

CHUYÊN ĐỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN
QUAN HỆ SONG SONG

BÀI GIẢNG HAI MẶT PHẪNG SONG SONG

Mục tiêu

❖ **Kiến thức**

- + Nhận biết được hai mặt phẳng song song.
- + Nhận biết được hình lăng trụ, hình hộp và hình chóp cụt.

❖ **Kĩ năng**

- + Chứng minh được hai mặt phẳng song song với nhau.
- + Áp dụng tính chất song song vào bài toán tìm thiết diện của hai mặt phẳng.

I. LÝ THUYẾT TRỌNG TÂM

Định nghĩa

Hai mặt phẳng gọi là song song nếu chúng không có điểm chung.

Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

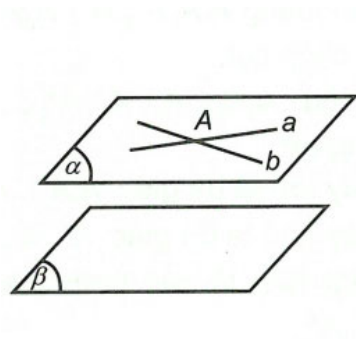
Với hai mặt phẳng phân biệt và có thể xảy ra một trong hai trường hợp sau:

$$+ (\alpha) \cap (\beta) = a;$$

$$+ (\alpha) \parallel (\beta).$$

Định lý 1. Nếu mặt phẳng chứa (α) hai đường thẳng a, b cắt nhau và cùng song song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β) .

$$\left. \begin{array}{l} a \subset (\alpha), b \subset (\alpha) \\ a \cap b = \{A\} \\ a \parallel (\beta), b \parallel (\beta) \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta).$$



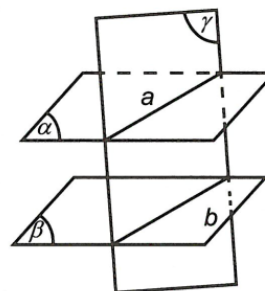
Định lý 2. Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng, có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.

Hệ quả 1: Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) thì có duy nhất một mặt phẳng (β) chứa a và song song với (α) .

Hệ quả 2: Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song nhau.

Định lý 3. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song thì mọi mặt phẳng (γ) đã cắt (α) thì phải cắt (β) và các giao tuyến của chúng song song.

$$\left\{ \begin{array}{l} (\alpha) \parallel (\beta) \\ (\gamma) \cap (\alpha) = a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\gamma) \cap (\beta) = b \\ a \parallel b \end{array} \right.$$



Hình lăng trụ và hình hộp.

Hình lăng trụ. Cho hai mặt phẳng (α) và (α') song song

nhau. Trên (α) cho đa giác $A_1A_2...A_n$. Qua các đỉnh

$A_1, A_2, ..., A_n$ vẽ các đường thẳng song song với nhau lần lượt cắt (α') tại $A'_1, A'_2, ..., A'_n$. Khi đó hình hợp bởi n hình bình hành

$A_1A_2A'_2A'_1, A_2A_3A'_3A'_2, ..., A_nA_1A'_1A'_n$ và hai đa giác

$A_1A_2...A_n; A'_1A'_2...A'_n$ gọi là hình lăng trụ. Kí hiệu

$A_1A_2...A_n, A'_1A'_2...A'_n$.

+ Mặt bên: là các hình bình hành $A_1A_2A'_2A'_1; A_2A_3A'_3A'_2; ...$

+ Mặt đáy: là hai đa giác $A_1A_2...A_n; A'_1A'_2...A'_n$

+ Cạnh bên: là các đoạn $A_1A'_1; A_2A'_2; ...; A_nA'_n$

+ Cạnh đáy: là các cạnh của đa giác đáy.

+ Đỉnh: là các đỉnh của đa giác đáy.

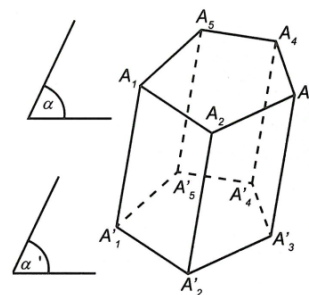
Lưu ý:

+ Tùy theo đa giác đáy mà ta có tên gọi hình lăng trụ tương ứng.

+ Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành thì được gọi là hình hộp.

+ Hình lăng trụ có đáy và các mặt bên là hình chữ nhật thì được gọi là hình hộp chữ nhật.

+ Hình lăng trụ có đáy và các mặt bên là hình vuông thì được gọi là hình lập phương.



Hình chóp cụt

Cho hình chóp $S.A_1A_2...A_n$ và mặt phẳng (α) không qua S , song song với mặt đáy và cắt các cạnh $SA_1, SA_2, ..., SA_n$ lần lượt tại $A'_1, A'_2, ..., A'_n$. Khi đó, hình hợp bởi đa giác

$A'_1A'_2...A'_n, A_1A_2...A_n$ và các hình thang

$A_1A_2A'_2A'_1, A_2A_3A'_3A'_2, ..., A_nA_1A'_1A'_n$ được gọi là hình chóp cụt.

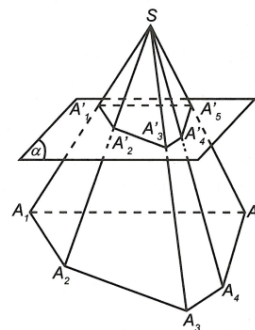
Ký hiệu: $A_1A_2...A_n.A'_1A'_2...A'_n$.

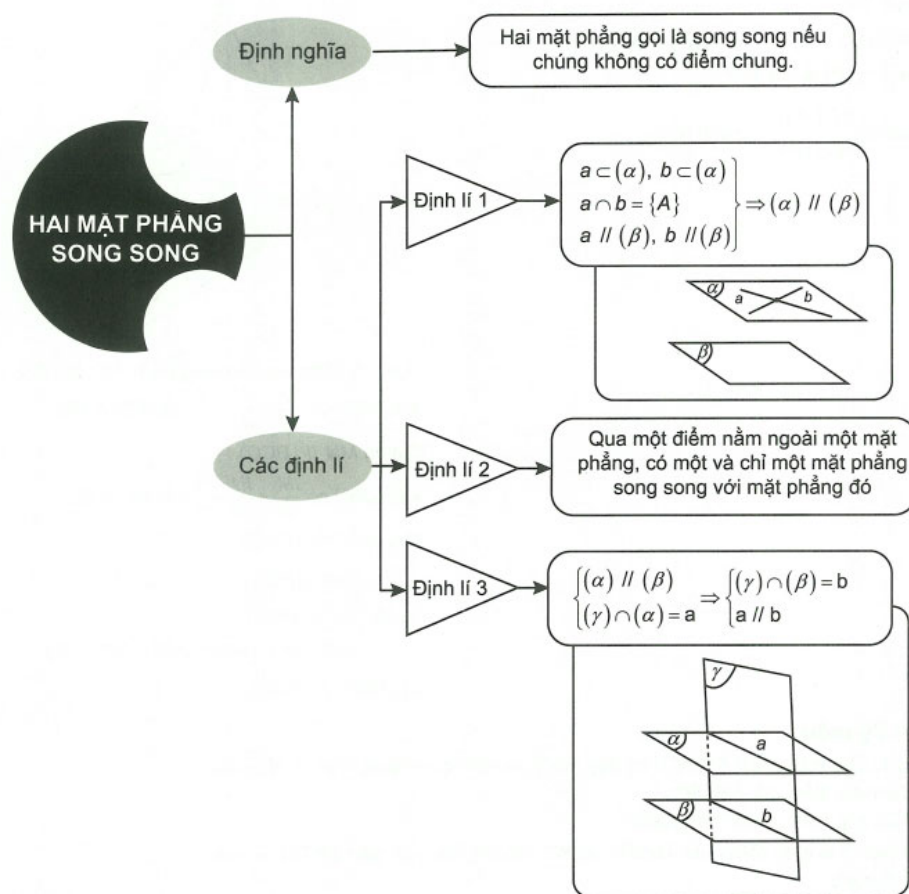
Trong đó:

+ Đáy lớn là đa giác $A_1A_2...A_n$.

+ Đáy nhỏ là đa giác $A'_1A'_2...A'_n$.

+ Mặt bên là các hình thang $A_1A_2A'_2A'_1, A_2A_3A'_3A'_2, ..., A_nA_1A'_1A'_n$.





II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1: Chứng minh hai mặt phẳng song song

✚ Phương pháp giải

Sử dụng tính chất:

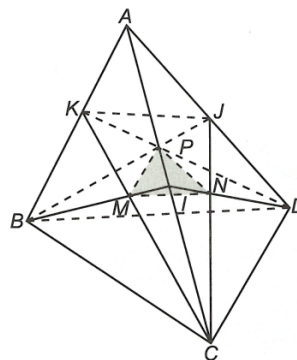
$$\begin{cases} a // (Q) \\ b // (Q) \\ a, b \subset (P), a \cap b \neq \emptyset \end{cases} \Rightarrow (P) // (Q).$$

Lưu ý: $\begin{cases} (P) // (Q) \\ d \subset (P) \end{cases} \Rightarrow d // (Q).$

Ví dụ: Cho tứ diện $ABCD$ có M, N, P lần lượt là trọng tâm của $\triangle ABC, \triangle ACD, \triangle ABD$.

Chứng minh rằng $(MNP) // (BCD)$.

Hướng dẫn giải



Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm AC, AD, AB .

Xét $\triangle IBD$ có $\frac{IM}{IB} = \frac{IN}{ID} = \frac{1}{3}$ nên $MN // BD$.

Suy ra $MN \parallel (BCD)$.

Xét $\triangle JBC$ có $\frac{IM}{IB} = \frac{IN}{ID} = \frac{1}{3}$ nên $NP \parallel BC$.

Suy ra $NP \parallel (BCD)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} MN \parallel (BCD) \\ NP \parallel (BCD) \\ MN, NP \subset (MNP), MN \cap NP = \{N\} \end{cases}$$

$\Rightarrow (MNP) \parallel (BCD)$.

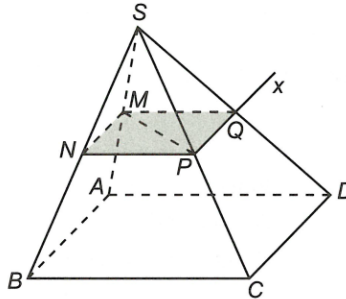
Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm SA, SB, SC .

a) Chứng minh $(MNP) \parallel (ABCD)$.

b) Gọi Q là giao điểm của (MNP) và SD . Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Hướng dẫn giải



a) Ta có $MN \parallel AB, AB \subset (ABCD) \Rightarrow MN \parallel (ABCD)$.

Tương tự $NP \parallel BC, BC \subset (ABCD) \Rightarrow NP \parallel (ABCD)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} MN \parallel (ABCD) \\ NP \parallel (ABCD) \\ MN, NP \subset (MNP), MN \cap NP = \{N\} \end{cases} \Rightarrow (MNP) \parallel (ABCD).$$

b) Ta có $SD \subset (SCD)$.

Xét hai mặt phẳng (MNP) và (SCD) có $P \in (MNP) \cap (SCD)$

$$\text{Ta có } \begin{cases} CD \subset (SCD), MN \subset (MNP) \\ MN \parallel CD \end{cases} \Rightarrow (MNP) \cap (SCD) = Px$$

sao cho $Px \parallel CD \parallel MN$. (vì $MN \parallel AB$ theo tính chất đường trung bình và $CD \parallel AB$)

Trong (SCD) gọi $Px \cap CD = \{Q\}$. Suy ra $(MNP) \cap CD = \{Q\}$.

Ta có $(MNP) \cap (SCD) = PQ$ nên $PQ \parallel CD \parallel MN$ suy ra Q là trung điểm của SD và

$$MN = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD = PQ.$$

Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành (cặp cạnh đối song song và bằng nhau).

Ví dụ 2. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'B'$ và AB . Chứng minh $(AMC') \parallel (CNB')$.

Hướng dẫn giải

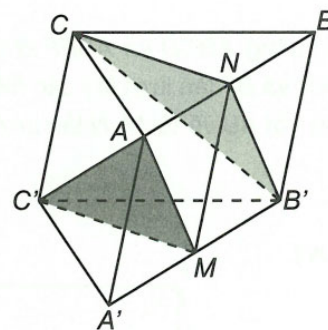
Ta có $MN \parallel AA', AA' \parallel CC' \Rightarrow MN \parallel CC'$ và theo tính chất hình lăng trụ thì $MN = CC'$ nên tứ giác $MNCC'$ là hình bình hành và $CN \parallel MC'$.

$$\begin{cases} CN \parallel MC' \\ MC' \subset (AMC') \end{cases} \Rightarrow CN \parallel (AMC').$$

Mặt khác $AN \parallel B'M, AN = B'M$ nên tứ giác $ANB'M$ là hình bình hành và $NB' \parallel MA$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} NB' \parallel MA \\ MA \subset (AMC') \end{cases} \Rightarrow NB' \parallel (AMC').$$

$$\text{Lại có } \begin{cases} CN \parallel (AMC') \\ NB' \parallel (AMC') \\ CN, NB' \subset (CNB') \\ CN \cap NB' = \{N\} \end{cases} \Rightarrow (AMC') \parallel (CNB').$$



Ví dụ 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, có M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, DC, DD' . Chứng minh rằng (MNP) song song với (ACD') .

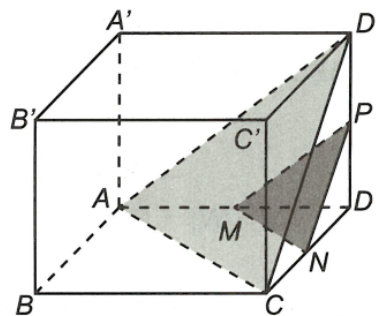
Hướng dẫn giải

Xét $\triangle ADD'$ có $MP \parallel AD'$, mà $AD' \subset (ACD') \Rightarrow MP \parallel (ACD')$.

Tương tự trong $\triangle ACD$ có $MN \parallel AC$, mà $AC \subset (ACD') \Rightarrow MN \parallel (ACD')$

$$\text{Ta có } \begin{cases} MP \parallel (ACD') \\ MN \parallel (ACD') \\ MN, MP \subset (MNP) \\ MN \cap MP = \{M\} \end{cases}$$

Suy ra $(MNP) \parallel (ACD')$.



Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SD .

- a) Chứng minh rằng (OMN) song song với (SBC) .
b) Gọi K là trung điểm OM . Chứng minh $NK \parallel (SBC)$.

Hướng dẫn giải

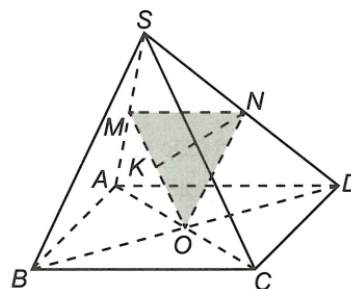
a) Ta có $ON \parallel SB, SB \subset (SBC) \Rightarrow ON \parallel (SBC)$ và

$OM \parallel SC, SC \subset (SBC) \Rightarrow OM \parallel (SBC)$.

Lại có $OM, ON \subset (OMN)$.

Suy ra $(OMN) \parallel (SBC)$.

b) Ta có $\begin{cases} (OMN) \parallel (SBC) \\ NK \subset (OMN) \end{cases} \Rightarrow NK \parallel (SBC)$.

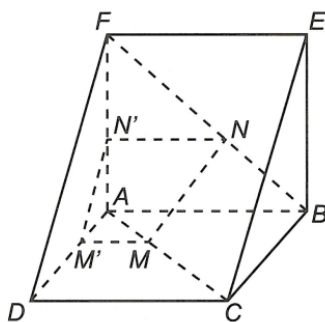


Ví dụ 5. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD và AF tại M' và N' .

Chứng minh:

- a) $(ADF) \parallel (BCE)$.
b) $(DEF) \parallel (MM'N'N)$.

Hướng dẫn giải



a) Ta có $\begin{cases} AD \parallel BC \\ BC \subset (BCE) \end{cases} \Rightarrow AD \parallel (BCE)$.

Tương tự $\begin{cases} AF \parallel BE \\ BE \subset (BCE) \end{cases} \Rightarrow AF \parallel (BCE)$.

Mà $\begin{cases} AD \subset (ADF) \\ AF \subset (ADF) \end{cases} \Rightarrow (ADF) \parallel (BCE)$.

b) Vì $ABCD$ và $(ABEF)$ là các hình vuông nên $AC = BF$ (1).

Ta có $MM' \parallel CD \Rightarrow \frac{AM'}{AD} = \frac{AM}{AC}$; (2)

$$NN' \parallel AB \Rightarrow \frac{AN'}{AF} = \frac{BN}{BF}. \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta được $\frac{AM'}{AD} = \frac{AN'}{AF} \Rightarrow M'N' \parallel DF$

$\Rightarrow DF \parallel (MM'N'N)$.

Lại có $NN' \parallel AB \Rightarrow NN' \parallel EF \Rightarrow EF \parallel (MM'N'N)$.

Vậy $\begin{cases} DF \parallel (MM'N'N) \\ EF \parallel (MM'N'N) \end{cases} \Rightarrow (DEF) \parallel (MM'N'N)$.

Bài tập tự luyện dạng 1

Câu 1: Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây.

A. Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) đều song song với mặt phẳng (Q) .

B. Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (P) đều song song với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng (Q) .

C. Nếu hai đường thẳng song song với nhau lần lượt nằm trong hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q) thì (P) và (Q) song song với nhau.

D. Qua một điểm nằm ngoài mặt phẳng cho trước ta vẽ được một và chỉ một đường thẳng song song với mặt phẳng cho trước đó.

Câu 2: Có bao nhiêu mặt phẳng song song với cả hai đường thẳng chéo nhau?

A. vô số.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Câu 3: Hãy chọn khẳng định sai.

A. Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) và (Q) song song với nhau.

B. Nếu hai mặt phẳng song song thì mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng này đều song song với mặt phẳng kia.

C. Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song nhau thì mặt phẳng (R) đã cắt (P) đều phải cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song nhau.

D. Nếu một đường thẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì sẽ cắt mặt phẳng còn lại.

Câu 4: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm trong hai mặt phẳng phân biệt. Kết quả nào sau đây đúng?

A. $AD \parallel (BEF)$.

B. $(AFD) \parallel (BEC)$.

C. $(ABD) \parallel (EFC)$.

D. $EC \parallel (ABF)$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J, K, L lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $(IJK) \parallel (BCD)$. B. $(IKL) \parallel SA$. C. $IK \subset (SBC)$. D. $JL \parallel SC$.

Câu 6: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có mặt bên là các hình chữ nhật. Gọi D' là trung điểm của $A'B'$ khi đó CB' song song với

- A. AD' . B. $C'D'$. C. AC' . D. $(AC'D')$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SD . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

- A. $OM \parallel SC$. B. $MN \parallel (SBC)$. C. $(OMN) \parallel (SBC)$. D. $ON \cap CB \neq \emptyset$.

Dạng 2: Tìm thiết diện nhờ quan hệ song song

Phương pháp giải

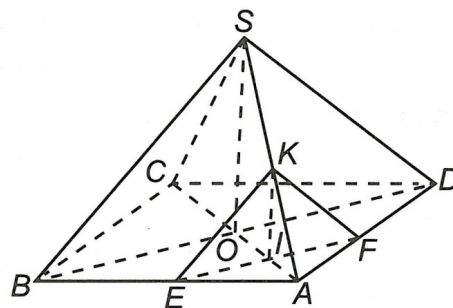
- Khi $(\alpha) \parallel (\beta)$ thì (α) sẽ song song với mọi đường thẳng trong (β) và ta chuyển về dạng thiết diện song song với đường thẳng.

- Ta có
$$\begin{cases} (\alpha) \parallel (\beta) \\ (\beta) \cap (\gamma) = d \Rightarrow (\alpha) \cap (\gamma) = d' \parallel d, M \in d'. \\ M \in (\alpha) \cap (\gamma) \end{cases}$$

- Tìm đường thẳng d nằm trong (β) và xét các mặt phẳng có trong hình chóp mà chứa d , khi đó $(\alpha) \parallel d$ nên sẽ cắt các mặt phẳng chứa d (nếu có) theo các giao tuyến song song với d .

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O . Tam giác SBD đều. Một mặt phẳng (P) song song với (SBD) và đi qua điểm I thuộc cạnh AC (không trùng với A hoặc C). Tìm thiết diện của (P) và hình chóp.

Hướng dẫn giải



Gọi $\{O\} = AC \cap DB$.

Do SO nằm trong (SBD) nên $SO \parallel (\alpha)$.

Mặt phẳng (SAC) chứa SO và có điểm chung với (α) là I , do đó $(SAC) \cap (\alpha) = IK$ với $IK \parallel SO$ và $K \in SA$.

Tương tự $(SAB) \cap (\alpha) = JE$ với $JE \parallel SB$ và $E \in AB$.

$(SAD) \cap (\alpha) = JF$ với $JF \parallel SD$ và $F \in AD$.

Suy ra thiết diện của (P) với hình chóp $S.ABCD$

là tam giác KEF .

$$\text{Ta có } \frac{EF}{BD} = \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AD} = \frac{AK}{AS} = \frac{KE}{SB} = \frac{KF}{SD}$$

$\Rightarrow \Delta SBD$ đồng dạng với ΔKEF .

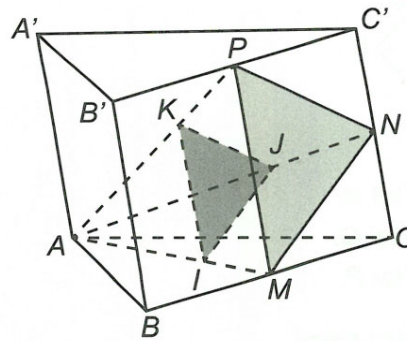
Tam giác SBD là tam giác đều nên ΔKEF cũng là tam giác đều.

Vậy thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ là tam giác đều.

Ví dụ mẫu

Ví dụ 1. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm tam giác $ABC, ACC', AB'C'$. Chứng minh $(IJK) \parallel (BB'C')$.

Hướng dẫn giải



Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm $BC; CC'; B'C'$.

Do I, J, K lần lượt là trọng tâm tam giác ABC, ACC' nên $\frac{AI}{AM} = \frac{AJ}{AN} = \frac{2}{3}$ nên

$$IJ \parallel MN \Rightarrow IJ \parallel (BCC'B').$$

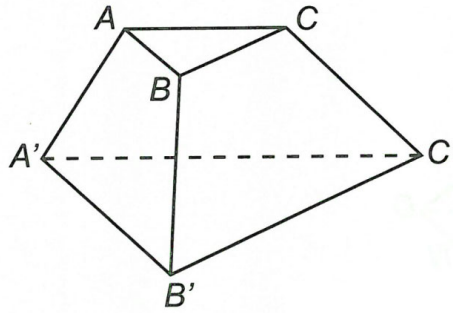
Tương tự $IK \parallel (BCC'B') \Rightarrow (IJK) \parallel (BCC'B')$.

Hay $(IJK) \parallel (BB'C')$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp cụt tam giác $ABC.A'B'C'$ có hai đáy là hai tam giác vuông tại A và A' và có

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{1}{2}. \text{ Khi đó tỉ số diện tích } \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}}$$
 bằng bao nhiêu?

Hướng dẫn giải



Hai tam giác ABC và $A'B'C'$ đồng dạng $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} = \frac{1}{2}$ nên $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A}{\frac{1}{2} A'B' \cdot A'C' \cdot \sin A'} = \frac{1}{4}$.

Cách khác: Tỉ số diện tích hai tam giác đồng dạng bằng bình phương tỉ số đồng dạng nên

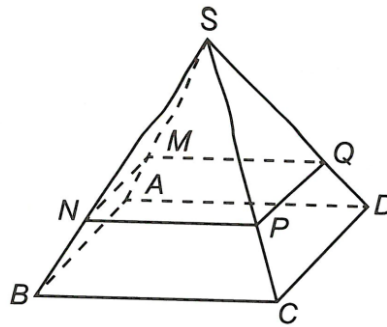
$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Ví dụ 3. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 10. Gọi M là điểm trên SA sao cho

$\frac{SM}{SA} = \frac{2}{3}$. Một mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và CD , cắt hình chóp theo một tứ giác. Tính

diện tích tứ giác đó.

Hướng dẫn giải



Qua M dựng đường thẳng song song AB cắt SB tại N .

Qua M dựng đường thẳng song song AD cắt SD tại Q .

Qua N dựng đường thẳng song song BC cắt SC tại P .

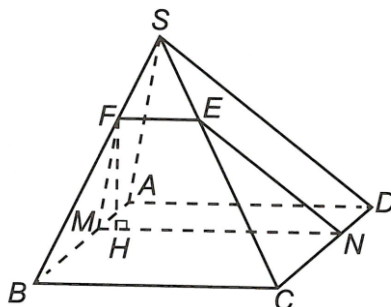
Ta có $\begin{cases} MN \parallel AB \Rightarrow MN \parallel (ABCD) \\ NP \parallel BC \Rightarrow NP \parallel (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (MNPQ) \parallel (ABCD).$

Ta có tỉ lệ diện tích $\frac{S_{MNPQ}}{S_{ABCD}} = \left(\frac{MN}{AB}\right)^2 = \left(\frac{SM}{SA}\right)^2 = \frac{4}{9}.$

Lại có $S_{ABCD} = 10 \cdot 10 = 100 \Leftrightarrow S_{MNPQ} = 100 \cdot \frac{4}{9} = \frac{400}{9}.$

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ với $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\triangle SAD$ là tam giác đều. Gọi M là một điểm thuộc cạnh AB , $AM = x$, (P) là mặt phẳng qua M song song với (SAD) . Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) .

Hướng dẫn giải



Do (P) đi qua M và song song với (SAD) nên cắt các mặt của hình chóp bằng các giao tuyến đi qua M và song song với (SAD) . Do $ABCD$ là hình thoi và tam giác SAD đều. Nên thiết diện thu được là hình thang cân $MNEF$ ($MN \parallel EF; MF = EN$).

Ta có $MN = a$, $\frac{EF}{BC} = \frac{SF}{SB} = \frac{MA}{AB} = \frac{x}{a} \Rightarrow EF = x; MF = a - x$.

Đường cao FH của hình thang cân bằng $FH = \sqrt{MF^2 - \left(\frac{MN - EF}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}(a - x)$.

Khi đó diện tích hình thang cân là $S = \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 - x^2)$

🌟 Bài tập tự luyện dạng 2

Câu 1: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $(ABB'A') \parallel (CDD'C')$.
- B. $(BDA') \parallel (D'B'C)$.
- C. $(BA'D') \parallel (ADC)$.
- D. $(ACD') \parallel (A'C'B)$.

Câu 2: Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $(BA'C') \parallel (ACD')$.
- B. $(ADD'A') \parallel (BCC'B')$.
- C. $(BA'D) \parallel (CB'D')$.
- D. $(ABA') \parallel (CB'D')$.

Câu 3: Đặc điểm nào sau đây đúng với hình lăng trụ?

- A. Hình lăng trụ có tất cả các mặt bên bằng nhau.
- B. Đáy của hình lăng trụ là hình bình hành.
- C. Hình lăng trụ có tất cả các mặt bên là hình bình hành.
- D. Hình lăng trụ có tất cả các mặt là hình bình hành.

Câu 4: Trong hình hộp (hoặc lăng trụ, hoặc hình chóp cụt) đoạn thẳng nối hai đỉnh mà hai đỉnh đó không cùng nằm trên một mặt nào của hình hộp (hoặc hình lăng trụ, hoặc hình chóp cụt), được gọi là đường chéo của nó. Tìm mệnh đề đúng.

- A. Hình lăng trụ tứ giác có các đường chéo đồng quy.
- B. Hình lăng trụ có các đường chéo đồng quy.
- C. Hình chóp cụt có các đường chéo đồng quy.
- D. Hình hộp có các đường chéo đồng quy.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J, K, L lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $(IJK) \parallel (BCD)$.
- B. $SA \parallel (IKL)$.
- C. $IK \subset (SBC)$.
- D. $JL \parallel SC$.

Câu 6: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (các đỉnh lấy theo thứ tự đó), AC cắt BD tại O còn $A'C'$ cắt $B'D'$ tại O' . Khi đó $(AB'D')$ sẽ song song với mặt phẳng nào dưới đây?

- A. $(A'OC')$.
- B. (BDA') .
- C. (BDC') .
- D. (BCD) .

Câu 7: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, gọi I là trung điểm của $A'B'$. Mặt phẳng (IBD) cắt hình hộp theo thiết diện là hình gì?

- A. Hình chữ nhật.
- B. Hình thang.
- C. Hình bình hành.
- D. Tam giác.

Câu 8: Cho hình hộp $ABCD.EFGH$, gọi I, J lần lượt là tâm của hình bình hành $ABCD$ và $EFGH$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. $(ABCD) \parallel (EFGH)$.
- B. $(ABFE) \parallel (DCGH)$.
- C. $(ACGE) \parallel (BDHF)$.
- D. $(ABJ) \parallel (GHI)$.

Câu 9: Phát biểu nào dưới đây là định lý Ta-lét trong không gian?

- A. Ba mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.
- B. Ba mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến bất kì các đoạn thẳng tương ứng bằng nhau.
- C. Ba mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến bất kì các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.
- D. Ba mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song các đoạn thẳng tương ứng bằng nhau.

Câu 10: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, gọi M, N theo thứ tự là trọng tâm của các tam giác ABC và $A'B'C'$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (AMN) với hình lăng trụ đã cho là

- A. hình bình hành.
- B. hình tam giác vuông.
- C. hình thang.
- D. hình tam giác cân.

Câu 11: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, B'C', DD'$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $mp(MNP)$ không song song với $mp(BDC')$.
- B. $mp(MNP)$ cắt lập phương theo thiết diện là một lục giác.
- C. $mp(MNP)$ đi qua tâm của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.
- D. $mp(MNP)$ đi qua trung điểm của cạnh BB' .

Câu 12: Cho hình vuông $ABCD$ và tam giác đều SAB nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M là điểm di động trên đoạn AB . Mặt phẳng (α) đi qua M song song với (SBC) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là

A. hình bình hành. B. hình vuông. C. hình tam giác. D. hình thang.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC thỏa mãn $AB = AC = 4$, $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Mặt phẳng (P) song song với (ABC) cắt SA tại M sao cho $SM = 2MA$. Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABC$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{16}{9}$. B. $\frac{25}{9}$. C. $\frac{14}{9}$. D. 1.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy C là hình thang cân với cạnh bên $BC = 2$, hai đáy $AB = 6, CD = 4$. Mặt phẳng (P) song song với $(ABCD)$ và cắt cạnh SA tại M sao cho $SA = 3SM$. Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{7\sqrt{3}}{9}$. C. 2. D. $\frac{5\sqrt{3}}{9}$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O , $AB = 8, SA = SB = 6$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua O và song song với (SAB) . Tính diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$.

A. 12. B. $6\sqrt{5}$. C. $5\sqrt{5}$. D. 13.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABC$ có M là điểm di động trên cạnh SA sao cho $\frac{SM}{SA} = k$ ($k \in \mathbb{R}, 0 < k < 1$). Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (ABC) . Tìm k để mặt phẳng (α) cắt hình chóp $S.ABC$ theo một thiết diện có diện tích bằng một nửa diện tích tam giác ABC .

A. $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $k = \frac{1}{3}$. C. $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $k = \frac{1}{2}$.

Câu 17: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt bên đều là hình vuông cạnh a . Các điểm M, N lần lượt trên AD', BD sao cho $AM = DN = x$ ($0 < x < a\sqrt{2}$). Khi đó với mọi giá trị x thì đường thẳng MN song song với mặt phẳng nào sau đây?

A. $(AD'C'B)$. B. $(A'DC'B)$. C. $(A'D'CB)$. D. $(ADC'B')$.

THAM KHẢO ĐỀ KIỂM TRA 15 PHÚT SỐ 3 VÀ SỐ 4
THAM KHẢO ĐỀ KIỂM TRA 45 PHÚT SỐ 3 VÀ SỐ 4
THAM KHẢO ĐỀ KIỂM TRA HỌC KÌ SỐ 1 VÀ SỐ 2

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Dạng 1. Chứng minh hai mặt phẳng song song

1-A	2-A	3-A	4-B	5-A	6-D	7-D			
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	--	--	--

Câu 2.

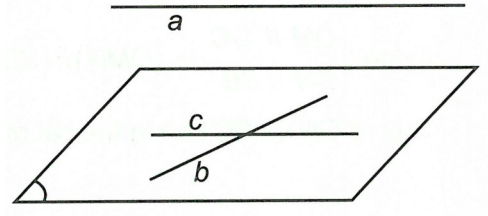
Gọi hai đường thẳng chéo nhau là a và b , c là đường thẳng song song với a và cắt b .

Gọi mặt phẳng $(\alpha) \equiv (b, c)$. Do $a \parallel c \Rightarrow a \parallel (\alpha)$.

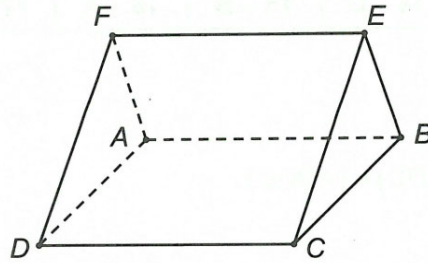
Giả sử mặt phẳng $(\beta) \parallel (\alpha)$ mà $b \subset (\alpha) \Rightarrow b \parallel (\beta)$.

Mặt khác $a \parallel (\alpha) \Rightarrow a \parallel (\beta)$. Có vô số mặt phẳng $(\beta) \parallel (\alpha)$.

Nên có vô số mặt phẳng song song với cả hai đường thẳng chéo nhau.

**Câu 3.**

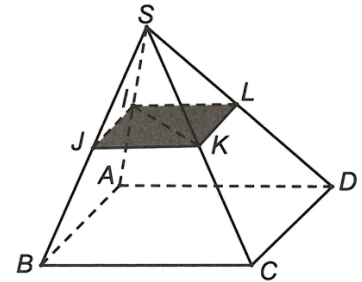
Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng a và b cùng song song với mặt phẳng (Q) và $a \parallel b$ thì (P) và (Q) có thể không song song với nhau.

Câu 4.**Câu 5.**

Ta có:

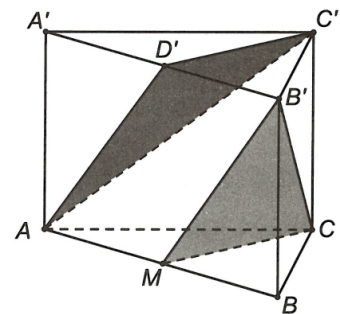
$$\begin{cases} IK \parallel AC, AC \subset (ABCD) \\ IJ \parallel AB, AB \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IK \parallel (ABCD) \\ IJ \parallel (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (IJK) \parallel (BCD).$$

Chọn A.

**Câu 6.**

Gọi M là trung điểm của AB .

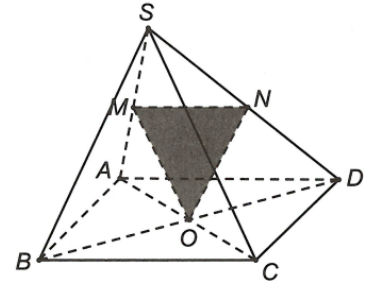
$$\text{Ta có } \begin{cases} B'M \parallel AD' \\ D'C' \parallel CM \end{cases} \Rightarrow (AC'D') \parallel (B'CM) \Rightarrow CB' \parallel (AD'C')$$



Câu 7.

$$\text{Ta có } \begin{cases} OM \parallel SC \\ ON \parallel SB \end{cases} \Rightarrow (OMN) \parallel (SBC)$$

Suy ra ON và BC không thể cắt nhau nên **D** sai.

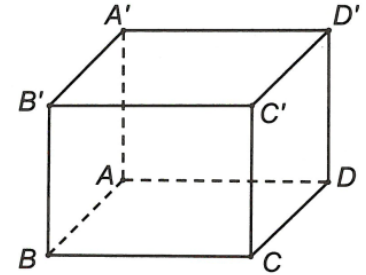
**Dạng 2. Đặc điểm hình hộp, lăng trụ. Tìm thiết diện nhờ quan hệ song song**

1-C	2-D	3-C	4-D	5-A	6-C	7-B	8-C	9-C	10-A
11-A	12-D	13-A	14-D	15-B	16-A	17-C			

Câu 1.

$$\text{Ta có } (BA'D') \equiv (BCD'A') \text{ và } (ADC) \equiv (ABCD).$$

Mà $(BCA'D') \cap (ABCD) = BC$, suy ra $(BA'D') \parallel (ADC)$ sai

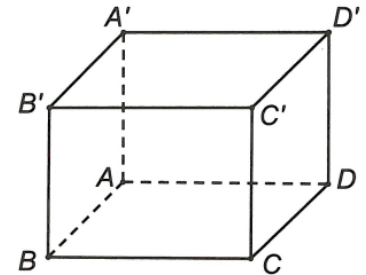
**Câu 2.**

$$\text{Ta có } \begin{cases} BA' \parallel CD' \\ A'C' \parallel AC \end{cases} \Rightarrow (BA'C') \parallel (ACD').$$

$$\begin{cases} AD \parallel BC \\ AA' \parallel BB' \end{cases} \Rightarrow (ADD'A') \parallel (BCC'B').$$

$$\begin{cases} BD \parallel B'D' \\ A'D \parallel B'C \end{cases} \Rightarrow (BA'D) \parallel (CB'D')$$

Mặt khác $B' \in (ABA') \cap (CB'D') \Rightarrow$ D sai.

**Câu 3.**

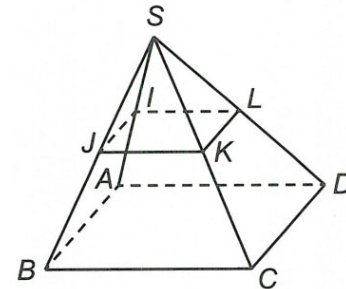
Ta có thể lấy hình lăng trụ có đáy là tam giác thường sẽ thấy các câu còn lại sai.

Câu 4.

Vì trong hình hộp cứ hai đường chéo đồng phẳng tạo nên hình bình hành, nên chúng luôn cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

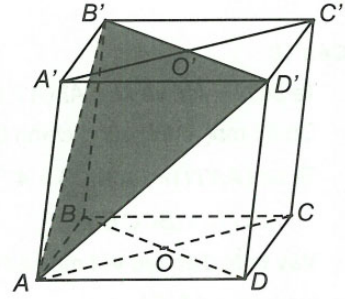
Câu 5.

$$\text{Ta có } \begin{cases} IK \parallel AC \\ IJ \parallel AB \end{cases} \Rightarrow (IJK) \parallel (BCD).$$



Câu 6.

Ta có
$$\begin{cases} BD \parallel B'D' \subset (AB'D') \\ DC' \parallel AB' \subset (AB'D') \text{ nên } (AB'D') \parallel (BDC') \\ BD \cap DC' = \{D\} \end{cases}$$



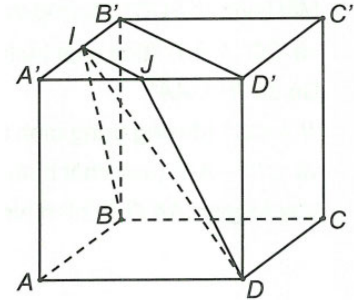
Câu 7.

Gọi $\{J\} = A'D' \cap (IBD)$.

Ta có thiết diện của mặt phẳng (IBD) và hình hộp là tứ giác $IJDB$.

Mặt khác
$$\begin{cases} (ABCD) \parallel (A'B'C'D') \\ (IBD) \cap (A'B'C'D') = IJ \Rightarrow IJ \parallel BD \\ (IBD) \cap (ABCD) = BD \end{cases}$$

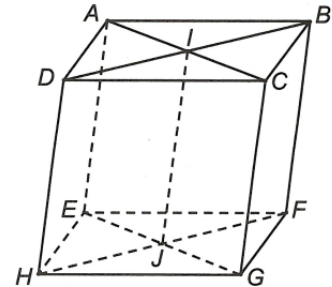
$\Rightarrow IJDB$ là hình thang.



Câu 8.

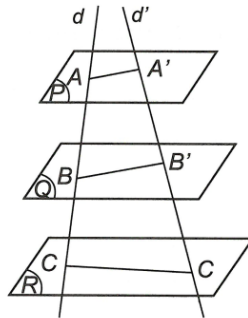
Ta có $AC \cap BD = \{I\}$ và $EG \cap HF = \{J\}$ nên $(ACGE) \cap (BDHF) = IJ$.

Nên C sai.



Câu 9.

Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.



Câu 10.

Ta có $N \in A'I'$ và $M \in AI$ ($A'I'$ là trung tuyến của $\Delta A'B'C'$ và AI là trung tuyến của ΔABC)

Do đó $mp(AMN)$ cũng chính là $mp(A'I'IA)$.

Ta có $(AA'I'I) \cap (A'B'C') = A'I'$; $(AA'I'I) \cap (ABC) = AI$;

$(AA'I'I) \cap (BCC'B') = II'$.

Vậy thiết diện tạo với $mp(A'I'IA)$ và hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là tứ giác $AA'I'I$.

Mặt khác $II' \parallel CC'$ (đường trung bình trong hình bình hành $CC'B'B$) và $CC' \parallel AA'$ (tính chất hình lăng trụ).

Do đó $II' \parallel AA'$.

$II' = CC'$ (đường trung bình trong hình bình hành $CC'B'B$)

và $CC' = AA'$ (tính chất lăng trụ). Do đó $II' = AA'$.

Vậy tứ giác $AA'I'I$ là hình bình hành.

Câu 11.

Gọi S, R, Q lần lượt là trung điểm của $AD, C'D', BB'$.

Dễ thấy, $MS \parallel NR$;

$PS \parallel QN$;

$MQ \parallel PR$.

$\Rightarrow M, S, P, R, N, Q$ đồng phẳng.

Lại có $MS \parallel BD \Rightarrow MS \parallel (BDC')$;

$PS \parallel NQ \parallel BC' \Rightarrow PS \parallel (BDC')$.

Vậy $(MNP) \parallel (BDC')$.

Câu 12.

Gọi $MN = (\alpha) \cap (ABCD)$ với $N \in CD$, ta có

$$\begin{cases} (\alpha) \parallel (SBC) \\ (SBC) \cap (ABCD) = BC \end{cases} \Rightarrow MN \parallel BC.$$

Gọi $NK = (\alpha) \cap (SCD)$ với $K \in SD$, ta có

$$\begin{cases} (\alpha) \parallel (SBC) \\ (SBC) \cap (SCD) = SC \end{cases} \Rightarrow NK \parallel SC.$$

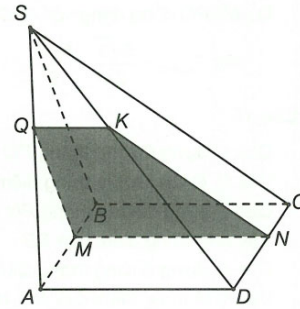
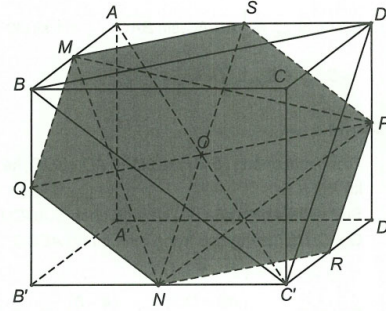
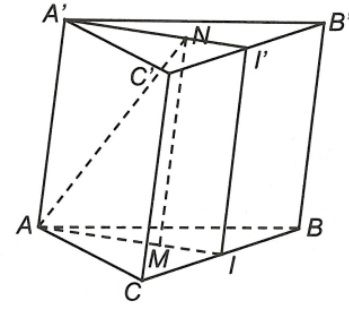
Do $MN \parallel BC \parallel AD$ nên $MN \parallel (SAD)$.

Gọi $KQ = (\alpha) \cap (SAB)$ với $Q \in SA$, ta có $KQ \parallel AD$.

Vậy thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (α) là hình thang $MNKQ$ có đáy MN và QK .

Câu 13.

Đường thẳng qua M song song với AB cắt SB tại N .



Đường thẳng qua N song song với BC cắt SC tại P .

$$\text{Ta có } \begin{cases} MN \parallel AB \Rightarrow MN \parallel (ABC) \\ MP \parallel AC \Rightarrow MP \parallel (ABC) \end{cases} \Rightarrow (MNP) \parallel (ABC).$$

Gọi h_1 là đường cao của $\triangle MNP$ ứng với đáy MN .

Gọi h_2 là đường cao của $\triangle ABC$ ứng với đáy AB .

$$\text{Để thấy } \triangle MNP \text{ đồng dạng } \triangle ABC \text{ ta có } \frac{MN}{AB} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{SM}{SA} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Ta có } \frac{S_{\triangle MNP}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2}h_1.MN}{\frac{1}{2}h_2.AB} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{4}{9}.$$

$$\text{Lại có } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2}.4.4.\sin 30^\circ = 4$$

$$\Rightarrow S_{\triangle MNP} = S_{\triangle ABC} \cdot \frac{4}{9} = 4 \cdot \frac{4}{9} = \frac{16}{9}.$$

Câu 14.

Trong mặt phẳng (SAD) kẻ $MN \parallel AD$, (SDC) kẻ $NP \parallel DC$,
 (SBC) kẻ $PQ \parallel BC$.

Suy ra thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ là tứ giác $MNPQ$.

Gọi CH là đường cao trong hình thang $ABCD$ ta có

$$CH = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}.$$

$$\text{Suy ra } S_{ABCD} = \frac{(AB+DC)}{2}CH = \frac{(4+6)}{2}.\sqrt{3} = 5\sqrt{3}.$$

$$\text{Do } MNPQ \text{ đồng dạng với } ABCD \text{ theo tỷ số } k = \frac{1}{3} \text{ nên } S_{MNPQ} = \frac{5\sqrt{3}}{3^2} = \frac{5\sqrt{3}}{9}.$$

Câu 15.

Qua O dựng đường thẳng $PQ \parallel AB$.

Vậy P, Q lần lượt là trung điểm của AD và BC .

Qua P dựng đường thẳng $PN \parallel SA$.

Vậy N là trung điểm của SD .

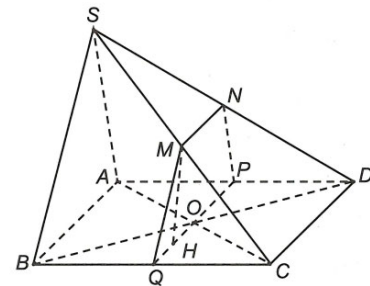
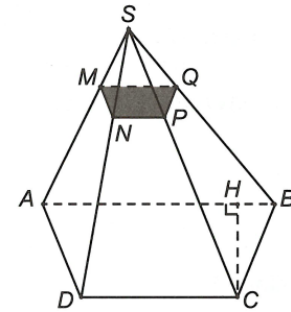
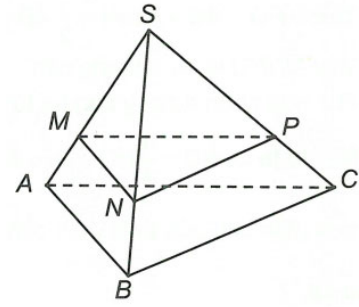
Qua Q dựng đường thẳng $QM \parallel SB$.

Vậy M là trung điểm của SC . Nối M và N

$\Rightarrow$ thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ là tứ giác $MNPQ$.

Vì $PQ \parallel CD; MN \parallel CD \Rightarrow PQ \parallel MN$.

Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình thang.



Ta có $PQ = AB = 8; MN = \frac{1}{2}AB = 4; MQ = NP = \frac{1}{2}SA = 3$.

Vậy $MNPQ$ là hình thang cân.

Gọi H là chân đường cao hạ từ đỉnh M của hình thang $MNPQ$.

Khi đó ta có $HQ = \frac{1}{4}PQ = 2 \Rightarrow MH = \sqrt{MQ^2 - HQ^2} = \sqrt{5}$.

Vậy diện tích của thiết diện cần tìm là $S = \frac{(MN + PQ) \cdot MH}{2} = 6\sqrt{5}$.

Câu 16.

Gọi N, P là hai điểm lần lượt thuộc SB, SC thỏa mãn $MN \parallel AB, MP \parallel AC$.

Ta có $\begin{cases} MN \parallel AB \Rightarrow MN \parallel (ABC) \\ MP \parallel AC \Rightarrow MP \parallel (ABC) \end{cases} \Rightarrow (MNP) \parallel (ABC)$.

Gọi h_1 là đường cao của $\triangle MNP$ ứng với đáy MN .

Gọi h_2 là đường cao của $\triangle ABC$ ứng với đáy AB .

Dễ thấy $\triangle MNP$ đồng dạng $\triangle ABC$ ta có $\frac{MN}{AB} = \frac{h_1}{h_2} = k$.

Vậy để thỏa mãn yêu cầu bài toán

$$\frac{S_{\triangle MNP}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{1}{2}h_1 \cdot MN}{\frac{1}{2}h_2 \cdot AB} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k \cdot k = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 17.

Do tất cả các mặt bên đều là hình vuông cạnh a nên theo tính chất hình hộp ta có $ABCD$ cũng là hình vuông cạnh a . Suy ra

$$BD = AD' = a\sqrt{2}.$$

Qua N kẻ $NK \parallel AD$ với $K \in AB$. Qua M kẻ $MI \parallel A'D'$ với $I \in AA'$.

$$\text{Ta có } \frac{BK}{BA} = \frac{BN}{BD} \Leftrightarrow \frac{BA - KA}{BA} = \frac{BD - ND}{BD} \Leftrightarrow \frac{KA}{BA} = \frac{ND}{BD}.$$

$$\text{Mà } \frac{ND}{BD} = \frac{AM}{AD'} = \frac{AI}{AA'}. \text{ Do đó } \frac{AI}{AA'} = \frac{AK}{AB} \Rightarrow IK \parallel A'B.$$

Ta có $I \in (MNK)$ do $IM \parallel KN \parallel AD$. Suy ra $MN \subset (MNIK) \parallel (A'D'CB)$.

Vậy MN song song với mặt phẳng $(A'D'CB)$ với mọi $0 < x < a\sqrt{2}$.

