

CHƯƠNG 4

NGUYÊN HÀM. TÍCH PHÂN

BÀI 1

NGUYÊN HÀM

1. Khái niệm nguyên hàm

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K . Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nếu $F'(x) = f(x)$, với mọi $x \in K$.

Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K . Khi đó:

- Với mỗi hằng số C , hàm số $F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K .
- Nếu $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì tồn tại hằng số C sao cho $G(x) = F(x) + C$ với mọi $x \in K$

Như vậy, mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$, với C là hằng số. Ta gọi $F(x) + C, C \in \mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K , kí hiệu $\int f(x)dx$ và viết:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Chú ý:

- Biểu thức $f(x)dx$ được gọi là vi phân của nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$, kí hiệu là $dF(x)$

Vậy, $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$

- Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K .
- Khi tìm nguyên hàm của một hàm số mà khoogn chỉ rõ tập K thì ta hiểu là tìm nguyên hàm của hàm số đó trên tập xác định của nó.

- $\int f'(x)dx = f(x) + C$

2. Các tính chất của nguyên hàm

- $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$, với k là hằng số khác 0
- $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

3. Nguyên hàm của một hàm số sơ cấp

Nguyên hàm của một hàm số sơ cấp

Nguyên hàm của hàm số lũy thừa

$$\int 0 dx = C$$

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

Nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{x}$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0)$$

Nguyên hàm của hàm số lượng giác

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

Nguyên hàm của hàm số mũ

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$$

TÍNH NGUYÊN HÀM MỘT SỐ HÀM SỐ SƠ CẤP**DẠNG 1****NGUYÊN HÀM HÀM SỐ LŨY THỪA****1. Bảng nguyên hàm hàm số lũy thừa**

Nguyên hàm hàm số lũy thừa	$\int 0 dx = C$
	$\int dx = x + C$
	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$
	$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$
	$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$
	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C \quad (x \neq 0)$

Chú ý : dùng công thức sau làm trắc nghiệm cho nhanh

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$$

2. Lũy thừa với số mũ thực

Cho a, b là những số thực dương, α, β là những số thực bất kì. Khi đó:

- $a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}$
- $\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$
- $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha \cdot \beta}$
- $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K . Các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai.

A. $\int f(x)dx = F(x) + C$.

B. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

C. $\left(\int f(x)dx\right)' = f'(x)$.

D. $\left(\int f(x)dx\right)' = F'(x)$.

Câu 2. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 6$ là

A. $x^2 + C$.

B. $x^2 + 6x + C$.

C. $2x^2 + C$.

D. $2x^2 + 6x + C$.

Câu 3. $\int x^2 dx$ bằng

A. $2x + C$.

B. $\frac{1}{3}x^3 + C$.

C. $x^3 + C$.

D. $3x^3 + C$.

Câu 4. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 1$ là

A. $x^3 + C$

B. $\frac{x^3}{3} + x + C$

C. $6x + C$

D. $x^3 + x + C$

Câu 5. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x$ là

A. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C$

B. $3x^2 + 1 + C$

C. $x^3 + x + C$

D. $x^4 + x^2 + C$

Câu 6. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x^2$ là

A. $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C$

B. $x^4 + x^2 + C$

C. $x^5 + x^3 + C$.

D. $4x^3 + 2x + C$

Câu 7. Hàm số nào trong các hàm số sau đây không là nguyên hàm của hàm số $y = x^{2022}$?

A. $\frac{x^{2023}}{2023} + 1$.

B. $\frac{x^{2023}}{2023}$.

C. $y = 2022x^{2021}$.

D. $\frac{x^{2023}}{2023} - 1$.

Câu 8. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 2024$ là

A. $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} + C$.

B. $\frac{1}{9}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2024x + C$.

C. $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2024x + C$.

D. $\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} - 2024x + C$.

Câu 9. Tìm nguyên $F(x)$ của hàm số $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$?

A. $F(x) = \frac{x^4}{4} - 6x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x + C$.

B. $F(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + C$.

C. $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 + 6x + C$.

D. $F(x) = x^3 + 6x^2 + 11x^2 + 6x + C$.

Câu 10. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = (5x+3)^5$.

A. $(5x+3)^6 + C$.

B. $(5x+3)^4 + C$.

C. $\frac{(5x+3)^6}{30} + C$.

D. $\frac{(5x+3)^4}{30} + C$.

Câu 11. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + \frac{2}{x^2}$.

A. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C$.

B. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$.

C. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$.

D. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C$.

Câu 12. Tính $\int \sqrt{x\sqrt{x}\sqrt{x}} dx$.

A. $\frac{4}{15} x^{15} \sqrt{x^7} + C$.

B. $\frac{8}{15} x^{15} \sqrt{x^7} + C$.

C. $\frac{8}{15} x^{15} \sqrt{x} + C$.

D. $\frac{4}{15} x^{15} \sqrt{x} + C$.

Câu 13. Tính $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx$.

A. $x\sqrt{x} - 2x\sqrt[17]{x^5} + \sqrt[4]{x^3} + C$.

B. $\frac{4}{5} x\sqrt{x} - \frac{24}{17} x\sqrt[17]{x^5} + \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + C$.

C. $x\sqrt{x} - \frac{24}{17} x\sqrt[17]{x^5} + \sqrt[4]{x^3} + C$.

D. $\frac{4}{5} x\sqrt{x} - 2x\sqrt[17]{x^5} + \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + C$.

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = x^2 + 4$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int f(x) dx = 2x + C$.

B. $\int f(x) dx = x^2 + 4x + C$.

C. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + 4x + C$.

D. $\int f(x) dx = x^3 + 4x + C$.

Câu 15. Trên khoảng $(0; +\infty)$, cho hàm số $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int f(x) dx = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} + C$.

B. $\int f(x) dx = \int \sqrt{x^3} dx$.

C. $\int f(x) dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C$.

D. $\int f(x) dx = \frac{2}{3} x^{\frac{1}{2}} + C$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^4 + 2}{x^2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$.

B. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C$.

C. $\int f(x) dx = \int \left(x^2 + \frac{2}{x^2} \right) dx$.

D. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 17. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

A. $\int \left(\sqrt[3]{x^2} + x - 2 \right) dx = \frac{3}{5} \sqrt[3]{x^5} + \frac{1}{2} x^2 - 2x + C$

B. $\int \frac{1}{2023x^{2024}} dx = \frac{1}{2023^2 x^{2023}} + C$

C. $\int (2x - 2024)^2 dx = x - 1012 + C$

D. $\int \left(\frac{1}{4} x^4 + 4x^3 \right) dx = \frac{1}{20} x^5 + \frac{4}{3} x^4 + C$

Câu 18. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

A. $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2} x^2 + \ln|x| + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + \frac{1}{x}$.

B. $F(x) = \frac{(5x+3)^6}{6} + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = (5x+3)^5$.

C. $F(x) = \frac{3}{2} x\sqrt{x} + \frac{4}{3} x\sqrt[3]{x} + \frac{5}{4} x\sqrt[4]{x} + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$.

D. $F(x) = \frac{1}{3} x^3 - 2024x + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^3 - 2024x}{x}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 19. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + 3^x + 3x - 2$.

Trả lời:

Câu 20. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = mx^3 - 3x^2 + \frac{4m}{x^3} + \frac{5}{2x} - 7m$ (m là tham số).

Trả lời:

Câu 21. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$.

Trả lời:

Câu 22. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{(x^2 - 1)^2}{x^2}$.

Trả lời:

Câu 23. Tính $\int \left(\frac{(1-x)^3}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$.

Trả lời:

Câu 24. Tính $\int \left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[5]{x^4} \right) dx$.

Trả lời:

Câu 25. Tính $\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx$.

Trả lời:

Câu 26. Tính $\int \left(2\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$.

Trả lời:

Câu 27. Tính $\int \frac{1}{\sqrt{2x} + \sqrt{3x}} dx$.

Trả lời:

Câu 28. Tính $\int \frac{1}{\sqrt{5x} - \sqrt{3x}} dx$.

Trả lời:

Câu 29. Tính $\int (x^2 - 1)^3 dx$.

Trả lời:

Câu 30. Tính $\int (2 - x^2)^4 dx$.

Trả lời:

Câu 31. Tính $\int (x - \sqrt[3]{x})^2 dx$.

Trả lời:

Câu 32. Tính $\int \left(\frac{x^2 + 2\sqrt[3]{x}}{x} \right)^2 dx$.

Trả lời:

Câu 33. Tìm m để $F(x) = mx^3 + (3m + 2)x^2 - 4x + 3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 10x - 4$.

Trả lời:

Câu 34. Tìm a, b, c để $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{x^2 - 4x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x - 2)\sqrt{x^2 - 4x}$.

Trả lời:

Câu 35. Tìm a, b, c để $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x - 3}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x - 3}}$.

Trả lời:

DẠNG 2

NGUYÊN HÀM HÀM LƯỢNG GIÁC

1. Bảng nguyên hàm hàm số lượng giác

Nguyên hàm hàm số lượng giác	$\int \cos x dx = \sin x + C$
	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$

Chú ý: $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$; $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 36. Hàm số $F(x) = \cot x$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

- A. $f_2(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$. B. $f_1(x) = -\frac{1}{\cos^2 x}$. C. $f_4(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. D. $f_3(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Câu 37. Cho hàm số $f(x) = 1 + \sin x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $\int f(x) dx = x - \cos x + C$. B. $\int f(x) dx = x + \sin x + C$.
C. $\int f(x) dx = x + \cos x + C$. D. $\int f(x) dx = \cos x + C$.

Câu 38. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2}$

- A. $F(x) = 2 \cos \frac{x}{2} + C$ B. $F(x) = \frac{1}{2}(1 + \sin x) + C$
C. $F(x) = 2 \sin \frac{x}{2} + C$ D. $F(x) = \frac{1}{2}(1 - \sin x) + C$

Câu 39. Cho hàm số $f(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $\int f(x) dx = x + \tan x + C$. B. $\int f(x) dx = x + \cot x + C$.
C. $\int f(x) dx = x - \tan x + C$. D. $\int f(x) dx = x - \cot x + C$.

Câu 40. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x + 6x$ là

- A. $\sin x + 3x^2 + C$. B. $-\sin x + 3x^2 + C$. C. $\sin x + 6x^2 + C$. D. $-\sin x + C$.

Câu 41. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2 \sin x + 3x$.

- A. $\int (2 \sin x + 3x) dx = -2 \cos x + \frac{3}{2}x^2 + C$ B. $\int (2 \sin x + 3x) dx = 2 \cos x + 3x^2 + C$

C. $\int (2 \sin x + 3x) dx = \sin^2 x + \frac{3}{2}x + C$

D. $\int (2 \sin x + 3x) dx = \sin 2x + \frac{3}{2}x^2 + C$

Câu 42. Tính $\int (x - \sin x) dx$.

A. $\frac{x^2}{2} + \sin x + C$.

B. $\frac{x^2}{2} - \cos x + C$.

C. $\frac{x^2}{2} - \sin x + C$.

D. $\frac{x^2}{2} + \cos x + C$.

Câu 43. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \sin x$ là

A. $x^3 + \cos x + C$.

B. $6x + \cos x + C$.

C. $x^3 - \cos x + C$.

D. $6x - \cos x + C$.

Câu 44. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x} + \sin x$ là

A. $\ln x - \cos x + C$.

B. $-\frac{1}{x^2} - \cos x + C$.

C. $\ln|x| + \cos x + C$.

D. $\ln|x| - \cos x + C$.

Câu 45. Cho $\int f(x) dx = -\cos x + C$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $f(x) = -\sin x$.

B. $f(x) = -\cos x$.

C. $f(x) = \sin x$.

D. $f(x) = \cos x$.

Câu 46. Cho hàm số $f(x) = \int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \sin x + C$.

B. $\int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \cos x + C$

C. $\int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \sin x + C$.

D. $\int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \cos x + C$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 47. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. $\int (2 + \cot^2 x) dx = x - \cot x + C$.

B. $\int \left(1 - \cos^2 \frac{x}{2}\right) dx = \frac{1}{2}(x + \sin x) + C$

C. $\int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 dx = x + \cos x + C$.

D. $\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2 dx = x - \cos x + C$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 48. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2024 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$.

Trả lời:

Câu 49. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}}$.

Trả lời:

Câu 50. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{1}{2}\tan^2 x$.

Trả lời:

Câu 51. Tính $\int x \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{2} \right) dx$.

Trả lời:

Câu 52. Tính $\int x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{\tan^2 x}{x^2} \right) dx$.

Trả lời:

Câu 53. Tính $\int x \left(2024 - \frac{1}{x^3} + \frac{\sin x}{x} \right) dx$.

Trả lời:

Câu 54. Tính $\int x^3 \left[\frac{\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2}{x^3} - 2x + \frac{1}{x^{2024}} \right] dx =$.

Trả lời:

Câu 55. Tính $\int x^2 \left[\frac{1}{x^2 \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}} + \frac{3}{x^3} - \frac{4}{x^4} \right] dx =$.

Trả lời:

DẠNG 3

NGUYÊN HÀM HÀM MŨ

Nguyên hàm hàm số mũ

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$$

Chú ý :

$$\bullet \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$$

$$\bullet \int a^{\alpha x + \beta} dx = \frac{1}{\alpha} \frac{a^{\alpha x + \beta}}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 56. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{3x}$ là hàm số nào sau đây?

A. $3e^x + C$.

B. $\frac{1}{3}e^{3x} + C$.

C. $\frac{1}{3}e^x + C$.

D. $3e^{3x} + C$.

Câu 57. Nguyên hàm của hàm số $y = e^{2x-1}$ là

A. $2e^{2x-1} + C$.

B. $e^{2x-1} + C$.

C. $\frac{1}{2}e^{2x-1} + C$.

D. $\frac{1}{2}e^x + C$.

Câu 58. Cho hàm số $f(x) = e^x + 2$. Khẳng định nào dưới đây là đúng ?

A. $\int f(x) dx = e^{x-2} + C$.

B. $\int f(x) dx = e^x + 2x + C$.

C. $\int f(x) dx = e^x + C$.

D. $\int f(x) dx = e^x - 2x + C$.

Câu 59. Cho hàm số $f(x) = e^x + 2x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x) dx = e^x + x^2 + C$.

B. $\int f(x) dx = e^x + C$.

C. $\int f(x) dx = e^x - x^2 + C$.

D. $\int f(x) dx = e^x + 2x^2 + C$.

Câu 60. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 7^x$.

A. $\int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C$

B. $\int 7^x dx = 7^{x+1} + C$

C. $\int 7^x dx = \frac{7^{x+1}}{x+1} + C$

D. $\int 7^x dx = 7^x \ln 7 + C$

Câu 61. Nguyên hàm của hàm số $y = 2^x$ là

A. $\int 2^x dx = \ln 2 \cdot 2^x + C$.

B. $\int 2^x dx = 2^x + C$.

C. $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$.

D. $\int 2^x dx = \frac{2^x}{x+1} + C$.

Câu 62. Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^{-x}$ là

A. $-\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C$

B. $-3^{-x} + C$

C. $3^{-x} \ln 3 + C$

D. $\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C$

Câu 63. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^x + 2x$.

A. $\int (3^x + 2x) dx = \frac{2^x}{\ln 2} + x^2 + C$

B. $\int (3^x + 2x) dx = 2^x \cdot \ln 2 + x^2 + C$

C. $\int (3^x + 2x) dx = \frac{2^x}{\ln 2} + x + C$

D. $\int (3^x + 2x) dx = 2^x \cdot \ln 2 + x + C$

Câu 64. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x - 2x$ là.

A. $e^x + x^2 + C$.

B. $e^x - x^2 + C$.

C. $\frac{1}{x+1} e^x - x^2 + C$.

D. $e^x - 2 + C$.

Câu 65. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x \left(2017 - \frac{2018e^{-x}}{x^5} \right)$.

A. $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{2018}{x^4} + C$.

B. $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{2018}{x^4} + C$.

C. $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{504,5}{x^4} + C$.

D. $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{504,5}{x^4} + C$.

Câu 66. Họ nguyên hàm của hàm số $y = e^x \left(2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right)$ là

A. $2e^x + \tan x + C$

B. $2e^x - \tan x + C$

C. $2e^x - \frac{1}{\cos x} + C$

D. $2e^x + \frac{1}{\cos x} + C$

Câu 67. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3^x + \frac{1}{x}$.

A. $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}$.

B. $\frac{x^3}{3} - 3^x + \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}$.

C. $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$.

D. $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$.

Câu 68. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int e^x dx = xe^x + C$.

B. $\int e^x dx = e^{x+1} + C$.

C. $\int e^x dx = -e^{x+1} + C$.

D. $\int e^x dx = e^x + C$.

Câu 69. Cho hàm số $f(x) = 1 + e^{2x}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x) dx = x + \frac{1}{2} e^x + C$.

B. $\int f(x) dx = x + 2e^{2x} + C$.

C. $\int f(x) dx = x + \frac{1}{2} e^{2x} + C$.

D. $\int f(x) dx = x + e^{2x} + C$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 70. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$.

B. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$.

C. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C.$

D. $\int e^x \, dx = e^x + C.$

Câu 71. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. $\int \cos x \, dx = \sin x + C.$

B. $\int x^e \, dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + C.$

C. $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C.$

D. $\int e^x \, dx = \frac{e^{x+1}}{x+1} + C.$

Câu 72. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. $\int 2^x \, dx = 2^x \ln 2 + C.$

B. $\int e^{2x} \, dx = \frac{e^{2x}}{2} + C.$

C. $\int e^x (e^x - 1) \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} + e^x + C.$

D. $\int e^{3x} \cdot 3^x \, dx = \frac{(3e^3)^x}{3 + \ln 3} + C.$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 73. Tính $\int (2^x + 3^x) \, dx.$

Trả lời:

Câu 74. Tính $\int e^{3x+2024} \, dx.$

Trả lời:

Câu 75. Tính $\int 3^{x+2} \cdot 2^{2x+1} \, dx.$

Trả lời:

Câu 76. Tính $\int (3^x + 5^x)^2 \, dx.$

Trả lời:

Câu 77. Tính $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} \, dx.$

Trả lời:

Câu 78. Tính $\int (e^x + e^{-x})^2 \, dx.$

Trả lời:

Câu 79. Tính $\int \frac{e^{2x} - 1}{1 - e^{-x}} dx$.

Trả lời:

Câu 80. Chứng minh $F(x) = (4x - 5)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (4x - 1)e^x$.

Trả lời:

Câu 81. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của các hàm số $f(x) = me^x + 2a^x - 2\sin x$ (m là tham số)

Trả lời:

Câu 82. Tìm a, b, c để $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$ là một nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = -(2x^2 - 8x + 7)e^{-2x}.$$

Trả lời:

CHƯƠNG 4

NGUYÊN HÀM. TÍCH PHÂN

BÀI 1

NGUYÊN HÀM

1. Khái niệm nguyên hàm

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K . Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nếu $F'(x) = f(x)$, với mọi $x \in K$.

Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K . Khi đó:

- Với mỗi hằng số C , hàm số $F(x) + C$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K .
- Nếu $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì tồn tại hằng số C sao cho $G(x) = F(x) + C$ với mọi $x \in K$

Như vậy, mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x) + C$, với C là hằng số. Ta gọi $F(x) + C, C \in \mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K , kí hiệu $\int f(x)dx$ và viết:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Chú ý:

- Biểu thức $f(x)dx$ được gọi là vi phân của nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$, kí hiệu là $dF(x)$

Vậy, $dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$

- Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K .
- Khi tìm nguyên hàm của một hàm số mà khoogn chỉ rõ tập K thì ta hiểu là tìm nguyên hàm của hàm số đó trên tập xác định của nó.

- $\int f'(x)dx = f(x) + C$

2. Các tính chất của nguyên hàm

- $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$, với k là hằng số khác 0
- $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
- $\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

3. Nguyên hàm của một hàm số sơ cấp

Nguyên hàm của một hàm số sơ cấp

Nguyên hàm của hàm số lũy thừa

$$\int 0 dx = C$$

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

Nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{x}$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0)$$

Nguyên hàm của hàm số lượng giác

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

Nguyên hàm của hàm số mũ

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$$

TÍNH NGUYÊN HÀM MỘT SỐ HÀM SỐ SƠ CẤP

DẠNG 1

NGUYÊN HÀM HÀM SỐ LŨY THỪA

1. Bảng nguyên hàm hàm số lũy thừa

Nguyên hàm hàm số lũy thừa	$\int 0 dx = C$
	$\int dx = x + C$
	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$
	$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$
	$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$
	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C \quad (x \neq 0)$

Chú ý : dùng công thức sau làm trắc nghiệm cho nhanh

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$$

2. Lũy thừa với số mũ thực

Cho a, b là những số thực dương, α, β là những số thực bất kì. Khi đó:

- $a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}$
- $\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$
- $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha \cdot \beta}$
- $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K . Các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai.

A. $\int f(x)dx = F(x) + C$.

B. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

C. $\left(\int f(x)dx\right)' = f'(x)$.

D. $\left(\int f(x)dx\right)' = F'(x)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$ nên phương án A, B, D đúng.

Câu 2. Họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2x + 6$ là

A. $x^2 + C$.

B. $x^2 + 6x + C$.

C. $2x^2 + C$.

D. $2x^2 + 6x + C$.

Lời giải

Chọn B.

$$\int (2x + 6)dx = x^2 + 6x + C$$

Câu 3. $\int x^2 dx$ bằng

A. $2x + C$.

B. $\frac{1}{3}x^3 + C$.

C. $x^3 + C$.

D. $3x^3 + C$

Lời giải

Chọn B.

$$\text{Ta có } \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C.$$

Câu 4. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 1$ là

A. $x^3 + C$

B. $\frac{x^3}{3} + x + C$

C. $6x + C$

D. $x^3 + x + C$

Lời giải

Chọn D.

$$\int (3x^2 + 1)dx = x^3 + x + C.$$

Câu 5. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 + x$ là

A. $\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C$

B. $3x^2 + 1 + C$

C. $x^3 + x + C$

D. $x^4 + x^2 + C$

Lời giải

Chọn A.

$$\int (x^3 + x)dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C.$$

Câu 6. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^4 + x^2$ là

A. $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C$

B. $x^4 + x^2 + C$

C. $x^5 + x^3 + C$.

D. $4x^3 + 2x + C$

Lời giải

Chọn A.

$$\int f(x)dx = \int (x^4 + x^2)dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C.$$

Câu 7. Hàm số nào trong các hàm số sau đây không là nguyên hàm của hàm số $y = x^{2022}$?

A. $\frac{x^{2023}}{2023} + 1$.

B. $\frac{x^{2023}}{2023}$.

C. $y = 2022x^{2021}$.

D. $\frac{x^{2023}}{2023} - 1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\int x^{2022}dx = \frac{x^{2023}}{2023} + C$, C là hằng số.

Nên các phương án **A, B, D** đều là nguyên hàm của hàm số $y = x^{2022}$.

Câu 8. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 2024$ là

A. $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} + C$.

B. $\frac{1}{9}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2024x + C$.

C. $\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 2024x + C$.

D. $\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} - 2024x + C$.

Lời giải

Chọn C.

Sử dụng công thức $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ ta được:

$$\int \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 2024 \right) dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^4}{4} - 2 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2024x + C = \frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2024x + C.$$

Câu 9. Tìm nguyên $F(x)$ của hàm số $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$?

A. $F(x) = \frac{x^4}{4} - 6x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x + C$.

B. $F(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x + C$.

C. $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 + 6x + C$.

D. $F(x) = x^3 + 6x^2 + 11x^2 + 6x + C$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

$$\Rightarrow F(x) = \int (x^3 + 6x^2 + 11x + 6)dx = \frac{x^4}{4} + 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 + 6x + C.$$

Câu 10. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = (5x+3)^5$.

- A. $(5x+3)^6 + C$. B. $(5x+3)^4 + C$. **C. $\frac{(5x+3)^6}{30} + C$.** D. $\frac{(5x+3)^4}{30} + C$.

Lời giải

Chọn C.

$$f(x) = (5x+3)^5 \Rightarrow \int f(x)dx = \int (5x+3)^5 dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{(5x+3)^6}{6} + C = \frac{(5x+3)^6}{30} + C$$

Câu 11. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^2 + \frac{2}{x^2}$.

- A. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} + C$.** B. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C$.
C. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C$. D. $\int f(x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } \int \left(x^2 + \frac{2}{x^2} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C.$$

Câu 12. Tính $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} dx$.

- A. $\frac{4}{15} x^{15}\sqrt{x^7} + C$. **B. $\frac{8}{15} x^{15}\sqrt{x^7} + C$.** C. $\frac{8}{15} x^{15}\sqrt{x} + C$. D. $\frac{4}{15} x^{15}\sqrt{x} + C$.

Lời giải

Chọn B.

$$\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} dx = \int \sqrt{x\sqrt{x \cdot x^{\frac{1}{2}}}} dx = \int \sqrt{x \cdot x^{\frac{3}{4}}} dx = \int x^{\frac{7}{8}} dx = \frac{x^{\frac{7}{8}+1}}{\frac{7}{8}+1} + C = \frac{8}{15} x^{15}\sqrt{x^7} + C$$

Câu 13. Tính $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx$.

- A. $x^{\frac{5}{4}}\sqrt{x} - 2x^{\frac{17}{4}}\sqrt{x^5} + \sqrt[4]{x^3} + C$. **B. $\frac{4}{5} x^{\frac{5}{4}}\sqrt{x} - \frac{24}{17} x^{\frac{17}{4}}\sqrt{x^5} + \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + C$.**
C. $x^{\frac{5}{4}}\sqrt{x} - \frac{24}{17} x^{\frac{17}{4}}\sqrt{x^5} + \sqrt[4]{x^3} + C$. D. $\frac{4}{5} x^{\frac{5}{4}}\sqrt{x} - 2x^{\frac{17}{4}}\sqrt{x^5} + \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + C$.

Lời giải

Chọn B.

$$\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx = \int \frac{x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{2}{3}} + 1}{x^{\frac{1}{4}}} dx = \int \left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}} - 2 \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}} \right) dx$$

$$= \int \left(x^{\frac{1}{4}} - 2x^{\frac{5}{12}} + x^{-\frac{1}{4}} \right) dx = \frac{4}{5} x^{\frac{5}{4}} - \frac{24}{17} x^{\frac{17}{12}} + \frac{4}{3} x^{\frac{3}{4}} + C$$

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = x^2 + 4$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int f(x) dx = 2x + C.$

B. $\int f(x) dx = x^2 + 4x + C.$

C. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + 4x + C.$

D. $\int f(x) dx = x^3 + 4x + C.$

Lời giải

Ta có: $f(x) = x^2 + 4 \Rightarrow \int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + 4x + C$

Câu 15. Trên khoảng $(0; +\infty)$, cho hàm số $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int f(x) dx = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} + C.$

B. $\int f(x) dx = \int \sqrt{x^3} dx.$

C. $\int f(x) dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C.$

D. $\int f(x) dx = \frac{2}{3} x^{\frac{1}{2}} + C.$

Lời giải

Ta có: $\int f(x) dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C.$

Câu 16. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^4 + 2}{x^2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + C.$

B. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{x} + C.$

C. $\int f(x) dx = \int \left(x^2 + \frac{2}{x^2} \right) dx.$

D. $\int f(x) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C.$

Lời giải

Ta có: $\int f(x) dx = \int \frac{x^4 + 2}{x^2} dx = \int \left(x^2 + \frac{2}{x^2} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{x} + C.$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 17. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

A. $\int \left(\sqrt[3]{x^2} + x - 2 \right) dx = \frac{3}{5} \sqrt[3]{x^5} + \frac{1}{2} x^2 - 2x + C$

B. $\int \frac{1}{2023x^{2024}} dx = \frac{1}{2023^2 x^{2023}} + C$

C. $\int (2x - 2024)^2 dx = x - 1012 + C$

D. $\int \left(\frac{1}{4} x^4 + 4x^3 \right) dx = \frac{1}{20} x^5 + \frac{4}{3} x^4 + C$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

$\int \left(\sqrt[3]{x^2} + x - 2\right) dx = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$

$\int \frac{1}{2023x^{2024}} dx = \frac{1}{2023} \int x^{-2024} dx = \frac{1}{2023^2 x^{2023}} + C$

$\int (2x - 2024)^2 dx = \frac{(2x - 2024)^3}{3} + C$

$\int \left(\frac{1}{4}x^4 + 4x^3\right) dx = \frac{1}{20}x^5 + \frac{4}{3}x^4 + C$

Câu 18. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai

A. $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + \ln|x| + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + \frac{1}{x}$.

B. $F(x) = \frac{(5x+3)^6}{6} + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = (5x+3)^5$.

C. $F(x) = \frac{3}{2}x\sqrt{x} + \frac{4}{3}x\sqrt[3]{x} + \frac{5}{4}x\sqrt[4]{x} + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$.

D. $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2024x + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^3 - 2024x}{x}$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	SAI	ĐÚNG

$f(x) = x^3 - 3x + \frac{1}{x}$

$\Rightarrow F(x) = \int f(x)dx = \int \left(x^3 - 3x + \frac{1}{x}\right)dx = \int x^3dx - 3\int xdx + \int \frac{1}{x}dx = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + \ln|x| + C$

$f(x) = (5x+3)^5 \Rightarrow F(x) = \int f(x)dx = \int (5x+3)^5dx = \int (5x+3)^5 \frac{d(5x+3)}{5} = \frac{(5x+3)^6}{30} + C$

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$

$\Rightarrow F(x) = \int \left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}\right)dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{4}}\right)dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + \frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x} + \frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} + C$

$f(x) = \frac{x^3 - 2024x}{x} \Rightarrow F(x) = \int \frac{x^3 - 2024x}{x}dx = \int (x^2 - 2024)dx = \frac{1}{3}x^3 - 2024x + C$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 19. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + 3^x + 3x - 2$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\int \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + 3^x + 3x - 2 \right) dx = 4\sqrt{x} + \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{3}{2}x^2 - 2x + C$

$$\int \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + 3^x + 3x - 2 \right) dx = 4\sqrt{x} + \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{3}{2}x^2 - 2x + C$$

Câu 20. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = mx^3 - 3x^2 + \frac{4m}{x^3} + \frac{5}{2x} - 7m$ (m là tham số).

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $F(x) = \frac{m}{4}x^4 - x^3 - \frac{4m}{2 \cdot x^2} - \frac{5}{2 \cdot x^2} - 7mx + C$

$$\int \left(mx^3 - 3x^2 + \frac{4m}{x^3} + \frac{5}{2x} - 7m \right) dx = \frac{m}{4}x^4 - x^3 - \frac{4m}{2 \cdot x^2} - \frac{5}{2 \cdot x^2} - 7mx + C$$

Câu 21. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 22. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{(x^2 - 1)^2}{x^2}$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 23. Tính $\int \left(\frac{(1-x)^3}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 24. Tính $\int \left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x^3} + \sqrt[5]{x^4} \right) dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 25. Tính $\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1) dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 26. Tính $\int \left(2\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 27. Tính $\int \frac{1}{\sqrt{2x} + \sqrt{3x}} dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 28. Tính $\int \frac{1}{\sqrt{5x} - \sqrt{3x}} dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 29. Tính $\int (x^2 - 1)^3 dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 30. Tính $\int (2 - x^2)^4 dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 31. Tính $\int (x - \sqrt[3]{x})^2 dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 32. Tính $\int \left(\frac{x^2 + 2\sqrt[3]{x}}{x} \right)^2 dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 33. Tìm m để $F(x) = mx^3 + (3m + 2)x^2 - 4x + 3$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + 10x - 4$.

Trả lời:

Lời giải**Đáp án:**

Câu 34. Tìm a, b, c để $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{x^2 - 4x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x - 2)\sqrt{x^2 - 4x}$.

Trả lời:

Lời giải**Đáp án:**

Câu 35. Tìm a, b, c để $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{2x - 3}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{20x^2 - 30x + 7}{\sqrt{2x - 3}}$.

Trả lời:

Lời giải**Đáp án:**

1. Bảng nguyên hàm hàm số lượng giác

Nguyên hàm hàm số lượng giác	$\int \cos x dx = \sin x + C$
	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$
	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$

Chú ý: $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$; $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 36. Hàm số $F(x) = \cot x$ là một nguyên hàm của hàm số nào dưới đây trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

A. $f_2(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$. B. $f_1(x) = -\frac{1}{\cos^2 x}$. C. $f_4(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. D. $f_3(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Lời giải

Chọn D.

Có $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$ suy ra $F(x) = \cot x$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ là một nguyên hàm của hàm số $f_3(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Câu 37. Cho hàm số $f(x) = 1 + \sin x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x) dx = x - \cos x + C$. B. $\int f(x) dx = x + \sin x + C$.
C. $\int f(x) dx = x + \cos x + C$. D. $\int f(x) dx = \cos x + C$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\int f(x) dx = \int (1 + \sin x) dx = \int 1 dx + \int \sin x dx = x - \cos x + C$.

Câu 38. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2}$

A. $F(x) = 2 \cos \frac{x}{2} + C$ B. $F(x) = \frac{1}{2}(1 + \sin x) + C$
C. $F(x) = 2 \sin \frac{x}{2} + C$ D. $F(x) = \frac{1}{2}(1 - \sin x) + C$

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2} \Rightarrow F(x) = \int \cos^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1 + \cos x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos x) dx = \frac{1}{2} (x + \sin x) + C$

Câu 39. Cho hàm số $f(x) = 1 - \frac{1}{\cos^2 x}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x) dx = x + \tan x + C$.

B. $\int f(x) dx = x + \cot x + C$.

C. $\int f(x) dx = x - \tan x + C$.

D. $\int f(x) dx = x - \cot x + C$.

Lời giải

Chọn C.

$$\int f(x) dx = \int \left(1 - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = x - \tan x + C.$$

Câu 40. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x + 6x$ là

A. $\sin x + 3x^2 + C$.

B. $-\sin x + 3x^2 + C$.

C. $\sin x + 6x^2 + C$.

D. $-\sin x + C$.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\int f(x) dx = \int (\cos x + 6x) dx = \sin x + 3x^2 + C$.

Câu 41. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2 \sin x + 3x$.

A. $\int (2 \sin x + 3x) dx = -2 \cos x + \frac{3}{2} x^2 + C$

B. $\int (2 \sin x + 3x) dx = 2 \cos x + 3x^2 + C$

C. $\int (2 \sin x + 3x) dx = \sin^2 x + \frac{3}{2} x + C$

D. $\int (2 \sin x + 3x) dx = \sin 2x + \frac{3}{2} x^2 + C$

Lời giải

Chọn A.

$$\int (2 \sin x + 3x) dx = -2 \cos x + \frac{3}{2} x^2 + C$$

Câu 42. Tính $\int (x - \sin x) dx$.

A. $\frac{x^2}{2} + \sin x + C$.

B. $\frac{x^2}{2} - \cos x + C$.

C. $\frac{x^2}{2} - \sin x + C$.

D. $\frac{x^2}{2} + \cos x + C$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\int (x - \sin x) dx = \frac{x^2}{2} + \cos x + C$.

Câu 43. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3x^2 + \sin x$ là

A. $x^3 + \cos x + C$.

B. $6x + \cos x + C$.

C. $x^3 - \cos x + C$.

D. $6x - \cos x + C$.

Lời giải

Chọn C.Ta có $\int (3x^2 + \sin x) dx = x^3 - \cos x + C$.**Câu 44.** Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x} + \sin x$ là

- A. $\ln x - \cos x + C$. B. $-\frac{1}{x^2} - \cos x + C$. C. $\ln|x| + \cos x + C$. **D. $\ln|x| - \cos x + C$.**

Lời giải**Chọn D.**Ta có $\int f(x) dx = \int \left(\frac{1}{x} + \sin x \right) dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \sin x dx = \ln|x| - \cos x + C$.**Câu 45.** Cho $\int f(x) dx = -\cos x + C$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $f(x) = -\sin x$. B. $f(x) = -\cos x$. **C. $f(x) = \sin x$.** D. $f(x) = \cos x$.

Lời giảiÁp dụng công thức $\int \sin x dx = -\cos x + C$. Suy ra $f(x) = \sin x$.**Câu 46.** Cho hàm số $f(x) = \int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $\int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \sin x + C$. B. $\int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \cos x + C$
 C. $\int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \sin x + C$. **D. $\int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \cos x + C$**

Lời giải

$$\int \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \int \sin x dx = -\frac{1}{2} \cos x + C$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 47. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- A. $\int (2 + \cot^2 x) dx = x - \cot x + C$.**

$$\text{B. } \int \left(1 - \cos^2 \frac{x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} (x + \sin x) + C$$

$$\text{C. } \int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx = x + \cos x + C.$$

$$\text{D. } \int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx = x - \cos x + C$$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	SAI	SAI	SAI

$$\int (2 + \cot^2 x) dx = \int (1 + 1 + \cot^2 x) dx = \int \left(1 + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = x - \cot x + C$$

$$\int \left(1 - \cos^2 \frac{x}{2} \right) dx = \int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1 - \cos x}{2} dx = \frac{1}{2} (x - \sin x) + C$$

$$\int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx = \int (1 + \sin x) dx = x - \cos x + C$$

$$\int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx = \int (1 - \sin x) dx = x + \cos x + C$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 48. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2024 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $F(x) = 2023x - \sin x + C$

$$\Rightarrow F(x) = \int \left(2024 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right) dx = \int (2023 + \cos x) dx = 2023x - \sin x + C$$

Câu 49. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}}$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 50. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{1}{2}\tan^2 x$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 51. Tính $\int x \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{2} \right) dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 52. Tính $\int x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{\tan^2 x}{x^2} \right) dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 53. Tính $\int x \left(2024 - \frac{1}{x^3} + \frac{\sin x}{x} \right) dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 54. Tính $\int x^3 \left[\frac{\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2}{x^3} - 2x + \frac{1}{x^{2024}} \right] dx =$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 55. Tính $\int x^2 \left[\frac{1}{x^2 \sin^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}} + \frac{3}{x^3} - \frac{4}{x^4} \right] dx = .$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

DẠNG 3

NGUYÊN HÀM HÀM MŨ

Nguyên hàm hàm số mũ

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$$

Chú ý :

$$\bullet \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$$

$$\bullet \int a^{\alpha x+\beta} dx = \frac{1}{\alpha} \frac{a^{\alpha x+\beta}}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 56. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{3x}$ là hàm số nào sau đây?

- A. $3e^x + C$. **B.** $\frac{1}{3}e^{3x} + C$. C. $\frac{1}{3}e^x + C$. D. $3e^{3x} + C$.

Lời giải**Chọn B.**

Cách 1: $\int e^{3x} dx = \int (e^3)^x dx = \frac{(e^3)^x}{\ln e^3} + C = \frac{e^{3x}}{3} + C$

Cách 2: Trắc nghiệm $\int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C$, với C là hằng số bất kì.

Câu 57. Nguyên hàm của hàm số $y = e^{2x-1}$ là

- A. $2e^{2x-1} + C$. B. $e^{2x-1} + C$. **C.** $\frac{1}{2}e^{2x-1} + C$. D. $\frac{1}{2}e^x + C$.

Lời giải**Chọn C.**

Cách 1: $\int e^{2x-1} dx = \int e^{-1} \cdot (e^2)^x dx = e^{-1} \cdot \frac{(e^2)^x}{\ln e^2} + C = \frac{e^{2x-1}}{2} + C$

Cách 2: $\int e^{2x-1} dx = \frac{1}{2} \int e^{2x-1} d(2x-1) = \frac{1}{2} e^{2x-1} + C$.

Câu 58. Cho hàm số $f(x) = e^x + 2$. Khẳng định nào dưới đây là đúng ?

- A. $\int f(x) dx = e^{x-2} + C$. **B.** $\int f(x) dx = e^x + 2x + C$.
C. $\int f(x) dx = e^x + C$. D. $\int f(x) dx = e^x - 2x + C$.

Lời giải**Chọn B.**

Ta có: $\int f(x) dx = \int (e^x + 2) dx = e^x + 2x + C$

Câu 59. Cho hàm số $f(x) = e^x + 2x$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A.** $\int f(x) dx = e^x + x^2 + C$. B. $\int f(x) dx = e^x + C$.

C. $\int f(x)dx = e^x - x^2 + C.$

D. $\int f(x)dx = e^x + 2x^2 + C.$

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\int f(x)dx = \int (e^x + 2x)dx = e^x + x^2 + C.$

Câu 60. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 7^x.$

A. $\int 7^x dx = \frac{7^x}{\ln 7} + C$

B. $\int 7^x dx = 7^{x+1} + C$

C. $\int 7^x dx = \frac{7^{x+1}}{x+1} + C$

D. $\int 7^x dx = 7^x \ln 7 + C$

Lời giải

Chọn A.

Áp dụng công thức $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (0 < a \neq 1)$

Câu 61. Nguyên hàm của hàm số $y = 2^x$ là

A. $\int 2^x dx = \ln 2 \cdot 2^x + C.$

B. $\int 2^x dx = 2^x + C.$

C. $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$

D. $\int 2^x dx = \frac{2^x}{x+1} + C.$

Lời giải

Chọn C.

Do theo bảng nguyên hàm: $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

Câu 62. Tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^{-x}$ là

A. $-\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C$

B. $-3^{-x} + C$

C. $3^{-x} \ln 3 + C$

D. $\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C$

Lời giải

Chọn A

Cách 1: $\int f(x)dx = \int 3^{-x} dx = \int (3^{-1})^x d(x) = \frac{3^{-x}}{\ln 3^{-1}} + C = -\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C$

Cách 2: $\int f(x)dx = \int 3^{-x} dx = -\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C.$

Câu 63. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 3^x + 2x.$

A. $\int (3^x + 2x)dx = \frac{2^x}{\ln 2} + x^2 + C$

B. $\int (3^x + 2x)dx = 2^x \cdot \ln 2 + x^2 + C$

C. $\int (3^x + 2x)dx = \frac{2^x}{\ln 2} + x + C$

D. $\int (3^x + 2x)dx = 2^x \cdot \ln 2 + x + C$

Lời giải

Chọn A.

$$\int (3^x + 2x)dx = \frac{2^x}{\ln 2} + x^2 + C$$

Câu 64. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x - 2x$ là.

- A. $e^x + x^2 + C$. B. $e^x - x^2 + C$. C. $\frac{1}{x+1}e^x - x^2 + C$. D. $e^x - 2 + C$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\int (e^x - 2x) dx = e^x - x^2 + C$

Câu 65. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x \left(2017 - \frac{2018e^{-x}}{x^5} \right)$.

- A. $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{2018}{x^4} + C$. B. $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{2018}{x^4} + C$.
 C. $\int f(x) dx = 2017e^x + \frac{504,5}{x^4} + C$. D. $\int f(x) dx = 2017e^x - \frac{504,5}{x^4} + C$.

Lời giải

Chọn C.

$$\int f(x) dx = \int e^x \left(2017 - \frac{2018e^{-x}}{x^5} \right) dx = \int \left(2017e^x - \frac{2018}{x^5} \right) dx = 2017e^x + \frac{504,5}{x^4} + C$$

Câu 66. Họ nguyên hàm của hàm số $y = e^x \left(2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right)$ là

- A. $2e^x + \tan x + C$ B. $2e^x - \tan x + C$ C. $2e^x - \frac{1}{\cos x} + C$ D. $2e^x + \frac{1}{\cos x} + C$

Lời giải

Chọn A.

Ta có: $y = e^x \left(2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x} \right) = 2e^x + \frac{1}{\cos^2 x}$

$$\int y dx = \int \left(2e^x + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx = 2e^x + \tan x + C.$$

Câu 67. Tìm họ nguyên hàm của hàm số $y = x^2 - 3^x + \frac{1}{x}$.

- A. $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}$. B. $\frac{x^3}{3} - 3^x + \frac{1}{x^2} + C, C \in \mathbb{R}$.
 C. $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$. D. $\frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} - \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\int \left(x^2 - 3^x + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + \ln|x| + C, C \in \mathbb{R}$.

Câu 68. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int e^x dx = xe^x + C$. B. $\int e^x dx = e^{x+1} + C$. C. $\int e^x dx = -e^{x+1} + C$. D. $\int e^x dx = e^x + C$.

Lời giải

Ta có $\int e^x dx = e^x + C$.

Câu 69. Cho hàm số $f(x) = 1 + e^{2x}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x) dx = x + \frac{1}{2}e^x + C$. B. $\int f(x) dx = x + 2e^{2x} + C$.
 C. $\int f(x) dx = x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$. D. $\int f(x) dx = x + e^{2x} + C$.

Lời giải

Ta có $\int (1 + e^{2x}) dx = x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý A), B), C), D) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 70. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$.
 B. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$.
 C. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
 D. $\int e^x dx = e^x + C$.

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG

Ta có:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C.$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$\int e^x dx = e^x + C.$$

Câu 71. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. $\int \cos x dx = \sin x + C$.
 B. $\int x^e dx = \frac{x^{e+1}}{e+1} + C$.

C. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$

D. $\int e^x dx = \frac{e^{x+1}}{x+1} + C.$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
ĐÚNG	ĐÚNG	ĐÚNG	SAI

Ta có: $\int e^x dx = \frac{e^{x+1}}{x+1} + C$ sai vì $\int e^x dx = e^x + C.$

Câu 72. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. $\int 2^x dx = 2^x \ln 2 + C.$

B. $\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + C.$

C. $\int e^x (e^x - 1) dx = \frac{1}{2} e^{2x} + e^x + C.$

D. $\int e^{3x} \cdot 3^x dx = \frac{(3e^3)^x}{3 + \ln 3} + C.$

Lời giải

A.	B.	C.	D.
SAI	ĐÚNG	SAI	ĐÚNG

Ta có:

$$\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C.$$

$$\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + C$$

$$\int e^x (e^x - 1) dx = \int (e^{2x} - e^x) dx = \frac{1}{2} e^{2x} - e^x + C$$

$$\int e^{3x} \cdot 3^x dx = \int (3e^3)^x dx = \frac{(3e^3)^x}{\ln(3e^3)} + C = \frac{(3e^3)^x}{3 + \ln 3} + C$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 73. Tính $\int (2^x + 3^x) dx.$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3^x}{\ln 3} + C$

$$\int (2^x + 3^x) dx = \int 2^x dx + \int 3^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3^x}{\ln 3} + C$$

Câu 74. Tính $\int e^{3x+2024} dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\frac{1}{3} e^{3x+2024} + C$

$$\int e^{3x+2024} dx = \frac{1}{3} e^{3x+2024} + C$$

Câu 75. Tính $\int 3^{x+2} \cdot 2^{2x+1} dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $18 \frac{12^x}{2 \ln 2 + \ln 3} + C$

$$\int 3^{x+2} \cdot 2^{2x+1} dx = \int 3^2 \cdot 3^x \cdot 2 \cdot 4^x dx = 18 \int 12^x dx = 18 \frac{12^x}{\ln 12} + C = 18 \frac{12^x}{2 \ln 2 + \ln 3} + C$$

Câu 76. Tính $\int (3^x + 5^x)^2 dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\frac{9^x}{2 \ln 3} + \frac{30^x}{\ln 5 + \ln 3 + \ln 2} + \frac{25^x}{2 \ln 5} + C$

$$\int (3^x + 5^x)^2 dx = \int (9^x + 30^x + 25^x) dx = \frac{9^x}{\ln 9} + \frac{30^x}{\ln 30} + \frac{25^x}{\ln 25} + C = \frac{9^x}{2 \ln 3} + \frac{30^x}{\ln 5 + \ln 3 + \ln 2} + \frac{25^x}{2 \ln 5} + C$$

Câu 77. Tính $\int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 78. Tính $\int (e^x + e^{-x})^2 dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 79. Tính $\int \frac{e^{2x} - 1}{1 - e^{-x}} dx$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\frac{1}{2}e^{2x} + e^x + C$

$$\int \frac{e^{2x}-1}{1-e^{-x}} dx = \int \frac{(e^x-1)(e^x+1)}{1-\frac{1}{e^x}} dx = \int \frac{e^x(e^x-1)(e^x+1)}{e^x-1} dx = \int e^x(e^x+1) dx = \int (e^{2x} + e^x) dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} + e^x + C$$

Câu 80. Chứng minh $F(x) = (4x-5)e^x$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (4x-1)e^x$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Vì $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên $F'(x) = f(x)$

Ta có $F'(x) = 4e^x + (4x-5)e^x = (4x-1)e^x = f(x)$ điều phải chứng minh

Câu 81. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của các hàm số $f(x) = me^x + 2a^x - 2\sin x$ (m là tham số)

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $F(x) = me^x + \frac{2a^x}{\ln a} + \cos x + C$

$$F(x) = \int (me^x + 2a^x - 2\sin x) dx = me^x + \frac{2a^x}{\ln a} + \cos x + C$$

Câu 82. Tìm a, b, c để $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$ là một nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = -(2x^2 - 8x + 7)e^{-2x}.$$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $\begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \\ c = -1 \end{cases}$

Vì $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nên $F'(x) = f(x)$

Ta có

$$F'(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-2x} = (2ax + b)e^{-2x} - 2(ax^2 + bx + c)e^{-2x} = -[2ax^2 + (2a - 2b)x + b - 2c]e^{-2x}$$

Do $F'(x) = f(x)$ nên $\begin{cases} 2a = 2 \\ 2a - 2b = -8 \\ b - 2c = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \\ c = -1 \end{cases}$

CHỦ ĐỀ 2

NGUYÊN HÀM CÓ ĐIỀU KIỆN

DẠNG 1

BÀI TOÁN CHO HÀM $f(x)$, TÌM NGUYÊN HÀM CỦA $f(x)$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{x}$ trên $(-\infty; 0)$ thỏa mãn $F(-2) = 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $F(x) = \ln\left(\frac{-x}{2}\right) \quad \forall x \in (-\infty; 0)$

B. $F(x) = \ln|x| + C \quad \forall x \in (-\infty; 0)$ với C là một số thực bất kì.

C. $F(x) = \ln|x| + \ln 2 \quad \forall x \in (-\infty; 0)$.

D. $F(x) = \ln(-x) + C \quad \forall x \in (-\infty; 0)$ với C là một số thực bất kì.

Câu 2. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$ và $F(0) = 0$. Giá trị của $F(\ln 3)$ bằng

A. 2.

B. 6.

C. 8.

D. 4.

Câu 3. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = 2^x + x + 1$. Biết $F(0) = 1$. Tính $F(-1)$ kết quả là.

A. $F(-1) = \frac{1}{2 \ln 2}$.

B. $F(-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \ln 2}$.

C. $F(-1) = 1 + \frac{1}{2 \ln 2}$.

D. $F(-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\ln 2}$.

Câu 4. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

A. $F(x) = -\cos x + \sin x + 3$

B. $F(x) = -\cos x + \sin x - 1$

C. $F(x) = -\cos x + \sin x + 1$

D. $F(x) = \cos x - \sin x + 3$

Câu 5. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

A. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$

B. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}$

C. $F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}$

D. $F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}$

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2-2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$, giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng.

A. 9.

B. 15.

C. 11.

D. 6.

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của hàm số f trên $\mathbb{R}$

thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng

A. 23.

B. 11.

C. 10.

D. 21.

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng

A. 18.

B. 20.

C. 9.

D. 24.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = 2x + e^x$. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn

$F(0) = 2024$.

Trả lời:

Câu 10. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + 1$ biết $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

Trả lời:

Câu 11. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = (5x+3)^5$. Biết $F(1) = 0$. Tính $F(0)$.

Trả lời:

Câu 12. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = x^3 - 4x + 5$. Biết $F(1) = 3$. Tính $F(0)$.

Trả lời:

Câu 13. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = 3 - 5\cos x$. Biết $F(\pi) = 2$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Trả lời:

Câu 14. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{3-5x^2}{x}$. Biết $F(e) = 1$. Tính $F(2)$.

Trả lời:

Câu 15. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$. Biết $F(1) = \frac{3}{2}$. Tính $F(-1)$.

Trả lời:

Câu 16. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2}$ biết $F(-2) = 0$.

Trả lời:

Câu 17. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ biết $F(1) = -2$.

Trả lời:

Câu 18. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + 1$ biết $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

Trả lời:

Câu 19. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2024 - \sin^2 \frac{x}{2}$ biết $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2025$.

Trả lời:

Câu 20. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin^2 \frac{x}{4} \cdot \cos^2 \frac{x}{4}$ biết $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$.

Trả lời:

Câu 21. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x + 5, & x \geq 1 \\ 3x^2 + 4, & x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$F(0) = 2$. Tính giá trị của $F(-1) + 2F(2)$.

Trả lời:

Câu 22. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$, thỏa mãn $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$. Tính giá trị biểu

thức $T = F(0) + F(1) + \dots + F(2018) + F(2019)$.

Trả lời:

Câu 23. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. Biết $F\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = k$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$.

Tính giá trị của biểu thức $T = F(0) + F(\pi) + F(2\pi) + \dots + F(10\pi)$.

Trả lời:

$$\int f'(x)dx = f(x) + C$$

A. $\frac{6\ln 2 - 3}{4}$. B. $\frac{6\ln 2 + 3}{4}$. C. $\frac{8\ln 2 + 3}{4}$. D. $\frac{8\ln 2 - 3}{4}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 31. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và: $f'(x) = 2024 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$, $\forall x, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2023\pi}{2}$.

Tìm hàm $f(x)$

Trả lời:

Câu 32. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và: $f'(x) = 1 + e^{2x}$, $\forall x, f(0) = 2$. Tìm hàm $f(x)$

Trả lời:

Câu 33. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và: $f'(x) = 2^x + 3^x$, $\forall x, f(0) = \frac{1}{\ln 3}$. Tìm hàm

$f(x)$

Trả lời:

Câu 34. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và: $f'(x) = e^{3x+2024}$, $\forall x, f(-675) = 1$. Tìm hàm

$f(x)$

Trả lời:

Câu 35. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và: $f'(x) = 3^{x+2} \cdot 2^{2x+1}$, $\forall x, f(0) = \frac{1}{2\ln 2}$. Tìm hàm

$f(x)$

Trả lời:

Câu 36. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và: $f'(x) = (3^x + 5^x)^2$, $\forall x, f(0) = \frac{1}{\ln 5 + \ln 3 + \ln 2}$.

Tìm hàm $f(x)$

Trả lời:

CHỦ ĐỀ 2**NGUYÊN HÀM CÓ ĐIỀU KIỆN****DẠNG 1****BÀI TOÁN CHO HÀM $f(x)$, TÌM NGUYÊN HÀM CỦA $f(x)$**

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{1}{x}$ trên $(-\infty; 0)$ thỏa mãn $F(-2) = 0$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $F(x) = \ln\left(\frac{-x}{2}\right) \quad \forall x \in (-\infty; 0)$
- B.** $F(x) = \ln|x| + C \quad \forall x \in (-\infty; 0)$ với C là một số thực bất kì.
- C.** $F(x) = \ln|x| + \ln 2 \quad \forall x \in (-\infty; 0)$.
- D.** $F(x) = \ln(-x) + C \quad \forall x \in (-\infty; 0)$ với C là một số thực bất kì.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $F(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C = \ln(-x) + C$ với $\forall x \in (-\infty; 0)$.

Lại có $F(-2) = 0 \Leftrightarrow \ln 2 + C = 0 \Leftrightarrow C = -\ln 2$. Do đó $F(x) = \ln(-x) - \ln 2 = \ln\left(\frac{-x}{2}\right)$.

Vậy $F(x) = \ln\left(\frac{-x}{2}\right) \quad \forall x \in (-\infty; 0)$.

Câu 2. Biết $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{2x}$ và $F(0) = 0$. Giá trị của $F(\ln 3)$ bằng

- A.** 2. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D.

$F(x) = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C; F(0) = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{2} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}$.

Khi đó $F(\ln 3) = \frac{1}{2}e^{2\ln 3} - \frac{1}{2} = 4$.

Câu 3. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = 2^x + x + 1$. Biết $F(0) = 1$. Tính $F(-1)$ kết quả là.

- A.** $F(-1) = \frac{1}{2\ln 2}$. **B.** $F(-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\ln 2}$.

$$\text{C. } F(-1) = 1 + \frac{1}{2 \ln 2}.$$

$$\text{D. } F(-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\ln 2}.$$

Lời giải

Chọn B.

$$F(x) = \int (2^x + x + 1) dx = \frac{1}{\ln 2} 2^x + \frac{1}{2} x^2 + x + C.$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{\ln 2} 2^x + \frac{1}{2} x^2 + x + C.$$

$$F(0) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{\ln 2} 2^0 + \frac{1}{2} 0^2 + 0 + C \Rightarrow C = 1 - \frac{1}{\ln 2}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{\ln 2} 2^x + \frac{1}{2} x^2 + x + 1 - \frac{1}{\ln 2}$$

$$\Rightarrow F(-1) = \frac{1}{\ln 2} 2^{-1} + \frac{1}{2} (-1)^2 + (-1) + 1 - \frac{1}{\ln 2} \Rightarrow F(-1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \ln 2}$$

Câu 4. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

$$\text{A. } F(x) = -\cos x + \sin x + 3$$

$$\text{B. } F(x) = -\cos x + \sin x - 1$$

$$\text{C. } F(x) = -\cos x + \sin x + 1$$

$$\text{D. } F(x) = \cos x - \sin x + 3$$

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Có } F(x) = \int f(x) dx = \int (\sin x + \cos x) dx = -\cos x + \sin x + C$$

$$\text{Do } F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} + C = 2 \Leftrightarrow 1 + C = 2 \Leftrightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = -\cos x + \sin x + 1.$$

Câu 5. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tìm $F(x)$.

$$\text{A. } F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$$

$$\text{B. } F(x) = e^x + x^2 + \frac{5}{2}$$

$$\text{C. } F(x) = e^x + x^2 + \frac{3}{2}$$

$$\text{D. } F(x) = 2e^x + x^2 - \frac{1}{2}$$

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } F(x) = \int (e^x + 2x) dx = e^x + x^2 + C$$

$$\text{Theo bài ra ta có: } F(0) = 1 + C = \frac{3}{2} \Rightarrow C = \frac{1}{2}.$$

Câu 6. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2-2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$, giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$F(0) = 2. \text{ Giá trị của } F(-1) + 2F(2) \text{ bằng.}$$

A. 9.

B. 15.

C. 11.

D. 6.

Lời giải**Chọn A.**

Ta có:

$$\int (2x-1)dx = x^2 - x + c_1 ;$$

$$\int (3x^2 - 2)dx = x^3 - 2x + c_2$$

$$\text{Suy ra } F(x) = \int f(x)dx = \begin{cases} x^2 - x + C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 - 2x + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$$

$$\text{Mà ta có } F(0) = 2 \Rightarrow C_2 = 2$$

Mặt khác hàm số F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ nên $y = F(x)$ liên tục tại $x = 1$

$$\text{Suy ra } \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) \Rightarrow C_1 = 1.$$

$$\text{Khi đó ta có: } F(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 - 2x + 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} F(-1) = 3 \\ F(2) = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } F(-1) + 2F(2) = 9.$$

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của hàm số f trên $\mathbb{R}$

thỏa mãn $F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng

A. 23.

B. 11.

C. 10.

D. 21.

Lời giải**Chọn D.**

$$\text{Khi } x \geq 1 \text{ thì } F(x) = \int f(x)dx = \int (2x+3)dx = x^2 + 3x + C_1$$

$$\text{Khi } x < 1 \text{ thì } F(x) = \int f(x)dx = \int (3x^2 + 2)dx = x^3 + 2x + C_2$$

Theo giả thiết $F(0) = 2 \Rightarrow C_2 = 2$ Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = 5$ nên hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.

Suy ra hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Do đó hàm số } F(x) \text{ liên tục trên } \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) \Rightarrow C_1 + 4 = C_2 + 3 \Rightarrow C_1 = 1$$

$$\text{Vậy } F(-1) + 2F(2) = -3 + C_2 + 2(10 + C_1) = 21$$

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+2 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+1 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$F(0) = 2$. Giá trị của $F(-1) + 2F(2)$ bằng

A. 18.

B. 20.

C. 9.

D. 24.

Lời giải

Chọn A.

F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ nên $F(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + C_1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 + x + C_2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}$.

Ta có: $F(0) = 2 \Rightarrow C_2 = 2$. (1)

Do F liên tục tại $x=1$ nên $\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = F(1)$

$$\Leftrightarrow C_1 + 3 = C_2 + 2 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} C_1 + 3 = 4 \Leftrightarrow C_1 = 1.$$

$$\text{Do đó } F(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ x^3 + x + 2 & \text{khi } x < 1 \end{cases}.$$

Suy ra $F(-1) + 2F(2) = 18$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = 2x + e^x$. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2024$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $F(x) = x^2 + e^x + 2023$

Ta có $\int f(x) dx = \int (2x + e^x) dx = x^2 + e^x + C$.

Có $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ và $F(0) = 2019$.

$$\text{Suy ra } \begin{cases} F(x) = x^2 + e^x + C \\ F(0) = 2024 \end{cases} \Rightarrow 1 + C = 2024 \Leftrightarrow C = 2023.$$

Vậy $F(x) = x^2 + e^x + 2023$.

Câu 10. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + 1$ biết $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $F(x) = x - \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow F(x) = \int (\sin x + 1) dx = x - \cos x + C$$

$$\text{Do } F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{6} - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + C = 0 \Leftrightarrow C = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$$

Vậy nguyên hàm cần tìm là: $F(x) = x - \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$

Câu 11. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = (5x+3)^5$. Biết $F(1) = 0$. Tính $F(0)$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $F(0) = -\frac{52283}{6}$

$$f(x) = (5x+3)^5$$

$$\Rightarrow F(x) = \int f(x)dx = \int (5x+3)^5 dx = \frac{(5x+3)^6}{30} + C$$

$$F(1) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{(5 \cdot 1 + 3)^6}{30} + C \Rightarrow C = -\frac{131072}{15}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{(5x+3)^6}{30} - \frac{131072}{15}$$

$$\Rightarrow F(0) = \frac{(5 \cdot 0 + 3)^6}{30} - \frac{131072}{15} = -\frac{52283}{6}$$

Câu 12. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = x^3 - 4x + 5$. Biết $F(1) = 3$. Tính $F(0)$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 13. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = 3 - 5 \cos x$. Biết $F(\pi) = 2$. Tính $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 14. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{3-5x^2}{x}$. Biết $F(e) = 1$. Tính $F(2)$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 15. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$. Biết $F(1) = \frac{3}{2}$. Tính $F(-1)$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 16. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2}$ biết $F(-2) = 0$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 17. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ biết $F(1) = -2$.

Trả lời:

Lời giải**Đáp án:**

Câu 18. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + 1$ biết $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

Trả lời:

Lời giải**Đáp án:**

Câu 19. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2024 - \sin^2 \frac{x}{2}$ biết $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2025$.

Trả lời:

Lời giải**Đáp án:**

Câu 20. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin^2 \frac{x}{4} \cdot \cos^2 \frac{x}{4}$ biết $F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$.

Trả lời:

Lời giải**Đáp án:**

Câu 21. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x+5, & x \geq 1 \\ 3x^2+4, & x < 1 \end{cases}$. Giả sử F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$F(0) = 2$. Tính giá trị của $F(-1) + 2F(2)$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $F(-1) + 2F(2) = 27$

Ta có $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{khi } x \geq 1 \\ 3x^2+4 & \text{khi } x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F(x) = x^2 + 5x + C_1 & x \geq 1 \\ F(x) = x^3 + 4x + C_2 & x < 1 \end{cases}$

Vì F là nguyên hàm của f trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(0) = 2$ nên $C_2 = 2 \Rightarrow F(x) = x^3 + 4x + 2$.

Vì $F(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $F(x)$ liên tục tại $x = 1$ nên:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = F(1) \Rightarrow 6 + C_1 = 7 \Rightarrow C_1 = 1$$

Vậy ta có $\begin{cases} F(x) = x^2 + 5x + 2 & x \geq 1 \\ F(x) = x^3 + 4x + 1 & x < 1 \end{cases} \Rightarrow F(-1) + 2F(2) = -3 + 2 \cdot 15 = 27$

Câu 22. Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$, thỏa mãn $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$. Tính giá trị biểu thức $T = F(0) + F(1) + \dots + F(2018) + F(2019)$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $T = \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}$

Ta có $\int f(x)dx = \int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$

$F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x$, ta có $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + C$ mà $F(0) = \frac{1}{\ln 2}$

$\Rightarrow C = 0 \Rightarrow F(x) = \frac{2^x}{\ln 2}$.

$T = F(0) + F(1) + \dots + F(2018) + F(2019)$

$= \frac{1}{\ln 2} (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2018} + 2^{2019}) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{2^{2020} - 1}{2 - 1} = \frac{2^{2020} - 1}{\ln 2}$

Câu 23. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$. Biết $F\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = k$ với mọi $k \in \mathbb{Z}$.

Tính giá trị của biểu thức $T = F(0) + F(\pi) + F(2\pi) + \dots + F(10\pi)$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $T = 44$

Ta có $\int f(x)dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$.

$$\text{Suy ra } F(x) = \begin{cases} \tan x + C_0, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \\ \tan x + C_1, & x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \\ \tan x + C_2, & x \in \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right) \\ \dots \\ \tan x + C_9, & x \in \left(\frac{17\pi}{2}; \frac{19\pi}{2}\right) \\ \tan x + C_{10}, & x \in \left(\frac{19\pi}{2}; \frac{21\pi}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F\left(\frac{\pi}{4} + 0\pi\right) = 1 + C_0 = 0 \Rightarrow C_0 = -1 \\ F\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = 1 + C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = 0 \\ F\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right) = 1 + C_2 = 2 \Rightarrow C_2 = 1 \\ \dots \\ F\left(\frac{\pi}{4} + 9\pi\right) = 1 + C_9 = 9 \Rightarrow C_9 = 8 \\ F\left(\frac{\pi}{4} + 10\pi\right) = 1 + C_{10} = 10 \Rightarrow C_{10} = 9. \end{cases}$$

Vậy $F(0) + F(\pi) + F(2\pi) + \dots + F(10\pi) = \tan 0 - 1 + \tan \pi + \tan 2\pi + 1 + \dots + \tan 10\pi + 9 = 44$.

DẠNG 2**BÀI TOÁN CHO HÀM $f'(x)$, TÌM HÀM $f(x)$**

$$\int f'(x)dx = f(x) + C$$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = 12x^2 + 2, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 3$. Biết $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ thỏa mãn $F(0) = 2$, khi đó $F(1)$ bằng

A. -3 .

B. 1 .

C. 2 .

D. 7 .

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $f'(x) = 12x^2 + 2, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) = 4x^3 + 2x + C_1$.

Mà $f(1) = 3 \Rightarrow 3 = 6 + C_1 \Rightarrow C_1 = -3 \Rightarrow f(x) = 4x^3 + 2x - 3 \Rightarrow F(x) = x^4 + x^2 - 3x + C_2$.

Lại có: $F(0) = 2 \Rightarrow C_2 = 2 \Rightarrow F(x) = x^4 + x^2 - 3x + 2$.

Khi đó: $F(1) = 1$.

Cách khác: Ta có: $F(1) = \int_0^1 f(x) dx + F(0) = \int_0^1 (4x^3 + 2x - 3) dx + 2 = -1 + 2 = 1$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 3 - 5 \sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $f(x) = 3x - 5 \cos x + 15$

B. $f(x) = 3x - 5 \cos x + 2$

C. $f(x) = 3x + 5 \cos x + 5$

D. $f(x) = 3x + 5 \cos x + 2$

Lời giải

Chọn C.

Ta có $f(x) = \int (3 - 5 \sin x) dx = 3x + 5 \cos x + C$

Theo giả thiết $f(0) = 10$ nên $5 + C = 10 \Rightarrow C = 5$.

Vậy $f(x) = 3x + 5 \cos x + 5$.

Câu 26. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và: $f'(x) = 2e^{2x} + 1, \forall x, f(0) = 2$. Hàm $f(x)$ là

A. $y = 2e^x + 2x$.

B. $y = 2e^x + 2$.

C. $y = e^{2x} + x + 2$.

D. $y = e^{2x} + x + 1$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có: $\int f'(x) dx = \int (2e^{2x} + 1) dx = e^{2x} + x + C$.

Suy ra $f(x) = e^{2x} + x + C$.

Theo bài ra ta có: $f(0) = 2 \Rightarrow 1 + C = 2 \Leftrightarrow C = 1$.

Vậy: $f(x) = e^{2x} + x + 1$.

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = 2 - 5 \sin x$ và $f(0) = 10$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. $f(x) = 2x + 5 \cos x + 3$.

B. $f(x) = 2x - 5 \cos x + 15$.

C. $f(x) = 2x + 5 \cos x + 5$.

D. $f(x) = 2x - 5 \cos x + 10$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $f(x) = \int f'(x) dx = \int (2 - 5 \sin x) dx = 2x + 5 \cos x + C$.

Mà $f(0) = 10$ nên $5 + C = 10 \Rightarrow C = 5$.

Vậy $f(x) = 2x + 5 \cos x + 5$.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = ax^2 + \frac{b}{x^3}$, $f'(1) = 3$, $f(1) = 2$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12}$. Khi đó $2a + b$ bằng

A. $-\frac{3}{2}$.

B. 0.

C. 5.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $f'(1) = 3 \Rightarrow a + b = 3$ (1).

Hàm số có đạo hàm liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$, các điểm $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$ đều thuộc $(0; +\infty)$ nên

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \left(ax^2 + \frac{b}{x^3} \right) dx = \frac{ax^3}{3} - \frac{b}{2x^2} + C.$$

$$+ f(1) = 2 \Rightarrow \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + C = 2 \quad (2).$$

$$+ f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12} \Rightarrow \frac{a}{24} - 2b + C = -\frac{1}{12} \quad (3).$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3) ta được hệ phương trình } \begin{cases} a + b = 3 \\ \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + C = 2 \\ \frac{a}{24} - 2b + C = -\frac{1}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ C = \frac{11}{6} \end{cases} \Rightarrow 2a + b = 2 \cdot 2 + 1 = 5.$$

Câu 29. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = ax + \frac{b}{x^2}$ ($x \neq 0$), biết rằng

$$F(-1) = 1, F(1) = 4, f(1) = 0$$

A. $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4x} - \frac{7}{4}$.

B. $F(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2x} - \frac{7}{4}$.

C. $F(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2x} + \frac{7}{4}$.

D. $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2x} - \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } F(x) = \int f(x) dx = \int \left(ax + \frac{b}{x^2} \right) dx = \frac{1}{2}ax^2 - \frac{b}{x} + C.$$

$$\text{Theo bài ra } \begin{cases} F(-1) = 1 \\ F(1) = 4 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}a + b + C = 1 \\ \frac{1}{2}a - b + C = 4 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -\frac{3}{2} \\ a = \frac{3}{2} \\ C = \frac{7}{4} \end{cases}.$$

Vậy $F(x) = \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2x} + \frac{7}{4}$.

Câu 30. Cho hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ thỏa mãn $f'(x) = \frac{x+1}{x^2}$, $f(-2) = \frac{3}{2}$ và $f(2) = 2\ln 2 - \frac{3}{2}$. Giá trị của biểu thức $f(-1) + f(4)$ bằng

A. $\frac{6\ln 2 - 3}{4}$.

B. $\frac{6\ln 2 + 3}{4}$.

C. $\frac{8\ln 2 + 3}{4}$.

D. $\frac{8\ln 2 - 3}{4}$.

Lời giải

Chọn C.

Có $f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{x+1}{x^2} dx = \ln x - \frac{1}{x} + C$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \ln|x| - \frac{1}{x} + C_1 & \text{khi } x < 0 \\ \ln|x| - \frac{1}{x} + C_2 & \text{khi } x > 0 \end{cases}$$

Do $f(-2) = \frac{3}{2} \Rightarrow \ln 2 + \frac{1}{2} + C_1 = \frac{3}{2} \Rightarrow C_1 = 1 - \ln 2$

Do $f(2) = 2\ln 2 - \frac{3}{2} \Rightarrow \ln 2 - \frac{1}{2} + C_2 = 2\ln 2 - \frac{3}{2} \Rightarrow C_2 = \ln 2 - 1$

Như vậy, $f(x) = \begin{cases} \ln|x| - \frac{1}{x} + 1 - \ln 2 & \text{khi } x < 0 \\ \ln|x| - \frac{1}{x} + \ln 2 - 1 & \text{khi } x > 0 \end{cases}$

Vậy $f(-1) + f(4) = (2 - \ln 2) + \left(\ln 4 - \frac{1}{4} + \ln 2 - 1\right) = \frac{8\ln 2 + 3}{4}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 31. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và: $f'(x) = 2024 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$, $\forall x, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2023\pi}{2}$.

Tìm hàm $f(x)$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $f(x) = 2023x - \sin x + 1$

$$f'(x) = 2024 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \int \left(2024 - 2\sin^2 \frac{x}{2}\right) dx = \int (2023 + \cos x) dx = 2023x - \sin x + C$$

$$\Rightarrow f(x) = 2023x - \sin x + C$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2023\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2023\pi}{2} = 2023 \cdot \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} + C \Leftrightarrow C = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = 2023x - \sin x + 1$$

Câu 32. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và: $f'(x) = 1 + e^{2x}$, $\forall x, f(0) = 2$. Tìm hàm $f(x)$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $f(x) = x + \frac{1}{2}e^{2x} + 1$

$$f'(x) = 1 + e^{2x}$$

$$\Rightarrow f(x) = \int (1 + e^{2x}) dx = x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

$$\Rightarrow f(0) = 1 + C \Leftrightarrow 2 = 1 + C \Rightarrow C = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = x + \frac{1}{2}e^{2x} + 1$$

Câu 33. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và: $f'(x) = 2^x + 3^x$, $\forall x, f(0) = \frac{1}{\ln 3}$. Tìm hàm

$$f(x)$$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $f(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 2}$

$$f'(x) = 2^x + 3^x$$

$$\Rightarrow f(x) = \int (2^x + 3^x) dx = \int 2^x dx + \int 3^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3^x}{\ln 3} + C$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3^x}{\ln 3} + C$$

$$f(0) = \frac{1}{\ln 3} \Rightarrow \frac{1}{\ln 3} = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + C \Leftrightarrow C = \frac{1}{\ln 2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 2}$$

Câu 34. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và: $f'(x) = e^{3x+2024}$, $\forall x, f(-675) = 1$. Tìm hàm

$$f(x)$$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $f(x) = \frac{1}{3}e^{3x+2024} + 1 - \frac{1}{3e}$

$$f'(x) = e^{3x+2024}$$

$$\Rightarrow f(x) = \int e^{3x+2024} dx = \frac{1}{3}e^{3x+2024} + C$$

$$f(-675) = 1$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{3}e^{3(-675)+2024} + C \Rightarrow C = 1 - \frac{1}{3e}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}e^{3x+2024} + 1 - \frac{1}{3e}$$

Câu 35. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và: $f'(x) = 3^{x+2} \cdot 2^{2x+1}$, $\forall x$, $f(0) = \frac{1}{2\ln 2}$. Tìm hàm

$$f(x)$$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $f(x) = 18 \frac{12^x}{\ln 12} + \frac{1}{2\ln 2} - \frac{18}{2\ln 2 + \ln 3}$

$$f'(x) = 3^{x+2} \cdot 2^{2x+1}$$

$$\Rightarrow f(x) = \int 3^{x+2} \cdot 2^{2x+1} dx = \int 3^2 \cdot 3^x \cdot 2 \cdot 4^x dx = 18 \int 12^x dx = 18 \frac{12^x}{\ln 12} + C$$

$$\Rightarrow f(x) = 18 \frac{12^x}{\ln 12} + C$$

$$f(0) = \frac{1}{2\ln 2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\ln 2} = 18 \frac{1}{\ln 12} + C \Rightarrow C = \frac{1}{2\ln 2} - \frac{18}{2\ln 2 + \ln 3}$$

$$\Rightarrow f(x) = 18 \frac{12^x}{\ln 12} + \frac{1}{2\ln 2} - \frac{18}{2\ln 2 + \ln 3}$$

Câu 36. Hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và: $f'(x) = (3^x + 5^x)^2$, $\forall x$, $f(0) = \frac{1}{\ln 5 + \ln 3 + \ln 2}$.

Tìm hàm $f(x)$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $f(x) = \frac{9^x}{2\ln 3} + \frac{30^x}{\ln 5 + \ln 3 + \ln 2} + \frac{25^x}{2\ln 5} - \frac{1}{2\ln 3} - \frac{1}{2\ln 5}$

$$f'(x) = (3^x + 5^x)^2$$

$$\Rightarrow f(x) = \int (3^x + 5^x)^2 dx = \int (9^x + 30^x + 25^x) dx = \frac{9^x}{\ln 9} + \frac{30^x}{\ln 30} + \frac{25^x}{\ln 25} + C$$

$$= \frac{9^x}{2 \ln 3} + \frac{30^x}{\ln 5 + \ln 3 + \ln 2} + \frac{25^x}{2 \ln 5} + C$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{9^x}{2 \ln 3} + \frac{30^x}{\ln 5 + \ln 3 + \ln 2} + \frac{25^x}{2 \ln 5} + C$$

$$f(0) = \frac{1}{\ln 5 + \ln 3 + \ln 2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ln 5 + \ln 3 + \ln 2} = \frac{1}{2 \ln 3} + \frac{1}{\ln 5 + \ln 3 + \ln 2} + \frac{1}{2 \ln 5} + C \Leftrightarrow C = -\frac{1}{2 \ln 3} - \frac{1}{2 \ln 5}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{9^x}{2 \ln 3} + \frac{30^x}{\ln 5 + \ln 3 + \ln 2} + \frac{25^x}{2 \ln 5} - \frac{1}{2 \ln 3} - \frac{1}{2 \ln 5}$$

CHỦ ĐỀ 3
NGUYÊN HÀM HÀM ẨN

Cần nhớ các công thức đạo hàm của hàm hợp

- $\int f'(x)dx = f(x) + C$
- $f'(x).g(x) + f(x).g'(x) = [f(x).g(x)]'$
- $\frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)} = \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]'$
- $\frac{f'(x)}{f(x)} = [\ln(f(x))]'$
- $-\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \left[\frac{1}{f(x)} \right]'$
- $-\frac{f'(x)}{f^n(x)} = \left[\frac{1}{(n-1)[f(x)]^{n-1}} \right]'$
- $n.f'(x).f(x) = [f(x)^n]'$
- $\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = [2\sqrt{f(x)}]'$

DẠNG 1

1. Điều kiện hàm ẩn có dạng:
$$\begin{cases} f'(x) = g(x) \cdot h[f(x)] \\ f'(x) \cdot h[f(x)] = g(x) \end{cases}$$

Phương pháp giải:

- $\frac{f'(x)}{h[f(x)]} = g(x) \Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{h[f(x)]} \cdot dx = \int g(x) \cdot dx \Leftrightarrow \int \frac{d[f(x)]}{h[f(x)]} = \int g(x) \cdot dx$
- $f'(x) \cdot h[f(x)] = g(x) \Leftrightarrow \int f'(x) \cdot h[f(x)] \cdot dx = \int g(x) \cdot dx \Leftrightarrow \int h[f(x)] \cdot d[f'(x)] = \int g(x) \cdot dx$

Chú ý: Ngoài việc nguyên hàm hai vế, ta có thể lấy tích phân hai vế (tùy câu hỏi của bài toán)

2. Điều kiện hàm ẩn có dạng:
$$\begin{cases} f'(x) + p(x) \cdot f(x) = 0 \\ f'(x) + p(x) \cdot [f(x)]^n = 0 \end{cases}$$

Phương pháp giải:

- $f'(x) + p(x) \cdot f(x) = 0$

Chia hai vế với $f(x)$ ta được $\frac{f'(x)}{f(x)} + p(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -p(x)$

Suy ra $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = -\int p(x) dx \Leftrightarrow \ln |f(x)| = -\int p(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

- $f'(x) + p(x) \cdot [f(x)]^n = 0$

Chia hai vế với $[f(x)]^n$ ta được $\frac{f'(x)}{[f(x)]^n} + p(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} = -p(x)$

Suy ra $\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} dx = -\int p(x) dx \Leftrightarrow \frac{[f(x)]^{-n+1}}{-n+1} = -\int p(x) dx$

3. Điều kiện hàm ẩn có dạng: $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x)$

Phương pháp giải:

Dễ dàng thấy rằng $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = [u(x)f(x)]'$

Do đó $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x) \Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = h(x)$

Suy ra $u(x)f(x) = \int h(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$ và $f'(x)\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=1$. Tính $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

- A. $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ B. $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$ C. $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$ D. $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

Câu 2. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f'(x).f(x)=x^4+x^2$. Biết $f(0)=2$. Tính $f^2(2)$.

- A. $f^2(2)=\frac{313}{15}$. B. $f^2(2)=\frac{332}{15}$. C. $f^2(2)=\frac{324}{15}$. D. $f^2(2)=\frac{323}{15}$.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-2;1]$ thỏa mãn $f(0)=3$ và $(f(x))^2.f'(x)=3x^2+4x+2$. Giá trị $f(1)$ là

- A. $2\sqrt[3]{42}$. B. $2\sqrt[3]{15}$. C. $\sqrt[3]{42}$. D. $\sqrt[3]{15}$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{3}$ và $f'(x)=x[f(x)]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

- A. $f(1)=-\frac{2}{3}$ B. $f(1)=-\frac{2}{9}$ C. $f(1)=-\frac{7}{6}$ D. $f(1)=-\frac{11}{6}$

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{25}$ và $f'(x)=4x^3[f(x)]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

- A. $-\frac{391}{400}$ B. $-\frac{1}{40}$ C. $-\frac{41}{400}$ D. $-\frac{1}{10}$

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{1}{5}$ và $f'(x)=x^3[f(x)]^2$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

- A. $-\frac{4}{35}$ B. $-\frac{71}{20}$ C. $-\frac{79}{20}$ D. $-\frac{4}{5}$

Câu 7. Cho hàm số $y=f(x)$ thỏa mãn $f(2)=-\frac{4}{19}$ và $f'(x)=x^3f^2(x)\forall x\in\mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

- A. $-\frac{2}{3}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. -1 . D. $-\frac{3}{4}$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)>0$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ đồng thời thỏa mãn $f(0)=\frac{1}{2}$, $f'(x)=-e^xf^2(x),\forall x\in\mathbb{R}$. Tính giá trị của $f(\ln 2)$.

- A. $f(\ln 2)=\frac{1}{4}$. B. $f(\ln 2)=\frac{1}{3}$. C. $f(\ln 2)=\ln 2+\frac{1}{2}$. D. $f(\ln 2)=\ln^2 2+\frac{1}{2}$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x) \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x) = (2x+3)f^2(x)$ và $f(0) = -\frac{1}{2}$. Biết rằng

tổng $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2024) + f(2025) = \frac{a}{b}$ với $(a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*)$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản.

Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. $\frac{a}{b} < -1$. B. $\frac{a}{b} > 1$. C. $a+b=1010$. D. $b-a=1519$.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$; $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(3) = \frac{4}{9}$ và $[f'(x)]^2 = x.f(x)$. Tính $f(8)$.

- A. $f(8) = \frac{43-24\sqrt{3}}{9}$. B. $f(8) = \frac{43+24\sqrt{3}}{9}$. C. $f(8) = \frac{43-\sqrt{3}}{3}$. D. $f(8) = \frac{43+\sqrt{3}}{3}$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$ và $f(x) = \sqrt{x}.f'(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $f(3) < 2$ B. $2 < f(3) < 4$ C. $f(3) > 6$ D. $4 < f(3) < 6$

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện $f'(0) = -1, f'(x) < 0, [f'(x)]^2 = f''(x), \forall x \in [0;1]$. Giá trị $f'(2)$ thuộc khoảng

- A. $(2;3)$. B. $(-2;0)$. C. $(0;2)$. D. $(-3;-2)$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến có đạo hàm đến cấp hai trên đoạn $[0;2]$ và thỏa mãn $[f(x)]^2 - f(x).f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$. Biết $f(0) = 1, f(2) = e^6$. Khi đó $f(1)$ bằng

- A. $e^{\frac{3}{2}}$. B. e^3 . C. $e^{\frac{5}{2}}$. D. e^2 .

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $(f'(x))^2 + f(x).f''(x) = x^3 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$.

Tính giá trị của $T = f^2(2)$

- A. $\frac{43}{30}$ B. $\frac{16}{15}$ C. $\frac{43}{15}$ D. $\frac{26}{15}$

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x).f''(x) = 2x^2 - x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 3$. Giá trị của $[f(1)]^2$ bằng

- A. 28. B. 22. C. $\frac{19}{2}$. D. 10.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $y' = xy^2$ và $f(-1) = 1$. Tính giá trị $f(2)$.

Trả lời:

Câu 17. Cho hàm số $f(x) \neq 0$, liên tục trên đoạn $[1; 2]$ và thỏa mãn $f(1) = \frac{1}{3}$; $x^2 \cdot f'(x) = f^2(x)$ với $\forall x \in [1; 2]$. Tính $f(2)$

Trả lời:

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(x) < 0, \forall x > 0$ và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f'(x) = (2x+1)f^2(x), \forall x > 0$ và $f(1) = -\frac{1}{2}$. Tính giá trị của biểu thức $T = f(1) + f(2) + \dots + f(2023) + f(2024)$.

Trả lời:

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0) = 1 - \ln 2$ và $e^x f'(x) = 2^x [f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính giá trị của $f(1)$.

Trả lời:

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $(f'(x))^2 = f(x) \cdot e^x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tính $f(2)$.

Trả lời:

Câu 21. Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1, f(x) = f'(x) \cdot \sqrt{3x}$, với mọi $x > 0$. Tính $f(5)$.

Trả lời:

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $e^{f(x)} - \frac{x}{f'(x)} = 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(1) = 1$, tính $f(e^2)$

Trả lời:

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và thỏa mãn $f(0) = 1, (f'(x))^3 = e^x (f(x))^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính $f(3)$

Trả lời:

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện $x^6 [f'(x)]^3 + 27[f(x) - 1]^4 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = 0$. Tính giá trị của $f(2)$.

Trả lời:

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[xf'(x)]^2 + 1 = x^2 [1 - f(x) \cdot f''(x)]$ với mọi x dương. Biết $f(1) = f'(1) = 1$. Tính giá trị $f^2(2)$.

Trả lời:

DẠNG 2

1. Điều kiện hàm ẩn có dạng: $A(x)f(x) + B(x)f'(x) = h(x)$ (1)

Ý tưởng giải:

♦ Ta cần nhân thêm một lượng $u(x)$ vào (1) để tạo thành $u'(x)f(x) + u(x)f'(x) = u(x) \cdot h(x)$ và lúc này:

$$u'(x)f(x) + u(x)f'(x) = u(x) \cdot h(x)$$

$$\Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = u(x) \cdot h(x)$$

$$\Rightarrow \int [u(x)f(x)]' dx = \int u(x) \cdot h(x) dx$$

$$\Rightarrow u(x)f(x) = \int u(x) \cdot h(x) dx$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\int u(x) \cdot h(x) dx}{u(x)}$$

♦ Cách tìm $u(x)$

$$u(x) \text{ được chọn sao cho : } \begin{cases} u'(x) = A(x) \\ u(x) = B(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{A(x)}{B(x)} \Rightarrow \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \int \frac{A(x)}{B(x)} dx \Rightarrow \ln|u(x)| = \int \frac{A(x)}{B(x)} dx \Rightarrow u(x) = e^{\int \frac{A(x)}{B(x)} dx}$$

Tóm lại phương pháp giải: $A(x)f(x) + B(x)f'(x) = h(x)$ (1) như sau:

+ **Bước 1:** Tìm $u(x)$: $u(x) = e^{\int \frac{A(x)}{B(x)} dx}$

+ **Bước 2:** Nhân $u(x)$ vào (1) $\Rightarrow f(x) = \frac{\int u(x) \cdot h(x) dx}{u(x)}$

2. Một số dạng đặc biệt của (1)

a) Điều kiện hàm ẩn có dạng:
$$\begin{cases} f'(x) + f(x) = h(x) \\ f'(x) - f(x) = h(x) \end{cases}$$

Phương pháp giải:

♦ $f'(x) + f(x) = h(x)$

Nhân hai vế với e^x ta được $e^x \cdot f'(x) + e^x \cdot f(x) = e^x \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^x \cdot f(x)]' = e^x \cdot h(x)$

Suy ra $e^x \cdot f(x) = \int e^x \cdot h(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

♦ $f'(x) - f(x) = h(x)$

Nhân hai vế với e^{-x} ta được $e^{-x} \cdot f'(x) - e^{-x} \cdot f(x) = e^{-x} \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^{-x} \cdot f(x)]' = e^{-x} \cdot h(x)$

Suy ra $e^{-x} \cdot f(x) = \int e^{-x} \cdot h(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

b) Điều kiện hàm ẩn có dạng: $f'(x) + p(x) \cdot f(x) = h(x)$

Phương pháp giải:

Nhân hai vế với $e^{\int p(x)dx}$ ta được

$$f'(x) \cdot e^{\int p(x)dx} + p(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \cdot f(x) = h(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \Leftrightarrow \left[f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \right]' = h(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$$

$$\text{Suy ra } f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} = \int e^{\int p(x)dx} h(x)dx$$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tất cả các nguyên hàm của $f(x)e^x$ là

A. $x^2 + x + C$.

B. $2x^2 + 2x + C$.

C. $2x^2 + x + C$.

D. $\frac{1}{2}x^2 + 2x + C$.

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) + 2x \cdot f(x) = e^{-x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$. Tính $f(1)$.

A. $f(1) = e^2$.

B. $f(1) = -\frac{1}{e}$.

C. $f(1) = \frac{1}{e^2}$.

D. $f(1) = \frac{1}{e}$.

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ thỏa mãn điều kiện: $f(1) = -2 \ln 2$ và $x(x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + x$. Biết $f(2) = a + b \ln 3$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Giá trị $2(a^2 + b^2)$ là

A. $\frac{27}{4}$.

B. 9.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $\frac{9}{2}$.

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ thỏa mãn $f(1) = 2 \ln 2 + 1$, $x(x+1)f'(x) + (x+2)f(x) = x(x+1), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$. Biết $f(2) = a + b \ln 3$, với a, b là hai số hữu tỉ. Tính $T = a^2 - b$.

A. $T = \frac{-3}{16}$.

B. $T = \frac{21}{16}$.

C. $T = \frac{3}{2}$.

D. $T = 0$.

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f'(x) + \frac{f(x)}{x} = 4x^2 + 3x$ và $f(1) = 2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ là

A. $y = -16x - 20$.

B. $y = 16x - 20$.

C. $y = 16x + 20$.

D. $y = -16x + 20$.

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x) + f(x) = 3x^2\sqrt{x}$. Biết $f(1) = \frac{1}{2}$.

Tính $f(4)$?

A. 24.

B. 14.

C. 4.

D. 16.

Câu 32. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = 4$ và $f(x) = xf'(x) - 2x^3 - 3x^2$ với mọi $x > 0$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. 5.

B. 10.

C. 20.

D. 15.

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $3x.f(x) - x^2.f'(x) = 2f^2(x)$, với

$f(x) \neq 0, \forall x \in (0; +\infty)$ và $f(1) = \frac{1}{3}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

$y = f(x)$ trên đoạn $[1; 2]$. Tính $M + m$.

A. $\frac{9}{10}$.

B. $\frac{21}{10}$.

C. $\frac{5}{3}$.

D. $\frac{7}{3}$.

Câu 34. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{x^2}(x^3 - 4x)$. Hàm số $F(x^2 + x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

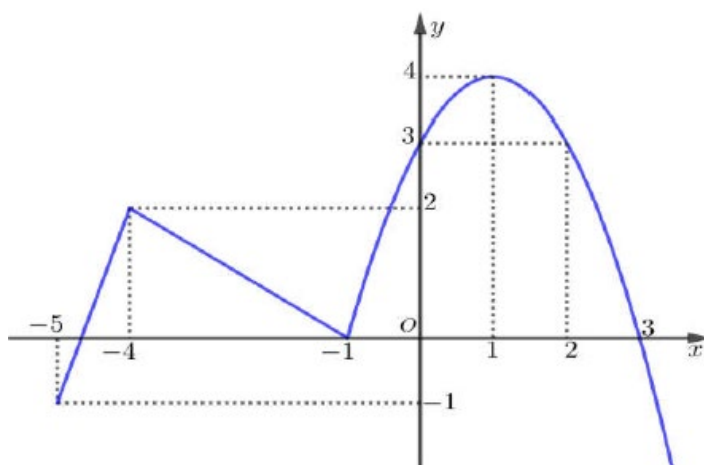
A. 6.

B. 5.

C. 3.

D. 4.

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $[-5; 3]$ như hình vẽ (phần cong của đồ thị là một phần của parabol $y = ax^2 + bx + c$).



Biết $f(0) = 0$, giá trị của $2f(-5) + 3f(2)$ bằng

A. 33.

B. $\frac{109}{3}$.

C. $\frac{35}{3}$.

D. 11.

CHỦ ĐỀ 3
NGUYÊN HÀM HÀM ẨN**Cần nhớ các công thức đạo hàm của hàm hợp**

- $\int f'(x)dx = f(x) + C$
- $f'(x).g(x) + f(x).g'(x) = [f(x).g(x)]'$
- $\frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)} = \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]'$
- $\frac{f'(x)}{f(x)} = [\ln(f(x))]'$
- $-\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \left[\frac{1}{f(x)} \right]'$
- $-\frac{f'(x)}{f^n(x)} = \left[\frac{1}{(n-1)[f(x)]^{n-1}} \right]'$
- $n.f'(x).f(x) = [f(x)^n]'$
- $\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = [2\sqrt{f(x)}]'$

DẠNG 1

1. Điều kiện hàm ẩn có dạng:
$$\begin{cases} f'(x) = g(x) \cdot h[f(x)] \\ f'(x) \cdot h[f(x)] = g(x) \end{cases}$$

Phương pháp giải:

- $\frac{f'(x)}{h[f(x)]} = g(x) \Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{h[f(x)]} \cdot dx = \int g(x) \cdot dx \Leftrightarrow \int \frac{d[f(x)]}{h[f(x)]} = \int g(x) \cdot dx$
- $f'(x) \cdot h[f(x)] = g(x) \Leftrightarrow \int f'(x) \cdot h[f(x)] \cdot dx = \int g(x) \cdot dx \Leftrightarrow \int h[f(x)] \cdot d[f'(x)] = \int g(x) \cdot dx$

Chú ý: Ngoài việc nguyên hàm hai vế, ta có thể lấy tích phân hai vế (tùy câu hỏi của bài toán)

2. Điều kiện hàm ẩn có dạng:
$$\begin{cases} f'(x) + p(x) \cdot f(x) = 0 \\ f'(x) + p(x) \cdot [f(x)]^n = 0 \end{cases}$$

Phương pháp giải:

- $f'(x) + p(x) \cdot f(x) = 0$

Chia hai vế với $f(x)$ ta được $\frac{f'(x)}{f(x)} + p(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = -p(x)$

Suy ra $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = -\int p(x) dx \Leftrightarrow \ln |f(x)| = -\int p(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

- $f'(x) + p(x) \cdot [f(x)]^n = 0$

Chia hai vế với $[f(x)]^n$ ta được $\frac{f'(x)}{[f(x)]^n} + p(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} = -p(x)$

Suy ra $\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^n} dx = -\int p(x) dx \Leftrightarrow \frac{[f(x)]^{-n+1}}{-n+1} = -\int p(x) dx$

3. Điều kiện hàm ẩn có dạng: $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x)$

Phương pháp giải:

Dễ dàng thấy rằng $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = [u(x)f(x)]'$

Do đó $u(x)f'(x) + u'(x)f(x) = h(x) \Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = h(x)$

Suy ra $u(x)f(x) = \int h(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ và $f'(x)\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = 1$. Tính $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

B. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$

C. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$

D. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Lời giải**Chọn D.**

Ta có:

$$f'(x)\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\frac{1}{4} \sin^2 x}$$

$$\Rightarrow f(x) = 4 \int \frac{1}{\sin^2 x} dx$$

$$\Rightarrow f(x) = 4 \cot x + C$$

$$\text{Do } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow C = -4$$

$$\Rightarrow f(x) = 4 \cot x - 4$$

$$\text{Mà } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \cot \frac{\pi}{2} - 4 = 0$$

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) \cdot f(x) = x^4 + x^2$. Biết $f(0) = 2$. Tính $f^2(2)$.

A. $f^2(2) = \frac{313}{15}$.

B. $f^2(2) = \frac{332}{15}$.

C. $f^2(2) = \frac{324}{15}$.

D. $f^2(2) = \frac{323}{15}$.

Lời giải**Chọn B.**

$$\text{Ta có } \int f'(x) \cdot f(x) dx = \int (x^4 + x^2) dx + C \Rightarrow \frac{f^2(x)}{2} = \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + C.$$

$$\text{Do } f(0) = 2 \text{ nên suy ra } C = 2.$$

$$\text{Vậy } f^2(2) = 2 \left(\frac{32}{5} + \frac{8}{3} + 2 \right) = \frac{332}{15}.$$

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên đoạn $[-2; 1]$ thỏa mãn $f(0) = 3$ và

$$(f(x))^2 \cdot f'(x) = 3x^2 + 4x + 2. \text{ Giá trị } f(1) \text{ là}$$

A. $2\sqrt[3]{42}.$

B. $2\sqrt[3]{15}.$

C. $\sqrt[3]{42}.$

D. $\sqrt[3]{15}.$

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $(f(x))^2 \cdot f'(x) = 3x^2 + 4x + 2$ (*)

Lấy nguyên hàm 2 vế của phương trình trên ta được

$$\int (f(x))^2 \cdot f'(x) dx = \int (3x^2 + 4x + 2) dx \Leftrightarrow \int (f(x))^2 d(f(x)) = x^3 + 2x^2 + 2x + C$$

$$\Leftrightarrow \frac{(f(x))^3}{3} = x^3 + 2x^2 + 2x + C \Leftrightarrow (f(x))^3 = 3(x^3 + 2x^2 + 2x + C) \quad (1)$$

Theo đề bài $f(0) = 3$ nên từ (1) ta có $(f(0))^3 = 3(0^3 + 2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 + C) \Leftrightarrow 27 = 3C \Leftrightarrow C = 9$

$$\Rightarrow (f(x))^3 = 3(x^3 + 2x^2 + 2x + 9)$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{3(x^3 + 2x^2 + 2x + 9)}.$$

$$\Rightarrow f(1) = \sqrt[3]{42}$$

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{3}$ và $f'(x) = x[f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$

bằng

A. $f(1) = -\frac{2}{3}$

B. $f(1) = -\frac{2}{9}$

C. $f(1) = -\frac{7}{6}$

D. $f(1) = -\frac{11}{6}$

Lời giải

Chọn A.

Từ hệ thức đề cho: $f'(x) = x[f(x)]^2$ (1), suy ra $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in [1; 2]$.

Do đó $f(x)$ là hàm không giảm trên đoạn $[1; 2]$, ta có $f(x) \leq f(2) < 0$ với mọi $x \in [1; 2]$.

Cách 1: lấy nguyên hàm

$$f'(x) = x[f(x)]^2$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = x$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{f(x)} \right)' = x$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{f(x)} \right)' = -x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = \int -x dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -\frac{x^2}{2} + C$$

$$\text{Mà } f(2) = -\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{f(2)} = -2 + C \Leftrightarrow \frac{1}{-\frac{1}{3}} = -2 + C \Rightarrow C = -1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -\frac{x^2}{2} - 1$$

$$\text{Do đó: } \frac{1}{f(1)} = -\frac{1}{2} - 1 \Leftrightarrow f(1) = -\frac{2}{3}$$

Cách 2: Lấy tích phân

$$\text{Chia 2 vế hệ thức (1) cho } [f(x)]^2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = x, \forall x \in [1; 2].$$

Lấy tích phân 2 vế trên đoạn $[1; 2]$ hệ thức vừa tìm được, ta được:

$$\int_1^2 \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} dx = \int_1^2 x dx$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{1}{[f(x)]^2} df(x) = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left. \frac{-1}{f(x)} \right|_1^2 = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f(1)} - \frac{1}{f(2)} = \frac{3}{2}$$

$$\text{Do } f(2) = -\frac{1}{3} \text{ nên suy ra } f(1) = -\frac{2}{3}.$$

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{25}$ và $f'(x) = 4x^3 [f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{391}{400}$

B. $-\frac{1}{40}$

C. $-\frac{41}{400}$

D. $-\frac{1}{10}$

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có } f'(x) = 4x^3 [f(x)]^2 \Rightarrow -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = -4x^3 \Rightarrow \left[\frac{1}{f(x)} \right]' = -4x^3 \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -x^4 + C$$

$$\text{Do } f(2) = -\frac{1}{25}, \text{ nên ta có } C = -9.$$

$$\text{Do đó } f(x) = -\frac{1}{x^4 + 9} \Rightarrow f(1) = -\frac{1}{10}.$$

Câu 6. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{1}{5}$ và $f'(x) = x^3 [f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Giá trị của

$f(1)$ bằng

A. $-\frac{4}{35}$

B. $-\frac{71}{20}$

C. $-\frac{79}{20}$

D. $-\frac{4}{5}$

Lời giải

Chọn D.

$$\text{Ta có: } f'(x) = x^3 [f(x)]^2 \Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = x^3 \Rightarrow \int_1^2 \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int_1^2 x^3 dx$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{f(x)} \right) \Big|_1^2 = \frac{15}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(1)} = \frac{15}{4} \Leftrightarrow f(1) = -\frac{4}{5}.$$

Câu 7. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(2) = -\frac{4}{19}$ và $f'(x) = x^3 f^2(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của $f(1)$ bằng

A. $-\frac{2}{3}$.

B. $-\frac{1}{2}$.

C. -1 .

D. $-\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn C.

$$\text{Ta có } f'(x) = x^3 f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = x^3 \Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int x^3 dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = \frac{x^4}{4} + C.$$

$$\text{Mà } f(2) = -\frac{4}{19} \Rightarrow \frac{19}{4} = \frac{16}{4} + C \Rightarrow C = \frac{3}{4}. \text{ Suy ra } f(x) = -\frac{4}{x^4 + 3}.$$

$$\text{Vậy } f(1) = -1.$$

Câu 8. Cho hàm số $f(x) > 0$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ đồng thời thỏa mãn $f(0) = \frac{1}{2}$,

$$f'(x) = -e^x f^2(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Tính giá trị của } f(\ln 2).$$

A. $f(\ln 2) = \frac{1}{4}$.

B. $f(\ln 2) = \frac{1}{3}$.

C. $f(\ln 2) = \ln 2 + \frac{1}{2}$.

D. $f(\ln 2) = \ln^2 2 + \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } f'(x) = -e^x f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = -e^x \quad (\text{do } f(x) > 0)$$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int -e^x dx \Rightarrow -\frac{1}{f(x)} = -e^x + C \Rightarrow f(x) = \frac{1}{e^x - C}.$$

$$\text{Mà } f(0) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{e^0 - C} = \frac{1}{2} \Rightarrow C = -1.$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{e^x + 1} \Rightarrow f(\ln 2) = \frac{1}{e^{\ln 2} + 1} = \frac{1}{3}.$$

Câu 9. Cho hàm số $f(x) \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $f'(x) = (2x+3)f^2(x)$ và $f(0) = -\frac{1}{2}$. Biết rằng

tổng $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2024) + f(2025) = \frac{a}{b}$ với $(a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*)$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản.

Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $\frac{a}{b} < -1$.

B. $\frac{a}{b} > 1$.

C. $a + b = 1010$.

D. $b - a = 1519$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $f'(x) = (2x+3)f^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x+3$

$\Leftrightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int (2x+3) dx \Leftrightarrow -\frac{1}{f(x)} = x^2 + 3x + C.$

Vì $f(0) = -\frac{1}{2} \Rightarrow C = 2.$

Vậy $f(x) = -\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}.$

Ta có:
$$\begin{cases} f(1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\ f(2) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \\ f(3) = \frac{1}{5} - \frac{1}{4} \\ \vdots \\ f(2025) = \frac{1}{2026} - \frac{1}{2025} \end{cases}$$

Do đó $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(2024) + f(2025) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2026} = -\frac{506}{1013}.$

Do $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a = -506, b = 1013 \Rightarrow b - a = 1519$

Do đó.

Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$; $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên

$(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(3) = \frac{4}{9}$ và $[f'(x)]^2 = x.f(x)$. Tính $f(8)$.

A. $f(8) = \frac{43-24\sqrt{3}}{9}.$

B. $f(8) = \frac{43+24\sqrt{3}}{9}.$

C. $f(8) = \frac{43-\sqrt{3}}{3}.$

D. $f(8) = \frac{43+\sqrt{3}}{3}.$

Lời giải

Chọn A.

Ta có với $\forall x \in (0; +\infty)$ thì $y = f(x) > 0; x+1 > 0.$

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên $f'(x) \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$.

Do đó

$$[f'(x)]^2 = xf(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sqrt{xf(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} = \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow 2\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{1}{2}\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \sqrt{f(x)} = \frac{1}{2} \int \sqrt{x} dx$$

$$\Rightarrow \sqrt{f(x)} = \frac{1}{3} \sqrt{x^3} + C.$$

$$\text{Vi } f(3) = \frac{4}{9} \text{ nên } C = \frac{2-3\sqrt{3}}{3}.$$

$$\Rightarrow \sqrt{f(x)} = \frac{1}{3} \sqrt{x^3} + \frac{2-3\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) = \left(\frac{1}{3} \sqrt{x^3} + \frac{2-3\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$\text{suy ra } f(8) = \frac{43-24\sqrt{3}}{9}.$$

Câu 11. Cho hàm số $f(x) > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$ và $f(x) = \sqrt{x} \cdot f'(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $f(3) < 2$

B. $2 < f(3) < 4$

C. $f(3) > 6$

D. $4 < f(3) < 6$

Lời giải

Chọn C.

Ta có:

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot f'(x)$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$\Leftrightarrow \ln f(x) = 2\sqrt{x} + C$$

$$\text{Mà } f(0) = 1 \text{ nên } C = 0 \Rightarrow f(x) = e^{2\sqrt{x}} \Rightarrow f(3) = e^{2\sqrt{3}} > 6$$

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm cấp hai trên đoạn $[0;1]$ đồng thời thỏa mãn các điều kiện

$f'(0) = -1, f'(x) < 0, [f'(x)]^2 = f''(x), \forall x \in [0;1]$. Giá trị $f'(2)$ thuộc khoảng

A. $(2;3)$.

B. $(-2;0)$.

C. $(0;2)$.

D. $(-3;-2)$.

Lời giải

Chọn C.

$$[f'(x)]^2 = f''(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f''(x)}{[f'(x)]^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow -\left(\frac{1}{f'(x)}\right)' = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f'(x)} = -\int dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f'(x)} = -x + C$$

$$\text{Mà } f'(0) = -1 \Rightarrow C = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{f'(x)} = -x + 1$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$\Rightarrow f'(2) = \frac{1}{1-2} = -1$$

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ đồng biến có đạo hàm đến cấp hai trên đoạn $[0;2]$ và thỏa mãn

$[f(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$. Biết $f(0) = 1, f(2) = e^6$. Khi đó $f(1)$ bằng

A. $e^{\frac{3}{2}}$.

B. e^3 .

C. $e^{\frac{5}{2}}$.

D. e^2 .

Lời giải

Chọn C.

Theo đề bài, ta có

$$[f(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x) + [f'(x)]^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{f(x) \cdot f''(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2} = 1$$

$$\Rightarrow \left[\frac{f'(x)}{f(x)} \right]' = 1$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = x + C$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = \frac{x^2}{2} + C.x + D$$

$$\text{Mà } \begin{cases} f(0) = 1 \\ f(2) = e^6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 2 \\ D = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra : } f(x) = e^{\frac{x^2}{2} + 2x} \Rightarrow f(1) = e^{\frac{5}{2}}.$$

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $(f'(x))^2 + f(x).f''(x) = x^3 - 2x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = f'(0) = 1$.

Tính giá trị của $T = f^2(2)$

A. $\frac{43}{30}$

B. $\frac{16}{15}$

C. $\frac{43}{15}$

D. $\frac{26}{15}$

Lời giải

Chọn C.

Có

$$(f'(x))^2 + f(x).f''(x) = x^3 - 2x$$

$$\Leftrightarrow (f(x).f'(x))' = x^3 - 2x$$

$$\Rightarrow f(x).f'(x) = \int (x^3 - 2x)dx$$

$$\Rightarrow f(x).f'(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + C$$

Từ $f(0) = f'(0) = 1$. Suy ra $C = 1$.

$$\text{Vậy } f(x).f'(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 1$$

Tiếp đến có:

$$2f(x).f'(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow (f^2(x))' = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 2$$

$$\Rightarrow f^2(x) = \int (\frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + 2)dx$$

$$\Rightarrow f^2(x) = \frac{1}{10}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 2x + C$$

Từ $f(0) = 1$. Suy ra $C = 1$.

$$\text{Vậy } f^2(x) = \frac{1}{10}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 2x + 1.$$

$$\text{Do đó } T = \frac{43}{15}$$

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[f'(x)]^2 + f(x) \cdot f''(x) = 2x^2 - x + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ và

$f(0) = f'(0) = 3$. Giá trị của $[f(1)]^2$ bằng

- A. 28. B. 22. C. $\frac{19}{2}$. D. 10.

Lời giải

Chọn A.

Ta có $[f(x)f'(x)]' = [f'(x)]^2 + f(x)f''(x)$.

Do đó theo giả thiết ta được $[f(x)f'(x)]' = 2x^2 - x + 1$.

Suy ra $f(x)f'(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + x + C$. Hơn nữa $f(0) = f'(0) = 3$ suy ra $C = 9$.

Tương tự vì $[f^2(x)]' = 2f(x)f'(x)$ nên $[f^2(x)]' = 2\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + x + 9\right)$.

Suy ra $f^2(x) = \int 2\left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + x + 9\right)dx = \frac{1}{3}x^4 - \frac{x^3}{3} + x^2 + 18x + C$,

cũng vì $f(0) = 3$ suy ra $f^2(x) = \frac{1}{3}x^4 - \frac{x^3}{3} + x^2 + 18x + 9$.

Do đó $[f(1)]^2 = 28$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 16. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $y' = xy^2$ và $f(-1) = 1$. Tính giá trị $f(2)$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $f(2) = e^3$

Ta có $y' = xy^2 \Rightarrow \frac{y'}{y} = x^2 \Rightarrow \int \frac{y'}{y} dx = \int x^2 dx \Leftrightarrow \ln y = \frac{x^3}{3} + C \Leftrightarrow y = e^{\frac{x^3}{3} + C}$.

Theo giả thiết $f(-1) = 1$ nên $e^{-\frac{1}{3} + C} = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{3}$.

Vậy $y = f(x) = e^{\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}}$.

Do đó $f(2) = e^3$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x) \neq 0$, liên tục trên đoạn $[1; 2]$ và thỏa mãn $f(1) = \frac{1}{3}$; $x^2 \cdot f'(x) = f^2(x)$ với

$\forall x \in [1; 2]$. Tính $f(2)$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $f(2) = 2$ **Cách 1: lấy nguyên hàm**

Học sinh tự làm nhé

Cách 2: Lấy tích phân

Ta có

$$x^2 \cdot f'(x) = f^2(x)$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{f(x)} \right)' = \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \left(-\frac{1}{f(x)} \right)' dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{f(x)} \right) \Big|_1^2 = -\frac{1}{x} \Big|_1^2$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(1)} = -\frac{1}{2} + 1$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{f(2)} + \frac{1}{f(1)} = \frac{1}{2}$$

$$\text{do } f(1) = \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{f(2)} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow f(2) = -6$$

Câu 18. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(x) < 0, \forall x > 0$ và có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f'(x) = (2x+1)f^2(x), \forall x > 0$ và $f(1) = -\frac{1}{2}$. Tính giá trị của biểu thức

$$T = f(1) + f(2) + \dots + f(2023) + f(2024).$$

Trả lời:**Lời giải**

$$\textbf{Đáp án: } T = -\frac{2024}{2025}$$

Ta có:

$$f'(x) = (2x+1)f^2(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = 2x+1$$

$$\Rightarrow \int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = \int (2x+1) dx$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{f(x)} = x^2 + x + C.$$

$$\text{Mà } f(1) = -\frac{1}{2} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{x^2 + x} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} f(1) = \frac{1}{2} - 1 \\ f(2) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\ f(3) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \\ \vdots \\ f(2024) = \frac{1}{2023} - \frac{1}{2024} \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = f(1) + f(2) + \dots + f(2024) = -1 + \frac{1}{2025} = -\frac{2024}{2025}.$$

Câu 19. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(0) = 1 - \ln 2$ và $e^x f'(x) = 2^x [f(x)]^2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tính giá trị của $f(1)$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $f(1) = \frac{e - e \ln 2}{2}$

Từ giả thiết ta có: $f'(x) = \frac{2^x}{e^x} [f(x)]^2$ với mọi $x \in (1; 2]$.

Do đó $f(x) \geq f(1) = 1 > 0$ với mọi $x \in [1; 2]$.

Xét với mọi $x \in [1; 2]$ ta có:

$$e^x f'(x) = 2^x [f(x)]^2$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2^x}{e^x} [f(x)]^2$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{[f(x)]^2} = \left(\frac{2}{e}\right)^x$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \left(\frac{2}{e}\right)^x$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\left(\frac{2}{e}\right)^x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -\int \left(\frac{2}{e}\right)^x dx$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = -\frac{\left(\frac{2}{e}\right)^x}{\ln \frac{2}{e}} + C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = \frac{\left(\frac{2}{e}\right)^x}{1 - \ln 2} + C$$

$$\text{Mà } f(0) = 1 - \ln 2 \Rightarrow C = 0.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(x)} = \frac{\left(\frac{2}{e}\right)^x}{1 - \ln 2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1 - \ln 2}{\left(\frac{2}{e}\right)^x}$$

$$\text{Vậy } f(1) = \frac{e - e \ln 2}{2}.$$

Câu 20. Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$(f'(x))^2 = f(x) \cdot e^x, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(0) = 2. \text{ Tính } f(2).$$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $f(2) = (e + \sqrt{2} - 1)^2$

Vì hàm số $y = f(x)$ đồng biến và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ đồng thời $f(0) = 2$ nên $f'(x) \geq 0$ và $f(x) > 0$ với mọi $x \in [0; +\infty)$.

Từ giả thiết $(f'(x))^2 = f(x) \cdot e^x, \forall x \in \mathbb{R}$ suy ra $f'(x) = \sqrt{f(x)} \cdot e^{\frac{x}{2}}, \forall x \in [0; +\infty)$.

$$\text{Do đó, } \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}, \forall x \in [0; +\infty).$$

Lấy nguyên hàm hai vế, ta được $\sqrt{f(x)} = e^{\frac{x}{2}} + C, \forall x \in [0; +\infty)$ với C là hằng số nào đó.

Kết hợp với $f(0) = 2$, ta được $C = \sqrt{2} - 1$.

Từ đó, tính được $f(2) = (e + \sqrt{2} - 1)^2 \approx 9,81$.

Câu 21. Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục, nhận giá trị dương trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(1) = 1$,

$$f(x) = f'(x) \cdot \sqrt{3x}, \text{ với mọi } x > 0. \text{ Tính } f(5).$$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $f(5) = e^{\frac{2\sqrt{5}-2}{\sqrt{3}}}$

Ta có :

$$f(x) = f'(x) \cdot \sqrt{3x}$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{3x}}$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$\Rightarrow \ln f(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{x} + C$$

$$\Rightarrow f(x) = e^{\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{x} + C}$$

Mà $f(1) = 1$ nên $1 = e^{\frac{2}{\sqrt{3}} + C} \Rightarrow C = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

$$\Rightarrow f(x) = e^{\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{3}}}$$

Suy ra $f(5) = e^{\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{5} - \frac{2}{\sqrt{3}}} = e^{\frac{2\sqrt{5}-2}{\sqrt{3}}}$.

Câu 22. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $e^{f(x)} - \frac{x}{f'(x)} = 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Biết $f(1) = 1$,

tính $f(e^2)$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 23. Cho hàm số $f(x)$ nhận giá trị dương và thỏa mãn $f(0) = 1, (f'(x))^3 = e^x (f(x))^2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Tính $f(3)$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $f(3) = e^3$

Ta có: $(f'(x))^3 = e^x (f(x))^2, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \sqrt[3]{e^x} \cdot \sqrt[3]{(f(x))^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{(f(x))^2}} = \sqrt[3]{e^x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{\sqrt[3]{(f(x))^2}} = \sqrt[3]{e^x}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) \cdot (f(x))^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{e^x}$$

$$\Leftrightarrow 3 \left[(f(x))^{\frac{1}{3}} \right]' = \sqrt[3]{e^x}$$

$$\Leftrightarrow \left[(f(x))^{\frac{1}{3}} \right]' = \frac{1}{3} \sqrt[3]{e^x}$$

$$\Leftrightarrow (f(x))^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \int \sqrt[3]{e^x} dx$$

$$\Leftrightarrow (f(x))^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{x}{3}} + C$$

$$f(0) = 1 \Rightarrow 1 = 1 + C \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow (f(x))^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{x}{3}}$$

$$\Rightarrow f(x) = e^x$$

$$\Rightarrow f(3) = e^3$$

Câu 24. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn điều kiện

$$x^6 [f'(x)]^3 + 27 [f(x) - 1]^4 = 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ và } f(1) = 0. \text{ Tính giá trị của } f(2).$$

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $f(2) = -7$

Ta có

$$x^6 [f'(x)]^3 + 27 [f(x) - 1]^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^6 [f'(x)]^3 = -27 [f(x) - 1]^4$$

$$\Leftrightarrow \frac{[f'(x)]^3}{[f(x) - 1]^4} = -\frac{27}{x^6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{[f'(x)]^3}{[f(x) - 1]^3 [f(x) - 1]} = -\frac{27}{x^6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{(f(x) - 1) \sqrt[3]{f(x) - 1}} = -\frac{3}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{-3(f(x) - 1) \sqrt[3]{f(x) - 1}} = \frac{1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{\sqrt[3]{f(x) - 1}} \right]' = \frac{1}{x^2}$$

$$\text{Do đó } \int \left[\frac{1}{\sqrt[3]{f(x)-1}} \right]' dx = \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C.$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{\sqrt[3]{f(x)-1}} = -\frac{1}{x} + C.$$

$$\text{Có } f(1) = 0 \Rightarrow C = 0.$$

$$\text{Do đó } f(x) = 1 - x^3.$$

$$\text{Khi đó } f(2) = -7.$$

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $[xf'(x)]^2 + 1 = x^2[1 - f(x).f''(x)]$ với mọi x dương. Biết $f(1) = f'(1) = 1$. Tính giá trị $f^2(2)$.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: $f^2(2) = 2 \ln 2 + 2$

$$\text{Ta có: } [xf'(x)]^2 + 1 = x^2[1 - f(x).f''(x)]; x > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2.[f'(x)]^2 + 1 = x^2[1 - f(x).f''(x)]$$

$$\Leftrightarrow [f'(x)]^2 + \frac{1}{x^2} = 1 - f(x).f''(x)$$

$$\Leftrightarrow [f'(x)]^2 + f(x).f''(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow [f(x).f'(x)]' = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$\text{Do đó: } \int [f(x).f'(x)]' .dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) .dx \Rightarrow f(x).f'(x) = x + \frac{1}{x} + C.$$

$$\text{Vì } f(1) = f'(1) = 1 \Rightarrow 1 = 2 + C \Leftrightarrow C = -1.$$

$$\text{Nên } \int f(x).f'(x).dx = \int \left(x + \frac{1}{x} - 1 \right) .dx \Leftrightarrow \int f(x).d(f(x)) = \int \left(x + \frac{1}{x} - 1 \right) .dx$$

$$\Rightarrow \frac{f^2(x)}{2} = \frac{x^2}{2} + \ln x - x + C.$$

$$\text{Vì } f(1) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 1 + C \Leftrightarrow C = 1.$$

$$\text{Vậy } \frac{f^2(x)}{2} = \frac{x^2}{2} + \ln x - x + 1 \Rightarrow f^2(2) = 2 \ln 2 + 2.$$

DẠNG 2

1. Điều kiện hàm ẩn có dạng: $A(x)f(x) + B(x)f'(x) = h(x)$ (1)

Ý tưởng giải:

♦ Ta cần nhân thêm một lượng $u(x)$ vào (1) để tạo thành $u'(x)f(x) + u(x)f'(x) = u(x).h(x)$ và lúc này:

$$u'(x)f(x) + u(x)f'(x) = u(x).h(x)$$

$$\Leftrightarrow [u(x)f(x)]' = u(x).h(x)$$

$$\Rightarrow \int [u(x)f(x)]' dx = \int u(x).h(x) dx$$

$$\Rightarrow u(x)f(x) = \int u(x).h(x) dx$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{\int u(x).h(x) dx}{u(x)}$$

♦ Cách tìm $u(x)$

$$u(x) \text{ được chọn sao cho : } \begin{cases} u'(x) = A(x) \\ u(x) = B(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{A(x)}{B(x)} \Rightarrow \int \frac{u'(x)}{u(x)} \cdot dx = \int \frac{A(x)}{B(x)} \cdot dx \Rightarrow \ln|u(x)| = \int \frac{A(x)}{B(x)} \cdot dx \Rightarrow u(x) = e^{\int \frac{A(x)}{B(x)} \cdot dx}$$

Tóm lại phương pháp giải: $A(x)f(x) + B(x)f'(x) = h(x)$ (1) như sau:

+ **Bước 1:** Tìm $u(x)$: $u(x) = e^{\int \frac{A(x)}{B(x)} \cdot dx}$

+ **Bước 2:** Nhân $u(x)$ vào (1) $\Rightarrow f(x) = \frac{\int u(x) \cdot h(x) dx}{u(x)}$

2. Một số dạng đặc biệt của (1)

a) Điều kiện hàm ẩn có dạng:
$$\begin{cases} f'(x) + f(x) = h(x) \\ f'(x) - f(x) = h(x) \end{cases}$$

Phương pháp giải:

♦ $f'(x) + f(x) = h(x)$

Nhân hai vế với e^x ta được $e^x \cdot f'(x) + e^x \cdot f(x) = e^x \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^x \cdot f(x)]' = e^x \cdot h(x)$

Suy ra $e^x \cdot f(x) = \int e^x \cdot h(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

♦ $f'(x) - f(x) = h(x)$

Nhân hai vế với e^{-x} ta được $e^{-x} \cdot f'(x) - e^{-x} \cdot f(x) = e^{-x} \cdot h(x) \Leftrightarrow [e^{-x} \cdot f(x)]' = e^{-x} \cdot h(x)$

Suy ra $e^{-x} \cdot f(x) = \int e^{-x} \cdot h(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

b) Điều kiện hàm ẩn có dạng: $f'(x) + p(x) \cdot f(x) = h(x)$

Phương pháp giải:

Nhân hai vế với $e^{\int p(x) dx}$ ta được

$$f'(x) \cdot e^{\int p(x) dx} + p(x) \cdot e^{\int p(x) dx} \cdot f(x) = h(x) \cdot e^{\int p(x) dx} \Leftrightarrow [f(x) \cdot e^{\int p(x) dx}]' = h(x) \cdot e^{\int p(x) dx}$$

Suy ra $f(x) \cdot e^{\int p(x) dx} = \int e^{\int p(x) dx} h(x) dx$

Từ đây ta dễ dàng tính được $f(x)$

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(x) + f'(x) = e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 2$. Tất cả các nguyên hàm của $f(x)e^x$ là

A. $x^2 + x + C$.

B. $2x^2 + 2x + C$.

C. $2x^2 + x + C$.

D. $\frac{1}{2}x^2 + 2x + C$.

Lời giải

Chọn D.

$$f(x) + f'(x) = e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow f(x)e^x + f'(x)e^x = 1.$$

$$\Leftrightarrow (f(x)e^x)' = 1$$

$$\Rightarrow f(x)e^x = \int x dx$$

$$\Leftrightarrow f(x)e^x = x + C$$

$$\text{Vì } f(0) = 2 \text{ nên } C = 2.$$

$$\Rightarrow f(x)e^x = x + 2$$

$$\Rightarrow \int f(x)e^x dx = \int (x + 2) dx = \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$$

$$\int f(x)e^x dx = \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$$

Câu 27. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f'(x) + 2x.f(x) = e^{-x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và $f(0) = 0$.

Tính $f(1)$.

A. $f(1) = e^2$.

B. $f(1) = -\frac{1}{e}$.

C. $f(1) = \frac{1}{e^2}$.

D. $f(1) = \frac{1}{e}$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có

$$f'(x) + 2x.f(x) = e^{-x^2}$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2} f'(x) + 2x.e^{x^2}.f(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow (e^{x^2}.f(x))' = 1$$

$$\text{Suy ra } \int (e^{x^2}.f(x))' dx = \int dx$$

$$\Rightarrow e^{x^2}.f(x) = x + C$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x + C}{e^{x^2}}$$

$$\text{Vì } f(0) = 0 \Rightarrow C = 0.$$

$$\text{Do đó } f(x) = \frac{x}{e^{x^2}}.$$

Vậy $f(1) = \frac{1}{e}$.

Câu 28. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ thỏa mãn điều kiện: $f(1) = -2\ln 2$ và $x \cdot (x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + x$. Biết $f(2) = a + b \cdot \ln 3$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Giá trị $2(a^2 + b^2)$ là

A. $\frac{27}{4}$.

B. 9.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $\frac{9}{2}$.

Lời giải

Chọn B.

Chia cả hai vế của biểu thức $x \cdot (x+1) \cdot f'(x) + f(x) = x^2 + x$ cho $(x+1)^2$ ta có

$$\frac{x}{x+1} \cdot f'(x) + \frac{1}{(x+1)^2} f(x) = \frac{x}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{x}{x+1} \cdot f(x) \right]' = \frac{x}{x+1}$$

$$\text{Vậy } \frac{x}{x+1} \cdot f(x) = \int \left[\frac{x}{x+1} \cdot f(x) \right]' dx = \int \frac{x}{x+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) dx = x - \ln|x+1| + C.$$

$$\text{Do } f(1) = -2\ln 2 \text{ nên ta có } \frac{1}{2} \cdot f(1) = 1 - \ln 2 + C \Leftrightarrow -\ln 2 = 1 - \ln 2 + C \Leftrightarrow C = -1.$$

$$\text{Khi đó } f(x) = \frac{x+1}{x} (x - \ln|x+1| - 1).$$

$$\text{Vậy ta có } f(2) = \frac{3}{2} (2 - \ln 3 - 1) = \frac{3}{2} (1 - \ln 3) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \ln 3 \Rightarrow a = \frac{3}{2}, b = -\frac{3}{2}.$$

$$\text{Suy ra } 2(a^2 + b^2) = 2 \left[\left(\frac{3}{2} \right)^2 + \left(-\frac{3}{2} \right)^2 \right] = 9.$$

Câu 29. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ thỏa mãn $f(1) = 2\ln 2 + 1$, $x(x+1)f'(x) + (x+2)f(x) = x(x+1)$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$. Biết $f(2) = a + b \ln 3$, với a, b là hai số hữu tỉ. Tính $T = a^2 - b$.

A. $T = \frac{-3}{16}$.

B. $T = \frac{21}{16}$.

C. $T = \frac{3}{2}$.

D. $T = 0$.

Lời giải

Chọn A.

$$\text{Ta có } x(x+1)f'(x) + (x+2)f(x) = x(x+1)$$

$$\Leftrightarrow f'(x) + \frac{x+2}{x(x+1)} f(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1} f'(x) + \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} f(x) = \frac{x^2}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{x^2}{x+1} f(x) \right] = \frac{x^2}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1} f(x) = \int \frac{x^2}{x+1} dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{x+1} f(x) = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + c$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{x+1}{x^2} \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + c \right).$$

Ta có $f(1) = 2 \ln 2 + 1 \Leftrightarrow c = 1$.

Từ đó $f(x) = \frac{x+1}{x^2} \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + 1 \right),$

$$\Rightarrow f(2) = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \ln 3. \text{ Nên } \begin{cases} a = \frac{3}{4} \\ b = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Vậy $T = a^2 - b = -\frac{3}{16}.$

Câu 30. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $f'(x) + \frac{f(x)}{x} = 4x^2 + 3x$ và

$f(1) = 2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ là

- A. $y = -16x - 20$. B. $y = 16x - 20$. C. $y = 16x + 20$. D. $y = -16x + 20$.

Lời giải

Chọn B.

$$f'(x) + \frac{f(x)}{x} = 4x^2 + 3x \Leftrightarrow xf'(x) + f(x) = 4x^3 + 3x^2.$$

Lấy nguyên hàm hai vế ta được: $xf(x) = \int (4x^3 + 3x^2) dx = x^4 + x^3 + C.$

Với $x = 1$ ta có: $f(1) = 2 + C.$

Theo bài ra $f(1) = 2 \Leftrightarrow 2 + C = 2 \Leftrightarrow C = 0.$

Vậy $xf(x) = x^4 + x^3 \Leftrightarrow f(x) = x^3 + x^2.$

Ta có: $f'(x) = 3x^2 + 2x; f'(2) = 16; f(2) = 12.$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm có hoành độ $x = 2$ là:

$$y = 16(x - 2) + 12 \Leftrightarrow y = 16x - 20.$$

Câu 31. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $2xf'(x) + f(x) = 3x^2\sqrt{x}$. Biết $f(1) = \frac{1}{2}.$

Tính $f(4)$?

A. 24.

B. 14.

C. 4.

D. 16.

Lời giải**Chọn D.**

Trên khoảng $(0; +\infty)$ ta có:

$$2xf'(x) + f(x) = 3x^2\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}f'(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}x^2.$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x} \cdot f(x))' = \frac{3}{2}x^2$$

$$\Rightarrow \int (\sqrt{x} \cdot f(x))' dx = \int \frac{3}{2}x^2 dx$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} \cdot f(x) = \frac{1}{2}x^3 + C. (*)$$

Mà $f(1) = \frac{1}{2}$ nên từ $(*)$ có: $\sqrt{1} \cdot f(1) = \frac{1}{2} \cdot 1^3 + C \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + C \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2\sqrt{x}}{2}.$

Vậy $f(4) = \frac{4^2\sqrt{4}}{2} = 16.$

Câu 32. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = 4$ và $f(x) = xf'(x) - 2x^3 - 3x^2$ với mọi $x > 0$. Giá trị của $f(2)$ bằng

A. 5.

B. 10.

C. 20.

D. 15.

Lời giải**Chọn C.**

$$f(x) - xf'(x) = -2x^3 - 3x^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 \cdot f(x) - x \cdot f'(x)}{x^2} = \frac{-2x^3 - 3x^2}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{f(x)}{x} \right]' = 2x + 3$$

Suy ra, $\frac{f(x)}{x}$ là một nguyên hàm của hàm số $g(x) = 2x + 3$.

Ta có $\int (2x + 3)dx = x^2 + 3x + C, C \in \mathbb{R}.$

Do đó, $\frac{f(x)}{x} = x^2 + 3x + C_1, (1)$ với $C_1 \in \mathbb{R}$ nào đó.

Vì $f(1) = 4$ theo giả thiết, nên thay $x = 1$ vào hai vế của (1) ta thu được $C_1 = 0$, từ đó $f(x) = x^3 + 3x^2$.

Vậy $f(2) = 20.$

MỘT SỐ DẠNG KHÁC

Câu 33. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ thỏa mãn $3x \cdot f(x) - x^2 \cdot f'(x) = 2f^2(x)$, với $f(x) \neq 0, \forall x \in (0; +\infty)$ và $f(1) = \frac{1}{3}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1; 2]$. Tính $M + m$.

A. $\frac{9}{10}$.

B. $\frac{21}{10}$.

C. $\frac{5}{3}$.

D. $\frac{7}{3}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có:

$$3x \cdot f(x) - x^2 \cdot f'(x) = 2f^2(x)$$

$$\Rightarrow 3x^2 \cdot f(x) - x^3 \cdot f'(x) = 2x \cdot f^2(x)$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2 \cdot f(x) - x^3 \cdot f'(x)}{f^2(x)} = 2x \text{ vì } f(x) \neq 0, \forall x \in (0; +\infty).$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^3}{f(x)} \right)' = 2x \Rightarrow \frac{x^3}{f(x)} = \int 2x dx = x^2 + C.$$

$$\text{Mà } f(1) = \frac{1}{3} \Rightarrow C = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2}.$$

$$\text{Ta có: } f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^4 + 6x^2}{(x^2 + 2)^2} > 0, \forall x \in (0; +\infty).$$

Vậy, hàm số $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Mà $[1; 2] \subset (0; +\infty)$ nên hàm số $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2}$ đồng biến trên đoạn $[1; 2]$.

$$\text{Suy ra, } M = f(2) = \frac{4}{3}; m = f(1) = \frac{1}{3} \Rightarrow M + m = \frac{5}{3}.$$

Câu 34. Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{x^2} (x^3 - 4x)$. Hàm số $F(x^2 + x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 6.

B. 5.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $F'(x) = f(x)$

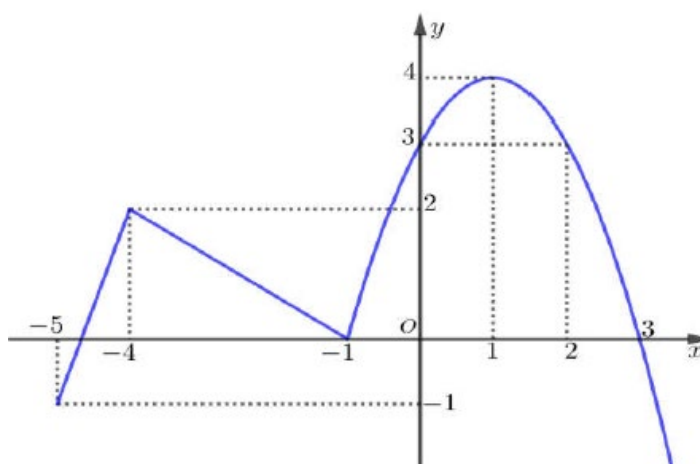
$$\Rightarrow F'(x^2 + x) = f(x^2 + x) \cdot (x^2 + x)' = (2x + 1)(x^2 + x)e^{(x^2 + x)^2} \left((x^2 + x)^2 - 4 \right)$$

$$= (2x + 1)x(x + 1)e^{(x^2 + x)^2} (x^2 + x - 2)(x^2 + x + 2)$$

$$= (2x + 1)x(x + 1)(x + 2)(x - 1)(x^2 + x + 2)e^{(x^2 + x)^2} = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ -2; -1; \frac{-1}{2}; 0; 1 \right\}$$

$F'(x^2 + x) = 0$ có 5 nghiệm đơn nên $F(x^2 + x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên $[-5; 3]$ như hình vẽ (phần cong của đồ thị là một phần của parabol $y = ax^2 + bx + c$).



Biết $f(0) = 0$, giá trị của $2f(-5) + 3f(2)$ bằng

A. 33.

B. $\frac{109}{3}$.C. $\frac{35}{3}$.

D. 11.

Lời giải

Chọn C.

*)Parabol $y = ax^2 + bx + c$ qua các điểm $(2;3), (1;4), (0;3), (-1;0), (3;0)$ nên xác định được

$$y = -x^2 + 2x + 3, \forall x \geq -1 \text{ suy ra } f(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x + C_1.$$

$$\text{Mà } f(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0, f(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x.$$

$$\text{Có } f(-1) = -\frac{5}{3}; f(2) = \frac{22}{3} \quad (1)$$

*Đồ thị $f'(x)$ trên đoạn $[-4; -1]$ qua các điểm $(-4;2), (-1;0)$ nên

$$f'(x) = \frac{-2}{3}(x+1) \Rightarrow f(x) = \frac{-2}{3}\left(\frac{x^2}{2} + x\right) + C_2.$$

$$\text{Mà } f(-1) = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow C_2 = -\frac{5}{3} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 \Rightarrow f(x) = \frac{-2}{3}\left(\frac{x^2}{2} + x\right) - 2, \text{ hay } f(-4) = \frac{-14}{3}.$$

* Đồ thị $f'(x)$ trên đoạn $[-5; -4]$ qua các điểm $(-4;2), (-5;-1)$ nên

$$f'(x) = 3x + 14 \Rightarrow f(x) = \frac{3x^2}{2} + 14x + C_3.$$

$$\text{Mà } f(-4) = \frac{-14}{3} \Leftrightarrow \frac{3 \cdot (-4)^2}{2} + 14 \cdot (-4) + C_3 = \frac{-14}{3} \text{ suy ra } C_3 = \frac{82}{3}.$$

$$\text{Ta có } f(x) = \frac{3x^2}{2} + 14x + \frac{82}{3} \Rightarrow f(-5) = -\frac{31}{6} \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta được } 2f(-5) + 3f(2) = -\frac{31}{3} + 22 = \frac{35}{3}.$$

CHỦ ĐỀ 4**ỨNG DỤNG NGUYÊN HÀM TRONG THỰC TIỄN****DẠNG 1****ỨNG DỤNG NGUYÊN HÀM TRONG BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG**

Giả sử $v(t)$ là vận tốc của vật M tại thời điểm t và $s(t)$ là quãng đường vật đi được sau khoảng thời gian t tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Ta có mối liên hệ giữa $s(t)$ và $v(t)$ như sau:

- Đạo hàm của quãng đường là vận tốc: $s'(t) = v(t)$.
- Nguyên hàm của vận tốc là quãng đường $s(t) = \int v(t) dt$.

Nếu gọi $a(t)$ là gia tốc của vật M thì ta có mối liên hệ giữa $v(t)$ và $a(t)$ như sau:

- Đạo hàm của vận tốc là gia tốc: $v'(t) = a(t)$.
- Nguyên hàm của gia tốc là vận tốc: $v(t) = \int a(t) dt$.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Một ô tô đang chạy với vận tốc 20 (m/s) thì người lái ô tô đạp phanh. Sau khi đạp phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -40t + 20 \text{ (m/s)}$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn đi chuyển bao nhiêu mét?

- A. 5 (cm). B. 7,5(m). C. $\frac{5}{2}$ (m). D. 5 (m).



Câu 2. Bạn Minh Hiền ngồi trên máy bay đi du lịch thế giới với vận tốc chuyển động của máy bay là $v(t) = 3t^2 + 5 \text{ (m/s)}$. Quãng đường máy bay bay từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là:

- A. 36m. B. 252m. C. 1134m. D. 966m.



Câu 3. Một ô tô đang chạy với vận tốc 12m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -6t + 12 \text{ (m/s)}$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

- A. 24m . B. 12m . C. 6m . D. $0,4\text{m}$.

Câu 4. Một ô tô đang chạy với vận tốc 36km/h thì tăng tốc chuyển động nhanh dần đều với gia tốc $a(t) = 1 + \frac{t}{3} \text{ (m/s}^2\text{)}$ tính quãng đường ô tô đi được sau 6 giây kể từ khi ô tô bắt đầu tăng tốc.

- A. $S = 90\text{m}$. B. $S = 246\text{m}$. C. $S = 58\text{m}$. D. $S = 100\text{m}$.

Câu 5. Một ca nô đang chạy trên hồ Tây với vận tốc 20m/s thì hết xăng; từ thời điểm đó, ca nô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 20$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc hết xăng. Hỏi từ lúc hết xăng đến lúc ca nô dừng hẳn đi được bao nhiêu mét?

- A. 10. B. 20. C. 30. D. 40.

Câu 6. Một vật chuyển động với vận tốc 10m/s thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian t là $a(t) = 3t + t^2 \text{ (m}^2/\text{s)}$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng 10s kể từ khi bắt đầu tăng tốc.

- A. $\frac{130}{3}\text{km}$. B. 130km . C. $\frac{3400}{3}\text{km}$. D. $\frac{4300}{3}\text{km}$.

Câu 7. Tại một nơi không có gió, một chiếc khí cầu đang đứng yên ở độ cao 162 (mét) so với mặt đất đã được phi công cài đặt cho nó chế độ chuyển động đi xuống. Biết rằng, khí cầu đã chuyển động theo phương thẳng đứng với vận tốc tuân theo quy luật $v(t) = 10t - t^2$, trong đó t (phút) là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $v(t)$ được tính theo đơn vị mét/phút (m/p). Nếu như vậy thì khi bắt đầu tiếp đất vận tốc v của khí cầu là

- A. $v = 5(\text{m/p})$. B. $v = 7(\text{m/p})$. C. $v = 9(\text{m/p})$. D. $v = 3(\text{m/p})$.

Câu 8. Một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu là 25m/s , gia tốc trọng trường là $9,8\text{m/s}^2$. Quãng đường viên đạn đi được từ lúc bắn cho đến khi chạm đất gần bằng kết quả nào nhất trong các kết quả sau:

- A. $30,78\text{m}$. B. $31,89\text{m}$. C. $32,43\text{m}$. D. $33,88\text{m}$.

Câu 9. Tại một nơi không có gió, một chiếc khí cầu đang đứng yên ở độ cao 162 (mét) so với mặt đất đã được phi công cài đặt cho nó chế độ chuyển động đi xuống. Biết rằng, khí cầu đã chuyển động theo phương thẳng đứng với vận tốc tuân theo quy luật $v(t) = 10t - t^2$, trong đó t (phút) là thời gian tính từ

lúc bắt đầu chuyển động, $v(t)$ được tính theo đơn vị mét/phút (m/p). Nếu như vậy thì khi bắt đầu tiếp đất vận tốc v của khí cầu là:

A. $v = 7 (m/p)$

B. $v = 9 (m/p)$

C. $v = 5 (m/p)$

D. $v = 3 (m/p)$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 10. Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc $15m/s$ thì nhìn thấy chướng ngại vật trên đường cách đó $50m$, người lái xe hãm phanh khẩn cấp. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -3t + 15 (m/s)$, trong đó t (giây). Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) kể từ lúc đạp phanh.



- Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là bao nhiêu giây?
- Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được bao nhiêu mét? Xe ô tô có gặp tai nạn do va chạm với chướng ngại vật không?
- Nếu người lái xe nhìn thấy chướng ngại vật trên đường, sau đó 1 giây mới phản ứng đạp phanh khẩn cấp thì xe ô tô có gặp tai nạn do va chạm với chướng ngại vật không?

Trả lời:

Câu 11. Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc $72 km/h$ thì nhìn thấy chướng ngại vật trên đường cách đó $40m$, người lái xe hãm phanh khẩn cấp. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -10t + 20 (m/s)$, trong đó t (giây). Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) kể từ lúc đạp phanh.



- Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là bao nhiêu giây?
- Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được bao nhiêu mét? Xe ô tô có gặp tai nạn do va chạm với chướng ngại vật không?

c) Nếu người lái xe nhìn thấy chướng ngại vật trên đường, sau đó 1 giây mới phản ứng đạp phanh khẩn cấp thì xe ô tô có gặp tai nạn do va chạm với chướng ngại vật không?

Trả lời:

Câu 12. Một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng từ mặt đất. Giả sử tại thời điểm t giây (coi là thời điểm viên đạn được bắn lên), vận tốc của nó được cho bởi $v(t) = 24,5 - 9,8t \text{ (m/s)}$.

a) Tính quãng đường viên đạn đi sau 2 giây đầu.

b) Tính quãng đường viên đạn đi từ lúc bắn lên cho tới khi rơi xuống đất.

Trả lời:

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 13. Trong một đợt xả lũ, nhà máy thủy điện đã xả lũ trong 40 phút với tốc độ lưu lượng nước tại thời điểm t giây là $h'(t) = 10t + 500 \text{ (m}^3/\text{s)}$. Hỏi sau thời gian xả lũ trên thì hồ thoát nước của nhà máy đã thoát đi một lượng nước là bao nhiêu?

- A. $5 \cdot 10^4 \text{ (m}^3\text{)}$. B. $4 \cdot 10^6 \text{ (m}^3\text{)}$. C. $3 \cdot 10^7 \text{ (m}^3\text{)}$. D. $6 \cdot 10^6 \text{ (m}^3\text{)}$.



Câu 14. Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 3at^2 + bt \text{ (m}^3/\text{s)}$ và ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là 150m^3 . Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là 1100m^3 . Hỏi thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây là bao nhiêu.

- A. 8400m^3 B. 8400m^3 C. 6000m^3 D. 4200m^3

Câu 15. Gọi $h(t) \text{ (m)}$ là mực nước ở bồn chứa sau khi bơm nước được t giây. Biết rằng $h'(t) = \frac{1}{5}\sqrt[3]{t} \text{ (m/s)}$ và lúc đầu bồn không có nước. Tìm mực nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

- A. $2,64\text{m}$. B. $1,22\text{m}$. C. $2,22\text{m}$. D. $1,64\text{m}$.

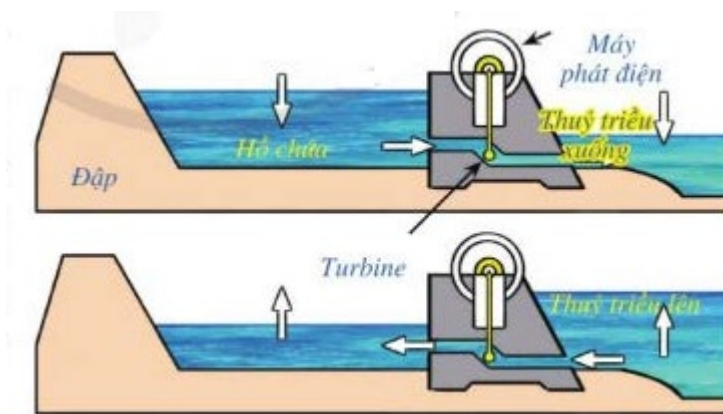
Câu 16. Sự sản sinh vi rút Zika ngày thứ t có số lượng là $N(t)$ con, biết $N'(t) = \frac{1000}{t}$ và lúc đầu đám vi rút có số lượng 250.000 con. Tính số lượng vi rút sau 10 ngày.

- A. 272304 con B. 212302 con C. 242102 con D. 252302 con.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 17. Mực nước trong hồ chứa của nhà máy điện thủy triều thay đổi trong suốt một ngày do nước chảy ra khi thủy triều xuống và nước chảy vào khi thủy triều lên (như hình vẽ). Tốc độ thay đổi của mực nước được xác định bởi hàm số $h'(t) = \frac{1}{90}(t^2 - 17t + 60)$, trong đó t tính bằng giờ ($0 \leq t \leq 24$), $h'(t)$ tính

bằng mét/giờ. Tại thời điểm $t = 0$, mực nước trong hồ chứa cao $8m$. Mực nước trong hồ cao nhất và thấp nhất bao nhiêu?



Trả lời:

Câu 18. Gọi $h(t)$ là chiều cao của cây keo (tính theo mét) sau khi trồng t năm. Biết rằng năm đầu tiên cây cao $1,5m$, trong những năm tiếp theo, cây phát triển với tốc độ $h'(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{t}}$ (mét /năm). Sau bao nhiêu năm cây cao được $3m$.

Trả lời:

Câu 19. Người ta bơm nước vào một bồn chứa, lúc đầu bồn không chứa nước, mực nước ở bồn chứa sau khi bơm phụ thuộc vào thời gian bơm nước theo một hàm số $h = h(t)$ trong đó h tính bằng cm , t tính bằng giây. Biết rằng $h'(t) = \sqrt[3]{2t}$ (m/s). Mực nước ở bồn sau khi bơm được 13 giây là bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 20. Khi quan sát một đám vi khuẩn trong phòng thí nghiệm người ta thấy tại ngày thứ t có số lượng là $N(t)$. Biết rằng $N'(t) = \frac{1500}{t}$ và lúc đầu số lượng vi khuẩn là 5000 con. Tính số lượng vi rút sau 12 ngày.

Trả lời:

Câu 21. Vi khuẩn HP (*Helicobacter pylori*) gây đau dạ dày tại ngày thứ t với số lượng là $F(t)$, biết nếu phát hiện sớm khi số lượng không vượt quá 4000 con thì bệnh nhân sẽ được cứu chữa. Biết $F'(t) = \frac{600}{t}$ và ban đầu bệnh nhân có 2000 con vi khuẩn. Sau 15 ngày bệnh nhân phát hiện ra bị bệnh. Hỏi khi đó có bao nhiêu con vi khuẩn trong dạ dày (lấy xấp xỉ hàng thập phân thứ hai) và bệnh nhân có cứu chữa được không?

Trả lời:

CHỦ ĐỀ 4**ỨNG DỤNG NGUYÊN HÀM TRONG THỰC TIỄN****DẠNG 1****ỨNG DỤNG NGUYÊN HÀM TRONG BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG**

Giả sử $v(t)$ là vận tốc của vật M tại thời điểm t và $s(t)$ là quãng đường vật đi được sau khoảng thời gian t tính từ lúc bắt đầu chuyển động. Ta có mối liên hệ giữa $s(t)$ và $v(t)$ như sau:

- Đạo hàm của quãng đường là vận tốc: $s'(t) = v(t)$.
- Nguyên hàm của vận tốc là quãng đường $s(t) = \int v(t) dt$.

Nếu gọi $a(t)$ là gia tốc của vật M thì ta có mối liên hệ giữa $v(t)$ và $a(t)$ như sau:

- Đạo hàm của vận tốc là gia tốc: $v'(t) = a(t)$.
- Nguyên hàm của gia tốc là vận tốc: $v(t) = \int a(t) dt$.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Một ô tô đang chạy với vận tốc 20 (m/s) thì người lái ô tô đạp phanh. Sau khi đạp phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -40t + 20 \text{ (m/s)}$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển bao nhiêu mét?

A. 5 (cm).

B. 7,5(m).

C. $\frac{5}{2}$ (m).**D. 5 (m).****Lời giải****Chọn D**

Ta có:

$$v(t) = -40t + 20$$

$$\Rightarrow s(t) = \int v(t) dt = \int (-40t + 20) dt = -20t^2 + 20t + C$$

$$\Rightarrow s(t) = -20t^2 + 20t + C$$

$$\text{Chọn } t = 0 \Rightarrow s(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow s(t) = -20t^2 + 20t$$

Khi xe dừng hẳn thì $v(t) = 0 \Leftrightarrow -40t + 20 = 0 \Rightarrow t = 0,5$.

từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được: $s(0,5) = -20(0,5)^2 + 20(0,5) = 5m$

Câu 2. Bạn Minh Hiền ngồi trên máy bay đi du lịch thế giới với vận tốc chuyển động của máy bay là $v(t) = 3t^2 + 5 (m/s)$. Quãng đường máy bay bay từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là:

A. 36m .

B. 252m.

C. 1134m.

D. 966m.



Lời giải

Chọn D

Ta có:

$$v(t) = 3t^2 + 5$$

$$\Rightarrow s(t) = \int v(t) dt = \int (3t^2 + 5) dt = t^3 + 5t + C$$

$$\Rightarrow s(t) = t^3 + 5t + C$$

$$\text{Chọn } t = 0 \Rightarrow s(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow s(t) = t^3 + 5t$$

Quãng đường máy bay bay từ giây thứ 4 là: $s(4) = 4^3 + 5 \cdot 4 = 84m$

Quãng đường máy bay bay từ giây thứ 10 là: $s(10) = 10^3 + 5 \cdot 10 = 1050m$

Quãng đường máy bay bay từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là: $s(10) - s(4) = 966m$

Câu 3. Một ô tô đang chạy với vận tốc 12m/s thì người lái đạp phanh; từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -6t + 12 (m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi ô tô dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét ?

A. 24m .

B. 12m .

C. 6m .

D. 0,4m .

Câu 4. Một ô tô đang chạy với vận tốc 36 km/h thì tăng tốc chuyển động nhanh dần đều với gia tốc

$a(t) = 1 + \frac{t}{3} (\text{m/s}^2)$ tính quãng đường ô tô đi được sau 6 giây kể từ khi ô tô bắt đầu tăng tốc.

A. $S = 90\text{m}$.

B. $S = 246\text{m}$.

C. $S = 58\text{m}$.

D. $S = 100\text{m}$.

Câu 5. Một ca nô đang chạy trên hồ Tây với vận tốc 20 m/s thì hết xăng; từ thời điểm đó, ca nô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -5t + 20$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc hết xăng. Hỏi từ lúc hết xăng đến lúc ca nô dừng hẳn đi được bao nhiêu mét?

A. 10.

B. 20.

C. 30.

D. 40.

Câu 6. Một vật chuyển động với vận tốc 10 m/s thì tăng tốc với gia tốc được tính theo thời gian t là $a(t) = 3t + t^2 (\text{m}^2/\text{s})$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng 10s kể từ khi bắt đầu tăng tốc.

A. $\frac{130}{3} \text{ km}$.

B. 130 km .

C. $\frac{3400}{3} \text{ km}$.

D. $\frac{4300}{3} \text{ km}$.

Câu 7. Tại một nơi không có gió, một chiếc khí cầu đang đứng yên ở độ cao 162 (mét) so với mặt đất đã được phi công cài đặt cho nó chế độ chuyển động đi xuống. Biết rằng, khí cầu đã chuyển động theo phương thẳng đứng với vận tốc tuân theo quy luật $v(t) = 10t - t^2$, trong đó t (phút) là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $v(t)$ được tính theo đơn vị mét/phút (m/p). Nếu như vậy thì khi bắt đầu tiếp đất vận tốc v của khí cầu là

A. $v = 5 (\text{m/p})$.

B. $v = 7 (\text{m/p})$.

C. $v = 9 (\text{m/p})$.

D. $v = 3 (\text{m/p})$.

Câu 8. Một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng với vận tốc ban đầu là 25 m/s , gia tốc trọng trường là $9,8\text{ m/s}^2$. Quãng đường viên đạn đi được từ lúc bắn cho đến khi chạm đất gần bằng kết quả nào nhất trong các kết quả sau:

A. $30,78\text{ m}$.

B. $31,89\text{ m}$.

C. $32,43\text{ m}$.

D. $33,88\text{ m}$.

Câu 9. Tại một nơi không có gió, một chiếc khí cầu đang đứng yên ở độ cao 162 (mét) so với mặt đất đã được phi công cài đặt cho nó chế độ chuyển động đi xuống. Biết rằng, khí cầu đã chuyển động theo phương thẳng đứng với vận tốc tuân theo quy luật $v(t) = 10t - t^2$, trong đó t (phút) là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $v(t)$ được tính theo đơn vị mét/phút (m/p). Nếu như vậy thì khi bắt đầu tiếp đất vận tốc v của khí cầu là:

A. $v = 7 (\text{m/p})$

B. $v = 9 (\text{m/p})$

C. $v = 5 (\text{m/p})$

D. $v = 3 (\text{m/p})$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 10. Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc $15m/s$ thì nhìn thấy chướng ngại vật trên đường cách đó $50m$, người lái xe hãm phanh khẩn cấp. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -3t + 15(m/s)$, trong đó t (giây). Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) kể từ lúc đạp phanh.



- Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là bao nhiêu giây?
- Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô đi chuyển được bao nhiêu mét? Xe ô tô có gặp tai nạn do va chạm với chướng ngại vật không?
- Nếu người lái xe nhìn thấy chướng ngại vật trên đường, sau đó 1 giây mới phản ứng đạp phanh khẩn cấp thì xe ô tô có gặp tai nạn do va chạm với chướng ngại vật không?

Trả lời:

Lời giải**Đáp án:**

a) quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) là một nguyên hàm của $v(t)$ nên:

$$s(t) = \int v(t) dx = \int (-3t + 15) dx = -\frac{3t^2}{2} + 15t + C$$

$$\Rightarrow s(t) = -\frac{3t^2}{2} + 15t + C$$

$$\text{Chọn } t = 0 \Rightarrow s(0) = 0$$

$$\Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow s(t) = -\frac{3t^2}{2} + 15t$$

$$\text{Khi xe dừng hẳn thì } v(t) = 0 \Leftrightarrow -3t + 15 = 0 \Rightarrow t = 5.$$

Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là 5 giây

b) Sau khi đạp phanh đến khi dừng hẳn, xe đi được quãng đường:

$$s(5) = -\frac{3 \cdot 5^2}{2} + 15 \cdot 5 = 37,5(m)$$

Do $50 > 37,5$ nên xe ô tô dừng hẳn trước khi va chạm chướng ngại vật. Vì thế tai nạn không xảy ra.

c) người lái xe nhìn thấy chướng ngại vật trên đường, sau đó 1 giây mới phản ứng đạp phanh nên xe đi được quãng đường $15m$ trong 1 giây

Tổng quãng đường xe đi được đến khi dừng hẳn là : $15 + 37,5 = 52,5(m)$

Do $50 < 52,5$ nên xe ô tô va chạm chướng ngại vật. Vì thế tai nạn xảy ra.

Câu 11. Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc $72 km/h$ thì nhìn thấy chướng ngại vật trên đường cách đó $40m$, người lái xe hãm phanh khẩn cấp. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -10t + 20(m/s)$, trong đó t (giây). Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) kể từ lúc đạp phanh.



- Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là bao nhiêu giây?
- Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được bao nhiêu mét? Xe ô tô có gặp tai nạn do va chạm với chướng ngại vật không?
- Nếu người lái xe nhìn thấy chướng ngại vật trên đường, sau đó 1 giây mới phản ứng đạp phanh khẩn cấp thì xe ô tô có gặp tai nạn do va chạm với chướng ngại vật không?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

- quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) là một nguyên hàm của $v(t)$ nên:

$$s(t) = \int v(t) dx = \int (-10t + 20) dx = -5t^2 + 20t + C$$

$$\Rightarrow s(t) = -5t^2 + 20t + C$$

$$\text{Chọn } t = 0 \Rightarrow s(0) = 0$$

$$\Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow s(t) = -5t^2 + 20t$$

$$\text{Khi xe dừng hẳn thì } v(t) = 0 \Leftrightarrow -10t + 20 = 0 \Rightarrow t = 2.$$

Thời gian kể từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn là 2 giây

- Sau khi đạp phanh đến khi dừng hẳn, xe đi được quãng đường:

$$s(2) = -5.2^2 + 20.2 = 20(m)$$

Do $40 > 20$ nên xe ô tô dừng hẳn trước khi va chạm chướng ngại vật. Vì thế tai nạn không xảy ra.

c) $72 \text{ km} / \text{h} = 20 \text{ m} / \text{s}$

người lái xe nhìn thấy chướng ngại vật trên đường, sau đó 1 giây mới phản ứng đạp phanh nên xe đi được quãng đường 20 m trong 1 giây

Tổng quãng đường xe đi được đến khi dừng hẳn là : $20 + 20 = 40(m)$

Do chướng ngại vật trên đường cách đó 40 m xe khi bắt đầu đạp phanh nên xe ô tô va chạm chướng ngại vật. Vì thế tai nạn xảy ra.

Câu 12. Một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng từ mặt đất. Giả sử tại thời điểm t giây (coi là thời điểm viên đạn được bắn lên), vận tốc của nó được cho bởi $v(t) = 24,5 - 9,8t (m/s)$.

a) Tính quãng đường viên đạn đi sau 2 giây đầu.

b) Tính quãng đường viên đạn đi từ lúc bắn lên cho tới khi rơi xuống đất.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

a) Quãng đường viên đạn đi được là: $s(t) = \int (24,5 - 9,8t) dx = 24,5t - 4,9t^2 + C$

$$\Rightarrow s(t) = 24,5t - 4,9t^2 + C$$

$$\text{Chọn } t = 0 \Rightarrow s(0) = 0$$

$$\Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow s(t) = 24,5t - 4,9t^2$$

sau 2 giây đầu quãng đường viên đạn đi là $s(2) = 24,5.2 - 4,9.2^2 = 29,4 \text{ m}$

b) khi viên đạn đạt độ cao lớn nhất thì $v(t) = 0 \Leftrightarrow 24,5 - 9,8t = 0 \Leftrightarrow t = 2,5(s)$

quãng đường viên đạn đi từ lúc bắn lên cho tới khi rơi xuống đất là:

$$s(2,5) = 2(24,5.2,5 - 4,9.2,5^2) = 61,25 \text{ m}$$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 13. Trong một đợt xả lũ, nhà máy thủy điện đã xả lũ trong 40 phút với tốc độ lưu lượng nước tại thời điểm t giây là $h'(t) = 10t + 500 \text{ (m}^3/\text{s)}$. Hỏi sau thời gian xả lũ trên thì hồ thoát nước của nhà máy đã thoát đi một lượng nước là bao nhiêu?

- A. $5.10^4 \text{ (m}^3\text{)}$. B. $4.10^6 \text{ (m}^3\text{)}$. **C. $3.10^7 \text{ (m}^3\text{)}$.** D. $6.10^6 \text{ (m}^3\text{)}$.



Lời giải

Chọn C

Ta có :

$$h'(t) = 10t + 500$$

$$\Rightarrow h(t) = \int (10t + 500) dt = 5t^2 + 500t + C$$

$$\Rightarrow h(t) = 5t^2 + 500t + C$$

$$\text{Chọn } t = 0 \Rightarrow h(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow h(t) = 5t^2 + 500t$$

thủy điện đã xả lũ trong 40 phút = 2400 giây thì thoát đi một lượng nước là:

$$h(2400) = 5.2400^2 + 500.2400 = 3.10^3 \text{ (m}^3\text{)}$$

Câu 14. Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây.

Cho $h'(t) = 3at^2 + bt \text{ (m}^3/\text{s)}$ và ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là 150m^3 . Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là 1100m^3 . Hỏi thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây là bao nhiêu.

- A. 8400m^3** B. 8400m^3 C. 6000m^3 D. 4200m^3

Lời giải

Chọn A

Ta có :

$$h'(t) = 3at^2 + bt$$

$$\Rightarrow h(t) = \int (3at^2 + bt) dt = at^3 + \frac{1}{2}bt^2 + C$$

$$\Rightarrow h(t) = at^3 + \frac{1}{2}bt^2 + C$$

$$\text{Chọn } t = 0 \Rightarrow h(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow h(t) = at^3 + \frac{1}{2}bt^2$$

$$\text{Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là } 150m^3 : h(5) = 150 \Leftrightarrow 125a + \frac{25}{2}b = 150$$

$$\text{Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là } 1100m^3 : h(10) = 1100 \Leftrightarrow 1000a + 50b = 1100$$

$$\text{Ta có hệ : } \begin{cases} 125a + \frac{25}{2}b = 150 \\ 1000a + 50b = 1100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow h(t) = t^3 + t^2$$

$$\text{thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây là } h(20) = 20^3 + 20^2 = 8400m^3$$

Câu 15. Gọi $h(t)$ (m) là mực nước ở bồn chứa sau khi bơm nước được t giây. Biết rằng

$h'(t) = \frac{1}{5}\sqrt[3]{t}$ (m/s) và lúc đầu bồn không có nước. Tìm mức nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây

(làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

A. 2,64m .

B. 1,22m .

C. 2,22m .

D. 1,64m .

Lời giải

Chọn D

Ta có :

$$h'(t) = \frac{1}{5}\sqrt[3]{t}$$

$$\Rightarrow h(t) = \int \frac{1}{5}\sqrt[3]{t} dx = \frac{1}{5} \int t^{\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{5} \frac{t^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{20}t^{\frac{4}{3}} + C$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{3}{20}t^{\frac{4}{3}} + C$$

$$\text{Chọn } t = 0 \Rightarrow h(0) = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{3}{20}t^{\frac{4}{3}}$$

$$\text{mức nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây: } h(6) = \frac{3}{20} \cdot 6^{\frac{4}{3}} \approx 1,64m$$

Câu 16. Sự sản sinh vi rút Zika ngày thứ t có số lượng là $N(t)$ con, biết $N'(t) = \frac{1000}{t}$ và lúc đầu đám vi rút có số lượng 250.000 con. Tính số lượng vi rút sau 10 ngày.

A. 272304 con

B. 212302 con

C. 242102 con

D. 252302 con.

Lời giải**Chọn D**

Ta có :

$$N'(t) = \frac{1000}{t}$$

$$\Rightarrow N(t) = \int \frac{1000}{t} dt = 1000 \ln|t| + C$$

$$\Rightarrow N(t) = 1000 \ln|t| + C$$

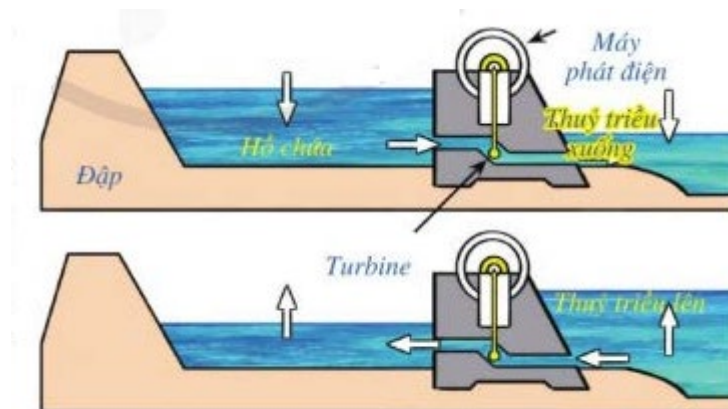
$$\text{Chọn } t = 1 \Rightarrow N(1) = 250000 \Rightarrow C = 250000$$

$$\Rightarrow N(t) = 1000 \ln|t| + 250000$$

số lượng vi rút sau 10 ngày là: $N(10) = 1000 \ln 10 + 250000 \approx 252302$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ trả lời đáp án.

Câu 17. Mức nước trong hồ chứa của nhà máy điện thủy triều thay đổi trong suốt một ngày do nước chảy ra khi thủy triều xuống và nước chảy vào khi thủy triều lên (như hình vẽ). Tốc độ thay đổi của mực nước được xác định bởi hàm số $h'(t) = \frac{1}{90}(t^2 - 17t + 60)$, trong đó t tính bằng giờ ($0 \leq t \leq 24$), $h'(t)$ tính bằng mét/giờ. Tại thời điểm $t = 0$, mực nước trong hồ chứa cao 8m. Mực nước trong hồ cao nhất và thấp nhất bao nhiêu?



Trả lời:

Lời giải**Đáp án:**

Ta có

$$h'(t) = \frac{1}{90}(t^2 - 17t + 60)$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{90} \int (t^2 - 17t + 60) dt = \frac{1}{90} \left(\frac{1}{3} t^3 - \frac{17}{2} t^2 + 60t \right) + C$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{90} \left(\frac{1}{3} t^3 - \frac{17}{2} t^2 + 60t \right) + C$$

Tại thời điểm $t = 0$, mực nước trong hồ chứa cao $8m$ nên $h(0) = 8 \Rightarrow C = 8$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{90} \left(\frac{1}{3} t^3 - \frac{17}{2} t^2 + 60t \right) + 8 \quad (0 \leq t \leq 24)$$

Ta có: $h'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 - 17t + 60 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = 12 \end{cases}$

Lập bảng biến thiên:

t	0	5	12	24	
$h'(t)$	+	0	-	0	+
$h(t)$	8	$\nearrow \frac{1019}{108}$	$\searrow \frac{44}{5}$	$\nearrow \frac{104}{5}$	

Mực nước trong hồ cao nhất : $\frac{104}{5} = 20,8m$

Mực nước trong hồ thấp nhất $8m$

Câu 18. Gọi $h(t)$ là chiều cao của cây keo (tính theo mét) sau khi trồng t năm. Biết rằng năm đầu tiên cây cao 1,5m, trong những năm tiếp theo, cây phát triển với tốc độ $h'(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{t}}$ (mét /năm). Sau bao nhiêu năm cây cao được 3m.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Ta có

$$h'(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{t}}$$

$$\Rightarrow h(t) = \int \frac{1}{\sqrt[4]{t}} dt = \int t^{-\frac{1}{4}} dt = \frac{t^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1} + C = \frac{4}{3} \sqrt[4]{t^3} + C$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{4}{3} \sqrt[4]{t^3} + C$$

năm đầu tiên cây cao 1m nên $h(1) = 1,5 \Leftrightarrow 1,5 = \frac{4}{3} \sqrt[4]{1} + C \Rightarrow C = \frac{1}{6}$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{4}{3}\sqrt[4]{t^3} + \frac{1}{6}$$

cây cao được 3m nên $h(t) = 3 \Leftrightarrow \frac{4}{3}\sqrt[4]{t^3} + \frac{1}{6} = 3 \Leftrightarrow \sqrt[4]{t^3} = \frac{17}{8} \Rightarrow t \approx 2,73$

Câu 19. Người ta bơm nước vào một bồn chứa, lúc đầu bồn không chứa nước, mức nước ở bồn chứa sau khi bơm phụ thuộc vào thời gian bơm nước theo một hàm số $h = h(t)$ trong đó h tính bằng cm , t tính bằng giây. Biết rằng $h'(t) = \sqrt[3]{2t}$ (m/s). Mức nước ở bồn sau khi bơm được 13 giây là bao nhiêu?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 20. Khi quan sát một đám vi khuẩn trong phòng thí nghiệm người ta thấy tại ngày thứ t có số lượng là $N(t)$. Biết rằng $N'(t) = \frac{1500}{t}$ và lúc đầu số lượng vi khuẩn là 5000 con. Tính số lượng vi rút sau 12 ngày.

Trả lời:

Lời giải

Đáp án:

Câu 21. Vi khuẩn HP (*Helicobacter pylori*) gây đau dạ dày tại ngày thứ t với số lượng là $F(t)$, biết nếu phát hiện sớm khi số lượng không vượt quá 4000 con thì bệnh nhân sẽ được cứu chữa. Biết $F'(t) = \frac{600}{t}$ và ban đầu bệnh nhân có 2000 con vi khuẩn. Sau 15 ngày bệnh nhân phát hiện ra bị bệnh. Hỏi khi đó có bao nhiêu con vi khuẩn trong dạ dày (lấy xấp xỉ hàng thập phân thứ hai) và bệnh nhân có cứu chữa được không?

Trả lời:

Lời giải

Đáp án: