ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

TRẮC NGHIỆM VD - VDC

HÌNH HỌC OXYZ

* CÓ ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT
* PHÂN LOẠI CÁC DẠNG TOÁN
* CHIA PHẦN BÀI TẬP VÀ LỜI GIẢI RIÊNG

NEW

ÔN THI THPT QUỐC GIA

MỤC LỤC

DẠNG 1: HỆ TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN……1

DẠNG 2: MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN……8

DẠNG 3: GÓC, KHOẢNG CÁCH, VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI VỚI MẶT PHẲNG.....21

DẠNG 4: ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN.....29

DẠNG 5: GÓC, KHOẢNG CÁCH, VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI VỚI ĐƯỜNG THẲNG……44

DẠNG 6: MẶT CẦU TRONG KHÔNG GIAN.....58

DẠNG 7: MIN, MAX TRONG HH OXYZ.....69

7.1. MIN, MAX VỚI MẶT PHẲNG.....71
7.2 MIN, MAX VỚI ĐƯỜNG THẲNG.....76
7.3 MIN, MAX VỚI MẶT CẦU.....83

DẠNG 8: TỌA ĐỘ HÓA HÌNH HỌC KHÔNG GIAN.....91

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM VÀ VÉCTƠ TRONG KHÔNG GIAN

A - LÝ THUYẾT CHUNG

1. Véc tơ trong không gian

*** Định nghĩa**

Trong không gian, vecto là một đoạn thẳng có định hướng tức là đoạn thẳng có quy định thứ tự của hai đầu

□ **Chú ý:** Các định nghĩa về hai vecto bằng nhau, đối nhau và các phép toán trên các vecto trong không gian được xác định tương tự như trong mặt phẳng.

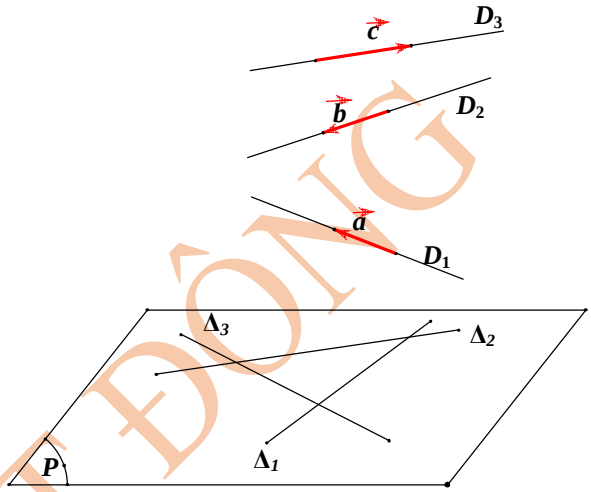
2. Vecto đồng phẳng

*** Định nghĩa:** Ba vecto $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ khác $\vec{0}$ gọi là đồng phẳng khi giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

□ **Chú ý**:

□ n vecto khác $\vec{0}$ gọi là đồng phẳng khi giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

□ Các giá của các vecto đồng phẳng có thể là các đường thẳng chéo nhau.



*** Điều kiện để 3 vecto khác $\vec{0}$ đồng phẳng**

Định lý 1:

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \exists m,n\in\mathbb{R}: \vec{a}=m\vec{b}+n\vec{c}$

*** Phân tích một vecto theo ba vecto không đồng phẳng**

□ Định lý 2: Cho 3 vecto $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ không đồng phẳng. Bất kì một vecto $\vec{a}$ nào trong không gian cũng có thể phân tích theo ba vecto đó, nghĩa là có một bộ ba số thực (x_1,x_2,x_3) duy nhất

$\vec{a}=x_1\vec{e_1}+x_2\vec{e_2}+x_3\vec{e_3}$

□ **Chú ý**: Cho vecto $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ khác $\vec{0}$:

1. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng nếu có ba số thực m,n,p không đồng thời bằng 0 sao cho: $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=0$
2. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng nếu từ $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=0\Rightarrow m=n=p=0$

3. Tọa độ của vecto

Trong không gian xét hệ trục $Oxyz$, có trục Ox vuông góc với trục Oy tại O, và trục Oz vuông góc với mặt phẳng (Oxy) tại O. Các vecto đơn vị trên từng trục Ox,Oy,Oz lần lượt là $\vec{i}=(1;0;0),\vec{j}=(0;1;0),\vec{k}=(0;0;1)$.

a) $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)\Leftrightarrow\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$

b) $M(x_M,y_M,z_M)\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=x_M\vec{i}+y_M\vec{j}+z_M\vec{k}$

c) Cho $A(x_A,y_A,z_A),B(x_B,y_B,z_B)$ ta có:

$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$ và $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.

d) M là trung điểm AB thì $M\left(\frac{x_B+x_A}{2};\frac{y_B+y_A}{2};\frac{z_B+z_A}{2}\right)$

e) Cho $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ ta có:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

- $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=b_1\\a_2=b_2\\a_3=b_3\end{cases}$
- $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_1\pm b_1;a_2\pm b_2;a_3\pm b_3)$
- $k.\vec{a}=(ka_1;ka_2;ka_3)$
- $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a};\vec{b})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$
- $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$
- $\cos\varphi=\cos(\vec{a};\vec{b})=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$ (với $\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0}$)
- $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc: $\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$
- $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương: $\Leftrightarrow\exists k\in R:\vec{a}=k\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=kb_1\\a_2=kb_2\\a_3=kb_3\end{cases}$

4. Tích có hướng và ứng dụng

Tích có hướng của $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ là:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix}a_2a_3\\b_2b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_3a_1\\b_3b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1a_2\\b_1b_2\end{vmatrix}\right)=(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1)$$

a. Tính chất:

- $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\perp\vec{a},\left[\vec{a},\vec{b}\right]\perp\vec{b}$
- $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=|\vec{a}|.|\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})$
- $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương: $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$
- $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}=0$

b. Các ứng dụng tích có hướng

- Diện tích tam giác: $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$
- Thể tích tứ diện $V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$
- Thể tích khối hộp: $V_{ABCD.A'B'C'D'}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$

5. Một số kiến thức khác

Nếu M chia đoạn AB theo tỉ số $k\left(\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}\right)$ thì ta có:

$x_M=\dfrac{x_A-kx_B}{1-k};y_M=\dfrac{y_A-ky_B}{1-k};z_M=\dfrac{z_A-kz_B}{1-k}$ với $k\neq1$

G là trọng tâm tam giác $ABC\Leftrightarrow x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3};y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3};z_G=\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}$

G là trọng tâm tứ diện $ABCD\Leftrightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

B - CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

Dạng 1. A,B,C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ cùng phương $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\vec{0}$.

Dạng 2. A,B,C là ba đỉnh tam giác $\Leftrightarrow$ A,B,C không thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ không cùng phương $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\neq\vec{0}$.

Dạng 3. $G\left(x_G;y_G;z_G\right)$ là trọng tâm tam giác ABC thì:

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3};y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3};z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}$$

Dạng 4. Cho ΔABC có các chân E,F của các đường phân giác trong và ngoài của góc A của ΔABC trên BC. Ta có: $\overrightarrow{EB}=-\frac{AB}{AC}.\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{FB}=\frac{AB}{AC}.\overrightarrow{FC}$

Dạng 5. $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|\Rightarrow$ diện tích của hình bình hành $ABCD$ là: $S_{ABCD}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$

Dạng 6. Đường cao AH của ΔABC: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AH.BC\Rightarrow AH=\frac{2.S_{\Delta ABC}}{BC}=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|}{BC}$

Dạng 7. Tìm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành: Từ t/c hbh có 4 cặp vecto bằng nhau $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ hoặc $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}...\Rightarrow$ tọa độ D.

Dạng 8. Chứng minh $ABCD$ là một tứ diện $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\neq 0$.

Dạng 9. $G\left(x_G;y_G;z_G\right)$ là trọng tâm tứ diện $ABCD$ thì:

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4};y_G=\frac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4};z_G=\frac{z_A+z_B+z_C+z_D}{4}$$

Dạng 10. Thể tích khối tứ diện $ABCD$: $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$

Dạng 11. Đường cao AH của tứ diện $ABCD$: $V=\frac{1}{3}S_{\Delta BCD}.AH\Rightarrow AH=\frac{3V}{S_{\Delta BCD}}$

Dạng 12. Thể tích hình hộp: $V_{ABCD.A'B'C'D'}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$.

Dạng 13. Hình chiếu của điểm $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ lên các mặt phẳng tọa độ và các trục:

Xem lại mục 1, công thức 17, 18.

Dạng 14. Tìm điểm đối xứng với điểm $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ qua các mặt phẳng tọa độ, các trục và gốc tọa độ:

(Thiếu tọa độ nào thì đổi dấu tọa độ đó, có mặt tọa độ nào thì để nguyên tọa độ đó)

(OXY): $A_1\left(x_A;y_A;-z_A\right)$ (OXZ): $A_2\left(x_A;-y_A;z_A\right)$ (OYZ): $A_3\left(-x_A;y_A;z_A\right)$

(OX): $A_4\left(x_A;-y_A;-z_A\right)$ (OY): $A_5\left(-x_A;y_A;-z_A\right)$ (OZ): $A_6\left(-x_A;-y_A;z_A\right)$

Qua gốc O: $A_7\left(-x_A;-y_A;-z_A\right)$

Câu 1: Cho bốn điểm $S(1,2,3);A(2,2,3);B(1,3,3);C(1,2,4)$. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của BC,CA và AB. Khi đó SMNP là:

A. Hình chóp. **B.** Hình chóp đều. **C.** Tứ diện đều. **D.** Tam diện vuông

Câu 2: Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(2;0;-2),B(3;-1;-4),C(-2;2;0)$. Điểm D trong mặt phẳng (Oyz) có cao độ âm sao cho thể tích của khối tứ diện ABCD bằng 2 và khoảng cách từ D đến mặt phẳng (Oxy) bằng 1 có thể là:

A. $D(0;-3;-1)$ **B.** $D(0;2;-1)$ **C.** $D(0;1;-1)$ **D.** $D(0;3;-1)$

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;0)$, $B(3;4;1)$, $D(-1;3;2)$. Tìm tọa độ điểm C sao cho $ABCD$ là hình thang có hai cạnh đáy AB, CD và có góc C bằng $45°$.

A. $C(5;9;5)$. **B.** $C(1;5;3)$. **C.** $C(-3;1;1)$. **D.** $C(3;7;4)$.

Câu 4: Cho ba điểm $A(3;1;0), B(0;-1;0), C(0;0;-6)$. Nếu tam giác $A'B'C'$ thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{C'C}=\vec{0}$ thì có tọa độ trọng tâm là:

A. $(1;0;-2)$. **B.** $(2;-3;0)$. **C.** $(3;-2;0)$. **D.** $(3;-2;1)$.

Câu 5: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(3;0;0), N(m,n,0), P(0;0;p)$. Biết $MN=\sqrt{13}, \widehat{MON}=60^0$, thể tích tứ diện $OMNP$ bằng 3. Giá trị của biểu thức $A=m+2n^2+p^2$ bằng

A. 29. **B.** 27. **C.** 28. **D.** 30.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ biết $A(-2;2;6), B(-3;1;8), C(-1;0;7), D(1;2;3)$. Gọi H là trung điểm của CD, $SH\perp(ABCD)$. Để khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng $\frac{27}{2}$ (đvtt) thì có hai điểm S_1, S_2 thỏa mãn yêu cầu bài toán. Tìm tọa độ trung điểm I của S_1S_2

A. $I(0;-1;-3)$. **B.** $I(1;0;3)$ **C.** $I(0;1;3)$. **D.** $I(-1;0;-3)$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$, $B(3;0;8)$, $D(-5;-4;0)$. Biết đỉnh A thuộc mặt phẳng (Oxy) và có tọa độ là những số nguyên, khi đó $\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right|$ bằng:

A. $5\sqrt{10}$. **B.** $6\sqrt{10}$. **C.** $10\sqrt{6}$. **D.** $10\sqrt{5}$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(4;2;0), B(2;4;0), C(2;2;1)$. Biết điểm $H(a;b;c)$ là trực tâm của tam giác ABC. Tính $S=a-b+3c$.

A. $S=-6$. **B.** $S=-2$. **C.** $S=6$. **D.** $S=2$.

Câu 9: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0), B(1;b;0), C(1;0;c)$ với a,b,c là các số thực thay đổi sao cho $H(3;2;1)$ là trực tâm của tam giác ABC. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=2$. **B.** $S=19$. **C.** $S=11$. **D.** $S=9$.

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(4;0;0), B(a;b;0), C(0;0;c)$ với $(a,b,c>0)$ thỏa mãn độ dài đoạn $AB=2\sqrt{10}$, góc $\widehat{AOB}=45°$ và thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng 8. Tính tổng $T=a+b+c$.

A. $T=2$. **B.** $T=10$. **C.** $T=12$. **D.** $T=14$.

Câu 11: **(THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4)**Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(5;1;5)$, $B(4;3;2)$, $C(-3;-2;1)$. Điểm $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tính $a+2b+c$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 6. **D.** -9.

Câu 12: **(KIM LIÊN HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 03)** Trong không gian $Oxyz$, cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $A'(\sqrt{3};-1;1)$, hai đỉnh B,C thuộc trục Oz và $AA'=1$ (C không

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

trùng với O). Biết véctơ $\vec{u}=(a;b;2)$ với $a,b\in\mathbb{R}$ là một véctơ chỉ phương của đường thẳng $A'C$. Tính $T=a^2+b^2$.

A. $T=5$. **B.** $T=16$. **C.** $T=4$. **D.** $T=9$.

Câu 13: **(Thuận Thành 2 Bắc Ninh)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình thang $ABCD$ có hai đáy AB, CD; có tọa độ ba đỉnh $A(1;2;1)$, $B(2;0;-1)$, $C(6;1;0)$. Biết hình thang có diện tích bằng $6\sqrt{2}$. Giả sử đỉnh $D(a;b;c)$, tìm mệnh đề đúng?

A. $a+b+c=6$. **B.** $a+b+c=5$. **C.** $a+b+c=8$. **D.** $a+b+c=7$.

Câu 14: **(KIM LIÊN HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 03)** Trong không gian $Oxyz$, cho hình thang cân $ABCD$ có các đáy lần lượt là AB,CD. Biết $A(3;1;-2)$, $B(-1;3;2)$, $C(-6;3;6)$ và $D(a;b;c)$ với $a;b;c\in\mathbb{R}$. Tính $T=a+b+c$.

A. $T=-3$. **B.** $T=1$. **C.** $T=3$. **D.** $T=-1$.

Câu 15: **(GIA LỘC TỈNH HẢI DƯƠNG 2019 lần 2)** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;-1;2)$, $B(2;-3;0)$, $C(-2;1;1)$, $D(0;-1;3)$. Gọi (L) là tập hợp tất cả các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=1$. Biết rằng (L) là một đường tròn, tính bán kính đường tròn đó?

A. $r=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **B.** $r=\dfrac{\sqrt{11}}{2}$. **C.** $r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $r=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

Câu 16: **(Nguyễn Trãi Hải Dương Lần1)** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A\left(0;4\sqrt{2};0\right)$, $B\left(0;0;4\sqrt{2}\right)$, điểm $C\in(Oxy)$ và tam giác OAC vuông tại C, hình chiếu vuông góc của O trên BC là điểm H. Khi đó điểm H luôn thuộc đường tròn cố định có bán kính bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B.** 4. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 2.

Câu 17: **(KỸ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG)** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(2;0;-3)$; $B(-1;-2;4)$; $C(2;-1;2)$. Biết điểm $E(a;b;c)$ là điểm để biểu thức $P=\left|\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$

A. $T=3$. **B.** $T=1$. **C.** $T=0$. **D.** $T=-1$.

Câu 18: **(Nam Tiền Hải Thái Bình Lần1)** Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;3;4)$, $B(9;-7;2)$. Tìm trên trục Ox toạ độ điểm M sao cho MA^2+MB^2 đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(5;0;0)$. **B.** $M(-2;0;0)$. **C.** $M(4;0;0)$. **D.** $M(9;0;0)$.

Câu 19: **(THPT Nghèn Lần1)** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;1;2);B(0;-1;-3)$. Xét điểm M thay đổi trên mặt phẳng (Oxz), giá trị nhỏ nhất của $\left|\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|$ bằng?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. 1. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Câu 20: **(Gang Thép Thái Nguyên)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;4;-1)$, $B(1;4;-1)$, $C(2;4;3)$, $D(2;2;-1)$, biết $M(x;y;z)$ để $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $x+y+z$ bằng

A. 6. **B.** $\frac{21}{4}$. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 21: **(Nguyễn Khuyến)**Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA}=\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$, $B(2;2;1)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục tung sao cho MA^2+MB^2 nhỏ nhất.

A. $M(0;-2;0)$. **B.** $M\left(0;\frac{3}{2};0\right)$. **C.** $M(0;-3;0)$. **D.** $M(0;-4;0)$.

Câu 22: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1), B(-2;1;0), C(2;-3;1)$. Điểm $S(a;b;c)$ sao cho $SA^2+2SB^2+3SC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$

A. $T=\frac{1}{2}$. **B.** $T=-1$. **C.** $T=\frac{-1}{3}$. **D.** $T=\frac{-5}{6}$.

Câu 23: **(Ngô Quyền Hà Nội)** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2t;2t;0), B(0;0;t)$ với $t>0$. Cho điểm P di động thỏa mãn $\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP}=3$. Biết rằng có giá trị $t=\frac{a}{b}$ với a,b nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản sao cho OP đạt giá trị lớn nhất là 3. Tính giá trị $Q=2a+b$?

A. 5. **B.** 13. **C.** 11. **D.** 9.

Câu 24: Trong không gian với hệ tọa độ Oxy, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ O, các đỉnh $B(m;0;0)$, $D(0;m;0)$, $A'(0;0;n)$ với $m,n>0$ và $m+n=4$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Khi đó thể tích tứ diện $BDA'M$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{245}{108}$. **B.** $\frac{9}{4}$. **C.** $\frac{64}{27}$. **D.** $\frac{75}{32}$.

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;4), B(-1;4;-4)$ và điểm $C(0;a;b)$ thỏa mãn tam giác ABC cân tại C và có diện tích nhỏ nhất. Tính $S=2a+3b$.

A. $S=\frac{62}{25}$. **B.** $S=\frac{73}{25}$. **C.** $S=\frac{239}{10}$. **D.** $S=\frac{29}{5}$.

Câu 26: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;2;0), B(2;0;-2)$ và điểm $M(a,b,c)$ với a,b,c là các số thực thay đổi thỏa mãn $a+2b-c-1=0$. Biết $MA=MB$ và góc $\widehat{AMB}$ có số đo lớn nhất. Tính $S=a+2b+3c$.

A. $S=\frac{16}{11}$. **B.** $S=\frac{15}{11}$. **C.** $S=-\frac{1}{11}$. **D.** $S=\frac{1}{11}$.

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $M(2;3;-1), N(-1;1;1), P(1;m-1;2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của số đo góc $\angle MNP$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $\arccos\frac{6}{\sqrt{85}}$. **B.** $\arcsin\frac{6}{\sqrt{85}}$ **C.** $\arccos\frac{2}{9}$ **D.** $\arcsin\frac{2}{9}$

Câu 28: **(ĐH Vinh Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(1;-1;0)$ và hai điểm $A(-4;7;3)$, $B(4;4;5)$. Giả sử M, N là hai điểm thay đổi trong mặt phẳng (Oxy) sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{a}$ và $MN=5\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của $|AM-BN|$ bằng

A. $\sqrt{17}$. **B.** $\sqrt{77}$. **C.** $7\sqrt{2}-3$. **D.** $\sqrt{82}-5$.

Câu 29: **(Lý Nhân Tông)** Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ A, B, C với $a,b,c>0$ sao cho $OA+OB+OC+AB+BC+CA=1+\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của $V_{O.ABC}$ bằng

A. $\frac{1}{108}$. **B.** $\frac{1}{486}$. **C.** $\frac{1}{54}$. **D.** $\frac{1}{162}$.

Câu 30: **(Đoàn Thượng)** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;-1;2)$, $B(-2;0;3)$, $C(0;1;-2)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $S=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $T=12a+12b+c$ có giá trị là

A. $T=3$. **B.** $T=-3$. **C.** $T=1$. **D.** $T=-1$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

A - LÝ THUYẾT CHUNG

1. Định nghĩa

Trong không gian $Oxyz$ phương trình dạng $Ax+By+Cz+D=0$ với $A^2+B^2+C^2>0$ được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng.

□ Phương trình mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$ với $A^2+B^2+C^2>0$ có vec tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(A;B;C)$.

□ Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và nhận vecto $\vec{n}=(A;B;C), \vec{n}\neq\vec{0}$ làm vecto pháp tuyến dạng $(P): A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$

□ Nếu (P) có cặp vecto $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3); \vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ không cùng phương, có giá song song hoặc nằm trên (P). Thì vecto pháp tuyến của (P) được xác định $\vec{n}=[\vec{a},\vec{b}]$.

2. Các trường hợp riêng của mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$ cho mp $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0,$ với $A^2+B^2+C^2>0.$ Khi đó:

□ $D=0$ khi và chỉ khi (α) đi qua gốc tọa độ.

□ $A=0, B\neq 0, C\neq 0, D\neq 0$ khi và chỉ khi (α) song song trục Ox.

□ $A=0, B=0, C\neq 0, D\neq 0$ khi và chỉ khi (α) song song mặt phẳng (Oxy).

□ $A,B,C,D\neq 0.$ Đặt $a=-\frac{D}{A}, b=-\frac{D}{B}, c=-\frac{D}{C}.$ Khi đó: $(\alpha): \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{c}{z}=1$

3. Phương trình mặt chắn cắt các trục tọa độ tại các điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \quad abc\neq 0$$

4. Phương trình các mặt phẳng tọa độ: $(Oyz): x=0;$ $(Oxz): y=0;$ $(Oxy): z=0.$

5. Chùm mặt phẳng (lớp chuyên):

Giả sử $(\alpha)\cap(\alpha')=d$ trong đó: $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ và $(\alpha'): A'x+B'y+C'z+D'=0.$

Pt mp chứa d có dạng: $m(Ax+By+Cz+D)+n(A'x+B'y+C'z+D')=0$ (với $m^2+n^2\neq 0$).

6. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$ cho $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ và $(\alpha'): A'x+B'y+C'z+D'=0$

□ (α) cắt $(\alpha') \Leftrightarrow \begin{cases} AB'\neq A'B \\ BC'\neq B'C \\ CB'\neq C'B \end{cases}$

□ $(\alpha)\ //\ (\alpha') \Leftrightarrow \begin{cases} AB'=A'B \\ BC'=B'C \\ CB'=C'B \end{cases}$ va $AD'\neq A'D$

□ $(\alpha)\equiv(\alpha') \Leftrightarrow \begin{cases} AB'=A'B \\ BC'=B'C \\ CB'=C'B \\ AD'=A'D \end{cases}$

Đặt biệt: $(\alpha)\perp(\alpha') \Leftrightarrow \vec{n_1}.\vec{n_2}=0 \Leftrightarrow A.A'+B.B'+C.C'=0$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

7. Khoảng cách từ $M_0(x_0;y_0;z_0)$ **đến** $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$

$$d(M,(\alpha))=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Chú ý:

- *Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song bằng khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.*
- *Nếu hai mặt phẳng không song song thì khoảng cách giữa chúng bằng* 0 .

8. Góc giữa hai mặt phẳng

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $(0^0\le\varphi\le 90^0)$

$(P): Ax+By+Cz+D=0$ và $(Q): A'x+B'y+C'z+D'=0$

$$\cos\varphi=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}\right|}{\left|\overrightarrow{n_P}\right|.\left|\overrightarrow{n_Q}\right|}=\frac{|A.A'+B.B'+C.C'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

- *Góc giữa* $(\alpha),(\beta)$ ***bằng hoặc bù*** *với góc giữa hai vtpt* $\vec{n}_1,\vec{n}_2$.
- $0^0\le\left(\widehat{(\alpha),(\beta)}\right)\le 90^0$.
- $(\alpha)\perp(\beta)\Leftrightarrow\vec{n}_1\perp\vec{n}_2\Leftrightarrow AA'+BB'+CC'=0$

1. Các hệ quả hay dùng:

- Mặt phẳng $(\alpha)//(\beta)$ thì (α) có một vtpt là $\vec{n}_\alpha=\vec{n}_\beta$ với $\vec{n}_\beta$ là vtpt của mặt phẳng (β).
- Mặt phẳng (α) vuông góc với đường thẳng d thì (α) có một vtpt là $\vec{n}_\alpha=\vec{u}_d$ với $\vec{u}_d$ là vtcp của đường thẳng d.
- Mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng $(Q)\Rightarrow\overrightarrow{n_{(P)}}\perp\overrightarrow{n_{(Q)}}$
- Mặt phẳng (P) chứa hoặc song song với đường thẳng $d\Rightarrow\overrightarrow{n_{(P)}}\perp\overrightarrow{u_d}$
- Hai điểm A,B nằm trong một mặt phẳng $(P)\Rightarrow\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{n_{(p)}}$

B - CÁC DẠNG TOÁN VỀ PHƯƠNG TRÌNH MẶT THẲNG

Muốn viết phương trình mặt phẳng cần xác định: *1 điểm và 1 véctơ pháp tuyến.*

Dạng 1. Mặt phẳng (α) ***đi qua điểm*** $M(x_0;y_0;z_0)$ ***có vtpt*** $\vec{n}=(A;B;C)$

(α): $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ hay $Ax+By+Cz+D=0$ với $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$.

Dạng 2. Mặt phẳng (α) ***đi qua điểm*** $M(x_0;y_0;z_0)$ ***có cặp vtcp*** $\vec{a},\vec{b}$

- Khi đó một vtpt của (α) là $\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$
- Sử dụng dạng toán 1 để viết phương trình mặt phẳng (α).

Dạng 3. Mặt phẳng (α) ***qua 3 điểm không thẳng hàng*** A,B,C

- Cặp vtcp: $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$
- Mặt phẳng (α) đi qua A (hoặc B hoặc C) và có vtpt $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$
- Sử dụng dạng toán 1 để viết phương trình mặt phẳng (α).

Dạng 4. Mặt phẳng trung trực đoạn AB

- Tìm tọa độ M là trung điểm của đoạn thẳng AB (dùng công thức trung điểm)
- Mặt phẳng (α) đi qua M và có vtpt $\vec{n}=\overrightarrow{AB}$
- Sử dụng dạng toán 1 để viết phương trình mặt phẳng (α).

Dạng 5. Mặt phẳng (α) ***qua*** M ***và vuông góc đường thẳng*** d ***(hoặc*** AB***)***

- Mặt phẳng (α) đi qua M và có vtpt là vtcp của đường thẳng d (hoặc $\vec{n}_\alpha=\overrightarrow{AB}$)

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

- Sử dụng dạng toán 1 để viết phương trình mặt phẳng (α).

Dạng 6. ***Mặt phẳng*** (α) ***qua*** M ***và song song*** (β)***:*** $Ax+By+Cz+D=0$

- Mặt phẳng (α) đi qua M và có vtpt $\overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{n_\beta}=(A;B;C)$
- Sử dụng dạng toán 1 để viết phương trình mặt phẳng (α).

Dạng 7. Mặt phẳng (α) đi qua M, song song với d và vuông góc với (β)

- (α) có một vtpt là $\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{n_{(\beta)}}\right]$ với $\overrightarrow{u_d}$ là vtcp của đường thẳng d và $\overrightarrow{n_{(\beta)}}$ là vtpt của (β).
- Sử dụng dạng toán 1 để viết phương trình mặt phẳng (α).

Dạng 8. ***Mặt phẳng*** (α) ***chứa*** M ***và đường thẳng*** d ***không đi qua*** M

- Lấy điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)\in(d)$
- Tính $\overrightarrow{MM_0}$. Xác định vtcp $\overrightarrow{u_d}$ của đường thẳng d
- Tính $\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{MM_0},\overrightarrow{u_d}\right]$
- Mặt phẳng (α) đi qua M (hoặc M_0) và có vtpt $\overrightarrow{n_\alpha}$

Dạng 9. ***Mặt phẳng*** (α) ***đi qua điểm*** M ***và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau*** (β), (γ)***:***

- Xác định các vtpt $\vec{n}_\beta,\vec{n}_\gamma$ của (β) và (γ)
- Một vtpt của (α) là $\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{u_\gamma},\overrightarrow{n_{(\beta)}}\right]$
- Sử dụng dạng toán 1 để viết phương trình mặt phẳng (α).

Dạng 10. ***Mặt phẳng*** (α) ***đi qua điểm*** M ***và song song với hai đường thẳng chéo nhau*** d_1,d_2 ***:***

- Xác định các vtcp $\vec{a},\vec{b}$ của các đường thẳng d_1,d_2
- Một vtpt của (α) là $\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$
- Sử dụng dạng toán 1 để viết phương trình mặt phẳng (α).

Dạng 11. ***Mặt phẳng*** (α) ***qua*** M,N ***và vuông góc*** (β)***:***

- Tính $\overrightarrow{MN}$
- Tính $\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{n_\beta}\right]$
- Mặt phẳng (α) đi qua M (hoặc N) và có vtpt $\overrightarrow{n_\alpha}$
- Sử dụng dạng toán 1 để viết phương trình mặt phẳng (α).

Dạng 12. Mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d và vuông góc với (β)

- (α) có một vtpt là $\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{n_\beta}\right]$ với $\overrightarrow{u_d}$ là vtcp của d
- Lấy điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)\in d\Rightarrow M_0(x_0;y_0;z_0)\in(\alpha)$
- Sử dụng dạng toán 1 để viết phương trình mặt phẳng (α).

Dạng 13. ***Mặt phẳng*** (α) ***chứa*** (d) ***và song song*** $\left(d'\right)$ ***(với*** $(d),(d')$ ***chéo nhau)***

- Lấy điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)\in d\Rightarrow M_0(x_0;y_0;z_0)\in(\alpha)$
- Xác định vtcp $\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{u_{d'}}$ của đường thẳng d và đường thẳng d'
- Mặt phẳng (α) đi qua M_0 và có vtpt $\vec{n}_\alpha=\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{u_{d'}}\right]$
- Sử dụng dạng toán 1 để viết phương trình mặt phẳng (α).

Dạng 14. ***Mặt phẳng*** (α) ***chứa hai đường thẳng song song*** Δ_1,Δ_2

- Chọn điểm $M_1(x_1;y_1;z_1)\in\Delta_1$ và $M_2(x_2;y_2;z_2)\in\Delta_2$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

- Tìm vtcp $\overrightarrow{u_1}$ của đường thẳng Δ_1 hoặc vtcp $\overrightarrow{u_2}$ của đường thẳng Δ_2
- Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{M_1M_2}\right]$ hoặc $\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{M_1M_2}\right]$
- Sử dụng bài toán 1 để viết phương trình mặt phẳng (α).

Dạng 15. Mặt phẳng (α) đi qua 2 đường thẳng cắt nhau d_1,d_2:

- Xác định các vtcp $\vec{a},\vec{b}$ của các đường thẳng d_1,d_2
- Một vtpt của (α) là $\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$
- Lấy một điểm M thuộc d_1 hoặc d_2 $\Rightarrow M\in(\alpha)$
- Sử dụng dạng toán 1 để viết phương trình mặt phẳng (α).

Dạng 16. Mặt phẳng (α) đi qua đường thẳng (d) cho trước và cách điểm M cho trước một khoảng k không đổi:

- Giả sử (α) có phương trình: $Ax+By+Cz+D=0\ \left(A^2+B^2+C^2\neq 0\right)$
- Lấy 2 điểm $A,B\in(d)\Rightarrow A,B\in(\alpha)$ (ta được hai phương trình (1), (2))
- Từ điều kiện khoảng cách $d(M,(\alpha))=k$, ta được phương trình (3)
- Giải hệ phương trình (1), (2), (3) (bằng cách cho giá trị một ẩn, tìm các ẩn còn lại).

Dạng 17. Mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm H :

- Giả sử mặt cầu (S) có tâm I và bán kính R. Vì H là tiếp điểm $\Rightarrow H\in(\alpha)$
- Một vtpt của (α) là $\vec{n}=\overrightarrow{IH}$
- Sử dụng dạng toán 1 để viết phương trình mặt phẳng (α).

Dạng 18. Mặt phẳng (α') đối xứng với mặt phẳng (α) qua mặt phẳng (P)

- **TH1**: $(\alpha)\cap(P)=d$:
  - Tìm M,N là hai điểm chung của $(\alpha),(P)$
  - Chọn một điểm $I\in(\alpha)$. Tìm I' đối xứng I qua (P)
  - Viết phương trình mp (α') qua I',M,N .
- **TH2**: $(\alpha)//(P)$
  - Chọn một điểm $I\in(\alpha)$. Tìm I' đối xứng I qua (P)
  - Viết phương trình mp (α') qua I' và song song với (P).

CÁC DẠNG TOÁN KHÁC

Dạng 1. Tìm điểm H là hình chiếu vuông góc của M lên (α)

- ***Cách 1:***
  - H là hình chiếu của điểm M trên $(P)\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{MH},\vec{n}\ \text{cùng phương}\\ H\in(P)\end{cases}$
  - Giải hệ tìm được H.
- ***Cách 2:***
  - Viết phương trình đường thẳng d qua M và vuông góc với (α) : ta có $\overrightarrow{a_d}=\vec{n}_\alpha$
  - Khi đó: $H=d\cap(\alpha)$ $\Leftrightarrow$ tọa độ H là nghiệm của hpt: (d) và (α)

Dạng 2. Tìm điểm M' đối xứng M qua (α)

- Tìm điểm H là hình chiếu vuông góc của M lên (α)
- H là trung điểm của MM' (dùng công thức trung điểm) $\Rightarrow$ tọa độ H.

Dạng 3. Viết phương trình mp (P') đối xứng mp (P) qua mp (Q)

- **TH1**: $(Q)\cap(P)=d$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

- Lấy hai điểm bất kỳ $\{A,B\}=(P)\cap(Q)$ (hay $A,B\in d$)
- Lấy điểm $M\in(P)$ (M bất kỳ). Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với M qua (Q).
- Mặt phẳng (P') là mặt phẳng đi qua d và M'.

□ **TH2:** $(Q)\ //\ (P)$

- Lấy điểm $M\in(P)$ (M bất kỳ). Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với M qua (Q).
- Mặt phẳng (P') là mặt phẳng đi qua M' và song song (P).

C – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(1;0;0)$ và $N(0;0;-1)$, mặt phẳng (P) qua điểm M,N và tạo với mặt phẳng $(Q):x-y-4=0$ một góc bằng 45^O. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $\left[\begin{array}{l}y=0\\2x-y-2z-2=0\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}y=0\\2x-y-2z+2=0\end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l}2x-y-2z+2=0\\2x-y-2z-2=0\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}2x-2z+2=0\\2x-2z-2=0\end{array}\right.$.

Câu 2: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$,cho $(P):x+4y-2z-6=0$,$(Q):x-2y+4z-6=0$. Lập phương trình mặt phẳng (α) chứa giao tuyến của $(P),(Q)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A,B,C sao cho hình chóp $O.ABC$ là hình chóp đều.

A. $x+y+z+6=0$. **B.** $x+y+z-6=0$. **C.** $x+y-z-6=0$. **D.** $x+y+z-3=0$.

Câu 3: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho 2 đường thẳng:

$\Delta_1:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-3}$, $\Delta_2:\left\{\begin{array}{l}x=t\\y=2-t\\z=1+2t\end{array}\right.$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+2y-6z-5=0$

Viết phương trình mặt phẳng (α) song song với hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có chu vi bằng $\dfrac{2\sqrt{365}\pi}{5}$.

A. $x-5y-3z-4=0;\ x-5y-3z+10=0$

B. $x-5y-3z+10=0$

C. $x-5y-3z+3+\sqrt{511}=0;\ x-5y-3z+3-\sqrt{511}=0$

D. $x-5y-3z-4=0$

Câu 4: Cho tứ giác $ABCD$ có $A(0;1;-1);B(1;1;2);C(1;-1;0);D(0;0;1)$. Viết phương trình của mặt phẳng (P) qua A,B và chia tứ diện thành hai khối $ABCE$ và $ABDE$ có tỉ số thể tích bằng 3.

A. $15x-4y-5z-1=0$. **B.** $15x+4y-5z-1=0$.

C. $15x+4y-5z+1=0$. **D.** $15x-4y+5z+1=0$

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $\left[\begin{array}{l}y=0\\2x-y-2z-2=0\end{array}\right.$ $Oxyz$ cho điểm $M(1;0;0)$ và $N(0;0;-1)$, mặt phẳng (P) qua điểm M,N và tạo với mặt phẳng $(Q):x-y-4=0$ một góc bằng 45^O. Phương trình mặt phẳng (P) là

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $\left[\begin{array}{l} y=0 \\ 2x-y-2z-2=0 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} y=0 \\ 2x-y-2z+2=0 \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} 2x-y-2z+2=0 \\ 2x-y-2z-2=0 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} 2x-2z+2=0 \\ 2x-2z-2=0 \end{array}\right.$.

Câu 6: Cho tứ giác $ABCD$ có $A(0;1;-1); B(1;1;2); C(1;-1;0); D(0;0;1)$. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (BCD) và chia tứ diện thành hai khối $AMNF$ và $MNFBCD$ có tỉ số thể tích bằng $\frac{1}{27}$.

A. $3x-3z-4=0$. **B.** $y-z-1=0$.

C. $y+z-4=0$. **D.** $4x+3z+4=0$

Câu 7: Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) cắt hai trục $y'Oy$ và $z'Oz$ tại $A(0,-1,0), B(0,0,1)$ và tạo với mặt phẳng (yOz) một góc 45^0.

A. $\sqrt{2}x-y+z-1=0$. **B.** $\sqrt{2}x+y-z+1=0$.

C. $\sqrt{2}x+y-z+1=0; \sqrt{2}x-y+z+1=0$. **D.** $\sqrt{2}x+y-z+1=0; \sqrt{2}x-y+z-1=0$

Câu 8: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho mặt cầu (S) có phương trình: $x^2+y^2+z^2-2x+6y-4z-2=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với giá của véc tơ $\vec{v}=(1;6;2)$, vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): x+4y+z-11=0$ và tiếp xúc với (S).

A. $\left[\begin{array}{l} 2x-y+2z-3=0 \\ 2x-y+2z+21=0 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} 2x-y+2z+3=0 \\ 2x-y+2z-21=0 \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} 2x-y+z+3=0 \\ 2x-y+z-1=0 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} 2x-y+z+13=0 \\ 2x-y+z-1=0 \end{array}\right.$

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=t_1 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$, $d_2: \begin{cases} x=1 \\ y=t_2 \\ z=0 \end{cases}$, $d_3: \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=t_3 \end{cases}$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm $H(3;2;1)$ và cắt ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 lần lượt tại A, B, C sao cho H là trực tâm tam giác ABC.

A. $2x+2y+z-11=0$. **B.** $x+y+z-6=0$.

C. $2x+2y-z-9=0$. **D.** $3x+2y+z-14=0$.

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho đường thẳng AB vuông góc với d.

A. $(P): x+2y+5z-4=0.$ **B.** $(P): x+2y+5z-5=0.$

C. $(P): x+2y-z-4=0.$ **D.** $(P): 2x-y-3=0.$

Câu 11: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$,cho hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có phương trình $d_1: \frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{3}$, $d_2: \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{4}$. Phương trình mặt phẳng (α) cách đều hai đường thẳng d_1, d_2 là

A. $7x-2y-4z=0$. **B.** $7x-2y-4z+3=0$.

C. $2x+y+3z+3=0$. **D.** $14x-4y-8z+3=0$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, viết phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai đường thẳng $d_1:\frac{x-2}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ và $d_2:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{-1}$.

A. $(P):2x-2z+1=0$. **B.** $(P):2y-2z+1=0$.

C. $(P):2x-2y+1=0$. **D.** $(P):2y-2z-1=0$.

Câu 13: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P):5x-z-4=0$ và hai đường thẳng $d_1;d_2$ lần lượt có phương trình $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{2};\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{1}$. Viết phương trình của mặt phẳng $(Q)//(P)$, theo thứ tự cắt d_1,d_2 tại A,B sao cho $AB=\frac{4\sqrt{5}}{3}$.

A. $(Q_1):5x-z+\frac{-25+\sqrt{331}}{7}=0;(Q_2):5x-z+\frac{-25-\sqrt{331}}{7}=0$.

B. $(Q_1):5x-z-2=0;(Q_2):55x+11z+14=0$.

C. $(Q_1):-5x-z-2=0;(Q_2):-55x-11z+14=0$.

D. $(Q_1):5x-z-4=0;(Q_2):55x-11z+7=0$

Câu 14: Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt các trục *Ox, Oy, Oz* lần lượt tại A,B,C (khác gốc toạ độ O) sao cho M là trực tâm tam giác ABC. Mặt phẳng (α) có phương trình là

A. $x+2y+3z-14=0$. **B.** $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}-1=0$.

C. $3x+2y+z-10=0$. **D.** $x+2y+3z+14=0$.

Câu 15: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$,cho $(P):x+4y-2z-6=0$, $(Q):x-2y+4z-6=0$. Lập phương trình mặt phẳng (α) chứa giao tuyến của $(P),(Q)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A,B,C sao cho hình chóp $O.ABC$ là hình chóp đều.

A. $x+y+z+6=0$. **B.** $x+y+z-6=0$. **C.** $x+y-z-6=0$. **D.** $x+y+z-3=0$.

Câu 16: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $N(1;1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) cắt các trục Ox,Oy,Oz lần lượt tại A,B,C (không trùng với gốc tọa độ O) sao cho N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

A. $(P):x+y+z-3=0$. **B.** $(P):x+y-z+1=0$.

C. $(P):x-y-z+1=0$. **D.** $(P):x+2y+z-4=0$.

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q):x+y+z=0$ và hai điểm $A(4,-3,1),B(2,1,1)$. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (Q) sao cho tam giác ABM vuông cân tại M.

A. $\left[\begin{array}{l}M(1;-2;1)\\M\left(\frac{17}{7};-\frac{9}{7};-\frac{8}{7}\right)\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}M(1;2;1)\\M\left(\frac{17}{7};\frac{9}{7};\frac{8}{7}\right)\end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l}M(-1;2;1)\\M\left(\frac{13}{7};-\frac{5}{7};-\frac{9}{7}\right)\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}M(1;1;1)\\M\left(\frac{9}{7};-\frac{9}{7};-\frac{8}{7}\right)\end{array}\right.$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $A(1;3;2), B(3;2;1)$ và mặt phẳng $(P): x+2y+2x-11=0$. Tìm điểm M trên (P) sao cho $MB=2\sqrt{2}, \hat{MBA}=30^0$.

A. $\left[\begin{array}{l} M(1;2;3) \\ M(1;4;1) \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} M(1;-2;3) \\ M(1;-4;1) \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} M(2;1;3) \\ M(4;1;1) \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} M(1;-2;3) \\ M(-1;4;1) \end{array}\right.$

Câu 19: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho tám điểm $A(-2;-2;0)$, $B(3;-2;0)$, $C(3;3;0)$, $D(-2;3;0)$, $M(-2;-2;5)$, $N(-2;-2;5)$, $P(3;-2;5)$, $Q(-2;3;5)$. Hỏi hình đa diện tạo bởi tám điểm đã cho có bao nhiêu mặt đối xứng.

A. 3. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 9

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;-2;0)$, $B(0;-1;1)$, $C(2;1;-1)$, $D(3;1;4)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng cách đều bốn điểm đó?

A. 1. **B.** 4. **C.** 7. **D.** Vô số.

Câu 21: Trong không gian cho điểm $M(1;-3;2)$.Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua M và cắt các trục tọa độ tại A,B,C mà $OA=OB=OC\neq 0$

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 22: Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua điểm $M(1;9;4)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C (khác gốc tọa độ) sao cho $OA=OB=OC$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 23: **(Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x-y-2z-2=0$. (Q) là mặt phẳng chứa d và tạo với mặt phẳng (P) một góc nhỏ nhất. Gọi $\overrightarrow{n_Q}=(a;b;1)$ là một vectơ pháp tuyến của (Q). Đẳng thức nào **đúng**?

A. $a+b=0$. **B.** $a-b=-1$. **C.** $a-b=1$. **D.** $a+b=-2$.

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có điểm A trùng với gốc của hệ trục tọa độ, $B(a;0;0)$, $D(0;a;0)$, $A'(0;0;b)$ $(a>0,b>0)$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Giá trị của tỉ số $\dfrac{a}{b}$ để hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD) vuông góc với nhau là

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** -1. **D.** 1.

Câu 25: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ trong đó b,c dương và mặt phẳng $(P): y-z+1=0$. Biết rằng $mp(ABC)$ vuông góc với $mp(P)$ và $d(O,(ABC))=\dfrac{1}{3}$, mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $b+c=1$. **B.** $2b+c=1$. **C.** $b-3c=1$. **D.** $3b+c=3$.

Câu 26: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(5;5;0)$, $B(1;2;3)$, $C(3;5;-1)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z+5=0$. Tính thể tích V của khối tứ diện $SABC$ biết đỉnh S thuộc mặt phẳng (P) và $SA=SB=SC$.

A. $V=\dfrac{145}{6}$. **B.** $V=145$. **C.** $V=\dfrac{45}{6}$. **D.** $V=\dfrac{127}{3}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 27: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1), M(2;4;1), N(1;5;3)$. Tìm tọa độ điểm C nằm trên mặt phẳng $(P): x+z-27=0$ sao cho tồn tại các điểm B, D tương ứng thuộc các tia AM, AN để tứ giác $ABCD$ là hình thoi.

A. $C(6;-17;21)$ **B.** $C(20;15;7)$ **C.** $C(6;21;21)$ **D.** $C(18;-7;9)$

Câu 28: **(Nguyễn Du Dak-Lak 2019)** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;2)$, $B(2;-3;1)$, $C(3;2;2)$ và mặt phẳng $(\alpha): x-3y+z=0$. Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C lên (α). D' là điểm sao cho $A'B'C'D'$ là hình bình hành. Diện tích hình bình hành $A'B'C'D'$ bằng

A. $\frac{3}{\sqrt{22}}$ **B.** $\frac{4}{\sqrt{11}}$. **C.** $\frac{8}{\sqrt{11}}$. **D.** $\frac{6}{\sqrt{22}}$.

Câu 29: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(\alpha): x-2y+z+1=0; (\beta): x-2y+z+8=0; (\delta): x-2y+z-4=0.$ Một đường thẳng Δ thay đổi cắt ba mặt phẳng $(\alpha);(\beta);(\delta)$ lần lượt tại A, B, C. Hỏi giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = AB^2 + \frac{144}{AC}$ là?

A. 108. **B.** $72\sqrt[3]{4}$. **C.** 96. **D.** 36.

Câu 30: **(THTT lần5)** Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABC$ có $SC = AB = 3\sqrt{2}$, đường thẳng AB có phương trình $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{4} = \frac{z+1}{-1}$ và góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng $60°$. Khi ba điểm A, B, C cùng với ba trung điểm của ba cạnh bên của hình chóp $S.ABC$ nằm trên một mặt cầu thì mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A. $y+z+1=0$. **B.** $x+y-4z-14=0$. **C.** $x-2y-7z-8=0$. **D.** $x+y-4z+14=0$.

Câu 31: **(Thuận Thành 2 Bắc Ninh)** Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;0;-2)$, $C(2;-1;0)$, $D(-2;2;3)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng song song với AB, CD và cắt 2 đường thẳng AC, BD lần lượt tại M, N thỏa mãn $\left(\frac{BN}{AM}\right)^2 = AM^2 - 1$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 32: **(Sở Vĩnh Phúc)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;-3;2)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng đi qua M và cắt các trục tọa độ tại A, B, C mà $OA = OB = OC \neq 0$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 33: **(SỞ NAM ĐỊNH 2018-2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$ và điểm $A(2;2;2)$. Từ A kẻ ba tiếp tuyến AB, AC, AD với B, C, D là các tiếp điểm. Viết phương trình mặt phẳng (BCD).

A. $2x+2y+z-1=0$. **B.** $2x+2y+z-3=0$.
C. $2x+2y+z+1=0$. **D.** $2x+2y+z-5=0$.

Câu 34: **(Cầu Giấy Hà Nội 2019 Lần 1)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(a;b;c)$ với $a,b,c>0$. Mặt phẳng (P) chứa điểm H và lần lượt cắt các trục Ox, Oy, Oz tại A, B, C thỏa mãn H là trực tâm của tam giác ABC. Phương trình của mặt phẳng (P) là

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $\frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}+\frac{z}{c^2}=\frac{ab+bc+ca}{abc}$ **B.** $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=3$.

C. $ax+by+cz-a^2-b^2-c^2=0$. **D.** $a^2x+b^2y+c^2z-a^3-b^3-c^3=0$.

Câu 35: **(THTT lần5)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1)$ và $B(3;-1;5)$. Mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng AB và cắt các trục Ox, Oy và Oz lần lượt tại các điểm D, E và F. Biết thể tích của tứ diện $ODEF$ bằng $\frac{3}{2}$, phương trình mặt phẳng (P) là

A. $2x-3y+4z\pm\sqrt[3]{36}=0$. **B.** $2x-3y+4z+\frac{3}{2}=0$.

C. $2x-3y+4z\pm12=0$. **D.** $2x-3y+4z\pm6=0$.

Câu 36: **(Đặng Thành Nam Đề 17)** Trong không gian $Oxyz$, có bao nhiêu mặt phẳng qua điểm $M(4;-4;1)$ và chắn trên ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz theo ba đoạn thẳng có độ dài theo thứ tự lập thành cấp số nhân có công bội bằng $\frac{1}{2}$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 37: **(KỸ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-2=0$. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa Oy cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là đường tròn có chu vi bằng 8π.

A. $(\alpha):3x-z=0$. **B.** $(\alpha):3x+z=0$.

C. $(\alpha):x-3z=0$. **D.** $(\alpha):3x+z+2=0$.

Câu 38: **(Thuận Thành 2 Bắc Ninh)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0),B(0;1;0)$. Mặt phẳng đi qua các điểm A,B đồng thời cắt tia Oz tại C sao cho tứ diện $OABC$ có thể tích bằng $\frac{1}{6}$ có phương trình dạng $x+ay+bz+c=0$. Tính giá trị $a+3b-2c$.

A. 16. **B.** 1. **C.** 10. **D.** 6

Câu 39: **(THPT PHỤ DỰC – THÁI BÌNH)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;5)$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và cắt trục tọa độ Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho M là trực tâm tam giác ABC. Thể tích của tứ diện $OABC$ là

A. $\frac{10}{6}$. **B.** 450. **C.** 10. **D.** 45.

Câu 40: **(Kim Liên)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;1;-2)$, $B(-1;1;0)$ và mặt phẳng $(P):x+y+z+1=0$. Điểm C thuộc (P) sao cho tam giác ABC vuông cân tại B. Cao độ của điểm C bằng

A. 1 hoặc $-\frac{2}{3}$. **B.** -1 hoặc $\frac{2}{3}$. **C.** -3 hoặc $\frac{1}{3}$. **D.** -1 hoặc $-\frac{1}{3}$.

Câu 41: **(Sở Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1),B(3;4;0)$, mặt phẳng $(P):ax+by+cz+46=0$. Biết rằng khoảng cách từ A,B đến mặt phẳng (P) lần lượt bằng 6 và 3. Giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ bằng

A. -3. **B.** -6. **C.** 3. **D.** 6.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 42: **(Đặng Thành Nam Đề 9)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=12$ và mặt phẳng $(P):x-2y+2z+11=0$. Xét điểm M di động trên (P); các điểm A,B,C phân biệt di động trên (S) sao cho AM,BM,CM là các tiếp tuyến của (S). Mặt phẳng (ABC) luôn đi qua điểm cố định nào dưới đây?

A. $\left(\frac{1}{4};-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$. **B.** $(0;-1;3)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};0;2\right)$. **D.** $(0;3;-1)$.

Câu 43: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$,cho tứ diện $ABCD$ có điểm $A(1;1;1),B(2;0;2),C(-1;-1;0),D(0;3;4)$. Trên các cạnh AB,AC,AD lần lượt lấy các điểm B',C',D' thỏa: $\frac{AB}{AB'}+\frac{AC}{AC'}+\frac{AD}{AD'}=4$. Viết phương trình mặt phẳng $(B'C'D')$ biết tứ diện $AB'C'D'$ có thể tích nhỏ nhất?

A. $16x+40y-44z+39=0$. **B.** $16x+40y+44z-39=0$.

C. $16x-40y-44z+39=0$. **D.** $16x-40y-44z-39=0$.

Câu 44: **(CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG – NAM ĐỊNH 2019 – LẦN 1)** Trong không gian $Oxyz$ $d:\frac{x}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P):2x-y-2z+4=0$ .Mặt phẳng chứa đường thẳng d và tạo với mặt phẳng (P) góc với số đo nhỏ nhất có phương trình là

A. $x-z-2=0$. **B.** $x+z-2=0$. **C.** $3x+y+z-1=0$. **D.** $x+y-z+3=0$.

Câu 45: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;-2;0)$, đường thẳng $\Delta:\frac{x+1}{-1}=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{1}$. Biết mặt phẳng (P) có phương trình $ax+by+cz+d=0$ đi qua A, song song với Δ và khoảng cách từ Δ tới mặt phẳng (P) lớn nhất. Biết a,b là các số nguyên dương có ước chung lớn nhất bằng 1. Hỏi tổng $a+b+c+d$ bằng bao nhiêu?

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** -1.

Câu 46: Trong không gain Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-1}$ và $d_2:\begin{cases}x=2-t\\y=3-t\\z=-2\end{cases}$. Mặt phẳng $(P):ax+by+cz+d=0$ (với $a;b;c;d\in\mathbb{R}$) vuông góc với đường thẳng d_1 và chắn d_1,d_2 đoạn thẳng có độ dài nhỏ nhất. Tính $a+b+c+d$.

A. -14 **B.** 1 **C.** -8 **D.** -12

Câu 47: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):3x+y-z+5=0$ và hai điểm $A(1;0;2)$, $B(2;-1;4)$. Tìm tập hợp các điểm $M(x;y;z)$ nằm trên mặt phẳng (P) sao cho tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất.

A. $\begin{cases}x-7y-4z+7=0\\3x-y+z-5=0\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x-7y-4z+14=0\\3x+y-z+5=0\end{cases}$.

C. $\begin{cases}x-7y-4z+7=0\\3x+y-z+5=0\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}3x-7y-4z+5=0\\3x+y-z+5=0\end{cases}$.

Câu 48: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;0;1);B(3;-2;0);C(1;2;-2)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A sao cho tổng khoảng cách từ B và C đến (P) lớn nhất biết rằng (P) không cắt đoạn BC. Khi đó, điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P)?

A. $G(-2;0;3)$. **B.** $F(3;0;-2)$. **C.** $E(1;3;1)$. **D.** $H(0;3;1)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 49: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-2;3;1)$ và hai mặt phẳng $(P):x-2y+2z+3=0$ và $(Q):2x+2y-z-5=0$. Gọi $B\in(P),C\in(Q)$ sao cho chu vi tam giác ABC nhỏ nhất. Tính $P=AB+BC+CA$.

A. $P=\dfrac{2\sqrt{321}}{9}$. **B.** $P=\dfrac{2\sqrt{231}}{9}$. **C.** $P=\dfrac{\sqrt{321}}{9}$. **D.** $P=\dfrac{\sqrt{231}}{9}$.

Câu 50: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x-2y+2z-3=0$ và hai điểm $A(1;2;3),B(3;4;5)$. Gọi M là một điểm di động trên (P). Giá trị lớn nhất của biểu thức $\dfrac{MA+2\sqrt{3}}{MB}$ bằng:

A. $3\sqrt{6+\sqrt{78}}$ **B.** $3\sqrt{3+\sqrt{78}}$ **C.** $\sqrt{54+6\sqrt{78}}$ **D.** $3\sqrt{3}$

Câu 51: **(THPT-Gia-Lộc-Hải-Dương-Lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3)** Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;1;1)$ cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ sao cho thể tích khối tứ diện $OABC$ nhỏ nhất. Khi đó $a+2b+3c$ bằng

A. 12. **B.** 21. **C.** 15. **D.** 18.

Câu 52: **(TRƯỜNG THỰC HÀNH CAO NGUYÊN – ĐẠI HỌC TÂY NGUYÊN NĂM 2019)** Cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+5)^2=16$ và điểm $A(1;2;-1)$. Điểm $B(a;b;c)$ thuộc mặt cầu sao cho AB có độ dài lớn nhất. Tính $a+b+c$.

A. -6. **B.** 2. **C.** -2. **D.** 12.

Câu 53: **(Chuyên Lý Tự Trọng Cần Thơ)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=12$ và mặt phẳng $(P):2x+2y-z-3=0$. Viết phương trình mặt phẳng song song với (P) và cắt (S) theo thiết diện là đường tròn (C) sao cho khối nón có đỉnh là tâm mặt cầu và đáy là hình tròn (C) có thể tích lớn nhất.

A. $(Q):2x+2y-z+2=0$ hoặc $(Q):2x+2y-z+8=0$.
B. $(Q):2x+2y-z-1=0$ hoặc $(Q):2x+2y-z+11=0$.
C. $(Q):2x+2y-z-6=0$ hoặc $(Q):2x+2y-z+3=0$.
D. $(Q):2x+2y-z+2=0$ hoặc $(Q):2x+2y-z+2=0$.

Câu 54: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $E(8;1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (α) qua E và cắt nửa trục dương Ox,Oy,Oz lần lượt tại A,B,C sao cho OG nhỏ nhất với G là trọng tâm tam giác ABC.

A. $x+y+2z-11=0$. **B.** $8x+y+z-66=0$.
C. $2x+y+z-18=0$. **D.** $x+2y+2z-12=0$.

Câu 55: **(KÊNH TRUYỀN HÌNH GIÁO DỤC QUỐC GIA VTV7 –2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt các trục Ox,Oy,Oz lần lượt tại ba điểm A,B,C khác với gốc tọa độ O sao cho biểu thức $\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}$ có giá trị nhỏ nhất.

A. $(P):x+2y+z-14=0$. **B.** $(P):x+2y+3z-14=0$.
C. $(P):x+2y+3z-11=0$. **D.** $(P):x+y+3z-14=0$.

Câu 56: Phương trình của mặt phẳng nào sau đây đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt ba tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A,B,C sao cho thể tích tứ diện $OABC$ nhỏ nhất?

A. $6x+3y+2z+18=0$. **B.** $6x+3y+3z-21=0$.
C. $6x+3y+3z+21=0$. **D.** $6x+3y+2z-18=0$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 57: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-z+2=0$ và hai điểm $A(3;4;1), B(7;-4;-3)$. Gọi $M(x_0;y_0;z_0)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MA^2+MB^2-2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\left(\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}\right)=96$ và $MA.MB$ đạt giá trị lớn nhất. Tính y_0.

A. $y_0=\frac{7}{3}$. **B.** $y_0=\frac{5}{3}$. **C.** $y_0=-\frac{8}{3}$. **D.** $y_0=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

GÓC

Câu 1: **(Ba Đình Lần2)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình: $ax+by+cz-1=0$ với $c<0$ đi qua 2 điểm $A(0;1;0)$, $B(1;0;0)$ và tạo với (Oyz) một góc $60°$. Khi đó $a+b+c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(5;8)$. **B.** $(8;11)$. **C.** $(0;3)$. **D.** $(3;5)$.

Câu 2: **(Đặng Thành Nam Đề 12)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=4$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=2-t\\y=t\\z=m-1-t\end{cases}$. Tổng các giá trị thực của tham số m để d cắt (S) tại hai điểm phân biệt A,B và các tiếp diện của (S) tại A,B tạo với nhau một góc lớn nhất bằng

A. $-1,5$. **B.** 3. **C.** -1. **D.** $-2,25$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;2;0)$, $B(2;0;-2)$ và mặt phẳng $(P):x+2y-z-1=0$. Tìm điểm $M\in(P)$ sao cho $MA=MB$ và góc $\widehat{AMB}$ có số đo lớn nhất.

A. $M\left(\frac{14}{11};\frac{-1}{11};\frac{1}{11}\right)$. **B.** $M\left(\frac{2}{11};\frac{4}{11};\frac{-1}{11}\right)$. **C.** $M(2;-1;-1)$. **D.** $M(-2;2;1)$.

Câu 4: Trong không gian Oxyz, cho 2 đường thẳng d: $\begin{cases}x=3+t\\y=-2-t\\z=\sqrt{2}t\end{cases}$ và d': $\begin{cases}x=t'\\y=5+t'\\z=\sqrt{2}t'-3\sqrt{2}-5\end{cases}$

Viết phương trình mặt phẳng (β) chứa (d) và tạo với mặt phẳng Oyz một góc nhỏ nhất.

A. $3x+y+\sqrt{2}z+7=0$. **B.** $3x-y-\sqrt{2}z-7=0$.

C. $-3x+y-\sqrt{2}z+7=0$. **D.** $3x+y-\sqrt{2}z-7=0$.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (Q): $x+2y-z+5=0$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{1}$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và tạo với mặt phẳng (Q) một góc nhỏ nhất là

A. $(P):y-z+4=0$ **B.** $(P):x-z+4=0$

C. $(P):x+y-z+4=0$ **D.** $(P):y-z-4=0$

Câu 6: **(SỞ QUẢNG BÌNH NĂM 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ biết $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $A_1(0;0;1)$. Gọi $(P):ax+by+cz-3=0$ (với $a,\ b,\ c\in\mathbb{Z}^*$) là phương trình mặt phẳng chứa CD_1 và tạo với mặt phẳng (BB_1D_1D) một góc có số đo nhỏ nhất. Giá trị của $T=a+b+c$ bằng

A. -1. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-1}$ và $d_2:\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 sao cho góc giữa mặt phẳng (P) và đường thẳng d_2 là lớn nhất.

A. $x+y+z+6=0$. **B.** $7x-y+5z-9=0$. **C.** $x+y-z-6=0$. **D.** $x+y+z-3=0$.

Câu 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-1}$ và $d_2:\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d_1 sao cho góc giữa mặt phẳng (P) và đường thẳng d_2 là lớn nhất. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-1;2)$.

B. (P) qua điểm $A(0;2;0)$.

C. (P) song song với mặt phẳng $(Q):7x-y+5z-3=0$.

D. (P) cắt d_2 tại điểm $B(2;-1;4)$.

Câu 9: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=-t\\y=-1+2t\\z=2+t\end{cases}$ và mp (P): $2x-y-2z-2=0$. Viết phương trình mặt phẳng (R) qua d và tạo với (P) một góc nhỏ nhất.

A. $x-y-z+3=0$ **B.** $x+y-z+3=0$

C. $x+y+z+3=0$ **D.** $x-y+z+3=0$

KHOẢNG CÁCH

Câu 10: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(10;2;1)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{3}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A, song song với đường thẳng d sao cho khoảng cách giữa d và (P) lớn nhất. Khoảng cách từ điểm $M(-1;2;3)$ đến mp(P) là

A. $\frac{97\sqrt{3}}{15}$. **B.** $\frac{76\sqrt{790}}{790}$. **C.** $\frac{2\sqrt{13}}{13}$. **D.** $\frac{3\sqrt{29}}{29}$.

Câu 11: Cho mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(3,0,4),B(-3,0,4)$ và hợp với mặt phẳng (xOy) một góc 30^0 và cắt $y'Oy$ tại C. Tính khoảng cách từ O đến (P).

A. $4\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $2\sqrt{3}$

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(-2;0;3)$, $M(0;0;1)$ và $N(0;3;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua các điểm M, N sao cho khoảng cách từ điểm B đến (P) gấp hai lần khoảng cách từ điểm A đến (P). Có bao mặt phẳng (P) thỏa mãn đầu bài?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. Có vô số mặt phẳng (P). **B.** Chỉ có một mặt phẳng (P).

C. Không có mặt phẳng (P) nào. **D.** Có hai mặt phẳng (P).

Câu 13: **(ĐOÀN THƯỢNG-HẢI DƯƠNG LẦN 2 NĂM 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;2;1)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho độ dài OA, OB, OC theo thứ tự tạo thành một cấp số nhân có công bội bằng 2. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O tới mặt phẳng (α).

A. $\frac{4}{\sqrt{21}}$. **B.** $\frac{\sqrt{21}}{21}$. **C.** $\frac{3\sqrt{21}}{7}$. **D.** $9\sqrt{21}$.

Câu 14: **(SGD-Nam-Định-2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(1,-2,0)$; $B(3,3,2)$; $C(-1,2,2)$; $D(3,3,1)$. Độ dài đường cao của tứ diện $ABCD$ hạ từ đỉnh D xuống mặt phẳng (ABC) bằng

A. $\frac{9}{7\sqrt{2}}$ **B.** $\frac{9}{7}$ **C.** $\frac{9}{14}$ **D.** $\frac{9}{\sqrt{2}}$

Câu 15: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hai mặt phẳng $4x-4y+2z-7=0$ và $2x-2y+z+1=0$ chứa hai mặt của hình lập phương. Thể tích khối lập phương đó là

A. $V=\frac{27}{8}$ **B.** $V=\frac{81\sqrt{3}}{8}$ **C.** $V=\frac{9\sqrt{3}}{2}$ **D.** $V=\frac{64}{27}$

Câu 16: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(BC'D)$.

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Câu 17: **(SỞ GDĐT KIÊN GIANG 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho $M(1;2;-1)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm M và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất. Mặt phẳng (P) cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

A. $27\sqrt{6}\pi$. **B.** $216\sqrt{6}\pi$. **C.** 972π. **D.** $\frac{243\pi}{2}$.

Câu 18: **(KINH MÔN HẢI DƯƠNG 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;3;5)$ cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại ba điểm A, B, C sao cho OA, OB, OC theo thứ tự lập thành cấp số nhân có công bội bằng 3. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (P) là

A. $\frac{16}{\sqrt{91}}$. **B.** $\frac{24}{\sqrt{91}}$. **C.** $\frac{32}{\sqrt{91}}$. **D.** $\frac{18}{\sqrt{91}}$.

Câu 19: **(NGUYỄN TRUNG THIÊN HÀ TĨNH)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{3}$ và mặt phẳng $(P):2x+y-z=0$. Mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng (P). Khoảng cách từ điểm $O(0;0;0)$ đến mặt phẳng (Q) bằng

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{1}{5}$.

Câu 20: **(THPT SỐ 1 TƯ NGHĨA LẦN 2 NĂM 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P_m): mx+m(m+1)y+(m-1)^2z-1=0$ (m là tham số) và đường thẳng d có vec-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2;3)$. Đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (Oxy), Δ vuông góc với d và cắt mặt phẳng (P_m) tại một điểm cố định. Tính khoảng cách h từ $A(1;-5;0)$ đến đường thẳng Δ.

A. $h=5\sqrt{2}$. **B.** $h=\sqrt{19}$. **C.** $h=\sqrt{21}$. **D.** $h=2\sqrt{5}$.

Câu 21: **(KINH MÔN II LẦN 3 NĂM 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;2;2)$, $B(2;1;2)$, $C(-1;5;1)$, $D(3;1;1)$ và $E(0;-1;2)$. Có bao nhiêu mặt phẳng cách đều năm điểm đã cho?

A. Vô số. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 22: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, gọi (α) là mặt phẳng qua hai điểm $A(2;0;1)$ và $B(-2;0;5)$ đồng thời hợp với mặt phẳng (Oxz) một góc 45^0. Khoảng cách từ O tới (α) là

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a, b, c dương. Biết A, B, C di động trên các tia Ox, Oy, Oz sao cho $a+b+c=2$. Biết rằng khi a, b, c thay đổi thì quỹ tích tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ thuộc mặt phẳng (P) cố định. Tính khoảng cách từ $M(2016;0;0)$ tới mặt phẳng (P).

A. 2017. **B.** $\frac{2014}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{2016}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{2015}{\sqrt{3}}$.

Câu 24: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(1,0,0)$ có hình chiếu trên mặt phẳng $(P): x-2y-2z+8=0$ là d'. Giả sử giá trị lớn nhất và nhỏ nhất khoảng cách từ điểm $M(2,-3,-1)$ tới d' là α và β. Tính giá trị của $T=\alpha+\beta$?

A. $\sqrt{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$ **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

Câu 25: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(0;-1;2)$ và $N(-1;1;3)$. Mặt phẳng (P) đi qua M, N sao cho khoảng cách từ $K(0;0;2)$ đến (P) đạt giá trị lớn nhất. (P) có vectơ pháp tuyến là

A. $(1;1;-1)$ **B.** $(1;-1;1)$ **C.** $(1;-2;1)$ **D.** $(2;-1;1)$

Câu 26: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ cho $A(2;1;6), B(1;2;4)$ và $I(1;3;2)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B sao cho khoảng cách từ I đến (P) lớn nhất.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $3x+7y+6z-35=0$. **B.** $7x-y+5z-9=0$.
C. $x+y-z-6=0$. **D.** $x+y+z-3=0$.

Câu 27: **(SỞ NAM ĐỊNH 2018-2019)**Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(m;0;0)$, $N(0;n;0)$, $P(0;0;p)$ không trùng với gốc tọa độ và thỏa mãn $m^2+n^2+p^2=3$. Tìm giá trị lớn nhất của khoảng cách từ O đến mặt phẳng (MNP).

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{1}{27}$.

Câu 28: Cho điểm $A(0;8;2)$ và mặt cầu (S) có phương trình $(S):(x-5)^2+(y+3)^2+(z-7)^2=72$ và điểm $B(9;-7;23)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A tiếp xúc với (S) sao cho khoảng cách từ B đến (P) là lớn nhất. Giả sử $\vec{n}=(1;m;n)$ là một vectơ pháp tuyến của (P). Lúc đó

A. $m.n=2$. **B.** $m.n=-2$. **C.** $m.n=4$. **D.** $m.n=-4$.

Câu 29: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$ với a, b, c là những số dương thay đổi thỏa mãn $a^2+4b^2+16c^2=49$. Tính tổng $S=a^2+b^2+c^2$ khi khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) đạt giá trị lớn nhất.

A. $S=\frac{51}{5}$. **B.** $S=\frac{49}{4}$. **C.** $S=\frac{49}{5}$. **D.** $S=\frac{51}{4}$.

Câu 30: **(Chuyên Sơn La Lần 3 năm 2018-2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi $(P):ax+by+cz-3=0$ (với a,b,c là các số nguyên không đồng thời bằng 0) là mặt phẳng đi qua hai điểm $M(0;-1;2), N(-1;1;3)$ và không đi qua điểm $H(0;0;2)$. Biết rằng khoảng cách từ H đến mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất. Tổng $T=a-2b+3c+12$ bằng

A. -16. **B.** 8. **C.** 12. **D.** 16.

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI

Câu 31: **(Sở Hà Nam)**Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x-2y+z+7=0$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4z-10=0$. Gọi (Q) là mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có chu vi bằng 6π. Hỏi (Q) đi qua điểm nào trong số các điểm sau?

A. $M(6;0;1)$. **B.** $N(-3;1;4)$. **C.** $J(-2;-1;5)$. **D.** $K(4;-1;-2)$.

Câu 32: **(NGÔ SĨ LIÊN BẮC GIANG LẦN IV NĂM 2019)** Cho hai mặt cầu $(S_1):x^2+y^2+z^2=6$ và $(S_2):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=6$. Biết rằng mặt phẳng $(P):ax+by+cz+6=0(a>0)$ vuông góc với mặt phẳng $(Q):3x+2y+z-1=0$ đồng thời tiếp xúc với cả hai mặt cầu đã cho. Tích abc bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 33: **(THPT Sơn Tây Hà Nội 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$ và đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng (P) và

(Q) chứa d và tiếp xúc với mặt cầu (S) tại A và B. Gọi $H(a;b;c)$ là trung điểm AB. Giá trị $a+b+c$ bằng

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{5}{6}$.

Câu 34: **(Ba Đình Lần2)** Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): mx+2y-z+1=0$ (m là tham số). Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=9$ theo một đường tròn có bán kính bằng 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m?

A. $m=\pm 1$. **B.** $m=\pm 2+\sqrt{5}$. **C.** $m=\pm 4$. **D.** $m=6\pm 2\sqrt{5}$.

Câu 35: **(Trần Đại Nghĩa)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $2x+2y-z-7=0$ và mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$. Mặt phẳng (Q) song song với (P) và cắt (S) theo một đường tròn có chu vi bằng 6π có phương trình là

A. $(Q):2x+2y-z+17=0$. **B.** $(Q):2x+2y-z+7=0$.

C. $(Q):2x+2y-z-19=0$. **D.** $(Q):2x+2y-z-17=0$.

Câu 36: **(Đặng Thành Nam Đề 5)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a,b,c\neq 0$. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $M\left(\frac{2}{3};\frac{4}{3};\frac{4}{3}\right)$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=1$. Thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng:

A. 4. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 12.

Câu 37: **(ĐOÀN THƯỢNG-HẢI DƯƠNG LẦN 2 NĂM 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-2}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{4}$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=2$. Hai mặt phẳng (P) và (Q) chứa d và tiếp xúc với (S). Gọi M, N là tiếp điểm. Tính độ dài đoạn thẳng MN.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\frac{4}{\sqrt{3}}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** 4.

Câu 38: **(Sở Phú Thọ)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+2)^2+(y-1)^2+\left(z+\sqrt{2}\right)^2=9$ và hai điểm $A\left(-2;0;-2\sqrt{2}\right), B(-4;-4;0)$. Biết rằng tập hợp các điểm M thuộc (S) sao cho $MA^2+\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MB}=16$ là một đường tròn. Bán kính của đường tròn đó bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 39: **(THPT-Toàn-Thắng-Hải-Phòng)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+m-3=0$. Tìm số thực m để $(\beta):2x-y+2z-8=0$ cắt (S) theo một đường tròn có chu vi bằng 8π.

A. $m=-3$. **B.** $m=-4$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=-2$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 40: **(Chuyên KHTN)** Biết rằng trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ có hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng thỏa mãn các điều kiện sau: đi qua hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(0;-2;2)$, đồng thời cắt các trục tọa độ Ox, Oy tại hai điểm cách đều O. Giả sử (P) có phương trình $x+b_1y+c_1z+d_1=0$ và (Q) có phương trình $x+b_2y+c_2z+d_2=0$. Tính giá trị biểu thức $b_1b_2+c_1c_2$.

A. 7. **B.** -9. **C.** -7. **D.** 9.

Câu 41: **(CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIỆU ĐỒNG THÁP 2019 LẦN 2)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) đi qua điểm $M(2;5;-2)$ và tiếp xúc với các mặt phẳng $(\alpha):x=1$, $(\beta):y=1$, $(\gamma):z=-1$. Bán kính của mặt cầu (S) bằng

A. 4. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 42: **(Đề thi HK2 Lớp 12-Chuyên Nguyễn Du- Đăk Lăk)**Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm thuộc trục Oz. Biết mặt phẳng (Oxy) và mặt phẳng $(\alpha):z=2$ lần lượt cắt (S) theo hai đường tròn có bán kính 2 và 4. Phương trình của (S) là

A. $x^2+y^2+(z-2)^2=16$. **B.** $x^2+y^2+(z-4)^2=16$.

C. $x^2+y^2+(z-4)^2=20$. **D.** $x^2+y^2+(z-2)^2=20$.

Câu 43: **(Đề thi HK2 Lớp 12-Chuyên Nguyễn Du- Đăk Lăk)**Trong không gian $Oxyz$, cho các mặt phẳng $(P):2x+4y-z-7=0$, $(Q):4x+5y+z-14=0$, $(R):x+2y-2z-2=0$ và $(S):x+2y-2z+4=0$.

Biết mặt cầu $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=D$ có tâm nằm trên (P) và (Q), cùng tiếp xúc với (R) và (S). Giá trị $a+b+c$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Câu 44: **(Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019)** Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;2)$ và mặt cầu $(S):x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$. Mặt phẳng thay đổi luôn đi qua A cắt (S) theo thiết diện là đường tròn. Hãy tìm bán kính của đường tròn có chu vi nhỏ nhất.

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 45: **(Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019)** Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;2)$ và mặt cầu $(S):x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$. Mặt phẳng thay đổi luôn đi qua A cắt (S) theo thiết diện là đường tròn. Hãy tìm bán kính của đường tròn có chu vi nhỏ nhất.

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 46: **(Chuyên Hưng Yên Lần 3)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x-z+6=0$ và hai mặt cầu $(S_1):x^2+y^2+z^2=25$; $(S_2):x^2+y^2+z^2+4x-4z+7=0$. Biết rằng tập hợp tâm I các mặt cầu tiếp xúc với cả hai mặt cầu (S_1), (S_2) và tâm I nằm trên (P) là một đường cong. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong đó.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $\frac{7}{3}\pi$. **B.** $\frac{7}{9}\pi$. **C.** $\frac{9}{7}\pi$. **D.** $\frac{7}{6}\pi$.

Câu 47: **(Thuận Thành 2 Bắc Ninh)** Trong không gian $Oxyz$, cho (P) $x+2y-2z+5=0$ và 2 mặt cầu (S_1): $(x-2)^2+y^2+(z+1)^2=1$, (S_2): $(x+4)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=4$. Gọi M, A, B lần lượt thuộc mặt phẳng (P) và hai mặt cầu (S_1), (S_2). Tìm giá trị nhỏ nhất $S=MA+MB$.

A. $S_{\min}=11$. **B.** $S_{\min}=2\sqrt{14}-3$. **C.** $S_{\min}=\sqrt{15}-3$. **D.** $S_{\min}=3\sqrt{6}-3$.

Câu 48: **(THPT-Toàn-Thắng-Hải-Phòng)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;2;1)$, $B(3;-1;1)$, $C(-1;-1;1)$. Gọi (S_1) là mặt cầu tâm A và bán kính $R_1=2$. (S_2), (S_3) lần lượt là mặt cầu tâm B, C và đều có bán kính bằng 1. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với (S_2), (S_3) và cắt (S_1) theo giao tuyến là đường tròn bán kính $r=\sqrt{3}$.

A. 3. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 49: **(PHÂN TÍCH BL_PT ĐỀ ĐH VINHL3 -2019..)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-3;4)$, đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{2}$ và mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=20$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d thỏa mãn khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất. Mặt cầu (S) cắt (P) theo đường tròn có bán kính bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG NÂNG CAO

A - LÝ THUYẾT CHUNG

1. Định nghĩa

Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có vec tơ chỉ phương

$$\vec{a}=(a_1;a_2;a_3),\vec{a}\neq\vec{0}:\begin{cases}x=x_0+a_1t\\y=y_0+a_2t\\z=z_0+a_3t\end{cases}$$

Nếu $a_1;a_2;a_3$ đều khác không. Phương trình đường thẳng Δ viết dưới dạng chính tắc như sau:

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$$

Ngoài ra đường thẳng còn có dạng tổng quát là: $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$

với $\forall A_1,B_1,C_1,A_2,B_2,C_2$ thỏa $A_1^2+B_1^2+C_1^2>0,A_2^2+B_2^2+C_2^2>0.$

2. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Chương trình cơ bản	Chương trình nâng cao
1)Vị trí tương đối của hai đường thẳng Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=x_0+a_1t\\y=y_0+a_2t\\z=z_0+a_3t\end{cases}$; $d':\begin{cases}x=x_0'+a_1't'\\y=y_0'+a_2't'\\z=z_0'+a_3't'\end{cases}$ Vtcp $\vec{u}$ đi qua M_0 và d' có vtcp $\vec{u'}$ đi qua M_0' $\vec{u},\vec{u'}$ ***cùng phương:*** $d//d'\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{u}=k\vec{u'}\\M_0\notin d'\end{cases}$; $d\equiv d'\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{u}=k\vec{u'}\\M_0\in d'\end{cases}$ $\vec{u},\vec{u'}$ ***không cùng phương:*** $\begin{cases}x_0+a_1t=x_0'+a_1't'\\y_0+a_2t=y_0'+a_2't'\\z_0+a_3t=y_0'+a_3't'\end{cases}(I)$ d chéo d' $\Leftrightarrow$ hệ phương trình (1) vô nghiệm d cắt d' $\Leftrightarrow$ hệ phương trình (1) có 1 nghiệm	***1) Vị trí tương đối của hai đường thẳng*** Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=x_0+a_1t\\y=y_0+a_2t\\z=z_0+a_3t\end{cases}$; $d':\begin{cases}x=x_0'+a_1't'\\y=y_0'+a_2't'\\z=z_0'+a_3't'\end{cases}$ Vtcp $\vec{u}$ đi qua M_0 và d' có vtcp $\vec{u'}$ đi qua M_0' $(d)//(d')\Leftrightarrow\begin{cases}[\vec{u},\vec{u'}]=\vec{0}\\M_0\notin d'\end{cases}$ $(d)\equiv(d')\Leftrightarrow\begin{cases}[\vec{u},\vec{u'}]=\vec{0}\\M_0\in d'\end{cases}$ (d) cat $(d')\Leftrightarrow\begin{cases}[\vec{u},\vec{u'}]\neq\vec{0}\\[\vec{u},\vec{u'}].\overrightarrow{MM_0}=0\end{cases}$ (d) *cheo* $(d')\Leftrightarrow[\vec{u},\vec{u'}].\overrightarrow{MM_0}\neq0$

3. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

Phương pháp 1	Phương pháp 2
Trong không gian $Oxyz$ cho: (α):Ax+By+Cz+D=0 và $d:\begin{cases}x=x_0+a_1t\\y=y_0+a_2t\\z=z_0+a_3t\end{cases}$	Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng d qua $M(x_0;y_0;z_0)$ có vtcp: $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và (α):Ax+By+Cz+D=0 có vtpt $\vec{n}=(A;B;C)$ (d) cắt $(\alpha)\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{n}\neq0$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Pt: $A(x_0+a_1t)+B(y_0+a_2t)+C(z_0+a_3t)+D=0(1)$ Phương trình (1) vô nghiệm thì $d//(\alpha)$ Phương trình (1) có 1 nghiệm thì d cắt (α) Phương trình (1) có vô số nghiệm thì $d\in(\alpha)$ Đặc biệt: $d\perp(\alpha)\Leftrightarrow \vec{a},\vec{n}$ cùng phương	$(d)//(\alpha)\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{a}.\vec{n}=0\\ M\notin(\alpha)\end{cases}$ (d) nằm trên mp $(\alpha)\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{a}.\vec{n}=0\\ M\in(\alpha)\end{cases}$

4. Khoảng cách

Khoảng cách từ $M(x_0;y_0;z_0)$ **đến mặt phẳng** (α):Ax+By+Cz+D=0 **cho bởi công thức**

$$d(M_0,\alpha)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Khoảng cách từ M đến đường thẳng (d)

Phương pháp 1:

Lập ptmp (α) đi qua M và vuông góc với d.

Tìm tọa độ giao điểm H của mp (α) và d

$d(M,d)=MH$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Phương pháp 1:

d đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$; có vtpt $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$

d' đi qua $M'(x_0';y_0';z_0')$; vtpt $\vec{a'}=(a_1';a_2';a_3')$

Lập phương trình mp (α) chứa d và song song với d': $d(d,d')=d(M',(\alpha))$

Khoảng cách từ M đến đường thẳng (d)

Phương pháp 2:

(d đi qua M_0 có vtcp $\vec{u}$)

$$d(M,\Delta)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}$$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Phương pháp 2:

d đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$; có vtpt $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$

d' đi qua $M'(x_0';y_0';z_0')$; vtpt $\vec{a'}=(a_1';a_2';a_3')$

$$d(\Delta,\Delta')=\frac{\left|\left[\vec{a},\vec{a'}\right].\overrightarrow{MM'}\right|}{\left|\left[\vec{a},\vec{a'}\right]\right|}=\frac{V_{hop}}{S_{day}}$$

5. Góc giữa hai đường thẳng

□ Góc giữa hai đường thẳng

(Δ) đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$ có VTCP $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$

(Δ') đi qua $M'(x_0';y_0';z_0')$ có VTCP $\vec{a'}=(a_1';a_2';a_3')$

$$\cos\varphi=\left|\cos\left(\vec{a},\vec{a'}\right)\right|=\frac{|\vec{a}.\vec{a'}|}{|\vec{a}|.|\vec{a'}|}=\frac{|a_1.a'_1+a_2.a'_2+a_3.a'_3|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{a'^2_1+a'^2_2+a'^2_3}}$$

6. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng (Δ) đi qua M_0 có VTCP $\vec{a}$, mặt phẳng (α) có VTPT $\vec{n}=(A;B;C)$.

Gọi φ là góc hợp bởi (Δ) và mặt phẳng (α): $\sin\varphi=\left|\cos\left(\vec{a},\vec{n}\right)\right|=\frac{|Aa_1+Ba_2+Ca_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$

B - CÁC DẠNG TOÁN VỀ PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Để lập phương trình đường thẳng d ta cần xác định ***một điểm thuộc d và một VTCP*** *của nó.*

Dạng 1. Viết phương trình đường thẳng (d) ***đi qua*** $M_0(x_0;y_0;z_0)$ ***và có vtcp*** $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$**:**

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$$(d):\begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases} \quad (t \in R)$$ ***hoặc*** $$(d):\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$$

Dạng 2. Đường thẳng d đi qua A và B :

- Đường thẳng d đi qua A (hoặc B) có vtcp $\vec{a_d} = \overrightarrow{AB}$
- Sử dụng dạng 1 để viết phương trình đường thẳng d.

Dạng 3. Đường thẳng d qua A và song song Δ

- Đường thẳng d đi qua A và có vtcp $\vec{u_d} = \vec{u_\Delta}$
- Sử dụng dạng 1 để viết phương trình đường thẳng d.

Dạng 4. Đường thẳng d qua A và vuông góc mp(α)

- Đường thẳng d đi qua A và có vtcp $\vec{u_d} = \vec{n_\alpha}$
- Sử dụng dạng 1 để viết phương trình đường thẳng d.

Dạng 5. Đường thẳng (d) qua A và vuông góc 2 đường thẳng d_1 và d_2:

- Đường thẳng d đi qua A và có vtcp $\vec{u} = \left[\vec{u_{d_1}}, \vec{u_{d_2}}\right]$
- Sử dụng dạng 1 để viết phương trình đường thẳng d.

Dạng 6. Đường thẳng (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P),(Q)$:

- ***Cách 1***: Tìm một điểm và một vtcp.

  – Tìm toạ độ một điểm $A \in d$: Bằng cách giải hệ phương trình $\begin{cases}(P)\\(Q)\end{cases}$

(với việc chọn giá trị cho một ẩn ta sẽ giải hệ tìm giá trị hai ẩn còn lại)

  – Tìm một vtcp của d: $\vec{u_d} = \left[\vec{n_P}, \vec{n_Q}\right]$

- ***Cách 2***: Tìm hai điểm A, B thuộc d, rồi viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm đó.

Dạng 7. Đường thẳng (d) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và vuông góc với hai đường thẳng d_1, d_2:

- Vì $d \perp d_1$, $d \perp d_2$ nên một vtcp của d là: $\vec{u_d} = \left[\vec{u_{d_1}}, \vec{u_{d_2}}\right]$
- Sử dụng dạng 1 để viết phương trình đường thẳng d.

Dạng 8. Đường thẳng (d) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$, vuông góc và cắt đường thẳng Δ .

- ***Cách 1***: Gọi H là hình chiếu vuông góc của M_0 trên đường thẳng Δ

Ta có $\begin{cases} H \in \Delta \\ \overrightarrow{M_0H} \perp \vec{u}_\Delta \end{cases} \Rightarrow H$

Khi đó đường thẳng d là đường thẳng đi qua M_0, H (trở về dạng 2).

- ***Cách 2***: Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M_0 và vuông góc với Δ; (Q) là mặt phẳng đi qua M_0 và chứa Δ. Khi đó $d = (P) \cap (Q)$ *(trở về dạng 6).*

- ***Cách 3***: Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M_0 và vuông góc với Δ

  - Tìm điểm $B = (P) \cap \Delta$

  - Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm M_0, B *(quay về dạng 2).*

Dạng 9. Đường thẳng (d) nằm trong mặt phẳng (P), vuông góc và cắt đường thẳng Δ

- Tìm giao điểm M của Δ và $(P) \Rightarrow M \in d$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

□ Vì $\begin{cases}\overrightarrow{u_d}\perp\overrightarrow{u_\Delta}\\ \overrightarrow{u_d}\perp\overrightarrow{n_P}\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{u_d}=\left[\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{n_P}\right]$

Dạng 10. Đường thẳng (d) qua A và cắt d_1,d_2:

□ $d=(\alpha)\cap(\beta)$ với mp(α) chứa A và d_1; mp(β) chứa A và d_2 *(trở về dạng 6)*

Dạng 11. Đường thẳng (d) nằm trong mặt phẳng (P) và cắt cả hai đường thẳng d_1,d_2:

□ Tìm các giao điểm $A=d_1\cap(P),B=d_2\cap(P)$. Khi đó d chính là đường thẳng AB *(về dạng 2).*

Dạng 12. Đường thẳng $(d)//\Delta$ và cắt d_1,d_2:

□ Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d và d_1, mặt phẳng (Q) chứa d và d_2

Khi đó $d=(P)\cap(Q)$ *(trở về dạng 6).*

Dạng 13. Đường thẳng (d) qua A và $\perp d_1$, cắt d_2:

□ ***Cách 1:***

- Viết phương trình mp (α) qua A và vuông góc với d_1
- Tìm $B=d_2\cap(\alpha)$
- Khi đó (d) chính là đường thẳng AB *(về dạng 2).*

□ ***Cách 2:***

- Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với d_1
- Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa A và d_2
- Khi đó $d=(P)\cap(Q)$. *(trở về dạng 6)*

□ ***Cách 3:***

- Viết phương trình tham số t của đường thẳng d_2 (nếu chưa có).
- Tìm điểm $B=d\cap d_2$ (B có tọa độ theo tham số t) thỏa mãn $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_{d_1}}=0$

Giải phương trình tìm được $t\Rightarrow B$

- Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm A,B.

Dạng 14. Đường thẳng $(d)\perp(P)$ cắt d_1,d_2:

□ Tìm mp(α) chứa $d_1,\perp(P)$; $mp(\beta)$ chứa $d_2,\perp(P)$

□ $d=(\alpha)\cap(\beta)$ *(trở về dạng 6).*

Dạng 15. Đường thẳng d' là hình chiếu của d lên (α):

□ ***Cách 1:***

- Viết phương trình mặt phẳng (β) chứa d và vuông góc với (α).
- Đường thẳng d' là giao tuyến của (α) và (β) *(trở về dạng 6).*

□ ***Cách 2:***

- Xác định A là giao điểm của d và (α).
- Lấy điểm $M\neq A$ trên d. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M vuông góc với (α).
- Tìm tọa độ điểm H là giao điểm của Δ với (α).
- Đường thẳng d' chính là đường thẳng AH *(trở về dạng 2).*

Đặc biệt: Nếu d song song (α) thì d' là đường thẳng đi qua H và song song với d.

Dạng 16. Phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau (d_1) và (d_2):

□ ***Cách 1:***

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

- Chuyển phương trình đường thẳng $(d_1),(d_2)$ về dạng tham số và xác định $\vec{u_1},\vec{u_2}$ lần lượt là vtcp của $(d_1),(d_2)$.

- Lấy A,B lần lượt thuộc $(d_1),(d_2)$ (tọa độ A,B phụ thuộc vào tham số).

- Giả sử AB là đường vuông góc chung. Khi đó: $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\perp\vec{u_1}=0\\ \overrightarrow{AB}\perp\vec{u_2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\vec{u_1}=0\\ \overrightarrow{AB}.\vec{u_2}=0\end{cases}\quad(*)$

Giải hệ phương trình $(*)$ tìm ra giá trị của tham số. Từ đó tìm được A,B.

- Viết phương trình đường vuông góc chung AB.

☐ ***Cách 2:***

- Vì d ⊥ d₁ và d ⊥ d₂ nên một vtcp của d là: $\vec{a_d}=\left[\vec{a_{d_1}},\vec{a_{d_2}}\right]$

- Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa 2 đường thẳng cắt nhau d và d_1, bằng cách:

+ Lấy một điểm A trên d_1 .

+ Một vtpt của (P) là: $\vec{n_P}=\left[\vec{a},\vec{a_{d_1}}\right]$

- Tương tự lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa 2 đường thẳng cắt nhau d và d_2.

Khi đó $d=(P)\cap(Q)$ *(trở về dạng 6).*

☐ ***Cách 3:***

- Vì $d\perp d_1$ và $d\perp d_2$ nên một vtcp của d là: $\vec{a_d}=\left[\vec{a_{d_1}},\vec{a_{d_2}}\right]$

- Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa 2 đường thẳng cắt nhau d và d_1, bằng cách:

+ Lấy một điểm A trên d_1 .

+ Một vtpt của (P) là: $\vec{n_P}=\left[\vec{a},\vec{a_{d_1}}\right]$

- Tìm $M=d_2\cap(P)$. Khi đó viết phương trình d qua M có vtcp $\vec{a_d}$.

CÁC DẠNG TOÁN KHÁC

Dạng 1. Tìm H ***là hình chiếu của*** M ***trên đường thẳng*** (d)

☐ ***Cách 1:***

- Viết phương trình mp(α) qua M và vuông góc với(d): ta có $\vec{n}_\alpha=\vec{a_d}$

- Khi đó: $H=d\cap(\alpha)\Leftrightarrow$ tọa độ H là nghiệm của hpt: (d) và (α).

☐ ***Cách 2:***

- Đưa (d) về dạng tham số. Điểm H được xác định bởi: $\begin{cases}H\in d\\ \overrightarrow{MH}\perp\vec{a}_d\end{cases}$

Dạng 2. ***Điểm*** M' ***đối xứng với*** M ***qua đường thẳng*** d***:***

☐ ***Cách 1:***

- Tìm hình chiếu H của M trên (d)

- Xác định điểm M' sao cho H là trung điểm của đoạn MM' (công thức trung điểm).

☐ ***Cách 2:***

- Gọi H là trung điểm của đoạn MM'. Tính toạ độ điểm H theo toạ độ của M,M' (công thức trung điểm).

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

- Khi đó toạ độ của điểm M' được xác định bởi: $\begin{cases} \overrightarrow{MM'} \perp \vec{a}_d \\ H \in d \end{cases}$.

Dạng 3. Đường thẳng (d') đối xứng đường thẳng (d) qua mặt phẳng (P)

- ***TH1:*** $(d) \cap (P) = A$
  - Xác định A là giao điểm của d và (P)
  - Lấy điểm $M \in d$ (M bất kỳ). Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với M qua (P).
  - Đường thẳng d' chính là đường thẳng AM'.
- ***TH2:*** $(d) \,//\, (P)$
  - Lấy điểm $M \in d$ (M bất kỳ). Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với M qua (P).
  - Đường thẳng d' chính là đường thẳng qua M' và song song d.

C – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Đường thẳng Δ song song với $d: \frac{x+4}{3} = \frac{y-5}{-4} = \frac{z+2}{1}$ và cắt cả hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{2}$ và $d_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{1}$. Phương trình nào không phải đường thẳng Δ

A. $\Delta: \frac{x+4}{3} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z+1}{1}$

B. $\Delta: \frac{x-3}{3} = \frac{y-\frac{7}{3}}{-4} = \frac{z-\frac{2}{3}}{1}$

C. $\Delta: \frac{x+9}{3} = \frac{y+7}{-4} = \frac{z+2}{1}$

D. $\Delta: \frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-1}{1}$

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x+2y+2z-4=0$. Phương trình đường thẳng d nằm trong (P) sao cho d cắt và vuông góc với đường thẳng Δ là

A. $d: \begin{cases} x = -3+t \\ y = 1-2t \\ z = 1-t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

B. $d: \begin{cases} x = 3t \\ y = 2+t \\ z = 2+2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

C. $d: \begin{cases} x = -2-4t \\ y = -1+3t \\ z = 4-t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

D. $d: \begin{cases} x = -1-t \\ y = 3-3t \\ z = 3-2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P): x+2y-z-3=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong (P) sao cho Δ vuông góc với d và khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ và d bằng $\sqrt{2}$.

A. $\left[\begin{array}{l} \Delta: \frac{x-7}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{-1} \\ \Delta: \frac{x-3}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1} \end{array}\right.$.

B. $\left[\begin{array}{l} \Delta: \frac{x+7}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{-1} \\ \Delta: \frac{x+3}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1} \end{array}\right.$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

C. $\left[\begin{array}{l}\Delta:\dfrac{x-7}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-4}{-1}\\ \Delta:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{1}\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}\Delta:\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{-y}{-1}=\dfrac{z-4}{-1}\\ \Delta:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{-y}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}\end{array}\right.$

Câu 4: **(KIM LIÊN HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 03)** Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng đi qua $A(1;2;4)$ song song với (P): $2x+y+z-4=0$ và cắt đường thẳng d: $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-2}{5}$ có phương trình:

A. $\begin{cases}x=1+t\\ y=2\\ z=4-2t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1+2t\\ y=2\\ z=4+2t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-1-2t\\ y=2\\ z=4+4t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1-t\\ y=-2\\ z=4+2t\end{cases}$.

Câu 5: **(Lương Thế Vinh Lần 3)** Trong hệ tọa độ $Oxyz$, lập phương trình đường vuông góc chung Δ của hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-2}{2}$ và $d_2:\begin{cases}x=-3t\\ y=t\\ z=-1-3t\end{cases}$.

A. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-4}{-2}$. **B.** $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$.

C. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$. **D.** $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{6}=\dfrac{z+1}{1}$.

Câu 6: **(THPT-Yên-Mô-A-Ninh-Bình-2018-2019-Thi-tháng-4)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{-2}$ và mặt phẳng $(P):2x-2y+z-3=0$, phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), cắt d và vuông góc với d là

A. $\begin{cases}z=2-2t\\ y=1-5t\\ z=-5-6t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}z=-2-2t\\ y=-1-5t\\ z=5-6t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}z=-2+2t\\ y=-1+5t\\ z=5-6t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}z=-2-2t\\ y=1-5t\\ z=5+6t\end{cases}$.

Câu 7: **(THẠCH THÀNH I - THANH HÓA 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P):x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$. Hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z+1}{5}$. **B.** $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$.

C. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{4}=\dfrac{z-1}{-5}$. **D.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z+5}{1}$.

Câu 8: **(Đặng Thành Nam Đề 10)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2m+1}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+1}{m-2}, m\notin\left\{-\dfrac{1}{2},2\right\}$ và mặt phẳng $(P):x+y+z-6=0$. Gọi đường thẳng Δ là hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng (P). Có bao nhiêu số thực m để đường thẳng Δ vuông góc với giá của vécto $\vec{a}=(-1;0;1)$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 9: **(PHÂN-TÍCH-BL-VÀ-PT-ĐẠI-HỌC-SP-HÀ-NỘI)** Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;4)$ và hai điểm M,B thoả mãn $MA.\overrightarrow{MA}+MB.\overrightarrow{MB}=\vec{0}$. Giả sử điểm M thay đổi trên đường thẳng $d:\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+4}{1}$. Khi đó điểm B thay đổi trên đường thẳng có phương trình là:

A. $d_1:\dfrac{x+7}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+12}{1}$.

B. $d_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-4}{1}$.

C. $d_3:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1}$.

D. $d_4:\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-12}{1}$.

Câu 10: **(PHÂN TÍCH BL_PT ĐỀ ĐH VINHL3 -2019..)** Trong không gian $Oxyz$, cho 2 đường thẳng $d:\begin{cases}x=-1-2t\\y=t\\z=-1+3t\end{cases}$, $d':\begin{cases}x=2+t'\\y=-1+2t'\\z=-2t'\end{cases}$ và mặt phẳng $(P):x+y+z+2=0$. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P), cắt d và d' có phương trình là

A. $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{1}$.

B. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-4}$.

C. $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$.

D. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-4}{2}$.

Câu 11: **(THPT ĐỒ LƯƠNG 3 LẦN 2)** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+y-5z+4=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+5}{6}$. Hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $\begin{cases}x=-2+3t\\y=-2+2t\\z=-t\end{cases}$.

B. $\begin{cases}x=-2-t\\y=2+2t\\z=t\end{cases}$.

C. $\begin{cases}x=1+3t\\y=2t\\z=1+t\end{cases}$.

D. $\begin{cases}x=3+t\\y=2\\z=1+t\end{cases}$.

Câu 12: **(CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ HÒA BÌNH LẦN 4 NĂM 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1, d_2 và mặt phẳng (α) có phương trình:

$d_1:\begin{cases}x=1+3t\\y=2+t\\z=-1+2t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$, $d_2:\dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-4}{-2}$, $(\alpha):x+y-z-2=0$.

Phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (α), cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2 là

A. $\dfrac{x+2}{8}=\dfrac{y-1}{-7}=\dfrac{z+3}{1}$.

B. $\dfrac{x-2}{-8}=\dfrac{y+1}{7}=\dfrac{z-3}{-1}$.

C. $\dfrac{x+2}{8}=\dfrac{y-1}{7}=\dfrac{z+3}{-1}$.

D. $\dfrac{x-2}{-8}=\dfrac{y+1}{7}=\dfrac{z-3}{1}$.

Câu 13: **(THPT LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG NGÃI)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;3;2)$, mặt phẳng $(P):x+y-z+2=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt (P) và d lần lượt tại M, N sao cho A là trung điểm của MN.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $\Delta:\begin{cases}x=1+t\\y=3-t\\z=2-2t\end{cases}$. **B.** $\Delta:\begin{cases}x=1+t\\y=3+t\\z=2-2t\end{cases}$. **C.** $\Delta:\begin{cases}x=-1+t\\y=3-t\\z=2-2t\end{cases}$. **D.** $\Delta:\begin{cases}x=1+t\\y=-3-t\\z=2-2t\end{cases}$.

Câu 14: **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;1;2), B(-2;3;1), C(3;-1;4)$. Viết phương trình đường cao của tam giác ABC kẻ từ đỉnh B

A. $\begin{cases}x=-2-t\\y=3+t\\z=1-t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=-2+t\\y=3\\z=1-t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-2-t\\y=3+t\\z=1+t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-2+t\\y=3-t\\z=1+t\end{cases}$.

Câu 15: **(THPT-Toàn-Thắng-Hải-Phòng)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$ và mặt phẳng $(P):2x+y-4z+1=0$. Đường thẳng (d) đi qua điểm A, song song với mặt phẳng (P), đồng thời cắt trục Oz. Viết phương trình tham số của đường thẳng (d).

A. $\begin{cases}x=1+5t\\y=2-6t\\z=3+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=t\\y=2t\\z=2+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+3t\\y=2+2t\\z=3+t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1-t\\y=2+6t\\z=3+t\end{cases}$.

Câu 16: **(KỸ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-2;1;5)$ và hai mặt phẳng $(P):2x+y+3z-7=0$, $(Q):3x-2y-z+1=0$. Gọi M là điểm nằm trên mặt phẳng (P) và điểm N nằm trên mặt phẳng (Q) thỏa mãn $\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{AM}$. Khi M di động trên mặt phẳng (P) thì quỹ tích điểm N là một đường thẳng có phương trình là

A. $\begin{cases}x=-3-5t\\y=-8+11t\\z=6-7t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=7+11t\\y=-8-5t\\z=6-7t\end{cases}$.

C. $\begin{cases}x=7+11t\\y=-8-5t\\z=-8-7t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=2+5t\\y=3+11t\\z=-1-7t\end{cases}$.

Câu 17: **(SỞ PHÚ THỌ LẦN 2 NĂM 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha):2x+3y-2z+12=0$. Gọi A,B,C lần lượt là giao điểm của (α) với ba trục tọa độ, đường thẳng d đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và vuông góc với (α) có phương trình là

A. $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{-2}$. **B.** $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{2}$.

C. $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-3}{-2}$. **D.** $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+3}{-2}$.

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(P):x+y+z-3=0$. Gọi I là giao điểm của $d,(P)$. Tìm $M\in(P)$ sao cho MI vuông góc với d và $MI=4\sqrt{14}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $\left[\begin{array}{l} M(5;9;-11) \\ M(-3;-7;13) \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} M(5;7;-11) \\ M(-3;-7;13) \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} M(-5;9;-11) \\ M(3;-7;13) \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} M(5;-7;11) \\ M(3;7;-13) \end{array}\right.$.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x-2y+2z=0, (Q): 2x+2y+z-1=0$. Viết phương trình của đường thẳng d đi qua $A(0;0;1)$, nằm trong mặt phẳng (Q) và tạo với mặt phẳng (P) một góc bằng 45^0.

A. $d_1: \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=1-4t \end{cases}; d_2: \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=1 \end{cases}$. **B.** $d_1: \begin{cases} x=t \\ y=2t-1 \\ z=1-4t \end{cases}; d_2: \begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=1 \end{cases}$.

C. $d_1: \begin{cases} x=t \\ y=t-1 \\ z=1-4t \end{cases}; d_2: \begin{cases} x=3t \\ y=-t \\ z=1+4t \end{cases}$. **D.** $d_1: \begin{cases} x=1+4t \\ y=1-t \\ z=1-4t \end{cases}; d_2: \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=1 \end{cases}$

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình thang cân $ABCD$ có hai đáy AB, CD thỏa mãn $CD=2AB$ và diện tích bằng 27; đỉnh $A(-1;-1;0)$; phương trình đường thẳng chứa cạnh CD là $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{1}$. Tìm tọa độ các điểm D biết hoành độ điểm B lớn hơn hoành độ điểm A.

A. $D(-2;-5;1)$. **B.** $D(-3;-5;1)$. **C.** $D(2;-5;1)$. **D.** $D(3;-5;1)$

Câu 21: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x+y+z+2=0$. Gọi M là giao điểm giữa d và (P). Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), vuông góc với d đồng thời khoảng cách từ M đến Δ bằng $\sqrt{42}$.

A. $\left[\begin{array}{l} \Delta: \dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z+5}{1} \\ \Delta: \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z-5}{1} \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} \Delta: \dfrac{x-5}{-2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z+5}{1} \\ \Delta: \dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z-5}{1} \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} \Delta: \dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-5}{1} \\ \Delta: \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z-5}{1} \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} \Delta: \dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z+5}{1} \\ \Delta: \dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+4}{3}=\dfrac{z-5}{1} \end{array}\right.$.

Câu 22: Cho hai điểm $M(1;2;3)$, $A(2;4;4)$ và hai mặt phẳng $(P): x+y-2z+1=0$, $(Q): x-2y-z+4=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua M cắt $(P), (Q)$ lần lượt tại B, C sao cho tam giác ABC cân tại A và nhận AM là đường trung tuyến.

A. $\Delta: \dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$ **B.** $\Delta: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$

C. $\Delta: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{1}$ **D.** $\Delta: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 23: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(-1;0;-1)$, cắt $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+2}{-1}$, sao cho $\cos(d;\Delta_2)$ là nhỏ nhất, biết phương trình của đường thẳng $\Delta_2:\frac{x-3}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{2}$. Phương trình đường thẳng d là?

A. $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-1}$ **B.** $\frac{x+1}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z+1}{-2}$

C. $\frac{x+1}{4}=\frac{y}{-5}=\frac{z+1}{-2}$ **D.** $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$

Câu 24: Trong không gian tọa độ Oxyz cho M(2;1;0) và đường thẳng d có phương trình: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-1}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua M, cắt và vuông góc với d. Viết phương trình đường thẳng Δ?

A. $\begin{cases}x=2+t\\y=1-4t\\z=-2t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=2+t\\y=1-4t\\z=3-2t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=1+t\\y=1-4t\\z=-2t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=2-t\\y=1-4t\\z=-2t\end{cases}$

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ $MN\Rightarrow N(-t;-5-2t;1+t)$ gọi d đi qua $A(-1;0;-1)$, cắt $\Delta_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+2}{-1}$, sao cho góc giữa d và $\Delta_2:\frac{x-3}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{2}$ là nhỏ nhất. Phương trình đường thẳng d là

A. $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-1}$. **B.** $\frac{x+1}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z+1}{-2}$. **C.** $\frac{x+1}{4}=\frac{y}{-5}=\frac{z+1}{-2}$. **D.** $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$.

Câu 26: Trong không gian với hệ tọa độ $\begin{cases}x=2+t\\y=-3-2t\\z=-1+2t\end{cases}$ cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{-1}$ và $d_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-2}{-2}$. Gọi Δ là đường thẳng song song với $(P):x+y+z-7=0$ và cắt d_1, d_2 lần lượt tại hai điểm A,B sao cho AB ngắn nhất. Phương trình của đường thẳng Δ là.

A. $\begin{cases}x=12-t\\y=5\\z=-9+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=6-t\\y=\frac{5}{2}\\z=-\frac{9}{2}+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=6\\y=\frac{5}{2}-t\\z=-\frac{9}{2}+t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=6-2t\\y=\frac{5}{2}+t\\z=-\frac{9}{2}+t\end{cases}$.

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-3;3;-3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha):2x-2y+z+15=0$ và mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=100$. Đường thẳng Δ qua A, nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại A, B. Để độ dài AB lớn nhất thì phương trình đường thẳng Δ là:

A. $\frac{x+3}{1}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+3}{6}$. **B.** $\frac{x+3}{16}=\frac{y-3}{11}=\frac{z+3}{-10}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

C. $\begin{cases} x=-3+5t \\ y=3 \\ z=-3+8t \end{cases}$. **D.** $\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+3}{3}$.

Câu 28: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-12}{4}=\dfrac{y-9}{3}=\dfrac{z-1}{1}$, và mặt thẳng $(P):3x+5y-z-2=0$. Gọi d' là hình chiếu của d lên (P). Phương trình tham số của d' là

A. $\begin{cases} x=-62t \\ y=25t \\ z=2-61t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=62t \\ y=-25t \\ z=2+61t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=62t \\ y=-25t \\ z=-2+61t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=62t \\ y=-25t \\ z=2+61t \end{cases}$.

Câu 29: Trong không gian với hệ tọa độ $(Q):x-2y+2z+1=0$ gọi d đi qua $A(3;-1;1)$, nằm trong mặt phẳng $(P):x-y+z-5=0$, đồng thời tạo với $\Delta:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z}{2}$ một góc 45^0. Phương trình đường thẳng d là

A. $\begin{cases} x=3+7t \\ y=-1-8t \\ z=-1-15t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=3+t \\ y=-1-t \\ z=1 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x=3+7t \\ y=-1-8t \\ z=1-15t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=3+t \\ y=-1-t \\ z=1 \end{cases}$ **và** $\begin{cases} x=3+7t \\ y=-1-8t \\ z=1-15t \end{cases}$.

Câu 30: **(THTT số 3)** Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$, $d_2:\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z-3}{2}$. Viết phương trình đường phân giác của những góc tù tạo bởi d_1,d_2.

A. $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y}{-5}=\dfrac{z-3}{4}$. **B.** $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-3}{1}$.

C. $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$. **D.** $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-3}{1}$.

Câu 31: **(Chuyên Bắc Giang)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho tam giác ABC biết $A(2;1;0)$, $B(3;0;2)$, $C(4;3;-4)$. Viết phương trình đường phân giác trong của góc A.

A. $\begin{cases} x=2 \\ y=1+t \\ z=0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=2+t \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2+t \\ y=1 \\ z=t \end{cases}$.

Câu 32: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+y-z+2=0$ và hai đường thẳng $d:\begin{cases} x=1+t \\ y=t \\ z=2+2t \end{cases}$; $d':\begin{cases} x=3-t' \\ y=1+t' \\ z=1-2t' \end{cases}$. Biết rằng có 2 đường thẳng có các đặc điểm: song song với (P); cắt d,d' và tạo với d góc 30°. Tính cosin góc tạo bởi hai đường thẳng đó.

A. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. **B.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 33: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{1}$; $d_2:\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P):x+y-2z+5=0$. Lập phương trình đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) và cắt d_1,d_2 lần lượt tại A,B sao cho độ dài đoạn AB đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{1}$. **B.** $d:\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{1}$.

C. $d:\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+2}{1}$. **D.** $d:\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{1}$

Câu 34: **(Thuan-Thanh-Bac-Ninh)** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-3;3;-3)$ thuộc mặt phẳng (α) có phương trình $2x-2y+z+15=0$ và mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=100$. Đường thẳng Δ qua A, nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại M, N. Để độ dài MN lớn nhất thì phương trình đường thẳng Δ là

A. $\frac{x+3}{1}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+3}{6}$. **B.** $\frac{x+3}{16}=\frac{y-3}{11}=\frac{z+3}{-10}$.

C. $\begin{cases}x=-3+5t\\y=3\\z=-3+8t\end{cases}$. **D.** $\frac{x+3}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{3}$.

Câu 35: **(THẠCH THÀNH I - THANH HÓA 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(2;1;3)$, mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A\left(\frac{3}{2};0;0\right)$, $B\left(0;\frac{3}{2};0\right)$, $C(0;0;-3)$ và mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm E, nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Phương trình Δ là

A. $\begin{cases}x=2+9t\\y=1+9t\\z=3+8t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=2-5t\\y=1+3t\\z=3\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=2+t\\y=1-t\\z=3\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=2+4t\\y=1+3t\\z=3-3t\end{cases}$.

Câu 36: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi d đi qua điểm $A(1;-1;2)$, song song với $(P):2x-y-z+3=0$, đồng thời tạo với đường thẳng $\Delta:\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{2}$ một góc lớn nhất. Phương trình đường thẳng d là.

A. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-5}=\frac{z-2}{7}$. **B.** $\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{-5}=\frac{z+2}{7}$.

C. $\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-2}{7}$. **D.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-5}=\frac{z-2}{-7}$.

Câu 37: **(Nguyễn Trãi Hải Dương Lần1)** Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(3;1;1)$, nằm trong mặt phẳng $(\alpha):x+y-z-3=0$ và tạo với đường thẳng $d:\begin{cases}x=1\\y=4+3t\\z=-3-2t\end{cases}$ một góc nhỏ nhất thì phương trình của Δ là

A. $\begin{cases} x=1 \\ y=-t' \\ z=2t' \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=8+5t' \\ y=-3-4t' \\ z=2+t' \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+2t' \\ y=1-t' \\ z=3-2t' \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+5t' \\ y=1-4t' \\ z=3+2t' \end{cases}$.

Câu 38: Trong không gian cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-3}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{3}$ và đường thẳng $d: \frac{x+3}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+2}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua Δ và tạo với đường thẳng d một góc lớn nhất.

A. $19x-17y-20z-77=0$. **B.** $19x-17y-20z+34=0$.

C. $31x-8y-5z+91=0$. **D.** $31x-8y-5z-98=0$.

Câu 39: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hai điểm $A(1;2;-1), B(7;-2;3)$ và đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x=2+3t \\ y=-2t \\ z=4+2t \end{cases}$ (t ∈ R). Điểm M trên d sao cho tổng khoảng cách từ M đến A và B là nhỏ nhất có tổng các tọa độ là:

A. $M=(2;0;4)$. **B.** $M=(2;0;1)$. **C.** $M=(1;0;4)$. **D.** $M=(1;0;2)$.

Câu 40: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;3;0)$, $B(0;-\sqrt{2};0)$, $M\left(\frac{6}{5};-\sqrt{2};2\right)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=2-t \end{cases}$. Điểm C thuộc d sao cho chu vi tam giác ABC là nhỏ nhất thì độ dài CM bằng

A. $2\sqrt{3}$. **B.** 4. **C.** 2. **D.** $\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Câu 41: Trong không gian với hệ tọa độ., cho bốn điểm. và. Kí hiệu d là đường thẳng đi qua D sao cho tổng khoảng cách từ các điểm A, B, C đến d lớn nhất. Hỏi đường thẳng d đi qua điểm nào dưới đây?

A. $M(-1;-2;1)$. **B.** $N(5;7;3)$. **C.** $P(3;4;3)$. **D.** $Q(7;13;5)$.

Câu 42: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$ và hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=2-2t \\ y=1 \\ z=-2+t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x=5+3s \\ y=1 \\ z=3-s \end{cases}$. Gọi B, C là các điểm lần lượt di động trên d_1, d_2. Hỏi giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=AB+BC+CA$ là?

A. $2\sqrt{29}$. **B.** $2\sqrt{985}$. **C.** $\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{29}$. **D.** $\sqrt{5}+\sqrt{10}$.

Câu 43: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=1 \end{cases}$ và $A(0;4;0)$. Gọi M là điểm cách đều d và trục $x'Ox$. Khoảng cách ngắn nhất giữa A và M bằng:

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $3\sqrt{2}$ **C.** $\sqrt{6}$ **D.** $\frac{\sqrt{65}}{2}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 44: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(2,1,0)$, song song với mặt phẳng $(P): x-y-z=0$ và có tổng khoảng cách từ các điểm $M(0,2,0), N(4,0,0)$ tới đường thẳng đó đạt giá trị nhỏ nhất? Vector chỉ phương của Δ là?

A. $\overrightarrow{u_\Delta}=(1,0,1)$ **B.** $\overrightarrow{u_\Delta}=(2,1,1)$ **C.** $\overrightarrow{u_\Delta}=(3,2,1)$ **D.** $\overrightarrow{u_\Delta}=(0,1,-1)$

Câu 45: **(Đặng Thành Nam Đề 9)** Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(2;3;3)$ đường trung tuyến kẻ từ đỉnh B là $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{-1}$, phương trình đường phân giác trong góc C là $\frac{x-2}{2}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z-2}{-1}$. Đường thẳng AB có một véctơ chỉ phương là:

A. $\overrightarrow{u_1}=(0;1;-1)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=(2;1;-1)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(1;2;1)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}=(1;-1;0)$.

Câu 46: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{3}$ và hai điểm $A(1;-1;-1), B(-2;-1;1)$. Gọi C,D là hai điểm phân biệt di động trên đường thẳng Δ sao cho tồn tại điểm I cách đều tất cả các mặt của tứ diện $ABCD$ và I thuộc tia Ox. Tính độ dài đoạn thẳng CD.

A. $\frac{12\sqrt{17}}{17}$. **B.** $\sqrt{17}$. **C.** $\frac{3\sqrt{17}}{11}$. **D.** $\sqrt{13}$.

Câu 47: **(Yên Phong 1)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1}$. Gọi Δ là hình chiếu vuông góc của d trên (α) và $\vec{u}=(1;a;b)$ là một vectơ chỉ phương của Δ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính tổng $a+b$.

A. 0. **B.** 1. **C.** -1. **D.** -2.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

GÓC

Câu 1: **(Đề thi HK2 Lớp 12-Chuyên Nguyễn Du- Đăk Lăk)** Trong không gian $Oxyz$, hai đường thẳng $d_1:\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{\sqrt{2}}=\frac{z-3}{1}$ và $d_2:\frac{x+5}{1}=\frac{y+3}{\sqrt{2}}=\frac{z-5}{m}$

tạo với nhau góc $60°$, giá trị của tham số m bằng

A. $m=-1$. **B.** $m=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $m=\frac{1}{2}$. **D.** $m=1$.

Câu 2: **(THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4)** Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P):x-z.\sin\alpha+\cos\alpha=0;(Q):y-z.\cos\alpha-\sin\alpha=0;\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Góc giữa (d) và trục Oz là:

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Câu 3: **(Sở Vĩnh Phúc)** Trong không gian $Oxyz$, gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(1;-1;2)$, song song với mặt phẳng $(P):2x-y-z+3=0$, đồng thời tạo với đường thẳng $\Delta:\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{2}$ một góc lớn nhất. Phương trình đường thẳng d là

A. $\frac{x-1}{-4}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-2}{3}$. **B.** $\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{-5}=\frac{z-2}{3}$.

C. $\frac{x+1}{4}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-2}{-3}$. **D.** $\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-2}{3}$.

KHOẢNG CÁCH

Câu 4: **(Đề thi HK2 Lớp 12-Chuyên Nguyễn Du- Đăk Lăk)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng: $d_1:\frac{x-3}{-4}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{1}$ và

$d_2:\frac{x}{-6}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{2}$. Khoảng cách giữa chúng bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 5: **(Sở Vĩnh Phúc)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(-2;-2;1)$, $A(1;2;-3)$ và đường thẳng

$d:\frac{x+1}{2}=\frac{y-5}{2}=\frac{z}{-1}$. Tìm vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ đi qua M, vuông góc với đường thẳng d đồng thời cách điểm A một khoảng nhỏ nhất.

A. $\vec{u}(2;2;-1)$. **B.** $\vec{u}(3;4;-4)$. **C.** $\vec{u}(2;1;6)$. **D.** $\vec{u}(1;0;2)$.

Câu 6: **(Sở Điện Biên)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng phẳng $(P):x-2y+2z-1=0$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{-1}$. Biết điểm $A(a;b;c)$ $(c<0)$ là điểm nằm trên đường thẳng d và cách (P) một khoảng bằng 1. Tính tổng $S=a+b+c$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $S=2$. **B.** $S=-\frac{2}{5}$. **C.** $S=4$. **D.** $S=\frac{12}{5}$.

Câu 7: **(Sở Vĩnh Phúc)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(10;2;1)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{3}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A, song song với đường thẳng d sao cho khoảng cách giữa d và (P) lớn nhất. Khoảng cách từ điểm $M(-1;2;3)$ đến mặt phẳng (P) bằng

A. $\frac{533}{\sqrt{2765}}$. **B.** $\frac{97\sqrt{3}}{15}$. **C** $\frac{2\sqrt{13}}{13}$. **D.** $\frac{76\sqrt{790}}{790}$.

Câu 8: **(THPT LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG NGÃI)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;3)$, $B(1;2;0)$ và $M(-1;3;4)$. Gọi d là đường thẳng qua B vuông góc với AB đồng thời cách M một khoảng nhỏ nhất. Một véc tơ chỉ phương của d có dạng $\vec{u}(2;a;b)$. Tính tổng $a+b$.

A. 1. **B.** 2. **C.** –1. **D.** –2.

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG, GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Câu 9: **(ĐH Vinh Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P):x+2y-z-1=0$, $(P):2x+y-z+2=0$, và hai đường thẳng $\Delta_1:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2}$, $\Delta_2:\frac{x}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{2}$. Đường thẳng Δ song song với hai mặt phẳng $(P);(Q)$ và cắt Δ_1,Δ_2 tương ứng tại H,K. Độ dài đoạn HK bằng

A. $\frac{8\sqrt{11}}{7}$. **B.** $\sqrt{5}$ **C.** 6. **D.** $\frac{\sqrt{11}}{7}$.

Câu 10: **(Nam Tiền Hải Thái Bình Lần1)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;0)$ và đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-1}$. Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua M, cắt và vuông góc với Δ là

A. $d:\begin{cases}x=2+t\\y=1-4t\\z=-2t\end{cases}$. **B.** $d:\begin{cases}x=2+2t\\y=1+t\\z=-t\end{cases}$. **C.** $d:\begin{cases}x=2-t\\y=1+t\\z=t\end{cases}$. **D.** $d:\begin{cases}x=1+t\\y=-1-4t\\z=2t\end{cases}$.

Câu 11: **(Sở Thanh Hóa 2019)**Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;5;3)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d sao cho khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất. Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (P) bằng

A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $\frac{3}{\sqrt{6}}$. **C.** $\frac{11\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\sqrt{2}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 12: **(CổLoa Hà Nội)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{1}$ và $d_2:\frac{x-m}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{1}$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hai đường thẳng d_1, d_2 có đúng một điểm chung?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** vô số.

Câu 13: **(KSCL-Lần-2-2019-THPT-Nguyễn-Đức-Cảnh-Thái-Bình)** Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{2m+1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+1}{m-2}$ và mặt phẳng $(P):x+y+z-6=0$, hai điểm $A(2;2;2)$, $B(1;2;3)$ thuộc (P). Giá trị của m để AB vuông góc với hình chiếu của d trên (P) là?

A. $m=1$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-3$.

Câu 14: **(Đặng Thành Nam Đề 3)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-y+2z+3=0$ và hai đường thẳng $d_1:\frac{x}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{1}$; $d_2:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+3}{1}$. Xét các điểm A, B lần lượt di động trên d_1 và d_2 sao cho AB song song với mặt phẳng (P). Tập hợp trung điểm của đoạn thẳng AB là

A. Một đường thẳng có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-9;8;-5)$.

B. Một đường thẳng có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-5;9;8)$.

C. Một đường thẳng có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-2;-5)$.

D. Một đường thẳng có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;5;-2)$.

Câu 15: **(Chuyên Phan Bội Châu Lần2)** rong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+1}{-1}$ và $d_2:\begin{cases}x=t\\y=0\\z=-t\end{cases}$. Mặt phẳng (P) qua d_1, tạo với d_2 một góc 45° và nhận vectơ $\vec{n}(1;b;c)$ làm một vec tơ pháp tuyến. Xác định tích $b.c$.

A. -4. **B.** 4. **C.** 4 hoặc 0. **D.** -4 hoặc 0.

Câu 16: **(Đặng Thành Nam Đề 6)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-3), B(-2;-2;1)$ và mặt phẳng $(\alpha):2x+2y-z+9=0$. Xét điểm M thuộc (α) sao cho tam giác AMB vuông tại M và độ dài đoạn thẳng MB đạt giá trị lớn nhất. Phương trình đường thẳng MB là

A. $\begin{cases}x=-2-t\\y=-2+2t\\z=1+2t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=-2+2t\\y=-2-t\\z=1+2t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-2+t\\y=-2\\z=1+2t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-2+t\\y=-2-t\\z=1\end{cases}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 17: **(Gang Thép Thái Nguyên)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{3}$; $d_2:\begin{cases}x=1+t\\y=2+t\\z=m\end{cases}$. Gọi S là tập tất cả các số m sao cho d_1 và d_2 chéo nhau và khoảng cách giữa chúng bằng $\dfrac{5}{\sqrt{19}}$. Tính tổng các phần tử của S.

A. -11. **B.** 12. **C.** -12. **D.** 11.

Câu 18: **(Chuyên Hạ Long lần 2-2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1\begin{cases}x=4+t\\y=-4-t\\z=6+2t\end{cases}$; $d_2:\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-11}{4}=\dfrac{z-5}{2}$. Đường thẳng d đi qua $A(5;-3;5)$ cắt $d_1;d_2$ lần lượt ở B,C. Tính tỉ số $\dfrac{AB}{AC}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Câu 19: **(Sở Thanh Hóa 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$. Đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc và cắt d có phương trình là

A. $\Delta:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$. **B.** $\Delta:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$.

C. $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}$. **D.** $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-2}{1}$.

Câu 20: **(Đặng Thành Nam Đề 6)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;0;0),B(0;4;0),C(0;0;c)$ với c là số thực thay đổi khác 0. Khi c thay đổi thì trực tâm H của tam giác ABC luôn thuộc một đường tròn cố định. Bán kính của đường tròn đó bằng

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{4}$. **C.** $\dfrac{12}{5}$. **D.** $\dfrac{6}{5}$.

Câu 21: **(CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIỆU ĐỒNG THÁP 2019 LẦN 2)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;0),B(0;3;0),C(0;0;6)$ và $D(1;1;1)$. Gọi Δ là đường thẳng qua D và thỏa mãn tổng khoảng cách từ các điểm A,B,C đến Δ là lớn nhất. Khi đó Δ đi qua điểm nào trong các điểm dưới đây?

A. $M(-1;-2;1)$. **B.** $M(7;5;3)$. **C.** $M(3;4;3)$. **D.** $M(5;7;3)$.

BÀI TOÁN LIÊN QUAN GIỮA ĐƯỜNG THẲNG - MẶT PHẲNG - MẶT CẦU

Câu 22: **(Chuyên Hạ Long lần 2-2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho $(P):2x+y+2z-1=0$, $A(0;0;4),B(3;1;2)$. Một mặt cầu (S) luôn đi qua A,B và tiếp xúc với (P) tại C. Biết rằng, C luôn thuộc một đường tròn cố định bán kính r. Tính bán kính r của đường tròn đó.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. Đáp án khác. **B.** $r=\frac{2\sqrt[4]{244651}}{3}$. **C.** $r=\frac{2\sqrt{244651}}{9}$. **D.** $r=\frac{\sqrt{2024}}{3}$.

Câu 23: **(HSG Bắc Ninh)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$ và đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng (P), (P') chứa d và tiếp xúc với (S) tại T, T'. Tìm tọa độ trung điểm H của TT'.

A. $H\left(-\frac{7}{6};\frac{1}{3};\frac{7}{6}\right)$. **B.** $H\left(\frac{5}{6};\frac{2}{3};-\frac{7}{6}\right)$. **C.** $H\left(\frac{5}{6};\frac{1}{3};-\frac{5}{6}\right)$. **D.** $H\left(-\frac{5}{6};\frac{1}{3};\frac{5}{6}\right)$.

Câu 24: **(Hàm Rồng)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+m-3=0$. Tìm số thực m để $(\beta):2x-y+2z-8=0$ cắt (S) theo một đường tròn có chu vi bằng 8π.

A. $m=-4$. **B.** $m=-1$ **C.** $m=-2$. **D.** $m=-3$.

Câu 25: **(Đề thi HK2 Lớp 12-Chuyên Nguyễn Du- Đăk Lăk)**Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):(1+m)x+(1-m)y-(1+3m)z-(2-8m)=0$ và điểm $A(-4;-2;7)$. Khi m thay đổi, biết tập hợp hình chiếu của A trên mặt phẳng (P) là một đường tròn, đường kính của đường tròn đó bằng

A. $3\sqrt{5}$. **B.** $7\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{7}$. **D.** $5\sqrt{3}$.

Câu 26: **(KỸ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, biết (P) là mặt phẳng cách đều hai đường thẳng $d_1:\frac{x-2}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ và $d_2:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{-1}$. Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P)

A. $M\left(\frac{1}{2};1;0\right)$. **B.** $N\left(1;-\frac{1}{2};0\right)$. **C.** $P\left(-\frac{1}{2};0;1\right)$. **D.** $Q\left(1;0;-\frac{1}{2}\right)$.

Câu 27: **(Chuyên Bắc Giang)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=6$ đồng thời song song với hai đường thẳng $d_1:\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{-1}, d_2:\frac{x}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{-1}$.

A. $\left[\begin{array}{l}x-y+2z-3=0\\x-y+2z+9=0\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}x+y+2z-3=0\\x+y+2z+9=0\end{array}\right.$. **C.** $x+y+2z+9=0$. **D.** $x-y+2z+9=0$.

Câu 28: **(Gang Thép Thái Nguyên)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $M(1;2;3), A(2;4;4)$ và hai mặt phẳng $(P):x+y-2z+1=0$, $(Q):x-2y-z+4=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M, cắt $(P),(Q)$ lần lượt tại B,C sao cho tam giác ABC cân tại A và nhận AM làm đường trung tuyến.

A. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{-1}$. **B.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{1}$.

C. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{1}$. **D.** $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{1}$.

Câu 29: **(Lê Quý Đôn Điện Biên Lần 3)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1), B(3;0;3)$. Biết mặt phẳng (P) đi qua điểm A và cách B một khoảng lớn nhất. Phương trình mặt phẳng (P) là:

A. $x-2y+2z+5=0$. **B.** $x-y+2z+3=0$.
C. $2x-2y+4z+3=0$. **D.** $2x-y+2z=0$.

Câu 30: **(THĂNG LONG HN LẦN 2 NĂM 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-z-4=0$ và điểm $A(2;-1;3)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và song song với (P), biết Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(a;b;c)$, đồng thời Δ đồng phẳng và không song song với Oz. Tính $\frac{a}{c}$.

A. $\frac{a}{c}=2$. **B.** $\frac{a}{c}=-2$. **C.** $\frac{a}{c}=-\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{a}{c}=\frac{1}{2}$.

Câu 31: **(Chuyên Hưng Yên Lần 3)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1}$. Đường thẳng d' đối xứng với d qua mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $\frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+1}{7}$. **B.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{7}$.
C. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{7}$. **D.** $\frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{7}$.

Câu 32: **(Đề thi HK2 Lớp 12-Chuyên Nguyễn Du- Đăk Lăk)** Trong không gian $Oxyz$, cho các đường thẳng $(d_1): \begin{cases} x=1+t \\ y=0 \\ z=-5+t \end{cases}$; $(d_2): \begin{cases} x=0 \\ y=4-2t' \\ z=5+3t' \end{cases}$. Biết mặt cầu $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ nhận đoạn vuông góc chung của (d_1) và (d_2) làm đường kính. Giá trị $a+2b+c$ bằng

A. 6. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 5.

Câu 33: **(THPT LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG NGÃI)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(-1;2;1)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z=0$. Gọi M là giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (P). Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 34: **(Lương Thế Vinh Lần 3)** Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-2}{1}$ và điểm $A(1;2;1)$. Tìm bán kính của mặt cầu có tâm I nằm trên d, đi qua A và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x-2y+2z+1=0$.

A. $R=2$. **B.** $R=4$. **C.** $R=1$. **D.** $R=3$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 35: **(Đặng Thành Nam Đề 6)** Trong không gian *Oxyz*, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+5}{-2}$ và $d_2:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z}{1}$.

Viết phương trình mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất và tiếp xúc với cả hai đường thẳng đã cho.

A. $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=24$. **B.** $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=24$.

C. $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=6$. **D.** $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=6$.

Câu 36: **(Đặng Thành Nam Đề 15)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(\alpha):x+y-z-2=0$. Đường thẳng nằm trong mặt phẳng (α), đồng thời vuông góc và cắt đường thẳng d có phương trình là

A. $\Delta_3:\dfrac{x-5}{3}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-5}{1}$. **B.** $\Delta_1:\dfrac{x+2}{-3}=\dfrac{y+4}{2}=\dfrac{z+4}{-1}$.

C. $\Delta_2:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-4}{-2}=\dfrac{z-4}{3}$. **D.** $\Delta_4:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{1}$.

Câu 37: **(Thuan-Thanh-Bac-Ninh)** Trong không gian tọa độ Oxyz ,cho điểm $A(0;0;-2)$ và đường thẳng Δ có phương trình là $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+3}{2}$. Phương trình mặt cầu tâm A, cắt Δ tại hai điểm B và C sao cho $BC=8$ là

A. $(x+2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=16$. **B.** $x^2+y^2+(z+2)^2=25$.

C. $(x+2)^2+y^2+z^2=25$. **D.** $x^2+y^2+(z+2)^2=16$.

Câu 38: **(Đặng Thành Nam Đề 15)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=3$ và hai đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$, $\Delta:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn (C) có bán kính bằng 1 và song song với d và Δ.

A. $y+z+3=0$. **B.** $x+y+1=0$. **C.** $x+z-1=0$. **D.** $x+z+1=0$.

Câu 39: **(KINH MÔN II LẦN 3 NĂM 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng $(P):x+y-z-3=0$ và hai điểm $M(1;1;1)$, $N(-3;-3;-3)$. Mặt cầu (S) đi qua M, N và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm Q. Biết rằng Q luôn thuộc một đường tròn cố định. Tìm bán kính của đường tròn đó.

A. $R=\dfrac{2\sqrt{11}}{3}$. **B.** $R=6$. **C.** $R=\dfrac{2\sqrt{33}}{3}$. **D.** $R=4$.

Câu 40: **(Lương Thế Vinh Lần 3)** Cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$. Viết phương trình mặt cầu tâm $I(1;2;-1)$ cắt d tại các điểm A, B sao cho $AB=2\sqrt{3}$.

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25$. **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=4$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$. **D.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$.

Câu 41: **(THPT ĐÔ LƯƠNG 3 LẦN 2)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;1)$, mặt phẳng $(\alpha):x+y+z-4=0$ và mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=16$. Phương trình đường thẳng Δ đi qua M và nằm trong (α) cắt mặt cầu (S) theo một đoạn thẳng có độ dài nhỏ nhất. Đường thẳng Δ đi qua điểm nào trong các điểm sau đây?

A. $(4;-3;3)$. **B.** $(4;-3;-3)$. **C.** $(4;3;3)$. **D.** $(-4;-3;-3)$.

Câu 42: **(Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1;3;2)$ và đường thẳng d có phương trình $\begin{cases}x=1-4t\\y=t\\z=2+t\end{cases}$. Mặt phẳng (P) chứa điểm A và đường thẳng d có phương trình nào dưới đây?

A. $2x-y+2z+1=0$. **B.** $x+y-z=0$.
C. $-3x-2y-10z+23=0$. **D.** $2x-y+3z+4=0$.

Câu 43: **(Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1;3;2)$ và đường thẳng d có phương trình $\begin{cases}x=1-4t\\y=t\\z=2+t\end{cases}$. Mặt phẳng (P) chứa điểm A và đường thẳng d có phương trình nào dưới đây?

A. $2x-y+2z+1=0$. **B.** $x+y-z=0$.
C. $-3x-2y-10z+23=0$. **D.** $2x-y+3z+4=0$.

Câu 44: **(HKII-CHUYÊN-NGUYỄN-HUỆ-HÀ-NỘI)** Cho mặt cầu: $(S):x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z+m=0$. Tìm m để (S) cắt đường thẳng $(\Delta):\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{-2}$ tại hai điểm A,B sao cho tam giác IAB vuông (Với I là tâm mặt cầu).

A. $m=-1$. **B.** $m=10$. **C.** $m=-20$. **D.** $m=-\dfrac{4}{9}$.

Câu 45: **(Chuyên Vinh Lần 3)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=-1-2t\\y=t\\z=-1+3t\end{cases}$; $d':\begin{cases}x=2+t'\\y=-1+2t'\\z=-2t'\end{cases}$ và mặt phẳng $(P):x+y+z+2=0$. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) và cắt cả hai đường thẳng d,d' có phương trình là

A. $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{1}$. **B.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-4}$.
C. $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$. **D.** $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-4}{2}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 46: **(SGD-Nam-Định-2019)** Trong không gian Oxyz, cho ba đường thẳng $(d_1):\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-2}, (d_2):\frac{x+1}{3}=\frac{y}{-2}=\frac{z+4}{-1}$ và $(d_3):\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{6}$. Đường thẳng song song d_3, cắt d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\frac{x-3}{4}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{6}$. **B.** $\frac{x-3}{-4}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-6}$.

C. $\frac{x+1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z-4}{6}$. **D.** $\frac{x-1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z+4}{6}$.

Câu 47: **(Chuyên Hạ Long lần 2-2019)** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho hai đường thẳng $\Delta_1:\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+1}{2}$ và $\Delta_2:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{1}$. Tính diện tích mặt cầu có bán kính nhỏ nhất, đồng thời tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2.

A. $\frac{16}{17}\pi$ (đvdt). **B.** $\frac{4}{\sqrt{17}}\pi$ (đvdt). **C.** $\frac{16}{\sqrt{17}}\pi$ (đvdt). **D.** $\frac{4}{17}\pi$ (đvdt).

Câu 48: **(Sở Quảng NamT)** Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác đều ABC với $A(6;3;5)$ và đường thẳng BC có phương trình tham số $\begin{cases}x=1-t\\y=2+t\\z=2t\end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng qua trọng tâm G của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng Δ?

A. $M(-1;-12;3)$. **B.** $N(3;-2;1)$. **C.** $P(0;-7;3)$. **D.** $Q(1;-2;5)$.

Câu 49: **(Cụm THPT Vũng Tàu)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$ và $B(3;0;5)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng $(P):x-2y+2z-10=0$ sao cho tam giác MAB cân tại M và có diện tích bằng $11\sqrt{2}$. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=\frac{7}{3}$. **B.** $S=\frac{19}{3}$. **C.** $S=-1$. **D.** $S=-\frac{1}{3}$.

Câu 50: **(THPT ĐÔ LƯƠNG 3 LẦN 2)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;3)$, $B(6;5;5)$. Gọi (S) là mặt cầu đường kính AB. Mặt phẳng (P) vuông góc với AB tại H sao cho khối nón đỉnh A và đáy là hình tròn tâm H (giao của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P)) có thể tích lớn nhất, biết rằng $(P):2x+by+cz+d=0$ với $b,c,d\in\mathbb{Z}$. Tính $S=b+c+d$.

A. $S=18$. **B.** $S=-18$. **C.** $S=-12$. **D.** $S=24$.

Câu 51: **(Thuận Thành 2 Bắc Ninh)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):y-4=0$. Có bao nhiêu đường thẳng d song song với ba mặt phẳng (xOy), (zOx), (P) đồng thời cách đều 3 mặt phẳng đó.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 52: **(Cụm THPT Vũng Tàu)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-3;4)$, mặt phẳng $(P): x-2y+z-12=0$ và mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=5$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua M, nằm trong (P) và cắt (S) theo dây cung dài nhất?

A. $\begin{cases} x=2+t \\ y=-3+2t \\ z=4+3t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=2+3t \\ y=-3-9t \\ z=4+3t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+3t \\ y=1-2t \\ z=1+5t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=3+t \\ y=-2+t \\ z=5+t \end{cases}$.

Câu 53: **(SỞ GD & ĐT CÀ MAU)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-3=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+5=0$. Xét hai điểm M, N thay đổi với $M \in (P)$ và $N \in (S)$ sao cho vecto $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với vecto $\vec{u}=(1;0;1)$. Độ dài đoạn MN lớn nhất bằng

A. 3. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Câu 54: **(THPT ISCHOOL NHA TRANG)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(1;1;1)$, mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=4$ và mặt phẳng $(P): x-3y+5z-3=0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E, nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm A, B sao cho OAB là tam giác đều. Phương trình của Δ là

A. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1+t \\ z=1+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=1+4t \\ y=1+3t \\ z=1+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \\ z=1-t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=1-2t \end{cases}$.

Câu 55: **(KINH MÔN HẢI DƯƠNG 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x+4y+5z+1=0$ và ba điểm $A(2;5;-3), B(-2;1;1), C(2;0;1)$. Tìm điểm $D(a;b;c)(b>0)$ là điểm nằm trên (P) sao cho có vô số mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm C, D và thỏa mãn khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (Q) gấp 3 lần khoảng cách từ B đến (Q). Tính $T=abc$.

A. 0. **B.** 16. **C.** 12. **D.** -16.

Câu 56: **(Chuyên Thái Bình Lần3)** Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1)$, $B(2;2;1)$ và mặt phẳng $(P): x+y+2z=0$. Mặt cầu (S) thay đổi qua A, B và tiếp xúc với (P) tại H. Biết H chạy trên 1 đường tròn cố định. Tìm bán kính của đường tròn đó.

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Câu 57: **(Nguyễn Khuyến)** Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-m}{2}$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt E, F sao cho độ dài đoạn thẳng EF lớn nhất khi $m=m_0$. Hỏi m_0 thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;1)$. **B.** $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$. **C.** $\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)$. **D.** $(0;2)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 58: **(Nguyễn Tất Thành Yên Bái)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{1}$, mặt phẳng $(P):x+y-2z+5=0$ và $A(1;-1;2)$. Đường thẳng Δ cắt d và (P) lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN. Một vectơ chỉ phương của Δ là

A. $\vec{u}=(4;5;-13)$. **B.** $\vec{u}=(2;3;2)$. **C.** $\vec{u}=(1;-1;2)$. **D.** $\vec{u}=(-3;5;1)$.

Câu 59: **(Nguyễn Tất Thành Yên Bái)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x-2y+2z-2=0$ và điểm $I(-1;2;-1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5.

A. $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25$. **B.** $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$.

C. $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=34$. **D.** $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=34$.

Câu 60: **(Cụm THPT Vũng Tàu)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+y-z-1=0$ và hai đường thẳng $\Delta_1:\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$, $\Delta_2:\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{3}$. Biết rằng d_1,d_2 nằm trong mặt phẳng (P), cắt Δ_2 và cách Δ_1 một khoảng bằng $\frac{\sqrt{6}}{2}$. Gọi $\overrightarrow{u_1}=(a;b;1),\overrightarrow{u_2}=(1;c;d)$ lần lượt là vectơ chỉ phương của d_1,d_2. Tính $S=a+b+c+d$.

A. $S=0$. **B.** $S=2$. **C.** $S=4$. **D.** $S=1$.

Câu 61: **(KINH MÔN HẢI DƯƠNG 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}$ cắt mặt phẳng $(P):x+2y+z-6=0$ tại điểm M. Mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ với $a<0$ thuộc đường thẳng d và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm A. Tìm tổng $T=a+b+c$ khi biết diện tích tam giác IAM bằng $3\sqrt{3}$.

A. $T=-2$. **B.** $T=\frac{1}{2}$. **C.** $T=8$. **D.** $T=0$.

Câu 62: **(Nam Tiền Hải Thái Bình Lần1)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;2)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+z^2=9$. Mặt phẳng (P) đi qua M cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính nhỏ nhất có phương trình là

A. $x-y+2z-5=0$. **B.** $x-y+2z-7=0$. **C.** $2x-y+z-7=0$. **D.** $x+y+2z-5=0$.

Câu 63: **(Cầu Giấy Hà Nội 2019 Lần 1)** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;4;2)$ và mặt cầu $x^2+y^2+(z+2)^2=1$. Gọi S là tập hợp các đường thẳng trong không gian đi qua điểm A cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt B,C thỏa mãn $AB+AC=12$. Số phần tử của S là

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 64: **(CHUYÊN NGUYỄN DU ĐĂK LĂK LẦN X NĂM 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2mx+(m^2+1)y+(m^2-1)z-10=0$ và điểm $A(2;11;-5)$. Biết rằng khi m thay đổi,

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (P) và cùng đi qua A. Tổng bán kính của 2 mặt cầu đó bằng:

A. $12\sqrt{3}$. **B.** $12\sqrt{2}$. **C.** $10\sqrt{3}$. **D.** $10\sqrt{2}$.

Câu 65: **(HSG Bắc Ninh)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(6;0;0)$, $N(0;6;0)$, $P(0;0;6)$. Hai mặt cầu có phương trình $(S_1): x^2+y^2+z^2-2x-2y+1=0$ và $(S_2): x^2+y^2+z^2-8x+2y+2z+1=0$ cắt nhau theo đường tròn (C). Hỏi có bao nhiêu mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng chứa (C) và tiếp xúc với ba đường thẳng MN, NP, PM.

A. 1. **B.** 3. **C.** Vô số. **D.** 4.

Câu 66: **(Trung-Tâm-Thanh-Tường-Nghệ-An-Lần-2)** Cho hai đường thẳng $d: \begin{cases} x=-2 \\ y=t \\ z=2+2t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$, $\Delta: \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-4}{1}$ và mặt phẳng $(P): x+y-z+2=0$. Gọi d', Δ' lần lượt là hình chiếu của d và Δ lên mặt phẳng (P). Gọi $M(a;b;c)$ là giao điểm của hai đường thẳng d' và Δ'. Biểu thức $a+b.c$ bằng

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 67: **(THPT SỐ 1 TƯ NGHĨA LẦN 2 NĂM 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2y+2z+1=0$ và hai điểm $A(2;0;0)$, $B(3;1;-1)$. Hai mặt phẳng (P) và (P') chứa đường thẳng AB, tiếp xúc với (S) tại T và T'. $H(a;b;c)$ là trung điểm đoạn TT'. Tính $a+b+2c$.

A. $a+b+2c=\dfrac{2}{3}$. **B.** $a+b+2c=-\dfrac{2}{3}$.

C. $a+b+2c=-\dfrac{1}{2}$. **D.** $a+b+2c=\dfrac{1}{2}$.

Câu 68: **(THPT Sơn Tây Hà Nội 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$ và điểm $M(1;3;-1)$. Biết rằng các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M tới mặt cầu đã cho luôn thuộc một đường tròn (C) có tâm $J(a;b;c)$. Tính $2a+b+c$.

A. $\dfrac{134}{25}$. **B.** $\dfrac{116}{25}$. **C.** $\dfrac{84}{25}$. **D.** $\dfrac{62}{25}$.

Câu 69: **(Đặng Thành Nam Đề 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1),(S_2)$ có phương trình lần lượt là $(S_1): x^2+y^2+z^2=25; (S_2): x^2+y^2+(z-1)^2=4$. Một đường thẳng d vuông góc với véc tơ $\vec{u}=(1;-1;0)$ tiếp xúc với mặt cầu (S_2) và cắt mặt cầu (S_1) theo một đoạn thẳng có độ dài bằng 8. Hỏi véc tơ nào sau đây là véc tơ chỉ phương của d?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $\overrightarrow{u_1}=(1;1;\sqrt{3})$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=(1;1;\sqrt{6})$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(1;1;0)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}=(1;1;-\sqrt{3})$.

Câu 70: **(GIỮA-HKII-2019-NGHĨA-HƯNG-NAM-ĐỊNH)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng song song $(P):2x-y+2z-1=0,(Q):2x-y+2z+5=0$ và điểm $A(-1;1;1)$ nằm trong khoảng giữa hai mặt phẳng này. Gọi (S) là mặt cầu đi qua A và tiếp xúc với cả (P) và (Q). Biết khi (S) thay đổi thì tâm I của nó luôn thuộc đường tròn (C) cố định. Diện tích hình tròn giới hạn bởi (C) là

A. $\frac{2\pi}{3}$. **B.** $\frac{4\pi}{9}$. **C.** $\frac{16\pi}{9}$. **D.** $\frac{8\pi}{9}$.

Câu 71: **(Đặng Thành Nam Đề 3)** Trong không gian Oxyz, xét số thực $m\in(0;1)$ và hai mặt phẳng $(\alpha):2x-y+2z+10=0$ và $(\beta):\frac{x}{m}+\frac{y}{1-m}+\frac{z}{1}=1$. Biết rằng, khi m thay đổi có hai mặt cầu cố định tiếp xúc đồng thời với cả hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$. Tổng bán kính của hai mặt cầu đó bằng

A. 6. **B.** 3. **C.** 9 **D.** 12.

Câu 72: **(SỞ GDĐT KIÊN GIANG 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=27$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(0;0;-4)$, $B(2;0;0)$ và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C). Xét các khối nón có đỉnh là tâm của (S) và đáy là (C). Biết rằng khi thể tích của khối nón lớn nhất thì mặt phẳng (α) có phương trình dạng $ax+by-z+d=0$. Tính $P=a-b-d$.

A. $P=-4$. **B.** $P=8$. **C.** $P=0$. **D.** $P=4$.

Câu 73: **(HSG Bắc Ninh)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{14}{3}$ và đường thẳng $d:\frac{x-4}{3}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-4}{1}$. Gọi $A(x_0;y_0;z_0)$ $(x_0>0)$ là điểm nằm trên đường thẳng d sao cho từ A kẻ được 3 tiếp tuyến đến mặt cầu (S) có các tiếp điểm B,C,D sao cho $ABCD$ là tứ diện đều. Tính giá trị của biểu thức $P=x_0+y_0+z_0$.

A. $P=6$. **B.** $P=16$. **C.** $P=12$. **D.** $P=8$.

Câu 74: **(CỤM TRƯỜNG SÓC SƠN MÊ LINH HÀ NỘI)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm P,Q,R lần lượt di động trên ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz (không trùng với gốc tọa độ O) sao cho $\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OQ^2}+\frac{1}{OR^2}=\frac{1}{8}$. Biết mặt phẳng (PQR) luôn tiếp xúc với mặt cầu (S) cố định. Đường thẳng d thay đổi nhưng luôn đi qua $M\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ và cắt (S) tại hai điểm A,B phân biệt. Diện tích lớn nhất của tam giác AOB là

A. $\sqrt{15}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{17}$. **D.** $\sqrt{7}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 75: **(Đặng Thành Nam Đề 10)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{-1}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của m để phương trình $x^2+y^2+z^2-4x+2my-2(m+1)z+m^2+2m+8=0$ là phương trình của một mặt cầu (S) sao cho có duy nhất một mặt phẳng chứa Δ và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1.

A. 1. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 2.

Câu 76: **(SỞ NAM ĐỊNH 2018-2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=16$ và $(S_2):\ (x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$ cắt nhau theo giao tuyến là một đường tròn với tâm là

$I(a;b;c)$. Tính $a+b+c$

A. $\frac{7}{4}$. **B.** $-\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{10}{3}$. **D.** 1.

Câu 77: **(Nguyễn Tất Thành Yên Bái)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-3;3;-3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha):2x-2y+z+15=0$ và mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=100$. Đường thẳng Δ qua M, nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại A, B sao cho độ dài AB lớn nhất. Viết phương trình đường thẳng Δ.

A. $\frac{x+3}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{3}$. **B.** $\frac{x+3}{1}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+3}{6}$.

C. $\frac{x+3}{16}=\frac{y-3}{11}=\frac{z+3}{-10}$. **D.** $\frac{x+3}{5}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{8}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

A - LÝ THUYẾT CHUNG

1 - Định nghĩa mặt cầu

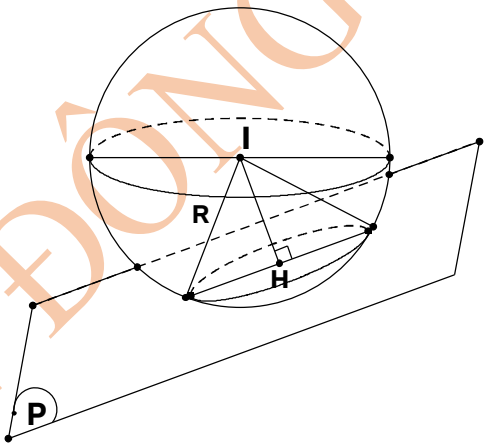
Tập hợp các điểm trong không gian cách điểm O cố định một khoảng cách R cho trước là mặt cầu tâm O và bán kính R. Kí hiệu $S(O;R)$.

Trong không gian với hệ trục $Oxyz$:

- Mặt cầu (S) tâm $I(a,b,c)$ bán kính R có phương trình là: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

- Phương trình: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$, với $a^2+b^2+c^2-d>0$ là phương trình mặt cầu tâm $I(a;b;c)$, bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

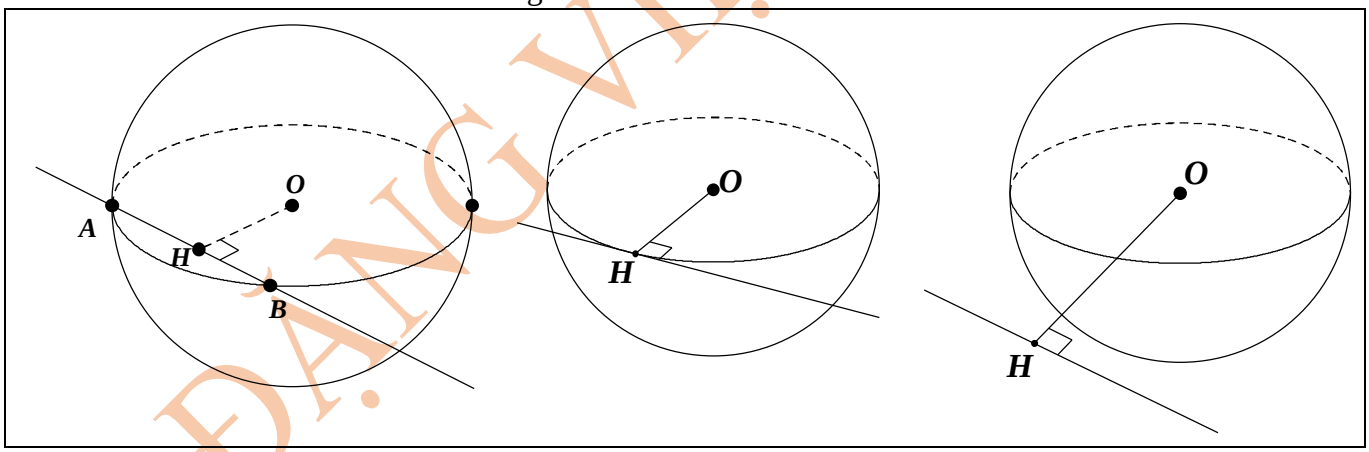
2 - Vị trí tương đối của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S)



- $d(I,(P))>R$ khi và chỉ khi (P) không cắt mặt cầu (S).
- $d(I,(P))=R$ khi và chỉ khi (P) tiếp xúc mặt cầu (S).
- $d(I,(P))<R$ khi và chỉ khi (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn nằm trên mặt phẳng (P) có tâm H và có bán kính $r=\sqrt{R^2-d^2}$.

3 - Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng

a) Cho mặt cầu $S(O;R)$ và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu của O lên Δ và $d=OH$ là khoảng cách từ O đến Δ



- Nếu $d<R$ thì Δ cắt mặt cầu tại 2 điểm phân biệt (H.3.1)
- Nếu $d=R$ thì Δ cắt mặt cầu tại 1 điểm duy nhất (H.3.2)
- Nếu $d>R$ thì Δ không cắt mặt cầu (H.3.3)

B - CÁC DẠNG TOÁN VỀ PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Dạng 1. ***Biết trước tâm*** $I(a;b;c)$ ***và bán kính*** R **:** Phương trình

$$S(I;R):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

Dạng 2. ***Tâm*** I ***và đi qua điểm*** A **:**

- Bán kính $R=IA$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

- Phương trình $S(I;R):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

Dạng 3. Mặt cầu đường kính AB

- Tâm I là trung điểm AB: $x_I=\frac{x_A+x_B}{2}; y_I=\frac{y_A+y_B}{2}; z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$
- Bán kính $R=IA=\frac{AB}{2}$
- Phương trình $S(I;R):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

Dạng 4. Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ tiếp xúc mặt phẳng (α):

- Bán kính $R=d(I;\alpha)=\frac{|Aa+Bb+Cc+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$
- Phương trình $S(I;R):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

Dạng 5. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ (đi qua 4 điểm A,B,C,D)

- Giả sử mặt cầu (S) có dạng: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ (2)
- Thế tọa độ của điểm A,B,C,D vào phương trình (2) ta được 4 phương trình
- Giải hệ phương trình tìm a,b,c,d
- Viết phương trình mặt cầu.

Dạng 6. Mặt cầu đi qua A,B,C và tâm $I\in(\alpha):Ax+By+Cz+D=0$:

- Giả sử mặt cầu (S) có dạng: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ (2)
- Thế tọa độ của điểm A,B,C vào phương trình (2) ta được 3 phương trình
- $I(a;b;c)\in(\alpha)\Rightarrow Aa+Bb+Cc+D=0$
- Giải hệ 4 phương trình tìm a,b,c,d
- Viết phương trình mặt cầu.

Dạng 7. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A,B và tâm thuộc đường thẳng d

Cách 1:

- Tham số hóa tọa độ tâm I theo đường thẳng d (tham số t)
- Ta có $A,B\in(S)\Leftrightarrow IA=IB=R\Leftrightarrow IA^2=IB^2$. Giải pt tìm ra $t\Rightarrow$ tọa độ I, tính được R.

Cách 2:

- Viết phương trình mặt phẳng trung trực (P) của đoạn thẳng AB.
- Tâm mặt cầu là giao của mặt phẳng trung trực trên và đường thẳng d (giải hệ tìm tọa độ tâm I)
- Bán kính $R=IA$. Suy ra phương trình mặt cầu cần tìm.

(Chú ý: Nếu $d\subset(P)$ hoặc $d//(P)$ thì không sử dụng được cách 2 này)

Dạng 8. Mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt cầu (T) cho trước:

- Xác định tâm J và bán kính R' của mặt cầu (T)
- Sử dụng điều kiện tiếp xúc của hai mặt cầu để tính bán kính R của mặt cầu (S).

(Xét hai trường hợp tiếp xúc trong và tiếp xúc ngoài)

Dạng 9. Mặt cầu (S') đối xứng Mặt cầu (S) qua mặt phẳng (P)

- Tìm điểm I' đối xứng với tâm I qua mp (P)
- Viết phương trình mặt cầu (S') tâm I' có bán kính $R'=R$.

Dạng 10. Mặt cầu (S') đối xứng mặt cầu (S) qua đường thẳng d

- Tìm điểm I' đối xứng với tâm I qua mp d (xem cách làm ở phần đường thẳng)
- Viết phương trình mặt cầu (S') tâm I' có bán kính $R'=R$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

C – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: **(ĐH Vinh Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$ cho $M(2;1;4)$; $N(5;0;0)$; $P(1;-3;1)$. Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) đồng thời đi qua các điểm M, N, P. Tìm c biết $a+b+c<5$

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 2: **(ĐH Vinh Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$ cho $A(-2;0;0)$; $B(0;-2;0)$; $C(0;0;-2)$. D là điểm khác O sao cho DA, DB, DC đôi một vuông góc. $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Tính $S=a+b+c$

A. -4. **B.** -1. **C.** -2. **D.** -3.

Câu 3: **(THPT Nghèn Lần1)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;-1)$, $B(-3;-2;1)$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I thuộc mặt phẳng (Oxy), bán kính $\sqrt{11}$ và đi qua hai điểm A, B. Biết I có tung độ âm, phương trình mặt cầu (S) là

A. $x^2+y^2+z^2+6y-2=0$. **B.** $x^2+y^2+z^2+4y-7=0$.

C. $x^2+y^2+z^2+4y+7=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2+6y+2=0$.

Câu 4: **(SỞ PHÚ THỌ LẦN 2 NĂM 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2=9$ và mặt phẳng $(P):4x+2y+4z+7=0$. Hai mặt cầu có bán kính là R_1 và R_2 chứa đường tròn giao tuyến của (S) và (P) đồng thời cùng tiếp xúc với mặt phẳng $(Q):3y-4z-20=0$. Tổng R_1+R_2 bằng

A. $\frac{63}{8}$. **B.** $\frac{35}{8}$. **C.** 5. **D.** $\frac{65}{8}$.

Câu 5: **(THPT LƯƠNG THẾ VINH 2019LẦN 3)** Cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-2}{1}$ và điểm $A(1;2;1)$. Tìm bán kính của mặt cầu có tâm I nằm trên d, đi qua A và tiếp xúc với mặt phẳng $(P):x-2y+2z+1=0$.

A. $R=2$. **B.** $R=4$. **C.** $R=1$. **D.** $R=3$.

Câu 6: **(Chuyên Phan Bội Châu Lần2)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$ và hai điểm $A(4;3;1)$, $B(3;1;3)$; M là điểm thay đổi trên (S). Gọi m, n là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất cảu biểu thức $P=2MA^2-MB^2$. Xác định $(m-n)$.

A. 64. **B.** 60. **C.** 68. **D.** 48.

Câu 7: **(CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIỆU ĐỒNG THÁP 2019 LẦN 2)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=4$ và điểm $A(1;1;-1)$. Ba mặt phẳng thay đổi đi qua A và đôi một vuông góc với nhau, cắt mặt cầu (S) theo ba giao tuyến là các đường tròn $(C_1),(C_2),(C_3)$. Tổng ba bán kính của ba đường tròn (C_1), (C_2), (C_3) là

A. 6. **B.** $4+\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $2+2\sqrt{3}$.

Câu 8: **(THPT LƯƠNG THẾ VINH 2019LẦN 3)** Cho đường thẳng $d:\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-2}{2}$. Viết phương trình mặt cầu tâm $I(1;2;-1)$ cắt d tại các điểm A, B sao cho $AB=2\sqrt{3}$.

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25$. **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=4$.

C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$. **D.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 9: **(Đặng Thành Nam Đề 12)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2+y^2+z^2=1$ cắt mặt phẳng $(P):x+2y-2z+1=0$ theo giao tuyến là đường tròn (C). Mặt cầu chứa đường tròn (C) và qua điểm $A(1;1;1)$ có tâm là điểm $I(a;b;c)$, giá trị $a+b+c$ bằng

A. $0,5$. **B.** -1. **C.** $-0,5$. **D.** 1.

Câu 10: **(NGÔ SĨ LIÊN BẮC GIANG LẦN IV NĂM 2019)** Cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2(m+1)x+(2-m)y+2(m+1)z-6(m+2)=0$. Biết rằng khi m thay đổi mặt cầu (S) luôn chứa một đường tròn cố định. Tọa độ tâm I của đường tròn đó là

A. $I(1;2;1)$. **B.** $I(-1;-2;-1)$. **C.** $I(1;2;-1)$. **D.** $I(-1;-2;1)$.

Câu 11: **(Sở Ninh Bình 2019 lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x-2y-2z-3=0$ và mặt phẳng $(Q):x-2y-2z+6=0$. Gọi (S) là một mặt cầu tiếp xúc với cả hai mặt phẳng. Bán kính của (S) bằng.

A. 3. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** 9.

Câu 12: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;2;0),B(-1;1;4)$ và $C(3;-2;1)$. Mặt cầu (S) tâm I đi qua A,B,C và độ dài $OI=\sqrt{5}$ (biết tâm I có hoành độ nguyên, O là gốc tọa độ). Bán kính mặt cầu (S) là

A. $R=1$ **B.** $R=3$ **C.** $R=4$ **D.** $R=\sqrt{5}$

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;0;0),B(2;-1;2),C(-1;1;-3)$. Viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc trục Oy, đi qua A và cắt mặt phẳng (ABC) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất.

A. $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+z^2=\frac{5}{4}$. **B.** $x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+z^2=\frac{5}{4}$.

C. $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+z^2=\frac{9}{4}$. **D.** $x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+z^2=\frac{5}{4}$

Câu 14: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu có tâm $I(1;2;3)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\frac{x}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z}{2}$.

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{233}{9}$. **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{243}{9}$.

C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{2223}{9}$. **D.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{333}{9}$

Câu 15: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $x^2+y^2+z^2-4x+2y+6z-12=0$ và đường thẳng $d:x=5+2t;y=4;z=7+t$. Viết phương trình đường thẳng Δ tiếp xúc mặt cầu (S) tại điểm $M(5;0;1)$ biết đường thẳng Δ tạo với đường thẳng d một góc φ thỏa mãn $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{7}}$.

A. $\Delta:\begin{cases}x=5+3t\\y=-5t\\z=1-t\end{cases}\vee\Delta:\begin{cases}x=5+13t\\y=5t\\z=1-11t\end{cases}$.

B. $\Delta:\begin{cases}x=5+3t\\y=-5t\\z=1-t\end{cases}\vee\Delta:\begin{cases}x=5+13t\\y=5t\\z=1+11t\end{cases}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

C. $\Delta:\begin{cases}x=5+3t\\y=5t\\z=1-t\end{cases}\vee\Delta:\begin{cases}x=5+13t\\y=5t\\z=1-11t\end{cases}$. **D.** $\Delta:\begin{cases}x=5+3t\\y=-5t\\z=1-t\end{cases}\vee\Delta:\begin{cases}x=5+13t\\y=5t\\z=1-21t\end{cases}$

Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-2}$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng d sao cho mặt cầu (S) tâm M tiếp xúc với trục Oz có bán kính bằng 2.

A. $M(2;0;-2)\vee M\left(\frac{6}{5};-\frac{8}{5};\frac{2}{5}\right)$. **B.** $M(2;0;2)\vee M\left(\frac{6}{5};\frac{8}{5};\frac{2}{5}\right)$.

C. $M(2;0;-2)\vee M\left(\frac{7}{5};-\frac{8}{5};\frac{4}{5}\right)$. **D.** $M(4;0;-2)\vee M\left(\frac{6}{5};-\frac{8}{5};\frac{2}{5}\right)$

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng Δ_1,Δ_2 có phương trình: $\Delta_1:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-1}{2};\Delta_2:\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{-1}$. Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất và tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1,Δ_2?

A. $x^2+(y-2)^2+z^2=6$. **B.** $x^2+(y-2)^2-z^2=6$.

C. $x^2-(y-2)^2+z^2=6$. **D.** $x^2+(y+2)^2+z^2=6$

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa trục Ox và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính bằng 3.

A. $(P):y-2z=0$. **B.** $(P):x-2z=0$. **C.** $(P):y+2z=0$. **D.** $(P):x+2z=0$

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}$ và cắt mặt phẳng $(P):x+2y+z-6=0$ tại điểm M. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng d và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm A, biết diện tích tam giác IAM bằng $3\sqrt{3}$ và tâm I có hoành độ âm.

A. $(S):(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=6$. **B.** $(S):(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=36$.

C. $(S):(x+1)^2-y^2-(z-1)^2=6$. **D.** $(S):(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=6$

Câu 20: Trong không gian Oxyz cho 3 điểm $A(-13;-1;0),B(2;1;-2),C(1;2;2)$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-67=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua qua A, song song với BC và tiếp xúc với mặt cầu (S).(S) có tâm $I(1;2;3)$ và có bán kính $R=9$.

A. $(P):-2x+2y-z+28=0$ hoặc $(P):8x+4y+z-100=0$.

B. $(P):-2x+2y+z+28=0$ hoặc $(P):8x+4y+z+100=0$.

C. $(P):-2x+2y-z-28=0$ hoặc $(P):8x+4y+z+100=0$.

D. $(P):-2x+2y-2z+28=0$ hoặc $(P):8x+4y+z-1000=0$

Câu 21: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-3=0$, mặt phẳng $(P):x-y+z+1=0$ và hai điểm $A(-1;1;0),B(2;2;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (α) song

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

song với AB, vuông góc với mặt phẳng (P) và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn (C) có bán kính bằng $\sqrt{3}$.

A. $(\alpha): x-y-2z+1=0$ và mp $(\alpha): x-y-2z-11=0$.

B. $(\alpha): x-5y-2z+1=0$ và mp $(\alpha): x-y-2z-11=0$.

C. $(\alpha): x-y-2z+1=0$ và mp $(\alpha): x-5y-2z-11=0$.

D. $(\alpha): x-5y-2z+1=0$ và mp $(\alpha): x-5y-2z-11=0$

Câu 22: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(2;0;0), B(0;2;0)$. Điểm C thuộc trục Ox sao cho tam giác ABC là tam giác đều, viết phương trình mặt cầu (S) có tâm O tiếp xúc với ba cạnh của tam giác ABC.

A. $(S): x^2+y^2+z^2=2$.

B. $(S): x^2+y^2+z^2=-2$.

C. $(S): x^2+y^2+z^2=\sqrt{2}$.

D. $(S): x^2+y^2+z^2=-\sqrt{2}$

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{1}$ và mặt cầu $(S): (x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=25$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M(-1;-1;-2)$, cắt đường thẳng d và mặt cầu (S) tại hai điểm A, B sao cho $AB=8$.

A. $\Delta: \begin{cases} x=-1+6t \\ y=-1+2t \\ z=-2+9t \end{cases}$.

B. $\Delta: \begin{cases} x=-1-6t \\ y=-1-2t \\ z=-2+9t \end{cases}$.

C. $\Delta: \begin{cases} x=-1+6t \\ y=1+2t \\ z=2-9t \end{cases}$.

D. $\Delta: \begin{cases} x=-2+6t \\ y=-3+2t \\ z=-2+9t \end{cases}$

Câu 24: Trong không gian Oxyz, viết phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(Q): 2x+y+2z+1=0$ tại $M(1;-1;-1)$ và tiếp xúc mặt phẳng $(P): x+2y-2z+8=0$

A. $\left[\begin{array}{l} (c): (x-3)^2+y^2+(z-1)^2=9 \\ (c): (x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=9 \end{array}\right.$.

B. $\left[\begin{array}{l} (c): (x+3)^2+y^2+(z+1)^2=9 \\ (c): (x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=9 \end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l} (c): (x-3)^2+y^2+(z-1)^2=9 \\ (c): (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9 \end{array}\right.$.

D. $\left[\begin{array}{l} (c): (x-3)^2+y^2+(z-1)^2=81 \\ (c): (x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=81 \end{array}\right.$

Câu 25: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho 2 đường thẳng:

$\Delta_1: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-3}$, $\Delta_2: \begin{cases} x=t \\ y=2-t \\ z=1+2t \end{cases}$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+2y-6z-5=0$

Viết phương trình mặt phẳng (α) song song với hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có chu vi bằng $\dfrac{2\sqrt{365}\pi}{5}$.

A. $x-5y-3z-4=0;\ x-5y-3z+10=0$

B. $x-5y-3z+10=0$

C. $x-5y-3z+3+\sqrt{511}=0;\ x-5y-3z+3-\sqrt{511}=0$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

D. $x-5y-3z-4=0$

Câu 26: Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(1,0,-1)$ và mặt phẳng $(P): x+y-z-3=0$. Mặt cầu S có tâm I nằm trên mặt phẳng (P), đi qua điểm A và gốc tọa độ O sao cho chu vi tam giác OIA bằng $6+\sqrt{2}$. Phương trình mặt cầu S là:

A. $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$ hoặc $(x+2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9.$

B. $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$ hoặc $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=9$

C. $(x-2)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9$ hoặc $(x-2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$

D. $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$ hoặc $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=9$

Câu 27: Cho điểm $I(1;7;5)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-6}{-1}=\dfrac{z}{3}$. Phương trình mặt cầu có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho tam giác diện tích tam giác IAB bằng $2\sqrt{6015}$ là:

A. $(x-1)^2+(y-7)^2+(z-5)^2=2018.$ **B.** $(x-1)^2+(y-7)^2+(z-5)^2=2017.$

C. $(x-1)^2+(y-7)^2+(z-5)^2=2016.$ **D.** $(x-1)^2+(y-7)^2+(z-5)^2=2019.$

Câu 28: Cho điểm $I(0;0;3)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=-1+t\\y=2t\\z=2+t\end{cases}$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB vuông là:

A. $x^2+y^2+(z-3)^2=\dfrac{3}{2}.$ **B.** $x^2+y^2+(z-3)^2=\dfrac{8}{3}.$

C. $x^2+y^2+(z-3)^2=\dfrac{2}{3}.$ **D.** $x^2+y^2+(z-3)^2=\dfrac{4}{3}.$

Câu 29: Cho điểm $A(2;5;1)$ và mặt phẳng $(P): 6x+3y-2z+24=0$, H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (P). Phương trình mặt cầu (S) có diện tích 784π và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại H, sao cho điểm A nằm trong mặt cầu là:

A. $(x-8)^2+(y-8)^2+(z+1)^2=196.$ **B.** $(x+8)^2+(y+8)^2+(z-1)^2=196.$

C. $(x+16)^2+(y+4)^2+(z-7)^2=196.$ **D.** $(x-16)^2+(y-4)^2+(z+7)^2=196.$

Câu 30: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=1\\y=1,t\in\mathbb{R};\\z=t\end{cases}$

$d_2:\begin{cases}x=2\\y=u\\z=1+u\end{cases}, u\in\mathbb{R};\ \Delta: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}.$ Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với cả d_1, d_2 và có tâm thuộc đường thẳng Δ?

A. $(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=1.$ **B.** $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(z-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{2}.$

C. $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(z-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}.$ **D.** $\left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{4}\right)^2+\left(z-\dfrac{5}{4}\right)^2=\dfrac{9}{16}.$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 31: Cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4z+1=0$ và đường thẳng $d:\begin{cases} x=2-t \\ y=t \\ z=m+t \end{cases}$. Tìm m để d cắt (S) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho các mặt phẳng tiếp diện của (S) tại A và tại B vuông góc với nhau.

A. $m=-1$ hoặc $m=-4$ **B.** $m=0$ hoặc $m=-4$

C. $m=-1$ hoặc $m=0$ **D.** Cả A,B,C đều sai

Câu 32: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+4x-6y+m=0$ và đường thẳng $(d): \frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2}$. Tìm m để (d) cắt (S) tại hai điểm M, N sao cho độ dài MN bằng 8.

A. $m=-24$ **B.** $m=8$ **C.** $m=16$ **D.** $m=-12$

Câu 33: Cho đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\beta): x+2y-2z-4=0$ $(\alpha): 2x-2y-z+1=0,$ và mặt cầu S có phương trình $x^2+y^2+z^2+4x-6y+m=0$. Tìm m để đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho AB = 8.

A. –9 **B.** –12 **C.** 5 **D.** 2

Câu 34: Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho $A(1;0;2), B(3;1;4), C(3;-2;1)$. Tìm tọa độ điểm *S*, biết *SA* vuông góc với *(ABC)*, mặt cầu ngoại tiếp tứ diện *S.ABC* có bán kính bằng $\frac{3\sqrt{11}}{2}$ và *S* có cao độ âm.

A. $S(-4;-6;4)$. **B.** $S(3;4;0)$. **C.** $S(2;2;1)$. **D.** $S(4;6;-4)$.

Câu 35: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;0;4)$, điểm M nằm trên mặt phẳng (Oxy) và $M\neq O$. Gọi D là hình chiếu vuông góc của O lên AM và E là trung điểm của OM. Biết đường thẳng DE luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định. Tính bán kính mặt cầu đó.

A. $R=2$. **B.** $R=1$. **C.** $R=4$. **D.** $R=\sqrt{2}$.

Câu 36: Trong không gian tọa độ Oxyz cho điểm $A(0;1;1), B(1;0;-3), C(-1;-2;-3)$ và mặt cầu (S) có phương trình: $x^2+y^2+z^2-2x+2z-2=0$.Tìm tọa độ điểm D trên mặt cầu (S) sao cho tứ diện $ABCD$ có thể tích lớn nhất.

A. $D\left(\frac{7}{3};-\frac{4}{3};-\frac{1}{3}\right)$ **B.** $D\left(\frac{-1}{3};\frac{4}{3};\frac{-5}{3}\right)$ **C.** $D\left(\frac{7}{3};\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$ **D.** $D\left(\frac{7}{3};-\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$

Câu 37: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-1}$ và mặt cầu (S) tâm I có phương trình $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=18$. Đường thẳng d cắt (S) tại hai điểm A,B. Tính diện tích tam giác IAB.

A. $\frac{8\sqrt{11}}{3}$. **B.** $\frac{16\sqrt{11}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{11}}{6}$. **D.** $\frac{8\sqrt{11}}{9}$.

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=8$. Đường thẳng d thay đổi, đi qua điểm M, cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt. Tính diện tích lớn nhất S của tam giác OAB.

A. $S=\sqrt{7}$. **B.** $S=4$. **C.** $S=2\sqrt{7}$. **D.** $S=2\sqrt{2}$.

Câu 39: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;11;-5)$ và mặt phẳng

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$(P): 2mx+(m^2+1)y+(m^2-1)z-10=0$. Biết rằng khi m thay đổi, tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (P) và cùng đi qua A. Tìm tổng bán kính của hai mặt cầu đó.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** $7\sqrt{2}$. **D.** $12\sqrt{2}$.

Câu 40: Cho hình chóp SABC có đáy là tam giác đều cạnh bằng $6cm$ và $SA=SB=SC=4\sqrt{3}(cm)$.Gọi D là điểm đối xứng của B qua **C.** Khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABD bằng?

A. $5cm$ **B.** $3\sqrt{2}cm$ **C.** $\sqrt{26}cm$ **D.** $\sqrt{37}cm$

Câu 41: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{4}$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=2$. Hai mặt phẳng (P) và (Q) chứa d và tiếp xúc với (S). Gọi M,N là tiếp điểm. Tính độ dài đoạn thẳng MN.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** 4.

Câu 42: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, trong đó $a>0$, $b>0$, $c>0$ và $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{3}{c}=7$. Biết mặt phẳng (ABC) tiếp xúc với mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\dfrac{72}{7}$. Thể tích của khối tứ diện $OABC$ là

A. $\dfrac{2}{9}$. **B.** $\dfrac{1}{6}$. **C.** $\dfrac{3}{8}$. **D.** $\dfrac{5}{6}$.

Câu 43: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xét các điểm $A(0;0;1)$, $B(m;0;0)$, $C(0;n;0)$ và $D(1;1;1)$, với $m>0,n>0$ và $m+n=1$. Biết rằng khi m,n thay đổi, tồn tại một mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) và đi qua D. Tính bán kính R của mặt cầu đó.

A. $R=1$. **B.** $R=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $R=\dfrac{3}{2}$. **D.** $R=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 44: **(THPT-Chuyên-Sơn-La-Lần-1-2018-2019-Thi-tháng-4)**Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;0)$ và $B(2;3;4)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1):(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=4$ và $(S_2):x^2+y^2+z^2+2y-2=0$. Xét M, N là hai điểm bất kỳ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MN=1$. Giá trị nhỏ nhất của $AM+BN$ bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 45: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi $\alpha;\beta;\gamma$ là ba góc tạo bởi tia Ot bất kì với 3 tia $Ox;Oy;Oz$ và mặt cầu $(S):(x-\cos\alpha)^2+(y-\cos\beta)^2+(z-\cos\gamma)^2=4$. Biết (S) luôn tiếp xúc với hai mặt cầu cố định có bán kính $R_1;R_2$. Tính $T=R_1+R_2$.

A. $T=8$. **B.** $T=4$. **C.** $T=11$. **D.** $T=9$.

Câu 46: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;0),B(2;-3;2)$. Gọi (S) là mặt cầu đường kính AB và Ax là tiếp tuyến của (S) tại A; By là tiếp tuyến của (S) tại B và $Ax\perp By$. Hai điểm M,N lần lượt di động trên Ax,By sao cho MN là tiếp tuyến của (S). Tính $AM.BN$.

A. $AN.BM=\dfrac{19}{2}$. **B.** $AN.BM=48$. **C.** $AN.BM=19$. **D.** $AN.BM=24$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 47: **(Đặng Thành Nam Đề 17)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z-3)^2=8$ và hai điểm $A(4;4;3)$, $B(1;1;1)$ Tập hợp tất cả các điểm M thuộc (S) sao cho $MA=2MB$ là một đường tròn (C). Bán kính của (C) bằng

A. $\sqrt{7}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 48: **(Kim Liên)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+\frac{9}{2}=0$ và hai điểm $A(0;2;0)$, $B(2;-6;-2)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc (S) thỏa mãn tích $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ có giá trị nhỏ nhất. Tổng $a+b+c$ bằng

A. -1 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 2

Câu 49: **(CHUYÊN SƯ PHẠM HÀ NỘI LẦN 4 NĂM 2019)** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;0)$, $B(5;6;0)$ và M là điểm thay đổi trên mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2=1$. Tập hợp các điểm M trên mặt cầu (S) thỏa mãn $3MA^2+MB^2=48$ có bao nhiêu phần tử?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 50: **(Sở Phú Thọ)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+2)^2+(y-1)^2+\left(z+\sqrt{2}\right)^2=9$ và hai điểm $A\left(-2;0;-2\sqrt{2}\right)$, $B(-4;-4;0)$. Biết rằng tập hợp các điểm M thuộc (S) sao cho $MA^2+\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MB}=16$ là một đường tròn. Bán kính của đường tròn đó bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 51: **(CỤM TRẦN KIM HƯNG - HƯNG YÊN NĂM 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P):2x-y-2z-2=0$ và mặt phẳng $(Q):2x-y-2z+10=0$ song song với nhau. Biết $A(1;2;1)$ là điểm nằm giữa hai mặt phẳng (P) và (Q). Gọi (S) là mặt cầu qua A và tiếp xúc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q). Biết rằng khi (S) thay đổi thì tâm của nó luôn nằm trên một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó

A. $r=\frac{4\sqrt{2}}{3}$. **B.** $r=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **C.** $r=\frac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $r=\frac{2\sqrt{5}}{3}$.

Câu 52: **(Chuyên Vinh Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-4)^2+(z-6)^2=24$ và điểm $A(-2;0;-2)$. Từ A kẻ các tiếp tuyến đến (S) với các tiếp điểm thuộc đường tròn (ω). Từ điểm M di động nằm ngoài (S) và nằm trong mặt phẳng chứa (ω), kẻ các tiếp tuyến đến (S) với các tiếp điểm thuộc đường tròn (ω'). Biết khi (ω) và (ω') có cùng bán kính thì M luôn thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=6\sqrt{2}$. **B.** $r=3\sqrt{10}$. **C.** $r=3\sqrt{5}$. **D.** $r=3\sqrt{2}$.

Câu 53: **(Chuyên Vinh Lần 2)** Trong không gian cho hình cầu (S) có tâm O, bán kính R. Một điểm S cố định nằm ngoài hình cầu sao cho $SO=kR(k>1)$. Từ S kẻ các tiếp tuyến đến mặt cầu với các tiếp điểm thuộc đường tròn (C_1). Trên mặt phẳng (P) chứa đường tròn (C_1) ta lấy một điểm E thay đổi nằm ngoài mặt cầu (S). Từ E ta kẻ các tiếp tuyến đến mặt cầu với các tiếp điểm thuộc đường tròn (C_2). Biết rằng hai đường tròn (C_1) và (C_2) luôn có cùng bán kính. Hỏi khi đó điểm E di chuyển trên một đường tròn có bán kính R' bằng bao nhiêu?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $R'=\frac{\sqrt{k^4-1}}{k}.R$. **B.** $R'=\frac{\sqrt{k^4-1}}{2k}.R$.

C. $R'=\frac{\sqrt{k^4+1}}{k}.R$. **D.** $R'=\frac{\sqrt{k^2-1}}{k}.R$.

Câu 54: **(Chuyên Vinh Lần 2)** Trong không gian cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2=1$. Từ điểm $A(2019;0;0)$ ta kẻ các tiếp tuyến đến (S) với các tiếp điểm thuộc đường tròn (ω). Từ điểm M di động nằm ngoài (S) và nằm trong mặt phẳng chứa (ω), kẻ các tiếp tuyến đến (S) với các tiếp điểm thuộc đường tròn (ω'). Biết khi (ω) và (ω') có cùng bán kính thì M luôn thuộc một đường tròn cố định. Tính chiều dài quảng đường l khi M di chuyển đúng 2019 vòng theo cùng một chiều trên đường tròn đó.

A. $l=\frac{2.\sqrt{2019^4-1}}{2019}\pi$. **B.** $l=2019\pi$.

C. $l=8152722\pi$. **D.** $l=4076361\pi$.

Câu 55: **(Chuyên Thái Nguyên)** Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) đi qua điểm $A(2;-2;5)$ và tiếp xúc với ba mặt phẳng $(P):x=1,(Q):y=-1$ và $(R):z=1$ có bán kính bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

Câu 56: **(Văn Giang Hưng Yên)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;0;2)$, $B(3;1;4)$, $C(3;-2;1)$. Tìm tọa độ điểm S, biết SA vuông góc với (ABC), mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$ có bán kính bằng $\frac{3\sqrt{11}}{2}$ và S có cao độ âm.

A. $S(4;6;-4)$. **B.** $S(4;-6;-4)$. **C.** $S(-4;6;-4)$. **D.** $S(-4;-6;-4)$.

Câu 57: **(Chuyên Hưng Yên Lần 3)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=25$ và $M(4;6;3)$. Qua M kẻ các tia Mx, My, Mz đôi một vuông góc với nhau và cắt mặt cầu tại các điểm thứ hai tương ứng là A, B, C. Biết mặt phẳng (ABC) luôn đi qua một điểm cố định $H(a;b;c)$. Tính $a+3b-c$.

A. 9. **B.** 14. **C.** 11. **D.** 20.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

GTLN, GTNN TRONG HÌNH HỌC TỌA ĐỘ OXYZ

A - LÝ THUYẾT CHUNG

Để tìm cực trị trong không gian chúng ta thường sử dụng hai cách làm:

Cách 1: Sử dụng phương pháp hình học

Cách 2: Sử dụng phương pháp đại số.

Bài toán 1: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B)$ và mặt phẳng $(P): ax+by+cz+d=0$. Tìm điểm $M \in (P)$ sao cho

1. $MA+MB$ nhỏ nhất.

2. $|MA-MB|$ lớn nhất với $d(A,(P)) \neq d(B,(P))$.

Phương pháp:

- Xét vị trí tương đối của các điểm A, B so với mặt phẳng (P).
- Nếu $(ax_A+by_A+cz_A+d)(ax_B+by_B+cz_B+d)>0$ thì hai điểm A, B cùng phía với mặt phẳng (P).
- Nếu $(ax_A+by_A+cz_A+d)(ax_B+by_B+cz_B+d)<0$ thì hai điểm A, B nằm khác phía với mặt phẳng (P).

1. $MA+MB$ nhỏ nhất.

- Trường hợp 1: Hai điểm A, B ở khác phía so với mặt phẳng (P).

Vì A, B ở khác phía so với mặt phẳng (P) nên $MA+MB$ nhỏ nhất bằng AB khi và chỉ khi $M=(P)\cap AB$.

- Trường hợp 2: Hai điểm A, B ở cùng phía so với mặt phẳng (P).

Gọi A' đối xứng với A qua mặt phẳng (P), khi đó A' và B ở khác phía (P) và $MA=MA'$ nên $MA+MB=MA'+MB\geq A'B$.

Vậy $MA+MB$ nhỏ nhất bằng $A'B$ khi $M=A'B\cap(P)$.

2. $|MA-MB|$ lớn nhất.

- Trường hợp 1: Hai điểm A,B ở cùng phía so với mặt phẳng (P).

Vì A,B ở cùng phía so với mặt phẳng (P) nên $|MA-MB|$ lớn nhất bằng AB khi và chỉ khi $M=(P)\cap AB$.

- Trường hợp 2: Hai điểm A,B ở khác phía so với mặt phẳng (P).

Gọi A' đối xứng với A qua mặt phẳng (P), khi đó A' và B ở cùng phía (P) và $MA=MA'$ nên $|MA-MB|=|MA'-MB|\leq A'B$.

Vậy $|MA-MB|$ lớn nhất bằng $A'B$ khi $M=A'B\cap(P)$.

Bài toán 2: Lập phương trình mặt phẳng (P) biết

1. (P) đi qua đường thẳng Δ và khoảng cách từ $A\notin\Delta$ đến (P) lớn nhất

2. (P) đi qua Δ và tạo với mặt phẳng (Q) một góc nhỏ nhất

3. (P) đi qua Δ và tạo với đường thẳng d một góc lớn nhất.

Phương pháp:

Cách 1: Dùng phương pháp đại số

1. Giả sử đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}=\dfrac{z-z_1}{c}$ và $A(x_0;y_0;z_0)$

Khi đó phương trình (P) có dạng: $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$

Trong đó $Aa+Bb+Cc=0\Rightarrow A=-\dfrac{bB+cC}{a}$ $(a\neq 0)$ **(1)**

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Khi đó $d(A,(P))=\dfrac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ (2)

Thay (1) vào (2) và đặt $t=\dfrac{B}{C}$, ta được $d(A,(P))=\sqrt{f(t)}$

Trong đó $f(t)=\dfrac{mt^2+nt+p}{m't^2+n't+p'}$, khảo sát hàm $f(t)$ ta tìm được max $f(t)$. Từ đó suy ra được sự biểu diễn của A,B qua C rồi cho C giá trị bất kì ta tìm được A,B.

2. và **3**. làm tương tự

Cách 2: Dùng hình học

1. Gọi K,H lần lượt là hình chiếu của A lên Δ và (P), khi đó ta có:

$d(A,(P))=AH\le AK$, mà AK không đổi. Do đó $d(A,(P))$ lớn nhất $\Leftrightarrow H\equiv K$

Hay (P) là mặt phẳng đi qua K, nhận $\overrightarrow{AK}$ làm VTPT.

2. Nếu $\Delta\perp(Q)\Rightarrow\widehat{((P),(Q))}=90^0$ nên ta xét Δ và (Q) không vuông góc với nhau.

- Gọi B là một điểm nào đó thuộc Δ, dựng đường thẳng qua B và vuông góc với (Q). Lấy điểm C cố định trên đường thẳng đó. Hạ $CH\perp(P)$, $CK\perp d$. Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) là $\widehat{BCH}$.

Ta có $\sin\widehat{BCH}=\dfrac{BH}{BC}\ge\dfrac{BK}{BC}$.

Mà $\dfrac{BK}{BC}$ không đổi, nên $\widehat{BCH}$ nhỏ nhất khi $H\equiv K$.

- Mặt phẳng (P) cần tìm là mặt phẳng chứa Δ và vuông góc với mặt phẳng (BCK). Suy ra $\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{u_\Delta},\left[\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{n_Q}\right]\right]$ là VTPT của (P).

3. Gọi M là một điểm nào đó thuộc Δ, dựng đường thẳng d' qua M và song song với d. Lấy điểm A cố định trên đường thẳng đó. Hạ $AH\perp(P)$, $AK\perp d$. Góc giữa mặt phẳng (P) và đường thẳng d' là $\widehat{AMH}$. Ta có $\cos\widehat{AMH}=\dfrac{HM}{AM}\ge\dfrac{KM}{AM}$.

Mà $\dfrac{KM}{AM}$ không đổi, nên $\widehat{AMH}$ lớn nhất khi $H\equiv K$.

- Mặt phẳng (P) cần tìm là mặt phẳng chứa Δ và vuông góc với mặt phẳng (d',Δ). Suy ra $\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{u_\Delta},\left[\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{u_{d'}}\right]\right]$ là VTPT của (P).

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

DẠNG 1: MIN, MAX VỚI MẶT PHẲNG CHẮN

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;1)$. Mặt phẳng (P) thay đổi đi qua M lần lượt cắt các tia Ox,Oy,Oz tại A,B,C khác O. Tính giá trị nhỏ nhất của thể tích khối tứ diện $OABC$.

A. 54. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 18.

Câu 2: Trong hệ trục tọa độ Oxyz cho 3 điểm $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$ với $a,b,c>0$.Giả sử a,b,c thay đổi nhưng thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=k^2$ không đổi. Diện tích tam giác ABC đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $\dfrac{k^2\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\dfrac{k^2\sqrt{3}}{6}$ **C.** $k^2\sqrt{3}$ **D.** k^2

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 3: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(9;1;1)$, cắt các tia Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho thể tích tứ diện $OABC$ có giá trị nhỏ nhất là

A. $\frac{x}{7}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=1$ **B.** $\frac{x}{27}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=1$ **C.** $\frac{x}{-27}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=1$ **D.** $\frac{x}{27}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=-1$

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có điểm A trùng với gốc tọa độ, $B(a;0;0), D(0;a;0), A'(0;0;b)$ với $(a>0, b>0)$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Giả sử $a+b=4$, hãy tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $A'BDM$?

A. $\max V_{A'MBD}=\frac{64}{27}$ **B.** $\max V_{A'MBD}=1$

C. $\max V_{A'MBD}=-\frac{64}{27}$ **D.** $\max V_{A'MBD}=\frac{27}{64}$

DẠNG 2: MIN, MAX VỚI PHƯƠNG TRÌNH MẶT THẲNG

Câu 1: **(Thị Xã Quảng Trị)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;2)$, $B(1;1;1)$, $C(2;-2;3)$ và mặt phẳng $(P): x-y+z+3=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của $a+2b+3c$ bằng

A. 7. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 2: **(Chuyên Lam Sơn Lần 2)** Trong hệ trục $Oxyz$, cho điểm $A(-1;3;5)$, $B(2;6;-1)$, $C(-4;-12;5)$ và mặt phẳng $(P): x+2y-2z-5=0$. Gọi M là điểm di động trên (P). Gía trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ là

A. 42. **B.** 14. **C.** $14\sqrt{3}$. **D.** $\frac{14}{\sqrt{3}}$.

Câu 3: **(THPT-Ngô-Quyền-Hải-Phòng-Lần-2-2018-2019-Thi-24-3-2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;2;0)$, $C(3;-1;2)$ và M là điểm thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x-y+2z+7=0$. Tính giá trị nhỏ nhất của $P=\left|3\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}-7\overrightarrow{MC}\right|$.

A. $P_{\min}=20$. **B.** $P_{\min}=5$. **C.** $P_{\min}=25$. **D.** $P_{\min}=27$.

Câu 4: **(KÊNH TRUYỀN HÌNH GIÁO DỤC QUỐC GIA VTV7 –2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;2;2)$, $B(3;-1;-2)$, $C(-4;0;3)$. Tìm tọa độ điểm I trên mặt phẳng (Oxz) sao cho biểu thức $\left|\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}+5\overrightarrow{IC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $I\left(-\frac{37}{4};0;\frac{19}{4}\right)$. **B.** $I\left(-\frac{27}{4};0;\frac{21}{4}\right)$. **C.** $I\left(\frac{37}{4};0;-\frac{23}{4}\right)$. **D.** $I\left(\frac{25}{4};0;-\frac{19}{4}\right)$.

Câu 5: **(SỞ QUẢNG BÌNH NĂM 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;1;1)$, $B(2;-1;1)$, $C(4;1;1)$ và

$(P): x+y+z-6=0$. Xét điểm $M(a;b;c)$ thuộc $mp(P)$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của $2a+4b+c$ bằng:

A. 6. **B.** 12. **C.** 7. **D** 5.

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;2)$; $B(0;-1;2)$ và mặt phẳng $(P): x+2y-2z+12=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $M\left(2;2;9\right)$. **B.** $M\left(-\frac{6}{11};-\frac{18}{11};\frac{25}{11}\right)$.

C. $M\left(\frac{7}{6};\frac{7}{6};\frac{31}{4}\right)$. **D.** $M\left(-\frac{2}{5};-\frac{11}{5};\frac{18}{5}\right)$.

Câu 7: Cho hai điểm $A(-1,3,-2);B(-9,4,9)$ và mặt phẳng $(P):2x-y+z+1=0$. Điểm M thuộc (P). Tính GTNN của $AM+BM$.

A. $\sqrt{6}+\sqrt{204}$ **B.** $\frac{\sqrt{7274}+\sqrt{31434}}{6}$ **C.** $\frac{\sqrt{2004}+\sqrt{726}}{3}$ **D.** $3\sqrt{26}$

Câu 8: **(Chuyên Hạ Long lần 2-2019)** Cho $A(4;5;6);B(1;1;2)$, M là một điểm di động trên mặt phẳng $(P):2x+y+2z+1=0$.

Khi đó $|MA-MB|$ nhận giá trị lớn nhất là?

A. $\sqrt{77}$. **B.** $\sqrt{41}$. **C.** 7. **D.** $\sqrt{85}$.

Câu 9: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $2x-y+z+1=0$ và hai điểm $M\left(3;1;0\right),N\left(-9;4;9\right)$. Tìm điểm $I\left(a;b;c\right)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $|IM-IN|$ đạt giá trị lớn nhất. Biết a,b,c thỏa mãn điều kiện:

A. $a+b+c=21$ **B.** $a+b+c=14$ **C.** $a+b+c=5$ **D.** $a+b+c=19$.

Câu 10: **(ĐH Vinh Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;1;0),B(3;-1;4)$ và mặt phẳng $(\alpha):x-y+z+1=0$. Tìm tọa độ điểm $M\in(\alpha)$ sao cho $|MA-MB|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $M\left(1;3;-1\right)$. **B.** $M\left(\frac{3}{4};\frac{5}{4};-\frac{1}{2}\right)$. **C.** $M\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$. **D.** $M\left(0;2;1\right)$.

Câu 11: **(CỤM TRẦN KIM HƯNG - HƯNG YÊN NĂM 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $(Oxyz)$ cho ba điểm $A(1;0;3)$; $B(-3;1;3)$; $C(1;5;1)$. Gọi $M(x_o;y_o;z_o)$ thuộc mặt phẳng tọa độ (Oxy) sao cho biểu thức $T=2|\overrightarrow{MA}|+|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|$ có giá trị nhỏ nhất. Khi đó tính giá trị x_o-y_o ?

A. $x_o-y_o=-\frac{8}{5}$. **B.** $x_o-y_o=\frac{8}{5}$. **C.** $x_o-y_o=-2$. **D.** $x_o-y_o=2$.

Câu 12: (Hình Oxyz) Cho $A(-1;3;5),B(2;6;-1),C(-4;-12;5)$ và điểm $(P):x+2y-2z-5=0$. Gọi M là điểm thuộc (P) sao cho biểu thức $S=|\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MB}|+|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm hoành độ điểm M.

A. $x_M=3$ **B.** $x_M=-1$ **C.** $x_M=1$ **D.** $x_M=-3$

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;-1)$, $B(0;3;1)$ và mặt phẳng $(P):x+y-z+3=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}|$ có giá trị nhỏ nhất.

A. $M\left(-4;-1;0\right)$. **B.** $M\left(-1;-4;0\right)$. **C.** $M\left(4;1;0\right)$. **D.** $M\left(1;-4;0\right)$.

Câu 14: **(Đề thi HK2 Lớp 12-Chuyên Nguyễn Du- Đăk Lăk)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;0;1)$, $B(-2;8;3)$ và điểm $M\left(a;b;c\right)$ di động trên mặt phẳng (Oxy). Khi $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị $a+b+3c$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 15: **(HKII Kim Liên 2017-2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, Cho hai điểm $A(-3;5;-5), B(5;-3;7)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z=0$. Tìm tọa độ điểm M trên mặt phẳng (P) sao cho MA^2-2MB^2 lớn nhất.

A. $M(-2;1;1)$. **B.** $M(2;-1;1)$. **C.** $M(6;-18;12)$. **D.** $M(-6;18;12)$.

Câu 16: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1;2;2), B(5;4;4)$ và mặt phẳng $(P): 2x+y-z+6=0$. Tọa độ điểm M nằm trên (P) saocho MA^2+MB^2 nhỏ nhất là:

A. $(-1;3;2)$ **B.** $(2;1;-11)$ **C.** $(-1;1;5)$ **D.** $(1;-1;7)$

Câu 17: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-y+z+1=0, A(8;-7;4), B(-1;2;-2)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho MA^2+2MB^2 nhỏ nhất.

A. $M(0;0;-1)$. **B.** $M(0;0;1)$. **C.** $M(1;0;1)$. **D.** $M(0;1;0)$

Câu 18: **(Chuyên Lý Tự Trọng Cần Thơ)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$ và mặt phẳng $(P); 2x-y+2z-8=0$. Xét M là điểm thay đổi thuộc (P), giá trị nhỏ nhất của $2MA^2+3MB^2$ bằng

A. 145. **B.** 108. **C.** 105. **D.** 135.

Câu 19: **(GIỮA-HKII-2019-NGHĨA-HƯNG-NAM-ĐỊNH)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(2;1;3)$, $B(1;-1;2)$, $C(3;-6;1)$. Điểm $M(x;y;z)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $P=x+y+z$.

A. $P=0$. **B.** $P=2$. **C.** $P=6$. **D.** $P=-2$.

Câu 20: rong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho ba điểm $A(1;01;1), B(1;2;1), C(4;1;-2)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z=0$. Tìm trên (P) điểm M sao cho $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó M có tọa độ

A. $M(1;1;-1)$ **B.** $M(1;1;1)$ **C.** $M(1;2;-1)$ **D.** $M(1;0;-1)$

Câu 21: **(Cẩm Giàng)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-10;-5;8)$, $B(2;1;-1)$, $C(2;3;0)$ và mặt phẳng $(P): x+2y-2z-9=0$. Xét M là điểm thay đổi trên (P) sao cho $MA^2+2MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $MA^2+2MB^2+3MC^2$.

A. 54. **B.** 282. **C.** 256. **D.** 328.

Câu 22: **(Sở Ninh Bình 2019 lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;4;5)$, $B(0;3;1)$, $C(2;-1;0)$ và mặt phẳng $(P): 3x-3y-2z-15=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho tổng các bình phương khoảng cách từ M đến A, B, C nhỏ nhất. Tính $a+b+c$.

A. 5. **B.** -5. **C.** 3. **D.** -3.

Câu 23: **(THPT-Nguyễn-Công-Trứ-Hà-Tĩnh-lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x+y-z+5=0$ và hai điểm $A(1;0;2)$, $B(2;-1;4)$. Tập hợp các điểm M nằm trên mặt phẳng (P) sao cho tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất.

A. $\begin{cases} x-7y-4z+7=0 \\ 3x-y+z-5=0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x-7y-4z+14=0 \\ 3x+y-z+5=0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x-7y-4z+7=0 \\ 3x+y-z+5=0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x-7y-4z+5=0 \\ 3x+y-z+5=0 \end{cases}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 24: **(Ba Đình Lần2)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-3=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+5=0$. Giả sử $M \in (P)$ và $N \in (S)$ sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với vecto $\vec{u}=(1;0;1)$ và khoảng cách giữa M và N lớn nhất. Tính MN.

A. $MN=3$. **B.** $MN=1+2\sqrt{2}$. **C.** $MN=3\sqrt{2}$. **D.** $MN=14$.

Câu 25: **(KÊNH TRUYỀN HÌNH GIÁO DỤC QUỐC GIA VTV7 –2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;3;4)$, $B(3;1;0)$. Gọi M là điểm trên mặt phẳng (Oxz) sao cho tổng khoảng cách từ M đến A và B là ngắn nhất. Tìm hoành độ x_0 của điểm M.

A. $x_0=4$. **B.** $x_0=3$. **C.** $x_0=2$. **D.** $x_0=1$.

Câu 26: **(KỸ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;-2;4)$ và mặt phẳng $(P): (m^2+2m)x-(m^2+4m-1)y+2(3m-1)z+m^2+1=0$. Tìm giá trị lớn nhất của khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P).

A. 5. **B.** $\sqrt{29}$. **C.** $\sqrt{33}$. **D.** $\sqrt{21}$.

Câu 27: **(ĐH Vinh Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(4;4;5)$. Giả sử M là điểm thay đổi trong mặt phẳng $(P): 2x+2y+z+2019=0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|AM-BM|$.

A. $\sqrt{17}$. **B.** $\sqrt{77}$. **C.** $7\sqrt{2}-3$. **D.** $\sqrt{82}-5$.

Câu 28: **(ĐH Vinh Lần 1)** Cho mặt phẳng $(\alpha): x-y+2z-1=0$ và hai điểm $A(0;-1;1), B(1;1;-2)$. Biết $M \in (\alpha)$ sao cho $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, hoành độ x_M của điểm M là

A. $x_M=\frac{1}{3}$. **B.** $x_M=-1$. **C.** $x_M=-2$. **D.** $x_M=\frac{2}{7}$.

Câu 29: **(Phan Đình Tùng Hà Tĩnh)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Mặt phẳng $(P): x+Ay+Bz+C=0$ chứa trục Oz và cách điểm M một khoảng lớn nhất, khi đó tổng $A+B+C$ bằng

A. 6. **B.** -3. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 30: **(GIỮA-HKII-2019-NGHĨA-HƯNG-NAM-ĐỊNH)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(a;b;c)$ với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $5(a^2+b^2+c^2)=9(ab+2bc+ca)$ và $Q=\frac{a}{b^2+c^2}-\frac{1}{(a+b+c)^3}$ có giá trị lớn nhất. Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các tia Ox, Oy, Oz. Phương trình mặt phẳng (MNP) là

A. $x+4y+4z-12=0$. **B.** $3x+12y+12z-1=0$.

C. $x+4y+4z=0$. **D.** $3x+12y+12z+1=0$.

Câu 31: **(Trần Đại Nghĩa)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $M(1;2;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $(P): x+2y+3z-8=0$. **B.** $(P): \frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1$.

C. $(P): x+y+z-4=0$. **D.** $(P): x+2y+z-6=0$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 32: **(THPT PHỤ DỰC – THÁI BÌNH)** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;1;1)$, $B(2;3;4)$, $C(3;2;4)$, $D(-2;-1;-3)$. Mặt phẳng (P) thay đổi nhưng luôn qua D và không cắt cạnh nào của tam giác ABC. Khi tổng các khoảng cách từ A, B, C đến (P) là lớn nhất thì (P) có một phương trình dạng $ax+by+cz+29=0$. Tính tổng $a+b+c$.

A. 9. **B.** 5. **C.** 13. **D.** 14.

Câu 33: **(Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-2;3;4)$ và $C(-2;5;1)$. Điểm $M(a;b;0)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng $T=a^2+b^2$ bằng

A. $T=10$. **B.** $T=25$. **C.** $T=13$. **D.** $T=17$.

Câu 34: **(Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-2;3;4)$ và $C(-2;5;1)$. Điểm $M(a;b;0)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng $T=a^2+b^2$ bằng

A. $T=10$. **B.** $T=25$. **C.** $T=13$. **D.** $T=17$.

Câu 35: **(THTT lần5)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;6)$, $B(2;4;0)$ và $C(0;4;6)$. Biết M là điểm để biểu thức $MA+MB+MC+MO$ đạt giá trị nhỏ nhất, phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm $H(3;0;-1)$ và M là

A. $\Delta:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-3}$. **B.** $\Delta:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{3}$.

C. $\Delta:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{-1}$. **D.** $\Delta:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{-2}$.

Câu 36: **(Đặng Thành Nam Đề 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;2)$, $B(-2;2;0)$ và mặt phẳng $(P):2x-y+2z-3=0$. Xét các điểm M, N di động trên (P) sao cho $MN=1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $2MA^2+3NB^2$ bằng

A. 49,8. **B.** 45. **C.** 53. **D.** 55,8.

Câu 37: **(Sở Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):mx+(m+1)y-z-2m-1=0$, với m là tham số. Gọi (T) là tập hợp các điểm H_m là hình chiếu vuông góc của điểm $H(3;3;0)$ trên (P). Gọi a,b lần lượt là khoảng cách lớn nhất, khoảng cách nhỏ nhất từ O đến một điểm thuộc (T). Khi đó, $a+b$ bằng

A. $5\sqrt{2}$. **B.** $3\sqrt{3}$. **C.** $8\sqrt{2}$. **D.** $4\sqrt{2}$.

Câu 38: **(Nguyễn Trãi Hải Dương Lần1)** Trong không gian $Oxyz$ cho $A(4;-2;6)$, $B(2;4;2)$, $M\in(\alpha):x+2y-3z-7=0$ sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất. Tọa độ của M bằng

A. $\left(\dfrac{29}{13};\dfrac{58}{13};\dfrac{5}{13}\right)$. **B.** $(4;3;1)$. **C.** $(1;3;4)$. **D.** $\left(\dfrac{37}{3};\dfrac{-56}{3};\dfrac{68}{3}\right)$.

Câu 39: **(GIA LỘC TỈNH HẢI DƯƠNG 2019 lần 2)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$,cho tứ diện $ABCD$ có tọa độ các điểm $A(1;1;1)$, $B(2;0;2)$ $C(-1;-1;0)$, $D(0;3;4)$. Trên các cạnh AB, AC, AD lần lượt lấy các điểm B', C', D' sao cho $\dfrac{AB}{AB'}+\dfrac{AC}{AC'}+\dfrac{AD}{AD'}=4$ và tứ diện $AB'C'D'$ có thể tích nhỏ nhất. Phương trình mặt phẳng $(B'C'D')$ là

A. $16x-40y-44z+39=0$. **B.** $16x-40y-44z-39=0$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

C. $16x+40y+44z-39=0$. **D.** $16x+40y-44z+39=0$.

DẠNG 3: MIN, MAX VỚI PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Câu 1: **(Nguyễn Du số 1 lần3)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-3}{2}=\frac{y-5}{2}=z+2$ và hai điểm $A(4;3;0), B(1;9;3)$. Điểm $M(a;b;c)$ nằm trên d sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất. Khi đó, tổng $a+b+c$ thuộc khoảng nào dưới đây:

A. $(9;10)$. **B.** $(4;5)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(7;8)$.

Câu 2: **(Chuyên Sơn La Lần 3 năm 2018-2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$ và đường thẳng $d:\frac{x-5}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{-1}$. Xét M là điểm thay đổi thuộc d, giá trị nhỏ nhất của $2MA^2+3MB^2$ bằng

A. 14. **B.** 160. **C.** $4\sqrt{10}$. **D.** 18.

Câu 3: Cho đường thẳng $\Delta:\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{2}$ và $A(1;1;0)$, $B(3;-1;4)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc Δ sao cho $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(-1;1;-2)$. **B.** $M\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};1\right)$. **C.** $M\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2};-3\right)$. **D.** $M(1;-1;2)$.

Câu 4: Cho đường thẳng $\Delta:\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{2}$ và hai điểm $A(1;1;0)$, $B(-1;0;1)$. Biết điểm $M(a;b;c)$ thuộc Δ sao cho biểu thức $T=|MA-MB|$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó tổng $a-b+c$ bằng:

A. 8. **B.** $8+\sqrt{33}$. **C.** $8+\frac{\sqrt{33}}{3}$. **D.** $8+\frac{4\sqrt{33}}{3}$.

Câu 5: Cho đường thẳng $\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$ và hai điểm $A(0;1;-3)$, $B(-1;0;2)$. Biết điểm M thuộc Δ sao cho biểu thức $T=|MA-MB|$ đạt giá trị lớn nhất là $T_{\max}$. Khi đó, $T_{\max}$ bằng bao nhiêu?

A. $T_{\max}=\sqrt{3}$. **B.** $T_{\max}=2\sqrt{3}$. **C.** $T_{\max}=3\sqrt{3}$. **D.** $T_{\max}=\sqrt{2}$.

Câu 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;5;3)$, đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{2}$. Biết rằng phương trình mặt phẳng (P) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) lớn nhất, có dạng $ax+by+cz-3=0$ (với a,b,c là các số nguyên). Khi đó tổng $T=a+b+c$ bằng

A. 3. **B.** -3. **C.** -2. **D.** -5.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): y-1=0$, đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=1 \\ y=2-t \\ z=1 \end{cases}$ và hai điểm $A(-1;-3;11)$, $B\left(\frac{1}{2};0;8\right)$. Hai điểm M, N thuộc mặt phẳng (P) sao cho $d(M;\Delta)=2$ và $NA=2NB$. Tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn MN.

A. $MN_{\min}=1$. **B.** $MN_{\min}=\sqrt{2}$. **C.** $MN_{\min}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $MN_{\min}=\frac{2}{3}$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=2+t \\ y=-1+2t \\ z=3t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$ hai điểm $A(2;0;3)$ và $B(2;-2;-3)$. Biết điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc Δ thì MA^4+MB^4 nhỏ nhất. Tìm x_0

A. $x_0=0$ **B.** $x_0=1$ **C.** $x_0=2$ **D.** $x_0=3$

Câu 9: **(CHUYÊN LÊ THÁNH TÔNG QUẢNG NAM LẦN 2 NĂM 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{3}$ và hai điểm $A(2;0;3)$, $B(2;-2;-3)$. Biết điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc d thỏa mãn $P=MA^4+MB^4+MA^2.MB^2$ nhỏ nhất. Tìm y_0.

A. $y_0=3$. **B.** $y_0=2$. **C.** $y_0=1$. **D.** $y_0=-1$.

Câu 10: **(TTHT Lần 4)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(2;-1;-2)$ và đường thẳng (d) có phương trình $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A, song song với đường thẳng (d) và khoảng cách từ d tới mặt phẳng (P) là lớn nhất. Khi đó mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. $x-y-6=0$. **B.** $x+3y+2z+10=0$.
C. $x-2y-3z-1=0$. **D.** $3x+z+2=0$.

Câu 11: **(TTHT Lần 4)**Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(-2;-2;1)$, $A(1;2;-3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2}=\frac{y-5}{2}=\frac{z}{-1}$. Tìm một vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ đi qua M, vuông góc với đường thẳng d đồng thời cách điểm A một khoảng bé nhất.

A. $\vec{u}=(2;2;-1)$. **B.** $\vec{u}=(1;7;-1)$. **C.** $\vec{u}=(1;0;2)$. **D.** $\vec{u}=(3;4;-4)$.

Câu 12: **(TTHT Lần 4)**Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;-1;0)$ và đường thẳng $d: \frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{1}$. Mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất có phương trình là

A. $x+y-z-2=0$. **B.** $x+y-z=0$.
C. $x+y-z+1=0$. **D.** $-x+2y+z+5=0$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 13: **(TTHT Lần 4)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;0;1)$, $B(1;-1;3)$ và mặt phẳng $(P): x-2y+2z-5=0$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua A, song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất.

A. $d: \dfrac{x+3}{26}=\dfrac{y}{11}=\dfrac{z-1}{-2}$.
B. $d: \dfrac{x+3}{26}=\dfrac{y}{-11}=\dfrac{z-1}{2}$.
C. $d: \dfrac{x+3}{26}=\dfrac{y}{11}=\dfrac{z-1}{2}$.
D. $d: \dfrac{x+3}{-26}=\dfrac{y}{11}=\dfrac{z-1}{-2}$.

Câu 14: **(KÊNH TRUYỀN HÌNH GIÁO DỤC QUỐC GIA VTV7 –2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x=-1-2t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$ và điểm $A(1;2;3)$. Mặt phẳng (P) chứa d sao cho $d(A,(P))$ lớn nhất. Khi đó tọa độ vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là

A. $(1;1;1)$. **B.** $(1;2;3)$. **C.** $(1;-1;1)$. **D.** $(0;1;1)$.

Câu 15: **(Chuyên Bắc Giang)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P): x+2y-2z+1=0$, $(Q): x+my+(m-1)z+2019=0$. Khi hai mặt phẳng (P), (Q) tạo với nhau một góc nhỏ nhất thì mặt phẳng (Q) đi qua điểm M nào sau đây?

A. $M(2019;-1;1)$. **B.** $M(0;-2019;0)$. **C.** $M(-2019;1;1)$. **D.** $M(0;0;-2019)$.

Câu 16: **(Nguyễn Khuyến)**Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{-1}$ và $d_2: \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa (d_1) sao cho góc giữa (P) và đường thẳng (d_2) là lớn nhất là: $ax-y+cz+d=0$. Giá trị của biểu thức $T=a+c+d$ bằng

A. $T=0$. **B.** $T=3$. **C.** $T=-\dfrac{13}{4}$. **D.** $T=-6$.

Câu 17: **(HKII-CHUYÊN-NGUYỄN-HUỆ-HÀ-NỘI)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{-2}$ và tạo với trục Oy góc có số đo lớn nhất. Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P)

A. $E(-3;0;4)$. **B.** $M(3;0;2)$. **C.** $N(-1;-2;-1)$. **D.** $F(1;2;1)$.

Câu 18: **(Thanh Chương Nghệ An Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác nhọn ABC có đường phân giác trong góc A song song với đường thẳng $(d): \begin{cases} x=2 \\ y=-1+t \\ z=4-t \end{cases}$. Đường thẳng AC có một vécto chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(1;2;-1)$. Biết đường thẳng AB có một vécto chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=(a;b;c)$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Biểu thức $P=a^2+b^2+c^2$ có giá trị nhỏ nhất bằng

A. 10. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 14.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 19: **(THPT-Phúc-Trạch-Hà-Tĩnh-lần-2-2018-2019-thi-tháng-4)** Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(-2;-2;1)$, $B(1;2;-3)$ và đường thẳng $\Delta:\frac{x+1}{2}=\frac{y-5}{2}=\frac{z}{-1}$. Tìm véctơ chỉ phương của đường thẳng d đi qua A vuông góc với đường thẳng Δ đồng thời cách điểm B một khoảng cách bé nhất.

A. $\vec{u}(2;2;-1)$. **B.** $\vec{u}(1;0;2)$. **C.** $\vec{u}(2;1;6)$. **D.** $\vec{u}(25;-29;-6)$.

Câu 20: **(THPT NINH BÌNH – BẠC LIÊU LẦN 4 NĂM 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{1}$ và điểm $A(2;1;2)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A, vuông góc với d đồng thời khoảng cách giữa d và Δ là lớn nhất. Biết $\vec{v}=(a;b;4)$ là một véc- tơ chỉ phương của Δ. Tính giá trị $a+b$.

A. 2. **B.** –8. **C.** –2. **D.** –4.

Câu 21: **(Chuyên Lý Tự Trọng Cần Thơ)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x+y+z-3=0$ và điểm $A(1;2;2)$. Gọi M là giao điểm của mặt phẳng (P) và trục oy. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P), đi qua M sao cho khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d có giá trị lớn nhất.

A. $d:\frac{x}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z}{-1}$. **B.** $d:\frac{x}{1}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z}{1}$.

C. $d:\frac{x}{2}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z}{-1}$. **D.** $d:\frac{x}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{-3}$.

Câu 22: **(Đặng Thành Nam Đề 10)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{-1}$. Hai điểm M,N lần lượt di động trên các mặt phẳng $(\alpha):x=2$, $(\beta):z=2$ sao cho trung điểm K của MN luôn thuộc đường thẳng Δ. Giá trị nhỏ nhất của độ dài MN bằng

A. $\frac{8\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{4\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{9\sqrt{5}}{5}$.

Câu 23: **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $A(1;4;2),B(-1;2;4)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua A cắt d sao cho khoảng cách từ B đến Δ là nhỏ nhất.

A. $\begin{cases}x=1-15t\\y=4-18t\\z=2-19t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1-5t\\y=4+8t\\z=2-9t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=1+5t\\y=4-8t\\z=2-9t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+15t\\y=4+18t\\z=2-19t\end{cases}$.

Câu 24: **(Chuyên Bắc Giang)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(1;2;-3)$, $B(-2;-2;1)$ và mặt phẳng $(\alpha):2x+2y-z+9=0$. Gọi M là điểm thay đổi trên mặt phẳng (α) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới một góc vuông. Xác định phương trình đường thẳng MB khi MB đạt giá trị lớn nhất.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $\begin{cases} x=-2-t \\ y=-2+2t \\ z=1+2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=-2+2t \\ y=-2-t \\ z=1+2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=-2+t \\ y=-2 \\ z=1+2t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=-2+t \\ y=-2-t \\ z=1 \end{cases}$.

Câu 25: **(KỸ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-z+1=0$, điểm $A(1;-1;2)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-4}{-3}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A song song với (P) sao cho khoảng cách giữa d và Δ lớn nhất.

A. $d: \begin{cases} x=1+40t \\ y=-1+29t \\ z=2+69t \end{cases}$. **B.** $d: \begin{cases} x=1+40t \\ y=-1-29t \\ z=2+11t \end{cases}$. **C.** $d: \begin{cases} x=1+t \\ y=-1+2t \\ z=2-3t \end{cases}$. **D.** $d: \begin{cases} x=1+21t \\ y=-1+10t \\ z=2+31t \end{cases}$.

Câu 26: **(Chuyên KHTN lần2)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}$ và hai điểm $A(1;2;3); B(-1;0;2)$. Phương trình đường thẳng Δ đi qua B, cắt d sao cho khoảng cách từ A đến Δ đạt giá trị lớn nhất là

A. $\frac{x+1}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{4}$. **B.** $\frac{x+1}{3}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{-4}$.

C. $\frac{x+1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}$. **D.** $\frac{x+1}{8}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{-14}$.

Câu 27: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(3;1;1)$, $N(4;3;4)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-9}{1}$. Gọi $I(a;b;c)$ là điểm thuộc đường thẳng Δ sao cho chu vi tam giác IMN nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$.

A. $T=\frac{23}{3}$. **B.** $T=29$. **C.** $T=19$. **D.** $T=\frac{40}{3}$.

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(-2;-2;1)$, $A(1;2;-3)$ và đường thẳng $d: \frac{x+1}{2}=\frac{y-6}{2}=\frac{z}{-1}$. Gọi Δ là đường thẳng qua M, vuông góc với đường thẳng d, đồng thời cách A một khoảng bé nhất. Khoảng cách bé nhất đó là

A. $\sqrt{29}$. **B.** 6. **C.** 5. **D.** $\frac{\sqrt{34}}{9}$.

Câu 29: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{-1}$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc nhỏ nhất. Khoảng cách từ $M(0;3;-4)$ đến mặt phẳng (α) bằng

A. $\sqrt{30}$. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** $\sqrt{20}$. **D.** $\sqrt{35}$.

Câu 30: Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(7;-2;3)$ và đường thẳng d có phương trình $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-2}{2}$. Điểm I thuộc d sao cho $AI+BI$ nhỏ nhất. Hoành độ của điểm I là

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. 2. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 31: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=4-3t\\y=3+4t\\z=0\end{cases}$. Gọi A là hình chiếu vuông góc của O trên d. Điểm M di động trên tia Oz, điểm N di động trên đường thẳng d sao cho $MN=OM+AN$. Gọi I là trung điểm đoạn thẳng OA. Trong trường hợp diện tích tam giác IMN đạt giá trị nhỏ nhất, một véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (M,d) có tọa độ là

A. $\left(4;3;5\sqrt{2}\right)$. **B.** $\left(4;3;10\sqrt{2}\right)$. **C.** $\left(4;3;5\sqrt{10}\right)$. **D.** $\left(4;3;10\sqrt{10}\right)$.

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2;2;2),B(2;4;-6),C(0;2;-8)$ và mặt phẳng $(P):x+y+z=0$. Xét các điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho $\widehat{AMB}=90°$, đoạn thẳng CM có độ dài lớn nhất bằng

A. $2\sqrt{15}$. **B.** $2\sqrt{17}$. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 33: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z-2}{1}$ và 2 điểm $A(6;3;-2)$, $B(1;0;-1)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua B, vuông góc với d và thỏa mãn khoảng cách từ A đến Δ là nhỏ nhất. Một vectơ chỉ phương của Δ có tọa độ

A. $(1;1;-3)$. **B.** $(1;-1;-1)$. **C.** $(1;2;-4)$. **D.** $(2;-1;-3)$.

Câu 34: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;4;3)$ và mặt phẳng $(P):2y-z=0$. Biết điểm B thuộc mặt phẳng (P), điểm C thuộc (Oxy) sao cho chu vi tam giác ABC nhỏ nhất. Hỏi giá trị nhỏ nhất đó là

A. $4\sqrt{5}$. **B.** $6\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Câu 35: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-;3;4)$, đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{2}$ và mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=20$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d thỏa mãn khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất. Mặt cầu (S) cắt (P) theo đường tròn có bán kính bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 36: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $\mathrm{A}(0;1;1)$, $\mathrm{B}(3;0;-1)$, $\mathrm{C}(0;21;-19)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$. $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho biểu thức $T=3MA^2+2MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $a+b+c$.

A. $a+b+c=\dfrac{14}{5}$. **B.** $a+b+c=0$. **C.** $a+b+c=\dfrac{12}{5}$. **D.** $a+b+c=12$.

Câu 37: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(-2;2;-2)$ và điểm $B(3;-3;3)$.

Điểm M thay đổi trong không gian thỏa mãn $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{2}{3}$. Điểm $N(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng $(P):-x+2y-2z+6=0$ sao cho MN nhỏ nhất. Tính tổng $T=a+b+c$.

A. 6. **B.** -2. **C.** 12. **D.** -6.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;-1;2)$, $B(1;1;2)$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}$. Biết $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng d sao cho tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất. Khi đó, giá trị $T=a+2b+3c$ bằng:

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 10.

Câu 39: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;-1;2)$, $B(1;1;2)$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}$. Biết $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng d sao cho tam giác MAB có diện tích bằng $\sqrt{\frac{5}{6}}$. Khi đó, giá trị $T=a+2b+3c$ bằng:

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 10.

Câu 40: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;-1;2)$, $B(1;1;2)$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}$. Có bao nhiêu điểm M thuộc đường thẳng d sao cho tam giác MAB có diện tích bằng 1.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Câu 41: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1;5;0), B(3;3;6)$ và đường thẳng Δ có phương trình tham số $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases}$. Một điểm M thay đổi trên đường thẳng Δ sao cho chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất. Tọa độ điểm M và chu vi tam giác ABC là

A. $M(1;0;2);\ P=2(\sqrt{11}+\sqrt{29})$ **B.** $M(1;2;2);\ P=2(\sqrt{11}+\sqrt{29})$

C. $M(1;0;2);\ P=\sqrt{11}+\sqrt{29}$ **D.** $M(1;2;2);\ P=\sqrt{11}+\sqrt{29}$

Câu 42: **(SỞ LÀO CAI 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(1;5;0)$, $B(3;3;6)$ và đường thẳng $d:\ \frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng d sao cho chu vi tam giác MAB nhỏ nhất. Khi đó biểu thức $a+2b+3c$ bằng

A. 5. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 3.

Câu 43: **(Hoàng Hoa Thám Hưng Yên)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(-1;1;6)$, $B(-3;-2;-4)$, $C(1;2;-1)$, $D(2;-2;0)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng CD sao cho tam giác ABM có chu vi nhỏ nhất. Tính $a+b+c$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 44: Trong không gian $Oxyz$ cho 4 điểm $A(2;3;2)$, $B(6;-1;-2)$, $C(-1;-4;3)$, $D(1;6;-5)$. Gọi M là một điểm nằm trên đường thẳng CD sao cho tam giác MAB có chu vi bé nhất. Khi đó toạ độ điểm M là:

A. $M(0;1;-1)$ **B.** $M(2;11;-9)$ **C.** $M(3;16;-13)$ **D.** $M(-1;-4;3)$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

DẠNG 4: MIN, MAX VỚI MẶT CẦU

Câu 1. **(Đặng Thành Nam Đề 5)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;4), B(3;2;6), C(3;-2;6)$. Gọi M là điểm di động trên mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=4$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA+\left|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ bằng

A. $2\sqrt{34}$. **B.** $6\sqrt{5}$. **C.** $4\sqrt{10}$. **D.** $2\sqrt{29}$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-3=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+5=0$. Giả sử $M\in(P)$ và $N\in(S)$ sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với véc tơ $\vec{u}=(1;0;1)$ và khoảng cách MN nhỏ nhất. Tính MN.

A. $MN=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $MN=1$. **C.** $MN=3\sqrt{2}$. **D.** $MN=\sqrt{2}$.

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+3}{2}$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+4z+3=0$. Giả sử $M\in d$ và $N\in(S)$ sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với véc tơ $\vec{u}=(1;0;1)$ và khoảng cách MN nhỏ nhất. Tính MN.

A. $MN=2$. **B.** $MN=\dfrac{17\sqrt{2}-\sqrt{34}}{6}$. **C.** $MN=\dfrac{17\sqrt{2}+\sqrt{34}}{6}$. **D.** $MN=\dfrac{17-\sqrt{17}}{6}$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+3}{2}$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+4z+3=0$. Giả sử $M\in d$ và $N\in(S)$ sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với véc tơ $\vec{u}=(1;0;1)$ và khoảng cách MN lớn nhất. Tính MN.

A. $MN=4$. **B.** $MN=\dfrac{17\sqrt{2}-\sqrt{34}}{6}$. **C.** $MN=\dfrac{17\sqrt{2}+\sqrt{34}}{6}$. **D.** $MN=\dfrac{17+\sqrt{17}}{6}$.

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $(P): 2x-y+2z-14=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$. Điểm $M\in(P), N\in(S)$ sao cho khoảng cách MN nhỏ nhất. Tính MN.

A. $MN=1$. **B.** $MN=3$. **C.** $MN=2$. **D.** $MN=4$.

Câu 6. Các số thực a,b,c,d,e,f thỏa mãn $\begin{cases} a^2+b^2+c^2-2a+4b+2c-6=0 \\ 2d-e+2f-14=0 \end{cases}$. Hỏi giá trị nhỏ nhất của biểu $P=(a-d)^2+(b-e)^2+(c-f)^2$ là bao nhiêu?

A. 1. **B.** $4-2\sqrt{3}$. **C.** $28-16\sqrt{3}$. **D.** $7-4\sqrt{3}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 7. **(Sở Ninh Bình 2019 lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=4$ và mặt phẳng $(P):x-y+2z-1=0$. Gọi M là một điểm bất kì trên mặt cầu (S). Khoảng cách từ M đến (P) có giá trị nhỏ nhất bằng

A. $\frac{4\sqrt{6}}{3}-2$. **B.** 0. **C.** $\sqrt{6}-2$. **D.** $2\sqrt{6}-2$.

Câu 8. **(THPT-Ngô-Quyền-Hải-Phòng-Lần-2-2018-2019-Thi-24-3-2019)**Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-y+2z-14=0$ và mặt cầu

$(S):x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$. Gọi tọa độ điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) là lớn nhất. Tính giá trị biểu thức $K=a+b+c$.

A. $K=1$. **B.** $K=2$. **C.** $K=-5$. **D.** $K=-2$.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$ và mặt phẳng $(P):2x-2y+z+3=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm trên mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến (P) là lớn nhất. Khi đó

A. $a+b+c=5$. **B.** $a+b+c=6$. **C.** $a+b+c=7$. **D.** $a+b+c=8$.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;0),B(2;-3;2)$. Gọi (S) là mặt cầu đường kính AB và Ax là tiếp tuyến của (S) tại A; By là tiếp tuyến của (S) tại B và $Ax\perp By$. Hai điểm M,N lần lượt di động trên Ax,By sao cho MN là tiếp tuyến của (S). Hỏi tứ diện $AMBN$ có diện tích toàn phần nhỏ nhất là?

A. $19\sqrt{3}$. **B.** $19\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$. **C.** $19\left(2+\sqrt{3}\right)$. **D.** $19\left(2+\sqrt{6}\right)$.

Câu 11. Trong khôn gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ nội tiếp mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2=11$. Hỏi giá trị lớn nhất của biểu thức $AB^2+BC^2+CA^2+DA^2+BD^2+CD^2$ là?

A. 99. **B.** 176. **C.** 132. **D.** 66.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(a;0;0),B(0;b;c),C(0;0;c)$ với $a\ge 4,b\ge 5,c\ge 6$ và mặt cầu (S) có bán kính bằng $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ ngoại tiếp tứ diện $OABC$. Khi tổng $OA+OB+OC$ đạt giá trị nhỏ nhất thì mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng nào dưới đây?

A. $2x+2y-\sqrt{2}z+6+3\sqrt{2}=0$ **B.** $2x+\sqrt{2}y+2z+7-2\sqrt{2}=0$

C. $\sqrt{2}x+2y-2z+3+2\sqrt{2}=0$ **D.** $\sqrt{2}x+2y+2z+3-2\sqrt{2}=0$

Câu 13. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $S(0;0;1),M(m;0;0),N(0;n;0)$ với $m,n>0$ và $m+n=1$. (SMN) luôn tiếp xúc với 1 mặt cầu cố định có bán kính là bao nhiêu biết mặt cầu đó đi qua $M(1;1;1)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $\sqrt{2}$ **B.** 2 **C.** 1 **D.** $\sqrt{3}$

Câu 14. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(m;0;0), B(0;m-1;0), C(0;0;m+4)$ thỏa mãn $BC=AD, CA=BD, AB=CD$ điểm $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Tính bán kính nhỏ nhất của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $\frac{\sqrt{7}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{14}}{2}$.

C. $\sqrt{7}$. **D.** $\sqrt{14}$.

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(1;-2;1), B(2;4;6)$. Điểm M di động trên AB và N là điểm thuộc tia OM sao cho $OM.ON=4$. Biết rằng N thuộc một đường tròn cố định. Tìm bán kính của đường tròn đó.

A. $R=\sqrt{\frac{42}{31}}$. **B.** $R=\sqrt{\frac{31}{42}}$. **C.** $R=2\sqrt{\frac{42}{31}}$. **D.** $R=2\sqrt{\frac{31}{42}}$.

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(m;0;0)$, $B(0;n;0)$, $C(0;0;-2)$ và $D(m;n;-2)$, với m,n là các số thực thay đổi thỏa mãn $2m+n=1$. Hỏi bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có giá trị nhỏ nhất là?

A. $\frac{\sqrt{105}}{10}$. **B.** $\frac{\sqrt{17}}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{21}}{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{17}}{2}$.

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(m;0;0), B(0;1;0), C(0;0;n)$ với m,n là các số thực thỏa mãn $m.n=2$. Hỏi bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ có bán kính nhỏ nhất là?

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(m;0;0), B(0;n;0), C(0;0;1)$ và $D(m;n;1)$ với m,n là các số thực thỏa mãn $m.n=2$. Hỏi mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ có bán kính nhỏ nhất là?

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(m;0;0), B(0;1;0), C(0;0;n)$ với m,n là các số thực thỏa mãn $m+2n=2$. Hỏi mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ có bán kính nhỏ nhất là?

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\frac{3\sqrt{5}}{10}$. **D.** $\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 20. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $A(1,0,1), B(-3,4,-1), C(2,2,3)$.

Đường thẳng d đi qua A, cắt các mặt cầu đường kính AB và AC lần lượt tại các điểm M, N không trùng với A sao cho đường gấp khúc $BMNC$ có độ dài lớn nhất có vector chỉ phương là?

A. $\vec{u}=(1,0,2)$ **B.** $\vec{u}=(1,0,1)$ **C.** $\vec{u}=(1,0,-1)$ **D.** $\vec{u}=(2,0,-1)$

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x-y+2z+1=0; (Q): 2x+y+z-1=0$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm thuộc trục Ox, đồng thời (S) cắt (P) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 2; (S) cắt (Q) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng r. Tìm r sao cho chỉ có duy nhất một mặt cầu (S) thỏa mãn điều kiện bài toán.

A. $r=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$. **B.** $r=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $r=\sqrt{3}$. **D.** $r=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có A, B, C lần lượt là giao điểm của mặt phẳng $(P): \dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{m-1}+\dfrac{z}{m+4}=1$ với các trục tọa độ Ox, Oy, Oz; trong đó $m\notin\{0;1;-4\}$ là tham số thực thay đổi. Điểm O, D nằm khác phía với mặt phẳng (P) và $BC=AD, CA=BD, AB=CD$. Hỏi mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có bán kính nhỏ nhất là?

A. $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$. **C.** $\sqrt{7}$. **D.** $\sqrt{14}$.

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-3=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+5=0$. Giả sử $M\in(P)$ và $N\in(S)$ sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với véc tơ $\vec{u}=(1;0;1)$ và khoảng cách MN lớn nhất. Tính MN.

A. $MN=3$. **B.** $MN=1+2\sqrt{2}$. **C.** $MN=3\sqrt{2}$. **D.** $MN=14$.

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a\ge 4, b\ge 5, c\ge 6$ và mặt cầu (S) có bán kính bằng $\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$ ngoại tiếp tứ diện $OABC$. Khi tổng $OA+OB+OC$ nhỏ nhất thì mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng nào dưới đây?

A. $2x+2y-\sqrt{2}z+6+3\sqrt{2}=0$. **B.** $\sqrt{2}x+2y-2z+3+2\sqrt{2}=0$.

C. $2x+\sqrt{2}y-2z+7-2\sqrt{2}=0$. **D.** $\sqrt{2}x+2y+2z+3-2\sqrt{2}=0$.

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$ và mặt phẳng $(P): 2+2y+2z+7=0$. Gọi (Q) là mặt phẳng thay đổi qua $A(-2;1;1)$ và tiếp xúc với mặt cầu (S). Hỏi góc nhỏ nhất giữa hai mặt phẳng $(P), (Q)$ là?

A. $\arccos\dfrac{2\sqrt{10}-2}{9}$. **B.** $\arccos\dfrac{\sqrt{10}-1}{9}$. **C.** $\arccos\dfrac{2\sqrt{10}+2}{9}$. **D.** $\arccos\dfrac{\sqrt{10}+1}{9}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(10;2;1), B(3;1;4)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$. Điểm M di động trên mặt cầu (S). Hỏi giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA+3MB$ là?

A. $3\sqrt{14}$. **B.** 9. **C.** $3\sqrt{11}$. **D.** $6\sqrt{3}$.

Câu 27. **(ĐỀ-THI-THU-ĐH-THPT-CHUYÊN-QUANG-TRUNG-L5-2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-1}$ và mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua $A(2;1;3)$, vuông góc với đường thẳng d và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách lớn nhất. Khi đó đường thẳng Δ có một véctơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;a;b)$. Tính $a+b$.

A. 4. **B.** -2. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** 5.

Câu 28. **(CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 3)** Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S): $(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$ và điểm $M(a;b;c)\in(S)$ sao cho biểu thức $P=a+2b+2c$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$.

A. 2. **B.** 1. **C.** -2. **D.** -1.

Câu 29. **(KSCL-Lần-2-2019-THPT-Nguyễn-Đức-Cảnh-Thái-Bình)** Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S):(x-4)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=1$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc (S). Tìm giá trị nhỏ nhất của $a^2+b^2+c^2$.

A. 25. **B.** 29. **C.** 24. **D.** 26.

Câu 30. **(Đặng Thành Nam Đề 15)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+(y-3)^2+(y+4)^2=4$. Xét hai điểm M, N di động trên (S) sao cho $MN=1$. Giá trị nhỏ nhất của OM^2-ON^2 bằng

A. -10. **B.** $-4-3\sqrt{5}$. **C.** -5. **D.** $-6-2\sqrt{5}$.

Câu 31. **(Chuyên KHTN)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(8;5;-11), B(5;3;-4), C(1;2;-6)$ và mặt

$(S):(x-2)^2+(y-4)^2+(z+1)^2=9$. Gọi điểm $M(a;b;c)$ là điểm trên (S) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Hãy tìm $a+b$.

A. 6. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 9.

Câu 32. **(CỤM TRƯỜNG SÓC SƠN MÊ LINH HÀ NỘI)** Cho x, y, z, a, b, c là các số thực thay đổi thỏa mãn $(x+3)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=2$ và $a+b+c=1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$ là

A. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{3}+\sqrt{2}$. **C.** $5-2\sqrt{6}$. **D.** $5+2\sqrt{6}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 33. **(GIA LỘC TỈNH HẢI DƯƠNG 2019 lần 2)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3) có bán kính $r=1$ và lần lượt có tâm là các điểm $A(0;3;-1)$, $B(-2;1;-1)$, $C(4;-1;-1)$. Gọi (S) là mặt cầu tiếp xúc với cả ba mặt cầu trên. Mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất là bao nhiêu?

A. $R=\sqrt{10}$. **B.** $R=\sqrt{10}-1$. **C.** $R=2\sqrt{2}-1$. **D.** $R=2\sqrt{2}$.

Câu 34. **(THPT TX QUẢNG TRỊ LẦN 1 NĂM 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1:\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+5}{-2}$ và $\Delta_2:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z}{1}$. Trong tất cả các mặt cầu tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2. Gọi (S) là mặt cầu có bán kính nhỏ nhất. Bán kính của mặt cầu (S) là

A. $\sqrt{12}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $\sqrt{24}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 35. **(ĐH Vinh Lần 1)** Cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-4)^2+z^2=8$ và hai điểm $A(3;0;0), B(4;2;1)$. Gọi M là điểm thuộc mặt mặt cầu (S). Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA+2MB$.

A. $\sqrt{6}$. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** $6\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

Câu 36. **(Ngô Quyền Hà Nội)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi điểm $M(a;b;c)$ (với a,b,c tối giản) thuộc mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-4y-4z-7=0$ sao cho biểu thức $T=2a+3b+6c$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó giá trị biểu thức $P=2a-b+c$ bằng

A. $\dfrac{12}{7}$. **B.** 8. **C.** 6. **D.** $\dfrac{51}{7}$.

Câu 37. **(KSCL-Lần-2-2019-THPT-Nguyễn-Đức-Cảnh-Thái-Bình)** Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(2;-3;2)$, $B(-2;1;4)$ và mặt cầu $(S):(x+1)^2+y^2+(z-4)^2=12$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất, tính $a+b+c$.

A. $\dfrac{7}{3}$. **B.** -4. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 38. **(THPT-Chuyên-Sơn-La-Lần-1-2018-2019-Thi-tháng-4)**Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=3$. Xét điểm M thay đổi thuộc mặt cầu (S), giá trị nhỏ nhất của $2MA^2+3MB^2$ bằng

A. 103. **B.** 108. **C.** 105. **D.** 100.

Câu 39. **(Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019)** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-4)^2+z^2=8$ và điểm $A(3;0;0);B(4;2;1)$. Điểm M thay đổi nằm trên mặt cầu, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=MA+2MB$.

A. $P=2\sqrt{2}$. **B.** $P=3\sqrt{2}$. **C.** $P=4\sqrt{2}$. **D.** $P=6\sqrt{2}$.

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S_m):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-m)^2=\dfrac{m^2}{4}$ và hai điểm $A(2;3;5)$, $B(1;2;4)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của m để trên (S_m) tồn tại điểm M sao cho $MA^2-MB^2=9$.

A. $m=1$. **B.** $m=3-\sqrt{3}$. **C.** $m=8-4\sqrt{3}$. **D.** $m=\dfrac{4-\sqrt{3}}{2}$.

Câu 41. **(Đặng Thành Nam Đề 17)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1):x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z+2=0$ và $(S_2):x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-4=0$. Xét tứ diện $ABCD$ có hai đỉnh A, B nằm trên (S_1); hai đỉnh C, D nằm trên (S_2). Thể tích khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $6\sqrt{3}$. **D.** $6\sqrt{2}$.

Câu 42. **(ĐỀ-THI-THU-ĐH-THPT-CHUYÊN-QUANG-TRUNG-L5-2019)** Trong không gian Oxyz cho $A(0;0;2)$, $B(1;1;0)$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z-1)^2=\dfrac{1}{4}$. Xét điểm M thay đổi thuộc (S). Giá trị nhỏ nhất của biểu thức MA^2+2MB^2 bằng

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{3}{4}$. **C.** $\dfrac{21}{4}$. **D.** $\dfrac{19}{4}$.

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(9;6;11)$, $B(5;7;2)$ và điểm M di động trên mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=36$. Giá trị nhỏ nhất của $MA+2MB$ bằng

A. $\sqrt{105}$. **B.** $2\sqrt{26}$. **C.** $2\sqrt{29}$. **D.** $\sqrt{102}$.

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;9)$ và mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=25$. Gọi (C) là giao tuyến của (S) với mặt phẳng (Oxy). Lấy hai điểm M,N trên (C) sao cho $MN=2\sqrt{5}$. Khi tứ diện $OAMN$ có thể tích lớn nhất thì đường thẳng MN đi qua điểm nào trong số các điểm dưới đây?

A. $(5;5;0)$. **B.** $\left(-\dfrac{1}{5};4;0\right)$. **C.** $\left(\dfrac{12}{5};-3;0\right)$. **D.** $(4;6;0)$.

Câu 45. Cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=9$ và hai điểm $A(1;1;3)$, $B(21;9;-13)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho $3MA^2+MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $T=a.b.c$ bằng

A. 3. **B.** 8. **C.** 6. **D.** -18.

Câu 46. **(THPT-Nguyễn-Công-Trứ-Hà-Tĩnh-lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-3;3;-3)$, thuộc mặt phẳng $(\alpha):2x-2y+z+15=0$ và mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=100$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A, nằm trong (α) và cắt (S) tại hai điểm B,C. Để độ dài BC lớn nhất thì Δ có phương trình là

A. $\Delta:\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+3}{6}$. **B.** $\Delta:\dfrac{x+3}{16}=\dfrac{y-3}{11}=\dfrac{z+3}{-10}$.

C. $\Delta:\begin{cases}x=-3+5t\\y=3\\z=-3+8t\end{cases}$. **D.** $\Delta:\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+3}{3}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 47. **(THPT NINH BÌNH – BẠC LIÊU LẦN 4 NĂM 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3=0$ và điểm $A(5;3;-2)$. Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A và luôn cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt M,N. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=AM+4AN$.

A. $S_{\min}=30$. **B.** $S_{\min}=20$. **C.** $S_{\min}=\sqrt{34}-3$. **D.** $S_{\min}=5\sqrt{34}-9$.

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2=1$. Điểm M nằm trên (S) có tọa độ dương, mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) tại M, cắt các tia Ox, Oy, Oz tại các điểm A,B,C. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=(1+OA^2)(1+OB^2)(1+OC^2)$ là

A. 24. **B.** 27. **C.** 64. **D.** 8.

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{4}$ và mặt cầu (S): $(x+3)^2+(y+4)^2+(z+5)^2=729$. Cho biết điểm $A(-2;-2;-7)$, điểm B thuộc giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng $(P):2x+3y+4z-107=0$. Khi điểm M di động trên đường thẳng d giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA+MB$ bằng

A. $5\sqrt{30}$. **B.** 27. **C.** $5\sqrt{29}$. **D.** $\sqrt{742}$.

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=6$ tâm I. Gọi (α) là mặt phẳng vuông góc với đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z}{1}$ và cắt mặt cầu (S) theo đường tròn (C) sao cho khối nón có đỉnh I, đáy là đường tròn (C) có thể tích lớn nhất. Biết (α) không đi qua gốc tọa độ, gọi $H(x_H,y_H,z_H)$ là tâm của đường tròn (C). Giá trị của biểu thức $T=x_H+y_H+z_H$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ HÓA TRONG HHKG

A - PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Bước 1: *Chọn hệ trục tọa* $Oxyz$.

Xác định ba đường thẳng đồng quy và đôi một cắt nhau trên cơ sở có sẵn của hình (như tam diện vuông, hình hộp chữ nhật, hình chóp tứ giác đều …), hoặc dựa trên các mặt phẳng vuông góc dựng thêm đường phụ.

Bước 2: *Tọa độ hóa các điểm của hình không gian.*

Tính tọa độ điểm liên quan trực tiếp đến giả thiết và kết luận của bài toán. Cơ sở tính toán chủ yếu dựa vào quan hệ song song, vuông góc cùng các dữ liệu của bài toán.

Bước 3: *Chuyển giả thiết qua hình học giải tích.*

Lập các phương trình đường, mặt liên quan. Xác định tọa độ các điểm, véc tơ cần thiết cho kết luận.

Bước 4: *Giải quyết bài toán.*

Sử dụng các kiến thức hình học giải tích để giải quyết yêu cầu của bài toán hình không gian.

Chú ý các công thức về góc, khoảng cách, diện tích và thể tích …

Cách chọn hệ tọa độ một số hình không gian.

Hình hộp lập phương – Hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$

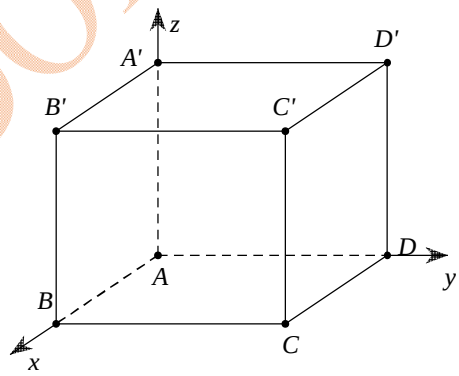
Với hình lập phương .

Chọn hệ trục tọa độ sao cho : $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $D(0;a;0)$

$A'(0;0;a)$, $B'(a;0;a)$, $C'(a;a;a)$, $D'(0;a;a)$

Với hình hộp chữ nhật.

Chọn hệ trục tọa độ sao cho:



$A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;b;0)$, $D(0;b;0)$, $A'(0;0;c)$; $B'(a;0;c)$; $C'(a;b;c)$; $D'(0;b;c)$

Chú ý: Tam diện vuông là một nửa của hình hộp chữ nhật nên ta chọn hệ trục tọa độ tương tự như hình hộp chữ nhật.

Với hình hộp đứng có đáy là hình thoi $ABCD.A'B'C'D'$

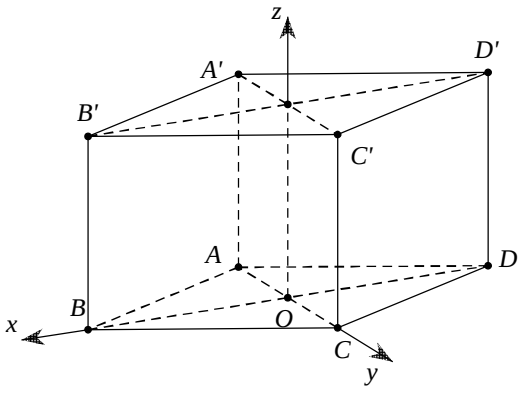
Chọn hệ trục tọa độ sao cho :

Gốc tọa độ trùng với giao điểm O của hai đường chéo của hình thoi $ABCD$

Trục Oz đi qua 2 tâm của 2 đáy

Nếu $AC = a, BD = b, AA' = c$ thì

$A\left(0;-\frac{a}{2};0\right), B\left(\frac{b}{2};0;0\right), C\left(0;\frac{a}{2};0\right)$



$D\left(-\frac{b}{2};0;0\right), A'\left(0;-\frac{a}{2};c\right), B'\left(\frac{b}{2};0;c\right), C'\left(0;\frac{a}{2};c\right), D'\left(-\frac{b}{2};0;c\right)$.

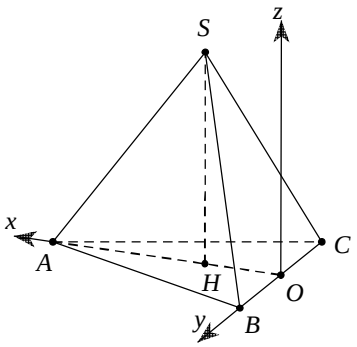
Chú ý: Với lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại B thì ta chọn hệ tọa độ tương tự như trên với gốc tọa độ là trung điểm AC, $B \in Ox, C \in Oy$ còn trục Oz đi qua trung điểm hai cạnh $AC, A'C'$.

Hình chóp đều

1) Hình chóp tam giác đều $S.ABC$, $AB = a$, $SH = h$, ta chọn hệ tọa độ sao cho O là trung điểm BC, $A \in Ox, B \in Oy$.

Khi đó $A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right)$, $B\left(0;\frac{a}{2};0\right)$,

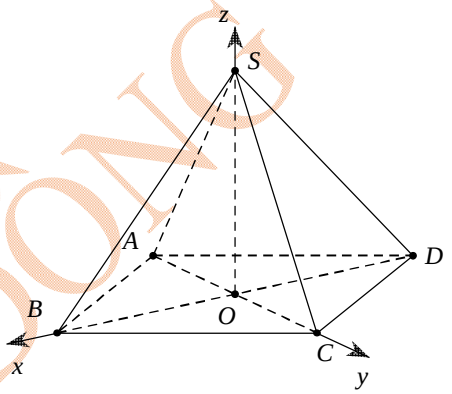
$C\left(0;-\frac{a}{2};0\right)$, $S\left(\frac{a\sqrt{3}}{6};0;h\right)$



Hình chóp từ giác đều $S.ABCD$, $AB = a$, $SH = h$, ta chọn hệ tọa độ sao cho O là tâm đáy $B \in Ox, C \in Oy, S \in Oz$. Khi đó:

$A\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$,

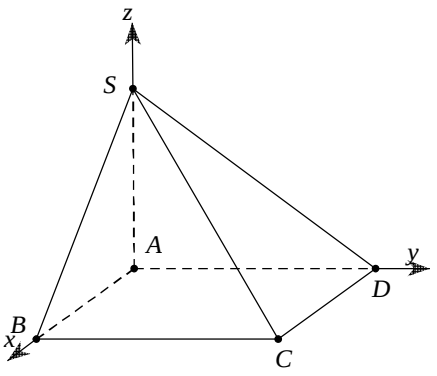
$B\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$, $C\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$, $D\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$, $S(0;0;h)$



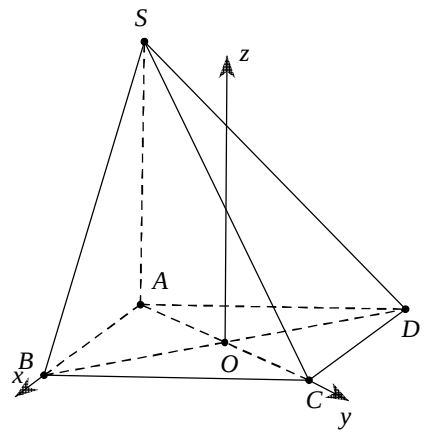
Chú ý: Ngoài cách chọn hệ trục như trên ta có thể chọn hệ trục bằng cách khác.
Chẳng hạn với hình chóp tam giác đều ta có thể chọn $H \equiv O$, trục Oy đi qua H và song song với BC.

Hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD), SA = h$

1) Nếu đáy là hình chữ nhật ta chọn hệ trục sao cho
$A \equiv O, B \in Ox, D \in Oy, S \in Oz$



Nếu đáy là hình thoi, ta chọn hệ trục sao cho O là tâm của đáy, $B \in Ox, C \in Oy$ và $Oz // SA$.

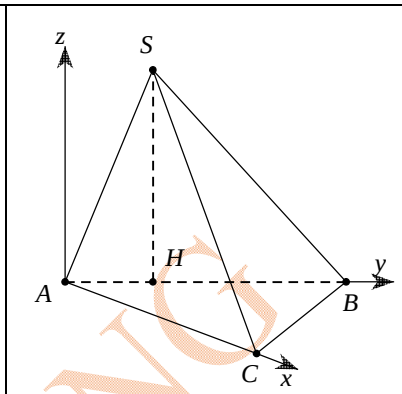


Chú ý: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

• Nếu đáy ABC là tam giác vuông tại A thì cách chọn hệ trục hoàn toàn tương tự như hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật.

• Nếu đáy ABC là tam giác cân tại B thì ta chọn hệ trục tọa độ như hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, khi đó gốc tọa độ là trung điểm cạnh AC.

Hình chóp $S.ABC$ **có** $(SAB) \perp (ABC)$	
Đường cao $SH = h$ của tam giác SAB là đường cao của hình chóp. Nếu tam giác ABC vuông tại A, $AB = a, AC = b$ ta chọn hệ trục sao cho $A \equiv O, B \in Oy, C \in Ox$, $Oz // SH$. Khi đó $A(0;0;0), B(0;a;0), C(b;0;0)$ $AH = c \Rightarrow H(0;c;0), S(0;c;h)$.	

Chú ý:

• Nếu vuông tại B ta chọn $B \equiv O$, vuông tại C chọn $C \equiv O$.

• Nếu tam giác ASB cân tại S, ΔABC cân tại C thì ta chọn $H \equiv O, C \in Ox, B \in Oy, S \in Oz$

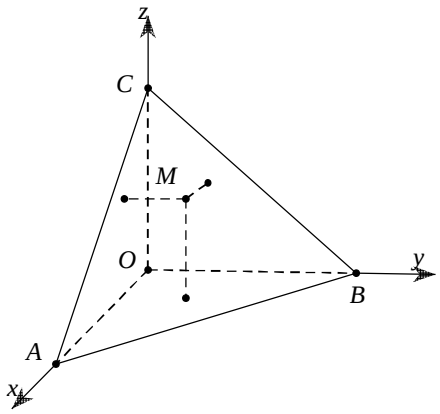
Tùy vào từng bài toán mà có thể thay đổi linh hoạt cách chọn hệ tọa độ. Trong nhiều trường hợp, phải biết kết hợp kiến thức hình không gian tổng hợp và kiến thức hình giải tích nhằm thu gọn lời giải.

Ví dụ 1: Cho hình chóp $O.ABC$ có $OA = a, OB = b, OC = c$ đôi một vuông góc. Điểm M cố định thuộc tam giác ABC có khoảng cách lần lượt đến các $mp(OBC)$, $mp(OCA)$, $mp(OAB)$ là 1, 2, 3. Tính a, b, c để thể tích $O.ABC$ nhỏ nhất.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có: $O(0;0;0), A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$

Vì khoảng cách từ M đến các mặt phẳng $mp(OBC)$, $mp(OCA)$, $mp(OAB)$ là 1, 2, 3 nên $M(1;2;3)$. Suy ra phương trình



$$(ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Vì $M \in (ABC) \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1$

(1).Thể tích khối chóp $O.ABC$:

$$V_{O.ABC} = \frac{1}{6}abc.$$

Từ $(1) \Rightarrow 1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}.\frac{2}{b}.\frac{3}{c}} \Rightarrow \frac{1}{6}abc \geq 27$

Vậy, $\min V_{OABC} = 27$ đạt được khi $\frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{3}{c} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = 3, b = 6, c = 9$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

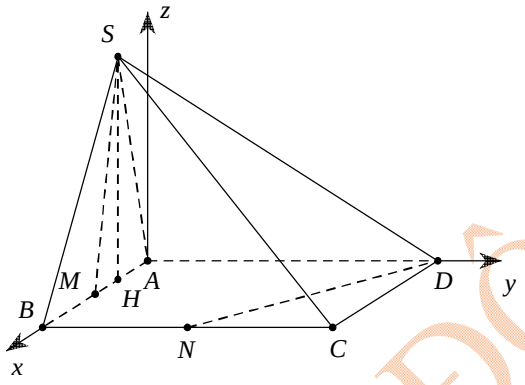
Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.BMDN$ và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của S lên $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Ta có: $SA^2 + SB^2 = AB^2 \Rightarrow SA \perp SB \Rightarrow AH = \dfrac{SA^2}{AB} = \dfrac{a}{2}, SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có tọa độ các điểm:



$A(0;0;0), B(2a;0;0), D(0;2a;0), C(2a;2a;0), H\left(\dfrac{a}{2};0;0\right), S\left(\dfrac{a}{2};0;\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

$M(a;0;0), N(2a;a;0)$.

Ta có $S_{\Delta ADM} = S_{\Delta CDN} = \dfrac{1}{2}a.2a = a^2 \Rightarrow S_{BNDM} = 4a^2 - 2a^2 = 2a^2$

Thể tích khối chóp $S.BMDN$: $V = \dfrac{1}{3}SH.S_{BMDN} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.2a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$

Vì $\overrightarrow{SM} = \left(\dfrac{a}{2};0;-\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right), \overrightarrow{DN} = (2a;-a;0) \Rightarrow \overrightarrow{SM}.\overrightarrow{DN} = a^2$

Vậy $\cos(SM, DN) = \dfrac{\left|\overrightarrow{SM}.\overrightarrow{DN}\right|}{SM.DN} = \dfrac{a^2}{a.\sqrt{5}a} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Ví dụ 3: Trên các tia Ox, Oy, Oz của góc tam diện vuông $Oxyz$ lần lượt lấy các điểm A, B, C sao cho $OA = a, OB = a\sqrt{2}, OC = c, \ (a, c > 0)$. Gọi D là đỉnh đối diện với O của hình chữ nhật $AOBD$ và M là trung điểm của đoạn BC. Mặt phẳng (α) qua A, M cắt mặt phẳng (OCD) theo một đường thẳng vuông góc với đường thẳng AM.

1. Gọi E là giao điểm của (α) với đường thẳng OC. Tính độ dài đoạn thẳng OE;

2. Tính tỷ số thể tích của hai khối đa diện được tạo thành khi cắt khối chóp $C.AOBD$ bởi mặt phẳng (α). Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (α)

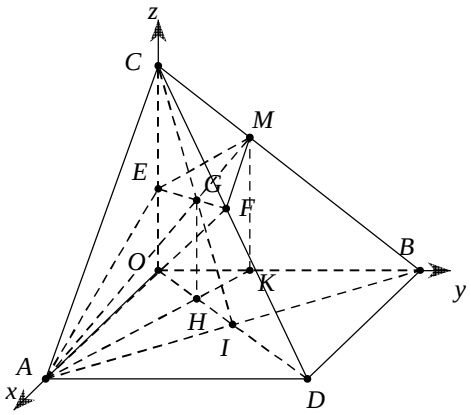
Lời giải.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, sao cho:

$O(0;\ 0;\ 0),\ A(a;\ 0;\ 0),\ B\left(0;\ a\sqrt{2};\ 0\right),$

$D\left(a;\ a\sqrt{2};0\right),\ C(0;\ 0;\ c)$



1. Vì M là trung điểm của BC nên

$M\left(0;\ \frac{a\sqrt{2}}{2};\ \frac{c}{2}\right).$

$\overrightarrow{OC}(0;\ 0;\ c),\ \overrightarrow{OD}\left(a;\ a\sqrt{2};0\right)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{OC};\ \overrightarrow{OD}\right]=\left(-ac\sqrt{2};\ ac;\ 0\right)$

Một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (OCD) là $\overrightarrow{n_{OCD}}=\left(-\sqrt{2};\ 1;\ 0\right).$

Gọi $F=(\alpha)\cap CD$ thì EF là giao tuyến của (α) với (OCD), ta có $EF\perp AM.$

Vì $\overrightarrow{AM}=\left(-a;\ \frac{a\sqrt{2}}{2};\ \frac{c}{2}\right)$ nên $\left[\overrightarrow{n_{OCD}},\overrightarrow{AM}\right]=\frac{c}{2}(1;\ \sqrt{2};\ 0),$ do đó một véc tơ chỉ phương của EF là

$\overrightarrow{u_{EF}}=(1;\ \sqrt{2};\ 0).$

Ta có $\left[\overrightarrow{u_{EF}},\ \overrightarrow{AM}\right]=\frac{1}{2}\left(c\sqrt{2};\ -c;\ 3\sqrt{2}a\right)$ nên phương trình mặt phẳng (α) là :

$\sqrt{2}cx-cy+3\sqrt{2}az-ac\sqrt{2}=0.$

Do đó $(\alpha)\cap Oz=E\left(0;\ 0;\ \frac{c}{3}\right)\Rightarrow OE=\frac{c}{3}.$

2. Ta có $(\alpha)\cap CD=F\left(\frac{2a}{3};\ \frac{2\sqrt{2}a}{3};\ \frac{c}{3}\right)\Rightarrow\frac{CF}{CD}=\frac{2}{3}.$

Mà $V_{COADB}=2V_{CAOD}=2V_{CBOD}$ nên

$$\frac{V_{CEAFM}}{V_{COADB}}=\frac{V_{CAEF}}{2V_{CAOD}}+\frac{V_{CMEF}}{2V_{CBOD}}=\frac{1}{2}\left(\frac{CE}{CO}.\frac{CF}{CD}+\frac{CM}{CB}.\frac{CE}{CO}.\frac{CF}{CD}\right)=\frac{1}{3}$$

Do đó tỷ số thể tích hai khối đa diện được tạo thành khi cắt khối chóp $C.AODB$ bởi mặt phẳng (α) là $\frac{1}{2}$ (hay 2).

Khoảng cách cần tìm : $d(C,\ (\alpha))=\frac{\left|3\sqrt{2}ac-ac\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2c^2+c^2+18a^2}}=\frac{2\sqrt{6}ac}{3\sqrt{c^2+6a^2}}.$

Ví dụ 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $A\equiv O,B\in Ox,D\in Oy,A'\in Oz$ và $AB=1,\ AD=2,\ AA'=3.$

1. Tìm tọa độ các đỉnh của hình hộp;

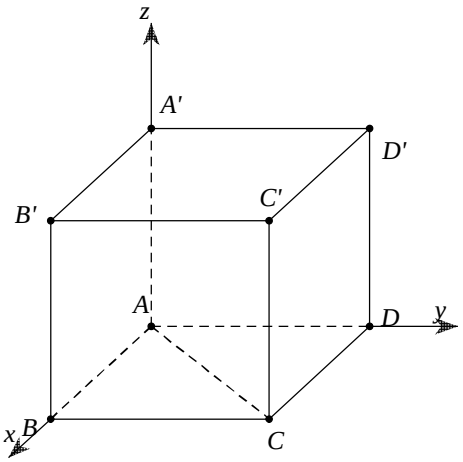
2. Tìm điểm E trên đường thẳng DD' sao cho $B'E\perp A'C$

3. Tìm điểm M thuộc $A'C$, N thuộc BD sao cho $MN\perp BD,MN\perp A'C$. Từ đó tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau $A'C$ và BD

Lời giải.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

1. Ta có $A(0;0;0), B(1;0;0), D(0;2;0), A'(0;0;3)$.
Hình chiếu của C lên (Oxy) là C, hình chiếu của C lên Oz là A nên $C(1;2;0)$.
Hình chiếu của B', C', D' lên mp (Oxy) và trục Oz lần lượt là các điểm B, C, D và A' nên $B'(1;0;3)$, $C'(1;2;3)$, $D'(0;2;3)$.



2. Vì E thuộc đường thẳng DD' nên $E(0;2;z)$, suy ra $\overrightarrow{B'E} = (-1;2;z-3)$
Mà $\overrightarrow{A'C} = (1;2;-3)$ nên $B'E \perp A'C \Leftrightarrow \overrightarrow{B'E}.\overrightarrow{A'C} = 0 \Leftrightarrow -1+4-3(z-3) = 0 \Leftrightarrow z = 4$.
Vậy $E(0;2;4)$.

3. Đặt $\overrightarrow{A'M} = x.\overrightarrow{A'C}$; $\overrightarrow{BN} = y.\overrightarrow{BD}$
Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{AA'} + x.\overrightarrow{A'C} = (x;2x;3-3x)$, suy ra $M(x;2x;3-3x)$
$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + y.\overrightarrow{BD} = (1-y;2y;0) \Rightarrow N(1-y;2y;0)$
Theo giả thiết của để bài, ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{A'C} = 0 \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BD} = 0 \end{cases}$ (*)
Mà $\overrightarrow{MN} = (1-x-y;2y-2x;3x-3)$, $\overrightarrow{A'C} = (1;2;-3)$, $\overrightarrow{BD} = (-1;2;0)$
Khi đó (*) trở thành

$$\begin{cases} 1-x-y+4y-4x-9x+9=0 \\ -1+x+y+4y-4x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -14x+3y=-10 \\ -3x+5y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{53}{61} \\ y=\dfrac{44}{61} \end{cases}$$

Do đó $M\left(\frac{53}{61};\frac{106}{61};\frac{24}{61}\right)$, $N\left(\frac{17}{61};\frac{88}{61};0\right)$.
Vì MN là đường vuông góc chung của hai đường thẳng $A'C, BD$
$d(A'C, BD) = MN = \sqrt{(1-x-y)^2 + (2y-2x)^2 + (3x-3)^2} = \dfrac{6\sqrt{61}}{61}$.

Ví dụ 5: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = 2a$; hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB; mặt phẳng SM và song song với BC, cắt AC tại N. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^o. Tính thể tích khối chóp S.BCNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a

Lời giải.
Vì hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên suy ra $SA \perp (ABC)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, đặt $SA = x, x > 0$

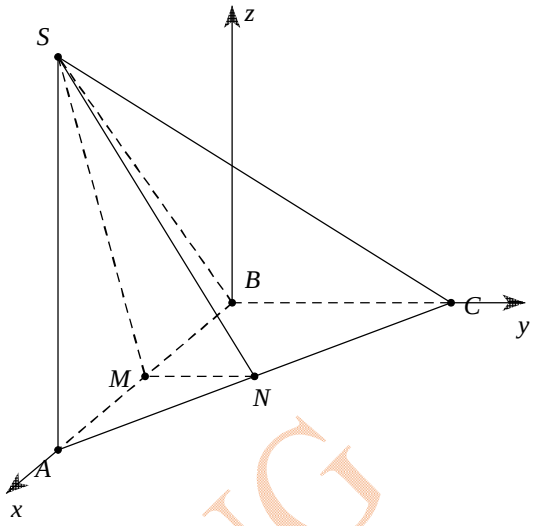
Vì $MN // BC \Rightarrow N$ là trung điểm cạnh AC

Tọa độ các đỉnh là:

$B(0;0;0)$, $A(2a;0;0)$,

$C(0;2a;0)$, $S(2a;0;x)$,

$M(a;0;0)$, $N(a;a;0)$



Suy ra $\overrightarrow{BS} = (2a;0;x), \overrightarrow{BC} = (0;2a;0) \Rightarrow \left[\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{BC}\right] = (-2ax;0;4a^2)$

Do đó $\vec{n} = (x;0;-2a)$ là VTPT của mặt phẳng (SBC)

$\vec{k} = (0;0;1)$ là VTPT của mặt phẳng (ABC)

Theo giả thiết ta có: $\dfrac{|\vec{n}.\vec{k}|}{|\vec{n}|.|\vec{k}|} = \cos 60^0 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{2a}{\sqrt{x^2+4a^2}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x^2 = 12a^2 \Rightarrow x = 2a\sqrt{3}$

Vì M, N là trung điểm của AB, CB nên

$$S_{\Delta AMN} = \frac{1}{4} S_{\Delta ABC} \Rightarrow S_{BMNC} = \frac{3}{4} S_{\Delta ABC} = \frac{3a^2}{2}$$

Từ đó suy ra thể tích khối chóp $S.BMNC$ là:

$$V_{S.BMNC} = \frac{1}{3} SA.S_{BMNC} = \frac{1}{3}.2a\sqrt{3}.\frac{3a^2}{2} = a^3\sqrt{3}.$$

Ta có: $\overrightarrow{BA} = (2a;0;0), \overrightarrow{SN} = (-a;a;2a\sqrt{3}), \overrightarrow{BN} = (a;a;0)$

Suy ra $\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{SN}\right] = (0;-4\sqrt{3}a^2;2a^2) \Rightarrow \left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{SN}\right].\overrightarrow{BN} = -4\sqrt{3}a^3$

Vậy $d(AB, SN) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{SN}\right].\overrightarrow{BN}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{SN}\right]\right|} = \dfrac{4a^3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}a^2} = \dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$.

B - BÀI TẬP

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$; M, N hai điểm nằm trên hai cạnh BC, CD. Đặt $BM = x$, $DN = y$ $(0 < x, y < a)$. Hệ thức liên hệ giữa x và y để hai mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau là:

A. $x^2 + a^2 = a(x+y)$. **B.** $x^2 + 2a^2 = a(x+y)$.

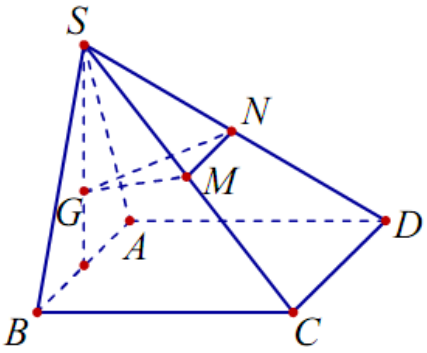
C. $2x^2 + a^2 = a(x+y)$. **D.** $x^2 + a^2 = a(x+2y)$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm của BC và H là trung điểm của AM. Biết $HB = HC$, $\widehat{HBC} = 30°$; góc giữa mặt phẳng (SHC) và mặt phẳng (HBC) bằng $60°$. Tính côsin của góc giữa đường thẳng BC và mặt phẳng (SHC)?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{13}}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB và M, N lần lượt là trung điểm của SC, SD (tham khảo hình vẽ bên). Tính côsin của góc giữa hai mặt phẳng (GMN) và $(ABCD)$.



A. $\frac{2\sqrt{39}}{13}$. **B.** $\frac{\sqrt{13}}{13}$. **C.** $\frac{2\sqrt{39}}{39}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC}=60^\circ$, $BC=2a$. Gọi D là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{SB}=2\overrightarrow{SD}$. Hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc đoạn BC sao cho $BC=4BH$. Biết SA tạo với đáy một góc 60°. Góc giữa hai đường thẳng AD và SC bằng

A. 90°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 45°.

Câu 5: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a. Lấy điểm M thuộc đoạn AD', điểm N thuộc đoạn BD sao cho $AM=DN=x$, $\left(0<x<\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$. Tìm x theo a để đoạn MN ngắn nhất.

A. $x=\frac{a}{2}$. **B.** $x=\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $x=\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **D.** $x=\frac{a}{3}$.

Câu 6: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA=OB=OC=a$. Gọi M là trung điểm BC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và OM bằng

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{2a}{3}$. **C.** $\frac{a}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ Oxy, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ O, các đỉnh $B(m;0;0)$, $D(0;m;0)$, $A'(0;0;n)$ với $m,n>0$ và $m+n=4$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Khi đó thể tích tứ diện $BDA'M$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{75}{32}$. **B.** $\frac{245}{108}$. **C.** $\frac{9}{4}$. **D.** $\frac{64}{27}$.

Câu 8: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, BC, C'D'$ và DD'. Tính thể tích khối tứ diện $MNPQ$.

A. $\frac{1}{12}$. **B.** $\frac{1}{24}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{1}{8}$.

Câu 9: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. M là một điểm thỏa mãn $\overrightarrow{CM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$. Cô sin của góc giữa hai mặt phẳng $(A'MB)$ và (ABC) bằng

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $\frac{\sqrt{30}}{8}$. **B.** $\frac{\sqrt{30}}{16}$. **C.** $\frac{\sqrt{30}}{10}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Câu 10: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Một đường thẳng d đi qua đỉnh D' và tâm I của mặt bên $BCC'B'$. Hai điểm M, N thay đổi lần lượt thuộc các mặt phẳng $(BCC'B')$ và $(ABCD)$ sao cho trung điểm K của MN thuộc đường thẳng d (tham khảo hình vẽ). Giá trị bé nhất của độ dài đoạn thẳng MN là

A. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{5}.a}{10}$. **C.** $\frac{2\sqrt{5}.a}{5}$. **D.** $\frac{2\sqrt{3}.a}{5}$.

Câu 11: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Chứng minh hai đường chéo $B'D'$ và $A'B$ của hai mặt bên là hai đường thẳng chéo nhau. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau $B'D'$ và $A'B$.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{2a}{3}$. **C.** $\frac{a}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Câu 12: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, có đáy $AB = a, AC = 2a$, $\widehat{BAC} = 120^0$. Gọi M là trung điểm cạnh bên BB', biết hai mặt phẳng (MAC) và $(MA'C')$ vuông góc với nhau. Tính cô sin của góc giữa hai mặt phẳng (MAC) và $(BCC'B')$.

A. $\frac{\sqrt{14}}{8}$. **B.** $\frac{5\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{5}{28}$. **D.** $\frac{5\sqrt{14}}{28}$.

Câu 13: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a, AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích khối chóp $A'.ABC$

A. $\frac{a^3}{4}$. **B.** $\frac{a^3}{2}$. **C.** $\frac{a^3}{8}$. **D.** $\frac{a^3}{12}$.

Câu 14: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng $AM, B'C$.

A. $\frac{a}{3}$. **B.** $\frac{a}{4}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a}{8}$.

Câu 15: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, góc giữa đường thẳng BB' và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0; tam giác ABC vuông tại C và $\widehat{BAC} = 60^0$. Hình chiếu vuông góc của điểm B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Tính thể tích khối tứ diện $A'ABC$ theo a.

A. $\frac{3a^3}{208}$. **B.** $\frac{a^3}{108}$. **C.** $\frac{9a^3}{208}$. **D.** $\frac{9a^3}{104}$.

Câu 16: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $B, AB = a$, $AA' = 2a$, $A'C = 3a$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng $A'C'$, I là giao điểm của AM và $A'C$. Tính theo a thể tích khối tứ diện $IABC$

A. $\frac{a^3}{9}$. **B.** $\frac{4a^3}{9}$. **C.** $\frac{5a^3}{9}$. **D.** $\frac{4a^3}{3}$.

Câu 17: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60^0. Gọi G là trọng tâm tam giác $A'BC$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $GABC$ theo a.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $\frac{a}{3}$. **B.** $\frac{a}{4}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a}{8}$.

Câu 18: Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A_1 trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm AC và BD. Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và $(ABCD)$ bằng 60^0. Tính khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) theo a.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a}{4}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 19: Cho hình tứ diện $ABCD$ có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC); $AC = AD = 4cm$; $AB = 3cm$ và $BC = 5cm$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh BD, BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và AN.

A. $\frac{6\sqrt{15}}{17}$. **B.** $\frac{6\sqrt{34}}{17}$. **C.** $\frac{\sqrt{34}}{17}$. **D.** $\frac{6\sqrt{3}}{17}$.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với đáy, $AB = a, AD = 2a, SA = 3a$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SD và P là giao điểm của SC với mặt phẳng (AMN). Tính thể tích khối chóp $S.AMPN$

A. $\frac{1863a^3}{1820}$. **B.** $\frac{1873a^3}{1820}$. **C.** $\frac{1863a^3}{182}$. **D.** $\frac{1263a^3}{1820}$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B; $AB = AD = 2a$; $CB = a$; góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60^0. Gọi I là trung điểm của cạnh AB. Biết hai mặt phẳng (SDI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a.

A. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{5}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{5}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\frac{8a^3\sqrt{15}}{5}$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = \sqrt{2}a$, $SA = a$ và vuông góc với $mp(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, SC. Gọi I là giao điểm của BM, AC. Chứng minh $mp(SAC)$ vuông góc với (SMB). Tính thể tích của khối tứ diện $ANIB$.

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{36}$.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC, CD. Tính thể tích khối tứ diện $CMNP$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{32}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{5}}{96}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{96}$.

Câu 24: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA. M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh MN vuông góc với BD và tính (theo a) khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{a}{8}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD; H là giao điểm của CN và DM. Biết SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SH = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a.

A. $\frac{a\sqrt{57}}{19}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{37}}{19}$. **D.** $\frac{a\sqrt{57}}{38}$.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = a$; hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn AC, $AH = \frac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC. Chứng minh M là trung điểm của SA và tính thể tích khối tứ diện $SMBC$ theo a.

A. $\frac{a^3\sqrt{14}}{48}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{12}}{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{5}}{32}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{14}}{24}$.

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^0$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) tạo với nhau một góc 60^0. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC .Tính thể tích khối chóp $S.AMN$.

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3888}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{3888}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{1233}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{14}}{24}$.

Câu 28: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy là a. Gọi M, N là trung điểm SB, SC. Tính theo a diện tích ΔAMN, biết (AMN) vuông góc với (SBC).

A. $\frac{a^2\sqrt{10}}{16}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{5}}{16}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{10}}{8}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{10}}{32}$.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với $mp(ABC)$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SC. Tính thể tích của khối chóp $A.BCMN$.

A. $\frac{a^3\sqrt{14}}{48}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{25}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{50}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{50}$.

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $B, BA = 3a$, $BC = 4a$; mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết $SB = 2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC} = 30^0$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo a.

A. $\frac{6a\sqrt{5}}{7}$. **B.** $\frac{6a\sqrt{7}}{7}$. **C.** $\frac{a\sqrt{7}}{7}$. **D.** $\frac{6a\sqrt{7}}{15}$.

Câu 31: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B với $AB = BC = a; AD = 2a$; $A \equiv O, B$ thuộc tia Ox, D thuộc tia Oy và S thuộc tia Oz. Đường thẳng SC và BD tạo với nhau một góc α thỏa $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{30}}$. Gọi E là trung điểm cạnh AD. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BCE$.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 32: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M là trung điểm CC', biết $AM \perp B'M$. Chọn hệ trục $Oxyz$ sao cho $A \equiv O$, C thuộc tia Ox, A' thuộc tia Oz và B thuộc miền góc xOy. Trên các cạnh $A'B', A'C', BB'$ lần lượt lấy các điểm N, P, Q thỏa $A'N = NB'$ $A'P = 2C'P$, $B'Q = 3BQ$. Tính thể tích khối đa diện $AMPNQ$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $\frac{13a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{24}$. **C.** $\frac{13a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $\frac{13a^3\sqrt{6}}{24}$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $1cm$, các cạnh bên SA, SB, SC có độ dài cùng bằng $1cm$. Tính độ dài cạnh SD sao cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích lớn nhất.

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 34: Tứ diện đều $ABCD$ có tâm là S và có độ dài các cạnh bằng 2. Gọi A', B', C', D' theo thứ tự là hình chiếu của các đỉnh A, B, C, D trên đường thẳng nào Δ đó đi qua S. Tìm GTLN $P = SA'^4 + SB'^4 + SC'^4 + SD'^4$

A. $\frac{7}{4}$. **B.** $\frac{7}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 35: **(THPT-Chuyên-Sơn-La-Lần-1-2018-2019-Thi-tháng-4)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của hai cạnh SA và BC, biết $MN = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Khi đó giá trị sin của góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 36: **(Chuyên Thái Bình Lần3)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng với đáy. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và CD. Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CMN$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{93}}{12}$. **B.** $\frac{a\sqrt{29}}{8}$. **C.** $\frac{5a\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{a\sqrt{37}}{6}$.

Câu 37: **(KINH MÔN II LẦN 3 NĂM 2019)** Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi, tam giác ABD đều. Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC và $C'D'$, biết rằng $MN \perp B'D$. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng MN và mặt đáy $(ABCD)$, khi đó giá trị $\cos\alpha$ bằng

A. $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$. **D.** $\cos\alpha = \frac{1}{2}$.

Câu 38: **(Đặng Thành Nam Đề 14)** Trong không gian Oxyz, cho điểm A(1;0;2), B(−2;0;5), C(0;−1;7). Trên đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A lấy một điểm S. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC. Biết khi S di động trên d (S ≠ A) thì đường thẳng HK luôn đi qua một điểm cố định D. Tính độ dài đoạn thẳng AD.

A. $AD = 3\sqrt{3}$. **B.** $AD = 6\sqrt{2}$. **C.** $AD = 3\sqrt{6}$. **D.** $AD = 6\sqrt{3}$.

Câu 39: **(Chuyên Hưng Yên Lần 3)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;0)$, $B(0;-1;0)$, $C(0;0;1)$, $D(1;-1;1)$. Mặt cầu tiếp xúc 6 cạnh của tứ diện $ABCD$ cắt (ACD) theo thiết diện có diện tích S. Chọn mệnh đề đúng?

A. $S = \frac{\pi}{3}$. **B.** $S = \frac{\pi}{6}$. **C.** $S = \frac{\pi}{4}$. **D.** $S = \frac{\pi}{5}$.

Câu 40: **(THTT số 3)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại C, $AB = 2a$, $AA' = a$, góc giữa BC' và $(ABB'A')$ bằng $60°$. Gọi N là trung điểm AA' và M là trung điểm BB'. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(BC'N)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $\frac{2a\sqrt{74}}{37}$. **B.** $\frac{a\sqrt{74}}{37}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{37}}{37}$. **D.** $\frac{a\sqrt{37}}{37}$.

Câu 41: **(THPT SỐ 1 TƯ NGHĨA LẦN 2 NĂM 2019)** Cho tứ diện $SABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA=AB=3cm$, $BC=5cm$ và diện tích tam giác SAC bằng $6cm^2$. Một mặt phẳng (α) thay đổi qua trọng tâm G của tứ diện cắt các cạnh AS, AB, AC lần lượt tại M,N,P. Tính giá trị nhỏ nhất T_m của biểu thức $T=\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{AN^2}+\frac{1}{AP^2}$.

A. $T_m=\frac{8}{17}$. **B.** $T_m=\frac{41}{144}$. **C.** $T_m=\frac{1}{10}$. **D.** $T_m=\frac{1}{34}$.

Câu 42: **(Nguyễn Khuyến)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA=2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SD. Tang của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Câu 43: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, $AB=3$, $AD=4$, $\widehat{BAD}=120^\circ$. Cạnh bên $SA=2\sqrt{3}$ vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh SA, AD và BC, α là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (MNP). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau đây:

A. $\alpha\in(60^\circ;90^\circ)$. **B.** $\alpha\in(0^\circ;30^\circ)$. **C.** $\alpha\in(30^\circ;45^\circ)$. **D.** $\alpha\in(45^\circ;60^\circ)$.

Vậy: $\cos\alpha=\frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{13}}.\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{26}}$. Suy ra: $\alpha\approx 78^\circ 41'24"$.

Câu 44: **(Yên Phong 1)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Các điểm M, N lần lượt thuộc các đoạn $A'B'$ và $A'D'$ sao cho hai mặt phẳng (MAC') và (NAC') vuông góc với nhau. Tìm giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $A.A'MC'N$.

A. $\frac{\sqrt{3}+1}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}-2}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}-1}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM VÀ VÉCTƠ TRONG KHÔNG GIAN

A - LÝ THUYẾT CHUNG

1. Véc tơ trong không gian

*** Định nghĩa**

Trong không gian, vecto là một đoạn thẳng có định hướng tức là đoạn thẳng có quy định thứ tự của hai đầu

 Chú ý: Các định nghĩa về hai vecto bằng nhau, đối nhau và các phép toán trên các vecto trong không gian được xác định tương tự như trong mặt phẳng.

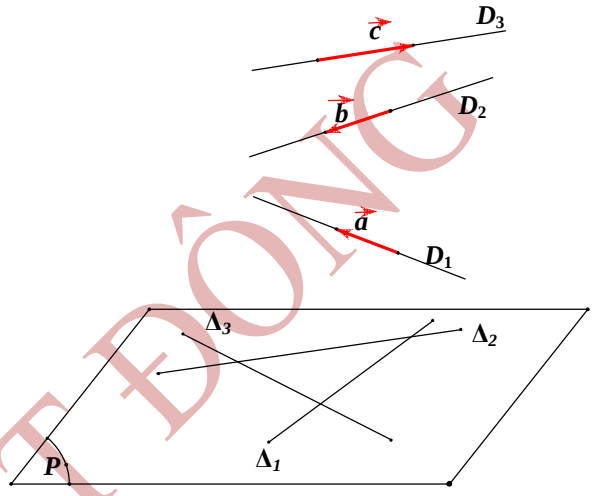
2. Vecto đồng phẳng

*** Định nghĩa:** Ba vecto $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ khác $\vec{0}$ gọi là đồng phẳng khi giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

 Chú ý:

 n vecto khác $\vec{0}$ gọi là đồng phẳng khi giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

 Các giá của các vecto đồng phẳng có thể là các đường thẳng chéo nhau.



*** Điều kiện để 3 vecto khác $\vec{0}$ đồng phẳng**

Định lý 1:

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \exists m,n\in\mathbb{R}: \vec{a}=m\vec{b}+n\vec{c}$

*** Phân tích một vecto theo ba vecto không đồng phẳng**

 Định lý 2: Cho 3 vecto $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ không đồng phẳng. Bất kì một vecto $\vec{a}$ nào trong không gian cũng có thể phân tích theo ba vecto đó, nghĩa là có một bộ ba số thực (x_1,x_2,x_3) duy nhất

$\vec{a}=x_1\vec{e_1}+x_2\vec{e_2}+x_3\vec{e_3}$

 Chú ý: Cho vecto $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ khác $\vec{0}$:

1. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng nếu có ba số thực m,n,p không đồng thời bằng 0 sao cho: $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=0$
2. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng nếu từ $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=0\Rightarrow m=n=p=0$

3. Tọa độ của vecto

Trong không gian xét hệ trục $Oxyz$, có trục Ox vuông góc với trục Oy tại O, và trục Oz vuông góc với mặt phẳng (Oxy) tại O. Các vecto đơn vị trên từng trục Ox,Oy,Oz lần lượt là $\vec{i}=(1;0;0),\vec{j}=(0;1;0),\vec{k}=(0;0;1)$.

a) $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)\Leftrightarrow\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$

b) $M(x_M,y_M,z_M)\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=x_M\vec{i}+y_M\vec{j}+z_M\vec{k}$

c) Cho $A(x_A,y_A,z_A),B(x_B,y_B,z_B)$ ta có:

$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$ và $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$.

d) M là trung điểm AB thì $M\left(\frac{x_B+x_A}{2};\frac{y_B+y_A}{2};\frac{z_B+z_A}{2}\right)$

e) Cho $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ ta có:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

- $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=b_1\\a_2=b_2\\a_3=b_3\end{cases}$
- $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_1\pm b_1;a_2\pm b_2;a_3\pm b_3)$
- $k.\vec{a}=(ka_1;ka_2;ka_3)$
- $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a};\vec{b})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$
- $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}}$
- $\cos\varphi=\cos(\vec{a};\vec{b})=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}}.\sqrt{b_1^{\,2}+b_2^{\,2}+b_3^{\,2}}}$ (với $\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0}$)
- $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc: $\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$
- $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương: $\Leftrightarrow\exists k\in R:\vec{a}=k\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=kb_1\\a_2=kb_2\\a_3=kb_3\end{cases}$

4. Tích có hướng và ứng dụng

Tích có hướng của $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ là:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix}a_2a_3\\b_2b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_3a_1\\b_3b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1a_2\\b_1b_2\end{vmatrix}\right)=(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1)$$

a. Tính chất:

- $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\perp\vec{a},\left[\vec{a},\vec{b}\right]\perp\vec{b}$
- $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=|\vec{a}|.|\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b})$
- $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương: $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$
- $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}=0$

b. Các ứng dụng tích có hướng

- Diện tích tam giác: $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$
- Thể tích tứ diện $V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$
- Thể tích khối hộp: $V_{ABCD.A'B'C'D'}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$

5. Một số kiến thức khác

Nếu M chia đoạn AB theo tỉ số $k\left(\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB}\right)$ thì ta có:

$x_M=\dfrac{x_A-kx_B}{1-k};y_M=\dfrac{y_A-ky_B}{1-k};z_M=\dfrac{z_A-kz_B}{1-k}$ với $k\neq1$

G là trọng tâm tam giác $ABC\Leftrightarrow x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3};y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3};z_G=\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}$

G là trọng tâm tứ diện $ABCD\Leftrightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

B - CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

Dạng 1. A,B,C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ cùng phương $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\vec{0}$.

Dạng 2. A,B,C là ba đỉnh tam giác $\Leftrightarrow$ A,B,C không thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ không cùng phương $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\neq\vec{0}$.

Dạng 3. $G(x_G;y_G;z_G)$ là trọng tâm tam giác ABC thì:

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3};y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3};z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}$$

Dạng 4. Cho ΔABC có các chân E,F của các đường phân giác trong và ngoài của góc A của ΔABC trên BC. Ta có: $\overrightarrow{EB}=-\frac{AB}{AC}.\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{FB}=\frac{AB}{AC}.\overrightarrow{FC}$

Dạng 5. $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|\Rightarrow$ diện tích của hình bình hành $ABCD$ là: $S_{ABCD}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$

Dạng 6. Đường cao AH của ΔABC: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AH.BC\Rightarrow AH=\frac{2.S_{\Delta ABC}}{BC}=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|}{BC}$

Dạng 7. Tìm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành: Từ t/c hbh có 4 cặp vecto bằng nhau $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ hoặc $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}...\Rightarrow$ tọa độ D.

Dạng 8. Chứng minh $ABCD$ là một tứ diện $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}$ không đồng phẳng $\Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\neq 0$.

Dạng 9. $G(x_G;y_G;z_G)$ là trọng tâm tứ diện $ABCD$ thì:

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4};y_G=\frac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4};z_G=\frac{z_A+z_B+z_C+z_D}{4}$$

Dạng 10. Thể tích khối tứ diện $ABCD$: $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$

Dạng 11. Đường cao AH của tứ diện $ABCD$: $V=\frac{1}{3}S_{\Delta BCD}.AH\Rightarrow AH=\frac{3V}{S_{\Delta BCD}}$

Dạng 12. Thể tích hình hộp: $V_{ABCD.A'B'C'D'}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$.

Dạng 13. Hình chiếu của điểm $A(x_A;y_A;z_A)$ lên các mặt phẳng tọa độ và các trục:

Xem lại mục 1, công thức 17, 18.

Dạng 14. Tìm điểm đối xứng với điểm $A(x_A;y_A;z_A)$ qua các mặt phẳng tọa độ, các trục và gốc tọa độ:

(Thiếu tọa độ nào thì đổi dấu tọa độ đó, có mặt tọa độ nào thì để nguyên tọa độ đó)

(OXY): $A_1(x_A;y_A;-z_A)$ (OXZ): $A_2(x_A;-y_A;z_A)$ (OYZ): $A_3(-x_A;y_A;z_A)$

(OX): $A_4(x_A;-y_A;-z_A)$ (OY): $A_5(-x_A;y_A;-z_A)$ (OZ): $A_6(-x_A;-y_A;z_A)$

Qua gốc O: $A_7(-x_A;-y_A;-z_A)$

C – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho bốn điểm $S(1,2,3);A(2,2,3);B(1,3,3);C(1,2,4)$. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của BC,CA và AB. Khi đó SMNP là:

A. Hình chóp. **B.** Hình chóp đều. **C.** Tứ diện đều. **D.** Tam diện vuông

Lời giải

Tam giác: ABC có $AB=BC=CA=\sqrt{2}\Rightarrow MN=NP=PM=\frac{\sqrt{2}}{2}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\overrightarrow{SA}=(1;0;0);\overrightarrow{SB}=(0;1;0);\overrightarrow{SC}=(0;0;1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}=0\Rightarrow SA\perp SB$

Tương tự $SA\perp SC, SB\perp SC$

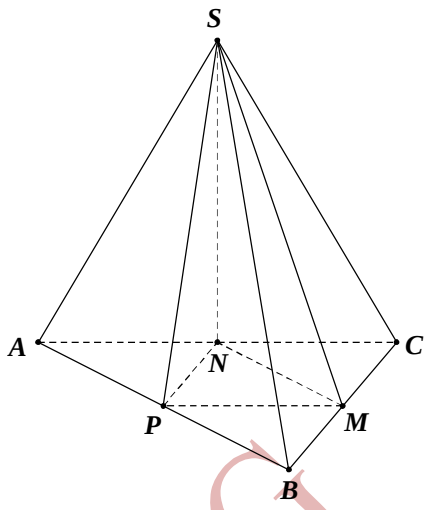
Các tam giác vuông SAB, SBC, SCA vuông tại S, có các trung tuyến:

$SP=SM=SN=\dfrac{AB}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=MN=NP=PM$

Ta có: $SP\subset(SAB); SM\subset(SBC); SN\subset(SCA)$

$\Rightarrow \overrightarrow{SP},\overrightarrow{SM},\overrightarrow{SN}$ không đồng phẳng

$\Rightarrow SMNP$ là tứ diện đều.



Chọn C

Câu 2: Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(2;0;-2), B(3;-1;-4), C(-2;2;0)$. Điểm D trong mặt phẳng (Oyz) có cao độ âm sao cho thể tích của khối tứ diện ABCD bằng 2 và khoảng cách từ D đến mặt phẳng (Oxy) bằng 1 có thể là:

A. $D(0;-3;-1)$ **B.** $D(0;2;-1)$ **C.** $D(0;1;-1)$ **D.** $D(0;3;-1)$

Lời giải

Do $D\in(Oyz)\longrightarrow D(0;b;c)$ với $c<0$

Theo giả thiết: $d\left[D,(Oxy)\right]=1\Leftrightarrow|c|=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=1(loai)\\c=-1\end{array}\right.\longrightarrow D(0;b;-1)$

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-1;-2), \overrightarrow{AC}=(-4;2;2), \overrightarrow{AD}=(-2;b;1)$

Suy ra $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(2;6;-2)\longrightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=6b-6$

Cũng theo giả thiết, ta có: $V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|=|b-1|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=3\\b=-1\end{array}\right.$

Chọn D

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;0)$, $B(3;4;1)$, $D(-1;3;2)$. Tìm tọa độ điểm C sao cho $ABCD$ là hình thang có hai cạnh đáy AB, CD và có góc C bằng 45°.

A. $C(5;9;5)$. **B.** $C(1;5;3)$. **C.** $C(-3;1;1)$. **D.** $C(3;7;4)$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1. $\overrightarrow{AB}=(2;2;1)$.

Đường thẳng CD có phương trình là $CD:\left\{\begin{array}{l}x=-1+2t\\y=3+2t\\z=2+t\end{array}\right.$.

Suy ra $C(-1+2t;3+2t;2+t)$; $\overrightarrow{CB}=(4-2t;1-2t;-1-t)$, $\overrightarrow{CD}=(-2t;-2t;-t)$.

Ta có $\cos\widehat{BCD}=\dfrac{(4-2t)(-2t)+(1-2t)(-2t)+(-1-t)(-t)}{\sqrt{(4-2t)^2+(1-2t)^2+(-1-t)^2}\sqrt{(-2t)^2+(-2t)^2+(-t)^2}}$

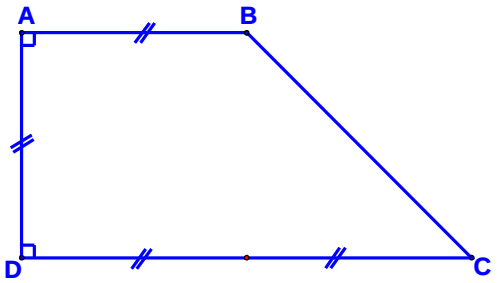
Hay $\dfrac{(4-2t)(-2t)+(1-2t)(-2t)+(-1-t)(-t)}{\sqrt{(4-2t)^2+(1-2t)^2+(-1-t)^2}\sqrt{(-2t)^2+(-2t)^2+(-t)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (1).

Lần lượt thay t bằng $3;1;-1;2$ (tham số t tương ứng với toạ độ điểm C ở các phương án A, B, C, D), ta thấy $t=2$ thoả (1).

Cách 2.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;2;1), \overrightarrow{AD}=(-2;1;2)$. Suy ra $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$ và $AB=AD$. Theo giả thiết, suy ra $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}$. Kí hiệu $C(a;b;c)$, ta có $\overrightarrow{DC}=(a+1;b-3;c-2)$, $2\overrightarrow{AB}=(4;4;2)$. Từ đó $C(3;7;4)$.



Câu 4: Cho ba điểm $A(3;1;0), B(0;-1;0), C(0;0;-6)$. Nếu tam giác $A'B'C'$ thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{C'C}=\vec{0}$ thì có tọa độ trọng tâm là:

A. $(1;0;-2)$. **B.** $(2;-3;0)$. **C.** $(3;-2;0)$. **D.** $(3;-2;1)$.

Lời giải

Chọn A

* Cách diễn đạt thứ nhất:

Gọi G, G' theo thứ tự lần lượt là trọng tâm tam giác ABC, A'B'C'. Với mọi điểm T trong không gian có:

$$(1):\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{C'C}=\vec{0}\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{TA}-\overrightarrow{TA'}\right)+\left(\overrightarrow{TB}-\overrightarrow{TB'}\right)+\left(\overrightarrow{TC}-\overrightarrow{TC'}\right)=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=\overrightarrow{TA'}+\overrightarrow{TB'}+\overrightarrow{TC'}\qquad(2)$$

Hệ thức (2) chứng tỏ. Nếu $T\equiv G$ tức là $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TB}+\overrightarrow{TC}=\vec{0}$ thì ta cũng có $\overrightarrow{TA'}+\overrightarrow{TB'}+\overrightarrow{TC'}=\vec{0}$ hay $T\equiv G'$ hay (1) là hệ thức cần và đủ để hai tam giác ABC, A'B'C' có cùng trọng tâm.

Ta có tọa độ của G là: $G=\left(\frac{3+0+0}{3};\frac{1-1+0}{3};\frac{0+0-6}{3}\right)=(1;0;-2)$

Đó cũng là tọa độ trọng tâm G' của $\Delta A'B'C'$

* Cách diễn đạt thứ hai:

Ta có: $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$ (1)

$$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{A'G'}+\overrightarrow{G'G}+\overrightarrow{GA}\right)+\left(\overrightarrow{B'G'}+\overrightarrow{G'G}+\overrightarrow{GB}\right)+\left(\overrightarrow{C'G'}+\overrightarrow{G'G}+\overrightarrow{GC}\right)=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+\left(\overrightarrow{A'G'}+\overrightarrow{B'G'}+\overrightarrow{C'G'}\right)+3\overrightarrow{G'G}=\vec{0}\ (2)$$

Nếu G, G' theo thứ tự lần lượt là trọng tâm tam giác ABC, A'B'C' nghĩa là $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{A'G'}+\overrightarrow{B'G'}+\overrightarrow{C'G'}$ thì $(2)\Leftrightarrow\overrightarrow{G'G}=\vec{0}\Leftrightarrow G'\equiv G$

Tóm lại (1) là hệ thức cần và đủ để hai tam giác ABC, A'B'C' có cùng trọng tâm.

Ta có tọa độ của G là: $G=\left(\frac{3+0+0}{3};\frac{1-1+0}{3};\frac{0+0-6}{3}\right)=(1;0;-2)$. Đó cũng là tọa độ trọng tâm G' của $\Delta A'B'C'$

Câu 5: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(3;0;0), N(m,n,0), P(0;0;p)$. Biết $MN=\sqrt{13}, \widehat{MON}=60^0$, thể tích tứ diện $OMNP$ bằng 3. Giá trị của biểu thức $A=m+2n^2+p^2$ bằng

A. 29. **B.** 27. **C.** 28. **D.** 30.

Lời giải

$$\overrightarrow{OM}=(3;0;0), \overrightarrow{ON}=(m;n;0)\Rightarrow\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}=3m$$

$$\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}=\left|\overrightarrow{OM}\right|.\left|\overrightarrow{ON}\right|\cos 60^0\Rightarrow\frac{\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}}{\left|\overrightarrow{OM}\right|.\left|\overrightarrow{ON}\right|}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}=\frac{1}{2}$$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$MN=\sqrt{(m-3)^2+n^2}=\sqrt{13}$

Suy ra $m=2;n=\pm 2\sqrt{3}$

$\left[\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right].\overrightarrow{OP}=6\sqrt{3}p\Rightarrow V=\frac{1}{6}\left|6\sqrt{3}p\right|=3\Rightarrow p=\pm\sqrt{3}$

Vậy $A=2+2.12+3=29.$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ biết $A(-2;2;6),B(-3;1;8),C(-1;0;7),D(1;2;3)$. Gọi H là trung điểm của CD, $SH\perp(ABCD)$. Để khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng $\frac{27}{2}$ (đvtt) thì có hai điểm S_1,S_2 thỏa mãn yêu cầu bài toán. Tìm tọa độ trung điểm I của S_1S_2

A. $I(0;-1;-3)$. **B.** $I(1;0;3)$ **C.** $I(0;1;3)$. **D.** $I(-1;0;-3)$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;-1;2),\overrightarrow{AC}=(1;-2;1)\Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\overrightarrow{DC}=(-2;-2;4),\overrightarrow{AB}=(-1;-1;2)\Rightarrow\overrightarrow{DC}=2.\overrightarrow{AB}\Rightarrow ABCD$ là hình thang và

$S_{ABCD}=3S_{ABC}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$

Vì $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}\Rightarrow SH=3\sqrt{3}$

Lại có H là trung điểm của $CD\Rightarrow H(0;1;5)$

Gọi $S(a;b;c)\Rightarrow\overrightarrow{SH}=(-a;1-b;5-c)\Rightarrow\overrightarrow{SH}=k\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=k(3;3;3)=(3k;3k;3k)$

Suy ra $3\sqrt{3}=\sqrt{9k^2+9k^2+9k^2}\Rightarrow k=\pm 1$

+) Với $k=1\Rightarrow\overrightarrow{SH}=(3;3;3)\Rightarrow S(-3;-2;2)$

+) Với $k=-1\Rightarrow\overrightarrow{SH}=(-3;-3;-3)\Rightarrow S(3;4;8)$

Suy ra $I(0;1;3)$

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình vuông $ABCD$, $B(3;0;8)$, $D(-5;-4;0)$. Biết đỉnh A thuộc mặt phẳng (Oxy) và có tọa độ là những số nguyên, khi đó $\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right|$ bằng:

A. $5\sqrt{10}$. **B.** $6\sqrt{10}$. **C.** $10\sqrt{6}$. **D.** $10\sqrt{5}$.

Lời giải

Ta có trung điểm BD là $I(-1;-2;4)$, $BD=12$ và điểm A thuộc mặt phẳng (Oxy) nên $A(a;b;0)$.

$ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow\begin{cases}AB^2=AD^2\\AI^2=\left(\frac{1}{2}BD\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a-3)^2+b^2+8^2=(a+5)^2+(b+4)^2\\(a+1)^2+(b+2)^2+4^2=36\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}b=4-2a\\(a+1)^2+(6-2a)^2=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}a=\frac{17}{5}\\b=\frac{-14}{5}\end{cases}\Rightarrow$ A(1; 2; 0) hoặc $A\left(\frac{17}{5};\frac{-14}{5};0\right)$

(loại). Với $A(1;2;0)\Rightarrow C(-3;-6;8)$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(4;2;0),B(2;4;0),C(2;2;1)$. Biết điểm $H(a;b;c)$ là trực tâm của tam giác ABC. Tính $S=a-b+3c$.

A. $S=-6$. **B.** $S=-2$. **C.** $S=6$. **D.** $S=2$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\overrightarrow{HA}=(4-a;2-b;-c),\overrightarrow{HB}=(2-a;4-b;-c),\overrightarrow{BC}=(0;-2;1),\overrightarrow{AC}=(-2;0;1)$.

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC}\right]=(-2;-2;-4)\Rightarrow\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{HA}=2(a-4)+2(b-2)+4c=2a+2b+4c-12$.

Vì H là trực tâm của tam giác ABC nên:

$$\begin{cases}\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AC}=0\\ \overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC}=0\\ \left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{HA}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(a-2)-c=0\\ 2(b-2)-c=0\\ 2a+2b+4c-12=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a-c=4\\ 2b-c=4\\ a+b+2c=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{7}{3}\\ b=\dfrac{7}{3}\\ c=\dfrac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow S=a-b+3c=2$$

Câu 9: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0),B(1;b;0),C(1;0;c)$ với a,b,c là các số thực thay đổi sao cho $H(3;2;1)$ là trực tâm của tam giác ABC. Tính $S=a+b+c$.

A. $S=2$. **B.** $S=19$. **C.** $S=11$. **D.** $S=9$.

Lời giải

Chọn B

Để $H(3;2;1)$ là trực tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\\ H\in(ABC)\end{cases}$.

$\overrightarrow{AH}=(3-a;2;1),\overrightarrow{BC}(0;-b;c)$.

$\overrightarrow{BH}(2;2-b;1),\overrightarrow{AC}(1-a;0;c)$.

Ta có $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow-2b+c=0\Leftrightarrow c=2b$.

$\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow 2(1-a)+c=0$, thay $c=2b$ ta được $a=b+1$.

Khi đó $\overrightarrow{AB}=(-b;b;0)\Rightarrow\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\vec{u}(-1;1;0)$, $\overrightarrow{AC}(-b;0;2b)\Rightarrow\overrightarrow{AC}$ cùng phương với $\vec{v}(-1;0;2)$.

Ta có $\left[\vec{u},\vec{v}\right]=(2;2;1)$. Để $H\in(ABC)$ khi và chỉ khi $\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AH}$ đồng phẳng

$\Leftrightarrow\left[\vec{u},\vec{v}\right]\overrightarrow{AH}=0\Leftrightarrow 2(3-a)+4+1=0\Leftrightarrow a=\dfrac{11}{2}\Rightarrow b=\dfrac{9}{2},c=9$.

Vậy $a+b+c=19$.

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(4;0;0),B(a;b;0),C(0;0;c)$ với $(a,b,c>0)$ thỏa mãn độ dài đoạn $AB=2\sqrt{10}$, góc $\widehat{AOB}=45^\circ$ và thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng 8. Tính tổng $T=a+b+c$.

A. $T=2$. **B.** $T=10$. **C.** $T=12$. **D.** $T=14$.

Lời giải

Chọn D

$V_{OABC}=\dfrac{1}{3}.S_{OAB}.OC=\dfrac{1}{6}.OA.OB.OC.\sin\widehat{AOB}=\dfrac{1}{6}.4.\sqrt{a^2+b^2}.\dfrac{1}{\sqrt{2}}=8\Leftrightarrow c^2\left(a^2+b^2\right)=288$.

Lại có $AB=\sqrt{(a-4)^2+b^2}=2\sqrt{10}\Leftrightarrow(a-4)^2+b^2=40$.

Theo định lí hàm số cô-sin ta có:

$AB^2=OA^2+OB^2-2.OA.OB.\cos 45^\circ=16+a^2+b^2-4\sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}=40$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Leftrightarrow a^2+b^2=72 \Rightarrow c^2=\dfrac{288}{72}=4 \Rightarrow c=2;\ -8a+16+72=40 \Leftrightarrow a=6 \Rightarrow b=6$.

Vậy $T=6+6+2=14$.

Câu 11: **(THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4)**Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(5;1;5)$, $B(4;3;2)$, $C(-3;-2;1)$. Điểm $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tính $a+2b+c$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 6. **D.** –9.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

$\overrightarrow{AB}=(-1;2;-3)$, $\overrightarrow{AC}=(-8;-3;-4)$.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, $AC \Rightarrow \begin{cases} M\left(\dfrac{9}{2};2;\dfrac{7}{2}\right) \\ N\left(1;-\dfrac{1}{2};3\right) \end{cases}$.

Gọi $\vec{n}$ là véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(ABC) \Rightarrow \vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-17;20;19)$.

$(ABC): -17x+20y+19z-30=0$.

I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IM}\perp\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{IN}\perp\overrightarrow{AC} \\ I\in(ABC) \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{9}{2}-a\right).(-1)+(2-b).2+\left(\dfrac{7}{2}-c\right).(-3)=0 \\ (1-a).(-8)+\left(-\dfrac{1}{2}-b\right).(-3)+(3-c).(-4)=0 \\ -17a+20b+19c-30=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2b+3c=11 \\ 8a+3b+4c=\dfrac{37}{2} \\ -17a+20b+19c=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-\dfrac{1}{2} \\ c=3 \end{cases}.$$

Vậy $a+2b+c=1+2.\left(-\dfrac{1}{2}\right)+3=3$.

Cách 2:

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;2;-3)$ và $\overrightarrow{BC}=(-7;-5;-1) \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=0 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại B.

Vì I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC nên I là trung điểm của AC.

Vậy $I\left(1;-\dfrac{1}{2};3\right) \Rightarrow a+2b+c=1+2.\left(-\dfrac{1}{2}\right)+3=3$.

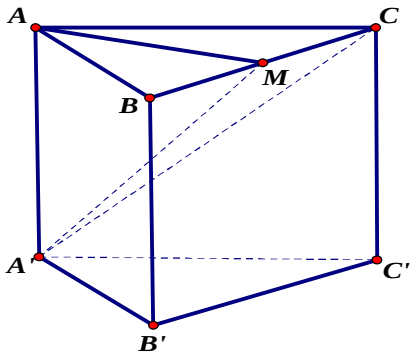
Câu 12: **(KIM LIÊN HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 03)** Trong không gian $Oxyz$, cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $A'\left(\sqrt{3};-1;1\right)$, hai đỉnh B,C thuộc trục Oz và $AA'=1$ (C không trùng với O). Biết véctơ $\vec{u}=(a;b;2)$ với $a,b\in\mathbb{R}$ là một véctơ chỉ phương của đường thẳng $A'C$. Tính $T=a^2+b^2$.

A. $T=5$. **B.** $T=16$. **C.** $T=4$. **D.** $T=9$.

Lời giải

Chọn B

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Gọi M là trung điểm BC.

Khi đó có $\begin{cases} AM \perp BC \\ AA' \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp A'M$ tại $M \Rightarrow M$ là hình chiếu của A' trên trục Oz

(vì đường thẳng BC chính là trục Oz)

$A'\left(\sqrt{3};-1;1\right) \Rightarrow M\left(0;0;1\right)$ và $A'M = 2$.

Ta có: $AM = \sqrt{A'M^2 - AA'^2} = \sqrt{3}$. Mà tam giác ABC đều nên $AM = \frac{\sqrt{3}}{2}BC = \sqrt{3} \Rightarrow BC = 2$

$\Rightarrow MC = 1$.

Vì C thuộc trục Oz và C không trùng với O nên gọi $C\left(0;0;c\right)$, $c \neq 0$.

$\overrightarrow{MC} = \left(0;0;c-1\right) \Rightarrow MC = \left|c-1\right|$

$MC = 1 \Leftrightarrow \left|c-1\right| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 0 (\text{L}) \\ c = 2 \end{array}\right. \Rightarrow C\left(0;0;2\right)$.

$\overrightarrow{A'C} = \left(-\sqrt{3};1;1\right)$ là một véctơ chỉ phương của đường thẳng $A'C$

$\Rightarrow \vec{u} = \left(-2\sqrt{3};2;2\right)$ cũng là một véctơ chỉ phương của đường thẳng $A'C$.

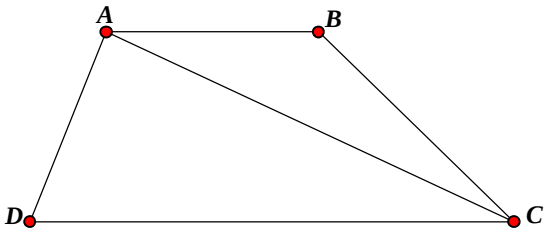
Vậy $a = -2\sqrt{3}; b = 2 \Rightarrow T = a^2 + b^2 = 16$.

Câu 13: **(Thuận Thành 2 Bắc Ninh)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình thang $ABCD$ có hai đáy AB, CD; có tọa độ ba đỉnh $A(1;2;1)$, $B(2;0;-1)$, $C(6;1;0)$. Biết hình thang có diện tích bằng $6\sqrt{2}$. Giả sử đỉnh $D(a;b;c)$, tìm mệnh đề đúng?

A. $a+b+c=6$. **B.** $a+b+c=5$. **C.** $a+b+c=8$. **D.** $a+b+c=7$.

Lời giải

Chọn C



Cách 1:

$\overrightarrow{AB} = \left(1;-2;-2\right); \overrightarrow{AC} = \left(5;-1;-1\right); \overrightarrow{DC} = \left(6-a;1-b;-c\right)$.

Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \frac{9\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S_{ACD} = 6\sqrt{2} - \frac{9\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$AB // CD$ nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$ cùng phương, cùng chiều $\Leftrightarrow \dfrac{6-a}{1}=\dfrac{1-b}{-2}=\dfrac{c}{2}>0 \Leftrightarrow \begin{cases} c=12-2a \\ b=13-2a \\ a<6 \\ b>1 \\ c>0 \end{cases}$

$\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]=(0;9a-54;54-9a).$

$S_{\Delta ACD}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right\|=\dfrac{3\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow |54-9a|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{19}{3} \\ a=\dfrac{17}{3} \end{array}\right.$.

So với điều kiện suy ra: $a=\dfrac{17}{3} \Rightarrow a+b+c=8.$

Cách 2:

Ta có $AB=3; h=d(C,AB)=\dfrac{\sqrt{162}}{3}.$

$S_{ABCD}=\dfrac{h}{2}(AB+CD) \Leftrightarrow 6\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{162}}{6}(3+CD) \Leftrightarrow CD=1.$

Suy ra $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow D\left(\dfrac{17}{3};\dfrac{5}{3};\dfrac{2}{3}\right) \Rightarrow a+b+c=8.$

Câu 14: **(KIM LIÊN HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 03)** Trong không gian $Oxyz$, cho hình thang cân $ABCD$ có các đáy lần lượt là AB, CD. Biết $A(3;1;-2)$, $B(-1;3;2)$, $C(-6;3;6)$ và $D(a;b;c)$ với $a;b;c \in \mathbb{R}$. Tính $T=a+b+c$.

A. $T=-3.$ **B.** $T=1.$ **C.** $T=3.$ **D.** $T=-1.$

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Ta có $\overrightarrow{AB}=(-4;2;4); \overrightarrow{CD}=(a+6;b-3;c-6)$

Do $ABCD$ là hình thang cân nên $\overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{AB}$ $(k \in \mathbb{R})$ hay $\dfrac{a+6}{-2}=\dfrac{b-3}{1}=\dfrac{c-6}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} b=\dfrac{-a}{2} \\ c=-a \end{cases}$. Vậy $D\left(a;\dfrac{-a}{2};-a\right)$.

Lại có $AC=BD \Leftrightarrow AC^2=BD^2 \Leftrightarrow (-9)^2+2^2+8^2=(a+1)^2+\left(\dfrac{a}{2}+3\right)^2+(a+2)^2$

$\Leftrightarrow a^2+4a-60=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=6 \\ a=-10 \end{array}\right.$

Với $a=-10 \Rightarrow D(-10;5;10)$. Kiểm tra thấy: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ (Không thỏa mãn $ABCD$ là hình thang cân).

Với $a=6 \Rightarrow D(6;-3;-6)$. Kiểm tra thấy: $(-3).\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ (thỏa mãn).

Do đó, $T=a+b+c=6-3-6=-3.$

Cách 2

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-4;2;4); \overrightarrow{CD}=(a+6;b-3;c-6)$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Do $ABCD$ là hình thang cân nên $\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{CD}$ ngược hướng hay $\frac{a+6}{-2}=\frac{b-3}{1}=\frac{c-6}{2}<0$

$\Leftrightarrow\begin{cases}b=\frac{-a}{2}\\c=-a\\a>-6\end{cases}$. Vậy $D\left(a;\frac{-a}{2};-a\right)$ với $a>-6$.

Lại có $AC=BD\Leftrightarrow AC^2=BD^2\Leftrightarrow(-9)^2+2^2+8^2=(a+1)^2+\left(\frac{a}{2}+3\right)^2+(a+2)^2$

$\Leftrightarrow a^2+4a-60=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=6\\a=-10(L)\end{array}\right.$

Với $a=6\Rightarrow D(6;-3;-6)$.

Do đó, $T=a+b+c=6-3-6=-3$.

Cách 3

+ Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB (cũng là mp trung trực của đoạn thẳng CD)

+ Gọi mp (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB, suy ra mp (α) đi qua trung điểm $I(1;2;0)$ của đoạn thẳng AB và có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=(-2;1;2)$, suy ra phương trình của mp (α) là : $(\alpha):-2x+y+2z=0$.

+ Vì C,D đối xứng nhau qua mp(α) nên

$D(6;-3;-6)\Rightarrow a=6;\ b=-3;c=-6\Rightarrow T=a+b+c=-3$

Công thức trắc nghiệm: Xác định toạ độ điểm $M'(x_1;y_1;z_1)$ là điểm đối xứng của điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ qua mp $(\alpha):ax+by+cz+d=0\ \left(a^2+b^2+c^2\neq 0\right)$

$\begin{cases}x_1=x_0-2ak\\y_1=y_0-2bk\\z_1=z_0-2ck\end{cases}(k\in\mathbb{R}),\quad k=-\frac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}$.

Câu 15: **(GIA LỘC TỈNH HẢI DƯƠNG 2019 lần 2)** Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0;-1;2)$, $B(2;-3;0)$, $C(-2;1;1)$, $D(0;-1;3)$. Gọi (L) là tập hợp tất cả các điểm M trong không gian thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}=1$. Biết rằng (L) là một đường tròn, tính bán kính đường tròn đó?

A. $r=\frac{\sqrt{5}}{2}$. **B.** $r=\frac{\sqrt{11}}{2}$. **C.** $r=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $r=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Lời giải

Tác giả: Nguyễn Thanh Giang; Fb: Thanh Giang

Chọn D

* Trước tiên, ta xét bài toán phụ sau:

"Trong không gian cho đoạn thẳng AB bất kì, có trung điểm I. Chứng minh rằng tập hợp các điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=k>0$ là một mặt cầu tâm I và bán kính $R=\sqrt{k+IA^2}$ ".

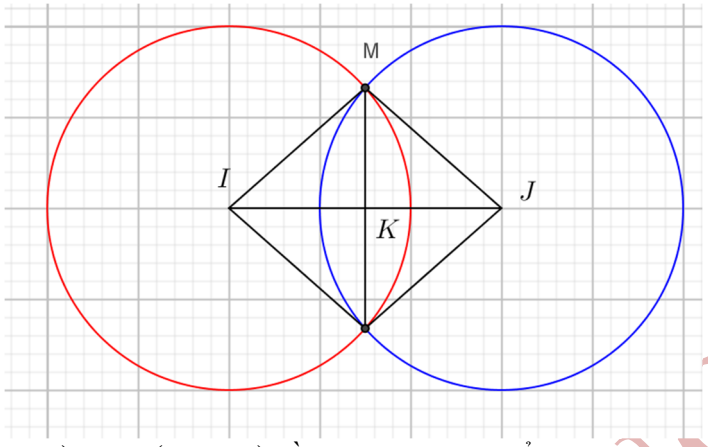
Thật vậy:

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=k\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=k\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\left(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}\right)=k\Leftrightarrow MI^2-IA^2=k$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Leftrightarrow MI^2 = k + IA^2$ hay $IM = \sqrt{k + IA^2}$.

Suy ra M thuộc mặt cầu tâm I, bán kính $R = \sqrt{k + IA^2}$.



* Áp dụng: Có $I(1;-2;1)$ và $J(-1;0;2)$ lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng AB và CD.

Sử dụng kết quả bài toán trên, ta có:

+ Từ điều kiện $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 1$, suy ra M thuộc mặt cầu tâm I, bán kính $R_1 = 2$. (1)

+ Từ điều kiện $\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} = 1$, suy ra M thuộc mặt cầu tâm J, bán kính $R_2 = 2$. (2)

Ta có $|R_1 - R_2| = 0 < IJ = 3 < R_1 + R_2 = 4$. (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra M thuộc đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu nêu trên.

+ Gọi K là tâm của đường tròn giao tuyến.

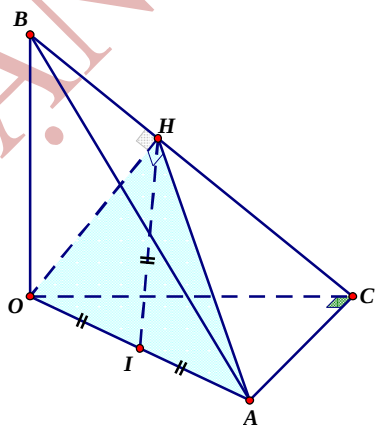
Suy ra bán kính cần tìm $r = KM = \sqrt{IM^2 - IK^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

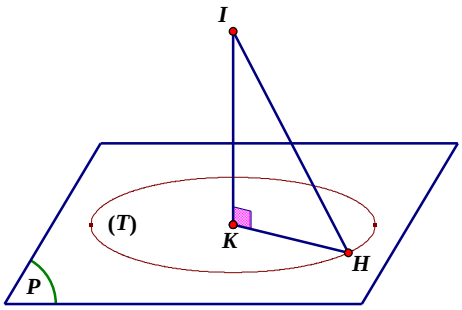
Câu 16: **(Nguyễn Trãi Hải Dương Lần1)** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(0;4\sqrt{2};0)$, $B(0;0;4\sqrt{2})$, điểm $C \in (Oxy)$ và tam giác OAC vuông tại C, hình chiếu vuông góc của O trên BC là điểm H. Khi đó điểm H luôn thuộc đường tròn cố định có bán kính bằng

A. $2\sqrt{2}$. **B.** 4. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D





+) Dễ thấy $B \in Oz$. Ta có $A \in (Oxy)$ và $C \in (Oxy)$, suy ra $OB \perp (OAC)$.

+) Ta có $\begin{cases} AC \perp OC \\ AC \perp OB \end{cases} \Rightarrow AC \perp (OBC)$, mà $OH \subset (OBC)$. Suy ra $AC \perp OH$ (1).

Mặt khác ta có $OH \perp BC$ (2), (theo giả thiết).

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Từ (1) và (2) suy ra $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp AB$ và $OH \perp HA$.

+) Với $OH \perp AB$ suy ra H thuộc mặt phẳng (P) với (P) là mặt phẳng đi qua O và vuông góc với đường thẳng AB. Phương trình của (P) là: $y-z=0$.

+) Với $OH \perp HA \Rightarrow \Delta OHA$ vuông tại H. Do đó H thuộc mặt cầu (S) có tâm $I\left(0;2\sqrt{2};0\right)$ là trung điểm của OA và bán kính $R=\dfrac{OA}{2}=2\sqrt{2}$.

+) Do đó điểm H luôn thuộc đường tròn (T) cố định là giao tuyến của mặt phẳng (P) với mặt cầu (S).

+) Giả sử (T) có tâm K và bán kính r thì $IK=d\left(I,(P)\right)=2$ và $r=\sqrt{R^2-IK^2}=2$.

Vậy điểm H luôn thuộc đường tròn cố định có bán kính bằng 2.

Câu 17: **(KỸ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG)** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(2;0;-3)$; $B(-1;-2;4)$; $C(2;-1;2)$. Biết điểm $E(a;b;c)$ là điểm để biểu thức $P=\left|\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$

A. $T=3$. **B.** $T=1$. **C.** $T=0$. **D.** $T=-1$.

Lời giải

Chọn B

Gọi G là trọng tâm tam giác $ABC \Rightarrow G(1;-1;1)$.

Ta có: $P=\left|\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{EC}\right|=\left|3\overrightarrow{EG}\right|=3EG\geq 0 \Rightarrow P_{\min}=0$ khi $E\equiv G(1;-1;1) \Rightarrow T=1$

Câu 18: **(Nam Tiền Hải Thái Bình Lần1)** Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;3;4)$, $B(9;-7;2)$. Tìm trên trục Ox toạ độ điểm M sao cho MA^2+MB^2 đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(5;0;0)$. **B.** $M(-2;0;0)$. **C.** $M(4;0;0)$. **D.** $M(9;0;0)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x;0;0)\in Ox$.

$MA^2=(x+1)^2+3^2+4^2$.

$MB^2=(x-9)^2+7^2+2^2$.

Suy ra $MA^2+MB^2=2x^2-16x+160=2(x-4)^2+128\geq 128, \forall x\in\mathbb{R}$.

Nên MA^2+MB^2 đạt giá trị nhỏ nhất là 128 khi $x=4$. Vậy $M=(4;0;0)$

Câu 19: **(THPT Nghèn Lần1)** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;1;2);B(0;-1;-3)$. Xét điểm M thay đổi trên mặt phẳng (Oxz), giá trị nhỏ nhất của $\left|\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|$ bằng?

A. 1. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Chọn $I(a;b;c)$ thỏa $\overrightarrow{OI}+2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0} \Rightarrow I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{-1}{4};\dfrac{-5}{4}\right)$.

Ta có : $\left|\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{OI}+2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{MI}\right|=4\left|\overrightarrow{MI}\right|$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow 4\left|\overrightarrow{MI}\right|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI\perp(Oxz)$. Lúc đó $4\left|\overrightarrow{MI}\right|=4d\left(I;(Oxz)\right)=1$.

Câu 20: **(Gang Thép Thái Nguyên)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 4 điểm $A(2;4;-1)$, $B(1;4;-1)$, $C(2;4;3)$, $D(2;2;-1)$, biết $M(x;y;z)$ để $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $x+y+z$ bằng

A. 6. **B.** $\frac{21}{4}$. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Xét điểm $I(a;b;c)$ thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$. Khi đó $I\left(\frac{7}{4};\frac{7}{2};0\right)$.

Ta có $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID}\right)^2$

$=4MI^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right)+IA^2+IB^2+IC^2+ID^2$

$=4MI^2+IA^2+IB^2+IC^2+ID^2\geq IA^2+IB^2+IC^2+ID^2$ (vì $MI^2\geq 0$ với mọi điểm M)

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M\equiv I$ tức là $M\left(\frac{7}{4};\frac{7}{2};0\right)\Rightarrow x+y+z=\frac{7}{4}+\frac{7}{2}=\frac{21}{4}$.

Câu 21: **(Nguyễn Khuyến)**Trong không gian $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OA}=\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$, $B(2;2;1)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc trục tung sao cho MA^2+MB^2 nhỏ nhất.

A. $M(0;-2;0)$. **B.** $M\left(0;\frac{3}{2};0\right)$. **C.** $M(0;-3;0)$. **D.** $M(0;-4;0)$.

Lời giải

Chọn B

***Cách 1*:** Do $M\in Oy$ nên $M(0;y;0)$. Tính $MA^2+MB^2=2y^2-6y+20=f(y)$.

Do đó $f(y)$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow y=\frac{3}{2}$. Vậy $M\left(0;\frac{3}{2};0\right)$.

***Cách 2*:** Ta có: $A(1;1;-3)$. Gọi I là trung điểm của AB. Suy ra $I=\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};-1\right)$.

Khi đó: $MA^2+MB^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$

$=2\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{IB}^2+2\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)=2MI^2+IA^2+IB^2=2MI^2+9$.

Do đó MA^2+MB^2 đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MI có độ dài ngắn nhất, điều này xảy ra khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của I trên trục tung.

Phương trình mặt phẳng (P) đi qua I và vuông góc với trục tung là

$0.\left(x-\frac{3}{2}\right)+1.\left(y-\frac{3}{2}\right)+0.(z+1)=0$ hay $(P):y-\frac{3}{2}=0$.

Phương trình tham số của trục tung là $\begin{cases}x=0\\y=t\\z=0\end{cases}$.

Tọa độ điểm M cần tìm là nghiệm $(x;y;z)$ của hệ phương trình:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=0 \\ y-\frac{3}{2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\frac{3}{2} \\ z=0 \end{cases}$. Vậy $M\left(0;\frac{3}{2};0\right)$.

Câu 22: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1), B(-2;1;0), C(2;-3;1)$. Điểm $S(a;b;c)$ sao cho $SA^2+2SB^2+3SC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$

A. $T=\frac{1}{2}$. **B.** $T=-1$. **C.** $T=\frac{-1}{3}$. **D.** $T=\frac{-5}{6}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi G là điểm sao cho $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Leftrightarrow G\left(\frac{1}{2};-1;\frac{-1}{3}\right)$

$SA^2+2SB^2+3SC^2=\overrightarrow{SA}^2+2\overrightarrow{SB}^2+3\overrightarrow{SC}^2=\left(\overrightarrow{SG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+2\left(\overrightarrow{SG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+3\left(\overrightarrow{SG}+\overrightarrow{GC}\right)^2$

$=6SG^2+GA^2+2GB^2+3GC^2$

$SA^2+SB^2+SC^2$ nhỏ nhất khi $S\equiv G$ hay $S\left(\frac{1}{2};-1;\frac{-1}{3}\right)$.Nên $T=\frac{-5}{6}$.

Câu 23: **(Ngô Quyền Hà Nội)** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2t;2t;0), B(0;0;t)$ với $t>0$. Cho điểm P di động thỏa mãn $\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP}=3$. Biết rằng có giá trị $t=\frac{a}{b}$ với a,b nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản sao cho OP đạt giá trị lớn nhất là 3. Tính giá trị $Q=2a+b$?

A. 5. **B.** 13. **C.** 11. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=0$ nên

$\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{BP}=3$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP}.\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}\right)+\overrightarrow{OP}.\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}\right).\left(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}\right)=3$

$\Leftrightarrow 3OP^2=3+2\overrightarrow{OP}\left[\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right](1)$.

Giả sử $P(x;y;z)$ thì phương trình (1) trở thành

$3\left(x^2+y^2+z^2\right)=3+2t(2x+2y+z)\le 3+2t\sqrt{(4+4+1)\left(x^2+y^2+z^2\right)}$

Hay

$3OP^2\le 3+6tOP \Leftrightarrow OP^2-2tOP-1\le 0$

$\Rightarrow t-\sqrt{t^2+1}\le OP\le t+\sqrt{t^2+1}$

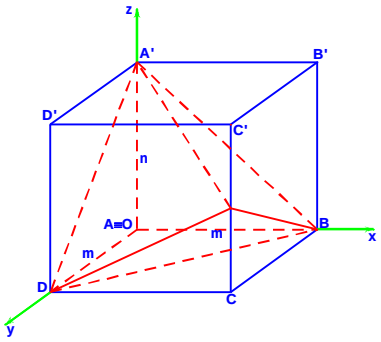
Từ giả thiết suy ra $t+\sqrt{t^2+1}=3\Leftrightarrow t=\frac{4}{3}$. Vậy $Q=2a+b=11$.

Câu 24: Trong không gian với hệ tọa độ Oxy, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ O, các đỉnh $B(m;0;0)$, $D(0;m;0)$, $A'(0;0;n)$ với $m,n>0$ và $m+n=4$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Khi đó thể tích tứ diện $BDA'M$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{245}{108}$. **B.** $\frac{9}{4}$. **C.** $\frac{64}{27}$. **D.** $\frac{75}{32}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Lời giải



Tọa độ điểm $C(m;m;0), C'(m;m;;n), M\left(m;m;\frac{n}{2}\right)$

$\overrightarrow{BA'}=(-m;0;n), \overrightarrow{BD}=(-m;m;0), \overrightarrow{BM}=\left(0;m;\frac{n}{2}\right)$

$\left[\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{BD}\right]=(-mn;-mn;-m^2)$

$V_{BDA'M}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{BD}\right].\overrightarrow{BM}\right|=\frac{m^2n}{4}$

Ta có $m.m.(2n)\le\left(\frac{m+m+2n}{3}\right)^3=\frac{512}{27}\Rightarrow m^2n\le\frac{256}{27}$

$\Rightarrow V_{BDA'M}\le\frac{64}{27}$

Chọn C

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;4), B(-1;4;-4)$ và điểm $C(0;a;b)$ thỏa mãn tam giác ABC cân tại C và có diện tích nhỏ nhất. Tính $S=2a+3b$.

A. $S=\frac{62}{25}$. **B.** $S=\frac{73}{25}$. **C.** $S=\frac{239}{10}$. **D.** $S=\frac{29}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-4;6;-8), \overrightarrow{AC}=(-3;a+2;b-4)$.

Điều kiện để A,B,C là ba đỉnh của tam giác là: $\begin{cases}\frac{a+2}{6}\ne\frac{-3}{-4}\\ \frac{b-4}{-8}\ne\frac{-3}{-4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\ne\frac{1}{4}\\ b\ne 2\end{cases}$.

Gọi I là trung điểm của AB ta có: $I(1;1;0)$

Tam giác ABC cân tại C nên $CI\perp AB\Leftrightarrow\overrightarrow{CI}.\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow 1.(-4)+(1-a).6+(-b).(-8)=0$

$\Leftrightarrow -6a+8b+2=0\Leftrightarrow 3a-4b-1=0\Rightarrow b=\frac{3a-1}{4}(1)$.

Diện tích tam giác ABC là: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}.CI.AB$ .Do đó diện tích tam giác ABC nhỏ nhất khi CI nhỏ nhất.

Khi đó: $CI=\sqrt{1+(1-a)^2+(0-b)^2}=\sqrt{2+a^2-2a+b^2}(2)$.

Thay (1) vào (2) ta có:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$CI=\sqrt{2+a^2-2a+\left(\frac{3a-1}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{25a^2-38a+33}{16}}=\frac{1}{4}\sqrt{\left(5a-\frac{19}{5}\right)^2+\frac{464}{25}}\ge\frac{4\sqrt{29}}{20}$.

Vậy CI nhỏ nhất khi $a=\frac{19}{25}\Rightarrow b=\frac{8}{25}\Rightarrow S=2a+3b=\frac{62}{25}$.

Câu 26: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;2;0), B(2;0;-2)$ và điểm $M(a,b,c)$ với a,b,c là các số thực thay đổi thỏa mãn $a+2b-c-1=0$. Biết $MA=MB$ và góc $\widehat{AMB}$ có số đo lớn nhất. Tính $S=a+2b+3c$.

A. $S=\frac{16}{11}$. **B.** $S=\frac{15}{11}$. **C.** $S=-\frac{1}{11}$. **D.** $S=\frac{1}{11}$.

Lời giải

Chọn B

Vì $MA=MB$ nên M thuộc mặt phẳng trung trực (P) của đoạn AB.

Ta có $(P): y+z=0$ nên $\begin{cases}b+c=0\\a+2b-c-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=-b\\a=1-3b\end{cases}$.

$\overrightarrow{MA}=(1+3b;2-b;b), \overrightarrow{MB}=(1+3b;-b;-2+b)$

$\Rightarrow\cos\widehat{AMB}=\frac{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}}{\left|\overrightarrow{MA}\right|.\left|\overrightarrow{MB}\right|}=\frac{(1+3b)^2+2b(b-2)}{\sqrt{(1+3b)^2+(b-2)^2+b^2}.\sqrt{(1+3b)^2+(b-2)^2+b^2}}$

$=\frac{9b^2+6b+1+2b^2-4b}{9b^2+6b+1+2b^2-4b+4}=\frac{11b^2+2b+1}{11b^2+2b+5}$

Xét $f(b)=\frac{11b^2+2b+1}{11b^2+2b+5}$ có $f'(b)=\frac{4(22b+2)}{11b^2+2b+5}=0\Rightarrow b=\frac{-1}{11}$.

Nhận thấy $f(b)$ nhỏ nhất tại $b=-\frac{1}{11}\Rightarrow a=\frac{14}{11}, c=\frac{1}{11}$

Nên $a+2b+3c=\frac{14}{11}-\frac{2}{11}+\frac{3}{11}=\frac{15}{11}$

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $M(2;3;-1), N(-1;1;1), P(1;m-1;2)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của số đo góc $\angle MNP$.

A. $\arccos\frac{6}{\sqrt{85}}$. **B.** $\arcsin\frac{6}{\sqrt{85}}$ **C.** $\arccos\frac{2}{9}$ **D.** $\arcsin\frac{2}{9}$

Lời giải

Chọn A

$\cos MNP=\frac{\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{NP}}{NM.NP}=\frac{2m}{\sqrt{17}.\sqrt{m^2-4m+9}}$

Để số đo góc $\angle MNP$ nhỏ nhất thì $\cos MNP=\frac{\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{NP}}{NM.NP}=\frac{2m}{\sqrt{17}.\sqrt{m^2-4m+9}}$ là số dương lớn nhất. Khi đó $\cos MNP=\frac{\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{NP}}{NM.NP}=\frac{2m}{\sqrt{17}.\sqrt{m^2-4m+9}}=\frac{2}{\sqrt{17}}\sqrt{\frac{m^2}{m^2-4m+9}}$.

Xét hàm số $f(m)=\frac{m^2}{m^2-4m+9}=\frac{1}{\frac{9}{m^2}-\frac{4}{m}+1}=\frac{1}{\left(\frac{3}{m}-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{5}{9}}\le\frac{9}{5}$

$\cos MNP=\frac{\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{NP}}{NM.NP}=\frac{2m}{\sqrt{17}.\sqrt{m^2-4m+9}}=\frac{2}{\sqrt{17}}\sqrt{\frac{m^2}{m^2-4m+9}}\le\frac{6}{\sqrt{85}}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 28: **(ĐH Vinh Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(1;-1;0)$ và hai điểm $A(-4;7;3)$, $B(4;4;5)$. Giả sử M, N là hai điểm thay đổi trong mặt phẳng (Oxy) sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{a}$ và $MN=5\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của $|AM-BN|$ bằng

A. $\sqrt{17}$. **B.** $\sqrt{77}$. **C.** $7\sqrt{2}-3$. **D.** $\sqrt{82}-5$.

Lời giải

Chọn A

Vì $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\vec{a}$ nên $\exists t>0:\overrightarrow{MN}=t\vec{a}$.

Hơn nữa, $MN=5\sqrt{2}\Leftrightarrow t.|\vec{a}|=5\sqrt{2}\Leftrightarrow t=5$. Suy ra $\overrightarrow{MN}=(5;-5;0)$.

Gọi $A'(x';y';z')$ là điểm sao cho $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{MN}\Leftrightarrow\begin{cases}x'+4=5\\y'-7=-5\\z'-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x'=1\\y'=2\\z'=3\end{cases}\Rightarrow A'(1;2;3)$.

Dễ thấy các điểm A', B đều nằm cùng phía so với mặt phẳng (Oxy) vì chúng đều có cao độ dương. Hơn nữa vì cao độ của chúng khác nhau nên đường thẳng $A'B$ luôn cắt mặt phẳng (Oxy) tại một điểm cố định.

Từ $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{MN}$ suy ra $AM=A'N$ nên $|AM-BN|=|A'N-BN|\le A'B$ dấu bằng xảy ra khi N là giao điểm của đường thẳng $A'B$ với mặt phẳng (Oxy).

Do đó $\max|AM-BN|=A'B=\sqrt{(4-1)^2+(4-2)^2+(5-3)^2}=\sqrt{17}$, đạt được khi $N=A'B\cap(Oxy)$.

Nhận xét

Ý tưởng ra đề

Từ bất đẳng thức véc tơ

a) $\left||\vec{u}|-|\vec{v}|\right|\le|\vec{u}-\vec{v}|$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi hai véc tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng chiều.

b) $|\vec{u}+\vec{v}|\le|\vec{u}|+|\vec{u}|$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi hai véc tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng chiều.

c) $|\vec{u}-\vec{v}|\le|\vec{u}|+|\vec{u}|$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi hai véc tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ ngược chiều.

Câu 29: **(Lý Nhân Tông)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$ A, B, C với $a,b,c>0$ sao cho $OA+OB+OC+AB+BC+CA=1+\sqrt{2}$. Giá trị lớn nhất của $V_{O.ABC}$ bằng

A. $\frac{1}{108}$. **B.** $\frac{1}{486}$. **C.** $\frac{1}{54}$. **D.** $\frac{1}{162}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $OA=a,OB=b;OC=c;AB=\sqrt{a^2+b^2},BC=\sqrt{b^2+c^2},CA=\sqrt{c^2+a^2}$.

$V_{OABC}=\frac{1}{6}OA.OB.OC=\frac{1}{6}a.b.c.$

$OA+OB+OC+AB+BC+CA=1+\sqrt{2}\Leftrightarrow a+b+c+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}=1+\sqrt{2}.$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có: $a+b+c\ge3\sqrt[3]{abc}$,

$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\ge3\sqrt[6]{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}\ge3\sqrt[6]{2ab.2bc.2ac}=3\sqrt{2}.\sqrt[3]{abc}.$

Suy ra $a+b+c+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\ge3\sqrt[3]{abc}+3\sqrt{2}.\sqrt[3]{abc}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Leftrightarrow 1+\sqrt{2}\ge 3\sqrt[3]{abc}\left(1+\sqrt{2}\right)\Leftrightarrow \sqrt[3]{abc}\le\frac{1}{3}\Leftrightarrow abc\le\frac{1}{27}\Leftrightarrow\frac{1}{6}abc\le\frac{1}{162}\Leftrightarrow V_{OABC}\le\frac{1}{162}.$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a>0;b>0;c>0\\a=b=c\\a+b+c+\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}=1+\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}.$

Vậy giá trị lớn nhất của V_{OABC} bằng $\frac{1}{162}$.

Câu 30: **(Đoàn Thượng)** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;-1;2)$, $B(-2;0;3)$, $C(0;1;-2)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $S=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}+3\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $T=12a+12b+c$ có giá trị là

A. $T=3$. **B.** $T=-3$. **C.** $T=1$. **D.** $T=-1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $M(a;b;c)\in(Oxy)$ nên $c=0$. Do đó $M(a;b;0)$.

$\overrightarrow{MA}=(1-a;-1-b;2)$, $\overrightarrow{MB}=(-2-a;-b;3)$, $\overrightarrow{MC}=(-a;1-b;-2)$

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=(1-a)(-2-a)+(-1-b)(-b)+6=a^2+a+b^2+b+4$

$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=(-2-a)(-a)+(-b)(1-b)-6=a^2+2a+b^2-b-6$

$\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA}=(-a)(1-a)+(1-b)(-1-b)-4=a^2-a+b^2-5$

Suy ra

$S=a^2+a+b^2+b+4+2\left(a^2+2a+b^2-b-6\right)+3\left(a^2-a+b^2-5\right)=6a^2+2a+6b^2-b-23$

$S=6\left(a+\frac{1}{6}\right)^2+6\left(b-\frac{1}{12}\right)^2-\frac{557}{24}\ge-\frac{557}{24}.$

Do đó S đạt giá trị nhỏ nhất là $-\frac{557}{24}$ khi $a=-\frac{1}{6}$ và $b=\frac{1}{12}$

Khi đó $T=12a+12b+c=12.\left(-\frac{1}{6}\right)+12.\frac{1}{12}+0=-1.$

$V_{A.A'MC'N}=\frac{1}{3}AA'.S_{A'MC'N}=\frac{1}{6}(t+m)\ge\frac{\sqrt{3}-1}{3}.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $A.A'MC'N$ là $\frac{\sqrt{3}-1}{3}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

A - LÝ THUYẾT CHUNG

1. Định nghĩa

Trong không gian $Oxyz$ phương trình dạng $Ax+By+Cz+D=0$ với $A^2+B^2+C^2>0$ được gọi là phương trình tổng quát của mặt phẳng.

□ Phương trình mặt phẳng $(P): Ax+By+Cz+D=0$ với $A^2+B^2+C^2>0$ có vec tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(A;B;C)$.

□ Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và nhận vecto $\vec{n}=(A;B;C), \vec{n}\neq\vec{0}$ làm vecto pháp tuyến dạng $(P): A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$

□ Nếu (P) có cặp vecto $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3); \vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ không cùng phương, có giá song song hoặc nằm trên (P). Thì vecto pháp tuyến của (P) được xác định $\vec{n}=[\vec{a},\vec{b}]$.

2. Các trường hợp riêng của mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$ cho mp $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0,$ với $A^2+B^2+C^2>0.$ Khi đó:

□ $D=0$ khi và chỉ khi (α) đi qua gốc tọa độ.

□ $A=0, B\neq 0, C\neq 0, D\neq 0$ khi và chỉ khi (α) song song trục Ox.

□ $A=0, B=0, C\neq 0, D\neq 0$ khi và chỉ khi (α) song song mặt phẳng (Oxy).

□ $A,B,C,D\neq 0.$ Đặt $a=-\frac{D}{A}, b=-\frac{D}{B}, c=-\frac{D}{C}.$ Khi đó: $(\alpha): \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{c}{z}=1$

3. Phương trình mặt chắn cắt các trục tọa độ tại các điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1, \quad abc\neq 0$$

4. Phương trình các mặt phẳng tọa độ: $(Oyz): x=0;$ $(Oxz): y=0;$ $(Oxy): z=0.$

5. Chùm mặt phẳng (lớp chuyên):

Giả sử $(\alpha)\cap(\alpha')=d$ trong đó: $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ và $(\alpha'): A'x+B'y+C'z+D'=0$.

Pt mp chứa d có dạng: $m(Ax+By+Cz+D)+n(A'x+B'y+C'z+D')=0$ (với $m^2+n^2\neq 0$).

6. Vị trí tương đối của hai mặt phẳng

Trong không gian $Oxyz$ cho $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ và $(\alpha'): A'x+B'y+C'z+D'=0$

□ (α) cắt $(\alpha') \Leftrightarrow \begin{cases} AB'\neq A'B \\ BC'\neq B'C \\ CB'\neq C'B \end{cases}$

□ $(\alpha)\ //\ (\alpha') \Leftrightarrow \begin{cases} AB'=A'B \\ BC'=B'C \\ CB'=C'B \end{cases}$ va $AD'\neq A'D$

□ $(\alpha)\equiv(\alpha') \Leftrightarrow \begin{cases} AB'=A'B \\ BC'=B'C \\ CB'=C'B \\ AD'=A'D \end{cases}$

Đặt biệt: $(\alpha)\perp(\alpha') \Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0 \Leftrightarrow A.A'+B.B'+C.C'=0$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

7. Khoảng cách từ $M_0(x_0;y_0;z_0)$ **đến** $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$

$$d(M,(\alpha))=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Chú ý:

- *Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song bằng khoảng cách từ một điểm bất kì trên mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.*
- *Nếu hai mặt phẳng không song song thì khoảng cách giữa chúng bằng* 0 .

8. Góc giữa hai mặt phẳng

Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng $(0^0\le\varphi\le 90^0)$

$(P): Ax+By+Cz+D=0$ và $(Q): A'x+B'y+C'z+D'=0$

$$\cos\varphi=\left|\cos(\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q})\right|=\frac{|\overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_Q}|}{|\overrightarrow{n_P}|.|\overrightarrow{n_Q}|}=\frac{|A.A'+B.B'+C.C'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

- *Góc giữa* $(\alpha),(\beta)$ ***bằng hoặc bù*** *với góc giữa hai vtpt* $\vec{n}_1,\vec{n}_2$.
- $0^0\le\widehat{((\alpha),(\beta))}\le 90^0$.
- $(\alpha)\perp(\beta)\Leftrightarrow\vec{n}_1\perp\vec{n}_2\Leftrightarrow AA'+BB'+CC'=0$

1. Các hệ quả hay dùng:

- Mặt phẳng $(\alpha)//(\beta)$ thì (α) có một vtpt là $\vec{n}_\alpha=\vec{n}_\beta$ với $\vec{n}_\beta$ là vtpt của mặt phẳng (β).
- Mặt phẳng (α) vuông góc với đường thẳng d thì (α) có một vtpt là $\vec{n}_\alpha=\vec{u}_d$ với $\vec{u}_d$ là vtcp của đường thẳng d .
- Mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng $(Q)\Rightarrow\overrightarrow{n_{(P)}}\perp\overrightarrow{n_{(Q)}}$
- Mặt phẳng (P) chứa hoặc song song với đường thẳng $d\Rightarrow\overrightarrow{n_{(P)}}\perp\overrightarrow{u_d}$
- Hai điểm A,B nằm trong một mặt phẳng $(P)\Rightarrow\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{n_{(p)}}$

B - CÁC DẠNG TOÁN VỀ PHƯƠNG TRÌNH MẶT THẲNG

Muốn viết phương trình mặt phẳng cần xác định: *1 điểm và 1 vécto pháp tuyến.*

Dạng 1. Mặt phẳng (α) ***đi qua điểm*** $M(x_0;y_0;z_0)$ ***có vtpt*** $\vec{n}=(A;B;C)$

(α): $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ hay $Ax+By+Cz+D=0$ với $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$.

Dạng 2. Mặt phẳng (α) ***đi qua điểm*** $M(x_0;y_0;z_0)$ ***có cặp vtcp*** $\vec{a},\vec{b}$

- Khi đó một vtpt của (α) là $\overrightarrow{n_\alpha}=[\vec{a},\vec{b}]$
- Sử dụng dạng toán 1 để viết phương trình mặt phẳng (α).

Dạng 3. Mặt phẳng (α) ***qua 3 điểm không thẳng hàng*** A,B,C

- Cặp vtcp: $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$
- Mặt phẳng (α) đi qua A (hoặc B hoặc C) và có vtpt $\vec{n}=[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]$
- Sử dụng dạng toán 1 để viết phương trình mặt phẳng (α).

Dạng 4. Mặt phẳng trung trực đoạn AB

- Tìm tọa độ M là trung điểm của đoạn thẳng AB (dùng công thức trung điểm)
- Mặt phẳng (α) đi qua M và có vtpt $\vec{n}=\overrightarrow{AB}$
- Sử dụng dạng toán 1 để viết phương trình mặt phẳng (α).

Dạng 5. Mặt phẳng (α) ***qua*** M ***và vuông góc đường thẳng*** d ***(hoặc*** AB ***)***

- Mặt phẳng (α) đi qua M và có vtpt là vtcp của đường thẳng d (hoặc $\vec{n}_\alpha=\overrightarrow{AB}$)

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

- Sử dụng dạng toán 1 để viết phương trình mặt phẳng (α).

Dạng 6. ***Mặt phẳng*** (α) ***qua*** M ***và song song*** (β)***:*** $Ax+By+Cz+D=0$

- Mặt phẳng (α) đi qua M và có vtpt $\overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{n_\beta}=(A;B;C)$
- Sử dụng dạng toán 1 để viết phương trình mặt phẳng (α).

Dạng 7. Mặt phẳng (α) đi qua M, song song với d và vuông góc với (β)

- (α) có một vtpt là $\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{n_{(\beta)}}\right]$ với $\overrightarrow{u_d}$ là vtcp của đường thẳng d và $\overrightarrow{n_{(\beta)}}$ là vtpt của (β).
- Sử dụng dạng toán 1 để viết phương trình mặt phẳng (α).

Dạng 8. ***Mặt phẳng*** (α) ***chứa*** M ***và đường thẳng*** d ***không đi qua*** M

- Lấy điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)\in(d)$
- Tính $\overrightarrow{MM_0}$. Xác định vtcp $\overrightarrow{u_d}$ của đường thẳng d
- Tính $\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{MM_0},\overrightarrow{u_d}\right]$
- Mặt phẳng (α) đi qua M (hoặc M_0) và có vtpt $\overrightarrow{n_\alpha}$

Dạng 9. ***Mặt phẳng*** (α) ***đi qua điểm*** M ***và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau*** (β), (γ)***:***

- Xác định các vtpt $\vec{n}_\beta,\vec{n}_\gamma$ của (β) và (γ)
- Một vtpt của (α) là $\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{u_\gamma},\overrightarrow{n_{(\beta)}}\right]$
- Sử dụng dạng toán 1 để viết phương trình mặt phẳng (α).

Dạng 10. ***Mặt phẳng*** (α) ***đi qua điểm*** M ***và song song với hai đường thẳng chéo nhau*** d_1,d_2 ***:***

- Xác định các vtcp $\vec{a},\vec{b}$ của các đường thẳng d_1,d_2
- Một vtpt của (α) là $\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$
- Sử dụng dạng toán 1 để viết phương trình mặt phẳng (α).

Dạng 11. ***Mặt phẳng*** (α) ***qua*** M,N ***và vuông góc*** (β)***:***

- Tính $\overrightarrow{MN}$
- Tính $\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{n_\beta}\right]$
- Mặt phẳng (α) đi qua M (hoặc N) và có vtpt $\overrightarrow{n_\alpha}$
- Sử dụng dạng toán 1 để viết phương trình mặt phẳng (α).

Dạng 12. Mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d và vuông góc với (β)

- (α) có một vtpt là $\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{n_\beta}\right]$ với $\overrightarrow{u_d}$ là vtcp của d
- Lấy điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)\in d\Rightarrow M_0(x_0;y_0;z_0)\in(\alpha)$
- Sử dụng dạng toán 1 để viết phương trình mặt phẳng (α).

Dạng 13. ***Mặt phẳng*** (α) ***chứa*** (d) ***và song song*** (d') ***(với*** $(d),(d')$ ***chéo nhau)***

- Lấy điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)\in d\Rightarrow M_0(x_0;y_0;z_0)\in(\alpha)$
- Xác định vtcp $\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{u_{d'}}$ của đường thẳng d và đường thẳng d'
- Mặt phẳng (α) đi qua M_0 và có vtpt $\vec{n}_\alpha=\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{u_{d'}}\right]$
- Sử dụng dạng toán 1 để viết phương trình mặt phẳng (α).

Dạng 14. ***Mặt phẳng*** (α) ***chứa hai đường thẳng song song*** Δ_1,Δ_2

- Chọn điểm $M_1(x_1;y_1;z_1)\in\Delta_1$ và $M_2(x_2;y_2;z_2)\in\Delta_2$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

- Tìm vtcp $\overrightarrow{u_1}$ của đường thẳng Δ_1 hoặc vtcp $\overrightarrow{u_2}$ của đường thẳng Δ_2
- Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{M_1M_2}\right]$ hoặc $\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{M_1M_2}\right]$
- Sử dụng bài toán 1 để viết phương trình mặt phẳng (α).

Dạng 15. Mặt phẳng (α) đi qua 2 đường thẳng cắt nhau d_1,d_2:

- Xác định các vtcp $\vec{a},\vec{b}$ của các đường thẳng d_1,d_2
- Một vtpt của (α) là $\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$
- Lấy một điểm M thuộc d_1 hoặc d_2 $\Rightarrow M\in(\alpha)$
- Sử dụng dạng toán 1 để viết phương trình mặt phẳng (α).

Dạng 16. Mặt phẳng (α) đi qua đường thẳng (d) cho trước và cách điểm M cho trước một khoảng k không đổi:

- Giả sử (α) có phương trình: $Ax+By+Cz+D=0\ \left(A^2+B^2+C^2\neq 0\right)$
- Lấy 2 điểm $A,B\in(d)\Rightarrow A,B\in(\alpha)$ (ta được hai phương trình (1), (2))
- Từ điều kiện khoảng cách $d(M,(\alpha))=k$, ta được phương trình (3)
- Giải hệ phương trình (1), (2), (3) (bằng cách cho giá trị một ẩn, tìm các ẩn còn lại).

Dạng 17. Mặt phẳng (α) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm H :

- Giả sử mặt cầu (S) có tâm I và bán kính R. Vì H là tiếp điểm $\Rightarrow H\in(\alpha)$
- Một vtpt của (α) là $\vec{n}=\overrightarrow{IH}$
- Sử dụng dạng toán 1 để viết phương trình mặt phẳng (α).

Dạng 18. Mặt phẳng (α') đối xứng với mặt phẳng (α) qua mặt phẳng (P)

- **TH1**: $(\alpha)\cap(P)=d$:
  - Tìm M,N là hai điểm chung của $(\alpha),(P)$
  - Chọn một điểm $I\in(\alpha)$. Tìm I' đối xứng I qua (P)
  - Viết phương trình mp (α') qua I',M,N .
- **TH2**: $(\alpha)//(P)$
  - Chọn một điểm $I\in(\alpha)$. Tìm I' đối xứng I qua (P)
  - Viết phương trình mp (α') qua I' và song song với (P).

CÁC DẠNG TOÁN KHÁC

Dạng 1. Tìm điểm H là hình chiếu vuông góc của M lên (α)

- ***Cách 1:***
  - H là hình chiếu của điểm M trên $(P)\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{MH},\vec{n}\text{ cùng phương}\\ H\in(P)\end{cases}$
  - Giải hệ tìm được H.
- ***Cách 2:***
  - Viết phương trình đường thẳng d qua M và vuông góc với (α) : ta có $\overrightarrow{a_d}=\vec{n}_\alpha$
  - Khi đó: $H=d\cap(\alpha)$ $\Leftrightarrow$ tọa độ H là nghiệm của hpt: (d) và (α)

Dạng 2. Tìm điểm M' đối xứng M qua (α)

- Tìm điểm H là hình chiếu vuông góc của M lên (α)
- H là trung điểm của MM' (dùng công thức trung điểm) $\Rightarrow$ tọa độ H.

Dạng 3. Viết phương trình mp (P') đối xứng mp (P) qua mp (Q)

- **TH1**: $(Q)\cap(P)=d$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

- Lấy hai điểm bất kỳ $\{A,B\}=(P)\cap(Q)$ (hay $A,B\in d$)
- Lấy điểm $M\in(P)$ (M bất kỳ). Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với M qua (Q).
- Mặt phẳng (P') là mặt phẳng đi qua d và M'.

□ **TH2:** $(Q)\ //\ (P)$

- Lấy điểm $M\in(P)$ (M bất kỳ). Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với M qua (Q).
- Mặt phẳng (P') là mặt phẳng đi qua M' và song song (P).

C – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $M(1;0;0)$ và $N(0;0;-1)$, mặt phẳng (P) qua điểm M,N và tạo với mặt phẳng $(Q):x-y-4=0$ một góc bằng 45°. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $\left[\begin{array}{l}y=0\\2x-y-2z-2=0\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}y=0\\2x-y-2z+2=0\end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l}2x-y-2z+2=0\\2x-y-2z-2=0\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}2x-2z+2=0\\2x-2z-2=0\end{array}\right.$.

Lời giải

Gọi vectơ pháp tuyến của mp(P) và (Q) lần lượt là $\overrightarrow{n_P}(a;b;c)$ $(a^2+b^2+c^2\neq 0)$, $\overrightarrow{n_Q}$

(P) qua $M(1;0;0)\Rightarrow(P):a(x-1)+by+cz=0$

(P) qua $N(0;0;-1)\Rightarrow a+c=0$

(P) hợp với (Q) góc $45^{\circ}\Rightarrow\left|cos\left(\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}\right)\right|=cos45^{\circ}\Leftrightarrow\dfrac{|a-b|}{\sqrt{2a^2+b^2}\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\a=-2b\end{array}\right.$

Với $a=0\Rightarrow c=0$ chọn $b=1$ phương trình $(P):y=0$

Với $a=-2b$ chọn $b=-1\Rightarrow a=2$ phương trình mặt phẳng $(P):2x-y-2z-2=0$.

Chọn A

Câu 2: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$,cho $(P):x+4y-2z-6=0,(Q):x-2y+4z-6=0$. Lập phương trình mặt phẳng (α) chứa giao tuyến của$(P),(Q)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A,B,C sao cho hình chóp $O.ABC$ là hình chóp đều.

A. $x+y+z+6=0$. **B.** $x+y+z-6=0$. **C.** $x+y-z-6=0$. **D.** $x+y+z-3=0$.

Lời giải

Chọn $M(6;0;0),N(2;2;2)$ thuộc giao tuyến của$(P),(Q)$

Gọi $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$ lần lượt là giao điểm của (α) với các trục Ox,Oy,Oz

$\Rightarrow(\alpha):\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1(a,b,c\neq 0)$

(α) chứa $M,N\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{6}{a}=1\\\dfrac{2}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{2}{c}=1\end{array}\right.$

Hình chóp $O.ABC$ là hình chóp đều$\Rightarrow OA=OB=OC\Rightarrow|a|=|b|=|c|$

Vậy phương trình $x+y+z-6=0$.

Chọn B

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 3: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho 2 đường thẳng:

$\Delta_1: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-3}$, $\Delta_2: \begin{cases} x=t \\ y=2-t \\ z=1+2t \end{cases}$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x+2y-6z-5=0$

Viết phương trình mặt phẳng (α) song song với hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có chu vi bằng $\dfrac{2\sqrt{365}\pi}{5}$.

A. $x-5y-3z-4=0;\ x-5y-3z+10=0$

B. $x-5y-3z+10=0$

C. $x-5y-3z+3+\sqrt{511}=0;\ x-5y-3z+3-\sqrt{511}=0$

D. $x-5y-3z-4=0$

Chọn B

Lời giải

+ Δ_1 qua $M_1(2;-1;1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=(1;2;-3)$.

Δ_2 qua $M_2(0;2;1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=(1;-1;2)$.

+ Mặt phẳng (α) song song với Δ_1, Δ_2 nên có vectơ pháp tuyến: $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=(1;-5;-3)$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (α) có dạng: $x-5y-3z+D=0$

+ Mặt cầu (S) có tâm I(1;−1;3) và bán kính $R=4$.

Gọi r là bán kính đường tròn (C), ta có: $2\pi r=\dfrac{2\sqrt{365}\pi}{5}\Rightarrow r=\dfrac{\sqrt{365}}{5}$

Khi đó: $d\left(I,(\alpha)\right)=\sqrt{R^2-r^2}=\dfrac{\sqrt{35}}{5}\Rightarrow\dfrac{|D-3|}{\sqrt{35}}=\dfrac{\sqrt{35}}{5}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} D=-4 \\ D=10 \end{array}\right.$

+ Phương trình mặt phẳng $(\alpha): x-5y-3z-4=0$ (1) hay $x-5y-3z+10=0$ (2).

Vì $\Delta_1 // (\alpha), \Delta_2 // (\alpha)$ nên M_1 và M_2 không thuộc $(\alpha)\Rightarrow$ loại (1).

Vậy phương trình mặt phẳng (α) cần tìm là $x-5y-3z+10=0$.

Chọn B

Câu 4: Cho tứ giác $ABCD$ có $A(0;1;-1); B(1;1;2); C(1;-1;0); D(0;0;1)$. Viết phương trình của mặt phẳng (P) qua A, B và chia tứ diện thành hai khối $ABCE$ và $ABDE$ có tỉ số thể tích bằng 3.

A. $15x-4y-5z-1=0$.

B. $15x+4y-5z-1=0$.

C. $15x+4y-5z+1=0$.

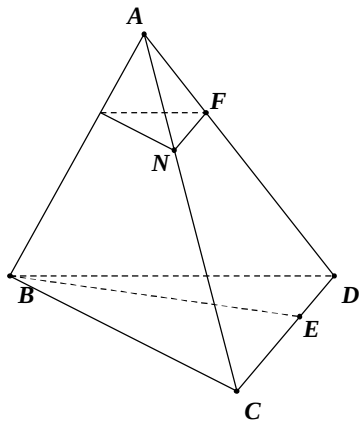
D. $15x-4y+5z+1=0$

Lời giải

(P) cắt cạnh CD tại E, E chia đoạn CD theoo tỷ số -3

$\Rightarrow E\begin{cases} x=\dfrac{x_C+3x_D}{4}=\dfrac{1+3.0}{4}=\dfrac{1}{4} \\ y=\dfrac{y_C+3y_D}{4}=\dfrac{-1+3.0}{4}=\dfrac{-1}{4} \\ z=\dfrac{z_C+3z_D}{4}=\dfrac{0+3.1}{4}=\dfrac{3}{4} \end{cases}$

$\overrightarrow{AB}=(1;0;3); \overrightarrow{AE}=\left(\dfrac{1}{4};-\dfrac{5}{4};\dfrac{7}{4}\right)=\dfrac{1}{4}(1;-5;7)$



ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Vecto pháp tuyến của

$(P):\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\right]=(15;-4;-5)\Rightarrow(P):(x-0)15+(y-1)(-4)+(z+1)(-5)=0$

$\Leftrightarrow 15x-4y-5z-1=0$

Chọn A

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $\begin{cases} y=0 \\ 2x-y-2z-2=0 \end{cases}$ $Oxyz$ cho điểm $M(1;0;0)$ và $N(0;0;-1)$, mặt phẳng (P) qua điểm M,N và tạo với mặt phẳng $(Q):x-y-4=0$ một góc bằng 45°. Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $\begin{cases} y=0 \\ 2x-y-2z-2=0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} y=0 \\ 2x-y-2z+2=0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} 2x-y-2z+2=0 \\ 2x-y-2z-2=0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} 2x-2z+2=0 \\ 2x-2z-2=0 \end{cases}$.

Lời giải

Gọi vecto pháp tuyến của mp(P) và (Q) lần lượt là $\overrightarrow{n_P}(a;b;c)$ $(a^2+b^2+c^2\neq 0)$, $\overrightarrow{n_Q}$

(P) qua $M(1;0;0)\Rightarrow(P):a(x-1)+by+cz=0$

(P) qua $N(0;0;-1)\Rightarrow a+c=0$

(P) hợp với (Q) góc $45^{\circ}\Rightarrow\left|\cos\left(\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}\right)\right|=\cos 45^{\circ}\Leftrightarrow\dfrac{|a-b|}{\sqrt{2a^2+b^2}\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=-2b \end{array}\right.$

Với $a=0\Rightarrow c=0$ chọn $b=1$ phương trình $(P):y=0$

Với $a=-2b$ chọn $b=-1\Rightarrow a=2$ phương trình mặt phẳng $(P):2x-y-2z-2=0$.

Chọn A

Câu 6: Cho tứ giác $ABCD$ có $A(0;1;-1);B(1;1;2);C(1;-1;0);D(0;0;1)$. Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (BCD) và chia tứ diện thành hai khối $AMNF$ và $MNFBCD$ có tỉ số thể tích bằng $\dfrac{1}{27}$.

A. $3x-3z-4=0$. **B.** $y-z-1=0$.

C. $y+z-4=0$. **D.** $4x+3z+4=0$

Lời giải

Tỷ số thể tích hai khối $AMNF$ và $MNFBCD$: $\left(\dfrac{AM}{AB}\right)^3=\dfrac{1}{27}$

$\Rightarrow\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow M$ chia cạnh AB theo tỉ số -2

$\Rightarrow E\begin{cases} x=\dfrac{1+2.0}{3}=\dfrac{1}{3} \\ y=\dfrac{1+2.1}{3}=1 \\ x=\dfrac{2+2(-1)}{3}=0 \end{cases}$; $\overrightarrow{BC}=-2(0;1;1);\overrightarrow{BD}=-(1;1;1)$

Vecto pháp tuyến của $(Q):\vec{n}=(0;1;-1)$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Rightarrow M \in (Q) \Rightarrow (Q): \left(x-\frac{1}{3}\right)0+(y-1)1+(z-0)(-1)=0$

$\Rightarrow (P): y-z-1=0$

Chọn B

Câu 7: Viết phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) cắt hai trục $y'Oy$ và $z'Oz$ tại $A(0,-1,0), B(0,0,1)$ và tạo với mặt phẳng (yOz) một góc 45^0.

A. $\sqrt{2}x-y+z-1=0$. **B.** $\sqrt{2}x+y-z+1=0$.

C. $\sqrt{2}x+y-z+1=0; \sqrt{2}x-y+z+1=0$. **D.** $\sqrt{2}x+y-z+1=0; \sqrt{2}x-y+z-1=0$

Lời giải

Gọi $C(a,0,0)$ là giao điểm của (P) và trục x'Ox

$\Rightarrow \overrightarrow{BA}=(0,-1,-1); \overrightarrow{BC}=(a,0,-1)$

Vec tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right]=(1,-a,a)$

Vec tơ pháp tuyến của (yOz) là $\vec{e_1}=(1,0,0)$

Gọi α là góc tạo bởi (P) và $(yOz) \Rightarrow \cos 45^0=\frac{1}{\sqrt{1+2a^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 4a^2=2 \Leftrightarrow a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

Vậy có hai mặt phẳng $(P): \pm\sqrt{2}x-y+z=1 \Rightarrow \sqrt{2}x+y-z+1=0; \sqrt{2}x-y+z-1=0$

Chọn D

Câu 8: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình: $x^2+y^2+z^2-2x+6y-4z-2=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) song song với giá của véc tơ $\vec{v}=(1;6;2)$, vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): x+4y+z-11=0$ và tiếp xúc với (S).

A. $\left[\begin{array}{l}2x-y+2z-3=0\\2x-y+2z+21=0\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}2x-y+2z+3=0\\2x-y+2z-21=0\end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l}2x-y+z+3=0\\2x-y+z-1=0\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}2x-y+z+13=0\\2x-y+z-1=0\end{array}\right.$

Lời giải

Vậy: (P): $2x-y+2z+3=0$ hoặc (P): $2x-y+2z-21=0$

(S) có tâm I(1; –3; 2) và bán kính R = 4. VTPT của (α) là $\vec{n}=(1;4;1)$.

$\Rightarrow$ VTPT của (P) là $\vec{n}_P=[\vec{n},\vec{v}]=(2;-1;2) \Rightarrow$ PT của (P) có dạng: $2x-y+2z+m=0$.

Vì (P) tiếp xúc với (S) nên $d(I,(P))=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-21\\m=3\end{array}\right.$.

Vậy: (P): $2x-y+2z+3=0$ hoặc (P): $2x-y+2z-21=0$.

Chọn B

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba đường thẳng $d_1: \begin{cases}x=t_1\\y=0\\z=0\end{cases}$, $d_2: \begin{cases}x=1\\y=t_2\\z=0\end{cases}$, $d_3: \begin{cases}x=1\\y=0\\z=t_3\end{cases}$.

Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm $H(3;2;1)$ và cắt ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 lần lượt tại A, B, C sao cho H là trực tâm tam giác ABC.

A. $2x+2y+z-11=0$. **B.** $x+y+z-6=0$.

C. $2x+2y-z-9=0$. **D.** $3x+2y+z-14=0$.

Lời giải

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Chọn A

Gọi $A(a;0;0)$, $B(1;b;0)$, $C(1;0;c)$.

$\overrightarrow{AB}=(1-a;b;0)$, $\overrightarrow{BC}=(0;-b;c)$, $\overrightarrow{CH}=(2;2;1-c)$, $\overrightarrow{AH}=(3-a;2;1)$.

Yêu cầu bài toán

$$\begin{cases}\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}\right].\overrightarrow{CH}=0\\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CH}=0\\ \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AH}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2bc+2c(a-1)+(1-c)b(a-1)=0\\ a=b+1\\ c=2b\end{cases}\Rightarrow 9b^2-2b^3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\\ b=\dfrac{9}{2}\end{array}\right.$$

Nếu $b=0$ suy ra $A\equiv B$ (loại).

Nếu $b=\dfrac{9}{2}$, tọa độ $A\left(\dfrac{11}{2};0;0\right)$, $B\left(1;\dfrac{9}{2};0\right)$, $C(1;0;9)$. Suy ra phương trình mặt phẳng (ABC) là $2x+2y+z-11=0$.

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho đường thẳng AB vuông góc với d.

A. $(P):x+2y+5z-4=0.$ **B.** $(P):x+2y+5z-5=0.$

C. $(P):x+2y-z-4=0.$ **D.** $(P):2x-y-3=0.$

Lời giải

Cách 1 (Tự luận**)**

Đường thẳng d qua M(2;1;0) và có VTCP $\overrightarrow{u_d}=(1;2;-1)$

Ta có: AB ⊥ d và AB ⊥ Oz nên AB có VTCP là $\overrightarrow{u_{AB}}=\left[\overrightarrow{u_d},\vec{k}\right]=(2;-1;0)$

(P) chứa d và AB nên (P) đi qua M(2;1; 0), có VTPT là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{u_d},\overrightarrow{u_{AB}}\right]=(1;2;5)$

$\Rightarrow (P):x+2y+5z-4=0\Rightarrow$ **Chọn A**

Cách 2: Dùng phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn.

Đường thẳng d qua 2 điểm M(2;1;0) và N(3;3;-1)

Giả sử mp(P) cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)

$\Rightarrow (P):\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

AB ⊥ d $\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_d}=0\Rightarrow a=2b$ (1)

(P) chứa d nên d cũng đi qua M, N $\Rightarrow \dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}=1$ (2), $\dfrac{3}{a}+\dfrac{3}{b}+\dfrac{-1}{c}=1$ (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow$ a = 4, b = 2, c = $\dfrac{4}{5}$ $\Rightarrow (P):x+2y+5z-4=0$

Chọn A

Câu 11: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$,cho hai đường thẳng d_1,d_2 lần lượt có phương trình $d_1:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{3}$, $d_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{4}$. Phương trình mặt phẳng (α) cách đều hai đường thẳng d_1,d_2 là

A. $7x-2y-4z=0.$ **B.** $7x-2y-4z+3=0.$

C. $2x+y+3z+3=0.$ **D.** $14x-4y-8z+3=0.$

Lời giải

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Ta có d_1 đi qua $A(2;2;3)$ và có $\overrightarrow{u_{d_1}}=(2;1;3)$, d_2 đi qua $B(1;2;1)$ và có $\overrightarrow{u_{d_2}}=(2;-1;4)$

$\overrightarrow{AB}=(-1;1;-2);\left[\overrightarrow{u_{d_1}};\overrightarrow{u_{d_2}}\right]=(7;-2;-4)$;

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{u_{d_1}};\overrightarrow{u_{d_2}}\right]\overrightarrow{AB}=-1\neq 0$ nên d_1,d_2 chéo nhau.

Do (α) cách đều d_1,d_2 nên (α) song song với $d_1,d_2\Rightarrow\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{u_{d_1}};\overrightarrow{u_{d_2}}\right]=(7;-2;-4)$

$\Rightarrow(\alpha)$ có dạng $7x-2y-4z+d=0$

Theo giả thiết thì $d(A,(\alpha))=d(B,(\alpha))\Leftrightarrow\frac{|d-2|}{\sqrt{69}}=\frac{|d-1|}{\sqrt{69}}\Leftrightarrow d=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow(\alpha):14x-4y-8z+3=0$

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, viết phương trình mặt phẳng (P) song song và cách đều hai đường thẳng $d_1:\frac{x-2}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ và $d_2:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-2}{-1}$.

A. $(P):2x-2z+1=0$.

B. $(P):2y-2z+1=0$.

C. $(P):2x-2y+1=0$.

D. $(P):2y-2z-1=0$.

Lời giải

Ta có: d_1 đi qua điểm $A(2;0;0)$ và có VTCP $\vec{u}_1=(-1;1;1)$.

và d_2 đi qua điểm $B(0;1;2)$ và có VTCP $\vec{u}_2=(2;-1;-1)$. Vì (P) song songvới hai đường thẳng d_1 và d_2 nên VTPT của (P) là $\vec{n}=\left[\vec{u}_1,\vec{u}_2\right]=(0;1;-1)$

Khi đó (P) có dạng $y-z+D=0\Rightarrow$ loại đáp án A và **C.**

Lại có (P) cách đều d_1 và d_2 nên (P) đi qua trung điểm $M\left(0;\frac{1}{2};1\right)$ của AB. Do đó $(P):2y-2z+1=0$

Chọn B

Câu 13: Trong hệ trục tọa độ *Oxyz* cho mặt phẳng $(P):5x-z-4=0$ và hai đường thẳng $d_1;d_2$ lần lượt có phương trình $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{2};\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+1}{1}$. Viết phương trình của mặt phẳng $(Q)//(P)$, theo thứ tự cắt d_1,d_2 tại A,B sao cho $AB=\frac{4\sqrt{5}}{3}$.

A. $(Q_1):5x-z+\frac{-25+\sqrt{331}}{7}=0;(Q_2):5x-z+\frac{-25-\sqrt{331}}{7}=0$.

B. $(Q_1):5x-z-2=0;(Q_2):55x+11z+14=0$.

C. $(Q_1):-5x-z-2=0;(Q_2):-55x-11z+14=0$.

D. $(Q_1):5x-z-4=0;(Q_2):55x-11z+7=0$

Lời giải

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$d_1:\begin{cases}x=1+t\\y=-t\\z=-1+2t\end{cases}, d_2:\begin{cases}x=1+2t'\\y=2+t'\\z=-1+t'\end{cases}; (Q):5x-z+d=0, d\neq -4$

$(Q)\cap d_1=A\left(\frac{-3-d}{3};\frac{6+d}{3};\frac{-15-2d}{3}\right), (Q)\cap d_2=B\left(\frac{-3-2d}{9};\frac{12-d}{9};\frac{30+5d}{9}\right)$

Suy ra $\overrightarrow{AB}=\left(\frac{6+d}{9};\frac{-6-4d}{9};\frac{30+5d}{9}\right)=\frac{1}{9}(6+d;-6-4d;30+5d)$

Do $AB=\frac{4\sqrt{5}}{3}\Rightarrow\frac{1}{8}\left((6+d)^2+(-6-4d)^2+(30+5d)^2\right)$

$=\frac{80}{9}\Leftrightarrow 42d^2+300d+252=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d=\frac{-25+\sqrt{331}}{7}\\d=\frac{-25-\sqrt{331}}{7}\end{array}\right.$

Vậy, tìm được hai mặt phẳng thỏa mãn:

$(Q_1):5x-z+\frac{-25+\sqrt{331}}{7}=0; (Q_2):5x-z+\frac{-25-\sqrt{331}}{7}=0$

Chọn A

Câu 14: Trong không gian với hệ toạ độ *Oxyz*, cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt các trục *Ox*, *Oy*, *Oz* lần lượt tại A, B, C (khác gốc toạ độ O) sao cho M là trực tâm tam giác ABC. Mặt phẳng (α) có phương trình là

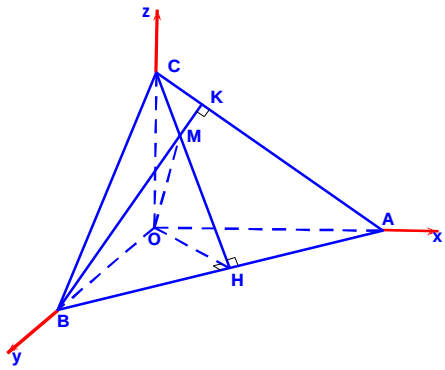
A. $x+2y+3z-14=0$. **B.** $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}-1=0$.

C. $3x+2y+z-10=0$. **D.** $x+2y+3z+14=0$.

Lời giải

Cách 1: Gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB, K là hình chiếu vuông góc B trên AC. M là trực tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $M=BK\cap CH$

Ta có: $\left.\begin{array}{l}AB\perp CH\\AB\perp CO\end{array}\right\}\Rightarrow AB\perp(COH)\Rightarrow AB\perp OM$ (1)



(1)

Chứng minh tương tự, ta có: $AC\perp OM$ (2).

Từ (1) và (2), ta có: $OM\perp(ABC)$

Ta có: $\overrightarrow{OM}(1;2;3)$.

Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và có một *VTPT* là $\overrightarrow{OM}(1;2;3)$ nên có phương trình là

$(x-1)+2(y-2)+3(z-3)=0\Leftrightarrow x+2y+3z-14=0$.

Cách 2:

+) Do A, B, C lần lượt thuộc các trục Ox, Oy, Oz nên $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ $(a,b,c\neq 0)$.

Phương trình đoạn chắn của mặt phẳng (ABC) là $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

+) Do M là trực tâm tam giác ABC nên $\begin{cases}\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC}=0\\ M\in(ABC)\end{cases}$. Giải hệ điều kiện trên ta được a,b,c

Vậy phương trình mặt phẳng: $x+2y+3z-14=0$.

Câu 15: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$,cho $(P):x+4y-2z-6=0,(Q):x-2y+4z-6=0$. Lập phương trình mặt phẳng (α) chứa giao tuyến của $(P),(Q)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A,B,C sao cho hình chóp $O.ABC$ là hình chóp đều.

A. $x+y+z+6=0$. **B.** $x+y+z-6=0$. **C.** $x+y-z-6=0$. **D.** $x+y+z-3=0$.

Lời giải

Chọn $M(6;0;0),N(2;2;2)$ thuộc giao tuyến của $(P),(Q)$

Gọi $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$ lần lượt là giao điểm của (α) với các trục Ox,Oy,Oz

$\Rightarrow(\alpha):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1(a,b,c\neq 0)$

(α) chứa $M,N\Rightarrow\begin{cases}\frac{6}{a}=1\\ \frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}=1\end{cases}$

Hình chóp $O.ABC$ là hình chóp đều $\Rightarrow OA=OB=OC\Rightarrow|a|=|b|=|c|$

Vậy phương trình $x+y+z-6=0$.

Câu 16: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho điểm $N(1;1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) cắt các trục Ox,Oy,Oz lần lượt tại A,B,C (không trùng với gốc tọa độ O) sao cho N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

A. $(P):x+y+z-3=0$. **B.** $(P):x+y-z+1=0$.

C. $(P):x-y-z+1=0$. **D.** $(P):x+2y+z-4=0$.

Lời giải

Gọi $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$ lần lượt là giao điểm của (P) với các trục Ox,Oy,Oz

$\Rightarrow(P):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1(a,b,c\neq 0)$

Ta có: $\begin{cases}N\in(P)\\ NA=NB\\ NA=NC\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1\\ |a-1|=|b-1|\\ |a-1|=|c-1|\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=3\Rightarrow x+y+z-3=0$

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(Q):x+y+z=0$ và hai điểm $A(4,-3,1),B(2,1,1)$. Tìm điểm M thuộc mặt phẳng (Q) sao cho tam giác ABM vuông cân tại M.

A. $\left[\begin{array}{l}M(1;-2;1)\\ M\left(\frac{17}{7};-\frac{9}{7};-\frac{8}{7}\right)\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}M(1;2;1)\\ M\left(\frac{17}{7};\frac{9}{7};\frac{8}{7}\right)\end{array}\right.$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

C. $\left[\begin{array}{l} M(-1;2;1) \\ M\left(\frac{13}{7};-\frac{5}{7};-\frac{9}{7}\right) \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} M(1;1;1) \\ M\left(\frac{9}{7};-\frac{9}{7};-\frac{8}{7}\right) \end{array}\right.$

Lời giải

Gọi $M(a,b,c).M \in (Q) \Rightarrow a+b+c=0 \ (1)$.

Tam giác ABM cân tại M khi và chỉ khi:

$AM^2 = BM^2 \Leftrightarrow (a-4)^2+(b+3)^2+(c-1)^2 = (a-2)^2+(b-1)^2+(c-1)^2 \Leftrightarrow -a+2b+5=0 \ (2)$

Từ (1) và (2) ta có: $\begin{cases} a+b+c=0 \\ -a+2b+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2b+5 \\ c=-5-3b \end{cases} \ (*)$

Trung điểm AB là $I(3;-1;1)$. Tam giác ABM cân tại M, suy ra:

$MI = \frac{AB}{2} \Leftrightarrow (a-3)^2+(b+1)^2+(c-1)^2 = 5 \quad (3)$

Thay $(*)$ và (3) ta được: $(2b+2)^2+(b+1)^2+(-6-3b)^2=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=-2 \\ b=-\frac{9}{7} \end{array}\right.$

$b=-2 \Rightarrow a=1, c=1 \Rightarrow M(1;-2;1)$

$b=-\frac{9}{7} \Rightarrow a=\frac{17}{7}, c=-\frac{8}{7} \Rightarrow M\left(\frac{17}{7};-\frac{9}{7};-\frac{8}{7}\right)$

Chọn A

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $A(1;3;2), B(3;2;1)$ và mặt phẳng $(P): x+2y+2x-11=0$. Tìm điểm M trên (P) sao cho $MB=2\sqrt{2}, \hat{MBA}=30^0$.

A. $\left[\begin{array}{l} M(1;2;3) \\ M(1;4;1) \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} M(1;-2;3) \\ M(1;-4;1) \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} M(2;1;3) \\ M(4;1;1) \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} M(1;-2;3) \\ M(-1;4;1) \end{array}\right.$

Lời giải

Nhận thấy $A \in (P), B \notin (P), AB=\sqrt{6}$.

Áp dụng định lý côsin trong tam giác MAB ta có:

$MA^2 = MB^2+BA^2-2MB.BA.\cos 30^0 = 2 \Rightarrow MB^2 = MB^2+BA^2$

Do đó tam giác MAB vuông tại A.

Ta có: $\overrightarrow{u_{AM}} = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_p}\right] = (0;-5;5) \Rightarrow AM: \begin{cases} x=1 \\ y=3-t \\ z=2+t \end{cases} \Rightarrow M(1;3-t;2+t)$

Ta có $MA^2=2 \Rightarrow t^2+t^2=2 \Leftrightarrow t=\pm 1$

Với $t=1 \Rightarrow M(1;2;3)$; $t=-1 \Rightarrow M(1;4;1)$

Chọn A

Câu 19: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho tám điểm $A(-2;-2;0)$, $B(3;-2;0)$, $C(3;3;0)$, $D(-2;3;0)$, $M(-2;-2;5)$, $N(-2;-2;5)$, $P(3;-2;5)$, $Q(-2;3;5)$. Hỏi hình đa diện tạo bởi tám điểm đã cho có bao nhiêu mặt đối xứng.

A. 3. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 9

Lời giải

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Vì tám điểm đã chỗ tạo nên một hình lập phương, nên hình đa diện tạo bởi tám điểm này có 9 mặt đối xứng.

Chọn D

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;-2;0)$, $B(0;-1;1)$, $C(2;1;-1)$, $D(3;1;4)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng cách đều bốn điểm đó?

A. 1. **B.** 4. **C.** 7. **D.** Vô số.

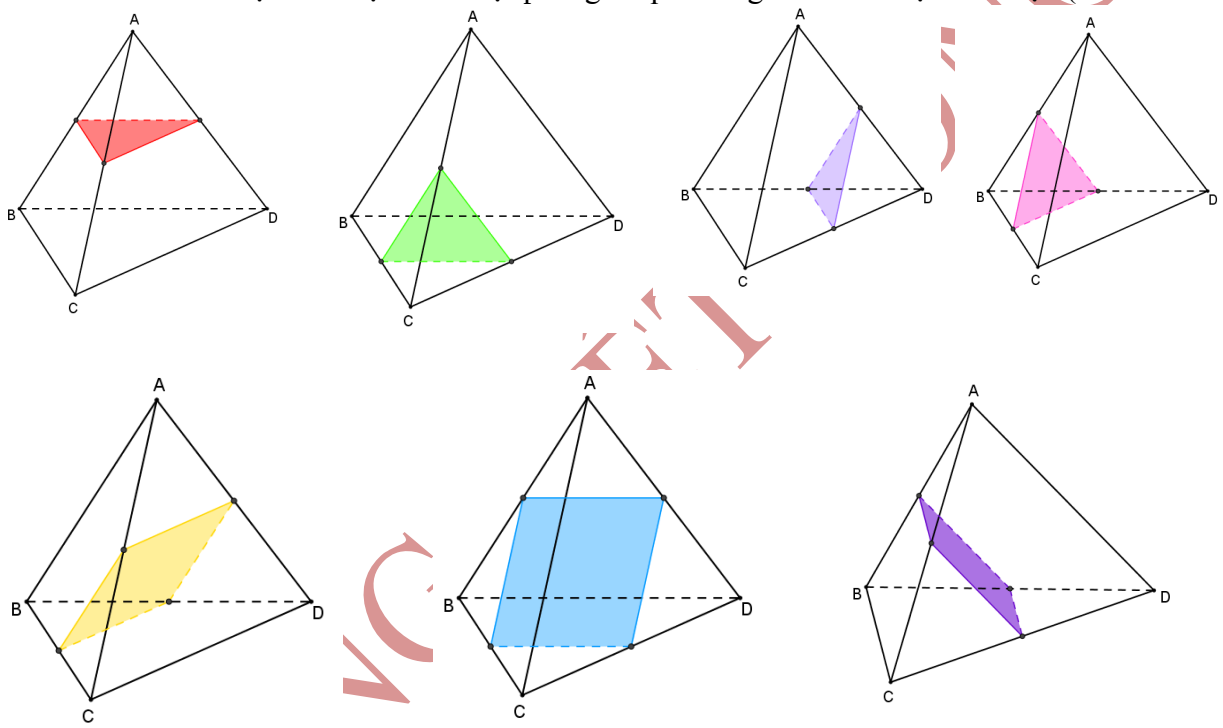
Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;1;1)$, $\overrightarrow{AC}=(1;3;-1)$, $\overrightarrow{AD}=(2;3;4)$.

Khi đó $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-4;0;-4)$ suy ra $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=-24\neq 0$.

Do đó A,B,C,D không đồng phẳng và là 4 đỉnh của một tứ diện.

Khi đó sẽ có 7 mặt phẳng cách đều bốn đỉnh của tứ diện. Bao gồm: 4 mặt phẳng đi qua trung điểm của ba cạnh tứ diện và 3 mặt phẳng đi qua trung điểm bốn cạnh tứ diện (như hình vẽ).



Chọn C

Câu 21: Trong không gian cho điểm $M(1;-3;2)$.Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua M và cắt các trục tọa độ tại A,B,C mà $OA=OB=OC\neq 0$

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Giả sử mặt phẳng (α) cần tìm cắt Ox,Oy,Oz lần lượt tại $A(a,0,0),B(0,b,0),C(0,0c)(a,b,c\neq 0)$

$(\alpha):\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$; (α) qua $M(1;-3;2)$ nên: $(\alpha):\dfrac{1}{a}-\dfrac{3}{b}+\dfrac{2}{c}=1(*)$

$$OA=OB=OC\neq 0\Rightarrow |a|=|b|=|c|\neq 0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=c(1)\\ a=b=-c(2)\\ a=-b=c(3)\\ a=-b=-c(4)\end{array}\right.$$

Thay (1) vào (*) ta có phương trình vô nghiệm

Thay $(2),(3),(4)$ vào (*) ta được tương ứng $a=-4, a=6, a=\dfrac{-3}{4}$

Vậy có 3 mặt phẳng.

Câu 22: Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua điểm $M(1;9;4)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C (khác gốc tọa độ) sao cho $OA=OB=OC$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Giả sử mặt phẳng (α) cắt các trục tọa độ tại các điểm khác gốc tọa độ là $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a,b,c\neq 0$.

Phương trình mặt phẳng (α) có dạng $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;9;4)$ nên $\dfrac{1}{a}+\dfrac{9}{b}+\dfrac{4}{c}=1$ (1).

Vì $OA=OB=OC$ nên $|a|=|b|=|c|$, do đó xảy ra 4 trường hợp sau:

+) TH1: $a=b=c$.

Từ (1) suy ra $\dfrac{1}{a}+\dfrac{9}{a}+\dfrac{4}{a}=1\Leftrightarrow a=14$, nên phương trình mp (α) là $x+y+z-14=0$.

+) TH2: $a=b=-c$. Từ (1) suy ra $\dfrac{1}{a}+\dfrac{9}{a}-\dfrac{4}{a}=1\Leftrightarrow a=6$, nên pt mp (α) là $x+y-z-6=0$.

+) TH3: $a=-b=c$. Từ (1) suy ra $\dfrac{1}{a}-\dfrac{9}{a}+\dfrac{4}{a}=1\Leftrightarrow a=-4$, nên pt mp (α) là $x-y+z+4=0$.

+) TH4: $a=-b=-c$. Từ (1) có $\dfrac{1}{a}-\dfrac{9}{a}-\dfrac{4}{a}=1\Leftrightarrow a=-12$, nên pt mp (α) là $x-y-z+12=0$.

Vậy có 4 mặt phẳng thỏa mãn.

Câu 23: **(Chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P):2x-y-2z-2=0$. (Q) là mặt phẳng chứa d và tạo với mặt phẳng (P) một góc nhỏ nhất. Gọi $\overrightarrow{n_Q}=(a;b;1)$ là một vectơ pháp tuyến của (Q). Đẳng thức nào **đúng**?

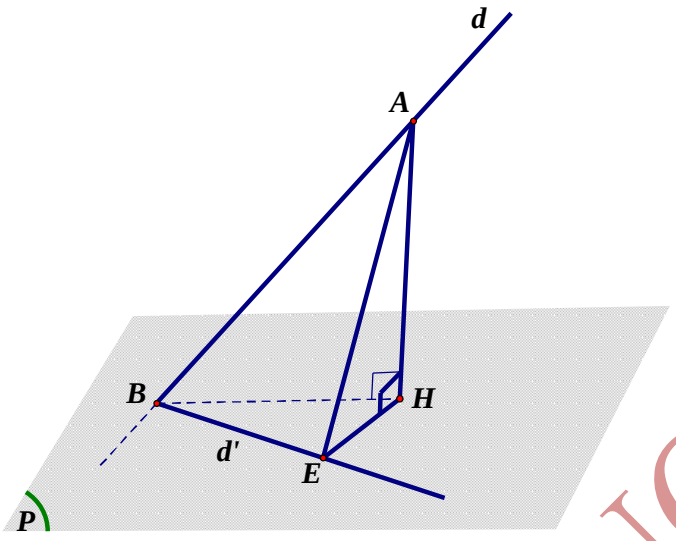
A. $a+b=0$. **B.** $a-b=-1$. **C.** $a-b=1$. **D.** $a+b=-2$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Gọi d' là giao tuyến của (P) và (Q), B là giao điểm của d và (P). Suy ra B cố định và $B \in d'$

Trên đường thẳng d lấy điểm A không trùng với B. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (P), E là hình chiếu vuông góc của H lên d'.

Ta có $AH \perp (P); BE \subset (P) \Rightarrow AH \perp BE$. Mà $BE \perp EH$. Suy ra $BE \perp EA$

Vậy góc giữa (P) và (Q) là góc $\widehat{AEH}$

Ta có tam giác AEH vuông tại H và AH không đổi

Vì vậy, góc $\widehat{AEH}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ EH lớn nhất. Mà $EH \le BH$; BH không đổi

Suy ra EH lớn nhất $\Leftrightarrow$ E trùng với $B \Leftrightarrow d'$ vuông góc với BH. Từ đó suy ra d' vuông góc với d

Vậy (Q) là mặt phẳng chứa d và tạo với mặt phẳng (P) một góc nhỏ nhất khi và chỉ khi (Q) chứa d và d' (với d' nằm trên (P), đi qua B và vuông góc với d)

Ta có $\overrightarrow{n_P} = (2;-1;-2)$ là một vectơ pháp tuyến của (P); $\overrightarrow{u_d} = (-1;2;1)$ là một vectơ chỉ phương của d

$\left[\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{u_d}\right] = (3;0;3) \Rightarrow \overrightarrow{u_{d'}} = (1;0;1)$ là một vectơ chỉ phương của d'

$\left[\overrightarrow{u_{d'}};\overrightarrow{u_d}\right] = (-2;-2;2) \Rightarrow \overrightarrow{n_Q} = (-1;-1;1)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q)

Suy ra $a = -1; b = -1 \Rightarrow a + b = -2$.

Cách 2

Ta có

$\overrightarrow{u_d} = (-1;2;1)$ là một vectơ chỉ phương của d

$\overrightarrow{n_Q} = (a;b;1)$ là một vectơ pháp tuyến của (Q)

$\overrightarrow{n_P} = (2;-1;-2)$ là một vectơ pháp tuyến của (P)

(Q) là mặt phẳng chứa d nên $\overrightarrow{n_Q} \perp \overrightarrow{u_d} \Leftrightarrow \overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow -a + 2b + 1 = 0 \Leftrightarrow a = 2b + 1 \quad (1)$

Gọi α là góc giữa (P) và (Q)

$$\Rightarrow \cos\alpha = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{n_Q}\right)\right| = \frac{|2a - b - 2|}{3.\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta có

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$$\cos\alpha = \frac{|4b+2-b-2|}{3\sqrt{4b^2+4b+1+b^2+1}} = \frac{|b|}{\sqrt{5b^2+4b+2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5+\frac{4}{b}+\frac{2}{b^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{1}{b}+1\right)^2+3}} \le \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Góc α nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ $\cos\alpha$ lớn nhất $\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Khi đó $\frac{1}{b}+1=0 \Leftrightarrow b=-1$. Suy ra $a=-1$. Vậy $a+b=-2$.

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có điểm A trùng với gốc của hệ trục tọa độ, $B(a;0;0)$, $D(0;a;0)$, $A'(0;0;b)$ $(a>0, b>0)$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Giá trị của tỉ số $\frac{a}{b}$ để hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD) vuông góc với nhau là

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Rightarrow C(a;a;0) \Rightarrow C'(a;a;b) \Rightarrow M\left(a;a;\frac{b}{2}\right)$

Cách 1.

Ta có $\overrightarrow{MB}=\left(0;-a;-\frac{b}{2}\right)$; $\overrightarrow{BD}=(-a;a;0)$ và $\overrightarrow{A'B}=(a;0;-b)$

Ta có $\vec{u}=\left[\overrightarrow{MB};\overrightarrow{BD}\right]=\left(\frac{ab}{2};\frac{ab}{2};-a^2\right)$ và $\left[\overrightarrow{BD};\overrightarrow{A'B}\right]=\left(-a^2;-a^2;-a^2\right)$

Chọn $\vec{v}=(1;1;1)$ là VTPT của $(A'BD)$

$(A'BD)\perp(MBD) \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v}=0 \Leftrightarrow \frac{ab}{2}+\frac{ab}{2}-a^2=0 \Leftrightarrow a=b \Rightarrow \frac{a}{b}=1$

Cách 2.

$AB=AD=BC=CD=a \Rightarrow \begin{cases} A'B=A'D \\ MB=MD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A'X\perp BD \\ MX\perp BD \end{cases}$ với X là trung điểm BD

$\Rightarrow \left[\widehat{(A'BD);(MBD)}\right]=\left(\widehat{A'X;MX}\right)$

$X\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$ là trung điểm BD

$\overrightarrow{A'X}=\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};-b\right)$, $\overrightarrow{MX}=\left(-\frac{a}{2};-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$

$(A'BD)\perp(MBD) \Rightarrow A'X\perp MX$

$\Rightarrow \overrightarrow{A'X}.\overrightarrow{MX}=0 \Rightarrow -\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2+\frac{b^2}{2}=0 \Rightarrow \frac{a}{b}=1$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 25: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ trong đó b,c dương và mặt phẳng $(P): y-z+1=0$. Biết rằng $mp(ABC)$ vuông góc với $mp(P)$ và $d(O,(ABC))=\frac{1}{3}$, mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. $b+c=1$. **B.** $2b+c=1$. **C.** $b-3c=1$. **D.** $3b+c=3$.

Lời giải

Ta có phương trình mp(ABC) là $\frac{x}{1}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

$(ABC)\perp(P)\Rightarrow \frac{1}{b}-\frac{1}{c}=0\Rightarrow b=c\,(1)$

Ta có $d(O,(ABC))=\frac{1}{3}\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=\frac{1}{3}\Leftrightarrow \frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=8\,(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow b=c=\frac{1}{2}\Rightarrow b+c=1$.

Câu 26: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(5;5;0)$, $B(1;2;3)$, $C(3;5;-1)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z+5=0$. Tính thể tích V của khối tứ diện $SABC$ biết đỉnh S thuộc mặt phẳng (P) và $SA=SB=SC$.

A. $V=\frac{145}{6}$. **B.** $V=145$. **C.** $V=\frac{45}{6}$. **D.** $V=\frac{127}{3}$.

Lời giải

Gọi $S(a;b;c)\in(P)\Rightarrow a+b+c+5=0\,(1)$.

Ta có: $AS=\sqrt{(a-5)^2+(b-5)^2+c^2}$,

$BS=\sqrt{(a-1)^2+(b-2)^2+(c-3)^2}, CS=\sqrt{(a-3)^2+(b-5)^2+(c+1)^2}$

Do $SA=SB=SC\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{(a-1)^2+(b-2)^2+(c-3)^2}=\sqrt{(a-3)^2+(b-5)^2+(c+1)^2}\\ \sqrt{(a-5)^2+(b-5)^2+c^2}=\sqrt{(a-3)^2+(b-5)^2+(c+1)^2}\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}4a+6b-8c-21=0\\ 4a+2c-15=0\end{cases}$

Ta có hệ: $\begin{cases}4a+6b-8c-21=0\\ 4a+2c-15=0\\ a+b+c+5=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a=6\\ b=-\frac{23}{2}\\ c=-\frac{9}{2}\end{cases}\Rightarrow S=\left(6;-\frac{13}{2};-\frac{9}{2}\right)$. Lại có:

$\overrightarrow{AB}(-4;-3;3), \overrightarrow{AC}(-2;0;-1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(3;-10;-6); \overrightarrow{AS}=\left(1;-\frac{23}{2};-\frac{9}{2}\right)\Rightarrow \left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AS}\right|=145\Rightarrow V_{S.ABC}=\frac{145}{6}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 27: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1), M(2;4;1), N(1;5;3)$. Tìm tọa độ điểm C nằm trên mặt phẳng $(P): x+z-27=0$ sao cho tồn tại các điểm B, D tương ứng thuộc các tia AM, AN để tứ giác $ABCD$ là hình thoi.

A. $C(6;-17;21)$ **B.** $C(20;15;7)$ **C.** $C(6;21;21)$ **D.** $C(18;-7;9)$

Lời giải

C là giao của phân giác trong ΔAMN với (P). Ta có: $AM=3; AN=5$.

Gọi E là giao điểm phân giác trong ΔAMN và MN. Ta có: $\frac{EM}{EN}=\frac{AM}{AN}=\frac{3}{5}$

$$\Rightarrow 5\overrightarrow{EM}+3\overrightarrow{EN}=\vec{0}\Leftrightarrow E\left(\frac{13}{8};\frac{35}{8};\frac{7}{4}\right)\Rightarrow (AE):\begin{cases}x=1+5t\\y=2+19t\\z=-1+22t\end{cases}\Rightarrow \boxed{C(6;21;21)}.$$

Câu 28: **(Nguyễn Du Dak-Lak 2019)** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;1;2)$, $B(2;-3;1)$, $C(3;2;2)$ và mặt phẳng $(\alpha): x-3y+z=0$. Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C lên (α). D' là điểm sao cho $A'B'C'D'$ là hình bình hành. Diện tích hình bình hành $A'B'C'D'$ bằng

A. $\frac{3}{\sqrt{22}}$ **B.** $\frac{4}{\sqrt{11}}$. **C.** $\frac{8}{\sqrt{11}}$. **D.** $\frac{6}{\sqrt{22}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AB}=(0;-4;-1)$, $\overrightarrow{AC}=(1;1;0)$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{n_{ABC}}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(1;-1;4)\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

$$\cos\left((ABC),(\alpha)\right)=\frac{\left|\overrightarrow{n_{ABC}}.\overrightarrow{n_{\alpha}}\right|}{\left|\overrightarrow{n_{ABC}}\right|\left|\overrightarrow{n_{\alpha}}\right|}=\frac{4\sqrt{22}}{33}\Rightarrow S_{\Delta A'B'C'}=S_{\Delta ABC}.\cos\left((ABC),(\alpha)\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}.\frac{4\sqrt{22}}{33}=\frac{4}{\sqrt{11}}.$$

$$\Rightarrow S_{\Delta A'B'C'D'}=2S_{\Delta A'B'C'}=\frac{8}{\sqrt{11}}.$$

Câu 29: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba mặt phẳng

$(\alpha): x-2y+z+1=0; (\beta): x-2y+z+8=0; (\delta): x-2y+z-4=0.$

Một đường thẳng Δ thay đổi cắt ba mặt phẳng $(\alpha);(\beta);(\delta)$ lần lượt tại A, B, C. Hỏi giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=AB^2+\frac{144}{AC}$ là?

A. 108. **B.** $72\sqrt[3]{4}$. **C.** 96. **D.** 36.

Lời giải

Chọn A

Vì ba mặt phẳng $(\alpha)//(\beta)//(\delta)$, nên theo định lí Thales trong không gian, ta có:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{d\left((\alpha),(\beta)\right)}{d\left((\alpha),(\delta)\right)}=\frac{|-1-8|}{|-1-(-4)|}=3.$$

Do đó sử dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$$P = AB^2 + \frac{144}{AC} = 9AC^2 + \frac{144}{AC} = 9AC^2 + \frac{72}{AC} + \frac{72}{AC} \ge 3\sqrt[3]{9AC^2 . \frac{72}{AC} . \frac{72}{AC}} = 108.$$

Chọn A

Câu 30: **(THTT lần5)** Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABC$ có $SC = AB = 3\sqrt{2}$, đường thẳng AB có phương trình $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{4} = \frac{z+1}{-1}$ và góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng $60°$. Khi ba điểm A, B, C cùng với ba trung điểm của ba cạnh bên của hình chóp $S.ABC$ nằm trên một mặt cầu thì mặt phẳng (ABC) có phương trình là

A. $y + z + 1 = 0$. **B.** $x + y - 4z - 14 = 0$. **C.** $x - 2y - 7z - 8 = 0$. **D.** $x + y - 4z + 14 = 0$.

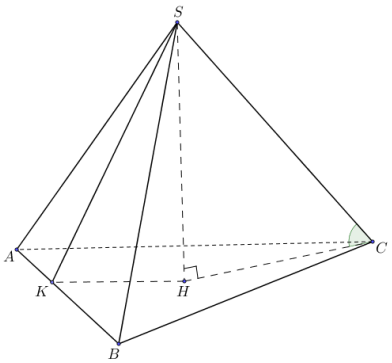
Lời giải

Chọn C

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) và đường thẳng AB.

$\Rightarrow$ góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{SCH} = 60°$.

$\Rightarrow SH = SC.\sin 60° = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$



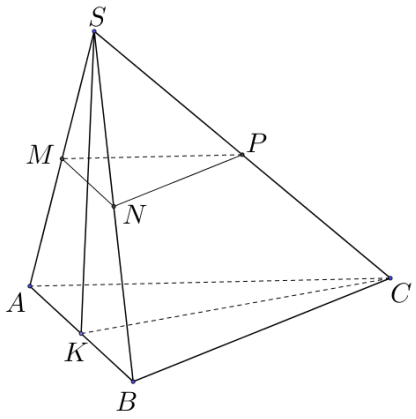
Gọi $K(1+t; 4t; -1-t) \in AB \Rightarrow \overrightarrow{SK} = (t; 4t-3; -3-t)$.

Gọi $\overrightarrow{u_{AB}}$ là một vecto chỉ phương của đường thẳng AB. Theo đề ra $\overrightarrow{u_{AB}} = (1; 4; -1)$.

Ta có $SK \perp AB \Rightarrow \overrightarrow{SK}.\overrightarrow{u_{AB}} = 0 \Leftrightarrow t + 16t - 12 + 3 + t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow K\left(\frac{3}{2}; 2; -\frac{3}{2}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{SK} = \left(\frac{1}{2}; -1; -\frac{7}{2}\right) \Rightarrow SK = \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{49}{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow SK = SH \Rightarrow H \equiv K$.

Khi đó $SK \perp (ABC)$. Chọn vecto pháp tuyến của $mp(ABC)$ là $\vec{n} = \overrightarrow{SK} = \left(\frac{1}{2}; -1; -\frac{7}{2}\right)$, ta có phương trình mặt phẳng (ABC) là $\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right) - (y-2) - \frac{7}{2}\left(x + \frac{3}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 7z - 8 = 0$



Cách 2: (ABC) chứa điểm $M(1;0;-1)$ nên loại đáp án B, D. Vecto pháp tuyến của (ABC) vuông góc với vecto chỉ phương của đường thẳng AB nên **Chọn C** Phương án nhiễu kém!

Nhận xét: Khi 6 điểm A,B,C cùng với ba trung điểm của ba cạnh bên của hình chóp $S.ABC$ nằm trên một mặt cầu thì các mặt bên của hình chóp cụt là hình thang cân suy ra $SA=SB=SC$. Mà $SK\perp(ABC)$ nên K là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Do đó ΔABC vuông tại C nên tâm mặt cầu qua 6 điểm A,B,C cùng với ba trung điểm của ba cạnh bên của hình chóp $S.ABC$ là K. Đề nên hỏi phương trình mặt cầu đi qua 6 điểm trên.

Câu 31: **(Thuận Thành 2 Bắc Ninh)** Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;0;-2)$, $C(2;-1;0)$, $D(-2;2;3)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng song song với AB,CD và cắt 2 đường thẳng AC,BD lần lượt tại M,N thỏa mãn $\left(\frac{BN}{AM}\right)^2=AM^2-1$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

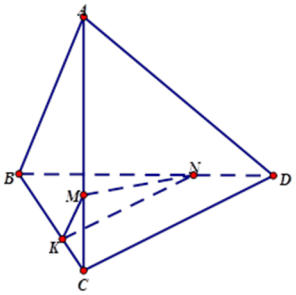
Cách 1:

Ta dễ dàng chứng minh được 4 điểm A,B,C,D tạo thành tứ diện. Gọi (α) là mặt phẳng cần tìm, ta xác định mặt phẳng (α) như sau:

Xét (α) và (ABC) có $\begin{cases}M\in(\alpha)\cap AB\\(\alpha)//AB\end{cases}\Rightarrow$ giao tuyến của (α) và (ABC) là Mx trong đó $Mx//AB$, $Mx\cap AB=K$

Tương tự ta có giao tuyến của (α) và (BCD) là Ky trong đó $Ky//CD$, $Ky\cap BD=N$

$\Rightarrow(\alpha)\equiv(KMN)$



Ta có: $\frac{BN}{BD}=\frac{BK}{BC}=\frac{AM}{AC}\Rightarrow\frac{BN}{BD}=\frac{AM}{AC}\Rightarrow\frac{BN}{AM}=\frac{BD}{AC}=\frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}}=\sqrt{5}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Vậy từ giả thiết: $\left(\frac{BN}{AM}\right)^2 = AM^2 - 1 \Rightarrow AM^2 = 6 \Rightarrow AM = \sqrt{6} = AC$.

$\Rightarrow M$ là điểm đối xứng của C qua A.

Vậy chỉ có 1 mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2:

Ta dễ dàng chứng minh được 4 điểm A, B, C, D tạo thành tứ diện.

Vì mặt phẳng (α) song song với AB, CD và cắt 2 đường thẳng AC, BD lần lượt tại M, N nên theo định lí Talet trong không gian ta có: $\frac{BN}{AM} = \frac{BD}{AC} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \sqrt{5}$

Vậy từ giả thiết: $\left(\frac{BN}{AM}\right)^2 = AM^2 - 1 \Rightarrow AM^2 = 6 \Rightarrow AM = \sqrt{6} = AC$.

$\Rightarrow M$ là điểm đối xứng của C qua A.

Vậy chỉ có 1 mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 32: **(Sở Vĩnh Phúc)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;-3;2)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng đi qua M và cắt các trục tọa độ tại A, B, C mà $OA = OB = OC \neq 0$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Gọi $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$. Từ đó ta có $OA = |a|$, $OB = |b|$, $OC = |c|$

Mặt phẳng qua các điểm A, B, C có phương trình theo đoạn chắn: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (P).

Vì $M \in (P)$ nên $\frac{1}{a} - \frac{3}{b} + \frac{2}{c} = 1$. Vì $OA = OB = OC \Rightarrow |a| = |b| = |c|$

Từ đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{a} - \frac{3}{b} + \frac{2}{c} = 1 \\ |a| = |b| = |c| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} - \frac{3}{b} + \frac{2}{c} = 1 \\ |a| = |b| \\ |b| = |c| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} - \frac{3}{b} + \frac{2}{c} = 1 \\ \left[\begin{array}{l} a = b \\ a = -b \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} b = c \\ b = -c \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{1}{a} - \frac{3}{b} + \frac{2}{c} = 1 \\ a = b = c \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{a} - \frac{3}{b} + \frac{2}{c} = 1 \\ a = b = -c \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{a} - \frac{3}{b} + \frac{2}{c} = 1 \\ a = -b = c \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{a} - \frac{3}{b} + \frac{2}{c} = 1 \\ a = -b = -c \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b = -c = -4 \\ a = -b = c = 6 \\ a = -b = -c = 2 \end{array}\right.$$

Vậy có 3 mặt phẳng thỏa mãn.

Câu 33: **(SỞ NAM ĐỊNH 2018-2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 4$ và điểm $A(2;2;2)$. Từ A kẻ ba tiếp tuyến AB, AC, AD với B, C, D là các tiếp điểm. Viết phương trình mặt phẳng (BCD).

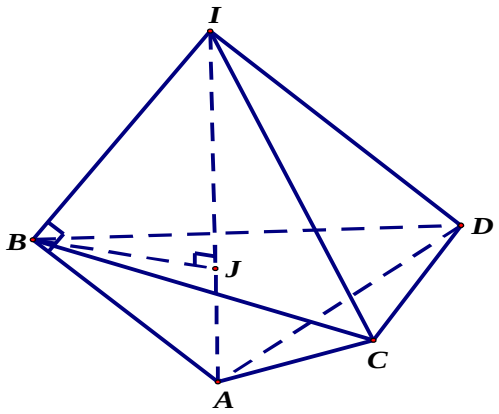
A. $2x + 2y + z - 1 = 0$. **B.** $2x + 2y + z - 3 = 0$.

C. $2x + 2y + z + 1 = 0$. **D.** $2x + 2y + z - 5 = 0$.

Lời giải

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Chọn D



Mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-1)^2=4$ có tâm $I(0;0;1)$ và bán kính $R=2$.

Do AB, AC, AD là ba tiếp tuyến của mặt cầu (S) với B, C, D là các tiếp điểm nên:

$\begin{cases} AB=AC=AD \\ IB=IC=ID=R \end{cases} \Rightarrow IA$ là trục của đường tròn ngoại tiếp $\Delta BCD \Rightarrow IA \perp (BCD)$.

Khi đó mặt phẳng (BCD) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\overrightarrow{IA}=(2;2;1)$.

Gọi J là tâm của đường tròn ngoại tiếp $\Delta BCD \Rightarrow J \in IA$ và $IJ \perp BJ$.

Ta có: ΔIBA vuông tại B và $BJ \perp IA$ nên: $IB^2=IJ.IA \Rightarrow IJ=\dfrac{IB^2}{IA}=\dfrac{4}{3} \Rightarrow \overrightarrow{IJ}=\dfrac{4}{9}\overrightarrow{IA}$.

Đặt $J(x;y;z) \Rightarrow \overrightarrow{IJ}=(x;y;z-1)$, $\overrightarrow{IA}=(2;2;1)$. $\overrightarrow{IJ}=\dfrac{4}{9}\overrightarrow{IA} \Rightarrow J\left(\dfrac{8}{9};\dfrac{8}{9};\dfrac{13}{9}\right)$.

Mặt phẳng (BCD) đi qua $J\left(\dfrac{8}{9};\dfrac{8}{9};\dfrac{13}{9}\right)$ và có véctơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;2;1)$ có phương trình:

$$2\left(x-\frac{8}{9}\right)+2\left(y-\frac{8}{9}\right)+\left(z-\frac{13}{9}\right)=0 \Rightarrow 2x+2y+z-5=0.$$

Câu 34: **(Cầu Giấy Hà Nội 2019 Lần 1)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $H(a;b;c)$ với $a,b,c>0$. Mặt phẳng (P) chứa điểm H và lần lượt cắt các trục Ox,Oy,Oz tại A,B,C thỏa mãn H là trực tâm của tam giác ABC. Phương trình của mặt phẳng (P) là

A. $\dfrac{x}{a^2}+\dfrac{y}{b^2}+\dfrac{z}{c^2}=\dfrac{ab+bc+ca}{abc}$

B. $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=3$.

C. $ax+by+cz-a^2-b^2-c^2=0$.

D. $a^2x+b^2y+c^2z-a^3-b^3-c^3=0$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Gọi $A(x_0;0;0)$, $B(0;y_0;0)$, $C(0;0;z_0)$. Khi đó mặt phẳng (P) có phương trình theo đoạn chắn là $\dfrac{x}{x_0}+\dfrac{y}{y_0}+\dfrac{z}{z_0}=1$.

Ta có : $\overrightarrow{AH}=(a-x_0;b;c)$, $\overrightarrow{BC}=(0;-y_0;z_0)$, $\overrightarrow{BH}=(a;b-y_0;c)$, $\overrightarrow{AC}=(-x_0;0;z_0)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Vì H là trực tâm tam giác ABC nên ta có hệ:

$$\begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\\ H\in(ABC)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-by_0+cz_0=0\\ -ax_0+cz_0=0\\ \frac{a}{x_0}+\frac{b}{y_0}+\frac{c}{z_0}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_0=\frac{c}{b}z_0\\ x_0=\frac{c}{a}z_0\\ \frac{a}{\frac{c}{a}z_0}+\frac{b}{\frac{c}{b}z_0}+\frac{c}{z_0}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_0=\frac{a^2+b^2+c^2}{b}\\ x_0=\frac{a^2+b^2+c^2}{a}\\ z_0=\frac{a^2+b^2+c^2}{c}\end{cases}$$

Thay vào phương trình mặt phẳng (P) ta được: $\frac{ax}{a^2+b^2+c^2}+\frac{by}{a^2+b^2+c^2}+\frac{cz}{a^2+b^2+c^2}=1.$

Hay $(P):ax+by+cz-a^2-b^2-c^2=0$.

Cách 2 : Ta chứng minh được $OH\perp(ABC)$ hay $OH\perp(P)$. Do đó mặt phẳng (P) qua H và nhận $\overrightarrow{OH}(a;b;c)$ làm véc tơ pháp tuyến có phương trình là :

$a(x-a)+b(y-b)+c(z-c)=0\Leftrightarrow ax+by+cz-a^2-b^2-c^2=0$.

Câu 35: **(THTT lần5)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1)$ và $B(3;-1;5)$. Mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng AB và cắt các trục Ox, Oy và Oz lần lượt tại các điểm D, E và F. Biết thể tích của tứ diện $ODEF$ bằng $\frac{3}{2}$, phương trình mặt phẳng (P) là

A. $2x-3y+4z\pm\sqrt[3]{36}=0$. **B.** $2x-3y+4z+\frac{3}{2}=0$.

C. $2x-3y+4z\pm12=0$. **D.** $2x-3y+4z\pm6=0$.

Lời giải

Chọn D

Vì $AB\perp(P)$ nên mặt phẳng (P) có một véc tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AB}=(2;-3;4)$, do đó phương trình mặt phẳng (P) có dạng $2x-3y+4z+d=0$, từ đây tìm được $D(-\frac{d}{2};0;0)$, $E(0;\frac{d}{3};0)$, $F(0;0;-\frac{d}{4})$ suy ra $OD=\frac{|d|}{2}$, $OE=\frac{|d|}{3}$, $OF=\frac{|d|}{4}$. Mặt khác tứ diện $ODEF$ có OD,OE,OF đôi một vuông góc nên $V_{ODEF}=\frac{1}{6}OD.OE.OF\Leftrightarrow\frac{(|d|)^3}{144}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow|d|=6\Leftrightarrow d=\pm6$.Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $2x-3y+4z\pm6=0$.

Câu 36: **(Đặng Thành Nam Đề 17)** Trong không gian $Oxyz$, có bao nhiêu mặt phẳng qua điểm $M(4;-4;1)$ và chắn trên ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz theo ba đoạn thẳng có độ dài theo thứ tự lập thành cấp số nhân có công bội bằng $\frac{1}{2}$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Gọi $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$ là giao điểm của mặt phẳng (P) và các trục tọa độ.

$\Rightarrow(P):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Theo giả thiết có: $\begin{cases} M \in (P) \\ OC = \frac{1}{2}OB = \frac{1}{4}OA \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{a} - \frac{4}{b} + \frac{1}{c} = 1 \\ |c| = \frac{1}{2}|b| = \frac{1}{4}|a| \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -8, b = -4, c = 2 \\ a = 8, b = -4, c = -2 \\ a = 16, b = -8, c = 4 \end{array} \right.$.

Vậy có 3 mặt phẳng thỏa mãn.

Câu 37: **(KỸ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 2 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa Oy cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là đường tròn có chu vi bằng 8π.

A. $(\alpha): 3x - z = 0$. **B.** $(\alpha): 3x + z = 0$.

C. $(\alpha): x - 3z = 0$. **D.** $(\alpha): 3x + z + 2 = 0$.

Lời giải

Chọn A

(S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R = 4$. Đường tròn thiết diện có bán kính $r = 4$.

$\Rightarrow$ mặt phẳng (α) qua tâm I.

(α) chứa $Oy \Rightarrow (\alpha): ax + cz = 0$. Mà $I \in (\alpha) \Rightarrow a + 3c = 0 \Rightarrow a = -3c$.

Chọn $c = -1 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow (\alpha): 3x - z = 0$.

Câu 38: **(Thuận Thành 2 Bắc Ninh)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0), B(0;1;0)$. Mặt phẳng đi qua các điểm A, B đồng thời cắt tia Oz tại C sao cho tứ diện $OABC$ có thể tích bằng $\frac{1}{6}$ có phương trình dạng $x + ay + bz + c = 0$. Tính giá trị $a + 3b - 2c$.

A. 16. **B.** 1. **C.** 10. **D.** 6

Lời giải

Chọn D

Mặt phẳng đi qua các điểm A, B đồng thời cắt tia Oz tại $C(0;0;c)$, $c > 0$ có phương trình là $\frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{c} = 1$.

Mặt khác: $V_{OABC} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{6}.OA.OB.OC = \frac{1}{6} \Leftrightarrow c = 1$.

Vậy phương trình mặt phẳng cần tìm có dạng $\frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} = 1 \Leftrightarrow x + y + z - 1 = 0$.

Vậy $a = b = 1, c = -1 \Rightarrow a + 3b - 2c = 1 + 3.1 + 2 = 6$.

Câu 39: **(THPT PHỤ DỰC – THÁI BÌNH)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;5)$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và cắt trục tọa độ Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho M là trực tâm tam giác ABC. Thể tích của tứ diện $OABC$ là

A. $\frac{10}{6}$. **B.** 450. **C.** 10. **D.** 45.

Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và cắt trục tọa độ Ox, Oy, Oz tại A, B, C. Gọi $A(a,0,0)$; $B(0,b,0)$; $C(0,0,c)$. Phương trình mặt phẳng (P) có dạng:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (1).$$

Do $M(1;2;5)$ thuộc mặt phẳng (P) nên thay vào (1) ta có: $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{5}{c} = 1 \quad (2)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Mặt khác M là trực tâm tam giác ABC nên $\begin{cases} AM \perp BC \\ BM \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{CB}=0 \\ \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC}=0 \end{cases}$.

Ta có $\overrightarrow{AM}=(1-a;2;5)$; $\overrightarrow{BM}=(1;2-b;5)$; $\overrightarrow{CB}=(0;b;-c)$; $\overrightarrow{AC}=(-a;0;c)$.

Khi đó : $\begin{cases} 2b-5c=0 \\ -a+5c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{5}{2}c \\ a=5c \end{cases}$. Thay vào (2) ta có:

$\dfrac{1}{5c}+\dfrac{4}{5c}+\dfrac{5}{c}=1 \Leftrightarrow c=6 \Rightarrow \begin{cases} a=30 \\ b=15 \\ c=6 \end{cases}$.

Vậy thể tích tứ diện $OABC$ là: $V=\dfrac{1}{6}OA.OB.OC=\dfrac{1}{6}abc=\dfrac{1}{6}.30.15.6=450$ (đơn vị thể tích).

Câu 40: **(Kim Liên)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-2;1;-2)$, $B(-1;1;0)$ và mặt phẳng $(P):x+y+z+1=0$. Điểm C thuộc (P) sao cho tam giác ABC vuông cân tại B. Cao độ của điểm C bằng

A. 1 hoặc $-\dfrac{2}{3}$. **B.** -1 hoặc $\dfrac{2}{3}$. **C.** -3 hoặc $\dfrac{1}{3}$. **D.** -1 hoặc $-\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi tọa độ $C(a;b;c)$.

Vì điểm C thuộc (P): $x+y+z+1=0$ nên $a=-b-c-1$ hay tọa độ C có dạng

$C(-b-c-1;b;c) \Rightarrow \overrightarrow{BC}=(-b-c;b-1;c) \Rightarrow BC^2=(b+c)^2+(b-1)^2+c^2$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;0;2) \Rightarrow AB^2=5$. Do tam giác ABC vuông cân tại B nên

$\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=0 \\ BC^2=AB^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=c & (1) \\ (b+c)^2+(b-1)^2+c^2=5 & (2) \end{cases}$

Thay (1) vào (2) ta có $6c^2-2c-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=1 \\ c=-\dfrac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C(-3;1;1) \\ C\left(\dfrac{1}{3};-\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3}\right) \end{array}\right.$.

Vậy cao độ của điểm C là 1 hoặc $-\dfrac{2}{3}$.

Câu 41: **(Sở Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;1), B(3;4;0)$, mặt phẳng $(P):ax+by+cz+46=0$. Biết rằng khoảng cách từ A,B đến mặt phẳng (P) lần lượt bằng 6 và 3. Giá trị của biểu thức $T=a+b+c$ bằng

A. -3. **B.** -6. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của A,B trên mặt phẳng (P).

Khi đó theo giả thiết ta có: $AB=3$, $AH=6$, $BK=3$.

Do đó A,B ở cùng phía với mặt phẳng (P)

Lại có: $AB+BK \geq AK \geq AH \Rightarrow H \equiv K$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Suy ra A, B, H là ba điểm thẳng hàng và B là trung điểm của AH nên tọa độ $H(5;6;-1)$.

Vậy mặt phẳng (P) đi qua $H(5;6;-1)$ và nhận $\overrightarrow{AB}=(2;2;-1)$ là VTPT có nên phương trình $2(x-5)+2(y-6)-1(z+1)=0 \Leftrightarrow 2x+2y-z-23=0$.

Theo bài ra thì $(P): -4x-4y+2z+46=0$, nên $a=-4, b=-4, c=2$.

Vậy $T=a+b+c=-6$.

Câu 42: **(Đặng Thành Nam Đề 9)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=12$ và mặt phẳng $(P): x-2y+2z+11=0$. Xét điểm M di động trên (P); các điểm A, B, C phân biệt di động trên (S) sao cho AM, BM, CM là các tiếp tuyến của (S). Mặt phẳng (ABC) luôn đi qua điểm cố định nào dưới đây?

A. $\left(\frac{1}{4};-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$. **B.** $(0;-1;3)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};0;2\right)$. **D.** $(0;3;-1)$.

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$ bán kính $R=2\sqrt{3}$.

Xét điểm $M(a;b;c); A(x;y;z)$ ta có hệ điều kiện:

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=12\\ AI^2+AM^2=IM^2\\ a-2b+2c+11=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=12\ (1)\\ 12+(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\ (2)\\ a-2b+2c+11=0\ (3)\end{cases}$$

Lấy (1) – (2) theo vế có:

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-\left[12+(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\right]=12-\left[(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow (a-1)x+(b-1)y+(c-1)z-a-b-c-9=0.$$

Vậy mặt phẳng qua ba tiếp điểm là $(Q):(a-1)x+(b-1)y+(c-1)z-a-b-c-9=0$.

Kết hợp với (3) suy ra mặt phẳng này luôn đi qua điểm cố định $(0;3;-1)$.

Câu 43: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$,cho tứ diện $ABCD$ có điểm $A(1;1;1), B(2;0;2), C(-1;-1;0), D(0;3;4)$. Trên các cạnh AB, AC, AD lần lượt lấy các điểm B', C', D' thỏa: $\frac{AB}{AB'}+\frac{AC}{AC'}+\frac{AD}{AD'}=4$. Viết phương trình mặt phẳng $(B'C'D')$ biết tứ diện $AB'C'D'$ có thể tích nhỏ nhất?

A. $16x+40y-44z+39=0$. **B.** $16x+40y+44z-39=0$.

C. $16x-40y-44z+39=0$. **D.** $16x-40y-44z-39=0$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có: $4=\frac{AB}{AB'}+\frac{AC}{AC'}+\frac{AD}{AD'}\geq 3\sqrt[3]{\frac{AB.AC.AD}{AB'.AC'.AD'}}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Rightarrow \dfrac{AB'.AC'.AD'}{AB.AC.AD} \ge \dfrac{27}{64} \Rightarrow \dfrac{V_{AB'C'D'}}{V_{ABCD}} = \dfrac{AB'.AC'.AD'}{AB.AC.AD} \ge \dfrac{27}{64} \Rightarrow V_{AB'C'D'} \ge \dfrac{27}{64} V_{ABCD}$

Để $V_{AB'C'D'}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $\dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{AC'}{AC} = \dfrac{AD'}{AD} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \overrightarrow{AB'} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB} \Rightarrow B'\left(\dfrac{7}{4};\dfrac{1}{4};\dfrac{7}{4}\right)$

Lúc đó mặt phẳng $(B'C'D')$ song song với mặt phẳng (BCD) và đi qua $B'\left(\dfrac{7}{4};\dfrac{1}{4};\dfrac{7}{4}\right)$

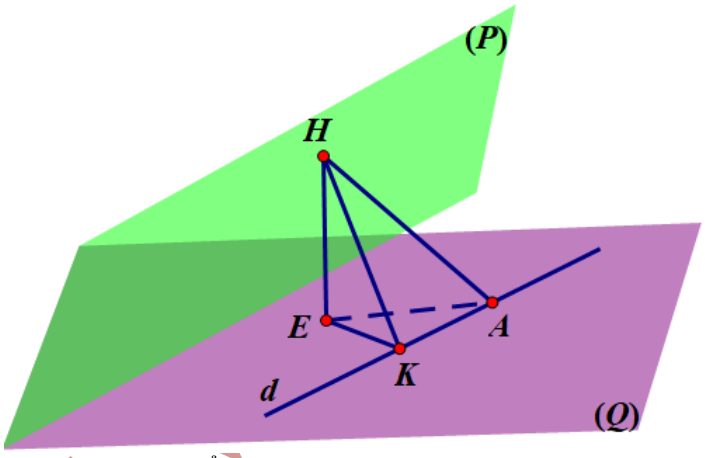
$\Rightarrow (B'C'D'): 16x + 40y - 44z + 39 = 0$.

Câu 44: **(CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG – NAM ĐỊNH 2019 – LẦN 1)** Trong không gian $Oxyz$ $d: \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{1}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z + 4 = 0$ .Mặt phẳng chứa đường thẳng d và tạo với mặt phẳng (P) góc với số đo nhỏ nhất có phương trình là

A. $x - z - 2 = 0$. **B.** $x + z - 2 = 0$. **C.** $3x + y + z - 1 = 0$. **D.** $x + y - z + 3 = 0$.

Lời giải

Chọn D



Lấy điểm $A(0;-1;2)$ thuộc đường thẳng d .

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (P).

Gọi E, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của H lên mặt phẳng (Q) và đường thẳng d .

Ta có: $AH \perp (P), HE \perp (Q) \Rightarrow \left((\widehat{P),(Q)}\right) = \widehat{AHE} = \alpha$. Xét $\cos\alpha = \dfrac{HE}{HA} \le \dfrac{HK}{HA}$

Để α có số đo nhỏ nhất khi $\cos\alpha$ lớn nhất $\Leftrightarrow E \equiv K$. Lúc đó mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng (HAK).

Mặt phẳng (AHK) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và vuông với mặt phẳng (P)

$\Rightarrow \vec{n}_{AHK} = \left[\vec{u}_d, \vec{n}_P\right]$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (AHK)

Suy ra một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q) $\Rightarrow \vec{n}_Q = \left[\vec{u}_d, \vec{n}_{AHK}\right] = (-6;-6;6) \Rightarrow$ phương trình mặt phẳng (Q): $x + y - z + 3 = 0$.

Câu 45: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;-2;0)$, đường thẳng $\Delta: \dfrac{x+1}{-1} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-2}{1}$.

Biết mặt phẳng (P) có phương trình $ax + by + cz + d = 0$ đi qua A, song song với Δ và khoảng cách từ Δ tới mặt phẳng (P) lớn nhất. Biết a, b là các số nguyên dương có ước chung lớn nhất bằng 1. Hỏi tổng $a + b + c + d$ bằng bao nhiêu?

A. 3. **B.** 0 . **C.** 1. **D.** −1.

Lời giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng Δ.

Do $H \in \Delta \Rightarrow H(-1-t;3t;2+t) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (-t-3;3t+2;t+2)$

Do $AH \perp \Delta \Rightarrow \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{u_\Delta} = 0$ với $\overrightarrow{u_\Delta} = (-1;3;1)$

$\Leftrightarrow -1.(-t-3)+3.(3t+2)+1.(t+2)=0 \Leftrightarrow 11t=-11 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow H(0;-3;1)$

Gọi F là hình chiếu vuông góc của H trên (P), khi đó: $d(\Delta,(P)) = d(H,(P)) = HF \le HA$

Suy ra $d(\Delta,(P))_{\max} = HA$. Dấu "=" xảy ra khi $F \equiv A \Rightarrow AH \perp (P)$, hay bài toán được phát biểu lại là

" Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với AH "

Ta có $\overrightarrow{AH} = (-2;-1;1) = -(2;1;-1)$, suy ra $\overrightarrow{n_{(P)}} = (2;1;-1)$

Suy ra phương trình mặt phẳng (P) là $2(x-2)+y+2-z=0 \Leftrightarrow 2x+y-z-2=0$.

Do $\begin{cases} a,b \in \mathbb{N}^* \\ (a,b)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2,b=1 \\ c=-1,d=-2 \end{cases} \Rightarrow a+b+c+d=0$.

Chọn B

Câu 46: Trong không gain Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{-1}$ và $d_2 : \begin{cases} x = 2-t \\ y = 3-t \\ z = -2 \end{cases}$. Mặt phẳng $(P): ax+by+cz+d=0$ (với $a;b;c;d \in \mathbb{R}$) vuông góc với đường thẳng d_1 và chắn d_1, d_2 đoạn thẳng có độ dài nhỏ nhất. Tính $a+b+c+d$.

A. -14 **B.** 1 **C.** -8 **D.** -12

Lời giải

Ta có mặt phẳng (P) vuông dóc với đường thẳng d_1 nên (P) có véctơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;2;1)$.

Phương trình (P) có dạng $(P): x+2y-z+d=0$.

Gọi M là giáo điểm của (P) với d_1 và N là giao của (P) với d_2 suy ra $M\left(\dfrac{2-d}{6};\dfrac{2-d}{3};\dfrac{10+d}{6}\right)$,

$N\left(\dfrac{-4-d}{3};\dfrac{-1-d}{3};-2\right)$.

Ta có $MN^2 = \dfrac{d^2}{18} + \dfrac{16d}{9} + \dfrac{155}{9}$.

Để MN nhỏ nhất thì MN^2 nhỏ nhất, nghĩa là $d=-16$.

Khi đó $a+b+c+d=-14$.

Chọn A

Câu 47: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x+y-z+5=0$ và hai điểm $A(1;0;2)$, $B(2;-1;4)$. Tìm tập hợp các điểm $M(x;y;z)$ nằm trên mặt phẳng (P) sao cho tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất.

A. $\begin{cases} x-7y-4z+7=0 \\ 3x-y+z-5=0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x-7y-4z+14=0 \\ 3x+y-z+5=0 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x-7y-4z+7=0 \\ 3x+y-z+5=0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} 3x-7y-4z+5=0 \\ 3x+y-z+5=0 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Ta thấy hai điểm A,B nằm cùng 1 phía với mặt phẳng (P) và AB song song với (P). Điểm $M\in(P)$ sao cho tam giác ABM có diện tích nhỏ nhất

$\Leftrightarrow S_{\Delta ABC}=\dfrac{AB.d(M;AB)}{2}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow d(M;AB)$ nhỏ nhất, hay $M\in\Delta=(P)\cap(Q),(Q)$ là mặt phẳng đi qua AB và vuông góc với (P).

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-1;2)$, vtpt của (P) $\overrightarrow{n_{(P)}}=(3;1;-1)$

Suy ra vtpt của (Q): $\overrightarrow{n_{(Q)}}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_{(P)}}\right]=(-1;7;4)$

PTTQ $(Q):-1(x-1)+7y+4(z-2)=0$

$\Leftrightarrow x-7y-4z+7=0$

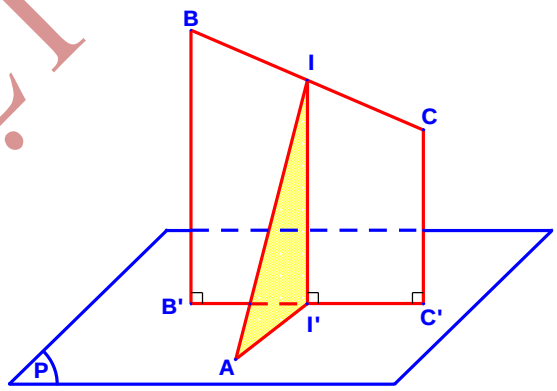
Quỹ tích M là $\begin{cases}x-7y-4z+7=0\\3x+y-z+5=0\end{cases}$.

Câu 48: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(1;0;1);B(3;-2;0);C(1;2;-2)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A sao cho tổng khoảng cách từ B và C đến (P) lớn nhất biết rằng (P) không cắt đoạn BC. Khi đó, điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P)?

A. $G(-2;0;3)$. **B.** $F(3;0;-2)$. **C.** $E(1;3;1)$. **D.** $H(0;3;1)$.

Lời giải

Gọi I là trung điểm đoạn BC; các điểm B',C',I' lần lượt là hình chiếu của B,C,I trên (P).



Ta có tứ giác $BCC'B'$ là hình thang và II' là đường trung bình.

$\Rightarrow d(B,(P))+d(C,(P))=BB'+CC'=2II'$.

Mà $II'\le IA$ (với IA không đổi)

Do vậy, $d(B,(P))+d(C,(P))$ lớn nhất khi $I'\equiv A$

$\Rightarrow (P)$ đi qua A và vuông góc $\overrightarrow{IA}$ với $I(2;0;-1)$.

$\Rightarrow (P):-x+2z-1=0\Rightarrow E(1;3;1)\in(P)$.

Câu 49: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-2;3;1)$ và hai mặt phẳng $(P):x-2y+2z+3=0$ và $(Q):2x+2y-z-5=0$. Gọi $B\in(P),C\in(Q)$ sao cho chu vi tam giác ABC nhỏ nhất. Tính $P=AB+BC+CA$.

A. $P=\dfrac{2\sqrt{321}}{9}$. **B.** $P=\dfrac{2\sqrt{231}}{9}$. **C.** $P=\dfrac{\sqrt{321}}{9}$. **D.** $P=\dfrac{\sqrt{231}}{9}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi A_1,A_2 lần lượt là điểm đối xứng của A qua $(P),(Q)$ ta có $BA=BA_1,CA=CA_2$ và

$P=A_1B+BC+CA_2\ge A_1A_2=P=\dfrac{2\sqrt{321}}{9}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow B=(P)\cap A_1A_2, C=(Q)\cap A_1A_2$. Trong đó tọa độ A_1 là nghiệm hệ

$$\begin{cases}\left(\frac{x-2}{2}\right)-2\left(\frac{y+3}{2}\right)+2\left(\frac{z+1}{2}\right)+3=0\\ \frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{4}{3}\\ y=\frac{5}{3}\\ z=\frac{7}{3}\end{cases}\Rightarrow A_1\left(-\frac{4}{3};\frac{5}{3};\frac{7}{3}\right).$$

Tọa độ điểm A_2 là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}2\left(\frac{x-2}{2}\right)+2\left(\frac{y+3}{2}\right)-\left(\frac{z+1}{2}\right)-5=0\\ \frac{x+2}{2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-1}{-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{2}{9}\\ y=\frac{43}{9}\\ z=\frac{1}{9}\end{cases}\Rightarrow A_2\left(-\frac{2}{9};\frac{43}{9};\frac{1}{9}\right).$$

Câu 50: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-3=0$ và hai điểm $A(1;2;3), B(3;4;5)$. Gọi M là một điểm di động trên (P). Giá trị lớn nhất của biểu thức $\frac{MA+2\sqrt{3}}{MB}$ bằng:

A. $3\sqrt{6+\sqrt{78}}$ **B.** $3\sqrt{3+\sqrt{78}}$ **C.** $\sqrt{54+6\sqrt{78}}$ **D.** $3\sqrt{3}$

Lời giải

Ta dễ dàng nhận thấy $A\in(P)$ và $AB=2\sqrt{3}$ do vậy $P=\frac{MA+2\sqrt{3}}{MB}=\frac{MA+AB}{MB}$.

Áp dụng định lý hàm số sin:

$$P=\frac{\sin MBA+\sin AMB}{\sin MAB}=2\cot\left(\frac{MAB}{2}\right)\cos\left(\frac{MBA-AMB}{2}\right)\le 2\left|\cot\left(\frac{MAB}{2}\right)\right|.$$

Do vậy $P_{\max}\Leftrightarrow \angle MAB$ nhọn và đạt giá trị nhỏ nhất hoặc tù và đạt giá trị lớn nhất. Điều này xảy ra khi và chỉ khi M nằm trên đường thẳng hình chiếu của AB trên (P) và tam giác MAB cân tại A.

Chọn C

Câu 51: **(THPT-Gia-Lộc-Hải-Dương-Lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3)** Mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;1;1)$ cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ sao cho thể tích khối tứ diện $OABC$ nhỏ nhất. Khi đó $a+2b+3c$ bằng

A. 12. **B.** 21. **C.** 15. **D.** 18.

Lời giải

Chọn D

Từ giả thiết ta có $a>0, b>0, c>0$ và thể tích khối tứ diện $OABC$ là $V_{OABC}=\frac{1}{6}abc$.

Ta có phương trình đoạn chắn mặt phẳng (P) có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Mà $M\in(P)\Rightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Áp dụng bất đẳng thức côsi cho ba số ta có: $1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}\Rightarrow abc\ge 27$.

Do đó $V_{OABC}=\frac{1}{6}abc\ge\frac{9}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=3$.

Vậy $\min_{V_{OABC}}=\frac{9}{2}\Leftrightarrow a=b=c=3$. Khi đó $a+2b+3c=18$.

Câu 52: **(TRƯỜNG THỰC HÀNH CAO NGUYÊN – ĐẠI HỌC TÂY NGUYÊN NĂM 2019)** Cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+5)^2=16$ và điểm $A(1;2;-1)$. Điểm $B(a;b;c)$ thuộc mặt cầu sao cho AB có độ dài lớn nhất. Tính $a+b+c$.

A. -6. **B.** 2. **C.** -2. **D.** 12.

Lời giải

Chọn A

+ Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-5)$ và bán kính $R=4$.

+ Gọi Δ là đường thẳng đi qua 2 điểm A và I. Véc tơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u}=\overrightarrow{IA}=(0;0;4)$.

$\Rightarrow$ phương trình đường thẳng Δ là $\begin{cases}x=1\\y=2\\z=-1+4t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

+ Vì $A(1;2;-1)$ thuộc mặt cầu (S) nên AB có độ dài lớn nhất $\Leftrightarrow$ AB là đường kính $\Leftrightarrow$ B là giao điểm còn lại của đường thẳng Δ và mặt cầu (S).

+ $B\in\Delta\Rightarrow B(1;2;-1+4t)$. $B\in(S)\Rightarrow(1-1)^2+(2-2)^2+(-1+4t+5)^2=16\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=-2\end{array}\right.$.

+ Với $t=0\Rightarrow B(1;2;-1)$ (Loại vì $B\equiv A$).

+ Với $t=-2\Rightarrow B(1;2;-9)$.

Vậy $a+b+c=1+2-9=-6$.

Cách 2: Vì $A(1;2;-1)$ thuộc mặt cầu (S) nên AB có độ dài lớn nhất $\Leftrightarrow$ AB là đường kính, tức là I là trung điểm của đoạn AB.

Câu 53: **(Chuyên Lý Tự Trọng Cần Thơ)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=12$ và mặt phẳng $(P):2x+2y-z-3=0$. Viết phương trình mặt phẳng song song với (P) và cắt (S) theo thiết diện là đường tròn (C) sao cho khối nón có đỉnh là tâm mặt cầu và đáy là hình tròn (C) có thể tích lớn nhất.

A. $(Q):2x+2y-z+2=0$ hoặc $(Q):2x+2y-z+8=0$.

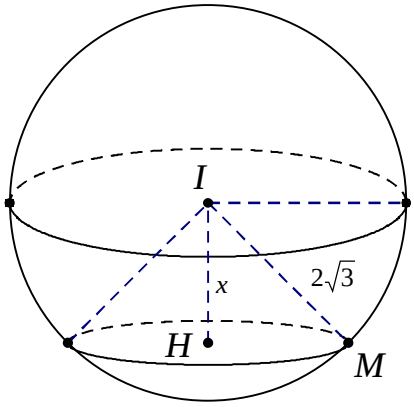
B. $(Q):2x+2y-z-1=0$ hoặc $(Q):2x+2y-z+11=0$.

C. $(Q):2x+2y-z-6=0$ hoặc $(Q):2x+2y-z+3=0$.

D. $(Q):2x+2y-z+2=0$ hoặc $(Q):2x+2y-z+2=0$.

Lời giải

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Chọn B

$(\alpha)//(P)\Rightarrow(\alpha):2x+2y-z+d=0(d\neq -3)$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;3)$, bán kính $R=2\sqrt{3}$.

Gọi (H) là khối nón thỏa đề bài với đường sinh $l=R=2\sqrt{3}$.

Đặt $x=h=d(I,(\alpha))$. Khí đó bán kính đường tròn đáy hình nón : $r=\sqrt{12-x^2}$.

Thể tích khối nón: $V_{(H)}=\frac{1}{3}\pi(12-x^2)x$, với $0<x<2\sqrt{3}$.

Xét sự biến thiên của hàm số : $f(x)=\frac{1}{3}\pi(12-x^2)x$ trên $0<x<2\sqrt{3}$.

x	0		2		$2\sqrt{3}$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗		↘	

Khi đó $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x=2$, hay $d(I,(\alpha))=2$

Vậy : $d(I,(\alpha))=2\Leftrightarrow\frac{|2.1+2.(-2)-3+d|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d-5=6\\d-5=-6\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d=11\\d=-1\end{array}\right.$.

Câu 54: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $E(8;1;1)$ .Viết phương trình mặt phẳng (α) qua E và cắt nửa trục dương Ox,Oy,Oz lần lượt tại A,B,C sao cho OG nhỏ nhất với G là trọng tâm tam giác ABC.

A. $x+y+2z-11=0$.

B. $8x+y+z-66=0$.

C. $2x+y+z-18=0$.

D. $x+2y+2z-12=0$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1 :

Với đáp án A: $A(11;0;0);B(0;11;0);C(0;0;\frac{11}{2})\Rightarrow G(\frac{11}{3};\frac{11}{3};\frac{11}{6})\Rightarrow OG^2=\frac{121}{4}$

Với đáp án B: $A(\frac{33}{4};0;0);B(0;66;0);C(0;0;66)\Rightarrow G(\frac{11}{4};22;22)\Rightarrow OG^2=\frac{15609}{16}$

Với đáp án C: $A(9;0;0);B(0;18;0);C(0;0;18)\Rightarrow G(3;\frac{18}{3};\frac{18}{3})\Rightarrow OG^2=81$

ĐANG ĐẶT ĐỒNG

Với đáp án D: $A(-12;0;0);B(0;6;0);C(0;0;6)\Rightarrow G(-4;2;2)\Rightarrow OG^2=24$

Cách 2 :

Gọi $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$ với $a,b,c>0$. Theo đề bài ta có : $\frac{8}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$. Cần tìm giá trị nhỏ nhất của $a^2+b^2+c^2$.

Ta có $\left(a^2+b^2+c^2\right)(4+1+1)\ge(a.2+b.1+c.1)^2\Rightarrow 6.\left(a^2+b^2+c^2\right)\ge(2a+b+c)^2$

Mặt khác

$$\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)(4+1+1)}\ge(a.2+b.1+c.1)$$

$$\ge(2a+b+c)\left(\frac{8}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$\ge(4+1+1)^2=36$$

Suy ra $a^2+b^2+c^2\ge 6^3$. Dấu "=" xảy ra khi $\frac{a^2}{4}=b^2=c^2\Rightarrow a=2b=2c$.

Vậy $a^2+b^2+c^2$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 216 khi $a=12,b=c=6$.

Vậy phương trình mặt phẳng là : $\frac{x}{12}+\frac{y}{6}+\frac{z}{6}=1$ hay $x+2y+2z-12=0$.

Câu 55: **(KÊNH TRUYỀN HÌNH GIÁO DỤC QUỐC GIA VTV7 –2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt các trục Ox,Oy,Oz lần lượt tại ba điểm A,B,C khác với gốc tọa độ O sao cho biểu thức $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$ có giá trị nhỏ nhất.

A. $(P):x+2y+z-14=0$.

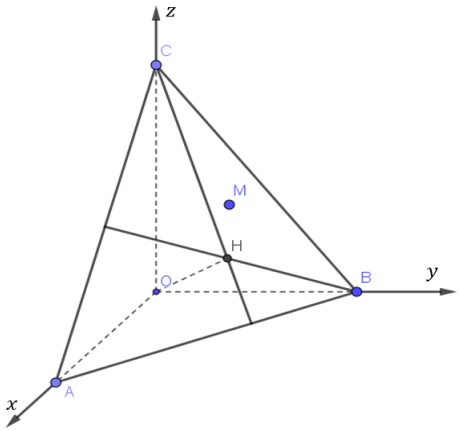
B. $(P):x+2y+3z-14=0$.

C. $(P):x+2y+3z-11=0$.

D. $(P):x+y+3z-14=0$.

Lời giải

Chọn B



Gọi H là trực tâm $\triangle ABC$.

Ta có: $\begin{cases}BH\perp AC\\OB\perp AC\end{cases}\Rightarrow AC\perp(OBH)\Rightarrow AC\perp OH(1)$.

Chứng minh tương tự ta có: $BC\perp OH(2)$.

Từ $(1),(2)\Rightarrow OH\perp(ABC)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Ta có: $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}=\frac{1}{OH^2}$.

Vậy để biểu thức $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất thì OH đạt giá trị lớn nhất.

Mà $OH \le OM$ nên suy ra OH đạt giá lớn nhất bằng OM hay $H \equiv M$.

Vậy $OM \perp (ABC) \Rightarrow (P)$ có 1 vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{OM}=(1;2;3)$.

Phương trình mặt phẳng $(P): 1(x-1)+2(y-2)+3(z-3)=0 \Leftrightarrow x+2y+3z-14=0$.

Câu 56: Phương trình của mặt phẳng nào sau đây đi qua điểm $M(1;2;3)$ và cắt ba tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho thể tích tứ diện $OABC$ nhỏ nhất?

A. $6x+3y+2z+18=0$. **B.** $6x+3y+3z-21=0$.

C. $6x+3y+3z+21=0$. **D.** $6x+3y+2z-18=0$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c) \quad (a,b,c>0)$

(ABC): $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ (1)

M(1;2;3) thuộc (ABC): $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=1$.

Thể tích tứ diện OABC: $V=\frac{1}{6}abc$

Áp dụng BDT Côsi ta có: $1=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c} \ge 3\sqrt[3]{\frac{6}{abc}} \Rightarrow 1 \ge \frac{27.6}{abc} \Rightarrow \frac{1}{6}abc \ge 27 \Rightarrow V \ge 27$

Ta có: V đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow V=27 \Leftrightarrow \frac{1}{a}=\frac{2}{b}=\frac{3}{c}=\frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=6 \\ c=9 \end{cases}$

Vậy (ABC): $6x+3y+2z-18=0$.

Câu 57: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-z+2=0$ và hai điểm $A(3;4;1), B(7;-4;-3)$. Gọi $M(x_0;y_0;z_0)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MA^2+MB^2-2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\left(\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}\right)=96$ và $MA.MB$ đạt giá trị lớn nhất. Tính y_0.

A. $y_0=\frac{7}{3}$. **B.** $y_0=\frac{5}{3}$. **C.** $y_0=-\frac{8}{3}$. **D.** $y_0=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$MA^2+MB^2-2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\left(\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}\right)^2=96$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2-2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\left(\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}\right)^2=96$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}\right)^2=96 \Leftrightarrow AB^2+\left(\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}\right)^2=96$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}\right)^2=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0 \Leftrightarrow MA \perp MB$.

Khi đó theo AM – GM và Pitago, ta có $MA.MB \le \frac{MA^2+MB^2}{2}=\frac{AB^2}{2}=48$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi ΔAMB vuông cân tại M, do đó tọa độ điểm M là nghiệm của hệ $\begin{cases} x+y-z+2=0 \\ (x-3)^2+(y-4)^2+(z-1)^2=48 \\ (x-7)^2+(y+4)^2+(z+3)^2=48 \end{cases} \Leftrightarrow x_0=\frac{7}{3}\pm\frac{2}{\sqrt{3}}, y_0=-\frac{8}{3}, z_0=\frac{5}{3}\pm\frac{2}{\sqrt{3}}.$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

GÓC

Câu 1: **(Ba Đình Lần2)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình: $ax+by+cz-1=0$ với $c<0$ đi qua 2 điểm $A(0;1;0)$, $B(1;0;0)$ và tạo với (Oyz) một góc $60°$. Khi đó $a+b+c$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(5;8)$. **B.** $(8;11)$. **C.** $(0;3)$. **D.** $(3;5)$.

Lời giải.

Chọn C

Mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A, B nên $\begin{cases} b-1=0 \\ a-1=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=1$.

Và (P) tạo với (Oyz) góc $60°$ nên $\cos((P),(Oyz))=\dfrac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{1}}=\dfrac{1}{2}$ (*).

Thay $a=b=1$ vào phương trình được $\sqrt{2+c^2}=2 \Rightarrow c=-\sqrt{2}$.

Khi đó $a+b+c=2-\sqrt{2} \in (0;3)$.

Câu 2: **(Đặng Thành Nam Đề 12)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=4$ và đường thẳng $d:\begin{cases} x=2-t \\ y=t \\ z=m-1-t \end{cases}$. Tổng các giá trị thực của tham số m để d cắt (S) tại hai điểm phân biệt A,B và các tiếp diện của (S) tại A,B tạo với nhau một góc lớn nhất bằng

A. $-1,5$. **B.** 3. **C.** -1. **D.** $-2,25$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-2)$ và bán kính $R=2$.

Các tiếp diện của (S) tại A và B tạo với nhau một góc lớn nhất (bằng $90°$)

$\Leftrightarrow IA \perp IB \Leftrightarrow d(I,d)=\dfrac{R}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

Đường thẳng d đi qua điểm $M(2;0;m-1)$ và có một VTCP $\vec{u}=(-1;1;-1)$.

Suy ra: $\overrightarrow{IM}=(1;0;m+1)$, $\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]=(-m-1;-m;1)$.

$$d(I,d)=\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\left|\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2m^2+2m+2}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2} \Leftrightarrow m^2+m-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-2 \end{array}\right.$$

Vậy tổng các giá trị thực của tham số m bằng -1.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;2;0)$, $B(2;0;-2)$ và mặt phẳng $(P):x+2y-z-1=0$. Tìm điểm $M \in (P)$ sao cho $MA=MB$ và góc $\widehat{AMB}$ có số đo lớn nhất.

A. $M\left(\dfrac{14}{11};\dfrac{-1}{11};\dfrac{1}{11}\right)$. **B.** $M\left(\dfrac{2}{11};\dfrac{4}{11};\dfrac{-1}{11}\right)$. **C.** $M(2;-1;-1)$. **D.** $M(-2;2;1)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\begin{cases} M \in (P) \\ MA = MB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z-1=0 \\ (x-2)^2+(y-2)^2+z^2=(x-2)^2+y^2+(z+2)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3z+1 \\ y=-z \end{cases}$

Do đó $M(3z+1;-z;z)$ và $\overrightarrow{MA}=(1-3z;2+z;-z), \overrightarrow{MB}=(1-3z;z;-2-z)$

Do đó $\cos\widehat{AMB}=\dfrac{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}}{MA.MB}=\dfrac{(1-3z)^2+z(2+z)+z(2+z)}{(1-3z)^2+z^2+(2+z)^2}$

$=1-\dfrac{4}{11\left(z-\dfrac{1}{11}\right)^2+\dfrac{54}{11}} \geq \dfrac{5}{27} \Rightarrow \widehat{AMB} \leq \arccos\dfrac{5}{27}$.

Dấu bằng đạt tại $z=\dfrac{1}{11} \Rightarrow M\left(\dfrac{14}{11};\dfrac{-1}{11};\dfrac{1}{11}\right)$.

Câu 4: Trong không gian Oxyz, cho 2 đường thẳng d: $\begin{cases} x=3+t \\ y=-2-t \\ z=\sqrt{2}t \end{cases}$ và d': $\begin{cases} x=t' \\ y=5+t' \\ z=\sqrt{2}t'-3\sqrt{2}-5 \end{cases}$

Viết phương trình mặt phẳng (β) chứa (d) và tạo với mặt phẳng Oyz một góc nhỏ nhất.

A. $3x+y+\sqrt{2}z+7=0$. **B.** $3x-y-\sqrt{2}z-7=0$.

C. $-3x+y-\sqrt{2}z+7=0$. **D.** $3x+y-\sqrt{2}z-7=0$.

Lời giải

Giả sử (β): $Ax+By+Cz+D=0$ (đk: $A^2+B^2+C^2>0$), (β) có vtpt là $\vec{n}=(A;B;C)$

d $\subset$ (β) $\Leftrightarrow \begin{cases} A \in (\beta) \\ \vec{n}.\vec{a}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3A-2B+D=0 \\ A-B+C\sqrt{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D=-A+2C\sqrt{2} \\ B=A+C\sqrt{2} \end{cases}$

$\cos((\widehat{\beta),(Oyz)})=\left|\cos(\vec{n},\vec{i})\right|=\dfrac{|A|}{\sqrt{A^2+(A+C\sqrt{2})^2+C^2}}$

TH 1: A = 0 (không thoả đb hoặc $(\widehat{\beta),(Oyz)}$ không nhỏ nhất)

TH 2: A ≠ 0, ta có:

$\cos((\widehat{\beta),(Oyz)})=\dfrac{1}{\sqrt{1+(1+\dfrac{C}{A}\sqrt{2})^2+(\dfrac{C}{A})^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{(\dfrac{C}{A}\sqrt{3})^2+2.\dfrac{C}{A}\sqrt{2}+(\dfrac{\sqrt{6}}{3})^2+\dfrac{12}{9}}}=$

$\dfrac{1}{\sqrt{(\dfrac{C}{A}\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{6}}{3})^2+\dfrac{12}{9}}}$

$(\widehat{\beta),(Oyz)}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \cos((\widehat{\beta),(Oyz)})$ lớn nhất $\Leftrightarrow (\dfrac{C}{A}\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{6}}{3})^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$

$\dfrac{C}{A}\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{6}}{3}=0$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \text{ (choïn)} \\ C=-\dfrac{\sqrt{2}}{3} \end{cases}$ nên $\begin{cases} B=\dfrac{1}{3} \\ D=-\dfrac{7}{3} \end{cases}$. Vậy: (β): $3x+y-\sqrt{2}z-7=0$

Chọn D

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (Q): $x+2y-z+5=0$ và đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-3}{1}$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng *d* và tạo với mặt phẳng (Q) một góc nhỏ nhất là

A. $(P): y-z+4=0$ **B.** $(P): x-z+4=0$

C. $(P): x+y-z+4=0$ **D.** $(P): y-z-4=0$

Lời giải

PT mặt phẳng (P) có dạng: $ax+by+cz+d=0\ (a^2+b^2+c^2\neq 0)$. Gọi $\alpha=\widehat{((P),(Q))}$.

Chọn hai điểm $M(-1;-1;3), N(1;0;4)\in d$. Ta có: $\begin{cases} M\in(P) \\ N\in(P) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=-a-b \\ d=7a+4b \end{cases}$

$\Rightarrow$ (P): $ax+by+(-2a-b)z+7a+4b=0 \Rightarrow \cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{6}}.\dfrac{|a+b|}{\sqrt{5a^2+4ab+2b^2}}$

TH1: Nếu a = 0 thì $\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{6}}.\dfrac{|b|}{\sqrt{2b^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \alpha=30^0$.

TH2: Nếu $a\neq 0$ thì $\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{6}}.\dfrac{\left|1+\dfrac{b}{a}\right|}{\sqrt{5+4\dfrac{b}{a}+2\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}}$. Đặt $x=\dfrac{b}{a}$ và $f(x)=\cos^2\alpha$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{9}{6}.\dfrac{x^2+2x+1}{5+4x+2x^2}$.

Dựa vào BBT, ta thấy $\min f(x)=0\Leftrightarrow\cos\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=90^0>30^0$

Do đó chỉ có trường hợp 1 thoả mãn, tức a = 0. Khi đó chọn $b=1, c=1, d=4$.

Vậy: (P): $y-z+4=0$.

Chọn A

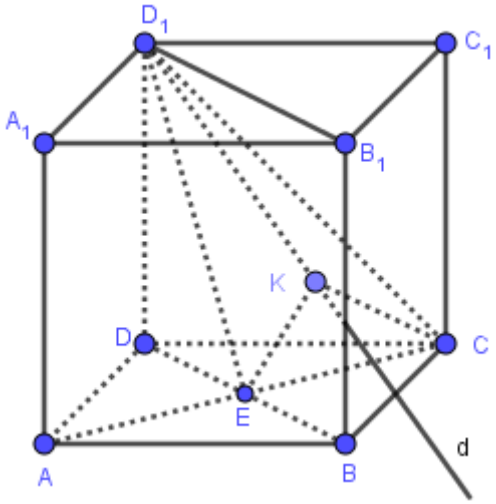
Câu 6: **(SỞ QUẢNG BÌNH NĂM 2019)** Trong không gian *Oxyz*, cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ biết $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $A_1(0;0;1)$. Gọi $(P): ax+by+cz-3=0$ (với *a*, *b*, $c\in\mathbb{Z}^*$) là phương trình mặt phẳng chứa CD_1 và tạo với mặt phẳng (BB_1D_1D) một góc có số đo nhỏ nhất. Giá trị của $T=a+b+c$ bằng

A. -1. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Từ giả thiết ta có $C(1;1;0)$, $B_1(1;0;1)$, $D_1(0;1;1)$.

Gọi d là giao tuyến của (P) và (BB_1D_1D), E là trung điểm của AC; K là hình chiếu vuông góc của E trên d. Ta có $\begin{cases} d \perp CE \\ d \perp EK \end{cases} \Rightarrow d \perp (ECK) \Rightarrow ((P),(BB_1D_1D)) = \widehat{EKC}$.

Do đó $\sin((P),(BB_1D_1D)) = \sin\widehat{EKC} = \dfrac{CE}{CK} \geq \dfrac{CE}{CD_1} = \dfrac{1}{2}$ suy ra góc giữa mặt phẳng (P) và (BB_1D_1D) nhỏ nhất bằng 30°. Dấu "=" xảy ra khi d vuông góc với CD_1, mặt khác d vuông góc với AC suy ra d cùng phương với $\left[\overrightarrow{CD_1}, \overrightarrow{AC}\right]$. Do đó

$\overrightarrow{CD_1} = (-1;0;1)$; $\overrightarrow{AC} = (1;1;0)$; $\vec{n}_P = \left[\left[\overrightarrow{CD_1}, \overrightarrow{AC}\right], \overrightarrow{CD_1}\right] = (1;2;1)$

Vậy $(P): x+2y+z-3=0$, do đó $a+b+c=4$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z}{-1}$ và $d_2 : \dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 sao cho góc giữa mặt phẳng (P) và đường thẳng d_2 là lớn nhất.

A. $x+y+z+6=0$. **B.** $7x-y+5z-9=0$. **C.** $x+y-z-6=0$. **D.** $x+y+z-3=0$.

Lời giải

Ta có: d_1 đi qua $M(1;-2;0)$ và có VTCP $\vec{u} = (1;2;-1)$.

Phương trình mặt phẳng (P) có dạng: $A(x-1)+B(y+2)+Cz=0, (A^2+B^2+C^2 \neq 0)$.

Ta có: $d \subset (P) \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{n} = 0 \Leftrightarrow C = A+2B$

Gọi $\alpha = ((P), d_2) \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{|4A+3B|}{3\sqrt{2A^2+4AB+5B^2}} = \dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{\dfrac{(4A+3B)^2}{2A^2+4AB+5B^2}}$

Với $B=0 \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

Với $B \neq 0$. Đặt $t = \dfrac{A}{B}$, ta được $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}\cdot\sqrt{\dfrac{(4t+3)^2}{2t^2+4t+5}}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{(4t+3)^2}{2t^2+4t+5}$. Ta có: $f'(t)=\dfrac{16t^2+124t+84}{(2t^2+4t+5)^2}$

$f'(t)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-\dfrac{3}{4}\\t=-7\end{array}\right.$

Dựa vào BBT ta có: $\max f(t)=\dfrac{25}{3}$ khi $t=-7\Leftrightarrow\dfrac{A}{B}=-7$

Khi đó: $\sin\alpha=f(-7)=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$

Vậy $\sin\alpha=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$ khi $\dfrac{A}{B}=-7\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng $(P):7x-y+5z-9=0$

Câu 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{-1}$ và $d_2:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d_1 sao cho góc giữa mặt phẳng (P) và đường thẳng d_2 là lớn nhất. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

A. (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;-1;2)$.

B. (P) qua điểm $A(0;2;0)$.

C. (P) song song với mặt phẳng $(Q):7x-y+5z-3=0$.

D. (P) cắt d_2 tại điểm $B(2;-1;4)$.

Lời giải

d_1 qua $M(1;-2;0)$ và có VTCP $\vec{u}=(1;2;-1)$. Vì $d_1\subset(P)$ nên $M\in(P)$.

Pt mặt phẳng (P) có dạng: $A(x-1)+B(y+2)+Cz=0\left(A^2+B^2+C^2\neq0\right)$.

Ta có: $d_1\subset(P)\Rightarrow\vec{u}.\vec{n}=0\Rightarrow C=A+2B$.

Gọi $\alpha=\left(\widehat{(P),d_2}\right)\Rightarrow\sin\alpha=\dfrac{|4A+3B|}{3\sqrt{2A^2+4AB+5B^2}}=\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{(4A+3B)^2}{2A^2+4AB+5B^2}}$.

TH1: Với $B=0$ thì $\sin\alpha=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

TH2: Với $B\neq0$. Đặt $t=\dfrac{A}{B}$, ta được: $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{(4t+3)^2}{2t^2+4t+5}}$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{(4t+3)^2}{2t^2+4t+5}$. Dựa vào bảng biến thiên ta có: $\max f(x)=\dfrac{25}{7}$ khi $t=-7$ khi $\dfrac{A}{B}=-7$.

Khi đó $\sin\alpha=f(-7)=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$.

So sánh TH1 và TH2 $\Rightarrow\alpha$ lớn nhất với $\sin\alpha=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$ khi $\dfrac{A}{B}=-7$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Vậy phương trình mặt phẳng $(P): 7x-y+5z-9=0$.

Chọn B

Câu 9: Trong không gian tọa độ *Oxyz* cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=-t\\y=-1+2t\\z=2+t\end{cases}$ và mp (P): $2x-y-2z-2=0$. Viết phương trình mặt phẳng (R) qua *d* và tạo với (P) một góc nhỏ nhất.

A. $x-y-z+3=0$ **B.** $x+y-z+3=0$

C. $x+y+z+3=0$ **D.** $x-y+z+3=0$

Lời giải

Đường thẳng *d* là giao tuyến của hai mặt phẳng: $\begin{cases}\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+1}{2}\\\dfrac{x}{-1}=\dfrac{z-2}{1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y+1=0\\x+z-2=0\end{cases}$.

Do vậy mặt phẳng (R) qua *d* thì (R) thuộc chùm mặt phẳng: $2x+y+1+m(x+z-2)=0$.

Hay mp(R): $(2+m)x+y+mz+1-2m=0$ (*). Mp(R) có

$\vec{n}_1=(m+2;1;m);\vec{n}_P=(2;-1;-2)$.

Vậy:

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_P}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\left|n_P\right|}=\frac{2(m+2)+1-2m}{\sqrt{(m+2)^2+1+m^2}\sqrt{4+1+4}}=\frac{5}{3\sqrt{2m^2+4m+5}}=\frac{5}{3}\frac{1}{\sqrt{2(m+1)^2+3}}\le\frac{5}{3\sqrt{3}}$$

Do α nhỏ nhất cho nên $\cos\alpha$ lớn nhất khi $m=-1$.

Vậy thay vào (*) ta có mp(R): $x+y-z+3=0$.

Chọn B

KHOẢNG CÁCH

Câu 10: Trong không gian với hệ trục toạ độ *Oxyz*, cho điểm $A(10;2;1)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{3}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A, song song với đường thẳng d sao cho khoảng cách giữa d và (P) lớn nhất. Khoảng cách từ điểm $M(-1;2;3)$ đến mp(P) là

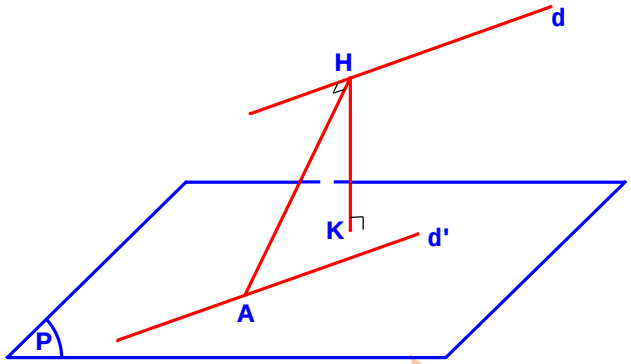
A. $\dfrac{97\sqrt{3}}{15}$. **B.** $\dfrac{76\sqrt{790}}{790}$. **C.** $\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$. **D.** $\dfrac{3\sqrt{29}}{29}$.

Lời giải:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

(P) là mặt phẳng đi qua điểm A và song song với đường thẳng d nên (P) chứa đường thẳng d' đi qua điểm A và song song với đường thẳng d.

Gọi H là hình chiếu của A trên d, K là hình chiếu của H trên (P).



Ta có $d\left(d,(P)\right)=HK\le AH$ (AH không đổi)

$\Rightarrow$ GTLN của $d(d,(P))$ là AH

$\Rightarrow d\left(d,(P)\right)$ lớn nhất khi AH vuông góc với (P).

Khi đó, nếu gọi (Q) là mặt phẳng chứa A và d thì (P) vuông góc với (Q).

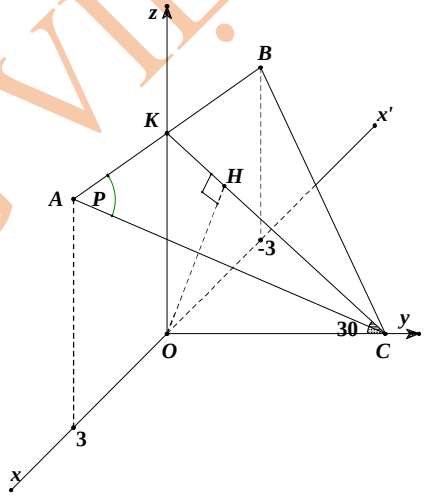
$\Rightarrow \vec{n}_P=\left[\vec{u}_d,\vec{n}_Q\right]=(98;14;-70)$

$\Rightarrow (P):7x+y-5z-77=0\Rightarrow d\left(M,(P)\right)=\dfrac{97\sqrt{3}}{15}.$

Câu 11: Cho mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(3,0,4),B(-3,0,4)$ và hợp với mặt phẳng (xOy) một góc 30^0 và cắt $y'Oy$ tại C. Tính khoảng cách từ O đến (P).

A. $4\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $2\sqrt{3}$

Lời giải



Vẽ $OH\perp KC$ với K là giao điểm của AB và trục $z'Oz$.

Ta có: $\hat{C}=30^0\Rightarrow \hat{K}=60^0;OK=4$

$\Rightarrow d\left(O,P\right)=OH=OK.\sin 60^0$

$=4.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}.$

Chọn D

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;0)$, $B(-2;0;3)$, $M(0;0;1)$ và $N(0;3;1)$. Mặt phẳng (P) đi qua các điểm M, N sao cho khoảng cách từ điểm B đến (P) gấp hai lần khoảng cách từ điểm A đến (P). Có bao mặt phẳng (P) thỏa mãn đầu bài?

A. Có vô số mặt phẳng (P).
B. Chỉ có một mặt phẳng (P).
C. Không có mặt phẳng (P) nào.
D. Có hai mặt phẳng (P).

Lời giải

Chọn A

Giả sử (P) có phương trình là $ax+by+cz+d=0\left(a^2+b^2+c^2\neq 0\right)$

Vì $M\in(P)\Rightarrow c+d=0\Leftrightarrow d=-c.$

Vì $N\in(P)\Rightarrow 3b+c+d=0$ hay $b=0$ vì $c+d=0.$

$\Rightarrow (P):ax+cz-c=0.$

Theo bài ra: $d\left(B,(P)\right)=2d\left(A,(P)\right)\Leftrightarrow \dfrac{|-2a+3c-c|}{\sqrt{a^2+c^2}}=2\dfrac{|a-c|}{\sqrt{a^2+c^2}}\Leftrightarrow |c-a|=|a-c|$

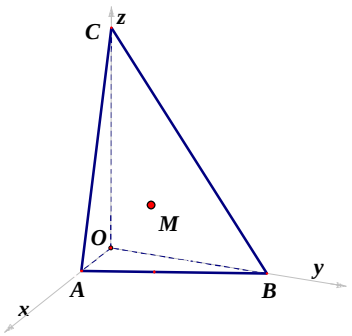
Vậy có vô số mặt phẳng (P).

Câu 13: **(ĐOÀN THƯỢNG-HẢI DƯƠNG LẦN 2 NĂM 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;2;1)$ và cắt các tia Ox,Oy,Oz lần lượt tại A,B,C sao cho độ dài OA,OB,OC theo thứ tự tạo thành một cấp số nhân có công bội bằng 2. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O tới mặt phẳng (α).

A. $\dfrac{4}{\sqrt{21}}$.
B. $\dfrac{\sqrt{21}}{21}$.
C. $\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$.
D. $9\sqrt{21}$.

Lời giải

Chọn C



Đặt $OA=a\,(a>0)$. Khi đó $OB=2a$, $OC=4a$.

Áp dụng phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn ta có mặt phẳng (α) có phương trình $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{2a}+\dfrac{z}{4a}=1$.

Do $M(1;2;1)\in(\alpha)$ nên $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{2a}+\dfrac{1}{4a}=1\Leftrightarrow\dfrac{9}{4a}=1\Leftrightarrow a=\dfrac{9}{4}$ (thỏa mãn $a>0$).

Phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) là: $4x+2y+z-9=0$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Suy ra: $d\left(O;(\alpha)\right)=\dfrac{\left|4.0+2.0+0-9\right|}{\sqrt{4^2+2^2+1^2}}=\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$.

Câu 14: **(SGD-Nam-Định-2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(1,-2,0)$; $B(3,3,2)$; $C(-1,2,2)$; $D(3,3,1)$. Độ dài đường cao của tứ diện $ABCD$ hạ từ đỉnh D xuống mặt phẳng (ABC) bằng

A. $\dfrac{9}{7\sqrt{2}}$ **B.** $\dfrac{9}{7}$ **C.** $\dfrac{9}{14}$ **D.** $\dfrac{9}{\sqrt{2}}$

Lời giải

Chọn A

Ta có:

Mặt phẳng (ABC) có $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(1,-4,9)$ là véc-tơ pháp tuyến (ABC) và đi qua điểm $A(1,-2,0)$ nên có phương trình dạng:

$1(x-1)-4(y+2)+9(z-0)\Leftrightarrow x-4y+9z-9=0$

Độ dài đường cao của tứ diện $ABCD$ hạ từ điểm D:

$$d\left(D,(ABC)\right)=\frac{\left|x_D-4y_D+9z_D-9\right|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+9^2}}=\frac{\left|3-4.3+9.1-9\right|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+9^2}}=\frac{9}{7\sqrt{2}}$$

Câu 15: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, hai mặt phẳng $4x-4y+2z-7=0$ và $2x-2y+z+1=0$ chứa hai mặt của hình lập phương. Thể tích khối lập phương đó là

A. $V=\dfrac{27}{8}$ **B.** $V=\dfrac{81\sqrt{3}}{8}$. **C.** $V=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ **D.** $V=\dfrac{64}{27}$

Lời giải

Theo bài ra hai mặt phẳng $4x-4y+2z-7=0$ và $2x-2y+z+1=0$ chứa hai mặt của hình lập phương. Mà hai mặt phẳng $(P):4x-4y+2z-7=0$ và $(Q):2x-2y+z+1=0$ song song với nhau nên khoảng cách giữa hai mặt phẳng sẽ bằng cạnh của hình lập phương.

Ta có $M(0;0;-1)\in(Q)$ nên $d((Q),(P))=d(M,(P))=\left|\dfrac{-2-7}{\sqrt{4^2+(-4)^2+2^2}}\right|=\dfrac{3}{2}$

Vậy thể tích khối lập phương là $V=\dfrac{2}{3}.\dfrac{2}{3}.\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{27}$.

Câu 16: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(BC'D)$.

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn A

Ta chọn hệ trục tọa độ sao cho các đỉnh của hình lập phương có tọa độ như sau:

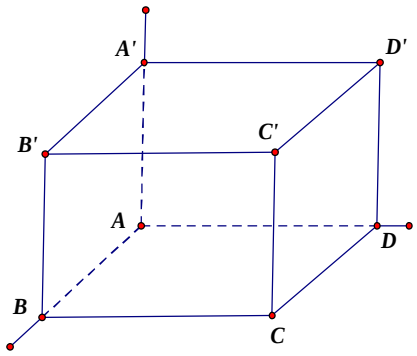
ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$A(0;0;0)$ $B(2;0;0)$ $C(2;2;0)$ $D(0;2;0)$

$A'(0;0;2)$ $B'(2;0;2)$ $C'(2;2;2)$ $D'(0;2;2)$

$\overrightarrow{AB'}=(2;0;2)$, $\overrightarrow{AD'}=(0;2;2)$,

$\overrightarrow{BD}=(-2;2;0)$, $\overrightarrow{BC'}=(0;2;2)$



* Mặt phẳng $(AB'D')$ qua $A(0;0;0)$ và nhận véctơ $\vec{n}=\frac{1}{4}\left[\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{AD'}\right]=(-1;-1;1)$ làm véctơ pháp tuyến.

Phương trình $(AB'D')$ là $x+y-z=0$.

* Mặt phẳng $(BC'D)$ qua $B(2;0;0)$ và nhận véctơ $\vec{m}=\frac{1}{4}\left[\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC'}\right]=(1;1;-1)$ làm véctơ pháp tuyến.

Phương trình $(BC'D)$ là $x+y-z-2=0$.

Suy ra hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(BC'D)$ song song với nhau nên khoảng cách giữa hai mặt phẳng chính là khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(BC'D)$: $d\left(A,(BC'D)\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

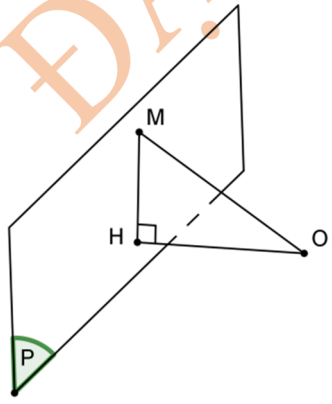
Cách khác: Thấy khoảng cách cần tìm $d\left((AB'D'),(BC'D)\right)=\frac{1}{3}AC'=\frac{1}{3}.2\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

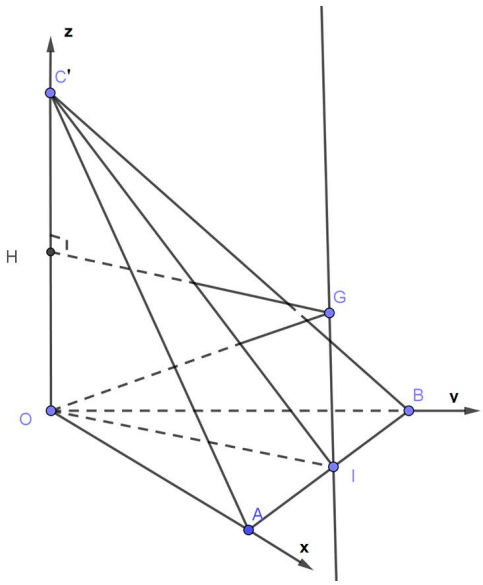
Câu 17: **(SỞ GDĐT KIÊN GIANG 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho $M(1;2;-1)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm M và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất. Mặt phẳng (P) cắt các trục tọa độ tại các điểm A,B,C. Tính thể tích V của khối cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

A. $27\sqrt{6}\pi$. **B.** $216\sqrt{6}\pi$. **C.** 972π. **D.** $\frac{243\pi}{2}$.

Lời giải

Chọn D





Gọi H là hình chiếu của O mặt phẳng (P). Khi đó: $d\left(O,(P)\right)=OH$.

Trong tam giác vuông OHM: $OH\le OM$ nên $d\left(O,(P)\right)$ đạt giá trị lớn nhất khi $d\left(O,(P)\right)=OM$ hay $OM\perp(P)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Phương trình mặt phẳng (P) qua $M(1;2;-1)$ và nhận $\overrightarrow{OM}=(1;2;-1)$ làm véc tơ pháp tuyến là $x+2y-z-6=0$.

(P) cắt các trục Ox,Oy,Oz lần lượt tại $A(6;0;0), B(0;3;0), C(0;0;-6)$.

Xét tứ diện $OABC'$ với $OC'=6, OA=6, OB=3$.

Gọi I là trung điểm của AB, trong mp (OAB). Gọi d qua I và song song trục Oz.

Lấy H là trung điểm OC'. Mặt phẳng trung trực của OC' qua H cắt d tại G.

Suy ra : $GC'=GO=GA=GB=R$.

Tam giác vuông OAB: $OI=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+3^2}=\frac{\sqrt{45}}{2}\Rightarrow OI=HG=\frac{\sqrt{45}}{2}$.

$OH=\frac{1}{2}OC'=3$.

Tam giác vuông $OHG: R=OG=\sqrt{HG^2+OH^2}=\frac{9}{2}$.

Thể tích V của khối cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ bằng thể tích khối cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC'$ là $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{243\pi}{2}$ (đvtt).

Câu 18: **(KINH MÔN HẢI DƯƠNG 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(2;3;5)$ cắt các tia Ox,Oy,Oz lần lượt tại ba điểm A,B,C sao cho OA,OB,OC theo thứ tự lập thành cấp số nhân có công bội bằng 3. Khoảng cách từ O đến mặt phẳng (P) là

A. $\frac{16}{\sqrt{91}}$. **B.** $\frac{24}{\sqrt{91}}$. **C.** $\frac{32}{\sqrt{91}}$. **D.** $\frac{18}{\sqrt{91}}$.

Lời giải

Chọn C

Vì (P) cắt các tia Ox,Oy,Oz lần lượt ở A,B,C nên ta gọi tọa độ các điểm là $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a,b,c>0$.

Khi đó phương trình mặt phẳng $(P):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Vì $M(2;3;5)\in(P)\Rightarrow\frac{2}{a}+\frac{3}{b}+\frac{5}{c}=1$.

Vì đô dài các đoạn OA,OB,OC lập thành cấp số nhân với công bội bằng 3

$\Rightarrow\begin{cases}b=3a\\c=3b=9a\end{cases}$.

$\Rightarrow\frac{2}{a}+\frac{3}{3a}+\frac{5}{9a}=1\Leftrightarrow a=\frac{32}{9}\Rightarrow\begin{cases}b=\frac{32}{3}\\c=32\end{cases}$

Khi đó ta có phương trình mặt phẳng $(P):\frac{x}{\frac{32}{9}}+\frac{y}{\frac{32}{3}}+\frac{z}{32}=1$

Hay $(P):9x+3y+z-32=0$.

Do đó: $d(O;(P))=\frac{|-32|}{\sqrt{9^2+3^2+1^2}}=\frac{32}{\sqrt{91}}$.

Bình luận:

Bài này có thể dùng cách khác như sau:

Khoảng cách từ O đến (ABC): $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(3a)^2}+\frac{1}{(9a)^2}\Rightarrow h=\frac{9a}{\sqrt{91}}$

Mà $a=\frac{32}{9}$ (theo trên). từ đó tìm được $h=\frac{32}{\sqrt{91.}}$.

Câu 19: **(NGUYỄN TRUNG THIÊN HÀ TĨNH)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{3}$ và mặt phẳng $(P):2x+y-z=0$. Mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng (P). Khoảng cách từ điểm $O(0;0;0)$ đến mặt phẳng (Q) bằng

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** $\frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn C

+ Đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{3}$ đi qua điểm $M(1;0;-1)$ và có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;1;3)$.

+ Mặt phẳng $(P):2x+y-z=0$ có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=(2;1;-1)$.

+ Gọi $\vec{n}_{(Q)}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (Q).

Vì mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng (P) nên $\begin{cases}\vec{n}_{(Q)}\perp\vec{u}\\ \vec{n}_{(Q)}\perp\vec{n}_{(P)}\end{cases}$ và (Q) đi qua điểm $M(1;0;-1)$.

Do đó mặt phẳng (Q) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(Q)}=\vec{u}\wedge\vec{n}_{(P)}=(-4;8;0)=-4(1;-2;0)$.

Phương trình của mặt phẳng (Q) là: $1.(x-1)-2(y-0)=0\Leftrightarrow x-2y-1=0$.

+ Vậy khoảng cách từ điểm $O(0;0;0)$ đến mặt phẳng (Q) bằng

$d(O;(Q))=\frac{|0-2.0-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Câu 20: **(THPT SỐ 1 TƯ NGHĨA LẦN 2 NĂM 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P_m):mx+m(m+1)y+(m-1)^2z-1=0$ (m là tham số) và đường thẳng d có vec-tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;2;3)$. Đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (Oxy), Δ vuông góc với d và cắt mặt phẳng (P_m) tại một điểm cố định. Tính khoảng cách h từ $A(1;-5;0)$ đến đường thẳng Δ.

A. $h=5\sqrt{2}$. **B.** $h=\sqrt{19}$. **C.** $h=\sqrt{21}$. **D.** $h=2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $mx+m(m+1)y+(m-1)^2z-1=0\Leftrightarrow m^2(y+z)+m(x+y-2z)+z-1=0$.

Giả sử $M(x_0;y_0;z_0)$ là điểm cố định mà mặt phẳng (P_m) luôn đi qua.

$\Leftrightarrow m^2(y_0+z_0)+m(x_0+y_0-2z_0)+z_0-1=0\ \forall m\in\mathbb{R}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 + z_0 = 0 \\ x_0 + y_0 - 2z_0 = 0 \\ z_0 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = -1 \\ z_0 = 1 \end{cases}$.

Suy ra $M(3;-1;1)$.

Vì Δ cắt mặt phẳng (P_m) tại một điểm cố định và M là điểm cố định mà mặt phẳng (P_m) luôn đi qua nên $M(3;-1;1) \in \Delta$.

Mặt phẳng (Oxy) có vec-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (0;0;1)$.

Vì $\begin{cases} \Delta // (Oxy) \\ \Delta \perp d \end{cases}$ nên Δ có vec-tơ chỉ phương $\vec{u_1} = [\vec{u}, \vec{n}] = (2;-1;0)$.

Vậy Δ đi qua $M(3;-1;1)$ và có vec-tơ chỉ phương $\vec{u_1} = (2;-1;0)$.

Do vậy ta có $h = \mathrm{d}(A,\Delta) = \dfrac{\left|\left[\vec{u_1}, \overrightarrow{AM}\right]\right|}{\left|\vec{u_1}\right|} = \sqrt{21}$.

Câu 21: **(KINH MÔN II LẦN 3 NĂM 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;2;2)$, $B(2;1;2)$, $C(-1;5;1)$, $D(3;1;1)$ và $E(0;-1;2)$. Có bao nhiêu mặt phẳng cách đều năm điểm đã cho?

A. Vô số. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

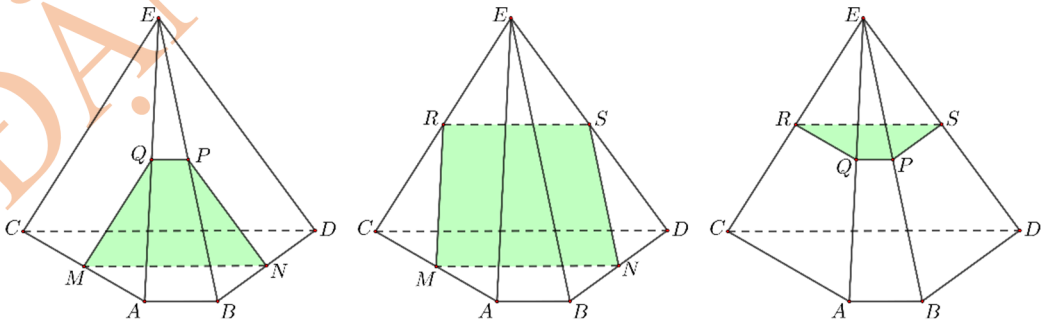
Ta có: $\overrightarrow{AB} = (1;-1;0)$, $\overrightarrow{CD} = (4;-4;0)$, $\overrightarrow{AD} = (2;-1;-1)$, $\overrightarrow{BC} = (-3;4;-1)$. Nhận thấy $\overrightarrow{CD} = 4\overrightarrow{AB}$ và $AD < BC$ bốn điểm A, B, C, D tạo thành một hình thang hai đáy là AB và CD

Mặt khác $\overrightarrow{AC} = (-2;3;-1)$ và $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = (1;1;1)$ nên $(ABC): x + y + z - 5 = 0$

Suy ra $E \notin (ABC)$. Vậy 5 điểm A, B, C, D, E tạo thành hình chóp có đỉnh là E.

Gọi M, N; P, Q; R, S lần lượt là trung điểm của AC, BD; EB, EA; EC, ED.

Ta dễ chứng minh được các mặt phẳng $(MNQP)$, $(MNSR)$, $(PQRS)$ là các mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy có 3 mặt phẳng cách đều 5 điểm đã cho.



Câu 22: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, gọi (α) là mặt phẳng qua hai điểm $A(2;0;1)$ và $B(-2;0;5)$ đồng thời hợp với mặt phẳng (Oxz) một góc 45^0. Khoảng cách từ O tới (α) là

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Gọi $K;H$ lần lượt là hình chiếu vuông góc điểm O lên đường thẳng AB và mặt phẳng (α).

Ta có: $A,B\in(Oxz)$

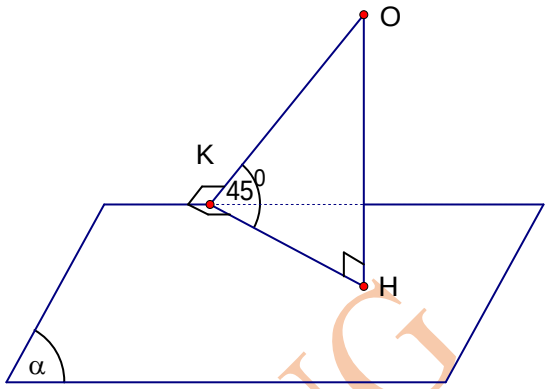
$\Rightarrow(\alpha)\cap(Oxz)=AB$

$\begin{cases}OH\perp(\alpha)\\OK\perp AB\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}HK\perp AB\\OK\perp AB\end{cases}$

$\Rightarrow\left(\widehat{(Oxz),(\alpha)}\right)=\left(\widehat{KH,OK}\right)=\widehat{OKH}$

Suy ra tam giác OHK vuông cân tại H

Khi đó: $d\left(O,(\alpha)\right)=OH=\dfrac{OK}{\sqrt{2}}$.



Mặt khác:

$$OK=d\left(O,AB\right)=\frac{\left|\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Khi đó: $d\left(O,(\alpha)\right)=OH=\dfrac{OK}{\sqrt{2}}=\dfrac{3}{2}$.

Chọn A

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a, b, c dương. Biết A, B, C di động trên các tia Ox, Oy, Oz sao cho $a+b+c=2$. Biết rằng khi a, b, c thay đổi thì quỹ tích tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ thuộc mặt phẳng (P) cố định. Tính khoảng cách từ $M\left(2016;0;0\right)$ tới mặt phẳng (P).

A. 2017. **B.** $\dfrac{2014}{\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{2016}{\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{2015}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi (α) là mặt phẳng trung trực của đoạn OA

$\Rightarrow(\alpha)$ đi qua điểm $D\left(\dfrac{a}{2};0;0\right)$ và có VTPT $\overrightarrow{OA}=(a;0;0)=a(1;0;0)$

$\Rightarrow(\alpha):x-\dfrac{a}{2}=0$.

Gọi (β) là mặt phẳng trung trực của đoạn OB

$\Rightarrow(\beta)$ đi qua điểm $E\left(0;\dfrac{a}{2};0\right)$ và có VTPT $\overrightarrow{OB}=(0;a;0)=a(0;1;0)$

$\Rightarrow(\beta):y-\dfrac{a}{2}=0$.

Gọi (γ) là mặt phẳng trung trực của đoạn OC

$\Rightarrow(\gamma)$ đi qua điểm $F\left(0;0;\dfrac{a}{2}\right)$ và có VTPT $\overrightarrow{OC}=(0;0;a)=a(0;0;1)$

$\Rightarrow(\gamma):z-\dfrac{a}{2}=0$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC \Rightarrow I=(\alpha)\cap(\beta)\cap(\gamma)\Rightarrow I\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$.

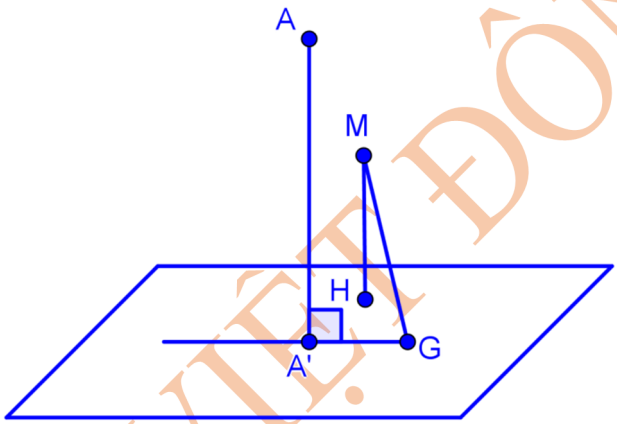
Mà theo giả thiết, $a+b+c=2\Leftrightarrow\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}=1\Rightarrow I\in(P):x+y+z=1$.

Vậy, $d\left(M,(P)\right)=\frac{|2016-1|}{\sqrt{3}}=\frac{2015}{\sqrt{3}}$.

Câu 24: Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz* gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(1,0,0)$ có hình chiếu trên mặt phẳng $(P):x-2y-2z+8=0$ là d'. Giả sử giá trị lớn nhất và nhỏ nhất khoảng cách từ điểm $M(2,-3,-1)$ tới d' là α và β. Tính giá trị của $T=\alpha+\beta$?

A. $\sqrt{2}$ **B.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$ **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$

Lời giải



Ta có xét A' là hình chiếu của A trên (P). Khi đó đường thẳng d' đi qua điểm A'. Ta gọi G là hình chiếu của M trên đường thẳng d' và H là hình chiếu của M trên (P). Ta có các đánh giá:

$MH\le MG\le MA'\Rightarrow \boxed{T=\alpha+\beta=MA'+MH=\frac{\sqrt{6}}{3}}$

Câu 25: Trong không gian với hệ trục tọa độ *Oxyz*, cho hai điểm $M(0;-1;2)$ và $N(-1;1;3)$. Mặt phẳng *(P)* đi qua *M, N* sao cho khoảng cách từ $K(0;0;2)$ đến (*P*) đạt giá trị lớn nhất. (*P*) có vectơ pháp tuyến là

A. (1;1;−1) **B.** (1;−1;1) **C.** (1;−2;1) **D.** (2;−1;1)

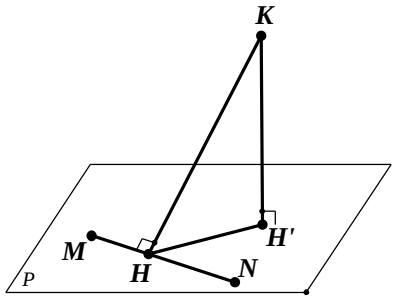
Lời giải

- Khoảng cách từ K đến (P) lớn nhất bằng KH, khi H' trùng H
- Vậy mặt phẳng (P) qua MN và vuông góc với KH.
- Tìm H và viết (P) hoặc:
- (P) chứa MN và vuông góc với (MNP).

Gọi H, H' là hình chiếu của K lên MN và (P).

Ta có: $d(k,(P))=KH\le KH'$ không đổi.

Vậy $d(K,(P))$ lớn nhất khi và chỉ khi H' trùng H hay (P) vuông góc với KH.



$\overrightarrow{MK}=(0;1;0);\overrightarrow{NK}=(1;-1;-1);\ \overrightarrow{MN}=(-1;2;1)$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

(MNK) có vtpt là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{MK},\overrightarrow{NK}\right]=(-1;0;-1)$

Do $\begin{cases}HK\subset(MNK)\\HK\perp MN\end{cases}$ nên HK có vtcp là $\left[\overrightarrow{MN},\vec{n}\right]=(2;2;-2)$.

Chọn A

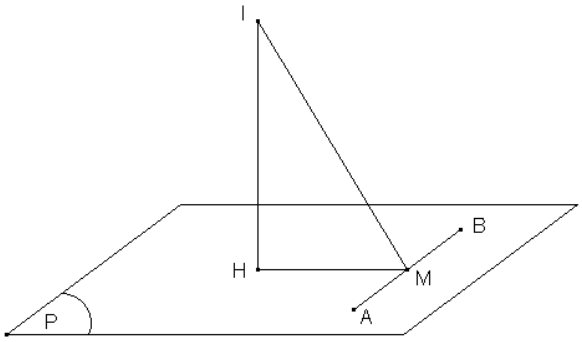
Câu 26: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ cho $A(2;1;6), B(1;2;4)$ và $I(1;3;2)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B sao cho khoảng cách từ I đến (P) lớn nhất.

A. $3x+7y+6z-35=0$. **B.** $7x-y+5z-9=0$.
C. $x+y-z-6=0$. **D.** $x+y+z-3=0$.

Lời giải

Ta có $IA=\sqrt{3^2+2^2+4^2}=\sqrt{29}$ và $IB=\sqrt{0^2+5^2+2^2}=\sqrt{29}$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB, vì IA=IB nên $IM\perp AB$, ta có

$M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};5\right)$; $IM=\frac{\sqrt{94}}{2}$.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (P):
Nếu H, M là hai điểm phân biệt thì tam giác IHM vuông tại H, IH<IM hay $IH<\frac{\sqrt{94}}{2}$.

Nếu H trùng với M thì $IH=IM=\frac{\sqrt{94}}{2}$.

Vậy ta có $IH\le\frac{\sqrt{94}}{2}$, IH lớn nhất khi H≡M.

Khi đó (P) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{IH}=\overrightarrow{IM}=\left(\frac{3}{2};\frac{7}{2};3\right)$. Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $\frac{3}{2}(x-2)+\frac{7}{2}(y+1)+3(z-6)=0$ hay $3x+7y+6z-35=0$

Chọn A

Câu 27: **(SỞ NAM ĐỊNH 2018-2019)**Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $M(m;0;0)$, $N(0;n;0)$, $P(0;0;p)$ không trùng với gốc tọa độ và thỏa mãn $m^2+n^2+p^2=3$. Tìm giá trị lớn nhất của khoảng cách từ O đến mặt phẳng (MNP).

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{1}{27}$.

Lời giải

Chọn C

Do M, N, P không trùng với gốc tọa độ nên $m\neq0$, $n\neq0$, $p\neq0$.

Phương trình mặt phẳng (MNP) là: $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}+\frac{z}{p}=1\Leftrightarrow\frac{1}{m}x+\frac{1}{n}y+\frac{1}{p}z-1=0$

$\Rightarrow d\left(O,(MNP)\right)=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{p^2}}}$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số dương m^2, n^2, p^2 và ba số dương $\dfrac{1}{m^2}$, $\dfrac{1}{n^2}$, $\dfrac{1}{p^2}$ ta có:

$m^2+n^2+p^2\ge 3\sqrt[3]{m^2n^2p^2}$ và $\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{p^2}\ge 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{m^2n^2p^2}}$

$\Rightarrow \left(m^2+n^2+p^2\right)\left(\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{p^2}\right)\ge 9$; Mà $m^2+n^2+p^2=3$ suy ra:

$\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{p^2}\ge 3\Rightarrow \sqrt{\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{p^2}}\ge\sqrt{3}\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{p^2}}}\le\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow d\left(O,(MNP)\right)\le\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m^2=n^2=p^2=1$.

Vậy giá trị lớn nhất của khoảng cách từ O đến mặt phẳng (MNP) là $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 28: Cho điểm $A(0;8;2)$ và mặt cầu (S) có phương trình $(S):(x-5)^2+(y+3)^2+(z-7)^2=72$ và điểm $B(9;-7;23)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A tiếp xúc với (S) sao cho khoảng cách từ B đến (P) là lớn nhất. Giả sử $\vec{n}=(1;m;n)$ là một vectơ pháp tuyến của (P). Lúc đó

A. $m.n=2$. **B.** $m.n=-2$. **C.** $m.n=4$. **D.** $m.n=-4$.

Lời giải

Chọn D

Mặt phẳng (P) qua A có dạng $a(x-0)+b(y-8)+c(z-2)=0\Leftrightarrow ax+by+cz-8b-2c=0$.

Điều kiện tiếp xúc:

$d(I;(P))=6\sqrt{2}\Leftrightarrow\dfrac{|5a-3b+7c-8b-2c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=6\sqrt{2}\Leftrightarrow\dfrac{|5a-11b+5c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=6\sqrt{2}$. (*)

Mà $d(B;(P))=\dfrac{|9a-7b+23c-8b-2c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{|9a-15b+21c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$=\dfrac{|5a-11b+5c+4(a-b+4c)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\le$

$\le\dfrac{|5a-11b+5c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}+4\dfrac{|a-b+4c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\le 6\sqrt{2}+4\dfrac{\sqrt{1^2+(-1)^2+4^2}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=18\sqrt{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi $\dfrac{a}{1}=\dfrac{b}{-1}=\dfrac{c}{4}$. Chọn $a=1;b=-1;c=4$ thỏa mãn (*).

Khi đó $(P):x-y+4z=0$. Suy ra $m=-1;n=4$. Suy ra: $m.n=-4$.

Chọn B

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 29: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$ với a, b, c là những số dương thay đổi thỏa mãn $a^2+4b^2+16c^2=49$. Tính tổng $S=a^2+b^2+c^2$ khi khoảng cách từ O đến mặt phẳng (ABC) đạt giá trị lớn nhất.

A. $S=\frac{51}{5}$. **B.** $S=\frac{49}{4}$. **C.** $S=\frac{49}{5}$. **D.** $S=\frac{51}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình mặt phẳng (ABC): $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \Leftrightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0$.

$$d\left(O;(ABC)\right)=\frac{\left|\frac{0}{a}+\frac{0}{b}+\frac{0}{c}-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=P.$$

$P_{\max} \Leftrightarrow T=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$ min.

$$T=\frac{1}{a^2}+\frac{4}{4b^2}+\frac{16}{16c^2}\geq\frac{(1+2+4)^2}{a^2+4b^2+16c^2}=\frac{7^2}{49}=1.$$

$S_{\min}=1$. Dấu bằng xảy ra $\frac{1}{a^2}=\frac{2}{4b^2}=\frac{4}{16c^2} \Rightarrow 2b^2=a^2;\ 4c^2=a^2$.

$a^2+4b^2+16c^2=49 \Leftrightarrow a^2+4\frac{a^2}{2}+16\frac{a^2}{4}=49 \Leftrightarrow a^2=7$, $b^2=\frac{7}{2}$, $c^2=\frac{7}{4}$.

Vậy $S=a^2+b^2+c^2=\frac{49}{4}$.

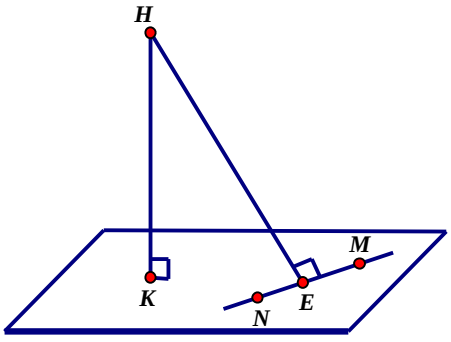
Câu 30: **(Chuyên Sơn La Lần 3 năm 2018-2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi $(P):ax+by+cz-3=0$ (với a,b,c là các số nguyên không đồng thời bằng 0) là mặt phẳng đi qua hai điểm $M(0;-1;2), N(-1;1;3)$ và không đi qua điểm $H(0;0;2)$. Biết rằng khoảng cách từ H đến mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất. Tổng $T=a-2b+3c+12$ bằng

A. -16. **B.** 8. **C.** 12. **D.** 16.

Lời giải

Chọn D

Gọi K là hình chiếu của H lên (P), E là hình chiếu của H lên MN.



ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Ta có : $d\left(H;(P)\right)=HK$ và $d\left(H;MN\right)=HE$, $HK\le HE$ (không đổi) .

Vậy $d\left(H;(P)\right)$ lớn nhất khi $K\equiv E$, với E là hình chiếu của H lên MN $\Rightarrow E\left(\frac{-1}{3};\frac{-1}{3};\frac{7}{3}\right)$.

Vậy mặt phẳng (P) cần tìm là mặt phẳng nhận $\overrightarrow{HE}=\left(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ làm vectơ pháp tuyến và đi qua M .

$\Rightarrow (P):-x-y+z-3=0$.

Vậy $\begin{cases}a=-1\\ b=-1\end{cases}\Rightarrow T=16$.
$\quad\ \ c=1$

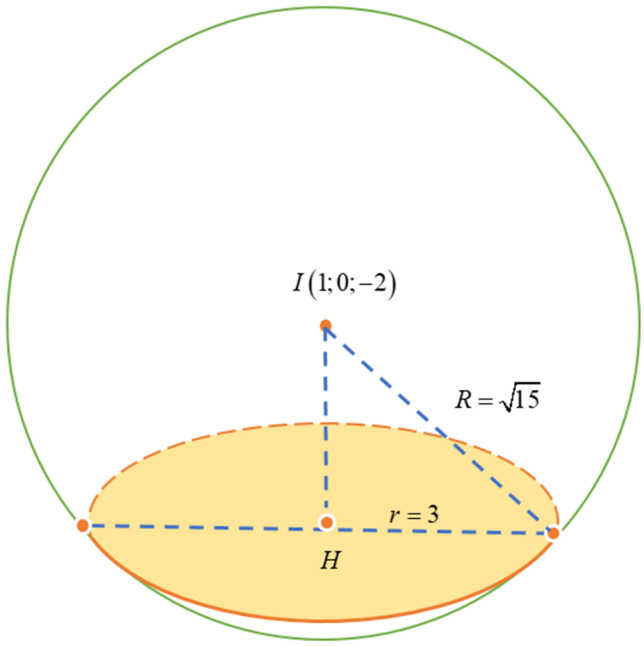
VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI

Câu 31: **(Sở Hà Nam)**Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x-2y+z+7=0$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4z-10=0$. Gọi (Q) là mặt phẳng song song với mặt phẳng (P) và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn có chu vi bằng 6π. Hỏi (Q) đi qua điểm nào trong số các điểm sau?

A. $M(6;0;1)$. **B.** $N(-3;1;4)$. **C.** $J(-2;-1;5)$. **D.** $K(4;-1;-2)$.

Lời giải

Chọn C



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-2), R=\sqrt{15}$.

Gọi đường tròn giao tuyến của (S) và (Q) có bán kính là r, theo đề bài

$C=2\pi r=6\pi\Rightarrow r=3.$

$IH=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{15-9}=\sqrt{6}$.

$(P)//(Q)\Rightarrow (Q): x-2y+z+D=0 (D\neq 7)$.

$d(I,(Q))=IH\Leftrightarrow \dfrac{|1-2+D|}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}\Rightarrow \left[\begin{array}{l} D=7(l) \\ D=-5(t/m) \end{array}\right. \Rightarrow (Q): x-2y+z-5=0$.

Thay các điểm ở đáp án vào phương trình $(Q)\Rightarrow J$ thỏa mãn.

Câu 32: **(NGÔ SĨ LIÊN BẮC GIANG LẦN IV NĂM 2019)** Cho hai mặt cầu $(S_1): x^2+y^2+z^2=6$ và $(S_2): (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=6$. Biết rằng mặt phẳng $(P): ax+by+cz+6=0 (a>0)$ vuông góc với mặt phẳng $(Q): 3x+2y+z-1=0$ đồng thời tiếp xúc với cả hai mặt cầu đã cho. Tích abc bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có: (S_1) có tâm $I_1(0;0;0)$ và bán kính $R_1=\sqrt{6}$

(S_2) có tâm $I_2(1;1;1)$ và bán kính $R_2=\sqrt{6}$

Mặt phẳng $(P): ax+by+cz+6=0 (a>0)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)}=(a;b;c) (a>0)$

Mặt phẳng $(Q): 3x+2y+z-1=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(Q)}=(3;2;1)$

Vì Mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) vuông góc nhau $\Rightarrow \vec{n}_{(P)}.\vec{n}_{(Q)}=0\Leftrightarrow 3a+2b+c=0 (1)$

Mặt phẳng (P) đồng thời tiếp xúc với cả hai mặt cầu nên $\begin{cases} d(I_1;(P))=R_1 \\ d(I_2;(P))=R_2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|6|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\sqrt{6} \\ \dfrac{|a+b+c+6|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a+b+c+6|=6 \\ a^2+b^2+c^2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ a+b+c=-12 \end{array}\right. (2) \\ a^2+b^2+c^2=6 \end{cases}$$

Từ (1) và (2)

TH1: $\begin{cases} 3a+2b+c=0 \\ a+b+c=0 \\ a^2+b^2+c^2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=a \\ b=-2a \\ a^2+4a^2+a^2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ b=-2 \\ a=1 \end{cases} \Rightarrow abc=-2$

TH2: $\begin{cases} 3a+2b+c=0 \\ a+b+c=-12 \\ a^2+b^2+c^2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=a-24 \\ b=12-2a \\ a^2+(12-2a)^2+(a-24)^2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=a-24 \\ b=12-2a \\ 5a^2-96a+684=0 (\text{VN}) \end{cases}$

Ta chọn đáp án A.

Cách khác :

Ta có: (S_1) có tâm $I_1(0;0;0)$ và bán kính $R_1=\sqrt{6}$

(S_2) có tâm $I_2(1;1;1)$ và bán kính $R_2=\sqrt{6}$; Mặt phẳng $(Q): 3x+2y+z-1=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(Q)}=(3;2;1)$.

Vì $I_1I_2=\sqrt{3}<\sqrt{6}$ nên hai mặt cầu cắt nhau mà $R_1=R_2=\sqrt{6}$ nên mặt phẳng (P) tiếp xúc với cả hai mặt cầu khi (P) song song với I_1I_2.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Ta lại có mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q) nên mặt phẳng (P) nhận $\left[\overrightarrow{I_1I_2},\vec{n}_{(Q)}\right]=(-1;2;-1)$ làm vectơ pháp tuyến.

Vì (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)}=(a;b;c)(a>0)$ nên $\frac{a}{-1}=\frac{b}{2}=\frac{c}{-1}\Rightarrow\begin{cases}b=-2a\\c=a\end{cases}$.

Khi đó phương trình mặt phẳng (P) được viết lại là: $ax-2ay+az+6=0$.

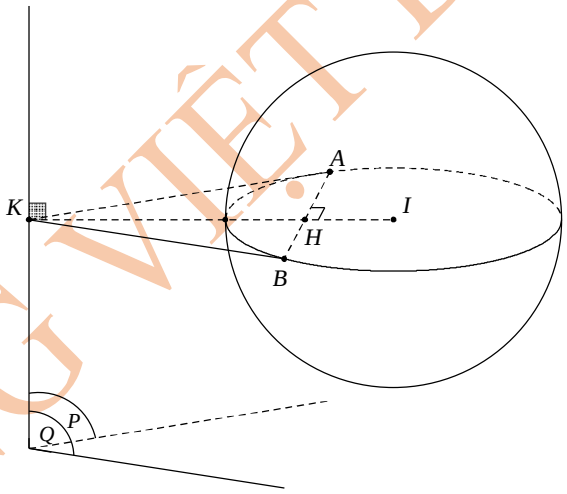
Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu (S_1) nên $d\left(I_1,(P)\right)=R_1\Leftrightarrow\frac{6}{a\sqrt{6}}=\sqrt{6}\Leftrightarrow a=1$.

Suy ra phương trình mặt phẳng $(P):1x-2y+z+6=0$. Vậy tích $abc=-2$

Câu 33: **(THPT Sơn Tây Hà Nội 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$ và đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng (P) và (Q) chứa d và tiếp xúc với mặt cầu (S) tại A và B. Gọi $H(a;b;c)$ là trung điểm AB. Giá trị $a+b+c$ bằng

A. $\frac{1}{6}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{5}{6}$.

Lời giải



Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;-1)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2-1}=1$.

Mặt phẳng (α) đi qua I và vuông góc với đường thẳng d có phương trình:

$1(x-1)+1(y-0)-1(z+1)=0\Leftrightarrow x+y-z-2=0$.

Gọi K là hình chiếu của I trên d, do $K\in d\Rightarrow K(t;2+t;-t)$ và

$K\in(P)\Rightarrow t+2+t-(-t)-2=0\Leftrightarrow t=0\Rightarrow K(0;2;0)$.

Mặt phẳng (α) cắt (S) theo đường tròn lớn (C), có $A,B\in(C)$ và $H=IK\cap AB$.

$IK=\sqrt{(0-1)^2+(2-0)^2+(0+1)^2}=\sqrt{6}$

$IH.IK=IA^2=1\Rightarrow\frac{IH}{IK}=\frac{1}{6}\Rightarrow\overrightarrow{IH}=\frac{1}{6}\overrightarrow{IK}$ (vì $\overrightarrow{IH},\overrightarrow{IK}$ cùng hướng).

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-1=\frac{1}{6}(0-1) \\ b-0=\frac{1}{6}(2-0) \\ c+1=\frac{1}{6}(0+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{5}{6} \\ b=\frac{1}{3} \\ c=-\frac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow a+b+c=\frac{1}{3}.$$

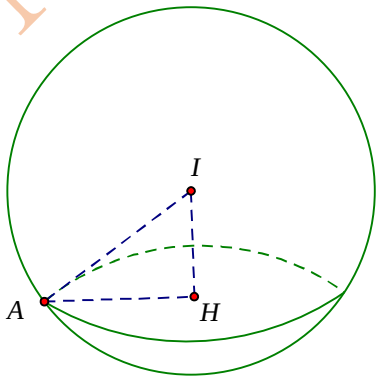
Câu 34: **(Ba Đình Lần2)** Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(P): mx+2y-z+1=0$ (m là tham số). Mặt phẳng (P) cắt mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=9$ theo một đường tròn có bán kính bằng 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m?

A. $m=\pm 1$. **B.** $m=\pm 2+\sqrt{5}$. **C.** $m=\pm 4$. **D.** $m=6\pm 2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn D

Từ $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=9$ ta có tâm $I=(2;1;0)$ bán kính $R=3$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên (P) và $(P)\cap(S)=C(H;r)$ với $r=2$



Ta có $IH=d(I;(P)) \Leftrightarrow IH=\frac{|2m+2-0+1|}{\sqrt{m^2+4+1}}=\frac{|2m+3|}{\sqrt{m^2+5}}$

Theo yêu cầu bài toán ta có $R^2=IH^2+r^2 \Leftrightarrow 9=\frac{(2m+3)^2}{m^2+5}+4$

$$\Leftrightarrow m^2-12m+16=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=6-2\sqrt{5} \\ m=6+2\sqrt{5} \end{cases}.$$

Câu 35: **(Trần Đại Nghĩa)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $2x+2y-z-7=0$ và mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-11=0$. Mặt phẳng (Q) song song với (P) và cắt (S) theo một đường tròn có chu vi bằng 6π có phương trình là

A. $(Q):2x+2y-z+17=0$. **B.** $(Q):2x+2y-z+7=0$.

C. $(Q):2x+2y-z-19=0$. **D.** $(Q):2x+2y-z-17=0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;3)$, bán kính $R=\sqrt{1+4+9+11}=5$.

Đường tròn (C) có chu vi bằng 6π nên có bán kính là: $r_C=\frac{6\pi}{2\pi}=3$.

Mặt phẳng (Q) song song với mp (P) nên phương trình mặt phẳng (Q) là:

$2x+2y-z+D=0$ $(D\neq -7)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Vì (Q) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) nên

$r_C=\sqrt{R^2-d^2\left(I,(Q)\right)}\Leftrightarrow 3=\sqrt{25-d^2\left(I,(Q)\right)}\Leftrightarrow d\left(I,(Q)\right)=4$

$\Leftrightarrow\dfrac{\left|2.1+2(-2)-3+D\right|}{\sqrt{4+4+1}}=4\Leftrightarrow|D-5|=12\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}D=17\\D=-7\end{array}\right.$

Kết hợp điều kiện $D\neq -7$ ta có phương trình $(Q):2x+2y-z+17=0$.

Câu 36: **(Đặng Thành Nam Đề 5)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$ với $a,b,c\neq 0$. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $M\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{3};\dfrac{4}{3}\right)$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=1$. Thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng:

A. 4. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 12.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;2)$ bán kính $R=1$.

Ta có $IM=\sqrt{\left(\dfrac{2}{3}-1\right)^2+\left(\dfrac{4}{3}-2\right)^2+\left(\dfrac{4}{3}-2\right)^2}=1=R$

Suy ra mặt phẳng (ABC) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm M.

Nên mặt phẳng (ABC) có véctơ pháp tuyến $\overrightarrow{MI}\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right)$.

Phương trình mặt phẳng $(ABC):1\left(x-\dfrac{2}{3}\right)+2\left(y-\dfrac{4}{3}\right)+2\left(z-\dfrac{4}{3}\right)=0\Leftrightarrow\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{3}=1$.

Suy ra $a=6;b=3;c=3$.

Vậy $V_{OABC}=\dfrac{1}{6}|abc|=9$.

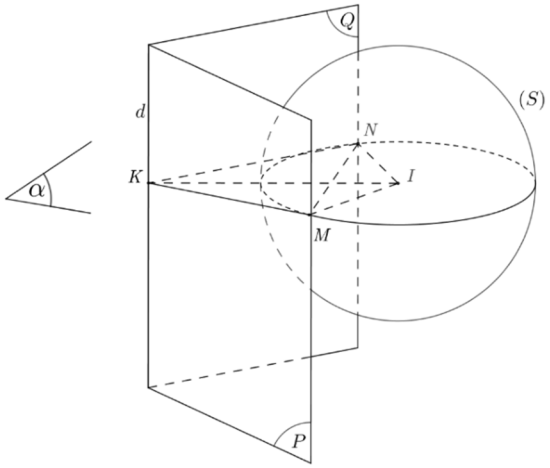
Câu 37: **(ĐOÀN THƯỢNG-HẢI DƯƠNG LẦN 2 NĂM 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{4}$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=2$. Hai mặt phẳng (P) và (Q) chứa d và tiếp xúc với (S). Gọi M, N là tiếp điểm. Tính độ dài đoạn thẳng MN.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



d nằm trên hai mặt phẳng (P) và (Q) nên d chính là giao tuyến của hai mặt phẳng đó

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;1)$ và bán kính $R=\sqrt{2}$.

Mặt phẳng (α) đi qua I và vuông góc với đường thẳng d có phương trình:

$2(x-1)-1(y-2)+4(z-1)=0 \Leftrightarrow 2x-y+4z-4=0$.

Gọi K là hình chiếu của I trên d, do $K\in d \Rightarrow K(2+2t;-t;4t)$ và $K\in(\alpha)$

$\Rightarrow 2.(2+2t)+t+4.4t-4=0 \Leftrightarrow t=0 \Rightarrow K(2;0;0)$.

Mặt phẳng (α) cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn lớn (C). Ta có $M,N\in(C)$ và gọi $H=IK\cap MN$. Suy ra H là trung điểm của MN.

$IK=\sqrt{(2-1)^2+(0-2)^2+(0-1)^2}=\sqrt{6}$.

Ta có $IH.IK=IM^2=2 \Rightarrow IH=\dfrac{2}{\sqrt{6}}$ nên $MN=2HM=2\sqrt{IM^2-\left(\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)^2}=2\sqrt{2-\dfrac{2}{3}}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

Câu 38: **(Sở Phú Thọ)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+2)^2+(y-1)^2+\left(z+\sqrt{2}\right)^2=9$ và hai điểm $A\left(-2;0;-2\sqrt{2}\right), B(-4;-4;0)$. Biết rằng tập hợp các điểm M thuộc (S) sao cho $MA^2+\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MB}=16$ là một đường tròn. Bán kính của đường tròn đó bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x;y;z)$ là điểm thuộc mặt cầu (S). Vì $MA^2+\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MB}=16$ nên

$(x+2)^2+y^2+\left(z+2\sqrt{2}\right)^2+x^2+y^2+z^2+4x+4y=16$

$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2+8x+4y+4\sqrt{2}z+12=16$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+4x+2y+2\sqrt{2}z-2=0\ (S')$.

Ta thấy rằng tọa độ M thỏa phương trình (S') cũng là phương trình mặt cầu.

Như vậy điểm M nằm trên giao tuyến của hai mặt cầu (S) và (S'),đó là một đường tròn.

Để tìm bán kính của đường tròn giao tuyến ta làm như sau:

Bằng cách khử đi x^2,y^2,z^2 từ phương trình (S) và (S') ta được phương trình $y=0\ (P)$

Phương trình (P) là phương trình của một mặt phẳng.

Như vậy điểm M nằm trên giao tuyến của mặt cầu (S) (hoặc của (S') cũng được) với mặt phẳng (P).

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2;1;-\sqrt{2})$ và bán kính $R=3$.

Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) là: $d=d(I,(P))=1$.

Vậy bán kính đường tròn giao tuyến là $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{9-1}=2\sqrt{2}$.

Bình luận:

+ Thực ra bản chất của giả thiết $MA^2+\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MB}=16$ là muốn cho thêm điểm M nằm trên một mặt cầu khác nữa. Chỗ này ta có thể thay đổi giả thiết để có bài toán tương tự. Ngoài ra ta cũng có thể thay đổi điều kiện để được điểm M nằm trên một mặt phẳng có tương giao với mặt cầu (S).

+ Trong **Lời giải** trên, ta thấy rằng khi cho hai mặt cầu tương giao, sau khi loại trừ phần bậc hai, ta thu được phương trình của một mặt phẳng. Mặt phẳng đó được gọi ***Mặt đẳng phương*** của hai mặt cầu .Khái niệm này chính là sự mở rộng tự nhiên của hái niệm ***Trục đẳng phương*** của hai đường tròn trong mặt phẳng. Việc sử dụng mặt đẳng phương để giải làm cho bài toán trở nên hết sức đơn giản. Sau đây chúng ta sẽ xét thêm một số ví dụ tương tự với nhiều cách giải khác nhau. Qua đó ta thấy cách giải sử dụng mặt đẳng phương như trên là nhanh gọn nhất.

Sau đây ta đưa ra một số bài tương tự câu 42 được thực hiện theo nhiều cách giải khác nhau:

Câu 39: **(THPT-Toàn-Thắng-Hải-Phòng)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+m-3=0$. Tìm số thực m để $(\beta):2x-y+2z-8=0$ cắt (S) theo một đường tròn có chu vi bằng 8π.

A. $m=-3$. **B.** $m=-4$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=-2$.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;3)$, bán kính $R=\sqrt{17-m}$ (điều kiện $m<17$).

Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (β) là: $d(I,(\beta))=2$.

Đường tròn giao tuyến có bán kính là: $r=\dfrac{8\pi}{2\pi}=4$.

Ta có $R^2=d^2(I,(\beta))+r^2\Leftrightarrow 17-m=4+16\Leftrightarrow m=-3$ (thỏa mãn).

Câu 40: **(Chuyên KHTN)** Biết rằng trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ có hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng thỏa mãn các điều kiện sau: đi qua hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(0;-2;2)$, đồng thời cắt các trục tọa độ Ox,Oy tại hai điểm cách đều O. Giả sử (P) có phương trình $x+b_1y+c_1z+d_1=0$ và (Q) có phương trình $x+b_2y+c_2z+d_2=0$. Tính giá trị biểu thức $b_1b_2+c_1c_2$.

A. 7. **B.** -9. **C.** -7. **D.** 9.

Lời giải

ChọnB

Cách 1

Xét mặt phẳng (α) có phương trình $x+by+cz+d=0$ thỏa mãn các điều kiện: đi qua hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(0;-2;2)$, đồng thời cắt các trục tọa độ Ox,Oy tại hai điểm cách đều O.

Vì (α) đi qua $A(1;1;1)$ và $B(0;-2;2)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}1+b+c+d=0\\-2b+2c+d=0\end{cases} \quad (*)$$

Mặt phẳng (α) cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại $M(-d;0;0), N\left(0;\frac{-d}{b};0\right)$.

Vì M, N cách đều O nên $OM = ON$. Suy ra: $|d| = \left|\frac{d}{b}\right|$.

Nếu $d = 0$ thì chỉ tồn tại duy nhất một mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán (mặt phẳng này sẽ đi qua điểm O).

Do đó để tồn tại hai mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán thì: $|d| = \left|\frac{d}{b}\right| \Leftrightarrow b = \pm 1$.

□ Với $b=1$, $(*) \Leftrightarrow \begin{cases}c+d=-2\\2c+d=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=4\\d=-6\end{cases}$. Ta được mặt phẳng (P):

$x+y+4z-6=0$

□ Với $b=-1$, $(*) \Leftrightarrow \begin{cases}c+d=0\\2c+d=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=-2\\d=2\end{cases}$. Ta được mặt phẳng (Q):

$x-y-2z+2=0$

Vậy: $b_1b_2 + c_1c_2 = 1.(-1) + 4.(-2) = -9$.

Cách 2 (Mai Đình Kế)

$\overrightarrow{AB} = (-1;-3;1)$

Xét mặt phẳng (α) có phương trình $x + by + cz + d = 0$ thỏa mãn các điều kiện: đi qua hai điểm $A(1;1;1)$ và $B(0;-2;2)$, đồng thời cắt các trục tọa độ Ox, Oy tại hai điểm cách đều O lần lượt tại M, N. Vì M, N cách đều O nên ta có 2 trường hợp sau:

TH1: $M(a;0;0), N(0;a;0)$ với $a \neq 0$ khi đó (α) chính là (P). Ta có $\overrightarrow{MN} = (-a;a;0)$, chọn $\overrightarrow{u_1} = (-1;1;0)$ là một véc tơ cùng phương với $\overrightarrow{MN}$. Khi đó $\vec{n}_P = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u_1}\right] = (-1;-1;-4)$,

suy ra $(P): x + y + 4z + d_1 = 0$

TH2: $M(-a;0;0), N(0;a;0)$ với $a \neq 0$ khi đó (α) chính là (Q). Ta có $\overrightarrow{MN} = (a;a;0)$, chọn $\overrightarrow{u_2} = (1;1;0)$ là một véc tơ cùng phương với $\overrightarrow{MN}$. Khi đó $\vec{n}_Q = \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u_2}\right] = (-1;1;2)$,

suy ra $(Q): x - y - 2z + d_2 = 0$

Vậy: $b_1b_2 + c_1c_2 = 1.(-1) + 4.(-2) = -9$.

Câu 41: **(CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIỆU ĐỒNG THÁP 2019 LẦN 2)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) đi qua điểm $M(2;5;-2)$ và tiếp xúc với các mặt phẳng $(\alpha): x = 1$, $(\beta): y = 1$, $(\gamma): z = -1$. Bán kính của mặt cầu (S) bằng

A. 4. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu (S).

Do (S) tiếp xúc với cả ba mặt phẳng (α), (β), (γ) nên ta có $|a-1| = |b-1| = |c+1| = R$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Mặt khác, ta lại có $R = IM = \sqrt{(2-a)^2+(5-b)^2+(-2-c)^2}$.

Do đó ta có hệ:

$$\begin{cases}(2-a)^2+(5-b)^2+(-2-c)^2=(a-1)^2\\(2-a)^2+(5-b)^2+(-2-c)^2=(b-1)^2\\(2-a)^2+(5-b)^2+(-2-c)^2=(c+1)^2\end{cases}(1).$$

Quan sát ta thấy rằng $\begin{cases}(a-1)^2>(a-2)^2\Leftrightarrow a>\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow a-1>0\\(b-1)^2>(b-5)^2\Leftrightarrow b>3\Leftrightarrow b-1>0\\(c+1)^2>(c+2)^2\Leftrightarrow c<-\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow c+1<0\end{cases}$.

Do đó $|a-1|=|b-1|=|c+1|\Rightarrow a-1=b-1=-c-1$.

Từ $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}a-1=b-1=-c-1\\(a-2)^2+(b-5)^2+(c+2)^2=(a-1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\b=4\\c=-4\end{cases}$.

Vậy $R = IM = 3$.

Câu 42: **(Đề thi HK2 Lớp 12-Chuyên Nguyễn Du- Đăk Lăk)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm thuộc trục Oz. Biết mặt phẳng (Oxy) và mặt phẳng $(\alpha): z = 2$ lần lượt cắt (S) theo hai đường tròn có bán kính 2 và 4. Phương trình của (S) là

A. $x^2+y^2+(z-2)^2=16$. **B.** $x^2+y^2+(z-4)^2=16$.

C. $x^2+y^2+(z-4)^2=20$. **D.** $x^2+y^2+(z-2)^2=20$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử mặt cầu (S) có bán kính R và có tâm $I(0;0;c)$ (vì tâm I thuộc trục Oz).

Ta có: $d(I;(Oxy))=|c|$ và $d(I;(\alpha))=|c-2|$.

Vì mặt phẳng (Oxy) cắt (S) theo đường tròn có bán kính bằng 2 nên $R=\sqrt{(d(I;(Oxy)))^2+4}=\sqrt{c^2+4}$.

Vì mặt phẳng $(\alpha): z = 2$ cắt (S) theo đường tròn có bán kính bằng 4 nên $R=\sqrt{(d(I;(\alpha)))^2+16}=\sqrt{(c-2)^2+16}$.

Suy ra: $c^2+4=(c-2)^2+16\Leftrightarrow 4c=16\Leftrightarrow c=4\Rightarrow I(0;0;4)$ và $R=\sqrt{20}$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là: $x^2+y^2+(z-4)^2=20$.

Câu 43: **(Đề thi HK2 Lớp 12-Chuyên Nguyễn Du- Đăk Lăk)** Trong không gian $Oxyz$, cho các mặt phẳng $(P): 2x+4y-z-7=0$, $(Q): 4x+5y+z-14=0$, $(R): x+2y-2z-2=0$ và $(S): x+2y-2z+4=0$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Biết mặt cầu $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=D$ có tâm nằm trên (P) và (Q), cùng tiếp xúc với (R) và (S). Giá trị $a+b+c$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm của mặt cầu $(S'):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=D$.

Vì I nằm trên (P) và (Q) nên: $\begin{cases}2a+4b-c-7=0\\4a+5b+c-14=0\end{cases}$ (1)

Mặt khác, (S') cùng tiếp xúc với (R) và (S) nên:

$$d(I,(R))=d(I,(S)) \Rightarrow \frac{|a+2b-2c-2|}{3}=\frac{|a+2b-2c+4|}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a+2b-2c-2=a+2b-2c+4\\a+2b-2c-2=-a-2b+2c-4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2=4\\a+2b-2c+1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow a+2b-2c+1=0 \ (2)$$

Từ (1) và (2) ta được hệ: $\begin{cases}2a+4b-c-7=0\\4a+5b+c-14=0\\a+2b-2c+1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-1\\b=3\\c=3\end{cases} \Rightarrow a+b+c=5.$

Câu 44: **(Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019)** Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;2)$ và mặt cầu $(S):x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$. Mặt phẳng thay đổi luôn đi qua A cắt (S) theo thiết diện là đường tròn. Hãy tìm bán kính của đường tròn có chu vi nhỏ nhất.

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm là $I(0;1;1)$ bán kính $R=3$. Vì $IA=\sqrt{5}<3$ nên điểm A nằm trong mặt cầu.

Gọi H và r lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn thiết diện.

Khi đó, ta luôn có $r^2=R^2-IH^2\geq R^2-IA^2=4$ (vì H trùng với A hoặc ΔAIH vuông tại H nên $IH\leq IA$).

Vậy đường tròn có chu vi nhỏ nhất thì có bán kính nhỏ nhất $r=2$ khi A trùng với H.

Câu 45: **(Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019)** Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;1;2)$ và mặt cầu $(S):x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$. Mặt phẳng thay đổi luôn đi qua A cắt (S) theo thiết diện là đường tròn. Hãy tìm bán kính của đường tròn có chu vi nhỏ nhất.

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm là $I(0;1;1)$ bán kính $R=3$. Vì $IA=\sqrt{5}<3$ nên điểm A nằm trong mặt cầu.

Gọi H và r lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn thiết diện.

Khi đó, ta luôn có $r^2=R^2-IH^2\geq R^2-IA^2=4$ (vì H trùng với A hoặc ΔAIH vuông tại H nên $IH\leq IA$).

Vậy đường tròn có chu vi nhỏ nhất thì có bán kính nhỏ nhất $r=2$ khi A trùng với H.

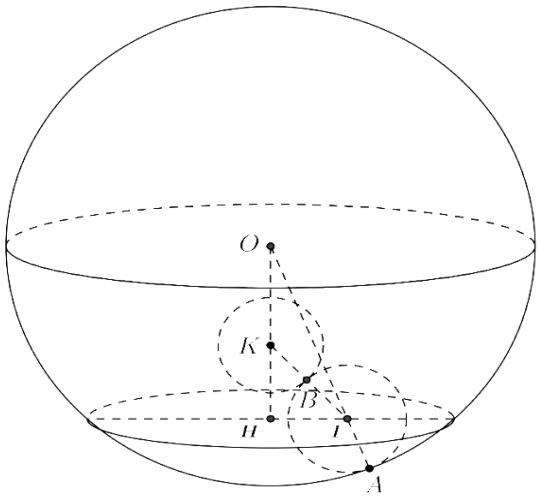
ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 46: **(Chuyên Hưng Yên Lần 3)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-z+6=0$ và hai mặt cầu $(S_1): x^2+y^2+z^2=25$; $(S_2): x^2+y^2+z^2+4x-4z+7=0$. Biết rằng tập hợp tâm I các mặt cầu tiếp xúc với cả hai mặt cầu (S_1), (S_2) và tâm I nằm trên (P) là một đường cong. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong đó.

A. $\frac{7}{3}\pi$. **B.** $\frac{7}{9}\pi$. **C.** $\frac{9}{7}\pi$. **D.** $\frac{7}{6}\pi$.

Lời giải

Chọn B



Mặt cầu (S_1) có tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R_1=5$. Mặt cầu (S_2) có tâm $K(-2;0;2)$, bán kính $R_2=1$, mặt phẳng (P) có 1 vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=(1;0;-1)$.

Vì $\overrightarrow{OK}=(-2;0;2)$ cùng phương với $\vec{n}_{(P)}=(1;0-1)$ nên $\overrightarrow{OK}$ vuông góc với mặt phẳng (P)

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (P) nên O, K, H thẳnghàng.

Ta có $OH=d(O;(P))=3\sqrt{2}<R_1$, $KH=d(K;(P))=\sqrt{2}>R_2$, $OK=2\sqrt{2}$, $OK+R_2<R_1$

$\Rightarrow (P)$ cắt (S_1) và (P) không cắt (S_2) và (S_1) chứa (S_2).

Do đó mặt cầu tâm I phải tiếp xúc trong với (S_1) tại A và tiếp xúc ngoài với (S_2) tại B.

Gọi R là bán kính với mặt cầu tâm I.

Suy ra: $OI=R_1-R=5-R$ và $KI=R_2+R=1+R$.

Ta có $IH^2=OI^2-OH^2=KI^2-KH^2 \Leftrightarrow IH^2=(5-R)^2-18=(1+R)^2-2 \Leftrightarrow 12R=8$

$\Leftrightarrow R=\frac{2}{3}\Rightarrow IH^2=\left(1+\frac{2}{3}\right)^2-2=\frac{7}{9}\Leftrightarrow IH=\frac{\sqrt{7}}{3}$.

Khi đó I thuộc mặt cầu (S_3) tâm H, bán kính $R_3=\frac{\sqrt{7}}{3}$.

Mà I thuộc mặt phẳng (P) nên I thuộc đường tròn giao tuyến và có bán kính là $r=R_3=\frac{\sqrt{7}}{3}$

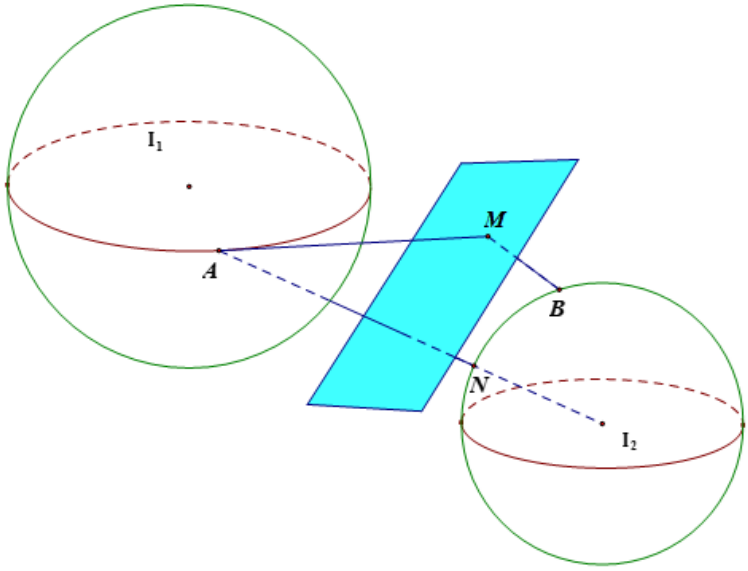
Vậy diện tích là $\pi r^2=\frac{7}{9}\pi$.

Câu 47: **(Thuận Thành 2 Bắc Ninh)** Trong không gian $Oxyz$, cho (P) $x+2y-2z+5=0$ và 2 mặt cầu (S_1): $(x-2)^2+y^2+(z+1)^2=1$, (S_2): $(x+4)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=4$. Gọi M, A, B lần lượt thuộc mặt phẳng (P) và hai mặt cầu (S_1), (S_2). Tìm giá trị nhỏ nhất $S=MA+MB$.

A. $S_{\min}=11$. **B.** $S_{\min}=2\sqrt{14}-3$. **C.** $S_{\min}=\sqrt{15}-3$. **D.** $S_{\min}=3\sqrt{6}-3$.

Lời giải

Chọn B



Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_P=(1;2;-2)$.

Mặt cầu (S_1) có tâm $I_1(2;0;-1)$ và bán kính $R_1=1$.

Mặt cầu (S_2) có tâm $I_2(-4;-2;3)$ và bán kính $R_2=2$.

Ta có $\overrightarrow{I_1I_2}=(-6;-2;4)\Rightarrow I_1I_2=2\sqrt{14}>R_1+R_2$ suy ra (S_1), (S_2) nằm ngoài nhau.

Ta có $\left(x_{I_1}+2y_{I_1}-2z_{I_1}+5\right)\left(x_{I_2}+2y_{I_2}-2z_{I_2}+5\right)<0$ nên I_1, I_2 nằm về hai phía đối với mặt phẳng (P).

Ngoài ra $d\left[I_1,(P)\right]=3>R_1$, $d\left[I_2,(P)\right]=3>R_2$.

Gọi N, P lần lượt là giao điểm của đoạn thẳng I_1I_2 với hai mặt cầu (S_1) và (S_2).

Ta có

$MA+MB+AI_1+BI_2\geq I_1I_2\Leftrightarrow MA+MB+NI_1+PI_2\geq I_1N+NP+PI_2\Leftrightarrow MA+MB\geq NP$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A\equiv N$, $B\equiv P$ và M, N, P thẳng hàng.

Khi đó $(MA+MB)_{\min}=NP=I_1I_2-R_1-R_2=2\sqrt{14}-3$.

Câu 48: **(THPT-Toàn-Thắng-Hải-Phòng)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;2;1)$, $B(3;-1;1)$, $C(-1;-1;1)$. Gọi (S_1) là mặt cầu tâm A và bán kính $R_1=2$. (S_2), (S_3) lần lượt là mặt cầu tâm B, C và đều có bán kính bằng 1. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tiếp xúc với (S_2), (S_3) và cắt (S_1) theo giao tuyến là đường tròn bán kính $r=\sqrt{3}$.

A. 3. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

Ta có (P) cắt (S_1) theo giao tuyến là đường tròn bán kính $r=\sqrt{3} \Rightarrow d\left(A,(P)\right)=\sqrt{R_1^2-r^2}=1$.

Xét $(P): ax+by+cz+d=0$ thỏa mãn ycbt.

Ta có $\begin{cases} d\left(A,(P)\right)=1 \\ d\left(B,(P)\right)=1 \\ d\left(C,(P)\right)=1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |a+2b+c+d|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ (1) \\ |3a-b+c+d|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ (2) \\ |a-b+c+d|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ (3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a+2b+c+d|=|3a-b+c+d| \\ |a-b+c+d|=|3a-b+c+d| \\ |a-b+c+d|=\sqrt{a^2+b^2+c^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2a-3b-2c=0 \\ 4a+b+2d=0 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=a+c+d \end{array}\right. \\ |a-b+c+d|=\sqrt{a^2+b^2+c^2} \end{cases}$$

Từ đó ta có 4 hệ

1. $\begin{cases} a=0 \\ 2a-3b-2c=0 \\ |a-b+c+d|=\sqrt{a^2+b^2+c^2} \end{cases}$ suy ra hệ có hai nghiệm.

2. $\begin{cases} a=0 \\ 4a+b+2d=0 \\ |a-b+c+d|=\sqrt{a^2+b^2+c^2} \end{cases}$ suy ra hệ có hai nghiệm nhưng có một nghiệm $a=b=c=0$

nên loại.

3. $\begin{cases} b=a+c+d \\ 2a-3b-2c=0 \\ |a-b+c+d|=\sqrt{a^2+b^2+c^2} \end{cases}$ suy ra hệ có hai nghiệm

4. $\begin{cases} b=a+c+d \\ 4a+b+2d=0 \\ |a-b+c+d|=\sqrt{a^2+b^2+c^2} \end{cases}$ suy ra hệ có hai nghiệm

Vậy có 7 mặt phẳng thỏa mãn.

+ Theo tôi nhận thấy A,B,C không thẳng hàng nên A,B,C tạo thành tam giác

+ AB=AC= $\sqrt{13}>2=2d\left(A,(P)\right)=2\mathrm{d}\left(B,(P)\right)$, BC=4

+ Từ giả thiết suy ra $\begin{cases} d\left(A,(P)\right)=1 \\ d\left(B,(P)\right)=1 \\ d\left(C,(P)\right)=1 \end{cases}$ nên ta rút ra được có tất cả 5 mp thỏa mãn

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

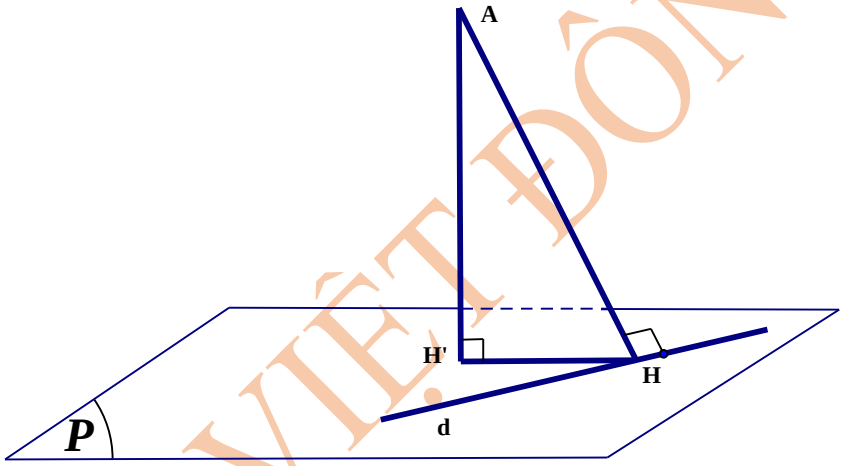
- 2 mp // và cách (P) một khoảng bằng 1
- 06 mp qua trung điểm của 2 cạnh tam giác ABC và cách các đỉnh một khoảng bằng 1
Vậy theo tôi là có 8 mặt phẳng thỏa mãn

Câu 49: **(PHÂN TÍCH BL_PT ĐỀ ĐH VINHL3 -2019..)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-3;4)$, đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{2}$ và mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=20$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d thỏa mãn khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất. Mặt cầu (S) cắt (P) theo đường tròn có bán kính bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d, H' là hình chiếu vuông góc của A trên (P). Ta có $AH' \le AH$. Vậy mặt phẳng (P) thỏa mãn yêu cầu đề bài phải chứa d và vuông góc với AH.

Gọi $H(1+2t;-2+t;2t), t\in\mathbb{R}$. Ta có $\overrightarrow{AH}=(2t-1;1+t;2t-4)$, $\overrightarrow{u_d}=(2;1;2)$

$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{u_d}=0\Leftrightarrow 9t-9=0\Leftrightarrow t=1$.

Vậy mặt phẳng (P) có vecto pháp tuyến $\overrightarrow{AH}=(1;2;-2)$ và đi qua điểm $B(1;-2;0)\in d$.

Phương trình mặt phẳng $(P): x+2y-2z+3=0$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;-1), R=2\sqrt{5}$. Ta có $d(I,(P))=4<R$.

Vậy (S) cắt (P) theo đường tròn có bán kính $r=\sqrt{R^2-d^2(I,(P))}=\sqrt{20-16}=2$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG NÂNG CAO

A - LÝ THUYẾT CHUNG

1. Định nghĩa

Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có vec tơ chỉ phương

$$\vec{a}=(a_1;a_2;a_3),\vec{a}\neq\vec{0}:\begin{cases}x=x_0+a_1t\\y=y_0+a_2t\\z=z_0+a_3t\end{cases}$$

Nếu $a_1;a_2;a_3$ đều khác không. Phương trình đường thẳng Δ viết dưới dạng chính tắc như sau:

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$$

Ngoài ra đường thẳng còn có dạng tổng quát là: $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$

với $\forall A_1,B_1,C_1,A_2,B_2,C_2$ thỏa $A_1^2+B_1^2+C_1^2>0,A_2^2+B_2^2+C_2^2>0.$

2. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Chương trình cơ bản	Chương trình nâng cao
1)Vị trí tương đối của hai đường thẳng Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=x_0+a_1t\\y=y_0+a_2t\\z=z_0+a_3t\end{cases}$; $d':\begin{cases}x=x_0'+a_1't'\\y=y_0'+a_2't'\\z=z_0'+a_3't'\end{cases}$ Vtcp $\vec{u}$ đi qua M_0 và d' có vtcp $\vec{u'}$ đi qua M_0' $\vec{u},\vec{u'}$ ***cùng phương:*** $d//d'\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{u}=k\vec{u'}\\M_0\notin d'\end{cases}$; $d\equiv d'\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{u}=k\vec{u'}\\M_0\in d'\end{cases}$ $\vec{u},\vec{u'}$ ***không cùng phương:*** $\begin{cases}x_0+a_1t=x_0'+a_1't'\\y_0+a_2t=y_0'+a_2't'\\z_0+a_3t=y_0'+a_3't'\end{cases}(I)$ d chéo d' $\Leftrightarrow$ hệ phương trình (1) vô nghiệm d cắt d' $\Leftrightarrow$ hệ phương trình (1) có 1 nghiệm	***1) Vị trí tương đối của hai đường thẳng*** Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=x_0+a_1t\\y=y_0+a_2t\\z=z_0+a_3t\end{cases}$; $d':\begin{cases}x=x_0'+a_1't'\\y=y_0'+a_2't'\\z=z_0'+a_3't'\end{cases}$ Vtcp $\vec{u}$ đi qua M_0 và d' có vtcp $\vec{u'}$ đi qua M_0' $(d)//(d')\Leftrightarrow\begin{cases}[\vec{u},\vec{u'}]=\vec{0}\\M_0\notin d'\end{cases}$ $(d)\equiv(d')\Leftrightarrow\begin{cases}[\vec{u},\vec{u'}]=\vec{0}\\M_0\in d'\end{cases}$ (d) cat $(d')\Leftrightarrow\begin{cases}[\vec{u},\vec{u'}]\neq\vec{0}\\[\vec{u},\vec{u'}].\overrightarrow{MM_0}=0\end{cases}$ (d) *cheo* $(d')\Leftrightarrow[\vec{u},\vec{u'}].\overrightarrow{MM_0}\neq0$

3. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt phẳng

Phương pháp 1	Phương pháp 2
Trong không gian $Oxyz$ cho: (α):Ax+By+Cz+D=0 và $d:\begin{cases}x=x_0+a_1t\\y=y_0+a_2t\\z=z_0+a_3t\end{cases}$ **Pt**: $A(x_0+a_1t)+B(y_0+a_2t)+C(z_0+a_3t)+D=0(1)$ Phương trình (1) vô nghiệm thì $d//(\alpha)$	Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng d qua $M(x_0;y_0;z_0)$ có vtcp: $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và (α):Ax+By+Cz+D=0 có vtpt $\vec{n}=(A;B;C)$ (d) cắt $(\alpha)\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{n}\neq0$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Phương trình (1) có 1 nghiệm thì d cắt (α) Phương trình (1) có vô số nghiệm thì $d \in (\alpha)$ Đặc biệt: $d \perp (\alpha) \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{n}$ cùng phương	$(d)//(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}.\vec{n} = 0 \\ M \notin (\alpha) \end{cases}$ (d) nằm trên mp $(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}.\vec{n} = 0 \\ M \in (\alpha) \end{cases}$

4. Khoảng cách

Khoảng cách từ $M(x_0;y_0;z_0)$ đến mặt phẳng (α):Ax+By+Cz+D=0 cho bởi công thức $d(M_0,\alpha) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

Khoảng cách từ M đến đường thẳng (d)

Phương pháp 1:

Lập ptmp (α) đi qua M và vuông góc với d.

Tìm tọa độ giao điểm H của mp (α) và d

$d(M,d) = MH$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Phương pháp 1:

d đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$; có vtpt $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$

d' đi qua $M'(x_0';y_0';z_0')$; vtpt $\vec{a'} = (a_1';a_2';a_3')$

Lập phương trình mp (α) chứa d và song song với d': $d(d,d') = d(M',(\alpha))$

Khoảng cách từ M đến đường thẳng (d)

Phương pháp 2:

(d đi qua M_0 có vtcp $\vec{u}$)

$$d(M,\Delta) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}$$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Phương pháp 2:

d đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$; có vtpt $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$

d' đi qua $M'(x_0';y_0';z_0')$; vtpt $\vec{a'} = (a_1';a_2';a_3')$

$$d(\Delta,\Delta') = \frac{\left|\left[\vec{a},\vec{a'}\right].\overrightarrow{MM'}\right|}{\left|\left[\vec{a},\vec{a'}\right]\right|} = \frac{V_{hop}}{S_{day}}$$

5. Góc giữa hai đường thẳng

Góc giữa hai đường thẳng

(Δ) đi qua $M(x_0;y_0;z_0)$ có VTCP $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$

(Δ') đi qua $M'(x_0';y_0';z_0')$ có VTCP $\vec{a'} = (a_1';a_2';a_3')$

$$\cos\varphi = \left|\cos\left(\vec{a},\vec{a'}\right)\right| = \frac{|\vec{a}.\vec{a'}|}{|\vec{a}|.|\vec{a'}|} = \frac{|a_1.a_1' + a_2.a_2' + a_3.a_3'|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{a_1'^2+a_2'^2+a_3'^2}}$$

6. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng (Δ) đi qua M_0 có VTCP $\vec{a}$, mặt phẳng (α) có VTPT $\vec{n} = (A;B;C)$.

Gọi φ là góc hợp bởi (Δ) và mặt phẳng (α): $\sin\varphi = \left|\cos\left(\vec{a},\vec{n}\right)\right| = \dfrac{|Aa_1 + Ba_2 + Ca_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$

B - CÁC DẠNG TOÁN VỀ PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Để lập phương trình đường thẳng d ta cần xác định ***một điểm thuộc d và một VTCP*** *của nó.*

Dạng 1. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có vtcp $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3)$:

$$(d): \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases} \quad (t \in R)$$

hoặc

$$(d): \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Dạng 2. ***Đường thẳng*** d ***đi qua*** A ***và*** B :

- Đường thẳng d đi qua A (hoặc B) có vtcp $\vec{a_d} = \overrightarrow{AB}$
- Sử dụng dạng 1 để viết phương trình đường thẳng d.

Dạng 3. ***Đường thẳng*** d ***qua*** A ***và song song*** Δ

- Đường thẳng d đi qua A và có vtcp $\vec{u_d} = \vec{u_\Delta}$
- Sử dụng dạng 1 để viết phương trình đường thẳng d.

Dạng 4. ***Đường thẳng*** d ***qua*** A ***và vuông góc mp*** (α)

- Đường thẳng d đi qua A và có vtcp $\vec{u_d} = \vec{n_\alpha}$
- Sử dụng dạng 1 để viết phương trình đường thẳng d.

Dạng 5. ***Đường thẳng*** (d) ***qua*** A ***và vuông góc 2 đường thẳng*** d_1 ***và*** d_2***:***

- Đường thẳng d đi qua A và có vtcp $\vec{u} = \left[\vec{u_{d_1}}, \vec{u_{d_2}}\right]$
- Sử dụng dạng 1 để viết phương trình đường thẳng d.

Dạng 6. ***Đường thẳng*** (d) ***là giao tuyến của hai mặt phẳng*** $(P),(Q)$***:***

- ***Cách 1****:* Tìm một điểm và một vtcp.

  – Tìm toạ độ một điểm $A \in d$: Bằng cách giải hệ phương trình $\begin{cases}(P)\\(Q)\end{cases}$ *(với việc chọn giá trị cho một ẩn ta sẽ giải hệ tìm giá trị hai ẩn còn lại)*

  – Tìm một vtcp của d: $\vec{u_d} = \left[\vec{n_P}, \vec{n_Q}\right]$

- ***Cách 2****:* Tìm hai điểm A, B thuộc d, rồi viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm đó.

Dạng 7. ***Đường thẳng*** (d) ***đi qua điểm*** $M_0(x_0;y_0;z_0)$ ***và vuông góc với hai đường thẳng*** d_1, d_2***:***

- Vì $d \perp d_1$, $d \perp d_2$ nên một vtcp của d là: $\vec{u_d} = \left[\vec{u_{d_1}}, \vec{u_{d_2}}\right]$
- Sử dụng dạng 1 để viết phương trình đường thẳng d.

Dạng 8. ***Đường thẳng*** (d) ***đi qua điểm*** $M_0(x_0;y_0;z_0)$***, vuông góc và cắt đường thẳng*** Δ **.**

- ***Cách 1****:* Gọi H là hình chiếu vuông góc của M_0 trên đường thẳng Δ

Ta có $\begin{cases}H \in \Delta\\ \overrightarrow{M_0H} \perp \vec{u}_\Delta\end{cases} \Rightarrow H$

Khi đó đường thẳng d là đường thẳng đi qua M_0, H (trở về dạng 2).

- ***Cách 2****:* Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M_0 và vuông góc với Δ; (Q) là mặt phẳng đi qua M_0 và chứa Δ. Khi đó $d = (P) \cap (Q)$ *(trở về dạng 6).*

- ***Cách 3****:* Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M_0 và vuông góc với Δ

  - Tìm điểm $B = (P) \cap \Delta$

  - Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm M_0, B *(quay về dạng 2).*

Dạng 9. ***Đường thẳng*** (d) ***nằm trong mặt phẳng*** (P)***, vuông góc và cắt đường thẳng*** Δ

- Tìm giao điểm M của Δ và $(P) \Rightarrow M \in d$
- Vì $\begin{cases}\vec{u_d} \perp \vec{u_\Delta}\\ \vec{u_d} \perp \vec{n_P}\end{cases} \Rightarrow \vec{u_d} = \left[\vec{u_\Delta}, \vec{n_P}\right]$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Dạng 10. Đường thẳng (d) qua A và cắt d_1, d_2:

- $d = (\alpha) \cap (\beta)$ với mp(α) chứa A và d_1; mp(β) chứa A và d_2 *(trở về dạng 6)*

Dạng 11. Đường thẳng (d) nằm trong mặt phẳng (P) và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2:

- Tìm các giao điểm $A = d_1 \cap (P), B = d_2 \cap (P)$. Khi đó d chính là đường thẳng AB *(về dạng 2).*

Dạng 12. Đường thẳng $(d) // \Delta$ và cắt d_1, d_2:

- Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d và d_1, mặt phẳng (Q) chứa d và d_2

  Khi đó $d = (P) \cap (Q)$ *(trở về dạng 6).*

Dạng 13. Đường thẳng (d) qua A và $\perp d_1$, cắt d_2:

- ***Cách 1:***
  - Viết phương trình mp (α) qua A và vuông góc với d_1
  - Tìm $B = d_2 \cap (\alpha)$
  - Khi đó (d) chính là đường thẳng AB *(về dạng 2).*
- ***Cách 2:***
  - Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A và vuông góc với d_1
  - Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa A và d_2
  - Khi đó $d = (P) \cap (Q)$. *(trở về dạng 6)*
- ***Cách 3:***
  - Viết phương trình tham số t của đường thẳng d_2 (nếu chưa có).
  - Tìm điểm $B = d \cap d_2$ (B có tọa độ theo tham số t) thỏa mãn $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_{d_1}} = 0$

  Giải phương trình tìm được $t \Rightarrow B$
  - Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm A, B.

Dạng 14. Đường thẳng $(d) \perp (P)$ cắt d_1, d_2:

- Tìm mp(α) chứa $d_1, \perp (P)$; mp(β) chứa $d_2, \perp (P)$
- $d = (\alpha) \cap (\beta)$ *(trở về dạng 6).*

Dạng 15. Đường thẳng d' là hình chiếu của d lên (α):

- ***Cách 1:***
  - Viết phương trình mặt phẳng (β) chứa d và vuông góc với (α).
  - Đường thẳng d' là giao tuyến của (α) và (β) *(trở về dạng 6).*
- ***Cách 2:***
  - Xác định A là giao điểm của d và (α).
  - Lấy điểm $M \neq A$ trên d. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M vuông góc với (α).
  - Tìm tọa độ điểm H là giao điểm của Δ với (α).
  - Đường thẳng d' chính là đường thẳng AH *(trở về dạng 2).*

  Đặc biệt: Nếu d song song (α) thì d' là đường thẳng đi qua H và song song với d.

Dạng 16. Phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau (d_1) và (d_2):

- ***Cách 1:***
  - Chuyển phương trình đường thẳng $(d_1), (d_2)$ về dạng tham số và xác định $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ lần lượt là vtcp của $(d_1), (d_2)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

- Lấy A,B lần lượt thuộc $(d_1),(d_2)$ (tọa độ A,B phụ thuộc vào tham số).

- Giả sử AB là đường vuông góc chung. Khi đó: $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{u_1}=0\\ \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{u_2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_1}=0\\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_2}=0\end{cases}\quad(*)$

Giải hệ phương trình $(*)$ tìm ra giá trị của tham số. Từ đó tìm được A,B.

- Viết phương trình đường vuông góc chung AB.

☐ ***Cách 2:***

- Vì d ⊥ d1 và d ⊥ d2 nên một vtcp của d là: $\overrightarrow{a_d}=\left[\overrightarrow{a_{d_1}},\overrightarrow{a_{d_2}}\right]$

- Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa 2 đường thẳng cắt nhau d và d_1, bằng cách:

+ Lấy một điểm A trên d_1 .

+ Một vtpt của (P) là: $\overrightarrow{n_P}=\left[\vec{a},\overrightarrow{a_{d_1}}\right]$

- Tương tự lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa 2 đường thẳng cắt nhau d và d_2.

Khi đó $d=(P)\cap(Q)$ *(trở về dạng 6).*

☐ ***Cách 3:***

- Vì $d\perp d_1$ và $d\perp d_2$ nên một vtcp của d là: $\overrightarrow{a_d}=\left[\overrightarrow{a_{d_1}},\overrightarrow{a_{d_2}}\right]$

- Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa 2 đường thẳng cắt nhau d và d_1, bằng cách:

+ Lấy một điểm A trên d_1 .

+ Một vtpt của (P) là: $\overrightarrow{n_P}=\left[\vec{a},\overrightarrow{a_{d_1}}\right]$

- Tìm $M=d_2\cap(P)$. Khi đó viết phương trình d qua M có vtcp $\overrightarrow{a_d}$.

CÁC DẠNG TOÁN KHÁC

Dạng 1. Tìm H ***là hình chiếu của*** M ***trên đường thẳng*** (d)

☐ ***Cách 1:***

- Viết phương trình mp(α) qua M và vuông góc với (d): ta có $\vec{n}_\alpha=\overrightarrow{a_d}$

- Khi đó: $H=d\cap(\alpha)\Leftrightarrow$ tọa độ H là nghiệm của hpt: (d) và (α).

☐ ***Cách 2:***

- Đưa (d) về dạng tham số. Điểm H được xác định bởi: $\begin{cases}H\in d\\ \overrightarrow{MH}\perp\vec{a}_d\end{cases}$

Dạng 2. ***Điểm*** M' ***đối xứng với*** M ***qua đường thẳng*** d***:***

☐ ***Cách 1:***

- Tìm hình chiếu H của M trên (d)

- Xác định điểm M' sao cho H là trung điểm của đoạn MM' (công thức trung điểm).

☐ ***Cách 2:***

- Gọi H là trung điểm của đoạn MM'. Tính toạ độ điểm H theo toạ độ của M,M' (công thức trung điểm).

- Khi đó toạ độ của điểm M' được xác định bởi: $\begin{cases}\overrightarrow{MM'}\perp\vec{a}_d\\ H\in d\end{cases}$.

Dạng 3. ***Đường thẳng*** (d') ***đối xứng đường thẳng*** (d) ***qua mặt phẳng*** (P)

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

- ***TH1:*** $(d)\cap(P)=A$
  - Xác định A là giao điểm của d và (P)
  - Lấy điểm $M\in d$ (M bất kỳ). Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với M qua (P).
  - Đường thẳng d' chính là đường thẳng AM'.
- ***TH2:*** $(d)\ //\ (P)$
  - Lấy điểm $M\in d$ (M bất kỳ). Tìm tọa độ điểm M' đối xứng với M qua (P).
  - Đường thẳng d' chính là đường thẳng qua M' và song song d.

C – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Đường thẳng Δ song song với $d:\dfrac{x+4}{3}=\dfrac{y-5}{-4}=\dfrac{z+2}{1}$ và cắt cả hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{2}$ và $d_2:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z}{1}$. Phương trình nào không phải đường thẳng Δ

A. $\Delta:\dfrac{x+4}{3}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z+1}{1}$

B. $\Delta:\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-\frac{7}{3}}{-4}=\dfrac{z-\frac{2}{3}}{1}$

C. $\Delta:\dfrac{x+9}{3}=\dfrac{y+7}{-4}=\dfrac{z+2}{1}$

D. $\Delta:\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-1}{-4}=\dfrac{z-1}{1}$

Lời giải

Giải: Gọi M, N là giao điểm của Δ và d_1,d_2.

Khi đó M, N thuộc d_1,d_2 nên $\begin{cases}x_M=1+3t\\y_M=-1+t\\z_M=2+2t\end{cases},\begin{cases}x_N=-2+2t'\\y_N=3+4t'\\z_N=t'\end{cases}$.

Vector chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{MN}=(-3+2t'-3t;4+4t'-t;-2+t'-2t)$

Δ song song với $d:\dfrac{x+4}{3}=\dfrac{y-5}{-4}=\dfrac{z+2}{1}$ nên $\dfrac{-3+2t'-3t}{3}=\dfrac{4+4t'-t}{-4}=\dfrac{-2+t'-2t}{1}$

Giải hệ ta được $t'=-1;t=-\dfrac{4}{3}$. Vậy $N(-4;-1;-1),M\left(-3;-\dfrac{7}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$

Vậy $\Delta:\dfrac{x+4}{3}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z+1}{1}$

Chọn A

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P):x+2y+2z-4=0$. Phương trình đường thẳng d nằm trong (P) sao cho d cắt và vuông góc với đường thẳng Δ là

A. $d:\begin{cases}x=-3+t\\y=1-2t\\z=1-t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

B. $d:\begin{cases}x=3t\\y=2+t\\z=2+2t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

C. $d:\begin{cases}x=-2-4t\\y=-1+3t\\z=4-t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

D. $d:\begin{cases}x=-1-t\\y=3-3t\\z=3-2t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

Lời giải

Chọn C

Vectơ chỉ phương của $\Delta:\vec{u}_\Delta(1;1;-1)$, vectơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n_{(P)}}=(1;2;2)$.

Vì $\begin{cases}d\perp\Delta\\d\subset(P)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{u}_d\perp\vec{u}_\Delta\\\vec{u}_d\perp\vec{n}_{(P)}\end{cases}\Rightarrow\vec{u}_d=\left[\vec{u}_\Delta;\vec{n}_{(P)}\right]=(4;-3;1)$.

Tọa độ giao điểm $H=\Delta\cap(P)$ là nghiệm của hệ $\begin{cases}x=t\\y=1+t\\z=2-t\\x+2y+2z-4=0\end{cases}\Rightarrow t=-2\Rightarrow H(-2;-1;4)$.

Lại có $(d;\Delta)\cap(P)=d$, mà $H=\Delta\cap(P)$. Suy ra $H\in d$.

Vậy đường thẳng d đi qua $H(-2;-1;4)$ và có VTCP $\vec{u}_d=(4;-3;1)$ nên có phương trình

$d:\begin{cases}x=-2-4t\\y=-1+3t\\z=4-t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P):x+2y-z-3=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong (P) sao cho Δ vuông góc với d và khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ và d bằng $\sqrt{2}$.

A. $\left[\begin{array}{l}\Delta:\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-4}{-1}\\\Delta:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{-1}\end{array}\right.$.

B. $\left[\begin{array}{l}\Delta:\dfrac{x+7}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-4}{-1}\\\Delta:\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-1}\end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l}\Delta:\dfrac{x-7}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-4}{-1}\\\Delta:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z}{1}\end{array}\right.$.

D. $\left[\begin{array}{l}\Delta:\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{-y}{-1}=\dfrac{z-4}{-1}\\\Delta:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{-y}{-1}=\dfrac{z-1}{-1}\end{array}\right.$.

Lời giải

Đường thẳng d có VTCP $\overrightarrow{u_d}=(2;1;1)$. Mặt phẳng (P) có VTPT $\overrightarrow{n_p}=(1;2;-1)$, ta có $\left[\overrightarrow{n_p},\overrightarrow{u_d}\right]=(3;-3;-3)$

Vì $\Delta\subset(P),\Delta\perp d\Rightarrow VTPT\ \overrightarrow{u_\Delta}=\dfrac{1}{3}\left[\overrightarrow{u_\Delta};\overrightarrow{u_d}\right]=(0;-1;1)$

Khi đó, phương trình mặt phẳng $(Q):y-z+m=0$

Chọn $A(1;-2;0)\in d$, ta có:

$$d\left(A;(Q)\right)=d\left(\Delta;d\right)=\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{|-2+m|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=4\\m=0\end{array}\right.$$

Với $m=4\Rightarrow(Q):y-z+4=0$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Vì $\Delta=(P)\cap(Q)\Rightarrow\Delta$ đi qua $B(7;0;4)\Rightarrow\Delta:\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-4}{-1}$

Với $m=0\Rightarrow(Q):y-z=0$

Vì $\Delta=(P)\cap(Q)\Rightarrow\Delta$ đi qua $C(3;0;0)\Rightarrow\Delta:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{-1}$

Chọn A

Câu 4: **(KIM LIÊN HÀ NỘI NĂM 2018-2019 LẦN 03)** Trong không gian $Oxyz$, phương trình đường thẳng đi qua $A(1;2;4)$ song song với (P): $2x+y+z-4=0$ và cắt đường thẳng d: $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-2}{5}$ có phương trình:

A. $\begin{cases}x=1+t\\y=2\\z=4-2t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1+2t\\y=2\\z=4+2t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-1-2t\\y=2\\z=4+4t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1-t\\y=-2\\z=4+2t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\vec{n}_P=(2;1;1)$ là một vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Phương trình tham số của đường thẳng d là: $\begin{cases}x=2+3t\\y=2+t\\z=2+5t\end{cases},t\in\mathbb{R}$.

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm. Gọi M là giao điểm của Δ và $d\Rightarrow M(2+3t;2+t;2+5t)$

$\Rightarrow\overrightarrow{AM}=(1+3t;t;-2+5t)$

Do $\Delta//(P)$ nên $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n_P}=0\Leftrightarrow2(1+3t)+t+(-2+5t)=0\Leftrightarrow12t=0\Leftrightarrow t=0$

$\Rightarrow\overrightarrow{AM}=(1;0;-2)$.

Phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(1;2;4)$ và nhận $\overrightarrow{AM}=(1;0;-2)$ là một vec tơ chỉ phương là: $\begin{cases}x=1+t\\y=2\\z=4-2t\end{cases},t\in\mathbb{R}$.

Câu 5: **(Lương Thế Vinh Lần 3)** Trong hệ tọa độ $Oxyz$, lập phương trình đường vuông góc chung Δ của hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-2}{2}$ và $d_2:\begin{cases}x=-3t\\y=t\\z=-1-3t\end{cases}$.

A. $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-4}{-2}$. **B.** $\dfrac{x-3}{-1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$.

C. $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$. **D.** $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{6}=\dfrac{z+1}{1}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi: $\Delta\cap d_1=M(1+t';3-t';2+2t')$, $\Delta\cap d_2=N(-3t;t;-1-3t)$

$\Rightarrow\overrightarrow{MN}=(-3t-1-t';t-3+t';-3-3t-2t')$.

d_1,d_2 lần lượt có 2 vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_1}=(1;-1;2),\overrightarrow{u_2}=(-3;1;-3)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Vì Δ là đường vuông góc chung của $d_1;d_2$ nên $\begin{cases}\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_1}=0\\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-6t'-10t=4\\ 10t'+19t=-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t'=1\\ t=-1\end{cases}$

$\Rightarrow M(2;2;4), N(3;-1;2), \overrightarrow{MN}=(1;-3;-2)$

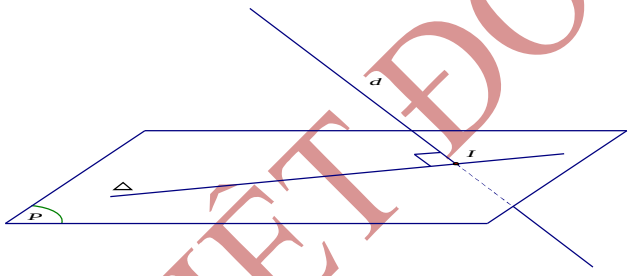
Vậy phương trình $\Delta:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-4}{-2}$.

Câu 6: **(THPT-Yên-Mô-A-Ninh-Bình-2018-2019-Thi-tháng-4)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{-2}$ và mặt phẳng $(P):2x-2y+z-3=0$, phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), cắt d và vuông góc với d là

A. $\begin{cases}z=2-2t\\ y=1-5t\\ z=-5-6t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}z=-2-2t\\ y=-1-5t\\ z=5-6t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}z=-2+2t\\ y=-1+5t\\ z=5-6t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}z=-2-2t\\ y=1-5t\\ z=5+6t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn B



Mặt phẳng (P) có vecto pháp tuyến $\vec{n}=(2;-2;1)$.

Đường thẳng d đi qua $M(-1;1;3)$ và có vecto chỉ phương $\vec{u}=(1;2;-2)$ nên phương trình tham số của d là: $\begin{cases}x=-1+t\\ y=1+2t\\ z=3-2t\end{cases}$.

Gọi $I=\Delta\cap d\Rightarrow\begin{cases}I\in\Delta\\ I\in d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}I\in(P)\\ I\in d\end{cases}\Rightarrow I=d\cap(P)$.

Vì $I\in d\Rightarrow I(-1+t;1+2t;3-2t)$, mà $I\in(P)\Rightarrow t=-1\Rightarrow I(-2;-1;5)$.

Gọi $\vec{v}$ là vecto chỉ phương của đường thẳng Δ.

Vì $\begin{cases}\Delta\subset(P)\\ \Delta\perp d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{v}\perp\vec{n}\\ \vec{v}\perp\vec{u}\end{cases}$ nên ta chọn $\vec{v}=\left[\vec{u},\vec{n}\right]=(-2;-5;-6)$.

Vậy Δ đi qua $I(-2;-1;5)$ và có vecto chỉ phương $\vec{v}=(-2;-5;-6)$ nên có phương trình tham số là: $\begin{cases}z=-2-2t\\ y=-1-5t\\ z=5-6t\end{cases}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 7: **(THẠCH THÀNH I - THANH HÓA 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d: \frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1}$. Hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $\frac{x+1}{-1}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z+1}{5}$.

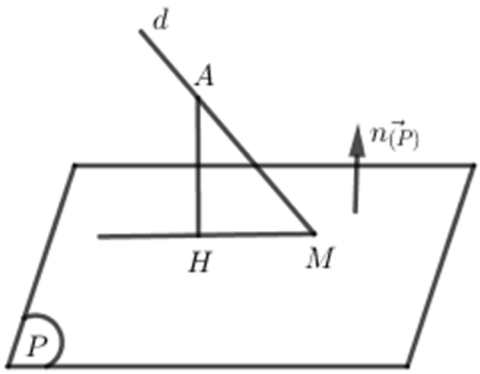
B. $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{-1}$.

C. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-1}{-5}$.

D. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+5}{1}$.

Lời giải

Chọn C



Phương trình đường thẳng d qua $A(0;-1;2)$, có 1 véc tơ chỉ phương $\vec{a}=(1;2;-1)$ là

$$\begin{cases} x=t_1 \\ y=-1+2t_1 \\ z=2-t_1 \end{cases} (t_1 \in R).$$

Gọi M là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P).

Ta có $M(t_1;-1+2t_1;2-t_1) \in d$ và $M \in (P) \Rightarrow t_1+(-1+2t_1)+(2-t_1)-3=0 \Leftrightarrow t_1=1$

$\Rightarrow M(1;1;1)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (P).

Đường thẳng chứa AH đi qua $A(0;-1;2)$ và nhận vectơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)}=(1;1;1)$ của (P) làm vectơ chỉ phương có phương trình là $\begin{cases} x=t_2 \\ y=-1+t_2 \\ z=2+t_2 \end{cases} (t_2 \in R)$.

Lại có $H(t_2;-1+t_2;2+t_2) \in (AH)$ và $H \in (P) \Rightarrow t_2+(-1+t_2)+(2+t_2)-3=0 \Leftrightarrow t_2=\frac{2}{3}$

$\Rightarrow H\left(\frac{2}{3};-\frac{1}{3};\frac{8}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{MH}=\left(-\frac{1}{3};-\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)=-\frac{1}{3}(1;4;-5)$.

Hình chiếu cần tìm là đường thẳng (MH), đi qua $M(1;1;1)$ và có một véc tơ chỉ phương $\vec{b}=(1;4;-5)$ là $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-1}{-5}$.

Câu 8: **(Đặng Thành Nam Đề 10)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2m+1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+1}{m-2}, m \notin \left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}$ và mặt phẳng $(P): x+y+z-6=0$. Gọi đường thẳng

Δ là hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng (P). Có bao nhiêu số thực m để đường thẳng Δ vuông góc với giá của vécto $\vec{a}=(-1;0;1)$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Ta có VTCP của đường thẳng d là $\vec{u}_d=(2m+1;2;m-2)$.

VTPT của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_P=(1;1;1)$

Gọi $\begin{cases}(Q)\supset d\\(Q)\perp(P)\end{cases}\Rightarrow \vec{n}_Q=\left[\vec{u}_d,\vec{n}_P\right]=(4-m;-m-3;2m-1).$

Khi đó $\Delta=(P)\cap(Q)\Rightarrow \vec{u}_\Delta=\left[\vec{n}_P,\vec{n}_Q\right]=(-3m-2;3m-5;7).$

Vì Δ vuông góc với giá của vécto $\vec{a}$ nên ta có $\vec{u}_\Delta.\vec{a}=0\Leftrightarrow -1(-3m-2)+7=0\Leftrightarrow m=-3.$

Cách 2:

Ta có: d có VTCP là $\vec{u}_d=(2m+1;2;m-2)$.

Δ là hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng (P) và vuông góc với giá của véc tơ $\vec{a}$ nên d vuông góc với giá của véc tơ $\vec{a}$.

Khi đó $\vec{a}.\vec{u}_d=0\Leftrightarrow -(2m+1)+m-2=0\Leftrightarrow m=-3$.

Câu 9: **(PHÂN-TÍCH-BL-VÀ-PT-ĐẠI-HỌC-SP-HÀ-NỘI)** Trong không gian toạ độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;4)$ và hai điểm M,B thoả mãn $MA.\overrightarrow{MA}+MB.\overrightarrow{MB}=\vec{0}$. Giả sử điểm M thay đổi trên đường thẳng $d:\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+4}{1}$. Khi đó điểm B thay đổi trên đường thẳng có phương trình là:

A. $d_1:\dfrac{x+7}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+12}{1}$.

B. $d_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z-4}{1}$.

C. $d_3:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{1}$.

D. $d_4:\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-12}{1}$.

Lời giải

Chọn A

Từ $MA.\overrightarrow{MA}+MB.\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ ta suy ra M,A,B thẳng hàng. Hơn nữa:

$MA.\overrightarrow{MA}+MB.\overrightarrow{MB}=\vec{0}\Leftrightarrow MA.\overrightarrow{MA}=-MB.\overrightarrow{MB}\Rightarrow\left|MA.\overrightarrow{MA}\right|=\left|-MB.\overrightarrow{MB}\right|\Leftrightarrow MA^2=MB^2$

Vậy M là trung điểm AB.

Vì $M\in d$ nên toạ độ $M(-3+2t;1+2t;-4+t)$ $(t\in\mathbb{R})$. Đặt toạ độ $B(x;y;z)$ ta có:

$$\begin{cases}1+x=2(-3+2t)\\2+y=2(1+2t)\\4+z=2(-4+t)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+7=4t\\y=4t\\z+12=2t\end{cases}\Leftrightarrow\frac{x+7}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+12}{1}$$

Vậy $B\in d_1$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 10: **(PHÂN TÍCH BL_PT ĐỀ ĐH VINHL3 -2019..)** Trong không gian $Oxyz$, cho 2 đường thẳng $d:\begin{cases}x=-1-2t\\y=t\\z=-1+3t\end{cases}$, $d':\begin{cases}x=2+t'\\y=-1+2t'\\z=-2t'\end{cases}$ và mặt phẳng $(P):x+y+z+2=0$. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P), cắt d và d' có phương trình là

A. $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{1}$.

B. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-4}$.

C. $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$.

D. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-4}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Tổng quát bài toán: Viết phương trình đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P), cắt hai đường thẳng d và d' cho trước.

Gọi $A=\Delta\cap d\Rightarrow$ tọa độ điểm A theo t, $B=\Delta\cap d'\Rightarrow$ tọa độ điểm B theo t'.

Đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{n_P}$ cùng phương suy ra được t và t'.

Tìm được tọa độ A và B suy ra phương trình đường thẳng Δ.

Lời giải

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;1;1)$.

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm và $A=\Delta\cap d$ có $A\in d$ nên $A(-1-2t;t;-1+3t)$, $B=\Delta\cap d'$ có $B\in d'$ nên $B(2+t';-1+2t';-2t')$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(t'+2t+3;2t'-t-1;-2t'-3t+1)$.

Do $\Delta\perp(P)$ nên $\overrightarrow{AB}$, $\vec{n}$ cùng phương $\Leftrightarrow\dfrac{t'+2t+3}{1}=\dfrac{2t'-t-1}{1}=\dfrac{-2t'-3t+1}{1}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}3t-t'=-4\\2t+4t'=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-1\\t'=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A(1;-1;-4)\\B(3;1;-2)\end{cases}$.

Đường thẳng Δ đi qua điểm B và có vectơ chỉ phương $\vec{n}=(1;1;1)$ nên có phương trình $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{1}$.

Câu 11: **(THPT ĐÔ LƯƠNG 3 LẦN 2)** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+y-5z+4=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z+5}{6}$. Hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $\begin{cases}x=-2+3t\\y=-2+2t\\z=-t\end{cases}$.

B. $\begin{cases}x=-2-t\\y=2+2t\\z=t\end{cases}$.

C. $\begin{cases}x=1+3t\\y=2t\\z=1+t\end{cases}$.

D. $\begin{cases}x=3+t\\y=2\\z=1+t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của đường thẳng d trên mặt phẳng (P)

Đường thẳng d đi qua điểm $A(-1;-1;-5)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_d=(2;1;6)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Mặt phẳng (P) có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}_{(P)}=(1;1;-5)$.

Gọi (Q) là mặt phẳng chứa d và vuông góc với $(P)\Rightarrow(P)\cap(Q)=d'$.

Véc tơ pháp tuyến của (Q) là $\vec{n}_{(Q)}=\left[\vec{n}_{(P)},\vec{u}_d\right]=(11;-16;-1)$.

Phương trình của mặt phẳng (Q) là : $11x-16y-z-10=0$.

Do $(P)\cap(Q)=d'$ nên véc tơ chỉ phương của đường thẳng d' là

$\vec{u}_{d'}=\left[\vec{n}_{(Q)},\vec{n}_{(P)}\right]=(-81;-54;-27)=-27(3;2;1)$,

suy ra d' có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_1=(3;2;1)$.

Kiểm tra với điểm $B(1;0;1)$ thuộc đường thẳng ở khẳng định C ta thấy $B\in(P),B\in(Q)$.

Do đó phương trình của d' là : $\begin{cases}x=1+3t\\y=2t\\z=1+t\end{cases},t\in\mathbb{R}$

Câu 12: **(CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ HÒA BÌNH LẦN 4 NĂM 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1, d_2 và mặt phẳng (α) có phương trình:

$d_1:\begin{cases}x=1+3t\\y=2+t\\z=-1+2t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$, $d_2:\dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-4}{-2}$, $(\alpha):x+y-z-2=0$.

Phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (α), cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2 là

A. $\dfrac{x+2}{8}=\dfrac{y-1}{-7}=\dfrac{z+3}{1}$.

B. $\dfrac{x-2}{-8}=\dfrac{y+1}{7}=\dfrac{z-3}{-1}$.

C. $\dfrac{x+2}{8}=\dfrac{y-1}{7}=\dfrac{z+3}{-1}$.

D. $\dfrac{x-2}{-8}=\dfrac{y+1}{7}=\dfrac{z-3}{1}$.

Lời giải

Chọn A

* Vì đường thẳng Δ cắt cả hai đường thẳng d_1 và d_2 nên ta gọi M và N lần lượt là giao điểm của Δ với d_1 và d_2. Hơn nữa, vì đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (α) nên $M,N\in(\alpha)$.

* Tìm tọa độ điểm M.

Vì $M\in d_1$ nên tọa độ điểm M có dạng $M(1+3t;2+t;-1+2t)$ với $t\in\mathbb{R}$.

Vì $M(1+3t;2+t;-1+2t)\in(\alpha)$ nên $(1+3t)+(2+t)-(-1+2t)-2=0\Leftrightarrow t=-1$.

Do đó $M(-2;1;-3)$.

* Tìm tọa độ điểm N.

$d_2:\dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-4}{-2}\Rightarrow d_2:\begin{cases}x=2-3t'\\y=0+2t'\\z=4-2t'\end{cases}(t'\in\mathbb{R})$.

Vì $N\in d_2$ nên tọa độ điểm N có dạng $N(2-3t';2t';4-2t')$ với $t'\in\mathbb{R}$.

Vì $N(2-3t';2t';4-2t')\in(\alpha)$ nên $(2-3t')+(2t')-(4-2t')-2=0\Leftrightarrow t'=4$.

Do đó $N(-10;8;-4)$.

* Ta có: $\overrightarrow{NM}=(8;-7;1)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

* Đường thẳng Δ đi qua $M(-2;1;-3)$ và nhận $\overrightarrow{NM}=(8;-7;1)$ làm vectơ chỉ phương nên Δ có phương trình là $\frac{x+2}{8}=\frac{y-1}{-7}=\frac{z+3}{1}$.

Câu 13: **(THPT LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG NGÃI)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;3;2)$, mặt phẳng $(P):x+y-z+2=0$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt (P) và d lần lượt tại M, N sao cho A là trung điểm của MN.

A. $\Delta:\begin{cases}x=1+t\\y=3-t\\z=2-2t\end{cases}$. **B.** $\Delta:\begin{cases}x=1+t\\y=3+t\\z=2-2t\end{cases}$. **C.** $\Delta:\begin{cases}x=-1+t\\y=3-t\\z=2-2t\end{cases}$. **D.** $\Delta:\begin{cases}x=1+t\\y=-3-t\\z=2-2t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $N(2t+1;t;-t-1)$. Vì A là trung điểm của MN, suy ra $M(1-2t;6-t;5+t)$.

Điểm M nằm trong mặt phẳng (P), suy ra $1-2t+6-t-5-t+2=0 \Leftrightarrow t=1$.

Suy ra tọa độ điểm $N(3;1;-2)$. Ta có $\overrightarrow{NA}=(-2;2;4)$, chọn $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;-1;-2)$.

Phương trình đường thẳng Δ qua A, có véc-tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta}$ là $\begin{cases}x=1+t\\y=3-t\\z=2-2t\end{cases}$.

Câu 14: **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;1;2), B(-2;3;1), C(3;-1;4)$. Viết phương trình đường cao của tam giác ABC kẻ từ đỉnh B

A. $\begin{cases}x=-2-t\\y=3+t\\z=1-t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=-2+t\\y=3\\z=1-t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-2-t\\y=3+t\\z=1+t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-2+t\\y=3-t\\z=1+t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

*) Cách 1.Gọi $H(a;b;c)$ là hình chiếu vuông góc của B trên AC.

Ta có : $\overrightarrow{BH}=(a+2;b-3;c-1), \overrightarrow{AC}=(2;-2;2), \overrightarrow{AH}=(a-1;b-1;c-2)$

H là hình chiếu vuông góc của B trên $AC \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\\H\in AC\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2(a+2)-2(b-3)+2(c-1)=0\\\frac{a-1}{2}=\frac{b-1}{-2}=\frac{c-2}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a-b+c=-4\\a+b=2\\a-c=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-1\\b=3\\c=0\end{cases}$

Nên $H(-1;3;0), \overrightarrow{BH}=(1;0;-1)$

Đường cao BH đi qua B và có VTCP $\overrightarrow{BH}=(1;0;-1)$ có phương trình là: $\begin{cases}x=-2+t\\y=3\\z=1-t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

*) Cách 2. Đường thẳng AC đi qua A và có VTCP $\overrightarrow{AC}=(2;-2;2)$ hay ta có thể chọn véc tơ chỉ phương của AC là $\vec{U}=(1;-1;1)$ nên phương trình của đường thẳng AC là: $\begin{cases}x=1+t\\y=1-t\\z=2+t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên AC nên ta gọi $H(1+t;1-t;2+t)$

$\Rightarrow \overrightarrow{BH}=(3+t;-2-t;1+t)$

Ta có: $BH\perp AC\Leftrightarrow \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow 2(3+t)+(-2)(-2-t)+2(1+t)=0\Leftrightarrow t=-1$

$\Rightarrow H(-1;3;0);\overrightarrow{BH}=(1;0;-1)$

Vậy đường thẳng BH đi qua B và có VTCP $\overrightarrow{BH}=(1;0;-1)$ có phương trình là:

$\begin{cases}x=-2+t\\y=3\\z=1-t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$

Câu 15: **(THPT-Toàn-Thắng-Hải-Phòng)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$ và mặt phẳng $(P):2x+y-4z+1=0$. Đường thẳng (d) đi qua điểm A, song song với mặt phẳng (P), đồng thời cắt trục Oz. Viết phương trình tham số của đường thẳng (d).

A. $\begin{cases}x=1+5t\\y=2-6t\\z=3+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=t\\y=2t\\z=2+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+3t\\y=2+2t\\z=3+t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1-t\\y=2+6t\\z=3+t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

Giả sử đường thẳng (d) cắt trục Oz tại điểm $B(0;0;a)$ (a là số thực).

Suy ra đường thẳng (d) nhận $\overrightarrow{BA}(1;2;3-a)$ là một vecto chỉ phương.

Mà (d) song song với mặt phẳng (P) và $\vec{n}(2;1;-4)$ là một vecto pháp tuyến của (P) nên:

$\overrightarrow{BA}\perp\vec{n}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}.\vec{n}=0\Rightarrow 2.1+1.2-4(3-a)=0\Leftrightarrow a=2$.

Suy ra đường thẳng (d) đi qua điểm $A(1;2;3)$ và nhận $\overrightarrow{BA}(1;2;1)$ là một vecto chỉ phương có phương trình tham số là: $\begin{cases}x=1+t\\y=2+2t\\z=3+t\end{cases}$.

Từ dữ kiện (d) nhận $\overrightarrow{BA}(1;2;1)$ là một vecto chỉ phương ta loại được đáp án A, C, D.

Thử lại thấy điểm $(0;0;2)$ thuộc đường thẳng $\begin{cases}x=1+t\\y=2+2t\\z=3+t\end{cases}$ nên đáp án B là đáp án đúng.

Câu 16: **(KỸ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-2;1;5)$ và hai mặt phẳng $(P):2x+y+3z-7=0$, $(Q):3x-2y-z+1=0$. Gọi M là điểm nằm trên mặt phẳng (P) và điểm N nằm trên mặt phẳng (Q) thỏa mãn $\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{AM}$. Khi M di động trên mặt phẳng (P) thì quỹ tích điểm N là một đường thẳng có phương trình là

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $\begin{cases} x=-3-5t \\ y=-8+11t \\ z=6-7t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=7+11t \\ y=-8-5t \\ z=6-7t \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x=7+11t \\ y=-8-5t \\ z=-8-7t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2+5t \\ y=3+11t \\ z=-1-7t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có phép vị tự tâm A tỉ số 2 biến điểm M thành điểm N mà M là điểm nằm trên mặt phẳng (P)

Suy ra điểm N nằm trên mặt phẳng (P') là ảnh của mặt phẳng (P) qua phép vị tự tâm A tỉ số 2.

Ta có $B(2;0;1)\in(P)$, phép vị tự tâm A tỉ số 2 biến B thành $B'(6;1;-3)\in(P')$ và $(P)//(P')$

$\Rightarrow (P'):2x+y+3z-4=0$

Do đó N thuộc hai mặt phẳng (Q) và (P') nên N thuộc giao tuyến d của hai mặt phẳng (Q) và (P') với $\vec{n_1}(2;1;3),\vec{n_2}(3;-2;-1)$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của hai mặt phẳng (P') và (Q)

$\Rightarrow C(2;3;-1)\in d$ và d có vectơ chỉ phương $\vec{u}=\left[\vec{n_1};\vec{n_2}\right]=(5;11;-7)$

$\Rightarrow d:\begin{cases} x=2+5t \\ y=3+11t \\ z=-1-7t \end{cases}$.

Câu 17: **(SỞ PHÚ THỌ LẦN 2 NĂM 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha):2x+3y-2z+12=0$. Gọi A,B,C lần lượt là giao điểm của (α) với ba trục tọa độ, đường thẳng d đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và vuông góc với (α) có phương trình là

A. $\frac{x+3}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{-2}$. **B.** $\frac{x+3}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-3}{2}$.

C. $\frac{x+3}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-3}{-2}$. **D.** $\frac{x-3}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+3}{-2}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Ta có: mặt phẳng $(\alpha):2x+3y-2z+12=0\Rightarrow\begin{cases} Ox\cap(\alpha)=A(-6;0;0) \\ Oy\cap(\alpha)=B(0;-4;0) \\ Oz\cap(\alpha)=C(0;0;6). \end{cases}$

Mà đường thẳng d đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên đường thẳng d là tập hợp các điểm cách đều 3 đỉnh A,B,C trong không gian $\Rightarrow$ đường thẳng d là giao tuyến của các mp trung trực của các đoạn thẳng AB,AC,BC.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

* Gọi (P) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng $AB \Rightarrow$ Mặt phẳng (P) đi qua trung điểm $M(-3;-2;0)$ của AB và nhận $\overrightarrow{AM}=(3;-2;0)$ là vectơ pháp tuyến $\Rightarrow$ Phương trình của mặt phẳng (P) là: $3x-2y+5=0$.

* Gọi (Q) là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng $AC \Rightarrow$ Mặt phẳng (Q) đi qua trung điểm $N(-3;0;3)$ của AC và nhận $\overrightarrow{AN}=(3;0;3)$ là vectơ pháp tuyến $\Rightarrow$ Phương trình của mặt phẳng (Q) là: $x+z=0$.

* Lấy điểm $E(-1;y;z)$ thuộc đường thẳng d, vì đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) nên tọa độ điểm E thỏa mãn hệ: $\begin{cases}-3-2y+5=0\\-1+z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=1\\z=1\end{cases} \Rightarrow E(-1;1;1)$

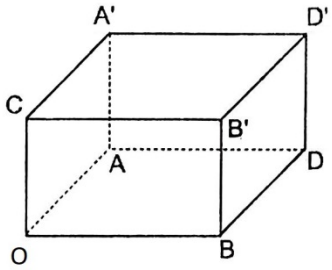
* Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 2x+3y-2z+12=0$ nên đường thẳng d có 1 vécto chỉ phương là $\vec{u}=(2;3;-2)$, đồng thời d đi qua điểm $E(-1;1;1)$ nên phương trình của d là $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-3}{-2}$.

Cách 2:

Ta có: mặt phẳng $(\alpha): 2x+3y-2z+12=0 \Rightarrow \begin{cases}Ox\cap(\alpha)=A(-6;0;0)\\Oy\cap(\alpha)=B(0;-4;0)\\Oz\cap(\alpha)=C(0;0;6).\end{cases}$

Mà đường thẳng d đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên đường thẳng d là tập hợp các điểm cách đều 3 đỉnh A,B,C trong không gian.

Nhận xét: 3 cạnh OA,OB,OC đôi một vuông góc $\Rightarrow$ dựng hình hộp chữ nhật $OADB.CA'D'B'$



Dễ thấy tâm mặt cầu ngoại tiếp hình hộp là trung điểm I của đường chéo OD'

$\Rightarrow \overrightarrow{OI}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OD'}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right) \Rightarrow \overrightarrow{OI}=(-3;-2;3) \Rightarrow I(-3;-2;3).$

Mà I là tâm mặt cầu ngoại tiếp của hình hộp $\Rightarrow$ I cách đều 3 đỉnh $A, B, C \Rightarrow I$ nằm trên đường thẳng d cần tìm.

Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 2x+3y-2z+12=0$ nên đường thẳng d có 1 vécto chỉ phương là $\vec{u}=(2;3;-2)$, đồng thời d đi qua điểm $E(-1;1;1)$ nên phương trình của d là $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-3}{-2}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{-1}$ và mặt phẳng $(P):x+y+z-3=0$. Gọi I là giao điểm của $d,(P)$. Tìm $M\in(P)$ sao cho MI vuông góc với d và $MI=4\sqrt{14}$.

A. $\left[\begin{array}{l}M(5;9;-11)\\M(-3;-7;13)\end{array}\right.$.

B. $\left[\begin{array}{l}M(5;7;-11)\\M(-3;-7;13)\end{array}\right.$.

C. $\left[\begin{array}{l}M(-5;9;-11)\\M(3;-7;13)\end{array}\right.$.

D. $\left[\begin{array}{l}M(5;-7;11)\\M(3;7;-13)\end{array}\right.$.

Lời giải

Vì $I\in d$ nên $I(2+t;-1-2t;-t)$.

Hơn nữa $I\in(P)\Rightarrow 2+t-1-2t-3=0\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow I(1;1;1)$

Gọi $M(a;b;c)$. Do: $\begin{cases}M\in(P)\Rightarrow a+b+c=3\\MI\perp d\Rightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{u_d}=0\Leftrightarrow a-2b-c+2=0\end{cases}$

$\left(\overrightarrow{IM}=(a-1;b-1;c-1),\overrightarrow{u_d}=(1;-2;-1)\right)$

Do $MI=4\sqrt{14}\Rightarrow(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=224$.

Khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}a+b+c=3\\a-2b-c+2=0\\(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=224\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2a-1\\c=4-3a\\(a-1)^2=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=5\\b=9\\c=-11\end{cases}\cup\begin{cases}a=-3\\b=-7\\c=13\end{cases}$$

Với $(a;b;c)=(5;9;-11)\Rightarrow M(5;9;-11)$

Với $(a;b;c)=(-3;-7;13)\Rightarrow M(-3;-7;13)$

Chọn A

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P):x-2y+2z=0,(Q):2x+2y+z-1=0$. Viết phương trình của đường thẳng d đi qua $A(0;0;1)$, nằm trong mặt phẳng (Q) và tạo với mặt phẳng (P) một góc bằng 45^0.

A. $d_1:\begin{cases}x=t\\y=t\\z=1-4t\end{cases};d_2:\begin{cases}x=t\\y=-t\\z=1\end{cases}$.

B. $d_1:\begin{cases}x=t\\y=2t-1\\z=1-4t\end{cases};d_2:\begin{cases}x=t\\y=1-t\\z=1\end{cases}$.

C. $d_1:\begin{cases}x=t\\y=t-1\\z=1-4t\end{cases};d_2:\begin{cases}x=3t\\y=-t\\z=1+4t\end{cases}$.

D. $d_1:\begin{cases}x=1+4t\\y=1-t\\z=1-4t\end{cases};d_2:\begin{cases}x=t\\y=-t\\z=1\end{cases}$

Lời giải

Ta có $\vec{n}=(2;2;1)$ là vecto pháp tuyến của $(Q),\vec{b}=(1;-2;2)$ là vec tơ pháp tuyến của (P).

Gọi $\vec{a}=(a;b;c),a^2+b^2+c^2>0$ là một vecto chỉ phương của d.

Vì đường thẳng d đi qua $A(0;0;1)$ mà $A(0;0;1),A\in(Q)$

Do đó $d\subset(Q)\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{n}\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{n}=0\Leftrightarrow 2a+2b+c=0\Leftrightarrow c=-2a-2b$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Góc hợp bởi d và (P) bằng 45^0:

$$\Leftrightarrow \sin 45^0 = \left|\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)\right| = \frac{\left|\vec{a}.\vec{b}\right|}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|a-2b+2c|}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\Leftrightarrow 18(a^2+b^2+c^2) = 4(a-2b+2c)^2 \Leftrightarrow a = \pm b$$

$a = b\,(b=1 \Rightarrow a=1; c=-4)$

$a = -b\,(b=-1 \Rightarrow a=1; c=0)$

Vậy $d_1: \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=1-4t \end{cases}; d_2: \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=1 \end{cases}$ là các đường thẳng cần tìm.

Chọn A

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình thang cân $ABCD$ có hai đáy AB, CD thỏa mãn $CD = 2AB$ và diện tích bằng 27; đỉnh $A(-1;-1;0)$; phương trình đường thẳng chứa cạnh CD là $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{1}$. Tìm tọa độ các điểm D biết hoành độ điểm B lớn hơn hoành độ điểm A.

A. $D(-2;-5;1)$. **B.** $D(-3;-5;1)$. **C.** $D(2;-5;1)$. **D.** $D(3;-5;1)$

Lời giải

Đường thẳng CD qua $M(2;-1;3)$ có vec tơ chỉ phương $\vec{u} = (2;2;1)$

Gọi $H(2+2t;-1+2t;3+t)$ là hình chiếu của A lên CD, ta có:

$\overrightarrow{AH}.\vec{u} = 2(3+2t; 2.2t+(3+t) \Rightarrow t=-1 \Rightarrow H(0;-3;2), d(A,CD) = AH = 3$

Từ giả thiết ta có:

$$AB + CD = 3AB = \frac{2S_{ABCD}}{AH} = 18 \Rightarrow AB = 6; DH = 3; HC = 9$$

Đặt $\overrightarrow{AB} = t\vec{u} = (2t;2t;t) \Rightarrow t > 0 (x_B > x_A) \Rightarrow t = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\vec{u}|} = 2 \Rightarrow \overrightarrow{AB}(4;4;2) \Rightarrow B(3;3;2)$

$$\overrightarrow{HC} = \frac{9}{6}\overrightarrow{AB} = (6;6;3) \Rightarrow C(6;3;5)$$

$$\overrightarrow{HD} = -\frac{3}{6}\overrightarrow{AB} = (-2;-2;-1) \Rightarrow D(-2;-5;1)$$

Chọn A

Câu 21: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x+y+z+2=0$. Gọi M là giao điểm giữa d và (P). Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P), vuông góc với d đồng thời khoảng cách từ M đến Δ bằng $\sqrt{42}$.

A. $\left[\begin{array}{l} \Delta: \frac{x-5}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+5}{1} \\ \Delta: \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z-5}{1} \end{array}\right.$.

B. $\left[\begin{array}{l} \Delta: \frac{x-5}{-2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+5}{1} \\ \Delta: \frac{x+3}{-2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z-5}{1} \end{array}\right.$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

C. $\left[\begin{array}{l}\Delta:\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-5}{1}\\ \Delta:\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z-5}{1}\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}\Delta:\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z+5}{1}\\ \Delta:\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+4}{3}=\dfrac{z-5}{1}\end{array}\right.$

Lời giải

Phương trình tham số của $d:\begin{cases}x=3+2t\\ y=-2+t\\ z=-1-t\end{cases}$

Mặt phẳng (P) có VTPT $\overrightarrow{n_P}=(1;1;1)$, d có VTCP $\overrightarrow{u_d}=(2;1;-1)$

Vì $M=d\cap(P)\Rightarrow M(1;-3;0)$

Vì Δ nằm trong (P) và vuông góc với d nên: *VTCP* $\overrightarrow{u_\Delta}=\left[\overrightarrow{u_d};\overrightarrow{n_P}\right]=(2;-3;1)$

Gọi $N(x;y;z)$ là hình chiếu vuông góc của M trên Δ, khi đó: $\overrightarrow{MN}=(x-1;y+3;z)$

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{u_\Delta}\\ N\in(P)\\ MN=\sqrt{42}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z+2=0\\ 2x-3y+z-11=0\\ (x-1)^2+(y+3)^2+z^2=42\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}N(5;-2;-5)\\ N(-3;-4;5)\end{array}\right.$

Với $N(5;-2;-5)\Rightarrow\Delta:\dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z+5}{1}$

Với $N(-3;-4;5)\Rightarrow\Delta:\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y+4}{-3}=\dfrac{z-5}{1}$

Chọn A

Câu 22: Cho hai điểm $M(1;2;3)$, $A(2;4;4)$ và hai mặt phẳng $(P):x+y-2z+1=0$, $(Q):x-2y-z+4=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua M cắt (P), (Q) lần lượt tại B, C sao cho tam giác ABC cân tại A và nhận AM là đường trung tuyến.

A. $\Delta:\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$ **B.** $\Delta:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$

C. $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-3}{1}$ **D.** $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$

Lời giải

Gọi $B(a;b;c)$, từ giả thiết suy ra M là trung điểm của BC, suy ra $C(2-a;4-b;6-c)$.

$B\in(P)$, $C\in(Q)$ nên có hai pt: $a+b-2c+1=0$ (1); $-a+2b+c-8=0$ (2).

$\overrightarrow{AM}(-1;-2;-1)$, $\overrightarrow{BC}(2-2a;4-2b;6-2c)$.

Tam giác ABC cân tại A nên: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow a+2b+c-8=0$ (3).

Từ (1), (2) và (3) có hệ: $\begin{cases}a+b-2c+1=0\\ -a+2b+c-8=0\\ a+2b+c-8=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\ b=3\\ c=2\end{cases}\Rightarrow B(0;3;2)$, $C(2;1;4)$.

Đường thẳng Δ qua B và C có pt $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-3}{1}$.

Chọn D

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 23: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(-1;0;-1)$, cắt $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+2}{-1}$, sao cho $\cos(d;\Delta_2)$ là nhỏ nhất, biết phương trình của đường thẳng $\Delta_2:\frac{x-3}{-1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{2}$. Phương trình đường thẳng d là?

A. $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-1}$ **B.** $\frac{x+1}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z+1}{-2}$

C. $\frac{x+1}{4}=\frac{y}{-5}=\frac{z+1}{-2}$ **D.** $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$

Lời giải

Gọi $M=d\cap\Delta_1\Rightarrow M(1+2t;2+t;-2-t)$.

d có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_d=\overrightarrow{AM}=(2t+2;t+2;-1-t)$.

Δ_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2=(-1;2;2)$.

$\cos(d;\Delta_2)=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{t^2}{6t^2+14t+9}}$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{t^2}{6t^2+14t+9}$, ta suy ra được $\min f(t)=f(0)=0$.

Do đó $\min\left[\cos(d;\Delta_2)\right]=0$ khi $t=0$. Nên $\overrightarrow{AM}=(2;2;-1)$.

Vậy phương trình đường thẳng d là: $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-1}$.

Chọn A

Câu 24: Trong không gian tọa độ Oxyz cho M(2;1;0) và đường thẳng d có phương trình: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-1}$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua M, cắt và vuông góc với d. Viết phương trình đường thẳng Δ?

A. $\begin{cases}x=2+t\\y=1-4t\\z=-2t\end{cases}$ **B.** $\begin{cases}x=2+t\\y=1-4t\\z=3-2t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=1+t\\y=1-4t\\z=-2t\end{cases}$ **D.** $\begin{cases}x=2-t\\y=1-4t\\z=-2t\end{cases}$

Lời giải

PTTS của d là $\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+t\\z=-t\end{cases}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên d, đường thẳng Δ cần tìm là đường thẳng MH.

Vì H thuộc d nên $H(1+2t;-1+t;-t)$ suy ra $\overrightarrow{MH}=(2t-1;-2+t;-t)$.

Vì $MH\perp d$ và d có 1 VTCP là $\vec{u}=(2;1;-1)$ nên $\overrightarrow{MH}.\vec{u}=0\Leftrightarrow t=\frac{2}{3}$. Do đó

$\overrightarrow{MH}=\left(\frac{1}{3};\frac{-4}{3};\frac{-2}{3}\right)$

Vậy PTTS của Δ là: $\begin{cases}x=2+t\\y=1-4t\\z=-2t\end{cases}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Chọn A

Câu 25: Trong không gian với hệ tọa độ $MN \Rightarrow N(-t;-5-2t;1+t)$ gọi d đi qua $A(-1;0;-1)$, cắt $\Delta_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-1}$, sao cho góc giữa d và $\Delta_2 : \frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{2}$ là nhỏ nhất. Phương trình đường thẳng d là

A. $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$. **B.** $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{-2}$. **C.** $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{-5} = \frac{z+1}{-2}$. **D.** $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$.

Lời giải

Gọi $M = d \cap \Delta_1 \Rightarrow M(1+2t;2+t;-2-t)$

d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_d} = \overrightarrow{AM} = (2t+2;t+2;-1-t)$

Δ_2 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_2} = (-1;2;2)$

$\cos(d;\Delta_2) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{t^2}{6t^2+14t+9}}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2}{6t^2+14t+9}$, ta suy ra được $\min f(t) = f(0) = 0 \Leftrightarrow t = 0$

Do đó $\min\left[\cos(\Delta,d)\right] = 0 \Leftrightarrow t = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (2;2-1)$

Vậy phương trình đường thẳng d là $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$

Câu 26: Trong không gian với hệ tọa độ $\begin{cases} x = 2+t \\ y = -3-2t \\ z = -1+2t \end{cases}$ cho hai đường thẳng $d_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ và $d_2 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{-2}$. Gọi Δ là đường thẳng song song với $(P): x+y+z-7=0$ và cắt d_1, d_2 lần lượt tại hai điểm A, B sao cho AB ngắn nhất. Phương trình của đường thẳng Δ là.

A. $\begin{cases} x = 12-t \\ y = 5 \\ z = -9+t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 6-t \\ y = \frac{5}{2} \\ z = -\frac{9}{2}+t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 6 \\ y = \frac{5}{2}-t \\ z = -\frac{9}{2}+t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 6-2t \\ y = \frac{5}{2}+t \\ z = -\frac{9}{2}+t \end{cases}$.

Lời giải

$A \in d_1 \Rightarrow A(1+2a;a;-2-a)$

$B \in d_2 \Rightarrow B(1+b;-2+3b;2-2b)$

Δ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (b-2a;3b-a-2;-2b+a+4)$

(P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P} = (1;1;1)$

Vì $\Delta // (P)$ nên $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{n_P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n_P} = 0 \Leftrightarrow b = a-1$. Khi đó $\overrightarrow{AB} = (-a-1;2a-5;6-a)$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$$AB=\sqrt{(-a-1)^2+(2a-5)^2+(6-a)^2}$$
$$=\sqrt{6a^2-30a+62}$$
$$=\sqrt{6\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{49}{2}}\geq\frac{7\sqrt{2}}{2};\forall a\in\mathbb{R}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=\frac{5}{2}\Rightarrow A\left(6;\frac{5}{2};-\frac{9}{2}\right)$, $\overrightarrow{AB}=\left(-\frac{7}{2};0;\frac{7}{2}\right)$

Đường thẳng Δ đi qua điểm $A\left(6;\frac{5}{2};-\frac{9}{2}\right)$ và vec tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(-1;0;1)$

Vậy phương trình của Δ là $\begin{cases}x=6-t\\y=\frac{5}{2}\\z=-\frac{9}{2}+t\end{cases}$

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-3;3;-3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha):2x-2y+z+15=0$ và mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=100$. Đường thẳng Δ qua A, nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại A, B. Để độ dài AB lớn nhất thì phương trình đường thẳng Δ là:

A. $\frac{x+3}{1}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+3}{6}$.

B. $\frac{x+3}{16}=\frac{y-3}{11}=\frac{z+3}{-10}$.

C. $\begin{cases}x=-3+5t\\y=3\\z=-3+8t\end{cases}$.

D. $\frac{x+3}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{3}$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;5)$, bán kính $R=10$. Do $d(I,(\alpha))<R$ nên Δ luôn cắt (S) tại A, B.

Khi đó $AB=\sqrt{R^2-(d(I,\Delta))^2}$. Do đó, AB lớn nhất thì $d(I,(\Delta))$ nhỏ nhất nên Δ qua H, với H là hình chiếu vuông góc của I lên (α). Phương trình $BH:\begin{cases}x=2+2t\\y=3-2t\\z=5+t\end{cases}$

$H\in(\alpha)\Rightarrow 2(2+2t)-2(3-2t)+5+t+15=0\Leftrightarrow t=-2\Rightarrow H(-2;7;3)$.

Do vậy $\overrightarrow{AH}=(1;4;6)$ là véc tơ chỉ phương của Δ. Phương trình của $\frac{x+3}{1}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+3}{6}$

Câu 28: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}$, và mặt thẳng $(P):3x+5y-z-2=0$. Gọi d' là hình chiếu của d lên (P). Phương trình tham số của d' là

A. $\begin{cases}x=-62t\\y=25t\\z=2-61t\end{cases}$.

B. $\begin{cases}x=62t\\y=-25t\\z=2+61t\end{cases}$.

C. $\begin{cases}x=62t\\y=-25t\\z=-2+61t\end{cases}$.

D. $\begin{cases}x=62t\\y=-25t\\z=2+61t\end{cases}$.

Lời giải

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Cách 1:

Gọi $A = d \cap (P)$

$A \in d \Rightarrow A(12+4a;9+3a;1+a)$

$A \in (P) \Rightarrow a = -3 \Rightarrow A(0;0;-2)$

d đi qua điểm $B(12;9;1)$

Gọi H là hình chiếu của B lên (P)

(P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P} = (3;5;-1)$

BH đi qua $B(12;9;1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_{BH}} = \overrightarrow{n_P} = (3;5;-1)$

$$BH: \begin{cases} x = 12+3t \\ y = 9+5t \\ z = 1-t \end{cases}$$

$H \in BH \Rightarrow H(12+3t;9+5t;1-t)$

$H \in (P) \Rightarrow t = -\frac{78}{35} \Rightarrow H\left(\frac{186}{35};-\frac{15}{7};\frac{113}{35}\right)$

$\overrightarrow{AH} = \left(\frac{186}{35};-\frac{15}{7};\frac{183}{35}\right)$

d' đi qua $A(0;0;-2)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_{d'}} = (62;-25;61)$

Vậy phương trình tham số của d' là $\begin{cases} x = 62t \\ y = -25t \\ z = -2+61t \end{cases}$

Cách 2:

□ Gọi (Q) qua d và vuông góc với (P)

d đi qua điểm $B(12;9;1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_d} = (4;3;1)$

(P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P} = (3;5;-1)$

(Q) qua $B(12;9;1)$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_Q} = \left[\overrightarrow{a_d}, \overrightarrow{n_P}\right] = (-8;7;11)$

$(Q): 8x - 7y - 11z - 22 = 0$

□ d' là giao tuyến của (Q) và (P)

Tìm một điểm thuộc d', bằng cách cho $y = 0$

Ta có hệ $\begin{cases} 3x - z = 2 \\ 8x - 11z = 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow M(0;0;-2) \in d'$

d' đi qua điểm $M(0;0;-2)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_d} = \left[\overrightarrow{n_P};\overrightarrow{n_Q}\right] = (62;-25;61)$

Vậy phương trình tham số của d' là $\begin{cases} x = 62t \\ y = -25t \\ z = -2+61t \end{cases}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 29: Trong không gian với hệ tọa độ $(Q): x-2y+2z+1=0$ gọi d đi qua $A(3;-1;1)$, nằm trong mặt phẳng $(P): x-y+z-5=0$, đồng thời tạo với $\Delta: \frac{x}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z}{2}$ một góc 45^0. Phương trình đường thẳng d là

A. $\begin{cases} x=3+7t \\ y=-1-8t \\ z=-1-15t \end{cases}$.

B. $\begin{cases} x=3+t \\ y=-1-t \\ z=1 \end{cases}$.

C. $\begin{cases} x=3+7t \\ y=-1-8t \\ z=1-15t \end{cases}$.

D. $\begin{cases} x=3+t \\ y=-1-t \\ z=1 \end{cases}$ **và** $\begin{cases} x=3+7t \\ y=-1-8t \\ z=1-15t \end{cases}$.

Lời giải

Δ có vecto chỉ phương $\overrightarrow{a_\Delta}=(1;2;2)$

d có vecto chỉ phương $\overrightarrow{a_d}=(a;b;c)$

(P) có vecto pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}=(1;-1;1)$

$d\subset(P)\Rightarrow \overrightarrow{a_d}\perp\overrightarrow{n_P}\Leftrightarrow b=a+c;\ (1)$

$(\Delta,d)=45^0\Leftrightarrow \cos(\Delta,d)=\cos 45^0$

$$\Leftrightarrow \frac{|a+2b+2c|}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(a+2b+2c)^2=9(a^2+b^2+c^2);\ (2)$$

Từ $\Delta_1: \frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{1}$ và $\Delta_2: \frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{3}$, ta có: $14c^2+30ac=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=0 \\ 15a+7c=0 \end{array}\right.$

Với $c=0$, chọn $a=b=1$, phương trình đường thẳng d là $\begin{cases} x=3+t \\ y=-1-t \\ z=1 \end{cases}$

Với $15a+7c=0$, chọn $a=7\Rightarrow c=-15; b=-8$, phương trình đường thẳng d là $\begin{cases} x=3+7t \\ y=-1-8t \\ z=1-15t \end{cases}$

Câu 30: **(THTT số 3)** Trong không gian $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}$, $d_2: \frac{x-1}{-2}=\frac{y}{-4}=\frac{z-3}{2}$. Viết phương trình đường phân giác của những góc tù tạo bởi d_1, d_2.

A. $\frac{x-1}{-3}=\frac{y}{-5}=\frac{z-3}{4}$.

B. $\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{1}$.

C. $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}$.

D. $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{1}$.

Lời giải

Chọn D

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Ta viết phương trình tham số của $d_1:\begin{cases}x=t\\y=1-t\\z=1+2t\end{cases}(t\in\mathbb{R}), d_2:\begin{cases}x=1-2s\\y=-4s\\z=3+2s\end{cases}(s\in\mathbb{R})$.

Tìm giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2.

Ta có $\begin{cases}t=1-2s\\1-t=-4s\\1+2t=3+2s\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=1\\s=0\end{cases}$ suy ra $I(1;0;3)$ là giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2.

Lấy $A(0;1;1)\in d_1\Rightarrow IA=\sqrt{6}$. Gọi $B(1-2s;-4s;3+2s)\in d_2$ sao cho $IB=\sqrt{6}$.

Ta có $IB=\sqrt{6}\Leftrightarrow 4s^2+16s^2+4s^2=6\Leftrightarrow s^2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow s=\pm\frac{1}{2}$.

Vậy có 2 điểm thỏa mãn $\left[\begin{array}{l}B(0;-2;4)\\B(2;2;2)\end{array}\right.$.

Với $B(0;-2;4)$ ta có $\overrightarrow{IA}(-1;1;-2), \overrightarrow{IB}(-1;-2;1)\Rightarrow \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}=-3<0\Rightarrow \widehat{AIB}$ là góc tù

Theo yêu cầu bài toán ta viết phương trình của đường phân giác của góc $\widehat{AIB}$ với $B(0;-2;4)$ (không cần xét trường hợp kia) .

Gọi M là trung điểm của AB suy ra $M\left(0;-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$, khi đó phương trình đường phân giác cần tìm là phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $I(1;0;3)$ và $M\left(0;-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{IM}=\left(-1;-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$, chọn $\vec{u}=-2\overrightarrow{IM}\Rightarrow\vec{u}=(2;1;1)$ làm vectơ chỉ phương của đường phân giác. Vậy đường phân giác đi qua điểm $I(1;0;3)$ và nhận $\vec{u}=(2;1;1)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình chính tắc là: $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{1}$.

Nhận xét: Có thể tìm vectơ chỉ phương của đường phân giác như sau:

Ta có $\overrightarrow{u_1}=(1;-1;2); \overrightarrow{u_2}=(2;4;-2)$ lần lượt là véctơ chỉ phương của hai đường thẳng d_1 và d_2.

Vì $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}=-6<0$ nên góc giữa hai vectơ đó là góc tù.

Xét $\overrightarrow{u_1}=(1;-1;2); \overrightarrow{u_2}=(2;4;-2)$.

Ta có $|\overrightarrow{u_1}|=\sqrt{6}$, $|\overrightarrow{u_2}|=2\sqrt{6}$.

Đặt $\vec{a}=\frac{1}{\sqrt{6}}\overrightarrow{u_1}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$; $\vec{b}=\frac{1}{2\sqrt{6}}\overrightarrow{u_2}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{2}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

Ta có $\vec{a}+\vec{b}=\left(\frac{2}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ nên có thể chọn $\vec{u}=(2;1;1)$ là vectơ chỉ phương của đường phân giác.

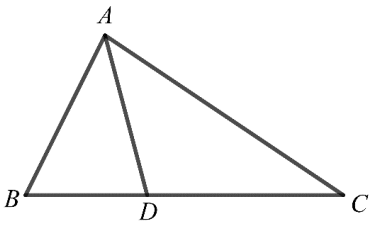
Câu 31: **(Chuyên Bắc Giang)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho tam giác ABC biết $A(2;1;0)$, $B(3;0;2)$, $C(4;3;-4)$. Viết phương trình đường phân giác trong của góc A.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $\begin{cases} x=2 \\ y=1+t \\ z=0 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=2+t \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2+t \\ y=1 \\ z=t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C



Cách 1:

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-1;2)\Rightarrow AB=\sqrt{6}$, $\overrightarrow{AC}=(2;2;-4)\Rightarrow AC=2\sqrt{6}$.

Giả sử đường phân giác trong của góc A cắt BC tại D.

Khi đó: $\frac{DB}{DC}=\frac{AB}{AC}=\frac{1}{2}\Rightarrow DB=\frac{1}{2}DC\Rightarrow \overrightarrow{DB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ (*) (vì D nằm giữa B và C).

Gọi $D(x;y;z)\Rightarrow \overrightarrow{DB}=(3-x;-y;2-z)$, $\overrightarrow{DC}=(4-x;3-y;-4-z)$.

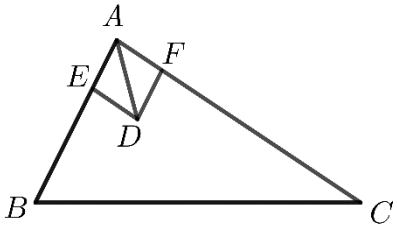
Thay vào (*) ta được hệ phương trình $\begin{cases} 3-x=-\frac{1}{2}(4-x) \\ -y=-\frac{1}{2}(3-y) \\ 2-z=-\frac{1}{2}(-4-z) \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=\frac{10}{3} \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$. Vậy $D\left(\frac{10}{3};1;0\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{AD}=\left(\frac{4}{3};0;0\right)$.

Đường phân giác trong của góc A đi qua điểm $A(2;1;0)$ và có vectơ chỉ phương

$\vec{u}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}=(1;0;0)$ nên có phương trình là: $\begin{cases} x=2+t \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$.

Cách 2:



Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-1;2)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{6}$, $\overrightarrow{AC}=(2;2;-4)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AC}\right|=2\sqrt{6}$.

Lấy điểm E trên cạnh AB sao cho $AE=1$. Khi đó $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

Lấy điểm F trên cạnh AC sao cho $AF=1$. Khi đó $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}\overrightarrow{AC}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}};-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Dựng hình bình hành $AEDF$, ta có $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=\left(\frac{2}{\sqrt{6}};0;0\right)$.

Vì $AE=AF=1$ nên hình bình hành $AEDF$ cũng là hình thoi. Do đó $\overrightarrow{AD}$ là một vectơ chỉ phương của đường phân giác trong của góc A của tam giác ABC.

Vậy đường phân giác trong của góc A đi qua điểm $A(2;1;0)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=\frac{\sqrt{6}}{2}\overrightarrow{AD}=(1;0;0)$ nên có phương trình là: $\begin{cases}x=2+t\\y=1\\z=0\end{cases}$.

Nhận xét:

Đường phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=\frac{1}{|\overrightarrow{AB}|}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{|\overrightarrow{AC}|}\overrightarrow{AC}$.

Cách 3:

Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;-1;2)\Rightarrow AB=\sqrt{6}$, $\overrightarrow{AC}=(2;2;-4)\Rightarrow AC=2\sqrt{6}$.

Gọi I là trung điểm AC. Ta có $I=(3;2;-2)$ và $AI=\sqrt{6}$.

Dựng hình bình hành $ABKI$, ta có $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AI}=(2;0;0)$.

Vì $AB=AI=\sqrt{6}$ nên hình bình hành $ABKI$ cũng là hình thoi. Do đó $\overrightarrow{AK}$ là một vectơ chỉ phương của đường phân giác trong của góc A của tam giác ABC.

Vậy đường phân giác trong của góc A đi qua điểm $A(2;1;0)$ và có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AI}=(1;0;0)$ nên có phương trình là: $\begin{cases}x=2+t\\y=1\\z=0\end{cases}$.

Câu 32: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+y-z+2=0$ và hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\y=t\\z=2+2t\end{cases}$; $d':\begin{cases}x=3-t'\\y=1+t'\\z=1-2t'\end{cases}$. Biết rằng có 2 đường thẳng có các đặc điểm: song song với (P); cắt d,d' và tạo với d góc 30°. Tính cosin góc tạo bởi hai đường thẳng đó.

A. $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **B.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **C.** $\sqrt{\frac{2}{3}}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải:

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm, $\overrightarrow{n_P}$ là VTPT của mặt phẳng (P).

Gọi $M(1+t;t;2+2t)$ là giao điểm của Δ và d; $M'(3-t';1+t';1-2t')$ là giao điểm của Δ và d'

Ta có: $\overrightarrow{MM'}(2-t'-t;1+t'-t;-1-2t'-2t)$

$MM'\ //\ (P)\Leftrightarrow\begin{cases}M\notin(P)\\\overrightarrow{MM'}\perp\overrightarrow{n_P}\end{cases}\Leftrightarrow t'=-2\Rightarrow\overrightarrow{MM'}(4-t;-1-t;3-2t)$

Ta có $\cos30^{\circ}=\cos\left(\overrightarrow{MM'},\vec{u}_d\right)\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{|-6t+9|}{\sqrt{36t^2-108t+156}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=4\\t=-1\end{array}\right.$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Vậy, có 2 đường thẳng thoả mãn là $\Delta_1:\begin{cases}x=5\\y=4+t\\z=10+t\end{cases};\Delta_2:\begin{cases}x=t'\\y=-1\\z=t'\end{cases}$.

Khi đó, $\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\frac{1}{2}$.

Câu 33: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{1}$; $d_2:\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P):x+y-2z+5=0$. Lập phương trình đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) và cắt d_1,d_2 lần lượt tại A,B sao cho độ dài đoạn AB đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{1}$.

B. $d:\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{1}$.

C. $d:\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z+2}{1}$.

D. $d:\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{1}$

Lời giải

Vì $A\in d_1;B\in d_2\Rightarrow A(-1+a;-2+2a;a),B(2+2b;1+b;1+b)$

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-a+2b+3;-2a+b+3;-a+b+1)$

(P) có vec tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;1;-2)$, $AB//(P)\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}\perp\vec{n}\\A\notin(P)\end{cases}$

$\overrightarrow{AB}\perp\vec{n}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}.\vec{n}=0\Leftrightarrow-a+2b+3-2a+b+3+2a-2b-2=0\Leftrightarrow b=a-4\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(a-5;-a-1;-3)$

Do đó: $AB=\sqrt{(a-5)^2+(-a-1)^2+(-3)^2}=\sqrt{2(a-2)^2+27}\ge3\sqrt{3}$

$\Rightarrow\min AB=3\sqrt{3}$ khi $a=2\Rightarrow A(1;2;2)$

$\overrightarrow{AB}=(-3;-3;-3),A(1;2;2)\notin(P)$

Vậy phương trình đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-2}{1}$.

Chọn A

Câu 34: **(Thuan-Thanh-Bac-Ninh)** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-3;3;-3)$ thuộc mặt phẳng (α) có phương trình $2x-2y+z+15=0$ và mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=100$. Đường thẳng Δ qua A, nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại M, N. Để độ dài MN lớn nhất thì phương trình đường thẳng Δ là

A. $\frac{x+3}{1}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+3}{6}$.

B. $\frac{x+3}{16}=\frac{y-3}{11}=\frac{z+3}{-10}$.

C. $\begin{cases}x=-3+5t\\y=3\\z=-3+8t\end{cases}$.

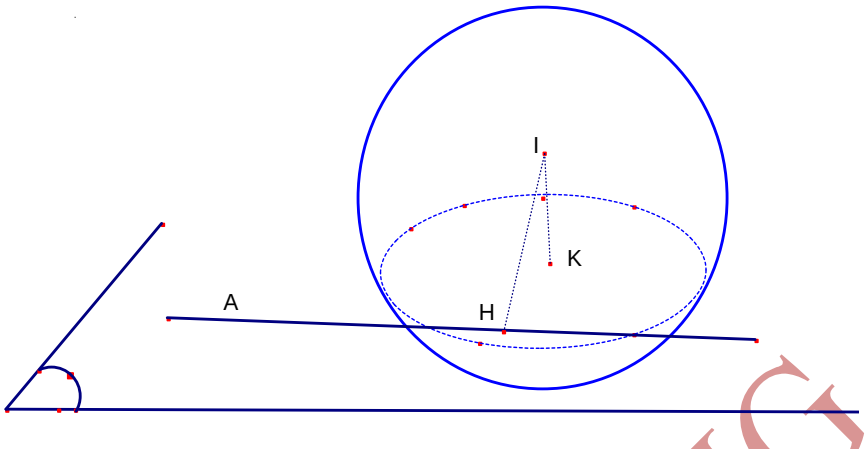
D. $\frac{x+3}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{3}$.

Lời giải

Chọn A

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;5)$ bán kính $R=10$



Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của I lên Δ và mặt phẳng (α).

$\Rightarrow IK \perp (\alpha)$ nên phương trình đường thẳng IK đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (α) là.

Phương trình tham số đường thẳng IK : $\begin{cases} x=2+2t \\ y=3-2t \\ z=5+t \end{cases}$.

Tọa độ điểm K là nghiệm hệ phương trình $\begin{cases} x=2+2t \\ y=3-2t \\ z=5+t \\ 2x-2y+z+15=0 \end{cases} \Rightarrow K(-2;7;3)$.

Vì $\Delta \subset (\alpha)$ nên $IH \geq IK$. Do đó, IH nhỏ nhất khi H trùng với K.

Để MN lớn nhất thì IH phải nhỏ nhất. Khi đó, đường thẳng Δ cần tìm đi qua A và K.

Đường thẳng Δ có phương trình là: $\frac{x+3}{1}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+3}{6}$.

Câu 35: **(THẠCH THÀNH I - THANH HÓA 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(2;1;3)$, mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A\left(\frac{3}{2};0;0\right)$, $B\left(0;\frac{3}{2};0\right)$, $C(0;0;-3)$ và mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm E, nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách nhỏ nhất. Phương trình Δ là

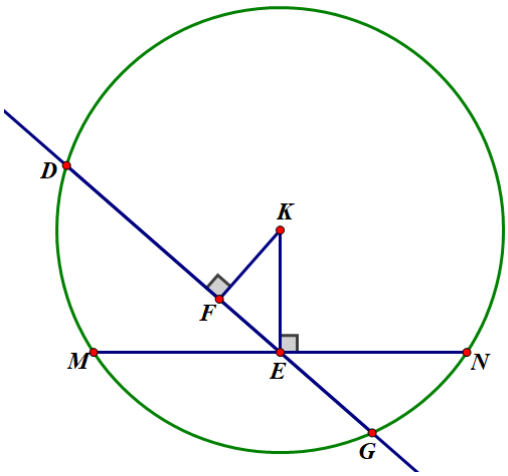
A. $\begin{cases} x=2+9t \\ y=1+9t \\ z=3+8t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=2-5t \\ y=1+3t \\ z=3 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=2+t \\ y=1-t \\ z=3 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=2+4t \\ y=1+3t \\ z=3-3t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A\left(\frac{3}{2};0;0\right)$, $B\left(0;\frac{3}{2};0\right)$, $C(0;0;-3)$ nên phương trình (P) là $\frac{2x}{3}+\frac{2y}{3}+\frac{z}{-3}=1\Leftrightarrow 2x+2y-z-3=0$. Dễ thấy $E\in(P)$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;2;5)$, bán kính $R=6$.

Giả sử K là hình chiếu của I lên (P), ta có: $IK=d_{I/(P)}=\frac{|2.3+2.2-5-3|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{2}{3}$.

Do đó $IK<R$ nên (S) và (P) cắt nhau và giao tuyến của chúng là đường tròn tâm K.

Lại có $IE=\sqrt{(2-3)^2+(1-2)^2+(3-5)^2}=\sqrt{6}\Rightarrow IE<R$, nên E nằm trong mặt cầu (S). Mà $E\in(P)$ nên E nằm trong đường tròn giao tuyến của (S) và (P).

Giả sử Δ cắt (S) tại D và G, F là hình chiếu của K lên Δ. Qua E kẻ đường thẳng vuông góc với EK, nằm trên (P), cắt (S) tại M và N. Ta có $KF\le KE\Rightarrow DG\ge MN$ (theo tính chất mối quan hệ giữa dây cung và khoảng cách từ dây cung tới tâm).

Mà MN không đổi nên DG nhỏ nhất khi và chỉ khi $E\equiv F$. Khi đó $\Delta\perp KE$, ngoài ra $IK\perp(P)\Rightarrow\Delta\perp IK$, do đó $\Delta\perp(IKE)\Rightarrow\Delta\perp IE$.

Vậy $\overrightarrow{u_\Delta}\perp\overrightarrow{IE}$; $\overrightarrow{u_\Delta}\perp\overrightarrow{n_P}$, mà $\overrightarrow{IE}=(-1;-1;-2)$, $\overrightarrow{n_P}=(2;2;-1)$

Ta có: $\left[\overrightarrow{IE};\overrightarrow{n_P}\right]=(5;-5;0)$, chọn $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;-1;0)$.

Vì Δ đi qua $E(2;1;3)$ nên phương trình Δ là $\begin{cases}x=2+t\\y=1-t\\z=3\end{cases}$.

Cách 2:

Mặt phẳng (P) đi qua ba điểm $A\left(\frac{3}{2};0;0\right)$, $B\left(0;\frac{3}{2};0\right)$, $C(0;0;-3)$ nên phương trình (P) là $\frac{2x}{3}+\frac{2y}{3}+\frac{z}{-3}=1\Leftrightarrow 2x+2y-z-3=0$. Dễ thấy $E\in(P)$.

Thay tọa độ điểm E vào vế trái của phương trình (S) ta được : $1^2+1^2+2^2=6<36$. Do đó E nằm trong mặt cầu (S).

Gọi M,N là giao điểm của Δ và mặt cầu (S). Khi đó ta có:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$MN = 2\sqrt{R^2 - (d(I,\Delta))^2}$, với R, I lần lượt là bán kính và tâm của mặt cầu (S).

Do đó MN nhỏ nhất khi $d(I,\Delta)$ lớn nhất.

Ta lại có: $d(I,\Delta) \le IE$, với IE cố định.

Do đó: $\max d(I,\Delta) = IE$. Khi đó: $\overrightarrow{u_\Delta} \perp \overrightarrow{IE}$; $\overrightarrow{u_\Delta} \perp \overrightarrow{n_P}$, mà $\overrightarrow{IE} = (-1;-1;-2)$, $\overrightarrow{n_P} = (2;2;-1)$

Ta có: $\left[\overrightarrow{IE};\overrightarrow{n_P}\right] = (5;-5;0)$, chọn $\overrightarrow{u_\Delta} = (1;-1;0)$.

Ngoài ra Δ đi qua $E(2;1;3)$ nên phương trình Δ là $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1-t \\ z = 3 \end{cases}$.

Câu 36: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi d đi qua điểm $A(1;-1;2)$, song song với $(P): 2x - y - z + 3 = 0$, đồng thời tạo với đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$ một góc lớn nhất. Phương trình đường thẳng d là.

A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{7}$.

B. $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z+2}{7}$.

C. $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{7}$.

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{-7}$.

Lời giải

Δ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_\Delta} = (1;-2;2)$

d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a_d} = (a;b;c)$

(P) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P} = (2;-1;-1)$

Vì $d \subset (P)$ nên $\overrightarrow{a_d} \perp \overrightarrow{n_P} \Leftrightarrow \overrightarrow{a_d}.\overrightarrow{n_P} = 0 \Leftrightarrow 2a - b - c = 0 \Leftrightarrow c = 2a - b$

$$\cos(\Delta,d) = \frac{|5a-4b|}{3\sqrt{5a^2-4ab+2b^2}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{(5a-4b)^2}{5a^2-4ab+2b^2}}$$

Đặt $t = \frac{a}{b}$, ta có: $\cos(\Delta,d) = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{(5t-4)^2}{5t^2-4t+2}}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{(5t-4)^2}{5t^2-4t+2}$, ta suy ra được: $\max f(t) = f\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{5\sqrt{3}}{3}$

Do đó: $\max\left[\cos(\Delta,d)\right] = \sqrt{\frac{5\sqrt{3}}{27}} \Leftrightarrow t = -\frac{1}{5} \Rightarrow \frac{a}{b} = -\frac{1}{5}$

Chọn $a = 1 \Rightarrow b = -5, c = 7$

Vậy phương trình đường thẳng d là $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{7}$

Chọn A

Câu 37: **(Nguyễn Trãi Hải Dương Lần1)** Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(3;1;1)$, nằm trong mặt phẳng

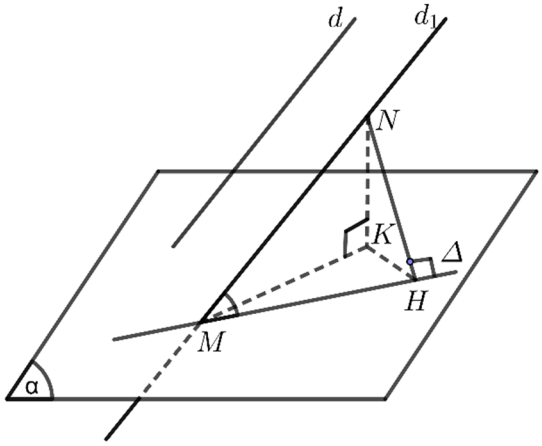
$(\alpha): x + y - z - 3 = 0$ và tạo với đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 \\ y = 4+3t \\ z = -3-2t \end{cases}$ một góc nhỏ nhất thì phương trình của Δ là

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $\begin{cases} x=1 \\ y=-t' \\ z=2t' \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=8+5t' \\ y=-3-4t' \\ z=2+t' \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=1+2t' \\ y=1-t' \\ z=3-2t' \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x=1+5t' \\ y=1-4t' \\ z=3+2t' \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B



Đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(0;3;-2)$.

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;1;-1)$.

Vì $\vec{u}.\vec{n}=0.1+3.1+(-2).(-1)=5\neq 0$ nên d cắt (α).

Gọi d_1 là đường thẳng đi qua M và $d_1 // d$, suy ra d_1 có phương trình: $\begin{cases} x=3 \\ y=1+3t \\ z=1-2t \end{cases}$.

Lấy $N(3;4;-1)\in d_1$. Gọi K, H lần lượt là hình chiếu vuông góc của N trên mặt phẳng (α) và đường thẳng Δ.

Ta có: $\widehat{(d,\Delta)}=\widehat{NMH}$ và $\sin\widehat{NMH}=\dfrac{NH}{MN}\geq\dfrac{NK}{MN}$.

Do vậy $\widehat{(d,\Delta)}$ nhỏ nhất khi $K\equiv H$ hay Δ là đường thẳng MK.

Đường thẳng NK có phương trình: $\begin{cases} x=3+t \\ y=4+t \\ z=-1-t \end{cases}$.

Tọa độ điểm K ứng với t là nghiệm của phương trình:

$$(3+t)+(4+t)-(-1-t)-3=0\Leftrightarrow t=-\frac{5}{3}.$$ Suy ra $K\left(\frac{4}{3};\frac{7}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{MK}=\left(-\frac{5}{3};\frac{4}{3};-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}(5;-4;1)\Rightarrow$ **Chọn B**

Câu 38: Trong không gian cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{3}$ và đường thẳng $d:\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{2}$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua Δ và tạo với đường thẳng d một góc lớn nhất.

A. $19x-17y-20z-77=0.$ **B.** $19x-17y-20z+34=0.$

C. $31x-8y-5z+91=0.$ **D.** $31x-8y-5z-98=0.$

Lời giải

Chọn D

Đường thẳng d có VTCP là $\overrightarrow{u_1}=(3;1;2)$.

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M(3;0;-1)$ và có VTCP là $\vec{u}=(1;2;3)$.

Do $\Delta\subset(P)$ nên $M\in(P)$. Giả sử VTPT của (P) là $\vec{n}=(A;B;C),(A^2+B^2+C^2\neq 0)$.

Phương trình (P) có dạng $A(x-3)+By+C(z+1)=0$.

Do $\Delta\subset(P)$ nên $\vec{u}.\vec{n}=0\Leftrightarrow A+2B+3C=0\Leftrightarrow A=-2B-3C$.

Gọi α là góc giữa d và (P). Ta có

$$\sin\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\vec{n}\right|}=\frac{|3A+B+2C|}{\sqrt{14}.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|3(-2B-3C)+B+2C|}{\sqrt{14}.\sqrt{(-2B-3C)^2+B^2+C^2}}$$

$$=\frac{|5B+7C|}{\sqrt{14}.\sqrt{5B^2 12BC+10C^2}}=\frac{1}{\sqrt{14}}\sqrt{\frac{(5B+7C)^2}{5B^2+12BC+10C^2}}.$$

TH1: Với $C=0$ thì $\sin\alpha=\sqrt{\frac{5}{14}}=\frac{\sqrt{70}}{14}$.

TH2: Với $C\neq 0$ đặt $t=\frac{B}{C}$ ta có $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{14}}\sqrt{\frac{(5t+7)^2}{5t^2+12t+10}}$.

Xét hàm số $f(t)=\frac{(5t+7)^2}{5t^2+12t+10}$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=\frac{-50t^2+10t+112}{(5t^2+12t+10)^2}$.

$$f'(t)=0\Leftrightarrow -50t^2+10t+112=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{8}{5}\Rightarrow f\left(\frac{8}{5}\right)=\frac{75}{14}\\ t=-\frac{7}{5}\Rightarrow f\left(-\frac{7}{5}\right)=0\end{array}\right.$$

Và $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(t)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{(5t+7)^2}{5t^2+12t+10}=5$.

Bảng biến thiên

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

t	$-\infty$		$-\frac{7}{5}$		$\frac{8}{5}$		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{75}{14}$	$\searrow$	5

Từ đó ta có $Maxf(t)=\frac{75}{14}$ khi $t=\frac{8}{5}\Rightarrow\frac{B}{C}=\frac{8}{5}$. Khi đó $sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{14}}.\sqrt{f\left(\frac{8}{5}\right)}=\frac{\sqrt{75}}{14}$.

So sánh TH1 và Th2 ta có $sin\alpha$ lớn nhất là $sin\alpha=\frac{\sqrt{75}}{14}$ khi $\frac{B}{C}=\frac{8}{5}$.

Chọn $B=-8\Rightarrow C=-5\Rightarrow A=31$.

Phương trình (P) là $31(x-3)-8y-5(z+1)=0\Leftrightarrow 31x-8y-5z-98=0$.

Câu 39: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho hai điểm $A(1;2;-1), B(7;-2;3)$ và đường thẳng d có phương trình $\begin{cases}x=2+3t\\y=-2t\\z=4+2t\end{cases}$ (t ∈ R). Điểm M trên d sao cho tổng khoảng cách từ M đến A và B là nhỏ nhất có tổng các tọa độ là:

A. $M=(2;0;4)$. **B.** $M=(2;0;1)$. **C.** $M=(1;0;4)$. **D.** $M=(1;0;2)$.

Lời giải

Nếu M nằm trên d thì điểm I có tọa độ là M=(2+3t;-2t;4+2t). Từ đó ta có:

$\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=(3t+1;-2-2t;2t+5)\Rightarrow AM=\sqrt{(3t+1)^2+(2+2t)^2+(2t+5)^2}$

Tương tự: $\Leftrightarrow\overrightarrow{BM}=(3t-5;2-2t;2t+1)\Rightarrow BM=\sqrt{(3t-5)^2+(2-2t)^2+(2t+1)^2}$

Từ (*): MA=MB $=\sqrt{(3t+1)^2+(2+2t)^2+(2t+5)^2}=\sqrt{(3t-5)^2+(2-2t)^2+(2t+1)^2}$

Hay: $\Leftrightarrow\sqrt{17t^2+34t+30}=\sqrt{17t^2-36t+30}\Leftrightarrow 34t+36t=0-11\Leftrightarrow 70t=0\rightarrow t=0$

Tọa độ M thỏa mãn yêu cầu là: M=(2;0;4).

Chọn A

Câu 40: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;3;0)$, $B(0;-\sqrt{2};0)$, $M\left(\frac{6}{5};-\sqrt{2};2\right)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=t\\y=0\\z=2-t\end{cases}$. Điểm C thuộc d sao cho chu vi tam giác ABC là nhỏ nhất thì độ dài CM bằng

A. $2\sqrt{3}$. **B.** 4. **C.** 2. **D.** $\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Lời giải

Do AB có độ dài không đổi nên chu vi tam giác ABC nhỏ nhất khi $AC+CB$ nhỏ nhất.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Vì $C \in d \Rightarrow C(t;0;2-t) \Rightarrow AC = \sqrt{\left(\sqrt{2}t-2\sqrt{2}\right)^2+9}$, $BC = \sqrt{\left(\sqrt{2}t-\sqrt{2}\right)^2+4}$

$\Rightarrow AC+CB = \sqrt{\left(\sqrt{2}t-2\sqrt{2}\right)^2+9}+\sqrt{\left(\sqrt{2}t-\sqrt{2}\right)^2+4}.$

Đặt $\vec{u} = \left(\sqrt{2}t-2\sqrt{2};3\right), \vec{v} = \left(-\sqrt{2}t+\sqrt{2};2\right)$ áp dụng bất đẳng thức $|\vec{u}|+|\vec{v}| \geq |\vec{u}+\vec{v}|$

$\Rightarrow \sqrt{\left(\sqrt{2}t-2\sqrt{2}\right)^2+9}+\sqrt{\left(\sqrt{2}t-\sqrt{2}\right)^2+4} \geq \sqrt{\left(\sqrt{2}-2\sqrt{2}\right)^2+25}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{\sqrt{2}t-2\sqrt{2}}{-\sqrt{2}t+\sqrt{2}} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow t = \frac{7}{5} \Rightarrow C\left(\frac{7}{5};0;\frac{3}{5}\right) \Rightarrow CM = \sqrt{\left(\frac{6}{5}-\frac{7}{5}\right)^2+2+\left(2-\frac{3}{5}\right)^2} = 2.$

Chọn C

Câu 41: Trong không gian với hệ tọa độ., cho bốn điểm. và. Kí hiệu d là đường thẳng đi qua D sao cho tổng khoảng cách từ các điểm A, B, C đến d lớn nhất. Hỏi đường thẳng d đi qua điểm nào dưới đây?

A. $M(-1;-2;1)$. **B.** $N(5;7;3)$. **C.** $P(3;4;3)$. **D.** $Q(7;13;5)$.

Lời giải

Ta có phương trình mặt phẳng qua A,B,C là: $(ABC): \frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{6}=1 \Leftrightarrow 2x+3y+z-6=0$.

Dễ thấy $D \in (ABC)$. Gọi. lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C trên d.

Suy ra $d(A,d)+d(B,d)+d(C,d) = AA'+BB'+CC' \leq AD+BD+CD$. Dấu bằng xảy ra khi $A' \equiv B' \equiv C' \equiv D$. Hay tổng khoảng cách từ các điểm A, B, C đến d lớn nhất khi d là đường thẳng qua D và vuông góc với mặt phẳng $(ABC) \Rightarrow d: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 1+3t; N \in d \\ z = 1+t \end{cases}$

chọn B

Câu 42: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$ và hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 2-2t \\ y = 1 \\ z = -2+t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x = 5+3s \\ y = 1 \\ z = 3-s \end{cases}$. Gọi B, C là các điểm lần lượt di động trên d_1, d_2. Hỏi giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = AB+BC+CA$ là?

A. $2\sqrt{29}$. **B.** $2\sqrt{985}$. **C.** $\sqrt{5}+\sqrt{10}+\sqrt{29}$. **D.** $\sqrt{5}+\sqrt{10}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi A_1, A_2 lần lượt là điểm đối xứng của A qua d_1, d_2 ta có $BA = BA_1, CA = CA_2$, do đó $P = A_1B+BC+CA_2 \geq A_1A_2 = 2\sqrt{29}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow B = d_1 \cap A_1A_2, C = d_2 \cap A_1A_2$.

Trong đó $A_1(-1;1;-3), A_2(3;1;7), A_1A_2 = 2\sqrt{29}$.

Kiểm tra dấu bằng, dễ thấy $A_1A_2 \cap d_1 = B\left(-\frac{1}{6};1;-\frac{11}{12}\right)$, $A_1A_2 \cap d_2 = C\left(\frac{31}{17};1;\frac{69}{17}\right)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 43: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=0\\y=t\\z=1\end{cases}$ và $A(0;4;0)$. Gọi M là điểm cách đều d và trục $x'Ox$. Khoảng cách ngắn nhất giữa A và M bằng:

A. $\frac{1}{2}$ **B.** $3\sqrt{2}$ **C.** $\sqrt{6}$ **D.** $\frac{\sqrt{65}}{2}$

Lời giải

Gọi $M(a;b;c)$ ta có: $\begin{cases}d(M,Ox)=\sqrt{b^2+c^2}\\d(M,d)=\sqrt{a^2+(c-1)^2}\end{cases}$.

Do đó $b^2+c^2=a^2+(c-1)^2\Leftrightarrow a^2=b^2+2c-1$.

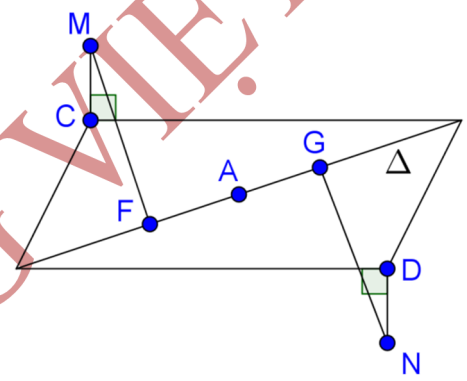
Khi đó $AM=\sqrt{a^2+(b-4)^2+c^2}=\sqrt{2(b-2)^2+(c+1)^2+6}$.

Chọn C

Câu 44: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(2,1,0)$, song song với mặt phẳng $(P):x-y-z=0$ và có tổng khoảng cách từ các điểm $M(0,2,0),N(4,0,0)$ tới đường thẳng đó đạt giá trị nhỏ nhất? Vector chỉ phương của Δ là?

A. $\overrightarrow{u_\Delta}=(1,0,1)$ **B.** $\overrightarrow{u_\Delta}=(2,1,1)$ **C.** $\overrightarrow{u_\Delta}=(3,2,1)$ **D.** $\overrightarrow{u_\Delta}=(0,1,-1)$

Lời giải



Ta gọi $(Q):x-y-z-1=0$ là mặt phẳng qua điểm $A(2,1,0)$, song song với mặt phẳng $(P):x-y-z=0$.

Đồng thời ta phát hiện ra rằng điểm $A(2,1,0)$ là trung điểm MN.

Khi đó tổng khoảng cách $MF+NG\geq MC+ND=2d(M,(Q))$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi Δ là đường thẳng đi qua A và hai hình chiếu C và D của các điểm $M(0,2,0),N(4,0,0)$ tới mặt phẳng (Q).

Chọn A

Câu 45: **(Đặng Thành Nam Đề 9)** Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(2;3;3)$ đường trung tuyến kẻ từ đỉnh B là $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-2}{-1}$, phương trình đường phân giác trong góc C là $\frac{x-2}{2}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z-2}{-1}$. Đường thẳng AB có một véctơ chỉ phương là:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $\overrightarrow{u_1}=(0;1;-1)$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=(2;1;-1)$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(1;2;1)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}=(1;-1;0)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(3-t;3+2t;2-t)$ là trung điểm cạnh AC, khi đó $C(4-2t;3+4t;1-2t)$.

Mặt khác C thuộc đường phân giác trong góc C là Δ nên $\frac{(4-2t)-2}{2}=\frac{(3+4t)-4}{-1}=\frac{(1-2t)-2}{-1}\Leftrightarrow t=0\Rightarrow C(4;3;1)$.

Gọi A' đối xứng với A qua phân giác trong góc $C\Rightarrow A'\in CB$.

Mặt phẳng (α) qua A và vuông góc với đường phân giác trong góc C: $(\alpha):2(x-2)-(y-3)-(z-3)=0$.

Gọi $H=(\alpha)\cap\Delta\Rightarrow H(2;4;2)$.

Mặt khác : H là trung điểm AA' nên $A'(2;5;1)$.

Phương trình đường thẳng BC qua A',C là:

$$\begin{cases}x=4+2t\\y=3-2t\\z=1\end{cases}$$

$\Rightarrow BC\cap BM=B(2;5;1)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(0;2;-2)$

Câu 46: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{3}$ và hai điểm $A(1;-1;-1),B(-2;-1;1)$. Gọi C,D là hai điểm phân biệt di động trên đường thẳng Δ sao cho tồn tại điểm I cách đều tất cả các mặt của tứ diện $ABCD$ và I thuộc tia Ox. Tính độ dài đoạn thẳng CD.

A. $\frac{12\sqrt{17}}{17}$. **B.** $\sqrt{17}$. **C.** $\frac{3\sqrt{17}}{11}$. **D.** $\sqrt{13}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $(ACD):2x+y+2z+1=0;(BCD):x+2y+2z+2=0$.

Gọi $I(m;0;0)$, với $m>0$, ta có $d(I,(ACD))=d(I,(BCD))\Leftrightarrow\frac{|2m+1|}{3}=\frac{|m+2|}{3}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-1\end{array}\right.$.

Vì $m>0$ nên $I(1;0;0)$ và $d(I,(BCD))=1$. Gọi $C(2t+2;2t+1;-3t-3)$, ta có $(ABC):(4t+4)x+(5t+4)y+(6t+6z)+7t+6=0$.

Vì $d(I,(ACD))=d(I,(BCD))=1\Leftrightarrow\frac{|11t+10|}{\sqrt{(4t+4)^2+(5t+4)^2+(6t+6z)^2}}=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=-\frac{8}{11}\end{array}\right.$

Suy ra $CD=\sqrt{(2^2+2^2+3^2)(t_1-t_2)^2}=\sqrt{17\left(-1+\frac{8}{11}\right)^2}=\frac{3\sqrt{17}}{11}$. Chọn đáp án C

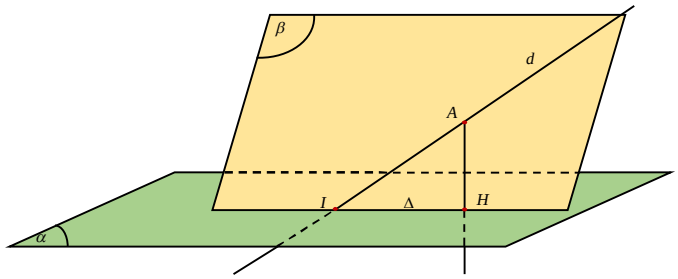
Câu 47: **(Yên Phong 1)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha):x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1}$. Gọi Δ là hình chiếu vuông góc của d trên (α) và $\vec{u}=(1;a;b)$ là một vectơ chỉ phương của Δ với $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính tổng $a+b$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. 0. **B.** 1. **C.** -1. **D.** -2.

Lời giải

Chọn C



Cách 1.

Ta có mặt phẳng (α) nhận vectơ $\overrightarrow{n_\alpha}=(1;1;1)$ là vectơ pháp tuyến, đường thẳng d đi qua điểm $A=(0;-1;2)$ và nhận $\overrightarrow{u_d}=(1;2;-1)$ là vectơ chỉ phương.

Gọi (β) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và vuông góc với mặt phẳng (α).

Ta có $\overrightarrow{n_\beta}=\overrightarrow{n_\alpha}\wedge\overrightarrow{u_d}=(-3;2;1)$.

Khi đó đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β). Do đó một vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\overrightarrow{u_\Delta}=\overrightarrow{n_\alpha}\wedge\overrightarrow{n_\beta}=(-1;-4;5)$.

Mà $\vec{u}=(1;a;b)$ nên $a=4$, $b=-5$. Vậy $a+b=-1$.

Cách 2.

Dễ dàng tính được tọa độ giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (α) là $I=(1;1;1)$. Trên đường thẳng lấy điểm $A=(0;-1;2)$ và gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (α). Phương trình đường thẳng đi qua A và H có dạng: $\begin{cases}x=0+t\\y=-1+t\\z=2+t\end{cases}$.

Tọa độ của là H nghiệm của hệ $\begin{cases}x=0+t\\y=-1+t\\z=2+t\\x+y+z-3=0\end{cases}\Rightarrow t=\frac{2}{3}$. Vậy $H\left(\frac{2}{3};\frac{-1}{3};\frac{8}{3}\right)$.

Đường thẳng Δ đi qua hai điểm I và H nhận vectơ $\overrightarrow{IH}=\left(\frac{-1}{3};\frac{-4}{3};\frac{5}{3}\right)$ là vectơ chỉ phương nên cũng nhận vectơ $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;4;-5)$ là vectơ chỉ phương. Vậy $a+b=-1$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

GÓC

Câu 1: **(Đề thi HK2 Lớp 12-Chuyên Nguyễn Du- Đăk Lăk)** Trong không gian $Oxyz$, hai đường thẳng $d_1:\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{\sqrt{2}}=\frac{z-3}{1}$ và $d_2:\frac{x+5}{1}=\frac{y+3}{\sqrt{2}}=\frac{z-5}{m}$ tạo với nhau góc $60°$, giá trị của tham số m bằng

A. $m=-1$. **B.** $m=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $m=\frac{1}{2}$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có vectơ chỉ phương của hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt là $\overrightarrow{u_1}=(1;\sqrt{2};1)$ và $\overrightarrow{u_2}=(1;\sqrt{2};m)$.

Theo công thức tính góc tạo bởi hai đường thẳng thì $cos\varphi=\frac{|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}|}{|\overrightarrow{u_1}|.|\overrightarrow{u_2}|}$ với $\varphi=\widehat{(d_1,d_2)}$.

Từ giả thiết suy ra $\frac{1}{2}=\frac{|3+m|}{2\sqrt{m^2+3}}\Leftrightarrow\sqrt{m^2+3}=|3+m|\Leftrightarrow m^2+3=m^2+6m+9\Leftrightarrow m=-1$.

Câu 2: **(THPT-Yên-Khánh-Ninh-Bình-lần-4-2018-2019-Thi-tháng-4)** Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng $(P):x-z.\sin\alpha+\cos\alpha=0;(Q):y-z.\cos\alpha-\sin\alpha=0;\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Góc giữa (d) và trục Oz là:

A. $30°$. **B.** $45°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(P)}}=(1;0;-\sin\alpha)$

Mặt phẳng (Q) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(Q)}}=(0;1;-\cos\alpha)$

(d) là giao tuyến của (P) và (Q) nên vectơ chỉ phương của (d) là:

$\overrightarrow{u_{(d)}}=\left[\overrightarrow{n_{(P)}};\overrightarrow{n_{(Q)}}\right]=(\sin\alpha;\cos\alpha;1)$; vectơ chỉ phương của (Oz) là $\overrightarrow{u_{(Oz)}}=(0;0;1)$

$\Rightarrow\cos(d,Oz)=\frac{|0.\sin\alpha+0.\cos\alpha+1.1|}{\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+1^2}.\sqrt{0+0+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow(d,Oz)=45°$

Vậy góc giữa (d) và trục (Oz) là: $45°$.

Câu 3: **(Sở Vĩnh Phúc)** Trong không gian $Oxyz$, gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(1;-1;2)$, song song với mặt phẳng $(P):2x-y-z+3=0$, đồng thời tạo với đường thẳng $\Delta:\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{2}$ một góc lớn nhất. Phương trình đường thẳng d là

A. $\frac{x-1}{-4}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-2}{3}$. **B.** $\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{-5}=\frac{z-2}{3}$.

C. $\frac{x+1}{4}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-2}{-3}$. **D.** $\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-2}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Mặt phẳng $(P):2x-y-z+3=0$ có một véctơ pháp tuyến là $\vec{n}_{(P)}=(2;-1;-1)$.

Đường thẳng $\Delta:\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{2}$ có một véctơ chỉ phương là $\vec{u}_{\Delta}=(1;-2;2)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Giả sử đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_d$.

Do $0^\circ \le (d,\Delta) \le 90^\circ$ mà theo giả thiết d tạo Δ góc lớn nhất $\Rightarrow (d,\Delta) = 90^\circ \Rightarrow \vec{u}_d \perp \vec{u}_\Delta$.

Lại có $d \,//\, (P)$ nên $\vec{u}_d \perp \vec{n}_{(P)}$. Do đó chọn $\vec{u}_d = \left[\vec{u}_\Delta, \vec{n}_{(P)}\right] = (4;\ 5;\ 3)$.

Vậy phương trình đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+1}{5} = \dfrac{z-2}{3}$.

KHOẢNG CÁCH

Câu 4: **(Đề thi HK2 Lớp 12-Chuyên Nguyễn Du- Đăk Lăk)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng: $d_1: \dfrac{x-3}{-4} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z+1}{1}$ và

$d_2: \dfrac{x}{-6} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{2}$. Khoảng cách giữa chúng bằng

A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Đường thẳng d_1 có vecto chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (-4;1;1)$ và đi qua điểm $A(3;-2;-1)$.

Đường thẳng d_2 có vecto chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = (-6;1;2)$ và đi qua điểm $B(0;1;2)$.

Gọi mặt phẳng chứa d_1 và song song với d_2 là (P).

Ta có: $\overrightarrow{u_P} = \left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right] = (1;2;2)$.

Vì (P) chứa d_1 nên $A \in (P)$, ta suy ra phương trình mặt phẳng (P) là:

$$1(x-3)+2(y+2)+2(z+1)=0 \Leftrightarrow x+2y+2z+3=0.$$

Ta suy ra: $d(d_1;d_2) = d\left(d_2;(P)\right) = d\left(B;(P)\right) = \dfrac{|0.1+2.1+2.2+3|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = 3$.

Cách 2: Đường thẳng d_1 có vecto chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (-4;1;1)$ và đi qua điểm $A(3;-2;-1)$.

Đường thẳng d_2 có vecto chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = (-6;1;2)$ và đi qua điểm $B(0;1;2)$.

Có: $\overrightarrow{AB} = (-3;3;3)$; $\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right] = (1;2;2)$.

Vậy $d(d_1;d_2) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB}.\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]\right|} = 3$.

Câu 5: **(Sở Vĩnh Phúc)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(-2;-2;1)$, $A(1;2;-3)$ và đường thẳng

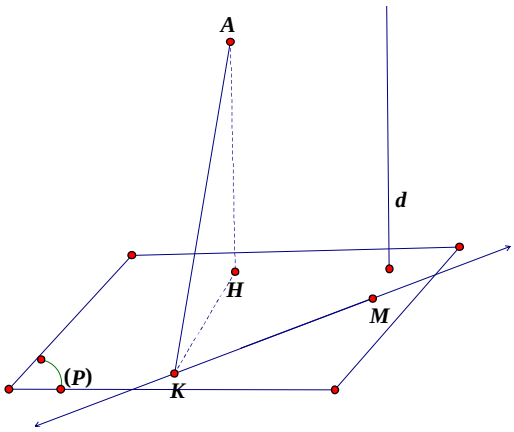
$d: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z}{-1}$. Tìm vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ đi qua M, vuông góc với đường thẳng d đồng thời cách điểm A một khoảng nhỏ nhất.

A. $\vec{u}(2;2;-1)$. **B.** $\vec{u}(3;4;-4)$. **C.** $\vec{u}(2;1;6)$. **D.** $\vec{u}(1;0;2)$.

Lời giải

Chọn D

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Đường thẳng (d) có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_d}=(2;2;-1)$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa M và vuông góc với đường thẳng d. Gọi H là hình chiếu kẻ từ A xuống mặt phẳng (P). Gọi K là hình chiếu vuông góc kẻ từ A đến đường thẳng Δ. Suy ra $d(A;\Delta)=AK$. Vì $AH\perp(P)\Rightarrow AH\perp HK$ nên $AK\ge AH\Rightarrow d(A/\Delta)\ge AH$.

Do đó khoảng cách từ A đến đường thẳng Δ đạt giá trị nhỏ nhất khi K trùng với H, khi đó đường thẳng cần tìm là MH.

Phương trình của mặt phẳng (P) là

$(P):2(x+2)+2(y+2)-(z-1)=0\Leftrightarrow 2x+2y-z+9=0$

Phương trình đường thẳng AH là $\begin{cases}x=1+2t\\y=2+2t\\z=-3-t\end{cases}$

Vì $H=(P)\cap AH$ nên tọa độ của H là bộ ba $(x;y;z)$ thỏa hệ $\begin{cases}x=1=2t & (1)\\y=2+2t & (2)\\z=-3-t & (3)\\2x+2y-z+9=0 & (4)\end{cases}$.

Thay $(1),(2),(3)$ vào (4) ta được

$2(1+2t)+2(2+2t)-(-3-t)+9=0\Leftrightarrow 9t+18=0\Leftrightarrow t=-2\Rightarrow H(-3;-2;-1)$

Vậy vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ là $\vec{u}=\overrightarrow{HM}=(1;0;2)$.

Câu 6: **(Sở Điện Biên)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng phẳng $(P):x-2y+2z-1=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{-1}$. Biết điểm $A(a;b;c)$ $(c<0)$ là điểm nằm trên đường thẳng d và cách (P) một khoảng bằng 1. Tính tổng $S=a+b+c$

A. $S=2$. **B.** $S=-\dfrac{2}{5}$. **C.** $S=4$. **D.** $S=\dfrac{12}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $d:\begin{cases}x=1+t\\y=-1+2t\\z=-t\end{cases}$

Gọi $A(1+t;-1+2t;-t)\in d$

$$d\left(A,(P)\right)=\frac{\left|1+t-2(-1+2t)+2(-t)-1\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{|2-5t|}{3}$$

Mà $d\left(A,(P)\right)=1\Leftrightarrow\frac{|2-5t|}{3}=1$

$$\Leftrightarrow|2-5t|=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2-5t=3\\2-5t=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-\frac{1}{5}\\t=1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}A\left(\frac{4}{5};-\frac{7}{5};\frac{1}{5}\right)\\A(2;1;-1)\end{array}\right.$$

Vì $c<0\Rightarrow A(2;1;-1)$

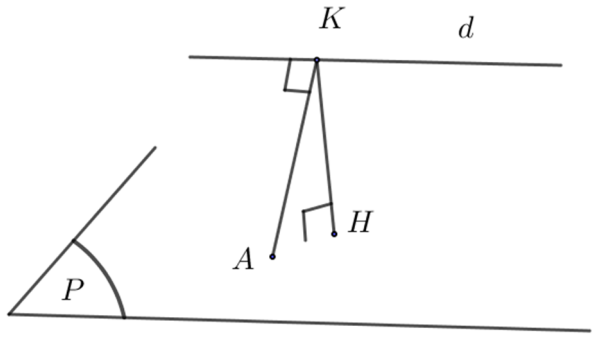
Vậy $S=2$.

Câu 7: **(Sở Vĩnh Phúc)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(10;2;1)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{3}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A, song song với đường thẳng d sao cho khoảng cách giữa d và (P) lớn nhất. Khoảng cách từ điểm $M(-1;2;3)$ đến mặt phẳng (P) bằng

A. $\frac{533}{\sqrt{2765}}$. **B.** $\frac{97\sqrt{3}}{15}$. **C** $\frac{2\sqrt{13}}{13}$. **D.** $\frac{76\sqrt{790}}{790}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng d và H là hình chiếu vuông góc của K lên mặt phẳng (P). Vì $K\in d$ nên ta đặt $K(1+2t;t;1+3t)$

$\Rightarrow\overrightarrow{AK}=(2t-9;t-2;3t)$.

Véc tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\overrightarrow{u_d}=(2;1;3)$.

Vì $AK\perp d\Rightarrow\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{u_d}=0\Leftrightarrow2(2t-9)+1.(t-2)+3.3t=0\Leftrightarrow14t-20=0\Leftrightarrow t=\frac{10}{7}$.

Vậy $\overrightarrow{AK}=(-\frac{43}{7};-\frac{4}{7};\frac{30}{7})$. Khoảng cách giữa d và (P) là độ dài đoạn thẳng HK mà $HK\le AK$ nên khoảng cách giữa d và (P) lớn nhất bằng AK khi H trùng A, lúc đó $AK\perp(P)$ nên (P) có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{AK}=(-\frac{43}{7};-\frac{4}{7};\frac{30}{7})$, ta chọn véctơ pháp tuyến (P) là $\overrightarrow{n_p}=(43;4;-30)$. Khi đó phương trình mặt phẳng (P) là $43(x-10)+4(y-2)-30.(z-1)=0\Leftrightarrow43x+4y-30z-408=0$.

Vậy ta có $d(M;(P))=\frac{533}{\sqrt{2765}}$.

Câu 8: **(THPT LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG NGÃI)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;3)$, $B(1;2;0)$ và $M(-1;3;4)$. Gọi d là đường thẳng qua B vuông góc với AB đồng thời

cách M một khoảng nhỏ nhất. Một véc tơ chỉ phương của d có dạng $\vec{u}(2;a;b)$. Tính tổng $a+b$.

A. 1. **B.** 2. **C.** -1. **D.** -2.

Lời giải

Chọn C

*** Cách 1.**

$\overrightarrow{AB}=(0;0;-3)$, $\overrightarrow{u_d}=(2;a;b)$.

* $d\perp AB\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_d}=0\Leftrightarrow b=0\Rightarrow \overrightarrow{u_d}=(2;a;0)$

* $\overrightarrow{BM}=(-2;1;4)\Rightarrow\left[\overrightarrow{BM},\overrightarrow{u_d}\right]=(-4a;8;-2a-2)$

$$\Rightarrow d=d(M,d)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{BM},\overrightarrow{u_d}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|}=\sqrt{\frac{16a^2+64+(2a+2)^2}{4+a^2}}=\sqrt{\frac{20a^2+8a+68}{a^2+4}}$$

$$=2.\sqrt{\frac{5a^2+2a+17}{a^2+4}}=2\sqrt{f(a)}$$

Xét $f(a)=\frac{5a^2+2a+17}{a^2+4}$, $f'(a)=\frac{-2a^2+6a+8}{(a^2+4)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-1\\a=4\end{array}\right.$

Vì hàm $f(a)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f(a)$ có GTNN $=\{f(-1),f(4)\}$

$f(-1)=4$, $f(4)=5,25$.

Vậy $d_{\min}\Leftrightarrow f(a)$ đạt GTNN $\Leftrightarrow a=-1\Rightarrow a+b=-1\Rightarrow C$

*** Cách 2.**

$d\perp AB$ nên d nằm trong mặt phẳng (P) qua B và vuông góc $\overrightarrow{AB}=(0;0;-3)$

Có phương trình: $0(x-1)+0(y-2)-3(z-0)=0$

hay $(P):z=0\Rightarrow(P)$ trùng (xOy)

Khoảng cách từ $M(-1;3;4)$ đến (P) nhỏ nhất khi và chỉ khi (d) đi qua H là hình chiếu của $M(-1;3;4)$ xuống $(xOy)\Rightarrow H(-1;3;0)$. Vậy (d) có vtcp là $\overrightarrow{BH}=(-2;1;0)$

Gt cho (d) có vtcp dạng $\vec{u}(2;a;b)//-(2;-1;0)$

$\Rightarrow a=-1, b=0\Rightarrow a+b=-1\Rightarrow C$.

VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG, GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Câu 9: **(ĐH Vinh Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P):x+2y-z-1=0$, $(P):2x+y-z+2=0$, và hai đường thẳng $\Delta_1:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2}$, $\Delta_2:\frac{x}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{2}$. Đường thẳng Δ song song với hai mặt phẳng $(P);(Q)$ và cắt Δ_1,Δ_2 tương ứng tại H,K. Độ dài đoạn HK bằng

A. $\frac{8\sqrt{11}}{7}$. **B.** $\sqrt{5}$ **C.** 6. **D.** $\frac{\sqrt{11}}{7}$.

Lời giải

Chọn A

+ Tính $\vec{u}=\left[\overrightarrow{n_P},\overrightarrow{n_Q}\right]=(-1;-1;-3)$

+ Gọi $H(2t;1+t;-1+2t);K(m;2-m;1+2m)$ nên $\overrightarrow{HK}=(m-2;1-m-t;2+2m-2t)$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

+ Vì song song với 2 mặt phẳng $(P);(Q)$ nên $\overrightarrow{HK}=k.\vec{u}$ suy ra

$\frac{m-2t}{1}=\frac{1-m-t}{1}=\frac{2+2m-2t}{3}$ tính ra được $m=\frac{2}{7};t=\frac{-3}{7}$.

+ Suy ra $HK=\frac{8\sqrt{11}}{7}$.

Câu 10: **(Nam Tiền Hải Thái Bình Lần1)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;0)$ và đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-1}$. Phương trình tham số của đường thẳng d đi qua M, cắt và vuông góc với Δ là

A. $d:\begin{cases}x=2+t\\y=1-4t\\z=-2t\end{cases}$. **B.** $d:\begin{cases}x=2+2t\\y=1+t\\z=-t\end{cases}$. **C.** $d:\begin{cases}x=2-t\\y=1+t\\z=t\end{cases}$. **D.** $d:\begin{cases}x=1+t\\y=-1-4t\\z=2t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Vectơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{u_\Delta}=(2;1;-1)$.

Gọi $H(x;y;z)$ là hình chiếu của M lên Δ, suy ra tọa độ của H thỏa

$$\begin{cases}\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{u_\Delta}=0\\H\in\Delta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-2).2+(y-1).1+z.(-1)=0\\x-1=2(y+1)\\y+1=-z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y-z=5\\x-2y=3\\y+z=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{7}{3}\\y=-\frac{1}{3}\\z=-\frac{2}{3}\end{cases}.$$

Ta có $\overrightarrow{MH}=\left(\frac{1}{3};-\frac{4}{3};-\frac{2}{3}\right)$, suy ra vectơ chỉ phương của d là $\overrightarrow{n_d}=(1;-4;-2)$.

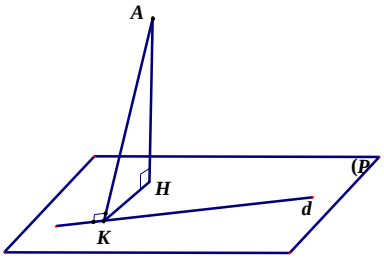
Phương trình tham số của đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{n_d}=(1;-4;-2)$ và đi qua điểm $M(2;1;0)$ là $d:\begin{cases}x=2+t\\y=1-4t\\z=-2t\end{cases}$.

Câu 11: **(Sở Thanh Hóa 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;5;3)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa d sao cho khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất. Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến (P) bằng

A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $\frac{3}{\sqrt{6}}$. **C.** $\frac{11\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi K là hình chiếu của A lên đường thẳng d. H là hình chiếu của A lên mặt phẳng (P).

Khi đó $d\left(A,(P)\right)=AH\le AK$ không đổi.

Vậy khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất khi $H\equiv K$. Khi đó $AK\perp(P)$.

Giả sử $K\left(1+2t;t;2+2t\right)\in d$. Suy ra $\overrightarrow{AK}=\left(-1+2t;-5+t;-1+2t\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{AK}\perp\overrightarrow{u_d}=\left(2;1;2\right)\Leftrightarrow\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{u_d}=0$

$\Leftrightarrow 2\left(-1+2t\right)-5+t+2\left(-1+2t\right)=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow K\left(3;1;4\right)$ và $\overrightarrow{AK}=\left(1;-4;1\right)$.

Mặt phẳng (P) có phương trình:

$$\left(x-1\right)-4\left(y-0\right)+\left(z-2\right)\Leftrightarrow x-4y+z-3=0\Rightarrow d\left(O;(P)\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Câu 12: **(CổLoa Hà Nội)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\mathrm{d}_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{1}$ và $\mathrm{d}_2:\frac{x-m}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-3}{1}$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hai đường thẳng d_1, d_2 có đúng một điểm chung?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** vô số.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng d_1 đi qua điểm $\mathrm{M}_1\left(1;3;-1\right)$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=\left(1;-1;1\right)$.

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $\mathrm{M}_2\left(m;-1;3\right)$ có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2}=\left(2;-2;1\right)$.

Ta có $\begin{cases}\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right]=\left(1;1;0\right)\\ \overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}=\left(m-1;-4;4\right)\end{cases}$

d_1 cắt d_2 khi $\begin{cases}\left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right]=\left(1;1;0\right)\neq\vec{0}\\ \left[\overrightarrow{u_1};\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2}=m-5=0\end{cases}\Leftrightarrow m=5$.

Câu 13: **(KSCL-Lần-2-2019-THPT-Nguyễn-Đức-Cảnh-Thái-Bình)** Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{2m+1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z+1}{m-2}$ và mặt phẳng $(P):x+y+z-6=0$, hai điểm $A\left(2;2;2\right)$, $B\left(1;2;3\right)$ thuộc (P). Giá trị của m để AB vuông góc với hình chiếu của d trên (P) là?

A. $m=1$. **B.** $m=-1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-3$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{u_d}=\left(2m+1;2;m-2\right)$, $\overrightarrow{n_P}=\left(1;1;1\right)$ và $\overrightarrow{AB}=\left(-1;0;1\right)$.

Giả sử d vuông góc với (P), khi đó $\overrightarrow{u_d}$ và $\overrightarrow{n_P}$ cùng phương

$$\Rightarrow\frac{2m+1}{1}=\frac{2}{1}=\frac{m-2}{1}\Leftrightarrow\begin{cases}2m+1=2\\ m-2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\frac{1}{2}\\ m=4\end{cases}\text{ (loại).}$$

Vậy d không vuông góc với (P).

Khi đó với $AB\subset(P)$, AB vuông góc với hình chiếu của d lên (P) khi và chỉ khi AB vuông góc với $d\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{u_d}=0\Leftrightarrow(-1)\cdot(2m+1)+0\cdot2+1\cdot(m-2)=0\Leftrightarrow m=-3$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 14: **(Đặng Thành Nam Đề 3)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-y+2z+3=0$ và hai đường thẳng $d_1:\frac{x}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{1}$; $d_2:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+3}{1}$. Xét các điểm A, B lần lượt di động trên d_1 và d_2 sao cho AB song song với mặt phẳng (P). Tập hợp trung điểm của đoạn thẳng AB là

A. Một đường thẳng có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-9;8;-5)$.

B. Một đường thẳng có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-5;9;8)$.

C. Một đường thẳng có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-2;-5)$.

D. Một đường thẳng có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;5;-2)$.

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(2;-1;2)$.

Phương trình tham số của đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=3a\\y=1-a\\z=-1+a\end{cases}$ (a là tham số, $a\in\mathbb{R}$)

Phương trình tham số của đường thẳng $d_2:\begin{cases}x=2+b\\y=1-2b\\z=-3+b\end{cases}$ (b là tham số, $b\in\mathbb{R}$)

Ta có: $A\in d_1\Rightarrow A(3a;1-a;-1+a)$; $B\in d_2\Rightarrow B(2+b;1-2b;-3+b)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(b-3a+2;a-2b;b-a-2)$.

Theo giả thiết:

$$AB//(P)\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AB}\perp\vec{n}\\A,B\notin(P)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(b-3a+2)-(a-2b)+2(b-a-2)=0\\a\neq 0\\b\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=\frac{3a}{2}\\a\neq 0\\b\neq 0\end{cases}.$$

Suy ra $B\left(2+\frac{3a}{2};1-3a;-3+\frac{3a}{2}\right)$.

Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB, ta có:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \\ z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{3a + 2 + \dfrac{3a}{2}}{2} \\ y_I = \dfrac{1 - a + 1 - 3a}{2} \\ z_I = \dfrac{-1 + a - 3 + \dfrac{3a}{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = 1 + \dfrac{9}{4}a \\ y_I = 1 - 2a \\ z_I = -2 + \dfrac{5}{4}a \end{cases}$$ hay $I = \left(1 + \dfrac{9}{4}a; 1 - 2a; -2 + \dfrac{5}{4}a\right)$.

Suy ra tập hợp điểm I là đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + \dfrac{9}{4}a \\ y = 1 - 2a \\ z = -2 + \dfrac{5}{4}a \end{cases}$ (a là tham số, $a \in \mathbb{R}^*$)

Đường thẳng (Δ) có một vectơ chỉ phương là: $\vec{u} = (-9; 8; -5)$.

Câu 15: **(Chuyên Phan Bội Châu Lần2)** rong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+1}{-1}$ và $d_2: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases}$. Mặt phẳng (P) qua d_1, tạo với d_2 một góc 45° và nhận vectơ $\vec{n}(1; b; c)$ làm một vec tơ pháp tuyến. Xác định tích $b.c$.

A. -4. **B.** 4. **C.** 4 hoặc 0. **D.** -4 hoặc 0.

Lời giải.

Chọn A

$\overrightarrow{u_1} = (2; -2; -1)$, $\overrightarrow{u_2} = (1; 0; -1)$ lần lượt là vectơ chỉ phương của d_1, d_2. Theo bài ra ta có

$$\begin{cases} \vec{n}.\overrightarrow{u_1} = 0 \\ \left|\cos\left(\vec{n}; \overrightarrow{u_2}\right)\right| = \sin\left(d_2; (P)\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2.1 + (-2)b + (-1)c = 0 \\ \dfrac{|1.1 + 0.b + (-1)c|}{\sqrt{1 + b^2 + c^2}.\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 2 - 2b \\ (c-1)^2 = 1 + b^2 + c^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = -2 \end{cases}.$$

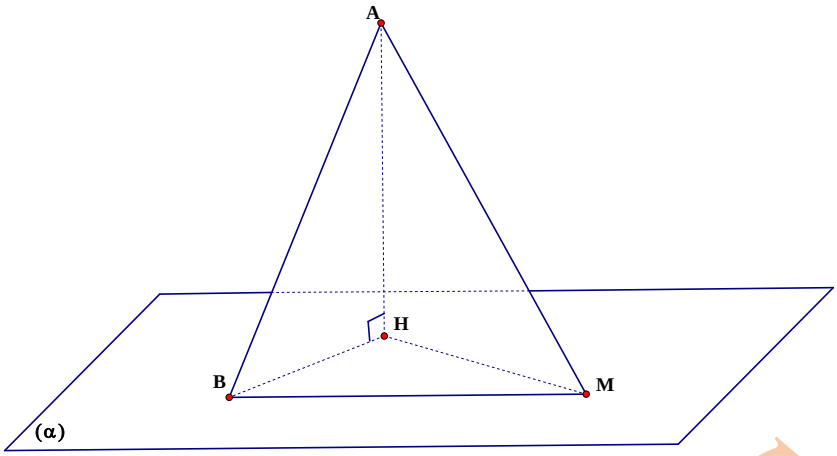
Câu 16: **(Đặng Thành Nam Đề 6)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; -3), B(-2; -2; 1)$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x + 2y - z + 9 = 0$. Xét điểm M thuộc (α) sao cho tam giác AMB vuông tại M và độ dài đoạn thẳng MB đạt giá trị lớn nhất. Phương trình đường thẳng MB là

A. $\begin{cases} x = -2 - t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -2 \\ z = 1 + 2t \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -2 - t \\ z = 1 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Ta có $B\in(\alpha)$ và gọi H là hình chiếu của điểm A lên mặt phẳng (α). Khi đó, tọa độ điểm H là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}2x+2y-z+9=0\\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{2}=\dfrac{z+3}{-1}\end{cases}\Rightarrow H(-3;-2;-1)$.

Xét hai tam giác vuông $\Delta AHB;\Delta AMB$ có $MB=\sqrt{AB^2-AM^2}\le\sqrt{AB^2-AH^2}=BH=\sqrt{5}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $M\equiv H\Rightarrow\overrightarrow{MB}=(1;0;2)$.

Vậy phương trình đường thẳng MB là $\begin{cases}x=-2+t\\ y=-2\\ z=1+2t\end{cases}$.

Câu 17: **(Gang Thép Thái Nguyên)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{3}$; $d_2:\begin{cases}x=1+t\\ y=2+t\\ z=m\end{cases}$. Gọi S là tập tất cả các số m sao cho d_1 và d_2 chéo nhau và khoảng cách giữa chúng bằng $\dfrac{5}{\sqrt{19}}$. Tính tổng các phần tử của S.

A. -11. **B.** 12. **C.** -12. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

d_1 đi qua điểm $M(1;0;0)$, có vectơ chỉ phương $\vec{u}_1=(2;1;3)$.

d_2 đi qua điểm $N(1;2;m)$, có vectơ chỉ phương $\vec{u}_2=(1;1;0)$.

$[\vec{u}_1,\vec{u}_2]=(-3;3;1)$; $\overrightarrow{MN}=(0;2;m)$.

d_1 và d_2 chéo nhau khi và chỉ khi $[\vec{u}_1,\vec{u}_2].\overrightarrow{MN}\ne 0\Leftrightarrow m\ne -6$.

Mặt khác $d(d_1,d_2)=\dfrac{5}{\sqrt{19}}\Leftrightarrow\dfrac{\left|[\vec{u}_1,\vec{u}_2].\overrightarrow{MN}\right|}{\left\|[\vec{u}_1,\vec{u}_2]\right\|}=\dfrac{5}{\sqrt{19}}\Leftrightarrow\dfrac{|m+6|}{\sqrt{19}}=\dfrac{5}{\sqrt{19}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=-11\end{array}\right.$.

Khi đó tổng các phần tử của m là -12.

Câu 18: **(Chuyên Hạ Long lần 2-2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hai đường thẳng $d_1\begin{cases}x=4+t\\y=-4-t\\z=6+2t\end{cases}; d_2: \dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y-11}{4}=\dfrac{z-5}{2}$. Đường thẳng d đi qua $A(5;-3;5)$ cắt $d_1;d_2$ lần lượt ở B,C. Tính tỉ số $\dfrac{AB}{AC}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$B\in d_1 \Rightarrow B(4+t;-4-t;6+2t)$. PT tham số của $d_2: \begin{cases}x=5+2s\\y=11+4s\\z=5+2s\end{cases}$.

$C\in d_2 \Rightarrow C(5+2s;11+4s;5+2s)$. Khi đó: $\overrightarrow{AB}=(1-t;-1-t;2t+1); \overrightarrow{AC}=(2s;4s+14;2s)$.

Do A,B,C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ cùng phương $\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}: \overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}t-1=2ks\\-t-1=4ks+14k\\2t+1=2ks\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=-2\\s=-3\\k=\dfrac{1}{2}\end{cases}$. Do đó: $\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\Rightarrow \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{1}{2}$.

Câu 19: **(Sở Thanh Hóa 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$. Đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc và cắt d có phương trình là

A. $\Delta: \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-1}{1}$. **B.** $\Delta: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$.

C. $\Delta: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}$. **D.** $\Delta: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z-2}{1}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có phương trình tham số của đường thẳng $d: \begin{cases}x=1+t\\y=t\\z=-1+2t\end{cases}$ và d có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;1;2)$. Gọi B là giao điểm của Δ và d khi đó tọa độ của $B(1+t;t;-1+2t)$.

$\overrightarrow{AB}=(t;t;-3+2t)$

Vì $\Delta\perp d$ nên $\overrightarrow{AB}\perp\vec{u}$ suy ra $\overrightarrow{AB}.\vec{u}=0$ hay $t+t+2(-3+2t)=0\Leftrightarrow t=1 \Rightarrow B(2;1;1)$.

Vectơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{AB}=(1;1;-1)$. Đường thẳng Δ đi qua $B(2;1;1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(1;1;-1)$ nên có phương trình đường thẳng Δ là $\Delta: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$.

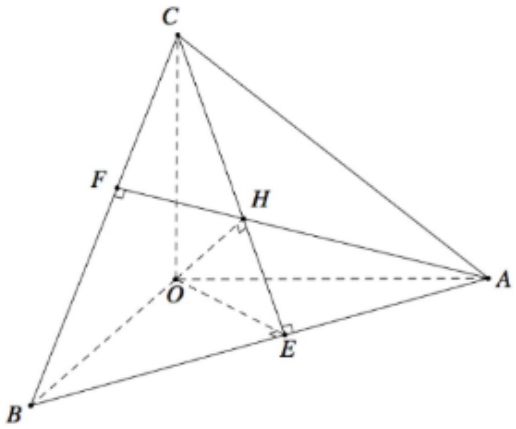
Câu 20: **(Đặng Thành Nam Đề 6)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;0;0), B(0;4;0), C(0;0;c)$ với c là số thực thay đổi khác 0. Khi c thay đổi thì trực tâm H của tam giác ABC luôn thuộc một đường tròn cố định. Bán kính của đường tròn đó bằng

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{5}{4}$. **C.** $\frac{12}{5}$. **D.** $\frac{6}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Kẻ $CE \perp AB,\ AF \perp BC \Rightarrow H = CE \cap AF$ và $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp HE$;

$AB \perp (OCE) \Rightarrow AB \perp OE$.

Vì điểm O và điểm E cố định nên H di động trên đường tròn đường kính OE nằm trong mặt phẳng $(OCE) = (OE, Oz)$.

Tam giác vuông OAB vuông tại O và có $OE \perp AB$ nên ta có:

$OE = \frac{OA.OB}{AB} = \frac{3.4}{5} = \frac{12}{5} \Rightarrow R = \frac{OE}{2} = \frac{6}{5}$.

Câu 21: **(CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIỆU ĐỒNG THÁP 2019 LẦN 2)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(2;0;0), B(0;3;0), C(0;0;6)$ và $D(1;1;1)$. Gọi Δ là đường thẳng qua D và thỏa mãn tổng khoảng cách từ các điểm A, B, C đến Δ là lớn nhất. Khi đó Δ đi qua điểm nào trong các điểm dưới đây?

A. $M(-1;-2;1)$. **B.** $M(7;5;3)$. **C.** $M(3;4;3)$. **D.** $M(5;7;3)$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C là $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 1$.

$D(1;1;1) \in (ABC) \Rightarrow \Delta \cap (ABC) = \{D\}$.

Gọi hình chiếu A, B, C lên đường thẳng Δ lần lượt là H, I, J thì ta luôn có

$AH \le AD; BI \le BD; CJ \le CD$.

$\Rightarrow d(A;\Delta) + d(B;\Delta) + d(C;\Delta) \le AD + BD + CD.$

Vậy để tổng khoảng cách từ A, B, C đến đường thẳng Δ là lớn nhất thì Δ phải vuông góc với (ABC) tại D. Khi đó phương trình Δ đi qua $D(1;1;1)$ và có $VTCP$ $\vec{u}(3;2;1)$ là

$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ (t là tham số). Ta thấy $M(7;5;3) \in \Delta$.

BÀI TOÁN LIÊN QUAN GIỮA ĐƯỜNG THẲNG - MẶT PHẲNG - MẶT CẦU

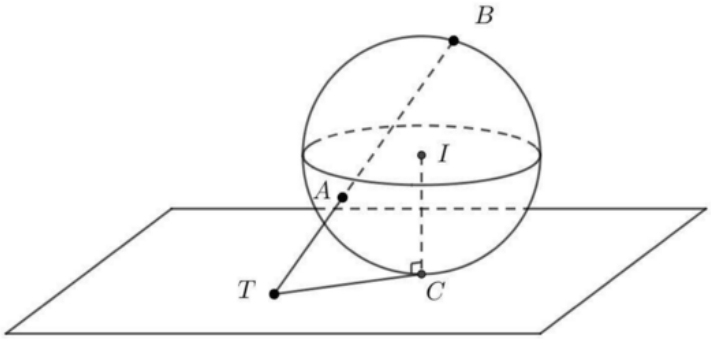
Câu 22: **(Chuyên Hạ Long lần 2-2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho $(P): 2x + y + 2z - 1 = 0$, $A(0;0;4), B(3;1;2)$. Một mặt cầu (S) luôn đi qua A, B và tiếp xúc với (P) tại C. Biết rằng, C luôn thuộc một đường tròn cố định bán kính r. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. Đáp án khác. **B.** $r=\dfrac{2\sqrt[4]{244651}}{3}$. **C.** $r=\dfrac{2\sqrt{244651}}{9}$. **D.** $r=\dfrac{\sqrt{2024}}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:



Ta có $\overrightarrow{AB}(3;1;-2)$ là véc tơ chỉ phương của đường thẳng AB.

Phương trình tham số của đường thẳng AB là $\begin{cases}x=3t\\y=t\\z=4-2t\end{cases}$.

Giả sử AB cắt (P) tại $T(3t;t;4-2t)$. Do $T\in(P):2x+y+2z-1=0\Rightarrow t=\dfrac{-7}{3}$.

Khi đó

$T\left(-7;\dfrac{-7}{3};\dfrac{26}{3}\right);\ \overrightarrow{TA}\left(7;\dfrac{7}{3};\dfrac{-14}{3}\right)\Rightarrow TA=\dfrac{7\sqrt{14}}{3};\ \overrightarrow{TB}\left(10;\dfrac{10}{3};\dfrac{-20}{3}\right)\Rightarrow TB=\dfrac{10\sqrt{14}}{3}$.

Ta có $TC^2=TA.TB=\dfrac{980}{9}\Rightarrow TC=\dfrac{14\sqrt{5}}{3}$.

Điểm C thuộc mặt phẳng (P) và cách điểm T cố định một khoảng $\dfrac{14\sqrt{5}}{3}$.

Vậy C luôn thuộc một đường tròn cố định bán kính $r=\dfrac{14\sqrt{5}}{3}$.

Cách 2:

Ta có $\dfrac{TA}{TB}=\dfrac{d(A,(P))}{d(B,(P))}=\dfrac{7}{10};\ AB=\sqrt{14}$.

Giả sử AB cắt (P) tại T. Suy ra A nằm giữa B và T (vì A,B cùng phía so với (P)).

Khi đó ta có

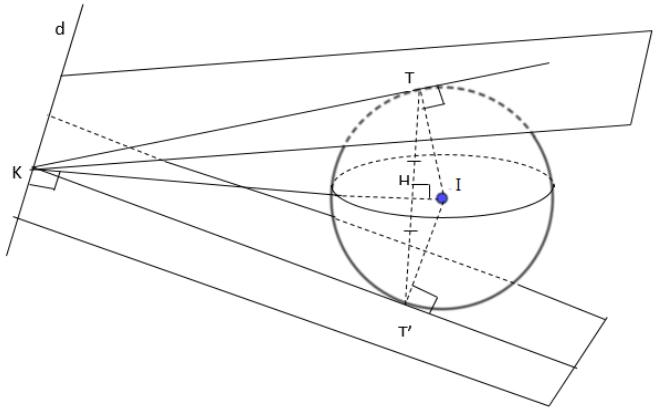
$$\begin{cases}TB-TA=\sqrt{14}\\TA=\dfrac{7}{10}TB\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}TA=\dfrac{7\sqrt{14}}{3}\\TB=\dfrac{10\sqrt{14}}{3}\end{cases}\Rightarrow TC^2=TA.TB=\dfrac{980}{9}\Rightarrow TC=\dfrac{14\sqrt{5}}{3}$$

Câu 23: **(HSG Bắc Ninh)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$ và đường thẳng $d:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z}{-1}$. Hai mặt phẳng (P), (P') chứa d và tiếp xúc với (S) tại T, T'. Tìm tọa độ trung điểm H của TT'.

A. $H\left(-\frac{7}{6};\frac{1}{3};\frac{7}{6}\right)$. **B.** $H\left(\frac{5}{6};\frac{2}{3};-\frac{7}{6}\right)$. **C.** $H\left(\frac{5}{6};\frac{1}{3};-\frac{5}{6}\right)$. **D.** $H\left(-\frac{5}{6};\frac{1}{3};\frac{5}{6}\right)$.

Lời giải

Chọn C



Mặt cầu (S) tâm $I(1;0;-1)$, bán kính $R=\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2-1}=1$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của I lên d.

$K\in d$ nên ta có thể giả sử $K(t;2+t;-t)$

$\overrightarrow{IK}=(t-1;2+t;-t+1)$, $\overrightarrow{u_d}=(1;1;-1)$ là một véctơ chỉ phương của đường thẳng d

$IK\perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{IK}.\overrightarrow{u_d}=0\Leftrightarrow t-1+2+t+t-1=0 \Leftrightarrow t=0.\Rightarrow K(0;2;0)$

ΔITK vuông tại T có TH là đường cao nên $IT^2=IH.IK$.

$\Leftrightarrow IH=\frac{1}{\sqrt{6}}$ $\left(IK=\sqrt{6}\right)\Rightarrow \overrightarrow{IH}=\frac{1}{6}\overrightarrow{IK}$. Giả sử $H(x;y;z)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=\frac{1}{6}.(-1)\\ y-0=\frac{1}{6}.2\\ z+1=\frac{1}{6}.1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{5}{6}\\ y=\frac{1}{3}\\ z=\frac{-5}{6}\end{cases}$$ Vậy $H\left(\frac{5}{6};\frac{1}{3};\frac{-5}{6}\right)$

Câu 24: **(Hàm Rồng)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2+2x-4y-6z+m-3=0$. Tìm số thực m để $(\beta):2x-y+2z-8=0$ cắt (S) theo một đường tròn có chu vi bằng 8π.

A. $m=-4$. **B.** $m=-1$ **C.** $m=-2$. **D.** $m=-3$.

Lời giải

Chọn D

+ Mặt cầu (S) có: Tâm $I(-1;2;3)$, bán kính $R=\sqrt{17-m}$.

+ Khoảng cách $d\left(I;(\beta)\right)=\frac{|-2-2+6-8|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=2$.

+ $(\beta)\cap(S)\Leftrightarrow d\left(I;(\beta)\right)<R\Leftrightarrow\sqrt{17-m}>2\Leftrightarrow m<13\,(*)$

+ Mặt khác, $(\beta)\cap(S)=C(H,r)$ có chu vi bằng 8π nên $r=4$.

hay $\sqrt{R^2-d^2}=4\Leftrightarrow\sqrt{13-m}=4\Leftrightarrow m=-3$ thỏa mãn $(*)$.

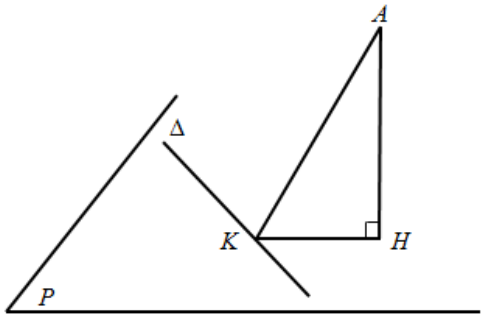
Vậy $m=-3$.

Câu 25: **(Đề thi HK2 Lớp 12-Chuyên Nguyễn Du- Đăk Lăk)**Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):(1+m)x+(1-m)y-(1+3m)z-(2-8m)=0$ và điểm $A(-4;-2;7)$. Khi m thay đổi, biết tập hợp hình chiếu của A trên mặt phẳng (P) là một đường tròn, đường kính của đường tròn đó bằng

A. $3\sqrt{5}$. **B.** $7\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{7}$. **D.** $5\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi Δ là đường thẳng cố định nằm trong mặt phẳng (P).

Ta có $m(x-y-3z+8)+(x+y-z-2)=0$ nên phương trình Δ thỏa mãn hệ sau:

$\begin{cases} x-y-3z+8=0 \\ x+y-z-2=0 \end{cases}$. Chọn $z=t$ suy ra Δ có phương trình $\begin{cases} x=2t-3 \\ y=-t+5 \\ z=t \end{cases}$.

Gọi K là hình chiếu của A trên Δ.

$K\in\Delta\Rightarrow K(2t-3;-t+5;t)\Rightarrow \overrightarrow{AK}=(2t+1;-t+7;t-7)$.

$\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{u_\Delta}=0\Rightarrow 2(2t+1)+(-1)(-t+7)+t-7=0\Rightarrow t=2\Rightarrow K(1;3;2)$.

Gọi H là hình chiếu của A trên mặt phẳng (P). Ta có $\Delta\perp(AHK)$ mà Δ cố định, điểm A cố định nên mặt phẳng (AHK) cố định.

Khi m thay đổi ta luôn có $\widehat{AHK}$ là một góc vuông. Do AK cố định nên điểm H luôn nằm trên đường tròn đường kính $AK=5\sqrt{3}$.

Câu 26: **(KỸ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, biết (P) là mặt phẳng cách đều hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$ và $d_2:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P)

A. $M\left(\frac{1}{2};1;0\right)$. **B.** $N\left(1;-\frac{1}{2};0\right)$. **C.** $P\left(-\frac{1}{2};0;1\right)$. **D.** $Q\left(1;0;-\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn B

d_1 có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(-1;1;1)$ và đi qua điểm $A(2;0;0)$.

d_2 có véc tơ chỉ phương $\vec{v}=(2;-1;-1)$ và đi qua điểm $B(0;1;2)$.

Ta có: $[\vec{u},\vec{v}]=(0;1;-1)$, $\overrightarrow{AB}=(-2;1;2)$, $[\vec{u},\vec{v}].\overrightarrow{AB}=-1\neq 0\Rightarrow d_1$ và d_2 chéo nhau $\Rightarrow$ có duy nhất một mặt phẳng (P) song song và cách đều d_1,d_2.

(P) đi qua trung điểm $I\left(1;\frac{1}{2};1\right)$ của đoạn AB và nhận $\left[\vec{u},\vec{v}\right]=(0;1;-1)$ làm véc tơ pháp tuyến, vậy $(P):2y-2z+1=0$, chỉ có điểm $N\in(P)$

□ **Bài toán tổng quát:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng chéo nhau d_1 và d_2. Viết phương trình mặt phẳng (P) cách đều hai đường thẳng d_1, d_2.

Phương pháp giải

- Gọi $\vec{u},\vec{v}$ lần lượt là các véc tơ chỉ phương của d_1 và d_2, lấy $A\in d_1, B\in d_2$.
- (P) là mặt phẳng đi qua I là trung điểm của AB và có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=k\left[\vec{u};\vec{v}\right]$ với $k\neq 0$.

Câu 27: **(Chuyên Bắc Giang)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ viết phương trình mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu $(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=6$ đồng thời song song với hai đường thẳng $d_1:\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{-1}, d_2:\frac{x}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{-1}$.

A. $\left[\begin{array}{l}x-y+2z-3=0\\x-y+2z+9=0\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}x+y+2z-3=0\\x+y+2z+9=0\end{array}\right.$. **C.** $x+y+2z+9=0$. **D.** $x-y+2z+9=0$.

Lời giải

Chọn B

Gọi (P) là mặt phẳng cần tìm có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}$.

Đường thẳng d_1, d_2 có vectơ chỉ phương lần lượt là $\overrightarrow{u_1}=(3;-1;-1)$ và $\overrightarrow{u_2}=(1;1;-1)$.

Mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+(z+2)^2=6$ có tâm $I(1;0;-2)$, bán kính $R=\sqrt{6}$.

Do $\left\{\begin{array}{l}(P)//d_1\\(P)//d_2\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\vec{n}\perp\overrightarrow{u_1}\\\vec{n}\perp\overrightarrow{u_2}\end{array}\right.$. Suy ra $\vec{n}$ cùng phương với $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]$.

Có $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=(2;2;4)$, nên chọn $\vec{n}=(1;1;2)$.

Khi đó phương trình tổng quát của mặt phẳng (P) có dạng: $x+y+2z+d=0$.

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu $(S)\Leftrightarrow d\left(I,(P)\right)=R\Leftrightarrow\frac{\left|1+0+2.(-2)+d\right|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\sqrt{6}$

$\Leftrightarrow|d-3|=6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d=9\\d=-3\end{array}\right.$.

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn đề là (P_1): $x+y+2z-3=0$ và (P_2): $x+y+2z+9=0$.

Câu 28: **(Gang Thép Thái Nguyên)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $M(1;2;3), A(2;4;4)$ và hai mặt phẳng $(P):x+y-2z+1=0$, $(Q):x-2y-z+4=0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M, cắt $(P),(Q)$ lần lượt tại B,C sao cho tam giác ABC cân tại A và nhận AM làm đường trung tuyến.

A. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{-1}$. **B.** $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{1}$.

C. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{1}$. **D.** $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{1}$.

Lời giải

Chọn C

Điểm B thuộc mặt (P) nên $B(2c-b-1;b;c)$ vì $M(1;2;3)$ là trung điểm BC nên $C(3-2c+b;4-b;6-c)$. Do C thuộc mặt (Q) nên $3c-c-7=0 \Leftrightarrow c=3b-7$. Khi đó $B(5b-15;b;3b-7)$, $C(-5b+17;4-b;13-3b)$. $\overrightarrow{BC}(-10b+32;-2b+4;-6b+20)$. ABC cân tại A nên $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AM}=0 \Leftrightarrow 20b-60=0 \Leftrightarrow b=3 \Rightarrow B(0;3;2)$. Đường thẳng Δ đi qua $M(1;2;3)$ và $B(0;3;2)$ có phương trình là $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{1}$.

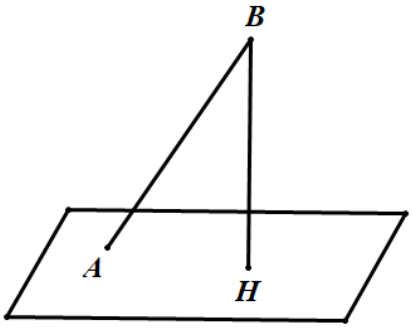
Câu 29: **(Lê Quý Đôn Điện Biên Lần 3)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1), B(3;0;3)$. Biết mặt phẳng (P) đi qua điểm A và cách B một khoảng lớn nhất. Phương trình mặt phẳng (P) là:

A. $x-2y+2z+5=0$. **B.** $x-y+2z+3=0$.

C. $2x-2y+4z+3=0$. **D.** $2x-y+2z=0$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;-2;4) \Rightarrow AB=2\sqrt{6}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B trên mặt phẳng (P).

Ta có $d(B,(P))=BH \le BA=2\sqrt{6} \Rightarrow maxd(B,(P))=2\sqrt{6}$, đạt được khi $H \equiv A$.

Khi đó mặt phẳng (P) đi qua A và nhận $\overrightarrow{AB}=(2;-2;4)$ là véctơ pháp tuyến.

Suy ra phương trình mặt phẳng (P) là $2(x-1)-2(y-2)+4(z+1)=0 \Leftrightarrow x-y+2z+3=0$.

Câu 30: **(THĂNG LONG HN LẦN 2 NĂM 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-z-4=0$ và điểm $A(2;-1;3)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và song song với (P), biết Δ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(a;b;c)$, đồng thời Δ đồng phẳng và không song song với Oz. Tính $\frac{a}{c}$.

A. $\frac{a}{c}=2$. **B.** $\frac{a}{c}=-2$. **C.** $\frac{a}{c}=-\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{a}{c}=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $A(2;-1;3) \in \Delta$, $A(2;-1;3) \notin Oz$. Mà Δ đồng phẳng và không song song với Oz nên Δ cắt Oz tại một điểm. Gọi $M(0;0;z_0)$ là giao điểm của Δ và Oz.

Khi đó Δ có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AM}(-2;1;z_0-3)$.

$(P): x+y-z-4=0$ suy ra (P) có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(P)}}=(1;1;-1)$.

Vì $\Delta // (P)$ nên $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n_{(P)}}=0 \Leftrightarrow (-2).1+1.1+(z_0-3).(-1)=0 \Leftrightarrow z_0=2$.

Suy ra $\overrightarrow{AM}=(-2;1;-1)$. $\vec{u}=(a;b;c)$ cũng là một vectơ chỉ phương của Δ nên ta có:

$$\frac{a}{-2}=\frac{b}{1}=\frac{c}{-1}\Leftrightarrow\frac{a}{c}=2.$$

Vậy $\frac{a}{c}=2$.

Câu 31: **(Chuyên Hưng Yên Lần 3)** Trong không gian với hệ tọa độ *Oxyz*, cho mặt phẳng $(P):x+y+z-3=0$ và đường thẳng $d:\frac{x}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{-1}$. Đường thẳng d' đối xứng với d qua mặt phẳng (P) có phương trình là

A. $\frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+1}{7}$.

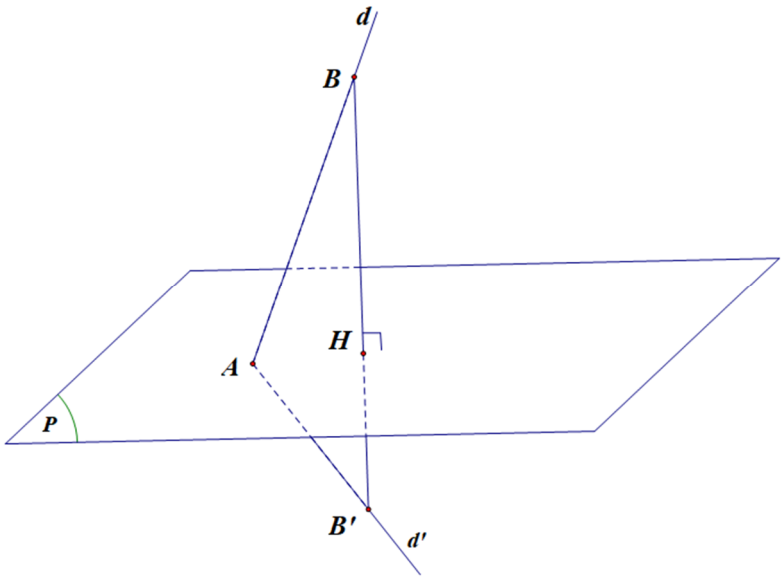
B. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{7}$.

C. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{7}$.

D. $\frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+1}{7}$.

Lời giải

Chọn C



Phương trình tham số của $d:\begin{cases}x=t\\y=-1+2t\\z=2-t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

Giả sử A là giao điểm của d và $(P)\Rightarrow$ tọa độ của A là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases}x=t\\y=-1+2t\\z=2-t\\x+y+z-3=0\end{cases}\Rightarrow A(1;1;1).$$

Lấy điểm $B(0;-1;2)\in d$, Gọi H là hình chiếu của B trên (P).

Đường thẳng Δ chứa BH vuông góc với (P) có phương trình $\Delta:\begin{cases}x=t'\\y=-1+t'\\z=2+t'\end{cases}(t'\in\mathbb{R})$.

Khi đó $H=\Delta\cap(P)\Rightarrow$ Tọa độ H là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}x=t'\\y=-1+t'\\z=2+t'\\x+y+z-3=0\end{cases}$

$\Rightarrow H\left(\frac{2}{3};\frac{-1}{3};\frac{8}{3}\right)$.

Gọi B' là điểm đối xứng với B qua $(P)\Rightarrow B'\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3};\frac{10}{3}\right)\Rightarrow \overrightarrow{AB'}=\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3};\frac{7}{3}\right)$.

Đường thẳng d' đối xứng với d qua mặt phẳng (P) đi qua 2 điểm A, B' có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-2;7)\Rightarrow d'$ có phương trình là $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{7}$.

Câu 32: **(Đề thi HK2 Lớp 12-Chuyên Nguyễn Du- Đăk Lăk)** Trong không gian $Oxyz$, cho các đường thẳng $(d_1):\begin{cases}x=1+t\\y=0\\z=-5+t\end{cases}$; $(d_2):\begin{cases}x=0\\y=4-2t'\\z=5+3t'\end{cases}$. Biết mặt cầu $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ nhận đoạn vuông góc chung của (d_1) và (d_2) làm đường kính. Giá trị $a+2b+c$ bằng

A. 6. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

Gọi MN là đoạn vuông góc chung của (d_1) và (d_2), $M\in(d_1)$; $N\in(d_2)$.

Khi đó $M(1+t;0;-5+t)$, $N(0;4-2t';5+3t')$ và $MN\perp(d_1), MN\perp(d_2)$.

Đường thẳng $(d_1):\begin{cases}x=1+t\\y=0\\z=-5+t\end{cases}$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u_1}=(1;0;1)$, đường thẳng

$(d_2):\begin{cases}x=0\\y=4-2t'\\z=5+3t'\end{cases}$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u_2}=(0;-2;3)$.

$\overrightarrow{MN}=(-t-1;4-2t';-t+3t'+10)$.

$MN\perp(d_1), MN\perp(d_2)$ suy ra $\begin{cases}\overrightarrow{MN}.\vec{u_1}=0\\\overrightarrow{MN}.\vec{u_2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2t+3t'=-9\\-3t+13t'=-22\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=3\\t'=-1\end{cases}$.

Suy ra $M(4;0;-2)$, $N(0;6;2)$.

Mặt cầu $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ có đường kính MN suy ra tâm $I(2;3;0)$ là trung điểm của MN. Suy ra $a=2;b=3;c=0\Rightarrow a+2b+c=8$.

Câu 33: **(THPT LÊ QUÝ ĐÔN QUẢNG NGÃI)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(-1;2;1)$ và mặt phẳng $(P):x+y+z=0$. Gọi M là giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (P). Tính tỉ số $\frac{AM}{BM}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Cách 1: Ta có $\overrightarrow{AB}=(-2;0;-2)\Rightarrow AB:\begin{cases}x=1+t\\y=2\\z=3+t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$

$M\in AB\Rightarrow M(1+t;2;3+t)$

$M\in(P)\Rightarrow 1+t+2+3+t=0\Leftrightarrow t=-3.$

Vậy $M(-2;2;0)\Rightarrow\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=3.$

Cách 2: Do $AB\cap(P)=M\Rightarrow\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{d(A,(P))}{d(B,(P))}=\dfrac{|1+2+3|}{|-1+2+1|}=3.$

Câu 34: **(Lương Thế Vinh Lần 3)** Cho đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$ và điểm $A(1;2;1)$. Tìm bán kính của mặt cầu có tâm I nằm trên d, đi qua A và tiếp xúc với mặt phẳng $(P):x-2y+2z+1=0$.

A. $R=2$. **B.** $R=4$. **C.** $R=1$. **D.** $R=3$.

Lời giải

Chọn D

Tâm I nằm trên d nên $I(1+t;2-2t;2+t)$.

Mặt cầu đi qua A và tiếp xúc với mặt phẳng (P) nên $AI=d(I;(P))=R$.

$$AI=d(I;(P))\Leftrightarrow\sqrt{t^2+4t^2+(t+1)^2}=\frac{|1+t-4+4t+4+2t+1|}{\sqrt{1+(-2)^2+2^2}}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{6t^2+2t+1}=\frac{|7t+2|}{3}\Leftrightarrow 9(6t^2+2t+1)=(7t+2)^2.$$

$\Leftrightarrow t^2-2t+1=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow I(2;0;3).$

Vậy bán kính mặt cầu $R=AI=3$.

Câu 35: **(Đặng Thành Nam Đề 6)** Trong không gian *Oxyz*, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+5}{-2}$ và $d_2:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z}{1}$.

Viết phương trình mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất và tiếp xúc với cả hai đường thẳng đã cho.

A. $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=24$. **B.** $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=24$.

C. $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=6$. **D.** $(S):(x+2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=6$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu tiếp xúc đồng thời hai đường thẳng và có bán kính nhỏ nhất chính là mặt cầu có đường kính là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng.

Gọi $\begin{cases}A(4+3a;1-a;-5-2a)\in d_1\\B(2+b;-3+3b;b)\in d_2\end{cases}$ là chân đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(b-3a-2;3b+a-4;b+2a+5)$ và

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_1}=0\\\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3(b-3a-2)-1(3b+a-4)-2(b+2a+5)=0\\1(b-3a-2)+3(3b+a-4)+1(b+2a+5)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=1\end{cases}.$$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Khi đó $A(1;2;-3), B(3;0;1) \Rightarrow I(2;1;-1), R = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\sqrt{2^2+2^2+4^2}}{2} = \sqrt{6}.$

Vậy: $(S): (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 6.$

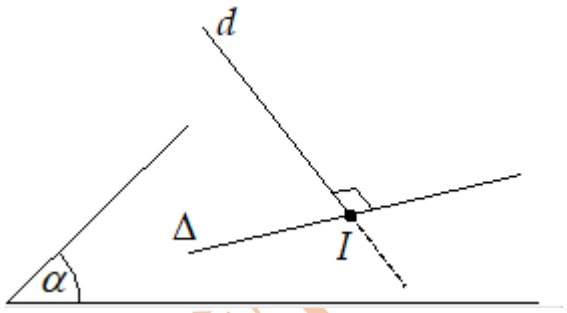
Câu 36: **(Đặng Thành Nam Đề 15)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-3}{1}$ và mặt phẳng $(\alpha): x+y-z-2=0$. Đường thẳng nằm trong mặt phẳng (α), đồng thời vuông góc và cắt đường thẳng d có phương trình là

A. $\Delta_3: \dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-5}{1}.$ **B.** $\Delta_1: \dfrac{x+2}{-3} = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z+4}{-1}.$

C. $\Delta_2: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-4}{-2} = \dfrac{z-4}{3}.$ **D.** $\Delta_4: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{1}.$

Lời giải

Chọn A



Phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+2t \\ z = 3+t \end{cases}$.

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_d} = (1;2;1)$.

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1;1;-1)$.

Gọi I là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (α).

Ta có: $I \in d \Rightarrow I(1+t;2+2t;3+t)$.

Mặt khác $I \in (\alpha) \Leftrightarrow 1+t+2+2t-3-t-2=0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow I(2;4;4)$.

Vì đường thẳng cần tìm Δ nằm trong mặt phẳng (α), đồng thời vuông góc và cắt đường thẳng d nên Δ đi qua điểm $I(2;4;4)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta} = \left[\vec{n}, \overrightarrow{u_d}\right] = (3;-2;1)$.

Phương trình chính tắc của Δ: $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-4}{-2} = \dfrac{z-4}{1}$.

Đối chiếu đáp án ta thấy đường thẳng Δ_3 của đáp án A có vtcp $(3;-2;1)$, và khi thay toạ độ $I(2;4;4)$ vào phương trình Δ_3 thì thỏa mãn.

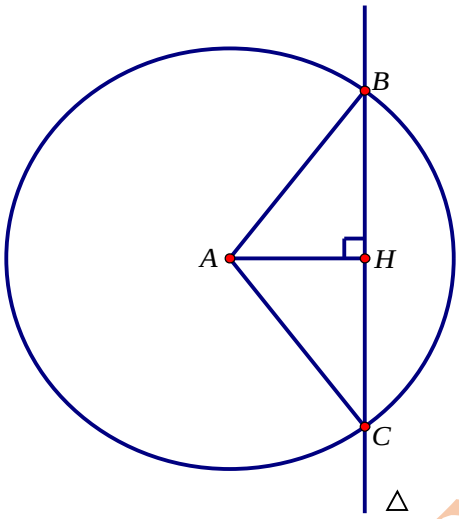
Câu 37: **(Thuan-Thanh-Bac-Ninh)** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;0;-2)$ và đường thẳng Δ có phương trình là $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z+3}{2}$. Phương trình mặt cầu tâm A, cắt Δ tại hai điểm B và C sao cho $BC = 8$ là

A. $(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 16.$ **B.** $x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 25.$

C. $(x+2)^2 + y^2 + z^2 = 25.$ **D.** $x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 16.$

Lời giải

Chọn B



+Gọi (S) là mặt cầu tâm $A(0;0;-2)$ và có bán kính R.

+ Đường thẳng Δ đi qua $M(-2;2;3)$ có véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(2;3;2)$.

+Gọi là H trung điểm $BC \Rightarrow AH \perp BC$.

+Ta có: $AH = d_{(A,\Delta)} = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{MA},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}$. Với $\begin{cases}\overrightarrow{MA}=(2;-2;1)\\ \vec{u}=(2;3;2)\end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{MA},\vec{u}\right]=(-7;-2;10)$.

$\Rightarrow AH = \dfrac{\sqrt{(-7)^2+(-2)^2+10^2}}{\sqrt{2^2+3^2+2^2}} = 3.$

+Bán kính mặt cầu (S) là: $R = AB = \sqrt{AH^2+HB^2} = \sqrt{3^3+4^2} = 5$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) là: $x^2+y^2+(z+2)^2 = 25$.

Câu 38: **(Đặng Thành Nam Đề 15)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=3$ và hai đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$, $\Delta:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$.

Phương trình nào dưới đây là phương trình mặt phẳng cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn (C) có bán kính bằng 1 và song song với d và Δ.

A. $y+z+3=0$. **B.** $x+y+1=0$. **C.** $x+z-1=0$. **D.** $x+z+1=0$.

Lời giải

Chọn D

Gọi (α) là mặt phẳng cần tìm.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;1;-2)$ và bán kính $R=\sqrt{3}$.

Đường thẳng d và Δ có vectơ chỉ phương lần lượt là $\overrightarrow{u_d}=(1;2;-1)$ và $\overrightarrow{u_\Delta}=(1;1;-1)$.

Khoảng cách từ I đến mặt phẳng (α): $d(I,(\alpha))=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2-1^2}=\sqrt{2}$.

Vì (α) song song với d và Δ nên (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{u_d}\right]=(1;0;1)$.

Suy ra phương trình mặt phẳng (α) có dạng: $x+z+d=0$.

Ta có: $d\left(I,(\alpha)\right)=\sqrt{2}\Leftrightarrow\dfrac{|-1-2+d|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\Leftrightarrow|d-3|=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d-3=2\\d-3=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}d=5\\d=1\end{array}\right.$.

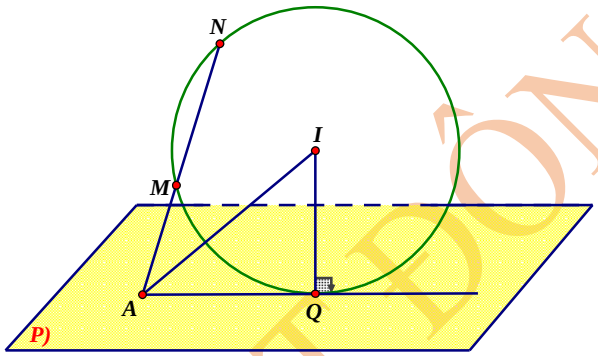
Vậy phương trình mặt phẳng (α) là: $x+z+5=0$ hoặc $x+z+1=0$.

Câu 39: **(KINH MÔN II LẦN 3 NĂM 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x+y-z-3=0$ và hai điểm $M(1;1;1)$, $N(-3;-3;-3)$. Mặt cầu (S) đi qua M, N và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm Q. Biết rằng Q luôn thuộc một đường tròn cố định. Tìm bán kính của đường tròn đó.

A. $R=\dfrac{2\sqrt{11}}{3}$. **B.** $R=6$. **C.** $R=\dfrac{2\sqrt{33}}{3}$. **D.** $R=4$.

Lời giải

Chọn B



Từ tọa độ các điểm M và N suy ra phương trình đường thẳng MN là: $x=y=z$.

Gọi $A=MN\cap(P)$, tọa độ A là nghiệm hệ phương trình $\left\{\begin{array}{l}x+y-z-3=0\\x=y=z\end{array}\right.\Leftrightarrow x=y=z=3$.

Suy ra $A(3;3;3)$.

Các điểm M, N, Q cùng thuộc một đường tròn nên ta có $AM.AN=AQ^2$.

Với $AM=2\sqrt{3}$, $AN=6\sqrt{3}$ thì $AQ^2=36\Leftrightarrow AQ=6$.

Vậy điểm Q luôn thuộc một đường tròn cố định có tâm $A(3;3;3)$ và bán kính $R=6$.

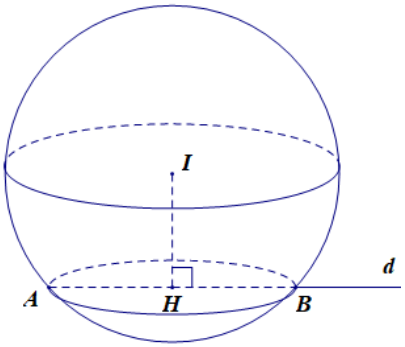
Câu 40: **(Lương Thế Vinh Lần 3)** Cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$. Viết phương trình mặt cầu tâm $I(1;2;-1)$ cắt d tại các điểm A, B sao cho $AB=2\sqrt{3}$.

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25$. **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=4$.

C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$. **D.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$.

Lời giải

Chọn D



ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Đường thẳng d đi qua điểm $M(-1;2;2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(3;-2;2)$.

$\overrightarrow{IM}=(-2;0;3)\Rightarrow\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]=(6;13;4)$. Gọi H là trung điểm $AB\Rightarrow IH\perp AB$.

Khoảng cách từ tâm I đến đường thẳng d là: $IH=\dfrac{\left\|\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]\right\|}{|\vec{u}|}=\dfrac{\sqrt{36+169+16}}{\sqrt{9+4+4}}=\sqrt{13}$.

Suy ra bán kính $R=\sqrt{IH^2+\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2}=\sqrt{13+3}=4$.

Phương trình mặt cầu tâm $I(1;2;-1)$ và có bán kính $R=4$ là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$.

Câu 41: **(THPT ĐÔ LƯƠNG 3 LẦN 2)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;1;1)$, mặt phẳng $(\alpha):x+y+z-4=0$ và mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=16$. Phương trình đường thẳng Δ đi qua M và nằm trong (α) cắt mặt cầu (S) theo một đoạn thẳng có độ dài nhỏ nhất. Đường thẳng Δ đi qua điểm nào trong các điểm sau đây?

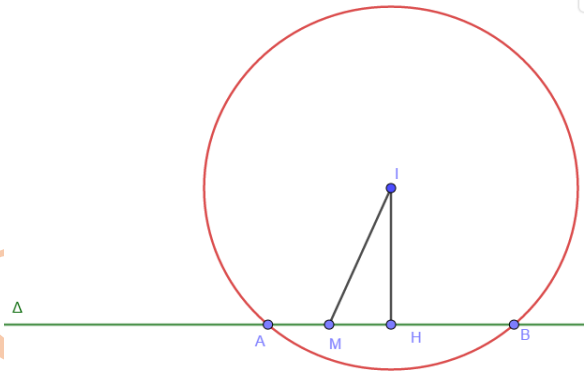
A. $(4;-3;3)$. **B.** $(4;-3;-3)$. **C.** $(4;3;3)$. **D.** $(-4;-3;-3)$.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(3;3;4)$, mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;1;1),\overrightarrow{MI}=(1;2;3)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên Δ. Khi đó $d(I,\Delta)=IH\le IM$.



Để Δ cắt mặt cầu (S) theo một đoạn thẳng có độ dài nhỏ nhất

$\Leftrightarrow d(I,\Delta)$ lớn nhất khi $\Delta\perp IM$.

Khi đó Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=\left[\vec{n},\overrightarrow{MI}\right]=(1;-2;1)$.

Phương trình đường thẳng Δ là: $\begin{cases}x=2+t\\y=1-2t\\z=1+t\end{cases}$.

Do đó đường thẳng đi qua điểm có tọa độ $(4;-3;3)$.

Câu 42: **(Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1;3;2)$ và đường thẳng d có phương trình $\begin{cases}x=1-4t\\y=t\\z=2+t\end{cases}$. Mặt phẳng (P) chứa điểm A và đường thẳng d có phương trình nào dưới đây?

A. $2x-y+2z+1=0$. **B.** $x+y-z=0$.

C. $-3x-2y-10z+23=0$. **D.** $2x-y+3z+4=0$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;0;2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-4;1;1)$.

Ta có: $\overrightarrow{AM}=(2;-3;0)$; $\left[\overrightarrow{AM},\vec{u}\right]=(-3;-2;-10)$.

Mặt phẳng (P) chứa điểm A và đường thẳng d có vectơ pháp tuyến $\left[\overrightarrow{AM},\vec{u}\right]=(-3;-2;-10)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $-3(x+1)-2(y-3)-10(z-2)=0$

$\Leftrightarrow -3x-2y-10z+23=0$.

Câu 43: **(Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1;3;2)$ và đường thẳng d có phương trình $\begin{cases}x=1-4t\\y=t\\z=2+t\end{cases}$. Mặt phẳng (P) chứa điểm A và đường thẳng d có phương trình nào dưới đây?

A. $2x-y+2z+1=0$. **B.** $x+y-z=0$.

C. $-3x-2y-10z+23=0$. **D.** $2x-y+3z+4=0$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;0;2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-4;1;1)$.

Ta có: $\overrightarrow{AM}=(2;-3;0)$; $\left[\overrightarrow{AM},\vec{u}\right]=(-3;-2;-10)$.

Mặt phẳng (P) chứa điểm A và đường thẳng d có vectơ pháp tuyến $\left[\overrightarrow{AM},\vec{u}\right]=(-3;-2;-10)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) là $-3(x+1)-2(y-3)-10(z-2)=0$

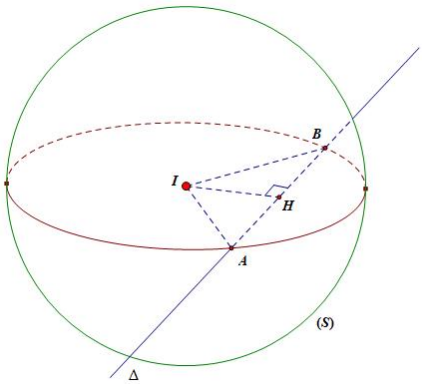
$\Leftrightarrow -3x-2y-10z+23=0$.

Câu 44: **(HKII-CHUYÊN-NGUYỄN-HUỆ-HÀ-NỘI)** Cho mặt cầu: $(S):x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z+m=0$. Tìm m để (S) cắt đường thẳng $(\Delta):\dfrac{x+1}{-1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{-2}$ tại hai điểm A,B sao cho tam giác IAB vuông (Với I là tâm mặt cầu).

A. $m=-1$. **B.** $m=10$. **C.** $m=-20$. **D.** $m=-\dfrac{4}{9}$.

Lời giải

Chọn D



Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;-3)$, bán kính $R=\sqrt{14-m}$, (1). Điều kiện: $14-m>0\Leftrightarrow m<14$.

Đường thẳng (Δ) đi qua điểm $M(-1;0;2)$, có vecto chỉ phương

$\vec{u}=(-1;2;-2)$, $\overrightarrow{IM}=(0;-2;5)$

Khoảng cách từ tâm I đến đường thẳng (Δ) là $d=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{IM}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}=\dfrac{\sqrt{65}}{3}=IH$, với H là trung điểm AB.

Vì tam giác IAB vuông cân, ta có $\widehat{IBA}=45^0$. Trong tam giác vuông IHB có:

$\sin 45^0=\dfrac{IH}{IB}=\dfrac{d}{R}\Rightarrow R=\dfrac{d}{\sin 45^0}=\dfrac{\sqrt{130}}{3},\ (2)$

Từ $(1),(2)\Rightarrow\sqrt{14-m}=\dfrac{\sqrt{130}}{3}\Leftrightarrow 14-m=\dfrac{130}{9}\Leftrightarrow m=\dfrac{-4}{9}$. Thỏa mãn điều kiện

Vậy $m=\dfrac{-4}{9}$.

Câu 45: **(Chuyên Vinh Lần 3)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d:\begin{cases}x=-1-2t\\y=t\\z=-1+3t\end{cases}$; $d':\begin{cases}x=2+t'\\y=-1+2t'\\z=-2t'\end{cases}$ và mặt phẳng $(P):x+y+z+2=0$. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (P) và cắt cả hai đường thẳng d,d' có phương trình là

A. $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{1}$.

B. $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{-4}$.

C. $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$.

D. $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-4}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;1;1)$.

Gọi Δ là đường thẳng cần tìm và $A=\Delta\cap d$, $B=\Delta\cap d'$

Vì $A\in d$, $B\in d'$ nên gọi $A(-1-2t;\ t;\ -1+3t)$ và $B(2+t';\ -1+2t';\ -2t')$

$\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(t'+2t+3;\ 2t'-t-1;\ -2t'-3t+1)$.

Do $\Delta\perp(P)$ nên $\overrightarrow{AB},\vec{n}$ cùng phương $\Leftrightarrow\dfrac{t'+2t+3}{1}=\dfrac{2t'-t-1}{1}=\dfrac{-2t'-3t+1}{1}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}3t-t'=-4\\2t+4t'=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-1\\t'=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A(1;-1;-4)\\B(3;\ 1;\ -2)\end{cases}$.

Đường thẳng Δ đi qua điểm B và có vectơ chỉ phương $\vec{n}=(1;1;1)$ nên có phương trình $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+2}{1}$.

Câu 46: **(SGD-Nam-Định-2019)** Trong không gian Oxyz, cho ba đường thẳng $(d_1):\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-2},(d_2):\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+4}{-1}$ và $(d_3):\dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z}{6}$. Đường thẳng song song d_3, cắt d_1 và d_2 có phương trình là

A. $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{6}$.

B. $\dfrac{x-3}{-4}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-6}$.

C. $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-4}{6}$.

D. $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+4}{6}$.

Lời giải

Chọn B

- Gọi d là đường thẳng cần tìm

- Phương trình tham số của d_1 là $(d_1):\begin{cases}x=3+2a\\y=-1+a\\z=2-2a\end{cases}$

- Phương trình tham số của d_2 là $(d_2):\begin{cases}x=-1+3b\\y=-2b\\z=-4-b\end{cases}$

- Gọi $A=d\cap d_1\Rightarrow A(3+2a;-1+a;2-2a)$; $B=d\cap d_2\Rightarrow B(-1+3b;-2b;-4-b)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(-4+3b-2a;-2b+1-a;-6-b+2a)$

- Véc tơ chỉ phương của d_3 là $\overrightarrow{u_3}=(4;-1;6)$

- Vì d song song với d_3 nên ta có $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{u_3}$

$$\Rightarrow \frac{-4+3b-2a}{4}=\frac{-2b+1-a}{-1}=\frac{-6-b+2a}{6}\Rightarrow\begin{cases}\frac{-4+3b-2a}{4}=\frac{-2b+1-a}{-1}\\\frac{-2b+1-a}{-1}=\frac{-6-b+2a}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow A(3;-1;2);B(-1;0;-4)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(-4;1;-6)\Rightarrow(d):\frac{x-3}{-4}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-6}$$

Câu 47: **(Chuyên Hạ Long lần 2-2019)** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$ cho hai đường thẳng $\Delta_1:\frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+1}{2}$ và $\Delta_2:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{1}$. Tính diện tích mặt cầu có bán kính nhỏ nhất, đồng thời tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2.

A. $\frac{16}{17}\pi$ (đvdt). **B.** $\frac{4}{\sqrt{17}}\pi$ (đvdt). **C.** $\frac{16}{\sqrt{17}}\pi$ (đvdt). **D.** $\frac{4}{17}\pi$ (đvdt).

Lời giải

Chọn D

Gọi $A;B$ là hai điểm thuộc lần lượt Δ_1 và Δ_2 sao cho AB là đoạn thẳng vuông góc chung giữa 2 đường. Gọi M là trung điểm AB. Dễ có mặt cầu tâm M bán kính $R=\frac{AB}{2}$ tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 là mặt cầu có bán kính bé nhất.

Ta có tọa độ theo tham số của $A;B$ lần lượt là:

$A(2t_1-1;t_1-1;2t_1-1)$ và $B(2t_2+1;2t_2+1;t_2+1)\Rightarrow\overrightarrow{AB}(2t_2-2t_1+2;2t_2-t_1+2;t_2-2t_1+2)$.

Có $\overrightarrow{u_1}(2;1;2)$ và $\overrightarrow{u_2}(2;2;1)$ lần lượt là 2 vectơ chỉ phương của Δ_1 và Δ_2 nên $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{u_1}\\\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{u_2}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(2t_2-2t_1+2).2+(2t_2-t_1+2).1+(t_2-2t_1+2).2=0\\(2t_2-2t_1+2).2+(2t_2-t_1+2).2+(t_2-2t_1+2).1=0\end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}8t_2-9t_1+10=0\\9t_2-8t_1+10=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t_1=\frac{10}{17}\\t_2=\frac{-10}{17}\end{cases}\Rightarrow A(\frac{3}{17};\frac{-7}{17};\frac{3}{17});\mathrm{B}(\frac{-3}{17};\frac{-3}{17};\frac{7}{17})\ \overrightarrow{AB}(\frac{-6}{17};\frac{4}{17};\frac{4}{17}).$$

$$R=\frac{AB}{2}=\frac{1}{2}.\frac{\sqrt{(-6)^2+4^2+4^2}}{17}=\frac{\sqrt{17}}{17}.$$

Diện tích mặt cầu cần tính là $S = 4\pi.R^2 = 4.\pi.\frac{1}{\sqrt{17}^2} = \frac{4\pi}{17}$ (đvdt).

Câu 48: **(Sở Quảng NamT)** Trong không gian *Oxyz*, cho tam giác đều *ABC* với $A(6;3;5)$ và đường thẳng BC có phương trình tham số $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 2+t \\ z = 2t \end{cases}$. Gọi Δ là đường thẳng qua trọng tâm G của tam giác *ABC* và vuông góc với mặt phẳng (ABC). Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng Δ?

A. $M(-1;-12;3)$. **B.** $N(3;-2;1)$. **C.** $P(0;-7;3)$. **D.** $Q(1;-2;5)$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $M(1-t;2+t;2t) \in BC$ là trung điểm của cạnh BC.

$\overrightarrow{AM} = (-t-5;t-1;2t-5)$; $\vec{u}_d = (-1;1;2)$.

Vì tam giác ABC đều nên $AM \perp BC$ và $G \in AM$, suy ra $\overrightarrow{AM}.\vec{u}_d = 0$.

$\Rightarrow t+5+t-1+4t-10=0 \Rightarrow t=1$, suy ra $M(0;3;2)$; $\overrightarrow{AM} = (-6;0;-3)$.

Vì G là trọng tâm tam giác nên

$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} \Rightarrow (x_G - x_A; y_G - y_A; z_G - z_A) = \frac{2}{3}(-6;0;-3) \Rightarrow G(2;3;3)$

Phương trình mp ABC có một vtpt là $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AM};\vec{u}_d\right] = (3;15;-6) = 3(1;5;-2)$

Phương trình đường thẳng Δ đi qua trọng tâm G của tam giác *ABC* và vuông góc với mặt phẳng (ABC) là $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-3}{-2}$.

Thử từng tọa độ điểm vào ptdt Δ thì điểm Q thỏa mãn.

Câu 49: **(Cụm THPT Vũng Tàu)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$ và $B(3;0;5)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng $(P): x-2y+2z-10=0$ sao cho tam giác MAB cân tại M và có diện tích bằng $11\sqrt{2}$. Tính $S = a+b+c$.

A. $S = \frac{7}{3}$. **B.** $S = \frac{19}{3}$. **C.** $S = -1$. **D.** $S = -\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Tam giác MAB cân tại $M \Rightarrow MA = MB \Rightarrow M$ nằm trên mặt phẳng (Q) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

Mặt phẳng (Q) đi qua trung điểm $I(2;1;2)$ của AB và nhận $\overrightarrow{AB}(2;-2;6)$ làm vec tơ pháp tuyến có phương trình là: $(Q): x-y+3z-7=0$.

Khi đó M nằm trên đường thẳng là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q).

$\Rightarrow$ tọa độ M thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases} x-2y+2z-10=0 \\ x-y+3z-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+3z-7=0 \\ y+z+3=0 \end{cases}$.

Đặt $z = t \Rightarrow y = -3-t; x = 4-4t$

$\Rightarrow M(4-4t;-3-t;t)$.

$\overrightarrow{AM}(3-4t;-5-t;t+1)$

$\overrightarrow{AB}(2;-2;6)$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right]=(-4t-28;26t-16;10t+4)$.

Diện tích tam giác MAB: $S_{\Delta MAB}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right]\right|=\sqrt{198t^2-132t+264}$.

Từ giả thiết suy ra $\sqrt{198t^2-132t+264}=11\sqrt{2}\Leftrightarrow 9t^2-6t+1=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{3}$.

Với $t=\frac{1}{3}$ ta được điểm $M\left(\frac{8}{3};-\frac{10}{3};\frac{1}{3}\right)$.

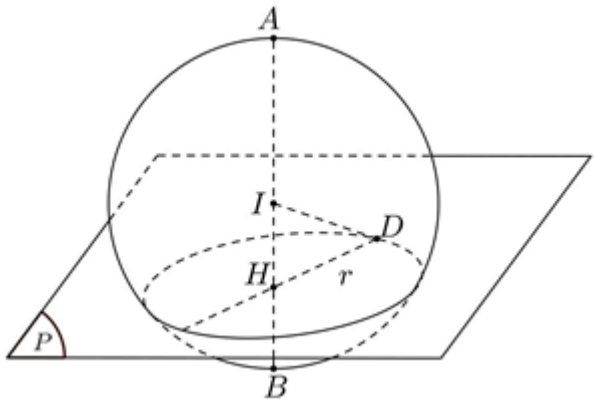
Vậy $S=\frac{8}{3}-\frac{10}{3}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}$.

Câu 50: **(THPT ĐÔ LƯƠNG 3 LẦN 2)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;3)$, $B(6;5;5)$. Gọi (S) là mặt cầu đường kính AB. Mặt phẳng (P) vuông góc với AB tại H sao cho khối nón đỉnh A và đáy là hình tròn tâm H (giao của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P)) có thể tích lớn nhất, biết rằng $(P):2x+by+cz+d=0$ với $b,c,d\in\mathbb{Z}$. Tính $S=b+c+d$.

A. $S=18$. **B.** $S=-18$. **C.** $S=-12$. **D.** $S=24$.

Lời giải

Chọn B



Cách 1.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;4;2)$. Điểm H thuộc đoạn AB và không trùng với hai đầu mút nên ta giả sử $\overrightarrow{AH}=t\overrightarrow{AB},(0<t<1)$.

Khi đó tọa độ của điểm H là $H(2+4t;1+4t;3+2t)$ và $AH=tAB=6t$.

Tâm của mặt cầu là trung điểm của AB có tọa độ $I(4;3;4)$, bán kính $R=IA=3$.

Bán kính đường tròn đáy của nón là $r=\sqrt{R^2-IH^2}=\sqrt{9-9(2t-1)^2}=6\sqrt{t-t^2}$.

Thể tích khối nón:

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2AH=\frac{1}{3}\pi.36.(t-t^2).6t=36\pi t^2(2-2t)\le 36\pi.\left(\frac{t+t+2-2t}{3}\right)^3=\frac{32}{3}\pi$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $t=2-2t\Leftrightarrow t=\frac{2}{3}$.

Khi đó $H\left(\frac{14}{3};\frac{11}{3};\frac{13}{3}\right)$.

Mặt phẳng (P) qua H, nhận $\overrightarrow{AB}$ làm véc tơ pháp tuyến có phương trình:

$2\left(x-\frac{14}{3}\right)+2\left(y-\frac{11}{3}\right)+\left(z-\frac{13}{3}\right)=0\Leftrightarrow 2x+2y+z-21=0$.

Do đó: $\begin{cases}b=2\\c=1\\d=-21\end{cases}\Rightarrow b+c+d=-18.$

Cách 2

Ta có $\overrightarrow{AB}=(4;4;2)$.

Gọi I là trung điểm $AB\Rightarrow I(4;3;4)$. Bán kính mặt cầu là $R=IA=3$.

Giả sử $IH=t$. Xét điểm H' đối xứng với H qua I thì mặt phẳng qua H,H' cắt mặt cầu với đường tròn có cùng bán kính nên thể tích khối nón sẽ lớn hơn nếu H nằm khác phía A so với điểm I. Khi đó chiều cao của nón là $AH=3+t\,(0<t<3)$.

Bán kính mặt nón là: $r=\sqrt{R^2-IH^2}=\sqrt{9-t^2}$.

Thể tích khối nón là: $V=\frac{1}{3}\pi.r^2.h=\frac{1}{3}\pi\left(9-t^2\right)(3+t)=\frac{\pi}{3}\left(-t^3-3t^2+9t+27\right)$.

Xét hàm số $f(t)=-t^3-3t^2+9t+27$

Có $f'(t)=-3t^2-6t+9=0\Leftrightarrow\begin{cases}t=1\\t=-3\quad(loai)\end{cases}$.

Bảng biến thiên

t	0		1		3
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$	27	↗	32	↘	0

$\Rightarrow \max\limits_{(0;3)} f(t)=f(1)=32$. Khi đó $IH=1\Rightarrow AH=4.$

Đường thẳng AB nhận $\vec{u}(2;2;1)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình $\begin{cases}x=2+2t\\y=1+2t\\z=3+t\end{cases}$

Suy ra $H(2+2t;1+2t;3+t)$.

Mà $IH=\sqrt{(2t-2)^2+(2t-2)^2+(t-1)^2}=1\Leftrightarrow 9t^2-18t+8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{4}{3}\\t=\frac{2}{3}\end{array}\right.$

□ Với $t=\frac{2}{3}\Rightarrow H\left(\frac{10}{3};\frac{7}{3};\frac{11}{3}\right)\Rightarrow AH=2.$ (loại).

□ Với $t=\frac{4}{3}\Rightarrow H\left(\frac{14}{3};\frac{11}{3};\frac{13}{3}\right)\Rightarrow AH=4.$

Khi đó, mặt phẳng (P) đi qua $H\left(\frac{14}{3};\frac{11}{3};\frac{13}{3}\right)$ và nhận vectơ $\vec{u}(2;2;1)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là

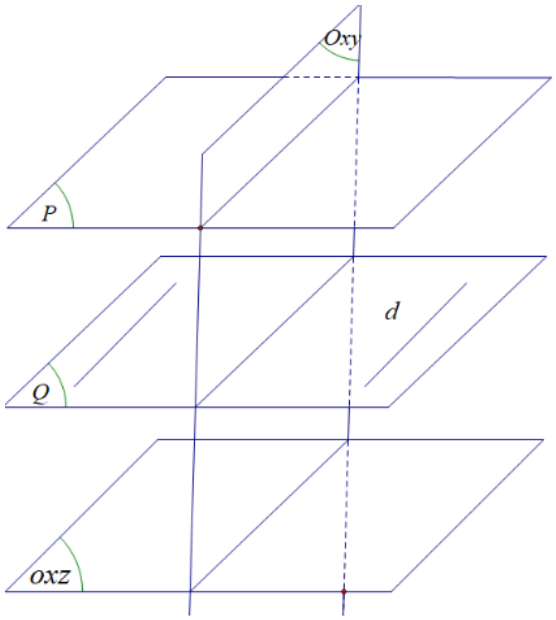
$2\left(x-\frac{14}{3}\right)+2\left(y-\frac{11}{3}\right)+\left(z-\frac{13}{3}\right)=0\Leftrightarrow 2x+2y+z-21=0$.

Do đó: $\begin{cases}b=2\\c=1\\d=-21\end{cases}\Rightarrow b+c+d=-18..$

Câu 51: **(Thuận Thành 2 Bắc Ninh)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):y-4=0$. Có bao nhiêu đường thẳng d song song với ba mặt phẳng (xOy), (zOx), (P) đồng thời cách đều 3 mặt phẳng đó.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Chọn B



Vì $(P)//(xOz)$ nên đường thẳng d sẽ nằm trên mặt phẳng cách đều 2 mặt phẳng $(P);(xOz)$.

Do đó d thuộc mặt phẳng $(Q):y-2=0$.

Mà mặt phẳng (xOy) vuông góc với hai mặt phẳng $(P);(xOz)$. Do đó có 2 đường thẳng d thỏa mãn đề bài.

Câu 52: **(Cụm THPT Vũng Tàu)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(2;-3;4)$, mặt phẳng $(P):x-2y+z-12=0$ và mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=5$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường thẳng đi qua M, nằm trong (P) và cắt (S) theo dây cung dài nhất?

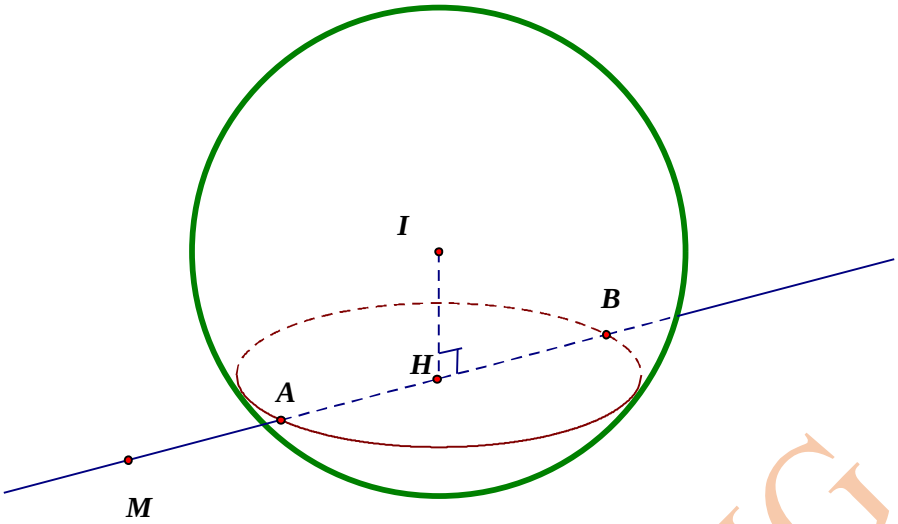
A. $\begin{cases}x=2+t\\y=-3+2t\\z=4+3t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=2+3t\\y=-3-9t\\z=4+3t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+3t\\y=1-2t\\z=1+5t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=3+t\\y=-2+t\\z=5+t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

Thay tọa độ $M(2;-3;4)$ vào phương trình của (P), dễ thấy $M\in(P)$.

Ta có $d_{(I,(P))}=\frac{|1-4+3-12|}{\sqrt{6}}=2\sqrt{6}<5$, do đó mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn. Vậy đường thẳng đi qua qua M, nằm trong (P) và cắt (S) theo dây cung dài nhất khi và chỉ khi đường thẳng đó qua tâm H của đường tròn giao tuyến.



Đường thẳng IH đi qua $I(1,2,3)$ nhận VTPT của (P) $\vec{n}(1;-2;1)$ làm VTCP: $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-2t \\ z=3+t \end{cases}$.

Do vậy ta có $H=IH\cap(P)$ nên ta có hệ: $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-2t \\ z=3+t \\ x-2y+z-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ x=3 \\ y=-2 \\ z=5 \end{cases}$ hay $H(3;-2;5)$.

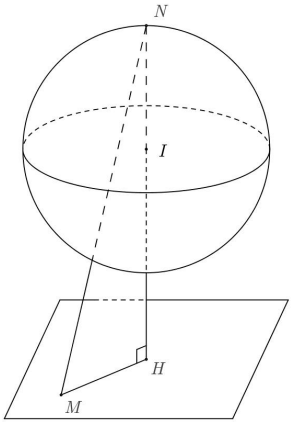
Vậy đường thẳng cần tìm qua $H(3;-2;5)$ nhận $\overrightarrow{MH}(1;1;1)$ làm vtcp có dạng $\begin{cases} x=3+t \\ y=-2+t \\ z=5+t \end{cases}$.

Câu 53: **(SỞ GD & ĐT CÀ MAU)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-3=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+5=0$. Xét hai điểm M, N thay đổi với $M\in(P)$ và $N\in(S)$ sao cho vectơ $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với vectơ $\vec{u}=(1;0;1)$. Độ dài đoạn MN lớn nhất bằng

A. 3. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** $5\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



(S) có tâm $I(-1;2;1)$, bán kính $R=1$.

Đường thẳng MN nhận $\vec{u}=(1;0;1)$ làm VTCP, (P) nhận $\vec{n}_p=(1;-2;2)$ làm VTPT.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\sin\widehat{(MN,(P))}=\dfrac{|\vec{u}.\vec{n}_p|}{|\vec{u}||\vec{n}_p|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\widehat{(MN,(P))}=45°$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của N lên (P).

Suy ra ΔMNH vuông cân tại $H\Rightarrow MN=NH\sqrt{2}$.

Do đó MN lớn nhất khi NH lớn nhất.

Mà NH lớn nhất khi NH đi qua tâm I của (S), khi đó $NH=NI+IH=R+IH$.

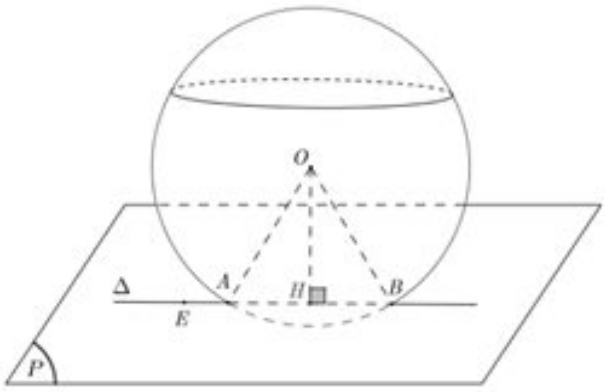
$IH=d(I,(P))=2$ nên $NH_{max}=1+2=3$. Vậy $MN_{max}=3\sqrt{2}$.

Câu 54: **(THPT ISCHOOL NHA TRANG)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $E(1;1;1)$, mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2=4$ và mặt phẳng $(P):x-3y+5z-3=0$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua E, nằm trong (P) và cắt (S) tại hai điểm A, B sao cho OAB là tam giác đều. Phương trình của Δ là

A. $\begin{cases}x=1+2t\\y=1+t\\z=1+t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1+4t\\y=1+3t\\z=1+t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=1+2t\\y=1-t\\z=1-t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+t\\y=1+t\\z=1-2t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $\vec{u}=(a;b;c)$ là một VTCP của đường thẳng Δ ($a^2+b^2+c^2>0$).

+) Vì $\Delta\subset(P)$ nên $\vec{u}\perp\overrightarrow{n_P}\Rightarrow a-3b+5c=0\Rightarrow a=3b-5c$ (1).

+) Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R=2$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên AB.

Ta có OAB là tam giác đều cạnh R nên $OH=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

Hay khoảng cách từ O đến đường thẳng Δ bằng $OH=\sqrt{3}\Leftrightarrow\dfrac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{OE}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\sqrt{3}$.

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=3(a^2+b^2+c^2)\Leftrightarrow (a+b+c)^2=0\Leftrightarrow a+b+c=0$ (2).

Thay (1) vào (2) ta được

$3b-5c+b+c=0\Leftrightarrow b=c\Rightarrow a=-2c$.

Chọn $c=-1$, khi đó $b=-1$ và $a=2$. Ta được một vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}=(2;-1;-1)$.

Vậy phương trình của đường thẳng Δ là $\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \\ z=1-t \end{cases}$.

Câu 55: **(KINH MÔN HẢI DƯƠNG 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):3x+4y+5z+1=0$ và ba điểm $A(2;5;-3), B(-2;1;1), C(2;0;1)$. Tìm điểm $D(a;b;c)(b>0)$ là điểm nằm trên (P) sao cho có vô số mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm C, D và thỏa mãn khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (Q) gấp 3 lần khoảng cách từ B đến (Q). Tính $T=abc$.

A. 0. **B.** 16. **C.** 12. **D.** -16.

Lời giải

Chọn B

Trường hợp 1: A, B cùng phía với (Q): Gọi $M(x;y;z)$ thỏa $\overrightarrow{AM}=3.\overrightarrow{BM}$

Suy ra: $\begin{cases} x-2=3(x+2) \\ y-5=3(y-1) \\ z+3=3(z-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=-1 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow M(-4;-1;3)$

Đường thẳng MC qua $C(2;0;1)$ và có VTCP $\vec{u}=\overrightarrow{MC}=(6;1;-2)$

Phương trình $MC: \begin{cases} x=2+6t \\ y=t \\ z=1-2t \end{cases}$

Gọi $D(2+6t;t;1-2t) \in MC$.

$D \in (P) \Rightarrow 3(2+6t)+4.t+5(1-2t)+1=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow D(-4;-1;3)$ (loại)

Trường hợp 2: A, B khác phía với (Q): Gọi $M(x;y;z)$ thỏa $\overrightarrow{AM}=-3.\overrightarrow{BM}$

Suy ra: $\begin{cases} x-2=-3(x+2) \\ y-5=-3(y-1) \\ z+3=-3(z-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow M(-1;2;0)$

Đường thẳng MC qua $C(2;0;1)$ và có VTCP $\vec{u}=\overrightarrow{MC}=(3;-2;1)$

Phương trình $MC: \begin{cases} x=2+3t \\ y=-2t \\ z=1+t \end{cases}$

Gọi $D(2+3t;-2t;1+t) \in MC$.

$D \in (P) \Rightarrow 3(2+3t)+4.(-2t)+5(1+t)+1=0 \Leftrightarrow t=-2 \Rightarrow D(-4;4;-1)$ (thỏa)

Suy ra: $\begin{cases} a=-4 \\ b=4 \\ c=-1 \end{cases} \Rightarrow abc=16..$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 56: **(Chuyên Thái Bình Lần3)** Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;1)$, $B(2;2;1)$ và mặt phẳng $(P): x+y+2z=0$. Mặt cầu (S) thay đổi qua A,B và tiếp xúc với (P) tại H. Biết H chạy trên 1 đường tròn cố định. Tìm bán kính của đường tròn đó.

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

Chọn B

Có $A(1;1;1), B(2;2;1) \Rightarrow$ Phương trình AB: $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=1 \end{cases}$

Gọi K là giao điểm của AB và $(P) \Rightarrow K(-1;-1;1)$

Có Mặt cầu (S) tiếp xúc với (P) tại H.

$\Rightarrow HK$ là tiếp tuyến của (S)

$\Rightarrow KH^2 = \overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KB} = 12 \Rightarrow KH = 2\sqrt{3}$ không đổi

$\Rightarrow$ Biết H chạy trên 1 đường tròn bán kính $2\sqrt{3}$ không đổi

Câu 57: **(Nguyễn Khuyến)** Trong không gian Oxyz cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-m}{2}$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9$. Đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt E,F sao cho độ dài đoạn thẳng EF lớn nhất khi $m=m_0$. Hỏi m_0 thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(-1;1)$. **B.** $\left(\frac{1}{2};1\right)$. **C.** $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$. **D.** $(0;2)$.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng d đi qua $M(1;-1;m)$ và có một vtcp $\vec{u}=(1;1;2)$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;2)$ và bán kính $R=3$. Gọi K là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng d thì K cũng là trung điểm EF. Khi đó: $IK^2 + \frac{EF^2}{4} = R^2 = 9$. Để EF lớn nhất thì IK nhỏ nhất. Mà $IK = d(I,d) = \frac{|[\vec{u}, \overrightarrow{IM}]|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{2m^2+12}}{\sqrt{6}}$ nên IK nhỏ nhất khi $m=0$.

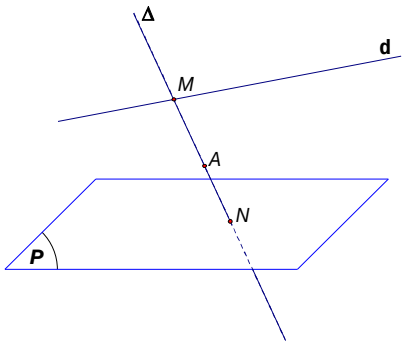
Câu 58: **(Nguyễn Tất Thành Yên Bái)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$, mặt phẳng $(P): x+y-2z+5=0$ và $A(1;-1;2)$. Đường thẳng Δ cắt d và (P) lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN. Một vectơ chỉ phương của Δ là

A. $\vec{u}=(4;5;-13)$. **B.** $\vec{u}=(2;3;2)$. **C.** $\vec{u}=(1;-1;2)$. **D.** $\vec{u}=(-3;5;1)$.

Lời giải

Chọn B

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Ta có $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}\Rightarrow\begin{cases}x=-1+2t\\y=t\\z=2+t\end{cases}$. Do đó $M\in d\Rightarrow M\left(-1+2t;t;2+t\right)$.

Vì $A(1;-1;2)$ là trung điểm $MN\Rightarrow N\left(3-2t;-2-t;2-t\right)$.

Mặt khác $N\in(P)\Rightarrow 3-2t-2-t-2(2-t)+5=0\Leftrightarrow t=2\Rightarrow M(3;2;4)\Rightarrow \overrightarrow{AM}=(2;3;2)$ là một vectơ chỉ phương của Δ.

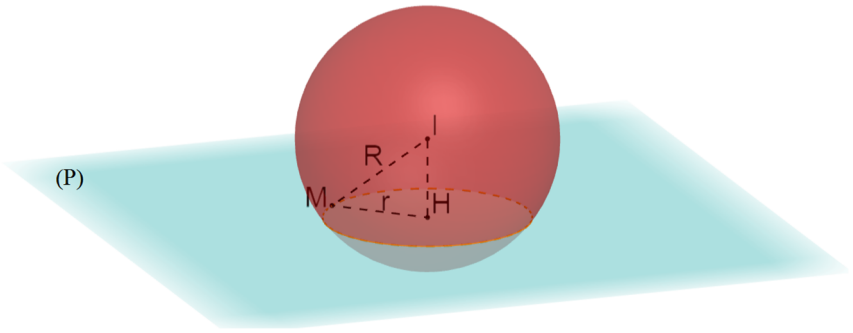
Câu 59: **(Nguyễn Tất Thành Yên Bái)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x-2y+2z-2=0$ và điểm $I(-1;2;-1)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính bằng 5.

A. $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25$. **B.** $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$.

C. $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=34$. **D.** $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=34$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M là điểm nằm trên đường tròn giao tuyến của (S) và (P). Ta có $IM=R$. Áp dụng công thức tính bán kính mặt cầu trong trường hợp mặt cầu (S) giao với mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính r là

$$IM^2=R^2=d_{(I;(P))}^2+r^2 \qquad (*)$$

Ta có: $d_{(I;(P))}=\dfrac{\left|-1-2.2+2.(-1)-2\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=3=IH$.

Từ $(*)\Rightarrow R^2=3^2+5^2=34$.

Vậy phương trình mặt cầu (S) thỏa mãn yêu cầu đề bài là

$(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=34$.

Câu 60: **(Cụm THPT Vũng Tàu)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-z-1=0$ và hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-1}{-1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1}$, $\Delta_2: \frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{3}$. Biết rằng d_1, d_2 nằm trong mặt phẳng (P), cắt Δ_2 và cách Δ_1 một khoảng bằng $\frac{\sqrt{6}}{2}$. Gọi $\vec{u_1}=(a;b;1), \vec{u_2}=(1;c;d)$ lần lượt là vectơ chỉ phương của d_1, d_2. Tính $S=a+b+c+d$.

A. $S=0$. **B.** $S=2$. **C.** $S=4$. **D.** $S=1$.

Lời giải

Chọn A

Gọi M là giao điểm của mặt phẳng (P) và đường thẳng $\Delta_2 \Rightarrow M(0;0;-1)$

Do d_1, d_2 nằm trong mặt phẳng (P) nên: $\begin{cases} \vec{u_1}.\vec{n_P}=0 \\ \vec{u_2}.\vec{n_P}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b-1=0 \quad (1) \\ c-d+1=0 \quad (2) \end{cases}$

Từ $\Delta_1: \frac{x-1}{-1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{1} \Rightarrow \vec{u_{\Delta_1}}(-1;-1;1), N(1;0;0)$

$$d(d_1,\Delta_1)=\frac{\left|\left[\vec{u_1},\vec{u_{\Delta_1}}\right].\overrightarrow{MN}\right|}{\left|\left[\vec{u_1},\vec{u_{\Delta_1}}\right]\right|}=\frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \frac{|2b-a+1|}{\sqrt{(b+1)^2+(a+1)^2+(b-a)^2}}=\frac{\sqrt{6}}{2} \quad (3)$$

$$d(d_2,\Delta_1)=\frac{\left|\left[\vec{u_2},\vec{u_{\Delta_1}}\right].\overrightarrow{MN}\right|}{\left|\left[\vec{u_2},\vec{u_{\Delta_1}}\right]\right|}=\frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \frac{|d+2c-1|}{\sqrt{(d+1)^2+(1-c)^2+(c+d)^2}}=\frac{\sqrt{6}}{2} \quad (4)$$

Từ $(1) \Rightarrow b=1-a$.

Thay vào (3) $\frac{|3-3a|}{\sqrt{(2-a)^2+(a+1)^2+(1-2a)^2}}=\frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow |6-6a|=\sqrt{36a^2-36a+36} \Leftrightarrow a=0 \Rightarrow b=1$

Từ $(2) \Rightarrow d=c+1$

Thay vào (4) $\Rightarrow \frac{|3c|}{\sqrt{(c+2)^2+(1-c)^2+(2c+1)^2}}=\frac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow |6c|=\sqrt{36c^2+36c+36} \Leftrightarrow c=-1 \Rightarrow d=0$

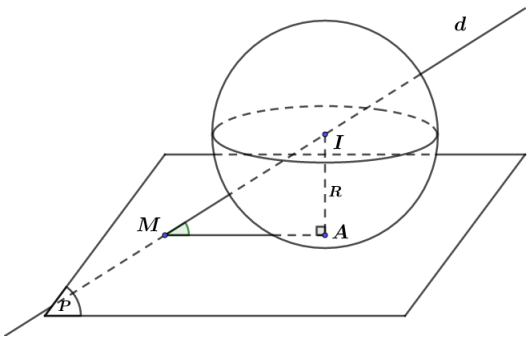
Vậy $S=a+b+c+d=0$.

Câu 61: **(KINH MÔN HẢI DƯƠNG 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}$ cắt mặt phẳng $(P): x+2y+z-6=0$ tại điểm M. Mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ với $a<0$ thuộc đường thẳng d và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm A. Tìm tổng $T=a+b+c$ khi biết diện tích tam giác IAM bằng $3\sqrt{3}$.

A. $T=-2$. **B.** $T=\frac{1}{2}$. **C.** $T=8$. **D.** $T=0$.

Lời giải

Chọn D



ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=1+t\\z=-t\end{cases},(t\in\mathbb{R})$ có vtcp $\vec{u}_d=(2;1;-1)$.

Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}_P=(1;2;1)$.

Khi đó: Góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là $\widehat{IMA}$

$\sin\widehat{IMA}=\dfrac{|\vec{u}_d.\vec{n}_P|}{|\vec{u}_d|.|\vec{n}_P|}=\dfrac{|2.1+1.2-1.1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}.\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\widehat{IMA}=30°$.

Ta có: $IA=R\Rightarrow MA=\dfrac{IA}{\tan 30°}=R\sqrt{3}$.

Mà $S_{\Delta IAM}=3\sqrt{3}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}IA.MA=3\sqrt{3}\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{3}}{2}R^2=3\sqrt{3}\Leftrightarrow R=\sqrt{6}$.

Mặt khác: $I(1+2t;1+t;-t)\in d$ và $d(I,(P))=R$

$\Rightarrow\dfrac{|1+2t+2(1+t)+(-t)-6|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\sqrt{6}\Leftrightarrow|3t-3|=6\Leftrightarrow|t-1|=2\Leftrightarrow\begin{cases}t=3&\Rightarrow I(7;4;-3)\\t=-1&\Rightarrow I(-1;0;1)\end{cases}\ (L)$

$\Rightarrow a=-1,b=0,c=1$.

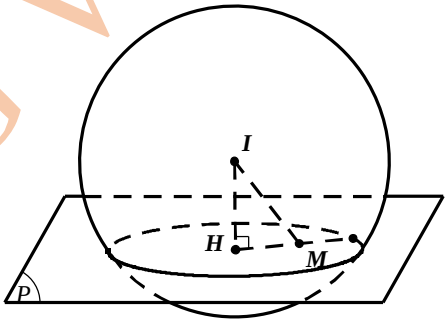
Vậy $T=a+b+c=0$.

Câu 62: **(Nam Tiền Hải Thái Bình Lần1)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2;-1;2)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+y^2+z^2=9$. Mặt phẳng (P) đi qua M cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính nhỏ nhất có phương trình là

A. $x-y+2z-5=0$. **B.** $x-y+2z-7=0$. **C.** $2x-y+z-7=0$. **D.** $x+y+2z-5=0$.

Lời giải

Chọn B



Mặt cầu (S) có tâm $I(1;0;0)$, bán kính $R=3$.

Giả sử đường tròn giao tuyến có tâm H, bán kính r. Khi đó H là hình chiếu của I trên (P)

Ta có $\overrightarrow{IM}=(1;-1;2)\Rightarrow IM=\sqrt{6}$.

Do $r^2=R^2-IH^2=R^2-(IM^2-MH^2)=R^2-IM^2+MH^2=3+MH^2\geq 3$ (vì MH luôn không âm). Suy ra r nhỏ nhất bằng 3 khi và chỉ khi MH nhỏ nhất $\Leftrightarrow M\equiv H$.

Khi đó (P) là mặt phẳng qua M và vuông góc với IM.

Phương trình mặt phẳng (P) là $1.(x-2)-1.(y+1)+2.(z-2)=0$ hay $x-y+2z-7=0$

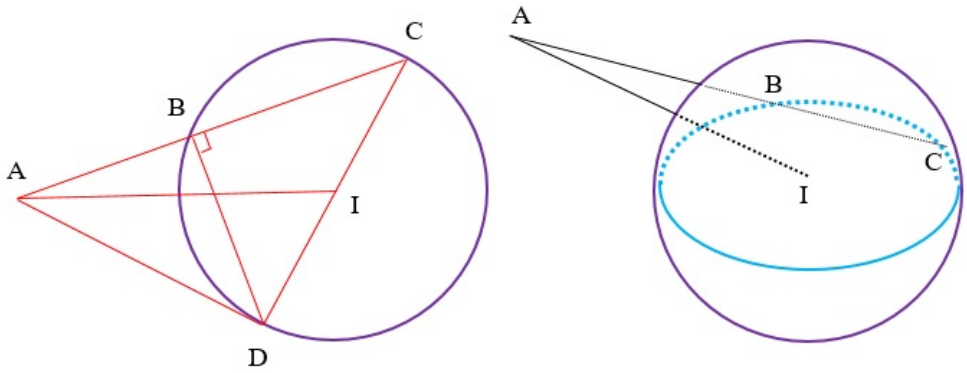
Câu 63: **(Cầu Giấy Hà Nội 2019 Lần 1)** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;4;2)$ và mặt cầu $x^2+y^2+(z+2)^2=1$. Gọi S là tập hợp các đường thẳng trong không gian đi qua điểm A cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt B,C thỏa mãn $AB+AC=12$. Số phần tử của S là

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C



(Hình vẽ minh họa cho trường hợp điểm B nằm giữa A và C)

Từ giả thiết ta có mặt cầu tâm $I(0;0;-2), R=1$. Tính được $AI=6>R$, suy ra A nằm ngoài mặt cầu. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A và cắt mặt cầu tại hai điểm B,C.

Xét mặt phẳng (AI,Δ) cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn (C).

Ta chứng minh $AB.AC=AI^2-R^2$.

Thật vậy, gọi là điểm D đối xứng với C qua I, ta có $DB\perp AC$.

Ta có $AB.AC=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\right).\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}$ (1).

Mặt khác $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{ID}\right).\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}\right)=\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{ID}\right).\left(\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{ID}\right)=\overrightarrow{AI}^2-\overrightarrow{ID}^2=AI^2-R^2$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AB.AC=AI^2-R^2=35$ (3).

Theo giả thiết và (3) ta có $\begin{cases}AB+AC=12\\AB.AC=35\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}AB=5\\AC=7\end{cases}\vee\begin{cases}AB=7\\AC=5\end{cases}$.

Suy ra $BC=|AC-AB|=2=2R$.

Từ trên suy ra Δ đi qua tâm I, như vậy có 1 đường thẳng thỏa mãn bài toán.

Câu 64: **(CHUYÊN NGUYỄN DU ĐẮK LẮK LẦN X NĂM 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2mx+\left(m^2+1\right)y+\left(m^2-1\right)z-10=0$ và điểm $A(2;11;-5)$. Biết rằng khi m thay đổi, tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (P) và cùng đi qua A. Tổng bán kính của 2 mặt cầu đó bằng:

A. $12\sqrt{3}$. **B.** $12\sqrt{2}$. **C.** $10\sqrt{3}$. **D.** $10\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Giả sử mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (P) có dạng

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \text{ với } R>0.$$

Vì mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng $(P):2mx+\left(m^2+1\right)y+\left(m^2-1\right)z-10=0$ và đi qua điểm $A(2;11;-5)$ nên

$$\begin{cases}(2-a)^2+(11-b)^2+(-5-c)^2=R^2 & (1)\\ d\left(I;(P)\right)=\dfrac{\left|2ma+\left(m^2+1\right)b+\left(m^2-1\right)c-10\right|}{\sqrt{4m^2+\left(m^2+1\right)^2+\left(m^2-1\right)^2}}=R & (2)\end{cases}$$

$(2)\Leftrightarrow \left|m^2(b+c)+2ma+b-c-10\right|=\sqrt{2}.R\left(m^2+1\right)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2\left(b+c-\sqrt{2}R\right)+2ma+b-c-10-\sqrt{2}R=0 \\ m^2\left(b+c+\sqrt{2}R\right)+2ma+b-c-10+\sqrt{2}R=0 \end{array}\right.$

TH1: $m^2\left(b+c-\sqrt{2}R\right)+2ma+b-c-10-\sqrt{2}R=0$

Vì với mọi m tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (P) nên

$\left\{\begin{array}{l} b+c-\sqrt{2}R=0 \\ 2a=0 \\ b-c-10-\sqrt{2}R=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=0 \\ b+c=\sqrt{2}R \\ b-c-10-b-c=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=0 \\ c=-5 \\ b=\sqrt{2}R+5 \end{array}\right.$.

Khi đó $(1)\Leftrightarrow 4+\left(6-\sqrt{2}R\right)^2=R^2\Leftrightarrow R^2-12\sqrt{2}R+40=0$.

Vậy tổng bán kính của 2 mặt cầu là $12\sqrt{2}$.

TH2: $m^2\left(b+c+\sqrt{2}R\right)+2ma+b-c-10+\sqrt{2}R=0$

Vì với mọi m tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (P) nên

$\left\{\begin{array}{l} b+c+\sqrt{2}R=0 \\ 2a=0 \\ b-c-10+\sqrt{2}R=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=0 \\ b+c=-\sqrt{2}R \\ b-c-10-b-c=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=0 \\ c=-5 \\ b=5-\sqrt{2}R \end{array}\right.$

Khi đó $(1)\Leftrightarrow 4+\left(6+\sqrt{2}R\right)^2=R^2\Leftrightarrow R^2+12\sqrt{2}R+40=0\Leftrightarrow R=-10\sqrt{2}\vee R=-2\sqrt{2}$ (Vô lí).

Vậy tổng bán kính của 2 mặt cầu là $12\sqrt{2}$.

Câu 65: **(HSG Bắc Ninh)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(6;0;0)$, $N(0;6;0)$, $P(0;0;6)$. Hai mặt cầu có phương trình $(S_1):x^2+y^2+z^2-2x-2y+1=0$ và $(S_2):x^2+y^2+z^2-8x+2y+2z+1=0$ cắt nhau theo đường tròn (C). Hỏi có bao nhiêu mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng chứa (C) và tiếp xúc với ba đường thẳng MN, NP, PM.

A. 1. **B.** 3. **C.** Vô số. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

□ Giả sử mặt cầu (S) có tâm $I\in(C)$ và tiếp xúc với ba đường thẳng MN, NP, PM.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên (MNP).

Ta có: (S) tiếp xúc với ba đường thẳng MN, NP, PM

$\Leftrightarrow d(I,MN)=d(I,NP)=d(I,PM)\Leftrightarrow d(H,MN)=d(H,NP)=d(H,PM)$

$\Leftrightarrow H$ là tâm đường tròn nội tiếp hoặc tâm đường tròn bàng tiếp của tam giác MNP.

□ (MNP) có phương trình là $\frac{x}{6}+\frac{y}{6}+\frac{z}{6}=1$ hay $x+y+z-6=0$.

□ $(C)=(S_1)\cap(S_2)\Rightarrow$ Tọa độ các điểm thuộc trên (C) thỏa mãn hệ phương trình:

$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2-2x-2y+1=0 \\ x^2+y^2+z^2-8x+2y+2z+1=0 \end{array}\right. \Rightarrow 3x-2y-z=0.$

Do đó, phương trình chứa mặt phẳng chứa (C) là $(\alpha):3x-2y-z=0$.

□ Vì $1.3+1.(-2)+1.(-1)=0\Rightarrow (MNP)\perp(\alpha)$. (1)

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

□ Ta có: $MN = NP = PM = 6\sqrt{2} \Rightarrow \Delta MNP$ đều.

Gọi G là trọng tâm tam giác $MNP \Rightarrow G(2;2;2)$ và G là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MNP. Thay tọa độ của điểm G vào phương trình mặt phẳng (α), ta có: $G \in (\alpha)$.

□ Gọi Δ là đường thẳng vuông góc với (MNP) tại G.

Vì $\begin{cases}(MNP) \perp (\alpha)\\ G \in (\alpha)\end{cases} \Rightarrow \Delta \subset (\alpha)$.

Khi đó: $\forall I \in \Delta \Rightarrow d(I, MN) = d(I, NP) = d(I, PM) = r$

$\Rightarrow$ Mặt cầu tâm I bán kính r tiếp xúc với ba đường thẳng MN, NP, PM.

Vậy có vô số mặt cầu có tâm thuộc mặt phẳng chứa (C) và tiếp xúc với ba đường thẳng MN, MP, PM.

Câu 66: **(Trung-Tâm-Thanh-Tường-Nghệ-An-Lần-2)** Cho hai đường thẳng $d: \begin{cases}x = -2\\ y = t\\ z = 2 + 2t\end{cases} (t \in \mathbb{R})$, $\Delta: \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-4}{1}$ và mặt phẳng $(P): x + y - z + 2 = 0$. Gọi d', Δ' lần lượt là hình chiếu của d và Δ lên mặt phẳng (P). Gọi $M(a;b;c)$ là giao điểm của hai đường thẳng d' và Δ'. Biểu thức $a + b.c$ bằng

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Do d' là hình chiếu của d lên mặt phẳng (P) khi đó d' là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (α) chứa d và vuông góc với mặt phẳng (P).

$\Rightarrow$ một vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\overrightarrow{n_{(\alpha)}} = \left[\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{n_P}\right] = (-3;2;-1)$.

Phương trình mặt phẳng (α) đi qua $A(-2;0;2)$ và có một vec tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{(\alpha)}} = (-3;2;-1)$ là $3x - 2y + z + 4 = 0$.

Do Δ' là hình chiếu của Δ lên mặt phẳng (P) khi đó Δ' là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (β) chứa Δ và vuông góc với mặt phẳng (P).

$\Rightarrow$ một vec tơ pháp tuyến của mặt phẳng (β) là $\overrightarrow{n_{(\beta)}} = \left[\overrightarrow{u_\Delta}, \overrightarrow{n_P}\right] = (0;-2;-2)$.

Phương trình mặt phẳng (β) đi qua $B(3;1;4)$ và có một vec tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_{(\beta)}} = (0;-2;-2)$ là $y + z - 5 = 0$.

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}x + y - z + 2 = 0\\ 3x - 2y + z + 4 = 0\\ y + z - 5 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = -1\\ y = 2\\ z = 3\end{cases}$.

Vậy $M(-1;2;3) \Rightarrow a + b.c = -1 + 2.3 = 5$.

Câu 67: **(THPT SỐ 1 TƯ NGHĨA LẦN 2 NĂM 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z + 1 = 0$ và hai điểm $A(2;0;0)$, $B(3;1;-1)$. Hai mặt phẳng (P) và (P') chứa đường thẳng AB, tiếp xúc với (S) tại T và T'. $H(a;b;c)$ là trung điểm đoạn TT'. Tính $a + b + 2c$.

A. $a+b+2c=\frac{2}{3}$. **B.** $a+b+2c=-\frac{2}{3}$.

C. $a+b+2c=-\frac{1}{2}$. **D.** $a+b+2c=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Đường thẳng AB đi qua điểm $A(2;0;0)$ và có VTCP $\overrightarrow{AB}=(1;1;-1)$ có dạng: $AB:\begin{cases}x=2+t\\y=+t\\z=-t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

(S) có tâm $I(0;1;-1)$ và bán kính $R=1$.

$\begin{cases}IT\perp AB\\IT'\perp AB\end{cases}\Rightarrow(ITT')\perp AB$. Gọi $K=(ITT')\cap AB\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{IK}.\overrightarrow{AB}=0\\K\in AB\end{cases}$.

$K(2+t;t;-t)\in AB, \overrightarrow{IK}=(2+t;t-1;-t+1)$, $\overrightarrow{IK}.\overrightarrow{AB}=2+t+t-1+t-1=0\Leftrightarrow t=0\Leftrightarrow K\equiv A$.

Ta có, $IA=\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{6}$, $IA\perp TT'$ và $I;A;H$ thẳng hàng. Mặt khác, $\Delta IAT'$ vuông tại T' nên theo hệ thức lượng $IH=\frac{IT'^2}{IA}=\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Do đó, $\overrightarrow{IH}=\frac{IH}{IA}\cdot\overrightarrow{IA}=\frac{1}{\sqrt{6}}\cdot\overrightarrow{IA}=\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{6};\frac{1}{6}\right)\Rightarrow H\left(\frac{1}{3};\frac{5}{6};-\frac{5}{6}\right)$.

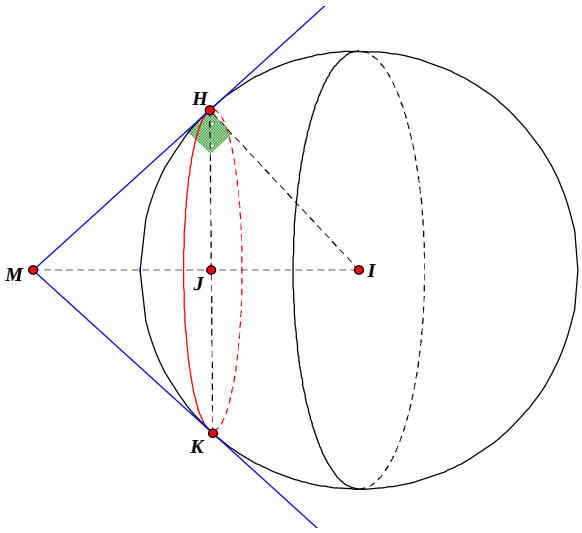
Vậy $a+b+2c=-\frac{1}{2}$.

Câu 68: **(THPT Sơn Tây Hà Nội 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=9$ và điểm $M(1;3;-1)$. Biết rằng các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M tới mặt cầu đã cho luôn thuộc một đường tròn (C) có tâm $J(a;b;c)$. Tính $2a+b+c$.

A. $\frac{134}{25}$. **B.** $\frac{116}{25}$. **C.** $\frac{84}{25}$. **D.** $\frac{62}{25}$.

Lời giải

Chọn C



ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Ta có: $(S):\begin{cases} I(1;-1;2) \\ R=3 \end{cases}$. Khi đó $IM=5>R \Rightarrow M$ nằm ngoài mặt cầu.

Tâm $J(a;b;c)$ nằm trên $MI:\begin{cases} x=1 \\ y=-1+4t(t\in\mathbb{R}) \\ z=2-3t \end{cases}$ nên $J(1;-1+4t;2-3t)$.

Xét tam giác MHI vuông tại H có:

$MI=5; IH=3 \Rightarrow MH=\sqrt{MI^2-HI^2}=4$.

$\frac{1}{HJ^2}=\frac{1}{HM^2}+\frac{1}{HI^2} \Rightarrow HJ=\frac{12}{5}$.

$MJ.MI=MH^2 \Rightarrow MJ=\frac{16}{5}$.

Mặt khác, $\begin{cases} M(1;3;-1) \\ J(1;-1+4t;2-3t) \end{cases} \Rightarrow MJ=\sqrt{(-4+4t)^2+(3-3t)^2}=\frac{16}{5}$.

$\Leftrightarrow (-4+4t)^2+(3-3t)^2=\frac{256}{25}$

$\Leftrightarrow 16-32t+16t^2+9-18t+9t^2=\frac{256}{25}$

$\Leftrightarrow 25t^2-50t+\frac{369}{25}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{9}{25} \\ t=\frac{41}{25} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} J\left(1;\frac{11}{25};\frac{23}{25}\right) \\ J\left(1;\frac{139}{25};\frac{-73}{25}\right) \end{array}\right.$.

- Với $J\left(1;\frac{11}{25};\frac{23}{25}\right)$ thì $IJ=\frac{9}{5}<IM$ (nhận).

- Với $J\left(1;\frac{139}{25};\frac{-73}{25}\right)$ thì $IJ=\frac{\sqrt{1097}}{5}>IM$ (loại).

Vậy $J\left(1;\frac{11}{25};\frac{23}{25}\right)$ nên: $2a+b+c=\frac{84}{25}$.

Câu 69: **(Đặng Thành Nam Đề 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1),(S_2)$ có phương trình lần lượt là $(S_1):x^2+y^2+z^2=25;(S_2):x^2+y^2+(z-1)^2=4$. Một đường thẳng d vuông góc với véc tơ $\vec{u}=(1;-1;0)$ tiếp xúc với mặt cầu (S_2) và cắt mặt cầu (S_1) theo một đoạn thẳng có độ dài bằng 8. Hỏi véc tơ nào sau đây là véc tơ chỉ phương của d?

A. $\overrightarrow{u_1}=(1;1;\sqrt{3})$. **B.** $\overrightarrow{u_2}=(1;1;\sqrt{6})$. **C.** $\overrightarrow{u_3}=(1;1;0)$. **D.** $\overrightarrow{u_4}=(1;1;-\sqrt{3})$.

Lời giải

Chọn C

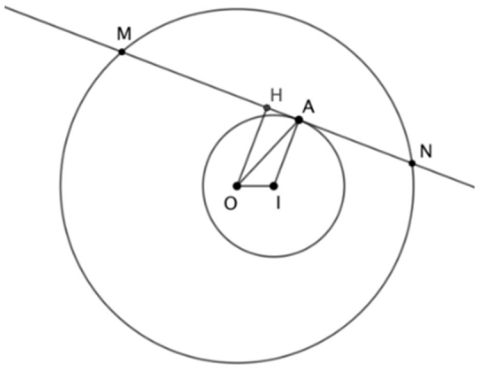
Hai mặt cầu $(S_1),(S_2)$ có tâm lần lượt là là gốc toạ độ O, điểm I(0;0;1) và bán kính lần lượt là $R_1=5; R_2=2$.

Gọi A là tiếp điểm của d và (S_2), ta có IA = R2 = 2.

Vì d cắt (S_1) theo một đoạn thẳng có độ dài bằng 8 nên

$d(O;d)=\sqrt{R_1^2-\left(\frac{8}{2}\right)^2}=\sqrt{25-16}=3.$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Vì $d \perp \vec{u} \Rightarrow \vec{u}_d = (1;1;x)$, ta có:

$OI + IA \geq OA \geq d(O,d) \rightarrow 1+2 \geq \mathrm{OA} \geq 3 \Rightarrow O, I, A$ thẳng hàng.

$\overrightarrow{OA} = \dfrac{OA}{OI}\overrightarrow{OI} = 3\overrightarrow{OI} = (0;0;3) \Rightarrow A(0;0;3).$

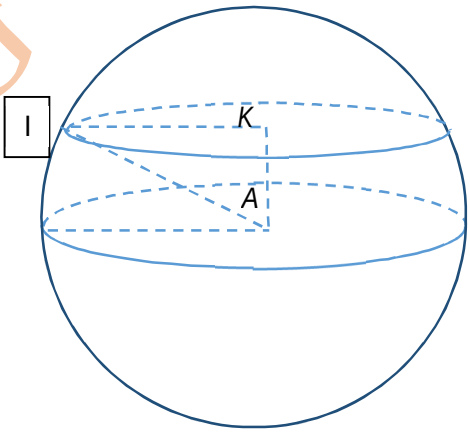
Do đó $d(O;d) = \dfrac{\left\|\left[\overrightarrow{OA}, \vec{u}_d\right]\right\|}{\left|\overrightarrow{u_d}\right|} = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+2}} = 3 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow \vec{u}_d = (1;1;0).$

Câu 70: **(GIỮA-HKII-2019-NGHĨA-HƯNG-NAM-ĐỊNH)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng song song $(P): 2x-y+2z-1=0, (Q): 2x-y+2z+5=0$ và điểm $A(-1;1;1)$ nằm trong khoảng giữa hai mặt phẳng này. Gọi (S) là mặt cầu đi qua A và tiếp xúc với cả (P) và (Q). Biết khi (S) thay đổi thì tâm I của nó luôn thuộc đường tròn (C) cố định. Diện tích hình tròn giới hạn bởi (C) là

A. $\dfrac{2\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{4\pi}{9}$. **C.** $\dfrac{16\pi}{9}$. **D.** $\dfrac{8\pi}{9}$.

Lời giải

Chọn D



Bán kính mặt cầu (S): $R = d\left((P),(Q)\right) = \dfrac{1}{2}.\dfrac{\left|5-(-1)\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = 1$

Tâm I của mặt cầu (S) nằm trên mặt phẳng (R) cách đều (P) và (Q).

Phương trình mặt phẳng $(R): 2x-y+2z+2=0$

Tâm I của mặt cầu (S) nằm trên mặt cầu (S') có tâm A bán kính $R = IA = 1$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Gọi K là hình chiếu của A trên $(R) \Rightarrow AK = d(A,(R)) = \dfrac{|2.(-1)-1+2.1+2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}} = \dfrac{1}{3}$

Tâm I của mặt cầu (S) nằm trên đường tròn (C) là giao của mặt cầu (S') và mặt phẳng (R) có tâm K và bán kính $r = KI = \sqrt{AI^2 - AK^2} = \sqrt{1^2 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

Diện tích hình tròn giới hạn bởi (C) là: $\pi r^2 = \dfrac{8\pi}{9}$.

Câu 71: **(Đặng Thành Nam Đề 3)** Trong không gian Oxyz, xét số thực $m \in (0;1)$ và hai mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + 2z + 10 = 0$ và $(\beta): \dfrac{x}{m} + \dfrac{y}{1-m} + \dfrac{z}{1} = 1$. Biết rằng, khi m thay đổi có hai mặt cầu cố định tiếp xúc đồng thời với cả hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$. Tổng bán kính của hai mặt cầu đó bằng

A. 6. **B.** 3. **C.** 9 **D.** 12.

Lời giải

ChọnC

Ta có $(\beta): \dfrac{x}{m} + \dfrac{y}{1-m} + \dfrac{z}{1} - 1 = 0 \Leftrightarrow (\beta): (1-m)x + my + (m-m^2)z - m + m^2 = 0.$

Gọi $I(x_0; y_0; z_0)$ là tâm, R là bán kính mặt cầu tiếp xúc đồng thời với cả hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$. Khi đó: $R = d(I,(\alpha)) = d(I,(\beta))$.

$$d(I,(\beta)) = \frac{|(1-m)x_0 + my_0 + (m-m^2)z_0 - m + m^2|}{\sqrt{(1-m)^2 + m^2 + (m-m^2)^2}} = \frac{|(1-m)x_0 + my_0 + (m-m^2)z_0 - m + m^2|}{\sqrt{(m^2-m+1)^2}}$$

$$= \frac{|(1-m)x_0 + my_0 + (m-m^2)z_0 - m + m^2|}{m^2 - m + 1}$$

Đặt $\dfrac{(m-1)x_0 + my_0 + (m-m^2)z_0 - m + m^2}{m^2 - m + 1} = k \Rightarrow R = |k|$

Ta cần tìm $(x_0; y_0; z_0)$ sao cho

$(1-m)x_0 + my_0 + (m-m^2)z_0 - m + m^2 = k(m^2 - m + 1), \forall m$

$\Leftrightarrow (1-z_0)m^2 + (-x_0 + y_0 + z_0 - 1)m + x_0 = km^2 - km + k, \forall m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - z_0 = k \\ -x_0 + y_0 + z_0 - 1 = -k \\ x_0 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = k \\ y_0 = k \\ z_0 = 1 - k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I(k;k;1-k) \\ R = |k| \end{cases}$$

Khi đó: $R = d(\mathrm{I},(\alpha)) = d(\mathrm{I},(\beta)) \Leftrightarrow |k| = \dfrac{|2k - k + 2(1-k) + 10|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} \Leftrightarrow \dfrac{|12-k|}{3}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 12 - k = -3k \\ 12 - k = 3k \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} k = -6 \\ k = 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} I_1(-6;-6;7), R_1 = 6 \\ I_2(3;3;-2), R_2 = 3 \end{bmatrix}.$$

Tổng bán kính của hai mặt cầu bằng $6 + 3 = 9$.

Câu 72: **(SỞ GDĐT KIÊN GIANG 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S): $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 27$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua hai điểm $A(0;0;-4)$, $B(2;0;0)$ và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn (C). Xét các khối nón có đỉnh là tâm của (S) và đáy

là (C). Biết rằng khi thể tích của khối nón lớn nhất thì mặt phẳng (α) có phương trình dạng $ax+by-z+d=0$. Tính $P=a-b-d$.

A. $P=-4$. **B.** $P=8$. **C.** $P=0$. **D.** $P=4$.

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;3)$ và bán kính $R=3\sqrt{3}$.

Vì (α) đi qua 2 điểm $A(0;0;-4)$, $B(2;0;0)$ nên ta có $\begin{cases} a.0+b.0+4+d=0 \\ a.2+b.0-0+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d=-4 \\ a=2 \end{cases}$.

Gọi r, h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của khối nón. Khi đó thể tích của khối nón là $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

Ta có $h=d(I,(\alpha))=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{27-r^2} \Rightarrow V=\frac{1}{3}\pi r^2\sqrt{27-r^2}$.

Đặt $t=\sqrt{27-r^2} \Rightarrow r^2=27-t^2$, điều kiện: $0<t<3\sqrt{3}$.

Khi đó $V=\frac{1}{3}\pi\left(27-t^2\right)t$, $\left(0<t<3\sqrt{3}\right)$.

Ta có $V'=\frac{1}{3}\pi\left(27-3t^2\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3(n) \\ t=-3(l) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

t	0		3		$3\sqrt{3}$
V'		$+$	0	$-$	
V	0	↗	18π	↘	0

Thể tích khối nón lớn nhất khi $t=3 \Rightarrow r^2=18 \Rightarrow h=3$.

Mặt khác $h=d\left(I,(\alpha)\right)=\frac{|a-2b-3+d|}{\sqrt{a^2+b^2+1}}=3$ mà

$\begin{cases} a=2 \\ d=-4 \end{cases} \Rightarrow |-2b-5|=3\sqrt{5+b^2} \Leftrightarrow b^2-4b+4=0 \Leftrightarrow b=2$.

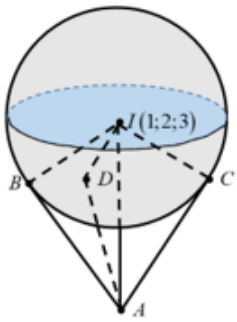
Vậy $P=a-b-d=2-2+4=4$.

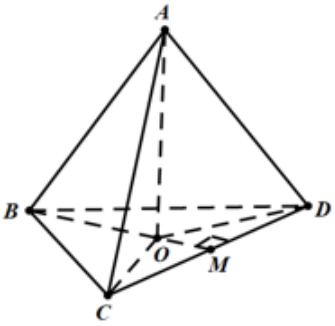
Câu 73: **(HSG Bắc Ninh)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{14}{3}$ và đường thẳng $d:\frac{x-4}{3}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-4}{1}$. Gọi $A(x_0;y_0;z_0)$ $(x_0>0)$ là điểm nằm trên đường thẳng d sao cho từ A kẻ được 3 tiếp tuyến đến mặt cầu (S) có các tiếp điểm B,C,D sao cho $ABCD$ là tứ diện đều. Tính giá trị của biểu thức $P=x_0+y_0+z_0$.

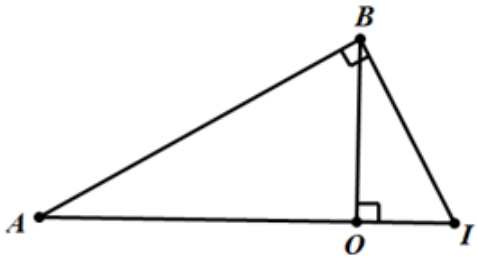
A. $P=6$. **B.** $P=16$. **C.** $P=12$. **D.** $P=8$.

Lời giải

Chọn C







Gọi I là tâm của mặt cầu $\Rightarrow I(1;2;3)$. Gọi O là giao điểm của mặt phẳng (BCD) và đoạn AI. Khi đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. (Vì theo giả thiết $AB=AC=AD$ và $IB=IC=ID=\sqrt{\frac{14}{3}}$ nên AI vuông góc với mặt phẳng (BCD) tại O).

Đặt $AI=x\left(x>\sqrt{\frac{14}{3}}\right)$. Ta có $AB=\sqrt{AI^2-IB^2}=\sqrt{x^2-\frac{14}{3}}$, $IB^2=IO.IA\Rightarrow IO=\frac{14}{3x}$

$$\Rightarrow OB=\sqrt{IB^2-IO^2}=\sqrt{\frac{14}{3}-\left(\frac{14}{3x}\right)^2}$$

$$\Rightarrow BD^2=OB^2+OD^2-2OB.OD.\cos 120^\circ=3OB^2\Rightarrow BD=\sqrt{3}OB=\sqrt{3\left(\frac{14}{3}-\frac{196}{9x^2}\right)}$$

Do $ABCD$ là tứ diện đều nên $AB=BD\Rightarrow\sqrt{x^2-\frac{14}{3}}=\sqrt{3\left(\frac{14}{3}-\frac{196}{9x^2}\right)}\Leftrightarrow x^2-\frac{14}{3}=14-\frac{196}{3x^2}$

$$\Leftrightarrow 3x^4-56x^2+196=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=\frac{14}{3}\\x^2=14\end{array}\right.\Rightarrow x=\sqrt{14}.$$ Gọi tọa độ điểm $A(4+3t;4+2t;4+t)$.

Suy ra $AI=\sqrt{14}\Leftrightarrow\sqrt{(4+3t-1)^2+(4+2t-2)^2+(4+t-3)^2}=\sqrt{14}$

$$\Leftrightarrow 14t^2+28t+14=14\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}A(4;4;4)\\A(-2;0;2)\end{array}\right.$$

Do $x_0>0$ nên điểm A có tọa độ $A(4;4;4)\Rightarrow P=12$.

Câu 74: **(CỤM TRƯỜNG SÓC SƠN MÊ LINH HÀ NỘI)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm P,Q,R lần lượt di động trên ba trục tọa độ Ox, Oy, Oz (không trùng với gốc tọa độ O) sao cho $\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OQ^2}+\frac{1}{OR^2}=\frac{1}{8}$. Biết mặt phẳng (PQR) luôn tiếp xúc với mặt cầu (S) cố định.

Đường thẳng d thay đổi nhưng luôn đi qua $M\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ và cắt (S) tại hai điểm A,B phân biệt. Diện tích lớn nhất của tam giác AOB là

A. $\sqrt{15}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\sqrt{17}$. **D.** $\sqrt{7}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm O trên mặt phẳng (PQR).

Dễ thấy $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OQ^2}+\frac{1}{OR^2}$ suy ra $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{8}$ hay $OH=2\sqrt{2}$.

Khi đó suy ra mặt phẳng (PQR) luôn tiếp xúc với mặt cầu (S) tâm O, bán kính $R=2\sqrt{2}$.

Ta có $OM=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+0}=1<R$ nên điểm M nằm trong mặt cầu (S).

Gọi I là trung điểm của AB, do tam giác OAB cân tại O nên $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}OI.AB$.

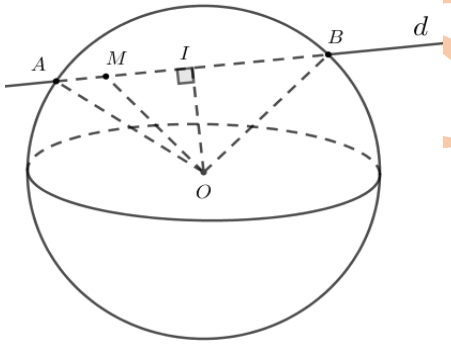
Đặt $OI=x$, vì $OI\le OM$ nên $0<x\le 1$ và $AB=2\sqrt{8-x^2}$.

Ta có $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}x.2\sqrt{8-x^2}=x\sqrt{8-x^2}=\sqrt{8x^2-x^4}$.

Xét hàm số $f(x)=8x^2-x^4$ với $0<x\le 1$.

Có $f'(x)=16x-4x^3=4x(4-x^2)>0$ với mọi $x\in(0;1]\Rightarrow f(x)\le f(1)=7$.

Suy ra diện tích của tam giác OAB lớn nhất bằng $\sqrt{7}$ đạt được khi M là trung điểm của AB.



Cách 2. $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}OI.AB=x\sqrt{8-x^2}=\sqrt{8x^2-x^4}=\sqrt{7x^2+x^2(1-x^2)}\le\sqrt{7}$ với $\forall x\in(0;1]$.

Câu 75: **(Đặng Thành Nam Đề 10)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta:\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{-1}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của m để phương trình $x^2+y^2+z^2-4x+2my-2(m+1)z+m^2+2m+8=0$ là phương trình của một mặt cầu (S) sao cho có duy nhất một mặt phẳng chứa Δ và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 1.

A. 1. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện của m để (S) là phương trình mặt cầu là

$2^2+(-m)^2+(m+1)^2-(m^2+2m+8)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>\sqrt{3}\\m<-\sqrt{3}\end{array}\right.$

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-m;m+1)$, $R=\sqrt{m^2-3}$

Gọi (P) là mặt phẳng chứa Δ và cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn (C) có bán kính $R_{(C)}=1$ thì mặt phẳng (P) có véctơ pháp tuyến $\vec{n}=(a;b;c)$ với $(a^2+b^2+c>0)$.

Vì mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ nên $\vec{n}.\vec{u}_{\Delta}=0$

$\Leftrightarrow a+3b-c=0\Leftrightarrow c=a+3b\Rightarrow\vec{n}=(a;b;a+3b)$

Mặt khác $A(3;1;2)\in(P)\Rightarrow(P):a(x-3)+b(y-1)+(a+3b)(z-2)=0$

Hay $(P): ax+by+(a+3b)z-5a-7b=0.$

Theo giả thiết $d(I,(P))=\sqrt{R^2-R_{(C)}^2}=\sqrt{m^2-3-1}=\sqrt{m^2-4}$

Vậy có điều kiện:

$$\frac{|2a-bm+(a+3b)(m+1)-5a-7b|}{\sqrt{a^2+b^2+(a+3b)^2}}=\sqrt{m^2-4}\Leftrightarrow\frac{|(m-2)(a+2b)|}{\sqrt{2a^2+10b^2+6ab}}=\sqrt{m^2-4}$$

+ Nếu $m=2$ đẳng thức luôn đúng, tức vô số mặt phẳng (loại).

+ Nếu $m\neq 2$ ta có

$$(m-2)(a+2b)^2=(m+2)(2a^2+10b^2+6ab)$$

$$\Leftrightarrow (m+6)a^2+2(m+10)ab+(6m+28)b^2=0$$

+ Nếu $m=-6\Rightarrow 8ab-8b^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b\\b=0\end{array}\right.$ có hai mặt phẳng (loại).

+ Nếu $m\neq -6$, điều kiện là

$$\Delta'_a=0\Leftrightarrow(m+10)^2-(m+6)(6m+28)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-2\\m=-\frac{34}{5}\end{array}\right.$$ (thoả mãn).

Vậy có hai giá trị thực của tham số m thoả mãn.

Câu 76: **(SỞ NAM ĐỊNH 2018-2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=16$ và $(S_2):(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$ cắt nhau theo giao tuyến là một đường tròn với tâm là $I(a;b;c)$. Tính $a+b+c$

A. $\frac{7}{4}$. **B.** $-\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{10}{3}$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Cách 1 : Mặt cầu (S_1) có tâm là $I_1(1;1;2)$

Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=16\\(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z-10=0\ (1)\\x^2+y^2+z^2+2x-4y+2z-3=0\ (2)\end{cases}$$

Lấy (2) trừ (1) ta được: $4x-2y+6z+7=0$ (P) $\Rightarrow$ đường tròn tâm I thuộc mặt phẳng (P).

Gọi d là đường thẳng đi qua I_1 và vuông góc với mặt phẳng (P).

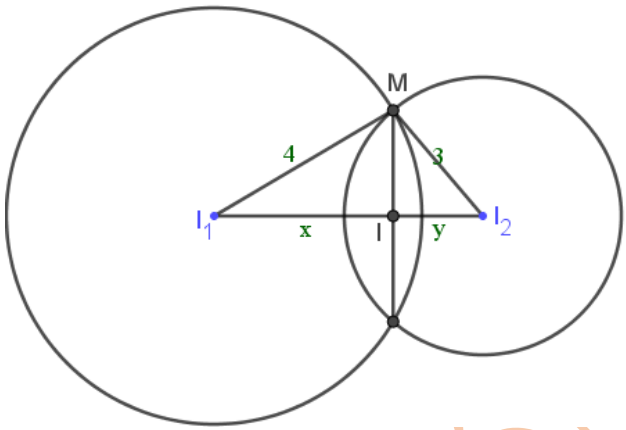
Phương trình đường thẳng d là: $\begin{cases}x=1+2t\\y=1-t\\z=2+3t\end{cases}$. Khi đó, $I=d\cap(P)$.

Xét hệ phương trình: $\begin{cases}4x-2y+6z+7=0\\x=1+2t\\y=1-t\\z=2+3t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{1}{2}\\y=\frac{7}{4}\\z=-\frac{1}{4}\\t=-\frac{3}{4}\end{cases}\Rightarrow I\left(-\frac{1}{2};\frac{7}{4};-\frac{1}{4}\right)$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Rightarrow a+b+c=-\frac{1}{2}+\frac{7}{4}-\frac{1}{4}=1.$

Cách 2 (Nguyễn Công Định): Mặt cầu (S_1) có tâm là $I_1(1;1;2)$, bán kính $R_1=4$; mặt cầu (S_2) có tâm là $I_2(-1;2;-1)$ bán kính $R_2=3\Rightarrow I_1I_2=\sqrt{14}$



Giả sử M là điểm thuộc đường tròn tâm I, $x=II_1, y=II_2$. Khi đó, $x+y=I_1I_2=\sqrt{14}$ và

$4^2-x^2=3^2-y^2\Leftrightarrow x^2-y^2=7\Leftrightarrow (x+y)(x-y)=7\Rightarrow x-y=\frac{\sqrt{14}}{2}$

$$\begin{cases} x+y=\sqrt{14} \\ x-y=\frac{\sqrt{14}}{2} \end{cases}\Rightarrow x=\frac{3\sqrt{14}}{4}\Rightarrow \overrightarrow{I_1I}=\frac{3}{4}\overrightarrow{I_1I_2}\Leftrightarrow \begin{cases} x_I-1=\frac{3}{4}.(-2) \\ y_I-1=\frac{3}{4}.1 \\ z_I-2=\frac{3}{4}.(-3) \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x_I=-\frac{1}{2} \\ y_I=\frac{7}{4} \\ z_I=\frac{-1}{4} \end{cases}$$

$\Rightarrow a+b+c=-\frac{1}{2}+\frac{7}{4}-\frac{1}{4}=1.$

Câu 77: **(Nguyễn Tất Thành Yên Bái)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(-3;3;-3)$ thuộc mặt phẳng $(\alpha):2x-2y+z+15=0$ và mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=100$. Đường thẳng Δ qua M, nằm trên mặt phẳng (α) cắt (S) tại A, B sao cho độ dài AB lớn nhất. Viết phương trình đường thẳng Δ.

A. $\frac{x+3}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{3}.$ **B.** $\frac{x+3}{1}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+3}{6}.$

C. $\frac{x+3}{16}=\frac{y-3}{11}=\frac{z+3}{-10}.$ **D.** $\frac{x+3}{5}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+3}{8}.$

Lời giải

Fb: Lê Như Quân

Chọn B

Ta có: Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;5)$, bán kính $R=10$.

$d(I,(\alpha))=\frac{|2.2-2.3+5+15|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=6<R\Rightarrow(\alpha)\cap(S)=C(H;r), H$ là hình chiếu của I lên (α)

.

Gọi Δ_1 là đường thẳng qua I và vuông góc với $(\alpha)\Rightarrow\Delta_1$ có VTCP là $\overrightarrow{u_{\Delta_1}}=(2;-2;1)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Rightarrow$ PTTS $\Delta_1: \begin{cases} x = 2+2t \\ y = 3-2t \\ z = 5+t \end{cases}$. Tọa độ H là nghiệm của hệ: $\begin{cases} x = 2+2t \\ y = 3-2t \\ z = 5+t \\ 2x-2y+z+15=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 7 \\ z = 3 \end{cases}$

$\Rightarrow H(-2;7;3)$.

Ta có AB có độ dài lớn nhất $\Leftrightarrow AB$ là đường kính của (C) $\Leftrightarrow \Delta \equiv MH$.

Đường thẳng MH đi qua $M(-3;3;-3)$ và có VTCP $\overrightarrow{MH} = (1;4;6)$.

Suy ra phương trình $\Delta: \dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z+3}{6}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

A - LÝ THUYẾT CHUNG

1 - Định nghĩa mặt cầu

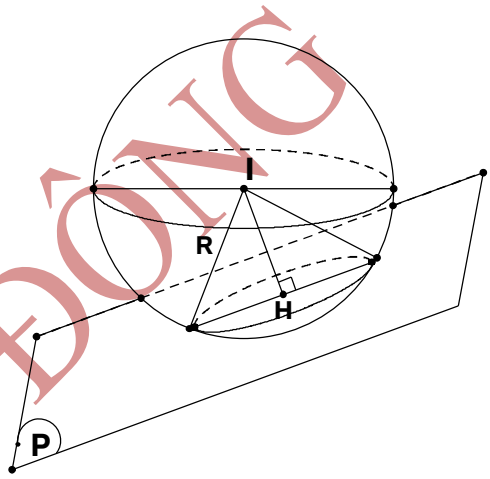
Tập hợp các điểm trong không gian cách điểm O cố định một khoảng cách R cho trước là mặt cầu tâm O và bán kính R. Kí hiệu $S(O;R)$.

Trong không gian với hệ trục $Oxyz$:

- Mặt cầu (S) tâm $I(a,b,c)$ bán kính R có phương trình là: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

- Phương trình: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$, với $a^2+b^2+c^2-d>0$ là phương trình mặt cầu tâm $I(a;b;c)$, bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

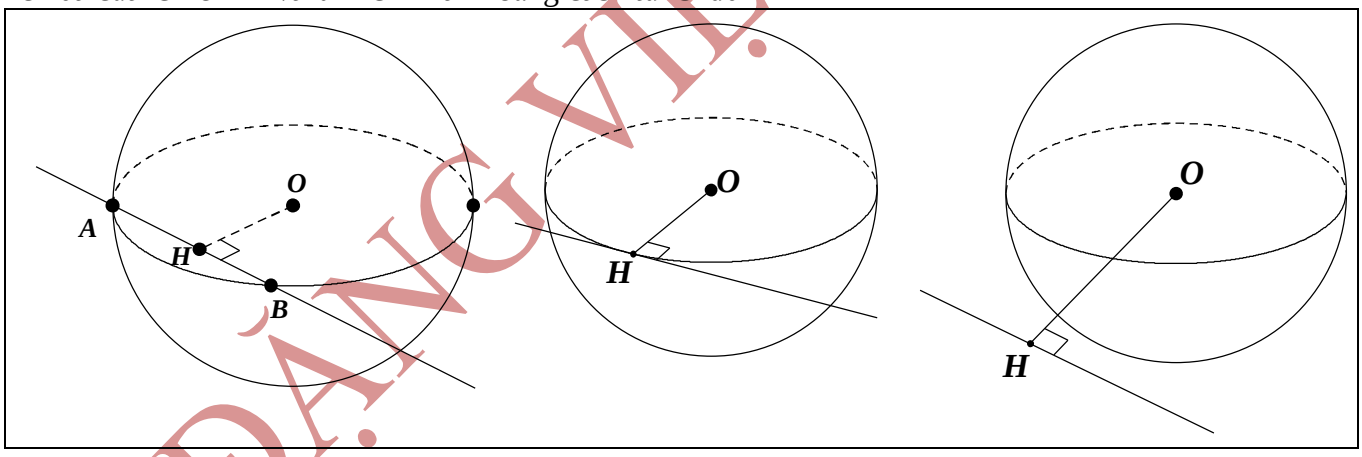
2 - Vị trí tương đối của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S)



- $d(I,(P))>R$ khi và chỉ khi (P) không cắt mặt cầu (S).
- $d(I,(P))=R$ khi và chỉ khi (P) tiếp xúc mặt cầu (S).
- $d(I,(P))<R$ khi và chỉ khi (P) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn nằm trên mặt phẳng (P) có tâm H và có bán kính $r=\sqrt{R^2-d^2}$.

3 - Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng

a) Cho mặt cầu $S(O;R)$ và đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu của O lên Δ và $d=OH$ là khoảng cách từ O đến Δ



- Nếu $d<R$ thì Δ cắt mặt cầu tại 2 điểm phân biệt (H.3.1)
- Nếu $d=R$ thì Δ cắt mặt cầu tại 1 điểm duy nhất (H.3.2)
- Nếu $d>R$ thì Δ không cắt mặt cầu (H.3.3)

B - CÁC DẠNG TOÁN VỀ PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Dạng 1. ***Biết trước tâm*** $I(a;b;c)$ ***và bán kính*** R***:*** Phương trình

$$S(I;R):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

Dạng 2. ***Tâm*** I ***và đi qua điểm*** A***:***

- Bán kính $R=IA$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

- Phương trình $S(I;R):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

Dạng 3. Mặt cầu đường kính AB

- Tâm I là trung điểm AB: $x_I=\frac{x_A+x_B}{2}; y_I=\frac{y_A+y_B}{2}; z_I=\frac{z_A+z_B}{2}$
- Bán kính $R=IA=\frac{AB}{2}$
- Phương trình $S(I;R):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

Dạng 4. Mặt cầu tâm $I(a;b;c)$ tiếp xúc mặt phẳng (α):

- Bán kính $R=d(I;\alpha)=\frac{|Aa+Bb+Cc+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$
- Phương trình $S(I;R):(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

Dạng 5. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ (đi qua 4 điểm A,B,C,D)

- Giả sử mặt cầu (S) có dạng: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ (2)
- Thế tọa độ của điểm A,B,C,D vào phương trình (2) ta được 4 phương trình
- Giải hệ phương trình tìm a,b,c,d
- Viết phương trình mặt cầu.

Dạng 6. Mặt cầu đi qua A,B,C và tâm $I\in(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$:

- Giả sử mặt cầu (S) có dạng: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ (2)
- Thế tọa độ của điểm A,B,C vào phương trình (2) ta được 3 phương trình
- $I(a;b;c)\in(\alpha)\Rightarrow Aa+Bb+Cc+D=0$
- Giải hệ 4 phương trình tìm a,b,c,d
- Viết phương trình mặt cầu.

Dạng 7. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm A,B và tâm thuộc đường thẳng d

Cách 1:

- Tham số hóa tọa độ tâm I theo đường thẳng d (tham số t)
- Ta có $A,B\in(S)\Leftrightarrow IA=IB=R\Leftrightarrow IA^2=IB^2$. Giải pt tìm ra $t\Rightarrow$ tọa độ I, tính được R.

Cách 2:

- Viết phương trình mặt phẳng trung trực (P) của đoạn thẳng AB.
- Tâm mặt cầu là giao của mặt phẳng trung trực trên và đường thẳng d (giải hệ tìm tọa độ tâm I)
- Bán kính $R=IA$. Suy ra phương trình mặt cầu cần tìm.

(Chú ý: Nếu $d\subset(P)$ hoặc $d//(P)$ thì không sử dụng được cách 2 này)

Dạng 8. Mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt cầu (T) cho trước:

- Xác định tâm J và bán kính R' của mặt cầu (T)
- Sử dụng điều kiện tiếp xúc của hai mặt cầu để tính bán kính R của mặt cầu (S).

(Xét hai trường hợp tiếp xúc trong và tiếp xúc ngoài)

Dạng 9. Mặt cầu (S') đối xứng Mặt cầu (S) qua mặt phẳng (P)

- Tìm điểm I' đối xứng với tâm I qua mp (P)
- Viết phương trình mặt cầu (S') tâm I' có bán kính $R'=R$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Dạng 10. Mặt cầu (S') đối xứng mặt cầu (S) qua đường thẳng d

- Tìm điểm I' đối xứng với tâm I qua mp d (xem cách làm ở phần đường thẳng)
- Viết phương trình mặt cầu (S') tâm I' có bán kính $R' = R$.

C – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: **(ĐH Vinh Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$ cho $M(2;1;4)$; $N(5;0;0)$; $P(1;-3;1)$. Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) đồng thời đi qua các điểm M, N, P. Tìm c biết $a+b+c<5$

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (Oyz) đồng thời đi qua các điểm M, N, P nên

$d(I;(Oyz)) = IM = IN = IP$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d(I;(Oyz)) = IM \\ IN = IM \\ IN = IP \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = (a-2)^2 + (b-1)^2 + (c-4)^2 \\ (a-5)^2 + b^2 + c^2 = (a-2)^2 + (b-1)^2 + (c-4)^2 \\ (a-5)^2 + b^2 + c^2 = (a-1)^2 + (b+3)^2 + (c-1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = (a-2)^2 + (b-1)^2 + (c-4)^2 \\ 3a - b - 4c = 2 \\ 4a + 3b - c = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 5 \\ b = -3 \\ c = 4 \end{cases}$$

So sánh với điều kiện $a+b+c<5$ ta có $c=2$

Câu 2: **(ĐH Vinh Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$ cho $A(-2;0;0)$; $B(0;-2;0)$; $C(0;0;-2)$. D là điểm khác O sao cho DA, DB, DC đôi một vuông góc. $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Tính $S = a+b+c$

A. -4. **B.** -1. **C.** -2. **D.** -3.

Lời giải

Chọn B

Gọi $D(x;y;z) \Rightarrow \overrightarrow{DA} = (x+2;y;z); \overrightarrow{DB} = (x;y+2;z); \overrightarrow{DC} = (x;y;z+2)$

Vì DA, DB, DC đôi một vuông góc nên

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB} = 0 \\ \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC} = 0 \\ \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+2) + y(y+2) + z^2 = 0 \\ x(x+2) + y^2 + z(z+2) = 0 \\ x^2 + y(y+2) + z(z+2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = -\frac{4}{3}$$

$I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ nên

$$\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \\ IA = ID \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+2)^2 + b^2 + c^2 = a^2 + (b+2)^2 + c^2 \\ (a+2)^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + (c+2)^2 \\ (a+2)^2 + b^2 + c^2 = \left(a+\frac{4}{3}\right)^2 + \left(b+\frac{4}{3}\right)^2 + \left(c+\frac{4}{3}\right)^2 \end{cases}$$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ a=c \\ 4a+4=8a+\dfrac{16}{3} \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=-\dfrac{1}{3}.$

Vậy $a+b+c=-1$.

Câu 3: **(THPT Nghèn Lần1)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;-1)$, $B(-3;-2;1)$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm I thuộc mặt phẳng (Oxy), bán kính $\sqrt{11}$ và đi qua hai điểm A, B. Biết I có tung độ âm, phương trình mặt cầu (S) là

A. $x^2+y^2+z^2+6y-2=0$. **B.** $x^2+y^2+z^2+4y-7=0$.

C. $x^2+y^2+z^2+4y+7=0$. **D.** $x^2+y^2+z^2+6y+2=0$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $I(a;b;0)\in(Oxy);\ b<0$.

Ta có $\overrightarrow{IA}=(1-a;-b;-1)$, $\overrightarrow{IB}=(-3-a;-2-b;1)$.

Do mặt cầu (S) hai điểm A, B nên $IA=IB=\sqrt{11}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} IA=IB \\ IA=\sqrt{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2=IB^2 \\ IA^2=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=-3 \\ (1-a)^2+b^2+1=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2a-3 \\ (1-a)^2+(-2a-3)^2-10=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-2a-3 \\ 5a^2+10a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2a-3 \\ \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=-2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0;b=-3 \\ a=-2;b=1 \end{array}\right.$.

Đối chiếu điều kiện ta có $I(0;-3;0)\Rightarrow (S):x^2+y^2+z^2+6y-2=0$.

Câu 4: **(SỞ PHÚ THỌ LẦN 2 NĂM 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2=9$ và mặt phẳng $(P):4x+2y+4z+7=0$. Hai mặt cầu có bán kính là R_1 và R_2 chứa đường tròn giao tuyến của (S) và (P) đồng thời cùng tiếp xúc với mặt phẳng $(Q):3y-4z-20=0$. Tổng R_1+R_2 bằng

A. $\dfrac{63}{8}$. **B.** $\dfrac{35}{8}$. **C.** 5. **D.** $\dfrac{65}{8}$.

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R=3$.

Gọi $(S)\cap(P)=(C)$ là đường tròn tâm K, bán kính

$r=\sqrt{R^2-d^2(O,(P))}=\sqrt{9-\left(\dfrac{7}{6}\right)^2}=\dfrac{5\sqrt{11}}{6}$.

Gọi d là đường thẳng qua O và vuông góc với (P). Khi đó $(d):\begin{cases} x=2t \\ y=t \\ z=2t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Gọi I là tâm mặt cầu chứa đường tròn giao tuyến của (S) và (P). Khi đó $I \in d$ $\Rightarrow I(2t;t;2t)$.

Theo bài ra $d(I,(Q)) = \sqrt{\left(d(I,(P))\right)^2 + r^2} \Leftrightarrow \dfrac{|3t-8t-20|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \sqrt{\dfrac{|8t+2t+8t+7|^2}{6^2} + \dfrac{275}{36}}$

$\Leftrightarrow 36|t+4|^2 = |18t+7|^2 + 275 \Leftrightarrow 288t^2 - 36t - 252 = 0 \Leftrightarrow 8t^2 - t - 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-\dfrac{7}{8}. \end{array}\right.$

Với $t=1 \Rightarrow d(I,(Q)) = 5$.

Với $t=-\dfrac{7}{8} \Rightarrow d(I,(Q)) = \dfrac{25}{8}$.

Vậy có hai mặt cầu chứa đường tròn giao tuyến của (S) và (P) đồng thời cùng tiếp xúc với mặt phẳng (Q), bán kính hai mặt cầu đó lần lượt là $R_1 = 5$, $R_2 = \dfrac{25}{8}$. Khi đó $R_1 + R_2 = \dfrac{65}{8}$.

Câu 5: **(THPT LƯƠNG THẾ VINH 2019LẦN 3)** Cho đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z-2}{1}$ và điểm $A(1;2;1)$. Tìm bán kính của mặt cầu có tâm I nằm trên d, đi qua A và tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x-2y+2z+1=0$.

A. $R=2$. **B.** $R=4$. **C.** $R=1$. **D.** $R=3$.

Lời giải

Chọn D

Tâm I nằm trên d nên $I(1+t;2-2t;2+t)$.

Mặt cầu đi qua A và tiếp xúc với mặt phẳng (P) nên $AI = d(I;(P)) = R$.

$AI = d(I;(P)) \Leftrightarrow \sqrt{t^2+4t^2+(t+1)^2} = \dfrac{|1+t-4+4t+4+2t+1|}{\sqrt{1+(-2)^2+2^2}}$

$\Leftrightarrow \sqrt{6t^2+2t+1} = \dfrac{|7t+2|}{3} \Leftrightarrow 9(6t^2+2t+1) = (7t+2)^2$.

$\Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow I(2;0;3)$.

Vậy bán kính mặt cầu $R = AI = 3$.

Câu 6: **(Chuyên Phan Bội Châu Lần2)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ và hai điểm $A(4;3;1)$, $B(3;1;3)$; M là điểm thay đổi trên (S). Gọi m, n là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất cảu biểu thức $P = 2MA^2 - MB^2$. Xác định $(m-n)$.

A. 64. **B.** 60. **C.** 68. **D.** 48.

Lời giải.

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-1)$ và bán kính $R=3$. Lấy điểm E sao cho $2\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BE} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow E(5;5;-1)$. Dễ thấy điểm E là điểm ngoài của (S).

Khi đó $P = 2MA^2 - MB^2 = 2\left(\overrightarrow{ME} - \overrightarrow{AE}\right)^2 - \left(\overrightarrow{ME} - \overrightarrow{BE}\right)^2 = ME^2 + 2AE^2 - BE^2$.

P lớn nhất và nhỏ nhất khi và chỉ khi ME lớn nhất và nhỏ nhất.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\max ME = IE + R = 8;\ \min ME = IE - R = 2$. Do đó

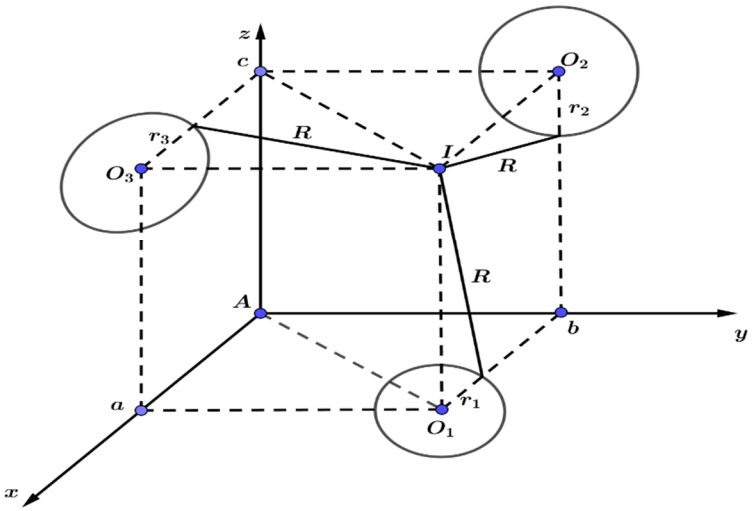
$m = \max P = 64 + 2AE^2 - BE^2;\ n = \min P = 4 + 2AE^2 - BE^2$ suy ra $m - n = 60$.

Câu 7: **(CHUYÊN NGUYỄN QUANG DIỆU ĐỒNG THÁP 2019 LẦN 2)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=4$ và điểm $A(1;1;-1)$. Ba mặt phẳng thay đổi đi qua A và đôi một vuông góc với nhau, cắt mặt cầu (S) theo ba giao tuyến là các đường tròn $(C_1),(C_2),(C_3)$. Tổng ba bán kính của ba đường tròn (C_1), (C_2), (C_3) là

A. 6. **B.** $4+\sqrt{3}$. **C.** $3\sqrt{3}$. **D.** $2+2\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B



Mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=4$ có tâm $I(1;1;-2)$ và bán kính $R=2$.

Vì ba mặt phẳng thay đổi qua $A(1;1;-1)$ và đôi một vuông góc với nhau nên ba mặt phẳng này cắt nhau theo ba giao tuyến là ba đường thẳng đôi một vuông góc với nhau tại A. Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ sao cho gốc tọa độ là điểm A và các trục tọa độ lần lượt trùng với các đường thẳng giao tuyến của ba mặt phẳng đã cho.

Gọi $I(a;b;c)$ là tọa độ tâm mặt cầu (S) ứng với hệ trục tọa độ $Axyz$.

Suy ra $IA=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=1\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=1$. Không mất tính tổng quát ta giả sử mặt cầu (S) cắt các mặt phẳng $(Axy),(Ayz),(Axz)$ theo các đường tròn lần lượt có tâm là O_1,O_2,O_3 tương ứng với bán kính là r_1,r_2,r_3.

Ta có $r_1^2=R^2-IO_1^2=4-c^2$, $r_2^2=R^2-IO_2^2=4-a^2$, $r_3^2=R^2-IO_3^2=4-b^2$.

Suy ra $r_1^2+r_2^2+r_3^2=12-\left(a^2+b^2+c^2\right)=12-1=11$

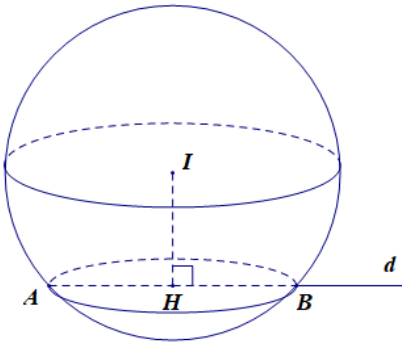
Câu 8: **(THPT LƯƠNG THẾ VINH 2019LẦN 3)** Cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$. Viết phương trình mặt cầu tâm $I(1;2;-1)$ cắt d tại các điểm A, B sao cho $AB=2\sqrt{3}$.

A. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=25$. **B.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=4$.

C. $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$. **D.** $(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$.

Lời giải

Chọn D



Đường thẳng d đi qua điểm $M(-1;2;2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(3;-2;2)$.

$\overrightarrow{IM}=(-2;0;3)\Rightarrow\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]=(6;13;4)$. Gọi H là trung điểm $AB\Rightarrow IH\perp AB$.

Khoảng cách từ tâm I đến đường thẳng d là: $IH=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|}=\dfrac{\sqrt{36+169+16}}{\sqrt{9+4+4}}=\sqrt{13}$.

Suy ra bán kính $R=\sqrt{IH^2+\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2}=\sqrt{13+3}=4$.

Phương trình mặt cầu tâm $I(1;2;-1)$ và có bán kính $R=4$ là

$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=16$.

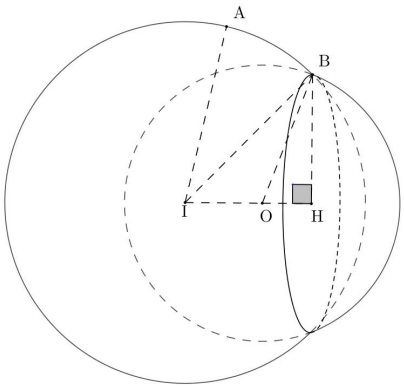
Câu 9: **(Đặng Thành Nam Đề 12)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2+y^2+z^2=1$ cắt mặt phẳng $(P):x+2y-2z+1=0$ theo giao tuyến là đường tròn (C). Mặt cầu chứa đường tròn (C) và qua điểm $A(1;1;1)$ có tâm là điểm $I(a;b;c)$, giá trị $a+b+c$ bằng

A. $0,5$. **B.** -1. **C.** $-0,5$. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có hình vẽ sau:



Mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2=1$ có tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R=OB=1$.

Khoảng cách từ điểm $O(0;0;0)$ đến mặt phẳng (P) là: $d(O,(P))=OH=\dfrac{1}{3}$.

Bán kính đường tròn giao tuyến (C) là: $r=BH=\sqrt{OB^2-OH^2}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Gọi d' là đường thẳng qua tâm $O(0;0;0)$ và vuông góc với mặt phẳng (P).

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Khi đó $d':\begin{cases}x=t\\y=2t\\z=-2t\end{cases}\ (t\in\mathbb{R})$ lại có điểm $I\in d'$ do ba điểm I,O,H thẳng hàng.

Suy ra $I(t;2t;-2t)$, $\overrightarrow{IA}=(t-1;2t-1;-2t-1)$, $IA=\sqrt{(t-1)^2+(2t-1)^2+(-2t-1)^2}$

Ta có:

$$IH=d(I,(P))=\frac{|t+4t+4t+1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{|9t+1|}{3},\ IB=\sqrt{BH^2+IH^2}=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2+\left(\frac{|9t+1|}{3}\right)^2}.$$

Mặt cầu chứa đường tròn (C) và qua điểm $A(1;1;1)$ có tâm là điểm $I(a;b;c)$ có bán kính

$$IA=IB\Leftrightarrow\sqrt{(t-1)^2+(2t-1)^2+(-2t-1)^2}=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2+\left(\frac{|9t+1|}{3}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow(t-1)^2+(2t-1)^2+(-2t-1)^2=\frac{8}{9}+\left(\frac{|9t+1|}{3}\right)^2\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}.$$

Suy ra tâm $I\left(\frac{1}{2};1;-1\right)$. Vậy $a+b+c=\frac{1}{2}$.

Cách 2.

Măt cầu chứa đường tròn $(C):\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\x+2y-2z+1=0\end{cases}$ có dạng:

$(S'):x^2+y^2+z^2-1+m(x+2y-2z+1)=0$

$A(1;1;1)\in(S')\Leftrightarrow 3-1+m(1+2-2+1)=0\Leftrightarrow m=-1.$

Vậy $(S'):x^2+y^2+z^2-x-2y+2z-1=0$. Suy ra tâm $I\left(\frac{1}{2};1;-1\right)$. Vậy $a+b+c=\frac{1}{2}$.

Câu 10: **(NGÔ SĨ LIÊN BẮC GIANG LẦN IV NĂM 2019)** Cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2(m+1)x+(2-m)y+2(m+1)z-6(m+2)=0$. Biết rằng khi m thay đổi mặt cầu (S) luôn chứa một đường tròn cố định. Tọa độ tâm I của đường tròn đó là

A. $I(1;2;1)$. **B.** $I(-1;-2;-1)$. **C.** $I(1;2;-1)$. **D.** $I(-1;-2;1)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $x^2+y^2+z^2-2(m+1)x+(2-m)y+2(m+1)z-6(m+2)=0$

$\Leftrightarrow(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2-15+m(-2x-y+2z-6)=0$

Khi đó đường tròn cố định (C) cần tìm là giao điểm của mặt phẳng

$(P):-2x-y+2z-6=0$ và mặt cầu $(S'):(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2-15=0$.

Mặt cầu (S') có tâm $J(1;-1;-1)$ nên độ tâm I của đường tròn (C) là hình chiếu vuông góc của J trên mặt phẳng (P).

Gọi Δ là đường thẳng qua J và vuông góc với (P), ta có: $\Delta:\frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z+1}{2}$

$I\in\Delta\Rightarrow I(-2t+1;-t-1;2t-1)$, mặt khác $I\in(P)$ nên $-2x_I-y_I+2z_I-6=0\Rightarrow t=1$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Vậy $I(-1;-2;1)$.

Câu 11: **(Sở Ninh Bình 2019 lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y-2z-3=0$ và mặt phẳng $(Q): x-2y-2z+6=0$. Gọi (S) là một mặt cầu tiếp xúc với cả hai mặt phẳng. Bán kính của (S) bằng.

A. 3. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Dễ thấy mặt phẳng (P) song song mặt phẳng (Q).

Lấy điểm $A(1;-1;0)\in(P)$. Ta có:

$$d\left((P);(Q)\right)=d\left(A;(Q)\right)=\frac{|1+2+6|}{\sqrt{1+4+4}}=3.$$

Do mặt cầu (S) tiếp xúc với hai mặt phẳng song song nên khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song đó chính bằng đường kính của (S).

Vậy mặt cầu (S) có bán kính là $R_{(S)}=\frac{3}{2}$.

Câu 12: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;2;0), B(-1;1;4)$ và $C(3;-2;1)$. Mặt cầu (S) tâm I đi qua A,B,C và độ dài $OI=\sqrt{5}$ (biết tâm I có hoành độ nguyên, O là gốc tọa độ). Bán kính mặt cầu (S) là

A. $R=1$ **B.** $R=3$ **C.** $R=4$ **D.** $R=\sqrt{5}$

Lời giải

Phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$

Vì 4 điểm O,A,B,C thuộc mặt cầu (S) nên ta có hệ:

$$\begin{cases}A\in(S)\\B\in(S)\\C\in(S)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4b+d+4=0\\-2a+2b+8c+d+18=0\\6a-4b+2c+d+14=0\end{cases}$$

$OI=\sqrt{5}\Leftrightarrow OI^2=5\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=5$

Suy ra $a=-1;b=0;c=-2;d=-4\Rightarrow R=3$

Chọn B

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho $A(1;0;0), B(2;-1;2), C(-1;1;-3)$. Viết phương trình mặt cầu có tâm thuộc trục Oy, đi qua A và cắt mặt phẳng (ABC) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất.

A. $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+z^2=\frac{5}{4}$. **B.** $x^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+z^2=\frac{5}{4}$.

C. $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+z^2=\frac{9}{4}$. **D.** $x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+z^2=\frac{5}{4}$

Lời giải

Mặt phẳng (ABC) có phương trình: $x-y-z-1=0$

Gọi (S) là mặt cầu có tâm $I\in Oy$ và cắt (ABC) theo một đường tròn bán kính r nhỏ nhất.

Vì $I\in Oy$ nên $I(0;t;0)$, gọi H là hình chiếu của I lên (ABC) khi đó là có bán kính

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

đường tròn giao của (ABC) và (S) là $r = AH = \sqrt{IA^2 - IH^2}$.

Ta có $IA^2 = t^2 + 1, IH = d\left(I,(ABC)\right) = \dfrac{|t+1|}{\sqrt{3}} \Rightarrow r = \sqrt{t^2+1-\dfrac{t^2+2t+1}{3}} = \sqrt{\dfrac{2t^2-2t+2}{3}}$.

Do đó, r nhỏ nhất khi và chỉ khi $t = \dfrac{1}{2}$. Khi đó $I\left(0;\dfrac{1}{2};0\right), IA^2 = \dfrac{5}{4}$

Vậy phương trình mặt cầu cần tìm là: $x^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 + z^2 = \dfrac{5}{4}$

Chọn A

Câu 14: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt cầu có tâm $I(1;2;3)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z}{2}$.

A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \dfrac{233}{9}$.

B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \dfrac{243}{9}$.

C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \dfrac{2223}{9}$.

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \dfrac{333}{9}$

Lời giải

+ Đường thẳng d đi qua $M(0;-2;0)$ có vec tơ chỉ phương $\vec{u} = (1;-2;2)$. Tính được $\overrightarrow{MI} = (1;4;3)$.

+ Khẳng định và tính được $d(I,d) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{MI},\vec{u}\right]\right|}{|\vec{u}|} = \dfrac{\sqrt{233}}{3}$

+ Khẳng định mặt cầu cần tìm có bán kính bằng $d(I,d)$ và viết phương trình:

$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \dfrac{233}{9}$

Chọn A

Câu 15: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 6z - 12 = 0$ và đường thẳng $d: x = 5 + 2t; y = 4; z = 7 + t$. Viết phương trình đường thẳng Δ tiếp xúc mặt cầu (S) tại điểm $M(5;0;1)$ biết đường thẳng Δ tạo với đường thẳng d một góc φ thỏa mãn $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$.

A. $\Delta: \begin{cases} x = 5+3t \\ y = -5t \\ z = 1-t \end{cases} \vee \Delta: \begin{cases} x = 5+13t \\ y = 5t \\ z = 1-11t \end{cases}$.

B. $\Delta: \begin{cases} x = 5+3t \\ y = -5t \\ z = 1-t \end{cases} \vee \Delta: \begin{cases} x = 5+13t \\ y = 5t \\ z = 1+11t \end{cases}$.

C. $\Delta: \begin{cases} x = 5+3t \\ y = 5t \\ z = 1-t \end{cases} \vee \Delta: \begin{cases} x = 5+13t \\ y = 5t \\ z = 1-11t \end{cases}$.

D. $\Delta: \begin{cases} x = 5+3t \\ y = -5t \\ z = 1-t \end{cases} \vee \Delta: \begin{cases} x = 5+13t \\ y = 5t \\ z = 1-21t \end{cases}$

Lời giải

$(S): (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 26 \Rightarrow (S)$ có tâm $I(2;-1;-3)$ và bán kính $R = \sqrt{26}$.

$\overrightarrow{IM} = (3;1;4), \overrightarrow{u_1} = (2;0;1)$ là 1 VTVP của (d)

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Giả sử $\overrightarrow{u_2}=(a;b;c)$ là 1 VTCP của đường thẳng $\Delta\left(a^2+b^2+c^2\neq 0\right)$

Do tiếp xúc mặt cầu (S) tại $M\Rightarrow \overrightarrow{IM}\perp\overrightarrow{u_2}\Leftrightarrow 3a+b+4c=0\Leftrightarrow b=-3a-4c\ (1)$

Mà góc giữa đường thẳng Δ và đường thẳng d bằng φ.

$$\Rightarrow\left|\cos\left(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right)\right|=\cos\varphi\Leftrightarrow\frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|}=\frac{1}{\sqrt{7}}\Leftrightarrow\frac{|2a+c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{7}}\quad(2)$$

Thay (1) vào (2) ta được:

$$\sqrt{7}|2a+c|=\sqrt{5}.\sqrt{a^2+(3a+4c)^2+c^2}\Leftrightarrow 7\left(4a^2+4ac+c^2\right)=5\left(a^2+9a^2+24ac+16c^2+c^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 22a^2+92ac+78c^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-3c\\a=-\frac{13}{11}c\end{array}\right.$$

Với $a=-3c$ do $a^2+b^2+c^2\neq 0$ nên chọn $c=-1\Rightarrow a=3;b=-5$

$\Rightarrow$ phương trình đường thẳng là: $\Delta:\left\{\begin{array}{l}x=5+3t\\y=-5t\\z=1-t\end{array}\right.$

Với $a=-\frac{13}{11}c$ do $a^2+b^2+c^2\neq 0$ nên chọn $c=-11\Rightarrow a=13;b=5$

$\Rightarrow$ phương trình đường thẳng là: $\Delta:\left\{\begin{array}{l}x=5+13t\\y=5t\\z=1-11t\end{array}\right.$

Chọn A

Câu 16: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-2}$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng d sao cho mặt cầu (S) tâm M tiếp xúc với trục Oz có bán kính bằng 2.

A. $M(2;0;-2)\vee M\left(\frac{6}{5};-\frac{8}{5};\frac{2}{5}\right)$.

B. $M(2;0;2)\vee M\left(\frac{6}{5};\frac{8}{5};\frac{2}{5}\right)$.

C. $M(2;0;-2)\vee M\left(\frac{7}{5};-\frac{8}{5};\frac{4}{5}\right)$.

D. $M(4;0;-2)\vee M\left(\frac{6}{5};-\frac{8}{5};\frac{2}{5}\right)$

Lời giải

Vì $M\in d\Rightarrow M(1+t;-2+2t;-2t)$. Trục Oz đi qua điểm $O(0;0;0)$ và có vtcp $\vec{k}=(0;0;1)$;

$\overrightarrow{OM}=(1+t;-2+2t;-2t)\Rightarrow\left[\overrightarrow{OM};\vec{k}\right]=(-2+2t;-1-t;0)$

$\Rightarrow\left|\left[\overrightarrow{OM};\vec{k}\right]\right|=\sqrt{5t^2-6t+5}$

Gọi R là bán kính mặt cầu (S), ta có: $R=d(M;Oz)=\sqrt{5t^2-6t+5}$

$$R=2\Rightarrow\sqrt{5t^2-6t+5}=2\Rightarrow 5t^2-6t+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=\frac{1}{5}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}M(2;-2;0)\\M\left(\frac{6}{5};-\frac{8}{5};\frac{2}{5}\right)\end{array}\right.$$

Chọn A

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng Δ_1,Δ_2 có phương trình: $\Delta_1:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-1}{2};\Delta_2:\frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{-1}$. Viết phương trình mặt cầu có bán kính nhỏ nhất và tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1,Δ_2?

A. $x^2+(y-2)^2+z^2=6$. **B.** $x^2+(y-2)^2-z^2=6$.

C. $x^2-(y-2)^2+z^2=6$. **D.** $x^2+(y+2)^2+z^2=6$

Lời giải

Mặt cầu có bán kính nhỏ nhất và tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1,Δ_2 là mặt cầu nhận đoạn vuông góc chung của Δ_1,Δ_2 làm đường kính. Giả sử mặt cầu cần lập là (S) và A,B lần lượt là tiếp điểm của (S) với Δ_1,Δ_2. Viết phương trình Δ_1,Δ_2 dưới dạng tham số thì ta có:

$A(2+m;1+4m;1+2m),B(-2+n;3+n;-1-n)$

Do AB là đoạn vuông góc chung của Δ_1,Δ_2 nên:

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{U_{\Delta_1}}=0\\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{U_{\Delta_2}}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3n-21m=0\\ 3n-m=0\end{cases}\Leftrightarrow m=n=0\Rightarrow A(2;1;1),B(-2;3;-1)$$

Trung điểm I của AB có tọa độ là $I(0;2;0)$ nên phương trình mặt cầu cần lập là:

$x^2+(y-2)^2+z^2=6$

Chọn A

Câu 18: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa trục Ox và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính bằng 3.

A. $(P):y-2z=0$. **B.** $(P):x-2z=0$. **C.** $(P):y+2z=0$. **D.** $(P):x+2z=0$

Lời giải

(S) có tâm $I(1;-2;-1)$ và bán kính $R=3$.

(P) chứa trục Ox và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính bằng 3 nên (P) chứa Ox và đi qua tâm I của mặt cầu.

Ta có: $\overrightarrow{OI}(1;-2;-1),(P)$ có vec tơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\vec{i},\overrightarrow{OI}\right]=(0;-1;-2)$ và (P) qua O.

Vậy $(P):y-2z=0$.

Chọn A

Câu 19: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}$ và cắt mặt phẳng $(P):x+2y+z-6=0$ tại điểm M. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I thuộc đường thẳng d và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm A, biết diện tích tam giác IAM bằng $3\sqrt{3}$ và tâm I có hoành độ âm.

A. $(S):(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=6$. **B.** $(S):(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=36$.

C. $(S):(x+1)^2-y^2-(z-1)^2=6$. **D.** $(S):(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=6$

Lời giải

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Một vec tơ chỉ phương của đường thẳng d là $\vec{u}(2;1;-1)$. Một vec tơ pháp tuyến của đường thẳng và mặt phẳng (P) là $\vec{n}=(1;2;1)$. Gọi δ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P).

Ta có $\sin\delta=\left|\cos\left(\vec{u},\vec{n}\right)\right|=\dfrac{|2+2-1|}{\sqrt{6}.\sqrt{6}}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\delta=\widehat{IMA}=30^0$

Gọi R bán kính mặt cầu $(S)\Rightarrow IA=R$. Tam giác IAM vuông tại A có

$\hat{IMA}=30^0\Rightarrow AM=R\sqrt{3}.S_{IMA}=3\sqrt{3}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}IA.AM=3\sqrt{3}\Rightarrow R=\sqrt{6}$

Giả sử: $I(1+2t;1+t;-t),t<\dfrac{1}{2}$

Từ giả thuyết ta có khoảng cách: $d\left(I,(P)\right)=R\Leftrightarrow\dfrac{|3t-3|}{\sqrt{6}}\Leftrightarrow t=-1\cup t=3$ (loại)

$\Rightarrow I(-1;0;1)$

Phương trình mặt cầu $(S):(x+1)^2+y^2+(z-1)^2=6.$

Chọn A

Câu 20: Trong không gian Oxyz cho 3 điểm $A(-13;-1;0),B(2;1;-2),C(1;2;2)$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-67=0.$ Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua qua A, song song với BC và tiếp xúc với mặt cầu $(S).(S)$ có tâm $I(1;2;3)$ và có bán kính $R=9.$

A. $(P):-2x+2y-z+28=0$ hoặc $(P):8x+4y+z-100=0$.

B. $(P):-2x+2y+z+28=0$ hoặc $(P):8x+4y+z+100=0$.

C. $(P):-2x+2y-z-28=0$ hoặc $(P):8x+4y+z+100=0$.

D. $(P):-2x+2y-2z+28=0$ hoặc $(P):8x+4y+z-1000=0$

Lời giải

Giả sử (P) có vtpt $\vec{n}=(A;B;C),\left(A^2+B^2+C^2\neq0\right),(P)//BC$ nên:

$\vec{n}\perp\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BC}=(-1;1;4)\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow A=B+4C\Rightarrow\vec{n}=(B+4C;B;C)$

(P) đi qua $A(13;-1;0)\Rightarrow$ phương trình: $(P):(B+4C)x+By+Cz-12B-52C=0$

(P) tiếp xúc với $(S)\Leftrightarrow d\left[I,(P)\right]=R\Leftrightarrow\dfrac{|B+4C+2B+3C-12B-52C|}{\sqrt{(B+4C)^2+B^2+C^2}}=9$

$\Leftrightarrow B^2-2BC-8C^2=0\Leftrightarrow(B+2C)(B-4C)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}B+2C=0\\B-4C=0\end{array}\right.$

Với $B+2C=0$ chọn $\begin{cases}B=2\\C=-1\end{cases}$, ta được phương trình: $(P):-2x+2y-z+28=0$

Với $B-4C=0$ chọn $\begin{cases}B=4\\C=1\end{cases}$, ta được phương trình: $(P):8x+4y+z-100=0$

Chọn A

Câu 21: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z-3=0,$ mặt phẳng $(P):x-y+z+1=0$ và hai điểm $A(-1;1;0),B(2;2;1).$ Viết phương trình mặt phẳng (α)

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

song song với AB, vuông góc với mặt phẳng (P) và cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn (C) có bán kính bằng $\sqrt{3}$.

A. $(\alpha): x-y-2z+1=0$ và mp $(\alpha): x-y-2z-11=0$.

B. $(\alpha): x-5y-2z+1=0$ và mp $(\alpha): x-y-2z-11=0$.

C. $(\alpha): x-y-2z+1=0$ và mp $(\alpha): x-5y-2z-11=0$.

D. $(\alpha): x-5y-2z+1=0$ và mp $(\alpha): x-5y-2z-11=0$

Lời giải

Pt (S) viết dưới dạng $(S): (x-2)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=9$

Suy ra (S) có tâm $I(2;-1;-1)$, bán kính $R=3$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;1;1)$ một VTPT của mặt phẳng (P) là $\vec{n}=(1;-1;1)$

Do đó $\left[\overrightarrow{AB}.\vec{n}\right]=(2;-2;4)\neq\vec{0}$

Gọi vec tơ là một VTPT của mặt phẳng (α). Ta có:

$\begin{cases}(\alpha)//AB\\(\alpha)\perp(P)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{u}\perp\overrightarrow{AB}\\\vec{u}\perp\vec{n}\end{cases}\Rightarrow\vec{u}$ cùng phương với $\left[\overrightarrow{AB}.\vec{n}\right]$.

Chọn $\vec{u}=\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AB}.\vec{n}\right]\Rightarrow\vec{u}=(1;-1;-2)$

Mặt phẳng (α) có một VTPT $\vec{u}$ nên phương trình có dạng $x-y-2z+D=0$

Gọi d là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (α) cắt (S) theo một đường tròn (C) có bán kính $r=\sqrt{3}$. Nên $d=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{9-3}=\sqrt{6}$

Ta có: $d=\sqrt{6}\Leftrightarrow\frac{|2-(-1)-2(-1)+D|}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}\Leftrightarrow|5+D|=6\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}D=1\\D=-11\end{array}\right.$

Với $D=1$ thì $(\alpha): x-y-2z+1=0$ không qua $A(-1;1;0)$ (vì $-1-1-2.0+1\neq 0$)

Nên $(\alpha)//AB$. Tương tự, mặt phẳng cũng song song với AB.

Vậy có hai mặt phẳng (α) thỏa mãn yêu cầu bài toán có phương trình:

$(\alpha): x-y-2z+1=0$ và mp $(\alpha): x-y-2z-11=0$.

Chọn A

Câu 22: Trong không gian Oxyz, cho hai điểm $A(2;0;0), B(0;2;0)$. Điểm C thuộc trục Ox sao cho tam giác ABC là tam giác đều, viết phương trình mặt cầu (S) có tâm O tiếp xúc với ba cạnh của tam giác ABC.

A. $(S): x^2+y^2+z^2=2$.

B. $(S): x^2+y^2+z^2=-2$.

C. $(S): x^2+y^2+z^2=\sqrt{2}$.

D. $(S): x^2+y^2+z^2=-\sqrt{2}$

Lời giải

Vì $C\in Oz\Rightarrow C(0;0;c)$ và tam giác ABC đều khi và chỉ khi:

$AB=AC=BC\Rightarrow AB^2=AC^2=BC^2\Leftrightarrow 2^2+2^2=2^2+c\Rightarrow c=\pm 2$

Vậy $C(0;0;2)$ hoặc $C(0;0;-2)$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Lập luận được tứ diện $OABC$ đều vì $OA=OB=OC=2$ và tam giác ABC đều.

Gọi I là trung điểm của AB thì $IO\perp AB$ tại

$I\Rightarrow OI=\frac{1}{2}AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{2}$

(Tam giác OAB vuông tại O)

Lập luận được mặt cầu (S) có tâm O tiếp xúc với 3 cạnh của tam giác ABC có bán kính $R=d(O,AB)=IO=\sqrt{2}.$

Do đó phương trình có mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2=2.$

Chọn A

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d:\frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{1}$ và mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=25.$ Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M(-1;-1;-2)$, cắt đường thẳng d và mặt cầu (S) tại hai điểm A,B sao cho $AB=8.$

A. $\Delta:\begin{cases}x=-1+6t\\y=-1+2t\\z=-2+9t\end{cases}.$

B. $\Delta:\begin{cases}x=-1-6t\\y=-1-2t\\z=-2+9t\end{cases}.$

C. $\Delta:\begin{cases}x=-1+6t\\y=1+2t\\z=2-9t\end{cases}.$

D. $\Delta:\begin{cases}x=-2+6t\\y=-3+2t\\z=-2+9t\end{cases}$

Lời giải

Gọi: $M_1=d\cap\Delta\Rightarrow M_1(2-t;1-2t;1+t)\Rightarrow\overrightarrow{MM_1}=(3-t;2-2t;3+t)$

Mặt cầu có tâm $I(-1;2;1)$

Mặt phẳng $(P):\begin{cases}qua\ I(-1;2;1)\\(P)\perp\Delta\end{cases}\Rightarrow(P):\begin{cases}qua\ I(-1;2;1)\\VTPT\ \overrightarrow{n_P}=\overrightarrow{MM_1}\end{cases}$

$\Rightarrow(P):(3-t)(x+1)+(2-2t)(y-2)+(3+t)(z-1)=0$

Gọi H là trung điểm AB thì $IH\perp AB, IH=3$

Do $IM=3\sqrt{2}\Rightarrow MH=3=d(M,(P))=\frac{|3t-15|}{\sqrt{6t^2-8t+22}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\t=\frac{3}{5}\end{array}\right.$

Với $t=-1\Rightarrow\Delta:\begin{cases}x=-1+2t\\y=-1+2t\\z=-2+t\end{cases}.$ Với $t=\frac{3}{5}\Rightarrow\Delta:\begin{cases}x=-1+6t\\y=-1+2t\\z=-2+9t\end{cases}.$

Chọn A

Câu 24: Trong không gian Oxyz, viết phương trình mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(Q):2x+y+2z+1=0$ tại $M(1;-1;-1)$ và tiếp xúc mặt phẳng $(P):x+2y-2z+8=0$

A. $\left[\begin{array}{l}(c):(x-3)^2+y^2+(z-1)^2=9\\(c):(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=9\end{array}\right.$.

B. $\left[\begin{array}{l}(c):(x+3)^2+y^2+(z+1)^2=9\\(c):(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=9\end{array}\right.$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

C. $\left[\begin{array}{l}(c):(x-3)^2+y^2+(z-1)^2=9\\(c):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}(c):(x-3)^2+y^2+(z-1)^2=81\\(c):(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=81\end{array}\right.$

Lời giải

Mặt phẳng (Q) có vec tơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;1;2)$. Đường thẳng d đi qua M và vuông góc với (Q)

có phương trình là $\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+t\\z=-1+2t\end{cases}$.

Lấy $I(1+2t;-1+t;-1+2t)\in d$

$MI=d(I,(P))\Leftrightarrow\sqrt{4t^2+t^2+4t^2}=\left|\dfrac{1+2t-2+2t+2-4t+8}{\sqrt{1+4+4}}\right|\Leftrightarrow t=\pm$

$t=1\Rightarrow I(3;0;1),R=3\Rightarrow(S):(x-3)^2+y^2+(z-1)^2=9$

$t=-1\Rightarrow I(-1;-2;-3),R=3\Rightarrow(S):(x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=9$

Chọn A

Câu 25: Trong không gian với hệ toạ độ Oxyz, cho 2 đường thẳng:

$\Delta_1:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{-3}$, $\Delta_2:\begin{cases}x=t\\y=2-t\\z=1+2t\end{cases}$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+2y-6z-5=0$

Viết phương trình mặt phẳng (α) song song với hai đường thẳng Δ_1,Δ_2 và cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là đường tròn (C) có chu vi bằng $\dfrac{2\sqrt{365}\pi}{5}$.

A. $x-5y-3z-4=0;\ x-5y-3z+10=0$

B. $x-5y-3z+10=0$

C. $x-5y-3z+3+\sqrt{511}=0;\ x-5y-3z+3-\sqrt{511}=0$

D. $x-5y-3z-4=0$

Chọn B

Lời giải

+ Δ_1 qua $M_1(2;-1;1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u_1}=(1;2;-3)$.

Δ_2 qua $M_2(0;2;1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u_2}=(1;-1;2)$.

+ Mặt phẳng (α) song song với Δ_1,Δ_2 nên có vectơ pháp tuyến: $\left[\vec{u_1},\vec{u_2}\right]=(1;-5;-3)$

$\Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (α) có dạng: $x-5y-3z+D=0$

+ Mặt cầu (S) có tâm I(1;−1;3) và bán kính $R=4$.

Gọi r là bán kính đường tròn (C), ta có: $2\pi r=\dfrac{2\sqrt{365}\pi}{5}\Rightarrow r=\dfrac{\sqrt{365}}{5}$

Khi đó: $d(I,(\alpha))=\sqrt{R^2-r^2}=\dfrac{\sqrt{35}}{5}\Rightarrow\dfrac{|D-3|}{\sqrt{35}}=\dfrac{\sqrt{35}}{5}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}D=-4\\D=10\end{array}\right.$

+ Phương trình mặt phẳng $(\alpha):x-5y-3z-4=0$ (1) hay $x-5y-3z+10=0$ (2).

Vì $\Delta_1//(\alpha),\Delta_2//(\alpha)$ nên M_1 và M_2 không thuộc $(\alpha)\Rightarrow$ loại (1).

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Vậy phương trình mặt phẳng (α) cần tìm là: $x-5y-3z+10=0$.

Chọn B

Câu 26: Trong không gian Oxyz, cho điểm $A(1,0,-1)$ và mặt phẳng $(P): x+y-z-3=0$. Mặt cầu S có tâm I nằm trên mặt phẳng (P), đi qua điểm A và gốc tọa độ O sao cho chu vi tam giác OIA bằng $6+\sqrt{2}$. Phương trình mặt cầu S là:

A. $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$ hoặc $(x+2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$.

B. $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$ hoặc $(x+1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=9$

C. $(x-2)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=9$ hoặc $(x-2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$

D. $(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$ hoặc $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+2)^2=9$

Lời giải

Gọi $I(x,y,z)$ là tâm của S.

Khi đó $I\in(P), IO=IA, IO+IA+AO=6+\sqrt{2}$ nên ta suy ra hệ

$$\begin{cases}\sqrt{(x-1)^2+y^2+(z+1)^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\\ 2\sqrt{x^2+y^2+z^2}+\sqrt{2}=6+\sqrt{2}\\ x+y-z-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x+z+1=0\\ x^2+y^2+z^2=9\\ x+y-z-3=0\end{cases}$$

Giải hệ ta tìm được $I(2,2,1)$ hoặc $I(-1,2,-2)$

Chọn D

Câu 27: Cho điểm $I(1;7;5)$ và đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-6}{-1}=\dfrac{z}{3}$. Phương trình mặt cầu có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho tam giác diện tích tam giác IAB bằng $2\sqrt{6015}$ là:

A. $(x-1)^2+(y-7)^2+(z-5)^2=2018$.

B. $(x-1)^2+(y-7)^2+(z-5)^2=2017$.

C. $(x-1)^2+(y-7)^2+(z-5)^2=2016$.

D. $(x-1)^2+(y-7)^2+(z-5)^2=2019$.

Lời giải

Gọi H là hình chiếu của $I(1;7;5)$ trên $d\Rightarrow H(0;0;-4)\Rightarrow IH=d(I;d)=2\sqrt{3}$

$$S_{\Delta AIB}=\frac{IH.AB}{2}\Rightarrow AB=\frac{2S_{\Delta AIB}}{IH}=\sqrt{8020}\Rightarrow R^2=IH^2+\left(\frac{AB}{2}\right)^2=2017$$

Vậy phương trình mặt cầu là: $(x-1)^2+(y-7)^2+(z-5)^2=2017$.

Chọn B

Câu 28: Cho điểm $I(0;0;3)$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=-1+t\\ y=2t\\ z=2+t\end{cases}$. Phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt đường thẳng d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB vuông là:

A. $x^2+y^2+(z-3)^2=\dfrac{3}{2}$.

B. $x^2+y^2+(z-3)^2=\dfrac{8}{3}$.

C. $x^2+y^2+(z-3)^2=\dfrac{2}{3}$.

D. $x^2+y^2+(z-3)^2=\dfrac{4}{3}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Lời giải

• Gọi $H(-1+t;2t;2+t)\in d$ là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng d

$\Rightarrow \overrightarrow{IH}=(-1+t;2t;-1+t)$

• Ta có vectơ chỉ phương của d : $\overrightarrow{a_d}=(1;2;1)$ và $IH\perp d$

$\Rightarrow \overrightarrow{IH}.\overrightarrow{a_d}=0\Leftrightarrow -1+t+4t-1+t=0\Leftrightarrow -2+6t=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{3}\Rightarrow H\left(-\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{7}{3}\right)$

$\Rightarrow IH=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

• Vì tam giác IAB vuông tại I và $IA=IB=R$. Suy ra tam giác IAB vuông cân tại I, do đó bán kính:

$R=IA=AB\cos 45^0=2IH.\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}IH=\sqrt{2}.\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

• Vậy phương trình mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z-3)^2=\frac{8}{3}$.

Chọn B

Câu 29: Cho điểm $A(2;5;1)$ và mặt phẳng $(P):6x+3y-2z+24=0$, H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng (P). Phương trình mặt cầu (S) có diện tích 784π và tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại H, sao cho điểm A nằm trong mặt cầu là:

A. $(x-8)^2+(y-8)^2+(z+1)^2=196$. **B.** $(x+8)^2+(y+8)^2+(z-1)^2=196$.

C. $(x+16)^2+(y+4)^2+(z-7)^2=196$. **D.** $(x-16)^2+(y-4)^2+(z+7)^2=196$.

Lời giải

• Gọi d là đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P). Suy ra $d:\begin{cases}x=2+6t\\y=5+3t\\z=1-2t\end{cases}$

• Vì H là hình chiếu vuông góc của A trên (P) nên $H=d\cap(P)$.

Vì $H\in d$ nên $H(2+6t;5+3t;1-2t)$.

• Mặt khác, $H\in(P)$ nên ta có: $6(2+6t)+3(5+3t)-2(1-2t)+24=0\Leftrightarrow t=-1$

Do đó, $H(-4;2;3)$.

• Gọi I,R lần lượt là tâm và bán kính mặt cầu.

Theo giả thiết diện tích mặt cầu bằng 784π, suy ra $4\pi R^2=784\pi\Rightarrow R=14$.

Vì mặt cầu tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại H nên $IH\perp(P)\Rightarrow I\in d$.

Do đó tọa độ điểm I có dạng $I(2+6t;5+3t;1-2t)$, với $t\neq -1$.

• Theo giả thiết, tọa độ điểm I thỏa mãn:

$$\begin{cases}d(I,(P))=14\\AI<14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{|6(2+6t)+3(5+3t)-2(1-2t)+24|}{\sqrt{6^2+3^2+(-2)^2}}=14\\\sqrt{(6t)^2+(3t)^2+(-2t)^2}<14\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-3\end{array}\right.\\-2<t<2\end{cases}\Leftrightarrow t=1$$

Do đó: $I(8;8;-1)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

• Vậy phương trình mặt cầu $(S):(x-8)^2+(y-8)^2+(z+1)^2=196$.

Chọn A

Câu 30: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=1\\y=1,t\in\mathbb{R};\\z=t\end{cases}$

$d_2:\begin{cases}x=2\\y=u\\z=1+u\end{cases}$, $u\in\mathbb{R}$; $\Delta:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{1}$. Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với cả d_1,d_2 và có tâm thuộc đường thẳng Δ?

A. $(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=1$.

B. $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(z-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{2}$.

C. $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(z-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$.

D. $\left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{4}\right)^2+\left(z-\dfrac{5}{4}\right)^2=\dfrac{9}{16}$.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1(1;1;0)$ và có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_{d_1}}=(0;0;1)$.

Đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2(2;0;1)$ và có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_{d_2}}=(0;1;1)$.

Gọi I là tâm của mặt cầu. Vì $I\in\Delta$ nên ta tham số hóa $I(1+t;t;1+t)$, từ đó

$$\overrightarrow{IM_1}=(-t;1-t;-1-t),\quad \overrightarrow{IM_2}=(1-t;-t;-t).$$

Theo giả thiết ta có $d(I;d_1)=d(I;d_2)$, tương đương với

$$\frac{\left|\left[\overrightarrow{IM_1};\overrightarrow{u_{d_1}}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_{d_1}}\right|}=\frac{\left|\left[\overrightarrow{IM_2};\overrightarrow{u_{d_2}}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_{d_2}}\right|}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{(1-t)^2+t^2}}{1}=\frac{\sqrt{2(1-t)^2}}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow t=0$$

Suy ra $I(1;0;1)$ và bán kính mặt cầu là $R=d(I;d_1)=1$. Phương trình mặt cầu cần tìm là

$$(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=1.$$

Câu 31: Cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2-2x+4z+1=0$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=2-t\\y=t\\z=m+t\end{cases}$. Tìm m để d cắt (S) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho các mặt phẳng tiếp diện của (S) tại A và tại B vuông góc với nhau.

A. $m=-1$ hoặc $m=-4$

B. $m=0$ hoặc $m=-4$

C. $m=-1$ hoặc $m=0$

D. Cả A,B,C đều sai

Lời giải

Để thỏa mãn yêu cầu đề bài thì trước tiên d phải cắt mặt cầu, tức là phương trình $(2-t)^2+t^2+(m+t)^2-2.(2-t)+4.(m+t)+1=0$ có hai nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow 3t^2+2(m+1)t+m^2+4m+1=0$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta'>0\Leftrightarrow(m+1)^2-3m^2-12m-3>0$

$\Leftrightarrow m^2+5m+1<0$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Với phương trình có hai nghiệm phân biệt, áp dụng định lí Viet ta có

$t_1t_2=\dfrac{m^2+4m+1}{3};t_1+t_2=\dfrac{-2}{3}(m+1)$

Khi đó $\overrightarrow{IA}=(1-t_1;t_1;m+2+t_1),\overrightarrow{IB}=(1-t_2;t_2;m+2+t_2)$.

Vậy $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}=(1-t_1)(1-t_2)+t_1t_2+(m+2+t_1)(m+2+t_2)=0$

$\Leftrightarrow 3t_1t_2+(m+1)(t_1+t_2)+(m+2)^2+1=0$

$\Leftrightarrow m^2+4m+1-\dfrac{2}{3}(m+1)^2+(m+2)^2+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-1\\m=-4\end{array}\right.$ (TM).

Chọn A

Câu 32: Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2+4x-6y+m=0$ và đường thẳng $(d):\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{2}$. Tìm m để (d) cắt (S) tại hai điểm M, N sao cho độ dài MN bằng 8.

A. $m=-24$ **B.** $m=8$ **C.** $m=16$ **D.** $m=-12$

Lời giải

(S) có tâm $I(-2;3;0)$ và bán kính $R=\sqrt{(-2)^2+3^2+0^2-m}=\sqrt{13-m}(m<13)$

Gọi H là trung điểm M, N $\Rightarrow MH=4$

Đường thẳng (d) qua $A(0;1;-1)$ và có vectơ chỉ phương

$\vec{u}=(2;1;2)\Rightarrow d(I;d)=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{AI}\right]\right|}{|\vec{u}|}=3$

Suy ra $R=\sqrt{MH^2+d^2(I;d)}=\sqrt{4^2+3^2}=5$

Ta có $\sqrt{13-m}=5\Leftrightarrow 13-m=25\Leftrightarrow m=-12$

Chọn D

Câu 33: Cho đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\beta):x+2y-2z-4=0$ $(\alpha):2x-2y-z+1=0$, và mặt cầu S có phương trình $x^2+y^2+z^2+4x-6y+m=0$. Tìm m để đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho AB = 8.

A. –9 **B.** –12 **C.** 5 **D.** 2

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{n_1}=(2;-2;-1)$, $\overrightarrow{n_2}=(1;2;-2)$ lần lượt là VTPT của (α) và (β)

Suy ra VTCP của đường thẳng d là $\vec{u}=\dfrac{1}{3}\left[\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}\right]=(2;1;2)$,

Ta có A(6;4;5) là điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (β) nên A∈d.

Mặt cầu (S) có tâm I(-2;3;0), bán kính $R=\sqrt{13-m}$ với m < 13.

$\overrightarrow{IA}=(8;1;5)\Rightarrow\left[\overrightarrow{IA},\vec{u}\right]=(-3;-6;6)\Rightarrow d(I,d)=3$

Gọi H là trung điểm của AB $\Rightarrow AH=\dfrac{AB}{2}=4$ và $IH=3$.

Trong tam giác vuông IHA ta có: $IA^2=IH^2+AH^2\Leftrightarrow R^2=9+16$

$\Leftrightarrow 13-m=25\Leftrightarrow m=-12$. Vậy m = –12 là giá trị cần tìm.

Chọn B

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 34: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;0;2), B(3;1;4), C(3;-2;1)$. Tìm tọa độ điểm S, biết SA vuông góc với (ABC), mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$ có bán kính bằng $\frac{3\sqrt{11}}{2}$ và S có cao độ âm.

A. $S(-4;-6;4)$. **B.** $S(3;4;0)$. **C.** $S(2;2;1)$. **D.** $S(4;6;-4)$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;1;2); \overrightarrow{AC}=(2;-2;-1)$, suy ra $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$.

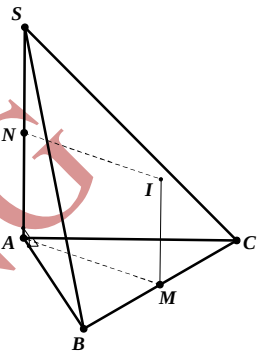
Tam giác ABC vuông nên I và S có thể sử dụng các tính chất của phép dựng tâm để tính.

Tính được IM.

$MI\perp(ABC)\Rightarrow\overrightarrow{MI}=k\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\to k$

$\overrightarrow{AS}=2\overrightarrow{MI}$, *tìm S.*

$\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(3;6;-6)$



Gọi $M\left(3;\frac{-1}{2};\frac{5}{2}\right)$ là trung điểm BC. Ta có:

$IM^2=IB^2-BM^2=\left(\frac{3\sqrt{11}}{2}\right)^2-\frac{9}{2}=\frac{81}{4}\Rightarrow IM=\frac{9}{2}$

$MI\perp(ABC)\Rightarrow\overrightarrow{MI}=k\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=k(3;6;-6)\Rightarrow MI=9|k|$. Suy ra $\frac{9}{2}=9|k|\Leftrightarrow k=\pm\frac{1}{2}$

$k=\frac{1}{2}$ thì $\overrightarrow{AS}=2\overrightarrow{MI}=(3;6;-6)\Rightarrow S(4;6;-4)$

Chọn D

Câu 35: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;0;4)$, điểm M nằm trên mặt phẳng (Oxy) và $M\neq O$. Gọi D là hình chiếu vuông góc của O lên AM và E là trung điểm của OM. Biết đường thẳng DE luôn tiếp xúc với một mặt cầu cố định. Tính bán kính mặt cầu đó.

A. $R=2$. **B.** $R=1$. **C.** $R=4$. **D.** $R=\sqrt{2}$.

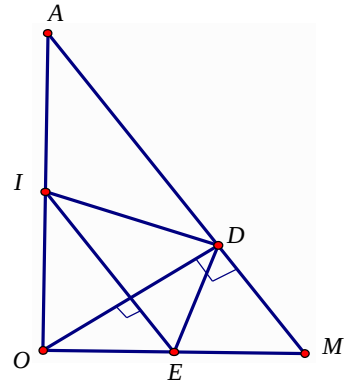
Lời giải

Chọn A

Ta có tam giác OAM luôn vuông tại O.

Gọi I là trung điểm của OA (Điểm I cố định)

Ta có tam giác ADO vuông tại D có ID là đường trung tuyến nên $ID=\frac{1}{2}OA=2\ (1)$



Ta có IE là đường trung bình của tam giác OAM nên IE song song với AM mà $OD\perp AM\Rightarrow OD\perp IE$

Mặt khác tam giác EOD cân tại E. Từ đó suy ra IE là đường trung trực của OD

Nên

$\widehat{DOE}=\widehat{ODE};\widehat{IOD}=\widehat{IDO}\Rightarrow\widehat{IDE}=\widehat{IOE}=90^\circ\Rightarrow ID\perp DE\ (2)$

Vậy DE luôn tiếp xúc với mặt cầu tâm I bán kính $R=\frac{OA}{2}=2$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 36: Trong không gian tọa độ Oxyz cho điểm $A(0;1;1), B(1;0;-3), C(-1;-2;-3)$ và mặt cầu (S) có phương trình: $x^2+y^2+z^2-2x+2z-2=0$.Tìm tọa độ điểm D trên mặt cầu (S) sao cho tứ diện $ABCD$ có thể tích lớn nhất.

A. $D\left(\frac{7}{3};-\frac{4}{3};-\frac{1}{3}\right)$ **B.** $D\left(\frac{-1}{3};\frac{4}{3};\frac{-5}{3}\right)$ **C.** $D\left(\frac{7}{3};\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$ **D.** $D\left(\frac{7}{3};-\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$

Lời giải

Ta có (S): $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4$ suy ra (S) có tâm I(1;0;-1), bán kính $R=2$

Và $\overrightarrow{AB}=(1;-1;-4); \overrightarrow{AC}=(-1;-3;-4)$

Mặt phẳng (ABC) có một vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-8;8;-4)$

Suy ra mp(ABC) có phương trình: $-8x+8(y-1)-4(z-1)=0 \Leftrightarrow 2x-2y+z+1=0$

Ta có $V_{ABCD}=\frac{1}{3}d(D;(ABC)).S_{ABC}$ nên V_{ABCD} lớn nhất khi và chỉ khi $d(D;(ABC))$ lớn nhất.

Gọi D_1D_2 là ***đường kính*** của mặt cầu (S) *vuông góc* với mp(ABC). Ta thấy với D là 1 điểm bất kỳ thuộc (S) thì $d(D;(ABC)) \le \max\{d(D_1;(ABC)); d(D_2;(ABC))\}$.

Dấu "=" xảy ra khi D trùng với D_1 hoặc D_2

Đường thẳng D_1D_2 đi qua I(1;0;-1), và có VTCP là $\vec{n}_{ABC}=(2;-2;1)$

Do đó (D_1D_2) có phương trình: $\begin{cases}x=1+2t\\y=-2t\\z=-1+t\end{cases}$.

Tọa độ điểm D_1 và D_2 thỏa mãn hệ: $\begin{cases}x=1+2t\\y=-2t\\z=-1+t\\(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=4\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}t=\frac{2}{3}\\t=\frac{-2}{3}\end{array}\right.$

$\Rightarrow D_1\left(\frac{7}{3};\frac{-4}{3};\frac{-1}{3}\right) \& D_2\left(\frac{-1}{3};\frac{4}{3};\frac{-5}{3}\right)$

Ta thấy: $d(D_1;(ABC))>d(D_2;(ABC))$. Vậy điểm $D\left(\frac{7}{3};-\frac{4}{3};-\frac{1}{3}\right)$ là điểm cần tìm

Chọn D

Câu 37: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-1}$ và mặt cầu (S) tâm I có phương trình $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=18$. Đường thẳng d cắt (S) tại hai điểm A, B. Tính diện tích tam giác IAB.

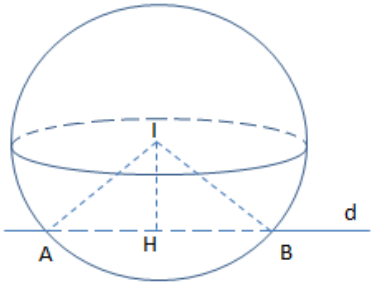
A. $\frac{8\sqrt{11}}{3}$. **B.** $\frac{16\sqrt{11}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{11}}{6}$. **D.** $\frac{8\sqrt{11}}{9}$.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng d đi qua điểm $C(1;0;-3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-1;2;-1)$

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;-1)$, bán kính $R=3\sqrt{2}$



ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng d.

Khi đó: $IH=\dfrac{\left\|\left[\overrightarrow{IC},\vec{u}\right]\right\|}{\left|\vec{u}\right|}$, với $\overrightarrow{IC}=(0;-2;-2)$; $2x+y-3z-4=0$

Vậy $IH=\dfrac{\sqrt{6^2+2^2+2^2}}{\sqrt{1+4+1}}=\dfrac{\sqrt{66}}{3}$

Suy ra $HB=\sqrt{18-\dfrac{22}{3}}=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

Vậy, $S_{\Delta IAB}=\dfrac{1}{2}IH\cdot AB=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{66}}{3}\cdot\dfrac{8\sqrt{6}}{3}=\dfrac{8\sqrt{11}}{3}$.

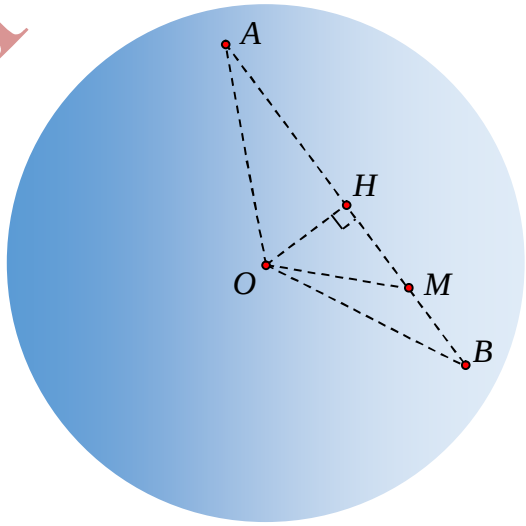
Câu 38: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2=8$. Đường thẳng d thay đổi, đi qua điểm M, cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt. Tính diện tích lớn nhất S của tam giác OAB.

A. $S=\sqrt{7}$. **B.** $S=4$. **C.** $S=2\sqrt{7}$. **D.** $S=2\sqrt{2}$.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R=2\sqrt{2}$.

Vì $OM=1<R$ nên M thuộc miền trong của mặt cầu (S). Gọi A, B là giao điểm của đường thẳng với mặt cầu. Gọi H là chân đường cao hạ từ O của tam giác OAB.



Đặt $x=OH$, ta có $0<x\le OM=1$, đồng thời $HA=\sqrt{R^2-OH^2}=\sqrt{8-x^2}$. Vậy diện tích tam giác OAB là

$$S_{OAB}=\frac{1}{2}OH.AB=OH.HA=x\sqrt{8-x^2}.$$

Khảo sát hàm số $f(x)=x\sqrt{8-x^2}$ trên $(0;1]$, ta được $\max\limits_{(0;1]}f(x)=f(1)=\sqrt{7}$.

Vậy giá trị lớn nhất của $S_{\Delta OAB}=\sqrt{7}$, đạt được khi $x=1$ hay $H\equiv M$, nói cách khác là $d\perp OM$.

Chọn A

Câu 39: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;11;-5)$ và mặt phẳng $(P):2mx+\left(m^2+1\right)y+\left(m^2-1\right)z-10=0$. Biết rằng khi m thay đổi, tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (P) và cùng đi qua A. Tìm tổng bán kính của hai mặt cầu đó.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $5\sqrt{2}$. **C.** $7\sqrt{2}$. **D.** $12\sqrt{2}$.

Lời giải

Gọi $I(a;b;c),r$ lần lượt là tâm và bán kính của mặt cầu. Do mặt cầu tiếp xúc với (P) nên ta có

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$$r=d\left(I,(P)\right)=\frac{\left|2ma+\left(m^2+1\right)b+\left(m^2-1\right)c-10\right|}{\left(m^2+1\right)\sqrt{2}}=\frac{\left|(b-c)m^2+2ma+b-c-10\right|}{\left(m^2+1\right)\sqrt{2}}$$

$$\left|(b+c)m^2+2ma+b-c-10\right|=r\left(m^2+1\right)\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(b+c-r\sqrt{2}\right)m^2+2ma+b-c-r\sqrt{2}-10=0 \quad (1)\\ \left(b+c+r\sqrt{2}\right)m^2+2ma+b-c+r\sqrt{2}-10=0 \quad (2)\end{array}\right.$$

TH1: $\left(b+c-r\sqrt{2}\right)m^2+2ma+b-c-r\sqrt{2}-10=0 \quad (1)$

Do m thay đổi vẫn có mặt cầu cố định tiếp xúc với (P) nên yêu cầu bài toán trờ thành tìm điều kiện a,b,c sao cho (1) không phụ thuộc vào m. Do đó (1) luôn đúng với mọi

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}b+c-r\sqrt{2}=0\\ a=0\\ b-c-r\sqrt{2}-10=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}b=r\sqrt{2}+5=0\\ a=0\\ c=-5\end{array}\right.$$ Suy ra $I\left(0;5+r\sqrt{2};-5\right)\Rightarrow(S):x^2+\left(y-5-r\sqrt{2}\right)^2+(z+5)^2=r^2.$

Lại có $A\in(S)$ nên suy ra: $4+\left(-11-5-r\sqrt{2}\right)^2=r^2\Leftrightarrow r^2-12\sqrt{2}r+40=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}r=2\sqrt{2}\\ r=10\sqrt{2}\end{array}\right.$

TH2: $\left(b+c+r\sqrt{2}\right)m^2+2ma+b-c+r\sqrt{2}-10=0$ làm tương tự TH1 (trường hợp này không thỏa đề bài)

Tóm lại: Khi m thay đổi, tồn tại hai mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (P) và cùng đi qua A và có tổng bán kính là: $12\sqrt{2}$ suy ra chọn D

Câu 40: Cho hình chóp SABC có đáy là tam giác đều cạnh bằng $6cm$ và $SA=SB=SC=4\sqrt{3}(cm)$ .Gọi D là điểm đối xứng của B qua **C.** Khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABD bằng?

A. $5cm$ **B.** $3\sqrt{2}cm$ **C.** $\sqrt{26}cm$ **D.** $\sqrt{37}cm$

Lời giải

Cách 1: Dựng CG vuông góc với (ABC), Qua E dựng mặt phẳng vuông góc với SB, mặt phẳng này cắt CG tại F. Suy ra F là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.AB**D.** Đặt $SF=R$

Xét hình chữ nhật:

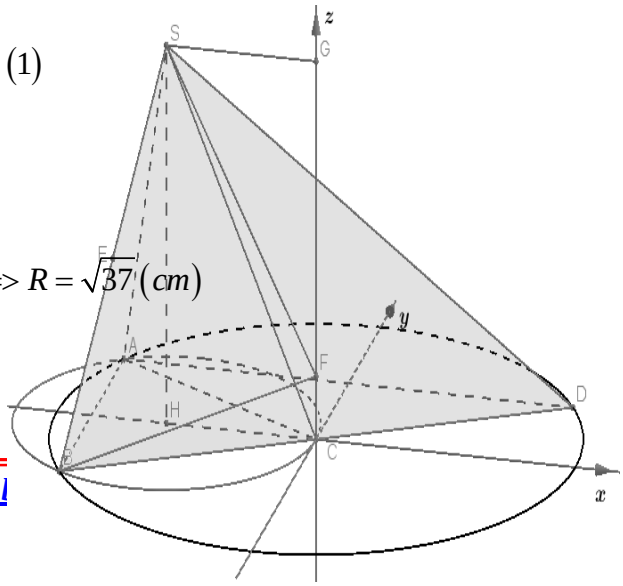
$$FGSH\Rightarrow FC=SH-FG=SH-\sqrt{R^2-CH^2}\ (1)$$

Lại có: $FC=\sqrt{R^2-CB^2}\ (2)$.Từ (1) và (2)

suy ra $SH-\sqrt{R^2-CH^2}=\sqrt{R^2-CB^2}$

$$6-\sqrt{R^2-12}=\sqrt{R^2-36}\Rightarrow 5-\sqrt{R^2-12}=0\Rightarrow R=\sqrt{37}(cm)$$

Suy ra chọn D



Cách 2:

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Ta có: $C(0;0;0), A(-3\sqrt{3};-3;0), B(-3\sqrt{3};3;0), S(-2\sqrt{3};0;6)$

$F \in CG \Rightarrow F(0;0;t) \Rightarrow FA = FS \Leftrightarrow \sqrt{36+t^2} = \sqrt{12+(t-6)^2}$

$\Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow SC = \sqrt{37}(cm)$ suy ra chọn D

Câu 41: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{4}$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 2$. Hai mặt phẳng (P) và (Q) chứa d và tiếp xúc với (S). Gọi M, N là tiếp điểm. Tính độ dài đoạn thẳng MN.

A. $2\sqrt{2}$. **B.** $\frac{4}{\sqrt{3}}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

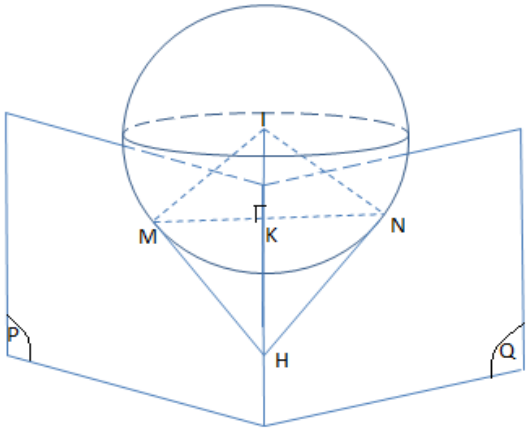
Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;1), R = \sqrt{2}$

Đường thẳng d nhận $\vec{u} = (2;-1;4)$ làm vectơ chỉ phương

Gọi H là hình chiếu của I lên đường thẳng d. $H \in d \Leftrightarrow H(2t+2;-t;4t)$

Lại có:

$\vec{IH}.\vec{u} = 0 \Leftrightarrow (2t+1;-t-2;4t-1).(2;-1;4) = 0 \Leftrightarrow 2(2t+1)+t+2+4(4t-1) = 0 \Leftrightarrow t = 0$



Suy ra tọa độ điểm $H(2;0;0)$.

Vậy $IH = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

Suy ra: $HM = \sqrt{6-2} = 2$

Gọi K là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng HI.

Suy ra: $\frac{1}{MK^2} = \frac{1}{MH^2} + \frac{1}{MI^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

Suy ra: $MK = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow MN = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

Câu 42: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, trong đó $a>0$, $b>0$, $c>0$ và $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=7$. Biết mặt phẳng (ABC) tiếp xúc với mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=\frac{72}{7}$. Thể tích của khối tứ diện $OABC$ là

A. $\frac{2}{9}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{5}{6}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Ta có $(ABC):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=\sqrt{\frac{72}{7}}$.

Mặt phẳng (ABC) tiếp xúc **với** $(S)\Leftrightarrow d(I;(ABC))=R\Leftrightarrow\frac{\left|\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=\sqrt{\frac{72}{7}}$.

Mà $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=7\Rightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{7}{2}$.

Áp dụng BĐT Bunhiacopski ta có

$$\left(1^2+2^2+3^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\ge\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\right)^2=7^2\Rightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge\frac{7}{2}.$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{\frac{1}{a}}{1}=\frac{\frac{2}{b}}{1}=\frac{\frac{3}{c}}{1}\\ \frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=7\end{cases}\Leftrightarrow a=2,\ b=1,\ c=\frac{2}{3}$, khi đó $V_{OABC}=\frac{1}{6}abc=\frac{2}{9}$.

Cách 2: Ta có $(ABC):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3), R=\sqrt{\frac{72}{7}}$.

Ta có (ABC) tiếp xúc với mặt cầu $(S)\Leftrightarrow d(I,(P))=R\Leftrightarrow\frac{\left|\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}-1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=\sqrt{\frac{72}{7}}$

$$\Leftrightarrow\frac{|7-1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}=\sqrt{\frac{72}{7}}\Leftrightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{7}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=7-\frac{7}{2}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}-\frac{7}{2}\Leftrightarrow\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-1\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{3}{2}\right)^2=0\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=1\\ c=\frac{2}{3}\end{cases}$$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Rightarrow V_{OABC}=\frac{1}{6}abc=\frac{2}{9}.$

Cách 3: Giống **Cách 2** khi đến $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{7}{2}$.

Đến đây ta có thể tìm a, b, c bằng bất đẳng thức như sau:

Ta có

$$7^2=\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}\right)^2=\left(1.\frac{1}{a}+2.\frac{1}{b}+3.\frac{1}{c}\right)^2\le\left(1^2+2^2+3^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\Rightarrow\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\ge\frac{7}{2}$$

Mà $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{7}{2}\Rightarrow$ Dấu "=" của BĐT xảy ra $\frac{\frac{1}{a}}{1}=\frac{\frac{1}{b}}{2}=\frac{\frac{1}{c}}{3}$, kết hợp với giả thiết $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=7$ ta được $a=2$, $b=1$, $c=\frac{2}{3}$. Vậy: $V_{OABC}=\frac{1}{6}abc=\frac{2}{9}$.

Ta có $\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\\c=\frac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow V_{OABC}=\frac{1}{6}abc=\frac{2}{9}.$

Cách 4: Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=\sqrt{\frac{72}{7}}$.

Phương trình mặt phẳng $(ABC):\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$

Ta có: $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}=7\Leftrightarrow\frac{\frac{1}{7}}{a}+\frac{\frac{2}{7}}{b}+\frac{\frac{3}{7}}{c}=1$ nên $M\left(\frac{1}{7};\frac{2}{7};\frac{3}{7}\right)\in(ABC)$

Thay tọa độ $M\left(\frac{1}{7};\frac{2}{7};\frac{3}{7}\right)$ vào phương trình mặt cầu (S) ta thấy đúng nên $M\in(S)$.

Suy ra: (ABC) tiếp xúc với (S) thì M là tiếp điểm.

Do đó: (ABC) qua $M\left(\frac{1}{7};\frac{2}{7};\frac{3}{7}\right)$, có VTPT là $\overrightarrow{MI}=\left(\frac{6}{7};\frac{12}{7};\frac{18}{7}\right)\to\vec{n}=(1;2;3)$

(ABC) có phương trình: $x+2y+3z-2=0\Leftrightarrow\frac{x}{2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{\frac{2}{3}}=1\Rightarrow a=2,\ b=1,\ c=\frac{2}{3}.$

Vậy $V=\frac{1}{6}abc=\frac{2}{9}$

Câu 43: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, xét các điểm $A(0;0;1)$, $B(m;0;0)$, $C(0;n;0)$ và $D(1;1;1)$, với $m>0, n>0$ và $m+n=1$. Biết rằng khi m,n thay đổi, tồn tại một mặt cầu cố định tiếp xúc với mặt phẳng (ABC) và đi qua D. Tính bán kính R của mặt cầu đó.

A. $R=1$. **B.** $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $R=\frac{3}{2}$. **D.** $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Tư duy giảm ẩn, rút $n=1-m$ ta được:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$(ABC):\frac{x}{m}+\frac{y}{1-m}+\frac{z}{1}-1=0 \Leftrightarrow (1-m)x+my+(m-m^2)z-m+m^2=0$.

Gọi tâm mặt cầu $I(x_0;y_0;z_0)$ ta có điều kiện theo bài toán: $R=d(I,(ABC))$. Vì vậy

$$R=\frac{\left|(1-m)x_0+my_0+(m-m^2)z_0-m+m^2\right|}{\sqrt{(1-m)^2+m^2+(m-m^2)^2}}=\frac{\left|(1-m)x_0+my_0+(m-m^2)z_0-m+m^2\right|}{m^2-m+1}.$$

Ta cần chọn $(x_0;y_0;z_0)$ sao cho $(1-m)x_0+my_0+(m-m^2)z_0-m+m^2=k(m^2-m+1),\forall m$

$\Leftrightarrow (1-z_0)m^2+(-x_0+y_0+z_0-1)m+x_0=km^2-km+k,\forall m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}1-z_0=k\\-x_0+y_0+z_0-1=-k\\x_0=k\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x_0=k\\y_0=k\\z_0=1-k\end{cases}.$$

Vì vậy $I(k;k;1-k)$ và

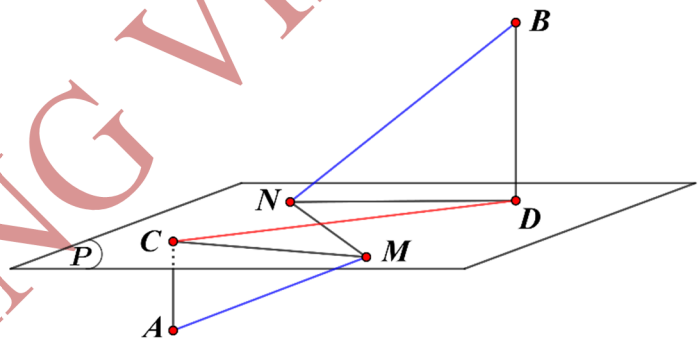
$R=|k|=ID=\sqrt{(k-1)^2+(k-1)^2+(1-k-1)^2} \Leftrightarrow k=1\Rightarrow R=1$.

Câu 44: **(THPT-Chuyên-Sơn-La-Lần-1-2018-2019-Thi-tháng-4)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;0;0)$ và $B(2;3;4)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1):(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=4$ và $(S_2):x^2+y^2+z^2+2y-2=0$. Xét M, N là hai điểm bất kỳ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MN=1$. Giá trị nhỏ nhất của $AM+BN$ bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A



• Xét hệ $\begin{cases}(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=4\\x^2+y^2+z^2+2y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x+2y-2=0\\x^2+y^2+z^2+2y-2=0\end{cases}\Rightarrow x=0$

Vậy $(P):x=0$ ((P) chính là mặt phẳng (Oyz)).

Gọi $C(0;0;0)$ và $D(0;3;4)$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của $A(-1;0;0)$ và $B(2;3;4)$ trên mặt phẳng (P). Suy ra $AC=1$, $BD=2$, $CD=5$.

• Áp dụng bất đẳng thức $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\ge\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$, ta được

$$AM+BN=\sqrt{AC^2+CM^2}+\sqrt{BD^2+DN^2}$$
$$\ge\sqrt{(AC+BD)^2+(CM+DN)^2}$$
$$\ge\sqrt{9+(CM+DN)^2}$$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Lại có $CM+MN+ND \ge CD=5$ nên suy ra $CM+ND \ge 4$. Do đó $AM+BN \ge 5$.

Đẳng thức xảy ra khi C, M, N, D thẳng hàng theo thứ tự đó và $\frac{AC}{CM}=\frac{BD}{DN}$, tức là $M\left(0;\frac{4}{5};\frac{16}{15}\right)$ và $N\left(0;\frac{7}{5};\frac{28}{15}\right)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $AM+BN$ là 5.

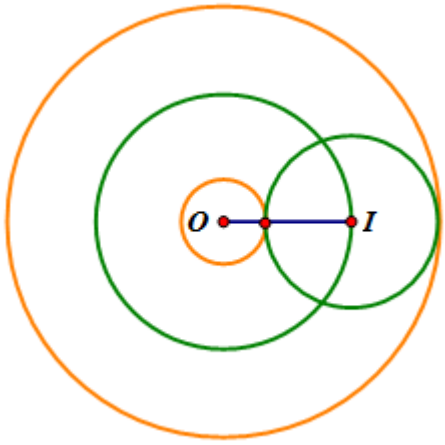
Câu 45: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi $\alpha;\beta;\gamma$ là ba góc tạo bởi tia Ot bất kì với 3 tia $Ox;Oy;Oz$ và mặt cầu $(S):(x-\cos\alpha)^2+(y-\cos\beta)^2+(z-\cos\gamma)^2=4$. Biết (S) luôn tiếp xúc với hai mặt cầu cố định có bán kính $R_1;R_2$. Tính $T=R_1+R_2$.

A. $T=8$. **B.** $T=4$. **C.** $T=11$. **D.** $T=9$.

Lời giải

Chọn B
Chọn C

Ta có tâm mặt cầu (S) có tâm $I(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$, khi đó tâm I thuộc mặt cầu (S') tâm $O(0;0;0)$, $R=\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}=1$.



Mặt cầu (S) luôn tiếp xúc với hai mặt cầu cố định $(S_1),(S_2)$

(S_1) tâm O bán kính $R_1=|OI-R|=2-1=1$

(S_2) tâm O bán kính $R_2=OI+R=2+1=3$

$S=R_1+R_2=4$.

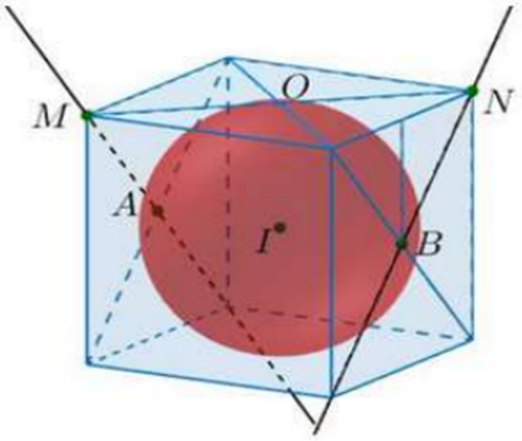
Câu 46: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;0),B(2;-3;2)$. Gọi (S) là mặt cầu đường kính AB và Ax là tiếp tuyến của (S) tại A; By là tiếp tuyến của (S) tại B và $Ax\perp By$. Hai điểm M,N lần lượt di động trên Ax,By sao cho MN là tiếp tuyến của (S). Tính $AM.BN$.

A. $AN.BM=\frac{19}{2}$. **B.** $AN.BM=48$. **C.** $AN.BM=19$. **D.** $AN.BM=24$.

Lời giải

Chọn C

ĐẶNG



Giả sử (S) tiếp xúc với MN tại O.Theo tính chất tiếp tuyến, ta có $AM = MO, BN = NO$ và $\begin{cases} AB \perp AM \\ BN \perp AM \end{cases} \Rightarrow AM \perp (ABN) \Rightarrow AM \perp AN.$

Theo định lí Pitago, ta có $\begin{cases} MN = MO + ON = AM + BN \\ MN^2 = AM^2 + AN^2 = AM^2 + AB^2 + BN^2 \end{cases}$

Do đó $(AM + BN)^2 = AM^2 + AB^2 + BN^2$

Suy ra $AM.BN = \dfrac{AB^2}{2} = \dfrac{3^2 + 5^2 + 2^2}{2} = 19.$

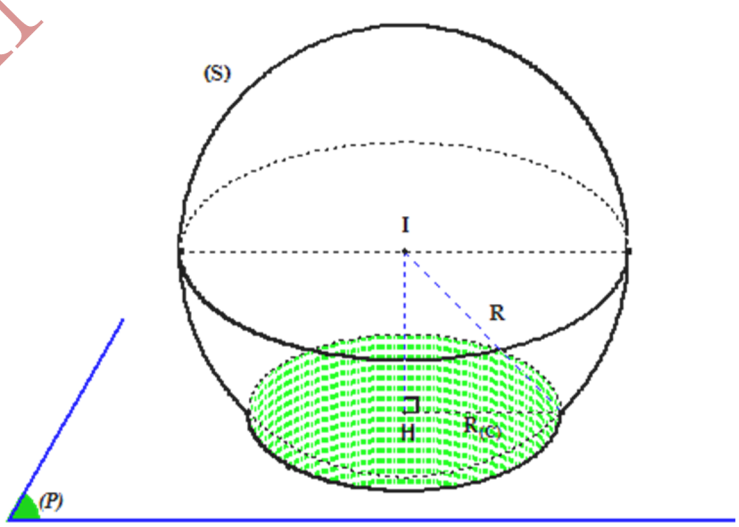
Chọn C

Câu 47: **(Đặng Thành Nam Đề 17)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 8$ và hai điểm $A(4;4;3)$, $B(1;1;1)$Tập hợp tất cả các điểm M thuộc (S) sao cho $MA = 2MB$ là một đường tròn (C). Bán kính của (C) bằng

A. $\sqrt{7}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Từ phương trình mặt cầu $(S): x^2+y^2+(z-3)^2=8$, suy ra mặt cầu có tâm $I(0;0;3)$ và bán kính $R=2\sqrt{2}$.

Gọi $M(x;y;z)$ là điểm thuộc (S) sao cho $MA=2MB$. Theo giả thiết, ta có :

$$\begin{cases} M\in(S) \\ MA=2MB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+(z-3)^2=8 \\ (x-4)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=4\left[(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\right] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+(z-3)^2=8 \\ x^2+y^2+z^2-\dfrac{2z}{3}-\dfrac{29}{3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+(z-3)^2=8 \\ z-2=0 \end{cases}.$$

Khoảng cách từ tâm $I(0;0;3)$ đến mặt phẳng (P): $z-2=0$ là:

$$d(I,(P))=\frac{|3-2|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=1<R.$$

Do đó đường tròn (C) là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S).

Đường tròn (C) có bán kính $R_{(C)}=\sqrt{R^2-d^2(I,(P))}=\sqrt{8-1}=\sqrt{7}$.

Câu 48: **(Kim Liên)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+\dfrac{9}{2}=0$ và hai điểm $A(0;2;0), B(2;-6;-2)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc (S) thỏa mãn tích $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ có giá trị nhỏ nhất. Tổng $a+b+c$ bằng

A. -1 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 2

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MA}=(-a;2-b;-c) \\ \overrightarrow{MB}=(2-a;-b-6;-c-2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=-a(2-a)+(2-b)(-b-6)-c(-c-2)=a^2+b^2+c^2-2a+4b+2c-12=P$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-2a+4b+2c-12-P=0 \Leftrightarrow (a-1)^2+(b+2)^2+(c+1)^2=P+18$$

Nếu $P+18<0 \Leftrightarrow P<-18$ thì không tồn tại điểm M.

Nếu $P+18=0 \Leftrightarrow P=-18$ thì $M(1;-2;-1)$ không thỏa mãn $M\in(S)$.

Nếu $P+18>0 \Leftrightarrow P>-18$ thì M thuộc mặt cầu (S') có tâm $I'(1;-2;-1)$ và bán kính $R'=\sqrt{18+P}$ .Khi đó M là điểm chung của hai mặt cầu:

$(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+\dfrac{9}{2}=0$ có tâm $I(-1;2;1)$ và bán kính $R=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

$(S')\, x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-12-P=0$ có tâm $I'(1;-2;-1)$ và bán kính $R'=\sqrt{18+P}$.

Tồn tại điểm M khi và chỉ khi hai mặt cầu (S) và (S') có điểm chung

$$\Leftrightarrow |R-R'|\le II'\le R+R' \Leftrightarrow \left|\frac{\sqrt{6}}{2}-\sqrt{18+P}\right|\le 2\sqrt{6}\le \frac{\sqrt{6}}{2}+\sqrt{18+P}.$$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$$\begin{cases}\sqrt{18+P}\ge\dfrac{3\sqrt{6}}{2}\\ -2\sqrt{6}\le\dfrac{\sqrt{6}}{2}-\sqrt{18+P}\le 2\sqrt{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P\ge\dfrac{-9}{2}\\ \sqrt{18+P}\le\dfrac{5\sqrt{6}}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{-9}{2}\le P\le\dfrac{39}{2}$$ (thỏa mãn $P>-18$)

Khi đó $P=\dfrac{-9}{2}$ đạt được khi hai mặt cầu trên tiếp xúc ngoài tại $M(a;b;c)$ thỏa mãn:

$$\overrightarrow{MI}=-\frac{R}{R'}\overrightarrow{MI'}=-\frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{3\sqrt{6}}{2}}\overrightarrow{MI'}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{MI'}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MI'}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=\frac{3\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OI'}}{4}\Rightarrow M\left(-\frac{1}{2};1;\frac{1}{2}\right)$$

.

Khi đó $\min P=\dfrac{-9}{2}\Leftrightarrow M\left(-\dfrac{1}{2};1;\dfrac{1}{2}\right)\Rightarrow a+b+c=1.$

Cách 2:

$$M\in(S)\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+2a-4b-2c+\frac{9}{2}=0\Leftrightarrow(a+1)^2+(b-2)^2+(c-1)^2=\frac{3}{2}.$$

$$M\in(S)\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=-2a+4b+2c-\frac{9}{2}.$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{MA}=(-a;2-b;-c)\\ \overrightarrow{MB}=(2-a;-b-6;-c-2)\end{cases}$$

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=-a(2-a)+(2-b)(-b-6)-c(-c-2)=a^2+b^2+c^2-2a+4b+2c-12.$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=-2a+4b+2c-\frac{9}{2}-2a+4b+2c-12=-4a+8b+4c-\frac{33}{2}=P.$$

$$P=-4a+8b+4c-\frac{33}{2}=-4(a+1)+8(b-2)+4(c-1)+\frac{15}{2}.$$

$$\Rightarrow P-\frac{15}{2}=-4(a+1)+8(b-2)+4(c-1).$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpxki cho hai bộ số $-4;8;4$ và $a+1;b-2;c-1$, ta có

$$\left(P-\frac{15}{2}\right)^2=\left[-4(a+1)+8(b-2)+4(c-1)\right]^2\le(16+64+16)\left[(a+1)^2+(b-2)^2+(c-1)^2\right]=144$$

.

$$\Rightarrow-12\le P-\frac{15}{2}\le 12\Leftrightarrow-\frac{9}{2}\le P\le\frac{39}{2}.$$

$$P=-\frac{9}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}-4a+8b+4c-\dfrac{33}{2}=-\dfrac{9}{2}\\ \dfrac{a+1}{-4}=\dfrac{b-2}{8}=\dfrac{c-1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4a+8b+4c=12\\ 2a+b=0\\ a+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{1}{2}\\ b=1\\ c=\dfrac{1}{2}\end{cases}.$$

Khi đó $\min P=-\dfrac{9}{2}\Leftrightarrow M\left(-\dfrac{1}{2};1;\dfrac{1}{2}\right)\Rightarrow a+b+c=1.$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 49: **(CHUYÊN SƯ PHẠM HÀ NỘI LẦN 4 NĂM 2019)** Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;0)$, $B(5;6;0)$ và M là điểm thay đổi trên mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2=1$. Tập hợp các điểm M trên mặt cầu (S) thỏa mãn $3MA^2+MB^2=48$ có bao nhiêu phần tử?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

+) Mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2=1$ có tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R=1$.

+) Ta tìm điểm $I(x;y;z)$ thỏa mãn $3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

+) Có $\overrightarrow{IA}=(1-x;-y;-z)$, $\overrightarrow{IB}=(5-x;6-y;-z)$.

+) $3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}3(1-x)+5-x=0\\3(-y)+6-y=0\\3(-z)-z=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-4x+8=0\\-4y+6=0\\-4z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=\dfrac{3}{2}\\z=0\end{cases}\Leftrightarrow I\left(2;\dfrac{3}{2};0\right)$. Suy ra $IA=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$, $IB=\dfrac{3\sqrt{13}}{2}$.

+) Do đó $3MA^2+MB^2=48\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2=48\Leftrightarrow 3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=48$

$\Leftrightarrow 4MI^2+3IA^2+IB^2+2\overrightarrow{MI}\left(3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)=48\Leftrightarrow 4MI^2+3IA^2+IB^2=48\Leftrightarrow MI=\dfrac{3}{2}$.

Ta thấy $OI=\dfrac{5}{2}$ nên điểm I nằm ngoài mặt cầu (S). Ta có $OI=R+MI=OM+MI$, suy ra có một điểm M thuộc đoạn OI thỏa mãn đề bài (điểm M là giao điểm của đoạn thẳng OI và mặt cầu (S)).

Cách 2:

Gọi $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc mặt cầu (S) và thỏa mãn $3MA^2+MB^2=48$.

Ta có: $3MA^2+MB^2=48\Leftrightarrow 3\left[(x_0-1)^2+y_0^2+z_0^2\right]+\left[(x_0-5)^2+(y_0-6)^2+z_0^2\right]=48$

$\Leftrightarrow 4x_0^2+4y_0^2+4z_0^2-16x_0-12y_0+16=0\Leftrightarrow x_0^2+y_0^2+z_0^2-4x_0-3y_0+4=0$.

Suy ra M thuộc mặt cầu (S') tâm $I'\left(2;\dfrac{3}{2};0\right)$, bán kính $R'=\dfrac{3}{2}$.

Mặt khác M thuộc mặt cầu (S) tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R=1$.

Ta thấy: $OI'=\dfrac{5}{2}=R+R'\Rightarrow$ mặt cầu (S) và (S') tiếp xúc ngoài nhau tại M

$\Rightarrow$ Có duy nhất một điểm M thỏa mãn đề bài.

Câu 50: **(Sở Phú Thọ)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+2)^2+(y-1)^2+\left(z+\sqrt{2}\right)^2=9$ và hai điểm $A\left(-2;0;-2\sqrt{2}\right)$, $B(-4;-4;0)$. Biết rằng tập hợp các điểm M thuộc (S) sao cho $MA^2+\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MB}=16$ là một đường tròn. Bán kính của đường tròn đó bằng

A. $\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{2}$. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{5}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I\left(-2;1;-\sqrt{2}\right)$, bán kính $R=3$.

Với mọi điểm $M\left(x;y;z\right)\in(S)$ ta có $MI=3$.

Theo đề bài $MA^2+\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MB}=16\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IO}\right)\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)=16$.

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}^2+\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{MI}\left(2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IO}\right)+\overrightarrow{IO}.\overrightarrow{IB}=16\,(*)$.

Có $\overrightarrow{IA}=\left(0;-1;-\sqrt{2}\right)$, $\overrightarrow{IO}=\left(2;-1;\sqrt{2}\right)$, $\overrightarrow{IB}=\left(-2;-5;\sqrt{2}\right)$, $\overrightarrow{MI}=\left(-2-x;1-y;-\sqrt{2}-z\right)$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IO}=(0;-8;0)$, $\overrightarrow{MI}\left(2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IO}\right)=8(y-1)$, $\overrightarrow{IO}.\overrightarrow{IB}=3$.

Do đó $(*)\Leftrightarrow 2.9+3+8(y-1)+3=16\Leftrightarrow y=0$ hay M thuộc mặt phẳng $(P):y=0$.

Tập hợp điểm M là đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S).

Do $d(I;(P))=1$ suy ra bán kính của đường tròn $r=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$.

Cách 2.

Mặt cầu (S) có tâm $I\left(-2;1;-\sqrt{2}\right)$, bán kính $R=3$. Gọi $M\left(x;y;z\right)$.

$M\in(S)\Rightarrow\left(x+2\right)^2+\left(y-1\right)^2+\left(z+\sqrt{2}\right)^2=9$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+4x-2y+2\sqrt{2}z-2=0$ (1)

$MA^2+\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MB}=16\Leftrightarrow\left(x+2\right)^2+y^2+\left(z+2\sqrt{2}\right)^2+x\left(x+4\right)+y\left(y+4\right)+z^2=16$

$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+4x+2y+2\sqrt{2}z-2=0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ: $\begin{cases}x^2+y^2+z^2+4x-2y+2\sqrt{2}z-2=0\\x^2+y^2+z^2+4x+2y+2\sqrt{2}z-2=0\end{cases}$

$\Rightarrow y=0$ hay M thuộc mặt phẳng $(P):y=0$.

Tập hợp điểm M là đường tròn giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S).

Do $d(I;(P))=1$ suy ra bán kính của đường tròn $r=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$.

Câu 51: **(CỤM TRẦN KIM HƯNG - HƯNG YÊN NĂM 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P):2x-y-2z-2=0$ và mặt phẳng $(Q):2x-y-2z+10=0$ song song với nhau. Biết $A(1;2;1)$ là điểm nằm giữa hai mặt phẳng (P) và (Q). Gọi (S) là mặt cầu qua A và tiếp xúc với cả hai mặt phẳng (P) và (Q). Biết rằng khi (S) thay đổi thì tâm của nó luôn nằm trên một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó

A. $r=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$. **B.** $r=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$. **C.** $r=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $r=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$.

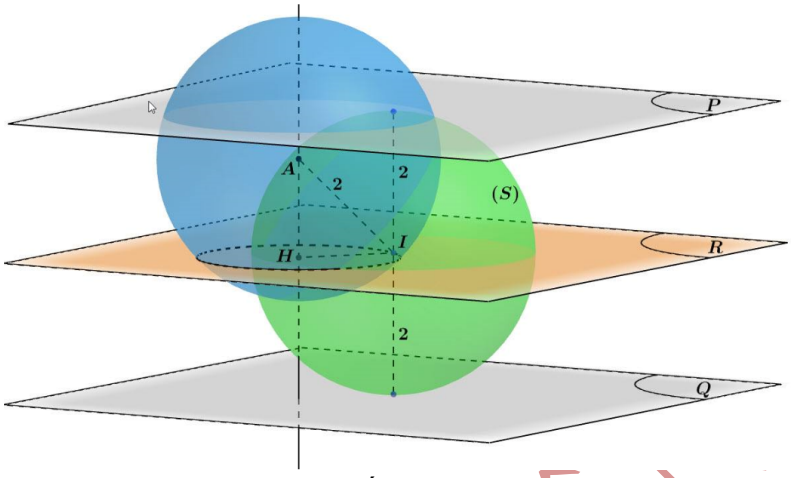
Lời giải

Chọn A

Điểm $M\left(1;0;0\right)$ là 1 điểm thuộc (P).

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Vì $(P)//(Q)$ nên $d\left((P),(Q)\right)=d\left(M,(Q)\right)=\dfrac{|2+10|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\dfrac{12}{3}=4$.



Giả sử $I(a;b;c)$ là tâm của (S). Vì (S) tiếp xúc với cả (P) và (Q) nên bán kính mặt cầu (S) là $R=\dfrac{d\left((P),(Q)\right)}{2}=\dfrac{4}{2}=2$.

Do đó $IA=2$ nên I luôn thuộc mặt cầu (T) tâm A, bán kính 2.

Ngoài ra $d\left(I,(P)\right)=d\left(I,(Q)\right)\Leftrightarrow\dfrac{|2a-b-2c-2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\dfrac{|2a-b-2c+10|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}$

$\Leftrightarrow|2a-b-2c-2|=|2a-b-2c+10|\Leftrightarrow 2a-b-2c-2=-(2a-b-2c+10)$

$\Leftrightarrow 2a-b-2c+4=0$. Do đó I luôn thuộc mặt phẳng $(R):2x-y-2z+4=0$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên (R). Vì $A,(R)$ cố định nên H cố định.

Ta có: $AH=d\left(A,(R)\right)=\dfrac{|2.1-2-2.1+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\dfrac{2}{3}$.

Mà $AH\perp(R)\Rightarrow AH\perp HI$, do đó ΔAHI vuông tại H nên

$HI=\sqrt{AI^2-AH^2}=\sqrt{2^2-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Vậy I luôn thuộc đường tròn tâm H, nằm trên mặt phẳng (R), bán kính $r=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

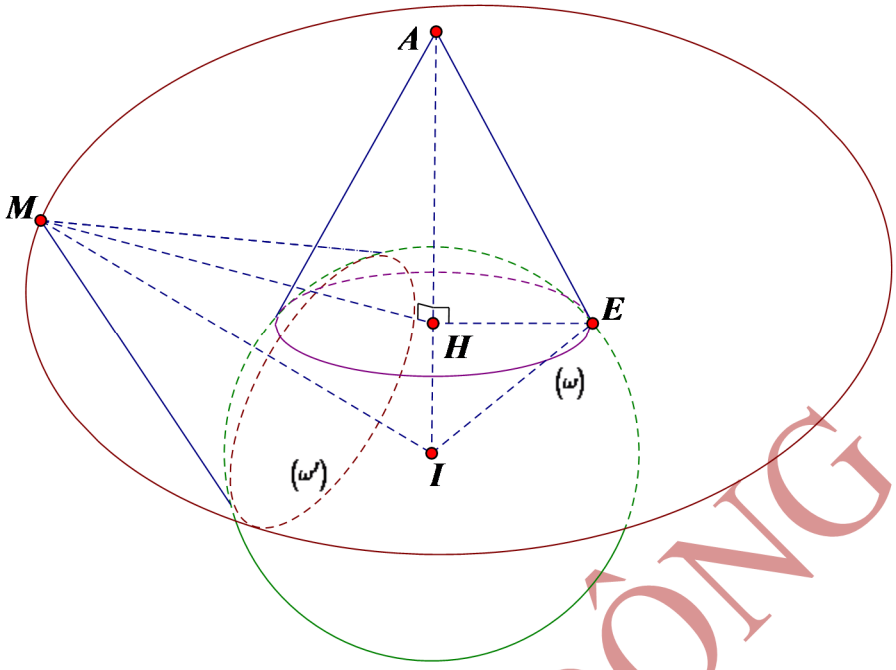
Câu 52: **(Chuyên Vinh Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-4)^2+(z-6)^2=24$ và điểm $A(-2;0;-2)$. Từ A kẻ các tiếp tuyến đến (S) với các tiếp điểm thuộc đường tròn (ω). Từ điểm M di động nằm ngoài (S) và nằm trong mặt phẳng chứa (ω), kẻ các tiếp tuyến đến (S) với các tiếp điểm thuộc đường tròn (ω'). Biết khi (ω) và (ω') có cùng bán kính thì M luôn thuộc một đường tròn cố định. Tính bán kính r của đường tròn đó.

A. $r=6\sqrt{2}$. **B.** $r=3\sqrt{10}$. **C.** $r=3\sqrt{5}$. **D.** $r=3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Gọi H là tâm của đường tròn (ω) và E là một tiếp điểm của tiếp tuyến của hình cầu kẻ từ điểm A. Khi đó $E \in (\omega)$.

Mặt cầu có tâm $I(2;4;6)$ và bán kính $R = 2\sqrt{6}$. Đoạn $IA = 4\sqrt{6} \Rightarrow IA = 2R$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn (ω) mà M di động trong đó. Khi đó ta luôn có $AI \perp (P)$. Tam giác AIE vuông ở E mà EH là đường cao nên

$IH.IA = IE^2 \Rightarrow IH = \dfrac{IE^2}{IA} = \dfrac{R^2}{2R} = \dfrac{R}{2}$. Từ đó suy ra bán kính $HE = \sqrt{HI.HA} = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

Gọi r là bán kính của đường tròn mà M di động trong mặt (P) tạo nên. Khi đó bán kính đường tròn chính là $r = HM$.

Vì đường tròn (ω) và (ω') có cùng bán kính nên ta suy ra $MI = AI = 2R$.

Tam giác MHI vuông ở H nên ta có $MH = \sqrt{MI^2 - IH^2} = \sqrt{4R^2 - \dfrac{R^2}{4}} = \dfrac{R\sqrt{15}}{2}$.

Vậy bán kính đường tròn mà M di động trên đó là $r = MH = \dfrac{R\sqrt{15}}{2}$.

Thay $R = 2\sqrt{6}$ ta được $r = 3\sqrt{10}$.

Câu 53: **(Chuyên Vinh Lần 2)** Trong không gian cho hình cầu (S) có tâm O, bán kính R. Một điểm S cố định nằm ngoài hình cầu sao cho $SO = kR(k > 1)$. Từ S kẻ các tiếp tuyến đến mặt cầu với các tiếp điểm thuộc đường tròn (C_1). Trên mặt phẳng (P) chứa đường tròn (C_1) ta lấy một điểm E thay đổi nằm ngoài mặt cầu (S). Từ E ta kẻ các tiếp tuyến đến mặt cầu với các tiếp điểm thuộc đường tròn (C_2). Biết rằng hai đường tròn (C_1) và (C_2) luôn có cùng bán kính. Hỏi khi đó điểm E di chuyển trên một đường tròn có bán kính R' bằng bao nhiêu?

A. $R' = \dfrac{\sqrt{k^4 - 1}}{k}.R$.

B. $R' = \dfrac{\sqrt{k^4 - 1}}{2k}.R$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

C. $R'=\dfrac{\sqrt{k^4+1}}{k}.R$. **D.** $R'=\dfrac{\sqrt{k^2-1}}{k}.R$.

Lời giải

Chọn A

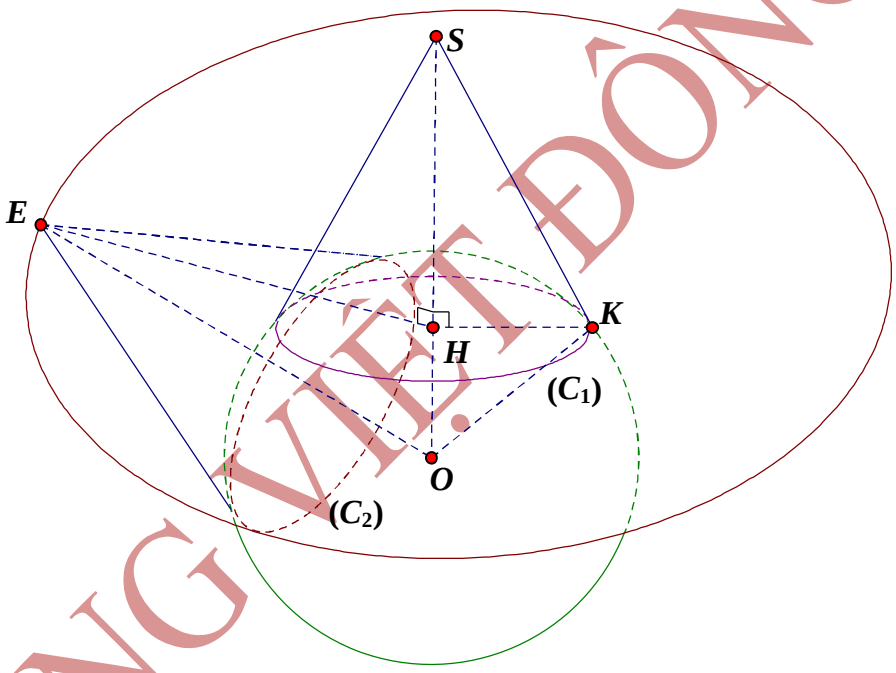
Gọi K là một tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ S, H là tâm của đường tròn (C_1). Tam giác giác SKO vuông tại K và KH là đường cao. Do đó $OH.OS=OK^2\Rightarrow OH=\dfrac{OK^2}{OS}=\dfrac{R}{k}$.

Do hai đường tròn $(C_1),(C_2)$ có cùng bán kính nên ta suy ra $OE=OS=kR$.

Đường tròn mà E di động trên đó có bán kính là $R'=EH$.

Vì tam giác EHO vuông ở H nên ta có

$$R'=EH=\sqrt{EO^2-OH^2}=\sqrt{k^2R^2-\frac{R^2}{k^2}}=\frac{\sqrt{k^4-1}}{k}.R.$$



Bình luận:

Bây giờ thay $k=2,R=2\sqrt{6}$ và tiến hành tọa độ hóa điểm $S(-2;0;-2)$ với điểm $O(2;4;6)$ thì ta có được câu 47 trong đề thi thử chuyên ĐH Vinh lần 2 năm 2019 ở trên.

Câu 54: **(Chuyên Vinh Lần 2)** Trong không gian cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2=1$. Từ điểm $A(2019;0;0)$ ta kẻ các tiếp tuyến đến (S) với các tiếp điểm thuộc đường tròn (ω). Từ điểm M di động nằm ngoài (S) và nằm trong mặt phẳng chứa (ω), kẻ các tiếp tuyến đến (S) với các tiếp điểm thuộc đường tròn (ω'). Biết khi (ω) và (ω') có cùng bán kính thì M luôn thuộc một đường tròn cố định. Tính chiều dài quảng đường l khi M di chuyển đúng 2019 vòng theo cùng một chiều trên đường tròn đó.

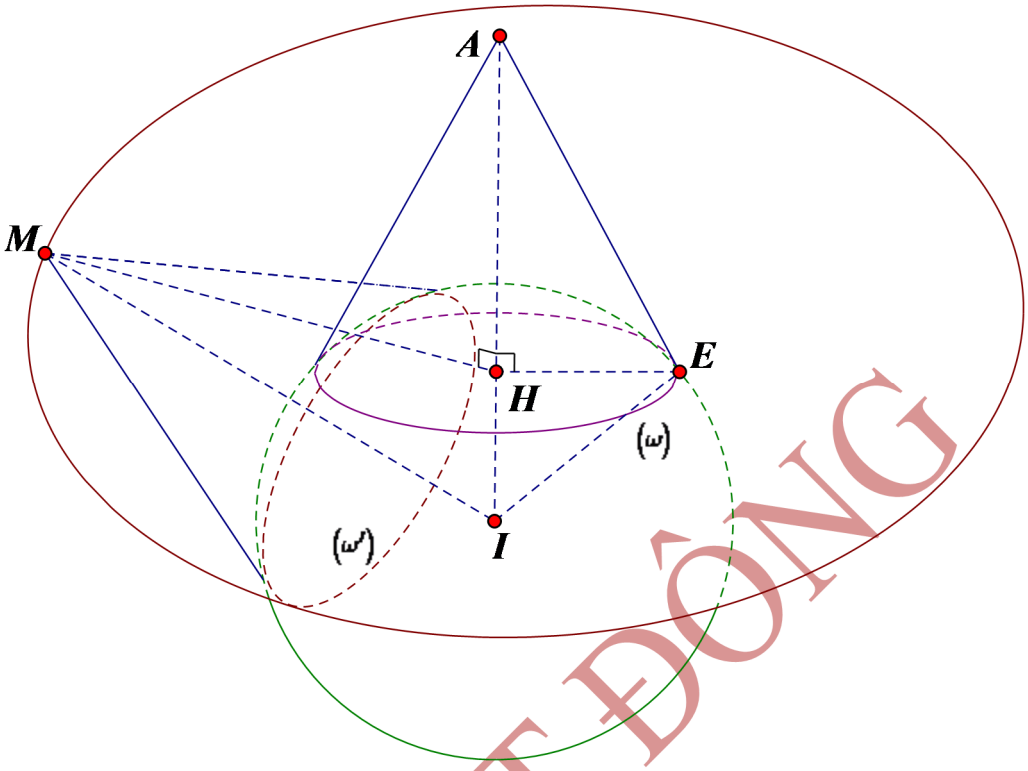
A. $l=\dfrac{2.\sqrt{2019^4-1}}{2019}\pi$. **B.** $l=2019\pi$.

C. $l=8152722\pi$. **D.** $l=4076361\pi$.

Lời giải

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Chọn C



Từ giả thiết ta có:

Bán kính mặt cầu $R=1$, tâm mặt cầu $O(0;0;0)$. Khoảng cách $AO=2019=2019R$.

Như vậy ta có $k=2019$.

Áp dụng bài toán 47.1 ta có bán kính mà đường tròn M di động trên đó là

$r=\dfrac{\sqrt{k^4-1}}{k}R=\dfrac{\sqrt{2019^4-1}}{2019}$.

Chu vi của đường tròn M di động là $C=2\pi r$.

Vậy chiều dài quảng đường là: $l=2019.2\pi r=2019.2.\pi\dfrac{\sqrt{2019^4-1}}{2019}=8152722\pi$.

Câu 55: **(Chuyên Thái Nguyên)** Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S) đi qua điểm $A(2;-2;5)$ và tiếp xúc với ba mặt phẳng $(P):x=1,(Q):y=-1$ và $(R):z=1$ có bán kính bằng

A. 3. **B.** 1. **C.** $2\sqrt{3}$. **D.** $3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $I(a;b;c)$ và R là tâm và bán kính của (S). Khi đó ta có

$$R=IA=d\left(I;(P)\right)=d\left(I;(Q)\right)=d\left(I;(R)\right)\Leftrightarrow IA=|a-1|=|b+1|=|c-1|\Leftrightarrow\begin{cases}IA=|a-1|\\a-1=\pm(b+1)\\a-1=\pm(c-1)\end{cases}$$

TH1: $\begin{cases}IA=|a-1|\\a-1=b+1\\a-1=c-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=a-2\\c=a\\(2-a)^2+a^2+(5-a)^2=(a-1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=a-2\\c=a\\2a^2-12a+28=0\end{cases}$ (vô nghiệm)

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

TH2:

$$\begin{cases} IA=|a-1| \\ a-1=-b-1 \\ a-1=c-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-a \\ c=a \\ (2-a)^2+(-2+a)^2+(5-a)^2=(a-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-a \\ c=a \\ 2a^2-16a+32=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=-4 \\ c=4 \end{cases} \Rightarrow R=1$$

TH3: $\begin{cases} IA=|a-1| \\ a-1=b+1 \\ a-1=-c+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a-2 \\ c=2-a \\ (2-a)^2+a^2+(3+a)^2=(a-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-a \\ c=a \\ 2a^2+4a+12=0 \end{cases}$ (vô nghiệm)

TH4: $\begin{cases} IA=|a-1| \\ a-1=-b-1 \\ a-1=-c+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-a \\ c=2-a \\ (2-a)^2+(-2+a)^2+(3+a)^2=(a-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-a \\ c=a \\ 2a^2+12=0 \end{cases}$ (vô nghiệm)

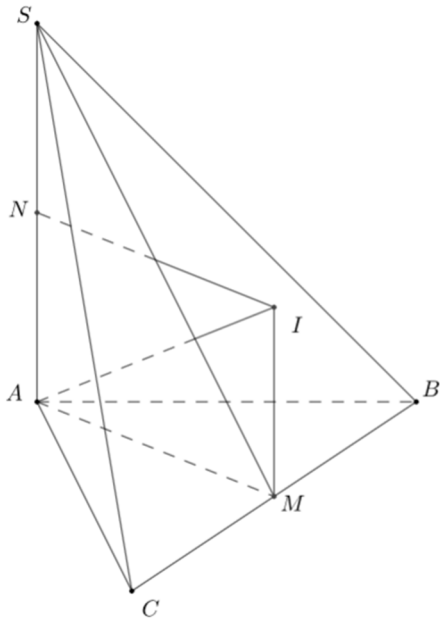
Vậy mặt cầu có bán kính $R=1$

Câu 56: **(Văn Giang Hưng Yên)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(1;0;2)$, $B(3;1;4)$, $C(3;-2;1)$. Tìm tọa độ điểm S, biết SA vuông góc với (ABC), mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $S.ABC$ có bán kính bằng $\frac{3\sqrt{11}}{2}$ và S có cao độ âm.

A. $S(4;6;-4)$. **B.** $S(4;-6;-4)$. **C.** $S(-4;6;-4)$. **D.** $S(-4;-6;-4)$.

Lời giải

Chọn A.



Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;1;2)$, $\overrightarrow{AC}=(2;-2;-1) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(3;6;-6)$.

Do SA vuông góc với (ABC) nên một VTCP của đường thẳng SA được chọn là $\vec{u}=\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(3;6;-6)$.

Đường thẳng SA qua $A(1;0;2)$ và có VTCP $\vec{u}=(3;6;-6)$ nên có phương trình tham số là:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$$\begin{cases} x = 1+3t \\ y = 6t \\ z = 2-6t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Do $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4-2-2 = 0 \Rightarrow AB \perp AC \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

Gọi M là trung điểm BC, khi đó M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi d là đường thẳng qua M và song song với SA nên $d \perp (ABC)$, suy ra d là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Trong mặt phẳng (SAM) vẽ đường trung trực của SA cắt d tại I và cắt SA tại N.

Mặt phẳng (ABC) qua A và có một VTPT $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right] = (3;6;-6)$ nên có phương trình tổng quát là:

$$3(x-1)+6y-6(z-2) = 0 \Leftrightarrow x+2y-2z+3 = 0$$

$\overrightarrow{BC} = (0;-3;-3) \Rightarrow BC = \sqrt{18} \Rightarrow BC^2 = 18$.

Ta có $R^2 = IA^2 + AM^2 \Leftrightarrow \dfrac{99}{4} = IM^2 + \dfrac{1}{4}BC^2 \Rightarrow IM = \dfrac{9}{2}$.

Do $S \in SA$ nên $S(1+3t;6t;2-6t)$, mà $SA = 2IM \Rightarrow SA = 9$

$$\Leftrightarrow \mathrm{d}(S,(ABC)) = 9 \Leftrightarrow \frac{|1+3t+12t-2(2-6t)+3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = 9$$

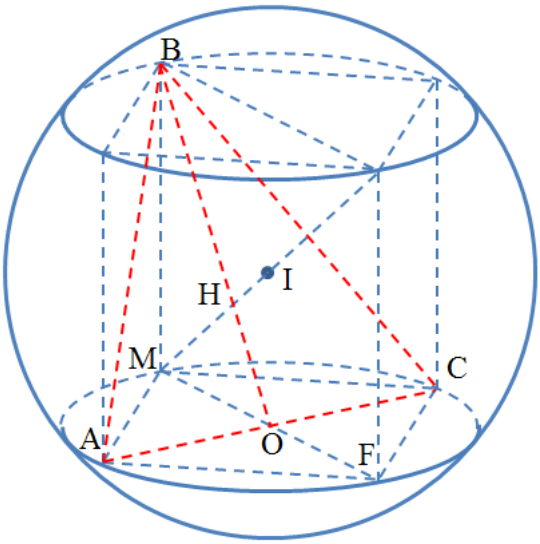
$$\Leftrightarrow |27t| = 27 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} t = 1 \Rightarrow S(4;6;-4) \\ t = -1 \Rightarrow S(-2;-6;8) \end{bmatrix}$$, mà cao độ của S âm nên $S(4;6;-4)$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 57: **(Chuyên Hưng Yên Lần 3)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2 = 25$ và $M(4;6;3)$. Qua M kẻ các tia Mx, My, Mz đôi một vuông góc với nhau và cắt mặt cầu tại các điểm thứ hai tương ứng là A, B, C. Biết mặt phẳng (ABC) luôn đi qua một điểm cố định $H(a;b;c)$. Tính $a+3b-c$.

A. 9. **B.** 14. **C.** 11. **D.** 20.

Lời giải

Chọn A



ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Ta có $M(4;6;3)$ nằm trên mặt cầu (S) tâm $I(1;2;3)$ bán kính $R=5$.

Dựng hình hộp chữ nhật nội tiếp hình cầu, có ba cạnh là MA, MB, MC.

Ta có tâm $I(1;2;3)$ của mặt cầu cũng là tâm của hình hộp chữ nhật.

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $MAFC$.

Trong mặt phẳng (MBF), gọi $H=MI\cap BO\Rightarrow H\in BO\subset(ABC)$ (1)

Do H là trọng tâm của ΔBMF nên $MH=\frac{2}{3}MI$.

Do I, M cố định nên H cố định (2)

Từ (1) và (2) suy ra (ABC) luôn đi qua điểm cố định H.

Gọi $H(a;b;c)$. Ta có $\overrightarrow{MH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MI}$, với $\overrightarrow{MH}(a-4;b-6;c-3)$; $\overrightarrow{MI}(-3;-4;0)$

Ta được $\begin{cases}a-4=-2\\b-6=-\frac{8}{3}\\c-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=\frac{10}{3}\\c=3\end{cases}$.

Vậy $a+3b-c=2+10-3=9$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

GTLN, GTNN TRONG HÌNH HỌC TỌA ĐỘ OXYZ

A - LÝ THUYẾT CHUNG

Để tìm cực trị trong không gian chúng ta thường sử dụng hai cách làm:

Cách 1: Sử dụng phương pháp hình học

Cách 2: Sử dụng phương pháp đại số.

Bài toán 1: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B)$ và mặt phẳng $(P): ax+by+cz+d=0$. Tìm điểm $M \in (P)$ sao cho

1. $MA+MB$ nhỏ nhất.

2. $|MA-MB|$ lớn nhất với $d(A,(P)) \neq d(B,(P))$.

Phương pháp:

- Xét vị trí tương đối của các điểm A, B so với mặt phẳng (P).
- Nếu $(ax_A+by_A+cz_A+d)(ax_B+by_B+cz_B+d)>0$ thì hai điểm A, B cùng phía với mặt phẳng (P).
- Nếu $(ax_A+by_A+cz_A+d)(ax_B+by_B+cz_B+d)<0$ thì hai điểm A, B nằm khác phía với mặt phẳng (P).

1. $MA+MB$ nhỏ nhất.

- Trường hợp 1: Hai điểm A, B ở khác phía so với mặt phẳng (P).

Vì A, B ở khác phía so với mặt phẳng (P) nên $MA+MB$ nhỏ nhất bằng AB khi và chỉ khi $M=(P)\cap AB$.

- Trường hợp 2: Hai điểm A, B ở cùng phía so với mặt phẳng (P).

Gọi A' đối xứng với A qua mặt phẳng (P), khi đó A' và B ở khác phía (P) và $MA=MA'$ nên $MA+MB=MA'+MB\geq A'B$.

Vậy $MA+MB$ nhỏ nhất bằng $A'B$ khi $M=A'B\cap(P)$.

2. $|MA-MB|$ lớn nhất.

- Trường hợp 1: Hai điểm A,B ở cùng phía so với mặt phẳng (P).

Vì A,B ở cùng phía so với mặt phẳng (P) nên $|MA-MB|$ lớn nhất bằng AB khi và chỉ khi $M=(P)\cap AB$.

- Trường hợp 2: Hai điểm A,B ở khác phía so với mặt phẳng (P).

Gọi A' đối xứng với A qua mặt phẳng (P), khi đó A' và B ở cùng phía (P) và $MA=MA'$ nên $|MA-MB|=|MA'-MB|\leq A'B$.

Vậy $|MA-MB|$ lớn nhất bằng $A'B$ khi $M=A'B\cap(P)$.

Bài toán 2: Lập phương trình mặt phẳng (P) biết

1. (P) đi qua đường thẳng Δ và khoảng cách từ $A\notin\Delta$ đến (P) lớn nhất

2. (P) đi qua Δ và tạo với mặt phẳng (Q) một góc nhỏ nhất

3. (P) đi qua Δ và tạo với đường thẳng d một góc lớn nhất.

Phương pháp:

Cách 1: Dùng phương pháp đại số

1. Giả sử đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-x_1}{a}=\dfrac{y-y_1}{b}=\dfrac{z-z_1}{c}$ và $A(x_0;y_0;z_0)$

Khi đó phương trình (P) có dạng: $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$

Trong đó $Aa+Bb+Cc=0\Rightarrow A=-\dfrac{bB+cC}{a}$ $(a\neq 0)$ **(1)**

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Khi đó $d(A,(P))=\dfrac{\left|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ **(2)**

Thay (1) vào (2) và đặt $t=\dfrac{B}{C}$, ta được $d(A,(P))=\sqrt{f(t)}$

Trong đó $f(t)=\dfrac{mt^2+nt+p}{m't^2+n't+p'}$, khảo sát hàm $f(t)$ ta tìm được $\max f(t)$. Từ đó suy ra được sự biểu diễn của A,B qua C rồi cho C giá trị bất kì ta tìm được A,B.

2. và **3**. làm tương tự

Cách 2: Dùng hình học

1. Gọi K,H lần lượt là hình chiếu của A lên Δ và (P), khi đó ta có:

$d(A,(P))=AH\le AK$, mà AK không đổi. Do đó $d(A,(P))$ lớn nhất $\Leftrightarrow H\equiv K$

Hay (P) là mặt phẳng đi qua K, nhận $\overrightarrow{AK}$ làm VTPT.

2. Nếu $\Delta\perp(Q)\Rightarrow\widehat{((P),(Q))}=90^0$ nên ta xét Δ và (Q) không vuông góc với nhau.

• Gọi B là một điểm nào đó thuộc Δ, dựng đường thẳng qua B và vuông góc với (Q). Lấy điểm C cố định trên đường thẳng đó. Hạ $CH\perp(P), CK\perp d$. Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) là $\widehat{BCH}$. Ta có $\sin\widehat{BCH}=\dfrac{BH}{BC}\ge\dfrac{BK}{BC}$.

Mà $\dfrac{BK}{BC}$ không đổi, nên $\widehat{BCH}$ nhỏ nhất khi $H\equiv K$.

• Mặt phẳng (P) cần tìm là mặt phẳng chứa Δ và vuông góc với mặt phẳng (BCK). Suy ra $\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{u_\Delta},\left[\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{n_Q}\right]\right]$ là VTPT của (P).

3. Gọi M là một điểm nào đó thuộc Δ, dựng đường thẳng d' qua M và song song với d. Lấy điểm A cố định trên đường thẳng đó. Hạ $AH\perp(P), AK\perp d$. Góc giữa mặt phẳng (P) và đường thẳng d' là $\widehat{AMH}$. Ta có $\cos\widehat{AMH}=\dfrac{HM}{AM}\ge\dfrac{KM}{AM}$.

Mà $\dfrac{KM}{AM}$ không đổi, nên $\widehat{AMH}$ lớn nhất khi $H\equiv K$.

• Mặt phẳng (P) cần tìm là mặt phẳng chứa Δ và vuông góc với mặt phẳng (d',Δ). Suy ra $\overrightarrow{n_P}=\left[\overrightarrow{u_\Delta},\left[\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{u_{d'}}\right]\right]$ là VTPT của (P).

B – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

DẠNG 1: MẶT PHẲNG CHẮN

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;1)$. Mặt phẳng (P) thay đổi đi qua M lần lượt cắt các tia Ox,Oy,Oz tại A,B,C khác O. Tính giá trị nhỏ nhất của thể tích khối tứ diện $OABC$.

A. 54. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 18.

Lời giải

Chọn C

Gọi $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0,0,c)$ với $a,b,c>0$.

Phương trình mặt phẳng (P): $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Vì: $M\in(P)\Leftrightarrow\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{1}{c}=1$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Thể tích khối tứ diện $OABC$ là: $V_{OABC}=\frac{1}{6}abc$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}\frac{2}{b}.\frac{1}{c}}$

Hay $1\ge 3\sqrt[3]{\frac{2}{abc}}\Leftrightarrow 1\ge\frac{54}{abc}$. Suy ra: $abc\ge 54\Leftrightarrow\frac{1}{6}abc\ge 9$

Vậy: $V_{OABC}\ge 9$.

Câu 2: Trong hệ trục tọa độ Oxyz cho 3 điểm $A(a;0;0),B(0;b;0),C(0;0;c)$ với $a,b,c>0$.Giả sử a,b,c thay đổi nhưng thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=k^2$ không đổi. Diện tích tam giác ABC đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{k^2\sqrt{3}}{2}$ **B.** $\frac{k^2\sqrt{3}}{6}$ **C.** $k^2\sqrt{3}$ **D.** k^2

Lời giải

Phương trình (ABC): $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

Gọi $H(x;y;z)$ là hình chiếu vuông góc của O lên (ABC)

Khi đó $\begin{cases}H\in(ABC)\\OH\perp AB\\OH\perp AC\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}bcx+cay+abz=abc\\-ax+by=0\\-ax+cz=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{ab^2c^2}{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2}\\y=\frac{a^2bc^2}{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2}\\z=\frac{a^2b^2c}{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2}\end{cases}$

$\Rightarrow OH=\frac{abc}{\sqrt{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2}}$

Ta có $V_{OABC}=\frac{1}{6}OA.OB.OC=\frac{1}{6}abc$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\frac{3V_{ABCD}}{OH}=\frac{1}{2}\sqrt{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2}$

Áp dụng bất đẳng thức Cosi ta có

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\le\frac{a^4+b^4}{2}+\frac{b^4+c^4}{2}+\frac{c^4+a^4}{2}=a^4+b^4+c^4$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Vậy $\max S=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k^4}{3}}=\frac{k^2\sqrt{3}}{6}$

Chọn B

Câu 3: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(9;1;1)$, cắt các tia Ox,Oy,Oz tại A,B,C sao cho thể tích tứ diện $OABC$ có giá trị nhỏ nhất là

A. $\frac{x}{7}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=1$ **B.** $\frac{x}{27}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=1$ **C.** $\frac{x}{-27}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=1$ **D.** $\frac{x}{27}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=-1$

Lời giải

Giả sử $A(a;0;0)\in Ox,B(0;b;0)\in Oy,C(0;0;c)\in Oz\ (a,b,c>0)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Khi đó PT mặt phẳng (P) có dạng: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

Ta có: $M(9;1;1)\in(P)\Rightarrow \frac{9}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ (1); $V_{OABC}=\frac{1}{6}abc$ (2)

(1) $\Leftrightarrow abc=9bc+ac+ab\ge 3\sqrt[3]{9(abc)^2}\Leftrightarrow (abc)^3\ge 27.9(abc)^2\Leftrightarrow abc\ge 243$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}9bc=ac=ab\\ \frac{9}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a=27\\ b=3\\ c=3\end{cases}\Rightarrow$ (P): $\frac{x}{27}+\frac{y}{3}+\frac{z}{3}=1$.

Chọn B

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có điểm A trùng với gốc tọa độ, $B(a;0;0), D(0;a;0), A'(0;0;b)$ với $(a>0,b>0)$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Giả sử $a+b=4$, hãy tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $A'BDM$?

A. $\max V_{A'MBD}=\frac{64}{27}$ **B.** $\max V_{A'MBD}=1$

C. $\max V_{A'MBD}=-\frac{64}{27}$ **D.** $\max V_{A'MBD}=\frac{27}{64}$

Lời giải

Ta có: $C(a;a;0), B'(a;0;b), D'(0;a;b), C'(a;a;b)\Rightarrow M\left(a;a;\frac{b}{2}\right)$

Suy ra: $\overrightarrow{A'B}=(a;0;-b), \overrightarrow{A'D}=(0;a;-b), \overrightarrow{AM}=\left(a;a;-\frac{b}{2}\right)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{A'D}\right]=(ab;ab;a^2)\Rightarrow \left[\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{A'D}\right].\overrightarrow{A'M}=\frac{3a^2b}{2}\Rightarrow V_{A'MBD}=\frac{a^2b}{4}$

Do $a,b>0$ nên áp dụng BĐT Côsi ta được: $4=a+b=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a+b\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}a^2b}\Rightarrow a^2b\le\frac{64}{27}$

Suy ra: $\max V_{A'MBD}=\frac{64}{27}$.

Chọn A

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

DẠNG 2: MIN, MAX VỚI PHƯƠNG TRÌNH MẶT THẲNG

Câu 1: **(Thị Xã Quảng Trị)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;2)$, $B(1;1;1)$, $C(2;-2;3)$ và mặt phẳng $(P): x-y+z+3=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) thỏa mãn $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của $a+2b+3c$ bằng

A. 7. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có trọng tâm của tam giác ABC là $G(1;0;2)$. Khi đó: $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|3\overrightarrow{MG}\right|=3MG$.

Vậy $\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|_{\min} \Leftrightarrow MG_{\min} \Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của G trên mặt phẳng (P).

Gọi d là đường thẳng qua G và vuông góc với (P), ta có phương trình đường thẳng d là:

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=-t \\ z=2+t \end{cases}.$$

Giá trị t ứng với tọa độ điểm M là nghiệm của phương trình:

$(1+t)-(-t)+(2+t)+3=0 \Leftrightarrow 3t+6=0 \Leftrightarrow t=-2$.

Vậy $M(-1;2;0)$. Khi đó: $a+2b+3c=-1+2.2+3.0=3$.

Câu 2: **(Chuyên Lam Sơn Lần 2)** Trong hệ trục $Oxyz$, cho điểm $A(-1;3;5)$, $B(2;6;-1)$, $C(-4;-12;5)$ và mặt phẳng $(P): x+2y-2z-5=0$. Gọi M là điểm di động trên (P). Gía trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ là

A. 42. **B.** 14. **C.** $14\sqrt{3}$. **D.** $\frac{14}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $G(x_1;y_1;z_1)$ là trọng tâm tam giác ABC.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC và M là điểm tùy ý nên $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MG}=3\overrightarrow{MG}$.

Vậy $S=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|3\overrightarrow{MG}\right|=3MG$.

Do G là trọng tâm tam giác ABC nên $\begin{cases} x_1=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=\dfrac{-1+2-4}{3}=-1 \\ y_1=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=\dfrac{3+6-12}{3}=-1 \\ z_1=\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}=\dfrac{5-1+5}{3}=3 \end{cases} \Rightarrow G(-1;-1;3)$.

Vì G cố định nên $S=3MG$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất. Tức là $MG \perp (P)$.

Ta có: $d(G,(P))=\dfrac{\left|-1.1+2.(-1)-2.3-5\right|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\dfrac{14}{3}=MG$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Vậy giá trị nhỏ nhất $S=\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|3\overrightarrow{MG}\right|=3MG=3.\frac{14}{3}=14.$

Câu 3: **(THPT-Ngô-Quyền-Hải-Phòng-Lần-2-2018-2019-Thi-24-3-2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-1;2;0)$, $C(3;-1;2)$ và M là điểm thuộc mặt phẳng $(\alpha):2x-y+2z+7=0$. Tính giá trị nhỏ nhất của $P=\left|3\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}-7\overrightarrow{MC}\right|$.

A. $P_{\min}=20$. **B.** $P_{\min}=5$. **C.** $P_{\min}=25$. **D.** $P_{\min}=27$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $I(x;y;z)$ sao cho $3\overrightarrow{IA}+5\overrightarrow{IB}-7\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ (1).

Ta có: $\begin{cases}3(1-x)+5(-1-x)-7(3-x)=0\\3(1-y)+5(2-y)-7(-1-y)=0\\3(1-z)+5(0-z)-7(2-z)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-23\\y=20\\z=-11\end{cases}$.

Suy ra $I(-23;20;-11)$.

Xét $P=\left|3\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}-7\overrightarrow{MC}\right|=\left|3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)+5\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)-7\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)\right|$.

$P=\left|\overrightarrow{MI}+\left(3\overrightarrow{IA}+5\overrightarrow{IB}-7\overrightarrow{IC}\right)\right|$.

Từ (1) ta có $P=\left|\overrightarrow{MI}\right|=MI$.

$P_{\min}$ khi MI ngắn nhất hay M là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (α).

Khi đó: $P_{\min}=d\left(I,(\alpha)\right)=\frac{\left|2.(-23)-20+2.(-11)+7\right|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=27$.

Câu 4: **(KÊNH TRUYỀN HÌNH GIÁO DỤC QUỐC GIA VTV7 –2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;2;2)$, $B(3;-1;-2)$, $C(-4;0;3)$. Tìm tọa độ điểm I trên mặt phẳng (Oxz) sao cho biểu thức $\left|\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}+5\overrightarrow{IC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $I\left(-\frac{37}{4};0;\frac{19}{4}\right)$. **B.** $I\left(-\frac{27}{4};0;\frac{21}{4}\right)$. **C.** $I\left(\frac{37}{4};0;-\frac{23}{4}\right)$. **D.** $I\left(\frac{25}{4};0;-\frac{19}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Chọn điểm K sao cho $\overrightarrow{KA}-2\overrightarrow{KB}+5\overrightarrow{KC}=\vec{0}$.

Khi đó: $\begin{cases}(-1-x_K)-2(3-x_K)+5(-4-x_K)=0\\(2-y_K)-2(-1-y_K)+5(0-y_K)=0\\(2-z_K)-2(-2-z_K)+5(3-z_K)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_K=-\frac{27}{4}\\y_K=1\\z_K=\frac{21}{4}\end{cases}\Rightarrow K\left(-\frac{27}{4};1;\frac{21}{4}\right)$.

$\left|\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}+5\overrightarrow{IC}\right|=\left|\overrightarrow{IK}+\overrightarrow{KA}-2\overrightarrow{IK}-2\overrightarrow{KB}+5\overrightarrow{IK}+5\overrightarrow{KC}\right|=\left|4\overrightarrow{IK}\right|=4IK$.

IK đạt giá trị nhỏ nhất khi K là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (Oxz).

Vậy $I\left(-\frac{27}{4};0;\frac{21}{4}\right)$.

Câu 5: **(SỞ QUẢNG BÌNH NĂM 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0;1;1)$, $B(2;-1;1)$, $C(4;1;1)$ và

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$(P): x+y+z-6=0$. Xét điểm $M(a;b;c)$ thuộc $mp(P)$ sao cho $\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị của $2a+4b+c$ bằng:

A. 6. **B.** 12. **C.** 7. **D** 5.

Lời giải

Chọn B

Ta có $T=\left|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=\left|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right|=\left|4\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right|$

Tìm tọa độ điểm $I(x_I;y_I;z_I)$ sao cho $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}0-x_I+2(2-x_I)+4-x_I=0\\1-y_I+2(-1-y_I)+1-y_I=0\\1-z_I+2(1-z_I)+1-z_I=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x_I=2\\y_I=0\\z_I=1\end{cases}\Rightarrow I(2;0;1)$.

$\Rightarrow T=4\left|\overrightarrow{MI}\right|$ mà điểm M thuộc $mp(P)$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức đạt được khi điểm M là hình chiếu của điểm I lên $mp(P)$.

$\min T=4.d_{(I,(P))}=4.\dfrac{|2+0+1-6|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=4\sqrt{3}$.

Đường thẳng IM đi qua điểm I và nhận vectơ $\overrightarrow{n_{(P)}}=(1;1;1)$ làm vectơ chỉ phương.

$\begin{cases}x=2+t\\y=t\\z=1+t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

Gọi điểm $M(2+t;t;1+t)\in IM$ mà $M\in(P)$

$\Rightarrow 2+t+t+1+t-6=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow M(3;1;2)$.

Vậy giá trị của $2a+4b+c=2.3+4.1+2=12$

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;0;2)$; $B(0;-1;2)$ và mặt phẳng $(P): x+2y-2z+12=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất?

A. $M(2;2;9)$. **B.** $M\left(-\dfrac{6}{11};-\dfrac{18}{11};\dfrac{25}{11}\right)$.

C. $M\left(\dfrac{7}{6};\dfrac{7}{6};\dfrac{31}{4}\right)$. **D.** $M\left(-\dfrac{2}{5};-\dfrac{11}{5};\dfrac{18}{5}\right)$.

Lời giải

Chọn D

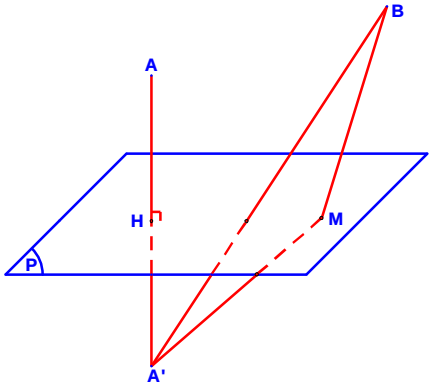
Thay tọa độ $A(1;0;2)$; $B(0;-1;2)$ vào phương trình mặt phẳng (P), ta được $P(A)P(B)>0\Rightarrow$ hai điểm A, B cùng phía với đối với mặt phẳng (P).

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua (P). Ta có

$$MA+MB=MA'+MB\geq A'B.$$

Nên $\min(MA+MB)=A'B$ khi và chỉ khi M là giao điểm của $A'B$ với (P).



Phương trình $AA':\begin{cases}x=1+t\\y=2t\\z=2-2t\end{cases}$ (AA' đi qua $A(1;0;2)$ và có véctơ chỉ phương $\overrightarrow{n_{(P)}}=(1;2;-1)$).

Gọi H là giao điểm của AA' trên (P), suy ra tọa độ của H là $H(0;-2;4)$, suy ra $A'(-1;-4;6)$, nên phương trình $A'B:\begin{cases}x=t\\y=-1+3t\\z=2-4t\end{cases}$.

Vì M là giao điểm của $A'B$ với (P) nên ta tính được tọa độ $M\left(-\frac{2}{5};-\frac{11}{5};\frac{18}{5}\right)$.

Câu 7: Cho hai điểm $A(-1,3,-2);B(-9,4,9)$ và mặt phẳng $(P):2x-y+z+1=0$. Điểm M thuộc (P). Tính GTNN của $AM+BM$.

A. $\sqrt{6}+\sqrt{204}$ **B.** $\frac{\sqrt{7274}+\sqrt{31434}}{6}$ **C.** $\frac{\sqrt{2004}+\sqrt{726}}{3}$ **D.** $3\sqrt{26}$

Lời giải

Ta có: $(2.(-1)-3+(-2)+1)(2.(-9)-4+9+1)=72>0$ => A,B nằm cùng phía so với mặt phẳng (P).

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua (P). Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}(2,-1,1)$

Đường thẳng AA' đi qua $A(-1,3,-2)$ có vtcp $\vec{n}(2,-1,1)$ có pt: $\begin{cases}x=-1+2t\\y=3-t\\z=-2+t\end{cases}$

Gọi H là giao của AA' và (P) ta có:

$2(-1+2t)-(3-t)+(-2+t)+1=0=>t=1=>H(1,2,-1)$. Ta có H là trung điểm của AA' => $A'(3,1,0)$.

Đường A'B đi qua A'(3, 1, 0) có vtcp $\overrightarrow{A'B}(-12,3,9)$ có pt: $\begin{cases}x=3-4t\\y=1+t\\z=3t\end{cases}$

Gọi N là giao điểm của A'B và mặt phẳng (P) ta có:

$2.(3-4t)-(1+t)+3t+1=0=>t=1=>N(-1,2,3)$.

Để $MA+MB$ nhỏ nhất thì $M\equiv N$ khi đó $MA+MB=A'B=\sqrt{(-12)^2+3^2+9^2}=\sqrt{234}=3\sqrt{26}$

Chọn D

Câu 8: **(Chuyên Hạ Long lần 2-2019)** Cho $A(4;5;6);B(1;1;2)$, M là một điểm di động trên mặt phẳng $(P):2x+y+2z+1=0$.

Khi đó $|MA-MB|$ nhận giá trị lớn nhất là?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $\sqrt{77}$. **B.** $\sqrt{41}$. **C.** 7. **D.** $\sqrt{85}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $|MA-MB| \le AB$ với mọi điểm $M \in (P)$

Vì $(2.4+5+2.6+1).(2.1+1+2.2+1)=208>0$ nên hai điểm A,B nằm cùng phía với (P)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $M = AB \cap (P)$

Khi đó, $|MA-MB|$ nhận giá trị lớn nhất là: $AB=\sqrt{(4-1)^2+(5-1)^2+(6-2)^2}=\sqrt{41}$.

Câu 9: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình $2x-y+z+1=0$ và hai điểm $M(3;1;0), N(-9;4;9)$. Tìm điểm $I(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $|IM-IN|$ đạt giá trị lớn nhất. Biết a,b,c thỏa mãn điều kiện:

A. $a+b+c=21$ **B.** $a+b+c=14$ **C.** $a+b+c=5$ **D.** $a+b+c=19$.

Lời giải

Nhận thấy 2 điểm M, N nằm về hai phía của mặt phẳng (P).

Gọi R là điểm đối xứng của M qua mặt phẳng (P), khi đó đường thẳng MR đi qua điểm M(3; 1; 0) và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình: $\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{1}$. Gọi

$H = MR \cap (P) \Rightarrow H(1;2;-1) \Rightarrow R(-1;3;-2)$.

Ta có $|IM-IN|=|IR-IN| \le RN$. Đẳng thức xảy ra khi I, N, R thẳng hàng. Do đó tọa độ điểm I là giao điểm của đường thẳng NR: $\begin{cases} x=-1-8t \\ y=3+t \\ z=-2+11t \end{cases}$ (t là tham số) và mặt phẳng (P).

Dễ dàng tìm được I(7; 2; 13).

Chọn A

Câu 10: **(ĐH Vinh Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;1;0), B(3;-1;4)$ và mặt phẳng $(\alpha): x-y+z+1=0$. Tìm tọa độ điểm $M \in (\alpha)$ sao cho $|MA-MB|$ đạt giá trị lớn nhất.

A. $M(1;3;-1)$. **B.** $M\left(\frac{3}{4};\frac{5}{4};-\frac{1}{2}\right)$. **C.** $M\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$. **D.** $M(0;2;1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $(x_A-y_A+z_A+1)(x_B-y_B+z_B+1)=(1-1+0+1)(3+1+4+1)>0$ nên hai điểm A và B cùng nằm về một phía của mặt phẳng (α).

Ta có $|MA-MB| \le AB = 2\sqrt{6}$, nên $|MA-MB|$ lớn nhất khi và chỉ khi $M = AB \cap (\alpha)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

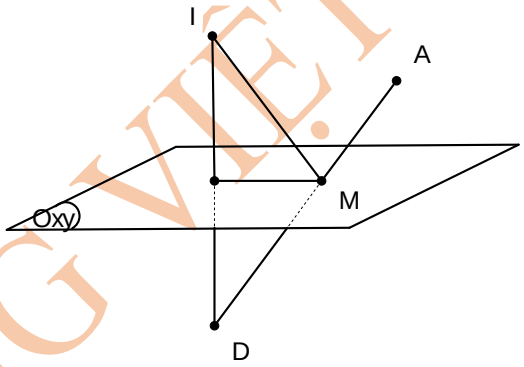
Phương trình đường thẳng $AB:\begin{cases}x=1+2t\\y=1-2t\\z=4t\end{cases}$, do đó tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}x=1+2t\\y=1-2t\\z=4t\\x-y+z+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-\dfrac{1}{8}\\x=\dfrac{3}{4}\\y=\dfrac{5}{4}\\z=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$. Do đó $M\left(\frac{3}{4};\frac{5}{4};-\frac{1}{2}\right)$.

Câu 11: **(CỤM TRẦN KIM HƯNG - HƯNG YÊN NĂM 2019)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $(Oxyz)$ cho ba điểm $A(1;0;3)$; $B(-3;1;3)$; $C(1;5;1)$. Gọi $M(x_o;y_o;z_o)$ thuộc mặt phẳng tọa độ (Oxy) sao cho biểu thức $T=2\left|\overrightarrow{MA}\right|+\left|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ có giá trị nhỏ nhất. Khi đó tính giá trị x_o-y_o ?

A. $x_o-y_o=-\frac{8}{5}$. **B.** $x_o-y_o=\frac{8}{5}$. **C.** $x_o-y_o=-2$. **D.** $x_o-y_o=2$.

Lời giải

Chọn C



Trung điểm của BC là $I(-1;3;2)$ suy ra $T=2\left|\overrightarrow{MA}\right|+2\left|\overrightarrow{MI}\right|=2(MA+MI)$.

Điểm đối xứng với I qua mặt phẳng (Oxy) là $D(-1;3;-2)$.

Nhận xét: A,I cùng phía so với mặt phẳng (Oxy) nên D,A khác phía với (Oxy).

Ta có $T=2(MA+MI)=2(MA+MD)\geq AD$ không đổi.

Dấu "=" xảy ra khi A, M, D thẳng hàng với M nằm giữa A và D.

$\Rightarrow M=AD\cap(Oxy)$.

Đường thẳng (AD) qua điểm $A(1;0;3)$, có một véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{DA}=(2;-3;5)$ là $\begin{cases}x=1+2t\\y=-3t\\z=3+5t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$. Mặt phẳng $(Oxy):z=0$.

Lúc đó $M(1+2t;-3t;3+5t)\in(AD)$ và $M\in(Oxy)\Rightarrow t=-\frac{3}{5}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Rightarrow M\left(\frac{-1}{5};\frac{9}{5};0\right)\Rightarrow x_0-y_0=-2$.

Câu 12: (Hình Oxyz) Cho $A(-1;3;5), B(2;6;-1), C(-4;-12;5)$ và điểm $(P): x+2y-2z-5=0$. Gọi M là điểm thuộc (P) sao cho biểu thức $S=\left|\overrightarrow{MA}-4\overrightarrow{MB}\right|+\left|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm hoành độ điểm M.

A. $x_M=3$ **B.** $x_M=-1$ **C.** $x_M=1$ **D.** $x_M=-3$

Lời giải

Gọi I là điểm $\overrightarrow{IA}-4\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Rightarrow I(3;7;-3)$. Gọi G là trọng tâm ta m giác ABC $\Rightarrow G(-1;-1;3)$

Nhận thấy, M,I nằm khác phía so với mp(P).

Có $S=3(MI+MG)\geq 3GI$. Dấu bằng xảy ra khi M là giao điểm của GI và (P)

$\Rightarrow M(1;3;1)$

Chọn C

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;-1)$, $B(0;3;1)$ và mặt phẳng $(P): x+y-z+3=0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$ có giá trị nhỏ nhất.

A. $M(-4;-1;0)$. **B.** $M(-1;-4;0)$. **C.** $M(4;1;0)$. **D.** $M(1;-4;0)$.

Lời giải

Gọi $I(a;b;c)$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}=\vec{0}$, suy ra $I(4;-1;-3)$.

Ta có $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{MI}$. Suy ra $\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|=\left|\overrightarrow{MI}\right|=MI$.

Do đó $\left|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất hay M là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P)

Đường thẳng đi qua I và vuông góc với (P) có là $d:\frac{x-4}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+3}{-1}$.

Tọa độ hình chiếu M của I trên (P) thỏa mãn

$$\begin{cases}\frac{x-4}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+3}{-1}\\ x+y-z+3=0\end{cases}\Rightarrow M(1;-4;0).$$

Chọn D

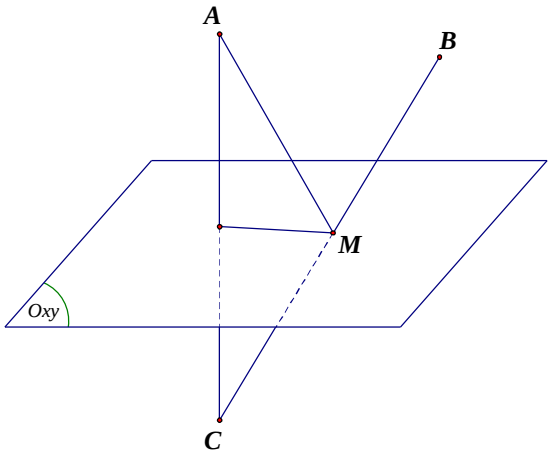
Câu 14: **(Đề thi HK2 Lớp 12-Chuyên Nguyễn Du- Đăk Lăk)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;0;1)$, $B(-2;8;3)$ và điểm $M(a;b;c)$ di động trên mặt phẳng (Oxy). Khi $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất thì giá trị $a+b+3c$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Dễ thấy hai điểm A, B nằm về cùng một phía so với mặt phẳng (Oxy).

Gọi C là điểm đối xứng với A qua (Oxy) suy ra $C(2;0;-1)$.

Đường thẳng BC đi qua $C(2;0-1)$ và $\vec{u}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}=(-1;2;1)$ làm vecto chỉ phương có phương trình là: $\begin{cases}x=2-t\\y=2t\\z=-1+t\end{cases}$

Khi đó $MA+MB=MC+MB\geq BC=4\sqrt{6}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M, B, C thẳng hàng.

Suy ra $\min(MA+MB)=4\sqrt{6}\Leftrightarrow M=(Oxy)\cap BC$ nên tọa độ điểm $M(x;y;z)$ thỏa mãn hệ:

$\begin{cases}x=2-t\\y=2t\\z=-1+t\\z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\\z=0\end{cases}$. Vậy $M(1;2;0)\Rightarrow a=1,\ b=2,\ c=0\Rightarrow a+b+3c=3$.

Câu 15: **(HKII Kim Liên 2017-2018)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, Cho hai điểm $A(-3;5;-5), B(5;-3;7)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z=0$. Tìm tọa độ điểm M trên mặt phẳng (P) sao cho MA^2-2MB^2 lớn nhất.

A. $M(-2;1;1)$. **B.** $M(2;-1;1)$. **C.** $M(6;-18;12)$. **D.** $M(-6;18;12)$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1.

Gọi $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng $(P): x+y+z=0$ nên ta có $a+b+c=0$

$MA^2-2MB^2=(-3-a)^2+(5-b)^2+(-5-c)^2-2\left[(5-a)^2+(-3-b)^2+(7-c)^2\right]$

$=-a^2-b^2-c^2+26a-22b+38c-107=-\left[(a-13)^2+(b+11)^2+(c-19)^2\right]+544$.

Theo BĐT Bunnhia ta có

$a+b+c=0\Rightarrow|-21|=|(a-13)+(b+11)+(c-19)|\leq\sqrt{3\left[(a-13)^2+(b+11)^2+(c-19)^2\right]}$

$\Rightarrow(a-13)^2+(b+11)^2+(c-19)^2\geq 147$

$MA^2-2MB^2=-\left[(a-13)^2+(b+11)^2+(c-19)^2\right]+544\leq 397$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Dấu bằng xảy ra khi:

$$\frac{a-13}{1}=\frac{b+11}{1}=\frac{c-19}{1}=-7\Leftrightarrow\begin{cases}a=6\\b=-18\\c=12\end{cases}\Rightarrow M(6;-18;12).$$

Cách 2.

(Căn cứ vào đề cho đáp án sẵn tọa độ điểm M)

M thuộc mặt phẳng $(P):x+y+z=0$ nên loại **B**,**D**

Với $M(-2;1;1)\Rightarrow MA^2-2MB^2=-149$, với $M(6;-18;12)\Rightarrow MA^2-2MB^2=397$

Từ đó loại **A** Vậy đáp án là **C**

Cách 3.

Ta có thể dùng tâm tỷ cự như sau:

Gọi I thỏa mãn

$$\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OA}-2\left(\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OB}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{OI}=2\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\Leftrightarrow I(13;-11;19).$$

Khi đó: $MA^2-2MB^2=\left(\overrightarrow{MA}\right)^2-2\left(\overrightarrow{MB}\right)^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2-2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=-MI^2+\left(IA^2-2IB^2\right)$ lớn nhất khi I là hình chiếu vuông góc của M lên $(P)\Rightarrow M(6;-18;12)$.

Câu 16: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1;2;2),B(5;4;4)$ và mặt phẳng $(P):2x+y-z+6=0.$ Tọa độ điểm M nằm trên (P) saocho MA^2+MB^2 nhỏ nhất là:

A. $(-1;3;2)$ **B.** $(2;1;-11)$ **C.** $(-1;1;5)$ **D.** $(1;-1;7)$

Lời giải

+ Kiểm tra phương án A không thuộc (P).

+ Tính trực tiếp $MA^2 + MB^2$ trong 3 phương án B,C,D và so sánh.

Chọn C

Câu 17: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-y+z+1=0,A(8;-7;4),B(-1;2;-2).$ Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho MA^2+2MB^2 nhỏ nhất.

A. $M(0;0;-1).$ **B.** $M(0;0;1).$ **C.** $M(1;0;1).$ **D.** $M(0;1;0)$

Lời giải

Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}=0\Rightarrow I(2;-1;0)$

Có $MA^2+2MB^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=3MI^2+IA^2+2IB^2$

Vì IA,IB không đổi nên $\left(MA^2+2MB^2\right)_{\min}\Leftrightarrow MI_{\min}\Rightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (P).

Đường thẳng d đi qua I và vuông góc với (P).

$$\Rightarrow d:\begin{cases}x=2+2t\\y=-1-t;d\cap(P)=M(0;0;-1)\\z=t\end{cases}$$

Chọn A

Câu 18: **(Chuyên Lý Tự Trọng Cần Thơ)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$ và mặt phẳng $(P);2x-y+2z-8=0$. Xét M là điểm thay đổi thuộc (P), giá trị nhỏ nhất của $2MA^2+3MB^2$ bằng

A. 145. **B.** 108. **C.** 105. **D.** 135.

Lời giải

Chọn D

Gọi I là điểm thỏa điều kiện: $2\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. Khi đó $I(-1;1;1)$.

T= $2MA^2+3MB^2=2\overrightarrow{MA}^2+3\overrightarrow{MB}^2=2(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA})^2+3(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})^2=5MI^2+2IA^2+3IB^2$.

T đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI_{\min}$.

Mà $M\in(P)$ nên $MI_{\min}\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P)

$\Leftrightarrow MI=d(\mathrm{I},(P))=\dfrac{|2.(-1)-1+2.1-8|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=3$.

Khi đó: $T_{\min}=5MI^2+2IA^2+3IB^2=135$.

Câu 19: **(GIỮA-HKII-2019-NGHĨA-HƯNG-NAM-ĐỊNH)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(2;1;3)$, $B(1;-1;2)$, $C(3;-6;1)$. Điểm $M(x;y;z)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị biểu thức $P=x+y+z$.

A. $P=0$. **B.** $P=2$. **C.** $P=6$. **D.** $P=-2$.

Lời giải

Chọn A

Gọi I là điểm thỏa $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow I(2;-2;2)$.

$MA^2+MB^2+MC^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$

$=3MI^2+IA^2+IB^2+IC^2+2\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)=3MI^2+IA^2+IB^2+IC^2$.

Mà $M\in(Oyz)\Rightarrow MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I lên $(Oyz)\Leftrightarrow M(0;-2;2)$.

Vậy $P=0-2+2=0$.

Câu 20: rong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho ba điểm $A(1;01;1),B(1;2;1),C(4;1;-2)$ và mặt phẳng $(P):x+y+z=0$. Tìm trên (P) điểm M sao cho $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó M có tọa độ

A. $M(1;1;-1)$ **B.** $M(1;1;1)$ **C.** $M(1;2;-1)$ **D.** $M(1;0;-1)$

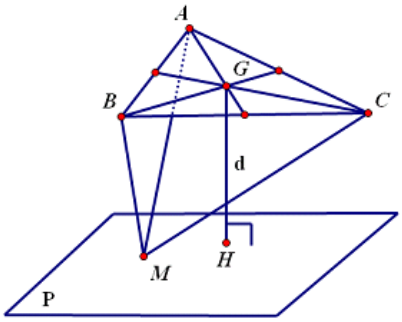
Lời giải

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, ta có $G(2;1;0)$, ta có

$MA^2+MB^2+MC^2=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$ (1)

Từ hệ thức (1) ta suy ra:

$MA^2+MB^2+MC^2$ đạt GTNN $\Leftrightarrow MG$ đạt GTNN $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu vuông góc của G trên (P).



Gọi (d) là đường thẳng qua G và vuông góc với (P) thì (d) có phương trình tham số là $\begin{cases}x=2+t\\y=1+t\\z=t\end{cases}$

Tọa độ M là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}x=2+t\\y=1+t\\z=t\\x+y+z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-1\\x=1\\y=0\\z=-1\end{cases}\Rightarrow M(1;0;-1)$

Chọn D

Câu 21: **(Cẩm Giàng)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-10;-5;8)$, $B(2;1;-1)$, $C(2;3;0)$ và mặt phẳng $(P): x+2y-2z-9=0$. Xét M là điểm thay đổi trên (P) sao cho $MA^2+2MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $MA^2+2MB^2+3MC^2$.

A. 54. **B.** 282. **C.** 256. **D.** 328.

Lời giải

Chọn B

Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$.

Ta có $\overrightarrow{IA}=(-10-x;-5-y;8-z)$, $\overrightarrow{IB}=(2-x;1-y;-1-z)$, $\overrightarrow{IC}=(2-x;3-y;-z)$.

Khi đó, $\begin{cases}(-10-x)+2(2-x)+3(2-x)=0\\(-5-y)+2(1-y)+3(3-y)=0\\(8-z)+2(-1-z)+3(-z)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=1\\z=1\end{cases}\Rightarrow I(0;1;1)$.

Với điểm M thay đổi trên (P), ta có

$MA^2+2MB^2+3MC^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$

$=6MI^2+IA^2+2IB^2+3IC^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}\right)$

$=6MI^2+IA^2+2IB^2+3IC^2$ (Vì $\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IB}+3\overrightarrow{IC}=\vec{0}$).

Ta lại có $IA^2+2IB^2+3IC^2=185+2.8+3.9=228$.

Do đó, $MA^2+2MB^2+3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ MI đạt giá trị nhỏ nhất

$\Leftrightarrow$ M là hình chiếu vuông góc của I trên (P).

Khi đó, $MI=d(I,(P))=3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $MA^2+2MB^2+3MC^2$ bằng

$6MI^2+228=6.9+228=282$.

Giá trị nhỏ nhất của $MA^2+2MB^2+3MC^2$ đạt được khi và chỉ khi M là hình chiếu vuông góc của I trên (P).

Lưu ý thêm cách tìm điểm M như sau:

Gọi Δ là đường thẳng qua I và vuông góc với (P). Phương trình của Δ: $\begin{cases}x=t\\y=1+2t\\z=1-2t\end{cases}$.

Ta có $M=\Delta\cap(P)$. Xét phương trình

$t+2(1+2t)-2(1-2t)-9=0\Leftrightarrow 9t-9=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow M(1;3;-1)$.

Câu 22: **(Sở Ninh Bình 2019 lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;4;5)$, $B(0;3;1)$, $C(2;-1;0)$ và mặt phẳng $(P): 3x-3y-2z-15=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho tổng các bình phương khoảng cách từ M đến A, B, C nhỏ nhất. Tính $a+b+c$.

A. 5. **B.** -5. **C.** 3. **D.** -3.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $I(1;2;2)$ là trọng tâm của tam giác ABC.

MA, MB, MC là khoảng cách từ M đến các điểm A, B, C

Xét $MA^2+MB^2+MC^2=\left(\overrightarrow{MA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MC}\right)^2=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$=3\left(\overrightarrow{MI}\right)^2+\left(\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{IB}\right)^2+\left(\overrightarrow{IC}\right)^2+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IC}$

$=3MI^2+IA^2+IB^2+IC^2+2\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)$

$=3MI^2+IA^2+IB^2+IC^2+2\overrightarrow{MI}.\vec{0}$ (do I là trọng tâm của tam giác ABC nên $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$)

$=3MI^2+IA^2+IB^2+IC^2$.

Mà $IA^2+IB^2+IC^2$ có giá trị không đổi nên $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi MI ngắn nhất. Khi đó M là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (P).

Gọi (d) là đường thẳng đi qua M và I, vuông góc với mặt phẳng (P).

Đường thẳng (d) đi qua điểm $I(1;1;1)$, nhận véc tơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n_P}=(3;-3;-2)$ là một véc tơ chỉ phương nên phương trình tham số của (d) là $(d):\begin{cases}x=1+3t\\y=2-3t\\z=2-2t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

$M=(P)\cap d$.

$M\in d\Rightarrow M(1+3t;2-3t;2-2t)$.

Mặt khác $M\in(P)$ nên: $3(1+3t)-3(2-3t)-2(2-2t)-15=0\Leftrightarrow t=1$.

Do đó $M(4;-1;0)$. Suy ra $a+b+c=3$.

Câu 23: **(THPT-Nguyễn-Công-Trứ-Hà-Tĩnh-lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):3x+y-z+5=0$ và hai điểm $A(1;0;2)$, $B(2;-1;4)$. Tập hợp các điểm M nằm trên mặt phẳng (P) sao cho tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất.

A. $\begin{cases}x-7y-4z+7=0\\3x-y+z-5=0\end{cases}$.

B. $\begin{cases}x-7y-4z+14=0\\3x+y-z+5=0\end{cases}$.

C. $\begin{cases}x-7y-4z+7=0\\3x+y-z+5=0\end{cases}$.

D. $\begin{cases}x-7y-4z+5=0\\3x+y-z+5=0\end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $S_{\Delta MAB}=\frac{1}{2}d_{(M;(AB))}AB$.

Ta có: Diện tích tam giác MAB nhỏ nhất $\Leftrightarrow d_{(M;(AB))}$ nhỏ nhất.

$\overrightarrow{AB}=(1;-1;2)$; $\vec{n}_{(P)}=(3;1;-1)\Rightarrow\vec{n}_{(P)}.\overrightarrow{AB}=0$.

$\Rightarrow$ AB song song với mặt phẳng (P).

Mà $d_{(M;(AB))}$ ngắn nhất, $M\in(P)$. Nên M thuộc giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q). Với (Q) là mặt phẳng vuông góc với (P) và đi qua AB.

Mặt phẳng (Q) vuông góc với (P) đi qua AB $\Rightarrow\vec{n}_{(Q)}=\left[\vec{n}_{(P)};\overrightarrow{AB}\right]=(1;-7;-4)$.

$A\in(Q)\Rightarrow(Q):x_A-7y_A-4z_A+c=0$

$\Rightarrow 1-7.0-4.2+c=0$

$\Rightarrow c=7$

$\Rightarrow(Q):x-7y-4z+7=0$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Rightarrow \begin{cases} M \in (Q) \\ M \in (P) \end{cases} \Rightarrow M \in \begin{cases} x-7y-4z+7=0 \\ 3x+y-z+5=0 \end{cases}$.

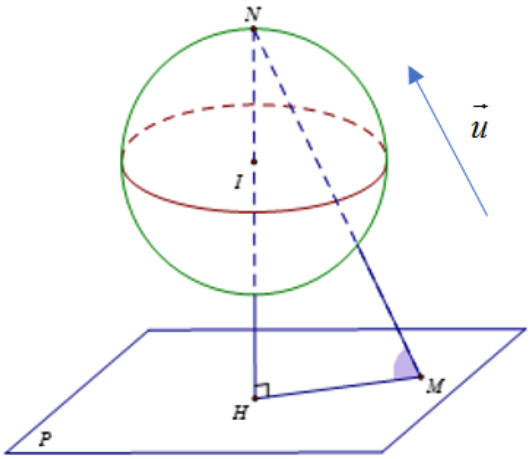
Câu 24: **(Ba Đình Lần2)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-3=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+5=0$. Giả sử $M \in (P)$ và $N \in (S)$ sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với vectơ $\vec{u}=(1;0;1)$ và khoảng cách giữa M và N lớn nhất. Tính MN.

A. $MN=3$. **B.** $MN=1+2\sqrt{2}$. **C.** $MN=3\sqrt{2}$. **D.** $MN=14$.

Lời giải.

Chọn C

(S) có tâm $I(-1;2;1)$ và bán kính $R=1$. Ta có: $\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{|-1-2.2+2.1-3|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=2>R$.



Gọi H là hình chiếu vuông góc của N trên mặt phẳng (P) và α là góc giữa MN và NH.

Vì $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với $\vec{u}$ nên góc α có số đo không đổi, $\alpha=\widehat{HNM}$.

Có $HN=MN.\cos\alpha \Rightarrow MN=\dfrac{1}{\cos\alpha}.HN$ nên MN lớn nhất $\Leftrightarrow$ HN lớn nhất $\Leftrightarrow$ $HN=d(I,(P))+R=3$.

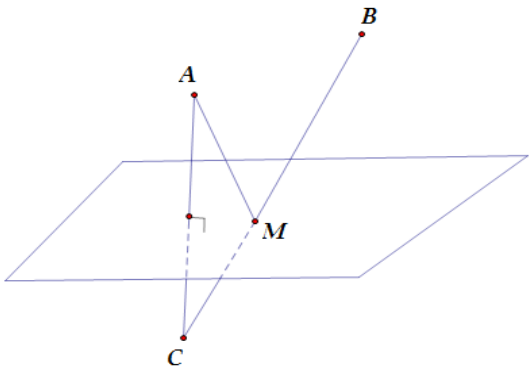
Có $\cos\alpha=\left|\cos\left(\vec{u},\overrightarrow{n_P}\right)\right|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ nên $MN=\dfrac{1}{\cos\alpha}HN=3\sqrt{2}$.

Câu 25: **(KÊNH TRUYỀN HÌNH GIÁO DỤC QUỐC GIA VTV7 –2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;3;4)$, $B(3;1;0)$. Gọi M là điểm trên mặt phẳng (Oxz) sao cho tổng khoảng cách từ M đến A và B là ngắn nhất. Tìm hoành độ x_0 của điểm M.

A. $x_0=4$. **B.** $x_0=3$. **C.** $x_0=2$. **D.** $x_0=1$.

Lời giải

Chọn C



Mặt phẳng (Oxz) có phương trình $y=0$.

Vì $y_A.y_B=3>0$ nên A, B nằm cùng phía với mặt phẳng (Oxz).

Lấy điểm C đối xứng với A qua (Oxz). Suy ra $C(-1;-3;4)$.

Khi đó $MA+MB$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $MC+MB$ nhỏ nhất. Suy ra M là giao điểm của đường thẳng BC với mặt phẳng (Oxz).

Đường thẳng $BC:\begin{cases}x=-1+t\\y=-3+t\\z=4-t\end{cases},(t\in\mathbb{R})$.

Tọa độ điểm $M(x;y;z)$ là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x=-1+t\\y=-3+t\\z=4-t\\y=0\end{cases}\Leftrightarrow -3+t=0\Leftrightarrow t=3$.

$\Rightarrow M(2;0;1)\Rightarrow x_0=2$.

Câu 26: **(KỸ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;-2;4)$ và mặt phẳng $(P):(m^2+2m)x-(m^2+4m-1)y+2(3m-1)z+m^2+1=0$. Tìm giá trị lớn nhất của khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P).

A. 5. **B.** $\sqrt{29}$. **C.** $\sqrt{33}$. **D.** $\sqrt{21}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x_0;y_0;z_0)$ là điểm cố định mà mặt phẳng (P) luôn đi qua.

Ta có

$(m^2+2m)x_0-(m^2+4m-1)y_0+2(3m-1)z_0+m^2+1=0\ \forall m$

$\Leftrightarrow (x_0-y_0+1)m^2+(2x_0-4y_0+6z_0)m+y_0-2z_0+1=0\ \forall m$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0-y_0+1=0\\2x_0-4y_0+6z_0=0\\y_0-2z_0+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=-2\\y_0=-1\\z_0=0\end{cases}\Rightarrow M(-2;-1;0)$

Ta có $d(A,(P))\le AM$

Do đó khoảng cách từ khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) đạt giá trị lớn nhất bằng $AM=\sqrt{29}$ khi $AM\perp(P)$ tại M.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 27: **(ĐH Vinh Lần 1)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$, $B(4;4;5)$. Giả sử M là điểm thay đổi trong mặt phẳng $(P):2x+2y+z+2019=0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=|AM-BM|$.

A. $\sqrt{17}$. **B.** $\sqrt{77}$. **C.** $7\sqrt{2}-3$. **D.** $\sqrt{82}-5$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $(2x_A+2y_A+z_A+2019)(2x_B+2y_B+z_B+2019)>0$ nên các điểm A,B đều nằm cùng phía so với mặt phẳng (P) và đường thẳng AB luôn cắt mặt phẳng (P) tại một điểm cố định.

Từ bất đẳng thức véc tơ $||\vec{u}|-|\vec{v}||\le|\vec{u}-\vec{v}|$. Ta có $|AM-BM|\le AB$. Dấu bằng xảy ra khi M là giao điểm của đường thẳng AB với mặt phẳng (P).

Do đó $|AM-BM|_{Max}=AB=\sqrt{(4-1)^2+(4-2)^2+(5-3)^2}=\sqrt{17}$, đạt được khi $M=AB\cap(P)$.

Câu 28: **(ĐH Vinh Lần 1)** Cho mặt phẳng $(\alpha):x-y+2z-1=0$ và hai điểm $A(0;-1;1),B(1;1;-2)$. Biết $M\in(\alpha)$ sao cho $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó, hoành độ x_M của điểm M là

A. $x_M=\frac{1}{3}$. **B.** $x_M=-1$. **C.** $x_M=-2$. **D.** $x_M=\frac{2}{7}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $(x_A-y_A+2z_A-1)(x_B-y_B+2z_B-1)=(0+1+2.1-1)(1-1-4-1)<0$ nên hai điểm A và B nằm khác phía so với mặt phẳng (α).

Nên $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $M=AB\cap(\alpha)$.

Phương trình đường thẳng $AB:\begin{cases}x=t\\y=-1+2t\\z=1-3t\end{cases}$, do đó tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}x=t\\y=-1+2t\\z=1-3t\\x-y+2z-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\frac{2}{7}\\x=\frac{2}{7}\\y=-\frac{3}{7}\\z=\frac{1}{7}\end{cases}$. Do đó $M\left(\frac{2}{7};-\frac{3}{7};\frac{1}{7}\right)$, $x_M=\frac{2}{7}$.

Câu 29: **(Phan Đình Tùng Hà Tĩnh)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;3)$. Mặt phẳng $(P):x+Ay+Bz+C=0$ chứa trục Oz và cách điểm M một khoảng lớn nhất, khi đó tổng $A+B+C$ bằng

A. 6. **B.** -3. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Vì (P) chứa trục Oz nên luôn có $d(M;(P))\le d(M;Oz)$.

Suy ra $d(M;(P))$ đạt giá trị lớn nhất bằng $d(M;Oz)=MH$, với H là hình chiếu của M trên trục Oz.

Dễ có $H(0;0;3)$. Vậy (P) đi qua $H(0;0;3)$, có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{MH}(-1;-2;0)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$(P): -x-2y=0 \Leftrightarrow x+2y=0 \Rightarrow A=2; B=C=0 \Rightarrow A+B+C=2$

Câu 30: **(GIỮA-HKII-2019-NGHĨA-HƯNG-NAM-ĐỊNH)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(a;b;c)$ với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $5(a^2+b^2+c^2)=9(ab+2bc+ca)$ và $Q=\dfrac{a}{b^2+c^2}-\dfrac{1}{(a+b+c)^3}$ có giá trị lớn nhất. Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các tia Ox, Oy, Oz. Phương trình mặt phẳng (MNP) là

A. $x+4y+4z-12=0$. **B.** $3x+12y+12z-1=0$.

C. $x+4y+4z=0$. **D.** $3x+12y+12z+1=0$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=b+c\,(t>0)$; $b^2+c^2\ge\dfrac{t^2}{2}$; $bc\le\dfrac{t^2}{4}$.

$5(a^2+b^2+c^2)=9(ab+2bc+ca) \Leftrightarrow 5a^2+5(b+c)^2-9a(b+c)=28bc \Rightarrow 5a^2+5t^2-9at\le 7t^2$

$\Leftrightarrow (5a+t)(a-2t)\le 0 \Leftrightarrow a\le 2t$.

Vậy $Q\le\dfrac{4}{t}-\dfrac{1}{27t^3}=f(t)$ với $t>0$.

Ta có $f'(t)=-\dfrac{4}{t^2}+\dfrac{1}{9t^4}=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{6}$ (vì $t>0$).

Ta có bảng biến thiên

x	0		$\frac{1}{6}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-\infty$	↗	16	↘	0

Vậy $Q_{max}=16 \Leftrightarrow a=\dfrac{1}{3}$; $b=c=\dfrac{1}{12}$.

Suy ra tọa độ điểm $A\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{12};\dfrac{1}{12}\right)$; tọa độ các điểm $M\left(\dfrac{1}{3};0;0\right)$; $N\left(0;\dfrac{1}{12};0\right)$; $P\left(0;0;\dfrac{1}{12}\right)$.

Phương trình mặt phẳng (MNP) $\dfrac{x}{\frac{1}{3}}+\dfrac{y}{\frac{1}{12}}+\dfrac{z}{\frac{1}{12}}=1 \Leftrightarrow 3x+12y+12z-1=0$.

Câu 31: **(Trần Đại Nghĩa)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $M(1;2;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M cắt các trục Ox,Oy,Oz lần lượt tại A,B,C sao cho $\dfrac{1}{OA^2}+\dfrac{1}{OB^2}+\dfrac{1}{OC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $(P): x+2y+3z-8=0$. **B.** $(P): \dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{1}=1$.

C. $(P): x+y+z-4=0$. **D.** $(P): x+2y+z-6=0$.

Lời giải

Chọn D

Gọi H là hình chiếu của gốc tọa độ O lên mặt phẳng (P), do tứ diện $OABC$ là tứ diện vuông tại O nên ta có $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}=\frac{1}{OH^2}$ nhỏ nhất khi và chỉ khi OH lớn nhất.

Mặt khác $OH=d\left(O,(P)\right)\le OM$.

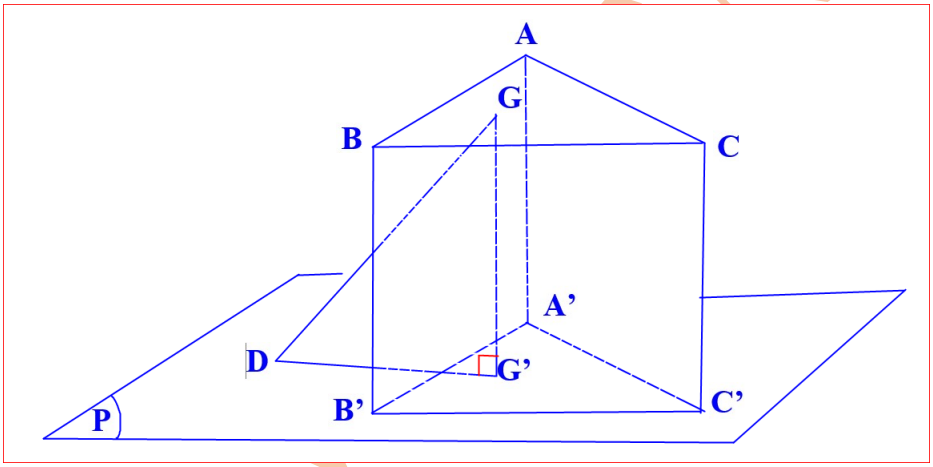
Vậy mặt phẳng $(P):\begin{cases}M(1;2;1)\\ \vec{n}=\overrightarrow{OM}=(1;2;1)\end{cases}\Leftrightarrow (P):x+2y+z-6=0$.

Câu 32: **(THPT PHỤ DỰC – THÁI BÌNH)** Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1;1;1)$, $B(2;3;4)$, $C(3;2;4)$, $D(-2;-1;-3)$. Mặt phẳng (P) thay đổi nhưng luôn qua D và không cắt cạnh nào của tam giác ABC. Khi tổng các khoảng cách từ A, B, C đến (P) là lớn nhất thì (P) có một phương trình dạng $ax+by+cz+29=0$. Tính tổng $a+b+c$.

A. 9. **B.** 5. **C.** 13. **D.** 14.

Lời giải.

Chọn C



* Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu của A, B, C xuống (P).

Gọi G là trọng tâm $\Delta ABC\Rightarrow G(2;2;3)$.

Gọi G' là hình chiếu của G xuống mặt phẳng (P).

* Tổng khoảng cách từ A, B, C xuống (P), theo giả thiết thì $(P)//(ABC)$ nên

$d=AA'+BB'+CC'=3GG'\Rightarrow d_{\max}\Leftrightarrow (GG')_{\max}$.

Mà $GG'\le GD$ (mối quan hệ đường xiên – hình chiếu)

$\Rightarrow d_{\max}\Leftrightarrow G'\equiv D\Rightarrow (P)$ qua $D(-2;-1;-3)$ nhận $\overrightarrow{DG}=(4;3;6)$ là véc tơ pháp tuyến nên có phương trình: $4(x+2)+3(y+1)+6(z+3)=0$ hay $(P):4x+3y+6z+29=0$. Từ đó suy ra $a=4$; $b=3$; $c=6$.

Vậy $a+b+c=4+3+6=13$.

Câu 33: **(Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-2;3;4)$ và $C(-2;5;1)$. Điểm $M(a;b;0)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng $T=a^2+b^2$ bằng

A. $T=10$. **B.** $T=25$. **C.** $T=13$. **D.** $T=17$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $G(-1;3;2)$ là trọng tâm tam giác ABC.

Khi đó

$$MA^2+MB^2+MC^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2$$
$$=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2$$
$$=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2+2\overrightarrow{MG}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)$$
$$=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$$

Do đó $MA^2+MB^2+MC^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu của G lên mặt phẳng (Oxy). Do hình chiếu vuông góc của G lên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ $(-1;3;0)$

Vậy $M(-1;3;0)$. Từ đó $T=(-1)^2+3^2=10$.

Câu 34: **(Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1)$, $B(-2;3;4)$ và $C(-2;5;1)$. Điểm $M(a;b;0)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA^2+MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tổng $T=a^2+b^2$ bằng

A. $T=10$. **B.** $T=25$. **C.** $T=13$. **D.** $T=17$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $G(-1;3;2)$ là trọng tâm tam giác ABC.

Khi đó

$$MA^2+MB^2+MC^2=\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2+\overrightarrow{MC}^2$$
$$=\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GC}\right)^2$$
$$=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2+2\overrightarrow{MG}\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)$$
$$=3MG^2+GA^2+GB^2+GC^2$$

Do đó $MA^2+MB^2+MC^2$ nhỏ nhất khi và chỉ khi MG nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M là hình chiếu của G lên mặt phẳng (Oxy). Do hình chiếu vuông góc của G lên mặt phẳng (Oxy) có tọa độ $(-1;3;0)$

Vậy $M(-1;3;0)$. Từ đó $T=(-1)^2+3^2=10$.

Câu 35: **(THTT lần5)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;6)$, $B(2;4;0)$ và $C(0;4;6)$. Biết M là điểm để biểu thức $MA+MB+MC+MO$ đạt giá trị nhỏ nhất, phương trình đường thẳng Δ đi qua hai điểm $H(3;0;-1)$ và M là

A. $\Delta:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{-3}$. **B.** $\Delta:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{3}$.

C. $\Delta:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+1}{-1}$. **D.** $\Delta:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+1}{-2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a};\vec{b})$.

Do $\cos(\vec{a};\vec{b})\le 1$ nên: $|\vec{a}|.|\vec{b}|\ge \vec{a}.\vec{b}$. Dấu bằng xảy ra khi $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng.

Gọi G là là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GO}=\vec{0}$. Khi đó, tọa độ G là

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C + x_O}{4} = 1 \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C + y_O}{4} = 2 \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C + z_O}{4} = 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow G(1;2;3) \Rightarrow GA = GB = GC = GO = \sqrt{14}$.

Đặt $T = MA + MB + MC + MO$.

$\Rightarrow \sqrt{14}T = \sqrt{14}MA + \sqrt{14}MB + \sqrt{14}MC + \sqrt{14}MO = GA.MA + GB.MB + GC.MC + GO.MO$

$\geq \overrightarrow{GA}.\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GB}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{GC}.\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{GO}.\overrightarrow{MO}$

$= \overrightarrow{GA}.\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right) + \overrightarrow{GB}.\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right) + \overrightarrow{GC}.\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right) + \overrightarrow{GO}.\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GO}\right)$

$= GA^2 + GB^2 + GC^2 + GO^2 + \overrightarrow{MG}.\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GO}\right)$

$= GA^2 + GB^2 + GC^2 + GO^2 = 56 \Rightarrow T \geq 4\sqrt{14}$.

Giá trị nhỏ nhất $T = MA + MB + MC + MO$ bằng $4\sqrt{14}$ khi 4 cặp véc tơ: $\overrightarrow{GA}$ và $\overrightarrow{MA}$; $\overrightarrow{GB}$ và $\overrightarrow{MB}$; $\overrightarrow{GC}$ và $\overrightarrow{MC}$; $\overrightarrow{GO}$ và $\overrightarrow{MO}$ cùng hướng. Khi đó M trùng với G.

$\Rightarrow M(1;2;3)$. Đường thẳng Δ có một véctơ chỉ phương $\vec{u} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{MH} = (1;-1;-2)$.

Vậy phương trình đường thẳng Δ là: $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+1}{-2}$.

Câu 36: **(Đặng Thành Nam Đề 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3;-2;2)$, $B(-2;2;0)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 3 = 0$. Xét các điểm M, N di động trên (P) sao cho $MN = 1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $2MA^2 + 3NB^2$ bằng

A. 49,8. **B.** 45. **C.** 53. **D.** 55,8.

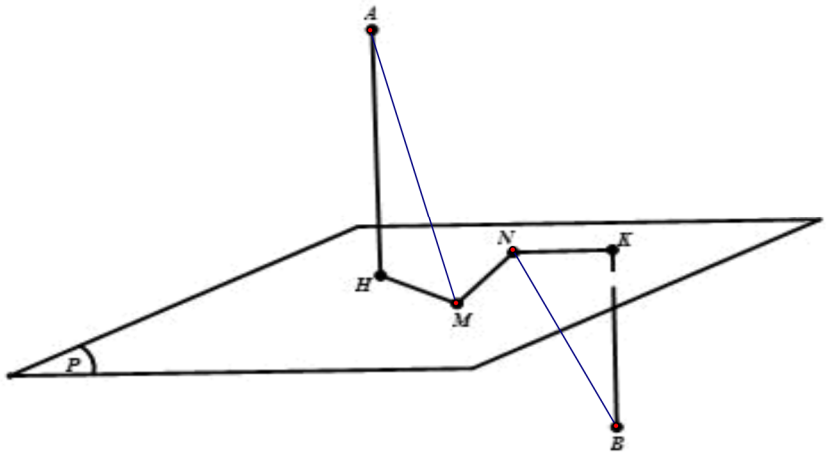
Lời giải

Chọn A

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B lên mặt phẳng (P).

Theo định lí Pitago có

$$\begin{cases} MA^2 = MH^2 + HA^2 = MH^2 + d^2(A,(P)) = MH^2 + 9 \\ NB^2 = NK^2 + KB^2 = NK^2 + d^2(B,(P)) = NK^2 + 9 \end{cases}.$$



Đặt $MH = a, NK = b \Rightarrow 2MA^2 + 3NB^2 = 2(a^2 + 9) + 3(b^2 + 9)$.

Mặt khác theo bất đẳng thức đường gấp khúc ta có:
$HM+MN+NK\ge HK=3\Rightarrow a+1+b\ge 3\Leftrightarrow b\ge 2-a.$
Do đó $2MA^2+3NB^2\ge 2\left(a^2+9\right)+3\left((2-a)^2+9\right)=5a^2-12a+57\ge 49,8.$

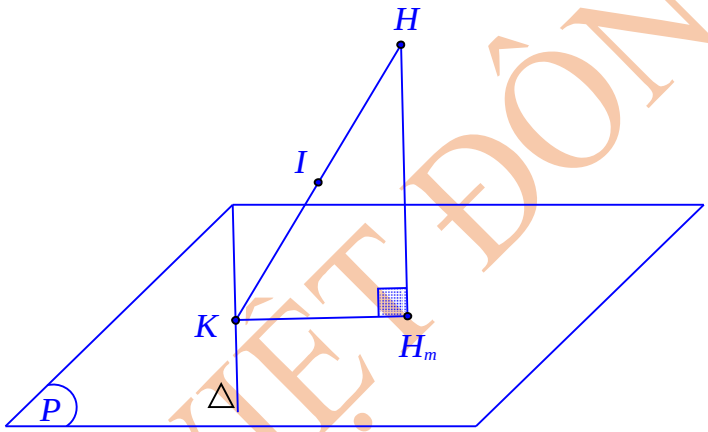
Vậy giá trị nhỏ nhất $2MA^2+3NB^2$ bằng $49,8$ khi $a=1,2;b=0,8$ và các điểm M,N thuộc đoạn thẳng HK.

Câu 37: **(Sở Bắc Ninh 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):mx+(m+1)y-z-2m-1=0$, với m là tham số. Gọi (T) là tập hợp các điểm H_m là hình chiếu vuông góc của điểm $H(3;3;0)$ trên (P). Gọi a,b lần lượt là khoảng cách lớn nhất, khoảng cách nhỏ nhất từ O đến một điểm thuộc (T). Khi đó, $a+b$ bằng

A. $5\sqrt{2}$. **B.** $3\sqrt{3}$. **C.** $8\sqrt{2}$. **D.** $4\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $(P):mx+(m+1)y-z-2m-1=0,\ \forall m$

$(P):m(x+y-2)+y-z-1=0\Leftrightarrow\begin{cases}x+y-2=0\\y-z-1=0\end{cases}.$

Vậy mặt phẳng (P) luôn chứa đường thẳng $(\Delta):\begin{cases}x=2-t\\y=t\\z=-1+t\end{cases}$.

Gọi $K(2-t;t;-1+t)$ là hình chiếu của H lên đường thẳng (Δ), $\overrightarrow{HK}=(-1-t;t-3;-1+t)$.

Vì $HK\perp(\Delta)$ nên: $-(-1-t)+t-3-1+t=0\Leftrightarrow t=1\Rightarrow K(1;1;0)$.

Gọi mặt phẳng (α) là mặt phẳng đi qua K và vuông góc với đường thẳng (Δ).

$\Rightarrow(\alpha):-x+y+z=0\Rightarrow O\in(Q)$. Vậy:

+ H_m thuộc mặt cầu đường kính HK.

+ $H_m\in(Q)$.

$\Rightarrow(T)$ là một đường tròn tâm $I(2;2;0)$, bán kính $R=\dfrac{HK}{2}=\sqrt{2}$ và $OI=2\sqrt{2}$.

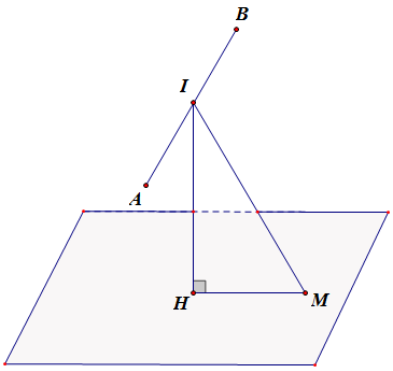
Vậy: $a=OI+R=3\sqrt{2}$; $b=OI-R=\sqrt{2}\Rightarrow a+b=4\sqrt{2}$.

Câu 38: **(Nguyễn Trãi Hải Dương Lần1)** Trong không gian $Oxyz$ cho $A(4;-2;6)$, $B(2;4;2)$, $M\in(\alpha):x+2y-3z-7=0$ sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất. Tọa độ của M bằng

A. $\left(\frac{29}{13};\frac{58}{13};\frac{5}{13}\right)$. **B.** $(4;3;1)$. **C.** $(1;3;4)$. **D.** $\left(\frac{37}{3};\frac{-56}{3};\frac{68}{3}\right)$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I là trung điểm $AB \Rightarrow I(3;1;4)$. Gọi H là hình chiếu của I xuống mặt phẳng (α).

Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}) = MI^2 + \overrightarrow{MI}.(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}) - IA^2 = MI^2 - IA^2$.

Do IA không đổi nên $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI = IH \Leftrightarrow M \equiv H$.

Gọi Δ là đường thẳng đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (α). Khi đó Δ nhận $\overrightarrow{n_{(\alpha)}} = (1;2;-3)$ làm vectơ chỉ phương. Do đó Δ có phương trình $\begin{cases} x = 3+t \\ y = 1+2t \\ z = 4-3t \end{cases}$.

$H \in \Delta \Leftrightarrow H(3+t;1+2t;4-3t)$.

$H \in (\alpha) \Leftrightarrow (3+t)+2(1+2t)-3(4-3t)-7=0 \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow H(4;3;1)$.

Vậy $M(4;3;1)$.

Câu 39: **(GIA LỘC TỈNH HẢI DƯƠNG 2019 lần 2)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có tọa độ các điểm $A(1;1;1)$, $B(2;0;2)$ $C(-1;-1;0)$, $D(0;3;4)$. Trên các cạnh AB, AC, AD lần lượt lấy các điểm B', C', D' sao cho $\frac{AB}{AB'}+\frac{AC}{AC'}+\frac{AD}{AD'}=4$ và tứ diện $AB'C'D'$ có thể tích nhỏ nhất. Phương trình mặt phẳng $(B'C'D')$ là

A. $16x-40y-44z+39=0$. **B.** $16x-40y-44z-39=0$.

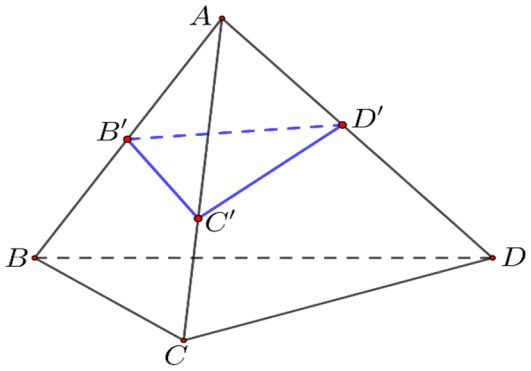
C. $16x+40y+44z-39=0$. **D.** $16x+40y-44z+39=0$.

Lời giải

Chọn D

Trên các cạnh AB, AC, AD của tứ diện $ABCD$ lần lượt có các điểm B', C', D'. Áp dụng công thức tỉ số thể tích ta có $\frac{V_{AB'C'D'}}{V_{ABCD}} = \frac{AB'}{AB}\cdot\frac{AC'}{AC}\cdot\frac{AD'}{AD}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Từ giả thiết $\frac{AB}{AB'}+\frac{AC}{AC'}+\frac{AD}{AD'}=4$, áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$ ta có:

$$4=\frac{AB}{AB'}+\frac{AC}{AC'}+\frac{AD}{AD'}\ge 3.\sqrt[3]{\frac{AB}{AB'}\cdot\frac{AC}{AC'}\cdot\frac{AD}{AD'}}=3.\sqrt[3]{\frac{V_{ABCD}}{V_{AB'C'D'}}}$$

$$\Leftrightarrow 64\ge 27\cdot\frac{V_{ABCD}}{V_{AB'C'D'}}\Leftrightarrow V_{AB'C'D'}\ge\frac{27}{64}V_{ABCD}.$$

Do V_{ABCD} cố định nên $V_{AB'C'D'}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow V_{A'B'C'D'}=\frac{27}{64}V_{ABCD}\Leftrightarrow\frac{AB}{AB'}=\frac{AC}{AC'}=\frac{AD}{AD'}=\frac{4}{3}$

$$\Leftrightarrow\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}=\frac{AD'}{AD}=\frac{3}{4}$$

$\Leftrightarrow (B'C'D')$ song song với (BCD) và đi qua điểm B' thoả $\overrightarrow{AB'}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

Có $\overrightarrow{BC}=(-3;-1;-2)$, $\overrightarrow{BD}=(-2;3;2)$, suy ra vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(B'C'D')$ là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right]=(4;10;-11)$.

Có $\overrightarrow{AB}=(1;-1;1)$, giả sử $B'(x;y;z)$. Do $\overrightarrow{AB'}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ nên $B'\left(\frac{7}{4};\frac{1}{4};\frac{7}{4}\right)$.

Vậy phương trình $(B'C'D')$ là: $16x+40y-44z+39=0$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

DẠNG 3: MIN, MAX PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Câu 1: **(Nguyễn Du số 1 lần3)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-3}{2}=\frac{y-5}{2}=z+2$ và hai điểm $A(4;3;0), B(1;9;3)$. Điểm $M(a;b;c)$ nằm trên d sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất. Khi đó, tổng $a+b+c$ thuộc khoảng nào dưới đây:

A. $(9;10)$. **B.** $(4;5)$. **C.** $(2;3)$. **D.** $(7;8)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $M\in d\Rightarrow M(2t+3;2t+5;t-2)$.

$T=MA+MB=AM+BM=\sqrt{(2t-1)^2+(2t+2)^2+(t-2)^2}+\sqrt{(2t+2)^2+(2t-4)^2+(t-5)^2}$

$=\sqrt{9t^2+9}+\sqrt{9t^2-18t+45}=3\left(\sqrt{t^2+1^2}+\sqrt{(1-t)^2+2^2}\right)\geq 3\sqrt{(t+1-t)^2+(1+2)^2}=3\sqrt{10}$.

Do đó: $T_{\min}=3\sqrt{10}\Leftrightarrow\frac{t}{1-t}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow t=\frac{1}{3}\Rightarrow M\left(\frac{11}{3};\frac{17}{3};-\frac{5}{3}\right)\Rightarrow a+b+c=\frac{23}{3}\approx 7,7\in(7;8)$.

Câu 2: **(Chuyên Sơn La Lần 3 năm 2018-2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$ và đường thẳng $d:\frac{x-5}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z}{-1}$. Xét M là điểm thay đổi thuộc d, giá trị nhỏ nhất của $2MA^2+3MB^2$ bằng

A. 14. **B.** 160. **C.** $4\sqrt{10}$. **D.** 18.

Lời giải

Chọn B

Ta có $M\in d\Rightarrow M(5+2t;2-t;-t),\ (t\in\mathbb{R})$.

$\Rightarrow\overrightarrow{AM}=(3+2t;4-t;-4-t),\ \overrightarrow{BM}=(8+2t;-1-t;1-t)$.

$2MA^2+3MB^2=2\left[(3+2t)^2+(4-t)^2+(-4-t)^2\right]+3\left[(8+2t)^2+(-1-t)^2+(1-t)^2\right]$

$=30t^2+120t+280=30(t+2)^2+160\geq 160$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $t=-2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $2MA^2+3MB^2$ bằng 160.

Câu 3: Cho đường thẳng $\Delta:\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{2}$ và $A(1;1;0)$, $B(3;-1;4)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc Δ sao cho $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(-1;1;-2)$. **B.** $M\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};1\right)$. **C.** $M\left(-\frac{3}{2};\frac{3}{2};-3\right)$. **D.** $M(1;-1;2)$.

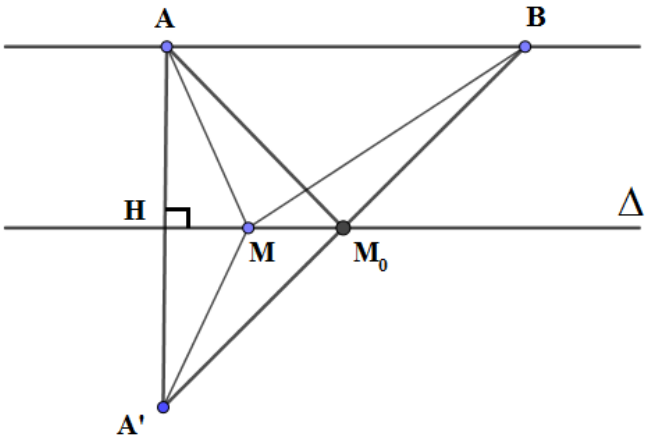
Lời giải

Chọn D

Ta có: $\overrightarrow{AB}(2;-2;4)$ cùng phương với $\vec{u}(1;-1;2)$ và $A(1;1;0)\notin\Delta$ (do $\frac{1+1}{1}\neq\frac{1-1}{-1}$)

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Rightarrow AB // \Delta \Rightarrow AB$ và Δ đồng phẳng.



* Xét mặt phẳng chứa AB và Δ:

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua Δ; (α) là mặt phẳng qua A, vuông góc với Δ

Khi đó, giao điểm H của Δ với (α) là trung điểm của AA'

(α) có phương trình: $x-y+2z=0$

Giả sử $H(-1+t;1-t;-2+2t)$, $H\in(\alpha)\Leftrightarrow t=1\Rightarrow H(0;0;0)$

H là trung điểm của $AA'\Rightarrow A'(-1;-1;0)$

Ta có: $MA+MB=MA'+MB\geq A'B\Rightarrow (MA+MB)_{\min}=A'B$ khi và chỉ khi M trùng với M_0 là giao điểm của $A'B$ và Δ

Đường thẳng $A'B$ đi qua $A'(-1;-1;0)$, có phương trình: $\begin{cases}x=-1+t'\\y=-1\\z=t'\end{cases}$

Mà $\Delta:\begin{cases}x=-1+t\\y=1-t\\z=-2+2t\end{cases}$

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}-1+t=-1+t'\\1-t=-1\\-2+2t=t'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=t'\\t=2\\-2+2t=t'\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t'=2\\t=2\end{cases}$

$\Rightarrow M_0(1;-1;2)$

Vậy, để $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $M(1;-1;2)$.

Câu 4: Cho đường thẳng $\Delta:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z+2}{2}$ và hai điểm $A(1;1;0)$, $B(-1;0;1)$. Biết điểm $M(a;b;c)$ thuộc Δ sao cho biểu thức $T=|MA-MB|$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó tổng $a-b+c$ bằng:

A. 8. **B.** $8+\sqrt{33}$. **C.** $8+\dfrac{\sqrt{33}}{3}$. **D.** $8+\dfrac{4\sqrt{33}}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Δ qua $C(-1;1;-2)$, và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(1;-1;2)$

$\overrightarrow{AB}=(-2;-1;1)$; $\overrightarrow{AC}=(-2;0;-2)$.

$\left[\overrightarrow{AB};\vec{u}\right]\overrightarrow{AC}\neq 0$ nên AB; Δ không đồng phẳng

Vì điểm M thuộc Δ nên ta có $M(-1+t;1-t;-2+2t)$, $t\in\mathbb{R}$. Lúc đó

$$P=|MA-MB|=\left|\sqrt{(t-2)^2+t^2+(2t-2)^2}-\sqrt{(-t)^2+(t-1)^2+(2t-3)^2}\right|$$

$$=\left|\sqrt{6t^2-12t+8}-\sqrt{6t^2-14t+10}\right|.$$

$$P=\sqrt{6}\left|\sqrt{(t-1)^2+\frac{1}{3}}-\sqrt{\left(t-\frac{7}{6}\right)^2+\frac{11}{6}}\right|$$

Đặt $\vec{u}=\left(t-1;\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\vec{v}=\left(t-\frac{7}{6};\frac{\sqrt{11}}{6}\right)$. Ta có $\left||\vec{u}|-|\vec{v}|\right|\le|\vec{u}-\vec{v}|$.

Tức là $P\le\sqrt{6}.\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{11}}{6}\right)^2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{t-1}{t-\frac{7}{6}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{11}}{6}}\Leftrightarrow t=3+\frac{\sqrt{33}}{3}$.

Với ta có $a-b+c=4t-4=8+\frac{4\sqrt{33}}{3}$.

Câu 5: Cho đường thẳng $\Delta:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$ và hai điểm $A(0;1;-3)$, $B(-1;0;2)$. Biết điểm M thuộc Δ sao cho biểu thức $T=|MA-MB|$ đạt giá trị lớn nhất là $T_{\max}$. Khi đó, $T_{\max}$ bằng bao nhiêu?

A. $T_{\max}=\sqrt{3}$. **B.** $T_{\max}=2\sqrt{3}$. **C.** $T_{\max}=3\sqrt{3}$. **D.** $T_{\max}=\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;-1;5)$, phương trình đường thẳng AB là $\begin{cases}x=-t\\y=1-t\\z=-3+5t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

Xét vị trí tương đối giữa AB và Δ ta có AB cắt Δ tại $C\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{AC}=\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)\Rightarrow\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\Rightarrow C$ là trung điểm AB.

$T=|MA-MB|\le AB$. Dấu "=" xảy ra khi $M\equiv A$ hoặc $M\equiv B$.

Do đó $T_{\max}=AB=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$.

Câu 6: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2;5;3)$, đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{2}$. Biết rằng phương trình mặt phẳng (P) chứa d sao cho khoảng cách từ A

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

đến mặt phẳng (P) lớn nhất, có dạng $ax+by+cz-3=0$ (với a,b,c là các số nguyên). Khi đó tổng $T=a+b+c$ bằng

A. 3. **B.** -3. **C.** -2. **D.** -5.

Lời giải

Chọn C

Gọi K, H lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (P), đường thẳng d.

Ta có: $AH \geq AK$.

Suy ra, mặt phẳng (P) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) lớn nhất khi và chỉ khi (P) đi qua điểm H và vuông góc AH.

Gọi $H(1+2t;t;2+2t) \in d$ ta có:

$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{u_d}=0$ với $\overrightarrow{u_d}=(2;1;2)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng d.

$\Rightarrow t=1$

$\Rightarrow H(3;1;4)$.

Nên (P) đi qua điểm $H(3;1;4)$ nhận $\overrightarrow{AH}=(1;-4;1)$ làm vectơ pháp tuyến có phương trình là: $x-4y+z-3=0$.

Vậy $T=a+b+c=1-4+1=-2$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): y-1=0$, đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=1 \\ y=2-t \\ z=1 \end{cases}$ và hai điểm $A(-1;-3;11)$, $B\left(\frac{1}{2};0;8\right)$. Hai điểm M,N thuộc mặt phẳng (P) sao cho $d(M;\Delta)=2$ và $NA=2NB$. Tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn MN.

A. $MN_{\min}=1$. **B.** $MN_{\min}=\sqrt{2}$. **C.** $MN_{\min}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $MN_{\min}=\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\begin{cases} \Delta \perp (P) \\ \Delta \cap (P)=\{I(1;1;1)\} \end{cases}$.

Vì $d(M;\Delta)=2$ nên điểm M thuộc mặt trụ tròn xoay (H) có trục là đường thẳng Δ.

Khi đó M nằm trên giao của mặt phẳng (P) và mặt trụ (H) là đường tròn (C) có tâm $I(1;1;1)$ và bán kính $R=2$.

Giả sử $N(x;y;z)$.

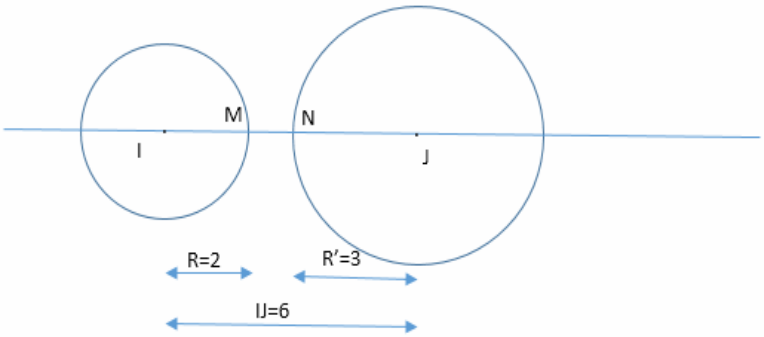
Do $NA=2NB \Leftrightarrow NA^2=4NB^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-2y-14z+42=0$.

Suy ra N nằm trên mặt cầu (S) có tâm $J(1;1;7)$ và bán kính $R'=3$.

Mặt khác: $\begin{cases} N \in (P) \\ J \in (P) \end{cases}$, do đó N nằm trên giao của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) là đường tròn (C') có tâm $J(1;1;7)$ và bán kính $R'=3$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Bài toán đã cho trở thành: 'Trên mặt phẳng (P) cho hai điểm M,N. Biết M thuộc đường tròn (C) có tâm $I(1;1;1)$, bán kính $R=2$ và N thuộc đường tròn (C') có tâm $J(1;1;7)$, bán kính $R'=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của đoạn MN."



Từ hình vẽ trên, dễ thấy $MN_{\min} = \text{IJ} - (IM + JN) = 6 - (2+3) = 1$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 2+t \\ y = -1+2t \\ z = 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ hai điểm $A(2;0;3)$ và $B(2;-2;-3)$. Biết điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc Δ thì $MA^4 + MB^4$ nhỏ nhất. Tìm x_0

A. $x_0 = 0$ **B.** $x_0 = 1$ **C.** $x_0 = 2$ **D.** $x_0 = 3$

Lời giải

Phương trình đường thẳng AB là: $\begin{cases} x = 2 \\ y = t_1 \\ z = 3+3t_1 \end{cases} (t_1 \in \mathbb{R})$. Dễ thấy đường thẳng Δ và AB cắt nhau tại điểm $I(2;-1;0)$ suy ra AB và Δ đồng phẳng.

Lại có $\overrightarrow{IA}(0;1;3), \overrightarrow{IB}(0;-1;-3) \Rightarrow \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB} \Rightarrow IA + IB = AB$.

Ta có: $MA^4 + MB^4 \geq \frac{1}{2}\left(MA^2 + MB^2\right)^2 \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(MA + MB\right)^2\right)^2 \geq \frac{1}{8}AB^4 = \frac{1}{8}\left(IA + IB\right)^4$.

Do đó $MA^4 + MB^4$ nhỏ nhất khi M trùng với điểm $I(2;-1;0)$

Chọn C

Câu 9: **(CHUYÊN LÊ THÁNH TÔNG QUẢNG NAM LẦN 2 NĂM 2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{3}$ và hai điểm $A(2;0;3)$, $B(2;-2;-3)$. Biết điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc d thỏa mãn $P = MA^4 + MB^4 + MA^2.MB^2$ nhỏ nhất. Tìm y_0.

A. $y_0 = 3$. **B.** $y_0 = 2$. **C.** $y_0 = 1$. **D.** $y_0 = -1$.

Lời giải

Chọn D

Vì $M \in d$ nên $M(t+3;2t+1;3t+3)$.

Suy ra $\overrightarrow{MA}=(-t-1;-2t-1;-3t)$, $\overrightarrow{MB}=(-t-1;-2t-3;-3t-6)$.

$MA^2=(t+1)^2+(2t+1)^2+9t^2=14t^2+6t+2 \quad (1)$.

$MB^2=(t+1)^2+(2t+3)^2+(3t+6)^2=14t^2+50t+46 \quad (2)$.

Ta có $P=MA^4+MB^4+MA^2.MB^2=\left(MB^2-MA^2\right)^2+3MA^2.MB^2$

Thay (1) và (2) vào P ta được $P=(44t+44)^2+3(14t^2+6t+2)(14t^2+50t+46)$

$=44^2(t+1)^2+3\left[14(t+1)^2+10-22(t+1)\right]\left[14(t+1)^2+10+22(t+1)\right]$

$=1936(t+1)^2+3\left\{\left[14(t+1)^2+10\right]^2-22^2(t+1)^2\right\}$

$=1936(t+1)^2+3\left[196(t+1)^4+280(t+1)^2+100-484(t+1)^2\right]$

$=588(t+1)^4+1324(t+1)^2+300$. Đặt $u=(t+1)^2, u\ge 0 \Rightarrow P=588u^2+1324u+300, u\ge 0$.

Xét hàm số $f(u)=588u^2+1324u+300, u\ge 0$ có $f'(u)=1176u+1324>0, \forall u\ge 0$ cho nên $f(u)\ge f(0), \forall u\ge 0$.

Ta được $P_{\min}=f(0)=300$ khi $u=0\Rightarrow t+1=0\Leftrightarrow t=-1\Rightarrow y_0=2.(-1)+1=-1$. Vậy $y_0=-1$.

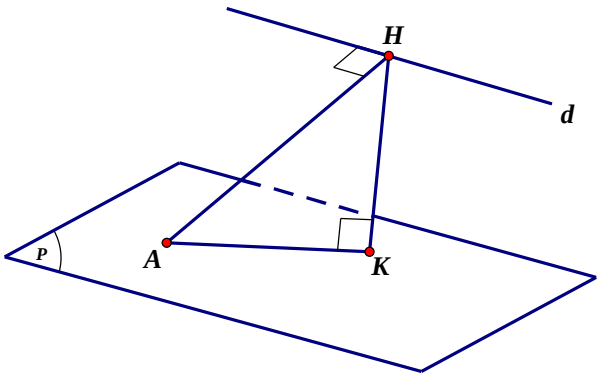
Câu 10: **(TTHT Lần 4)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(2;-1;-2)$ và đường thẳng (d) có phương trình $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{1}$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A, song song với đường thẳng (d) và khoảng cách từ d tới mặt phẳng (P) là lớn nhất. Khi đó mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. $x-y-6=0$. **B.** $x+3y+2z+10=0$.

C. $x-2y-3z-1=0$. **D.** $3x+z+2=0$.

Lời giải

Chọn D



Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng d. Ta suy ra $H(1;1;1)$.

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm A và (P) song song với đường thẳng d. Gọi K là hình chiếu của H lên mặt phẳng (P). Do d // (P) nên ta có $d(d,(P))=d(H,(P))=HK$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Ta luôn có bất đẳng thức $HK \le HA$. Như vậy khoảng cách từ (d) đến (P) lớn nhất bằng AH.

Và khi đó (P) nhận $\overrightarrow{AH} = (-1;2;3)$ làm vectơ pháp tuyến.

Do (P) đi qua $A(2;-1;-2)$ nên ta có phương trình của (P) là: $x-2y-3z-10=0$.

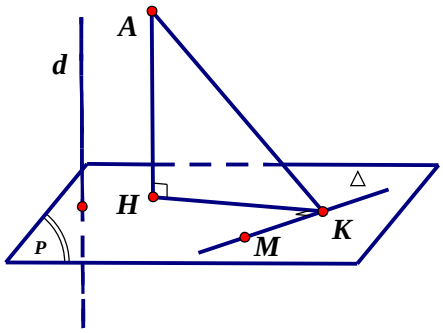
Do đó (P) vuông góc với mặt phẳng có phương trình: $3x+z+2=0$.

Câu 11: **(TTHT Lần 4)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(-2;-2;1)$, $A(1;2;-3)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z}{-1}$. Tìm một vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng Δ đi qua M, vuông góc với đường thẳng d đồng thời cách điểm A một khoảng bé nhất.

A. $\vec{u} = (2;2;-1)$. **B.** $\vec{u} = (1;7;-1)$. **C.** $\vec{u} = (1;0;2)$. **D.** $\vec{u} = (3;4;-4)$.

Lời giải

Chọn C



Xét (P) là mặt phẳng qua M và $(P) \perp d$.

Mặt phẳng (P) qua $M(-2;-2;1)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P} = \overrightarrow{u_d} = (2;2;-1)$ nên có phương trình: $(P): 2x+2y-z+9=0$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên (P) và Δ. Khi đó: $AK \ge AH = const$ nên $AK_{\min}$ khi và chỉ khi $K \equiv H$. Đường thẳng AH đi qua $A(1,2,-3)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d} = (2;2;-1)$ nên AH có phương trình tham số: $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2+2t \\ z = -3-t \end{cases}$.

Vì $H \in AH \Rightarrow H(1+2t;2+2t;-3-t)$.

Lại $H \in (P) \Rightarrow 2(1+2t)+2(2+2t)-(-3-t)+9=0 \Rightarrow t=-2 \Rightarrow H(-3;-2;-1)$.

Vậy $\vec{u} = \overrightarrow{HM} = (1;0;2)$.

Câu 12: **(TTHT Lần 4)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;-1;0)$ và đường thẳng $d: \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-1}{1}$. Mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất có phương trình là

A. $x+y-z-2=0$. **B.** $x+y-z=0$.

C. $x+y-z+1=0$. **D.** $-x+2y+z+5=0$.

Lời giải

Chọn B

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của A lên (α) và d. Khi đó ta có $AH \le AK$.

Vì $H \in d$ nên $H(2-t;-1+2t;1+t) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (-1-t;2t;1+t)$.

Do $AH \perp d$ nên ta có $-(-1-t)+2.2t+1+t=0 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{3}$. Khi đó $\overrightarrow{AH} = \left(-\frac{2}{3};-\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất khi và chỉ khi $AH = AK$. Do đó (α) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1;1;-1)$. Vậy (α): $1(x-2)+1(y+1)-1(z-1)=0 \Leftrightarrow x+y-z=0$.

Vẫn là đánh giá bất đẳng thức $AH \le AK$ nói trên, nhưng bài toán sau đây lại phát biểu hơi khác một chút.

Câu 13: **(TTHT Lần 4)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3;0;1)$, $B(1;-1;3)$ và mặt phẳng $(P): x-2y+2z-5=0$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua A, song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ B đến d nhỏ nhất.

A. $d: \frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}$.

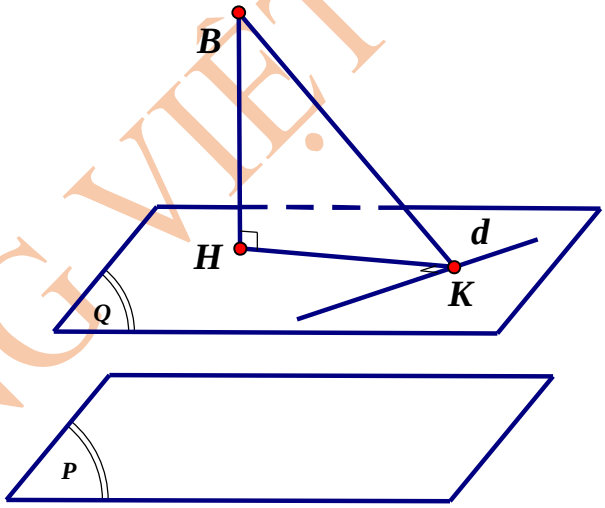
B. $d: \frac{x+3}{26} = \frac{y}{-11} = \frac{z-1}{2}$.

C. $d: \frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{2}$.

D. $d: \frac{x+3}{-26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}$.

Lời giải

Chọn A



Ta thấy rằng d đi qua A và d song song với (P) nên d luôn nằm trong mặt phẳng (Q) qua A và (Q) // (P). Như vậy bây giờ ta chuyển về xét trong mặt phẳng (Q) để thay thế cho (P). Ta lập được phương trình mặt phẳng $(Q): x-2y-2z+1=0$.

Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của B lên (Q) và d. Ta tìm được $H\left(-\frac{1}{9};\frac{11}{9};\frac{7}{9}\right)$. Ta luôn có được bất đẳng thức $d(B;d) = BK \ge BH$ nên khoảng cách từ B đến d bé nhất bằng BH.

Đường thẳng d bây giờ đi qua A,H nên có phương trình $\frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 14: **(KÊNH TRUYỀN HÌNH GIÁO DỤC QUỐC GIA VTV7 –2019)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng d có phương trình $\begin{cases} x=-1-2t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases}$ và điểm $A(1;2;3)$. Mặt phẳng (P) chứa d sao cho $d(A,(P))$ lớn nhất. Khi đó tọa độ vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là

A. $(1;1;1)$. **B.** $(1;2;3)$. **C.** $(1;-1;1)$. **D.** $(0;1;1)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên (P) và K là hình chiếu vuông góc của A trên d.

Ta có: $d(A,(P))=AH\le AK$.

Suy ra: $d(A,(P))$ lớn nhất bằng AK khi và chỉ khi H trùng K.

Khi đó tọa độ vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là: $\overrightarrow{AK}$.

Lấy $K(-1-2t;t;1+t)\in d$ và $\overrightarrow{AK}=(-2t-2;t-2;t-2)$.

Lại có: $\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{u_d}=0\Leftrightarrow(-2t-2)(-2)+1.(t-2)+1.(t-2)=0\Leftrightarrow t=0$.

Suy ra: $\overrightarrow{AK}=(-2;-2;-2)$. Vậy vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là: $(1;1;1)$.

Câu 15: **(Chuyên Bắc Giang)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai mặt phẳng $(P):x+2y-2z+1=0,\ (Q):x+my+(m-1)z+2019=0$. Khi hai mặt phẳng (P), (Q) tạo với nhau một góc nhỏ nhất thì mặt phẳng (Q) đi qua điểm M nào sau đây?

A. $M(2019;-1;1)$. **B.** $M(0;-2019;0)$. **C.** $M(-2019;1;1)$. **D.** $M(0;0;-2019)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q). Vì $0°\le\alpha\le 90°$ nên α nhỏ nhất khi và chỉ khi $\cos\alpha$ lớn nhất.

Ta có $\cos\alpha=\dfrac{|1+2m-2(m-1)|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}.\sqrt{1^2+m^2+(m-1)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2m^2-2m+2}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.\dfrac{1}{\sqrt{m^2-m+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}.\dfrac{1}{\sqrt{\left(m-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}}\le\dfrac{1}{\sqrt{2}}.\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{3}{4}}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3},\forall m$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m-\dfrac{1}{2}=0\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$.

Khi đó $(Q):x+\dfrac{1}{2}y-\dfrac{1}{2}z+2019=0$. Dễ thấy điểm $M(-2019;1;1)$ thuộc mặt phẳng (Q).

Vậy mặt phẳng (Q) đi qua điểm $M(-2019;1;1)$.

Câu 16: **(Nguyễn Khuyến)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z}{-1}$ và $d_2:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z}{2}$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa (d_1) sao cho

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

góc giữa (P) và đường thẳng (d_2) là lớn nhất là: $ax-y+cz+d=0$. Giá trị của biểu thức $T=a+c+d$ bằng

A. $T=0$. **B.** $T=3$. **C.** $T=-\frac{13}{4}$. **D.** $T=-6$.

Lời giải

Chọn B

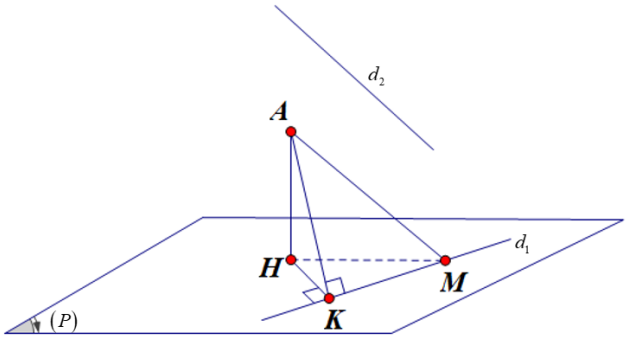
Ta xét bài toán tổng quát như sau:

Bài toán: Cho hai đường thẳng d_1, d_2 không song song. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d_1 và tạo với đường thẳng d_2 một góc lớn nhất.

Phương pháp giải

Giả sử d_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u_1}$, d_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u_2}$.

Trước hết ta xét trường hợp d_1 và d_2 chéo nhau.



Gọi M là một điểm nào đó thuộc d_1, dựng đường thẳng qua M và song song với d_2. Lấy điểm A cố định trên đường thẳng đó. Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng P, K là hình chiếu của A lên đường thẳng d_1.

Góc giữa mặt phẳng (P) và đường thẳng d_2 là $\widehat{AMH}$.

Ta có $\sin\left(\widehat{d_2,P}\right)=\sin\left(\widehat{HMA}\right)=\frac{AH}{AM}\le\frac{AK}{AM}$ (do $AH\le AK$). Góc $\left(\widehat{d_2,P}\right)$ lớn nhất khi $\sin\left(\widehat{d_2,P}\right)$ lớn nhất. Do $\frac{AK}{AM}$ không đổi suy ra $\sin\left(\widehat{d_2,P}\right)$ lớn nhất $H\equiv K$.

Mặt phẳng (P) cần tìm là mặt phẳng chứa d_1 và vuông góc với mặt phẳng (AKM), hay vectơ pháp tuyến của (P) vuông góc với hai vecto $\vec{u_1}$ và $\left[\vec{u_1},\vec{u_2}\right]$.

Nên ta chọn vectơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n_{(P)}}=\left[\vec{u_1},\left[\vec{u_1},\vec{u_2}\right]\right]$.

Trường hợp d_1 và d_2 cắt nhau tại M, bài toán giải tương tự như trên. Kết luận không thay đổi: vectơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{n_{(P)}}=\left[\vec{u_1},\left[\vec{u_1},\vec{u_2}\right]\right]$.

Áp dụng vào bài 45 ta có $\vec{u_1}=(1;2;-1)$; $\vec{u_2}=(2;-1;2)$.

$\Rightarrow\left[\vec{u_1};\vec{u_2}\right]=(3;-4;-5)\Rightarrow\overrightarrow{n_{(P)}}=\left[\vec{u_1};\left[\vec{u_1};\vec{u_2}\right]\right]=(-14;2;-10)=-2(7;-1;5)$.

Mặt phẳng (P) chứa d_1 nên mặt phẳng (P) đi qua điểm $A(1;-2;0)$.

Phương trình mặt phẳng $(P):7x-y+5z-9=0$. Suy ra $a+c+d=7+5-9=3$.

Câu 17: **(HKII-CHUYÊN-NGUYỄN-HUỆ-HÀ-NỘI)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{-2}$ và tạo với trục Oy góc có số đo lớn nhất. Điểm nào sau đây thuộc mặt phẳng (P)

A. $E(-3;0;4)$. **B.** $M(3;0;2)$. **C.** $N(-1;-2;-1)$. **D.** $F(1;2;1)$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Đường thẳng d qua điểm $M(1;-2;0)$, có véc tơ chỉ phương $\vec{a}=(1;-1;-2)$ và trục Oy có véc tơ chỉ phương $\vec{j}=(0;1;0)$.

Gọi $\vec{n}=(A;B;C)$ $(A^2+B^2+C^2\neq 0)$ là một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P).

Vì $d\subset(P)\Rightarrow \vec{a}.\vec{n}=0\Leftrightarrow 1.A+(-1).B+(-2).C=0\Leftrightarrow A=B+2C\Rightarrow \vec{n}=(B+2C;B;C)$.

Gọi φ là góc giữa mặt phẳng (P) và trục Oy $\left(0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ta có $\sin\varphi=\dfrac{|\vec{n}.\vec{j}|}{|\vec{n}|.|\vec{j}|}=\dfrac{|B|}{\sqrt{(B+2C)^2+B^2+C^2}}=\sqrt{\dfrac{B^2}{2B^2+4BC+5C^2}}$

$=\sqrt{\dfrac{1}{2+4.\left(\dfrac{C}{B}\right)+5\left(\dfrac{C}{B}\right)^2}}=\sqrt{\dfrac{1}{5\left(\dfrac{C}{B}+\dfrac{2}{5}\right)^2+\dfrac{6}{5}}}$ $(B\neq 0)$.

Vì hàm số $\sin\varphi$ tăng liên tục trên $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ nên φ đạt giá trị lớn nhất khi $\sin\varphi$ lớn nhất

Lúc đó $5\left(\dfrac{C}{B}+\dfrac{2}{5}\right)^2+\dfrac{6}{5}$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{6}{5}$ khi và chỉ khi $\dfrac{C}{B}+\dfrac{2}{5}=0$.

Chọn $B=5\Rightarrow C=-2;\ A=1\Rightarrow \vec{n}=(1;5;-2)$.

Phương trình mặt phẳng (P) qua điểm $M(1;-2;0)$, có véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;5;-2)$ là $1.(x-1)+5.(y+2)-2(z-0)=0\Leftrightarrow x+5y-2z+9=0$.

Thế tọa độ $N(-1;-2;-1)$ vào phương trình mặt phẳng (P): $-1+5(-2)-2(-1)+9=0$ (luôn đúng).

Vậy điểm $N(-1;-2;-1)$ thuộc mặt phẳng (P).

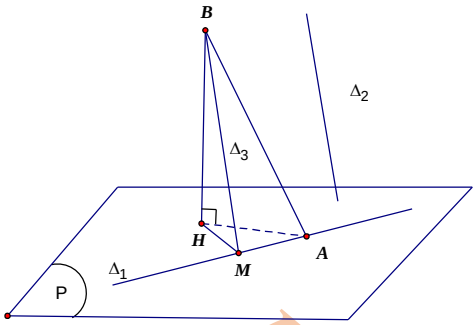
Cách 2:

Xét bài toán tổng quát: Cho hai đường thẳng Δ_1,Δ_2 phân biệt và không song song với nhau. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ_1 và tạo với Δ_2 một góc lớn nhất.

Phương pháp giải:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

+) Vẽ một đường thẳng Δ_3 bất kỳ song song với Δ_2 và cắt Δ_1 tại M. Gọi B là điểm cố định trên Δ_3 và H là hình chiếu vuông góc của B lên mp (P), kẻ $BA \perp \Delta_1$



+) $\widehat{(\Delta_2,(P))} = \widehat{BMH}$.

$\sin\widehat{BMH} = \dfrac{HB}{BM} \le \dfrac{BA}{BM}$ không đổi

Suy ra $\widehat{BMH}$ lớn nhất khi $H \equiv A$

Khi đó $\widehat{BMH} = \widehat{(\Delta_1,\Delta_2)}$ và (P) chứa Δ_1 và vuông góc với mặt phẳng (Δ_1,Δ_2).

Vậy (P) có VTPT là: $\left[\left[\overrightarrow{u_{\Delta_1}},\overrightarrow{u_{\Delta_2}}\right],\overrightarrow{u_{\Delta_1}}\right]$

Áp dụng:

$\overrightarrow{u_d} = (1;-1;-2)$; $\vec{j} = (0;1;0)$, $\vec{n} = \left[\left[\overrightarrow{u_d},\vec{j}\right],\overrightarrow{u_d}\right] = (1;5;-2)$. Phương trình mặt phẳng (P) qua điểm $M(1;-2;0)$, có véc tơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;5;-2)$ là $x+5y-2z+9=0$

Vậy điểm $N(-1;-2;-1)$ thuộc mặt phẳng (P).

Câu 18: **(Thanh Chương Nghệ An Lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác nhọn ABC có đường phân giác trong góc A song song với đường thẳng $(d): \begin{cases} x = 2 \\ y = -1+t \\ z = 4-t \end{cases}$. Đường thẳng AC có một véctơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (1;2;-1)$. Biết đường thẳng AB có một véctơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = (a;b;c)$ với $a,b,c \in \mathbb{Z}$. Biểu thức $P = a^2+b^2+c^2$ có giá trị nhỏ nhất bằng

A. 10. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 14.

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng d có một VTCP là $\vec{u}_d = (0;1;-1)$.

Đường thẳng AC có một VTCP là $\vec{u}_1 = (1;2;-1)$.

Đường thẳng AB có một VTCP là $\vec{u}_2 = (a;b;c)$ với $a^2+b^2+c^2 \neq 0$ $(*)$

Do d là đường phân giác của góc A nên ba véc tơ $\vec{u}_d,\vec{u}_1,\vec{u}_2$ đồng phẳng

Suy ra $\left[\vec{u}_d,\vec{u}_1\right].\vec{u}_2 = 0 \Leftrightarrow a-b-c=0 \Leftrightarrow a=b+c$. (1)

Do tam giác ABC nhọn nên $\widehat{(AC,d)} < 45^0, \widehat{(AB,d)} < 45^0$.

Ta có $\left|\cos(\vec{u}_1,\vec{u}_d)\right| = \left|\cos(\vec{u}_2,\vec{u}_d)\right| > \cos 45^0$ (thỏa mãn).

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{2}.\sqrt{6}} = \frac{|b-c|}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \Leftrightarrow 3\left(a^2+b^2+c^2\right) = 2\left(b^2-2bc+c^2\right). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $3(b+c)^2+b^2+c^2+4bc=0 \Leftrightarrow 2b^2+5bc+2c^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=-2c \\ c=-2b \end{array}\right.$.

* Trường hợp 1: Với $b=-2c$ ta được $a=-c$.

Khi đó $P = a^2+b^2+c^2 = 6c^2$. Do điều kiện (*) và $c \in \mathbb{Z}$ ta được $P = 6c^2 \ge 6$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Nên $P_{\min}=6$.

* Trường hợp 2: Với $c=-2b$ ta được $a=-b$.

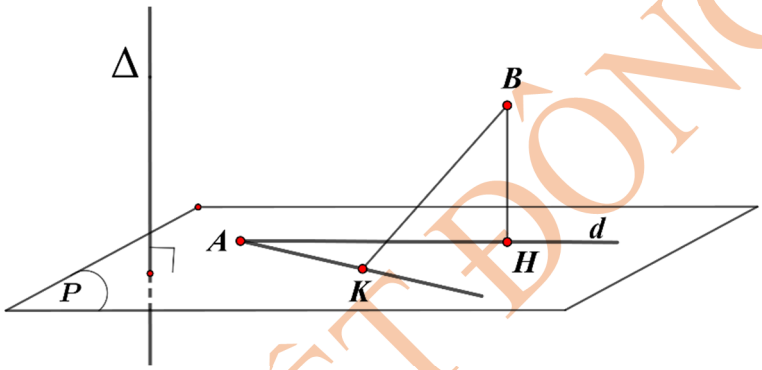
Khi đó $P=a^2+b^2+c^2=6b^2$. Tương tự trên ta có $P_{\min}=6$.

Câu 19: **(THPT-Phúc-Trạch-Hà-Tĩnh-lần-2-2018-2019-thi-tháng-4)** Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(-2;-2;1)$, $B(1;2;-3)$ và đường thẳng $\Delta:\frac{x+1}{2}=\frac{y-5}{2}=\frac{z}{-1}$. Tìm véctơ chỉ phương của đường thẳng d đi qua A vuông góc với đường thẳng Δ đồng thời cách điểm B một khoảng cách bé nhất.

A. $\vec{u}(2;2;-1)$. **B.** $\vec{u}(1;0;2)$. **C.** $\vec{u}(2;1;6)$. **D.** $\vec{u}(25;-29;-6)$.

Lời giải

Chọn B



• Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với Δ.

Chọn $\vec{n}_{(P)}=\vec{u}_{\Delta}=(2;2;-1)$.

$\Rightarrow (P)$ có phương trình: $2(x+2)+2(y+2)-(z-1)=0\Leftrightarrow 2x+2y-z+9=0$.

Khi đó mọi đường thẳng d đi qua A và vuông góc Δ thì d nằm trong (P).

• Gọi K,H lần lượt là hình chiếu vuông góc của B lên d và (P).

Ta có khoảng cách từ B đến d là $BK\geq BH=d(B,(P))=6$.

Dấu bằng xảy ra khi d đi qua A và H.

• Tìm H là hình chiếu vuông góc của B trên (P).

Đường thẳng a đi qua $B(1;2;-3)$ và vuông góc với (P), có phương trình: $\begin{cases}x=1+2t\\y=2+2t\\z=-3-t\end{cases}$.

Có $H=a\cap(P)\Rightarrow 2(1+2t)+2(2+2t)-(-3-t)+9=0\Leftrightarrow 9t+18=0\Leftrightarrow t=-2$

$\Rightarrow H(-3;-2;-1)$ và $\overrightarrow{AH}=(-1;0;-2)$ là một véctơ chỉ phương của d.

Vậy một véctơ chỉ phương của d là $\vec{u}(1;0;2)$.

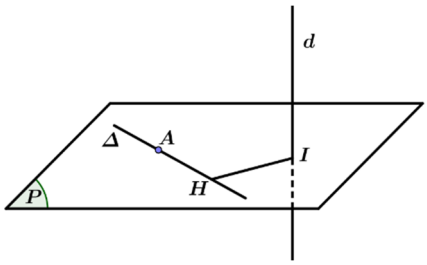
Câu 20: **(THPT NINH BÌNH – BẠC LIÊU LẦN 4 NĂM 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{1}$ và điểm $A(2;1;2)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A, vuông góc với d đồng thời khoảng cách giữa d và Δ là lớn nhất. Biết $\vec{v}=(a;b;4)$ là một véc- tơ chỉ phương của Δ. Tính giá trị $a+b$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. 2. **B.** –8. **C.** –2. **D.** –4.

Lời giải

Chọn B



Gọi (P) là mặt phẳng qua A, vuông góc với $d \Rightarrow (P): -x+2y+z-2=0$. Suy ra $\Delta \subset (P)$

Gọi $I = d \cap (P) \Rightarrow I(1;1;1)$, ,H là hình chiếu vuông góc của I lên Δ.

Ta có $d(d;\Delta) = IH \le IA$. Dấu bằng xảy ra khi $H \equiv A$.

d có VTCP $\overrightarrow{u_d} = (-1;2;1)$, $\overrightarrow{IA} = (1;0;1)$

Vậy $\max d(d,\Delta) = IA$ khi Δ có 1 VTCP là $\vec{u} = \left[\overrightarrow{u_d}, \overrightarrow{IA}\right] = (2;2;-2)$ mà $\vec{v} = (a;b;4)$ là 1 VTCP của Δ nên $\vec{v} = -2\vec{u} \Rightarrow a = -4, b = -4 \Rightarrow a+b = -8$.

Câu 21: **(Chuyên Lý Tự Trọng Cần Thơ)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x+y+z-3=0$ và điểm $A(1;2;2)$. Gọi M là giao điểm của mặt phẳng (P) và trục oy. Viết phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P), đi qua M sao cho khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d có giá trị lớn nhất.

A. $d: \frac{x}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{-1}$. **B.** $d: \frac{x}{1} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z}{1}$.

C. $d: \frac{x}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z}{-1}$. **D.** $d: \frac{x}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{-3}$.

Lời giải

Chọn A

$M = (P) \cap oy \Rightarrow M(0;3;0)$. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ điểm A lên đường thẳng d .

Ta có $AH = d(A;d)$. Xét trong tam giác vuông AHM có $AH \le AM \Rightarrow AH$ max $\Leftrightarrow$ H ≡ M $\Rightarrow d(A;d)$ max $\Leftrightarrow$ AM ⊥ d . Suy ra vecto chỉ phương của d: $\overrightarrow{u_d} = \left[\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{n_P}\right]$.

$\overrightarrow{n_P} = (2;1;1)$, $\overrightarrow{AM} = (-1;1;-2) \Rightarrow \overrightarrow{u_d} = (-3;3;3) = -3(1;-1;-1)$. Suy ra đáp án **A.**

Câu 22: **(Đặng Thành Nam Đề 10)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-1}$. Hai điểm M, N lần lượt di động trên các mặt phẳng $(\alpha): x=2$, $(\beta): z=2$ sao cho trung điểm K của MN luôn thuộc đường thẳng Δ. Giá trị nhỏ nhất của độ dài MN bằng

A. $\frac{8\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{4\sqrt{5}}{5}$. **C.** $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\frac{9\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(2;a;b)\in(\alpha)$; $N(c;d;2)\in(\beta)$ khi đó trung điểm của MN là $K\left(\frac{c+2}{2};\frac{a+d}{2};\frac{b+2}{2}\right)$.

Vì K thuộc Δ nên $\frac{c+2}{4}=\frac{a+d-2}{-2}=\frac{b}{-2}=t(t\in\mathbb{R})\Leftrightarrow\begin{cases}a+d=2-2t\\b=-2t\\c=4t-2\end{cases}$.

Khi đó $MN=\sqrt{(c-2)^2+(a-d)^2+(b-2)^2}=\sqrt{(4t-4)^2+(a-d)^2+(2t+2)^2}$

$=\sqrt{20t^2-24t+20+(a-d)^2}=\sqrt{4\left(\sqrt{5}t-\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2+\frac{64}{5}+(a-d)^2}\geq\frac{8\sqrt{5}}{5}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$\begin{cases}a+d=2-2t\\b=-2t\\c=4t-2\\a-d=0\\t=\frac{3}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=d=\frac{2}{5}\\b=-\frac{6}{5}\\c=\frac{2}{5}\end{cases}\Rightarrow M\left(2;\frac{2}{5};-\frac{6}{5}\right),\ N\left(\frac{2}{5};\frac{2}{5};2\right)$. Đối chiếu chọn đáp án **A.**

Câu 23: **(Chuyên Hùng Vương Gia Lai)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 2 điểm $A(1;4;2),B(-1;2;4)$ và đường thẳng $d:\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{2}$. Viết phương trình đường thẳng Δ qua A cắt d sao cho khoảng cách từ B đến Δ là nhỏ nhất.

A. $\begin{cases}x=1-15t\\y=4-18t\\z=2-19t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=1-5t\\y=4+8t\\z=2-9t\end{cases}$ **C.** $\begin{cases}x=1+5t\\y=4-8t\\z=2-9t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=1+15t\\y=4+18t\\z=2-19t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

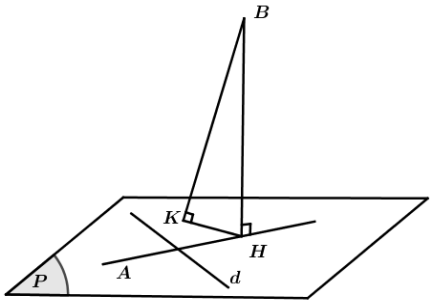
Đường thẳng $d:\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{2}$ đi qua điểm $M(1;-2;0)$ và nhận $\vec{u}=(-1;1;2)$ làm một véc tơ chỉ phương.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa d và A. Khi đó $\vec{u}=(-1;1;2)$ và $\overrightarrow{AM}=(0;-6;-2)$ không cùng phương và có giá song song hoặc chứa trong (P). Suy ra có véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là $\vec{n}_{(P)}=\left[\vec{u},\overrightarrow{AM}\right]=(10;-2;6)$.

Phương trình mặt phẳng $(P):5x-y+3z-7=0$

Gọi K,H lần lượt là hình chiếu vuông góc của B trên (P) và Δ, ta luôn có $BH\geq BK$, suy ra BH nhỏ nhất khi H trùng K.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Đường thẳng qua B vuông góc với (P) có phương trình: $(BK):\begin{cases}x=-1+5t\\y=2-t\\z=4+3t\end{cases}\ (t\in R)$.

Tọa độ điểm K là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}x=-1+5t\\y=2-t\\z=4+3t\\5x-y+3z-7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1+5t\\y=2-t\\z=4+3t\\5(-1+5t)-2+t+3(4+3t)-7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=\dfrac{2}{35}\\x=-\dfrac{5}{7}\\y=\dfrac{68}{35}\\z=\dfrac{146}{35}\end{cases}\Rightarrow K\left(-\frac{5}{7};\frac{68}{35};\frac{146}{35}\right).$$

Ta có $\overrightarrow{AK}=\left(-\frac{12}{7};-\frac{72}{35};\frac{76}{35}\right)$, đường thẳng Δ đi qua $A(1;4;2)$, nhận $\vec{u}_\Delta=-\frac{35}{4}\overrightarrow{AK}$ hay $\vec{u}_\Delta=(15;18;-19)$ làm một véc tơ chỉ phương, suy ra có phương trình

$$(\Delta):\begin{cases}x=1+15t'\\y=4+18t'\\z=2-19t'\end{cases}\ (t'\in R).$$

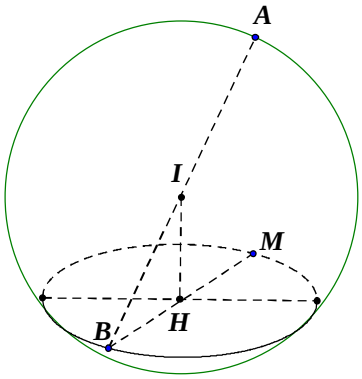
Câu 24: **(Chuyên Bắc Giang)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(1;2;-3)$, $B(-2;-2;1)$ và mặt phẳng $(\alpha):2x+2y-z+9=0$. Gọi M là điểm thay đổi trên mặt phẳng (α) sao cho M luôn nhìn đoạn AB dưới một góc vuông. Xác định phương trình đường thẳng MB khi MB đạt giá trị lớn nhất.

A. $\begin{cases}x=-2-t\\y=-2+2t\\z=1+2t\end{cases}$. **B.** $\begin{cases}x=-2+2t\\y=-2-t\\z=1+2t\end{cases}$. **C.** $\begin{cases}x=-2+t\\y=-2\\z=1+2t\end{cases}$. **D.** $\begin{cases}x=-2+t\\y=-2-t\\z=1\end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Ta có $M \in (\alpha)$ và $\widehat{AMB} = 90°$ suy ra M nằm trên đường tròn (C) là giao tuyến của mặt phẳng (α) và mặt cầu (S) đường kính AB.

Lại có $B \in (\alpha)$ suy ra B và M cùng nằm trên đường tròn (C).

Khi đó MB lớn nhất khi và chỉ khi MB là đường kính của đường tròn (C).

Gọi I là tâm mặt cầu (S) suy ra $I\left(-\frac{1}{2};0;-1\right)$, H là tâm đường tròn (C).

(α) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{(\alpha)}}(2;2;-1)$.

Đường thẳng IH vuông góc với (α) nên nhận $\overrightarrow{n_{(\alpha)}}(2;2;-1)$ là vectơ chỉ phương.

Phương trình tham số của đường thẳng $IH: \begin{cases} x = -\frac{1}{2} + 2t \\ y = 2t \\ z = -1 - t \end{cases}$.

Ta có $H\left(-\frac{1}{2}+2t;2t;-1-t\right)$.

$H \in (\alpha) \Leftrightarrow 2\left(-\frac{1}{2}+2t\right)+2(2t)-(-1-t)+9=0 \Leftrightarrow t=-1$. Suy ra $H\left(-\frac{5}{2};-2;0\right)$.

Phương trình đường thẳng BM đi qua B nhận $\overrightarrow{BH} = \left(-\frac{1}{2};0;-1\right) = -\frac{1}{2}(1;0;2)$ làm vectơ chỉ phương là: $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -2 \\ z = 1 + 2t \end{cases}$.

Câu 25: **(KỸ-NĂNG-GIẢI-TOÁN-HƯỚNG-ĐẾN-THPT-QG)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x+y-z+1=0$, điểm $A(1;-1;2)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{-3}$. Viết phương trình đường thẳng d đi qua A song song với (P) sao cho khoảng cách giữa d và Δ lớn nhất.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $d:\begin{cases}x=1+40t\\y=-1+29t\\z=2+69t\end{cases}$. **B.** $d:\begin{cases}x=1+40t\\y=-1-29t\\z=2+11t\end{cases}$. **C.** $d:\begin{cases}x=1+t\\y=-1+2t\\z=2-3t\end{cases}$. **D.** $d:\begin{cases}x=1+21t\\y=-1+10t\\z=2+31t\end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng α qua A và song song với (P) có phương trình: $x+y-z+2=0\Rightarrow d\subset(\alpha)$.

Đường thẳng Δ có vtcp là $\vec{u}=(2;1;-3)$, (α) có vtpt là $\vec{n}_\alpha=(1;1;-1)$.

Phương trình tham số của $\Delta:\begin{cases}x=-1+2t\\y=t\\z=4-3t\end{cases}$.

Gọi B là giao điểm của Δ và α. Tọa độ điểm B ứng với t là nghiệm phương trình: $-1+2t+t-(4-3t)+2=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}\Rightarrow B\left(0;\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$.

Xét đường thẳng Δ_1 là đường thẳng đi qua A song song với Δ. Phương trình của Δ_1 là: $\begin{cases}x=1+2t\\y=-1+t\\z=2-3t\end{cases}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên $\Delta_1\Rightarrow H(1+2t,-1+t,2-3t)$, $\overrightarrow{BH}=\left(1+2t;t-\frac{3}{2};-3t\right)$.

Ta có $\overrightarrow{BI}.\vec{u}=0\Leftrightarrow 2+4t+t-\frac{3}{2}+9t=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{28}$.

Khi đó $\overrightarrow{BH}=\left(\frac{13}{14};\frac{-43}{28};\frac{3}{28}\right)=\frac{1}{28}(26;-43;3)=\frac{1}{28}\vec{u}_1$.

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}_d=[\vec{u}_1;\vec{n}_\alpha]=(40;29;69)$.

Phương trình đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+40t\\y=-1+29t\\z=2+69t\end{cases}$.

Câu 26: **(Chuyên KHTN lần2)** Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}$ và hai điểm $A(1;2;3);B(-1;0;2)$. Phương trình đường thẳng Δ đi qua B, cắt d sao cho khoảng cách từ A đến Δ đạt giá trị lớn nhất là

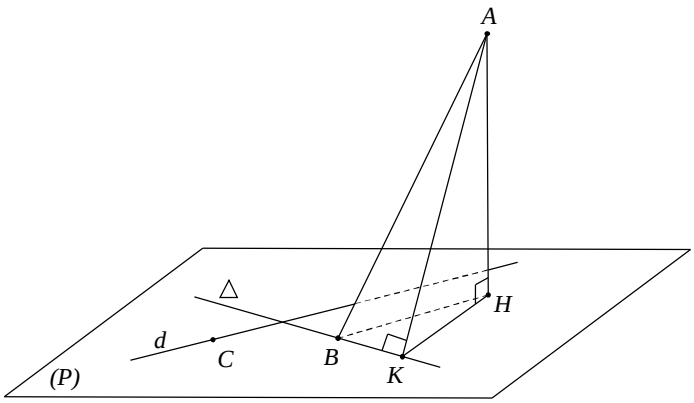
A. $\frac{x+1}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{4}$. **B.** $\frac{x+1}{3}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{-4}$.

C. $\frac{x+1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}$. **D.** $\frac{x+1}{8}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{-14}$.

Lời giải

Chọn D

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Ta có: $C \in d \Rightarrow C(1;0;-1) \Rightarrow \overrightarrow{BC} = (2;0;-3), \overrightarrow{u_d} = (2;1;-1)$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa B và đường thẳng d. Gọi H là hình chiếu kẻ từ A xuống mặt phẳng (P) và $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(P) \Rightarrow \vec{n} = \left[\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{u_d}\right] = (3;-4;2)$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc kẻ từ A đến đường thẳng Δ. Suy ra $d(A;\Delta) = AK$.

Ta thấy ΔABK vuông tại K nên $AK \le AB$.

$\Rightarrow AK$ đạt giá trị lớn nhất khi K trùng với B, khi đó $AK = AB$.

Do đó : $\overrightarrow{u_\Delta} = \left[\overrightarrow{BA}; \vec{n}\right] = (-8;1;14)$

Vậy phương trình đường thẳng $\Delta : \dfrac{x+1}{8} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-2}{-14}$.

Câu 27: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(3;1;1)$, $N(4;3;4)$ và đường thẳng $\Delta : \dfrac{x-7}{1} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z-9}{1}$. Gọi $I(a;b;c)$ là điểm thuộc đường thẳng Δ sao cho chu vi tam giác IMN nhỏ nhất. Tính $T = a+b+c$.

A. $T = \dfrac{23}{3}$. **B.** $T = 29$. **C.** $T = 19$. **D.** $T = \dfrac{40}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1.

Ta có $I \in \Delta$; $I(7+t;3-2t;9+t)$.

Ta tính: $MI = \sqrt{6t^2+16t+84}$; $NI = \sqrt{6t^2+16t+34}$; $MN = \sqrt{14}$.

Gọi C là chu vi tam giác IMN; $C = \sqrt{6\left(t+\dfrac{4}{3}\right)^2 + \dfrac{220}{3}} + \sqrt{6\left(t+\dfrac{4}{3}\right)^2 + \dfrac{70}{3}} + \sqrt{14}$.

Hay $C \ge \sqrt{\dfrac{220}{3}} + \sqrt{\dfrac{70}{3}} + \sqrt{14}$.

Chu vi tam giác IMN nhỏ nhất khi $t = -\dfrac{4}{3}$; khi đó $I\left(\dfrac{17}{3};\dfrac{17}{3};\dfrac{23}{3}\right)$ hay $T = 19$.

Cách 2.

Gọi véc tơ $\vec{u}$ là véc tơ chỉ phương của Δ ta có $\vec{u} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$.

Đường thẳng MN vuông góc với Δ.

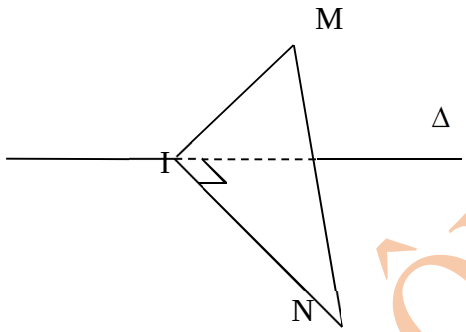
Gọi (α) là mặt phẳng chứa MN và vuông góc với Δ.

Phương trình mặt phẳng (α) chứa MN vuông góc với Δ là: $x-2y+z-2=0$.

Mặt phẳng (α) cắt Δ tại $H\left(\frac{17}{3};\frac{17}{3};\frac{23}{3}\right)$.

Gọi điểm $I\in\Delta$; Gọi C là chu vi tam giác IMN. Ta có:

$C=MI+NI+MN\geq MH+NH+\sqrt{14}=\sqrt{\frac{220}{3}}+\sqrt{\frac{70}{3}}+\sqrt{14}$.



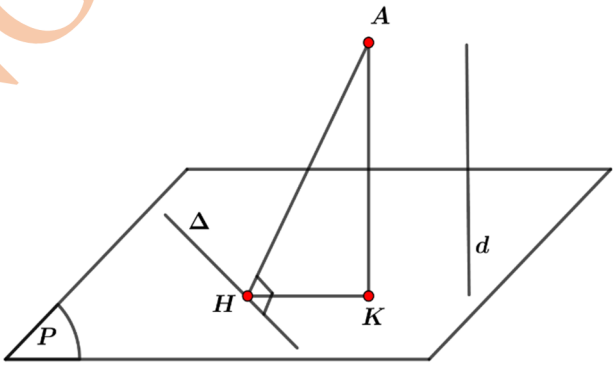
Vậy chu vi tam giác IMN nhỏ nhất khi $I\equiv H$. Hay $I\left(\frac{17}{3};\frac{17}{3};\frac{23}{3}\right)$. Vậy $T=19$.

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(-2;-2;1)$, $A(1;2;-3)$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y-6}{2}=\frac{z}{-1}$. Gọi Δ là đường thẳng qua M, vuông góc với đường thẳng d, đồng thời cách A một khoảng bé nhất. Khoảng cách bé nhất đó là

A. $\sqrt{29}$. **B.** 6. **C.** 5. **D.** $\frac{\sqrt{34}}{9}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi (P) là mặt phẳng chứa Δ qua M và vuông góc với đường thẳng d, khi đó $\begin{cases}\Delta\subset(P)\\ \Delta\perp d\end{cases}$.

Với $\vec{u}_d=(2;2;-1)$ là một véctơ chỉ phương của đường thẳng d.

Chọn một véc tơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}_{(P)}=\vec{u}_d=(2;2;-1)$.

Ta có (P): $2x+2y-z+9=0$.

Gọi K,H lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên mp(P) và đường thẳng Δ.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Ta thấy $d\left(A;\Delta\right)=AH\geq AK$.

Nên $Min\ d\left(A;\Delta\right)=AK$ khi và chỉ khi $H\equiv K$.

Mà $AK=d\left(A;(P)\right)=\dfrac{|2.1+2.2+3+9|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}=6.$

Vậy $Min\ d\left(A;\Delta\right)=6$.

Câu 29: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{-1}$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng d và tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc nhỏ nhất. Khoảng cách từ $M(0;3;-4)$ đến mặt phẳng (α) bằng

A. $\sqrt{30}$. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** $\sqrt{20}$. **D.** $\sqrt{35}$.

Lời giải

Chọn A

Có góc tạo bởi đường thẳng d và mặt phẳng (Oxy) là $\widehat{(d;(Oxy))}$

góc tạo bởi mặt phẳng (α) và mặt phẳng (Oxy) là $\widehat{((\alpha);(Oxy))}$.

Ta có $\widehat{(d;(Oxy))}\leq\widehat{((\alpha);(Oxy))}\Rightarrow\widehat{((\alpha);(Oxy))}_{\min}\Leftrightarrow\widehat{(d;(Oxy))}=\widehat{((\alpha);(Oxy))}$

$\sin\widehat{(d,(\alpha))}=\dfrac{|\overrightarrow{u_d}.\vec{k}|}{|\overrightarrow{u_d}|.|\vec{k}|}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\Rightarrow\cos\widehat{(d,(\alpha))}=\dfrac{\sqrt{30}}{6}$

Gọi VTPT của (α) là $\vec{n}=(a;b;c),a^2+b^2+c^2\neq0$

Vì $d\subset(\alpha)\Rightarrow\vec{u}\perp\vec{n}\Rightarrow2a-b-c=0\Rightarrow c=2a-b$

$\cos\widehat{((Oxy),(\alpha))}=\dfrac{|\vec{n}.\vec{k}|}{|\vec{n}|.|\vec{k}|}=\dfrac{|2a-b|}{\sqrt{a^2+b^2+(2a-b)^2}}=\dfrac{\sqrt{30}}{6}$

$\Leftrightarrow36\left(4a^2-4ab+b^2\right)=30\left(5a^2-4ab+2b^2\right)$

$\Leftrightarrow6a^2+24ab+24b^2=0\Leftrightarrow6(a+2b)^2=0\Leftrightarrow a=-2b$

Chọn $\vec{n}=(2;-1;5)$.

Vậy (α) đi qua $A(-1;1;2)\in d$ và có VTPT $\vec{n}=(2;-1;5)\Rightarrow(\alpha):2x-y+5z-7=0$.

$d_{(M,(\alpha))}=\dfrac{30}{\sqrt{30}}=\sqrt{30}$.

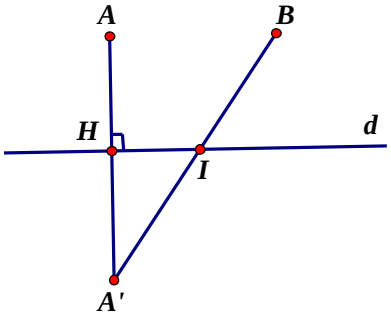
Câu 30: Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(7;-2;3)$ và đường thẳng d có phương trình $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$. Điểm I thuộc d sao cho $AI+BI$ nhỏ nhất. Hoành độ của điểm I là

A. 2. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



+ Đường thẳng d có véctơ chỉ phương $\overrightarrow{u_d}=(3;-2;2)$.

Ta thấy $A\notin d$ và $\overrightarrow{AB}=(6;-4;4)=2(3;-2;2)$. Suy ra $AB//d$.

+ Gọi A' là điểm đối xứng với A qua d. Ta có $AI+BI=A'I+BI\geq A'B$. Dấu "=" xảy ra khi A', I, B thẳng hàng.

Vậy $\min(AI+BI)=A'B$ trong đó $I=A'B\cap d$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng d. Ta tìm được $H(-1;2;2)$

Do H là trung điểm AA' nên suy ra $A'(-3;2;5)$.

Do $AB//d$ nên I là trung điểm $A'B$ nên suy ra $I(2;0;4)$.

Cách 2: Tìm tọa độ điểm H trong bài này từ nhận xét sau:

Từ phương trình đường thẳng d ta thấy d đi qua điểm $H(-1;2;2)$.

Có $\overrightarrow{AH}=(-4;0;6)$ và $\overrightarrow{u_d}=(3;-2;2)$ thỏa mãn $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{u_d}=0\Rightarrow AH\perp d$.

Vậy H là hình chiếu của A lên đường thẳng d.

Câu 31: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\begin{cases}x=4-3t\\y=3+4t\\z=0\end{cases}$. Gọi A là hình chiếu vuông góc của O trên d. Điểm M di động trên tia Oz, điểm N di động trên đường thẳng d sao cho $MN=OM+AN$. Gọi I là trung điểm đoạn thẳng OA. Trong trường hợp diện tích tam giác IMN đạt giá trị nhỏ nhất, một véctơ pháp tuyến của mặt phẳng (M,d) có tọa độ là

A. $(4;3;5\sqrt{2})$. **B.** $(4;3;10\sqrt{2})$. **C.** $(4;3;5\sqrt{10})$. **D.** $(4;3;10\sqrt{10})$.

Lời giải

Chọn A

Theo đề $\begin{cases}M\in Oz\Rightarrow M(0;0;m)\\N\in d\Rightarrow N(4-3t;3+4t;0).\\d\subset(Oxy)\end{cases}$

Vì A là hình chiếu vuông góc của O trên d nên tìm được $A(4;3;0)$. I là trung điểm đoạn thẳng $OA\Rightarrow I\left(2;\frac{3}{2};0\right)$.

Mặt khác $MN=OM+AN\Rightarrow\sqrt{(3t-4)^2+(4t+3)^2+m^2}=|m|+5|t|$ (*)

$\Leftrightarrow 2|mt|=5\Leftrightarrow|mt|=\frac{5}{2}\Leftrightarrow|m|=\frac{5}{2|t|}(t\neq 0)$.

Trên tia đối của tia Oz, lấy điểm H thỏa $OH = AN$. Ta chứng minh được $\Delta IMH = \Delta IMN$.

Khi đó $S_{\Delta IMN} = S_{\Delta IMH} = \frac{1}{2} IO.MH = \frac{5}{4} MN = \frac{5}{4}\left(|m| + 5|t|\right)$ do $(*)$.

$= \frac{5}{4}\left(\frac{5}{2|t|} + 5|t|\right) = \frac{25}{4}\left(\frac{1}{2|t|} + |t|\right) \geq \frac{25\sqrt{2}}{4}$.

Dấu "=" đạt tại $\frac{1}{2|t|} = |t| \Leftrightarrow |t| = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow |m| = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. Vậy $M\left(0;0;\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{MA} = \left(4;3;-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right); \overrightarrow{u_d} = (-3;4;0)$.

Mặt phẳng (M,d) có một VTPT $\vec{n} = \left[\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{u_d}\right] = \left(10\sqrt{2}; \frac{15\sqrt{2}}{2}; 25\right) = \frac{5\sqrt{2}}{2}\left(4;3;5\sqrt{2}\right)$.

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2;2;2), B(2;4;-6), C(0;2;-8)$ và mặt phẳng $(P): x+y+z=0$. Xét các điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho $\widehat{AMB} = 90°$, đoạn thẳng CM có độ dài lớn nhất bằng

A. $2\sqrt{15}$. **B.** $2\sqrt{17}$. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Vì $\widehat{AMB} = 90°$ nên ta có điểm M thuộc mặt cầu (S) (mặt cầu đường kính AB).

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;-2)$ là trung điểm của AB và bán kính $R = \frac{1}{2} AB = \sqrt{17}$.

Mặt khác điểm M thuộc mặt phẳng (P) nên ta có tập hợp điểm M là đường tròn $(C) = (S) \cap (P)$.

Đường tròn (C) có tâm O là hình chiếu của điểm $I(2;3;-2)$ lên mặt phẳng (P) và có bán kính $r = \sqrt{R^2 - d^2\left(I,(P)\right)} = \sqrt{17-3} = \sqrt{14}$.

□ Tìm tọa độ điểm O:

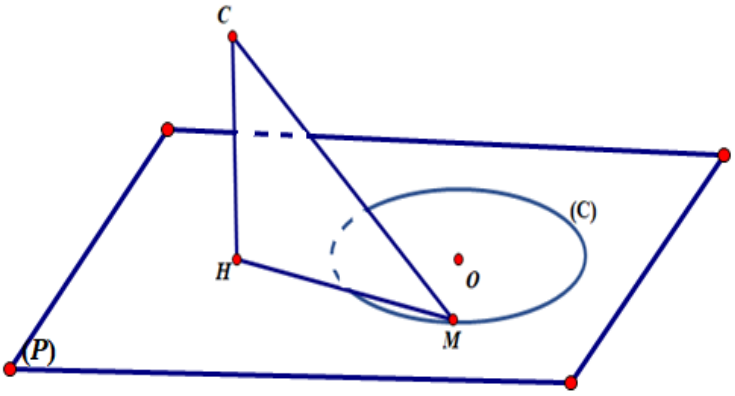
Gọi (d) là đường thẳng đi qua điểm I và vuông góc với mặt phẳng (P). Phương trình đường thẳng (d) là: $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 3+t \\ z = -2+t \end{cases}$.

Vì O là hình chiếu của điểm $I(2;3;-2)$ lên mặt phẳng (P) nên $O = (d) \cap (P)$.

Xét $(2+t)+(3+t)+(-2+t)=0 \Leftrightarrow 3t+3=0 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow O(1;2;-3)$.

Vậy đường tròn (C) nằm trên mặt phẳng (P) có tâm $O(1;2;-3)$ bán kính $r = \sqrt{14}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Gọi H là hình chiếu của điểm C lên mặt phẳng (P). Tương tự tìm tọa độ điểm O ta có $H(2;4;-6)$.

Ta có $CM=\sqrt{CH^2+HM^2}=\sqrt{12+HM^2}$.

Do đó CM đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi HM lớn nhất.

Ta có $HM\le HO+r\le 2\sqrt{14}\Rightarrow HM_{\max}=2\sqrt{14}$.

$\Rightarrow CM_{\max}=\sqrt{12+\left(2\sqrt{14}\right)^2}=2\sqrt{17}$.

Câu 33: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z-2}{1}$ và 2 điểm $A(6;3;-2)$, $B(1;0;-1)$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua B, vuông góc với d và thỏa mãn khoảng cách từ A đến Δ là nhỏ nhất. Một vectơ chỉ phương của Δ có tọa độ

A. $(1;1;-3)$. **B.** $(1;-1;-1)$. **C.** $(1;2;-4)$. **D.** $(2;-1;-3)$.

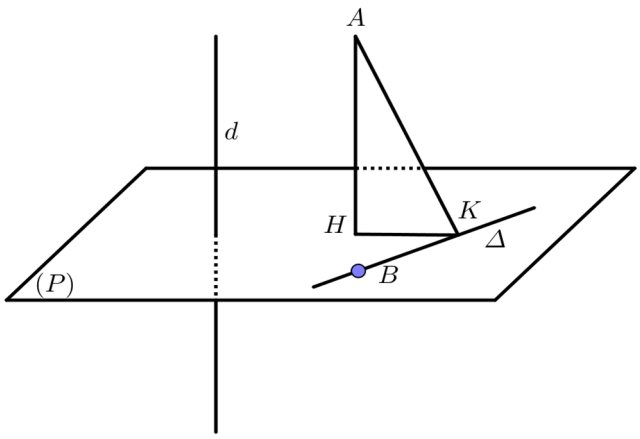
Lời giải

Chọn A

Gọi (P) là mặt phẳng qua B và vuông góc với d; $(P):2x+y+z-1=0$.

Gọi H là hình chiếu của A lên (P), ta có: $H(2;1;-4)$

Ta có: $\Delta\subset(P)$ nên $d(A;\Delta)\ge d(A;(P))$;



Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $H\in\Delta$.

Một vectơ chỉ phương của Δ là $\overrightarrow{BH}=(1;1;-3)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 34: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;4;3)$ và mặt phẳng $(P):2y-z=0$. Biết điểm B thuộc mặt phẳng (P), điểm C thuộc (Oxy) sao cho chu vi tam giác ABC nhỏ nhất. Hỏi giá trị nhỏ nhất đó là

A. $4\sqrt{5}$. **B.** $6\sqrt{5}$. **C.** $2\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $E;F$ lần lượt là điểm đối xứng của A qua (P) và $(Oxy) \Rightarrow E(1;0;5)$, $F(1;4;-3)$.

Với $B\in(P)\Rightarrow BA=BE$. Với $C\in(Oxy)\Rightarrow CA=CF$.

Ta có $C_{\Delta ABC}=AB+BC+CA=EB+BC+CF\geq EF$.

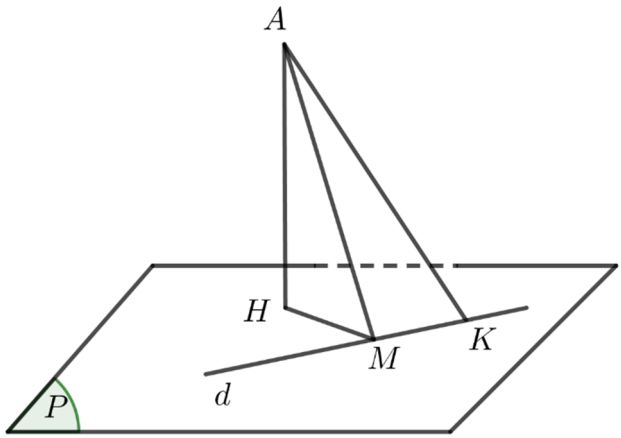
$\min C_{\Delta ABC}=EF=4\sqrt{5}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} EF\cap(P)=B \\ EF\cap(Oxy)=C \end{cases}$.

Câu 35: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;-;3;4)$, đường thẳng $d:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z}{2}$ và mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=20$. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d thỏa mãn khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất. Mặt cầu (S) cắt (P) theo đường tròn có bán kính bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D



Ta có:

d đi qua $M(1;-2;0)$ và có VTCP $\vec{u}_d=(2;1;2)$.

(S) có tâm $I(3;2;-1)$ và bán kính $R=2\sqrt{5}$.

Ta có: $d(A;(P))\leq d(A;d)$. Dấu "=" xảy ra khi (P) chứa d và vuông góc với AK.

Khi đó: (P) có VTPT là $\vec{n}_P=\left[\vec{n}_{(AKM)},\vec{u}_d\right]$.

Vì $\vec{n}_{(AKM)}=\left[\vec{u}_d,\overrightarrow{AM}\right]=(-6;6;3)\Rightarrow \vec{n}_P=(9;18;-18)=9(1;2;-2)$.

$\Rightarrow (P):(x-1)+2(y+2)-2z=0\Rightarrow (P):x+2y-2z+3=0$.

Ta có: $d=d(I;(P))=4$.

Vậy bán kính đường tròn cần tìm: $r=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{20-16}=2$.

Câu 36: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;1;1)$, $B(3;0;-1)$, $C(0;21;-19)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$. $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt cầu (S) sao cho biểu thức $T=3MA^2+2MB^2+MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $a+b+c$.

A. $a+b+c=\frac{14}{5}$. **B.** $a+b+c=0$. **C.** $a+b+c=\frac{12}{5}$. **D.** $a+b+c=12$.

Lời giải

Chọn A

$(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ có tâm $I(1;1;1)$

Gọi $G(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn

$$3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}3(0-x)+2(3-x)+(0-x)=0\\3(1-y)+2(0-y)+(21-y)=0\\3(1-z)+2(-1-z)+(-19-z)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=4\\z=-3\end{cases}\Rightarrow G(1;4;-3).$$

Ta có:

$T=3MA^2+2MB^2+MC^2$

$=3MG^2+6\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}+3GA^2+2MG^2+4\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB}+2GB^2+MG^2+2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC}+GC^2$

$=6MG^2+2\overrightarrow{MG}\left(3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+3GA^2+2GB^2+GC^2=6MG^2+3GA^2+2GB^2+GC^2$

$T_{\min}\Leftrightarrow M$ là giao điểm của đường thẳng IG và mặt cầu (S), sao cho M và G cùng phía với I

Phương trình đường thẳng $IG:\begin{cases}x=1\\y=1+3t\\z=1-4t\end{cases}$

$M=IG\cap(S)$ nên tọa độ M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}x=1\\y=1+3t\\z=1-4t\\(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}t=\frac{1}{5}\\t=\frac{-1}{5}\end{bmatrix}.\text{ Khi đó : }\begin{bmatrix}M_1\left(1;\frac{8}{5};\frac{1}{5}\right)\\M_2\left(1;\frac{2}{5};\frac{9}{5}\right)\end{bmatrix}$$

Vì $M_1G<M_2G$ nên điểm $M\equiv M_1\left(1;\frac{8}{5};\frac{1}{5}\right)$

Vậy $a+b+c=\frac{14}{5}$.

Câu 37: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(-2;2;-2)$ và điểm $B(3;-3;3)$.

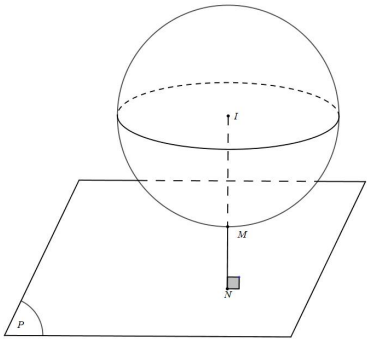
Điểm M thay đổi trong không gian thỏa mãn $\frac{MA}{MB}=\frac{2}{3}$. Điểm $N(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng $(P):-x+2y-2z+6=0$ sao cho MN nhỏ nhất. Tính tổng $T=a+b+c$.

A. 6. **B.** −2. **C.** 12. **D.** −6.

Lời giải

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Chọn B



Gọi $M(x;y;z)$.

Ta có $\frac{MA}{MB}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow 9MA^2=4MB^2\Leftrightarrow (x+6)^2+(y-6)^2+(z+6)^2=108$. Vậy điểm M thuộc mặt cầu tâm $I(-6;6;-6)$ bán kính $R=6\sqrt{3}$.

Vậy MN nhỏ nhất khi M,N thuộc đường thẳng đi qua tâm I và vuông góc với mặt phẳng (P).

Gọi (d) là đường thẳng đi qua tâm I và vuông góc với mặt phẳng (P).

Khi đó $(d):\begin{cases}x=-6-t\\y=6+2t\\z=-6-2t\end{cases}$. Tọa độ điểm N là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases}x=-6-t\\y=6+2t\\z=-6-2t\\-x+2y-2z+6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-6-t\\y=6+2t\\z=-6-2t\\6+t+12+4t+12+4t+6=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=-2\\z=2\\t=-4\end{cases}.$$

$\Rightarrow N(-2;-2;2)$. Do đó $T=-2-2+2=-2$.

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;-1;2)$, $B(1;1;2)$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}$. Biết $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng d sao cho tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất. Khi đó, giá trị $T=a+2b+3c$ bằng:

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 10.

Lời giải

Chọn D

Vì $M\in d$ nên $M(-1+t;t;1+t)$.

Ta có $\overrightarrow{AM}=(-1+t;t+1;t-1)$, $\overrightarrow{AB}=(1;2;0)$.

Do đó: $\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right]=(2-2t;t-1;t-3)$

Diện tích tam giác MAB:

$$S=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(2-2t)^2+(t-1)^2+(t-3)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{6t^2-16t+14}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{6\left(t-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{10}{3}}\geq\sqrt{\frac{5}{6}}.$$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Dấu bằng xảy ra khi $t=\frac{4}{3}$.

Do đó diện tích tam giác MAB nhỏ nhất khi $M\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3};\frac{7}{3}\right)$.

Khi đó $T=a+2b+3c=10$.

Câu 39: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;-1;2)$, $B(1;1;2)$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}$. Biết $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng d sao cho tam giác MAB có diện tích bằng $\sqrt{\frac{5}{6}}$. Khi đó, giá trị $T=a+2b+3c$ bằng:

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 10.

Lời giải

Chọn D

Vì $M\in d$ nên $M(-1+t;t;1+t)$.

Ta có $\overrightarrow{AM}=(-1+t;t+1;t-1)$, $\overrightarrow{AB}=(1;2;0)$.

Do đó: $\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right]=(2-2t;t-1;t-3)$

Diện tích tam giác MAB: $S=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(2-2t)^2+(t-1)^2+(t-3)^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{6t^2-16t+14}=\sqrt{\frac{5}{6}}\Rightarrow t=\frac{4}{3}$.

Do đó $M\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3};\frac{7}{3}\right)$.

Khi đó $T=a+2b+3c=10$.

Câu 40: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;-1;2)$, $B(1;1;2)$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1}$. Có bao nhiêu điểm M thuộc đường thẳng d sao cho tam giác MAB có diện tích bằng 1.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn C

Vì $M\in d$ nên $M(-1+t;t;1+t)$.

Ta có $\overrightarrow{AM}=(-1+t;t+1;t-1)$, $\overrightarrow{AB}=(1;2;0)$.

Do đó: $\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right]=(2-2t;t-1;t-3)$

Diện tích tam giác MAB:

$$S=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(2-2t)^2+(t-1)^2+(t-3)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{6t^2-16t+14}=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=\frac{5}{3}\end{array}\right.$$

Do đó $M(0;1;2)$ hoặc $M\left(\frac{2}{3};\frac{5}{3};\frac{8}{3}\right)$.

Vậy có hai điểm M thuộc d để tam giác MAB có diện tích bằng 1.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 41: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm $A(1;5;0), B(3;3;6)$ và đường thẳng Δ có phương trình tham số $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=1-t \\ z=2t \end{cases}$. Một điểm M thay đổi trên đường thẳng Δ sao cho chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất. Tọa đô điểm M và chu vi tam giác ABC là

A. $M(1;0;2);\ P=2(\sqrt{11}+\sqrt{29})$ **B.** $M(1;2;2);\ P=2(\sqrt{11}+\sqrt{29})$

C. $M(1;0;2);\ P=\sqrt{11}+\sqrt{29}$ **D.** $M(1;2;2);\ P=\sqrt{11}+\sqrt{29}$

Lời giải

Gọi P là chu vi của tam giác MAB thì $P=AB+AM+BM$.

Vì AB không đổi nên P nhỏ nhất khi và chỉ khi $AM+BM$ nhỏ nhất.

Điểm $M\in\Delta$ nên $M(-1+2t;1-t;2t)$. $AM+BM=\sqrt{(3t)^2+(2\sqrt{5})^2}+\sqrt{(3t-6)^2+(2\sqrt{5})^2}$

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, ta xét hai vecto $\vec{u}=(3t;2\sqrt{5})$ và $\vec{v}=(-3t+6;2\sqrt{5})$.

Ta có $|\vec{u}|=\sqrt{(3t)^2+(2\sqrt{5})^2}$; $|\vec{v}|=\sqrt{(3t-6)^2+(2\sqrt{5})^2}$

$\Rightarrow AM+BM=|\vec{u}|+|\vec{v}|$ và $\vec{u}+\vec{v}=(6;4\sqrt{5})\Rightarrow|\vec{u}+\vec{v}|=2\sqrt{29}$

Mặt khác, ta luôn có $|\vec{u}|+|\vec{v}|\geq|\vec{u}+\vec{v}|$ Như vậy $AM+BM\geq 2\sqrt{29}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u},\vec{v}$ cùng hướng $\Leftrightarrow\frac{3t}{-3t+6}=\frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\Leftrightarrow t=1$

$\Rightarrow M(1;0;2)$ *và* $\min(AM+BM)=2\sqrt{29}$. *Vậy khi M(1;0;2) thì minP* $=2(\sqrt{11}+\sqrt{29})$

Chọn A

Câu 42: **(SỞ LÀO CAI 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(1;5;0)$, $B(3;3;6)$ và đường thẳng $d:\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng d sao cho chu vi tam giác MAB nhỏ nhất. Khi đó biểu thức $a+2b+3c$ bằng

A. 5. **B.** 7. **C.** 9. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $AB=\sqrt{44}$ không đổi. Do đó chu vi tam giác MAB nhỏ nhất khi $(MA+MB)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

$M\in(d)\Rightarrow M(-1+2t;1-t;2t)$.

$MA=\sqrt{9t^2+20}=\sqrt{(3t)^2+(2\sqrt{5})^2}$, $MB=\sqrt{9t^2-36t+56}=\sqrt{(6-3t)^2+(2\sqrt{5})^2}$.

Chọn $\vec{u}=(3t;2\sqrt{5};0)\Rightarrow|\vec{u}|=\sqrt{(3t)^2+(2\sqrt{5})^2}$.

Chọn $\vec{v}=(6-3t;2\sqrt{5};0)\Rightarrow|\vec{v}|=\sqrt{(6-3t)^2+(2\sqrt{5})^2}$.

Khi đó $\vec{u}+\vec{v}=(6;4\sqrt{5};0)\Rightarrow|\vec{u}+\vec{v}|=2\sqrt{29}$.

Theo tính chất vecto $|\vec{u}|+|\vec{v}|\geq|\vec{u}+\vec{v}|=2\sqrt{29}$.

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}$ cùng hướng với $\vec{v}\Leftrightarrow t=1$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Suy ra $MA+MB=\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{v}\right|\geq 2\sqrt{29}$.

Do đó $MA+MB$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2\sqrt{29}$ khi $t=1\Rightarrow M\left(1;0;2\right)$.

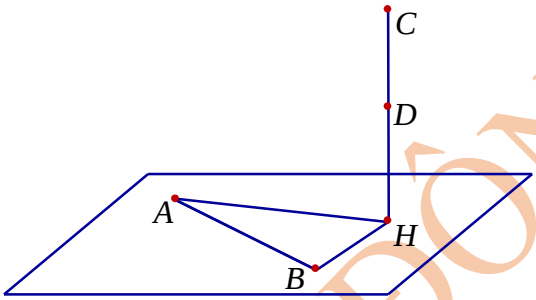
Vậy $a+2b+3c=1+2.0+3.2=7$.

Câu 43: **(Hoàng Hoa Thám Hưng Yên)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có $A(-1;1;6)$, $B(-3;-2;-4)$, $C(1;2;-1)$, $D(2;-2;0)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc đường thẳng CD sao cho tam giác ABM có chu vi nhỏ nhất. Tính $a+b+c$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A



Gọi C_{ABM} là chu vi của tam giác ABM.

$\overrightarrow{AB}=(-2;-3;-10)\Rightarrow AB=\sqrt{113}$

$\overrightarrow{AB}=(-2;-3;-10)$, $\overrightarrow{CD}=(1;-4;1)\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=-2+12-10=0\Rightarrow AB\perp CD$.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng AB và vuông góc với đường thẳng CD.

H là giao điểm của (P) và đường thẳng CD.

Phương trình mặt phẳng (P) qua $A(-1;1;6)$ có véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{CD}=(1;-4;1)$ là:

$x-4y+z-1=0$.

Phương trình đường thẳng CD: $\begin{cases}x=1+t\\y=2-4t\\z=-1+t\end{cases}$.

$H\in CD\Leftrightarrow H\left(1+t;2-4t;-1+t\right)$.

$H\in(P)\Leftrightarrow 1+t-4(2-4t)-1+t-1=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}\Leftrightarrow H\left(\frac{3}{2};0;-\frac{1}{2}\right)$.

Với $\forall M\in CD$, ta có $\begin{cases}AM\geq AH\\BM\geq BH\end{cases}\Rightarrow AM+BM\geq AH+BH$.

$C_{ABM}=AB+AM+BM\geq\sqrt{113}+AH+BH$, $\forall M\in CD$.

Suy ra $minC_{ABM}=\sqrt{113}+AH+BH$, đạt được $M\equiv H\Leftrightarrow M\left(\frac{3}{2};0;-\frac{1}{2}\right)$.

Vậy $a+b+c=1$.

Câu 44: Trong không gian *Oxyz* cho 4 điểm $A(2;3;2)$, $B(6;-1;-2)$, $C(-1;-4;3)$, $D(1;6;-5)$. Gọi *M* là một điểm nằm trên đường thẳng *CD* sao cho tam giác *MAB* có chu vi bé nhất. Khi đó toạ độ điểm *M* là:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $M\left(0;1;-1\right)$ **B.** $M\left(2;11;-9\right)$ **C.** $M\left(3;16;-13\right)$ **D.** $M\left(-1;-4;3\right)$

Lời giải

Tam giác MAB có độ dài cạnh $AB=4\sqrt{3}$ không đổi, do đó chu vi bé nhất khi và chỉ khi $MA+MB$ bé nhất.

$\overrightarrow{AB}=\left(4;-4;-4\right)$; $\overrightarrow{CD}=\left(2;10;-8\right)$. Vì $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=0$ nên $AB\perp CD$, suy ra điểm M cần tìm là hình chiếu vuông góc của A, cũng là hình chiếu vuông góc của B lên đường thẳng CD. Từ đó tìm ra điểm $M\left(0;1;-1\right)$.

Chọn A

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

DẠNG 4: MIN, MAX VỚI MẶT CẦU

Câu 1. **(Đặng Thành Nam Đề 5)** Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;4), B(3;2;6), C(3;-2;6)$. Gọi M là điểm di động trên mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=4$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA+\left|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|$ bằng

A. $2\sqrt{34}$. **B.** $6\sqrt{5}$. **C.** $4\sqrt{10}$. **D.** $2\sqrt{29}$.

Lời giải

Chọn A

Với điểm $M(x;y;z)\in(S)$ thì $x^2+y^2+z^2-4=0$ và điểm $I(3;0;6)$ là trung điểm BC và

$$MA+\left|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=MA+2\left|\overrightarrow{MI}\right|=MA+2MI$$

$$=\sqrt{x^2+y^2+(z-4)^2}+2\sqrt{(x-3)^2+y^2+(z-6)^2}$$

$$=\sqrt{x^2+y^2+(z-4)^2+3\left[x^2+y^2+z^2-4\right]}+2\sqrt{(x-3)^2+y^2+(z-6)^2}$$

$$=2\left[\sqrt{x^2+y^2+(z-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2+y^2+(z-6)^2}\right]$$

$$\geq 2\sqrt{(x+3-x)^2+(y-y)^2+(z-1+6-z)^2}=2\sqrt{34}$$

Dấu bằng đạt tại $\begin{cases}\dfrac{x}{3-x}=\dfrac{z-1}{6-z}=k>0\\ y=0\\ x^2+y^2+z^2=4\end{cases}\Leftrightarrow(x;y;z)=\left(\dfrac{3\sqrt{127}-15}{34};0;\dfrac{9+5\sqrt{127}}{34}\right)$.

Câu 2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-3=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+5=0$. Giả sử $M\in(P)$ và $N\in(S)$ sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với véc tơ $\vec{u}=(1;0;1)$ và khoảng cách MN nhỏ nhất. Tính MN.

A. $MN=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $MN=1$. **C.** $MN=3\sqrt{2}$. **D.** $MN=\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi H là hình chiếu vuông góc của N lên (P), ta có:

$$MN=\frac{NH}{\cos\widehat{MNH}}=\frac{NH}{\left|\cos\left(\vec{u},\overrightarrow{n_P}\right)\right|}\geq\frac{d\left(I;(P)\right)-r}{\left|\cos\left(\vec{u},\overrightarrow{n_P}\right)\right|}=\frac{2-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}.$$

Câu 3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+3}{2}$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2+4z+3=0$. Giả sử $M\in d$ và $N\in(S)$ sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với véc tơ $\vec{u}=(1;0;1)$ và khoảng cách MN nhỏ nhất. Tính MN.

A. $MN=2$. **B.** $MN=\dfrac{17\sqrt{2}-\sqrt{34}}{6}$. **C.** $MN=\dfrac{17\sqrt{2}+\sqrt{34}}{6}$. **D.** $MN=\dfrac{17-\sqrt{17}}{6}$.

Lời giải

Chọn B

Xét điểm $M\left(-2+2t;2+3t;-3+2t\right)\in d\Rightarrow \overrightarrow{MN}=k\vec{u}=\left(k;0;k\right)$

$\Rightarrow N\left(2t+k-2;3t+2;2t+k-3\right)$ mà $N\in\left(S\right)$ nên ta có

$\left(2t+k-2\right)^2+\left(3t+2\right)^2+\left(2t+k-3\right)^2+4\left(2t+k-3\right)^2+3=0\Leftrightarrow 17t^2+8tk+2k^2-6k+8=0$

$\Delta_t'\ge 0\Leftrightarrow 16k^2-17\left(2k^2-6k+8\right)\ge 0\Leftrightarrow \dfrac{17-\sqrt{17}}{6}\le k\le \dfrac{17+\sqrt{17}}{6}$.

Do đó $MN=\left|k\right|.\sqrt{2}\ge \dfrac{17-\sqrt{17}}{6}.\sqrt{2}=\dfrac{17\sqrt{2}-\sqrt{34}}{6}$.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+3}{2}$ và mặt cầu $\left(S\right):x^2+y^2+z^2+4z+3=0$. Giả sử $M\in d$ và $N\in\left(S\right)$ sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với véc tơ $\vec{u}=\left(1;0;1\right)$ và khoảng cách MN lớn nhất. Tính MN.

A. $MN=4$. **B.** $MN=\dfrac{17\sqrt{2}-\sqrt{34}}{6}$. **C.** $MN=\dfrac{17\sqrt{2}+\sqrt{34}}{6}$. **D.** $MN=\dfrac{17+\sqrt{17}}{6}$.

Lời giải

Chọn C

Xét điểm $M\left(-2+2t;2+3t;-3+2t\right)\in d\Rightarrow \overrightarrow{MN}=k\vec{u}=\left(k;0;k\right)$

$\Rightarrow N\left(2t+k-2;3t+2;2t+k-3\right)$ mà $N\in\left(S\right)$ nên ta có

$\left(2t+k-2\right)^2+\left(3t+2\right)^2+\left(2t+k-3\right)^2+4\left(2t+k-3\right)^2+3=0\Leftrightarrow 17t^2+8tk+2k^2-6k+8=0$

$\Delta_t'\ge 0\Leftrightarrow 16k^2-17\left(2k^2-6k+8\right)\ge 0\Leftrightarrow \dfrac{17-\sqrt{17}}{6}\le k\le \dfrac{17+\sqrt{17}}{6}$.

Do đó $MN=\left|k\right|.\sqrt{2}\le \dfrac{17+\sqrt{17}}{6}.\sqrt{2}=\dfrac{17\sqrt{2}+\sqrt{34}}{6}$.

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\left(P\right):2x-y+2z-14=0$ và mặt cầu $\left(S\right):x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$. Điểm $M\in\left(P\right),N\in\left(S\right)$ sao cho khoảng cách MN nhỏ nhất. Tính MN.

A. $MN=1$. **B.** $MN=3$. **C.** $MN=2$. **D.** $MN=4$.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu $\left(S\right)$ có tâm $I\left(1;-2;-1\right)$ và $d\left(I;\left(P\right)\right)=4$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của N lên $\left(P\right)$, ta có:

$MN\ge NH\ge\left|IH-IN\right|\ge d\left(I;\left(P\right)\right)-R=4-3=1$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Dấu bằng xảy ra khi M là hình chiếu vuông góc của I lên (P); N là giao điểm của đoạn IM với (S).

Câu 6. Các số thực a,b,c,d,e,f thỏa mãn $\begin{cases} a^2+b^2+c^2-2a+4b+2c-6=0 \\ 2d-e+2f-14=0 \end{cases}$. Hỏi giá trị nhỏ nhất của biểu $P=(a-d)^2+(b-e)^2+(c-f)^2$ là bao nhiêu?

A. 1. **B.** $4-2\sqrt{3}$. **C.** $28-16\sqrt{3}$. **D.** $7-4\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Dễ có $M(a;b;c)\in(S): x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-6=0$ có tâm $I(1;-2;-1)$, $R=2\sqrt{3}$ và điểm $N(d;e;f)\in(P): 2x-y+2z-14=0$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên (P), ta có:

$MN\ge NH\ge |IH-IN|\ge d(I;(P))-R=4-2\sqrt{3}$. Do đó $P=MN^2\ge(4-2\sqrt{3})^2=28-16\sqrt{3}$.

Dấu bằng xảy ra khi N là hình chiếu vuông góc của I lên (P); M là giao điểm của đoạn IN với (S).

Câu 7. **(Sở Ninh Bình 2019 lần 2)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=4$ và mặt phẳng $(P):x-y+2z-1=0$. Gọi M là một điểm bất kì trên mặt cầu (S). Khoảng cách từ M đến (P) có giá trị nhỏ nhất bằng

A. $\frac{4\sqrt{6}}{3}-2$. **B.** 0. **C.** $\sqrt{6}-2$. **D.** $2\sqrt{6}-2$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;2)$ và bán kính $R=2$.

$d(I,(P))=\sqrt{6}>R$ suy ra mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu (S).

Điểm $M\in(S)$ thỏa mãn $d(M,(P))$ nhỏ nhất bằng $d(I,(P))-R=\sqrt{6}-2$.

Câu 8. **(THPT-Ngô-Quyền-Hải-Phòng-Lần-2-2018-2019-Thi-24-3-2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):2x-y+2z-14=0$ và mặt cầu

$(S):x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0$. Gọi tọa độ điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) là lớn nhất. Tính giá trị biểu thức $K=a+b+c$.

A. $K=1$. **B.** $K=2$. **C.** $K=-5$. **D.** $K=-2$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I=(1;-2;-1)$ và có bán kính $R=3$.

Mặt phẳng (P) có véctơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;-1;2)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Gọi d là đường thẳng đi qua I và vuông góc với mặt phẳng (P) thì đường thẳng d có phương trình tham số là $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-t \\ z=-1+2t \end{cases}$.

Điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) là lớn nhất khi và chỉ khi M là giao điểm của đường thẳng d và mặt cầu (S).

Khi đó tọa độ điểm M là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-t \\ z=-1+2t \\ x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-t \\ z=-1+2t \\ \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-1 \end{array}\right. \end{cases}.$$

Với $t=1 \Rightarrow M(3;-3;1) \Rightarrow \mathrm{d}(M,(P))=\dfrac{|6+3+2-14|}{3}=1.$

Với $t=-1 \Rightarrow M(-1;-1;-3) \Rightarrow \mathrm{d}(M,(P))=\dfrac{|-2+1-6-14|}{3}=7.$

Vậy $M(-1;-1;-3)$ thỏa mãn nên $a=-1, b=-1, c=-3 \Rightarrow K=a+b+c=-5.$

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$ và mặt phẳng $(P):2x-2y+z+3=0$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm trên mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến (P) là lớn nhất. Khi đó

A. $a+b+c=5.$ **B.** $a+b+c=6.$ **C.** $a+b+c=7.$ **D.** $a+b+c=8.$

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=9$ có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=3.$

Gọi d là đường thẳng đi qua $I(1;2;3)$ và vuông góc (P)

Suy ra phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-2t \\ z=3+t \end{cases}.$

Gọi A,B lần lượt là giao của d và (S), khi đó tọa độ A,B ứng với t là nghiệm của phương trình $(1+2t-1)^2+(2-2t-2)^2+(3+t-3)^2=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-1 \end{array}\right.$

Với $t=1 \Rightarrow A(3;0;4) \Rightarrow d(A;(P))=\dfrac{13}{3}.$

Với $t=-1 \Rightarrow B(-1;4;2) \Rightarrow d(B;(P))=\dfrac{5}{3}.$

Với mọi điểm $M(a;b;c)$ trên (S) ta luôn có $d(B;(P)) \le d(M;(P)) \le d(A;(P)).$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Vậy khoảng cách từ M đến (P) là lớn nhất bằng $\frac{13}{3}$ khi $M(3;0;4)$

Do đó $a+b+c=7$.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;0), B(2;-3;2)$. Gọi (S) là mặt cầu đường kính AB và Ax là tiếp tuyến của (S) tại A; By là tiếp tuyến của (S) tại B và $Ax \perp By$. Hai điểm M, N lần lượt di động trên Ax, By sao cho MN là tiếp tuyến của (S). Hỏi tứ diện $AMBN$ có diện tích toàn phần nhỏ nhất là?

A. $19\sqrt{3}$. **B.** $19\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$. **C.** $19\left(2+\sqrt{3}\right)$. **D.** $19\left(2+\sqrt{6}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Giả sử (S) tiếp xúc với MN tại điểm O.

Theo tính chất tiếp tuyến, ta có $x=AM=MO, y=BN=NO$ và

$$\begin{cases} AB \perp AM \\ BN \perp AM \end{cases} \Rightarrow AM \perp (ABN) \Rightarrow AM \perp AN$$

Theo Pitago, ta có $\begin{cases} MN = MO+ON = AM+BN \\ MN^2 = AM^2+AN^2 = AM^2+AB^2+BN^2 \end{cases}$

Do đó $(AM+BN)^2 = AM^2+AB^2+BN^2$

$$\Rightarrow xy = AM.BN = \frac{AB^2}{2} = \frac{3^2+5^2+2^2}{2} = 19.$$

Ta có:

$$S_{ABM} = \frac{1}{2}AB.AM = \frac{\sqrt{38}}{2}x.$$

$$S_{ABN} = \frac{1}{2}AB.BN = \frac{\sqrt{38}}{2}y.$$

$$S_{AMN} = \frac{1}{2}AM.AN = \frac{1}{2}x\sqrt{38+y^2}.$$

$$S_{BMN} = \frac{1}{2}BM.BN = \frac{1}{2}y\sqrt{38+x^2}.$$

Khi đó theo bất đẳng thức AM – GM, ta có

$$S_{tp} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{38}x+\sqrt{38}y+x\sqrt{38+y^2}+y\sqrt{38+x^2}\right)$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(2\sqrt{\sqrt{38}x.\sqrt{38}y}+2\sqrt{x\sqrt{38+y^2}.y\sqrt{38+x^2}}\right)$$

$$= \sqrt{38xy}+\sqrt{xy\sqrt{38^2+38\left(x^2+y^2\right)+x^2y^2}}$$

$$\geq \sqrt{38xy}+\sqrt{xy\sqrt{38^2+38.2xy+x^2y^2}} = 19\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right).$$

Câu 11. Trong khôn gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ nội tiếp mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2=11$. Hỏi giá trị lớn nhất của biểu thức $AB^2+BC^2+CA^2+DA^2+BD^2+CD^2$ là?

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. 99. **B.** 176. **C.** 132. **D.** 66.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $r=\sqrt{11}$.

Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$ thì ta có $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

Do đó $4\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$. Suy ra $16OG^2=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)^2$

$=\sum OA^2+2\sum\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB}$ và $2\sum\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB}=16OG^2-4R^2$.

Khi đó $AB^2+BC^2+CA^2+DA^2+BD^2+CD^2=\sum\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)^2=\sum\left(2R^2-2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}\right)$

$=12R^2-\sum 2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA}=12R^2-\left(16OG^2-4R^2\right)=16R^2-16OG^2\le 16R^2=176$.

Dấu bằng xảy ra khi $G\equiv O$.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(a;0;0),B(0;b;c),C(0;0;c)$ với $a\ge 4,b\ge 5,c\ge 6$ và mặt cầu (S) có bán kính bằng $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ ngoại tiếp tứ diện $OABC$. Khi tổng $OA+OB+OC$ đạt giá trị nhỏ nhất thì mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng nào dưới đây?

A. $2x+2y-\sqrt{2}z+6+3\sqrt{2}=0$ **B.** $2x+\sqrt{2}y+2z+7-2\sqrt{2}=0$

C. $\sqrt{2}x+2y-2z+3+2\sqrt{2}=0$ **D.** $\sqrt{2}x+2y+2z+3-2\sqrt{2}=0$

Lời giải

Ta có: $a^2+b^2+c^2=90$ và $a\ge 4,b\ge 5,c\ge 6$. Khi đó: $4\le a\le\sqrt{29};5\le b\le\sqrt{38}$.

Ta có: $OA+OB+OC=a+b+c=a+b+\sqrt{90-a^2-b^2}=f(a,b)$.

Xét $f'(a)=1-\frac{a}{\sqrt{90-a^2-b^2}}=0\Leftrightarrow a=\sqrt{45-\frac{b^2}{2}}$.

Lập bảng biến thiên ta được:

$\min f(a,b)=\min\left\{f(4);f\left(\sqrt{29}\right)\right\}=\min\left\{b+4+\sqrt{74-b^2};b+\sqrt{29}+\sqrt{61-b^2}\right\}$

Dễ có:

$b+4+\sqrt{74-b^2}<b+\sqrt{29}+\sqrt{61-b^2}\ \ \forall b\in\left[5;\sqrt{38}\right]\Rightarrow\min f(a,b)=b+4+\sqrt{74-b^2}=f(b)$.

Do $f'(b)=1-\frac{b}{\sqrt{74-b^2}}=0\Leftrightarrow b=\sqrt{37}$ nên lập bảng biến thiên ta được $\min f(a,b)=f(5)=16$.

Do đó giá trị nhỏ nhất của $OA+OB+OC$ là 16 khi $a=4,b=5,c=7$.

Câu 13. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $S(0;0;1),M(m;0;0),N(0;n;0)$ với $m,n>0$ và $m+n=1$. (SMN) luôn tiếp xúc với 1 mặt cầu cố định có bán kính là bao nhiêu biết mặt cầu đó đi qua $M(1;1;1)$.

A. $\sqrt{2}$ **B.** 2 **C.** 1 **D.** $\sqrt{3}$

Lời giải

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu. Khi đó: $R=d\left(I,(MSN)\right)=\dfrac{\left|\dfrac{a}{m}+\dfrac{b}{n}+\dfrac{c}{1}-1\right|}{\sqrt{1+\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{1}{n^2}}}=I$.

Chú ý: $1+\dfrac{1}{m^2}+\dfrac{1}{n^2}=1+\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\right)^2-\dfrac{2}{mn}=1+\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\right)^2-2\left(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}\right)=\left|\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}-1\right|^2$.

Vậy $R=\dfrac{\left|\dfrac{a}{m}+\dfrac{b}{n}+\dfrac{c}{1}-1\right|}{\left|\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}-1\right|}$. Chọn $a=b=1-c\Rightarrow R=|a|$ và tâm $I(a;a;1-a)$.

$\Rightarrow IM=\sqrt{2(a-1)^2+a^2}=|a|\Leftrightarrow a=1\Rightarrow R=1$. **Chọn C**

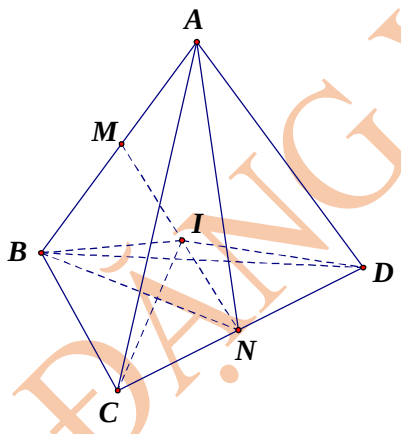
Câu 14. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với $A(m;0;0),B(0;m-1;0),C(0;0;m+4)$ thỏa mãn $BC=AD,CA=BD,AB=CD$ điểm $I(a;b;c)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Tính bán kính nhỏ nhất của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

A. $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

C. $\sqrt{7}$. **D.** $\sqrt{14}$.

Lời giải

Chọn B



Có $\Delta BCD=\Delta ACD\Rightarrow BN=AN\Rightarrow MN\perp AB$.

Tương tự ta cũng có $MN\perp CD$. Gọi I là trung điểm MN, khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

$AB=\sqrt{2m^2-2m+1},BC=\sqrt{2m^2+6m+17},AC=\sqrt{2m^2+8m+16}$

$MN=\sqrt{MC^2-CN^2}=\sqrt{\dfrac{AC^2+BC^2}{2}-\dfrac{AB^2}{4}-\dfrac{CD^2}{4}}=\sqrt{\dfrac{AC^2+BC^2-AB^2}{2}}=m+4$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$MI=\frac{1}{1}MN=\frac{m+4}{2}$

$\Rightarrow IB=\sqrt{\left(\frac{1}{2}AB\right)^2+\left(\frac{1}{2}MN\right)^2}$

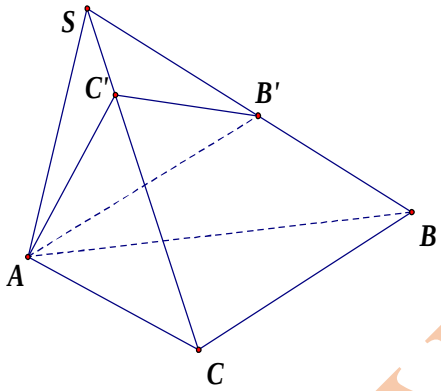
$=\frac{1}{2}\sqrt{2m^2-2m+1+(m+4)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{3(m-1)^2+14}\ge\frac{\sqrt{14}}{2}$

Câu 15. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(1;-2;1), B(2;4;6)$. Điểm M di động trên AB và N là điểm thuộc tia OM sao cho $OM.ON=4$. Biết rằng N thuộc một đường tròn cố định. Tìm bán kính của đường tròn đó.

A. $R=\sqrt{\frac{42}{31}}$. **B.** $R=\sqrt{\frac{31}{42}}$. **C.** $R=2\sqrt{\frac{42}{31}}$. **D.** $R=2\sqrt{\frac{31}{42}}$.

Lời giải

Chọn C



Đặt $\frac{SB'}{SB}=x, \frac{SC'}{SC}=y\Rightarrow\frac{V_1}{V_2}=\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}=x.y$.

Khi đó:

$AB'^2=SA^2+SB'^2-2.SA.SB'.\cos\angle ASB=a^2+(ax)^2-2.a.ax.\cos 30^\circ=a^2\left(1-\sqrt{3}x+x^2\right)$.

$\Rightarrow AB'=a\sqrt{1-\sqrt{3}x+x^2}$

Tương tự: $AC'=a\sqrt{1-\sqrt{3}y+y^2}$, $B'C'=a\sqrt{x^2-\sqrt{3}xy+y^2}$

Ta có: $2p=AB'+AC'+B'C'=a\left[\sqrt{1-\sqrt{3}x+x^2}+\sqrt{1-\sqrt{3}y+y^2}+\sqrt{x^2-\sqrt{3}xy+y^2}\right]$

$=a\left[\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-y\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2+\left(\frac{1}{2}x\right)^2}+\sqrt{1-\sqrt{3}x+x^2}\right]$

$\ge a\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x\right)^2}+a\sqrt{1-\sqrt{3}x+x^2}=a(\sqrt{1-x+x^2}+\sqrt{1-\sqrt{3}x+x^2})$.

$=a\left(\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-x\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right)\ge a\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=a\sqrt{2}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Dấu bằng xảy ra khi: $x=\dfrac{y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}x}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}-y}, x=\sqrt{3}-1\Leftrightarrow x=y=\sqrt{3}-1\Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2}=\left(\sqrt{3}-1\right)^2=4-2\sqrt{3}$.

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(m;0;0)$, $B(0;n;0)$, $C(0;0;-2)$ và $D(m;n;-2)$, với m,n là các số thực thay đổi thỏa mãn $2m+n=1$. Hỏi bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có giá trị nhỏ nhất là?

A. $\dfrac{\sqrt{105}}{10}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{17}}{4}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{21}}{5}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là:

$(S): x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0\left(a^2+b^2+c^2-d>0\right)$.

Vì A,B,C,D thuộc mặt cầu nên:

$$\begin{cases} m^2+2ma+n^2+2bn+4-4c+d=0\\ m^2+2ma+d=0\\ 4-4c+d=0\\ n^2+2bn+d=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m^2+2ma+n^2+2bn=0\\ m^2+2ma+n^2+2bn+2d=0\\ 4-4c+d=0\\ n^2+2bn+d=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} m^2+2am=0\\ n^2+2bn=0\\ 4-4c=0\\ d=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=-\dfrac{m}{2}\\ b=-\dfrac{n}{2}\\ c=1\\ d=0 \end{cases}.$$

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là:

$$R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{\frac{m^2+n^2+1}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{m^2+n^2+4}=\frac{1}{2}\sqrt{m^2+(1-2m)^2+4}=\frac{1}{2}\sqrt{5m^2-4m+5}$$

Ta có: $5m^2-4m+5=5\left(n-\dfrac{2}{5}\right)^2+\dfrac{21}{5}\geq\dfrac{21}{5}\Rightarrow R_{\min}=\dfrac{\sqrt{105}}{10}$.

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(m;0;0), B(0;1;0), C(0;0;n)$ với m,n là các số thực thỏa mãn $m.n=2$. Hỏi bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ có bán kính nhỏ nhất là?

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$(S): x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0 \left(a^2+b^2+c^2-d>0\right)$.

Vì O, A, B, C thuộc mặt cầu nên: $\begin{cases} d=0 \\ m^2+2ma=0 \\ 1+2b=0 \\ n^2+2cn=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{m}{2} \\ c=-\dfrac{n}{2} \\ b=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là:

$$R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{\frac{m^2+n^2+1}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{m^2+n^2+1}=\frac{1}{2}\sqrt{n^2+\frac{4}{n^2}+1}$$

Ta có: $n^2+\dfrac{4}{n^2}+1 \geq 2\sqrt{n^2.\dfrac{4}{n^2}}+1=5 \Rightarrow R_{\min}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(m;0;0), B(0;n;0), C(0;0;1)$ và $D(m;n;1)$ với m, n là các số thực thỏa mãn $m.n=2$. Hỏi mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ có bán kính nhỏ nhất là?

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là:

$(S): x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0 \left(a^2+b^2+c^2-d>0\right)$.

Vì A, B, C, D thuộc mặt cầu nên:

$$\begin{cases} m^2+2ma+d=0 \\ n^2+2nb+d=0 \\ 1+2c+d=0 \\ m^2+n^2+2ma+2bn+1+2c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+n^2+2ma+2bn+2d=0 \\ 1+2c+d=0 \\ m^2+2ma+d=0 \\ m^2+n^2+2ma+2bn=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2+2ma=0 \\ n^2+2bn=0 \\ 1+2c=0 \\ d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{m}{2} \\ b=-\dfrac{n}{2} \\ c=-\dfrac{1}{2} \\ d=0 \end{cases}.$$

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là:

$$R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{\frac{m^2+n^2+1}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{m^2+n^2+1}=\frac{1}{2}\sqrt{n^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+1}=\frac{1}{2}\sqrt{n^2+\frac{4}{n^2}+1}$$

Ta có: $n^2+\dfrac{4}{n^2}+1 \geq 2\sqrt{n^2.\dfrac{4}{n^2}}+1=5 \Rightarrow R_{\min}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(m;0;0), B(0;1;0), C(0;0;n)$ với m,n là các số thực thỏa mãn $m+2n=2$. Hỏi mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ có bán kính nhỏ nhất là?

A. $\sqrt{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\frac{3\sqrt{5}}{10}$. **D.** $\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là:

$(S): x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0 \left(a^2+b^2+c^2-d>0\right)$.

Vì O,A,B,C thuộc mặt cầu nên: $\begin{cases} d=0 \\ m^2+2ma=0 \\ 1+2b=0 \\ n^2+2cn=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{m}{2} \\ c=-\frac{n}{2} \\ b=-\frac{1}{2} \end{cases}$.

Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là:

$$R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}=\sqrt{\frac{m^2+n^2+1}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{m^2+n^2+1}=\frac{1}{2}\sqrt{n^2+(2-2n)^2+1}=\frac{1}{2}\sqrt{5n^2-8n+5}$$

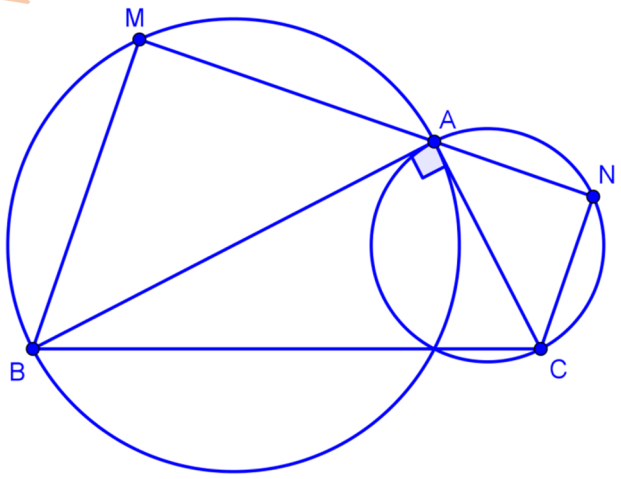
Ta có: $5n^2-8n+4=5\left(n-\frac{4}{5}\right)^2+\frac{9}{5}\geq\frac{9}{5}\Rightarrow R_{\min}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$.

Câu 20. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho $A(1,0,1), B(-3,4,-1), C(2,2,3)$.

Đường thẳng d đi qua A, cắt các mặt cầu đường kính AB và AC lần lượt tại các điểm M,N không trùng với A sao cho đường gấp khúc $BMNC$ có độ dài lớn nhất có vector chỉ phương là?

A. $\vec{u}=(1,0,2)$ **B.** $\vec{u}=(1,0,1)$ **C.** $\vec{u}=(1,0,-1)$ **D.** $\vec{u}=(2,0,-1)$

Lời giải



Ta phát hiện được tam giác ABC vuông tại A mặt khác:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$$\begin{cases} MA+MB \le \sqrt{2\left(MA^2+MB^2\right)} = AB\sqrt{2} \\ NA+NB \le \sqrt{2\left(NA^2+NB^2\right)} = AC\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow BM+MN+NC \le \left(AB+AC\right)\sqrt{2}$$

Chú ý rằng đẳng thức xảy ra được bởi vì trong trường hợp các tam giác MAB, NAC vuông cân và tam giác ABC vuông thì A, M, N vẫn thẳng hàng cho nên đường thẳng d khi đó có $\boxed{\vec{u}=(1,0,1)}$. (Học sinh cần tự tìm các tọa độ của M, N sao cho các tam giác MAB, NAC vuông cân tại M, N và nằm trong mặt phẳng (ABC)).

Chọn B

Câu 21. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x-y+2z+1=0; (Q): 2x+y+z-1=0$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm thuộc trục Ox, đồng thời (S) cắt (P) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng 2; (S) cắt (Q) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính bằng r. Tìm r sao cho chỉ có duy nhất một mặt cầu (S) thỏa mãn điều kiện bài toán.

A. $r=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$. **B.** $r=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. **C.** $r=\sqrt{3}$. **D.** $r=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi $I(m;0;0)$ thuộc trục Ox là tâm của (S) và R là bán kính của (S). Theo giả thiết, ta có:

$$\begin{cases} d^2\left(I,(P)\right)+2^2=R^2 \\ d^2\left(I,(Q)\right)+r^2=R^2 \end{cases} \Rightarrow r^2+d^2\left(I,(Q)\right)=4+d^2\left(I,(P)\right).$$

Vậy ta có phương trình: $r^2+\dfrac{(2m-1)^2}{6}=4+\dfrac{(m+1)^2}{6} \Leftrightarrow 3m^2-6m+6r^2-24=0.$

Để có duy nhất 1 mặt cầu thỏa mãn thì phương trình trên có nghiệm duy nhất, do đó:

$\Delta'_m=9-3\left(6r^2-24\right)=0 \Leftrightarrow r=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}.$

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ có A, B, C lần lượt là giao điểm của mặt phẳng $(P): \dfrac{x}{m}+\dfrac{y}{m-1}+\dfrac{z}{m+4}=1$ với các trục tọa độ Ox, Oy, Oz; trong đó $m \notin \{0;1;-4\}$ là tham số thực thay đổi. Điểm O, D nằm khác phía với mặt phẳng (P) và $BC=AD, CA=BD, AB=CD$. Hỏi mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ có bán kính nhỏ nhất là?

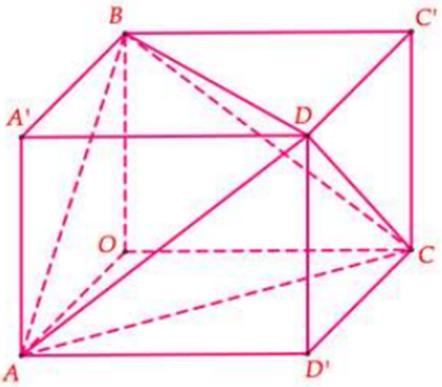
A. $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{14}}{2}$. **C.** $\sqrt{7}$. **D.** $\sqrt{14}$.

Lời giải

Chọn B

Theo giả thiết, ta có $A(m;0;0), B(0;m-1;0), C(0;0;m+4)$ và BC, CA, AB, DB, DA, DC lần lượt là đường chéo các mặt của một hình hộp chữ nhật $OAD'C.BA'DC'$ như hình vẽ dưới.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Do đó mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ cũng chính là mặt cầu ngoại tiếp hình hộp chữ nhật đã cho. Vì vậy tâm mặt cầu ngoại tiếp là $I\left(\frac{m}{2};\frac{m-1}{2};\frac{m+4}{2}\right)$.

Do đó $R=IO=\sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2+\left(\frac{m-1}{2}\right)^2+\left(\frac{m+4}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3(m+1)^2+14}}{2}\geq\frac{\sqrt{14}}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi $m=-1$.

Câu 23. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):x-2y+2z-3=0$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2+2x-4y-2z+5=0$. Giả sử $M\in(P)$ và $N\in(S)$ sao cho $\overrightarrow{MN}$ cùng phương với véc tơ $\vec{u}=(1;0;1)$ và khoảng cách MN lớn nhất. Tính MN.

A. $MN=3$. **B.** $MN=1+2\sqrt{2}$. **C.** $MN=3\sqrt{2}$. **D.** $MN=14$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;1), R=1$.

Xét điểm $M(x;y;z)\in(P)\Rightarrow x-2y+2z-3=0$.

Theo giả thiết $\overrightarrow{MN}=k\vec{u}=(k;0;k)\Rightarrow N(x+k;y;z+k)$ và $N\in(S)$ nên

$(x+k)^2+y^2+(z+k)^2+2(x+k)-4y-2(z+k)+5=0$

$\Leftrightarrow(x+k+1)^2+(y-2)^2+(z+k-1)^2=1$.

Do $x-2y+2z-3=0\Leftrightarrow(x+k+1)-2(y-2)+2(z+k-1)=3k+6$.

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwar, ta có:

$(3k+6)^2\leq\left(1^2+(-2)^2+2^2\right).\left[(x+k+1)^2+(y-2)^2+(z+k-1)^2\right]=9\Leftrightarrow-3\leq k\leq-1$

$\Rightarrow MN=|k|.\sqrt{2}\leq3\sqrt{2}$.

Chọn C

Dấu bằng xảy ra khi $k=-3$.

Cách 2: Gọi H là hình chiếu vuông góc của N lên (P), ta có:

$$MN=\frac{NH}{\cos\widehat{MNH}}=\frac{NH}{\left|\cos\left(\vec{u},\overrightarrow{n_P}\right)\right|}\leq\frac{r+d\left(I;(P)\right)}{\left|\cos\left(\vec{u},\overrightarrow{n_P}\right)\right|}=\frac{1+2}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=3\sqrt{2}.$$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 24. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với $a \ge 4, b \ge 5, c \ge 6$ và mặt cầu (S) có bán kính bằng $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ ngoại tiếp tứ diện $OABC$. Khi tổng $OA+OB+OC$ nhỏ nhất thì mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng nào dưới đây?

A. $2x+2y-\sqrt{2}z+6+3\sqrt{2}=0$. **B.** $\sqrt{2}x+2y-2z+3+2\sqrt{2}=0$.

C. $2x+\sqrt{2}y-2z+7-2\sqrt{2}=0$. **D.** $\sqrt{2}x+2y+2z+3-2\sqrt{2}=0$.

Lời giải

Chọn D

Tâm mặt cầu (S) là điểm $I\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2};\frac{z}{2}\right)$ và bán kính

$$R=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{10}}{2}\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=90.$$

Khi đó: $OA+OB+OC=a+b+c=\sqrt{a^2+b^2+2ab}+c$

$=\sqrt{90-c^2+2ab}+c\ge\sqrt{90-c^2+2.4.5}+c$

$=\sqrt{130-c^2}+c\ge\min\limits_{[0;+\infty)}y=y(7)=16$.

Khi đó $I\left(2;\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right)$ và rõ rang $d\left(I,(P)\right):\sqrt{2}x+2y+2z+3-2\sqrt{2}=0=\frac{3\sqrt{10}}{2}$.

Câu 25. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$ và mặt phẳng $(P):2+2y+2z+7=0$. Gọi (Q) là mặt phẳng thay đổi qua $A(-2;1;1)$ và tiếp xúc với mặt cầu (S). Hỏi góc nhỏ nhất giữa hai mặt phẳng $(P),(Q)$ là?

A. $\arccos\frac{2\sqrt{10}-2}{9}$. **B.** $\arccos\frac{\sqrt{10}-1}{9}$. **C.** $\arccos\frac{2\sqrt{10}+2}{9}$. **D.** $\arccos\frac{\sqrt{10}+1}{9}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $(Q):a(x+2)+b(y-1)+c(z-1)=0$ theo giả thiết, ta có

$$d\left(I,(Q)\right)=2\Leftrightarrow\frac{|3a|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=2\Leftrightarrow b^2+c^2=\frac{5}{4}a^2.$$

Khi đó góc giữa $(P),(Q)$ xác định bởi

$$\cos\alpha=\frac{|a+2b+2c|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\frac{2}{9}\left|1+2\left(\frac{b+c}{a}\right)\right|\le\frac{2}{9}\left(1+2\sqrt{\frac{5}{2}}\right)=\frac{2+2\sqrt{10}}{9}.$$

$$\Rightarrow a\ge\arccos\frac{2+2\sqrt{10}}{9}.$$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Bởi vì $\frac{5}{4}a^2=b^2+c^2\ge\frac{1}{2}(b+c)^2\Rightarrow\left(\frac{b+c}{a}\right)^2\le\frac{5}{2}\Rightarrow\frac{b+c}{a}\in\left[-\frac{\sqrt{10}}{2};\frac{\sqrt{10}}{2}\right]$.

Câu 26. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(10;2;1),B(3;1;4)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$. Điểm M di động trên mặt cầu (S). Hỏi giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA+3MB$ là?

A. $3\sqrt{14}$. **B.** 9. **C.** $3\sqrt{11}$. **D.** $6\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) tâm $I(1;2;1),R=3$.

Ta chọn điểm C trên đoạn IA sao cho $\Delta ICM\sim\Delta IMA$ theo tỉ số $\frac{1}{3}$; tức

$$\frac{IC}{IM}=\frac{IM}{IA}=\frac{MC}{MA}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{IC}{IA}=\frac{IM^2}{IA^2}=\frac{R^2}{IA^2}=\frac{9}{9^2}=\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{IC}=\frac{1}{9}\overrightarrow{IA}=(1;0;0)\Rightarrow C(2;2;1).$$

Khi đó $MA+3MB=3(MC+MB)\ge3BC=3\sqrt{1^2+1^2+3^2}=3\sqrt{11}$

Dấu bằng đạt tại $M=BC\cap(S)$.

Câu 27. **(ĐỀ-THI-THU-ĐH-THPT-CHUYÊN-QUANG-TRUNG-L5-2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d:\frac{x}{2}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-1}$ và mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-2)^2+(z-5)^2=36$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua $A(2;1;3)$, vuông góc với đường thẳng d và cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách lớn nhất. Khi đó đường thẳng Δ có một véctơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;a;b)$. Tính $a+b$.

A. 4. **B.** -2. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** 5.

Lời giải

Chọn D

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc d. Suy ra $(\alpha):2x+2y-z-3=0$.

Δ đi qua A và vuông với d nên Δ nằm trong (α).

Vì Δ cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách lớn nhất nên Δ đi qua tâm K của đường tròn giao tuyến của (α) và (S).

Ta có: K là hình chiếu vuông góc của tâm I của mặt cầu lên (α) nên $K\left(\frac{23}{9};\frac{14}{9};\frac{47}{9}\right)$.

Khi đó: $\overrightarrow{AK}=\left(\frac{5}{9};\frac{5}{9};\frac{20}{9}\right)\Rightarrow\vec{u}=(1;1;4)$.

Câu 28. **(CHUYÊN THÁI NGUYÊN LẦN 3)** Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$ và điểm $M(a;b;c)\in(S)$ sao cho biểu thức $P=a+2b+2c$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. 2. **B.** 1. **C.** −2. **D.** −1.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

Ta có $M(a\,;\,b\,;\,c)\in(S)\Leftrightarrow(a-2)^2+(b-1)^2+(c-1)^2=9$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski ta có

$\left[1.(a-2)+2.(b-1)+2.(c-1)\right]^2\le\left(1^2+2^2+2^2\right)\left[(a-2)^2+(b-1)^2+(c-1)^2\right]$

$\Leftrightarrow\left[1.(a-2)+2.(b-1)+2.(c-1)\right]^2\le 9.9\Leftrightarrow -9\le 1.(a-2)+2.(b-1)+2.(c-1)\le 9$

$\Leftrightarrow -3\le a+2b+2c\le 15$ hay $-3\le P\le 15$.

Vậy $P_{\min}=-3\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a-2}{1}=\dfrac{b-1}{2}=\dfrac{c-1}{2}\\ 1.(a-2)+2.(b-1)+2.(c-1)=-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-1.\\ c=-1\end{cases}$

Khi đó $T=a+b+c=1+(-1)+(-1)=-1$.

Cách 2:

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;1;1)$, bán kính $R=3$. Để $M(a;b;c)\in(S)$ đồng thời $P=a+2b+2c$ đạt giá trị nhỏ nhất thì M phải là điểm chung giữa (S) và mặt phẳng $(Q):x+2y+2z-P=0$.

Suy ra $d\left(I;(\alpha)\right)\le R\Leftrightarrow|6-P|\le 9\Leftrightarrow -3\le P\le 15$.

Ta có $P=-3$ khi $a=1$, $b=-1$, $c=-1$.

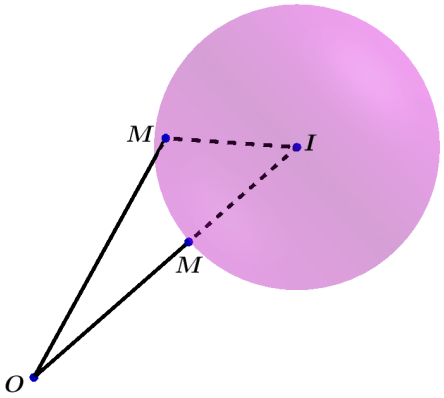
Vậy $T=a+b+c=-1$.

Câu 29. **(KSCL-Lần-2-2019-THPT-Nguyễn-Đức-Cảnh-Thái-Bình)** Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S):(x-4)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=1$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc (S). Tìm giá trị nhỏ nhất của $a^2+b^2+c^2$.

A. 25. **B.** 29. **C.** 24. **D.** 26.

Lời giải

Chọn A



Mặt cầu (S) có tâm $I(4;2;4)$, bán kính $R=1$

$OM=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

Ta có $OM\ge OI-IM=OI-R$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Nên OM nhỏ nhất khi $OM = OI - R = \sqrt{4^2+2^2+4^2} - 1 = 5$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $a^2+b^2+c^2 = 25$.

Câu 30. **(Đặng Thành Nam Đề 15)** Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+(y-3)^2+(y+4)^2 = 4$. Xét hai điểm M, N di động trên (S) sao cho $MN = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $OM^2 - ON^2$ bằng

A. -10. **B.** $-4-3\sqrt{5}$. **C.** -5. **D.** $-6-2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

Mặt cầu $(S): x^2+(y-3)^2+(y+4)^2 = 4$. có tâm $I(0;3;-4)$, bán kính $R = 2$.

Ta có: $OM^2 - ON^2 = \left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IM}\right)^2 - \left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IN}\right)^2 = 2\overrightarrow{OI}\left(\overrightarrow{IM}-\overrightarrow{IN}\right)$, (vì $IM = IN = R$)

$= 2\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{NM} = 2.OI.\text{NM}.\cos\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{NM}\right) \geq -2OI.\text{NM} = -10$.

Dấu "=" xảy ra khi hai véc tơ $\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{NM}$ ngược hướng.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $OM^2 - ON^2$ là -10.

Cách 2:

Xét điểm $M(x;y;z)$, $N(a;b;c)$ ta có $\begin{cases} M \in (S) \\ N \in (S) \\ MN = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(y-3)^2+(z+4)^2 = 4(1) \\ a^2+(b-3)^2+(c+4)^2 = 4(2) \\ (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = 1(3) \end{cases}$.

Lấy $(1)-(2)$ theo vế có: $x^2+y^2+z^2-a^2-b^2-c^2 = 6(y-b)-8(z-c)$.

Kết hợp sử dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz (Bunhiacopski) và (3) ta có

$OM^2 - ON^2 = x^2+y^2+z^2-a^2-b^2-c^2 = 6(y-b)-8(z-c)$

$\geq -\sqrt{\left(6^2+8^2\right)\left((y-b)^2+(z-c)^2\right)} \geq -\sqrt{\left(6^2+8^2\right)\left((y-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\right)} = -10.$

Dấu bằng đạt tại $\begin{cases} x^2+(y-3)^2+(z+4)^2 = 4 \\ a^2+(b-3)^2+(c+4)^2 = 4 \\ (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = 1. \\ x-a = 0 \\ \dfrac{y-b}{6} = \dfrac{z-c}{-8} = k < 0 \end{cases}$

*Một cách tương tự mở rộng cho min – max của $\alpha OM^2 + \beta ON^2$.

Câu 31. **(Chuyên KHTN)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(8;5;-11), B(5;3;-4), C(1;2;-6)$ và mặt

$(S): (x-2)^2+(y-4)^2+(z+1)^2 = 9$. Gọi điểm $M(a;b;c)$ là điểm trên (S) sao cho $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Hãy tìm $a+b$.

A. 6. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

Gọi N là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{NA}-\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{NC}=\vec{0}$, suy ra $N(-2;0;1)$.

Khi đó:

$\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|=\left|\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NA}\right)-\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NB}\right)-\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC}\right)\right|=\left|\left(\overrightarrow{NA}-\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{NC}\right)-\overrightarrow{MN}\right|=MN$.

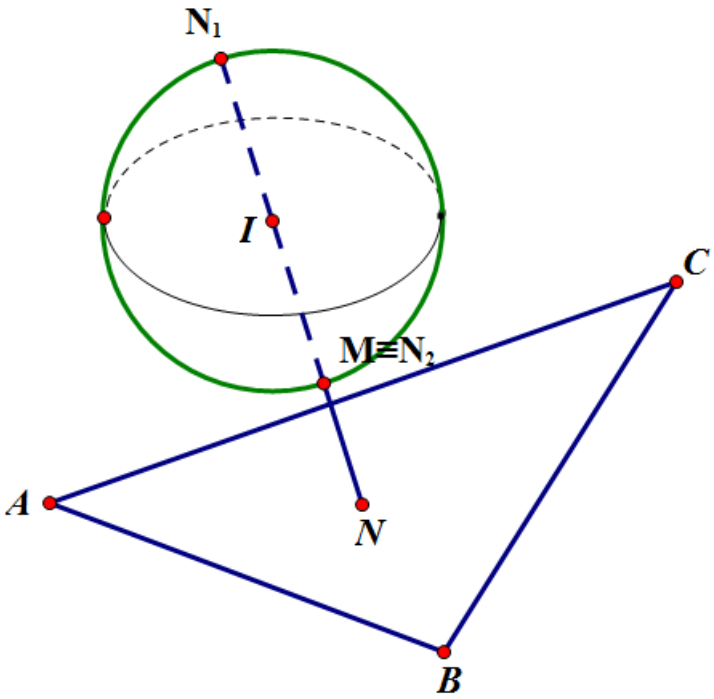
Suy ra $\left|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\right|$ nhỏ nhất khi MN nhỏ nhất. Mặt cầu (S) có tâm $I(2;4;-1)$, suy ra:

$\overrightarrow{NI}=(4;4;-2)=(2;2;-1)$. Phương trình $NI=\begin{cases}x=2+2t\\y=4+2t\\z=-1-t\end{cases}$. Thay phương trình NI vào phương trình (S) ta được: $(2t)^2+(2t)^2+(-t)^2=9\Leftrightarrow t^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-1\end{array}\right.$.

Suy ra NI cắt (S) tại hai điểm phân biệt $N_1(3;6;-2), N_2(0;2;0)$.

Vì $NN_1>NN_2$ nên MN nhỏ nhất khi và chỉ khi $M\equiv N_2$. Vậy $M(0;2;0)$ là điểm cần tìm.

Suy ra: $a+b=2$.



Câu 32. **(CỤM TRƯỜNG SÓC SƠN MÊ LINH HÀ NỘI)** Cho x, y, z, a, b, c là các số thực thay đổi thỏa mãn $(x+3)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=2$ và $a+b+c=1$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$ là

A. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$. **B.** $\sqrt{3}+\sqrt{2}$. **C.** $5-2\sqrt{6}$. **D.** $5+2\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn C

Giả sử $M(x;y;z)$ và $N(a;b;c)$.

Khi đó $P=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=MN^2$.

Vì $(x+3)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=2$ nên M thuộc mặt cầu (S) có tâm $I(-3;2;-1)$ và bán kính $R=\sqrt{2}$.

Vì $a+b+c=1$ nên N thuộc mặt phẳng $(P): x+y+z-1=0$.

Ta có $d(I;(P))=\dfrac{|-3+2-1-1|}{\sqrt{1+1+1}}=\sqrt{3}>R$

$\Rightarrow$ mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu (S).

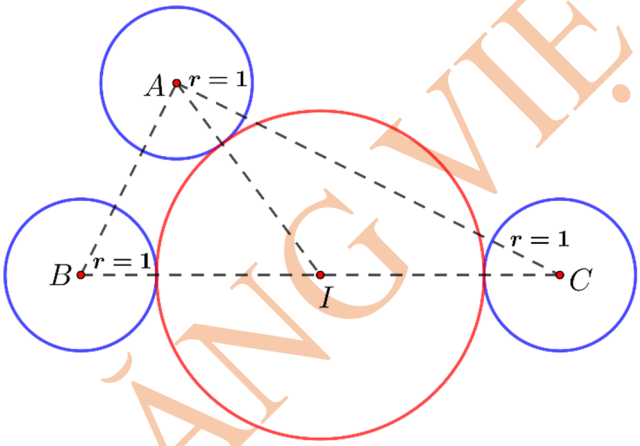
$\Rightarrow \min P=\min MN^2=\left[d(I;(P))-R\right]^2=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2=5-2\sqrt{6}$.

Câu 33. **(GIA LỘC TỈNH HẢI DƯƠNG 2019 lần 2)** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3) có bán kính $r=1$ và lần lượt có tâm là các điểm $A(0;3;-1)$, $B(-2;1;-1)$, $C(4;-1;-1)$. Gọi (S) là mặt cầu tiếp xúc với cả ba mặt cầu trên. Mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất là bao nhiêu?

A. $R=\sqrt{10}$. **B.** $R=\sqrt{10}-1$. **C.** $R=2\sqrt{2}-1$. **D.** $R=2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $AB=\sqrt{8}; AC=\sqrt{32}; BC=\sqrt{40}\Rightarrow AB^2+AC^2=BC^2\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A.

Thấy 3 mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3) có đôi một nằm ngoài nhau.

Khi đó: Mặt cầu (S) tiếp xúc với 3 mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3) và có bán kính nhỏ nhất

$\Leftrightarrow (S)$ có tâm thuộc $mp(ABC)$ và (S) **tiếp xúc ngoài** với 3 mặt cầu (S_1), (S_2), (S_3)

$\Leftrightarrow (S)$ có tâm I thuộc $mp(ABC)$ và $IA=IB=IC$

$\Leftrightarrow (S)$ có tâm $I(1;0;-1)$, (trong đó I là trung điểm của BC).

Vậy mặt cầu (S) có bán kính nhỏ nhất $R_{\min}=IA-r=\sqrt{10}-1$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 34. **(THPT TX QUẢNG TRỊ LẦN 1 NĂM 2019)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta_1 : \frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{-2}$ và $\Delta_2 : \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{3} = \frac{z}{1}$. Trong tất cả các mặt cầu tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2. Gọi (S) là mặt cầu có bán kính nhỏ nhất. Bán kính của mặt cầu (S) là

A. $\sqrt{12}$. **B.** $\sqrt{6}$. **C.** $\sqrt{24}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Cách1: Gọi I là tâm mặt cầu tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2.

Q là tiếp điểm của Δ_1 với mặt cầu.

R là tiếp điểm của Δ_2 với mặt cầu.

J là trung điểm của QR.

Ta có: $R = IQ \geq JQ \Rightarrow R$ nhỏ nhất khi và chỉ khi I trùng J hay QR là đoạn vuông góc chung của Δ_1 và Δ_2, khi đó tâm mặt cầu I là trung điểm của đoạn vuông góc chung, $2R$ bằng độ dài đoạn vuông góc chung.

Gọi $\begin{cases} Q(4+3a;1-a;-5-2a) \in \Delta_1, a \in \mathbb{R} \\ R(2+b;-3+3b;b) \in \Delta_2, b \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Khi đó ta có vec tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_{\Delta_1}} = (3;-1;-2)$, $\overrightarrow{u_{\Delta_2}} = (1;3;1)$,

$\overrightarrow{RQ} = (3a-b+2;-a-3b+4;-2a-b-5)$.

Theo giả thiết đề bài ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{RQ}.\overrightarrow{u_{\Delta_1}} = 0 \\ \overrightarrow{RQ}.\overrightarrow{u_{\Delta_2}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{RQ} = (2;-2;4) \Rightarrow RQ = 2\sqrt{6} \Rightarrow R = \frac{RQ}{2} = \sqrt{6}.$$

Cách 2: Gọi hai mặt phẳng song song và lần lượt chứa Δ_1 và Δ_2 là (P) và (Q).

Mặt cầu có bán kính nhỏ nhất tiếp xúc với cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 sẽ tiếp xúc với (P) và (Q) nên đường kính hình cầu là khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) hay là khoảng cách từ Δ_2 tới mặt phẳng (P).

Khi đó ta có *VTCP* $\overrightarrow{u_{\Delta_1}} = (3;-1;-2); \overrightarrow{u_{\Delta_2}} = (1;3;1)$ và $N = (2;-3;0) \in \Delta_2$.

Véc-tơ pháp tuyến của (P) là $\overrightarrow{u_{\Delta_1}} = \frac{1}{5}\left[\overrightarrow{u_{\Delta_1}};\overrightarrow{u_{\Delta_2}}\right] = \frac{1}{5}(5;-5;10) = (1;-1;2)$

Ta có phương trình mặt phẳng (P) là $x - y + 2z + 7 = 0$.

Vậy $d((P),(Q)) = d(\Delta_2,(P)) = d(N,(P)) = 2\sqrt{6}$.

Suy ra bán kính mặt cầu là $R = \sqrt{6}$.

Câu 35. **(ĐH Vinh Lần 1)** Cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-4)^2+z^2=8$ và hai điểm $A(3;0;0), B(4;2;1)$. Gọi M là điểm thuộc mặt mặt cầu (S). Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA+2MB$.

A. $\sqrt{6}$. **B.** $2\sqrt{6}$. **C.** $6\sqrt{2}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ý tưởng

Tìm điểm B' cố định sao cho $MA=2MB'$ rồi áp dụng bất đẳng thức $\left|\left|\vec{u}+\vec{v}\right|\le\left|\vec{u}\right|+\left|\vec{u}\right|\right.$.

Cách 1: Gọi $M(a;b;c)\in(S)$, ta có $(a+1)^2+(b-4)^2+c^2=8\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2=-2a+8b-9$

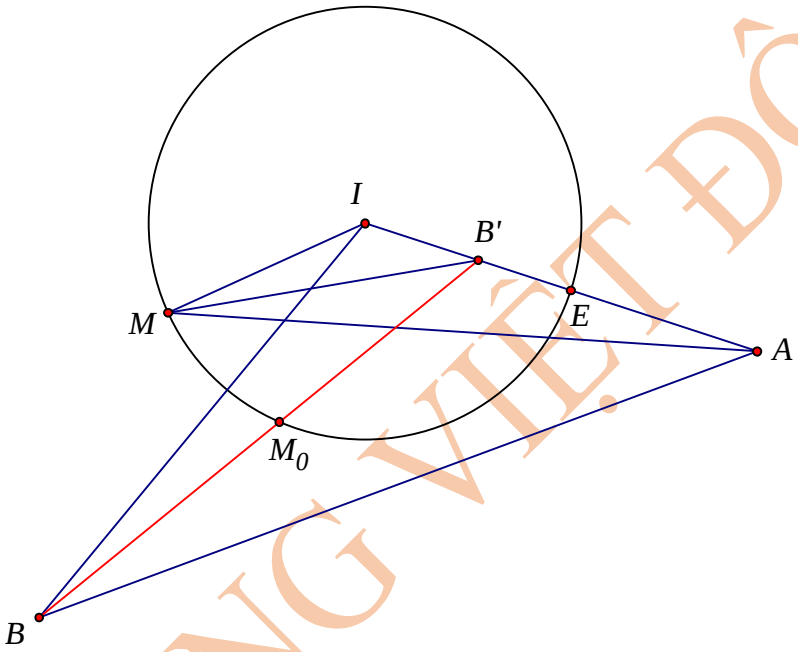
Do đó $MA=\sqrt{(a-3)^2+b^2+c^2}=\sqrt{4(a^2+b^2+c^2)-3(a^2+b^2+c^2)-6a+9}$

$2\sqrt{a^2+b^2+c^2-6b+9}=2\sqrt{a^2+(b-3)^2+c^2}=2MB'$ với $B'(0;3;0)$.

Dễ thấy B'nằm trong mặt cầu, B nằm ngoài mặt cầu nên $MA+2MB=2(MB'+MB)$ nhỏ nhất khi B',M,B thẳng hàng.

Vậy, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA+2MB$ là $2BB'=6\sqrt{2}$.

Cách 2:



Ta có $IA=4\sqrt{2}$, với I là tâm mặt cầu.

Gọi $E(1;2;0),B'(0;3;0)$ lần lượt là trung điểm của IA và IE.

+ M là điểm nằm trên đường thẳng IA ta có $MB'=\frac{1}{2}MA$.

+ M là điểm không nằm trên đường thẳng IA ta có $\Delta IMB'\sim\Delta IAM$ nên $\frac{MB'}{MA}=\frac{IM}{IA}=\frac{1}{2}$,

ta có $MB'=\frac{1}{2}MA$.

Dễ thấy B'nằm trong mặt cầu, B nằm ngoài mặt cầu nên $MA+2MB=2(MB'+MB)$ nhỏ nhất khi B',M,B thẳng hàng. $M\equiv M_0$

Vậy, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA+2MB$ là $2BB'=6\sqrt{2}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Câu 36. **(Ngô Quyền Hà Nội)** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, gọi điểm $M(a;b;c)$ (với a,b,c tối giản) thuộc mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-4z-7=0$ sao cho biểu thức $T=2a+3b+6c$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó giá trị biểu thức $P=2a-b+c$ bằng

A. $\frac{12}{7}$. **B.** 8. **C.** 6. **D.** $\frac{51}{7}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-4z-7=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=16$.

Vì điểm $M\in(S)\Leftrightarrow (a-1)^2+(b-2)^2+(c-2)^2=16$. $(*)$

Xét $T=2a+3b+6c=2(a-1)+3(b-2)+6(c-2)+20$

$\le\sqrt{(2^2+3^2+6^2)\left((a-1)^2+(b-2)^2+(c-3)^2\right)}+20=7.4+20=48$.

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{a-1}{2}=\frac{b-2}{3}=\frac{c-2}{6}=t>0\Rightarrow\begin{cases}a=1+2t\\b=2+3t\\c=2+6t\end{cases}$, thay vào phương trình $(*)$ ta được: $4t^2+9t^2+36t^2=16\Rightarrow t=\frac{4}{7}$. Do đó $M\left(\frac{15}{7};\frac{26}{7};\frac{38}{7}\right)$ và

$P=2a-b+c=2.\frac{15}{7}-\frac{26}{7}+\frac{38}{7}=6$.

Câu 37. **(KSCL-Lần-2-2019-THPT-Nguyễn-Đức-Cảnh-Thái-Bình)** Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(2;-3;2)$, $B(-2;1;4)$ và mặt cầu $(S):(x+1)^2+y^2+(z-4)^2=12$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất, tính $a+b+c$.

A. $\frac{7}{3}$. **B.** -4. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu $(S):(x+1)^2+y^2+(z-4)^2=12$ có tâm $I(-1;0;4)$, bán kính $R=\sqrt{12}$.

Gọi $C(0;-1;3)$ là trung điểm của AB.

Ta có $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\left(\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IM}\right)\left(\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IM}\right)=\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IM}^2-\overrightarrow{IM}\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)=\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}+R^2-2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{IC}$

$=\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}+R^2-2.R.IC.\cos\left(\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IC}\right)$.

Vì I,A,B,R,C không đổi nên $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ nhỏ nhất khi $\cos\left(\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IC}\right)=1$ lớn nhất hay hai véctơ $\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IC}$ cùng hướng.

Cách 1: Đường thẳng IC có véctơ chỉ phương $\overrightarrow{IC}=(1;-1;-1)$

Phương trình đường thẳng IC: $\begin{cases}x=-1+t\\y=-t\\z=4-t\end{cases}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Điểm M thuộc đường thẳng IC nên $M=(-1+t;-t;4-t)$

Điểm M thuộc mặt cầu nên $(-1+t+1)^2+(-t)^2+(4-t-4)^2=12 \Leftrightarrow 3t^2=12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-2 \end{array}\right.$

Khi $t=-2$ thì $M(-3;2;6)$ và $\overrightarrow{IM}=(-2;2;2) \Rightarrow \overrightarrow{IM}=-2\overrightarrow{IC}$ nên hai véctơ $\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IC}$ không cùng hướng.

Khi $t=2$ thì $M(1;-2;2)$ và $\overrightarrow{IM}=(2;-2;-2) \Rightarrow \overrightarrow{IM}=2\overrightarrow{IC}$ nên hai véctơ $\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IC}$ cùng hướng.

Vậy $M(1;-2;2)$ hay $a+b+c=1$.

Cách 2: $IC=\sqrt{3}$, $IM=R=2\sqrt{3}$ và hai véctơ $\overrightarrow{IM},\overrightarrow{IC}$ cùng hướng nên $\overrightarrow{IM}=2\overrightarrow{IC}$ (Tổng quát $\overrightarrow{IM}=\dfrac{IM}{IC}\overrightarrow{IC}$) hay C là trung điểm của đoạn thẳng IM. Suy ra $M(1;-2;2)$ hay $a+b+c=1$.

Bình luận: Bài toán cũng có thể ra ở dạng Điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ **lớn** nhất, tính $a+b+c$.

Câu 38. **(THPT-Chuyên-Sơn-La-Lần-1-2018-2019-Thi-tháng-4)**Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;4)$, $B(-3;3;-1)$ và mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-3)^2+(z-3)^2=3$. Xét điểm M thay đổi thuộc mặt cầu (S), giá trị nhỏ nhất của $2MA^2+3MB^2$ bằng

A. 103. **B.** 108. **C.** 105. **D.** 100.

Lời giải

Chọn C

• Gọi $H(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn: $2\overrightarrow{HA}+3\overrightarrow{HB}=\vec{0}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(2-x)+3(-3-x)=0 \\ 2(2-y)+3(3-y)=0 \\ 2(4-z)+3(-1-z)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow H(-1;1;1)$$

• Xét $P=2MA^2+3MB^2=2\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA}\right)^2+3\left(\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HB}\right)^2$

$=2\left(MH^2+HA^2+2\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{HA}\right)+3\left(MH^2+HB^2+2\overrightarrow{MH}.\overrightarrow{HB}\right)$

$=5MH^2+2HA^2+3HB^2+\overrightarrow{MH}.\left(2\overrightarrow{HA}+3\overrightarrow{HB}\right)$

$=5MH^2+2HA^2+3HB^2$ (vì $2\overrightarrow{HA}+3\overrightarrow{HB}=\vec{0}$)

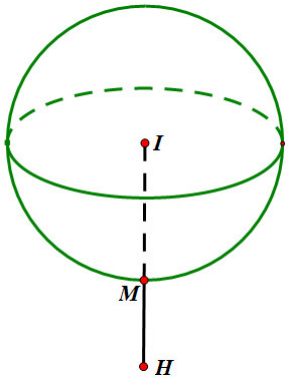
$=5MH^2+90$

Để $P=5MH^2+90$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ MH nhỏ nhất.

• Mặt cầu (S) có tâm $I(1;3;3)$, bán kính $R=\sqrt{3}$.

$IH=2\sqrt{3}>R$ nên điểm H nằm ngoài mặt cầu (S).

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Khi đó: $MH_{\min}=\left|IH-R\right|=\left|2\sqrt{3}-\sqrt{3}\right|=\sqrt{3}$.

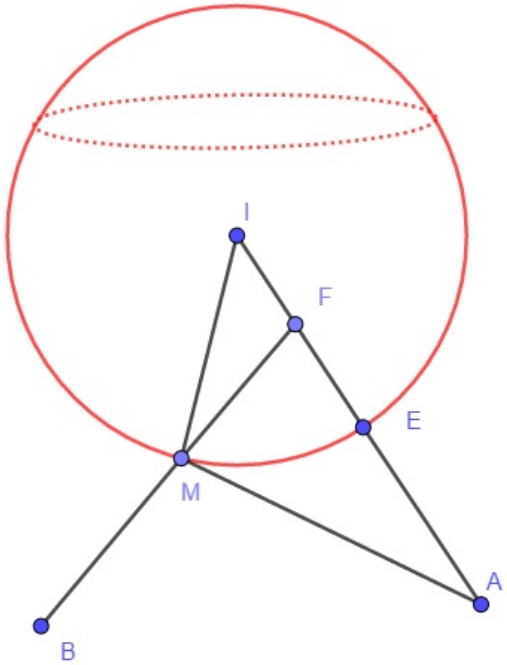
Vậy $P_{\min}=5.3+90=105$.

Câu 39. **(Giữa-Kì-2-Thuận-Thành-3-Bắc-Ninh-2019)** Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x+1)^2+(y-4)^2+z^2=8$ và điểm $A(3;0;0);B(4;2;1)$. Điểm M thay đổi nằm trên mặt cầu, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=MA+2MB$.

A. $P=2\sqrt{2}$. **B.** $P=3\sqrt{2}$. **C.** $P=4\sqrt{2}$. **D.** $P=6\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D



Nhận xét: điểm A,B nằm ngoài mặt cầu (S). Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;4;0),R=2\sqrt{2}$.

Ta có: $IA=4\sqrt{2}=2R,E=IA\cap(S)\Rightarrow E(1;2;0)$ (Do E là trung điểm của IA).

Gọi F là trung điểm của $IE\Rightarrow F(0;3;0)$.

Tam giác IFM và IMA có $\widehat{AIM}$ chung và $\dfrac{IF}{IM}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{IM}{IA}\Rightarrow\Delta AIM\sim\Delta MIF$.

Suy ra $\dfrac{MA}{FM}=\dfrac{AI}{MI}=2\Rightarrow MA=2MF$.

Ta có: $MA+2MB=2(MF+MB)\geq 2FB=6\sqrt{2}$.

Vì F nằm trong (S) và B nằm ngoài (S) nên dấu "=" xảy ra khi $M=BF\cap(S)$.

Câu 40. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S_m):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-m)^2=\frac{m^2}{4}$ và hai điểm $A(2;3;5)$, $B(1;2;4)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của m để trên (S_m) tồn tại điểm M sao cho $MA^2-MB^2=9$.

A. $m=1$. **B.** $m=3-\sqrt{3}$. **C.** $m=8-4\sqrt{3}$. **D.** $m=\frac{4-\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x;y;z)$, suy ra

$MA^2-MB^2=9\Leftrightarrow(x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2-\left[(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2\right]=9$

$\Leftrightarrow x+y+z-4=0$

Suy ra: Tập các điểm $M(x;y;z)$ thỏa mãn $MA^2-MB^2=9$ là mặt phẳng $(P):x+y+z-4=0$

Trên (S_m) tồn tại điểm M sao cho $MA^2-MB^2=9$ khi và chỉ khi (S_m) và (P) có điểm chung

$\Leftrightarrow d(I;(P))\leq R\Leftrightarrow\frac{|1+1+m-4|}{\sqrt{1+1+1}}\leq\frac{|m|}{2}\Leftrightarrow 2|m-2|\leq\sqrt{3}|m|$

$\Leftrightarrow m^2-16m+16\leq 0\Leftrightarrow 8-4\sqrt{3}\leq m\leq 8+4\sqrt{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của m là $8-4\sqrt{3}$.

Câu 41. **(Đặng Thành Nam Đề 17)** Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt cầu $(S_1):x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z+2=0$ và $(S_2):x^2+y^2+z^2-2x+4y-2z-4=0$. Xét tứ diện $ABCD$ có hai đỉnh A, B nằm trên (S_1); hai đỉnh C, D nằm trên (S_2). Thể tích khối tứ diện $ABCD$ có giá trị lớn nhất bằng

A. $3\sqrt{2}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $6\sqrt{3}$. **D.** $6\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Mặt cầu (S_1) có tâm $I(1;-2;1)$ và bán kính là $R_1=2$. Mặt cầu (S_2) cũng có tâm $I(1;-2;1)$ nhưng bán kính là $R_2=\sqrt{10}$.

Gọi a, b lần lượt là khoảng cách từ tâm I đến hai đường thẳng AB, CD.

Ta có $AB=2\sqrt{R_1^2-a^2}=2\sqrt{4-a^2}$, $CD=2\sqrt{R_2^2-b^2}=2\sqrt{10-b^2}$

và $d(AB,CD)\leq d(I,AB)+d(I,CD)=a+b$. Thêm nữa: $\sin(AB,CD)\leq 1$.

Ta có $V_{ABCD}=\frac{1}{6}AB.CD.d(AB,CD).\sin(AB,CD)\leq\frac{2}{3}(a+b)\sqrt{4-a^2}\sqrt{10-b^2}$.

Ta có: $a+b=a+\sqrt{2}\frac{b}{\sqrt{2}}\leq\sqrt{3}\sqrt{a^2+\frac{b^2}{2}}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

và $\left(a^2+\frac{b^2}{2}\right)\left(4-a^2\right)\left(5-\frac{b^2}{2}\right)\le\left(\frac{a^2+\frac{b^2}{2}+4-a^2+5-\frac{b^2}{2}}{3}\right)^3=27$.

Vậy $V_{ABCD}\le\frac{2\sqrt{3}}{3}.\sqrt{2}.\sqrt{27}=6\sqrt{2}$.

Dấu bằng đạt được tại $a=1$, $b=2$ và hai đường AB,CD vuông góc với nhau.

Câu 42. **(ĐỀ-THI-THU-ĐH-THPT-CHUYÊN-QUANG-TRUNG-L5-2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho $A(0;0;2)$, $B(1;1;0)$ và mặt cầu $(S):x^2+y^2+(z-1)^2=\frac{1}{4}$. Xét điểm M thay đổi thuộc (S). Giá trị nhỏ nhất của biểu thức MA^2+2MB^2 bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** $\frac{21}{4}$. **D.** $\frac{19}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi E là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{EA}+2\overrightarrow{EB}=\vec{0}\Rightarrow E\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$.

$MA^2+2MB^2=\overrightarrow{MA}^2+2\overrightarrow{MB}^2=\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EA}\right)^2+2\left(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EB}\right)^2$

$=3ME^2+EA^2+2EB^2+2\overrightarrow{ME}\left(\overrightarrow{EA}+2\overrightarrow{EB}\right)=3ME^2+EA^2+2EB^2$.

$\left(MA^2+2MB^2\right)_{\min}\Leftrightarrow ME_{\min}$

Gọi $I(0;0;1)$ là tâm mặt cầu.

Ta có $IE=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=1>\mathbb{R}=\frac{1}{2}$, suy ra E nằm ngoài mặt cầu.

Do đó $ME_{\min}\Leftrightarrow M$ là giao điểm của IE với mặt cầu.

Khi đó $ME_{\min}=IE-\mathbb{R}=\frac{1}{2}$

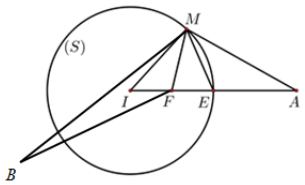
Suy ra $MA^2+2MB^2=3ME_{\min}{}^2+EA^2+2EB^2=\frac{19}{4}$.

Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(9;6;11)$, $B(5;7;2)$ và điểm M di động trên mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=36$. Giá trị nhỏ nhất của $MA+2MB$ bằng

A. $\sqrt{105}$. **B.** $2\sqrt{26}$. **C.** $2\sqrt{29}$. **D.** $\sqrt{102}$.

Lời giải

Chọn C



ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=36$ có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R=6$.

Nhận xét $IA=12=2R$.

Gọi E là giao điểm của IA và mặt cầu (S) suy ra E là trung điểm của IA nên $E(5;4;7)$.

Gọi F là trung điểm của IE suy ra $F(3;3;5)$.

ΔMIF và ΔAIM có góc $\widehat{AIM}$ chung và có $\frac{IF}{IM}=\frac{IM}{IA}=\frac{1}{2}$.

Nên ΔAIM đồng dạng $\Delta MIF(c.g.c)\Rightarrow\frac{MA}{MF}=\frac{AI}{MI}=2\Rightarrow MA=2MF$.

$MA+2MB=2(MF+MB)\geq 2BF=2\sqrt{29}$ (do bất đẳng thức tam giác).

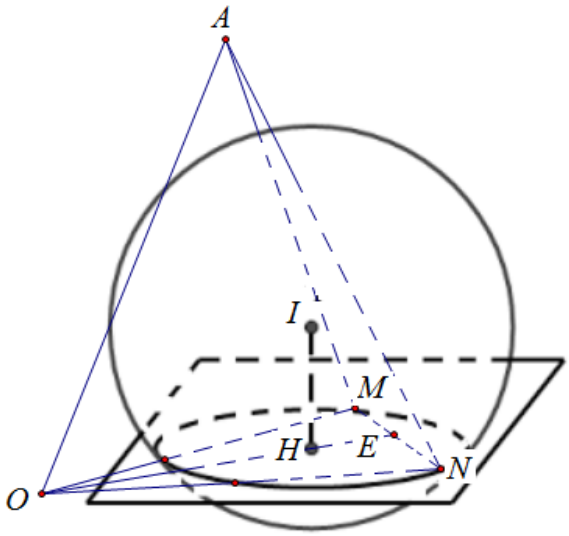
Dấu bằng xảy ra khi M là giao điểm FB và mặt cầu (S).

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;1;9)$ và mặt cầu $(S):(x-3)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=25$. Gọi (C) là giao tuyến của (S) với mặt phẳng (Oxy). Lấy hai điểm M,N trên (C) sao cho $MN=2\sqrt{5}$. Khi tứ diện $OAMN$ có thể tích lớn nhất thì đường thẳng MN đi qua điểm nào trong số các điểm dưới đây?

A. $(5;5;0)$. **B.** $\left(-\frac{1}{5};4;0\right)$. **C.** $\left(\frac{12}{5};-3;0\right)$. **D.** $(4;6;0)$.

Lời giải

Chọn A



$(S):(x-3)^2+(y-4)^2+(z-4)^2=25$ có tâm $I(3;4;4)$ và bán kính $R=5$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên $(Oxy)\Rightarrow H(3;4;0)$.

Đường tròn (C) có tâm là $H(3;4;0)$ và bán kính $r=\sqrt{R^2-IH^2}=\sqrt{25-16}=3$.

Gọi E là trung điểm của MN, suy ra $ME=\sqrt{5}$ và $HE\perp MN$.

$OH=5, HE=\sqrt{r^2-ME^2}=2$. Suy ra O nằm ngoài (C).

Gọi K là hình chiếu vuông góc của O lên MN.

$V_{OAMN}=\frac{1}{3}d\left(A;(Oxy)\right).S_{\Delta OMN}=\frac{1}{3}.9.\frac{1}{2}OK.MN=3\sqrt{5}.OK\le 3\sqrt{5}.OE\le 3\sqrt{5}.(OH+HE)=21\sqrt{5}.$

Đẳng thức xảy ra khi $K\equiv E$ và O,H,E thẳng hàng (H nằm trong đoạn OE).

Khi đó: $\overrightarrow{OE}=\frac{7}{5}\overrightarrow{OH}\Rightarrow E\left(\frac{21}{5};\frac{28}{5};0\right)$.

MN đi qua điểm $E\left(\frac{21}{5};\frac{28}{5};0\right)$ và nhận $\vec{u}=\vec{k}\wedge\overrightarrow{OE}=\left(-\frac{28}{5};\frac{21}{5};0\right)$ làm một vectơ chỉ phương.

Do đó MN có phương trình: $\begin{cases}x=\frac{21}{5}-\frac{28}{5}t\\ y=\frac{28}{5}+\frac{21}{5}t\\ z=0\end{cases}$.

Vậy, MN đi qua điểm $(5;5;0)$.

Câu 45. Cho mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=9$ và hai điểm $A(1\,;\,1\,;3)$, $B(21\,;\,9\,;\,-13)$. Điểm $M(a\,;\,b\,;\,c)$ thuộc mặt cầu (S) sao cho $3MA^2+MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị của biểu thức $T=a.b.c$ bằng

A. 3. **B.** 8. **C.** 6. **D.** -18.

Lời giải

Chọn B

Gọi điểm I thỏa mãn $3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}\Rightarrow I(6\,;3\,;-1)$.

Khi đó $3MA^2+MB^2=3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2=4MI^2+3IA^2+IB^2+2\overrightarrow{MI}.\left(3\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)$

$=4MI^2+3IA^2+IB^2$.

Do $3IA^2+IB^2$ không đổi vì ba điểm $A;B;I$ cố định nên $3MA^2+MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất. Khi đó M là giao điểm của đường thẳng IJ với mặt cầu (S), ($J(2\,;1\,;3)$ là tâm của mặt cầu (S)).

Ta có phương trình đường thẳng IJ là $\begin{cases}x=2+2t\\ y=1+t\\ z=3-2t\end{cases}\Rightarrow IJ\cap(S)=\begin{bmatrix}M_1(4;\,2\,;1)\\ M_2(0\,;\,0\,;\,5)\end{bmatrix}$.

Kiểm tra $IM_1<IM_2\,(3<9)$ nên $M_1(4;2;1)$ là điểm cần tìm. Vậy $T=a.b.c=8$.

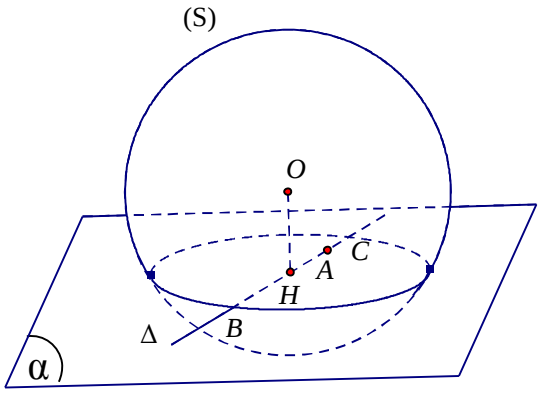
Câu 46. **(THPT-Nguyễn-Công-Trứ-Hà-Tĩnh-lần-1-2018-2019-Thi-tháng-3)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-3;3;-3)$, thuộc mặt phẳng $(\alpha):2x-2y+z+15=0$ và mặt cầu $(S):(x-2)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=100$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua A, nằm trong (α) và cắt (S) tại hai điểm B,C. Để độ dài BC lớn nhất thì Δ có phương trình là

A. $\Delta:\frac{x+3}{1}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+3}{6}$. **B.** $\Delta:\frac{x+3}{16}=\frac{y-3}{11}=\frac{z+3}{-10}$.

C. $\Delta:\begin{cases}x=-3+5t\\y=3\\z=-3+8t\end{cases}$. **D.** $\Delta:\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+3}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;5)$ và bán kính $R=10$.

Gọi H là hình chiếu của I trên mặt phẳng (α),

Khi đó, BC lớn nhất khi nó là đường kính của đường tròn giao tuyến tâm $H \Rightarrow BC$ đi qua A, H

Phương trình IH đi qua I và vuông góc $(\alpha)\begin{cases}x=2+2t\\y=3-2t\\z=5+t\end{cases}$ thay vào $(\alpha)\Rightarrow t=-2\Rightarrow H(-2;7;3)$

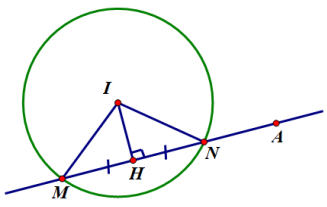
Ta có: $\overrightarrow{AH}=(1;4;6)$. Vậy phương trình của Δ là $\Delta:\dfrac{x+3}{1}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+3}{6}$.

Câu 47. **(THPT NINH BÌNH – BẠC LIÊU LẦN 4 NĂM 2019)** Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z-3=0$ và điểm $A(5;3;-2)$. Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A và luôn cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt M,N. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=AM+4AN$.

A. $S_{\min}=30$. **B.** $S_{\min}=20$. **C.** $S_{\min}=\sqrt{34}-3$. **D.** $S_{\min}=5\sqrt{34}-9$.

Lời giải

Chọn D



Mặt cầu (S) có tâm $I(2;-1;1)$, bán kính $R=\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2-(-3)}=3$.

Ta có: $AI=\sqrt{(2-5)^2+(-1-3)^2+(1+2)^2}=\sqrt{34}>R$ nên A nằm ngoài mặt cầu (S).

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Ta lại có: $S = AM + 4AN$. Đặt $AM = x$ với $x \in \left[\sqrt{34}-3;\sqrt{34}+3\right]$

Mà $AM.AN = AI^2 - R^2 = 34-9 = 25$ suy ra: $AN = \dfrac{25}{AM}$

Do đó: $S = f(x) = x + \dfrac{100}{x}$ với $x \in \left[\sqrt{34}-3;\sqrt{34}+3\right]$

$f'(x) = 1 - \dfrac{100}{x^2} = \dfrac{x^2-100}{x^2} < 0, \forall x \in \left[\sqrt{34}-3;\sqrt{34}+3\right]$

Do đó: $\min\limits_{\left[\sqrt{34}-3;\sqrt{34}+3\right]} f(x) = f\left(\sqrt{34}+3\right) = 5\sqrt{34}-9.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow A, M, N, I$ thẳng hàng và $AM = \sqrt{34}+3; AN = \sqrt{34}-3.$

Câu 48. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2 = 1$. Điểm M nằm trên (S) có tọa độ dương, mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) tại M, cắt các tia Ox, Oy, Oz tại các điểm A, B, C. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \left(1+OA^2\right)\left(1+OB^2\right)\left(1+OC^2\right)$ là

A. 24. **B.** 27. **C.** 64. **D.** 8.

Lời giải

Chọn C

Gọi $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)\ (a>0, b>0, c>0)$.

Khi đó phương trình mặt phẳng (ABC) là $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c} = 1 \Leftrightarrow bcx + acy + abz - abc = 0$.

Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R = 1$.

Mặt phẳng (P) tiếp xúc với (S) nên $d\left(O,(P)\right) = R$ hay $d\left(O,(ABC)\right) = 1$.

Khi đó $\dfrac{abc}{\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}} = 1 \Leftrightarrow a^2b^2c^2 = a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ (1)$.

Ta có $T = \left(1+OA^2\right)\left(1+OB^2\right)\left(1+OC^2\right) = \left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)$.

$T = 1+a^2+b^2+c^2+a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2c^2$.

$T \ge 1+3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}+3\sqrt[3]{a^4b^4c^4}+a^2b^2c^2 = \left(1+\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\right)^3$.

Mặt khác từ (1) suy ra $a^2b^2c^2 \ge 3\sqrt[3]{a^4b^4c^4} \Leftrightarrow a^6b^6c^6 \ge 27a^4b^4c^4 \Leftrightarrow a^2b^2c^2 \ge 27$.

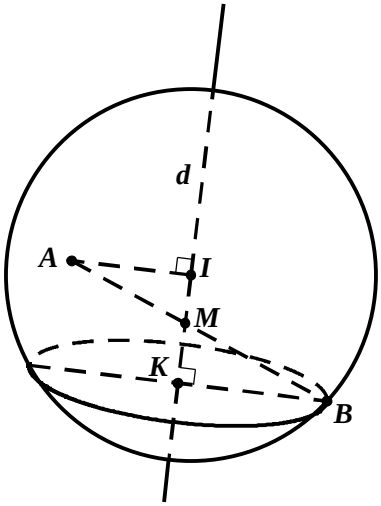
Suy ra $T \ge \left(1+\sqrt[3]{27}\right)^3 = 64$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của T bằng 64 khi: $\begin{cases} a=b=c \\ a^2=b^2=c^2 \\ a^2b^2c^2 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\sqrt{3}$.

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{4}$ và mặt cầu (S): $(x+3)^2+(y+4)^2+(z+5)^2 = 729$. Cho biết điểm $A(-2;-2;-7)$, điểm B thuộc giao tuyến của mặt cầu (S) và mặt phẳng $(P): 2x+3y+4z-107 = 0$. Khi điểm M di động trên đường thẳng d giá trị nhỏ nhất của biểu thức $MA+MB$ bằng

A. $5\sqrt{30}$. **B.** 27. **C.** $5\sqrt{29}$. **D.** $\sqrt{742}$.

Lời giải



Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(-3;-4;-5)$ và bán kính $R=27$.

Đường thẳng d có 1 véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}=(2;3;4)\Rightarrow d\perp(P)$.

Gọi K là giao điểm của mặt phẳng (P) và đường thẳng d. Vì $I\in d$ nên K là tâm của đường tròn giao tuyến và $KB\perp d$.

Ta có $\overrightarrow{IA}=(1;2;-2)\Rightarrow IA=3$ và $\overrightarrow{IA}.\vec{u}=0\Rightarrow IA\perp d$.

Ta tính được $IK=\mathrm{d}(I,(P))=\dfrac{|2.(-3)+3.(-4)+4(-5)-107|}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}}=5\sqrt{29}$ và $KB=\sqrt{R^2-IK^2}=2$.

Do M di động trên đường thẳng d (trục của đường tròn giao tuyến) và B thuộc đường tròn giao tuyến nên biểu thức $MA+MB$ nhỏ nhất khi và chỉ khi $M=AB\cap d$.

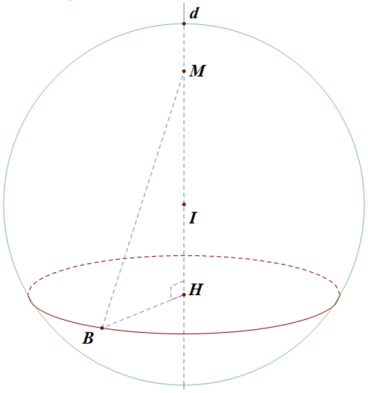
Khi đó, ta có $\dfrac{MI}{MK}=\dfrac{IA}{KB}=\dfrac{3}{2}$ và $MI+MK=IK=5\sqrt{29}$.

Suy ra $MI=3\sqrt{29}$, $MK=2\sqrt{29}$.

Ta có $AM=\sqrt{IA^2+MI^2}=3\sqrt{30}\Rightarrow BM=\dfrac{2}{3}AM=2\sqrt{30}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $MA+MB$ là $AM+BM=3\sqrt{30}+2\sqrt{30}=5\sqrt{30}$.

Cách 2:



ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Ta có (S) có tâm $I(-3;-4;-5)$, bán kính $R=27$.

Dễ thấy d đi qua $I(-3;-4;-5)$ và vuông góc với (P).

(P) cắt (S) theo đường tròn có bán kính $r=2$.

$M\in d\Leftrightarrow M(1+2t;2+3t;3+4t)$.

Ta có $T=MA+MB=MA+\sqrt{MH^2+r^2}$.

Lại có $MH=d(M;(P))=\dfrac{|29t-87|}{\sqrt{29}}=\left|\sqrt{29}t-3\sqrt{29}\right|$.

Suy ra $T=\sqrt{29t^2+116t+125}+\sqrt{29(t-3)^2+4}=\sqrt{29}\sqrt{(t+2)^2+\dfrac{9}{29}}+\sqrt{29}\sqrt{(t-3)^2+\dfrac{4}{29}}$.

Xét $\vec{u}=\left(t+2;\dfrac{3}{\sqrt{29}}\right),\vec{v}=\left(3-t;\dfrac{2}{\sqrt{29}}\right)\Rightarrow\vec{u}+\vec{v}=\left(5;\dfrac{5}{\sqrt{29}}\right)$.

Do đó $T=\sqrt{29}\left(|\vec{u}|+|\vec{v}|\right)\geq\sqrt{29}|\vec{u}+\vec{v}|=5\sqrt{50}$.

Câu 50. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=6$ tâm I. Gọi (α) là mặt phẳng vuông góc với đường thẳng $d:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z}{1}$ và cắt mặt cầu (S) theo đường tròn (C) sao cho khối nón có đỉnh I, đáy là đường tròn (C) có thể tích lớn nhất. Biết (α) không đi qua gốc tọa độ, gọi $H(x_H,y_H,z_H)$ là tâm của đường tròn (C). Giá trị của biểu thức $T=x_H+y_H+z_H$ bằng

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{4}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;1)$, bán kính $R=\sqrt{6}$.

Gọi x là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (α), $0<x<\sqrt{6}$. Khi đó, thể tích khối nón đỉnh I, đáy là đường tròn (C) là: $V=\dfrac{1}{3}x\left(6-x^2\right)=-\dfrac{x^3}{3}+2x$

Xét hàm số $f(x)=-\dfrac{x^3}{3}+2x,$ với $0<x<\sqrt{6}$

$f'(x)=-x^2+2;\ f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{2}$

Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\left[0;\sqrt{6}\right]$, có $f(0)=f(\sqrt{6})=0,\ f(\sqrt{2})=\sqrt{2}$, nên $\underset{(0;\sqrt{6})}{Max}\,f(x)=\sqrt{2}$, đạt được khi $x=\sqrt{2}$.

Gọi $\vec{u}=(1;-4;1)$ là một véc tơ chỉ phương của đường thẳng d. Vì $IH\perp(\alpha)$ nên tồn tại số thực k sao cho $\overrightarrow{IH}=k\vec{u}$, suy ra $\left|\overrightarrow{IH}\right|=|k|.|\vec{u}|\Rightarrow|k|=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow k=\pm\dfrac{1}{3}$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Với $k=\frac{1}{3}$: $\overrightarrow{IH}=\frac{1}{3}\vec{u}\Rightarrow H\left(\frac{4}{3};-\frac{7}{3};\frac{4}{3}\right)\Rightarrow(\alpha):x-4y+z-6=0$ (nhận vì $O\notin(\alpha)$)

Với $k=-\frac{1}{3}$: $\overrightarrow{IH}=-\frac{1}{3}\vec{u}\Rightarrow H\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)\Rightarrow(\alpha):x-4y+z=0$ (loại vì $O\in(\alpha)$).

Vậy $x_H+y_H+z_H=\frac{1}{3}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

GIẢI HHKG BẰNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ HÓA

A - PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN VÀ VÍ DỤ MINH HỌA

Bước 1: *Chọn hệ trục tọa* $Oxyz$.

Xác định ba đường thẳng đồng quy và đôi một cắt nhau trên cơ sở có sẵn của hình (như tam diện vuông, hình hộp chữ nhật, hình chóp tứ giác đều …), hoặc dựa trên các mặt phẳng vuông góc dựng thêm đường phụ.

Bước 2: *Tọa độ hóa các điểm của hình không gian.*

Tính tọa độ điểm liên quan trực tiếp đến giả thiết và kết luận của bài toán. Cơ sở tính toán chủ yếu dựa vào quan hệ song song, vuông góc cùng các dữ liệu của bài toán.

Bước 3: *Chuyển giả thiết qua hình học giải tích.*

Lập các phương trình đường, mặt liên quan. Xác định tọa độ các điểm, véc tơ cần thiết cho kết luận.

Bước 4: *Giải quyết bài toán.*

Sử dụng các kiến thức hình học giải tích để giải quyết yêu cầu của bài toán hình không gian.

Chú ý các công thức về góc, khoảng cách, diện tích và thể tích …

Cách chọn hệ tọa độ một số hình không gian.

Hình hộp lập phương – Hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$

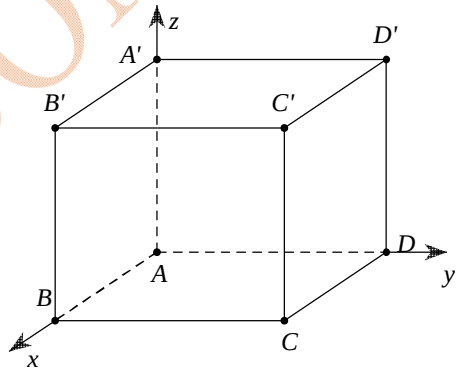
Với hình lập phương .

Chọn hệ trục tọa độ sao cho : $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $D(0;a;0)$

$A'(0;0;a)$, $B'(a;0;a)$, $C'(a;a;a)$, $D'(0;a;a)$

Với hình hộp chữ nhật.

Chọn hệ trục tọa độ sao cho:



$A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;b;0)$, $D(0;b;0)$, $A'(0;0;c)$; $B'(a;0;c)$; $C'(a;b;c)$; $D'(0;b;c)$

Chú ý: Tam diện vuông là một nửa của hình hộp chữ nhật nên ta chọn hệ trục tọa độ tương tự như hình hộp chữ nhật.

Với hình hộp đứng có đáy là hình thoi $ABCD.A'B'C'D'$

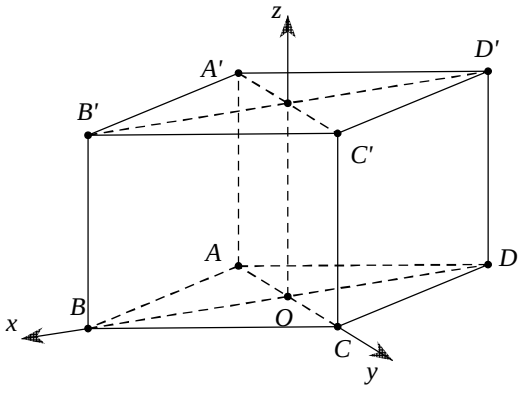
Chọn hệ trục tọa độ sao cho :

Gốc tọa độ trùng với giao điểm O của hai đường chéo của hình thoi $ABCD$

Trục Oz đi qua 2 tâm của 2 đáy

Nếu $AC = a, BD = b, AA' = c$ thì

$A\left(0;-\frac{a}{2};0\right), B\left(\frac{b}{2};0;0\right), C\left(0;\frac{a}{2};0\right)$



$D\left(-\frac{b}{2};0;0\right), A'\left(0;-\frac{a}{2};c\right), B'\left(\frac{b}{2};0;c\right), C'\left(0;\frac{a}{2};c\right), D'\left(-\frac{b}{2};0;c\right)$.

Chú ý: Với lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại B thì ta chọn hệ tọa độ tương tự như trên với gốc tọa độ là trung điểm AC, $B \in Ox, C \in Oy$ còn trục Oz đi qua trung điểm hai cạnh $AC, A'C'$.

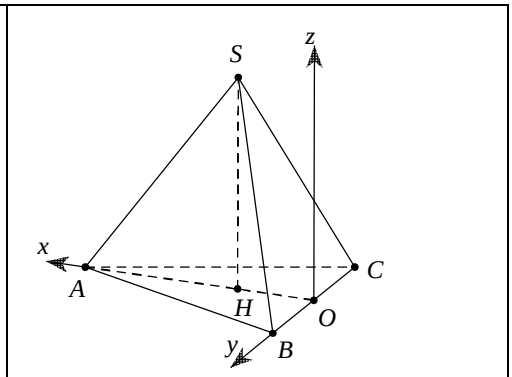
Hình chóp đều

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

1) Hình chóp tam giác đều $S.ABC$, $AB = a$, $SH = h$, ta chọn hệ tọa độ sao cho O là trung điểm BC, $A \in Ox, B \in Oy$.

Khi đó $A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right), B\left(0;\frac{a}{2};0\right),$

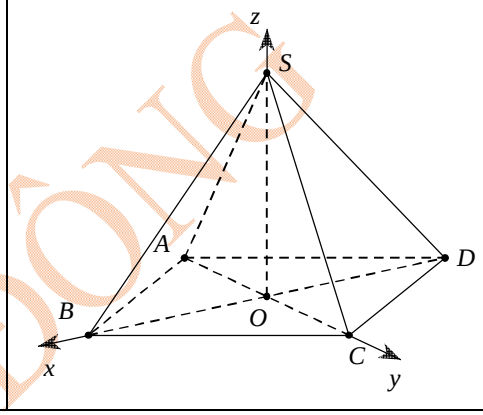
$C\left(0;-\frac{a}{2};0\right), S\left(\frac{a\sqrt{3}}{6};0;h\right)$



Hình chóp từ giác đều $S.ABCD$, $AB = a$, $SH = h$, ta chọn hệ tọa độ sao cho O là tâm đáy $B \in Ox, C \in Oy, S \in Oz$. Khi đó:

$A\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right),$

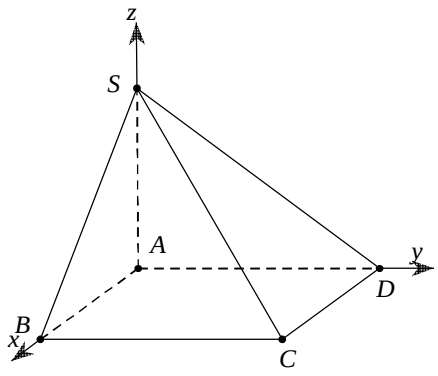
$B\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right), C\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right), D\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right), S(0;0;h)$



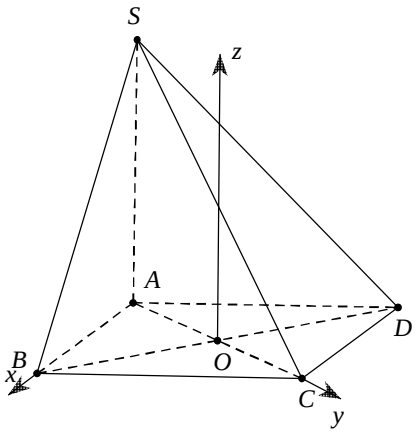
Chú ý: Ngoài cách chọn hệ trục như trên ta có thể chọn hệ trục bằng cách khác.
Chẳng hạn với hình chóp tam giác đều ta có thể chọn $H \equiv O$, trục Oy đi qua H và song song với BC.

Hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD), SA = h$

1) Nếu đáy là hình chữ nhật ta chọn hệ trục sao cho
$A \equiv O, B \in Ox, D \in Oy, S \in Oz$



Nếu đáy là hình thoi, ta chọn hệ trục sao cho O là tâm của đáy, $B \in Ox, C \in Oy$ và $Oz // SA$.

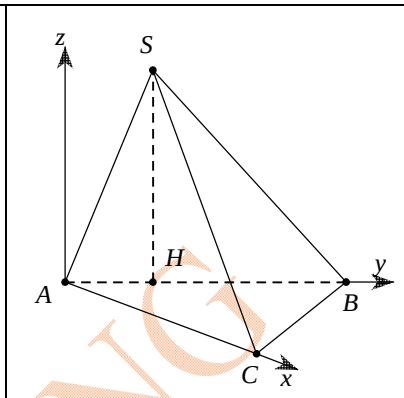


Chú ý: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

• Nếu đáy ABC là tam giác vuông tại A thì cách chọn hệ trục hoàn toàn tương tự như hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật.

• Nếu đáy ABC là tam giác cân tại B thì ta chọn hệ trục tọa độ như hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, khi đó gốc tọa độ là trung điểm cạnh AC.

Hình chóp $S.ABC$ có $(SAB) \perp (ABC)$	
Đường cao $SH = h$ của tam giác SAB là đường cao của hình chóp. Nếu tam giác ABC vuông tại A, $AB = a, AC = b$ ta chọn hệ trục sao cho $A \equiv O, B \in Oy, C \in Ox$, $Oz // SH$. Khi đó $A(0;0;0), B(0;a;0), C(b;0;0)$ $AH = c \Rightarrow H(0;c;0), S(0;c;h)$.	

Chú ý:

• Nếu vuông tại B ta chọn $B \equiv O$, vuông tại C chọn $C \equiv O$.

• Nếu tam giác ASB cân tại S, ΔABC cân tại C thì ta chọn $H \equiv O, C \in Ox, B \in Oy, S \in Oz$

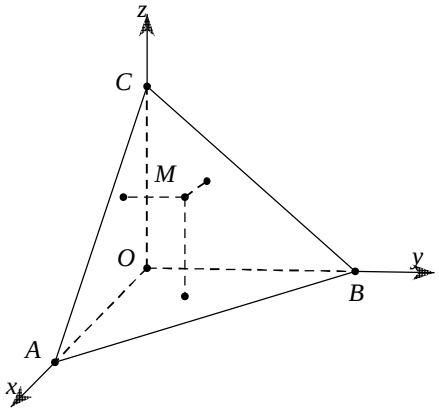
Tùy vào từng bài toán mà có thể thay đổi linh hoạt cách chọn hệ tọa độ. Trong nhiều trường hợp, phải biết kết hợp kiến thức hình không gian tổng hợp và kiến thức hình giải tích nhằm thu gọn lời giải.

Ví dụ 1: Cho hình chóp $O.ABC$ có $OA = a, OB = b, OC = c$ đôi một vuông góc. Điểm M cố định thuộc tam giác ABC có khoảng cách lần lượt đến các $mp(OBC)$, $mp(OCA)$, $mp(OAB)$ là 1, 2, 3. Tính a, b, c để thể tích $O.ABC$ nhỏ nhất.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có: $O(0;0;0), A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$

Vì khoảng cách từ M đến các mặt phẳng $mp(OBC)$, $mp(OCA)$, $mp(OAB)$ là 1, 2, 3 nên $M(1;2;3)$. Suy ra phương trình



$$(ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Vì $M \in (ABC) \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1$

(1).Thể tích khối chóp $O.ABC$:

$$V_{O.ABC} = \frac{1}{6}abc.$$

Từ (1) $\Rightarrow 1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}.\frac{2}{b}.\frac{3}{c}} \Rightarrow \frac{1}{6}abc \geq 27$

Vậy, $\min V_{OABC} = 27$ đạt được khi $\frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{3}{c} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = 3, b = 6, c = 9$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

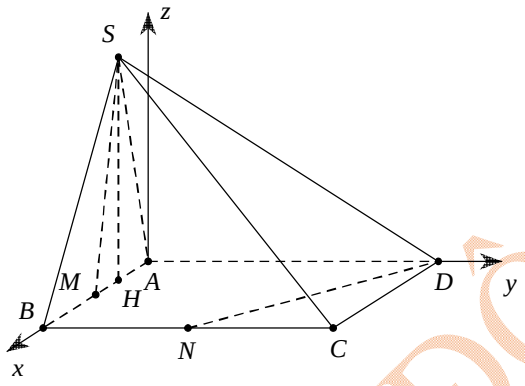
Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.BMDN$ và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của S lên $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Ta có: $SA^2 + SB^2 = AB^2 \Rightarrow SA \perp SB \Rightarrow AH = \dfrac{SA^2}{AB} = \dfrac{a}{2}, SH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có tọa độ các điểm:



$A(0;0;0), B(2a;0;0), D(0;2a;0), C(2a;2a;0), H\left(\dfrac{a}{2};0;0\right), S\left(\dfrac{a}{2};0;\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

$M(a;0;0), N(2a;a;0)$.

Ta có $S_{\Delta ADM} = S_{\Delta CDN} = \dfrac{1}{2}a.2a = a^2 \Rightarrow S_{BNDM} = 4a^2 - 2a^2 = 2a^2$

Thể tích khối chóp $S.BMDN$: $V = \dfrac{1}{3}SH.S_{BMDN} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.2a^2 = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$

Vì $\overrightarrow{SM} = \left(\dfrac{a}{2};0;-\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right), \overrightarrow{DN} = (2a;-a;0) \Rightarrow \overrightarrow{SM}.\overrightarrow{DN} = a^2$

Vậy $\cos(SM, DN) = \dfrac{\left|\overrightarrow{SM}.\overrightarrow{DN}\right|}{SM.DN} = \dfrac{a^2}{a.\sqrt{5}a} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Ví dụ 3: Trên các tia Ox, Oy, Oz của góc tam diện vuông $Oxyz$ lần lượt lấy các điểm A, B, C sao cho $OA = a, OB = a\sqrt{2}, OC = c,\ (a, c > 0)$. Gọi D là đỉnh đối diện với O của hình chữ nhật $AOBD$ và M là trung điểm của đoạn BC. Mặt phẳng (α) qua A, M cắt mặt phẳng (OCD) theo một đường thẳng vuông góc với đường thẳng AM.

1. Gọi E là giao điểm của (α) với đường thẳng OC. Tính độ dài đoạn thẳng OE;

2. Tính tỷ số thể tích của hai khối đa diện được tạo thành khi cắt khối chóp $C.AOBD$ bởi mặt phẳng (α). Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (α)

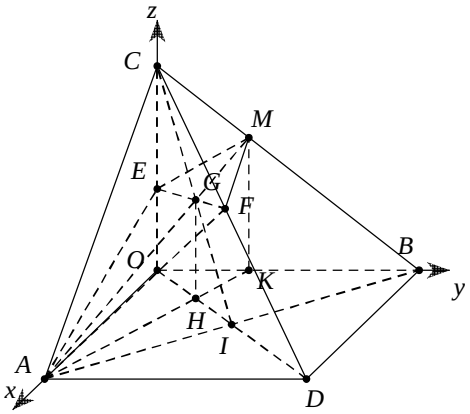
Lời giải.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, sao cho:

$O(0;\ 0;\ 0),\ A(a;\ 0;\ 0),\ B\left(0;\ a\sqrt{2};\ 0\right),$

$D\left(a;\ a\sqrt{2};0\right),\ C(0;\ 0;\ c)$



1. Vì M là trung điểm của BC nên

$M\left(0;\ \frac{a\sqrt{2}}{2};\ \frac{c}{2}\right).$

$\overrightarrow{OC}(0;\ 0;\ c),\ \overrightarrow{OD}\left(a;\ a\sqrt{2};0\right)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{OC};\ \overrightarrow{OD}\right]=\left(-ac\sqrt{2};\ ac;\ 0\right)$

Một véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (OCD) là $\overrightarrow{n_{OCD}}=\left(-\sqrt{2};\ 1;\ 0\right).$

Gọi $F=(\alpha)\cap CD$ thì EF là giao tuyến của (α) với (OCD), ta có $EF\perp AM.$

Vì $\overrightarrow{AM}=\left(-a;\ \frac{a\sqrt{2}}{2};\ \frac{c}{2}\right)$ nên $\left[\overrightarrow{n_{OCD}},\ \overrightarrow{AM}\right]=\frac{c}{2}(1;\ \sqrt{2};\ 0),$ do đó một véc tơ chỉ phương của EF là

$\overrightarrow{u_{EF}}=(1;\ \sqrt{2};\ 0).$

Ta có $\left[\overrightarrow{u_{EF}},\ \overrightarrow{AM}\right]=\frac{1}{2}\left(c\sqrt{2};\ -c;\ 3\sqrt{2}a\right)$ nên phương trình mặt phẳng (α) là :

$\sqrt{2}cx-cy+3\sqrt{2}az-ac\sqrt{2}=0.$

Do đó $(\alpha)\cap Oz=E\left(0;\ 0;\ \frac{c}{3}\right)\Rightarrow OE=\frac{c}{3}.$

2. Ta có $(\alpha)\cap CD=F\left(\frac{2a}{3};\ \frac{2\sqrt{2}a}{3};\ \frac{c}{3}\right)\Rightarrow \frac{CF}{CD}=\frac{2}{3}.$

Mà $V_{COADB}=2V_{CAOD}=2V_{CBOD}$ nên

$$\frac{V_{CEAFM}}{V_{COADB}}=\frac{V_{CAEF}}{2V_{CAOD}}+\frac{V_{CMEF}}{2V_{CBOD}}=\frac{1}{2}\left(\frac{CE}{CO}.\frac{CF}{CD}+\frac{CM}{CB}.\frac{CE}{CO}.\frac{CF}{CD}\right)=\frac{1}{3}$$

Do đó tỷ số thể tích hai khối đa diện được tạo thành khi cắt khối chóp $C.AODB$ bởi mặt phẳng (α) là $\frac{1}{2}$ (hay 2).

Khoảng cách cần tìm : $d(C,\ (\alpha))=\frac{\left|3\sqrt{2}ac-ac\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2c^2+c^2+18a^2}}=\frac{2\sqrt{6}ac}{3\sqrt{c^2+6a^2}}.$

Ví dụ 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $A\equiv O,\ B\in Ox,\ D\in Oy,\ A'\in Oz$ và $AB=1,\ AD=2,\ AA'=3.$

1. Tìm tọa độ các đỉnh của hình hộp;

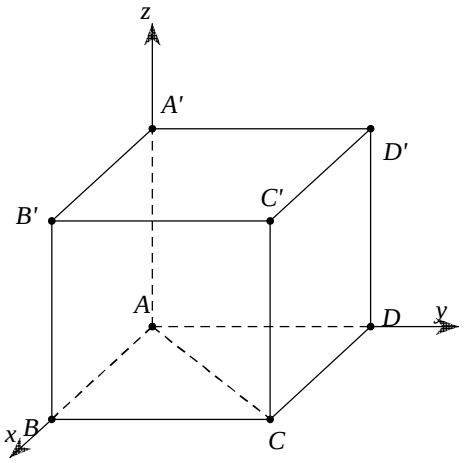
2. Tìm điểm E trên đường thẳng DD' sao cho $B'E\perp A'C$

3. Tìm điểm M thuộc $A'C$, N thuộc BD sao cho $MN\perp BD, MN\perp A'C$. Từ đó tính khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau $A'C$ và BD

Lời giải.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

1. Ta có $A(0;0;0), B(1;0;0), D(0;2;0), A'(0;0;3)$.
Hình chiếu của C lên (Oxy) là C, hình chiếu của C lên Oz là A nên $C(1;2;0)$.
Hình chiếu của B', C', D' lên mp (Oxy) và trục Oz lần lượt là các điểm B, C, D và A' nên $B'(1;0;3)$, $C'(1;2;3)$, $D'(0;2;3)$.



2. Vì E thuộc đường thẳng DD' nên $E(0;2;z)$, suy ra $\overrightarrow{B'E} = (-1;2;z-3)$
Mà $\overrightarrow{A'C} = (1;2;-3)$ nên $B'E \perp A'C \Leftrightarrow \overrightarrow{B'E}.\overrightarrow{A'C} = 0 \Leftrightarrow -1+4-3(z-3) = 0 \Leftrightarrow z = 4$.
Vậy $E(0;2;4)$.

3. Đặt $\overrightarrow{A'M} = x.\overrightarrow{A'C}$; $\overrightarrow{BN} = y.\overrightarrow{BD}$
Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{AA'} + x.\overrightarrow{A'C} = (x;2x;3-3x)$, suy ra $M(x;2x;3-3x)$
$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + y.\overrightarrow{BD} = (1-y;2y;0) \Rightarrow N(1-y;2y;0)$
Theo giả thiết của để bài, ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{A'C} = 0 \\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BD} = 0 \end{cases}$ $(*)$
Mà $\overrightarrow{MN} = (1-x-y;2y-2x;3x-3)$, $\overrightarrow{A'C} = (1;2;-3)$, $\overrightarrow{BD} = (-1;2;0)$
Khi đó $(*)$ trở thành

$$\begin{cases} 1-x-y+4y-4x-9x+9=0 \\ -1+x+y+4y-4x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -14x+3y=-10 \\ -3x+5y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{53}{61} \\ y=\dfrac{44}{61} \end{cases}$$

Do đó $M\left(\frac{53}{61};\frac{106}{61};\frac{24}{61}\right)$, $N\left(\frac{17}{61};\frac{88}{61};0\right)$.
Vì MN là đường vuông góc chung của hai đường thẳng $A'C, BD$
$d(A'C, BD) = MN = \sqrt{(1-x-y)^2 + (2y-2x)^2 + (3x-3)^2} = \dfrac{6\sqrt{61}}{61}$.

Ví dụ 5: Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = 2a$; hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB; mặt phẳng SM và song song với BC, cắt AC tại N. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60^o. Tính thể tích khối chóp S.BCNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a

Lời giải.
Vì hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên suy ra $SA \perp (ABC)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, đặt $SA = x, x > 0$

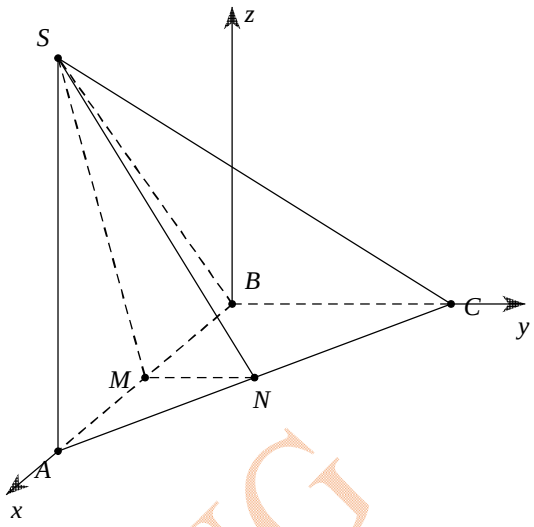
Vì $MN // BC \Rightarrow N$ là trung điểm cạnh AC

Tọa độ các đỉnh là:

$B(0;0;0)$, $A(2a;0;0)$,

$C(0;2a;0)$, $S(2a;0;x)$,

$M(a;0;0)$, $N(a;a;0)$



Suy ra $\overrightarrow{BS} = (2a;0;x), \overrightarrow{BC} = (0;2a;0) \Rightarrow \left[\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{BC}\right] = (-2ax;0;4a^2)$

Do đó $\vec{n} = (x;0;-2a)$ là VTPT của mặt phẳng (SBC)

$\vec{k} = (0;0;1)$ là VTPT của mặt phẳng (ABC)

Theo giả thiết ta có: $\dfrac{|\vec{n}.\vec{k}|}{|\vec{n}|.|\vec{k}|} = \cos 60^0 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{2a}{\sqrt{x^2+4a^2}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x^2 = 12a^2 \Rightarrow x = 2a\sqrt{3}$

Vì M, N là trung điểm của AB, CB nên

$$S_{\Delta AMN} = \frac{1}{4} S_{\Delta ABC} \Rightarrow S_{BMNC} = \frac{3}{4} S_{\Delta ABC} = \frac{3a^2}{2}$$

Từ đó suy ra thể tích khối chóp $S.BMNC$ là:

$$V_{S.BMNC} = \frac{1}{3} SA.S_{BMNC} = \frac{1}{3}.2a\sqrt{3}.\frac{3a^2}{2} = a^3\sqrt{3}.$$

Ta có: $\overrightarrow{BA} = (2a;0;0), \overrightarrow{SN} = (-a;a;2a\sqrt{3}), \overrightarrow{BN} = (a;a;0)$

Suy ra $\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{SN}\right] = (0;-4\sqrt{3}a^2;2a^2) \Rightarrow \left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{SN}\right].\overrightarrow{BN} = -4\sqrt{3}a^3$

Vậy $d(AB, SN) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{SN}\right].\overrightarrow{BN}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{SN}\right]\right|} = \dfrac{4a^3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}a^2} = \dfrac{2a\sqrt{39}}{13}.$

B - BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

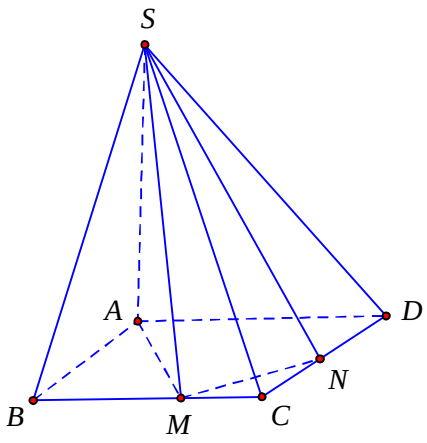
Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$; M, N hai điểm nằm trên hai cạnh BC, CD. Đặt $BM = x$, $DN = y$ $(0 < x, y < a)$. Hệ thức liên hệ giữa x và y để hai mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau là:

A. $x^2 + a^2 = a(x+y)$. **B.** $x^2 + 2a^2 = a(x+y)$.

C. $2x^2 + a^2 = a(x+y)$. **D.** $x^2 + a^2 = a(x+2y)$.

Lời giải

Chọn A



Tọa độ hóa với $O \equiv A$, $Ox \equiv AD$, $Oy \equiv AB$, $Oz \equiv AS$.

Đặt $SA = z > 0$, ta có $S(0;0;z)$, $M(x;a;0)$, $N(a;y;0)$.

Do đó $\begin{cases} \overrightarrow{AS} = (0;0;z) \\ \overrightarrow{AM} = (x;a;0) \end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{AS};\overrightarrow{AM}\right] = (-az;xz;0)$.

$\begin{cases} \overrightarrow{SM} = (x;a;-z) \\ \overrightarrow{SN} = (a;y;-z) \end{cases} \Rightarrow \left[\overrightarrow{SM};\overrightarrow{SN}\right] = (yz-az;xz-az;xy-a^2)$.

Mặt phẳng (SAM) nhận $\left[\overrightarrow{AS};\overrightarrow{AM}\right] = (-az;xz;0)$ là một VTPT.

Mặt phẳng (SMN) nhận $\left[\overrightarrow{SM};\overrightarrow{SN}\right] = (yz-az;xz-az;xy-a^2)$ là một VTPT.

Ta có $(SAM) \perp (SMN) \Leftrightarrow \left[\overrightarrow{AS};\overrightarrow{AM}\right].\left[\overrightarrow{SM};\overrightarrow{SN}\right] = 0$

$\Leftrightarrow az(az-yz)+xz(xz-az)=0 \Leftrightarrow a(a-y)+x(x-a)=0 \Leftrightarrow x^2+a^2 = a(x+y)$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm của BC và H là trung điểm của AM. Biết $HB = HC$, $\widehat{HBC} = 30°$; góc giữa mặt phẳng (SHC) và mặt phẳng (HBC) bằng $60°$. Tính côsin của góc giữa đường thẳng BC và mặt phẳng (SHC)?

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{13}}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

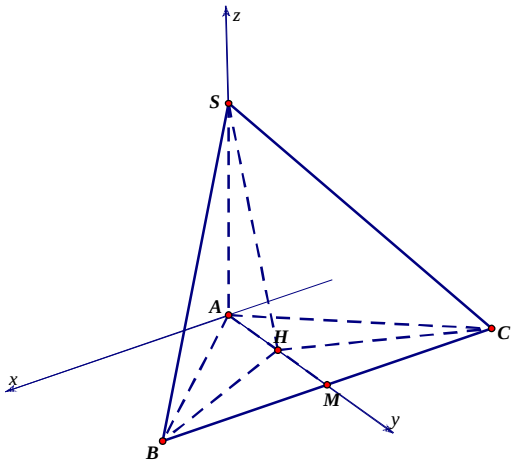
Chọn B

Từ M là trung điểm của BC và H là trung điểm của AM, $HB = HC$ suy ra $AM \perp BC$, hay tam giác ABC cân đỉnh A.

Đặt $BC = a \Rightarrow BM = \frac{a}{2}$. Do $\widehat{HBC} = 30°$ suy ra $HM = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Đặt $SA = b$.

Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Ta có $A(0;0;0)$, $B\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{3};0\right)$, $C\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{3};0\right)$; $H\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{6};0\right)$, $S(0;0;b)$.

Ta có $\overrightarrow{HC}=\left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{6};0\right)$; $\overrightarrow{SH}=\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{6};-b\right)$.

Nên $\left[\overrightarrow{HC},\overrightarrow{SH}\right]=\left(-\frac{ab\sqrt{3}}{6};-\frac{ab}{2};-\frac{a^2\sqrt{3}}{12}\right)$.

Suy ra (SHC) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n}_1=\left(2b\sqrt{3};6b;a\sqrt{3}\right)$.

Mặt phẳng (HBC) có một véc-tơ pháp tuyến là $\vec{k}=(0;0;1)$.

Góc giữa mặt phẳng (SHC) và mặt phẳng (HBC) bằng $60°$ nên

$$\cos\left((SHC),(HBC)\right)=\frac{\left|\vec{n}_1.\vec{k}\right|}{\left|\vec{n}_1\right|.\left|\vec{k}\right|}\Leftrightarrow\cos 60°=\frac{\left|a\sqrt{3}\right|}{\sqrt{12b^2+36b^2+3a^2}}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{12b^2+36b^2+3a^2}=2\left|a\sqrt{3}\right|\Leftrightarrow b=\frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Khi đó $\vec{n}_1=\left(\frac{3a}{2};\frac{3a\sqrt{3}}{2};a\sqrt{3}\right)$, đường thẳng BC có véc-tơ chỉ phương $\vec{i}=(1;0;0)$.

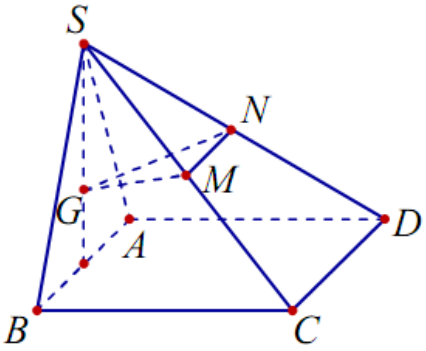
Gọi φ là góc giữa đường thẳng BC và mặt phẳng (SHC), ta có

$$\sin\varphi=\frac{\left|\vec{n}_1.\vec{i}\right|}{\left|\vec{n}_1\right|.\left|\vec{i}\right|}=\frac{\left|\frac{3a}{2}\right|}{\sqrt{\frac{9a^2}{4}+\frac{27a^2}{4}+3a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Do đó $\cos\varphi=\sqrt{1-\sin^2\varphi}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{4}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB và M,N lần lượt là trung điểm của SC,SD (tham khảo hình vẽ bên). Tính côsin của góc giữa hai mặt phẳng (GMN) và $(ABCD)$.

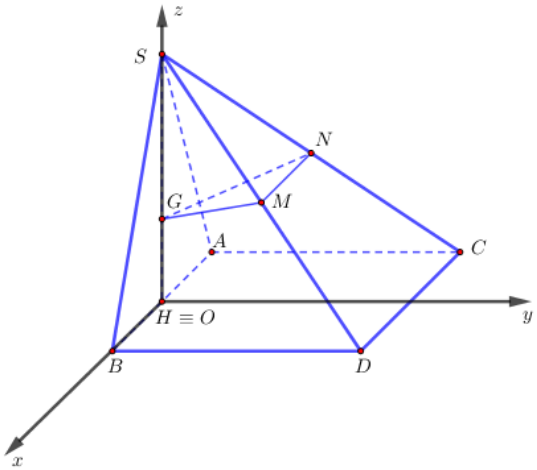
ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



A. $\frac{2\sqrt{39}}{13}$. **B.** $\frac{\sqrt{13}}{13}$. **C.** $\frac{2\sqrt{39}}{39}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó

$S\left(0;0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $A\left(\frac{-a}{2};0;0\right)$; $B\left(\frac{a}{2};0;0\right)$; $C\left(\frac{a}{2};a;0\right)$; $D\left(\frac{-a}{2};a;0\right)$

suy ra $G\left(0;0;\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)$; $M\left(\frac{a}{4};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$; $N\left(-\frac{a}{4};\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$

Ta có mặt phẳng $(ABCD)$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{k}=(0;0;1)$, mặt phẳng (GMN) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left[\overrightarrow{GM};\overrightarrow{GN}\right]=\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{24};\frac{a}{4}\right)$

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (GMN) và $(ABCD)$, ta có

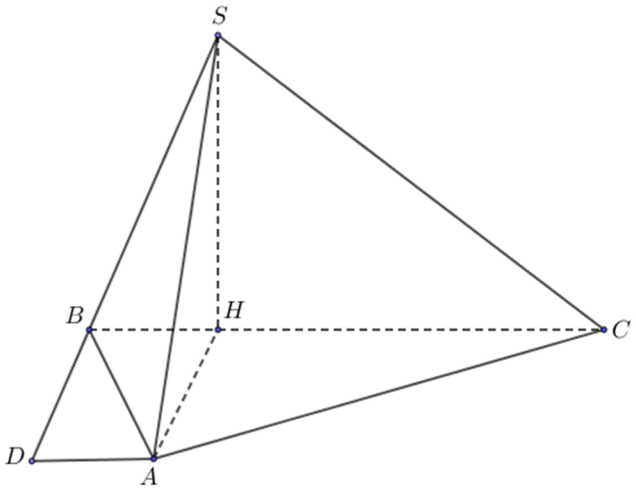
$$\cos\alpha=\frac{|\vec{n}.\vec{k}|}{|\vec{n}|.|\vec{k}|}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{39}}{24}}=\frac{2\sqrt{39}}{13}.$$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC}=60^\circ$, $BC=2a$. Gọi D là điểm thỏa mãn $3\overrightarrow{SB}=2\overrightarrow{SD}$. Hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc đoạn BC sao cho $BC=4BH$. Biết SA tạo với đáy một góc 60°. Góc giữa hai đường thẳng AD và SC bằng

A. 90°. **B.** 30°. **C.** 60°. **D.** 45°.

Lời giải

Chọn A



Ta có $AH^2 = BH^2 + BA^2 - 2.BH.BA.\cos 60^o = \frac{a^2}{4} + a^2 - 2.\frac{a}{2}.a.\frac{1}{2} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\tan 60^o = \frac{SH}{AH} \Rightarrow SH = AH.\sqrt{3} = \frac{3a}{2}$.

Chuẩn hóa và chọn hệ trục tọa độ sao cho $H(0;0;0)$, $C\left(\frac{3}{2};0;0\right)$, $A\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$, $S\left(0;0;\frac{3}{2}\right)$,

$B\left(-\frac{1}{2};0;0\right)$, $\overrightarrow{SB} = \left(-\frac{1}{2};0;-\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{SD} = \left(-\frac{3}{4};0;-\frac{9}{4}\right) \Rightarrow D\left(-\frac{3}{4};0;-\frac{3}{4}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{DA} = \left(\frac{3}{4};\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{3}{4}\right) \Rightarrow \vec{u} = \left(\sqrt{3};2;\sqrt{3}\right)$ là một vtcp của AD.

$\overrightarrow{SC} = \left(\frac{3}{2};0;-\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \vec{v} = (1;0;-1)$ là một vtcp của SC. Ta có $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Rightarrow AD \perp SC$

Vậy góc giữa hai đường thẳng AD và SC bằng 90^o.

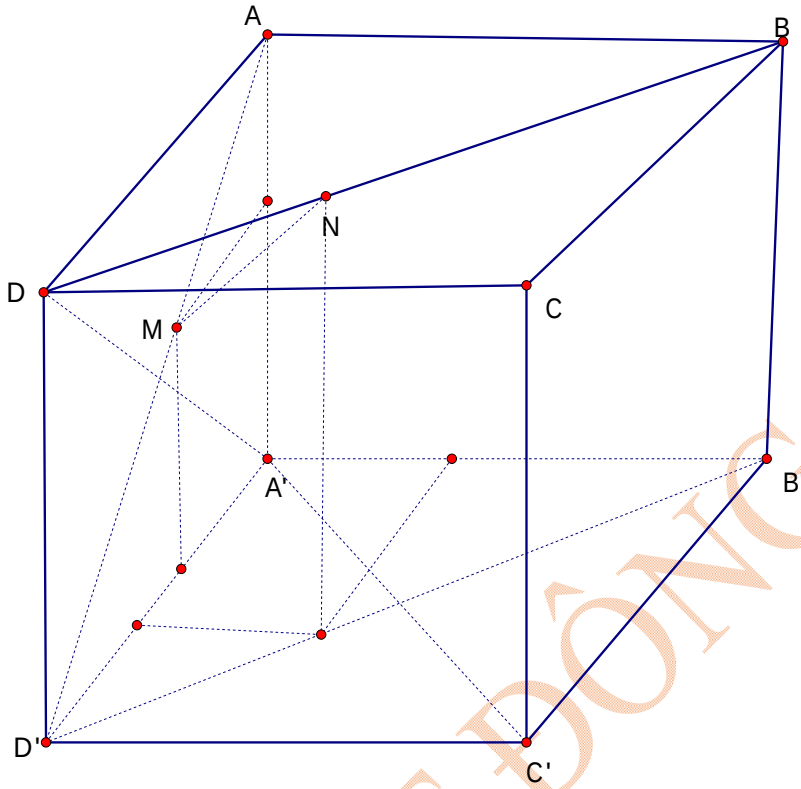
Câu 5: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a. Lấy điểm M thuộc đoạn AD', điểm N thuộc đoạn BD sao cho $AM = DN = x$, $\left(0 < x < \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$. Tìm x theo a để đoạn MN ngắn nhất.

A. $x = \frac{a}{2}$. **B.** $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. **C.** $x = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. **D.** $x = \frac{a}{3}$.

Lời giải

Chọn B

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $O \equiv A'$, $A'D' \equiv Ox$, $A'B' \equiv Oy$, $A'A \equiv Oz$.

$A'(0;0;0)$, $D'(a;0;0)$, $B'(0;a;0)$, $A(0;0;a)$, $D(a;0;a)$, $B(0;a;a)$, $C'(a;a;0)$, $C(a;a;a)$.

$M\left(\frac{x}{\sqrt{2}};0;\frac{a\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}}\right)$, $N\left(\frac{a\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}};\frac{x}{\sqrt{2}};a\right)$.

$\Rightarrow MN^2 = \left(\sqrt{2}x-a\right)^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} = 3x^2 - 2\sqrt{2}ax + a^2 = 3\left(x^2 - 2\frac{\sqrt{2}}{3}ax + \frac{2a^2}{9}\right) + \frac{a^2}{3}$.

$\Rightarrow MN^2 = 3\left(x - \frac{\sqrt{2}a}{3}\right)^2 + \frac{a^2}{3}$. Vậy MN ngắn nhất $\Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

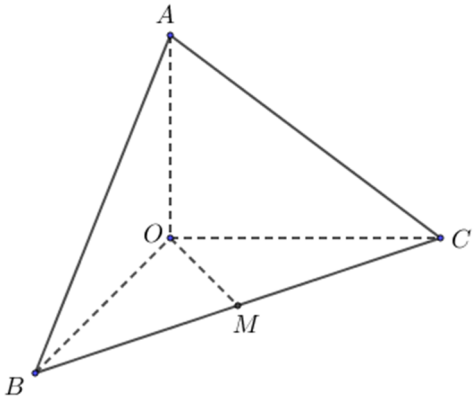
Câu 6: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = OB = OC = a$. Gọi M là trung điểm BC. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và OM bằng

A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{2a}{3}$. **C.** $\frac{a}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Lời giải

Chọn C

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Chọn hệ trục tọa độ sao cho $O(0;0;0)$, $A(0;0;a)$, $B(a;0;0)$, $C(0;a;0)$, $M\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$.

$\overrightarrow{AB}=(a;0;-a)\Rightarrow AB$ có một vtcp $\vec{u}=(1;0;-1)$.

$\overrightarrow{OM}=\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)\Rightarrow OM$ có một vtcp $\vec{v}=(1;1;0)$, $\overrightarrow{OA}=(0;0;a)$.

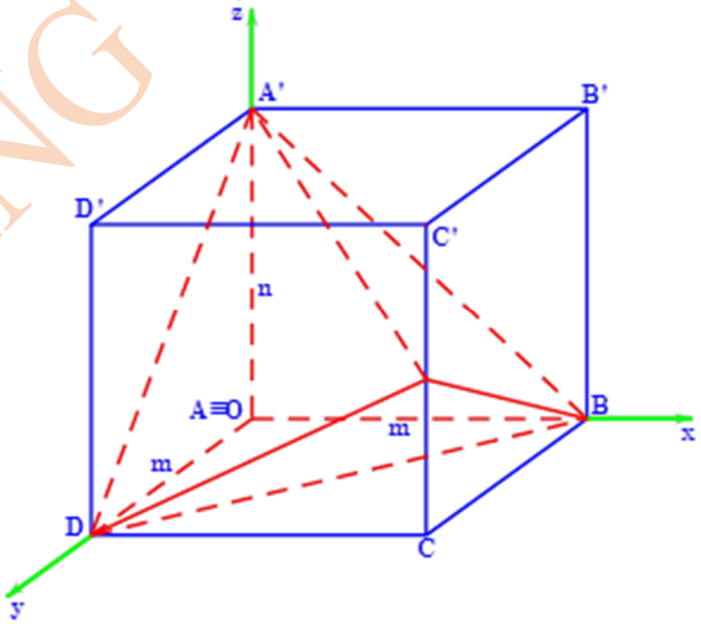
$[\vec{u},\vec{v}]=(1;-1;1)\Rightarrow d(OM,BC)=\dfrac{\left|[\vec{u},\vec{v}].\overrightarrow{OA}\right|}{\left|[\vec{u},\vec{v}]\right|}=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ Oxy, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ O, các đỉnh $B(m;0;0)$, $D(0;m;0)$, $A'(0;0;n)$ với $m,n>0$ và $m+n=4$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Khi đó thể tích tứ diện $BDA'M$ đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $\frac{75}{32}$. **B.** $\frac{245}{108}$. **C.** $\frac{9}{4}$. **D.** $\frac{64}{27}$.

Lời giải

Chọn D



Tọa độ điểm $C(m;m;0),C'(m;m;;n),M\left(m;m;\frac{n}{2}\right)$

$\overrightarrow{BA'}=(-m;0;n),\overrightarrow{BD}=(-m;m;0),\overrightarrow{BM}=\left(0;m;\frac{n}{2}\right)$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\left[\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{BD}\right]=\left(-mn;-mn;-m^2\right)$

$V_{BDA'M}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BA'},\overrightarrow{BD}\right].\overrightarrow{BM}\right|=\frac{m^2n}{4}$

Ta có $m.m.(2n)\le\left(\frac{m+m+2n}{3}\right)^3=\frac{512}{27}\Rightarrow m^2n\le\frac{256}{27}$

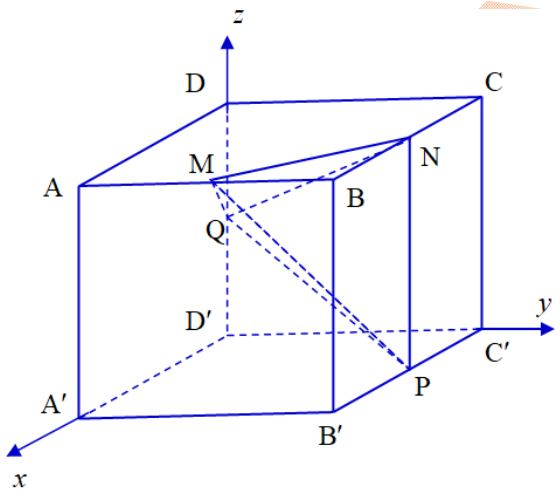
$\Rightarrow V_{BDA'M}\le\frac{64}{27}$

Câu 8: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, $C'D'$ và DD'. Tính thể tích khối tứ diện $MNPQ$.

A. $\frac{1}{12}$. **B.** $\frac{1}{24}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{1}{8}$.

Lời giải

Chọn B



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho: $\begin{cases}D'\equiv O\\Ox\equiv D'A'\\Oy\equiv D'C'\\Oz\equiv D'D\end{cases}$

Khi đó:

$A(1;0;1)$, $B(1;1;1)$, $C(0;1;1)$, $D(0;0;1)$, $A'(1;0;0)$, $B'(1;1;0)$, $C'(0;1;0)$

$M\left(1;\frac{1}{2};1\right)$, $N\left(\frac{1}{2};1;1\right)$, $P\left(0;\frac{1}{2};0\right)$, $Q\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{MN}\left(\frac{-1}{2};\frac{1}{2};0\right)$, $\overrightarrow{MP}\left(-1;\frac{1}{2};\frac{-1}{2}\right)$, $\overrightarrow{MQ}\left(-1;\frac{-1}{2};\frac{-1}{2}\right)$

$\left|\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right].\overrightarrow{MQ}\right|=\left|\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\right|=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow V_{MNPQ}=\frac{1}{6}.\left|\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right].\overrightarrow{MQ}\right|=\frac{1}{24}$.

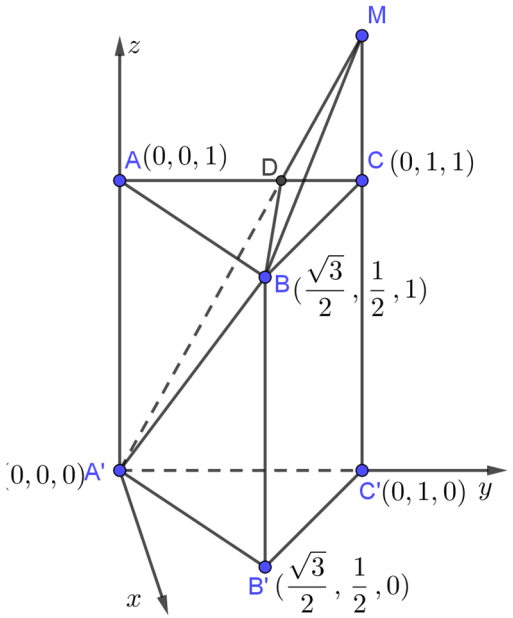
Câu 9: Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. M là một điểm thỏa mãn $\overrightarrow{CM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$. Cô sin của góc giữa hai mặt phẳng $(A'MB)$ và (ABC) bằng

A. $\frac{\sqrt{30}}{8}$. **B.** $\frac{\sqrt{30}}{16}$. **C.** $\frac{\sqrt{30}}{10}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Xét hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Gắn hệ trục như hình vẽ quy ước $a=1$ (đơn vị).



Gọi D là giao điểm của $A'M$ và AC.

Vì tam giác $A'B'C'$ là tam giác cân cạnh bằng a nên ta suy ra độ dài các đường trung tuyến là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Suy ra tọa độ các điểm như hình vẽ.

Theo giả thiết ta có $\overrightarrow{CM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$ vậy $\Rightarrow \Delta ADA' \sim \Delta CDM \Rightarrow \frac{AD}{CD}=2 \Rightarrow \overrightarrow{DA}=-2\overrightarrow{DC}$

Vậy tọa độ của điểm D là: $D\left(0;\frac{2}{3};1\right)$

Ta có mặt phẳng ABC có phương trình $z=1 \Rightarrow \vec{n}_{(ABC)}=(0;0;1)$

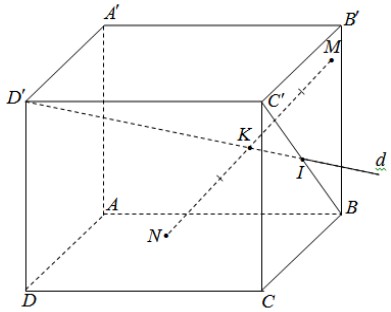
Mặt khác mặt phẳng $(A'MB)$ là mặt phẳng đi qua ba điểm A', D và B.

Ta có: $\overrightarrow{A'D}=\left(0;\frac{2}{3};1\right)$ và $\overrightarrow{A'B}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};1\right) \Rightarrow \vec{n}_{(A'BM)}=\left[\overrightarrow{A'D},\overrightarrow{A'B}\right]=\left(\frac{1}{6};\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)$

Vậy $\Rightarrow$ cô sin góc tạo bởi hai mặt phẳng $(A'MB)$ và (ABC) là:

$$\cos\left(\widehat{(A'BM),(ABC)}\right)=\left|\cos\left(\widehat{\vec{n}_{(A'BM)},\vec{n}_{(ABC)}}\right)\right|.=\frac{\left|\frac{-\sqrt{3}}{3}\right|}{\sqrt{\frac{1}{36}+\frac{3}{4}+\frac{1}{3}}.\sqrt{1}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{30}}{10}.$$

Câu 10: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Một đường thẳng d đi qua đỉnh D' và tâm I của mặt bên $BCC'B'$. Hai điểm M, N thay đổi lần lượt thuộc các mặt phẳng $(BCC'B')$ và $(ABCD)$ sao cho trung điểm K của MN thuộc đường thẳng d (tham khảo hình vẽ). Giá trị bé nhất của độ dài đoạn thẳng MN là



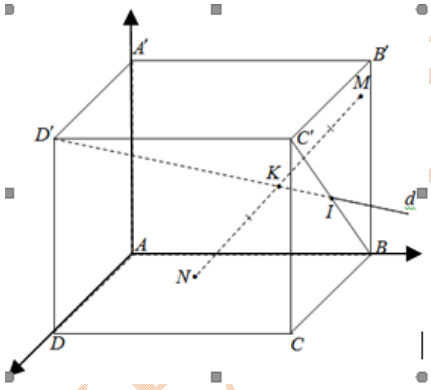
A. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. **B.** $\frac{3\sqrt{5}.a}{10}$. **C.** $\frac{2\sqrt{5}.a}{5}$. **D.** $\frac{2\sqrt{3}.a}{5}$.

Lời giải

Chọn D

Cho $a=1$.

Chọn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ.



$A(0;0;0)$, $D'(1;0;1)$, $B(0;1;0)$, $C'(1;1;1)$

I là trung điểm $BC' \Rightarrow I\left(\frac{1}{2};1;\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{D'I}=\left(-\frac{1}{2};1;-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}(1;-2;1)$.

Đường thẳng $D'I$ đi qua $D'(1;0;1)$, có một VTCP là $\vec{u}=(1;-2;1)$ có phương trình là:

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=-2t \\ z=1+t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$$

Mặt phẳng $(ABCD)$: $z=0$

Mặt phẳng $(BCC'B')$: $y=1$

$M\in(BCC'B') \Rightarrow M(m;1;n)$, $K\in D'I \Rightarrow K(1+t;-2t;1+t)$

K là trung điểm $MN \Rightarrow N(2t-m+2;-4t-1;2t-n+2)$.

$N\in(ABCD) \Leftrightarrow z_N=0 \Leftrightarrow 2t-n+2=0 \Leftrightarrow t=\frac{n-2}{2} \Rightarrow N(n-m;3-2n;0)$.

$\overrightarrow{MN}=(n-2m;2-2n;-n) \Rightarrow MN^2=(n-2m)^2+(2-2n)^2+n^2=(n-2m)^2+5n^2-8n+4$

$=(n-2m)^2+5\left(n-\frac{4}{5}\right)^2+\frac{4}{5}\ge\frac{4}{5} \Rightarrow MN\ge\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{4}{5} \\ a=\frac{2}{5} \end{cases}$.

Câu 11: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Chứng minh hai đường chéo $B'D'$ và $A'B$ của hai mặt bên là hai đường thẳng chéo nhau. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau $B'D'$ và $A'B$.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. **B.** $\frac{2a}{3}$. **C.** $\frac{a}{\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Lời giải

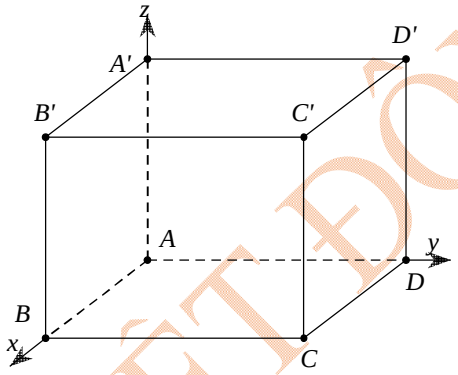
Chọn C

Ta có: $A(0;0;0), A'(0;0;a), B(0;a;0), B'(0;a;a), C(a;a;0), C'(a;a;a),$
$D(a;0;0), D'(a;0;a)$

Ta có: $\overrightarrow{B'D'} = (a;-a;0)$, $\overrightarrow{A'B} = (0;a;-a)$, $\overrightarrow{BB'} = (0;0;a)$,

Suy ra $\left[\overrightarrow{B'D'}, \overrightarrow{A'B}\right] = (a^2;a^2;a^2)$ nên $\left[\overrightarrow{B'D'}, \overrightarrow{A'B}\right].\overrightarrow{BB'} = a^3 \neq 0$

Vậy ba vecto $\overrightarrow{B'D'}; \overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{BB'}$ không đồng phẳng hay $B'D'$ và $A'B$ chéo nhau.



$$d\left(B'D', A'B\right) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{B'D'}, \overrightarrow{A'B}\right].\overrightarrow{BB'}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{B'D'}, \overrightarrow{A'B}\right]\right|} = \frac{a^3}{\sqrt{a^4+a^4+a^4}} = \frac{a^3}{a^2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

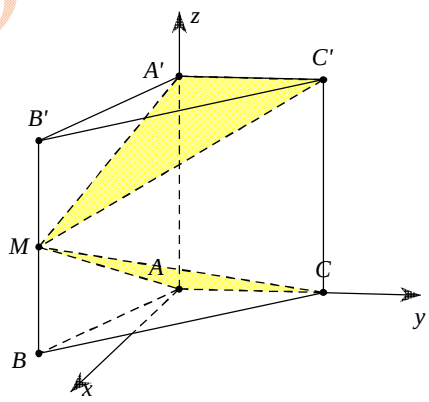
Câu 12: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, có đáy $AB = a, AC = 2a$, $\widehat{BAC} = 120^0$. Gọi M là trung điểm cạnh bên BB', biết hai mặt phẳng (MAC) và $(MA'C')$ vuông góc với nhau. Tính cô sin của góc giữa hai mặt phẳng (MAC) và $(BCC'B')$.

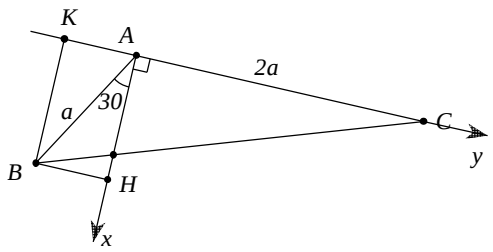
A. $\frac{\sqrt{14}}{8}$. **B.** $\frac{5\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{5}{28}$. **D.** $\frac{5\sqrt{14}}{28}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $AA' = 2x, x > 0$. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ





Ta có $A(0;0;0), C(0;2a;0), A'(0;0;2x), C'(0;2a;2x)$

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B lên các trục Ox, Oy, suy ra

$AH = AB.\cos 30^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AK = BH = AB.\sin 30^0 = \frac{a}{2}$

Do đó $B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};0\right)$, $B'\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};2x\right)$, $M\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};x\right)$

Ta có $\overrightarrow{AM}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};x\right)$, $\overrightarrow{AC}=(0;2a;0) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}\right]=\left(-2ax;0;a^2\sqrt{3}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_1}=\left(2x;0;-a\sqrt{3}\right)$ là VTPT của mặt phẳng (MAC)

$\overrightarrow{A'M}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};-x\right)$, $\overrightarrow{A'C'}=(0;2a;0) \Rightarrow \left[\overrightarrow{A'M},\overrightarrow{A'C'}\right]=\left(2ax;0;a^2\sqrt{3}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_2}=\left(2x;0;a\sqrt{3}\right)$ là VTPT của mặt phẳng $(MA'C')$

Vì $(MAC)\perp(MA'C')$ nên $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0 \Leftrightarrow 4x^2-3a^2=0 \Rightarrow x=\frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AA'=a\sqrt{3}$

Ta có $\overrightarrow{CC'}=\left(0;0;a\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{BC}=\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{5a}{2};0\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{CC'},\overrightarrow{BC}\right]=\left(-\frac{5a^2\sqrt{3}}{2};-\frac{3a^2}{2};0\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_3}=\left(5;\sqrt{3};0\right)$ là VTPT của mặt phẳng $(BCC'B')$

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (MAC) và $(BCC'B')$, ta có:

$$\cos\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_3}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_3}\right|}=\frac{5}{\sqrt{2}.\sqrt{28}}=\frac{5\sqrt{14}}{28}.$$

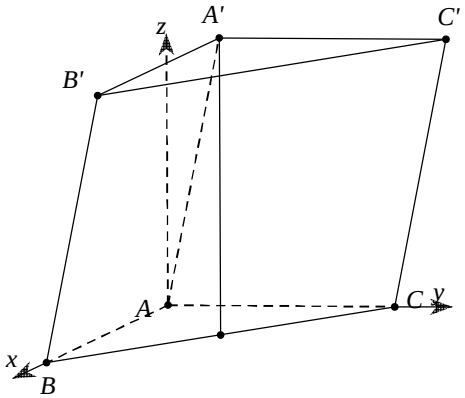
Câu 13: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh bên bằng $2a$, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB=a, AC=a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích khối chóp $A'.ABC$

A. $\frac{a^3}{4}$. **B.** $\frac{a^3}{2}$. **C.** $\frac{a^3}{8}$. **D.** $\frac{a^3}{12}$.

Lời giải

Chọn A

Chọn hệ trục như hình vẽ. Gọi M là trung điểm đoạn BC



Ta có tọa độ các đỉnh là: $A(0;0;0), B\left(a;0;0\right), C\left(0;a\sqrt{3};0\right), M\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Vì $AM = \frac{1}{2}BC = a \Rightarrow MA' = \sqrt{A'A^2 - AM^2} = a\sqrt{3}$,

suy ra $A'\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};a\sqrt{3}\right)$

Vì $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow B'\left(\frac{3a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};a\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow C'\left(\frac{a}{2};\frac{3a\sqrt{3}}{2};a\sqrt{3}\right)$

Thể tích khối chóp $A'.ABC$: $V = \frac{1}{3}A'M.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.a\sqrt{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{4}$

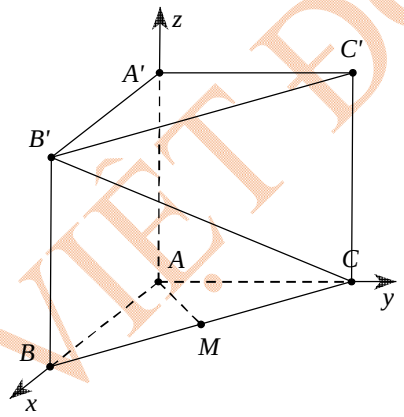
Câu 14: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, $B'C$.

A. $\frac{a}{3}$. **B.** $\frac{a}{4}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a}{8}$.

Lời giải

Chọn C

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Tọa độ các đỉnh là: $A(0;0;0), B(a;0;0), C(0;a;0), A'(0;0;a\sqrt{2}), B'(a;0;a\sqrt{2})$

$C'(0;a;a\sqrt{2}), M\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$.

Thể tích khối lặng trụ: $V = AA'.S_{\Delta ABC} = a\sqrt{2}.\frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

Ta có: $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right), \overrightarrow{AC} = (0;a;0), \overrightarrow{B'C} = (-a;a;a\sqrt{2})$

Suy ra $\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right] = \left(\frac{a^2\sqrt{2}}{2};-\frac{a^2\sqrt{2}}{2};a^2\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right].\overrightarrow{AC} = -\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

Vậy $d(AM,B'C) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right].\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{B'C}\right]\right|} = \frac{a}{2}$

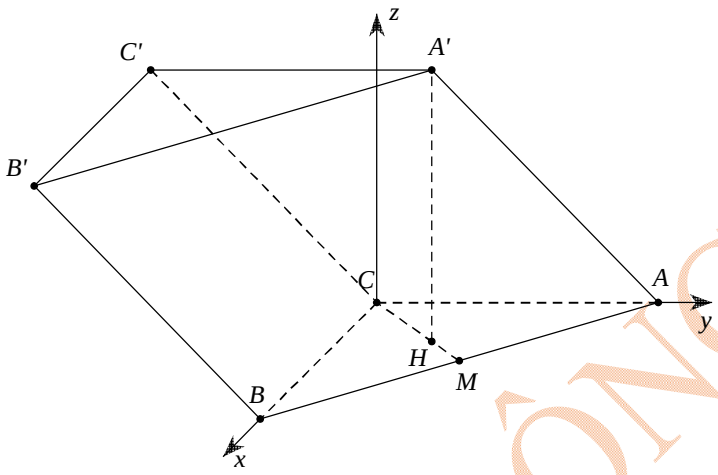
Câu 15: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, góc giữa đường thẳng BB' và mặt phẳng (ABC) bằng 60^0; tam giác ABC vuông tại C và $\widehat{BAC} = 60^0$. Hình chiếu vuông góc của điểm B' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trọng tâm của tam giác ABC. Tính thể tích khối tứ diện $A'ABC$ theo a.

A. $\frac{3a^3}{208}$. **B.** $\frac{a^3}{108}$. **C.** $\frac{9a^3}{208}$. **D.** $\frac{9a^3}{104}$.

Lời giải

Chọn C

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Gọi M, H lần lượt là trung điểm của BC và trọng tâm của tam giác ABC

Đặt $BC = x, SH = y; x, y > 0$ suy ra $AC = AB.\cot 60^0 = \frac{x}{\sqrt{3}}$. Tọa độ các đỉnh là:

$$C(0;0;0), B(x;0;0), A\left(0;\frac{x}{\sqrt{3}};0\right), H\left(\frac{x}{3};\frac{x}{3\sqrt{3}};0\right), B'\left(\frac{x}{3};\frac{x}{3\sqrt{3}};y\right)$$

Suy ra $\overrightarrow{BB'} = \left(-\frac{2x}{3};\frac{x}{3\sqrt{3}};y\right)$, $\vec{k} = (0;0;1)$ là VTPT của (ABC)

Theo đề bài ta có: $\begin{cases} \dfrac{\left|\overrightarrow{BB'}.\vec{k}\right|}{\left|\overrightarrow{BB'}\right|.\left|\vec{k}\right|} = \sin 60^0 \\ BB' = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = a \\ \sqrt{\frac{13}{27}x^2 + y^2} = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{a\sqrt{3}}{2} \\ x^2 = \frac{27a^2}{52} \end{cases}$

Suy ra $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}CA.CB = \frac{1}{2}x.\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{x^2}{2\sqrt{3}} = \frac{81a^2}{104\sqrt{3}}$

Vậy thể tích khối chóp $A'.ABC$ là:

$$V_{A'ABC} = V_{B'.ABC} = \frac{1}{3}y.\frac{x^2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}a}{2}.\frac{27a^2}{104\sqrt{3}} = \frac{9a^3}{208}.$$

Câu 16: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $B, AB = a, AA' = 2a, A'C = 3a$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng $A'C'$, I là giao điểm của AM và $A'C$. Tính theo a thể tích khối tứ diện $IABC$

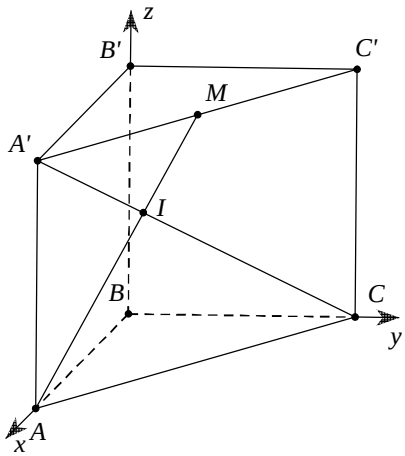
A. $\frac{a^3}{9}$. **B.** $\frac{4a^3}{9}$. **C.** $\frac{5a^3}{9}$. **D.** $\frac{4a^3}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $BC = x, x > 0$. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Tọa độ các điểm là: $B(0;0;0), A(a;0;0), C(0;x;0), B'(0;2a;0), A'(a;0;2a), C'(0;x;2a)$

Suy ra $\overrightarrow{A'C} = (-a;x;-2a) \Rightarrow A'C^2 = a^2 + x^2 + (2a)^2 = (3a)^2 \Rightarrow x = 2a$

Trung điểm $M\left(\frac{a}{2};a;2a\right) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \left(-\frac{a}{2};a;2a\right)$

Phương trình $AM: \begin{cases} x = a - t \\ y = 2t \\ z = 4t \end{cases} \Rightarrow I(a-t;2t;4t) \Rightarrow \overrightarrow{A'I} = (-t;2t;4t-2a)$

Vì $I \in A'C \Rightarrow \frac{-t}{-a} = \frac{2t}{2a} = \frac{4t-2a}{-2a} \Rightarrow t = \frac{a}{3} \Rightarrow I\left(\frac{2a}{3};\frac{2a}{3};\frac{4a}{3}\right)$

Suy ra $\overrightarrow{BI} = \left(\frac{2a}{3};\frac{2a}{3};\frac{4a}{3}\right), \overrightarrow{CI} = \left(\frac{2a}{3};-\frac{4a}{3};\frac{4a}{3}\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{BI},\overrightarrow{CI}\right] = \left(\frac{8a^2}{3};0;-\frac{4a^2}{3}\right)$

$\overrightarrow{AI} = \left(-\frac{a}{3};\frac{2a}{3};\frac{4a}{3}\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{BI},\overrightarrow{CI}\right].\overrightarrow{AI} = -\frac{8a^3}{3}$

Thể tích khối chóp $IABC: V = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{BI},\overrightarrow{CI}\right].\overrightarrow{AI}\right| = \frac{4a^3}{9}$

Câu 17: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60^0. Gọi G là trọng tâm tam giác $A'BC$. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $GABC$ theo a.

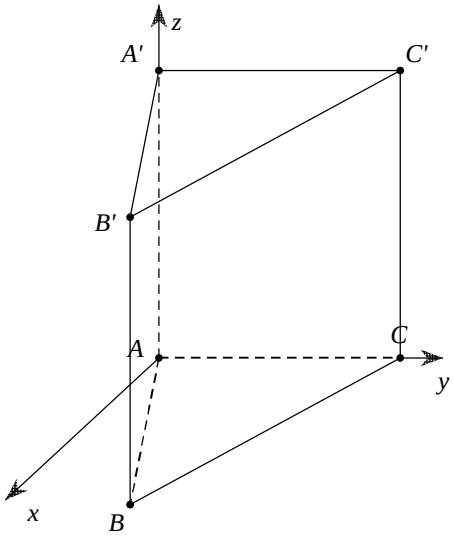
A. $\frac{a}{3}$. **B.** $\frac{a}{4}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a}{8}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $AA' = x, x > 0$. Chọn hệ trục như hình vẽ

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Tọa độ các điểm: $A(0;0;0), C(0;a;0), A'(0;0;x), C'(0;a;x), B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};0\right)$

Suy ra $\overrightarrow{A'B}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};-x\right), \overrightarrow{A'C}=(0;a;-x) \Rightarrow \left[\overrightarrow{A'B},\overrightarrow{A'C}\right]=\left(\frac{ax}{2};\frac{ax\sqrt{3}}{2};\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)$

Nên $\vec{n}=\left(x;x\sqrt{3};a\sqrt{3}\right)$ là VTPT của $(A'BC)$, $\vec{k}=(0;0;1)$ là VTPT của (ABC)

Theo đề bài: $\frac{|\vec{n}.\vec{k}|}{|\vec{n}|.|\vec{k}|}=\cos 60^0 \Rightarrow 2\sqrt{3}a=\sqrt{4x^2+3a^2} \Rightarrow x=\frac{3a}{2}$

Tọa độ trọng tâm $G\left(\frac{a\sqrt{3}}{6};\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$.

Gọi $I(x;y;z)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $GABC$, ta có

$$\begin{cases} IA^2=IB^2 \\ IA^2=IC^2 \\ IA^2=IG^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=\left(x-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2+z^2 \\ x^2+y^2+z^2=x^2+(y-a)^2+z^2 \\ x^2+y^2+z^2=\left(x-\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2+\left(z-\frac{a}{2}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{a\sqrt{3}}{6} \\ y=\frac{a}{2} \\ z=-\frac{a}{12} \end{cases}$$ Tâm

$I\left(\frac{a\sqrt{3}}{6};\frac{a}{2};-\frac{a}{12}\right)$, bán kính $R=IA=\frac{7a}{12}$.

Câu 18: Cho lăng trụ $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. $AB=a$, $AD=a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A_1 trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với giao điểm AC và BD. Góc giữa hai mặt phẳng (ADD_1A_1) và $(ABCD)$ bằng 60^0. Tính khoảng cách từ điểm B_1 đến mặt phẳng (A_1BD) theo a.

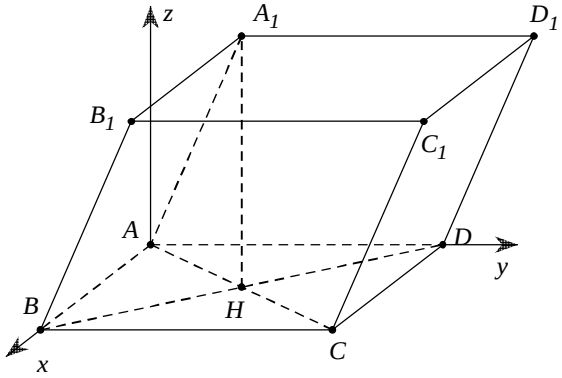
A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a}{4}$. **C.** $\frac{a}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi H là tâm của đáy $ABCD$ và đặt $A_1H = x$.

Chọn hệ trục như hình vẽ



Tọa độ các điểm:

$$A(0;0;0), B(a;0;0), D(0;a\sqrt{3};0), C\left(a;a\sqrt{3};0\right), H\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), A_1\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};x\right)$$

Suy ra $\overrightarrow{AA_1} = \left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};x\right), \overrightarrow{AD} = \left(0;a\sqrt{3};0\right)$

$$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AD}\right] = \left(ax\sqrt{3};0;\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \vec{n} = (2x;0;a) \text{ là VTPT của } (A_1AD)$$

Và $\vec{k} = (0;0;1)$ là VTPT của $(ABCD)$ nên theo giả thiết đề bài ta có:

$$\frac{|\vec{n}.\vec{k}|}{|\vec{n}|.|\vec{k}|} = \cos 60^0 \Rightarrow 2a = \sqrt{4x^2 + a^2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

$\overrightarrow{A_1B} = \left(\frac{a}{2};-\frac{a\sqrt{3}}{2};-x\right), \overrightarrow{A_1D} = \left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};-x\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{A_1D}\right] = \left(a\sqrt{3}x;ax;0\right)$ Phương trình

$(A_1BD): x\sqrt{3} + y - a\sqrt{3} = 0$. Vì $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow B_1\left(\frac{3a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

Vậy $d\left(B_1,(A_1BD)\right) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 19: Cho hình tứ diện $ABCD$ có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC); $AC = AD = 4cm$; $AB = 3cm$ và $BC = 5cm$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh BD, BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và AN.

A. $\frac{6\sqrt{15}}{17}$. **B.** $\frac{6\sqrt{34}}{17}$. **C.** $\frac{\sqrt{34}}{17}$. **D.** $\frac{6\sqrt{3}}{17}$.

Lời giải

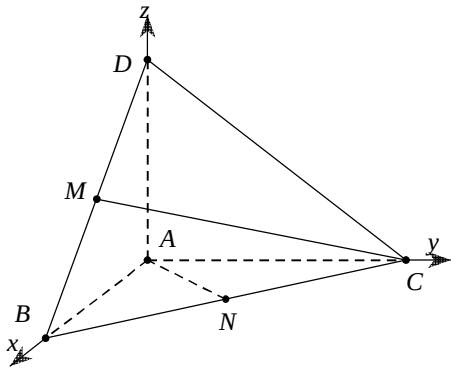
Chọn B

Ta có: $AB^2 + AC^2 = BC^2 = 25$ nên ΔABC vuông tại A.

Chọn hệ trục toạ độ Đêcac vuông góc *Oxyz* như hình vẽ

Suy ra $O \equiv A(0;0;0)$, $B(3;0;0)$, $C(0;4;0)$, $D(0;0;4)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Ta có $M(0;2;2), N\left(\frac{3}{2};2;0\right)$. Suy ra $\overrightarrow{AN}=\left(\frac{3}{2};2;0\right), \overrightarrow{CM}=(0;-2;2), \overrightarrow{AC}(0;4;0)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CM}\right]=(4;-3;-3), \left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CM}\right].\overrightarrow{AC}=-12$.

Suy ra khoảng cách giữa hai đường thẳng AN, CM là:

$$d(AN,CM)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CM}\right].\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CM}\right]\right|}=\frac{12}{\sqrt{4^2+3^2+3^2}}=\frac{6\sqrt{34}}{17}.$$

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với đáy, $AB=a, AD=2a, SA=3a$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SD và P là giao điểm của SC với mặt phẳng (AMN). Tính thể tích khối chóp $S.AMPN$

A. $\frac{1863a^3}{1820}$. **B.** $\frac{1873a^3}{1820}$. **C.** $\frac{1863a^3}{182}$. **D.** $\frac{1263a^3}{1820}$.

Lời giải

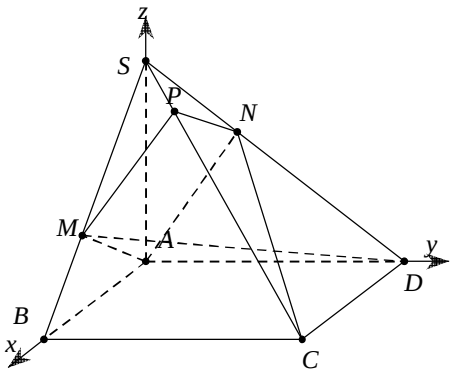
Chọn D

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Ta có tọa độ các điểm

$A(0;0;0), B(a;0;0), D(0;2a;0),$

$C(a;2a;0), S(0;0;3a)$

Suy ra $\overrightarrow{SB}=(a;0;-3a)$, $\overrightarrow{SD}=(0;2a;-3a), \overrightarrow{SC}=(a;2a;-3a)$



Phương trình $SB: \begin{cases} x=a+t \\ y=0 \\ z=-3t \end{cases}$

$\Rightarrow M(a+t;0;-3t) \Rightarrow \overrightarrow{AM}=(a+t;0;-3t)$

Mà $AM \perp SB \Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{SB}=0 \Leftrightarrow (a+t)+9t=0 \Rightarrow t=-\frac{a}{10} \Rightarrow M\left(\frac{9a}{10};0;\frac{3a}{10}\right)$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Tương tự vậy ta tìm được $N\left(0;\frac{18a}{13};\frac{12a}{13}\right)$

Suy ra $\overrightarrow{n_1}=\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\right]=-\frac{27a^2}{65}(1;2;-3)$

Do đó ta có phương trình của $(AMN): x+2y-3z=0$

Phương trình $SC:\begin{cases}x=t\\y=2t\\z=3a-3t\end{cases}$ nên tọa độ điểm P là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}x=t\\y=2t\\z=3a-3t\\x+2y-3z=0\end{cases}\Rightarrow x=\frac{9a}{14},y=\frac{9a}{7},z=\frac{15a}{14}\Rightarrow P\left(\frac{9a}{14};\frac{9a}{7};\frac{15a}{14}\right).$$

Ta có: $\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AP}\right]=-\frac{27a^2}{70}(1;2;-3)$, $\left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AP}\right]=\frac{27a^2}{91}(1;2;-3)$

Suy ra $S_{AMPN}=\frac{1}{2}\left[\left\|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AP}\right]\right\|+\left\|\left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AP}\right]\right\|\right]=\frac{621\sqrt{14}a^2}{1820}$ và $d(S,(AMN))=\frac{9a}{\sqrt{14}}$

Vậy $V_{S.AMPN}=\frac{1}{3}.\frac{9a}{\sqrt{14}}.\frac{621\sqrt{14}a^2}{1820}=\frac{1863a^3}{1820}.$

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B; $AB=AD=2a$; $CB=a$; góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60^0. Gọi I là trung điểm của cạnh AB. Biết hai mặt phẳng (SDI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a.

A. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{5}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{5}$. **C.** $\frac{3a^3\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\frac{8a^3\sqrt{15}}{5}$.

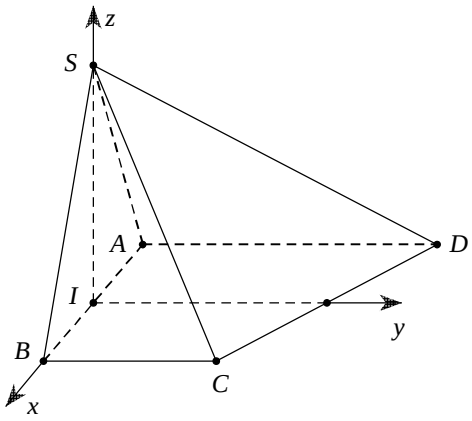
Lời giải

Chọn C

Vì hai mặt phẳng (SDI) và (SCI) cùng vuông góc với đáy nên $SI\perp(ABCD)$.

Đặt $SI=x, x>0$, tọa độ các điểm là: $I(0;0;0)$, $A(-a;0;0)$, $B(a;0;0)$, $C(a;a;0)$, $D(-a;2a;0)$, $S(0;0;x)$. Suy ra $\overrightarrow{SC}=(a;a;-x)$,

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



$\overrightarrow{CD} = (-2a; a; 0) \Rightarrow \left[\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{CD}\right] = (ax; 2ax; 3a^2)$

Nên $\overrightarrow{n_1} = (x; 2x; 3a)$ là VTPT của mặt phẳng (SCD).

Mà $\vec{k} = (0;0;1)$ là VTPT của mặt đáy nên theo giả thiết đề bài ta có

$$\frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\vec{k}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\vec{k}\right|} = \cos 60^0 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3a}{\sqrt{5x^2 + 9a^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{3a\sqrt{15}}{5}$$

Mặt khác: $S_{ABCD} = \frac{AB(BC + AD)}{2} = 3a^2$ nên thể tích khối chóp là

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SI.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{3a\sqrt{15}}{5}.3a^2 = \frac{3a^3\sqrt{15}}{5}$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = \sqrt{2}a$, $SA = a$ và vuông góc với $mp(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, SC. Gọi I là giao điểm của BM, AC. Chứng minh $mp(SAC)$ vuông góc với (SMB). Tính thể tích của khối tứ diện $ANIB$.

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{15}}{5}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{36}$.

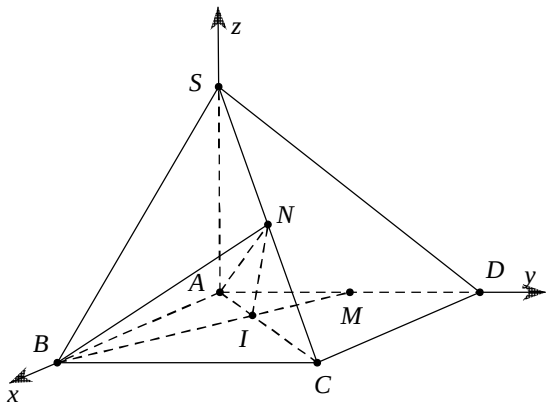
Lời giải

Chọn D

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

Ta có tọa độ các đỉnh $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$,

$D(0;a\sqrt{2};0)$, $C(a;a\sqrt{2};0)$ $S(0;0;a)$ $M\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$, $N\left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{a}{2}\right)$



Suy ra: $\overrightarrow{BM} = \left(-a;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right)$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\overrightarrow{AC} = \left(a; a\sqrt{2}; 0\right)$

Phương trình $BM: \begin{cases} x = a - 2t \\ y = \sqrt{2}t \\ z = 0 \end{cases}$, phương trình $AC: \begin{cases} x = t' \\ y = \sqrt{2}t' \\ z = 0 \end{cases}$

Từ đó ta tìm được giao điểm $I\left(\frac{a}{3}; \frac{a\sqrt{2}}{3}; 0\right)$

Ta có: $\overrightarrow{AS} = (0;0;a), \overrightarrow{AC} = \left(a; a\sqrt{2}; 0\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AC}\right] = \left(-a^2\sqrt{2}; a^2; 0\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_1} = \left(\sqrt{2}; -1; 0\right)$ là VTPT của (SAC)

$\overrightarrow{SM} = \left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; -a\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{BM}\right] = \left(\frac{a^2\sqrt{2}}{2}; a^2; \frac{a^2\sqrt{2}}{2}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_2} = \left(1; \sqrt{2}; 1\right)$ là VTPT của (SMB).

Vì $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0 \Rightarrow (SAC) \perp (SMB)$

Ta có: $\overrightarrow{AN} = \left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a}{2}\right), \overrightarrow{AI} = \left(\frac{a}{3}; \frac{a\sqrt{2}}{3}; 0\right), \overrightarrow{AB} = (a;0;0)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AI}\right] = \left(-\frac{a^2\sqrt{2}}{6}; \frac{a^2}{6}; 0\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AI}\right].\overrightarrow{AB} = -\frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$

Vậy $V_{ANIB} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AI}\right].\overrightarrow{AB}\right| = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}.$

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, BC, CD. Tính thể tích khối tứ diện $CMNP$.

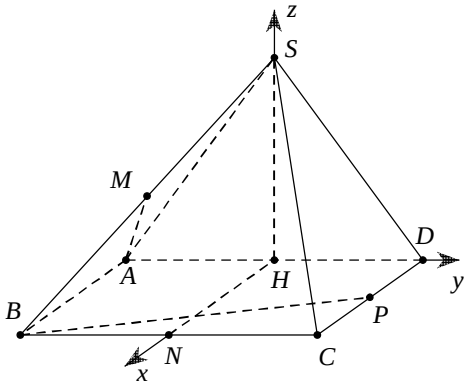
A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{32}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{5}}{96}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{96}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi H là trung điểm $AD \Rightarrow SH \perp AD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

$H(0;0;0), A\left(0; -\frac{a}{2}; 0\right), D\left(0; \frac{a}{2}; 0\right), N\left(a;0;0\right), B\left(a; -\frac{a}{2}; 0\right), C\left(a; \frac{a}{2}; 0\right), S\left(0;0; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right),$



$M\left(\frac{a}{2}; -\frac{a}{4}; \frac{a\sqrt{3}}{4}\right), P\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$

$\overrightarrow{AM}=\left(\frac{a}{2};\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right),\overrightarrow{BP}=\left(-\frac{a}{2};a;0\right)\Rightarrow\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BP}=0\Rightarrow AM\perp BP.$

Ta có: $\overrightarrow{CM}=\left(-\frac{a}{2};-\frac{3a}{4};\frac{a\sqrt{3}}{4}\right),\overrightarrow{CN}=\left(0;-\frac{a}{2};0\right),\overrightarrow{CP}=\left(-\frac{a}{2};0;0\right)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{CN},\overrightarrow{CP}\right]=\left(0;0;-\frac{a^2}{4}\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{CN},\overrightarrow{CP}\right].\overrightarrow{CM}=-\frac{a^3\sqrt{3}}{16}.$

Vậy $V_{CMNP}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{CN},\overrightarrow{CP}\right].\overrightarrow{CM}\right|=\frac{a^3\sqrt{3}}{96}.$

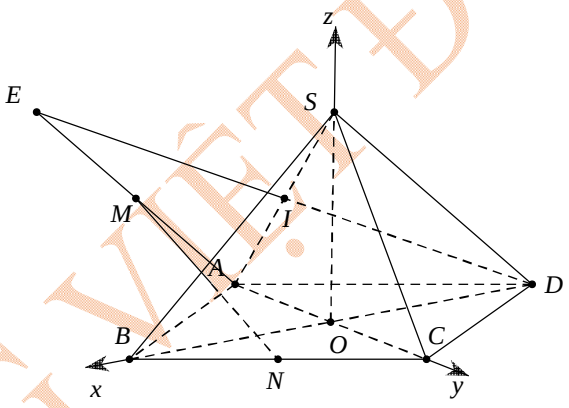
Câu 24: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA. M là trung điểm của AE, N là trung điểm của BC. Chứng minh MN vuông góc với BD và tính (theo a) khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC.

A. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. **D.** $\frac{a}{8}$.

Lời giải

Chọn A

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Đặt $SO=h$ và gọi I là trung điểm SA.



Ta có tọa độ các đỉnh là: $A\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right),B\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right),C\left(0;\frac{a\sqrt{2}}{2};0\right),D\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2};0;0\right)$

$S\left(0;0;h\right),I\left(0;-\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{h}{2}\right),N\left(\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{a\sqrt{2}}{4};0\right),E\left(\frac{a\sqrt{2}}{2};-\frac{a\sqrt{2}}{2};h\right),$

$M\left(\frac{a\sqrt{2}}{4};-\frac{a\sqrt{2}}{2};\frac{h}{2}\right).\ \overrightarrow{MN}=\left(0;\frac{3a\sqrt{2}}{4};-\frac{h}{2}\right),\overrightarrow{BD}=\left(a\sqrt{2};0;0\right)\Rightarrow\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BD}=0\Rightarrow MN\perp BD$

$\overrightarrow{AC}=\left(0;a\sqrt{2};0\right),\overrightarrow{AN}=\left(\frac{a\sqrt{2}}{4};\frac{3a\sqrt{2}}{4};0\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}\right]=\left(\frac{ah\sqrt{2}}{2};0;0\right)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AN}=\frac{a^2h}{4}.$ Vậy $d\left(MN,AC\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AN}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}\right]\right|}=\frac{a\sqrt{2}}{4}.$

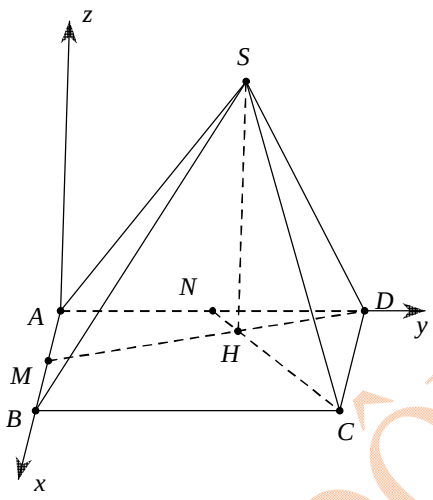
Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD; H là giao điểm của CN và DM. Biết SH vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SH=a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DM và SC theo a.

A. $\frac{a\sqrt{57}}{19}$. **B.** $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{37}}{19}$. **D.** $\frac{a\sqrt{57}}{38}$.

Lời giải

Chọn B

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Tọa độ các đỉnh: $A(0;0;0), B\left(a;0;0\right), D(0;a;0), C(a;a;0), M\left(\frac{a}{2};0;0\right), N\left(0;\frac{a}{2};0\right)$

Suy ra $\overrightarrow{DM}=\left(\frac{a}{2};-a;0\right)\Rightarrow$ phương trình $DM:\begin{cases}x=t\\y=a-2t\\z=0\end{cases}\Rightarrow H\left(t;a-2t;0\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{CH}=\left(t-a;-2t;0\right), \overrightarrow{CN}=\left(-a;-\frac{a}{2};0\right)$

Vì $H\in CN\Rightarrow \frac{t-a}{-a}=\frac{-2t}{\frac{-a}{2}}\Leftrightarrow -t+a=4t\Rightarrow t=\frac{a}{5}\Rightarrow H\left(\frac{a}{5};\frac{3a}{5};0\right)\Rightarrow S\left(\frac{a}{5};\frac{3a}{5};a\sqrt{3}\right)$

Ta có: $\overrightarrow{SC}=\left(\frac{4a}{5};\frac{2a}{5};-a\sqrt{3}\right), \overrightarrow{DC}=\left(a;0;0\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{DM},\overrightarrow{SC}\right]=\left(a^2\sqrt{3};\frac{a^2\sqrt{3}}{2};a^2\right)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{DM},\overrightarrow{SC}\right].\overrightarrow{DC}=a^3\sqrt{3}$.

Vậy $d\left(SC,DM\right)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{DM},\overrightarrow{SC}\right].\overrightarrow{DC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{DM},\overrightarrow{SC}\right]\right|}=\frac{a^3\sqrt{3}}{\frac{a^2\sqrt{19}}{2}}=\frac{2a\sqrt{57}}{19}$.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA=a$; hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm H thuộc đoạn $AC, AH=\frac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC. Chứng minh M là trung điểm của SA và tính thể tích khối tứ diện $SMBC$ theo a.

A. $\frac{a^3\sqrt{14}}{48}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{12}}{3}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{5}}{32}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{14}}{24}$.

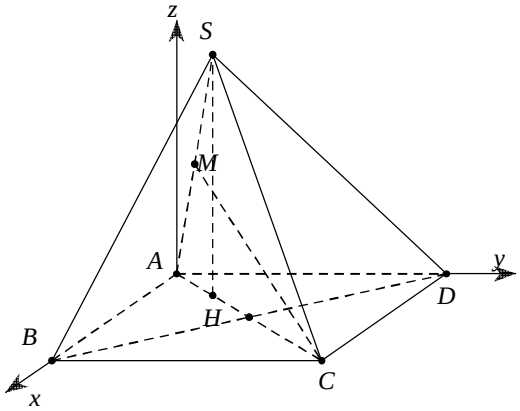
Lời giải

Chọn A

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Ta có $AH = \frac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{14}}{4}$

Chọn hệ trục như hình vẽ



Tọa độ các điểm $A(0;0;0), B(a;0;0), D(0;a;0), C(a;a;0), H\left(\frac{a}{4};\frac{a}{4};0\right), S\left(\frac{a}{4};\frac{a}{4};\frac{a\sqrt{14}}{4}\right)$

Gọi N là trung điểm của $SA \Rightarrow N\left(\frac{a}{8};\frac{a}{8};\frac{a\sqrt{14}}{8}\right) \Rightarrow \overrightarrow{CN} = \left(-\frac{7a}{8};-\frac{7a}{8};\frac{a\sqrt{14}}{8}\right)$

$\overrightarrow{SN} = \left(-\frac{a}{8};-\frac{a}{8};-\frac{a\sqrt{14}}{8}\right) \Rightarrow \overrightarrow{SN}.\overrightarrow{CN} = 0 \Rightarrow CN \perp SA \Rightarrow N \equiv M$

Ta có: $\overrightarrow{SB} = \left(\frac{3a}{4};-\frac{a}{4};-\frac{a\sqrt{14}}{4}\right), \overrightarrow{SC} = \left(\frac{3a}{4};\frac{3a}{4};-\frac{a\sqrt{14}}{4}\right)$

$\Rightarrow \left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right] = \left(\frac{a^2\sqrt{14}}{4};0;\frac{3a^2}{4}\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right].\overrightarrow{SM} = -\frac{a^3\sqrt{14}}{8}$

Vậy $V_{S.MBC} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right].\overrightarrow{SM}\right| = \frac{a^3\sqrt{14}}{48}$.

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân $AB = AC = a$, $\widehat{BAC} = 120^0$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) tạo với nhau một góc 60^0. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB, SC. Tính thể tích khối chóp $S.AMN$.

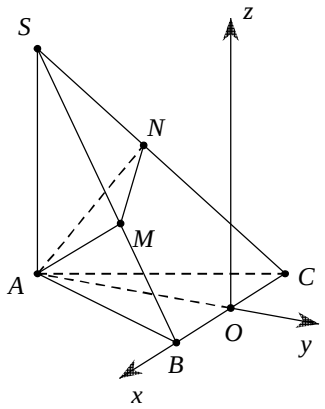
A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3888}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{3888}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{1233}$. **D.** $\frac{a^3\sqrt{14}}{24}$.

Lời giải

Chọn B

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, trong đó gốc tọa độ O là trung điểm cạnh BC. Vì $\widehat{BAO} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 60^0$ nên

$AO = AB\cos 60^0 = \frac{a}{2}, BO = AB\sin 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ Đặt $SA = x, x > 0$, tọa độ các điểm là:



$A\left(0;-\frac{a}{2};0\right),\ B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right),C\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right),$

$S\left(0;-\frac{a}{2};x\right)$

Suy ra $\overrightarrow{SA}=(0;0;-x),\ \overrightarrow{AB}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};0\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{AB}\right]=\left(-\frac{ax}{2};\frac{ax\sqrt{3}}{2};0\right)$

Nên $\overrightarrow{n_1}=\left(1;-\sqrt{3};0\right)$ là VTPT của (SAB)

$\overrightarrow{SB}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};-x\right),\ \overrightarrow{BC}=\left(-a\sqrt{3};0;0\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{BC}\right]=\left(0;ax\sqrt{3};\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)$

Nên $\overrightarrow{n_2}=\left(0;2x;a\right)$ là VTPT của (SBC)

Theo đề bài $\frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\cos 60^0\Leftrightarrow\frac{\left|-2x\sqrt{3}\right|}{2.\sqrt{4x^2+a^2}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{a\sqrt{2}}{4}.$

Do đó $S\left(0;-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)$

Vì $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC}=\frac{1}{2}a.a.\sin 120^0=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ nên thể tích khối chóp $S.ABC$

$$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{4}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{6}}{48}.$$

Ta có: $\frac{SM}{SB}=\frac{SA^2}{SB^2}=\frac{x^2}{a^2+x^2}=\frac{1}{9},\ \frac{SN}{SC}=\frac{SA^2}{SC^2}=\frac{1}{9}$ nên

$$V_{S.AMN}=\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC}.V_{S.ABC}=\frac{1}{81}.\frac{a^3\sqrt{6}}{48}=\frac{a^3\sqrt{6}}{3888}.$$

Câu 28: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy là a. Gọi M,N là trung điểm SB,SC. Tính theo a diện tích ΔAMN, biết (AMN) vuông góc với (SBC).

A. $\frac{a^2\sqrt{10}}{16}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{5}}{16}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{10}}{8}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{10}}{32}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi O là hình chiếu của S trên (ABC), ta suy ra O là trọng tâm ΔABC. Gọi I là trung điểm của BC, ta có: $AI=\frac{\sqrt{3}}{2}BC=\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow OA=\frac{a\sqrt{3}}{3},\ OI=\frac{a\sqrt{3}}{6}$

Trong $mp(ABC)$, ta vẽ tia Oy vuông góc với OA. Đặt $SO = h$, chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ ta được:

$O(0;0;0), A\left(\frac{a\sqrt{3}}{3};0;0\right), S(0;0;h) \Rightarrow I\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6};0;0\right), B\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6};\frac{a}{2};0\right)$

$C\left(-\frac{a\sqrt{3}}{6};-\frac{a}{2};0\right), M\left(-\frac{a\sqrt{3}}{12};\frac{a}{4};\frac{h}{2}\right), N\left(-\frac{a\sqrt{3}}{12};-\frac{a}{4};\frac{h}{2}\right).$

Suy ra $\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\right] = \left(\frac{ah}{4};0;\frac{5a^2\sqrt{3}}{24}\right) \Rightarrow \overrightarrow{n_1} = \left(6h;0;5a\sqrt{3}\right)$ là VTPT của (AMN)

$\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\right] = \left(-ah;0;\frac{a^2\sqrt{3}}{6}\right) \Rightarrow \overrightarrow{n_2} = \left(6h;0;-a\sqrt{3}\right)$ là VTPT của (SBC)

Vì $(AMN) \perp (SBC) \Rightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0 \Leftrightarrow h^2 = \frac{5a^2}{12}$

$\Rightarrow S_{\Delta AMN} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\right]\right| = \frac{a^2\sqrt{10}}{16}$

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với $mp(ABC)$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SC. Tính thể tích của khối chóp $A.BCMN$.

A. $\frac{a^3\sqrt{14}}{48}$. **B.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{25}$. **C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{50}$. **D.** $\frac{3a^3\sqrt{3}}{50}$.

Lời giải

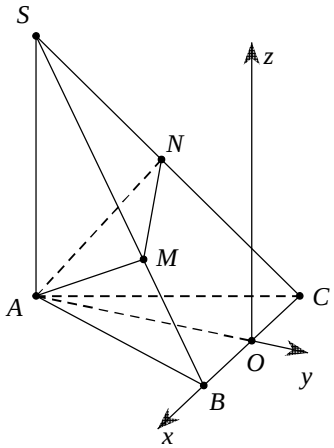
Chọn D

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ và O là trung điểm BC

$A\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), B\left(\frac{a}{2};0;0\right),$

$C\left(-\frac{a}{2};0;0\right), S\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{2};2a\right)$

$\overrightarrow{SB} = \left(\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};-2a\right), \overrightarrow{SC} = \left(-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};-2a\right)$



Phương trình $SB: \begin{cases} x = \frac{a}{2} + t \\ y = \sqrt{3}t \\ z = -4t \end{cases}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\Rightarrow M\left(\frac{a}{2}+t;\sqrt{3}t;-4t\right)\Rightarrow \overrightarrow{AM}\left(\frac{a}{2}+t;\sqrt{3}t+\frac{a\sqrt{3}}{2};-4t\right)$

Vì $AM\perp SB\Rightarrow \frac{a}{2}+t+3t+\frac{3a}{2}+16t=0\Rightarrow t=-\frac{a}{10}\Rightarrow M\left(\frac{2a}{5};-\frac{a\sqrt{3}}{10};\frac{2a}{5}\right)$

Tương tự ta tìm được $N\left(-\frac{2a}{5};-\frac{a\sqrt{3}}{10};\frac{2a}{5}\right)$

$\overrightarrow{SA}=(0;0;-2a),\overrightarrow{SM}=\left(\frac{2a}{5};\frac{2a\sqrt{3}}{5};-\frac{8a}{5}\right),\overrightarrow{SN}=\left(-\frac{2a}{5};\frac{2a\sqrt{3}}{5};-\frac{8a}{5}\right)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{SN}\right]=\left(0;\frac{32a^2}{25};\frac{8a^2\sqrt{3}}{25}\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{SN}\right].\overrightarrow{SA}=-\frac{16a^2\sqrt{3}}{25}$

Do đó $V_{S.AMN}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{SM},\overrightarrow{SN}\right].\overrightarrow{SA}\right|=\frac{8a^3\sqrt{3}}{75}$. Mặt khác $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}.2a.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

Vậy $V_{A.BCNM}=V_{S.ABC}-V_{S.AMN}=\frac{3a^3\sqrt{3}}{50}$.

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $B, BA=3a$, $BC=4a$; mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Biết $SB=2a\sqrt{3}$ và $\widehat{SBC}=30^0$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) theo a.

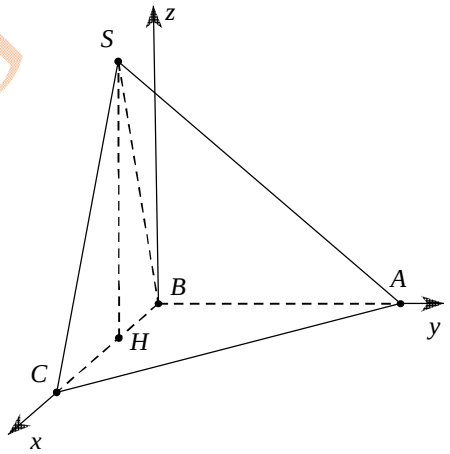
A. $\frac{6a\sqrt{5}}{7}$. **B.** $\frac{6a\sqrt{7}}{7}$. **C.** $\frac{a\sqrt{7}}{7}$. **D.** $\frac{6a\sqrt{7}}{15}$.

Lời giải

Chọn B

Gọi H là hình chiếu của S lên $BC\Rightarrow SH\perp(ABC)$

Đặt $BH=x,SH=y;x,y>0$. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Tọa độ các đỉnh $B(0;0;0),C(4a;0;0),A(0;3a;0),H(x;0;0),S(x;0;y)$

Suy ra $\overrightarrow{BS}=(x;0;y),\overrightarrow{BC}=(4a;0;0)\Rightarrow\overrightarrow{BS}.\overrightarrow{BC}=4ax$

Theo đề bài ta có: $\begin{cases}\frac{\overrightarrow{BS}.\overrightarrow{BC}}{SB.BC}=\cos 30^0\\ SB=2a\sqrt{3}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{4ax}{2a\sqrt{3}.4a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ x^2+y^2=12a^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3a\\ y=a\sqrt{3}\end{cases}$

Thể tích khối chóp $S.ABC$: $V=\frac{1}{3}y.\frac{1}{2}BA.BC=\frac{1}{6}.a\sqrt{3}.4a.3a=2a^3\sqrt{3}$

$\overrightarrow{SA}=\left(-3a;3a;-a\sqrt{3}\right),\overrightarrow{SC}=\left(a;0;-a\sqrt{3}\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SC}\right]=\left(-3a^2\sqrt{3};-4a^2\sqrt{3};-3a^2\right)$

Suy ra $\vec{n}=(3;4;\sqrt{3})$ là VTPT của (SAC), phương trình (SAC) là:

$$3x+4y+\sqrt{3}z-12a=0$$

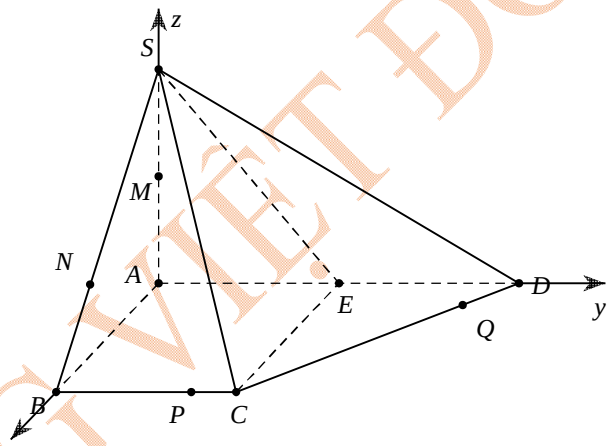
Vậy $d\left(B,(SAC)\right)=\dfrac{\left|-12a\right|}{\sqrt{3^2+4^2+3}}=\dfrac{6a\sqrt{7}}{7}$.

Câu 31: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A,B với $AB=BC=a;AD=2a$; $A\equiv O,B$ thuộc tia Ox, D thuộc tia Oy và S thuộc tia Oz. Đường thẳng SC và BD tạo với nhau một góc α thỏa $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{30}}$. Gọi E là trung điểm cạnh AD. Tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BCE$.

A. $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\dfrac{a\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $A\left(0;0;0\right),B\left(a;0;0\right),D\left(0;2a;0\right),C(a;a;0)$.

Đặt $SA=x\Rightarrow S\left(0;0;x\right)$

$\overrightarrow{BD}=\left(-a;2a;0\right),\overrightarrow{SC}=\left(a;a;-x\right)\Rightarrow DB=a\sqrt{5},SC=\sqrt{x^2+2a^2};\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{SC}=a^2$ Nên

$\Leftrightarrow x^2+2a^2=6a^2\Leftrightarrow x=2a\Rightarrow S\left(0;0;2a\right)$.

Ta có $\overrightarrow{CS}=\left(-a;-a;2a\right),\overrightarrow{CD}=\left(-a;a;0\right)\Rightarrow\overrightarrow{CS}.\overrightarrow{CD}=0\Rightarrow\Delta SCD$ vuông tại C.

Ta có $E\left(0;a;0\right)$. Gọi $I\left(x;y;z\right)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $SBCE$

Khi đó $\begin{cases}IB^2=IS^2\\IC^2=IS^2\\IE^2=IS^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-a)^2+y^2+z^2=x^2+y^2+(z-2a)^2\\(x-a)^2+(y-a)^2+z^2=x^2+y^2+(z-2a)^2\\x^2+(y-a)^2+z^2=x^2+y^2+(z-2a)^2\end{cases}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+4z=3a \\ -x-y+2z=a \\ -2y+4z=3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{a}{2} \\ y=\dfrac{a}{2} \\ z=a \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};a\right).$$

Bán kính $R = IE = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(a-\frac{a}{2}\right)^2+a^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Câu 32: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a. Gọi M là trung điểm CC', biết $AM \perp B'M$. Chọn hệ trục $Oxyz$ sao cho $A \equiv O$, C thuộc tia Ox, A' thuộc tia Oz và B thuộc miền góc xOy. Trên các cạnh $A'B'$, $A'C'$, BB' lần lượt lấy các điểm N, P, Q thỏa $A'N = NB'$
$A'P = 2C'P$, $B'Q = 3BQ$. Tính thể tích khối đa diện $AMPNQ$.

A. $\frac{13a^3\sqrt{3}}{12}$. **B.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{24}$. **C.** $\frac{13a^3\sqrt{6}}{12}$. **D.** $\frac{13a^3\sqrt{6}}{24}$.

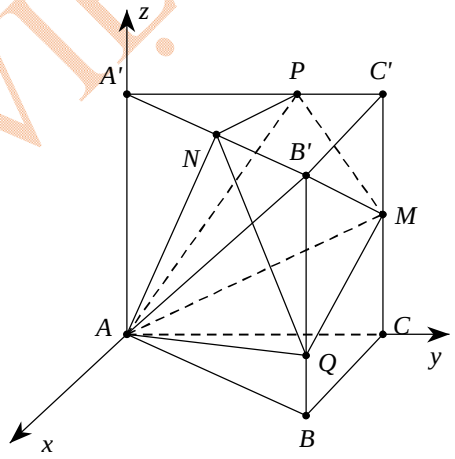
Lời giải

Chọn D

Đặt $AA' = 2x,\ x > 0$

Ta có $A(0;0;0)$, $C(0;a;0)$, $A'(0;0;2x)$, $C'(0;a;2x)$

Gọi K là hình chiếu của B lên Oy, $BK = AB.\sin 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AK = \frac{a}{2}$. Nên



$B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};0\right)$, $B'\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};2x\right)$.

Suy ra $M(0;a;x) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (0;a;x)$, $\overrightarrow{B'M} = \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};-x\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{B'M} = \frac{a^2}{2} - x^2$. Mà $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{B'M} = 0$ nên suy ra $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Do đó $A'\left(0;0;a\sqrt{2}\right)$ và $B'\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};a\sqrt{2}\right)$

Ta có $\overrightarrow{A'N} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'} \Rightarrow N\left(\frac{a\sqrt{3}}{4};\frac{a}{4};a\sqrt{2}\right)$, $\overrightarrow{A'P} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A'C'} \Rightarrow P\left(0;\frac{2a}{3};a\sqrt{2}\right)$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$\overrightarrow{B'Q}=\frac{3}{4}\overrightarrow{B'B}\Rightarrow Q\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)$ và $M\left(0;a;\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$

Suy ra $\overrightarrow{AN}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{4};\frac{a}{4};a\sqrt{2}\right)$, $\overrightarrow{AM}=\left(0;a;\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$, $\overrightarrow{AP}=\left(0;\frac{2a}{3};a\sqrt{2}\right)$,

$\overrightarrow{AQ}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ}\right]=\left(0;\frac{a^2\sqrt{6}}{2};-\frac{a^2\sqrt{3}}{3}\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ}\right].\overrightarrow{AN}=-\frac{5\sqrt{6}}{24}a^3;$

$\left[\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ}\right]\overrightarrow{AM}=\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$

Do đó $V_{A.MPQ}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ}\right].\overrightarrow{AN}\right|=\frac{5\sqrt{6}}{24}a^3;$

$V_{A.MPQ}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ}\right]\overrightarrow{AM}\right|=\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$

Vậy $V_{AMPNQ}=V_{A.MPQ}+V_{A.MPQ}=\frac{13a^3\sqrt{6}}{24}$.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $1cm$, các cạnh bên SA, SB, SC có độ dài cùng bằng $1cm$. Tính độ dài cạnh SD sao cho hình chóp $S.ABCD$ có thể tích lớn nhất.

A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

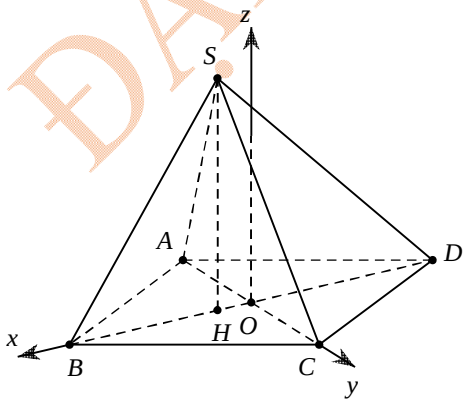
Chọn C

Vì $SA=SB=SC$ nên hình chiếu H của S lên mặt phẳng đáy là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên $H\in BD$. Chọn hệ trục như hình vẽ

Giả sử $B(b;0;0), C(0;c;0)$ với $b,c>0$.

Khi đó $A(0;-c;0), D(-b;0;0)$ và $b^2+c^2=1$. Gọi $H(h;0;0)$, ta có:

$HB^2=HA^2\Rightarrow(h-b)^2=h^2+c^2\Rightarrow h=\frac{b^2-c^2}{2b}=\frac{2b^2-1}{2b}$



Ta có: $SH^2=SA^2-AH^2=1-\frac{1}{4b^2}=\frac{4b^2-1}{4b^2}\Rightarrow SH=\frac{\sqrt{4b^2-1}}{2b}$, $b>\frac{1}{2}$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

Do đó $S\left(\frac{b^2-c^2}{2b};0;\frac{\sqrt{4b^2-1}}{2b}\right)$

Vì đáy $ABCD$ là hình thoi nên ta có $S_{ABCD}=4S_{\Delta ABO}$, do vậy

$$V_{S.ABCD}=4V_{SABO}=4\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right].\overrightarrow{OS}\right|=\frac{2}{3}\left|\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right].\overrightarrow{OS}\right|$$

Mà $\overrightarrow{OA}=(0;-c;0),\overrightarrow{OB}=(b;0;0)\Rightarrow\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(0;0;bc)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right].\overrightarrow{OS}=\frac{1}{2}c\sqrt{4b^2-1}$

Nên $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}c\sqrt{4b^2-1}=\frac{1}{6}\sqrt{4c^2(4b^2-1)}$

Ap dụng bđt Cô si ta có: $\sqrt{4c^2(4b^2-1)}\le\frac{4c^2+4b^2-1}{2}=\frac{3}{2}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}c^2+b^2=1\\4c^2=4b^2-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=\frac{\sqrt{10}}{4}\\c=\frac{\sqrt{6}}{4}\end{cases}$

Khi đó $SD^2=\left(\frac{b^2-c^2}{2b}+b\right)^2+\frac{4b^2-1}{4b^2}=\frac{3}{2}\Rightarrow SD=\frac{\sqrt{6}}{2}$

Vậy $\max V_{S.ABCD}=\frac{1}{4}$ đạt được khi $SD=\frac{\sqrt{6}}{2}$ cm.

Câu 34: Tứ diện đều $ABCD$ có tâm là S và có độ dài các cạnh bằng 2. Gọi A',B',C',D' theo thứ tự là hình chiếu của các đỉnh A,B,C,D trên đường thẳng nào Δ đó đi qua S. Tìm GTLN $P=SA'^4+SB'^4+SC'^4+SD'^4$

A. $\frac{7}{4}$. **B.** $\frac{7}{3}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ngoại tiếp tứ diện đều $ABCD$ bằng hình lập phương $AB_1CD_1.C_1DA_1B$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

Tọa độ các điểm $A(\sqrt{2};0;0),B(0;\sqrt{2};0),C(0;0;\sqrt{2}),D(\sqrt{2};\sqrt{2};\sqrt{2}),S\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{SA}\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\overrightarrow{SB}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\overrightarrow{SC}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

$\overrightarrow{SD}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Gọi $\vec{e}=(x;y;z)$ là véc tơ đơn vị của đường thẳng Δ. Khi đó:

$$SA'=\left|\vec{e}.\overrightarrow{SA}\right|,SB'=\left|\vec{e}.\overrightarrow{SB}\right|,SC'=\left|\vec{e}.\overrightarrow{SC}\right|,SD'=\left|\vec{e}.\overrightarrow{SD}\right|$$

Vì $x^2+y^2+z^2=1$ nên $4P=4(SA'^4+SB'^4+SC'^4+SD'^4)$

$=(-x+y+z)^4+(x-y+z)^4+(x+y-z)^4+(x+y+z)^4$

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

$= 4 + 16(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \le 4 + \frac{16}{3}(x^2 + y^2 + z^2)^2$

Hay $P \le \frac{7}{3}$.

Dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $x^2 = y^2 = z^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow |x| = |y| = |z| = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

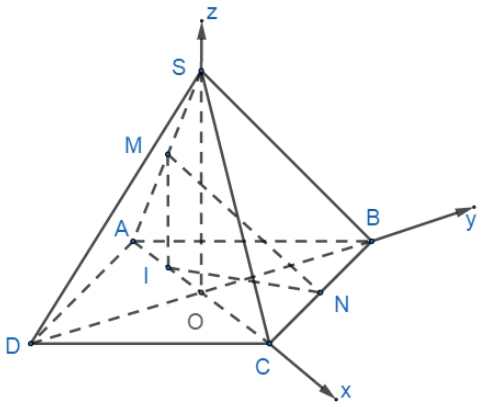
Vậy $\max P = \frac{7}{3}$ đạt được khi Δ là các đường thẳng đi qua các đỉnh của tứ diện đều $ABCD$.

Câu 35: **(THPT-Chuyên-Sơn-La-Lần-1-2018-2019-Thi-tháng-4)** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của hai cạnh SA và BC, biết $MN = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Khi đó giá trị sin của góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B



Gọi I hình chiếu của M lên $(ABCD)$, suy ra I là trung điểm của AO.

Khi đó $CI = \frac{3}{4}AC = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$.

Xét ΔCNI có: $CN = \frac{a}{2}$, $\widehat{NCI} = 45^o$.

Áp dụng định lý cosin ta có:

$$NI = \sqrt{CN^2 + CI^2 - 2CN.CI.\cos 45^o} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{9a^2}{8} - 2.\frac{a}{2}.\frac{3a\sqrt{2}}{4}.\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$$

Xét ΔMIN vuông tại I nên $MI = \sqrt{MN^2 - NI^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{2} - \frac{5a^2}{8}} = \frac{a\sqrt{14}}{4}$.

Mà $MI // SO, MI = \frac{1}{2}SO \Rightarrow SO = \frac{a\sqrt{14}}{2}$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ:

Ta có: $O(0;0;0)$, $B\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)$, $D\left(0;-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right)$, $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2};0;0\right)$, $N\left(\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{2}}{4};0\right)$,

$A\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};0;0\right)$, $S\left(0;0;\frac{\sqrt{14}}{4}\right)$, $M\left(-\frac{\sqrt{2}}{4};0;\frac{\sqrt{14}}{4}\right)$.

Khi đó $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{4};-\frac{\sqrt{14}}{4}\right)$, $\overrightarrow{SB}=\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$, $\overrightarrow{SD}=\left(0;-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)$.

Vectơ pháp tuyến mặt phẳng (SBD): $\vec{n}=\overrightarrow{SB}\wedge\overrightarrow{SD}=\left(-\sqrt{7};0;0\right)$.

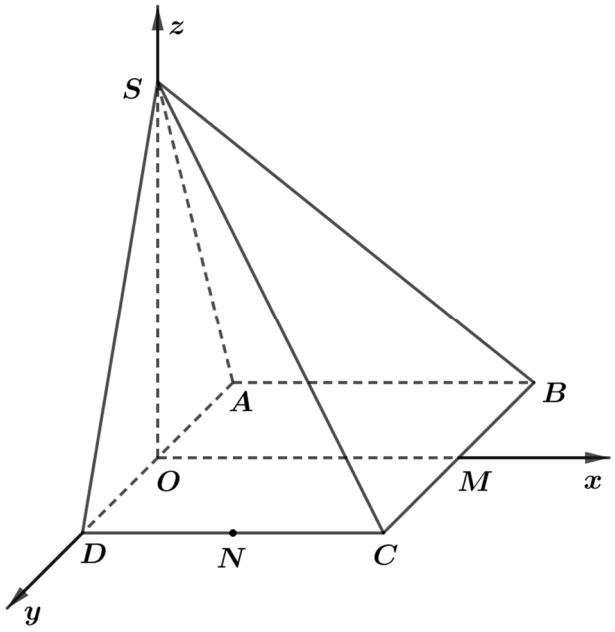
Suy ra $\sin\left(MN,(SBD)\right)=\frac{\left|\overrightarrow{MN}.\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|.\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|-\sqrt{7}.\frac{\sqrt{2}}{2}\right|}{\sqrt{7}.\frac{\sqrt{6}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 36: **(Chuyên Thái Bình Lần3)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng với đáy. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của BC và CD. Bán kính của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CMN$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{93}}{12}$. **B.** $\frac{a\sqrt{29}}{8}$. **C.** $\frac{5a\sqrt{3}}{12}$. **D.** $\frac{a\sqrt{37}}{6}$.

Lời giải

Chọn A



Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

$M(1;0;0)$, $N\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$, $C\left(1;\frac{1}{2};0\right)$, $S\left(0;0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Gọi $I(x;y;z)$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CMN \Rightarrow MI=NI=CI=SI$.

Ta có: $\overrightarrow{MI}=(x-1;y;z)$, $\overrightarrow{NI}=\left(x-\frac{1}{2};y-\frac{1}{2};z\right)$, $\overrightarrow{CI}=\left(x-1;y-\frac{1}{2};z\right)$, $\overrightarrow{SI}=\left(x;y;z-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Từ $MI=NI=CI=SI$ ta có hệ:

$$\begin{cases} (x-1)^2+y^2+z^2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+z^2 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+z^2=(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+z^2 \\ (x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+z^2=x^2+y^2+\left(z-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{4} \\ y=\frac{1}{4} \\ z=\frac{5\sqrt{3}}{12} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I\left(\frac{3}{4};\frac{1}{4};\frac{5\sqrt{3}}{12}\right) \Rightarrow \overrightarrow{IM}=\left(\frac{1}{4};-\frac{1}{4};-\frac{5\sqrt{3}}{12}\right).$$

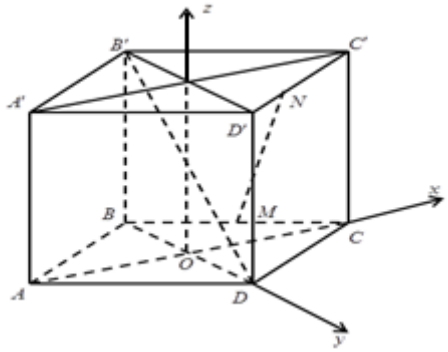
$\Rightarrow$ Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.CMN$ là: $R=IM=\frac{\sqrt{93}}{12}$.

Câu 37: **(KINH MÔN II LẦN 3 NĂM 2019)** Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi, tam giác ABD đều. Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC và $C'D'$, biết rằng $MN \perp B'D$. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng MN và mặt đáy $(ABCD)$, khi đó giá trị $\cos\alpha$ bằng

A. $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$. **B.** $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$. **D.** $\cos\alpha=\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A



Đặt cạnh hình thoi $ABCD$ là 1, chiều cao hình hộp $=h\ (h>0)$.

Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD của hình thoi.

Tam giác ABD đều $\Rightarrow AO=\frac{\sqrt{3}}{2}=CO$, $BD=AB=1$, $BO=DO=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}$.

Ta có $B'\left(0;\frac{-1}{2};h\right)$, $D\left(0;\frac{1}{2};0\right) \Rightarrow \overrightarrow{B'D}(0;1;-h)$.

$M\left(\frac{\sqrt{3}}{4};\frac{-1}{4};0\right)$, $N\left(\frac{\sqrt{3}}{4};\frac{1}{4};h\right) \Rightarrow \overrightarrow{MN}\left(0;\frac{1}{2};h\right)$.

Vì $MN \perp B'D \Rightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{B'D} \Rightarrow h^2=\frac{1}{2} \Rightarrow h=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (Vì $h>0$).

Lại có $A\left(\frac{-\sqrt{3}}{2};0;0\right)$, $B\left(0;\frac{-1}{2};0\right)$, $D\left(0;\frac{1}{2};0\right) \Rightarrow \overrightarrow{AB}\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{-1}{2};0\right)$, $\overrightarrow{AD}\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2};0\right)$

$\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]=\left(0;0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\vec{u}=\overrightarrow{MN}=\left(0;\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng MN và mặt đáy $(ABCD)$.

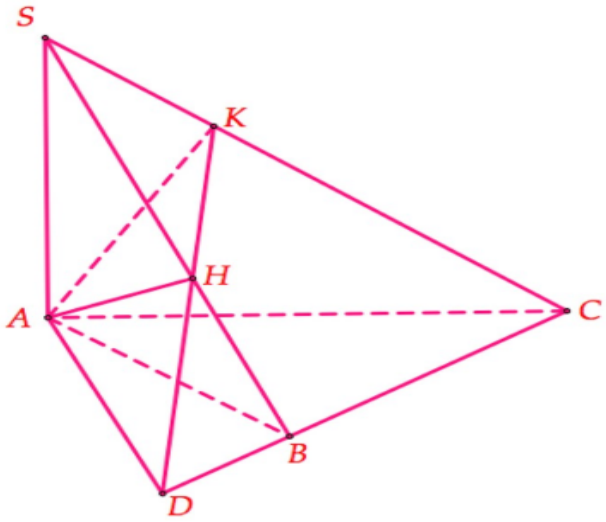
Ta có $\sin\alpha=\dfrac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}|.|\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 38: **(Đặng Thành Nam Đề 14)** Trong không gian Oxyz, cho điểm A(1;0;2), B(−2;0;5), C(0;−1;7). Trên đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A lấy một điểm S. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SC. Biết khi S di động trên d (S ≠ A) thì đường thẳng HK luôn đi qua một điểm cố định D. Tính độ dài đoạn thẳng AD.

A. $AD=3\sqrt{3}$. **B.** $AD=6\sqrt{2}$. **C.** $AD=3\sqrt{6}$. **D.** $AD=6\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có :

$\overrightarrow{AB}=(-3;0;3), AB=3\sqrt{2}$

$\overrightarrow{BC}=(2;-1;2), BC=3$

$\overrightarrow{AC}=(-1;-1;5), AC=3\sqrt{3}$

Vì $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=0\Rightarrow\Delta ABC$ vuông tại B

Ta có : $\begin{cases}BC\perp AB\\BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp AH$.

Ta có : $\begin{cases}AH\perp SB\\AH\perp BC\end{cases}\Rightarrow AH\perp(SBC)\Rightarrow AH\perp SC$.

Ta có : $\begin{cases}SC\perp AH\\SC\perp AK\end{cases}\Rightarrow SC\perp(AHK)$.

Do đó : Gọi D là giao điểm của HK và BC thì $SC\perp AD$

Ta có : $\begin{cases}AD\perp SA\\AD\perp SC\end{cases}\Rightarrow AD\perp(SAC)\Rightarrow AD\perp AC$

Vì D nằm trong mặt phẳng (ABC) và D là giao điểm của BC và đường thẳng vuông góc với AC tại A nên D cố định (do A, B, C cố định).

Trong ΔDAC vuông tại A, ta có : $AD=AC.\tan C=AC.\dfrac{AB}{BC}=3\sqrt{3}.\dfrac{3\sqrt{2}}{3}=3\sqrt{6}$. Đáp án C

Câu 39: **(Chuyên Hưng Yên Lần 3)** Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;0)$, $B(0;-1;0)$, $C(0;0;1)$, $D(1;-1;1)$. Mặt cầu tiếp xúc 6 cạnh của tứ diện $ABCD$ cắt (ACD) theo thiết diện có diện tích S. Chọn mệnh đề đúng?

A. $S=\frac{\pi}{3}$. **B.** $S=\frac{\pi}{6}$. **C.** $S=\frac{\pi}{4}$. **D.** $S=\frac{\pi}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Nhận thấy $AB=AC=BC=DA=DB=DC=\sqrt{2}$ nên $ABCD$ là tứ diện đều cạnh $\sqrt{2}$.

Theo giả thiết giao tuyến của mặt cầu tiếp xúc 6 cạnh của tứ diện với (ACD) là đường tròn nội tiếp tam giác ACD.

Gọi r là bán kính hình tròn nội tiếp tam giác ACD, $p=\frac{AC+CD+AD}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Khi đó diện tích tam giác đều ACD, $S_{\Delta ACD}=pr\Leftrightarrow\frac{AC^2\sqrt{3}}{4}=pr\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.r\Leftrightarrow r=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Diện tích thiết diện $S=\pi r^2=\pi.\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2=\frac{\pi}{6}$ (đvdt).

Cách 2:

Vì $ABCD$ là tứ diện đều nên (ACD) cắt mặt cầu theo giao tuyến là đường tròn nội tiếm ΔACD. Suy ra tâm đường tròn này trùng với trọng tâm tam giác đều ACD và bán kính $r=\frac{1}{3}\frac{AC\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

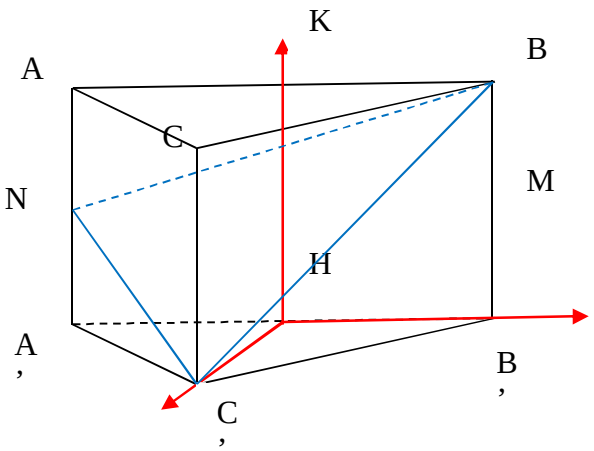
Diện tích thiết diện $S=\pi r^2=\pi.\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2=\frac{\pi}{6}$ (đvdt).

Câu 40: **(THTT số 3)** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại C, $AB=2a$, $AA'=a$, góc giữa BC' và $(ABB'A')$ bằng 60°. Gọi N là trung điểm AA' và M là trung điểm BB'. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(BC'N)$.

A. $\frac{2a\sqrt{74}}{37}$. **B.** $\frac{a\sqrt{74}}{37}$. **C.** $\frac{2a\sqrt{37}}{37}$. **D.** $\frac{a\sqrt{37}}{37}$.

Lờigiải

Chọn A



Gọi H,K lần lượt là là trung điểm cạnh $A'B'$ và AB. Từ giả thiết ta có:

$HB' = a \Rightarrow HB = a\sqrt{2} \Rightarrow HC' = HB.\tan 60^o = a\sqrt{6}$

Mặt khác: HC', HB' và HK đôi một vuông góc nhau.

Tọa độ hóa: $H(0;0;0)$, $C'(0;a\sqrt{6};0)$, $A'(-a;0;0)$, $A(-a;0;a)$, $N\left(-a;0;\frac{a}{2}\right)$, $B'(a;0;0)$, $B(a;0;a)$, $M\left(a;0;\frac{a}{2}\right)$.

Xét mặt phẳng $(BC'N)$ có $\begin{cases}\overrightarrow{C'B} = (a;-a\sqrt{6};a)\\ \overrightarrow{BN} = \left(-2a;0;-\frac{a}{2}\right)\end{cases} \Rightarrow vtpt\ \vec{n} = (\sqrt{6};-3;-4\sqrt{6})$

Phương trình $(BC'N)$ là : $\sqrt{6}(x+a) - 3y - 4\sqrt{6}\left(z - \frac{a}{2}\right) = 0$.

Khoảng cách từ M đến $(BC'N)$ là:

$$d(M;(BC'N)) = \frac{\left|\sqrt{6}(a+a) - 3.0 - 4\sqrt{6}\left(\frac{a}{2} - \frac{a}{2}\right)\right|}{\sqrt{6+9+96}} = \frac{2a\sqrt{6}}{\sqrt{111}} = \frac{2a\sqrt{74}}{37}.$$

Câu 41: **(THPT SỐ 1 TƯ NGHĨA LẦN 2 NĂM 2019)** Cho tứ diện $SABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC), $SA = AB = 3cm$, $BC = 5cm$ và diện tích tam giác SAC bằng $6cm^2$. Một mặt phẳng (α) thay đổi qua trọng tâm G của tứ diện cắt các cạnh AS, AB, AC lần lượt tại M, N, P. Tính giá trị nhỏ nhất T_m của biểu thức $T = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} + \frac{1}{AP^2}$.

A. $T_m = \frac{8}{17}$. **B.** $T_m = \frac{41}{144}$. **C.** $T_m = \frac{1}{10}$. **D.** $T_m = \frac{1}{34}$.

Lời giải

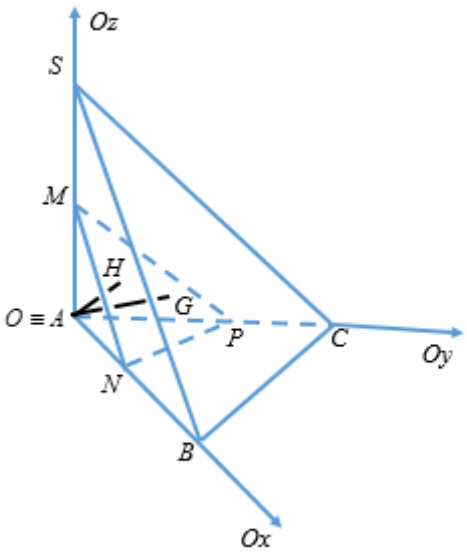
Chọn A

Vì tam giác SAC vuông tại $A \Rightarrow AC = \frac{2S_{\Delta SAC}}{SA} = 4cm$.

Vì $AC^2 + AB^2 = BC^2$ nên tam giác ABC vuông tại A.

Chọn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Ta có $A(0;0;0), B(3;0;0), C(0;4;0), S(0;0;3)$.

Vì G là trọng tâm của tứ diện $SABC$ nên ta có:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_S + x_A + x_B + x_C}{4} = \dfrac{3}{4} \\ y_G = \dfrac{y_S + y_A + y_B + y_C}{4} = 1 \Rightarrow G\left(\dfrac{3}{4};1;\dfrac{3}{4}\right). \\ z_G = \dfrac{z_S + z_A + z_B + z_C}{4} = \dfrac{3}{4} \end{cases}$$

Gọi H là hình chiếu của điểm A lên mặt phẳng (α). Theo tính chất của tam diện vuông ta có:

$T = \dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{AN^2} + \dfrac{1}{AP^2} = \dfrac{1}{AH^2}$.

mà $AH \le AG \Rightarrow T = \dfrac{1}{AM^2} + \dfrac{1}{AN^2} + \dfrac{1}{AP^2} = \dfrac{1}{AH^2} \ge \dfrac{1}{AG^2} \Rightarrow T \ge \dfrac{8}{17}$.

Dấu "=" xảy ra khi $H \equiv G$ tức mặt phẳng (α) đi qua điểm G và vuông góc với đường thẳng OG.

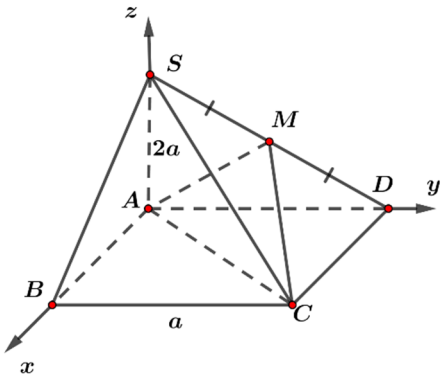
Vậy giá trị nhỏ nhất của T bằng $\dfrac{8}{17}$.

Câu 42: **(Nguyễn Khuyến)** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a, cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M là trung điểm cạnh SD. Tang của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) bằng

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

Lời giải

Chọn D



Để thuận tiện trong việc tính toán ta chọn $a=1$.

Trong không gian, gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ sao cho gốc O trùng với điểm A, tia Ox chứa đoạn thẳng AB, tia Oy chứa đoạn thẳng AD, tia Oz chứa đoạn thẳng AS. Khi đó: $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$, $S(0;0;2)$, $D(0;1;0)$.

Vì M là trung điểm SD nên tọa độ M là $M\left(0;\frac{1}{2};1\right)$.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{SB} = (1;0;-2)\\ \overrightarrow{BC} = (0;1;0)\end{cases} \Rightarrow \vec{n}_{(SBC)} = [\overrightarrow{SB};\overrightarrow{BC}] = (2;0;1)$.

$\begin{cases}\overrightarrow{AM} = \left(0;\frac{1}{2};1\right)\\ \overrightarrow{AC} = (1;1;0)\end{cases} \Rightarrow \vec{n}_{(AMC)} = [\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AC}] = \left(-1;1;\frac{-1}{2}\right)$

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (AMC) và (SBC).

Suy ra $\cos\alpha = \left|\cos\left(\vec{n}_{(SBC)};\vec{n}_{(AMC)}\right)\right| = \dfrac{\left|\vec{n}_{(SBC)}.\vec{n}_{(AMC)}\right|}{\left|\vec{n}_{(SBC)}\right|.\left|\vec{n}_{(AMC)}\right|} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Mặt khác, $1+\tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \tan\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1}$.

Vậy $\tan\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}-1} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Câu 43: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, $AB=3$, $AD=4$, $\widehat{BAD}=120°$. Cạnh bên $SA=2\sqrt{3}$ vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh SA, AD và BC, α là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (MNP). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau đây:

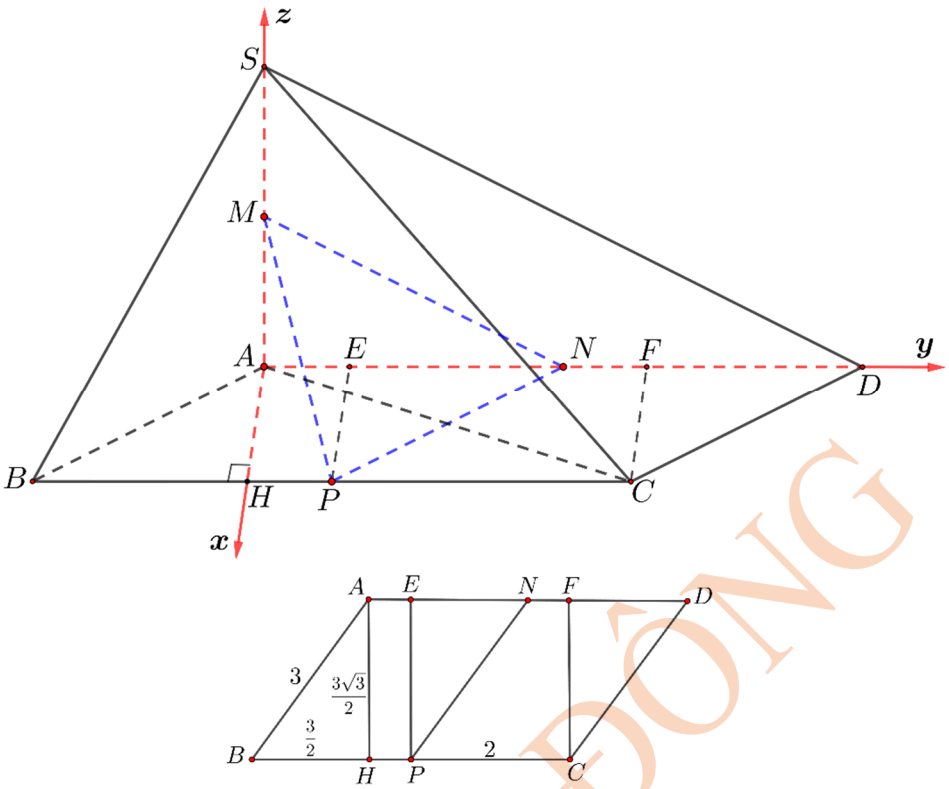
A. $\alpha\in(60°;90°)$. **B.** $\alpha\in(0°;30°)$. **C.** $\alpha\in(30°;45°)$. **D.** $\alpha\in(45°;60°)$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1:

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG



Trong mặt phẳng $(ABCD)$, dựng tia $Ax \perp AD$ nên $Ax \perp BC$ tại H.

ΔABH vuông tại H có: $\begin{cases} BH = AB.\cos\widehat{ABH} = 3.\cos 60° = \dfrac{3}{2} \\ AH = AB.\sin\widehat{ABH} = 3.\sin 60° = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

$HP = BP - BH = 2 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2}$, $HC = BC - BH = 4 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2}$.

Dựng hình chữ nhật $AHPE$ và hình chữ nhật $AHCF$ nên $AE = HP = \dfrac{1}{2}$, $AF = HC = \dfrac{5}{2}$.

Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ.

Ta có: $A(0;0;0)$, $S\left(0;0;2\sqrt{3}\right)$, $M\left(0;0;\sqrt{3}\right)$, $N(0;2;0)$, $C\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2};\dfrac{5}{2};0\right)$, $P\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2};\dfrac{1}{2};0\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{AS} = \left(0;0;2\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{AC} = \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2};\dfrac{5}{2};0\right)$, $\overrightarrow{NM} = \left(0;-2;\sqrt{3}\right)$, $\overrightarrow{NP} = \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2};-\dfrac{3}{2};0\right)$.

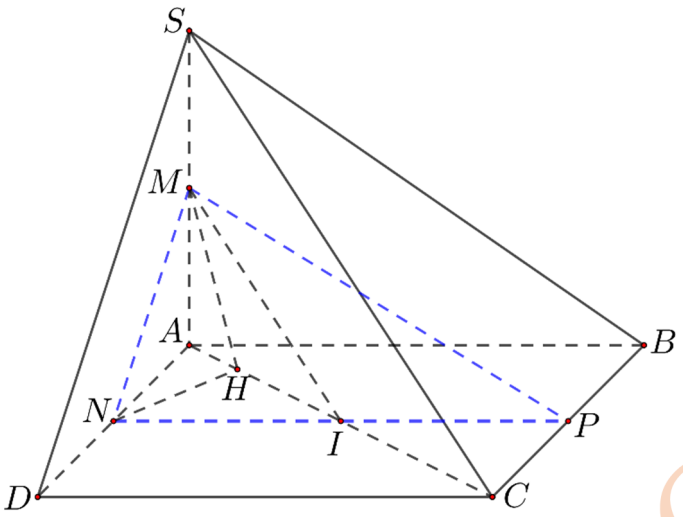
Chọn $\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{AS},\overrightarrow{AC}\right] = \left(-5\sqrt{3};9;0\right)$ là một vectơ pháp tuyến của (SAC) $\Rightarrow \left|\overrightarrow{n_1}\right| = 2\sqrt{39}$.

Chọn $\overrightarrow{n_2} = \left[\overrightarrow{NM},\overrightarrow{NP}\right] = \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2};\dfrac{9}{2};3\sqrt{3}\right)$ là một vectơ pháp tuyến của (MNP) $\Rightarrow \left|\overrightarrow{n_2}\right| = 3\sqrt{6}$.

Khi đó: $\cos\alpha = \left|\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)\right| = \dfrac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \dfrac{\left|-5\sqrt{3}.\dfrac{3\sqrt{3}}{2} + 9.\dfrac{9}{2} + 0.3\sqrt{3}\right|}{2\sqrt{39}.3\sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$.

Vậy: $\alpha \approx 78°41'24"$.

Cách 2:



Gọi $I = AC \cap NP$ và dựng $NH \perp AC$ tại H.

Ta có: $NH \perp AC, NH \perp SA \Rightarrow NH \perp (SAC)$ tại H.

Khi đó: ΔHMI là hình chiếu vuông góc của ΔNMI lên mặt phẳng (SAC).

Do đó: $S_{HMI} = S_{MNI}.\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{S_{HMI}}{S_{MNI}}$.

Ta có: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2.AB.BC.\cos\widehat{ABC} = 16 + 9 - 2.3.4.\cos 60° = 13 \Rightarrow AC = \sqrt{13}$.

$SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \sqrt{12+16} = 2\sqrt{7}$, $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{12+13} = 5$.

$MN = \dfrac{SD}{2} = \sqrt{7}$, $MI = \dfrac{SC}{2} = \dfrac{5}{2}$, $NI = \dfrac{DC}{2} = \dfrac{3}{2}$, $AI = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$, $AN = \dfrac{AD}{2} = 2$.

$$S_{NAI} = \frac{1}{2}.NA.NI.\sin\widehat{ANI} = \frac{1}{2}.NH.AI \Rightarrow HN = \frac{NA.NI.\sin 60°}{AI} = \frac{2.\frac{3}{2}.\sin 60°}{\frac{\sqrt{13}}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{13}}.$$

$$MH = \sqrt{MN^2 - NH^2} = \sqrt{7 - \frac{36}{13}} = \frac{8}{\sqrt{13}},\ HI = \sqrt{NI^2 - NH^2} = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{36}{13}} = \frac{3}{2\sqrt{13}}.$$

$$* \ p_1 = \frac{NM + MI + NI}{2} = \frac{\sqrt{7} + \frac{5}{2} + \frac{3}{2}}{2} = \frac{\sqrt{7}+4}{2}$$

$$\Rightarrow S_{MNI} = \sqrt{p_1.(p_1 - MN).(p_1 - MI).(p_1 - NI)} = \sqrt{\frac{27}{8}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

$$* \ p_2 = \frac{MI + IH + HM}{2} = \frac{\frac{5}{2} + \frac{8}{\sqrt{13}} + \frac{3}{2\sqrt{13}}}{2} = \frac{65 + 19\sqrt{13}}{52}$$

$$\Rightarrow S_{MIH} = \sqrt{p_2.(p_2 - MI).(p_2 - HI).(p_2 - MH)} = \sqrt{\frac{27}{208}} = \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{13}}.$$

Vậy: $\cos\alpha = \dfrac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{13}}.\dfrac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$. Suy ra: $\alpha \approx 78°41'24"$.

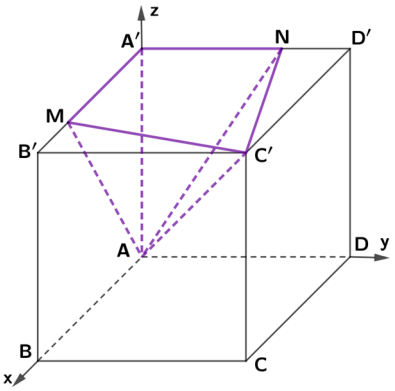
Câu 44: **(Yên Phong 1)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Các điểm M, N lần lượt thuộc các đoạn $A'B'$ và $A'D'$ sao cho hai mặt phẳng (MAC') và (NAC') vuông góc với nhau. Tìm giá trị nhỏ nhất của thể tích khối chóp $A.A'MC'N$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

A. $\frac{\sqrt{3}+1}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}-2}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}-1}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ, ta có: $A(0;0;0)$, $A'(0;0;1)$, $C'(1;1;1)$.

$M(t;0;1)\in A'B', t\in[0;1]$, $N(0;m;1)\in A'D', m\in[0;1]$.($M$, N lần lượt thuộc đoạn $A'B'$, $A'D'$)

$\begin{cases}\overrightarrow{AM}=(t;0;1)\\ \overrightarrow{AC'}=(1;1;1)\end{cases}\Rightarrow (AMC')$ có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1}=\left[\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AC'}\right]=(-1;1-t;t)$.

$\begin{cases}\overrightarrow{AN}=(0;m;1)\\ \overrightarrow{AC'}=(1;1;1)\end{cases}\Rightarrow (ANC')$ có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_2}=\left[\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AC'}\right]=(m-1;1;-m)$.

$(MAC')\perp(NAC')\Leftrightarrow \overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=0\Leftrightarrow m+t+mt=2\Rightarrow 2=m+t+mt\overset{Cauchy}{\le} m+t+\frac{(m+t)^2}{4}$

$\Rightarrow \frac{(m+t)^2}{4}+m+t-2\ge 0\Rightarrow m+t\ge 2\sqrt{3}-2$ vì $m,t\in[0;1]$.

Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}t=m\\ t+m=2\sqrt{3}-2\end{cases}\Rightarrow t=m=\sqrt{3}-1$.

$S_{\Delta B'MC'}=\frac{1}{2}B'M.B'C'=\frac{1}{2}(1-t)$, $S_{\Delta D'NC'}=\frac{1}{2}D'N.D'C'=\frac{1}{2}(1-m)$, $S_{A'B'C'D'}=1$.

$S_{A'MC'N}=S_{A'B'C'D'}-S_{\Delta B'MC'}-S_{\Delta D'NC'}=\frac{1}{2}(m+t)$.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG