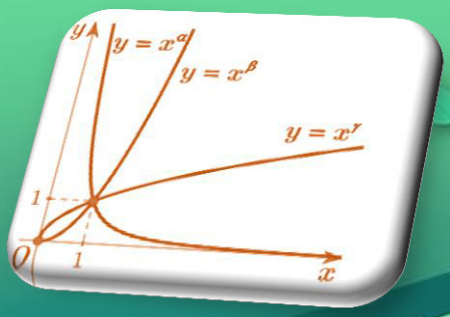
Chinh phục kì thi THPT QG 2021

Chuyên đề 2

LEE MINH

HÀM SỐ LŨY THỪA MŨ VÀ LOGARIT





Giải tích 12

Họ tên HS: _____

Trường: _____

Lớp: _____

MỤC LỤC

Chủ đề 1. LUỸ THỪA VÀ HÀM SỐ LUỸ THỪA 1
Vấn đề 1. LUỸ THỪA 1
VÍ DỤ MINH HOẠ 1
Vấn đề 2. HÀM SỐ LUỸ THỪA 4
VÍ DỤ MINH HOẠ 5
Dạng 1. Tìm tập xác định của hàm số luỹ thừa 5
Dạng 2. Đạo hàm và đồ thị của hàm số luỹ thừa 7
BÀI TẬP RÈN LUYỆN 12
Bài tập rèn luyện vấn đề 1. 12
Bài tập rèn luyện vấn đề 2. 15
Chủ đề 2. LOGARIT 26
VÍ DỤ MINH HOẠ 26
Dạng 1. Tìm điều kiện xác định của biểu thức logarit 26
Dạng 2. Rút gọn và tính giá trị biểu thức logarit 28
Dạng 3. Biểu diễn logarit theo các logarit đã biết 29
BÀI TẬP RÈN LUYỆN 32
Dạng 1. Tìm điều kiện xác định của biểu thức logarit 32
Dạng 2. Rút gọn và tính giá trị biểu thức logarit 37
Dạng 3. Biểu diễn logarit theo các logarit đã biết 41
Chủ đề 3. HÀM SỐ MŨ - HÀM SỐ LOGARIT 44
VÍ DỤ MINH HOẠ 46
Dạng 1. Tìm tập xác định của hàm số logarit 46
Dạng 2. Đạo hàm và đồ thị của hàm số mũ - logarit 48

Dạng 3. Các bài toán thực tế về hàm số mũ.....53
Dạng 4. Cực trị hàm số mũ – logarit và min max hàm nhiều biến.....57
BÀI TẬP RÈN LUYỆN.....61
Dạng 1. Tìm tập xác định của hàm số logarit.....61
Dạng 2. Đạo hàm và đồ thị của hàm số mũ - logarit.....64
Dạng 3. Các bài toán thực tế về hàm số mũ.....83
Dạng 4. Cực trị hàm số mũ – logarit và min max hàm nhiều biến.....88
▪ Cực trị của hàm số mũ và hàm số logarit.....88
▪ Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số mũ và logarit.....90
Chủ đề 4. PHƯƠNG TRÌNH MŨ - LOGARIT.....105
VÍ DỤ MINH HOẠ.....107
Dạng 1. Phương trình mũ không chứa tham số.....107
Dạng 2. Phương trình logarit không chứa tham số.....113
Dạng 3. Phương trình mũ - logarit chứa tham số.....119
BÀI TẬP RÈN LUYỆN.....130
Dạng 1. Phương trình mũ không chứa tham số.....130
Dạng 2. Phương trình logarit không chứa tham số.....135
Dạng 3. Phương trình mũ - logarit chứa tham số.....139
Chủ đề 5. BẤT **PHƯƠNG TRÌNH MŨ - LOGARIT**.....143
VÍ DỤ MINH HOẠ.....144
Dạng 1. Bất phương trình mũ không chứa tham số.....144
Dạng 2. Bất phương trình logarit không chứa tham số.....152
Dạng 3. Bất phương trình mũ - logarit chứa tham số.....158
BÀI TẬP RÈN LUYỆN.....163
Dạng 1. Bất phương trình mũ không chứa tham số.....163
Dạng 2. Bất phương trình logarit không chứa tham số.....166
Dạng 3. Bất phương trình mũ - logarit chứa tham số.....168

HÀM SỐ LUỸ THỪA – HÀM SỐ MŨ HÀM SỐ LOGARIT

CHỦ ĐỀ 1. LUỸ THỪA VÀ HÀM SỐ LUỸ THỪA

Vấn đề 1. LUỸ THỪA

◈ CÔNG THỨC VỀ LUỸ THỪA

① $a^n = a.a.....a$ ***(n thừa số a)***	② $a^0 = 1$, với $a \neq 0$
③ $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, với $a \neq 0$	④ $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \left(\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a\right)$, với $a > 0$

◈ TÍNH CHẤT CỦA LUỸ THỪA

Với mọi $a > 0,\ b > 0$ **ta có:**

① $a^m.a^n = a^{m+n}$ ② $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

③ $\left(a^m\right)^n = \left(a^n\right)^m = a^{mn}$ ④ $(ab)^n = a^n.b^n$

⑤ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Nếu $a > 1$ thì $a^m > a^n \Leftrightarrow m > n$.

Nếu $0 < a < 1$ thì $a^m > a^n \Leftrightarrow m < n$.

Với $0 < a < b$ và $m \in \mathbb{Z}$ ta có:

$$\begin{cases} a^m < b^m \Leftrightarrow m > 0 \\ a^m > b^m \Leftrightarrow m < 0 \end{cases}$$

Với $a,\ b \geq 0;\ m,\ n \in \mathbb{N}^*;\ p,\ q \in \mathbb{Z}$, ta có:

① $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$. ② $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ (b > 0)$

③ $\sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p\ (a > 0)$. ④ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Nếu $\dfrac{p}{n} = \dfrac{q}{m}$ thì $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q}\ (a > 0)$.

Nếu n là số nguyên dương lẻ và $a < b$ thì $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Nếu n là số nguyên dương chẵn và $0 < a < b$ thì $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

LUỸ THỪA - MŨ - LOGARIT

VÍ DỤ MINH HOẠ

Ví dụ 1: Tính $P = \left(\dfrac{3}{7}\right)^{-1} - \dfrac{3}{4} \cdot \left(\dfrac{9}{4}\right)^{-1}$.

A. $P = 2$. **B.** $P = \dfrac{31}{48}$. **C.** $P = \dfrac{2}{21}$. **D.** $P = -\dfrac{141}{112}$.

Lời giải

Ta có $P = \dfrac{7}{3} - \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{4}{9} = 2$.

Ví dụ 2: Cho a là một số dương. Biểu thức $a^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{a}$ viết dưới dạng luỹ thừa với số mũ hữu tỷ là

A. $a^{\frac{7}{6}}$. **B.** $a^{\frac{11}{6}}$. **C.** $a^{\frac{6}{5}}$. **D.** $a^{\frac{5}{6}}$.

Lời giải

Ta có $a^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{a} = a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{6}}$.

Ví dụ 3: Cho a, b là các số thực dương. Rút gọn biểu thức $P = \dfrac{\left(\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}}$.

A. $P=ab^2$. **B.** $P=a^2b$. **C.** $P=ab$. **D.** $P=a^2b^2$.

Lời giải

$$P=\frac{\left(a^3b^2\right)^{\frac{1}{4}\cdot 4}}{\left(a^{12}b^6\right)^{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}}=\frac{a^3b^2}{a^2b}=ab.$$

Ví dụ 4: Tìm dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ của biểu thức $\sqrt[3]{a^5\sqrt[4]{a}}$ (với $a>0$).

A. $a^{\frac{7}{4}}$. **B.** $a^{\frac{1}{4}}$. **C.** $a^{\frac{4}{7}}$. **D.** $a^{\frac{1}{7}}$.

Lời giải

$\sqrt[3]{a^5\sqrt[4]{a}}=a^{\frac{5}{3}}\cdot a^{\frac{1}{12}}=a^{\frac{7}{4}}$.

Ví dụ 5: Cho biểu thức $T=\sqrt[5]{a\sqrt[3]{a}}$ với $a>0$. Viết biểu thức T dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ.

A. $a^{\frac{1}{3}}$. **B.** $a^{\frac{3}{5}}$. **C.** $a^{\frac{4}{15}}$. **D.** $a^{\frac{2}{15}}$.

Lời giải

Ta có $T=\sqrt[5]{a\sqrt[3]{a}}=\sqrt[5]{a^{\frac{4}{3}}}=a^{\frac{4}{15}}$.

Ví dụ 6: Hãy rút gọn biểu thức $A=a^{1+\sqrt{5}}\cdot a^{1-\sqrt{5}}$.

A. $A=\frac{1}{a^4}$. **B.** $A=\frac{1}{a^{-4}}$. **C.** $A=a^2$. **D.** $A=a^4$.

Lời giải

$A=a^{1+\sqrt{5}}\cdot a^{1-\sqrt{5}}=a^{1+\sqrt{5}+1-\sqrt{5}}=a^2$.

Ví dụ 7: Rút gọn biểu thức $P=\left(2-\sqrt{3}\right)^{2017}\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)^{2018}$.

A. $P=2-\sqrt{3}$. **B.** $P=1$. **C.** $P=-2-\sqrt{3}$. **D.** $P=2+\sqrt{3}$.

Lời giải

Ta có: $\left(2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)=2^2-(\sqrt{3})^2=1$.

Do đó: $P=\left(2-\sqrt{3}\right)^{2017}\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)^{2018}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-2017}\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)^{2018}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-2017+2018}=2+\sqrt{3}$.

Ví dụ 8: Tính giá trị biểu thức $A=\frac{6^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}}\cdot 3^{1+\sqrt{5}}}$.

A. 1. **B.** $6^{-\sqrt{5}}$. **C.** 18. **D.** 9.

Lời giải

Ta có $A=\frac{6^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}}\cdot 3^{1+\sqrt{5}}}=\frac{2^{3+\sqrt{5}}\cdot 3^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}}\cdot 3^{1+\sqrt{5}}}=2\cdot 3^2=18$.

Ví dụ 9: Cho x là số thực dương và $P=\left(\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}\right)^5$. Biết rằng P được biểu diễn dưới dạng $P=x^{\frac{m}{n}}$ với $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản và m,n là các số nguyên dương. Tính $m+n$.

A. $m+n=21$. **B.** $m+n=25$. **C.** $m+n=29$. **D.** $m+n=31$.

Lời giải

$P=\left(\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}\right)^5=\left(x^2\sqrt{x}\right)^{\frac{5}{3}}=x^{\frac{10}{3}}x^{\frac{5}{6}}=x^{\frac{25}{6}}\Rightarrow m+n=25+6=31.$

Ví dụ 10: Rút gọn biểu thức $A=\frac{a-3a^{\frac{1}{3}}+2}{\sqrt[3]{a}-1}+\frac{\sqrt{a}-a^{\frac{5}{6}}+\sqrt[6]{a}}{\sqrt[6]{a}}$.

A. $A=2\sqrt{a}-1$. **B.** $A=2a-1$. **C.** $A=2\sqrt[6]{a}-1$. **D.** $A=2\sqrt[3]{a}-1$.

Lời giải

Ta có

$$A=\frac{a-3a^{\frac{1}{3}}+2}{\sqrt[3]{a}-1}+\frac{\sqrt{a}-a^{\frac{5}{6}}+\sqrt[6]{a}}{\sqrt[6]{a}}=\frac{\left(\sqrt[3]{a}-1\right)\left(a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{a}-2\right)}{\sqrt[3]{a}-1}+\frac{\sqrt[6]{a}\left(\sqrt[3]{a}-a^{\frac{2}{3}}+1\right)}{\sqrt[6]{a}}$$

$$=a^{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{a}-2+\sqrt[3]{a}-a^{\frac{2}{3}}+1=2\sqrt[3]{a}-1.$$

Ví dụ 11: Cho $9^x+9^{-x}=14$; $\frac{6+3\left(3^x+3^{-x}\right)}{2-3^{x+1}-3^{1-x}}=\frac{a}{b}$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $P=a\cdot b$.

A. $P=10$. **B.** $P=-10$. **C.** $P=-45$. **D.** $P=45$.

Lời giải

$9^x+9^{-x}=14\Leftrightarrow\left(3^x+3^{-x}\right)^2=16\Rightarrow 3^x+3^{-x}=4$

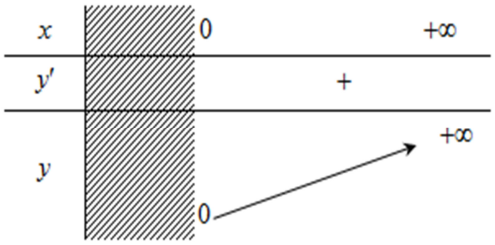
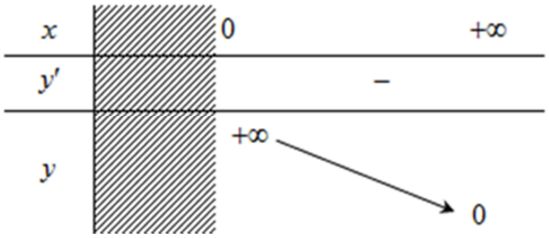
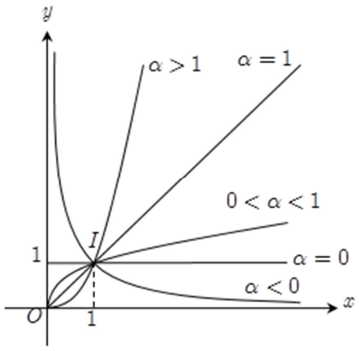
$\frac{6+3\left(3^x+3^{-x}\right)}{2-3^{x+1}-3^{1-x}}=\frac{6+3\cdot 4}{2-3\cdot 4}=\frac{18}{-10}=\frac{9}{-5}$. Vậy $P=a\cdot b=-45$.

Vấn đề 2. HÀM SỐ LUỸ THỪA

◈ ĐỊNH NGHĨA VỀ HÀM SỐ LUỸ THỪA

1. Định nghĩa: Hàm số $y=x^{\alpha}$, với $\alpha\in\mathbb{R}$, được gọi là hàm số lũy thừa.
2. Tập xác định: Có 3 trường hợp về TXĐ
   ① $D=\mathbb{R}$ nếu α là số nguyên dương.
   ② $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ với α nguyên âm hoặc bằng 0
   ③ $D=(0;+\infty)$ với α không nguyên.
3. Đạo hàm: Hàm số $y=x^{\alpha}$, $(\alpha\in\mathbb{R})$ có đạo hàm với mọi $x>0$ và $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha.x^{\alpha-1}$.

◈ TÍNH CHẤT CỦA HÀM SỐ LUỸ THỪA

$y=x^{\alpha},\ \alpha>0$	$y=x^{\alpha},\ \alpha<0$
◆ Tập khảo sát: $(0;+\infty)$	Tập khảo sát: $(0;+\infty)$
◆ Sự biến thiên: $y'=\alpha x^{\alpha-1}>0,\ \forall x>0.$ Giới hạn đặc biệt: $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\alpha}=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}x^{\alpha}=+\infty.$ Tiệm cận: Không có	◆ Sự biến thiên: $y'=\alpha x^{\alpha-1}<0,\ \forall x>0.$ Giới hạn đặc biệt: $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\alpha}=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}x^{\alpha}=0.$ Tiệm cận: Trục Ox là tiệm cận ngang. Trục Oy là tiệm cận đứng.
◆ Bảng biến thiên: Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ 	◆ Bảng biến thiên: Hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$ 
◆ **Đồ thị:** 	Đồ thị của hàm số lũy thừa $y=x^{\alpha}$ luôn đi qua điểm $I(1;1)$ **<u>Lưu ý</u>:** Khi khảo sát hàm số lũy thừa với số mũ cụ thể, ta phải xét hàm số đó trên toàn bộ tập xác định của nó. Chẳng hạn: ◈ Hàm số $y=x^{3}$ ta xét trên $\mathbb{R}$. ◈ Hàm số $y=x^{-2}$ ta xét trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. ◈ Hàm số $y=x^{\pi}$ ta xét trên $(0;+\infty)$.

VÍ DỤ MINH HOẠ

Dạng 1 TÌM TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ LUỸ THỪA

Ghi nhớ

Xét hàm số $y=\left[f(x)\right]^{\alpha}$:

① Khi α **nguyên dương**: hàm số xác định khi và chỉ khi $f(x)$ xác định.

② Khi α **nguyên âm**: hàm số xác định khi và chỉ khi $f(x)$ xác định và $f(x)\neq 0$.

③ Khi α **không nguyên**: hàm số xác định khi và chỉ khi $f(x)$ xác định và $f(x)>0$.

Lưu ý: Theo định nghĩa, đẳng thức $\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$ chỉ xảy ra nếu $x>0$. Do đó hàm số $y=x^{\frac{1}{n}}$ không đồng nhất với hàm số $y=\sqrt[n]{x}\ (n\in\mathbb{N}^*)$.

Như vậy, cần nhớ lại:

$y=\sqrt[2n]{f(x)},(n\in\mathbb{N}^*)$: Hàm số xác định khi và chỉ khi $f(x)$ xác định và $f(x)\geq 0$.

$y=\sqrt[2n+1]{f(x)},(n\in\mathbb{N}^*)$: Hàm số xác định khi $f(x)$ xác định.

Ví dụ 1: Với x là số thực tuỳ ý, xét các mệnh đề sau

1) $x^n=\underbrace{x.x.\cdots.x}_{n\text{ so}}\ (n\in\mathbb{N},n\geq 1)$ 2) $(2x-1)^0=1$

3) $(4x+1)^{-2}=\dfrac{1}{(4x+1)^2}$ 4) $(x-1)^{\frac{1}{3}}+(5-x)^{\frac{1}{2}}=2\Leftrightarrow\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{5-x}=2$

Số mệnh đề đúng là

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Ta thấy $x^n=\underbrace{x.x.\cdots.x}_{n\text{ so}}\ (n\in\mathbb{N},n\geq 1)$ là mệnh đề đúng.

Ta thấy $(2x-1)^0=1$ là mệnh đề sai vì phải có thêm điều kiện $2x-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq\dfrac{1}{2}$.

Ta thấy $(4x+1)^{-2}=\dfrac{1}{(4x+1)^2}$ là mệnh đề sai vì phải có thêm điều kiện $4x+1\neq 0\Leftrightarrow x\neq-\dfrac{1}{4}$

Ta thấy $(x-1)^{\frac{1}{3}}+(5-x)^{\frac{1}{2}}=2\Leftrightarrow\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{5-x}=2$ là mệnh đề sai vì phải có thêm điều kiện $\begin{cases}x-1>0\\5-x>0\end{cases}\Leftrightarrow 1<x<5$. Vậy chỉ có 1 mệnh đề đúng.

Ví dụ 2: Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y=\left(x^2-1\right)^{-2}$.

A. $\mathcal{D}=\mathbb{R}$. **B.** $\mathcal{D}=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

C. $\mathcal{D}=(-1;1)$. **D.** $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$.

Lời giải

Hàm số $y=\left(x^2-1\right)^{-2}$ có số mũ là số nguyên âm nên xác định khi $x^2-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq\pm 1$.

Vậy $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$ là tập xác định của hàm số đã cho.

Ví dụ 3: Tập xác định của hàm số $y=\left(x^2+x-12\right)^{-3}$ là

A. $\mathcal{D}=(-4;3)$. **B.** $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{-4;3\}$.

C. $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus(-4;3)$. **D.** $\mathcal{D}=(-\infty;-4)\cup(3;+\infty)$.

Lời giải

Do số mũ là số nguyên âm nên ta có điều kiện $x^2+x-12\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -4\\ x\neq 3\end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{-4;3\}$.

Ví dụ 4: Hàm số $y=(4x^2-1)^{-4}$ có tập xác định là

A. $\mathcal{D}=[0;+\infty)$. **B.** $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$. **C.** $\mathcal{D}=\mathbb{R}$. **D.** $\mathcal{D}=\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Điều kiện: $4x^2-1\neq 0\Leftrightarrow x\neq\pm\frac{1}{2}$ nên tập xác định của hàm số là $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$.

Ví dụ 5: Tập xác định của hàm số $y=x^{(\sin 2020\pi)}$ là

A. $D=\mathbb{R}$. **B.** $D=(0;+\infty)$. **C.** $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **D.** $D=[0;+\infty)$.

Lời giải

Ta có $y=x^{(\sin 2020\pi)}=x^0$ nên tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Ví dụ 6: Tìm tập xác định $\mathcal{D}$ của hàm số $y=x^{2\pi-3}$.

A. $\mathcal{D}=\mathbb{R}$. **B.** $\mathcal{D}=(0;+\infty)$. **C.** $\mathcal{D}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **D.** $\mathcal{D}=[0;+\infty)$.

Lời giải

Hàm số $y=x^{2\pi-3}$ có số mũ không nguyên nên xác định khi $x>0$.

Vậy tập xác định $\mathcal{D}=(0;+\infty)$.

Ví dụ 7: Tập xác định của hàm số $y=(2-x)^{\sqrt{3}}$ là

A. $\mathcal{D}=[2;+\infty)$. **B.** $\mathcal{D}=(2;+\infty)$. **C.** $\mathcal{D}=(-\infty;2)$. **D.** $\mathcal{D}=(-\infty;2]$.

Lời giải

Hàm số $y=(2-x)^{\sqrt{3}}$ có số mũ không nguyên nên xác định khi $2-x>0\Leftrightarrow x<2$.

Vậy tập xác định là $\mathcal{D}=(-\infty;2)$.

Ví dụ 8: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt[4]{25-x^2}-3\sqrt[3]{2x^2-5x+2}-(x^2-1)^{\frac{\pi}{2}}-2x^2$.

A. $D=(-5;-1)\cup(1;5)$. **B.** $D=[-5;-1)\cup(1;5]$.

C. $D=[-5;5]$. **D.** $D=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

Lời giải

Hàm số xác định khi $\begin{cases}25-x^2\geq 0\\ x^2-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-5\leq x\leq 5\\ \left[\begin{array}{l}x>1\\ x<-1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1<x\leq 5\\ -5\leq x<-1\end{array}\right.$

Vậy tập xác định là $D=[-5;-1)\cup(1;5]$.

Ví dụ 9: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{x^2+6x+17}-(x^2-4x+3)^{\sqrt{5}+6}+(1+x)^{-2020}-2x+1$.

A. $D=(-\infty;1)\cup(3;+\infty)\setminus\{-1\}$. **B.** $D=(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$.

C. $D=(1;3)$. **D.** $D=[1;3]$.

Lời giải

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x^2+6x+17\ge 0 \\ x^2-4x+3>0 \\ x+1\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<1 \end{array}\right. \\ x\ne -1 \end{cases}$

Vậy tập xác định là $D=(-\infty;1)\cup(3;+\infty)\setminus\{-1\}$.

Ví dụ 10: Tìm tập xác định D của hàm số $y=3\left(25-x^2\right)^{1+\sqrt{18}}-\left(\dfrac{x+3}{x-3}\right)^{-2020}$.

A. $D=(-5;5)\setminus\{3\}$. **B.** $D=(-5;5)\setminus\{\pm 3\}$. **C.** $D=[-5;5]$. **D.** $D=(-5;5)\setminus\{-3\}$.

Lời giải

Hàm số xác định khi $\begin{cases} 25-x^2>0 \\ \dfrac{x+3}{x-3}\ne 0 \\ x-3\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5<x<5 \\ x\ne \pm 3 \end{cases}$. Vậy tập xác định là $D=(-5;5)\setminus\{\pm 3\}$.

Dạng 2 ĐẠO HÀM VÀ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ LUỸ THỪA

Ví dụ 1: Tìm tập xác định và tính đạo hàm của các hàm số sau.

a) $y=x^9$ b) $y=x^{-4}$

c) $y=(x-1)^{\frac{1}{3}}$ d) $y=\left(3-x^2\right)^{-\frac{4}{3}}$

Lời giải

a) TXĐ: $D=\mathbb{R}$. $y'=9x^8$.

b) TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. $y'=-4x^{-5}=-\dfrac{4}{x^5}$.

c) TXĐ: $D=(1;+\infty)$. $y'=\dfrac{1}{3}(x-1)'.(x-1)^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

d) TXĐ: $D=\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$. $y'=-\dfrac{4}{3}\left(3-x^2\right)'.\left(3-x^2\right)^{-\frac{7}{3}}=\dfrac{8x}{3\sqrt[3]{\left(3-x^2\right)^7}}$.

Ví dụ 2: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y=(x+1)^{\frac{3}{2}}$ trên $[3;15]$. b) $y=(4-3x)^{\frac{5}{2}}$ trên $[0;1]$

Lời giải

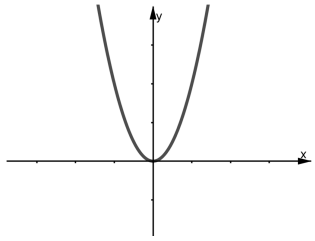
a) $y'=\dfrac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}=\dfrac{3}{2}\sqrt{x+1}>0,\ \forall x\in[3;15] \Rightarrow$ hàm số luôn ĐB trên $[3;15]$.

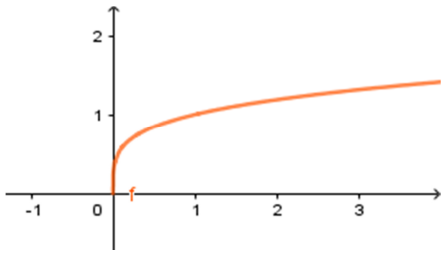
Vậy $\min\limits_{[3;15]} y=y(3)=8$ và $\max\limits_{[3;15]} y=y(15)=64$.

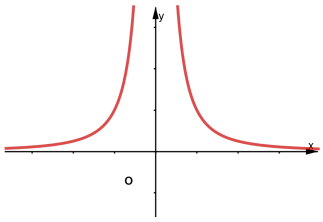
b) $y'=\dfrac{5}{2}(4-3x)'.(4-3x)^{\frac{3}{2}}=-\dfrac{15}{2}\sqrt{(4-3x)^3}<0,\ \forall x\in[0;1] \Rightarrow$ hàm số luôn NB trên $[0;1]$.

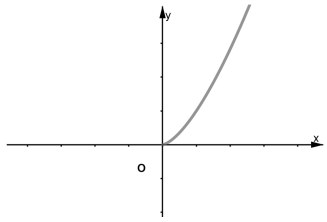
Vậy $\min\limits_{[0;1]} y=y(1)=1$ và $\max\limits_{[0;1]} y=y(0)=32$.

Ví dụ 3: Trong các đồ thị dưới đây, đồ thị nào là đồ thị của hàm số $y=x^{\frac{1}{4}}$?

A. 

B. 

C. 

D. 

Lời giải

Hàm số đã cho có tập xác định $D=(0;+\infty)$ nên loại đáp án A và C.

Vì $\frac{1}{4}<1$ nên chọn đáp án B.

Ví dụ 4: Đồ thị hàm số $y=x^{\frac{1}{4}}$ cắt đường thẳng $y=2x$ tại một điểm. Tìm tọa độ điểm giao điểm đó.

A. $A\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. **B.** $A\left(\frac{1}{2\sqrt[3]{2}};\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$. **C.** $A\left(\frac{1}{2\sqrt[4]{2}};\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$. **D.** $A\left(\frac{1}{2\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm

$$x^{\frac{1}{4}}=2x\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x=16x^4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x\left(1-16x^3\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}.$$

Vậy tọa độ giao điểm là $A\left(\frac{1}{2\sqrt[3]{2}};\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$.

Ví dụ 5: Cho α là một số thực và hàm số $y=\frac{1}{x^{\frac{2\alpha-1}{\alpha}}}$ đồng biến trên $(0;+\infty)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\alpha<1$. **B.** $0<\alpha<\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}<\alpha<1$. **D.** $\alpha>1$.

Lời giải

$y=x^{\frac{1-2\alpha}{\alpha}}\Rightarrow y'=\frac{1-2\alpha}{\alpha}.x^{\frac{1-3\alpha}{\alpha}}$.

Theo giả thiết, hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên

$$y'>0,\forall x\in(0;+\infty)\Rightarrow\frac{1-2\alpha}{\alpha}>0\Leftrightarrow 0<\alpha<\frac{1}{2}$$

Ví dụ 6: Cho hàm số $(C):y=x^{\frac{\pi}{2}}$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M_0 có hoành độ $x_0=1$

A. $y=\frac{\pi}{2}x+1$. **B.** $y=\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{2}+1$. **C.** $y=\pi x-\pi+1$. **D.** $y=-\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{2}+1$

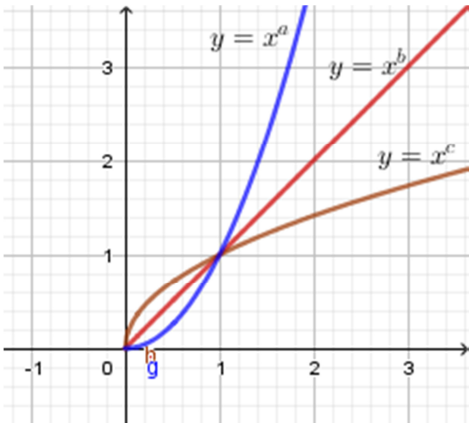
Lời giải

TXĐ: $D=(0;+\infty)$. $y'=\frac{\pi}{2}x^{\frac{\pi}{2}-1} \Rightarrow y'(x_0)=y'(1)=\frac{\pi}{2}$ và $y_0=y(1)=1$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M_0 có dạng:

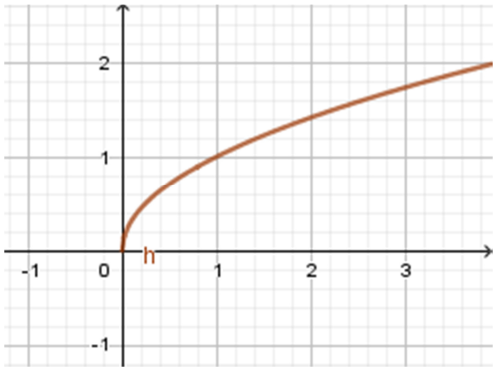
$y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0 \Leftrightarrow y=\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{2}+1$.

Ví dụ 7: Hình vẽ dưới đây là đồ thị các hàm số $y=x^a, y=x^b, y=x^c$ trên miền $(0;+\infty)$. Hỏi trong các số a,b,c số nào nhận giá trị trong khoảng $(0;1)$?



A. Số b. **B.** Số a và số c. **C.** Số c. **D.** Số a.

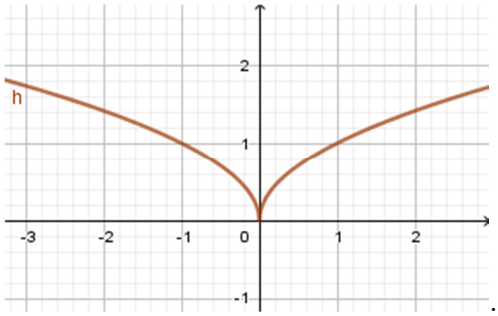
Hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số $y=x^{\frac{1}{2}}$.



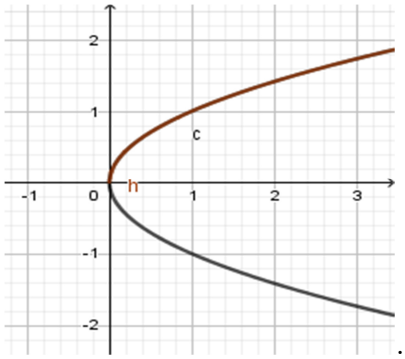
Sử dụng hình vẽ trên để trả lời 3 câu hỏi bên dưới.

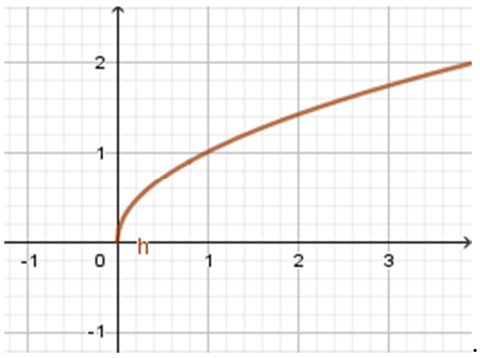
Ví dụ 8: Hỏi đồ thị của hàm số $y=|x|^{\frac{1}{2}}$ là hình nào?

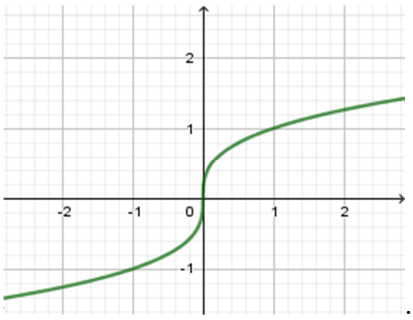
A.



B.



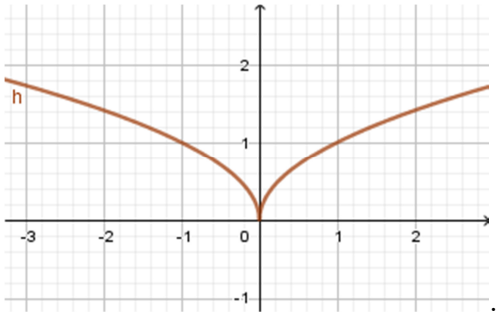
C. 

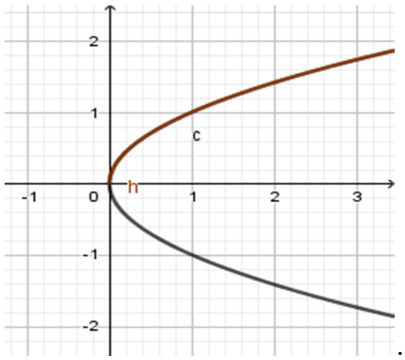
D. 

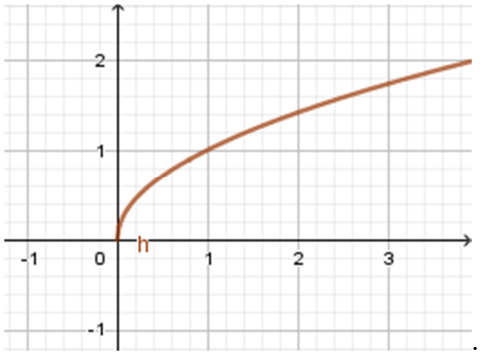
Lời giải

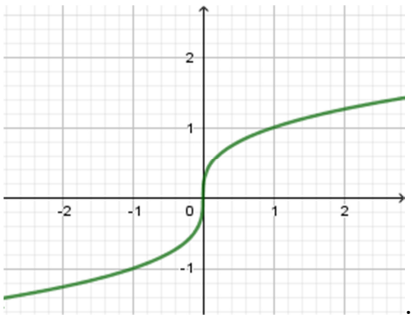
Đồ thị của hàm số $y=\left|x\right|^{\frac{1}{2}}$ là hình ở đáp án A.

Ví dụ 9: Hỏi đồ thị của hàm số $y=\left|x^{\frac{1}{2}}\right|$ là hình nào?

A. 

B. 

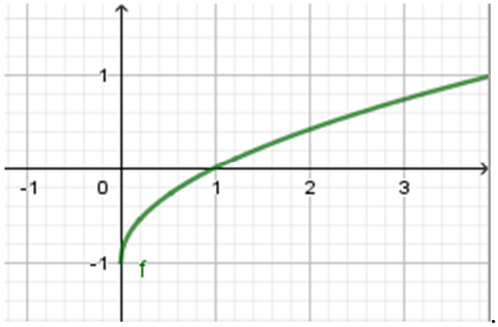
C. 

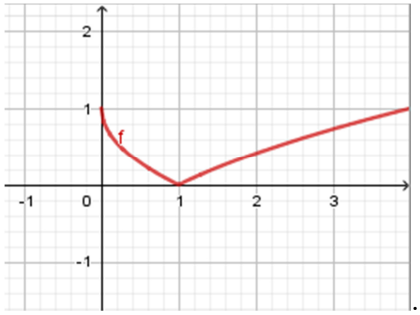
D. 

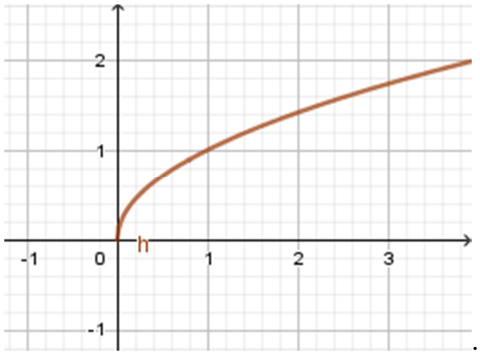
Lời giải

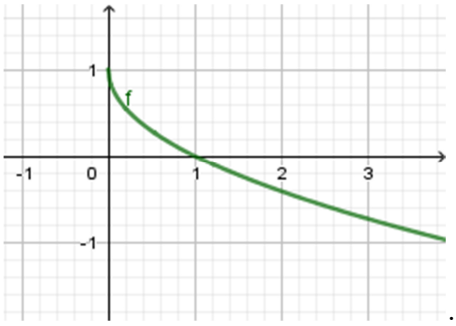
Đồ thị của hàm số $y=\left|x^{\frac{1}{2}}\right|$ là hình ở đáp án C.

Ví dụ 10: Hỏi đồ thị của hàm số $y=\left|x^{\frac{1}{2}}-1\right|$ là hình nào?

A. 

B. 

C. 

D. 

Lời giải

Đồ thị của hàm số $y=\left|x^{\frac{1}{2}}-1\right|$ là hình ở đáp án B.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Vấn đề 1. LUỸ THỪA

Câu 1: Cho x, y là hai số thực dương và m, n là hai số thực tùy ý. Đẳng thức nào sau đây là **sai**?

A. $x^m.x^n = x^{m+n}$ **B.** $(xy)^n = x^n.y^n$ **C.** $(x^n)^m = x^{nm}$ **D.** $x^m.y^n = (xy)^{m+n}$

Câu 2: Nếu m là số nguyên dương, biểu thức nào theo sau đây **không bằng** với $(2^4)^m$?

A. 4^{2m} **B.** $2^m.(2^{3m})$ **C.** $4^m.(2^m)$ **D.** 2^{4m}

Câu 3: Cho $a>0; b>0; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Hãy chọn công thức đúng trong các công thức sau

A. $a^{\alpha+\beta} = a^\alpha.a^\beta$ **B.** $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = a^\alpha - b^\alpha$ **C.** $(ab)^\alpha = a^\alpha + b^\alpha$ **D.** $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha+\beta}$

Câu 4: Biểu thức $\sqrt{x}.\sqrt[3]{x}.\sqrt[6]{x^5}, (x>0)$ viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ là

A. $x^{\frac{5}{3}}$ **B.** $x^{\frac{7}{3}}$ **C.** $x^{\frac{5}{2}}$ **D.** $x^{\frac{1}{3}}$

Câu 5: Giá trị của biểu thức $A = \dfrac{\left(2^{2\sqrt{3}}-1\right)\left(2^{\sqrt{3}}+2^{2\sqrt{3}}+2^{3\sqrt{3}}\right)}{2^{4\sqrt{3}}-2^{\sqrt{3}}}$ là

A. 1 **B.** $2^{\sqrt{3}}+1$ **C.** $2^{\sqrt{3}}-1$ **D.** -1

Câu 6: Cho $a=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}; b=\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}$. Giá trị của biểu thức $A=(a+1)^{-1}+(b+1)^{-1}$ là

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 7: Trục căn thức ở mẫu biểu thức $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}$ ta được

A. $\dfrac{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}}{3}$ **B.** $\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{2}$ **C.** $\sqrt[3]{75}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{4}$ **D.** $\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{4}$

Câu 8: Rút gọn $\dfrac{\left(\sqrt[4]{a^3.b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}.b^6}}}$ ta được

A. a^2b **B.** ab^2 **C.** a^2b^2 **D.** ab

Câu 9: Rút gọn $\left(a^{\frac{2}{3}}+1\right)\left(a^{\frac{4}{9}}+a^{\frac{2}{9}}+1\right)\left(a^{\frac{2}{9}}-1\right)$ ta được

A. $a^{\frac{1}{3}}+1$ **B.** $a^{\frac{4}{3}}+1$ **C.** $a^{\frac{4}{3}}-1$ **D.** $a^{\frac{1}{3}}-1$

Câu 10: Rút gọn $a^{-2\sqrt{2}}.\left(\dfrac{1}{a^{-\sqrt{2}-1}}\right)^{\sqrt{2}+1}$ ta được

A. a^3 **B.** a^2 **C.** a **D.** a^4

Câu 11: Rút gọn biểu thức $T=\left(\dfrac{a+b}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}-\sqrt[3]{ab}\right):\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2$

A. 2 **B.** 1 **C.** 3 **D.** -1

Câu 12: Kết quả $a^{\frac{5}{2}}$ $(a>0)$ là biểu thức rút gọn của biểu thức nào sau đây ?

A. $\sqrt{a}.\sqrt[5]{a}$ **B.** $\dfrac{\sqrt[3]{a^7}.\sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}$ **C.** $a^5.\sqrt{a}$ **D.** $\dfrac{\sqrt[4]{a^5}}{\sqrt{a}}$

Câu 13: Rút gọn $A=\dfrac{a^{\frac{4}{3}}-8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}}.\left(1-2\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right)^{-1}-a^{\frac{2}{3}}$ được kết quả

A. 1 **B.** $a+b$ **C.** 0 **D.** $2a-b$

Câu 14: Với $a,b>0$ và giá trị biểu thức $A=\left(\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{a-b}-\dfrac{a-b}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}\right).\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}$ là

A. 1 **B.** -1 **C.** 2 **D.** -3

Câu 15: Với $a,b>0$ và $a\neq b\neq 1$, rút gọn biểu thức $B=\dfrac{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{9}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{5}{4}}}-\dfrac{b^{-\frac{1}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}}}$ ta được

A. 2 **B.** $a-b$ **C.** $a+b$ **D.** a^2+b^2

Câu 16: Với $a,b>0$ và $a\neq b\neq 1$, rút gọn biểu thức $B=\dfrac{a^{\frac{7}{3}}-a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+a^{\frac{1}{3}}}-\dfrac{b^{\frac{5}{3}}-b^{-\frac{1}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}+b^{-\frac{1}{3}}}$ ta được

A. 2 **B.** $a-b$ **C.** $a+b$ **D.** a^2+b^2

Câu 17: Với $0<a\neq 1$, rút gọn biểu thức $M=\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+2}{a+2a^{\frac{1}{2}}+1}-\dfrac{a^{\frac{1}{2}}-2}{a-1}\right).\dfrac{a^{\frac{1}{2}}+1}{a^{\frac{1}{2}}}$ ta được

A. $3\sqrt{a}$ **B.** $\dfrac{a-1}{2}$ **C.** $\dfrac{2}{a-1}$ **D.** $3\left(\sqrt{a}-1\right)$

Câu 18: Nếu $\dfrac{1}{2}\left(a^{\alpha}+a^{-\alpha}\right)=1$ thì giá trị của α là

A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 0

Câu 19: Rút gọn biểu thức $K=\left(\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}+1\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right)$ ta được

A. x^2+1 **B.** x^2+x+1. **C.** x^2-x+1 **D.** x^2-1

Câu 20: Rút gọn biểu thức $x^{\pi}\sqrt[4]{x^2:x^{4\pi}}$ $(x>0)$, ta được

A. $\sqrt[4]{x}$ **B.** $\sqrt[3]{x}$ **C.** $\sqrt{x}$ **D.** $x^{\frac{\pi}{2}}$

Câu 21: Biểu thức $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}}$ $(x>0)$ được viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ là

A. $x^{\frac{31}{32}}$ **B.** $x^{\frac{15}{8}}$ **C.** $x^{\frac{7}{8}}$ **D.** $x^{\frac{15}{16}}$

Câu 22: Rút gọn biểu thức: $A=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}:x^{\frac{11}{16}},(x>0)$ ta được

A. $\sqrt[8]{x}$ **B.** $\sqrt[6]{x}$ **C.** $\sqrt[4]{x}$ **D.** $\sqrt{x}$

Câu 23: Cho $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[6]{x}}$. Khi đó $f\left(\dfrac{13}{10}\right)$ bằng

A. 1 **B.** $\dfrac{11}{10}$ **C.** $\dfrac{13}{10}$ **D.** 4

Câu 24: Mệnh đề nào sau đây là đúng ?

A. $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^4<\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^5$ **B.** $\left(\sqrt{11}-\sqrt{2}\right)^6>\left(\sqrt{11}-\sqrt{2}\right)^7$

C. $\left(2-\sqrt{2}\right)^3<\left(2-\sqrt{2}\right)^4$ **D.** $\left(4-\sqrt{2}\right)^3<\left(4-\sqrt{2}\right)^4$

Câu 25: Trong các kết luận sau, những kết luận nào **sai**?

I. $\sqrt{17}>\sqrt[3]{28}$ II. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}}>\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}$ III. $4^{\sqrt{5}}<4^{\sqrt{7}}$ IV. $\sqrt[4]{13}<\sqrt[5]{23}$

A. II và III **B.** III **C.** I **D.** II và IV

Câu 26: Cho $a>1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng ?

A. $a^{-\sqrt{3}}>\frac{1}{a^{\sqrt{5}}}$ **B.** $a^{\frac{1}{3}}>\sqrt{a}$ **C.** $\frac{1}{a^{2016}}<\frac{1}{a^{2017}}$ **D.** $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{a}>1$

Câu 27: Cho $a,\ b>0$ thỏa mãn: $a^{\frac{1}{2}}>a^{\frac{1}{3}},\ b^{\frac{2}{3}}>b^{\frac{3}{4}}$. Khi đó

A. $a>1,\ b>1$ **B.** $a>1,\ 0<b<1$ **C.** $0<a<1,\ b>1$ **D.** $0<a<1,\ 0<b<1$

Câu 28: Biết $(a-1)^{-2\sqrt{3}}>(a-1)^{-3\sqrt{2}}$. Khi đó ta có thể kết luận về a là

A. $a>2$ **B.** $a>1$ **C.** $1<a<2$ **D.** $0<a<1$

Câu 29: Cho 2 số thực $a,\ b$ thỏa mãn $a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ b\neq 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a^m>a^n\Leftrightarrow m>n$ **B.** $a^m<a^n\Leftrightarrow m<n$ **C.** $\begin{cases}a<b\\n>0\end{cases}\Rightarrow a^n<b^n$ **D.** $\begin{cases}a<b\\n<0\end{cases}\Rightarrow a^n<b^n$

Câu 30: Cho $P=x\sqrt[5]{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}},x>0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $P=x^{\frac{2}{3}}$ **B.** $P=x^{\frac{3}{10}}$ **C.** $P=x^{\frac{13}{10}}$ **D.** $P=x^{\frac{1}{2}}$

Câu 31: Cho biểu thức $P=\sqrt[4]{x.\sqrt[3]{x^2.\sqrt{x^3}}},x>0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $P=x^{\frac{1}{2}}$ **B.** $P=x^{\frac{13}{24}}$ **C.** $P=x^{\frac{1}{4}}$ **D.** $P=x^{\frac{2}{3}}$

Câu 32: Rút gọn $P=\frac{x^{\frac{7}{6}}y+xy^{\frac{7}{6}}}{\sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y}}\ (x,y>0)$ ta được

A. $P=x+y$ **B.** $P=\sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y}$ **C.** $P=xy$ **D.** $P=\sqrt[6]{xy}$

Câu 33: Rút gọn biểu thức $P=\frac{a^{-n}+b^{-n}}{a^{-n}-b^{-n}}-\frac{a^{-n}-b^{-n}}{a^{-n}+b^{-n}}\ (ab\neq 0,\ a\neq\pm b)$ là

A. $P=\frac{a^nb^n}{b^{2n}-a^{2n}}$ **B.** $P=\frac{2a^nb^n}{b^{2n}-a^{2n}}$ **C.** $P=\frac{3a^nb^n}{b^{2n}-a^{2n}}$ **D.** $P=\frac{4a^nb^n}{b^{2n}-a^{2n}}$

Câu 34: Cho $a\neq 0;\ a\neq\pm 1$. Rút gọn biểu thức $P=\left(\frac{a\sqrt{2}}{\left(1+a^2\right)^{-1}}-\frac{2\sqrt{2}}{a^{-1}}\right):\frac{1-a^{-2}}{a^{-3}}$ ta được

A. $\sqrt{2}$ **B.** $\sqrt{2a}$ **C.** a **D.** $\frac{1}{a}$

Câu 35: Cho $P=\left(2a^{\frac{1}{4}}-3b^{\frac{1}{4}}\right).\left(2a^{\frac{1}{4}}+3b^{\frac{1}{4}}\right).\left(4a^{\frac{1}{2}}+9b^{\frac{1}{2}}\right)$ với a và b là các số thực dương. Biểu thức thu gọn của biểu thức P có dạng là $P=xa+yb$, với $x;y\in\mathbb{Z}$. Biểu thức liên hệ giữa x và y là

A. $x+y=97$ **B.** $x+y=-65$ **C.** $x-y=56$ **D.** $y-x=-97$

Câu 36: Cho các số thực dương phân biệt a và b. Biểu thức thu gọn của biểu thức $P=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}-\frac{\sqrt{4a}+\sqrt[4]{16ab}}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$ có dạng $P=m\sqrt[4]{a}+n\sqrt[4]{b}$, với $m;n\in\mathbb{Z}$. Khi đó biểu thức liên hệ giữa m và n là

A. $2m-n=-3$ **B.** $m+n=-2$ **C.** $m-n=0$ **D.** $m+3n=-1$

Câu 37: **(THPT Lý Thái Tổ - Bắc Ninh - 2018)** Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\left(\frac{3}{4}\right)^5 < \left(\frac{3}{4}\right)^6$. **B.** $\left(\frac{4}{3}\right)^{-7} > \left(\frac{4}{3}\right)^{-6}$. **C.** $\left(\frac{3}{2}\right)^6 > \left(\frac{3}{2}\right)^7$. **D.** $\left(\frac{2}{3}\right)^{-6} > \left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$.

Câu 38: **(THPT Chuyên Lê Hồng Phong – Nam Định - Lần 1 - 2018)** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $2^{\sqrt{2}+1} > 2^{\sqrt{3}}$. **B.** $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2019} < \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018}$.

C. $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2017} > \left(\sqrt{2}-1\right)^{2018}$. **D.** $\left(\sqrt{3}-1\right)^{2018} > \left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}$.

Câu 39: **(SGD - Nam Định - Lần 1 - 2018)** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?

A. $\left(\sqrt{2}-1\right)^{2017} > \left(\sqrt{2}-1\right)^{2018}$. **B.** $\left(\sqrt{3}-1\right)^{2018} > \left(\sqrt{3}-1\right)^{2017}$.

C. $2^{\sqrt{2}+1} > 2^{\sqrt{3}}$. **D.** $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2018} < \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2017}$.

Câu 40: **(THPT Vân Nội - Hà Nội – HK1 - 2018)** Cho số thực a thỏa mãn điều kiện $(a+1)^{-\frac{2}{3}} < (a+1)^{-\frac{1}{3}}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a<0$. **B.** $0<a<1$. **C.** $a>0$. **D.** $-1<a<0$.

Vấn đề 2. HÀM SỐ LUỸ THỪA

Dạng 1 TÌM TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ LUỸ THỪA

Câu 1: Tìm tập xác định D của hàm số $y=x^m$, với m là một số nguyên dương.

A. $D=\mathbb{R}$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **C.** $D=(-\infty;0)$. **D.** $D=(0;+\infty)$.

Câu 2: Tìm tập xác định D của hàm số $y=x^n$, với n là một số nguyên âm.

A. $D=\mathbb{R}$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **C.** $D=(-\infty;0)$. **D.** $D=(0;+\infty)$.

Câu 3: Tìm tập xác định D của hàm số $y=x^\alpha$, với α không nguyên.

A. $D=\mathbb{R}$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **C.** $D=(-\infty;0)$. **D.** $D=(0;+\infty)$.

Câu 4: Tìm điều kiện của x để hàm số $y=x^{-2020}$ có nghĩa.

A. $x\in\mathbb{R}$. **B.** $x\neq 0$. **C.** $x<0$. **D.** $x>0$.

Câu 5: Tìm điều kiện của để hàm số $y=x^{\pi+1}$ có nghĩa.

A. $x\in\mathbb{R}$. **B.** $x\neq 0$. **C.** $x<0$. **D.** $x>0$.

Câu 6: Tìm điều kiện của x để hàm số $y=x^{\frac{2}{5}}$ có nghĩa.

A. $x\in\mathbb{R}$. **B.** $x\neq 0$. **C.** $x<0$. **D.** $x>0$.

Câu 7: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{x}$.

A. $D=\mathbb{R}$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **C.** $D=[0;+\infty)$. **D.** $D=(0;+\infty)$.

Câu 8: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt[5]{x}$.

A. $D=\mathbb{R}$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **C.** $D=[0;+\infty)$. **D.** $D=(0;+\infty)$.

Câu 9: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt[4]{x}+1$.

A. $D=\mathbb{R}$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **C.** $D=[0;+\infty)$. **D.** $D=(0;+\infty)$.

Câu 10: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt[3]{x}+x-1$.

A. $D=\mathbb{R}$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **C.** $D=[0;+\infty)$. **D.** $D=(1;+\infty)$.

Câu 11: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\left(1+x-x^2\right)^m$, với m là một số nguyên dương.

A. $D=\mathbb{R}$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **C.** $D=(-\infty;0)$. **D.** $D=(0;+\infty)$.

Câu 12: Tìm tập xác định D của hàm số $y=(2x-4)^{-2020}$.

A. $D=\mathbb{R}$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **C.** $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **D.** $D=(2;+\infty)$.

Câu 13: Tìm tập xác định D của hàm số $y=(1-2x)^{\sqrt{3}-1}$.

A. $D=\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$. **C.** $D=\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $D=(0;+\infty)$.

Câu 14: Tìm tập xác định D của hàm số $y=(4-x)^{\frac{3}{11}}$.

A. $D=[4;+\infty)$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{4\}$. **C.** $D=(-\infty;4)$. **D.** $D=(4;+\infty)$.

Câu 15: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\left(1+x-2x^2\right)^n$, với n là một số nguyên âm.

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{1,-\frac{1}{2}\right\}$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **C.** $D=\left[-\frac{1}{2};1\right]$. **D.** $D=\left(-\frac{1}{2};1\right)$.

Câu 16: Tìm tập xác định D của hàm số $y=(9-x)^{\frac{1}{2}}$.

A. $D=(-\infty;9)$. **B.** $D=(-\infty;9]$. **C.** $D=\mathbb{R}\setminus\{9\}$. **D.** $D=(9;+\infty)$.

Câu 17: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt[3]{3x+7}$.

A. $\left(-\infty;-\frac{7}{3}\right]$. **B.** $\left[-\frac{7}{3};+\infty\right)$. **C.** $D=\left(-\frac{7}{3};+\infty\right)$. **D.** $D=\mathbb{R}$.

Câu 18: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt[4]{4x+4\pi}$.

A. $D=\mathbb{R}$. **B.** $D=[-\pi;+\infty)$. **C.** $D=(-\pi;+\infty)$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-\pi\}$.

Câu 19: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\left(2-\sqrt{x-1}\right)^{\sqrt{5}}$

A. $D=(-\infty;5)$. **B.** $D=[1;5)$. **C.** $D=[1;3)$. **D.** $D=[1;+\infty)$.

Câu 20: Tập xác định của hàm số $y=\left(x^3-27\right)^{\frac{\pi}{2}}$ là

A. $D=[3;+\infty)$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus 2$. **C.** $D=\mathbb{R}$. **D.** $D=(3;+\infty)$.

Câu 21: Tập xác định của hàm số $\left(x^2-3x+2\right)^{\pi}$

A. $\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$. **B.** $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$.

Câu 22: Tập xác định của hàm số $y=\left(4-3x-x^2\right)^{2017}$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $(-4;1)$. **C.** $(-\infty;-4)\cup(1;+\infty)$. **D.** $[-4;1]$.

Câu 23: Tập xác định của hàm số $y=(x-5)^{\sqrt{3}}$ là

A. $(-\infty;5)$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{5\}$. **C.** $[5;+\infty)$. **D.** $(5;+\infty)$.

Câu 24: Tập xác định của hàm số $y=\left(4-x^2\right)^{\frac{1}{3}}$ là

A. $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. **B.** $(-2;2)$. **C.** $(-\infty;-2)$. **D.** $m=2\pm\sqrt{3}$.

Câu 25: Tập xác định của hàm số $y=\left(x^2-2x+3\right)^{\sqrt{2}}$ là

A. $D=\mathbb{R}$. **B.** $D=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

C. $D=(0;+\infty)$. **D.** $D=(-1;3)$.

Câu 26: Tập xác định của hàm số $y=\left(x^2-1\right)^{-2}$

A. $D=\mathbb{R}$. **B.** $D=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

C. $D=(-1;1)$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$.

Câu 27: Tập xác định của hàm số $y=\left(3x-x^2\right)^{\frac{2}{3}}$ là

A. $D=\mathbb{R}$. **B.** $D=(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$.

C. $D=\mathbb{R}\setminus\{0;3\}$. **D.** $D=(0;3)$.

Câu 28: Tìm tập xác định của hàm số: $y=\left(-x^2+3x+4\right)^{\frac{1}{3}}+\sqrt{2-x}$.

A. $D=(-1;2]$. **B.** $D=[-1;2]$. **C.** $D=(-\infty;2]$. **D.** $D=(-1;2)$.

Câu 29: Tìm tập xác định của hàm số $y=(x+2)^{-2}$ là

A. $(-2;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $[-2;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Câu 30: Tìm tập xác định của hàm số $y=\left(4x^2-1\right)^{-4}$

A. $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$.

Câu 31: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\left(1-x^2\right)^{-2020}+2x-4$.

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$. **B.** $D=(-1;1)$. **C.** $D=[-1;1]$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Câu 32: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\left(1+x-2x^2\right)^{\sqrt{2}+2}+2x^2+x-3$.

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2};1\right\}$. **B.** $D=\left(-\frac{1}{2};1\right)$. **C.** $D=\left[-\frac{1}{2};1\right]$. **D.** $D=\mathbb{R}$.

Câu 33: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\left(x^2-2x+1\right)^{e+1}+x^2-3x-4$.

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **B.** $D=(-\infty;1)$. **C.** $D=(1;+\infty)$. **D.** $D=\mathbb{R}$.

Câu 34: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+x-2$.

A. $D=(-1;1)$. **B.** $D=(-\infty;-1)\cup[1;+\infty)$.

C. $D=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$. **D.** $D=(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$.

Câu 35: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{4-x^2}+\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+x+1$.

A. $D=[-2;2]$. **B.** $D=[-2;2]\setminus\{1\}$.

C. $D=(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$. **D.** $D=(-2;2)\setminus\{1\}$.

Câu 36: Tìm tập xác định D của hàm số $y=(x-2)^{\sqrt{5}}+\left(x^2-9\right)^{\frac{3}{5}}+x^2-5x-2$.

A. $D=(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$. **B.** $D=(2;+\infty)$.

C. $D=(3;+\infty)$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-3,3,2\}$.

Câu 37: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{\dfrac{x^2-3x+2}{3-x}}+(2x-5)^{\sqrt{7}+1}-3x-11$.

A. $D=\left(\dfrac{5}{2};3\right)$. **B.** $D=\left(\dfrac{5}{2};3\right]$. **C.** $D=\left(\dfrac{5}{2};+\infty\right)$. **D.** $D=(2;3)$.

Câu 38: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{25-x^2}+\sqrt[3]{x^2+3x-4}-(x^2-1)^{\pi-e}+2x-7$.

A. $D=(-5;-1)\cup(1;5)$. **B.** $D=[-5;-1)\cup(1;5]$.

C. $D=[-5;5]$. **D.** $D=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

Câu 39: Tìm tập xác định D của hàm số $y=(x^2-5x+4)^{\sqrt{2}-3}-\sqrt{x^2+3x+7}+x^{-3}+x^2-2x+1$.

A. $D=(-\infty;1)\cup(4;+\infty)\setminus\{0\}$. **B.** $D=(-\infty;1)\cup(4;+\infty)$.

C. $D=(1;4)$. **D.** $D=[1;4]$.

Câu 40: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)^{-2020}-3(16-x^2)^{1-\sqrt{8}}+3$.

A. $D=(-4;4)\setminus\{2\}$. **B.** $D=(-4;4)\setminus\{-2,2\}$.

C. $D=[-4;4]$. **D.** $D=(-4;4)\setminus\{-2\}$.

Dạng 2 ĐẠO HÀM VÀ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ LUỸ THỪA

Câu 1: Đạo hàm của hàm số $y=x^{\alpha}$ là

A. $\alpha x^{\alpha-1}$. **B.** $\alpha x^{\alpha+1}$. **C.** $\dfrac{x^{\alpha-1}}{\alpha-1}$. **D.** $\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

Câu 2: Đạo hàm của hàm số $y=[u(x)]^{\alpha}$ là

A. $\alpha[u(x)]^{\alpha-1}$. **B.** $\alpha[u(x)]^{\alpha+1}.u'(x)$. **C.** $\alpha[u(x)]^{\alpha-1}.u'(x)$. **D.** $\alpha[u(x)]^{\alpha+1}$.

Câu 3: Đạo hàm của hàm số $y=x^{-4}$ là

A. $-4x^{-3}$. **B.** $-4x^{-5}$. **C.** $-3x^{5}$. **D.** $4x^{-3}$.

Câu 4: Đạo hàm của hàm số $y=x^{-5}$ bằng

A. $y'=-\dfrac{1}{4}x^{-4}$. **B.** $y'=-5x^{-6}$. **C.** $y'=5x^{-6}$. **D.** $y'=5x^{-4}$.

Câu 5: Hàm số $y=(x-1)^{\frac{1}{3}}$ có đạo hàm là

A. $y'=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ **B.** $y'=\dfrac{1}{3\sqrt{(x-1)^3}}$ **C.** $y'=\dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{3}$ **D.** $y'=\dfrac{\sqrt{(x-1)^3}}{3}$

Câu 6: Hàm số $y=(3-x^2)^{-\frac{4}{3}}$ có đạo hàm trên khoảng $\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$ là

A. $y'=-\dfrac{4}{3}(3-x^2)^{-\frac{7}{3}}$. **B.** $y'=\dfrac{8}{3}x(3-x^2)^{-\frac{7}{3}}$.

C. $y'=-\dfrac{8}{3}x(3-x^2)^{-\frac{7}{3}}$. **D.** $y'=\dfrac{4}{3}x^2(3-x^2)^{-\frac{7}{3}}$.

Câu 7: Đạo hàm của hàm số $y=\left(x^2+3\right)^{\frac{1}{3}}$ là

A. $y'=\frac{1}{3}\left(x^2+3\right)^{-\frac{2}{3}}$. **B.** $y'=\frac{2x}{3}\left(x^2+3\right)^{-\frac{2}{3}}$.

C. $y'=2x\left(x^2+3\right)^{\frac{1}{3}}\ln\left(x^2+3\right)$. **D.** $y'=\left(x^2+3\right)^{\frac{1}{3}}\ln\left(x^3+3\right)$.

Câu 8: Đạo hàm của hàm số $y=\left(2x-1\right)^{\frac{1}{3}}$ là

A. $y'=\frac{1}{3}\left(2x-1\right)^{-\frac{2}{3}}$. **B.** $y'=\left(2x-1\right)^{\frac{1}{3}}.\ln\left|2x-1\right|$.

C. $y'=\frac{2}{3}\left(2x-1\right)^{\frac{4}{3}}$. **D.** $y'=\frac{2}{3}\left(2x-1\right)^{-\frac{2}{3}}$.

Câu 9: Đạo hàm của hàm số $y=\left(x^2+x\right)^{\alpha}$ là

A. $2\alpha\left(x^2+1\right)^{\alpha-1}$. **B.** $\alpha\left(x^2+x\right)^{\alpha-1}\left(2x+1\right)$.

C. $\alpha\left(x^2+x\right)^{\alpha+1}\left(2x+1\right)$. **D.** $\alpha\left(x^2+x\right)^{\alpha-1}$.

Câu 10: Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{4x^2-3x-1}$ là

A. $\frac{1}{2\sqrt{4x^2-3x-1}}$. **B.** $\frac{8x-3}{\sqrt{4x^2-3x-1}}$. **C.** $\frac{8x-3}{2\sqrt{4x^2-3x-1}}$. **D.** $\frac{4x-3}{2\sqrt{4x^2-3x-1}}$.

Câu 11: Tính đạo hàm của hàm số $y=\left(2x^2-3x+2\right)^{\frac{1}{3}}$.

A. $y'=\frac{4x-3}{3\sqrt[3]{\left(2x^3-3x+2\right)^2}}$. **B.** $y'=\frac{4x-3}{3\sqrt{\left(2x^3-3x+2\right)^2}}$.

C. $y'=\frac{4x-3}{3\sqrt[3]{2x^2-3x+2}}$. **D.** $y'=\frac{4x-3}{\sqrt[3]{\left(2x^3-3x+2\right)^2}}$.

Câu 12: Tính đạo hàm của hàm số $y=\left(3x^2+2x+1\right)^{\frac{4}{3}}$.

A. $y'=\frac{4}{3}\left(6x+2\right)\left(3x^2+2x+1\right)^{\frac{2}{3}}$. **B.** $y'=\frac{4}{3}\left(3x^2+2x+1\right)^{\frac{2}{3}}$.

C. $y'=\frac{4}{3}\left(6x+2\right)\left(3x^2+2x+1\right)^{\frac{1}{3}}$. **D.** $y'=\frac{4}{3}\left(3x^2+2x+1\right)^{\frac{1}{3}}$.

Câu 13: Đạo hàm của hàm số $y=\left(x^2+3\right)^{\frac{1}{2}}+2^{2017}$ là

A. $y'=x\left(x^2+3\right)^{\frac{3}{2}}$. **B.** $y'=\frac{1}{2}\left(x^2+3\right)^{-\frac{1}{2}}$. **C.** $y'=\frac{1}{2}x\left(x^2+3\right)^{-\frac{1}{2}}$. **D.** $y'=x\left(x^2+3\right)^{-\frac{1}{2}}$.

Câu 14: Cho hàm số $f\left(x\right)=\sqrt[3]{x^2+x+1}$. Giá trị của $f'\left(0\right)$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 15: Hàm số $y=\sqrt[3]{2x^2-x+1}$. Giá trị của $f'\left(0\right)$ là

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $-\frac{1}{3}$. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)=\sqrt[5]{\dfrac{x-1}{x+1}}$. Tính $f'(0)$

A. $f'(0)=\dfrac{1}{5}$. **B.** $f'(0)=-\dfrac{1}{5}$. **C.** $f'(0)=\dfrac{2}{5}$. **D.** $f'(0)=-\dfrac{2}{5}$.

Câu 17: Cho hàm số $y=\sqrt[3]{\dfrac{x-2}{x+1}}$. Đạo hàm $f'(0)$ bằng

A. 1. **B.** $\sqrt[3]{2}$. **C.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$. **D.** 4.

Câu 18: Cho hàm số $f(x)=\sqrt[3]{1+2\sin 2x}$. Đạo hàm tại của hàm số đã cho tại điểm $x=0$.

A. $f'(0)=\dfrac{1}{3}$. **B.** $f'(0)=\dfrac{4}{3}$. **C.** $f'(0)=1$. **D.** $f'(0)=-\dfrac{2}{3}$.

Câu 19: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left(5x^2+1\right)^{-1}$ là

A. $\dfrac{7}{5}$. **B.** $\dfrac{6}{5}$. **C.** 1. **D.** Không tồn tại.

Câu 20: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=(2x+1)^{\frac{1}{3}}$ trên đoạn $[1;5]$ là

A. $\sqrt[3]{3}$. **B.** $\sqrt[3]{11}$. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 21: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\left(x^5+x^3+1\right)^{\frac{1}{2}}$ trên đoạn $[1;3]$ là

A. 1. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{41}$. **D.** $\sqrt{271}$.

Câu 22: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=(5-2x)^{\frac{5}{3}}$ trên đoạn $[0;2]$ là

A. 1. **B.** $\sqrt[3]{3125}$. **C.** 3125. **D.** 0.

Câu 23: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=(1-x)^{-\frac{4}{3}}$ trên đoạn $[-3;0]$ là

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{256}}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{16}}$.

Câu 24: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\left(x^2-4\right)^2$ trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị $M-m$ là

A. 7. **B.** 16. **C.** 9. **D.** 25.

Câu 25: Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt[3]{x^2\sqrt{x^3}}$ là

A. $y'=\sqrt[3]{x}$. **B.** $y'=\dfrac{7}{6}\sqrt[6]{x}$. **C.** $y'=\dfrac{4}{3}\sqrt[3]{x}$. **D.** $y'=\dfrac{6}{7\sqrt[7]{x}}$.

Câu 26: Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt[5]{x^3+8}$.

A. $y'=\dfrac{3x^2}{5\sqrt[5]{\left(x^3+8\right)^6}}$. **B.** $y'=\dfrac{3x^2}{2\sqrt[5]{\left(x^3+8\right)}}$. **C.** $y'=\dfrac{3x^2}{5\sqrt[5]{\left(x^3+8\right)}}$. **D.** $y'=\dfrac{3x^2}{5\sqrt[5]{\left(x^3+8\right)^4}}$.

Câu 27: Hàm số $y=\sqrt[3]{a+bx^3}$, với a,b là tham số, có đạo hàm là

A. $\dfrac{bx}{3\sqrt[3]{a+bx^3}}$. **B.** $\dfrac{bx^2}{\sqrt[3]{\left(a+bx^3\right)^2}}$. **C.** $3bx^2\sqrt[3]{a+bx^3}$. **D.** $\dfrac{3bx^2}{2\sqrt[3]{a+bx^3}}$.

Câu 28: Cho hàm số $y=(x+2)^{-2}$. Hệ thức giữa y và y'' không phụ thuộc vào x là

A. $y''+2y=0.$ **B.** $y''-6y^2=0.$ **C.** $2y''-3y=0.$ **D.** $\left(y''\right)^2-4y=0.$

Câu 29: Gọi m là số thực để hàm số $y=\left(3x^2+2m\right)^5$ đạt giá trị lớn nhất bằng 32 trên đoạn $[2;3]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m=-\dfrac{25}{2}.$ **B.** $m=-5.$ **C.** $m=-25.$ **D.** $m=-10.$

Câu 30: Gọi m là số thực để hàm số $y=\left(2x+m^2\right)^3$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng -8 trên đoạn $[-1;4]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m\in(-1;1).$ **B.** $m\in(-3;-1).$ **C.** $m\in(0;3).$ **D.** $m\in(-3;0).$

Câu 31: Hàm số $y=\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}$ có đạo hàm là

A. $y'=\dfrac{4x}{3\sqrt[3]{x^2+1}}.$ **B.** $y'=\dfrac{4x}{3\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}}.$ **C.** $y'=2x\sqrt[3]{x^2+1}.$ **D.** $y'=4x\sqrt[3]{\left(x^2+1\right)^2}.$

Câu 32: Cho hàm số $y=\sqrt[4]{2x-x^2}$. Đạo hàm của hàm số $f'(x)$ có tập xác định là

A. $\mathbb{R}.$ **B.** $(0;2).$ **C.** $(-\infty;0)\cup(2;+\infty).$ **D.** $\mathbb{R}\setminus\{0;2\}.$

Câu 33: Cho hàm số $y=\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{x}}}}}$, với $x>0$ và e là hằng số. Đạo hàm của y là

A. $y'=e^{\frac{15}{16}}.x^{-\frac{31}{32}}.$ **B.** $y'=\dfrac{\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e}}}}}{32.\sqrt[32]{x^{31}}}.$ **C.** $y'=e^{\frac{15}{16}}.x^{\frac{31}{32}}.$ **D.** $y'=\dfrac{\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e\sqrt{e}}}}}{2\sqrt{x}}.$

Câu 34: Đạo hàm của hàm số $y=\left(x^2+x+1\right)^{\frac{1}{3}}$ là

A. $y'=\dfrac{2x+1}{3\sqrt[3]{\left(x^2+x+1\right)^2}}.$ **B.** $y'=\dfrac{1}{3}\left(x^2+x+1\right)^{\frac{2}{3}}.$ **C.** $y'=\dfrac{1}{3}\left(x^2+x+1\right)^{\frac{8}{3}}.$ **D.** $y'=\dfrac{2x+1}{3\sqrt[3]{x^2+x+1}}.$

Câu 35: Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$

A. $y=x^2.$ **B.** $y=x^{-2}.$ **C.** $y=\sqrt[5]{x}.$ **D.** $y=x^{-\frac{2}{3}}.$

Câu 36: Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên các khoảng xác định của nó

A. $y=x^{\frac{1}{5}}.$ **B.** $y=x^4.$ **C.** $y=x^{\frac{-1}{3}}.$ **D.** $y=x^{-4}.$

Câu 37: Cho hàm số $y=\dfrac{1}{4^x}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. Đồ thị hàm số đã cho không có tiệm cận.
B. Đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận ngang và không có tiệm cận đứng.
C. Đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận đứng và không có tiệm cận ngang.
D. Đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận đứng và một tiệm cận ngang.

Câu 38: Cho hàm số $y=f(x)=x^{-\sqrt{2}}$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số tăng trên $(0;+\infty)$. **B.** Đồ thị (C) không có tiệm cận.
C. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$. **D.** Hàm số không có cực trị.

Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)=x^{\pi}$ có đồ thị (C). Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. Hàm số tăng trên $(0;+\infty)$. **B.** Đồ thị (C) không có tiệm cận.
C. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$. **D.** Hàm số không có cực trị.

Câu 40: Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $(0;+\infty)$?

A. $y=x^{\frac{1}{4}}$. **B.** $y=x^{-2}$. **C.** $y=\dfrac{x-6}{x}$. **D.** $y=x^{6}$.

Câu 41: Cho hàm số $y=x^{\frac{1}{3}}$. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng?

A. Hàm số đồng biến trên tập xác định.

B. Hàm số nhận $O(0;0)$ làm tâm đối xứng.

C. Hàm số lõm trên $(-\infty;0)$ và lồi trên $(0;+\infty)$.

D. Hàm số có đồ thị nhận trục tung làm trục đối xứng.

Câu 42: Cho hàm số $y=x^{-4}$. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau

A. Đồ thị hàm số có một trục đối xứng. **B.** Đồ thị hàm số đi qua điểm $(1;1)$.

C. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận. **D.** Đồ thị hàm số có một tâm đối xứng.

Câu 43: Trong các hàm số sau đây, hàm số nào đồng biến trên các khoảng mà nó xác định?

A. $y=x^{-4}$. **B.** $y=x^{-\frac{3}{4}}$. **C.** $y=x^{4}$. **D.** $y=\sqrt[3]{x}$.

Câu 44: Cho $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ và $f(x_0)=2$. Tính giá trị của x_0.

A. 8. **B.** $\dfrac{1}{8}$. **C.** ± 8. **D.** 6.

Câu 45: Cho hàm số $y=(x-1)^{1-\sqrt{2}}$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Đồ thị hàm số không cắt trục hoành.

B. Hàm số nghịch đồng trên khoảng $(1;+\infty)$.

C. Hàm số có tập xác định là $(1;+\infty)$.

D. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.

Câu 46: Cho hàm số $y=(x^2+1)^{\sqrt{2}}$, có các khẳng định sau. Hỏi có bao nhiêu khẳng định đúng?

I. Tập xác định của hàm số là $D=(0;+\infty)$.

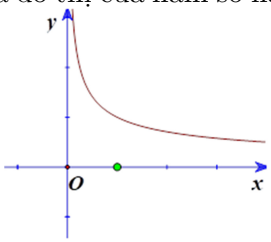
II. Hàm số luôn đồng biến với mọi x thuộc tập xác định của nó.

III. Hàm số luôn đi qua điểm $M(0;1)$.

IV. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.

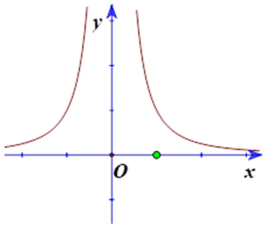
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 47: Đường cong trong hình bên dưới là đồ thị của hàm số nào sau đây?



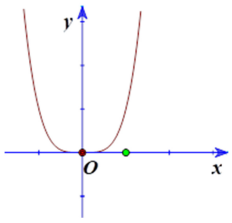
A. $y=x^{\frac{1}{3}}$. **B.** $y=x^{-\frac{1}{3}}$. **C.** $y=x^{2}$. **D.** $y=x^{3}$

Câu 48: Đường cong trong hình bên dưới là đồ thị của hàm số nào sau đây?



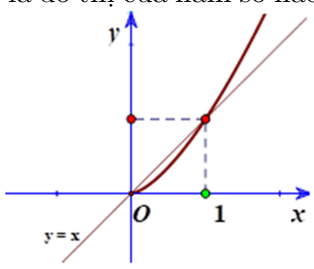
A. $y=x^{\frac{1}{2}}$. **B.** $y=x^{-\frac{1}{2}}$. **C.** $y=x^{2}$. **D.** $y=x^{-2}$

Câu 49: Đường cong trong hình bên dưới là đồ thị của hàm số nào sau đây?



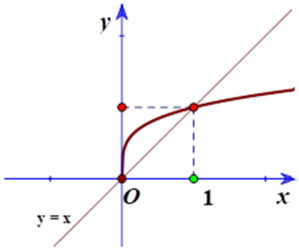
A. $y=x^{\frac{1}{4}}$. **B.** $y=x^{-\frac{1}{4}}$. **C.** $y=x^4$. **D.** $y=x^{-4}$

Câu 50: Đường cong trong hình bên dưới là đồ thị của hàm số nào sau đây?



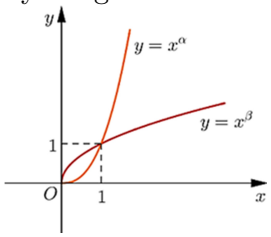
A. $y=x^{\frac{1}{2}}$. **B.** $y=x^{-\frac{1}{2}}$. **C.** $y=x^{\frac{1}{3}}$. **D.** $y=x^{\frac{3}{2}}$

Câu 51: Đường cong trong hình bên dưới là đồ thị của hàm số nào sau đây?



A. $y=x^{\frac{1}{4}}$. **B.** $y=x^{-\frac{1}{4}}$. **C.** $y=x^4$. **D.** $y=x^{-4}$

Câu 52: Cho $\alpha;\beta$ là các số thức. Đồ thị các hàm số $y=x^{\alpha};y=x^{\beta}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ được cho hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $0<\beta<1<\alpha$. **B.** $\beta<0<1<\alpha$. **C.** $0<\alpha<1<\beta$. **D.** $\alpha<0<1<\beta$.

Câu 53: Cho hàm số $y=x^{\sqrt{2}}$, có các khẳng định sau

I. Tập xác định của hàm số là $D=(0;+\infty)$.

II. Hàm số luôn đồng biến với mọi x thuộc tập xác định của nó.

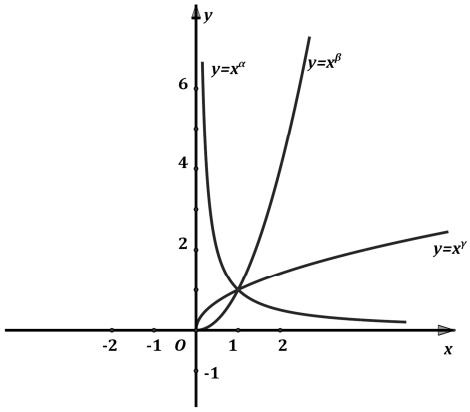
III. Hàm số luôn đi qua điểm $M(1;1)$.

IV. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.

Hỏi có bao nhiêu khẳng định đúng?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 54: Cho các hàm số lũy thừa $y=x^{\alpha},y=x^{\beta},y=x^{\gamma}$ có đồ thị như hình vẽ. Chọn đáp án đúng:



A. $\alpha > \beta > \gamma$. **B.** $\beta > \alpha > \gamma$. **C.** $\beta > \gamma > \alpha$. **D.** $\gamma > \beta > \alpha$.

Câu 55: Cho hàm số $y = x^{-\sqrt{2}}$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. Đồ thị hàm số không cắt trục hoành.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

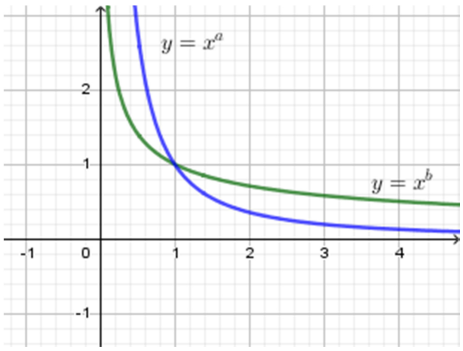
C. Hàm số có tập xác định là $(0;+\infty)$.

D. Đồ thị hàm số không có tiệm cận.

Câu 56: Đồ thị hàm số nào sau đây nhận 2 trục tọa độ làm 2 tiệm cận

A. $y = \log_3 x$. **B.** $y = x^{\frac{1}{5}}$. **C.** $y = 2^x$. **D.** $y = x^{-5}$.

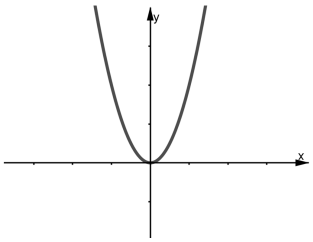
Câu 57: Hình dưới đây là đồ thị của hai hàm số $y = x^a$ và $y = x^b$. Hãy chọn khẳng định đúng.



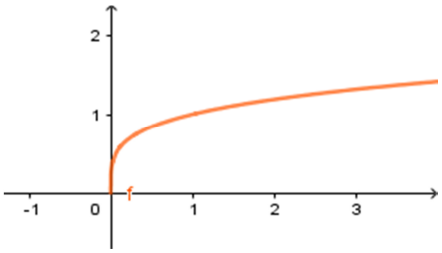
A. $a > b > 0$. **B.** $b < a < 0$. **C.** $a < b < 0$. **D.** $b > a > 0$.

Câu 58: Trong các đồ thị dưới đây, đồ thị nào là đồ thị của hàm số $y = x^{\frac{1}{4}}$?

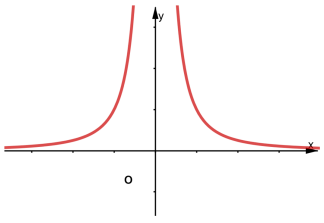
A.



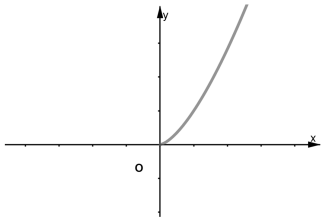
B.



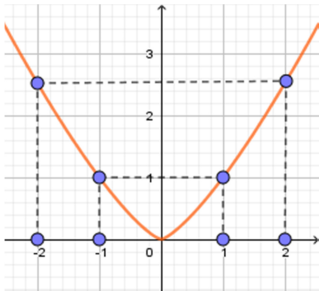
C.



D.

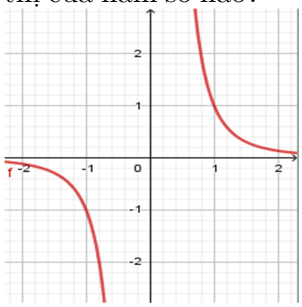


Câu 59: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào?



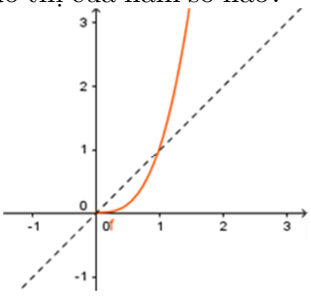
A. $y=x^{\frac{4}{3}}$ **B.** $y=x^{\frac{2}{3}}$ **C.** $y=x^2$ **D.** $y=x^4$

Câu 60: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào?



A. $y=x^{-3}$ **B.** $y=x^{-\frac{1}{3}}$ **C.** $y=x^3$ **D.** $y=\sqrt[3]{x}$

Câu 61: Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào?



A. $y=x^{\frac{\pi}{2}}$. **B.** $y=x^{\frac{1}{3}}$. **C.** $y=x^{-\frac{5}{2}}$. **D.** $y=x^{-3}$

Câu 62: **(THPT Chuyên Hùng Vương - Gia Lai - Lần 2 - 2018)** Tìm các giá trị nguyên dương $n\geq 2$ để hàm số $y=(2-x)^n+(2+x)^n$ với $x\in[-2;\,2]$ có giá trị lớn nhất gấp 8 lần giá trị nhỏ nhất.

A. $n=5$. **B.** $n=6$. **C.** $n=2$. **D.** $n=4$.

Câu 63: Trên đồ thị (C) của hàm số $y=x^{\frac{\pi}{2}+1}$ lấy điểm M_0 có hoành độ $x_0=2^{\frac{2}{\pi}}$. Tiếp tuyến của (C) tại điểm M_0 có hệ số góc bằng

A. $\pi+2$. **B.** 2π. **C.** $2\pi-1$. **D.** 3

CHỦ ĐỀ 2. LOGARIT

◈ ĐỊNH NGHĨA VỀ LOGARIT

Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thoả mãn đẳng thức $a^{\alpha} = b$ được gọi là logarit cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$.

Ta viết: $\boxed{\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^{\alpha} = b}$ $(*)$

◈ TÍNH CHẤT CỦA LOGARIT

Xuất phát từ công thức $(*)$ ta có các tính chất về logarit dưới đây

"Các công thức dưới đây sử dụng với điều kiện $a,b,c,b_1,b_2 > 0$, $a \neq 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \neq 0$"

① $\log_a a = 1,\ \log_a 1 = 0$

② $a^{\log_a b} = b,\ \log_a \left(a^{\alpha}\right) = \alpha$

③ $\log_a \left(b_1.b_2\right) = \log_a b_1 + \log_a b_2$

④ $\log_a \dfrac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$

Đặc biệt: $\log_a \dfrac{1}{b} = -\log_a b$

⑤ $\log_a b^{\alpha} = \alpha \log_a b$

Đặc biệt: $\log_a \sqrt[n]{b} = \dfrac{1}{n}\log_a b$ và $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

⑥ $\log_a b = \log_a c.\log_c b$ và $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$, với $c \neq 1$.

Đặc biệt: $\log_a c = \dfrac{1}{\log_c a}$ và $\log_{a^{\alpha}} b = \dfrac{1}{\alpha}\log_a b$

⑦ Lôgarit thập phân là logarit cơ số 10. Kí hiệu:

$$\boxed{\log_{10} b = \log b = \lg b}$$

Ví dụ: Đổi từ cơ số a về cơ số 10: $\log_a b = \dfrac{\log b}{\log a}$

⑧ Lôgarit tự nhiên là logarit cơ số $e \approx 2{,}71828\ldots$.
Kí hiệu:

$$\boxed{\log_e b = \ln b}$$

Ví dụ: Đổi từ cơ số a về cơ số e: $\log_a b = \dfrac{\ln b}{\ln a}$

VÍ DỤ MINH HOẠ

Dạng 1 TÌM ĐIỀU KIỆN XÁC ĐỊNH CỦA BIỂU THỨC LOGARIT

◈ GHI NHỚ

Biểu thức $\log_a f(x)$ xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) > 0 \end{cases}$.

Chú ý rằng: Khi giải bất phương trình $A^n > 0$ cần nhớ:

- n là số tự nhiên lẻ thì $A^n > 0 \Leftrightarrow A > 0$.
- n là số tự nhiên chẵn thì $A^n > 0 \Leftrightarrow A \neq 0$.

Ví dụ 1: Với giá trị nào của x thì biểu thức $A = \log_2(2x-1)$ xác định?

A. $x \in \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$. **B.** $x \in \left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$. **D.** $x \in (-1; +\infty)$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $2x-1>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$.

Ví dụ 2: Với giá trị nào của x thì biểu thức $B=\ln\left(4-x^2\right)$ xác định?

A. $x\in[-2;2]$. **B.** $x\in(-2;2)$. **C.** $x\in\mathbb{R}\setminus[-2;2]$. **D.** $x\in\mathbb{R}\setminus(-2;2)$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $4-x^2>0 \Leftrightarrow -2<x<2$.

Ví dụ 3: Tìm điều kiện xác định của biểu thức $C=\sqrt{x^3+x}-\log(x-2)^2$.

A. $x\in(2;+\infty)$. **B.** $x\in[0;+\infty)$. **C.** $x\in[0;+\infty)\setminus\{2\}$. **D.** $x\in(0;+\infty)\setminus\{2\}$.

Lời giải

Biểu thức A xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+x\ge 0 \\ (x-2)^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x\ne 2 \end{cases}$. Vậy $x\in[0;+\infty)\setminus\{2\}$.

Ví dụ 4: Tìm điều kiện xác định của biểu thức $D=\log_{-x^2+2x}(2x-1)^{2021}$.

A. $x\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **B.** $x\in(0;2)$. **C.** $x\in\left(\frac{1}{2};2\right)$. **D.** $x\in\left(\frac{1}{2};2\right)\setminus\{1\}$.

Lời giải

Biểu thức D xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} -x^2+2x>0 \\ -x^2+2x\ne 1 \\ (2x-1)^{2021}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<2 \\ x\ne 1 \\ x>\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}<x<2 \\ x\ne 1 \end{cases}$.

Ví dụ 5: Với giá trị nào của m thì biểu thức $E=\log_{\sqrt{5}}(x-m)$ xác định với mọi $x\in(-3;+\infty)$?

A. $m>-3$. **B.** $m<-3$. **C.** $m\le -3$. **D.** $m\ge -3$.

Lời giải

Biểu thức E xác định $\Leftrightarrow x-m>0 \Leftrightarrow x>m$.

Để E xác định với mọi $x\in(-3;+\infty)$ thì $m\le -3$.

Ví dụ 6: Với giá trị nào của m thì biểu thức $F=\log_{\frac{1}{2}}(3-x)(x+2m)$ xác định với mọi $x\in[-4;2]$?

A. $m\ge 2$. **B.** $m\ge\frac{3}{2}$. **C.** $m>2$. **D.** $m\ge -1$.

Lời giải

Biểu thức F xác định $\Leftrightarrow (3-x)(x+2m)>0 \Leftrightarrow -2m<x<3$, với $m>-\frac{3}{2}$.

Để $f(x)$ xác định với mọi $x\in[-4;2]$ thì $[-4;2]\subset(-2m;3) \Leftrightarrow -2m<-4 \Leftrightarrow m>2$.

Kết hợp với điều kiện, suy ra $m>2$ thoả mãn.

Ví dụ 7: Có bao nhiêu số nguyên a để biểu thức $G=\log_2\left(ax^2-4x+1\right)$ có nghĩa với mọi $x\in\mathbb{R}$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 0.

Lời giải

Biểu thức G xác định với mọi $x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow ax^2-4x+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ 4-a>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<a<4$.

Vì $a\in\mathbb{Z}$ nên $a\in\{1;2;3\}$.

Dạng 2 RÚT GỌN VÀ TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC LOGARIT

Ví dụ 1: Rút gọn biểu thức $P=a^{3-2\log_a b}$ $(a>0,a\neq 1,b>0)$ ta được

A. $P=a^3b^{-2}$ **B.** $P=a^3b$ **C.** $P=a^2b^3$ **D.** $P=ab^2$

Lời giải

$a^{3-2\log_a b}=\dfrac{a^3}{a^{2\log_a b}}=\dfrac{a^3}{a^{\log_a b^2}}=\dfrac{a^3}{b^2}=a^3b^{-2}$.

HS có thể sử dụng MTCT: Gán $a=2,b=5$ ta được $2^{3-2\log_2 5}$ và thay $a=2,b=5$ vào 4 đáp án để so sánh.

Ví dụ 2: Cho $a=\log_2 5$. Ta phân tích được $\log_4 1000=\dfrac{ma+n}{k},(m,n,k\in\mathbb{Z})$. Tính $m^2+n^2+k^2$

A. 13. **B.** 10. **C.** 22. **D.** 14.

Lời giải

Ta có: $\log_4 1000=\dfrac{3}{2}\log_2 10=\dfrac{3}{2}(\log_2 2+\log_2 5)=\dfrac{3}{2}(1+\log_2 5)=\dfrac{3}{2}(1+a)=\dfrac{3a+3}{2}$

$\Rightarrow m=n=3,k=2\Rightarrow m^2+n^2+k^2=22$.

Ví dụ 3: Giá trị của biểu thức $\log_a\left(\dfrac{a^2\sqrt[3]{a^2}\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[15]{a^7}}\right)$ nằm trong khoảng nào sau đây?

A. $(2;5)$. **B.** $(0;1)$ **C.** $(1;3)$ **D.** $(2;3)$.

Lời giải

$\log_a\left(\dfrac{a^2\sqrt[3]{a^2}\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[15]{a^7}}\right)=\log_a\left(\dfrac{a^2a^{\frac{2}{3}}a^{\frac{4}{5}}}{a^{\frac{7}{15}}}\right)=\log_a\left(a^{2+\frac{2}{3}+\frac{4}{5}-\frac{7}{15}}\right)=a^3$.

HS có thể sử dụng MTCT: Gán $a=2$. Tính $\log_a\left(\dfrac{a^2\sqrt[3]{a^2}\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[15]{a^7}}\right)$ và thay $a=2$ vào 4 đáp án để so sánh.

Ví dụ 4: Cho số thực x thỏa mãn: $\log_a x=\dfrac{1}{2}\log_a 9-\log_a 5+\log_a 2$ $(a>0,a\neq 1)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $x<0$. **B.** $x>2$. **C.** $1<x<2$. **D.** $0<x<1$.

Lời giải

Ta có: $\log_a x=\dfrac{1}{2}\log_a 9-\log_a 5+\log_a 2=\log_a\sqrt{9}-\log_a 5+\log_a 2$

$=\log_a 3-\log_a 5+\log_a 2=\log_a\left(\dfrac{3.2}{5}\right)=\log_a\dfrac{6}{5}\Rightarrow x=\dfrac{6}{5}$.

Ví dụ 5: Cho $0<a\neq 1$, biểu thức $E=a^{4\log_{a^2}5}$ có giá trị bằng bao nhiêu?

A. 25. **B.** 625. **C.** 5. **D.** 5^8.

Lời giải

Ta có: $E=a^{4\log_{a^2}5}=a^{\frac{4}{2}\log_a 5}=a^{\log_a 25}=25$.

Ví dụ 6: Tính giá trị biểu thức $A=\log_{\frac{1}{3}}7+2\log_9 49-\log_{\sqrt{3}}\dfrac{1}{7}$.

A. $A=3\log_3 7$. **B.** $A=\log_3 7$. **C.** $A=2\log_3 7$. **D.** $A=4\log_3 7$.

Ta có: $A=\log_{\frac{1}{3}}7+2\log_9 49-\log_{\sqrt{3}}\frac{1}{7}=\log_{3^{-1}}7+2\log_{3^2}7^2-\log_{\frac{1}{3^2}}7^{-1}$.

$=-\log_3 7+2\log_3 7+2\log_3 7=3\log_3 7$

Ví dụ 7: Biểu thức $\log_2\left(2\sin\frac{\pi}{12}\right)+\log_2\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)$ có giá trị bằng

A. $\log_2\sqrt{3}-1$. B. -2. C. 1. D. -1.

Lời giải

Ta có: $\log_2\left(2\sin\frac{\pi}{12}\right)+\log_2\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)=\log_2\left(2\sin\frac{\pi}{12}.\cos\frac{\pi}{12}\right)=\log_2\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)=\log_2\frac{1}{2}=-1$.

HS có thể sử dụng MTCT: Chuyển máy tính về đơn vị Rad (Shift + Mode + 4). Sau đó nhập $\log_2\left(2\sin\frac{\pi}{12}\right)+\log_2\left(\cos\frac{\pi}{12}\right)$ được kết quả bằng -1.

Ví dụ 8: Cho $\lg x=a,\ln 10=b$, với $0<x\neq 1$. Tính $\log_{10e}(x)$ bằng

A. $\frac{b}{1+b}$ B. $\frac{ab}{1+b}$. C. $\frac{2ab}{1+b}$ D. $\frac{a}{1+b}$

Lời giải

$$\log_{10e}(x)=\frac{1}{\log_x(10.e)}=\frac{1}{\log_x 10+\log_x e}=\frac{1}{\frac{1}{\log x}+\frac{\log e}{\log x}}=\frac{\log x}{1+\frac{1}{\ln 10}}=\frac{a}{1+\frac{1}{b}}=\frac{ab}{1+b}$$

Dạng 3 BIỂU DIỄN LOGARIT THEO CÁC LOGARIT ĐÃ BIẾT

◈ GHI NHỚ

Để giải quyết bài toán biểu diễn logarit theo các logarit đã biết, chúng ta có thể sử dụng một trong hai cách:

Cách 1: Sử dụng các tính chất của logarit. **Cách 2: Sử dụng MTCT.**

Bài toán minh hoạ: Cho $\log_2 3=a,\ \log_2 5=b$. Biểu diễn $\log_3 20$ theo $a,\ b$.

A. $\log_3 20=\frac{1+b}{2a}$ B. $\log_3 20=\frac{2+b}{a}$. C. $\log_3 20=\frac{2+b}{2a}$ D. $\log_3 20=\frac{1+b}{a}$

Cách 1: Sử dụng các tính chất của logarit

Ta có: $\log_3 20=\log_3\left(2^2.5\right)=2\log_3 2+\log_3 5=\frac{2}{\log_2 3}+\frac{\log_2 5}{\log_2 3}=\frac{2}{a}+\frac{b}{a}=\frac{2+b}{a}$. **Chọn B**

Cách 2: Sử dụng MTCT (Casio 570 hoặc Vinacal)

Bước 1: (Gán 3 giá trị $\log_2 3$ và $\log_2 5$ vào các biến A, B và C trong máy tính)

✓ Nhập $\log_2(3)$ → Bấm phím "=" → Shift + STO RCL → A → Ans→A

✓ Nhập $\log_2(5)$ → Bấm phím "=" → Shift + STO RCL → B → Ans→B

✓ Nhập $\log_3(20)$ → Bấm phím "=" → Shift + STO RCL → C → Ans→C

Bước 2: (Thử đáp án)

✓ Thử đáp án A: Nhập $C-\frac{1+B}{2A}$ → Máy tính trả ra kết quả khác 0 → **Loại đáp án A**

✓ Thử đáp án B: Nhập $C-\frac{2+B}{A}$ → Máy tính trả ra kết quả bằng 0 → **Chọn đáp án B**

Ví dụ 1: Giả sử đặt $a=\log_2 3$, $b=\log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b

A. $\log_6 45=\dfrac{a+2ab}{ab}$ **B.** $\log_6 45=\dfrac{2a^2-2ab}{ab}$

C. $\log_6 45=\dfrac{a+2ab}{ab+b}$ **D.** $\log_6 45=\dfrac{2a^2-2ab}{ab+b}$

Lời giải

Ta có $a=\log_2 3=\dfrac{1}{\log_3 2}\Rightarrow \log_3 2=\dfrac{1}{a}$ và $\log_3 5=\dfrac{1}{b}$.

Vậy $\log_6 45=\dfrac{\log_3 45}{\log_3 6}=\dfrac{\log_3\left(3^2.5\right)}{\log_3\left(3.2\right)}=\dfrac{2+\log_3 5}{1+\log_3 2}=\dfrac{2+\dfrac{1}{b}}{1+\dfrac{1}{a}}=\dfrac{a+2ab}{ab+b}$.

Ví dụ 2: Giả sử đặt $\log_{12}6=a,\log_{12}7=b$. Hãy biểu diễn $\log_2 7$ theo a và b

A. $\log_2 7=\dfrac{a}{1-b}$ **B.** $\log_2 7=\dfrac{b}{1-a}$ **C.** $\log_2 7=\dfrac{a}{1+b}$ **D.** $\log_2 7=\dfrac{b}{1+a}$.

Lời giải

Cách 1: Ta có $a=\log_{12}6=\dfrac{\log_2 6}{\log_2 12}=\dfrac{1+\log_2 3}{2+\log_2 3}\Rightarrow \log_2 3=\dfrac{1-2a}{a-1}$

$b=\log_{12}7=\dfrac{\log_3 7}{\log_3 12}=\dfrac{\log_3 7}{2\log_3 2+1}\Rightarrow \log_3 7=b\left(\dfrac{2}{\log_2 3}+1\right)=b\left(\dfrac{2a-2}{1-2a}+1\right)=\dfrac{-b}{1-2a}$.

Vậy $\log_2 7=\log_2 3.\log_3 7=\dfrac{1-2a}{a-1}.\dfrac{-b}{1-2a}=\dfrac{b}{1-a}$.

Cách 2: Ta có $\log_2 7=\dfrac{\log_{12}7}{\log_{12}2}=\dfrac{\log_{12}7}{\log_{12}\dfrac{12}{6}}=\dfrac{\log_{12}7}{1-\log_{12}6}=\dfrac{b}{1-a}$.

Ví dụ 3: Cho số thực dương b thỏa mãn $b\neq 1$ và các số thực a, c, x thỏa mãn: $\log_b 3=a$; $\log_b 6=c$ và $3^x=6$. Hãy biểu diễn x theo a và c.

A. $\dfrac{c}{2a}$. **B.** $\dfrac{c}{3a}$. **C.** $a+c$. **D.** $\dfrac{c}{a}$.

Lời giải

Ta có $3^x=6\Leftrightarrow x=\log_3 6=\dfrac{\log_b 6}{\log_b 3}=\dfrac{c}{a}$. Vậy $x=\dfrac{c}{a}$.

Ví dụ 4: Cho $\log_2 3=a$, $\log_3 5=b$, $\log_7 2=c$. Hãy tính $\log_{140}63$ theo a,b,c

A. $\dfrac{2ac+1}{abc+2c+1}$. **B.** $\dfrac{2ac+1}{abc+2c-1}$. **C.** $\dfrac{2ac-1}{abc+2c+1}$. **D.** $\dfrac{2ac+1}{abc-2c+1}$.

Lời giải

Ta có $\log_{140}63=\dfrac{\log_2\left(3^2.7\right)}{\log_2\left(2^2.5.7\right)}=\dfrac{2\log_2 3+\log_2 7}{2+\log_2 5+\log_2 7}=\dfrac{2\log_2 3+\dfrac{1}{\log_7 2}}{2+\log_2 3.\log_3 5+\dfrac{1}{\log_7 2}}$

$=\dfrac{2a+\dfrac{1}{c}}{2+ab+\dfrac{1}{c}}=\dfrac{2ac+1}{2c+abc+1}$

Ví dụ 5: Cho $\log_6 45 = a + \dfrac{\log_2 5 + b}{\log_2 3 + c}$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Tính tổng $a+b+c$.

A. -4. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Ta có $\log_6 45 = \log_6\left(3^2.5\right) = \dfrac{\log_2\left(3^2 5\right)}{\log_2 6} = \dfrac{2\log_2 3 + \log_2 5}{\log_2\left(2.3\right)} = \dfrac{2\log_2 3 + \log_2 5}{1 + \log_2 3}$

$= \dfrac{2\left(\log_2 3 + 1\right) + \log_2 5 - 2}{\log_2 3 + 1} = 2 + \dfrac{\log_2 5 - 2}{\log_2 3 + 1}$. Vậy $\begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow a+b+c = 2-2+1 = 1$.

Ví dụ 6: Cho các số dương a, b thỏa mãn $4a^2 + 9b^2 = 13ab$. Chọn đẳng thức đúng trong các đẳng thức sau.

A. $\log\sqrt{2a+3b} = \log\sqrt{a} + 2\log\sqrt{b}$.

B. $\dfrac{1}{4}\log\left(2a+3b\right) = 3\log a + 2\log b$.

C. $\log\left(\dfrac{2a+3b}{5}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\log a + \log b\right)$.

D. $\log\left(\dfrac{2a+3b}{4}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\log a + \log b\right)$.

Lời giải

Ta có $4a^2 + 9b^2 = 13ab \Leftrightarrow \left(2a+3b\right)^2 = 25ab$

Lấy logarit cơ số 10 cho hai vế ta được:

$2\log\left(2a+3b\right) = \log\left(25ab\right) \Leftrightarrow 2\log\left(2a=3b\right) = 2\log 5 + \log a + \log b$

$\Leftrightarrow 2\log\dfrac{2a+3b}{5} = \dfrac{1}{2}\left(\log a + \log b\right)$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Dạng 1 TÌM ĐIỀU KIỆN XÁC ĐỊNH CỦA BIỂU THỨC LOGARIT

Câu 1: Cho các số thực dương a,b với $a\neq 1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$ **B.** $\log_a(bc)=\log_a b.\log_a c$

C. $\log_a(bc)=\log_a b-\log_a c$ **D.** $\log_a(bc)=\log_a b.\log_b c$

Câu 2: Cho các số thực dương a,b với $a\neq 1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. $\log_a c=\log_a b+\log_a c$ **B.** $\log_a a^b=b$

C. $\log_a 1=0$ **D.** $\log_a c=\log_a b.\log_b c$

Câu 3: Cho các số thực dương a,b,c với $a\neq 1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **sai**?

A. $\log_a\dfrac{b}{c}=\dfrac{\log_a b}{\log_a c}$. **B.** $\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$.

C. $\log_a a=1$. **D.** $a^{\log_a b}=b$.

Câu 4: Cho các số thực dương a,b,c với $a\neq 1,b\neq 1$,. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\log_b c=\dfrac{\log_a b}{\log_a c}$. **B.** $\log_b c=\log_a b+\log_a c$.

C. $\log_b c=\dfrac{\log_b a}{\log_a c}$. **D.** $\log_b c=\log_b a.\log_a c$.

Câu 5: Cho các số thực dương a,b,c với $a\neq 1$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\log_a b=-\log_b a$. **B.** $\log_a b.\log_b a=1$. **C.** $\log_{a^\alpha} b=\dfrac{1}{\alpha}\log_a b$. **D.** $\log_a b^\alpha=\alpha\log_a b$.

Câu 6: Cho a là số thực dương, $a\neq 1$. Khẳng định nào sau đây **sai?**

A. $(0{,}125)^{\log_a 1}=1$. **B.** $\log_a\dfrac{1}{a}=-1$. **C.** $\log_a\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}=-\dfrac{1}{3}$. **D.** $9^{\log_2 a}=2a$.

Câu 7: Cho hai số thực a, b với $1<a<b$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\log_{2020}2021<1$. **B.** $\left(\dfrac{2021}{2020}\right)^x<1\Leftrightarrow x>0$.

C. $\left(\dfrac{2020}{2021}\right)^x<1\Leftrightarrow x>0$. **D.** $\log_{2021}2020<1$.

Câu 8: Cho $0<a\neq 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\log_a 1=a$ và $\log_a a=0$. **B.** $\log_a x=a$ có nghĩa với $\forall x$.

C. $\log_a x^n=n\log_a x\,(x>0,n\neq 0)$. **D.** $\log_a xy=\log_a x.\log_a y$.

Câu 9: Giả sử các số logarit đều có nghĩa, điều nào sau đây là đúng?

A. $\log_a b>\log_a c\Leftrightarrow b<c$. **B.** $\log_a b>\log_a c\Leftrightarrow b>c$.

C. $\log_a b>\log_a c\Leftrightarrow b=c$. **D.** Tất cả đều sai.

Câu 10: Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\ln(ab)=\ln a+\ln b$. **B.** $\ln(ab)=\ln a.\ln b$ **C.** $\ln\dfrac{a}{b}=\dfrac{\ln a}{\ln b}$. **D.** $\ln\dfrac{a}{b}=\ln b-\ln a$.

Câu 11: Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào **sai**?

A. $\log x<0\Leftrightarrow 0<x<1$.
B. $\log_{\frac{1}{3}} a=\log_{\frac{1}{3}} b\Leftrightarrow a=b>0$.
C. $\ln x>0\Leftrightarrow x>1$.
D. $\log_{0,5} a>\log_{0,5} b\Leftrightarrow a>b>0$

Câu 12: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai**?
A. $\log_3 5>0$.
B. $\log_{2-\sqrt{2}} 2016<\log_{2-\sqrt{2}} 2017$.
C. $\log_{0,3} 0,8>0$.
D. $\log_{x^2+2} 2016<\log_{x^2+2} 2017$.

Câu 13: Xác định a,b sao cho $\log_2 a+\log_2 b=\log_2(a+b)$. Khẳng định nào sau đây đúng?
A. $a+b=ab$ với $a,b>0$.
B. $a+b=2ab$ với $a,b>0$.
C. $2(a+b)=ab$ với $a,b>0$.
D. $a+b=ab$ với $a.b>0$

Câu 14: Cho các số thực dương a, b với $a\neq 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?
A. $\log_{a^2}(ab)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log_a b$
B. $\log_{a^2}(ab)=2+\log_a b$
C. $\log_{a^2}(ab)=\frac{1}{4}\log_a b$
D. $\log_{a^2}(ab)=\frac{1}{2}\log_a b$

Câu 15: Cho các số thực dương $a,b,a\neq 1$. Khẳng định nào sau đây đúng?
A. $\log_{a^3}(ab)=\frac{1}{3}\log_a b$
B. $\log_{a^3}(ab)=\frac{1}{6}\log_a b$
C. $\log_{a^3}(ab)=\frac{1}{3}+\log_a b$
D. $\log_{a^3}(ab)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\log_a b$

Câu 16: Cho các số thực a,b thỏa mãn $a>b>1$. Khẳng định nào sau đây **sai?**
A. $\log_a b>\log_b a$.
B. $\log_a b>\log_b a$.
C. $\ln a>\ln b$.
D. $\log_{\frac{1}{2}}(ab)<0$.

Câu 17: Cho các số thực $a<b<0$. Mệnh đề nào sau đây **sai?**
A. $\ln(ab)^2=\ln(a^2)+\ln(b^2)$.
B. $\ln\left(\sqrt{ab}\right)=\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)$
C. $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln|a|-\ln|b|$.
D. $\ln\left(\frac{a}{b}\right)^2=\ln(a^2)-\ln(b^2)$.

Câu 18: Với các số thực dương a,b bất kỳ, đặt $M=\left(\frac{a^{10}}{\sqrt[3]{b^5}}\right)^{0,3}$ Mệnh đề nào dưới đây là đúng?
A. $\log M=3\log a-\frac{1}{2}\log b$.
B. $\log M=-3\log a-\frac{1}{2}\log b$.
C. $\log M=-3\log a+2\log b$.
D. $\log M=3\log a+2\log b$.

Câu 19: Cho các số thực dương a,b,c với $c\neq 1$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?
A. $\log_c\frac{a}{b}=\log_c a-\log_c b$.
B. $\log_c\frac{a}{b}=\frac{\ln a-\ln b}{\ln c}$.
C. $\log_c^2\left(\frac{a}{b}\right)^2=4(\log_c a-\log_c b)$.
D. $\log_{c^2}\frac{a}{b^2}=\frac{1}{2}\log_c a-\log_c b$.

Câu 20: Cho $0<a,b\neq 1;\ ab\neq 1$ Khẳng định nào sau đây đúng?
A. $\log_{\frac{1}{a}}(ab)=-1+\log_a b$.
B. $\log_{a^2} b=\frac{1}{2\log_b a}$.
C. $\log_{\frac{1}{a}}(ab)=-(1-\log_a b)$.
D. $\log_{\frac{1}{a}}(ab)=\frac{1}{1+\log_a b}$

Câu 21: Cho a,b là các số thực dương bất kỳ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\log\left(\frac{a^3}{b}\right)=3\log a-\log b$.
B. $\log\left(\frac{a^3}{b}\right)=\frac{1}{3}\log a-\log b$.
C. $\log\left(a^3.b\right)=3\log a.\log b$.
D. $\log\left(a^3.b\right)=\frac{1}{3}\log a+\log b$.

Câu 22: Cho hai số thực a,b dương và khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\frac{1}{\log_a b}+\frac{1}{\log_{a^2} b}+\frac{1}{\log_{a^3} b}=\frac{8}{\log_a b}$.
B. $\frac{1}{\log_a b}+\frac{1}{\log_{a^2} b}+\frac{1}{\log_{a^3} b}=\frac{4}{\log_a b}$.
C. $\frac{1}{\log_a b}+\frac{1}{\log_{a^2} b}+\frac{1}{\log_{a^3} b}=\frac{6}{\log_a b}$.
D. $\frac{1}{\log_a b}+\frac{1}{\log_{a^2} b}+\frac{1}{\log_{a^3} b}=\frac{7}{\log_a b}$.

Câu 23: Với ba số thực dương a, b, c bất kỳ, mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $\log_2\frac{8a^{b^2}}{c}=3+2b\log_2 a-\log_2 c.$
B. $\log_2\frac{8a^{b^2}}{c}=3+b^2\log_2 a-\log_2 c.$
C. $\log_2\frac{8a^{b^2}}{c}=3+\frac{1}{b^2}\log_2 a-\log_2 c.$
D. $\log_2\frac{8a^{b^2}}{c}=3+b^2\log_2 a+\log_2 c.$

Câu 24: Cho a, b là các số thực dương thỏa $a\neq 1$, $a\neq b$, mệnh đề nào sau đây đúng.

A. $\log_{\sqrt{a}}\left(\sqrt[3]{b}\right)=\frac{2}{3}\log_b a$.
B. $\log_{\sqrt{a}}\left(\sqrt[3]{b}\right)=\frac{3}{2}\log_a b$.
C. $\log_{\sqrt{a}}\left(\sqrt[3]{b}\right)=\frac{3}{2}\log_b a$.
D. $\log_{\sqrt{a}}\left(\sqrt[3]{b}\right)=\frac{2}{3}\log_a b$.

Câu 25: Cho $0<a,b\neq 1$ thoả mãn $\log_{a^2} b+\log_{b^2} a=1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $a=\frac{1}{b}$.
B. $a=b$.
C. $a=\frac{1}{b^2}$.
D. $a=b^2$.

Câu 26: Cho hai số thực a,b với $1<a<b$. Khẳng định nào khẳng định đúng?

A. $\log_a b<1<\log_b a$.
B. $1<\log_a b<\log_b a$.
C. $\log_a b<\log_b a<1$.
D. $\log_b a<1<\log_a b$.

Câu 27: Cho a,b,c,d là các số thực dương, khác 1 bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a^c=b^d\Leftrightarrow\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{c}{d}$.
B. $a^c=b^d\Leftrightarrow\frac{\ln a}{\ln b}=\frac{d}{c}$.
C. $a^c=b^d\Leftrightarrow\frac{\ln a}{\ln b}=\frac{c}{d}$.
D. $a^c=b^d\Leftrightarrow\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\frac{d}{c}$.

Câu 28: Cho $a,b,c>0$ đôi một khác nhau và khác 1, khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $\log^2_{\frac{a}{b}}\frac{c}{b}.\log^2_{\frac{b}{c}}\frac{a}{c}.\log^2_{\frac{c}{a}}\frac{b}{a}=1$.
B. $\log^2_{\frac{a}{b}}\frac{c}{b}.\log^2_{\frac{b}{c}}\frac{a}{c}.\log^2_{\frac{c}{a}}\frac{b}{a}>1$.
C. $\log^2_{\frac{a}{b}}\frac{c}{b}.\log^2_{\frac{b}{c}}\frac{a}{c}.\log^2_{\frac{c}{a}}\frac{b}{a}>-1$.
D. $\log^2_{\frac{a}{b}}\frac{c}{b}.\log^2_{\frac{b}{c}}\frac{a}{c}.\log^2_{\frac{c}{a}}\frac{b}{a}<1$.

Câu 29: Với giá trị nào của x thì biểu thức $A=\log_{\frac{1}{2}}\frac{x-1}{3+x}$ xác định?

A. $x\in[-3;1]$.
B. $x\in\mathbb{R}\setminus[-3;1]$.
C. $x\in\mathbb{R}\setminus(-3;1)$.
D. $x\in(-3;1)$.

Câu 30: Với giá trị nào của x thì biểu thức: $f(x)=\log_6\left(2x-x^2\right)$ xác định?

A. $0<x<2$.
B. $x>2$.
C. $-1<x<1$.
D. $x<3$.

Câu 31: Với giá trị nào của x thì biểu thức: $f(x)=\log_5\left(x^3-x^2-2x\right)$ xác định?

A. $x\in(0;1)$.
B $x\in(1;+\infty)$.
C. $x\in(-1;0)\cup(2;+\infty)$.
D. $x\in(0;2)\cup(4;+\infty)$.

Câu 32: Điều kiện xác định của biểu thức $T=\lg\sqrt{\left(x^2-4\right)\left(x^2-6x+9\right)}$ là

A. $x\in\left(-\infty;-2\right)\cup\left(2;+\infty\right)$. **B.** $x>3$.

C. $x\in\left(-\infty;-2\right)\cup\left(3;+\infty\right)$. **D.** $x\in\left(-\infty;-2\right)\cup\left(2;3\right)\cup\left(3;+\infty\right)$.

Câu 33: Tìm tất cả các giá trị thực của a để biểu thức $T=\log_{20}\left(12-a\right)$ có nghĩa?

A. $a\ge 12$. **B.** $a\le 12$. **C.** $a>12$. **D.** $a<12$.

Câu 34: Tìm tất cả các giá trị thực của a để biểu thức $T=\log\left(12-a^2\right)$ có nghĩa?

A. $-\sqrt{12}<a<\sqrt{12}$. **B.** $\left[\begin{array}{l}a<-\sqrt{12}\\a>\sqrt{12}\end{array}\right.$. **C.** $a>12$. **D.** $a<12$.

Câu 35: Tìm tất cả các giá trị thực của x để biểu thức $T=1+\ln\dfrac{2x^2}{\left(x-1\right)^4}$ có nghĩa?

A. $x>1$. **B.** $x<1$. **C.** $x\notin\left\{1;0\right\}$ **D.** $\forall x\in\mathbb{R}$.

Câu 36: Tìm tất cả các giá trị thực của x để biểu thức $T=\log_2\left(x+2\right)-\log_3\left(1-x\right)+2$ có nghĩa?

A. $x>-2$. **B.** $x<1$. **C.** $-2<x<1$. **D.** $x>1$.

Câu 37: Tìm tất cả các giá trị thực của x để biểu thức $T=13+\ln\dfrac{2+x^2}{1+x}$ có nghĩa?

A. $x>-2$. **B.** $x<-1$. **C.** $-2<x<1$. **D.** $x>-1$.

Câu 38: Tìm tất cả các giá trị thực của x để biểu thức $T=\dfrac{3x+\ln\left(1-x\right)}{x+2}$ có nghĩa?

A. $-2<x<1$. **B.** $\left\{\begin{array}{l}x\ne -2\\x<1\end{array}\right.$. **C.** $x<1$. **D.** $x\ne -2$.

Câu 39: Tìm tất cả các giá trị thực của x để biểu thức $T=\log_{2x+1}\dfrac{1+x^2}{2}$ có nghĩa?

A. $\forall x\in\mathbb{R}$. **B.** $\left\{\begin{array}{l}x>-\dfrac{1}{2}\\x\ne 0\end{array}\right.$. **C.** $x>-\dfrac{1}{2}$. **D.** $x\ne -\dfrac{1}{2}$.

Câu 40: Tìm tất cả các giá trị thực của x để biểu thức $T=\log_{3+x}\left(3x+1\right)-x\sqrt{x}$ có nghĩa?

A. $x>0$. **B.** $x>-\dfrac{1}{3}$. **C.** $\left\{\begin{array}{l}x>-3\\x\ne -2\end{array}\right.$. **D.** $x\ge 0$.

Câu 41: Tìm tất cả các giá trị thực của x để biểu thức $T=12+\dfrac{5\log\left(2-x\right)}{x+2}$ có nghĩa?

A. $\left\{\begin{array}{l}x\ne -2\\x<2\end{array}\right.$. **B.** $x>2$. **C.** $x<-2$. **D.** $-2<x<2$.

Câu 42: Tìm tất cả các giá trị thực của x để biểu thức $T=4x-12\log\left(x+1\right)-\log_x 4$ có nghĩa?

A. $\left\{\begin{array}{l}x\ne 1\\x>0\end{array}\right.$. **B.** $x>0$. **C.** $x>-1$. **D.** $-1<x<0$.

Câu 43: Tìm tất cả các giá trị thực của x để biểu thức $T=\log_{2x}\dfrac{3}{1-x^2}$ có nghĩa?

A. $\left\{\begin{array}{l}x\ne 1\\0<x<1\end{array}\right.$. **B.** $\left\{\begin{array}{l}0<x<1\\x\ne \dfrac{1}{2}\end{array}\right.$. **C.** $\left\{\begin{array}{l}-1<x<1\\x\ne \dfrac{1}{2}\end{array}\right.$. **D.** $0<x<1$.

Câu 44: Tìm tất cả các giá trị thực của x để biểu thức $T=\lg\dfrac{3x}{x+3}-3$ có nghĩa?

A. $x>0$. **B.** $\left[\begin{array}{l}x\geq 0\\x<-3\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}x>0\\x<-3\end{array}\right.$. **D.** $-3<x<0$.

Câu 45: Tìm tất cả các giá trị thực của x để biểu thức $T=\log x\sqrt{2x}-\dfrac{1}{x^2-1}$ có nghĩa?

A. $\left\{\begin{array}{l}x>0\\x\neq 1\end{array}\right.$ **B.** $-1<x<1$. **C.** $x>0$ **D.** $\left\{\begin{array}{l}x\neq\pm 1\\x\geq 0\end{array}\right.$.

Câu 46: Tìm tất cả các giá trị thực của x để biểu thức $T=\log_3 x^2+4\ln\left(x^2-2x+3\right)$ có nghĩa?

A. $\forall x\in\mathbb{R}$ **B.** $-3<x<-1$. **C.** $x\neq 0$ **D.** $x>0$.

Câu 47: Tìm tất cả các giá trị thực của x để biểu thức $T=4-\log_{x^2+1}(x+2)$ có nghĩa?

A. $\left\{\begin{array}{l}x\neq 0\\x>-2\end{array}\right.$. **B.** $x>-2$. **C.** $x\geq 2$. **D.** $\left\{\begin{array}{l}x\neq\pm 1\\x>-2\end{array}\right.$.

Câu 48: Tìm tất cả các giá trị thực của x để biểu thức $T=3\log_x\dfrac{2^x+1}{1-x}$ có nghĩa?

A. $x>0$. **B.** $x<1$. **C.** $0<x<1$ **D.** $\left\{\begin{array}{l}x>0\\x\neq 1\end{array}\right.$.

Câu 49: Với giá trị nào của m thì biểu thức $f(x)=\log_{\sqrt{5}}(x-m)$ xác định với mọi $x\in(-3;+\infty)$?

A. $m>-3$. **B.** $m<-3$. **C.** $m\leq -3$. **D.** $m\geq -3$.

Câu 50: Với giá trị nào của m thì biểu thức $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(3-x)(x+2m)$ xác định $\forall x\in[-4;2]$?

A. $m\geq 2$. **B.** $m\geq\dfrac{3}{2}$. **C.** $m>2$. **D.** $m\geq -1$.

Câu 51: Với giá trị nào của m thì biểu thức $f(x)=\log_3\sqrt{(m-x)(x-3m)}$ xác định với mọi $x\in(-5;4]$

A. $m\neq 0$. **B.** $m>\dfrac{4}{3}$. **C.** $m<-\dfrac{5}{3}$. **D.** $m\in\varnothing$.

Câu 52: Biểu thức $\ln\left(x^2-2mx+4\right)$ có nghĩa với mọi $x\in\mathbb{R}$ khi

A. $m=2$. **B.** $-2<m<2$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m>2\\m<-2\end{array}\right.$. **D.** $m<2$.

Câu 53: Có tất cả bao nhiêu số nguyên của a để biểu thức $T=\log_{20}\left(12-3a^2\right)$ có nghĩa?

A. 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 54: Có bao nhiêu số nguyên âm m để biểu thức $f(x)=12+3\log_2(3x+m)$ xác định $\forall x\in(3;+\infty)$?

A. 9. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 11.

Câu 55: Với giá trị nào của m thì biểu thức $T=34+\ln(4m-x)$ xác định với mọi $x\in(-\infty;-1)$?

A. $m>-4$. **B.** $m\geq -\dfrac{1}{4}$. **C.** $m<-4$. **D.** $m\leq -\dfrac{1}{4}$.

Câu 56: Gọi A là tập hợp tất cả các giá trị m để biểu thức $T=\log_2\left(x^2-4mx+4\right)$ có nghĩa với mọi $x\in\mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $A\subset(0;2)$. **B.** $A\subset(-1;2)$. **C.** $A\subset\left(-2;\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $A\subset\left(-\dfrac{3}{2};1\right)$.

Dạng 2 RÚT GỌN VÀ TÍNH GIÁ TRỊ BIỂU THỨC LOGARIT

Câu 1: Rút gọn $P=3^{\log_9 4+\log_3 5}$ ta được

A. $P=80.$ **B.** $P=7.$ **C.** $P=10.$ **D.** $P=21.$

Câu 2: Rút gọn $P=\log_a(\tan 5)+\log_a(\cot 5)$ ta được

A. $P=3.$ **B.** $P=2.$ **C.** $P=1.$ **D.** $P=0.$

Câu 3: Rút gọn $P=\log_2 x+\log_4 x+\log_8 x$ ta được

A. $\frac{11}{6}\log_2 x.$ **B.** $\frac{6}{11}\log_2 x.$ **C.** $6\log_2 x.$ **D.** $11\log_2 x.$

Câu 4: Cho biểu thức $P=\log_a 8-\log_a 2+\log_a 4$. Kết quả rút gọn của biểu thức P bằng

A. $\log_a 16$ **B.** 0 **C.** $\log_a 10$ **D.** $\log_a 24$

Câu 5: Rút gọn $A=\log_{\sqrt{6}} 3.\log_3 36$ ta được

A. $A=1$ **B.** $A=2$ **C.** $A=3$ **D.** $A=4$

Câu 6: Cho $a,b>0$ và $a,b\neq 1$, biểu thức $P=\log_{\sqrt{a}} b^3.\log_b a^4$ có giá trị bằng bao nhiêu?

A. $6.$ **B.** $24.$ **C.** $12.$ **D.** $18.$

Câu 7: Rút gọn $P=2\log_2 12+3\log_2 5-\log_2 15-\log_2 150$ ta được

A. $5.$ **B.** $2.$ **C.** $4.$ **D.** $3.$

Câu 8: Kết quả rút gọn biểu thức A= $36^{\log_6 5}+10^{1-\log 2}-3^{\log_9 36}$ là

A. 42. **B.** 24. **C.** 12. **D.** 20

Câu 9: Rút gọn biểu thức $A=\log_a b.\log_b c.\log_c a^2\ (a,b,c>0;a,b,c\neq 1).$

A. $A=2.$ **B.** $A=1.$ **C.** $A=a^2.$ **D.** $A=\log_c a^2.$

Câu 10: Rút gọn biểu thức $A=a^{\log_{\sqrt{a}} b}+\sqrt{a}^{\log_a b}$ (với $a>0,b>0$) ta được

A. $A=2\sqrt{b}.$ **B.** $A=b^2+\sqrt{b}.$ **C.** $A=2b^2.$ **D.** $A=2b^2+2\sqrt{b}.$

Câu 11: Nếu $\log_a x=\frac{1}{2}(\log_a 9-3\log_a 4)$ $(a>0,a\neq 1)$ thì x bằng

A. $2\sqrt{2}$ **B.** $\sqrt{2}$ **C.** $\frac{3}{8}$ **D.** 16

Câu 12: Cho $a>0,b>0$. Giá trị của x bằng bao nhiêu biết $\log_{\frac{2}{3}} x=\frac{1}{4}\log_{\frac{2}{3}} a+\frac{4}{7}\log_{\frac{2}{3}} b.$

A. $\sqrt[4]{a}.\sqrt[7]{b^4}$ **B.** $\frac{a^4}{b^7}$ **C.** a^4b^7 **D.** $a^{\frac{4}{7}}b^{\frac{1}{4}}$

Câu 13: Nếu $\log_2 x=5\log_2 a+4\log_2 b$ $(a,b>0)$ thì x bằng

A. a^5b^4 **B.** a^4b^5 **C.** $5a+4b$ **D.** $4a+5b$

Câu 14: Nếu $\log_7 x=8\log_7 ab^2-2\log_7 a^3b$ $(a,b>0)$ thì x bằng:

A. a^4b^6 **B.** a^2b^{14} **C.** a^6b^{12} **D.** a^8b^{14}

Câu 15: Rút gọn biểu thức $A=\log_a a+\log_a a^2-3\log_a\sqrt{a}\ (a>0;a\neq 1)$ ta được

A. $A=\frac{3}{2}.$ **B.** $A=\frac{a^3}{3\sqrt{a}}.$ **C.** $A=\log_a\left(a+a^2-3\sqrt{a}\right).$ **D.** $A=0.$

Câu 16: Cho $a>0,a\neq 1$, biểu thức $A=(\ln a+\log_a e)^2+\ln^2 a-\log_a^2 e$ có giá trị bằng

A. $2\ln^2 a+2.$ **B.** $4\ln a+2.$ **C.** $2\ln^2 a-2.$ **D.** $\ln^2 a+2.$

Câu 17: Cho $a>0,a\neq 1$, biểu thức $B=2\ln a+3\log_a e-\frac{3}{\ln a}-\frac{2}{\log_a e}$ có giá trị bằng

LŨY THỪA – MŨ - LOGARIT

A. $4\ln a+6\log_a 4$. **B.** $4\ln a$. **C.** $3\ln a-\dfrac{3}{\log_a e}$. **D.** $6\log_a e$.

Câu 18: Cho các số thực dương a, b, c với a và b khác 1. Rút gọn biểu thức sau: $\log_a b.\log_{\sqrt{b}} c$.

A. $2\log_a c$ **B.** $\dfrac{1}{2}\log_a c$ **C.** $-2\log_a c$ **D.** $-\dfrac{1}{2}\log_a c$

Câu 19: Rút gọn biểu thức $A=\log_a a^3\sqrt{a}\sqrt[5]{a}$, ta được kết quả là

A. $\dfrac{1}{10}$. **B.** $\dfrac{35}{10}$. **C.** $\dfrac{3}{10}$. **D.** $\dfrac{37}{10}$.

Câu 20: Rút gọn biểu thức $B=\log_{\frac{1}{a}}\dfrac{a\sqrt[5]{a^3}\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{a}\sqrt[4]{a}}$, ta được kết quả là

A. $-\dfrac{5}{16}$. **B.** $\dfrac{60}{91}$. **C.** $\dfrac{16}{5}$. **D.** $-\dfrac{91}{60}$.

Câu 21: Cho $a>0, a\neq 1$, giá trị của biểu thức $A=a^{\log_{\sqrt{a}}4}$ bằng

A. 16. **B.** 8. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 22: Cho $a>0, a\neq 1$, biểu thức $D=\log_{a^3} a$ có giá trị bằng

A. $-\dfrac{1}{3}$. **B.** 3. **C.** -3. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Câu 23: Giá trị $\log_4\sqrt[4]{8}$ bằng

A. $\dfrac{1}{2}$ **B.** $\dfrac{3}{8}$. **C.** $\dfrac{5}{4}$ **D.** 2.

Câu 24: Giá trị của $\log_{a^3}\sqrt{a}$ với $(0<a\neq 1)$ là

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** 6. **C.** $\dfrac{1}{6}$. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Câu 25: Cho $0<a\neq 1$, biểu thức $E=a^{4\log_{a^2}5}$ có giá trị bằng

A. 5. **B.** 625. **C.** 25. **D.** 5^8.

Câu 26: Cho a là số thực dương khác 1. Tính $I=\log_{\sqrt{a}} a$.

A. $I=\dfrac{1}{2}$ **B.** $I=0$ **C.** $I=-2$ **D.** $I=2$

Câu 27: Cho $0<a\neq 1$, giá trị của biểu thức $P=\log_a\left(a^3\sqrt{a}\sqrt[5]{a}\right)$ là

A. $\dfrac{53}{30}$ **B.** $x+y>0$. **C.** 20. **D.** $\dfrac{1}{15}$

Câu 28: Giá trị của biểu thức $\log_{\sqrt{6}}3.\log_3 36$ bằng

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 29: Cho $a>0$ và $a\neq 1$. Khi đó biểu thức $P=a^{8\log_{a^2}7}$ có giá trị là

A. 7^2. **B.** 7^4. **C.** 7^6. **D.** 7^8.

Câu 30: Giá trị của biểu thức $B=2\log_2 12+3\log_2 5-\log_2 15-\log_2 150$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 31: Tìm giá trị của biểu thức sau $C=\log_{36}2-\dfrac{1}{2}\log_{\frac{1}{6}}3$

A. $\dfrac{1}{2}$ **B.** $\dfrac{3}{2}$ **C.** $-\dfrac{1}{2}$ **D.** $\dfrac{5}{2}$

Câu 32: Cho $\log_2 x=\sqrt{2}$. Tính giá trị của biểu thức $A=\log_2 x^2+\log_{\frac{1}{2}} x^3+\log_4 x$

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **B.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **C.** $\sqrt{2}$ **D.** $-\sqrt{2}$

Câu 33: Giá trị của biểu thức $P=\frac{25^{\log_5 6}+49^{\log_7 8}-3}{3^{1+\log_9 4}+4^{2-\log_2 3}+5^{\log_{125} 27}}$ là

A. 8 **B.** 9 **C.** 10 **D.** 12

Câu 34: Cho số thực $a>0, a\neq 1$. Giá trị của biểu thức $A=\log_a \frac{a^2.\sqrt{a}.\sqrt[3]{a^2}.\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[4]{a^3}}$

A. $\frac{193}{60}$ **B.** $\frac{73}{60}$ **C.** $\frac{103}{60}$ **D.** $\frac{43}{60}$

Câu 35: Tìm giá trị của biểu thức sau $A=\left(81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4}+25^{\log_{125} 8}\right).49^{\log_7 2}$

A. 20. **B.** 17. **C.** 18. **D.** 19.

Câu 36: Giá trị của biểu thức $A=2\log_{\frac{1}{3}} 6-\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 400+3\log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{45}$ là

A. 5. **B.** −4. **C.** −3. **D.** 4.

Câu 37: Tìm giá trị của biểu thức sau $B=\log_4\left(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{3}\right)+\log_4\left(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{21}+\sqrt[3]{9}\right)$

A. −1. **B.** −2. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 38: Nếu $\log_7 x=8\log_7 ab^2-2\log_7 a^3b\ \ (a,b>0)$ thì x bằng

A. a^4b^6 **B.** a^2b^{14} **C.** a^6b^{12} **D.** a^8b^{14}

Câu 39: Cho $0<a\neq 1$. Giá trị của biểu thức $P=\log_{\frac{1}{a}} \frac{a^3.\sqrt[3]{a^2}.\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt{a}.\sqrt[4]{a}}$ bằng

A. $-\frac{60}{91}$. **B.** $-\frac{3}{4}$. **C.** $-\frac{9}{61}$ **D.** $-\frac{211}{60}$.

Câu 40: Cho $\log_3 x=4\log_3 a+7\log_3 b\left(a,b>0\right)$. Giá trị của x tính theo a,b là

A. ab. **B.** a^4b. **C.** a^4b^7. **D.** b^7.

Câu 41: Cho $x=2000!$. Giá trị của biểu thức $A=\frac{1}{\log_2 x}+\frac{1}{\log_3 x}+...+\frac{1}{\log_{2000} x}$ là

A. 1. **B.** −1. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** 2000.

Câu 42: Cho các số thực a,b,c thỏa mãn: $a^{\log_3 7}=27, b^{\log_7 11}=49, c^{\log_{11} 25}=\sqrt{11}$. Giá trị của biểu thức $A=a^{(\log_3 7)^2}+b^{(\log_7 11)^2}+c^{(\log_{11} 25)^2}$ là

A. 519. **B.** 729. **C.** 469. **D.** 129.

Câu 43: Biết $\log_3\left(\log_4\left(\log_2 y\right)\right)=0$, khi đó giá trị của biểu thức $A=2y+1$ là

A. 33. **B.** 17. **C.** 65. **D.** 133.

Câu 44: Cho $\log_a b=\sqrt{3}$. Giá trị của biểu thức $A=\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}}$ được tính theo a là

A. $-\frac{\sqrt{3}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **D.** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Câu 45: Rút gọn biểu thức: $A=\left(\log_b^3 a+2\log_b^2 a+\log_b a\right)\left(\log_a b-\log_{ab} b\right)-\log_b a$ ta được kết quả là

A. 0 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 2

Câu 46: Cho $A=\frac{1}{\log_{a^1} b}+\frac{1}{\log_{a^2} b}+\frac{1}{\log_{a^3} b}+...+\frac{1}{\log_{a^n} b}$. Biểu thức rút gọn A là

A. $\frac{2n(n+1)}{3.\log_a b}$. **B.** $\frac{2n(2n+1)}{\log_a b}$. **C.** $\frac{n(n+1)}{2.\log_a b}$. **D.** $\frac{n(n+2)}{3.\log_a b}$.

Câu 47: Cho $a>0,b>0;a\neq 1,b\neq 1,n\in\mathbb{R}^*$, một học sinh tính biểu thức $P=\frac{1}{\log_a b}+\frac{1}{\log_{a^2} b}+.....+\frac{1}{\log_{a^n} b}$ theo các bước sau

Bước 1: $P=\log_b a+\log_b a^2+...+\log_b a^n$ Bước 2: $P=\log_b(a.a^2...a^n)$

Bước 3: $P=\log_b a^{1+2+3+...+n}$ Bước 4: $P=n(n+1)\log_b a$

Bạn học sinh trên đã giải sai ở bước nào?

A. Bước 1. **B.** Bước 2. **C.** Bước 3. **D.** Bước 4.

Câu 48: Rút gọn $A=\frac{1}{\log_2 x}+\frac{1}{\log_3 x}+\frac{1}{\log_4 x}+....+\frac{1}{\log_{2021} x}$ ta được

A. $A=\log_x 2020!$ **B.** $A=\log_x 1002!$ **C.** $A=\log_x 2021!$ **D.** $A=\log_x 2021$.

Câu 49: Cho $a>0,a\neq 1$, biểu thức $B=2\ln a+3\log_a e-\frac{3}{\ln a}-\frac{2}{\log_a e}$ có giá trị bằng

A. $4\ln a$. **B.** 0. **C.** $4\ln a+6\log_a 4$. **D.** $6\log_a e$.

Câu 50: Cho $a,b>0$, Nếu viết $\log_5\left(\frac{a^{10}}{\sqrt[6]{b^5}}\right)^{-0,2}=x\log_5 a+y\log_5 b$ thì xy bằng bao nhiêu ?

A. $-\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** 3. **D.** -3.

Câu 51: Biểu thức $\frac{1}{\log_2 x}+\frac{1}{\log_{2^2} x}+\frac{1}{\log_{2^3} x}+...+\frac{1}{\log_{2^n} x}=\frac{55}{\log_2 x}$ đúng với mọi $0<x\neq 1$, giá trị của n là

A. 10. **B.** 20. **C.** 5. **D.** 15.

Câu 52: Rút gọn biểu thức $A=\log_3 2.\log_4 3.\log_5 4...\log_{16} 15$ ta được kết quả là

A. 1. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 53: Kết quả rút gọn của biểu thức $C=\sqrt{\log_a b+\log_b a+2}\left(\log_a b-\log_{ab} b\right)\sqrt{\log_a b}$ ta được kết quả là

A. $\log_a b$. **B.** $.\sqrt{\log_a b}$. **C.** $\sqrt[3]{\log_a b}$. **D.** $(\log_a b)^2$.

Câu 54: Với mọi số tự nhiên n, Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $n=\log_2\log_2\underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{...\sqrt{2}}}}}_{n\ căn\ bac\ hai}$.. **B.** $n=-\log_2\log_2\underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{...\sqrt{2}}}}}_{n\ căn\ bac\ hai}$.

C. $n=2+\log_2\log_2\underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{...\sqrt{2}}}}}_{n\ căn\ bac\ hai}$. **D.** $n=2-\log_2\log_2\underbrace{\sqrt{\sqrt{\sqrt{...\sqrt{2}}}}}_{n\ căn\ bac\ hai}$.

Câu 55: Tính giá trị của biểu thức $P=\ln(\tan 1°)+\ln(\tan 2°)+\ln(\tan 3°)+...+\ln(\tan 89°)$.

A. $P=1$. **B.** $P=\frac{1}{2}$. **C.** $P=0$. **D.** $P=2$.

Câu 56: Cho $\log_2 x=\sqrt{2}$. Tính giá trị biểu thức $P=\log_2 x^2+\log_{\frac{1}{2}} x^3+\log_4 x$.

A. $P=\frac{11\sqrt{2}}{2}$. **B.** $P=\sqrt{2}$. **C.** $P=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $P=3\sqrt{2}$.

Câu 57: Cho $f(1)=1; f(m+n)=f(m)+f(n)+m.n,\ \forall m,n\in\mathbb{N}^*$. Khi đó giá trị của biểu thức $T=\log\left(\dfrac{f(2021)-f(2020)-17}{2}\right)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 9.

Câu 58: Cho $\log_9 x=\log_{12} y=\log_{16}(x+y)$. Giá trị của tỉ số $\dfrac{x}{y}$ là

A. $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. **B.** $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. **D.** $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Câu 59: Cho a,b,c lần lượt là độ dài của hai cạnh góc vuông và cạnh huyền của một tam giác vuông, trong đó $c-b\neq 1; c+b\neq 1$. Khi đó $\log_{c+b} a+\log_{c-b} a$ bằng:

A. $-2\log_{c+b} a.\log_{c-b} a$. **B.** $3\log_{c+b} a.\log_{c-b} a$. **C.** $2\log_{c+b} a.\log_{c-b} a$. **D.** $-3\log_{c+b} a.\log_{c-b} a$.

Dạng 3 BIỂU DIỄN LOGARIT THEO CÁC LOGARIT ĐÃ BIẾT

Câu 1: Biết $\log 2=a$, khi đó $\log 16$ tính theo a là

A. $4a$. **B.** $2a$. **C.** $8a$. **D.** $16a$.

Câu 2: Cho $a=\log_2 m$ và $A=\log_m 8m$, với $0<m\neq 1$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $A=(3-a)a$. **B.** $A=(3+a)a$. **C.** $A=\dfrac{3-a}{a}$. **D.** $A=\dfrac{3+a}{a}$.

Câu 3: Nếu $\log 3=a$ thì $\log 9000$ bằng

A. a^2+3 **B.** $3+2a$ **C.** $3a^2$ **D.** a^2

Câu 4: Cho $\log_6 9=a$. Tính $\log_3 2$ theo a

A. $\log_3 2=\dfrac{a}{2-a}$. **B.** $\log_3 2=\dfrac{a+2}{a}$. **C.** $\log_3 2=\dfrac{a-2}{a}$. **D.** $\log_3 2=\dfrac{2-a}{a}$.

Câu 5: Cho $\log 5=a$. Tính $\log 50$ theo a?

A. $\log 50=1-a$. **B.** $\log 50=1+a$. **C.** $\log 50=2+a$. **D.** $\log 50=10a$.

Câu 6: Cho $\log_2 5=a$ và $\log_3 5=b$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $\log_6 5=\dfrac{ab}{a+b}$. **B.** $\log_6 5=\dfrac{1}{a+b}$. **C.** $\log_6 5=\dfrac{1}{ab}$. **D.** $\log_6 5=\dfrac{a+b}{ab}$.

Câu 7: Biết $\log 2=a, \log 3=b$ thì $\log 45$ tính theo a và b bằng

A. $2b-a+1$ **B.** $2b+a+1$ **C.** $15b$ **D.** $a-2b+1$

Câu 8: Cho $\log_2 5=a$. Tính $\log_{32} 40$ theo a ta được

A. $\dfrac{2+a}{2}$. **B.** $\dfrac{3a+1}{2}$. **C.** $\dfrac{a+2}{9}$. **D.** $\dfrac{3+a}{5}$.

Câu 9: Đặt $a=\log_{30} 3, b=\log_{30} 5$. Hãy biểu diễn $\log_{30} 1350$ theo a và b

A. $\log_{30} 1350=2a+b+2$ **B.** $\log_{30} 1350=a+2b+1$

C. $\log_{30} 1350=2a+b+1$ **D.** $\log_{30} 1350=a+2b+2$

Câu 10: Đặt $a=\log_3 15, b=\log_3 10$. Hãy biểu diễn $\log_3 150$ theo a và b.

A. $\log_3 150=ab$. **B.** $\log_3 150=a-b$. **C.** $\log_3 150=a+b$. **D.** $\log_3 150=\dfrac{a}{b}$

Câu 11: Cho $\log_3 15=a$. Tính $A=\log_{25} 15$ theo a.

A. $A=\dfrac{a}{2(1-a)}$. **B.** $A=\dfrac{2a}{a-1}$. **C.** $A=\dfrac{a}{2(a-1)}$. **D.** $A=\dfrac{a}{a-1}$

Câu 12: Đặt $a=\log_2 6,\ b=\log_2 7$. Hãy biểu diễn $\log_{18} 42$ theo a và b

A. $\log_{18} 42 = \dfrac{a+b}{2a-1}$. **B.** $\log_{18} 42 = \dfrac{1+a+b}{2a-1}$. **C.** $\log_{18} 42 = \dfrac{1+a+b}{2b-1}$. **D.** $\log_{18} 42 = \dfrac{a+b}{2b-1}$.

Câu 13: Cho $a = \log_2 5$. Ta phân tích được $\log_4 1000 = \dfrac{ma+n}{k}, (m,n,k \in \mathbb{Z})$. Tính $m^2+n^2+k^2$

A. 13. **B.** 10. **C.** 22. **D.** 14.

Câu 14: Cho $\log_2 5 = a,\ \log_3 5 = b$. Tính giá trị biểu thức $A = \dfrac{\log_5 120}{2^{\log_4 \sqrt{2}}}$ theo a và b.

A. $A = \dfrac{2b+ab+a}{\sqrt[4]{2}ab}$ **B.** $A = \dfrac{3b+ab+a}{ab}$ **C.** $A = \dfrac{3b+ab+a}{\sqrt[4]{2}ab}$ **D.** $A = \dfrac{b+ab+3a}{\sqrt[4]{2}ab}$

Câu 15: Biết $\log 3 = a, \log 7 = b$ thì $\log 8334900$ tính theo a và b bằng

A. $3a+5b+2$. **B.** $5a+3b+2$. **C.** $5a+3b-2$. **D.** $8ab+2$.

Câu 16: Đặt $a = \log_2 3, b = \log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b

A. $\log_6 45 = \dfrac{2a^2-2ab}{ab}$ **B.** $\log_6 45 = \dfrac{2a^2-2ab}{ab+b}$

C. $\log_6 45 = \dfrac{a+2ab}{ab+b}$ **D.** $\log_6 45 = \dfrac{a+2ab}{ab}$

Câu 17: Nếu $\log 2 = a$ và $\log_2 7 = b$ thì $\log 56$ bằng

A. $a+b$. **B.** $a(b+3)$. **C.** ab. **D.** $b(a+3)$

Câu 18: Cho $\log 2 = a; \log 3 = b$. Tính $\log_6 90$ theo a và b

A. $\dfrac{2b-1}{a+b}$. **B.** $\dfrac{b+1}{a+b}$. **C.** $\dfrac{2b+1}{a+b}$. **D.** $\dfrac{2b+1}{a+2b}$

Câu 19: Nếu $\log_2 3 = a, \log_2 5 = b$ thì $\log_2 \sqrt[6]{360}$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}+\dfrac{a}{4}+\dfrac{b}{6}$. **B.** $\dfrac{1}{2}+\dfrac{a}{6}+\dfrac{b}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{2}+\dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{6}$. **D.** $\dfrac{1}{6}+\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{3}$

Câu 20: Biết $\log_3 5 = a$ và $\log_3 2 = b$. Tính $M = \log_6 30$ theo a và b

A. $M = \dfrac{1+a+b}{1+b}$. **B.** $M = \dfrac{1+a+b}{1+a}$. **C.** $M = \dfrac{1+ab}{a+b}$. **D.** $M = \dfrac{1+b}{1+a}$

Câu 21: Cho $a = \log_3 5; b = \log_7 5$. Khi đó khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\log_{15} 21 = \dfrac{a+b}{ab+b}$. **B.** $\log_{15} 21 = \dfrac{a+b}{a+1}$. **C.** $\log_{15} 21 = \dfrac{a-b}{a+1}$. **D.** $\log_{15} 21 = \dfrac{a-b}{ab+b}$

Câu 22: Cho $\log_2 3 = a; \log_3 5 = b$. Khi đó $\log_{12} 90$ tính theo a và b bằng

A. $\dfrac{ab+2a+1}{a-2}$. **B.** $\dfrac{ab-2a+1}{a+2}$. **C.** $\dfrac{ab-2a+1}{a+2}$. **D.** $\dfrac{ab+2a+1}{a+2}$.

Câu 23: Cho $\log_5 3 = a, \log_7 5 = b$. Tính $\log_{15} 105$ theo a và b

A. $\log_{15} 105 = \dfrac{1+a+ab}{(1+a)b}$. **B.** $\log_{15} 105 = \dfrac{1+b+ab}{1+a}$.

C. $\log_{15} 105 = \dfrac{a+b+1}{b(1+a)}$. **D.** $\log_{15} 105 = \dfrac{1+b+ab}{(1+a)b}$

Câu 24: Cho $a = \log_3 2$ và $b = \log_3 5$. Tính $\log_{10} 60$ theo a và b

A. $\dfrac{2a+b+1}{a+b}$. **B.** $\dfrac{2a+b-1}{a+b}$. **C.** $\dfrac{2a-b+1}{a+b}$. **D.** $\dfrac{a+b+1}{a+b}$.

Câu 25: Nếu $\log_8 3 = p$ và $\log_3 5 = q$ thì $\log 5$ bằng

A. $\dfrac{1+3pq}{p+q}$. **B.** $\dfrac{3pq}{1+3pq}$. **C.** p^2+q^2. **D.** $\dfrac{3p+q}{5}$.

Câu 26: Biết $\log_{27}5=a,\ \log_8 7=b,\ \log_2 3=c$ thì $\log_{12}35$ tính theo $a,\ b,\ c$ bằng

A. $\dfrac{3(b+ac)}{c+2}$. **B.** $\dfrac{3b+2ac}{c+1}$. **C.** $\dfrac{3b+2ac}{c+2}$. **D.** $\dfrac{3(b+ac)}{c+1}$.

Câu 27: Cho $\log 3=a$ và $\log 5=b$. Biểu diễn $\log_6 1125$ theo a và b bằng

A. $\dfrac{3a+2b}{a-1+b}$. **B.** $\dfrac{2a+3b}{a+1-b}$. **C.** $\dfrac{3a+2b}{a+1-b}$. **D.** $\dfrac{3a-2b}{a+1+b}$.

Câu 28: Cho $\log_2 3=a,\ \log_3 5=b,\ \log_7 2=c$. Hãy tính $\log_{140}63$ theo a,b,c

A. $\dfrac{2ac+1}{abc+2c+1}$. **B.** $\dfrac{2ac+1}{abc+2c-1}$. **C.** $\dfrac{2ac-1}{abc+2c+1}$. **D.** $\dfrac{2ac+1}{abc-2c+1}$

Câu 29: Cho $\log_b a=x$ và $\log_b c=y$. Hãy biểu diễn $\log_{a^2}\left(\sqrt[3]{b^5c^4}\right)$ theo x và y

A. $\log_{a^2}\left(\sqrt[3]{b^5c^4}\right)=\dfrac{5+4y}{6x}$. **B.** $\log_{a^2}\left(\sqrt[3]{b^5c^4}\right)=\dfrac{20y}{3x}$.

C. $\log_{a^2}\left(\sqrt[3]{b^5c^4}\right)=\dfrac{5+3y^4}{3x^2}$. **D.** $\log_{a^2}\left(\sqrt[3]{b^5c^4}\right)=20x+\dfrac{20y}{3}$

Câu 30: Cho $\log_{27}5=a;\ \log_8 7=b;\ \log_2 3=c$. Giá trị của $\log_{12}35$ bằng

A. $\dfrac{3b+3ac}{c+2}$. **B.** $\dfrac{3b+2ac}{c+2}$. **C.** $\dfrac{3b+3ac}{c+1}$. **D.** $\dfrac{3b+2ac}{c+3}$.

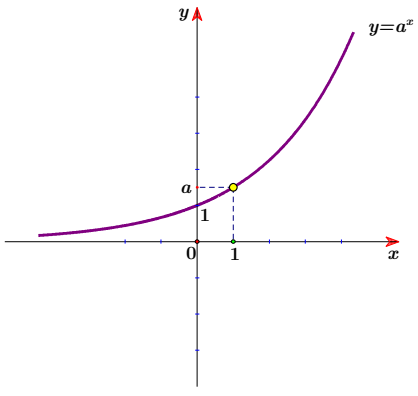
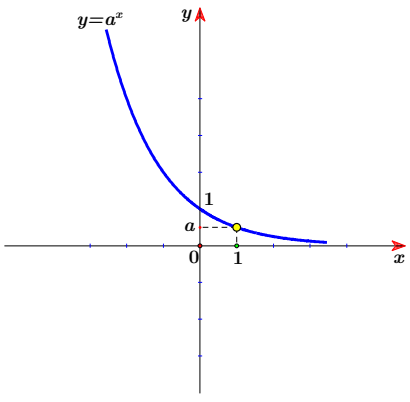
CHỦ ĐỀ 3. HÀM SỐ MŨ – HÀM SỐ LOGARIT

◈ BẢNG CÔNG THỨC ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

HÀM SỐ MŨ	HÀM SỐ LOGARIT
① $\left(a^x\right)' = a^x.\ln a$ ② $\left(a^u\right)' = u'.a^u.\ln a$ ③ $\left(e^x\right)' = e^x$ ④ $\left(e^u\right)' = u'.e^u$ Với $u = u(x)$ là hàm hợp theo biến x.	① $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}$ ② $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{u'}{u.\ln a}$ ③ $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$ ④ $\left(\ln u\right)' = \dfrac{u'}{u}$ Với $u = u(x)$ là hàm hợp theo biến x.

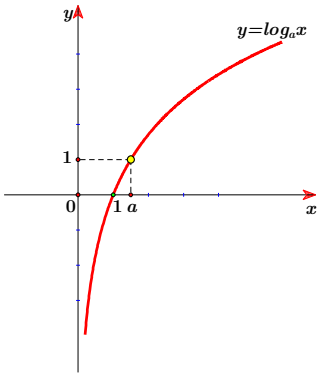
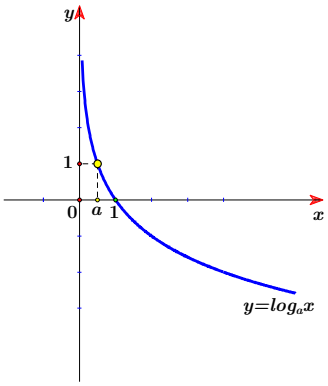
◈ KHẢO SÁT HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

HÀM SỐ MŨ $y = a^x$

❒ Với $a > 1$	❒ Với $0 < a < 1$
① *Tập xác định:* $D = \mathbb{R}$	① *Tập xác định:* $D = \mathbb{R}$
② Tập giá trị $T = (0;+\infty)$	② Tập giá trị $T = (0;+\infty)$
③ Tính đơn điệu: $y' = a^x \ln a > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ HS đồng biến trên $\mathbb{R}$	③ Tính đơn điệu: $y' = a^x \ln a < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ HS nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
④ Giới hạn đặc biệt: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty \end{cases} \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang	④ Giới hạn đặc biệt: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0$ là tiệm cận ngang
⑤ Bảng biến thiên x: $-\infty$	0	1	$+\infty$ y':	+	+	+ y: 0 ↗ 1 ↗ a ↗ $+\infty$	⑤ Bảng biến thiên x: $-\infty$	0	1	$+\infty$ y':	−	−	− y: $+\infty$ ↘ 1 ↘ a ↘ 0
⑥ Đồ thị 	⑥ Đồ thị 

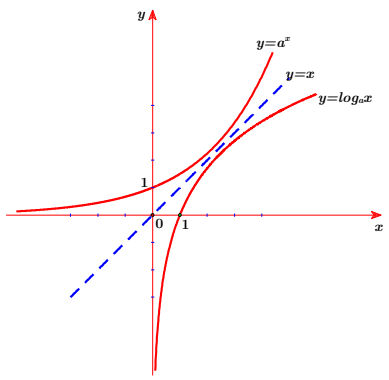
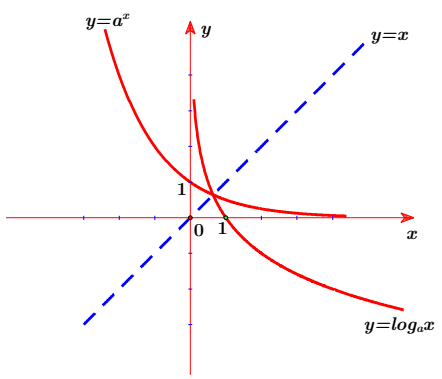
Đồ thị hàm số $y = a^x$ luôn đi qua 2 điểm $A(0;1)$, $B(1;a)$ và nhận trục hoành làm tiệm cận ngang

HÀM SỐ LOGARIT $y=\log_a x$

❒ Với $a>1$	❒ Với $0<a<1$
① *Tập xác định:* $D=(0;+\infty)$	① *Tập xác định:* $D=(0;+\infty)$
② Tập giá trị $T=\mathbb{R}$	② Tập giá trị $T=\mathbb{R}$
③ Tính đơn điệu: $y'=\dfrac{1}{x\ln a}>0,\ \forall x\in(0;+\infty)$ $\Rightarrow$ HS đồng biến trên $(0;+\infty)$	③ Tính đơn điệu: $y'=\dfrac{1}{x\ln a}<0,\ \forall x\in(0;+\infty)$ $\Rightarrow$ HS nghịch biến trên $(0;+\infty)$.
④ Giới hạn đặc biệt: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+} y=\lim\limits_{x\to0^+}\log_a x=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=+\infty\end{cases}$ $\Rightarrow x=0$ là tiệm cận đứng	④ Giới hạn đặc biệt: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+} y=\lim\limits_{x\to0^+}\log_a x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=-\infty\end{cases}$ $\Rightarrow x=0$ là tiệm cận đứng
⑤ Bảng biến thiên x: 0, 1, a, $+\infty$ y': $+$, $+$, $+$ y: $-\infty$ ↗ 0 ↗ 1 ↗ $+\infty$	⑤ Bảng biến thiên x: 0, a, 1, $+\infty$ y': $-$, $-$, $-$ y: $+\infty$ ↘ 1 ↘ 0 ↘ $-\infty$
⑥ Đồ thị 	⑥ Đồ thị 

Đồ thị hàm số $y=\log_a x$ luôn đi qua 2 điểm $A(1;0)$, $B(a;1)$ và nhận trục tung làm tiệm cận đứng

Đặc điểm chung của đồ thị hàm số $y=a^x$ *và* $y=\log_a x$ *khi vẽ trên cùng hệ trục toạ độ*: hai đồ thị luôn đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$ (đường phân giác của góc phần tư thứ nhất và thứ ba)

Với $a>1$	Với $0<a<1$
	

VÍ DỤ MINH HOẠ

Dạng 1 TÌM TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ LOGARIT

◈ GHI NHỚ

① Hàm số $y=\log_a f(x)$ xác định $\Leftrightarrow \begin{cases}0<a\neq 1\\ f(x)>0\end{cases}$.

② Theo tính đơn điệu của hàm số mũ và hàm số logarit ta luôn có:

- Với $a>1$ thì $\begin{cases}\log_a f(x)>b\Leftrightarrow f(x)>a^b\\ a^{f(x)}>b\Leftrightarrow f(x)>\log_a b,(b>0)\end{cases}$
- Với $0<a<1$ thì $\begin{cases}\log_a f(x)>b\Leftrightarrow 0<f(x)<a^b\\ a^{f(x)}>b\Leftrightarrow f(x)<\log_a b,(b>0)\end{cases}$

③ Hàm số $y=\log_a f(x)$ xác định trên tập $K\ \Leftrightarrow f(x)>0,\forall x\in K$.

Ví dụ 1: Tập xác định của hàm số $f(x)=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{x+1}-\log_{\frac{1}{2}}(3-x)-\log_3(x-1)^3$ là

A. $D=(1;3)$. **B.** $D=(-1;1)$. **C.** $D=(-\infty;3)$. **D.** $D=(1;+\infty)$.

Lời giải

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x+1}>0\\ 3-x>0\\ (x-1)^3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\ x<3\\ x>1\end{cases}\Leftrightarrow 1<x<3$. Vậy TXĐ: $D=(1;3)$.

Ví dụ 2: Tìm tập xác định của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2^x-16}+\sqrt{2x-5}$.

A. $D=\left[\dfrac{5}{2};+\infty\right)\setminus\{4\}$. **B.** $D=\left[\dfrac{5}{2};+\infty\right)$. **C.** $D=\left(-\infty;\dfrac{5}{2}\right)$. **D.** $D=\left(\dfrac{5}{2};+\infty\right)\setminus\{4\}$.

Lời giải

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases}2^x-16\neq 0\\ 2x-5\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 4\\ x\geq\dfrac{5}{2}\end{cases}$. Vậy TXĐ: $D=\left[\dfrac{5}{2};+\infty\right)\setminus\{4\}$.

Ví dụ 3: Tập xác định của hàm số $f(x)=x^{\pi}+\ln\dfrac{e^{2x}+4e^x+5}{1-x}$ là

A. $D=(-3;e)$. **B.** $D=(0;1)$. **C.** $D=(-\infty;1)$. **D.** $D=(0;+\infty)$.

Lời giải

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\ \dfrac{e^{2x}+4e^x+5}{1-x}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x<1\end{cases}\Leftrightarrow 0<x<1$. Vậy TXĐ: $D=(0;1)$.

Ví dụ 4: Tập xác định của hàm số $f(x)=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x-1}-\dfrac{1}{8}}+\dfrac{1}{\sqrt{\log_{0,3}(x+1)}}$ là

A. $D=(-1;1]$. **B.** $D=(-1;0)$. **C.** $D=[1;+\infty)$. **D.** $D=(-\infty;1]$.

Lời giải

$$\text{HSXĐ} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1}-\frac{1}{8}\geq 0 \\ x+1>0 \\ \log_{0,3}(x+1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{-2x+1}\geq 2^{-3} \\ x>-1 \\ x+1<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+1\geq -3 \\ -1<x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq 2 \\ -1<x<0 \end{cases} \Leftrightarrow -1<x<0.$$

Vậy TXĐ: $D=(-1;0)$.

Ví dụ 5: Tìm giá trị nguyên âm lớn nhất của tham số m để hàm số $y=\log_{2020}\left(x^3-3x^2+2-m\right)$ luôn xác định trên khoảng $(-2;+\infty)$.

A. -1 **B.** -19 **C.** -18 **D.** -5

Lời giải

Hàm số xác định trên $(-2;+\infty) \Leftrightarrow x^3-3x^2+2-m>0,\ \forall x\in(-2;+\infty)$

$\Leftrightarrow m<f(x)=x^3-3x^2+2,\ \forall x\in(-2;+\infty)$

Ta có: $f'(x)=3x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

BBT:

x	-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ -18	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

Dựa vào BBT, suy ra: $m\leq -18$. Vậy giá trị nguyên âm lớn nhất của m là -18.

Ví dụ 6: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\log_3\left(x^2-2x+3m\right)}}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$

A. $m\in\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$ **B.** $m\in\left[\frac{2}{3};+\infty\right)$ **C.** $m\in\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)$ **D.** $m\in\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)$

Lời giải

Hàm số xác định trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x+3m>0 \\ \log_3\left(x^2-2x+3m\right)>0 \end{cases},\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2-2x+3m>1,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+3m-1>0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta'<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1>0 \\ 1-(3m-1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow m>\frac{2}{3}.$$

Dạng 2

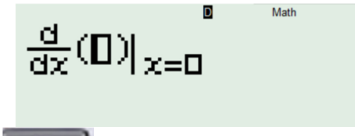
ĐẠO HÀM VÀ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ MŨ - LOGARIT

◈ GHI NHỚ

HÀM SỐ MŨ	HÀM SỐ LOGARIT
① $\left(a^x\right)'=a^x.\ln a$ ② $\left(a^u\right)'=u'.a^u.\ln a$	① $\left(\log_a x\right)'=\dfrac{1}{x\ln a}$ ② $\left(\log_a u\right)'=\dfrac{u'}{u.\ln a}$
③ $\left(e^x\right)'=e^x$ ④ $\left(e^u\right)'=u'.e^u$	③ $\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x}$ ④ $\left(\ln u\right)'=\dfrac{u'}{u}$
Với $u=u(x)$ là hàm hợp theo biến x.	Với $u=u(x)$ là hàm hợp theo biến x.

SỬ DỤNG MÁY TÍNH CẦM TAY ĐỂ TÍNH ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

Để tính đạo hàm của hàm số tại 1 điểm x_0 cho trước ta có thể sử dụng chức năng



Bước 1: Bấm tổ hợp phím Shift +  Bước 2: Nhập hàm số và giá trị x_0 cần tính đạo hàm.

Ví dụ 1: Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$. **B.** $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$. **C.** $y=\left(\dfrac{2}{e}\right)^x$. **D.** $y=\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^x$.

Lời giải

Hàm số $y=\left(\dfrac{\pi}{3}\right)^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ vì $\dfrac{\pi}{3}>1$.

Ví dụ 2: Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên tập xác định của nó?

A. $y=\log x$. **B.** $y=\sqrt{x^2+1}$. **C.** $y=\log_{\frac{2}{3}} x$. **D.** $y=\ln\left(x^2+1\right)$.

Lời giải

Hàm số $y=\log x$ đồng biến trên tập xác định của nó vì cơ số $10>1$.

Ví dụ 3: Cho 4 hàm số $f(x)=\ln x$, $g(x)=\sqrt{2x^2+4}$, $h(x)=\left(\dfrac{2020}{2021}\right)^x$, $l(x)=\ln\left(x^2+1\right)$. Có bao nhiêu hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Hàm số $f(x)=\ln x$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ vì cơ số $e>1$

Hàm số $h(x)=\left(\dfrac{2020}{2021}\right)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ vì cơ số $\dfrac{2020}{2021}<1$

Hàm số $g(x)=\sqrt{2x^2+4}$ xác định với $\forall x\in\mathbb{R}$ và $y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}>0,\ \forall x\in(0;+\infty)$ nên hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Hàm số $l(x)=\ln\left(x^2+1\right)$ xác định với $\forall x\in\mathbb{R}$ và $y'=\dfrac{2x}{x^2+1}>0,\ \forall x\in(0;+\infty)$ nên hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Ví dụ 4: Đạo hàm của hàm số $y=e^{\cos 2x}$ tại $x=\dfrac{\pi}{6}$ bằng

A. $-e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$. **B.** $-\sqrt{3e}$. **C.** $e^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$. **D.** $\sqrt{3e}$.

Lời giải

$y'=\left(\cos 2x\right)'.e^{\cos 2x}=-2\sin 2x.e^{\cos 2x}\Rightarrow y'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-2\sin\dfrac{\pi}{3}.e^{\cos\frac{\pi}{3}}=-\sqrt{3}e^{\frac{1}{2}}=-\sqrt{3e}$.

Ví dụ 5: Phát biểu nào sau đây **sai**?

A. Hai hàm số $y=a^x$ và $y=\log_a x$ với $a>1$ có cùng tình đơn điệu trên tập xác định.

B. Đồ thị hàm số $y=a^x$ với $0<a\neq 1$ luôn nằm trên trục hoành.

C. Đồ thị hàm số $y=\log_a x$ với $0<a\neq 1$ luôn nằm bên phải trục tung.

D. Hai hàm số $y=a^x$ và $y=\log_a x\ (0<a<1)$ đều có đồ thị nằm phía trên trục hoành.

Lời giải

Căn cứ vào tính chất của đồ thị hàm mũ ta rút ra kết quả là đáp án D

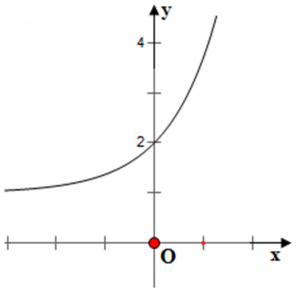
+) Hai hàm số $y=a^x$ và $y=\log_a x$ với $a>1$ cùng đồng biến trên TXĐ.

+) $y=a^x$ nên đồ thị luôn nằm trên trục hoành.

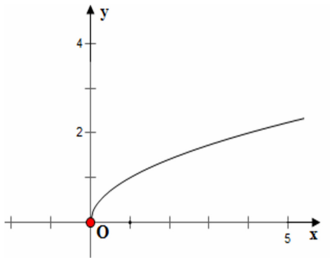
+) $y=\log_a x$ có TXĐ $D=(0;+\infty)$ nên đồ thị luôn nằm bên phải trục tung

Ví dụ 6: Cho hàm số $f(x)=2e^x-x$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ có thể là hình vẽ nào sau đây?

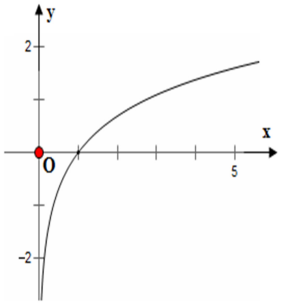
A.



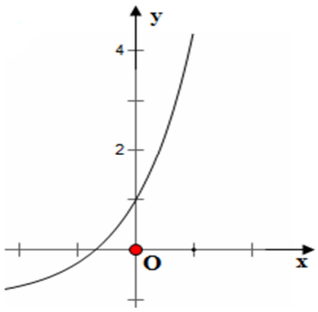
B.



C.



D.



Lời giải

Ta có $f'(x)=2e^x-1$. Xét hàm số $g(x)=2e^x-1$.

$g'(x)=2.e^x>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Do đó hàm số luôn đồng biến và đi qua điểm $M(0;1)$.

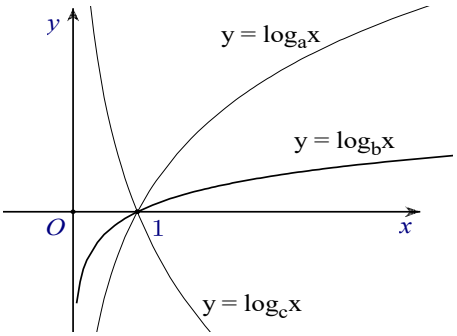
Ví dụ 7: Nếu $a^{\frac{\sqrt{3}}{3}}>a^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ và $\log_b\dfrac{3}{4}<\log_b\dfrac{4}{5}$ thì ta kết luận gì về a,b?

A. $0<a,b<1$. **B.** $0<a<1,\ b>1$. **C.** $a>1,\ 0<b<1$. **D.** $a,b>1$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3}}{3}<\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ a^{\frac{\sqrt{3}}{3}}>a^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\end{cases}\Rightarrow 0<a<1$ và $\begin{cases}\dfrac{3}{4}<\dfrac{4}{5}\\ \log_b\dfrac{3}{4}<\log_b\dfrac{4}{5}\end{cases}\Rightarrow b>1$.

Ví dụ 8: Hình bên dưới là đồ thị của ba hàm số $y=\log_a x, y=\log_b x, y=\log_c x$ với $0<a,b,c\neq 1$ được vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ.



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a>c>b$. **B.** $a>b>c$. **C.** $b>c>a$. **D.** $b>a>c$.

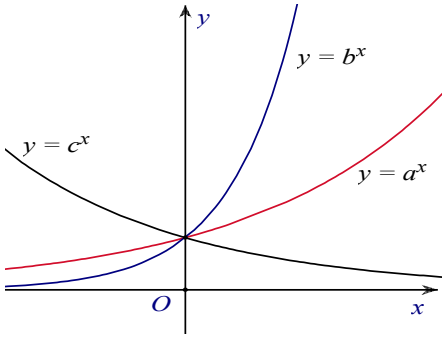
Lời giải

Vì đồ thị hàm số $y=\log_c x$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$ nên $0<c<1$.

Đồ thị hàm số $y=\log_a x, y=\log_b x$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên $a,b>1$.

Dựng đường thẳng $y=1$ cắt 2 đồ thị hàm $y=\log_a x, y=\log_b x$ lần lượt tại $A(a;1), B(b;1)$ nên $b>a$. Vậy $b>a>c$.

Ví dụ 9: Hình bên dưới là đồ thị của ba hàm số $y=a^x, y=b^x, y=c^x$ với $0<a,b,c\neq 1$ được vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ.



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a>c>b$. **B.** $a>b>c$. **C.** $b>c>a$. **D.** $b>a>c$.

Lời giải

Vì đồ thị hàm số $y=c^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên $0<c<1$.

Đồ thị hàm số $y=a^x, y=b^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $a,b>1$.

Dựng đường thẳng $x=1$ cắt 2 đồ thị hàm $y=a^x, y=b^x$ lần lượt tại $A(1;a), B(1;b)$ nên $b>a$. Vậy $b>a>c$.

Ví dụ 10: Đạo hàm của hàm số $y=\log_7\left(x^2-3x+4\right)$ là

A. $y'=(2x-3).\log_7\left(x^2-3x+4\right)$. **B.** $y'=\dfrac{2x-3}{x^2-3x+4}$.

C. $y'=\dfrac{2x-3}{\left(x^2-3x+4\right)\ln 7}$. **D.** $y'=\dfrac{(2x-3)\ln 7}{x^2-3x+4}$.

Lời giải

Ta có $y'=\dfrac{\left(x^2-3x+4\right)'}{\left(x^2-3x+4\right)\ln 7}=\dfrac{2x-3}{\left(x^2-3x+4\right)\ln 7}$.

Ví dụ 11: Cho hàm số $f(x)=2^{\frac{x-1}{x+1}}$. Tính giá trị $f'(0)$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $2\ln 2$. **C.** 2. **D.** $\ln 2$.

Lời giải

Ta có $f'(x)=\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)'.2^{\frac{x-1}{x+1}}.\ln 2=\dfrac{2}{(x+1)^2}.2^{\frac{x-1}{x+1}}.\ln 2$. Vậy $f'(0)=2.2^{-1}.\ln 2=\ln 2$.

Ví dụ 12: Đạo hàm của hàm số $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ là

A. $y'=\dfrac{1+x}{x+\sqrt{x^2+1}}$. **B.** $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. **C.** $y'=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}}$. **D.** $y'=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Lời giải

Ta có $y'=\dfrac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)'}{x+\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Tổng quát: $\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$ với $a>0$.

Ví dụ 13: Tính tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x-\ln(x+1)$ trên $[0;2]$.

A. 0. **B.** $1-\ln 2$. **C.** $2-\ln 3$. **D.** $2+\ln 3$.

Lời giải

Ta có $f'(x)=1-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x}{x+1}>0,\ \forall x\in[0;2]$.

Vậy $\min\limits_{[0;2]}f(x)+\max\limits_{[0;2]}f(x)=f(0)+f(2)=2-\ln 3$.

Ví dụ 14: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x-\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)$ trên đoạn $\left[0;\sqrt{5}\right]$. Khi đó giá trị của biểu thức $P=e^{\sqrt{5}-M}+e^m$ bằng

A. $\sqrt{5}+3$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{5}+5$. **D.** $\sqrt{5}-5$.

Lời giải

Ta có $f'(x)=1-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}>0,\ \forall x\in\left[0;\sqrt{5}\right]$.

$\Rightarrow\begin{cases}M=\max\limits_{[0;\sqrt{5}]}f(x)=f\left(\sqrt{5}\right)=\sqrt{5}-\ln\left(\sqrt{5}+3\right)\\ m=\min\limits_{[0;\sqrt{5}]}f(x)=f(0)=\ln 2\end{cases}$. Vậy $e^{\sqrt{5}-M}+e^m=e^{\ln\left(\sqrt{5}+3\right)}+e^{\ln 2}=\sqrt{5}+5$.

Ví dụ 15: Cho hàm số $y=\ln\dfrac{1}{x+1}$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. $xy'-1=-e^y$. **B.** $xy'-1=e^y$. **C.** $xy'+1=e^y$. **D.** $xy'+1=-e^y$.

Lời giải

TXĐ: $D=(-1;+\infty)$.

Ta có: $y'=\left(\dfrac{1}{x+1}\right)'.(x+1)=\dfrac{-1}{(x+1)^2}.(x+1)=-\dfrac{1}{x+1}$.

$\Rightarrow xy'+1=\dfrac{-x}{x+1}+1=\dfrac{1}{x+1}$. Mà $y=\ln\dfrac{1}{x+1}\Rightarrow e^y=\dfrac{1}{x+1}$ nên $xy'+1=e^y$.

Ví dụ 16: Cho hàm số $y=e^{-x^3-3mx^2-2x-2020}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\le m\le\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. **B.** $-\sqrt{\dfrac{2}{3}}<m<\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. **C.** $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\le m\le\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $-\sqrt{3}\le m\le\sqrt{3}$.

Lời giải

HS luôn NB trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left(-3x^2-6mx-2\right).e^{-x^3-3mx^2+2x-2020}\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow -3x^2-6mx-2\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}-3<0\\9m^2-6\le 0\end{cases}\Leftrightarrow-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\le m\le\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Ví dụ 17: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=\dfrac{3}{2}x^2-2(m-1)\ln x-\dfrac{1}{6x^6}$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $y'=3x-2(m-1)\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^7}$.

YCBT $\Leftrightarrow 3x-2(m-1)\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^7}\ge 0,\ \forall x\in(0;+\infty)\Leftrightarrow 2(m-1)\le 3x^2+\dfrac{1}{x^6},\ \forall x\in(0;+\infty)$.

Xét hàm số $g(x)=3x^2+\dfrac{1}{x^6}$ trên $(0;+\infty)$. Ta có $g'(x)=6x-\dfrac{6}{x^7}$; $g'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm 1$

Bảng biến thiên:

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $2(m-1)\le 4\Leftrightarrow m\le 3$.

Do m nguyên dương nên $m\in\{1,2,3\}$. Vậy có 3 giá trị m nguyên dương thỏa mãn.

Dạng 3

CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ VỀ HÀM SỐ MŨ

◈ GHI NHỚ

❒ **Bài toán 1: (Lãi kép)** Một người gửi vào ngân hàng số tiền là A đồng, với lãi suất là $r\%$ trên một *kì hạn*. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi kì hạn, số tiền lãi được nhập vào vốn ban đầu, sau n *kì hạn*, số tiền cả vốn lẫn lãi nhận được là:

$$\boxed{T_n = A(1+r\%)^n}$$ (*kì hạn* ở đây có thể là 1 năm; 1 tháng hoặc k tháng)

✍ **Chứng minh:**

- Số tiền nhận được (gồm cả gốc và lãi) sau kì hạn thứ nhất là $T_1 = A + A.r\% = A(1+r\%)$
- Số tiền nhận được (gồm cả gốc và lãi) sau kì hạn thứ 2 là $T_2 = T_1 + T_1.r\% = T_1(1+r\%) = A(1+r\%)^2$

.....

- Số tiền nhận được (gồm cả gốc và lãi) sau kì hạn thứ n là

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-1}.r\% = T_{n-1}(1+r\%) = A(1+r\%)^n$$

❒ **Bài toán 2: (Gửi tiết kiệm)** Hàng tháng một người gửi vào ngân hàng số tiền là A đồng (gửi đầu tháng). Biết lãi suất hàng tháng là $r\%$. Tổng tiền nhận được sau n tháng là:

$$\boxed{T = \frac{A}{r\%}(1+r\%)\left[(1+r\%)^n - 1\right]}$$

✍ **Chứng minh:**

- Số tiền có được (gồm cả gốc và lãi) vào cuối thứ nhất là $T_1 = A + A.r\% = A(1+r\%)$.
- Số tiền có được (gồm cả gốc và lãi) vào cuối thứ hai là

$$T_2 = T_1 + A + (T_1 + A).r\% = (T_1 + A)(1+r\%) = A(1+r\%)^2 + A(1+r\%).$$

- Số tiền có được (gồm cả gốc và lãi) vào cuối thứ ba là

$$T_3 = T_2 + A + (T_2 + A).r\% = (T_2 + A)(1+r\%) = A(1+r\%)^3 + A(1+r\%)^2 + A(1+r\%).$$

.....

- Số tiền nhận được (gồm cả gốc và lãi) vào cuối tháng thứ n là

$$T_n = A(1+r\%)^n + A(1+r\%)^{n-1} + ... + A(1+r\%) = A\left[(1+r\%) + (1+r\%)^2 + ... + (1+r\%)^{n-1} + (1+r\%)^n\right]$$

- Theo công thức tính tổng n số hạng đầu tiên của CSN ta suy ra:

$$\boxed{T_n = A.(1+r\%).\frac{(1+r\%)^n - 1}{(1+r\%) - 1} = \frac{A}{r\%}(1+r\%).\left[(1+r\%)^n - 1\right]}$$

❒ **Bài toán 3: (Vay trả góp)** Một người vay ngân hàng A đồng, với lãi suất là $r\%$ trên một tháng, sau đúng một tháng kể từ ngày vay, bắt đầu hoàn nợ, hai lần hoàn nợ cách nhau đúng một tháng, mỗi lần hoàn nợ trả a đồng. Số tiền còn nợ ngân hàng sau n tháng là:

$$\boxed{T_n = A(1+r\%)^n - \frac{a}{r\%}\left[(1+r\%)^n - 1\right]}$$

✍ **Chứng minh:**

- Số tiền còn nợ ngân hàng vào cuối thứ nhất là $T_1 = A(1+r\%) - a$.
- Số tiền còn nợ ngân hàng vào cuối thứ hai là

$$T_2 = T_1(1+r\%) - a = \left[A(1+r\%) - a\right](1+r\%) - a = A(1+r\%)^2 - a(1+r\%) - a$$

- Số tiền còn nợ ngân hàng vào cuối thứ ba là

$$T_3 = T_2(1+r\%) - a = \left[A(1+r\%)^2 - a(1+r\%) - a\right](1+r\%) - a = A(1+r\%)^3 - a(1+r\%)^2 - a(1+r\%) - a$$

.....

◆ Số tiền còn nợ ngân hàng vào cuối tháng thứ n là

$T_n = T_{n-1}(1+r\%) - a = A(1+r\%)^n - a(1+r\%)^{n-1} - a(1+r\%)^{n-2} - \ldots - a(1+r\%) - a$

$\Leftrightarrow T_n = A(1+r\%)^n - a\left[(1+r\%)^{n-1} + (1+r\%)^{n-2} + \ldots + (1+r\%) + 1\right]$

◆ Theo công thức tính tổng n số hạng đầu tiên của CSN ta suy ra:

$$T_n = A(1+r\%)^n - a\frac{(1+r\%)^n - 1}{1+r\% - 1} = A(1+r\%)^n - \frac{a}{r\%}\left[(1+r\%)^n - 1\right]$$

Chú ý: Để trả hết nợ ta cho $T_n = 0$ sẽ tìm ra được thời gian trả hết số tiền đã vay.

❒ **Bài toán 4: (Gửi tiết kiệm và rút hàng tháng)** Một người gửi ngân hàng A đồng, với lãi suất là $r\%$ trên một tháng. Mỗi tháng vào ngày ngân hàng tính lãi, người này rút ra một số tiền là a để sử dụng. Sau n tháng thì số tiền còn lại trong ngân hàng là

$$T_n = A(1+r\%)^n - \frac{a}{r\%}\left[(1+r)^n - 1\right]$$

Ví dụ 1: Một người gửi tiết kiệm số tiền 100.000.000 VNĐ vào ngân hàng với lãi suất 8% /năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi sau 15 năm số tiền người ấy nhận về là bao nhiêu? (làm tròn đến đơn vị nghìn đồng)

A. 117.217.000 VNĐ. **B.** 417.217.000 VNĐ. **C.** 317.217.000 VNĐ. **D.** 217.217.000 VNĐ.

Lời giải

Theo công thức ở bài toán 1 ta có: $T_{15} = 10^8(1+8\%)^{15} \approx 317.216.911$.

Ví dụ 2: Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng với lãi suất 8,4% /năm và tiền lãi hàng năm được nhập vào tiền vốn. Tính số năm tối thiểu người đó cần gửi để số tiền thu được nhiều hơn 2 lần số tiền gửi ban đầu.

A. 10 năm. **B.** 9 năm. **C.** 8 năm. **D.** 11 năm.

Lời giải

Gọi số tiền gửi ban đầu là A và số năm tối thiểu thỏa ycbt là n.

Ta có $A(1+8,4\%)^n = 2A \Leftrightarrow 1,084^n = 2 \Leftrightarrow n = \log_{1,084} 2 = 8,59$.

Vậy số năm tối thiểu là 9 năm.

Ví dụ 3: Theo thông tin trên internet, lãi suất tiền gửi của ngân hàng TP Bank là 6,2% /năm. Tại thời điểm ngày 01/01/2020 anh Nguyễn Văn A dự định vào ngày 01/01/2021 sẽ mua một chiếc laptop trị giá 20.000.000 đồng nên đã quyết định gửi vào ngân hàng trên một số tiền là T triệu đồng. Theo em anh Nguyễn Văn A nên gửi số tiền gần với số tiền nào sau đây?

A. 18.832.391 đồng. **B.** 15.832.391 đồng. **C.** 17.832.391 đồng. **D.** 16.832.391 đồng.

Lời giải

Số tiền anh A nhận được sau 12 tháng được tính bởi công thức:

$$T_1 = T.(1+r\%)^1 \Leftrightarrow 20.000.000 = T(1+6,2\%) \Rightarrow T = \frac{20.000.000}{1+6,2\%} \approx 18.832.391$$

Ví dụ 4: Một người gửi tiết kiệm với số tiền gửi là A đồng với lãi suất 6% một năm, biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính gốc cho năm tiếp theo. Sau 10 năm người đó rút ra được số tiền gốc lẫn lãi nhiều hơn số tiền ban đầu là 100 triệu đồng ? Hỏi người đó phải gửi số tiền A bằng bao nhiêu ?

A. 145.037.058 đồng. **B.** 55.839.478 đồng.
C. 126.446.589 đồng. **D.** 111.321.564 đồng.

Lời giải

Từ công thức lãi kép ta có $A_n = A(1+r)^n$.

Theo đề bài ta có: $\begin{cases} n=10 \\ r=0,06 \\ A_n = A+100 \end{cases}$

$\Rightarrow 100+A=A\left(1+0,06\right)^{10} \Leftrightarrow 100=A\left(1,06^{10}-1\right) \Leftrightarrow A=\dfrac{100}{1.06^{10}-1}$.

Ví dụ 5: Một người mỗi tháng đều đặn gửi vào ngân hàng một khoản tiền T theo hình thức lãi kép với lãi suất $0,6\%$ mỗi tháng. Biết sau 15 tháng, người đó có số tiền là 10 triệu đồng. Hỏi số tiền T gần với số tiền nào nhất trong các số sau.

A. 635.000 đồng. **B.** 645.000 đồng. **C.** 613.000 đồng. **D.** 535.000 đồng.

Lời giải

Với số tiền T gửi đều đặn mỗi tháng theo hình thức lãi kép với lãi suất $r\%$ mỗi tháng, ta có

Sau một tháng, số tiền của người đó là $A_1=T\left(1+r\right)$ đồng.

Sau hai tháng, số tiền của người đó là $A_2=\left[T\left(1+r\right)+T\right]\left(1+r\right)=T\left[\left(1+r\right)^2+\left(1+r\right)\right]$ đồng.

Sau ba tháng, số tiền của người đó là

$A_3=\left\{T\left[\left(1+r\right)^2+\left(1+r\right)\right]+T\right\}\left(1+r\right)=T\left[\left(1+r\right)^3+\left(1+r\right)^2+\left(1+r\right)\right]$ đồng.

...

Sau mười lăm tháng, số tiền của người đó là

$A_{15}=T\left[\left(1+r\right)^{15}+\left(1+r\right)^{14}+...+\left(1+r\right)\right]=\dfrac{T}{r}\left(1+r\right)\left[\left(1+r\right)^{15}-1\right]$ đồng.

Theo đề thì sau 15 tháng người đó có số tiền là 10 triệu đồng nên

$$T=\frac{A_{15}.r}{\left(1+r\right)\left[\left(1+r\right)^{15}-1\right]}=\frac{10^7.0,006}{1,006\left(1,006^{15}-1\right)}\approx 635.000 \text{ đồng.}$$

Ví dụ 6: Anh Nam dự định sau 8 năm (kể từ lúc gửi tiết kiệm lần đầu) sẽ có đủ 2 tỉ đồng để mua nhà. Mỗi năm anh phải gửi tiết kiệm bao nhiêu tiền (số tiền mỗi năm gửi như nhau ở thời điểm cách lần gửi trước 1 năm) ? Biết lãi suất là $8\%/$năm, lãi hàng năm được nhập vào vốn và sau kỳ gửi cuối cùng anh đợi đúng 1 năm để có đủ 2 tỉ đồng.

A. $2\times\dfrac{0,08}{\left(1,08\right)^9-1,08}$ tỉ đồng. **B.** $2\times\dfrac{0,08}{\left(1,08\right)^8-1,08}$ tỉ đồng.

C. $2\times\dfrac{0,08}{\left(1,08\right)^7-1}$ tỉ đồng. **D.** $2\times\dfrac{0,08}{\left(1,08\right)^8-1}$ tỉ đồng.

Lời giải

Gọi M là số tiền anh Nam phải gửi hàng năm.

Để sau 8 năm (kể từ lúc gửi tiết kiệm lần đầu) sẽ có đủ 2 tỉ đồng, tính luôn cả thời gian anh đợi để rút tiền ra thì anh gửi tất cả 8 lần.

Ta có công thức $T_n=\dfrac{M}{r}\left[\left(1+r\right)^n-1\right]\left(1+r\right)$

$$\Rightarrow M=\frac{T_n.r}{\left(1+r\right)\left[\left(1+r\right)^n-1\right]}=\frac{2\times 0,08}{\left(1.08\right)^9-1,08} \text{ tỉ đồng.}$$

Ví dụ 7: Một người vay ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất là 0,7%/tháng, theo thỏa thuận cứ mỗi tháng người đó sẽ trả cho ngân hàng 5 triệu đồng và cứ trả hàng tháng như thế cho đến khi hết nợ (tháng cuối cùng có thể trả dưới 5 triệu). Hỏi sau bao nhiêu tháng thì người đó trả được hết nợ ngân hàng.

A. 21. **B.** 22. **C.** 23. **D.** 24.

Lời giải

Theo công thức ở bài toán 3, số tiền mà người đó còn nợ sau n tháng là:

$$T_n = 100(1+0,7\%)^n - \frac{5}{0,7\%}\left[(1+0,7\%)^n - 1\right].$$

Sau n tháng thì người đó sẽ trả hết nợ thì

$$T_n = 0 \Leftrightarrow 100(1+0,7\%)^n - \frac{5}{0,7\%}\left[(1+0,7\%)^n - 1\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow (1+0,7\%)^n = \frac{5}{0,7\%} : \left[\frac{5}{0,7\%} - 100\right] \Leftrightarrow (1+0,7\%)^n = \frac{50}{43} \Leftrightarrow n = \log_{1+0,7\%}\frac{50}{43} \approx 21,6.$$

Vậy sau tháng thứ 22 thì người đó trả hết nợ.

Ví dụ 8: Năm 1992, người ta đã biết số $p = 2^{756839} - 1$ là một số nguyên tố (số nguyên tố lớn nhất được biết cho đến lúc đó). Hãy tìm số các chữ số của p khi viết trong hệ thập phân.

A. 227830 chữ số. **B.** 227834 chữ số. **C.** 227832 chữ số. **D.** 227831 chữ số.

Lời giải

2^{756839} có chữ số tận cùng khác 0 nên 2^{756839} và $p = 2^{756839} - 1$ có số các chữ số bằng nhau.

Số các chữ số của p khi viết trong hệ thập phân của $p = 2^{756839} - 1$ là:

$$\left[\log 2^{756839}\right] + 1 = \left[756839 \log 2\right] + 1 = \left[227831,2409\right] + 1 = 227832$$

Suy ra $p = 2^{756839} - 1$ khi viết trong hệ thập phân là số có 227832 chữ số.

Ví dụ 9: Dân số thế giới được dự đoán theo công thức $P(t) = a.e^{bt}$, trong đó a, b là các hằng số, t là năm tính dân số. Theo số liệu thực tế, dân số thế giới năm 1950 là 2560 triệu người; dân số thế giới năm 1980 là 3040 triệu người. Hãy dự đoán dân số thế giới năm 2020?

A. 3823 triệu. **B.** 5360 triệu. **C.** 3954 triệu. **D.** 4017 triệu.

Lời giải

Từ giả thiết ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} P(1950) = 2560 \\ P(1980) = 3040 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ae^{1950b} = 2560 \\ ae^{1980b} = 3040 \end{cases} \Rightarrow e^{30b} = \frac{19}{16} \Leftrightarrow 30b = \ln\frac{19}{16} \Leftrightarrow b = \frac{1}{30}\ln\frac{19}{16}.$$

Suy ra: $a = \dfrac{2560}{e^{1950.\frac{1}{30}\ln\frac{19}{16}}} = \dfrac{2560}{\left(\frac{19}{16}\right)^{65}}$.

Vậy dân số thế giới năm 2020 là: $P(2020) = \dfrac{2560}{\left(\frac{19}{16}\right)^{65}} e^{2020.\frac{1}{30}\ln\frac{19}{16}} \approx 3823$ triệu

Ví dụ 10: Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn tuân theo công thức $S = A.e^{rt}$, trong đó A là số vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng, t là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Để số lượng vi khuẩn ban đầu tăng gấp đôi thì thời gian tăng trưởng t gần với kết quả nào sau đây nhất ?

A. 3 giờ 9 phút. **B.** 3 giờ 2 phút. **C.** 3 giờ 30 phút. **D.** 3 giờ 18 phút.

Lời giải

Ta có $300 = 100.e^{5r} \Rightarrow r = \dfrac{1}{5}\ln 3$. Khi đó: $2.A = A.e^{t.\frac{1}{5}\ln 3} \Rightarrow t = 5\log_3 2$ giờ.

Dạng 4 CỰC TRỊ HÀM SỐ MŨ – LOGARIT VÀ MIN MAX HÀM NHIỀU BIẾN

Ví dụ 1: Tìm giá trị cực tiểu của hàm số $y=\dfrac{e^x}{x+1}$

A. $x=0$. **B.** $y=1$. **C.** $x=1$. **D.** $y=0$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Ta có $y'=\dfrac{xe^x}{(x+1)^2}=0\Leftrightarrow x=0$.

Lập BBT, suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ và $y_{CT}=y(0)=1$.

Ví dụ 2: Tìm điểm cực tiểu của hàm số $y=x^2\ln x$.

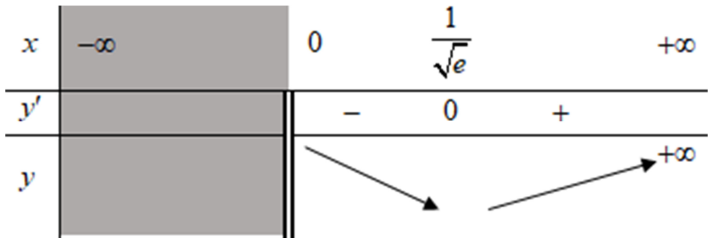
A. $x=\sqrt{e}$. **B.** $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$. **C.** $x=e$. **D.** $x=\dfrac{1}{e}$.

Lời giải

TXĐ: $D=(0;+\infty)$.

Ta có $y'=2x\ln x+x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \ln x=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\ (\text{L})\\ x=e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}\end{array}\right.$

Bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

Ví dụ 3: Tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=2^{\frac{x}{4x^2+1}}$ là

A. $\left(-\dfrac{1}{2};-\sqrt[4]{2}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{1}{2};\sqrt[4]{2}\right)$. **C.** $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$. **D.** $\left(-\dfrac{1}{2};\sqrt[4]{2}\right)$.

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=\dfrac{1-4x^2}{(4x^2+1)^2}.2^{\frac{x}{4x^2+1}}.\ln 2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{2}\\ x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

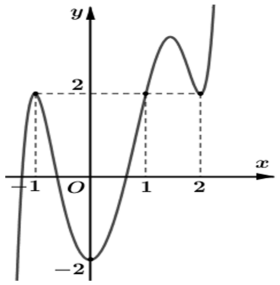
Bảng xét dấu của y':

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		−	0	+	0	−	

Vậy hàm số đã cho đạt cực đại tại $x=\dfrac{1}{2}$

Tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số đã cho là $\left(\dfrac{1}{2};\sqrt[4]{2}\right)$.

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=f'(x-1)$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $y=\pi^{2f(x)-4x}$ đạt cực tiểu tại điểm nào?

A. $x=2$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=1$. **D.** $x=0$.

Lời giải

Ta có: $y'=\left[2f'(x)-4\right]\pi^{2f(x)-4x}\ln\pi=0\Leftrightarrow 2f'(x)-4=0\Leftrightarrow f'(x)=2$.

Đặt $x=t-1$ ta có $f'(t-1)=2$.

Dựa vào đồ thị ta có $f'(t-1)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=1\\t=2\end{array}\right.$ hay $\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=0\\x=1\end{array}\right.$

Như vậy $f'(x)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Do $x=-2$ và $x=1$ là nghiệm bội chẵn nên ta có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘		↘		↗		↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$.

Ví dụ 5: Cho $m=\log_a\left(\sqrt[3]{ab}\right)$, với $a>1$, $b>1$ và $P=\log_a^2 b+16\log_b a$. Tìm m sao cho P đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $m=1$. **B.** $m=\dfrac{1}{2}$. **C.** $m=4$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Ta có: $m=\log_a\left(\sqrt[3]{ab}\right)\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{3}\left(1+\log_a b\right)\Rightarrow\log_a b=3m-1$.

Vì $a,b>1$ nên $\log_a b>0\Rightarrow 3m-1>0\Leftrightarrow m>\dfrac{1}{3}$.

Khi đó: $P=(3m-1)^2+\dfrac{16}{3m-1}=(3m-1)^2+\dfrac{8}{3m-1}+\dfrac{8}{3m-1}\overset{\text{Cauchy}}{\geq}3\sqrt[3]{8^2}=12$.

Dấu "=" xảy ra khi $(3m-1)^2=\dfrac{8}{3m-1}\Leftrightarrow m=1$. Vậy $\min P=12\Leftrightarrow m=1$.

Ví dụ 6: Cho biểu thức $P=9\log_{\frac{1}{3}}^3\sqrt[3]{a}+\log_{\frac{1}{3}}^2 a-\log_{\frac{1}{3}} a^3+1$ với $a\in\left[\frac{1}{27};3\right]$ và M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của P. Tính $S=4M-3m$.

A. $\frac{109}{9}$. **B.** $\frac{83}{2}$. **C.** 42. **D.** 38.

Lời giải

Ta có: $P=-\frac{1}{3}\log_3^3 a+\log_3^2 a+3\log_3 a+1$.

Đặt $t=\log_3 a$. Do $a\in\left[\frac{1}{27};3\right]$ nên $t\in[-3;1]$.

Khi đó $P=-\frac{1}{3}t^3+t^2+3t+1$ với $t\in[-3;1]$.

$P'(t)=-t^2+2t+3$. $P'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3\,(L)\\t=-1\,(N)\end{array}\right.$

$P(-3)=10$, $P(-1)=-\frac{2}{3}$, $P(1)=\frac{14}{3}\Rightarrow M=10$, $m=-\frac{2}{3}$. Vậy $S=4M-3m=42$.

Ví dụ 7: Xét các số thực $0<x,y<1$ thỏa mãn $\log_3\frac{1-xy}{x+2y}=3xy+x+2y-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=x+y$

A. $P_{\min}=\frac{9\sqrt{11}-9}{9}$. **B.** $P_{\min}=\frac{9\sqrt{11}+19}{9}$. **C.** $P_{\min}=\frac{18\sqrt{11}-29}{21}$ **D.** $P_{\min}=\frac{2\sqrt{11}-3}{3}$.

Lời giải

Ta có $\log_3\frac{1-xy}{x+2y}=3xy+x+2y-4\Leftrightarrow\log_3(3-3xy)+3-3xy=\log_3(x+2y)+x+2y$

$\Leftrightarrow f(3-xy)=f(x+2y)$ $(*)$

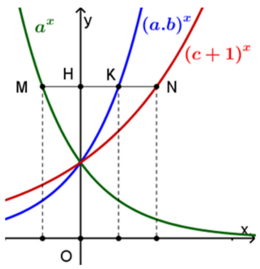
Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t,\ t>0$

$f'(t)=\frac{1}{t\ln 3}+1>0,\ \forall t\in(0;+\infty)$. Suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Khi đó $(*)\Leftrightarrow 3-3xy=x+2y\Leftrightarrow y=\frac{3-x}{3x+2}$. Suy ra: $P=x+\frac{3-x}{3x+2}=\frac{3x^2+x+3}{3x+2}$.

Ta có: $P'=\frac{9x^2+12x-7}{(3x+2)^2}=0\Leftrightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{11}}{3}$. Vậy $P_{\min}=P\left(\frac{-2+\sqrt{11}}{3}\right)=\frac{2\sqrt{11}-3}{3}$.

Ví dụ 8: Cho ba số thực dương a, b, c và đồ thị các hàm số $y=a^x$, $y=(ab)^x$, $y=(c+1)^x$ được cho như hình vẽ dưới đây



Biết rằng $MH=HK=KN$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\sqrt{b}-4c$ bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải

Đặt $MH = HK = KN = m > 0 \Rightarrow x_K = m$, $x_M = -m$, $x_N = 2m$.

Khi đó: $a^{x_M} = (ab)^{x_K} = (c+1)^{x_N} \Leftrightarrow a^{-m} = (ab)^m = (c+1)^{2m} \Leftrightarrow \begin{cases} a^{-1} = ab \\ a^{-1} = (c+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{1}{a^2} \\ c = -1 + \dfrac{1}{\sqrt{a}} \end{cases}$

Do đó: $T = \sqrt{b} - 4c = \dfrac{1}{a} - \dfrac{4}{\sqrt{a}} + 4 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{a}} - 2\right)^2 \geq 0$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{1}{\sqrt{a}} - 2 = 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{1}{4}$ (thỏa mãn điều kiện $a < 1$).

Vậy giá trị nhỏ nhất của T bằng 0.

Ví dụ 9: Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a > 1, b > 1$ và $a^{x^2} = b^{y^2} = \sqrt{a.b}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x.y$ là

A. $P = \dfrac{4}{9}$. **B.** $P = \dfrac{9}{4}$. **C.** $P = 1$. **D.** $P = \dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Ta có: $a^{x^2} = b^{y^2} = \sqrt{a.b} \Leftrightarrow \begin{cases} a^{x^2} = (ab)^{\frac{1}{2}} \\ b^{y^2} = (ab)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{1}{2}\log_a b + \dfrac{1}{2} \\ y^2 = \dfrac{1}{2}\log_b a + \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Vì $a, b > 1 \Rightarrow \log_a b > 0, \log_b a > 0$

$\Rightarrow (xy)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\log_a b + \dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2}\log_b a + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}(\log_a b + \log_b a) + \dfrac{1}{4} \geq 1$

Vì $x > 0, y > 0 \Rightarrow xy \geq 1$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$. Vậy $\min P = 1 \Leftrightarrow a = b$.

Ví dụ 10: Cho hai số thực dương $a, b > 1$ và sao cho luôn tồn tại số thực $0 < x \neq 1$ để thoả mãn hệ thức $a^{\log_b x} = b^{\log_a (x^4)}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T = 10\log ab - \log^2 a - \log^2 b$ bằng

A. 36. **B.** $18 + 2\sqrt{13}$. **C.** 45. **D.** 18.

Lời giải

Ta có: $a^{\log_b x} = b^{\log_a (x^4)} \Leftrightarrow \log_a \left(a^{\log_b x}\right) = \log_a \left(b^{\log_a (x^4)}\right) \Leftrightarrow \log_b x = \log_a b.\log_a \left(x^4\right)$.

$\Leftrightarrow \log_b a.\log_a x = 4.\log_a b.\log_a x \Leftrightarrow \log_b a = 4.\log_a b \Leftrightarrow \dfrac{\log_b a}{\log_a b} = 4 = (\log_b a)^2$.

Có $a, b > 1 \Rightarrow \log_b a > 0$. Nên ta có: $(\log_b a)^2 = 4 \Leftrightarrow \log_b a = 2 \Leftrightarrow a = b^2$.

Suy ra: $T = 10\log ab - \log^2 a - \log^2 b = 10.\log b^3 - \log^2 \left(b^2\right) - \log^2 b = 30\log b - 5\log^2 b$

$T = 5.\left(6.\log b - \log^2 b\right) = 45 - 5(\log b - 3)^2 \leq 45$.

Dấu "=" xảy ra khi $\log b = 3 \Leftrightarrow b = 10^3 \Rightarrow a = 10^6$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức T là $T_{\max} = 45$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Dạng 1 TÌM TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ LOGARIT

Câu 1: Tìm tập xác định của hàm số $y=\log\left(x^2-x-2\right)$ (1)

A. $(-1;1)$. **B.** $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$.

C. $(-\infty;2)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Câu 2: Tìm tập xác định của hàm số $y=\log(x+2)+3\log x^2$.

A. $[-2;+\infty)$. **B.** $(-2;0)\cup(0;+\infty)$.

C. $(0;+\infty)$. **D.** $(-2;+\infty)$.

Câu 3: Tập xác định của hàm số $y=3^{x+2}$ là

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$. **C.** $(-2;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Câu 4: Tập xác định của hàm số $y=\log(x-2)^2$ là

A. $(2;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **C.** $[2;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Câu 5: Cho a là một số thực dương khác 1. Mệnh đề nào sau đây **sai** ?

A. Tập giá trị của hàm số $y=\log_a x$ là $(0;+\infty)$.

B. Tập xác định của hàm số $y=\log_a x$ là $(0;+\infty)$.

C. Tập xác định của hàm số $y=a^x$ là $(-\infty;+\infty)$.

D. Tập giá trị của hàm số $y=a^x$ là $(0;+\infty)$.

Câu 6: Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau.

A. Hàm số $y=3^x$ xác định trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số $y=\log_3 x$ có tập xác định là $D=(0;+\infty)$.

C. Hàm số $y=e^x$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}$.

D. Hàm số $y=\log x$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}$.

Câu 7: Tìm tập xác định của hàm số $y=e^{\log\left(-x^2+3x\right)}$.

A. $D=(3;+\infty)$. **B.** $D=(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$

C. $D=\mathbb{R}$. **D.** $D=(0;3)$.

Câu 8: Tập hợp các giá trị của x để biểu thức $\log_5\left(x^3-x^2-2x\right)$ có nghĩa là

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(0;1)$.

C. $(-1;0)\cup(2;+\infty)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Câu 9: Tập xác định của hàm số $y=\log_2\dfrac{x+3}{2-x}$ là

A. $D=[-3;2]$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-3;2\}$.

C. $D=(-\infty;-3)\cup(2;+\infty)$. **D.** $D=(-3;2)$.

Câu 10: Hàm số nào sau đây có tập xác định là $\mathbb{R}$?

A. $y=2^{\frac{1}{x}}$ **B.** $y=\dfrac{1}{e^x}$. **C.** $y=x^{\frac{1}{3}}$. **D.** $y=\ln|x|$.

Câu 11: Tìm tập xác định của hàm số $y=\log_2\left(1-\sqrt{x+3}\right)$.

A. $D=[-3;+\infty)$. **B.** $D=[-3;-2]$. **C.** $D=[-3;-2)$. **D.** $D=(-\infty;-2)$.

Câu 12: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^5}}$.

A. $D=[5;+\infty)$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{5\}$. **C.** $D=(5;+\infty)$. **D.** $D=(\ln 5;+\infty)$.

Câu 13: Tìm tập xác định của hàm số $y=\sqrt{(x-2)^0}+\log_2\left(9-x^2\right)$ là

A. $D=(-3;3)$. **B.** $D=(2;3)$. **C.** $D=(-3;3)\setminus\{2\}$. **D.** $D=(3;+\infty)$.

Câu 14: Tìm tập xác định của hàm số $y=\dfrac{1}{\log_3(5-x)}$.

A. $(-\infty;5)\setminus\{4\}$. **B.** $(-\infty;5)$. **C.** $(5;+\infty)$. **D.** $[5;+\infty)$.

Câu 15: Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\log_2\dfrac{2x}{1-x^2}}$ có dạng $[a;b)\cup[c;d)$. Tính $a+b+c+d$.

A. 3. **B.** -4. **C.** 1. **D.** -2.

Câu 16: Tập xác định của hàm số $y=\log_x(x+2)$ là

A. $(0;+\infty)$. **B.** $(-2;+\infty)$. **C.** $(0;+\infty)\setminus\{1\}$. **D.** $(-2;+\infty)$.

Câu 17: Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{\log_{0,5}x}}$ là

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Câu 18: Tập xác định của hàm số $y=\log_{2020}\left(\log_{2019}\left(\log_{2018}\left(\log_{2017}x\right)\right)\right)$ là $D=(a;+\infty)$. Giá trị của a bằng

A. 0. **B.** 2018^{2019}. **C.** 2019^{2020}. **D.** 2017^{2018}.

Câu 19: Hàm số $y=\log_{x+3}\left(x^2-3x-4\right)-\log_{x+2}\left(x^2-3x-4\right)$ có tập xác định D là

A. $(-4;1)\cup(2;+\infty)$. **B.** $(-1;4)$. **C.** $(-2;-1)\cup(4;+\infty)$. **D.** $(-2;4)$.

Câu 20: Tập xác định của hàm số $\log\left[\ln\left(x-1-\sqrt{x^2-3x-10}\right)\right]$ là

A. $[5;14]$. **B.** $[2;14)$. **C.** $[5;14)$. **D.** $(2;14)$.

Câu 21: Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{1+\log_2 x}+\sqrt[3]{\log_2(1-x)}$ là

A. $(0;1)$. **B.** $\left[\dfrac{1}{2};1\right)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

Câu 22: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\ln\left(x^2-3x+m\right)$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$

A. $m\in\left(\dfrac{9}{4};+\infty\right)$. **B.** $m\in\left(-\infty;\dfrac{9}{4}\right]$.

C. $m\in\left(-\infty;\dfrac{9}{4}\right)\cup\left(\dfrac{9}{4};+\infty\right)$. **D.** $m\neq\dfrac{9}{4}$.

Câu 23: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\log\left(x^2-2mx+4\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $-2<m<2$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right.$. **C.** $m=2$. **D.** $m<2$.

Câu 24: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\log\left(x^2-2x-m+1\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $m\geq 0$ **B.** $m<0$ **C.** $m\leq 2$ **D.** $m>2$

Câu 25: Tìm m để hàm số $y=2x+2020+\ln\left(x^2-2m+4\right)$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

A. $m=2$. **B.** $m<2$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right.$. **D.** $-2<m<2$.

Câu 26: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019;2019)$ để hàm số $y=x+m+\sqrt{x^2+2(m+1)x+m^2+2m+4}+\log_2\left(x-m+\sqrt{2x^2+1}\right)$ xác định trên $\mathbb{R}$?

A. 2018. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 2021.

Câu 27: Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $f(x)=\ln\left(x^3-3m^2x+32m\right)$ xác định trên khoảng $(0;+\infty)$

A. 3. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5.

Câu 28: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\log_3\left(9^x-3^x+m\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

A. $m<\frac{1}{4}$. **B.** $m\geq\frac{1}{4}$. **C.** $m>\frac{1}{4}$. **D.** $m>0$.

Câu 29: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\log_{2020}\left(mx-m+2\right)$ xác định trên $[1;+\infty)$.

A. $m\leq -1$. **B.** $m\leq 0$. **C.** $m\geq 0$. **D.** $m\geq -1$.

Câu 30: Biết rằng hàm số $y=\log_2\left(\frac{4^x+2^{x+1}+10}{2^x+1}-m\right)$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$, khi đó có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m ?

A. 1. **B.** 5. **C.** 10. **D.** 13.

Dạng 2 ĐẠO HÀM VÀ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ MŨ - LOGARIT

Câu 1: Tìm đạo hàm của hàm số $y=e^{2x}$.

A. $y'=2e^{2x-1}$. **B.** $y'=e^{2x}$. **C.** $y'=2xe^{2x-1}$. **D.** $y'=2e^{2x}$.

Câu 2: Đạo hàm của hàm số $f(x)=\log\left(x^2+1\right)$ là

A. $f'(x)=-\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)\log e}$. **B.** $f'(x)=\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)\ln 10}$.

C. $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$. **D.** $f'(x)=\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)\ln 10}$.

Câu 3: Đạo hàm của hàm số $y=\log x$ là

A. $\dfrac{1}{10\ln x}$. **B.** $\dfrac{\ln 10}{x}$. **C.** $\dfrac{1}{x}$. **D.** $\dfrac{1}{x\ln 10}$.

Câu 4: Đạo hàm của hàm số $y=\log_2(5x-3)$ có dạng $y'=\dfrac{a}{(5x-3)\ln b}$ $(a;b\in\mathbb{Z},a<10)$. Tính $a+b$.

A. 9. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 7.

Câu 5: Đạo hàm của hàm số $y=\log_3\left(2x^2-x+1\right)$ là

A. $\dfrac{(4x-1)\ln 3}{2x^2-x+1}$. **B.** $\dfrac{4x-1}{2x^2-x+1}$. **C.** $\dfrac{2x-1}{\left(2x^2-x+1\right)\ln 3}$. **D.** $\dfrac{4x-1}{\left(2x^2-x+1\right)\ln 3}$.

Câu 6: Đạo hàm hàm số $y=\left(x^2-2x+2\right)e^x$ là

A. $y'=\left(x^2-2x\right)e^x$. **B.** $y'=\left(x^2+2\right)e^x$. **C.** $y'=x^2e^x$. **D.** $y'=\left(x^2-x\right)e^x$.

Câu 7: Tính đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{2+x}{2^x}$

A. $y'=\dfrac{1-(x+2)\ln 2}{4^x}$. **B.** $y'=\dfrac{1-(x+2)\ln 2}{2^x}$. **C.** $y'=\dfrac{1+(x+2)\ln 2}{2^x}$. **D.** $y'=\dfrac{(x+2)\ln 2-1}{2^x}$.

Câu 8: Đạo hàm $f'(x)$ của hàm số $f(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$ là

A. $\dfrac{-2}{\left(2^x+1\right)^2}.2^x\ln 2$. **B.** $\dfrac{2}{\left(2^x+1\right)^2}.2^x\ln 2$. **C.** $\dfrac{-2}{\left(2^x+1\right)^2}.2^x$. **D.** $\dfrac{2}{\left(2^x+1\right)^2}.2^x$.

Câu 9: Đạo hàm của hàm số $y=\ln\left(x^2+x+1\right)$ là hàm số nào sau đây?

A. $y'=\dfrac{1}{x^2+x+1}$. **B.** $y'=\dfrac{2}{x^2+x+1}$. **C.** $y'=\dfrac{-1}{x^2+x+1}$. **D.** $y'=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$.

Câu 10: Đạo hàm của hàm số $y=\mathrm{e}^{x^2+x}$ là

A. $(2x+1)\mathrm{e}^x$. **B.** $\left(x^2+x\right)\mathrm{e}^{2x+1}$. **C.** $(2x+1)\mathrm{e}^{2x+1}$. **D.** $(2x+1)\mathrm{e}^{x^2+x}$.

Câu 11: Tính đạo hàm của hàm số $y = \mathrm{e}^x - \ln 2x$.

A. $y' = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{x}$. **B.** $y' = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{2x}$. **C.** $y' = \mathrm{e}^x - \dfrac{2}{x}$. **D.** $y' = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x}$.

Câu 12: Cho hàm số $y = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$, mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $y' = \sqrt{x}.\mathrm{e}^{\sqrt{x}-1}$. **B.** $y' = \sqrt{x}.\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$. **C.** $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}.\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$. **D.** $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$.

Câu 13: Tìm đạo hàm của hàm số $y = \mathrm{e}^x - \log_2 x + 1$, $(x > 0)$.

A. $y' = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{x.\ln 2}$. **B.** $y' = x\mathrm{e}^{x-1} - \dfrac{1}{x.\ln 2}$. **C.** $y' = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{x}$. **D.** $y' = x\mathrm{e}^{x-1} - \dfrac{1}{x}$.

Câu 14: Hàm số $f(x) = 2^{x^2+3x+1}$ có đạo hàm là

A. $f'(x) = 2^{x^2+3x+1}(2x+3)\ln 2$. **B.** $f'(x) = \dfrac{2x+3}{2^{x^2+3x+1}}$.

C. $f'(x) = 2^{x^2+3x+1}(2x+3)$. **D.** $f'(x) = \dfrac{2x+3}{2^{x^2+3x+1}\ln 2}$.

Câu 15: Đạo hàm của hàm số $y = 3^x$ là

A. $y' = x\ln 3$. **B.** $y' = x3^{x-1}$. **C.** $y' = \dfrac{3^x}{\ln 3}$. **D.** $y' = 3^x \ln 3$.

Câu 16: Đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{\ln(\ln x)}$ là

A. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\ln(\ln x)}}$ **B.** $f'(x) = \dfrac{1}{2x\ln x\sqrt{\ln(\ln x)}}$.

C. $f'(x) = \dfrac{1}{\ln x\sqrt{\ln(\ln x)}}$. **D.** $f'(x) = \dfrac{1}{x\ln x\sqrt{\ln(\ln x)}}$.

Câu 17: Đạo hàm của hàm số $y = e^{2x}(\sin x - \cos x)$ là

A. $y' = e^{2x}(3\sin x + \cos x)$. **B.** $y' = 2e^{2x}(\sin x + \cos x)$.

C. $y' = e^{2x}(\sin x - 3\cos x)$. **D.** $y' = e^{2x}(3\sin x - \cos x)$.

Câu 18: Cho $f(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$. Giá trị $f'(1)$ bằng

A. $\mathrm{e}^{2\mathrm{e}}$. **B.** $\mathrm{e}^{\mathrm{e}+1}$. **C.** e. **D.** e^{e}.

Câu 19: Tính đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{x+1}{4^x}$.

A. $y' = \dfrac{1+2(x+1)\ln 2}{4^{x^2}}$. **B.** $y' = \dfrac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$.

C. $y' = \dfrac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$. **D.** $y' = \dfrac{1-2(x+1)\ln 2}{4^{x^2}}$.

Câu 20: Tính đạo hàm của hàm số $y = 3^x.e^x$

A. $3^x.e^x(\ln 3 + 1)$. **B.** $3^x.e^x\ln(3+e)$. **C.** $3^x.e^x(\ln 3 + \ln 1)$. **D.** $x.(3e)^{x-1}$.

Câu 21: Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{\ln x}{x^2}$ là

A. $y'=\dfrac{1-\ln x}{x^3}$. **B.** $y'=\dfrac{x-2\ln x}{x^4}$. **C.** $y'=\dfrac{1-2\ln x}{x^3}$. **D.** $y'=\dfrac{1-x\ln x}{x^4}$.

Câu 22: Tính đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{x+1}\ln x$.

A. $y'=\dfrac{x+\sqrt{x+1}}{x\sqrt{x+1}}$. **B.** $y'=\dfrac{3x+2}{2x\sqrt{x+1}}$.

C. $y'=\dfrac{x\ln x+2(x+1)}{2x\sqrt{x+1}}$. **D.** $y'=\dfrac{1}{2x\sqrt{x+1}}$.

Câu 23: Cho hàm số $y=f(x)=\log_2(1+2^x)$. Tính giá trị $S=f'(0)+f'(1)$.

A. $S=\dfrac{7}{8}$. **B.** $S=\dfrac{7}{6}$. **C.** $S=\dfrac{7}{5}$. **D.** $S=\dfrac{6}{5}$.

Câu 24: Cho hàm số $f(x)=\ln(x^2-2x+3)$. Tập hợp nghiệm của bất phương trình $f'(x)>0$ là

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-1;+\infty)$. **C.** $(-2;+\infty)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 25: Cho hàm số $y=\ln\sqrt{1+e^x}$. Tính $y'(\ln 3)$

A. $\dfrac{3}{8}$. **B.** 3. **C.** $\dfrac{\ln 3}{\sqrt{1+e^3}}$. **D.** e^3.

Câu 26: Cho hàm số $f(x)=x\ln x$. Tính $P=f(x)-x.f'(x)+x$.

A. $P=-1$. **B.** $P=e$. **C.** $P=1$. **D.** $P=0$.

Câu 27: Đạo hàm của hàm số $y=e^x\left(e^{-x}+x\right)$ là

A. $e^{2x}-1$ **B.** $e^x(x+1)$ **C.** $e^x\left(1-e^{-x}\right)$ **D.** $x+e^x$

Câu 28: Cho hàm số $f(x)=(x+1)e^x$. Giá trị của $f''(0)$ bằng

A. 3. **B.** 2. **C.** $3e$. **D.** $2e$.

Câu 29: Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x+1}{\log_2 x},(x>0,x\neq 1)$ là

A. $y'=\dfrac{x\log_2 x-(x+1)\ln 2}{x\log_2^2 x}$. **B.** $y'=\dfrac{x\ln x-x-1}{x\ln x}$.

C. $y'=\dfrac{x\log_2 x-x-1}{x\log_2^2 x}$. **D.** $y'=\dfrac{x\ln x-x-1}{x\ln x\log_2 x}$.

Câu 30: Đạo hàm của hàm số $y=\dfrac{x-1}{4^x}$ là

A. $y'=\dfrac{1+2(x-1)\ln 2}{2^{2x}}$. **B.** $y'=\dfrac{1-2(x-1)\ln 2}{2^{x^2}}$.

C. $y'=\dfrac{1-2(x-1)\ln 2}{2^{2x}}$. **D.** $y'=\dfrac{1+2(x-1)\ln 2}{2^{x^2}}$.

Câu 31: Trong các hàm số sau,hàm số nào luôn nghịch biến trên tập xác định của nó?

A. $y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$. **B.** $y=\log x$. **C.** $y=2^x$. **D.** $y=\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

Câu 32: Hàm số nào dưới đây đồng biến tên tập xác định của nó?

A. $y=\log\left(x^2-3x+4\right)$. **B.** $y=\frac{2x+3}{x+1}$.

C. $y=x^5+2020x-2021$. **D.** $y=\sin 3x$.

Câu 33: Cho $a>1$, chọn khẳng định đúng

A. Hàm số $y=\log_a x$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

B. Hàm số $y=\log_a x$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

C. Hàm số $y=\log_a x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số $y=\log_a x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 34: Hàm số nào dưới đây đồng biến trên tập xác định của nó?

A. $\left(\frac{2}{e}\right)^x$. **B.** $y=\left(\sqrt{3}-1\right)^x$. **C.** $y=\left(\frac{3}{4}\right)^x$. **D.** $y=(\pi)^x$.

Câu 35: Hàm số nào sau đây nghịch biến trên khoảng xác định của nó?

A. $y=\log_2 x$. **B.** $y=\log_{\frac{1}{3}} x$. **C.** $y=\log_{\sqrt{3}} x$. **D.** $y=\log_{\sqrt{2}} x$.

Câu 36: Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$?

A. $y=\left(\sqrt{3}+1\right)^x$. **B.** $y=\left(\frac{3}{\pi}\right)^{-x}$. **C.** $y=(1,5)^x$. **D.** $y=\left(\frac{2}{e}\right)^x$.

Câu 37: Tìm m để hàm số $y=(m-1)^x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m>2$. **B.** $1<m<2$. **C.** $m<1$. **D.** $1\le m\le 2$.

Câu 38: Tìm a để hàm số $y=(2a-5)^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $\frac{5}{2}<a<3$. **B.** $\frac{5}{2}\le a\le 3$. **C.** $a>3$. **D.** $a<\frac{5}{2}$.

Câu 39: Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau.

A. Hàm số $y=x^{\sqrt{2}}$ có tập xác định là $(0;+\infty)$.

B. Hàm số $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ nghịch biến trên tập xác định của nó.

C. Hàm số $y=2^x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số $y=\log_2 x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 40: Hàm số $y=\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-2x-3\right)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Câu 41: Hàm số $y=\log_{0,5}\left(-x^2+4x\right)$ đồng biến trên khoảng

A. $(0;2)$. **B.** $(2;4)$. **C.** $(0;4)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 42: Hàm số $y=\ln\left(x^2-2x-3\right)$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-1;3)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Câu 43: Cho hàm số $y=\left(x^2-3\right)e^x$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;1)$. **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;3)$. **D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

Câu 44: Cho hàm số $y=(0,5)^{x^2-8x}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng

A. $(0;4)$. **B.** $(0;8)$. **C.** $(9;10)$. **D.** $(-\infty;0)$.

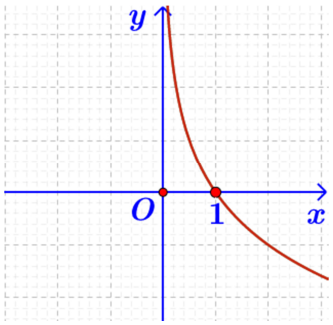
Câu 45: Trong bốn hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+2}, y=\dfrac{5^x+6^x}{2^x}, y=\left(\dfrac{\pi}{6}\right)^x, y=\log_3 x$ có bao nhiêu hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 46: Biết khoảng nghịch biến của hàm số $y=\log_{\frac{2}{e}}\left(-x^2+6x-5\right)$ là khoảng $(a;b)$ với $a,b\in\mathbb{R}$. Giá trị biểu thức $T=4a-b$ bằng.

A. -1. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 47: Đường cong trong hình sau là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số đã cho ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?

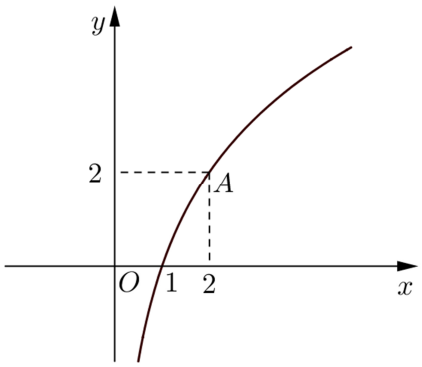


A. $y=\log_2 x$. **B.** $y=2^x$. **C.** $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$. **D.** $y=\log_{\frac{1}{2}} x$.

Câu 48: Hàm số nào trong các hàm số sau đây có bảng biến thiên phù hợp với hình bên?

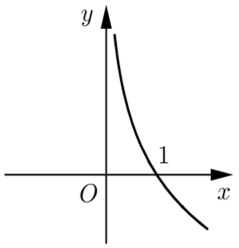
A. $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$. **B.** $y=\log_{\frac{1}{2}} x$. **C.** $y=2^x$. **D.** $y=\log_2 x$.

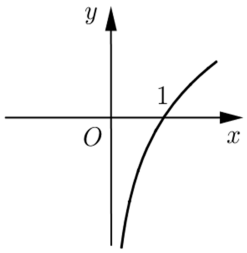
Câu 49: Cho hàm số $y=\log_a x\ (0<a\neq 1)$ có đồ thị là hình bên dưới. Giá trị của a bằng

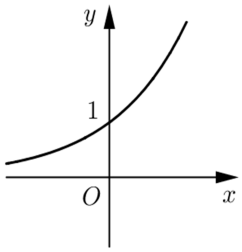


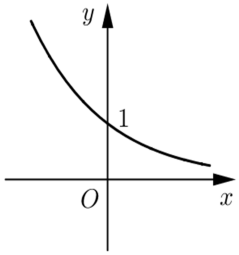
A. $a=2$. **B.** $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $a=\sqrt{2}$. **D.** $a=\dfrac{1}{2}$.

Câu 50: Cho số thực $a\in(0;1)$. Đồ thị hàm số $y=\log_a x$ là hình vẽ nào dưới đây

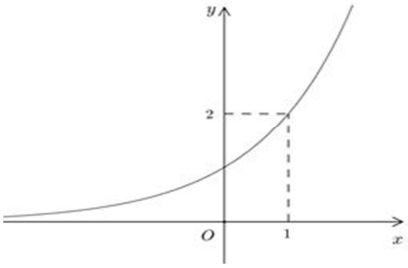
A.


B.


C.


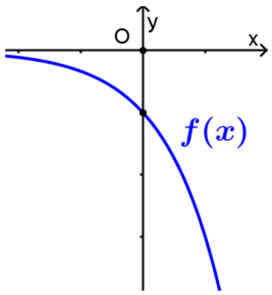
D.


Câu 51: Đồ thị sau là của hàm số nào?



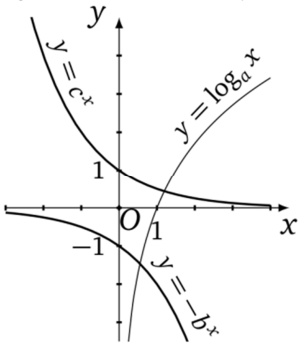
A. $y=\log_2 x$. **B.** $y=2^x$. **C.** $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$. **D.** $y=\log_3(x+2)$.

Câu 52: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $y=f(x)$ có thể là hàm số nào dưới đây?



A. $f(x)=\log_3 x$. **B.** $f(x)=2^x$. **C.** $f(x)=2^{-x}$. **D.** $f(x)=-3^x$.

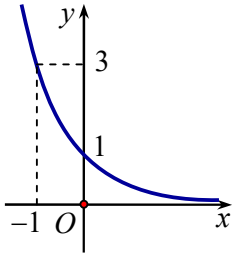
Câu 53: Xét các hàm số $y=\log_a x, y=-b^x, y=c^x$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây, trong đó a, b, c là các số thực dương khác 1. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $\log_b \dfrac{a}{c}<0$. **B.** $\log_c(a+b)>1+\log_c 2$.

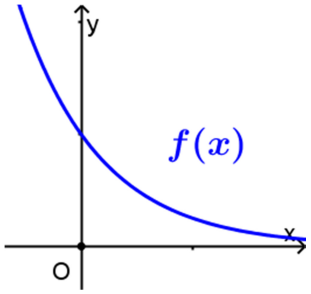
C. $\log_{ab} c>0$. **D.** $\log_a \dfrac{b}{c}>0$.

Câu 54: Đồ thị hình bên là của hàm số nào?



A. $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$. **B.** $y=\left(\sqrt{2}\right)^x$. **C.** $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$. **D.** $y=\left(\sqrt{3}\right)^x$.

Câu 55: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

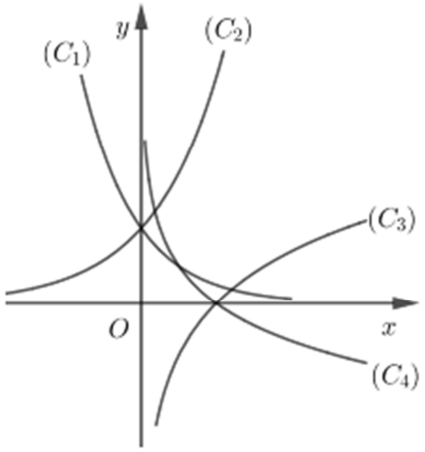


Hỏi $y=f(x)$ có thể là hàm số nào cho dưới đây?

A. $f(x)=x^3+2x$. **B.** $f(x)=x^4-x^2-1$.

C. $f(x)=\left(\dfrac{1}{0,3}\right)^x$. **D.** $f(x)=4^{-x}$.

Câu 56: Cho bốn đường cong, được kí hiệu là $(C_1),(C_2),(C_3),(C_4)$ như hình vẽ. Hàm số $y=\log_2 x$ có đồ thị là đường cong



A. (C_1). **B.** (C_2). **C.** (C_3). **D.** (C_4).

Câu 57: Cho hàm số $f(x)=\log_{0,9}\left(x^2+4x-5\right)$. Gọi S là tổng tất cả các giá trị nguyên của x thuộc đoạn $[-15;15]$ thỏa mãn bất phương trình $f'(x)>0$. Tính S?

A. $S=120$. **B.** $S=119$. **C.** $S=-105$. **D.** $S=-117$.

Câu 58: Cho hàm số $f(x)=\ln\left(e^x+\pi m\right)$ thỏa mãn $f'(\ln 3)=3$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m\in(-1;0)$. **B.** $m\in(1;3)$. **C.** $m\in(0;1)$. **D.** $m\in(-2;-1)$.

Câu 59: Hàm số $y=\log_2\sqrt{x^2+x}$ có đạo hàm là

A. $y'=\dfrac{2x+1}{2\left(x^2+x\right)\ln 2}$. **B.** $y'=\dfrac{2x+1}{\left(x^2+x\right)\ln 2}$. **C.** $y'=\dfrac{(2x+1)\ln 2}{2\left(x^2+x\right)}$. **D.** $y'=\dfrac{2x+1}{\left(x^2+x\right)}$.

Câu 60: Hàm số $f(x)=\ln\left(e^x+m\right)$ có $f'(-\ln 2)=\dfrac{3}{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m\in(-5;-2)$. **B.** $m\in(1;3)$. **C.** $m\in(0;1)$. **D.** $m\in(-2;0)$.

Câu 61: Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y=\ln(x+1)$ tại điểm có hoành độ $x=2$ là

A. 1. **B.** $\ln 2$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{3\ln 2}$.

Câu 62: Cho hàm số $y=\ln(x+2)$ có đồ thị là (C). Gọi A là giao điểm của (C) với trục Ox. Hệ số góc của tiếp tuyến của (C) tại A bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** -1. **D.** $\dfrac{-1}{4}$.

Câu 63: Đối với hàm số $y=\ln\dfrac{1}{x+1}$, khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $xy'+1=\mathrm{e}^y$. **B.** $xy'-1=\mathrm{e}^y$. **C.** $xy'-1=-\mathrm{e}^y$. **D.** $xy'+1=-\mathrm{e}^y$.

Câu 64: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x.\ln x$ tại điểm có hoành độ bằng e là

A. $y=2x-e$. **B.** $y=ex-2e$. **C.** $y=x+e$. **D.** $y=2x+3e$.

Câu 65: Cho hàm số $f(x)=\log_2(\cos x)$. Phương trình $f'(x)=0$ có bao nhiêu nghiệm trong khoảng $(0;2020\pi)$?

A. 2019. **B.** 2020. **C.** 1009. **D.** 1010.

Câu 66: Cho hàm số $f(x)=\ln\sqrt{1+\mathrm{e}^x}$. Tính $f'(\ln 2)$

A. 2. **B.** -2. **C.** 0,3. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Câu 67: Cho hàm số $y=\dfrac{\ln x}{x}$, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $y+xy'=-\dfrac{1}{x^2}$. **B.** $y+xy'=\dfrac{1}{x^2}$. **C.** $y+xy'=-\dfrac{1}{x}$. **D.** $y+xy'=\dfrac{1}{x}$.

Câu 68: Cho hàm số $y=\mathrm{e}^{-2x}.\cos x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $y'-4y''+5y=0$. **B.** $y''-4y'+5y=0$. **C.** $y'+4y''+5y=0$. **D.** $y''+4y'+5y=0$.

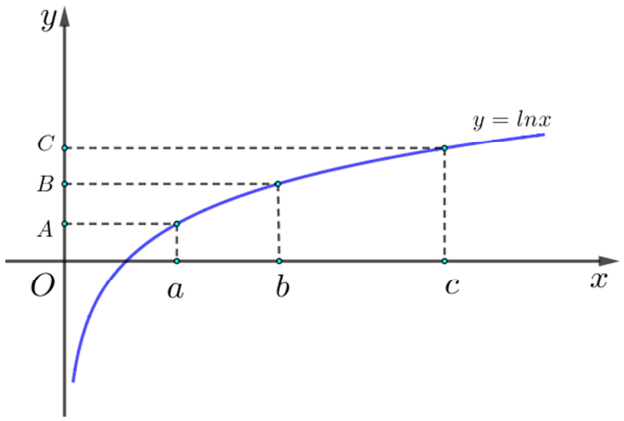
Câu 69: Cho hàm số $y=e^{-2x}$.Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $y''+y'+2y=0$. **B.** $y''+y'-2y=0$. **C.** $y''+y'-y=0$. **D.** $y''+y'+y=0$.

Câu 70: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\ln(x^2-x+1)$ tại điểm có hoành độ $x=1$.

A. $y=x+1-\ln 3$. **B.** $y=x-1+\ln 3$. **C.** $y=x-1$. **D.** $y=x+1$.

Câu 71: Trong hình dưới đây, điểm B là trung điểm của đoạn thẳng AC. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. $ac=b$. **B.** $a+c=2b$. **C.** $ac=b^2$. **D.** $ac=2b^2$.

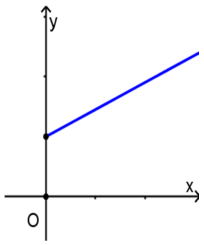
Câu 72: Biết đồ thị hàm số $y=a^x$ và đồ thị hàm số $y=\log_b x$ cắt nhau tại điểm $A\left(\dfrac{1}{2};2\right)$. Giá trị của biểu thức $T=a^2+2b^2$ bằng

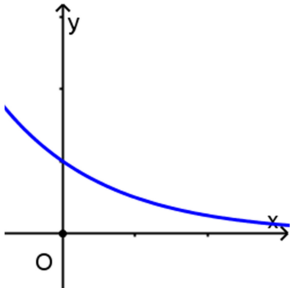
A. $T=17$. **B.** $T=15$. **C.** $T=9$. **D.** $T=\dfrac{33}{2}$.

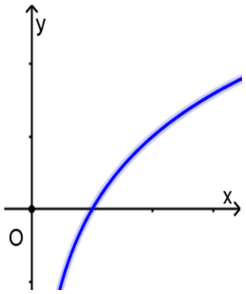
Câu 73: Cho hàm số $f(x)=(x+1)\left(1+\frac{x}{2}\right)^2...\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, với $n\in\mathbb{N}^*$. Giá trị $f'(0)$ bằng?

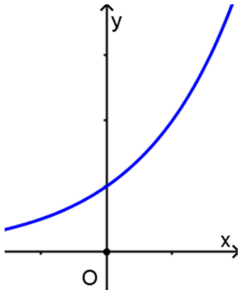
A. n. **B.** $\frac{1}{n}$. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 74: Hàm số $y=e^{\ln x}+b$ có đồ thị dạng nào trong các đồ thị dưới đây?

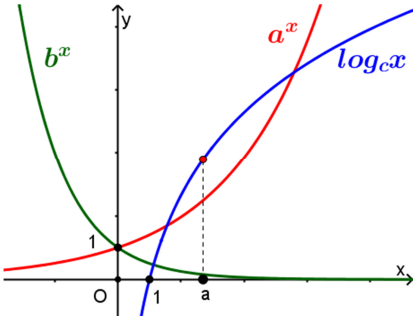
A.


B.


C.


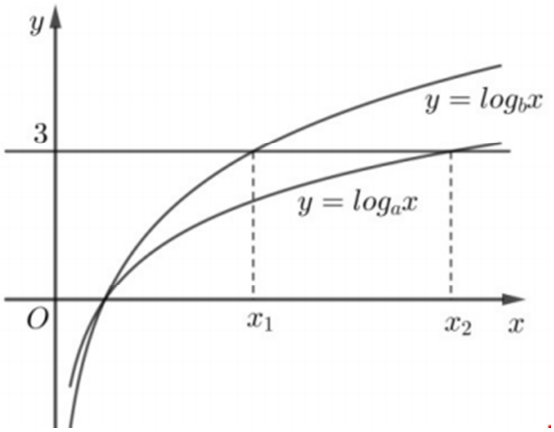
D.


Câu 75: Cho các số thực dương a,b,c và đồ thị biểu diễn các hàm số $y=a^x, y=b^x, y=\log_c x$. Hãy sắp xếp theo chiều tăng dần các hệ số a,b,c.



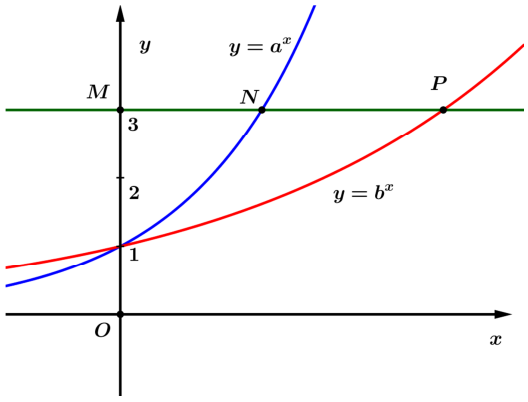
A. $b<c<a$. **B.** $c<b<a$. **C.** $b<a<c$. **D.** $a<b<c$.

Câu 76: Biết rằng đường thẳng $y=3$ cắt đồ thị của hai hàm số $y=\log_a x, y=\log_b x$ tại các điểm có hoành độ bằng x_1,x_2 sao cho $x_2=2x_1$ như hình vẽ bên. Giá trị của $\frac{a}{b}$ bằng



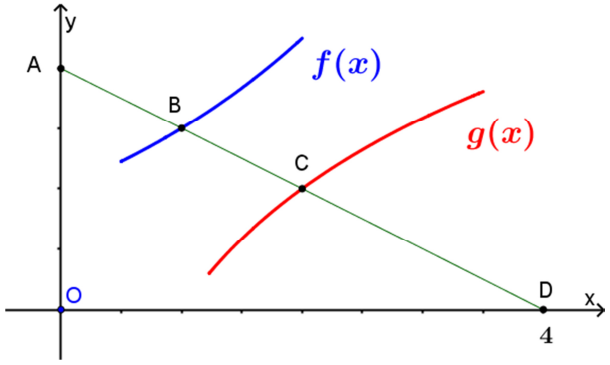
A. 2. **B.** $\sqrt[3]{2}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 77: Cho hàm số $y=a^x$ và $y=b^x$ có đồ thị như hình vẽ. Đường thẳng $y=3$ cắt trục tung, đồ thị hàm số $y=a^x$ và $y=b^x$ lần lượt tại M, N, P. Biết rằng $MN=2NP$. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $a^3=b^2$. **B.** $a^2=b^3$. **C.** $2a=3b$. **D.** $3a=2b$.

Câu 78: Cho hàm số $f(x)=a^x$ và $g(x)=\log_2 x$ có đồ thị như hình vẽ. Biết $2AB=2BC=CD$. Giá trị của số thực a nằm trong khoảng



A. $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $\left(\dfrac{2}{3};1\right)$. **D.** $\left(0;\dfrac{1}{3}\right)$.

Câu 79: Đồ thị của hàm số $f(x)$ đối xứng với đồ thị của hàm số $y=a^x$, $(a>0,a\neq 1)$ qua điểm $M(1;1)$. Giá trị của hàm số $f(x)$ tại $x=2+\log_a\dfrac{1}{2020}$ bằng

A. 2020. **B.** 2019. **C.** –2020. **D.** –2018.

Câu 80: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x.e^x$ trên đoạn $[-2;-1]$ bằng

A. $\dfrac{1}{e}$. **B.** $-\dfrac{1}{e}$. **C.** $\dfrac{2}{e^2}$. **D.** $-\dfrac{2}{e^2}$.

Câu 81: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{1}{2}x\mathrm{e}^{-x}$, với $x\geq 0$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $\max\limits_{x\in[0;+\infty)} f(x)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$. **B.** 48. **C.** 47. **D.** $\max\limits_{x\in[0;+\infty)} f(x)=-\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$.

Câu 82: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x$ trên đoạn $[0;2]$.

A. $\min\limits_{[0;2]} y=3$. **B.** $\min\limits_{[0;2]} y=\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}+\dfrac{2}{\mathrm{e}}$. **C.** $\min\limits_{[0;2]} y=2\mathrm{e}^4+2\mathrm{e}^2$. **D.** $\min\limits_{[0;2]} y=\mathrm{e}^4+2\mathrm{e}^2$.

Câu 83: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\ln(x^2-2x+1)-x$ trên đoạn $[2;4]$ là

A. –2. **B.** $2\ln 3-4$. **C.** –3. **D.** $2\ln 2-3$.

Câu 84: Gọi m và M lần lượt là các giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\mathrm{e}^{2-3x}$ trên đoạn $[0;2]$. Mối liên hệ giữa M và m là

A. $m+M=1$. **B.** $m.M=\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$. **C.** $\dfrac{M}{m}=\mathrm{e}^2$. **D.** $M-m=\mathrm{e}$.

Câu 85: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=e^{x+1}-2$ trên $[0;3]$.

A. e^4-2. **B.** e^2-2. **C.** $e-2$. **D.** e^3-2.

Câu 86: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=(2x-3)\mathrm{e}^x$ trên $[0;3]$ là

A. $\max\limits_{[0;3]} f(x)=3\mathrm{e}^3$. **B.** $\max\limits_{[0;3]} f(x)=5\mathrm{e}^3$. **C.** $\max\limits_{[0;3]} f(x)=4\mathrm{e}^3$. **D.** $\max\limits_{[0;3]} f(x)=\mathrm{e}^3$.

Câu 87: Cho hàm số $f(x)=x^2-x-\ln x$. Biết trên đoạn $[1;e]$ hàm số có GTNN là m, và có GTLN là M. Hỏi $M+m$ bằng

A. e^2-e. **B.** $2e^2-e+1$. **C.** e^2-e+1. **D.** e^2-e-1.

Câu 88: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x\mathrm{e}^x$ trên $[-2;0]$ bằng

A. $-\dfrac{1}{e}$. **B.** $-\dfrac{2}{\mathrm{e}^2}$. **C.** $\dfrac{2}{e^3}$. **D.** 0.

Câu 89: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=e^{x+1}-2$ trên đoạn $[0;3]$.

A. e^3-2. **B.** e^2-2. **C.** $e-2$. **D.** e^4-2.

Câu 90: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x\ln x$ trên khoảng $(0;+\infty)$ bằng

A. e. **B.** –1. **C.** $-e^{-1}$. **D.** e^{-1}.

Câu 91: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x(2-\ln x)$ trên đoạn $[2;3]$ bằng

A. $6-3\ln 3$. **B.** $4-2\ln 2$. **C.** e. **D.** 3.

Câu 92: Với giá trị nào của x thì hàm số $y=2^{2\log_3 x-\log_3^2 x}$ đạt giá trị lớn nhất?

A. 2. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 93: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x-3\ln x$ trên đoạn $[1;\mathrm{e}]$ bằng

A. 1. **B.** $3-3\ln 3$. **C.** e. **D.** $\mathrm{e}-3$.

Câu 94: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\log_2^2 x-4\log_2 x+1$ trên là

A. 1. **B.** -3. **C.** 2. **D.** -2.

Câu 95: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x(3-\ln x)$ trên đoạn $[6;9]$ bằng

A. $18-6\ln 6$. **B.** $27-9\ln 9$. **C.** e^2. **D.** 9.

Câu 96: Gọi a,b lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2+\log_2(2-x)$ trên đoạn $[-2;0]$. Tổng $a+b$ bằng

A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 0.

Câu 97: Có bao nhiêu giá trị của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\left|4^x-4.2^x+m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 6?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 98: Số giá trị m nguyên trên $[-2;2018]$ để hàm số $y=\mathrm{e}^{x^3-x^2+mx}$ đồng biến trên $[1;2]$ là

A. 2017. **B.** 2018. **C.** 2019. **D.** 2020.

Câu 99: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019;2019)$ để hàm số $y=2019^{x^3-x^2-mx+1}$ nghịch biến trên $[-1;2]$?

A. 2011. **B.** 2019. **C.** 2010. **D.** 2020.

Câu 100: Số giá trị nguyên của $m<10$ để hàm số $y=\ln(x^2+mx+1)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ là

A. 8. **B.** 9. **C.** 10. **D.** 11.

Câu 101: Tìm m để hàm số $y=\ln(3x-1)-\dfrac{m}{x}+2$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

A. $\left(-\dfrac{7}{3};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\dfrac{1}{3};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\dfrac{4}{3};+\infty\right)$. **D.** $\left(\dfrac{2}{9};+\infty\right)$.

Câu 102: Tìm tham số m để hàm số $y=\dfrac{\log_{\frac{1}{2}} x-2}{\log_2 x-m}$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

A. $m\ge 0$. **B.** $m>-2$. **C.** $m>0$. **D.** $m\ge -2$.

Câu 103: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-2018;2018]$ để hàm số $y=f(x)=(x+1)\ln x+(2-m)x$ đồng biến trên khoảng $(0;e^2)$.

A. 2023. **B.** 2022. **C.** 2014. **D.** 2016.

Câu 104: Cho hàm số $y=\dfrac{\ln x-6}{\ln x-2m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;e)$. Tìm số phần tử của S.

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 105: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)-2mx+3$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $\dfrac{1}{8}\le m<8$. **B.** $m\ge 8$. **C.** $m\le\dfrac{1}{8}$. **D.** $m\ge\dfrac{1}{8}$.

Câu 106: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-2019;2019]$ để hàm số $y=\ln\left(x^2+2\right)-mx+1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 2019. **B.** 2020. **C.** 4038. **D.** 1009.

Câu 107: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2}{2}-mx+\ln(x-1)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 108: Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $y=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{2x^3}{3}-\dfrac{m-1}{2}x^2+mx-\ln x+2$ đồng biến trên $(3;+\infty)$.

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 109: Cho hàm số $y=\dfrac{\sqrt{1-\ln x}+1}{\sqrt{1-\ln x}+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-5;5]$ để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{e^3};1\right)$.

A. 5. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 6.

Câu 110: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a trên đoạn $[-2019;2019]$ để hàm số $f(x)=\dfrac{(a+1)\ln x-6}{\ln x-3a}$ nghịch biến trên khoảng $(1;e)$

A. 4036. **B.** 4037. **C.** 2016. **D.** 4035.

Câu 111: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\log_2\left(e^x-mx\right)$ đồng biến trên $(0;\ln 3)$?

A. 1. **B.** vô số. **C.** 3. **D.** 2.

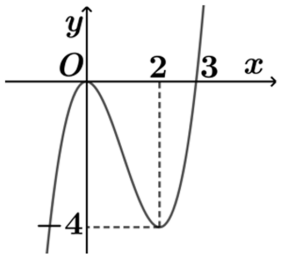
Câu 112: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-6		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f(2x-2)-2e^x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0;1)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(-2;0)$.

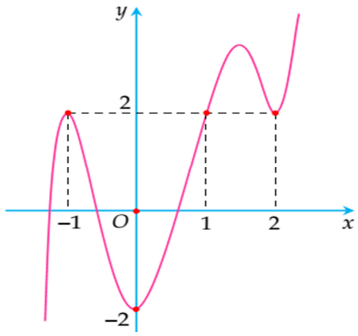
Câu 113: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $g(x)=f(e^x-2)-2020$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

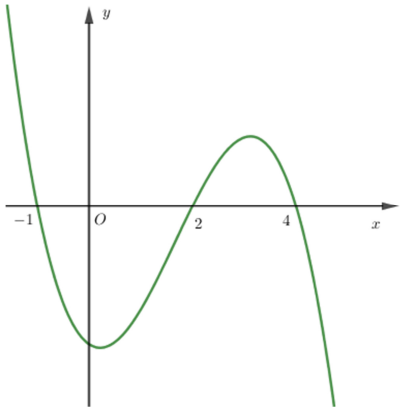
A. $\left(\frac{3}{2};2\right)$. **B.** $\left(-1;\frac{3}{2}\right)$. **C.** $(-1;2)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Câu 114: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $g(x)=\pi^{2f(x)-4x}$ đồng biến trên khoảng nào?



A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-1;2)$. **C.** $(-\infty;-1)$. **D.** $(-1;1)$.

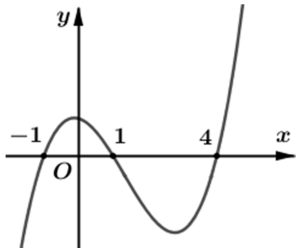
Câu 115: Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y=f(10-2^x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(\log_2 6;4)$. **B.** $(\log_2 11;+\infty)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $(2;4)$.

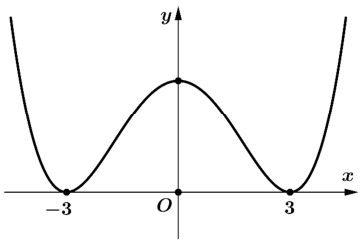
Câu 116: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x)=10^{f(3-2x)}$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(1;2)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(-\frac{1}{2};1\right)$.

Câu 117: Cho hai hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Đặt $g(x)=f\left(2^{1+x}-2^{1-x}\right)$. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Câu 118: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như hình bên.

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
y'		−	0	+	0	−	0	+	

Hàm số $y=e^{3f(2-x)+1}+3^{f(2-x)}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây.

A. $(-1;3)$. **B.** $(-2;1)$. **C.** $(1;+\infty)$ **D.** $(-\infty;-2)$.

Câu 119: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
y'		+	0	−	0	+	

Hàm số $g(x)=f\left(3-2^{x}\right)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-5)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(2;7)$.

Câu 120: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	0	−	

Đặt $g(x)=f\left(x^2\right)+e^{x^3-3x^2+1}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

B. $g(-3)<g(-2)$.

C. Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x=0$.

D. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$.

Câu 121: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		1		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=3f(-x+2)+2^{x^3+3x^2-9x}$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-2;1)$.

Câu 122: Cho hàm số $y=f(x)$ và $f(x)>0,\forall x\in\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ và $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{137}{16}$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		↗		↘	$-\frac{11}{2}$	↘		↗	

Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in[-2020;2020]$ để hàm số $g(x)=e^{-x^2+4mx-5}.f(x)$ đồng biến trên $\left(-1;\frac{1}{2}\right)$.

A. 4041. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 4040.

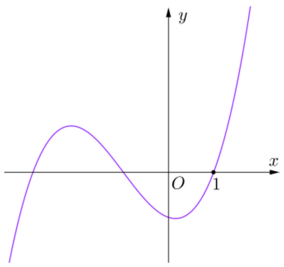
Câu 123: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình dưới đây

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	↗	1	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của số thực m sao cho hàm số $g(x)=f(x+1)+\frac{2020}{m}\ln\frac{2-x}{2+x}+\frac{x^2}{2}+3x+4\ln(2-x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$. Tính tổng tất cả các phần tử thuộc S?

A. 127765. **B.** 81810. **C.** 5151. **D.** 1275.

Câu 124: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị được cho trong hình vẽ. Tìm điều kiện của m để hàm số $g(x)=f(2019^x)-mx+2$ đồng biến trên $[0;1]$

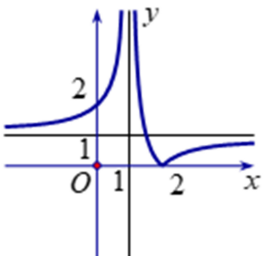


A. $m \le 0$. **B.** $0 < m < \ln 2019$. **C.** $m > \ln 2019$. **D.** $m \le \ln 2019$.

Câu 125: Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = \log_{2018} x$ và (C') là đồ thị của hàm số $y = f(x)$, (C') đối xứng với (C) qua trục tung. Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-1;0)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Câu 126: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$; $(1;+\infty)$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



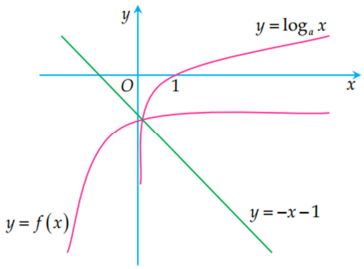
Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $f(\log_2 x) = m$ có nghiệm thuộc khoảng $(4;+\infty)$ là

A. $(0;2)$. **B.** $[0;1)$. **C.** $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. **D.** $(1;+\infty)$.

Câu 127: Cho hàm số $f(x) = 3^x - 1$ có đồ thị (C) và hàm số $y = g(x) = mx - m + 2$ có đồ thị là đường thẳng d. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị của tham số nguyên $m \in [-20;20]$ để đường thẳng d cắt (C) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x \ge 1$. Số phần tử của tập S là

A. 17. **B.** 18. **C.** 19. **D.** 24.

Câu 128: Hình vẽ bên là đồ thị của hai hàm số $y = \log_a x$ và $y = f(x)$. Đồ thị của chúng đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = -x - 1$. Tính $f(\log_a 2020)$.



A. $f(\log_a 2020) = -1 + \dfrac{a}{2020}$. **B.** $f(\log_a 2020) = -1 + \dfrac{1}{2020a}$.

C. $f\left(\log_a 2020\right)=-1-\dfrac{a}{2020}$. **D.** $f\left(\log_a 2020\right)=-1-\dfrac{1}{2020a}$.

Câu 129: Cho hàm số $f\left(x\right)=a\log\sqrt{4x^2+2}+ab\left(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}\right)+6$, với a, $b\in\mathbb{R}$, biết $f\left(\log\left(\log\mathrm{e}\right)\right)=4$. Giá trị $f\left(\log\left(\ln 10\right)\right)$ bằng

A. 8. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 130: Cho $f\left(x\right)=a\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+b\sin x+6$ với $a,b\in\mathbb{R}$. Biết rằng $f\left(\log\left(\log e\right)\right)=2$. Tính giá trị của $f\left(\log\left(\ln 10\right)\right)$.

A. 8. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 10.

Câu 131: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\mathrm{e}^x+m$ tiếp xúc với đồ thị hàm số $y=\ln\left(x+1\right)$.

A. $m=\mathrm{e}$. **B.** $m=1$. **C.** $m=-\mathrm{e}$. **D.** $m=-1$.

Câu 132: Đường thẳng $x=m$ lần lượt cắt đồ thị hàm số $y=\log_5 x$ và đồ thị hàm số $y=\log_5\left(x+4\right)$ tại các điểm A,B. Biết rằng khi $AB=\dfrac{1}{2}$ thì $m=a+\sqrt{b}$ trong đó a,b là các số nguyên. Tổng $a+b$ bằng

A. 7. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 133: Cho hàm số $f\left(x\right)=-\ln\left(x^2+x\right)$. Tính $\mathrm{P}=e^{f(1)}+e^{f(2)}+\ldots+e^{f(2019)}$.

A. $\mathrm{P}=e^{2019}$. **B.** $\mathrm{P}=-\dfrac{2019}{2020}$. **C.** $\mathrm{P}=\dfrac{2020}{2019}$. **D.** $\mathrm{P}=\dfrac{2019}{2020}$.

Câu 134: Cho hàm số $f\left(x\right)=\ln\left(1-\dfrac{4}{\left(2x-1\right)^2}\right)$. Biết rằng $f\left(2\right)+f\left(3\right)+\ldots+f\left(2020\right)=\ln\dfrac{a}{b}$, trong đó $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản, $a,b\in\mathbb{N}^*$. Tính $b-3a$.

A. -1. **B.** 1. **C.** -2. **D.** 3.

Câu 135: Cho hàm số $f\left(x\right)=-\log\left(x^2+2x\right)$. Tính $P=10^{f(1)}+10^{f(3)}+10^{f(5)}+\ldots+10^{f(2019)}$.

A. $\mathrm{P}=\dfrac{1010}{2021}$. **B.** $\mathrm{P}=\dfrac{2022}{2021}$. **C.** $\mathrm{P}=10^{2021}$. **D.** $\mathrm{P}=\dfrac{2020}{2021}$.

Câu 136: Cho $f\left(x\right)=5^{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}}}$. Biết rằng: $f\left(1\right).f\left(2\right)\ldots f\left(2020\right)=5^{\frac{m}{n}}$ với m,n là các số nguyên dương và phân số $\dfrac{m}{n}$ tối giản. Tính $m-n^2$

A. $m-n^2=1$. **B.** $m-n^2=2020$. **C.** $m-n^2=2021$. **D.** $m-n^2=-1$.

Dạng 3 CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ VỀ HÀM SỐ MŨ

Câu 1: Ông A gửi vào ngân hàng một số tiền ban đầu là 240 triệu VNĐ với mức lãi suất 2% tính cho một quý (gồm 3 tháng) theo hình thức lãi kép. Hỏi sau 3 năm kể từ ngày gửi tiền, tổng số tiền ông A có trong ngân hàng là bao nhiêu?

A. 280,891 triệu. **B.** 304,378 triệu **C.** 330,215 triệu. **D.** 403,766 triệu.

Câu 2: Một người gửi tiết kiệm với lãi suất 8,4%/năm và lãi suất hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi sau bao nhiêu năm người đó thu được gấp đôi số tiền ban đầu?

A. 11. **B.** 8. **C.** 9. **D.** 10.

Câu 3: Ông An gửi ngân hàng 150 triệu đồng với lãi suất 0,8%/tháng, sau mỗi tháng tiền lãi được nhập vào vốn (lãi kép). Hỏi sau một năm số **tiền lãi** ông An thu được gần nhất với kết quả nào sau đây.

A. 15.051.000 đồng. **B.** 165.050.000 đồng. **C.** 165.051.000 đồng. **D.** 15.050.000 đồng.

Câu 4: Một người gửi tiết kiệm 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7%/một năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu và lãi suất không đổi trong các năm gửi. Sau 5 năm mới rút lãi thì người đó thu được số tiền lãi gần với số nào nhất?

A. 53,5 triệu. **B.** 20,128 triệu. **C.** 50,7 triệu. **D.** 70,128 triệu.

Câu 5: Một người gửi vào ngân hàng 300 triệu đồng với lãi suất 6,8%/năm. Biết rằng nếu không rút lãi khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau đúng 2 năm kể từ khi gửi tiền, người đó nhận được số tiền lãi gần nhất với số tiền nào dưới đây, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền và lãi suất không thay đổi?

A. 42187000 triệu đồng. **B.** 40080000 triệu đồng.

C. 18252000 triệu đồng. **D.** 342187000 triệu đồng.

Câu 6: Một người gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 0,4%/tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau một tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau đúng 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền (cả vốn ban đầu và lãi gần nhất với số nào dưới đây, nếu trong thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

A. 102.017.000 đồng. **B.** 102.424.000 đồng. **C.** 102.423.000 đồng. **D.** 102.016.000 đồng.

Câu 7: Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép, kì hạn một năm với lãi suất 7%/năm. Hỏi sau bao nhiêu năm người gửi sẽ có ít nhất 200 triệu đồng từ số tiền gửi ban đầu (giả sử trong suốt quá trình gửi người gửi không rút tiền và lãi suất không thay đổi)

A. 11 năm. **B. 9** năm. **C. 12** năm. **D. 10** năm.

Câu 8: Bạn Châu được nhận học bổng Vallet 7 triệu đồng, mẹ cho bạn gửi tiết kiệm theo thể thức lãi kép kì hạn 1 năm với lãi suất 6.8% một năm. Hỏi sau bao nhiêu năm thì bạn Châu nhận được cả vốn ban đầu và lãi gần nhất với 10 triệu đồng? (Giả thiết rằng, lãi suất không thay đổi trong suốt thời gian bạn Châu gửi).

A. 7. **B.** 8. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 9: Một người gửi M triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất $8{,}4\%/$ năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm thì người đó có được nhiều hơn gấp đôi số tiền mang đi gửi?

A. 10 năm. **B.** 7 năm. **C.** 8 năm. **D.** 9 năm.

Câu 10: Một người gửi số tiền M triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất $0{,}7\%/$ tháng. Biết rằng nếu người đó không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi thàng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi đó là lãi kép). Sau ba năm, người đó muốn lãnh được số tiền là 5 triệu đồng, nếu trong khoảng thời gian này không rút tiền ra và lãi suất không đổi, thì người đó cần gửi số tiền M là

A. 3 triệu 900 ngàn đồng. **B.** 3 triệu 800 ngàn đồng.
C. 3 triệu 700 ngàn đồng. **D.** 3 triệu 600 ngàn đồng.

Câu 11: Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng với lãi suất $8{,}4\%$ /năm và tiền lãi hàng năm được nhập vào tiền vốn. Tính số năm tối thiểu người đó cần gửi để số tiền thu được nhiều hơn 3 lần số tiền gửi ban đầu.

A. 8 năm. **B.** 11 năm. **C.** 10 năm. **D.** 14 năm.

Câu 12: Một người gửi 15 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kỳ hạn một quý với lãi suất $1{,}65\%$ một quý. Hỏi sau bao lâu người đó có được ít nhất 20 triệu đồng (cả vốn lẫn lãi) từ số vốn ban đầu? (Giả sử lãi suất không thay đổi).

A. 4 năm 2 quý. **B.** 4 năm 3 quý. **C.** 5 năm. **D.** 4 năm 1 quý.

Câu 13: Ông An dự định gửi vào ngân hàng một số tiền với lãi suất không đổi là 7% một năm. Biết rằng cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho năm kế tiếp. Tính số tiền tối thiểu x (triệu đồng,) $x \in \mathbb{N}$ ông An gửi vào ngân hàng để sau 3 năm số tiền lãi đủ mua một chiếc xe gắn máy giá trị 45 triệu đồng.

A. 250. **B.** 150. **C.** 200. **D.** 190.

Câu 14: Một người lần đầu gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng với kì hạn 3 tháng, lãi suất 2% một quý theo hình thức lãi kép. Sau đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 100 triệu đồng với kì hạn và lãi suất như trước đó. Tổng số tiền người đó nhận được 1 năm sau khi gửi thêm tiền gần nhất với kết quả nào sau đây?

A. 220 triệu. **B.** 210 triệu. **C.** 212 triệu. **D.** 216 triệu.

Câu 15: Một người muốn gửi tiền vào ngân hàng để đến ngày 15/11/2021 rút được khoản tiền là 50 000 000 đồng (cả vốn ban đầu và lãi). Lãi suất ngân hàng là $0{,}55\%$ /tháng, tính theo thể thức lãi kép. Hỏi vào ngày 15/12/2019 người đó phải gửi ngân hàng số tiền là bao nhiêu để đáp ứng nhu cầu trên, nếu lãi suất không thay đổi trong thời gian người đó gửi tiền (giá trị gần đúng làm tròn đến hàng nghìn)?

A. 43 833 000 đồng. **B.** 44 074 000 đồng. **C.** 44 316 000 đồng. **D.** 43 593 000 đồng.

Câu 16: Đầu năm 2016, ông A thành lập một công ty. Tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong năm 2016 là 1 tỷ đồng. Biết rằng cứ sau mỗi năm thì tổng số tiền dùng để trả cho nhân viên trong cả năm đó tăng thêm 15% so với năm trước. Hỏi năm nào dưới đây là năm đầu tiên mà tổng số tiền ông A dùng để trả lương cho nhân viên trong cả 5 năm lớn hơn 2 tỷ đồng?

A. Năm 2022. **B.** Năm 2021. **C.** Năm 2020. **D.** Năm 2023.

Câu 17: Anh Nam tiết kiệm được x triệu đồng và dùng tiền đó để mua một căn nhà nhưng thực tế giá căn nhà đó là $1,6x$ triệu đồng. Anh Nam quyết định gửi tiết kiệm vào ngân hang với lãi suất 7% / năm theo hình thức lãi kép và không rút tiền trước kỳ hạn. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm anh Nam có đủ số tiền cần thiết (bao gồm vốn lẫn lãi) mua căn nhà đó? Giả định trong suốt thời gian gửi, lãi suất không đổi, anh Nam không rút tiền ra và giá bán căn nhà không thay đổi.

A. 8 năm. **B.** 7 năm. **C.** 5 năm. **D.** 6 năm.

Câu 18: Một người gửi một số tiền ban đầu là 300 triệu VNĐ vào một ngân hàng theo hình thức lãi kép (là hình thức tiền lãi của tháng trước cộng vào gốc để tính lãi cho tháng sau). Biết rằng lãi suất tính cho một tháng là $0,6\%$. Sau 10 tháng tính từ ngày gửi người đó đến ngân hàng rút 100 triệu VNĐ về tiêu dùng. Tiếp sau đó 2 năm người đó đến rút hết toàn bộ số tiền về. Hỏi người này đã thu được tổng cộng bao nhiêu tiền lãi so với số tiền ban đầu?

A. 52,227 triệu. **B.** 67,665 triệu. **C.** 100 triệu. **D.** 45,125 triệu.

Câu 19: Một người gửi ngân hàng lần đầu 100 triệu đồng với kì hạn 3 tháng, lãi suất 2% một quý theo hình thức lãi kép. Sau đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 100 triệu đồng với kì hạn và lãi suất như trước đó. Sau một năm, tổng số tiền gốc và lãi của người đó là bao nhiêu (làm tròn đến hàng triệu đồng)?

A. 212 triệu. **B.** 216 triệu. **C.** 221 triệu. **D.** 210 triệu.

Câu 20: Một người nhận hợp đồng dài hạn làm việc cho một công ty với lương năm đầu là 72 triệu đồng, cứ sau 3 năm thì tăng lương 10%. Nếu tính theo hợp đồng thì sau đúng 21 năm, người đó nhận được tổng số tiền của công ty là

A. $216\left(1,1^7-1\right)$ (triệu đồng). **B.** $7200\left(1,1^7-1\right)$ (triệu đồng).

C. $720\left(1,1^7-1\right)$ (triệu đồng). **D.** $2160\left(1,1^7-1\right)$ (triệu đồng).

Câu 21: Đầu mỗi tháng, chị B gửi vào ngân hàng 3 triệu đồng theo hình thức lãi kép với lãi suất $0,6\%$ một tháng và lãi suất không thay đổi trong suốt quá trình gửi tiền. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng chị B có được số tiền cả gốc và lãi nhiều hơn 150 triệu đồng?

A. 43 tháng. **B.** 44 tháng. **C.** 47 tháng. **D.** 46 tháng.

Câu 22: Cho thầy X muốn mua một chiếc xe Toyota Altis với giá 960 triệu VND với mức thu nhập hàng tháng là 30 triệu VND, biết rằng sau mỗi tháng thầy X chỉ giữ lại 10 triệu để chi tiêu và số tiền còn lại gửi hết vào ngân hàng với lãi suất 0,5% một tháng. Hỏi tối thiểu phải mất bao nhiêu tháng tính từ lần gửi tiền đầu tiên thầy X mới có thể mua được chiếc ô tô theo mơ ước mà không phải thiếu nợ một đồng nào?

A. 45 tháng. **B.** 48 tháng. **C.** 44 tháng. **D.** 43 tháng.

Câu 23: Ông A muốn sau 5 năm có 1.000.000.000 đồng để mua ô tô Camry. Hỏi rằng ông A phải gởi ngân hàng mỗi tháng số tiền gần nhất với số tiền nào sau đây? Biết lãi suất hàng tháng là $0,5\%$, tiền lãi sinh ra hàng tháng được nhập vào tiền vốn số tiền gửi hàng tháng là như nhau.

A. 14.261.000 (đồng). **B.** 14.260.500 (đồng). **C.** 14.260.000 (đồng). **D.** 14.261.500 (đồng).

Câu 24: Một thầy giáo muốn tiết kiệm tiền để mua cho mình một chiếc xe ô tô nên mỗi tháng gửi ngân hàng 8 000 000 VNĐ với lãi suất 0.5%/tháng. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu tháng thầy giáo có thể mua được chiếc xe ô tô 400 000 000 VNĐ?

A. $n=55$. **B.** $n=45$. **C.** $n=60$. **D.** $n=62$.

Câu 25: Ông Bình gửi 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 0,9% /tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng số tiền lãi sẽ được nhập vào gốc để tính lãi cho tháng tiếp theo và từ tháng thứ hai trở đi, mỗi tháng ông gửi thêm tiền vào tài khoản với số tiền 2 triệu đồng. Hỏi sau 3 năm số tiền ông Bình nhận được cả gốc lẫn lãi là bao nhiêu? Giả định trong suốt thời gian gửi lãi suất không thay đổi và ông Bình không rút tiền ra (kết quả được làm tròn đến hàng nghìn).

A. 222.675.000 đồng. **B.** 220.652.000 đồng. **C.** 221.871.000 đồng. **D.** 221.305.000 đồng.

Câu 26: Vào một ngày đầu tháng ông X gửi vào ngân hàng Y số tiền là 20 triệu đồng với mức lãi suất 0,6% tính cho một tháng và theo hình thức lãi suất kép. Sau đó mỗi tháng ông X lại gửi thêm vào ngân hàng một số tiền theo quy luật; tháng trước đó vừa gửi thêm 10 triệu thì tháng sau sẽ gửi thêm 20 triệu, tháng trước đô gửi vào số tiền 20 triệu thì tháng sau gửi vào số tiền 10 triệu. Hỏi ngay sau lần gửi tiền thứ 30 thì ông X có trong ngân hàng tất cả bao nhiêu tiền?

A. 491,924 triệu. **B.** 655,245 triệu. **C.** 655,623 triệu. **D.** 491,434 triệu.

Câu 27: Ngày 20/5/2018, ngày con trai đầu lòng chào đời, chú Tuấn quyết định mở một tài khoản tiết kiệm ở ngân hàng cho con với lãi suất 0,5% /tháng. Kể từ đó, cứ vào ngày 21 hàng tháng, chú sẽ gửi vào tài khoản một triệu đồng. Sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi vào ngày 22/5/2036, số tiền trong tài khoản tiết kiệm đó là bao nhiêu? (làm tròn đến triệu đồng)

A. 387 (triệu đồng). **B.** 391 (triệu đồng). **C.** 388 (triệu đồng). **D.** 390 (triệu đồng).

Câu 28: Một người vay ngân hàng 90.000.000 đồng theo hình thức trả góp trong 3 năm. Mỗi tháng người đó phải trả số tiền bằng nhau. Giả sử lãi suất trong toàn bộ quá trình trả nợ không đổi là 0,8% trên tháng. Tổng số tiền người đó phải trả trong toàn bộ quá trình trả nợ là

A. 101.320.000 đồng. **B.** 105.320.000 đồng. **C.** 103.940.000 đồng. **D.** 103.320.000 đồng.

Câu 29: Ông A vay ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất 1%/tháng. Ông ta muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi tháng là như nhau và ông A trả hết nợ sau đúng 5 năm kể từ ngày vay. Biết rằng mỗi tháng ngân hàng chỉ tính lãi trên số dư nợ thực tế của tháng đó. Hỏi số tiền mỗi tháng ôn ta cần trả cho ngân hàng gần nhất với số tiền nào dưới đây?

A. 2,22 triệu đồng. **B.** 3,03 triệu đồng. **C.** 2,25 triệu đồng. **D.** 2,20 triệu đồng.

Câu 30: Thầy Châu vay ngân hàng ba trăm triệu đồng theo phương thức trả góp để mua xe. Nếu cuối mỗi tháng, bắt đầu từ tháng thứ nhất thầy Châu trả 5 triệu đồng và chịu lãi số tiền chưa trả là 0,65% mỗi tháng (biết lãi suất không thay đổi) thì sau bao lâu thầy Châu trả hết số tiền trên?

A. 78 tháng. **B.** 76 tháng. **C.** 75 tháng. **D.** 77 tháng.

Câu 31: Ông A vay ngân hàng 200 triệu đồng với lãi suất 1%/tháng. Ông ta muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách sau: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi tháng là như nhau. Biết rằng mỗi tháng ngân hàng chỉ tính lãi trên số dư nợ thực tế của tháng đó và sau đúng hai năm kể từ ngày vay ông A trả hết nợ. Hỏi số tiền mỗi tháng ông ta cần trả cho ngân hàng gần nhất với số tiền nào dưới đây?

A. 9,5 triệu đồng. **B.** 9,41 triệu đồng. **C.** 9,85 triệu đồng. **D.** 9,44 triệu đồng.

Câu 32: Chị Phương Anh vay trả góp ngân hàng MSB số tiền 500 triệu đồng với lãi suất 10,8 %/năm, mỗi tháng trả 15 triệu đồng. Sau ít nhất bao nhiêu tháng thì chị Phương Anh trả hết nợ?

A. 42 tháng. **B.** 39 tháng. **C.** 41 tháng. **D.** 40 tháng.

Câu 33: Một người gửi 100 triệu đồng vào tài khoản tiết kiệm ngân hàng với lãi suất 0,6%/tháng, cứ sau mỗi tháng người đó rút ra 500 nghìn đồng. Hỏi sau đúng 36 lần rút tiền, số tiền còn lại trong tài khoản của người đó gần nhất với phương án nào sau đây? (Biết rằng lãi suất không thay đổi và tiền lãi mỗi tháng tính theo số tiền có thực tế trong tài khoản của tháng đó).

A. 106 triệu đồng. **B.** 108 triệu đồng. **C.** 104 triệu đồng. **D.** 102 triệu đồng.

Câu 34: Cho biết chu kì bán hủy của chất phóng xạ plutonium Pu^{239} là 24.360 năm (tức lượng Pu^{239} sau 24.360 năm phân hủy thì chỉ còn lại một nửa). Sự phân hủy được tính bởi công thức $S = Ae^{rt}$, trong đó A là lượng chất phóng xạ ban đầu, r là tỉ lệ phân hủy hàng năm $(r < 0)$, t là thời gian phân hủy, S là lượng còn lại sau thời gian phân hủy t. Hỏi 16 gam Pu^{239} sau bao nhiêu năm phân hủy sẽ còn 5 gam? (kết quả làm tròn đến chữ số hàng đơn vị)

A. 41541. **B.** 43352. **C.** 52311. **D.** 51467.

Câu 35: Sau một tháng thi công công trình xây dựng Nhà học thể dục của trường X đã thực hiện được một khối lượng công việc. Nếu tiếp tục với tiến độ như vậy thì dự kiến sau đúng 23 tháng nữa công trình sẽ hoàn thành. Để sớm hoàn thành công trình và kịp thời đưa vào sử dụng, công ty xây dựng quyết định từ tháng thứ hai, mỗi tháng tăng 4% khối lượng công việc so với tháng kề trước. Hỏi công trình sẽ hoàn thành ở tháng thứ mấy sau khi khởi công?

A. 18. **B.** 17. **C.** 20. **D.** 19.

Dạng 4 CỰC TRỊ HÀM SỐ MŨ – LOGARIT VÀ MIN MAX HÀM NHIỀU BIẾN

◈ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

Câu 1: Cho $y = ex + e^{-x}$ Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.
B. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
C. Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.
D. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = x^x$ với $x > 0$. Khẳng định nào sau đây là **sai?**

A. $f'(x) = x.x^{x-1}$.
B. $f'(1) = 1$.
C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \frac{1}{e}$.
D. Hàm số có GTNN bằng $e^{-\frac{1}{e}}$.

Câu 3: Nếu hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f'(x) = (x-1)^3(2^x - 2)\log_2 x$, $\forall x > 0$ thì

A. Trên khoảng $(0;+\infty)$ hàm số $y = f(x)$ có nhiều hơn một điểm cực trị.
B. Trên khoảng $(0;+\infty)$ hàm số $y = f(x)$ không có điểm cực trị nào.
C. Trên khoảng $(0;+\infty)$ hàm số $y = f(x)$ có điểm cực tiểu là $x = 1$.
D. Trên khoảng $(0;+\infty)$ hàm số $y = f(x)$ có điểm cực đại là $x = 1$.

Câu 4: Cho hàm số $y = x^2.e^{-x}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ và đạt cực đại tại $x = 2$.
B. Hàm số chỉ có điểm cực tiểu, không có điểm cực đại.
C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$.
D. Hàm số không có điểm cực trị.

Câu 5: Cho hàm số $y = x^2 \ln x$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \sqrt{e}$.
B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$.
C. Hàm số đạt cực đại tại $x = \sqrt{e}$.
D. Hàm số đạt cực đại tại $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Câu 6: Hàm số $f(x) = xe^{-x}$ đạt cực trị tại điểm

A. $x = 2$.
B. $x = e$.
C. $x = e^2$.
D. $x = 1$.

Câu 7: Cho hàm số $y = \ln(2x^2 - x^4)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.
B. Hàm số có hai cực trị.
C. Hàm số có ba cực trị.
D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

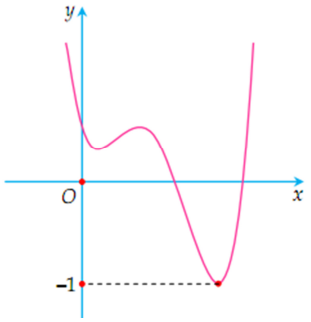
Câu 8: Số điểm cực trị của hàm $y = xe^x - e^x - \frac{x^2}{2} + 2$ là

A. 3.
B. 0.
C. 2.
D. 1.

Câu 9: Cho hàm số $y = \ln(2x - x^2)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

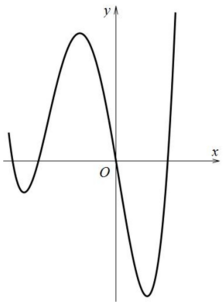
A. Hàm số không có cực trị.
B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.
C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$.
D. Hàm số có hai cực trị.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số cực trị của hàm số $y = 2^{f(x)} - 3^{f(x)}$.



A. 6. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

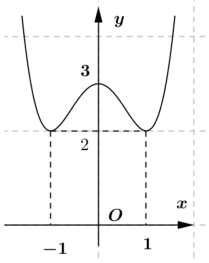
Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Tìm số điểm cực đại của hàm số $y=\left(\frac{1}{2018}\right)^{f(x)}-2019^{f(x)}$

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 12: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây



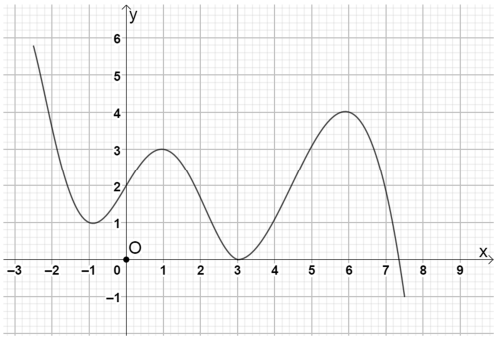
Hàm số $g(x)=\ln\left(f(x)\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị ?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 13: Cho hàm số $y=6|\ln x+2|+x^2-8x+2019$. Hỏi hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

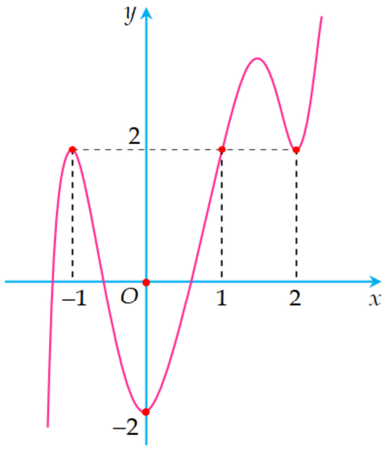
A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 2.

Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=2019^{f(f(x)-1)}$.



A. 12. **B.** 11. **C.** 10. **D.** 13.

Câu 15: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x-1)$ như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $y=\pi^{2f(x)-4x}$ đạt cực tiểu tại điểm nào?



A. $x=0$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=2$. **D.** $x=1$.

◈ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ MŨ VÀ LOGARIT

Dạng 1. SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP THẾ ĐƠN GIẢN

Câu 1: Cho x, y là các số thực dương thay đổi thỏa mãn $\ln x+\ln y=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $x+y$

A. 2. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** 3. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 2: Cho $a\ge b>1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $S=\log_a\left(\frac{a^2}{b}\right)+\log_b\left(\frac{b^3}{a}\right)$ là

A. -2. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 3: Cho hai số thực a, b thỏa mãn $1>a\ge b>0$. Tính giá trị nhỏ nhất $T_{\min}$ của biểu thức sau $T=\log_a^2 b+\log_{a.b} a^{36}$.

A. $T_{\min}=9$. **B.** $T_{\min}=19$. **C.** $T_{\min}=16$. **D.** $T_{\min}=13$.

Câu 4: Cho các số thực a,b thỏa mãn $a\ge b>1$. Biết rằng biểu thức $P=\frac{1}{\log_{ab} a}+\sqrt{\log_a\frac{a}{b}}$ đạt giá trị lớn nhất khi $b=a^k$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $k\in\left(0;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $k\in[2;3]$. **C.** $k\in(0;1)$. **D.** $k\in[0;1]$.

Câu 5: Xét các số thực a, b sao cho $b>1$, $\sqrt{a}\le b<a$. Biểu thức $P=\log_{\frac{a}{b}} a+2\log_{\sqrt{b}}\left(\frac{a}{b}\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi

A. $a^3=b^2$. **B.** $a^2=b^3$. **C.** $a=b^2$. **D.** $a^2=b$.

Câu 6: Cho x,y là các số thực dương, thỏa mãn $\log_{\frac{1}{2}} x+\log_{\frac{1}{2}} y\le\log_{\frac{1}{2}}\left(3x+y^2\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=4x+y$.

A. $P_{\min}=12\sqrt{5}$ **B.** $P_{\min}=12+6\sqrt{5}$. **C.** $P_{\min}=27+12\sqrt{5}$ **D.** $P_{\min}=27+6\sqrt{5}$

Câu 7: Cho các số thực a, b thỏa mãn điều kiện $0<b<a<1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_a\frac{4(3b-1)}{9}+8\log_{\frac{b}{a}}^2 a-1$.

A. 8. **B.** 7. **C.** 6. **D.** $3\sqrt[3]{2}$.

Câu 8: Cho a, b, c là các số thực lớn hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức

$$P=\frac{4}{\log_{\sqrt{bc}}a}+\frac{1}{\log_{ac}\sqrt{b}}+\frac{8}{3\log_{ab}\sqrt[3]{c}}.$$

A. $P_{\min}=20$. **B.** $P_{\min}=10$. **C.** $P_{\min}=18$. **D.** $P_{\min}=12$.

Câu 9: Cho hai số dương a,b thoả mãn $\log_2(a+1)+\log_2(b+1)\ge 6$. Tính giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=a+b$.

A. $P_{\min}=16$. **B.** $P_{\min}=12$. **C.** $P_{\min}=14$. **D.** $P_{\min}=8$.

Câu 10: Xét các số thực dương a,b,x,y thỏa mãn $a>1,b>1$ và $a^{\frac{x^2}{y}}=b^{\frac{y^2}{x}}=ab$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=xy$ là

A. $P=1$. **B.** $P=2$. **C.** $P=4$. **D.** $P=3$.

Câu 11: Xét các số thực a,b,x,y thỏa mãn $a,b>1$ và $a^x=b^y=\sqrt{\frac{a}{b}}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=x-2y$ thuộc tập nào dưới đây?

A. $\left[\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$. **B.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left[1;\frac{3}{2}\right)$.

Câu 12: Xét các số thức a,b,x,y thỏa mãn $a,b>1$ và $a^x=b^y=\sqrt[3]{ab}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q=x+3y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $\left(2;\frac{5}{2}\right)$. **B.** $\left(\frac{3}{2};2\right)$. **C.** $\left(\frac{5}{2};3\right)$. **D.** $(0;1)$.

Câu 13: Cho các số thực $a, b>1$ và các số dương x, y thay đổi thỏa mãn $a^x=b^y=ab$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{16}{x}-y^2$ bằng

A. 4. **B.** 0. **C.** 40. **D.** 16.

Câu 14: Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a, b>1$ và $a^x=b^y=\sqrt{ab}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+2y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $(1;2)$. **B.** $\left[2;\frac{5}{2}\right)$. **C.** $[3;4)$. **D.** $\left[\frac{5}{2};3\right)$.

Câu 15: Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a, b>1$ và $a^x=b^y=\sqrt[4]{ab}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+4y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $[1;2)$. **B.** $[0;1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $\left[2;\frac{5}{2}\right)$.

Câu 16: Xét các số thực a, b, c thỏa mãn $3^a=5^b=15^{-c}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2-4(a+b+c)$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $(-1;2)$. **B.** $[-5;-1)$. **C.** $[2;4)$. **D.** $[4;6)$.

Câu 17: Xét các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn $a, b>1$ và $a^{2x}=b^{3y}=a^6b^6$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3xy+2x+y$ có dạng $m+n\sqrt{30}$ (với m,n là các số tự nhiên), tính $S=m+n$

A. 52. **B.** 48 **C.** 40 **D.** 68.

Câu 18: Xét các số thực dương a, b, c, x, y, z thỏa mãn $a, b, c > 1$ và $a^x = b^y = c^z = \sqrt{abc}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + y + z + \frac{1}{2}$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $[10;13)$. **B.** $[7;10)$. **C.** $[3;5)$. **D.** $[5;7)$.

Câu 19: Cho $x, y, z > 0$; $a, b, c > 1$ và $a^x = b^y = c^z = \sqrt{abc}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{16}{x} + \frac{16}{y} - z^2$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $[-10;10)$. **B.** $[15;20]$. **C.** $(10;15)$. **D.** $\left[\frac{-11}{2};\frac{13}{2}\right)$.

Câu 20: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $xy \le 4y - 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{6(2x+y)}{x} + \ln\frac{x+2y}{y}$ là $a + \ln b$. Giá trị của tích $a.b$ là

A. 81. **B.** 115. **C.** 108. **D.** 45.

Câu 21: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $2^x + 2^y = 4$. Giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức $P = (2x^2 + y)(2y^2 + x) + 9xy$ là

A. $P_{\max} = 56$. **B.** $P_{\max} = 18$. **C.** $P_{\max} = 27$. **D.** $P_{\max} = 12$.

Câu 22: Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y \le \log_{\frac{1}{2}}(x + y^2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = x + 3y$.

A. $P_{\min} = \frac{17}{2}$. **B.** $P_{\min} = 9$. **C.** $P_{\min} = \frac{25\sqrt{2}}{4}$. **D.** $P_{\min} = 8$.

Câu 23: Cho hai số thực x, y thỏa mãn: $0 < x < y$ và $\log^2(xy^2) + \log^2 y = 10$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \ln x - \ln y$ bằng

A. $-10\ln 6$. **B.** $-12\ln 10$. **C.** $-6\ln 2$. **D.** $-10\ln 10$.

Câu 24: Cho x, y là hai số dương thỏa mãn $\ln(x+1) + \ln y \ge \ln(x^2 + 2x + y + 1)$. Giá trị nhỏ nhất của $x + y$ là

A. $\sqrt{2}$. **B.** $3 + \sqrt{2}$. **C.** $2 + \sqrt{2}$. **D.** $2\sqrt{2}$.

Câu 25: Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} y \le \log_{\frac{1}{3}}(x + y^2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P = 2x + 3y$.

A. $P_{\min} = 7 + 2\sqrt{10}$. **B.** $P_{\min} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$. **C.** $P_{\min} = 7 + 3\sqrt{2}$. **D.** $P_{\min} = 7 - 2\sqrt{10}$.

Câu 26: Cho các số thực dương x và y thỏa mãn $4 + 9.3^{x^2-2y} = (4 + 9^{x^2-2y}).7^{2y-x^2+2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x + 2y + 18}{x}$.

A. $\frac{9+\sqrt{2}}{2}$. **B.** 9. **C.** $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$. **D.** $1 + 9\sqrt{2}$.

Câu 27: Cho x, y là số thực dương thỏa mãn $\log_5 x + \log_5(7y) \ge \log_5(x^2 + 7y)$. Giá trị nhỏ nhất của $P = 4x + 7y$ có dạng $a\sqrt{b} + c$, trong đó a, b, c là số tự nhiên và $a > 1$. Tính giá trị biểu thức $S = a + b + c$

A. $S = 5$ **B.** $S = 12$. **C.** $S = 11$. **D.** $S = 13$.

Câu 28: Cho hai số thực dương x,y thoả mãn $2^{2x-3y-3}+9.2^{4x-6y-3}=8.3^{2x-3y-1}+1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x^2+9y^2-8x+12$ bằng

A. 3. **B.** -5. **C.** 1. **D.** 13.

Câu 29: Cho x,y là hai số thực dương thỏa mãn $\log x+\log 20y\ge 1+\log\left(x+16y^3\right)$. Giá trị nhỏ nhất của $P=\log_2 x-\log_2 2y$ là

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 30: Cho hai số thực dương $a;b$ thỏa mãn $a^2+b^2>2$ và $\log_{a^2+b^2}\left(2a+4b\right)\ge 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=a+b-3$ là

A. $\sqrt{10}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$. **C.** $2\sqrt{10}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Câu 31: Cho x,y là các số dương thỏa mãn $\log\left(x+2y\right)=\log\left(x\right)+\log\left(y\right)$. Khi đó, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x^2}{1+2y}+\dfrac{4y^2}{1+x}$ là

A. $\dfrac{29}{5}$. **B.** $\dfrac{32}{5}$. **C.** $\dfrac{31}{5}$. **D.** 6.

Câu 32: Xét các số thực dương a,b,x,y thỏa mãn $a>1$, $b>1$ và $a^{2x}=b^y=a^4b^4$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=xy+3x+2y$ có dạng $m+n\sqrt{14}$ (với m,n là các số tự nhiên), tính $S=m+n$.

A. 34 **B.** 30. **C.** 38. **D.** 48

Câu 33: Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn hệ thức: $2\log_2 a-\log_2 b\le\log_2\left(a+6b\right)$. Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức $P=\dfrac{2ab-b^2}{a^2-ab+b^2}$.

A. $P_{\max}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $P_{\max}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $P_{\max}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $P_{\max}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 34: Xét các số thực x,y thỏa mãn $x>0$ và $x^4+e^{4y}-3=x.e^y\left(1-2x.e^y\right)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\ln x+y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $\left[2;4\right)$. **B.** $\left[-3;0\right)$. **C.** $\left[0;3\right)$. **D.** $\left(1;2\right)$.

Câu 35: Cho các số thực $x;y$ thỏa mãn $x^2+4xy+12y^2=4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\log_2\left(x-2y\right)^2$ là

A. $\max P=3\log_2 2$ **B.** $\max P=\log_2 12$ **C.** $\max P=12$ **D.** $\max P=16$

Câu 36: Cho các số thực a,b thoả mãn $0<b<a<1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\log_a\dfrac{4\left(3b-1\right)}{9}+8\log_{\frac{b}{a}}^2 a-1$.

A. 6. **B.** 8. **C.** $3\sqrt[3]{2}$. **D.** 7.

Dạng 2. SỬ DỤNG HÀM ĐẶC TRƯNG

Câu 1: Cho $x;y$ là các số thực dương thỏa mãn $\log_3 \dfrac{2x+y+1}{x+y}=x+2y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{\sqrt{y}}$.

A. 4. **B.** $3+2\sqrt{3}$. **C.** 6. **D.** $3+\sqrt{3}$.

Câu 2: Xét các số thực dương x,y thỏa mãn $\log_3 \dfrac{1-xy}{x+2y}=3xy+x+2y-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P=x+y$

A. $P_{\min}=\dfrac{2\sqrt{11}-3}{3}$ **B.** $P_{\min}=\dfrac{9\sqrt{11}-19}{9}$ **C.** $P_{\min}=\dfrac{18\sqrt{11}-29}{21}$ **D.** $P_{\min}=\dfrac{9\sqrt{11}+19}{9}$

Câu 3: Xét các số thực dương x,y thỏa mãn $\log_3 \dfrac{1-y}{x+3xy}=3xy+x+3y-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P=x+y$.

A. $P_{\min}=\dfrac{4\sqrt{3}-4}{9}$. **B.** $P_{\min}=\dfrac{4\sqrt{3}+4}{3}$. **C.** $P_{\min}=\dfrac{4\sqrt{3}+4}{9}$. **D.** $P_{\min}=\dfrac{4\sqrt{3}-4}{3}$.

Câu 4: Cho $\begin{cases}x,y\in\mathbb{R}\\ x,y\ge 1\end{cases}$ sao cho $\ln\left(2+\dfrac{x}{y}\right)+x^3-\ln 3=19y^3-6xy\left(x+2y\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $T=x+\dfrac{1}{x+3y}$.

A. $m=\dfrac{5}{4}$. **B.** $m=1$. **C.** $m=1+\sqrt{3}$. **D.** $m=2$.

Câu 5: Cho hai số thực dương x,y thỏa mãn $\log_2 x+x\left(x+y\right)\ge \log_2(6-y)+6x$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3x+2y+\dfrac{6}{x}+\dfrac{8}{y}$ bằng

A. $8+6\sqrt{2}$. **B.** 19. **C.** $\dfrac{59}{3}$. **D.** $\dfrac{53}{3}$.

Câu 6: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $6.3^y+y+1=3x+\log_3\left(x+3^y\right)$.Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x}{2y}$ bằng

A. $\dfrac{e-\ln 3}{2}$. **B.** $\dfrac{e.\ln 3}{2}$. **C.** $e\ln 3$ **D.** $\dfrac{\ln 3}{e}$.

Câu 7: Cho các số thực x, y với $x\ge 0$ thỏa mãn $e^{x+3y}+e^{xy+1}+x\left(y+1\right)+1=e^{-xy-1}+\dfrac{1}{e^{x+3y}}-3y$. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x+2y+1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $m\in\left(2;3\right)$. **B.** $m\in\left(-1;0\right)$. **C.** $m\in\left(0;1\right)$. **D.** $m\in\left(1;2\right)$.

Câu 8: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $2^y+y=2x+\log_2\left(x+2^{y-1}\right)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x}{y}$ bằng

A. $\dfrac{e-\ln 2}{2}$. **B.** $\dfrac{e\ln 2}{2}$. **C.** $\dfrac{e}{2\ln 2}$. **D.** $\dfrac{e+\ln 2}{2}$.

Câu 9: Cho các số thực x,y thỏa mãn $0\le x,y\le 1$ và $\log_3\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)+\left(x+1\right)\left(y+1\right)-2=0$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=2x+y$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 10: Xét các số thực dương x,y thỏa mãn $\log_3\frac{x-3y}{xy+1}=xy+3y-x+1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=x+\frac{1}{y}$.

A. $A_{\min}=-\frac{14}{3}$. **B.** $A_{\min}=-6$. **C.** $A_{\min}=6$. **D.** $A_{\min}=\frac{14}{3}$.

Câu 11: Cho x,y là các số dương thỏa mãn $\log_3\frac{x+4y}{x+y}=2x-y+1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{3x^4y+2xy+2y^2}{x(x+y)^2}$.

A. 2. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 12: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $\log_2\left(\frac{x+4y}{x+y}\right)=2x-4y+1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{2x^4-2x^2y^2+6x^2}{(x+y)^3}$ bằng

A. $\frac{9}{4}$. **B.** $\frac{16}{9}$. **C.** $\frac{25}{9}$. **D.** 4.

Câu 13: Cho hai số thực dương x,y thỏa mãn $\log_2\frac{3(x+y)}{x^2+y^2+xy+3}=x^2+y^2+xy-6(x+y)+2$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{2x+3y+2}{x+y+1}$ lần lượt là M và m. Giá trị của biểu thức $M+m$ bằng

A. $\frac{60}{13}$. **B.** 12. **C.** $\frac{26}{5}$. **D.** $\frac{40}{13}$.

Câu 14: Cho x,y là các số dương thỏa mãn $\log_2\frac{x^2+5y^2}{x^2+10xy+y^2}+1+x^2-10xy+9y^2\le 0$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{x^2+xy+9y^2}{xy+y^2}$. Tính $T=10M-m$.

A. $T=104$. **B.** $T=50$. **C.** $T=60$. **D.** $T=94$.

Câu 15: Xét các số thực dương x,y thỏa mãn $2\log_3\sqrt{x}+x(x+y)\ge\log_{\sqrt{3}}\sqrt{8-y}+8x$. Biểu thức $P=3x+2y+\frac{6}{x}+\frac{18}{y}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=a,y=b$. Tính $S=3a+2b$.

A. $S=18$. **B.** $S=17$. **C.** $S=19$. **D.** $S=20$.

Câu 16: Cho các số thực x,y,z thỏa mãn $\log_{16}\left(\frac{x+y+z}{2x^2+2y^2+2z^2+1}\right)=x(x-2)+y(y-2)+z(z-2)$

Tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $F=\frac{x+y-z}{x+y+z}$ bằng

A. $-\frac{1}{3}$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Câu 17: Cho hai số thực dương x,y thỏa mãn $2^{x^2+1-\sqrt{y^2+1}}\log_2 x+2^y\log_2\left(\sqrt{y^2+1}-y\right)=0$. Giá trị lớn nhất của $P=3x^2-y^2-3y$ tương ứng bằng

A. $\frac{21}{4}$. **B.** $\frac{13}{4}$. **C.** $\frac{9}{4}$. **D.** 3.

Câu 18: Cho hai số thực $x>0, y>-1$ thỏa mãn $2^{x^2-\sqrt{y+1}}\log_2 x=\log_2\frac{y}{\sqrt{y+1}-1}$. Giá trị nhỏ nhất của $P=y-2x^2$ bằng

A. $\frac{-3}{4}$. **B.** -4. **C.** $\frac{-1}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 19: Cho hai số thực x,y không âm thỏa mãn $x^2+2x-y+1=\log_2\frac{\sqrt{2y+1}}{x+1}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=e^{2x-1}+4x^2-2y+1$ là

A. -1. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{1}{2}$.

Câu 20: Cho hai số thực dương x,y thỏa mãn $\log_3(x+y+2)=1+\log_3\left(\frac{x-1}{y}+\frac{y-1}{x}\right)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{a}{b}$ với $a,b\in\mathbb{N},(a,b)=1$. Hỏi $a+b$ bằng bao nhiêu?

A. 2. **B.** 9. **C.** 12. **D.** 13

Câu 21: Cho hai số thực x,y thỏa mãn hệ thức $\log_{0,1}\frac{x^2+4x-2y+10}{2x^2+y^2+6}=4x+4-x^2-y^2-2y$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=3x+4y+12$. Giá trị biểu thức $M+2m$ tương ứng bằng

A. 27. **B.** 26. **C.** 29. **D.** 28.

Câu 22: Cho hai số thực x,y thỏa mãn hệ thức $\log_5\frac{xy+y+2}{5x+7y+12}=5x+2y-5xy+1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x^2-10xy+4y+2019$ tương ứng bằng

A. 1990. **B.** 2010. **C.** 2011. **D.** 2019.

Câu 23: Cho x,y là các số thực dương thỏa mãn $\ln\frac{\sqrt{1+xy}}{x+y}=\frac{x^2+y^2+xy-1}{2}$. Biết giá trị lớn nhất của của biểu thức $P=\frac{xy}{x+y}$ bằng $\frac{\sqrt{a}}{b}$ trong đó a là số nguyên tố. Tính $a.b^2$

A. 48. **B.** 108. **C.** 80. **D.** 180.

Câu 24: Xét các số thực dương a , b thỏa mãn $\log_2\frac{1-ab}{a+b}=2ab+a+b-3$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P=a+2b$.

A. $P_{\min}=\frac{2\sqrt{10}-5}{2}$. **B.** $P_{\min}=\frac{3\sqrt{10}-7}{2}$. **C.** $P_{\min}=\frac{2\sqrt{10}-1}{2}$. **D.** $P_{\min}=\frac{2\sqrt{10}-3}{2}$.

Câu 25: Cho số thực x , y thoả mãn $\log_{\sqrt{3}}\frac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x(x-3)+y(y-3)+xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{x+2y+3}{x+y+6}$.

A. $\dfrac{37+\sqrt{249}}{94}$. **B.** $\dfrac{69-\sqrt{249}}{94}$. **C.** $\dfrac{43+2\sqrt{249}}{94}$. **D.** $\dfrac{69+\sqrt{249}}{94}$.

Câu 26: Cho hai số thực $x,y\in(-2;+\infty)$ thỏa mãn $\log_2\left((x+2)(y+2)\right)^{(y+2)}=4-x(y+2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=2x+y-1$ tương ứng bằng

A. $4\sqrt{2}$. **B.** $6-2\sqrt{2}$. **C.** $4\sqrt{3}-2$. **D.** $4\sqrt{2}-7$.

Câu 27: Cho a, b là hai số thực dương thỏa mãn $\log_5\left(\dfrac{4a+2b+5}{a+b}\right)=a+3b-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=a^2+b^2$.

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 1.

Câu 28: Cho x,y là hai số thực dương thỏa mãn $4+9.3^{x^2-2y}=\left(4+9^{x^2-2y}\right).7^{2y-x^2+2}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{x+2y+18}{x}$ là

A. 17. **B.** $\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$. **C.** $1+9\sqrt{2}$. **D.** 9.

Câu 29: Cho các số thực x, y thỏa mãn $2x-y=e^x\left(2-e^x\right)+\ln\left(2e^x+y\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+10y$.

A. -21. **B.** -20. **C.** -9. **D.** 0.

Câu 30: Cho $0\le x,\ y\le 1$ thỏa mãn $2017^{1-x-y}=\dfrac{x^2+2018}{y^2-2y+2019}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\left(4x^2+3y\right)\left(4y^2+3x\right)+25xy$. Khi đó $M+m$ bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{383}{16}$. **B.** $\dfrac{136}{3}$. **C.** $\dfrac{25}{2}$. **D.** $\dfrac{391}{16}$.

Câu 31: Cho các số thực $a,b\,c$ thỏa mãn $\log_2\dfrac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+1}=a(a-2)+b(b-2)+c(c-2)$.

Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{a+2b+c}{a+b+c+a}$ bằng

A. $\dfrac{6+2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{4+\sqrt{6}}{5}$. **C.** $\dfrac{4-\sqrt{6}}{5}$. **D.** $\dfrac{5+2\sqrt{6}}{3}$.

Câu 32: Cho các số thực x,y,a,b thỏa mãn các điều kiện $x>1,y>1,a>0,b>0$, $x+y=xy$. Biết rằng biểu thức $P=\dfrac{ya^x+xb^y}{abxy}$ đạt giá trị nhỏ nhất m khi $a=b^q$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $m+\dfrac{1}{q}=\dfrac{y}{y-1}$. **B.** $m+\dfrac{1}{q}=\dfrac{x}{x-1}$. **C.** $m+\dfrac{1}{q}=\dfrac{y-1}{y}$. **D.** $m+\dfrac{1}{q}=y$.

Câu 33: Cho hai số thực dương x, y thay đổi thỏa mãn đẳng thức $(2xy-1)4^{xy-1}=\left(x^2+y+1\right)2^{x^2+y}$. Tìm giá trị nhỏ nhất $y_{\min}$ của y.

A. $y_{\min}=2$. **B.** $y_{\min}=\sqrt{3}$. **C.** $y_{\min}=1$. **D.** $y_{\min}=3$.

Câu 34: Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\ln\left(\dfrac{1-2x}{x+y}\right)=3x+y-1$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{xy}}$.

A. $P_{\min}=16$. **B.** $P_{\min}=8$. **C.** $P_{\min}=4$. **D.** $P_{\min}=2$.

Câu 35: Xét các số thực dương x,y thỏa mãn $\log_3\dfrac{1-y}{x+3xy}=3xy+x+3y-4$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P=x+y$.

A. $P_{\min}=\dfrac{4\sqrt{3}+4}{9}$. **B.** $P_{\min}=\dfrac{4\sqrt{3}-4}{9}$. **C.** $P_{\min}=\dfrac{4\sqrt{3}-4}{3}$. **D.** $P_{\min}=\dfrac{4\sqrt{3}+4}{3}$.

Câu 36: Cho hai số thức a,b thỏa mãn $16.2^{a+2b}=\dfrac{8(1-2ab)}{a+2b}$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{4}ab+ab^2$

A. 1 **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$ **D.** $\dfrac{1}{8}$

Câu 37: Cho hai số dương x,y thỏa mãn $\log_3\left(4x+3y+2xy+6\right)^{y+2}=9-(2x+1)(y+2)$. Giá trị nhỏ nhất của $P=4x+y$ là cấp số có dạng $M=a\sqrt{2}+b$ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính $T=a+b$.

A. -2. **B.** -4. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 38: Cho các số thực x,y thỏa mãn điều kiện $0\le x\le 2$ và $2^{x+y+1}=4^x+\dfrac{x-y-1}{2^y}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2$.

A. $\sqrt{2}-1$. **B.** $1+\sqrt{2}$. **C.** $2-\sqrt{3}$. **D.** $\sqrt{3}-1$.

Câu 39: Cho số thực x, y $(x\ge 0)$ thỏa $2018^{x+3y}+2018^{xy+1}+x+1=2018^{-xy-1}+\dfrac{1}{2018^{x+3y}}-y(x+3)$. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x+2y$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $m\in(-1;0)$. **B.** $m\in(1;2)$. **C.** $m\in(2;3)$. **D.** $m\in(0;1)$.

Câu 40: Cho các số thực dương x,y thỏa mãn $\log_2\dfrac{x^2+y^2}{3xy+x^2}+x^2+2y^2+1\le 3xy$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{2x^2-xy+2y^2}{2xy-y^2}$.

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{3}{2}$. **D.** $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Câu 41: Cho hai số thực dương a,b thỏa mãn $4^{ab}.2^{a+b}=\dfrac{8(1-ab)}{a+b}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $Q=ab+2ab^2$ bằng

A. $\dfrac{3}{17}$. **B.** 1. **C.** 3. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Câu 42: Cho các số dương x,y thỏa mãn $\log_5\left(\dfrac{x+y-1}{2x+3y}\right)+3x+2y\le 4$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=6x+2y+\dfrac{4}{x}+\dfrac{9}{y}$ bằng

A. $11\sqrt{3}$. **B.** $\dfrac{27\sqrt{2}}{2}$. **C.** 19. **D.** $\dfrac{31\sqrt{6}}{4}$.

Câu 43: Xét các số thực dương x, y thoả mãn $2018^{2\left(x^2-y+1\right)}=\dfrac{2x+y}{\left(x+1\right)^2}$. Giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của biểu thức $P=2y-3x$ bằng

A. $P_{\min}=\dfrac{7}{8}$. **B.** $P_{\min}=\dfrac{1}{2}$. **C.** $P_{\min}=\dfrac{3}{4}$. **D.** $P_{\min}=\dfrac{5}{6}$.

Câu 44: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $5^{x+4y}+\dfrac{3}{3^{xy}}+x+1=\dfrac{5^{xy}}{5}+3^{-x-4y}+y\left(x-4\right)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y$.

A. $1+\sqrt{5}$. **B.** 3. **C.** $5+2\sqrt{5}$. **D.** $3-2\sqrt{5}$.

Câu 45: Cho $x,y>0$ thỏa $2019^{2\left(x^2-y+2\right)}-\dfrac{4x+y+2}{\left(x+2\right)^2}=0$. Tìm giá trị nhỏ nhất $P_{\min}$ của $P=2y-4x$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** 2018. **D.** 2019.

Câu 46: Cho hai số dương $x\,;y$ thỏa $\log_2\left(4x+y+2xy+2\right)^{y+2}=8-\left(2x-2\right)\left(y+2\right)$. Giá trị nhỏ nhất của $\mathrm{P}=2x+y$ là số có dạng $M=a\sqrt{b}+c$ với $a\,,b\in\mathbb{N},a>2$. Tính $\mathrm{S}=a+b+c$.

A. $\mathrm{S}=19$. **B.** $\mathrm{S}=3$. **C.** $\mathrm{S}=17$. **D.** $\mathrm{S}=7$.

Câu 47: Cho hai số thực $x\,;\,y$ thỏa mãn hệ thức $\log_2\sqrt{x^2+1}=2^{4y-1}-2x^2+2y-3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x^4-16^{y+1}+2x^2$ tương ứng bằng

A. -33. **B.** -65. **C.** -16. **D.** -1.

Câu 48: Cho 2 số thực dương x,y thỏa mãn $\log_3\left[\left(x+1\right)\left(y+1\right)\right]^{y+1}=9-\left(x-1\right)\left(y+1\right)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+2y$ là

A. $P_{\min}=\dfrac{27}{5}$. **B.** $P_{\min}=-5+6\sqrt{3}$. **C.** $P_{\min}=-3+6\sqrt{2}$. **D.** $P_{\min}=\dfrac{11}{2}$.

Câu 49: Xét các số thực x,y thỏa mãn $x>0$ và $x^4+e^{4y}-3=x.e^y\left(1-2x.e^y\right)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\ln x+y$ thuộc tập hợp nào dưới đây?

A. $\left[0;3\right)$. **B.** $\left[2;4\right)$. **C.** $\left[-3;0\right)$. **D.** $\left(1;2\right)$.

Câu 50: Xét các số thực dương x,y thỏa mãn $2\left(x^2+y^2+4\right)+\log_2\left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{y}\right)=\dfrac{1}{2}\left(xy-4\right)^2$. Khi $x+4y$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $\dfrac{x}{y}$ bằng

A. 2. **B.** 4. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Câu 51: Xét các số thực dương x, y thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}}\dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2}=x\left(x-3\right)+y\left(y-3\right)+xy.$ Tìm giá trị lớn nhất $P_{\max}$ của biểu thức $P=\dfrac{3x+2y+1}{x+y+6}$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 52: Cho hai số thực x,y dương thỏa mãn hệ thức $3^{x^2-y-\sqrt{y^2+1}}\log x+\log\sqrt{\sqrt{y^2+1}-y}=0$.

Khi biểu thức $T=y^2-x^2-y+\sqrt{y^2+1}$ đạt giá trị nhỏ nhất thì biểu thức $P=\left(x^2-1\right)^2+2y$ bằng

A. 4. **B.** 1. **C.** 5. **D.** 9.

Câu 53: Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn $\log_2\left(\frac{a+b+c}{a^2+b^2+c^2+1}\right)=a(a-2)+b(b-2)+c(c-2)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{3a+2b+c}{a+b+c}$.

A. $\frac{6+2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{4+2\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{6-2\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{8+2\sqrt{2}}{3}$.

Câu 54: Cho $0\le x,y\le 2$ thỏa mãn $2019^{2-x-y}=\frac{x^2+2020}{y^2-4y+2024}$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\left(2x^2-y\right)\left(2y^2-x\right)-15xy$. Khi đó $M.m$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{245}{4}$. **B.** 147. **C.** $-\frac{89}{4}$. **D.** $-\frac{245}{4}$.

Câu 55: Cho x,y là các số thực lớn hơn 1 sao cho $y^x\left(e^x\right)^{e^y}\ge x^y\left(e^y\right)^{e^x}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\log_x\sqrt{xy}+\log_y x$.

A. $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$.

Dạng 3. SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC PHỤ - PHƯƠNG PHÁP HÌNH HỌC – TÌM CẶP SỐ NGUYÊN THOẢ MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Câu 1: Cho hai số thực x,y. Khi biểu thức $T=\ln\left(x^2-2x+3\right)-2x^2+2y+2x$ đạt giá trị lớn nhất thì giá trị của biểu thức $P=3x+4y$ bằng?

A. 11. **B.** 2. **C.** 7. **D.** 9.

Câu 2: Cho các số thực $x;y$ thỏa mãn $4.2020^{x+2y-1}\ge\frac{x^2-2x+2021}{y^2+505}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{x^2}{1+2y}+\frac{4y^2}{1+x}-\frac{3(x+2y)}{4}$.

A. $-\frac{4}{7}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{2}{3}$.

Câu 3: Xét các số thực x, y thỏa mãn $x^2+y^2>1$ và $\log_{x^2+y^2}(2x+3y)\ge 1$. Giá trị lớn nhất P_{max} của biểu thức $P=2x+y$ bằng

A. $P_{max}=\frac{7-\sqrt{10}}{2}$. **B.** $P_{max}=\frac{19+\sqrt{19}}{2}$. **C.** $P_{max}=\frac{7+\sqrt{65}}{2}$. **D.** $P_{max}=\frac{11+10\sqrt{2}}{3}$.

Câu 4: Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=e^{x+yz+1}+e^{x^2y+4x-3}-x^2(y-1)-yz-x+1$ bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** -3. **D.** -5.

Câu 5: Cho x, $y\in(0;2)$ thỏa mãn $(x-3)(x+8)=ey(ey-11)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{\ln x}+\sqrt{1+\ln y}$ bằng

A. $1+\sqrt{\ln 2}$. **B.** $\sqrt{1+\ln 3-\ln 2}$. **C.** $2\sqrt{\ln 3-\ln 2}$. **D.** $1+\sqrt{\ln 3-\ln 2}$.

Câu 6: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $0\le x\le\frac{1}{2}$, $0\le y\le\frac{1}{2}$ và $\log(11-2x-y)=2y+4x-1$. Xét biểu thức $P=16yx^2-2x(3y+2)-y+5$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của P. Khi đó giá trị của $T=4m+M$ bằng bao nhiêu?

A. 19. **B.** 16. **C.** 18. **D.** 17.

Câu 7: Trong các nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn bất phương trình $\log_{x^2+2y^2}(2x+y)\ge 1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T=2x+y$ bằng

A. $\frac{9}{2}$. **B.** $\frac{9}{8}$. **C.** 9. **D.** $\frac{9}{4}$.

Câu 8: Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $64^{\frac{1}{x}}+64^{\frac{1}{2y}}+64^{\frac{1}{3z}}=3.4^{2020}$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{1}{x+4y+3z}+\frac{1}{2x+2y+3z}+\frac{1}{x+2y+6z}+1515$

A. 2018. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 2021.

Câu 9: Cho hai số thực a, b thỏa mãn $\log_{a^2+b^2}(a+b)\ge 1$ và $a^2+b^2>1$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2a+4b-3$ là

A. $2\sqrt{10}$ **B.** $\frac{\sqrt{10}}{2}$ **C.** $\frac{1}{\sqrt{10}}$ **D.** $\sqrt{10}$

Câu 10: Cho hai số thực $x;y;z$ thỏa mãn hệ thức $e^{x+2y+z}+e^{2x-y-2}\le 3x+y+z$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x^2+y^2+2z^2-22x$ bằng?

A. -19. **B.** 12. **C.** -15. **D.** 8.

Câu 11: Cho x,y,z là các số thực không âm thỏa $2^x+2^y+2^z=4$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x+y+z$?

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 12: Với hai số thực a,b bất kỳ, ta kí hiệu $f_{(a;b)}(x)=|x-a|+|x-b|+|x-2|+|x-3|$. Biết rằng luôn tồn tại duy nhất số thực x_0 để $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f_{(a;b)}(x)=f_{(a;b)}(x_0)$ với mọi số thực a,b thỏa mãn $a^b=b^a$ và $0<a<b$. Số x_0 bằng

A. $2e$. **B.** $2e-1$. **C.** 2,5. **D.** e.

Câu 13: Cho hai số thực dương x và y thỏa mãn $x,y\in(0;2023)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=2023-\left(16y^3+10^{3x}-24y\right)+12.10^{x+\log y}$ tương ứng bằng

A. 2048. **B.** 2039. **C.** 2042. **D.** 2047.

Câu 14: Cho dãy số (u_n) thoả mãn $\ln\left(u_1^2+u_2^2+10\right)=\ln\left(2u_1+6u_2\right)$ và $u_{n+2}+u_n=2u_{n+1}+1$ với mọi $n\ge 1$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n>5050$ là

A. 102. **B.** 99. **C.** 101. **D.** 100.

Câu 15: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log_2^2(5u_1)+\log_2^2(7u_1)=\log_2^2 5+\log_2^2 7$. Biết số hạng đầu $u_1\ne 1$ và $u_{n+1}=7u_n,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Giá trị nhỏ nhất của n để $u_n>2019$.

A. 7. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 16: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $\log u_5-2\log u_2=2\left(1+\sqrt{\log u_5-2\log u_2+1}\right)$ và $u_n=3u_{n-1},\forall n\ge 2$. Giá trị lớn nhất của n để $u_n<7^{100}$ là

A. 177. **B.** 191. **C.** 192. **D.** 176.

Câu 17: Cho các số thực x,y thay đổi thỏa mãn $e^{x^2+2xy+y^2}+4x^2+2xy+y^2-3=\frac{1}{e^{3x^2-3}}$. Gọi m_0 là giá trị của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left|x^2+2xy-y^2+3m-2\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, m_0 thuộc vào khoảng nào ?

A. $m_0\in(0;1)$. **B.** $m_0\in(-1;0)$. **C.** $m_0\in(2;3)$. **D.** $m_0\in(1;2)$.

Câu 18: Cho hai số thực x,y thỏa mãn điều kiện $\log_2(x+y-1)\le 1, x\ge 0, y\ge 0$. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x^2+y^2-6x-4y+1$ lần lượt là α và β. Giá trị của biểu thức $P=\alpha^2+\beta^2$ bằng

A. 48. **B.** 12. **C.** 104. **D.** 20.

Câu 19: Cho hai số thực x,y thỏa điều kiện $\begin{cases}\log_{x^2-2x+3}(2x+y+1)\ge 1\\ x+y\le 6\end{cases}$. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=2x+y$ lần lượt là α và β. Giá trị của biểu thức $P=\alpha+\beta$ bằng:

A. 5. **B.** 8. **C.** 11. **D.** 7.

Câu 20: Cho hai số thực x,y thoả các điều kiện $x^2+y^2\ge 9$ và $\log_{x^2+y^2}\left(x\left(8x^2+8y^2-7x\right)-7y^2\right)\ge 2$. Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3x+y$ lần lượt là M và m. Khi đó giá trị của biểu thức $M+3m\sqrt{2}$ bằng

A. $10-2\sqrt{3}$ **B.** 24. **C.** $6\sqrt{10}$. **D.** $12+18\sqrt{2}$.

Câu 21: Cho hai số thực x và y thỏa mãn đồng thời các điều kiện: $x+y+2\ge 0$ và $\log_{x^2+y^2+1}(2x-2y+3)\ge 1$. Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức $P=2x+y$ lần lượt là a và b. Giá trị của biểu thức $T=a+b$ bằng

A. $4-2\sqrt{3}$. **B.** 4. **C.** $-2+2\sqrt{5}$. **D.** 2.

Câu 22: Cho a,b là các số thực thỏa mãn $4a+2b>0$ và $\log_{a^2+b^2+1}(4a+2b)\ge 1$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=3a+4b$. Tính $M+m$.

A. 22. **B.** 21. **C.** 20. **D.** 25.

Câu 23: Cho hai số thực x, y thỏa mãn đồng thời các điều kiện $2x-y+1=0$ và $\log_{x^2+y^2+1}(4x+2my-1)\ge 1$. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất một cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn bài toán. Tổng tất cả các phần tử của tập S nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $(3;6)$. **B.** $(0;3)$. **C.** $(-5;-3)$. **D.** $(-3;-2)$.

Câu 24: Cho hai số thực x,y thỏa mãn điều kiện $\log_2(x+y-1)\le 1, x\ge 0, y\ge 0$. Gọi giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $T=x^2+y^2+2x-4y$ lần lượt là α và β. Giá trị của biểu thức $P=\alpha^2+\beta^2$ bằng

A. 90. **B.** 241. **C.** 21. **D.** 400.

Câu 25: Cho hai số thực x,y thỏa mãn đồng thời các điều kiện $x^2+y^2\le 4$ và $\log_{x^2+y^2+1}(2x+2my+3m-4)\ge 1$. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để tồn tại một cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn bài toán. Số phần tử của tập S là

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 26: Cho hai số thực x, y thỏa mãn đồng thời các điều kiện $x^2+y^2=9$ và $\log_{x^2+y^2+2}(2x-2y+m-1)\ge 1$. Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất một cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn bài toán. Tổng giá trị tất cả các phần tử của tập S nằm trong khoảng nào cho ở dưới đây?

A. $(1;2)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $(3;4)$. **D.** $(4;5)$.

Câu 27: Cho hai số thực x,y thỏa mãn:

$$\log_{\sqrt{3}}\left(y^2+8y+16\right)+\log_2(5-x)(1+x)=2\log_3\frac{5+4x-x^2}{3}+\log_2(2y+8)^2.$$

Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left|\sqrt{x^2+y^2}-m\right|$ không vượt quá 10. Hỏi S có bao nhiêu tập con **không phải** là tập rỗng?

A. 32. **B.** 2047. **C.** 16383. **D.** 16384.

Câu 28: Tính giá trị biểu thức $P=x^2+y^2-xy+1$, biết $4^{x^2+\frac{1}{x^2}-1}=\log_2\left(14-(y-2)\sqrt{y+1}\right)$ với $x\neq 0,-1\le y\le\dfrac{13}{2}$

A. $P=4$. **B.** $P=1$. **C.** $P=2$. **D.** $P=3$.

Câu 29: Cho $a>0$, $b>0$ thỏa mãn $\log_{10a+3b+1}\left(25a^2+b^2+1\right)+\log_{10ab+1}\left(10a+3b+1\right)=2$. Giá trị của $a+2b$ bằng

A. 6. **B.** 22. **C.** $\dfrac{11}{2}$. **D.** $\dfrac{5}{2}$.

Câu 30: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ với $x\le 2020$ thỏa mãn $2(3x-y)=3\left(1+9^y\right)-\log_3(2x-1)$

A. 4. **B.** 1010. **C.** 2020. **D.** 3.

Câu 31: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $4^{x+y}=3^{x^2+y^2}$?

A. 2. **B.** 1. **C.** Vô số. **D.** 3.

Câu 32: Có bao nhiêu số nguyên x sao cho tồn tại số thực y thỏa mãn $4^{x+y}=3^{x^2+y^2}$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Câu 33: Cho các số x, y thỏa mãn $9x^2-4y^2=5$ và $\log_m(3x+2y)-\log_3(3x-2y)=1$. Giá trị lớn nhất của m sao cho tồn tại cặp $(x;y)$ thỏa mãn $3x+2y\le 5$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(2;4)$. **B.** $(6;8)$. **C.** $(4;6)$. **D.** $(0;2)$.

Câu 34: Cho hàm số $f(t)=\dfrac{2020^t}{2020^t+m^2}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m sao cho $f(x)+f(y)=1$ với mọi x, y thỏa $e^{x+y}\le e(x+y)$. Số phần tử của S bằng

A. Vô số. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)=e^x-e^{-x}$. Số các giá trị $m\in\mathbb{N}$ thỏa mãn $f(m-5)+f\left(\dfrac{8}{m+1}\right)\le 0$ là

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 36: Có bao nhiêu cặp số tự nhiên $(a;b)$ thỏa mãn

$$\log_2\sqrt{a+b}+(a+b)^3=4a^2+4b^2+2a^2b+2ab^2+1?$$

A. Vô số. **B.** 6. **C.** 10. **D.** 5.

Câu 37: Có bao nhiêu số nguyên $y<10$ sao cho tồn tại số nguyên x thỏa mãn $5^{\sqrt{2^y}+x-2}+\sqrt{2^y}=5^{x^2-x-1}+(x-1)^2$?

A. 5. **B.** Vô số **C.** 10. **D.** 1.

Câu 38: Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1<1$; $u_{n+1}=5.u_n,\forall n\ge 1$ và $(\log u_1-1)\sqrt{2\log u_3-\log u_1+5}+3\left(\sqrt{2\log u_3-\log u_1+5}-\log u_1\right)-6=0$. Tổng của bao nhiêu số hạng đầu của dãy số bằng $4882,81$?

LŨY THỪA – MŨ – LOGARIT

A. 9 số hạng. **B.** 10 số hạng. **C.** 12 số hạng. **D.** 11 số hạng.

Câu 39: Cho cấp số nhân (u_n) sao cho dãy số: $\log_2(u_1);\log_2(u_2);...;\log_2(u_n)$ là cấp số cộng có công sai bằng 1. Biết rằng $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+...+\frac{1}{u_n}\right)=3$. Tổng $\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}+\frac{1}{u_4}=\frac{a}{b}$; trong đó a và b là những số nguyên dương và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Giá trị của $a+2b$ bằng

A. 103 **B.** 77 **C.** 81 **D.** 56

Câu 40: Có bao nhiêu số nguyên $x\neq 0$ để $\log_2\left(x+y^2\right)^2\le 4$ đúng với mọi số thực $y\in(0;|x|)$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 41: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x$ và cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $u_2>u_1\ge 0$; cấp số nhân (v_n) thỏa mãn $v_2>v_1\ge 1$. Biết rằng $f(u_2)+2=f(u_1)$ và $f(\log_2 v_2)+2=f(\log_2 v_1)$. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất và lớn hơn 1 sao cho $v_n-2019.u_n>0$.

A. 18. **B.** 16. **C.** 15. **D.** 17.

Câu 42: Cho hàm số $f(x)=2^x-2^{-x}+2020x$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m thỏa mãn điều kiện $f\left(\left|x^3-2x^2+3x-m\right|\right)+f\left(2x-2x^2-5\right)<0,\forall x\in(0;1)$. Số phần tử của S là

A. 5. **B.** 7. **C.** 3. **D.** 9.

Câu 43: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho tồn tại duy nhất cặp số thực (x,y) thỏa mãn $x^2+y^2=18$ và $x-y+m=\log_3(y-2m)-\log_3(x-m)$?

A. 2. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 44: Tìm m để tồn tại duy nhất cặp $(x;y)$ thỏa mãn $\begin{cases}\log_{x^2+y^2+2}(4x+4y-4)\ge 1\\ x^2+y^2+2x-2y+2-m=0\end{cases}$.

A. $m=\sqrt{10}\pm 2$ **B.** $m=\sqrt{10}-2$. **C.** $m=\left(\sqrt{10}-2\right)^2$. **D.** $m=\left(\sqrt{10}\pm 2\right)^2$.

Câu 45: Có bao nhiêu cặp số $(x;y)$ thoả mãn $2\le x\le 3;2<y<5$ và $\log_2(3-|\sin xy|)=\cos\left(\pi x-\frac{\pi}{6}\right)$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

CHỦ ĐỀ 4. PHƯƠNG TRÌNH MŨ - LOGARIT

◈ PHƯƠNG TRÌNH MŨ CƠ BẢN

	Phương pháp giải
Dạng $a^x = b$ (1), $(0 < a \neq 1)$.	Vì tập giá trị của hàm số $y = a^x$ là $(0;+\infty)$ nên ◆ Khi $b > 0$: Phương trình (1) có nghiệm duy nhất là $x = \log_a b$. ◆ Khi $b \leq 0$: Phương trình (1) vô nghiệm.

◈ MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH MŨ

Dạng toán	Phương pháp giải
① Phương pháp đưa về cùng cơ số	Biến đổi phương trình đã cho về dạng: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$, với $0 < a \neq 1$.
	Chú ý: Nếu cơ số a có chứa biến thì cần xét thêm trường hợp $a = 1$ (Vì $1^{f(x)} = 1^{g(x)}$ luôn đúng)
② Phương pháp đặt ẩn phụ	Thông thường, ta sẽ đặt $t = a^x$, điều kiện $t > 0$
	Một số phương trình thường gặp và cách đặt: ✍ $m.a^{2f(x)} + n.a^{f(x)} + p = 0 \rightarrow$ Đặt: $t = a^{f(x)}$, $(t > 0)$ ✍ $m.a^{f(x)} + n.b^{f(x)} + p = 0$, trong đó $a.b = 1$ $\rightarrow$ Đặt $t = a^{f(x)}$ $(t > 0)$, suy ra $b^{f(x)} = \frac{1}{t}$. ✍ $m.a^{2f(x)} + n.(a.b)^{f(x)} + p.b^{2f(x)} = 0$. $\rightarrow$ Chia hai vế cho $b^{2f(x)}$ và đặt $t = \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} > 0$.
	Chú ý: Nếu đặt $t = a^x$ và $x \in (m;n)$ thì ◆ $t \in (a^m;a^n)$ khi $a > 1$. ◆ $t \in (a^n;a^m)$ khi $0 < a < 1$.
③ Phương pháp logarit hoá	◆ Phương trình $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1,\ b > 0 \\ f(x) = \log_a b \end{cases}$. ◆ Phương trình $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ $(*)$, với a,b không đưa được về cùng cơ số. Ta thực hiện bằng cách lấy logarit cơ số a cho hai vế của phương trình $(*)$ $(*) \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).\log_a b$

◈ PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT CƠ BẢN

	Phương pháp giải
Dạng $\log_a x = b \ (1), (0 < a \neq 1)$.	Vì tập giá trị của hàm số $y = \log_a x$ là $\mathbb{R}$ nên phương trình (1) có nghiệm duy nhất là $x = a^b$.
	Chú ý: ◆ $\ln x = b \Rightarrow x = e^b$ ◆ $\log x = b \Rightarrow x = 10^b$. ◆ $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$.

◈ MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

Dạng toán	Phương pháp giải
① Phương pháp đưa về cùng cơ số	Biến đổi phương trình đã cho về dạng: $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{array}\right. \\ f(x) = g(x) \end{cases}$
	Chú ý: Nếu phương trình có chứa nhiều hơn 2 logarit thì cần đặt điều kiện để tồn tại các biểu thức chứa logarit trước khi giải.
② Phương pháp đặt ẩn phụ	Thông thường, ta sẽ đặt $t = \log_a x$, điều kiện $t \in \mathbb{R}$
	Chú ý: ✓ Nếu đặt $t = \log_a x$ và $x \in (m;n)$ thì ◆ $t \in (\log_a m; \log_a n)$ khi $a > 1$. ◆ $t \in (\log_a n; \log_a m)$ khi $0 < a < 1$. ✓ Với $0 < x \neq 1$ ta có: $\log_a x = \dfrac{1}{\log_x a}$. Do đó, nếu đặt $t = \log_a x$ thì $\log_x a = \dfrac{1}{t}$.
③ Phương pháp mũ hoá	◆ Phương trình $\log_a f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) = a^{g(x)} \end{cases}$. ◆ Đối với bài toán này, sau khi sử dụng phương pháp mũ hoá thường đưa về phương trình mũ, ta sẽ vận dụng các phương pháp giải của phương trình mũ để xử lí.

◈ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT BẰNG PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ

Phương pháp chung	Một số dạng phương trình mũ, logarit thường gặp sử dụng phương pháp hàm số
◆ Tính chất 1. Nếu hàm số $y = f(x)$ luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) trên $(a;b)$ thì phương trình $f(x) = k$ trên $(a;b)$ có tối đa 1 nghiệm hoặc $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v, \ \forall u, v \in (a;b)$ ◆ Tính chất 2. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và	◆ Dạng 1: $a^{f(x)} = g(x)$ hoặc $\log_a f(x) = g(x)$ ✍ Cách giải: - Đoán (nhẩm) nghiệm - Xét tính đơn điệu của 2 hàm số ở 2 vế của PT. - Kết luận nghiệm. (thường sẽ có 1 đến 2 nghiệm)

luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) trên D; hàm số $y=g(x)$ liên tục và luôn nghịch biến (hoặc luôn đồng biến) trên D phương trình $f(x)=g(x)$ có tối đa 1 nghiệm.

◆ Tính chất 3. Xét phương trình $f(x)=0$ (4).

Nếu hàm số f có đạo hàm cấp 1 là $f'(x)$ và đạo hàm cấp 2 là $f''(x)$ mà $f''(x)>0, \forall x\in K$ hoặc $f''(x)<0, \forall x\in K$ thì phương trình $f'(x)=0$ có tối đa 1 nghiệm. Từ đó suy ra Phương trình (4) có tối đa 2 nghiệm.

Lưu ý: Khi gặp bài toán trên ta có thể xử lí đến khi đạo hàm cấp n mang dấu dương hoặc dấu âm.

$\left[\begin{array}{l} f^{(3)}(x)>0, \forall x\in K \\ f^{(3)}(x)<0, \forall x\in K \end{array}\right. \rightarrow f''(x)=0$ có tối đa 1 nghiệm $\rightarrow f'(x)=0$ có tối đa 2 nghiệm $\rightarrow$ Phương trình (4) có tối đa 3 nghiệm.

◆ Dạng 2: $a^{f(x)}+b^{f(x)}=c^{f(x)}$.

✍ Cách giải:

- Chia cả 2 vế cho $c^{f(x)}$.
- Đoán (nhẩm) nghiệm.
- Xét tính đơn điệu của 2 hàm số ở 2 vế của PT.
- Kết luận nghiệm.

◆ Dạng 3: $a^{f(x)}+b^{f(x)}=g(x)$

✍ Cách giải:

- Đoán (nhẩm) nghiệm
- Xét tính đơn điệu của hàm số $y=a^{f(x)}+b^{f(x)}$ và $y=g(x)$.
- Kết luận nghiệm. (thường sẽ có 1 đến 2 nghiệm)

◆ Dạng 4: $\log_a \dfrac{f(x)}{g(x)}=h(x)$ với $h(x)=g(x)-f(x)$

✍ Cách giải:

- Biến đổi phương trình về dạng: $\log_a f(x)+f(x)=\log_a g(x)+g(x)$ $(*)$
- Xét hàm đặc trưng: $y=\log_a t+t$.
- Chứng minh hàm đặc trưng đơn điệu.
- Từ $(*)\Rightarrow f(x)=g(x)$.

VÍ DỤ MINH HOẠ

Dạng 1 PHƯƠNG TRÌNH MŨ KHÔNG CHỨA THAM SỐ

Ví dụ 1: Tập hợp nghiệm của phương trình $3^{x^2-x-4}=\dfrac{1}{81}$ là

A. $\{0;4\}$. **B.** $\varnothing$. **C.** $\{2;1\}$. **D.** $\{0;1\}$.

Lời giải

$$3^{x^2-x-4}=\frac{1}{81}\Leftrightarrow 3^{x^2-x-4}=3^{-4}\Leftrightarrow x^2-x-4=-4\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Ví dụ 2: Tìm tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=2^{-x}+3$ và đường thẳng $y=11$.

A. $(3;11)$. **B.** $(-3;11)$. **C.** $(4;11)$. **D.** $(-4;11)$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $2^{-x}+3=11\Leftrightarrow 2^{-x}=8\Leftrightarrow 2^{-x}=2^3\Leftrightarrow -x=3\Leftrightarrow x=-3$.

Vậy tọa độ giao điểm cần tìm là $(-3;11)$.

Ví dụ 3: Tính tổng T tất cả các nghiệm của phương trình $e^{x^2-3x}=\dfrac{1}{e^2}$.

A. $T=3$. **B.** $T=1$. **C.** $T=2$. **D.** $T=0$.

Lời giải

$$e^{x^2-3x}=\frac{1}{e^2}\Leftrightarrow e^{x^2-3x}=e^{-2}\Leftrightarrow x^2-3x=-2\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$$

$\Rightarrow S=\{1;2\}\Rightarrow T=1+2=3$.

Ví dụ 4: Nghiệm của phương trình $2^x+2^{x+1}=3^x+3^{x+1}$ là

A. $x=\log_{\frac{3}{2}}\frac{3}{4}$. **B.** $x=1$. **C.** $x=0$. **D.** $x=\log_{\frac{4}{3}}\frac{2}{3}$

Lời giải

$$2^x+2^{x+1}=3^x+3^{x+1}\Leftrightarrow 3.2^x=4.3^x\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{3}{4}\Leftrightarrow x=\log_{\frac{3}{2}}\frac{3}{4}.$$

Ví dụ 5: Cho phương trình: $2^{\left|\frac{28}{3}x+4\right|}=16^{x^2-1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Tích các nghiệm của phương trình là một số âm.

B. Tổng các nghiệm của phương trình là một số nguyên.

C. Nghiệm của phương trình là các số vô tỉ.

D. Phương trình vô nghiệm.

Lời giải

$$2^{\left|\frac{28}{3}x+4\right|}=16^{x^2-1}\Leftrightarrow\left|\frac{28}{3}x+4\right|=4\left(x^2-1\right)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x\le 1\vee x\ge 1\\\left[\begin{array}{l}7x+3=3x^2-3\\7x+3=-3x^2+3\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=-\frac{7}{3}\end{array}\right.$$

Ví dụ 6: Số nghiệm của phương trình $7^x-7^{1-x}=6$ là

A. Vô nghiệm. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

$$7^x-7^{1-x}=6\Leftrightarrow 7^x-\frac{7}{7^x}-6=0\Leftrightarrow 7^{2x}-6.7^x-7=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}7^x=7\\7^x=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow x=1$$

Ví dụ 7: Khi đặt $t=2^x$, phương trình $4^{x+1}-12.2^{x-2}-7=0$ trở thành phương trình nào sau đây?

A. $t^2-3t-7=0$. **B.** $4t^2-12t-7=0$. **C.** $4t^2-3t-7=0$. **D.** $t^2-12t-7=0$.

Lời giải

Ta có $4^{x+1}-12.2^{x-2}-7=0\Leftrightarrow 4.4^x-12.\frac{2^x}{2^2}-7=0\Leftrightarrow 4.\left(2^x\right)^2-3.2^x-7=0$.

Đặt $t=2^x\left(t>0\right)$, phương trình đã cho trở thành: $4t^2-3t-7=0$.

Ví dụ 8: Cho phương trình $\left(7+4\sqrt{3}\right)^x+\left(2+\sqrt{3}\right)^x=6$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Phương trình có một nghiệm vô tỉ. **B.** Phương trình có một nghiệm hữu tỉ.

C. Phương trình có hai nghiệm trái dấu. **D.** Tích của hai nghiệm bằng -6.

Lời giải

$\left(7+4\sqrt{3}\right)^x+\left(2+\sqrt{3}\right)^x=6$ (1)

$$(1)\Leftrightarrow\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^2\right]^x+\left(2+\sqrt{3}\right)^x-6=0\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^x\right]^2+\left(2+\sqrt{3}\right)^x-6=0\ (2)$$

Đặt $t=\left(2+\sqrt{3}\right)^x>0$

Khi đó: $(2)\Leftrightarrow t^2+t-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}t=2 & (\mathrm{N})\\t=-3 & (\mathrm{L})\end{array}\right.$ Với $t=2\Leftrightarrow\left(2+\sqrt{3}\right)^x=2\Leftrightarrow x=\log_{(2+\sqrt{3})}2$.

Ví dụ 9: Từ phương trình $\left(3+2\sqrt{2}\right)^x-2\left(\sqrt{2}-1\right)^x=3$ đặt $t=\left(\sqrt{2}-1\right)^x$ ta thu được phương trình nào sau đây?

A. t^3-3t+2. **B.** $2t^3+3t^2-1=0$. **C.** $2t^3-3t-1=0$. **D.** $2t^3+3t^2-3=0$.

Lời giải

Ta có: $\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)=1\Rightarrow\left(\sqrt{2}-1\right)^x=\dfrac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^x}$ và $\left(3+2\sqrt{2}\right)^x=\left(\sqrt{2}+1\right)^{2x}$.

Do đó, phương trình đã cho trở thành

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^{2x}-\frac{2}{\left(\sqrt{2}+1\right)^x}=3\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}+1\right)^{3x}-3\left(\sqrt{2}+1\right)^x-2=0$$

Vậy khi đặt $t=\left(\sqrt{2}-1\right)^x\Rightarrow\left(\sqrt{2}+1\right)^x=\dfrac{1}{t}$ ta có phương trình

$$\frac{1}{t^3}-\frac{3}{t}-2=0\Leftrightarrow-2t^3-3t^2+1=0\Leftrightarrow2t^3+3t^2-1=0$$

Ví dụ 10: Phương trình $3^{x^2-2}.4^{\frac{2x-3}{x}}=18$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

ĐK: $x\neq0$.

$$3^{x^2-2}.4^{\frac{2x-3}{x}}=18\Leftrightarrow3^{x^2-2}.2^{\frac{4x-6}{x}}=2.3^2\Leftrightarrow3^{x^2-4}=2^{1-\frac{4x-6}{x}}\Leftrightarrow3^{x^2-4}=2^{\frac{-3x+6}{x}}$$

$$\Leftrightarrow x^2-4=\frac{-3x+6}{x}\log_3 2\Leftrightarrow x\left(x-2\right)\left(x+2\right)+3\left(x-2\right)\log_3 2=0$$

$$\Leftrightarrow\left(x-2\right)\left(x^2-2x+3\log_3 2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x^2-2x+3\log_3 2=0\left(\text{VN}\right)\end{array}\right.$$

Ví dụ 11: Tổng các nghiệm của phương trình $6.4^x-13.6^x+6.9^x=0$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** -2. **D.** 9

Lời giải

$$6.4^x-13.6^x+6.9^x=0\Leftrightarrow6\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-13\left(\frac{3}{2}\right)^x+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=\dfrac{3}{2}\\\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$$

Ví dụ 12: Biết rằng phương trình $3^{3+3x}+3^{3-3x}+3^{4+x}+3^{4-x}=1000$ có hai nghiệm a và b. Tính giá trị biểu thức $\mathrm{T}=\log a+\log_5\left(4-b\right)$

A. $\mathrm{T}=1$. **B.** $\mathrm{T}=-1$. **C.** $\mathrm{T}=5$. **D.** $\mathrm{T}=2$.

Lời giải

$$3^{3+3x}+3^{3-3x}+3^{4+x}+3^{4-x}=10^3\ (1)$$

$$(1)\Leftrightarrow27.3^{3x}+\frac{27}{3^{3x}}+81.3^x+\frac{81}{3^x}=10^3\Leftrightarrow27.\left(3^{3x}+\frac{1}{3^{3x}}\right)+81.\left(3^x+\frac{1}{3^x}\right)=10^3\ (2)$$

Đặt $t=3^x+\dfrac{1}{3^x}\overset{Cosi}{\geq}2\sqrt{3^x.\dfrac{1}{3^x}}=2$.

$$\Rightarrow t^3=\left(3^x+\frac{1}{3^x}\right)^3=3^{3x}+3.3^{2x}.\frac{1}{3^x}+3.3^x.\frac{1}{3^{2x}}+\frac{1}{3^{3x}}\Leftrightarrow3^{3x}+\frac{1}{3^{3x}}=t^3-3t$$

Khi đó: $(2) \Leftrightarrow 27(t^3-3t)+81t=10^3 \Leftrightarrow t^3=\frac{10^3}{27} \Leftrightarrow t=\frac{10}{3}$ (thỏa mãn).

Với $t=\frac{10}{3} \Rightarrow 3^x+\frac{1}{3^x}=\frac{10}{3}$.

Đặt $y=3^x>0$. Khi đó: $y+\frac{1}{y}=\frac{10}{3} \Leftrightarrow 3y^2-10y+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=3 \\ y=\frac{1}{3} \end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Với $y=3 \Rightarrow 3^x=3 \Leftrightarrow x=1$

Với $y=\frac{1}{3} \Rightarrow 3^x=\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=-1$

Ví dụ 13: Phương trình $4^{x^2+x}+2^{1-x^2}=2^{(x+1)^2}+1$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4

Lời giải

Phương trình $\Leftrightarrow 2^{2x^2+2x}+2^{1-x^2}=2^{x^2+2x+1}+1$.

Đặt $\begin{cases} a=2^{2x^2+2x}>0 \\ b=2^{1-x^2}>0 \end{cases}$, suy ra $2^{x^2+2x+1}=ab$. Khi đó phương trình trở thành $a+b=ab+1$

$\Leftrightarrow a-ab+b-1=0 \Leftrightarrow a(1-b)+(b-1)=0 \Leftrightarrow (1-b)(a-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ b=1 \end{array}\right.$.

- Với $a=1$, ta được $2^{2x^2+2x}=1 \Leftrightarrow 2x^2+2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

- Với $b=1$, ta được $2^{1-x^2}=1 \Leftrightarrow 1-x^2=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm $x=0$, $x=\pm 1$.

Ví dụ 14: Phương trình $3.25^{x-2}+(3x-10)5^{x-2}+3-x=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Đặt $t=5^{x-2}>0$, phương trình trở thành $3t^2+(3x-10)t+3-x=0$. $(*)$

Ta coi đây là phương trình bậc hai ẩn t và có $\Delta=(3x-10)^2-4.3(3-x)=(3x-8)^2$.

Suy ra phương trình $(*)$ có hai nghiệm: $t=\frac{1}{3}$ hoặc $t=3-x$.

Với $t=\frac{1}{3} \Rightarrow 5^{x-2}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow x-2=\log_5\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x=2+\log_5\left(\frac{1}{3}\right)$.

Với $t=3-x \Rightarrow 5^{x-2}=3-x$.

Dễ thấy $x=2$ là nghiệm duy nhất (Vế trái là hàm đồng biến, vế phải là hàm nghịch biến).

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x=2,\ x=2+\log_5\left(\frac{1}{3}\right)$.

Ví dụ 15: Giả sử a, b là các số dương sao cho $\log_{16} a=\log_{20} b=\log_{25}(a+b)$. Tìm giá trị của $\frac{a}{b}$.

A. $\frac{4}{5}$. **B.** $\frac{8}{5}$. **C.** $\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)$. **D.** $\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)$.

Lời giải

Đặt $\log_{16} a=\log_{20} b=\log_{25}(a+b)=x \Rightarrow \begin{cases} a=16^x \\ b=20^x \\ a+b=25^x \end{cases}$.

$\Rightarrow 16^x+20^x=25^x \Leftrightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^{2x}-\left(\frac{5}{4}\right)^x-1=0 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Khi đó: $\frac{a}{b}=\frac{16^x}{20^x}=\left(\frac{4}{5}\right)^x=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-1}=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{5}\right)$.

Ví dụ 16: Phương trình $4^x+11x=1$ có tập nghiệm là

A. $\{\pm 1\}$. **B.** $\varnothing$. **C.** $\{0\}$. **D.** $\{0;1\}$.

Lời giải

Dễ thấy phương trình có nghiệm $x=0$.

Ta có $f(x)=4^x+11x$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $x=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Ví dụ 17: Số nghiệm của phương trình $(3+5^x)(x+1)=8$ tương ứng là

A. 0. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

$(3+5^x)(x+1)=8 \Leftrightarrow 5^x=\frac{5-3x}{x+1}$ là phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị

$y=f(x)=5^x\ (C'),\ y=g(x)=\frac{5-3x}{x+1}\ (C)$.

+) Hàm số $y=g(x)=\frac{5-3x}{x+1}$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	
$g(x)$	-3	↘	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	↘	-3

+) Hàm số $y=f(x)=5^x\ (5^x>0,\forall x)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy $(C), (C')$ có duy nhất 1 giao điểm chung

Suy ra phương trình đã cho có duy nhất 1 nghiệm

Ví dụ 18: Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá tri thực của x thỏa mãn phương trình $e^x=1+x$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow f(x)=e^x-1-x=0$.

Có $f'(x)=e^x-1\xrightarrow{f'(x)=0}x=0$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra phương trình có nghiệm duy nhất $x=0$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng 0.

Ví dụ 19: Cho hàm số $f(x)=e^x+2x^3-2021$. Hãy xác định tập nghiệm của phương trình $f(4^x-3)=f(2^{x+1})$?

A. $\{0;\log_2 3\}$. **B.** $\{\log_2 3\}$. **C.** $\{-1;3\}$. **D.** $\{\log_3 2\}$.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=e^x+2x^3-2021$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}$

Đạo hàm: $f'(x)=e^x+3x^2>0$, $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ hàm số đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$.

Áp dụng tính chất hàm đơn điệu ta có:

$f(4^x-3)=f(2^{x+1})\Leftrightarrow 4^x-3=2^{x+1}\Leftrightarrow 4^x-2.2^x-3=0$

Suy ra: $\left[\begin{array}{l}2^x=-1(VN)\\2^x=3\Leftrightarrow x=\log_2 3\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\log_2 3$.

Ví dụ 20: Phương trình $2^{\sin^2 x}+3^{\cos^2 x}=4.3^{\sin^2 x}$ có bao nhiêu nghiệm thuộc $[-2020;2020]$?

A. 4034. **B.** 1285. **C.** 4035. **D.** 1287.

Lời giải

Ta có $2^{\sin^2 x}+3^{\cos^2 x}=4.3^{\sin^2 x}\Leftrightarrow 2^{\sin^2 x}+3^{1-\sin^2 x}=4.3^{\sin^2 x}$

Đặt $\sin^2 x=t$ với $t\in[0;1]$, ta có phương trình

$$2^t+\frac{3}{3^t}=4.3^t\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^t+3.\left(\frac{1}{9}\right)^t=4.$$

Vì hàm số $f(t)=\left(\frac{2}{3}\right)^t+3.\left(\frac{1}{9}\right)^t$ nghịch biến với $t\in[0;1]$

nên phương trình có nghiệm duy nhất $t=0$. Do đó $\sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Vì $x\in[-2020;2020]$ nên ta có $-2020\le k\pi\le 2020\Leftrightarrow\frac{-2020}{\pi}\le k\le\frac{2020}{\pi}$ nên có 1285 giá trị nguyên của k thỏa mãn. Vậy có 1285 nghiệm.

Dạng 2 PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT KHÔNG CHỨA THAM SỐ

Ví dụ 1: Tập nghiệm của phương trình $\log_3\left(x^2+2x+3\right)=1$ là

A. $\{-2\}$. **B.** $\{0\}$. **C.** $\{0;-2\}$. **D.** $\{0;2\}$.

Lời giải

$$\log_3\left(x^2+2x+3\right)=1\Leftrightarrow x^2+2x+3=3\Leftrightarrow x^2+2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=0\end{array}\right.$$

Ví dụ 2: Tập nghiệm của phương trình $\log_3\left(x-\sqrt{3}\right)^3=3$ là

A. $\{-3\}$. **B.** $\left\{3-\sqrt{3}\right\}$. **C.** $\left\{3+\sqrt{3}\right\}$. **D.** $\left\{\sqrt{3}\right\}$.

Lời giải

$$\log_3\left(x-\sqrt{3}\right)^3=3\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{3}\right)^3=3^3\Leftrightarrow x=3+\sqrt{3}$$

Ví dụ 3: Phương trình $\log_2\left(x-3\sqrt{x}+4\right)=3$ có bao nhiêu nghiệm thực?

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

ĐK: $x\ge 0$

$$\log_2\left(x-3\sqrt{x}+4\right)=3\Leftrightarrow x-3\sqrt{x}+4=8\Leftrightarrow x-3\sqrt{x}-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x}=-1\\\sqrt{x}=4\end{array}\right.\Rightarrow x=16$$

Vậy $x=16$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Ví dụ 4: Tập nghiệm của phương trình $\log_2 x=\log_2\left(x^2-x\right)$ là

A. $\{2\}$. **B.** $\{1\}$. **C.** $\{0;1\}$. **D.** $\{0;2\}$.

Lời giải

$$\log_2 x=\log_2\left(x^2-x\right)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x>0\\x=x^2-x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x>0\\\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow x=2$$

Ví dụ 5: Số nghiệm của phương trình $\log_5 x+\log_5\left(x-6\right)=\log_5 7$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

ĐK: $x>6$

$$\log_5 x+\log_5\left(x-6\right)=\log_5 7\Leftrightarrow\log_5\left(x^2-6x\right)=\log_5 7\Leftrightarrow x^2-6x-7=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=7\end{array}\right.$$

So với điều kiện, suy ra $x=7$ là nghiệm của PT.

Ví dụ 6: Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_{0,5}\left(x^2-10x+23\right)+\log_2\left(x-5\right)=0$.

A. $S=\varnothing$. **B.** $S=\{7\}$. **C.** $S=\{4;7\}$. **D.** $S=\{4\}$.

Lời giải

$$\log_{0,5}\left(x^2-10x+23\right)+\log_2\left(x-5\right)=0\Leftrightarrow\log_2\left(x-5\right)=\log_2\left(x^2-10x+23\right)$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x>5\\x^2-10x+23=x-5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x>5\\x^2-11x+28=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x>5\\\left[\begin{array}{l}x=7\\x=4\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow x=7$$

Ví dụ 7: Số nghiệm của phương trình $\log_2(x+5)=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{3-x}+\log_8(3+x)^3-4$ là

A. 0. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Điều kiện: $-3<x<3$.

Ta có $\log_2(x+5)=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{3-x}+\log_8(3+x)^3-4 \Leftrightarrow \log_2\left[16(x+5)\right]=\log_2\left[(3-x)(3+x)\right]$

$\Leftrightarrow 16(x+5)=9-x^2 \Leftrightarrow x^2+16x+71=0$ (vô nghiệm).

Vậy số nghiệm của phương trình đã cho là 0.

Ví dụ 8: Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $\log_2^2 x=\log_2\frac{x}{4}+4$ là

A. $\frac{17}{4}$. **B.** 0. **C.** 4. **D.** $\frac{65}{4}$.

Lời giải

ĐK: $x>0$

$\log_2^2 x=\log_2\frac{x}{4}+4 \Leftrightarrow \log_2^2 x=\log_2 x-\log_2 4+4 \Leftrightarrow \log_2^2 x-\log_2 x-2=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x=-1\\ \log_2 x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\ x=4\end{array}\right.$ (Thoả mãn ĐK). Vậy $\sum x^2=\frac{17}{4}$.

Ví dụ 9: Tổng giá trị tất cả các nghiệm của phương trình $\log^4(x-1)^2+\log^2(x-1)^3=25$ là

A. $\frac{123}{10}$. **B.** $\frac{121}{10}$. **C.** 11. **D.** $\frac{99}{10}$.

Lời giải

Điều kiện $x-1>0\Leftrightarrow x>1$.

$\log^4(x-1)^2+\log^2(x-1)^3=25 \Leftrightarrow\left[2\log(x-1)\right]^4+\left[3\log(x-1)\right]^2-25=0$

$\Leftrightarrow 16\left[\log(x-1)\right]^4+9\left[\log(x-1)\right]^2-25=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left[\log(x-1)\right]^2=1\\ \left[\log(x-1)\right]^2=-\frac{25}{16}(L)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log(x-1)=1\\ \log(x-1)=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=11\\ x=\frac{11}{10}\end{array}\right.$ (TMĐK).

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình đã cho là $\frac{121}{10}$.

Ví dụ 10: Số tiền mà My để dành hằng ngày là x (nghìn đồng) biết x là nghiệm nguyên của phương trình $\log_{\sqrt{3}}(x-2)+\log_3(x-4)^2=0$. Tính tổng số tiền My dành được trong một tuần.

A. 35 nghìn đồng. **B.** 14 nghìn đồng. **C.** 21 nghìn đồng. **D.** 28 nghìn đồng.

Lời giải

Điều kiện: $x>2, x\in\mathbb{Z}, x\neq 4$.

Khi đó: $\log_{\sqrt{3}}(x-2)+\log_3(x-4)^2=0$

$\Leftrightarrow \log_3(x-2)^2+\log_3(x-4)^2=0\Leftrightarrow\log_3\left[(x-2)^2.(x-4)^2\right]=0$

$\Leftrightarrow\left[(x-2)(x-4)\right]^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-6x+8=1\\ x^2-6x+8=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-6x+7=0\\ x^2-6x+9=0\end{array}\right.\Leftrightarrow x=3$

Do vậy số tiền My dành được là: $3.7=21$.

Ví dụ 11: Phương trình $2\log^2 x-5\log x+\log 100=0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(1;100)$?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 10.

Lời giải

ĐK: $x>0$

$$2\log^2 x-5\log x+\log 100=0\Leftrightarrow 2\log^2 x-5\log x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log x=2\\ \log x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=100\\ x=\sqrt{10}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm thuộc khoảng $(1;100)$.

Ví dụ 12: Tổng các nghiệm của phương trình $\log_2\left(3.2^x-1\right)=2x+1$ bằng

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** -1.

Lời giải

$$\log_2\left(3.2^x-1\right)=2x+1\Leftrightarrow 3.2^x-1=2^{2x+1}\Leftrightarrow 2.2^{2x}-3.2^x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x=1\\ 2^x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-1\end{array}\right.$$

Vậy $\sum x=-1$.

Ví dụ 13: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2\left(10.\left(\sqrt{2020}\right)^x-2020^x\right)=4$ bằng

A. $\log_{2020}10$. **B.** $2\log_{2020}10$. **C.** $\log_{2020}16$. **D.** $2\log_{2020}16$.

Lời giải

$\log_2\left(10.\left(\sqrt{2020}\right)^x-2020^x\right)=4\ (1)$

Đặt $t=\left(\sqrt{2020}\right)^x>0$.

$$(1)\Leftrightarrow 10t-t^2=2^4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\ t=8\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2020^{\frac{x}{2}}=2\\ 2020^{\frac{x}{2}}=8\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\log_{2020}2\\ x=2\log_{2020}8\end{array}\right.$$

Tổng hai nghiệm là: $2\log_{2020}2+2\log_{2020}8=2\log_{2020}16$.

Ví dụ 14: Phương trình $\log_5(4x-3).\log_2 x=\log_2 x$ có tổng bình phương các nghiệm là

A. 5. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 15.

Lời giải

ĐK: $x>\dfrac{3}{4}$

$$\log_5(4x-3).\log_2 x=\log_2 x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x=0\\ \log_5(4x-3)=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ 4x-3=5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2\end{array}\right.\ (\text{TM}).\text{Vậy}\ \sum x^2=5$$

Ví dụ 15: Phương trình $\log_3 x+\dfrac{1}{\log_9 x}=3$ có hai nghiệm a,b với $a<b$. Tính $P=a^2-b$.

A. 0. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 5.

Lời giải

ĐK: $0<x\neq 1$

$$\log_3 x+\frac{1}{\log_9 x}=3\Leftrightarrow\log_3 x+\frac{2}{\log_3 x}=3\Leftrightarrow\log_3^2 x-3\log_3 x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_3 x=1\\ \log_3 x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\ x=9\end{array}\right.$$

Vậy $P=0$.

Ví dụ 16: Phương trình $\log_2 x+2\log_5 x=2+\dfrac{\log_2 x}{\log_x 5}$ có tích các nghiệm là

A. 20. **B.** 10. **C.** 90. **D.** 50.

Lời giải

ĐK: $0<x\neq 1$

$\log_2 x+2\log_5 x=2+\dfrac{\log_2 x}{\log_x 5}\Leftrightarrow \log_2 x+2\log_5 x=2+\log_2 x\log_5 x$

$\log_2 x\left(1-\log_5 x\right)+2\left(\log_5 x-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_5 x=1\\ \log_2 x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5\\ x=4\end{array}\right.$. Vậy tích các nghiệm là 20.

Ví dụ 17: Phương trình $2\log_{25} x=\log_2 25.\log_5 2-\log_5\left(26-x\right)$ có hai nghiệm. Tích của hai nghiệm đó bằng

A. 25. **B.** 5. **C.** 4. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Điều kiện: $0<x<26$.

$2\log_{25} x=\log_2 25.\log_5 2-\log_5\left(26-x\right)\Leftrightarrow \log_5 x=2\log_2 5.\log_5 2-\log_5\left(26-x\right)$

$\Leftrightarrow \log_5 x=2-\log_5\left(26-x\right)\Leftrightarrow \log_5 x+\log_5\left(26-x\right)=\log_5 25$

$\Leftrightarrow \log_5\left(x.\left(26-x\right)\right)=\log_5 25\Leftrightarrow x.\left(26-x\right)=25\Leftrightarrow x^2-26x+25=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=25\end{array}\right.$.

So điều kiện phương trình có nghiệm $x=1;\ x=25$.

Tích của hai nghiệm đó bằng $x=25$

Ví dụ 18: Tổng giá trị tất cả các nghiệm của phương trình $\dfrac{1}{\log_2 x}+\dfrac{1}{\log_3 x}+\dfrac{1}{\log_4 x}=1$ bằng

A. 9. **B.** 12. **C.** 24. **D.** 18.

Lời giải

Điều kiện: $x>0$, $x\neq 1$.

Ta có, phương trình tương đương với $\log_x 2+\log_x 3+\log_x 4=1\Leftrightarrow \log_x 24=1\Leftrightarrow x=24$.

Phương trình có nghiệm duy nhất $x=24$ nên tổng các nghiệm bằng 24.

Ví dụ 19: Cho $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$, biết $\log_2\left(\sin x\right)+\log_2\left(\cos x\right)=-2$ và $\log_2\left(\sin x+\cos x\right)=\dfrac{1}{2}\left(\log_2 n+1\right)$.

Giá trị của n bằng

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{5}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải

Vì $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ nên $\sin x>0$ và $\cos x>0$.

Ta có: $\log_2\left(\sin x\right)+\log_2\left(\cos x\right)=-2\Leftrightarrow \log_2\left(\sin x.\cos x\right)=-2\Leftrightarrow \sin x.\cos x=\dfrac{1}{4}$.

$\Rightarrow\left(\sin x+\cos x\right)^2=1+2\sin x.\cos x=\dfrac{3}{2}$.

Suy ra: $\log_2\left(\sin x+\cos x\right)=\dfrac{1}{2}\left(\log_2 n+1\right)\Leftrightarrow \log_2\left(\sin x+\cos x\right)^2=\log_2\left(2n\right)$

$\Leftrightarrow\left(\sin x+\cos x\right)^2=2n\Leftrightarrow\dfrac{3}{2}=2n\Leftrightarrow n=\dfrac{3}{4}$.

Ví dụ 20: Tổng giá trị tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3 x.\log_9 x.\log_{27} x.\log_{81} x=\frac{2}{3}$ là

A. 0. **B.** $\frac{82}{9}$. **C.** $\frac{80}{9}$. **D.** 9.

Lời giải

Điều kiện $x>0$.

$\log_3 x.\log_9 x.\log_{27} x.\log_{81} x=\frac{2}{3}\Leftrightarrow \log_3 x.\left(\frac{1}{2}\log_3 x\right).\left(\frac{1}{3}\log_3 x\right).\left(\frac{1}{4}\log_3 x\right)=\frac{2}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{24}.\left(\log_3 x\right)^4=\frac{2}{3}\Leftrightarrow \left(\log_3 x\right)^4=16\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_3 x=2\\ \log_3 x=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=9\\ x=\frac{1}{9}\end{array}\right.$ (TMĐK).

Vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình đã cho là $\frac{82}{9}$.

Ví dụ 21: Cho biết phương trình $\log_9 x+\sqrt{\log_9 x+4}=26$ có nghiệm dạng $x=3^n$, với n là số tự nhiên. Tổng tất cả các chữ số của n bằng

A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 9.

Lời giải

$\log_9 x+\sqrt{\log_9 x+4}=26\ (1)$

Đặt $t=\sqrt{\log_9 x+4}$ với $t\ge 0$. Ta có $\log_9 x=t^2-4$.

Phương trình (1) trở thành: $t^2-4+t=26\Leftrightarrow t^2+t-30=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=5\quad (\text{TM})\\ t=-6\quad (\text{L})\end{array}\right.$.

Với $t=5\Rightarrow \log_9 x=21\Leftrightarrow x=9^{21}\Leftrightarrow x=3^{42}\Rightarrow n=42$.

Vậy tổng tất cả các chữ số của n là $4+2=6$.

Ví dụ 22: Phương trình $2\ln^2(x+2)+2\ln^2(2x-3)=\frac{5\ln(2x-3)}{\log_{(x+2)} e}$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực?

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

ĐK: $x>\frac{3}{2}$

$2\ln^2(x+2)+2\ln^2(2x-3)=\frac{5\ln(2x-3)}{\log_{(x+2)} e}$

$\Leftrightarrow 2\ln^2(x+2)+2\ln^2(2x-3)=5\ln(2x-3).\ln(x+2)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\ln(x+2)=2\ln(2x-3)\\ \ln(x+2)=\frac{1}{2}\ln(2x-3)\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x+2=(2x-3)^2\\ (x+2)^2=2x-3\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x^2-13x+7=0\\ x^2+2x+7=0\ (\text{VN})\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\frac{13\pm\sqrt{57}}{8}$.

Ví dụ 23: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $\log_2(\log_4 x).\log_4(\log_2 x)=3$. Giá trị $\log_2 x_1.\log_2 x_2$ bằng

A. $\sqrt[4]{2^{33}}$. **B.** -6. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Ta có $\log_2\left(\log_4 x\right).\log_4\left(\log_2 x\right)=3 \Leftrightarrow \log_2\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right).\frac{1}{2}\log_2\left(\log_2 x\right)=3$

$\Leftrightarrow\left[\log_2\left(\log_2 x\right)-1\right].\frac{1}{2}\log_2\left(\log_2 x\right)=3$. Đặt $t=\log_2\left(\log_2 x\right)$ thì $(t-1)t=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3 \\ t=-2 \end{array}\right.$

$+\ t=3 \Rightarrow \log_2\left(\log_2 x_1\right)=3 \Leftrightarrow \log_2 x_1=8$

$+\ t=-2 \Rightarrow \log_2\left(\log_2 x_2\right)=-2 \Leftrightarrow \log_2 x_2=\frac{1}{4}$. Vậy $\log_2 x_1 .\log_2 x_2=2$.

Ví dụ 24: Biết $x_1>x_2$ là hai nghiệm của phương trình $\log_3\left(\frac{x^2-2x+1}{3x}\right)+x^2+2=3x$ và $4x_1+2x_2=a+\sqrt{b}$, với a,b là hai số nguyên dương. Tính $a+b$

A. $a+b=9$. **B.** $a+b=12$. **C.** $a+b=7$. **D.** $a+b=14$.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$

$\log_3\left(\frac{x^2-2x+1}{3x}\right)+x^2+2=3x \Leftrightarrow \log_3\left(x-1\right)^2+x^2-2x+1=\log_3 x+x$

$\Leftrightarrow \log_3\left(x-1\right)^2+\left(x-1\right)^2=\log_3 x+x\ (1)$

Xét hàm số $f(t)=\log_3 t+t \Leftrightarrow f'(t)=\frac{1}{t.\ln 3}+1>0, \forall t>0$

Phương trình (1) trở thành

$$f\left(\left(x-1\right)^2\right)=f\left(x\right) \Leftrightarrow \left(x-1\right)^2=x \Leftrightarrow x^2-3x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=\frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x_2=\frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy $4x_1+2x_2=9+\sqrt{5}$. Khi đó $a=9,b=5 \Rightarrow a+b=14$

Ví dụ 25: Cho $0\le x\le 2020$ và $\log_2\left(2x+2\right)+x-3y=8^y$. Có bao nhiêu cặp số $(x;y)$ nguyên thỏa mãn các điều kiện trên?

A. 1. **B.** 4. **C.** 2019. **D.** 2020.

Lời giải

Do $0\le x\le 2020$ nên $\log_2\left(2x+2\right)$ luôn có nghĩa.

Ta có $\log_2(2x+2)+x-3y=8^y$

$\Leftrightarrow \log_2(x+1)+x+1=3y-2^{3y} \Leftrightarrow \log_2(x+1)+2^{\log_2(x+1)}=3y+2^{3y}\ (1)$

Xét hàm số $f(t)=t+2^t$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$ và $f'(t)=1+2^t\ln 2 \Rightarrow f'(t)>0\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f\left(t\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(1) \Leftrightarrow \log_2(x+1)=3y \Leftrightarrow x+1=2^{3y} \Leftrightarrow y=\log_8(x+1)$.

Ta có $0\le x\le 2020$ nên $1\le x+1\le 2021$ suy ra $0\le \log_8(x+1)\le \log_8 2021$.

Lại có $\log_8 2021\approx 3,66$ nên nếu $y\in\mathbb{Z}$ thì $y\in\{0;1;2;3\}$.

Vậy có 4 cặp số $(x;y)$ nguyên thỏa yêu cầu bài toán là các cặp $(0;0),(7;1),(63;2),(511;3)$

Dạng 3 PHƯƠNG TRÌNH MŨ - LOGARIT CHỨA THAM SỐ

Ví dụ 1: Tập hợp các giá trị m để phương trình $e^x = m-2020$ có nghiệm thực.

A. $\mathbb{R}$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{2019\}$. **C.** $[2020;+\infty)$. **D.** $(2020;+\infty)$.

Lời giải

Ta có: $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Phương trình $e^x = m-2020$ có nghiệm thực khi và chỉ khi $m-2020>0$.

$\Leftrightarrow m > 2020 \Leftrightarrow m \in (2020;+\infty)$.

Ví dụ 2: Có bao nhiêu giá trị $m \in \mathbb{Z}$ để phương trình $5^x = 4-m^2$ có nghiệm thực?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Phương trình $5^x = 4-m^2$ có nghiệm thực khi và chỉ khi $4-m^2>0 \Leftrightarrow -2<m<2$.

Mặt khác: $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-1;0;1\}$.

Vậy có 3 giá trị $m \in \mathbb{Z}$ để phương trình $5^x = 4-m^2$ có nghiệm thực.

Ví dụ 3: Tập hợp các số thực m để phương trình $\log_2 x = m$ có nghiệm thực là

A. $(0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $[0;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải

Hàm $y=\log_2 x$ có tập giá trị là $\mathbb{R}$ nên phương trình $\log_2 x = m$ có nghiệm thực $\forall m \in \mathbb{R}$.

Ví dụ 4: Tập các giá trị của m để phương trình $8^x + 2.8^{1-x} - 9m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

A. $\left(-\infty;-\frac{8}{9}\right)$. **B.** $\left(-\frac{8}{9};\frac{8}{9}\right)$. **C.** $\left(\frac{8}{9};+\infty\right)$. **D.** $\left[-\frac{8}{9};\frac{8}{9}\right]$.

Lời giải

Đặt $t = 8^x \ (t>0)$. Phương trình trở thành: $t+\frac{16}{t}-9m=0 \Rightarrow t^2-9mt+16=0$.(1)

Phương trình $8^x + 2.8^{1-x} - 9m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt dương. Nghĩa là: $\begin{cases}\Delta>0\\S>0\\P>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}81m^2-64>0\\9m>0\\16>0\end{cases} z \Leftrightarrow m \in \left(\frac{8}{9};+\infty\right)$.

Ví dụ 5: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $9^x + m.3^x + m - 2 = 0$ có duy nhất một nghiệm thực x?

A. 1. **B.** 3. **C.** Vô số. **D.** 2.

Lời giải

Đặt $t = 3^x, t>0$. Phương trình đã cho trở thành:

$t^2 + m.t + m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2-t^2}{t+1}$ (*)

Bài toán tương đương với (*) có tối đa một nghiệm dương.

Đặt $f(t)=\frac{2-t^2}{t+1} \Leftrightarrow f'(t)=\frac{-t^2-2t-2}{(t+1)^2}<0, \forall t>0$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ trên $(0;+\infty)$ như sau:

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	2	$\searrow$ $-\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy bài toán thỏa mãn nếu $m<2$

Theo giả thiết m nguyên dương. Vậy $m=1$.

Ví dụ 6: Tính tổng các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $4^x+7=2^{x+3}+m^2+6m$ có nghiệm $x\in(1;3)$.

A. -22. **B.** -21. **C.** -35. **D.** -20.

Lời giải

Đặt $t=2^x$ với $x\in(1;3)\Rightarrow t\in(2;8)$.

Phương trình $4^x+7=2^{x+3}+m^2+6m$ (1) trở thành $t^2-8t=m^2+6m-7$ (2).

Xét hàm số $f(t)=t^2-8t$ với $t\in(2;8)$

Ta có $f'(t)=2t-8; f'(t)=0\Leftrightarrow 2t-8=0\Leftrightarrow t=4\in(2;8)$

BBT:

t	2		4		8
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	-12	$\searrow$	-16	$\nearrow$	0

Phương trình (1) có nghiệm $x\in(1;3)$ khi phương trình (2) có nghiệm $t\in(2;8)$.

Từ BBT suy ra $-16\le m^2+6m-7<0\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+6m+9\ge 0\\ m^2+6m-7<0\end{cases}\Leftrightarrow m\in(-7;1)$.

Do m nguyên nên $m\in\{-6,-5,-4,-3,-2,-1,0\}$

Vậy tổng các giá trị nguyên của m để phương trình (1) có nghiệm $x\in(1;3)$ là -21.

Ví dụ 7: Tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^x+(4m-1).2^x+3m^2-1=0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1+x_2=3$ là

A. $m=\sqrt{3}$. **B.** $m=-\sqrt{3}$. **C.** $m=\pm\sqrt{3}$. **D.** $m<-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Đặt $t=2^x>0$, ta được $t^2+(4m-1)t+3m^2-1=0$ (1).

Phương trình đã cho có hai nghiệm thực $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm dương t_1, t_2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (4m-1)^2 - 4(3m^2-1) \ge 0 \\ t_1 t_2 = 3m^2 - 1 > 0 \\ t_1 + t_2 = 1 - 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 8m + 5 \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} m > \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ m < -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{array} \right. \\ m < \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(m-1)^2 + 1 \ge 0 \\ m < -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow m < -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Khi đó $x_1 = \log_2 t_1$, $x_2 = \log_2 t_2 \Rightarrow x_1 + x_2 = \log_2 t_1 + \log_2 t_2 = \log_2 (t_1 t_2)$.

Mà $t_1 t_2 = 3m^2 - 1$ và $x_1 + x_2 = 3 \Rightarrow \log_2 (3m^2 - 1) = 3 \Leftrightarrow 3m^2 - 1 = 8 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{3}$.

Kết hợp với $m < -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ta được $m = -\sqrt{3}$ thỏa mãn.

Ví dụ 8: Cho phương trình $8^x - m2^{2x+1} + (2m^2 - 1)2^x + m - m^3 = 0$. Biết tập hợp các giá trị của tham số m sao cho phương trình có ba nghiệm phân biệt là khoảng (a,b). Giá trị ab bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Đặt $t = 2^x, t > 0$, phương trình trở thành:

$t^3 - 2mt^2 + (2m^2 - 1)t + m - m^3 = 0 \quad (1)$

$$\Leftrightarrow (t-m)(t^2 - mt + m^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = m \\ g(t) = t^2 - mt + m^2 - 1 = 0 \quad (2) \end{array} \right.$$

$ycbt \Leftrightarrow (1)$ có 3 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow (2)$ có 2 nghiệm dương phân biệt khác m với $m > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_g > 0 \\ g(m) \ne 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3m^2 + 4 > 0 \\ m^2 - 1 \ne 0 \\ m > 0 \\ m^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{2}{\sqrt{3}} < m < \dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ m > 0 \\ m > 1 \\ m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow m \in \left(1; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right).$$

Vậy $ab = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Ví dụ 9: Các giá trị của m để phương trình $(\sqrt{5}-1)^{x^2} + m(\sqrt{5}+1)^{x^2} = 2^{x^2-2}$ có đúng bốn nghiệm phân biệt là khoảng $(a;b)$. Giá trị $b-a$ là

A. $\dfrac{3}{4}$. **B.** $\dfrac{1}{16}$. **C.** $\dfrac{49}{64}$. **D.** $\dfrac{1}{64}$.

Lời giải

$$(\sqrt{5}-1)^{x^2} + m(\sqrt{5}+1)^{x^2} = 2^{x^2-2} \quad (1) \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{x^2} + m\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{x^2} = \frac{1}{4}.$$

Vì $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} = 1$ nên đặt $t = \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{x^2} \Rightarrow 0 < t \le 1$ và $\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{x^2} = \dfrac{1}{t}$.

Ta có phương trình $t+m.\dfrac{1}{t}=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow 4m=-4t^2+t\ (2)$.

Ứng với một nghiệm $t\in(0;1)$ của phương trình (2) ta có 2 nghiệm x phân biệt của phương trình (1).

Do đó, phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0;1)\Leftrightarrow$ Đường thẳng $y=4m$ cắt phần đồ thị của hàm số $f(t)=-4t^2+t$ với $t\in(0;1)$ tại 2 điểm phân biệt.

Bảng biến thiên của hàm $f(t)=-4t^2+t$ với $t\in(0;1)$

t	0		$\dfrac{1}{8}$		1
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{16}$	$\searrow$	-3

Từ bảng biến thiên suy ra $0<4m<\dfrac{1}{16}\Leftrightarrow 0<m<\dfrac{1}{64}$. Vậy $a=0;b=\dfrac{1}{64}\Rightarrow b-a=\dfrac{1}{64}$.

Ví dụ 10: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $2017^{\sin^2 x}+2018^{\cos^2 x}=m.2019^{\cos^2 x}$ có nghiệm?

A. 2018. **B.** 2019. **C.** 2016. **D.** 2017.

Lời giải

Phương trình tương đương: $2017\left(\dfrac{1}{2017.2019}\right)^{\cos^2 x}+\left(\dfrac{2018}{2019}\right)^{\cos^2 x}=m$.

Đặt $t=\cos^2 x$ với $t\in[0;1]$ ta được $2017\left(\dfrac{1}{2017.2019}\right)^{t}+\left(\dfrac{2018}{2019}\right)^{t}=m$.

Xét $f(t)=2017\left(\dfrac{1}{2017.2019}\right)^{t}+\left(\dfrac{2018}{2019}\right)^{t}$ với $t\in[0;1]$.

Hàm số $f(t)$ nghịch biến trên $D=[0;1]$.

$\underset{D}{\text{Max}}\,f(t)=f(0)=2018$ và $\underset{D}{\text{Min}}\,f(t)=f(1)=1$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \underset{D}{\text{Min}}\,f(t)\le m\le \underset{D}{\text{Max}}\,f(t)$ hay $m\in[1;2018]$.

Vậy có 2018 giá trị nguyên m để phương trình có nghiệm.

Ví dụ 11: Cho phương trình $e^{m\cos x-\sin x}-e^{2(1-\sin x)}=2-\sin x-m\cos x$ với m là tham số thực. Gọi S là tập tất cả các giá trị của m để phương trình có nghiệm. Khi đó S có dạng $(-\infty;a]\cup[b;+\infty)$. Tính $T=10a+20b$.

A. $T=10\sqrt{3}$. **B.** $T=0$. **C.** $T=1$. **D.** $T=3\sqrt{10}$.

Lời giải

Ta có $e^{m\cos x-\sin x}-e^{2(1-\sin x)}=2-\sin x-m\cos x$

$\Leftrightarrow e^{m\cos x-\sin x}+m\cos x-\sin x=e^{2(1-\sin x)}+2(1-\sin x)$

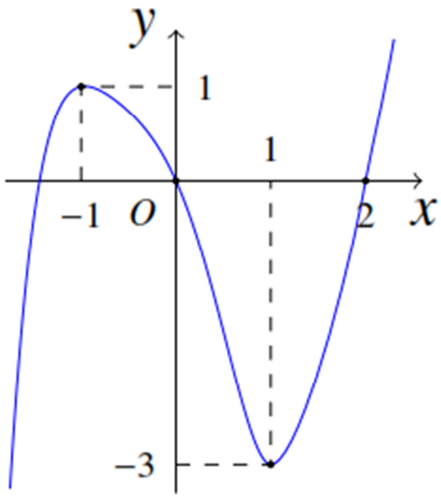
Xét hàm số $f(t)=e^t+t\ (t\in\mathbb{R})$, $f'(t)=e^t+1>0\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra $e^{m\cos x-\sin x}+m\cos x-\sin x=e^{2(1-\sin x)}+2(1-\sin x)\Leftrightarrow m\cos x-\sin x=2(1-\sin x)$

$\Leftrightarrow m\cos x+\sin x=2$. Phương trình có nghiệm khi $m^2+1\ge 4\Leftrightarrow m^2\ge 3$.

$\Rightarrow S=\left(-\infty;-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3};+\infty\right)$. Vậy $T=10a+20b=10\sqrt{3}$.

Ví dụ 12: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thực của phương trình $f\left(2+f\left(e^x\right)\right)=1$ là

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải

Ta có

$$f\left(2+f\left(e^x\right)\right)=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2+f\left(e^x\right)=-1\\2+f\left(e^x\right)=a\ ,(2<a<3)\end{array}\right.$$

$$2+f\left(e^x\right)=-1\Leftrightarrow f\left(e^x\right)=-3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}e^x=1\\e^x=b<-1(VN)\end{array}\right.\Leftrightarrow x=0$$

$$2+f\left(e^x\right)=a\Leftrightarrow f\left(e^x\right)=a-2,(0<a-2<1)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}e^x=c<-1\\e^x=d<0\\e^x=t>2\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\ln t$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt

Ví dụ 13: Gọi S là tập hợp các số nguyên m thỏa mãn phương trình $\log_2\left(x^2-3x+m\right)=\log_2 x$ có nghiệm duy nhất. Số phần tử của tập hợp $S\cap(-2;+\infty)$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Cách 1:

Điều kiện: $x>0$

$\log_2\left(x^2-3x+m\right)=\log_2 x$ (1)

$\Leftrightarrow x^2-3x+m=x\Leftrightarrow x^2-4x+m=0$ (2)

Để (1) có nghiệm dương duy nhất khi và chỉ khi (2) có nghiệm dương duy nhất

$\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm kép dương: $x_1=x_2>0$

hoặc (2) có hai nghiệm phân biệt, một nghiệm bằng 0, một nghiệm dương: $x_2>x_1=0$

hoặc (2) có 2 nghiệm phân biệt trái dấu: $x_1<0<x_2$

TH1: (2) có nghiệm kép dương $x_1 = x_2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ \dfrac{-b}{2a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^2 - 4m = 0 \\ \dfrac{4}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 4$

TH2: (2) có 2 nghiệm phân biệt, một nghiệm bằng 0, một nghiệm dương: $x_2 > x_1 = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1.x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 - 4m > 0 \\ m = 0 \\ 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0$

TH3: (2) có 2 nghiệm phân biệt trái dấu: $x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow 1.m < 0 \Leftrightarrow m < 0$

Suy ra $S = \{m \in \mathbb{Z} \,|\, m \in (-\infty; 0] \cup \{4\}\}$

Vậy $S \cap (-2; +\infty) = \{-1; 0; 4\}$

Cách 2: Dùng hàm số

Điều kiện: $x > 0$

$\log_2(x^2 - 3x + m) = \log_2 x \qquad (1)$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + m = x \Leftrightarrow x^2 - 4x + m = 0 \Leftrightarrow m = -x^2 + 4x \quad (2)$

Đặt $f(x) = -x^2 + 4x$

Ta có $f'(x) = -2x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	0	↗	4	↘	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy, để (1) có nghiệm dương duy nhất $\Leftrightarrow (2)$ có nghiệm dương duy nhất $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 4 \\ m \le 0 \end{array}\right.$

Suy ra $S = \{m \in \mathbb{Z} \,|\, m \in (-\infty; 0] \cup \{4\}\}$

Vậy $S \cap (-2; +\infty) = \{-1; 0; 4\}$.

Ví dụ 14: Tìm giá trị thực của m để phương trình $\log_2^2(2x) - (m+2)\log_2 x + m - 2 = 0 (m \in \mathbb{R})$ hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 = 2$. Tổng các giá trị của m thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(0;2)$. **B.** $(4;6)$. **C.** $(2;4)$. **D.** $(3;5)$.

Lời giải

Ta có $\log_2^2(2x) - (m+2)\log_2 x + m - 2 = 0 \Leftrightarrow (\log_2 x + 1)^2 - (m+2)\log_2 x + m - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \log_2^2 x - m\log_2 x + m - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x = 1 \\ \log_2 x = m - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 2^{m-1} \end{array}\right.$

+ Nếu $2^{m-1} = 2 \Leftrightarrow m = 2$ thì phương trình có 1 nghiệm duy nhất $x = 2$. Tổng các nghiệm lúc này bằng 2

+ Nếu $2^{m-1} \ne 2 \Leftrightarrow m \ne 2$ thì phương trình có 2 nghiệm $x_1.x_2 = 2.2^{m-1} = 2^m = 2 \Rightarrow m = 1$ $\Rightarrow x_1 + x_2 = 2 + 1 = 3$.

Ví dụ 15: Cho phương trình $\log_3^2 x-4\log_3 x+m-3=0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $x_1<x_2$ thỏa mãn $x_2-81x_1<0$.

A. 3. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Xét phương trình: $\log_3^2 x-4\log_3 x+m-3=0\quad(1)$. Điều kiện: $x>0$.

Đặt $t=\log_3 x$ phương trình (1) trở thành: $t^2-4t+m-3=0\,(2)$.

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khi phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow \Delta'>0\Leftrightarrow 4-m+3>0\Leftrightarrow m<7\,(i)$.

Gọi $x_1<x_2$ là 2 nghiệm của phương trình (1) thì phương trình (2) có 2 nghiệm tương ứng là $t_1=\log_3 x_1; t_2=\log_3 x_2$. Vì $x_1<x_2$ nên $t_1<t_2$.

Mặt khác, $x_2-81x_1<0\Leftrightarrow 0<x_2<81x_1\Leftrightarrow \log_3 x_2<4+\log_3 x_1$

$\Leftrightarrow t_2<4+t_1\Leftrightarrow 0<t_2-t_1<4$

$\Leftrightarrow (t_2-t_1)^2<16\Leftrightarrow (t_2+t_1)^2-4t_1t_2<16$.

$\Leftrightarrow 4^2-4(m-3)<16\Leftrightarrow m>3\,(ii)$.

Từ (i) và (ii) suy ra $3<m<7$ và $m\in\mathbb{Z}$ nên có 3 số nguyên thỏa mãn.

Ví dụ 16: Tất cả các giá thực của tham số m để phương trình $\log_3(1-x^2)+\log_{\frac{1}{3}}(x+m-4)=0$ có hai nghiệm thực phân biệt là

A. $-\frac{1}{4}<m<0$. **B.** $5<m<\frac{21}{4}$. **C.** $-\frac{1}{4}\le m\le 2$. **D.** $5\le m\le\frac{21}{4}$.

Lời giải

Ta có $\log_3(1-x^2)+\log_{\frac{1}{3}}(x+m-4)=0\Leftrightarrow \log_3(1-x^2)-\log_3(x+m-4)=0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}1-x^2>0\\1-x^2=x+m-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<1\\m=-x^2-x+5\quad(1)\end{cases}$

Phương trình đã cho có hai nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm thực phân biệt thuộc khoảng $(-1;1)$.

Xét hàm số $f(x)=-x^2-x+5\Rightarrow f'(x)=-2x-1=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$.

Ta có bảng biến thiên

x	-1		$-\frac{1}{2}$		1
y'		$+$	0	$-$	
y	5	↗	$\frac{21}{4}$	↘	3

Dựa vào bảng biến thiên ta có $5<m<\frac{21}{4}$ thỏa mãn đề bài.

Ví dụ 17: Số các giá trị nguyên nhỏ hơn 2020 của tham số m để phương trình $\log_6(2020x+m)=\log_4(1010x)$ có nghiệm là

A. 2021. **B.** 2022. **C.** 2020. **D.** 2019.

Lời giải

Ta đặt $\log_6(2020x+m)=\log_4(1010x)=t$. Khi đó

$2020x+m=6^t$ và $1010x=4^t$. Ta suy ra $2\cdot 4^t+m=6^t \Leftrightarrow m=6^t-2\cdot 4^t$

Đặt $f(t)=-2.4^t+6^t$

$f'(t)=6^t\ln 6-2.4^t.\ln 4$

$f'(t)=0\Rightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^t=\frac{2\ln 4}{\ln 6}=\log_6 16\Leftrightarrow t=\log_{\frac{3}{2}}(\log_6 16)$.

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		$\log_{\frac{3}{2}}(\log_6 16)$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(\log_{\frac{3}{2}}(\log_6 16)\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

Phương trình $f(t)=m$ có nghiệm khi và chỉ khi $m\ge f\left(\log_{\frac{3}{2}}(\log_6 16)\right)\approx -2{,}01$.

Hơn nữa, $\begin{cases}m<2020\\ m\in\mathbb{Z}\end{cases}$ nên suy ra $\begin{cases}-2\le m\le 2019\\ m\in\mathbb{Z}\end{cases}$.

Vậy ta có 2022 giá trị m thỏa mãn.

Ví dụ 18: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $\log_4 x^2+\log_2(4-x)=\log_2 m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

A. 3. **B.** 2. **C.** vô số. **D.** 4.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases}x^2>0\\ 4-x>0\\ m>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\ne x<4\\ m>0\end{cases}$.

Phương trình tương đương với

$\log_2|x|+\log_2(4-x)=\log_2 m\Leftrightarrow\log_2|x|(4-x)=\log_2 m\Leftrightarrow m=|x|(4-x)$.

Xét hàm số $g(x)=|x|(4-x)=\begin{cases}x(4-x),\ 0<x<4\\ -x(4-x),x<0\end{cases}\Rightarrow g'(x)=\begin{cases}4-2x,\ 0<x<4\\ 2x-4,\ x<0\end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		4
$g'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên, PT có ba nghiệm thực phân biệt $\Leftrightarrow 0<m<4\Rightarrow m\in\{1;2;3\}$.

Ví dụ 19: Tìm tập hợp các giá trị của m để phương trình $1+\log_5(x^2+1)=\log_5(mx^2+4x+m)$ có hai nghiệm phân biệt?

A. $m\in\mathbb{R}\setminus\{5\}$. **B.** $m\in(3;7)$. **C.** $m\in(3;7)\setminus\{5\}$. **D.** $m\in\mathbb{R}$.

Lời giải

Ta có $1+\log_5\left(x^2+1\right)=\log_5\left(mx^2+4x+m\right)\Leftrightarrow\log_5 5\left(x^2+1\right)=\log_5\left(mx^2+4x+m\right)$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+1>0\left(Đúng\,\forall x\in\mathbb{R}\right)\\5\left(x^2+1\right)=mx^2+4x+m\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{5x^2-4x+5}{x^2+1}=m$.

Đặt $f(x)=\dfrac{5x^2-4x+5}{x^2+1}$. Ta có: $f'(x)=\dfrac{4x^2-4}{\left(x^2+1\right)^2}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow 4x^2-4=0\Leftrightarrow x=\pm1$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	5	↗	7	↘	3	↗	5

Dựa vào bảng biến thiên ta có phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $m\in(3;7)\setminus\{5\}$.

Ví dụ 20: Xét các số nguyên dương a,b sao cho phương trình $a\ln^2 x+b\ln x+5=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 và phương trình $5\log^2 x+b\log x+a=0$ có hai nghiệm phân biệt x_3,x_4 thỏa mãn $x_1x_2>x_3x_4$. Tính giá trị nhỏ nhất $S_{\min}$ của $S=2a+3b$.

A. $S_{\min}=17$. **B.** $S_{\min}=30$. **C.** $S_{\min}=25$. **D.** $S_{\min}=33$.

Lời giải

Điều kiện $x>0$, điều kiện mỗi phương trình có 2 nghiệm phân biệt là $b^2>20a$.

Đặt $t=\ln x,u=\log x$ khi đó ta được $at^2+bt+5=0(1)$, $5t^2+bt+a=0(2)$.

Ta thấy với mỗi một nghiệm t thì có một nghiệm x, một u thì có một x.

Ta có $x_1.x_2=e^{t_1}.e^{t_2}=e^{t_1+t_2}=e^{-\frac{b}{a}}$, $x_3.x_4=10^{u_1+u_2}=10^{-\frac{b}{5}}$, lại có $x_1x_2>x_3x_4\Leftrightarrow e^{-\frac{b}{a}}>10^{-\frac{b}{5}}$

$\Rightarrow-\dfrac{b}{a}>-\dfrac{b}{5}\ln10\Leftrightarrow a>\dfrac{5}{\ln10}\Leftrightarrow a\ge3$ (do a,b nguyên dương), suy ra $b^2>60\Rightarrow b\ge8$.

Vậy $S=2a+3b\ge2.3+3.8=30$, suy ra $S_{\min}=30$ đạt được $a=3,b=8$.

Ví dụ 21: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để tồn tại cặp số $(x;y)$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $e^{3x+5y}-e^{x+3y+1}=1-2x-2y$ và $\log_3^2(3x+2y-1)-(m+6)\log_3 x+m^2+9=0$?

A. 8. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Ta có $e^{3x+5y}-e^{x+3y+1}=1-2x-2y\Leftrightarrow e^{3x+5y}+(3x+5y)=e^{x+3y+1}+(x+3y+1)(1)$

Xét hàm số $f(t)=e^t+t$ trên $\mathbb{R}$. Ta có $f'(t)=e^t+1>0$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó $(1)\Leftrightarrow f(3x+5y)=f(x+3y+1)\Leftrightarrow3x+5y=x+3y+1\Leftrightarrow2y=1-2x$.

Thế vào phương trình còn lại ta được $\log_3^2 x-(m+6)\log_3 x+m^2+9=0\,(2)$

Đặt $t=\log_3 x$. Số nghiệm của phương trình (2) chính là số nghiệm của phương trình

$t^2-(m+6)t+m^2+9=0$ (3)

Phương trình (3) có nghiệm khi $\Delta\ge0\Leftrightarrow-3m^2+12m\ge0\Leftrightarrow0\le m\le4$.

Do đó có 5 số nguyên m thỏa mãn.

Ví dụ 22: Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m sao cho phương trình $\log_2 \dfrac{3x^2+3x+m+1}{2x^2-x+1} = x^2-5x-m+2$ có nghiệm?

A. Vô số. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 5.

Lời giải

Ta có: $2x^2-x+1 = 2\left(x^2-\dfrac{1}{2}x\right)+1 = 2\left(x^2-2.x.\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}\right)+\dfrac{7}{8} = 2\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{7}{8} > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó điều kiện để phương trình xác định là $3x^2+3x+m+1>0$ (1)

Phương trình đã cho tương đương với:

$\log_2\left(3x^2+3x+m+1\right)-\log_2\left(2x^2-x+1\right) = x^2-5x-m+2$

$\Leftrightarrow \log_2\left(3x^2+3x+m+1\right)+3x^2+3x+m+1 = \log_2\left(2x^2-x+1\right)+1+4x^2-2x+2$

$\Leftrightarrow \log_2\left(3x^2+3x+m+1\right)+3x^2+3x+m+1 = \log_2\left(4x^2-2x+2\right)+4x^2-2x+2$ (2)

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t+t$ trên $(0;+\infty)$, ta có $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0 \ \ \forall t\in(0;+\infty)$, do đó $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$ nên $(2) \Leftrightarrow 3x^2+3x+m+1 = 4x^2-2x+2$ (Thoả mãn)

$\Leftrightarrow m = x^2-5x+1$ (3)

Xét hàm số $f(x)=x^2-5x+1$, $f'(x)=2x-5$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2}$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\frac{21}{4}$	↗	$+\infty$

Vậy (3) có nghiệm khi và chỉ khi $m \ge -\dfrac{21}{4}$.

Vậy $m \ge -\dfrac{21}{4}$, mà m là số nguyên âm nên $m \in \{-5;-4;-3;-2;-1\}$.

Ví dụ 23: Hỏi có tất cả bao nhiêu số tự nhiên m để phương trình $\left(\log_2 x-m\right)\sqrt{3^x-100}=0$ có đúng một nghiệm thực x?

A. 3. **B.** 0. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ 3^x-100\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge \log_3 100$ (*).

Ta có: $\left(\log_2 x-m\right)\sqrt{3^x-100}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x-m=0 \\ 3^x-100=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2^m \\ x=\log_3 100 \end{array}\right. (t/m)$.

Để phương trình đã cho có đúng một nghiệm thì nghiệm $x=2^m$ phải vi phạm điều kiện (*), tức là: $2^m \le \log_3 100 \Leftrightarrow m \le \log_2\left(\log_3 100\right) \approx 2{,}067$

Do m là số tự nhiên nên $m=\{0;1;2\}$.

Ví dụ 24: Cho phương trình $\log_2\left(x-\sqrt{x^2-1}\right).\log_{2017}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=\log_a\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(1;2018)$ của tham số a sao cho phương trình đã cho có nghiệm lớn hơn 3?

A. 17. **B.** 20. **C.** 19. **D.** 18.

Lời giải

Nhận thấy, với $x>3$ thì $\sqrt{x^2-1}<\sqrt{x^2}=x\Rightarrow x-\sqrt{x^2-1}>0$ và $x+\sqrt{x^2-1}>0$.

Ta có $\log_2\left(x-\sqrt{x^2-1}\right).\log_{2017}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=\log_a\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

$\Leftrightarrow \log_2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).\log_{2017}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\log_a 2.\log_2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

$\Leftrightarrow \log_{2017}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\log_a 2\ (1)$ (vì $\log_2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)>0,\ \forall x>3$).

Xét hàm số $f(x)=\log_{2017}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ trên khoảng $(3;+\infty)$.

Có: $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}.\ln 2017}\Rightarrow f'(x)>0,\ \forall x>3$.

BBT:

x	3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$f(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

- Từ BBT ta thấy: phương trình (1) có nghiệm lớn hơn 3 $\Leftrightarrow \log_2 a>f(3)$

$\Leftrightarrow \log_2 a>\log_{2017}\left(3+2\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow \log_2 a<\log_{3+2\sqrt{2}}2017$ (do $a>1$)

$\Leftrightarrow a<2^{\log_{3+2\sqrt{2}}2017}\approx 19{,}9$. Mà a nguyên thuộc khoảng $(1;2018)$ nên $a\in\{2;3;...;19\}$.

Vậy có 18 giá trị của a thoả mãn.

Ví dụ 25: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất cặp $(x;y)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $\log_{x^2+y^2+3}(2x-6y+5)=1$ và $\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}-m=0$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 5. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Ta có: $\log_{x^2+y^2+3}(2x-6y+5)=1\Leftrightarrow x^2+y^2+3=2x-6y+5\Leftrightarrow x^2+y^2-2x+6y-2=0$

Ta thấy phương trình $x^2+y^2-2x+6y-2=0$ là phương trình đường tròn tâm $I(1;-3)$ bán kính $R=\sqrt{12}$

Để tồn tại duy nhất cặp số $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán khi đường thẳng $\Delta:\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0$ tiếp xúc với đường tròn $(C):x^2+y^2-2x+6y-2=0$

Khi và chỉ khi $d(I,\Delta)=R\Leftrightarrow\dfrac{\left|\sqrt{3}+3-m-\sqrt{3}\right|}{2}=2\sqrt{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3+4\sqrt{3}\\m=3-4\sqrt{3}\end{array}\right.$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Dạng 1 PHƯƠNG TRÌNH MŨ KHÔNG CHỨA THAM SỐ

Câu 1: Phương trình $2^{2x^2+5x+4}=4$ có tổng tất cả các nghiệm bằng

A. 1. **B.** -1. **C.** $\frac{5}{2}$. **D.** $-\frac{5}{2}$.

Câu 2: Phương trình $9^{x+1}-13.6^x+4^{x+1}=0$ có 2 nghiệm x_1, x_2. Phát biểu nào sau đây đúng?

A. Phương trình có 2 nghiệm nguyên. **B.** Phương trình có 2 nghiệm vô tỉ.
C. Phương trình có 1 nghiệm dương. **D.** Phương trình có 2 nghiệm dương.

Câu 3: Tập nghiệm S của phương trình $\left(\frac{4}{7}\right)^x\left(\frac{7}{4}\right)^{3x-1}-\frac{16}{49}=0$ là

A. $S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$. **B.** $S=\{2\}$. **C.** $S=\left\{\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right\}$. **D.** $S=\left\{-\frac{1}{2};2\right\}$.

Câu 4: Tìm tập nghiệm của phương trình $4^{x^2}=2^{x+1}$

A. $S=\{0;1\}$. **B.** $S=\left\{-\frac{1}{2};1\right\}$.

C. $S=\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$. **D.** $S=\left\{-1;\frac{1}{2}\right\}$.

Câu 5: Tập nghiệm của phương trình $4^{x-x^2}=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ là

A. $\{0\}$. **B.** $\left\{0;\frac{1}{2}\right\}$. **C.** $\{0;2\}$. **D.** $\left\{0;\frac{3}{2}\right\}$.

Câu 6: Phương trình $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-2x-3}=7^{x-1}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 7: Phương trình $2^{x^2-3x+2}=4$ có 2 nghiệm là x_1; x_2. Hãy tính giá trị của $T=x_1^3+x_2^3$.

A. $T=9$. **B.** $T=10$. **C.** $T=3$. **D.** $T=27$.

Câu 8: Tìm nghiệm của phương trình $3^x+3^{x+1}=2^{x+2}$.

A. $x=\log_2 3$. **B.** $x=0$. **C.** $x=\frac{2}{3}$. **D.** $x=\frac{3}{2}$.

Câu 9: Cho phương trình $\left(7+4\sqrt{3}\right)^{x^2+x-1}=\left(2+\sqrt{3}\right)^{x-2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Phương trình có hai nghiệm không dương.
B. Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.
C. Phương trình có hai nghiệm trái dấu.
D. Phương trình có hai nghiệm âm phân biệt.

Câu 10: Tìm tích của tất cả các nghiệm thực của phương trình $7^{x^2-x+\frac{3}{2}}=49\sqrt{7}$

A. -1. **B.** 1. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 11: Tìm số nghiệm của phương trình $27^{\frac{x-2}{x-1}}=\frac{\sqrt{3}^{7x}}{243}$

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Câu 12: Phương trình $8^{\frac{2x-1}{x+1}}=0,25.\left(\sqrt{2}\right)^{7x}$ có tích các nghiệm bằng

A. $\frac{4}{7}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{2}{7}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 13: Phương trình $\left(\frac{3}{4}\right)^{x}.\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{8}{x}}}=\frac{9}{16}$ có hai nghiệm x_1 và x_2. Tổng $S=x_1+x_2$ là

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3

Câu 14: Giả sử x, y, z thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases}2^x.4^y.16^z=1\\4^x.16^y.2^z=2\\16^x.2^y.4^z=4\end{cases}$. Tìm x.

A. $\frac{3}{8}$. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** $\frac{4}{7}$. **D.** $\frac{7}{4}$.

Câu 15: Tính tích các nghiệm thực của phương trình $2^{x^2-1}=3^{2x+3}$.

A. $1-\log_2 3$. **B.** $-3\log_2 3$. **C.** $-\log_2 54$. **D.** -1.

Câu 16: Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $2^x.5^{x^2-2x}=1$. Khi đó tổng x_1+x_2 bằng

A. $2-\log_5 2$. **B.** $-2+\log_5 2$. **C.** $2+\log_5 2$. **D.** $2-\log_2 5$.

Câu 17: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $3^{x^2-2}=5^{x+1}$ là

A. $2-\log_3 5$. **B.** $P=-\log_3 45$. **C.** $P=\log_3 5$. **D.** 1.

Câu 18: Cho phương trình $5^{x+5}=8^x$. Biết phương trình có nghiệm $x=\log_a 5^5$, trong đó $0<a\neq 1$. Tìm phần nguyên của a.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 19: Biết nghiệm của phương trình $2^x.15^{x+1}=3^{x+3}$ được viết dưới dạng $x=2\log a-\log b$, với a,b là các số nguyên dương nhỏ hơn 10. Tính $S=2017a^3-2018b^2$.

A. $S=4009$. **B.** $S=2014982$. **C.** $S=1419943$. **D.** -197791.

Câu 20: Phương trình $5^{x^2-3x+2}=3^{x-2}$ có một nghiệm dạng $x=\log_a b$ với a, b là các số nguyên dương lớn hơn 4 và nhỏ hơn 16. Khi đó $a+2b$ bằng

A. 35. **B.** 25. **C.** 40. **D.** 30.

Câu 21: Phương trình $27^{\frac{x-1}{x}}.2^x=72$ có một nghiệm viết dưới dạng $x=-\log_a b$, với a, b là các số nguyên dương. Tính tổng $S=a+b$.

A. $S=4$. **B.** $S=5$. **C.** $S=6$. **D.** $S=8$.

Câu 22: Biết x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình $16^x-3.4^x+2=0$. Tích $P=4^{x_1}.4^{x_2}$ bằng

A. -3. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** 0.

Câu 23: Phương trình $3.4^x-5.6^x+2.9^x=0$ đương đương với phương trình nào sau đây?

A. $3x^2-5x+2=0$. **B.** $x^2-x=0$. **C.** $2x^2-5x+3=0$. **D.** $2x^2+5x+3=0$.

Câu 24: Phương trình $e^{6x}-3e^{3x}+2=0$ có hai nghiệm là $x=0$ và $x=\frac{1}{b}\ln a$, với $a,b\in\mathbb{N}$. Tính giá trị biểu thức $P=2^a+3^b$

A. $P=31$. **B.** $P=27$. **C.** $P=4$. **D.** $P=56$.

Câu 25: Tính tổng của tất cả các nghiệm thực của phương trình $\left(3^x-9\right)^3+\left(9^x-3\right)^3=\left(9^x+3^x-12\right)^3$.

A. 3. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** 4. **D.** $\frac{9}{2}$.

Câu 26: Phương trình $9^x-3.3^x+2=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 với $x_1<x_2$. Giá trị của $2x_1+3x_2$ là

A. $3\log_3 2$. **B.** 1. **C.** $4\log_3 2$. **D.** $2\log_2 3$.

Câu 27: Phương trình $3^{2x+1}-4.3^x+1=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 trong đó $x_1<x_2$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $x_1x_2=2$. **B.** $x_1+2x_2=-1$. **C.** $x_1+2x_2=0$. **D.** $x_1+x_2=-2$.

Câu 28: Phương trình $9^x-4.3^x+3=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 trong đó $x_1<x_2$. Tính $P=2^{x_1}+3^{x_2}$.

A. $P=4$. **B.** $P=5$. **C.** $P=10$. **D.** $P=14$.

Câu 29: Nếu phương trình $3^{2x}-4.3^x+1=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và $x_1<x_2$ thì

A. $2x_1+x_2=1$. **B.** $x_1+x_2=0$. **C.** $x_1+2x_2=-1$. **D.** $x_1.x_2=1$.

Câu 30: Cho phương trình $4^x+2^{x+1}-3=0$. Nếu đặt $t=2^x$ ta được phương trình nào sau đây?

A. $t^2+2t-3=0$. **B.** $t^2-2t-3=0$. **C.** $t^2+t-3=0$. **D.** $t^2-t-3=0$.

Câu 31: Cho phương trình $4^{x^2-2x}+2^{x^2-2x+3}-3=0$. Khi đặt $t=2^{x^2-2x}$, ta được phương trình nào dưới đây?

A. $t^2+8t-3=0$. **B.** $t^2+2t+3=0$. **C.** $t^2+2t-3=0$. **D.** $4t-3=0$.

Câu 32: Cho phương trình $9^{x^2}-4.3^{x^2}+3=0$ có ba nghiệm thực x_1,x_2,x_3 thoả mãn $x_1<x_2<x_3$. Tổng $S=x_1+2x_2+3x_3$ có giá trị là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 33: Tính tổng T tất cả các nghiệm của phương trình $4.9^x-13.6^x+9.4^x=0$.

A. $T=2$. **B.** $T=3$. **C.** $T=\frac{13}{4}$. **D.** $T=\frac{1}{4}$.

Câu 34: Tổng tất cả các nghiệm thực của phương trình $2^{2x^2+1}-5.2^{x^2+3x}+2^{6x+1}=0$ bằng

A. 4. **B.** 10. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 35: Gọi S là tập nghiệm của phương trình $2^{x^2-x}+2^{x^2-x-2}=4^{x^2-x-1}+1$. Số phần tử của tập S là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4

Câu 36: Cho phương trình $3^x-3^{1-x}=2$. Nếu đặt $t=3^x>0$ thì phương trình đã cho trở thành phương trình nào sau đây?

A. $t^2-3t-2=0$. **B.** $t^2-2t-3=0$. **C.** $t^2-3t+2=0$. **D.** $t^2-t-2=0$.

Câu 37: Gọi a là một nghiệm của phương trình $4.2^{2\log x}-6^{\log x}-18.3^{2\log x}=0$. Khẳng định nào sau đây là đúng khi đánh giá về a.

A. $(a-10)^2=1$.

B. $a^2+a+1=2$.

C. a cũng là nghiệm của phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log x}=\frac{9}{4}$.

D. $a=10^2$.

Câu 38: Gọi a là một nghiệm của phương trình $\left(26+15\sqrt{3}\right)^x+2\left(7+4\sqrt{3}\right)^x-2\left(2-\sqrt{3}\right)^x=1$. Khi đó giá trị của biểu thức nào sau đây là đúng?

A. $a^2+a=2$. **B.** $\sin^2 a+\cos a=1$. **C.** $2+\cos a=2$. **D.** $3^a+2a=5$.

Câu 39: Cho phương trình $\frac{1}{5}.5^{\sin 2x+2\cos^2 x}+25.5^{2\sin^2 x-\sin 2x}=126$. Số các nghiệm thực thuộc khoảng $(\pi;2020\pi)$ của phương trình đã cho bằng

A. 4037. **B.** 4038. **C.** 4040. **D.** 2020.

Câu 40: Gọi tập nghiệm của phương trình $\sqrt{3^x-5}+\sqrt{10-3^x}-\sqrt{15.3^x-50-9^x}=1$ là S. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. $\log_7\frac{1}{3}-3$. **B.** $4+\log_2 6$. **C.** $2+\log_3 6$. **D.** $1+\frac{1}{2}\log_7 5$.

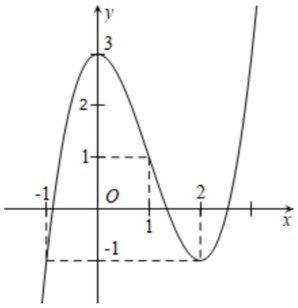
Câu 41: Phương trình $9^{\sin^2 x}+9^{\cos^2 x}=10$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[-2019;2019]$?

A. 1929. **B.** 1927. **C.** 2570. **D.** 2571.

Câu 42: Tính tổng các nghiệm của phương trình $2019^{x^3-3x^2+x}-2019^{x-2}+x^3-3x^2+2=0$.

A. 3. **B.** -2. **C.** 2. **D.** -3.

Câu 43: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau.



Số nghiệm của phương trình $\left[f\left(e^{\sqrt{x}}\right)\right]^2-f\left(e^{\sqrt{x}}\right)-2=0$ là

A. 5. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 44: Số nghiệm của phương trình $\left(2+3^x\right)(3-2x)=5$ tương ứng là

A. 3. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 45: Phương trình $\left(4^{f(x)}-1\right)+3f(x)=0$ có tập nghiệm là

A. $x.f(x)=0$. **B.** $f(x)=0$. **C.** $f(x)=1$. **D.** $f(x)\neq 0$.

Câu 46: Hỏi phương trình: $3.2^x+4.3^x+5.4^x=6.5^x$ có tất cả bao nhiêu nghiệm thực?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 47: Số nghiệm của phương trình $2^{\log_5(x+3)}=x$ là

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 48: Tổng bình phương tất cả các nghiệm thực của phương trình $e^{x^2-2x-1}+2x-x^2=0$ bằng

A. 2. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 4.

Câu 49: Cho hai số thực $x;y$ thỏa mãn hệ thức $e^{x-2y}+e^{3x+y-2}=4x-y$. Hãy tính giá trị của biểu thức $T=2x+3y$?

A. 2. **B.** 7. **C.** 8. **D.** -4.

Câu 50: Tìm số nghiệm của phương trình $\left(|x|-1\right)^2 e^{(|x|-1)}-\log 2=0$.

A. 2 **B.** 3. **C.** 4 **D.** 0

Câu 51: Cho hàm số $f(x)=e^x-e^{-x}+2x^3+x$. Phương trình $f\left(4^x+x\right)+f\left(2^{x+1}-x-3\right)=0$ có tập nghiệm là

A. $\{0\}$. **B.** $\{1\}$. **C.** $\{0;1\}$. **D.** $\{-1;3\}$.

Câu 52: Phương trình $2019^{\sin x}=\sin x+\sqrt{2-\cos^2 x}$ có bao nhiêu nghiệm thực trên đoạn $[-5\pi;2019\pi]$?

A. 2025. **B.** Vô nghiệm. **C.** 2024. **D.** 2019.

Câu 53: Phương trình $\left(e^{x^2-x}-1\right)+\left(x^2-x\right)\left(x^2+1\right)=0$ có tập nghiệm là

A. $\{0\}$. **B.** $\{0;1\}$. **C.** $\{1;2\}$. **D.** $\{1\}$.

Câu 54: Số nghiệm của phương trình $e^x = 2 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^{2018}}{2018!}$ trên khoảng $(0;+\infty)$ là

A. Vô số. **B.** 2018. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 55: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm chẵn xác định trên $\mathbb{R}$ sao cho $f(0) \neq 0$ và phương trình $9^x - 9^{-x} = f(x)$ có đúng năm nghiệm phân biệt. Khi đó, số nghiệm của phương trình $9^x + 9^{-x} = f^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2$ là

A. 20. **B.** 10. **C.** 5. **D.** 15.

Câu 56: Hỏi có bao nhiêu cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn $e^{x^2-2x} + e^{y^2-4y+3} = (x-1)^2 + (y-2)^2$?

A. 5. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 57: Có bao nhiêu cặp số nguyên dương $(x;y)$ thoả mãn $0 < x \leq 2020$ và $3^x(x+1) = 27^y y$.

A. 2019. **B.** 2020. **C.** 673. **D.** 672.

Câu 58: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0 \leq x \leq 2020$ và $\log_2(2x+2) + x = 3y + 8^y$?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2021. **D.** 2020.

Câu 59: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $0 \leq x \leq 2020$ và $2.625^{x^2} - 10.125^y = 3y - 4x^2 + 1$?

A. 674. **B.** 2021. **C.** 1347. **D.** 2020.

Câu 60: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(a;b)$ thỏa $4.2^{(a+b)^2} - 8^{ab-a-b} + a^2 + b^2 + 3(a+b) - ab + 2 = 0$?

A. 14. **B.** 9. **C.** 12. **D.** 10.

Câu 61: Có bao nhiêu cặp số nguyên $(a;b)$ với $1 \leq a \leq 100$; $1 \leq b \leq 100$ sao cho tồn tại đúng 2 số thực x thỏa mãn $a^{-x} + \frac{1}{b} = b^{-x} + \frac{1}{a}$?

A. 9700. **B.** 9702. **C.** 9698. **D.** 9704.

Dạng 2 PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT KHÔNG CHỨA THAM SỐ

Câu 1: Tập nghiệm S của phương trình $\log_3(2x+3)=1$.

A. $S=\{3\}$. **B.** $S=\{-1\}$. **C.** $S=\{0\}$. **D.** $S=\{1\}$.

Câu 2: Phương trình $\log_3(2^x-1)=4$ có nghiệm là

A. $x=\log_2 82$. **B.** $x=\log_2 65$. **C.** $x=\log_2 81$. **D.** $x=\log_2 66$.

Câu 3: Tích các nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}\left(6^{x+1}-36^x\right)=-2$ bằng

A. 5. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $\log_6 5$.

Câu 4: Phương trình $\log_2(5-2^x)=2-x$ có hai ngiệm x_1, x_2. Tính $P=x_1+x_2+x_1x_2$.

A. 11. **B.** 9. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 5: Kí hiệu A và B lần lượt là tập nghiệm của các phương trình $\log_3\left[x(x+2)\right]=1$ và $\log_3(x+2)+\log_3 x=1$. Khi đó khẳng định đúng là

A. $A=B$. **B.** $A\subset B$. **C.** $B\subset A$. **D.** $A\cap B=\varnothing$.

Câu 6: Số nghiệm của phương trình $\log_3(x^2+4x)+\log_{\frac{1}{3}}(2x+3)=0$ là

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 7: Tìm số nghiệm của phương trình $\log_2 x+\log_2(x-1)=2$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 8: Tìm số nghiệm của phương trình $2\log_4 x+\log_2(x-3)=2$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 9: Số nghiệm của phương trình $\log_3(x^2-6)=\log_3(x-2)+1$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 10: Số nghiệm của phương trình $\log_2\sqrt{x-3}+\log_2\sqrt{3x-7}=2$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 11: Biết rằng phương trình $2\ln(x+2)+\ln 4=\ln x+4\ln 3$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2, $(x_1<x_2)$. Tính $P=\dfrac{x_1}{x_2}$.

A. $\dfrac{1}{4}$. **B.** 64. **C.** $\dfrac{1}{64}$. **D.** 4.

Câu 12: Phương trình $\log_4(x+1)^2+2=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{4-x}+\log_8(4+x)^3$ có bao nhiêu nghiệm?

A. Vô nghiệm. **B.** Một nghiệm. **C.** Hai nghiệm. **D.** Ba nghiệm.

Câu 13: Gọi S là tập nghiệm của phương trình $2\log_2(2x-2)+\log_2(x-3)^2=2$. Tổng các phần tử của S bằng

A. 6. **B.** $4+\sqrt{2}$. **C.** $2+\sqrt{2}$. **D.** $8+\sqrt{2}$.

Câu 14: Số nghiệm của phương trình $\log\sqrt{x-1}+\log\sqrt{4x-15}-\sqrt{3}=0$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 15: Tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2^2 x+\log_2 x=\dfrac{17}{4}$

A. $\frac{17}{4}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 16: Gọi T là tổng các nghiệm của phương trình $\log_{\frac{1}{3}}^2 x-5\log_3 x+6=0$. Tính T.

A. $T=5$. **B.** $T=-3$. **C.** $T=36$. **D.** $T=\frac{1}{243}$.

Câu 17: Cho phương trình $\log_{\sqrt{2}}^2 x+\log_2\left(x\sqrt{8}\right)-3=0$. Khi đặt $t=\log_2 x$, phương trình đã cho trở thành phương trình nào dưới đây?

A. $8t^2+2t-6=0$. **B.** $4t^2+t=0$. **C.** $4t^2+t-3=0$. **D.** $8t^2+2t-3=0$.

Câu 18: Biết phương trình $2\log_2 x+3\log_x 2=7$ có hai nghiệm thực $x_1<x_2$. Tính giá trị của biểu thức $T=\left(x_1\right)^{x_2}$

A. $T=64$. **B.** $T=32$. **C.** $T=8$. **D.** $T=16$.

Câu 19: Cho phương trình $\log_5\left(5^x-1\right).\log_{25}\left(5^{x+1}-5\right)=1$. Khi đặt $t=\log_5\left(5^x-1\right)$, ta được phương trình nào dưới đây?

A. $t^2-1=0$. **B.** $t^2+t-2=0$. **C.** $t^2-2=0$. **D.** $2t^2+2t-1=0$.

Câu 20: Tập nghiệm của phương trình $\log_4\left(9^{50}+5x^2\right)=\log_2\left(3^{50}+2x\right)$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $\left\{0;4.3^{50}\right\}$. **C.** $\left\{0\right\}$. **D.** $\left\{0;1\right\}$.

Câu 21: Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2\left(x-1\right)+\log_2 x=1+\log_2\left(3x-5\right)$ bằng

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 22: Tổng giá trị tất cả các nghiệm của phương trình $\log_3^2 x-2\log_{\sqrt{3}} x=2\log_{\frac{1}{3}} x+3$ bằng

A. 2. **B.** 27. **C.** $\frac{82}{3}$. **D.** $\frac{80}{3}$.

Câu 23: Gọi a là một nghiệm của phương trình $4.2^{2\log x}-6^{\log x}-18.3^{2\log x}=0$. Khẳng định nào sau đây là đúng khi đánh giá về a.

A. $\left(a-10\right)^2=1$.

B. $a^2+a=1$.

C. a cũng là nghiệm của phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log x}=\frac{9}{4}$.

D. $a=10^2$.

Câu 24: Tích các nghiệm của phương trình $\log_3\left(3x\right).\log_3\left(9x\right)=4$ là

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{1}{27}$. **D.** 1.

Câu 25: Số nghiệm của phương trình $\log_2 x.\log_3\left(2x-1\right)=2\log_2 x$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 26: Tính tổng T các nghiệm của phương trình $\left(\log 10x\right)^2-3\log 100x=-5$

A. $T=11$. **B.** $T=110$. **C.** $T=10$. **D.** $T=12$.

Câu 27: Số nghiệm của phương trình: $\log_4\left(\log_2 x\right)+\log_2\left(\log_4 x\right)=2$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 28: Cho a là nghiệm của phương trình $\log_2\left(\frac{5.2^x-8}{2^x+2}\right)=3-x$. Giá trị của biểu thức $P=a^{\log_2 4a}$ là

A. $P=4$. **B.** $P=8$. **C.** $P=2$. **D.** $P=1$.

Câu 29: Tổng bình phương tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2^2 x-3\log_3 x.\log_2 3+2=0$ bằng

A. 25. **B.** 20 **C.** 18. **D.** 6.

Câu 30: Gọi x,y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\log_9 x=\log_6 y=\log_4(x+y)$ và $\frac{x}{y}=\frac{-a+\sqrt{b}}{2}$, với a, b là hai số nguyên dương. Tính $a+b$.

A. $a+b=6$. **B.** $a+b=11$. **C.** $a+b=4$. **D.** $a+b=8$.

Câu 31: Cho x, y là hai số thực dương khác 1. Biết $\log_2 x=\log_y 16$ và $xy=64$. Tính $\left(\log_2\frac{x}{y}\right)^2$.

A. $\frac{25}{2}$. **B.** 20. **C.** $\frac{45}{2}$. **D.** 25.

Câu 32: Số nghiệm thực của phương trình $\log_3\left|x^2-\sqrt{2}x\right|=\log_5\left(x^2-\sqrt{2}x+2\right)$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 33: Cho hàm số $f(x)=\ln x+2x^2+1$. Hãy xác định tập nghiệm của phương trình $f\left(9^x+1\right)=f\left(3^{x+1}-1\right)$?

A. $\{0;\log_3 2\}$. **B.** $\{\log_3 2\}$. **C.** $\{1;2\}$. **D.** $\{\log_3 2\}$.

Câu 34: Tìm tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\frac{1}{2}\log_2(x+3)=\log_2(x+1)+x^2-x-4+2\sqrt{x+3}$.

A. $S=2$. **B.** $S=-1$. **C.** $S=1-\sqrt{2}$. **D.** $S=1$.

Câu 35: Phương trình $\log_2\frac{x^2+3x+2}{3x^2-5x+8}=x^2-4x+3$ có nghiệm các nghiệm $x_1;x_2$. Hãy tính giá trị của biểu thức $A=x_1^2+x_2^2-3x_1x_2$

A. 31 **B.** –31. **C.** 1 **D.** –1.

Câu 36: Biết $x_1;x_2$ $(x_1<x_2)$ là hai nghiệm của phương trình $\log_2\left(\frac{4x^2-4x+1}{x}\right)=6x-4x^2$ và $x_1+2x_2=\frac{1}{4}\left(a+\sqrt{b}\right)$ với a,b là các số nguyên dương. Giá trị $P=a+b$ là

A. $P=15$. **B.** $P=16$. **C.** $P=14$. **D.** $P=13$.

Câu 37: Phương trình $\log_2\frac{x^2+3x+2}{3x^2-5x+8}=x^2-4x+3$ có nghiệm các nghiệm $x_1;x_2$. Hãy tính giá trị của biểu thức $A=x_1^2+x_2^2-3x_1x_2$.

A. –1. **B.** 31. **C.** –31. **D.** 1.

Câu 38: Biết x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $\log_7\left(\frac{4x^2-4x+1}{2x}\right)+4x^2+1=6x$ và $x_1+2x_2=\frac{1}{4}\left(a+\sqrt{b}\right)$ với a, b là hai số nguyên dương. Tính $a+b$.

A. $a+b=11$. **B.** $a+b=14$. **C.** $a+b=13$. **D.** $a+b=16$.

Câu 39: Phương trình $3x^2-6x+\ln(x+1)^3+1=0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 40: Phương trình $\log_3 \dfrac{2x-1}{(x-1)^2} = 3x^2 - 8x + 5$ có hai nghiệm là a và $\dfrac{a}{b}$ (với a, $b \in \mathbb{N}^*$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị của b là

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 41: Tính tích tất cả các nghiệm thực của phương trình $\log_2\left(\dfrac{2x^2+1}{2x}\right) + 2^{\left(x+\frac{1}{2x}\right)} = 5$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 42: Biết phương trình $\log_5 \dfrac{2\sqrt{x}+1}{x} = 2\log_3\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ có một nghiệm dạng $x = a + b\sqrt{2}$ trong đó a, b là các số nguyên. Tính $2a+b$.

A. 5. **B.** 3. **C.** 8. **D.** 4.

Câu 43: Cho phương trình $\log(x-3) + 2x\sqrt{x-3} + 6x - 16 = 2\log(x-4) + 2(x-3)^3$ có một nghiệm có dạng $x = \dfrac{a+\sqrt{b}}{2}$, trong đó a, b là hai số nguyên dương. Giá trị của biểu thức $a+b$ bằng

A. 14. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 10.

Câu 44: Biết phương trình $\log_{2020}\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x}\right) = 2\log_{2021}\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ có nghiệm duy nhất $x = a + b\sqrt{2}$ trong đó a , b là những số nguyên. Khi đó $a+b$ bằng

A. 5 **B.** –1 **C.** 2 **D.** 1

Câu 45: Có bao nhiêu cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $\log_{\sqrt{3}} \dfrac{x+y}{x^2+y^2+xy+2} = x(x-3) + y(y-3) + xy$

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

Câu 46: Tập nghiệm của phương trình $\ln(x^2+1)(x^4 - 2x^3 + x^2 + 1) = x^4 - 2x^3 + 2x^2$ có bao nhiêu phần tử?

A. 2. **B.** 5. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 47: Tập nghiệm của phương trình $\ln(x^2 - 5x + 7)(x^2 - 4x + 5) = 2x^2 - 9x + 10$ là

A. $\{1\}$. **B.** $\{4\}$. **C.** $\{2;3\}$. **D.** $\{2\}$.

Câu 48: Cho hàm số $f(x) = \log_2\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$. Có bao nhiêu cặp số nguyên $(a;b)$ thỏa mãn $f\left(2^{a^2-ab+b} - \dfrac{1}{4}\right) + f\left((a^2 - ab + b + 2)2^{b-2-ab}\right) = 0$

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 5.

Dạng 3 PHƯƠNG TRÌNH MŨ - LOGARIT CHỨA THAM SỐ

Câu 1: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $4^x - m.2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 2: Cho phương trình $4^{x^2} - 2^{x^2+2} + 6 = m$. Biết tập tất cả giá trị m để phương trình có đúng 4 nghiệm phân biệt là khoảng $(a;b)$. Khi đó $b-a$ bằng

A. 1. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 3: Tìm các giá trị của m để phương trình $9.9^{x^2-2x} - (2m+1)15^{x^2-2x+1} + (4m-2)5^{2x^2-4x+2} = 0$ có 2 nghiệm thực phân biệt.

A. $m > 1$ hoặc $m < \frac{1}{2}$. **B.** $\frac{3-\sqrt{6}}{2} < m < \frac{3+\sqrt{6}}{2}$.

C. $\frac{1}{2} < m < 1$. **D.** $m > \frac{3+\sqrt{6}}{2}$ hoặc $m < \frac{3-\sqrt{6}}{2}$.

Câu 4: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4.4^{x^2+2x} + (2m-2)6^{x^2+2x+1} - (6m+3)3^{2x^2+4x+2} = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $-1 < m < \frac{-1}{2}$. **B.** $m > 4+3\sqrt{2}$ hoặc $m < 4-3\sqrt{2}$.

C. $4-3\sqrt{2} < m < 4+3\sqrt{2}$. **D.** $m > -1$ hoặc $m < \frac{-1}{2}$.

Câu 5: Phương trình $\left(2+\sqrt{3}\right)^x + \left(2-\sqrt{3}\right)^x = m$ có nghiệm khi:

A. $m \in (-\infty;5)$. **B.** $m \in (2;+\infty)$. **C.** $m \in (-\infty;5]$. **D.** $m \in [2;+\infty)$.

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4^x - 3.2^{x+1} + m = 0$ có hai nghiệm thực x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 < 2$.

A. $m < 9$. **B.** $0 < m < 4$. **C.** $0 < m < 2$. **D.** $m > 0$.

Câu 7: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để phương trình $9^x - 4.3^x + m - 2 = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt.

A. $m < 6$. **B.** $2 < m < 6$. **C.** $3 < m < 6$. **D.** $0 < m < 6$.

Câu 8: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $16^x - 2.12^x + (m-2)9^x = 0$ có nghiệm dương?

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 9: Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $9^{x+1} - 2m.3^{x+1} + 12 - 3m = 0$ có hai nghiệm trái dấu. Số phần tử của S là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 10: Cho phương trình $(m-5)9^x+2(m-1)3^x-m+1=0$. Biết rằng tập các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt là một khoảng $(a;b)$. Tổng $S=a+b$ bằng

A. 4. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 6.

Câu 11: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2^{2x+4}-m3^{x^2}=0$ có hai nghiệm thực phân biệt?

A. 24. **B.** 18. **C.** Vô số. **D.** 31.

Câu 12: Cho hai đường cong $(C_1):y=3^x\left(3^x-m+2\right)+m^2-3m$ và $(C_2):y=3^x+1$. Để (C_1) và (C_2) tiếp xúc nhau thì giá trị của tham số m bằng

A. $m=\dfrac{5-2\sqrt{10}}{3}$. **B.** $m=\dfrac{5+3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $m=\dfrac{5+2\sqrt{10}}{3}$. **D.** $m=\dfrac{5-3\sqrt{2}}{3}$.

Câu 13: Số giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2019;2019]$ để phương trình $4^x-(m+3)2^x+3m+1=0$ có đúng một nghiệm lớn hơn 0 là

A. 2021 **B.** 2022 **C.** 2019 **D.** 2020

Câu 14: Biết rằng tập hợp các giá trị của m để phương trình $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x^2}-(m+1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2}-2m=0$ có nghiệm là $\left[-a+2\sqrt{b};0\right]$ với a, b là các số nguyên dương. Tính $b-a$.

A. 11. **B.** 1. **C.** -11. **D.** -1.

Câu 15: Biết $m=m_0$ là giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $4^x-(4m+1).2^x+2(4m-1)=0$ có hai nghiệm thực x_1,x_2 thoả mãn $(x_1+1)(x_2+1)=6$. Khi đó m_0 thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(2\,;\,4)$. **B.** $(1\,;\,2)$. **C.** $(-2\,;\,0)$. **D.** $(0\,;\,1)$.

Câu 16: Cho phương trình $4^x-2^{x+2}+m-2=0$ với m là tham số. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $0\le x_1<x_2$?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 17: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $4^x-2^x-2^m+1=0$ có hai nghiệm âm phân biệt.

A. $\dfrac{3}{4}<m<1$. **B.** $\log_2\dfrac{3}{4}<m\le 0$. **C.** $\log_{\frac{3}{4}}2<m<0$. **D.** $\log_2\dfrac{3}{4}<m<0$.

Câu 18: Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2;7]$ để phương trình $3^{x^2}.2^{2x+m}=7$ có hai nghiệm phân biệt?

A. 5. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 6.

Câu 19: Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[0;2019]$ của tham số m để phương trình $4^x-(m+2018)2^x+(2019+3m)=0$ có hai nghiệm trái dấu?

A. 2016 **B.** 2019. **C.** 2013 **D.** 2018.

Câu 20: Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $3^{x-3+\sqrt[3]{m-3x}}+\left(x^3-9x^2+24x+m\right).3^{x-3}=3^x+1$ có ba nghiệm phân biệt bằng?

A. 45. **B.** 38. **C.** 34. **D.** 27.

Câu 21: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên thuộc đoạn $[-30;30]$ của tham số m để phương trình $2^{x^2-2mx+1}+2x^4-4mx^3+x^2-2mx-2=0$ có hai nghiệm phân biệt. Số phần tử của tập S là

A. 58. **B.** 61. **C.** 57. **D.** 60.

Câu 22: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-40;40]$ để phương trình $4^{\left|x^2-4x\right|-m+1}+(\left|x^2-4x\right|-m)2^{\left|x^2-4x\right|-m+1}-4=0$ có đúng hai nghiệm thực.

A. 37. **B.** 81. **C.** 36. **D.** 1.

Câu 23: Cho phương trình $3^{2x^2-3x+m}+9=3^{x^2-x+2}+3^{x^2-2x+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2018;2018]$ để phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt?

A. 2020. **B.** 2021. **C.** 2019. **D.** 2018.

Câu 24: Cho phương trình $m.3^{2x^2-3x-2}-3^{x^2-3x+2}=m.3^{x^2-4}-1\ (1)$,($m$ là tham số). Tính tổng tất cả các giá trị m để phương trình có đúng 3 nghiệm phân biệt.

A. 109. **B.** $\frac{85}{81}$. **C.** 81. **D.** -7.

Câu 25: Số các giá trị nguyên của m để phương trình $4^{1+x}+4^{1-x}=(m+1)\left(2^{2+x}-2^{2-x}\right)+16-8m$ có nghiệm trên đoạn $[0;1]$ là

A. 2. **B.** Vô số. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 26: Cho phương trình $4^x-2^{x+m+1}+3m+1=0\quad(1)$. Biết rằng m là tham số thực sao cho $9m$ là số nguyên thỏa mãn điều kiện $|9m|<10$. Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của m để phương trình (1) có nghiệm duy nhất?

A. 9. **B.** 10. **C.** 19. **D.** 20.

Câu 27: Số giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019;2019)$ để phương trình $4^{x^2-2x+1}-m.2^{x^2-2x+2}+3m-2=0$ có bốn nghiệm phân biệt là

A. 4037. **B.** 2017. **C.** 2016. **D.** 4035.

Câu 28: Với tham số thực k thuộc tập S nào dưới đây để phương trình $\log_2(x+3)+\log_2 x^2=k$ có một nghiệm duy nhất?

A. $S=(-\infty;0)$. **B.** $S=(2;+\infty)$. **C.** $S=(4;+\infty)$. **D.** $S=(0;+\infty)$

Câu 29: Tìm các giá trị thực của tham số m để phương trình $\log_3^2 x-3\log_3 x+2m-7=0$ có hai nghiệm thực $x_1;x_2$ thỏa mãn $(x_1+3)(x_2+3)=72$.

A. $m=\frac{61}{2}$. **B.** $m=3$. **C.** không tồn tại. **D.** $m=\frac{9}{2}$.

Câu 30: Tìm giá trị của tham số m để phương trình $\log_2^2 x - m\log_2 x + 2m - 6 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 = 16$.

A. $m = -4$. **B.** $m = 11$. **C.** $m = 4$. **D.** $m = 5$.

Câu 31: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $\left(\log_2 x\right)^2 - \log_2\left(x^2\right) + 3 - m = 0$ có nghiệm $x \in [1;8]$.

A. $6 \le m \le 9$. **B.** $3 \le m \le 6$. **C.** $2 \le m \le 3$. **D.** $2 \le m \le 6$.

Câu 32: Số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-1) = \log_2(mx-8)$ có hai nghiệm phân biệt là

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** Vô số.

Câu 33: Tìm tham số m để phương trình $\log_{\sqrt{2018}}(x-2) = \log_{2018}(mx)$ có nghiệm thực duy nhất.

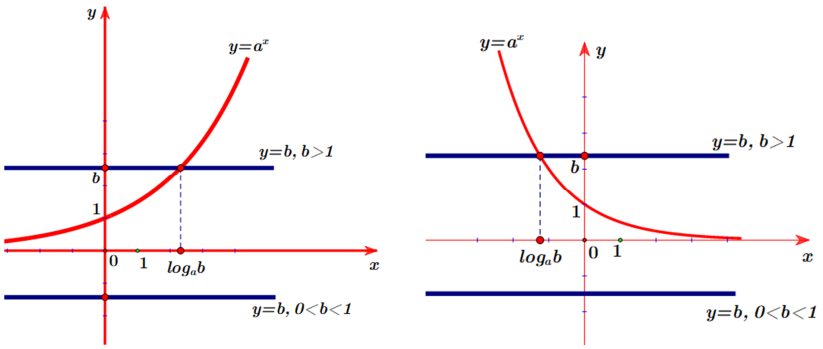
A. $1 < m < 2$. **B.** $m > 1$. **C.** $m > 0$. **D.** $m < 2$.

CHỦ ĐỀ 5. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ - LOGARIT

◈ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ CƠ BẢN

Dạng $a^x > b$ (1), $(0 < a \neq 1)$

Minh hoạ bằng đồ thị



Phương pháp giải

Vì $y = a^x$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có tập giá trị là $(0;+\infty)$ nên

◆ Khi $b \le 0$: Bất phương trình (1) luôn đúng. Hay tập nghiệm là $S = \mathbb{R}$.

◆ Khi $b \le 0$:

• $a > 1$ thì $(1) \Leftrightarrow x > \log_a b$.

$\Rightarrow$ Tập nghiệm $S = (\log_a b; +\infty)$.

• $0 < a < 1$ thì $(1) \Leftrightarrow x < \log_a b$.

$\Rightarrow$ Tập nghiệm $S = (-\infty; \log_a b)$.

Ngoài dạng bất phương trình (1) thì bất phương trình mũ cơ bản còn có các dạng $a^x \ge b$, $a^x < b$, $a^x \le b$.

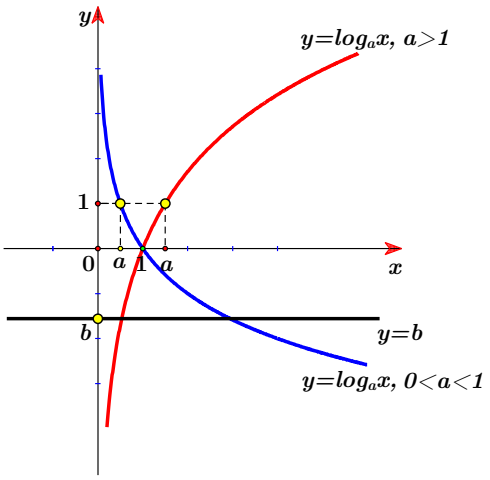
Tóm lại

$a^x > b$	Tập nghiệm	
	$a > 1$	$0 < a < 1$
$b \le 0$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$b > 0$	$(\log_a b; +\infty)$	$(-\infty; \log_a b)$

◈ BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT CƠ BẢN

Dạng $\log_a x > b$ (1), $(0 < a \neq 1)$

Minh hoạ bằng đồ thị



Phương pháp giải

Vì hàm số $y = \log_a x$ xác định trên $(0;+\infty)$ và có tập giá trị của là $\mathbb{R}$ nên bất phương trình (1) luôn có nghiệm

• $a > 1$ thì $(1) \Leftrightarrow x > a^b$.

$\Rightarrow$ Tập nghiệm $S = (a^b; +\infty)$.

• $0 < a < 1$ thì $(1) \Leftrightarrow x < a^b$.

$\Rightarrow$ Tập nghiệm $S = (0; a^b)$.

Ngoài dạng bất phương trình (1) thì bất phương trình mũ cơ bản còn có các dạng $\log_a x \ge b, \log_a x < b, \log_a x \le b$.

Tóm lại

$\log_a x > b$	$a > 1$	$0 < a < 1$
Nghiệm	$x > a^b$	$x < a^b$
Tập nghiệm	$S = (a^b; +\infty)$	$S = (0; a^b)$

◈ MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT

Đối với việc giải bất phương trình mũ và bất phương trình logarit ta có thể vận dụng các phương pháp đã được học ở chủ đề 4. Phương trình mũ và phương trình logarit

Bất phương trình mũ	Bất phương trình logarit
$a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>g(x), \text{ khi } a>1\\ f(x)<g(x), \text{ khi } 0<a<1\end{cases}$	$\log_a f(x)<b\Leftrightarrow\left[\begin{cases}a>1\\ 0<f(x)<a^b\end{cases}\right.\left.\begin{cases}0<a<1\\ f(x)>a^b\end{cases}\right.$
	$\log_a f(x)>b\Leftrightarrow\left[\begin{cases}a>1\\ f(x)>a^b\end{cases}\right.\left.\begin{cases}0<a<1\\ 0<f(x)<a^b\end{cases}\right.$
	$\log_a f(x)>\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>g(x)>0, \text{ khi } a>1\\ 0<f(x)<g(x), \text{ khi } 0<a<1\end{cases}$

◈ GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT BẰNG PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ

Bài toán giải BPT mũ và logarit bằng PP hàm số ta vẫn thực hiện như bài toán giải PT bằng PP hàm số và lưu ý thêm.

Hàm số $y=f(x)$ đơn điệu trên K. Khi đó, ta có các kết quả sau:

◈ Nếu hàm số f liên tục, đồng biến trên K thì với mọi $u, v\in K$ ta có: $f(u)<f(v)\Leftrightarrow u<v$.

◈ Nếu hàm số f liên tục, nghịch biến trên K thì với mọi $u, v\in K$ ta có: $f(u)<f(v)\Leftrightarrow u>v$.

VÍ DỤ MINH HOẠ

Dạng 1 BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ KHÔNG CHỨA THAM SỐ

Ví dụ 1: Tập nghiệm của bất phương trình $3^x>5$ là

A. $(3^5;+\infty)$. **B.** $(-\infty;3^5)$. **C.** $(-\infty;\log_3 5)$. **D.** $(\log_3 5;+\infty)$.

Lời giải

Vì cơ số $3>1$ nên $3^x>5\Leftrightarrow x>\log_3 5$. Vậy tập nghiệm là $S=(\log_3 5;+\infty)$.

Ví dụ 2: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{-x^2+3x}<4$ là

A. $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Lời giải

Vì cơ số $2>1$ nên $2^{-x^2+3x}<4\Leftrightarrow 2^{-x^2+3x}<2^2\Leftrightarrow -x^2+3x<2\Leftrightarrow x^2-3x+2>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>2\\ x<1\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm là $S=(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$

Ví dụ 3: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{7}{9}\right)^{2x^2-3x}\le\frac{9}{7}$ là

A. $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]$. **B.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup[1;+\infty)$. **C.** $[1;+\infty)$. **D.** $\left[\frac{1}{2};1\right]$.

Lời giải

Vì cơ số $\frac{7}{9}<1$ nên ta đưa về cơ số $\frac{9}{7}>1$

$$\left(\frac{7}{9}\right)^{2x^2-3x}\le\frac{9}{7}\Leftrightarrow\left(\frac{9}{7}\right)^{-2x^2+3x}\le\frac{9}{7}\Leftrightarrow-2x^2+3x\le1\Leftrightarrow2x^2-3x+1\ge0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge1\\x\le\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm là $S=\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup[1;+\infty)$

Ví dụ 4: Tập nghiệm của bất phương trình $8.4^{\frac{x-4}{x^2+1}}<1$ có dạng $\left(-\frac{a}{b};c\right)$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Tính $P=abc$.

A. $P=15$. **B.** $P=5$. **C.** $P=9$. **D.** $P=12$.

Lời giải

$$8.4^{\frac{x-4}{x^2+1}}<1\Leftrightarrow2^{3+\frac{2x-8}{x^2+1}}<2^0\Leftrightarrow3+\frac{2x-8}{x^2+1}<0\Leftrightarrow\frac{3x^2+2x-5}{x^2+1}<0$$

$$\Leftrightarrow3x^2+2x-5<0\,(\text{Vì }x^2+1>0,\forall x\in\mathbb{R})\Leftrightarrow-\frac{5}{3}<x<1.$$

Suy ra tập nghiệm là $S=\left(-\frac{5}{3};1\right)$. Vậy $P=15$.

Ví dụ 5: Tập nghiệm của bất phương trình $8.4^{\frac{x-4}{x^2+1}}<1$ có dạng $\left(-\frac{a}{b};c\right)$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Tính $P=abc$.

A. $P=15$. **B.** $P=5$. **C.** $P=9$. **D.** $P=12$.

Lời giải

$$8.4^{\frac{x-4}{x^2+1}}<1\Leftrightarrow2^{3+\frac{2x-8}{x^2+1}}<2^0\Leftrightarrow3+\frac{2x-8}{x^2+1}<0\Leftrightarrow\frac{3x^2+2x-5}{x^2+1}<0$$

$$\Leftrightarrow3x^2+2x-5<0\,(\text{Vì }x^2+1>0,\forall x\in\mathbb{R})\Leftrightarrow-\frac{5}{3}<x<1.$$

Suy ra tập nghiệm là $S=\left(-\frac{5}{3};1\right)$. Vậy $P=15$.

Ví dụ 6: Bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}>\frac{1}{8}$ có tập nghiệm là $(a;b)$. Khi đó giá trị của $b-a$ là

A. -2. **B.** 4. **C.** -4. **D.** 2.

Lời giải

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-2x}>\frac{1}{8}\Leftrightarrow x^2-2x<\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{8}\right)\Leftrightarrow x^2-2x-3<0\Leftrightarrow-1<x<3.$$

Tập nghiệm của bất phương trình là $(-1;3)$.

Khi đó $a=-1$ và $b=3$. Vậy: $b-a=4$.

Ví dụ 7: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(2-\sqrt{3}\right)^{x}>\left(7-4\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)^{x+1}$ là

A. $\left(\frac{1}{2};2\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **C.** $\left(-2;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

$\left(2-\sqrt{3}\right)^{x}>\left(7-4\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)^{x+1}\Leftrightarrow\left(2+\sqrt{3}\right)^{2-x}>\left(2+\sqrt{3}\right)^{x+1}\Leftrightarrow 2-x>x+1\Leftrightarrow x<\frac{1}{2}$.

Ví dụ 8: Tìm tập nghiệm của bất phương trình $2^{x+1}>3^{x+2}$.

A. $\left(\log_{\frac{2}{3}}\frac{9}{2};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;\log_{\frac{3}{2}}\frac{9}{2}\right)$. **C.** $\left(-\infty;\log_{\frac{2}{3}}\frac{9}{2}\right)$. **D.** $\left(-\infty;\log_{\frac{2}{3}}\frac{9}{2}\right]$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $2^{x+1}>3^{x+2}\Leftrightarrow x+1>(x+2)\log_2 3\Leftrightarrow(\log_2 3-1)x<1-2\log_2 3\Leftrightarrow x<\frac{1-2\log_2 3}{\log_2 3-1}$

$\Leftrightarrow x<\log_{\frac{3}{2}}\frac{2}{9}\Leftrightarrow x<\log_{\frac{2}{3}}\frac{9}{2}$.

Ví dụ 9: Bất phương trình $(0,2)^{x^2}.2^{x}\geq\frac{2}{5}$ tương đương với bất phương trình nào sau đây?

A. $x\geq 1$. **B.** $-x^2+x-\log_2\left(\frac{2}{5}\right)\geq 0$.

C. $x^2-x\log_5 2+\log_5 2-1\leq 0$. **D.** $x^2-x\log_5 2+\log_5 2-1\geq 0$.

Lời giải

$(0,2)^{x^2}.2^{x}\geq\frac{2}{5}\Leftrightarrow\log_5\left[(0,2)^{x^2}.2^{x}\right]\geq\log_5\left(\frac{2}{5}\right)\Leftrightarrow\log_5\left(0,2^{x^2}\right)+\log_5 2^{x}\geq\log_5 2-\log_5 5$

$\Leftrightarrow x^2\log_5 0,2+x\log_5 2\geq\log_5 2-1\Leftrightarrow -x^2+x\log_5 2-\log_5 2+1\geq 0$

$\Leftrightarrow x^2-x\log_5 2+\log_5 2-1\leq 0$

Ví dụ 10: Tập nghiệm của bất phương trình $e^{2x}+e^{x}-6<0$ là

A. $(-3;2)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(-\infty;\ln 2)$. **D.** $(\ln 2;+\infty)$.

Lời giải

Đặt $t=e^{x},(t>0)$. Bất phương trình đã cho trở thành:

$t^2+t-6<0\Leftrightarrow(t-2)(t+3)<0\Leftrightarrow t<2\Leftrightarrow e^{x}<2\Leftrightarrow x<\ln 2.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(-\infty;\ln 2)$.

Ví dụ 11: Tập nghiệm của bất phương trình $3^{1-x}+2.\left(\sqrt{3}\right)^{2x}\leq 7$ có dạng $[a;b]$ với $a<b$. Giá trị của biểu thức $P=b+a.\log_2 3$ bằng

A. $2\log_2 3$. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Bất phương trình tương đương $\frac{3}{3^{x}}+2.3^{x}\leq 7\Leftrightarrow 2.3^{2x}-7.3^{x}+3\leq 0$

Đặt $t=3^{x}\ (t>0)$. Bất phương trình trở thành $2t^2-7t+3\leq 0\Leftrightarrow\frac{1}{2}\leq t\leq 3$

$\longrightarrow\frac{1}{2}\leq 3^{x}\leq 3\Leftrightarrow-\log_3 2\leq x\leq 1\longrightarrow\begin{cases}a=-\log_3 2\\ b=1\end{cases}\longrightarrow P=b+a.\log_2 3=0.$

Ví dụ 12: Tập nghiệm của bất phương trình $6.\left(\frac{4}{9}\right)^x-13.\left(\frac{2}{3}\right)^x+6\le 0$ là

A. $(-1;1)$. **B.** $(1;+\infty)\cup(-\infty;-1)$.

C. $[-1;1]$. **D.** $(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$.

Lời giải

$6.\left(\frac{4}{9}\right)^x-13.\left(\frac{2}{3}\right)^x+6\le 0\Leftrightarrow\frac{2}{3}\le\left(\frac{2}{3}\right)^x\le\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{2}{3}\le\left(\frac{2}{3}\right)^x\le\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\Leftrightarrow -1\le x\le 1$.

Ví dụ 13: Biết rằng tập nghiệm của bất phương trình $4^x-8.6^x+12.9^x<0$ là khoảng $(a;b)$. Giá trị của $b-a$ bằng

A. $\log_{\frac{2}{3}}4$. **B.** $-\log_{\frac{2}{3}}3$. **C.** $\log_{\frac{2}{3}}3$. **D.** $-\log_{\frac{2}{3}}4$.

Lời giải

$4^x-8.6^x+12.9^x<0\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}-8.\left(\frac{2}{3}\right)^x+12<0\Leftrightarrow 2<\left(\frac{2}{3}\right)^x<6\Leftrightarrow\log_{\frac{2}{3}}6<x<\log_{\frac{2}{3}}2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(\log_{\frac{2}{3}}6;\log_{\frac{2}{3}}2\right)$.

Suy ra $\begin{cases}a=\log_{\frac{2}{3}}6\\ b=\log_{\frac{2}{3}}2\end{cases}\Rightarrow b-a=\log_{\frac{2}{3}}2-\log_{\frac{2}{3}}6=\log_{\frac{2}{3}}\frac{1}{3}=-\log_{\frac{2}{3}}3$.

Ví dụ 14: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(5+\sqrt{21}\right)^x+\left(5-\sqrt{21}\right)^x\le 2^{x+\log_2 5}$ là

A. $S=(-2;1)$. **B.** $S=[-1;1]$. **C.** $S=(1;5]$. **D.** $S=(1;+\infty)$.

Lời giải

Ta có: $\left(5+\sqrt{21}\right)^x+\left(5-\sqrt{21}\right)^x\le 2^{x+\log_2 5}\Leftrightarrow\left(5+\sqrt{21}\right)^x+\left(5-\sqrt{21}\right)^x\le 2^x.5$

$\Leftrightarrow\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^x+\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^x\le 5$

Đặt $\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^x=t\Rightarrow\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^x=\frac{1}{t},(t>0)$, bất phương trình trở thành:

$t+\frac{1}{t}\le 5\Leftrightarrow t^2-5t+1\le 0\Leftrightarrow\frac{5-\sqrt{21}}{2}\le t\le\frac{5+\sqrt{21}}{2}$.

Do đó ta có: $\frac{5-\sqrt{21}}{2}\le\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^x\le\frac{5+\sqrt{21}}{2}\Leftrightarrow -1\le x\le 1$.

Vậy bất phương trình có tập nghiệm là: $S=[-1;1]$.

Ví dụ 15: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\sqrt{3^x+1}\le 3^{\frac{x}{2}}+\frac{2}{\sqrt{3^x+1}}$.

A. $(0;+\infty)$. **B.** $[0;\log_3 2)$.

C. $\left(0;\frac{1}{2}\right]\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải

Ta có bất phương trình:

$\sqrt{3^x+1}\le 3^{\frac{x}{2}}+\dfrac{2}{\sqrt{3^x+1}}\Leftrightarrow\sqrt{3^x+1}\le\sqrt{3^x}+\dfrac{2}{\sqrt{3^x+1}}\Leftrightarrow\sqrt{3^x+1}\le\dfrac{\sqrt{3^x(3^x+1)}+2}{\sqrt{3^x+1}}$

$\Leftrightarrow 3^x+1\le\sqrt{3^x(3^x+1)}+2\ (*)$

Đặt $t=3^x+1>1\Rightarrow 3^x=t-1$

Từ đó bất phương trình $(*)\Leftrightarrow t\le\sqrt{(t-1)t}+2\Leftrightarrow t-2\le\sqrt{(t-1)t}$

Trường hợp 1:

$\begin{cases}1<t<2\\(t-1)t\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1<t<2\\\left[\begin{array}{l}t\ge 1\\t\le 0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow 1<t<2\Leftrightarrow 1<3^x+1<2\Leftrightarrow 3^x<1\Leftrightarrow x<0.$

Trường hợp 2:

$\begin{cases}t\ge 2\\(t-1)t\ge(t-2)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge 2\\t^2-t\ge t^2-4t+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge 2\\t\ge\dfrac{4}{3}\end{cases}\Leftrightarrow t\ge 2\Leftrightarrow 3^x+1\ge 2\Leftrightarrow 3^x\ge 1\Leftrightarrow x\ge 0.$

Kết luận nghiệm của bất phương trình là: $S=\mathbb{R}$.

Ví dụ 16: Bất phương trình $2^{x^2+\sqrt{x-1}-1}+2\le 2^{x^2}+2^{\sqrt{x-1}}$ có tập nghiệm $S=[a;b]$. Khi đó $a+b$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 10.

Lời giải

ĐK: $x\ge 1$.

Bất phương trình đã cho tương đương với $\dfrac{1}{2}.2^{x^2}.2^{\sqrt{x-1}}+2\le 2^{x^2}+2^{\sqrt{x-1}}$

$\Leftrightarrow 2^{x^2}.2^{\sqrt{x-1}}+4\le 2.2^{x^2}+2.2^{\sqrt{x-1}}$

Đặt $\begin{cases}u=2^{x^2}\\v=2^{\sqrt{x-1}}\end{cases}$, điều kiện $\begin{cases}u>0\\v>0\end{cases}$.

Bất phương trình trở thành

$uv+4\le 2u+2v\Leftrightarrow(uv-2u)+(4-2v)\le 0\Leftrightarrow u(v-2)-2(v-2)\le 0\Leftrightarrow(u-2)(v-2)\le 0.$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}u-2\ge 0\\v-2\le 0\end{cases}\\\begin{cases}u-2\le 0\\v-2\ge 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}u\ge 2\\v\le 2\end{cases}\\\begin{cases}u\le 2\\v\ge 2\end{cases}\end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện $\begin{cases}u>0\\v>0\end{cases}$ ta được

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}u\ge 2\\0<v\le 2\end{cases}\\\begin{cases}0<u\le 2\\v\ge 2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2^{x^2}\ge 2\\0<2^{\sqrt{x-1}}\le 2\end{cases}\\\begin{cases}0<2^{x^2}\le 2\\2^{\sqrt{x-1}}\ge 2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2\ge 1\\\sqrt{x-1}\le 1\end{cases}\\\begin{cases}x^2\le 1\\\sqrt{x-1}\ge 1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le -1\vee x\ge 1\\x-1\le 1\end{cases}\\\begin{cases}-1\le x\le 1\\x-1\ge 1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le -1\vee x\ge 1\\x\le 2\end{cases}\\\begin{cases}-1\le x\le 1\\x\ge 2\end{cases}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x\in(-\infty;-1]\cup[1;2]$

Kết hợp điều kiện $x\ge 1$, ta suy ra tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=[1;2]$.

Ví dụ 17: Cho hàm số $y=f(x)=x^3+3x+1$. Hãy xác định tập nghiệm của bất phương trình $f(4^x+4)\ge f(2^{x+2}+1)$?

A. $[1;2\log_3 2]$. **B.** $(-\infty;0]\cup[\log_2 3;+\infty)$.

C. $[0;\log_2 3]$. **D.** $[0;\log_3 4]$.

Lời giải

Ta có $f'(x)=3x^2+3>0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $f(4^x+4)\ge f(2^{x+2}+1)\Leftrightarrow 4^x+4\ge 2^{x+2}+1\Leftrightarrow 4^x-4.2^x+3\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x\ge 3\\2^x\le 1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge\log_2 3\\x\le 0\end{array}\right.$.

Ví dụ 18: Cho đồ thị hàm $f(x)=x^3-15x^2-1$. Hãy xác định tập nghiệm của bất phương trình $f\left(\sqrt{81-9^x}\right)\le f(3^x+1)$?

A. $1\le x\le 2$. **B.** $x>\log_3\dfrac{-1+\sqrt{161}}{2}$.

C. $x\le 1$. **D.** $x\le\log_3\dfrac{-1+\sqrt{161}}{2}$.

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=x^3-15x^2-1$ có tập xác định là $D=R$

Đạo hàm: $f'(x)=3x^2-30x=3x(x-10)\le 0$, $\forall x\in[0;10]$

Suy ra, hàm số đơn điệu giảm trên đoạn $[0;10]$.

Xét bất phương trình $f\left(\sqrt{81-9^x}\right)\le f(3^x+1)$ có điều kiện: $81-9^x\ge 0\Leftrightarrow x\le 2$

Suy ra: $\begin{cases}0\le\sqrt{81-9^x}<9\\1<3^x+1\le 10\end{cases}$

Áp dụng tính chất hàm đơn điệu giảm, ta có:

$f\left(\sqrt{81-9^x}\right)\le f(3^x+1)\Leftrightarrow\sqrt{81-9^x}\ge 3^x+1\Leftrightarrow 81-9^x\ge 9^x+2.3^x+1=0\Leftrightarrow 2.9^x+2.3^x-80\le 0$

$\Leftrightarrow\dfrac{-1-\sqrt{161}}{2}\le 3^x\le\dfrac{-1+\sqrt{161}}{2}\to 0<3^x\le\dfrac{-1+\sqrt{161}}{2}\Leftrightarrow x\le\log_3\dfrac{-1+\sqrt{161}}{2}$.

Ví dụ 19: Bất phương trình $\left(e^{f(x)}-1\right)+\left[f(x)\right]^3<0$ có tập nghiệm tương ứng với bất phương trình nào sau đây?

A. $f(x)=0$. **B.** $f(x)\ne 0$. **C.** $f(x)<0$. **D.** $f(x)\ge 0$.

Lời giải

Với $f(x)=0\Rightarrow$ không thỏa mãn bất phương trình.

Với $f(x)>0\Rightarrow\begin{cases}e^{f(x)}>1\\\left(f(x)\right)^3>0\end{cases}\Rightarrow\left(e^{f(x)}-1\right)+\left[f(x)\right]^3>0\Rightarrow$ không thỏa mãn bất phương trình.

Với $f(x)<0\Rightarrow\begin{cases}e^{f(x)}<1\\\left(f(x)\right)^3<0\end{cases}\Rightarrow\left(e^{f(x)}-1\right)+\left[f(x)\right]^3<0\Rightarrow$ thỏa mãn bất phương trình.

Vậy bất phương trình $\left(e^{f(x)}-1\right)+\left[f(x)\right]^3<0\Leftrightarrow f(x)<0$.

Ví dụ 20: Bất phương trình $e^{x^2-1}+x^4-2\le 0$ có tập nghiệm là

A. $(1;+\infty)$. **B.** $[-1;1]$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Lời giải

$e^{x^2-1}+x^4-2\le 0\Leftrightarrow \left(e^{x^2-1}-1\right)+\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)\le 0$

Với $x^2-1=0\Leftrightarrow x=\pm 1\Rightarrow$ thỏa mãn bất phương trình

Với $x^2-1>0\Rightarrow \begin{cases} e^{x^2-1}>1 \\ \left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)>0 \end{cases}\Rightarrow \left(e^{x^2-1}-1\right)+\left(x^2-x\right)\left(x^2+1\right)>0\Rightarrow$ không thỏa mãn bất phương trình.

Với $x^2-1<0\Rightarrow \begin{cases} e^{x^2-1}<1 \\ \left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)<0 \end{cases}\Rightarrow \left(e^{x^2-1}-1\right)+\left(x^2-x\right)\left(x^2+1\right)<0\Rightarrow$ thỏa mãn bất phương trình.

Vậy $e^{x^2-1}+x^4-2\le 0\Leftrightarrow x^2-1\le 0\Leftrightarrow -1\le x\le 1$.

Ví dụ 21: Gọi S là tập hợp chứa tất cả các giá trị nguyên $x\in[-2019;2019]$ thỏa mãn bất phương trình $e^x\le 1+x+\dfrac{x^2}{2}$. Số phần tử của tập S bằng

A. 2021. **B.** 1. **C.** 2019. **D.** 2020.

Lời giải

Bất phương trình $\Leftrightarrow f(x)=e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}\le 0$.

Có $f'(x)=e^x-1-x; f''(x)=e^x-1\xrightarrow{f''(x)=0}x=0$.

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$+\infty$	$+$	0	$+$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$		0		$+\infty$

Suy ra bất phương trình có nghiệm là: $x\le 0\Rightarrow -2019\le x\le 0\Rightarrow$ số phần tử của tập S là 2020.

Ví dụ 22: Gọi S là tập hợp các nghiệm nguyên của bpt $2^{x^2-x}+9^{3-2x}+x^2+6\le 4^{2x-3}+3^{x-x^2}+5x$. Tính tổng bình phương các phần tử của S.

A. 5. **B.** 25. **C.** 14. **D.** 13.

Lời giải

Bất phương trình $\Leftrightarrow 2^{x^2-x}+3^{6-4x}+x^2+6\le 2^{4x-6}+3^{x-x^2}+5x$

$\Leftrightarrow 2^{x^2-x}-3^{x-x^2}+\left(x^2-x\right)\le 2^{4x-6}-3^{6-4x}+(4x-6);\ (1)$.

Xét hàm số $f(t)=2^t-3^{-t}+t$ trên tập $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=2^t.\ln 2+3^{-t}.\ln 3+1>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$ suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó:

Bất phương trình $(1)\Leftrightarrow f\left(x^2-x\right)\le f(4x-6)\ \Leftrightarrow x^2-x\le 4x-6\Leftrightarrow 2\le x\le 3$.

Mặt khác $x\in\mathbb{Z}$ nên $S=\{2;3\}$. Vậy tổng cần tìm là $2^2+3^2=13$.

Ví dụ 23: Bất phương trình $9^x-2(x+5)3^x+9(2x+1)\ge 0$ có tập nghiệm là $S=[a;b]\cup[c;+\infty)$. Tính tổng $a+b+c$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Đặt $t=3^x$, $t>0$.

Bất phương trình đã cho trở thành: $t^2-2(x+5)t+9(2x+1)\ge 0\Leftrightarrow (t-9)(t-2x-1)\ge 0$

TH1: $\begin{cases} t-9\ge 0\\ t-2x-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} t\ge 9\\ t-2x-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 3^x\ge 9 & (1)\\ 3^x-2x-1\ge 0 & (2)\end{cases}$

Xét bất phương trình (2):

Đặt $g(x)=3^x-2x-1$ trên $\mathbb{R}$. Ta có: $g'(x)=3^x\ln 3-2$.

Gọi x_0 là nghiệm duy nhất của phương trình $g'(x)=0$, $x_0>0$

Khi đó, $g(x)=0$ có nhiều nhất hai nghiệm.

Xét thấy, $g(x)=0$ có hai nghiệm là $x=0$ và $x=1$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		x_0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$g(x_0)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có, $(2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x\le 0\\ x\ge 1\end{array}\right.$

Ta lại có, $(1)\Leftrightarrow x\ge 2$.

Kết hợp (1) và (2) suy ra, $x\ge 2$. $(*)$

TH2: $\begin{cases} t-9\le 0\\ t-2x-1\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} t\le 9\\ t-2x-1\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 3^x\le 9 & (3)\\ 3^x-2x-1\le 0 & (4)\end{cases}$

Xét bất phương trình (4):

Đặt $g(x)=3^x-2x-1$ trên $\mathbb{R}$. Ta có: $g'(x)=3^x\ln 3-2$.

Gọi x_0 là nghiệm duy nhất của phương trình $g'(x)=0$, $x_0>0$

Khi đó, $g(x)=0$ có nhiều nhất hai nghiệm.

Xét thấy, $g(x)=0$ có hai nghiệm là $x=0$ và $x=1$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		x_0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$g(x_0)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có, $(4)\Leftrightarrow 0\le x\le 1$

Ta lại có, $(3)\Leftrightarrow x\le 2$.

Kết hợp (3) và (4) suy ra, $0\le x\le 1$. $(**)$

Kết hợp $(*)$ và $(**)$ ta được tập nghiệm của BPT đã cho là $S=[0;1]\cup[2;+\infty)$

Dạng 2 BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT KHÔNG CHỨA THAM SỐ

Ví dụ 1: Bất phương trình $\log_3(x-1)\le 2$ có nghiệm lớn nhất bằng

A. 7. **B.** 10. **C.** 6. **D.** 9.

Lời giải

Ta có $\log_3(x-1)\le 2 \Leftrightarrow 0<x-1\le 3^2 \Leftrightarrow 1<x\le 10$, từ đó suy ra bất phương trình đã cho có nghiệm lớn nhất bằng 10.

Ví dụ 2: Tập nghiệm của bất phương trình $\ln x<1$ là

A. $S=(-\infty;10)$. **B.** $S=(-\infty;e)$. **C.** $S=(0;10)$. **D.** $S=(0;e)$.

Lời giải

Ta có: $\ln x<1 \Leftrightarrow 0<x<e^1 \Leftrightarrow 0<x<e$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $S=(0;e)$.

Ví dụ 3: Tập nghiệm của bất phương trình $\log x\ge 1$ là

A. $(0;+\infty)$. **B.** $[10;+\infty)$. **C.** $(-\infty;10)$. **D.** $(10;+\infty)$.

Lời giải

Ta có: $\log x\ge 1 \Leftrightarrow \log x\ge \log 10 \Leftrightarrow x\ge 10$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $\log x\ge 1$ là $[10;+\infty)$.

Ví dụ 4: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{0,5}(2x-1)>-2$.

A. $S=\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$. **B.** $S=\left[\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$. **C.** $S=\left(-\infty;\frac{5}{2}\right)$. **D.** $S=\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$.

Lời giải

$$\text{BPT} \Leftrightarrow \begin{cases}2x-1>0\\ 2x-1<(0,5)^{-2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>\frac{1}{2}\\ x<\frac{5}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2}<x<\frac{5}{2}.$$

Ví dụ 5: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+7)<0$ là

A. $(3;+\infty)$ **B.** $(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$ **C.** $(-\infty;2)$ **D.** $(2;3)$

Lời giải

Ta có: $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+7)<0 \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-5x+7>0\\ x^2-5x+7>1\end{cases} \Leftrightarrow x^2-5x+7>1 \Leftrightarrow x^2-5x+6>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>3\\ x<2\end{array}\right.$

Tập nghiệm của bất phương trình: $S=(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$

Ví dụ 6: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}x^2\ge -1$ là

A. $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$. **B.** $\left(0;\sqrt{2}\right]$. **C.** $\left[\sqrt{2};+\infty\right)$. **D.** $\left[-\sqrt{2};0\right)\cup\left(0;\sqrt{2}\right]$.

Lời giải

Ta có $\log_{\frac{1}{2}}x^2\ge -1 \Leftrightarrow \begin{cases}x^2>0\\ x^2\le\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ne 0\\ x^2\le 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ne 0\\ -\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow x\in\left[-\sqrt{2};0\right)\cup\left(0;\sqrt{2}\right]$.

Ví dụ 7: Tìm tập nghiệm T của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x-3}{x+4}\right)\ge 0$

A. $T=(3;+\infty)$. **B.** $T=(-4;3]$.

C. $T=(-\infty;-4)\cup(3;+\infty)$. **D.** $T=(-4;+\infty)$.

Lời giải

Bất phương trình đã cho tương đương $\begin{cases}\dfrac{x-3}{x+4}>0\\ \dfrac{x-3}{x+4}\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<-4\vee x>3\\ \dfrac{-7}{x+4}\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<-4\vee x>3\\ x>-4\end{cases}$

$\Leftrightarrow x>3$.

Ví dụ 8: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\dfrac{4x+6}{x}\le 0$ là

A. $S=[-2;0)$. **B.** $S=(-\infty;2]$. **C.** $S=\left[-2;-\dfrac{3}{2}\right)$. **D.** $S=\mathbb{R}\setminus\left[-\dfrac{3}{2};0\right]$.

Lời giải

$$\log_3\frac{4x+6}{x}\le 0\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{4x+6}{x}>0\\ \dfrac{4x+6}{x}\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<\dfrac{-3}{2}\\ x>0\end{array}\right.\\ \dfrac{3x+6}{x}\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<\dfrac{-3}{2}\\ x>0\end{array}\right.\\ -2\le x\le 0\end{cases}\Leftrightarrow -2\le x<-\frac{3}{2}.$$

Ví dụ 9: Bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left[\log_2\left(2-x^2\right)\right]>0$ có bao nhiêu nghiệm nguyên ?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases}2-x^2>0\\ \log_2\left(2-x^2\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2-x^2>0\\ 2-x^2>1\end{cases}\Leftrightarrow 2-x^2>1\Leftrightarrow -1<x<1.$

Bất phương trình tương đương $\log_{\frac{1}{2}}\left[\log_2\left(2-x^2\right)\right]>\log_{\frac{1}{2}}1$

$\Leftrightarrow\log_2\left(2-x^2\right)<1\Leftrightarrow\log_2\left(2-x^2\right)<\log_2 2\Leftrightarrow 2-x^2<2\Leftrightarrow x^2>0\Leftrightarrow x\ne 0.$

Đối chiếu điều kiện, bất phương trình có tập nghiệm $S=(-1;0)\cup(0;1)$.

Suy ra không có số nguyên nào thuộc tập S.

Ví dụ 10: Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{\log\left(x^2-9\right)}{\log(3-x)}\le 1$ là

A. $(3;4]$. **B.** $\varnothing$. **C.** $(-4;-3)$. **D.** $[-4;-3)$.

Lời giải

ĐK: $\begin{cases}x^2-9>0\\ 3-x>0\\ 3-x\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>3\vee x<-3\\ x<3\\ x\ne 2\end{cases}\Leftrightarrow x<-3$. Với $x<-3$ suy ra $\log(3-x)>0$ nên bất

phương trình đã cho tương đương $\log\left(x^2-9\right)\le\log(3-x)\Leftrightarrow x^2+x-12\le 0\Leftrightarrow x\in[-4;3]$

Kết hợp điều kiện suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $[-4;-3)$.

Ví dụ 11: Bất phương trình $\log_2^2\left(\dfrac{x-1}{10}\right)\le 4$ có tất cả bao nhiêu nghiệm x nguyên?

A. 41. **B.** 38. **C.** 40. **D.** 37.

Lời giải

Ta có: $\log_2^2\left(\frac{x-1}{10}\right)\le 4\Leftrightarrow -2\le\log_2\left(\frac{x-1}{10}\right)\le 2\Leftrightarrow\frac{1}{4}\le\frac{x-1}{10}\le 4\Leftrightarrow 3,5\le x\le 41$.

Do x nguyên nên $x\in\{4,5,6,\ldots,41\}$. Suy ra có tất cả 38 giá trị x nguyên.

Ví dụ 12: Gọi S là tập nghiệm bất phương trình $\log_{\frac{2}{3}}\left(\log_3|x-3|\right)\ge 0$. Tập S có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

A. Vô số. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

$$\log_{\frac{2}{3}}\left(\log_3|x-3|\right)\ge 0\Leftrightarrow\begin{cases}\log_3|x-3|>0\\ |x-3|>0\\ \log_3|x-3|\le\left(\frac{2}{3}\right)^0=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x-3|>1\\ |x-3|>0\\ |x-3|\le 3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|x-3|>1\\ |x-3|\le 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<2\\ x>4\end{array}\right.\\ 0\le x\le 6\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0\le x<2\\ 4<x\le 6\end{array}\right.$$

Suy ra tập nghiệm bất phương trình đã cho là $S=[0;2)\cup(4;6]$.

Vậy tập S có 4 giá trị nguyên là $\{0;1;5;6\}$.

Ví dụ 13: Tập nghiệm S của bất phương trình $\ln\left(x^2+1\right)-\ln(2x+4)>0$

A. $S=(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$. **B.** $S=(3;+\infty)$.

C. $S=(-1;3)$. **D.** $S=(-2;-1)\cup(3;+\infty)$.

Lời giải

Ta có $\ln\left(x^2+1\right)-\ln(2x+4)>0\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+1>2x+4\\ 2x+4>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x-3>0\\ x>-2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2<x<-1\\ x>3\end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện suy ra tập nghiệm của bất phương trình $S=(-2;-1)\cup(3;+\infty)$

Ví dụ 14: Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{2}{3}}(3x)>\log_{\frac{2}{3}}(2x+7)$?

A. $\left(0;\frac{13}{4}\right)$. **B.** $(0;7)$. **C.** $(-\infty;7)$. **D.** $(7;+\infty)$.

Lời giải

Bất phương trình $\log_{\frac{2}{3}}(3x)>\log_{\frac{2}{3}}(2x+7)\Leftrightarrow\begin{cases}3x<2x+7\\ 3x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<7\\ x>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<x<7$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $T=(0;7)$.

Ví dụ 15: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-3)+\log_2 x\ge 2$ là

A. $(3;4]$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-1]\cup[4;+\infty)$. **D.** $[4;+\infty)$.

Lời giải

Điều kiện: $x>3$.

Với điều kiện trên, bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow\log_2\left(x^2-3x\right)\ge 2\Leftrightarrow x^2-3x-4\ge 0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 4\\ x\le -1\end{array}\right.$.

Kết hợp với điều kiện $x>3$, suy ra tập nghiệm của bất phương trình là $S=[4;+\infty)$.

Ví dụ 16: Tập nghiệm của bất phương trình $3\log_3(x-1)+\log_{\sqrt[3]{3}}(2x-1)\le 3$

A. $\left(\frac{1}{2};2\right]$. **B.** $[2;+\infty)$. **C.** $(1;2]$. **D.** $\left(\frac{-1}{2};2\right]$.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases}x-1>0\\2x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\x>\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow x>1$.

$3\log_3(x-1)+3\log_3(2x-1)\le 3\Leftrightarrow\log_3(x-1)+\log_3(2x-1)\le 1\Leftrightarrow\log_3\left[(x-1)(2x-1)\right]\le 1$

$\Leftrightarrow(x-1)(2x-1)\le 3\Leftrightarrow 2x^2-3x-2\le 0\Leftrightarrow\frac{-1}{2}\le x\le 2$.

Kết hợp điều kiện, bất phương trình có tập nghiệm là $S=(1;2]$.

Ví dụ 17: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-6x+5)+\log_2(x-1)>0$ là

A. $(1;6)$. **B.** $(5;6)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $[5;6)$.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases}x^2-6x+5>0\\x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow x>5$.

Với điều kiện trên, bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-6x+5)+\log_2(x-1)>0$ tương đương với:

$-\log_2(x^2-6x+5)+\log_2(x-1)>0\Leftrightarrow\log_2(x^2-6x+5)<\log_2(x-1)\quad\Leftrightarrow x^2-6x+5<x-1$

$\Leftrightarrow x^2-7x+6<0\Leftrightarrow 1<x<6$.

Kết hợp với điều kiện ta được tập nghiệm của bất phương trình là: $S=(5;6)$.

Ví dụ 18: Có bao nhiêu số nguyên x nghiệm đúng bất phương trình $\frac{1}{\log_x 2}+\frac{1}{\log_{x^2}2}<5$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Xét bất phương trình $\frac{1}{\log_x 2}+\frac{1}{\log_{x^2}2}<5\ (1)$.

Điều kiện $\begin{cases}x>0\\x\ne 1\end{cases}(*)$.

Với điều kiện $(*)$ bất phương trình $(1)\Leftrightarrow\log_2 x+\log_2 x^2<5\Leftrightarrow\log_2 x+2\log_2 x<5$

$\Leftrightarrow\log_2 x<\frac{5}{3}\Leftrightarrow 0<x<2^{\frac{5}{3}}$ hay $0<x<\sqrt[3]{32}$.

Kết hợp với điều kiện $(*)$ và $x\in\mathbb{Z}$, ta được $x\in\{2,3\}$.

Vậy có 2 số nguyên x nghiệm đúng bất phương trình đã cho.

Ví dụ 19: Nghiệm của bất phương trình $\log_2(x+1)-2\log_4(5-x)<1-\log_2(x-2)$ là

A. $\begin{bmatrix}x<3\\x>4\end{bmatrix}$. **B.** $2<x<3$. **C.** $1<x<2$. **D.** $2<x<5$.

Lời giải

Với đk $5>x>2$ ta có: BPT $\Leftrightarrow\log_2(x+1)-2\log_{2^2}(5-x)<\log_2 2-\log_2(x-2)$

$\Leftrightarrow\log_2\frac{x+1}{5-x}<\log_2\frac{2}{x-2}\Leftrightarrow\frac{x+1}{5-x}<\frac{2}{x-2}\Leftrightarrow x^2-x-2<10-2x\Leftrightarrow x^2+x-12<0\Leftrightarrow -4<x<3$

Vậy nghiệm của bpt là $2<x<3$.

Ví dụ 20: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_4(x-1)^2-\log_2(x+2)\le 1$ là

A. $S=[2;+\infty)$. **B.** $S=[-1;1)\cup(1;+\infty)$.

C. $S=(1;+\infty)$. **D.** $S=(-2;1)\cup(1;+\infty)$.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases}x>-2\\x\ne 1\end{cases}$.

Ta có $\log_4(x-1)^2-\log_2(x+2)\le 1\Leftrightarrow\frac{1}{2}\log_2(x-1)^2\le\log_2(2x+4)$

$\Leftrightarrow\log_2(x-1)^2\le\log_2(2x+4)^2\Leftrightarrow x^2-2x+1\le 4x^2+16x+16\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge -1\\x\le -5\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=[-1;1)\cup(1;+\infty)$.

Ví dụ 21: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2^2 x-5\log_2 x+4\ge 0$.

A. $S=(-\infty;2]\cup[16;+\infty)$. **B.** $S=[2;16]$.

C. $S=(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$. **D.** $S=(0;2]\cup[16;+\infty)$.

Lời giải

Điều kiện: $x>0$.

Ta xem bpt đã cho là bpt bậc 2 có ẩn là $\log_2 x$.

Khi đó: $\log_2^2 x-5\log_2 x+4\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x\le 1\\\log_2 x\ge 4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le 2\\x\ge 16\end{array}\right.$.

So với điều kiện $x>0$ ta có: $\left[\begin{array}{l}0<x\le 2\\x\ge 16\end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S=(0;2]\cup[16;+\infty)$.

Ví dụ 22: Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_2^2 x-8\log_2\sqrt{x}+3<0$

A. 4. **B.** 1. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải

Điều kiện: $x>0$.

$\log_2^2 x-8\log_2\sqrt{x}+3<0\Leftrightarrow\log_2^2 x-8\log_2 x^{\frac{1}{2}}+3<0\Leftrightarrow\log_2^2 x-4\log_2 x+3<0$

$\Leftrightarrow 1<\log_2 x<3\Leftrightarrow 2<x<8$. So với điều kiện ta được $2<x<8$.

Ví dụ 23: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{5}}^2 x-2\log_{\frac{1}{5}} x-3>0$ là

A. $\left(0;\frac{1}{125}\right]\cup[5;+\infty)$. **B.** $\left(-\infty;\frac{1}{125}\right)\cup(5;+\infty)$.

C. $\left(\frac{1}{125};5\right)$. **D.** $\left(0;\frac{1}{125}\right)\cup(5;+\infty)$.

Lời giải

Ta có: $\log_{\frac{1}{5}}^2 x-2\log_{\frac{1}{5}} x-3>0\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\\left[\begin{array}{l}\log_{\frac{1}{5}} x<-1\\\log_{\frac{1}{5}} x>3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>5\\0<x<\frac{1}{125}\end{array}\right.$.

Ví dụ 24: Bất phương trình $\frac{\log_2\frac{x}{2}}{\log_2 x}-\frac{\log_2 x^2}{\log_2 x-1}\le 1$ có bao nhiêu nghiệm nguyên dương nhỏ hơn 10.

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1,\ x\neq 2 \end{cases}$.

Khi đó $\dfrac{\log_2 \dfrac{x}{2}}{\log_2 x}-\dfrac{\log_2 x^2}{\log_2 x-1}\le 1 \Leftrightarrow \dfrac{\log_2 x-1}{\log_2 x}-\dfrac{2\log_2 x}{\log_2 x-1}\le 1$

Đặt $t=\log_2 x$. Ta có $\dfrac{t-1}{t}-\dfrac{2t}{t-1}\le 1 \Leftrightarrow \dfrac{(t-1)^2-2t^2}{t(t-1)}\le 1 \Leftrightarrow \dfrac{(t-1)^2-2t^2}{t(t-1)}-1\le 0$

$$\Leftrightarrow \frac{-2t^2-t+1}{t(t-1)}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\le -1 \\ 0<t\le \dfrac{1}{2} \\ t>1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x\le -1 \\ 0<\log_2 x\le \dfrac{1}{2} \\ \log_2 x>1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le \dfrac{1}{2} \\ 1<x\le \sqrt{2} \\ x>2 \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện ta có $0<x\le \dfrac{1}{2}$ hoặc $1<x\le \sqrt{2}$ hoặc $x>2$.

Khi đó bất phương trình có 7 nghiệm nguyên dương nhỏ hơn 10.

Ví dụ 25: Có bao nhiêu cặp số nguyên (x,y) thỏa mãn $\log_{9x^2+y^2}(3x+y+9)\ge 1$?

A. 9. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 10.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x\in\mathbb{Z}, y\in\mathbb{Z} \\ 0<9x^2+y^2\neq 1 \\ 3x+y+9>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{Z}, y\in\mathbb{Z} \\ (x,y)\notin\{(0,0);(0,1);(0,-1)\} \\ 3x+y+9>0 \end{cases}$

Khi đó $9x^2+y^2>1$ nên ta có:

$\log_{9x^2+y^2}(3x+y+9)\ge 1 \Leftrightarrow 3x+y+9\ge 9x^2+y^2 \Leftrightarrow 9x^2-3x+y^2-y-9\le 0$

$$\Leftrightarrow \left(3x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\le \frac{19}{2}$$

Suy ra: $\begin{cases} \left(3x-\dfrac{1}{2}\right)^2\le \dfrac{19}{2} \\ \left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2\le \dfrac{19}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{38}}{6}\le x\le \dfrac{1+\sqrt{38}}{6} \\ \dfrac{1-\sqrt{38}}{2}\le y\le \dfrac{1+\sqrt{38}}{2} \end{cases}$

Do $x\in\mathbb{Z}, y\in\mathbb{Z}$ nên $\begin{cases} x\in\{0;1\} \\ y\in\{-2;-1;0;1;2\} \end{cases}$

Kết hợp điều kiện, ta được $(x,y)\in\{(0,-2);(0,2);(1;-2);(1,-1),(1,0);(1,1);(1,2)\}$

Thử lại ta thấy cặp $(x,y)=(1,-2)$ không thỏa yêu cầu đề bài.

Vậy có 6 cặp số nguyên (x,y) thỏa yêu cầu bài toán.

Dạng 3 BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ - LOGARIT CHỨA THAM SỐ

Ví dụ 1: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^{x^2+2mx+1} \le \left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right)^{2x-3m}$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$.

A. $m \in [-5;0]$. **B.** $m \in (-\infty;-5) \cup (0;+\infty)$.

C. $m \in (-\infty;-5] \cup [0;+\infty)$. **D.** $m \in (-5;0)$.

Lời giải

$\left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^{x^2+2mx+1} \le \left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right)^{2x-3m}, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^{x^2+2mx+1} \le \left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^{-2x+3m}, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^2+2mx+1 \ge -2x+3m, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^2+2(m+1)x+1-3m \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$ $(*)$.

$\Leftrightarrow \Delta' = m^2+5m \le 0 \Leftrightarrow -5 \le m \le 0$.

Ví dụ 2: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để bất phương trình $4^x - m.2^{x+1} + 3 - 2m \le 0$ có nghiệm thực.

A. $m \le 5$. **B.** $m \ge 1$. **C.** $m \ge 2$. **D.** $m \le 3$.

Lời giải

Ta có $4^x - m.2^{x+1} + 3 - 2m \le 0 \Leftrightarrow \left(2^x\right)^2 - 2m.2^x + 3 - 2m \le 0$

Đặt $2^x = t\ (t > 0)$.

Ta có bất phương trình tương đương với $t^2 - 2m.t + 3 - 2m \le 0 \Leftrightarrow \frac{t^2+3}{2t+2} \le m$

Xét $f(t) = \frac{t^2+3}{2t+2}$ trên $(0;+\infty)$.

$f'(t) = \frac{2t^2+4t-6}{(2t+2)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy để bất phương trình có nghiệm thực thì $m \ge 1$.

Ví dụ 3: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để tập nghiệm của bất phương trình $\left(3^{x+2} - \sqrt{3}\right)\left(3^x - 2m\right) < 0$ chứa không quá 9 số nguyên?

A. 3280. **B.** 3279. **C.** 3281. **D.** 3283.

Lời giải

Theo yêu cầu của đề ra, ta chỉ xét bài toán trong trường hợp m nguyên dương.

Từ giả thiết $\left(3^{x+2} - \sqrt{3}\right)\left(3^x - 2m\right) < 0 \Leftrightarrow \left(9.3^x - \sqrt{3}\right)\left(3^x - 2m\right) < 0$

Vì m nguyên dương nên $2m > \frac{\sqrt{3}}{9}$. Từ đó ta có:

$\left(9.3^x-\sqrt{3}\right)\left(3^x-2m\right)<0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{9}<3^x<2m \Leftrightarrow \log_3\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)<x<\log_3(2m) \Leftrightarrow -\frac{3}{2}<x<\log_3(2m)$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $T=\left(-\frac{3}{2};\log_3(2m)\right)$.

Tập nghiệm chứa không quá 9 số nguyên

$\Leftrightarrow \log_3(2m)\le 8 \Leftrightarrow 0<2m\le 6561 \Leftrightarrow 0<m\le 3280,5$.

Như vậy có 3280 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu của đề ra.

Ví dụ 4: Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để bất phương trình $12^x+(2-m)6^x+3^x>0$ thỏa mãn với mọi x dương.

A. $(-\infty;4)$. **B.** $(0;4]$. **C.** $(-\infty;4]$. **D.** $(4;+\infty)$.

Lời giải

Ta có: $12^x+(2-m)6^x+3^x>0 \Leftrightarrow 4^x+(2-m)2^x+1>0 \ (1)$

Đặt $t=2^x$. Vì $x>0$ nên $t>1$.

Bất phương trình (1) trở thành $t^2+(2-m)t+1>0 \ (2)$

Bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi x dương $\Leftrightarrow$ bất phương trình (2) nghiệm đúng với mọi $t\in(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow t^2+2t+1>mt, \forall t\in(1;+\infty) \Leftrightarrow m<\frac{t^2+2t+1}{t}, \forall t\in(1;+\infty)$

Xét hàm số $g(t)=\frac{t^2+2t+1}{t}$ trên khoảng $(1;+\infty)$.

Ta có: $g'(t)=\frac{t^2-1}{t^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-1 \end{array}\right. \Rightarrow g'(t)$ xác định trên khoảng $(1;+\infty)$.

Ta có bảng biến thiên sau

t	1		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	
$g(t)$	4	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra bất phương trình (2) nghiệm đúng với mọi $t\in(1;+\infty)$ khi và chỉ khi $m\in(-\infty;4]$. Khi đó bất phương trình nghiệm (1) đúng với mọi x dương.

Ví dụ 5: Cho hàm số $f(x)=2020^x-2020^{-x}$. Tìm số nguyên m lớn nhất để $f(m)+f(2m+2020)<0$

A. –673. **B.** –674. **C.** 673. **D.** 674.

Lời giải

Ta có: $f(-x)=2020^{-x}-2020^x=-\left(2020^x-2020^{-x}\right)=-f(x) \Rightarrow f(x)$ là hàm lẻ trên $\mathbb{R}$.

Mà $f'(x)=2020^x\ln 2020+2020^{-x}\ln 2020>0, \forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do vậy: $f(m)+f(2m+2020)<0 \Leftrightarrow f(2m+2020)<-f(m)$

$\Leftrightarrow f(2m+2020)<f(-m) \Leftrightarrow 2m+2020<-m \Leftrightarrow m<-\frac{2020}{3}$

Do đó giá trị m nguyên lớn nhất thỏa mãn là –674.

Ví dụ 6: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_m\left(2x^2+x+3\right)\le\log_m\left(3x^2-x\right)$ với m là tham số thực dương khác 1, biết $x=1$ là một nghiệm của bất phương trình đã cho.

A. $S=[-1;0)\cup\left(\frac{1}{3};3\right]$. **B.** $S=[-1;0]\cup\left(\frac{1}{3};3\right]$.

C. $S=(-1;0)\cup(1;3]$. **D.** $S=(-2;0)\cup\left(\frac{1}{3};3\right]$.

Lời giải

Do $x=1$ là nghiệm nên ta có $\log_m 6\le\log_m 2\Rightarrow 0<m<1$.

Bất phương trình tương đương với $\begin{cases}2x^2+x+3\ge 3x^2-x\\3x^2-x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x-3\le 0\\3x^2-x>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le x\le 3\\x<0;x>\frac{1}{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1\le x<0\\\frac{1}{3}<x\le 3\end{cases}$. Vậy $S=[-1;0)\cup\left(\frac{1}{3};3\right]$.

Ví dụ 7: Bất phương trình $\log_2\left(7x^2+7\right)\ge\log_2\left(mx^2+4x+m\right)$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$ khi $m\in(a;b]$. Tính $a.b$?

A. 10. **B.** 8. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Ta có: $\log_2\left(7x^2+7\right)\ge\log_2\left(mx^2+4x+m\right)$ nghiệm đúng $\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow\begin{cases}mx^2+4x+m>0\\7x^2+7\ge mx^2+4x+m\end{cases}$ đúng $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}mx^2+4x+m>0\\(7-m)x^2-4x+7-m\ge 0\end{cases}$ đúng $\forall x\in\mathbb{R}$.

$+)\ mx^2+4x+m>0\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left[\begin{cases}a=b=0\\c>0\end{cases}\begin{cases}a>0\\\Delta'<0\end{cases}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{cases}m=4=0\\m>0\end{cases}\begin{cases}m>0\\4-m^2<0\end{cases}\right.\Leftrightarrow m>2$.

$+)(7-m)x^2-4x+(7-m)\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left[\begin{cases}7-m=4=0\\7-m\ge 0\end{cases}\begin{cases}7-m>0\\4-(7-m)^2\le 0\end{cases}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}m<7\\\left[\begin{array}{l}m\le 5\\m\ge 9\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m\le 5$.

Kết hợp lại ta được $2<m\le 5$, do đó $m\in(2;5]$.

Ví dụ 8: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2\left(x^2-3x+m\right)>2\log_2(x-1)$ chứa đúng 2 số nguyên khi và chỉ khi

A. $m\in(2;3]$ **B.** $m\in(3;4]$ **C.** $m\in(-\infty;2]$ **D.** $m\in(4;5]$

Lời giải

Bất phương trình $\Leftrightarrow\begin{cases}x-1>0\\\log_2\left(x^2-3x+m\right)>\log_2(x-1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\x^2-3x+m>(x-1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\x<m-1\end{cases}$

Nếu $m-1\le 1\Rightarrow S=\varnothing$.

Nếu $m-1>1\Rightarrow S=(1;m-1)$.

Chứa đúng 2 số nguyên $\{2;3\}\Leftrightarrow 3<m-1\le 4\Leftrightarrow 4<m\le 5$.

Ví dụ 9: Xét bất phương trình $\log_2^2 2x-2(m+1)\log_2 x-2<0$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình có nghiệm thuộc khoảng $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

A. $m\in\left(-\frac{3}{4};0\right)$ **B.** $m\in\left(-\frac{3}{4};+\infty\right)$. **C.** $m\in(-\infty;0)$. **D.** $m\in(0;+\infty)$.

Lời giải

Ta có bất phương trình: $\log_2^2 2x-2(m+1)\log_2 x-2<0$, đkxđ: $x>0$

$\Leftrightarrow(\log_2 2+\log_2 x)^2-2(m+1)\log_2 x-2<0$

$\Leftrightarrow 1+2\log_2 x+\log_2^2 x-2(m+1)\log_2 x-2<0\Leftrightarrow\log_2^2 x-2m\log_2 x-1<0$ (*)

Đặt: $\log_2 x=t$

Với $x\in\left(\sqrt{2};+\infty\right)\Rightarrow t\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$

Khi đó bất phương trình trở thành $t^2-2mt-1<0$ (**)

với $t\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ thì $(**)\Leftrightarrow m>\frac{t^2-1}{2t}$.

Xét hàm số: $f(t)=\frac{t^2-1}{2t}$, với $t\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$

Ta có: $f'(t)=\frac{t^2+1}{2t^2}>0,\ \forall t\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)\Rightarrow$ hàm số $y=f(t)$ đồng biến trên $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
f'				$+$	
$f(t)$					$+\infty$
			$-\frac{3}{4}$		

$\Rightarrow f(t)>-\frac{3}{4}$, với $\forall t\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$

Để bất phương trình có nghiệm $x\in\left(\sqrt{2};+\infty\right)$ thì $m>f(t)$ có nghiệm $t\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$

$\Rightarrow m>-\frac{3}{4}$

Ví dụ 10: Có bao nhiêu số nguyên m để bất phương trình: $\log_2\frac{3x^2+3x+m+1}{2x^2-x+1}<x^2-5x+2-m$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Điều kiện: $3x^2+3x+m+1>0$.

Ta có: $\log_2\frac{3x^2+3x+m+1}{2x^2-x+1}<x^2-5x+2-m\Leftrightarrow\log_2\left(\frac{3x^2+3x+m+1}{2x^2-x+1}\right)-1<x^2-5x+1-m$

$\Leftrightarrow\log_2\frac{3x^2+3x+m+1}{4x^2-2x+2}<x^2-5x+1-m$

$\Leftrightarrow\log_2(3x^2+3x+m+1)-\log_2(4x^2-2x+2)<(4x^2-2x+2)-(3x^2+3x+m+1)$

$\Leftrightarrow\log_2(4x^2-2x+2)+(4x^2-2x+2)>\log_2(3x^2+3x+m+1)+(3x^2+3x+m+1)$ (1)

Xét hàm số: $f(t)=t+\log_2 t$ trên $(0;+\infty)$, ta có $f'(t)=1+\frac{1}{t.\ln 2}>0$, $\forall t\in(0;+\infty)$.

Do đó hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Suy ra: $(1)\Leftrightarrow f\left(4x^2-2x+2\right)>f\left(3x^2+3x+m+1\right)$

$\Leftrightarrow 4x^2-2x+2>3x^2+3x+m+1\Leftrightarrow x^2-5x-m+1>0$.

Bất phương trình đã cho có tập nghiệm là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases}x^2-5x-m+1>0 \quad (1.1)\\ 3x^2+3x+m+1>0 \quad (1.2)\end{cases} \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta_1<0\\ \Delta_2<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4m+21<0\\ -12m-3<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<-\dfrac{21}{4}\\ m>-\dfrac{1}{4}\end{cases} \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy không có giá trị nào của m để bất phương trình có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

Ví dụ 11: Tìm tập S tất cả các giá trị thực của tham số m để tồn tại duy nhất cặp số $(x;y)$ thỏa mãn $\log_{x^2+y^2+2}\left(4x+4y-6+m^2\right)\geq 1$ và $x^2+y^2+2x-4y+1=0$.

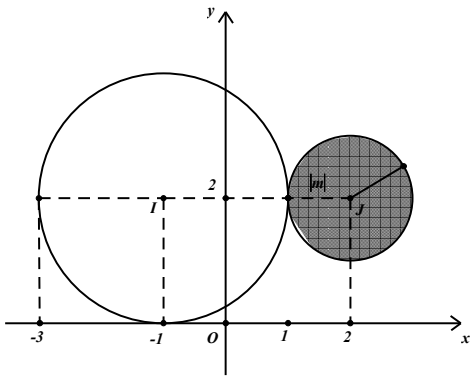
A. $S=\{-1;1\}$.

B. $S=\{-5;5\}$.

C. $S=\{-7-5;-1;1;5;7\}$.

D. $S=\{-5;-1;1;5\}$.

Lời giải



Nhận thấy $x^2+y^2+2>1$ với mọi $x,y\in\mathbb{R}$ nên:

$\log_{x^2+y^2+2}\left(4x+4y-6+m^2\right)\geq 1\Leftrightarrow 4x+4y-6+m^2\geq x^2+y^2+2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-4x-4y+8-m^2\leq 0\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2\leq m^2$ (*).

Khi $m=0$ thì $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=2\end{cases}$. Cặp $(2;2)$ không là nghiệm của phương trình $x^2+y^2+2x-4y+1=0$.

Khi $m\neq 0$, tập hợp các điểm $(x;y)$ thỏa mãn (*) là hình tròn tâm $J(2;2)$, bán kính là $|m|$. Trường hợp này, yêu cầu bài toán trở thành tìm m để đường tròn tâm $I(-1;2)$, bán kính 2 và hình tròn tâm $J(2;2)$, bán kính $|m|$ có đúng một điểm chung (hình vẽ)

Điều này xảy ra khi $|m|=1\Leftrightarrow m=\pm 1$ (thỏa mãn $m\neq 0$). Vậy $S=\{-1;1\}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Dạng 1 BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ KHÔNG CHỨA THAM SỐ

Câu 1: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 32$ là

A. $x \in (-\infty;-5)$. **B.** $x \in (-\infty;5)$. **C.** $x \in (-5;+\infty)$. **D.** $x \in (5;+\infty)$.

Câu 2: Cho bất phương trình $\left(\frac{5}{7}\right)^{x^2-x+1} > \left(\frac{5}{7}\right)^{2x-1}$, tập nghiệm của bất phương trình có dạng $S=(a;b)$. Giá trị của biểu thức $A=b-a$ nhận giá trị nào sau đây?

A. 1. **B.** -1. **C.** 2. **D.** -2.

Câu 3: Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{9}\right)^x > 3^{\frac{2x}{x+1}}$ là

A. $\left[\begin{array}{l} x<-2 \\ -1<x<0 \end{array}\right.$. **B.** $x<-2$. **C.** $-1<x<0$. **D.** $-1\le x<0$.

Câu 4: Tập nghiệm của bất phương trình $11^{\sqrt{x+6}} \ge 11^x$ là

A. $-6\le x\le 3$. **B.** $x<-6$. **C.** $x>3$. **D.** $\varnothing$.

Câu 5: Tập nghiệm của bất phương trình $2^x+2^{x+1} \le 3^x+3^{x-1}$

A. $x \in [2;+\infty)$. **B.** $x \in (2;+\infty)$. **C.** $x \in (-\infty;2)$. **D.** $x \in (2;+\infty)$.

Câu 6: Tập nghiệm của bất phương trình $16^x-4^x-6\le 0$ là

A. $x \le \log_4 3$. **B.** $x > \log_4 3$. **C.** $x \ge 1$. **D.** $x \ge 3$

Câu 7: Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{3^x}{3^x-2}<3$ là

A. $\left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<\log_3 2 \end{array}\right.$. **B.** $x>\log_3 2$. **C.** $x<1$. **D.** $\log_3 2<x<1$.

Câu 8: Tập nghiệm của bất phương trình $\frac{1}{3^x+5} \le \frac{1}{3^{x+1}-1}$ là

A. $-1<x\le 1$. **B.** $x>2$. **C.** $x>1$. **D.** $1<x<2$.

Câu 9: Tập nghiệm của bất phương trình $4^x-3.2^x+2>0$ là

A. $x \in (-\infty;0)\cup(1;+\infty)$. **B.** $x \in (-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

C. $x \in (0;1)$. **D.** $x \in (1;2)$.

Câu 10: Tập nghiệm của bất phương trình $3^x.2^{x+1} \ge 72$ là

A. $x \in [2;+\infty)$. **B.** $x \in (2;+\infty)$. **C.** $x \in (-\infty;2)$. **D.** $x \in (-\infty;2]$.

Câu 11: Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x+1}-2^{2x+1}-12^{\frac{x}{2}}<0$ là

A. $x\in(0;+\infty)$. **B.** $x\in(1;+\infty)$. **C.** $x\in(-\infty;0)$. **D.** $x\in(-\infty;1)$.

Câu 12: Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{2.3^x-2^{x+2}}{3^x-2^x}\le 1$ là

A. $x\in\left(0;\log_{\frac{3}{2}}3\right]$. **B.** $x\in(1;3)$. **C.** $x\in(1;3]$. **D.** $x\in\left[0;\log_{\frac{3}{2}}3\right]$.

Câu 13: Tập nghiệm của bất phương trình $2^x+4.5^x-4<10^x$ là

A. $\left[\begin{array}{l}x<0\\x>2\end{array}\right.$. **B.** $x<0$. **C.** $x>2$. **D.** $0<x<2$.

Câu 14: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{\sqrt{x}}-2^{1-\sqrt{x}}<1$ là

A. $-1\le x\le 1$. **B.** $(-8;0)$. **C.** $(1;9)$. **D.** $(0;1]$.

Câu 15: Tìm tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{1}{5^{x+1}-1}\ge\dfrac{1}{5-5^x}$

A. $S=(-1;0]\cup(1;+\infty)$. **B.** $S=(-1;0]\cap(1;+\infty)$.

C. $S=(-\infty;0]$. **D.** $S=(-\infty;0)$.

Câu 16: Bất phương trình $25^{-x^2+2x+1}+9^{-x^2+2x+1}\ge 34.15^{-x^2+2x}$ có tập nghiệm là

A. $S=\left(-\infty;1-\sqrt{3}\right]\cup[0;2]\cup\left[1+\sqrt{3};+\infty\right)$. **B.** $S=(0;+\infty)$.

C. $S=(2;+\infty)$. **D.** $S=\left(1-\sqrt{3};0\right)$.

Câu 17: Cho $f(x)=\dfrac{1}{2}.5^{2x+1}$; $g(x)=5^x+4x.\ln 5$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x)>g'(x)$ là

A. $x<0$. **B.** $x>1$. **C.** $0<x<1$. **D.** $x>0$.

Câu 18: Tập nghiệm của bất phương trình $2.7^{x+2}+7.2^{x+2}\le 351.\sqrt{14^x}$ có dạng là đoạn $S=[a;b]$. Giá trị $b-2a$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $\left(3;\sqrt{10}\right)$. **B.** $(-4;2)$. **C.** $\left(\sqrt{7};4\sqrt{10}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{2}{9};\dfrac{49}{5}\right)$.

Câu 19: Tập nghiệm của bất phương trình $9^x-2(x+5).3^x+9(2x+1)\ge 0$ là

A. $[0;1]\cup[2;+\infty)$. **B.** $(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$. **C.** $[1;2]$. **D.** $(-\infty;0]\cup[2;+\infty)$.

Câu 20: Số nghiệm nguyên dương của bất phương trình $3^{12-x}-(x-10).5^{x+2021}-9\ge 0$ là

A. 10. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 12.

Câu 21: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
f'(x)		$-$	0	$+$	0	$-$	

Xét hàm số $g(x)=e^{f\left(1+x-x^2\right)}$, tập nghiệm của bất phương trình $g'(x)>0$ là

A. $\left(-1;\frac{1}{2}\right)\cup(2;+\infty)$.

B. $(-\infty;-1)\cup\left(\frac{1}{2};2\right)$.

C. $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$.

D. $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Câu 22: Có bao nhiêu cặp số thực $(x;y)$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

$3^{\left(x^5-5x^3+4x\right)^2-\log_3 5}=5^{-(y+4)}$ và $4|y|-|y-1|+(y+3)^2\le 8$?

A. 1.

B. 2.

C. 5.

D. Vô số.

Câu 23: Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-9}+\left(x^2-9\right).5^{x+1}<1$ là khoảng $(a;b)$. Tính $b-a$

A. 4.

B. 6.

C. 3.

D. 8.

Câu 24: Tìm số nghiệm nguyên của bất phương trình $2^{2x^2-15x+100}-2^{x^2+10x-50}+x^2-25x+150<0$

A. 4.

B. 5.

C. 3.

D. 6.

Câu 25: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $5x^2+12x+16=m(x+2)\sqrt{x^2+2}$ có hai nghiệm thực phân biệt thoả mãn $2018^{2x+\sqrt{x+1}}-2018^{2+\sqrt{x+1}}+2019x\le 2019$.

A. $m\in\left(2\sqrt{6};3\sqrt{3}\right]$.

B. $m\in\left[2\sqrt{6};3\sqrt{3}\right]$.

C. $m\in\left(3\sqrt{3};\frac{11\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left\{2\sqrt{6}\right\}$.

D. $m\in\left(2\sqrt{6};\frac{11\sqrt{3}}{3}\right)$.

Dạng 2 BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT KHÔNG CHỨA THAM SỐ

Câu 1: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2\left(x^2-3x+1\right)\le 0$ là

A. $S=\left[0;\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};3\right]$. **B.** $S=\left(0;\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};3\right)$.

C. $S=\left[\dfrac{3-\sqrt{5}}{2};\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$. **D.** $S=\varnothing$.

Câu 2: Bất phương trình $\log_{\frac{2}{3}}\left(2x^2-x+1\right)<0$ có tập nghiệm là

A. $S=\left(0;\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $S=\left(-1;\dfrac{3}{2}\right)$.

C. $S=(-\infty;0)\cup\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$. **D.** $S=(-\infty;1)\cup\left(\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.

Câu 3: Bất phương trình $\log_{0,5}(4x+11)<\log_{0,5}\left(x^2+6x+8\right)$ có tập nghiệm là $(a;b)$. Tính $b-a$

A. 3. **B.** 1. **C.** 5. **D.** 2.

Câu 4: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\ln x^2>\ln(4x-4)$.

A. $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **B.** $S=(2;+\infty)$. **C.** $S=(2;+\infty)$. **D.** $S=(1;+\infty)\setminus\{2\}$.

Câu 5: Nghiệm nguyên lớn nhất của bất phương trình $\log_3\left(4.3^{x-1}\right)>2x-1$ là

A. $x=3$. **B.** $x=2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-1$.

Câu 6: Điều kiện xác định của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left[\log_2(2-x^2)\right]>0$ là

A. $x\in[-1;1]$. **B.** $x\in(-1;0)\cup(0;1)$. **C.** $x\in(-1;1)\cup(2;+\infty)$. **D.** $x\in(-1;1)$.

Câu 7: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_4\left(2x^2+3x+1\right)>\log_2(2x+1)$ là

A. $S=\left(\dfrac{1}{2};1\right)$. **B.** $S=\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $S=\left(-\dfrac{1}{2};1\right)$. **D.** $S=\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$.

Câu 8: Tập nghiệm của bất phương trình: $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>\log_2\dfrac{1}{x^2-1}$

A. $[2;+\infty)$. **B.** $\varnothing$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Câu 9: Nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình $\log_3\left(1-x^2\right)\le\log_{\frac{1}{3}}(1-x)$ là

A. $x=0$. **B.** $x=1$. **C.** $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. **D.** $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Câu 10: Bất phương trình $\log_2\left(x^2-x-2\right)\ge\log_{0,5}(x-1)+1$ có tập nghiệm là

A. $\left[1+\sqrt{2};+\infty\right)$. **B.** $\left[1-\sqrt{2};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;1+\sqrt{2}\right]$. **D.** $\left(-\infty;1-\sqrt{2}\right]$.

Câu 11: Nghiệm nguyên nhỏ nhất của bất phương trình $\log_2\left(\log_4 x\right)\ge\log_4\left(\log_2 x\right)$ là

A. 6. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 12: Cho bất phương trình $\dfrac{1-\log_9 x}{1+\log_3 x}\le\dfrac{1}{2}$. Nếu đặt $t=\log_3 x$ thì bất phương trình trở thành:

A. $2(1-2t)\le 1+t$. **B.** $\dfrac{1-2t}{1+t}\le\dfrac{1}{2}$. **C.** $1-\dfrac{1}{2}t\le\dfrac{1}{2}(1+t)$. **D.** $\dfrac{2t-1}{1+t}\ge 0$.

Câu 13: Bất phương trình $\log_{0,2}^2 x-5\log_{0,2} x<-6$ có tập nghiệm là

A. $S=\left(\frac{1}{125};\frac{1}{25}\right)$. **B.** $S=(2;3)$. **C.** $S=\left(0;\frac{1}{25}\right)$. **D.** $S=(0;3)$.

Câu 14: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2^2(2x)+\log_2\frac{x}{4}<9$ chứa tập hợp nào sau đây?

A. $(0;3)$. **B.** $(1;5)$. **C.** $\left(\frac{1}{2};2\right)$. **D.** $\left(\frac{3}{2};6\right)$.

Câu 15: Tìm tập nghiệm S của bất phương trình: $\log_2^2(x-1)-4\log_2(x-1)+3\ge 0$

A. $S=(1;3]\cup[9;+\infty)$. **B.** $S=(-\infty;1]\cup[3;+\infty)$.
C. $S=(-\infty;3]\cup[9;+\infty)$. **D.** $S=[3;9]$.

Câu 16: Nghiệm nguyên lớn nhất của bất pt $\log_2^4 x-\log_{\frac{1}{2}}^2\left(\frac{x^3}{8}\right)+9\log_2\left(\frac{32}{x^2}\right)<4\log_{2^{-1}}^2(x)$ là

A. $x=7$. **B.** $x=8$. **C.** $x=4$. **D.** $x=1$.

Câu 17: Bất phương trình $\log_x\left(\log_3\left(9^x-72\right)\right)\le 1$ có tập nghiệm là

A. $S=\left[\log_3\sqrt{73};2\right]$. **B.** $S=\left(\log_3\sqrt{72};2\right]$. **C.** $S=\left(\log_3\sqrt{73};2\right]$. **D.** $S=(-\infty;2]$.

Câu 18: Có bao nhiêu giá trị nguyên của x thỏa mãn bất phương trình $x^{\log_2 x+4}\le 32$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 19: Bất phương trình $\log_2(2^x+1)+\log_3(4^x+2)\le 2$ có tập nghiệm là

A. $[0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $(0;+\infty)$.

Câu 20: Tập nghiệm của bất phương trình $\ln(1+x)\le x$ tương ứng là

A. $(-1;+\infty)$. **B.** $(0;+\infty)$. **C.** $x<1$. **D.** $\forall x\in\mathbb{R}$.

Câu 21: Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(8-x)\le 2\log_3(x-1)$ là tập con của tập hợp nào dưới đây?

A. $(1;6)$. **B.** $\left(3;\frac{15}{2}\right)$. **C.** $(4;10)$. **D.** $\left(\frac{7}{2};8\right)$.

Câu 22: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $\log_3\frac{3x^2+x+1}{2x^2+2x+3}+x^2-x-2\le 0$ là

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 23: Bất phương trình $\log_3\frac{x^2-3x+2}{x-1}+x^2<4x-3$ có tập nghiệm là $S=(a;b)$. Tính $T=a+2b$

A. $T=7$. **B.** $T=8$. **C.** $T=3$. **D.** $T=6$.

Câu 24: Biết bất phương trình $\log_{\sqrt[3]{2}}(x+3)+x^2+12x<\frac{12}{x}+\frac{1}{x^2}+4\log_2\frac{3x+1}{x}$ có tập nghiệm là $S=(a;b)\cup(c;d)$ với a,b,c,d là các số thực. Tính $S=a+b+c+d$.

A. $S=-6$. **B.** $S=3-2\sqrt{2}$. **C.** $S=-3-2\sqrt{2}$. **D.** $S=-3$.

Câu 25: Biết tập nghiệm của bất phương trình $\log_7\left(\frac{4x^2-4x+1}{2x}\right)+4x^2+1\le 6x$ có dạng $[a;b]\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$. Tính giá trị của $a+b$

A. $a+b=\frac{3}{2}$. **B.** $a+b=\frac{7}{2}$. **C.** $a+b=16$. **D.** $a+b=13$.

Dạng 3 BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ - LOGARIT CHỨA THAM SỐ

Câu 1: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_3\left(x^2+4x+m\right)\ge 1$ nghiệm đúng với mọi $x\in\mathbb{R}$?

A. $m\ge 7$. **B.** $m>7$. **C.** $m<4$. **D.** $4<m\le 7$.

Câu 2: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $4\log_2^2\sqrt{x}-2\log_2 x+3m-2<0$ có nghiệm thực?

A. 0. **B.** Vô số. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 3: Tập hợp tất cả các số thực m để bất phương trình $4\ln(x+3)\le x^2-x+\ln(m)$ nghiệm đúng với mọi số thực $x>0$ là

A. $\left[2^6;+\infty\right)$. **B.** $\left[3^6;+\infty\right)$. **C.** $\left[2^8;+\infty\right)$. **D.** $\left[3^8;+\infty\right)$.

Câu 4: Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\log\left(60x^2+120x+10m-10\right)-3\log(x+1)>1$ có miền nghiệm chứa đúng 4 giá trị nguyên của biến x. Số phần tử của S là

A. 12. **B.** 10. **C.** 9. **D.** 11.

Câu 5: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_{\frac{1}{5}}\left(mx-x^2\right)\le\log_{\frac{1}{5}}4$ vô nghiệm?

A. $-4\le m\le 4$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m>4 \\ m<-4 \end{array}\right.$. **C.** $m<4$. **D.** $-4<m<4$.

Câu 6: Cho bất phương trình $9^x+(m-1).3^x+m>0\ (1)$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình (1) nghiệm đúng $\forall x>1$.

A. $m\ge-\frac{3}{2}$. **B.** $m>-\frac{3}{2}$. **C.** $m>3+2\sqrt{2}$. **D.** $m\ge 3+2\sqrt{2}$.

Câu 7: Cho bất phương trình $8^x-3.2^{2x+1}+9.2^x+m-5>0\ (1)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $x\in[1;2]$?

A. 6. **B.** 4. **C.** 5. **D.** Vô số.

Câu 8: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để bất phương trình $4^x-m.2^{x+1}+3-2m\le 0$ có nghiệm thự

A. $m\le 5$. **B.** $m\ge 1$. **C.** $m\ge 2$. **D.** $m\le 3$.

Câu 9: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2(5^x-1).\log_2(2.5^x-2)\ge m$ có nghiệm $x\ge 1$?

A. $m\ge 6$. **B.** $m>6$. **C.** $m\le 6$. **D.** $m<6$.

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $\log_2(5^x-1)\le m$ có nghiệm $x\ge 1$?

A. $m\ge 2$. **B.** $m>2$. **C.** $m\le 2$. **D.** $m<2$.

Câu 11: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho khoảng $(2;3)$ thuộc tập nghiệm của bất phương trình $\log_5\left(x^2+1\right)>\log_5\left(x^2+4x+m\right)-1$ (1).

A. $m\in[-12;13]$. **B.** $m\in[12;13]$. **C.** $m\in[-13;12]$. **D.** $m\in[-13;-12]$.

Câu 12: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để bất phương trình $1+\log_5\left(x^2+1\right)\ge\log_5\left(mx^2+4x+m\right)$ có nghiệm đúng $\forall x$.

A. $m\in(2;3]$. **B.** $m\in(-2;3]$. **C.** $m\in[2;3)$. **D.** $m\in[-2;3)$.

Câu 13: Có bao nhiêu số nguyên m để tập nghiệm của bất phương trình $4^x-2^{x+m}-2^{x+\frac{1}{2}}+2^{m+\frac{1}{2}}<0$ chứa đúng hai số nguyên ?

A. Vô số. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 14: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $9^x-4.6^x+(m-1).4^x\le 0$ có nghiệm?

A. 6. **B.** 5. **C.** vô số. **D.** 4.

Câu 15: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để bất phương trình $\left[(m-1)4^x-\frac{2}{4^x}+2m+1\right]\left(x-4^{1-x}\right)\ge 0$ nghiệm đúng với mọi x thuộc $[0;1)$?

A. 3. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 0.

Câu 16: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-2022;2022]$ để bất phương trình $2e^{x^2-2mx}\ge x^4-4mx^3+\left(4m^2+2\right)x^2-4mx+2$ nghiệm đúng với mọi $x\in[4;7]$?

A. 2021. **B.** 2025. **C.** 2022. **D.** 2023.

Câu 17: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho bất phương trình $m.4^x+(m-1).2^{x+2}+m-1>0$ nghiệm đúng $\forall x\in\mathbb{R}$.

A. $m\ge 0$. **B.** $m\le 3$. **C.** $m\ge 1$. **D.** $-1\le m\le 4$.

Câu 18: Cho bất phương trình $2019^{mx-x^2-1}\le\frac{x^4+2019}{m^2x^2-2mx+2020}$, m là tham số. Có bao nhiêu số nguyên $m\in[-2020;2020]$ để tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $\mathbb{R}$.

A. 5. **B.** 2020. **C.** 4. **D.** 2021.

Câu 19: Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để bất phương trình $\log_2\left(x^2+mx+m+2\right)\ge\log_2\left(x^2+2\right)$ nghiệm đúng $\forall x\in\mathbb{R}$?

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 20: Cho bất phương trình: $x\sqrt{x}+\sqrt{x+16}\le m\log_2\left(4+\sqrt{16-x}\right)$.Tìm m để bất phương trình đã cho có nghiệm.

A. $m\le\frac{3}{4}$. **B.** $m<\frac{3}{4}$. **C.** $m\ge\frac{4}{3}$. **D.** $m>\frac{4}{3}$.

Câu 21: Cho bất phương trình $(m-1)\log_{\frac{1}{2}}^2(x-2)^2+4(m-5)\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{x-2}+4m-4\ge 0$ (m là tham số thực). Tập hợp tất cả các giá trị của m để bất phương trình đã cho có nghiệm thuộc đoạn $\left[\dfrac{5}{2},4\right]$ là

A. $\left(-\infty;\dfrac{7}{3}\right]$. **B.** $\left(\dfrac{7}{3};+\infty\right)$. **C.** $\left[-3;\dfrac{7}{3}\right]$. **D.** $[-3;+\infty)$.

Câu 22: Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $\log_2(7x^2+7)\ge\log_2(mx^2+4x+m)$ có tập nghiệm là $\mathbb{R}$. Tổng các phần tử của S là

A. 13. **B.** 10. **C.** 11. **D.** 12.

Câu 23: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để bất phương trình $\log_3\dfrac{2x^2+x+m+1}{x^2+x+1}\ge 2x^2+4x+5-2m$ có nghiệm. Số phần tử của tập hợp S bằng

A. 15. **B.** 5. **C.** 20. **D.** 10.

Câu 24: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-40;40]$ để bất phương trình $e^{x^2-4x+m}-1-m+4x-x^2\le 0$ có nghiệm thực x?

A. 46. **B.** 37. **C.** 45. **D.** 44.

Câu 25: Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(-9;9)$ của tham số m để bất phương trình $3\log x\le 2\log\left(m\sqrt{x-x^2}-(1-x)\sqrt{1-x}\right)$ có nghiệm thực?

A. 6. **B.** 7. **C.** 10. **D.** 11.