

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN

Ngày thi: 17/9/2024

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

(Đề thi này có 01 trang)

Câu 1. (5 điểm)

Cho dãy số (u_n) được xác định bởi:

$$\begin{cases} u_1 = 2025. \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \sqrt{u_n}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

b) Gọi A là giới hạn vừa tính được ở câu a). Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{u_n} - A)$.

Câu 2. (5 điểm)

Với tham số thực a , xét hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(2xf(y) + y) = f(y) \cdot f(x) + (y+1)(f(x) - a), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1).$$

a) Khi $a = 3$, tìm tất cả các hàm số f thỏa mãn (1).

b) Tìm tất cả các giá trị a thực để tồn tại duy nhất hàm số f thỏa mãn (1).

Câu 3. (5 điểm)

Cho tam giác ABC nội tiếp (O) , ngoại tiếp (I) . Đường thẳng qua I vuông góc CI cắt AC tại E . Đường thẳng qua I vuông góc BI cắt AB tại F .

a) Chứng minh rằng EF tiếp xúc với (I) và $EF = BC \cdot \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2}$.

b) Gọi BI, CI cắt (O) lần lượt tại các điểm thứ hai là B', C' . $B'E$ cắt (O) tại điểm thứ hai là B_1 . $C'F$ cắt (O) tại điểm thứ hai là C_1 . Chứng minh rằng $C'B_1; B'C_1; AI$ đồng quy.

Câu 4. (5 điểm)

Một thầy giáo ra đề thi thử học kỳ I môn Toán cho 16 bạn học sinh. Đề thi chung cho tất cả 16 học sinh, có n câu hỏi, mỗi câu hỏi có 4 phương án trả lời A, B, C, D; mỗi học sinh chỉ được chọn một phương án trả lời cho mỗi câu hỏi. Sau khi thi xong, thầy giáo nhận thấy 2 học sinh bất kỳ có nhiều nhất một câu hỏi có phương án trả lời giống nhau.

a) Với $n = 3$, hãy chỉ ra một ví dụ về phương án trả lời của 16 bạn học sinh thỏa mãn các điều kiện của bài toán.

b) Tính giá trị lớn nhất của n .

----- HẾT -----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Chữ kí của Giám thị 1: Chữ kí của Giám thị 2:

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HƯỚNG DẪN CHẤM THI LẬP ĐỘI TUYỂN CỦA TỈNH
TỈNH QUẢNG NINH DỰ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT
NĂM HỌC 2024 - 2025

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN
Ngày thi: 17/9/2024

(Hướng dẫn này có 05 trang)

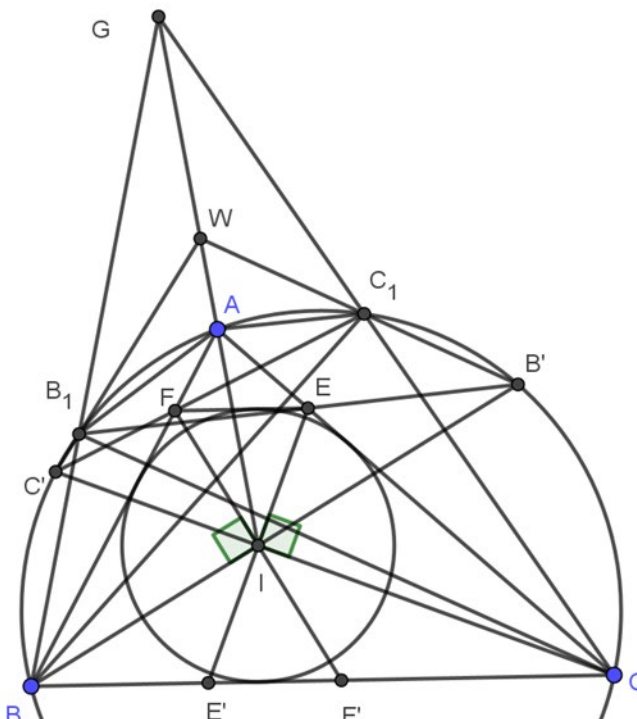
I. HƯỚNG DẪN CHUNG

- Giám khảo chấm đúng theo hướng dẫn của Sở Giáo dục và Đào tạo.
- Nếu thí sinh có cách trả lời khác đáp án nhưng đúng thì giám khảo vẫn chấm điểm theo biểu điểm của Hướng dẫn chấm thi.
- Giám khảo không quy tròn điểm thành phần của từng câu, điểm của bài thi.

II. ĐÁP ÁN, BIỂU ĐIỂM

Câu	Sơ lược lời giải/Một số gợi ý chính	Điểm
1a (2.5 điểm)	Chứng minh bằng quy nạp theo n : $u_n > 4, \forall n \in \mathbb{N}^*$.	1
	Ta có được $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n} - \frac{u_n}{2} = -\frac{\sqrt{u_n}}{2}(\sqrt{u_n} - 2) < 0, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Do đó nên dãy (u_n) giảm và bị chặn dưới bởi 4.	1
	Suy ra, tồn tại $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L \geq 4$ thỏa mãn $L = \frac{L}{2} + \sqrt{L} \Leftrightarrow L = 4$. Vậy nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$.	0.5
1b (2.5 điểm)	Ta có $u_{n+1} - 4 = (u_n - 4) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2 + \sqrt{u_n}} \right), \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \frac{u_{n+1} - 4}{u_n - 4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 + \sqrt{u_n}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.	1
	Do $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$ nên ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_{n+1} - 4}{u_n - 4} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2 + \sqrt{u_n}} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.	0.5
	Đặt $v_n = \ln(u_n - 4), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_{n+1} - v_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(\frac{u_{n+1} - 4}{u_n - 4} \right) \right) = \ln \left(\frac{3}{4} \right)$.	0.5
	Theo định lý Stolz, ta có $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln(\sqrt[n]{u_n - 4}) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{n} = \ln \left(\frac{3}{4} \right)$. Do đó nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[n]{u_n - 4} \right) = \frac{3}{4}$.	0.5
2a (2 điểm)	Khi $a = 3$: Giả sử tồn tại hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện (1). Thay $x = 0$ vào (1): $f(y) = f(y)f(0) + (y+1)(f(0)-3), \forall y \in \mathbb{R}$ (2).	0.5

Câu	Sơ lược lời giải/Một số gợi ý chính	Điểm
2a (2 điểm)	Nếu $f(0) \neq 1$ thì $f(y) = c(y+1), \forall y \in \mathbb{R}$ với c là hằng số. Do $f(0) \neq 1$ nên $c \neq 1$. Thử lại vào (1) ta có: $c.(2x.c(y+1)+y+1) = c^2(x+1)(y+1) + (y+1).(c.(x+1)-3), \forall x, y \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow 2c^2xy + 2c^2x + cy + c = (c^2 + c)xy + (c^2 + c)x + (c^2 + c - 3)y + c^2 + c - 3, \forall x, y \in \mathbb{R}.$ Đồng nhất hệ số ta thấy không tồn tại c thỏa mãn đề bài.	0.5
	Nếu $f(0) = 1$ thì thay vào (2): $-2(y+1) = 0, \forall y \in \mathbb{R}$. Điều này vô lý.	0.5
	Vậy nên khi $a = 3$, không tồn tại hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn (1).	0.5
2b (3 điểm)	Khi $a = 1$ thì có hai hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn là $f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}; f(x) = x + 1, \forall x \in \mathbb{R}.$ Vậy nên $a = 1$ không thỏa mãn đề bài.	1
	Xét trường hợp $a \neq 1$. Thay $x = 0$ vào (1): $f(y) = f(y)f(0) + (y+1)(f(0)-a), \forall y \in \mathbb{R}$ (2).	0.5
	Nếu $f(0) \neq 1$ thì $f(y) = c(y+1), \forall y \in \mathbb{R}$ với c là hằng số. Do $f(0) \neq 1$ nên $c \neq 1$. Thử lại vào (1) ta có: $c.(2x.c(y+1)+y+1) = c^2(x+1)(y+1) + (y+1).(c.(x+1)-a), \forall x, y \in \mathbb{R}.$ $\Leftrightarrow 2c^2xy + 2c^2x + cy + c = (c^2 + c)xy + (c^2 + c)x + (c^2 + c - a)y + c^2 + c - a, \forall x, y \in \mathbb{R}.$ Đồng nhất hệ số và chú ý do $c \neq 1$ nên $c = 0$ và $a = 0$.	0.5
	Nếu $f(0) = 1$ thì thay vào (2): $(y+1)(1-a) = 0, \forall y \in \mathbb{R}$. Điều này vô lý do $a \neq 1$.	0.5
	Như vậy: (+) Khi $a = 0$, chỉ có duy nhất một hàm số f thỏa mãn (1) là $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. (+) Khi $a = 1$, có hai hàm số f thỏa mãn (1) là $f(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(x) = x + 1, \forall x \in \mathbb{R}.$ (+) Khi $a \neq 1, a \neq 0$; không có hàm số f nào thỏa mãn (1). Vậy nên tất cả các giá trị a thực thỏa mãn đề bài là $a = 0$.	0.5

Câu	Sơ lược lời giải/Một số gợi ý chính	Điểm
3		
3a (3 điểm)	(*) Chứng minh EF tiếp xúc với (I): Lấy IE cắt BC tại E', IF cắt BC tại F'. Khi đó do $CI \perp EE'$ tại I và CI là phân giác $\widehat{ACB}$ nên I là trung điểm của EE'. Tương tự I là trung điểm của FF'.	1
	Xét phép đối xứng tâm I: $E \leftrightarrow E'$; $F \leftrightarrow F'$; $(I) \leftrightarrow (I)$. Do $E'F'$ tiếp xúc với (I) nên ta có EF tiếp xúc với (I).	0.5
	(*) Chứng minh $EF = BC \cdot \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2}$: Theo tính chất phép đối xứng tâm I; $EF \parallel E'F'$ hay $EF \parallel BC$. Theo định lý Thales cho $EF \parallel BC$ ta có $\frac{EF}{BC} = \frac{AF}{AB}$ (1). Theo định lý sin cho tam giác AFI và tam giác ABI ta có $\frac{AF}{AB} = \frac{IF}{IB} \cdot \frac{\sin AIF}{\sin AIB}$.	0.5
	Ta có I là tâm nội tiếp tam giác ABC nên $\widehat{AIB} = 90^\circ + \frac{\widehat{ACB}}{2}$ và do đó nên $\widehat{AIF} = \widehat{AIB} - 90^\circ = \frac{\widehat{ACB}}{2}$. Tam giác AIF vuông tại I có $\frac{IF}{IB} = \tan IBF = \tan \frac{B}{2}$.	0.5

Câu	Sơ lược lời giải/Một số gợi ý chính	Điểm																																																																				
3a (3 điểm)	Suy ra $\frac{AF}{AB} = \tan \frac{B}{2} \cdot \frac{\sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{C}{2}} = \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2}$. Kết hợp với (1) ta có $EF = BC \cdot \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2}$.	0.5																																																																				
3b (2 điểm)	Ta chú ý rằng B' là điểm chính giữa cung AC không chứa B của (O) nên ta có B_1E là phân giác của $\widehat{AB_1C}$. Tương tự C_1F là phân giác $\widehat{AC_1B}$. Theo tính chất đường phân giác ta có $\frac{B_1A}{B_1C} = \frac{EA}{EC}$; $\frac{C_1B}{C_1A} = \frac{FB}{FA}$.	0.5																																																																				
	Theo định lý sin: $\frac{\sin B_1BA}{\sin B_1BC} = \frac{B_1A}{B_1C} = \frac{EA}{EC}$; $\frac{\sin C_1CB}{\sin C_1CA} = \frac{C_1B}{C_1A} = \frac{FB}{FA}$. Theo phần (a) ta có $EF \parallel BC \Rightarrow \frac{EA}{EC} = \frac{FA}{FB}$.	0.5																																																																				
	Do đó nên $\frac{\sin B_1BA}{\sin B_1BC} \cdot \frac{\sin C_1CB}{\sin C_1CA} \cdot \frac{\sin IAC}{\sin IAB} = 1$. Áp dụng định lý Ceva sin cho tam giác ABC ta có BB_1, CC_1, AI đồng quy tại G .	0.5																																																																				
	Lấy $W = C'B_1 \cap B'C_1$. Áp dụng định lý Pascal cho bộ 6 điểm $\begin{pmatrix} B_1 & B' & C \\ C_1 & C' & B \end{pmatrix}$ ta có: $CC_1 \cap BB_1 = G; B'B \cap C'C = I; B_1C' \cap C_1B' = W \Rightarrow W, I, G$ thẳng hàng. Theo lập luận trên ta có G, I, A thẳng hàng nên $W \in AI$. Ta có đpcm.	0.5																																																																				
4a (1.5 điểm)	Chỉ ra một ví dụ phương án khi $n = 3$: <table><tr><td> h/s C.hỏi </td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td></tr><tr><td>1</td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>A</td><td>A</td><td>A</td><td>B</td><td>B</td><td>B</td><td>C</td><td>C</td><td>C</td><td>D</td><td>D</td><td>D</td></tr><tr><td>2</td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>A</td><td>C</td><td>D</td><td>A</td><td>B</td><td>D</td><td>A</td><td>B</td><td>C</td></tr><tr><td>3</td><td>B</td><td>B</td><td>B</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>A</td><td>C</td><td>A</td><td>D</td><td>D</td><td>A</td><td>C</td><td>A</td><td>D</td><td>C</td></tr></table>	h/s C.hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	1	A	B	C	D	A	A	A	B	B	B	C	C	C	D	D	D	2	A	B	C	D	B	C	D	A	C	D	A	B	D	A	B	C	3	B	B	B	B	C	D	A	C	A	D	D	A	C	A	D	C	1.5
h/s C.hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16																																																						
1	A	B	C	D	A	A	A	B	B	B	C	C	C	D	D	D																																																						
2	A	B	C	D	B	C	D	A	C	D	A	B	D	A	B	C																																																						
3	B	B	B	B	C	D	A	C	A	D	D	A	C	A	D	C																																																						
4b (3.5 điểm)	Gọi S là tập hợp tất cả các bộ $(\{A; B\}; T)$ trong đó A, B là hai bạn học sinh trong số 16 bạn học sinh đã cho chọn cùng một phương án trả lời trong câu hỏi thứ T . Ta sẽ đếm số phần tử của S theo hai cách khác nhau.	0.5																																																																				
	Đếm cách 1: Đếm theo học sinh. Có C_{16}^2 cách chọn $\{A; B\}$. Và do với mỗi tập $\{A; B\}$, có tối đa 1 cách chọn câu hỏi T nên $ S \leq C_{16}^2$.	1																																																																				

Câu	Sơ lược lời giải/Một số gợi ý chính	Điểm																																																																																																					
4b (3.5 điểm)	Đếm cách 2: Đếm theo lựa chọn: Với mỗi $i = 1, 2, \dots, n$; ta gọi a_i, b_i, c_i, d_i lần lượt là số học sinh chọn phương án trả lời là A, B, C, D ở câu hỏi thứ i. Để nhận thấy $a_i + b_i + c_i + d_i = 16, \forall i = 1, 2, \dots, n$. $\forall i = 1, 2, \dots, n$; số cách chọn hai học sinh $\{A; B\}$ sao cho hai học sinh này có cùng phương án trả lời ở câu thứ i là: $C_{a_i}^2 + C_{b_i}^2 + C_{c_i}^2 + C_{d_i}^2 = \frac{a_i(a_i - 1)}{2} + \frac{b_i(b_i - 1)}{2} + \frac{c_i(c_i - 1)}{2} + \frac{d_i(d_i - 1)}{2} = \frac{a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 + d_i^2}{2} - 8$ $\geq \frac{(a_i + b_i + c_i + d_i)^2}{8} - 8 = 24.$	1																																																																																																					
	Với n câu hỏi cho ta: $S \geq 24n$. Vậy $24n \leq C_{16}^2 \Rightarrow n \leq 5$.	0.5																																																																																																					
	(*) Chỉ ra mô hình dấu bằng xảy ra: <table><tr><td>h/s \ C.hỏi</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td></tr><tr><td>1</td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>A</td><td>A</td><td>A</td><td>B</td><td>B</td><td>B</td><td>C</td><td>C</td><td>C</td><td>D</td><td>D</td><td>D</td></tr><tr><td>2</td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>A</td><td>C</td><td>D</td><td>A</td><td>B</td><td>D</td><td>A</td><td>B</td><td>C</td></tr><tr><td>3</td><td>B</td><td>B</td><td>B</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>A</td><td>C</td><td>A</td><td>D</td><td>D</td><td>A</td><td>C</td><td>A</td><td>D</td><td>C</td></tr><tr><td>4</td><td>C</td><td>D</td><td>A</td><td>B</td><td>B</td><td>D</td><td>A</td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td>B</td><td>C</td><td>D</td><td>D</td><td>A</td><td>C</td></tr><tr><td>5</td><td>D</td><td>A</td><td>C</td><td>B</td><td>C</td><td>B</td><td>A</td><td>B</td><td>D</td><td>C</td><td>A</td><td>B</td><td>D</td><td>C</td><td>D</td><td>A</td></tr></table>	h/s \ C.hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	1	A	B	C	D	A	A	A	B	B	B	C	C	C	D	D	D	2	A	B	C	D	B	C	D	A	C	D	A	B	D	A	B	C	3	B	B	B	B	C	D	A	C	A	D	D	A	C	A	D	C	4	C	D	A	B	B	D	A	A	B	C	B	C	D	D	A	C	5	D	A	C	B	C	B	A	B	D	C	A	B	D	C	D	A
h/s \ C.hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16																																																																																							
1	A	B	C	D	A	A	A	B	B	B	C	C	C	D	D	D																																																																																							
2	A	B	C	D	B	C	D	A	C	D	A	B	D	A	B	C																																																																																							
3	B	B	B	B	C	D	A	C	A	D	D	A	C	A	D	C																																																																																							
4	C	D	A	B	B	D	A	A	B	C	B	C	D	D	A	C																																																																																							
5	D	A	C	B	C	B	A	B	D	C	A	B	D	C	D	A																																																																																							

----- HẾT -----

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN

Ngày thi: 18/9/2024

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

(Đề thi này có 01 trang)

Câu 1. (5 điểm)

Một hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ được nói là **có tính chất số học** nếu với mọi hai số nguyên dương $a \neq b$ thì $(a-b) \mid f(a) - f(b)$. Ký hiệu A là tập hợp tất cả các hàm số có tính chất số học.

a) Chứng minh rằng với mọi $u, v, f, g \in A$ thì hàm số G xác định bởi công thức

$G(x) = u(x) \cdot f(x) + v(x) \cdot g(x), \forall x \in \mathbb{N}^*$, cũng là một phần tử thuộc A .

b) Cho trước số nguyên dương $c > 1$. Chứng minh rằng nếu $f \in A$ thỏa mãn

$f(n) \mid c^n - 2025n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ thì f là hàm hằng.

Câu 2. (5 điểm)

Cho ba đa thức P, Q, R hệ số thực có bậc không quá 2025 thỏa mãn ba điều kiện sau:

1. Với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $P(x) \leq Q(x) \leq R(x)$.

2. Có 1012 số thực phân biệt $x_1, x_2, \dots, x_{1012}$ thỏa mãn $P(x_i) = R(x_i), \forall i = 1, 2, \dots, 1012$.

3. Tồn tại số thực x_0 khác tất cả các số $x_1, x_2, \dots, x_{1012}$ thỏa mãn $P(x_0) + R(x_0) = 2Q(x_0)$.

Chứng minh rằng $P(x) + R(x) = 2Q(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 3. (5 điểm)

Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp (I) . Lấy M dịch chuyển trên tia đối tia CI và N dịch chuyển trên tia đối tia DI sao cho $MN \parallel DC$. Tiếp tuyến tại M của đường tròn ngoại tiếp tam giác MBC cắt tiếp tuyến tại N của đường tròn ngoại tiếp tam giác NAD tại K .

a) Chứng minh rằng I, K liên hợp đẳng giác trong tứ giác $ABMN$.

b) Chứng minh rằng K dịch chuyển trên 1 đường thẳng cố định khi M, N dịch chuyển.

Câu 4. (5 điểm)

Cho tập hợp X gồm $2n$ số nguyên dương. Một **cách chia đẹp** đối với tập X là một cách chia $2n$ số này thành n cặp sao cho tích của hai số trong cùng một cặp không là số chính phương. Giả sử có tồn tại một cách chia đẹp đối với tập X . Hỏi có ít nhất bao nhiêu cách chia đẹp đối với tập X khi:

a) $n = 2$.

b) $n = 2025$.

Lưu ý: Hai cách chia được gọi là khác nhau nếu có hai số cùng cặp trong cách chia này nhưng lại không cùng cặp trong cách chia còn lại.

----- HẾT -----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.
- Giám thị không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Chữ kí của Giám thị 1: Chữ kí của Giám thị 2:

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Môn thi: TOÁN
Ngày thi: 18/9/2024
(Hướng dẫn này có 06 trang)

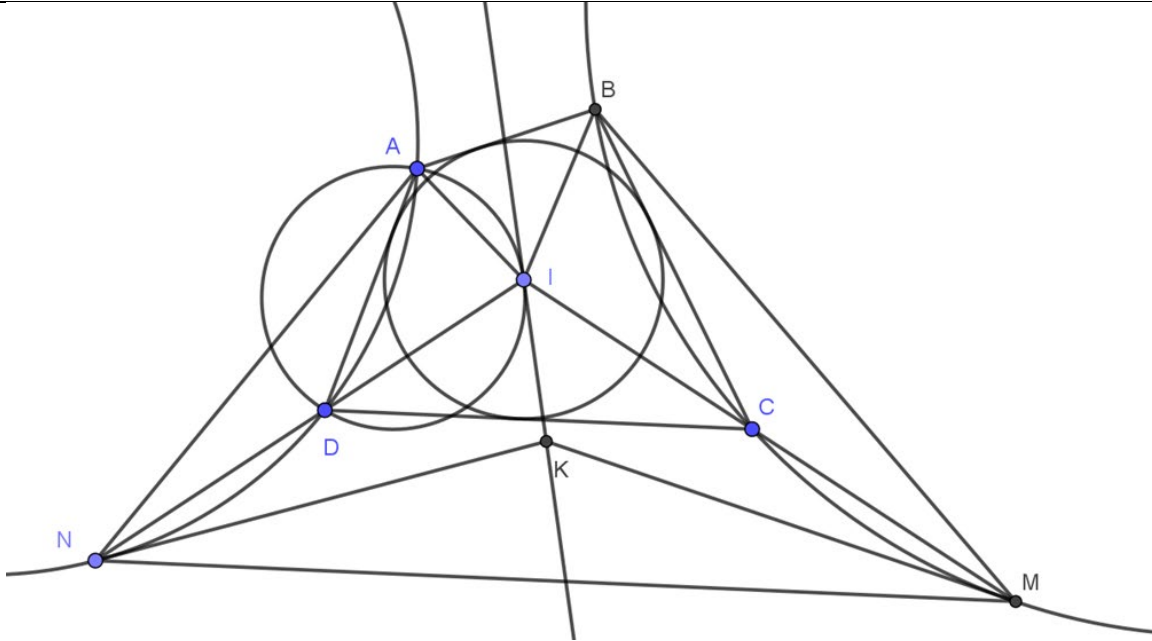
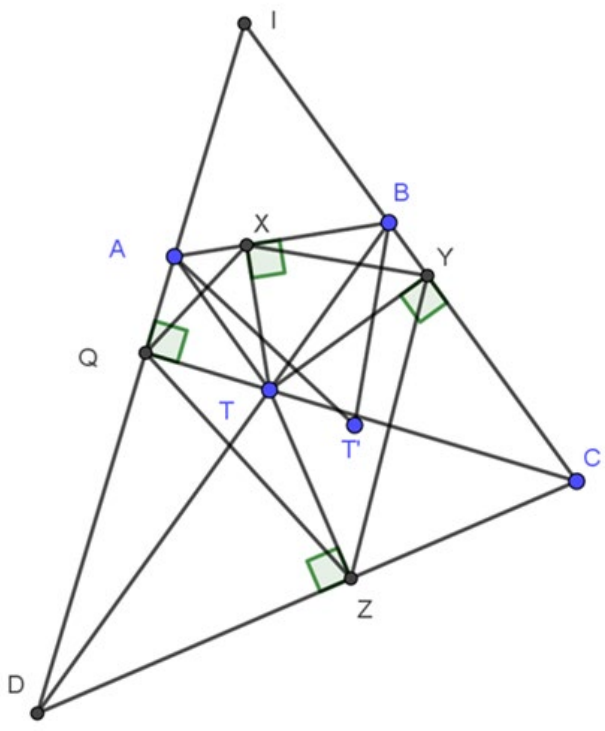
I. HƯỚNG DẪN CHUNG

- Giám khảo chấm đúng theo hướng dẫn của Sở Giáo dục và Đào tạo.
- Nếu thí sinh có cách trả lời khác đáp án nhưng đúng thì giám khảo vẫn chấm điểm theo biểu điểm của Hướng dẫn chấm thi.
- Giám khảo không quy tròn điểm thành phần của từng câu, điểm của bài thi.

II. ĐÁP ÁN, BIỂU ĐIỂM

Câu	Sơ lược lời giải/Một số gợi ý chính	Điểm
1a (1.5 điểm)	Ta có $u, v, f, g \in A$ nên với mọi a, b nguyên dương thỏa mãn $a \neq b$: $u(a) \equiv u(b) \pmod{a-b}$ $v(a) \equiv v(b) \pmod{a-b}$ $f(a) \equiv f(b) \pmod{a-b}$ $g(a) \equiv g(b) \pmod{a-b}.$	1
	Do đó nên $u(a).f(a) + v(a).g(a) \equiv u(b).f(b) + v(b).g(b) \pmod{a-b}$ hay $G(a) \equiv G(b) \pmod{a-b}$ với mọi a, b nguyên dương thỏa mãn $a \neq b$. Suy ra $G \in A$.	0.5
1b (3.5 điểm)	Trước hết ta chứng minh bổ đề sau: Bổ đề: Giả sử $f \in A$ và f khác hằng. Khi đó tập $\{p \in \mathbb{P} \mid \exists n \in \mathbb{N}^* : p \mid f(n)\}$ là tập vô hạn.	0.5
	Chứng minh bổ đề: Trước hết ta chứng minh với mọi m nguyên dương, phương trình $f(x) = m$ chỉ có hữu hạn nghiệm nguyên dương. Giả sử tồn tại m nguyên dương để phương trình $f(x) = m$ có vô hạn nghiệm nguyên dương. Khi đó tồn tại dãy tăng các số nguyên dương (x_n) thỏa mãn $f(x_n) = m$ với mọi n nguyên dương.	0.5
	Cố định x nguyên dương bất kỳ. Khi đó $f(x) - m = f(x) - f(x_n)$ chia hết cho $x - x_n$ với mọi n nguyên dương. Suy ra $f(x) = m$ với mọi x nguyên dương, vô lý. Vậy nên với mọi m nguyên dương, phương trình $f(x) = m$ chỉ có hữu hạn nghiệm nguyên dương.	0.5

Câu	Sơ lược lời giải/Một số gợi ý chính	Điểm
1b (3.5 điểm)	Đặt $A = \{p \in \mathbb{P} \mid \exists n \in \mathbb{N}^* : p \mid f(n)\}$. Theo lập luận trên thì tồn tại N nguyên dương để $f(N) > 1$. Do đó nên $A \neq \emptyset$. Giả sử tập A chỉ có hữu hạn phần tử. Gọi $p_1, p_2, \dots, p_k$ là tất cả các phần tử của tập này. Đặt $M = p_1 p_2 \dots p_k \cdot f(1)$. Phương trình $f(x) = f(1)$ chỉ có hữu hạn nghiệm nguyên dương nên tồn tại $t > 2$ nguyên dương đủ lớn để $f(Mt+1) \neq f(1)$.	0.5
	Ta có: $f(Mt+1) - f(1)$ chia hết cho Mt nên tồn tại h nguyên, $h \neq 0$ thỏa mãn $f(Mt+1) - f(1) = M \cdot t \cdot h \Rightarrow f(Mt+1) = f(1) \cdot (1 + p_1 p_2 \dots p_k \cdot t \cdot h)$. Bởi $h \neq 0, t > 2$ nên ta có $1 + p_1 p_2 \dots p_k \cdot h \cdot t \geq h \cdot t \cdot p_1 p_2 \dots p_k - 1 > 1$. Suy ra tồn tại ước nguyên tố q của $1 + p_1 p_2 \dots p_k \cdot h \cdot t$. Khi này $q \mid f(Mt+1)$ nhưng $q \neq p_i, \forall i = 1, 2, \dots, k$. Ta có điều mâu thuẫn. Vậy nên điều giả sử là sai hay ta có điều phải chứng minh.	0.5
	Trở lại bài toán: Giả sử f không là hàm hằng. Khi đó theo bổ đề, tập $S = \{p \in \mathbb{P} \mid \exists n \in \mathbb{N}^* : p \mid f(n)\}$ là tập vô hạn. Xét $p \in S$, $p > c$ bất kỳ. Khi đó tồn tại n_0 nguyên dương thỏa mãn $p \mid f(n_0)$.	0.5
	Ta có: $f(n_0 + p) - f(n_0) \vdots p \Rightarrow f(n_0 + p) \vdots p$. Theo điều kiện đề bài ta có được $f(n_0) \mid c^{n_0} - 2025n_0 \Rightarrow p \mid c^{n_0} - 2025n_0$. Ta lại có $f(n_0 + p) \mid c^{n_0+p} - 2025(n_0 + p) \Rightarrow p \mid c^{n_0+p} - 2025(n_0 + p)$. $\Rightarrow p \mid c^{n_0+p} - 2025n_0$. Suy ra $p \mid c^{n_0}(c^p - 1)$. Theo định lý Fermat nhỏ thì ta có được $p \mid c(c-1)$. Điều này mâu thuẫn với cách chọn p. Vậy nên f là hàm hằng.	0.5
2 (5 điểm)	Ta có $P(x_i) \leq Q(x_i) \leq R(x_i), \forall i = 1, 2, \dots, 1012$ và $P(x_i) = R(x_i), \forall i = 1, 2, 3, \dots, 1012$. $\Rightarrow P(x_i) = Q(x_i) = R(x_i), \forall i = 1, 2, \dots, 1012$. Suy ra $Q(x) - P(x)$ nhận $x_1, x_2, \dots, x_{1012}$ làm các nghiệm.	1
	Theo điều kiện đề bài $Q(x) - P(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên x_i phải là các nghiệm bội lớn hơn hoặc bằng 2 của $Q(x) - P(x)$. Đặt $Q(x) - P(x) = (x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \dots (x - x_{1012})^2 \cdot T_1(x)$ với T_1 là đa thức hệ số thực. Bởi $Q(x) - P(x)$ có bậc ≤ 2025 nên T_1 là đa thức bậc không quá 1.	1.5
	Do $Q(x) \geq P(x), \forall x \in \mathbb{R}$ nên ta có $T_1(x) \geq 0, \forall x \notin \{x_1, x_2, \dots, x_{1012}\}$. Do T_1 là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $T_1(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Mà T_1 là đa thức bậc không quá 1 nên T_1 là đa thức hằng. Như vậy $Q(x) - P(x) = (x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \dots (x - x_{1012})^2 \cdot c_1$ với c_1 là hằng số không âm.	1

Câu	Sơ lược lời giải/Một số gợi ý chính	Điểm
2 (5 điểm)	Tương tự $R(x) - Q(x) = (x - x_1)^2 (x - x_2)^2 \dots (x - x_{1012})^2 \cdot c_2$ với c_2 là hằng số không âm.	0.5
	Theo điều kiện 3. ta có : $(x_0 - x_1)^2 \cdot (x_0 - x_2)^2 \dots (x_0 - x_{1012})^2 (c_1 - c_2) = 0$. Do $x_0 \neq x_i, \forall i = 1, 2, 3, \dots, 1012$ nên ta có $c_1 = c_2 = c$. Khi đó $Q(x) - P(x) = R(x) - Q(x) \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow P(x) + R(x) = 2Q(x), \forall x \in \mathbb{R}$.	1
3		
3a (3 điểm)	Trước hết ta nhắc lại và chứng minh một bổ đề sau: Bổ đề: Cho tứ giác $ABCD$ và một điểm T bất kỳ trong tứ giác. Khi đó, T có điểm liên hợp đẳng giác trong tứ giác $ABCD$ khi và chỉ khi $\widehat{ATB} + \widehat{DTC} = 180^\circ$.	0.5
		

Câu	Sơ lược lời giải/Một số gợi ý chính	Điểm
3a (3 điểm)	Chứng minh bổ đề: Lấy I là giao điểm của AD và BC. Khi đó T có điểm liên hợp đẳng giác trong tứ giác $ABCD$ khi và chỉ khi điểm liên hợp đẳng giác với điểm T trong tam giác IAB và trong tam giác ICD trùng nhau. Điều này tương đương với đường tròn Pedal của T ứng với tam giác IAB và ứng với tam giác ICD trùng nhau. Gọi X, Y, Z, Q lần lượt là hình chiếu của T lên AB, BC, CD, DA. Khi đó $(XYQ), (ZYQ)$ lần lượt là đường tròn Pedal của T ứng với tam giác IAB và ứng với tam giác IDC. Suy ra T có điểm liên hợp đẳng giác trong tứ giác $ABCD$ tương đương với X, Y, Z, Q cùng thuộc một đường tròn. Ta có: $\widehat{XQZ} = \widehat{XQT} + \widehat{TQZ} = \widehat{TAB} + \widehat{TDC}$; $\widehat{XYZ} = \widehat{TBA} + \widehat{TCD}$. Do đó nên $\widehat{XYZ} + \widehat{XQZ} = 360^\circ - (\widehat{ATB} + \widehat{DTC})$. Như vậy X, Y, Z, Q cùng thuộc một đường tròn tương đương với $\widehat{ATB} + \widehat{DTC} = 180^\circ$. Ta hoàn tất chứng minh bổ đề.	0.5
	Trở lại bài toán: Ta có I liên hợp đẳng giác với chính nó trong tứ giác $ABCD$ nên $\widehat{AIB} + \widehat{MIN} = \widehat{AIB} + \widehat{CID} = 180^\circ$. Theo bổ đề, tồn tại điểm liên hợp đẳng giác với I trong tứ giác $ANMB$.	0.5
	Do NK tiếp xúc với (AND) nên ta có $\widehat{ANK} = \widehat{ADI} = \widehat{IDC} = \widehat{INM}$. Như vậy K, I liên hợp đẳng giác trong ANM. Tương tự K, I liên hợp đẳng giác trong BMN.	1
	Do đó nên K, I liên hợp đẳng giác trong tứ giác $ABMN$.	0.5
3b (2 điểm)	Ta có: $\widehat{KAN} = \widehat{IAB} = \widehat{IAD} \Rightarrow \widehat{IAK} = \widehat{DAN}$. Do NK tiếp xúc với (DAN) nên $\widehat{INK} = \widehat{DNK} = \widehat{DAN}$.	1
	Suy ra $\widehat{IAK} = \widehat{INK} \Rightarrow I, A, N, K$ đồng viên.	0.5
	Ta có $\widehat{AIK} = 180^\circ - \widehat{ANK} = 180^\circ - \widehat{ADI}$ nên IK là tiếp tuyến tại I của (AID). Vậy nên K dịch chuyển trên tiếp tuyến tại I của (AID) cố định.	0.5

Câu	Sơ lược lời giải/Một số gợi ý chính	Điểm
4a (2 điểm)	Giả sử $X = \{a, b, c, d\}$ và giả sử có cách chia cặp $(a, b); (c, d)$ là đẹp. Ta xét 2 trường hợp sau: Trường hợp 1: Cách chia $(a, c); (b, d)$ là đẹp. Khi đó có ít nhất 2 cách chia đẹp.	0.5
	Trường hợp 2: Cách chia $(a, c); (b, d)$ không đẹp. Thế thì một trong hai số ac, bd là chính phương. Không mất tính tổng quát, giả sử ac là số chính phương.	0.5
	Ta có: $(ba).(bc) = b^2.(ac)$ là số chính phương và ba không là số chính phương nên bc không là số chính phương. Tương tự vậy, ad không là số chính phương. Vậy nên cách chia $(a, d); (b, c)$ là đẹp. Do đó nên có ít nhất 2 cách chia đẹp với tập X.	0.5
	(*) Chỉ ra một trường hợp dấu bằng xảy ra: Xét $X = \{2; 4; 8; 16\}$. Khi đó, có đúng 2 cách chia đẹp là cách chia $(2; 4); (8; 16)$ và cách chia $(2; 16); (4; 8)$.	0.5
4b (3 điểm)	Ta sẽ chỉ ra có ít nhất $2025!$ cách chia đẹp với tập X. Ta chứng minh bằng quy nạp theo n: Nếu có tồn tại một cách chia đẹp với tập X gồm $2n$ số nguyên dương thì sẽ có ít nhất $n!$ cách chia đẹp đối với tập X.	0.5
	Với $n = 1$; mệnh đề hiển nhiên đúng. Với $n = 2$; mệnh đề đúng theo phần a). Giả sử khẳng định đúng với n. Ta xét tập X có $2(n+1)$ số nguyên dương và có cách chia đẹp với tập X là $(a_1, a_2); (a_3, a_4); \dots; (a_{2n+1}, a_{2n+2})$.	0.5
	Đầu tiên ta cố định (a_{2n+1}, a_{2n+2}). Trong $2n$ số còn lại, vẫn có 1 cách chia đẹp nên theo giả thiết quy nạp, ta có ít nhất $n!$ cách chia đẹp.	0.5

Câu	Sơ lược lời giải/Một số gợi ý chính	Điểm
4b (3 điểm)	Với mỗi chỉ số $1 \leq i \leq n$; ta xét hai cặp $(a_{2i-1}, a_{2i}), (a_{2n+1}, a_{2n+2})$. Khi đó, theo phần (a) ta có thể sắp xếp lại và có cách chia đẹp khác với 4 số $a_{2i-1}, a_{2i}, a_{2n+1}, a_{2n+2}$ là cách chia thành dạng $(a_{k_i}; a_{2n+2}); (a_{t_i}; a_{2n+1})$ với $\{k_i; t_i\} = \{2i; 2i-1\}$. Cố định $(a_{k_i}; a_{2n+2})$ và xét $2n$ số còn lại. Theo giả thiết quy nạp, sẽ có ít nhất $n!$ cách chia đẹp với $2n$ số còn lại này và tương ứng sẽ có ít nhất $n!$ cách chia đẹp với tập X (dễ thấy các cách này không bị trùng nhau).	0.5
	Như vậy ta sẽ có ít nhất $n! + n.n! = (n+1).n! = (n+1)!$ cách chia đẹp đối với tập X. Suy ra mệnh đề đúng với $n+1$. Theo nguyên lý quy nạp thì khẳng định được chứng minh.	0.5
	(*) Chỉ ra một trường hợp xảy ra dấu bằng: Xét tập hợp $X = \{2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{2n}\}$ thì rõ ràng chỉ có cách chia cặp không cùng tính chẵn lẻ mới thỏa mãn đề bài, rõ ràng số cách chia đó là $n!$, vừa đúng giá trị nhỏ nhất nêu trên.	0.5

----- HẾT -----