

Gv: TRẦN QUỐC NGHĨA

☎: 098 373 4349

Trường THPT.....

Họ và tên học sinh:

Lớp:..... STT:

Tài liệu tự học

TOÁN

LỚP 11 - NH 17-18

Chủ đề 8

VÉCTƠ TRONG KHÔNG GIAN QUAN HỆ VUÔNG GÓC

- *Tóm tắt lý thuyết*
- *Các dạng toán thường gặp*
- *Phương pháp giải toán*
- *Toán mẫu*
- *Bài tập cơ bản*
- *Bài tập nâng cao*
- *Bài tập tổng ôn*
- *Bài tập trắc nghiệm - Đáp án*

Năm học 2017 - 2018

Lưu hành nội bộ

Vấn đề 1. VÉCTOR TRONG KHÔNG GIAN

1. Vectơ trong không gian

① Vectơ, giá và độ dài của vectơ.

- ✦ Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng. **Kí hiệu** $\overrightarrow{AB}$ chỉ vectơ có điểm đầu A , điểm cuối B . Vectơ còn được kí hiệu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$
- ✦ Giá của vectơ là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó. Hai vectơ được gọi là *cùng phương* nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau. Ngược lại, hai vectơ có giá cắt nhau được gọi là hai vectơ *không cùng phương*. Hai vectơ cùng phương thì có thể cùng hướng hoặc ngược hướng.
- ✦ Độ dài của vectơ là độ dài của đoạn thẳng có hai đầu mút là điểm đầu và điểm cuối của vectơ. Vectơ có độ dài bằng 1 gọi là vectơ đơn vị. Kí hiệu độ dài vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $|\overrightarrow{AB}|$

Như vậy: $|\overrightarrow{AB}| = AB = BA$.

② Hai vectơ bằng nhau, đối nhau. Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b} (\neq \vec{0})$

- ✦ Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là *bằng nhau* nếu chúng có cùng hướng và cùng độ dài.

$$\text{Kí hiệu } \vec{a} = \vec{b} \text{ và } \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \text{ cùng hướng } \vec{b} \\ |\vec{a}| = |\vec{b}| \end{cases}$$

- ✦ Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là *đối nhau* nếu chúng ngược hướng và cùng độ dài.

$$\text{Kí hiệu } \vec{a} = -\vec{b} \text{ và } \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} \text{ cùng hướng } \vec{b} \\ |\vec{a}| = |\vec{b}| \end{cases}$$

③ Vectơ – không.

Vectơ – không là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau.

Kí hiệu: $\vec{0}, \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \dots = \vec{0}$.

Vectơ – không có phương, hướng tùy ý, có độ dài bằng không.

Vectơ – không cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ.

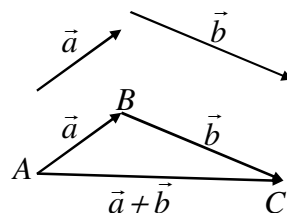
II. Phép cộng và phép trừ vectơ

① Định nghĩa 1.

- ✦ Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Trong không gian lấy một điểm A tùy ý, dựng $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ và được kí hiệu $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$.
- ✦ $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

② Tính chất 1.

- ✦ Tính chất giao hoán: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- ✦ Tính chất kết hợp: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- ✦ Cộng với $\vec{0}$: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$
- ✦ Cộng với vectơ đối: $\vec{a} + (-\vec{a}) = -\vec{a} + \vec{a} = \vec{0}$

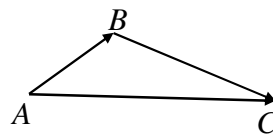
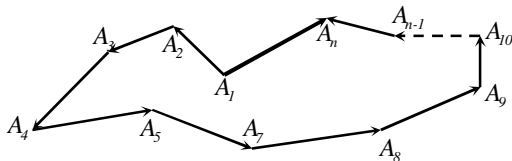


③ Các qui tắc.

✦ **Qui tắc ba điểm:** Với ba điểm A, B, C bất kì ta có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

Mở rộng: **Qui tắc đa giác khép kín**

Cho n điểm bất kì $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-1}, A_n$. Ta có: $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \dots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$

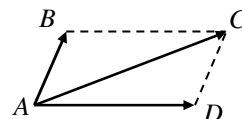


✦ **Qui tắc trừ (ba điểm cho phép trừ):**

Với ba điểm A, B, C bất kì ta có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$

✦ **Qui tắc hình bình hành:**

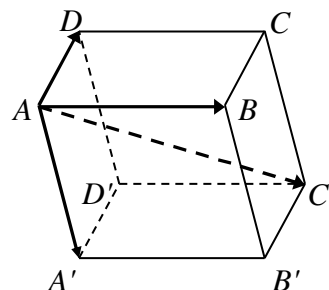
Với hình bình hành $ABCD$ ta có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$



✦ **Qui tắc hình hộp.**

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ với AB, AD, AA' là ba cạnh có chung đỉnh A và AC' là đường chéo, ta có:

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$$



III. Phép nhân một số với một vectơ

① Định nghĩa 2.

Cho $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích $k.\vec{a}$ là một vectơ:

- Cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$
- Ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$

② **Tính chất 2.** Với $\vec{a}, \vec{b}$ bất kì; $m, n \in \mathbb{R}$, ta có:

$$\star m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$$

$$\star (m + n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$$

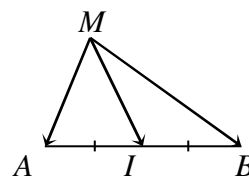
$$\star m(n\vec{a}) = (mn)\vec{a}$$

$$\star 1.\vec{a} = \vec{a}, (-1).\vec{a} = -\vec{a} \quad \star 0.\vec{a} = \vec{0}; k.\vec{0} = \vec{0}$$

③ **Điều kiện để hai vectơ cùng phương.**

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\neq \vec{0}$), $k \neq 0$: $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b}$

Hệ quả: điều kiện để ba điểm A, B, C thẳng hàng là $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$



④ Một số tính chất.

✦ **Tính chất trung điểm**

Cho đoạn thẳng AB có I là trung điểm, ta có: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$; $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$; $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$$\cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI} \quad (M \text{ bất kì})$$

✦ **Tính chất trọng tâm.**

Cho $\triangle ABC$, G là trọng tâm, ta có: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

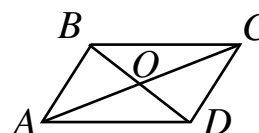
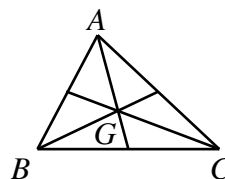
$$\cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} \quad (M \text{ bất kì})$$

✦ **Tính chất hình bình hành.**

Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O , ta có:

$$\cdot \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$$

$$\cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$$



1V. Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng**① Khái niệm về sự đồng phẳng của ba vectơ trong không gian.**

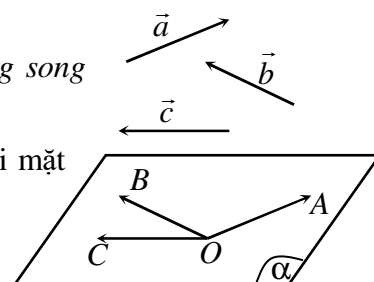
Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ($\neq \vec{0}$) trong không gian. Từ một điểm O bất kì ta dựng $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Khi đó xảy ra hai trường hợp:

- ✦ Các đường thẳng OA, OB, OC không cùng nằm trong một mặt phẳng thì ta nói ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng.
- ✦ Các đường thẳng OA, OB, OC cùng nằm trong một mặt phẳng thì ta nói ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

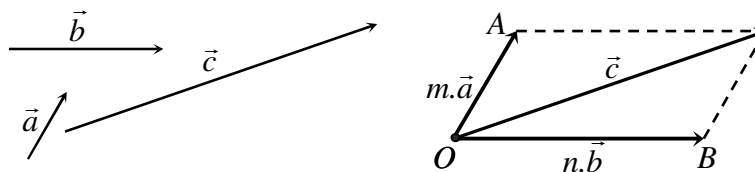
② Định nghĩa 3.

Ba vectơ gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

Trên hình bên, giá của các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ cùng song song với mặt phẳng (α) nên ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.

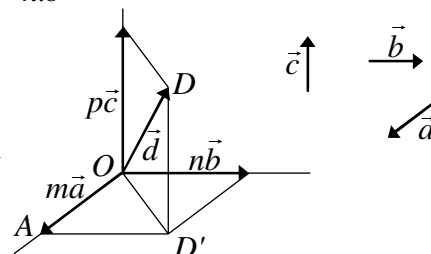
**③ Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng****Định lý 1.**

Cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ trong đó $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Điều kiện cần và đủ để ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng là có **duy nhất** các số m, n sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

**④ Phân tích một vectơ theo ba vectơ không đồng phẳng****Định lý 2.**

Nếu ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ không đồng phẳng thì với mỗi vectơ $\vec{d}$, ta tìm được **duy nhất** các số m, n, p sao cho

$$\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}.$$

**Dạng 1. Tính toán vectơ****A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI**

① **Quy tắc ba điểm:** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$ (quy tắc cộng)

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} \text{ (quy tắc trừ)}$$

② **Quy tắc hình bình hành:** Với hình bình hành $ABCD$ ta luôn có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

③ **Quy tắc hình hộp:** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, ta được: $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$

④ **Quy tắc trung điểm:** Cho I là trung điểm AB , M là điểm bất kỳ: $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

⑤ **Tính chất trọng tâm của tam giác:** G là trọng tâm $\triangle ABC$, $\forall M$ ta có:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \text{ và } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$$

⑥ **Tính chất trọng tâm của tứ diện:** G là trọng tâm tứ diện $ABCD$:

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \text{ và } \forall M \text{ ta có: } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG}$$

⑦ **Ba vectơ gọi là đồng phẳng** khi các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

⑧ Nếu ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng thì mỗi vectơ $\vec{d}$ đều có thể viết dưới dạng $\vec{d} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$, với m , n , p duy nhất.

⌘ **Chú ý:** ⌘ Để biểu diễn một vectơ trong hệ cơ sở ta thường đưa về gốc để tính, chẳng hạn vectơ $\overrightarrow{MN}$ và gốc O cho trước $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ theo hệ cơ sở thuận lợi, từ đó ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$.

⌘ Để tính đoạn AB ta có thể bình phương vô hướng $AB = \overrightarrow{AB}^2$ trong hệ cơ sở gồm 3 vectơ đồng phẳng.

⌘ Để tính góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ ta có thể tính $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ và

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

B. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{BD'}$, $\overrightarrow{B'D'}$, $\overrightarrow{DB'}$, $\overrightarrow{BC'}$ và $\overrightarrow{AD'}$ theo ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Ví dụ 2. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$.

a) Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{B'C}$, $\overrightarrow{BC'}$ theo ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

b) Gọi G' là trọng tâm tam giác $A'B'C'$. Biểu thị vectơ $\overrightarrow{AG'}$ qua ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

Ví dụ 3. Cho hình tứ diện $ABCD$. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC . Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{BB'} = \vec{b}, \overrightarrow{CC'} = \vec{c}$. Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{DD'}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}$ theo ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Ví dụ 4. Cho hình tứ diện $ABCD$ có $AB = c, CD = c', AC = b, BD = b', BC = a, AD = a'$. Tính cosin góc giữa các vectơ $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{DA}$.

Ví dụ 5. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có cạnh $BC = a\sqrt{2}$ và các cạnh còn lại đều bằng a . Tính cosin góc giữa các vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{SC}$.

Ví dụ 6. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA = SB = SC = b$ và đôi một hợp với nhau một góc 30° . Tính khoảng cách từ S đến trọng tâm G của chúng.

Ví dụ 7. Cho hình tứ diện đều $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng m . Các điểm M và N lần lượt là trung điểm AB và CD .

a) Tính độ dài MN .

b) Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{BC}$

Dạng 2. Chứng minh đẳng thức vectơ

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- ① Sử dụng các phép toán cộng, trừ, nhân vectơ với một số, tích vô hướng
- ② Sử dụng các quy tắc trung điểm, trọng tâm tam giác, trọng tâm tứ diện, quy tắc hình bình hành, hình hộp, ...
- 🔑 **Chú ý:** $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có cùng trọng tâm khi và chỉ khi $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

B. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 8. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Chứng minh:

- a) $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$
- b) Điểm G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

Ví dụ 9. Cho tứ diện $ABCD$ với G là trọng tâm.

- a) Chứng minh $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AG}$
- b) Gọi A' là trọng tâm tam giác BCD . Chứng minh: $\overrightarrow{A'B} \cdot \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'C} \cdot \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'D} \cdot \overrightarrow{AA'} = 0$

Ví dụ 10. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi D_1, D_2, D_3 lần lượt là điểm đối xứng của điểm D' qua A, B', C . Chứng tỏ rằng B là trọng tâm của tứ diện $D_1D_2D_3D'$.

Ví dụ 11. Cho hình chóp $S.ABCD$.

- a) Chứng minh rằng nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}$
 b) Gọi O là giao điểm của AC và BD . Chứng tỏ rằng $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} = 4\overrightarrow{SO}$

Dạng 3. Quan hệ đồng phẳng

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- ① Để chứng minh ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ đồng phẳng, ta chứng minh tồn tại cặp số thực m, n sao cho: $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.
 ② Để chứng minh ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ không đồng phẳng, ta đi chứng minh:
 $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow m = n = p = 0$
 ③ Bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng khi 3 vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ đồng phẳng.

B. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 12. Chứng minh:

- a) Nếu có $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ và một trong 3 số m, n, p khác 0 thì 3 vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng.
 b) Nếu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ là ba vectơ không đồng phẳng và $m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0}$ thì $m = n = p = 0$.

Ví dụ 13. Cho hình tứ diện $ABCD$. Trên cạnh AD lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{MD}$ và trên cạnh BC lấy điểm N sao cho $\overrightarrow{NB} = -3\overrightarrow{NC}$. Chứng minh rằng ba vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Dạng 4. Cùng phương và song song

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- ① Để chứng minh ba điểm A , B , C phân biệt thẳng hàng, ta chứng minh hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương, nghĩa là $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$; hoặc có thể chọn điểm O nào đó để chứng minh $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$, với $t + k = 1$.
- ② Để chứng minh hai đường thẳng AB và CD song song trùng nhau, ta cần chứng minh hai vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ cùng phương. Khi $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ cùng phương và có một điểm thuộc đường thẳng AB mà không thuộc đường thẳng CD hoặc ngược lại thì AB và CD là hai đường thẳng song song.
- ③ Để chứng minh đường thẳng AB song song hoặc nằm trong một mặt phẳng (P) ta chọn 2

điểm C, D thuộc (P) rồi chứng minh $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$ hoặc ta lấy trong (P) hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương, sau đó chứng minh $\overrightarrow{AB}, \vec{a}$ và $\vec{b}$ đồng phẳng và có một điểm thuộc đường thẳng AB mà không thuộc (P) thì đường thẳng AB song song với (P) .

- ④ Đường thẳng AB qua M khi A, M, B thẳng hàng. Đường thẳng AB cắt CD tại I thì $\overrightarrow{IA} = k \cdot \overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC} = t \cdot \overrightarrow{ID}$. Đường thẳng AB cắt mp(MNP) tại I thì A, I, B thẳng hàng và M, N, P, I đồng phẳng.

B. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 14. Cho hai điểm phân biệt A, B và một điểm O bất kì. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để một điểm M nằm trên đường thẳng AB là $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$, trong đó $k + t = 1$. Ngoài ra k và t không phụ thuộc điểm O . Với điều kiện nào của k, t thì điểm M thuộc đoạn thẳng AB ? Điểm M là trung điểm của đoạn AB ?

Ví dụ 15. Cho tứ diện $ABCD$, M và N là các điểm lần lượt thuộc AB và CD sao cho $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ND} = -2\overrightarrow{NC}$. Các điểm I, J, K lần lượt thuộc AD, MN, BC sao cho $\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{JM} = k\overrightarrow{JN}, \overrightarrow{KB} = k\overrightarrow{KC}$. Chứng minh các điểm I, J, K thẳng hàng.

Bài 12. Cho hình chóp $S.ABC$. Lấy các điểm A', B', C' lần lượt thuộc các tia SA, SB, SC sao cho $SA = aSA', SB = bSB', SC = cSC'$, trong đó a, b, c là các số thay đổi. Chứng minh rằng mặt phẳng $(A'B'C')$ đi qua trọng tâm của $\triangle ABC$ khi và chỉ khi $a + b + c = 3$.

Bài 13. Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$.

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{A_1C} = 2\overrightarrow{AC}$.

b) Xác định vị trí của điểm O sao cho: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OD_1} = \vec{0}$

c) Chứng minh rằng khi đó mọi điểm M trong không gian ta luôn có:
 $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MD_1} = 8\overrightarrow{MO}$

Bài 14. Cho tứ diện $ABCD$, hai điểm M, N thỏa mãn: $\overrightarrow{MA} + t\overrightarrow{MC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{NB} + t\overrightarrow{ND} = \vec{0}$. Chứng tỏ rằng khi t thay đổi thì trung điểm I của MN di chuyển trên một đường thẳng cố định.

Bài 15. Trong không gian, cho ba điểm A, B, C cố định không thẳng hàng, tìm tập hợp các điểm M sao cho: $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$

Bài 16. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc AD' và BD sao cho $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MD'}$, $\overrightarrow{ND} = k\overrightarrow{NB}$ ($k \neq 0, k \neq 1$).

a) Chứng minh rằng MN song song với mặt phẳng $(A'BC)$.

b) Khi MN và $A'C$ song song với nhau, chứng tỏ rằng MN vuông góc với AD' và DB .

Bài 17. Trong không gian cho $\triangle ABC$.

a) Chứng minh rằng nếu điểm $M \in (ABC)$ thì có ba số x, y, z mà $x + y + z = 1$ sao cho $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ với mọi điểm O .

b) Ngược lại, nếu có một điểm O trong không gian sao cho $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$, trong đó $x + y + z = 1$ thì $M \in (ABC)$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, M là trung điểm của BB' . Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$ B. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$ C. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$ D. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$

Câu 2. Trong không gian cho điểm O và bốn điểm A, B, C, D không thẳng hàng. Điều kiện cần và đủ để A, B, C, D tạo thành hình bình hành là:

A. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ B. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$
 C. $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$ D. $\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD}$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{SD} = \vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$ B. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$
 C. $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$ D. $\vec{a} + \vec{c} + \vec{b} + \vec{d} = \vec{0}$

Câu 4. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của AB và CD . Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} - \vec{b})$ B. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{b} - \vec{c})$
 C. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{b} - \vec{d})$ D. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d} + \vec{b})$

- Câu 5.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Gọi I là tâm hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AC'} = \vec{u}$, $\overrightarrow{CA'} = \vec{v}$, $\overrightarrow{BD'} = \vec{x}$, $\overrightarrow{DB'} = \vec{y}$ **đúng?**
- A. $2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$ B. $2\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$
- C. $2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$ D. $2\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y})$
- Câu 6.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I và K lần lượt là tâm của hình bình hành $ABB'A'$ và $BCC'B'$. Khẳng định nào sau đây **sai**?
- A. $\overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}$ B. Bốn điểm I, K, C, A đồng phẳng
- C. $\overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{IK} = 2\overrightarrow{BC}$ D. Ba vectơ $\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{B'C'}$ không đồng phẳng.
- Câu 7.** Cho tứ diện $ABCD$. Người ta định nghĩa “ G là trọng tâm tứ diện $ABCD$ khi $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ ”. Khẳng định nào sau đây **sai**?
- A. G là trung điểm của đoạn IJ (I, J lần lượt là trung điểm AB và CD)
- B. G là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm của AC và BD
- C. G là trung điểm của đoạn thẳng nối trung điểm của AD và BC
- D. Chưa thể xác định được.
- Câu 8.** Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD . Đặt $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{y} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{z} = \overrightarrow{AD}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?
- A. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})$. B. $\overrightarrow{AG} = -\frac{1}{3}(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})$
- C. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})$ D. $\overrightarrow{AG} = -\frac{2}{3}(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})$
- Câu 9.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O . Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. M là điểm xác định bởi $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?
- A. M là tâm hình bình hành $ABB'A'$ B. M là tâm hình bình hành $BCC'B'$
- C. M là trung điểm BB' D. M là trung điểm CC'

Vấn đề 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

1. Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

① Góc giữa hai vectơ.

Cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ trong không gian. Từ một điểm A bất kì vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Khi đó ta gọi góc $\widehat{BAC}$ ($0^\circ \leq \widehat{BAC} \leq 180^\circ$) là góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, kí hiệu $(\vec{u}, \vec{v})$.

Ta có $(\vec{u}, \vec{v}) = \widehat{BAC}$.

② Tích vô hướng.

Cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ ($\neq \vec{0}$). Tích vô hướng của $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Nếu $\vec{u} = \vec{0}$ hoặc $\vec{v} = \vec{0}$ thì ta quy ước $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

③ Tính chất.

Tính chất 3.

Với $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là ba vectơ bất kì trong không gian và $k \in \mathbb{R}$, ta có:

- ✦ Tính chất giao hoán: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- ✦ Tính chất phân phối: $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- ✦ Tính chất kết hợp: $(k \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k \cdot \vec{b})$
- ✦ Bình phương vô hướng: $\vec{a}^2 \geq 0$, $\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

④ Vectơ chỉ phương của đường thẳng.

- ✦ Vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng d nếu giá của nó song song hoặc trùng với đường thẳng d .
- ✦ Nếu $\vec{a}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d thì $k \cdot \vec{a}$ cũng là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d .
- ✦ Một đường thẳng d trong không gian hoàn toàn được xác định nếu biết một điểm A thuộc d và một vectơ chỉ phương.

⑤ Một số ứng dụng của tích vô hướng.

- ✦ Tính độ dài của đoạn thẳng AB : $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$
- ✦ Xác định góc giữa hai vectơ: $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$
- ✦ Chứng minh hai đường thẳng vuông góc.

11. Góc giữa hai đường thẳng

Góc giữa hai đường thẳng a và b trong không gian là góc giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm bất kì và lần lượt song song với a và b . Ta có:

$$(a, b) = (a', b') = \varphi$$

11.1. Hai đường thẳng vuông góc

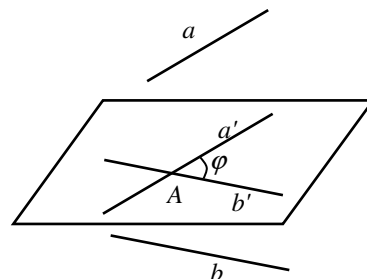
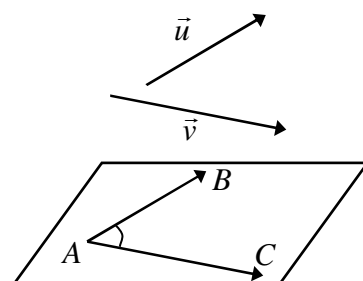
① Định nghĩa 4.

Hai đường thẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90° .

Kí hiệu: $a \perp b$ hay $b \perp a$.

② Nhận xét.

- ✦ Nếu $\vec{u}$, $\vec{v}$ lần lượt là vectơ chỉ phương của hai đường thẳng a và b thì $a \perp b \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
- ✦ Nếu $a \parallel b$ và $c \perp a \Rightarrow c \perp b$.



Dạng 1. Chứng minh vuông góc
A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

- ① **Cách 2.** Sử dụng trực tiếp định nghĩa góc của hai đường thẳng trong không gian.
- ② **Cách 3.** Muốn chứng minh hai đường thẳng AB và CD vuông góc với nhau ta có thể chứng minh $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$.
- ③ **Cách 4.** Chứng minh đường thẳng này vuông góc với mặt phẳng chứa đường thẳng kia.
- ④ **Cách 5.** Dùng định lí ba đường vuông góc (DL4).

B. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 16. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ thì $AB \perp CD$, $AC \perp BD$, $AD \perp BC$. Điều ngược lại có đúng không?

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 17. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Chứng minh rằng $SA \perp BC$, $SB \perp AC$, $SC \perp AB$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 18. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng $AB \perp CD \Leftrightarrow AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$.

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 19. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của các đoạn AC , BD , BC , AD . Chứng minh nếu $MN = PQ$ thì $AB \perp CD$.

.....

.....

.....

.....

.....

[illegible]

[illegible][illegible][illegible]

Ví dụ 24. Cho tứ diện $ABCD$ có $BC = AD = a$, $AC = BD = b$, $AB = CD = c$. Tính góc giữa BC và AD

Ví dụ 25. Cho tứ diện $ABCD$ có $CD = \frac{4}{3}AB$. Gọi I , J lần lượt là trung điểm của BC , AC , BD . Biết $JK = \frac{5}{6}AB$, tính góc giữa đường thẳng CD với các đường thẳng IJ và AB .

Ví dụ 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, cạnh bên $SA = AB$ và $SA \perp BC$.

a) Tính góc giữa SD và BC

b) Gọi I , J lần lượt là các điểm thuộc SB và SD sao cho $IJ \parallel BD$. Chứng minh rằng góc giữa AC và IJ không phụ thuộc vào vị trí của I và J .

b) Tính diện tích các hình $A'B'CD$ và $ACC'A'$.

This image shows a full page of a document template designed for handwriting practice or general note-taking. It consists of approximately 30 evenly spaced horizontal dotted lines across the entire width of the page. The background is plain white, and there are no margins, headers, footers, or other markings present.

Bài 18. Cho ba tia Ox , Oy , Oz không đồng phẳng.

- a) Đặt $\widehat{xOy} = \alpha$, $\widehat{yOz} = \beta$, $\widehat{zOx} = \gamma$. Chứng minh rằng: $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma > -\frac{3}{2}$
- b) Gọi Ox' , Oy' , Oz' lần lượt là các tia phân giác của các góc $\widehat{xOy}$, $\widehat{yOz}$, $\widehat{zOx}$. Chứng minh rằng nếu Ox' và Oy' vuông góc với nhau thì Oz' vuông góc với cả Ox' và Oy' .

Bài 19. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng m . Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AB , CD

- a) Tính độ dài MN theo a . b) Tính góc giữa MN với AB , CD và BC .

Bài 20. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa các cặp vectơ sau:

- a) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$ b) $\overrightarrow{AF}$ và $\overrightarrow{EG}$ c) $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$

Bài 21. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AD . Hãy tính góc giữa AB và CD , biết $AB = CD = 2a$ và $MN = a\sqrt{2}$.

Bài 22. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a$, $BC = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng SC và AB .

Bài 23. Cho tứ diện $ABCD$, biết $AB = AC$ và $DB = DC$.

- a) Chứng minh rằng AD vuông góc với BC .
- b) Gọi M, N là các điểm lần lượt thuộc các đường thẳng AB và BD sao cho $\overline{MA} = k\overline{MB}$, $\overline{ND} = k\overline{NB}$. Tính góc giữa hai đường thẳng MN và BC .

Bài 24. Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng:

- a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. Từ đó, suy ra rằng nếu tứ diện $ABCD$ có $AB \perp CD$ và $AC \perp DB$ thì $AD \perp BC$.
- b) Nếu $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ thì $AB \perp CD$, $AC \perp DB$, $AD \perp BC$. Điều ngược lại có đúng không?
- c) Nếu $AD = BD = CD$ và $\widehat{BDC} = \widehat{CDA}$ thì $AB \perp CD$, $AC \perp DB$, $AD \perp BC$.

Bài 25. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^\circ$, $\widehat{CAD} = 90^\circ$. Chứng minh rằng:

- a) AB vuông góc với CD .
b) Nếu I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD thì $IJ \perp AB$ và $IJ \perp CD$.

Bài 26. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Chứng minh rằng $SA \perp BC$, $SB \perp AC$, $SC \perp AB$.

Bài 27. Cho hai tam giác đều ABC và ABC' có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh $AC, CB, BC', C'A$. Chứng minh rằng:

- a) $AB \perp CC'$. b) Tứ giác $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Bài 28. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình bình hành. SAB và SAD là các tam giác vuông tại A . Chứng minh rằng:

- a) SA vuông góc với BC và CD . b) SA vuông góc với AC và BD .

Bài 29. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABC'D'$ có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau, lần lượt có tâm O và O' . Cmr: $AB \perp OO'$ và tứ giác $CDD'C'$ là hình chữ nhật.

Bài 30. Cho véctơ $\vec{n}$ (khác $\vec{0}$) và hai véctơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thì ba véctơ $\vec{n}, \vec{a}$ và $\vec{b}$ không đồng phẳng.

Bài 31. Chứng minh rằng ba vectơ cùng vuông góc với vectơ $\vec{n}$ (khác $\vec{0}$) thì đồng phẳng. Từ đó suy ra, các đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì cùng song song với một mặt phẳng.

Bài 32. Gọi S là diện tích ΔABC . Chứng minh rằng: $S = \frac{1}{2} \sqrt{\overline{AB}^2 \overline{AC}^2 - (\overline{AB} \cdot \overline{AC})^2}$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

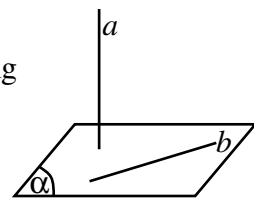
- Câu 10.** Trong không gian cho ba đường thẳng phân biệt a, b, c . Khẳng định nào sau đây **sai**?
- A. Nếu a và b cùng nằm trong một mặt phẳng và cùng vuông góc với c thì $a \parallel b$.
 B. Nếu $a \parallel b$ và $c \perp a$ thì $c \perp b$.
 C. Nếu góc giữa a và c bằng góc giữa b và c thì $a \parallel b$.
 D. Nếu a và b cùng nằm trong $mp(\alpha) \parallel c$ thì góc giữa a và c bằng góc giữa b và c .
- Câu 11.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a$, $IJ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. (I, J lần lượt là trung điểm của BC và AD). Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD là
- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .
- Câu 12.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = a$, $BD = 3a$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Biết AC vuông góc với BD . Tính MN
- A. $MN = \frac{a\sqrt{10}}{2}$. B. $MN = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. C. $MN = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$. D. $MN = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.
- Câu 13.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Giả sử tam giác $AB'C$ và $A'DC'$ đều có 3 góc nhọn. Góc giữa hai đường thẳng AC và $A'D$ là góc nào sau đây?
- A. $\angle BDB'$ B. $\angle AB'C$ C. $\angle DB'B$ D. $\angle DA'C'$
- Câu 14.** Cho tứ diện $ABCD$ Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ thì $AB \perp CD$, $AC \perp BD$, $AD \perp BC$. Điều ngược lại đúng không?
 Sau đây là lời giải:
- Bước 1: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow AC \perp BD$
- Bước 2: Chứng minh tương tự, từ $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ ta được $AD \perp BC$ và $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ ta được $AB \perp CD$.
- Bước 3: Ngược lại đúng, vì quá trình chứng minh ở bước 1 và 2 là quá trình biến đổi tương đương.
- Bài giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai ở đâu?**
- A. Đúng B. Sai từ bước 1 C. Sai từ bước 1 D. Sai ở bước 3
- Câu 15.** Cho tứ diện đều $ABCD$ (tứ diện có tất cả các cạnh bằng nhau). Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng:
- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°
- Câu 16.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào có thể **sai**?
- A. $A'C' \perp BD$ B. $BB' \perp BD$ C. $A'B \perp DC'$ D. $BC' \perp A'D$
- Câu 17.** Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC . Khi đó $\cos(AB, DM)$ bằng:
- A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$
- Câu 18.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD . Số đo của góc (MN, SC) bằng:
- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°
- Câu 19.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC . Số đo của góc (IJ, CD) bằng:
- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°
- Câu 20.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD$. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD, AD . Góc giữa (IE, JF) bằng:
- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

Vấn đề 3. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC MẶT PHẪNG

1. Định nghĩa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng:

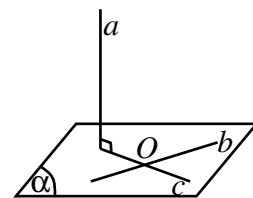
- ① **Định nghĩa 5:** Đường thẳng gọi là vuông góc với mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng của mặt phẳng đó.

$$a \perp (\alpha) \Leftrightarrow a \perp b, \forall b \subset (\alpha); \left. \begin{array}{l} a \perp (\alpha) \\ b \subset (\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp b$$



- ② **Định lý 3:** Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng nằm trong mặt phẳng (α) thì đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) .

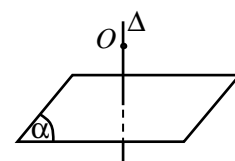
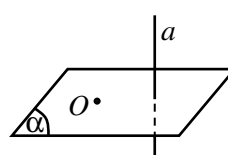
$$\left. \begin{array}{l} b, c \subset (\alpha) \\ b \text{ cắt } c \\ a \perp b, a \perp c \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (\alpha)$$



11. Tính chất

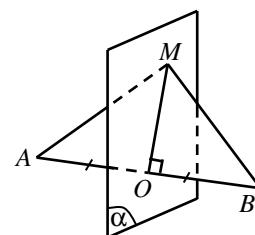
① Tính chất 4:

- Ⓐ Có duy nhất một mặt phẳng (P) đi qua một điểm O cho trước và vuông góc với một đường thẳng a cho trước.



- Ⓑ Có duy nhất một đường thẳng Δ đi qua một điểm O cho trước và vuông góc với một mặt phẳng (P) cho trước.

- ② **Định nghĩa 6:** Mặt phẳng đi qua trung điểm O của đoạn AB và vuông góc với AB là **mặt phẳng trung trực** của đoạn AB .



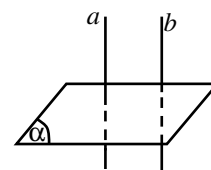
$$M \in \text{mặt trung trực của } AB \Leftrightarrow MA = MB$$

111. Liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng

① Tính chất 5:

- Ⓐ Nếu mặt phẳng nào vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì cũng vuông góc với đường thẳng còn lại.

$$\left. \begin{array}{l} a \parallel b \\ (\alpha) \perp a \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha) \perp b$$



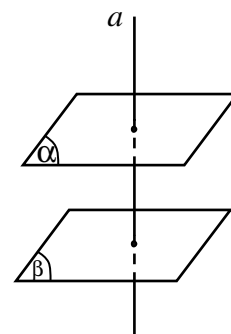
- Ⓑ Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song với nhau.

$$\left. \begin{array}{l} a \perp (\alpha) \\ b \perp (\alpha) \\ a \neq b \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel b$$

② Tính chất 6:

- Ⓐ Đường thẳng nào vuông góc với một trong hai mặt phẳng song song thì cũng vuông góc với mặt phẳng còn lại.

$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \parallel (\beta) \\ a \perp (\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (\beta) \quad \left. \begin{array}{l} (\alpha) \perp a \\ (\beta) \perp a \\ (\alpha) \neq (\beta) \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta)$$

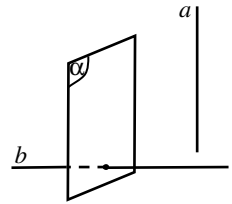


- Ⓑ Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song với nhau.

③ Tính chất 7:

- Ⓐ Cho đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với nhau. Đường thẳng nào vuông góc với (α) thì cũng vuông góc với a .

$$\left. \begin{array}{l} a \parallel (\alpha) \\ b \perp (\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow b \perp a \quad \left. \begin{array}{l} a \not\subset (\alpha) \\ a \perp b \\ (\alpha) \perp b \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel (\alpha)$$



- Ⓑ Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song với nhau.

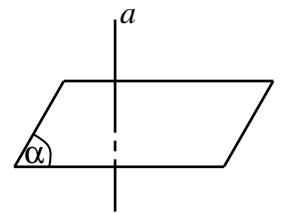
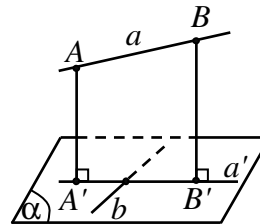
IV. Định lý ba đường vuông góc

- ① **Định nghĩa 7:** Phép chiếu song song lên mặt phẳng (α) theo phương l vuông góc với mặt phẳng (α) gọi là **phép chiếu vuông góc** lên mặt phẳng (α) .

- ② **Định lý 4:** (Định lý 3 đường vuông góc)

Cho đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (α) và đường thẳng b nằm trong (α) . Khi đó, điều kiện cần và đủ để b vuông góc với a là b vuông góc với hình chiếu a' của a trên (α) .

$$\left. \begin{array}{l} b \subset (\alpha) \\ a \not\perp (\alpha) \\ Ch_{\alpha} a = a' \end{array} \right\} \text{ thì } b \perp a \Leftrightarrow b \perp a'$$

**V. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng**

Định nghĩa 8: Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.

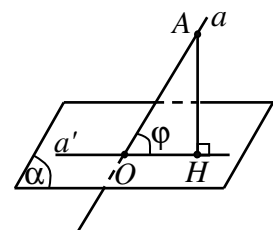
- Ⓐ Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (α) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) bằng 90° .

$$a \perp (\alpha) \Rightarrow (a, (\alpha)) = 90^\circ$$

- Ⓑ Nếu đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (α) thì góc giữa a và hình chiếu a' của a trên (α) gọi là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α)

$$(a, (\alpha)) = (a, a') = \widehat{AOH}$$

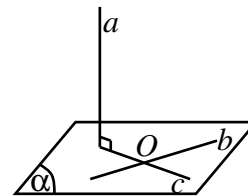
- ⌘ **Chú ý:** $0^\circ \leq (a, (\alpha)) \leq 90^\circ$



Dạng 1. Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng
A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

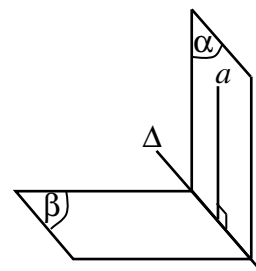
- ① Chứng minh đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (P) .

$$\left. \begin{array}{l} b, c \subset (\alpha) \\ b \text{ cắt } c \\ a \perp b, a \perp c \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (\alpha)$$



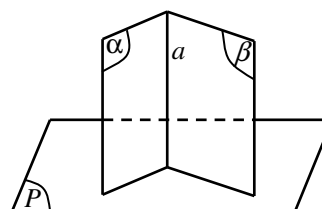
- ② Chứng minh a nằm trong một trong hai mặt phẳng vuông góc và d vuông góc với giao tuyến $\Rightarrow d$ vuông góc với mặt còn lại.

$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \perp (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = \Delta \\ a \subset (\alpha), a \perp \Delta \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (\beta)$$



- ③ Chứng minh a là giao tuyến của hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt thứ 3.

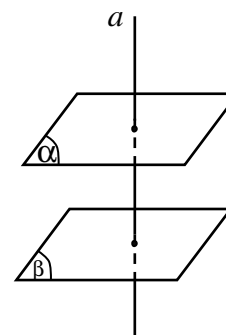
$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \cap (\beta) = a \\ (\alpha) \perp (P) \\ (\beta) \perp (P) \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (P)$$



- ④ Chứng minh đường thẳng d song song với a mà $a \perp (P)$.

- ⑤ Đường thẳng nào vuông góc với một trong hai mặt phẳng song song thì cũng vuông góc với mặt phẳng còn lại. (TC6).

$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \parallel (\beta) \\ a \perp (\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (\beta)$$



- ⑥ Chứng minh d là trục của tam giác ABC nằm trong (P) .

B. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 28. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B , $SA \perp (ABC)$.

- Chứng minh: $BC \perp (SAB)$
- Kẻ đường cao AH trong tam giác SAB . Chứng minh $AH \perp (SBC)$.
- Kẻ đường cao AK trong tam giác SAC . Chứng minh $SC \perp (AHK)$.
- Đường thẳng HK cắt BC tại I . Chứng minh $IA \perp (SAC)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 29. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$.

- a) Chứng minh: $BC \perp (SAB)$ và $CD \perp (SAD)$.
- b) Kẻ đường cao AH trong tam giác SAB . Chứng minh $AH \perp (SBC)$.
- c) Kẻ đường cao AK trong tam giác SAD . Chứng minh $SC \perp (AHK)$.
- d) Trong mặt phẳng $(ABCD)$ kẻ $AM \perp BD$ tại M . Chứng minh $BD \perp (SAM)$.

Ví dụ 30. Cho hình chóp $A.BCD$. Gọi O là hình chiếu của A lên (BCD) .

Chứng minh rằng $AB = AC = AD \Leftrightarrow OB = OC = OD$.

Ví dụ 31. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 90^\circ$, $\widehat{BSC} = 60^\circ$, $\widehat{CSA} = 120^\circ$. Gọi I là trung điểm cạnh AC . Chứng minh $SI \perp (ABC)$.

Ví dụ 32. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A , $BC = 2CC'$. Gọi I , K lần lượt là trung điểm của BC và AI' .

a) Chứng minh $B'C' \perp (A'AI)$ b) Chứng minh $AK \perp (A'BC)$

c) Gọi K là hình chiếu vuông góc của A trên $A'C$. Chứng minh B , H , K thẳng hàng

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Bài 33.** Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt (ABC) và (BCD) là hai tam giác cân có chung cạnh đáy BC . Gọi I là trung điểm của BC .
- a) Chứng minh rằng $BC \perp (ADI)$.
- b) Gọi AH là đường cao của ΔADI , chứng minh rằng $AH \perp (BCD)$.
- Bài 34.** Cho tứ diện $OABC$ có OA , OB , OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm O trên mặt phẳng (ABC) .
- a) Chứng minh rằng $BC \perp (OAH)$, $CA \perp (OBH)$, $AB \perp (OCH)$.
- b) Chứng minh rằng H là trực tâm của ΔABC .
- c) Chứng minh rằng $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.
- d) Chứng minh rằng $S_{\Delta ABC}^2 = S_{\Delta OAB}^2 + S_{\Delta OBC}^2 + S_{\Delta OCA}^2$.
- e) Chứng minh rằng các góc của ΔABC đều nhọn.
- Bài 35.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi và có $SA = SB = SC = SD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD .
- a) Chứng minh $SO \perp (ABCD)$
- b) Gọi I , J lần lượt là trung điểm của AB , BC . Chứng minh $IJ \perp (SBD)$.
- c) Gọi G là trọng tâm ΔACD và H ở trên cạnh SD sao cho $HD = 2HS$. Cm $HG \perp (ABCD)$
- Bài 36.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi và có $SA = SC$ và $SB = SD$.
- a) $SO \perp (ABCD)$ b) $AC \perp (SBD)$ và $BD \perp (SAC)$.
- Bài 37.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và tam giác ABC không vuông. Gọi H và K lần lượt là trực tâm của tam giác ABC và SBC . Chứng minh:
- a) AH , SK và BC đồng qui. b) $SC \perp (BHK)$ c) $HK \perp (SBC)$

- Bài 38.** Trên mặt phẳng (α) cho hình bình hành $ABCD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD , S là một điểm nằm ngoài mặt phẳng (α) sao cho $SA = SC$, $SB = SD$. Chứng minh rằng:
- $SO \perp (\alpha)$.
 - Nếu trong mặt phẳng (SAB) kẻ $SH \perp AB$ tại H thì $AB \perp (SOH)$.
- Bài 39.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi và có cạnh SA vuông góc với $(ABCD)$. Gọi I và K là hai điểm lần lượt lấy trên hai cạnh SB và SD sao cho $\frac{SI}{SB} = \frac{SK}{SD}$. Chứng minh:
- $BD \perp SC$.
 - $IK \perp (SAC)$
- Bài 40.** Cho tứ diện $SABC$ có $SA \perp (ABC)$ và có $\triangle ABC$ vuông tại B . Trong mặt phẳng (SAB) kẻ $AM \perp SB$ tại M . Trên cạnh SC lấy điểm N sao cho $\frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SC}$. Chứng minh rằng:
- $BC \perp (SAB)$ và $AM \perp (SBC)$.
 - $MN \perp (SAB)$, từ đó suy ra $SB \perp AN$.
- Bài 41.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , SA vuông góc với $(ABCD)$. Gọi H , I , K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên SB , SC và SD .
- Chứng minh rằng $BC \perp (SAB)$, $CD \perp (SAD)$.
 - Chứng minh rằng (SAC) là mặt trung trực của đoạn BD .
 - Chứng minh AH , AK cùng vuông góc với SC . Từ đó suy ra ba đường thẳng AH , AI , AK cùng nằm trong một mặt phẳng.
 - Chứng minh rằng (SAC) là mặt trung trực của đoạn HK . Từ đó suy ra $HK \perp AI$.
 - Tính diện tích tứ giác $AHIK$ biết $SA = AB = a$.

Dạng 2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Để tìm góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) ta thường dùng các cách sau đây:

✎ **Cách 1:**

Bước 1. Tìm $O = a \cap (\alpha)$.

Bước 2. Lấy $A \in a$ và dựng $AH \perp (\alpha)$ tại H .

Khi đó $(a, (\alpha)) = (a, a') = \widehat{AOH}$.

Bước 3. Tính số đo của góc $\widehat{AOH}$

✎ **Chú ý:** $0^\circ \leq (a, (\alpha)) \leq 90^\circ$

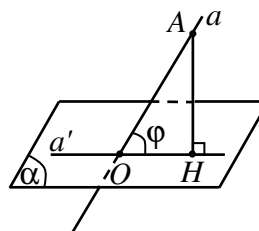
✎ **Cách 2:** Tính gián tiếp theo một trong hai hướng sau:

Hướng 1: Chọn một đường thẳng $d \parallel a$ mà góc giữa d và (α) có thể tính được.

Từ đó ta có: $(a, (\alpha)) = (d, (\alpha))$

Hướng 2: Chọn một mặt phẳng $(\beta) \parallel (\alpha)$ mà góc giữa a và (β) có thể tính được.

Từ đó ta có: $(a, (\alpha)) = (a, (\beta))$



B. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 33. Cho tứ diện đều $ABCD$. Tính góc giữa đường thẳng AB và (BCD)

ĐS: $54^{\circ}44'$

Ví dụ 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$.

Tính góc giữa:

a) SC, SD với $(ABCD)$

b) BD với (SAC)

ĐS: a) $45^{\circ}; 54^{\circ}44'$ b) 90°

Ví dụ 35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thang cân đáy lớn $AD = 2a$, $AB = BC = CD = a$. hình chiếu vuông góc của S trên $(ABCD)$ là trung điểm I của AD . $\triangle SAD$ là tam giác đều.

a) Tính góc giữa SC và $(ABCD)$

b) Gọi K là trung điểm AB , tính góc giữa KI và mặt phẳng (SAB)

c) Tính góc giữa BD với (SAB)

d) Tính góc giữa SA và (MBD)

ĐS: a) 60° b) $\arctan(1/2)$ c) $\arctan 2$ d) $\arcsin(1/4)$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 42. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a tâm O ; $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{2}$.

Tính góc giữa:

- a) SO và $(ABCD)$ b) SC và (SAB) c) BD và (SAD) d) SB và (SAC)

ĐS: a) $\arctan 2$ b) 30° c) 45° d) $\arcsin(\sqrt{6}/6)$

Bài 43. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AD = 2BC$ và $AB = BC = a$. SA vuông góc với $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa:

- a) SC và (SAD) b) SD và (SAC) c) SB và (SAC) d) AC và (SCD)

ĐS: a) 30° b) $\arctan(\sqrt{2}/2)$ c) $\arcsin(\sqrt{6}/6)$ d) 45°

Bài 44. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a tâm O ; $SA \perp (ABCD)$. Gọi M , N lần lượt là hình chiếu của A lên SB và SD .

a) Chứng minh $MN \parallel BD$ và $SC \perp (AMN)$.

b) Gọi K là giao điểm của SC với mặt phẳng (AMN) . Chứng minh tứ giác $AMKN$ có hai đường chéo vuông góc với nhau.

c) Nếu cho $AB = a$ và $SA = a\sqrt{6}$, tính góc φ giữa cạnh SC và mặt phẳng $(ABCD)$ và góc α giữa BD và mặt phẳng (SBC) .

ĐS: c) $\varphi = 60^\circ$, $\alpha = \arcsin(\sqrt{21}/7)$

Bài 45. Cho hình chóp $S.ABC$ đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $BC = a$, $SA = SB = SC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

a) Tính khoảng cách từ S tới $mp(ABC)$.

b) Tính góc giữa SA và $mp(ABC)$.

ĐS: a) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ b) $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Bài 46. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{6}$. Tính góc giữa:

a) SC với các mặt phẳng $(ABCD)$ và (SAB) .

b) SB với mặt phẳng (SAC) .

$$ĐS: a) 60^\circ; \arctan \frac{\sqrt{7}}{7}$$

c) AC với mặt phẳng (SBC) .

$$ĐS: b) \arctan \frac{\sqrt{14}}{14} \quad c) \arctan \frac{\sqrt{21}}{7}$$

Bài 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , O là tâm của đáy $SO \perp (ABCD)$, M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA , CD . Cho biết MN tạo với đáy $(ABCD)$ một góc 60°

a) Tính MN và SO .

b) Tính góc giữa MN và $mp(SBD)$.

$$ĐS: a) MN = \frac{a\sqrt{5}}{2}; SO = a\sqrt{5} \quad b) \arcsin \frac{2\sqrt{15}}{15}$$

Bài 48. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , O là tâm của đáy, $SO \perp (ABCD)$, và SA tạo với $(ABCD)$ và (SBC) hai góc bằng nhau. H là hình chiếu của A trên (SBC) .

a) Chứng minh $SO = AH$ và khi $HB = \frac{a}{2}$. Tính SA .

b) Tính tan góc giữa SA với $mp(ABCD)$.

$$ĐS: a) a/2 \quad b) \sqrt{6}/2$$

Bài 49. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Tính góc của AB' và BC' ; AC' và CD' .

b) IK với $(A'B'C'D')$, trong đó I , K là trung điểm của BC , $A'D'$.

$$ĐS: a) 60^\circ; 90^\circ \quad b) 45^\circ$$

Bài 50. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính góc giữa:

a) $B'D$ và $(AA'D'D)$ b) BD và $(B'AC)$

$$ĐS: a) \arctan(\sqrt{2}/2) \quad b) \arctan 2$$

Dạng 3. Thiết diện qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

Để tìm thiết diện của khối đa diện (S) với mặt phẳng (P) , (P) qua điểm M cho trước và vuông góc với một đường thẳng d cho trước, ta lựa chọn một trong hai cách sau:

Cách 1. Dựng mặt phẳng (P) như sau:

- ✦ Dựng hai đường thẳng cắt nhau cùng vuông góc với d , trong đó có ít nhất một đường qua M .
- ✦ Mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng trên chính là (P) .
- ✦ Xác định thiết diện theo phương pháp đã học.

Cách 2. Nếu có hai đường thẳng cắt nhau hay chéo nhau a , b cùng vuông góc với d thì:

- ✦ $(P) \parallel a$ hay (P) chứa $a \rightarrow$ chuyển về dạng qua điểm M và song song với a
- ✦ $(P) \parallel b$ hay (P) chứa $b \rightarrow$ chuyển về dạng qua điểm M và song song với b

Ví dụ 37. Cho tứ diện đều $ABCD$. Xác định thiết diện cắt tứ diện bởi mặt phẳng (P) qua trung điểm I của AB và vuông góc với AB .

a) Xác định mặt phẳng (α) ĐS: b) $S = 5a^2\sqrt{2}/32$ ($\forall vdt$)

a) Xác định mặt phẳng (α)

$$DS: b) S = 5a^2\sqrt{2}/32 \ (\dot{d}vdt)$$

b) (α) cắt tứ diện $SABC$ theo thiết diện là hình gì? tính diện tích của thiết diện.

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the page.

a) Chứng minh $B'C \perp (AKI)$

b) Xác định thiết diện do mặt phẳng (P) qua M và vuông góc với $B'C$ cắt hình lăng trụ.

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the page.

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Bài 51.** Cho hình chóp $S.ABC$, đáy là tam giác ABC vuông tại B , $SA \perp (ABC)$ và $SA = AB$. Gọi (P) là mặt phẳng qua một điểm M thuộc cạnh AB và vuông góc với SB . Hãy xác định thiết diện do (P) cắt hình chóp. Thiết diện là hình gì? Thiết diện có thể là hình bình hành được không?
- Bài 52.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông đáy lớn là AD , $SA \perp (ABCD)$. Mặt phẳng (α) qua M thuộc cạnh SC và vuông góc với AB . Hãy xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (α) . Thiết diện là hình gì?
- Bài 53.** Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác đều cạnh a và $SA = SB = SC = b$. Gọi G là trọng tâm ΔABC .
- Chứng minh rằng $SG \perp (ABC)$. Tính SG .
 - Xét mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với đường thẳng SC . Tìm hệ thức liên hệ giữa a và b để (P) cắt SC tại điểm C' nằm giữa S và C . Khi đó, hãy tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABC$ khi cắt (P) .

$$DS: a) SG = \sqrt{9b^2 - 3a^2} / 3 \quad b) a > b\sqrt{2}; S = a^2 \sqrt{3b^2 - a^2} / (4b) \text{ (đvdt)}$$

- Bài 54.** Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a , tâm O . Trên đường thẳng vuông góc với $(ABCD)$ tại O , lấy điểm S sao cho $SO = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với SC lần lượt cắt SB , SC , SD tại B' , C' , D' .
- Tính AC' . Chứng minh C' là trung điểm của SC . DS: $AC' = a\sqrt{6}/2$
 - Chứng minh $B'D'$ song song với BD . Từ đó suy ra cách dựng hai điểm B' và D' .

Dạng 4. Điểm cố định – Tìm tập hợp điểm

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

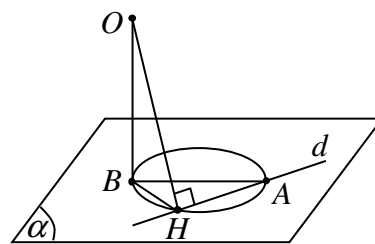
① Tập hợp điểm thường gặp:

Cho 3 điểm A, B, C không thẳng hàng và mặt phẳng (α)

- ✓ Nếu M là điểm thỏa mãn $AM \perp BC$ thì điểm M nằm trên mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với BC .
- ✓ Nếu điểm M thỏa mãn: $AM \perp (\alpha)$ thì điểm M nằm trên mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với (α)
- ✓ Nếu điểm M thỏa mãn $MA = MB$ thì M nằm trên mặt phẳng (P) qua trung điểm I của AB và vuông góc với AB , chính là **mặt phẳng trung trực** của đoạn AB .
- ✓ Nếu M thỏa mãn $MA = MB = MC \Leftrightarrow MA = MB$ và $MA = MC$ thì M nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (P) (mặt phẳng trung trực của AB) và mặt phẳng (Q) (mặt phẳng trung trực của AC), giao tuyến này chính là **trục của tam giác ABC** .

② Hai bài toán quỹ tích:

Bài toán 1: “Quĩ tích hình chiếu H của điểm cố định O lên đường thẳng di động d trong mặt phẳng (α) quay quanh điểm cố định A ”.



Gọi B là hình chiếu của O trên (α)

$$\left. \begin{array}{l} Ch_{\alpha}OH = BH \\ Do \ OH \perp d \end{array} \right\} \Rightarrow BH \perp d \Rightarrow \widehat{BHA} = \frac{\pi}{2} \text{ v\`a } H \in (\alpha)$$

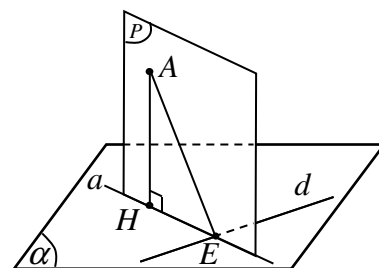
$\Rightarrow$ Quĩ tích là đường tròn đường kính BA trong (α)

Bài toán 2: “Quĩ tích hình chiếu H của điểm cố định A trên mặt phẳng (α) di động và luôn chứa một đường thẳng cố định d ”.

Bước 1. Xác định mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với d . Tìm $a = (\alpha) \cap (P)$

Bước 2. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên a , thì H cũng là hình chiếu vuông góc của A trên (P) .

Bước 3. Gọi E là giao điểm của d với (P) . Trong (P) , ta có $\widehat{AHE} = 90^\circ$ nên quỹ tích là đường tròn đường kính AE trong (P) .



B. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 40. Tìm tập hợp các điểm M cách đều 2 mút của đoạn thẳng AB

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 41. Tìm tập hợp các điểm M cách đều ba đỉnh của tam giác ABC .

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 42. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp các điểm:

a) M sao cho $MA \perp BC$

b) N sao cho: $NA \perp BC$, $NB \perp CA$, $NC \perp AB$

[illegible]

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Bài 55.** Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B , có $AD = 2a$, $AB = BC = a$. Trên tia $Ax \perp (ABCD)$ lấy một điểm S . Gọi C' , D' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SC và SD . Chứng minh rằng:
- $\widehat{SBC} = \widehat{SCD} = 90^\circ$.
 - AD' , AC' và AB cùng nằm trên một mặt phẳng.
 - Đường thẳng $OS = 2a$ luôn luôn đi qua một điểm cố định khi S di động trên Ax .
- Bài 56.** Cho mặt phẳng (α) và một điểm O ngoài (α) . A là một điểm cố định thuộc (α) sao cho OA không vuông góc với (α) , d là một đường thẳng di động trong (α) nhưng luôn luôn qua A . Gọi M là hình chiếu vuông góc của O trên d .
- Tìm tập hợp các điểm M thỏa các tính chất nêu trên.
 - Tìm vị trí của d để độ dài OM là lớn nhất.
- Bài 57.** Cho hình vuông $ABCD$ tâm O , S là một điểm di động trên tia Ax vuông góc với $(ABCD)$.
- Tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của O trên đường thẳng SB .
 - Tìm tập hợp chân đường cao vẽ từ đỉnh D của M .

BÀI TẬP CƠ BẢN NÂNG CAO VẤN ĐỀ 3

- Bài 58.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, cạnh bên $SA = SB = SC = SD = b$ và cùng hợp với đáy góc 60° . Gọi I là trung điểm của CD . Tính góc hợp bởi đường thẳng:
- SC và (SBD)
 - SI và (SAB)
- ĐS: a) 30° b) $44^\circ 24'$
- Bài 59.** Cho hình tứ diện $ABCD$ có AB , BC , CD đôi một vuông góc với nhau và $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$.
- Tính AD .
 - Chỉ ra điểm cách đều A , B , C , D (Tâm mặt cầu ngoại tiếp khối tứ diện)
 - Tính góc giữa đường thẳng AD với các mặt phẳng (BCD) và (ABC)
- Bài 60.** Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh $AB = a$, $AD = 2a$, $AA' = 3a$ và $\widehat{BAD} = 60^\circ$.
- Chứng minh $AB \perp (BD'D)$.
 - Gọi H , K lần lượt là hình chiếu vuông góc của D trên BD' và BC' . Chứng minh $BC' \perp (DHK)$.
- Bài 61.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a , $SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$.
- Chứng minh các mặt bên của hình chóp là những tam giác vuông.
 - Mặt phẳng (α) đi qua A và vuông góc với cạnh SC lần lượt cắt SB , SC , SD tại B' , C' , D' . Chứng minh $B'D' \parallel BD$ và $AB' \perp SB$.
- Bài 62.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và $SA = SC$, $SB = SD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD .
- Chứng minh: $SO \perp (ABCD)$.
 - Gọi $d_1 = (SAB) \cap (SCD)$, $d_2 = (SBC) \cap (SAD)$. Chứng minh: $SO \perp (d_1, d_2)$
- Bài 63.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , $SA \perp (ABC)$.
- Trong ΔSAB kẻ đường cao AH . Chứng minh rằng $BC \perp (SAB)$, $AH \perp (SBC)$.
 - Trong ΔSAC kẻ đường cao AK . Chứng minh rằng $SC \perp (AHK)$.
 - Trong ΔABC kẻ đường cao BM . Chứng minh rằng $BM \parallel (AHK)$.

- Bài 64.** Cho $\triangle ABC$ cân tại A có $\widehat{A} = 120^\circ$, cạnh $BC = a\sqrt{3}$. Lấy điểm S ở ngoài mặt phẳng chứa $\triangle ABC$ sao cho $SA = a$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle SBC$.
- a) Chứng minh: $AO \perp (SBC)$. b) Tính AO khi $\triangle SBC$ vuông tại S . ĐS: $a/2$
- Bài 65.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = a\sqrt{2}$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi AH là đường cao của $\triangle SAB$.
- a) Tính tỉ số $\frac{SH}{SB}$ và độ dài AH .
- b) Gọi (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SB , (α) cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì? Tính diện tích của thiết diện. ĐS: a) $SH/SB = 2/3$, $AH = a\sqrt{6}/3$ b) $S = 5a^2\sqrt{6}/18$ (đvdt)
- Bài 66.** Cho tam giác đều ABC có đường cao $AH = 2a$. Gọi O là trung điểm của AH . Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại O , lấy điểm S sao cho $OS = 2a$. Gọi I là một điểm trên OH , đặt $AI = x$, $a < x < 2a$. Gọi (α) là mặt phẳng qua I và vuông góc với đường thẳng OH .
- a) Xác định mặt phẳng (α) .
- b) Dựng thiết diện của (α) với tứ diện $SABC$. Thiết diện là hình gì?
- Bài 67.** Tính theo a và x diện tích của thiết diện. Với x nào thì diện tích thiết diện lớn nhất? Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh a , $\widehat{B} = 60^\circ$, $SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là một điểm trên cạnh SB .
- a) Khi M là trung điểm của cạnh SB , tính diện tích của thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với (ADM) .
- b) Khi M di động trên cạnh SB , tìm tập hợp hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ADM) .

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

- Câu 21.** Khẳng định nào sau đây **sai**?
- A.** Nếu đường thẳng $d \perp (\alpha)$ thì d vuông góc với hai đường thẳng trong (α) .
- B.** Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng nằm trong (α) thì $d \perp (\alpha)$.
- C.** Nếu đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α) thì d vuông góc với bất kì đường thẳng nào nằm trong (α) .
- D.** Nếu $d \perp (\alpha)$ và đường thẳng $a \parallel (\alpha)$ thì $d \perp a$.
- Câu 22.** Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O . Qua O có mấy đường thẳng vuông góc với Δ cho trước?
- A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.
- Câu 23.** Qua điểm O cho trước, có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với đường thẳng Δ cho trước?
- A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.
- Câu 24.** Mệnh đề nào sau đây có thể **sai**?
- A.** Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.
- B.** Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.
- C.** Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song.
- D.** Một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đã cho) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song nhau.

- Câu 25.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $\triangle ABC$ vuông ở B . Gọi AH là đường cao của $\triangle SAB$. Khẳng định nào sau đây **sai**?
- A. $SA \perp BC$. B. $AH \perp BC$. C. $AH \perp AC$. D. $AH \perp SC$.
- Câu 26.** Trong không gian tập hợp các điểm M cách đều hai điểm cố định A và B là:
- A. Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB . B. Đường trung trực của đoạn thẳng AB .
C. Mặt phẳng vuông góc với AB tại A . D. Đường thẳng qua A và vuông góc với AB .
- Câu 27.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC$ và $DB = DC$. Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. $AB \perp (ABC)$. B. $AC \perp BD$. C. $CD \perp (ABD)$. D. $BC \perp AD$.
- Câu 28.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O . Biết $SA = SC$ và $SB = SD$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?
- A. $SO \perp (ABCD)$. B. $AC \perp (SBD)$. C. $BD \perp (SAC)$. D. $CD \perp AC$.
- Câu 29.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và tam giác ABC vuông tại B . Vẽ $SH \perp (ABC)$, $H \in (ABC)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?
- A. H trùng với trọng tâm tam giác ABC . B. H trùng với trực tâm tam giác ABC .
C. H trùng với trung điểm của AC . D. H trùng với trung điểm của BC .
- Câu 30.** Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC là tam giác cân ở C . Gọi H và K lần lượt là trung điểm của AB và SB . Khẳng định nào sau đây có thể **sai**?
- A. $CH \perp SA$. B. $CH \perp SB$. C. $CH \perp AK$. D. $AK \perp SB$.
- Câu 31.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$. Gọi O là hình chiếu của S lên mặt đáy ABC . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?
- A. O là trọng tâm tam giác ABC . B. O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
C. O là trực tâm tam giác ABC . D. O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .
- Câu 32.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABC)$ và đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi O là tâm của ABC và I là trung điểm của SC . Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?
- A. $BC \perp SB$. B. (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn BD .
C. $IO \perp (ABCD)$. D. Tam giác SCD vuông ở D .
- Câu 33.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AB, BC và SB . Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?
- A. $(IJK) \parallel (SAC)$. B. $BD \perp (IJK)$.
C. Góc giữa SC và BD có số đo 60° . D. $BD \perp (SAC)$.
- Câu 34.** Cho hình tứ diện $ABCD$ có AB, BC, CD đôi một vuông góc nhau. Hãy chỉ ra điểm O cách đều bốn điểm A, B, C, D .
- A. O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . B. O là trọng tâm tam giác ACD .
C. O là trung điểm cạnh BD . D. O là trung điểm cạnh AD .
- Câu 35.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $AB \perp BC$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBC . H là hình chiếu vuông góc của O lên (ABC) . Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. H là trung điểm cạnh AB . B. H là trung điểm cạnh AC .
C. H là trọng tâm tam giác ABC . D. H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- Câu 36.** Cho tứ diện $ABCD$. Vẽ $AH \perp (BCD)$. Biết H là trực tâm tam giác BCD . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?
A. $AB = CD$. **B.** $AC = BD$. **C.** $AB \perp CD$. **D.** $CD \perp BD$.
- Câu 37.** Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông có tâm O , $SA \perp (ABCD)$. Gọi I là trung điểm của SC . Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?
A. $IO \perp (ABCD)$. **B.** (SAC) là mặt phẳng trung trực của đoạn BD .
C. $BD \perp SC$. **D.** $SA = SB = SC$.
- Câu 38.** Cho tứ diện $ABCD$ có cạnh AB, BC, BD bằng nhau và vuông góc với nhau từng đôi một. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?
A. Góc giữa AC và (BCD) là góc $\angle ACD$. **B.** Góc giữa AD và (ABC) là góc $\angle ADB$.
C. Góc giữa AC và (ABD) là góc $\angle CAB$. **D.** Góc giữa CD và (ABD) là góc $\angle CBD$.
- Câu 39.** Cho tam giác ABC vuông cân tại A và $BC = a$. Trên đường thẳng qua A vuông góc với (ABC) lấy điểm S sao cho $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính số đo giữa đường thẳng SB và (ABC)
A. 30° . **B.** 45° . **C.** 60° . **D.** 75° .
- Câu 40.** Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O và cạnh bằng $2a$. Trên đường thẳng qua O vuông góc với $(ABCD)$ lấy điểm S . Biết góc giữa SA và $(ABCD)$ có số đo bằng 45° . Tính độ dài SO .
A. $SO = a\sqrt{3}$. **B.** $SO = a\sqrt{2}$. **C.** $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.
- Câu 41.** Cho hình thoi $ABCD$ có tâm O , $BD = 4a$, $AC = 2a$. Lấy điểm S không thuộc $(ABCD)$ sao cho $SO \perp (ABCD)$. Biết $\tan \widehat{SBO} = \frac{1}{2}$. Tính số đo của góc giữa SC và $(ABCD)$.
A. 30° . **B.** 45° . **C.** 60° . **D.** 75° .
- Câu 42.** Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a và $SA \perp (ABCD)$. Biết $SA = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính góc giữa SC và $(ABCD)$.
A. 30° . **B.** 45° . **C.** 60° . **D.** 75° .
- Câu 43.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng nhau $SA = SB = SC = SD$. Gọi H là hình chiếu của S lên mặt đáy $ABCD$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?
A. $HA = HB = HC = HD$.
B. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành.
C. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp được trong đường tròn.
D. Các cạnh SA, SB, SC, SD hợp với đáy $ABCD$ những góc bằng nhau.
- Câu 44.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC . Biết tam giác SBC là tam giác đều. Tính số đo của góc giữa SA và (ABC) .
A. 30° . **B.** 45° . **C.** 60° . **D.** 75° .
- Câu 45.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cạnh huyền $BC = a$. Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm BC . Biết $SB = a$. Tính số đo của góc giữa SA và (ABC) .
A. 30° . **B.** 45° . **C.** 60° . **D.** 75° .

Vấn đề 4. HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC

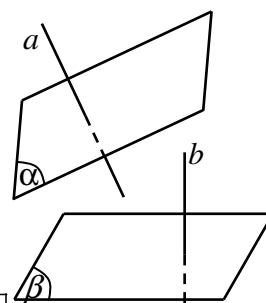
1. Góc giữa hai mặt phẳng

① Định nghĩa 9: Góc giữa hai mặt phẳng.

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

$$\left. \begin{array}{l} a \perp (\alpha) \\ b \perp (\beta) \end{array} \right\} \Rightarrow ((\alpha), (\beta)) = (a, b)$$

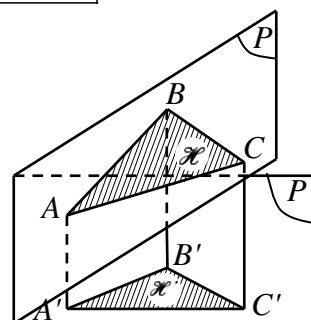
Chú ý: $(\alpha) \parallel (\beta) \Rightarrow ((\alpha), (\beta)) = 0^\circ$ $(\alpha) \equiv (\beta) \Rightarrow ((\alpha), (\beta)) = 0^\circ$



② Định lý 5: (Diện tích đa giác chiếu)

Gọi S là diện tích của đa giác H trong mặt phẳng (P) và S' là diện tích hình chiếu H' của H trên mặt phẳng (P') và φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (P') , thì

$$S' = S \cdot \cos \varphi, \quad S_{\Delta A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot \cos \varphi$$



11. Hai mặt phẳng vuông góc

① Định nghĩa 10: Hai mặt phẳng vuông góc.

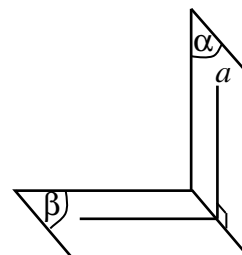
Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90° .

$$(\alpha) \perp (\beta) \Leftrightarrow ((\alpha), (\beta)) = 90^\circ$$

② Định lý 6: Điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc.

Nếu một mặt phẳng chứa một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng khác thì hai mặt phẳng đó vuông góc với nhau.

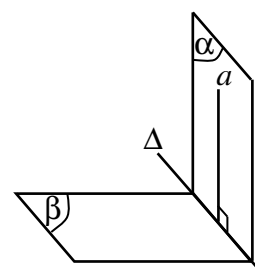
$$\left. \begin{array}{l} a \subset (\alpha) \\ a \perp (\beta) \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha) \perp (\beta)$$



③ Định lý 7: (Tính chất của hai mặt phẳng vuông góc)

Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất kì đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này mà vuông góc với giao tuyến đều vuông góc với mặt phẳng kia.

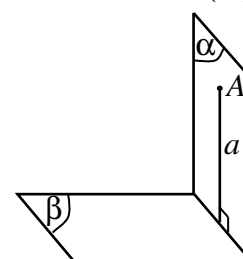
$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \perp (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = \Delta \\ a \subset (\alpha), a \perp \Delta \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (\beta)$$



④ Hệ quả 1:

Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau và A là một điểm nằm trong (α) thì đường thẳng a đi qua A và vuông góc với (α) sẽ nằm trong (β) .

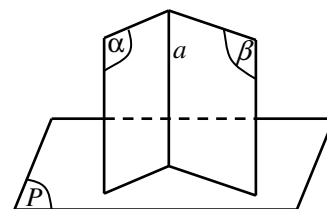
$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \perp (\beta) \\ A \in (\alpha) \\ a \perp (\beta) \\ A \in a \end{array} \right\} \Rightarrow a \subset (\alpha)$$



⑤ Hệ quả 2:

Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba.

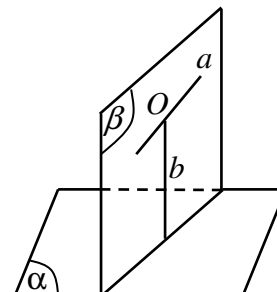
$$\left. \begin{array}{l} (\alpha) \cap (\beta) = \Delta \\ (\alpha) \perp (P) \\ (\beta) \perp (P) \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp (P)$$



⑥ Hệ quả 3:

Qua một đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (α) có duy nhất một mặt phẳng (β) vuông góc với mặt phẳng (α) .

$$a \not\perp (\alpha) \Rightarrow \exists! (\beta) \supset a \text{ và } (\beta) \perp (\alpha)$$



III. Hình lăng trụ đứng. Hình hộp chữ nhật. Hình lập phương.

Định nghĩa 11	Hình vẽ	Tính chất
Hình lăng trụ đứng Là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.		Các mặt bên của hình lăng trụ đứng là hình chữ nhật, vuông góc với mặt đáy.
Hình lăng trụ đều Là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều		Các mặt bên của hình lăng trụ đứng là hình chữ nhật bằng nhau và vuông góc với mặt đáy.
Hình hộp đứng Là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành		Hình hộp đứng có 4 mặt bên là hình chữ nhật
Hình hộp chữ nhật Là hình lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật		Các mặt là hình chữ nhật.
Hình lập phương Là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau		Các mặt là hình vuông bằng nhau.

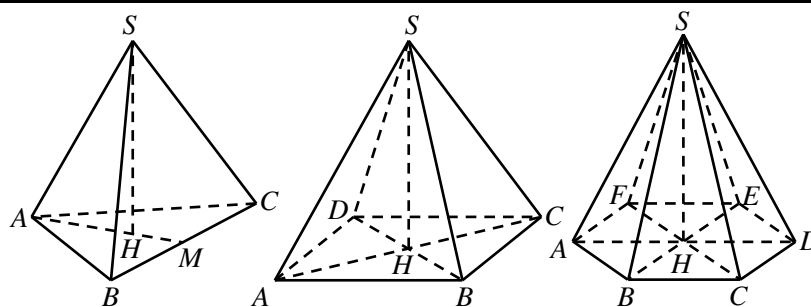
IV. Hình chóp đều

① Định nghĩa 12.

Một hình chóp được gọi là **hình chóp đều** nếu đáy của nó là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.

Trong hình chóp đều:

- Đường thẳng vuông góc với đáy kẻ từ đỉnh được gọi là **đường cao** của hình chóp.
- Đường cao kẻ từ đỉnh của mặt bên gọi là **trung đoạn** của hình chóp đều.



② Tính chất 8.

- Các mặt bên của hình chóp đều là các tam giác cân bằng nhau
- Các cạnh bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.
- Các mặt bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.
- Tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy là hình chiếu của đỉnh xuống đáy.

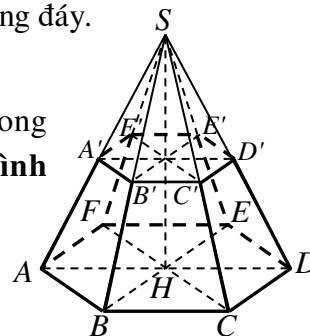
V. Hình chóp cắt đều

① **Định nghĩa 13.** Khi cắt hình chóp đều bởi một mặt phẳng song song với đáy để được một hình chóp cắt thì hình chóp cắt đó gọi là **hình chóp cắt đều**.

Đoạn nối tâm hai đáy được gọi là **đường cao** của hình chóp cắt đều.

② Tính chất 9.

- Các mặt bên là các hình thang cân bằng nhau.
- Hai đáy là hai đa giác đều đồng dạng và nằm trong hai mặt phẳng song song.



Dạng 1. Góc giữa hai mặt phẳng

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

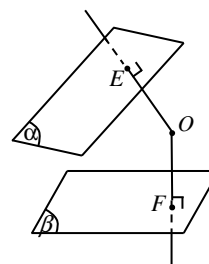
Để tính góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) ta thực hiện theo 3 cách sau:

Cách 1. Sử dụng định nghĩa:

Bước 1. Chọn điểm O , từ đó kẻ:

- ✦ $OE \perp (\alpha)$ tại E
- ✦ $OF \perp (\beta)$ tại F

Bước 2. Khi đó: $((\alpha), (\beta)) = (OE, OF)$



Cách 2. Dùng cho 2 mặt phẳng cắt nhau:

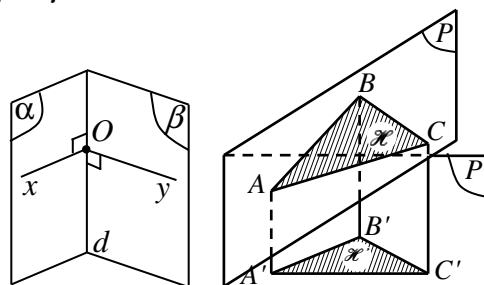
“Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường cùng vuông góc với giao tuyến tại một điểm”

Bước 1. Tìm giao tuyến d của (α) và (β)

Bước 2. Chọn điểm O trên d , từ đó:

- ✦ Trong (α) dựng $Ox \perp d$.
- ✦ Trong (β) dựng $Oy \perp d$.

Bước 3. Khi đó: $((\alpha), (\beta)) = (Ox, Oy)$



Cách 3. Dùng diện tích đa giác chiếu:

Gọi S là diện tích của đa giác H trong (P) và S' là diện tích hình chiếu H của

H trên (P') và φ là góc giữa (P) và (P') , thì: $S' = S \cdot \cos \varphi$ hay $\cos \varphi = \frac{S'}{S}$.

B. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 43. Cho hình chóp $S.ABC$ với ΔABC vuông cân tại B và $BA = BC = a$, $SA \perp (ABC)$, $SA = a\sqrt{3}$.

a) Tính góc giữa (SBC) và (ABC)

b) Tính góc giữa (SAC) và (SBC)

..... DS: a) 60° b) $52^\circ 14'$

Ví dụ 44. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , $AB = a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$

a) Trong tam giác SAC , hạ $OH \perp SC$. Chứng minh góc $\widehat{OHB}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAC) . Tính số đo $\widehat{OHB}$.

b) Tính góc giữa (SBC) và (SCD) .

DS: a) 60° b) 60°

Ví dụ 45. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với $AB = a$. Gọi O là hình chiếu của S trên mặt đáy, đặt $SO = x$.

a) Tìm x sao cho góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ bằng 45° .

b) Với giá trị của x tìm được ở câu a), tính góc giữa (SAD) và (SCD) ĐS: a) $x = a/2$ b) 60°

Ví dụ 46. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a .

a) Tính góc giữa (ACB') và (ACD') ĐS: a) $\arccos(1/3)$ b) $x = a/2$

b) Lấy điểm M trên cạnh DD' và đặt $MD = x$. Tính x sao cho (ACB') vuông góc với (ACM)

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Bài 68.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$. Hai điểm M và N lần lượt thay đổi trên hai cạnh CB và CD , đặt $CM = x$, $CN = y$. Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y để:
- a) Hai mặt phẳng (SAM) và (SAN) tạo với nhau góc 45° . ĐS: a) $2a^2 = 2a(x+y) - xy$
- b) Hai mặt phẳng (SAM) và (SAN) vuông góc với nhau. ĐS: b) $a(x+y) = x^2 + y^2$
- Bài 69.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa các cặp mặt phẳng sau:
- a) (SAB) và (SCD) b) (SBC) và (ABC)
- c) (SBD) và (ABD) d) (SBC) và (SCD)
- e) (SAB) và (SBD) ĐS: a) 30° b) 60° c) $\arctan \sqrt{6}$ d) $2\arctan \frac{2\sqrt{21}}{21}$ e) $\arctan \frac{\sqrt{3}}{2}$
- Bài 70.** Cho $\triangle ABC$ đều cạnh a . Trên đường thẳng vuông góc với (ABC) tại B và C , lần lượt lấy điểm M và N nằm cùng phía đối với mặt phẳng (ABC) sao cho $BM = x$, $CN = 2x$. Tính x sao cho góc giữa (ABC) và (AMN) bằng 60° . ĐS: $x = a\sqrt{3}/2$
- Bài 71.** Cho tứ diện $SABC$, $\triangle ABC$ vuông cân tại A , $AB = a$. Hình chiếu của S trên (ABC) trùng với trung điểm H của BC và $SH = \frac{a}{2}$. Tính góc giữa (SAB) và (SBC) . ĐS: 60°
- Bài 72.** Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi I , J , K lần lượt là trung điểm các cạnh AB , CD , BC . Tính góc giữa hai mặt phẳng (IJK) và (BCD) . ĐS: $\arctan \sqrt{2}$
- Bài 73.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = a$. Tính:
- a) Góc giữa các mặt (SAB) , (SBC) , (SCD) , (SAD) với mặt đáy.
- b) Góc giữa các cặp mặt phẳng (SAB) và (SAD) ; (SBC) và (SAB) ; (SBC) và (SCD) ; (SAD) và (SCD) .
- c) Góc giữa các cặp mặt phẳng (SAB) và (SCD) , (SAD) và (SBC) .
- ĐS: a) $90^\circ, 45^\circ, \arctan \frac{1}{2}, 90^\circ$ b) $90^\circ, 90^\circ, \arctan \frac{\sqrt{10}}{5}, 90^\circ$ c) $90^\circ - \arctan \frac{1}{2}; 45^\circ$
- Bài 74.** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $2a$.
- a) Tính góc giữa cạnh bên và mặt đáy.
- b) Tính tan của góc tạo bởi các mặt bên và mặt đáy. ĐS: a) 30° b) $\tan \alpha = 2\sqrt{3}/3$
- Bài 75.** Từ một điểm nằm ngoài mặt phẳng (P) , hạ đường vuông góc MA và hai đường xiên MB , MC tới (P) . Biết $MA = a$, MB , MC đều tạo với (P) các góc 30° và $MB \perp MC$.
- a) Tính độ dài đoạn thẳng BC .
- b) Tính góc φ tạo bởi (MBC) và (ABC) . ĐS: a) $BC = 2a\sqrt{2}$ b) $\varphi = 45^\circ$
- Bài 76.** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đáy đều bằng a . biết góc tạo thành bởi cạnh bên và mặt đáy là 60° và hình chiếu H của đỉnh A lên $(A'B'C')$ trùng với trung điểm của cạnh $B'C'$.
- a) Tính tan của góc giữa hai đường thẳng BC và AC' .
- b) Tính tan của góc giữa $(ABB'A')$ và mặt đáy. ĐS: a) $\tan \varphi = 3$ b) $\tan \alpha = 2\sqrt{3}$
- Bài 77.** Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , có cạnh huyền BC thuộc mặt phẳng (P) . Gọi β , γ là góc hợp bởi hai đường thẳng AB , AC với (P) . Gọi α là góc hợp bởi (ABC) với (P) . Chứng minh rằng:
- $$\sin^2 \alpha = \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma$$

A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI

-
- A right-angled triangle is shown. The vertical side is labeled a . The angle at the top vertex is labeled α . The angle at the bottom-left vertex is labeled β . A horizontal line segment is drawn from the bottom-left vertex to the vertical side, forming a right angle with it, indicated by a small square at the intersection.

$$\left[\begin{array}{l} a \subset (\alpha) \\ a \perp (\beta) \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha) \perp (\beta)$$

- ③ Chứng minh $a // (P)$ mà $(Q) \perp a$.
- ④ Chứng minh $(P) // (R)$ mà $(Q) \perp (R)$

B. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 47. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O . Các tam giác SAC và SBD cân tại S .
 Chứng minh: $SO \perp (ABCD)$ và $(SAC) \perp (SBD)$.

Ví dụ 48. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B , $SA \perp (ABC)$.

- a) Chứng minh: $(SBC) \perp (SAB)$.
b) Gọi M là trung điểm của AC . Chứng minh: $(SBM) \perp (SAC)$.

Ví dụ 50. Cho hình vuông $ABCD$ tâm O , cạnh a . Dụng d và d' lần lượt vuông góc với $(ABCD)$ tại B và D . Gọi M và N là hai điểm di động lần lượt trên d , d' và nằm cùng bên đối với mặt phẳng $(ABCD)$ sao cho $BM \cdot DN = \frac{a^2}{2}$. Chứng minh: $(MAC) \perp (NAC)$ và $(AMN) \perp (CMN)$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Bài 78.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là $\triangle ABC$ vuông tại B và $SA \perp (ABC)$. Trong $\triangle SAB$ và $\triangle SAC$, kẻ đường cao $AH \perp AB$ và $AK \perp SC$. Gọi E là giao điểm của HK và BC . C/m:
- a) $AH \perp (SBC)$ b) $(AHK) \perp (SAC)$ c) $EA \perp AC$.
- Bài 79.** Cho $\triangle AMN$ cân tại A , $AM = AN = a$, $MN = x$. Gọi I là trung điểm của MN . Trên đường thẳng qua I và vuông góc với (AMN) , ta lấy điểm B sao cho $IA = IB$.
- a) Gọi J là trung điểm của AB . C/m góc giữa (ABM) và (ABN) bằng góc giữa IM và JN .
- b) Tính AB theo a và x và suy ra giá trị x để $(ABM) \perp (ABN)$.
- Bài 80.** Cho hình chóp $S.ABC$, đáy là tam giác vuông tại A . Mặt bên (SAC) là tam giác vuông tại S , nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC) . Chứng minh:
- a) $(SAB) \perp (SAC)$ b) $(SAB) \perp (SBC)$.
- Bài 81.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi O là trọng tâm $\triangle BCD$ và H là trung điểm đoạn AO . Chứng minh các mặt phẳng (HBC) , (HCD) và (HBD) đôi một vuông góc với nhau.
- Bài 82.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , cạnh a , $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Chứng minh: a) $(SBD) \perp (SAC)$ b) $(SBC) \perp (SDC)$.
- Bài 83.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $SA = SB = SC = a$. Chứng minh:
- a) $(ABCD) \perp (SBD)$ b) $\triangle SBD$ vuông.
- Bài 84.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình thoi tâm I cạnh a và có góc A bằng 60° , cạnh $SC = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ và $SC \perp (ABCD)$.
- a) Chứng minh: $(SBD) \perp (SAC)$.
- b) Trong $\triangle SCA$, kẻ $IK \perp SA$ tại K . Tính IK .
- c) Chứng minh $\widehat{BKD} = 90^\circ$ và từ đó suy ra $(SAB) \perp (SAD)$.
- Bài 85.** Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt phẳng (ABC) , (ABD) nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (BDC) . Vẽ các đường cao BE , DF của $\triangle BCD$ và đường cao DK của $\triangle ACD$.
- a) Chứng minh rằng $AB \perp (BCD)$.
- b) Chứng minh rằng $(ABE) \perp (ADC)$ và $(DFK) \perp (ADC)$.
- c) Gọi O và H lần lượt là trực tâm của $\triangle BCD$ và $\triangle ACD$. Chứng minh rằng $OH \perp (ADC)$.
- Bài 86.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm cạnh a . $SO \perp (ABCD)$ và $SO = \frac{a}{2}$. Gọi I , J lần lượt là trung điểm của các cạnh AB , CD . Chứng minh:
- a) $(SAC) \perp (SBD)$ b) $(SAB) \perp (SIJ)$ c) $(SAB) \perp (SCD)$.
- Bài 87.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a . $SA = SB = SC$. Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) . Đặt $SH = h$.
- a) Tính h theo a sao cho $(SAB) \perp (SAC)$. ĐS: a) $h = a\sqrt{6}/6$
- b) Với giá trị h của câu trên. Chứng minh ba mặt bên của hình chóp là các tam giác vuông.

$$DS: S=a^2\sqrt{3}/2$$

ĐS: a) H.thang vuông, $S=3a^2/8$ (đvdt) b) Tứ giác, $S=a^2/2$ (đvdt)

This image shows a full page of a document template designed for handwritten notes or essays. It features approximately 28 evenly spaced, thin grey horizontal lines extending across the entire width of the page. The margins are consistent on all sides, providing ample space for writing. There are no vertical lines, headers, footers, or other markings present on the page.

b) Tính độ dài đường chéo AC' theo a, b, c .

$$DS: AB = AC = 2a \cos \alpha; \quad BC = 2\sqrt{2}a \cos \alpha$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

- Câu 46.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC vuông tại A . Khẳng định nào sau đây **sai**?
A. $(SAB) \perp (ABC)$ B. $(SAB) \perp (SAC)$
C. Vẽ $AH \perp BC$, $H \in BC \Rightarrow$ góc ASH là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC)
D. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAC) là góc SCB
- Câu 47.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = AD$ và $BC = BD$. Gọi I là trung điểm của CD . Khẳng định nào sau đây **sai**?
A. Góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là góc AIB . B. $(BCD) \perp (AIB)$
C. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) là góc CBD D. $(ACD) \perp (AIB)$
- Câu 48.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $AB \perp BC$. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc nào sau đây?
A. Góc SBA B. Góc SCA
C. Góc SCB D. Góc SIA (I là trung điểm BC)
- Câu 49.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?
A. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là góc ABS
B. Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là góc SOA (O là tâm hình vuông $ABCD$)
C. Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và $(ABCD)$ là góc SDA
D. $(SAC) \perp (SBD)$
- Câu 50.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O . Biết $SO \perp (ABCD)$, $SO = a\sqrt{3}$ và đường tròn ngoại tiếp $ABCD$ có bán kính bằng $a\sqrt{2}$. Tính góc hợp bởi mỗi mặt bên với đáy?
A. 30° B. 45° C. 60° D. 75°
- Câu 51.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O và khoảng cách từ A đến BD bằng $\frac{2a}{\sqrt{5}}$. Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (SBD) . Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?
A. $(SAB) \perp (SAD)$ B. $(SAC) \perp (ABCD)$ C. $\tan \alpha = \sqrt{5}$ D. $\alpha = \angle SOA$.
- Câu 52.** Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $AC = 2a$. Các cạnh bên AA' , BB' vuông góc với đáy và $AA' = a$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?
A. Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình chữ nhật.
B. Góc giữa hai mặt phẳng $(AA'C'C)$ và $(BB'D'D)$ có số đo bằng 60° .
C. Hai mặt bên $(AA'C')$ và $(BB'D')$ vuông góc với hai đáy.
D. Hai hai mặt bên $AA'B'B$ và $AA'D'D$ bằng nhau.
- Câu 53.** Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$. Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) trùng với trực tâm H của tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây **không đúng**?
A. $(AA'B'B) \perp (BB'C'C)$ B. $(AA'H) \perp (A'B'C')$
C. $BB'C'C$ là hình chữ nhật. D. $(BB'C'C) \perp (AA'H)$

- Câu 54.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC là tam giác cân ở A . Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (SBC) . Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?
- A. $H \in SB$ B. H trùng với trọng tâm tam giác SBC
C. $H \in SC$ D. $H \in SI$ (I là trung điểm của BC)
- Câu 55.** Cho hình chóp $S.ABC$ có hai mặt bên (SBC) và (SAC) vuông góc với đáy (ABC) . Khẳng định nào sau đây **sai**?
- A. $SC \perp (ABC)$
B. Nếu A' là hình chiếu vuông góc của A lên (SBC) thì $SA' \perp SB$
C. $(SAC) \perp (ABC)$
D. BK là đường cao của tam giác ABC thì $BK \perp (SAC)$.
- Câu 56.** Cho hình chóp $S.ABC$ có hai mặt bên (SAB) và (SAC) vuông góc với đáy (ABC) , tam giác ABC vuông cân ở A và có đường cao AH ($H \in BC$). Gọi O là hình chiếu vuông góc của A lên (SBC) . Khẳng định nào sau đây **đúng**?
- A. $SC \perp (ABC)$ B. $(SAH) \perp (SBC)$
C. $O \in SC$ D. Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc SBA .
- Câu 57.** Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt bên ACD và BCD là hai tam giác cân có đáy CD . Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên (ACD) . Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?
- A. AB nằm trên mặt phẳng trung trực của CD
B. $H \in AM$ (M là trung điểm CD)
C. Góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là góc ADB .
D. $(ABH) \perp (ACD)$.
- Câu 58.** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân ở A . H là trung điểm BC . Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?
- A. Các mặt bên của $ABC.A'B'C'$ là các hình chữ nhật bằng nhau.
B. $(AA'H)$ là mặt phẳng trung trực của BC
C. Nếu O là hình chiếu vuông góc của A lên $(A'BC)$ thì $O \in A'H$
D. Hai mặt phẳng $(AA'B'B)$ và $(AA'C'C)$ vuông góc nhau.
- Câu 59.** Hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ trở thành hình lăng trụ tứ giác đều khi phải thêm các điều kiện nào sau đây?
- A. Tất cả các cạnh đáy bằng nhau và cạnh bên vuông góc với mặt đáy.
B. Cạnh bên bằng cạnh đáy và cạnh bên vuông góc với mặt đáy
C. Có một mặt bên vuông góc với mặt đáy và đáy là hình vuông.
D. Các mặt bên là hình chữ nhật và mặt đáy là hình vuông
- Câu 60.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?
- A. Hình hộp có 6 mặt là 6 hình chữ nhật.
B. Hai mặt $ACC'A'$ và $BDD'B'$ vuông góc nhau
C. Tồn tại điểm O cách đều tám đỉnh của hình hộp
D. Hình hộp có 4 đường chéo bằng nhau và đồng quy tại trung điểm của mỗi đường.

- Câu 61.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a . Khẳng định nào sau đây **sai** ?
A. Hai mặt $ACC'A'$ và $BDD'B'$ vuông góc nhau
B. Bốn đường chéo $AC', A'C, BD', B'D$ bằng nhau và bằng $a\sqrt{3}$
C. Hai mặt $ACC'A'$ và $BDD'B'$ là hai hình vuông bằng nhau
D. $AC \perp BD'$
- Câu 62.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AA' = a$, $AD = 2a$. Gọi α là góc giữa đường chéo $A'C$ và đáy $ABCD$. Tính α
A. $\alpha \approx 20^\circ 45'$ **B.** $\alpha \approx 24^\circ 5'$ **C.** $\alpha \approx 30^\circ 18'$ **D.** $\alpha \approx 25^\circ 48'$
- Câu 63.** Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (ABC') có số đo bằng 60° . Cạnh bên của hình lăng trụ bằng:
A. $3a$ **B.** $a\sqrt{3}$ **C.** $2a$ **D.** $a\sqrt{2}$
- Câu 64.** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AA' = a$, $BC = 2a$, $CA = a\sqrt{5}$. Khẳng định nào sau đây **sai** ?
A. Đáy ABC là tam giác vuông.
B. Hai mặt $(AA'B'B)$ và $(BB'C'C)$ vuông góc nhau
C. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'BC)$ có số đo bằng 45°
D. $AC' = 2a\sqrt{2}$
- Câu 65.** Cho hình lăng trụ lục giác đều $ABCDEF.A'B'C'D'E'F'$ có cạnh bên bằng a và $ADD'A'$ là hình vuông. Cạnh đáy của lăng trụ bằng:
A. a **B.** $\frac{a}{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$
- Câu 66.** Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có $ACC'A'$ là hình vuông, cạnh bằng a . Cạnh đáy của hình lăng trụ bằng:
A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ **B.** $a\sqrt{2}$ **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $a\sqrt{3}$
- Câu 67.** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a\sqrt{3}$ và cạnh bên bằng $2a$. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của hai đáy ABC và $A'B'C'$. Khẳng định nào sau đây đúng khi nói về $AA'G'G$?
A. $AA'G'G$ là hình chữ nhật có hai kích thước là $2a$ và $3a$.
B. $AA'G'G$ là hình vuông có cạnh bằng $2a$.
C. $AA'G'G$ là hình chữ nhật có diện tích bằng $6a^2$
D. $AA'G'G$ là hình vuông có diện tích bằng $8a^2$
- Câu 68.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Khẳng định nào sau đây **sai**?
A. Tam giác $AB'C$ là tam giác đều.
B. Nếu α là góc giữa AC' thì $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
C. $ACC'A'$ là hình chữ nhật có diện tích bằng $2a^2$
D. Hai mặt $AA'C'C$ và $BB'D'D$ ở trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau.
- Câu 69.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đường cao SH . Xét các mệnh đề sau:
I) $SA = SB = SC$
II) H trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
III) Tam giác ABC là tam giác đều.
IV) H là trực tâm tam giác ABC .
Các yếu tố nào chưa đủ để kết luận $S.ABC$ là hình chóp đều?
A. (I) và (II) **B.** (II) và (III) **C.** (III) và (IV) **D.** (IV) và (I)

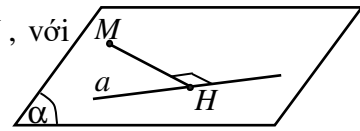
- Câu 70.** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và đường cao SH bằng cạnh đáy. Tính số đo góc hợp bởi cạnh bên và mặt đáy.
A. 30° **B.** 45° **C.** 60° **D.** 75°
- Câu 71.** Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính số đo của góc giữa mặt bên và mặt đáy.
A. 30° **B.** 45° **C.** 60° **D.** 75°
- Câu 72.** Tính cosin của góc giữa hai mặt của một tứ diện đều.
A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$ **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $\frac{1}{3}$
- Câu 73.** Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa một mặt bên và mặt đáy bằng 60° . Tính độ dài đường cao SH .
A. $SH = \frac{a}{2}$ **B.** $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $SH = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ **D.** $SH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$
- Câu 74.** Cho hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a . Tính cosin của góc giữa một mặt bên và một mặt đáy.
A. $\frac{1}{2}$ **B.** $\frac{1}{3}$ **C.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **D.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- Câu 75.** Cho ba tia Ox, Oy, Oz vuông góc nhau từng đôi một. Trên Ox, Oy, Oz lần lượt lấy các điểm A, B, C sao cho $OA = OB = OC = a$. Khẳng định nào sau đây **sai**?
A. $O.ABC$ là hình chóp đều.
B. Tam giác ABC có diện tích $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ **C.** Tam giác ABC có chu vi $2p = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
D. Ba mặt phẳng $(OAB), (OBC), (OCA)$ vuông góc với nhau từng đôi một.
- Câu 76.** Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng a và $\widehat{A} = 60^\circ$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại O (O là tâm của $ABCD$), lấy điểm S sao cho tam giác SAC là tam giác đều. Khẳng định nào sau đây **đúng**?
A. $S.ABCD$ là hình chóp đều
B. Hình chóp $S.ABCD$ có các mặt bên là các tam giác cân. **C.** $SO = \frac{3a}{2}$
D. SA và SB hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ những góc bằng nhau.
- Câu 77.** Cho hình chóp cụt đều $ABC.A'B'C'$ với đáy lớn ABC có cạnh bằng a . Đáy nhỏ $A'B'C'$ có cạnh bằng $\frac{a}{2}$, chiều cao $OO' = \frac{a}{2}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?
A. Ba đường cao AA', BB', CC' đồng qui tại S .
B. $AA' = BB' = CC' = \frac{a}{2}$
C. Góc giữa mặt bên mặt đáy là góc SIO (I là trung điểm BC)
D. Đáy lớn ABC có diện tích gấp 4 lần diện tích đáy nhỏ $A'B'C'$.
- Câu 78.** Cho hình chóp cụt tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh của đáy nhỏ $ABCD$ bằng $\frac{a}{3}$ và cạnh của đáy lớn $A'B'C'D'$ bằng a . Góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° . Tính chiều cao OO' của hình chóp cụt đã cho.
A. $OO' = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ **B.** $OO' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ **C.** $OO' = \frac{2a\sqrt{6}}{3}$ **D.** $OO' = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$

Vấn đề 5. KHOẢNG CÁCH

① Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng a là MH , với H là hình chiếu của M trên đường thẳng a .

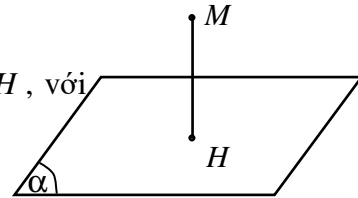
Kí hiệu: $d(M, a) = MH$.



② Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α) là MH , với H là hình chiếu của M trên mặt phẳng (α) .

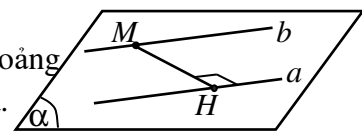
Kí hiệu: $d(M, (\alpha)) = MH$.



③ Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song

Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc đường này đến đường kia.

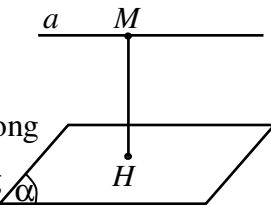
$d(a, b) = d(M, b) = MH$ ($M \in a$)



④ Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với nhau là khoảng cách từ một điểm M bất kì thuộc đường đến mặt phẳng (α) .

$d(a, (\alpha)) = d(M, (\alpha)) = MH$ ($M \in a$)

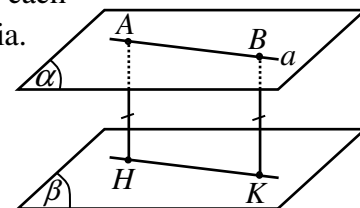


⑤ Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

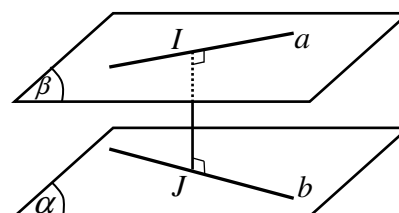
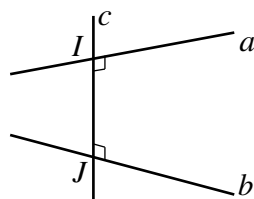
$d((\alpha), (\beta)) = d(a, (\alpha)) = d(A, (\beta)) = AH$

(với $a \subset (\alpha)$; $A \in a$)



⑥ Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

- Đường thẳng c cắt hai đường thẳng a, b và cùng vuông góc với mỗi đường thẳng ấy gọi là **đường vuông góc chung** của a và b . IJ gọi là đoạn vuông góc chung của a và b .



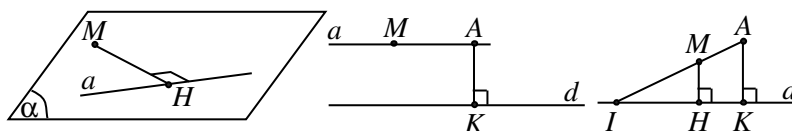
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

Dạng 1. Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng, mặt phẳng
A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI
1. Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng d cho trước

Các bước thực hiện:

Bước 1. Trong mặt phẳng (M, d) hạ $MH \perp d$ với $H \in d$.

Bước 2. Thực hiện việc xác định độ dài MH dựa trên hệ thức lượng trong tam giác, tứ giác, đường tròn, ...



⚡ **Chú ý:**

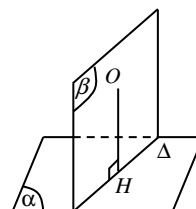
- Nếu tồn tại đường thẳng a qua A và song song với d thì:
 $d(M, d) = d(A, d) = AK$ với $A \in d$.
- Nếu $MA \cap d = I$, thì: $\frac{d(M, d)}{d(A, d)} = \frac{MI}{AI}$

2. Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (α)

Các bước thực hiện:

Bước 1. Tìm hình chiếu H của O lên (α) .

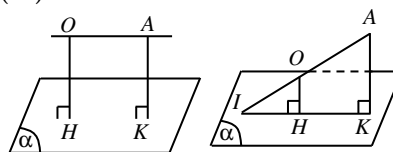
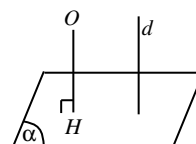
- Tìm mặt phẳng (β) qua O và vuông góc với (α) .
- Tìm $\Delta = (\alpha) \cap (\beta)$.
- Trong mặt phẳng (β) , kẻ $OH \perp \Delta$ tại H
 $\Rightarrow H$ là hình chiếu vuông góc của O lên (α) .



Bước 2. Khi đó OH là khoảng cách từ O đến (α) .

⚡ **Chú ý:**

- Chọn mặt phẳng (β) sao cho dễ tìm giao tuyến với (α) .
- Nếu đã có đường thẳng $d \perp (\alpha)$ thì kẻ $Ox \parallel d$ cắt (α) tại H .
- Nếu $OA \parallel (\alpha)$ thì: $d(O, (\alpha)) = d(A, (\alpha))$.
- Nếu OA cắt (α) tại I thì: $\frac{d(O, (\alpha))}{d(A, (\alpha))} = \frac{OI}{AI}$


B. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 55. Tứ diện $SABC$ có tam giác ABC vuông cân đỉnh B và $AC = 2a$, có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) và $SA = a$.

a) Tính khoảng cách từ S đến BC .

ĐS: a) $a\sqrt{3}$ b) $a\sqrt{6}/6$

b) Hạ $HK \perp SB$. Tính khoảng cách từ trung điểm O của AC đến đường thẳng CH .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 56. Cho tam giác ABC với $AB = 7cm$, $BC = 5cm$, $CA = 8cm$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A , lấy điểm O sao cho $AO = 4cm$. Tính khoảng cách từ điểm A và điểm O đến đường thẳng BC . ĐS: $4\sqrt{3} \text{ cm}; 8cm$

Ví dụ 57. Hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $3a$, cạnh bên bằng $2a$. gọi G là trọng tâm của tam giác đáy ABC , M là trung điểm SC .

a) Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC)

b) Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAG)

ĐS: a) a b) $3a/4$

Ví dụ 58. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = a$, $\widehat{ASB} = 120^\circ$, $\widehat{BSC} = 60^\circ$, $\widehat{CSA} = 90^\circ$. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) ĐS: $a/2$

Ví dụ 59. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh a , cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a$. Gọi I là trung điểm của cạnh SC và M là trung điểm của đoạn AB

a) Tính khoảng cách từ I đến mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Tính khoảng cách từ I đến đường thẳng CM .

ĐS: a) $a/2$ b) $a\sqrt{30}/10$

Ví dụ 60. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính:

a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BD)$.

b) Tính khoảng cách từ A', B, C, D' đến đường thẳng AC' .

ĐS: a) $a\sqrt{3}/2$ b) $a\sqrt{6}/3$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 93. Cho tam giác đều ABC cạnh $3a$, điểm H thuộc cạnh AC với $HC = a$. Dựng đoạn SH vuông góc với (ABC) và $SH = 2a$.

a) Hãy nêu cách dựng đoạn vuông góc HK vẽ từ H đến (SAB) .

b) Tính khoảng cách từ H và từ C đến mặt phẳng (SAB) .

ĐS: b) $2a\sqrt{3}/\sqrt{7}$, $3a\sqrt{21}/7$

Bài 94. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O , cạnh a , $\widehat{ABC} = 60^\circ$, SO vuông góc với mặt phẳng đáy, $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

a) Hãy nêu cách dựng $OH \perp (SCD)$.

b) Tính OH và khoảng cách từ B đến (SCD) . ĐS: b) $OH = a\sqrt{15}/10$; $d[B, (SCD)] = a\sqrt{15}/5$, $3a\sqrt{21}/7$

Bài 95. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a , các mặt bên là tam giác đều. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm của SB, SD và OC . Tính các khoảng cách từ:

a) S đến $(ABCD)$ b) A đến $(IMNB)$ c) S đến (IMN) ĐS: a) $a\sqrt{2}/2$ b) $3a/4$ c) $a/4$

Dạng 2. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau
A. PHƯƠNG PHÁP GIẢI
• Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau a và b
✦ Trường hợp $a \perp b$:

- Dựng mặt phẳng (α) chứa a và vuông góc với b tại B .
- Trong (α) dựng $BA \perp a$ tại A .

$\Rightarrow AB$ là đoạn vuông góc chung.

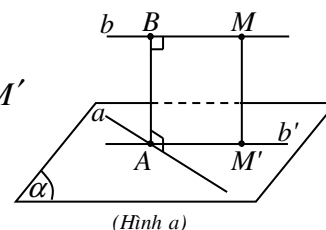
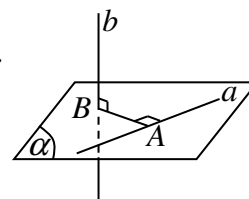
✦ Trường hợp a và b không vuông góc với nhau.
Cách 1: (Hình a)

- Dựng mp (α) chứa a và song song với b .
- Lấy điểm M tùy ý trên b dựng $MM' \perp (\alpha)$ tại M'
- Từ M' dựng $b' \parallel b$ cắt a tại A .
- Từ A dựng $AB \parallel MM'$ cắt b tại B .

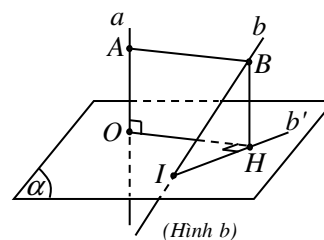
$\Rightarrow AB$ là đoạn vuông góc chung.

Cách 2: (Hình b)

- Dựng mặt phẳng $(\alpha) \perp a$ tại O , (α) cắt b tại I
 - Dựng hình chiếu vuông góc b' của b lên (α)
 - Trong mp (α) , vẽ $OH \perp b'$ tại H .
 - Từ H dựng đường thẳng song song với a cắt b tại B
 - Từ B dựng đường thẳng song song với OH cắt a tại A .
- $\Rightarrow AB$ là đoạn vuông góc chung.



(Hình a)



(Hình b)

• Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b
Cách 1. Dùng đường vuông góc chung:

- Tìm đoạn vuông góc chung AB của a và b .
- $d(a, b) = AB$.

Cách 2. Dựng mặt phẳng (α) chứa a và song song với b .

Khi đó: $d(a, b) = d(b, (\alpha))$

Cách 3. Dựng 2 mặt phẳng song song và lần lượt chứa a và b .

Khi đó: $d(a, b) = d((\alpha), (\beta))$

B. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 61. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC = a$. Gọi I là trung điểm của BC . Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng sau:

a) OA và BC

b) AI và OC

ĐS: a) $a\sqrt{2}/2$ b) $a\sqrt{5}/5$

.....

.....

.....

Ví dụ 62. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , có cạnh $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng sau:

a) SB và CD b) SC và BD c) SC và AB $ĐS$: a) a b) $a\sqrt{3}/3$ c) $2a\sqrt{5}/5$

$$DS: a\sqrt{2}/2$$

DS: a) $a/2$

b) Chứng minh rằng hai mặt phẳng (ABC) và (OBC) vuông góc với nhau.

Ví dụ 65. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:

a) AA' và CB'

b) AA' và DB'

c) AC và $B'D'$

d) BC' và CD' ĐS: a) a b) $a\sqrt{2}/2$ c) a d) $a\sqrt{3}/3$

Ví dụ 66. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O có cạnh $AB = a$. Đường cao SO của hình chóp vuông góc với mặt đáy ($ABCD$) và có $SO = a$. Tính khoảng cách giữa:

a) AC và SD

b) SC và AB

ĐS: a) $a\sqrt{3}/3$ b) $2a\sqrt{5}/5$

Ví dụ 67. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Tính khoảng cách giữa:

a) AA' và mặt phẳng song song (BB', DD')

b) Hai mặt phẳng song song $(A'BD)$ và $(CB'D')$

ĐS: a) $a\sqrt{2}/2$ b) $a\sqrt{3}/3$

Ví dụ 68. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$.

a) Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng $(ACC'A')$

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC'

ĐS: a) $ab/\sqrt{a^2 + b^2}$ b) $ab/\sqrt{a^2 + b^2}$

C. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- Bài 96.** Cho tứ diện $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các ΔABC và ΔSBC .
- Chứng minh ba đường thẳng AH, SK, BC đồng quy.
 - Chứng minh rằng $SC \perp (BHK)$ và $HK \perp (SBC)$.
 - Xác định đường vuông góc chung của BC và SA .
- Bài 97.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a có $SA = SB = SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $\widehat{BAD} = 60^\circ$.
- Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$ và độ dài cạnh SC .
 - Chứng minh $(SAC) \perp (ABCD)$.
 - Chứng minh $SB \perp BC$.
 - Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Tính $\tan \varphi$.
- Bài 98.** Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt (ABC) và (ADC) nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. ΔABC vuông tại A có $AB = a, AC = b$. ΔADC vuông tại D có $CD = a$.
- Chứng minh các tam giác BAD và BDC là những tam giác vuông.
 - Gọi I và K lần lượt là trung điểm của AD và BC . Chứng minh IK là đường vuông góc chung của hai đường thẳng AD và BC .
- Bài 99.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , tâm O , $SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi I, M theo thứ tự là trung điểm của SC và AB .
- Chứng minh: $OI \perp (ABCD)$. ĐS: b) $d[I, CM] = a\sqrt{30}/10, d[S, CM] = a\sqrt{30}/5$
 - Tính khoảng cách từ I đến đường thẳng CM , từ đó suy ra khoảng cách từ S đến CM .
- Bài 100.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và có $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Gọi O là giao điểm của AC và BD . Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SO = \frac{3a}{4}$. Gọi E là trung điểm của đoạn BC , F là trung điểm của BE .
- Chứng minh: $(SOF) \perp (SBC)$.
 - Tính khoảng cách từ O và A đến mặt phẳng (SBC) .
- Bài 101.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{ASB} = 90^\circ, \widehat{BSC} = 60^\circ, \widehat{ASC} = 120^\circ$ và $SA = SB = SC = a$. Gọi I là trung điểm của AC .
- Chứng minh $SI \perp (ABC)$.
 - Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) . ĐS: $a/2$
- Bài 102.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 2a$ và $SA \perp (ABC)$, đáy là tam giác vuông cân tại B với $AB = a$. Gọi M là trung điểm của AC .
- Dựng đoạn vuông góc chung của SM và BC .
 - Tính độ dài đoạn vuông góc chung của SM và BC . ĐS: $2a\sqrt{17}/17$
- Bài 103.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O , cạnh $a, \widehat{A} = 60^\circ$ và có đường cao $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- Tính khoảng cách từ O đến (SBC) .
 - Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SB . ĐS: a) $a\sqrt{3}/4$ b) $a\sqrt{3}/2$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

- Câu 79.** Cho tứ diện $SABC$ trong đó SA, SB, SC vuông góc với nhau từng đôi một và $SA = 3a, SB = a, SC = 2a$. Khoảng cách từ A đến đường thẳng BC bằng:
- A. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{7a\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{8a\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{5a\sqrt{6}}{6}$
- Câu 80.** Cho hình chóp $A.BCD$ có cạnh $AC \perp (BCD)$ và BCD là tam giác đều cạnh bằng a . Biết $AC = a\sqrt{2}$ và M là trung điểm của BD . Khoảng cách từ C đến đường thẳng AM bằng:
- A. $a\sqrt{\frac{2}{3}}$ B. $a\sqrt{\frac{6}{11}}$ C. $a\sqrt{\frac{7}{5}}$ D. $a\sqrt{\frac{4}{7}}$
- Câu 81.** Cho hình chóp $A.BCD$ có cạnh $AC \perp (BCD)$ và BCD là tam giác đều cạnh bằng a . Biết $AC = a\sqrt{2}$ và M là trung điểm của BD . Khoảng cách từ A đến đường thẳng BD bằng:
- A. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{4a\sqrt{5}}{3}$ D. $\frac{a\sqrt{11}}{2}$
- Câu 82.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh bằng a và $\hat{B} = 60^\circ$. Biết $SA = 2a$. Tính khoảng cách từ A đến SC
- A. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{4a\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{5a\sqrt{6}}{2}$
- Câu 83.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $SA = 2a$, $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Gọi O là tâm của $ABCD$, tính khoảng cách từ O đến SC .
- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ C. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$
- Câu 84.** Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng a và góc hợp bởi một cạnh bên và mặt đáy bằng α . Khoảng cách từ tâm của đáy đến một cạnh bên bằng:
- A. $a\sqrt{2} \cot \alpha$ B. $a\sqrt{2} \tan \alpha$ C. $\frac{a\sqrt{2}}{2} \cos \alpha$ D. $\frac{a\sqrt{2}}{2} \sin \alpha$
- Câu 85.** Cho hình chóp $S.ABC$ trong đó SA, AB, BC vuông góc với nhau từng đôi một. Biết $SA = 3a, AB = a\sqrt{3}, BC = a\sqrt{6}$. Khoảng cách từ B đến SC bằng:
- A. $a\sqrt{2}$ B. $2a$ C. $2a\sqrt{3}$ D. $a\sqrt{3}$
- Câu 86.** Cho hình chóp $S.ABC$ trong đó SA, AB, BC vuông góc với nhau từng đôi một. Biết $SA = a\sqrt{3}, AB = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng:
- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$
- Câu 87.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $AD = 2a, SA = a$. Khoảng cách từ A đến (SCD) bằng:
- A. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{2a}{\sqrt{5}}$ D. $\frac{3a}{\sqrt{7}}$
- Câu 88.** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ cạnh đáy bằng $2a$ và chiều cao bằng $a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ tâm O của đáy ABC đến một mặt bên:
- A. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ B. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ C. $a\sqrt{\frac{3}{10}}$ D. $a\sqrt{\frac{2}{5}}$
- Câu 89.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và chiều cao bằng $a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách từ tâm O của đáy $ABCD$ đến một mặt bên:
- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{2a\sqrt{5}}{3}$ D. $\frac{a\sqrt{}}{2}$

Câu 90. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông có chiều cao $AB = a$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CB . Tính khoảng cách giữa đường thẳng IJ và (SAD) .

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{a}{2}$ D. $\frac{a}{3}$

Câu 91. Cho hình thang vuông $ABCD$ vuông tại A và D , $AD = 2a$. Trên đường thẳng vuông góc tại D với $(ABCD)$ lấy điểm S với $SD = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa đường thẳng DC và (SAB) .

- A. $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ B. $\frac{a}{\sqrt{2}}$ C. $a\sqrt{2}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Câu 92. Cho hình chóp $O.ABC$ có đường cao $OH = \frac{2a}{\sqrt{3}}$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của OA và OB . Khoảng cách giữa đường thẳng MN và (ABC) bằng:

- A. $\frac{a}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{a}{3}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Câu 93. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Tính khoảng cách giữa AB và CD .

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Câu 94. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AC = a\sqrt{5}$ và $BC = a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa SD và BC

- A. $\frac{3a}{4}$ B. $\frac{2a}{3}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ D. $a\sqrt{3}$

Câu 95. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Khoảng cách giữa BB' và AC bằng:

- A. $\frac{a}{2}$ B. $\frac{a}{3}$ C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Câu 96. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1 (đvđ). Khoảng cách giữa AA' và BD' bằng:

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ D. $\frac{3\sqrt{5}}{7}$

Câu 97. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a . Gọi M , N , P lần lượt là trung điểm của AD , DC , $A'D'$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (MNP) và (ACC') .

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{a}{4}$ C. $\frac{a}{3}$ D. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$

Câu 98. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có các cạnh bên hợp với đáy những góc bằng 60° , đáy ABC là tam giác đều và A' cách đều A , B , C . Tính khoảng cách giữa hai đáy của hình lăng trụ.

- A. a B. $a\sqrt{2}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{2a}{3}$

Câu 99. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Khoảng cách từ A đến (BCD) bằng:

- A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Câu 100. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Khoảng cách giữa hai cạnh đối AB và CD bằng:

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{a}{2}$ D. $\frac{a}{3}$

BÀI TẬP TỔNG HỢP CHỦ ĐỀ 3

Bài 104. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a .

- a) Chứng minh rằng $B'D \perp (BA'C')$ và $BC' \perp (A'B'CD)$.
- b) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(BA'C')$ và (ACD') .
- c) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC' và CD' .
- d) Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của AB' và BC' .

Bài 105. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Gọi I , K lần lượt là trung điểm của AB và SC . Chứng minh $IS = IC = ID$ và suy ra $IK \perp (SDC)$.

Tính IK .

ĐS: $a\sqrt{2}/2$

Bài 106. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a và ΔSAB đều. Gọi H , K lần lượt là trung điểm của AB , AD và $SH \perp BC$. Chứng minh:

- a) $SH \perp (ABCD)$.
- b) $AC \perp SK$ và $CK \perp SD$.

Bài 107. Cho tứ diện $SABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H , K lần lượt là trực tâm ΔABC và ΔSBC . Chứng minh:

- a) AH , SK , BC đồng qui.
- b) $SC \perp (BHK)$.
- c) $HK \perp (SBC)$.

Bài 108. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có ΔABC đều cạnh a , cạnh bên CC' vuông góc với đáy và $CC' = a$.

- a) Gọi I là trung điểm của BC . Chứng minh $AI \perp BC'$.
- b) Gọi M là trung điểm của BB' . Chứng minh $AM \perp BC'$.
- c) Lấy $N \in A'B'$ sao cho $NB' = \frac{a}{4}$ và gọi J là trung điểm của $B'C'$. Chứng minh $AM' \perp (MNJ)$.

Bài 109. Cho tứ diện $ABCD$ có ΔABC và ΔABD vuông tại B , ΔBCD vuông tại C .

- a) Chứng minh $AB \perp (BCD)$ và ΔACD vuông tại C .
- b) Chứng minh $CD \perp (ABC)$ và ΔBHD vuông tại H với H là hình chiếu của B lên AC .

Bài 110. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh a , SA vuông góc với đáy và $SA = a$.

- a) Gọi I là trung điểm của SD . Chứng minh $AI \perp (SCD)$.
- b) Gọi M là một điểm thay đổi trên SD . Chứng minh hình chiếu của O trên CM thuộc đường tròn cố định.

Bài 111. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a$, $AD = 2a$; $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$. Gọi M là một điểm trên cạnh AB . (α) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB . Đặt $AM = x$, $(0 < x < a)$.

- a) Định hình tính của thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với (α) .

- b) Tính diện tích thiết diện theo a và x .

ĐS: $(2a - x)(a - x)$

Bài 112. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30° . Hình chiếu H của đỉnh A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ thuộc đường thẳng $B'C'$

- a) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy
- b) Chứng minh rằng hai đường thẳng AA' và $B'C'$ vuông góc, tính khoảng cách giữa chúng

ĐS: a) $a/2$ b) $a\sqrt{3}/4$

Bài 113. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $AC = 2a$, $SA \perp (ABC)$, $SA = 2a$.

- a) Xác định thiết diện của hình chóp và mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với SC .

- b) Tính diện tích của thiết diện.

ĐS: $a^2\sqrt{6}/5$

Bài 114. Cho đường tròn (C) đường kính AB trong mặt phẳng (α) và một đường thẳng d vuông góc với (α) tại A , trên d lấy một điểm S và trên (C) lấy một điểm M .

- Chứng minh $MB \perp (SAM)$.
- Dựng $AH \perp SB$ tại H , $AK \perp SM$ tại K . Chứng minh $AK \perp (SBM)$ và $SB \perp (AHK)$.
- Gọi $I = HK \cap MB$. Chứng minh $AI \perp (SAB)$ và AI là tiếp tuyến của (C) .

Bài 115. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O và có $SB = SD = AB$.

- Chứng minh (SAC) là mặt trung trực của đoạn BD .
- Chứng minh ΔSAC vuông tại S .
- Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SD .
Chứng minh $SH = SK, OH = OK, HK \parallel BD$.
- Chứng minh (SAC) là mặt trung trực của đoạn HK .

Bài 116. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính $AD = 2a$.

- Tính khoảng cách từ A và B đến mặt phẳng (SBC) .
- Tính khoảng cách từ đường thẳng AD đến mặt phẳng (SCD) .
- Tính diện tích của thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng

(SAD) và cách một khoảng bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

ĐS: a) $a\sqrt{2}, a\sqrt{2}/2$ b) $a\sqrt{6}/3$ c) $a^2\sqrt{6}/2$

Bài 117. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh a , có $SA = a\sqrt{2}$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với SC .

- Xác định thiết diện của hình chóp tạo bởi (α) .
- Chứng minh thiết diện là tứ giác nội tiếp và có hai đường chéo vuông góc với nhau. Tính diện tích thiết diện.

ĐS: $a^2\sqrt{2}/3$

Bài 118. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , $AB = BC = a$, $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABC)$, $M \in AB$, $AM = x$. Gọi (α) là mặt phẳng qua M và vuông góc với AB . Dựng và tính diện tích S của thiết diện bởi hình chóp với (α) theo a và x . Tìm x để S lớn nhất.

Bài 119. Cho tứ diện $ABCD$ có ΔBCD đều. BH là đường cao của ΔBCD . O là trung điểm của BH và $AO \perp (BCD)$, $AO = BH = 2a$, $BI = x$ với $I \in OH$ ($a < x < 2a$), (α) qua I và vuông góc với OH . Dựng và tính diện tích thiết diện tạo bởi (α) .

ĐS: $2(3x - 2a)(2a - x)/\sqrt{3}$

Bài 120. Cho tứ diện $ABCD$ có (ABC) và (ABD) cùng vuông góc với (BCD) .

- Chứng minh $AB \perp (BCD)$.
- Cho BE và DF là các đường cao của ΔBCD . C/m $(ABE) \perp (ACD)$, $(DAF) \perp (ABC)$.
- Cho DI là đường cao của ΔABD . Chứng minh $(DIF) \perp (ACD)$.
- Gọi $H = BE \cap DF$ và $K = DI \cap AE$. Chứng minh $KH \perp (ACD)$.

Bài 121. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $BC = b$, $CC' = c$.

- Tính khoảng cách từ B đến $(ACC'A')$.
- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và AC' .

Bài 122. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a , $SO \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{6}$, mặt phẳng (P) đi qua B và vuông góc với SD . Hãy xác định thiết diện và tính diện tích của thiết diện tạo bởi (P) với hình chóp. ĐS: $a^2\sqrt{39}/39$

Bài 123. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , các cạnh bên đều bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi (α) là mặt phẳng qua A và song song với BC và vuông góc với SI (I là trung điểm BC).
a) Hãy xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α) . Thiết diện là hình gì?
b) Tính góc giữa đường thẳng AB và (α) . ĐS: 45°

Bài 124. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $2a$ và góc $\widehat{A} = 60^\circ$, các cạnh SA , SB và SD bằng $a\sqrt{3}$. Gọi H là trọng tâm $\triangle ABD$.
a) Chứng minh $SH \perp (ABCD)$.
b) Tính các khoảng cách từ S đến đường thẳng AC và BD .
c) Tính góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$. ĐS: b) $\frac{a\sqrt{15}}{3}$; $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ c) $\arctan \frac{\sqrt{5}}{3}$

Bài 125. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\triangle BCD$ vuông cân tại C , O là trung điểm của BD và I là trung điểm của BC . Chứng minh:
a) $(AOC) \perp (BCD)$, $(ABD) \perp (BCD)$ và $(AOI) \perp (ABC)$.
b) Cho CH là đường cao của $\triangle ABC$. Chứng minh $(OCH) \perp (ABC)$.

Bài 126. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Mặt phẳng (α) chứa AB và vuông góc với (SCD) . Xác định và tính diện tích thiết diện bởi hình chóp với (α) . ĐS: $7a^2\sqrt{3}/16$

Bài 127. Trong mặt phẳng (α) cho đường tròn tâm O đường kính AB và M thuộc đường tròn ấy (M không trùng với A, B). Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (α) tại A lấy điểm S . Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SM . Chứng minh:
a) $(ADE) \perp (SBM)$.
b) Tìm vị trí của điểm M để $(SOM) \perp (SAB)$.

Bài 128. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Gọi E là trung điểm của cạnh CD . Tính theo a khoảng cách từ điểm S tới đường thẳng BE . ĐS: $3a\sqrt{5}/5$

Bài 129. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D , $AB = 2a$, $AD = DC = a$, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa SD và vuông góc với (SAC) .
a) Chứng minh $BC \perp (SAC)$.
b) Xác định thiết diện của hình chóp bởi (α) .
c) Tính diện tích thiết diện ấy. ĐS: $a^2\sqrt{3}/2$

Bài 130. Gọi (β) là mặt phẳng qua trung điểm M của SA và $N \in AD$, $AN = x$, vuông góc với (SAD) . Xác định và tính diện tích thiết diện của hình chóp với (β) . ĐS: $(3a - 2x)\sqrt{a^2 + 4x^2}/4$

Bài 131. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh a , $SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABCD)$.

- Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) .
- Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SBC) .
- Tính khoảng cách từ trọng tâm ΔSAB đến mặt phẳng (SAC) . $ĐS: a) a\sqrt{3}/2$ b) $a\sqrt{3}/4$ c) $a\sqrt{2}/6$

Bài 132. Cho hình thoi $ABCD$ tâm O , cạnh a và $AC = a$. Từ trung điểm H của cạnh AB dựng $SH \perp (ABCD)$ với $SH = a$, $\widehat{B} = 60^\circ$.

- Tính khoảng cách từ điểm O đến (SCD) . $ĐS: a\sqrt{21}/14$
- Tính khoảng cách từ điểm A đến (SBC) . $ĐS: 2a\sqrt{57}/19$

Bài 133. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a , $\widehat{A} = 60^\circ$ góc của đường chéo $A'C$ và mặt đáy bằng 60° .

- Tính khoảng cách giữa hai đáy của hình hộp, suy ra khoảng cách giữa hai đường AC và $D'C'$
- Dựng đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng $A'C$ và BB' . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng đó. $ĐS: a) 3a; 3a$ b) $a/2$

Bài 134. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy là a , cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD .

- Chứng minh: $AB \perp (SIJ)$.
- Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng AB và SC . $ĐS: a\sqrt{42}/7$

Bài 135. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = 3a$ và $SA \perp (ABC)$. Tam giác ABC có $AB = BC = 2a$, $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (ABC) . $ĐS: 3a/2$

Bài 136. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B , $BC = a$, $SA \perp (ABC)$, $SA = 2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và SC .

- Tính khoảng cách giữa SB và SC . $ĐS: 3a\sqrt{20}/20$
- Dựng mặt phẳng chứa MN và song song với BC . Tính $d(MN, BC)$. $ĐS: a/2$

Bài 137. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tâm O , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Gọi I là trung điểm của SC và M là trung điểm của AB .

- Chứng minh $OI \perp (ABCD)$.
- Tính khoảng cách từ điểm I đến đường thẳng CM . $ĐS: a\sqrt{105}/10$

Bài 138. Cho hình tứ diện $ABCD$ có $AD \perp (ABC)$, $AC = AD = 4$ cm, $AB = 3$ cm, $BC = 5$ cm. Tính khoảng cách giữa A và mặt phẳng (BCD) . $ĐS: 6\sqrt{34}/17$

Bài 139. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $SA \perp (ABC)$. Tính $d(A, (ABC))$ theo a , biết $SA = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. $ĐS: a\sqrt{2}/2$

Bài 140. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, ΔSAB đều cạnh a , $(SAB) \perp (ABCD)$.

- Chứng minh ΔSCD cân.
- Tính số đo góc của hai mặt phẳng (SCD) và $(ABCD)$.
- Tính độ dài đoạn vuông góc chung giữa AB và SC . $ĐS: b) 60^\circ, c) a\sqrt{21}/7$

Bài 141. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a .

- Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'D$.
- Gọi M , N và P lần lượt là trung điểm của các cạnh $B'B$, CD , $A'D'$. Tính góc giữa hai đường thẳng MP và $C'N$.
ĐS: a) $a\sqrt{6}/6$ b) 90°

Bài 142. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh đáy là a , tâm O , cạnh bên bằng a .

- Tính đường cao của hình chóp.
- Tính góc giữa các cạnh bên và các mặt bên với mặt đáy.
- Tính $d(O, (SCD))$.
ĐS: a) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ c) $\frac{a\sqrt{42}}{14}$ d) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{6a^2\sqrt{42}}{49}$
- Xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung giữa BD và SC .
- Gọi (α) là mặt phẳng chứa AB và vuông góc với (SCD) , (α) cắt SC , SD lần lượt tại C' và D' . Tứ giác $ABC'D'$ là hình gì? Tính diện tích của tứ giác.

Bài 143. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với $(ABCD)$ và góc giữa (SBC) và đáy bằng 60° . Gọi I là trung điểm của CD , E là trung điểm cạnh BC và J là điểm trên cạnh BC sao cho $BJ = 2JC$. Tính các khoảng cách:

- Giữa hai đường BC và SD
- Giữa hai đường CD và SB
- Giữa hai đường SA và BD
- Giữa hai đường SI và AB
- Giữa hai đường DJ và SA
- Giữa hai đường DJ và SC
- Giữa hai đường AE và SC

Bài 144. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, ΔSAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm của AB . Tính khoảng cách:

- từ A đến mặt phẳng (SBD)
- giữa hai đường SH và CD
- giữa hai đường SH và AC
- giữa hai đường SB và CD
- giữa hai đường BC và SA
- giữa hai đường SC và BD

Bài 145. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a\sqrt{2}$, $AD = 2a$. Biết tam giác SAB cân tại S và có diện tích bằng $\frac{a^2\sqrt{6}}{6}$. Gọi H là trung điểm của AB . Tính khoảng cách:

- từ A đến mặt phẳng (SBD)
- giữa hai đường SH và BD
- giữa hai đường BC và SA

Bài 146. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Lấy điểm $M \in AD'$, điểm $N \in BD$ sao cho: $AM = DN = x$ ($0 < x < a\sqrt{2}$).

- Tìm x để đoạn thẳng MN có độ dài ngắn nhất.
ĐS: $a\sqrt{2}/3$
- Khi MN ngắn nhất, hãy chứng minh MN là đường vuông góc chung của AD' và DB , đồng thời $MN \parallel A'C$.

Bài 147. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi I là điểm thuộc cạnh AB , $AI = x$ ($0 < x < a$)

- Khi góc giữa hai đường thẳng AC' và DI bằng 60° , hãy xác định vị trí của điểm I .
- Tính theo a và x diện tích thiết diện của hình lập phương khi cắt bởi mặt phẳng $(B'DI)$.
Tìm x để diện tích ấy là nhỏ nhất.
- Tính khoảng cách từ điểm C đến $(B'DI)$ theo a và x .

$$\text{ĐS: a) } x = (4 - \sqrt{15})a \text{ b) } S = a\sqrt{a^2 + x^2 + (a-x)^2} \text{ (đvdt), } S_{\min} \text{ khi } x = \frac{a}{2}; \text{ c) } h = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + x^2 + (a-x)^2}}$$

Bài 148. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , I là trung điểm của BC , $SA \perp (ABC)$.

- Chứng minh $(SAI) \perp (SBC)$.
- Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AC , AB ; BE , CF lần lượt là đường cao của ΔSBC . Chứng minh (MBE) vuông góc với (SAC) và (NFC) vuông góc với (SBC) .
- Gọi H , O lần lượt là trực tâm của ΔSBC và ΔABC . Chứng minh OH vuông góc với (SBC) .
- Cho (α) qua A và song song với BC và (α) vuông góc với (SBC) . Tính diện tích thiết diện tạo bởi hình chóp $S.ABC$ và mặt phẳng (α) khi $SA = 2a$. ĐS: $16a^2\sqrt{3}/19\sqrt{19}$
- Chứng minh $AK.AS$ không đổi. Tìm vị trí của S để SK ngắn nhất.
- Khi $SA = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa hai mp (SBC) và (ABC) , (SAC) và (SBC) .

Bài 149. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $a\sqrt{6}$. Xét đường thẳng Δ đi qua điểm A và song song với BD . Gọi (P) là mặt phẳng qua Δ và C' .

- Thiết diện của hình lăng trụ đã cho khi cắt bởi (P) là hình gì? Tính diện tích thiết diện.
- Tính góc giữa hai mặt phẳng (P) và $(ABCD)$. ĐS: a) $S = 2a^2$ b) 60°

Bài 150. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a .

- Tính góc tạo bởi hai đường thẳng AC' và $A'B$. ĐS: 90°
- Gọi M , N , P lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'B'$, BC , DD' . Cm: $AC' \perp (MNP)$.

Bài 151. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (ABC) nếu hình chóp $S.ABC$:

- Có tất cả các cạnh đều bằng a .
- Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$, cạnh đáy $AB = a$.
- Cạnh đáy $AB = a$ và góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy là 60° .
- Cạnh bên $SB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy là 60° .
- Cạnh bên $SB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và góc tạo bởi mặt bên và mặt đáy là 60° .

Bài 152. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$ nếu hình chóp $S.ABCD$:

- Tất cả các cạnh đều bằng a .
- $SA = \frac{a\sqrt{10}}{2}$, $AB = a$.
- $SA = 2a\sqrt{3}$ và góc tạo bởi giữa cạnh bên và mặt đáy là 60° .
- $SA = a\sqrt{2}$ và góc tạo bởi giữa mặt bên và mặt đáy là 60° .
- $AB = 2a$ và góc giữa cạnh bên và mặt đáy là 60° .

Bài 153. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi C_1 là trung điểm CC' .

- Tính góc giữa hai đường thẳng C_1B và $A'B'$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (C_1AB) và (ABC) .
- Chứng minh hình chóp $C_1.ABB'A'$ là hình chóp tứ giác đều.
- Một mặt phẳng (P) chứa cạnh AB , tạo với mặt phẳng đáy (ABC) góc φ và cắt hình lăng trụ đã cho theo hình có diện tích khác 0. Tính diện tích thiết diện theo a và φ .

$$\text{ĐS: a) } 30^\circ; 30^\circ \text{ b) } 0^\circ < \varphi < \widehat{C'MC} : S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\varphi}, \widehat{C'MC} < \varphi < 90^\circ : S = \frac{a^2\sqrt{3}}{3\tan\varphi\sin\varphi}(\sqrt{3}\tan\varphi - 1), \\ \varphi = 90^\circ : S = a^2$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP CHỦ ĐỀ 3

Câu 101. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- A. Vector trong không gian là một đoạn thẳng.
- B. Vector trong không gian là một tia.
- C. Vector trong không gian là một đoạn thẳng có độ dài xác định.
- D. Vector trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.

Câu 102. Trong không gian cho hai điểm M, N . Khi đó,

- A. giá của vector $\overrightarrow{MN}$ là tia MN .
- B. giá của vector $\overrightarrow{MN}$ là đoạn thẳng MN .
- C. giá của vector $\overrightarrow{MN}$ là đường thẳng MN .
- D. giá của vector $\overrightarrow{MN}$ song song với giá của vector $\overrightarrow{NM}$.

Câu 103. Trong không gian cho vector $\overrightarrow{AB}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- A. Độ dài vector $\overrightarrow{AB}$ là một số thực dương.
- B. Độ dài vector $\overrightarrow{AB}$ là độ dài đoạn thẳng AB .
- C. Độ dài vector $\overrightarrow{AB}$ là đoạn thẳng AB .
- D. Độ dài vector $\overrightarrow{AB}$ là đường thẳng AB .

Câu 104. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó, vector $\overrightarrow{AD}$ bằng vector nào dưới đây?

- A. $\overrightarrow{CD}$.
- B. $\overrightarrow{B'C'}$.
- C. $\overrightarrow{D'C'}$.
- D. $\overrightarrow{BA}$.

Câu 105. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Trong các vector $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{AB'}$. Có bao nhiêu vector bằng vector $\overrightarrow{AB}$?

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 4.

Câu 106. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Khi đó, ba vector đồng phẳng là

- A. $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{B'A'}$ và $\overrightarrow{D'C'}$.
- B. $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{B'A'}$ và $\overrightarrow{BC'}$.
- C. $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{B'A'}$ và $\overrightarrow{A'A}$.
- D. $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC'}$.

Câu 107. Cho hình hộp chữ nhật $MNPQ.M'N'P'Q'$. Khi đó,

- A. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{PM}$.
- B. $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{Q'N'} = \overrightarrow{PQ}$.
- C. $\overrightarrow{PN} - \overrightarrow{Q'N'} = \overrightarrow{PQ}$.
- D. $\overrightarrow{MM'} - \overrightarrow{N'N} = 2\overrightarrow{MN}$.

Câu 108. Gọi M, N, P và Q lần lượt là trung điểm của AB, AC, CD và DB của tứ diện $ABCD$. Các vector đồng phẳng là

- A. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}$.
- B. $\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{CD}$.
- C. $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MP}, \overrightarrow{BD}$.
- D. $\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}$.

Câu 109. Trong không gian, cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ có O và O' tương ứng là giao hai đường chéo của mỗi hình đó. Khi đó,

- A. $\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DF} = 4\overrightarrow{OO'}$.
- B. $\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{DC} = 3\overrightarrow{OO'}$.
- C. $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} = 3\overrightarrow{EO}$.
- D. $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DF} = \vec{0}$.

Câu 110. Cho hình hộp chữ nhật $MNPQ.M'N'P'Q'$. Khi đó,

- A. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN'} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP'}$.
- B. $\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{PP'} - \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MM'}$.
- C. $\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QN} - \overrightarrow{P'P} = \overrightarrow{P'Q}$.
- D. $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PP'} + \overrightarrow{P'N'} + \overrightarrow{M'M} = \vec{0}$.

Câu 111. Cho các điểm A, B, C, D trong không gian, trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.
- B. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA}$.
- C. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.
- D. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AD}$.

Câu 112. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Ba vector đồng phẳng khi và chỉ khi giá của ba vector đó cùng song song với một mặt phẳng.
- B. Ba vector đồng phẳng khi và chỉ khi có một vector ngược hướng với hai vector còn lại.
- C. Ba vector đồng phẳng khi và chỉ khi giá của ba vector đó trùng nhau hoặc song song với nhau.
- D. Ba vector đồng phẳng khi và chỉ khi ba vector đó nằm trong cùng một mặt phẳng.

Câu 113. Cho hình hộp $MNPQ.M'N'P'Q'$, khi đó $\overrightarrow{MN'}$, $\overrightarrow{NP'}$ và $\overrightarrow{NQ}$ là

- A. ba vector cùng phương.
- B. ba vector cùng hướng.
- C. ba vector đồng phẳng.
- D. ba vector không đồng phẳng.

Câu 114. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có O, O' lần lượt là tâm của các mặt $ABCD, A'B'C'D'$. Khi đó $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OO'}$ và $\overrightarrow{BB'}$ là

- A. ba vector đồng phẳng.
- B. ba vector không đồng phẳng.
- C. ba vector cùng phương.
- D. ba vector cùng hướng.

Câu 115. Điều kiện cần và đủ để ba vector $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng là:

- A. Có hai số x, y để $x\vec{a} + y\vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$.
- B. Có hai số x, y không đồng thời bằng 0 để $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.
- C. Có ba số x, y, z để $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$.
- D. Có ba số x, y, z không đồng thời bằng 0 để $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$.

Câu 116. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Gọi M là trung điểm của CD . Khi đó:

- A. $\overrightarrow{MC'} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.
- B. $\overrightarrow{MC'} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.
- C. $\overrightarrow{MC'} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$.
- D. $\overrightarrow{MC'} = \vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

Câu 117. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Gọi E là trung điểm của CC' . Khi đó:

- A. $\overrightarrow{AE} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.
- B. $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c}$.
- C. $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$.
- D. $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c})$.

Câu 118. Cho hình bình hành $ABCD$, gọi E là một điểm bất kì. Khi đó:

- A. $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{ED}$.
- B. $\overrightarrow{EA} - \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{ED}$.
- C. $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{ED}$.
- D. $\overrightarrow{EA} - \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{ED}$.

Câu 119. Cho tứ diện $SMNP$, gọi G là trọng tâm tam giác MNP , khi đó

- A. $\overrightarrow{SM} + \overrightarrow{SN} + \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{SG}$.
- B. $\overrightarrow{SM} + \overrightarrow{SN} + \overrightarrow{SP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SG}$.
- C. $\overrightarrow{SM} + \overrightarrow{SN} + \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{SG} = \vec{0}$.
- D. $\overrightarrow{SM} + \overrightarrow{SN} + \overrightarrow{SP} = 3\overrightarrow{SG}$.

Câu 120. Cho tứ diện $SMNP$, gọi G là trọng tâm của tam giác MNP . Vector $\overrightarrow{SG}$ cùng phương với vector nào sau đây?

- A. $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC}$.
- B. $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}$.
- C. $2(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})$.
- D. $\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}$.

Câu 121. Cho tứ diện $SMNP$, gọi G là trọng tâm của tam giác MNP . Vector $\overrightarrow{GS}$ cùng hướng với vector nào sau đây?

- A. $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}$.
- B. $-\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC}$.
- C. $2(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})$.
- D. $\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SA}$.

- Câu 122.** Cho hình chóp $S.ABC$, các điểm M, N tương ứng là trung điểm các cạnh SA, BC . Gọi I là trung điểm của MN , P là điểm bất kì. Khi đó
- A. $2\overrightarrow{PI} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$. B. $3\overrightarrow{PI} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$.
 C. $4\overrightarrow{PI} = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$. D. $\overrightarrow{PI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$.
- Câu 123.** Cho hình chóp $S.ABC$, các điểm M, N tương ứng là trung điểm các cạnh SA, BC . Gọi I là trung điểm của MN , P là điểm bất kì. Khi đó, $\overrightarrow{PI}$ cùng phương với vector nào sau đây?
- A. $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}$. B. $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}$. C. $\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$. D. $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$.
- Câu 124.** Cho hình chóp $S.ABC$, các điểm M, N tương ứng là trung điểm các cạnh SA, BC . Khi đó, vector $\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$ cùng hướng với vector nào sau đây?
- A. $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}$. B. $-\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{PN}$. C. $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{PS}$. D. $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}$.
- Câu 125.** Cho hình hộp $MNPQ.M'N'P'Q'$. Khi đó, góc giữa hai vector $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{NP'}$ là góc nào dưới đây?
- A. $\widehat{NPQ'}$. B. $\widehat{MPN}$. C. $\widehat{NMQ'}$. D. $\widehat{NMQ}$.
- Câu 126.** Cho hình hộp $MNPQ.M'N'P'Q'$. Khi đó, góc giữa hai vector $\overrightarrow{MM'}$ và $\overrightarrow{NP'}$ là góc nào dưới đây?
- A. $\widehat{N'NP'}$. B. $\widehat{MPN}$. C. $\widehat{NMQ'}$. D. $\widehat{NMM'}$.
- Câu 127.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Khi đó, góc giữa hai vector $\overrightarrow{BS}$ và $\overrightarrow{CD}$ bằng
- A. $\widehat{SBC}$. B. $\widehat{SCB}$. C. $\widehat{SAB}$. D. $\widehat{SBA}$.
- Câu 128.** Cho vector $\vec{a}$ khác $\vec{0}$. Khi đó, góc giữa hai vector $\vec{a}$ và $-\vec{a}$ là góc có số đo bằng
- A. 0° . B. 90° . C. 180° . D. 360° .
- Câu 129.** Trong không gian, với hai điểm phân biệt A, B . Ta luôn có:
- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} \neq \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB}$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
 C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} = -AB^2$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} = 2AB^2$.
- Câu 130.** Trong không gian, với ba vector $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ đều khác $\vec{0}$, ta luôn có:
- A. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} \neq \vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$. B. $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) = 0$.
 C. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$. D. $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$.
- Câu 131.** Trong không gian, với hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vector không, ta luôn có:
- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. B. $\vec{a} \cdot \vec{b} > |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.
 C. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$. D. $\vec{a} \cdot \vec{b} < |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.
- Câu 132.** Trong không gian, với hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vector không, ta luôn có:
- A. $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$. B. $\vec{a} \cdot \vec{b} \geq 0$. C. $\vec{a} \cdot \vec{b} \leq 0$. D. $\vec{a} \cdot \vec{b} \in \mathbb{R}$.
- Câu 133.** Trong không gian, với hai điểm phân biệt A, B . Ta luôn có:
- A. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0}$. B. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. C. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2$. D. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = -AB^2$.
- Câu 134.** Gọi α là góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có vector chỉ phương $\vec{u}_1, \vec{u}_2$. Ta luôn có:
- A. $\cos \alpha = \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$. B. $\cos \alpha = -\cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.
 C. $\cos \alpha = |\cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2)|$. D. $\cos \alpha > \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$.

Câu 135. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một vectơ.
- B. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số thực dương.
- C. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số thực.
- D. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là số thực khác 0.

Câu 136. Cho hình hộp $MNPQ.M'N'P'Q'$, trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$.
- B. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{N'M'}$.
- C. $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{PP'}$.
- D. $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{NQ}$.

Câu 137. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{B'C'}$ bằng

- A. 1.
- B. ab .
- C. 0.
- D. abc .

Câu 138. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ bằng

- A. $\overrightarrow{AS}$.
- B. $\overrightarrow{SC}$.
- C. $\overrightarrow{AC}$.
- D. $\overrightarrow{SA}$.

Câu 139. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a . Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$ bằng

- A. $2a^2$.
- B. 0.
- C. a^2 .
- D. $-a^2$.

Câu 140. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a . Tích vô hướng $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{B'D'}$ bằng

- A. a^2 .
- B. 0.
- C. $2a^2$.
- D. $\sqrt{2}a^2$.

Câu 141. Cho hình lập phương $MNPQ.M'N'P'Q'$ có cạnh a . Khi đó,

- A. $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{Q'P'} = a^2$.
- B. $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{PQ} = a^2$.
- C. $\overrightarrow{MN'} \cdot \overrightarrow{NP'} = a^2$.
- D. $\overrightarrow{MN'} \cdot \overrightarrow{NP'} = 0$.

Câu 142. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a . Khi đó,

- A. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{B'D} = a^2$.
- B. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{B'D} = 2a^2$.
- C. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{B'D} = 0$.
- D. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{B'D} = -a^2$.

Câu 143. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. Một đường thẳng có đúng một vectơ chỉ phương.
- B. Một đường thẳng có vô số vectơ chỉ phương.
- C. Các vectơ chỉ phương của đường thẳng cùng hướng với nhau.
- D. Các vectơ chỉ phương của đường thẳng ngược hướng với nhau.

Câu 144. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.
- B. Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với hai đường thẳng chéo nhau cho trước.
- C. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.
- D. Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Câu 145. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

- A. Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng d thì song song hoặc trùng nhau.
- B. Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng d thì vuông góc với nhau.
- C. Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng d thì có thể chéo nhau.
- D. Hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng d thì cắt nhau.

Câu 146. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P) . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Nếu $a \perp b$, $(P) \perp a$ thì $(P) \parallel b$. **C.** Nếu $a \parallel b$, $(P) \perp a$ thì $(P) \perp b$.

B. Nếu $a \parallel (P)$, $a \perp b$ thì $(P) \perp b$. **D.** Nếu $a \parallel (P)$, $a \perp b$ thì $(P) \parallel b$.

Câu 147. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu góc giữa hai vectơ bằng 180° thì hai vectơ đó bằng nhau.

B. Nếu góc giữa hai vectơ bằng 180° thì hai vectơ đó đối nhau.

C. Nếu góc giữa hai vectơ bằng 180° thì hai vectơ đó ngược hướng.

D. Nếu góc giữa hai vectơ bằng 180° thì hai vectơ đó cùng hướng.

Câu 148. Nếu hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ thỏa mãn $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ thì

A. góc giữa hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ bằng 180° .

B. góc giữa hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ bằng 90° .

C. hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ ngược hướng.

D. hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng.

Câu 149. Nếu hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác $\vec{0}$ thỏa mãn $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ thì

A. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1$.

B. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1$.

C. $|\cos(\vec{a}, \vec{b})| = 1$.

D. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0$.

Câu 150. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, đường thẳng nào **không** song song với mặt phẳng $(ABCD)$?

A. $B'D'$.

B. $A'D'$.

C. AC .

D. $B'C'$.

Câu 151. Cho hình chóp đều $S.ABCD$. Khi đó số mặt bên của hình chóp là tam giác cân bằng

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 152. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) .

Khi đó số mặt của hình chóp $S.ABC$ là tam giác vuông bằng

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 153. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng AC vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. $(ACC'A')$.

B. $(ABB'A')$.

C. $(BDD'B')$.

D. $(BC'D')$.

Câu 154. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy. Khi đó, góc giữa đường thẳng SB với mặt phẳng đáy bằng góc nào dưới đây?

A. $\widehat{SCA}$.

B. $\widehat{SBA}$.

C. $\widehat{SBD}$.

D. $\widehat{BAB}$.

Câu 155. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy, $SB = a\sqrt{2}$. Khi đó góc giữa SD với mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. 60° .

B. 90° .

C. 45° .

D. 30° .

Câu 156. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy, $SC = a\sqrt{3}$. Khi đó góc giữa SB với mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

A. 45° .

B. 60° .

C. 90° .

D. 30° .

Câu 157. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, SA vuông góc với đáy. Trong các tam giác cho dưới đây, tam giác nào **không phải** tam giác vuông?

A. $\triangle SAB$.

B. $\triangle SAD$.

C. $\triangle SAC$.

D. $\triangle SCD$.

Câu 158. Cho hình lập phương $MNPQ.M'N'P'Q'$. Khi đó mặt phẳng $(MPP'M')$ vuông góc với mặt phẳng nào dưới đây?

A. $(NN'P'P)$.

B. $(NN'Q)$.

C. $(NN'M')$.

D. $(MNPQ)$.

Câu 159. Cho hai mặt phẳng (P) , (Q) vuông góc với nhau theo giao tuyến Δ và cho đường thẳng a .

Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. Nếu $a // (P)$ thì $a \perp (Q)$.
 B. Nếu $a // (Q)$ thì $a \perp (P)$.
 C. Nếu $a \subset (P)$, $a \perp \Delta$ thì $a \perp (Q)$.
 D. Nếu $a \perp \Delta$ thì $a \perp (P)$ hoặc $a \perp (Q)$.

Câu 160. Cho hai mặt phẳng phân biệt (P) , (Q) cùng vuông góc với mặt phẳng (R) . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. $(P) \equiv (Q)$.
 B. $(P) // (Q)$.
 C. (P) cắt (Q) .
 D. $(P) // (Q)$ hoặc (P) cắt (Q) theo giao tuyến Δ thỏa mãn $\Delta \perp (R)$.

Câu 161. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. Hình hộp chữ nhật có các mặt bên đều là hình chữ nhật.
 B. Hình hộp chữ nhật là hình lăng trụ đứng.
 C. Hình lăng trụ đứng là hình hộp chữ nhật.
 D. Hình hộp chữ nhật có các cạnh bên vuông góc với đáy.

Câu 162. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

- A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
 B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
 C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì cắt nhau.
 D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Câu 163. Cho hai mặt phẳng (P) , (Q) và một đường thẳng a . Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

- A. Nếu $(P) // (Q)$, $a \perp (P)$ thì $a \perp (Q)$.
 B. Nếu $(P) \perp (Q)$, $a // (P)$ thì $a \perp (Q)$.
 C. Nếu $(P) \perp (Q)$, $a \perp (P)$ thì $a // (Q)$.
 D. Nếu $(P) // a$, $(Q) // a$ thì $(P) // (Q)$.

Câu 164. Cho đường thẳng a có hình chiếu trên mặt phẳng (P) là đường thẳng a' , đường thẳng b nằm trong (P) . Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?

- A. Nếu $a \perp b$ thì $a' \perp b$.
 B. Nếu $a' \perp b$ thì $a \perp b$.
 C. Nếu $a // b$ thì $a' // b$ hoặc $a' \equiv b$.
 D. Nếu $a' // b$ thì $a // b$.

Câu 165. Cho tứ diện $ABCD$ có AB , AC , AD đôi một vuông góc. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào **sai**?

- A. Hai cạnh đối của tứ diện vuông góc.
 B. Ba mặt phẳng (ABC) , (ABD) , (ACD) đôi một vuông góc.
 C. Hình chiếu của A lên mặt phẳng (BCD) là trực tâm tam giác BCD .
 D. Tam giác BCD vuông.

Câu 166. Cho đoạn thẳng AB là (P) là mặt phẳng trung trực của nó. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

- A. Nếu $M \in (P)$ thì $MA = MB$.
 B. Nếu $MN \subset (P)$ thì $MN \perp AB$.
 C. Nếu $MA = MB$ thì $M \in (P)$.
 D. Nếu $MN \perp AB$ thì $MN \subset (P)$.

Câu 167. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến c . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa hai đường thẳng lần lượt nằm trên (P) và (Q) .

- B.** Góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa hai đường thẳng lần lượt nằm trên (P) , (Q) và cùng đi qua một điểm.
- C.** Góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa hai đường thẳng lần lượt nằm trên (P) , (Q) và cùng vuông góc với c .
- D.** Góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa đường thẳng a nằm trên (P) và hình chiếu của a trên (Q) .

Câu 168. Cho tứ diện $ABCD$ có AB , AC , AD đôi một vuông góc. Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (DBC) bằng góc:

- A.** $\widehat{DBA}$. **B.** $\widehat{DMA}$ (M là trung điểm BC).
- C.** $\widehat{DCA}$. **D.** $\widehat{DHA}$ (H là chân đường cao của $\triangle ABC$ kẻ từ A).

Câu 169. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau khi và chỉ khi:

- A.** Mọi đường thẳng trong mặt phẳng này đều vuông góc với mặt phẳng kia.
- B.** Hai mặt phẳng lần lượt chứa hai đường thẳng vuông góc với nhau.
- C.** Mặt phẳng này chứa đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.
- D.** Mỗi đường thẳng trong mặt phẳng này vuông góc với một đường thẳng nằm trong mặt phẳng kia.

Câu 170. Qua một đường thẳng $a \parallel (P)$ cho trước, có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với (P) ?

- A.** 0 **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Câu 171. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau theo giao tuyến c . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A.** Đường thẳng a nằm trong (P) thì vuông góc với (Q) .
- B.** Đường thẳng a vuông góc với (Q) thì nằm trong (P) .
- C.** Đường thẳng a vuông góc với c thì vuông góc với (Q) .
- D.** Đường thẳng a đi qua điểm A thuộc (P) và vuông góc với c thì a nằm trên (P) .

Câu 172. Hình hộp chữ nhật có ba kích thước là 3, 4, 4 thì độ dài đường chéo của nó là:

- A.** 5. **B.** $\sqrt{41}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $5\sqrt{2}$.

Câu 173. Hình chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng 3, cạnh bên bằng 2 thì đường cao bằng bao nhiêu?

- A.** 1. **B.** $2\sqrt{2}$. **C.** $\sqrt{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 174. Hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng 2, cạnh bên bằng 5 thì đường cao bằng bao nhiêu?

- A.** $3\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{23}$. **C.** 3. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 175. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và CD , O là trung điểm của MN . Gọi I là giao điểm của đường thẳng AO và mặt phẳng (BCD) . Khi đó

- A.** I trùng với trực tâm của tam giác BCD .
- B.** I trùng với trọng tâm của tam giác BCD .
- C.** I trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD .
- D.** I trùng với tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCD .

Câu 176. Một hình chóp tam giác là hình chóp đều khi và chỉ khi

- A.** đường cao của hình chóp đi qua trọng tâm của đáy.
- B.** các cạnh bên của hình chóp bằng nhau.

- C. các cạnh bên tạo với mặt đáy các góc bằng nhau.
 D. đáy là tam giác đều và các cạnh bên có độ dài bằng nhau.

Câu 177. Cho ba đường thẳng a, b, c đôi một chéo nhau. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- A. Không tồn tại đường thẳng nào cắt cả ba đường thẳng a, b, c .
 B. Tồn tại vô số đường thẳng cắt cả ba đường thẳng a, b, c .
 C. Tồn tại đúng hai đường thẳng phân biệt cắt cả ba đường thẳng a, b, c .
 D. Tồn tại duy nhất một đường thẳng cắt cả ba đường thẳng a, b, c .

Câu 178. Hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. Hình hộp đã cho là hình lăng trụ đứng. B. Hình hộp đã cho là hình lăng trụ đều.
 C. Tất cả các mặt đều là hình vuông. D. Các mặt bên là các hình chữ nhật.

Câu 179. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. Hình hộp có ba cạnh chung một đỉnh đôi một vuông góc là hình hộp chữ nhật.
 B. Hình lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật là hình hộp chữ nhật.
 C. Hình lăng trụ đều có đáy là tứ giác là hình hộp chữ nhật.
 D. Hình hộp đứng có tất cả các cạnh bằng nhau là hình hộp chữ nhật.

Câu 180. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. Hình hộp có sáu mặt là hình vuông là một hình lập phương.
 B. Hình hộp chữ nhật có sáu mặt có diện tích bằng nhau là một hình lập phương.
 C. Hình lăng trụ đều có tất cả các cạnh bằng nhau là một hình lập phương.
 D. Hình lăng trụ tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau là một hình lập phương.

Câu 181. Hình nào trong các hình sau đây **không** có đủ sáu mặt là hình chữ nhật?

- A. Hình lập phương. B. Hình lăng trụ tứ giác đều.
 C. Hình hộp đứng. D. Hình hộp chữ nhật.

Câu 182. Hình nào trong các hình sau đây có tất cả các cạnh bằng nhau?

- A. Hình hộp chữ nhật. B. Hình hộp.
 C. Hình lăng trụ đều. D. Hình lập phương.

Câu 183. Hình lập phương có cạnh bằng 2 thì đường chéo có độ dài là:

- A. 6. B. $3\sqrt{2}$. C. $\sqrt{6}$. D. $2\sqrt{2}$.

Câu 184. Hình nào trong các hình sau đây không có mặt nào là hình bình hành?

- A. Hình lăng trụ ngũ giác. B. Hình chóp cụt tứ giác đều.
 B. Hình lập phương. D. Hình chóp cụt ngũ giác đều.

Câu 185. Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc. Khi đó:

- A. $S_{BCD} \cdot \cos \widehat{DCA} = S_{ABC}$. B. $S_{BCD} \cdot \cos \widehat{DBA} = S_{ABC}$.
 C. $S_{BCD} \cdot \cos \widehat{DHA} = S_{ABC}$ (H là chân đường cao của $\triangle ABC$ kẻ từ A).
 D. $S_{BCD} \cdot \cos \widehat{DMA} = S_{ABC}$ (M là trung điểm của BC).

Câu 186. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.
 B. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt đi qua hai đường thẳng đó.

- C.** Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng và mặt phẳng song song với nó chứa đường thẳng còn lại.
- D.** Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai đường thẳng song song lần lượt cắt hai đường thẳng đó.

Câu 187. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

- A.** Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau là đoạn thẳng ngắn nhất nối hai điểm thuộc hai đường thẳng đó.
- B.** Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau là đường thẳng vuông góc với cả hai đường thẳng đó.
- C.** Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau cắt cả hai đường thẳng đó.
- D.** Đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau vuông góc với mặt phẳng song song với hai đường thẳng đó.

Câu 188. Cho tứ diện $OABC$ có $OA \perp OB$, $OB \perp OC$, $OC \perp OA$. Gọi α , β , γ theo thứ tự là góc tạo bởi các mặt phẳng (OAB) , (OBC) , (OAC) với (ABC) . Khi đó, giá trị biểu thức $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma$ bằng

- A.** 2. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 189. Cho tứ diện $OABC$ có $OA \perp OB$, $OB \perp OC$, $OC \perp OA$. Đặt $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Khi đó khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) bằng

- A.** $h = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{abc}$. **B.** $h = \frac{a+b+c}{3}$.
- C.** $h = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$. **D.** $h = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

Câu 190. Đường cao của tứ diện đều cạnh a bằng

- A.** $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\frac{3a}{2}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** $2a\sqrt{3}$.

Câu 191. Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A.** Khoảng cách giữa a và (P) bằng khoảng cách giữa đường thẳng a và đường thẳng $a' \subset (P)$ và song song với a .
- B.** Khoảng cách giữa a và (P) bằng khoảng cách giữa a và hình chiếu của nó lên (P) .
- C.** Khoảng cách giữa a và (P) bằng khoảng cách giữa a và đường thẳng b nằm trên (P) và vuông góc với a .
- D.** Khoảng cách giữa a và (P) bằng khoảng cách giữa a và đường thẳng b nằm trên (P) và không song song với a .

Câu 192. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A.** $d(AC, B'D') = AA'$. **B.** $d(AC, B'D') = AD'$.
- C.** $d(AC, B'D') = AB'$. **D.** $d(AC, B'D') = CB'$.

Câu 193. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A.** $d(BB', AC') = d(BB', (ACC'A'))$ **B.** $d(BB', AC') = d(B, AC')$
- C.** $d(BB', AC') = d(B, (ACC'A'))$ **D.** $d(BB', AC') = BO$ (O là tâm hình vuông $ABCD$)

Câu 194. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- A. $AD \perp (BDD'B')$. B. $BD \perp (ACC'A')$.
C. $(BDD'B') \perp (ACC'A')$. D. $BC \parallel (ADC'B')$.

Câu 195. Trong không gian cho hai đường thẳng a, b chéo nhau và đường thẳng c song song với a . Khi đó

- A. b và c song song B. b và c cắt nhau. C. b và c chéo nhau. D. Cả 3 đều sai.

Câu 196. Cho tứ diện đều $ABCD$, gọi α là góc giữa hai mặt bất kỳ của tứ diện $ABCD$. Khi đó,

- A. $\cos \varphi = \frac{1}{3}$. B. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\cos \varphi = \frac{1}{2}$. D. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 197. Cho tứ diện đều $SABC$, gọi α là góc giữa SA và mặt (ABC) . Khi đó,

- A. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$. C. $\cos \varphi = \frac{1}{2}$. D. $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 198. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Khoảng cách từ đỉnh C' đến mặt phẳng $(BDD'B')$ bằng

- A. $\frac{a}{3}$. B. $\frac{a}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 199. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) bằng

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 200. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. C. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

Tài liệu tham khảo

- [1] Trần Văn Hạo – *Đại số và Giải tích 11* - Nhà xuất bản Giáo Dục Việt Nam
- [2] Trần Văn Hạo – *Bài tập Đại số và Giải tích 11* - Nhà xuất bản Giáo Dục Việt Nam
- [3] Trần Văn Hạo – *Hình học 11* - Nhà xuất bản Giáo Dục Việt Nam
- [4] Trần Văn Hạo – *Bài tập Hình học 11* - Nhà xuất bản Giáo Dục Việt Nam
- [5] Trần Văn Hạo – *Bài tập Đại số và Giải tích 11* - Nhà xuất bản Giáo Dục Việt Nam
- [6] Lê Hồng Đức – *Bài giảng trọng tâm TOÁN 11* - Nhà xuất bản ĐHQGHN
- [7] Lê Hoàng Phò – *Phương pháp giải CÁC CHỦ ĐỀ CĂN BẢN ĐẠI SỐ 11* - NXB ĐHQGHN
- [8] Lê Hoàng Phò – *Phương pháp giải CÁC CHỦ ĐỀ CĂN BẢN HÌNH HỌC 11* - NXB ĐHQGHN
- [9] Nguyễn Duy Hiếu – *Kỹ thuật giải nhanh bài toán hay & khó Giải tích 11* - NXB ĐHQGHN
- [10] Nguyễn Duy Hiếu – *Kỹ thuật giải nhanh bài toán hay & khó Hình học 11* - NXB ĐHQGHN
- [11] <http://mathvn.com>
- [12] <http://www.vnmith.com/>
- [13] <http://k2pi.net.vn/>
- [14] <http://forum.mathscope.org/index.php>
- [15] Và một số tài liệu trên Internet mà không rõ tác giả.

ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	B	A	A	C	C	D	A	C	D	C	A	D	A	D	B	A	D	C	D

21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
B	B	A	C	C	A	D	D	C	D	B	B	C	D	B	C	D	C	C	B

41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
B	A	B	B	C	D	C	A	C	C	D	B	A	D	B	B	D	A	D	D

61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
C	B	B	D	B	A	A	A	D	C	C	D	A	C	C	C	A	C	B	B

81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
D	C	A	D	B	D	B	C	B	C	A	D	C	D	C	B	B	A	B	A

101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
D	C	B	B	B	A	C	D	A	A	B	A	C	A	D	A	B	A	D	C

121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140
B	C	B	D	C	A	D	C	C	C	C	D	C	C	C	C	C	C	D	B

141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160
A	C	B	D	C	C	C	D	B	C	D	B	C	B	C	A	D	B	C	D

161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180
C	B	A	D	D	D	C	D	C	B	D	B	A	B	B	D	B	C	D	C

181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200
C	D	D	D	C	D	B	A	C	A	A	A	B	A	D	A	D	C	D	C

PHỤ LỤC

A – KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Chứng minh đường thẳng d song song mp (α) ($d \not\subset (\alpha)$)

Cách 1. Chứng minh $d \parallel d'$ và $d' \subset (\alpha)$

Cách 2. Chứng minh $d \subset (\beta)$ và $(\beta) \parallel (\alpha)$

Cách 3. C/m d và (α) cùng vuông góc với 1 đường thẳng hoặc cùng vuông góc với 1 mặt phẳng

2. Chứng minh mp (α) song song với mp (β)

Cách 1. Chứng minh mp (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau cùng song song với (β) (Nghĩa là 2 đường thẳng cắt nhau trong mặt này song song với 2 đường thẳng trong mặt phẳng kia)

Cách 2. Chứng minh (α) và (β) cùng song song với 1 mặt phẳng hoặc cùng vuông góc với 1 đường thẳng.

3. Chứng minh hai đường thẳng song song:

Cách 1. Hai mặt phẳng (α) , (β) có điểm chung S lần lượt chứa hai đường thẳng song song a và b thì $(\alpha) \cap (\beta) = Sx \parallel a \parallel b$.

Cách 2. $(\alpha) \parallel a$, $a \subset (\beta) \Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = b \parallel a$

Cách 3. Hai mặt phẳng cắt nhau cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng song song với đường thẳng đó.

Cách 4. Một mặt phẳng cắt hai mặt phẳng song song cho 2 giao tuyến song song

Cách 5. Một mặt phẳng song song với giao tuyến của 2 mặt phẳng cắt nhau, ta được 3 giao tuyến song song.

Cách 6. Hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ 3 hoặc cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Cách 7. Sử dụng phương pháp hình học phẳng: đường trung bình, định lý Thales đảo, cạnh đối tứ giác đặc biệt, ...

4. Chứng minh đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α)

Cách 1. Chứng minh đường thẳng d vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (α) .

Cách 2. Chứng minh d nằm trong một trong hai mặt phẳng vuông góc và d vuông góc với giao tuyến $\Rightarrow d$ vuông góc với mp còn lại.

Cách 3. Chứng minh d là giao tuyến của hai mặt phẳng cùng vuông góc với mặt thứ 3.

Cách 4. Chứng minh đường thẳng d song song với a mà $a \perp (\alpha)$.

Cách 5. Đường thẳng nào vuông góc với một trong hai mặt phẳng song song thì cũng vuông góc với mặt phẳng còn lại.

Cách 6. Chứng minh d là trục của tam giác ABC nằm trong (α) .

5. Chứng minh hai đường thẳng d và d' vuông góc:

Cách 1. Chứng minh $d \perp (\alpha)$ và $d' \subset (\alpha)$.

Cách 2. Sử dụng định lý 3 đường vuông góc.

Cách 3. Chứng tỏ góc giữa d , d' bằng 90° .

6. Chứng minh hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc:

Cách 1. Chứng minh $(\alpha) \supset d$ và $d \perp (\beta)$.

Cách 2. Chứng tỏ góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) bằng 90° .

Cách 3. Chứng minh $a \parallel (\alpha)$ mà $(\beta) \perp a$

Cách 4. Chứng minh $(\alpha) \parallel (P)$ mà $(\beta) \perp (P)$.

B - CÔNG THỨC CƠ BẢN

1. Tam giác

a. Tam giác thường:

$$\textcircled{1} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

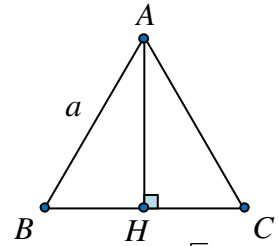
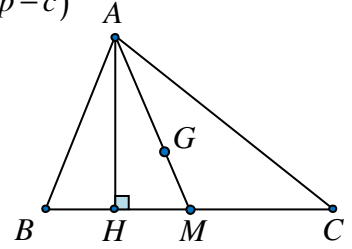
$$\textcircled{2} S_{\triangle ABM} = S_{\triangle ACM} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$$

$$\textcircled{3} AG = \frac{2}{3} AM \quad (G \text{ là trọng tâm})$$

$$\textcircled{4} \text{Độ dài trung tuyến: } AM^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}$$

$$\textcircled{5} \text{Định lí hàm số cosin: } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$$

$$\textcircled{6} \text{Định lí hàm số sin: } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



b. Tam giác đều ABC cạnh a:

$$\textcircled{1} S_{\triangle ABC} = \frac{(\text{cạnh})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \quad \textcircled{2} \quad AH = \frac{\text{cạnh} \times \sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \textcircled{3} \quad AG = \frac{2}{3} AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

c. Tam giác ABC vuông tại a:

$$\textcircled{1} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} AH \cdot BC$$

$$\textcircled{2} BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$\textcircled{3} BA^2 = BH \cdot BC$$

$$\textcircled{4} CA^2 = CH \cdot CB$$

$$\textcircled{5} HA^2 = HB \cdot HC$$

$$\textcircled{5} HA^2 = HB \cdot HC$$

$$\textcircled{6} AH \cdot BC = AB \cdot AC$$

$$\textcircled{7} \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

$$\textcircled{8} \frac{HB}{HC} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

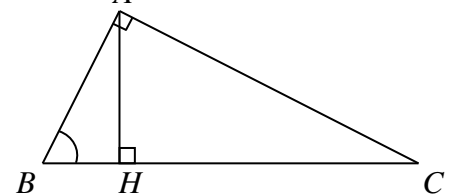
$$\textcircled{9} AM = \frac{1}{2} BC$$

$$\textcircled{10} \sin B = \frac{AC}{BC}$$

$$\textcircled{11} \cos B = \frac{AB}{BC}$$

$$\textcircled{12} \tan B = \frac{AC}{AB}$$

$$\textcircled{13} \cot B = \frac{AB}{AC}$$



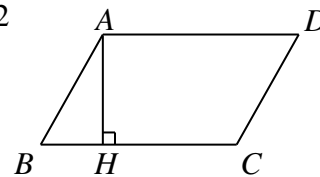
d. Tam giác ABC vuông cân tại A

$$\textcircled{1} BC = AB\sqrt{2} = AC\sqrt{2} \quad \textcircled{2} AB = AC = \frac{BC}{\sqrt{2}}$$

2. Tứ giác

a. Hình bình hành:

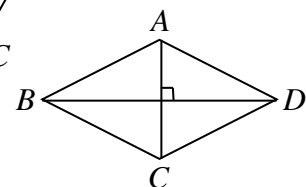
$$\text{Diện tích: } S_{ABCD} = BC \cdot AH = AB \cdot AD \cdot \sin A$$



b. Hình thoi:

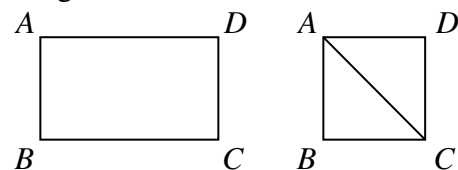
$$\bullet \text{ Diện tích: } S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = AB \cdot AD \cdot \sin A$$

$$\bullet \text{ Đặc biệt: khi } \widehat{ABC} = 60^\circ \text{ hoặc } \widehat{BAC} = 120^\circ \text{ thì các tam giác } ABC, ACD \text{ đều.}$$



c. Hình chữ nhật:

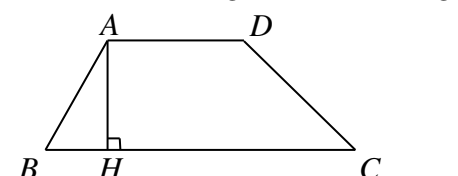
$$S_{ABCD} = AB \cdot AD$$



d. Hình vuông:

$$\bullet \text{ Diện tích: } S_{ABCD} = AB^2$$

$$\bullet \text{ Đường chéo: } AC = AB\sqrt{2}$$

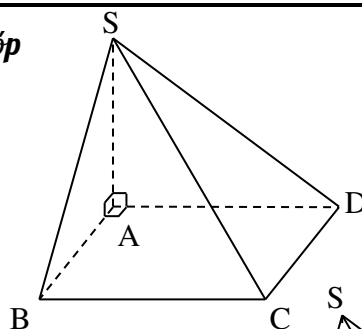


$$e. \text{ Hình thang: } S_{ABCD} = \frac{(AD + BC) \cdot AH}{2}$$

C – MỘT SỐ HÌNH THƯỜNG GẶP

HÌNH 1. Hình chóp S.ABCD, có đáy ABCD là hình chữ nhật (hoặc hình vuông) và SA vuông góc với đáy
H1.1 - Đáy, đường cao, cạnh đáy, cạnh bên, mặt bên của hình chóp

1. Đáy: là hình vuông hoặc hình chữ nhật
2. Đường cao: SA
3. Cạnh bên: SA, SB, SC, SD
4. Cạnh đáy: AB, BC, CD, DA
5. Mặt bên: $\triangle SAB$ vuông tại A. $\triangle SBC$ vuông tại B.
 $\triangle SCD$ vuông tại D. $\triangle SAD$ vuông tại A.

**H1.2 - Góc giữa cạnh bên và đáy**

1. Góc giữa cạnh bên SB và mặt đáy (ABCD) bằng α :

Ta có: $SA \perp (ABCD)$ (gt)

$\Rightarrow$ Hình chiếu của SB lên (ABCD) là AB

$$\Rightarrow (\widehat{SB, (ABCD)}) = (\widehat{SB, AB}) = \widehat{SBA} = \alpha$$

2. Góc giữa cạnh bên SD và mặt đáy (ABCD) bằng α :

Ta có: $SA \perp (ABCD)$ (gt)

$\Rightarrow$ Hình chiếu của SD lên (ABCD) là AD

$$\Rightarrow (\widehat{SD, (ABCD)}) = (\widehat{SD, AD}) = \widehat{SDA} = \alpha$$

3. Góc giữa cạnh bên SC và mặt đáy (ABCD) bằng α :

Ta có: $SA \perp (ABCD)$ (gt)

$\Rightarrow$ Hình chiếu của SC lên (ABCD) là AC

$$\Rightarrow (\widehat{SC, (ABCD)}) = (\widehat{SC, AC}) = \widehat{SCA} = \alpha$$

H1.3 - Góc giữa cạnh bên và mặt bên:

1. Góc giữa cạnh bên SB và mặt bên (SAD) bằng α :

Ta có: $AB \perp (SAD) \Rightarrow$ Hình chiếu của SB lên (SAD) là SA

$$\Rightarrow (\widehat{SB, (SAD)}) = (\widehat{SB, SA}) = \widehat{BSA} = \alpha$$

2. Góc giữa cạnh bên SD và mặt bên (SAB) bằng α :

Ta có: $AD \perp (SAB)$

$\Rightarrow$ Hình chiếu của SD lên (SAB) là SA

$$\Rightarrow (\widehat{SD, (SAB)}) = (\widehat{SD, SA}) = \widehat{DSA} = \alpha$$

3. Góc giữa cạnh bên SC và mặt bên (SAB) bằng α :

Ta có: $BC \perp (SAB)$

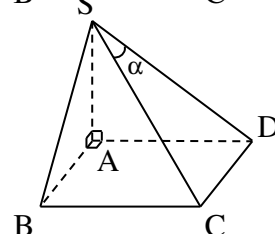
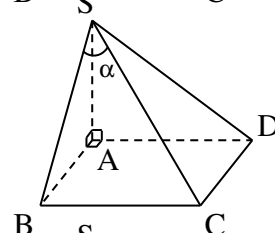
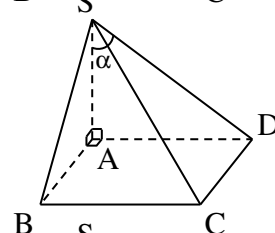
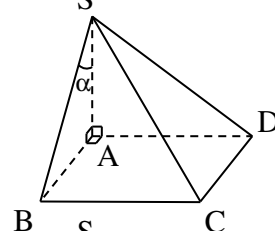
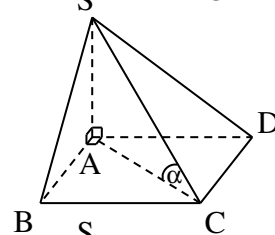
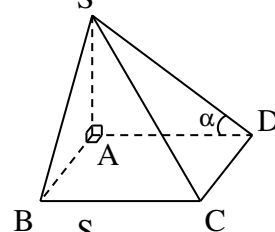
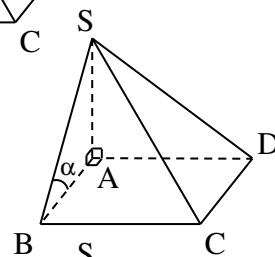
$\Rightarrow$ Hình chiếu của SC lên (SAB) là SB

$$\Rightarrow (\widehat{SC, (SAB)}) = (\widehat{SC, SB}) = \widehat{BSC} = \alpha$$

4. Góc giữa cạnh bên SC và mặt bên (SAD) bằng α :

Ta có: $DC \perp (SAD) \Rightarrow$ Hình chiếu của SC lên (SAD) là SD

$$\Rightarrow (\widehat{SC, (SAD)}) = (\widehat{SC, SD}) = \widehat{DSC} = \alpha$$



H1.4 - Góc giữa mặt bên và mặt đáy:**1. Góc giữa mặt bên (SBC) và mặt đáy (ABCD) bằng α :**

Ta có: $BC \perp AB$ tại B (?), $BC \perp SB$ tại B (?)

$$(SBC) \cap (ABCD) = BC$$

$$\Rightarrow (\widehat{(SBC), (ABCD)}) = (\widehat{AB, SB}) = \widehat{SBA} = \alpha$$

2. Góc giữa mặt bên (SCD) và mặt đáy (ABCD) bằng α :

Ta có: $CD \perp AD$ tại D (?), $CD \perp SD$ tại D (?)

$$(SCD) \cap (ABCD) = CD$$

$$\Rightarrow (\widehat{(SCD), (ABCD)}) = (\widehat{AD, SD}) = \widehat{SDA} = \alpha$$

3. Góc giữa mặt phẳng (SBD) và mặt đáy (ABCD) bằng α :

❖ Đáy ABCD là hình chữ nhật:

Trong (ABCD), vẽ $AH \perp BD$ tại $H \Rightarrow BD \perp SH$ (?)

$$\Rightarrow (\widehat{(SBD), (ABCD)}) = (\widehat{AH, SH}) = \widehat{SHA} = \alpha$$

⚠ Chú ý: Nếu $AB < AD$ thì điểm H ở gần B hơn

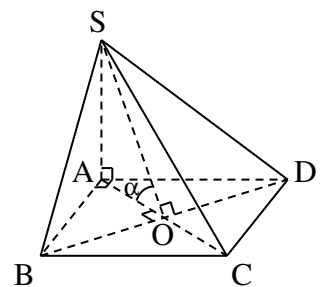
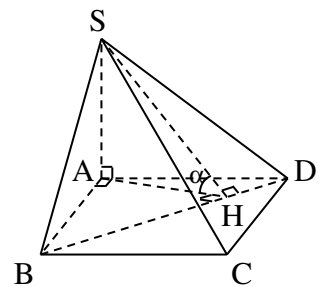
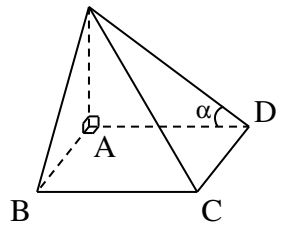
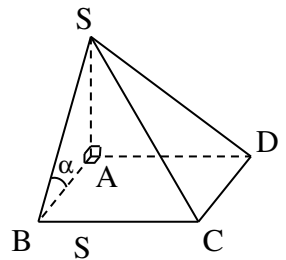
Nếu $AB > AD$ thì điểm H ở gần D hơn

❖ Đáy ABCD là hình vuông:

Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow AO \perp BD$ (?)

$$\Rightarrow BD \perp SO$$
 (?)

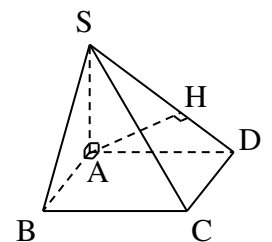
$$\Rightarrow (\widehat{(SBD), (ABCD)}) = (\widehat{SO, AO}) = \widehat{SOA} = \alpha$$

**H1.5 - Khoảng cách "điểm - mặt"****1. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD)**

Trong mp(SAD), vẽ $AH \perp SD$ tại H

$$\Rightarrow AH \perp (SCD) \text{ (?)}$$

$$\Rightarrow d(A, (SCD)) = AH$$

**2. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD)**

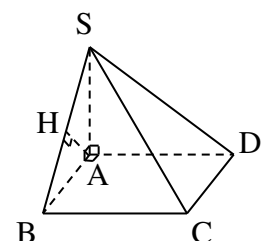
Vì $AB \parallel (SCD)$ (?) nên $d(B, (SCD)) = d(A, (SCD))$ (xem dạng 1)

3. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC)

Trong mp(SAB), vẽ $AH \perp SB$ tại H

$$\Rightarrow AH \perp (SBC) \text{ (?)}$$

$$\Rightarrow d(A, (SBC)) = AH$$

**4. Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC)**

Vì $AD \parallel (SBC)$ (?) nên $d(D, (SBC)) = d(A, (SBC))$ (xem dạng 3)

5. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD)

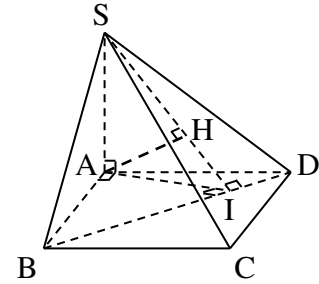
❖ Đáy ABCD là hình chữ nhật:

- Trong (ABCD), vẽ $AI \perp BD$ tại I
 $\Rightarrow BD \perp (SAI)$ (?)

- Trong (SAI), vẽ $AH \perp SI$ tại H
 $\Rightarrow AH \perp (SBD)$ (?)

$$\Rightarrow d(A, (SBD)) = AH$$

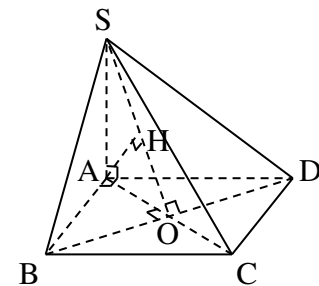
🔗 **Chú ý:** Nếu $AB < AD$ thì điểm I ở gần B hơn
 Nếu $AB > AD$ thì điểm I ở gần D hơn



❖ Đáy ABCD là hình vuông:

- Gọi $O = AC \cap BD$
 $\Rightarrow AO \perp BD$ (?) $\Rightarrow BD \perp (SAO)$ (?)

- Trong (SAO), vẽ $AH \perp SO$ tại H
 $\Rightarrow AH \perp (SBD)$ (?) $\Rightarrow d(A, (SBD)) = AH$



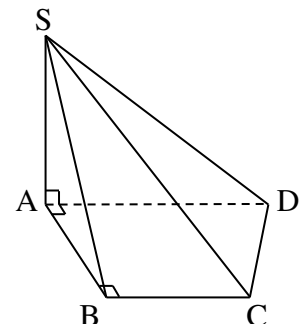
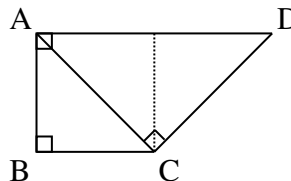
6. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SBD)

Vì O là trung điểm của AC nên $d(C, (SBD)) = d(A, (SBD))$

HÌNH 2. Hình chóp S.ABCD, có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B và SA vuông góc với đáy

H2.1 - Đáy, đường cao, cạnh đáy, cạnh bên, mặt bên của hình chóp

1. Đáy: Hình thang ABCD vuông tại A và B
2. Đường cao: SA
3. Cạnh bên: SA, SB, SC, SD
4. Cạnh đáy: AB, BC, CD, DA
5. Mặt bên: $\triangle SAB$ vuông tại A.
 $\triangle SBC$ vuông tại B.
 $\triangle SAD$ vuông tại A.



🔗 **Chú ý:** Nếu $AB = BC$ và $AD = 2BC$ thì $AC \perp CD \Rightarrow CD \perp (SAC) \Rightarrow \triangle SCD$ vuông tại C

H2.2 - Góc giữa cạnh bên SB và mặt đáy (ABCD):

1. Góc giữa cạnh bên SB và mặt đáy (ABCD):

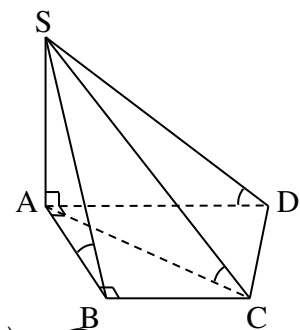
Ta có: $SA \perp ABCD$ (gt)
 $\Rightarrow$ Hình chiếu của SB lên (ABCD) là AB
 $\Rightarrow (\widehat{SB, (ABCD)}) = (\widehat{SB, AB}) = \widehat{SBA}$

2. Góc giữa cạnh bên SD và mặt đáy (ABCD):

Ta có: $SA \perp ABCD$ (gt)
 $\Rightarrow$ Hình chiếu của SD lên (ABCD) là AD $\Rightarrow (\widehat{SD, (ABCD)}) = (\widehat{SD, AD}) = \widehat{SDA}$

3. Góc giữa cạnh bên SC và mặt đáy (ABCD):

Ta có: $SA \perp ABCD$ (gt)
 $\Rightarrow$ Hình chiếu của SC lên (ABCD) là AC $\Rightarrow (\widehat{SC, (ABCD)}) = (\widehat{SC, AC}) = \widehat{SCA}$



H2.3 - Góc giữa mặt bên và mặt đáy:**1. Góc giữa mặt bên (SBC) và mặt đáy (ABCD):**

Ta có: $BC \perp AB$ tại B (?)

$BC \perp SB$ tại B (?)

$$(SBC) \cap (ABCD) = BC$$

$$\Rightarrow (\widehat{(SBC), (ABCD)}) = (\widehat{AB, SB}) = \widehat{SBA}$$

2. Góc giữa mặt bên (SCD) và mặt đáy (ABCD):

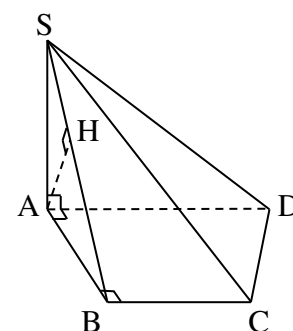
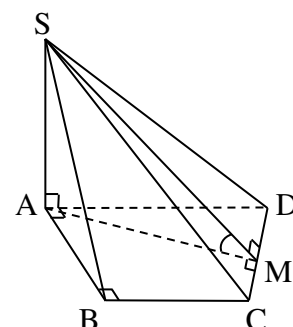
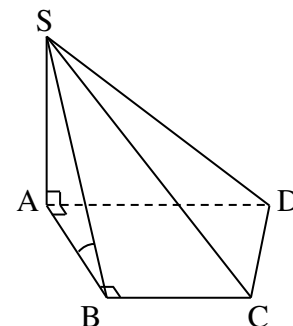
Trong (ABCD), vẽ $AM \perp CD$ tại M

$\Rightarrow SM \perp CD$ tại M (?)

$$\text{Mà } (SCD) \cap (ABCD) = CD$$

$$\Rightarrow (\widehat{(SCD), (ABCD)}) = (\widehat{AM, SM}) = \widehat{SMA} = \alpha$$

🔗 **Chú ý:** Nếu $AB = BC$ và $AD = 2BC$ thì $AC \perp CD$. Do đó $M \equiv C$.

**H2.4 - Khoảng cách "điểm - mặt"****1. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC)**

Trong mp(SAB), vẽ $AH \perp SB$ tại H

$\Rightarrow AH \perp (SBC)$ (?)

$$\Rightarrow d(A, (SBC)) = AH$$

2. Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC)

Vì $AD \parallel (SBC)$ (?) nên $d(D, (SBC)) = d(A, (SBC))$ (xem dạng 3)

3. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD)

• Trong (ABCD), vẽ $AM \perp CD$ tại M

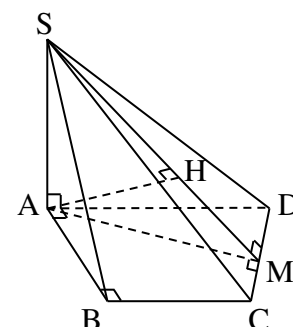
$\Rightarrow CD \perp (SAM)$ (?)

• Trong (SAM), vẽ $AH \perp SM$ tại H

$\Rightarrow AH \perp (SCD)$ (?)

$$\Rightarrow d(A, (SCD)) = AH$$

🔗 **Chú ý:** Nếu $AB = BC$ và $AD = 2BC$ thì $AC \perp CD$. Do đó $M \equiv C$.



HÌNH 3. Hình chóp tứ giác đều S.ABCD

H3.1 - Đáy, đường cao, cạnh đáy, cạnh bên, mặt bên của hình chóp

1. **Đáy:** ABCD là hình vuông

2. **Đường cao:** SO

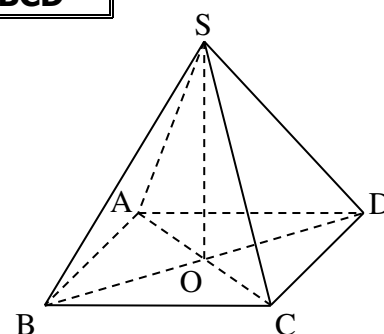
3. **Cạnh bên:** $SA = SB = SC = SD$

4. **Cạnh đáy:** $AB = BC = CD = DA$

5. **Mặt bên:** $\triangle SAB, \triangle SBC, \triangle SCD, \triangle SAD$

là các tam giác cân tại S và bằng nhau.

Gọi O là tâm hình vuông ABCD $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$



H3.2 - Góc giữa cạnh bên và đáy**1. Góc giữa cạnh bên SA và mặt đáy $(ABCD)$:**

Ta có: $SO \perp (ABCD)$ (?)

$\Rightarrow$ Hình chiếu của SA lên $(ABCD)$ là AO

$$\Rightarrow (\widehat{SA, (ABCD)}) = (\widehat{SA, AO}) = \widehat{SAO}$$

2. Góc giữa cạnh bên SB và mặt đáy $(ABCD)$:

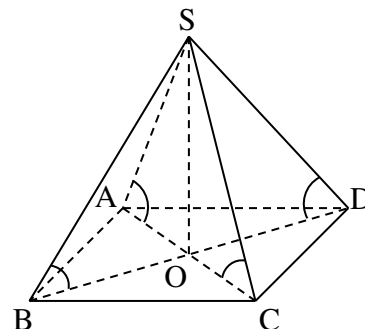
Tương tự $(\widehat{SB, (ABCD)}) = (\widehat{SB, BO}) = \widehat{SBO}$

3. Góc giữa cạnh bên SC và mặt đáy $(ABCD)$:

Tương tự $(\widehat{SC, (ABCD)}) = (\widehat{SC, CO}) = \widehat{SCO}$

4. Góc giữa cạnh bên SD và mặt đáy $(ABCD)$:

Tương tự $(\widehat{SD, (ABCD)}) = (\widehat{SD, DO}) = \widehat{SDO}$



🔗 **Chú ý:** $\widehat{SAO} = \widehat{SBO} = \widehat{SCO} = \widehat{SDO} \rightarrow$ “Góc giữa các cạnh bên với mặt đáy bằng nhau”

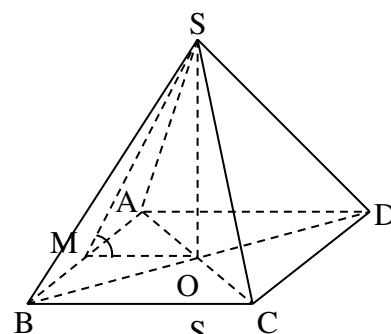
H3.3 - Góc giữa mặt bên và mặt đáy:**1. Góc giữa mặt bên (SAB) và mặt đáy $(ABCD)$:**

Ta có: $OM \perp AB$ tại M (?)

$\Rightarrow AB \perp SM$ tại M (?)

Mà $(SAB) \cap (ABCD) = AB$

$$\Rightarrow (\widehat{(SAB), (ABCD)}) = (\widehat{OM, SM}) = \widehat{SMO}$$

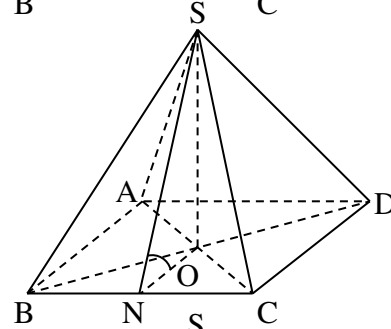
**2. Góc giữa mặt bên (SBC) và mặt đáy $(ABCD)$:**

Ta có: $ON \perp BC$ tại N (?)

$\Rightarrow BC \perp SN$ tại N (?)

Mà $(SBC) \cap (ABCD) = BC$

$$\Rightarrow (\widehat{(SBC), (ABCD)}) = (\widehat{ON, SN}) = \widehat{SNO}$$

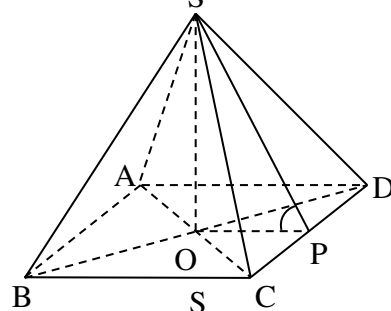
**3. Góc giữa mặt bên (SCD) và mặt đáy $(ABCD)$:**

Ta có: $OP \perp CD$ tại P (?)

$\Rightarrow CD \perp SP$ tại P (?)

Mà $(SCD) \cap (ABCD) = CD$

$$\Rightarrow (\widehat{(SCD), (ABCD)}) = (\widehat{OP, SP}) = \widehat{SPO}$$

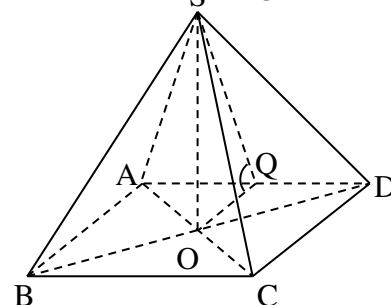
**4. Góc giữa mặt bên (SAD) và mặt đáy $(ABCD)$:**

Ta có: $OQ \perp AD$ tại Q (?)

$\Rightarrow AD \perp SQ$ tại Q (?)

Mà $(SAD) \cap (ABCD) = AD$

$$\Rightarrow (\widehat{(SAD), (ABCD)}) = (\widehat{OQ, SQ}) = \widehat{SQO}$$



🔗 **Chú ý:** $\widehat{SMO} = \widehat{SNO} = \widehat{SPO} = \widehat{SQO}$

$\rightarrow$ “Góc giữa các mặt bên với mặt đáy bằng nhau”

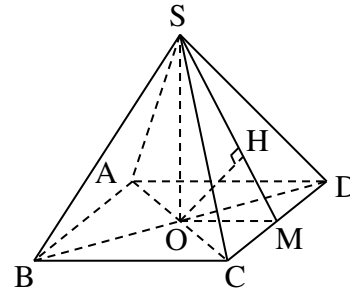
H3.4 - Khoảng cách "điểm - mặt"**1. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SCD)**

Trong $(ABCD)$, vẽ $OM \perp CD$ tại M

$$\Rightarrow CD \perp (SOM) \quad (?)$$

Trong (SOM) , vẽ $OH \perp SM$ tại H

$$\Rightarrow d(O, (SCD)) = OH$$

**2. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD)**

Vì O là trung điểm của AC nên $d(A, (SCD)) = 2d(O, (SCD))$

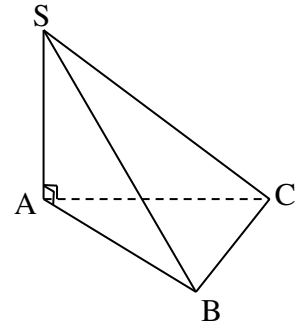
3. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD)

Vì O là trung điểm của BD nên $d(B, (SCD)) = 2d(O, (SCD))$

HÌNH 4. Hình chóp $S.ABC$, SA vuông góc với đáy**H4.1 - Đáy, đường cao, cạnh đáy, cạnh bên, mặt bên của hình chóp**

1. Đáy: tam giác ABC
2. Đường cao: SA
3. Cạnh bên: SA, SB, SC
4. Cạnh đáy: AB, BC, CA
5. Mặt bên: $\triangle SAB$ là tam giác vuông tại A .
 $\triangle SAC$ là tam giác vuông tại A .

Chú ý: Nếu $\triangle ABC$ vuông tại B thì $\triangle SBC$ vuông tại B
 Nếu $\triangle ABC$ vuông tại C thì $\triangle SBC$ vuông tại C

**H4.2 - Góc giữa cạnh bên và đáy****1. Góc giữa cạnh bên SB và mặt đáy (ABC) :**

Ta có: $SA \perp (ABC)$ (gt)

$\Rightarrow$ Hình chiếu của SB lên (ABC) là AB

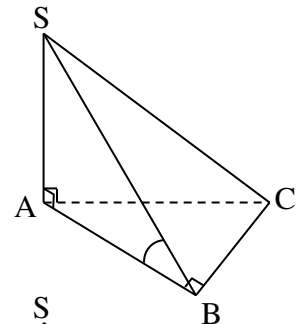
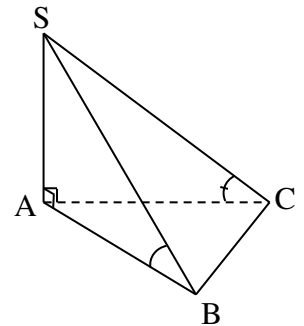
$$\Rightarrow (\widehat{SB, (ABC)}) = (\widehat{SB, AB}) = \widehat{SBA}$$

2. Góc giữa cạnh bên SC và mặt đáy (ABC) :

Ta có: $SA \perp (ABC)$ (gt)

$\Rightarrow$ Hình chiếu của SC lên (ABC) là AC

$$\Rightarrow (\widehat{SC, (ABC)}) = (\widehat{SC, AC}) = \widehat{SCA}$$

**H4.3 - Góc giữa mặt bên (SBC) và mặt đáy (ABC) :****1. Tam giác ABC vuông tại B**

Ta có: $BC \perp AB$ tại B (?)

$BC \perp SB$ tại B (?)

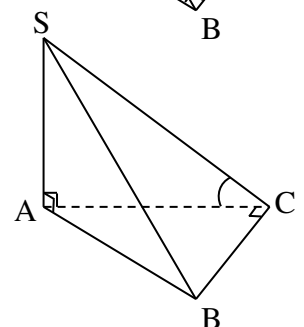
$$(SBC) \cap (ABC) = BC \Rightarrow (\widehat{(SBC), (ABC)}) = (\widehat{AB, SB}) = \widehat{SBA}$$

2. Tam giác ABC vuông tại C

Ta có: $BC \perp AC$ tại C (?)

$BC \perp SC$ tại C (?)

$$(SBC) \cap (ABC) = BC \Rightarrow (\widehat{(SBC), (ABC)}) = (\widehat{AC, SC}) = \widehat{SCA}$$



3. Tam giác ABC vuông tại A

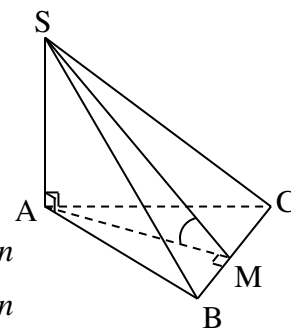
Trong (ABC) , vẽ $AM \perp BC$ tại M (?)

$$\Rightarrow BC \perp SM \text{ tại } M \text{ (?)}$$

$$(\widehat{SBC}) \cap (\widehat{ABC}) = BC \Rightarrow (\widehat{SBC}, (\widehat{ABC})) = (\widehat{AM}, \widehat{SM}) = \widehat{SMA}$$

✎ **Chú ý:**

- ♦ M không là trung điểm BC
- ♦ Nếu $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$ thì M ở trên đoạn BC và gần B hơn
- ♦ Nếu $\widehat{ABC} < \widehat{ACB}$ thì M ở trên đoạn BC và gần C hơn
- ♦ Nếu $AB > AC$ thì M ở trên đoạn BC và gần C hơn
- ♦ Nếu $AB < AC$ thì M ở trên đoạn BC và gần B hơn



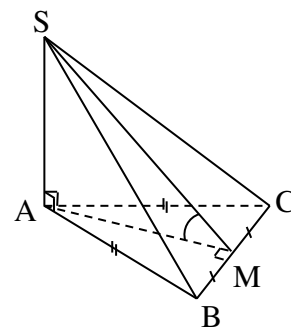
4. Tam giác ABC cân tại A (hoặc đều)

Gọi M là trung điểm BC

$$\Rightarrow BC \perp AM \text{ tại } M \text{ (?)}$$

$$\Rightarrow BC \perp SM \text{ tại } M \text{ (?)}$$

$$\text{Mà } (\widehat{SBC}) \cap (\widehat{ABC}) = SM \Rightarrow (\widehat{SBC}, (\widehat{ABC})) = (\widehat{AM}, \widehat{SM}) = \widehat{SMA}$$



5. Tam giác ABC có $\widehat{ABC} > 90^\circ$

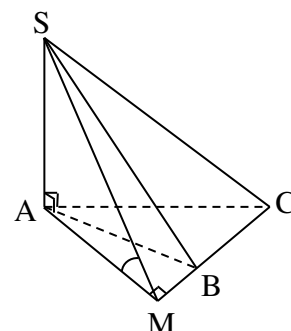
Trong (ABC) , vẽ $AM \perp BC$ tại M (?)

$$\Rightarrow BC \perp SM \text{ tại } M \text{ (?)}$$

$$(\widehat{SBC}) \cap (\widehat{ABC}) = BC$$

$$\Rightarrow (\widehat{SBC}, (\widehat{ABC})) = (\widehat{AM}, \widehat{SM}) = \widehat{SMA}$$

✎ **Chú ý:** M nằm ngoài đoạn BC và ở về phía B



6. Tam giác ABC có $\widehat{ACB} > 90^\circ$

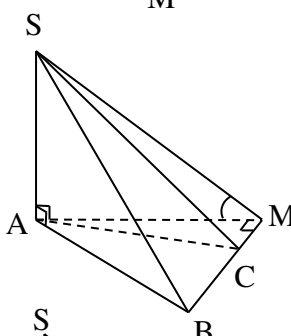
Trong (ABC) , vẽ $AM \perp BC$ tại M (?)

$$\Rightarrow BC \perp SM \text{ tại } M \text{ (?)}$$

$$(\widehat{SBC}) \cap (\widehat{ABC}) = BC$$

$$\Rightarrow (\widehat{SBC}, (\widehat{ABC})) = (\widehat{AM}, \widehat{SM}) = \widehat{SMA}$$

✎ **Chú ý:** M nằm ngoài đoạn BC và ở về phía C



H4.4 - Khoảng cách "điểm - mặt"

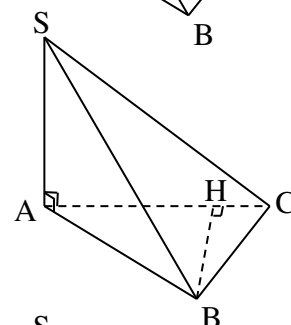
1. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC)

Trong (ABC) , vẽ $BH \perp AC$ tại H

$$\Rightarrow BH \perp (SAC) \text{ (?) } \Rightarrow d(B, (SAC)) = BH$$

✎ **Chú ý:**

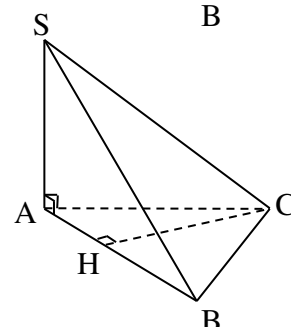
- ♦ Nếu $\triangle ABC$ vuông tại A thì $H \equiv A$ và khi đó $AB = d(B, (SAC))$
- ♦ Nếu $\triangle ABC$ vuông tại C thì $H \equiv C$ và khi đó $BC = d(B, (SAC))$



2. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB)

Trong (ABC) , vẽ $CH \perp AB$ tại H

$$\Rightarrow CH \perp (SAB) \text{ (?) } \Rightarrow d(C, (SAB)) = CH$$



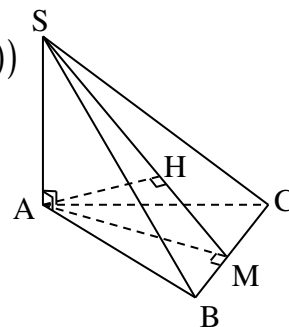
🔗 **Chú ý:**

- Nếu ΔABC vuông tại A thì $H \equiv A$ và khi đó $CA = d(C, (SAB))$
- Nếu ΔABC vuông tại B thì $H \equiv B$ và khi đó $CB = d(B, (SAB))$

3. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC)

- Trong (ABC) , vẽ $AM \perp BC$ tại M (?) $\Rightarrow BC \perp SM$ tại M (?)
- Trong (SAM) , vẽ $AH \perp SM$ tại $H \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH$

🔗 **Chú ý:** Tùy đặc điểm của ΔABC để các định đúng vị trí của điểm M trên đường thẳng BC .

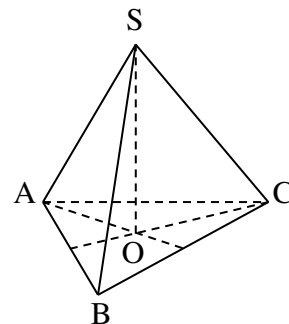


HÌNH 5. Hình chóp tam giác đều S.ABC

H5.1 - Đáy, đường cao, cạnh đáy, cạnh bên, mặt bên của hình chóp

1. Đáy: Tam giác ABC đều
2. Đường cao: SO
3. Cạnh bên: $SA = SB = SC$
4. Cạnh đáy: $AB = BC = CA$
5. Mặt bên: $\Delta SAB, \Delta SBC, \Delta SCA$
là các tam giác cân tại S và bằng nhau.

Gọi O là trọng tâm của tam giác $ABC \Rightarrow SO \perp (ABC)$



🔗 **Chú ý:** Tứ diện đều $S.ABC$ là hình chóp có đáy và các mặt bên là những tam giác đều bằng nhau.

H5.2 - Góc giữa cạnh bên và đáy

1. Góc giữa cạnh bên SA và mặt đáy (ABC) :

Ta có: $SO \perp (ABC)$ (?)

$\Rightarrow$ Hình chiếu của SA lên (ABC) là AO

$\Rightarrow (\widehat{SA, (ABC)}) = (\widehat{SA, AO}) = \widehat{SAO}$

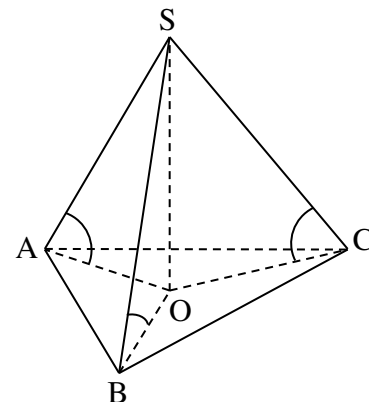
2. Góc giữa cạnh bên SB và mặt đáy (ABC) :

Tương tự $(\widehat{SB, (ABC)}) = (\widehat{SB, BO}) = \widehat{SBO}$

3. Góc giữa cạnh bên SC và mặt đáy (ABC) :

Tương tự $(\widehat{SC, (ABC)}) = (\widehat{SC, CO}) = \widehat{SCO}$

🔗 **Chú ý:** $\widehat{SAO} = \widehat{SBO} = \widehat{SCO} \rightarrow$ “Góc giữa các cạnh bên với mặt đáy bằng nhau”



H5.3 - Góc giữa mặt bên và mặt đáy:

1. Góc giữa mặt bên (SAB) và mặt đáy (ABC) :

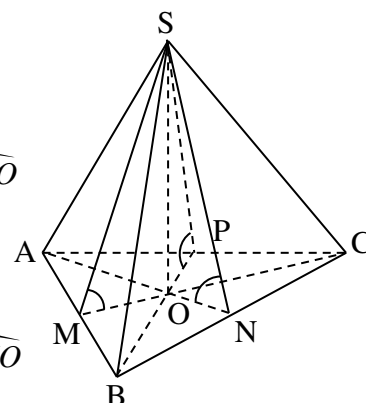
Ta có: $OM \perp AB$ tại M (?) $\Rightarrow AB \perp SM$ tại M (?)

Mà $(SAB) \cap (ABC) = AB \Rightarrow (\widehat{(SAB), (ABC)}) = (\widehat{OM, SM}) = \widehat{SMO}$

2. Góc giữa mặt bên (SBC) và mặt đáy (ABC) :

Ta có: $ON \perp BC$ tại N (?) $\Rightarrow BC \perp SN$ tại N (?)

Mà $(SBC) \cap (ABC) = BC \Rightarrow (\widehat{(SBC), (ABC)}) = (\widehat{ON, SN}) = \widehat{SNO}$



3. Góc giữa mặt bên (SAC) và mặt đáy (ABC):

Ta có: $OP \perp AC$ tại P (?)

$\Rightarrow AC \perp SP$ tại P (?)

Mà $(SAC) \cap (ABC) = AC \Rightarrow (\widehat{(SAC), (ABC)}) = (\widehat{OP, SP}) = \widehat{SPO}$

🔗 **Chú ý:** $\boxed{\widehat{SMO} = \widehat{SNO} = \widehat{SPO}}$ $\rightarrow$ “Góc giữa các mặt bên với mặt đáy bằng nhau”

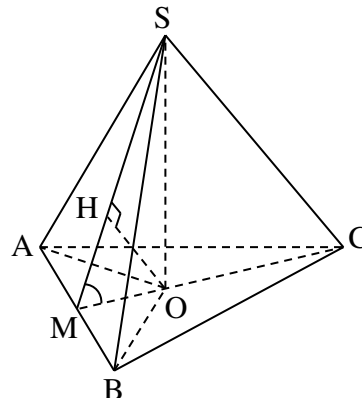
H5.4 - Khoảng cách “điểm - mặt”**1. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB)**

- Trong (ABC) , vẽ $OM \perp AB$ tại $M \Rightarrow AB \perp (SOM)$ (?)
- Trong (SOM) , vẽ $OH \perp SM$ tại $H \Rightarrow d(O, (SAB)) = OH$

2. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB)

Vì O là trọng tâm của ΔABC nên $\frac{MC}{MO} = 3$

$$\Rightarrow d(C, (SAB)) = \frac{MC}{MO} \cdot d(O, (SAB)) = 3 d(O, (SAB))$$



**HÌNH 6a. Hình chóp S.ABC
có một mặt bên (SAB) vuông góc với đáy (ABCD)**

“luôn luôn vẽ SH vuông góc với giao tuyến”

H6a.1 - Góc giữa cạnh bên và mặt đáy

- Vẽ $SH \perp AB$ tại H
Vì $(SAB) \perp (ABC)$ nên $SH \perp (ABC)$

🔗 **Chú ý:** Tùy đặc điểm của tam giác SAB để xác định đúng vị trí của điểm H trên đường thẳng AB .

1. Góc giữa cạnh bên SA và mặt đáy (ABC):

Ta có: $SH \perp (ABC)$ (?)

$\Rightarrow$ Hình chiếu của SA lên (ABC) là AH

$$\Rightarrow (\widehat{SA, (ABC)}) = (\widehat{SA, AH}) = \widehat{SAH}$$

2. Góc giữa cạnh bên SB và mặt đáy (ABC):

Ta có: $SH \perp (ABC)$ (?)

$\Rightarrow$ Hình chiếu của SB lên (ABC) là BH

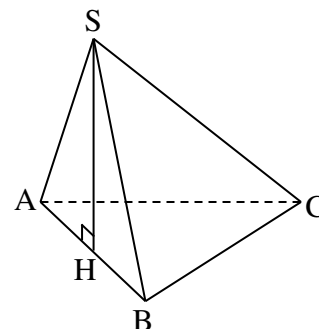
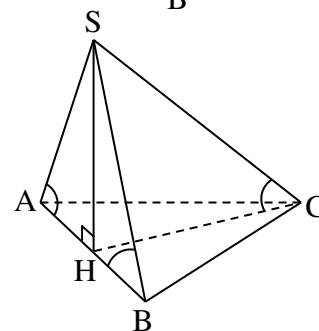
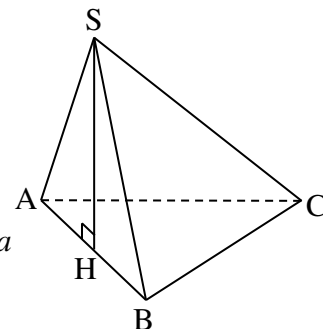
$$\Rightarrow (\widehat{SB, (ABC)}) = (\widehat{SB, BH}) = \widehat{SBH}$$

3. Góc giữa cạnh bên SC và mặt đáy (ABC):

Ta có: $SH \perp (ABC)$ (?)

$\Rightarrow$ Hình chiếu của SC lên (ABC) là CH

$$\Rightarrow (\widehat{SC, (ABC)}) = (\widehat{SC, CH}) = \widehat{SCH}$$



H6a.2 - Góc giữa mặt bên và mặt đáy:

- Vẽ $SH \perp AB$ tại H
- Vì $(SAB) \perp (ABC)$ nên $SH \perp (ABC)$

➤ **Chú ý:** Tùy đặc điểm của tam giác SAB để xác định đúng vị trí của điểm H trên đường thẳng AB .

1. Góc giữa mặt bên (SAB) và mặt đáy (ABC) :

Vì $(SAB) \perp (ABC)$ nên $(\widehat{SAB}, \widehat{ABC}) = 90^\circ$

2. Góc giữa mặt bên (SAC) và mặt đáy (ABC) :

Vẽ $HM \perp AC$ tại M

Ta có: $\left. \begin{array}{l} HM \perp AC \\ SH \perp AC \end{array} \right\} \Rightarrow AC \perp (SHM), \text{ mà } SM \subset (SHM) \Rightarrow SM \perp AC$

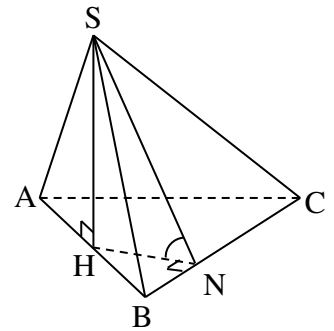
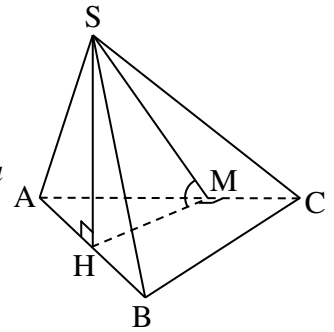
$$\Rightarrow (\widehat{SBC}, \widehat{ABC}) = (\widehat{HM}, \widehat{SM}) = \widehat{SMH}$$

3. Góc giữa mặt bên (SBC) và mặt đáy (ABC) :

Vẽ $HN \perp BC$ tại N

Ta có: $\left. \begin{array}{l} HN \perp BC \\ SH \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SHN),$

mà $SN \subset (SHN) \Rightarrow SN \perp AB \Rightarrow (\widehat{SBC}, \widehat{ABC}) = (\widehat{HN}, \widehat{SN}) = \widehat{SNH}$



HÌNH 6b. Hình chóp S.ABCD có một mặt bên (SAB) vuông góc với đáy (ABCD) và ABCD là hình chữ nhật hoặc hình vuông

“luôn luôn vẽ SH vuông góc với giao tuyến”

H6b.1 - Góc giữa cạnh bên và mặt đáy

- Vẽ $SH \perp AB$ tại H
- Vì $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$

➤ **Chú ý:** Tùy đặc điểm của tam giác SAB để xác định đúng vị trí của điểm H trên đường thẳng AB .

1. Góc giữa cạnh bên SA và mặt đáy $(ABCD)$:

Ta có: $SH \perp (ABCD)$ (?)

$\Rightarrow$ Hình chiếu của SA lên $(ABCD)$ là $AH \Rightarrow (\widehat{SA}, \widehat{(ABCD)}) = (\widehat{SA}, \widehat{AH}) = \widehat{SAH}$

2. Góc giữa cạnh bên SB và mặt đáy $(ABCD)$:

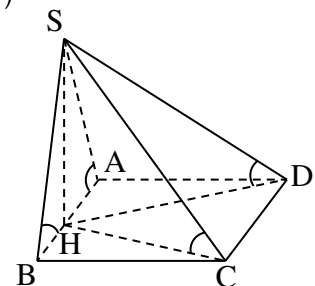
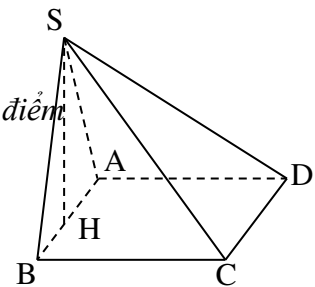
Tương tự $(\widehat{SB}, \widehat{(ABCD)}) = (\widehat{SB}, \widehat{BH}) = \widehat{SBH}$

3. Góc giữa cạnh bên SC và mặt đáy $(ABCD)$:

Tương tự $(\widehat{SC}, \widehat{(ABCD)}) = (\widehat{SC}, \widehat{CH}) = \widehat{SCH}$

4. Góc giữa cạnh bên SD và mặt đáy $(ABCD)$:

Tương tự $(\widehat{SD}, \widehat{(ABCD)}) = (\widehat{SD}, \widehat{DH}) = \widehat{SDH}$



H6b.2 - Góc giữa mặt bên và mặt đáy:**1. Góc giữa mặt bên (SAD) và mặt đáy (ABCD):**Ta có: $HA \perp AD$ (?)

$$SH \perp AD \text{ (?) } \Rightarrow AD \perp (SHA) \Rightarrow AD \perp SA$$

$$\text{Mà } (SAD) \cap (ABCD) = AD \Rightarrow \widehat{((SAD), (ABCD))} = \widehat{(SA, AH)} = \widehat{SAH}$$

2. Góc giữa mặt bên (SBC) và mặt đáy (ABCD):Ta có: $BA \perp BC$ (?)

$$SH \perp BC \text{ (?)}$$

$$\Rightarrow BC \perp (SHB) \Rightarrow BC \perp SB$$

$$\text{Mà } (SBC) \cap (ABCD) = BC \Rightarrow \widehat{((SBC), (ABCD))} = \widehat{(SB, AH)} = \widehat{SBH}$$

3. Góc giữa mặt bên (SCD) và mặt đáy (ABCD):Trong (ABCD), vẽ $HM \perp CD$ tại M

$$\text{Ta có: } \left. \begin{array}{l} HM \perp CD \\ SH \perp CD \end{array} \right\} \Rightarrow CD \perp (SHM) \Rightarrow CD \perp SM$$

$$\text{Mà } (SCD) \cap (ABCD) = CD \Rightarrow \widehat{((SCD), (ABCD))} = \widehat{(HM, SM)} = \widehat{SMH}$$

HÌNH 7. Hình lăng trụ**① Lăng trụ có:**

- Hai đáy song song và là 2 đa giác bằng nhau
- Các cạnh bên song song và bằng nhau
- Các mặt bên là các hình bình hành

② Lăng trụ đứng là lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với đáy**③ Lăng trụ tam giá đều là lăng trụ đứng, có đáy là tam giác đều****④ Lăng trụ có đáy là tam giác đều là lăng trụ xiên, có đáy là tam giác đều****⑤ Lăng trụ tứ giác đều là lăng trụ đứng, có đáy là hình vuông****⑥ Lăng trụ có đáy là tứ giác đều là lăng trụ xiên, có đáy là hình vuông****⑦ Hình hộp là hình lăng trụ xiên, có đáy là hình bình hành****⑧ Hình hộp đứng là lăng trụ đứng, có đáy là hình bình hành****⑨ Hình hộp chữ nhật là lăng trụ đứng, có đáy là hình chữ nhật****⑩ Hình lập phương là lăng trụ đứng, có đáy và các mặt bên là hình vuông.****⑪ Lăng trụ đứng ABC. A'B'C'.**

- Góc giữa (A'BC) và (ABC):

Vẽ $AM \perp BC$ tại M

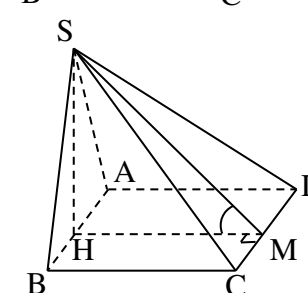
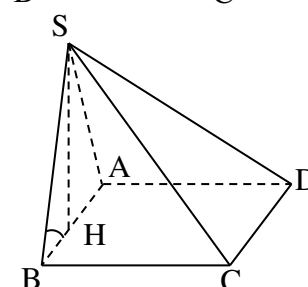
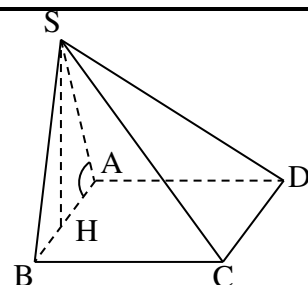
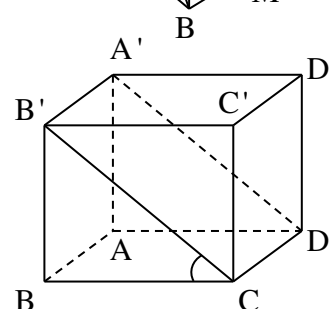
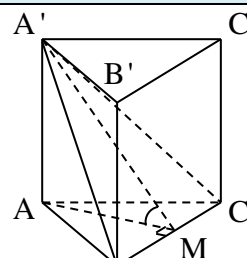
$$\Rightarrow A'M \perp BC \text{ (?) } \Rightarrow \widehat{((A'BC), (ABC))} = \widehat{AMA'}$$

- **Chú ý:** Tùy đặc điểm của tam giác ABC để xác định đúng vị trí của điểm M trên đường thẳng BC.

⑫ Hình hộp chữ nhật ABCD. A'B'C'D'.

- Góc giữa (A'B'CD) và (ABCD):

$$\text{Ta có: } BC \perp CD \Rightarrow CD \perp B'C \text{ (?) } \Rightarrow \widehat{((A'B'CD), (ABCD))} = \widehat{BCB'}$$

**Lăng trụ xiên**Cạnh bên
vuông góc đáy**Lăng trụ đứng**Đáy là
đa giác đều**Lăng trụ đều**

MỤC LỤC

VÉCTƠ TRONG KHÔNG GIAN QUAN HỆ VUÔNG GÓC

Vấn đề 1. VÉCTƠ TRONG KHÔNG GIAN	1
Dạng 1. Tính toán véctor	3
Dạng 2. Chứng minh đẳng thức véctor	7
Dạng 3. Quan hệ đồng phẳng	8
Dạng 4. Cùng phương và song song	9
BÀI TẬP CƠ BẢN NÂNG CAO VẤN ĐỀ 1	11
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	12
Vấn đề 2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC	14
Dạng 1. Chứng minh vuông góc	15
Dạng 2. Góc giữa hai đường thẳng	16
BÀI TẬP CƠ BẢN NÂNG CAO VẤN ĐỀ 2	20
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	21
Vấn đề 3. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC MẶT PHẪNG	22
Dạng 1. Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng	24
Dạng 2. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng	28
Dạng 3. Thiết diện qua một điểm cho trước và vuông góc với trước	31
Dạng 4. Điểm cố định - Tìm tập hợp điểm	34
BÀI TẬP CƠ BẢN NÂNG CAO VẤN ĐỀ 3	36
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	37
Vấn đề 4. HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC	40
Dạng 1. Góc giữa hai mặt phẳng	42
Dạng 2. Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc	46
Dạng 3. Thiết diện chứa đường thẳng a và vuông góc với (α)	49
Dạng 4. Hình lăng trụ – Hình lập phương – Hình hộp	51
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	53
Vấn đề 5. KHOẢNG CÁCH	57
Dạng 1. Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng, mặt phẳng	58
Dạng 2. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau	61
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	67
BÀI TẬP TỔNG HỢP CHỦ ĐỀ 3	69
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP CHỦ ĐỀ 3	75
Tài liệu tham khảo	84
ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM	85
PHỤ LỤC	86
MỤC LỤC	99

Gv: TRẦN QUỐC NGHĨA - 098 373 4349

Chuyên: TOÁN

- LỚP 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12
- LUYỆN THI LỚP 10
- LUYỆN THI THPT QUỐC GIA

TRỌN BỘ TÀI LIỆU HỌC TẬP

Môn: TOÁN - Lớp: 11 và THPTQG

Năm học 2017-2018

- 1. Tài liệu TOÁN 11 theo chủ đề (8 chủ đề)**
- 2. Bài tập trắc nghiệm TOÁN 11 HK 1**
- 3. Bài tập trắc nghiệm TOÁN 11 HK 2**

Năm học 2017 - 2018

Lưu hành nội bộ