

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH LỚP 11 THPT
TUYÊN QUANG**

NĂM HỌC 2024 – 2025

Môn thi: TOÁN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)
(Đề này có 01 trang)

Câu 1 (4,0 điểm). Giải các phương trình và bất phương trình sau:

a) $\sqrt{2x+5} = \sqrt{4x+8} - \sqrt{x-1}$. b) $(\sqrt{3}+1)^x + 3(\sqrt{3}-1)^x < (\sqrt{2})^{x+4}$.

Câu 2 (3,0 điểm). Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n^2 + \frac{2}{3}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh rằng:

- a) $u_n < 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$;
b) Dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

Câu 3 (5,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC có $CA < CB$ và nội tiếp trong đường tròn (O) . Gọi R là điểm chính giữa cung nhỏ $\widehat{AB}$; T và S lần lượt là trung điểm của CA, CB . Đường trung trực của các cạnh CA, CB lần lượt cắt CR tại Q và P .

1. Chứng minh rằng:

- a) $QT.CP = PS.CQ$;
b) Hai điểm P và Q đối xứng nhau qua đường trung trực của đoạn thẳng CR .

2. So sánh diện tích hai tam giác RTQ và RPS .

Câu 4 (3,0 điểm). Cho đa giác đều (H) có 30 đỉnh nội tiếp trong đường tròn (O) .

- a) Có bao nhiêu đường chéo của đa giác (H) không phải là đường kính của (O) ?
b) Tính số tam giác tù có ba đỉnh là ba đỉnh của đa giác (H) .

Câu 5 (3,0 điểm). Giả sử $\{x_1; x_2; \dots; x_{78}\}$ là một hoán vị của tập $A = \{1976; 1977; \dots; 2053\}$.

- a) Tìm dư khi chia $a = x_1 x_2 \dots x_{78}$ cho 79.
b) Chứng minh rằng tồn tại $m, n \in \{1; 2; \dots; 78\}, m \neq n$ thỏa mãn: $mx_m - nx_n$ chia hết cho 79.

Câu 6 (2,0 điểm). Cho đa thức $P(x)$ có hệ số hữu tỉ, bậc 5 và $P(1+\sqrt[3]{3}) = 25$. Chứng minh rằng tồn tại một tam thức bậc hai $Q(x)$ có hệ số hữu tỉ thỏa mãn

$$(P(-1) - 25).(P(0) - 25).(P(1) - 25) + 132.Q(-1).Q(0).Q(1) = 0.$$

-----Hết-----

Ghi chú: Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay trong khi làm bài.

Họ và tên thí sinh:.....SBD:.....

HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 11, NĂM HỌC 2024-2025
Môn: Toán (Đề thi chính thức)

Câu 1 (4,0 điểm). Giải các phương trình và bất phương trình sau:

a) $\sqrt{2x+5} = \sqrt{4x+8} - \sqrt{x-1}$. b) $(\sqrt{3}+1)^x + 3(\sqrt{3}-1)^x < (\sqrt{2})^{x+4}$.

Hướng dẫn chấm	Điểm
a) Điều kiện xác định: $x \geq 1$ (*). Với điều kiện (*), ta có $PT \Leftrightarrow \sqrt{2x+5} + \sqrt{x-1} = \sqrt{4x+8}$ (1).	0,5
Bình phương hai vế của (1) ta được $(1) \Leftrightarrow 3x+4+2\sqrt{(2x+5)(x-1)} = 4x+8 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x^2+3x-5} = x+4$ (2).	0,5
Vì $x \geq 1$ nên $(2) \Leftrightarrow 4(2x^2+3x-5) = (x+4)^2 \Leftrightarrow 7x^2+4x-36=0$ (3).	0,5
Giải (3) ta được hai nghiệm $x = -\frac{18}{7}$ (loại) và $x = 2$ (thỏa mãn). Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.	0,5
b) Ta có $BPT \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)^x + 3\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\right)^x < 4$.	0,5
Đặt $t = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)^x$, $t > 0$ ta được $t + \frac{3}{t} < 4$ (*).	0,5
Giải (*): $(*) \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 < 0 \Leftrightarrow 1 < t < 3$.	0,5
Suy ra $BPT \Leftrightarrow 1 < \left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}\right)^x < 3 \Leftrightarrow 0 < x < \log_{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}} 3$. Vậy nghiệm của bất phương trình là $0 < x < \log_{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}} 3$.	0,5

Câu 2 (3,0 điểm). Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $u_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n^2 + \frac{2}{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh rằng:

a) $u_n < 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$;

b) Dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

Hướng dẫn chấm	Điểm
a) Chứng minh: $u_n < 1$ (*) với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Với $n=1$ thì (*) là đúng.	0,25
Giả sử (*) đúng với $n=k$, $k \geq 1$. Khi đó $u_k < 1$. Hiển nhiên $u_k > 0$. Do đó $u_k^2 < 1$.	0,5

Suy ra $u_{k+1} = \frac{1}{3}u_k^2 + \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow u_{k+1} < 1$.	0,5
Vậy (*) đúng với $n = k + 1$. Theo Nguyên lí quy nạp thì (*) đúng.	0,25
b) Ta có $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n^2 + \frac{2}{3} - u_n = \frac{1}{3}(u_n^2 - 3u_n + 2) = \frac{1}{3}(u_n - 1)(u_n - 2)$.	0,5
Theo a) thì $u_n < 1$. Suy ra $(u_n - 1)(u_n - 2) > 0 \Rightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (u_n)$ tăng (1).	0,5
Từ (*) và (1) suy ra dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a \leq 1$ thỏa mãn $a = \frac{1}{3}a^2 + \frac{2}{3} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$	0,5

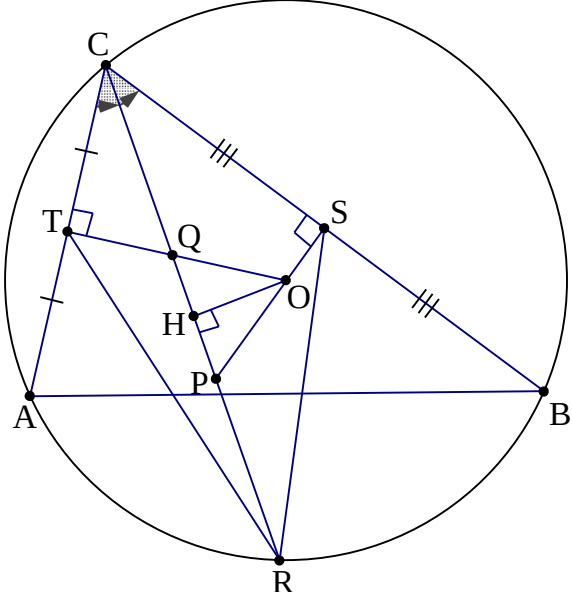
Câu 3 (5,0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC có $CA < CB$ và nội tiếp trong đường tròn (O) . Gọi R là điểm chính giữa cung nhỏ $\widehat{AB}$; T và S lần lượt là trung điểm của CA, CB . Đường trung trực của các cạnh CA, CB lần lượt cắt CR tại Q và P .

1. Chứng minh rằng:

a) $QT.CP = PS.CQ$;

b) Hai điểm P và Q đối xứng nhau qua đường trung trực của đoạn thẳng CR .

2. So sánh diện tích hai tam giác RTQ và RPS .

Hướng dẫn chấm	Điểm
1a) Xét thể hình của bài toán như sau:  Vì R là điểm chính giữa cung nhỏ $\widehat{AB}$ nên $\widehat{TCQ} = \widehat{PCS}$. Suy ra hai tam giác vuông QTC và PSC đồng dạng. Do đó $\frac{QT}{PS} = \frac{QC}{PC} \Rightarrow QT.PC = PS.CQ$.	0,5
1b) Theo a) thì $\Delta QTC \sim \Delta PSC \Rightarrow \widehat{TQC} = \widehat{CPS}$ (1).	0,5

Mặt khác $\widehat{PQO} = \widehat{TQC} = \widehat{QPO}$ ⁽¹⁾ (2).	0,5
Từ (2) suy ra tam giác OPQ cân đỉnh O . Suy ra P, Q đối xứng nhau qua đường cao OH của tam giác OPQ .	0,5
Vì CR là một dây cung của đường tròn (O) nên OH là trung trực của CR . Do đó P, Q đối xứng nhau qua đường trung trực của đoạn thẳng CR .	0,5
2. Từ (1) suy ra $\widehat{TQR} = \widehat{SPR}$ (3).	0,25
Do đó $\frac{S_{RTQ}}{S_{RPS}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot QT \cdot QR \cdot \sin \widehat{TQR}}{\frac{1}{2} \cdot PS \cdot PR \cdot \sin \widehat{SPR}} \stackrel{(3)}{=} \frac{QT \cdot QR}{PS \cdot PR}$ (4).	0,5
Theo b) thì $PR = CQ, RQ = CP$ (5).	0,25
Từ (4) và (5) suy ra $\frac{S_{RTQ}}{S_{RPS}} = \frac{QT \cdot CP}{PS \cdot CQ}$ (6).	0,25
Từ a) và (6) suy ra $\frac{S_{RTQ}}{S_{RPS}} = 1 \Rightarrow S_{RTQ} = S_{RPS}$. Vậy hai tam giác RTQ và RPS có diện tích bằng nhau.	0,25

Câu 4 (3,0 điểm). Cho đa giác đều (H) có 30 đỉnh nội tiếp trong đường tròn (O) .

- a) Có bao nhiêu đường chéo của đa giác (H) không phải là đường kính của (O) ?
b) Tính số tam giác tù có ba đỉnh là ba đỉnh của đa giác (H) .

Hướng dẫn chấm	Điểm
a) Có C_{30}^2 đoạn thẳng có hai điểm đầu mút là đỉnh của đa giác (H) .	0,5
Trong các đoạn thẳng trên, có 30 đoạn thẳng là cạnh của đa giác (H) . Suy ra số đường chéo của (H) là $C_{30}^2 - 30$.	0,5
Trong các đường chéo của (H) , có 15 đường chéo là đường kính của (O) (các đường chéo $A_1A_{16}, A_2A_{17}, \dots, A_{15}A_{30}$).	0,5
Suy ra có $C_{30}^2 - 30 - 15 = 390$ đường chéo của đa giác (H) không phải là đường kính của (O) .	0,5
b) Giả sử $(H) = A_1A_2 \dots A_{30}$. Xét các tam giác tù $A_1A_iA_j$ ($i < j$) có đỉnh góc tù là A_1 . Khi đó $i \in \{2; 3; \dots; 14\}$ vì nếu $i \geq 15$ thì $\widehat{A_1} \leq 90^\circ$.	0,25
Với mỗi $i = 2, 3, \dots, 14$ thì có $15 - i$ cách chọn điểm A_j (chọn trong các đỉnh $A_{16+i}, A_{17+i}, \dots, A_{30}$). Suy ra có $13 + 12 + \dots + 1 = 91$ tam giác tù có đỉnh góc tù là A_1 .	0,5
Tương tự, có 91 tam giác tù có đỉnh góc tù là A_k , với $k = 2, 3, \dots, 30$. Do đó số tam giác tù được tạo thành từ các đỉnh của (H) là $30 \cdot 91 = 2730$ (tam giác).	0,25

Câu 5 (3,0 điểm). Giả sử $\{x_1; x_2; \dots; x_{78}\}$ là một hoán vị của tập $A = \{1976; 1977; \dots; 2053\}$.

- a) Tìm dư khi chia $a = x_1x_2 \dots x_{78}$ cho 79.

b) Chứng minh rằng tồn tại $m, n \in \{1; 2; \dots; 78\}$, $m \neq n$ thỏa mãn: $mx_m - nx_n$ chia hết cho 79.

Hướng dẫn chấm	Điểm
a) Ta thấy $A = \{79.25 + 1; 79.25 + 2; \dots; 79.25 + 77; 79.25 + 78\}$.	0,5
Suy ra $a = \prod_{k \in A} k \equiv 1.2.3 \dots 78 \pmod{79}$.	0,5
Vì 79 là một số nguyên tố nên theo Định lí Wilson thì $a \equiv 1.2.3 \dots 78 \equiv -1 \pmod{79}$. Do đó dư khi chia a cho 79 là 78.	0,5
b) Giả sử không tồn tại $m, n \in \{1; 2; \dots; 78\}$, $m \neq n$ thỏa mãn: $mx_m - nx_n$ chia hết cho 79 (1). Vì x_i và i đều không chia hết cho 79 nên ix_i cũng không chia hết cho 79 với mọi $i = 1, 2, \dots, 78$ (2).	0,5
Từ (1) và (2) suy ra $\{kx_k\}_{k=1, \dots, 78}$ là một hệ thặng dư thu gọn modun 79.	0,25
Theo Định lí Wilson thì $\prod_{i=1, \dots, 78} (ix_i) \equiv 1.2.3 \dots 78 \equiv -1 \pmod{79}$ (1).	0,25
Mặt khác $\prod_{i=1, \dots, 78} (ix_i) \equiv 78! \cdot \prod_{i=1, \dots, 78} x_i \equiv (-1)(-1) \equiv 1 \pmod{79}$ (2).	0,25
Từ (1) và (2) suy ra $1 \equiv -1 \pmod{79}$, điều này là vô lí. Do đó điều giả sử là sai. Vậy tồn tại $m, n \in \{1; 2; \dots; 78\}$, $m \neq n$ thỏa mãn $mx_m - nx_n$ chia hết cho 79.	0,25

Câu 6 (2,0 điểm). Cho đa thức $P(x)$ có hệ số hữu tỉ, bậc 5 và $P(1 + \sqrt[3]{3}) = 25$. Chứng minh rằng tồn tại một tam thức bậc hai $Q(x)$ có hệ số hữu tỉ thỏa mãn

$$(P(-1) - 25) \cdot (P(0) - 25) \cdot (P(1) - 25) + 132 \cdot Q(-1) \cdot Q(0) \cdot Q(1) = 0.$$

Hướng dẫn chấm	Điểm
Đặt $\alpha = 1 + \sqrt[3]{3}$. Khi đó $\alpha - 1 = \sqrt[3]{3} \Rightarrow (\alpha - 1)^3 = 3 \Rightarrow \alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 4 = 0$.	0,25
Theo định lí Bézout, tồn tại đa thức $Q(x) \in \mathbb{Q}[x]$ và ba số $a, b, c \in \mathbb{Q}$ sao cho $P(x) = Q(x)(x^3 - 3x^2 + 3x - 4) + ax^2 + bx + c, \forall x \in \mathbb{R}.$ Suy ra $a\alpha^2 + b\alpha + c = P(1 + \sqrt[3]{3}) = 25 \Rightarrow a\alpha^2 + b\alpha + c - 25 = 0$.	0,25
Nếu $a \neq 0$ thì tồn tại $R(x) \in \mathbb{Q}[x]$, $\deg R(x) = 1$ và hai số $d, e \in \mathbb{Q}$ sao cho $x^3 - 3x^2 + 3x - 4 = (ax^2 + bx + c - 25)R(x) + dx + e, \forall x \in \mathbb{R}.$ Suy ra $d\alpha + e = 0 \Rightarrow d\sqrt[3]{3} + d + e = 0 \Rightarrow d = e = 0$.	0,25
Vì $\deg R(x) = 1$ và $R(x) \in \mathbb{Q}[x]$ nên $R(x)$ có nghiệm hữu tỉ $\beta \neq \alpha$. Suy ra đa thức $x^3 - 3x^2 + 3x - 4$ cũng có nghiệm β .	0,25
Mặt khác $x^3 - 3x^2 + 3x - 4 = (x - 1)^3 - (\sqrt[3]{3})^3 = (x - 1 - \sqrt[3]{3})((x - 1)^2 + \sqrt[3]{3}(x - 1) + \sqrt[3]{9})$ chỉ có nghiệm thực duy nhất là α . Điều này là vô lí. Vậy $a = 0$.	0,25

Nếu $b \neq 0$ thì $\alpha = \frac{25-c}{b} \in \mathbb{Q}$, vô lí. Vậy $b = 0 \Rightarrow c = 25$. Hay $P(x) = Q(x)(x^3 - 3x^2 + 3x - 4) + 25, \forall x \in \mathbb{R}. (*)$	0,25
Thay $x = -1; 0; 1$ vào (*) ta được: $\begin{cases} P(-1) = -11Q(-1) + 25 \\ P(0) = -4Q(0) + 25 \\ P(1) = -3Q(1) + 25 \end{cases}$	0,25
Suy ra $(P(-1) - 25).(P(0) - 25).(P(1) - 25) + 132.Q(-1).Q(0).Q(1) = 0$.	0,25

-----Hết-----

Ghi chú: Nếu thí sinh làm bài theo cách khác (với kiến thức trong chương trình THPT hoặc THPT chuyên) thì vẫn cho điểm theo các phần đúng tương ứng.