$, $c = \dfrac{2S}{h_c}$.

Thay vào giả thiết $a^2 = bc$, ta được:

$\left(\dfrac{2S}{h_a}\right)^2 = \dfrac{2S}{h_b}\cdot\dfrac{2S}{h_c} \Leftrightarrow \dfrac{4S^2}{h_a^2} = \dfrac{4S^2}{h_b h_c} \Leftrightarrow h_a^2 = h_b h_c$.

Câu 68. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết $AB = 10$ và $\tan(A+B) = \dfrac{1}{3}$.

Ⓐ $\dfrac{5\sqrt{10}}{9}$. Ⓑ $\dfrac{10}{3}$. Ⓒ $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. Ⓓ $5\sqrt{10}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $c = AB = 10$. Vì $A + B + C = 180^\circ$ nên $A + B = 180^\circ - C$.

Do đó: $\tan(A + B) = \tan(180^\circ - C) = -\tan C = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \tan C = -\dfrac{1}{3}$.

Vì $\tan C < 0$ nên C là góc tù, suy ra $\sin C > 0$ và $\cos C < 0$.

Ta có: $1 + \tan^2 C = \dfrac{1}{\cos^2 C} \Rightarrow 1 + \dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{\cos^2 C} \Rightarrow \cos^2 C = \dfrac{9}{10}$.

Mà $\sin^2 C = 1 - \cos^2 C = 1 - \dfrac{9}{10} = \dfrac{1}{10} \Rightarrow \sin C = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp: $R = \dfrac{c}{2\sin C} = \dfrac{10}{2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{10}}} = 5\sqrt{10}$.

Câu 69. Trong tam giác ABC, nếu có $2h_a = h_b + h_c$ thì:

Ⓐ $\dfrac{2}{\sin A} = \dfrac{1}{\sin B} + \dfrac{1}{\sin C}$. Ⓑ $2\sin A = \sin B + \sin C$.

Ⓒ $\sin A = 2\sin B + 2\sin C$. Ⓓ $\dfrac{2}{\sin A} = \dfrac{1}{\sin B} - \dfrac{1}{\sin C}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $h_a = \dfrac{2S}{a}$, $h_b = \dfrac{2S}{b}$, $h_c = \dfrac{2S}{c}$.

Giả thiết $2h_a = h_b + h_c \Leftrightarrow 2\cdot\dfrac{2S}{a} = \dfrac{2S}{b} + \dfrac{2S}{c} \Leftrightarrow \dfrac{2}{a} = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$.

Theo định lí sin: $a = 2R\sin A, b = 2R\sin B, c = 2R\sin C$.

Thay vào ta được: $\dfrac{2}{2R\sin A} = \dfrac{1}{2R\sin B} + \dfrac{1}{2R\sin C} \Leftrightarrow \dfrac{2}{\sin A} = \dfrac{1}{\sin B} + \dfrac{1}{\sin C}$.

Câu 70. Trong tam giác ABC, câu nào sau đây đúng?

Ⓐ $m_a = \dfrac{b+c}{2}$. Ⓑ $m_a > \dfrac{b+c}{2}$. Ⓒ $m_a < \dfrac{b+c}{2}$. Ⓓ $m_a = b + c$.

Hướng dẫn giải. Trong một tam giác bất kỳ, độ dài đường trung tuyến luôn nhỏ hơn nửa tổng

độ dài hai cạnh kề với nó. Cụ thể: $m_a < \dfrac{b+c}{2}$.

Điều này có thể chứng minh bằng cách lấy điểm D đối xứng với A qua trung điểm M của BC, khi đó tứ giác $ABDC$ là hình bình hành và $AD < AB + BD \Rightarrow 2m_a < c + b$.

Câu 71. Tam giác ABC có các cạnh thỏa mãn điều kiện $(a+b+c)(a+b-c) = 3ab$. Tính số đo của góc C.

Ⓐ $45°$. Ⓑ $60°$. Ⓒ $120°$. Ⓓ $30°$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $(a+b+c)(a+b-c) = 3ab \Leftrightarrow (a+b)^2 - c^2 = 3ab$

$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 - c^2 = 3ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 = ab$.

Theo định lí côsin: $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \dfrac{ab}{2ab} = \dfrac{1}{2}$.

Suy ra $\widehat{C} = 60°$.

Câu 72. Tam giác ABC thỏa mãn $a\cos B = b\cos A$. Tam giác ABC là tam giác gì?

Ⓐ Tam giác vuông. Ⓑ Tam giác đều.
Ⓒ Tam giác vuông cân. Ⓓ Tam giác cân.

Hướng dẫn giải. Áp dụng định lí sin $a = 2R\sin A, b = 2R\sin B$ vào giả thiết:

$2R\sin A\cos B = 2R\sin B\cos A \Leftrightarrow \sin A\cos B - \cos A\sin B = 0 \Leftrightarrow \sin(A-B) = 0 \Leftrightarrow A = B$. Vậy tam giác ABC cân tại C.

Câu 73. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB = 4, BC = 6$, M là trung điểm của BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho $ND = 3NC$. Tính diện tích tam giác AMN.

Ⓐ 6. Ⓑ 8. Ⓒ $7,5$. Ⓓ 7.

Hướng dẫn giải. Ta có $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 4 \cdot 6 = 24$.

M là trung điểm $BC \Rightarrow BM = MC = 3$. N trên CD sao cho $ND = 3NC$ và $CD = 4 \Rightarrow NC = 1, ND = 3$.

Diện tích các tam giác vuông xung quanh: $S_{ABM} = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = 6$. $S_{MCN} = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1 = 1,5$. $S_{ADN} = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$. Vậy $S_{AMN} = S_{ABCD} - (S_{ABM} + S_{MCN} + S_{ADN}) = 24 - (6 + 1,5 + 9) = 7,5$.

Câu 74. Mệnh đề nào sau đây sai?

Ⓐ Nếu $a^2 > b^2 + c^2$ thì A là góc tù.
Ⓑ Nếu tam giác ABC có một góc tù thì $a^2 > b^2 + c^2$.
Ⓒ Nếu $a^2 < b^2 + c^2$ thì A là góc nhọn.
Ⓓ Nếu $a^2 = b^2 + c^2$ thì A là góc vuông.

Hướng dẫn giải. Mệnh đề thứ hai sai vì tam giác có góc tù không nhất thiết là góc A. Nếu góc B tù thì $b^2 > a^2 + c^2$, khi đó mệnh đề $a^2 > b^2 + c^2$ là sai.

Câu 75. Độ dài trung tuyến m_c ứng với cạnh c của ΔABC bằng biểu thức nào sau đây?

Ⓐ $\dfrac{b^2+a^2}{2} - \dfrac{c^2}{4}$. Ⓑ $\sqrt{\dfrac{b^2+a^2}{2} + \dfrac{c^2}{4}}$.
Ⓒ $\dfrac{1}{2}\sqrt{2(b^2+a^2) - c^2}$. Ⓓ $\sqrt{\dfrac{b^2+a^2-c^2}{4}}$.

Hướng dẫn giải. Công thức tính độ dài đường trung tuyến ứng với cạnh c là:

$$m_c^2 = \frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4} \Rightarrow m_c = \sqrt{\frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}.$$

Câu 76. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có $AB = 3, AC = 6$ và $\widehat{A} = 60^\circ$.

(A) $R = 3$. (B) $R = 3\sqrt{3}$. (C) $R = \sqrt{3}$. (D) $R = 6$.

Hướng dẫn giải. Ta có $b = 6, c = 3, \widehat{A} = 60^\circ$.

Áp dụng định lí côsin: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 6^2 + 3^2 - 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ = 36 + 9 - 18 = 27 \Rightarrow a = 3\sqrt{3}$.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp: $R = \dfrac{a}{2\sin A} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2\sin 60^\circ} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}} = 3$.

Câu 77. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nhọn có $a = 3, b = 4$ và diện tích $S = 3\sqrt{3}$.

(A) $R = \dfrac{\sqrt{3}}{13}$. (B) $R = \dfrac{\sqrt{39}}{3}$. (C) $R = \dfrac{2}{3}$. (D) $R = \dfrac{\sqrt{13}}{3}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C \Rightarrow 3\sqrt{3} = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \sin C = 6\sin C \Rightarrow \sin C = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Vì tam giác nhọn nên $\widehat{C} = 60^\circ$.

Cạnh $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ = 9 + 16 - 12 = 13 \Rightarrow c = \sqrt{13}$.

Bán kính $R = \dfrac{c}{2\sin C} = \dfrac{\sqrt{13}}{2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{39}}{3}$.

Câu 78. Cho tam giác ABC thỏa mãn $c = b\cos A$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

(A) Tam giác ABC là tam giác cân nhưng không vuông.
(B) Tam giác ABC là tam giác nhọn.
(C) Tam giác ABC là tam giác vuông.
(D) Tam giác ABC là tam giác tù.

Hướng dẫn giải. Từ $c = b\cos A$, áp dụng định lí côsin $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, ta có:

$c = b \cdot \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \Leftrightarrow c = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c} \Leftrightarrow 2c^2 = b^2 + c^2 - a^2 \Leftrightarrow a^2 + c^2 = b^2$.

Theo định lí Pythagoras đảo, tam giác ABC vuông tại B.

Câu 79. Cho tam giác ABC có chu vi bằng 12, bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác là 5. Tính tổng $S = \sin A + \sin B + \sin C$.

(A) $\dfrac{3}{5}$. (B) $\dfrac{6}{5}$. (C) $\dfrac{24}{5}$. (D) $\dfrac{12}{5}$.

Hướng dẫn giải. Ta có chu vi $a + b + c = 12$ và $R = 5$.

Theo định lí sin: $a = 2R\sin A, b = 2R\sin B, c = 2R\sin C$.

$\Rightarrow a + b + c = 2R(\sin A + \sin B + \sin C) \Rightarrow 12 = 2 \cdot 5 \cdot (\sin A + \sin B + \sin C)$

$\Rightarrow \sin A + \sin B + \sin C = \dfrac{12}{10} = \dfrac{6}{5}$.

Câu 80. Cho tam giác ABC có các góc $\widehat{B} = 120°, \widehat{C} = 40°$, cạnh $BC = 5$ cm. Tính độ dài cạnh AB (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Ⓐ 7 cm. Ⓑ 8 cm. Ⓒ 9 cm. Ⓓ 10 cm.

Hướng dẫn giải. Xét tam giác ABC ta có: $\widehat{A} = 180° - 120° - 40° = 20°$. Theo định lý sin ta có: $\dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{BC}{\sin A} \Rightarrow AB = \dfrac{BC \cdot \sin C}{\sin A} = \dfrac{5 \cdot \sin 40°}{\sin 20°} \approx 9,397 \approx 9\,(\text{cm})$.

Câu 81. Cho ΔABC có $a = 4, c = 5, \widehat{B} = 150°$. Diện tích của tam giác là:

Ⓐ $5\sqrt{3}$. Ⓑ 10. Ⓒ 5. Ⓓ $10\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải. Diện tích tam giác ABC là: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}a \cdot c \cdot \sin B = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \sin 150° = 10 \cdot \dfrac{1}{2} = 5$.

Câu 82. Tính diện tích tam giác ABC biết $AB = 3, BC = 5, CA = 6$.

Ⓐ $\sqrt{56}$. Ⓑ $\sqrt{48}$. Ⓒ 6. Ⓓ 8.

Hướng dẫn giải. Ta có nửa chu vi: $p = \dfrac{AB + AC + BC}{2} = \dfrac{3 + 6 + 5}{2} = 7$. Áp dụng công thức Heron, diện tích tam giác ABC là: $S = \sqrt{p(p - AB)(p - AC)(p - BC)} = \sqrt{7(7 - 3)(7 - 6)(7 - 5)} = \sqrt{7 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2} = \sqrt{56}$.

Câu 83. Cho tam giác ABC có $AB = 3, AC = 4, BC = 5$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng?

Ⓐ $\dfrac{8}{9}$. Ⓑ $\dfrac{4}{5}$. Ⓒ $\dfrac{3}{4}$. Ⓓ 1.

Hướng dẫn giải. Vì $AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25 = 5^2 = BC^2$ nên tam giác ABC vuông tại A. Diện tích tam giác là: $S = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$. Nửa chu vi là: $p = \dfrac{3 + 4 + 5}{2} = 6$. Bán kính đường tròn nội tiếp: $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{6}{6} = 1$.

Câu 84. Cho tam giác ABC có $b = 7; c = 5; \cos A = \dfrac{3}{5}$. Độ dài đường cao h_a của tam giác ΔABC là?

Ⓐ 8. Ⓑ $\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$. Ⓒ $8\sqrt{3}$. Ⓓ 7.

Hướng dẫn giải. Ta có cạnh a: $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos A} = \sqrt{7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \dfrac{3}{5}} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. Vì $0° \leq \widehat{A} \leq 180°$ và $\cos A = \dfrac{3}{5}$ nên $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^2} = \dfrac{4}{5}$. Diện tích tam giác: $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2} \cdot 7 \cdot 5 \cdot \dfrac{4}{5} = 14$. Mặt khác $S = \dfrac{1}{2}ah_a \Rightarrow h_a = \dfrac{2S}{a} = \dfrac{2 \cdot 14}{4\sqrt{2}} = \dfrac{7}{\sqrt{2}} = \dfrac{7\sqrt{2}}{2}$.

Câu 85. Cho tam giác ABC với $BC = a, AC = b, AB = c$. Đẳng thức nào sai?

Ⓐ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$. Ⓑ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.
Ⓒ $c^2 = b^2 + a^2 + 2ab\cos C$. Ⓓ $c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos C$.

Hướng dẫn giải. Theo định lí hàm số côsin, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$. Vậy công thức $c^2 = b^2 + a^2 + 2ab\cos C$ là sai.

Câu 86. Cho ΔABC có $b = 6, c = 8, \widehat{A} = 60^\circ$. Độ dài cạnh a là.

Ⓐ $2\sqrt{13}$. Ⓑ $3\sqrt{12}$. Ⓒ $2\sqrt{37}$. Ⓓ $\sqrt{20}$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ = 36 + 64 - 48 = 52 \Rightarrow a = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$.

Câu 87. Cho tam giác ABC có $a^2 + b^2 - c^2 > 0$. Khi đó:

Ⓐ $\widehat{C} > 90^\circ$.
Ⓑ $\widehat{C} < 90^\circ$.
Ⓒ $\widehat{C} = 90^\circ$.
Ⓓ Không thể kết luận được gì về $\widehat{C}$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$. Vì $a^2 + b^2 - c^2 > 0$ và $2ab > 0$ nên $\cos C > 0$. Suy ra $\widehat{C} < 90^\circ$.

Câu 88. Cho tam giác ABC với $BC = 7\,\text{cm}, AC = 9\,\text{cm}, AB = 4\,\text{cm}$. Tính $\cos A$.

Ⓐ $\cos A = -\dfrac{2}{3}$. Ⓑ $\cos A = \dfrac{1}{2}$. Ⓒ $\cos A = \dfrac{1}{3}$. Ⓓ $\cos A = \dfrac{2}{3}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $a = 7, b = 9, c = 4$. $\cos A = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \dfrac{4^2 + 9^2 - 7^2}{2 \cdot 4 \cdot 9} = \dfrac{16 + 81 - 49}{72} = \dfrac{48}{72} = \dfrac{2}{3}$.

Câu 89. Cho tam giác ABC với $BC = a, AC = b, AB = c$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $a = 2R\cos A$. Ⓑ $a = 2R\sin A$.
Ⓒ $a = 2R\tan A$. Ⓓ $a = R\sin A$.

Hướng dẫn giải. Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC ta có: $\dfrac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow a = 2R\sin A$.

Câu 90. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 45^\circ$, cạnh $AC = 2\sqrt{2}\,\text{cm}$. Bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng

Ⓐ $R = 1\,\text{cm}$. Ⓑ $R = 2\,\text{cm}$. Ⓒ $R = 4\,\text{cm}$. Ⓓ $R = 3\,\text{cm}$.

Hướng dẫn giải. Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC ta có: $\dfrac{AC}{\sin B} = 2R \Rightarrow R = \dfrac{AC}{2\sin B} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2\sin 45^\circ} = 2\,\text{cm}$.

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Bài 1. Cho $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

a) $\sin\alpha > 0$.
b) $\cot(90^\circ - \alpha) > 0$.
c) $\sin(135^\circ - \alpha) < 0$.
d) $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2} + 90^\circ\right) < 0$.

Hướng dẫn giải.

a) **Đúng.** Ta có: $0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow \sin\alpha > 0$.

b) **Đúng.** Ta có: $\cot(90^\circ - \alpha) = \tan\alpha > 0$ (vì α là góc nhọn).

c) **Sai.** Ta có: $0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow -90^\circ < -\alpha < 0^\circ \Rightarrow 45^\circ < 135^\circ - \alpha < 135^\circ$. Do đó $\sin(135^\circ - \alpha) > 0$.

d) **Sai.** Ta có: $0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow 0^\circ < \dfrac{\alpha}{2} < 45^\circ \Rightarrow 90^\circ < \dfrac{\alpha}{2} + 90^\circ < 135^\circ$. Do đó $\sin\left(\dfrac{\alpha}{2} + 90^\circ\right) > 0$.

Bài 2. Cho góc $\alpha = \widehat{xOM}$ với điểm $M(x_0; y_0)$ trên nửa đường tròn đơn vị.

a) $\sin\alpha = x_0; \cos\alpha = y_0$.

b) Nếu $x_0 < 0$ thì $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

c) Nếu $x_0 = \dfrac{1}{3}; y_0 = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ thì giá trị $\cot\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

d) Nếu $x_0 = -\dfrac{1}{3}; y_0 = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ thì giá trị $\dfrac{\tan\alpha - \cot\alpha}{\tan\alpha + \cot\alpha} = \dfrac{7}{9}$.

Hướng dẫn giải.

a) **Sai.** Vì điểm $M(x_0; y_0)$ trên nửa đường tròn đơn vị thì $\sin\alpha = y_0; \cos\alpha = x_0$.

b) **Sai.** Vì $x_0 < 0$ thì $\cos\alpha < 0$, suy ra $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

c) **Đúng.** Vì điểm $M\left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ trên nửa đường tròn đơn vị thì $\sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}, \cos\alpha = \dfrac{1}{3} \Rightarrow$ $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

d) **Đúng.** Vì $\sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}, \cos\alpha = -\dfrac{1}{3} \Rightarrow \cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}, \tan\alpha = -2\sqrt{2}$ nên:

$$\frac{\tan\alpha - \cot\alpha}{\tan\alpha + \cot\alpha} = \frac{-2\sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}}{-2\sqrt{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}} = \frac{7}{9}.$$

Bài 3. Cho $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$ và $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

a) $\tan\alpha > 0$.

b) $\sin(90^\circ + \alpha) = \dfrac{2}{3}$.

c) Giá trị $\tan\alpha = 2\sqrt{2}$.

d) $\dfrac{1 + \sin^2\alpha}{1 - \sin^2\alpha} = 1 + 2\tan^2\alpha$.

Hướng dẫn giải.

a) **Đúng.** Vì $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ nên $\tan\alpha > 0$.

b) **Sai.** Ta có: $\sin(90^\circ + \alpha) = \sin(180^\circ - 90^\circ - \alpha) = \sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha = \dfrac{1}{3}$.

c) **Đúng.** Ta có $\tan^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \tan^2\alpha + 1 = 9 \Leftrightarrow \tan^2\alpha = 8 \Rightarrow \tan\alpha = 2\sqrt{2}$.

d) **Đúng.** Ta có: $\dfrac{1+\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{1+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\tan^2\alpha+1+\tan^2\alpha=1+2\tan^2\alpha.$

Bài 4. Cho $\sin x=\dfrac{5}{13}$ và $90^\circ<x<180^\circ$.

a) $\cos x>0$.

b) Giá trị của biểu thức $P=2\sin^2 x-\cos^2 x=\dfrac{-94}{169}$.

c) Giá trị $\tan x=\dfrac{5}{12}$.

d) Giá trị của biểu thức $A=\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}=\dfrac{25}{313}$.

Hướng dẫn giải.

a) **Sai.** Do $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ nên $\cos x<0$.

b) **Đúng.** Ta có: $\cos^2 x=1-\sin^2 x=1-\dfrac{25}{169}=\dfrac{144}{169}$.

Do đó $P=2\sin^2 x-\cos^2 x=2\cdot\left(\dfrac{25}{169}\right)-\dfrac{144}{169}=\dfrac{-94}{169}$.

c) **Sai.** Do $\cos x<0$ và $\cos^2 x=\dfrac{144}{169}$ nên $\cos x=-\dfrac{12}{13}$. $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}=-\dfrac{5}{12}$.

d) **Đúng.** Ta có:

$$A=\frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x}{1+1-\sin^2 x}=\frac{\left(\dfrac{5}{13}\right)^2}{1+1-\left(\dfrac{5}{13}\right)^2}=\frac{25}{313}.$$

Bài 5. Cho $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$ với $90^\circ<\alpha<180^\circ$.

a) Điểm M trên nửa đường tròn đơn vị phía trên trục Ox sao cho $\overset{\frown}{xOM}=\alpha$ thì M có tung độ bằng $\dfrac{1}{3}$.

b) Giá trị $\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

c) Giá trị $\cot\alpha=-2\sqrt{2}$.

d) Giá trị $\dfrac{\tan\alpha+3\cot\alpha}{\tan\alpha+\cot\alpha}=\dfrac{25}{9}$.

Hướng dẫn giải.

a) **Đúng.** Khẳng định đúng vì điểm M trên nửa đường tròn đơn vị phía trên trục Ox sao cho $\overset{\frown}{xOM}=\alpha$ có $y_M=\sin\alpha\Leftrightarrow y_M=\dfrac{1}{3}$.

b) **Sai.** Vì $90^\circ<\alpha<180^\circ$ nên $\cos\alpha<0$. Mặt khác $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ suy ra:

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{1}{9}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

c) **Đúng.** Vì $90^\circ<\alpha<180^\circ$ nên $\cot\alpha<0$. Ta có:

$$\frac{1}{\sin^2\alpha}=1+\cot^2\alpha\Rightarrow\cot\alpha=-\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha}-1}=-2\sqrt{2}.$$

d) **Đúng.** Vì $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ nên $\tan\alpha < 0; \cot\alpha < 0$. Theo câu c ta có $\cot\alpha = -2\sqrt{2}$, suy ra $\tan\alpha = \dfrac{1}{\cot\alpha} = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. Vậy:

$$\frac{\tan\alpha + 3\cot\alpha}{\tan\alpha + \cot\alpha} = \frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{2}} + 3(-2\sqrt{2})}{-\dfrac{1}{2\sqrt{2}} + (-2\sqrt{2})} = \frac{25}{9}.$$

Bài 6. Cho $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$ với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

a) $\sin(180^\circ - \alpha) < 0$.

b) Giá trị $\cos(180^\circ - \alpha) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

c) Giá trị $\cot^2\alpha = 2$.

d) Giá trị $\dfrac{\sin\alpha + 3\cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = 7$.

Hướng dẫn giải.

a) **Sai.** Mệnh đề sai vì $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ thì $\sin\alpha > 0$, ta có $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha > 0$.

b) **Sai.** Mệnh đề sai vì $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ thì $\cos\alpha > 0$. Ta có:

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

c) **Sai.** Mệnh đề sai vì $\cot\alpha = \dfrac{1}{\tan\alpha} = 2$ nên $\cot^2\alpha = 4$.

d) **Sai.** Mệnh đề sai vì:

$$\text{Do } \cos\alpha \neq 0 \text{ nên } \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + 3}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - 1} = \frac{\tan\alpha + 3}{\tan\alpha - 1} = \frac{\dfrac{1}{2} + 3}{\dfrac{1}{2} - 1} = -7.$$

Bài 7. Cho $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

a) $\cos(180^\circ - \alpha) < 0$.

b) $\cos\alpha = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

c) $\cot^2\alpha = 8$.

d) $\dfrac{5\tan\alpha + \cot\alpha}{\tan\alpha + \cot\alpha} = 4$.

Hướng dẫn giải.

a) **Sai.** Mệnh đề sai vì $90^\circ < \alpha < 180^\circ \Rightarrow \cos\alpha < 0$ mà $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha > 0$.

b) **Đúng.** Mệnh đề đúng vì $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ nên $\cos\alpha < 0$. Do đó:

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

c) **Đúng.** Mệnh đề đúng vì $\cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha} - 1 = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2} - 1 = 8$.

d) **Sai.** Mệnh đề sai vì:

$$\frac{5\tan\alpha+\cot\alpha}{\tan\alpha+\cot\alpha}=\frac{\dfrac{5}{\cot\alpha}+\cot\alpha}{\dfrac{1}{\cot\alpha}+\cot\alpha}=\frac{5+\cot^2\alpha}{1+\cot^2\alpha}=\frac{5+8}{1+8}=\frac{13}{9}.$$

Bài 8. Cho $\tan\alpha-\cot\alpha=3$.

a) $A=\tan^2\alpha+\cot^2\alpha=11$.

b) $B=\tan\alpha+\cot\alpha=\sqrt{13}$.

c) $C=\tan^4\alpha-\cot^4\alpha=\pm33\sqrt{13}$.

d) $D=\tan^6\alpha-\cot^6\alpha=36$.

Hướng dẫn giải.

a) **Đúng.** Ta có: $\tan\alpha-\cot\alpha=3\Leftrightarrow(\tan\alpha-\cot\alpha)^2=9\Leftrightarrow\tan^2\alpha+\cot^2\alpha-2=9\Rightarrow\tan^2\alpha+\cot^2\alpha=11$. Do đó, A đúng.

b) **Sai.** Theo câu a, ta có: $A=\tan^2\alpha+\cot^2\alpha=11\Leftrightarrow\tan^2\alpha+\cot^2\alpha+2\tan\alpha\cot\alpha=13\Leftrightarrow(\tan\alpha+\cot\alpha)^2=13\Rightarrow\tan\alpha+\cot\alpha=\pm\sqrt{13}$. Do đó, B sai.

c) **Đúng.** Ta có: $C=\tan^4\alpha-\cot^4\alpha=(\tan^2\alpha-\cot^2\alpha)(\tan^2\alpha+\cot^2\alpha)=(\tan\alpha-\cot\alpha)(\tan\alpha+\cot\alpha)(\tan^2\alpha+\cot^2\alpha)=3\cdot(\pm\sqrt{13})\cdot11=\pm33\sqrt{13}$. Do đó, C đúng.

d) **Đúng.** Ta có: $D=\tan^6\alpha-\cot^6\alpha=(\tan^2\alpha)^3-(\cot^2\alpha)^3=(\tan^2\alpha-\cot^2\alpha)(\tan^4\alpha+\cot^4\alpha+\tan^2\alpha\cot^2\alpha)$.

$D=(\tan\alpha-\cot\alpha)(\tan^2\alpha+\cot^2\alpha+\tan\alpha\cdot\cot\alpha)=3\cdot(11+1)=36$. Do đó, D đúng.

Bài 9. Cho tam giác ABC có $AB=3, AC=2, \widehat{A}=60^\circ$. Trên cạnh BC lấy điểm M nằm giữa B và C.

a) $BC^2=AB^2+AC^2+2AB\cdot AC\cdot\cos A$.

b) $BC=\sqrt{7}$.

c) $\cos B=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

d) Độ dài AM nhỏ nhất bằng $\dfrac{189}{49}$.

Hướng dẫn giải.

a) **Sai.** Theo định lý côsin: $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A$. Công thức trong câu hỏi bị sai dấu.

b) **Đúng.** $BC^2=3^2+2^2-2\cdot3\cdot2\cdot\cos60^\circ=9+4-6=7\Rightarrow BC=\sqrt{7}$.

c) **Sai.** $\cos B=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2\cdot AB\cdot BC}=\dfrac{3^2+7-2^2}{2\cdot3\cdot\sqrt{7}}=\dfrac{12}{6\sqrt{7}}=\dfrac{2}{\sqrt{7}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

d) **Sai.** Với M tùy ý nằm giữa B và C, ta có: $AM^2=AB^2+BM^2-2AB\cdot BM\cdot\cos B=9+BM^2-2\cdot3\cdot BM\cdot\dfrac{2\sqrt{7}}{7}=BM^2-\dfrac{12\sqrt{7}}{7}BM+9$.

Biến đổi thành bình phương: $AM^2=\left(BM-\dfrac{6\sqrt{7}}{7}\right)^2+\dfrac{189}{49}\geq\dfrac{189}{49}\Rightarrow AM\geq\dfrac{\sqrt{189}}{7}$.

Giá trị nhỏ nhất của AM là $\dfrac{\sqrt{189}}{7}$, không phải $\dfrac{189}{49}$.

Bài 10. Cho tam giác $\triangle ABC$ có $AC = b = 7; AB = c = 5; \cos A = \dfrac{3}{5}$.

a) Góc A là góc tù.

b) $a = 4\sqrt{2}$.

c) $\sin A = -\dfrac{4}{5}$.

d) Độ dài đường cao hạ từ đỉnh A bằng $\dfrac{7\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải.

a) **Sai.** Vì $\cos A = \dfrac{3}{5} > 0 \Rightarrow A$ là góc nhọn.

b) **Đúng.** $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos A} = \sqrt{7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \dfrac{3}{5}} = \sqrt{49 + 25 - 42} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.

c) **Sai.** Vì $0^\circ < A < 180^\circ$ nên $\sin A > 0$. $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^2} = \dfrac{4}{5}$.

d) **Đúng.** $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2} \cdot 7 \cdot 5 \cdot \dfrac{4}{5} = 14$.

Mặt khác $S = \dfrac{1}{2}a \cdot h_a \Rightarrow 14 = \dfrac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot h_a \Rightarrow h_a = \dfrac{14}{2\sqrt{2}} = \dfrac{7}{\sqrt{2}} = \dfrac{7\sqrt{2}}{2}$.

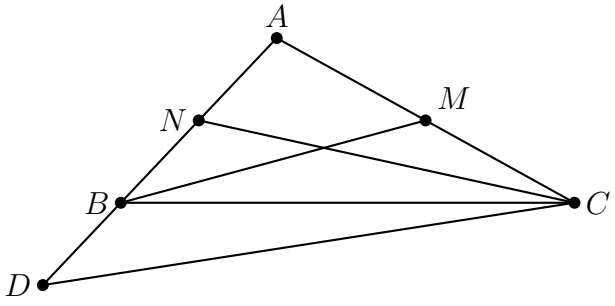
Bài 11. Cho tam giác ABC có $AB = 2; AC = 3; BC = 4$.

a) Diện tích của tam giác ABC là $S_{ABC} = \dfrac{3\sqrt{15}}{4}$.

b) Bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC là $r = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

c) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AC và AB. Khi đó $S_{ANC} < S_{AMB}$.

d) Gọi D là điểm đối xứng của N qua B. Khi đó $\cos\widehat{NCD} = \dfrac{2\sqrt{115}}{23}$.



Hướng dẫn giải.

a) **Đúng.** Nửa chu vi $p = \dfrac{2+3+4}{2} = \dfrac{9}{2}$.

$S = \sqrt{\dfrac{9}{2}\left(\dfrac{9}{2} - 2\right)\left(\dfrac{9}{2} - 3\right)\left(\dfrac{9}{2} - 4\right)} = \sqrt{\dfrac{9}{2} \cdot \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{1}{2}} = \dfrac{3\sqrt{15}}{4}$.

b) **Sai.** $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{3\sqrt{15}}{4} : \dfrac{9}{2} = \dfrac{\sqrt{15}}{6} \neq \dfrac{\sqrt{15}}{5}$.

c) **Sai.** $S_{ANC}=\dfrac{1}{2}S_{ABC}$ (vì N là trung điểm AB). $S_{AMB}=\dfrac{1}{2}S_{ABC}$ (vì M là trung điểm AC). Vậy $S_{ANC}=S_{AMB}$.

d) **Đúng.** Ta có $ND=2NB=2\Rightarrow AD=3$.

Tính toán $\cos\widehat{NCD}$ qua các bước định lý hàm số Cosin trong $\triangle NCD$. Theo lời giải hình ảnh, kết quả $\dfrac{2\sqrt{115}}{23}$ là đúng.

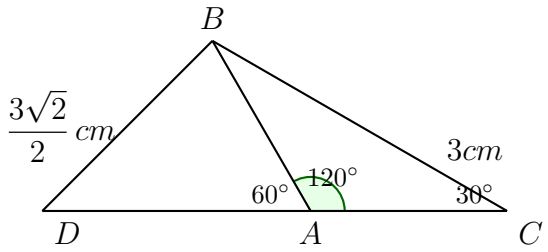
Bài 12. Cho tam giác ABC cân tại A có $\widehat{C}=30^\circ, BC=3$ cm.

a) Bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC là $R=\sqrt{3}$.

b) Diện tích tam giác ABC là $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ (cm^2).

c) $MB\perp NC$ ở đó M,N là trung điểm của AC và AB.

d) Trên tia đối của tia AC ta lấy D sao cho $BD=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ cm. Khi đó $\cos\widehat{ABD}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.



Hướng dẫn giải.

a) **Đúng.** Vì $\triangle ABC$ cân tại $A, \widehat{C}=30^\circ\Rightarrow\widehat{B}=30^\circ, \widehat{A}=120^\circ$.

$R=\dfrac{BC}{2\sin A}=\dfrac{3}{2\sin 120^\circ}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$.

b) **Sai.** $AB=\dfrac{BC\sin 30^\circ}{\sin 120^\circ}=\dfrac{3\cdot\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{3}\Rightarrow AC=\sqrt{3}$.

$S=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\sin 120^\circ=\dfrac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ (cm^2).

c) **Sai.** Áp dụng công thức đường trung tuyến tính được $BM=CN=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$.

Gọi G là trọng tâm, xét $\triangle GBC$, $GB^2+GC^2\neq BC^2$ nên GB không vuông góc GC.

d) **Đúng.** Xét $\triangle ABD$ có $\widehat{DAB}=60^\circ$ (kề bù với $\widehat{BAC}=120^\circ$).

Dùng định lý Cosin tính được $AD=\dfrac{\sqrt{3}+3}{2}$.

Sau đó tính $\cos\widehat{ABD}=\dfrac{AB^2+BD^2-AD^2}{2\cdot AB\cdot BD}$ cho kết quả $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Bài 13. Cho $\triangle ABC$, có diện tích bằng $12\sqrt{3}$, cạnh $AB=6, \widehat{BAC}=120^\circ$.

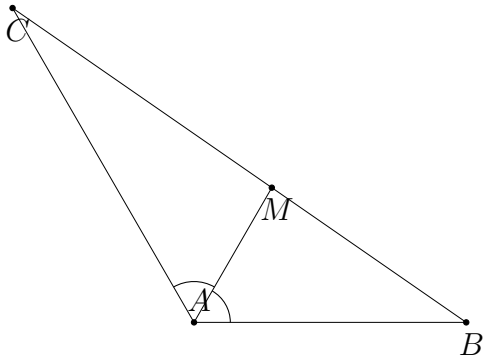
a) Có $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\widehat{B}$.

b) Độ dài cạnh $BC=2\sqrt{37}$.

c) Bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là $\dfrac{3\sqrt{111}}{2}$.

d) Độ dài chân đường phân giác trong góc A của $\triangle ABC$ có độ dài là $\dfrac{25}{7}$.

Hướng dẫn giải.



a) **Sai.** Ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{A}$, suy ra mệnh đề **sai**.

b) **Đúng.** Ta có: $S = \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin A \Rightarrow 12\sqrt{3} = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot AC \cdot \sin 120^\circ \Rightarrow AC = 8$.

$\Rightarrow BC^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cos 120^\circ = 148 \Rightarrow BC = 2\sqrt{37}$. Suy ra mệnh đề **đúng**.

c) **Sai.** Bán kính đường tròn ngoại tiếp: $R = \dfrac{BC}{2\sin A} = \dfrac{2\sqrt{37}}{2\sin 120^\circ} = \dfrac{2\sqrt{111}}{3}$. Suy ra mệnh đề **sai**.

d) **Sai.** Gọi M là chân đường phân giác góc A. Ta có $\dfrac{BM}{CM} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$.

Suy ra $BM = \dfrac{3}{7}BC = \dfrac{6\sqrt{37}}{7}$. Áp dụng định lý cosin trong $\triangle ABM$:

$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB.BM.\cos B = 6^2 + \left(\dfrac{6\sqrt{37}}{7}\right)^2 - 2 \cdot 6 \cdot \dfrac{6\sqrt{37}}{7} \cdot \dfrac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB.BC} = \dfrac{576}{49}$.

$\Rightarrow AM = \dfrac{24}{7}$. Suy ra mệnh đề **sai**.

Bài 14. Cho tam giác ABC có $AB = 15, AC = 20$ và $\widehat{BAC} = 60^\circ$. (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

a) $BC = 18$.

b) $\widehat{ABC} = 75^\circ$.

c) $S = 129$.

d) $2R - 5r < 0$ (Với R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác ABC).

Hướng dẫn giải.

a) **Đúng.** $BC^2 = 15^2 + 20^2 - 2.15.20.\cos 60^\circ = 325 \Rightarrow BC = \sqrt{325} \approx 18$.

b) **Sai.** $\cos B = \dfrac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2.AB.BC} = \dfrac{15^2 + 325 - 20^2}{2.15.\sqrt{325}} = \dfrac{149}{540} \Rightarrow \widehat{ABC} \approx 74^\circ$.

c) **Sai.** $S = \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin A = \dfrac{1}{2}.15.20.\sin 60^\circ = 75\sqrt{3} \approx 130$.

d) **Đúng.** $2R = \dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{\sqrt{325}}{\sin 60^\circ} \approx 20,8$.

$r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{75\sqrt{3}}{(15+20+\sqrt{325})/2} \approx 4,9.$

Ta có $2R - 5r \approx 20,8 - 5(4,9) = -3,7 < 0.$

Bài 15. Cho tam giác ABC có $BC = 12$ cm, $AC = 15$ cm, $\widehat{C} = 120°$.

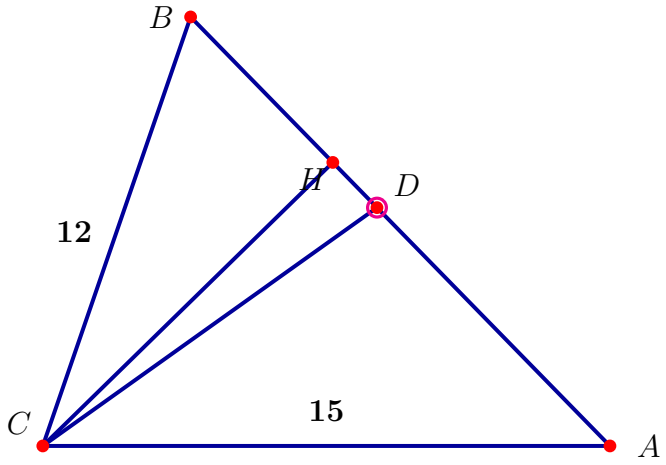
a) $AB^2 = AC^2 + CB^2 + 2BC.AC.\cos C.$

b) $\widehat{A} = 26°.$

c) Độ dài đường cao hạ từ C của tam giác là $CH = 6,65$ cm.

d) Độ dài đường phân giác trong hạ từ C là CD lớn hơn 7 cm.

Hướng dẫn giải.



a) **Sai.** Vì $AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2BC.AC.\cos C.$

b) **Đúng.** $AB^2 = 12^2 + 15^2 - 2.12.15.\cos 120° = 549 \Rightarrow AB = 3\sqrt{61}.$

Áp dụng định lý sin: $\dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{AB}{\sin C} \Rightarrow \sin A = \dfrac{12.\sin 120°}{3\sqrt{61}} \Rightarrow A \approx 26°.$

c) **Đúng.** Xét tam giác vuông AHC: $CH = AC.\sin A \approx 15.\sin 26° \approx 6,65.$

d) **Sai.** Gọi D là chân đường phân giác trong góc C.

Ta có $\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{15}{12} = \dfrac{5}{4}.$

$AD = \dfrac{5}{9}AB = \dfrac{5\sqrt{61}}{3}$. Áp dụng định lý sin trong $\triangle ACD$:

$\dfrac{CD}{\sin A} = \dfrac{AD}{\sin 60°} \Rightarrow CD = \dfrac{AD.\sin A}{\sin 60°} \approx 6,67 < 7.$

Bài 16. Hai tàu đánh cá xuất phát từ cảng A lúc 8h, tàu thứ nhất đi theo hướng $S70°E$ với vận tốc 50 km/h. Tàu thứ 2 đi theo hướng $N40°E$ với vận tốc 55 km/h. Đi được 75 phút thì động cơ của tàu thứ nhất bị hỏng nên tàu trôi tự do theo hướng nam với vận tốc 7 km/h. Sau 1h30 phút kể từ khi động cơ bị hỏng, tàu đó neo đậu được vào một hòn đảo. Các mệnh đề sau đúng hay sai? (các kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

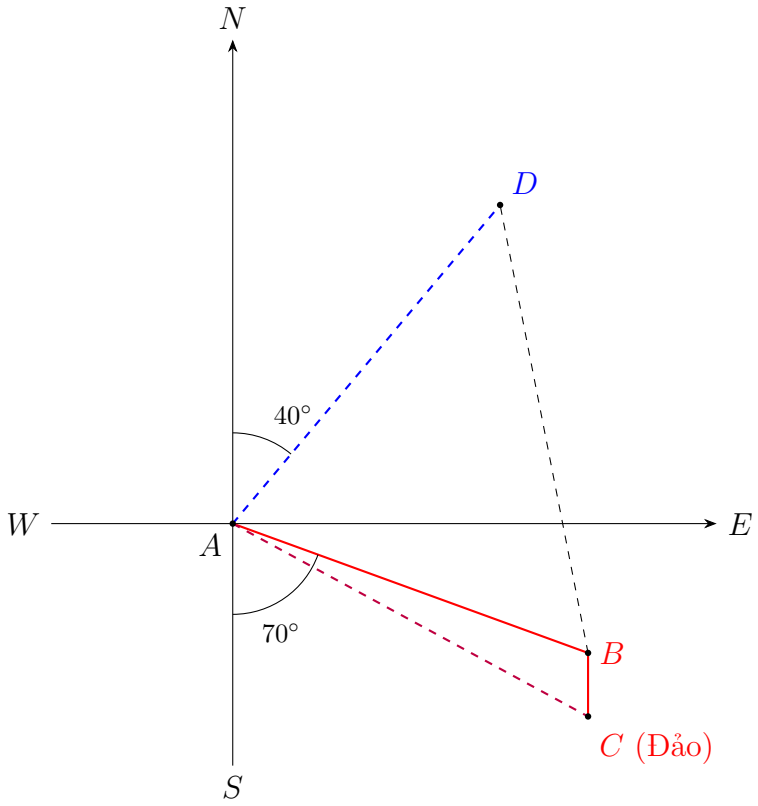
a) Quãng đường mà tàu thứ nhất đi được sau 75 phút kể từ khi xuất phát là $62,5$ (km).

b) Khoảng cách giữa hai tàu tại thời điểm tàu thứ nhất bị hỏng là $107,6$ (km).

c) Lúc 10 giờ 45 phút tàu thứ nhất cách vị trí xuất phát khoảng $59,7$ (km).

d) Hướng từ cảng A tới đảo nơi tàu thứ nhất neo đậu là $S61,5°E$.

✍ *Hướng dẫn giải.*



+) Ta gọi B là nơi tàu thứ nhất bị hỏng, C là cảng neo đậu (đảo), D là vị trí của tàu thứ 2 tại thời điểm tàu thứ nhất bị hỏng.

a) **Đúng.** Đổi 75 phút $= 1,25$ giờ.

Quãng đường tàu thứ nhất đi được là: $S_1 = AB = 1,25 \cdot 50 = 62,5$ (km).

b) **Sai.** Quãng đường tàu thứ hai đi được sau 75 phút là: $S_2 = AD = 1,25 \cdot 55 = 68,75$ (km).

Ban đầu tàu 1 đi hướng $S70°E \Rightarrow \widehat{BAS} = 70°$. Tàu 2 đi hướng $N40°E \Rightarrow \widehat{NAD} = 40°$.

Góc giữa hai tàu là: $\widehat{BAD} = 180° - (\widehat{SAB} + \widehat{DAN}) = 180° - (70° + 40°) = 70°$.

Khoảng cách BD: $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos\widehat{BAD}$

$BD^2 = 62,5^2 + 68,75^2 - 2 \cdot 62,5 \cdot 68,75 \cdot \cos 70° \approx 5693,6 \Rightarrow BD \approx 75,5$ (km).

c) **Sai.** Tàu hỏng lúc 9h15. Trôi 1,5h đến 10h45 thì tới đảo C.

Quãng đường trôi: $BC = 1,5 \cdot 7 = 10,5$ (km).

Trong $\triangle ABC$, ta có $\widehat{ABC} = 180° - \widehat{BAS} = 180° - 70° = 110°$ (do $BC // AS$).

Áp dụng định lý cosin cho $\triangle ABC$:

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\widehat{ABC}$

$AC^2 = 62,5^2 + 10,5^2 - 2 \cdot 62,5 \cdot 10,5 \cdot \cos 110° \approx 4465,4 \Rightarrow AC \approx 66,8$ km.

d) **Đúng.** Xác định hướng từ cảng A tới đảo C.

Theo sơ đồ, hướng là $S\alpha°E$ với $\alpha° = \widehat{CAS}$.

Áp dụng định lý sin cho $\triangle ABC$:

$$\frac{BC}{\sin\widehat{BAC}} = \frac{AC}{\sin\widehat{ABC}} \Rightarrow \sin\widehat{BAC} = \frac{BC \cdot \sin\widehat{ABC}}{AC} = \frac{10,5 \cdot \sin 110°}{66,8} \approx 0,1477.$$

$\Rightarrow \widehat{BAC} \approx 8,5°$.

$\Rightarrow \alpha° = \widehat{BAS} - \widehat{BAC} \approx 70° - 8,5° = 61,5°$.

Vậy hướng từ cảng A tới đảo là $S61,5°E$.

Bài 17. Cho tam giác ABC có $2\sin A = \sin B; c = 2$ và $a^2 + b^2 = 15$.

a) Độ dài cạnh AB lớn nhất.

b) Độ dài cạnh $BC = \sqrt{3}$.

c) $\cos C = \dfrac{11}{12}$.

d) Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác là $r = \dfrac{3\sqrt{69} - 2\sqrt{23}}{46}$.

Hướng dẫn giải.

Áp dụng định lý sin ta có $2\sin A = \sin B \Rightarrow 2a = b$.

Mà $a^2 + b^2 = 15 \Rightarrow a^2 + (2a)^2 = 15 \Rightarrow 5a^2 = 15 \Rightarrow a = \sqrt{3} \Rightarrow b = 2\sqrt{3}$.

Suy ra b) đúng.

Ta có các cạnh: $a = \sqrt{3} \approx 1,73$; $b = 2\sqrt{3} \approx 3,46$; $c = 2$.

Vì $b > c > a \Rightarrow \widehat{ABC}$ là góc lớn nhất $\Rightarrow$ cạnh AC lớn nhất. Nên **a) sai.**

Áp dụng định lý côsin ta có: $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \dfrac{3 + 12 - 4}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}} = \dfrac{11}{12}$. **Suy ra c) đúng.**

Ta có $p = \dfrac{a + b + c}{2} = \dfrac{\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2}{2} = \dfrac{3\sqrt{3} + 2}{2}$.

Diện tích tam giác: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pr \Rightarrow r = \dfrac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$.

Tính toán ta được $r = \dfrac{3\sqrt{69} - 2\sqrt{23}}{46}$. **Suy ra d) đúng.**

Bài 18. Cho tam giác ABC với $AB = 2, BC = 3, CA = 4$.

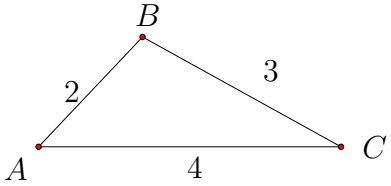
a) Tam giác ABC có diện tích $\sqrt{2}$.

b) Tam giác ABC có chiều cao $AH = 1$.

c) Tam giác ABC có góc B là góc tù.

d) Tam giác ABC có tổng độ dài bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp bằng $\dfrac{7\sqrt{15}}{10}$.

Hướng dẫn giải.



+ Trong tam giác ABC có $p = \dfrac{2 + 3 + 4}{2} = \dfrac{9}{2}$.

Áp dụng công thức Hê-rông: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \dfrac{3\sqrt{15}}{4} \neq \sqrt{2}$ nên **A sai.**

+ $S = \dfrac{1}{2}AH \cdot BC \Leftrightarrow AH = \dfrac{2S}{BC} = \dfrac{2 \cdot \dfrac{3\sqrt{15}}{4}}{3} = \dfrac{\sqrt{15}}{2} \neq 1$ nên **B sai.**

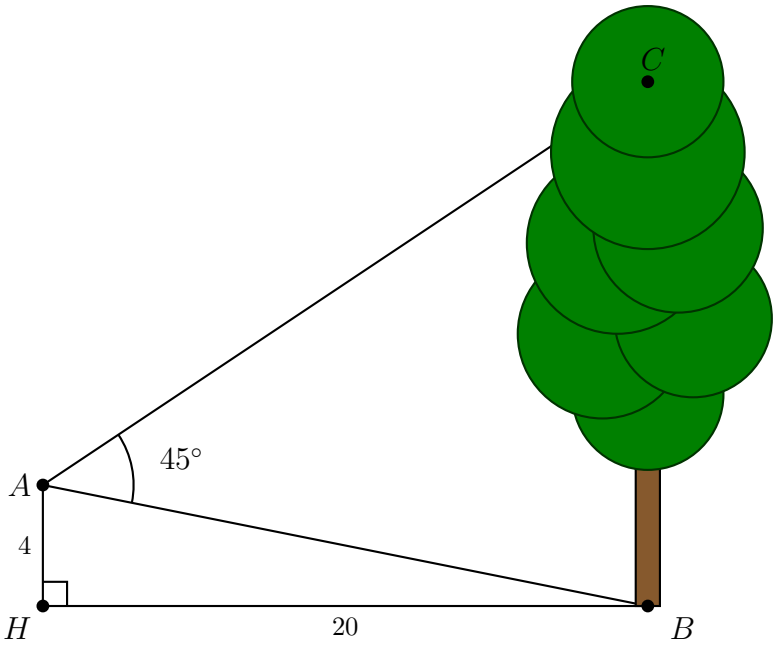
+ Theo định lý côsin: $\cos B = \dfrac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \dfrac{2^2 + 3^2 - 4^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} = -\dfrac{1}{4} < 0 \Rightarrow \widehat{B} > 90°$. Nên **C đúng.**

+ $S = \dfrac{abc}{4R} \Leftrightarrow R = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{2 \cdot 3 \cdot 4}{4 \cdot \dfrac{3\sqrt{15}}{4}} = \dfrac{8\sqrt{15}}{15}$.

$S = pr \Leftrightarrow r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{3\sqrt{15}/4}{9/2} = \dfrac{\sqrt{15}}{6}$.

Vậy $R + r = \dfrac{8\sqrt{15}}{15} + \dfrac{\sqrt{15}}{6} = \dfrac{16\sqrt{15} + 5\sqrt{15}}{30} = \dfrac{7\sqrt{15}}{10}$. Nên **D đúng.**

Bài 19. Từ vị trí A người ta quan sát một cây cao. Biết $AH = 4\text{m}, HB = 20\text{m}, \widehat{BAC} = 45°$.



a) Độ dài đoạn $AB = 24$.

b) $\tan ABH = \dfrac{1}{5}$.

c) Số đo góc $ACB = 56°18'$.

d) Độ dài đoạn $BC = \dfrac{52}{3}$.

Hướng dẫn giải.

+) Độ dài $AB = \sqrt{AH^2 + HB^2} = \sqrt{4^2 + 20^2} = 4\sqrt{26} \neq 24$ nên **a) sai.**

+) Xét tam giác vuông AHB: $\tan ABH = \dfrac{AH}{BH} = \dfrac{4}{20} = \dfrac{1}{5}$. **Suy ra b) đúng.**

+) Góc $\widehat{CBA} = 90° - \widehat{ABH}$.

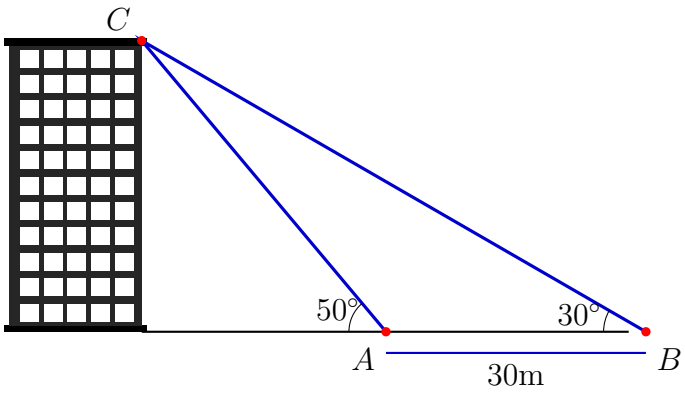
Ta có $\widehat{ABH} \approx 11°19' \Rightarrow \widehat{CBA} \approx 78°41'$.

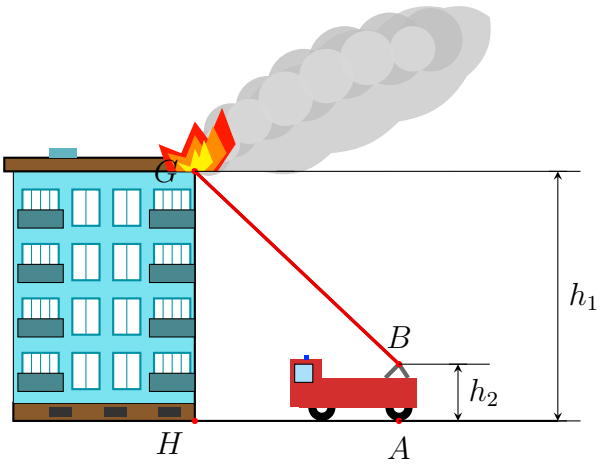
$\widehat{ACB} = 180° - 45° - 78°41' = 56°19'$. (Làm tròn theo đề bài $\approx 56°18'$). **Suy ra c) đúng.**

+) Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC ta có:

$$\frac{BC}{\sin 45^\circ}=\frac{AB}{\sin ACB}\Rightarrow BC=\frac{AB\cdot\sin 45^\circ}{\sin ACB}=\frac{4\sqrt{26}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\sin 56^\circ 18'}\approx\frac{52}{3}.$$ **Suy ra d) đúng.**

Bài 20. Hai người dân đứng cách nhau 30m cùng nhìn lên đỉnh của một tòa nhà theo góc nhìn lần lượt là 30° và 50°.





a) Góc nhìn từ đỉnh tòa nhà về hai phía A và B nơi hai người dân đang đứng là góc $\widehat{ACB}$ có số đo 30°.

b) Khoảng cách từ vị trí người A tới nóc của tòa nhà là $43,9$m.

c) Chiều cao của tòa nhà là khoảng 30m.

d) Vì gặp sự cố nên tầng trên cùng của tòa nhà đang bị cháy. Để cứu hộ đám cháy, một xe cứu hỏa đã tiếp cận dưới chân tòa nhà và chân thang đứng cách mặt đất $1,8$m, chiều dài tối đa của thang xếp là 40m. Để tiếp cận được đám cháy thì xe cứu hỏa phải đứng cách chân tòa một khoảng xa nhất là $21,7$m.

Hướng dẫn giải.

a) Xét tam giác ΔABC có $\widehat{BAC}=180^\circ-50^\circ=130^\circ$, $\widehat{ABC}=30^\circ$ nên:

$$\widehat{ACB}=180^\circ-130^\circ-30^\circ=20^\circ.$$

b) Khi đó, áp dụng định lý Sin cho tam giác ΔABC ta được:

$$\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}\Longrightarrow\frac{30}{\sin 20^\circ}=\frac{AC}{\sin 30^\circ}\Longrightarrow AC=\frac{30\cdot\sin 30^\circ}{\sin 20^\circ}\approx 43,9\text{m}.$$

c) Xét tam giác vuông CHA vuông tại H nên:

$$CH=AC\cdot\sin 50^\circ\approx 33,6\text{m}.$$

d) Chân thang cách mặt đất $1,8$m ta có:

$$CK=CH-HK=33,6-1,8=31,8\text{m}.$$

Khi đó, khoảng cách tới chân tòa nhà xa nhất có thể là:

$$KD=\sqrt{CD^2-CK^2}=\sqrt{40^2-31,8^2}\approx 24,3\text{m}.$$

Bài 21. Cho A, B, C là ba góc của một tam giác. Các khẳng định sau đây đúng hay sai?

a) $\cos(A+B)=-\cos C$.

b) $\sin(A+B)=\sin C$.

c) $\sin\dfrac{A+B}{2}=\cos\dfrac{C}{2}$.

d) $\cos\left(\dfrac{A+B}{2}\right)=-\sin\dfrac{C}{2}$.

✍ *Hướng dẫn giải.*

a) Trong tam giác ta có: $A+B+C=180^\circ \Leftrightarrow A+B=180^\circ-C \Leftrightarrow \cos(A+B)=\cos(180^\circ-C)=-\cos C$. Do đó, a) Đúng.

b) Trong tam giác ta có: $A+B+C=180^\circ \Leftrightarrow A+B=180^\circ-C \Leftrightarrow \sin(A+B)=\sin(180^\circ-C)=\sin C$. Do đó, b) Đúng.

c) Trong tam giác ta có: $A+B+C=180^\circ \Leftrightarrow A+B=180^\circ-C \Leftrightarrow \dfrac{A+B}{2}=90^\circ-\dfrac{C}{2}$ $\Leftrightarrow \sin\dfrac{A+B}{2}=\sin\left(90^\circ-\dfrac{C}{2}\right)=\cos\dfrac{C}{2}$. Do đó, c) Đúng.

d) Trong tam giác ta có: $A+B+C=180^\circ \Leftrightarrow A+B=180^\circ-C \Leftrightarrow \dfrac{A+B}{2}=90^\circ-\dfrac{C}{2}$ $\Leftrightarrow \cos\dfrac{A+B}{2}=\cos\left(90^\circ-\dfrac{C}{2}\right)=\sin\dfrac{C}{2}$. Do đó, d) Sai.

Bài 22. Cho tam giác ABC có $AB=6; AC=8; \widehat{BAC}=90^\circ$. Gọi D, E là các điểm thuộc cạnh BC sao cho $CD=BE=\dfrac{1}{4}BC$.

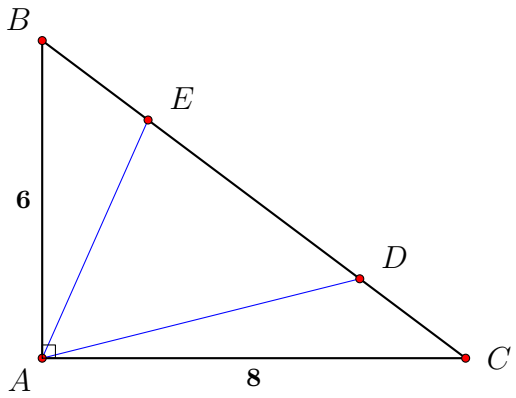
a) Tam giác ABC vuông cân.

b) Độ dài cạnh $BC=10$.

c) Số đo góc $\widehat{ABC}=60^\circ$.

d) Số đo góc $\widehat{EAD}\approx 52^\circ$.

✍ *Hướng dẫn giải.*



a) Tam giác ABC vuông cân.

Ta có: $AB=6; AC=8 \Rightarrow \triangle ABC$ không cân (sai).

b) Độ dài cạnh $BC=10$.

Ta có: $BC^2=AB^2+AC^2=6^2+8^2=100 \Rightarrow BC=10$ (đúng).

c) Số đo góc $\widehat{ABC}=60^\circ$.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A: $\tan\widehat{ABC}=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{8}{6}=\dfrac{4}{3}\Rightarrow \widehat{ABC}\approx 53^\circ$.

Vậy $\widehat{ABC} = 60^\circ$ (sai).

d) Số đo góc $\widehat{EAD} \approx 52^\circ$.

Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow BC = 10$.

Vì $CD = BE = \dfrac{1}{4}BC \Rightarrow CD = BE = \dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2} \Rightarrow DE = 10 - \left(\dfrac{5}{2} + \dfrac{5}{2}\right) = 5$.

Vì $\triangle ABC$ vuông tại A suy ra $\cos\widehat{ABC} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$; $\cos\widehat{ACB} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5}$.

Áp dụng định lí cô-sin cho $\triangle ABE$ và $\triangle ACD$ có: $AE^2 = AB^2 + BE^2 - 2AB \cdot BE \cdot \cos\widehat{ABE} = 6^2 + \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 - 2 \cdot 6 \cdot \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{97}{4} \Rightarrow AE = \dfrac{\sqrt{97}}{2}$.

$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2AC \cdot CD \cdot \cos\widehat{ACD} = 8^2 + \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 - 2 \cdot 8 \cdot \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{153}{4} \Rightarrow AD = \dfrac{\sqrt{153}}{2}$.

$\cos\widehat{DAE} = \dfrac{AD^2 + AE^2 - DE^2}{2 \cdot AD \cdot AE} = \dfrac{\dfrac{153}{4} + \dfrac{97}{4} - 5^2}{2 \cdot \dfrac{\sqrt{153}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{97}}{2}} \approx 0,6156 \Rightarrow \widehat{DAE} \approx 52^\circ$ (đúng).

Bài 23. Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh là $AB = 2, BC = 5, CA = 6$. Gọi M là trung điểm của BC.

a) Trong tam giác ABC, số đo của góc B là lớn nhất.

b) Giá trị của $\cos B$ là $\dfrac{7}{20}$.

c) Diện tích của tam giác ABC là $\dfrac{3\sqrt{39}}{4}$.

d) $\dfrac{\sqrt{55}}{2}$ là độ dài đường trung tuyến MA của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải.

a) Đúng

Vì cạnh $CA = 6$ là lớn nhất trong 3 cạnh của tam giác ABC nên góc đối diện với nó là góc B là lớn nhất.

b) Sai.

Áp dụng hệ quả định lí cô-sin ta có: $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2.a.c} = \dfrac{5^2 + 2^2 - 6^2}{2.5.2} = -\dfrac{7}{20}$.

c) Đúng

Ta có: $p = \dfrac{2 + 5 + 6}{2} = \dfrac{13}{2}$.

Áp dụng công thức hệ - rông ta có: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \dfrac{3\sqrt{39}}{4}$.

d) Đúng

Áp dụng công thức tính độ dài trung tuyến ta có:

$MA = \sqrt{\dfrac{c^2 + b^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}} = \sqrt{\dfrac{2^2 + 6^2}{2} - \dfrac{5^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{55}}{2}$.

Bài 24. Lúc 7 giờ kém 5 sáng, bạn Mai đi xe đạp từ nhà (điểm A) đến trường (điểm B) phải đi lên dốc và xuống một con dốc (hình vẽ). Cho biết đoạn lên dốc dài 300m, $\widehat{A}=6°, \widehat{B}=4°$. Gọi C là đỉnh dốc.

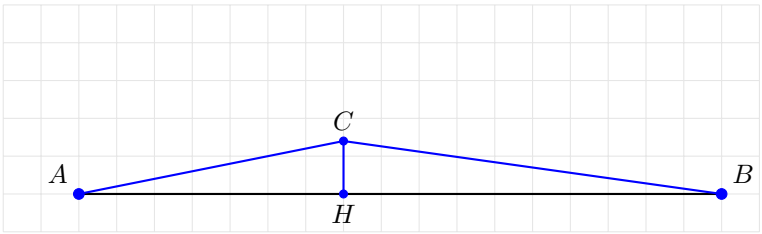
a) Độ dốc lúc lên cao hơn lúc xuống.

b) Độ cao con dốc là (làm tròn đến hàng phần mười) là 31, 3m.

c) Quãng đường chim bay đi từ nhà đến trường (làm tròn đến hàng đơn vị) là 749m.

d) Để kịp đến trường lúc 7h đúng, Mai đã lên dốc với vận tốc (làm tròn đến hàng đơn vị) là 6km/h, biết Mai khi xuống dốc bạn đi tự do không đạp xe với vận tốc không đổi là 15km/h.

Hướng dẫn giải.



Do $\widehat{A}>\widehat{B}$ nên độ dốc lúc lên cao hơn lúc xuống.

Mệnh đề A đúng

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ACH:

Độ cao con dốc là $CH=AC\cdot\sin\widehat{A}=300\cdot\sin 6°\approx 31,4$ (m). **Mệnh đề B sai**

Xét tam giác ABC có $\widehat{ACB}=180°-4°-6°=170°$.

Áp dụng định lý sin ta có $\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{AB}{\sin C}\Rightarrow AB=\dfrac{AC\cdot\sin C}{\sin B}\approx 747$ (m). **Mệnh đề C sai.**

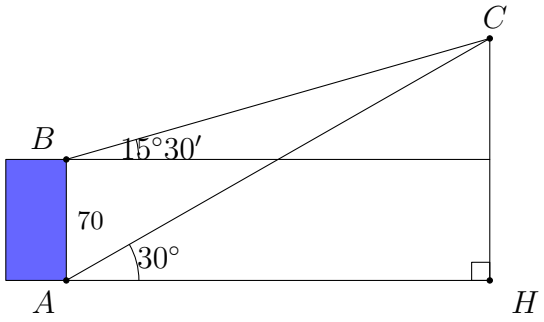
Sử dụng định lý sin ta có $\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AC}{\sin B}\Rightarrow BC=\dfrac{AC\cdot\sin A}{\sin B}\approx 449,5$ (m).

Thời gian bạn Mai đi từ nhà tới trường là 5 phút $=\dfrac{1}{12}$ giờ:

$$\frac{5}{60}=\frac{1}{12}=\frac{AC}{v_{AC}}+\frac{BC}{15}\Rightarrow v_{AC}=AC:\left(\frac{1}{12}-\frac{BC}{15}\right)=0,3:\left(\frac{1}{12}-\frac{0,3\cdot\sin 6°}{15\cdot\sin 4°}\right)\approx 6\ (\text{km/h}).$$

Vậy mệnh đề D đúng

Bài 25. Từ hai vị trí A, B của một tòa nhà người ta quan sát đỉnh C của ngọn núi. Biết rằng độ cao AB bằng 70 m, phương nhìn AC tạo với phương nằm ngang một góc 30°, phương nhìn BC tạo với phương nằm ngang một góc 15°30′. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:



a) $\widehat{ACB}=14°30'$.

b) $\dfrac{AB}{\sin\widehat{ACB}}=\dfrac{AC}{\sin\widehat{ABC}}$.

c) $AC\approx 279,41$ (m).

d) Độ cao ngọn núi $CH\approx 134,71$ (m).

Hướng dẫn giải.

a) Đúng.

Gọi BK là phương nằm ngang kẻ từ B ($BK//AH$). Khi đó $AB\perp AH\Rightarrow AB\perp BK$.

Ta có: $\widehat{CAH}=30^\circ\Rightarrow\widehat{BAC}=90^\circ-30^\circ=60^\circ$.

Lại có: $\widehat{KBC}=15^\circ30'\Rightarrow\widehat{ABC}=\widehat{ABK}+\widehat{KBC}=90^\circ+15^\circ30'=105^\circ30'$.

Trong tam giác ABC, ta có: $\widehat{ACB}=180^\circ-(\widehat{BAC}+\widehat{ABC})=180^\circ-(60^\circ+105^\circ30')=14^\circ30'$.

b) Đúng.

Theo định lý hàm số sin trong tam giác ABC, ta có: $\dfrac{AB}{\sin\widehat{ACB}}=\dfrac{AC}{\sin\widehat{ABC}}$.

c) Sai.

Từ hệ thức ở câu b, ta tính được: $AC=\dfrac{AB\cdot\sin\widehat{ABC}}{\sin\widehat{ACB}}=\dfrac{70\cdot\sin 105^\circ30'}{\sin 14^\circ30'}\approx 269,41$ (m).

(Giá trị đề bài cho $279,41$ là không chính xác).

d) Đúng.

Xét tam giác vuông ACH tại H, ta có độ cao ngọn núi là:

$CH=AC\cdot\sin\widehat{CAH}=269,41\cdot\sin 30^\circ\approx 134,71$ (m).

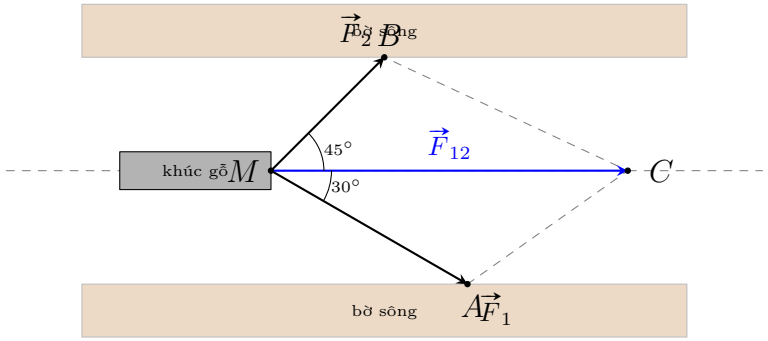
Bài 26. Hai người muốn dùng dây kéo một khối gỗ nổi trên mặt nước đi dọc theo bờ sông (như hình vẽ minh họa). Người thứ nhất dùng lực kéo 300N. Khi đó người thứ hai dùng lực x (N) để kéo được khúc gỗ đi dọc theo bờ sông? (làm tròn đến hàng đơn vị). Gọi M là điểm đầu, A,B là điểm cuối của các vectơ lực $\vec{F}_1,\vec{F}_2$. Dựng hình bình hành $MACB$. Gọi $\vec{F}_{12}$ là hợp lực của hai lực $\vec{F}_1,\vec{F}_2$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\widehat{MBC}=\widehat{MAC}=105^\circ$.

b) $\dfrac{MC}{\sin\widehat{MAC}}=\dfrac{MA}{\sin\widehat{MCA}}$.

c) $F_{12}>410$N.

d) Người thứ hai cần dùng lực $150\sqrt{2}\approx 212$ (N).



Hướng dẫn giải.

Để khúc gỗ đi dọc theo bờ sông thì hợp lực $\vec{F}_{12} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ phải có phương nằm ngang (song song với bờ sông).

Theo quy tắc hình bình hành, $\vec{F}_{12}$ là vectơ đường chéo $\overrightarrow{MC}$ của hình bình hành $MACB$.

a) Đúng.

Góc giữa hai lực kéo $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ là $\widehat{AMB} = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$.

Vì $MACB$ là hình bình hành nên $\widehat{MAC} + \widehat{AMB} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{MAC} = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$.

Trong hình bình hành, các góc đối bằng nhau nên $\widehat{MBC} = \widehat{MAC} = 105^\circ$.

b) Đúng.

Xét tam giác MAC, theo định lý hàm số sin ta có:

$\dfrac{MC}{\sin\widehat{MAC}} = \dfrac{MA}{\sin\widehat{MCA}} = \dfrac{AC}{\sin\widehat{AMC}}$.

Do đó, khẳng định $\dfrac{MC}{\sin\widehat{MAC}} = \dfrac{MA}{\sin\widehat{MCA}}$ là đúng.

c) Sai.

Trong tam giác MAC, ta có $\widehat{MCA} = \widehat{CMB} = 45^\circ$ (hai góc so le trong do $MB // AC$).

Góc $\widehat{AMC} = 30^\circ$ và $\widehat{MAC} = 105^\circ$.

Áp dụng định lý hàm số sin trong tam giác MAC ($MA = F_1 = 300$):

$\dfrac{MC}{\sin 105^\circ} = \dfrac{MA}{\sin 45^\circ} \Rightarrow MC = \dfrac{300 \cdot \sin 105^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 409,8$ (N).

Vì $409,8 < 410$ nên mệnh đề $F_{12} > 410$N là sai.

d) Đúng.

Lực kéo của người thứ hai là $x = MB = AC$.

Áp dụng định lý hàm số sin trong tam giác MAC:

$$\frac{AC}{\sin 30^\circ} = \frac{MA}{\sin 45^\circ} \Rightarrow AC = \frac{MA \cdot \sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{300 \cdot \dfrac{1}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{300}{\sqrt{2}} = 150\sqrt{2} \approx 212 \text{ (N)}.$$

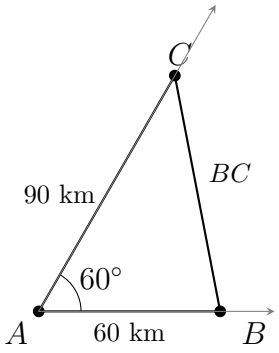
Bài 27. Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí A, đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc 60°. Tàu thứ nhất chạy với tốc độ 20 km/h, tàu thứ hai chạy với tốc độ 30 km/h. Sau 3 giờ vị trí của 2 tàu định vị qua các điểm B, C như hình vẽ.

a) Sau 3 giờ tàu thứ nhất đi được ít hơn tàu thứ hai 30km.

b) $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\widehat{BAC}$.

c) Sau 3 giờ hai tàu cách nhau $BC = 30\sqrt{7}$ km.

d) Giả sử hai tàu bất kỳ nhận được tín hiệu rada của nhau nếu chúng cách nhau không quá $20\sqrt{5}$ km. Một tàu thứ ba (tàu cứu hộ) có vị trí ở tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC sử dụng rada truyền tín hiệu thì hai tàu tại B, C không nhận được.



Hướng dẫn giải.

Sau 3 giờ, quãng đường tàu thứ nhất đi được là $AB = 20 \cdot 3 = 60$ (km).

Quãng đường tàu thứ hai đi được là $AC = 30 \cdot 3 = 90$ (km).

a) Đúng.

Hiệu quãng đường hai tàu đi được là: $AC - AB = 90 - 60 = 30$ (km).

b) Đúng.

Đây là hệ thức của định lý cô-sin trong tam giác ABC.

c) Đúng.

Áp dụng định lý cô-sin cho tam giác ABC ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ = 60^2 + 90^2 - 2 \cdot 60 \cdot 90 \cdot \frac{1}{2} = 3600 + 8100 - 5400 = 6300.$$

$\Rightarrow BC = \sqrt{6300} = 30\sqrt{7}$ (km).

d) Đúng.

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Vị trí tàu cứu hộ tại tâm đường tròn ngoại tiếp nên khoảng cách từ nó đến các tàu tại B, C đều bằng R.

Theo định lý hàm số sin:

$$R = \frac{BC}{2\sin \widehat{A}} = \frac{30\sqrt{7}}{2\sin 60^\circ} = \frac{30\sqrt{7}}{2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{30\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = 10\sqrt{21} \text{ (km)}.$$

Ta có $R = \sqrt{100 \cdot 21} = \sqrt{2100} \approx 45,83$ (km).

Tầm xa của rada là $d = 20\sqrt{5} = \sqrt{400 \cdot 5} = \sqrt{2000} \approx 44,72$ (km).

Vì $R > d$ nên khoảng cách vượt quá tầm rada, do đó hai tàu tại B, C không nhận được tín hiệu.

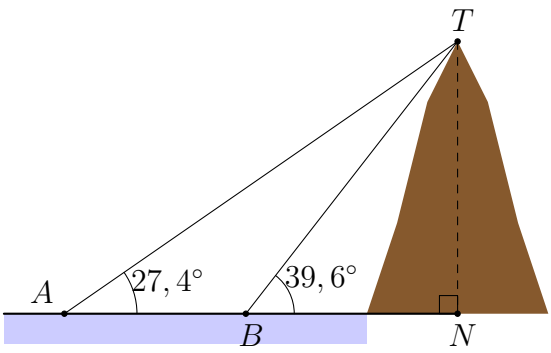
Bài 28. Các góc nhìn đến đỉnh núi so với mực nước biển được đo từ hai đèn tín hiệu A và B trên biển được thể hiện trên hình vẽ. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\widehat{ATB} = 12,2^\circ$.

b) $\dfrac{TB}{\sin \widehat{TAB}} = \dfrac{AB}{\sin \widehat{ATB}}$.

c) Nếu các đèn tín hiệu cách nhau 1536m thì ngọn núi cao khoảng 2132,14 (m).

d) $AB^2 + 2AB \cdot BT + BN^2 > AN^2$.



Hướng dẫn giải.

a) Đúng.

Trong tam giác ABT, góc $\widehat{TBN}$ là góc ngoài tại đỉnh B, ta có:

$\widehat{TBN} = \widehat{TAB} + \widehat{ATB} \Rightarrow \widehat{ATB} = \widehat{TBN} - \widehat{TAB} = 39,6^\circ - 27,4^\circ = 12,2^\circ$.

b) Đúng.

Xét tam giác ABT, áp dụng định lý hàm số sin ta có: $\dfrac{TB}{\sin \widehat{TAB}} = \dfrac{AB}{\sin \widehat{ATB}}$.

c) Sai

Từ hệ thức ở câu b, với $AB = 1536$ m, ta có:

$TB = \dfrac{AB \cdot \sin \widehat{TAB}}{\sin \widehat{ATB}} = \dfrac{1536 \cdot \sin 27,4^\circ}{\sin 12,2^\circ} \approx 3345,36$ (m).

Xét tam giác TBN vuông tại N, độ cao ngọn núi $h = TN$ là:

$TN = TB \cdot \sin \widehat{TBN} = 3345,36 \cdot \sin 39,6^\circ \approx 2132,41$ (m).

d) Đúng.

Ta có A, B, N thẳng hàng nên $AN = AB + BN \Rightarrow AN^2 = (AB + BN)^2 = AB^2 + 2AB \cdot BN + BN^2$.

Xét tam giác TBN vuông tại N, BT là cạnh huyền nên $BT > BN \Rightarrow 2AB \cdot BT > 2AB \cdot BN$.

Cộng $AB^2 + BN^2$ vào hai vế, ta được:

$AB^2 + 2AB \cdot BT + BN^2 > AB^2 + 2AB \cdot BN + BN^2 = AN^2$.

Vậy $AB^2 + 2AB \cdot BT + BN^2 > AN^2$.

Bài 29. Ông Ba có một mảnh vườn hình tam giác ABC có $\widehat{B} > 90^\circ$. Cho biết độ dài các cạnh AB, AC lần lượt là 20 mét và 30 mét; $\widehat{BAC} = 45^\circ$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Diện tích của mảnh vườn của ông Ba là $150\sqrt{2}$ mét vuông.

b) Ông Ba muốn dựng hàng rào bao quanh mảnh vườn theo các cạnh của tam giác ABC. Tổng độ dài của hàng rào là $21,25$ mét (làm tròn đến chữ số thứ hai sau dấu phẩy).

c) Ông Ba lấy điểm M trên cạnh AC và dựng đoạn hàng rào BM sao cho mảnh vườn được chia thành hai tam giác có diện tích bằng nhau. Khi đó đoạn hàng rào BM có độ dài là $14,17$ mét (làm tròn đến chữ số thứ hai sau dấu phẩy).

d) Ông Ba tiếp tục dựng hàng rào BH vuông góc với cạnh AC (H thuộc AC) và muốn xác định vị trí điểm N thuộc mảnh vườn tam giác AHB sao cho $NA : NH : NB = 1 : 2 : 3$. Khi

đó, tổng $NA+NB+NH$ bằng $25,27$ mét (làm tròn đến chữ số thứ hai sau dấu phẩy).

Hướng dẫn giải.

a) Đúng.

Diện tích tam giác ABC là: $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\widehat{A}=\dfrac{1}{2}\cdot 20\cdot 30\cdot\sin 45^\circ=300\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=150\sqrt{2}$ (m^2).

b) Sai.

Áp dụng định lý cô-sin trong tam giác ABC: $BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\widehat{A}}=\sqrt{20^2+30^2-2\cdot 20\cdot 30\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{1300-600\sqrt{2}}\approx 21,25$ (m).

Tổng độ dài hàng rào bao quanh là chu vi: $P=AB+AC+BC\approx 20+30+21,25=71,25$ (m).

c) Đúng.

Để diện tích hai tam giác ABM và CBM bằng nhau thì M phải là trung điểm của AC. Khi đó $AM=\dfrac{AC}{2}=15$ (m).

Trong tam giác ABM:

$BM=\sqrt{AB^2+AM^2-2AB\cdot AM\cdot\cos 45^\circ}=\sqrt{20^2+15^2-2\cdot 20\cdot 15\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{625-300\sqrt{2}}\approx 14,17$ (m).

d) Sai.

Xét tam giác vuông AHB tại H:

$AH=BH=20\cdot\sin 45^\circ=10\sqrt{2}$ (m).

Đặt $NA=x\Rightarrow NH=2x, NB=3x$. Chọn hệ trục tọa độ $H(0,0), A(-10\sqrt{2},0), B(0,10\sqrt{2})$.

Tọa độ $N(x_N,y_N)$ thỏa mãn hệ phương trình khoảng cách. Sau khi giải ta tìm được $x\approx 5,0545$ (m).

Tổng $NA+NB+NH=x+2x+3x=6x\approx 30,33$ (m). (Giá trị $25,27$ là không chính xác).

Bài 30. Cho tam giác ABC có $AC=10, BC=12, \widehat{B}=45^\circ$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Công thức tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là $R=\dfrac{BC}{2\sin B}$.

b) $\sin A=\dfrac{5\sqrt{2}}{12}$.

c) Bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là $5\sqrt{2}$.

d) $\dfrac{3BC-2AC-AB}{3\sin A-2\sin B-\sin C}=10\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải.

a) **Sai**: Ta có: $R=\dfrac{BC}{2\sin A}$.

b) **Sai**: Ta có:

$\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AC}{\sin B}\Rightarrow \sin A=\dfrac{BC\cdot \sin B}{AC}=\dfrac{12\cdot \sin 45^\circ}{10}=\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$.

c) **Đúng**: Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $\triangle ABC$ là:

$R=\dfrac{AC}{2\sin B}=\dfrac{10}{2\cdot \sin 45^\circ}=5\sqrt{2}$.

d) **Đúng**: Ta có:

$R=\dfrac{BC}{2\sin A}=\dfrac{AC}{2\sin B}=\dfrac{AB}{2\sin C}\Rightarrow R=\dfrac{3BC}{6\sin A}=\dfrac{2AC}{4\sin B}=\dfrac{AB}{2\sin C}$

$=\dfrac{3BC-2AC-AB}{2(3\sin A-2\sin B-\sin C)}\Rightarrow \dfrac{3BC-2AC-AB}{3\sin A-2\sin B-\sin C}=2R=10\sqrt{2}$.

III. BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

Bài 1. Cho góc x thỏa mãn $\cot x=\dfrac{4}{3}$. Tính giá trị của biểu thức: $B=\dfrac{3}{\sin^2 x}-\dfrac{\sin x-2\cos x}{\cos x+4\sin x}$.

Hướng dẫn giải.

Ta có:

$$\begin{aligned}B&=\frac{3}{\sin^2 x}-\frac{\sin x-2\cos x}{\cos x+4\sin x}\\&=3(1+\cot^2 x)-\frac{1-2\cot x}{\cot x+4}\\&=3\left(1+\left(\frac{4}{3}\right)^2\right)-\frac{1-2\left(\frac{4}{3}\right)}{\frac{4}{3}+4}=\frac{415}{48}\approx 8,65.\end{aligned}$$

Bài 2. Biết $\cos\alpha=\dfrac{-1}{2}$. Giá trị đúng của biểu thức $P=4\sin^2\alpha+8\tan^2\alpha$ là:

Hướng dẫn giải.

Ta có: $P=4\sin^2\alpha+8\tan^2\alpha=4(1-\cos^2\alpha)+8\left(\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1\right)$.

Thay $\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$, ta được:

$P=4\left(1-\dfrac{1}{4}\right)+8(4-1)=3+24=27$.

Bài 3. Tính giá trị biểu thức $C=\dfrac{\sin a+5\cos a}{\sin^3 a-2\cos^3 a}$ khi $\tan a=2$. (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Hướng dẫn giải.

Ta có:

$$C=\frac{\sin a+5\cos a}{\sin^3 a-2\cos^3 a}=\frac{\dfrac{\sin a}{\cos^3 a}+\dfrac{5\cos a}{\cos^3 a}}{\dfrac{\sin^3 a}{\cos^3 a}-\dfrac{2\cos^3 a}{\cos^3 a}}$$

$$= \frac{\tan a \cdot \dfrac{1}{\cos^2 a} + 5 \cdot \dfrac{1}{\cos^2 a}}{\tan^3 a - 2}$$
$$= \frac{\tan a(1+\tan^2 a) + 5(1+\tan^2 a)}{\tan^3 a - 2}.$$

Với $\tan a = 2$, ta có:

$$C = \frac{2(1+2^2)+5(1+2^2)}{2^3-2} = \frac{10+25}{6} = \frac{35}{6} \approx 5,83.$$

Bài 4. Giả sử $\dfrac{\tan^2 x - \sin^2 x}{\cot^2 x - \cos^2 x} = \tan^n x$. Khi đó n có giá trị là:

Hướng dẫn giải.

Ta có:

$$\frac{\tan^2 x - \sin^2 x}{\cot^2 x - \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x\left(\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1\right)}{\cos^2 x\left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - 1\right)}$$
$$= \frac{\sin^2 x\left(\dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\right)}{\cos^2 x\left(\dfrac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\right)}$$
$$= \frac{\dfrac{\sin^4 x}{\cos^2 x}}{\dfrac{\cos^4 x}{\sin^2 x}} = \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} = \frac{\sin^6 x}{\cos^6 x} = \tan^6 x.$$

Vậy $n = 6$.

Bài 5. Tính giá trị của biểu thức: $E = \sin^2 a \cdot \tan^2 a + 4\sin^2 a - \tan^2 a + 3\cos^2 a$.

Hướng dẫn giải.

Ta có:

$E = \sin^2 a \cdot \tan^2 a + 4\sin^2 a - \tan^2 a + 3\cos^2 a.$

$= \sin^2 a\left(\dfrac{1}{\cos^2 a} - 1\right) + 4\sin^2 a - \tan^2 a + 3\cos^2 a.$

$= \dfrac{\sin^2 a}{\cos^2 a} - \sin^2 a + 4\sin^2 a - \tan^2 a + 3\cos^2 a.$

$= \tan^2 a - \tan^2 a + 3\sin^2 a + 3\cos^2 a = 3(\sin^2 a + \cos^2 a) = 3.$

Bài 6. Cho A, B, C là ba góc trong tam giác ABC. Tính giá trị của biểu thức sau:

$$P = \cos^2\left(180^\circ - \frac{B}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{180^\circ + A + C}{2}\right) + \tan\frac{B}{2} \cdot \tan\frac{A+C}{2}.$$

Hướng dẫn giải.

Ta có:

$A + B + C = 180^\circ \Leftrightarrow A + C = 180^\circ - B.$

$\Rightarrow \cos\left(\dfrac{180^\circ + A + C}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{180^\circ + 180^\circ - B}{2}\right) = \cos\left(180^\circ - \dfrac{B}{2}\right).$

Lại có: $\dfrac{A+B+C}{2}=90^\circ \Rightarrow \dfrac{A+C}{2}=90^\circ-\dfrac{B}{2}$

$\Rightarrow \tan\dfrac{A+C}{2}=\tan\left(90^\circ-\dfrac{B}{2}\right)=\cot\dfrac{B}{2}.$

Khi đó:

$P=\cos^2\left(180^\circ-\dfrac{B}{2}\right)-\cos^2\left(180^\circ-\dfrac{B}{2}\right)+\tan\dfrac{B}{2}\cdot\cot\dfrac{B}{2}$

$P=0+1=1.$

Bài 7. Cho hai góc α và β với $\alpha+\beta=180^\circ$, tìm giá trị của biểu thức: $P=1-\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta$

Hướng dẫn giải.

Vì 2 góc α và β bù nhau nên ta có: $\begin{cases}\sin\beta=\sin\alpha\\ \cos\beta=-\cos\alpha\end{cases}$

Do đó: $P=1-\sin\alpha\sin\alpha-\cos\alpha\cos\alpha$

$P=1-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$

$P=1-1=0$

Bài 8. Cho $\sin\alpha=-\dfrac{1}{4}$. Tính giá trị biểu thức $P=2\cos^2\alpha-4\sin^2\alpha$. (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Hướng dẫn giải.

Do $\sin\alpha=-\dfrac{1}{4}\Rightarrow\begin{cases}\sin^2\alpha=\dfrac{1}{16}\\ \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\dfrac{1}{16}=\dfrac{15}{16}\end{cases}$

Vậy $P=2\cdot\dfrac{15}{16}-4\cdot\dfrac{1}{16}=\dfrac{13}{8}=1,625\approx 1,63.$

Bài 9. Cho α là góc tù và $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$. Giá trị của biểu thức $A=\sin\alpha-2\cos\alpha$ là

Hướng dẫn giải.

Vì $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}\Rightarrow\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{9}{25}$

$\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{-3}{5}$ (vì α là góc tù)

Vậy $A=\dfrac{4}{5}-2\cdot\left(-\dfrac{3}{5}\right)=2.$

Bài 10. Cho góc x thỏa mãn $0^\circ<x<180^\circ$ và $\tan x=3$, giá trị của biểu thức $A=\dfrac{\sin^2x+2\cos^2x+1}{3\sin^2x+\cos^2x-1}$ là (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Hướng dẫn giải.

Ta có $A=\dfrac{\sin^2x+2\cos^2x+1}{3\sin^2x+\cos^2x-1}=\dfrac{\tan^2x+2+(1+\tan^2x)}{3\tan^2x+1-(1+\tan^2x)}=\dfrac{9+2+(1+9)}{3\cdot9+1-(1+9)}=\dfrac{21}{18}=\dfrac{7}{6}\approx$

1, 17.

Bài 11. Tính giá trị biểu thức $C = \dfrac{\sin a + 5\cos a}{\sin^3 a - 2\cos^3 a}$ khi $\tan a = 2$. (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Hướng dẫn giải.

$$C = \frac{\sin a + 5\cos a}{\sin^3 a - 2\cos^3 a} = \frac{\tan a(1+\tan^2 a) + 5(1+\tan^2 a)}{\tan^3 a - 2} = \frac{35}{6} \approx 5,83.$$

Bài 12. Cho tam giác ABC. Tính giá trị biểu thức $P = \sin A \cdot \cos(B+C) + \cos A \cdot \sin(B+C)$

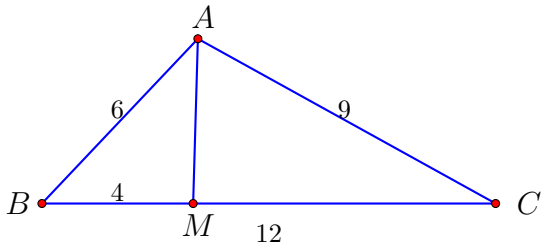
Hướng dẫn giải.

Ta có $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A}$

Do đó: $\cos(B+C) = \cos(180^\circ - A) = -\cos A$ và $\sin(B+C) = \sin(180^\circ - A) = \sin A$

Vậy: $P = \sin A \cdot \cos(B+C) + \cos A \cdot \sin(B+C) = -\sin A \cos A + \cos A \sin A = 0.$

Bài 13. Tam giác ABC có $BC = 12, CA = 9, AB = 6$. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = 4$. Tính độ dài đoạn thẳng AM. (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)



Hướng dẫn giải.

Áp dụng định lí cô-sin trong tam giác ABC ta có:

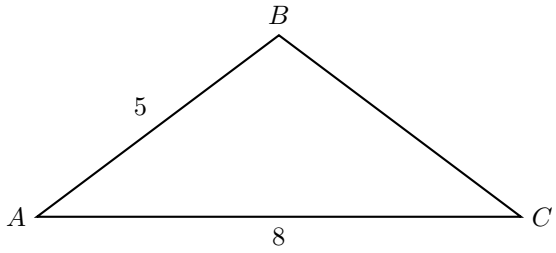
$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B$ suy ra

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{6^2 + 12^2 - 9^2}{2 \cdot 6 \cdot 12} = \frac{11}{16}$$

Áp dụng định lí cô-sin trong tam giác ABM ta có:

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2 \cdot AB \cdot BM \cdot \cos B \Rightarrow AM = \sqrt{6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{11}{16}} = \sqrt{19} \approx 4,36.$$

Bài 14. Tam giác ABC có góc A nhọn, $AB = 5$, $AC = 8$, diện tích bằng 12. Độ dài cạnh BC bằng



Hướng dẫn giải.

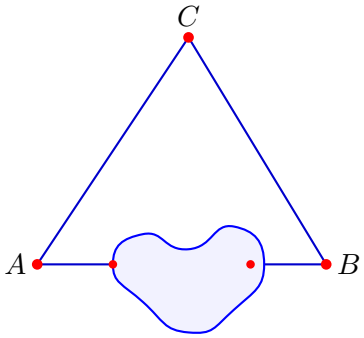
Ta có: $S = \dfrac{1}{2}.AB.AC.\sin A \Rightarrow \sin A = \dfrac{2S}{AB.AC} = \dfrac{2.12}{5.8} = \dfrac{3}{5}.$

Do $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, và A là góc nhọn, nên: $\cos A = \dfrac{4}{5}$.

Áp dụng định lý hàm cô-sin, ta có:

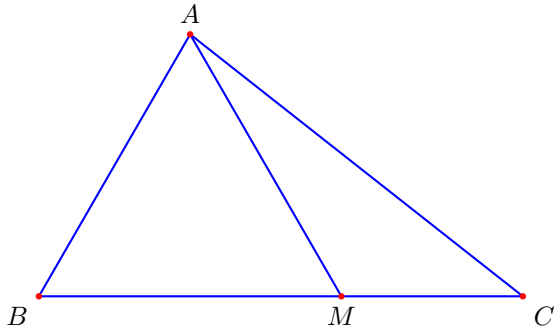
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos A = 5^2 + 8^2 - 2.5.8.\dfrac{4}{5} = 25 \Rightarrow BC = 5.$

Bài 15. Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B dưới một góc $60°$. Biết $CA = 200$(m), $CB = 180$(m). Khoảng cách AB bằng bao nhiêu? (*kết quả làm tròn đến hàng đơn vị*)



Hướng dẫn giải. Ta có: $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA.CB.\cos 60° = 40000 + 32400 - 2.200.180.\dfrac{1}{2}$ $= 36400 \Rightarrow AB = 20\sqrt{91}$(m).

Bài 16. Cho tam giác ABC có $BC = 8$, $CA = 7$, $AB = 5$. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = 5$. Tính bán kính r của đường tròn nội tiếp tam giác ACM. (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*)



Hướng dẫn giải.

Xét tam giác ABC có: $\cos B = \dfrac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB.BC} = \dfrac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2.5.8} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{B} = 60°$.

Xét tam giác ABM có: $AB = BM = 5$; $\widehat{ABM} = 60° \Rightarrow \Delta ABM$ là tam giác đều.

$\Rightarrow AM = 5$, $\widehat{AMC} = 120°$.

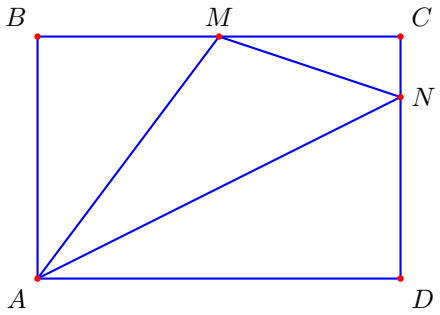
Xét tam giác ACM có: $S_{\Delta AMC} = \dfrac{1}{2}AM.MC.\sin\widehat{AMC} = \dfrac{1}{2}.5.3.\sin 120° = \dfrac{15\sqrt{3}}{4}$.

Mặt khác $S_{\Delta AMC} = p.r = \dfrac{5+3+7}{2}.r = \dfrac{15}{2}.r$.

Suy ra: $\dfrac{15}{2}r = \dfrac{15\sqrt{3}}{4} \Rightarrow r = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$.

Bài 17. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB = 4$, $BC = 6$, M là trung điểm của BC, N là

điểm trên cạnh CD sao cho $ND = 3NC$. Khi đó diện tích tam giác AMN bằng



Hướng dẫn giải.

Cách 1:

Ta có $MC = 3, NC = 1; BM = 3; ND = 3$.

$S_{\Delta AMN} = S_{ABCD} - S_{\Delta ABM} - S_{\Delta MCN} - S_{\Delta ADN} = 4.6 - \dfrac{1}{2}.4.3 - \dfrac{1}{2}.3.1 - \dfrac{1}{2}.6.3 = \dfrac{15}{2}$.

Cách 2:

Ta có $MC = 3, NC = 1 \Rightarrow MN = \sqrt{10}$

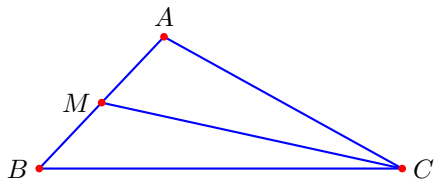
$BM = 3, AB = 4 \Rightarrow AM = 5$

$AD = 6, ND = 3 \Rightarrow AN = \sqrt{45}$

$p = \dfrac{AM + AN + MN}{2} = \dfrac{\sqrt{10} + 5 + \sqrt{45}}{2}$

$S_{\Delta AMN} = \sqrt{p(p - AM)(p - AN)(p - MN)} = \dfrac{15}{2}$.

Bài 18. Cho tam giác ABC có $AB = 2$, $AC = 3$, $BC = 4$. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCM. (*kết quả làm tròn đến hàng phần trăm*)



Hướng dẫn giải.

Xét tam giác ABC có: $CM^2 = \dfrac{BC^2 + AC^2}{2} - \dfrac{AB^2}{4} = \dfrac{23}{2} \Rightarrow CM = \sqrt{\dfrac{23}{2}}$.

Xét tam giác MBC có: $\cos B = \dfrac{BM^2 + BC^2 - CM^2}{2BM.BC} = \dfrac{1 + 16 - \dfrac{23}{2}}{2.1.4} = \dfrac{11}{16}$.

$\Rightarrow \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \dfrac{3\sqrt{15}}{16}$ (do $\sin B > 0$).

Xét tam giác BMC, ta có $\dfrac{MC}{\sin B} = 2R \Rightarrow R = \dfrac{MC}{2\sin B} = \dfrac{\sqrt{\dfrac{23}{2}}}{2.\dfrac{3\sqrt{15}}{16}} = \dfrac{4\sqrt{690}}{45} \approx 2,33$.

Vậy bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCM là $R = \dfrac{4\sqrt{690}}{45}$.

Bài 19. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 2; AC = 3; \widehat{A} = 60^\circ$. Tính độ dài đường phân giác trong góc A của tam giác ABC. (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Hướng dẫn giải.

Gọi M là chân đường phân giác góc A.

Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A = 7 \Rightarrow BC = \sqrt{7}$.

Lại có $\dfrac{BM}{CM} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{2}{3}$.

Suy ra $BM = \dfrac{2\sqrt{7}}{5}$.

Áp dụng định lý cô-sin trong tam giác ABM ta được:

$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2 \cdot AB \cdot BM \cdot \cos \widehat{ABC} = AB^2 + BM^2 - 2 \cdot AB \cdot BM \cdot \dfrac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \dfrac{108}{25} \Rightarrow AM = \dfrac{6\sqrt{3}}{5} \approx 2,08.$

Bài 20. Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí A, đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc 60°. Tàu thứ nhất chạy với tốc độ 30 km/h, tàu thứ hai chạy với tốc độ 40 km/h. Hỏi sau 2 giờ hai tàu cách nhau bao nhiêu km? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

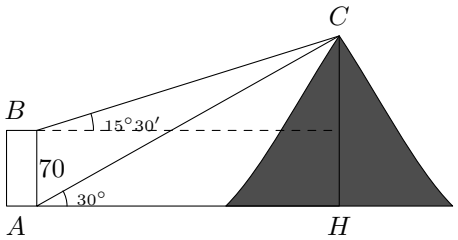
Hướng dẫn giải.

Ta có: Sau 2h quãng đường tàu thứ nhất chạy được là: $S_1 = 30 \cdot 2 = 60$ km.

Sau 2h quãng đường tàu thứ hai chạy được là: $S_2 = 40 \cdot 2 = 80$ km.

Vậy: sau 2h hai tàu cách nhau là: $S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2 \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot \cos 60^\circ} = 20\sqrt{13} \approx 72$.

Bài 21. Từ hai vị trí A và B của một tòa nhà, người ta quan sát đỉnh C của ngọn núi. Biết rằng độ cao $AB = 70$m, phương nhìn AC tạo với phương nằm ngang góc 30°, phương nhìn BC tạo với phương nằm ngang góc $15^\circ 30'$. Ngọn núi đó có độ cao so với mặt đất? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Hướng dẫn giải.

Từ giả thiết, ta suy ra tam giác ABC có $\widehat{CAB} = 60^\circ$, $\widehat{ABC} = 105^\circ 30'$ và $c = 70$.

Khi đó $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{C} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 180^\circ - 165^\circ 30' = 14^\circ 30'$.

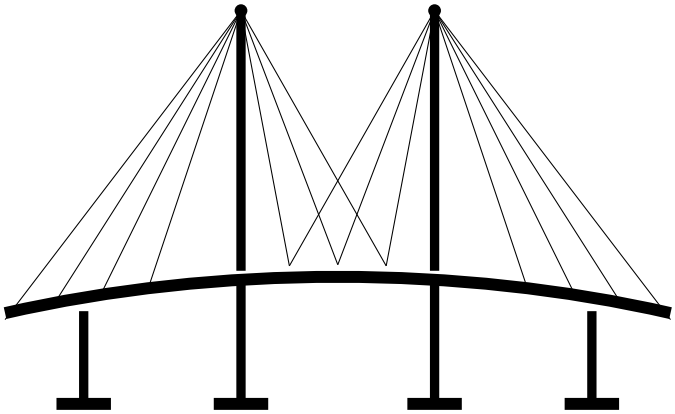
Theo định lý sin, ta có $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ hay $\dfrac{b}{\sin 105^\circ 30'} = \dfrac{70}{\sin 14^\circ 30'}$.

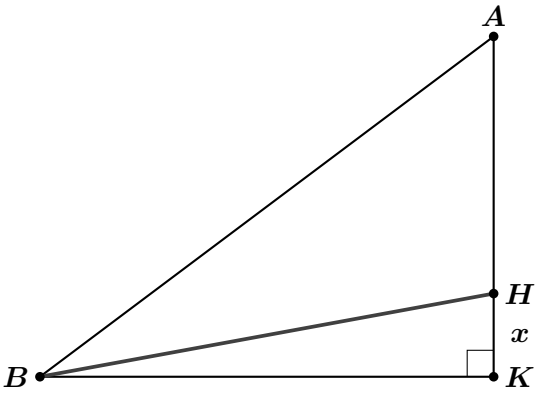
Do đó $AC = b = \dfrac{70 \cdot \sin 105^\circ 30'}{\sin 14^\circ 30'} \approx 269,4$ m.

Gọi CH là khoảng cách từ C đến mặt đất. Tam giác vuông ACH có cạnh CH đối diện với góc 30° nên $CH = \dfrac{AC \cdot \sin 30^\circ}{1} = \dfrac{269,4}{2} = 134,7\,\text{m}$.

Vậy ngọn núi cao khoảng 135 m.

Bài 22. Quan sát cây cầu dây văng minh họa như hình dưới đây:





Tại trụ cao nhất, khoảng cách từ đỉnh trụ (vị trí A) tới chân trụ trên mặt cầu (vị trí H) là 150 m, độ dài dây văng dài nhất nối từ đỉnh trụ xuống mặt cầu (vị trí B) là 300 m, khoảng cách từ chân dây văng dài nhất tới chân trụ trên mặt cầu là 250 m. Tính độ dốc của cầu qua trụ nói trên (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị độ).

Hướng dẫn giải. Độ dốc của cầu là góc nghiêng giữa đường cầu qua trụ và phương nằm ngang, tức là góc $\widehat{KBH}$.

Xét tam giác ABH, áp dụng định lí côsin ta có:

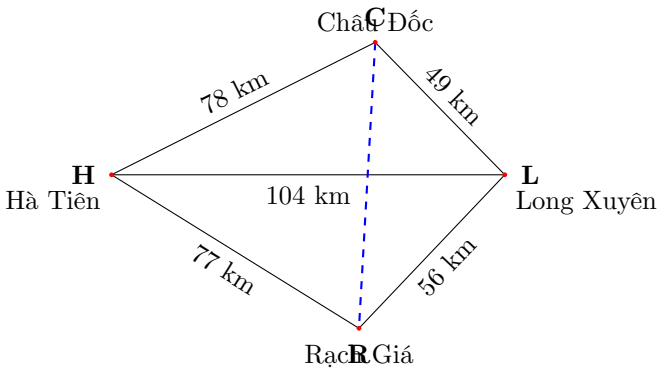
$$\cos\widehat{AHB} = \frac{BH^2 + AH^2 - AB^2}{2BH \cdot AH} = \frac{250^2 + 150^2 - 300^2}{2 \cdot 250 \cdot 150} = -\frac{1}{15} \Rightarrow \widehat{AHB} \approx 93,8^\circ.$$

Xét tam giác BHK ta có: $\widehat{HBK} \approx 93,8^\circ - 90^\circ = 3,8^\circ$ (tính chất góc ngoài tam giác).

Vậy độ dốc của cầu qua trụ theo đề bài là khoảng $3,8^\circ$.

Bài 23. Trên bản đồ địa lý người ta thường gọi tứ giác với 4 đỉnh lần lượt là các thành phố Hà Tiên, Châu Đốc, Long Xuyên, Rạch Giá là tứ giác Long Xuyên. Dựa vào các khoảng cách đã cho trên hình vẽ, tính khoảng cách giữa Châu Đốc và Rạch Giá. (*kết quả làm tròn đến hàng phần*

mười)



✍ *Hướng dẫn giải.*

Áp dụng định lí cosin vào tam giác CHL ta có:

$$\cos\widehat{CLH} = \frac{CL^2 + HL^2 - CH^2}{2 \cdot CL \cdot HL} = \frac{49^2 + 104^2 - 78^2}{2 \cdot 49 \cdot 104} \approx 0,6999 \Rightarrow \widehat{CLH} \approx 45°35'.$$

Tương tự trong tam giác RHL ta có:

$$\cos\widehat{RLH} = \frac{RL^2 + HL^2 - RH^2}{2 \cdot RL \cdot HL} = \frac{56^2 + 104^2 - 77^2}{2 \cdot 56 \cdot 104} \approx 0,6888 \Rightarrow \widehat{RLH} \approx 46°28'.$$

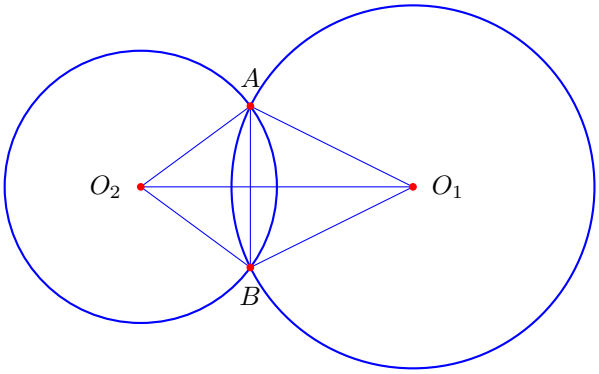
Suy ra góc $\widehat{CLR} = \widehat{CLH} + \widehat{RLH} \approx 45°35' + 46°28' = 92°3'$.

Áp dụng định lí cosin vào tam giác LCR để tính cạnh CR:

$$CR^2 = CL^2 + LR^2 - 2CL \cdot LR \cdot \cos\widehat{CLR} \approx 49^2 + 56^2 - 2 \cdot 49 \cdot 56 \cdot \cos(92°3') \approx 5727,6.$$

$\Rightarrow CR \approx 75,7$ (km).

Bài 24. Người ta xây một sân khấu với sân có dạng của hai hình tròn giao nhau. Bán kính của hai hình tròn là 20 m và 15 m. Khoảng cách giữa hai tâm của hai hình tròn là 30 m. Chi phí làm mỗi mét vuông phần giao nhau là 300 nghìn đồng và phần còn lại là 100 nghìn đồng. Hỏi số tiền làm mặt sân khấu là bao nhiêu triệu đồng?



✍ *Hướng dẫn giải.*

Gọi O_1, O_2 là tâm 2 hình tròn. A, B là giao điểm. $O_1A = 20, O_2A = 15, O_1O_2 = 30$.

Trong $\triangle AO_1O_2$, ta có: $\cos \widehat{AO_1O_2} = \dfrac{20^2 + 30^2 - 15^2}{2 \cdot 20 \cdot 30} = \dfrac{1075}{1200} \Rightarrow \widehat{AO_1O_2} \approx 26,38°$.

Góc ở tâm đường tròn (O_1) chắn cung AB là: $\alpha_1 = 2\widehat{AO_1O_2} \approx 52,77°$.

Diện tích hình quạt O_1AB: $S_{q1} = \dfrac{52,77}{360}\pi \cdot 20^2 \approx 184,2\,\text{m}^2$.

Diện tích $\triangle O_1AB$: $S_{\triangle 1} = \dfrac{1}{2} \cdot 20 \cdot 20 \cdot \sin(52,77°) \approx 159,2\,\text{m}^2$.

Diện tích viên phân $S_1 = S_{q1} - S_{\triangle 1} \approx 25\,\text{m}^2$.

Tương tự tính cho đường tròn (O_2), ta có $S_2 \approx 35\,\text{m}^2$.

Diện tích phần giao nhau $S_g = S_1 + S_2 = 60\,\text{m}^2$.

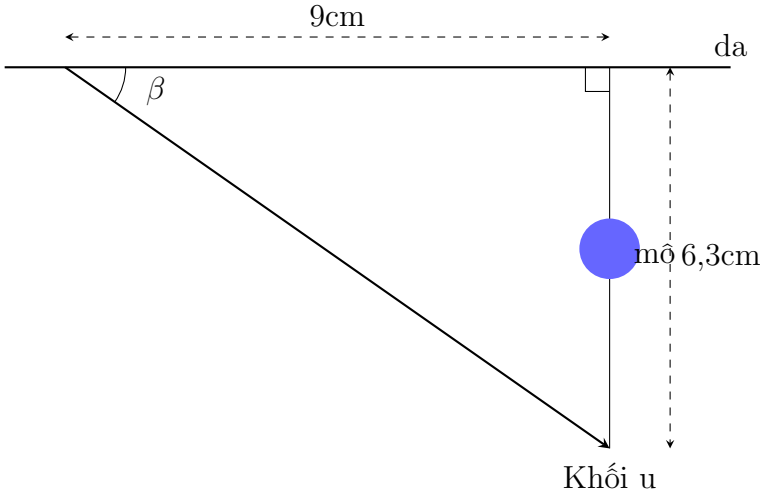
Diện tích thực tế của sân khấu: $S_{sk} = S_{(O_1)} + S_{(O_2)} - S_g = \pi(20^2 + 15^2) - 60 \approx 1903,7\,\text{m}^2$.

Diện tích phần còn lại (không giao): $S_{cl} = S_{sk} - S_g = 1903,7 - 60 = 1843,7\,\text{m}^2$.

Tổng chi phí: $T = 60 \cdot 300.000 + 1843,7 \cdot 100.000 \approx 202.370.000$ đồng.

Làm tròn theo thực tế đề bài (triệu đồng): ≈ 208 triệu (số liệu có thể dao động tùy phép làm tròn số π).

Bài 25. Xạ phẫu gamma knife là phương pháp điều trị u não bằng cách sử dụng bức xạ gamma tập trung, hội tụ chính xác vào tổn thương, không làm hại mô lành. Nếu khối u của bệnh nhân cách mặt da 6,3 cm, bác sĩ đặt nguồn tia cách khối u 9 cm để tránh làm tổn thương mô thì góc tạo bởi chùm tia với mặt da là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị, đơn vị độ)?



Hướng dẫn giải.

Từ đề bài ta có hình vẽ mô phỏng một tam giác vuông với cạnh đối của góc β là khoảng cách từ khối u đến mặt da (6,3 cm) và cạnh kề là khoảng cách từ nguồn tia đến hình chiếu của khối u trên mặt da (9 cm).

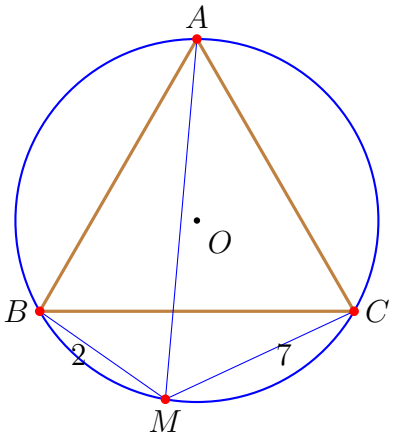
Gọi β là góc tạo bởi chùm tia với mặt da. Ta có:

$$\tan\beta = \frac{6,3}{9} = \frac{7}{10} = 0,7.$$

Sử dụng máy tính bỏ túi: $\beta = \arctan(0,7) \approx 34,99°$.

Vậy $\beta \approx 35°$.

Bài 26. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi M là điểm thuộc cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$ của đường tròn tâm O. Biết $MB = 2$ và $MC = 7$, độ dài đoạn thẳng MA bằng



Hướng dẫn giải.

Trong đường tròn (O), tứ giác $ABMC$ nội tiếp nên các góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau:

- $\widehat{AMB} = \widehat{ACB} = 60^\circ$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{AB}$).
- $\widehat{AMC} = \widehat{ABC} = 60^\circ$ (cùng chắn cung $\overset{\frown}{AC}$).

Đặt $AB = AC = x$. Áp dụng định lý Côsin lần lượt cho hai tam giác ΔAMB và ΔAMC ta được:

(1) $x^2 = MB^2 + MA^2 - 2MB \cdot MA \cdot \cos 60^\circ = 2^2 + MA^2 - 2 \cdot 2 \cdot MA \cdot \frac{1}{2} = 4 + MA^2 - 2MA.$

(2) $x^2 = MC^2 + MA^2 - 2MC \cdot MA \cdot \cos 60^\circ = 7^2 + MA^2 - 2 \cdot 7 \cdot MA \cdot \frac{1}{2} = 49 + MA^2 - 7MA.$

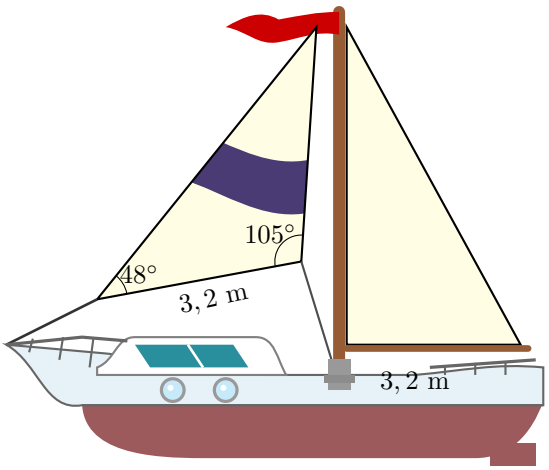
Từ (1) và (2) ta có phương trình:

$$4 + MA^2 - 2MA = 49 + MA^2 - 7MA$$

$$\Leftrightarrow 5MA = 45 \Leftrightarrow MA = 9.$$

Cách khác (Định lý Ptolemy): $MA \cdot BC = MB \cdot AC + MC \cdot AB$. Vì $AB = BC = AC$ nên $MA = MB + MC = 2 + 7 = 9$.

Bài 27. Gọi S là diện tích một cánh buồm hình tam giác. Biết cánh buồm đó có chiều dài một cạnh là $3,2$ m và hai góc kề cạnh đó có số đo là 48° và 105°. Khi đó S bằng. (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Hướng dẫn giải. Gọi tam giác ABC có $\widehat{A} = 48°, \widehat{B} = 105°, AB = 3,2$. Khi đó diện tích của tam giác ABC là diện tích của cánh buồm cần tìm.

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC, ta có: $\dfrac{AC}{\sin \widehat{B}} = \dfrac{AB}{\sin \widehat{C}}$

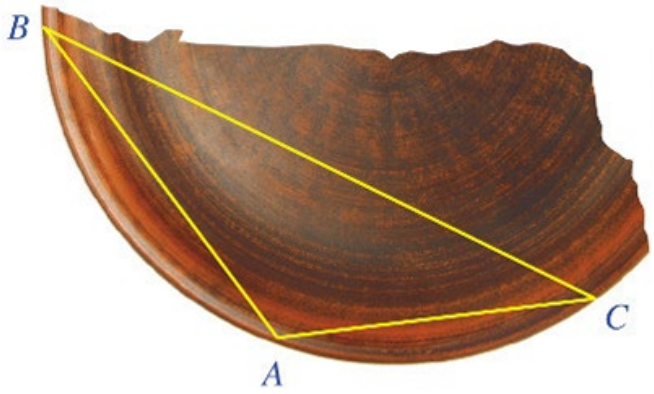
nên: $AC = \dfrac{AB \cdot \sin \widehat{B}}{\sin \widehat{C}} = \dfrac{3,2 \cdot \sin(105°)}{\sin(180° - 48° - 105°)} = \dfrac{3,2 \cdot \sin(105°)}{\sin(27°)}$.

Suy ra diện tích của tam giác ABC là:

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin(48°) = \frac{1}{2} \cdot 3,2 \cdot \frac{3,2 \cdot \sin(105°)}{\sin(27°)} \cdot \sin(48°) \approx 8,095.$$

Vậy diện tích của cánh buồm xấp xỉ là $8,095$ m^2.

Bài 28. Để xác định bán kính của chiếc đĩa cổ hình tròn bị vỡ một phần, các nhà khảo cổ lấy ba điểm A, B, C trên vành đĩa và tiến hành đo đạc thu được kết quả như sau: cạnh $AB \approx 9,5$ cm, $\widehat{ACB} \approx 60°$. Bán kính của chiếc đĩa là (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

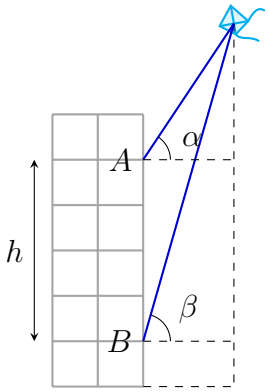


Hướng dẫn giải.

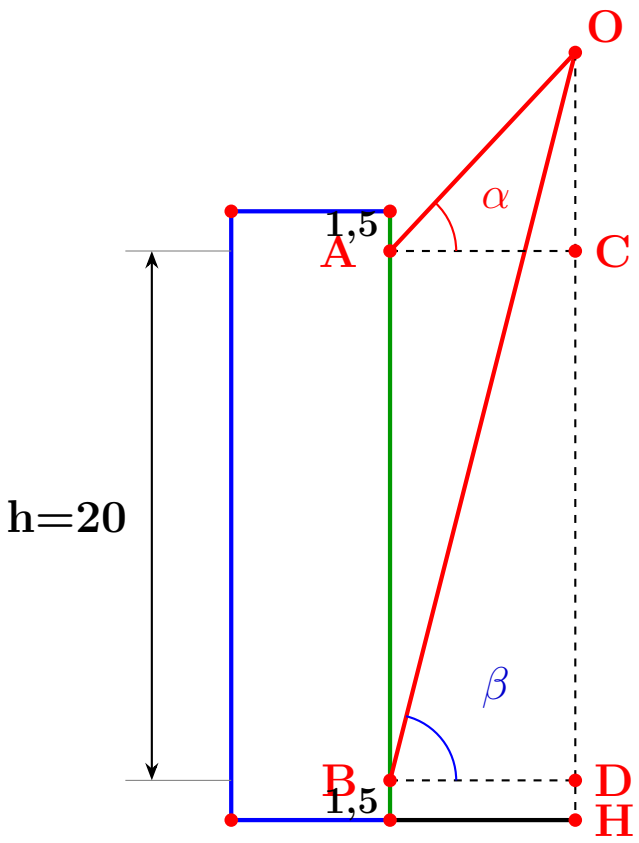
Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC, ta có

$$\frac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = \frac{AB}{2 \sin C} \approx \frac{9,5}{2 \sin 60°} \approx 5,5 \text{ (cm)}$$

Bài 29. Bạn A đứng ở đỉnh của tòa nhà và quan sát chiếc diều, nhận thấy góc nâng (góc nghiêng giữa phương từ mắt của bạn A tới chiếc diều và phương nằm ngang) là $\alpha = 35°$; khoảng cách từ đỉnh tòa nhà tới mắt bạn A là $1,5m$. Cùng lúc đó ở dưới chân tòa nhà, bạn B cũng quan sát chiếc diều và thấy góc nâng là $\beta = 75°$; khoảng cách từ mặt đất đến mắt bạn B cũng là $1,5m$. Biết chiều cao của tòa nhà là $h = 20m$ (Hình vẽ). Chiếc diều bay cao bao nhiêu mét so mặt đất (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



✍ *Hướng dẫn giải.*



O là vị trí của chiếc diều.

H là hình chiếu vuông góc của chiếc diều trên mặt đất.

C, D lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B trên OH.

Đặt $OC = x$, suy ra $OH = x + 20 + 1,5 = x + 21,5(m)$.

Xét tam giác OAC, ta có: $\tan\alpha = \dfrac{OC}{AC} \Rightarrow AC = \dfrac{OC}{\tan\alpha} = \dfrac{x}{\tan 35^\circ}$.

Xét tam giác OBD, ta có: $\tan\beta = \dfrac{OD}{BD} \Rightarrow BD = \dfrac{OD}{\tan\beta} = \dfrac{x+20}{\tan 75^\circ}$.

Mà: $AC = BD \Rightarrow \dfrac{x}{\tan 35^\circ} = \dfrac{x+20}{\tan 75^\circ}$

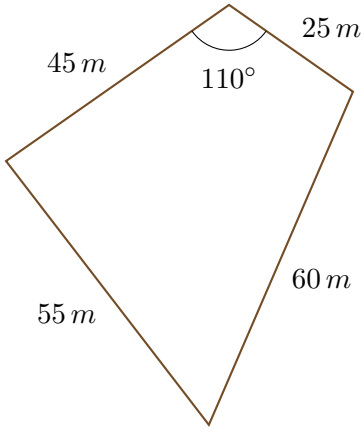
$\Leftrightarrow x \cdot \tan 75^\circ = (x+20) \cdot \tan 35^\circ \Leftrightarrow x = \dfrac{20 \cdot \tan 35^\circ}{\tan 75^\circ - \tan 35^\circ} \approx 4,6(m)$.

Suy ra $OH = 26(m)$.

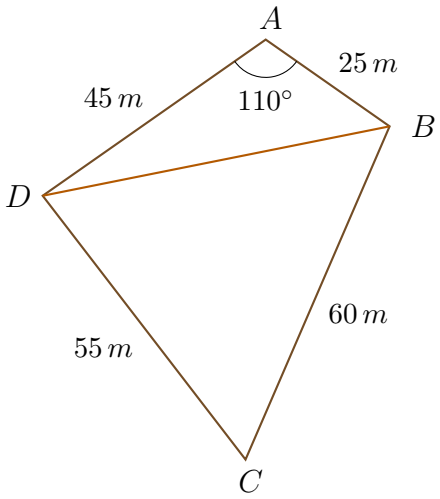
Vậy chiếc diều bay cao 26 m so với mặt đất.

Bài 30. Ông X cần đo diện tích mảnh đất hình tứ giác, ông đi theo chu vi mảnh đất, lần lượt đo độ dài các cạnh và một góc như hình vẽ. Tính diện tích của mảnh đất đó (*làm tròn kết quả đến*

hàng đơn vị, đơn vị: m^2).



✍ *Hướng dẫn giải.*



Gọi mảnh đất cần tính diện tích là $ABCD$.

Áp dụng định lý Côsin vào tam giác ABD ta có:

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos A} \approx 58,48\,m.$$

Diện tích tam giác ABD là:

$$S_{ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD} \approx 528,58\,m^2.$$

Nửa chu vi tam giác BCD là: $p = \dfrac{BC + BD + CD}{2} \approx 86,74\,m.$

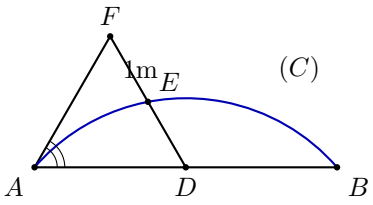
Diện tích tam giác BCD theo công thức Heron:

$$S_{BCD} = \sqrt{p(p - BC)(p - BD)(p - CD)} \approx 1442,38\,m^2.$$

Vậy diện tích mảnh đất của ông X xấp xỉ: $S \approx 528,58 + 1442,38 \approx 1971\,m^2$.

Bài 31. Mặt tiền nhà ông An có chiều ngang $AB = 4$m, ông An muốn thiết kế lan can nhô ra có dạng là một phần của đường tròn (C) (hình vẽ). Vì phía trước vướng cây tại vị trí F nên để an toàn, ông An cho xây đường cong cách 1m tính từ trung điểm D của AB. Biết $AF = 2$m, $\widehat{DAF} = 60^\circ$ và lan can cao 1m làm bằng inox với giá 2,2 triệu/m^2. Tính số tiền ông An phải trả

(làm tròn đến hàng nghìn).

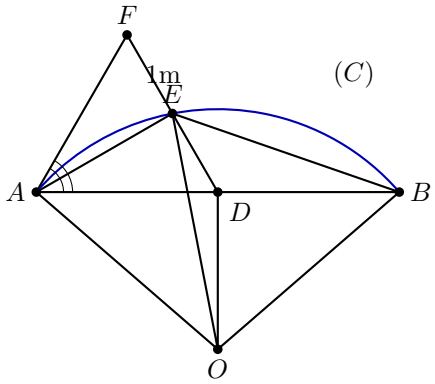


✍ *Hướng dẫn giải.* Theo giả thiết, ta có $\triangle AFD$ đều nên $FD = 2\text{m}$ suy ra $ED = 1\text{m}$, $\widehat{EAD} = 30^\circ$ và $\widehat{EDB} = 120^\circ$.

Trong tam giác $\triangle EDB$ có $EB^2 = DE^2 + DB^2 - 2DE \cdot DB \cdot \cos 120^\circ = 7 \implies EB = \sqrt{7}$.

Gọi R là bán kính của đường tròn (C) tâm O, áp dụng định lý sin trong tam giác $\triangle AEB$ ta có

$$\frac{EB}{\sin \widehat{EAD}} = 2R \implies R = \sqrt{7}.$$

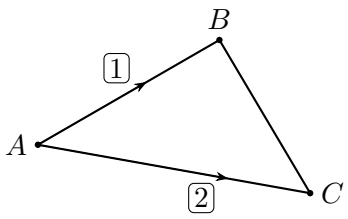


Xét tam giác OAB có $R = OA = OB = \sqrt{7}$, $AB = 4$, suy ra $\cos \widehat{AOB} = \dfrac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA \cdot OB} = -\dfrac{1}{7}$.

Khi đó $\widehat{AOB} \approx 98,2^\circ$ suy ra độ dài dây cung (C) xấp xỉ $4,54\text{m}$.

Vì chiều cao của lan can là 1m và giá kính là $2,2$ triệu/m^2 nên số tiền ông An phải trả xấp xỉ $9,977$ triệu đồng.

Bài 32. Hai chiếc xe cùng xuất phát ở vị trí A, đi theo hai hướng tạo với nhau một góc 60°. Xe thứ nhất chạy với tốc độ $30(km/h)$, xe thứ hai chạy với tốc độ $40(km/h)$ (tham khảo hình vẽ).



Sau thời gian 1,5 giờ thì khoảng cách của hai xe bằng (kết quả làm tròn đến một chữ số sau dấu phẩy).

✍ *Hướng dẫn giải.* Ta có quãng đường xe thứ nhất đi sau 1,5 giờ là $S_1 = 30 \cdot 1,5 = 45(km)$ và quãng đường xe thứ hai đi sau 1,5 giờ là $S_2 = 40 \cdot 1,5 = 60km$ nên ta có:

$$BC = \sqrt{45^2 + 60^2 - 2 \cdot 45 \cdot 60 \cdot \cos 60^\circ} = 15\sqrt{13} \approx 54,1(km)$$

Bài 33. Bác An cần đo khoảng cách từ một điểm trên bờ sông đến một điểm B ở giữa hồ mà

không thể đến trực tiếp được. Bác sử dụng giác kế để chọn điểm C cùng nằm trên bờ với A sao cho $\widehat{BAC} = 30°; \widehat{ACB} = 100°$ và cạnh $AC = 50(m)$. Tính khoảng cách AB (kết quả làm tròn đến một chữ số sau dấu phẩy).

✍ *Hướng dẫn giải.* Ta có: $\widehat{B} = 180° - (A + C) = 180° - 30° - 100° = 50°$.

Áp dụng định lí sin ta có $\dfrac{AB}{\sin C} = \dfrac{AC}{\sin B} \Longrightarrow AB = \dfrac{AC \cdot \sin C}{\sin B} = \dfrac{50 \cdot \sin 100°}{\sin 50°} \approx 64,3(m)$.

Bài 34. Một ô tô muốn đi từ A đến C nhưng giữa A và C là một ngọn núi cao nên ô tô phải đi thành hai đoạn từ A đến B rồi từ B đến C, các đoạn đường tạo thành tam giác ABC có $AB = 15(km)$, $BC = 20(km)$ và $\widehat{ABC} = 120°$ (tham khảo hình vẽ bên dưới). Giả sử ô tô chạy $5km$ tốn một lít xăng, giá một lít xăng là 20.000 đồng. Nếu người ta làm một đoạn đường hầm xuyên núi chạy thẳng từ A đến C, khi đó ô tô chạy trên con đường này sẽ tiết kiệm được bao nhiêu nghìn đồng so với chạy trên đường cũ.

✍ *Hướng dẫn giải.* Quảng đường ô tô đi từ A đến C qua B là: $S_1 = AB + BC = 15 + 20 = 35(km)$.

Áp dụng định lý côsin vào tam giác ABC ta có: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC}$

$= 15^2 + 20^2 - 2 \cdot 15 \cdot 20 \cdot \cos 120° = 925 \Longrightarrow AC = 5\sqrt{37}(km)$.

Nếu đi theo đường hầm thì quãng đường ô tô đi ít hơn là $S = S_1 - AC = 35 - 5\sqrt{37} \approx 4,6(km)$.

Ô tô tiết kiệm được số tiền là $\dfrac{4,6}{5} \cdot 20000 = 18400$ (đồng) hay $18,4$ (nghìn đồng).

Bài 35. Trên nóc một tòa nhà có một cột ăngten cao $5(m)$. Từ vị trí quan sát A cao $7(m)$ so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten dưới góc $50°$ và $40°$ so với phương nằm ngang như hình vẽ. Tính khoảng cách từ điểm A đến chân C của cột (kết quả làm tròn đến một chữ số sau dấu phẩy).

✍ *Hướng dẫn giải.* Tam giác ABD vuông tại D có $\widehat{BAD} = 50° \Longrightarrow \widehat{ABD} = 90° - 50° = 40°$.

$\widehat{ACD} = 90° - 40° = 50° \Longrightarrow \widehat{ACB} = 180° - \widehat{ACD} = 180° - 50° = 130°$.

Từ hình vẽ suy ra $\widehat{BAC} = 10°$ và $\widehat{ABD} = 180° - (\widehat{BAD} + \widehat{ADB}) = 180° - (50° + 90°) = 40°$.

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC ta có:

$$\frac{BC}{\sin \widehat{BAC}} = \frac{AC}{\sin \widehat{ABC}} \Longrightarrow AC = \frac{BC \cdot \sin \widehat{ABC}}{\sin \widehat{BAC}} = \frac{5 \cdot \sin 40°}{\sin 10°} \approx 18,5(m)$$

Chương IV

VECTƠ

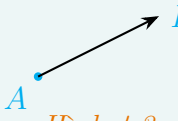
§1 CÁC KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

I. KHÁI NIỆM VECTƠ

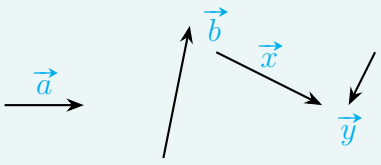
- **Vectơ** là một đoạn thẳng có hướng, nghĩa là, trong hai điểm mút của đoạn thẳng, đã chỉ rõ điểm đầu, điểm cuối.
- **Độ dài của vectơ** là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

Chú ý

- Vectơ có điểm đầu A và điểm cuối B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$, đọc là *vectơ* AB (H.4.3).
- Để vẽ một vectơ, ta vẽ đoạn thẳng nối điểm đầu và điểm cuối của nó, rồi đánh dấu mũi tên ở điểm cuối (H.4.3).
- Vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$, ... (H.4.4).
- Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$ tương ứng được kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$.



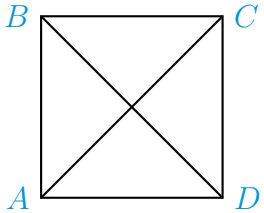
Hình 4.3



Hình 4.4

Ví dụ 1

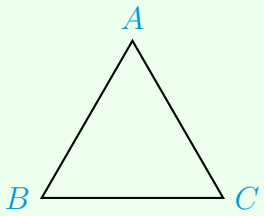
Cho hình vuông $ABCD$ với cạnh có độ dài bằng 1. Tính độ dài các vectơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD}$.



Lời giải. Vì cạnh của hình vuông $ABCD$ có độ dài bằng 1 nên các đường chéo của hình vuông này có độ dài bằng $\sqrt{2}$.

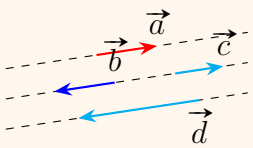
Vậy $|\overrightarrow{AC}| = AC = \sqrt{2}, |\overrightarrow{CA}| = CA = \sqrt{2}, |\overrightarrow{BD}| = BD = \sqrt{2}$.

1 Cho tam giác đều ABC với cạnh có độ dài bằng a. Hãy chỉ ra các vectơ có độ dài bằng a và có điểm đầu, điểm cuối là các đỉnh của tam giác ABC.

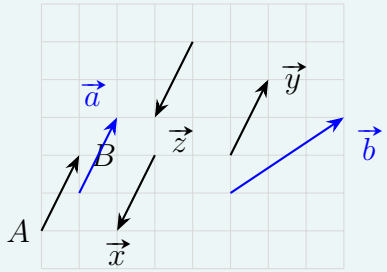


II. HAI VECTƠ CÙNG PHƯƠNG, CÙNG HƯỚNG, BẰNG NHAU

- Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của một vectơ được gọi là **giá** của vectơ đó.
- Hai vectơ được gọi là **cùng phương** nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.



Nhận xét. Trong Hình 4.7, mỗi cặp vectơ trong các vectơ $\overrightarrow{AB}, \vec{a}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ đều cùng phương, nhưng vectơ $\vec{b}$ không cùng phương với mỗi vectơ trên.

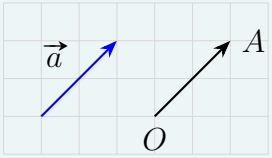


Hình 4.7

Đối với hai vectơ cùng phương thì chúng **cùng hướng** hoặc **ngược hướng**.
Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là **bằng nhau**, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$, nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.

Chú ý

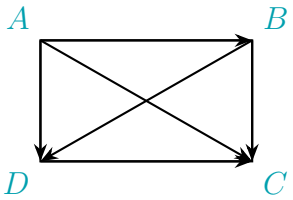
- Ta cũng xét các vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau (chẳng hạn $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \overrightarrow{MM}$), gọi là các **vectơ-không**.
- Ta quy ước vectơ-không có độ dài bằng 0, cùng hướng (do đó cùng phương) với mọi vectơ.
- Các vectơ-không có cùng độ dài và cùng hướng nên bằng nhau và được kí hiệu chung là $\vec{0}$.
- Với mỗi điểm O và vectơ $\vec{a}$ cho trước, có duy nhất điểm A sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ (H.4.8).



Hình 4.8

Ví dụ 2

Cho hình chữ nhật $ABCD$. Hãy chỉ ra mối quan hệ về độ dài, phương, hướng giữa các cặp vectơ: $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$. Những cặp vectơ nào trong các cặp vectơ trên là bằng nhau?

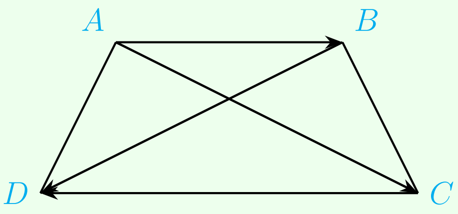


Lời giải.

- Hai vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$ có cùng độ dài và cùng hướng.
  Do đó, hai vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$ bằng nhau.
- Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ có cùng độ dài và ngược hướng.
  Do đó, hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ không bằng nhau.
- Hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$ có cùng độ dài nhưng không cùng phương nên không cùng hướng. Do đó, hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$ không bằng nhau.

Vậy trong các cặp vectơ đang xét, chỉ có cặp vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$ là bằng nhau ($\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$).

2 Cho hình thang cân $ABCD$ với hai đáy $AB, CD, AB < CD$ (H.4.10). Hãy chỉ ra mối quan hệ về độ dài, phương, hướng giữa các cặp vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$. Có cặp vectơ nào trong các cặp vectơ trên bằng nhau hay không?



Hình 4.10

....

....

....

....

....

NHẬN XÉT. Ba điểm A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương.

Ví dụ 3

Chứng minh rằng ba điểm A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương.

Lời giải.

- Giả sử ba điểm A, B, C thẳng hàng. Khi đó, chúng cùng thuộc một đường thẳng d. Vậy hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ có cùng giá là d. Suy ra chúng cùng phương.
- Giả sử hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương. Khi đó, chúng có cùng giá hoặc có hai giá song song với nhau. Mặt khác, giá của các vectơ trên đều đi qua A nên chúng trùng nhau. Vậy A, B, C thẳng hàng.

3 Trong các điều kiện dưới đây, chọn điều kiện cần và đủ để một điểm M nằm giữa hai điểm phân biệt A và B.

a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ ngược hướng. b) $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$ cùng phương.

c) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng hướng. d) $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$ ngược hướng.

....

....

....

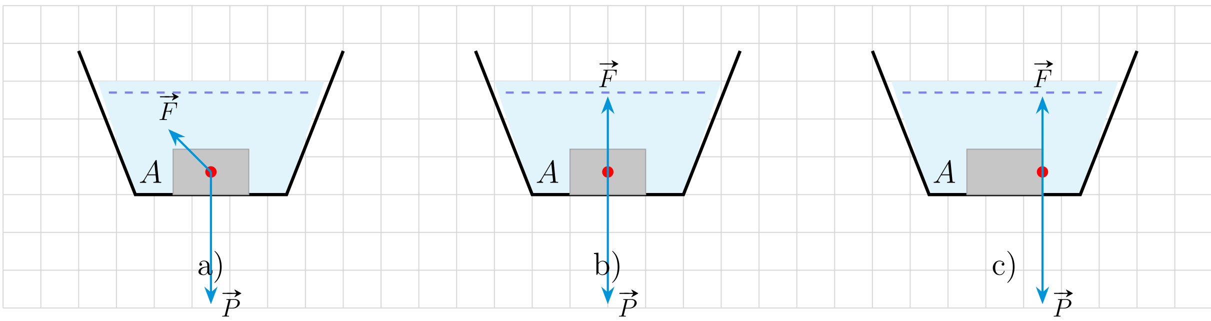
....

....

Ta có thể dùng vectơ để biểu diễn các đại lượng như lực, vận tốc, gia tốc. Hướng của vectơ chỉ hướng của đại lượng, độ dài của vectơ thể hiện cho độ lớn của đại lượng và được lấy tỉ lệ với độ lớn của đại lượng.

Ví dụ 4

Một vật A được thả chìm hoàn toàn dưới đáy một cốc chất lỏng. Biết rằng trong ba cách biểu diễn lực đẩy Archimedes (Ác-si-mét) $\overrightarrow{F}$ và trọng lực $\overrightarrow{P}$ tác động lên vật A ở Hình 4.11, có một cách biểu diễn đúng.



Hãy chỉ ra mối quan hệ giữa trọng lượng riêng của vật A và trọng lượng riêng của chất lỏng trong cốc.

Lời giải. Lực đẩy Archimedes và trọng lực đều tác động lên vật A theo phương thẳng đứng, hai lực này cùng phương nhưng ngược hướng. Do đó, Hình 4.11a không đúng. Vật A chìm xuống đáy nên trọng lực P (có hướng từ trên xuống) lớn hơn lực đẩy Archimedes F (có hướng từ dưới lên). Do vậy, Hình 4.11c không đúng.

Vậy hình biểu diễn đúng là Hình 4.11b. Theo đó, vectơ biểu diễn lực $\overrightarrow{P}$ có độ dài gấp 3 lần độ dài của vectơ biểu diễn lực $\overrightarrow{F}$.

Độ lớn của trọng lực và lực đẩy Archimedes tác động lên A là: $|\overrightarrow{P}| = d' \cdot V, |\overrightarrow{F}| = d \cdot V$, trong đó V (m^3) là thể tích của vật A và d', d ($\mathrm{N/m}^3$) tương ứng là trọng lượng riêng của vật A và của chất lỏng. Do $|\overrightarrow{P}| = 3|\overrightarrow{F}|$ (theo H.4.11b) nên $d' = 3d$. Vậy trọng lượng riêng của vật A gấp 3 lần trọng lượng riêng của chất lỏng trong cốc.

④ Hai ca nô A và B chạy trên sông với các vận tốc riêng có cùng độ lớn là 15 km/h. Tuy vậy, ca nô A chạy xuôi dòng còn ca nô B chạy ngược dòng. Vận tốc của dòng nước trên sông là 3 km/h.
a) Hãy thể hiện trên hình vẽ, vectơ vận tốc $\vec{v}$ của dòng nước và các vectơ vận tốc thực tế $\vec{v}_a$, $\vec{v}_b$ của các ca nô A, B.
b) Trong các vectơ $\vec{v}$, $\vec{v}_a$, $\vec{v}_b$, những cặp vectơ nào cùng phương và những cặp vectơ nào ngược hướng?

....

....

....

....

....

III. BÀI TẬP ÔN LUYỆN

1) Bài tập tự luận

Bài 1. Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đều khác $\vec{0}$. Những khẳng định nào sau đây là đúng?

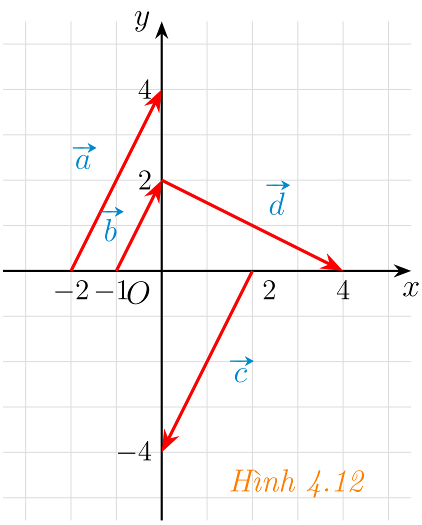
a) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đều cùng hướng với $\vec{0}$;

b) Nếu $\vec{b}$ không cùng hướng với $\vec{a}$ thì $\vec{b}$ ngược hướng với $\vec{a}$;

c) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều cùng phương với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương;

d) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều cùng hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

Bài 2. Trong Hình 4.12, hãy chỉ ra các vectơ cùng phương, các cặp vectơ ngược hướng và các cặp vectơ bằng nhau.



Hình 4.12

Bài 3. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là một hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

Bài 4. Cho hình vuông $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O. Hãy chỉ ra tập hợp S gồm tất cả các vectơ khác $\vec{0}$, có điểm đầu và điểm cuối thuộc tập hợp $\{A; B; C; D; O\}$. Hãy chia tập S thành các nhóm sao cho hai vectơ thuộc cùng một nhóm khi và chỉ khi chúng bằng nhau.

Bài 5. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy vẽ các vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MN}$ với $A(1;2), M(0;-1), N(3;5)$.

a) Chỉ ra mối quan hệ giữa hai vectơ trên.

b) Một vật thể khởi hành từ M và chuyển động thẳng đều với vận tốc (tính theo giờ) được biểu diễn bởi vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$. Hỏi vật thể đó có đi qua N hay không? Nếu có thì sau bao lâu vật sẽ tới N?

Bài 6. Cho tam giác ABC. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}$.

Bài 7. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E là điểm đối xứng C qua D. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BD}$.

Bài 8. Cho ΔABC có M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, BC. Tìm điểm I sao cho $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MI}$.

Bài 9. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, DC. AN và CM lần lượt cắt BD tại E, F. Chứng minh rằng $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FB}$.

2) Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho tứ giác $ABCD$. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ - không có điểm đầu và cuối là các đỉnh của tứ giác?

Ⓐ 4. Ⓑ 6. Ⓒ 8. Ⓓ 12.

Câu 2. Cho 5 điểm A, B, C, D, E có bao nhiêu vectơ khác vectơ-không có điểm đầu là A và điểm cuối là một trong các điểm đã cho?

Ⓐ 4. Ⓑ 20. Ⓒ 10. Ⓓ 12.

Câu 3. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Hãy tìm các vectơ khác vectơ-không có điểm đầu, điểm cuối là đỉnh của lục giác và tâm O sao cho bằng với $\overrightarrow{AB}$?

Ⓐ $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{FD}$.
Ⓑ $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{ED}$.
Ⓒ $\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{ED}$.
Ⓓ $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{ED}$.

Câu 4. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Số các vectơ khác vectơ - không, cùng phương với $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

Ⓐ 4. Ⓑ 6. Ⓒ 7. Ⓓ 9.

Câu 5. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA. Xác định các vectơ cùng phương với $\overrightarrow{MN}$.

Ⓐ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CP}$.
Ⓑ $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{AP}$.
Ⓒ $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CP}$.
Ⓓ $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{PN}, \overrightarrow{CP}$.

Câu 6. Cho hai vectơ khác vectơ - không, không cùng phương. Có bao nhiêu vectơ khác $\vec{0}$ cùng phương với cả hai vectơ đó?

Ⓐ 2. Ⓑ 1. Ⓒ không có. Ⓓ vô số.

Câu 7. Cho tứ giác $ABCD$ có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Mệnh đề nào trong các mệnh đề sau là **sai**?

Ⓐ Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

Ⓑ $DA = BC$.
Ⓒ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Câu 8. Cho tam giác ABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC. Hỏi cặp vectơ nào sau đây cùng hướng?

Ⓐ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{MB}$.
Ⓑ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{CB}$.
Ⓒ $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{CA}$.

Câu 9. Cho tứ giác $ABCD$. Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$?

Ⓐ $ABCD$ là vuông .
Ⓑ $ABDC$ là hình bình hành .
Ⓒ AD và BC có cùng trung điểm .
Ⓓ $AB = CD$.

Câu 10. Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD của hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức **sai**?

Ⓐ $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$.
Ⓓ $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$.

Câu 11. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây:

Ⓐ $\vec{0}$ cùng hướng với mọi vectơ .
Ⓑ $\vec{0}$ cùng phương với mọi vectơ .
Ⓒ $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.
Ⓓ $|\overrightarrow{AB}| > 0$.

Câu 12. Cho hình chữ nhật $ABCD$, có $AB = 4$ và $AC = 5$. Tìm độ dài vectơ $\overrightarrow{BC}$.

Ⓐ 3.
Ⓑ $\sqrt{41}$.
Ⓒ 9.
Ⓓ ± 3 .

Câu 13. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = 3, BC = 4$. Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{CA}$.

Ⓐ $|\overrightarrow{CA}| = 5$.
Ⓑ $|\overrightarrow{CA}| = 25$.
Ⓒ $|\overrightarrow{CA}| = 7$.
Ⓓ $|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{7}$.

Câu 14. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng 1. Gọi H là trung điểm BC. Tính $|\overrightarrow{AH}|$.

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Ⓑ 1.
Ⓒ 2.
Ⓓ $\sqrt{3}$.

Câu 15. Cho tam giác ABC đều cạnh $2a$. Gọi M là trung điểm BC. Khi đó $|\overrightarrow{AM}|$ bằng:

Ⓐ $2a$.
Ⓑ $2a\sqrt{3}$.
Ⓒ $4a$.
Ⓓ $a\sqrt{3}$.

Câu 16. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, tâm O. Tính $|\overrightarrow{OD}|$.

Ⓐ $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.
Ⓑ $(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2})a$.
Ⓒ a .
Ⓓ $\dfrac{a^2}{2}$.

Câu 17. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

Ⓐ Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba khác $\vec{0}$ thì cùng phương .
Ⓑ Hai vectơ ngược hướng với một vectơ thứ ba thì cùng hướng .
Ⓒ Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba thì cùng phương .
Ⓓ Hai vectơ cùng hướng với một vectơ thứ ba thì cùng hướng .

Câu 18. Cho 3 điểm A, B, C không thẳng hàng. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ không, có điểm đầu và điểm cuối là A, B hoặc C?

Ⓐ 3. Ⓑ 5. Ⓒ 6. Ⓓ 9.

Câu 19. Vectơ có điểm đầu là A, điểm cuối là B được kí hiệu là:

Ⓐ AB . Ⓑ $\overrightarrow{AB}$. Ⓒ $|\overrightarrow{AB}|$. Ⓓ $\overrightarrow{BA}$.

Câu 20. Cho tam giác ABC. Có thể xác định bao nhiêu vectơ (khác vectơ không) có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh A, B, C?

Ⓐ 3. Ⓑ 6. Ⓒ 4. Ⓓ 2.

Câu 21. Từ hai điểm phân biệt A, B xác định được bao nhiêu vectơ khác $\vec{0}$?

Ⓐ 3. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 4.

Câu 22. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

Ⓐ Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau nếu $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$.
Ⓑ Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng phương và cùng độ dài.
Ⓒ Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng độ dài.
Ⓓ Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.

Câu 23. Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt. Số véctơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ các điểm A, B, C, D là

Ⓐ 10. Ⓑ 14. Ⓒ 8. Ⓓ 12.

Câu 24. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ Hai véc tơ gọi là đối nhau nếu chúng có cùng độ dài.
Ⓑ Hai véc tơ gọi là đối nhau nếu chúng ngược hướng và có cùng độ dài.
Ⓒ Hai véc tơ gọi là đối nhau nếu chúng ngược hướng.
Ⓓ Hai véc tơ gọi là đối nhau nếu chúng cùng phương và cùng độ dài.

Câu 25. Phát biểu nào sau đây đúng?

Ⓐ Hai vectơ bằng nhau thì có giá trùng nhau hoặc song song.
Ⓑ Hai vectơ có độ dài không bằng nhau thì không cùng hướng.
Ⓒ Hai vectơ không bằng nhau thì chúng không cùng hướng.
Ⓓ Hai vectơ không bằng nhau thì độ dài của chúng không bằng nhau.

Câu 26. Hai vectơ có cùng độ dài và ngược hướng gọi là

Ⓐ Hai vectơ cùng hướng. Ⓑ Hai vectơ cùng phương.
Ⓒ Hai vectơ đối nhau. Ⓓ Hai vectơ bằng nhau.

Câu 27. Phát biểu nào sau đây **sai**?

Ⓐ Hai vectơ cùng hướng thì cùng phương.
Ⓑ Độ dài của véc tơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của véc tơ đó.
Ⓒ Hai véc tơ cùng phương thì cùng hướng.
Ⓓ Véc tơ là đoạn thẳng có hướng.

Câu 28. Cho 3 điểm M, N, P thẳng hàng trong đó N nằm giữa M và P. khi đó các cặp véc tơ nào sau đây cùng hướng?

Ⓐ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$.
Ⓑ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$.
Ⓒ $\overrightarrow{NM}$ và $\overrightarrow{NP}$.
Ⓓ $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{PN}$.

Câu 29. Cho ba điểm M, N, P thẳng hàng, trong đó điểm N nằm giữa hai điểm M và P. Khi đó các cặp vectơ nào sau đây cùng hướng?

Ⓐ $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{PN}$.
Ⓑ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$.
Ⓒ $\overrightarrow{NM}$ và $\overrightarrow{NP}$.
Ⓓ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$.

Câu 30. Cho tam giác ABC. Gọi M, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC và N là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BP}$. Chọn khẳng định đúng.

Ⓐ N là trung điểm của cạnh MC.
Ⓑ N là trung điểm của cạnh BP.
Ⓒ N là trung điểm của cạnh AC.
Ⓓ N là trung điểm của cạnh PC.

Câu 31. Cho tam giác ABC và D là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABDC$.
Ⓑ D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCD$.
Ⓒ D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ADBC$.
Ⓓ D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ACBD$.

Câu 32. Cho lục giác đều $ABCDEF$ và O là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FO}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

Ⓐ O là tâm của lục giác $ABCDEF$.
Ⓑ O là trung điểm của đoạn FC.
Ⓒ $EDCO$ là hình bình hành.
Ⓓ O là trung điểm của đoạn ED.

Câu 33. Cho bốn điểm A, B, C, D thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và các mệnh đề.
(I) $ABCD$ là hình bình hành.
(II) D nằm giữa B và C.
(III) C nằm trên đường thẳng đi qua điểm D và song song hoặc trùng với đường thẳng AB.
(IV) Bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng.
Số mệnh đề đúng?

Ⓐ 1.
Ⓑ 2.
Ⓒ 3.
Ⓓ 4.

Câu 34. Cho hình thang $ABCD$ với đáy $AB = 2CD$. Gọi N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CD, DA và M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{MB}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

Ⓐ M là trung điểm của PN.
Ⓑ M là trung điểm của AN.
Ⓒ M là trung điểm của AB.
Ⓓ M là trung điểm của QN.

Câu 35. Cho tam giác ABC. Để điểm M thoả mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ thì M phải thỏa mãn mệnh đề nào?

Ⓐ M là điểm sao cho tứ giác $ABMC$ là hình bình hành.
Ⓑ M là trọng tâm tam giác ABC.
Ⓒ M là điểm sao cho tứ giác $BAMC$ là hình bình hành.
Ⓓ M thuộc trung trực của AB.

Câu 36. Cho hình bình hành $ABCD$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}$ là?

Ⓐ tập rỗng..
Ⓑ một đoạn thẳng..
Ⓒ một đường tròn..
Ⓓ một đường thẳng..

Câu 37. Cho tam giác ABC. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}|=|\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BA}|$ là?

Ⓐ trung trực đoạn BC.
Ⓑ đường tròn tâm A, bán kính BC.
Ⓒ đường thẳng qua A và song song với BC.
Ⓓ đường thẳng AB.

BẢNG ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á
1	D	2	A	3	D	4	B	5	C
6	C	7	C	8	A	9	B	10	C
11	D	12	A	13	A	14	A	15	D
16	A	17	A	18	C	19	B	20	B
21	C	22	D	23	D	24	B	25	A
26	C	27	C	28	A	29	D	30	C
31	A	32	D	33	A	34	C	35	C
36	A	37	B						

IV. LỜI GIẢI CHI TIẾT

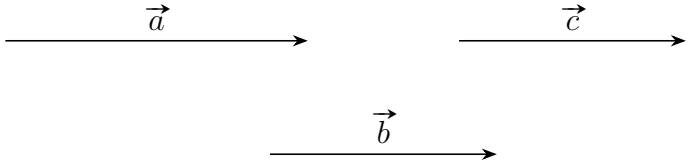
1) Bài tập tự luận

Bài 1. Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đều khác $\vec{0}$. Những khẳng định nào sau đây là đúng?

a) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đều cùng hướng với $\vec{0}$;
b) Nếu $\vec{b}$ không cùng hướng với $\vec{a}$ thì $\vec{b}$ ngược hướng với $\vec{a}$;
c) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều cùng phương với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương;
d) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều cùng hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

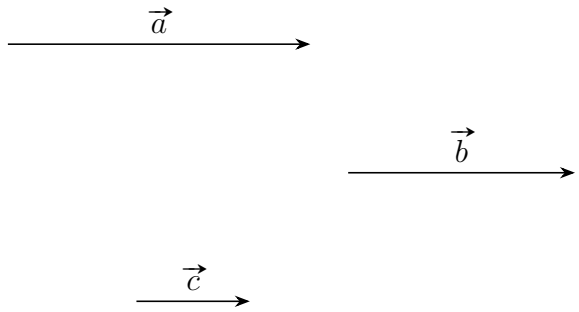
Hướng dẫn giải.

+ Mọi vectơ đều cùng phương, cùng hướng với vectơ $\vec{0}$. Do đó a) đúng.
+ Nếu $\vec{b}$ không cùng hướng với $\vec{a}$ thì hoặc $\vec{b}$ ngược hướng với $\vec{a}$ hoặc $\vec{b}$ không cùng phương với $\vec{a}$, bởi vậy chưa thể kết luận được $\vec{b}$ ngược hướng với $\vec{a}$. Do đó b) sai.
+ Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều cùng phương với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có giá song song hoặc trùng với giá của $\vec{c}$:



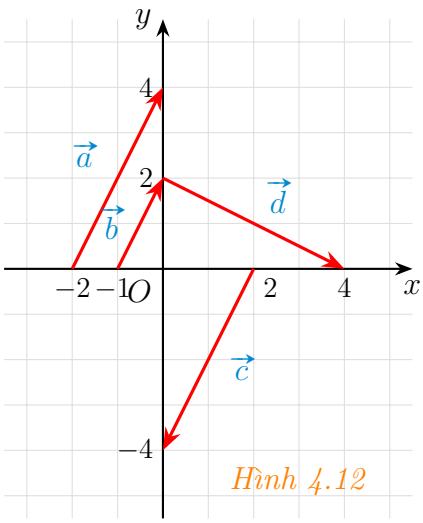
Suy ra $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có giá song song hoặc trùng nhau. Do đó $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương. Suy ra c) đúng.

◈ + Nếu $\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{c}$ thì giá của $\vec{a}$ và $\vec{c}$ song song hoặc trùng nhau, hướng từ gốc đến ngọn của $\vec{a}$ trùng với hướng từ gốc đến ngọn của $\vec{c}$; nếu $\vec{b}$ cùng hướng với $\vec{c}$ thì giá của $\vec{b}$ và $\vec{c}$ song song hoặc trùng nhau, hướng từ gốc đến ngọn của $\vec{b}$ trùng với hướng từ gốc đến ngọn của $\vec{c}$. Từ đó suy ra giá của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ song song hoặc trùng nhau, hướng từ gốc đến ngọn của $\vec{a}$ trùng với hướng từ gốc đến ngọn của $\vec{b}$. Do đó, $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng với nhau. Vậy khẳng định d) là đúng.



Theo quan sát hình vẽ, ta thấy $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng với nhau. Do đó d) đúng.

Bài 2. Trong Hình 4.12, hãy chỉ ra các vectơ cùng phương, các cặp vectơ ngược hướng và các cặp vectơ bằng nhau.



Hình 4.12

Hướng dẫn giải. Quan sát hình vẽ, ta có: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ có giá song song với nhau, $\vec{a}$, $\vec{d}$, $\vec{c}$ có cùng độ dài (cạnh huyền của các tam giác vuông có độ dài hai cạnh góc vuông lần lượt là 2 và 4).

Do đó ta có:

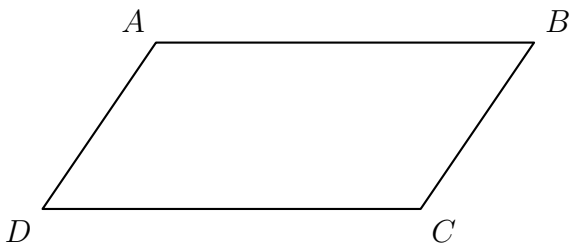
+ Các cặp vectơ cùng phương là: $\vec{a}$ và $\vec{b}$, $\vec{a}$ và $\vec{c}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$.

+ Các cặp vectơ ngược hướng: $\vec{a}$ và $\vec{b}$; $\vec{b}$ và $\vec{c}$.

+ Cặp vectơ bằng nhau là: $\vec{a}$ và $\vec{c}$ (do chúng cùng hướng và có độ dài bằng nhau).

Bài 3. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ là một hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

✍ *Hướng dẫn giải.*



+) Giả sử tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.

$\Rightarrow AD // BC$ (tính chất hình bình hành)

$\Rightarrow \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương $\Rightarrow \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng.

Mà $AD = BC$ (tính chất hình bình hành) hay $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|$. Do đó, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

+) Giả sử tứ giác $ABCD$ có $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ suy ra $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{AD}$ cùng phương, cùng hướng và cùng độ dài.

$\Rightarrow BC = AD$ (1) và AD, BC song song hoặc trùng nhau.

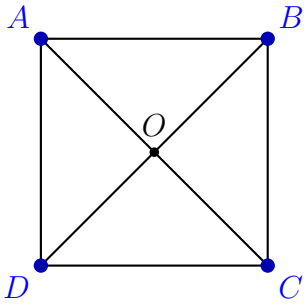
Nếu hai đường thẳng AD, BC trùng nhau thì bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường thẳng, điều này không xảy ra vì $ABCD$ là tứ giác. Vậy $AD // BC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $ABCD$ là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết).

Vậy tứ giác $ABCD$ là một hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

Bài 4. Cho hình vuông $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O. Hãy chỉ ra tập hợp S gồm tất cả các vectơ khác $\vec{0}$, có điểm đầu và điểm cuối thuộc tập hợp $\{A; B; C; D; O\}$. Hãy chia tập S thành các nhóm sao cho hai vectơ thuộc cùng một nhóm khi và chỉ khi chúng bằng nhau.

✍ *Hướng dẫn giải.*



Các vectơ khác $\vec{0}$, có điểm đầu và điểm cuối thuộc tập hợp $\{A; B; C; D; O\}$ là:

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CO},$

$\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DO}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD}$

Khi đó:

$S = \left\{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AO}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BO}; \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD}; \overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CO}; \overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD}; \overrightarrow{DA}; \overrightarrow{DO}; \overrightarrow{DB}; \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC}; \overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OD}\right\}$

Các cặp vectơ bằng nhau trong tập hợp S là:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}; \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC};$

$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}; \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB};$

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO}; \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC};$

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO}; \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB};$

Khi đó tập S được chia thành các nhóm là:

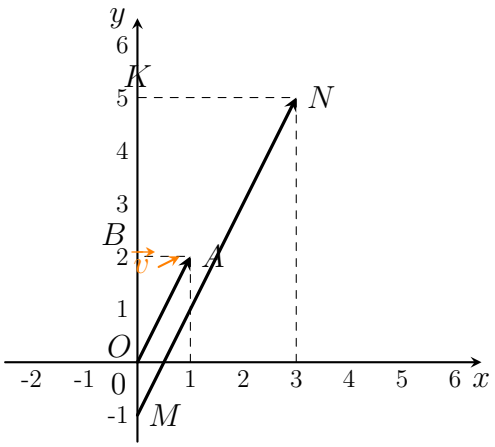
- Nhóm 1: $\left\{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{DC}\right\}$;
- Nhóm 2: $\left\{\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{BC}\right\}$;
- Nhóm 3: $\left\{\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{CD}\right\}$;
- Nhóm 4: $\left\{\overrightarrow{DA}; \overrightarrow{CB}\right\}$;
- Nhóm 5: $\left\{\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{CO}\right\}$;
- Nhóm 6: $\left\{\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{OC}\right\}$;
- Nhóm 7: $\left\{\overrightarrow{OD}; \overrightarrow{BO}\right\}$;
- Nhóm 8: $\left\{\overrightarrow{DO}; \overrightarrow{OB}\right\}$.

Bài 5. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy vẽ các vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MN}$ với $A(1;2), M(0;-1), N(3;5)$.

a) Chỉ ra mối quan hệ giữa hai vectơ trên.

b) Một vật thể khởi hành từ M và chuyển động thẳng đều với vận tốc (tính theo giờ) được biểu diễn bởi vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$. Hỏi vật thể đó có đi qua N hay không? Nếu có thì sau bao lâu vật sẽ tới N?

Hướng dẫn giải.



a) Dựng các điểm $B(0;2)$ và $K(0;5)$.

Khi đó $OB = 2, BA = 1, MK = 6, KN = 3$.

Suy ra hai tam giác OAB và MNK là các tam giác vuông đồng dạng.

Do đó $\widehat{BOA} = \widehat{KMN}$.

Suy ra $OA // MN$ và $\dfrac{MN}{OA} = \dfrac{KN}{BA} = \dfrac{MK}{OB} = 3$.

Như vậy, hai vectơ $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{MN}$ là hai vectơ cùng hướng và vectơ $\overrightarrow{MN}$ có độ dài gấp 3 lần độ dài của vectơ $\overrightarrow{OA}$.

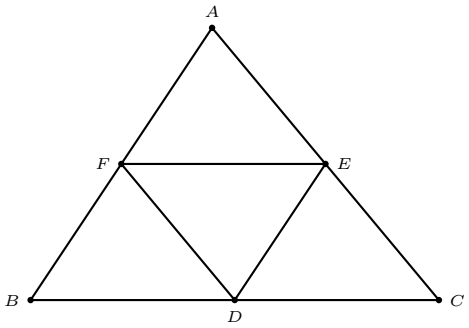
b) Vì $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{MN}$ là hai vectơ cùng hướng nên khi vật thể khởi hành từ M và chuyển động thẳng đều với vận tốc (tính theo giờ) được biểu diễn bởi $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$ thì vật thể đó sẽ đi qua điểm N.

Hơn nữa, sau mỗi giờ vật đó đi được quãng đường bằng OA và $|\overrightarrow{MN}| = 3|\overrightarrow{OA}|$.

Vậy nếu coi độ lớn của OA là một đơn vị giờ thì sau khi khởi hành 3 giờ vật sẽ tới N.

Bài 6. Cho tam giác ABC. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}$.

Hướng dẫn giải.



Cách 1: Vì EF là đường trung bình của tam giác ABC nên $EF // CD$ nên

$EF = \frac{1}{2}CB \Rightarrow EF = CD \Rightarrow |\overrightarrow{EF}| = |\overrightarrow{CD}|$ (1).

Mặt khác: $\overrightarrow{EF}$ cùng hướng $\overrightarrow{CD}$ (2).

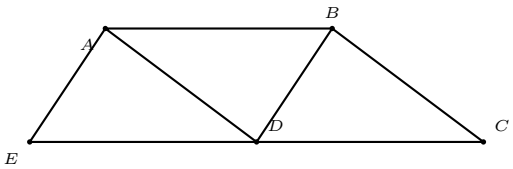
Từ (1) và (2) ta có: $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}$.

Cách 2: Chứng minh $EFCD$ là hình bình hành.

Dễ chứng minh được $EF = \frac{1}{2}BC = CD$ và $EF // CD \Rightarrow EFCD$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}$.

Bài 7. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E là điểm đối xứng C qua D. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BD}$.

Hướng dẫn giải.



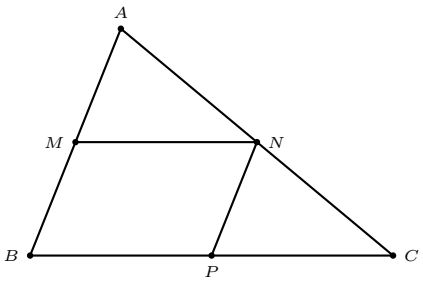
Vì $ABCD$ là hình bình hành nên ta có: $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ (1).

Ta có: E là điểm đối xứng C qua D nên D là trung điểm của $CE \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DE}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có: $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DE} \Leftrightarrow ABDE$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BD}$.

Bài 8. Cho ΔABC có M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, BC. Tìm điểm I sao cho $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MI}$.

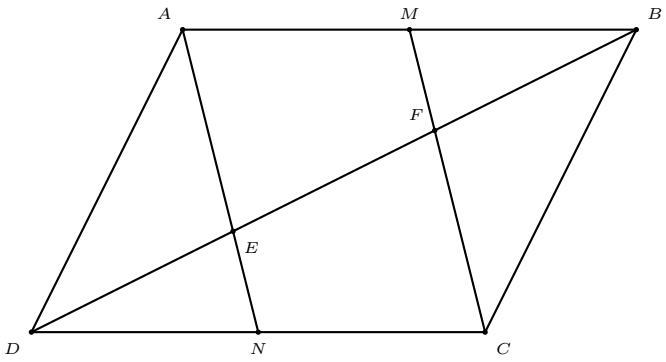
Hướng dẫn giải.



Vì $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MI}$ mà $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MB}$ nên $I \equiv B$.

Bài 9. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, DC. AN và CM lần lượt cắt BD tại E, F. Chứng minh rằng $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FB}$.

Hướng dẫn giải.



Ta có: $\begin{cases} AM = CN \\ AM // CN \end{cases} \Leftrightarrow AMCN$ là hình bình hành.

Theo gt ta có: N là trung điểm DC và $NE // CF \Rightarrow NE$ là đường trung bình của ΔDFC

$\Rightarrow E$ là trung điểm của $DF \Rightarrow \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EF}$ (1).

Tương tự ta cũng có: F là trung điểm của BE nên $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FB}$ (2).

Từ (1) và (2) ta có: $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FB}$.

2) Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho tứ giác $ABCD$. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ - không có điểm đầu và cuối là các đỉnh của tứ giác?

Ⓐ 4. Ⓑ 6. Ⓒ 8. Ⓓ 12.

Hướng dẫn giải. **Chọn D**

Xét các vectơ có điểm A là điểm đầu thì có các vectơ thỏa mãn Câu toán là $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \longrightarrow$ có 3 vectơ.

Tương tự cho các điểm còn lại B, C, D.

Câu 2. Cho 5 điểm A, B, C, D, E có bao nhiêu vectơ khác vectơ-không có điểm đầu là A và điểm cuối là một trong các điểm đã cho?

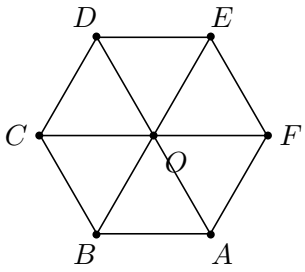
Ⓐ 4. Ⓑ 20. Ⓒ 10. Ⓓ 12.

Hướng dẫn giải. **Chọn A**

Câu 3. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Hãy tìm các vectơ khác vectơ-không có điểm đầu, điểm cuối là đỉnh của lục giác và tâm O sao cho bằng với $\overrightarrow{AB}$?

Ⓐ $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{FD}$.
Ⓑ $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{ED}$.
Ⓒ $\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{ED}$.
Ⓓ $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{ED}$.

Hướng dẫn giải.

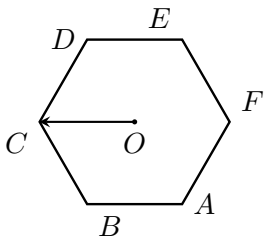


Chọn D

Câu 4. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Số các vectơ khác vectơ - không, cùng phương với $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

Ⓐ 4. Ⓑ 6. Ⓒ 7. Ⓓ 9.

Hướng dẫn giải.



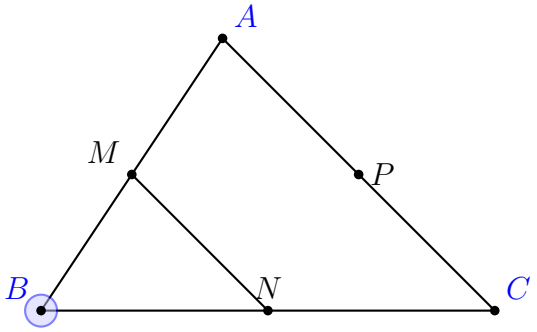
Chọn B

Đó là các vectơ: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{CF}$.

Câu 5. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA. Xác định các vectơ cùng phương với $\overrightarrow{MN}$.

Ⓐ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CP}$.
Ⓑ $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{AP}$.
Ⓒ $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CP}$.
Ⓓ $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{PN}, \overrightarrow{CP}$.

Hướng dẫn giải.



Chọn C

Câu 6. Cho hai vectơ khác vectơ - không, không cùng phương. Có bao nhiêu vectơ khác $\vec{0}$ cùng phương với cả hai vectơ đó?

Ⓐ 2. Ⓑ 1. Ⓒ không có. Ⓓ vô số.

Hướng dẫn giải.

Giả sử tồn tại một vec-tơ $\vec{c}$ cùng phương với cả hai vec-tơ $\vec{a}$, $\vec{b}$. Lúc đó tồn tại các số thực h và k sao cho $\vec{c} = h\vec{a}$ và $\vec{c} = k\vec{b}$. Từ đó suy ra $h\vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \dfrac{k}{h}\vec{b}$.

Suy ra hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương. (mâu thuẫn). → **Chọn C**

Câu 7. Cho tứ giác $ABCD$ có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Mệnh đề nào trong các mệnh đề sau là **sai**?

Ⓐ Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
Ⓑ $DA = BC$.
Ⓒ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

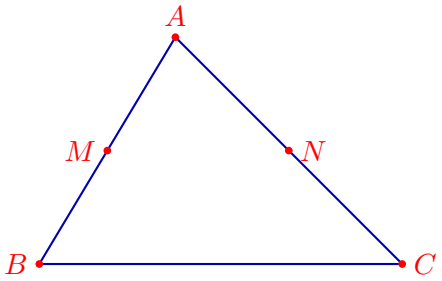
Hướng dẫn giải. **Chọn C**

$\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$ là hai đường chéo của tứ giác $ABCD$ nên hai vectơ $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ không cùng phương vì vậy không thể bằng nhau.

Câu 8. Cho tam giác ABC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC. Hỏi cặp vectơ nào sau đây cùng hướng?

Ⓐ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{MB}$.
Ⓑ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{CB}$.
Ⓒ $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{CA}$.

Hướng dẫn giải. **Chọn A**



Câu 9. Cho tứ giác $ABCD$. Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$?

Ⓐ $ABCD$ là vuông .
Ⓑ $ABDC$ là hình bình hành .
Ⓒ AD và BC có cùng trung điểm .
Ⓓ $AB = CD$.

Hướng dẫn giải. **Chọn B**

Ta có:

◈ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \begin{cases} AB // CD \\ AB = CD \end{cases} \Rightarrow ABDC$ là hình bình hành.

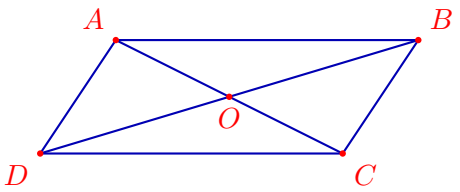
◈ Mặt khác, $ABDC$ là hình bình hành $\Rightarrow \begin{cases} AB // CD \\ AB = CD \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Do đó, điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ là $ABDC$ là hình bình hành.

Câu 10. Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD của hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức **sai**?

Ⓐ $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DO}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$.
Ⓓ $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$.

Hướng dẫn giải. **Chọn C**



$\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OC}$ là hai vectơ đối nhau.

Câu 11. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau đây:

Ⓐ $\vec{0}$ cùng hướng với mọi vectơ.
Ⓑ $\vec{0}$ cùng phương với mọi vectơ.
Ⓒ $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.
Ⓓ $|\overrightarrow{AB}|>0$.

Hướng dẫn giải. **Chọn D**

Mệnh đề $|\overrightarrow{AB}|>0$ là mệnh đề **sai**, vì khi $A\equiv B$ thì $|\overrightarrow{AB}|=0$.

Câu 12. Cho hình chữ nhật $ABCD$, có $AB=4$ và $AC=5$. Tìm độ dài vectơ $\overrightarrow{BC}$.

Ⓐ 3.
Ⓑ $\sqrt{41}$.
Ⓒ 9.
Ⓓ ± 3.

Hướng dẫn giải. **Chọn A**



$|\overrightarrow{BC}|=BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$.

Câu 13. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=3, BC=4$. Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{CA}$.

Ⓐ $|\overrightarrow{CA}|=5$.
Ⓑ $|\overrightarrow{CA}|=25$.
Ⓒ $|\overrightarrow{CA}|=7$.
Ⓓ $|\overrightarrow{CA}|=\sqrt{7}$.

Hướng dẫn giải. **Chọn A**

$|\overrightarrow{CA}|=CA=\sqrt{AB^2+BC^2}=5$.

Câu 14. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng 1. Gọi H là trung điểm BC. Tính $|\overrightarrow{AH}|$.

Ⓐ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Ⓑ 1.
Ⓒ 2.
Ⓓ $\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải. **Chọn A**

$|\overrightarrow{AH}|=AH=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 15. Cho tam giác ABC đều cạnh $2a$. Gọi M là trung điểm BC. Khi đó $|\overrightarrow{AM}|$ bằng:

Ⓐ $2a$. Ⓑ $2a\sqrt{3}$. Ⓒ $4a$. Ⓓ $a\sqrt{3}$.

Hướng dẫn giải. **Chọn D**

Ta có $|\overrightarrow{AM}| = AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

Câu 16. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, tâm O. Tính $|\overrightarrow{OD}|$.

Ⓐ $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Ⓑ $(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2})a$.

Ⓒ a . Ⓓ $\dfrac{a^2}{2}$.

Hướng dẫn giải. **Chọn A**

Ta có $|\overrightarrow{OD}| = OD = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 17. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

Ⓐ Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba khác $\vec{0}$ thì cùng phương .
Ⓑ Hai vectơ ngược hướng với một vectơ thứ ba thì cùng hướng .
Ⓒ Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba thì cùng phương .
Ⓓ Hai vectơ cùng hướng với một vectơ thứ ba thì cùng hướng .

Hướng dẫn giải. **Chọn A**

Câu 18. Cho 3 điểm A, B, C không thẳng hàng. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ không, có điểm đầu và điểm cuối là A, B hoặc C?

Ⓐ 3. Ⓑ 5. Ⓒ 6. Ⓓ 9.

Hướng dẫn giải. **Chọn C**

Các vectơ thỏa đề gồm $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$.

Câu 19. Vectơ có điểm đầu là A, điểm cuối là B được kí hiệu là:

Ⓐ AB . Ⓑ $\overrightarrow{AB}$. Ⓒ $|\overrightarrow{AB}|$. Ⓓ $\overrightarrow{BA}$.

Hướng dẫn giải. **Chọn B**

Câu 20. Cho tam giác ABC. Có thể xác định bao nhiêu vectơ (khác vectơ không) có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh A, B, C?

Ⓐ 3. Ⓑ 6. Ⓒ 4. Ⓓ 2.

Hướng dẫn giải. **Chọn B**

Các véc tơ có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh A, B, C là: $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}; \overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA}$.

Vậy có tất cả 6 véc tơ.

Câu 21. Từ hai điểm phân biệt A, B xác định được bao nhiêu vectơ khác $\vec{0}$?

Ⓐ 3. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 4.

Hướng dẫn giải. **Chọn C**

Câu 22. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

Ⓐ Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau nếu $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$.
Ⓑ Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng phương và cùng độ dài.
Ⓒ Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng độ dài.
Ⓓ Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.

Hướng dẫn giải. **Chọn D**

Theo định nghĩa thì "Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài."

Câu 23. Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt. Số véctơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ các điểm A, B, C, D là

Ⓐ 10. Ⓑ 14. Ⓒ 8. Ⓓ 12.

Hướng dẫn giải. **Chọn D**

Chọn một điểm bất kì là điểm đầu, giả sử là A thì lập được 3 vectơ là $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

Tương tự với mỗi điểm đầu lần lượt là B, C, D thì cũng lập được 3 vectơ. Số véctơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ các điểm A, B, C, D là $4 \cdot 3 = 12$.

Câu 24. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ Hai véc tơ gọi là đối nhau nếu chúng có cùng độ dài.
Ⓑ Hai véc tơ gọi là đối nhau nếu chúng ngược hướng và có cùng độ dài.
Ⓒ Hai véc tơ gọi là đối nhau nếu chúng ngược hướng.
Ⓓ Hai véc tơ gọi là đối nhau nếu chúng cùng phương và cùng độ dài.

Hướng dẫn giải. **Chọn B**

Theo định nghĩa hai véc tơ đối nhau.

Câu 25. Phát biểu nào sau đây đúng?

Ⓐ Hai vectơ bằng nhau thì có giá trùng nhau hoặc song song.
Ⓑ Hai vectơ có độ dài không bằng nhau thì không cùng hướng.
Ⓒ Hai vectơ không bằng nhau thì chúng không cùng hướng.
Ⓓ Hai vectơ không bằng nhau thì độ dài của chúng không bằng nhau.

Hướng dẫn giải. **Chọn A**

Theo định nghĩa hai vectơ bằng nhau thì chúng cùng phương nên có giá trùng nhau hoặc song song.

Câu 26. Hai vectơ có cùng độ dài và ngược hướng gọi là

Ⓐ Hai vectơ cùng hướng. Ⓑ Hai vectơ cùng phương.
Ⓒ Hai vectơ đối nhau. Ⓓ Hai vectơ bằng nhau.

Hướng dẫn giải. **Chọn C**

Theo định nghĩa hai vectơ đối nhau.

Câu 27. Phát biểu nào sau đây **sai**?

Ⓐ Hai vectơ cùng hướng thì cùng phương.
Ⓑ Độ dài của véc tơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của véc tơ đó.
Ⓒ Hai véc tơ cùng phương thì cùng hướng.
Ⓓ Véc tơ là đoạn thẳng có hướng.

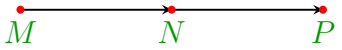
Hướng dẫn giải. **Chọn C**

Hai véc tơ cùng phương thì cùng hướng hoặc ngược hướng.

Câu 28. Cho 3 điểm M, N, P thẳng hàng trong đó N nằm giữa M và P. khi đó các cặp véc tơ nào sau đây cùng hướng?

(A) $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$.
(B) $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$.
(C) $\overrightarrow{NM}$ và $\overrightarrow{NP}$.
(D) $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{PN}$.

Hướng dẫn giải. **Chọn A**



Câu 29. Cho ba điểm M, N, P thẳng hàng, trong đó điểm N nằm giữa hai điểm M và P. Khi đó các cặp vectơ nào sau đây cùng hướng?

(A) $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{PN}$.
(B) $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$.
(C) $\overrightarrow{NM}$ và $\overrightarrow{NP}$.
(D) $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$.

Hướng dẫn giải. **Chọn D**

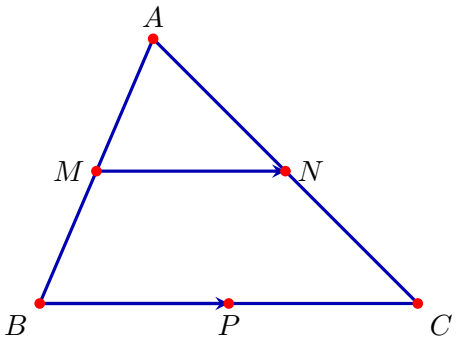


Cặp vectơ cùng hướng là $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$.

Câu 30. Cho tam giác ABC. Gọi M, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC và N là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BP}$. Chọn khẳng định đúng.

(A) N là trung điểm của cạnh MC.
(B) N là trung điểm của cạnh BP.
(C) N là trung điểm của cạnh AC.
(D) N là trung điểm của cạnh PC.

Hướng dẫn giải. **Chọn C**



Ta có M, B, P không thẳng hàng nên $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BP}$ thì $\begin{cases} MN = BP \\ MN // BP \end{cases}$.

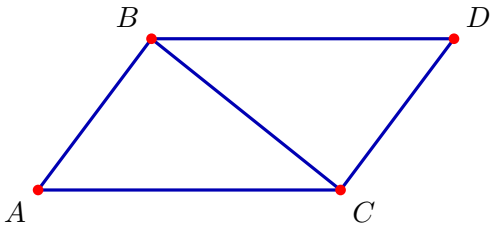
Mà $BP = \dfrac{1}{2}BC$, suy ra $\begin{cases} MN // BC \\ MN = \dfrac{1}{2}BC \end{cases}$ và $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BP}$ cùng hướng.

Vậy N là trung điểm của cạnh AC.

Câu 31. Cho tam giác ABC và D là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABDC$.
(B) D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCD$.
(C) D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ADBC$.
(D) D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ACBD$.

Hướng dẫn giải. **Chọn A**

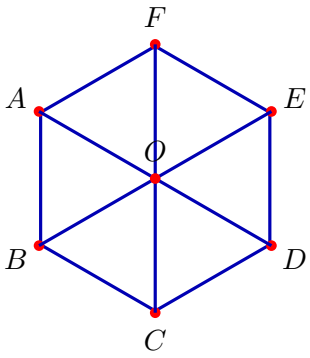


Từ đẳng thức vectơ ta suy ra D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABDC$.

Câu 32. Cho lục giác đều $ABCDEF$ và O là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FO}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

Ⓐ O là tâm của lục giác $ABCDEF$.
Ⓑ O là trung điểm của đoạn FC.
Ⓒ $EDCO$ là hình bình hành.
Ⓓ O là trung điểm của đoạn ED.

Hướng dẫn giải. **Chọn D**



Do $ABCDEF$ là lục giác đều và $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FO}$ nên O là trung điểm của đoạn ED là khẳng định sai.

Câu 33. Cho bốn điểm A,B,C,D thỏa mãn $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ và các mệnh đề.
(I) $ABCD$ là hình bình hành.
(II) D nằm giữa B và C.
(III) C nằm trên đường thẳng đi qua điểm D và song song hoặc trùng với đường thẳng AB.
(IV) Bốn điểm A,B,C,D thẳng hàng.
Số mệnh đề đúng?

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

Hướng dẫn giải. **Chọn A**

Ta có mệnh đề "$ABCD$ là hình bình hành" là sai khi ba điểm A,B,C thẳng hàng.

Mệnh đề "D nằm giữa B và C" là sai khi ba điểm A,B,C không thẳng hàng.

Mệnh đề "Bốn điểm A,B,C,D thẳng hàng" là sai khi ba điểm A,B,C không thẳng hàng.

Mệnh đề "C nằm trên đường thẳng đi qua điểm D và song song hoặc trùng với đường thẳng AB" là đúng theo định nghĩa hai vectơ bằng nhau.

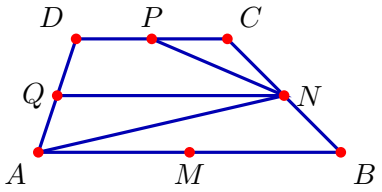
Vậy số mệnh đề đúng là 1.

Câu 34. Cho hình thang $ABCD$ với đáy $AB=2CD$. Gọi N,P,Q lần lượt là trung điểm các

cạnh BC, CD, DA và M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{MB}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

Ⓐ M là trung điểm của PN.
Ⓑ M là trung điểm của AN.
Ⓒ M là trung điểm của AB.
Ⓓ M là trung điểm của QN.

Hướng dẫn giải. **Chọn C**



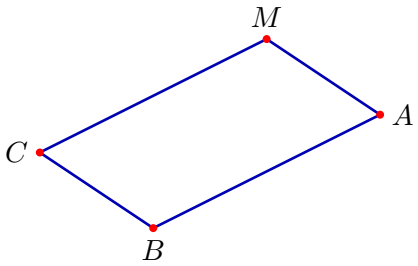
Ta có $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{MB}$ nên $DC = MB$ và $\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{MB}$ cùng hướng. Mà $AB = 2CD$ và $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ cùng hướng. Vậy M là trung điểm của AB.

Câu 35. Cho tam giác ABC. Để điểm M thoả mãn điều kiện $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ thì M phải thỏa mãn mệnh đề nào?

Ⓐ M là điểm sao cho tứ giác $ABMC$ là hình bình hành.
Ⓑ M là trọng tâm tam giác ABC.
Ⓒ M là điểm sao cho tứ giác $BAMC$ là hình bình hành.
Ⓓ M thuộc trung trực của AB.

Hướng dẫn giải. **Chọn C**

Ta có: $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$.

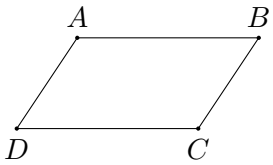


Nên tứ giác $BAMC$ là hình bình hành.

Câu 36. Cho hình bình hành $ABCD$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}$ là?

Ⓐ tập rỗng..
Ⓑ một đoạn thẳng..
Ⓒ một đường tròn..
Ⓓ một đường thẳng..

Hướng dẫn giải. **Chọn A**



$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MA} \Leftrightarrow \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD}$ sai.
$\Rightarrow$ Không có điểm M thỏa mãn.

Câu 37. Cho tam giác ABC. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA}|$ là?

Ⓐ trung trực đoạn BC.
Ⓑ đường tròn tâm A, bán kính BC.
Ⓒ đường thẳng qua A và song song với BC.

Ⓓ đường thẳng AB.

Hướng dẫn giải. **Chọn B**

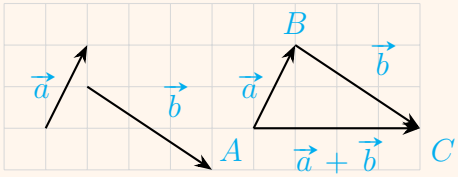
Ta có $|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}|=|\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BA}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{AM}| \Rightarrow AM=BC$.

Mà A, B, C cố định $\Rightarrow$ Tập hợp điểm M là đường tròn tâm A, bán kính BC.

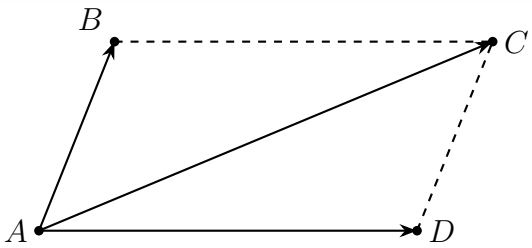
§2 TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTƠ

I. TỔNG CỦA HAI VECTƠ

Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Lấy một điểm A tuỳ ý và vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$ (H.4.13). Khi đó vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ và được kí hiệu là $\vec{a} + \vec{b}$.
Phép lấy tổng của hai vectơ được gọi là phép cộng vectơ.



Quy tắc ba điểm: Với ba điểm bất kì A, B, C, ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.
Quy tắc hình bình hành: Nếu $ABCD$ là một hình bình hành thì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.



Với ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ tuỳ ý:

- Tính chất giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
- Tính chất kết hợp: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;
- Tính chất của vectơ-không: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

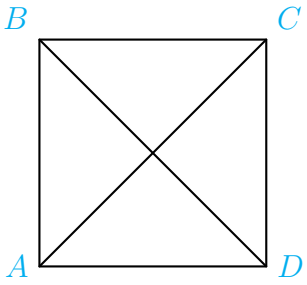
Do các vectơ $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ và $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ bằng nhau, nên ta còn viết chúng dưới dạng $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ và gọi là *tổng của ba vectơ* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Tương tự, ta cũng có thể viết tổng của một số vectơ mà không cần dùng các dấu ngoặc.

Ví dụ 5

Cho hình vuông $ABCD$ với cạnh có độ dài bằng 1. Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD}$.

» Sưu tầm và biên soạn: Lê Minh Kha - 0399653362

Lời giải.



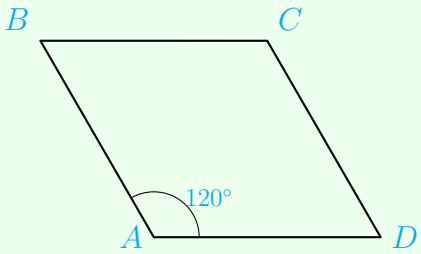
Do $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ nên $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DB}$.

Vậy $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{DB}|=DB=\sqrt{2}$.

Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$.

Do đó $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}|=AC=\sqrt{2}$.

1 Cho hình thoi $ABCD$ với cạnh có độ dài bằng 1 và $\widehat{BAD}=120^\circ$. Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BA}$.



II. HIỆU CỦA HAI VECTƠ

- Vectơ có cùng độ dài và ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ được gọi là vectơ đối của vectơ $\vec{a}$. Vectơ đối của $\vec{a}$ được kí hiệu là $-\vec{a}$.
- Vectơ $\vec{0}$ được coi là vectơ đối của chính nó.

Nhận xét. Hai vectơ đối nhau khi và chỉ khi tổng của chúng bằng $\vec{0}$.

Vectơ $\vec{a}+(-\vec{b})$ được gọi là hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ và được kí hiệu là $\vec{a}-\vec{b}$. Phép lấy hiệu hai vectơ được gọi là phép trừ vectơ.

Chú ý: Nếu $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$ thì $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=\vec{c}+\vec{b}+(-\vec{b})=\vec{c}+\vec{0}=\vec{c}$.
Với ba điểm O, M, N tuỳ ý, ta có $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{ON}=(-\overrightarrow{OM})+\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}$.

Quy tắc hiệu: Với ba điểm O, M, N, ta có $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}$.

Ví dụ 6

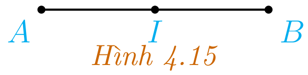
Cho hình bình hành $ABCD$ và một điểm O bất kì.
Chứng minh rằng $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$.

Lời giải. Áp dụng quy tắc hiệu, ta có $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{DC}$.

Mặt khác $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ nên $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$.

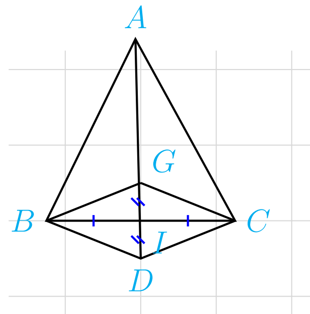
Ví dụ 7

a) Chứng minh rằng nếu I là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$.
b) Chứng minh rằng nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.



Hình 4.15

Lời giải.
a) (H.4.15) Khi I là trung điểm của AB, thì hai vectơ $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{IB}$ có cùng độ dài và ngược hướng (H.4.15).
Do đó, $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{IB}$ đối nhau, suy ra $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$.
b) (H.4.16) Trọng tâm G của tam giác ABC thuộc trung tuyến AI và $GA = 2GI$. Lấy điểm D đối xứng với G qua I.
Khi đó tứ giác $GBDC$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên nó là một hình bình hành. Ta có $GA = 2GI = GD$.
Hai vectơ $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{GD}$ có cùng độ dài và ngược hướng nên chúng là hai vectơ đối nhau, do đó $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$.
Trong hình bình hành $GBDC$, ta có $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GD}$.
Vậy $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$.



Hình 4.16

(2) Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD và O là trung điểm của MN. Chứng minh rằng $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{0}$.

....
....
....
....
....

Phép cộng vectơ tương ứng với các quy tắc tổng hợp lực, tổng hợp vận tốc:
- Nếu hai lực cùng tác động vào chất điểm A và được biểu diễn bởi các vectơ $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ thì hợp lực tác động vào A được biểu diễn bởi vectơ $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$.
- Nếu một con thuyền di chuyển trên sông với vận tốc riêng (vận tốc so với dòng nước)

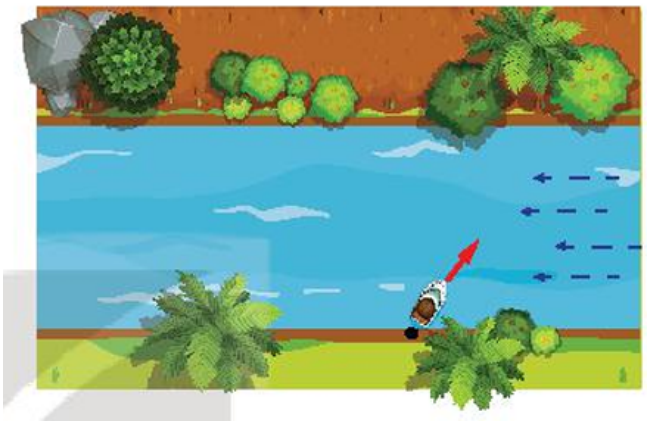
được biểu diễn bởi vectơ $\vec{v}_r$ và vận tốc của dòng nước (so với bờ) được biểu diễn bởi vectơ $\vec{v}_n$ thì vận tốc thực tế của thuyền (so với bờ) được biểu diễn bởi vectơ $\vec{v}_r + \vec{v}_n$.

Ví dụ 8

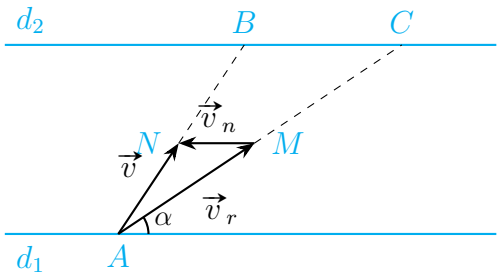
Hãy giải bài toán trong *tình huống mở đầu*

Một con tàu chuyển động từ bờ bên này sang bờ bên kia của một dòng sông với vận tốc riêng không đổi. Giả sử vận tốc dòng nước là không đổi và đáng kể, các yếu tố bên ngoài khác không ảnh hưởng đến vận tốc thực tế của tàu. Nếu không quan tâm đến điểm đến thì cần giữ lái cho tàu tạo với bờ sông một góc bao nhiêu để tàu sang bờ bên kia được nhanh nhất?

Vận tốc thực tế của con tàu trên sông đối với bờ phụ thuộc vào vận tốc riêng của tàu (đối với dòng nước) và vận tốc của dòng nước (đối với bờ). Tương tự, một vật thường chịu tác động của nhiều lực. Ta đã biết dùng vectơ để biểu diễn các đại lượng đó; bài học này xây dựng các phép toán vectơ, tương thích với việc tổng hợp vận tốc, tổng hợp và phân tích lực.



Hướng dẫn giải.



Hình 4.17

Ta biểu thị hai bờ sông là hai đường thẳng song song d_1, d_2 (H.4.17). Giả sử tàu xuất phát từ $A \in d_1$ và bánh lái luôn được giữ để tàu tạo với bờ góc α.

Gọi $\vec{v}_r$ và $\vec{v}_n$ lần lượt là vectơ vận tốc riêng của tàu và vận tốc dòng nước. Gọi M, N là các điểm sao cho $\vec{v}_r = \overrightarrow{AM}$, $\vec{v}_n = \overrightarrow{MN}$.

Khi đó tàu chuyển động với vectơ vận tốc thực tế là $\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_n = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN}$.

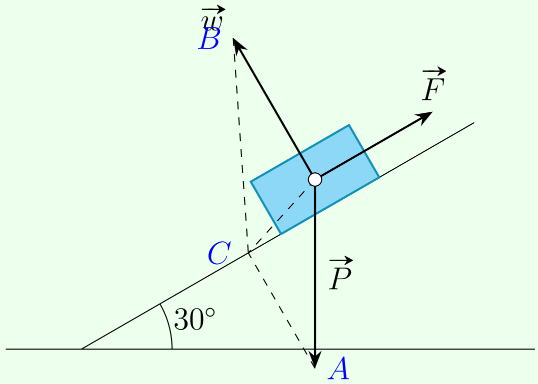
Gọi B, C tương ứng là giao điểm của AN, AM với d_2. Tàu chuyển động thẳng từ A đến B với

vectơ vận tốc thực tế $\overrightarrow{AN}$, do đó thời gian cần thiết để tàu sang được bờ d_2 là $\dfrac{AB}{|\overrightarrow{AN}|} = \dfrac{AC}{|\overrightarrow{AM}|}$.

Mặt khác, $AM = |\vec{v}_r|$ không đổi nên $\dfrac{AC}{AM}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow AC$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow AC \perp d_2 \Leftrightarrow AM \perp d_2$.

Vậy để tàu sang được bờ bên kia nhanh nhất, ta cần giữ bánh lái để tàu luôn vuông góc với bờ.

(3) Tính lực kéo cần thiết để kéo một khẩu pháo có trọng lượng 22 148 N (ứng với khối lượng xấp xỉ 2 260 kg) lên một con dốc nghiêng 30° so với phương nằm ngang (H.4.18). Nếu lực kéo của mỗi người bằng 100 N, thì cần tối thiểu bao nhiêu người để kéo pháo?



Hình 4.18

....

....

....

....

....

III. BÀI TẬP ÔN LUYỆN

1) Bài tập tự luận

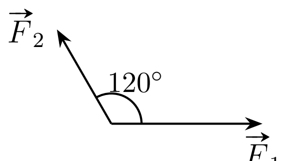
Bài 1. Cho bốn điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$;

b) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}$.

Bài 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Hãy tìm điểm M để $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$. Tìm mối quan hệ giữa hai vectơ $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{CM}$.

Bài 3. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.



Hình 4.19

Bài 4.

Hình 4.19 biểu diễn hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ cùng tác động lên một vật, cho $|\vec{F}_1| = 3$ N, $|\vec{F}_2| = 2$ N. Tính độ lớn của hợp lực $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

Bài 5. Hai con tàu xuất phát cùng lúc từ bờ bên này để sang bờ bên kia của dòng sông với vận tốc riêng không đổi và có độ lớn bằng nhau. Hai tàu luôn được giữ lái sao cho chúng tạo với bờ cùng một góc nhọn nhưng một tàu hướng xuống hạ lưu, một tàu hướng lên thượng nguồn (hình bên). Vận tốc dòng nước là đáng kể, các yếu tố bên ngoài khác không ảnh hưởng tới vận tốc của các tàu. Hỏi tàu nào sang bờ bên kia trước?



Bài 6. Cho năm điểm A, B, C, D, E. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED}$

b) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CB}$

Bài 7. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. M là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$

c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.

Bài 8. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$.

Bài 9. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$ có chung đỉnh A. Chứng minh rằng $\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{D'D} = \vec{0}$.

Bài 10. Cho hình bình hành $ABCD$. Dựng $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{BC}$. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AQ} = \vec{0}$.

2) Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ khác vectơ-không. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

(A) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
(B) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
(C) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.
(D) $\vec{0} + \vec{a} = \vec{0}$.

Câu 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Vectơ tổng $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$ bằng

(A) $\overrightarrow{CA}$.
(B) $\overrightarrow{BD}$.
(C) $\overrightarrow{AC}$.
(D) $\overrightarrow{DB}$.

Câu 3. Cho ba điểm phân biệt A, B, C. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

Ⓐ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$.
Ⓒ $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}$.
Ⓓ $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}$.

Câu 4. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D. Vectơ tổng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}$ bằng

Ⓐ $\vec{0}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{BD}$.
Ⓓ $\overrightarrow{BA}$.

Câu 5. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA. Vectơ tổng $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NP}$ bằng

Ⓐ $\overrightarrow{BP}$.
Ⓑ $\overrightarrow{MN}$.
Ⓒ $\overrightarrow{CP}$.
Ⓓ $\overrightarrow{PA}$.

Câu 6. Cho hình bình hành $ABCD$ và gọi I là giao điểm của hai đường chéo. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{IB}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$.
Ⓒ $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{IB}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{BI}$.

Câu 7. Cho hình bình hành $ABCD$ và gọi I là giao điểm của hai đường chéo. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

Ⓐ $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{IB}$.
Ⓑ $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{DI}$.
Ⓒ $\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{IC}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{IA}$.

Câu 8. Cho các điểm phân biệt M, N, P, Q, R. Xác định vectơ tổng $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RP}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}$.

Ⓐ $\overrightarrow{MP}$.
Ⓑ $\overrightarrow{MN}$.
Ⓒ $\overrightarrow{MQ}$.
Ⓓ $\overrightarrow{MR}$.

Câu 9. Cho hình bình hành $ABCD$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

Ⓐ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}$.
Ⓓ $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DB}$.

Câu 10. Cho tam giác ABC và M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

Ⓐ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}$.
Ⓒ $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PM}=\vec{0}$.
Ⓓ $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MP}$.

Câu 11. Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

Ⓐ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$.
Ⓑ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{EB}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\vec{0}$.
Ⓓ $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}$.

Câu 12. Cho hình vuông $ABCD$, tâm O. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}$.
Ⓑ $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{CA}$.
Ⓒ $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CA}$.
Ⓓ $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}$.

Câu 13. Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

Ⓐ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\vec{0}$.
Ⓑ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\vec{0}$.
Ⓒ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{FE}=\vec{0}$.
Ⓓ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FA}=\vec{0}$.

Câu 14. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi M là trung điểm BC, G_1 là điểm đối xứng của G qua M. Vectơ tổng $\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{G_1C}$ bằng

Ⓐ $\overrightarrow{GA}$. Ⓑ $\overrightarrow{BC}$. Ⓒ $\overrightarrow{G_1A}$. Ⓓ $\overrightarrow{G_1M}$.

Câu 15. Xét tam giác ABC có trọng tâm G và tâm đường tròn ngoại tiếp O thỏa mãn $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$. Hỏi trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

1) $\overrightarrow{OG}=\vec{0}$
2) Tam giác ABC là tam giác vuông cân
3) Tam giác ABC là tam giác đều
4) Tam giác ABC là tam giác cân

Ⓐ 3. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 4.

Câu 16. Xét tam giác ABC có trọng tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp O thỏa mãn $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$. Hỏi trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

1) $\overrightarrow{HG}=\vec{0}$
2) Tam giác ABC là tam giác vuông cân
3) $\overrightarrow{OG}=\vec{0}$
4) Tam giác ABC là tam giác cân

Ⓐ 3. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 4.

Câu 17. Xét tam giác ABC nội tiếp có O là tâm đường tròn ngoại tiếp, H là trực tâm. Gọi D là điểm đối xứng của A qua O. Hỏi trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

1) $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HD}$
2) $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{HA}$
3) $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HH_1}$, với H_1 là điểm đối xứng của H qua O
4) Nếu $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$ thì tam giác ABC là tam giác đều

Ⓐ 3. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 4.

Câu 18. Cho 5 điểm phân biệt M,N,P,Q,R. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{MP}$.
Ⓑ $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}$.
Ⓒ $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{MR}$.
Ⓓ $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{MN}$.

Câu 19. Cho hình bình hành $ABCD$, tâm O. Vectơ tổng $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}$ bằng

Ⓐ $\vec{0}$. Ⓑ $\overrightarrow{BD}$. Ⓒ $\overrightarrow{OC}$. Ⓓ $\overrightarrow{OA}$.

Câu 20. Cho n điểm phân biệt trên mặt phẳng. Bạn An kí hiệu chúng là $A_1,A_2,\ldots,A_n$. Bạn Bình kí hiệu chúng là $B_1,B_2,\ldots,B_n$ $(A_i\neq B_n)$. Vectơ tổng $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}+\cdots+\overrightarrow{A_nB_n}$ bằng

Ⓐ $\vec{0}$. Ⓑ $\overrightarrow{A_1A_n}$. Ⓒ $\overrightarrow{B_1B_n}$. Ⓓ $\overrightarrow{A_1B_n}$.

Câu 21. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là các vectơ khác $\vec{0}$ với $\vec{a}$ là vectơ đối của $\vec{b}$. Khẳng định nào sau đây sai?

Ⓐ Hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương.
Ⓑ Hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ ngược hướng.
Ⓒ Hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng độ dài.
Ⓓ Hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ chung điểm đầu.

Câu 22. Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây sai?

Ⓐ $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CD}$.
Ⓑ $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$.
Ⓓ $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}$.

Câu 23. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Tính $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$

Ⓐ $\overrightarrow{BC}$.
Ⓑ $\overrightarrow{DA}$.
Ⓒ $\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}$.

Câu 24. Cho O là tâm hình bình hành $ABCD$. Hỏi vectơ $\left(\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{DO}\right)$ bằng vectơ nào?

Ⓐ $\overrightarrow{BA}$.
Ⓑ $\overrightarrow{BC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{DC}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AC}$.

Câu 25. Chọn khẳng định sai:

Ⓐ Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.
Ⓑ Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{AB}$.
Ⓒ Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.
Ⓓ Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{BI}=\vec{0}$.

Câu 26. Cho 4 điểm bất kỳ A,B,C,D. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CO}$.
Ⓑ $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.
Ⓒ $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.
Ⓓ $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{BA}$.

Câu 27. Cho các điểm phân biệt A,B,C,D. Đẳng thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DA}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AD}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DA}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BC}$.

Câu 28. Chỉ ra vectơ tổng $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{RN}-\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{QR}$ trong các vectơ sau

Ⓐ $\overrightarrow{MR}$.
Ⓑ $\overrightarrow{MQ}$.
Ⓒ $\overrightarrow{MP}$.
Ⓓ $\overrightarrow{MN}$.

Câu 29. Cho hình bình hành $ABCD$ và điểm M tùy ý. Đẳng thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$.
Ⓑ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MD}$.
Ⓓ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

Câu 30. Cho tam giác ABC có M,N,D lần lượt là trung điểm của AB,AC,BC. Khi đó, các vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{DN}$ là:

Ⓐ $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{ND}$.
Ⓑ $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{ND}$.
Ⓒ $\overrightarrow{MB},\overrightarrow{AM}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM},\overrightarrow{ND}$.

Câu 31. Cho các điểm phân biệt A,B,C. Đẳng thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$.

Câu 32. Cho tam giác ABC có M,N,D lần lượt là trung điểm của AB,AC,BC. Khi đó, các vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{DN}$ là:

Ⓐ $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{ND}$.
Ⓑ $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{ND}$.
Ⓒ $\overrightarrow{MB},\overrightarrow{AM}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM},\overrightarrow{ND}$.

Câu 33. Cho các điểm phân biệt A,B,C. Đẳng thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$.

Câu 34. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Khi đó $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$ bằng

Ⓐ $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}$. Ⓑ $\overrightarrow{AB}$. Ⓒ $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{DO}$. Ⓓ $\overrightarrow{CD}$.

Câu 35. Cho bốn điểm A,B,C,D phân biệt. Khi đó vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DB}$ là:

Ⓐ $\vec{u}=\vec{0}$. Ⓑ $\vec{u}=\overrightarrow{AD}$. Ⓒ $\vec{u}=\overrightarrow{CD}$. Ⓓ $\vec{u}=\overrightarrow{AC}$.

Câu 36. Cho bốn điểm A,B,C,D phân biệt. Khi đó vectơ $\vec{u}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}$ bằng:

Ⓐ $\vec{u}=\overrightarrow{AD}$. Ⓑ $\vec{u}=\vec{0}$. Ⓒ $\vec{u}=\overrightarrow{CD}$. Ⓓ $\vec{u}=\overrightarrow{AC}$.

Câu 37. Cho 4 điểm A,B,C,D. Đẳng thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DB}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{CB}$.

Câu 38. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Đẳng thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{DO}=\vec{0}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{DO}=\vec{0}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.
Ⓓ $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{DO}=\vec{0}$.

Câu 39. Cho lục giác đều $ABCDEF$ và O là tâm của nó. Đẳng thức nào dưới đây là đẳng thức sai?

Ⓐ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{EO}=\vec{0}$.
Ⓑ $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}$.
Ⓒ $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{OC}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EF}=\vec{0}$.

Câu 40. Cho 5 điểm phân biệt M,N,P,Q,R. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{MP}$.
Ⓑ $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}$.
Ⓒ $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{MR}$.
Ⓓ $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{MN}$.

Câu 41. Cho hình bình hành $ABCD$, đẳng thức vectơ nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.
Ⓒ $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}$.
Ⓓ $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

Câu 42. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O. Khẳng định nào sau đây là đúng:

Ⓐ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DA}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BO}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{CD}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BD}$.

Câu 43. Cho 4 điểm bất kì A,B,C,O. Đẳng thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{BA}$.
Ⓑ $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CO}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}$.

Câu 44. Cho 3 điểm phân biệt A,B,C. Đẳng thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}$.

Câu 45. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Khi đó $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}$ bằng

Ⓐ $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}$. Ⓑ $\overrightarrow{AB}$. Ⓒ $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{DO}$. Ⓓ $\overrightarrow{CD}$.

Câu 46. Cho 6 điểm A,B,C,D,E,F. Đẳng thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DE}=\vec{0}$.

Ⓑ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AF}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}$.

Câu 47. Cho hình bình hành $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của đoạn BC và AD. Tính tổng $\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{MC}$.

Ⓐ $\overrightarrow{AC}$. Ⓑ $\overrightarrow{NM}$. Ⓒ $\overrightarrow{CA}$. Ⓓ $\overrightarrow{MN}$.

Câu 48. Cho lục giác đều $ABCDEF$ và O là tâm của nó. Đẳng thức nào dưới đây là đẳng thức sai?

Ⓐ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$.
Ⓑ $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AD}$.
Ⓒ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{EB}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FE}=\vec{0}$.

Câu 49. Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F. Tổng véc tơ: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}$ bằng

Ⓐ $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{DB}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DF}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{EB}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DF}$.

Câu 50. Cho các điểm phân biệt A, B, C, D, E, F. Đẳng thức nào sau đây sai?

Ⓐ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{BC}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CB}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AC}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{EC}$.

Câu 51. Cho tam giác ABC. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Hệ thức nào là đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{BD}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$.

Câu 52. Cho hình lục giác đều $ABCDEF$, tâm O. Đẳng thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FA}=6|\overrightarrow{AB}|$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.

Câu 53. Cho tam giác ABC có trực tâm H, D là điểm đối xứng với B qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CH}$.
Ⓑ $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{HC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{HD}$.
Ⓓ $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{HC}$.

BẢNG ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á
1	D	2	A	3	D	4	A	5	A
6	A	7	D	8	A	9	C	10	D
11	D	12	A	13	D	14	A	15	A
16	A	17	A	18	D	19	A	20	A
21	D	22	B	23	B	24	B	25	A
26	B	27	D	28	D	29	D	30	A
31	D	32	A	33	D	34	B	35	D
36	B	37	C	38	B	39	D	40	D
41	A	42	A	43	B	44	B	45	D
46	A	47	A	48	D	49	C	50	A
51	A	52	A	53	A				

IV. LỜI GIẢI CHI TIẾT

1) Bài tập tự luận

Bài 1. Cho bốn điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$;

b) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD}$.

Hướng dẫn giải.

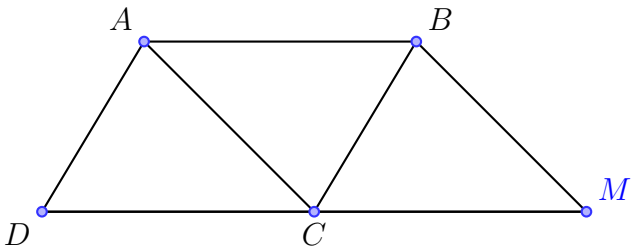
a) Ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}&=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}\right)\\&=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}\end{aligned}$$

b) Ta có: $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}$ (quy tắc hiệu)
$\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}$ (quy tắc hiệu)
$\Rightarrow \overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BD}$.

Bài 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Hãy tìm điểm M để $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$. Tìm mối quan hệ giữa hai vectơ $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{CM}$.

Hướng dẫn giải.



Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ (quy tắc hình bình hành)

Ta cần tìm điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BM}$

$\Leftrightarrow ACMB$ là hình bình hành

$\Rightarrow \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AB}$

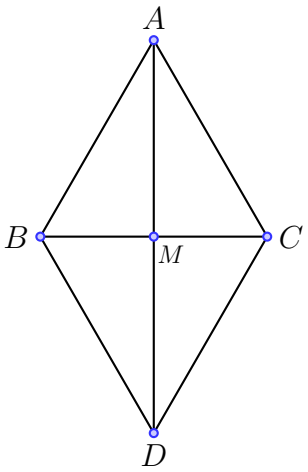
Mà $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{DC}$ hay $\overrightarrow{CM} = -\overrightarrow{CD}$

Suy ra $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{CM}$ là hai vectơ đối nhau.

Bài 3. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Hướng dẫn giải.



Ta có: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ (quy tắc hiệu)

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right| = a$

Ta lại có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ (với D là điểm thỏa mãn $ABDC$ là hình bình hành)

Gọi M là giao điểm của AD và BC

$\Rightarrow M$ là trung điểm của BC và AD (tính chất hình bình hành)

Xét ΔABC, có:

$AB^2 = AM^2 + BM^2$ (định lí Py - ta - go)

$\Rightarrow AM^2 = AB^2 - BM^2$

$= AB^2 - \left(\dfrac{BC}{2}\right)^2 = a^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = \dfrac{3a^2}{4}$

$\Rightarrow AM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

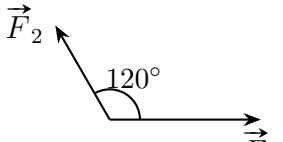
$\Rightarrow AD = 2AM = 2 \cdot \dfrac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right| = a\sqrt{3}$

Vậy $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right| = a, \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = a\sqrt{3}$.

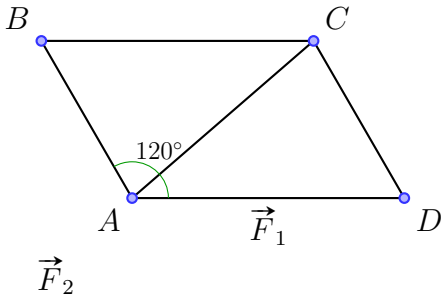
Bài 4. Hình 4.19 biểu diễn hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ cùng tác động lên một vật, cho $|\vec{F}_1| = 3$ N, $|\vec{F}_2| = 2$ N.

Tính độ lớn của hợp lực $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$.



Hình 4.19

✍ *Hướng dẫn giải.*



Trong đó $ABCD$ là hình bình hành

$\Rightarrow \widehat{ADC} = 60^\circ$

Ta có: $\left|\vec{F}_1\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = 3, \left|\vec{F}_2\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{DC}\right| = 2$

$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (quy tắc hình bình hành)

$\Rightarrow \left|\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right|$

Xét ΔADC, có:

$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cdot \cos D$ (định lí côsin)

$= 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ$

$= 7$

$\Rightarrow AC = \sqrt{7}$

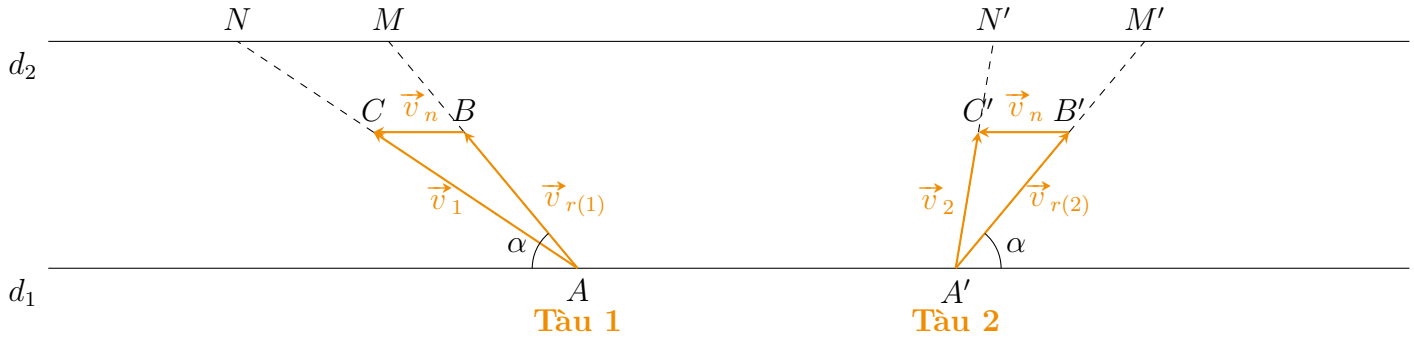
$\Rightarrow \left|\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right| = \sqrt{7}$

Vậy độ lớn của hợp lực $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ là $\sqrt{7}$ (N).

Bài 5. Hai con tàu xuất phát cùng lúc từ bờ bên này để sang bờ bên kia của dòng sông với vận tốc riêng không đổi và có độ lớn bằng nhau. Hai tàu luôn được giữ lái sao cho chúng tạo với bờ cùng một góc nhọn nhưng một tàu hướng xuống hạ lưu, một tàu hướng lên thượng nguồn (hình bên). Vận tốc dòng nước là đáng kể, các yếu tố bên ngoài khác không ảnh hưởng tới vận tốc của các tàu. Hỏi tàu nào sang bờ bên kia trước?



Hướng dẫn giải.



Ta biểu thị hai bờ sông là hai đường thẳng song song d_1, d_2.

Giả sử tàu 1 xuất phát từ $A \in d_1$ đến M (hướng xuống hạ lưu) và bánh lái luôn được giữ để tàu tạo với bờ một góc α.

Giả sử tàu 2 xuất phát từ $A' \in d_1$ đến M' (hướng lên thượng nguồn) và bánh lái luôn được giữ để tàu tạo với bờ một góc α.

Gọi $\vec{v}_{r(1)}, \vec{v}_{r(2)}$ và $\vec{v}_n$ lần lượt biểu diễn vận tốc riêng của tàu 1, tàu 2 và vận tốc dòng nước.

+ Gọi B, C là các điểm sao cho $\vec{v}_{r(1)} = \overrightarrow{AB}, \vec{v}_n = \overrightarrow{BC}$.

Khi đó tàu 1 chuyển động với vectơ vận tốc thực tế là $\vec{v}_1 = \vec{v}_{r(1)} + \vec{v}_n = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Vậy tàu 1 chuyển động theo hướng $\overrightarrow{AC}$ với đích đến là điểm N trên bờ d_2 và đi với độ lớn $|\vec{v}_1| = |\overrightarrow{AC}| = AC$.

Thời gian để tàu 1 di chuyển sang bờ d_2 là $t_1 = \dfrac{AN}{AC}$.

+ Gọi B', C' là các điểm sao cho $\vec{v}_{r(2)} = \overrightarrow{A'B'}, \vec{v}_n = \overrightarrow{B'C'}$.

Khi đó tàu 2 chuyển động với vectơ vận tốc thực tế là $\vec{v}_2 = \vec{v}_{r(2)} + \vec{v}_n = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{A'C'}$.

Vậy tàu 2 chuyển động theo hướng $\overrightarrow{A'C'}$ với đích đến là điểm N' trên bờ d_2 và đi với độ lớn $|\vec{v}_2| = |\overrightarrow{A'C'}| = A'C'$.

Thời gian để tàu 2 di chuyển sang bờ d_2 là $t_2 = \dfrac{A'N'}{A'C'}$.

+ Vì $\vec{v}_n = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$ nên B, B', C, C' thẳng hàng và nằm trên đường thẳng song song với hai đường thẳng d_1 và d_2.

Khi đó theo định lý Thales, ta có: $\dfrac{AN}{AC} = \dfrac{A'N'}{A'C'}$ hay $t_1 = t_2$.

Suy ra hai tàu cần thời gian như nhau để sang được đến bờ bên kia.

Vậy hai tàu sang đến bờ bên kia cùng một lúc.

Bài 6. Cho năm điểm A, B, C, D, E. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}$

b) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}$

Hướng dẫn giải. a) Biến đổi vế trái ta có:

$$\begin{aligned} VT &= (\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})+\overrightarrow{CD}+(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DA}) \\ &= (\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED})+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD})+\overrightarrow{DA} \\ &= (\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED})+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA} \\ &= \overrightarrow{CB}+\overrightarrow{ED}=VP. \end{aligned}$$

b) Đẳng thức tương đương với:

$$\begin{aligned} &(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE})+(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB})-\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{DB}=\vec{0} \\ \Leftrightarrow &\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{DB}=\vec{0} \\ \Leftrightarrow &\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB}=\vec{0} \text{ (đúng).} \end{aligned}$$

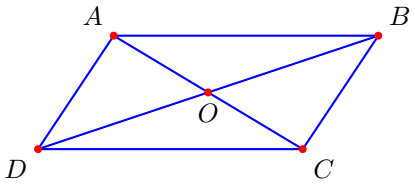
Bài 7. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. M là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh rằng

a) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

c) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

Hướng dẫn giải.



a) Ta có $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{AC}$.

Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ suy ra:

$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$.

b) Vì $ABCD$ là hình bình hành nên ta có O là trung điểm của AC và BD.

$\Rightarrow \overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OC} \Rightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.

Tương tự: $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

c) Cách 1: Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.

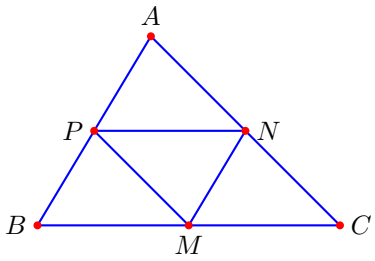
$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DC})=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

Cách 2: Đẳng thức tương đương với $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$ (đúng do $ABCD$ là hbh).

Bài 8. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh

rằng: $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}$.

Hướng dẫn giải.



Vì PN, MN là đường trung bình của tam giác ABC nên $PN//BM, MN//BP$ suy ra tứ giác $BMNP$ là hình bình hành.

$\Rightarrow \overrightarrow{BM}=\overrightarrow{PN}$.

N là trung điểm của $AC \Rightarrow \overrightarrow{CN}=\overrightarrow{NA}$.

Do đó theo quy tắc ba điểm ta có:

$\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}=(\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NA})+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}$.

Bài 9. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$ có chung đỉnh A. Chứng minh rằng $\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{D'D}=\vec{0}$.

Hướng dẫn giải. Theo quy tắc trừ và quy tắc hình bình hành ta có:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{D'D}&=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB'})+(\overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AD'})\\&=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})-\overrightarrow{AC}-(\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{AD'})+\overrightarrow{AC'}\\&=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{AC'}=\vec{0}.\end{aligned}$$

Bài 10. Cho hình bình hành $ABCD$. Dựng $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{NP}=\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{BC}$. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AQ}=\vec{0}$.

Hướng dẫn giải. Theo quy tắc ba điểm ta có $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}$.

Mặt khác $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}$.

Suy ra $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$.

2) Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ khác vectơ-không. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

Ⓐ $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
Ⓑ $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.
Ⓒ $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.
Ⓓ $\vec{0}+\vec{a}=\vec{0}$.

Hướng dẫn giải. Chọn D

$\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

Câu 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Vectơ tổng $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$ bằng

Ⓐ $\overrightarrow{CA}$.
Ⓑ $\overrightarrow{BD}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AC}$.
Ⓓ $\overrightarrow{DB}$.

Hướng dẫn giải. Chọn A

$\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}$

Câu 3. Cho ba điểm phân biệt A, B, C. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

Ⓐ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$.
Ⓒ $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}$.
Ⓓ $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BA}$.

Hướng dẫn giải. Chọn D

$\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}$

Câu 4. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D. Vectơ tổng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}$ bằng

Ⓐ $\vec{0}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{BD}$.
Ⓓ $\overrightarrow{BA}$.

Hướng dẫn giải. Chọn A

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

Câu 5. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA. Vectơ tổng $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NP}$ bằng

Ⓐ $\overrightarrow{BP}$.
Ⓑ $\overrightarrow{MN}$.
Ⓒ $\overrightarrow{CP}$.
Ⓓ $\overrightarrow{PA}$.

Hướng dẫn giải. Chọn A

$\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{BP}$

Câu 6. Cho hình bình hành $ABCD$ và gọi I là giao điểm của hai đường chéo. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{IB}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$.
Ⓒ $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{IB}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{BI}$.

Hướng dẫn giải. Chọn A

$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{IB}$

Câu 7. Cho hình bình hành $ABCD$ và gọi I là giao điểm của hai đường chéo. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

Ⓐ $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{IB}$.
Ⓑ $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{DI}$.
Ⓒ $\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{IC}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{IA}$.

Hướng dẫn giải. Chọn D

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{AI}$

Câu 8. Cho các điểm phân biệt M, N, P, Q, R. Xác định vectơ tổng $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RP}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}$.

Ⓐ $\overrightarrow{MP}$.
Ⓑ $\overrightarrow{MN}$.
Ⓒ $\overrightarrow{MQ}$.
Ⓓ $\overrightarrow{MR}$.

Hướng dẫn giải. Chọn A

$\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RP}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RP}=\overrightarrow{MP}$

Câu 9. Cho hình bình hành $ABCD$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

Ⓐ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}$.
Ⓓ $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DB}$.

Hướng dẫn giải. Chọn C

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

Câu 10. Cho tam giác ABC và M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

Ⓐ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}$.
Ⓒ $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PM}=\vec{0}$.
Ⓓ $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MP}$.

Hướng dẫn giải. Chọn D

$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{PM}$

Câu 11. Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

Ⓐ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$.
Ⓑ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{EB}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\vec{0}$.
Ⓓ $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}$.

Hướng dẫn giải. Chọn D

$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}=\vec{0}$

Câu 12. Cho hình vuông $ABCD$, tâm O. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}$.
Ⓑ $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{CA}$.
Ⓒ $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CA}$.
Ⓓ $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}$.

Hướng dẫn giải. Chọn A

$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CA}$

Câu 13. Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

Ⓐ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\vec{0}$.
Ⓑ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\vec{0}$.
Ⓒ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{FE}=\vec{0}$.
Ⓓ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{FA}=\vec{0}$.

Hướng dẫn giải. Chọn D

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FA}$

Câu 14. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi M là trung điểm BC, G_1 là điểm đối xứng của G qua M. Vectơ tổng $\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{G_1C}$ bằng

Ⓐ $\overrightarrow{GA}$.
Ⓑ $\overrightarrow{BC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{G_1A}$.
Ⓓ $\overrightarrow{G_1M}$.

Hướng dẫn giải. Chọn A

$\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{G_1C}=\overrightarrow{G_1G}=\overrightarrow{GA}$

Câu 15. Xét tam giác ABC có trọng tâm G và tâm đường tròn ngoại tiếp O thỏa mãn $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$. Hỏi trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?

1) $\overrightarrow{OG}=\vec{0}$
2) Tam giác ABC là tam giác vuông cân
3) Tam giác ABC là tam giác đều
4) Tam giác ABC là tam giác cân

Ⓐ 3.
Ⓑ 1.
Ⓒ 2.
Ⓓ 4.

Hướng dẫn giải. Chọn A

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OG}=\vec{0}\Rightarrow O\equiv G$. Do đó tam giác ABC là tam giác đều

Câu 16. Xét tam giác ABC có trọng tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp O thỏa mãn $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$. Hỏi trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?
1) $\overrightarrow{HG}=\vec{0}$
2) Tam giác ABC là tam giác vuông cân
3) $\overrightarrow{OG}=\vec{0}$
4) Tam giác ABC là tam giác cân

Ⓐ 3. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 4.

Hướng dẫn giải. Chọn A

$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{HG}=\vec{0}\Rightarrow H\equiv G$. Do đó tam giác ABC là tam giác đều

Câu 17. Xét tam giác ABC nội tiếp có O là tâm đường tròn ngoại tiếp, H là trực tâm. Gọi D là điểm đối xứng của A qua O. Hỏi trong các khẳng định sau, có bao nhiêu khẳng định đúng?
1) $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HD}$
2) $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{HA}$
3) $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HH_1}$, với H_1 là điểm đối xứng của H qua O
4) Nếu $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$ thì tam giác ABC là tam giác đều

Ⓐ 3. Ⓑ 1. Ⓒ 2. Ⓓ 4.

Hướng dẫn giải. Chọn A

$\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HD}\Rightarrow\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HH_1}$

Nếu $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\vec{0}$ thì $\overrightarrow{HH_1}=\vec{0}$, suy ra $H\equiv O$

Câu 18. Cho 5 điểm phân biệt M,N,P,Q,R. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{MP}$.
Ⓑ $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}$.
Ⓒ $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{MR}$.
Ⓓ $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{MN}$.

Hướng dẫn giải. Chọn D

$\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{MN}$

Câu 19. Cho hình bình hành $ABCD$, tâm O. Vectơ tổng $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}$ bằng

Ⓐ $\vec{0}$. Ⓑ $\overrightarrow{BD}$. Ⓒ $\overrightarrow{OC}$. Ⓓ $\overrightarrow{OA}$.

Hướng dẫn giải. Chọn A

$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CC}=\vec{0}$

Câu 20. Cho n điểm phân biệt trên mặt phẳng. Bạn An kí hiệu chúng là $A_1,A_2,\ldots,A_n$. Bạn Bình kí hiệu chúng là $B_1,B_2,\ldots,B_n$ $(A_i\neq B_n)$. Vectơ tổng $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}+\cdots+\overrightarrow{A_nB_n}$ bằng

Ⓐ $\vec{0}$. Ⓑ $\overrightarrow{A_1A_n}$. Ⓒ $\overrightarrow{B_1B_n}$. Ⓓ $\overrightarrow{A_1B_n}$.

Hướng dẫn giải. Chọn A

Lấy điểm O bất kì. Khi đó

$\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}+\cdots+\overrightarrow{A_nB_n}=\left(\overrightarrow{A_1O}+\overrightarrow{A_2O}+\cdots+\overrightarrow{A_nO}\right)+\left(\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}+\cdots+\overrightarrow{OB_n}\right)$

Vì $\{B_1,B_2,\ldots,B_n\}=\{A_1,A_2,\ldots,A_n\}$ nên

$\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}+\cdots+\overrightarrow{OB_n}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}$

Do đó $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}+\cdots+\overrightarrow{A_nB_n}=\left(\overrightarrow{A_1O}+\overrightarrow{OA_1}\right)+\left(\overrightarrow{A_2O}+\overrightarrow{OA_2}\right)+\cdots+\left(\overrightarrow{A_nO}+\overrightarrow{OA_n}\right)=\vec{0}$

Câu 21. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là các vectơ khác $\vec{0}$ với $\vec{a}$ là vectơ đối của $\vec{b}$. Khẳng định nào sau đây sai?

Ⓐ Hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương.
Ⓑ Hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ ngược hướng.
Ⓒ Hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng độ dài.
Ⓓ Hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ chung điểm đầu.

Hướng dẫn giải. Chọn D

Ta có $\vec{a}=-\vec{b}$. Do đó, $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương, cùng độ dài và ngược hướng nhau

Câu 22. Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây sai?

Ⓐ $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CD}$.
Ⓑ $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$.
Ⓓ $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}$.

Hướng dẫn giải. Chọn B

Xét các đáp án:

- Đáp án A: Ta có $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$. Vậy A đúng
- Đáp án B: Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{AD}\\ \overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AD}\end{cases}$. Vậy B sai
- Đáp án C: Ta có $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$. Vậy C đúng
- Đáp án D: Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AC}\end{cases}$. Vậy D đúng

Câu 23. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Tính $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$

Ⓐ $\overrightarrow{BC}$.
Ⓑ $\overrightarrow{DA}$.
Ⓒ $\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}$.

Hướng dẫn giải. Chọn B

$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$

Câu 24. Cho O là tâm hình bình hành $ABCD$. Hỏi vectơ $\left(\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{DO}\right)$ bằng vectơ nào?

Ⓐ $\overrightarrow{BA}$.
Ⓑ $\overrightarrow{BC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{DC}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AC}$.

Hướng dẫn giải. Chọn B

$\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

Câu 25. Chọn khẳng định sai:

Ⓐ Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.
Ⓑ Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{AB}$.
Ⓒ Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.
Ⓓ Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{BI}=\vec{0}$.

Hướng dẫn giải. Chọn A

$\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{BA} \neq \vec{0}$

Câu 26. Cho 4 điểm bất kỳ A, B, C, D. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

(A) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CO}$.
(B) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$.
(C) $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.
(D) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BA}$.

Hướng dẫn giải. Chọn B

$\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$

Câu 27. Cho các điểm phân biệt A, B, C, D. Đẳng thức nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DA}$.
(B) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD}$.
(C) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DA}$.
(D) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BC}$.

Hướng dẫn giải. Chọn D

Ta có: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB}$
Vậy: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BC}$

Câu 28. Chỉ ra vectơ tổng $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{RN} - \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{QR}$ trong các vectơ sau

(A) $\overrightarrow{MR}$.
(B) $\overrightarrow{MQ}$.
(C) $\overrightarrow{MP}$.
(D) $\overrightarrow{MN}$.

Hướng dẫn giải. Chọn D

$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RN} = \overrightarrow{MN}$

Câu 29. Cho hình bình hành $ABCD$ và điểm M tùy ý. Đẳng thức nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$.
(B) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}$.
(C) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MD}$.
(D) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.

Hướng dẫn giải. Chọn D

Ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$ (đúng)

Câu 30. Cho tam giác ABC có M, N, D lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC. Khi đó, các vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{DN}$ là:

(A) $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ND}$.
(B) $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ND}$.
(C) $\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{AM}$.
(D) $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{ND}$.

Hướng dẫn giải. Chọn A

Nhìn hình ta thấy vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{DN}$ là: $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ND}$

Câu 31. Cho các điểm phân biệt A, B, C. Đẳng thức nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$.
(B) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.
(C) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}$.
(D) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$.

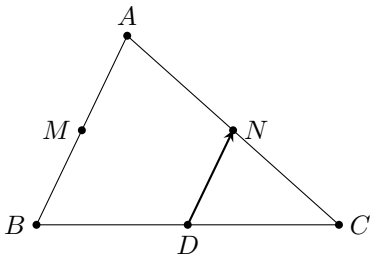
Hướng dẫn giải. Chọn D

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$

Câu 32. Cho tam giác ABC có M, N, D lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC. Khi đó, các vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{DN}$ là:

Ⓐ $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ND}$.
Ⓑ $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ND}$.
Ⓒ $\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{AM}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{ND}$.

Hướng dẫn giải.



Nhìn hình ta thấy vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{DN}$ là: $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ND}$. Chọn A.

Câu 33. Cho các điểm phân biệt A, B, C. Đẳng thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}$.

Hướng dẫn giải. Chọn D. Ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ (Lưu ý: lời giải trong ảnh có vẻ nhầm lẫn một chút về kí hiệu, nhưng theo quy tắc hiệu: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$).

Câu 34. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Khi đó $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$ bằng

Ⓐ $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB}$.
Ⓒ $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO}$.
Ⓓ $\overrightarrow{CD}$.

Hướng dẫn giải. Chọn B. $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB}$ (quy tắc 3 điểm).

Câu 35. Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt. Khi đó vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB}$ là:

Ⓐ $\vec{u} = \vec{0}$.
Ⓑ $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$.
Ⓒ $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$.
Ⓓ $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$.

Hướng dẫn giải. Chọn D. $\vec{u} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$.

Câu 36. Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt. Khi đó vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB}$ bằng:

Ⓐ $\vec{u} = \overrightarrow{AD}$.
Ⓑ $\vec{u} = \vec{0}$.
Ⓒ $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$.
Ⓓ $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$.

Hướng dẫn giải. Chọn B. $\vec{u} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$.

Câu 37. Cho 4 điểm A, B, C, D. Đẳng thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{CB}$.

Hướng dẫn giải. Chọn C. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

Câu 38. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Đẳng thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.
Ⓓ $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$.

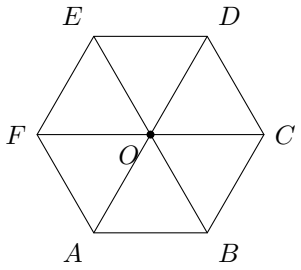
Hướng dẫn giải. Chọn B. Ta có: $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CO}) + (\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{DO}) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$.
Do $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{CO}$ đối nhau và $\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{DO}$ đối nhau.

Câu 39. Cho lục giác đều $ABCDEF$ và O là tâm của nó. Đẳng thức nào dưới đây là đẳng thức sai?

Ⓐ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{EO} = \vec{0}$.
Ⓑ $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD}$.

Ⓒ $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{OC}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EF}=\vec{0}$.

Hướng dẫn giải.



Chọn D. Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{AO}\neq\vec{0}$.

Câu 40. Cho 5 điểm phân biệt M,N,P,Q,R. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{MP}$.
Ⓑ $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}$.
Ⓒ $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{MR}$.
Ⓓ $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{MN}$.

Hướng dẫn giải. Chọn D.

Ta có $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RN}=\overrightarrow{MN}$.

Câu 41. Cho hình bình hành $ABCD$, đẳng thức vectơ nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.
Ⓒ $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}$.
Ⓓ $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

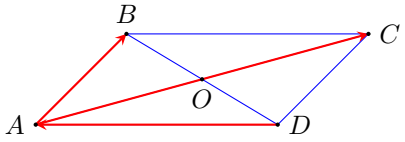
Hướng dẫn giải. Chọn A.

Đẳng thức vectơ $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}$ đúng theo quy tắc cộng hình bình hành.

Câu 42. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O. Khẳng định nào sau đây là đúng:

Ⓐ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DA}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BO}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{CD}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BD}$.

Hướng dẫn giải.



Chọn A.

Ta có $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$. Do $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$ nên $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DA}$.

Câu 43. Cho 4 điểm bất kì A,B,C,O. Đẳng thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{BA}$.
Ⓑ $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CO}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}$.

Hướng dẫn giải. Chọn B.

$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{BA}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{BA}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{BA}$ nên A sai.

$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CO}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{CO}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}=-\overrightarrow{CO}\Leftrightarrow\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{CO}$ nên B đúng.

Câu 44. Cho 3 điểm phân biệt A,B,C. Đẳng thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}$.

Hướng dẫn giải. Chọn B.

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}$.

Câu 45. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Khi đó $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}$ bằng

Ⓐ $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}$. Ⓑ $\overrightarrow{AB}$. Ⓒ $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{DO}$. Ⓓ $\overrightarrow{CD}$.

Hướng dẫn giải. Chọn D.

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$.

Câu 46. Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F. Đẳng thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DE}=\vec{0}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AF}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}$.

Hướng dẫn giải. Chọn A.

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{DE}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FA})=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

Câu 47. Cho hình bình hành $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của đoạn BC và AD. Tính tổng $\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{MC}$.

Ⓐ $\overrightarrow{AC}$. Ⓑ $\overrightarrow{NM}$. Ⓒ $\overrightarrow{CA}$. Ⓓ $\overrightarrow{MN}$.

Hướng dẫn giải. Chọn A.

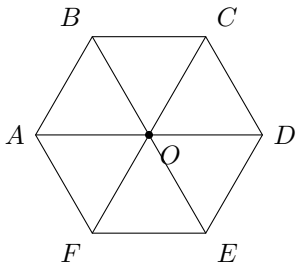
Do M, N là trung điểm BC, AD của hình bình hành $ABCD$ nên $ANCM$ cũng là hình bình hành. Khi đó $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AN}$.

$\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{AC}$.

Câu 48. Cho lục giác đều $ABCDEF$ và O là tâm của nó. Đẳng thức nào dưới đây là đẳng thức sai?

Ⓐ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=\vec{0}$.
Ⓑ $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AD}$.
Ⓒ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{EB}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FE}=\vec{0}$.

Hướng dẫn giải.



Chọn D.

Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AD}\neq\vec{0}$.

Câu 49. Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F. Tổng véc tơ: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}$ bằng

Ⓐ $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{DB}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DF}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{EB}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DF}$.

Hướng dẫn giải. Chọn C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})+(\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FD})+(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BF})=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{EB}$.

Câu 50. Cho các điểm phân biệt A, B, C, D, E, F. Đẳng thức nào sau đây sai?

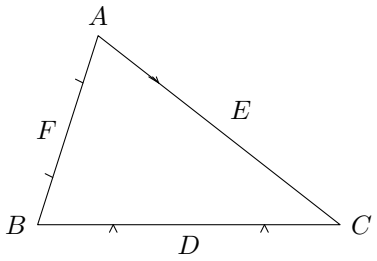
Ⓐ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{BC}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CB}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AC}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{EC}$.

Hướng dẫn giải. Chọn A. Giả sử $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{BC}$ đúng.
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{ED}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{FB}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CB}=\vec{0}$ (vô lý).

Câu 51. Cho tam giác ABC. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Hệ thức nào là đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{BD}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}$.

Hướng dẫn giải.

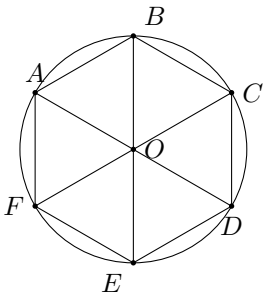


Chọn A.
Ta có $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EF}$
$=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{BD}+(\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF})$
$=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{FF}$
$=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{BD}+\vec{0}$
$=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{BD}$.

Câu 52. Cho hình lục giác đều $ABCDEF$, tâm O. Đẳng thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FA}=6|\overrightarrow{AB}|$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DC}=\vec{0}$.

✍ *Hướng dẫn giải.*



Chọn A.
Ta có $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}$.

Câu 53. Cho tam giác ABC có trực tâm H, D là điểm đối xứng với B qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CH}$.
Ⓑ $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{HC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{HD}$.
Ⓓ $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{HC}$.

✍ *Hướng dẫn giải.*

Chọn A.
Ta có: Vì D đối xứng với B qua O nên D thuộc đường tròn (O) và BD là đường kính.
$AD//CH$ (cùng vuông góc với AB).
$AH//CD$ (cùng vuông góc với BC).
Suy ra $ADCH$ là hình bình hành.
Vậy $\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CH}$.

§3 TÍCH CỦA MỘT VECTƠ VỚI MỘT SỐ

Với mỗi cặp vật đặt trên hai đầu của một cánh tay đòn AB, luôn có duy nhất một điểm M thuộc AB để nếu đặt trụ đỡ tại M thì cánh tay đòn ở trạng thái cân bằng (H.4.20). Điều trên còn đúng trong những trường hợp tổng quát hơn, chẳng hạn, cánh tay đòn được thay bởi một tấm ván hình đa giác n đỉnh $A_1, A_2, \ldots, A_n$, tại mỗi đỉnh A_i có đặt một vật nặng m_i (kg). Ở đây, ta coi cánh tay đòn, tấm ván là không có trọng lượng. Trong Vật lí, điểm M như trên được gọi là điểm khối tâm của hệ chất điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ứng với các khối lượng $m_1, m_2, \ldots, m_n$ (kg).

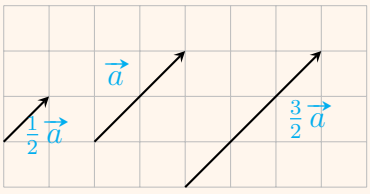
Qua bài học này, ta sẽ thấy Hình học cho phép xác định vị trí khối tâm của một hệ chất điểm.



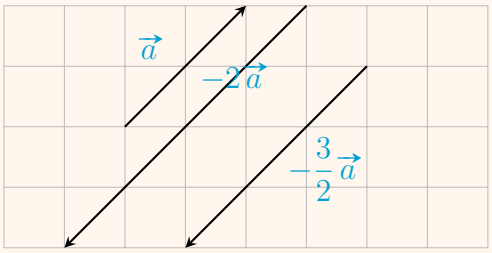
Hình 4.20

I. TÍCH CỦA MỘT VECTƠ VỚI MỘT SỐ

Tích của một vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ với một số thực $k > 0$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, cùng hướng với vectơ $\vec{a}$ và có độ dài bằng $k|\vec{a}|$.



Tích của một vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ với một số thực $k < 0$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ và có độ dài bằng $(-k)|\vec{a}|$.



Hình 4.23

Ta quy ước $k\vec{a} = \vec{0}$ nếu $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $k = 0$.

NHẬN XÉT. Vectơ $k\vec{a}$ có độ dài bằng $|k||\vec{a}|$ và cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k \geq 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $\vec{a} \neq \vec{0}$ và $k < 0$.

Ví dụ 1

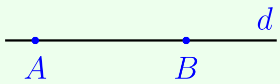
Chứng minh rằng hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ $(\vec{b} \neq \vec{0})$ cùng phương khi và chỉ khi tồn tại số k để $\vec{a} = k\vec{b}$.

Lời giải. Thật vậy, nếu $\vec{a} = k\vec{b}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương. Ngược lại, giả sử $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

Ta lấy $k = \dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng và lấy $k = -\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}$ nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.

Khi đó $\vec{a} = k\vec{b}$.

(1) Cho đường thẳng d đi qua hai điểm phân biệt A và B (H.4.25). Những khẳng định nào sau đây là đúng?



Hình 4.25

a) Điểm M thuộc đường thẳng d khi và chỉ khi tồn tại số t để $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$.

b) Với điểm M bất kì, ta luôn có $\overrightarrow{AM} = \dfrac{AM}{AB}\overrightarrow{AB}$.

c) Điểm M thuộc tia đối của tia AB khi và chỉ khi tồn tại số $t \leq 0$ để $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$.

II. CÁC TÍNH CHẤT CỦA PHÉP NHÂN VECTƠ VỚI MỘT SỐ

Với hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ và hai số thực k, t, ta luôn có:

- $k(t\vec{a}) = (kt)\vec{a}$;
- $(k+t)\vec{a} = k\vec{a} + t\vec{a}$;
- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$; $k(\vec{a} - \vec{b}) = k\vec{a} - k\vec{b}$;
- $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$; $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

Ví dụ 2

Cho đoạn thẳng AB có trung điểm I. Chứng minh rằng với điểm O tuỳ ý, ta có

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}.$$

Lời giải. Vì I là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

Do đó $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IB}) = 2\overrightarrow{OI} + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) = 2\overrightarrow{OI}$.

(2) Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chứng minh rằng với điểm O tuỳ ý, ta có

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}.$$

....

....

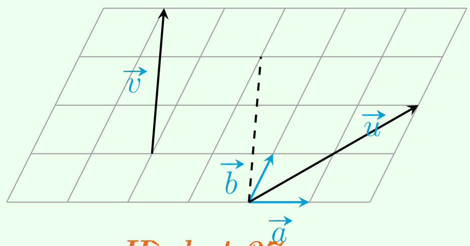
....

....

....

NHẬN XÉT. • Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.
• Điểm G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

(3) Trong Hình 4.27, hãy biểu thị mỗi vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ theo hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, tức là tìm các số x, y, z, t để $\vec{u}=x\vec{a}+y\vec{b}$, $\vec{v}=t\vec{a}+z\vec{b}$.



Hình 4.27

....

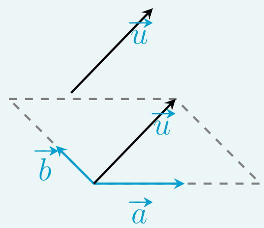
....

....

....

....

Chú ý: Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$, $\vec{b}$ (H.4.28). Khi đó, mọi vectơ $\vec{u}$ đều biểu thị (phân tích) được một cách duy nhất theo hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số $(x; y)$ sao cho $\vec{u}=x\vec{a}+y\vec{b}$.



Hình 4.28

III. BÀI TẬP ÔN LUYỆN

1) Bài tập tự luận

Bài 1. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Hãy biểu thị $\overrightarrow{AM}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

Bài 2. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N tương ứng là trung điểm của các cạnh AB, CD. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

Bài 3. Cho hai điểm phân biệt A và B.

a) Hãy xác định điểm K sao cho $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\vec{0}$.

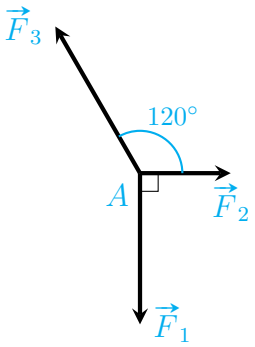
b) Chứng minh rằng với mọi điểm O, ta có $\overrightarrow{OK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$.

Bài 4. Cho tam giác ABC.

a) Hãy xác định điểm M để $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

b) Chứng minh rằng với mọi điểm O, ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OM}$.

Bài 5. Chất điểm A chịu tác động của ba lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ như Hình 4.30 và ở trạng thái cân bằng (tức là $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=\vec{0}$). Tính độ lớn của các lực $\vec{F}_2, \vec{F}_3$, biết $\vec{F}_1$ có độ lớn là 20 N.



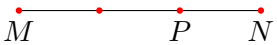
Hình 4.30

2) Bài tập trắc nghiệm

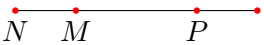
Câu 1. Khẳng định nào **sai**?

Ⓐ $1.\vec{a}=\vec{a}$.
Ⓑ $k\vec{a}$ và $\vec{a}$ cùng hướng khi $k>0$.
Ⓒ $k\vec{a}$ và $\vec{a}$ cùng hướng khi $k<0$.
Ⓓ Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}\neq\vec{0}$ cùng phương khi có một số k để $\vec{a}=k\vec{b}$.

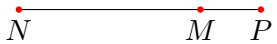
Câu 2. Trên đường thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN}=-3\overrightarrow{MP}$. Điểm P được xác định đúng trong hình vẽ nào sau đây:



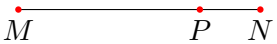
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

» Sưu tầm và biên soạn: Lê Minh Kha - 0399653362

Ⓐ Hình 3. Ⓑ Hình 4. Ⓒ Hình 1. Ⓓ Hình 2.

Câu 3. Cho ba điểm phân biệt A, B, C. Nếu $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$ thì đẳng thức nào dưới đây **đúng**?

Ⓐ $\overrightarrow{BC} = -4\overrightarrow{AC}$. Ⓑ $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{AC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC}$. Ⓓ $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{AC}$.

Câu 4. Cho tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của BC. Khẳng định nào sau đây đúng

Ⓐ $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$. Ⓑ $3\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{IC}$. Ⓒ $\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{IC}$. Ⓓ $2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$.

Câu 5. Cho tam giác ABC. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **sai**?

Ⓐ $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$. Ⓑ $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{CN}$.
Ⓒ $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{NM}$. Ⓓ $\overrightarrow{CN} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Câu 6. Cho $\vec{a} \neq \vec{0}$ và điểm O. Gọi M, N lần lượt là hai điểm thỏa mãn $\overrightarrow{OM} = 3\vec{a}$ và $\overrightarrow{ON} = -4\vec{a}$. Khi đó:

Ⓐ $\overrightarrow{MN} = 7\vec{a}$. Ⓑ $\overrightarrow{MN} = -5\vec{a}$.
Ⓒ $\overrightarrow{MN} = -7\vec{a}$. Ⓓ $\overrightarrow{MN} = -5\vec{a}$.

Câu 7. Tìm giá trị của m sao cho $\vec{a} = m\vec{b}$, biết rằng $\vec{a}$, $\vec{b}$ ngược hướng và $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 15$

Ⓐ $m = 3$. Ⓑ $m = -\dfrac{1}{3}$. Ⓒ $m = \dfrac{1}{3}$. Ⓓ $m = -3$.

Câu 8. Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng $2a$. Độ dài của $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ bằng:

Ⓐ $2a$. Ⓑ $a\sqrt{3}$. Ⓒ $2a\sqrt{3}$. Ⓓ $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 9. Cho tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của AB. Tìm điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Ⓐ M là trung điểm của BC.
Ⓑ M là trung điểm của IC.
Ⓒ M là trung điểm của IA.
Ⓓ M là điểm trên cạnh IC sao cho $IM = 2MC$.

Câu 10. Cho hình bình hành $ABCD$, điểm M thỏa mãn $4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$. Khi đó điểm M là:

Ⓐ Trung điểm của AC. Ⓑ Điểm C.
Ⓒ Trung điểm của AB. Ⓓ Trung điểm của AD.

Câu 11. Cho tam giác ABC có điểm O thỏa mãn: $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ Tam giác ABC đều. Ⓑ Tam giác ABC cân tại C.
Ⓒ Tam giác ABC vuông tại C. Ⓓ Tam giác ABC cân tại B.

Câu 12. Cho tam giác OAB vuông cân tại O với $OA = OB = a$. Độ dài của vectơ $\vec{u} = \dfrac{21}{4}\overrightarrow{OA} - \dfrac{5}{2}\overrightarrow{OB}$ là:

Ⓐ $\dfrac{a\sqrt{140}}{4}$. Ⓑ $\dfrac{a\sqrt{321}}{4}$. Ⓒ $\dfrac{a\sqrt{520}}{4}$. Ⓓ $\dfrac{a\sqrt{541}}{4}$.

Câu 13. Cho ngũ giác $ABCDE$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE.

Gọi I và J lần lượt là trung điểm các đoạn MP và NQ. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$. Ⓑ $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$. Ⓒ $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$. Ⓓ $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AE}$.

Câu 14. Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm trên đoạn AB sao cho $MA=\frac{1}{5}AB$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

Ⓐ $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$. Ⓑ $\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{MB}$.
Ⓒ $\overrightarrow{MB}=-4\overrightarrow{MA}$. Ⓓ $\overrightarrow{MB}=-\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$.

Câu 15. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của BC và N là trung điểm AM. Đường thẳng BN cắt AC tại P. Khi đó $\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{CP}$ thì giá trị của x là:

Ⓐ $-\frac{4}{3}$. Ⓑ $-\frac{2}{3}$. Ⓒ $-\frac{3}{2}$. Ⓓ $-\frac{5}{3}$.

Câu 16. Cho ba điểm A,B,C phân biệt. Điều kiện cần và đủ để ba điểm thẳng hàng là:

Ⓐ $AB=AC$. Ⓑ $\exists k\neq 0:\overrightarrow{AB}=k.\overrightarrow{AC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$. Ⓓ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC},\forall$ điểm M.

Câu 17. Cho ΔABC. Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$. Các cặp vectơ nào sau đây cùng phương?

Ⓐ $2\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+2\vec{b}$. Ⓑ $\vec{a}-2\vec{b},2\vec{a}-\vec{b}$.
Ⓒ $5\vec{a}+\vec{b},-10\vec{a}-2\vec{b}$. Ⓓ $\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b}$.

Câu 18. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Hai vectơ nào sau đây cùng phương?

Ⓐ $-3\vec{a}+\vec{b}$ và $-\frac{1}{2}\vec{a}+6\vec{b}$. Ⓑ $-\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$ và $2\vec{a}+\vec{b}$.
Ⓒ $\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$ và $-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$. Ⓓ $\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$ và $\vec{a}-2\vec{b}$.

Câu 19. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Hai vectơ nào sau đây là cùng phương?

Ⓐ $\vec{u}=2\vec{a}+3\vec{b}$ và $\vec{v}=\frac{1}{2}\vec{a}-3\vec{b}$.
Ⓑ $\vec{u}=\frac{3}{5}\vec{a}+3\vec{b}$ và $\vec{v}=2\vec{a}-\frac{3}{5}\vec{b}$.
Ⓒ $\vec{u}=\frac{2}{3}\vec{a}+3\vec{b}$ và $\vec{v}=2\vec{a}-9\vec{b}$.
Ⓓ $\vec{u}=2\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$ và $\vec{v}=-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$.

Câu 20. Biết rằng hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nhưng hai vectơ $3\vec{a}-2\vec{b}$ và $(x+1)\vec{a}+4\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là:

Ⓐ -7. Ⓑ 7. Ⓒ 5. Ⓓ 6.

Câu 21. Biết rằng hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nhưng hai vectơ $2\vec{a}-3\vec{b}$ và $\vec{a}+(x-1)\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là:

Ⓐ $\frac{1}{2}$. Ⓑ $-\frac{3}{2}$. Ⓒ $-\frac{1}{2}$. Ⓓ $\frac{3}{2}$.

Câu 22. Cho tam giác ABC. Hai điểm M,N được xác định bởi các hệ thức $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}$, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

Ⓐ $MN\perp AC$.
Ⓑ $MN//AC$.

Ⓒ M nằm trên đường thẳng AC.
Ⓓ Hai đường thẳng MN và AC trùng nhau.

Câu 23. Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Hãy chọn hệ thức đúng:

Ⓐ $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BC}$.
Ⓑ $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$.
Ⓒ $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$.
Ⓓ $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$.

Câu 24. Cho tam giác ABC với H, O, G lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm của tam giác. Hệ thức đúng là:

Ⓐ $\overrightarrow{OH}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{OG}$.
Ⓑ $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$.
Ⓒ $\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GH}$.
Ⓓ $2\overrightarrow{GO}=-3\overrightarrow{OH}$.

Câu 25. Ba trung tuyến AM, BN, CP của tam giác ABC đồng quy tại G. Hỏi vectơ $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}$ bằng vectơ nào?

Ⓐ $\dfrac{3}{2}(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})$.
Ⓑ $3(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{NG}+\overrightarrow{GP})$.
Ⓒ $\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC})$.
Ⓓ $\overrightarrow{0}$.

Câu 26. Cho hình chữ nhật $ABCD$, I và K lần lượt là trung điểm của BC, CD. Hệ thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AC}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{IK}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

Câu 27. Cho tam giác đều ABC tâm O. Điểm M là điểm bất kỳ trong tam giác. Hình chiếu của M xuống ba cạnh của tam giác lần lượt là D, E, F. Hệ thức giữa các vectơ $\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{ME}, \overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MO}$ là:

Ⓐ $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{MO}$.
Ⓑ $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{MO}$.
Ⓒ $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{MO}$.
Ⓓ $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{MO}$.

Câu 28. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N là trung điểm AB và DC. Lấy các điểm P, Q lần lượt thuộc các đường thẳng AD và BC sao cho $\overrightarrow{PA}=-2\overrightarrow{PD}, \overrightarrow{QB}=-2\overrightarrow{QC}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$.
Ⓑ $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}$.
Ⓒ $\overrightarrow{MN}=-\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$.
Ⓓ $\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NA})$.

Câu 29. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Với điểm M bất kỳ, ta luôn có:

Ⓐ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}$.
Ⓑ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.
Ⓒ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MI}$.
Ⓓ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{MI}$.

Câu 30. Cho G là trọng tâm của tam giác ABC. Với mọi điểm M, ta luôn có:

Ⓐ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MG}$.
Ⓑ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MG}$.
Ⓒ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.
Ⓓ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MG}$.

Câu 31. Cho ΔABC có G là trọng tâm, I là trung điểm BC. Đẳng thức nào **đúng**?

Ⓐ $\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{GI}$.
Ⓑ $\overrightarrow{IG}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$.
Ⓒ $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GI}$.
Ⓓ $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}$.

Câu 32. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào **đúng**?

Ⓐ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BC}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{CD}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CD}$.

Câu 33. Cho G là trọng tâm của tam giác ABC. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **đúng**?

Ⓐ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AG}$.
Ⓑ $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BG}$.
Ⓒ $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CG}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$.

BẢNG ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

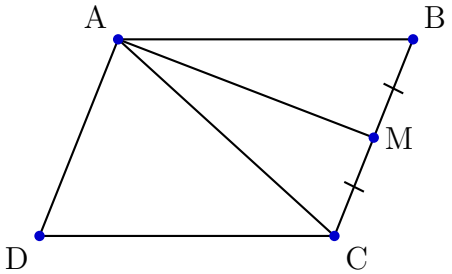
Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á
1	C	2	A	3	D	4	A	5	B
6	C	7	B	8	C	9	B	10	A
11	C	12	D	13	C	14	D	15	C
16	B	17	C	18	C	19	D	20	A
21	C	22	B	23	C	24	B	25	D
26	D	27	D	28	D	29	B	30	C
31	C	32	A	33	B				

IV. LỜI GIẢI CHI TIẾT

1) Bài tập tự luận

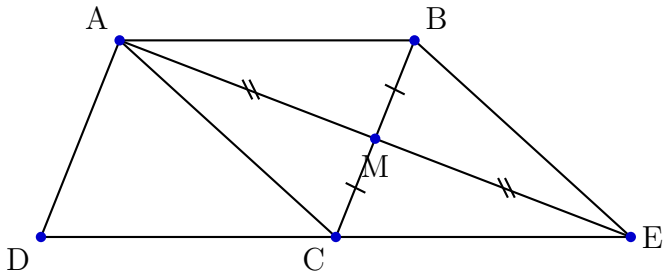
Bài 1. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Hãy biểu thị $\overrightarrow{AM}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AD}$.

Hướng dẫn giải. Ta có hình vẽ sau:



» Sưu tầm và biên soạn: Lê Minh Kha - 0399653362

Gọi E là điểm đối xứng với A qua M. Khi đó ABEC là hình bình hành



Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AE}$ (quy tắc hình bình hành)

Mà $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AM}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$

Ta lại có: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ (quy tắc hình bình hành)

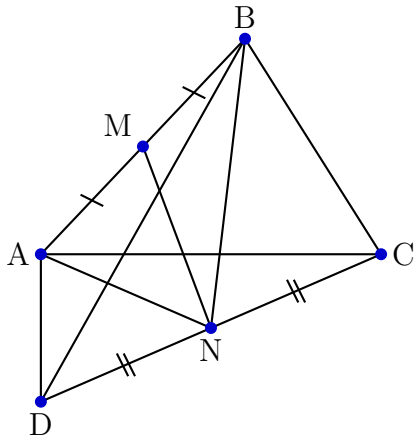
$\Rightarrow \overrightarrow{AM}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}{2}$

$=\dfrac{2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}{2}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$

Vậy $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$

Bài 2. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M,N tương ứng là trung điểm của các cạnh AB,CD. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

Hướng dẫn giải.



Ta có: $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$

(Do $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$) (1)

Vì N là trung điểm của CD nên $\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}$, M là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$, suy ra $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}=(\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{MA})+(\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{MB})=2\overrightarrow{NM}+(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})=2\overrightarrow{NM}.$

Do đó, ta có: $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{NC}-\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{ND}-\overrightarrow{NA}=(\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND})-(\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NA})$

$=-(\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NA})=-2\overrightarrow{NM}=2\overrightarrow{MN}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}.$

Bài 3. Cho hai điểm phân biệt A và B.

a) Hãy xác định điểm K sao cho $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\vec{0}$.

b) Chứng minh rằng với mọi điểm O, ta có $\overrightarrow{OK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$.

Hướng dẫn giải. a) $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{KA}+2(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AB})=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{KA}=-2\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AK}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

b) Ta có: $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{KA}=-2\overrightarrow{KB}$

$\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{KA})+\frac{2}{3}(\overrightarrow{OK}+\overrightarrow{KB})=\overrightarrow{OK}+\frac{1}{3}\overrightarrow{KA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{OK}+\frac{1}{3}(-2\overrightarrow{KB})+\frac{2}{3}\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{OK}$

Bài 4. Cho tam giác ABC.

a) Hãy xác định điểm M để $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

b) Chứng minh rằng với mọi điểm O, ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OM}$.

Hướng dẫn giải. a)

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

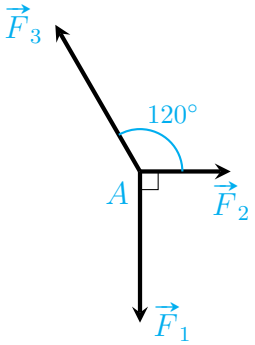
$\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MA}=-(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC})$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC})$

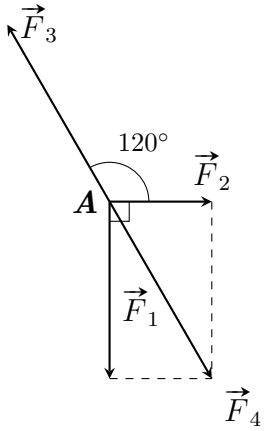
b) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{OM}$

Bài 5. Chất điểm A chịu tác động của ba lực $\vec{F}_1,\vec{F}_2,\vec{F}_3$ như Hình 4.30 và ở trạng thái cân bằng (tức là $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=\vec{0}$). Tính độ lớn của các lực $\vec{F}_2,\vec{F}_3$, biết $\vec{F}_1$ có độ lớn là 20 N.



Hình 4.30

Hướng dẫn giải.



$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_4$

$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}_4 = -\vec{F}_3 \Rightarrow |-\vec{F}_3| = |\vec{F}_4|$

Ta có: $|\vec{F}_2| = |\vec{F}_1| \cdot \tan 30^\circ = \dfrac{20\sqrt{3}}{3}; |\vec{F}_4| = \dfrac{|\vec{F}_1|}{\cos 30^\circ} = \dfrac{40\sqrt{3}}{3};$

Vậy $|\vec{F}_2| = \dfrac{20\sqrt{3}}{3}$ N, $|\vec{F}_3| = \dfrac{40\sqrt{3}}{3}$ N.

2) Bài tập trắc nghiệm

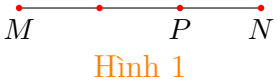
Câu 1. Khẳng định nào **sai**?

Ⓐ $1.\vec{a} = \vec{a}$.
Ⓑ $k\vec{a}$ và $\vec{a}$ cùng hướng khi $k > 0$.
Ⓒ $k\vec{a}$ và $\vec{a}$ cùng hướng khi $k < 0$.
Ⓓ Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b} \neq \vec{0}$ cùng phương khi có một số k để $\vec{a} = k\vec{b}$.

Hướng dẫn giải. Chọn C.

(Dựa vào định nghĩa tích của một số với một vectơ).

Câu 2. Trên đường thẳng MN lấy điểm P sao cho $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$. Điểm P được xác định đúng trong hình vẽ nào sau đây:



Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

Ⓐ Hình 3. Ⓑ Hình 4. Ⓒ Hình 1. Ⓓ Hình 2.

Hướng dẫn giải. Chọn A.

$\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP} \Rightarrow \overrightarrow{MN}$ ngược hướng với $\overrightarrow{MP}$ và $|\overrightarrow{MN}| = 3|\overrightarrow{MP}|$.

Câu 3. Cho ba điểm phân biệt A, B, C. Nếu $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$ thì đẳng thức nào dưới đây **đúng**?

Ⓐ $\overrightarrow{BC} = -4\overrightarrow{AC}$.
Ⓑ $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{AC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC}$.
Ⓓ $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{AC}$.

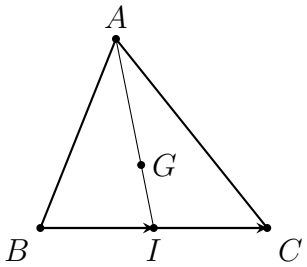
Hướng dẫn giải. Chọn D.



Câu 4. Cho tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của BC. Khẳng định nào sau đây đúng

Ⓐ $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{IC}$. Ⓑ $3\overrightarrow{BI}=2\overrightarrow{IC}$. Ⓒ $\overrightarrow{BI}=2\overrightarrow{IC}$. Ⓓ $2\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{IC}$.

Hướng dẫn giải. Chọn A.



Vì I là trung điểm của BC nên $BI=CI$ và $\overrightarrow{BI}$ cùng hướng với $\overrightarrow{IC}$ do đó hai vectơ $\overrightarrow{BI},\overrightarrow{IC}$ bằng nhau hay $\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{IC}$.

Câu 5. Cho tam giác ABC. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **sai**?

Ⓐ $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AM}$. Ⓑ $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{CN}$.
Ⓒ $\overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{NM}$. Ⓓ $\overrightarrow{CN}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Hướng dẫn giải. Chọn B.

Câu 6. Cho $\vec{a}\neq\vec{0}$ và điểm O. Gọi M,N lần lượt là hai điểm thỏa mãn $\overrightarrow{OM}=3\vec{a}$ và $\overrightarrow{ON}=-4\vec{a}$. Khi đó:

Ⓐ $\overrightarrow{MN}=7\vec{a}$. Ⓑ $\overrightarrow{MN}=-5\vec{a}$.
Ⓒ $\overrightarrow{MN}=-7\vec{a}$. Ⓓ $\overrightarrow{MN}=-5\vec{a}$.

Hướng dẫn giải. Chọn C.

Ta có: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=-4\vec{a}-3\vec{a}=-7\vec{a}$.

Câu 7. Tìm giá trị của m sao cho $\vec{a}=m\vec{b}$, biết rằng $\vec{a}$, $\vec{b}$ ngược hướng và $|\vec{a}|=5,|\vec{b}|=15$

Ⓐ $m=3$. Ⓑ $m=-\dfrac{1}{3}$. Ⓒ $m=\dfrac{1}{3}$. Ⓓ $m=-3$.

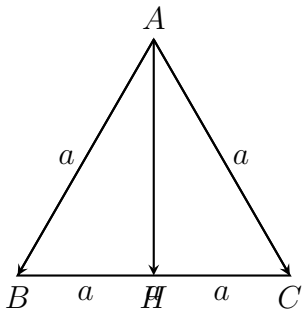
Hướng dẫn giải. Chọn B.

Do $\vec{a}$, $\vec{b}$ ngược hướng nên $m=-\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}=-\dfrac{5}{15}=-\dfrac{1}{3}$.

Câu 8. Cho tam giác ABC đều có cạnh bằng $2a$. Độ dài của $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ bằng:

Ⓐ $2a$. Ⓑ $a\sqrt{3}$. Ⓒ $2a\sqrt{3}$. Ⓓ $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải. Chọn C.



Gọi H là trung điểm của BC. Khi đó: $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=|2\overrightarrow{AH}|=2AH=2\cdot\dfrac{2a\sqrt{3}}{2}=2a\sqrt{3}$.

Câu 9. Cho tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của AB. Tìm điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

Ⓐ M là trung điểm của BC.
Ⓑ M là trung điểm của IC.
Ⓒ M là trung điểm của IA.
Ⓓ M là điểm trên cạnh IC sao cho $IM=2MC$.

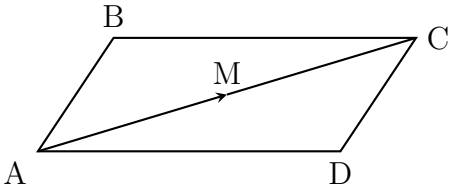
Hướng dẫn giải. Chọn B

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow M$ là trung điểm của IC.

Câu 10. Cho hình bình hành $ABCD$, điểm M thỏa mãn $4\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}$. Khi đó điểm M là:

Ⓐ Trung điểm của AC.
Ⓑ Điểm C.
Ⓒ Trung điểm của AB.
Ⓓ Trung điểm của AD.

Hướng dẫn giải. Chọn A

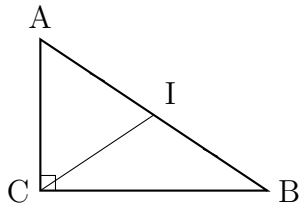


Theo quy tắc hình bình hành, ta có: $4\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\Rightarrow M$ là trung điểm của AC.

Câu 11. Cho tam giác ABC có điểm O thỏa mãn: $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ Tam giác ABC đều.
Ⓑ Tam giác ABC cân tại C.
Ⓒ Tam giác ABC vuông tại C.
Ⓓ Tam giác ABC cân tại B.

Hướng dẫn giải. Chọn C

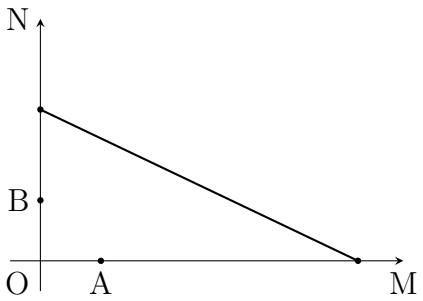


Gọi I là trung điểm của AB. Ta có:
$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{BA}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}|=AB$
$\Leftrightarrow |2\overrightarrow{CI}|=AB \Leftrightarrow 2CI=AB \Leftrightarrow CI=\dfrac{1}{2}AB \Rightarrow$ Tam giác ABC vuông tại C.

Câu 12. Cho tam giác OAB vuông cân tại O với $OA=OB=a$. Độ dài của vectơ $\vec{u}=\dfrac{21}{4}\overrightarrow{OA}-\dfrac{5}{2}\overrightarrow{OB}$ là:

Ⓐ $\dfrac{a\sqrt{140}}{4}$. Ⓑ $\dfrac{a\sqrt{321}}{4}$. Ⓒ $\dfrac{a\sqrt{520}}{4}$. Ⓓ $\dfrac{a\sqrt{541}}{4}$.

Hướng dẫn giải. Chọn D



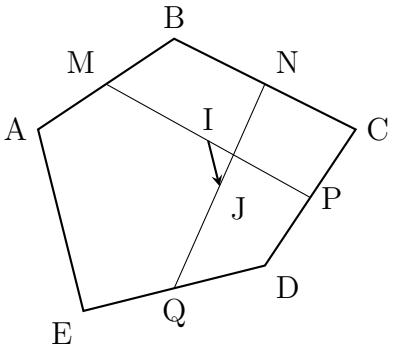
Dựng điểm M,N sao cho: $\overrightarrow{OM}=\dfrac{21}{4}\overrightarrow{OA},\overrightarrow{ON}=\dfrac{5}{2}\overrightarrow{OB}$. Khi đó:

$$|\vec{u}|=|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{ON}|=|\overrightarrow{NM}|=MN=\sqrt{OM^2+ON^2}=\sqrt{\left(\frac{21a}{4}\right)^2+\left(\frac{5a}{2}\right)^2}=\frac{a\sqrt{541}}{4}.$$

Câu 13. Cho ngũ giác $ABCDE$. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB,BC,CD,DE. Gọi I và J lần lượt là trung điểm các đoạn MP và NQ. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{IJ}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE}$. Ⓑ $\overrightarrow{IJ}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AE}$. Ⓒ $\overrightarrow{IJ}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AE}$. Ⓓ $\overrightarrow{IJ}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{AE}$.

Hướng dẫn giải. Chọn C



Ta có: $2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IQ}+\overrightarrow{IN}=\overrightarrow{IM}+\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{IP}+\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{PN}$

$$\begin{cases}\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EQ}\\ \overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DQ}\end{cases} \Rightarrow 2\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{MQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BD}),\overrightarrow{PN}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$$

Suy ra: $2\overrightarrow{IJ}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BD})-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE} \Rightarrow \overrightarrow{IJ}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AE}$.

Câu 14. Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm trên đoạn AB sao cho $MA=\dfrac{1}{5}AB$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

Ⓐ $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$.
Ⓑ $\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{MB}$.
Ⓒ $\overrightarrow{MB}=-4\overrightarrow{MA}$.
Ⓓ $\overrightarrow{MB}=-\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$.

Hướng dẫn giải. Chọn D

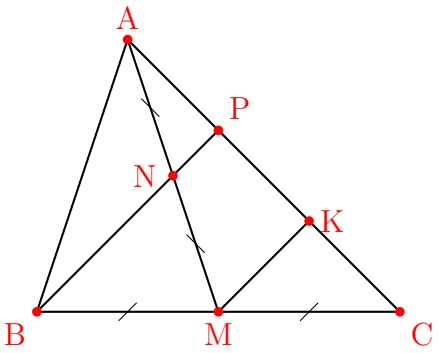


Ta thấy $\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{MB}=-\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$ là sai.

Câu 15. Cho tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của BC và N là trung điểm AM. Đường thẳng BN cắt AC tại P. Khi đó $\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{CP}$ thì giá trị của x là:

Ⓐ $-\frac{4}{3}$.
Ⓑ $-\frac{2}{3}$.
Ⓒ $-\frac{3}{2}$.
Ⓓ $-\frac{5}{3}$.

Hướng dẫn giải. Chọn C



Kẻ $MK//BP(K\in AC)$. Do M là trung điểm của BC nên suy ra K là trung điểm của CP

Vì $MK//BP\Rightarrow MK//NP$ mà N là trung điểm của AM nên suy ra P là trung điểm của AK

Do đó: $AP=PK=KC$. Vậy $\overrightarrow{AC}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{CP}\Rightarrow x=-\frac{3}{2}$.

Câu 16. Cho ba điểm A,B,C phân biệt. Điều kiện cần và đủ để ba điểm thẳng hàng là:

Ⓐ $AB=AC$.
Ⓑ $\exists k\neq 0:\overrightarrow{AB}=k.\overrightarrow{AC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$.
Ⓓ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MC},\forall$ điểm M.

Hướng dẫn giải. Chọn B

Câu 17. Cho ΔABC. Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$. Các cặp vectơ nào sau đây cùng phương?

Ⓐ $2\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+2\vec{b}$.
Ⓑ $\vec{a}-2\vec{b},2\vec{a}-\vec{b}$.
Ⓒ $5\vec{a}+\vec{b},-10\vec{a}-2\vec{b}$.
Ⓓ $\vec{a}+\vec{b},\vec{a}-\vec{b}$.

Hướng dẫn giải. Chọn C

Ta có: $-10\vec{a}-2\vec{b}=-2.(5\vec{a}+\vec{b})\Rightarrow 5\vec{a}+\vec{b}$ và $-10\vec{a}-2\vec{b}$ cùng phương.

Câu 18. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Hai vectơ nào sau đây cùng phương?

Ⓐ $-3\vec{a}+\vec{b}$ và $-\frac{1}{2}\vec{a}+6\vec{b}$.
Ⓑ $-\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$ và $2\vec{a}+\vec{b}$.
Ⓒ $\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$ và $-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$.
Ⓓ $\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$ và $\vec{a}-2\vec{b}$.

Hướng dẫn giải. Chọn C

Câu 19. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Hai vectơ nào sau đây là cùng phương?

Ⓐ $\vec{u}=2\vec{a}+3\vec{b}$ và $\vec{v}=\dfrac{1}{2}\vec{a}-3\vec{b}$.

Ⓑ $\vec{u}=\dfrac{3}{5}\vec{a}+3\vec{b}$ và $\vec{v}=2\vec{a}-\dfrac{3}{5}\vec{b}$.

Ⓒ $\vec{u}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+3\vec{b}$ và $\vec{v}=2\vec{a}-9\vec{b}$.

Ⓓ $\vec{u}=2\vec{a}-\dfrac{3}{2}\vec{b}$ và $\vec{v}=-\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}$.

Hướng dẫn giải. Chọn D

Câu 20. Biết rằng hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nhưng hai vectơ $3\vec{a}-2\vec{b}$ và $(x+1)\vec{a}+4\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là:

Ⓐ -7. Ⓑ 7. Ⓒ 5. Ⓓ 6.

Hướng dẫn giải. Chọn A

Điều kiện để hai vectơ $3\vec{a}-2\vec{b}$ và $(x+1)\vec{a}+4\vec{b}$ cùng phương là: $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{4}{-2}\Leftrightarrow x=-7$.

Câu 21. Biết rằng hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương nhưng hai vectơ $2\vec{a}-3\vec{b}$ và $\vec{a}+(x-1)\vec{b}$ cùng phương. Khi đó giá trị của x là:

Ⓐ $\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $-\dfrac{3}{2}$. Ⓒ $-\dfrac{1}{2}$. Ⓓ $\dfrac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải. Chọn C

Câu 22. Cho tam giác ABC. Hai điểm M,N được xác định bởi các hệ thức $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}$, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **đúng**?

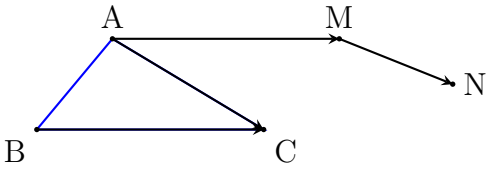
Ⓐ $MN\perp AC$.

Ⓑ $MN//AC$.

Ⓒ M nằm trên đường thẳng AC.

Ⓓ Hai đường thẳng MN và AC trùng nhau.

Hướng dẫn giải. Chọn B



Ta có: $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}\Rightarrow M$ là điểm thứ tư của hình bình hành $ABCM$ nên $M\notin AC$ (1)

Cộng về theo vế hai đẳng thức $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}$, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$, ta được: $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{NA}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AN})+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MN//AC$.

Câu 23. Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Hãy chọn hệ thức đúng:

Ⓐ $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BC}$.

Ⓑ $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$.

Ⓒ $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$.

(D) $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$.

Hướng dẫn giải. Chọn C

Câu 24. Cho tam giác ABC với H, O, G lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm của tam giác. Hệ thức đúng là:

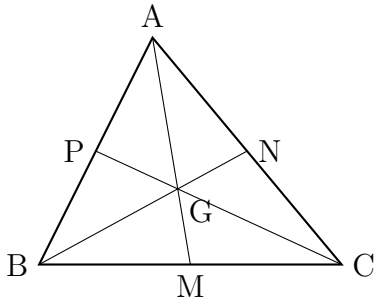
(A) $\overrightarrow{OH}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OG}$.
(B) $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$.
(C) $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$.
(D) $2\overrightarrow{GO}=-3\overrightarrow{OH}$.

Hướng dẫn giải. Chọn B

Câu 25. Ba trung tuyến AM, BN, CP của tam giác ABC đồng quy tại G. Hỏi vectơ $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}$ bằng vectơ nào?

(A) $\frac{3}{2}(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})$.
(B) $3(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{NG}+\overrightarrow{GP})$.
(C) $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC})$.
(D) $\vec{0}$.

Hướng dẫn giải. Chọn D



Ta có: $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BG}+\frac{3}{2}\overrightarrow{CG}=\frac{3}{2}(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG})=\vec{0}$.

Câu 26. Cho hình chữ nhật $ABCD$, I và K lần lượt là trung điểm của BC, CD. Hệ thức nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AC}$.
(B) $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.
(C) $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{IK}$.
(D) $\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

Hướng dẫn giải. Chọn D

Câu 27. Cho tam giác đều ABC tâm O. Điểm M là điểm bất kỳ trong tam giác. Hình chiếu của M xuống ba cạnh của tam giác lần lượt là D, E, F. Hệ thức giữa các vectơ $\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{ME}, \overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MO}$ là:

(A) $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{MO}$.
(B) $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MO}$.
(C) $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{MO}$.
(D) $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$.

Hướng dẫn giải. Chọn D

Câu 28. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N là trung điểm AB và DC. Lấy các điểm P, Q lần lượt thuộc các đường thẳng AD và BC sao cho $\overrightarrow{PA}=-2\overrightarrow{PD}, \overrightarrow{QB}=-2\overrightarrow{QC}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$.
(B) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}$.

Ⓒ $\overrightarrow{MN}=-\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$.

Ⓓ $\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NA})$.

Hướng dẫn giải. Chọn D

Câu 29. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Với điểm M bất kỳ, ta luôn có:

Ⓐ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MI}$.

Ⓑ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.

Ⓒ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=3\overrightarrow{MI}$.

Ⓓ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{MI}$.

Hướng dẫn giải. Chọn B

Câu 30. Cho G là trọng tâm của tam giác ABC. Với mọi điểm M, ta luôn có:

Ⓐ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MG}$.

Ⓑ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MG}$.

Ⓒ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

Ⓓ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MG}$.

Hướng dẫn giải. Chọn C

Câu 31. Cho ΔABC có G là trọng tâm, I là trung điểm BC. Đẳng thức nào **đúng**?

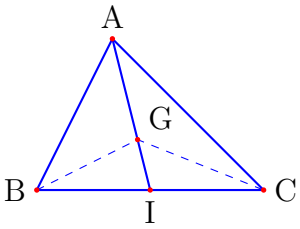
Ⓐ $\overrightarrow{GA}=2\overrightarrow{GI}$.

Ⓑ $\overrightarrow{IG}=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{IA}$.

Ⓒ $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GI}$.

Ⓓ $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GA}$.

Hướng dẫn giải. Chọn C



Câu 32. Cho hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào **đúng**?

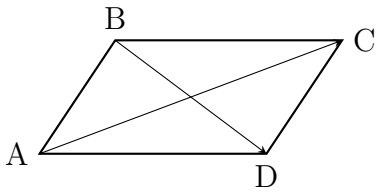
Ⓐ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BC}$.

Ⓑ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}$.

Ⓒ $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{CD}$.

Ⓓ $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CD}$.

Hướng dẫn giải. Chọn A



Câu 33. Cho G là trọng tâm của tam giác ABC. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề **đúng**?

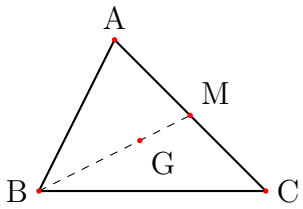
Ⓐ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AG}$.

Ⓑ $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BG}$.

Ⓒ $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CG}$.

Ⓓ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$.

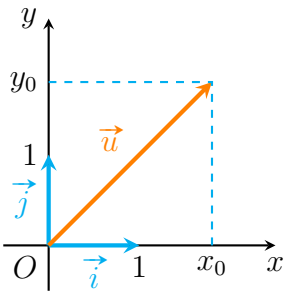
✍ *Hướng dẫn giải.* Chọn B



§4 VECTƠ TRONG MẶT PHẲNG TỌA ĐỘ

I. TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ

Trên mặt phẳng, xét hai trục Ox, Oy có chung gốc O và vuông góc với nhau. Vectơ đơn vị của trục Ox là $\vec{i}$, vectơ đơn vị của trục Oy là $\vec{j}$. Hệ gồm hai trục Ox, Oy như vậy được gọi là *hệ trục tọa độ* Oxy. Điểm O gọi là *gốc tọa độ*, trục Ox gọi là *trục hoành*, trục Oy gọi là *trục tung*. Mặt phẳng chứa hệ trục tọa độ Oxy gọi là mặt phẳng tọa độ Oxy hay mặt phẳng Oxy (H.4.34).



Hình 4.34

Với mỗi vectơ $\vec{u}$ trên mặt phẳng Oxy, có duy nhất cặp số $(x_0; y_0)$ sao cho $\vec{u} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$. Ta nói vectơ $\vec{u}$ có tọa độ $(x_0; y_0)$ và viết $\vec{u} = (x_0; y_0)$ hay $\vec{u}(x_0; y_0)$. Các số x_0, y_0 tương ứng được gọi là hoành độ, tung độ của $\vec{u}$.

NHẬN XÉT. Hai vectơ bằng nhau khi và chỉ khi chúng có cùng tọa độ.

$$\vec{u}(x; y) = \vec{v}(x'; y') \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

Ví dụ 1

Tìm tọa độ của các vectơ đơn vị $\vec{i}, \vec{j}$ tương ứng của các trục Ox, Oy.

Lời giải. Vì $\vec{i} = 1\vec{i} + 0\vec{j}$ nên $\vec{i}$ có tọa độ là $(1; 0)$.

Vì $\vec{j} = 0\vec{i} + 1\vec{j}$ nên $\vec{j}$ có tọa độ là $(0; 1)$.

1 Tìm tọa độ của $\vec{0}$.

» Sưu tầm và biên soạn: Lê Minh Kha - 0399653362

II. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

Cho hai vectơ $\vec{u}=(x;y)$ và $\vec{v}=(x';y')$. Khi đó:

◈ $\vec{u}+\vec{v}=(x+x';y+y')$; • $\vec{u}-\vec{v}=(x-x';y-y')$; • $k\vec{u}=(kx;ky)$, với $k\in\mathbb{R}$.

Ví dụ 2

Cho $\vec{a}=(1;2)$, $\vec{b}=\left(\dfrac{3}{2};3\right)$.

a) Tìm tọa độ của $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-2\vec{b}$.

b) Hỏi $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có cùng phương hay không?

Lời giải. a) Vì $\vec{a}=(1;2)$, $\vec{b}=\left(\dfrac{3}{2};3\right)$ nên $\vec{a}+\vec{b}=\left(\dfrac{5}{2};5\right)$.

Ta có $2\vec{b}=(3;6)$ nên $\vec{a}-2\vec{b}=(-2;-4)$.

b) Do $\dfrac{3}{2}\vec{a}=\left(\dfrac{3}{2};3\right)=\vec{b}$ nên hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

NHẬN XÉT. Vectơ $\vec{v}(x';y')$ cùng phương với vectơ $\vec{u}(x;y)\neq\vec{0}$ khi và chỉ khi tồn tại số k sao cho $x'=kx, y'=ky$ (hay là $\dfrac{x'}{x}=\dfrac{y'}{y}$ nếu $xy\neq 0$).

Nếu điểm M có tọa độ $(x;y)$ thì vectơ $\overrightarrow{OM}$ có tọa độ $(x;y)$ và độ dài $|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2}$.

NHẬN XÉT. Với vectơ $\vec{u}=(x;y)$, ta lấy điểm $M(x;y)$ thì $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$. Do đó, $|\vec{u}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2}$.
Chẳng hạn, vectơ $\vec{u}=(2;-1)$ có độ dài là $|\vec{u}|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$.

Với hai điểm $M(x;y)$ và $N(x';y')$ thì $\overrightarrow{MN}=(x'-x;y'-y)$ và khoảng cách giữa hai điểm M,N là $MN=|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}$.

Ví dụ 3

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(1;-2), B(3;2), C(7;4)$.

a) Tìm tọa độ của các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$. So sánh các khoảng cách từ B tới A và C.

b) Ba điểm A, B, C có thẳng hàng hay không?

c) Tìm điểm $D(x;y)$ để $ABCD$ là một hình thoi.

Lời giải. a) Ta có $\overrightarrow{AB}=(3-1;2-(-2))=(2;4)$, $\overrightarrow{BC}=(7-3;4-2)=(4;2)$.

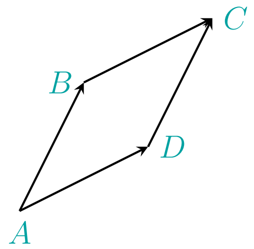
Các khoảng cách từ B tới A và C lần lượt là:

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}; BC = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}.$$

Do đó các khoảng cách này bằng nhau.

b) Hai vectơ $\overrightarrow{AB} = (2; 4), \overrightarrow{BC} = (4; 2)$ không cùng phương (vì $\dfrac{2}{4} \neq \dfrac{4}{2}$). Do đó các điểm A, B, C không cùng nằm trên một đường thẳng. Vậy chúng không thẳng hàng.

c) Các điểm A, B, C không thẳng hàng và $BA = BC$ nên $ABCD$ là một hình thoi khi và chỉ khi $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.
Do $\overrightarrow{AD} = (x - 1; y + 2), \overrightarrow{BC} = (4; 2)$ nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} x - 1 = 4 \\ y + 2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases}$.
Vậy điểm cần tìm là $D(5; 0)$.



Hình 4.36

bài tập tương tự

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(2; 1), B(4; 5), C(8; 7)$.
a) Tìm tọa độ của các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$. So sánh các độ dài AB và BC.
b) Chứng minh ba điểm A, B, C không thẳng hàng.
c) Tìm tọa độ điểm $D(x; y)$ sao cho tứ giác $ABCD$ là một hình thoi.

2 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(2; 1), B(3; 3)$.
a) Các điểm O, A, B có thẳng hàng hay không?
b) Tìm điểm $M(x; y)$ để $OABM$ là một hình bình hành.

- Trung điểm M của đoạn thẳng AB có tọa độ là $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$.
- Trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ là $\left(\dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}; \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$.

③ Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm không thẳng hàng:

$$A(1;3), B(-2;6), C(5;1).$$

a) Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB.
b) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

....
....
....
....
....

III. BÀI TẬP ÔN LUYỆN

1) Bài tập tự luận

Bài 1. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho các điểm $M(1;3), N(4;2)$.

a) Tính độ dài của các đoạn thẳng OM, ON, MN.

b) Chứng minh rằng tam giác OMN vuông cân.

Bài 2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho các vectơ $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{b} = (4;-1)$ và các điểm $M(-3;6), N(3;-3)$.

a) Tìm mối liên hệ giữa các vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $2\vec{a} - \vec{b}$.

b) Các điểm O, M, N có thẳng hàng hay không?

c) Tìm điểm $P(x;y)$ để $OMNP$ là một hình bình hành.

Bài 3. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho các điểm $A(1;3), B(2;4), C(-3;2)$.

a) Hãy giải thích vì sao các điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Tìm toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB.

c) Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

d) Tìm điểm $D(x;y)$ để $O(0;0)$ là trọng tâm của tam giác ABD.

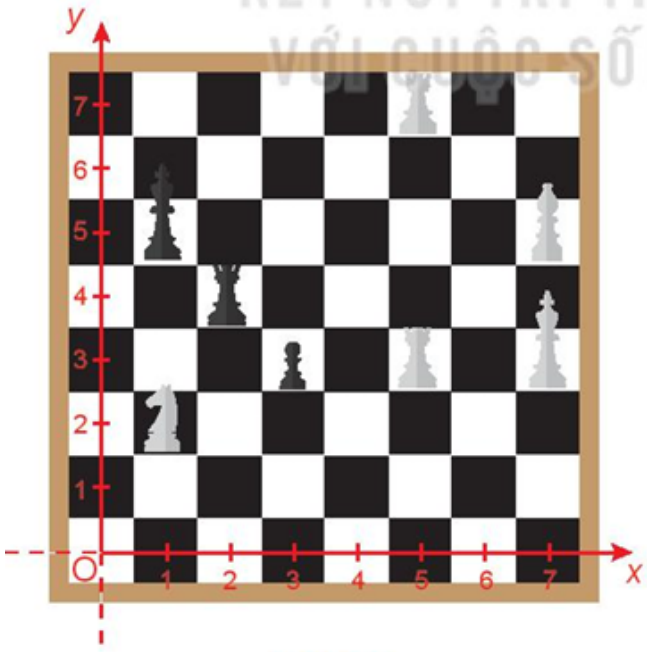
Bài 4. Sự chuyển động của một tàu thuỷ được thể hiện trên một mặt phẳng toạ độ như sau: Tàu khởi hành từ vị trí $A(1;2)$ chuyển động thẳng đều với vận tốc (tính theo giờ) được biểu thị bởi vectơ $\vec{v} = (3;4)$. Xác định vị trí của tàu (trên mặt phẳng toạ độ) tại thời điểm sau khi khởi hành $1,5$ giờ.

Bài 5. Trong Hình 4.38, quân mã đang ở vị trí có toạ độ $(1;2)$. Hỏi sau một nước đi, quân mã có thể đến những vị trí nào?

Bài 6. Trong không gian Oxy, cho hai điểm $A(1;2), B(-2;3)$. Tìm tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$?

Bài 7. Vectơ $\vec{a} = (-4;0)$ được phân tích theo hai vectơ đơn vị $(\vec{i};\vec{j})$ như thế nào?

Bài 8. Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ tâm I và có $A(1;3)$. Biết điểm B thuộc trục Ox và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng với $\vec{i}$. Tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AC}$?



Hình 4.38

Bài 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a và $\widehat{BAD} = 60°$. Biết A trùng với gốc tọa độ O; C thuộc trục Ox và $x_B \geq 0, y_B \geq 0$. Tìm tọa độ các đỉnh B và C của hình thoi $ABCD$.

Bài 10. Trong không gian Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}(1;3)$, $\vec{b}(3;-4)$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{a} - \vec{b}$?

Bài 11. Cho $\vec{a} = (x;2)$, $\vec{b} = (-5;1)$, $\vec{c} = (x;7)$. Tìm x để vectơ $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$.

Bài 12. Cho hai điểm $A(1;0)$ và $B(0;-2)$. Tọa độ điểm D sao cho $\overrightarrow{AD} = -3\overrightarrow{AB}$ là:

Bài 13. Trong mặt phẳng Oxy, cho các điểm $A(1;3), B(4;0)$. Tọa độ điểm M thỏa $3\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ là

Bài 14. Trong mặt phẳng Oxy, cho các điểm $A(-3;3), B(1;4), C(2;-5)$. Tọa độ điểm M thỏa mãn $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{CM}$ là:

2) Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho $\vec{a} = (-1;2)$, $\vec{b} = (5;-7)$. Tìm tọa độ của $\vec{a} - \vec{b}$.

Ⓐ $(6;-9)$. Ⓑ $(4;-5)$. Ⓒ $(-6;9)$. Ⓓ $(-5;-14)$.

Câu 2. Cho $\vec{a} = (3;-4)$, $\vec{b} = (-1;2)$. Tìm tọa độ của $\vec{a} + \vec{b}$.

Ⓐ $(-4;6)$. Ⓑ $(2;-2)$. Ⓒ $(4;-6)$. Ⓓ $(-3;-8)$.

Câu 3. Trong hệ trục tọa độ $(O;\vec{i};\vec{j})$, tọa độ $\vec{i} + \vec{j}$ là:

Ⓐ $(0;1)$. Ⓑ $(1;-1)$. Ⓒ $(-1;1)$. Ⓓ $(1;1)$.

Câu 4. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{a} = (-1;3)$, $\vec{b} = (5;-7)$. Tọa độ vectơ $3\vec{a} - 2\vec{b}$ là:

Ⓐ $(6;-19)$. Ⓑ $(13;-29)$. Ⓒ $(-6;10)$. Ⓓ $(-13;23)$.

Câu 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\vec{a} = (1;2)$, $\vec{b} = (3;4)$. Tọa độ $\vec{c} = 4\vec{a} - \vec{b}$ là

Ⓐ $\vec{c} = (-1;-4)$. Ⓑ $\vec{c} = (4;1)$.
Ⓒ $\vec{c} = (1;4)$. Ⓓ $\vec{c} = (-1;4)$.

Câu 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\vec{a}=(2;1)$, $\vec{b}=(3;-2)$ và $\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}$. Tọa độ của vectơ $\vec{c}$ là

Ⓐ $(13;-4)$. Ⓑ $(13;4)$. Ⓒ $(-13;4)$. Ⓓ $(-13;-4)$.

Câu 7. Cho $\vec{a}(2;7)$, $\vec{b}(-3;5)$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}-\vec{b}$ là.

Ⓐ $(5;2)$. Ⓑ $(-1;12)$. Ⓒ $(-5;-2)$. Ⓓ $(5;-2)$.

Câu 8. Cho $\vec{a}(3;-4)$, $\vec{b}(-1;2)$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}+2\vec{b}$ là

Ⓐ $(-4;6)$. Ⓑ $(4;-6)$. Ⓒ $(1;0)$. Ⓓ $(0;1)$.

Câu 9. Trong hệ trục $(O,\vec{i},\vec{j})$, tọa độ của $\vec{i}-\vec{j}$ là

Ⓐ $(0;1)$. Ⓑ $(1;1)$. Ⓒ $(1;-1)$. Ⓓ $(-1;1)$.

Câu 10. Cho $\vec{a}=(1;2)$ và $\vec{b}=(3;4)$ với $\vec{c}=4\vec{a}-\vec{b}$ thì tọa độ của $\vec{c}$ là:

Ⓐ $\vec{c}=(-1;4)$. Ⓑ $\vec{c}=(4;-1)$.
Ⓒ $\vec{c}=(1;4)$. Ⓓ $\vec{c}=(-1;-4)$.

Câu 11. Cho $\vec{a}=(1;5)$, $\vec{b}=(-2;1)$. Tính $\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}$.

Ⓐ $\vec{c}=(7;13)$. Ⓑ $\vec{c}=(1;17)$.
Ⓒ $\vec{c}=(-1;17)$. Ⓓ $\vec{c}=(1;16)$.

Câu 12. Cho $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}$ và $\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}$. Tìm tọa độ của $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$.

Ⓐ $\vec{c}=(1;-1)$. Ⓑ $\vec{c}=(3;-5)$.
Ⓒ $\vec{c}=(-3;5)$. Ⓓ $\vec{c}=(2;7)$.

Câu 13. Cho hai vectơ $\vec{a}=(1;-4)$; $\vec{b}=(-6;15)$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{u}$ biết $\vec{u}+\vec{a}=\vec{b}$.

Ⓐ $(7;19)$. Ⓑ $(-7;19)$. Ⓒ $(7;-19)$. Ⓓ $(-7;-19)$.

Câu 14. Tìm tọa độ vectơ $\vec{u}$ biết $\vec{u}+\vec{b}=\vec{0}$, $\vec{b}=(2;-3)$.

Ⓐ $(2;-3)$. Ⓑ $(-2;-3)$. Ⓒ $(-2;3)$. Ⓓ $(2;3)$.

Câu 15. Trong hệ tọa độ Oxy, cho $A(2;5), B(1;1), C(3;3)$. Tìm tọa độ điểm E sao cho $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$.

Ⓐ $(3;-3)$. Ⓑ $(-3;3)$. Ⓒ $(-3;-3)$. Ⓓ $(-2;-3)$.

Câu 16. Cho $\vec{a}=(2;-4)$, $\vec{b}=(-5;3)$. Tìm tọa độ của $\vec{u}=2\vec{a}-\vec{b}$.

Ⓐ $\vec{u}=(7;-7)$. Ⓑ $\vec{u}=(9;-11)$.
Ⓒ $\vec{u}=(9;-5)$. Ⓓ $\vec{u}=(-1;5)$.

Câu 17. Cho 3 điểm $A(-4;0), B(-5;0), C(3;0)$. Tìm điểm M trên trục Ox sao cho $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

Ⓐ $(-2;0)$. Ⓑ $(2;0)$. Ⓒ $(-4;0)$. Ⓓ $(-5;0)$.

Câu 18. Trong hệ trục $(O,\vec{i},\vec{j})$ cho 2 vectơ $\vec{a}=(3;2)$, $\vec{b}=-\vec{i}+5\vec{j}$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

Ⓐ $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}$. Ⓑ $\vec{b}=(-1;5)$.
Ⓒ $\vec{a}+\vec{b}=(2;7)$. Ⓓ $\vec{a}-\vec{b}=(2;-3)$.

Câu 19. Cho $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}$, $\vec{v}=-5\vec{i}-\vec{j}$. Gọi $(X;Y)$ là tọa độ của $\vec{w}=2\vec{u}-3\vec{v}$ thì tích XY bằng:

Ⓐ -57. Ⓑ 57. Ⓒ -63. Ⓓ 63.

Câu 20. Cho $A(4;0), B(2;-3), C(9;6)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là:

Ⓐ $(3;5)$. Ⓑ $(5;1)$. Ⓒ $(15;9)$. Ⓓ $(9;15)$.

Câu 21. Trong hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(3;5), B(1;2), C(5;2)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC?

Ⓐ $(-3;4)$. Ⓑ $(4;0)$. Ⓒ $(\sqrt{2};3)$. Ⓓ $(3;3)$.

Câu 22. Trong hệ tọa độ Oxy, cho $A(2;-3), B(4;7)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB.

Ⓐ $(6;4)$. Ⓑ $(2;10)$. Ⓒ $(3;2)$. Ⓓ $(8;-21)$.

Câu 23. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $A=(3;5), B=(1;2), C=(5;2)$. Trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ là:

Ⓐ $(-3;4)$. Ⓑ $(4;0)$. Ⓒ $(\sqrt{2};3)$. Ⓓ $(3;3)$.

Câu 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có tọa độ ba đỉnh lần lượt là $A(2;3), B(5;4), C(-1;-1)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ là:

Ⓐ $(3;3)$. Ⓑ $(2;2)$. Ⓒ $(1;1)$. Ⓓ $(4;4)$.

Câu 25. Cho tam giác ABC có tọa độ ba đỉnh lần lượt là $A(2;3), B(5;4), C(2;2)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác có tọa độ là

Ⓐ $(3;3)$. Ⓑ $(2;2)$. Ⓒ $(1;1)$. Ⓓ $(4;4)$.

Câu 26. Cho hai điểm $B(3;2), C(5;4)$. Tọa độ trung điểm M của BC là

Ⓐ $M=(-8;3)$. Ⓑ $M(4;3)$.
Ⓒ $M(2;2)$. Ⓓ $M=(2;-2)$.

Câu 27. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(5;-2), B(0;3), C(-5;-1)$. Khi đó trọng tâm $\triangle ABC$ là:

Ⓐ $G(0;11)$. Ⓑ $G(1;-1)$. Ⓒ $G(10;0)$. Ⓓ $G(0;0)$.

Câu 28. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $A(2;-3), B(4;7)$. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là:

Ⓐ $I(6;4)$. Ⓑ $I(2;10)$. Ⓒ $I(3;2)$. Ⓓ $I(8;-21)$.

Câu 29. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $A(3;5), B(1;2)$ và $C(2;0)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Ⓐ $G(3;7)$. Ⓑ $G(6;3)$. Ⓒ $G\left(-3;\dfrac{7}{3}\right)$. Ⓓ $G\left(2;\dfrac{7}{3}\right)$.

Câu 30. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $A(3;5), B(1;2)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB.

Ⓐ $I(4;7)$. Ⓑ $I(-2;3)$. Ⓒ $I\left(2;\dfrac{7}{2}\right)$. Ⓓ $I\left(-2;\dfrac{7}{2}\right)$.

Câu 31. Cho tam giác ABC với $A(-3;6); B(9;-10)$ và $G\left(\dfrac{1}{3};0\right)$ là trọng tâm. Tọa độ C là:

Ⓐ $C(5;-4)$. Ⓑ $C(5;4)$. Ⓒ $C(-5;4)$. Ⓓ $C(-5;-4)$.

Câu 32. Trong mặt phẳng Oxy cho $A(4;2), B(1;-5)$. Tìm trọng tâm G của tam giác OAB.

Ⓐ $G\left(\frac{5}{3};-1\right)$. Ⓑ $G\left(\frac{5}{3};2\right)$. Ⓒ $G(1;3)$. Ⓓ $G\left(\frac{5}{3};1\right)$.

Câu 33. Trong hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-2;2), B(3;5)$ và trọng tâm là gốc O. Tìm tọa độ đỉnh C?

Ⓐ $(-1;-7)$. Ⓑ $(2;-2)$. Ⓒ $(-3;-5)$. Ⓓ $(1;7)$.

Câu 34. Trong hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(6;1), B(-3;5)$ và trọng tâm $G(-1;1)$. Tìm tọa độ đỉnh C?

Ⓐ $(6;-3)$. Ⓑ $(-6;3)$. Ⓒ $(-6;-3)$. Ⓓ $(-3;6)$.

Câu 35. Trong hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $M(2;3), N(0;-4), P(-1;6)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Tìm tọa độ đỉnh A?

Ⓐ $(1;5)$. Ⓑ $(-3;-1)$. Ⓒ $(-2;-7)$. Ⓓ $(1;-10)$.

Câu 36. Trong hệ tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(1;1), B(3;2), C(6;5)$. Tìm tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành.

Ⓐ $(4;3)$. Ⓑ $(3;4)$. Ⓒ $(4;4)$. Ⓓ $(8;6)$.

Câu 37. Trong hệ tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(2;1), B(0;-3), C(3;1)$. Tìm tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành.

Ⓐ $(5;5)$. Ⓑ $(5;-2)$. Ⓒ $(5;-4)$. Ⓓ $(-1;-4)$.

Câu 38. Trong mặt phẳng Oxy cho 3 điểm $A=(-1;3), B=(2;0), C=(6;2)$. Tìm tọa độ D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Ⓐ $(9;-1)$. Ⓑ $(3;5)$. Ⓒ $(5;3)$. Ⓓ $(-1;9)$.

Câu 39. Cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(1;1), B(-1;2), C(0;1)$. Tọa độ điểm D là:

Ⓐ $(2;0)$. Ⓑ $(-2;0)$. Ⓒ $(-2;2)$. Ⓓ $(2;-2)$.

Câu 40. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BC, CA, AB. Biết $A(1;3), B(-3;3), C(8$
Giá trị của $x_M + x_N + x_P$ bằng:

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 1. Ⓓ 6.

Câu 41. Cho hình bình hành $ABCD$ có $A(-2;0), B(0;-1), C(4;4)$. Tọa độ đỉnh D là:

Ⓐ $D(2;3)$. Ⓑ $D(6;3)$. Ⓒ $D(6;5)$. Ⓓ $D(2;5)$.

Câu 42. Cho tam giác ABC với $A(-5;6), B(-4;-1)$ và $C(4;3)$. Tìm D để $ABCD$ là hình bình hành:

Ⓐ $D(3;10)$. Ⓑ $D(3;-10)$. Ⓒ $D(-3;10)$. Ⓓ $D(-3;-10)$.

Câu 43. Cho $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}$, $\vec{b}=m\vec{j}+\vec{i}$. Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương thì:

Ⓐ $m=-6$. Ⓑ $m=6$. Ⓒ $m=-\frac{2}{3}$. Ⓓ $m=-\frac{3}{2}$.

Câu 44. Hai vectơ nào có tọa độ sau đây là cùng phương?

Ⓐ $(1;0)$ và $(0;1)$. Ⓑ $(2;1)$ và $(2;-1)$.
Ⓒ $(-1;0)$ và $(1;0)$. Ⓓ $(3;-2)$ và $(6;4)$.

Câu 45. Trong hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(1;1), B(-2;-2), C(7;7)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $G(2;2)$ là trọng tâm tam giác ABC.
Ⓑ B ở giữa hai điểm A và C.
Ⓒ A ở giữa hai điểm B và C.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

Câu 46. Trong hệ tọa độ Oxy, cho $A(-1;5), B(5;5), C(-1;11)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ A, B, C thẳng hàng.
Ⓑ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương.
Ⓒ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

Câu 47. Trong hệ tọa độ Oxy, cho bốn điểm $A(3;-2), B(7;1), C(0;1), D(-8;-5)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ là hai vectơ đối nhau.
Ⓑ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ ngược hướng.
Ⓒ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ cùng hướng.
Ⓓ A, B, C, D thẳng hàng.

Câu 48. Cho $\vec{u} = (3;-2)$, $\vec{v} = (1;6)$. Chọn khẳng định đúng?

Ⓐ $\vec{u} + \vec{v}$ và $\vec{a} = (-4;4)$ ngược hướng.
Ⓑ $\vec{u}, \vec{v}$ cùng phương.
Ⓒ $\vec{u} - \vec{v}$ và $\vec{b} = (6;-24)$ cùng hướng.
Ⓓ $2\vec{u} + \vec{v}, \vec{v}$ cùng phương.

Câu 49. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ $\vec{a} = (-5;0)$, $\vec{b} = (-4;0)$ cùng hướng.
Ⓑ $\vec{c} = (7;3)$ là vectơ đối của $\vec{d} = (-7;3)$.
Ⓒ $\vec{u} = (4;2)$, $\vec{v} = (8;3)$ cùng phương.
Ⓓ $\vec{a} = (6;3)$, $\vec{b} = (2;1)$ ngược hướng.

Câu 50. Các điểm và các vectơ sau đây cho trong hệ trục $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (giả thiết m, n, p, q là những số thực khác 0). Mệnh đề nào sau đây **sai**?

Ⓐ $\vec{a} = (m;0) \Leftrightarrow \vec{a} // \vec{i}$.
Ⓑ $\vec{b} = (0;n) \Leftrightarrow \vec{b} // \vec{j}$.
Ⓒ Điểm $A(n;p) \in x'Ox \Leftrightarrow n = 0$.
Ⓓ $A(0;p), B(q;p)$ thì $AB // x'Ox$.

Câu 51. Hai vectơ nào sau đây **không** cùng phương:

Ⓐ $\vec{a} = (3;5)$ và $\vec{b} = \left(-\frac{6}{7}; -\frac{10}{7}\right)$.
Ⓑ $\vec{c}$ và $-4\vec{c}$.
Ⓒ $\vec{i} = (1;0)$ và $\vec{m} = \left(-\frac{5}{2}; 0\right)$.
Ⓓ $\vec{m} = (-\sqrt{3};0)$ và $\vec{n} = (0;-\sqrt{3})$.

Câu 52. Cho $\vec{u} = (2x-1;3)$, $\vec{v} = (1;x+2)$. Có hai giá trị x_1, x_2 của x để $\vec{u}$ cùng phương với $\vec{v}$. Tính $x_1.x_2$.

Ⓐ $\frac{5}{3}$.
Ⓑ $-\frac{5}{3}$.
Ⓒ $\frac{5}{2}$.
Ⓓ $-\frac{5}{3}$.

Câu 53. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba vectơ $\vec{a} = (1;2)$, $\vec{b} = (-3;1)$, $\vec{c} = (-4;2)$. Biết $\vec{u} = 3\vec{a} + 2\vec{b} + 4\vec{c}$. Chọn khẳng định đúng.

Ⓐ $\vec{u}$ cùng phương với $\vec{i}$.
Ⓑ $\vec{u}$ không cùng phương với $\vec{i}$.
Ⓒ $\vec{u}$ cùng phương với $\vec{j}$.
Ⓓ $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{i}$.

Câu 54. Cho bốn điểm $A(2;5), B(1;7), C(1;5), D(0;9)$. Ba điểm nào sau đây thẳng hàng:

Ⓐ A, B, C. Ⓑ A, C, D. Ⓒ B, C, D. Ⓓ A, B, D.

Câu 55. Trong hệ tọa độ Oxy, cho 4 điểm $A(3;0), B(4;-3), C(8;-1), D(-2;1)$. Ba điểm nào trong bốn điểm đã cho thẳng hàng?

Ⓐ B, C, D. Ⓑ A, B, C. Ⓒ A, B, D. Ⓓ A, C, D.

Câu 56. Cho 2 điểm $A(-2;-3), B(4;7)$. Tìm điểm $M \in y'Oy$ thẳng hàng với A và B.

Ⓐ $M\left(\frac{4}{3};0\right)$. Ⓑ $M\left(0;\frac{1}{3}\right)$.

Ⓒ $M(1;0)$. Ⓓ $M\left(-\frac{1}{3};0\right)$.

Câu 57. Ba điểm nào sau đây **không** thẳng hàng?

Ⓐ $M(-2;4), N(-2;7), P(-2;2)$. Ⓑ $M(-2;4), N(5;4), P(7;4)$.

Ⓒ $M(3;5), N(-2;5), P(-2;7)$. Ⓓ $M(5;-5), N(7;-7), P(-2;2)$.

Câu 58. Cho ba điểm $A(2;-4), B(6;0), C(m;4)$. Định m để A, B, C thẳng hàng.

Ⓐ $m = 10$. Ⓑ $m = -6$. Ⓒ $m = 2$. Ⓓ $m = -10$.

Câu 59. Cho $A(0;-2), B(-3;1)$. Tìm tọa độ giao điểm M của AB với trục $x'Ox$.

Ⓐ $M(-2;0)$. Ⓑ $M(2;0)$.

Ⓒ $M\left(-\frac{1}{2};0\right)$. Ⓓ $M(0;-2)$.

Câu 60. Cho bốn điểm $A(1;-1), B(2;4), C(-2;-7), D(3;3)$. Ba điểm nào trong bốn điểm đã cho thẳng hàng?

Ⓐ A, B, C. Ⓑ A, B, D. Ⓒ B, C, D. Ⓓ A, C, D.

Câu 61. Cho hai điểm $M(-2;2), N(1;1)$. Tìm tọa độ điểm P trên Ox sao cho 3 điểm M, N, P thẳng hàng.

Ⓐ $P(0;4)$. Ⓑ $P(0;-4)$. Ⓒ $P(-4;0)$. Ⓓ $P(4;0)$.

Câu 62. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(6;3), B(-3;6), C(1;-2)$. Xác định điểm E trên cạnh BC sao cho $BE = 2EC$.

Ⓐ $E\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$. Ⓑ $E\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$. Ⓒ $E\left(\frac{2}{3};-\frac{1}{3}\right)$. Ⓓ $E\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Câu 63. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(6;3), B\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right), C(1;-2), D(15;0)$. Xác định giao điểm I hai đường thẳng BD và AC.

Ⓐ $I\left(\frac{7}{2};-\frac{1}{2}\right)$. Ⓑ $I\left(-\frac{7}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Ⓒ $I\left(-\frac{7}{2};-\frac{1}{2}\right)$. Ⓓ $I\left(\frac{7}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Câu 64. Cho ba điểm $A(-1;-1), B(0;1), C(3;0)$. Xác định tọa độ điểm D biết D thuộc đoạn thẳng BC và $2BD = 5DC$.

Ⓐ $\left(\frac{15}{7};\frac{2}{7}\right)$. Ⓑ $\left(-\frac{15}{7};\frac{2}{7}\right)$. Ⓒ $\left(\frac{2}{7};\frac{15}{7}\right)$. Ⓓ $\left(\frac{15}{7};-\frac{2}{7}\right)$.

Câu 65. Cho tam giác ABC có $A(3;4), B(2;1), C(-1;-2)$. Tìm điểm M trên đường thẳng BC sao cho $S_{ABC} = 3S_{ABM}$.

Ⓐ $M_1(0;1), M_2(3;2)$.
Ⓑ $M_1(1;0), M_2(3;2)$.
Ⓒ $M_1(1;0), M_2(2;3)$.
Ⓓ $M_1(0;1), M_2(2;3)$.

Câu 66. Cho hình bình hành $ABCD$ có $A(-2;3)$ và tâm $I(1;1)$. Biết điểm $K(-1;2)$ nằm trên đường thẳng AB và điểm D có hoành độ gấp đôi tung độ. Tìm các đỉnh B, D của hình bình hành.

Ⓐ $B(2;1), D(0;1)$.
Ⓑ $B(0;1); D(4;-1)$.
Ⓒ $B(0;1); D(2;1)$.
Ⓓ $B(2;1), D(4;-1)$.

BẢNG ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á
1	C	2	B	3	D	4	D	5	C
6	A	7	A	8	C	9	C	10	C
11	C	12	B	13	B	14	C	15	C
16	B	17	A	18	D	19	A	20	B
21	D	22	C	23	D	24	B	25	A
26	B	27	D	28	C	29	D	30	C
31	C	32	A	33	A	34	C	35	B
36	C	37	A	38	B	39	A	40	D
41	D	42	A	43	D	44	C	45	C
46	C	47	B	48	C	49	A	50	C
51	D	52	C	53	B	54	D	55	D
56	B	57	C	58	A	59	A	60	D
61	D	62	A	63	D	64	A	65	B
66	C								

IV. LỜI GIẢI CHI TIẾT

1) Bài tập tự luận

Bài 1. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho các điểm $M(1;3), N(4;2)$.

a) Tính độ dài của các đoạn thẳng OM, ON, MN.

b) Chứng minh rằng tam giác OMN vuông cân.

Hướng dẫn giải. a) $OM = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$, $ON = \sqrt{4^2+2^2} = 2\sqrt{5}$.

b) $MN = \sqrt{(4-1)^2+(2-3)^2} = \sqrt{10}$.

Vì $OM^2 + MN^2 = 20 = ON^2$ nên tam giác OMN vuông tại M, mà $OM = MN$ nên tam giác OMN vuông cân tại M.

Bài 2. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho các vectơ $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{b} = (4;-1)$ và các điểm $M(-3;6), N(3;-3)$.

a) Tìm mối liên hệ giữa các vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $2\vec{a} - \vec{b}$.

b) Các điểm O, M, N có thẳng hàng hay không?

c) Tìm điểm $P(x;y)$ để $OMNP$ là một hình bình hành.

Hướng dẫn giải. a) $\overrightarrow{MN} = (6;-9)$; $\vec{a} = (3;-2) \Rightarrow 2\vec{a} = (6;-4)$; $2\vec{a} - \vec{b} = (2;-3)$.

Suy ra $\overrightarrow{MN} = 3(2\vec{a} - \vec{b})$.

b) Ta có: $\overrightarrow{OM} = (-3;6), \overrightarrow{ON} = (3;-3)$.

Vì $\dfrac{-3}{3} \neq \dfrac{6}{-3}$ nên $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$ không cùng phương, suy ra O, M, N không thẳng hàng.

c) Ta có: $\overrightarrow{OM} = (-3;6), \overrightarrow{PN} = (3-x;-3-y)$.

Do đó: $OMNP$ là một hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{PN} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = 3-x \\ 6 = -3-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -9 \end{cases} \Rightarrow P(6;-9)$.

Bài 3. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho các điểm $A(1;3), B(2;4), C(-3;2)$.

a) Hãy giải thích vì sao các điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Tìm toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB.

c) Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

d) Tìm điểm $D(x;y)$ để $O(0;0)$ là trọng tâm của tam giác ABD.

Hướng dẫn giải. a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1;1); \overrightarrow{AC} = (-4;-1)$.

Vì $\dfrac{1}{-4} \neq \dfrac{1}{-1}$ nên $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương, suy ra A, B, C là ba đỉnh của một tam giác.

b) $\begin{cases} x_M = \dfrac{1+2}{2} = \dfrac{3}{2} \\ y_M = \dfrac{3+4}{2} = \dfrac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{7}{2}\right)$.

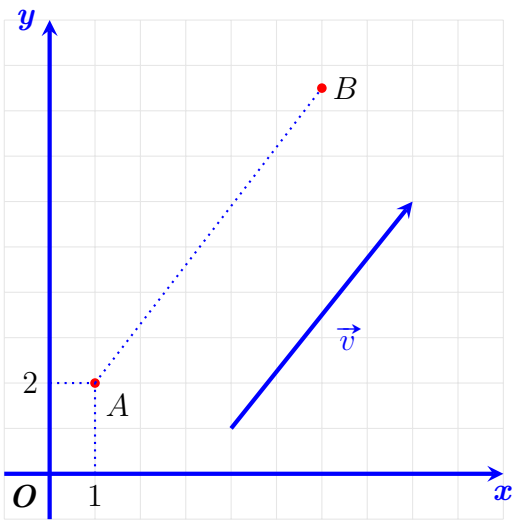
c) $\begin{cases} x_G = \dfrac{1+2+(-3)}{3} = 0 \\ y_G = \dfrac{3+4+2}{3} = 3 \end{cases} \Rightarrow G(0;3)$.

d) Gọi $D(x_D;y_D)$.

Ta có: $\begin{cases} 0 = \dfrac{1+2+x_D}{3} \\ 0 = \dfrac{3+4+y_D}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -3 \\ y_D = -7 \end{cases} \Rightarrow D(-3;-7)$.

Bài 4. Sự chuyển động của một tàu thuỷ được thể hiện trên một mặt phẳng toạ độ như sau: Tàu khởi hành từ vị trí $A(1;2)$ chuyển động thẳng đều với vận tốc (tính theo giờ) được biểu thị bởi vectơ $\vec{v} = (3;4)$. Xác định vị trí của tàu (trên mặt phẳng toạ độ) tại thời điểm sau khi khởi hành $1,5$ giờ.

Hướng dẫn giải.



Gọi $B(x;y), (y>0)$; $|\vec{v}| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$; $\overrightarrow{AB} = (x-1; y-2)$

Quảng đường tàu thủy chạy được sau $1,5$ giờ là: $1,5 \cdot 5 = 7,5$.

Ta có: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} = 7,5 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2 = 7,5^2 \quad (1)$

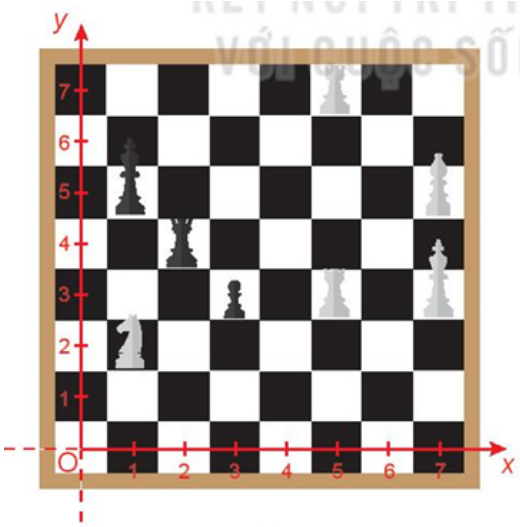
$\overrightarrow{AB}$ và $\vec{v}$ cùng phương nên $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{4} \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{4}y - \dfrac{1}{2} \quad (2)$

Thay (2) vào (1) ta có:

$$\left(\frac{3}{4}y - \frac{1}{2} - 1\right)^2 + (y-2)^2 = 7,5^2 \Leftrightarrow 25y^2 - 100y - 800 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 8 \Rightarrow x = \dfrac{11}{2} \\ y = -4 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy $B\left(8; \dfrac{11}{2}\right)$.

Bài 5. Trong Hình 4.38, quân mã đang ở vị trí có toạ độ $(1;2)$. Hỏi sau một nước đi, quân mã có thể đến những vị trí nào?



Hình 4.38

Hướng dẫn giải. **Quân mã di chuyển** theo hình chữ L, mỗi nước **đi** gồm tổng cộng 3 ô: tiến 1 ô rồi quẹo trái hoặc quẹo phải 2 ô và ngược lại; tiến 2 ô rồi quẹo trái hoặc quẹo phải 1 ô và ngược lại. Khác với toàn bộ **quân cờ trong** bàn **cờ vua, mã** không bị cản bởi bất cứ **quân** nào và có thể nhảy qua tất cả các **quân** khác trên **đường đi của** mình.

Theo cách đi như trên thì Quân mã có thể ở các vị trí sau: $(2;4), (2;0), (3;3), (3;1), (0;4), (0;0)$



Bài 6. Trong không gian Oxy, cho hai điểm $A(1;2), B(-2;3)$. Tìm tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$?

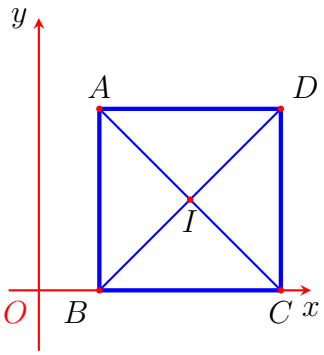
Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2-1; 3-2) = (-3;1)$.

Bài 7. Vectơ $\vec{a} = (-4;0)$ được phân tích theo hai vectơ đơn vị $(\vec{i}; \vec{j})$ như thế nào?

Hướng dẫn giải. Ta có: $\vec{a} = (-4;0) \Rightarrow \vec{a} = -4\vec{i} + 0\vec{j} = -4\vec{i}$.

Bài 8. Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ tâm I và có $A(1;3)$. Biết điểm B thuộc trục Ox và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng với $\vec{i}$. Tìm tọa độ các vectơ $\overrightarrow{AC}$?

Hướng dẫn giải.



Từ giả thiết ta xác định được hình vuông trên mặt phẳng tọa độ Oxy như hình vẽ bên.

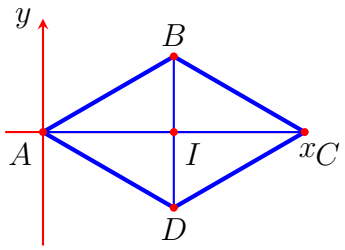
Vì điểm $A(1;3)$ suy ra $AB = 3, OB = 1$.

Do đó $B(1;0), C(4;0), D(4;3)$.

Vậy $\overrightarrow{AC} = (3;-3)$.

Bài 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh a và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Biết A trùng với gốc tọa độ O; C thuộc trục Ox và $x_B \geq 0, y_B \geq 0$. Tìm tọa độ các đỉnh B và C của hình thoi $ABCD$.

Hướng dẫn giải.



Từ giả thiết ta xác định được hình thoi trên mặt phẳng tọa độ Oxy.

Gọi I là tâm hình thoi ta có: $BI = AB\sin 30^\circ = \dfrac{a}{2}$. $AI = \sqrt{AB^2 - BI^2} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $A(0;0), B\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}; \dfrac{a}{2}\right), C(a\sqrt{3};0), D\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}; -\dfrac{a}{2}\right)$.

Bài 10. Trong không gian Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}(1;3)$, $\vec{b}(3;-4)$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{a} - \vec{b}$?

Hướng dẫn giải. Ta có $\vec{a} - \vec{b} = (1-3; 3-(-4)) = (-2;7)$.

Bài 11. Cho $\vec{a} = (x;2)$, $\vec{b} = (-5;1)$, $\vec{c} = (x;7)$. Tìm x để vectơ $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $x = 2 \cdot x + 3 \cdot (-5) \Leftrightarrow x = 15$.

Bài 12. Cho hai điểm $A(1;0)$ và $B(0;-2)$. Tọa độ điểm D sao cho $\overrightarrow{AD} = -3\overrightarrow{AB}$ là:

Hướng dẫn giải. Ta có $\begin{cases} x_D - 1 = -3(0-1) \\ y_D - 0 = -3(-2-0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 4 \\ y_D = 6 \end{cases} \Rightarrow D(4;6)$.

Bài 13. Trong mặt phẳng Oxy, cho các điểm $A(1;3), B(4;0)$. Tọa độ điểm M thỏa $3\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ là

Hướng dẫn giải. Ta có: $3\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x_M - 1) + (4-1) = 0 \\ 3(y_M - 3) + (0-3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 0 \\ y_M = 4 \end{cases} \Rightarrow M(0;4)$.

Bài 14. Trong mặt phẳng Oxy, cho các điểm $A(-3;3), B(1;4), C(2;-5)$. Tọa độ điểm M thỏa mãn $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{CM}$ là:

Hướng dẫn giải. Ta có: $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{CM} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(-3 - x_M) - (2-1) = 4(x_M - 2) \\ 2(3 - y_M) - (-5-4) = 4(y_M + 5) \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x_M = \dfrac{1}{6} \\ y_M = -\dfrac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{1}{6}; -\dfrac{5}{6}\right)$.

2) Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Cho $\vec{a}=(-1;2)$, $\vec{b}=(5;-7)$. Tìm tọa độ của $\vec{a}-\vec{b}$.

Ⓐ $(6;-9)$. Ⓑ $(4;-5)$. Ⓒ $(-6;9)$. Ⓓ $(-5;-14)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\vec{a}-\vec{b}=(-1-5;2-(-7))=(-6;9)$. Chọn C.

Câu 2. Cho $\vec{a}=(3;-4)$, $\vec{b}=(-1;2)$. Tìm tọa độ của $\vec{a}+\vec{b}$.

Ⓐ $(-4;6)$. Ⓑ $(2;-2)$. Ⓒ $(4;-6)$. Ⓓ $(-3;-8)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\vec{a}+\vec{b}=(3+(-1);-4+2)=(2;-2)$. Chọn B.

Câu 3. Trong hệ trục tọa độ $(O;\vec{i};\vec{j})$, tọa độ $\vec{i}+\vec{j}$ là:

Ⓐ $(0;1)$. Ⓑ $(1;-1)$. Ⓒ $(-1;1)$. Ⓓ $(1;1)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\vec{i}=(1;0)$, $\vec{j}=(0;1)\Rightarrow\vec{i}+\vec{j}=(1;1)$. Chọn D.

Câu 4. Trong mặt phẳng Oxy, cho $\vec{a}=(-1;3)$, $\vec{b}=(5;-7)$. Tọa độ vectơ $3\vec{a}-2\vec{b}$ là:

Ⓐ $(6;-19)$. Ⓑ $(13;-29)$. Ⓒ $(-6;10)$. Ⓓ $(-13;23)$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\begin{cases}\vec{a}=(-1;3)\\ \vec{b}=(5;-7)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3\vec{a}=(-3;9)\\ 2\vec{b}=(10;-14)\end{cases}\Rightarrow 3\vec{a}-2\vec{b}=(-13;23)$.
Chọn D.

Câu 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\vec{a}=(1;2)$, $\vec{b}=(3;4)$. Tọa độ $\vec{c}=4\vec{a}-\vec{b}$ là

Ⓐ $\vec{c}=(-1;-4)$. Ⓑ $\vec{c}=(4;1)$.
Ⓒ $\vec{c}=(1;4)$. Ⓓ $\vec{c}=(-1;4)$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\vec{c}=4\vec{a}-\vec{b}=4(1;2)-(3;4)=(1;4)$. Chọn C.

Câu 6. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\vec{a}=(2;1)$, $\vec{b}=(3;-2)$ và $\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}$. Tọa độ của vectơ $\vec{c}$ là

Ⓐ $(13;-4)$. Ⓑ $(13;4)$. Ⓒ $(-13;4)$. Ⓓ $(-13;-4)$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b}=2(2;1)+3(3;-2)=(13;-4)$. Chọn A.

Câu 7. Cho $\vec{a}(2;7)$, $\vec{b}(-3;5)$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}-\vec{b}$ là.

Ⓐ $(5;2)$. Ⓑ $(-1;12)$. Ⓒ $(-5;-2)$. Ⓓ $(5;-2)$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\vec{a}-\vec{b}=(2;7)-(-3;5)=(5;2)$. Chọn A.

Câu 8. Cho $\vec{a}(3;-4)$, $\vec{b}(-1;2)$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}+2\vec{b}$ là

Ⓐ $(-4;6)$. Ⓑ $(4;-6)$. Ⓒ $(1;0)$. Ⓓ $(0;1)$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\begin{cases}\vec{a}=(3;-4)\\ \vec{b}=(-1;2)\Rightarrow 2\vec{b}=(-2;4)\end{cases}\Rightarrow\vec{a}+2\vec{b}=(1;0)$. Chọn C.

Câu 9. Trong hệ trục $(O,\vec{i},\vec{j})$, tọa độ của $\vec{i}-\vec{j}$ là

Ⓐ $(0;1)$. Ⓑ $(1;1)$. Ⓒ $(1;-1)$. Ⓓ $(-1;1)$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\begin{cases}\vec{i}=(1;0)\\ \vec{j}=(0;1)\end{cases} \Rightarrow \vec{i}-\vec{j}=(1;-1)$. Chọn C.

Câu 10. Cho $\vec{a}=(1;2)$ và $\vec{b}=(3;4)$ với $\vec{c}=4\vec{a}-\vec{b}$ thì tọa độ của $\vec{c}$ là:

(A) $\vec{c}=(-1;4)$. (B) $\vec{c}=(4;-1)$.
(C) $\vec{c}=(1;4)$. (D) $\vec{c}=(-1;-4)$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\vec{c}=4\vec{a}-\vec{b}=4(1;2)-(3;4)=(1;4)$. Chọn C.

Câu 11. Cho $\vec{a}=(1;5)$, $\vec{b}=(-2;1)$. Tính $\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}$.

(A) $\vec{c}=(7;13)$. (B) $\vec{c}=(1;17)$.
(C) $\vec{c}=(-1;17)$. (D) $\vec{c}=(1;16)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\begin{cases}\vec{a}=(1;5)\\ \vec{b}=(-2;1)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3\vec{a}=(3;15)\\ 2\vec{b}=(-4;2)\end{cases} \Rightarrow \vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}=(-1;17)$.
Chọn C.

Câu 12. Cho $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}$ và $\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}$. Tìm tọa độ của $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$.

(A) $\vec{c}=(1;-1)$. (B) $\vec{c}=(3;-5)$.
(C) $\vec{c}=(-3;5)$. (D) $\vec{c}=(2;7)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}=(2\vec{i}-3\vec{j})-(-\vec{i}+2\vec{j})=3\vec{i}-5\vec{j} \Rightarrow \vec{c}=(3;-5)$.
Chọn B.

Câu 13. Cho hai vectơ $\vec{a}=(1;-4)$; $\vec{b}=(-6;15)$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{u}$ biết $\vec{u}+\vec{a}=\vec{b}$.

(A) $(7;19)$. (B) $(-7;19)$. (C) $(7;-19)$. (D) $(-7;-19)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\vec{u}+\vec{a}=\vec{b} \Leftrightarrow \vec{u}=\vec{b}-\vec{a}=(-7;19)$. Chọn B.

Câu 14. Tìm tọa độ vectơ $\vec{u}$ biết $\vec{u}+\vec{b}=\vec{0}$, $\vec{b}=(2;-3)$.

(A) $(2;-3)$. (B) $(-2;-3)$. (C) $(-2;3)$. (D) $(2;3)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\vec{u}+\vec{b}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}=-\vec{b}=(-2;3)$. Chọn C.

Câu 15. Trong hệ tọa độ Oxy, cho $A(2;5), B(1;1), C(3;3)$. Tìm tọa độ điểm E sao cho $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$.

(A) $(3;-3)$. (B) $(-3;3)$. (C) $(-3;-3)$. (D) $(-2;-3)$.

Hướng dẫn giải. Gọi $E(x;y)$.
Ta có $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=2(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{CB}$.
$(x-1;y-1)=2(-2;-2) \Leftrightarrow \begin{cases}x-1=-4\\ y-1=-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-3\\ y=-3\end{cases}$.
Vậy $E(-3;-3)$. Chọn C.

Câu 16. Cho $\vec{a}=(2;-4)$, $\vec{b}=(-5;3)$. Tìm tọa độ của $\vec{u}=2\vec{a}-\vec{b}$.

(A) $\vec{u}=(7;-7)$. (B) $\vec{u}=(9;-11)$.
(C) $\vec{u}=(9;-5)$. (D) $\vec{u}=(-1;5)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\vec{u}=2(2;-4)-(-5;3)=(9;-11)$. Chọn B.

Câu 17. Cho 3 điểm $A(-4;0), B(-5;0), C(3;0)$. Tìm điểm M trên trục Ox sao cho $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

Ⓐ $(-2;0)$. Ⓑ $(2;0)$. Ⓒ $(-4;0)$. Ⓓ $(-5;0)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $M \in Ox$ nên $M(x;0)$. Do $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ nên $x=\dfrac{-4-5+3}{3}=-2$. Chọn A.

Câu 18. Trong hệ trục $(O,\vec{i},\vec{j})$ cho 2 vectơ $\vec{a}=(3;2)$, $\vec{b}=-\vec{i}+5\vec{j}$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

Ⓐ $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}$. Ⓑ $\vec{b}=(-1;5)$.
Ⓒ $\vec{a}+\vec{b}=(2;7)$. Ⓓ $\vec{a}-\vec{b}=(2;-3)$.

Hướng dẫn giải. $\vec{a}=(3;2)$, $\vec{b}=(-1;5) \Rightarrow \vec{a}-\vec{b}=(4;-3)$. Chọn D.

Câu 19. Cho $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}$, $\vec{v}=-5\vec{i}-\vec{j}$. Gọi $(X;Y)$ là tọa độ của $\vec{w}=2\vec{u}-3\vec{v}$ thì tích XY bằng:

Ⓐ -57. Ⓑ 57. Ⓒ -63. Ⓓ 63.

Hướng dẫn giải. $\vec{w}=2\vec{u}-3\vec{v}=2(2\vec{i}-3\vec{j})-3(-5\vec{i}-\vec{j})=19\vec{i}-3\vec{j} \Rightarrow X=19, Y=-3 \Rightarrow XY=-57$. Chọn A.

Câu 20. Cho $A(4;0), B(2;-3), C(9;6)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là:

Ⓐ $(3;5)$. Ⓑ $(5;1)$. Ⓒ $(15;9)$. Ⓓ $(9;15)$.

Hướng dẫn giải. Trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ thỏa mãn: $\begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=\dfrac{4+2+}{3} \\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=\dfrac{0-3+6}{3} \end{cases}$

$G(5;1)$. Chọn B.

Câu 21. Trong hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(3;5), B(1;2), C(5;2)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC?

Ⓐ $(-3;4)$. Ⓑ $(4;0)$. Ⓒ $(\sqrt{2};3)$. Ⓓ $(3;3)$.

Hướng dẫn giải. Ta có tọa độ $G=\left(\dfrac{3+1+5}{3};\dfrac{5+2+2}{3}\right)=(3;3)$. Chọn D.

Câu 22. Trong hệ tọa độ Oxy, cho $A(2;-3), B(4;7)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB.

Ⓐ $(6;4)$. Ⓑ $(2;10)$. Ⓒ $(3;2)$. Ⓓ $(8;-21)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $I=\left(\dfrac{2+4}{2};\dfrac{-3+7}{2}\right)=(3;2)$. Chọn C.

Câu 23. Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC có $A=(3;5), B=(1;2), C=(5;2)$. Trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ là:

Ⓐ $(-3;4)$. Ⓑ $(4;0)$. Ⓒ $(\sqrt{2};3)$. Ⓓ $(3;3)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $G(x_G;y_G)$ là trọng tâm tam giác ABC nên: $\begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=\dfrac{3+1+5}{3}= \\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=\dfrac{5+2+2}{3}= \end{cases}$

$G=(3;3)$. Chọn D.

Câu 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có tọa độ ba đỉnh lần lượt là $A(2;3), B(5;4), C(-1;-1)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ là:

Ⓐ $(3;3)$. Ⓑ $(2;2)$. Ⓒ $(1;1)$. Ⓓ $(4;4)$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Để G là trọng tâm tam giác $ABC \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow G(2;2)$.

Chọn B.

Câu 25. Cho tam giác ABC có tọa độ ba đỉnh lần lượt là $A(2;3), B(5;4), C(2;2)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác có tọa độ là

Ⓐ $(3;3)$. Ⓑ $(2;2)$. Ⓒ $(1;1)$. Ⓓ $(4;4)$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Ta có: $\begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3x_G \\ y_A + y_B + y_C = 3y_G \end{cases} \Leftrightarrow G(3;3)$. Chọn A.

Câu 26. Cho hai điểm $B(3;2), C(5;4)$. Tọa độ trung điểm M của BC là

Ⓐ $M = (-8;3)$. Ⓑ $M(4;3)$.
Ⓒ $M(2;2)$. Ⓓ $M = (2;-2)$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Ta có: $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_B + x_C}{2} \\ y_M = \dfrac{y_B + y_C}{2} \end{cases} \Leftrightarrow M(4;3)$. Chọn B.

Câu 27. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(5;-2), B(0;3), C(-5;-1)$. Khi đó trọng tâm $\triangle ABC$ là:

Ⓐ $G(0;11)$. Ⓑ $G(1;-1)$. Ⓒ $G(10;0)$. Ⓓ $G(0;0)$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Ta có: $\begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3x_G \\ y_A + y_B + y_C = 3y_G \end{cases} \Leftrightarrow G(0;0)$. Chọn D.

Câu 28. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $A(2;-3), B(4;7)$. Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là:

Ⓐ $I(6;4)$. Ⓑ $I(2;10)$. Ⓒ $I(3;2)$. Ⓓ $I(8;-21)$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Ta có: $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow I(3;2)$. Chọn C.

Câu 29. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $A(3;5), B(1;2)$ và $C(2;0)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Ⓐ $G(3;7)$. Ⓑ $G(6;3)$. Ⓒ $G\left(-3;\dfrac{7}{3}\right)$. Ⓓ $G\left(2;\dfrac{7}{3}\right)$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Để G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow \begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3x_G \\ y_A + y_B + y_C = 3y_G \end{cases} \Rightarrow G\left(2;\dfrac{7}{3}\right)$.

Chọn D.

Câu 30. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho $A(3;5), B(1;2)$. Tìm tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB.

Ⓐ $I(4;7)$. Ⓑ $I(-2;3)$. Ⓒ $I\left(2;\dfrac{7}{2}\right)$. Ⓓ $I\left(-2;\dfrac{7}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow I\left(2; \dfrac{7}{2}\right)$. Chọn C.

Câu 31. Cho tam giác ABC với $A(-3;6); B(9;-10)$ và $G\left(\dfrac{1}{3};0\right)$ là trọng tâm. Tọa độ C là:

Ⓐ $C(5;-4)$. Ⓑ $C(5;4)$. Ⓒ $C(-5;4)$. Ⓓ $C(-5;-4)$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3x_G \\ y_A + y_B + y_C = 3y_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 3x_G - (x_A + x_B) \\ y_C = 3y_G - (y_A + y_B) \end{cases} \Rightarrow C(-5;4)$.
Chọn C.

Câu 32. Trong mặt phẳng Oxy cho $A(4;2), B(1;-5)$. Tìm trọng tâm G của tam giác OAB.

Ⓐ $G\left(\dfrac{5}{3};-1\right)$. Ⓑ $G\left(\dfrac{5}{3};2\right)$. Ⓒ $G(1;3)$. Ⓓ $G\left(\dfrac{5}{3};1\right)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_O + x_A + x_B}{3} = \dfrac{0+4+1}{3} = \dfrac{5}{3} \\ y_G = \dfrac{y_O + y_A + y_B}{3} = \dfrac{0+2-5}{3} = -1 \end{cases} \Rightarrow G\left(\dfrac{5}{3};-1\right)$. Chọn A.

Câu 33. Trong hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-2;2), B(3;5)$ và trọng tâm là gốc O. Tìm tọa độ đỉnh C?

Ⓐ $(-1;-7)$. Ⓑ $(2;-2)$. Ⓒ $(-3;-5)$. Ⓓ $(1;7)$.

Hướng dẫn giải. Gọi $C(x;y)$. Ta có O là trọng tâm $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-2+3+x}{3} = 0 \\ \dfrac{2+5+y}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -7 \end{cases}$.

Vậy $C(-1;-7)$. Chọn A.

Câu 34. Trong hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(6;1), B(-3;5)$ và trọng tâm $G(-1;1)$. Tìm tọa độ đỉnh C?

Ⓐ $(6;-3)$. Ⓑ $(-6;3)$. Ⓒ $(-6;-3)$. Ⓓ $(-3;6)$.

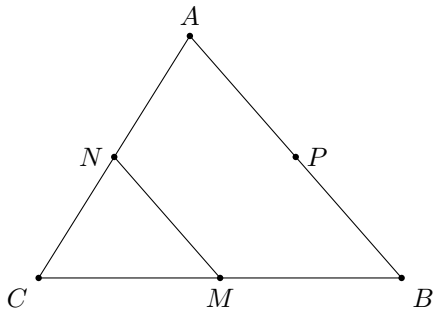
Hướng dẫn giải. Gọi $C(x;y)$. Ta có G là trọng tâm $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{6+(-3)+x}{3} = -1 \\ \dfrac{1+5+y}{3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = -3 \end{cases}$.

Vậy $C(-6;-3)$. Chọn C.

Câu 35. Trong hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $M(2;3), N(0;-4), P(-1;6)$ lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Tìm tọa độ đỉnh A?

Ⓐ $(1;5)$. Ⓑ $(-3;-1)$. Ⓒ $(-2;-7)$. Ⓓ $(1;-10)$.

✍ *Hướng dẫn giải.*



Gọi $A(x;y)$. Ta có $\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{MN}\Leftrightarrow(x+1;y-6)=(0-2;-4-3)=(-2;-7)$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}x+1=-2\\y-6=-7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\y=-1\end{cases}$. Vậy $A(-3;-1)$. Chọn B.

Câu 36. Trong hệ tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(1;1),B(3;2),C(6;5)$. Tìm tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành.

Ⓐ $(4;3)$. Ⓑ $(3;4)$. Ⓒ $(4;4)$. Ⓓ $(8;6)$.

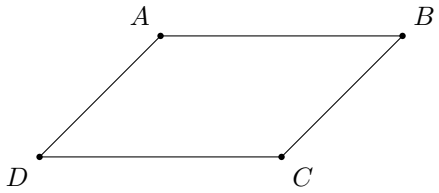
✍ *Hướng dẫn giải.* Gọi $D(x;y)$, $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow(x-1;y-1)=(3;3)\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=3\\y-1=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=4\end{cases}$.

Vậy $D(4;4)$. Chọn C.

Câu 37. Trong hệ tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(2;1),B(0;-3),C(3;1)$. Tìm tọa độ điểm D để $ABCD$ là hình bình hành.

Ⓐ $(5;5)$. Ⓑ $(5;-2)$. Ⓒ $(5;-4)$. Ⓓ $(-1;-4)$.

✍ *Hướng dẫn giải.*



Gọi $D(x;y)$, $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow(x-2;y-1)=(3;4)\Leftrightarrow\begin{cases}x-2=3\\y-1=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\y=5\end{cases}$.

Vậy $D(5;5)$. Chọn A.

Câu 38. Trong mặt phẳng Oxy cho 3 điểm $A=(-1;3),B=(2;0),C=(6;2)$. Tìm tọa độ D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Ⓐ $(9;-1)$. Ⓑ $(3;5)$. Ⓒ $(5;3)$. Ⓓ $(-1;9)$.

✍ *Hướng dẫn giải.* $ABCD$ là hình bình hành khi $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;-3),\overrightarrow{DC}=(6-x;2-y)$ với $D(x;y)$.

Nên $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{cases}6-x=3\\2-y=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=5\end{cases}\Rightarrow D(3;5)$. Chọn B.

Câu 39. Cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(1;1), B(-1;2), C(0;1)$. Tọa độ điểm D là:

Ⓐ $(2;0)$. Ⓑ $(-2;0)$. Ⓒ $(-2;2)$. Ⓓ $(2;-2)$.

Hướng dẫn giải. Gọi $D(x;y)$ là điểm cần tìm. Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-2;1), \overrightarrow{DC}=(-x;1-y)$.

Để $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{cases}-x=-2\\1-y=1\end{cases}\Rightarrow D(2;0)$. Chọn A.

Câu 40. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BC, CA, AB. Biết $A(1;3), B(-3;3), C($
Giá trị của $x_M+x_N+x_P$ bằng:

Ⓐ 2. Ⓑ 3. Ⓒ 1. Ⓓ 6.

Hướng dẫn giải. Ta có: M là trung điểm $BC\Rightarrow x_M=\dfrac{5}{2}$.

N là trung điểm $AC\Rightarrow x_N=\dfrac{9}{2}$.

P là trung điểm $AB\Rightarrow x_P=-1$.

$\Rightarrow x_M+x_N+x_P=\dfrac{5}{2}+\dfrac{9}{2}-1=6$. Chọn D.

Câu 41. Cho hình bình hành $ABCD$ có $A(-2;0), B(0;-1), C(4;4)$. Tọa độ đỉnh D là:

Ⓐ $D(2;3)$. Ⓑ $D(6;3)$. Ⓒ $D(6;5)$. Ⓓ $D(2;5)$.

Hướng dẫn giải. Gọi $D(x;y)$ là điểm cần tìm. Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;-1), \overrightarrow{DC}=(4-x;4-y)$.

Để $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{cases}4-x=2\\4-y=-1\end{cases}\Rightarrow D(2;5)$. Chọn D.

Câu 42. Cho tam giác ABC với $A(-5;6), B(-4;-1)$ và $C(4;3)$. Tìm D để $ABCD$ là hình bình hành:

Ⓐ $D(3;10)$. Ⓑ $D(3;-10)$. Ⓒ $D(-3;10)$. Ⓓ $D(-3;-10)$.

Hướng dẫn giải. Gọi $D(x;y)$ là điểm cần tìm. Ta có: $\overrightarrow{AB}=(1;-7), \overrightarrow{DC}=(4-x;3-y)$.

Để $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{cases}4-x=1\\3-y=-7\end{cases}\Rightarrow D(3;10)$. Chọn A.

Câu 43. Cho $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}$, $\vec{b}=m\vec{j}+\vec{i}$. Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ cùng phương thì:

Ⓐ $m=-6$. Ⓑ $m=6$. Ⓒ $m=-\dfrac{2}{3}$. Ⓓ $m=-\dfrac{3}{2}$.

Hướng dẫn giải. $\vec{a}=(2;-3)$ và $\vec{b}=(1;m)$ cùng phương $\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}=\dfrac{m}{-3}\Leftrightarrow m=-\dfrac{3}{2}$. Chọn D.

Câu 44. Hai vectơ nào có tọa độ sau đây là cùng phương?

Ⓐ $(1;0)$ và $(0;1)$. Ⓑ $(2;1)$ và $(2;-1)$.
Ⓒ $(-1;0)$ và $(1;0)$. Ⓓ $(3;-2)$ và $(6;4)$.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\vec{i}=(1;0)$ và $-\vec{i}=(-1;0)$ cùng phương. Chọn C.

Câu 45. Trong hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(1;1), B(-2;-2), C(7;7)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $G(2;2)$ là trọng tâm tam giác ABC.
Ⓑ B ở giữa hai điểm A và C.
Ⓒ A ở giữa hai điểm B và C.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3;-3), \overrightarrow{AC} = (6;6)$ và $\overrightarrow{AC} = -2\overrightarrow{AB}$.
Vậy A ở giữa hai điểm B và C. Chọn C.

Câu 46. Trong hệ tọa độ Oxy, cho $A(-1;5), B(5;5), C(-1;11)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ A, B, C thẳng hàng.
Ⓑ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương.
Ⓒ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{AB} = (6;0), \overrightarrow{AC} = (0;6) \Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương. Chọn C.

Câu 47. Trong hệ tọa độ Oxy, cho bốn điểm $A(3;-2), B(7;1), C(0;1), D(-8;-5)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ là hai vectơ đối nhau.
Ⓑ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ ngược hướng.
Ⓒ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ cùng hướng.
Ⓓ A, B, C, D thẳng hàng.

Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{AB} = (4;3), \overrightarrow{CD} = (-8;-6) = -2\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ ngược hướng. Chọn B.

Câu 48. Cho $\vec{u} = (3;-2), \vec{v} = (1;6)$. Chọn khẳng định đúng?

Ⓐ $\vec{u} + \vec{v}$ và $\vec{a} = (-4;4)$ ngược hướng.
Ⓑ $\vec{u}, \vec{v}$ cùng phương.
Ⓒ $\vec{u} - \vec{v}$ và $\vec{b} = (6;-24)$ cùng hướng.
Ⓓ $2\vec{u} + \vec{v}, \vec{v}$ cùng phương.

Hướng dẫn giải. Ta có $\vec{u} + \vec{v} = (4;4)$ và $\vec{u} - \vec{v} = (2;-8)$.
Xét tỉ số $\dfrac{4}{-4} \neq \dfrac{4}{4} \Rightarrow \vec{u} + \vec{v}$ và $\vec{a} = (-4;4)$ không cùng phương. Loại A.
Xét tỉ số $\dfrac{3}{1} \neq \dfrac{-2}{6} \Rightarrow \vec{u}, \vec{v}$ không cùng phương. Loại B.
Xét tỉ số $\dfrac{2}{6} = \dfrac{-8}{-24} = \dfrac{1}{3} > 0 \Rightarrow \vec{u} - \vec{v}$ và $\vec{b} = (6;-24)$ cùng hướng. Chọn C.

Câu 49. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ $\vec{a} = (-5;0), \vec{b} = (-4;0)$ cùng hướng.
Ⓑ $\vec{c} = (7;3)$ là vectơ đối của $\vec{d} = (-7;3)$.
Ⓒ $\vec{u} = (4;2), \vec{v} = (8;3)$ cùng phương.
Ⓓ $\vec{a} = (6;3), \vec{b} = (2;1)$ ngược hướng.

Hướng dẫn giải. Ta có $\vec{a} = (-5;0) = \dfrac{5}{4}(-4;0) = \dfrac{5}{4}\vec{b} \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng. Chọn A.

Câu 50. Các điểm và các vectơ sau đây cho trong hệ trục $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (giả thiết m, n, p, q là những số thực khác 0). Mệnh đề nào sau đây **sai**?

Ⓐ $\vec{a} = (m;0) \Leftrightarrow \vec{a} // \vec{i}$.
Ⓑ $\vec{b} = (0;n) \Leftrightarrow \vec{b} // \vec{j}$.
Ⓒ Điểm $A(n;p) \in x'Ox \Leftrightarrow n = 0$.
Ⓓ $A(0;p), B(q;p)$ thì $AB // x'Ox$.

Hướng dẫn giải. $A(n;p) \in x'Ox \Leftrightarrow p=0$. Chọn C.

Câu 51. Hai vectơ nào sau đây **không** cùng phương:

Ⓐ $\vec{a}=(3;5)$ và $\vec{b}=\left(-\frac{6}{7};-\frac{10}{7}\right)$.
Ⓑ $\vec{c}$ và $-4\vec{c}$.
Ⓒ $\vec{i}=(1;0)$ và $\vec{m}=\left(-\frac{5}{2};0\right)$.
Ⓓ $\vec{m}=(-\sqrt{3};0)$ và $\vec{n}=(0;-\sqrt{3})$.

Hướng dẫn giải. $\vec{m}=(-\sqrt{3};0)$ và $\vec{n}=(0;-\sqrt{3})$.

Ta có $a_1b_2-a_2b_1=(-\sqrt{3})(-\sqrt{3})-0=3\neq 0$.

Vậy $\vec{m}$ và $\vec{n}$ không cùng phương. Chọn D.

Câu 52. Cho $\vec{u}=(2x-1;3)$, $\vec{v}=(1;x+2)$. Có hai giá trị x_1,x_2 của x để $\vec{u}$ cùng phương với $\vec{v}$. Tính $x_1.x_2$.

Ⓐ $\frac{5}{3}$. Ⓑ $-\frac{5}{3}$. Ⓒ $\frac{5}{2}$. Ⓓ $-\frac{5}{3}$.

Hướng dẫn giải. $\vec{u},\vec{v}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{2x-1}{1}=\frac{3}{x+2}$ (với $x\neq -2$)

$\Leftrightarrow (2x-1)(x+2)=3 \Leftrightarrow 2x^2+3x-5=0$. Vậy $x_1.x_2=-\frac{5}{2}$. Chọn C.

Câu 53. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba vectơ $\vec{a}=(1;2)$, $\vec{b}=(-3;1)$, $\vec{c}=(-4;2)$. Biết $\vec{u}=3\vec{a}+2\vec{b}+4\vec{c}$. Chọn khẳng định đúng.

Ⓐ $\vec{u}$ cùng phương với $\vec{i}$.
Ⓑ $\vec{u}$ không cùng phương với $\vec{i}$.
Ⓒ $\vec{u}$ cùng phương với $\vec{j}$.
Ⓓ $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{i}$.

Hướng dẫn giải. Gọi $\vec{u}=(x;y)$. Ta có $\begin{cases} x=3.1+2.(-3)+4.(-4)=-19 \\ y=3.2+2.1+4.2=16 \end{cases} \Rightarrow \vec{u}=(-19;16)$. Chọn B.

Câu 54. Cho bốn điểm $A(2;5),B(1;7),C(1;5),D(0;9)$. Ba điểm nào sau đây thẳng hàng:

Ⓐ A,B,C. Ⓑ A,C,D. Ⓒ B,C,D. Ⓓ A,B,D.

Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;2),\overrightarrow{AC}=(-1;0),\overrightarrow{AD}=(-2;4) \Rightarrow \overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB} \Rightarrow A,B,D$ thẳng hàng. Chọn D.

Câu 55. Trong hệ tọa độ Oxy, cho 4 điểm $A(3;0),B(4;-3),C(8;-1),D(-2;1)$. Ba điểm nào trong bốn điểm đã cho thẳng hàng?

Ⓐ B,C,D. Ⓑ A,B,C. Ⓒ A,B,D. Ⓓ A,C,D.

Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{AC}=(5;-1);\overrightarrow{AD}=(-5;1) \Rightarrow \overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AD}$.

Vậy ba điểm A,C,D thẳng hàng. Chọn D.

Câu 56. Cho 2 điểm $A(-2;-3),B(4;7)$. Tìm điểm $M \in y'Oy$ thẳng hàng với A và B.

Ⓐ $M\left(\frac{4}{3};0\right)$.
Ⓑ $M\left(0;\frac{1}{3}\right)$.
Ⓒ $M(1;0)$.
Ⓓ $M\left(-\frac{1}{3};0\right)$.

Hướng dẫn giải. $M \in y'Oy \Rightarrow M(0;m)$. $\overrightarrow{AM}=(2;m+3)$; $\overrightarrow{AB}=(6;10)$.

Để A,B,M thẳng hàng thì $\frac{2}{6}=\frac{m+3}{10} \Leftrightarrow 3(m+3)=10 \Leftrightarrow m=\frac{1}{3}$.

Vậy $M\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$. Chọn B.

Câu 57. Ba điểm nào sau đây **không** thẳng hàng?

Ⓐ $M(-2;4), N(-2;7), P(-2;2)$.
Ⓑ $M(-2;4), N(5;4), P(7;4)$.
Ⓒ $M(3;5), N(-2;5), P(-2;7)$.
Ⓓ $M(5;-5), N(7;-7), P(-2;2)$.

Hướng dẫn giải. Ta có:

C. $\overrightarrow{MN}=(-5;0), \overrightarrow{MP}=(-5;2) \Rightarrow \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}$ không cùng phương
$\Rightarrow M, N, P$ không thẳng hàng. Chọn C.

Câu 58. Cho ba điểm $A(2;-4), B(6;0), C(m;4)$. Định m để A, B, C thẳng hàng.

Ⓐ $m=10$. Ⓑ $m=-6$. Ⓒ $m=2$. Ⓓ $m=-10$.

Hướng dẫn giải. $\overrightarrow{AB}=(4;4)$; $\overrightarrow{AC}=(m-2;8)$.

A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{m-2}{4}=\dfrac{8}{4} \Leftrightarrow m=10$. Chọn A.

Câu 59. Cho $A(0;-2), B(-3;1)$. Tìm tọa độ giao điểm M của AB với trục $x'Ox$.

Ⓐ $M(-2;0)$.
Ⓑ $M(2;0)$.
Ⓒ $M\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$.
Ⓓ $M(0;-2)$.

Hướng dẫn giải. $M(x;0) \in x'Ox \Rightarrow \overrightarrow{AM}=(x;2); \overrightarrow{AB}=(-3;3)$.

A, B, M thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{x}{-3}=\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow x=-2$.

Vậy, $M(-2;0)$. Chọn A.

Câu 60. Cho bốn điểm $A(1;-1), B(2;4), C(-2;-7), D(3;3)$. Ba điểm nào trong bốn điểm đã cho thẳng hàng?

Ⓐ A, B, C. Ⓑ A, B, D. Ⓒ B, C, D. Ⓓ A, C, D.

Hướng dẫn giải. $\overrightarrow{AB}=(1;5), \overrightarrow{AC}=(-3;-6), \overrightarrow{AD}=(2;4) \Rightarrow \overrightarrow{AC}=-\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AD} \Rightarrow A, C, D$ thẳng hàng. Chọn D.

Câu 61. Cho hai điểm $M(-2;2), N(1;1)$. Tìm tọa độ điểm P trên Ox sao cho 3 điểm M, N, P thẳng hàng.

Ⓐ $P(0;4)$. Ⓑ $P(0;-4)$. Ⓒ $P(-4;0)$. Ⓓ $P(4;0)$.

Hướng dẫn giải. Do $P \in Ox$ nên $P(x;0)$, mà $\overrightarrow{MP}=(x+2;-2); \overrightarrow{MN}=(3;-1)$.

Do M, N, P thẳng hàng nên $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{-2}{-1} \Leftrightarrow x=4 \Rightarrow P(4;0)$. Chọn D.

Câu 62. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(6;3), B(-3;6), C(1;-2)$. Xác định điểm E trên cạnh BC sao cho $BE=2EC$.

Ⓐ $E\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right)$. Ⓑ $E\left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$. Ⓒ $E\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{1}{3}\right)$. Ⓓ $E\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

Hướng dẫn giải. Vì E thuộc đoạn BC và $BE=2EC$ suy ra $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{EC}$.

Gọi $E(x;y)$ khi đó $\overrightarrow{BE}=(x+3;y-6), \overrightarrow{EC}=(1-x;-2-y)$.

Do đó $\begin{cases} x+3=2(1-x) \\ y-6=2(-2-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow E\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right)$. Chọn A.

Câu 63. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(6;3), B\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right), C(1;-2), D(15;0)$. Xác định giao điểm I hai đường thẳng BD và AC.

Ⓐ $I\left(\dfrac{7}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$. Ⓑ $I\left(-\dfrac{7}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

Ⓒ $I\left(-\dfrac{7}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$. Ⓓ $I\left(\dfrac{7}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải. Gọi $I(x;y)$ là giao điểm của BD và AC.

Do đó $\overrightarrow{DI}=(x-15;y), \overrightarrow{DB}=\left(-\dfrac{46}{3};\dfrac{2}{3}\right)$ cùng phương suy ra $\dfrac{3(x-15)}{-46}=\dfrac{3y}{2} \Rightarrow x+23y-15=0 \quad (1)$.

$\overrightarrow{AI}=(x-6;y-3), \overrightarrow{AC}=(-5;-5)$ cùng phương suy ra $\dfrac{x-6}{-5}=\dfrac{y-3}{-5} \Rightarrow x-y-3=0 \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $x=\dfrac{7}{2}$ và $y=\dfrac{1}{2}$. Vậy giao điểm hai đường thẳng BD và AC là $I\left(\dfrac{7}{2};\dfrac{1}{2}\right)$. Chọn D.

Câu 64. Cho ba điểm $A(-1;-1), B(0;1), C(3;0)$. Xác định tọa độ điểm D biết D thuộc đoạn thẳng BC và $2BD=5DC$.

Ⓐ $\left(\dfrac{15}{7};\dfrac{2}{7}\right)$. Ⓑ $\left(-\dfrac{15}{7};\dfrac{2}{7}\right)$. Ⓒ $\left(\dfrac{2}{7};\dfrac{15}{7}\right)$. Ⓓ $\left(\dfrac{15}{7};-\dfrac{2}{7}\right)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $2\overrightarrow{BD}=5\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BD}(x_D;y_D-1), \overrightarrow{DC}(3-x_D;-y_D)$.

Do đó $\begin{cases} 2x_D=5(3-x_D) \\ 2(y_D-1)=5(-y_D) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D=\dfrac{15}{7} \\ y_D=\dfrac{2}{7} \end{cases} \Rightarrow D\left(\dfrac{15}{7};\dfrac{2}{7}\right)$. Chọn A.

Câu 65. Cho tam giác ABC có $A(3;4), B(2;1), C(-1;-2)$. Tìm điểm M trên đường thẳng BC sao cho $S_{ABC}=3S_{ABM}$.

Ⓐ $M_1(0;1), M_2(3;2)$. Ⓑ $M_1(1;0), M_2(3;2)$.

Ⓒ $M_1(1;0), M_2(2;3)$. Ⓓ $M_1(0;1), M_2(2;3)$.

Hướng dẫn giải. Ta có $S_{ABC}=3S_{ABM} \Leftrightarrow BC=3BM \Rightarrow \overrightarrow{BC}=\pm 3\overrightarrow{BM}$.

Gọi $M(x;y) \Rightarrow \overrightarrow{BM}=(x-2;y-1); \overrightarrow{BC}=(-3;-3)$.

Suy ra $\begin{cases} -3=3(x-2) \\ -3=3(y-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} -3=-3(x-2) \\ -3=-3(y-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$.

Vậy có hai điểm thỏa mãn $M_1(1;0), M_2(3;2)$. Chọn B.

Câu 66. Cho hình bình hành $ABCD$ có $A(-2;3)$ và tâm $I(1;1)$. Biết điểm $K(-1;2)$ nằm trên đường thẳng AB và điểm D có hoành độ gấp đôi tung độ. Tìm các đỉnh B, D của hình bình hành.

Ⓐ $B(2;1), D(0;1)$. Ⓑ $B(0;1); D(4;-1)$.

Ⓒ $B(0;1); D(2;1)$. Ⓓ $B(2;1), D(4;-1)$.

Hướng dẫn giải. Ta có I là trung điểm AC nên $C(4;-1)$.

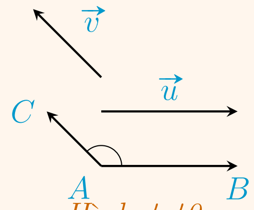
Gọi $D(2a;a) \Rightarrow B(2-2a;2-a)$.

$\overrightarrow{AK}(1;-1)$, $\overrightarrow{AB}(4-2a;-1-a)$.
Vì $\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AB}$ cùng phương nên $\dfrac{4-2a}{1}=\dfrac{-1-a}{-1}\Rightarrow a=1\Rightarrow D(2;1), B(0;1)$.

§5 TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

I. GÓC GIỮA HAI VECTƠ

Cho hai vectơ $\overrightarrow{u}$ và $\overrightarrow{v}$ khác $\overrightarrow{0}$. Từ một điểm A tuỳ ý, vẽ các vectơ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ và $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{v}$ (H.4.40). Khi đó, số đo của góc $\widehat{BAC}$ được gọi là số đo góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{u}$ và $\overrightarrow{v}$ hay đơn giản là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, kí hiệu là $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.



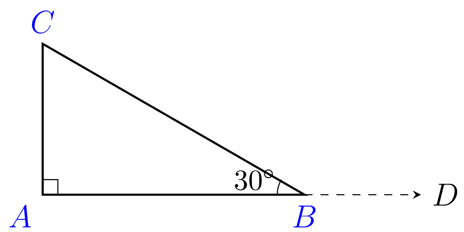
Hình 4.40

- Quy ước rằng góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{u}$ và $\overrightarrow{0}$ có thể nhận một giá trị tuỳ ý từ 0° đến 180°.
- Nếu $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 90^\circ$ thì ta nói rằng $\overrightarrow{u}$ và $\overrightarrow{v}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ hoặc $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{u}$. Đặc biệt $\overrightarrow{0}$ được coi là vuông góc với mọi vectơ.

Ví dụ 1

Cho tam giác ABC vuông tại A và $\widehat{B} = 30^\circ$. Tính $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}), (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}), (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$.

Lời giải.



Hình 4.41

Ta có: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{BAC} = 90^\circ, (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = \widehat{ACB} = 60^\circ$,
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}) = \widehat{DBC} = 150^\circ$.

(1) Cho tam giác đều ABC. Tính $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$.

....

....

....

....

II. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, kí hiệu là $\vec{u} \cdot \vec{v}$, được xác định bởi công thức sau:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

- $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- $\vec{u} \cdot \vec{u}$ còn được viết là $\vec{u}^2$ và được gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{u}$. Ta có $\vec{u}^2 = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{u}|^2$.

Ví dụ 2

Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a.
Tính các tích vô hướng sau: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$.

Lời giải. Vì $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 90^\circ$ nên $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

Hình vuông có cạnh bằng a nên có đường chéo bằng $a\sqrt{2}$.

Mặt khác, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 45^\circ, (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BD}) = 135^\circ$, do đó

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos 45^\circ = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2;$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = AB \cdot BD \cdot \cos 135^\circ = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -a^2.$$

2 Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$.
Hãy tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ theo a, b, c.

III. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ VÀ TÍNH CHẤT CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u} = (x; y)$ và $\vec{v} = (x'; y')$ được tính theo công thức:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

NHẬN XÉT.

- Hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $xx' + yy' = 0$.
- Bình phương vô hướng của $\vec{u}(x; y)$ là $\vec{u}^2 = x^2 + y^2$.
- Nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và $\vec{v} \neq \vec{0}$ thì $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2}}$.

Ví dụ 3

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, tính tích vô hướng của các cặp vectơ sau:

a) $\vec{u} = (2; -3)$ và $\vec{v} = (5; 3)$;

b) Hai vectơ đơn vị $\vec{i}$ và $\vec{j}$ tương ứng của các trục Ox, Oy.

Lời giải.

a) Ta có: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 5 + (-3) \cdot 3 = 10 - 9 = 1$.

b) Vì $\vec{i} = (1; 0)$ và $\vec{j} = (0; 1)$ nên $\vec{i} \cdot \vec{j} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$.

(3) Tính tích vô hướng và góc giữa hai vectơ $\vec{u} = (0; -5)$, $\vec{v} = (\sqrt{3}; 1)$.

....

....

....

....

....

Tính chất của tích vô hướng

Với ba vectơ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ bất kì và mọi số thực k, ta có:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (tính chất giao hoán);
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (tính chất phân phối đối với phép cộng);
- $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$.

Từ các tính chất trên, ta có thể chứng minh được:

- $\vec{u}\cdot(\vec{v}-\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{u}\cdot\vec{w}$ (tính chất phân phối đối với phép trừ);
- $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$; $\quad(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}^2$;
- $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2$.

Ví dụ 4

(*Ứng dụng của vectơ trong bài toán hình học*)
Cho điểm M thay đổi trên đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác đều ABC cho trước. Chứng minh rằng $MA^2+MB^2+MC^2$ không đổi.

Lời giải. **Cách 1** (*Dùng toạ độ*). Xét hệ trục toạ độ có gốc trùng với tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Gọi toạ độ của các điểm là $A(x_A;y_A), B(x_B;y_B), C(x_C;y_C), M(x;y)$.

Vì tam giác ABC đều nên tâm đường tròn ngoại tiếp $O(0;0)$ đồng thời là trọng tâm của tam giác.

Do đó $x_A+x_B+x_C=0$ và $y_A+y_B+y_C=0$.

Vì $OM^2=OA^2=R^2$ nên $x^2+y^2=x_A^2+y_A^2=R^2$.

Vậy $MA^2=(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=(x^2+y^2)+(x_A^2+y_A^2)-2xx_A-2yy_A=2R^2-2xx_A-2yy_A$.

Tương tự $MB^2=2R^2-2xx_B-2yy_B$ và $MC^2=2R^2-2xx_C-2yy_C$. Do đó $MA^2+MB^2+MC^2=6R^2-2x(x_A+x_B+x_C)-2y(y_A+y_B+y_C)=6R^2$ (không đổi).

Cách 2 (*Dùng tích vô hướng*). (H.4.44)

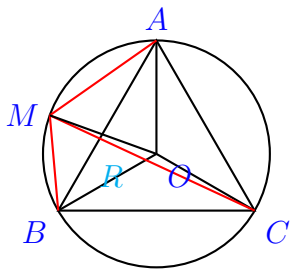
Vì tam giác ABC đều nên tâm O của đường tròn ngoại tiếp đồng thời là trọng tâm của tam giác.
Vậy $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.
Giả sử (O) có bán kính R. Ta có: $MA^2+MB^2+MC^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2$

$=(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA})^2+(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB})^2+(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC})^2$

$=3\overrightarrow{MO}^2+2\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{OC}^2$

$=3MO^2+2\overrightarrow{MO}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})+3R^2$

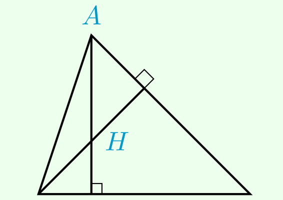
$=3R^2+2\overrightarrow{MO}\cdot\vec{0}+3R^2=6R^2$.



Hình 4.44

Vậy $MA^2+MB^2+MC^2$ không đổi khi M thay đổi trên (O).

④ Cho tam giác ABC với $A(-1;2)$, $B(8;-1)$, $C(8;8)$. Gọi H là trực tâm của tam giác.
a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.
b) Tìm toạ độ của H.
c) Giải tam giác ABC.



Hình 4.45

....

....

....

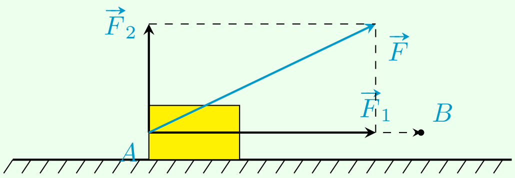
....

....

(5) Một lực $\overrightarrow{F}$ không đổi tác động vào một vật và điểm đặt của lực chuyển động thẳng từ A đến B. Lực $\overrightarrow{F}$ được phân tích thành hai lực thành phần là $\overrightarrow{F}_1$ và $\overrightarrow{F}_2$ ($\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2$).

a) Dựa vào tính chất của tích vô hướng, hãy giải thích vì sao công sinh bởi lực $\overrightarrow{F}$ (đã được đề cập ở trên) bằng tổng của các công sinh bởi các lực $\overrightarrow{F}_1$ và $\overrightarrow{F}_2$.

b) Giả sử các lực thành phần $\overrightarrow{F}_1, \overrightarrow{F}_2$ tương ứng cùng phương, vuông góc với phương chuyển động của vật. Hãy tìm mối quan hệ giữa các công sinh bởi lực $\overrightarrow{F}$ và lực $\overrightarrow{F}_1$.



Hình 4.46

....

....

....

....

....

IV. BÀI TẬP ÔN LUYỆN

1) Bài tập tự luận

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $\overrightarrow{a} = (-3; 1)$, $\overrightarrow{b} = (2; 6)$;

b) $\vec{a} = (3;1)$, $\vec{b} = (2;4)$;

c) $\vec{a} = (-\sqrt{2};1)$, $\vec{b} = (2;-\sqrt{2})$.

Bài 2. Tìm điều kiện của $\vec{u}, \vec{v}$ để:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$;

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$.

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;2), B(-4;3)$. Gọi $M(t;0)$ là một điểm thuộc trục hoành.

a) Tính $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$ theo t.

b) Tìm t để $\widehat{AMB} = 90^\circ$.

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm không thẳng hàng $A(-4;1), B(2;4), C(2;-2)$.

a) Giải tam giác ABC.

b) Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC.

Bài 5. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC, ta có:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2 \cdot \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}.$$

Bài 6. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chứng minh rằng với mọi điểm M, ta có:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2.$$

2) Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Tam giác ABC vuông ở A và có góc $\widehat{B} = 50^\circ$. Hệ thức nào sau đây sai?

Ⓐ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 130^\circ$. Ⓑ $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) = 40^\circ$.
Ⓒ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = 50^\circ$. Ⓓ $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 40^\circ$.

Câu 2. Cho O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều MNP. Góc nào sau đây bằng 120°?

Ⓐ $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NP})$. Ⓑ $(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{ON})$. Ⓒ $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{OP})$. Ⓓ $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP})$.

Câu 3. Cho tam giác đều ABC. Tính $P = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$.

Ⓐ $P = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Ⓑ $P = \frac{3}{2}$. Ⓒ $P = -\frac{3}{2}$. Ⓓ $P = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 4. Cho tam giác đều ABC có đường cao AH. Tính $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BA})$.

Ⓐ 30°. Ⓑ 60°. Ⓒ 120°. Ⓓ 150°.

Câu 5. Tam giác ABC vuông ở A và có $BC = 2AC$. Tính $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})$.

Ⓐ $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}$. Ⓑ $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = -\frac{1}{2}$.
Ⓒ $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ⓓ $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 6. Cho tam giác ABC. Tính tổng $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$.

Ⓐ 180°. Ⓑ 360°. Ⓒ 270°. Ⓓ 120°.

Câu 7. Cho tam giác ABC với $\widehat{A} = 60^\circ$. Tính tổng $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$.

Ⓐ 120°. Ⓑ 360°. Ⓒ 270°. Ⓓ 240°.

Câu 8. Cho hình vuông $ABCD$. Tính $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA})$.

Ⓐ $\cos(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA})=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Ⓑ $\cos(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Ⓒ $\cos(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA})=0$.
Ⓓ $\cos(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA})=-1$.

Câu 9. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O. Tính tổng $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC})+(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CB})+(\overrightarrow{CO},\overrightarrow{DC})$.

Ⓐ $45°$. Ⓑ $405°$. Ⓒ $315°$. Ⓓ $225°$.

Câu 10. Tam giác ABC có góc A bằng $100°$ và có trực tâm H. Tính tổng $(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{HB})+(\overrightarrow{HB},\overrightarrow{HC})+(\overrightarrow{HC},\overrightarrow{HA})$.

Ⓐ $360°$. Ⓑ $180°$. Ⓒ $80°$. Ⓓ $160°$.

Câu 11. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.
Ⓑ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.
Ⓒ $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$.
Ⓓ $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

Câu 12. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

Ⓐ $\alpha=180°$. Ⓑ $\alpha=0°$. Ⓒ $\alpha=90°$. Ⓓ $\alpha=45°$.

Câu 13. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$ và $\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Ⓐ $\alpha=30°$. Ⓑ $\alpha=45°$. Ⓒ $\alpha=60°$. Ⓓ $\alpha=120°$.

Câu 14. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ và hai vectơ $\vec{u}=\frac{2}{5}\vec{a}-3\vec{b}$ và $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Ⓐ $\alpha=90°$. Ⓑ $\alpha=180°$. Ⓒ $\alpha=60°$. Ⓓ $\alpha=45°$.

Câu 15. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây sai?

Ⓐ $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2\right)$.
Ⓑ $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2\right)$.
Ⓒ $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2\right)$.
Ⓓ $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{4}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2\right)$.

Câu 16. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Ⓐ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2a^2$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{a^2}{2}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{2}$.

Câu 17. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

Ⓐ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=a^2$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{a^2}{2}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{a^2}{2}$.

Câu 18. Gọi G là trọng tâm tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Mệnh đề nào sau đây là sai?

Ⓐ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}a^2$.
Ⓑ $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=-\frac{1}{2}a^2$.

Ⓒ $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=\dfrac{a^2}{6}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{2}a^2$.

Câu 19. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a và chiều cao AH. Mệnh đề nào sau đây là sai?

Ⓐ $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.
Ⓑ $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{HA})=150^\circ$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{2}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=\dfrac{a^2}{2}$.

Câu 20. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và có $AB=AC=a$. Tính $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

Ⓐ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-a^2$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=a^2$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Câu 21. Cho tam giác ABC vuông tại A và có $AB=c, AC=b$. Tính $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.

Ⓐ $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=b^2$.
Ⓑ $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=c^2$.
Ⓒ $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=b^2+c^2$.
Ⓓ $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=b^2-c^2$.

Câu 22. Cho ba điểm A, B, C thỏa $AB=2$ cm, $BC=3$ cm, $CA=5$ cm. Tính $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.

Ⓐ $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=13$.
Ⓑ $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=15$.
Ⓒ $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=17$.
Ⓓ $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=19$.

Câu 23. Cho tam giác ABC có $BC=a, CA=b, AB=c$. Tính $P=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{BC}$.

Ⓐ $P=b^2-c^2$.
Ⓑ $P=\dfrac{c^2+b^2}{2}$.
Ⓒ $P=\dfrac{c^2+b^2+a^2}{3}$.
Ⓓ $P=\dfrac{c^2+b^2-a^2}{2}$.

Câu 24. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tính $P=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA})$.

Ⓐ $P=-1$.
Ⓑ $P=3a^2$.
Ⓒ $P=-3a^2$.
Ⓓ $P=2a^2$.

Câu 25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(3;-1), B(2;10), C(-4;2)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Ⓐ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=40$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-40$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=26$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-26$.

Câu 26. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(3;-1)$ và $B(2;10)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OB}$.

Ⓐ $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OB}=-4$.
Ⓑ $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OB}=0$.
Ⓒ $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OB}=4$.
Ⓓ $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OB}=16$.

Câu 27. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=4\vec{i}+6\vec{j}$ và $\vec{b}=3\vec{i}-7\vec{j}$. Tính tích vô hướng $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Ⓐ $\vec{a}\cdot\vec{b}=-30$.
Ⓑ $\vec{a}\cdot\vec{b}=3$.
Ⓒ $\vec{a}\cdot\vec{b}=30$.
Ⓓ $\vec{a}\cdot\vec{b}=43$.

Câu 28. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(-3;2)$ và $\vec{b}=(-1;-7)$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{c}$ biết $\vec{c}\cdot\vec{a}=9$ và $\vec{c}\cdot\vec{b}=-20$.

Ⓐ $\vec{c}=(-1;-3)$.
Ⓑ $\vec{c}=(-1;3)$.
Ⓒ $\vec{c}=(1;-3)$.
Ⓓ $\vec{c}=(1;3)$.

Câu 29. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba vectơ $\vec{a}=(1;2)$, $\vec{b}=(4;3)$ và $\vec{c}=(2;3)$. Tính $P=\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})$.

Ⓐ $P=0$. Ⓑ $P=18$. Ⓒ $P=20$. Ⓓ $P=28$.

Câu 30. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(-1;1)$ và $\vec{b}=(2;0)$. Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Ⓐ $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Ⓑ $\cos(\vec{a},\vec{b})=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Ⓒ $\cos(\vec{a},\vec{b})=-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. Ⓓ $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{1}{2}$.

Câu 31. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(-2;-1)$ và $\vec{b}=(4;-3)$. Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Ⓐ $\cos(\vec{a},\vec{b})=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. Ⓑ $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Ⓒ $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ⓓ $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{1}{2}$.

Câu 32. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(4;3)$ và $\vec{b}=(1;7)$. Tính góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Ⓐ $\alpha=90^\circ$. Ⓑ $\alpha=60^\circ$. Ⓒ $\alpha=45^\circ$. Ⓓ $\alpha=30^\circ$.

Câu 33. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{x}=(1;2)$ và $\vec{y}=(-3;-1)$. Tính góc α giữa hai vectơ $\vec{x}$ và $\vec{y}$.

Ⓐ $\alpha=45^\circ$. Ⓑ $\alpha=60^\circ$. Ⓒ $\alpha=90^\circ$. Ⓓ $\alpha=135^\circ$.

Câu 34. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(1;2)$, $B(-1;1)$ và $C(5;-1)$. Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Ⓐ $\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=-\dfrac{1}{2}$. Ⓑ $\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ⓒ $\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=-\dfrac{2}{5}$. Ⓓ $\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 35. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(6;0)$, $B(3;1)$ và $C(-1;-1)$. Tính số đo góc B của tam giác đã cho.

Ⓐ 15°. Ⓑ 60°. Ⓒ 120°. Ⓓ 135°.

Câu 36. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho bốn điểm $A(-8;0)$, $B(0;4)$, $C(2;0)$ và $D(-3;-5)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ Hai góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$ phụ nhau.

Ⓑ Góc $\widehat{BCD}$ là góc nhọn.

Ⓒ $\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})=\cos(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD})$.

Ⓓ Hai góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$ bù nhau.

Câu 37. Cho ba điểm O,A,B không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để tích vô hướng $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{AB}=0$ là

Ⓐ tam giác OAB đều.

Ⓑ tam giác OAB cân tại O.

Ⓒ tam giác OAB vuông tại O.

Ⓓ tam giác OAB vuông cân tại O.

Câu 38. Cho M, N, P, Q là bốn điểm tùy ý. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào sai?

Ⓐ $\overrightarrow{MN}(\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ})=\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PQ}$.
Ⓑ $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}$.
Ⓒ $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{MN}$.
Ⓓ $(\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{PQ})(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ})=MN^2-PQ^2$.

Câu 39. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Đẳng thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=a^2$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=a^2\sqrt{2}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a^2$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}a^2$.

Câu 40. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua C. Đẳng thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=2a^2$..
Ⓑ $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{3}a^2$..
Ⓒ $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{5}a^2$..
Ⓓ $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=5a^2$..

Câu 41. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2. Điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM=\dfrac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng DC. Đẳng thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MN}=-4$..
Ⓑ $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MN}=0$..
Ⓒ $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MN}=4$..
Ⓓ $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MN}=16$..

Câu 42. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=8$, $AD=5$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=62$..
Ⓑ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=64$..
Ⓒ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=-62$..
Ⓓ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=-64$..

Câu 43. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba vectơ $\vec{a}=(-2;3)$, $\vec{b}=(4;1)$ và $\vec{c}=k\vec{a}+m\vec{b}$ với $k, m\in\mathbb{R}$. Biết rằng vectơ $\vec{c}$ vuông góc với vectơ $(\vec{a}+\vec{b})$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $2k=2m$.
Ⓑ $3k=2m$.
Ⓒ $2k+3m=0$.
Ⓓ $3k+2m=0$.

Câu 44. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{u}=(3;4)$ và $\vec{v}=(-8;6)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $|\vec{u}|=|\vec{v}|$.
Ⓑ $M\left(0;-\dfrac{1}{2}\right)$ và $\vec{v}$ cùng phương.
Ⓒ $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.
Ⓓ $\vec{u}=-\vec{v}$.

Câu 45. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho bốn điểm $A(7;-3)$, $B(8;4)$, $C(1;5)$ và $D(0;-2)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{CB}$.
Ⓑ Tam giác ABC đều.
Ⓒ Tứ giác $ABCD$ là hình vuông.
Ⓓ Tứ giác $ABCD$ không nội tiếp đường tròn.

Câu 46. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-1;1)$, $B(1;3)$ và $C(1;-1)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ Tam giác ABC đều.

Ⓑ Tam giác ABC có ba góc đều nhọn.
Ⓒ Tam giác ABC cân tại B.
Ⓓ Tam giác ABC vuông cân tại A.

Câu 47. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;2)$ và $B(-3;1)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc trục tung sao cho tam giác ABC vuông tại A.

Ⓐ $C(0;6)$. Ⓑ $C(5;0)$. Ⓒ $C(3;1)$. Ⓓ $C(0;-6)$.

Câu 48. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-3;0)$, $B(3;0)$ và $C(2;6)$. Gọi $H(a;b)$ là tọa độ trực tâm của tam giác đã cho. Tính $a+6b$.

Ⓐ $a+6b=5$. Ⓑ $a+6b=6$. Ⓒ $a+6b=7$. Ⓓ $a+6b=8$.

Câu 49. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(4;3)$, $B(2;7)$ và $C(-3;-8)$. Tìm tọa độ chân đường cao A' kẻ từ đỉnh A xuống cạnh BC.

Ⓐ $A'(1;-4)$. Ⓑ $A'(-1;4)$. Ⓒ $A'(1;4)$. Ⓓ $A'(4;1)$.

Câu 50. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác MNP vuông tại M. Biết điểm $M(2;1)$, $N(3;-2)$ và P là điểm nằm trên trục Oy. Tính diện tích tam giác MNP.

Ⓐ $\dfrac{10}{3}$. Ⓑ $\dfrac{5}{3}$. Ⓒ $\dfrac{16}{3}$. Ⓓ $\dfrac{20}{3}$.

Câu 51. Cho hai vectơ $\vec{u}=(2;-1)$, $\vec{v}=(-3;4)$. Tích $\vec{u}\cdot\vec{v}$ là

Ⓐ 11. Ⓑ -10. Ⓒ 5. Ⓓ -2.

Câu 52. Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho $\vec{a}=(2;5)$ và $\vec{b}=(-3;1)$. Khi đó, giá trị của $\vec{a}\cdot\vec{b}$ bằng

Ⓐ -5. Ⓑ 1. Ⓒ 13. Ⓓ -1.

Câu 53. Cho $A(0;3), B(4;0), C(-2;-5)$. Tính $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

Ⓐ 16. Ⓑ 9. Ⓒ -10. Ⓓ -9.

Câu 54. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{u}=\vec{i}+3\vec{j}$ và $\vec{v}=2\vec{j}-2\vec{i}$. Tính $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

Ⓐ $\vec{u}\cdot\vec{v}=-4$. Ⓑ $\vec{u}\cdot\vec{v}=4$. Ⓒ $\vec{u}\cdot\vec{v}=2$. Ⓓ $\vec{u}\cdot\vec{v}=-2$.

Câu 55. Trong hệ tọa độ Oxy, cho $\vec{u}=\vec{i}+3\vec{j}$; $\vec{v}=(2;-1)$. Tính biểu thức tọa độ của $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

Ⓐ $\vec{u}\cdot\vec{v}=-1$. Ⓑ $\vec{u}\cdot\vec{v}=1$.
Ⓒ $\vec{u}\cdot\vec{v}=(2;-3)$. Ⓓ $\vec{u}\cdot\vec{v}=5\sqrt{2}$.

Câu 56. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$. Ⓑ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})$.
Ⓒ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}\cdot\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})$. Ⓓ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\vec{a},\vec{b})$.

Câu 57. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $4a$. Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ là

Ⓐ $8a^2$. Ⓑ $8a$. Ⓒ $8\sqrt{3}a^2$. Ⓓ $8\sqrt{3}a$.

Câu 58. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a. Tính $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.

Ⓐ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$. Ⓑ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=a$.

Ⓒ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\dfrac{a^2}{2}$. Ⓓ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=a^2$.

Câu 59. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

Ⓐ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})$.

Ⓑ $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2\right)$.

Ⓒ $|\vec{a}\cdot\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2$.

Ⓓ $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2\right)$.

Câu 60. Cho tam giác ABC có $\hat{A}=90^\circ,\hat{B}=60^\circ$ và $AB=a$. Khi đó $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}$ bằng

Ⓐ $-2a^2$. Ⓑ $2a^2$. Ⓒ $3a^2$. Ⓓ $-3a^2$.

Câu 61. Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

Ⓐ $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Ⓑ $-\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Ⓒ $\dfrac{a^2}{2}$. Ⓓ $-\dfrac{a^2}{2}$.

Câu 62. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=a;AC=a\sqrt{3}$ và AM là trung tuyến. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AM}$.

Ⓐ $\dfrac{a^2}{2}$. Ⓑ a^2. Ⓒ $-a^2$. Ⓓ $-\dfrac{a^2}{2}$.

Câu 63. Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB=2,AD=1,\widehat{BAD}=60^\circ$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ bằng

Ⓐ -1. Ⓑ 1. Ⓒ $-\dfrac{1}{2}$. Ⓓ $\dfrac{1}{2}$.

Câu 64. Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB=2,AD=1,\widehat{BAD}=60^\circ$. Tích vô hướng $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$ bằng

Ⓐ -1. Ⓑ $\dfrac{1}{2}$. Ⓒ -1. Ⓓ $-\dfrac{1}{2}$.

Câu 65. Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB=2,AD=1,\widehat{BAD}=60^\circ$. Độ dài đường chéo AC bằng

Ⓐ $\sqrt{5}$. Ⓑ $\sqrt{7}$. Ⓒ 5. Ⓓ $\dfrac{7}{2}$.

Câu 66. Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB=2,AD=1,\widehat{BAD}=60^\circ$. Độ dài đường chéo BD bằng

Ⓐ $\sqrt{3}$. Ⓑ $\sqrt{5}$. Ⓒ 5. Ⓓ 3.

Câu 67. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ biết $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

Ⓐ $\alpha=90^\circ$. Ⓑ $\alpha=0^\circ$. Ⓒ $\alpha=45^\circ$. Ⓓ $\alpha=180^\circ$.

Câu 68. Tam giác ABC có $A(1;2),B(0;4),C(3;1)$. Góc $\widehat{BAC}$ của tam giác ABC gần với giá trị nào dưới đây?

Ⓐ 90°. Ⓑ $36^\circ52'$. Ⓒ $143^\circ7'$. Ⓓ $53^\circ7'$.

Câu 69. Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ khác vectơ-không thỏa mãn $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$. Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ bằng:

Ⓐ $(\vec{a}, \vec{b}) = 45°$.
Ⓑ $(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$.
Ⓒ $(\vec{a}, \vec{b}) = 180°$.
Ⓓ $(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$.

Câu 70. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; |\vec{a} - \vec{b}| = 4$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Chọn phát biểu đúng.

Ⓐ $\alpha = 60°$.
Ⓑ $\alpha = 30°$.
Ⓒ $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$.
Ⓓ $\cos\alpha = \dfrac{3}{8}$.

Câu 71. Cho hai vectơ $\vec{a} = (4; 3)$ và $\vec{b} = (1; 7)$. Số đo góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

Ⓐ $45°$.
Ⓑ $90°$.
Ⓒ $60°$.
Ⓓ $30°$.

Câu 72. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho $\vec{a} = (2; 5)$, $\vec{b} = (3; -7)$. Tính góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Ⓐ $\alpha = 60°$.
Ⓑ $\alpha = 120°$.
Ⓒ $\alpha = 45°$.
Ⓓ $\alpha = 135°$.

Câu 73. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\vec{a} = (2; 1)$ và $\vec{b} = (3; -6)$. Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

Ⓐ $0°$.
Ⓑ $90°$.
Ⓒ $180°$.
Ⓓ $60°$.

Câu 74. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$ thỏa mãn $\vec{a} \cdot \vec{b} = \dfrac{1}{2}|-\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ là

Ⓐ $60°$.
Ⓑ $120°$.
Ⓒ $150°$.
Ⓓ $30°$.

Câu 75. Cho vectơ $\vec{a}(1; -2)$. Với giá trị nào của y thì vectơ $\vec{b} = (3; y)$ tạo với vectơ $\vec{a}$ một góc $45°$?

Ⓐ $y = -9$.
Ⓑ $y = -1$ hoặc $y = 9$.
Ⓒ $y = 1$ hoặc $y = -9$.
Ⓓ $y = -1$.

Câu 76. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ sao cho $|\vec{a}| = \sqrt{2}, |\vec{b}| = 2$ và hai vectơ $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}, \vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$ vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Ⓐ $120°$.
Ⓑ $60°$.
Ⓒ $90°$.
Ⓓ $30°$.

Câu 77. Tìm x để hai vectơ $\vec{a} = (x; 2)$ và $\vec{b} = (2; -3)$ có giá vuông góc với nhau.

Ⓐ 3.
Ⓑ 0.
Ⓒ -3.
Ⓓ 2.

Câu 78. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{u} = (3; 4)$ và $\vec{v} = (-8; 6)$. Khẳng định nào đúng?

Ⓐ $\vec{u} = -\vec{v}$.
Ⓑ $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.
Ⓒ $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.
Ⓓ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

Câu 79. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(1; 2), B(-3; 1)$. Tìm tọa độ điểm C trên trục Oy sao cho tam giác ABC vuông tại A.

Ⓐ $C(6; 0)$.
Ⓑ $C(0; 6)$.
Ⓒ $C(-6; 0)$.
Ⓓ $C(0; -6)$.

Câu 80. Cho tam giác ABC có $A(-1; 2), B(0; 3), C(5; -2)$. Tìm tọa độ chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC.

Ⓐ $(0; 3)$.
Ⓑ $(0; -3)$.
Ⓒ $(3; 0)$.
Ⓓ $(-3; 0)$.

Câu 81. Cho tam giác ABC có $A(1; -1), B(3; -3), C(6; 0)$. Diện tích ΔABC là

Ⓐ 6. Ⓑ $6\sqrt{2}$. Ⓒ 12. Ⓓ 9.

Câu 82. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $B(-1;3)$ và $C(3;1)$. Tìm tọa độ điểm A sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

Ⓐ $A(0;0)$ hoặc $A(2;-4)$. Ⓑ $A(0;0)$ hoặc $A(2;4)$.
Ⓒ $A(0;0)$ hoặc $A(-2;-4)$. Ⓓ $A(0;0)$ hoặc $A(-2;4)$.

Câu 83. Tìm bán kính đường tròn đi qua ba điểm $A(0;4), B(3;4), C(3;0)$.

Ⓐ $\frac{5}{2}$. Ⓑ $\frac{\sqrt{10}}{2}$. Ⓒ 5. Ⓓ 3.

Câu 84. Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) cho tam giác ABC có $A(1;0), B(-1;1), C(5;-1)$. Tọa độ trực tâm H của tam giác ABC là

Ⓐ $H(-1;-9)$. Ⓑ $H(-8;-27)$.
Ⓒ $H(-2;5)$. Ⓓ $H(3;14)$.

BẢNG ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á
1	D	2	A	3	C	4	D	5	D
6	B	7	D	8	B	9	D	10	A
11	A	12	A	13	D	14	B	15	C
16	D	17	C	18	C	19	D	20	A
21	B	22	B	23	A	24	C	25	A
26	C	27	A	28	B	29	B	30	B
31	A	32	C	33	D	34	D	35	D
36	D	37	B	38	B	39	A	40	A
41	B	42	D	43	C	44	C	45	C
46	D	47	A	48	C	49	C	50	A
51	B	52	D	53	D	54	B	55	A
56	B	57	A	58	A	59	C	60	D
61	D	62	D	63	B	64	C	65	B
66	A	67	D	68	C	69	C	70	D
71	A	72	D	73	B	74	A	75	D
76	C	77	A	78	B	79	B	80	A
81	A	82	B	83	A	84	B		

V. LỜI GIẢI CHI TIẾT

1) Bài tập tự luận

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $\vec{a}=(-3;1)$, $\vec{b}=(2;6)$;

b) $\vec{a}=(3;1)$, $\vec{b}=(2;4)$;

c) $\vec{a}=(-\sqrt{2};1)$, $\vec{b}=(2;-\sqrt{2})$.

Hướng dẫn giải. Vận dụng công thức tính góc giữa hai vectơ

$$\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

a) $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{-3\cdot2+1\cdot6}{\sqrt{(-3)^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+6^2}}=0\Rightarrow(\vec{a},\vec{b})=90^\circ$

b) $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{3\cdot2+1\cdot4}{\sqrt{3^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+4^2}}=\dfrac{10}{10\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow(\vec{a},\vec{b})=45^\circ$

c) $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{(-\sqrt{2})\cdot2+1\cdot(-\sqrt{2})}{\sqrt{(-\sqrt{2})^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+(-\sqrt{2})^2}}=\dfrac{-3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=-1\Rightarrow(\vec{a},\vec{b})=180^\circ$

Bài 2. Tìm điều kiện của $\vec{u},\vec{v}$ để:

a) $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$;

b) $\vec{u}\cdot\vec{v}=-|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$.

Hướng dẫn giải. a) Ta có $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos(\vec{u},\vec{v})$ do đó để $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$ thì $\cos(\vec{u},\vec{v})=1$ hay $(\vec{u},\vec{v})=0^\circ$ nên $\vec{u},\vec{v}$ cùng hướng.

b) Ta có $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cos(\vec{u},\vec{v})$ do đó để $\vec{u}\cdot\vec{v}=-|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$ thì $\cos(\vec{u},\vec{v})=-1$ hay $(\vec{u},\vec{v})=180^\circ$ nên $\vec{u},\vec{v}$ ngược hướng.

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;2),B(-4;3)$. Gọi $M(t;0)$ là một điểm thuộc trục hoành.

a) Tính $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}$ theo t.

b) Tìm t để $\widehat{AMB}=90^\circ$.

Hướng dẫn giải. a) Ta có $\overrightarrow{AM}=(t-1;-2),\overrightarrow{BM}=(t+4;-3)\Rightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=(t-1)(t+4)+2.3=t^2+3t+2$

b) Để $\widehat{AMB}=90^\circ$ thì $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BM}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}=0\Leftrightarrow t^2+3t+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=-2\end{array}\right.$

Vậy với $\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=-2\end{array}\right.$ thì $\widehat{AMB}=90^\circ$.

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm không thẳng hàng $A(-4;1),B(2;4),C(2;-2)$.

a) Giải tam giác ABC.

b) Tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải. a) $AB=\sqrt{(2+4)^2+(4-1)^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$.

$AC=\sqrt{(2+4)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{45}$.

$BC=\sqrt{(2-2)^2+(-2-4)^2}=6$.

b) Giả sử $H(x;y)$ ta có $\overrightarrow{AH}=(x+4;y-1), \overrightarrow{BC}=(0;-6), \overrightarrow{BH}=(x-2;y-4), \overrightarrow{CA}=(-6;3)$.

Vì H là trực tâm tam giác ABC nên

$$\begin{cases}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+4).0+(y-1).(-6)=0\\ -6(x-8)+3(y-4)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{13}{2}\\ y=1\end{cases}\Rightarrow H\left(\frac{13}{2};1\right).$$

Bài 5. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC, ta có:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2\cdot\overrightarrow{AC}^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}.$$

Hướng dẫn giải. Ta có $S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A\Rightarrow S^2=\frac{1}{4}AB^2\cdot AC^2(1-\cos^2 A)$

Hay $S^2=\frac{1}{4}AB^2\cdot AC^2\left[1-\frac{(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}{AB^2\cdot AC^2}\right]=\frac{1}{4}\left[AB^2\cdot AC^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2\right]$

Vậy $S_{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{\overrightarrow{AB}^2\cdot\overrightarrow{AC}^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$.

Bài 6. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Chứng minh rằng với mọi điểm M, ta có:

$$MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2.$$

Hướng dẫn giải. $MA^2+MB^2+MC^2=(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})^2+(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC})^2$

$=3MG^2+2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC})+GA^2+GB^2+GC^2$

$=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$ (do $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$).

2) Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Tam giác ABC vuông ở A và có góc $\widehat{B}=50°$. Hệ thức nào sau đây sai?

Ⓐ $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})=130°$.
Ⓑ $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC})=40°$.
Ⓒ $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CB})=50°$.
Ⓓ $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB})=40°$.

Hướng dẫn giải.

Vì $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB})=180°-\widehat{ACB}=180°-40°=140°$.

Chọn D.

Câu 2. Cho O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều MNP. Góc nào sau đây bằng 120°?

Ⓐ $(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{NP})$.
Ⓑ $(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{ON})$.
Ⓒ $(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{OP})$.
Ⓓ $(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP})$.

Hướng dẫn giải.

- Vẽ $\overrightarrow{NE}=\overrightarrow{MN}$. Khi đó $(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{NP})=(\overrightarrow{NE},\overrightarrow{NP})=\widehat{PNE}=180°-\widehat{MNP}=180°-60°=120°$.
- Vẽ $\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{MO}$. Khi đó $(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{ON})=(\overrightarrow{OF},\overrightarrow{ON})=\widehat{NOF}=60°$.
- Vì $MN\perp OP\Rightarrow(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{OP})=90°$.
- Ta có $(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP})=\widehat{NMP}=60°$.

Chọn A.

Câu 3. Cho tam giác đều ABC. Tính $P = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$.

Ⓐ $P = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Ⓑ $P = \frac{3}{2}$. Ⓒ $P = -\frac{3}{2}$. Ⓓ $P = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải. Vẽ $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB}$. Khi đó $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}) = \widehat{CBE} = 180^\circ - \widehat{CBA} = 120^\circ \Rightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$.

Tương tự, ta cũng có $\cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) = \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{1}{2}$.

Vậy $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}) = -\frac{3}{2}$.

Chọn C.

Câu 4. Cho tam giác đều ABC có đường cao AH. Tính $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BA})$.

Ⓐ 30°. Ⓑ 60°. Ⓒ 120°. Ⓓ 150°.

Hướng dẫn giải. Vẽ $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA}$.

Khi đó $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AE}) = \widehat{HAE} = \alpha$ (hình vẽ).

$(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AE}) = 180^\circ - \widehat{BAH} = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

Chọn D.

Câu 5. Tam giác ABC vuông ở A và có $BC = 2AC$. Tính $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})$.

Ⓐ $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}$. Ⓑ $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = -\frac{1}{2}$.
Ⓒ $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ⓓ $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Hướng dẫn giải. Xác định được $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 180^\circ - \widehat{ACB}$

Ta có $\cos \widehat{ACB} = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{ACB} = 60^\circ$

$\longrightarrow (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 180^\circ - \widehat{ACB} = 120^\circ$

Vậy $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$.

Chọn B.

Câu 6. Cho tam giác ABC. Tính tổng $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$.

Ⓐ 180°. Ⓑ 360°. Ⓒ 270°. Ⓓ 120°.

Hướng dẫn giải. Ta có $\begin{cases} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 180^\circ - \widehat{ABC} \\ (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) = 180^\circ - \widehat{BCA} \\ (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}) = 180^\circ - \widehat{CAB} \end{cases}$

$\longrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}) = 540^\circ - (\widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{CAB}) = 540^\circ - 180^\circ = 360^\circ$.

Chọn B.

Câu 7. Cho tam giác ABC với $\widehat{A} = 60^\circ$. Tính tổng $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA})$.

Ⓐ 120°. Ⓑ 360°. Ⓒ 270°. Ⓓ 240°.

Hướng dẫn giải. Ta có $\begin{cases} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 180^\circ - \widehat{ABC} \\ (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) = 180^\circ - \widehat{BCA} \end{cases}$

$\longrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) = 360^\circ - (\widehat{ABC} + \widehat{BCA})$

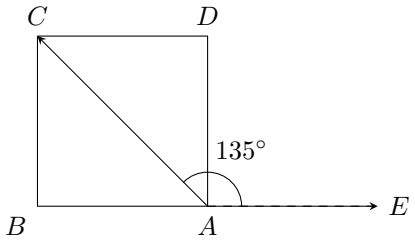
$= 360^\circ - (180^\circ - \widehat{BAC}) = 360^\circ - 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$.

Chọn D.

Câu 8. Cho hình vuông $ABCD$. Tính $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA})$.

Ⓐ $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Ⓑ $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Ⓒ $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = 0$.
Ⓓ $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = -1$.

Hướng dẫn giải.



Vẽ $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA}$.

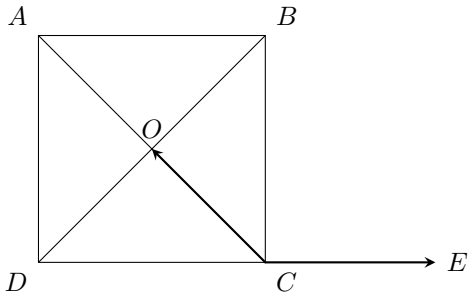
Khi đó $\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) = \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}) = \cos \widehat{CAE} = \cos 135^\circ = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Chọn B.

Câu 9. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O. Tính tổng $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{DC})$.

Ⓐ 45°. Ⓑ 405°. Ⓒ 315°. Ⓓ 225°.

Hướng dẫn giải.



- Ta có $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ cùng hướng nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) = 0^\circ$.
- Ta có $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}$ ngược hướng nên $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}) = 180^\circ$.
- Vẽ $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DC}$, khi đó $(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{DC}) = (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CE}) = \widehat{OCE} = 135^\circ$.

Vậy $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{DC}) = 0^\circ + 180^\circ + 135^\circ = 315^\circ$.

Chọn C.

Câu 10. Tam giác ABC có góc A bằng 100° và có trực tâm H. Tính tổng $(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}) + (\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) + (\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA})$.

Ⓐ 360°. Ⓑ 180°. Ⓒ 80°. Ⓓ 160°.

Hướng dẫn giải.

Ta có $\begin{cases} (\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}) = \widehat{BHA} \\ (\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) = \widehat{BHC} \\ (\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA}) = \widehat{CHA} \end{cases}$

$\longrightarrow (\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}) + (\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) + (\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HA}) = \widehat{BHA} + \widehat{BHC} + \widehat{CHA}$

$= 2\widehat{BHC} = 2(180^\circ - 100^\circ) = 160^\circ$ (do tứ giác $HIAF$ nội tiếp).

Chọn D.

Câu 11. Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

Ⓐ $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.
Ⓑ $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.
Ⓒ $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$.
Ⓓ $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

Hướng dẫn giải. Chọn A

Do $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng nên $(\vec{a},\vec{b})=0^\circ\longrightarrow\cos(\vec{a},\vec{b})=1$.
Vậy $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

Câu 12. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

Ⓐ $\alpha=180^\circ$.
Ⓑ $\alpha=0^\circ$.
Ⓒ $\alpha=90^\circ$.
Ⓓ $\alpha=45^\circ$.

Hướng dẫn giải. Chọn A

Ta có $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})$.

Mà theo giả thiết $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$, suy ra $\cos(\vec{a},\vec{b})=-1\longrightarrow(\vec{a},\vec{b})=180^\circ$.

Câu 13. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$ và $\vec{a}\cdot\vec{b}=-3$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Ⓐ $\alpha=30^\circ$.
Ⓑ $\alpha=45^\circ$.
Ⓒ $\alpha=60^\circ$.
Ⓓ $\alpha=120^\circ$.

Hướng dẫn giải. Chọn D

Ta có $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})\longrightarrow\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{-3}{3\cdot2}=-\dfrac{1}{2}\longrightarrow(\vec{a},\vec{b})=120^\circ$.

Câu 14. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ và hai vectơ $\vec{u}=\dfrac{2}{5}\vec{a}-3\vec{b}$ và $\vec{v}=\vec{a}+\vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Ⓐ $\alpha=90^\circ$.
Ⓑ $\alpha=180^\circ$.
Ⓒ $\alpha=60^\circ$.
Ⓓ $\alpha=45^\circ$.

Hướng dẫn giải. Chọn B

Ta có $\vec{u}\perp\vec{v}\longrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Leftrightarrow\left(\dfrac{2}{5}\vec{a}-3\vec{b}\right)\cdot(\vec{a}+\vec{b})=0\Leftrightarrow\dfrac{2}{5}\vec{a}^2-\dfrac{13}{5}\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{b}^2=0$.

$\xrightarrow{|\vec{a}|=|\vec{b}|=1}\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$.

Suy ra $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=-1\longrightarrow(\vec{a},\vec{b})=180^\circ$.

Câu 15. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây sai?

Ⓐ $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2\right)$.
Ⓑ $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2\right)$.
Ⓒ $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2\right)$.
Ⓓ $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{4}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2\right)$.

Hướng dẫn giải. Chọn C

Nhận thấy C và D chỉ khác nhau về hệ số $\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{4}$ nên thử kiểm tra đáp án C và D.

Ta có $|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})^2-(\vec{a}-\vec{b})^2=4\vec{a}\cdot\vec{b}\longrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{4}\left(|\vec{a}+\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2\right)$.

• A đúng, vì $|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$.

• B đúng, vì $|\vec{a}-\vec{b}|^2=(\vec{a}-\vec{b})^2=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}\longrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{a}-\vec{b}|^2\right)$.

Câu 16. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Ⓐ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2a^2$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{a^2}{2}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{2}$.

Hướng dẫn giải. Chọn D

Xác định được góc $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ là góc $\hat{A}$ nên $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=60^\circ$.

Do đó $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\cdot AC\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=a\cdot a\cdot\cos 60^\circ=\frac{a^2}{2}$.

Câu 17. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

Ⓐ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=a^2$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{a^2}{2}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{a^2}{2}$.

Hướng dẫn giải. Chọn C

Xác định được góc $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})$ là góc ngoài của góc $\hat{B}$ nên $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})=120^\circ$.

Do đó $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=AB\cdot BC\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})=a\cdot a\cdot\cos 120^\circ=-\frac{a^2}{2}$.

Câu 18. Gọi G là trọng tâm tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Mệnh đề nào sau đây là sai?

Ⓐ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}a^2$.
Ⓑ $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=-\frac{1}{2}a^2$.
Ⓒ $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=\frac{a^2}{6}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}a^2$.

Hướng dẫn giải. Chọn C

Dựa vào đáp án, ta có nhận xét sau:

• Xác định được góc $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ là góc $\hat{A}$ nên $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=60^\circ$.

Do đó $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\cdot AC\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=a\cdot a\cdot\cos 60^\circ=\frac{a^2}{2}\longrightarrow$ A đúng.

• Xác định được góc $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB})$ là góc ngoài của góc $\hat{C}$ nên $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB})=120^\circ$.

Do đó $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=AC\cdot CB\cdot\cos(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB})=a\cdot a\cdot\cos 120^\circ=-\frac{a^2}{2}\longrightarrow$ B đúng.

• Xác định được góc $(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB})$ là góc $\widehat{AGB}$ nên $(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB})=120^\circ$.

Do đó $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=GA\cdot GB\cdot\cos(\overrightarrow{GA},\overrightarrow{GB})=\frac{a}{\sqrt{3}}\cdot\frac{a}{\sqrt{3}}\cdot\cos 120^\circ=-\frac{a^2}{6}\longrightarrow$ C sai. Chọn C.

• Xác định được góc $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AG})$ là góc $\widehat{GAB}$ nên $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AG})=30^\circ$.

Do đó $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}=AB\cdot AG\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AG})=a\cdot\frac{a}{\sqrt{3}}\cdot\cos 30^\circ=\frac{a^2}{2}\longrightarrow$ D đúng.

Câu 19. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a và chiều cao AH. Mệnh đề nào sau đây là sai?

Ⓐ $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.
Ⓑ $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{HA})=150^\circ$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{2}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=\dfrac{a^2}{2}$.

Hướng dẫn giải. Chọn D

Xác định được góc $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB})$ là góc ngoài của góc $\hat{C}$ nên $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB})=120^\circ$.
Do đó $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}=AC\cdot CB\cdot\cos(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB})=a\cdot a\cdot\cos 120^\circ=-\dfrac{a^2}{2}$.

Câu 20. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và có $AB=AC=a$. Tính $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

Ⓐ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-a^2$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=a^2$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Hướng dẫn giải. Chọn A

Xác định được góc $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})$ là góc ngoài của góc $\hat{B}$ nên $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})=135^\circ$.
Do đó $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=AB\cdot BC\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})=a\cdot a\sqrt{2}\cdot\cos 135^\circ=-a^2$.

Câu 21. Cho tam giác ABC vuông tại A và có $AB=c, AC=b$. Tính $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$.

Ⓐ $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=b^2$.
Ⓑ $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=c^2$.
Ⓒ $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=b^2+c^2$.
Ⓓ $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=b^2-c^2$.

Hướng dẫn giải. Chọn B

Ta có $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=BA\cdot BC\cdot\cos(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})=BA\cdot BC\cdot\cos\hat{B}=c\cdot\sqrt{b^2+c^2}\cdot\dfrac{c}{\sqrt{b^2+c^2}}=c^2$.

Cách khác. Tam giác ABC vuông tại A suy ra $AB\perp AC\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.
Ta có $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}=AB^2=c^2$.

Câu 22. Cho ba điểm A,B,C thỏa $AB=2$ cm, $BC=3$ cm, $CA=5$ cm. Tính $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$.

Ⓐ $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=13$.
Ⓑ $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=15$.
Ⓒ $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=17$.
Ⓓ $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=19$.

Hướng dẫn giải. Chọn B

Ta có $AB+BC=CA\Rightarrow$ ba điểm A,B,C thẳng hàng và B nằm giữa A,C.
Khi đó $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=CA\cdot CB\cdot\cos(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=5\cdot 3\cdot\cos 0^\circ=15$.
Cách khác. Ta có $AB^2=\overrightarrow{AB}^2=(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})^2=CB^2-2\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}+CA^2$
$\longrightarrow\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=\dfrac{1}{2}(CB^2+CA^2-AB^2)=\dfrac{1}{2}(3^2+5^2-2^2)=15$.

Câu 23. Cho tam giác ABC có $BC=a, CA=b, AB=c$. Tính $P=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{BC}$.

Ⓐ $P=b^2-c^2$.
Ⓑ $P=\dfrac{c^2+b^2}{2}$.
Ⓒ $P=\dfrac{c^2+b^2+a^2}{3}$.
Ⓓ $P=\dfrac{c^2+b^2-a^2}{2}$.

Hướng dẫn giải. Chọn A

Ta có $P=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$
$=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{AB}^2=AC^2-AB^2=b^2-c^2$.

Câu 24. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tính $P=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA})$.

Ⓐ $P=-1$.
Ⓑ $P=3a^2$.
Ⓒ $P=-3a^2$.
Ⓓ $P=2a^2$.

Hướng dẫn giải. Chọn C

Từ giả thiết suy ra $AC = a\sqrt{2}$.

Ta có $P = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC}^2$

$= -CA \cdot CD \cdot \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) - AC^2 = -a\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos 45^\circ - (a\sqrt{2})^2 = -3a^2$.

Câu 25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(3;-1), B(2;10), C(-4;2)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

Ⓐ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 40$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -40$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 26$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -26$.

Hướng dẫn giải. Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1;11), \overrightarrow{AC} = (-7;3)$.
Suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-1) \cdot (-7) + 11 \cdot 3 = 40$.

Câu 26. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(3;-1)$ và $B(2;10)$. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB}$.

Ⓐ $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = -4$.
Ⓑ $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$.
Ⓒ $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = 4$.
Ⓓ $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = 16$.

Hướng dẫn giải. Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AO} = (-3;1), \overrightarrow{OB} = (2;10)$.
Suy ra $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = -3 \cdot 2 + 1 \cdot 10 = 4$.

Câu 27. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a} = 4\vec{i} + 6\vec{j}$ và $\vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j}$. Tính tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Ⓐ $\vec{a} \cdot \vec{b} = -30$.
Ⓑ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$.
Ⓒ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 30$.
Ⓓ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 43$.

Hướng dẫn giải. Chọn A

Từ giả thiết suy ra $\vec{a} = (4;6)$ và $\vec{b} = (3;-7)$.
Suy ra $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 3 + 6 \cdot (-7) = -30$.

Câu 28. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a} = (-3;2)$ và $\vec{b} = (-1;-7)$. Tìm tọa độ vectơ $\vec{c}$ biết $\vec{c} \cdot \vec{a} = 9$ và $\vec{c} \cdot \vec{b} = -20$.

Ⓐ $\vec{c} = (-1;-3)$.
Ⓑ $\vec{c} = (-1;3)$.
Ⓒ $\vec{c} = (1;-3)$.
Ⓓ $\vec{c} = (1;3)$.

Hướng dẫn giải. Chọn B

Gọi $\vec{c} = (x;y)$.

Ta có $\begin{cases} \vec{c} \cdot \vec{a} = 9 \\ \vec{c} \cdot \vec{b} = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y = 9 \\ -x - 7y = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \longrightarrow \vec{c} = (-1;3)$.

Câu 29. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba vectơ $\vec{a} = (1;2)$, $\vec{b} = (4;3)$ và $\vec{c} = (2;3)$. Tính $P = \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$.

Ⓐ $P = 0$.
Ⓑ $P = 18$.
Ⓒ $P = 20$.
Ⓓ $P = 28$.

Hướng dẫn giải. Chọn B

Ta có $\vec{b} + \vec{c} = (6;6)$.

Suy ra $P = \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 6 = 18$.

Câu 30. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a} = (-1;1)$ và $\vec{b} = (2;0)$. Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Ⓐ $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
Ⓑ $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Ⓒ $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.
Ⓓ $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải. Chọn B

Ta có $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \dfrac{-1 \cdot 2 + 1 \cdot 0}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + 0^2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 31. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a} = (-2;-1)$ và $\vec{b} = (4;-3)$. Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Ⓐ $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.
Ⓑ $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.
Ⓒ $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Ⓓ $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \dfrac{-2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-3)}{\sqrt{4+1} \cdot \sqrt{16+9}} = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 32. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{a} = (4;3)$ và $\vec{b} = (1;7)$. Tính góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Ⓐ $\alpha = 90°$.
Ⓑ $\alpha = 60°$.
Ⓒ $\alpha = 45°$.
Ⓓ $\alpha = 30°$.

Hướng dẫn giải. Chọn C

Ta có $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \dfrac{4 \cdot 1 + 3 \cdot 7}{\sqrt{16+9} \cdot \sqrt{1+49}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 45°$.

Câu 33. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{x} = (1;2)$ và $\vec{y} = (-3;-1)$. Tính góc α giữa hai vectơ $\vec{x}$ và $\vec{y}$.

Ⓐ $\alpha = 45°$.
Ⓑ $\alpha = 60°$.
Ⓒ $\alpha = 90°$.
Ⓓ $\alpha = 135°$.

Hướng dẫn giải. Chọn D

Ta có $\cos(\vec{x}, \vec{y}) = \dfrac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\vec{x}| \cdot |\vec{y}|} = \dfrac{1 \cdot (-3) + 2 \cdot (-1)}{\sqrt{1+4} \cdot \sqrt{9+1}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow (\vec{x}, \vec{y}) = 135°$.

Câu 34. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(1;2)$, $B(-1;1)$ và $C(5;-1)$. Tính cosin của góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Ⓐ $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\dfrac{1}{2}$.
Ⓑ $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Ⓒ $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\dfrac{2}{5}$.
Ⓓ $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Hướng dẫn giải. Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-2;-1)$ và $\overrightarrow{AC} = (4;-3)$.

Suy ra $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{-2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-3)}{\sqrt{4+1} \cdot \sqrt{16+9}} = -\dfrac{5}{\sqrt{5} \cdot 5} = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 35. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(6;0)$, $B(3;1)$ và $C(-1;-1)$. Tính số đo góc B của tam giác đã cho.

Ⓐ $15°$. Ⓑ $60°$. Ⓒ $120°$. Ⓓ $135°$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Chọn D

Ta có $\overrightarrow{BA} = (3;-1)$ và $\overrightarrow{BC} = (-4;-2)$. Suy ra:

$$\cos(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|} = \frac{3\cdot(-4)+(-1)\cdot(-2)}{\sqrt{9+1}\cdot\sqrt{16+4}} = -\frac{10}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{20}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow \hat{B} = (\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) = 135°.$$

Câu 36. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho bốn điểm $A(-8;0)$, $B(0;4)$, $C(2;0)$ và $D(-3;-5)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ Hai góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$ phụ nhau.
Ⓑ Góc $\widehat{BCD}$ là góc nhọn.
Ⓒ $\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) = \cos(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD})$.
Ⓓ Hai góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$ bù nhau.

✍ *Hướng dẫn giải.* Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB} = (8;4)$, $\overrightarrow{AD} = (5;-5)$, $\overrightarrow{CB} = (-2;4)$, $\overrightarrow{CD} = (-5;-5)$.

Suy ra $\begin{cases} \cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) = \dfrac{8\cdot5+4\cdot(-5)}{\sqrt{8^2+4^2}\cdot\sqrt{5^2+5^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \\ \cos(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}) = \dfrac{(-2)\cdot(-5)+4\cdot(-5)}{\sqrt{2^2+4^2}\cdot\sqrt{5^2+5^2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{10}} \end{cases}$

$\longrightarrow \cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) + \cos(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}) = 0 \Rightarrow \widehat{BAD} + \widehat{BCD} = 180°$.

Câu 37. Cho ba điểm O, A, B không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để tích vô hướng $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ là

Ⓐ tam giác OAB đều.
Ⓑ tam giác OAB cân tại O.
Ⓒ tam giác OAB vuông tại O.
Ⓓ tam giác OAB vuông cân tại O.

✍ *Hướng dẫn giải.* Chọn B

Ta có $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}) = 0$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{OA}^2 = 0 \Leftrightarrow OB^2 - OA^2 = 0 \Leftrightarrow OB = OA$.

Câu 38. Cho M, N, P, Q là bốn điểm tùy ý. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào sai?

Ⓐ $\overrightarrow{MN}(\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PQ}$.
Ⓑ $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}$.
Ⓒ $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{MN}$.
Ⓓ $(\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{PQ})(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}) = MN^2 - PQ^2$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Chọn B

Đáp án A đúng theo tính chất phân phối.
Đáp án B sai. Sửa lại cho đúng $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}$.
Đáp án C đúng theo tính chất giao hoán.
Đáp án D đúng theo tính chất phân phối. Chọn B.

Câu 39. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Đẳng thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = a^2$. Ⓑ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = a^2\sqrt{2}$.

Ⓒ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a^2$. Ⓓ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}a^2$.

Hướng dẫn giải. Chọn A

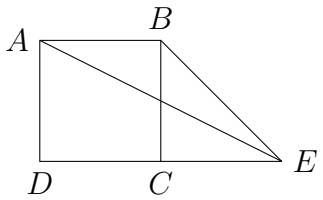
Ta có $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\widehat{BAC}=45^\circ$ nên $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\cdot AC\cdot\cos 45^\circ=a\cdot a\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=a^2$.

Câu 40. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua C. Đẳng thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=2a^2$.. Ⓑ $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{3}a^2$..
Ⓒ $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{5}a^2$.. Ⓓ $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=5a^2$..

Hướng dẫn giải. Chọn A

Ta có C là trung điểm của DE nên $DE=2a$.



Khi đó $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE})\cdot\overrightarrow{AB}=\underbrace{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}}_{0}+\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AB}$

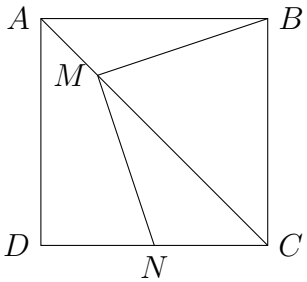
$=DE\cdot AB\cdot\cos(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{AB})=2a\cdot a\cdot\cos 0^\circ=2a^2$.

Câu 41. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2. Điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM=\dfrac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng DC. Đẳng thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MN}=-4$.. Ⓑ $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MN}=0$..
Ⓒ $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MN}=4$.. Ⓓ $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MN}=16$..

Hướng dẫn giải. Chọn B

Giả thiết không cho góc, ta phân tích các vectơ $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MN}$ theo các vectơ có giá vuông góc với nhau.



•$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

•$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}-\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$

$=\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. Suy ra:

$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MN}=\left(\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AD}\right)\left(\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}\right)=\dfrac{1}{16}\left(3\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+3\overrightarrow{AB}^2-3\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}\right)$

$=\dfrac{1}{16}(0+3a^2-3a^2-0)=0$.

Câu 42. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB=8$, $AD=5$. Đẳng thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=62$.. Ⓑ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=64$..

Ⓒ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=-62..$ Ⓓ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=-64..$

Hướng dẫn giải. Chọn D

Giả thiết không cho góc, ta phân tích các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}$ theo các vectơ có giá vuông góc với nhau.

Ta có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AB}^2+0=-AB^2=-64$.

Câu 43. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba vectơ $\vec{a}=(-2;3)$, $\vec{b}=(4;1)$ và $\vec{c}=k\vec{a}+m\vec{b}$ với $k,m\in\mathbb{R}$. Biết rằng vectơ $\vec{c}$ vuông góc với vectơ $(\vec{a}+\vec{b})$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $2k=2m$. Ⓑ $3k=2m$.
Ⓒ $2k+3m=0$. Ⓓ $3k+2m=0$.

Hướng dẫn giải. Chọn C

Ta có $\begin{cases}\vec{c}=k\vec{a}+m\vec{b}=(-2k+4m;3k+m)\\ \vec{a}+\vec{b}=(2;4)\end{cases}$.

Để $\vec{c}\perp(\vec{a}+\vec{b})\Leftrightarrow\vec{c}\cdot(\vec{a}+\vec{b})=0\Leftrightarrow 2(-2k+4m)+4(3k+m)=0\Leftrightarrow 8k+12m=0\Leftrightarrow 2k+3m=0$.

Câu 44. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{u}=(3;4)$ và $\vec{v}=(-8;6)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $|\vec{u}|=|\vec{v}|$. Ⓑ $M\left(0;-\dfrac{1}{2}\right)$ và $\vec{v}$ cùng phương.
Ⓒ $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$. Ⓓ $\vec{u}=-\vec{v}$.

Hướng dẫn giải. Chọn C

Ta có $\vec{u}\cdot\vec{v}=3\cdot(-8)+4\cdot 6=0$ suy ra $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.

Câu 45. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho bốn điểm $A(7;-3)$, $B(8;4)$, $C(1;5)$ và $D(0;-2)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{CB}$.
Ⓑ Tam giác ABC đều.
Ⓒ Tứ giác $ABCD$ là hình vuông.
Ⓓ Tứ giác $ABCD$ không nội tiếp đường tròn.

Hướng dẫn giải. Chọn C

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(1;7)\Rightarrow AB=\sqrt{1^2+7^2}=5\sqrt{2}\\ \overrightarrow{BC}=(-7;1)\Rightarrow BC=\sqrt{(-7)^2+1^2}=5\sqrt{2}\\ \overrightarrow{CD}=(-1;-7)\Rightarrow CD=\sqrt{(-1)^2+(-7)^2}=5\sqrt{2}\\ \overrightarrow{DA}=(7;-1)\Rightarrow DA=\sqrt{7^2+(-1)^2}=5\sqrt{2}\end{cases}\longrightarrow AB=BC=CD=DA=5\sqrt{2}$.

Lại có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=1\cdot(-7)+7\cdot 1=0$ nên $AB\perp BC$.

Từ đó suy ra $ABCD$ là hình vuông.

Câu 46. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-1;1)$, $B(1;3)$ và $C(1;-1)$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

Ⓐ Tam giác ABC đều.
Ⓑ Tam giác ABC có ba góc đều nhọn.
Ⓒ Tam giác ABC cân tại B.
Ⓓ Tam giác ABC vuông cân tại A.

Hướng dẫn giải. Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;2)$, $\overrightarrow{BC}=(0;-4)$ và $\overrightarrow{AC}=(2;-2)$.

Suy ra $\begin{cases} AB=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2} \\ AC=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2} \\ BC=\sqrt{0^2+(-4)^2}=4 \end{cases} \Rightarrow AB=AC=2\sqrt{2}.$

Lại có $AB^2+AC^2=(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2=8+8=16=BC^2$.

Vậy tam giác ABC vuông cân tại A.

Câu 47. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;2)$ và $B(-3;1)$. Tìm tọa độ điểm C thuộc trục tung sao cho tam giác ABC vuông tại A.

Ⓐ $C(0;6)$. Ⓑ $C(5;0)$. Ⓒ $C(3;1)$. Ⓓ $C(0;-6)$.

Hướng dẫn giải. Chọn A

Ta có $C\in Oy$ nên $C(0;c)$ và $\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(-4;-1) \\ \overrightarrow{AC}=(-1;c-2) \end{cases}$.

Tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow(-4)\cdot(-1)+(-1)(c-2)=0\Leftrightarrow 4-c+2=0\Leftrightarrow c=6$.

Vậy $C(0;6)$.

Câu 48. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(-3;0)$, $B(3;0)$ và $C(2;6)$. Gọi $H(a;b)$ là tọa độ trực tâm của tam giác đã cho. Tính $a+6b$.

Ⓐ $a+6b=5$. Ⓑ $a+6b=6$. Ⓒ $a+6b=7$. Ⓓ $a+6b=8$.

Hướng dẫn giải. Chọn C

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AH}=(a+3;b)\ \&\ \overrightarrow{BC}=(-1;6) \\ \overrightarrow{BH}=(a-3;b)\ \&\ \overrightarrow{AC}=(5;6) \end{cases}$. Từ giả thiết, ta có:

$\begin{cases} \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \\ \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+3)(-1)+b\cdot 6=0 \\ (a-3)\cdot 5+b\cdot 6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a+6b=3 \\ 5a+6b=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=\dfrac{5}{6} \end{cases} \longrightarrow a+6b=7.$

Câu 49. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(4;3)$, $B(2;7)$ và $C(-3;-8)$. Tìm tọa độ chân đường cao A' kẻ từ đỉnh A xuống cạnh BC.

Ⓐ $A'(1;-4)$. Ⓑ $A'(-1;4)$. Ⓒ $A'(1;4)$. Ⓓ $A'(4;1)$.

Hướng dẫn giải. Chọn C

Gọi $A'(x;y)$. Ta có $\overrightarrow{AA'}=(x-4;y-3)$, $\overrightarrow{BC}=(-5;-15)$, $\overrightarrow{BA'}=(x-2;y-7)$.

Từ giả thiết, ta có $\begin{cases} AA'\perp BC \\ B,A',C \text{ thẳng hàng} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{BC}=0\ (1) \\ \overrightarrow{BA'}=k\overrightarrow{BC}\ (2) \end{cases}$.

- $(1)\Leftrightarrow -5(x-4)-15(y-3)=0\Leftrightarrow x+3y=13$.
- $(2)\Leftrightarrow \dfrac{x-2}{-5}=\dfrac{y-7}{-15}\Leftrightarrow 3x-y=-1$.

Giải hệ $\begin{cases} x+3y=13 \\ 3x-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases} \longrightarrow A'(1;4)$.

Câu 50. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác MNP vuông tại M. Biết điểm $M(2;1)$, $N(3;-2)$ và P là điểm nằm trên trục Oy. Tính diện tích tam giác MNP.

Ⓐ $\dfrac{10}{3}$. Ⓑ $\dfrac{5}{3}$. Ⓒ $\dfrac{16}{3}$. Ⓓ $\dfrac{20}{3}$.

Hướng dẫn giải. Chọn A

P nằm trên $Oy \Rightarrow P(0;p)$ mà MNP vuông tại $M \Rightarrow \overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MN}=0$.

$\overrightarrow{MP}=(-2;p-1)$, $\overrightarrow{MN}=(1;-3)$.

$\Leftrightarrow -2\cdot 1+(p-1)\cdot(-3)=0 \Leftrightarrow -2-3p+3=0 \Leftrightarrow 3p=1 \Leftrightarrow p=\dfrac{1}{3}$.

$|\overrightarrow{MP}|=\sqrt{(-2)^2+\left(\dfrac{1}{3}-1\right)^2}=\sqrt{4+\dfrac{4}{9}}=\dfrac{2\sqrt{10}}{3}$, $|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$.

$S=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{MP}|\cdot|\overrightarrow{MN}|=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{10}}{3}\cdot\sqrt{10}=\dfrac{10}{3}$.

Câu 51. Cho hai vectơ $\vec{u}=(2;-1)$, $\vec{v}=(-3;4)$. Tích $\vec{u}\cdot\vec{v}$ là

Ⓐ 11. Ⓑ -10. Ⓒ 5. Ⓓ -2.

Hướng dẫn giải. Chọn B

Với $\begin{cases} \vec{u}=(2;-1) \\ \vec{v}=(-3;4) \end{cases} \Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=2\cdot(-3)+(-1)\cdot 4=-10$.

Câu 52. Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho $\vec{a}=(2;5)$ và $\vec{b}=(-3;1)$. Khi đó, giá trị của $\vec{a}\cdot\vec{b}$ bằng

Ⓐ -5. Ⓑ 1. Ⓒ 13. Ⓓ -1.

Hướng dẫn giải. Chọn D

Ta có $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot(-3)+5\cdot 1=-1$.

Câu 53. Cho $A(0;3), B(4;0), C(-2;-5)$. Tính $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

Ⓐ 16. Ⓑ 9. Ⓒ -10. Ⓓ -9.

Hướng dẫn giải. Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;-3)$; $\overrightarrow{BC}=(-6;-5)$.

Vậy $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=4\cdot(-6)+(-3)\cdot(-5)=-9$.

Câu 54. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{u}=\vec{i}+3\vec{j}$ và $\vec{v}=2\vec{j}-2\vec{i}$. Tính $\vec{u}\cdot\vec{v}$.

Ⓐ $\vec{u}\cdot\vec{v}=-4$. Ⓑ $\vec{u}\cdot\vec{v}=4$. Ⓒ $\vec{u}\cdot\vec{v}=2$. Ⓓ $\vec{u}\cdot\vec{v}=-2$.

Hướng dẫn giải. Chọn B

Theo giả thiết ta có $\vec{u}=(1;3)$ và $\vec{v}=(-2;2)$.

Khi đó $\vec{u}\cdot\vec{v}=1\cdot(-2)+3\cdot 2=4$.

Câu 55. Trong hệ tọa độ Oxy, cho $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j}$; $\vec{v} = (2;-1)$. Tính biểu thức tọa độ của $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Ⓐ $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$.
Ⓑ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$.
Ⓒ $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2;-3)$.
Ⓓ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 5\sqrt{2}$.

Hướng dẫn giải. Chọn A

Ta có $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j} \Rightarrow \vec{u} = (1;3)$.
Vậy $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = -1$.

Câu 56. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.
Ⓑ $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.
Ⓒ $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a} \cdot \vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.
Ⓓ $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$.

Hướng dẫn giải. Chọn B

Theo định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ.

Câu 57. Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng $4a$. Tích vô hướng của hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ là

Ⓐ $8a^2$.
Ⓑ $8a$.
Ⓒ $8\sqrt{3}a^2$.
Ⓓ $8\sqrt{3}a$.

Hướng dẫn giải. Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 4a \cdot 4a \cdot \cos 60^\circ = 4a \cdot 4a \cdot \dfrac{1}{2} = 8a^2$.

Câu 58. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a. Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

Ⓐ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = a$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \dfrac{a^2}{2}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = a^2$.

Hướng dẫn giải. Chọn A

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AB \perp AD$ do đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

Câu 59. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Đẳng thức nào sau đây **sai**?

Ⓐ $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$.
Ⓑ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \dfrac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2\right)$.
Ⓒ $|\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2$.
Ⓓ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \dfrac{1}{2}\left(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2\right)$.

Hướng dẫn giải. Chọn C

Ta thấy $|\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 = \left[|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})\right]^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \cos^2(\vec{a}, \vec{b}) \le |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2$ nên C sai.

Câu 60. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 90^\circ, \hat{B} = 60^\circ$ và $AB = a$. Khi đó $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$ bằng

Ⓐ $-2a^2$.
Ⓑ $2a^2$.
Ⓒ $3a^2$.
Ⓓ $-3a^2$.

Hướng dẫn giải. Chọn D

Tam giác ABC vuông tại A có $AB = a, \hat{B} = 60^\circ$ nên $AC = a\sqrt{3}$ và $BC = 2a$.

Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{CB}$ là $180^\circ - \hat{C} = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

Vậy $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = AC \cdot CB \cdot \cos 150^\circ = a\sqrt{3} \cdot 2a \cdot \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3a^2$.

Câu 61. Cho tam giác ABC đều cạnh bằng a. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Ⓐ $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Ⓑ $-\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Ⓒ $\dfrac{a^2}{2}$. Ⓓ $-\dfrac{a^2}{2}$.

Hướng dẫn giải. Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\dfrac{a^2}{2}$.

Câu 62. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = a; AC = a\sqrt{3}$ và AM là trung tuyến. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AM}$.

Ⓐ $\dfrac{a^2}{2}$. Ⓑ a^2. Ⓒ $-a^2$. Ⓓ $-\dfrac{a^2}{2}$.

Hướng dẫn giải. Chọn D

Ta có tam giác ABC vuông tại A và có AM là trung tuyến nên $AM = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{\sqrt{AB^2 + AC^2}}{2} = a$.

Tam giác AMB có $AB = BM = AM = a$ nên là tam giác đều. Suy ra góc $\widehat{MAB} = 60^\circ$.

Ta có $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AM}| \cdot \cos 60^\circ = -a \cdot a \cdot \dfrac{1}{2} = -\dfrac{a^2}{2}$.

Câu 63. Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB = 2, AD = 1, \widehat{BAD} = 60^\circ$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ bằng

Ⓐ -1. Ⓑ 1. Ⓒ $-\dfrac{1}{2}$. Ⓓ $\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải. Chọn B

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \cdot AD \cdot \cos \widehat{BAD} = 2 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = 1$.

Câu 64. Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB = 2, AD = 1, \widehat{BAD} = 60^\circ$. Tích vô hướng $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ bằng

Ⓐ -1. Ⓑ $\dfrac{1}{2}$. Ⓒ -1. Ⓓ $-\dfrac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải. Chọn C

Ta có $\widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{BAD} = 120^\circ$ và $BC = AD = 1$.

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC} = 2 \cdot 1 \cdot \cos 120^\circ = -1$.

Câu 65. Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB = 2, AD = 1, \widehat{BAD} = 60^\circ$. Độ dài đường chéo AC bằng

Ⓐ $\sqrt{5}$. Ⓑ $\sqrt{7}$. Ⓒ 5. Ⓓ $\dfrac{7}{2}$.

Hướng dẫn giải. Chọn B

Ta có $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \Rightarrow AC^2 = AB^2 + AD^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 2^2 + 1^2 + 2(1) = 7 \Rightarrow AC = \sqrt{7}$.

Câu 66. Cho hình bình hành $ABCD$, với $AB = 2, AD = 1, \widehat{BAD} = 60^\circ$. Độ dài đường chéo BD bằng

Ⓐ $\sqrt{3}$. Ⓑ $\sqrt{5}$. Ⓒ 5. Ⓓ 3.

Hướng dẫn giải. Chọn A

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} \Rightarrow BD^2 = BC^2 + BA^2 - 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 1^2 + 2^2 - 2(1) = 3 \Rightarrow BD = \sqrt{3}$.

Hoặc áp dụng định lý hàm số cosin trong tam giác ABD: $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ = 4 + 1 - 2 = 3$.

Câu 67. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ biết $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

Ⓐ $\alpha = 90^\circ$. Ⓑ $\alpha = 0^\circ$. Ⓒ $\alpha = 45^\circ$. Ⓓ $\alpha = 180^\circ$.

Hướng dẫn giải. Chọn D

Ta có: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$.

Mà $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ nên $\cos\alpha = -1$. Suy ra, $\alpha = 180^\circ$.

Câu 68. Tam giác ABC có $A(1;2), B(0;4), C(3;1)$. Góc $\widehat{BAC}$ của tam giác ABC gần với giá trị nào dưới đây?

Ⓐ 90°. Ⓑ $36^\circ 52'$. Ⓒ $143^\circ 7'$. Ⓓ $53^\circ 7'$.

Hướng dẫn giải. Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-1;2); \overrightarrow{AC} = (2;-1)$.

$\cos\widehat{BAC} = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{-2-2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \dfrac{-4}{5} \Rightarrow \widehat{BAC} \approx 143^\circ 7'$.

Câu 69. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác vectơ-không thỏa mãn $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ bằng:

Ⓐ $(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$. Ⓑ $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$.
Ⓒ $(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$. Ⓓ $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$.

Hướng dẫn giải. Chọn C

Ta có: $\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) \end{cases} \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$.

Câu 70. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; |\vec{a} - \vec{b}| = 4$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Chọn phát biểu đúng.

Ⓐ $\alpha = 60^\circ$. Ⓑ $\alpha = 30^\circ$. Ⓒ $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$. Ⓓ $\cos\alpha = \dfrac{3}{8}$.

Hướng dẫn giải. Chọn D

Ta có $|\vec{a} - \vec{b}| = 4 \Leftrightarrow (\vec{a} - \vec{b})^2 = 16 \Leftrightarrow \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 16$

$\Leftrightarrow 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos\alpha + 3^2 = 16 \Leftrightarrow \cos\alpha = \dfrac{3}{8}$.

Câu 71. Cho hai vectơ $\vec{a} = (4;3)$ và $\vec{b} = (1;7)$. Số đo góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

Ⓐ 45°. Ⓑ 90°. Ⓒ 60°. Ⓓ 30°.

Hướng dẫn giải. Chọn A

Ta có $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \dfrac{4 \cdot 1 + 3 \cdot 7}{\sqrt{4^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + 7^2}} = \dfrac{25}{5 \cdot \sqrt{50}} = \dfrac{25}{25\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ nên $\alpha = 45^\circ$.

Câu 72. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho $\vec{a}=(2;5)$, $\vec{b}=(3;-7)$. Tính góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Ⓐ $\alpha=60°$. Ⓑ $\alpha=120°$. Ⓒ $\alpha=45°$. Ⓓ $\alpha=135°$.

Hướng dẫn giải. Chọn D

Ta có $\cos\alpha=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{2\cdot3+5\cdot(-7)}{\sqrt{4+25}\cdot\sqrt{9+49}}=\dfrac{-29}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{58}}=\dfrac{-29}{29\sqrt{2}}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\alpha=135°$.

Câu 73. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $\vec{a}=(2;1)$ và $\vec{b}=(3;-6)$. Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

Ⓐ $0°$. Ⓑ $90°$. Ⓒ $180°$. Ⓓ $60°$.

Hướng dẫn giải. Chọn B

$\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{2\cdot3+1\cdot(-6)}{\sqrt{2^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+(-6)^2}}=0\Rightarrow(\vec{a},\vec{b})=90°$.

Câu 74. Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$ thỏa mãn $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}|-\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$. Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ là

Ⓐ $60°$. Ⓑ $120°$. Ⓒ $150°$. Ⓓ $30°$.

Hướng dẫn giải. Chọn A

Ta có $|-\vec{a}|=|\vec{a}|$.

Vậy $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{1}{2}|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\Rightarrow\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{1}{2}\Rightarrow(\vec{a},\vec{b})=60°$.

Câu 75. Cho vectơ $\vec{a}(1;-2)$. Với giá trị nào của y thì vectơ $\vec{b}=(3;y)$ tạo với vectơ $\vec{a}$ một góc $45°$?

Ⓐ $y=-9$. Ⓑ $y=-1$ hoặc $y=9$.
Ⓒ $y=1$ hoặc $y=-9$. Ⓓ $y=-1$.

Hướng dẫn giải. Chọn D

Ta có: $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{3-2y}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{9+y^2}}$.

Góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $45°$ suy ra $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{3-2y}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{9+y^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (1).

$(1)\Leftrightarrow\sqrt{90+10y^2}=6-4y\Leftrightarrow\begin{cases}6-4y\geq0\\90+10y^2=(6-4y)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\leq\dfrac{3}{2}\\y^2-8y-9=0\end{cases}\Leftrightarrow y=-1$.

Câu 76. Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ sao cho $|\vec{a}|=\sqrt{2},|\vec{b}|=2$ và hai vectơ $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b},\vec{y}=2\vec{a}-\vec{b}$ vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Ⓐ $120°$. Ⓑ $60°$. Ⓒ $90°$. Ⓓ $30°$.

Hướng dẫn giải. Chọn C

Vì hai vectơ $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b},\vec{y}=2\vec{a}-\vec{b}$ vuông góc với nhau nên

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})=0\Leftrightarrow2\vec{a}^2-\vec{b}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow2|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2+|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})=0$

$\Leftrightarrow 2\cdot(\sqrt{2})^2-2^2+\sqrt{2}\cdot 2\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})=0\Leftrightarrow\cos(\vec{a},\vec{b})=0\Leftrightarrow(\vec{a},\vec{b})=90^\circ$.

Câu 77. Tìm x để hai vectơ $\vec{a}=(x;2)$ và $\vec{b}=(2;-3)$ có giá vuông góc với nhau.

Ⓐ 3. Ⓑ 0. Ⓒ -3. Ⓓ 2.

Hướng dẫn giải. Chọn A

Vectơ $\vec{a}=(x;2)$ và $\vec{b}=(2;-3)$ có giá vuông góc với nhau $\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow 2x-6=0\Leftrightarrow x=3$.

Vậy $x=3$.

Câu 78. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai vectơ $\vec{u}=(3;4)$ và $\vec{v}=(-8;6)$. Khẳng định nào đúng?

Ⓐ $\vec{u}=-\vec{v}$. Ⓑ $\vec{u}$ vuông góc với $\vec{v}$.
Ⓒ $|\vec{u}|=|\vec{v}|$. Ⓓ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng phương.

Hướng dẫn giải. Chọn B

Ta có: $\vec{u}\cdot\vec{v}=3\cdot(-8)+4\cdot 6=0$. Do đó, $\vec{u}\perp\vec{v}$.

Câu 79. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $A(1;2),B(-3;1)$. Tìm tọa độ điểm C trên trục Oy sao cho tam giác ABC vuông tại A.

Ⓐ $C(6;0)$. Ⓑ $C(0;6)$. Ⓒ $C(-6;0)$. Ⓓ $C(0;-6)$.

Hướng dẫn giải. Chọn B

$C\in Oy\Leftrightarrow C(0;y)$

$\overrightarrow{AB}=(-4;-1),\overrightarrow{AC}=(-1;y-2)$.

Ba điểm A,B,C tạo thành một tam giác vuông tại $A\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}\\ \overrightarrow{AC}\neq\vec{0}\\ \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}\end{cases}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

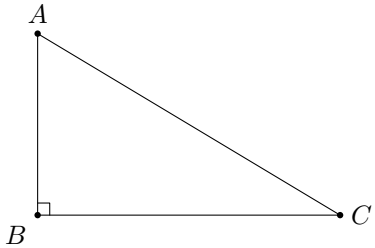
$\Leftrightarrow(-4)\cdot(-1)+(-1)\cdot(y-2)=0\Leftrightarrow 4-y+2=0\Leftrightarrow y=6$.

Vậy $C(0;6)$.

Câu 80. Cho tam giác ABC có $A(-1;2),B(0;3),C(5;-2)$. Tìm tọa độ chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC.

Ⓐ $(0;3)$. Ⓑ $(0;-3)$. Ⓒ $(3;0)$. Ⓓ $(-3;0)$.

Hướng dẫn giải. Chọn A



Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;1);\overrightarrow{AC}=(6;-4);\overrightarrow{BC}=(5;-5)$.

Nhận thấy rằng $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=1\cdot 5+1\cdot(-5)=0$ nên tam giác ABC vuông tại B.

Vậy chân đường cao hạ từ đỉnh A của tam giác ABC trùng với đỉnh $B(0;3)$.

Câu 81. Cho tam giác ABC có $A(1;-1), B(3;-3), C(6;0)$. Diện tích ΔABC là

Ⓐ 6. Ⓑ $6\sqrt{2}$. Ⓒ 12. Ⓓ 9.

Hướng dẫn giải. Chọn A

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-2), \overrightarrow{BC}=(3;3)$.

Ta thấy $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=2\cdot 3+(-2)\cdot 3=0$ nên tam giác ABC vuông tại B.

Vậy $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{3^2+3^2}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}=6$.

Câu 82. Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $B(-1;3)$ và $C(3;1)$. Tìm tọa độ điểm A sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

Ⓐ $A(0;0)$ hoặc $A(2;-4)$. Ⓑ $A(0;0)$ hoặc $A(2;4)$.
Ⓒ $A(0;0)$ hoặc $A(-2;-4)$. Ⓓ $A(0;0)$ hoặc $A(-2;4)$.

Hướng dẫn giải. Chọn B

Tìm tọa độ điểm A sao cho tam giác ABC vuông cân tại A.

Gọi $A(x;y)$. Tam giác ABC vuông cân tại $A \Leftrightarrow \begin{cases} AB=AC \\ AB\perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB^2=AC^2 \\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (-1-x)^2+(3-y)^2=(3-x)^2+(1-y)^2 \\ (-1-x)(3-x)+(3-y)(1-y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=y \\ x^2+y^2-2x-4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=y \\ x^2-2x=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=y \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, y=0 \\ x=2, y=4 \end{array}\right.$

Vậy $A(0;0)$ hoặc $A(2;4)$.

Câu 83. Tìm bán kính đường tròn đi qua ba điểm $A(0;4), B(3;4), C(3;0)$.

Ⓐ $\dfrac{5}{2}$. Ⓑ $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$. Ⓒ 5. Ⓓ 3.

Hướng dẫn giải. Chọn A

Tính được $AB=3, BC=4$ và $AC=5$.

Suy ra $AB^2+BC^2=AC^2$ nên tam giác ABC vuông tại B.

Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp $R=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{5}{2}$.

Câu 84. Trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) cho tam giác ABC có $A(1;0), B(-1;1), C(5;-1)$. Tọa độ trực tâm H của tam giác ABC là

Ⓐ $H(-1;-9)$. Ⓑ $H(-8;-27)$.
Ⓒ $H(-2;5)$. Ⓓ $H(3;14)$.

Hướng dẫn giải. Chọn B

Gọi $H(x;y)$ là trực tâm của tam giác $ABC \Leftrightarrow \begin{cases} AH\perp BC \\ BH\perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \\ \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \end{cases}$ (1).

Ta có: $\overrightarrow{AH}=(x-1;y); \overrightarrow{BC}=(6;-2); \overrightarrow{BH}=(x+1;y-1); \overrightarrow{AC}=(4;-1)$.

Suy ra: (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 6(x-1)-2y=0 \\ 4(x+1)-1(y-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x-2y=6 \\ 4x-y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-8 \\ y=-27 \end{cases}$.

Vậy $H(-8;-27)$.

§6 ÔN TẬP CHƯƠNG IV

I. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Trên cạnh BC của tam giác ABC lấy điểm M sao cho $MB = 3MC$.

a) Tìm mối liên hệ giữa hai vectơ $\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{MC}$.

b) Biểu thị vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Bài 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Chứng minh rằng với mọi điểm M, ta có:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}.$$

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $A(2;1), B(-2;5)$ và $C(-5;2)$.

a) Tìm tọa độ của các vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$.

b) Chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của một tam giác vuông. Tính diện tích và chu vi của tam giác đó.

c) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

d) Tìm tọa độ của điểm D sao cho tứ giác $BCAD$ là một hình bình hành.

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $A(1;2), B(3;4), C(-1;-2)$ và $D(6;5)$.

a) Tìm tọa độ của các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$.

b) Hãy giải thích tại sao các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng phương.

c) Giả sử E là điểm có tọa độ $(a;1)$. Tìm a để các vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BE}$ cùng phương.

d) Với a tìm được, hãy biểu thị vectơ $\overrightarrow{AE}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Bài 5. Cho vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ (hay còn được viết là $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$) là một vectơ đơn vị, cùng hướng với vectơ $\vec{a}$.

Bài 6. Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}$ với $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và $\vec{a} \perp \vec{b}$. Xét một hệ trục Oxy với các vectơ đơn vị $\vec{i} = \vec{a}$, $\vec{j} = \vec{b}$. Chứng minh rằng:

a) Vectơ $\vec{u}$ có tọa độ là $(\vec{u} \cdot \vec{a}; \vec{u} \cdot \vec{b})$.

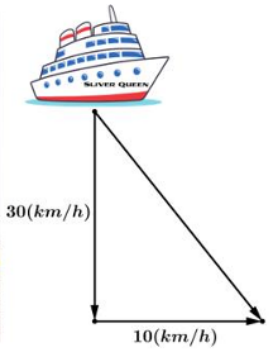
b) $\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{a})\vec{a} + (\vec{u} \cdot \vec{b})\vec{b}$.

Bài 7. Trên sông, một ca nô chuyển động thẳng đều theo hướng S15°E với vận tốc có độ lớn bằng 20 km/h. Tính vận tốc riêng của ca nô, biết rằng, nước trên sông chảy về hướng đông với vận tốc có độ lớn bằng 3 km/h.

Bài 8. Một khúc sông rộng 200m. Một chiếc thuyền chèo qua sông với vận tốc chèo 15km/h theo phương vuông góc với bờ sông. Biết rằng vận tốc nước chảy là 3km/h. Một lần khác thuyền muốn đến bờ bên kia tại điểm cách điểm đến theo phương vuông góc một khoảng bằng 50m. Tính vận tốc chèo của thuyền (biết rằng vận tốc dòng nước không đổi).

Bài 9. VinFast là một hãng xe ô tô điện của Việt Nam. Năm 2023, VinFast đã xuất khẩu gần 1900 chiếc xe điện VF8 sang thị trường Bắc Mỹ bằng tàu Silver Queen. Biết rằng con tàu có vectơ vận tốc chỉ theo hướng Nam, vận tốc của dòng nước là một vectơ theo hướng Đông như hình minh họa dưới đây. Tính độ dài vectơ tổng của hai vectơ nói trên (kết quả làm tròn đến một chữ số sau dấu phẩy).





II. TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Câu 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba khác $\vec{0}$ thì cùng phương.
(B) Hai vectơ ngược hướng với một vectơ thứ ba thì cùng hướng.
(C) Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba thì cùng phương.
(D) Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba thì cùng hướng.

Câu 2. Cho 3 điểm A, B, C không thẳng hàng. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ không, có điểm đầu và điểm cuối là A, B hoặc C?

(A) 3. (B) 5. (C) 6. (D) 9.

Câu 3. Vectơ có điểm đầu là A, điểm cuối là B được kí hiệu là:

(A) AB. (B) $\overrightarrow{AB}$. (C) $|\overrightarrow{AB}|$. (D) $\overrightarrow{BA}$.

Câu 4. Cho tam giác ABC. Có thể xác định bao nhiêu vectơ (khác vectơ không) có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh A, B, C?

(A) 3. (B) 6. (C) 4. (D) 2.

Câu 5. Từ hai điểm phân biệt A, B xác định được bao nhiêu vectơ khác $\vec{0}$?

(A) 3. (B) 1. (C) 2. (D) 4.

Câu 6. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Số các vectơ khác vectơ-không, cùng phương với $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

(A) 4. (B) 6. (C) 7. (D) 9.

Câu 7. Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt. Số vectơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ các điểm A, B, C, D là

(A) 10. (B) 14. (C) 8. (D) 12.

Câu 8. Phát biểu nào sau đây đúng?

(A) Hai vectơ bằng nhau thì có giá trùng nhau hoặc song song.
(B) Hai vectơ có độ dài không bằng nhau thì không cùng hướng.
(C) Hai vectơ không bằng nhau thì chúng không cùng hướng.
(D) Hai vectơ không bằng nhau thì độ dài của chúng không bằng nhau.

Câu 9. Hai vectơ có cùng độ dài và ngược hướng gọi là

(A) Hai vectơ cùng hướng. (B) Hai vectơ cùng phương.

Ⓒ Hai vectơ đối nhau. Ⓓ Hai vectơ bằng nhau.

Câu 10. Cho tứ diện $ABCD$. Hỏi có bao nhiêu vectơ khác vectơ $\vec{0}$ mà mỗi vectơ có điểm đầu, điểm cuối là hai đỉnh của tứ diện $ABCD$?

Ⓐ 12. Ⓑ 4. Ⓒ 10. Ⓓ 8.

Câu 11. Cho ba điểm A, B, C phân biệt, điều kiện cần và đủ để A nằm giữa B và C là

Ⓐ $\exists k < 0; \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$. Ⓑ $\exists k \neq 0; \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.
Ⓒ $AB = BC$. Ⓓ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

Câu 12. Chọn khẳng định đúng:

Ⓐ Hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng.
Ⓑ Hai vectơ cùng phương thì giá của chúng song song hoặc trùng nhau.
Ⓒ Hai vectơ có giá vuông góc thì cùng phương.
Ⓓ Hai vectơ ngược hướng với một vectơ thứ ba thì cùng phương.

Câu 13. Hai vectơ cùng hướng và cùng độ dài được định nghĩa là

Ⓐ Bằng nhau. Ⓑ Đối nhau.
Ⓒ Ngược hướng. Ⓓ Song song.

Câu 14. Cho hình bình hành $ABCD$, vectơ nào sau đây bằng $\overrightarrow{CD}$?

Ⓐ $\overrightarrow{DC}$. Ⓑ $\overrightarrow{BD}$. Ⓒ $\overrightarrow{AD}$. Ⓓ $\overrightarrow{BA}$.

Câu 15. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O. Vectơ bằng $\overrightarrow{DO}$ là:

Ⓐ $\overrightarrow{OC}$. Ⓑ $\overrightarrow{OA}$. Ⓒ $\overrightarrow{BO}$. Ⓓ $\overrightarrow{OB}$.

Câu 16. Cho hình bình hành $ABCD$. Hai vectơ nào ngược hướng?

Ⓐ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. Ⓑ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$. Ⓒ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DB}$. Ⓓ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$.

Câu 17. Hai vectơ cùng phương thì chúng

Ⓐ Cùng hướng.
Ⓑ Ngược hướng.
Ⓒ Có giá song song hoặc trùng nhau.
Ⓓ Song song.

Câu 18. Cho tam giác ABC với trung tuyến AM và trọng tâm G. Khi đó $\overrightarrow{GA} = ?$

Ⓐ $2\overrightarrow{GM}$. Ⓑ $\frac{2}{3}\overrightarrow{GM}$. Ⓒ $\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$. Ⓓ $-\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.

Câu 19. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC. Các vectơ bằng $\overrightarrow{AM}$ là:

Ⓐ $\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BN}$. Ⓑ $\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{BN}, \overrightarrow{NC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{NB}, \overrightarrow{NC}$. Ⓓ $\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{BN}, \overrightarrow{NC}$.

Câu 20. Cho tam giác ABC. Hãy xác định điểm M thỏa mãn: $2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

Ⓐ M thuộc cạnh AB và $AM = 2MB$.
Ⓑ M không thuộc AB.
Ⓒ M là trung điểm của AB.
Ⓓ M trên AB và ngoài đoạn AB.

Câu 21. Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD của hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức sai?

Ⓐ $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$. Ⓑ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Ⓒ $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$. Ⓓ $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$.

Câu 22. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau nếu $\vec{a} = \vec{b}$.
Ⓑ Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng phương và cùng độ dài.
Ⓒ Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng độ dài.
Ⓓ Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.

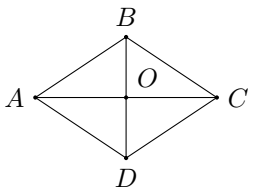
Câu 23. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA. Xác định các vectơ cùng phương với $\overrightarrow{MN}$.

Ⓐ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CP}$.
Ⓑ $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{AP}$.
Ⓒ $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CP}$.
Ⓓ $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{PN}, \overrightarrow{CP}$.

Câu 24. Cho tứ giác $ABCD$. Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$?

Ⓐ $ABCD$ là hình vuông. Ⓑ $ABDC$ là hình bình hành.
Ⓒ AD và BC có cùng trung điểm. Ⓓ $AB = CD$.

Câu 25. Cho hình thoi $ABCD$. Có bao nhiêu vectơ có điểm đầu là 2 trong 4 đỉnh đồng thời bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$?



Ⓐ 2. Ⓑ 1. Ⓒ 3. Ⓓ Vô số.

Câu 26. Cho điểm B nằm giữa hai điểm A và C, $AB = 2$ cm, $AC = 6$ cm. Đẳng thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{AB}$. Ⓑ $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{BA}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{BC}$. Ⓓ $\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$.

Câu 27. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

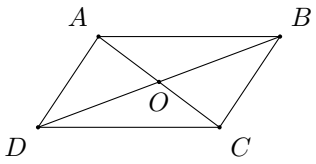
Ⓐ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. Ⓑ Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ thì $AB = BC$.
Ⓒ Nếu $AB = BC$ thì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$. Ⓓ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

Câu 28. Cho hai vectơ khác vectơ-không, không cùng phương. Có bao nhiêu vectơ khác $\vec{0}$ cùng phương với cả hai vectơ đó?

Ⓐ 2. Ⓑ 1. Ⓒ Không có. Ⓓ Vô số.

Câu 29. Cho hình bình hành $ABCD$. Số vectơ khác $\vec{0}$, cùng phương với vectơ $\overrightarrow{AB}$ và có điểm

đầu, điểm cuối là đỉnh của hình bình hành $ABCD$ là



Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

Câu 30. Cho đoạn thẳng AB. Gọi M là một điểm trên đoạn thẳng AB sao cho $AM = \dfrac{1}{4}AB$. Khẳng định nào sau đây là sai?

Ⓐ $\overrightarrow{MB} = -3\overrightarrow{MA}$. Ⓑ $\overrightarrow{BM} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{BA}$.
Ⓒ $\overrightarrow{MA} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{MB}$. Ⓓ $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

Câu 31. Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ khác vectơ-không. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

Ⓐ $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$. Ⓑ $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
Ⓒ $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$. Ⓓ $\vec{0} + \vec{a} = \vec{0}$.

Câu 32. Cho $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$, mệnh đề nào sau đây là đúng?

Ⓐ Tam giác ABC là tam giác cân.
Ⓑ Tam giác ABC là tam giác đều.
Ⓒ A là trung điểm của đoạn BC.
Ⓓ Điểm B trùng với điểm C.

Câu 33. Cho 4 điểm A, B, C, D không thẳng hàng. Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$?

Ⓐ $ABCD$ là hình bình hành. Ⓑ $ABDC$ là hình bình hành.
Ⓒ AB và DC có cùng trung điểm. Ⓓ $AB = CD$.

Câu 34. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC của tam giác đều ABC. Đẳng thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$. Ⓑ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$. Ⓓ $|\overrightarrow{BC}| = 2|\overrightarrow{MN}|$.

Câu 35. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

Ⓐ Tích của một số với một vectơ là một số.
Ⓑ Tích của một số với một vectơ là một vectơ.
Ⓒ Nếu $k > 0$ thì vectơ $k\vec{a}$ cùng hướng với vectơ $\vec{a}$.
Ⓓ Nếu $k < 0$ thì vectơ $k\vec{a}$ ngược hướng với vectơ $\vec{a}$.

Câu 36. Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau đây:

Ⓐ $\vec{0}$ cùng hướng với mọi vectơ. Ⓑ $\vec{0}$ cùng phương với mọi vectơ.
Ⓒ $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$. Ⓓ $|\overrightarrow{AB}| > 0$.

Câu 37. Cho 3 điểm M, N, P thẳng hàng trong đó N nằm giữa M và P. Khi đó các cặp vectơ nào sau đây cùng hướng?

Ⓐ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$.
Ⓑ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$.
Ⓒ $\overrightarrow{NM}$ và $\overrightarrow{NP}$.
Ⓓ $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{PN}$.

Câu 38. Cho hình bình hành $ABCD$. Số vectơ khác $\vec{0}$, cùng phương với vectơ $\overrightarrow{AB}$ và có điểm đầu, điểm cuối là đỉnh của hình bình hành $ABCD$ là

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

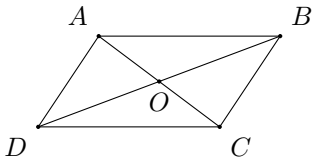
Câu 39. Cho 4 điểm A, B, C, D tùy ý. Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ thì

Ⓐ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$. Ⓑ $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$. Ⓒ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. Ⓓ $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BD}$.

Câu 40. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng, trong đó điểm B nằm giữa hai điểm A và C. Khi đó các cặp vectơ nào sau đây cùng hướng?

Ⓐ $\overrightarrow{CB}$ và $\overrightarrow{AB}$. Ⓑ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. Ⓒ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CB}$. Ⓓ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$.

Câu 41. Cho hình bình hành $ABCD$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



Ⓐ Hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ cùng phương.
Ⓑ Hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ cùng phương.
Ⓒ Hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ cùng hướng.
Ⓓ Hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$ ngược hướng.

Câu 42. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AD, BC và AC. Biết $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{PN}$. Chọn câu đúng.

Ⓐ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. Ⓑ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$. Ⓒ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Ⓓ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$.

Câu 43. Cho 3 điểm M, N, P tùy ý khi đó

Ⓐ $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{PM}$.
Ⓑ $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$.
Ⓒ $\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$.
Ⓓ $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$.

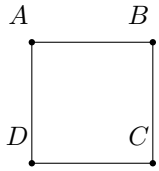
Câu 44. Cho tam giác ABC, để $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ thì vị trí điểm M thỏa:

Ⓐ $AMBC$ là hình bình hành.
Ⓑ $CBAM$ là hình bình hành.
Ⓒ $MACB$ là hình bình hành.
Ⓓ $MABC$ là hình bình hành.

Câu 45. Cho tứ giác $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$.
Ⓒ $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CD}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB}$.

Câu 46. Cho hình vuông $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?



Ⓐ $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}$.
Ⓑ $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}$.
Ⓒ $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CD}$.
Ⓓ $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{BC}$.

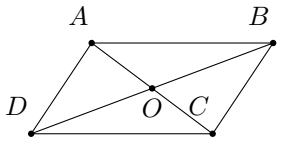
Câu 47. Cho tam giác ABC, M là điểm tùy ý. Tìm khẳng định đúng:

Ⓐ $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{BA}$.
Ⓑ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BA}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{BC}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{BC}$.

Câu 48. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức đúng?

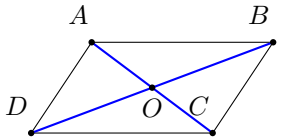
Ⓐ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}$.
Ⓑ $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$.
Ⓒ $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}$.

Câu 49. Cho hình bình hành $ABCD$. Khẳng định nào sau đây sai?



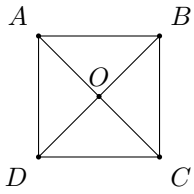
Ⓐ $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}=\vec{0}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\vec{0}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$.

Câu 50. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O. Khẳng định nào sau đây là đúng?



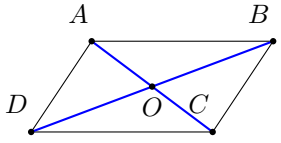
Ⓐ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DA}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BO}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{CD}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BD}$.

Câu 51. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Tính $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$.



Ⓐ $\overrightarrow{BC}$.
Ⓑ $\overrightarrow{DA}$.
Ⓒ $\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}$.

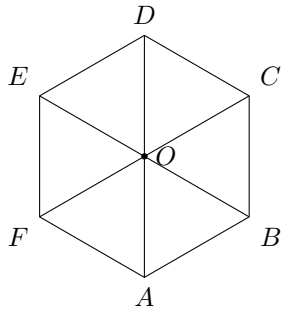
Câu 52. Cho O là tâm hình bình hành $ABCD$. Hỏi vectơ $(\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{DO})$ bằng vectơ nào?



Ⓐ $\overrightarrow{BA}$.
Ⓑ $\overrightarrow{BC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{DC}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AC}$.

Câu 53. Cho lục giác đều $ABCDEF$ và O là tâm của nó. Đẳng thức nào dưới đây là đẳng

thức sai?



Ⓐ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{EO}=\vec{0}$.
Ⓑ $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}$.
Ⓒ $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{OC}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\vec{0}$.

Câu 54. Chọn khẳng định sai:

Ⓐ Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.
Ⓑ Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{AB}$.
Ⓒ Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.
Ⓓ Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{BI}=\vec{0}$.

Câu 55. Cho 4 điểm bất kỳ A, B, C, D. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CO}$.
Ⓑ $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.
Ⓒ $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.
Ⓓ $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{BA}$.

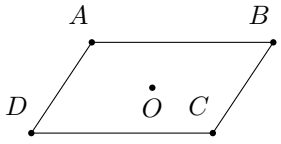
Câu 56. Cho các điểm phân biệt A, B, C, D. Đẳng thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DA}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AD}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DA}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BC}$.

Câu 57. Chỉ ra vectơ tổng $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{RN}-\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{QR}$ trong các vectơ sau

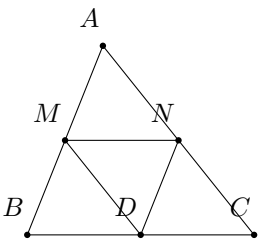
Ⓐ $\overrightarrow{MR}$. Ⓑ $\overrightarrow{MQ}$. Ⓒ $\overrightarrow{MP}$. Ⓓ $\overrightarrow{MN}$.

Câu 58. Cho hình bình hành $ABCD$ và điểm M tùy ý. Đẳng thức nào sau đây đúng?



Ⓐ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$.
Ⓑ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MD}$.
Ⓓ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

Câu 59. Cho tam giác ABC có M, N, D lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC. Khi đó, các vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{DN}$ là:



Ⓐ $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ND}$.
Ⓑ $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ND}$.
Ⓒ $\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{AM}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{ND}$.

Câu 60. Trên đường thẳng chứa cạnh BC của tam giác ABC lấy một điểm M sao cho $2\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$. Khi đó đẳng thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

Câu 61. Trên đường thẳng chứa cạnh BC của tam giác ABC lấy một điểm M sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$. Khi đó đẳng thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

Câu 62. Cho tam giác ABC điểm I thoả: $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$. Chọn mệnh đề đúng:

Ⓐ $\overrightarrow{CI} = \dfrac{\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}}{-3}$.
Ⓑ $\overrightarrow{CI} = -\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$.
Ⓒ $\overrightarrow{CI} = \dfrac{\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB}}{3}$.
Ⓓ $\overrightarrow{CI} = \dfrac{\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{CB}}{-3}$.

Câu 63. Cho ΔABC, M là điểm trên cạnh AB sao cho $MB = 3MA$. Đẳng thức vectơ nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{MC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} + \frac{5}{4}\overrightarrow{CA}$.
Ⓑ $\overrightarrow{MC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} + 3\overrightarrow{CA}$.
Ⓒ $\overrightarrow{MC} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{CA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$.
Ⓓ $\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$.

III. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Bài 1. Cho hình thang $ABCD$ với hai đáy là AB và CD. Biết rằng nếu $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$ thì $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}|$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hai đường chéo AC và BD có độ dài bằng nhau

b) Hình thang $ABCD$ là hình thang cân

c) Hai cạnh bên AD và BC có độ dài không bằng nhau

d) Nếu $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}|$ thì $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$

Bài 2. Cho $\triangle ABC$, gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Khi đó:

a) vectơ $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với vectơ $\overrightarrow{MN}$

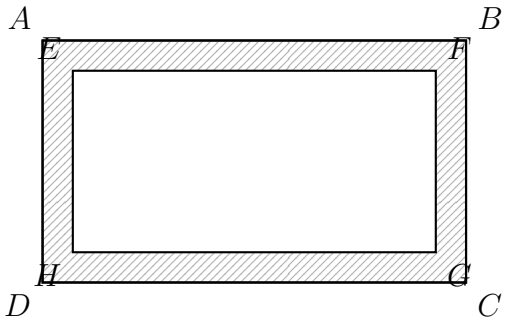
b) Có 6 vectơ khác vectơ không và cùng phương với $\overrightarrow{AB}$ có điểm đầu, điểm cuối lấy từ các điểm đã cho.

c) vectơ $\overrightarrow{AP}$ ngược hướng vectơ $\overrightarrow{PB}$

d) Có 3 vectơ khác vectơ không và cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ có điểm đầu và điểm cuối lấy từ các điểm đã cho.

Bài 3. Một mảnh vườn trồng rau hình chữ nhật có chiều dài và chiều rộng lần lượt là 25 m và 16 m. Người chủ để dành mỗi chiều 0,5 m để làm đường đi xung quanh mảnh vườn (như hình

minh họa). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Từ 8 điểm A, B, C, D, E, F, G, H có 6 vectơ cùng phương với vectơ $\overrightarrow{AB}$.

b) Độ dài vectơ $\overrightarrow{AC}$ lớn hơn 30 m.

c) Độ dài vectơ $\overrightarrow{EF}$ là 24 m.

d) Người chủ bón đạm cho vườn rau, cứ 2 kg đạm cho 25 (m^2) đất với chi phí 24 000 đồng/kg. Để bón đạm cho cả vườn rau, người chủ cần bỏ ra chi phí là 700 000 đồng.

Bài 4. Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O.

a) Vectơ $\overrightarrow{OA}$ cùng phương với $\overrightarrow{OD}$

b) Có 9 vectơ khác vectơ không và cùng phương với vectơ $\overrightarrow{OA}$.

c) Vectơ $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng $\overrightarrow{OC}$

d) Có 3 vectơ khác vectơ không và cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{AB}$.

Bài 5. Cho ΔABC có A', B', C' lần lượt là các trung điểm của các cạnh BC, CA, AB.

a) $BC' = C'A = A'B' = \dfrac{AB}{2}$.

b) Hai vectơ $\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{A'B'}$ ngược hướng

c) $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{A'B'}$.

d) $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{CA'}$.

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = \sqrt{3}, AC = 2\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm BC và H là hình chiếu vuông góc của A lên BC.

a) $BC^2 = AB^2 + AC^2$

b) $|\overrightarrow{AM}| = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$

c) $AB \cdot AC = AH \cdot BC$

d) $|\overrightarrow{AH}| = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$

Bài 7. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB.

a) Tứ giác $BMNP$ và $APMN$ là hình bình hành

b) $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$.

c) $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BM}$.

d) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$ với O là điểm bất kì.

Bài 8. Cho hình bình hành $ABCD$ với M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD.

a) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}$

b) $\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

c) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

d) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BM}$

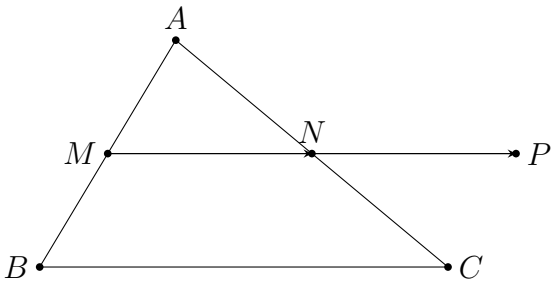
Bài 9. Cho tam giác ABC có M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Lấy điểm P đối xứng với điểm M qua N. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{BC}$ cùng phương.

b) $|\overrightarrow{MP}|=|\overrightarrow{BC}|$.

c) $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{BC}$ ngược hướng.

d) $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{BC}$.



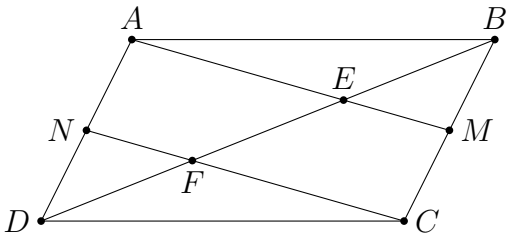
Bài 10. Cho hình bình hành $ABCD$. Hai điểm M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD, gọi E,F lần lượt là giao điểm của BD với AM,CN. Xét các véc tơ tạo thành từ các điểm đã cho. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với là $\overrightarrow{DC}$.

b) $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{MC}$.

c) $\overrightarrow{AD}$ cùng hướng với 4 véc tơ.

d) $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{EB}$.



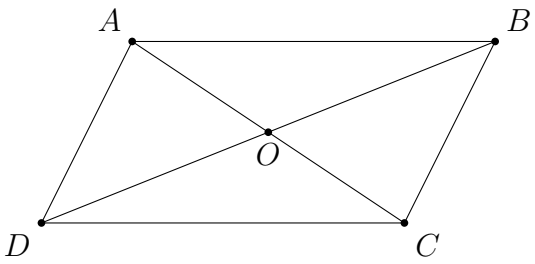
Bài 11. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Xét các véc tơ tạo thành từ 5 điểm đã cho. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Có $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$.

b) $\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}$ không cùng phương.

c) Số véc tơ có điểm đầu là A khác $\vec{0}$ là 3.

d) Có đúng bốn cặp véc tơ bằng nhau.



Bài 12. Cho tam giác $\triangle ABC$ đều. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng.

b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

c) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$.

d) Có 6 véc tơ khác véc tơ-không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh A, B, C.

Bài 13. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Gọi G là trung điểm MN. Gọi O là điểm bất kì. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau :

a) $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MN}$.

b) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{MN}$.

c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MN}$.

d) $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$.

Bài 14. Cho tam giác ABC với trung tuyến AM và trọng tâm G. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tổng $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

b) Biểu diễn $\overrightarrow{GA} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.

c) Với mọi điểm N thì $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = 3\overrightarrow{GN}$.

d) Phân tích $\overrightarrow{AG}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ ta được $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}$

Bài 15. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC với $A(4\sqrt{3}; -1), B(0; 3), C(8\sqrt{3}; 3)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $AC = 8$

b) Tam giác ABC cân tại B

c) $S_{\Delta ABC} = 16\sqrt{3}$

d) $ABC = 30°$

Bài 16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC với $A(4; 6), B(5; 1), C(1; -3)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{AB} = (1; -5)$

b) Tọa độ điểm D thuộc Ox cách đều hai điểm A, B có hoành độ bằng 13

c) $I\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{5}{2}\right)$ là tọa độ tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

d) Bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

Bài 17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho bốn điểm $A(7;-3), B(8;4), C(1;5)$ và $D(0;-2)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{AB} = (1;7), \overrightarrow{AC} = (-6;8)$

b) A, B, C là ba đỉnh một tam giác.

c) Tọa độ điểm $K(8;4)$ là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC.

d) Bốn điểm A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình vuông.

Bài 18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(3;-5), B(1;0)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $I\left(2;\dfrac{5}{2}\right)$ là trung điểm của AB

b) Tọa độ điểm C sao cho $\overrightarrow{OC} = -3\overrightarrow{AB}$ là $C(6;-15)$

c) Tọa độ điểm D đối xứng với A qua C là $D(9;25)$

d) Tọa độ điểm M chia đoạn AB theo tỉ số $k=-3$ là $M\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{4}\right)$

Bài 19. Cho tam giác ABC có $A(4;1), B(2;4), C(2;-2)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $ABCD$ là hình bình hành khi $D(4;5)$

b) Tọa độ điểm E để tam giác BCE nhận điểm A làm trọng tâm là $E(8;1)$

c) Tọa độ trực tâm H của tam giác ABC là $H\left(\dfrac{13}{2};1\right)$

d) Tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I\left(\dfrac{3}{4};1\right)$

Bài 20. Cho $A(1;1), B(2;4), C(10;-2)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) ΔABC vuông tại A.

b) $S_{\Delta ABC} = 12$

c) Độ dài trung tuyến $BN = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$

d) $I(6;1)$ là tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Bài 21. Cho hai điểm $A(3;-5), B(1;0)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{AB} = (-2;5)$

b) Tọa độ điểm C sao cho $\overrightarrow{OC} = -3\overrightarrow{AB}$ là $C(6;-5)$

c) Tọa độ điểm D đối xứng của A qua C có hoành độ bằng 7

d) Tọa độ điểm M chia đoạn AB theo tỉ số $k=-3$ là $M\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{5}{4}\right)$

Bài 22. Cho ba điểm $A(1;-2), B(0;4), C(3;2)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{AB} = (-1;6)$

b) $\overrightarrow{AC} = (2;4); \overrightarrow{BC} = (3;-2)$

c) Tọa độ trung điểm của đoạn AB là $I\left(\dfrac{1}{2};1\right)$

d) Tọa độ điểm N sao cho $\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{BN} - 4\overrightarrow{CN} = \vec{0}$ là $N(11;12)$

Bài 23. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $A(2;1), B(-1;-2), C(-3;2)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AC là $M\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$

b) $\overrightarrow{AB}=(-3;-3), \overrightarrow{AC}=(-5;1)$

c) Ba điểm A, B, C thẳng hàng.

d) Tọa độ trọng tâm tam giác ABC là $G\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$

Bài 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $A(-2;5), B(-4;-2), C(1;5)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) $G\left(-\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right)$ là tọa độ trọng tâm của tam giác ABC.

c) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi đó tọa độ điểm D là $D(3;10)$

d) $\widehat{ACB}=45^\circ$

Bài 25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC có các đỉnh thỏa mãn $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}-\vec{j}, \overrightarrow{OB}=\vec{i}+\vec{j}, \overrightarrow{OC}=4\vec{i}+\vec{j}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $A(2;-1), B(1;1), C(4;1)$

b) E là trung điểm AB nên $E\left(\frac{3}{2};0\right)$

c) G là trọng tâm ΔABC nên $G\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$

d) Điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành nên $D(2;-1)$

Bài 26. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm $A(-4;1), B(2;4), C(2;-2)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tọa độ điểm D sao cho C là trọng tâm tam giác ABD là $D(8;11)$

b) Tọa độ điểm E thuộc trục hoành sao cho A, B, E thẳng hàng là $E(-6;0)$

c) $\overrightarrow{BC}=(0;-6), \overrightarrow{AC}=(6;-3)$

d) Tọa độ F thỏa mãn $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{CF}$ là $F(20;5)$

Bài 27. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(-2;-1), B(1;3), C(2;-3)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) A, B, C là ba đỉnh một tam giác.

b) Điểm $I(0;-2)$ là trung điểm của AB

c) Điểm M thuộc Ox sao cho $AM+BM$ bé nhất có hoành độ bằng $\frac{5}{4}$

d) Điểm N thuộc Oy sao cho $BN+CN$ bé nhất có tung độ bằng 2

Bài 28. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=a, BC=2a$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\widehat{ACB}=60^\circ$

b) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=a^2$

c) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=3a^2$.

d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=-4a^2$

Bài 29. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O, có cạnh a. Biết M là trung điểm của AB, G là trọng tâm tam giác ADM. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=a^2$

b) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{3}$

c) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{2}$

d) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC})=a^2$

Bài 30. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh bằng a. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=2a^2$

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}=a^2$

c) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OC}=-a^2$

d) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})=a^2$

Bài 31. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B, biết $AD=a, BC=3a$ và cạnh $AB=2a$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=-4a^2$

b) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=2a^2$

c) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=-2a^2$

d) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD. Khi đó $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IJ}=6a^2$

Bài 32. Cho tam giác ABC đều có cạnh a, có trọng tâm G. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{2}$

b) $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{4}$

c) $\widehat{AGB}=120^\circ$

d) $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=\dfrac{a^2}{6}$

IV. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Bài 1. Cho hình thoi tâm O, cạnh bằng 1 và $\widehat{A}=60^\circ$. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AO}$ bằng bao nhiêu? *Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.*

Bài 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm O có cạnh $AB=\sqrt{3}, AD=1$. Tìm vectơ $\vec{u}$ khác vectơ không và cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{BD}$ (khác $\overrightarrow{BD}$) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ các điểm A, B, C, D, O. Tính độ dài vectơ $\vec{u}$ đó?

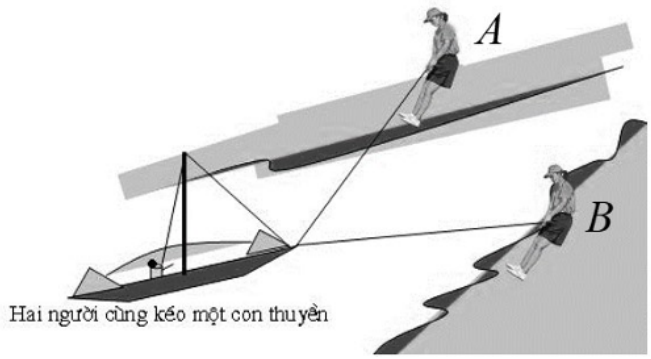
Bài 3. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Có bao nhiêu vectơ được tạo thành mà điểm đầu và điểm cuối lấy từ các đỉnh của hình chữ nhật?

Bài 4. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh 1 và $\widehat{BAD}=60^\circ$. Tìm độ dài véc tơ $\overrightarrow{AC}$. *(kết quả làm tròn đến hàng phần chục).*

Bài 5. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DC, AB. P là giao điểm của AM, DB và Q là giao điểm của CN, DB. Có bao nhiêu véc tơ bằng véc tơ $\overrightarrow{DP}$ đúng hay sai?

Bài 6. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh 1. Gọi M là trung điểm của AB, N là điểm đối xứng với C qua D. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{MN}$ bằng bao nhiêu? *Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.*

Bài 7. Hai người đứng hai bên bờ kênh, cùng kéo một chiếc thuyền xuôi trên kênh. Người A kéo với một lực bằng 60 N, người B kéo với một lực bằng 80 N, hai lực hợp nhau một góc bằng $90°$. Vậy hợp lực mà hai người đã tác động lên thuyền có độ lớn bằng bao nhiêu?



Hai người cùng kéo một con thuyền

Bài 8. Cho ba lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}, \vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}, \vec{F}_3 = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Biết cường độ của $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ đều bằng 100 và $\widehat{AMB} = 60°$. Cường độ của lực $\vec{F}_3$ là (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Bài 9. Một chiếc tàu di chuyển từ phía Tây sang phía Đông với vận tốc 30 km/h, dòng nước chảy từ phía Nam lên phía Bắc với vận tốc 5 km/h. Hỏi tàu di chuyển với vận tốc bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Bài 10. Cho hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ có điểm đặt A tạo với nhau góc $45°$, biết rằng cường độ của hai lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ lần lượt bằng 60 N, 90 N. Tính cường độ tổng hợp của hai lực trên? Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.

Bài 11. Một dòng sông chảy từ phía bắc xuống phía nam với vận tốc 5 km/h. Một tàu thuỷ chuyển động từ phía đông sang phía tây với vận tốc 35 km/h so với mặt nước. Vận tốc tàu thuỷ so với bờ sông là:

Bài 12. Một con lắc đơn đang đứng yên tại vị trí cân bằng M. Thực tập viên tác dụng một lực $\vec{F}$ lên con lắc đưa nó đến vị trí I và giữ yên như hình vẽ. Biết rằng con lắc đang chịu tác động của lực căng dây $\vec{T}$ có cường độ 30N, trọng lực $\vec{P}$ và lực tác dụng $\vec{F}$. Hãy xác định cường độ của lực $\vec{F}$?

Bài 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(2;3)$, $N(5;1)$. Điểm $I(a;0)$ thỏa mãn $\left|\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN}\right|$ ngắn nhất. Tìm a (kết quả a làm tròn đến hàng phần mười).

Bài 14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;5)$, $B(-1;3)$, $C(4;1)$. Điểm D có tung độ dương thuộc đường thẳng AC sao cho $S_{BDC} = \dfrac{1}{4}S_{ABC}$. Tính tổng hoành độ và tung độ của điểm D (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Bài 15. Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho hình bình hành $ABCD$ biết điểm $A(4;5)$, $C(-2;-1)$. Gọi M là trung điểm của BC, N là giao điểm của BD và AM. Biết $N(4;1)$, tọa độ điểm D có dạng $D(a;b)$, $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính tổng $a+b$?

Bài 16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(2;3); B(-1;2); C(-2;0)$. Điểm M thuộc đường thẳng $y=-1$ sao cho tứ giác $ACMB$ là hình thang có một cạnh đáy là AC. Hoành độ của điểm M bằng bao nhiêu?

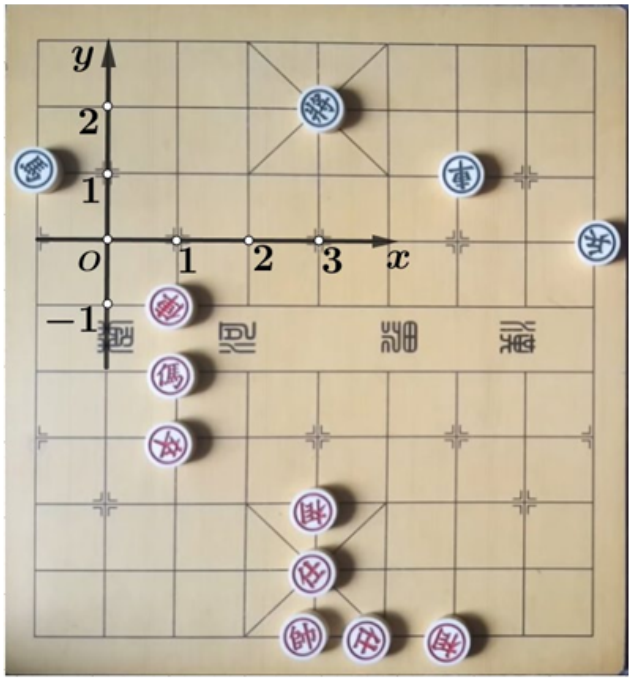
Bài 17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;3); B(-1;2)$. Điểm $M(x;y)$ thuộc tia AB sao cho $AM=\sqrt{80}$. Giá trị của $x+y$ bằng bao nhiêu?

Bài 18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $M(4;1); N(n;n+1)$. Độ dài đoạn thẳng MN nhỏ nhất bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài 19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(2;3); B(4;2-3a)$. Tam giác OAB vuông tại O thì a có giá trị bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài 20. Cho biết sự chuyển động của một chiếc thuyền được thể hiện trên một mặt phẳng tọa độ như sau: Thuyền rời bến từ vị trí $A(2;3)$ chuyển động thẳng đều với vận tốc (tính theo giờ) được biểu thị bởi vectơ $\vec{v}=(a;b)$, sau khi khởi hành 2 giờ thì vị trí của tàu (trên mặt phẳng tọa độ) là $B(8;9)$. Tính $a+b$.

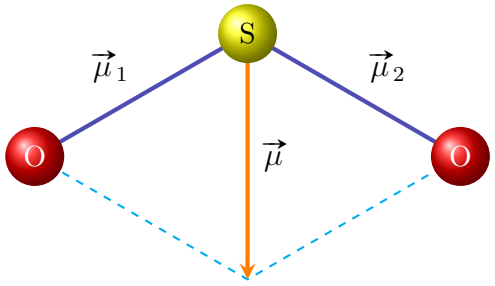
Bài 21. Trong hình vẽ bên dưới, quân xe bên cờ đỏ đang ở vị trí có tọa độ $(1;-1)$. Biết rằng sau một nước đi, quân xe bên cờ đỏ đến vị trí có tọa độ là $(a;b)$ thì sẽ chiếu tướng được bên cờ xanh mà không bị quân mã cờ xanh ăn quân xe đỏ. Tính a^2+b^2.



Bài 22. Để kéo đường dây điện băng qua một hồ hình chữ nhật $ABCD$ với độ dài $AB=200$ m, $AD=180$ m người ta dự định làm 4 cột điện liên tiếp cách đều. Cột thứ nhất nằm trên bờ AB và cách đỉnh A khoảng cách 20 m, cột thứ tư nằm trên bờ CD và cách đỉnh C một khoảng cách 30 m. Tính các khoảng cách từ vị trí các cột thứ hai, thứ ba đến các bờ AB, AD.

Bài 23. Phân tử sulfur dioxide (SO_2) có cấu tạo hình chữ V, góc liên kết $\widehat{OSO}$ gần bằng $120°$. Người ta biểu diễn sự phân cực giữa nguyên tử S với mỗi nguyên tử O bằng các vectơ $\vec{\mu}_1$ và $\vec{\mu}_2$, có cùng phương với liên kết cộng hoá trị, có chiều từ nguyên tử S về mỗi nguyên tử O và cùng có độ dài là $1,6$ đơn vị (Hình 6). Cho biết vectơ tổng $\vec{\mu}=\vec{\mu}_1+\vec{\mu}_2$ được dùng để biểu diễn sự phân

cực của cả phân tử SO_2. Tính độ dài của $\vec{\mu}$.

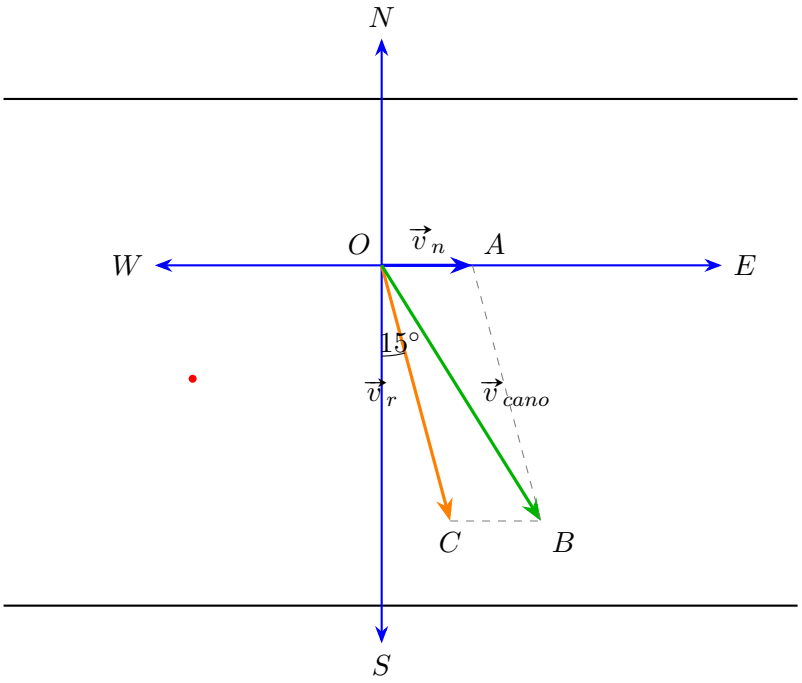


Bài 24. Một máy bay đang bay từ hướng đông sang hướng tây với tốc độ 650 (km/h) thì gặp luồng gió thổi từ hướng đông bắc sang hướng tây nam với tốc độ 35 (km/h). Máy bay bị thay đổi vận tốc sau khi gặp gió thổi. Tìm tốc độ mới của máy bay (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị km/h).

Bài 25. Một máy bay bay từ hướng tây sang hướng đông với tốc độ $800(km/h)$ thì gặp luồng gió thổi từ hướng tây bắc sang hướng đông nam với tốc độ $100(km/h)$. Máy bay bị thay đổi vận tốc sau khi gặp gió thổi. Tìm tốc độ mới của máy bay theo đơn vị km/h (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị km/h).

Bài 26. Hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ có độ lớn $|\vec{F}_1| = 10$ N, $|\vec{F}_2| = 20$ N và tạo với nhau một góc $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 60°$ cùng tác dụng lên một vật đặt tại điểm O làm cho vật di chuyển theo hướng từ O đến B (như hình vẽ). Biết $OB = 100$ m và chỉ có hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ tác động lên vật. Tính công A của hợp lực $\vec{F}$ của $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ khi di chuyển vật từ O đến B?

Bài 27. Trên sông, một ca nô đang chuyển động thẳng đều theo hướng $S15°E$ với vận tốc có độ lớn bằng 21 km/h. Tính vận tốc riêng của ca nô, biết rằng nước trên sông chảy về hướng đông với vận tốc có độ lớn bằng 2 km/h (tham khảo hình vẽ). (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



§7 LỜI GIẢI CHI TIẾT

I. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Trên cạnh BC của tam giác ABC lấy điểm M sao cho $MB = 3MC$.

a) Tìm mối liên hệ giữa hai vectơ $\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{MC}$.

b) Biểu thị vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Hướng dẫn giải. a) Hai vectơ $\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{MC}$ là hai vectơ ngược hướng và $MB = 3MC$ nên ta có: $\overrightarrow{MB} = -3\overrightarrow{MC}$.

Vậy mối liên hệ là: $\overrightarrow{MB} = -3\overrightarrow{MC}$.

b) Ta có: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{3}{4}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{3}{4}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

Bài 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Chứng minh rằng với mọi điểm M, ta có:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}.$$

Hướng dẫn giải. Gọi O là giao điểm của AC và BD.

Khi đó O là trung điểm của AC và O cũng là trung điểm của BD.

Do đó $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ và

$VT = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{MO}$;

$VP = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{MO}$;

$\Rightarrow VT = VP$ (đpcm).

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $A(2;1), B(-2;5)$ và $C(-5;2)$.

a) Tìm tọa độ của các vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$.

b) Chứng minh rằng A, B, C là ba đỉnh của một tam giác vuông. Tính diện tích và chu vi của tam giác đó.

c) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

d) Tìm tọa độ của điểm D sao cho tứ giác $BCAD$ là một hình bình hành.

Hướng dẫn giải. a) Ta có: $\overrightarrow{BA} = (4;-4)$ và $\overrightarrow{BC} = (-3;-3)$.

b) Ta có: $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 4 \cdot (-3) + (-4) \cdot (-3) = -12 + 12 = 0$

$\Rightarrow BA \perp BC \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại B.

Diện tích tam giác vuông ABC là: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot BC = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{4^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \dfrac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 12$ (đvdt).

Ta có: $AB = 4\sqrt{2}, BC = 3\sqrt{2}, \overrightarrow{AC} = (-7;1) \Rightarrow AC = \sqrt{(-7)^2 + 1^2} = 5\sqrt{2}$.

Chu vi của tam giác ABC là: $P = AB + BC + AC = 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$ (đvđd).

c) Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là: $\begin{cases} x_G = \dfrac{2 + (-2) + (-5)}{3} = \dfrac{-5}{3} \\ y_G = \dfrac{1 + 5 + 2}{3} = \dfrac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(\dfrac{-5}{3}; \dfrac{8}{3}\right)$.

» Sưu tầm và biên soạn: Lê Minh Kha - 0399653362

d) Giả sử $D(x;y)$. Để tứ giác $BCAD$ là hình bình hành khi $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BC}$.

Ta có: $\overrightarrow{DA}=(2-x;1-y)$ và $\overrightarrow{BC}=(-3;-3)$.

Khi đó, ta có hệ phương trình: $\begin{cases}2-x=-3\\1-y=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=5\\y=4\end{cases}\Rightarrow D(5;4)$.

Vậy với $D(5;4)$ thì tứ giác $BCAD$ là một hình bình hành.

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $A(1;2), B(3;4), C(-1;-2)$ và $D(6;5)$.

a) Tìm tọa độ của các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$.

b) Hãy giải thích tại sao các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng phương.

c) Giả sử E là điểm có tọa độ $(a;1)$. Tìm a để các vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BE}$ cùng phương.

d) Với a tìm được, hãy biểu thị vectơ $\overrightarrow{AE}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Hướng dẫn giải. a) Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;2)$ và $\overrightarrow{CD}=(7;7)$.

b) Hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng phương vì $\dfrac{7}{2}=\dfrac{7}{2}$ hay $\overrightarrow{AB}=\dfrac{2}{7}\overrightarrow{CD}$.

c) Ta có: $\overrightarrow{AC}=(-2;-4)$ và $\overrightarrow{BE}=(a-3;-3)$.

Để hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BE}$ cùng phương khi: $\dfrac{a-3}{-2}=\dfrac{-3}{-4}\Leftrightarrow -4(a-3)=6\Leftrightarrow a-3=-\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow a=\dfrac{3}{2}$.

d) Với $a=\dfrac{3}{2}\Rightarrow E\left(\dfrac{3}{2};1\right)\Rightarrow\overrightarrow{AE}=\left(\dfrac{1}{2};-1\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;2)$ và $\overrightarrow{AC}=(-2;-4)$.

Tồn tại hai số thực u,v thỏa mãn: $\overrightarrow{AE}=u\overrightarrow{AB}+v\overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{2}=u\cdot 2+v\cdot(-2)\\-1=u\cdot 2+v\cdot(-4)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2u-2v=\dfrac{1}{2}\\2u-4v=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=1\\v=\dfrac{3}{4}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}.$$

Bài 5. Cho vectơ $\vec{a}\neq\vec{0}$. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ (hay còn được viết là $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$) là một vectơ đơn vị, cùng hướng với vectơ $\vec{a}$.

Hướng dẫn giải. Ta có: vectơ $\vec{u}=\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ có độ dài bằng $|\vec{u}|=\left|\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}\right|=\dfrac{1}{|\vec{a}|}\cdot|\vec{a}|=1$. Từ đó, do $\dfrac{1}{|\vec{a}|}>0$, suy ra $\vec{u}$ là vectơ đơn vị, cùng hướng với $\vec{a}$.

Bài 6. Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{u}$ với $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ và $\vec{a}\perp\vec{b}$. Xét một hệ trục Oxy với các vectơ đơn vị $\vec{i}=\vec{a},\vec{j}=\vec{b}$. Chứng minh rằng:

a) Vectơ $\vec{u}$ có tọa độ là $(\vec{u}\cdot\vec{a};\vec{u}\cdot\vec{b})$.

b) $\vec{u}=(\vec{u}\cdot\vec{a})\vec{a}+(\vec{u}\cdot\vec{b})\vec{b}$.

Hướng dẫn giải.

a) Vì $\vec{i}=\vec{a}\Rightarrow\vec{a}=(1;0)$ và $\vec{j}=\vec{b}\Rightarrow\vec{b}=(0;1)$.
Gọi tọa độ của vectơ $\vec{u}=(c;d)$. Khi đó, ta có:

◈ $\vec{u} \cdot \vec{a} = 1 \cdot c + 0 \cdot d = c$;

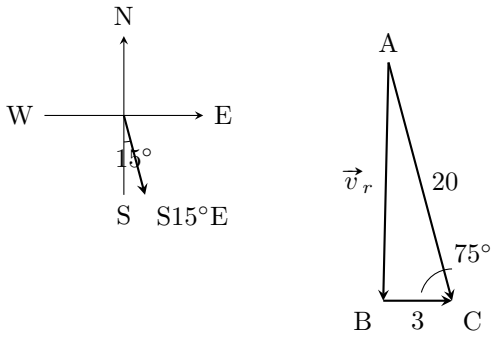
◈ $\vec{u} \cdot \vec{b} = 0 \cdot c + 1 \cdot d = d$;

Vì vậy tọa độ của vectơ $\vec{u}$ là $(\vec{u} \cdot \vec{a}; \vec{u} \cdot \vec{b})$.

b) Ta có: $(\vec{u} \cdot \vec{a}) \cdot \vec{a} + (\vec{u} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{b} = c \cdot \vec{a} + d \cdot \vec{b} = c(1;0) + d(0;1) = (c;d) = \vec{u}$.

Bài 7. Trên sông, một ca nô chuyển động thẳng đều theo hướng S15°E với vận tốc có độ lớn bằng 20 km/h. Tính vận tốc riêng của ca nô, biết rằng, nước trên sông chảy về hướng đông với vận tốc có độ lớn bằng 3 km/h.

Hướng dẫn giải.



Hướng S15°E là hướng tạo với hướng nam (S) một góc 15° và tạo với hướng đông (E) một góc $90° - 15° = 75°$.

Ta sử dụng vectơ $\overrightarrow{AB}$ để biểu thị cho vận tốc riêng của ca nô, vectơ $\overrightarrow{BC}$ để biểu thị cho vận tốc của dòng nước và vectơ $\overrightarrow{AC}$ để biểu thị cho vận tốc thực tế của ca nô.

Khi đó ta có: $AC = 20, BC = 3$.

Do ca nô chuyển động thẳng đều theo hướng S15°E nên vectơ $\overrightarrow{AC}$ tạo với hướng nam một góc 15° nên $\widehat{ACB} = 75°$.

Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABC ta có:

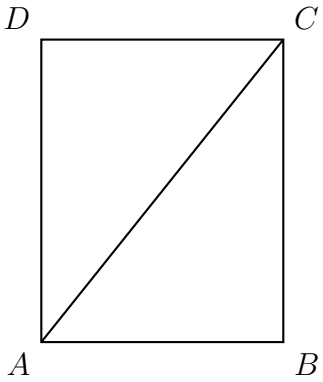
$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \widehat{ACB} = 20^2 + 3^2 - 2 \cdot 20 \cdot 3 \cdot \cos 75° \approx 377,94.$$

Suy ra $AB \approx 19,44$.

Vậy vận tốc riêng của ca nô xấp xỉ bằng 19,44 km/h.

Bài 8. Một khúc sông rộng 200m. Một chiếc thuyền chèo qua sông với vận tốc chèo 15km/h theo phương vuông góc với bờ sông. Biết rằng vận tốc nước chảy là 3km/h. Một lần khác thuyền muốn đến bờ bên kia tại điểm cách điểm đến theo phương vuông góc một khoảng bằng 50m. Tính vận tốc chèo của thuyền (biết rằng vận tốc dòng nước không đổi).

✍ *Hướng dẫn giải.*



Gọi C là điểm đến của thuyền theo phương vuông góc và D là điểm đến của thuyền.

Ta có: $\tan \widehat{DAB} = \dfrac{DB}{AB} = \dfrac{200}{50} = 4$.

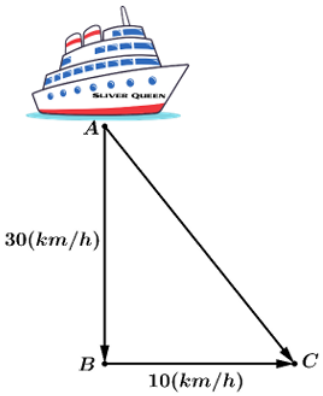
Vectơ vận tốc dòng nước cùng hướng $\overrightarrow{AB}$ và vectơ vận tốc thuyền cùng hướng $\overrightarrow{AC}$.

Suy ra vận tốc chèo của thuyền là $v = 3 \cdot \tan \widehat{DAB} = 3 \cdot 4 = 12$ (km/h).

Bài 9. VinFast là một hãng xe ô tô điện của Việt Nam. Năm 2023, VinFast đã xuất khẩu gần 1900 chiếc xe điện VF8 sang thị trường Bắc Mỹ bằng tàu Silver Queen. Biết rằng con tàu có vectơ vận tốc chỉ theo hướng Nam, vận tốc của dòng nước là một vectơ theo hướng Đông như hình minh họa dưới đây. Tính độ dài vectơ tổng của hai vectơ nói trên (kết quả làm tròn đến một chữ số sau dấu phẩy).



✍ *Hướng dẫn giải.*



Gọi vectơ vận tốc của tàu là $\overrightarrow{AB}$ và vectơ vận tốc của dòng nước là vectơ $\overrightarrow{BC}$.

Ta có vectơ tổng là $\vec{F} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Độ dài vectơ tổng là: $|\vec{F}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{30^2 + 10^2} = 10\sqrt{10}$ (km/h).

Vậy độ dài vectơ tổng là $10\sqrt{10} \approx 31,6$ (km/h).

II. TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Câu 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba khác $\vec{0}$ thì cùng phương.
(B) Hai vectơ ngược hướng với một vectơ thứ ba thì cùng hướng.
(C) Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba thì cùng phương.
(D) Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba thì cùng hướng.

Hướng dẫn giải. Chọn A.

Theo tính chất: Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba khác vectơ không thì chúng cùng phương với nhau.

Câu 2. Cho 3 điểm A, B, C không thẳng hàng. Có bao nhiêu vectơ khác vectơ không, có điểm đầu và điểm cuối là A, B hoặc C?

(A) 3. (B) 5. (C) 6. (D) 9.

Hướng dẫn giải. Chọn C.

Các vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối lấy từ các điểm A, B, C là: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}$. Tổng cộng có 6 vectơ.

Câu 3. Vectơ có điểm đầu là A, điểm cuối là B được kí hiệu là:

(A) AB. (B) $\overrightarrow{AB}$. (C) $|\overrightarrow{AB}|$. (D) $\overrightarrow{BA}$.

Hướng dẫn giải. Chọn B.

Theo định nghĩa, vectơ có điểm đầu là A, điểm cuối là B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$.

Câu 4. Cho tam giác ABC. Có thể xác định bao nhiêu vectơ (khác vectơ không) có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh A, B, C?

(A) 3. (B) 6. (C) 4. (D) 2.

Hướng dẫn giải. Chọn B.

Tương tự câu 2, các vectơ đó là $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}$. Có tất cả 6 vectơ.

Câu 5. Từ hai điểm phân biệt A, B xác định được bao nhiêu vectơ khác $\vec{0}$?

(A) 3. (B) 1. (C) 2. (D) 4.

Hướng dẫn giải. Chọn C.

Hai vectơ đó là $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$.

Câu 6. Cho lục giác đều $ABCDEF$ tâm O. Số các vectơ khác vectơ-không, cùng phương với $\overrightarrow{OC}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

(A) 4. (B) 6. (C) 7. (D) 9.

Hướng dẫn giải. Chọn B.

Vectơ $\overrightarrow{OC}$ nằm trên đường chéo FC. Trong lục giác đều, các cạnh và đường chéo song song hoặc trùng với FC là AB, ED và FC.
Các vectơ có điểm đầu và điểm cuối là đỉnh lục giác cùng phương với $\overrightarrow{OC}$ là: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{CF}$.
Tổng cộng có 6 vectơ.

Câu 7. Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt. Số vectơ (khác $\vec{0}$) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ các điểm A, B, C, D là

Ⓐ 10. Ⓑ 14. Ⓒ 8. Ⓓ 12.

Hướng dẫn giải. Chọn D.

Số vectơ khác $\vec{0}$ tạo từ n điểm phân biệt là $n(n-1)$.
Với $n = 4$, số vectơ là $4 \times 3 = 12$.

Câu 8. Phát biểu nào sau đây đúng?

Ⓐ Hai vectơ bằng nhau thì có giá trùng nhau hoặc song song.
Ⓑ Hai vectơ có độ dài không bằng nhau thì không cùng hướng.
Ⓒ Hai vectơ không bằng nhau thì chúng không cùng hướng.
Ⓓ Hai vectơ không bằng nhau thì độ dài của chúng không bằng nhau.

Hướng dẫn giải. Chọn A.

Hai vectơ bằng nhau thì cùng hướng, do đó chúng cùng phương. Khi hai vectơ cùng phương thì giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

Câu 9. Hai vectơ có cùng độ dài và ngược hướng gọi là

Ⓐ Hai vectơ cùng hướng. Ⓑ Hai vectơ cùng phương.
Ⓒ Hai vectơ đối nhau. Ⓓ Hai vectơ bằng nhau.

Hướng dẫn giải. Chọn C.

Theo định nghĩa, hai vectơ ngược hướng và có cùng độ dài được gọi là hai vectơ đối nhau.

Câu 10. Cho tứ diện $ABCD$. Hỏi có bao nhiêu vectơ khác vectơ $\vec{0}$ mà mỗi vectơ có điểm đầu, điểm cuối là hai đỉnh của tứ diện $ABCD$?

Ⓐ 12. Ⓑ 4. Ⓒ 10. Ⓓ 8.

Hướng dẫn giải. Chọn A.

Tứ diện có 4 đỉnh. Số vectơ khác $\vec{0}$ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của tứ diện là $4 \times 3 = 12$.

Câu 11. Cho ba điểm A, B, C phân biệt, điều kiện cần và đủ để A nằm giữa B và C là

Ⓐ $\exists k < 0; \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$. Ⓑ $\exists k \neq 0; \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.
Ⓒ $AB = BC$. Ⓓ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

Hướng dẫn giải. Chọn A.

A nằm giữa B và C khi và chỉ khi hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ ngược hướng, tương đương với tồn tại số thực $k < 0$ sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

Câu 12. Chọn khẳng định đúng:

Ⓐ Hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng.
Ⓑ Hai vectơ cùng phương thì giá của chúng song song hoặc trùng nhau.
Ⓒ Hai vectơ có giá vuông góc thì cùng phương.
Ⓓ Hai vectơ ngược hướng với một vectơ thứ ba thì cùng phương.

Hướng dẫn giải. Chọn B. Theo định nghĩa, hai vectơ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

Câu 13. Hai vectơ cùng hướng và cùng độ dài được định nghĩa là

(A) Bằng nhau. (B) Đối nhau.
(C) Ngược hướng. (D) Song song.

Hướng dẫn giải. Chọn A. Hai vectơ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.

Câu 14. Cho hình bình hành $ABCD$, vectơ nào sau đây bằng $\overrightarrow{CD}$?

(A) $\overrightarrow{DC}$. (B) $\overrightarrow{BD}$. (C) $\overrightarrow{AD}$. (D) $\overrightarrow{BA}$.

Hướng dẫn giải. Chọn D. Trong hình bình hành $ABCD$, ta có cạnh CD song song và bằng cạnh BA. Vì vectơ $\overrightarrow{CD}$ và $\overrightarrow{BA}$ cùng hướng và cùng độ dài nên $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$.

Câu 15. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O. Vectơ bằng $\overrightarrow{DO}$ là:

(A) $\overrightarrow{OC}$. (B) $\overrightarrow{OA}$. (C) $\overrightarrow{BO}$. (D) $\overrightarrow{OB}$.

Hướng dẫn giải. Chọn D. Trong hình vuông $ABCD$, tâm O là trung điểm của đường chéo BD. Khi đó $\overrightarrow{DO}$ và $\overrightarrow{OB}$ cùng hướng (từ D đến B) và có độ dài bằng nhau ($DO = OB$). Vậy $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}$.

Câu 16. Cho hình bình hành $ABCD$. Hai vectơ nào ngược hướng?

(A) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. (B) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$. (C) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DB}$. (D) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$.

Hướng dẫn giải. Chọn D. Trong hình bình hành $ABCD$, ta có $AB//CD$ và $AB = CD$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ hướng từ trái sang phải, vectơ $\overrightarrow{CD}$ hướng từ phải sang trái. Do đó $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ là hai vectơ ngược hướng.

Câu 17. Hai vectơ cùng phương thì chúng

(A) Cùng hướng.
(B) Ngược hướng.
(C) Có giá song song hoặc trùng nhau.
(D) Song song.

Hướng dẫn giải. Chọn C. Đây là định nghĩa cơ bản về hai vectơ cùng phương: giá của chúng phải song song hoặc trùng nhau.

Câu 18. Cho tam giác ABC với trung tuyến AM và trọng tâm G. Khi đó $\overrightarrow{GA} =$?

(A) $2\overrightarrow{GM}$. (B) $\frac{2}{3}\overrightarrow{GM}$. (C) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}$. (D) $-\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.

Hướng dẫn giải. Chọn D. Theo tính chất trọng tâm, $GA = \frac{2}{3}AM$. Vì điểm G nằm giữa A và M nên vectơ $\overrightarrow{GA}$ ngược hướng với vectơ $\overrightarrow{AM}$. Do đó $\overrightarrow{GA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.

Câu 19. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC. Các vectơ bằng $\overrightarrow{AM}$ là:

(A) $\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{BN}$. (B) $\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{BN}, \overrightarrow{NC}$.
(C) $\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{NB}, \overrightarrow{NC}$. (D) $\overrightarrow{DM}, \overrightarrow{BN}, \overrightarrow{NC}$.

Hướng dẫn giải. Chọn B. Vì M là trung điểm AD nên $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MD}$. Vì $ABCD$ là hình vuông và M,N là trung điểm các cạnh đối diện nên $AM//BN//NC$ và $AM=MD=BN=NC$. Các vectơ $\overrightarrow{MD},\overrightarrow{BN},\overrightarrow{NC}$ đều cùng hướng và cùng độ dài với $\overrightarrow{AM}$.

Câu 20. Cho tam giác ABC. Hãy xác định điểm M thỏa mãn: $2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

Ⓐ M thuộc cạnh AB và $AM=2MB$.
Ⓑ M không thuộc AB.
Ⓒ M là trung điểm của AB.
Ⓓ M trên AB và ngoài đoạn AB.

Hướng dẫn giải. Chọn D. Ta có $2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{MB}$. Vì hệ số $\dfrac{3}{2}>0$ nên $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$ cùng hướng, suy ra M nằm ngoài đoạn thẳng AB. Về độ dài, $MA=1,5MB$, nên M nằm về phía điểm B.

Câu 21. Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD của hình bình hành $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức sai?

Ⓐ $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{DO}$. Ⓑ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Ⓒ $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$. Ⓓ $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$.

Hướng dẫn giải. Chọn C. Trong hình bình hành, O là trung điểm của AC. Khi đó $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OC}$ là hai vectơ đối nhau (cùng độ dài nhưng ngược hướng), nên $\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OC}$. Khẳng định $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$ là sai.

Câu 22. Khẳng định nào sau đây đúng?

Ⓐ Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau nếu $\vec{a}=\vec{b}$.
Ⓑ Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng phương và cùng độ dài.
Ⓒ Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng độ dài.
Ⓓ Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.

Hướng dẫn giải. Chọn D. Hai vectơ bằng nhau nếu thỏa mãn cả hai điều kiện: cùng hướng và cùng độ dài. (Cùng phương là chưa đủ vì có thể ngược hướng).

Câu 23. Cho tam giác ABC. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của AB,BC,CA. Xác định các vectơ cùng phương với $\overrightarrow{MN}$.

Ⓐ $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AP},\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PC},\overrightarrow{CP}$.
Ⓑ $\overrightarrow{NM},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CB},\overrightarrow{PA},\overrightarrow{AP}$.
Ⓒ $\overrightarrow{NM},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AP},\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PC},\overrightarrow{CP}$.
Ⓓ $\overrightarrow{NM},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AM},\overrightarrow{MA},\overrightarrow{PN},\overrightarrow{CP}$.

Hướng dẫn giải. Chọn C. MN là đường trung bình của tam giác ABC nên $MN//AC$. Các vectơ cùng phương với $\overrightarrow{MN}$ là các vectơ có giá song song hoặc trùng với đường thẳng AC. Các vectơ đó bao gồm: $\overrightarrow{NM}$ (vectơ đối), các vectơ nằm trên cạnh AC là $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CA}$ và các vectơ tạo bởi trung điểm P là $\overrightarrow{AP},\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PC},\overrightarrow{CP}$.

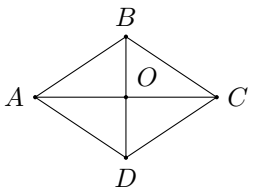
Câu 24. Cho tứ giác $ABCD$. Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$?

Ⓐ $ABCD$ là hình vuông. Ⓑ $ABDC$ là hình bình hành.
Ⓒ AD và BC có cùng trung điểm. Ⓓ $AB=CD$.

Hướng dẫn giải. Chọn B.
Theo định nghĩa, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ khi và chỉ khi đoạn thẳng AB song song và bằng đoạn thẳng CD,

đồng thời hướng từ A đến B cùng hướng với hướng từ C đến D. Điều này tương đương với tứ giác $ABDC$ (với các đỉnh theo thứ tự) là một hình bình hành.

Câu 25. Cho hình thoi $ABCD$. Có bao nhiêu vectơ có điểm đầu là 2 trong 4 đỉnh đồng thời bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$?



Ⓐ 2. Ⓑ 1. Ⓒ 3. Ⓓ Vô số.

Hướng dẫn giải. Chọn B.

Trong hình thoi $ABCD$, ta có $AB // DC$ và $AB = DC$. Do đó, vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của hình thoi mà bằng vectơ $\overrightarrow{AB}$ chỉ có duy nhất vectơ $\overrightarrow{DC}$.

Câu 26. Cho điểm B nằm giữa hai điểm A và C, $AB = 2$ cm, $AC = 6$ cm. Đẳng thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{AB}$. Ⓑ $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{BA}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{BC}$. Ⓓ $\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$.

Hướng dẫn giải. Chọn B.

Vì B nằm giữa A và C nên $AB + BC = AC \Rightarrow BC = AC - AB = 6 - 2 = 4$ cm.
Vectơ $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{BA}$ là hai vectơ ngược hướng.
Về độ dài: $\dfrac{BC}{BA} = \dfrac{4}{2} = 2 \Rightarrow BC = 2BA$.
Vì ngược hướng nên $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{BA}$.

Câu 27. Cho ba điểm A, B, C phân biệt. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$. Ⓑ Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ thì $AB = BC$.
Ⓒ Nếu $AB = BC$ thì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$. Ⓓ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

Hướng dẫn giải. Chọn B.

Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ thì hai vectơ này bằng nhau, dẫn đến độ dài của chúng phải bằng nhau, tức là $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| \Leftrightarrow AB = BC$.

Câu 28. Cho hai vectơ khác vectơ-không, không cùng phương. Có bao nhiêu vectơ khác $\vec{0}$ cùng phương với cả hai vectơ đó?

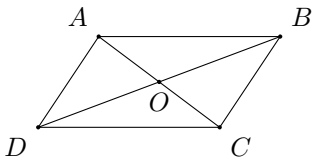
Ⓐ 2. Ⓑ 1. Ⓒ Không có. Ⓓ Vô số.

Hướng dẫn giải. Chọn C.

Nếu có một vectơ $\vec{x} \neq \vec{0}$ cùng phương với cả $\vec{a}$ và $\vec{b}$ (với $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương) thì theo tính chất bắc cầu, $\vec{a}$ và $\vec{b}$ phải cùng phương. Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vậy không có vectơ nào thỏa mãn.

Câu 29. Cho hình bình hành $ABCD$. Số vectơ khác $\vec{0}$, cùng phương với vectơ $\overrightarrow{AB}$ và có điểm

đầu, điểm cuối là đỉnh của hình bình hành $ABCD$ là



Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

Hướng dẫn giải. Chọn C.

Các vectơ khác $\vec{0}$ cùng phương với $\overrightarrow{AB}$ có điểm đầu và cuối là các đỉnh hình bình hành là: $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DC}$. (Không tính $\overrightarrow{AB}$ vì đề bài hỏi các vectơ cùng phương với nó, thường ngụ ý là các vectơ khác nó hoặc tổng số). Nếu tính cả $\overrightarrow{AB}$ thì là 4. Tuy nhiên, nhìn vào đáp án 3 thường là các vectơ song song hoặc đối. Theo quy ước thông thường trong các bài trắc nghiệm này, ta chọn các vectơ cùng phương là $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DC}$.

Câu 30. Cho đoạn thẳng AB. Gọi M là một điểm trên đoạn thẳng AB sao cho $AM = \dfrac{1}{4}AB$. Khẳng định nào sau đây là sai?

Ⓐ $\overrightarrow{MB} = -3\overrightarrow{MA}$. Ⓑ $\overrightarrow{BM} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{BA}$.

Ⓒ $\overrightarrow{MA} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{MB}$. Ⓓ $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

Hướng dẫn giải. Chọn C.

Vì M nằm trên đoạn AB nên $AM + MB = AB \Rightarrow MB = \dfrac{3}{4}AB$. Do đó $MB = 3AM$.

$\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$ là hai vectơ ngược hướng.

Vì $MB = 3AM$ nên $|\overrightarrow{MA}| = \dfrac{1}{3}|\overrightarrow{MB}|$. Do ngược hướng nên $\overrightarrow{MA} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{MB}$. Khẳng định C ghi là số dương nên sai.

Câu 31. Cho ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ khác vectơ-không. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

Ⓐ $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$. Ⓑ $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Ⓒ $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$. Ⓓ $\vec{0} + \vec{a} = \vec{0}$.

Hướng dẫn giải. Chọn D.

Tính chất của vectơ không là $\vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$. Khẳng định D sai.

Câu 32. Cho $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$, mệnh đề nào sau đây là đúng?

Ⓐ Tam giác ABC là tam giác cân.
Ⓑ Tam giác ABC là tam giác đều.
Ⓒ A là trung điểm của đoạn BC.
Ⓓ Điểm B trùng với điểm C.

Hướng dẫn giải. Chọn D.

Hai vectơ có cùng điểm đầu A mà bằng nhau thì điểm cuối của chúng phải trùng nhau, tức là $B \equiv C$.

Câu 33. Cho 4 điểm A, B, C, D không thẳng hàng. Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$?

Ⓐ $ABCD$ là hình bình hành. Ⓑ $ABDC$ là hình bình hành.
Ⓒ AB và DC có cùng trung điểm. Ⓓ $AB = CD$.

Hướng dẫn giải. Chọn B.

Tương tự câu 1, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABDC$ là hình bình hành.

Câu 34. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC của tam giác đều ABC. Đẳng thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$. Ⓑ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$. Ⓓ $|\overrightarrow{BC}| = 2|\overrightarrow{MN}|$.

Hướng dẫn giải. Chọn D.

Vì M, N là trung điểm của AB, AC nên MN là đường trung bình của tam giác ABC. Theo tính chất đường trung bình: $MN = \dfrac{1}{2}BC \Leftrightarrow BC = 2MN$. Do đó $|\overrightarrow{BC}| = 2|\overrightarrow{MN}|$.

Câu 35. Khẳng định nào sau đây là khẳng định sai?

Ⓐ Tích của một số với một vectơ là một số.
Ⓑ Tích của một số với một vectơ là một vectơ.
Ⓒ Nếu $k > 0$ thì vectơ $k\vec{a}$ cùng hướng với vectơ $\vec{a}$.
Ⓓ Nếu $k < 0$ thì vectơ $k\vec{a}$ ngược hướng với vectơ $\vec{a}$.

Hướng dẫn giải. Chọn A.

Tích của một số thực k với một vectơ $\vec{a}$ là một vectơ $k\vec{a}$. Khẳng định A nói là "một số" nên sai.

Câu 36. Chọn mệnh đề sai trong các mệnh đề sau đây:

Ⓐ $\vec{0}$ cùng hướng với mọi vectơ. Ⓑ $\vec{0}$ cùng phương với mọi vectơ.
Ⓒ $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$. Ⓓ $|\overrightarrow{AB}| > 0$.

Hướng dẫn giải. Chọn D.

Độ dài của một vectơ luôn không âm, $|\overrightarrow{AB}| \geq 0$. Trong trường hợp $A \equiv B$ thì $|\overrightarrow{AB}| = 0$. Do đó khẳng định $|\overrightarrow{AB}| > 0$ là sai vì thiếu trường hợp bằng 0.

Câu 37. Cho 3 điểm M, N, P thẳng hàng trong đó N nằm giữa M và P. Khi đó các cặp vectơ nào sau đây cùng hướng?

Ⓐ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$. Ⓑ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{PN}$.
Ⓒ $\overrightarrow{NM}$ và $\overrightarrow{NP}$. Ⓓ $\overrightarrow{MP}$ và $\overrightarrow{PN}$.

Hướng dẫn giải. Chọn A.

Vì N nằm giữa M và P nên tia MN và tia MP trùng nhau. Do đó hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$ cùng hướng.

Câu 38. Cho hình bình hành $ABCD$. Số vectơ khác $\vec{0}$, cùng phương với vectơ $\overrightarrow{AB}$ và có điểm đầu, điểm cuối là đỉnh của hình bình hành $ABCD$ là

Ⓐ 1. Ⓑ 2. Ⓒ 3. Ⓓ 4.

Hướng dẫn giải. Chọn C.

Tương tự câu 6, các vectơ đó là $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DC}$.

Câu 39. Cho 4 điểm A, B, C, D tùy ý. Nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ thì

Ⓐ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$. Ⓑ $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$. Ⓒ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. Ⓓ $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BD}$.

Hướng dẫn giải. Chọn C.

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow\overrightarrow{B}-\overrightarrow{A}=\overrightarrow{D}-\overrightarrow{C}\Leftrightarrow\overrightarrow{C}-\overrightarrow{A}=\overrightarrow{D}-\overrightarrow{B}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.

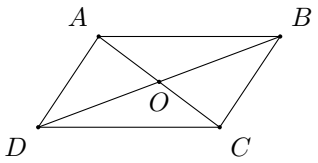
Câu 40. Cho ba điểm A,B,C thẳng hàng, trong đó điểm B nằm giữa hai điểm A và C. Khi đó các cặp vectơ nào sau đây cùng hướng?

Ⓐ $\overrightarrow{CB}$ và $\overrightarrow{AB}$. Ⓑ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$. Ⓒ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CB}$. Ⓓ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$.

Hướng dẫn giải. Chọn B.

Vì B nằm giữa A và C nên hai tia AB và AC trùng nhau, do đó $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

Câu 41. Cho hình bình hành $ABCD$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



Ⓐ Hai vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$ cùng phương.
Ⓑ Hai vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$ cùng phương.
Ⓒ Hai vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$ cùng hướng.
Ⓓ Hai vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}$ ngược hướng.

Hướng dẫn giải. Chọn B.

Trong hình bình hành $ABCD$, ta có $AB//CD$ nên hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng phương.

Câu 42. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của AD,BC và AC. Biết $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{PN}$. Chọn câu đúng.

Ⓐ $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$. Ⓑ $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$. Ⓒ $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$. Ⓓ $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$.

Hướng dẫn giải. Chọn C.

Trong tam giác ADC, MP là đường trung bình $\Rightarrow\overrightarrow{MP}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.

Trong tam giác ABC, PN là đường trung bình $\Rightarrow\overrightarrow{PN}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Mà $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{PN}\Rightarrow\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

Suy ra tứ giác $ABCD$ là hình bình hành, dẫn đến $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

Câu 43. Cho 3 điểm M,N,P tùy ý khi đó

Ⓐ $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{PM}$. Ⓑ $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MP}$.
Ⓒ $\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MP}$. Ⓓ $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MP}$.

Hướng dẫn giải. Chọn B. Theo quy tắc ba điểm (quy tắc tam giác): với ba điểm bất kỳ M,N,P ta luôn có $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MP}$.

Câu 44. Cho tam giác ABC, để $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}$ thì vị trí điểm M thỏa:

Ⓐ $AMBC$ là hình bình hành. Ⓑ $CBAM$ là hình bình hành.
Ⓒ $MACB$ là hình bình hành. Ⓓ $MABC$ là hình bình hành.

Hướng dẫn giải. Chọn D. Ta có $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}$.

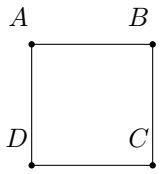
Đẳng thức $\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AB}$ chứng tỏ tứ giác $MABC$ là hình bình hành.

Câu 45. Cho tứ giác $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}$.
(B) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$.
(C) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CD}$.
(D) $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}$.

Hướng dẫn giải. Chọn A. Ta có $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$ (theo quy tắc ba điểm). Các khẳng định còn lại đều sai theo quy tắc trừ hoặc cộng vectơ.

Câu 46. Cho hình vuông $ABCD$. Khẳng định nào sau đây đúng?



(A) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DB}$.
(B) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}$.
(C) $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CD}$.
(D) $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{BC}$.

Hướng dẫn giải. Chọn B. Theo quy tắc hình bình hành áp dụng cho hình vuông $ABCD$ (cũng là hình bình hành), ta có $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}$.

Câu 47. Cho tam giác ABC, M là điểm tùy ý. Tìm khẳng định đúng:

(A) $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{BA}$.
(B) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BA}$.
(C) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{BC}$.
(D) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{BC}$.

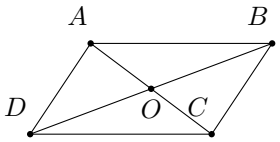
Hướng dẫn giải. Chọn B. Biến đổi khẳng định B: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BA}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}\Leftrightarrow\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MB}$ (luôn đúng).

Câu 48. Cho ba điểm A,B,C phân biệt. Đẳng thức nào sau đây là đẳng thức đúng?

(A) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CA}$.
(B) $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$.
(C) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$.
(D) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}$.

Hướng dẫn giải. Chọn B. Theo quy tắc cộng vectơ: $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$.

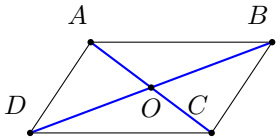
Câu 49. Cho hình bình hành $ABCD$. Khẳng định nào sau đây sai?



(A) $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC}=\vec{0}$.
(B) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\vec{0}$.
(C) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.
(D) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$.

Hướng dẫn giải. Chọn B. Trong hình bình hành $ABCD$, ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{CD}$. Do đó $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$. Khẳng định B là sai.

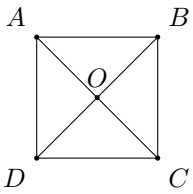
Câu 50. Cho hình bình hành $ABCD$ có tâm O. Khẳng định nào sau đây là đúng?



Ⓐ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DA}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BO}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{CD}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BD}$.

Hướng dẫn giải. Chọn A. Ta có $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$. Trong hình bình hành $ABCD$, ta có $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$. Do đó $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DA}$ là khẳng định đúng.

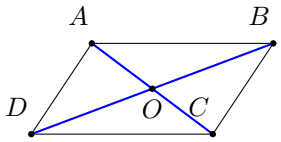
Câu 51. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Tính $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$.



Ⓐ $\overrightarrow{BC}$.
Ⓑ $\overrightarrow{DA}$.
Ⓒ $\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}$.

Hướng dẫn giải. Chọn B. Ta có $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CB}$. Trong hình vuông $ABCD$, $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$.

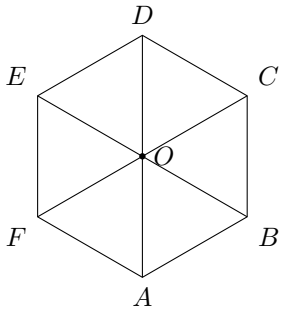
Câu 52. Cho O là tâm hình bình hành $ABCD$. Hỏi vectơ $(\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{DO})$ bằng vectơ nào?



Ⓐ $\overrightarrow{BA}$.
Ⓑ $\overrightarrow{BC}$.
Ⓒ $\overrightarrow{DC}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AC}$.

Hướng dẫn giải. Chọn B. Ta có $\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{DO}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AD}$. Trong hình bình hành $ABCD$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$.

Câu 53. Cho lục giác đều $ABCDEF$ và O là tâm của nó. Đẳng thức nào dưới đây là đẳng thức sai?



Ⓐ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{EO}=\vec{0}$.
Ⓑ $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}$.
Ⓒ $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{OC}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\vec{0}$.

Hướng dẫn giải. Chọn D. Trong lục giác đều, ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OA}=\vec{0}$ (vì O là tâm, tổng các vectơ bán kính cách quãng bằng 0). Tuy nhiên, nếu xét các phương án khác, hãy kiểm tra kỹ tính đúng đắn. Trong một số tài liệu, biểu thức D được viết dưới dạng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF}=\vec{0}$ là ĐÚNG. Đề bài yêu cầu tìm câu SAI. Kiểm tra câu C: $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$. Vế phải $\overrightarrow{EB}-\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}\neq\overrightarrow{BA}$. Vậy C sai.

Câu 54. Chọn khẳng định sai:

Ⓐ Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.
Ⓑ Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{AB}$.
Ⓒ Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.
Ⓓ Nếu I là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{BI}=\vec{0}$.

Hướng dẫn giải. Chọn A. Nếu I là trung điểm AB thì $\overrightarrow{IA}$ và $\overrightarrow{IB}$ là hai vectơ đối nhau, tức là $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$ hay $\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{IB}$. Do đó $\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=-2\overrightarrow{IB}\neq\vec{0}$.

Câu 55. Cho 4 điểm bất kỳ A,B,C,D. Đẳng thức nào sau đây là đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CO}$.
Ⓑ $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.
Ⓒ $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.
Ⓓ $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{BA}$.

Hướng dẫn giải. Chọn B. Ta có $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

Câu 56. Cho các điểm phân biệt A,B,C,D. Đẳng thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DA}$.
Ⓑ $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AD}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DA}$.
Ⓓ $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BC}$.

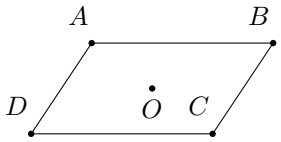
Hướng dẫn giải. Chọn D. Vế trái: $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$. Vế phải: $\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DB}$. Vậy D đúng.

Câu 57. Chỉ ra vectơ tổng $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{RN}-\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{QR}$ trong các vectơ sau

Ⓐ $\overrightarrow{MR}$. Ⓑ $\overrightarrow{MQ}$. Ⓒ $\overrightarrow{MP}$. Ⓓ $\overrightarrow{MN}$.

Hướng dẫn giải. Chọn D. Biến đổi: $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{QR}=(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP})+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QR}+\overrightarrow{RN}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RN}=\overrightarrow{MR}+\overrightarrow{RN}=\overrightarrow{MN}$.

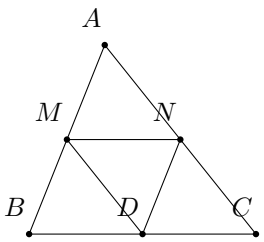
Câu 58. Cho hình bình hành $ABCD$ và điểm M tùy ý. Đẳng thức nào sau đây đúng?



Ⓐ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$.
Ⓑ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}$.
Ⓒ $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MD}$.
Ⓓ $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$.

Hướng dẫn giải. Chọn D. Với hình bình hành $ABCD$, tâm O ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.
Theo tính chất vectơ tâm hình bình hành: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MO}$ và $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MO}$.

Câu 59. Cho tam giác ABC có M,N,D lần lượt là trung điểm của AB,AC,BC. Khi đó, các vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{DN}$ là:



Ⓐ $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{ND}$.
Ⓑ $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{ND}$.

Ⓒ $\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{AM}$. Ⓓ $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{ND}$.

Hướng dẫn giải. Chọn A. DN là đường trung bình nên $DN//AB$ và $DN = \frac{1}{2}AB = AM = MB$.
Vectơ $\overrightarrow{DN}$ cùng hướng với $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{BM}$.
Các vectơ đối của $\overrightarrow{DN}$ (ngược hướng và cùng độ dài) là $\overrightarrow{ND}$, $\overrightarrow{AM}$, và $\overrightarrow{MB}$.

Câu 60. Trên đường thẳng chứa cạnh BC của tam giác ABC lấy một điểm M sao cho $2\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$. Khi đó đẳng thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$. Ⓑ $\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.

Ⓒ $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Ⓓ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

Hướng dẫn giải. Ta có $2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}) - 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}) = \vec{0}$
$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AM} - 3\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AM} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.
Chọn B.

Câu 61. Trên đường thẳng chứa cạnh BC của tam giác ABC lấy một điểm M sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$. Khi đó đẳng thức nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$. Ⓑ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

Ⓒ $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Ⓓ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}) - 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}) = \vec{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AM} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.
Chọn A.

Câu 62. Cho tam giác ABC điểm I thoả: $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$. Chọn mệnh đề đúng:

Ⓐ $\overrightarrow{CI} = \dfrac{\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}}{-3}$. Ⓑ $\overrightarrow{CI} = -\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$.

Ⓒ $\overrightarrow{CI} = \dfrac{\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB}}{3}$. Ⓓ $\overrightarrow{CI} = \dfrac{\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{CB}}{-3}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow (\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CI}) - 2(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CI}) = \vec{0}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CI} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CI} = -\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$.
Chọn B.

Câu 63. Cho ΔABC, M là điểm trên cạnh AB sao cho $MB = 3MA$. Đẳng thức vectơ nào sau đây đúng?

Ⓐ $\overrightarrow{MC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} + \frac{5}{4}\overrightarrow{CA}$. Ⓑ $\overrightarrow{MC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} + 3\overrightarrow{CA}$.

Ⓒ $\overrightarrow{MC} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{CA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$. Ⓓ $\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$.

Hướng dẫn giải. Vì M thuộc cạnh AB và $MB = 3MA$ nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.
Ta có $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}(\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})$
$= \overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{CA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{CA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$.
Chọn C.

III. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Bài 1. Cho hình thang $ABCD$ với hai đáy là AB và CD. Biết rằng nếu $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$ thì $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}|$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hai đường chéo AC và BD có độ dài bằng nhau

b) Hình thang $ABCD$ là hình thang cân

c) Hai cạnh bên AD và BC có độ dài không bằng nhau

d) Nếu $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}|$ thì $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$

Hướng dẫn giải.

a) Đúng: Vì $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$ nên hai đường chéo AC và BD có độ dài bằng nhau

b) Đúng: Suy ra hình thang $ABCD$ cân.

c) Sai: Do đó hai cạnh bên AD và BC có độ dài bằng nhau hay $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|$.

d) Sai: Xét hình bình hành $ABCD$ (cũng là hình thang có hai đáy AB và CD) có $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}|$ nhưng $|\overrightarrow{AC}| \neq |\overrightarrow{BD}|$.

Bài 2. Cho $\triangle ABC$, gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Khi đó:

a) vectơ $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với vectơ $\overrightarrow{MN}$

b) Có 6 vectơ khác vectơ không và cùng phương với $\overrightarrow{AB}$ có điểm đầu, điểm cuối lấy từ các điểm đã cho.

c) vectơ $\overrightarrow{AP}$ ngược hướng vectơ $\overrightarrow{PB}$

d) Có 3 vectơ khác vectơ không và cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ có điểm đầu và điểm cuối lấy từ các điểm đã cho.

Hướng dẫn giải.

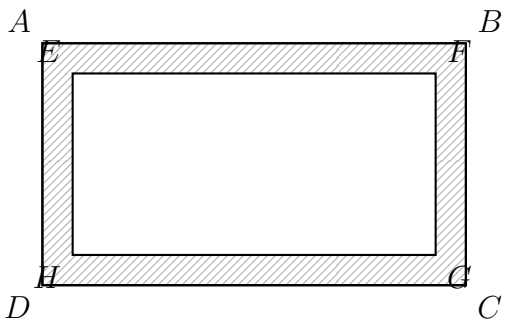
a) Đúng: $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{MN}$

b) Sai: Có 7 vec tơ khác vec tơ không và cùng phương với $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NM}$.

c) Sai: $\overrightarrow{AP}$ cùng hướng $\overrightarrow{PB}$

d) Đúng: Có 3 vectơ khác vectơ không cùng hướng với $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{NM}$.

Bài 3. Một mảnh vườn trồng rau hình chữ nhật có chiều dài và chiều rộng lần lượt là 25 m và 16 m. Người chủ để dành mỗi chiều $0,5$ m để làm đường đi xung quanh mảnh vườn (như hình minh họa). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Từ 8 điểm A, B, C, D, E, F, G, H có 6 vectơ cùng phương với vectơ $\overrightarrow{AB}$.

b) Độ dài vectơ $\overrightarrow{AC}$ lớn hơn 30 m.

c) Độ dài vectơ $\overrightarrow{EF}$ là 24 m.

d) Người chủ bón đạm cho vườn rau, cứ 2 kg đạm cho 25 (m^2) đất với chi phí 24 000 đồng/kg. Để bón đạm cho cả vườn rau, người chủ cần bỏ ra chi phí là 700 000 đồng.

Hướng dẫn giải.

a) Đúng : Từ 8 điểm A, B, C, D, E, F, G, H có 7 vectơ cùng phương với vectơ $\overrightarrow{AB}$ là: $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{FE}, \overrightarrow{HG}, \overrightarrow{G}$

b) Sai: $\triangle ABC$ vuông tại B có: $|\overrightarrow{AC}| = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{25^2 + 16^2} = \sqrt{881} < 30$

c) Đúng: Ta có: $|\overrightarrow{EF}| = EF = AB - 0,5 - 0,5 = 24$ (m).

d) Sai: Do người chủ để dành mỗi chiều 0,5 m để làm đường đi xung quanh mảnh vườn nên chiều dài, chiều rộng của phần đất trồng rau thực tế là:

Chiều dài $EF = AB - 0,5 - 0,5 = 24$ (m)

Chiều rộng $FG = BC - 0,5 - 0,5 = 15$ (m)

Diện tích phần đất trồng rau là: $24 \cdot 15 = 360$ (m^2)

Số đạm cần dùng để bón cho cả vườn rau là: $360 \cdot \dfrac{2}{25} = 28,8$ (kg)

Để bón đạm cho cả vườn rau, người chủ cần bỏ ra chi phí là: $28,8 \cdot 24\,000 = 691\,200$ (đồng)

Bài 4. Cho lục giác đều $ABCDEF$ có tâm O.

a) Vectơ $\overrightarrow{OA}$ cùng phương với $\overrightarrow{OD}$

b) Có 9 vectơ khác vectơ không và cùng phương với vectơ $\overrightarrow{OA}$.

c) Vectơ $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng $\overrightarrow{OC}$

d) Có 3 vectơ khác vectơ không và cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{AB}$.

Hướng dẫn giải.

a) *Vectơ $\overrightarrow{OA}$ cùng phương với $\overrightarrow{OD}$*

Vectơ $\overrightarrow{OA}$ cùng phương với $\overrightarrow{OD}$

Chọn ĐÚNG.

b) *Có 9 vectơ khác vectơ không và cùng phương với vectơ $\overrightarrow{OA}$.*

Có 9 vectơ khác vectơ không và cùng phương với vectơ $\overrightarrow{OA}$: $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{DO}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{FE}$.

Chọn ĐÚNG.

c) *Vectơ $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng $\overrightarrow{OC}$*

Vectơ $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng $\overrightarrow{OC}$

Chọn SAI.

d) *Có 3 vectơ khác vectơ không và cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{AB}$.*

Có 4 vectơ khác vectơ không và cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{AB}$ là: $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{ED}$.

Chọn SAI.

Bài 5. Cho ΔABC có A', B', C' lần lượt là các trung điểm của các cạnh BC, CA, AB.

a) $BC' = C'A = A'B' = \dfrac{AB}{2}$.

b) Hai vectơ $\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{A'B'}$ ngược hướng

c) $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{A'B'}$.

d) $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{CA'}$.

Hướng dẫn giải.

a) $BC' = C'A = A'B' = \dfrac{AB}{2}$.

Ta có C' là trung điểm của AB và $A'B'$ là đường trung bình của tam giác ứng với cạnh đáy AB nên: $BC' = C'A = A'B' = \dfrac{AB}{2}$.

Chọn ĐÚNG.

b) *Hai vectơ $\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{A'B'}$ ngược hướng*

Mặt khác, ba vectơ $\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{C'A}, \overrightarrow{A'B'}$ cùng hướng.

Chọn SAI.

c) $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{A'B'}$.

Do đó $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{A'B'}$.

Chọn ĐÚNG.

d) $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{CA'}$.

Ta xác định được: $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{A'B'}$; $\overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{B'C}$.

Chọn ĐÚNG.

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = \sqrt{3}, AC = 2\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm BC và H là hình chiếu vuông góc của A lên BC.

a) $BC^2 = AB^2 + AC^2$

b) $|\overrightarrow{AM}| = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$

c) $AB \cdot AC = AH \cdot BC$

d) $|\overrightarrow{AH}| = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$

Hướng dẫn giải.

a) $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Áp dụng định lí Py-ta-go trong ΔABC vuông tại A, ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 = (\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 = 15 \Rightarrow |\overrightarrow{BC}| = BC = \sqrt{15}$.

Chọn ĐÚNG.

b) $|\overrightarrow{AM}| = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$

Ta có: AM là trung tuyến ứng với cạnh huyền $BC \Rightarrow |\overrightarrow{AM}| = AM = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$.

Chọn SAI.

c) $AB \cdot AC = AH \cdot BC$

Ta có: $AB \cdot AC = AH \cdot BC$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)

Chọn ĐÚNG.

d) $|\overrightarrow{AH}| = \dfrac{\sqrt{15}}{5}$

$\Rightarrow |\overrightarrow{AH}| = AH = \dfrac{AB \cdot AC}{BC} = \dfrac{\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}}{\sqrt{15}} = \dfrac{6}{\sqrt{15}} = \dfrac{2\sqrt{15}}{5}.$

Chọn SAI.

Bài 7. Cho tam giác ABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB.

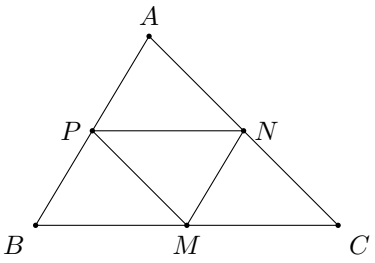
a) Tứ giác $BMNP$ và $APMN$ là hình bình hành

b) $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$.

c) $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BM}$.

d) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$ với O là điểm bất kì.

Hướng dẫn giải.



a) *Tứ giác $BMNP$ và $APMN$ là hình bình hành*

Ta có $\begin{cases} BP//MN; BP = MN \\ NP//MB; NP = MB \end{cases} \Rightarrow BMNP$ là hình bình hành

Ta có $\begin{cases} AP//MN; AP = MN \\ AN//MP; AN = MP \end{cases} \Rightarrow APMN$ là hình bình hành

Chọn ĐÚNG.

b) $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$.

$BMNP$ là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{PN}$.

Vì N là trung điểm của $AC \Rightarrow \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{NA}$.

Do đó theo quy tắc ba điểm: $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \left(\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NA}\right) + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$ $(*)$

Chọn ĐÚNG.

c) $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BM}$.

Vì tứ giác $APMN$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM}$,

Kết hợp với quy tắc trừ $\Rightarrow \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BM}$.

Mà $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$ do M là trung điểm của BC.

Vậy $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BM}$

Chọn SAI.

d) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$ *với* O *là điểm bất kì.*

Theo quy tắc ba điểm ta có $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\left(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA}\right)+\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB}\right)+\left(\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NC}\right)$

$=\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}\right)+\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{NC}=\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}\right)-\left(\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}\right)$

Lại có $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AP}=\vec{0}$ $(*)$ suy ra $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}$.

Chọn ĐÚNG.

Bài 8. Cho hình bình hành $ABCD$ với M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD.

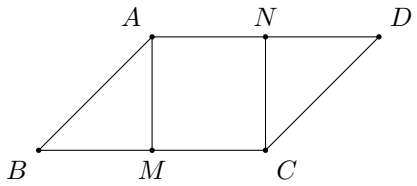
a) $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}$

b) $\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

c) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

d) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BM}$

Hướng dẫn giải.



a) $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}$

Theo qui tắc hình bình hành ta có: $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}$

Chọn ĐÚNG.

b) $\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

Do $AMCN$ là hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{CA}$

Suy ra $\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{CN}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$

Chọn SAI.

c) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$

Do $AMCN$ là hình bình hành, ta có:

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MN}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NM}=\vec{0}$

Chọn SAI.

d) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BM}$

Do $ABCD$ là hình bình hành, ta có $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}$, suy ra $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BM}$

Chọn ĐÚNG.

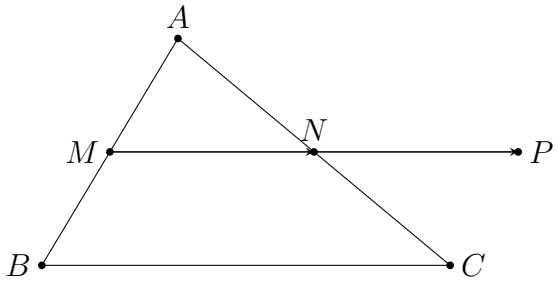
Bài 9. Cho tam giác ABC có M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Lấy điểm P đối xứng với điểm M qua N. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{BC}$ cùng phương.

b) $|\overrightarrow{MP}|=|\overrightarrow{BC}|$.

c) $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{BC}$ ngược hướng.

d) $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{BC}$.



✍ *Hướng dẫn giải.*

a) **Đúng:** Do MN là đường trung bình của tam giác ABC nên $MN // BC$.

b) **Đúng:** Điểm P đối xứng với điểm M qua N nên $MP = 2MN = BC$ do đó $|\overrightarrow{MP}| = |\overrightarrow{BC}|$.

c) **Sai:** Xét nửa mặt phẳng bờ AB chứa C, ta có N là trung điểm AC nên N và C cùng phía AB hay cùng phía MB do đó $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng.

d) **Đúng:** Hai véc tơ cùng hướng, cùng độ dài suy ra $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{BC}$.

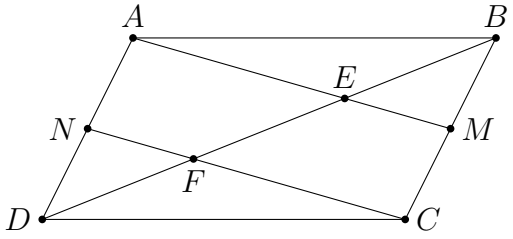
Bài 10. Cho hình bình hành $ABCD$. Hai điểm M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD, gọi E, F lần lượt là giao điểm của BD với AM, CN. Xét các véc tơ tạo thành từ các điểm đã cho. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với là $\overrightarrow{DC}$.

b) $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MC}$.

c) $\overrightarrow{AD}$ cùng hướng với 4 véc tơ.

d) $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{EB}$.



✍ *Hướng dẫn giải.*

a) **Đúng:** Theo tính chất hình bình hành.

b) **Đúng:** Ta có: $AN = \dfrac{1}{2}AD; CM = \dfrac{1}{2}BC \Rightarrow AN = CM$. Mặt khác: $\overrightarrow{AN}; \overrightarrow{MC}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MC}$.

c) **Đúng:** Theo tính chất hình bình hành ta có $\overrightarrow{AD}$ cùng hướng với 5 véc tơ sau: $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{ND}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{MC}$.

d) **Đúng:** Do tứ giác $AMCN$ là hình bình hành nên $ME // FC$, $BM = MC$ suy ra $BE = EF$. Mặt khác $\overrightarrow{BE}; \overrightarrow{EF}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{EF}$. Tương tự $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{EF}$.

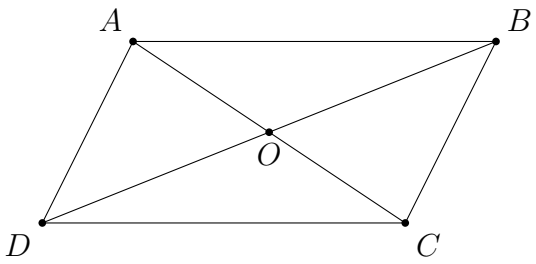
Bài 11. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Xét các véc tơ tạo thành từ 5 điểm đã cho. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Có $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$.

b) $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}$ không cùng phương.

c) Số véc tơ có điểm đầu là A khác $\vec{0}$ là 3.

d) Có đúng bốn cặp véc tơ bằng nhau.



Hướng dẫn giải.

a) **Sai:** Do O là trung điểm của AC.

b) **Đúng:** $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}$ không cùng phương.

c) **Sai:** Có 4 véc tơ thỏa mãn có điểm đầu là A.

d) **Sai:** Theo tính chất hbh suy ra $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}, \ldots,$ có 8 cặp véc tơ bằng nhau.

Bài 12. Cho tam giác $\triangle ABC$ đều. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng.

b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$.

c) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$.

d) Có 6 véc tơ khác véc tơ-không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh A, B, C.

Hướng dẫn giải.

a) **Sai:**

b) **Sai:**

c) **Đúng:** Do tam giác $\triangle ABC$ đều nên $AB = BC \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$.

d) **Đúng:** Từ 3 điểm A, B, C ta chọn được 3 cặp điểm, cứ 2 điểm sẽ được hai véc tơ khác véc tơ-không nên có 6 véc tơ khác véc tơ-không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh A, B, C.

Bài 13. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Gọi G là trung điểm MN. Gọi O là điểm bất kì. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau :

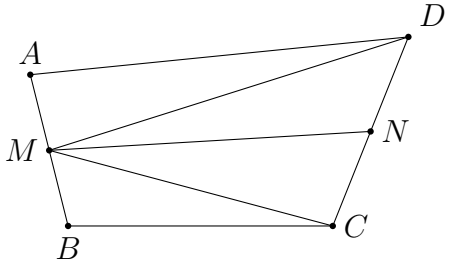
a) $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MN}$.

b) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{MN}$.

c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MN}$.

d) $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$.

Hướng dẫn giải.



a) Đúng : Do M là trung điểm các cạnh AB nên $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}=\vec{0}$
Do N lần lượt là trung điểm các cạnh DC nên $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$.

b) Đúng: $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}+\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

c) Mặt khác: $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}\right)+\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}\right)=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$.

d) Đúng: $\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)=\frac{1}{4}\left(2\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{ON}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}\right)=\frac{1}{2}\cdot 2\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OG}$.

Bài 14. Cho tam giác ABC với trung tuyến AM và trọng tâm G. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

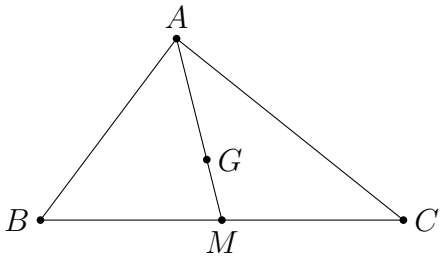
a) Tổng $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

b) Biểu diễn $\overrightarrow{GA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.

c) Với mọi điểm N thì $\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=3\overrightarrow{GN}$.

d) Phân tích $\overrightarrow{AG}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ ta được $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}$

Hướng dẫn giải.



a) Đúng: Vì M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

b) Sai: Ta có $GA=\frac{2}{3}AM$. Mặt khác $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{AM}$ ngược hướng $\overrightarrow{GA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$.

c) Đúng : Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên
$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{NA}-\overrightarrow{NG}+\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{NG}+\overrightarrow{NC}-\overrightarrow{NG}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=3\overrightarrow{NG}$

d) Đúng: Ta có $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\Rightarrow\overrightarrow{AG}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}$.

Bài 15. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC với $A(4\sqrt{3};-1),B(0;3),C(8\sqrt{3};3)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $AC=8$

b) Tam giác ABC cân tại B

c) $S_{\Delta ABC}=16\sqrt{3}$

d) $ABC=30^\circ$

Hướng dẫn giải. a) Đúng: Ta có $\overrightarrow{AB}=(-4\sqrt{3};4)\Rightarrow AB=\sqrt{(-4\sqrt{3})^2+4^2}=8$

$\overrightarrow{AC}=(4\sqrt{3};4)\Rightarrow AC=\sqrt{(4\sqrt{3})^2+4^2}=8$

$\overrightarrow{BC}=(8\sqrt{3};0)\Rightarrow BC=\sqrt{(8\sqrt{3})^2+0^2}=8\sqrt{3}$.

Ta thấy $AB = AC = 8$ nên tam giác ABC cân tại A.

b) Sai: Chu vi tam giác ABC là $2p = AB + AC + BC = 8 + 8 + 8\sqrt{3} = 8\left(2 + \sqrt{3}\right)$.

c) Sai: Nửa chu vi tam giác là $p = 4\left(2 + \sqrt{3}\right)$.

Diện tích tam giác: $S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p - AB)(p - AC)(p - BC)} = 16\sqrt{3}$.

d) Đúng: Ta có: $\cos A = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \dfrac{8^2 + 8^2 - \left(8\sqrt{3}\right)^2}{2.8.8} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow BAC = 120°$.

Vì tam giác ABC cân tại A nên $ABC = ACB = 30°$.

Bài 16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC với $A(4;6), B(5;1), C(1;-3)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{AB} = (1;-5)$

b) Tọa độ điểm D thuộc Ox cách đều hai điểm A, B có hoành độ bằng 13

c) $I\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right)$ là tọa độ tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

d) Bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng $\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

Hướng dẫn giải. a) Đúng: $\overrightarrow{AB} = (1;-5)$

b) Sai: Gọi $D(x;0) \in Ox \Rightarrow AD = \sqrt{(x-4)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{x^2 - 8x + 52}$;

Khi đó $BD = \sqrt{(x-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{x^2 - 10x + 26}$.

Ta có: $AD^2 = BD^2 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 52 = x^2 - 10x + 26 \Leftrightarrow 2x = -26 \Leftrightarrow x = -13$.

Vậy $D(-13;0)$.

c) Đúng: Gọi $I(x;y)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Ta có: $IA = IB = IC \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2 + (y-6)^2 = (x-5)^2 + (y-1)^2 \\ (x-4)^2 + (y-6)^2 = (x-1)^2 + (y+3)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 10y = -26 \\ -6x - 18y = -42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{5}{2} \end{cases}$ nên $I\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right)$.

d) Sai: Bán kính đường tròn là: $R = IA = \sqrt{\left(-\dfrac{1}{2} - 4\right)^2 + \left(\dfrac{5}{2} - 6\right)^2} = \dfrac{\sqrt{130}}{2}$.

Bài 17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho bốn điểm $A(7;-3), B(8;4), C(1;5)$ và $D(0;-2)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{AB} = (1;7), \overrightarrow{AC} = (-6;8)$

b) A, B, C là ba đỉnh một tam giác.

c) Tọa độ điểm $K(8;4)$ là chân đường cao kẻ từ A của tam giác ABC.

d) Bốn điểm A, B, C, D là bốn đỉnh của một hình vuông.

Hướng dẫn giải. a) Đúng: Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1;7), \overrightarrow{AC} = (-6;8)$.

b) Sai: Vì $\dfrac{1}{-6} \neq \dfrac{7}{8}$ nên hai vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương, suy ra ba điểm A, B, C là ba

đỉnh của một tam giác.

c) Đúng: Gọi $K(x;y)$ là điểm cần tìm ta có: $\overrightarrow{AK}=(x-7;y+3)$

$\overrightarrow{BK}=(x-8;y-4);\overrightarrow{BC}=(-7;1)$.

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{BC}=0(\text{ do } AK\perp BC)\\ \overrightarrow{BK},\overrightarrow{BC}\text{ cùng phương}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-7(x-7)+1(y+3)=0\\ \dfrac{x-8}{-7}=\dfrac{y-4}{1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-7x+y=-52\\ x+7y=36\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}x=8\\ y=4\end{cases}$

Vậy $K(8;4)$.

d) Sai: Ta có: $\overrightarrow{DC}=(1;7)=\overrightarrow{AB}\Rightarrow ABCD$ là hình bình hành (1)

Mặt khác: $\overrightarrow{AD}=(-7;1)$ và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=1.(-7)+7.1=0\Rightarrow AB\perp AD$ (2); $AB=AD=5\sqrt{2}$ (3).

Từ (1),(2),(3) suy ra $ABCD$ là bốn đỉnh của một hình vuông.

Bài 18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(3;-5),B(1;0)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $I\left(2;\dfrac{5}{2}\right)$ là trung điểm của AB

b) Tọa độ điểm C sao cho $\overrightarrow{OC}=-3\overrightarrow{AB}$ là $C(6;-15)$

c) Tọa độ điểm D đối xứng với A qua C là $D(9;25)$

d) Tọa độ điểm M chia đoạn AB theo tỉ số $k=-3$ là $M\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{4}\right)$

Hướng dẫn giải. a) Sai: $I\left(2;-\dfrac{5}{2}\right)$ là trung điểm của AB

b) Đúng: Gọi $C(x_C;y_C)$. Ta có: $\overrightarrow{OC}=(x_C;y_C),\overrightarrow{AB}=(-2;5)\Rightarrow-3\overrightarrow{AB}=(6;-15)$;

Khi đó $\overrightarrow{OC}=-3\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}x_C=6\\ y_C=-15\end{cases}\Rightarrow C(6;-15)$.

c) Sai: Điểm D đối xứng với A qua C hay C là trung điểm của $AD\Leftrightarrow\begin{cases}x_C=\dfrac{x_A+x_D}{2}\\ y_C=\dfrac{y_A+y_D}{2}\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=2x_C-x_A=2.6-3=9\\ y_D=2y_C-y_A=2(-15)-(-5)=-25\end{cases}\Rightarrow D(9;-25)$.

d) Sai: M chia đoạn AB theo tỉ số $k\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\begin{cases}x_A-x_M=k(x_B-x_M)\\ y_A-y_M=k(y_B-y_M)\end{cases}$

Suy ra: $\begin{cases}x_M=\dfrac{x_A-k.x_B}{1-k}\\ y_M=\dfrac{y_A-k.y_B}{1-k}\end{cases}$ mà $k=3$ nên $\begin{cases}x_M=\dfrac{3+3.1}{4}=\dfrac{3}{2}\\ y_M=\dfrac{-5+3.0}{4}=-\dfrac{5}{4}\end{cases}\Rightarrow M\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{5}{4}\right)$.

Bài 19. Cho tam giác ABC có $A(4;1),B(2;4),C(2;-2)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $ABCD$ là hình bình hành khi $D(4;5)$

b) Tọa độ điểm E để tam giác BCE nhận điểm A làm trọng tâm là $E(8;1)$

c) Tọa độ trực tâm H của tam giác ABC là $H\left(\frac{13}{2};1\right)$

d) Tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I\left(\frac{3}{4};1\right)$

Hướng dẫn giải. a) Sai: Gọi $D(x;y) \Rightarrow \overrightarrow{DC} = (2-x;-2-y), \overrightarrow{AB} = (-2;3)$ nên $ABCD$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x=-2 \\ -2-y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-5 \end{cases}$ hay $D(4;-5)$.

b) Đúng: Tam giác BCE nhận điểm A làm trọng tâm nên

$$\begin{cases} x_A = \dfrac{x_B+x_C+x_E}{3} \\ y_A = \dfrac{y_B+y_C+y_E}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = \dfrac{2+2+x_E}{3} \\ 1 = \dfrac{4-2+y_E}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 8 \\ y_E = 1 \end{cases} \text{ nên } E(8;1).$$

c) Đúng: Gọi $H(x;y) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (x-4;y-1), \overrightarrow{BH} = (x-2;y-4); \overrightarrow{BC} = (0;-6), \overrightarrow{AC} = (-2;-3)$
H là trực tâm tam giác ABC nên

$$\begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0(x-4)-6(y-1)=0 \\ -2(x-2)-3(y-4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{13}{2} \\ y = 1 \end{cases} \text{ hay } H\left(\frac{13}{2};1\right).$$

d) Đúng: Gọi $I(x;y)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta có: $IA = IB = IC \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2+(y-1)^2 = (x-2)^2+(y-4)^2 \\ (x-4)^2+(y-1)^2 = (x-2)^2+(y+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x-2y+17 = -4x-8y+20 \\ -8x-2y+17 = -4x+4y+8 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -4x+6y=3 \\ -4x-6y=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{4} \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{3}{4};1\right).$$

Bài 20. Cho $A(1;1), B(2;4), C(10;-2)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) ΔABC vuông tại A.

b) $S_{\Delta ABC} = 12$

c) Độ dài trung tuyến $BN = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$

d) $I(6;1)$ là tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Hướng dẫn giải. a) Đúng: $AB = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}; BC = \sqrt{64+36} = 10; AC = \sqrt{81+9} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$. Khi đó $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 100 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

b) Sai: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB \cdot AC = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot 3\sqrt{10} = 15$.

c) Sai: Gọi N là trung điểm $AC \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = \dfrac{x_A+x_C}{2} = \dfrac{1+10}{2} = \dfrac{11}{2} \\ y_N = \dfrac{y_A+y_C}{2} = \dfrac{1-2}{2} = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow N\left(\frac{11}{2};-\frac{1}{2}\right)$ Khi đó

$$BN = \sqrt{\left(\frac{11}{2}-2\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}-4\right)^2} = \frac{\sqrt{136}}{2}.$$

d) Đúng: Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. ΔABC vuông tại $A \Rightarrow I$ là trung điểm

$BC \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{x_B + x_C}{2} = \dfrac{2+10}{2} = 6 \\ y_I = \dfrac{y_B + y_C}{2} = \dfrac{4-2}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow I(6;1).$

Bài 21. Cho hai điểm $A(3;-5), B(1;0)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{AB} = (-2;5)$

b) Tọa độ điểm C sao cho $\overrightarrow{OC} = -3\overrightarrow{AB}$ là $C(6;-5)$

c) Tọa độ điểm D đối xứng của A qua C có hoành độ bằng 7

d) Tọa độ điểm M chia đoạn AB theo tỉ số $k = -3$ là $M\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{5}{4}\right)$

Hướng dẫn giải. a) Đúng: Gọi $C(a;b) \Rightarrow \overrightarrow{OC} = (a,b); \overrightarrow{AB} = (-2;5)$

b) Sai: $\overrightarrow{OC} = -3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = -15 \end{cases}$ nên $C(6;-15)$.

c) Sai: Gọi $D(c;d) \Rightarrow \overrightarrow{CD} = (c-6; d+15); \overrightarrow{AC} = (3;-10)$ Khi đó: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} c-6 = 3 \\ d+15 = -10 \end{cases} \Rightarrow D(9;-25)$

d) Đúng: Gọi $M(x;y) \Rightarrow \overrightarrow{MA} = (3-x;-5-y); \overrightarrow{MB} = (1-x;-y)$. Vì M chia đoạn AB theo tỉ số $k = -3 \Rightarrow \overrightarrow{MA} = -3\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x = -3(1-x) \\ -5-y = -3(-y) \end{cases} \Rightarrow M\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{5}{4}\right)$

Bài 22. Cho ba điểm $A(1;-2), B(0;4), C(3;2)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{AB} = (-1;6)$

b) $\overrightarrow{AC} = (2;4); \overrightarrow{BC} = (3;-2)$

c) Tọa độ trung điểm của đoạn AB là $I\left(\dfrac{1}{2};1\right)$

d) Tọa độ điểm N sao cho $\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{BN} - 4\overrightarrow{CN} = \vec{0}$ là $N(11;12)$

Hướng dẫn giải. a) Đúng: $\overrightarrow{AB} = (-1;6)$

b) Đúng: $\overrightarrow{AC} = (2;4); \overrightarrow{BC} = (3;-2)$

c) Đúng: Vì I là trung điểm của đoạn AB nên $\begin{cases} x_I = \dfrac{1+0}{2} = \dfrac{1}{2} \\ y_I = \dfrac{-2+4}{2} = 1 \end{cases}$ nên $I\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

d) Sai: Gọi $N(x;y)$. Ta có $\overrightarrow{AN} = (x-1;y+2); \overrightarrow{BN} = (x;y-4); \overrightarrow{CN} = (x-3;y-2)$ Vì $\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{BN} - 4\overrightarrow{CN} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1+2x-4(x-3) = 0 \\ y+2+2(y-4)-4(y-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ y = 2 \end{cases}$ nên $N(11;2)$

Bài 23. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $A(2;1), B(-1;-2), C(-3;2)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AC là $M\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right)$

b) $\overrightarrow{AB} = (-3;-3), \overrightarrow{AC} = (-5;1)$

c) Ba điểm A, B, C thẳng hàng.

d) Tọa độ trọng tâm tam giác ABC là $G\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$

Hướng dẫn giải. a) Đúng: Gọi M là trung điểm $AC \Rightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{2-3}{2} = -\dfrac{1}{2} \\ y_M = \dfrac{1+2}{2} = \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$

b) Đúng: Tính được $\overrightarrow{AB} = (-3;-3), \overrightarrow{AC} = (-5;1)$ dẫn đến hai vectơ đó không cùng phương.

c) Sai: Nói cách khác ba điểm A, B, C tạo thành một tam giác.

d) Sai: Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{2-1-3}{3} = -\dfrac{2}{3} \\ y_G = \dfrac{1-2+2}{3} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(-\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right).$

Bài 24. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho $A(-2;5), B(-4;-2), C(1;5)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) $G\left(-\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right)$ là tọa độ trọng tâm của tam giác ABC.

c) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi đó tọa độ điểm D là $D(3;10)$

d) $\widehat{ACB} = 45^\circ$

Hướng dẫn giải. a) Đúng: Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2;-7), \overrightarrow{AC} = (3;0)$.

Do $\frac{3}{-2} \neq \frac{0}{-7}$ nên $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Đúng: Do G là trọng tâm của tam giác ABC nên $G\left(\frac{-2-4+1}{3};\frac{5-2+5}{3}\right) = G\left(-\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right).$

c) Sai: Giả sử $D(x,y)$ nên ta có $\overrightarrow{AB} = (-2;-7), \overrightarrow{DC} = (1-x;5-y)$.

Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = 1-x \\ -7 = 5-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 12 \end{cases}$ nên $D(3;12)$.

d) Sai: Ta có: $AB = \sqrt{(-2)^2+(-7)^2} = \sqrt{53}$; $AC = \sqrt{[1-(-2)]^2+(5-5)^2} = 3$, $BC = \sqrt{[1-(-4)]^2+[5-(-2)]^2} = \sqrt{74}$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (-2)\cdot 3 + (-7)\cdot 0 = -6$.

Suy ra: $\cos BAC = \cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{-6}{\sqrt{53}\cdot 3} = -\dfrac{2\sqrt{53}}{53}$ nên $\widehat{BAC} \approx 106^\circ$.

Ta có: $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = 2\cdot 5 + 7\cdot 7 = 59$.

Suy ra $\cos ABC = \cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right) = \dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|} = \dfrac{59}{\sqrt{53}\cdot\sqrt{74}}$ nên $\widehat{ABC} \approx 20^\circ$.

Vậy $\widehat{ACB} = 180^\circ - (\widehat{BAC} + \widehat{ABC}) \approx 180^\circ - (106^\circ + 20^\circ) = 54^\circ$.

Bài 25. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ΔABC có các đỉnh thỏa mãn $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} - \vec{j}, \overrightarrow{OB} = \vec{i} + \vec{j}, \overrightarrow{OC} = 4\vec{i} + \vec{j}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $A(2;-1), B(1;1), C(4;1)$

b) E là trung điểm AB nên $E\left(\frac{3}{2};0\right)$

c) G là trọng tâm ΔABC nên $G\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$

d) Điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành nên $D(2;-1)$

Hướng dẫn giải. a) Đúng: Ta có: $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}-\vec{j}\Rightarrow A(2;-1), \overrightarrow{OB}=\vec{i}+\vec{j}\Rightarrow B(1;1), \overrightarrow{OC}=4\vec{i}+\vec{j}\Rightarrow C(4;1)$.

b) Đúng: E là trung điểm AB nên $x_E=\dfrac{x_A+x_B}{2}=\dfrac{2+1}{2}=\dfrac{3}{2}, y_E=\dfrac{y_A+y_B}{2}=\dfrac{-1+1}{2}=0$ hay $E\left(\frac{3}{2};0\right)$.

c) Sai: G là trọng tâm ΔABC nên $x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=\dfrac{2+1+4}{3}=\dfrac{7}{3}$,

$y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=\dfrac{-1+1+1}{3}=\dfrac{1}{3}$ hay $G\left(\frac{7}{3};\frac{1}{3}\right)$.

d) Sai: Ta có: $ABCD$ là hình bình hành

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow \begin{cases}x_D-x_A=x_C-x_B\\ y_D-y_A=y_C-y_B\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x_D-2=4-1\\ y_D+1=1-1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x_D=5\\ y_D=-1\end{cases}$. Vậy $D(5;-1)$.

Bài 26. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các điểm $A(-4;1), B(2;4), C(2;-2)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tọa độ điểm D sao cho C là trọng tâm tam giác ABD là $D(8;11)$

b) Tọa độ điểm E thuộc trục hoành sao cho A, B, E thẳng hàng là $E(-6;0)$

c) $\overrightarrow{BC}=(0;-6), \overrightarrow{AC}=(6;-3)$

d) Tọa độ F thỏa mãn $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{CF}$ là $F(20;5)$

Hướng dẫn giải. a) Sai: Điểm C là trọng tâm tam giác ABD

$\Leftrightarrow \begin{cases}x_C=\dfrac{x_A+x_B+x_D}{3}\\ y_C=\dfrac{y_A+y_B+y_D}{3}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}2=\dfrac{-4+2+x_D}{3}\\ -2=\dfrac{1+4+y_D}{3}\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x_D=8\\ y_D=-11\end{cases}$ nên $D(8;-11)$.

b) Đúng: Gọi $E(x;0)\in Ox\Rightarrow \overrightarrow{AE}=(x+4;-1), \overrightarrow{AB}=(6;3)$.

Ba điểm A, B, E thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AE}$ cùng phương $\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow \dfrac{x+4}{6}=\dfrac{-1}{3}\Leftrightarrow x+4=-2\Leftrightarrow x=-6$. Vậy $E(-6;0)$.

c) Đúng: Gọi $F(x;y)$. Ta có: $\overrightarrow{AF}=(x+4;y-1), \overrightarrow{BC}=(0;-6), \overrightarrow{AC}=(6;-3)$

$\Rightarrow -2\overrightarrow{AC}=(-12;6), \overrightarrow{CF}=(x-2;y+2), 2\overrightarrow{CF}=(2x-4;2y+4)$.

Suy ra $\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{CF}=(2x-16;2y+4)$.

d) Sai: Ta có $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{CF}\Leftrightarrow \begin{cases}x+4=2x-16\\ y-1=2y+4\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=20\\ y=-5\end{cases}$. Vậy $F(20;-5)$.

Bài 27. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(-2;-1), B(1;3), C(2;-3)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) A, B, C là ba đỉnh một tam giác.

b) Điểm $I(0;-2)$ là trung điểm của AB

c) Điểm M thuộc Ox sao cho $AM+BM$ bé nhất có hoành độ bằng $\dfrac{5}{4}$

d) Điểm N thuộc Oy sao cho $BN+CN$ bé nhất có tung độ bằng 2

Hướng dẫn giải. a) Đúng: Ta có: $\overrightarrow{AB}=(3;4), \overrightarrow{AC}=(4;-2)$ vì $\dfrac{3}{4}\neq\dfrac{4}{-2}\Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ không cùng phương.

Vậy A, B, C không thẳng hàng hay A, B, C là ba đỉnh một tam giác.

b) Sai: Trung điểm AB có tọa độ $\left(-\dfrac{1}{2};1\right)$.

c) Sai: Do $y_A\cdot y_B=-1\cdot 3=-3<0$ nên hai điểm A, B nằm khác phía so với trục Ox.

Vì M thuộc Ox mà $AM+BM$ bé nhất nên A, M, B thẳng hàng hay $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}$ cùng phương. Gọi $M(x;0)\in Ox\Rightarrow \overrightarrow{AM}=(x+2;1)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow 4x+8=3\Leftrightarrow x=-\dfrac{5}{4}$.

Vậy $M\left(-\dfrac{5}{4};0\right)$.

d) Sai: Do $x_B\cdot x_C=1\cdot 2=2>0$ nên hai điểm B, C nằm cùng phía so với trục Oy.

Lấy C' đối xứng với C qua Oy, suy ra $C'(-2;-3)$ (lúc này C' và B khác phía so với trục Oy).

Vì N thuộc Oy nên $CN=C'N$.

Do vậy $BN+CN=BN+C'N$ mà tổng này bé nhất khi và chỉ khi B, N, C' thẳng hàng hay $\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{BN}$ cùng phương.

Gọi $N(0;y)\in Oy\Rightarrow \overrightarrow{BN}=(-1;y-3), \overrightarrow{BC'}=(-3;-6)$.

Ta có $\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{BN}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{-1}{-3}=\dfrac{y-3}{-6}\Leftrightarrow 6=-3y+9\Leftrightarrow y=1$.

Vậy $N(0;1)$.

Bài 28. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB=a, BC=2a$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\widehat{ACB}=60^\circ$

b) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=a^2$

c) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=3a^2$.

d) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}=-4a^2$

Hướng dẫn giải. a) **Đúng:** Xét tam giác vuông ABC: $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=\sqrt{(2a)^2-a^2}=a\sqrt{3}$,

Khi đó: $\cos ABC=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{a}{2a}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow \widehat{ABC}=60^\circ\Rightarrow \widehat{ACB}=30^\circ$.

b) **Đúng:** Ta có: $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})=BA\cdot BC\cdot\cos ABC=a\cdot 2a\cdot\dfrac{1}{2}=a^2$.

c) **Sai:** Ta có: $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=-|\overrightarrow{CB}|\cdot|\overrightarrow{CA}|\cos ACB$

$= -CB \cdot CA \cdot \cos 30^\circ = -2a \cdot a\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = -3a^2$

d) **Đúng:** Vì tam giác ABC vuông tại A nên $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2, \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -3a^2$.

Suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -a^2 - 3a^2 = -4a^2$.

Bài 29. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O, có cạnh a. Biết M là trung điểm của AB, G là trọng tâm tam giác ADM. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

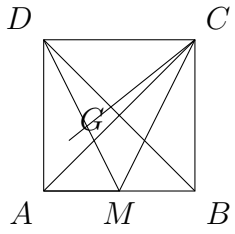
a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = a^2$

b) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{a^2}{3}$

c) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC} = \dfrac{a^2}{2}$

d) $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = a^2$

Hướng dẫn giải.



a) **Sai:** Độ dài đường chéo hình vuông $ABCD$ cạnh a là: $AC = BD = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

$= -AB \cdot AC \cdot \cos BAC = -a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = -a^2$.

b) **Sai:** $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AM}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}) = AM \cdot AC \cdot \cos CAM = \dfrac{a}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = \dfrac{a^2}{2}$.

c) **Đúng:** Ta có: $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{DA}| \cdot |\overrightarrow{DB}| \cdot \cos(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$

$= DA \cdot DB \cdot \cos ADB - \dfrac{1}{2}AD \cdot AC \cdot \cos CAD$

$= a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ - \dfrac{1}{2}a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = a^2 - \dfrac{1}{2}a^2 = \dfrac{1}{2}a^2$.

d) **Đúng:** Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (quy tắc hình bình hành).

Do đó $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$

$= \underbrace{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}}_{0} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot \cos ACB = a\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos 45^\circ = a^2$

(trong đó $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ vì $AC \perp BD$).

Bài 30. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh bằng a. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 2a^2$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = a^2$

c) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OC}=-a^2$

d) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})=a^2$

Hướng dẫn giải. a) **Sai:** Do $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}$ cùng hướng nên $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC})=0°$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}=AB\cdot DC\cdot\cos 0°=a\cdot a\cdot 1=a^2$.

b) **Sai:** Hai vectơ $\overrightarrow{AO},\overrightarrow{OC}$ cùng hướng do đó $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OC})=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO})=\widehat{BAO}=45°$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC}=AB\cdot OC\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OC})=a\cdot\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\cos 45°=\dfrac{a^2}{2}$.

c) **Đúng:** Hai vectơ $\overrightarrow{CA},\overrightarrow{OC}$ ngược hướng do đó $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{OC})=180°$.

Suy ra $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OC}=CA\cdot OC\cdot\cos(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{OC})=a\sqrt{2}\cdot\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\cos 180°=-a^2$.

d) **Đúng:** Ta có: $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$

(trong đó $AC\perp BD\Rightarrow\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$).

Ta có: $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=|\overrightarrow{CA}|\cdot|\overrightarrow{CB}|\cdot\cos(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=CA\cdot CB\cdot\cos ACB=a\sqrt{2}\cdot a\cdot\cos 45°=a^2$.

Vậy $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})=a^2$.

Bài 31. Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B, biết $AD=a, BC=3a$ và cạnh $AB=2a$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

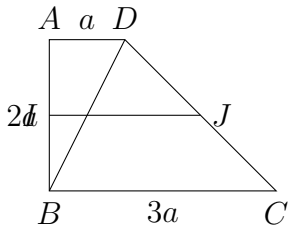
a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=-4a^2$

b) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=2a^2$

c) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=-2a^2$

d) Gọi I,J lần lượt là trung điểm của AB,CD. Khi đó $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IJ}=6a^2$

Hướng dẫn giải.



a) **Đúng:** Tính $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}$ thì ta có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}+\underbrace{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}_{0}=-\overrightarrow{AB}^2=-4a^2$.

b) **Sai:** Tính $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}$ thì ta có $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=BC\cdot BD\cdot\cos(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD})=BC\cdot BD\cdot\cos DBC$

$=BC\cdot BD\cdot\cos BDA=BC\cdot BD\cdot\dfrac{AD}{BD}=BC\cdot AD=3a\cdot a=3a^2$.

(trong đó $\widehat{DBC}=\widehat{BDA}$ vì là hai góc so le trong).

c) **Sai:** Tính $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$.

Ta có: $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}$

$=-\overrightarrow{AB}^2+0+0+BC\cdot AD\cdot\cos 0°=-AB^2+3a\cdot a\cdot 1=-(2a)^2+3a^2=-a^2$.

d) **Đúng:** Tính $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IJ}$.

Ta có $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{IJ}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{IJ}=\underbrace{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IJ}}_{0}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{IJ}=BC\cdot IJ\cdot\cos 0^\circ=3a\cdot 2a\cdot 1=6a^2.$

Bài 32. Cho tam giác ABC đều có cạnh a, có trọng tâm G. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{2}$

b) $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{4}$

c) $\widehat{AGB}=120^\circ$

d) $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=\dfrac{a^2}{6}$

Hướng dẫn giải. a) **Đúng:** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=AB\cdot AC\cdot\cos 60^\circ=a\cdot a\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{a^2}{2}.$

b) **Sai:** $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AG}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos(\overrightarrow{AG},\overrightarrow{AC})=AG\cdot AC\cdot\cos 30^\circ=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\cdot a\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a^2}{2}.$

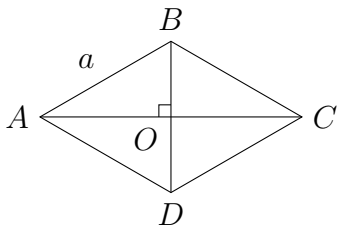
c) **Đúng:** Tam giác AGB có $\widehat{GAB}=\widehat{GBA}=30^\circ\Rightarrow\widehat{AGB}=120^\circ.$

d) **Sai:** $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=GA\cdot GB\cdot\cos AGB=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\cos 120^\circ=\dfrac{a^2}{3}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{a^2}{6}.$

IV. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Bài 1. Cho hình thoi tâm O, cạnh bằng 1 và $\widehat{A}=60^\circ$. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AO}$ bằng bao nhiêu? *Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.*

Hướng dẫn giải.



Vì $\widehat{A}=60^\circ\Rightarrow\Delta ABC$ đều $\Rightarrow AO=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\left|\overrightarrow{AO}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Bài 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm O có cạnh $AB=\sqrt{3}, AD=1$. Tìm vectơ $\vec{u}$ khác vectơ không và cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{BD}$ (khác $\overrightarrow{BD}$) có điểm đầu và điểm cuối lấy từ các điểm A,B,C,D,O. Tính độ dài vectơ $\vec{u}$ đó?

Hướng dẫn giải.

Ta có $\vec{u}$ khác vectơ không và cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{BD}$ nên $\vec{u}$ là một trong hai vectơ $\overrightarrow{BO},\overrightarrow{OD}$.

Áp dụng định lí Py-ta-go cho tam giác ABD: $BD^2=AB^2+AD^2=3^2+1^2=4\Rightarrow BD=2.$

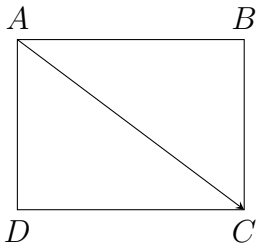
Vì vậy: $|\vec{u}|=\left|\overrightarrow{BO}\right|=\left|\overrightarrow{OD}\right|=\dfrac{BD}{2}=1.$

Bài 3. Cho hình chữ nhật $ABCD$. Có bao nhiêu vectơ được tạo thành mà điểm đầu và điểm

cuối lấy từ các đỉnh của hình chữ nhật?

Hướng dẫn giải.

Dễ thấy có 4 Vectơ-không là: $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \overrightarrow{CC}, \overrightarrow{DD}$.



Từ mỗi đỉnh của hình chữ nhật, ta lập được 3 vectơ khác vectơ-không nhận đỉnh đó làm điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh còn lại.

Chẳng hạn với đỉnh A ta có: $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

Suy ra có 12 vectơ khác $\vec{0}$.

Như vậy có tất cả 16 vectơ thỏa mãn.

Bài 4. Cho hình thoi $ABCD$ cạnh 1 và $\widehat{BAD} = 60°$. Tìm độ dài véc tơ $\overrightarrow{AC}$. *(kết quả làm tròn đến hàng phần chục).*

Hướng dẫn giải.

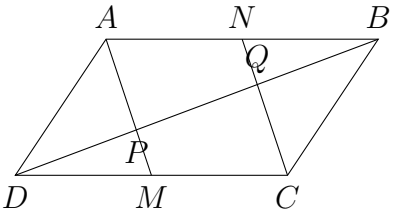
Theo qui tắc hình bình hành: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

Tam giác ABD đều cạnh a, nên $AO = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Vậy $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right| = \left|\overrightarrow{AC}\right| = AC = 2AO = \sqrt{3} \approx 1,7$

Bài 5. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DC, AB. P là giao điểm của AM, DB và Q là giao điểm của CN, DB. Có bao nhiêu véc tơ bằng véc tơ $\overrightarrow{DP}$ đúng hay sai?

Hướng dẫn giải.



Ta có tứ giác $DMBN$ là hình bình hành vì $DM = NB = \dfrac{1}{2}AB, DM//NB$.

Suy ra $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{NB}$.

Xét tam giác CDQ có M là trung điểm của DC và $MP//QC$

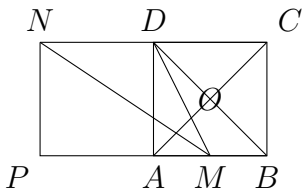
Do đó P là trung điểm của DQ.

Tương tự xét tam giác ABP suy ra được Q là trung điểm của PB

Vì vậy $DP = PQ = QB$ từ đó suy ra $\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QB}$

Bài 6. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh 1. Gọi M là trung điểm của AB, N là điểm đối xứng với C qua D. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{MN}$ bằng bao nhiêu? *Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.*

Hướng dẫn giải.



Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông MAD ta có:

$$DM^2 = AM^2 + AD^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow DM = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Qua N kẻ đường thẳng song song với AD cắt AB tại P.

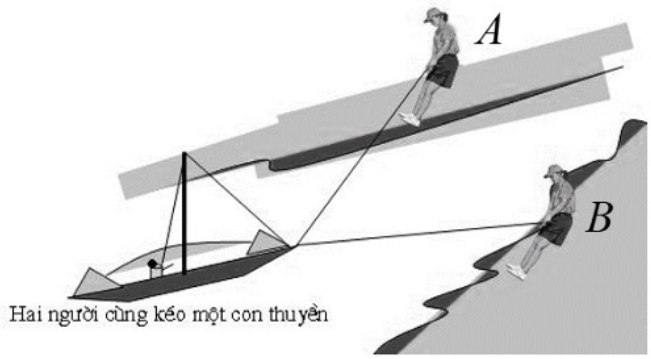
Khi đó tứ giác $ADNP$ là hình vuông và $PM = PA + AM = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông NPM ta có:

$$MN^2 = NP^2 + PM^2 = 1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{4} \Rightarrow MN = \frac{\sqrt{13}}{2} \approx 1,8$$

Suy ra $\left|\overrightarrow{MN}\right| = MN = \dfrac{\sqrt{13}}{2} \approx 1,8$

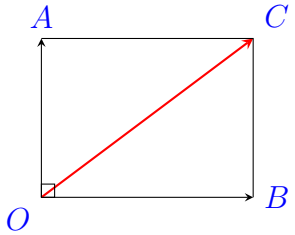
Bài 7. Hai người đứng hai bên bờ kênh, cùng kéo một chiếc thuyền xuôi trên kênh. Người A kéo với một lực bằng 60 N, người B kéo với một lực bằng 80 N, hai lực hợp nhau một góc bằng $90°$. Vậy hợp lực mà hai người đã tác động lên thuyền có độ lớn bằng bao nhiêu?



Hai người cùng kéo một con thuyền

Hướng dẫn giải.

Hình trên biểu diễn hai lực tác động lên chiếc thuyền xuôi trên kênh hai lực $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ và



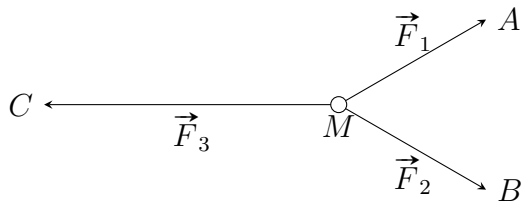
$|\overrightarrow{OA}| = 60$ N, $|\overrightarrow{OB}| = 80$ N. Khi đó hợp lực mà hai người đã tác động lên thuyền có độ lớn bằng

$|\overrightarrow{OC}|$.

Xét tam giác vuông OAC ta có: $|\overrightarrow{OC}| = \sqrt{60^2 + 80^2} = 100$.

Bài 8. Cho ba lực $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}, \vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}, \vec{F}_3 = \overrightarrow{MC}$ cùng tác động vào một vật tại điểm M và vật đứng yên. Biết cường độ của $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ đều bằng 100 và $\widehat{AMB} = 60°$. Cường độ của lực $\vec{F}_3$ là (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Hướng dẫn giải.



Vì vật đứng yên nên $\vec{F}_{12} + \vec{F}_3 = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_{12} = -\vec{F}_3$ do đó $|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_3|$.

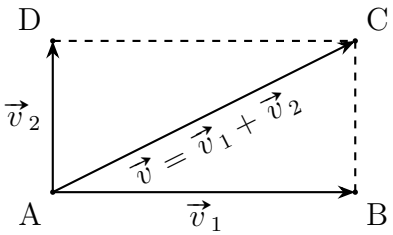
Mà tam giác MAB đều (ở đây là hình thoi có góc 60° nên tổng hợp lực có độ lớn bằng $2 \cdot 100 \cdot \cos 30°$) nên $F_3 = 100\sqrt{3} \approx 173$.

Bài 9. Một chiếc tàu di chuyển từ phía Tây sang phía Đông với vận tốc 30 km/h, dòng nước chảy từ phía Nam lên phía Bắc với vận tốc 5 km/h. Hỏi tàu di chuyển với vận tốc bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Hướng dẫn giải.

Giả sử véc-tơ $\vec{v}_1$ biểu diễn cho vận tốc của tàu, ta có $|\vec{v}_1| = 30$ km/h, véc-tơ $\vec{v}_2$ biểu diễn cho vận tốc của dòng nước.

Khi đó, tàu sẽ di chuyển theo véc-tơ tổng $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ được xác định qua quy tắc hình bình hành như hình vẽ.

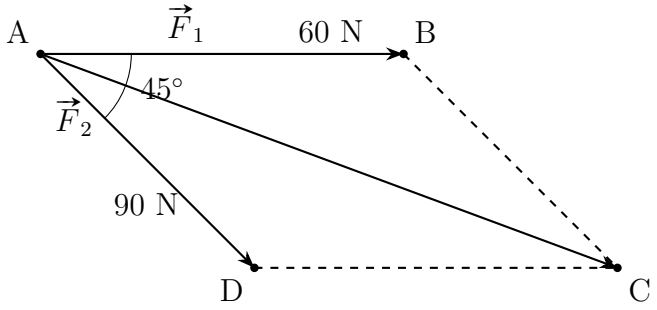


Ta có $|\vec{v}| = AC$. Vì $ABCD$ là hình chữ nhật nên

$$AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{30^2 + 5^2} = 5\sqrt{37} \approx 30,4 \text{ km/h}.$$

Bài 10. Cho hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ có điểm đặt A tạo với nhau góc 45°, biết rằng cường độ của hai lực $\vec{F}_1$ và $\vec{F}_2$ lần lượt bằng 60 N, 90 N. Tính cường độ tổng hợp của hai lực trên? Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.

✍ *Hướng dẫn giải.*



Đặt $\vec{F}_1 = \overrightarrow{AB}, \vec{F}_2 = \overrightarrow{AD}$.

Vẽ hình bình hành $ABCD$.

Ta có: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Vì $\widehat{BAD} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 135^\circ$; $AD = 90 = BC$.

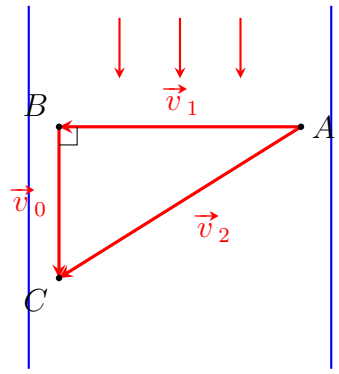
Theo định lí cosin ta có:

$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 135^\circ \\ &= 60^2 + 90^2 - 2 \cdot 60 \cdot 90 \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ &\approx 19336,75 \Rightarrow AC \approx 139. \end{aligned}$$

Vậy vectơ hợp lực của $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ có độ lớn là: $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2| \approx 139\,\text{N}$.

Bài 11. Một dòng sông chảy từ phía bắc xuống phía nam với vận tốc 5 km/h. Một tàu thuỷ chuyển động từ phía đông sang phía tây với vận tốc 35 km/h so với mặt nước. Vận tốc tàu thuỷ so với bờ sông là:

✍ *Hướng dẫn giải.*



Giả sử tàu thuỷ chuyển động từ vị trí A bên phải con sông sang vị trí B bên trái con sông.

Gọi $\vec{v}_0$ là vận tốc của dòng nước so với bờ sông, $|\vec{v}_0| = 5$ km/h.

$\vec{v}_1$ là vận tốc của tàu thuỷ so với mặt nước, $|\vec{v}_1| = 35$ km/h.

$\vec{v}_2$ là vận tốc của tàu thuỷ so với bờ sông.

Phương của $\vec{v}_0$ và $\vec{v}_1$ vuông góc nhau nên ta có:

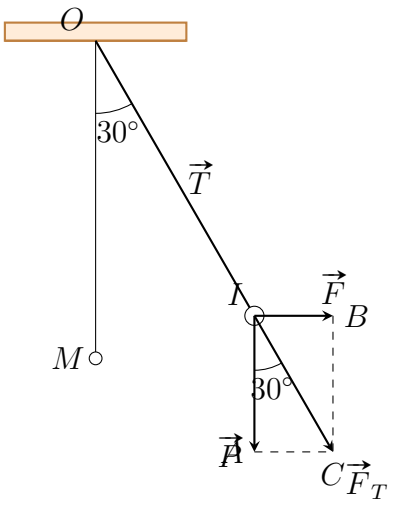
$$|\vec{v}_0|^2 + |\vec{v}_1|^2 = |\vec{v}_2|^2 \Rightarrow |\vec{v}_2| = \sqrt{|\vec{v}_0|^2 + |\vec{v}_1|^2} = \sqrt{5^2 + 35^2} = 25\sqrt{2} \approx 35,4 \text{ km/h}.$$

Vậy vận tốc tàu thuỷ so với bờ sông theo hướng từ A đến C có độ lớn $25\sqrt{2}$ km/h.

Bài 12. Một con lắc đơn đang đứng yên tại vị trí cân bằng M. Thực tập viên tác dụng một lực $\vec{F}$ lên con lắc đưa nó đến vị trí I và giữ yên như hình vẽ. Biết rằng con lắc đang chịu tác động của lực căng dây $\vec{T}$ có cường độ 30N, trọng lực $\vec{P}$ và lực tác dụng $\vec{F}$. Hãy xác định cường độ của lực $\vec{F}$?

Hướng dẫn giải. Giả sử $\vec{P} = \overrightarrow{IA}$; $\vec{F} = \overrightarrow{IB}$ có hợp lực $\vec{F}_T = \overrightarrow{IC}$, lực căng dây $\vec{T} = \overrightarrow{IN}$.

Đặt $x, x > 0$ là cường độ của lực $\vec{F}$, đơn vị N.



Dễ thấy $\widehat{IOM} = \widehat{ICB}$ suy ra $\widehat{ICB} = 30°$.

Mà $\widehat{ICB} = \widehat{CIA}$ nên $\widehat{CIA} = 30°$.

Ta có $AC = IB = x \Rightarrow IC = \frac{AC}{\sin 30°} = 2x$.

Do con lắc đứng yên tại I nên lực căng dây $\vec{T}$ có cùng cường độ với hợp lực $\vec{F}_T$.

Nên $2x = 30 \Leftrightarrow x = 15$.

Vậy cường độ của lực tác dụng $\vec{F}$ bằng 15N.

Bài 13. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(2;3)$, $N(5;1)$. Điểm $I(a;0)$ thỏa mãn $\left|\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN}\right|$ ngắn nhất. Tìm a (kết quả a làm tròn đến hàng phần mười).

Hướng dẫn giải.

Ta có: $I(a;0)$.

Khi đó $\overrightarrow{IM} = (2-a;3)$; $\overrightarrow{IN} = (5-a;1)$

$\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = (7-2a;4)$

$\left|\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN}\right| = \sqrt{(7-2a)^2 + 16} \geq 4$.

Dấu "=" xảy ra khi $2a - 7 = 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{7}{2} = 3,5$.

Vậy $\left|\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN}\right|$ ngắn nhất bằng 4.

Bài 14. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(2;5)$, $B(-1;3)$, $C(4;1)$. Điểm D có tung độ dương thuộc đường thẳng AC sao cho $S_{BDC} = \dfrac{1}{4}S_{ABC}$. Tính tổng hoành độ và tung độ của điểm D (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Hướng dẫn giải.

Gọi $D(a;b)$ $(b>0)$. Ta có $S_{BDC}=\dfrac{1}{4}S_{ABC}\Leftrightarrow AC=4DC\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}=\pm 4\overrightarrow{DC}$

Mà $\overrightarrow{AC}=(2;-4)$; $\overrightarrow{DC}=(a-4;b-1)$

+ TH1: $\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow \begin{cases}4a-16=2\\4b-4=-4\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{18}{4}\text{ (loại)}\\b=0\end{cases}$

+ TH2: $\overrightarrow{AC}=-4\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow \begin{cases}-4a+16=2\\-4b+4=-4\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{14}{4}\text{ (nhận)}\\b=2\end{cases}$

Vậy $D\left(\dfrac{14}{4};2\right)\Rightarrow \dfrac{14}{4}+2=\dfrac{11}{2}=5,5.$

Đáp án: 5,5.

Bài 15. Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho hình bình hành $ABCD$ biết điểm $A(4;5)$, $C(-2;-1)$. Gọi M là trung điểm của BC, N là giao điểm của BD và AM. Biết $N(4;1)$, tọa độ điểm D có dạng $D(a;b)$, $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính tổng $a+b$?

Hướng dẫn giải.

Gọi I là giao điểm của AC và BD suy ra I là trung điểm của AC.

Suy ra: $\begin{cases}x_I=\dfrac{4-2}{2}=1\\y_I=\dfrac{5-1}{2}=2\end{cases}\Rightarrow I(1;2).$

Xét tam giác ABC có AM, BI là hai trung tuyến cắt nhau tại N nên N là trọng tâm của tam giác ABC suy ra $\overrightarrow{IN}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{IB}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{DI}$.

Gọi $D(x;y)\Rightarrow \overrightarrow{DI}=(1-x;2-y)$, $\overrightarrow{IN}=(3;-1)$.

Ta có: $\overrightarrow{IN}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{DI}\Leftrightarrow \begin{cases}3=\dfrac{1}{3}(1-x)\\-1=\dfrac{1}{3}(2-y)\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=-8\\y=5\end{cases}\Rightarrow D(-8;5).$

Vậy $a+b=-3$.

Bài 16. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(2;3); B(-1;2); C(-2;0)$. Điểm M thuộc đường thẳng $y=-1$ sao cho tứ giác $ACMB$ là hình thang có một cạnh đáy là AC. Hoành độ của điểm M bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải.

Điểm M thuộc đường thẳng $y=-1$ nên có tọa độ là $M(x;-1)$.

Ta có $\overrightarrow{AC}(-4;-3); \overrightarrow{BM}(x+1;-3)$.

Tứ giác $ACMB$ là hình thang có một cạnh đáy là AC nên hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BM}$ cùng hướng, do đó:

$$\frac{x+1}{-4}=\frac{-3}{-3}=1>0\Leftrightarrow x+1=-4\Leftrightarrow x=-5.$$

Bài 17. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;3); B(-1;2)$. Điểm $M(x;y)$ thuộc tia

AB sao cho $AM = \sqrt{80}$. Giá trị của $x + y$ bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải.

Ta có $\overrightarrow{AB}(-2;-1); \overrightarrow{AM}(x-1;y-3)$.

Vì M thuộc tia AB nên hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng hướng hay $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ $(k > 0)$.

$\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-3}{-1} = k \Leftrightarrow x = 2y - 5 \quad (1)$.

Mặt khác $AM = \sqrt{80} \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 = 80 \quad (2)$. Thế (1) vào (2) ta được:

$$(2y-6)^2 + (y-3)^2 = 80 \Leftrightarrow 5y^2 - 30y - 35 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1 \\ y = 7 \end{array}\right.$$

- Với $y = -1$, ta có $x = -7$. Khi đó $k = 4$ (thỏa mãn).

- Với $y = 7$, ta có $x = 9$. Khi đó $k = -4$ (loại).

Vậy điểm $M(x;y)$ là $M(-7;-1)$ với $x + y = -8$.

Bài 18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $M(4;1); N(n;n+1)$. Độ dài đoạn thẳng MN nhỏ nhất bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Hướng dẫn giải.

Ta có $MN = \sqrt{(n-4)^2 + n^2} = \sqrt{2n^2 - 8n + 16} = \sqrt{2(n-2)^2 + 8} \geq \sqrt{8}$.

$MN_{\min} = \sqrt{8} \approx 2,83 \Leftrightarrow n = 2$.

Bài 19. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm $A(2;3); B(4;2-3a)$. Tam giác OAB vuông tại O thì a có giá trị bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Hướng dẫn giải.

Ta có $\overrightarrow{OA} = (2;3); \overrightarrow{OB} = (4;2-3a)$.

Tam giác OAB vuông tại $O \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$

$\Leftrightarrow 2 \cdot 4 + 3 \cdot (2-3a) = 0 \Leftrightarrow 14 - 9a = 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{14}{9} \approx 1,56$.

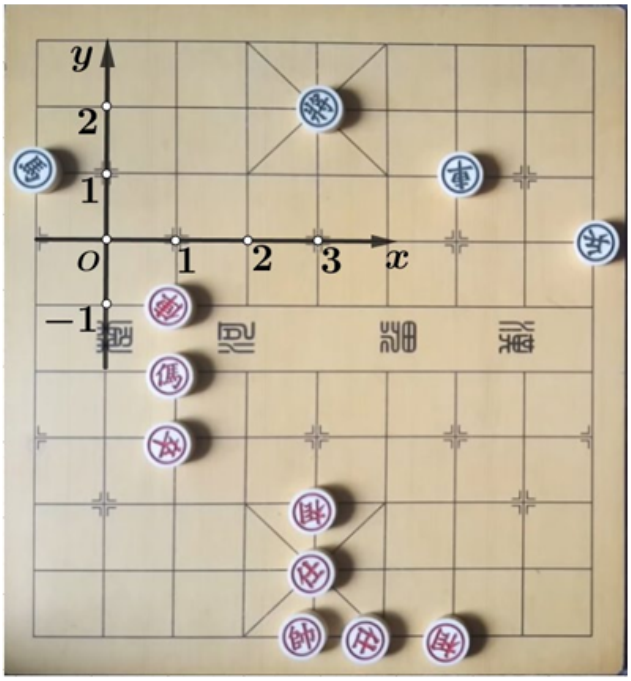
Bài 20. Cho biết sự chuyển động của một chiếc thuyền được thể hiện trên một mặt phẳng tọa độ như sau: Thuyền rời bến từ vị trí $A(2;3)$ chuyển động thẳng đều với vận tốc (tính theo giờ) được biểu thị bởi vectơ $\vec{v} = (a;b)$, sau khi khởi hành 2 giờ thì vị trí của tàu (trên mặt phẳng tọa độ) là $B(8;9)$. Tính $a + b$.

Hướng dẫn giải.

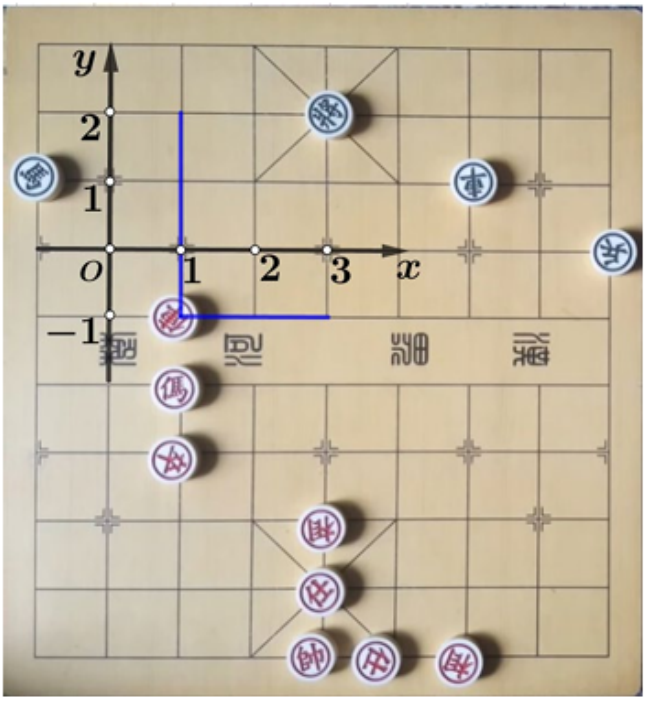
Gọi $\vec{v} = (a;b)$. Sau 2 giờ thuyền di chuyển tới $B(8;9)$ nên ta có:

$$\overrightarrow{AB} = 2\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 - 2 = 2a \\ 9 - 3 = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow a + b = 6.$$

Bài 21. Trong hình vẽ bên dưới, quân xe bên cờ đỏ đang ở vị trí có tọa độ $(1;-1)$. Biết rằng sau một nước đi, quân xe bên cờ đỏ đến vị trí có tọa độ là $(a;b)$ thì sẽ chiếu tướng được bên cờ xanh mà không bị quân mã cờ xanh ăn quân xe đỏ. Tính $a^2 + b^2$.



✍ *Hướng dẫn giải.*



Ta thấy quân xe bên cờ đỏ sau một nước đi đến các vị trí có tọa độ là $(1;2)$ hoặc $(3;-1)$ thì sẽ chiếu tướng được bên cờ xanh (đang ở vị trí $(3;2)$).

- Nếu đến vị trí $(1;2)$, quân xe sẽ bị quân mã bên cờ xanh (đang ở $(2,0)$) ăn theo luật đi hình chữ nhật 1×2.

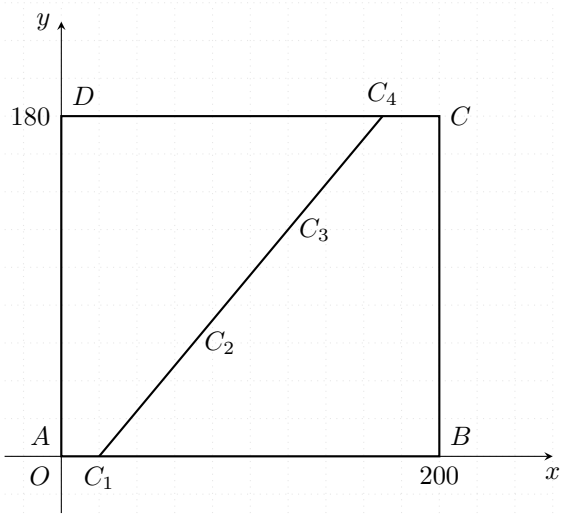
- Do đó để chiếu tướng mà không bị mất quân, quân xe đỏ phải ở vị trí có tọa độ là $(3;-1)$.

Khi đó $a=3, b=-1$. Vậy $a^2+b^2=10$.

Bài 22. Để kéo đường dây điện băng qua một hồ hình chữ nhật $ABCD$ với độ dài $AB=200$ m, $AD=180$ m người ta dự định làm 4 cột điện liên tiếp cách đều. Cột thứ nhất nằm trên bờ AB

và cách đỉnh A khoảng cách 20 m, cột thứ tư nằm trên bờ CD và cách đỉnh C một khoảng cách 30 m. Tính các khoảng cách từ vị trí các cột thứ hai, thứ ba đến các bờ AB, AD.

Hướng dẫn giải. Chọn hệ tọa độ Oxy sao cho $A(0;0), B(200;0), C(200;180), D(0;180)$. Gọi vị trí các cột điện được trồng là C_1, C_2, C_3, C_4.



Do C_1 thuộc cạnh AB và $AC_1 = 20$ nên $C_1(20;0)$, do C_4 thuộc cạnh CD và $C_4C = 30$ nên $C_4(170;180)$.

Suy ra $\overrightarrow{C_1C_4} = (150;180)$ (1)

Do bốn cột điện C_1, C_2, C_3, C_4 được trồng liên tiếp, cách đều trên một đường thẳng, nên $\overrightarrow{C_1C_2} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{C_1C_4}$ và $\overrightarrow{C_1C_3} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{C_1C_4}$.

Gọi tọa độ của C_2 đối với hệ trục đang xét là $(x;y)$. Khi đó $\overrightarrow{C_1C_2} = (x-20;y)$.

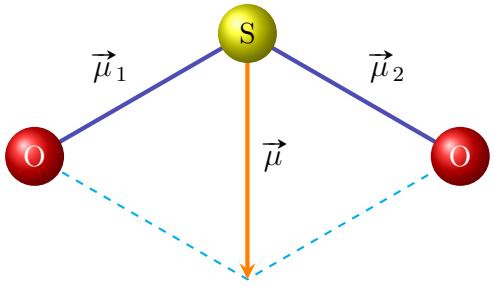
Từ đó kết hợp với (1) và do $\overrightarrow{C_1C_2} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{C_1C_4}$ nên $\begin{cases} x - 20 = \dfrac{150}{3} = 50 \\ y = \dfrac{180}{3} = 60. \end{cases}$

Suy ra $x = 70, y = 60$, tức là $C_2(70;60)$.

Khi đó $d(C_2;AB) = d(C_2;Ox) = 60$ m và $d(C_2;AD) = d(C_2;Oy) = 70$ m.

Hoàn toàn tương tự, cũng được $d(C_3;AB) = 120$ m và $d(C_3;AD) = 120$ m.

Bài 23. Phân tử sulfur dioxide (SO_2) có cấu tạo hình chữ V, góc liên kết $\widehat{OSO}$ gần bằng 120°. Người ta biểu diễn sự phân cực giữa nguyên tử S với mỗi nguyên tử O bằng các vectơ $\vec{\mu}_1$ và $\vec{\mu}_2$, có cùng phương với liên kết cộng hoá trị, có chiều từ nguyên tử S về mỗi nguyên tử O và cùng có độ dài là 1,6 đơn vị (Hình 6). Cho biết vectơ tổng $\vec{\mu} = \vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2$ được dùng để biểu diễn sự phân cực của cả phân tử SO_2. Tính độ dài của $\vec{\mu}$.



Hướng dẫn giải. Từ điểm cuối của vectơ $\vec{\mu}_1$ vẽ vectơ $\vec{\mu}_3 = \vec{\mu}_2$ suy ra $\vec{\mu} = \vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2 = \vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_3 \Rightarrow |\vec{\mu}| = |\vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_3|$.

Ta có: $(\vec{\mu}_1, \vec{\mu}_2) = 120^\circ \Rightarrow (\vec{\mu}_1, \vec{\mu}_3) = 60^\circ$ (do tính chất hình thoi).

Khi đó:

$$\begin{aligned} |\vec{\mu}|^2 &= |\vec{\mu}_1|^2 + |\vec{\mu}_3|^2 - 2|\vec{\mu}_1| \cdot |\vec{\mu}_3| \cdot \cos(\vec{\mu}_1, \vec{\mu}_3) \\ &= 1,6^2 + 1,6^2 - 2 \cdot 1,6 \cdot 1,6 \cdot \cos 60^\circ \\ &= 2,56 + 2,56 - 2,56 = 2,56 = \frac{64}{25}. \end{aligned}$$

Suy ra $|\vec{\mu}| = \sqrt{\dfrac{64}{25}} = 1,6$.

Vậy độ dài của $\vec{\mu}$ là $1,6$ đơn vị.

Bài 24. Một máy bay đang bay từ hướng đông sang hướng tây với tốc độ 650 (km/h) thì gặp luồng gió thổi từ hướng đông bắc sang hướng tây nam với tốc độ 35 (km/h). Máy bay bị thay đổi vận tốc sau khi gặp gió thổi. Tìm tốc độ mới của máy bay (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị km/h).

Hướng dẫn giải. Gọi $\vec{v}_0$ là vận tốc của máy bay khi không có gió là $|\vec{v}_0| = 650$ (km/h).

Gọi $\vec{v}_1$ là vận tốc của gió thì $|\vec{v}_1| = 35$; $\vec{v}_2$ là vận tốc của máy bay khi có gió.

Ta có: $\vec{v}_2 = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$ mà theo giả thiết $(\vec{v}_1, \vec{v}_0) = 45^\circ$ nên ta có:

$$\vec{v}_2^2 = (\vec{v}_0 + \vec{v}_1)^2 = \vec{v}_0^2 + \vec{v}_1^2 + 2\vec{v}_0 \cdot \vec{v}_1 = |\vec{v}_0|^2 + |\vec{v}_1|^2 + 2|\vec{v}_0| \cdot |\vec{v}_1| \cdot \cos 45^\circ$$

$$= 650^2 + 35^2 + 2 \cdot 650 \cdot 35 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 455898,36 \text{ suy ra } |\vec{v}_2| \approx 675,2 \text{ (km/h)}.$$

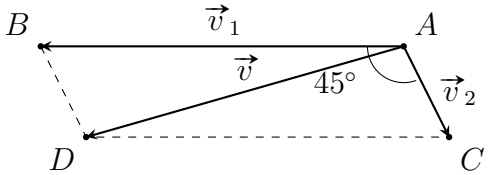
Bài 25. Một máy bay bay từ hướng tây sang hướng đông với tốc độ $800(km/h)$ thì gặp luồng gió thổi từ hướng tây bắc sang hướng đông nam với tốc độ $100(km/h)$. Máy bay bị thay đổi vận tốc sau khi gặp gió thổi. Tìm tốc độ mới của máy bay theo đơn vị km/h (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị km/h).

Hướng dẫn giải.

Giả sử vận tốc của máy bay theo hướng tây sang đông là $\vec{v}_1$, vận tốc của luồng gió theo hướng đông bắc sang tây nam là $\vec{v}_2$ và vận tốc mới của máy bay chính là $\vec{v}$ thỏa mãn $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

Theo bài ra ta có: $|\vec{v}_1| = 800$ km/h, $|\vec{v}_2| = 100$ km/h, $(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 45^\circ$.

Khi đó bài toán được biểu diễn như hình sau:



Khi đó ta có: $ABDC$ là hình bình hành có $\widehat{BAC} = 45^\circ$, suy ra $\widehat{DBA} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$, $BD = |\vec{v}_2| = 100$, $AB = |\vec{v}_1| = 800$.

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABD, ta có:

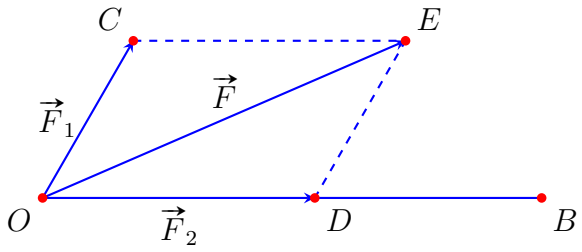
$AD^2 = BD^2 + BA^2 - 2BA.BD.\cos B = 100^2 + 800^2 - 2.100.800.\cos 135^\circ \approx 763137,085.$

Suy ra $AD \approx 873,5771775(km/h)$.

Vậy tốc độ mới của máy bay là $|\vec{v}| = AD \approx 874(km/h)$.

Bài 26. Hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ có độ lớn $|\vec{F}_1| = 10$ N, $|\vec{F}_2| = 20$ N và tạo với nhau một góc $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 60^\circ$ cùng tác dụng lên một vật đặt tại điểm O làm cho vật di chuyển theo hướng từ O đến B (như hình vẽ). Biết $OB = 100$ m và chỉ có hai lực $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ tác động lên vật. Tính công A của hợp lực $\vec{F}$ của $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ khi di chuyển vật từ O đến B?

Hướng dẫn giải.



Vì $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ nên

$(\vec{F})^2 = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2)^2 = (\vec{F}_1)^2 + (\vec{F}_2)^2 + 2\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 = (\vec{F}_1)^2 + (\vec{F}_2)^2 + 2|\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}_2| \cdot \cos(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 700.$

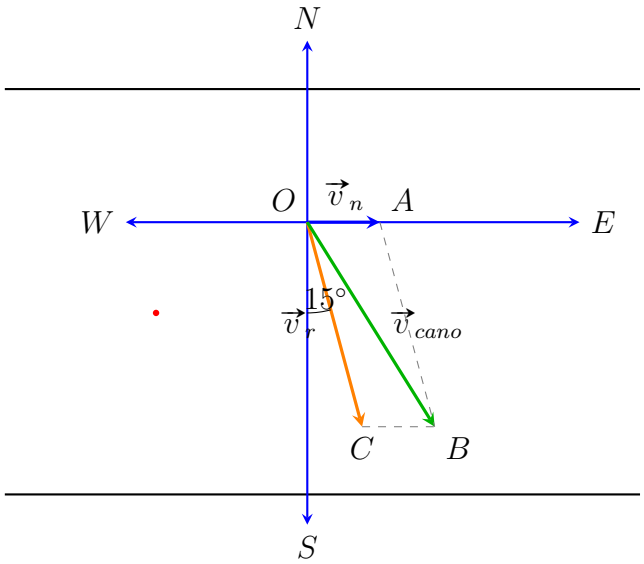
Do đó:

$|\vec{F}| = 10\sqrt{7}(\text{N}).$

Xét tam giác ODE ta có: $\cos(\widehat{DOE}) = \dfrac{OD^2 + OE^2 - DE^2}{2OD.OE} = \dfrac{5\sqrt{7}}{14}$. Suy ra: $\cos(\vec{F}, \overrightarrow{OB}) = \dfrac{5\sqrt{7}}{14}$.

Vậy công của lực $\vec{F}$ là: $A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{OB} = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cdot \cos(\vec{F}, \overrightarrow{OB}) = 2500(\text{J})$

Bài 27. Trên sông, một ca nô đang chuyển động thẳng đều theo hướng $S15^\circ E$ với vận tốc có độ lớn bằng 21 km/h. Tính vận tốc riêng của ca nô, biết rằng nước trên sông chảy về hướng đông với vận tốc có độ lớn bằng 2 km/h (tham khảo hình vẽ). (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



✍ *Hướng dẫn giải.* Trong hình, $\overrightarrow{OA}$ biểu diễn vectơ vận tốc của dòng nước; $\overrightarrow{OB}$ biểu diễn vectơ vận tốc của ca nô.

$\overrightarrow{OC}$ biểu diễn vectơ vận tốc riêng của ca nô.

Theo quy tắc hình bình hành ta có:

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$\Rightarrow |\overrightarrow{OC}|^2 = |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}|^2$

$\Leftrightarrow |\overrightarrow{OC}|^2 = |\overrightarrow{OB}|^2 - 2 \cdot \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} \cdot \cos 75^\circ + |\overrightarrow{OA}|^2$

(Do hướng $S15^\circ E$ tạo với hướng Đông góc $90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$)

$\Leftrightarrow |\overrightarrow{OC}| = \sqrt{21^2 - 2 \cdot 21 \cdot 2 \cdot \cos 75^\circ + 2^2} \approx 20,6$ (km/h).

Vậy vận tốc riêng của ca nô là khoảng $20,6$ km/h.

Chương V

CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG CỦA MẪU SỐ LIỆU KHÔNG GHÉP NHÓM

§1 SỐ GẦN ĐÚNG VÀ SAI SỐ

I. SỐ GẦN ĐÚNG

Trong nhiều trường hợp, ta không biết hoặc khó biết số đúng (kí hiệu là $\bar{a}$) mà chỉ tìm được giá trị khác xấp xỉ nó. Giá trị này được gọi là **số gần đúng**, kí hiệu là a.

Ví dụ 1

Gọi d là độ dài đường chéo của hình vuông cạnh bằng 1. Trong hai số $\sqrt{2}$ và 1,41, số nào là số đúng, số nào là số gần đúng của d?

Lời giải. Hình vuông có cạnh bằng 1 có độ dài của đường chéo là $d = 1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}$.

Vậy $\sqrt{2}$ là số đúng; 1,41 là số gần đúng của d.

(1) Gọi P là chu vi của đường tròn bán kính 1 cm. Hãy tìm một giá trị gần đúng của P.

.....

.....

.....

.....

.....

Ta có thể sử dụng máy tính cầm tay để tìm giá trị gần đúng của các biểu thức chứa các số vô tỉ như $\pi, \sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, \ldots$ Chẳng hạn, dùng máy tính cầm tay để tính $2^9 \cdot \sqrt{3}$, bấm các phím như sau:

$\boxed{2}$ $\boxed{x^{\square}}$ $\boxed{9}$ $\boxed{\blacktriangleright}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\sqrt{\square}}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{6}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$

Kết quả nhận được có ba chữ số thập phân sau dấu phẩy là 886,810.

» Sưu tầm và biên soạn: Lê Minh Kha - 0399653362

II. SAI SỐ TUYỆT ĐỐI VÀ SAI SỐ TƯƠNG ĐỐI

1) Sai số tuyệt đối

Giá trị $|a-\bar{a}|$ phản ánh mức độ sai lệch giữa số đúng $\bar{a}$ và số gần đúng a, được gọi là sai số tuyệt đối của số gần đúng a, kí hiệu là Δ_a, tức là:

$$\Delta_a = |a-\bar{a}|.$$

- Trên thực tế, nhiều khi ta không biết $\bar{a}$ nên cũng không biết Δ_a. Tuy nhiên, ta có thể đánh giá được Δ_a không vượt quá một số dương d nào đó.
- Nếu $\Delta_a \le d$ thì $a-d \le \bar{a} \le a+d$, khi đó ta viết $\bar{a} = a \pm d$ và hiểu là số đúng $\bar{a}$ nằm trong đoạn $[a-d; a+d]$. Do d càng nhỏ thì a càng gần $\bar{a}$ nên d được gọi là **độ chính xác của số gần đúng**.

Ví dụ 2

Một công ty sử dụng dây chuyền A để đóng gạo vào bao với khối lượng mong muốn là 5 kg. Trên bao bì ghi thông tin khối lượng là $5 \pm 0,2$ kg. Gọi $\bar{a}$ là khối lượng thực của một bao gạo do dây chuyền A đóng gói.

a) Xác định số đúng, số gần đúng và độ chính xác.

b) Giá trị của $\bar{a}$ nằm trong đoạn nào?



Hướng dẫn giải. a) Khối lượng thực của bao gạo $\bar{a}$ là số đúng. Tuy không biết $\bar{a}$ nhưng ta xem khối lượng bao gạo là 5 kg nên 5 là số gần đúng cho $\bar{a}$. Độ chính xác là $d = 0,2$ (kg).

b) Giá trị của $\bar{a}$ nằm trong đoạn $[5-0,2; 5+0,2]$ hay $[4,8; 5,2]$.

(2) Một phép đo đường kính nhân tế bào cho kết quả là $5 \pm 0,3$ μm. Đường kính thực của nhân tế bào thuộc đoạn nào?

....

....

....

....

....

Trong các phép đo, độ chính xác d của số gần đúng bằng một nửa đơn vị của thước đo. Chẳng hạn, một thước đo có chia vạch đến xentimét thì mọi giá trị đo nằm giữa 6,5 cm và 7,5 cm đều được coi là 7 cm. Vì vậy, thước đo có thang đo càng nhỏ thì cho giá trị đo càng chính xác.

2) Sai số tương đối

Sai số tương đối của số gần đúng a, kí hiệu là δ_a, là tỉ số giữa sai số tuyệt đối và $|a|$, tức là $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|}$.

NHẬN XÉT. Nếu $\bar{a} = a \pm d$ thì $\Delta_a \leq d$, do đó $\delta_a \leq \dfrac{d}{|a|}$.

Nếu $\dfrac{d}{|a|}$ càng nhỏ thì chất lượng của phép đo hay tính toán càng cao. Người ta thường viết sai số tương đối dưới dạng phần trăm.

Ví dụ 3

Trong một cuộc điều tra dân số, người ta viết dân số của một tỉnh là:

3 574 625 người ± 50 000 người.

Hãy đánh giá sai số tương đối của số gần đúng này

Lời giải. Ta có $a = 3\,574\,625$ người và $d = 50\,000$ người, do đó sai số tương đối là:

$$\delta_a \leq \frac{d}{|a|} = \frac{50\,000}{3\,574\,625} \approx 1,4\%.$$

(3) Đánh giá sai số tương đối của khối lượng bao gạo được đóng gói theo hai dây chuyền A, B ở Ví dụ 2 và HĐ4. Dựa trên tiêu chí này, dây chuyền nào tốt hơn?

....

....

....

....

....

III. QUY TRÒN SỐ GẦN ĐÚNG

Số thu được sau khi thực hiện làm tròn số được gọi là **số quy tròn**. Số quy tròn là một số gần đúng của số ban đầu.

- Đối với chữ số hàng làm tròn:
  - Giữ nguyên nếu chữ số ngay bên phải nó nhỏ hơn 5;
  - Tăng 1 đơn vị nếu chữ số ngay bên phải nó lớn hơn hoặc bằng 5.
- Đối với chữ số sau hàng làm tròn:
  - Bỏ đi nếu ở phần thập phân;
  - Thay bởi các chữ số 0 nếu ở phần số nguyên.

Ví dụ 4

a) Làm tròn số 2 395,3 đến hàng chục, số 18,693 đến hàng phần trăm và số đúng $d \in [5,5; 6,5)$ đến hàng đơn vị. Đánh giá sai số tuyệt đối của phép làm tròn số đúng d.

b) Cho số gần đúng $a = 2,53$ với độ chính xác $d = 0,01$. Số đúng $\bar{a}$ thuộc đoạn nào? Nếu làm tròn số a thì nên làm tròn đến hàng nào? Vì sao?

Lời giải.

a) Số quy tròn của số 2 395,3 đến hàng chục là 2 360; số quy tròn của số 18,693 đến hàng phần trăm là 18,69. Mọi số đúng $d \in [5,5; 6,5)$ khi làm tròn đến hàng đơn vị đều thu được số quy tròn là 6 và sai số tuyệt đối $|d - 6| \leq 0,5$.

b) Số đúng $\bar{a}$ thuộc đoạn $[2,53 - 0,01; 2,53 + 0,01]$ hay $[2,52; 2,54]$. Khi làm tròn số gần đúng a ta nên làm tròn đến hàng phần chục do chữ số hàng phần trăm của a là chữ số không chắc chắn đúng.

Nhận xét.

- Khi thay số đúng bởi số quy tròn đến một hàng nào đó thì sai số tuyệt đối của số quy tròn không vượt quá nửa đơn vị của hàng làm tròn.
- Cho số gần đúng a với độ chính xác d. Khi được yêu cầu làm tròn số a mà không nói rõ làm tròn đến hàng nào thì ta làm tròn số a đến hàng thấp nhất mà d nhỏ hơn 1 đơn

vị của hàng đó.

Ví dụ 5

Cho số gần đúng $a = 581\,268$ với độ chính xác $d = 200$. Hãy viết số quy tròn của số a.

Lời giải. Vì độ chính xác đến hàng trăm ($d = 200$) nên ta làm tròn a đến hàng nghìn theo quy tắc làm tròn ở trên. Số quy tròn của a là $581\,000$.

4 Hãy viết số quy tròn của số gần đúng trong những trường hợp sau:

a) $11\,251\,900 \pm 300$;

b) $18,2857 \pm 0,01$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

5 Các nhà vật lí sử dụng hai phương pháp khác nhau để đo tuổi của vũ trụ (đơn vị tỉ năm) lần lượt cho hai kết quả là: $13,807 \pm 0,026$ và $13,799 \pm 0,021$.
Hãy đánh giá sai số tương đối của mỗi phương pháp. Căn cứ trên tiêu chí này, phương pháp nào cho kết quả chính xác hơn?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

IV. BÀI TẬP ÔN LUYỆN

1) Bài tập tự luận

Bài 1. Trong các số sau, những số nào là số gần đúng?

a) Cân một túi gạo cho kết quả là $10,2$ kg.

b) Bán kính Trái Đất là 6371 km.

c) Trái Đất quay một vòng quanh Mặt Trời mất 365 ngày.

Bài 2. Giải thích kết quả "Đo độ cao của một ngọn núi cho kết quả là 1235 ± 5 m" và thực hiện

làm tròn số gần đúng.

Bài 3. Sử dụng máy tính cầm tay tìm số gần đúng cho $\sqrt[3]{7}$ với độ chính xác $0,0005$.

Bài 4. Các nhà vật lí sử dụng ba phương pháp đo hằng số Hubble lần lượt cho kết quả như sau:

$$67,31 \pm 0,96; \qquad 67,90 \pm 0,55; \qquad 67,74 \pm 0,46$$

Phương pháp nào chính xác nhất tính theo sai số tương đối?

Bài 5. An và Bình cùng tính chu vi của hình tròn bán kính 2 cm với hai kết quả như sau:

- Kết quả của An: $S_1 = 2\pi R = 2 \cdot 3,14 \cdot 2 = 12,56$ cm;
- Kết quả của Bình: $S_2 = 2\pi R = 2 \cdot 3,1 \cdot 2 = 12,4$ cm.

Hỏi:

a) Hai giá trị tính được có phải là các số gần đúng không?

b) Giá trị nào chính xác hơn?

Bài 6. Làm tròn số $8316,4$ đến hàng chục và $9,754$ đến hàng phần trăm rồi tính sai số tuyệt đối của số quy tròn.

2) Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Kết quả đo chiều dài của một cây cầu được ghi là $152m \pm 0,2m$, điều đó có nghĩa là gì?

Ⓐ Chiều dài đúng của cây cầu là một số nằm trong khoảng từ $151,8m$ đến $152,2m$.
Ⓑ Chiều dài đúng của cây cầu là một số lớn hơn 152 m.
Ⓒ Chiều dài đúng của cây cầu là một số nhỏ hơn 152 m.
Ⓓ Chiều dài đúng của cây cầu là 151,8 m hoặc là 152,2 m.

Câu 2. Khi tính diện tích hình tròn bán kính $R = 3$cm, nếu lấy $\pi = 3,14$ thì độ chính xác là bao nhiêu?

Ⓐ $d = 0,009$. Ⓑ $d = 0,09$. Ⓒ $d = 0,1$. Ⓓ $d = 0,01$.

Câu 3. Cho giá trị gần đúng của $\dfrac{8}{17}$ là $0,47$. Sai số tuyệt đối của $0,47$ là:

Ⓐ $0,001$. Ⓑ $0,002$. Ⓒ $0,003$. Ⓓ $0,004$.

Câu 4. Kết quả đo chiều dài của một cây cầu được ghi là $152m \pm 0,2m$. Tìm sai số tương đối của phép đo chiều dài cây cầu.

Ⓐ $\delta_a < 0,1316\%$. Ⓑ $\delta_a < 1,316\%$.
Ⓒ $\delta_a = 0,1316\%$. Ⓓ $\delta_a > 0,1316\%$.

Câu 5. Bạn A đo chiều dài của một sân bóng ghi được $250 \pm 0,2m$. Bạn B đo chiều cao của một cột cờ được $15 \pm 0,1m$. Trong 2 bạn A và B, bạn nào có phép đo chính xác hơn và sai số tương đối trong phép đo của bạn đó là bao nhiêu?

Ⓐ Bạn A đo chính xác hơn bạn B với sai số tương đối là $0,08\%$.
Ⓑ Bạn B đo chính xác hơn bạn A với sai số tương đối là $0,08\%$.
Ⓒ Hai bạn đo chính xác như nhau với sai số tương đối bằng nhau là $0,08\%$.
Ⓓ Bạn A đo chính xác hơn bạn B với sai số tương đối là $0,06\%$.

Câu 6. Hãy xác định sai số tuyệt đối của số $a = 123456$ biết sai số tương đối $\delta_a = 0,2\%$.

Ⓐ $146,912$. Ⓑ 617280. Ⓒ $24691,2$. Ⓓ 61728000.

Câu 7. Tìm số gần đúng của $a = 2851275$ với độ chính xác $d = 300$.

Ⓐ 2851000. Ⓑ 2851575. Ⓒ 2850025. Ⓓ 2851200.

Câu 8. Tìm số gần đúng của $a = 5,2463$ với độ chính xác $d = 0,001$.

Ⓐ $5,25$. Ⓑ $5,24$. Ⓒ $5,246$. Ⓓ $5,2$.

Câu 9. Sử dụng máy tính bỏ túi, hãy viết giá trị gần đúng của $\sqrt{3}$ chính xác đến hàng phần trăm.

Ⓐ $1,73$. Ⓑ $1,732$. Ⓒ $1,7$. Ⓓ $1,7320$.

Câu 10. Sử dụng máy tính bỏ túi, hãy viết giá trị gần đúng của π^2 chính xác đến hàng phần nghìn.

Ⓐ $9,870$. Ⓑ $9,869$. Ⓒ $9,871$. Ⓓ $9,8696$.

Câu 11. Hãy viết số quy tròn của số a với độ chính xác d được cho sau đây: $\bar{a} = 17658 \pm 16$.

Ⓐ 17700. Ⓑ 17660. Ⓒ 18000. Ⓓ 17674.

Câu 12. Tìm số chắc của số gần đúng a biết số người dân tỉnh Nghệ An là $a = 3214056$ người với độ chính xác $d = 100$ người.

Ⓐ $1,2,3,4$. Ⓑ $1,2,3,4,0$.
Ⓒ $1,2,3$. Ⓓ $1,2,3,4,0,5$.

Câu 13. Viết dạng chuẩn của số gần đúng a biết số người dân tỉnh Nghệ An là $a = 3214056$ người với độ chính xác $d = 100$ người.

Ⓐ $3214 \cdot 10^3$. Ⓑ $321 \cdot 10^4$. Ⓒ $321405 \cdot 10^1$. Ⓓ $32140 \cdot 10^2$.

Câu 14. Viết dạng chuẩn của số gần đúng a biết $a = 1,3462$ sai số tương đối của a bằng 1%.

Ⓐ $1,3$. Ⓑ $1,34$. Ⓒ $1,35$. Ⓓ $1,346$.

Câu 15. Một hình chữ nhật có diện tích là $S = 180,57\text{cm}^2 \pm 0,6\text{cm}^2$. Kết quả gần đúng của S viết dưới dạng chuẩn là:

Ⓐ $180,58\text{cm}^2$. Ⓑ $180,59\text{cm}^2$. Ⓒ $0,181\text{cm}^2$. Ⓓ 181cm^2.

BẢNG ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á
1	A	2	B	3	A	4	A	5	A
6	A	7	A	8	A	9	A	10	A
11	A	12	A	13	A	14	A	15	D

V. LỜI GIẢI CHI TIẾT

1) Bài tập tự luận

Bài 1. Trong các số sau, những số nào là số gần đúng?

a) Cân một túi gạo cho kết quả là $10,2$ kg.

b) Bán kính Trái Đất là 6371 km.

c) Trái Đất quay một vòng quanh Mặt Trời mất 365 ngày.

Hướng dẫn giải. Bán kính Trái Đất là 6371 km và Trái Đất quay một vòng quanh Mặt Trời mất 365 ngày là số gần đúng.

Bài 2. Giải thích kết quả "Đo độ cao của một ngọn núi cho kết quả là 1235 ± 5 m" và thực hiện làm tròn số gần đúng.

Hướng dẫn giải. "Đo độ cao của một ngọn núi cho kết quả là 1235 ± 5 m" có nghĩa là kết quả đo được có độ chính xác $d = 5$ đến hàng đơn vị nên ta phải quy tròn đến hàng chục. Số quy tròn là 1240.

Bài 3. Sử dụng máy tính cầm tay tìm số gần đúng cho $\sqrt[3]{7}$ với độ chính xác $0,0005$.

Hướng dẫn giải. $\sqrt[3]{7} \approx 1,913$.

Bài 4. Các nhà vật lí sử dụng ba phương pháp đo hằng số Hubble lần lượt cho kết quả như sau:

$$67,31 \pm 0,96; \qquad 67,90 \pm 0,55; \qquad 67,74 \pm 0,46$$

Phương pháp nào chính xác nhất tính theo sai số tương đối?

Hướng dẫn giải. Phương pháp thứ 1: $a = 67,31$ và $d = 0,96$ do đó sai số tương đối là:

$$\delta_a \leq \frac{d}{|a|} = \frac{0,96}{67,31} \approx 1,426\%.$$

Phương pháp thứ 2: $a = 67,90$ và $d = 0,55$ do đó sai số tương đối là:

$$\delta_a \leq \frac{d}{|a|} = \frac{0,55}{67,90} \approx 0,81\%.$$

Phương pháp thứ 3: $a = 67,74$ và $d = 0,46$ do đó sai số tương đối là:

$$\delta_a \leq \frac{d}{|a|} = \frac{0,46}{67,74} \approx 0,679\%.$$

Phương pháp thứ 3 chính xác nhất tính theo sai số tương đối.

Bài 5. An và Bình cùng tính chu vi của hình tròn bán kính 2 cm với hai kết quả như sau:

- Kết quả của An: $S_1 = 2\pi R = 2 \cdot 3,14 \cdot 2 = 12,56$ cm;
- Kết quả của Bình: $S_2 = 2\pi R = 2 \cdot 3,1 \cdot 2 = 12,4$ cm.

Hỏi:

a) Hai giá trị tính được có phải là các số gần đúng không?

b) Giá trị nào chính xác hơn?

Hướng dẫn giải.

a) Hai kết quả tính được là số gần đúng.

b) Kết quả câu a) (kết quả của An) chính xác hơn.

Bài 6. Làm tròn số $8316,4$ đến hàng chục và $9,754$ đến hàng phần trăm rồi tính sai số tuyệt đối của số quy tròn.

Hướng dẫn giải. Số $8316,4$ làm tròn đến hàng chục là 8320. Sai số tuyệt đối là: $|8320 - 8316,4| = 3,6$.

Số $9,754$ làm tròn đến hàng phần trăm là: $9,75$. Sai số tuyệt đối là: $|9,75 - 9,754| = 0,004$.

2) Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Kết quả đo chiều dài của một cây cầu được ghi là $152m \pm 0,2m$, điều đó có nghĩa là gì?

Ⓐ Chiều dài đúng của cây cầu là một số nằm trong khoảng từ $151,8m$ đến $152,2m$.
Ⓑ Chiều dài đúng của cây cầu là một số lớn hơn 152 m.
Ⓒ Chiều dài đúng của cây cầu là một số nhỏ hơn 152 m.
Ⓓ Chiều dài đúng của cây cầu là $151,8$ m hoặc là $152,2$ m.

Hướng dẫn giải. Kết quả đo chiều dài của một cây cầu được ghi là $152m \pm 0,2m$ có nghĩa là chiều dài đúng của cây cầu là một số nằm trong khoảng từ $151,8m$ đến $152,2m$.

Câu 2. Khi tính diện tích hình tròn bán kính $R = 3$cm, nếu lấy $\pi = 3,14$ thì độ chính xác là bao nhiêu?

Ⓐ $d = 0,009$. Ⓑ $d = 0,09$. Ⓒ $d = 0,1$. Ⓓ $d = 0,01$.

Hướng dẫn giải. Ta có diện tích hình tròn $S = 3,14 \cdot 3^2$ và $\bar{S} = \pi \cdot 3^2 = 9\pi$.
Ta có: $3,14 < \pi < 3,15 \Rightarrow 3,14 \cdot 9 < 9\pi < 3,15 \cdot 9 \Rightarrow 28,26 < \bar{S} < 28,35$.
Do đó: $\bar{S} - S = \bar{S} - 28,26 < 28,35 - 28,26 = 0,09 \Rightarrow \Delta(S) = |\bar{S} - S| < 0,09$.
Vậy nếu ta lấy $\pi = 3,14$ thì diện tích hình tròn là $S = 28,26\text{cm}^2$ với độ chính xác $d = 0,09$.

Câu 3. Cho giá trị gần đúng của $\dfrac{8}{17}$ là $0,47$. Sai số tuyệt đối của $0,47$ là:

Ⓐ $0,001$. Ⓑ $0,002$. Ⓒ $0,003$. Ⓓ $0,004$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\left|0,47 - \dfrac{8}{17}\right| < 0,00059$ suy ra sai số tuyệt đối của $0,47$ là $0,001$.

Câu 4. Kết quả đo chiều dài của một cây cầu được ghi là $152m \pm 0,2m$. Tìm sai số tương đối của phép đo chiều dài cây cầu.

Ⓐ $\delta_a < 0,1316\%$. Ⓑ $\delta_a < 1,316\%$.
Ⓒ $\delta_a = 0,1316\%$. Ⓓ $\delta_a > 0,1316\%$.

Hướng dẫn giải. Sai số tương đối $\delta_a \le \dfrac{0,2}{152} = 0,001315789 \approx 0,1316\%$.

Câu 5. Bạn A đo chiều dài của một sân bóng ghi được $250 \pm 0,2m$. Bạn B đo chiều cao của một cột cờ được $15 \pm 0,1m$. Trong 2 bạn A và B, bạn nào có phép đo chính xác hơn và sai số tương đối trong phép đo của bạn đó là bao nhiêu?

Ⓐ Bạn A đo chính xác hơn bạn B với sai số tương đối là $0,08\%$.
Ⓑ Bạn B đo chính xác hơn bạn A với sai số tương đối là $0,08\%$.
Ⓒ Hai bạn đo chính xác như nhau với sai số tương đối bằng nhau là $0,08\%$.
Ⓓ Bạn A đo chính xác hơn bạn B với sai số tương đối là $0,06\%$.

Hướng dẫn giải. Phép đo của bạn A có sai số tương đối $\delta_1 \le \dfrac{0,2}{250} = 0,0008 = 0,08\%$.
Phép đo của bạn B có sai số tương đối $\delta_2 \le \dfrac{0,1}{15} = 0,0066 = 0,66\%$.
Như vậy phép đo của bạn A có độ chính xác cao hơn.

Câu 6. Hãy xác định sai số tuyệt đối của số $a = 123456$ biết sai số tương đối $\delta_a = 0,2\%$.

Ⓐ $146,912$. Ⓑ 617280. Ⓒ $24691,2$. Ⓓ 61728000.

Hướng dẫn giải. Ta có $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|} \Rightarrow \Delta_a = \delta_a \cdot |a| = 146,912$.

Câu 7. Tìm số gần đúng của $a = 2851275$ với độ chính xác $d = 300$.

Ⓐ 2851000. Ⓑ 2851575. Ⓒ 2850025. Ⓓ 2851200.

Hướng dẫn giải. Vì độ chính xác đến hàng *trăm* nên ta quy tròn a đến hàng **nghìn**, vậy số quy tròn của a là 2851000.

Câu 8. Tìm số gần đúng của $a = 5,2463$ với độ chính xác $d = 0,001$.

Ⓐ $5,25$. Ⓑ $5,24$. Ⓒ $5,246$. Ⓓ $5,2$.

Hướng dẫn giải. Vì độ chính xác đến hàng *phần nghìn* nên ta quy tròn a đến hàng *phần trăm*, vậy số quy tròn của a là $5,25$.

Câu 9. Sử dụng máy tính bỏ túi, hãy viết giá trị gần đúng của $\sqrt{3}$ chính xác đến hàng phần trăm.

Ⓐ $1,73$. Ⓑ $1,732$. Ⓒ $1,7$. Ⓓ $1,7320$.

Hướng dẫn giải. Sử dụng máy tính bỏ túi ta có $\sqrt{3} = 1,732050808$. Do đó: Giá trị gần đúng của $\sqrt{3}$ chính xác đến hàng phần trăm là $1,73$.

Câu 10. Sử dụng máy tính bỏ túi, hãy viết giá trị gần đúng của π^2 chính xác đến hàng phần nghìn.

Ⓐ $9,870$. Ⓑ $9,869$. Ⓒ $9,871$. Ⓓ $9,8696$.

Hướng dẫn giải. Sử dụng máy tính bỏ túi ta có giá trị của π^2 là $9,8696044$. Do đó giá trị gần đúng của π^2 chính xác đến hàng phần nghìn là $9,870$.

Câu 11. Hãy viết số quy tròn của số a với độ chính xác d được cho sau đây: $\bar{a} = 17658 \pm 16$.

Ⓐ 17700. Ⓑ 17660. Ⓒ 18000. Ⓓ 17674.

Hướng dẫn giải. Vì độ chính xác đến hàng chục nên ta phải quy tròn số 17658 đến hàng trăm. Vậy số quy tròn là 17700 (hay viết $\bar{a} \approx 17700$).

Câu 12. Tìm số chắc của số gần đúng a biết số người dân tỉnh Nghệ An là $a = 3214056$ người với độ chính xác $d = 100$ người.

Ⓐ $1, 2, 3, 4$. Ⓑ $1, 2, 3, 4, 0$.
Ⓒ $1, 2, 3$. Ⓓ $1, 2, 3, 4, 0, 5$.

Hướng dẫn giải. Vì $\dfrac{100}{2} = 50 < 100 < \dfrac{1000}{2} = 500$ nên chữ số hàng trăm (số 0) không là số chắc, còn chữ số hàng nghìn (số 4) là chữ số chắc.
Vậy chữ số chắc là $1, 2, 3, 4$.

Câu 13. Viết dạng chuẩn của số gần đúng a biết số người dân tỉnh Nghệ An là $a = 3214056$ người với độ chính xác $d = 100$ người.

Ⓐ $3214 \cdot 10^3$. Ⓑ $321 \cdot 10^4$. Ⓒ $321405 \cdot 10^1$. Ⓓ $32140 \cdot 10^2$.

Hướng dẫn giải. Vì $\dfrac{100}{2} = 50 < 100 < \dfrac{1000}{2} = 500$ nên chữ số hàng trăm (số 0) không là số chắc, còn chữ số hàng nghìn (số 4) là chữ số chắc.
Vậy chữ số chắc là $1, 2, 3, 4$.

Cách viết dưới dạng chuẩn là $3214 \cdot 10^3$.

Câu 14. Viết dạng chuẩn của số gần đúng a biết $a = 1,3462$ sai số tương đối của a bằng 1%.

Ⓐ $1,3$. Ⓑ $1,34$. Ⓒ $1,35$. Ⓓ $1,346$.

Hướng dẫn giải. Ta có $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|} \Rightarrow \Delta_a = \delta_a \cdot |a| = 1\% \cdot 1,3462 = 0,013462$.
Suy ra độ chính xác của số gần đúng a không vượt quá $0,013462$ nên ta có thể xem độ chính xác là $d = 0,013462$.
Ta có $\dfrac{0,01}{2} = 0,005 < 0,013462 < \dfrac{0,1}{2} = 0,05$ nên chữ số hàng phần trăm (số 4) không là số chắc, còn chữ số hàng phần chục (số 3) là chữ số chắc.
Vậy chữ số chắc là 1 và 3.
Cách viết dưới dạng chuẩn là $1,3$.

Câu 15. Một hình chữ nhật có diện tích là $S = 180,57\text{cm}^2 \pm 0,6\text{cm}^2$. Kết quả gần đúng của S viết dưới dạng chuẩn là:

Ⓐ $180,58\text{cm}^2$. Ⓑ $180,59\text{cm}^2$. Ⓒ $0,181\text{cm}^2$. Ⓓ 181cm^2.

Hướng dẫn giải. Ta có $\dfrac{1}{2} = 0,5 < 0,6 < \dfrac{10}{2} = 5$ nên chữ số hàng đơn vị không là số chắc, còn chữ số hàng chục là số chắc. Vậy cách viết dưới dạng chuẩn là 181cm^2.

§2 CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM

I. SỐ TRUNG BÌNH VÀ TRUNG VỊ

1) Số trung bình

Số trung bình (số trung bình cộng) của mẫu số liệu $x_1, x_2, \ldots, x_n$, kí hiệu là $\bar{x}$, được tính bằng công thức:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}.$$

Trong trường hợp mẫu số liệu cho dưới dạng bảng tần số thì số trung bình được tính theo công thức:

$$\bar{x} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_k x_k}{n},$$

trong đó m_k là tần số của giá trị x_k và $n = m_1 + m_2 + \cdots + m_k$.

Ví dụ 1

Thống kê số cuốn sách mỗi bạn trong lớp đã đọc trong năm 2021, An thu được kết quả như bảng bên. Hỏi trong năm 2021, trung bình mỗi bạn trong lớp đọc bao nhiêu cuốn sách?

Số cuốn sách	1	2	3	4	5
Số bạn	3	5	15	10	7

Lời giải. Số bạn trong lớp là $n = 3 + 5 + 15 + 10 + 7 = 40$ (bạn).

Trong năm 2021, trung bình mỗi bạn trong lớp đọc số cuốn sách là:

$$\frac{3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 15 \cdot 3 + 10 \cdot 4 + 7 \cdot 5}{40} = 3,325 \text{ (cuốn)}.$$

Số trung bình là giá trị trung bình cộng của các số trong mẫu số liệu, nó cho biết vị trí trung tâm của mẫu số liệu và có thể dùng để đại diện cho mẫu số liệu.

① Bảng sau cho biết thời gian chạy cự li 100 m của các bạn trong lớp (đơn vị giây):

Thời gian	12	13	14	15	16
Số bạn	5	7	10	8	6

Hãy tính thời gian chạy trung bình cự li 100 m của các bạn trong lớp.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2) Trung vị

Để tìm trung vị của một mẫu số liệu, ta thực hiện như sau:

- Sắp xếp các giá trị trong mẫu số liệu theo thứ tự không giảm.
- Nếu số giá trị của mẫu số liệu là số lẻ thì giá trị chính giữa của mẫu là trung vị. Nếu là số chẵn thì trung vị là trung bình cộng của hai giá trị chính giữa của mẫu.

Ví dụ 2

Hãy tìm trung vị cho mẫu số liệu về lương của giám đốc và nhân viên công ty được cho trong HĐ3.

Một công ty nhỏ gồm 1 giám đốc và 5 nhân viên, thu nhập mỗi tháng của giám đốc là 20 triệu đồng, của nhân viên là 4 triệu đồng.

a) Tính thu nhập trung bình của các thành viên trong công ty.

b) Thu nhập trung bình có phản ánh đúng thu nhập của nhân viên công ty không?

Trong trường hợp mẫu số liệu có giá trị bất thường (rất lớn hoặc rất bé so với đa số các giá trị khác), người ta không dùng số trung bình để đo xu thế trung tâm mà dùng **trung vị**.

Lời giải. Để tìm trung vị của mẫu số liệu trên, ta làm như sau:

- Sắp xếp số liệu theo thứ tự không giảm:

$$4 \quad 4 \quad \underbrace{4 \quad 4}_{\text{Hai giá trị chính giữa}} \quad 4 \quad 20$$

- Dãy trên có hai giá trị chính giữa cùng bằng 4. Vậy trung vị của mẫu số liệu cũng bằng 4.

Nhận xét. Trung vị là giá trị chia đôi mẫu số liệu, nghĩa là trong mẫu số liệu được sắp xếp theo thứ tự không giảm thì giá trị trung vị ở vị trí chính giữa. Trung vị không bị ảnh hưởng bởi giá trị bất thường trong khi số trung bình bị ảnh hưởng bởi giá trị bất thường.

2 Chiều dài (đơn vị feet) của 7 con cá voi trưởng thành được cho như sau:

$$48 \quad 53 \quad 51 \quad 31 \quad 53 \quad 112 \quad 52.$$

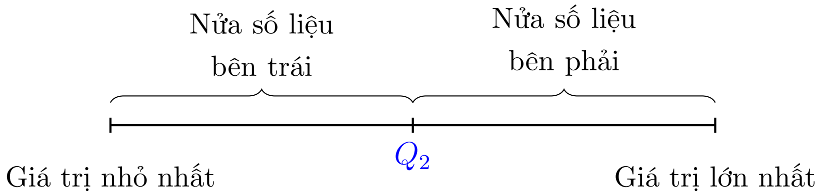
Tìm số trung bình và trung vị của mẫu số liệu trên. Trong hai số đó, số nào phù hợp hơn để đại diện cho chiều dài của 7 con cá voi trưởng thành này?

II. TỨ PHÂN VỊ

Để tìm các tứ phân vị của mẫu số liệu có n giá trị, ta làm như sau:

- Sắp xếp mẫu số liệu theo thứ tự không giảm.
- Tìm trung vị. Giá trị này là Q_2.
- Tìm trung vị của nửa số liệu bên trái Q_2 (không bao gồm Q_2 nếu n lẻ). Giá trị này là Q_1.
- Tìm trung vị của nửa số liệu bên phải Q_2 (không bao gồm Q_2 nếu n lẻ). Giá trị này là Q_3.

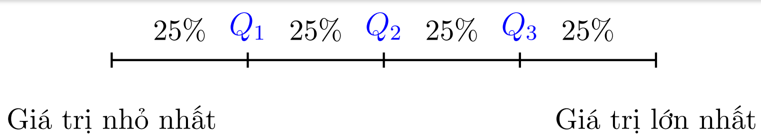
Q_1, Q_2, Q_3 được gọi là các **tứ phân vị** của mẫu số liệu.



Hình 5.3b

Q_1 được gọi là tứ phân vị thứ nhất hay tứ phân vị dưới, Q_3 được gọi là tứ phân vị thứ ba hay tứ phân vị trên.

NHẬN XÉT. Các điểm Q_1, Q_2, Q_3 chia mẫu số liệu đã sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn thành bốn phần, mỗi phần đều chứa 25% giá trị (H.5.3a).



Hình 5.3a. Các tứ phân vị

Ví dụ 3

Hàm lượng Natri (đơn vị miligam, 1 mg = 0,001 g) trong 100 g một số loại ngũ cốc được cho như sau:

0 340 70 140 200 180 210 150 100 130
140 180 190 160 290 50 220 180 200 210.

Hãy tìm các tứ phân vị. Các tứ phân vị này cho ta thông tin gì?

Lời giải.

- Sắp xếp các giá trị này theo thứ tự không giảm:

0 50 70 100 130 140 140 150 160 $\underbrace{180 \quad 180}_{\text{Hai giá trị chính giữa}}$ 180 190 200
200 210 210 220 290 340.

- Vì $n = 20$ là số chẵn nên Q_2 là trung bình cộng của hai giá trị chính giữa:

$$Q_2 = (180 + 180) : 2 = 180.$$

- Ta tìm Q_1 là trung vị của nửa số liệu bên trái Q_2:

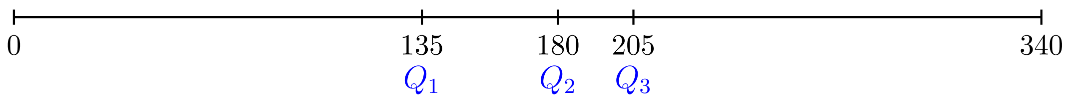
0 50 70 100 130 140 140 150 160 180

và tìm được $Q_1 = (130 + 140) : 2 = 135$.

- Ta tìm Q_3 là trung vị của nửa số liệu bên phải Q_2:

180 180 190 200 200 210 210 220 290 340

và tìm được $Q_3 = (200 + 210) : 2 = 205$.



Hình 5.4. Hình ảnh về sự phân bố của mẫu số liệu

Các tứ phân vị cho ta hình ảnh phân bố của mẫu số liệu. Khoảng cách từ Q_1 đến Q_2 là 45 trong khi khoảng cách từ Q_2 đến Q_3 là 25. Điều này cho thấy mẫu số liệu tập trung với mật độ cao ở bên phải của Q_2 và mật độ thấp ở bên trái của Q_2 (H.5.4).

3 Bảng sau đây cho biết số lần học tiếng Anh trên Internet trong một tuần của một số học sinh lớp 10:

Số lần	0	1	2	3	4	5
Số học sinh	2	4	6	12	8	3

Hãy tìm các tứ phân vị cho mẫu số liệu này.

....
....
....

. . . .

. . . .

III. MỐT

Mốt của mẫu số liệu là giá trị xuất hiện với tần số lớn nhất.

NHẬN XÉT. Có thể dùng mốt để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu khi mẫu số liệu có nhiều giá trị trùng nhau.

Ví dụ 4

Thời gian truy cập Internet (đơn vị giờ) trong một ngày của một số học sinh lớp 10 được cho như sau:

$$0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \quad 4 \quad 4 \quad 5 \quad 6.$$

Tìm mốt cho mẫu số liệu này.

Lời giải. Vì số học sinh truy cập Internet 1 giờ mỗi ngày là lớn nhất (có 3 học sinh) nên mốt là 1.

NHẬN XÉT.

- Mốt có thể không là duy nhất. Chẳng hạn, với mẫu số liệu

$$8 \quad 7 \quad 10 \quad 9 \quad 7 \quad 5 \quad 7 \quad 8 \quad 8$$

  các số 7; 8 đều xuất hiện với số lần lớn nhất (3 lần) nên mẫu số liệu này có hai mốt là 7 và 8.

- Khi các giá trị trong mẫu số liệu xuất hiện với tần số như nhau thì mẫu số liệu không có mốt.

- Mốt còn được định nghĩa cho mẫu dữ liệu định tính (dữ liệu không phải là số). Ví dụ báo Tuổi trẻ đã thực hiện thăm dò ý kiến của bạn đọc với câu hỏi "Theo bạn, VFF nên chọn huấn luyện viên ngoại hay nội dẫn dắt đội tuyển bóng đá nam Việt Nam?".

Tại thời điểm 21 giờ ngày 27-4-2021 kết quả bình chọn như sau:

Lựa chọn	Huấn luyện viên nội	Huấn luyện viên ngoại	Ý kiến khác
Số lượt bình chọn	1 897	3 781	747

Trong mẫu dữ liệu này, lựa chọn "huấn luyện viên ngoại" có nhiều người bình chọn nhất, được gọi là *mốt*.

(4) Hãy tính các số đặc trưng đo xu thế trung tâm cho mẫu số liệu về điểm khảo sát của lớp A và lớp B ở đầu bài học để phân tích và so sánh hiệu quả học tập của hai phương

pháp này.

Hai phương pháp học tiếng Anh khác nhau được áp dụng cho hai lớp A và B có trình độ tiếng Anh tương đương nhau. Sau hai tháng, điểm khảo sát tiếng Anh (thang điểm 10) của hai lớp được cho như hình bên.

Lớp A

2	7	6	3	9
8	6	7	9	2
5	7	5	9	8
8	7	4	3	5
5	4	5	7	7

Lớp B

6	7	6	4	7
9	3	8	7	5
5	6	8	7	4
5	3	10	7	9
6	7	6	7	5

....

....

....

....

....

IV. BÀI TẬP ÔN LUYỆN

Bài 1. Tìm số trung bình, trung vị, mốt và tứ phân vị của mỗi mẫu số liệu sau đây:

a) Số điểm mà năm vận động viên bóng rổ ghi được trong một trận đấu:

9 8 15 8 20

b) Giá của một số loại giày (đơn vị nghìn đồng):

350 300 650 300 450 500 300 250

c) Số kênh được chiếu của một số hãng truyền hình cáp:

36 38 33 34 32 30 34 35

Bài 2. Hãy chọn số đặc trưng đo xu thế trung tâm của mỗi mẫu số liệu sau. Giải thích và tính giá trị của số đặc trưng đó.

a) Số mặt trăng đã biết của các hành tinh:

Hành tinh	Thủy tinh	Kim tinh	Trái Đất	Hỏa tinh	Mộc tinh	Thổ tinh	Thiên Vương tinh	Hải Vương tinh
Số mặt trăng	0	0	1	2	63	34	27	13

b) Số đường chuyền thành công trong một trận đấu của một số cầu thủ bóng đá:

32 24 20 14 23

c) Chỉ số IQ của một nhóm học sinh: 60 72 63 83 68 74 90 86 74 80.

d) Các sai số trong phép đo: 10 15 18 15 14 13 42 15 12 14 42.

Bài 3. Số lượng học sinh giỏi Quốc gia năm học 2018 - 2019 của 10 trường Trung học phổ thông được cho như sau: 0 0 4 0 0 0 10 0 6 0.

a) Tìm số trung bình, mốt, các tứ phân vị của mẫu số liệu trên.

b) Giải thích tại sao tứ phân vị thứ nhất và trung vị trùng nhau.

Bài 4. Bảng sau đây cho biết số chỗ ngồi của một số sân vận động được sử dụng trong Giải Bóng đá Vô địch Quốc gia Việt Nam năm 2018 (số liệu gần đúng).

Sân vận động	Cẩm Phả	Thiên Trường	Hàng Đẫy	Thanh Hoá	Mỹ Đình
Chỗ ngồi	20 120	21 315	23 405	20 120	37 546

Các giá trị số trung bình, trung vị, mốt bị ảnh hưởng như thế nào nếu bỏ đi số liệu chỗ ngồi của Sân vận động Quốc gia Mỹ Đình?

V. LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 1. Tìm số trung bình, trung vị, mốt và tứ phân vị của mỗi mẫu số liệu sau đây:

a) Số điểm mà năm vận động viên bóng rổ ghi được trong một trận đấu:

9 8 15 8 20

b) Giá của một số loại giày (đơn vị nghìn đồng):

350 300 650 300 450 500 300 250

c) Số kênh được chiếu của một số hãng truyền hình cáp:

36 38 33 34 32 30 34 35

Hướng dẫn giải.

a) Số trung bình là $\dfrac{8\cdot 2+9+15+20}{5}=12$.

Sắp xếp số liệu theo thứ tự không giảm: 8 8 9 15 20.

Trung vị là 9.

Số 8 xuất hiện nhiều nhất nên mốt là 8.

Tứ phân vị $Q_1=8; Q_2=9; Q_3=17.5$.

b) Số trung bình là $\dfrac{250+300\cdot 3+350+450+500+650}{8}=387.5$.

Sắp xếp số liệu theo thứ tự không giảm: 250 300 300 300 350 450 500 650.

Trung vị là 325.

Mốt là 300.

Tứ phân vị $Q_1=300; Q_2=325; Q_3=475$.

c) Số trung bình là $\dfrac{30+32+33+34\cdot 2+35+36+38}{8}=34$.

Sắp xếp số liệu theo thứ tự không giảm: 30 32 33 34 34 35 36 38.

Trung vị là 34.

Mốt là 34.

Tứ phân vị $Q_1=32.5; Q_2=34; Q_3=35.5$.

Bài 2. Hãy chọn số đặc trưng đo xu thế trung tâm của mỗi mẫu số liệu sau. Giải thích và tính giá trị của số đặc trưng đó.

a) Số mặt trăng đã biết của các hành tinh:

Hành tinh	Thủy tinh	Kim tinh	Trái Đất	Hỏa tinh	Mộc tinh	Thổ tinh	Thiên Vương tinh	Hải Vương tinh
Số mặt trăng	0	0	1	2	63	34	27	13

b) Số đường chuyền thành công trong một trận đấu của một số cầu thủ bóng đá:

32 24 20 14 23

c) Chỉ số IQ của một nhóm học sinh: 60 72 63 83 68 74 90 86 74 80.

d) Các sai số trong phép đo: 10 15 18 15 14 13 42 15 12 14 42.

Hướng dẫn giải.

a) Chọn số đặc trưng là tứ phân vị, vì các số liệu không đồng đều nhau, nhiều số liệu trong mẫu chênh lệch lớn so với trung vị.

Sắp xếp số liệu theo thứ tự không giảm: 0 0 1 2 13 27 34 63.

Tứ phân vị $Q_1=0.5; Q_2=7.5; Q_3=30.5$.

b) Chọn số đặc trưng là số trung bình, các giá trị không lặp lại.
Số trung bình là $\dfrac{32+24+20+14+23}{5}=22.6$.

c) Chọn số đặc trưng là trung bình, vì các số liệu gần nhau. Số trung bình là:
$\dfrac{60+63+68+72+74\cdot 2+80+83+86+90}{10}=75$.

d) Chọn số đặc trưng là trung vị, vì có số 42 lớn bất thường. Trung vị là 15.

Bài 3. Số lượng học sinh giỏi Quốc gia năm học 2018 - 2019 của 10 trường Trung học phổ thông được cho như sau: 0 0 4 0 0 0 10 0 6 0.

a) Tìm số trung bình, mốt, các tứ phân vị của mẫu số liệu trên.

b) Giải thích tại sao tứ phân vị thứ nhất và trung vị trùng nhau.

Hướng dẫn giải.

a) Số trung bình là $\dfrac{0\cdot 7+4+6+10}{10}=2$.

Sắp xếp số liệu theo thứ tự không giảm: 0 0 0 0 0 0 0 4 6 10.

Số 0 xuất hiện nhiều nhất nên mốt là 0.

Tứ phân vị $Q_1=0; Q_2=0; Q_3=4$.

b) Tứ phân vị thứ nhất và trung vị trùng nhau do mẫu có 10 số liệu mà số 0 đã xuất hiện 7 lần.

Bài 4. Bảng sau đây cho biết số chỗ ngồi của một số sân vận động được sử dụng trong Giải Bóng đá Vô địch Quốc gia Việt Nam năm 2018 (số liệu gần đúng).

Sân vận động	Cẩm Phả	Thiên Trường	Hàng Đẫy	Thanh Hoá	Mỹ Đình
Chỗ ngồi	20 120	21 315	23 405	20 120	37 546

Các giá trị số trung bình, trung vị, mốt bị ảnh hưởng như thế nào nếu bỏ đi số liệu chỗ ngồi của Sân vận động Quốc gia Mỹ Đình?

Hướng dẫn giải. Số trung bình ban đầu là $\dfrac{20120+21315+23405+20120+37546}{5}=24501.2$.

Sắp xếp số liệu theo thứ tự không giảm: 20120 20120 21315 23405 37546.

Mốt là 20120. Trung vị là 21315.

Nếu bỏ số liệu chỗ ngồi của Sân vận động Quốc gia Mỹ Đình:

Số trung bình là $\dfrac{20120+21315+23405+20120}{4}=21240$.

Sắp xếp số liệu theo thứ tự không giảm: 20120 20120 21315 23405.

Mốt là 20120. Trung vị mới là $\dfrac{20120+21315}{2}=20717.5$.

Vậy nếu bỏ số liệu chỗ ngồi của Sân vận động Quốc gia Mỹ Đình thì mốt giữ nguyên, số trung bình và trung vị sẽ thay đổi.

§3 CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN

I. KHOẢNG BIẾN THIÊN VÀ KHOẢNG TỨ PHÂN VỊ

Khoảng biến thiên, kí hiệu là R, là hiệu số giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trong mẫu số liệu.

NHẬN XÉT. Khoảng biến thiên dùng để đo độ phân tán của mẫu số liệu. Khoảng biến thiên càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.

Ví dụ 1

Điểm kiểm tra học kì môn Toán của các bạn Tổ 1, Tổ 2 lớp 10A được cho như sau:

Tổ 1: 7 8 8 9 8 8 8.

Tổ 2: 10 6 8 9 9 7 8 7 8.

a) Điểm kiểm tra trung bình của hai tổ có như nhau không?

b) Tính các khoảng biến thiên của hai mẫu số liệu. Căn cứ trên chỉ số này, các bạn tổ nào học đồng đều hơn?

Lời giải.

a) Điểm kiểm tra trung bình của hai tổ đều bằng 8.

b) Đối với Tổ 1: Điểm kiểm tra thấp nhất, cao nhất tương ứng là 7; 9. Do đó khoảng biến thiên là: $R_1 = 9 - 7 = 2$.

Đối với Tổ 2: Điểm kiểm tra thấp nhất, cao nhất tương ứng là 6; 10. Do đó khoảng biến thiên là: $R_2 = 10 - 6 = 4$.

Do $R_2 > R_1$ nên ta nói các bạn Tổ 1 học đều hơn các bạn Tổ 2.

(1) Mẫu số liệu sau cho biết chiều cao (đơn vị cm) của các bạn trong tổ:

163 159 172 167 165 168 170 161.

Tính khoảng biến thiên của mẫu số liệu này.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

» Sưu tầm và biên soạn: Lê Minh Kha - 0399653362

NHẬN XÉT. Sử dụng khoảng biến thiên có ưu điểm là đơn giản, dễ tính toán song khoảng biến thiên chỉ sử dụng thông tin của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất mà bỏ qua thông tin từ tất cả các giá trị khác. Do đó, khoảng biến thiên rất dễ bị ảnh hưởng bởi các giá trị bất thường.

Khoảng tứ phân vị, kí hiệu là Δ_Q, là hiệu số giữa tứ phân vị thứ ba và tứ phân vị thứ nhất, tức là:

$$\Delta_Q = Q_3 - Q_1.$$

NHẬN XÉT. Về bản chất, khoảng tứ phân vị là khoảng biến thiên của 50% số liệu chính giữa của mẫu số liệu đã sắp xếp.

Khoảng tứ phân vị cũng là một số đo độ phân tán của mẫu số liệu. Khoảng tứ phân vị càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.
Một số tài liệu gọi khoảng biến thiên là *biên độ* và khoảng tứ phân vị là *độ trải giữa*.

Ví dụ 2

Mẫu số liệu sau cho biết số ghế trống tại một rạp chiếu phim trong 9 ngày:

7 8 22 20 15 18 19 13 11.

Tìm khoảng tứ phân vị cho mẫu số liệu này.

Lời giải. Trước hết, ta sắp xếp mẫu số liệu theo thứ tự không giảm:

7 8 11 13 15 18 19 20 22.

Mẫu số liệu gồm 9 giá trị nên trung vị là số ở vị trí chính giữa $Q_2 = 15$.

Nửa số liệu bên trái là 7, 8, 11, 13 gồm 4 giá trị, hai phần tử chính giữa là 8, 11.

Do đó, $Q_1 = (8 + 11) : 2 = 9,5$.

Nửa số liệu bên phải là 18, 19, 20, 22 gồm 4 giá trị, hai phần tử chính giữa là 19, 20.

Do đó, $Q_3 = (19 + 20) : 2 = 19,5$.

Vậy khoảng tứ phân vị cho mẫu số liệu là $\Delta_Q = 19,5 - 9,5 = 10$.

(2) Mẫu số liệu sau đây cho biết số bài hát ở mỗi album trong bộ sưu tập của An:

12 7 10 9 12 9 10 11 10 14.

Hãy tìm khoảng tứ phân vị cho mẫu số liệu này.

....

....

....

....

....

◈ **Phương sai** là giá trị $s^2 = \dfrac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2}{n}$

◈ Căn bậc hai của phương sai, $s=\sqrt{s^2}$, được gọi là **độ lệch chuẩn**.

NHẬN XÉT. Người ta còn sử dụng đại lượng để đo độ phân tán của mẫu số liệu:

$$\hat{s}^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2}{n-1}.$$

Nếu số liệu càng phân tán thì phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn

Ví dụ 3

Mẫu số liệu sau đây cho biết sĩ số của 5 lớp khối 10 tại một trường Trung học:

43 45 46 41 40.

Tìm phương sai và độ lệch chuẩn cho mẫu số liệu này.

Lời giải. Số trung bình của mẫu số liệu là: $\bar{x} = \dfrac{43+45+46+41+40}{5} = 43.$

Ta có bảng sau:

Giá trị	Độ lệch	Bình phương độ lệch
43	$43-43=0$	0
45	$45-43=2$	4
46	$46-43=3$	9
41	$41-43=-2$	4
40	$40-43=-3$	9
Tổng		26

Mẫu số liệu gồm 5 giá trị nên $n=5$. Do đó phương sai là: $s^2 = \dfrac{26}{5} = 5,2$.

Độ lệch chuẩn là: $s=\sqrt{5,2}\approx 2,28$.

(3) Dùng đồng hồ đo thời gian có độ chia nhỏ nhất đến 0,001 giây để đo 7 lần thời gian rơi tự do của một vật bắt đầu từ điểm A ($v_A=0$) đến điểm B. Kết quả đo như sau:

0,398 0,399 0,408 0,410 0,406 0,405 0,402.

(Theo Bài tập Vật lí 10, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2018)

Hãy tính phương sai và độ lệch chuẩn cho mẫu số liệu này. Qua các đại lượng này, em có nhận xét gì về độ chính xác của phép đo trên?

II. BÀI TẬP ÔN LUYỆN

Bài 1. Mỗi khẳng định sau đúng hay sai?

(1) Nếu các giá trị của mẫu số liệu càng tập trung quanh giá trị trung bình thì độ lệch chuẩn càng lớn.

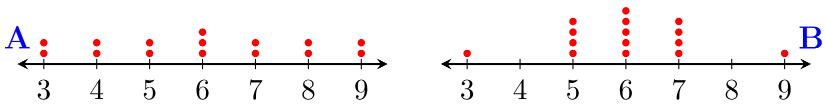
(2) Khoảng biến thiên chỉ sử dụng thông tin của giá trị lớn nhất và bé nhất, bỏ qua thông tin của các giá trị còn lại.

(3) Khoảng tứ phân vị có sử dụng thông tin của giá trị lớn nhất, giá trị bé nhất.

(4) Khoảng tứ phân vị chính là khoảng biến thiên của nửa dưới mẫu số liệu đã sắp xếp.

(5) Các số đo độ phân tán đều không âm.

Bài 2. Cho hai biểu đồ chấm biểu diễn hai mẫu số liệu A, B như sau:



Không tính toán, hãy cho biết:

a) Hai mẫu số liệu này có cùng khoảng biến thiên và số trung bình không?

b) Mẫu số liệu nào có phương sai lớn hơn?

Bài 3. Cho mẫu số liệu gồm 10 số dương không hoàn toàn giống nhau. Các số đo độ phân tán (khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị, độ lệch chuẩn) sẽ thay đổi như thế nào nếu:

a) Nhân mỗi giá trị của mẫu số liệu với 2.

b) Cộng mỗi giá trị của mẫu số liệu với 2.

Bài 4. Từ mẫu số liệu về thuế thuốc lá của 51 thành phố tại một quốc gia, người ta tính được:

Giá trị nhỏ nhất bằng 2,5; $Q_1 = 36; Q_2 = 60; Q_3 = 100$; giá trị lớn nhất bằng 205.

a) Tỉ lệ thành phố có thuế thuốc lá lớn hơn 36 là bao nhiêu?

b) Chỉ ra hai giá trị sao cho có 50% giá trị của mẫu số liệu nằm giữa hai giá trị này.

c) Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu.

Bài 5. Mẫu số liệu sau đây cho biết cân nặng của 10 trẻ sơ sinh (đơn vị kg):

2,977	3,155	3,920	3,412	4,236
2,593	3,270	3,813	4,042	3,387

Hãy tính khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị và độ lệch chuẩn cho mẫu số liệu này.

Bài 6. Tỉ lệ thất nghiệp ở một số quốc gia vào năm 2007 (đơn vị %) được cho như sau:

7,8 3,2 7,7 8,7 8,6 8,4 7,2 3,6

5,0 4,4 6,7 7,0 4,5 6,0 5,4.

Hãy tìm các giá trị bất thường (nếu có) của mẫu số liệu trên.

III. LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 1. Mỗi khẳng định sau đúng hay sai?

(1) Nếu các giá trị của mẫu số liệu càng tập trung quanh giá trị trung bình thì độ lệch chuẩn càng lớn.

(2) Khoảng biến thiên chỉ sử dụng thông tin của giá trị lớn nhất và bé nhất, bỏ qua thông tin của các giá trị còn lại.

(3) Khoảng tứ phân vị có sử dụng thông tin của giá trị lớn nhất, giá trị bé nhất.

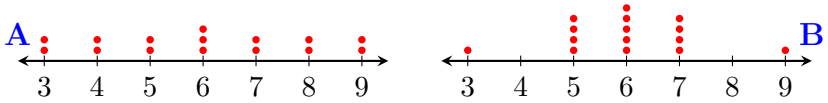
(4) Khoảng tứ phân vị chính là khoảng biến thiên của nửa dưới mẫu số liệu đã sắp xếp.

(5) Các số đo độ phân tán đều không âm.

Hướng dẫn giải. Các khẳng định đúng: (2), (5).

Các khẳng định sai: (1), (3), (4).

Bài 2. Cho hai biểu đồ chấm biểu diễn hai mẫu số liệu A, B như sau:



Không tính toán, hãy cho biết:

a) Hai mẫu số liệu này có cùng khoảng biến thiên và số trung bình không?

b) Mẫu số liệu nào có phương sai lớn hơn?

Hướng dẫn giải.

a) Khoảng biến thiên của hai mẫu số liệu bằng nhau. Số trung bình của hai mẫu số liệu bằng nhau.

b) Mẫu số liệu A có phương sai lớn hơn mẫu số liệu B (do dữ liệu ở mẫu A phân tán xa giá trị trung bình hơn mẫu B).

Bài 3. Cho mẫu số liệu gồm 10 số dương không hoàn toàn giống nhau. Các số đo độ phân tán (khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị, độ lệch chuẩn) sẽ thay đổi như thế nào nếu:

a) Nhân mỗi giá trị của mẫu số liệu với 2.

b) Cộng mỗi giá trị của mẫu số liệu với 2.

Hướng dẫn giải.

a) Nhân mỗi giá trị của mẫu số liệu với 2 thì:

Khoảng biến thiên tăng gấp 2 lần.

Khoảng tứ phân vị tăng gấp 2 lần.

Độ lệch chuẩn tăng gấp 2 lần.

b) Cộng mỗi giá trị của mẫu số liệu với 2 thì:

Khoảng biến thiên giữ nguyên.

Khoảng tứ phân vị giữ nguyên.

Độ lệch chuẩn giữ nguyên.

Bài 4. Từ mẫu số liệu về thuế thuốc lá của 51 thành phố tại một quốc gia, người ta tính được: Giá trị nhỏ nhất bằng 2,5; $Q_1 = 36; Q_2 = 60; Q_3 = 100$; giá trị lớn nhất bằng 205.

a) Tỉ lệ thành phố có thuế thuốc lá lớn hơn 36 là bao nhiêu?

b) Chỉ ra hai giá trị sao cho có 50% giá trị của mẫu số liệu nằm giữa hai giá trị này.

c) Tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu.

Hướng dẫn giải.

a) Từ mẫu số liệu về thuế thuốc lá của 51 thành phố tại một quốc gia, người ta tính được $Q_1 = 36$ nên có 12 thành phố có thuế thuốc lá nhỏ hơn 36 (khoảng 25% số thành phố). Theo đó, có khoảng $51 - 12 = 39$ thành phố có mức thuế lớn hơn 36.

b) Hai giá trị có 50% giá trị của mẫu số liệu nằm giữa là $Q_1 = 36$ và $Q_3 = 100$.

c) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu là $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 100 - 36 = 64$.

Bài 5. Mẫu số liệu sau đây cho biết cân nặng của 10 trẻ sơ sinh (đơn vị kg):

2,977	3,155	3,920	3,412	4,236
2,593	3,270	3,813	4,042	3,387

Hãy tính khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị và độ lệch chuẩn cho mẫu số liệu này.

Hướng dẫn giải. Trước hết, ta sắp xếp mẫu số liệu theo thứ tự không giảm:

2,593 2,977 3,155 3,270 3,387 3,412 3,813 3,920 4,042 4,236.

Khoảng biến thiên là $R = 4,236 - 2,593 = 1,643$.

Ta có: $Q_2 = (3,387 + 3,412)/2 = 3,3995$; $Q_1 = 3,155$; $Q_3 = 3,920$.

Khoảng tứ phân vị là $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 3,920 - 3,155 = 0,765$.

Độ lệch chuẩn tính được là $s \approx 0,52$.

Bài 6. Tỉ lệ thất nghiệp ở một số quốc gia vào năm 2007 (đơn vị %) được cho như sau:

7,8	3,2	7,7	8,7	8,6	8,4	7,2	3,6
5,0	4,4	6,7	7,0	4,5	6,0	5,4.	

Hãy tìm các giá trị bất thường (nếu có) của mẫu số liệu trên.

Hướng dẫn giải. Từ mẫu số liệu ta tính được $Q_1 = 4,5$ và $Q_3 = 7,8$. Do đó, khoảng tứ phân vị là:

$$\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 7,8 - 4,5 = 3,3$$

Ta có các ngưỡng để xác định giá trị bất thường:

$$Q_1 - 1,5\Delta_Q = 4,5 - 1,5 \cdot 3,3 = -0,45$$

$$Q_3 + 1,5\Delta_Q = 7,8 + 1,5 \cdot 3,3 = 12,75$$

Vì tất cả các giá trị trong mẫu số liệu đều nằm trong khoảng $[-0,45; 12,75]$ nên trong mẫu số liệu trên không có giá trị bất thường.

§4 ÔN TẬP CHƯƠNG V

I. TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Câu 1. Mẫu số liệu sau ghi lại cân nặng (đơn vị là ki-lô-gam) của các bạn tổ 2 lớp 10A

38	40	55	44	50	82	78	65	48	44

Trung vị của mẫu số liệu trên là

(A) 50. (B) 49. (C) 54. (D) 48.

Câu 2. Tìm mốt của mẫu số liệu sau: 11; 17; 13; 14; 15; 14; 15; 16; 17; 17.

(A) 17. (B) 14. (C) 15. (D) 13.

Câu 3. Khảo sát chiều cao của 5 học sinh lớp 8 lần lượt được các số liệu sau

Chiều cao (cm)	156	158	160	162	164

Tứ phân vị thứ nhất Q_1 của mẫu số liệu trên là

(A) 156. (B) 158. (C) 157. (D) 159.

Câu 4. Một số tuyến xe buýt nội tỉnh của Bắc Ninh có cự ly (đơn vị: km) được cho trong bảng sau đây (nguồn http://vi.wikipedia.org/wiki/Giao-thông-Bắc-Ninh)

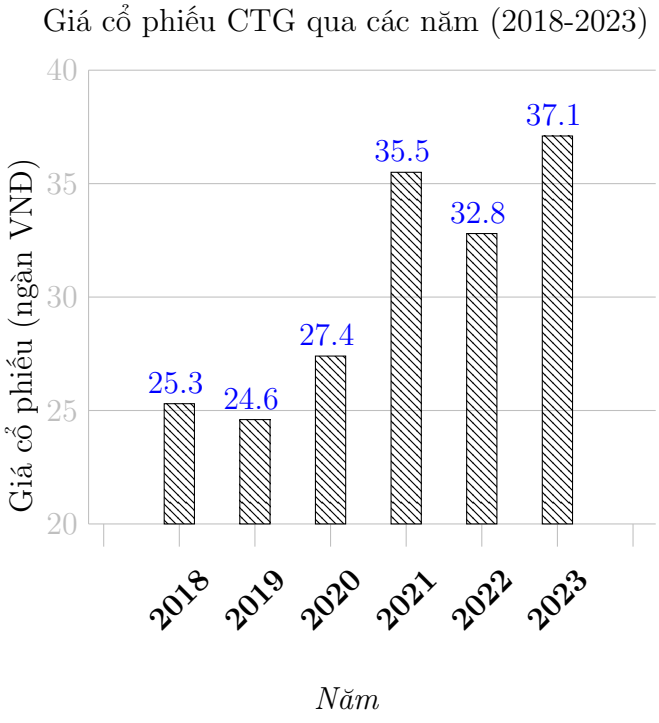
Tuyến	BN01	BN02	BN03	BN08	BN27	BN68	BN86A	BN86B
Cự ly	36,4	28,2	17,8	48,1	36,4	37,6	42,5	35,8

Số trung bình của mẫu số liệu đã cho bằng

(A) 35,16. (B) 35,44. (C) 35,20. (D) 35,35.

Câu 5. Dựa vào biểu đồ giá cổ phiếu của ngân hàng Công thương Việt Nam (Viettinbank), mã

cổ phiếu CTG qua các năm



Giá trị trung bình của giá cổ phiếu CTG từ năm 2018 đến năm 2023 là

Ⓐ 29,95. Ⓑ 28,83. Ⓒ 30,45. Ⓓ 30,15.

Câu 6. Cho bảng phân bố tần số về sản lượng cà phê thu được trong một năm (kg/ sào) của 20 hộ gia đình như sau

Sản lượng	111	112	113	114	115	116	117
Tần số	1	3	4	5	4	2	1

Trung vị của bảng số liệu trên bằng

Ⓐ 114. Ⓑ 113,5. Ⓒ 117. Ⓓ 111.

Câu 7. Số đôi giày bán ra trong Quý IV năm 2020 của một cửa hàng được thống kê trong bảng tần số sau

Cỡ giày	37	38	39	40	41	42	43	44
Tần số (Số đôi giày bán được)	40	48	52	70	54	47	28	3

Trong Quý IV, cỡ giày cửa hàng bán được nhiều nhất là

Ⓐ 40. Ⓑ 44. Ⓒ 41. Ⓓ 3.

Câu 8. Đại lượng dùng để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu là

Ⓐ Giá trị đại diện. Ⓑ Phương sai.
Ⓒ Tần số. Ⓓ Giá trị trung bình.

Câu 9. Mẫu số liệu thống kê thời gian (đơn vị: phút) đọc hết một cuốn sách của 10 học sinh

lớp $10A$ như sau:

120	125	110	101	132	127	133	112	123	130

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên bằng bao nhiêu?

Ⓐ 32. Ⓑ 124. Ⓒ 18. Ⓓ 2.

Câu 10. Đại lượng dùng để đo độ phân tán của mẫu số liệu là

Ⓐ Tần số. Ⓑ Giá trị đại diện.
Ⓒ Độ lệch chuẩn. Ⓓ Trung vị.

Câu 11. Cho dãy số liệu 1, 2, 5, 7, 8, 9, 10. Tìm số trung vị trong dãy số liệu đã cho.

Ⓐ $7,5$. Ⓑ 6. Ⓒ 8. Ⓓ 7.

Câu 12. Tuổi đời của 16 công nhân trong xưởng sản xuất được thống kê trong bảng sau

Tuổi	25	26	27	29	30	33	Cộng
Số người	2	3	4	3	3	1	16

Tìm số trung bình $\overline{x}$ của mẫu số liệu trên.

Ⓐ 27,875. Ⓑ 27. Ⓒ 27,75. Ⓓ 28.

Câu 13. Cho mẫu số liệu $\{10; 8; 6; 2; 4\}$. Độ lệch chuẩn của mẫu là:

Ⓐ 2,8. Ⓑ 8. Ⓒ 6. Ⓓ 2,4.

Câu 14. Số ôtô đi qua một cây cầu mỗi ngày trong một tuần đếm được như sau:

83	74	71	79	83	69	92

Phương sai và độ lệch chuẩn lần lượt là

Ⓐ 78,71 và 8,87. Ⓑ 52,99 và 7,28.
Ⓒ 61,82 và 7,86. Ⓓ 55,63 và 7,46.

Câu 15. Tiền thưởng (triệu đồng) cho cán bộ và nhân viên trong công ty X được trình bày trong bảng tần số sau đây.

Tiền thưởng (x)	2	3	4	5	6	
Tần số (n)	5	15	10	6	7	$n = 43$

Phương sai là

Ⓐ 1,59. Ⓑ 1,58. Ⓒ 1,61. Ⓓ 1,57.

Câu 16. Trên con đường A, trạm kiểm soát đã ghi lại tốc độ của 30 chiếc ô tô được trình bày trong bảng tần số sau đây

Vận tốc	60	62	63	65	68	69	70	73	75	76	80	82	83	84	85	88	90
Tần số	2	2	1	2	3	1	2	2	3	2	3	1	1	2	1	1	1

Phương sai của tốc độ các ô tô trên con đường A là

Ⓐ 74,77. Ⓑ 75,36. Ⓒ 73,63. Ⓓ 72,1.

Câu 17. Số lượng khách đến tham quan một điểm du lịch trong 12 tháng như sau

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Số khách	430	550	430	520	550	515	550	110	520	430	550	880

Độ lệch chuẩn là

Ⓐ 567,56. Ⓑ 163,84. Ⓒ 171,13. Ⓓ 143,3.

Câu 18. Cho mẫu số liệu thống kê $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Tính (gần đúng) độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên?

Ⓐ 2,45. Ⓑ 2,58. Ⓒ 6,75. Ⓓ 6,25.

Câu 19. Điểm thi môn Toán lớp $10A$ của một Trường trung học phổ thông được trình bày ở bảng phân bố tần số sau

Điểm thi	5	6	7	8	9	10	
Tần số	7	5	10	12	4	2	$n=40$

Trong các giá trị dưới đây, giá trị nào gần nhất với phương sai của bảng phân bố tần số trên?

Ⓐ 0,94. Ⓑ 3,94. Ⓒ 2,94. Ⓓ 1,94.

Câu 20. Phương sai của mẫu số liệu $\{x_1;x_2;\ldots;x_N\}$ bằng:

Ⓐ Hai lần độ lệch chuẩn.
Ⓑ Căn bậc hai của độ lệch chuẩn.
Ⓒ Bình phương của độ lệch chuẩn.
Ⓓ $S^2=(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_N-\bar{x})^2$.

Câu 21. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

Ⓐ Các số đo độ phân tán có thể nhỏ hơn 0.
Ⓑ Khoảng tứ phân vị có sử dụng thông tin của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.
Ⓒ Khoảng biến thiên chỉ sử dụng thông tin của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất, bỏ qua thông tin của các giá trị còn lại.
Ⓓ Nếu các giá trị của mẫu càng tập trung quanh giá trị trung bình thì độ lệch chuẩn càng lớn.

BẢNG ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á	Câu	Đ.Á
1	A	2	A	3	C	4	D	5	C
6	A	7	A	8	D	9	C	10	C
11	D	12	A	13	A	14	D	15	A
16	D	17	B	18	B	19	D	20	C
21	C								

II. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Bài 1. Điều tra về chiều cao (đơn vị: cm) của 12 học sinh tổ 1 lớp 10C thu được bảng số liệu sau:

154 150 152 160 165 168 154 170 163 172 152 160

Xét tính đúng - sai của các khẳng định sau:

a) Số trung vị của mẫu số liệu là 160cm.

b) Chiều cao trung bình của các học sinh tổ 1 là 160cm.

c) Mẫu số liệu có khoảng tứ phân vị là 6cm.

d) Độ chênh lệch chiều cao tối đa của các học sinh là 22cm.

Bài 2. Thống kê điểm một bài kiểm tra môn Lịch sử của tất cả học sinh lớp 10A ta được kết quả như sau:

Điểm	5	6	7	8	9	10
Số học sinh	5	8	9	15	5	3

Xét tính đúng - sai của các khẳng định sau:

a) Lớp 10A có 45 học sinh.

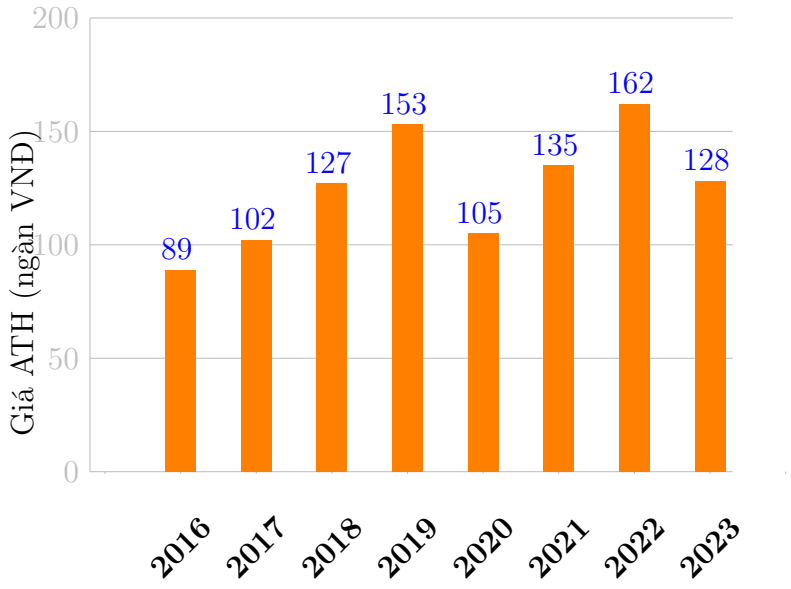
b) Có 5 học sinh đạt điểm 9 trở lên.

c) Không có học sinh nào đạt điểm dưới 5.

d) Điểm kiểm tra trung bình của lớp 10A lớn hơn 8.

Bài 3. Biểu đồ sau cho biết giá cao nhất của cổ phiếu MWG (Thế Giới Di Động) qua các năm:

Giá ATH của cổ phiếu MWG hàng năm (2016-2023)



Dựa vào biểu đồ, xét tính đúng - sai của các mệnh đề sau (kết quả làm tròn đến hàng phần mười):

a) Giá trị trung bình của giá cổ phiếu MWG là 125,1 nghìn đồng.

b) Độ lệch chuẩn của giá cổ phiếu MWG là 22,3 nghìn đồng.

c) Khoảng tứ phân vị của giá cổ phiếu MWG là 27,5 nghìn đồng.

d) Trung vị của giá cổ phiếu MWG là 114,5 nghìn đồng.

Bài 4. Bảng sau đây cho biết số lần học tiếng Anh trên Internet trong một tuần của 40 học sinh lớp 10:

Số lần	0	1	2	3	4	5
Số học sinh	3	5	7	12	9	4

Xét tính đúng - sai của các khẳng định sau:

a) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên là 2.

b) Số trung vị của mẫu số liệu trên là 3.

c) Mốt của mẫu số liệu trên là 4.

d) Số trung bình của mẫu số liệu trên bằng 5.

Bài 5. Hai xạ thủ A và B mỗi xạ thủ bắn 10 phát đạn. Kết quả được thể hiện trong bảng sau:

A	7	9	6	9	8	6	8	7	10	8
B	8	7	8	9	6	7	7	9	9	8

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điểm thấp nhất của xạ thủ A là 6.

b) Điểm trung bình của xạ thủ A cao hơn điểm trung bình của xạ thủ B.

c) Độ lệch chuẩn bảng điểm của xạ thủ A lớn hơn độ lệch chuẩn bảng điểm của xạ thủ B.

d) Xạ thủ A bắn đều hơn xạ thủ B.

Bài 6. Mẫu số liệu sau đây cho biết chiều cao của 10 học sinh (đơn vị: cm):

165	155	160	145	157	162	148	170	172	152

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Chiều cao trung bình của 10 học sinh là $157,6$.

b) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là 27.

c) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu là 13.

d) Phương sai của mẫu số liệu trên nhỏ hơn 64.

Bài 7. Mẫu số liệu sau cho biết số ghế trống tại một rạp chiếu phim trong 9 ngày là:

7	8	22	20	18	15	19	13	11

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là $R = 15$.

b) Trung vị của mẫu số liệu là $Q_2 = 18$.

c) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu là $\Delta_Q = 10$.

d) Phương sai của mẫu số liệu là $s^2 \approx 25,73$.

Bài 8. Mẫu số liệu sau cho biết sĩ số của 5 lớp khối 10 tại một trường THPT là:

40	45	46	41	43

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là $R = 3$.

b) Trung vị của mẫu số liệu là $Q_2 = 46$.

c) Số trung bình của mẫu số liệu là $\bar{x} = 43$.

d) Phương sai của mẫu số liệu là $s^2 = 5,2$.

Bài 9. Tỉ lệ trẻ suy dinh dưỡng (tính theo cân nặng ứng với độ tuổi) của 10 tỉnh thuộc Đồng bằng sông Hồng được cho như sau:

5,5	13,8	10,2	12,2	11,0	7,4	11,4	13,1	12,5	13,4

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là $R = 8,3$.

b) Trung vị của mẫu số liệu là $Q_2 = 9,2$.

c) Số trung bình của mẫu số liệu là $\bar{x} = 11,05$.

d) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu là $s \approx 2,57$.

Bài 10. Số lượng gạo bán ra tại một quầy hàng các tháng (đơn vị: yến) trong một năm được cho bởi bảng sau:

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Số lượng	410	430	450	430	525	550	950	450	800	635	760	560

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mốt của bảng số liệu trên là 430.

b) Số trung vị của bảng số liệu trên là 525.

c) Khoảng tứ vị phân của mẫu số liệu là 257.

d) Phương sai của mẫu số liệu trên là: $s^2 = \dfrac{49375}{2}$.

Bài 11. Dưới đây là điểm kiểm tra giữa kì I của hai bạn An và Bình:

	Toán	Lý	Hóa	Sinh	Anh	Văn	Sử	Địa	CD	Tin	CN
An	8	7,5	7,8	8,3	9	7	8	8,2	9	8	8,3
Bình	8,5	9,5	9,5	8,5	9	5	5,5	6	10	9	8,5

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau: a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu điểm kiểm tra của An là 2. b) Điểm kiểm tra trung bình của học sinh An là 8,3. c) Điểm kiểm tra trung bình của học sinh Bình là 8.1. d) Bạn An học đều hơn bạn Bình.

Bài 12. Sản lượng lúa (đơn vị là tạ) của 40 thửa ruộng thí nghiệm có cùng diện tích được trình bày trong bảng tần số sau đây:

Sản lượng (x)	20	21	22	23	24	
Tần số (n)	5	8	11	10	6	$n = 40$

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mốt của mẫu số liệu là 11.

b) Số trung bình của mẫu số liệu là $\bar{x} = 23$.

c) Số trung vị của mẫu số liệu là $Me = 22$.

d) Phương sai của mẫu số liệu là $s^2 = 2,04$.

Bài 13. Mẫu số liệu sau đây cho biết cân nặng của 10 trẻ sơ sinh (đơn vị: kg):

2,977	3,155	3,920	3,412	4,236
2,593	3,270	3,813	4,042	3,5

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau: a) Số trung bình của mẫu số liệu là 4. b) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là 1,643. c) Số trung vị của mẫu số liệu là 3,8. d) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu là $s \approx 0,49$.

Bài 14. Điểm một bài kiểm tra môn Toán của một nhóm học sinh cho ở bảng số liệu sau:

Điểm	5	6	7	8	9	10
Số học sinh	2	5	6	8	3	1

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Trung vị của bảng số liệu là 6.

b) Khoảng biến thiên của bảng số liệu là $R = 5$.

c) Độ lệch chuẩn điểm của các học sinh nhỏ hơn 1 điểm.

d) Khoảng tứ phân vị của bảng số liệu là $\Delta_Q = 2$.

BẢNG ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

Câu	a	b	c	d	Câu	a	b	c	d	Câu	a	b	c	d
1	Đ	Đ	S	Đ	6	S	Đ	Đ	S	11	Đ	S	Đ	Đ
2	Đ	S	Đ	S	7	Đ	S	Đ	Đ	12	S	S	Đ	S
3	Đ	S	S	S	8	S	S	Đ	Đ	13	S	Đ	S	Đ
4	Đ	Đ	S	S	9	Đ	S	Đ	Đ	14	S	Đ	S	Đ
5	Đ	S	Đ	S	10	Đ	S	S	Đ					

III. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Bài 1. Tính tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu: $5; 6; 4; 7; 8; 6; 3; 7$.

Bài 2. Số liệu sau cho biết số con được sinh ra trong 20 hộ gia đình khảo sát ở một địa phương:

$$2 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 2 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 9 \quad 5 \quad 3 \quad 2 \quad 4 \quad 1 \quad 0 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 6.$$

Tìm độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đã cho? Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm.

Bài 3. Số liệu thống kê kết quả bài kiểm tra môn Toán của bạn Dũng là:

Điểm	8	6	7	5	9

Phương sai của mẫu số liệu đã cho bằng bao nhiêu?

Bài 4. Mẫu số liệu sau là thống kê số tiền (triệu đồng) mua phân bón XYZ trong một vụ mùa của 15 hộ nông dân ở một khu vực nông thôn thuộc khảo sát:

$$2,4 \quad 1,2 \quad 0,8 \quad 3,5 \quad 1,6 \quad 1,8 \quad 1,2 \quad 1,3 \quad 0,7 \quad 4,1 \quad 4,8 \quad 3,6 \quad 2,9 \quad 2,6$$

Tìm độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đã cho? Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm.

Bài 5. Hãy tìm độ lệch chuẩn của mẫu số liệu sau:

Giá trị	2	3	4	5	6
Tần số	4	2	5	2	6

Bài 6. Bảng số liệu sau thống kê nhiệt độ tại Thành phố Hồ Chí Minh trong một ngày của năm 2021 (đơn vị: $^\circ C$)

Giờ đo (h)	1	4	7	10	13	16	19	22
Nhiệt độ	27	26	28	32	34	35	30	28

Tìm độ lệch chuẩn của số liệu đã cho (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Bài 7. Điều tra số sách tham khảo môn Toán của 30 học sinh ở một lớp 10 của một trường THPT ta thu được mẫu số liệu:

Số sách (x_i)	1	2	3	4	5	6	7
Tần số (n_i)	2	7	6	3	4	4	4

Xác định độ lệch chuẩn của mẫu số liệu.

Bài 8. Cho bảng số liệu điểm kiểm tra môn Toán học kỳ 2 của 40 học sinh lớp 10C như sau: (thang điểm là 10)

Điểm	5	6	7	8	9	10	Cộng
Tần số	5	12	8	9	4	2	40

Phương sai S^2 của mẫu số liệu đã cho.

Bài 9. Cho bảng số liệu điểm kiểm tra cuối học kỳ 2 môn Hóa của 40 học sinh lớp 10A như sau: (thang điểm là 10)

Điểm	3	4	5	6	7	8	9	10	Cộng
Tần số	1	1	2	7	12	14	2	1	40

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên.

IV. TỰ LUẬN

Bài 1. Nhiệt độ trung bình các tháng trong một năm gần đây của tỉnh Bắc Ninh được cho bởi bảng thống kê bên dưới (đơn vị: độ C, nguồn: https://vi.weatherspark.com/).

17	18	21	24	27	29	29	29	28	25	22	18

Tìm mốt, trung vị và khoảng biến thiên của mẫu số liệu đã cho.

Bài 2. Bảng sau đây cho biết chiều cao của một nhóm học sinh

160	178	150	164	168	176	156	172

Tìm chiều cao trung bình và các tứ phân vị của mẫu số liệu trên.

Bài 3. Bà Hoa kiểm tra chiều cao của 30 cây trồng trong vườn và ghi lại bảng số liệu như sau

Chiều cao (m)	0,5	0,8	1,0	1,2	1,5	2,0
Số cây	2	3	15	6	3	1

Gọi S là tập hợp các giá trị bất thường của mẫu số liệu trên. Hãy xác định tổng tất cả các phần tử của tập hợp S.

Bài 4. Cho mẫu số liệu

2 3 13 17 16 18 19 20 21 22 23 24 28 35 38.

Trong mẫu số liệu trên, có bao nhiêu giá trị bất thường?

§5 LỜI GIẢI CHI TIẾT

I. TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Câu 1. Mẫu số liệu sau ghi lại cân nặng (đơn vị là ki-lô-gam) của các bạn tổ 2 lớp 10A

38	40	55	44	50	82	78	65	48	44

Trung vị của mẫu số liệu trên là

Ⓐ 50. Ⓑ 49. Ⓒ 54. Ⓓ 48.

Hướng dẫn giải. Sắp xếp mẫu số liệu theo thứ tự không giảm:

38 40 44 44 48 50 54 55 78 82

Vì $n = 11$ là số lẻ nên trung vị là giá trị thứ $\dfrac{n+1}{2} = \dfrac{11+1}{2} = 6$ trong dãy đã sắp xếp.

Suy ra trung vị của mẫu số liệu là 50. A

Câu 2. Tìm mốt của mẫu số liệu sau: 11; 17; 13; 14; 15; 14; 15; 16; 17; 17.

Ⓐ 17. Ⓑ 14. Ⓒ 15. Ⓓ 13.

Hướng dẫn giải. Số lần xuất hiện của các giá trị 11; 13; 14; 15; 16 và 17 lần lượt là 1; 1; 2; 2; 1 và 3.

Do đó, mẫu số liệu trên có mốt là 17. A

Câu 3. Khảo sát chiều cao của 5 học sinh lớp 8 lần lượt được các số liệu sau

Chiều cao (cm)	156	158	160	162	164

Tứ phân vị thứ nhất Q_1 của mẫu số liệu trên là

Ⓐ 156. Ⓑ 158. Ⓒ 157. Ⓓ 159.

Hướng dẫn giải. Do mẫu số liệu đã được sắp theo thứ tự tăng dần và có cỡ mẫu $n = 5$ nên tứ phân vị thứ nhất Q_1 của mẫu số liệu trên là $\dfrac{156+158}{2} = 157$. C

Câu 4. Một số tuyến xe buýt nội tỉnh của Bắc Ninh có cự ly (đơn vị: km) được cho trong bảng sau đây (nguồn http://vi.wikipedia.org/wiki/Giao-thông-Bắc-Ninh)

Tuyến	BN01	BN02	BN03	BN08	BN27	BN68	BN86A	BN86B
Cự ly	36,4	28,2	17,8	48,1	36,4	37,6	42,5	35,8

Số trung bình của mẫu số liệu đã cho bằng

Ⓐ 35,16. Ⓑ 35,44. Ⓒ 35,20. Ⓓ 35,35.

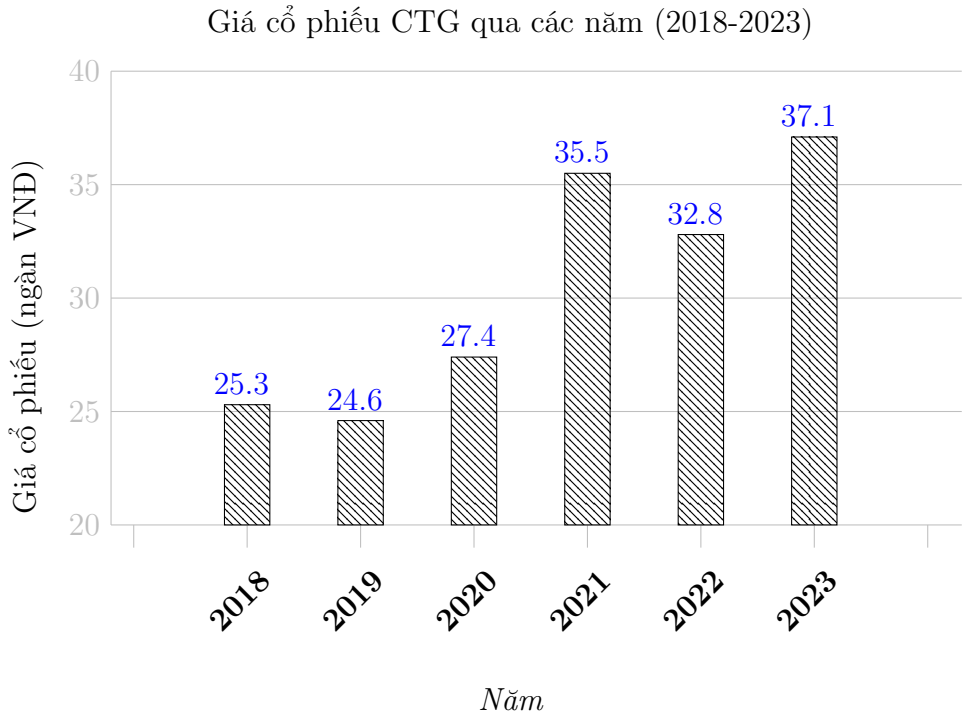
Hướng dẫn giải. Số trung bình của mẫu số liệu là

$$\overline{x} = \frac{36{,}4 + 28{,}2 + 17{,}8 + 48{,}1 + 36{,}4 + 37{,}6 + 42{,}5 + 35{,}8}{8} = 35{,}35.$$

D

Câu 5. Dựa vào biểu đồ giá cổ phiếu của ngân hàng Công thương Việt Nam (Viettinbank), mã

cổ phiếu CTG qua các năm



Giá trị trung bình của giá cổ phiếu CTG từ năm 2018 đến năm 2023 là

Ⓐ 29,95. Ⓑ 28,83. Ⓒ 30,45. Ⓓ 30,15.

Hướng dẫn giải. Giá trị trung bình của giá cổ phiếu CTG từ năm 2018 đến năm 2023 là

$$\frac{25{,}3+24{,}6+27{,}4+35{,}5+32{,}8+37{,}1}{6}=30{,}45.$$

C

Câu 6. Cho bảng phân bố tần số về sản lượng cà phê thu được trong một năm (kg/ sào) của 20 hộ gia đình như sau

Sản lượng	111	112	113	114	115	116	117
Tần số	1	3	4	5	4	2	1

Trung vị của bảng số liệu trên bằng

Ⓐ 114. Ⓑ 113,5. Ⓒ 117. Ⓓ 111.

Hướng dẫn giải. Mẫu số liệu trên có 20 giá trị và 2 giá trị đứng giữa (đứng thứ 10 và 11) khi sắp xếp theo thứ tự không giảm là 114; 114 nên trung vị của mẫu số liệu là $M_e=\dfrac{114+114}{2}=114$.

A

Câu 7. Số đôi giày bán ra trong Quý IV năm 2020 của một cửa hàng được thống kê trong bảng

tần số sau

Cỡ giày	37	38	39	40	41	42	43	44
Tần số (Số đôi giày bán được)	40	48	52	70	54	47	28	3

Trong Quý IV, cỡ giày cửa hàng bán được nhiều nhất là

Ⓐ 40. Ⓑ 44. Ⓒ 41. Ⓓ 3.

Hướng dẫn giải. Trong Quý IV năm 2020, cỡ giày 40 cửa hàng bán được nhiều nhất (cụ thể có tổng cộng 70 đôi giày được bán).

Cỡ giày	37	38	39	**40**	41	42	43	44
Tần số (Số đôi giày bán được)	40	48	52	**70**	54	47	28	3

A

Câu 8. Đại lượng dùng để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu là

Ⓐ Giá trị đại diện. Ⓑ Phương sai.
Ⓒ Tần số. Ⓓ Giá trị trung bình.

Hướng dẫn giải. Đại lượng dùng để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu là giá trị trung bình.
D

Câu 9. Mẫu số liệu thống kê thời gian (đơn vị: phút) đọc hết một cuốn sách của 10 học sinh lớp $10A$ như sau:

120	125	110	101	132	127	133	112	123	130

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên bằng bao nhiêu?

Ⓐ 32. Ⓑ 124. Ⓒ 18. Ⓓ 2.

Hướng dẫn giải. Sắp xếp mẫu số liệu theo thứ tự không giảm ta có

$$101 \quad 110 \quad 112 \quad 120 \quad 123 \quad 125 \quad 127 \quad 130 \quad 132 \quad 133$$

Ta có cỡ mẫu $n = 10$.
Suy ra số trung vị mẫu $M_e = \dfrac{1}{2}(123 + 125) = 124$.
Tứ phân vị thứ hai $Q_2 = M_e = 124$.
Tứ phân vị thứ nhất là trung vị của 101; 110; 112; 120; 123. Do đó $Q_1 = 112$.
Tứ phân vị thứ ba là trung vị của 125; 127; 130; 132; 133. Do đó $Q_3 = 130$.
Vậy khoảng tứ phân vị $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 130 - 112 = 18$. C

Câu 10. Đại lượng dùng để đo độ phân tán của mẫu số liệu là

Ⓐ Tần số. Ⓑ Giá trị đại diện.
Ⓒ Độ lệch chuẩn. Ⓓ Trung vị.

Hướng dẫn giải. Độ lệch chuẩn và phương sai là các đại lượng đo độ phân tán của mẫu số liệu. C

Câu 11. Cho dãy số liệu 1, 2, 5, 7, 8, 9, 10. Tìm số trung vị trong dãy số liệu đã cho.

Ⓐ 7,5. Ⓑ 6. Ⓒ 8. Ⓓ 7.

Hướng dẫn giải. Vì cỡ mẫu $n = 7$ nên trung vị là 7. D

Câu 12. Tuổi đời của 16 công nhân trong xưởng sản xuất được thống kê trong bảng sau

Tuổi	25	26	27	29	30	33	Cộng
Số người	2	3	4	3	3	1	16

Tìm số trung bình $\overline{x}$ của mẫu số liệu trên.

Ⓐ 27,875. Ⓑ 27. Ⓒ 27,75. Ⓓ 28.

Hướng dẫn giải. Số trung bình $\overline{x} = \dfrac{2 \cdot 25 + 3 \cdot 26 + 4 \cdot 27 + 3 \cdot 29 + 3 \cdot 30 + 1 \cdot 33}{16} = 27{,}875$.
A

Câu 13. Cho mẫu số liệu $\{10; 8; 6; 2; 4\}$. Độ lệch chuẩn của mẫu là:

Ⓐ 2,8. Ⓑ 8. Ⓒ 6. Ⓓ 2,4.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\bar{x} = \dfrac{1}{5}(2 + 4 + 6 + 8 + 10) = 6$.

Phương sai $S^2 = \dfrac{1}{5}\left[(2-6)^2 + (4-6)^2 + (6-6)^2 + (8-6)^2 + (10-6)^2\right] = 8$.

Độ lệch chuẩn $S = \sqrt{S^2} \approx 2{,}8$.

Câu 14. Số ôtô đi qua một cây cầu mỗi ngày trong một tuần đếm được như sau:

83	74	71	79	83	69	92

Phương sai và độ lệch chuẩn lần lượt là

Ⓐ 78,71 và 8,87. Ⓑ 52,99 và 7,28.
Ⓒ 61,82 và 7,86. Ⓓ 55,63 và 7,46.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\bar{x} = \dfrac{1}{7}(69 + 71 + 74 + 79 + 83 \cdot 2 + 92) \approx 78{,}7$.

Phương sai: $S^2 = \dfrac{1}{7}\left[(69-78{,}7)^2 + (71-78{,}7)^2 + (74-78{,}7)^2 + 2 \cdot (83-78{,}7)^2 + (92-78{,}7)^2\right] \approx 55{,}63$.

Độ lệch chuẩn: $S = \sqrt{S^2} \approx 7{,}46$.

Câu 15. Tiền thưởng (triệu đồng) cho cán bộ và nhân viên trong công ty X được trình bày trong bảng tần số sau đây.

Tiền thưởng (x)	2	3	4	5	6	
Tần số (n)	5	15	10	6	7	$n = 43$

Phương sai là

Ⓐ 1,59. Ⓑ 1,58. Ⓒ 1,61. Ⓓ 1,57.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\bar{x} = \dfrac{1}{43}(5 \cdot 2 + 15 \cdot 3 + 10 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 7 \cdot 6) \approx 3,88$.

Phương sai: $S^2 = \dfrac{1}{43}\left[5(2-3,88)^2 + 15(3-3,88)^2 + 10(4-3,88)^2 + 6(5-3,88)^2 + 7(6-3,88)^2\right] \approx 1,59$.

Câu 16. Trên con đường A, trạm kiểm soát đã ghi lại tốc độ của 30 chiếc ô tô được trình bày trong bảng tần số sau đây

Vận tốc	60	62	63	65	68	69	70	73	75	76	80	82	83	84	85	88	90
Tần số	2	2	1	2	3	1	2	2	3	2	3	1	1	2	1	1	1

Phương sai của tốc độ các ô tô trên con đường A là

Ⓐ 74,77. Ⓑ 75,36. Ⓒ 73,63. Ⓓ 72,1.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\bar{x} = \dfrac{1}{30}(2 \cdot 60 + 2 \cdot 62 + 63 + 2 \cdot 65 + 3 \cdot 68 + 69 + 2 \cdot 70 + 2 \cdot 73 + 3 \cdot 75 + 2 \cdot 76 + 3 \cdot 80 + 82 + 83 + 2 \cdot 84 + 85 + 88 + 90) \approx 73,63$.

Phương sai: $S^2 = \dfrac{1}{30}\left[2 \cdot (60-73,63)^2 + 2 \cdot (62-73,63)^2 + \cdots + (90-73,63)^2\right] \approx 72,1$.

Câu 17. Số lượng khách đến tham quan một điểm du lịch trong 12 tháng như sau

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Số khách	430	550	430	520	550	515	550	110	520	430	550	880

Độ lệch chuẩn là

Ⓐ 567,56. Ⓑ 163,84. Ⓒ 171,13. Ⓓ 143,3.

Hướng dẫn giải. Ta có: $\bar{x} = \dfrac{1}{12}(3 \cdot 430 + 4 \cdot 550 + 2 \cdot 520 + 515 + 110 + 880) \approx 503$.

Phương sai: $S^2 = \dfrac{1}{12}\left[3(430-503)^2 + 4(550-503)^2 + 2(520-503)^2 + (515-503)^2 + (110-503)^2 + (880-5\right.$ $26843,58$.

Vậy độ lệch chuẩn $S = \sqrt{S^2} \approx 163,84$.

Câu 18. Cho mẫu số liệu thống kê $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$. Tính (gần đúng) độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên?

Ⓐ 2,45. Ⓑ 2,58. Ⓒ 6,75. Ⓓ 6,25.

Hướng dẫn giải. Ta có giá trị trung bình $\bar{x} = \dfrac{1+2+3+4+5+6+7+8+9}{9} = 5$.

Do đó độ lệch chuẩn: $S = \sqrt{\dfrac{(1-5)^2 + (2-5)^2 + (3-5)^2 + (4-5)^2 + (5-5)^2 + (6-5)^2 + (7-5)^2 + (8-5}{9}}$ $2,58$.

Câu 19. Điểm thi môn Toán lớp $10A$ của một Trường trung học phổ thông được trình bày ở bảng phân bố tần số sau

Điểm thi	5	6	7	8	9	10	
Tần số	7	5	10	12	4	2	$n = 40$

Trong các giá trị dưới đây, giá trị nào gần nhất với phương sai của bảng phân bố tần số trên?

Ⓐ 0,94. Ⓑ 3,94. Ⓒ 2,94. Ⓓ 1,94.

Hướng dẫn giải. Trong dãy số liệu về điểm thi môn Toán lớp $10A$ ta có:

$\bar{x} = \dfrac{1}{40}(7 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 10 \cdot 7 + 12 \cdot 8 + 4 \cdot 9 + 2 \cdot 10) = 7,175.$

Phương sai là: $S^2 = \dfrac{1}{40}[7 \cdot (5 - 7,175)^2 + 5 \cdot (6 - 7,175)^2 + 10 \cdot (7 - 7,175)^2 + 12 \cdot (8 - 7,175)^2 + 4 \cdot (9 - 1,94.$

Câu 20. Phương sai của mẫu số liệu $\{x_1; x_2; \ldots; x_N\}$ bằng:

Ⓐ Hai lần độ lệch chuẩn.
Ⓑ Căn bậc hai của độ lệch chuẩn.
Ⓒ Bình phương của độ lệch chuẩn.
Ⓓ $S^2 = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_N - \bar{x})^2$.

Hướng dẫn giải. Ta có công thức tính độ lệch chuẩn là $S = \sqrt{S^2}$ và S^2 là phương sai của dãy số liệu thống kê.

Câu 21. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

Ⓐ Các số đo độ phân tán có thể nhỏ hơn 0.
Ⓑ Khoảng tứ phân vị có sử dụng thông tin của giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.
Ⓒ Khoảng biến thiên chỉ sử dụng thông tin của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất, bỏ qua thông tin của các giá trị còn lại.
Ⓓ Nếu các giá trị của mẫu càng tập trung quanh giá trị trung bình thì độ lệch chuẩn càng lớn.

Hướng dẫn giải. Theo định nghĩa khoảng biến thiên chỉ sử dụng thông tin của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất, bỏ qua thông tin của các giá trị còn lại.

II. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Bài 1. Điều tra về chiều cao (đơn vị: cm) của 12 học sinh tổ 1 lớp 10C thu được bảng số liệu sau:

154 150 152 160 165 168 154 170 163 172 152 160

Xét tính đúng - sai của các khẳng định sau:

a) Số trung vị của mẫu số liệu là 160cm.

b) Chiều cao trung bình của các học sinh tổ 1 là 160cm.

c) Mẫu số liệu có khoảng tứ phân vị là 6cm.

d) Độ chênh lệch chiều cao tối đa của các học sinh là 22cm.

Hướng dẫn giải.

◈ **Khẳng định a) Đúng.** Ta sắp xếp số liệu theo thứ tự không giảm như sau:

150 152 152 154 154 160 160 163 165 168 170 172

Ta có $n = 12$ là số chẵn nên số trung vị của mẫu số liệu trên là $M_e = \dfrac{160 + 160}{2} = 160.$

◈ **Khẳng định b) Đúng.** Chiều cao trung bình là:

$$\overline{x} = \frac{150 + 152 \cdot 2 + 154 \cdot 2 + 160 \cdot 2 + 163 + 165 + 168 + 170 + 172}{12} = 160.$$

◈ **Khẳng định c) Sai.**

☆ Nửa số liệu bên trái là $150; 152; 152; 154; 154; 160$ gồm 6 giá trị nên $Q_1 = \dfrac{152 + 154}{2} = 153$.

☆ Nửa số liệu bên phải là $160; 163; 165; 168; 170; 172$ gồm 6 giá trị nên $Q_3 = \dfrac{165 + 168}{2} = 166{,}5$.

Do đó khoảng tứ phân vị bằng $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 166{,}5 - 153 = 13{,}5$.

◈ **Khẳng định d) Đúng.** Chiều cao nhỏ nhất là 150cm và lớn nhất là 172cm nên độ chênh lệch tối đa là $172 - 150 = 22$cm.

Bài 2. Thống kê điểm một bài kiểm tra môn Lịch sử của tất cả học sinh lớp 10A ta được kết quả như sau:

Điểm	5	6	7	8	9	10
Số học sinh	5	8	9	15	5	3

Xét tính đúng - sai của các khẳng định sau:

a) Lớp 10A có 45 học sinh.

b) Có 5 học sinh đạt điểm 9 trở lên.

c) Không có học sinh nào đạt điểm dưới 5.

d) Điểm kiểm tra trung bình của lớp 10A lớn hơn 8.

Hướng dẫn giải.

◈ **Khẳng định a) Đúng.** Tổng số học sinh lớp 10A là $5 + 8 + 9 + 15 + 5 + 3 = 45$.

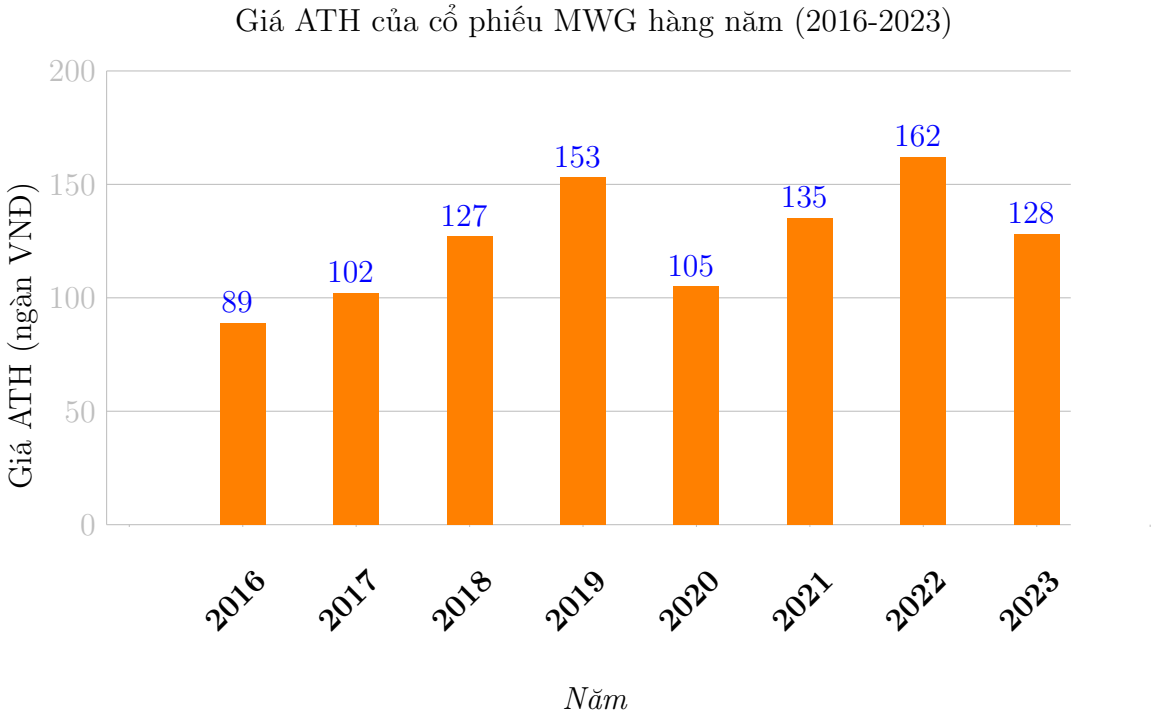
◈ **Khẳng định b) Sai.** Số học sinh đạt điểm 9 trở lên gồm các học sinh đạt điểm 9 (5 em) và điểm 10 (3 em). Tổng cộng là $5 + 3 = 8$ học sinh.

◈ **Khẳng định c) Đúng.** Dựa vào bảng thống kê, điểm thấp nhất là 5, do đó không có học sinh nào dưới 5.

◈ **Khẳng định d) Sai.** Điểm trung bình của lớp là:

$$\overline{x} = \frac{5 \cdot 5 + 6 \cdot 8 + 7 \cdot 9 + 8 \cdot 15 + 9 \cdot 5 + 10 \cdot 3}{45} = \frac{331}{45} \approx 7{,}356 < 8.$$

Bài 3. Biểu đồ sau cho biết giá cao nhất của cổ phiếu MWG (Thế Giới Di Động) qua các năm:



Dựa vào biểu đồ, xét tính đúng - sai của các mệnh đề sau (kết quả làm tròn đến hàng phần mười):

a) Giá trị trung bình của giá cổ phiếu MWG là 125,1 nghìn đồng.

b) Độ lệch chuẩn của giá cổ phiếu MWG là 22,3 nghìn đồng.

c) Khoảng tứ phân vị của giá cổ phiếu MWG là 27,5 nghìn đồng.

d) Trung vị của giá cổ phiếu MWG là 114,5 nghìn đồng.

Hướng dẫn giải.

◈ **Khẳng định a) Đúng.** Giá trị trung bình là:

$$\overline{x} = \frac{89+102+127+153+105+135+162+128}{8} = 125{,}125 \approx 125{,}1.$$

◈ **Khẳng định b) Sai.** Phương sai $s^2 \approx 561{,}36 \Rightarrow s = \sqrt{561{,}36} \approx 23{,}7$.

◈ **Khẳng định c) Sai.** Sắp xếp số liệu: 89; 102; 105; 127; 128; 135; 153; 162.

★ $Q_2 = (127+128)/2 = 127{,}5$.

★ $Q_1 = (102+105)/2 = 103{,}5$.

★ $Q_3 = (135+153)/2 = 144$.

Khoảng tứ phân vị $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 144 - 103{,}5 = 40{,}5$.

◈ **Khẳng định d) Sai.** Trung vị $M_e = Q_2 = 127{,}5$.

Bài 4. Bảng sau đây cho biết số lần học tiếng Anh trên Internet trong một tuần của 40 học sinh lớp 10:

Số lần	0	1	2	3	4	5
Số học sinh	3	5	7	12	9	4

Xét tính đúng - sai của các khẳng định sau:

a) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu trên là 2.

b) Số trung vị của mẫu số liệu trên là 3.

c) Mốt của mẫu số liệu trên là 4.

d) Số trung bình của mẫu số liệu trên bằng 5.

Hướng dẫn giải. Sắp xếp số liệu theo thứ tự không giảm $x_1, x_2, \ldots, x_{40}$.

◈ **Khẳng định a) Đúng.**

☆ $Q_2 = M_e = \dfrac{x_{20} + x_{21}}{2} = \dfrac{3+3}{2} = 3.$

☆ $Q_1 = \dfrac{x_{10} + x_{11}}{2} = \dfrac{2+2}{2} = 2.$

☆ $Q_3 = \dfrac{x_{30} + x_{31}}{2} = \dfrac{4+4}{2} = 4.$

Khoảng tứ phân vị $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 4 - 2 = 2$.

◈ **Khẳng định b) Đúng.** Số trung vị $Q_2 = 3$.

◈ **Khẳng định c) Sai.** Số liệu 3 có tần số lớn nhất (12), nên mốt là 3.

◈ **Khẳng định d) Sai.** Số trung bình là:

$$\overline{x} = \frac{0 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 12 + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 4}{40} = \frac{111}{40} = 2{,}775.$$

Bài 5. Hai xạ thủ A và B mỗi xạ thủ bắn 10 phát đạn. Kết quả được thể hiện trong bảng sau:

A	7	9	6	9	8	6	8	7	10	8
B	8	7	8	9	6	7	7	9	9	8

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điểm thấp nhất của xạ thủ A là 6.

b) Điểm trung bình của xạ thủ A cao hơn điểm trung bình của xạ thủ B.

c) Độ lệch chuẩn bảng điểm của xạ thủ A lớn hơn độ lệch chuẩn bảng điểm của xạ thủ B.

d) Xạ thủ A bắn đều hơn xạ thủ B.

Hướng dẫn giải. a) Đúng: Điểm thấp nhất của xạ thủ A là 6.

b) Sai: Điểm trung bình của xạ thủ A là $\bar{x}_1 = \dfrac{7+9+6+9+8+6+8+7+10+8}{10} = 7{,}8.$

Điểm trung bình của xạ thủ B là $\bar{x}_2 = \dfrac{8+7+8+9+6+7+7+9+9+8}{10} = 7{,}8.$

c) Đúng: Phương sai bảng điểm của xạ thủ A là

$$s_1^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = 1{,}56$$

Độ lệch chuẩn bảng điểm của xạ thủ A là $s_1 = \sqrt{s_1^2} \approx 1{,}249$.

Phương sai bảng điểm của xạ thủ B là

$$s_2^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = 0{,}96$$

Độ lệch chuẩn bảng điểm của xạ thủ B là $s_2 = \sqrt{s_2^2} \approx 0,980$.

d) Sai: Độ lệch chuẩn bảng điểm của xạ thủ A lớn hơn độ lệch chuẩn bảng điểm của xạ thủ B. Suy ra xạ thủ B bắn đều hơn xạ thủ A.

Bài 6. Mẫu số liệu sau đây cho biết chiều cao của 10 học sinh (đơn vị: cm):

165	155	160	145	157	162	148	170	172	152

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Chiều cao trung bình của 10 học sinh là $157,6$.

b) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là 27.

c) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu là 13.

d) Phương sai của mẫu số liệu trên nhỏ hơn 64.

Hướng dẫn giải. a) Sai: Chiều cao trung bình của 10 học sinh là

$$\bar{x} = \frac{165 + 155 + 160 + 145 + 157 + 162 + 148 + 170 + 172 + 152}{10} = 158,6.$$

b) Đúng: Số liệu lớn nhất là 172. Số liệu nhỏ nhất là 145. Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là $R = 172 - 145 = 27$.

c) Đúng: Sắp xếp các số liệu theo thứ tự không giảm:

145	148	152	155	157	160	162	165	170	172

$Q_2 = Me = \dfrac{157 + 160}{2} = 158,5$; $Q_1 = 152$; $Q_3 = 165$.

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu là $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 165 - 152 = 13$.

d) Sai: Phương sai của mẫu số liệu trên là $s^2 = \dfrac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = 72,04$.

Bài 7. Mẫu số liệu sau cho biết số ghế trống tại một rạp chiếu phim trong 9 ngày là:

7	8	22	20	18	15	19	13	11

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là $R = 15$.

b) Trung vị của mẫu số liệu là $Q_2 = 18$.

c) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu là $\Delta_Q = 10$.

d) Phương sai của mẫu số liệu là $s^2 \approx 25,73$.

Hướng dẫn giải. Sắp xếp mẫu số liệu theo thứ tự không giảm: $7, 8, 11, 13, 15, 18, 19, 20, 22$.

a) Đúng: Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là hiệu giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất. Ta có $R = 22 - 7 = 15$.

b) Sai: Mẫu số liệu gồm 9 giá trị nên trung vị là số ở vị trí chính giữa $Q_2 = 15$.

c) Đúng: Ta có $Q_1 = \dfrac{8+11}{2} = 9,5$ và $Q_3 = \dfrac{19+20}{2} = 19,5$. Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu là $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 10$.

d) Đúng: Số trung bình của mẫu số liệu là $\bar{x} = \dfrac{7+8+11+13+15+18+19+20+22}{9} \approx 14,78$.

Phương sai của mẫu số liệu là:

$$s^2 = \frac{(7-14,78)^2 + (8-14,78)^2 + \cdots + (22-14,78)^2}{9} \approx 25,73.$$

Bài 8. Mẫu số liệu sau cho biết sĩ số của 5 lớp khối 10 tại một trường THPT là:

40	45	46	41	43

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là $R = 3$.

b) Trung vị của mẫu số liệu là $Q_2 = 46$.

c) Số trung bình của mẫu số liệu là $\bar{x} = 43$.

d) Phương sai của mẫu số liệu là $s^2 = 5,2$.

Hướng dẫn giải. Sắp xếp mẫu số liệu theo thứ tự không giảm: $40, 41, 43, 45, 46$.

a) Sai: Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là hiệu giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất. Ta có $R = 46 - 40 = 6$.

b) Sai: Mẫu số liệu gồm 5 giá trị nên trung vị là số ở vị trí chính giữa số liệu là $Q_2 = 43$.

c) Đúng: Số trung bình của mẫu số liệu là $\bar{x} = \dfrac{40+41+43+45+46}{5} = 43$.

d) Đúng: Phương sai của mẫu số liệu là:

$$s^2 = \frac{(40-43)^2 + (41-43)^2 + (43-43)^2 + (45-43)^2 + (46-43)^2}{5} = 5,2.$$

Bài 9. Tỉ lệ trẻ suy dinh dưỡng (tính theo cân nặng ứng với độ tuổi) của 10 tỉnh thuộc Đồng bằng sông Hồng được cho như sau:

5,5	13,8	10,2	12,2	11,0	7,4	11,4	13,1	12,5	13,4

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là $R = 8,3$.

b) Trung vị của mẫu số liệu là $Q_2 = 9,2$.

c) Số trung bình của mẫu số liệu là $\bar{x} = 11,05$.

d) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu là $s \approx 2,57$.

Hướng dẫn giải. Sắp xếp mẫu số liệu theo thứ tự không giảm: 5,5; 7,4; 10,2; 11,0; 11,4; 12,2; 12,5; 13,1; 13,

a) Đúng: Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là hiệu giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất. Ta có $R = 13,8 - 5,5 = 8,3$.

b) Sai: Mẫu số liệu gồm 10 giá trị nên trung vị là $Q_2 = \dfrac{11,4+12,2}{2} = 11,8$.

c) Đúng: Số trung bình của mẫu số liệu là $\bar{x} = \dfrac{5,5 + 7,4 + 10,2 + \cdots + 13,4 + 13,8}{10} = 11,05$.

d) Đúng: Phương sai của mẫu số liệu là:

$$s^2 = \frac{(5,5 - 11,05)^2 + (7,4 - 11,05)^2 + \cdots + (13,8 - 11,05)^2}{10} \approx 6,6.$$

Vậy độ lệch chuẩn của mẫu số liệu là $s = \sqrt{s^2} \approx \sqrt{6,6} \approx 2,57$.

Bài 10. Số lượng gạo bán ra tại một quầy hàng các tháng (đơn vị: yến) trong một năm được cho bởi bảng sau:

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Số lượng	410	430	450	430	525	550	950	450	800	635	760	560

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mốt của bảng số liệu trên là 430.

b) Số trung vị của bảng số liệu trên là 525.

c) Khoảng tứ vị phân của mẫu số liệu là 257.

d) Phương sai của mẫu số liệu trên là: $s^2 = \dfrac{49375}{2}$.

Hướng dẫn giải. a) Đúng: Mốt của bảng số liệu trên là 430 vì số 430 xuất hiện nhiều nhất.

b) Sai: Vì $n = 12$ là số chẵn nên số trung vị là trung bình cộng của số chính giữa.

Số trung vị của bảng số liệu trên là $\dfrac{525 + 550}{2} = 537,5$.

c) Sai: Ta có $Q_1 = 440; Q_2 = 537,5; Q_3 = 697,5$, suy ra $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 697,5 - 440 = 257,5$.

Vậy khoảng phân tứ vị của mẫu số liệu là $\Delta_Q = 257,5$.

d) Đúng: Giá trị trung bình của mẫu số liệu trên là:

$$\bar{x} = \frac{410 + 430.2 + 450 + 460 + 525 + 550 + 560 + 635 + 760 + 800 + 950}{12} = 580.$$

Các độ lệch: $410 - 580 = -170; 430 - 580 = -150; 450 - 580 = -130; 460 - 580 = -120; 525 - 580 = -55; 550 - 580 = -30; 560 - 580 = -20; 635 - 580 = 55; 760 - 580 = 180; 800 - 580 = 120; 950 - 580 = 370$.

Phương sai của mẫu số liệu là: $s^2 = \dfrac{(-170)^2 + 2(-150)^2 + (-130)^2 + (120)^2 + (-55)^2 + (-30)^2 + (-20$

$\dfrac{49375}{2}$.

Bài 11. Dưới đây là điểm kiểm tra giữa kì I của hai bạn An và Bình:

	Toán	Lý	Hóa	Sinh	Anh	Văn	Sử	Địa	CD	Tin	CN
An	8	7,5	7,8	8,3	9	7	8	8,2	9	8	8,3
Bình	8,5	9,5	9,5	8,5	9	5	5,5	6	10	9	8,5

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu điểm kiểm tra của An là 2.

b) Điểm kiểm tra trung bình của học sinh An là 8,3.

c) Điểm kiểm tra trung bình của học sinh Bình là 8.1.

d) Bạn An học đều hơn bạn Bình.

Hướng dẫn giải. a) Đúng: Trong mẫu số liệu trên, số lớn nhất là 9 và số bé nhất là 7. Vậy khoảng biến thiên của mẫu số liệu trên là:

$$R = x_{\max} - x_{\min} = 9 - 7 = 2.$$

b) Sai: Điểm kiểm tra trung bình cộng của An là:

$$\bar{x}_{An} = \frac{8.3 + 7,5 + 7,8 + 8,3 + 9.2 + 7 + 8,2 + 9 + 8,3}{11}$$

$\bar{x}_{An} = 8,1.$

c) Đúng: Điểm kiểm tra trung bình cộng của Bình là:

$$\bar{x}_B = \frac{8,5.3 + 9,5.2 + 9.2 + 5 + 5,5 + 6 + 10}{11}$$

$\bar{x}_B = \dfrac{89}{11} \approx 8,1.$

d) Đúng: Điểm trung bình cộng của An là: $\bar{x}_N = 8,1.$

Điểm trung bình cộng của Bình là: $\bar{x}_H = \dfrac{89}{11} \approx 8,1.$

Phương sai của số liệu điểm của bạn An:

$$s^2_{An} = \frac{0,1^2 + 0,6^2 + 0,3^2 + 0,2^2 + 0,9^2 + 1,1^2 + 0,1^2 + 0,1^2 + 0,9^2 + 0,1^2 + 0,2^2}{11} = \frac{17}{55} \approx 0,31.$$

Phương sai của số liệu điểm của bạn Bình:

$$s^2_B = \frac{3.0,4^2 + 1,4^2.2 + 0,9^2 + 3,1^2 + 2,6^2 + 2,1^2 + 1,9^2 + 0,9^2}{11} \approx 2,76.$$

Do $\bar{x}_{An} = \bar{x}_B; s^2_{An} < s^2_B$ nên bạn An học đều các môn hơn bạn Bình.

Bài 12. Sản lượng lúa (đơn vị là tạ) của 40 thửa ruộng thí nghiệm có cùng diện tích được trình

bày trong bảng tần số sau đây:

Sản lượng (x)	20	21	22	23	24	
Tần số (n)	5	8	11	10	6	$n = 40$

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mốt của mẫu số liệu là 11.

b) Số trung bình của mẫu số liệu là $\bar{x} = 23$.

c) Số trung vị của mẫu số liệu là $Me = 22$.

d) Phương sai của mẫu số liệu là $s^2 = 2,04$.

Hướng dẫn giải. a) Sai: Tần số lớn nhất là 11 ứng với giá trị 22 nên $M_o = 22$.

b) Sai: Số trung bình của mẫu số liệu là: $\bar{x} = \dfrac{5.20 + 8.21 + 11.22 + 10.23 + 6.24}{40} = 22,1$.

c) Đúng: Số giá trị của mẫu số liệu là 40 nên $M_e = \dfrac{x_{20} + x_{21}}{2} = \dfrac{22 + 22}{2} = 22$.

d) Sai: Phương sai của mẫu số liệu là $s^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2$

$$= \frac{1}{40}[5(20 - 22,1)^2 + 8(21 - 22,1)^2 + 11(22 - 22,1)^2 + 10(23 - 22,1)^2 + 6(24 - 22,1)^2]$$

$$= \frac{1}{40}[5(2,1)^2 + 8(1,1)^2 + 11(0,1)^2 + 10(0,9)^2 + 6(1,9)^2] = \frac{6160}{4000} = 1,54.$$

Bài 13. Mẫu số liệu sau đây cho biết cân nặng của 10 trẻ sơ sinh (đơn vị: kg):

2,977	3,155	3,920	3,412	4,236
2,593	3,270	3,813	4,042	3,5

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau: a) Số trung bình của mẫu số liệu là 4. b) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là 1,643. c) Số trung vị của mẫu số liệu là 3,8. d) Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu là $s \approx 0,49$.

Hướng dẫn giải. Sắp xếp cân nặng theo thứ tự không giảm ta được: 2,593 2,977 3,155 3,270 3,412 3,5 3,813 3,920 4,042 4,236

a) Sai: Số trung bình của mẫu số liệu là

$$\bar{x} = \frac{2,593 + 2,977 + 3,155 + 3,270 + 3,412 + 3,5 + 3,813 + 3,920 + 4,042 + 4,236}{10} = 3,4918.$$

b) Đúng: Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là $R = 4,236 - 2,593 = 1,643$.

c) Sai: Số giá trị của mẫu số liệu là 10 nên số trung vị của mẫu số liệu là

$$M_e = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{3,412 + 3,5}{2} = 3,456.$$

d) Đúng: Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu là $s \approx 0,49$.

Bài 14. Điểm một bài kiểm tra môn Toán của một nhóm học sinh cho ở bảng số liệu sau:

Điểm	5	6	7	8	9	10
Số học sinh	2	5	6	8	3	1

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Trung vị của bảng số liệu là 6.

b) Khoảng biến thiên của bảng số liệu là $R = 5$.

c) Độ lệch chuẩn điểm của các học sinh nhỏ hơn 1 điểm.

d) Khoảng tứ phân vị của bảng số liệu là $\Delta_Q = 2$.

Hướng dẫn giải. a) Sai: Trung vị của bảng số liệu là 6.

Kích thước mẫu trong bảng số liệu là $n = 25$, suy ra trung vị $M_e = x_{13} = 7$.

b) Đúng: Khoảng biến thiên của bảng số liệu là $R = 5$.

Kích thước mẫu trong bảng số liệu là $n = 25$. Suy ra khoảng biến thiên $R = x_{25} - x_1 = 10 - 5 = 5$.

c) Sai: Độ lệch chuẩn của bảng số liệu là $Q_1 = 7.S$

Ta có giá trị trung bình là $\bar{x} = 7,32$, phương sai là

$$s^2 = \frac{2.(5-\bar{x})^2 + 5.(6-\bar{x})^2 + 6.(7-\bar{x})^2 + 8.(8-\bar{x})^2 + 3.(9-\bar{x})^2 + 1.(10-\bar{x})^2}{25} = 1,5776.$$

Suy ra độ lệch chuẩn là $s \approx 1,256$ điểm.

d) Đúng: Khoảng tứ phân vị của bảng số liệu là.

Ta có tứ phân vị thứ nhất là $Q_1 = \dfrac{x_6 + x_7}{2} = \dfrac{6+6}{2} = 6$,

tứ phân vị thứ ba là $Q_3 = \dfrac{x_{19} + x_{20}}{2} = \dfrac{8+8}{2} = 8$,

vậy khoảng tứ phân vị bằng $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 = 8 - 6 = 2$.

III. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Bài 1. Tính tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu: $5; 6; 4; 7; 8; 6; 3; 7$.

Hướng dẫn giải.

- Bước 1: Sắp xếp mẫu số liệu theo thứ tự không giảm: $3; 4; 5; 6; 6; 7; 7; 8$.
- Bước 2: Vì $n = 8$ (chẵn), tứ phân vị thứ nhất Q_1 là trung vị của nửa đầu mẫu số liệu: $3; 4; 5; 6$.
  Ta có $Q_1 = \dfrac{4+5}{2} = 4,5$.

Bài 2. Số liệu sau cho biết số con được sinh ra trong 20 hộ gia đình khảo sát ở một địa phương:

$$2 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 2 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 9 \quad 5 \quad 3 \quad 2 \quad 4 \quad 1 \quad 0 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 6.$$

Tìm độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đã cho? Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm.

Hướng dẫn giải. Giá trị trung bình của mẫu là:

$$\overline{x} = \frac{2+2+3+5+2+4+3+2+1+9+5+3+2+4+1+0+3+2+1+6}{20} = 3.$$

Phương sai là:

$$s^2 = \frac{1}{20}\left[(2-3)^2 + (2-3)^2 + \ldots + (6-3)^2\right] = 4,1.$$

Độ lệch chuẩn: $s = \sqrt{4,1} \approx 2,025$.

Bài 3. Số liệu thống kê kết quả bài kiểm tra môn Toán của bạn Dũng là:

Điểm	8	6	7	5	9

Phương sai của mẫu số liệu đã cho bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải. Điểm trung bình môn Toán của Dũng là: $\overline{x} = \dfrac{8+6+7+5+9}{5} = 7$.

Phương sai của mẫu số liệu là: $s^2 = \dfrac{1}{5}\left[(8-7)^2 + (6-7)^2 + (7-7)^2 + (5-7)^2 + (9-7)^2\right] = \dfrac{1}{5}[1+1+0+4+4] = 2$.

Bài 4. Mẫu số liệu sau là thống kê số tiền (triệu đồng) mua phân bón XYZ trong một vụ mùa của 15 hộ nông dân ở một khu vực nông thôn thuộc khảo sát:

$$2,4 \quad 1,2 \quad 0,8 \quad 3,5 \quad 1,6 \quad 1,8 \quad 1,2 \quad 1,3 \quad 0,7 \quad 4,1 \quad 4,8 \quad 3,6 \quad 2,9 \quad 2,6$$

Tìm độ lệch chuẩn của mẫu số liệu đã cho? Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm.

Hướng dẫn giải. Giá trị trung bình là:

$$\overline{x} = \frac{2,4+1,2+0,8+3,5+1,6+1,8+1,2+1,3+0,7+4,1+4,8+3,6+2,9+2,6}{15} \approx 2,24$$

(triệu đồng).

Phương sai là:

$$s^2 = \frac{1}{15}\left[(2,4-2,24)^2 + (1,2-2,24)^2 + \ldots + (2,6-2,24)^2\right] \approx 1,5624.$$

Độ lệch chuẩn: $s = \sqrt{1,5624} \approx 1,25$ (triệu đồng).

Bài 5. Hãy tìm độ lệch chuẩn của mẫu số liệu sau:

Giá trị	2	3	4	5	6
Tần số	4	2	5	2	6

Hướng dẫn giải. Số trung bình:

$$\overline{x} = \frac{2\cdot 4 + 3\cdot 2 + 4\cdot 5 + 5\cdot 2 + 6\cdot 6}{4+2+5+2+6} = \frac{8+6+20+10+36}{19} = \frac{80}{19} \approx 4,21.$$

Phương sai mẫu số liệu là:

$$s^2 = \frac{1}{19}\left[4\cdot(2-4,21)^2 + 2\cdot(3-4,21)^2 + 5\cdot(4-4,21)^2 + 2\cdot(5-4,21)^2 + 6\cdot(6-4,21)^2\right] \approx 2,27.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu là: $s = \sqrt{2,27} \approx 1,51$.

Bài 6. Bảng số liệu sau thống kê nhiệt độ tại Thành phố Hồ Chí Minh trong một ngày của

năm 2021 (đơn vị: $^\circ C$)

Giờ đo (h)	1	4	7	10	13	16	19	22
Nhiệt độ	27	26	28	32	34	35	30	28

Tìm độ lệch chuẩn của số liệu đã cho (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Hướng dẫn giải. Số trung bình là:

$$\overline{x} = \frac{27+26+28+32+34+35+30+28}{8} = 30(^\circ C).$$

Phương sai:

$s^2 = \frac{1}{8}\left[(27-30)^2+(26-30)^2+\ldots+(28-30)^2\right] = \frac{1}{8}[9+16+4+4+16+25+0+4] = \frac{82}{8} = 10,25.$

Độ lệch chuẩn: $s = \sqrt{10,25} \approx 3,12(^\circ C)$.

Bài 7. Điều tra số sách tham khảo môn Toán của 30 học sinh ở một lớp 10 của một trường THPT ta thu được mẫu số liệu:

Số sách (x_i)	1	2	3	4	5	6	7
Tần số (n_i)	2	7	6	3	4	4	4

Xác định độ lệch chuẩn của mẫu số liệu.

Hướng dẫn giải. Sắp xếp các số liệu theo thứ tự tăng dần ta có:

Số sách (x_i)	1	2	3	4	5	6	7
Tần số (n_i)	2	7	6	3	4	4	4
$N = 30$							

Ta có: $\sum_{i=1}^{7} n_i x_i = 2\cdot 1+7\cdot 2+6\cdot 3+3\cdot 4+4\cdot 5+4\cdot 6+4\cdot 7 = 2+14+18+12+20+24+28 = 118$.
Số trung bình:

$$\overline{x} = \frac{118}{30} \approx 3,93.$$

$\sum_{i=1}^{7} n_i x_i^2 = 2\cdot 1^2+7\cdot 2^2+6\cdot 3^2+3\cdot 4^2+4\cdot 5^2+4\cdot 6^2+4\cdot 7^2 = 2+28+54+48+100+144+196 = 572$.
Phương sai:

$S^2 = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{7} n_i x_i^2 - \overline{x}^2 = \frac{572}{30} - \left(\frac{118}{30}\right)^2 \approx 19,067 - 15,441 \approx 3,626$. Độ lệch chuẩn: $S = \sqrt{3,626} \approx 1,90$.

Bài 8. Cho bảng số liệu điểm kiểm tra môn Toán học kỳ 2 của 40 học sinh lớp 10C như sau:

(thang điểm là 10)

Điểm	5	6	7	8	9	10	Cộng
Tần số	5	12	8	9	4	2	40

Phương sai S^2 của mẫu số liệu đã cho.

Hướng dẫn giải. Ta có điểm trung bình của 40 học sinh là:

$$\overline{x} = \frac{5\cdot 5 + 12\cdot 6 + 8\cdot 7 + 9\cdot 8 + 4\cdot 9 + 2\cdot 10}{40} = \frac{25+72+56+72+36+20}{40} = \frac{281}{40} = 7,025.$$

$$S^2 = \frac{5\cdot(-2,025)^2 + 12\cdot(-1,025)^2 + 8\cdot(-0,025)^2 + 9\cdot(0,975)^2 + 4\cdot(1,975)^2 + 2\cdot(2,975)^2}{40}$$

$$S^2 = \frac{20,505625 + 12,6151125 + 0,0051005 + 8,55565575 + 15,60255175 + 17,70067775}{40}$$

$$= \frac{85,08470325}{40} \approx 2,127.$$

Bài 9. Cho bảng số liệu điểm kiểm tra cuối học kỳ 2 môn Hóa của 40 học sinh lớp 10A như sau: (thang điểm là 10)

Điểm	3	4	5	6	7	8	9	10	Cộng
Tần số	1	1	2	7	12	14	2	1	40

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên.

Hướng dẫn giải. Ta có điểm trung bình của 40 học sinh là:

$$\overline{x} = \frac{3\cdot 1 + 4\cdot 1 + 5\cdot 2 + 6\cdot 7 + 7\cdot 12 + 8\cdot 14 + 9\cdot 2 + 10\cdot 1}{40}$$

$$= \frac{3+4+10+42+84+112+18+10}{40}$$

$$= \frac{283}{40} = 7,075.$$

$$S^2 = \frac{16,605625 + 9,455625 + 8,61005 + 8,115675 + 0,084375 + 12,00515 + 7,41005 + 8,555625}{40} = \frac{70,842175}{40} \approx 1,771.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu là $s = \sqrt{1,771} \approx 1,33$.

IV. TỰ LUẬN

Bài 1. Nhiệt độ trung bình các tháng trong một năm gần đây của tỉnh Bắc Ninh được cho bởi bảng thống kê bên dưới (đơn vị: độ C, nguồn: https://vi.weatherspark.com/).

17	18	21	24	27	29	29	29	28	25	22	18

Tìm mốt, trung vị và khoảng biến thiên của mẫu số liệu đã cho.

Hướng dẫn giải. Sắp xếp mẫu số liệu theo thứ tự không giảm 17, 18, 18, 21, 22, 24, 25, 27, 28, 29, 29, 29.

Mốt của mẫu số liệu là 29.
Trung vị của mẫu số liệu là $\frac{1}{2}\cdot(24+25)=24{,}5$.
Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là $29-17=12$.

Bài 2. Bảng sau đây cho biết chiều cao của một nhóm học sinh

160	178	150	164	168	176	156	172

Tìm chiều cao trung bình và các tứ phân vị của mẫu số liệu trên.

Hướng dẫn giải. Sắp xếp dãy số liệu $150, 156, 160, 164, 168, 172, 176, 178$
Chiều cao trung bình là $\dfrac{150+156+160+164+168+172+176+178}{8}=\dfrac{1\,324}{8}=165{,}5$.
Q_1 là trung vị của $150, 156, 160, 164$ suy ra $Q_1=\dfrac{156+160}{2}=158$.
Q_2 là trung vị của $150, 156, 160, 164, 168, 172, 176, 178$ suy ra $Q_2=\dfrac{164+168}{2}=166$.
Q_3 là trung vị của $168, 172, 176, 178$ suy ra $Q_3=\dfrac{172+176}{2}=174$.

Bài 3. Bà Hoa kiểm tra chiều cao của 30 cây trồng trong vườn và ghi lại bảng số liệu như sau

Chiều cao (m)	0,5	0,8	1,0	1,2	1,5	2,0
Số cây	2	3	15	6	3	1

Gọi S là tập hợp các giá trị bất thường của mẫu số liệu trên. Hãy xác định tổng tất cả các phần tử của tập hợp S.

Hướng dẫn giải. Tập dữ liệu có 30 số liệu, nên tứ phân vị thứ nhất là số liệu thứ 8 và tứ phân vị thứ 3 là số liệu thứ 23.
Dựa vào bảng số liệu, tứ phân vị tứ nhất là $Q_1=1{,}0$ và tứ phân vị thứ ba là $Q_3=1{,}2$.
Ta có khoảng tứ phân vị là $\Delta_Q=Q_3-Q_1=1{,}2-1{,}0=0{,}2$.
Ta có $Q_1-1{,}5\cdot\Delta_Q=1{,}0-1{,}5\cdot 0{,}2=0{,}7$ và $Q_3+1{,}5\cdot\Delta_Q=1{,}2+1{,}5\cdot 0{,}2=1{,}5$.
Ta thấy có 2 số liệu 0,5 nhỏ hơn 0,7 và có 1 số liệu 2,0 lớn hơn 1,5.
Vậy có các giá trị 0,5 và 2,0 là hai giá trị bất thường, tức là $S=\{0{,}5;2{,}0\}$.
Suy ra tổng các giá trị của S là $0{,}5+2{,}0=2{,}5$.

Bài 4. Cho mẫu số liệu

$$2\quad 3\quad 13\quad 17\quad 16\quad 18\quad 19\quad 20\quad 21\quad 22\quad 23\quad 24\quad 28\quad 35\quad 38.$$

Trong mẫu số liệu trên, có bao nhiêu giá trị bất thường?

Hướng dẫn giải. Xếp mẫu số liệu đề bài theo thứ tự không giảm ta được

$$2\quad 3\quad 13\quad 16\quad 17\quad 18\quad 19\quad 20\quad 21\quad 22\quad 23\quad 24\quad 28\quad 35\quad 38.$$

Do mẫu số liệu đề bài có 15 giá trị nên tứ phân vị của mẫu số liệu lần lượt là các giá trị x_4, x_8 và x_{12}, suy ra tứ phân vị của mẫu số liệu là $Q_1=x_4=16$, $Q_2=x_8=20$, $Q_3=x_{12}=24$.
Ta có khoảng tứ phân vị là $\Delta_Q=Q_3-Q_1=8$. Khi đó $\begin{cases}Q_1-\dfrac{3}{2}\Delta_Q=4\\ Q_3+\dfrac{3}{2}\Delta_Q=36.\end{cases}$
Do $2<4$; $3<4$; $38>36$ nên có 3 giá trị bất thường là 2, 3, 38.