



Từ cơ bản tới nâng cao
Các dạng toán đa dạng
Dành cho học sinh ôn 8+

ÔN
THI
TRUNG
HOC
PHỔ
THÔNG
QUỐC
GIA
2022

Chương V

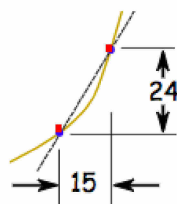
Đạo Hàm

ĐI TÌM MỘT NỬA TINH HOA

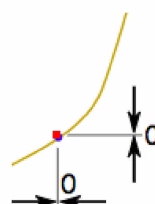
$$dy = f'(x) \cdot dx$$



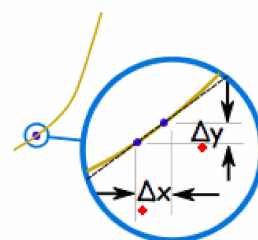
$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



$$\text{average slope} = \frac{24}{15}$$



$$\text{slope} = \frac{0}{0} = ???$$



MỤC LỤC

Chương 1. CHƯƠNG V - ĐẠO HÀM	1
§1 – Định nghĩa và ý nghĩa của đạo hàm	1
(A) Tóm tắt lí thuyết	1
(B) Các dạng toán	3
Dạng 1. Tính đạo hàm của hàm số bằng định nghĩa	3
Dạng 2. Ý nghĩa của đạo hàm vào một số bài toán	5
Dạng 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số	6
Dạng 4. Mối quan hệ giữa tính liên tục và đạo hàm của hàm số	11
§2 – Quy tắc tính đạo hàm	12
(A) Tóm tắt lí thuyết	12
(B) Ví dụ	12
(C) Các dạng toán	14
Dạng 1. Tính đạo hàm của hàm số chứa đa thức, chứa căn thức	14
Dạng 2. Một số ứng dụng của đạo hàm	18
§3 – Đạo hàm của các hàm số lượng giác	23
(A) Tóm tắt lí thuyết	23
(B) Các dạng toán	23
Dạng 1. Tính đạo hàm của các hàm số lượng giác	23
Dạng 2. Chứng minh đẳng thức hoặc giải phương trình	30
Dạng 3. Tính giới hạn của hàm số có chứa biểu thức lượng giác	36
§4 – Đạo hàm cấp hai	42
(A) Tóm tắt lý thuyết	42
(B) Các dạng toán	42
Dạng 1. Tính đạo hàm cấp hai - Ý nghĩa của đạo hàm cấp hai	42
Dạng 2. Chứng minh đẳng thức chứa đạo hàm cấp 2	46
Dạng 3. Vận dụng đạo hàm cấp hai chứng minh đẳng thức tổ hợp	49
§5 – Đề Kiểm tra Chương 5	55
(A) Đề số 1a	55
(B) Đề số 1b	56
(C) Đề số 2a	58
(D) Đề số 2b	60

Ⓔ	Đề số 3a.....	61
Ⓕ	Đề số 3b.....	63

CHƯƠNG V - ĐẠO HÀM

BÀI 1. ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Đạo hàm tại một điểm

⟳ **Định nghĩa 1.1.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 và ký hiệu là $f'(x_0)$ (hoặc $y'(x_0)$), tức là

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

⚠ Đại lượng $\Delta x = x - x_0$ được gọi là số gia của đối số tại x_0 .

Đại lượng $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ được gọi là số gia tương ứng của hàm số. Như vậy

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

2. Quan hệ giữa sự tồn tại của đạo hàm và tính liên tục của hàm số

⟳ **Định lý 1.1.** Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

⚠ a) Định lý 1.1 tương đương với khẳng định: Nếu $y = f(x)$ gián đoạn tại x_0 thì nó không có đạo hàm tại điểm đó.

b) Mệnh đề đảo của Định lý 1.1 không đúng. Một hàm số liên tục tại một điểm có thể không có đạo hàm tại điểm đó.

3. Ý nghĩa hình học của đạo hàm

⟳ **Định lý 1.2.** Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$.

⟳ **Định lý 1.3.** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị ($\mathcal{C}$) của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M_0(x_0; f(x_0))$ là

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

trong đó $y_0 = f(x_0)$.

4. Ý nghĩa vật lí của đạo hàm

- a) $v(t) = s'(t)$ là vận tốc tức thời của chuyển động $s = s(t)$ tại thời điểm t .
- b) $I(t) = Q'(t)$ là cường độ tức thời của dòng điện $Q = Q(t)$ tại thời điểm t .

5. Đạo hàm trên một khoảng

✧ **Định nghĩa 1.2.** Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ nếu có đạo hàm tại mọi điểm x trên khoảng đó.

Khi đó, ta gọi hàm số

$$\begin{aligned} f' : (a; b) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) \end{aligned}$$

là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(a; b)$, ký hiệu là y' hay $f'(x)$.

6. Đạo hàm một bên

✧ **Định nghĩa 1.3.**

- a) Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn) bên phải

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

ta sẽ gọi giới hạn đó là đạo hàm bên phải của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x = x_0$ và kí hiệu là $f'(x_0^+)$.

- b) Nếu tồn tại giới hạn (hữu hạn) bên trái

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

ta sẽ gọi giới hạn đó là đạo hàm bên trái của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x = x_0$ và kí hiệu là $f'(x_0^-)$.

Các đạo hàm bên phải và bên trái được gọi chung là đạo hàm một bên.

✧ **Định lý 1.4.** Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 khi và chỉ khi $f'(x_0^+), f'(x_0^-)$ tồn tại và bằng nhau. Khi đó, ta có

$$f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = f'(x_0).$$

✧ **Định nghĩa 1.4.** Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên đoạn $[a; b]$ nếu thỏa mãn các điều kiện sau:

- Có đạo hàm tại mọi $x \in (a; b)$;
- Có đạo hàm bên phải tại $x = a$;
- Có đạo hàm bên trái tại $x = b$.

B – CÁC DẠNG TOÁN**Dạng 1. Tính đạo hàm của hàm số bằng định nghĩa**

Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 bằng định nghĩa, ta thực hiện như sau:

- ☑ Bước 1. Giả sử Δx là số gia của đối số tại x_0 , tính

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

- ☑ Bước 2. Lập tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

- ☑ Bước 3. Tìm $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

🔗 **Ví dụ 1.** Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{x}$ tại điểm $x_0 = 3$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

🔗 **Ví dụ 2.** Tính đạo hàm của hàm số $y = -x^2 + 3x - 2$ tại điểm $x_0 = 2$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

🔗 **Ví dụ 3.** Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ tại điểm $x_0 = 1$.

💬 **Lời giải.**

◀ Ví dụ 4. Bằng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của hàm số $f(x) = x^3$ tại điểm x bất kì.

💬 Lời giải.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

◀ Bài 1. Dùng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x-3}$ tại $x_0 = 4$.

💬 Lời giải.

◀ Bài 2. Dùng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin 3x$ tại $x = \frac{\pi}{6}$.

💬 Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Bài 3.** Dùng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 3x - 5$ tại điểm x bất kì.

💬 **Lời giải.**

.....	
-------	-------

❖ **Bài 4.** Dùng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 4x - x^2$ tại điểm $x = 2$.

💬 **Lời giải.**

.....	
-------	-------

❖ **Bài 5.** Dùng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{3x+1}$ tại điểm $x = 1$.

💬 **Lời giải.**

.....	
-------	-------

📁 Dạng 2. Ý nghĩa của đạo hàm vào một số bài toán

a) Xét chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = s(t)$, trong đó s là quãng đường đi được trong thời gian t . Lúc đó, vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0 là $v(t_0) = s'(t_0)$.

b) Từ $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ ta có được công thức xấp xỉ

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

c) Ý nghĩa tổng quát: Đạo hàm của một hàm số chính là đặc trưng cho tốc độ thay đổi của hàm số theo biến số của nó.

❖ **Ví dụ 5.** Một vật rơi tự do theo phương trình $s = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$ là gia tốc trọng trường. Tìm vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t_0 = 5 \text{ s}$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	

❖ **Ví dụ 6.** Một viên đạn được bắn lên từ mặt đất theo phương thẳng đứng với tốc độ ban đầu $v_0 = 196 \text{ m/s}$ (bỏ qua sức cản không khí). Tính vận tốc tức thời của viên đạn tại thời điểm $t_0 = 10 \text{ s}$. Biết gia tốc trọng trường là $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$.

💬 **Lời giải.**

◀ Ví dụ 7. Tính gần đúng giá trị $\sqrt{8,99}$.

💬 Lời giải.

⚠ Từ công thức xấp xỉ ta viết lại $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Lúc này, ta có thể hiểu được rằng: **đường cong có phương trình $y = f(x)$ có thể được xấp xỉ bằng tiếp tuyến của nó có hệ số góc $f'(x_0)$ quanh lân cận của tiếp điểm.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

◀ Bài 6. Tính giá trị gần đúng của $\sqrt{3,99}$

💬 Lời giải.

◀ Bài 7. Sau mùa lũ, tại địa phương A, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh đường ruột kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ n được xác định bởi công thức $D(n) = 45n^2 - n^3$. Hỏi tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tức thời tại thời điểm $n = 10$ là bao nhiêu?

💬 Lời giải.

◀ Bài 8. Tính giới hạn sau $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$.

💬 Lời giải.

📁 Dạng 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) , $M(x_0; y_0)$ thuộc (C) với $y_0 = f(x_0)$. Nếu $\exists f'(x_0)$ thì:
Hệ số góc của tiếp tuyến đồ thị tại điểm $M(x_0, y_0)$ là $f'(x_0)$.
Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (C) tại $M(x_0; y_0)$ là:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 \quad (1.1)$$

Các dạng viết phương trình tiếp tuyến

- a) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M_0 .

Tính x_0 (hoặc y_0) từ giả thiết

Tính $f'(x_0)$

Viết phương trình tiếp tuyến

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

- b) Viết phương trình tiếp tuyến khi biết hệ số góc hay song song với một đường thẳng cho trước.

Hệ số góc của đồ thị hàm số tại điểm M_0 là $f'(x_0)$

Vì tiếp tuyến có hệ số góc k nên ta có $f'(x_0) = k$, giải ta tìm được x_0

Viết phương trình tiếp tuyến

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

- c) Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = ax + b$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm M_0 có hệ số góc $k = f'(x_0)$

Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = ax + b$ nên ta có $a \cdot f'(x_0) = -1$, giải ta tìm được x_0

Viết phương trình tiếp tuyến

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$$

- d) Viết phương trình tiếp tuyến đi qua $A(x,y)$

Gọi tiếp điểm là $M(x_0; y_0)$

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M là

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0(*)$$

Vì $A(x; y)$ nằm trên tiếp tuyến nên tọa độ của A thỏa mãn $*$, thay tọa độ của A vào ta tìm được x_0 .

Viết phương trình tiếp tuyến với mỗi x_0 tìm được

❖ **Ví dụ 8.** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2(C)$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) :

- Tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục Oy
- Tại điểm có tung độ bằng 2
- Tại điểm M mà tiếp tuyến tại M song song với đường thẳng $y = 6x + 1$
- Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = \frac{-1}{9}x + 3$

 **Lời giải.**



.....	
.....	
.....	

◀ Ví dụ 9. Cho đồ thị hàm số $y = x^3 + mx^2 - m - 1 (C_m)$. Viết tiếp tuyến của (C) tại các điểm cố định của đồ thị hàm số.

💬 Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

◀ Ví dụ 10. Cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 3m - 2 (C_m)$. Chứng minh rằng tiếp tuyến của C_m tại giao của (C_m) với Oy luôn đi qua một điểm cố định.

💬 Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

◀ Ví dụ 11. Cho đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 5 (C)$; tìm điểm M thuộc C mà hệ số góc tiếp tuyến tại M đạt giá trị nhỏ nhất, viết phương trình tiếp tuyến tại đó.

💬 Lời giải.

.....	
.....	
.....	

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

◀ Bài 9. Cho đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2mx^2 - 2m + 1 (C_m)$. Chứng minh rằng (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định. Tìm m để tiếp tuyến của (C_m) tại hai điểm cố định vuông góc.

💬 Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	



.....	
.....	
.....	

❖ **Bài 10.** Cho đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}(C)$. Lập phương trình tiếp tuyến của (C) , biết tiếp tuyến cắt Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho tam giác ABO vuông cân.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Bài 11.** Cho đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + 1(C_m)$. Tìm m để đồ thị hàm số cắt $y = 1$ tại ba điểm $C(0; 1), D, E$ mà tiếp tuyến tại D, E vuông góc với nhau.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Bài 12.** Cho đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2(C)$. Tìm tất cả các điểm trên đường thẳng $y = 2$ mà có thể kẻ được ba tiếp tuyến tới (C) .

💬 **Lời giải.**

[illegible][illegible]

❖ **Bài 13.** Cho đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ (C) và $I(1;2)$.

- a) Tìm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến tại M vuông góc với MI .
- b) Điểm N thuộc (C) , tiếp tuyến của (C) tại N cắt $x = 1, y = 2$ tại hai điểm A, B . Chứng minh rằng N là trung điểm của AB và diện tích tam giác $S_{\triangle ABI}$ không đổi.

 Lời giải.

[illegible][illegible]

Bài tập tổng hợp

❖ **Bài 14.** Cho đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ (C). Tìm điểm A nằm trên Oy sao cho từ A kẻ được hai tiếp tuyến tới (C) mà hai tiếp điểm nằm về hai phía của Ox .

 **Lời giải.**

[illegible][illegible]

Dạng 4. Mối quan hệ giữa tính liên tục và đạo hàm của hàm số

Một hàm số đạo hàm tại một điểm, tức là tồn tại đạo hàm tại điểm đó, thì liên tục tại điểm đó.

❖ **Ví dụ 12.** Chứng minh rằng hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & \text{nếu } x \geq 0 \\ (x+1)^2, & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$ không có đạo hàm tại $x = 0$, nhưng liên tục tại đó.

 **Lời giải.**

nên $f(x)$ liên tục tại $x = 0$.

Tiếp theo ta xét tính đạo hàm của hàm số tại điểm $x = 0$, ta xét $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}, \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -2; \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 2$ do đó không tồn tại đạo hàm của $f(x)$ tại điểm $x = 0$.

❖ **Ví dụ 13.** Chứng minh rằng hàm số $y = g(x) = \begin{cases} \cos x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -\sin x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$ không có đạo hàm tại điểm $x = 0$

 **Lời giải.**

Bài tập tự luyện

❖ **Bài 15.** Chứng minh rằng hàm số $y = |x|$ không tồn tại đạo hàm tại điểm $x = 0$.

 **Lời giải.**

BÀI 2. QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Quy tắc tính đạo hàm

Cho $u = u(x)$; $v = v(x)$; C là hằng số.

$$\textcircled{v} (u \pm v)' = u' \pm v'; (u + v - w)' = u' + v' - w'$$

$$\textcircled{v} (u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u \Rightarrow (C \cdot u)' = C \cdot u'$$

$$\textcircled{v} \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, (v \neq 0) \Rightarrow \left(\frac{C}{u}\right)' = -\frac{C \cdot u'}{u^2}$$

$$\textcircled{v} \text{ Nếu } y = f(u), u = u(x) \Rightarrow y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

2. Các công thức

$$\textcircled{v} (C)' = 0; (x)' = 1.$$

$$\textcircled{v} (x^n)' = n \cdot x^{n-1} \Rightarrow (u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u', (n \in \mathbb{N}, n \geq 2).$$

$$\textcircled{v} (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, (x > 0) \Rightarrow (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}, (u > 0).$$

B – VÍ DỤ

🔗 **Ví dụ 1.** Cho hàm số $y = x^3 - x^2 - 5x + 2$. Tìm tập nghiệm của bất phương trình $y' \geq 0$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

🔗 **Ví dụ 2.** Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (x^2 + 2)(x - 3);$

c) $y = \frac{1}{x^2} + \sqrt{x};$

d) $y = \sqrt[n]{x};$

b) $y = x^5 - \frac{1}{x^3};$

e) $y = \sqrt[7]{2x - 1}.$

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Ví dụ 3.** Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \frac{2x-1}{x+5};$

c) $y = \frac{x}{x^2+1};$

e) $y = \frac{x^2 + \sqrt{2x}}{x};$

b) $y = \frac{x^2+x-1}{x+1};$

d) $y = \frac{x^2+2x+3}{x^2-x+1};$

f) $y = \sqrt[3]{x} + (x^3+x)^5.$

💬 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 4.** Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (x-x^2)^{32};$

c) $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}};$

b) $y = \frac{1}{x\sqrt{x}};$

d) $y = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}, (a \text{ là hằng số}).$

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C – CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính đạo hàm của hàm số chứa đa thức, chứa căn thức

Áp dụng các qui tắc và công thức tính đạo hàm.

❖ **Ví dụ 1.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 2x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2\sqrt{x} - 5.$

b) $y = (x^3 - 1)(1 - x^2).$

 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

❖ **Ví dụ 2.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \frac{2x+1}{1-3x}.$

c) $y = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}.$

b) $y = \frac{x^2-3x+3}{x-1}.$

 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

❖ **Ví dụ 3.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 2}.$

c) $y = (1 + \sqrt{1 - 2x})^3.$

b) $y = (x - 2)\sqrt{x^2 - 3}.$

 **Lời giải.**

 **Ví dụ 4.** Chứng minh các công thức tổng quát sau:

$$a) \left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1} \right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}{(a_1x+b_1)^2}; (a, b, a_1, b_1 \text{ là hằng số}).$$

$$b) \left(\frac{ax^2+bx+c}{a_1x+b_1} \right)' = \frac{a \cdot a_1x^2 + 2a \cdot b_1x + \begin{vmatrix} b & c \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}{(a_1x+b_1)^2}; (a, b, c, a_1, b_1 \text{ là hằng số}).$$

$$c) \left(\frac{ax^2+bx+c}{a_1x^2+b_1x+c_1} \right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}x^2 + 2 \begin{vmatrix} a & c \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}x + \begin{vmatrix} b & c \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix}}{(a_1x^2+b_1x+c_1)^2};$$

$(a, b, c, a_1, b_1, c_1 \text{ là hằng số}).$

 **Lời giải.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

✧ **Bài 1.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{2}x^5 + \frac{2}{3}x^4 - x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x - 5.$

c) $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x.$

b) $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - 0,5x^4.$

d) $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3\sqrt{x}.$

💬 **Lời giải.**

✧ **Bài 2.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (2x - 3)(x^5 - 2x).$

f) $y = \frac{2x^2 - 4x + 5}{2x + 1}.$

b) $y = x(2x - 1)(3x + 2).$

g) $y = x + 1 - \frac{2}{x + 1}.$

c) $y = (\sqrt{x} + 1) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right).$

h) $y = \frac{5x - 3}{x^2 + x + 1}.$

d) $y = \frac{2x - 1}{x - 1}.$

i) $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}.$

e) $y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}.$

💬 **Lời giải.**

🔗 **Bài 3.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (2x^3 - 3x^2 - 6x + 1)^2.$

e) $y = \sqrt{1 + 2x - x^2}.$

b) $y = \frac{1}{(x^2 - x + 1)^5}.$

f) $y = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{1 - x^2}.$

c) $y = (x^2 - x + 1)^3(x^2 + x + 1)^2.$

g) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}.$

d) $y = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2.$

h) $y = (x + \sqrt{x^2 + 1})^5.$

💬 **Lời giải.**

BÀI TẬP TỔNG HỢP

🔗 **Bài 4.** Cho hàm số $y = \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}$. Chứng minh rằng: $2\sqrt{1 + x^2} \cdot y' = y.$

💬 **Lời giải.**

🔮 **Bài 5.** Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + mx + 5$. Tìm m sao cho:

a) $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

b) $f'(x) > 0, \forall x \in (0; +\infty)$.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 6.** Cho hàm số $f(x) = \frac{m}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 + (4-m)x + 5m + 1$. Tìm m sao cho:

a) $f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

b) $f'(x) = 0$ có hai nghiệm cùng dấu.

 **Lời giải.**

Dạng 2. Một số ứng dụng của đạo hàm

1. Ý nghĩa hình học và ý nghĩa vật lí của đạo hàm:

a) Cho đường cong $(C) : y = f(x)$. Hệ số góc của tiếp tuyến với (C) tại điểm $M_0(x_0; y_0)$ là $k = f'(x_0)$.

- b) Xét chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = s(t)$, với $s = s(t)$ là hàm số có đạo hàm. Khi đó, vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0 là $v(t_0) = s'(t_0)$.
- c) Nếu điện lượng Q truyền trong dây dẫn là một hàm số của thời gian: $Q = Q(t)$ ($Q = Q(t)$ là một hàm số có đạo hàm) thì cường độ tức thời của dòng điện tại thời điểm t_0 là $I(t_0) = Q'(t_0)$.

2. Các dạng toán viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $(C) : y = f(x)$ thường gặp:

- a) Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M_0(x_0; y_0) \in (C) : y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$ (1).
- b) Viết phương trình tiếp tuyến với (C) , biết tiếp tuyến có hệ số góc k :
 + Gọi x_0 là hoành độ của tiếp điểm. Ta có $f'(x_0) = k$.
 + Giải phương trình trên tìm x_0 , tiếp tục tính $y_0 = f(x_0)$.
 + Viết phương trình tiếp tuyến theo công thức (1).
- c) Viết phương trình tiếp tuyến d với đường cong (C) , biết đường thẳng d đi qua điểm $A(x_A; y_A)$ cho trước:
 + Gọi $(x_0; y_0)$ là tiếp điểm cần tìm.
 + Tiếp tuyến d đi qua điểm $A(x_A; y_A)$ nên ta có $y_A = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$.
 + Giải phương trình trên tìm được x_0 , tính y_0 và $f'(x_0)$.
 + Từ đó viết phương trình d theo (1).
- d) Viết phương trình tiếp tuyến với đường cong (C) biết tiếp tuyến song song với $\Delta : y = ax + b$. Khi đó ta có $f'(x_0) = a$.
- e) Viết phương trình tiếp tuyến với đường cong (C) biết tiếp tuyến vuông góc với $\Delta : y = ax + b$ ($a \neq 0$). Khi đó ta có $f'(x_0) = -\frac{1}{a}$.
- f) Viết phương trình tiếp tuyến với đường cong (C) biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng $\Delta : y = ax + b$ một góc ϕ . Khi đó, $|\tan \phi| = \left| \frac{f'(x_0) - a}{1 + f'(x_0) \cdot a} \right|$.

❖ **Ví dụ 1.** Cho đường cong $(C) : y = f(x) = \frac{x^2}{2} - 4x + 1$.

- a) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = -2$.
- b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) , biết tiếp tuyến có hệ số góc $k = 1$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Ví dụ 2.** Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta : 3x + y = 2$.

💬 **Lời giải.**



.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✧ **Ví dụ 3.** Cho hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ (1). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm $M(-1; -9)$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✧ **Ví dụ 4.** Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{2}{3}t^3 + 4t^2 - 1$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 5 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

✧ **Bài 1.** Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong (C) : $y = f(x) = x(x^2 + x - 1) + 1$ tại điểm có tung độ bằng -1 .

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	

✧ **Bài 2.** Viết phương trình tiếp tuyến của parabol (P) : $y = f(x) = -x^2 + 4x - 3$ tại các giao điểm của (P) với trục hoành.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	

✧ **Bài 3.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C) : y = \frac{x-1}{x+2}$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $\Delta : 3x + y - 2 = 0$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✧ **Bài 4.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C) : y = \frac{3x-1}{x-3}$, biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng $d : x + 3y = 3$ một góc 45° .

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

BÀI TẬP TỔNG HỢP

✧ **Bài 5.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C) : y = \frac{2x+1}{x+1}$ biết tiếp tuyến cách đều 2 điểm $A(2;4)$ và $B(-4;2)$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✧ **Bài 6.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $(C): y = \frac{2x}{x-2}$ biết tiếp tuyến cắt các trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A, B mà tam giác OAB thỏa mãn $AB = OA\sqrt{2}$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✧ **Bài 7.** Cho hàm số $y = \frac{4}{3}x^3 - (2m+1)x^2 + (m+2)x + \frac{1}{3}$ (C_m). Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để tiếp tuyến tại giao điểm của (C_m) với trục tung cắt hai trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại A và B . Biết rằng tam giác OAB có diện tích bằng $\frac{1}{8}$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	

BÀI 3. ĐẠO HÀM CỦA CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Giới hạn của $\frac{\sin x}{x}$

❖ **Định lý 3.1.** Hàm số $y = \frac{\sin x}{x}$ có giới hạn bằng 1 khi $x \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Mở rộng ra, nếu hàm số $u(x)$ thỏa mãn các điều kiện $u(x) \neq 0$ với mọi $x \neq x_0$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$ thì

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1.$$

⚠ Với điều kiện như trên, ta cũng có các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x)}{\sin u(x)} = 1$.

2. Đạo hàm của các hàm số lượng giác

Đạo hàm các hàm số lượng giác cơ bản

☑ $(\sin x)' = \cos x.$

☑ $(\cos x)' = -\sin x.$

☑ $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ với điều kiện $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

☑ $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$ với điều kiện $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Đạo hàm các hàm số lượng giác theo hàm số $u(x)$

☑ $(\sin u)' = u' \cos u.$

☑ $(\cos u)' = -u' \sin u.$

☑ $(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \tan^2 u)$ với điều kiện $u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

☑ $(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u} = -u'(1 + \cot^2 u)$ với điều kiện $u \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

B – CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính đạo hàm của các hàm số lượng giác

Áp dụng các công thức đạo hàm của hàm số lượng giác và các quy tắc tính đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương, căn bậc hai, ...

❖ **Ví dụ 1.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 3 \sin x + \cos x.$

b) $y = 4 \sin x - 5 \cos x.$

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Ví dụ 2.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \sin 2x - 3 \sin x.$

b) $y = \cos 3x - 4 \cos x.$

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Ví dụ 3.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 3 \tan x.$

b) $y = 4 \cot x.$

c) $y = 3 \tan x + \cot x.$

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Ví dụ 4.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \tan 3x + 2 \tan x.$

b) $y = \cot 5x - 4 \cot x.$

💬 **Lời giải.**

c) $y = \sin^3 2x$.

b) $y = 3 \cot^3 x$.b) $y = \cot^3 4x$.

Th.S Nguyễn Hoàng Việt – 0905.193.688

❖ **Ví dụ 8.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \sin x \cos 3x$.

b) $y = \cot 5x \cos 4x$.

💬 **Lời giải.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

❖ **Bài 1.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \sin \sqrt{x+1}$.

b) $y = \cos \frac{1}{x}$.

c) $y = x \sin \sqrt{5-x}$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Bài 2.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 4 \cos x + 5 \sin x$.

b) $y = 2 \tan 3x - 4 \cot x.$

c) $y = \cos^3 4x$.

d) $y = 2 \sin^2 2x - 4 \cos^2 5x.$

 **Lời giải.**

❖ Bài 3. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 2 \tan^3 x - \cot^2 x$.

b) $y = \cos 4x \tan x$.

c) $y = \tan 2x \sin 5x$.

d) $y = \tan \frac{4}{x+1}$.

e) $y = \cot \sqrt{x+5}$.

 **Lời giải.**

$$\begin{aligned} \text{a) } y' &= (2 \tan^3 x - \cot^2 x)' = (2 \tan^3 x)' - (\cot^2 x)' \\ &= 2 \cdot 3 \cdot \tan^2 x \cdot (\tan x)' - 2 \cdot \cot x \cdot (\cot x)' \\ &= 6 \tan^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - 2 \cot x \cdot \frac{-1}{\sin^2 x} \\ &= \frac{6 \tan^2 x}{\cos^2 x} + \frac{2 \cot x}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } y' &= (\cos 4x \tan x)' = (\cos 4x)' \cdot \tan x + \cos 4x \cdot (\tan x)' \\ &= 4 \cdot (-\sin 4x) + \cos 4x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = -4 \sin 4x + \frac{\cos 4x}{\cos^2 x}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{c) } y' &= (\tan 2x \sin 5x)' = (\tan 2x)' \cdot \sin 5x + \tan 2x \cdot (\sin 5x)' \\ &= \frac{2}{\cos^2 2x} \cdot \sin 5x + \tan 2x \cdot 5 \cos 5x \\ &= \frac{2 \sin 5x}{\cos^2 2x} + 5 \tan 2x \cos 5x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } y' &= \left(\tan \frac{4}{x+1} \right)' = \left(\frac{4}{x+1} \right)' \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{4}{x+1}} \\ &= -\frac{4}{(x+1)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{4}{x+1}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } y' &= (\cot \sqrt{x+5})' = (\sqrt{x+5})' \cdot \frac{-1}{\sin^2 \sqrt{x+5}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x+5}} \cdot \frac{-1}{\sin^2 \sqrt{x+5}} = \frac{-1}{2\sqrt{x+5} \sin^2 \sqrt{x+5}}. \end{aligned}$$



❖ **Bài 4.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \sin \sqrt{x^2 + 5}.$

b) $y = \frac{\sin x}{\cos^2 3x}.$

c) $y = \frac{\sin^2 3x}{\cos \sqrt{x+1}}$

💬 **Lời giải.**

BÀI TẬP TỔNG HỢP

❖ **Bài 5.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^3 \sqrt{\sin x}.$

$$\text{b) } y = \frac{\sin \sqrt{x^2 + 1}}{\cos^3 3x}.$$

$$\text{c) } y = \sqrt{\frac{\sin(5 + x^2)}{\cos^3 2x}}.$$

 Lời giải.

❖ **Bài 6.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$\text{a) } y = 4 \sin^2 \sqrt{x^3 + 1} + \frac{1}{\sin 5x}.$$

$$\text{b) } y = 8\sqrt{\tan 3x} + \frac{4}{\sin^2 \sqrt{x}}.$$

 Lời giải.

Dạng 2. Chứng minh đẳng thức hoặc giải phương trình

Phương pháp giải: Dùng các công thức đạo hàm để tính đạo hàm của hàm số, sau đó sử dụng các công thức lượng giác biến đổi chứng minh đẳng thức hoặc giải phương trình.

🔗 **Ví dụ 9.** Cho hàm số $y = \tan x$. Chứng minh rằng $y' - y^2 - 1 = 0$.

 **Lời giải.**

🔗 **Ví dụ 10.** Cho hàm số $y = \cot 2x$. Chứng minh rằng $y' + 2y^2 + 2 = 0$.

 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 11.** Cho hàm số $y = \sin^6 x + \cos^6 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x$. Chứng minh rằng $y' = 0$.

 **Lời giải.**

🔗 **Ví dụ 12.** Cho hàm số $y = \cos^2 x - \sin x$. Giải phương trình $y' = 0$.

 **Lời giải.**

🔗 **Ví dụ 13.** Giải phương trình $y' = 0$ với $y = 3\cos x + 4\sin x + 5x$.

 Lời giải.

🔗 **Ví dụ 14.** Giải phương trình $y' = 0$ với $y = \tan x + \cot x$.

 **Lời giải.**

❖ **Ví dụ 15.** Cho hàm số $f(x) = \frac{\sin 3x}{3} - \cos x - \sqrt{3} \left(\sin x - \frac{\cos 3x}{3} \right)$. Giải phương trình $f'(x) = 0$.

 Lời giải.

3. Đạo hàm của các hàm số lượng giác

Kết nối tri thức với cuộc sống

BÀI TẬP TỰ LUYỆN (Cho mỗi dạng)

❖ **Bài 7.** Cho hàm số $y = \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) - 2\sin^2 x$.
 Chứng minh rằng $y' = 0$.

 **Lời giải.**

🔹 **Bài 8.** Cho hàm số $y = x \sin x$. Chứng minh rằng

a) $xy - 2(y' - \sin x) + x(2\cos x - y) = 0.$

b) $\frac{y'}{\cos x} - x = \tan x.$

 Lời giải.

❖ **Bài 12.** Cho các hàm số $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$ và $g(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$. Chứng minh rằng $3f'(x) - 2g'(x) = 0$.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 13.** Cho hàm số $y = \cos^2 x + \sin x$. Phương trình $y' = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$

 **Lời giải.**

✧ **Bài 14.** Cho hàm số $y = (m + 1)\sin x + m\cos x - (m + 2)x + 1$. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $y' = 0$ có nghiệm.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 15.** Cho hàm số $f(x) = 2\cos^2(4x+2)$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f'(x)$.

 Lời giải.

b) Hai tiếp tuyến của (C) tại các điểm có hoành độ $x = -\frac{\pi}{4}$ và $x = \frac{\pi}{3}$ song song với nhau hoặc trùng nhau.

3. Đạo hàm của các hàm số lượng giác

Kết nối tri thức với cuộc sống

Dạng 3. Tính giới hạn của hàm số có chứa biểu thức lượng giác

Ta thực hiện biến đổi hàm số về dạng có chứa các giới hạn đặc biệt $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin u}{u}$.

🔗 **Ví dụ 16.** Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}$.

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 2 \sin 3x}{3x}$.

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{6}}.$$

 **Lời giải.**

🔗 **Ví dụ 17.** Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$

c) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \sin 2x}.$

d) $\lim_{x \rightarrow b} \frac{\cos x - \cos b}{x - b}.$

💬 **Lời giải.**

🔗 **Ví dụ 18.** Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x}.$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{1 - \cos x}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}.$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x+1} + \sin x}{\sqrt{x+4} - 2}.$

💬 **Lời giải.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

✧ Bài 18. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x}.$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{\sin 9x}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x - 3 \sin 5x}{x}.$

d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}}.$

💬 Lời giải.

✧ Bài 19. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{\sin^2 x}.$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2}.$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x}.$

💬 Lời giải.



🔗 **Bài 20.** Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{3x}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\tan 3x}$.

c) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan x - \tan a}{\sin x - \sin a}$.

d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{2 \cos x - \sqrt{2}}.$

 **Lời giải.**

❖ **Bài 21.** Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{2x^2 + 1}}{1 - \cos 2x}.$

c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x}{2 \cos x - 1}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{2x + 1} + \sin x}{\sqrt{3x + 4} - 2 - x}.$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x^2 - 4)}{x^3 - 8}.$

💬 **Lời giải.**

❖ **Bài 22.** Tính các giới hạn sau:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x \sin 3x \sin x}{45x^3}.$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a + 2x) - 2 \sin(a + x) + \sin a}{x^2}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}}.$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ax - \cos bx \cos cx}{\sin^2 x}.$

💬 **Lời giải.**

BÀI 4. ĐẠO HÀM CẤP HAI

A – TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại mọi điểm x thuộc khoảng $(a; b)$. Khi đó ta có hàm số y' xác định trên khoảng $(a; b)$. Nếu hàm số y' có đạo hàm tại x thì ta nói đạo hàm của y' là đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$. Hàm số đạo hàm của hàm y' được kí hiệu là y'' .

Đạo hàm cấp 3, 4, ... của hàm số cũng được định nghĩa tương tự và được kí hiệu là $y^{(3)}, y^{(4)}$.

B – CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tính đạo hàm cấp hai - Ý nghĩa của đạo hàm cấp hai

◀▶ **Ví dụ 1.** Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = (x^2 + 1)^3$.

b) $y = \frac{x}{x-2}$.

c) $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$.

 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

◀▶ **Ví dụ 2.** Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{2x+5}$.

b) $y = x\sqrt{x^2+1}$.

 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Ví dụ 3.** Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = \sin x$.

b) $y = \tan x$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Ví dụ 4.** Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2 + 5t + 2$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3$ s.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

❖ **Bài 1.** Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = -3x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 2x + 1$.

b) $y = \frac{4}{5}x^5 - 3x^2 - x + 4$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	

❖ **Bài 2.** Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = -\frac{1}{x}$.

d) $y = \frac{5x^2 - 3x - 20}{x^2 - 2x - 3}$.

 **Lời giải.**

🔗 **Bài 3.** Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

b) $y = x^2 \cdot \sqrt{x^3 - x}$.

 Lời giải.

🔗 **Bài 4.** Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

e) $y = \tan x + \cot x + \sin x + \cos x$.

 Lời giải.



.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

⇨ **Bài 5.** Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = x \cdot \sin x$.

b) $y = x^2 \cdot \cos^2 x$.

c) $y = \frac{\cos x}{x^3 + 1}$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

⇨ **Bài 6.** Cho hàm số $f(x) = (x+1)^3$. Tính giá trị $f''(0)$.

💬 **Lời giải.**

.....	
-------	-------

⇨ **Bài 7.** Cho hàm số $f(x) = \sin^3 x + x^2$. Tính giá trị $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

💬 **Lời giải.**

.....	
-------	-------

⇨ **Bài 8.** Cho hàm số $h(x) = 5(x+1)^3 + 4(x+1)$. Giải phương trình $h''(x) = 0$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Bài 9.** Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$ (t tính bằng giây; s tính bằng mét). Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 2$ s.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Bài 10.** Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2$ (t tính bằng giây; s tính bằng mét). Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 4$ s.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	

📁 **Dạng 2. Chứng minh đẳng thức chứa đạo hàm cấp 2**

- 🕒 Tìm các đạo hàm đến cấp cao nhất có mặt trong đẳng thức cần chứng minh.
- 🕒 Thay thế vào vị trí tương ứng và biến đổi vế này cho bằng vế kia. Từ đó suy ra đẳng thức cần chứng minh.

CÁC VÍ DỤ MẪU

❖ **Ví dụ 5.** Cho hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$. Chứng minh rằng: $y^3 \cdot y'' + 1 = 0$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Ví dụ 6.** Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{2}$. Chứng minh rằng: $2y \cdot y'' - 1 = (y')^2$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	

❖ **Ví dụ 7.** Cho hàm số $y = x \sin x$. Chứng minh rằng: $x \cdot y - 2(y' - \sin x) + x \cdot y'' = 0$.

💬 **Lời giải.**

✧ Ví dụ 8. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$. Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc x .
 $P = 2(y')^2 - y''(y-1)$ (Giả sử các biểu thức đều có nghĩa).

💬 Lời giải.

✧ Ví dụ 9. Cho hàm số $y = \tan x$. Chứng minh rằng: $\frac{6y}{y''} - \frac{1}{y'} - \cos 2x = 1$.

💬 Lời giải.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

✧ Bài 11. Chứng minh rằng hàm số $y = \sqrt{4x - 2x^2}$ thỏa hệ thức: $y^3 y'' + 4 = 0$.

💬 Lời giải.

✧ Bài 12. Cho hàm số $y = -2 + \frac{5}{x}$. Chứng minh rằng: $\frac{2y'}{x} + y'' = 0$.

💬 Lời giải.

✧ Bài 13. Cho $y = \frac{x-3}{x+4}$. Chứng minh rằng: $2(y')^2 = (y-1)y''$.

💬 Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

✧ Bài 14. Cho hàm số $y = x \cos x$. Chứng minh rằng: $x.y - 2(y' - \cos x) + x.y'' = 0$.

💬 Lời giải.

.....	
.....	

✧ Bài 15. Cho hàm số $y = x \sin x$. Chứng minh $xy - 2y' + xy'' = -2 \sin x$.

💬 Lời giải.

.....	
.....	

✧ Bài 16. Cho hàm số $y = \sin^2 x$. Chứng minh rằng: $2y + y' \tan x + y'' - 2 = 0$.

💬 Lời giải.

.....	
.....	
.....	
.....	

✧ Bài 17. Cho hàm số $y = \cos^2 4x$. Chứng minh rằng: $32(2y - 1) + y'' = 0$.

💬 Lời giải.

.....	
.....	
.....	

✧ Bài 18. Cho hàm số $y = x \tan x$. Chứng minh rằng: $x^2 y'' - 2(x^2 + y^2)(1 + y) = 0$.

💬 Lời giải.

❖ **Bài 19.** Cho hàm số $y = \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{1 - \sin x \cos x}$. Chứng minh rằng : $y'' + y = 0$.

💬 **Lời giải.**

📁 Dạng 3. Vận dụng đạo hàm cấp hai chứng minh đẳng thức tổ hợp

- Nhận dạng: Số hạng tổng quát của tổng có chứa thành phần dạng $(k-1) \cdot k$.
- Phương pháp: Chọn hàm $f(x)$ sao cho khai triển nhị thức Newton của $f(x)$ có đạo hàm cấp hai tại một điểm chính là tổng cần tính. Lưu ý:

$$\sum_{k=2}^n (k-1)kC_n^k \Rightarrow f(x) = (1+x)^n;$$

$$\sum_{k=2}^n (-1)^k (k-1)kC_n^k \Rightarrow f(x) = (1-x)^n;$$

$$\sum_{k=0}^{n-2} (n-k-1)(n-k)C_n^k \Rightarrow f(x) = (x+1)^n;$$

$$\sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k (n-k-1)(n-k)C_n^k \Rightarrow f(x) = (x-1)^n.$$

❖ **Ví dụ 10.** Với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, chứng minh rằng

$$1 \cdot 2C_n^2 + 2 \cdot 3C_n^3 + \cdots + (n-1)nC_n^n = (n-1)n2^{n-2}.$$

💬 **Lời giải.**

🔗 **Ví dụ 11.** Với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, tính tổng $S = 1^2 C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \dots + n^2 C_n^n$.

 **Lời giải.**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

🔗 **Bài 20.** Tính tổng $S = 1^2 C_{2017}^1 + 2^2 C_{2017}^2 + \dots + 2017^2 C_{2017}^{2017}$.

 **Lời giải.**

❖ **Bài 21.** Với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, chứng minh rằng $1.2C_n^2 - 2.3C_n^3 + \cdots + (-1)^n(n-1)nC_n^n = 0$.

 **Lời giải.**

🔗 **Bài 22.** Với $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, tính tổng

$$S = (n-1)nC_n^0 + (n-2)(n-1)C_n^1 + \cdots + (n-k-1)(n-k)C_n^k + \cdots + 2.3C_n^{n-3} + 1.2C_n^{n-2}.$$

 **Lời giải.**

❖ **Bài 23.** Với $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, tính tổng $S = 1^2 C_n^0 + 2^2 C_n^1 + \dots + (n+1)^2 C_n^n$.

 **Lời giải.**

✧ Bài 24. Với $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, chứng minh rằng

$$2.3C_n^0 + 3.4C_n^1 + \cdots + (n+2)(n+3)C_n^n = (n^2 + 11n + 24)2^{n-2}.$$

 **Lời giải.**

4. Đạo hàm cấp hai

Kết nối tri thức với cuộc sống

🔗 **Bài 25.** Với $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, tính tổng

$$S = (2n-1)2nC_{2n}^0 + (2n-3)(2n-2)C_{2n}^2 + \cdots + 1.2C_{2n}^{2n-2}.$$

 Lời giải.

BÀI TẬP TỔNG HỢP

❖ **Bài 26.** Cho $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ thỏa mãn $\frac{A_n^3 + C_n^3}{(n-1)(n-2)} = 42$. Tính tổng

$$S = 2^2 C_n^2 - 3^2 C_n^3 + 4^2 C_n^4 - \dots + (-1)^n n^2 C_n^n.$$

 Lời giải.



🔗 Bài 27. Giải phương trình

$$C_{2n+1}^1 - 1.2.2C_{2n+1}^2 + 2.2^2.3C_{2n+1}^3 - \dots - (2n-1)2^{2n-1}2nC_{2n+1}^{2n} + 2n2^{2n}(2n+1)C_{2n+1}^{2n+1} = 4005.$$

 **Lời giải.**



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI 5. ĐỀ KIỂM TRA CHƯƠNG 5

A – ĐỀ SỐ 1A

❖ **Câu 1.** Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = (x - 1)^4$.

b) $y = x\sqrt{x+3}$.

c) $y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 2}$.

d) $y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Câu 2.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & \text{khi } x < 0 \\ \frac{2}{x+1} & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Câu 3.** a) Cho hàm số $f(x) = \sin x - 2\cos x - x^2$. Giải phương trình $f''(x) = 0$.

b) Một vật được ném lên trên trời theo phương thẳng đứng từ mặt đất với vận tốc ban đầu là $v_0 = 4,9$ m/s. Biết gia tốc trọng trường là $g = 9,8$ m/s², hỏi sau bao nhiêu giây (kể từ lúc bắn), vật đạt độ cao lớn nhất?

💬 **Lời giải.**

❖ **Câu 4.** Cho hàm số $y = \frac{2x-2}{x^2-2x-8}$. Tính $y^{(n)}$ với mọi số nguyên dương n .

 Lời giải.

B – ĐỀ SỐ 1B

🔗 **Câu 1.** Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = (x+5)^5$.

b) $y = x \cdot \sqrt{x-7}$.

$$\text{c) } y = \frac{x^2 + 4x + 1}{x + 2}.$$

$$\text{d) } y = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}.$$

 **Lời giải.**

❖ **Câu 2.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 4 & \text{khi } x < 0 \\ \frac{4}{x+1} & \text{khi } x \geq 0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$.

 Lời giải.

❖ **Câu 3.** a) Cho hàm số $f(x) = 2\sin x - \cos x - x^2$. Giải phương trình $f''(x) = 0$.
b) Ném một quả bóng lên trên trời theo phương thẳng đứng từ mặt đất với vận tốc ban đầu là $v_0 = 7,35$ m/s. Biết gia tốc trọng trường là $g = 9,8$ m/s², hỏi sau bao nhiêu giây (kể từ lúc ném), quả bóng đạt độ cao lớn nhất?

 **Lời giải.**



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

❖ **Câu 4.** Cho hàm số $y = \frac{3x-1}{x^2+2x-15}$. Tính $y^{(n)}$ với mọi số nguyên dương n .

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

C-ĐỀ SỐ 2A

❖ **Câu 1. (4,0 điểm)** Tính đạo hàm các hàm số sau

a) $y = x^3 - 3(1-x)^2$.

b) $y = \frac{1-x}{1+x}$.

c) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$.

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

❖ **Câu 2. (1,0 điểm)** Cho hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$. Bằng định nghĩa, tính $f'(0)$.

💬 **Lời giải.**



.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Câu 3.** (4,0 điểm)

- a) Cho hàm số $y = 16\cos x + 17\sin x$. Chứng minh rằng $y'' + y = 0$.
- b) Cho hàm số $y = x^3 - x + 1$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M biết điểm M cách trục tung một khoảng bằng 1.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Câu 4.** (1,0 điểm) Tính tổng $S = C_{2017}^1 + 3C_{2017}^3 + 5C_{2017}^5 + \dots + 2017C_{2017}^{2017}$.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

D – ĐỀ SỐ 2B

❖ **Câu 1. (4,0 điểm)** Tính đạo hàm các hàm số sau

a) $y = (1 - x)^3 - \frac{x^2}{2}.$

b) $y = \frac{x+1}{1-x}.$

c) $y = \sqrt{x-2x^2}.$

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Câu 2. (4,0 điểm)**

a) Cho hàm số $y = f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$. Giải phương trình $f''(x) = 0$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x + 2$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung.

💬 **Lời giải.**

.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	
.....	

❖ **Câu 3. (1,0 điểm)** Cho hàm số $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + (3-m)x - 2$. Tìm m để $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

💬 **Lời giải.**

❖ **Câu 4. (1,0 điểm)** Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{3}(t-2)^3 + \frac{t^2}{2} + 4t - \frac{8}{3}$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian từ giây thứ nhất, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, đến giây thứ 5, vận tốc lớn nhất và nhỏ nhất của vật là bao nhiêu?

 **Lời giải.**

E – ĐỀ SỐ 3A

🔗 **Câu 1. (4,0 điểm)** Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 2017$;

b) $y = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1}$;

c) $y = \sin^2 2x$;

d) $y = \sqrt{\tan\left(2017x - \frac{\pi}{4}\right)}$.

 **Lời giải.**



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

❖ **Câu 2.** (3,0 điểm) Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + 4$ có đồ thị (C) .

- Tìm hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng 2;
- Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết rằng tiếp tuyến có hệ số góc bằng -1 .

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

❖ **Câu 3.** (2,0 điểm) Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x-1}$.

- Tính đạo hàm y' của hàm số đã cho;
- Chứng minh đẳng thức $2y' + (x-1) \cdot y'' = 0$.

💬 **Lời giải.**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

❖ **Câu 4.** (1,0 điểm) Chứng minh đẳng thức

$$C_{2018}^1 + 2C_{2018}^2 + 3C_{2018}^3 + \cdots + 2017C_{2018}^{2017} = 2018(2^{2017} - 1).$$

💬 **Lời giải.**

F – ĐỀ SỐ 3B

❖ **Câu 1.** (4,0 điểm) Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^{2018} - x^{2017} + 2016;$

b) $y = \frac{1 - 2x}{x + 3};$

c) $y = x^2 \sin x;$

d) $y = \sqrt{\tan(x^2 + 1)}.$

💬 **Lời giải.**

❖ **Câu 2.** (3,0 điểm) Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1$ có đồ thị (C).

a) Tìm hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm có hoành độ bằng -2 ;

b) Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết rằng tiếp tuyến song song với đường thẳng (d) : $y =$

$6x + 2017.$

 **Lời giải.**

❖ **Câu 3. (2,0 điểm)** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 2017$, với m là tham số. Tìm m để $y' > 0$ với mọi giá trị của tham số m .

 **Lời giải.**

❖ **Câu 4. (1,0 điểm)** Một vật chuyển động với phương trình $S = t^2 - 25t - 1$ tính bằng mét (m), t là khoảng thời gian tính bằng giây (s). Tính vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 20s$.

 Lời giải.

Vây vận tốc tức thời tại thời điểm $20s$ là 15 m/s .